

СОВРЕМЕННАЯ
АЛГЕБРА

В. А. АНДРУНАКИЕВИЧ, Ю. М. РЯБУХИН

РАДИКАЛЫ АЛГЕБР И СТРУКТУРНАЯ ТЕОРИЯ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1979

22.14
А 66
УДК 512

Владимир Александрович Андрунакиевич, Юрий Михайлович Рябухин

РАДИКАЛЫ АЛГЕБР И СТРУКТУРНАЯ ТЕОРИЯ

(Серия: «Современная алгебра»)

М., 1979 г., 496 стр. с илл.

Редактор *Ф. И. Кизнер*. Техн. редактор *С. Я. Шкляр*. Корректор *Л. С. Сомова*.
ИБ № 11382

Сдано в набор 05.08.78. Подписано к печати 28.02.79. Т-05371. Бумага 84 X 108¹/₂,
тип № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 26,04.
Уч.-изд. л. 24,2. Тираж 4000 экз. Заказ № 138. Цена книги 2 р. 70 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Набрано и сматрицировано в ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградском производственно-техническом объединении «Печатный Двор» имени А. М. Горького «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская, 26. Отпечатано в ордена Трудового Красного Знамени Ленинградской типографии № 2 имени Евгении Соколовой «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

А $\frac{20203-053}{053(02)-79}$ 76-79 1702030000

© Главная редакция
физико-математической
литературы издательства
«Наука», 1979

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение	7
 Глава 1	
Классические радикалы ассоциативных алгебр	29
§ 1. Нижний нильрадикал	30
§ 2. Верхний нильрадикал и локально нильпотентный радикал	43
§ 3. Квазирегулярный радикал	66
§ 4. Нильалгебры с условиями обрыва	80
 Глава 2	
Общая теория радикалов колец и алгебр	90
§ 1. Радикалы, радикальность и полупростота в смысле Куроша	91
§ 2. Нижний радикал и цепи Куроша	106
§ 3. Кручения. Радикальные и полупростые классы	123
§ 4. Специфика ассоциативных алгебр	140
 Глава 3	
Наследственные радикалы ассоциативных алгебр	159
§ 1. Кручения и верхние радикалы	159
§ 2. Атомность и булевость решетки кручений	176
§ 3. Дополнительность и двойственность	192
§ 4. Наднильпотентные и специальные радикалы	229
 Глава 4	
Полупервичные алгебры, алгебры без нильпотентных элементов и разложения алгебр	259
§ 1. Полупервичные алгебры с условиями обрыва	259
§ 2. Алгебры без нильпотентных элементов и обобщенный нильрадикал	284

§ 3. Левые алгебры частных полупервичных алгебр . . .	302
§ 4. Простые алгебры с единицей и присоединенно простой радикал	331
§ 5. Наследственно идемпотентный радикал и антипростой радикал	351
§ 6. Минимальные идеалы и разложения алгебр	361

Глава 5

Радикалы в категориях	378
§ 1. Необходимые понятия и результаты из теории категорий	378
§ 2. Радикалы, радикальность и полупростота в смысле Куроша в категориях	400
§ 3. «Решетка» радикалов. Верхний и нижний радикалы	416
§ 4. Идеально наследственные радикалы (кручения). Радикальность и полупростота	434
§ 5. Слабо специальные и специальные радикалы в категориях	448
§ 6. Примеры идеально наследственных, слабо специальных и специальных радикалов в конкретных категориях	468
Литература	485
Предметный указатель	493
Основные обозначения	496

ПРЕДИСЛОВИЕ

При изучении алгебраических систем одной из основных задач является описание рассматриваемых алгебраических систем, т. е. построение соответствующей структурной теории. Структурные теоремы сводят изучение рассматриваемых алгебраических систем к изучению более «просто устроенных». Поэтому для доказательства структурных теорем необходима достаточно развитая техника и конструкции, позволяющие осуществить сведение к более простым системам и дать описание этих систем. Одной из конструкций, осуществляющих подобное сведение, и является радикал. С помощью этого понятия из класса всех рассматриваемых алгебраических систем выделяются системы двух противоположных видов — полупростые и радикальные — каждый из которых описывается более или менее удовлетворительно. Более того, используя теорию расширений, с помощью полупростых и радикальных систем можно построить любую.

К настоящему времени теория радикалов наиболее развита для колец (алгебр), модулей и групп. Теория радикалов стала во многом самостоятельной теорией со своими проблемами, методами и конструкциями. Тем не менее, многие теоремы теории радикалов тесно связаны со структурной теорией: радикал остается одним из ее основных инструментов.

В предлагаемой книге будут отражены основные результаты, методы и конструкции теории радикалов и соответствующей структурной теории для колец и алгебр.

Основное внимание уделяется ассоциативным кольцам и алгебрам. Часть результатов (общая теория радикалов и кручений) перенесена в категории, что позволяет применять их для алгебраических систем, близких к кольцам и алгебрам (группы, модули, мультиоператорные группы и т. д.)

Для понимания книги необходим определённый уровень знания алгебры (основная терминология, теоремы о гомоморфизмах и т. д.). Все необходимые сведения можно найти, например, в известных монографиях А. Г. Куроша [5], А. И. Мальцева [3] и Ламбека [2]. Классические теоремы структурной теории колец и алгебр указаны во введении. Там же дан краткий исторический очерк теории радикалов и структурной теории колец и алгебр, а также ссылки на библиографию (не претендующую на полноту).

Мы применяем обычную нумерацию теорем, предложений, лемм и т. д.: в каждом параграфе своя нумерация. При необходимости ссылок на уже доказанные утверждения, мы указываем номер параграфа, если нужное утверждение находится в той же главе, или номер параграфа и главы. Например, ссылка на теорему 2 означает, что нужная нам теорема находится в том же параграфе, ссылка на теорему 1.2 — теорема 2 в § 1 той же главы, ссылка на теорему 3.1.2 — теорема 2 в § 1 главы 3.

При работе над книгой мы опирались на постоянную поддержку сотрудников отдела (сектора) алгебры и математической логики Института математики АН МССР. Мы благодарны Р. С. Григор, К. К. Крачилову, Е. И. Тэбырца и другим сотрудникам отдела за большую помощь в оформлении рукописи, обсуждение основных результатов и проблем.

ВВЕДЕНИЕ

Мы начнем с краткого исторического очерка развития теории радикалов и структурной теории колец и алгебр. Кроме того, будут рассмотрены некоторые результаты, обобщения и проблемы, тесно связанные с результатами, методами и конструкциями, отраженными в основном тексте книги.

Структурная теория и классические радикалы. Первые структурные теоремы появились еще в середине XIX века до определения понятия радикала. Начиная с 1861 года, Вейерштрасс рассматривает в своих лекциях конечномерные ассоциативно-коммутативные алгебры без нильпотентных элементов над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел и доказывает (при некоторых дополнительных ограничениях и в несколько иных терминах), что верна следующая теорема:

Любая конечномерная ассоциативно-коммутативная алгебра без нильпотентных элементов над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел разлагается в прямую сумму полей, изоморфных полю $\mathbb{C}$.

К 1870 году Дедекинд усиливает результаты Вейерштрасса, отбросив лишние условия, уточнив формулировки и рассматривая алгебры над произвольным числовым полем. Следующую теорему принято называть теоремой Дедекинда:

Любая конечномерная ассоциативно-коммутативная алгебра без нильпотентных элементов (над произвольным полем Φ) разлагается в прямую сумму полей (конечных расширений поля Φ).

Доказательства были опубликованы в работах Вейерштрасса [1] и Дедекинда [1] в 1884—1885 годах. В этих работах понятия радикала еще не было.

Впервые радикал (как наибольший нильпотентный идеал) ясно и отчетливо появляется в работе Молина [1],

а понятие полупростой алгебры — в работах Картана [2]. Молин рассмотрел конечномерные ассоциативные алгебры над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, ввел понятие простой алгебры и доказал, по существу, что фактор-алгебра по радикалу полупроста, т. е. имеет нулевой радикал, полупростая алгебра разлагается в прямую сумму простых алгебр, а простые алгебры — это в точности алгебры матриц над $\mathbb{C}$ подходящих порядков. Эти же результаты через некоторое время были доказаны и в работах Картана, который применил понятие идеала (двустороннего) и этим связал фактор-алгебры и идеалы. Таким образом, к концу XIX века в работах Молина и Картана была доказана следующая структурная теорема:

Любая конечномерная ассоциативная алгебра без нильпотентных идеалов над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел разлагается в прямую сумму простых алгебр. При этом простые алгебры изоморфны алгебрам всех $n \times n$ -матриц над $\mathbb{C}$ для подходящих $n \geq 1$.

Картан перенес указанные результаты и на конечномерные ассоциативные алгебры над полем действительных чисел. В работах Молина и Картана была доказана возможность расщепления:

Любая конечномерная ассоциативная алгебра (над указанными полями) расщепляется в полупрямую сумму $N + Q$ радикала N и полупростой подалгебры Q .

К 1900 году была разработана достаточно сильная техника для исследования конечномерных алгебр (гиперкомплексных систем) над произвольными полями. К этому времени в работах Дедекинда, Молина и Картана систематически используются понятия тела (поля), идеала и фактор-алгебры по идеалу. Б. Пирс [1] вводит понятия нильпотентного и идемпотентного элементов, развивает технику «пирсовских разложений» и описывает алгебры малых размерностей, показывая большое разнообразие возникающих случаев. Продолжая эти исследования, Ч. Пирс [1] вводит в рассмотрение матричные представления и доказывает существование изоморфного вложения любой конечномерной ассоциативной алгебры в алгебру матриц достаточно высокого порядка. Это позволило Ч. Пирсу [2] дать новое и более ясное доказательство теоремы Фробениуса [1] о теле кватернионов. В работах Фробениуса вводятся и изучаются гомоморфизмы алгебр,

появляется термин «радикал». В работах Шеффера [1] четко определяются алгебры, являющиеся прямой суммой нескольких других алгебр. Все это создало возможность построения структурной теории конечномерных ассоциативных алгебр не только над полями комплексных или действительных чисел, но и над любым полем.

Развитая техника идемпотентов и достаточно развитая теория полей позволили Веддербарну [1] завершить в начале XX века построение структурной теории конечномерных ассоциативных алгебр. Веддербарн вводит в рассмотрение и систематически изучает односторонние (правые и левые) идеалы, минимальные односторонние идеалы и их свойства, доказывает, что в любой конечномерной ассоциативной алгебре (над любым полем) существует радикал — наибольший нильпотентный двусторонний идеал, — причем он является наибольшим нильпотентным левым (правым) идеалом. Обобщив результаты Молина и Картана на случай алгебр над произвольным полем, Веддербарн сводит изучение конечномерных ассоциативных алгебр к изучению нильпотентных и полупростых алгебр, изучение полупростых алгебр — к изучению простых алгебр, а изучение простых алгебр — к изучению тел. Образцом структурных теорем стала следующая теорема Веддербарна:

Любая конечномерная ассоциативная алгебра (над «хорошим» полем) расщепляется в полупрямую сумму радикала и полупростой подалгебры. Любая конечномерная полупростая алгебра, т. е. алгебра без ненулевых нильпотентных идеалов, разлагается в прямую сумму простых алгебр. При этом простые алгебры — это алгебры матриц Δ_n над подходящими телами.

После 1910 года доказательство новых теорем или существенное уточнение известных теорем в структурной теории конечномерных ассоциативных алгебр стало очень редким явлением. Одним из таких редких исключений явилось решение А. И. Мальцевым [1] в 1942 году проблемы однозначности расщепления конечномерной алгебры в полупрямую сумму радикала и полупростой подалгебры. Оказалось, что любые две полупростые компоненты переходят друг в друга при подходящих автоморфизмах всей алгебры.

Следующий период развития структурной теории начался в двадцатых годах и характеризуется переходом от конечномерных алгебр к алгебрам и кольцам с условиями минимальности или максимальности. В 1927 году Артин [1] показал, что, систематически изучая минимальные левые идеалы и взаимосвязи между ними, можно перенести понятие радикала, полупростой алгебры и соответствующие теоремы Веддербарна на все ассоциативные кольца и алгебры, которые удовлетворяют, одновременно, и условию максимальности и условию минимальности для левых идеалов. В 1929 году Эмми Нётер [1] доказала, что для колец и алгебр без радикала (т. е. без нильпотентных идеалов) достаточно выполнения условия минимальности, т. е. верна теорема:

Любое ассоциативное кольцо (или алгебра) с условием минимальности для левых идеалов, не имеющее ненулевых нильпотентных идеалов, разлагается в конечную прямую сумму простых колец. При этом простые кольца (с условием минимальности для левых идеалов) изоморфны кольцам Δ_n матриц над телами.

К началу 40-х годов структурная теория ассоциативных колец с условием минимальности для левых идеалов была, в основном, завершена (см., например, работу Хопкинса [1] и монографии Артина, Несбита, Тrolла [1] и Джекобсона [1]).

Работа Нётер [1] явилась, по важности идей, ясности и четкости изложения, одним из краеугольных камней современной теории колец и алгебр. Достаточно отметить, что именно в этой работе впервые в общем виде вводятся четкие понятия гомоморфизма, ядра и образа гомоморфизма для групп с операторами, колец и двусторонних модулей, изучаются свойства решетки идеалов и доказываются знаменитые теоремы об изоморфизмах. На идеях этой работы основано дальнейшее развитие структурной теории — переход от колец с условиями конечности или обрыва цепей к произвольным кольцам и алгебрам.

При рассмотрении конечномерных алгебр и колец с условием минимальности для левых (или правых) идеалов не было необходимости в общей теории радикалов. Более того, не было никакого разнообразия радикалов, так как под радикалом всегда понимался наибольший нильпотентный идеал. Положение существенно изменилось

при переходе к произвольным кольцам и алгебрам *), так как в кольцах без условий обрыва может и не существовать наибольшего нильпотентного идеала. Поэтому, начиная с тридцатых годов, развитие структурной теории вызвало потребность в новом понятии радикала, способном работать в произвольных кольцах и алгебрах.

В тридцатых — сороковых годах было найдено несколько радикалов, удовлетворяющих требованиям структурной теории и совпадающих в классическом случае с классическим нильпотентным радикалом. Наиболее известны следующие четыре радикала: нижний ниль-радикал Бэра, локально нильпотентный радикал Левицкого, верхний ниль-радикал Кёте и квазирегулярный радикал Перлиса — Джекобсона.

В 1930 году был введен в рассмотрение верхний ниль-радикал. Основные свойства этого радикала были изучены Кёте [1, 2]. В связи с введенным радикалом возникли две проблемы, не решенные до настоящего времени:

Проблема 1. Будет ли правым нильидеалом сумма любых двух правых нильидеалов (и, аналогично, для левых нильидеалов), т. е. является ли радикал Кёте — наибольший нильидеал — наибольшим правым (левым) нильидеалом?

Проблема 2. Существует ли простое (идемпотентное) нилькольцо?

В 1943 году был введен локально нильпотентный радикал. Основные свойства этого радикала были изучены Левицким [1, 2]. Естественно возникла проблема о совпадении радикалов Кёте и Левицкого. Эта проблема была решена в 1964 году: Е. С. Голод [1] доказал, что ненильпотентные конечнопорожденные нильалгебры существуют и потому локально нильпотентный радикал отличен от верхнего нильрадикала.

В 1943 году Бэр [1] построил нижний нильрадикал трансфинитным «бэровским» процессом. Естественно возник вопрос об обрыве этого процесса. В некоторых случаях процесс обрывается на конечном шаге. Однако в общем случае процесс может продолжаться сколь угодно долго (см. Амицур [3]). Маккой [4] ввел понятия первич-

*) Если противное не оговорено особо, то рассматриваем только ассоциативные кольца и алгебры.

ного кольца и первичного идеала и с их помощью ввел в рассмотрение первичный радикал — пересечение всех первичных идеалов кольца или алгебры. Левицкий [3] с помощью m -последовательностей доказал совпадение радикала Бэра и радикала Маккоя.

Радикал Перлиса — Джекобсона был введен в работах Перлиса [1] и Джекобсона [2]. Однако основные свойства этого радикала и связанной с ним полупростоты были изучены в 1945 году Джекобсоном [2, 3]. Поэтому указанный радикал принято называть радикалом Джекобсона — это квазирегулярный радикал.

К настоящему времени нижний нильрадикал, локально нильпотентный радикал, верхний нильрадикал и квазирегулярный радикал нашли многочисленные применения в разных областях современной теории колец. Они встречаются почти в любой монографии по теории колец или алгебр, начиная с монографии Джекобсона [4]. Поэтому можно сказать, что указанные четыре радикала стали классическими. Такое название оправдывается и тем, что в классическом случае конечномерных алгебр и колец с условием минимальности все эти радикалы совпадают с классическим нильпотентным радикалом (ряд проблем, связанных с четырьмя указанными радикалами, указан в работе Амицура [3]).

В первой главе «Классические радикалы ассоциативных алгебр» собраны наиболее известные утверждения об указанных четырех радикалах и даны две конструкции нильалгебр. Основные результаты о радикалах, отраженные в этой главе, совпадают, по существу, с основными результатами работ Бэра [1], Левицкого [1—3], Маккоя [3, 4]. Конструкции взяты из работ Андрунакиевича [2—9], Рябухина [1—13], Голода [1] и Бабица [1]. Теоремы Голода [1] в настоящее время доказываются значительно проще, чем первоначально. В рассматриваемой главе приведен один из возможных вариантов доказательства. В работе Бабица [1] доказано, что кольца, полупростые в смысле Левицкого, являются подпрямыми произведениями первичных колец без ненулевых локально нильпотентных идеалов. В работе Рябухина [5] указана достаточно общая конструкция локально нильпотентных колец и алгебр: из результатов работы Рябухина [13] вытекает, что если L — первичная локально нильпотентная алгебра

из [5], то любая локально нильпотентная алгебра A с $\dim A \leq \aleph_0$ является гомоморфным образом алгебры L .

В связи со сказанным о локально нильпотентных алгебрах возникает вопрос о достаточно общей конструкции нильалгебр. Наиболее интересен, по-видимому, случай счетнопорожденных алгебр над полями.

Проблема 3. Существует ли такая счетнопорожденная нильалгебра A , что любая другая нильалгебра B с $\dim B \leq \aleph_0$ является гомоморфным образом алгебры A ?

Проблема 4. Существует ли такая счетнопорожденная алгебра B , радикальная в смысле Бэра, что любая другая радикальная в смысле Бэра алгебра A с $\dim A \leq \aleph_0$ является гомоморфным образом алгебры B ?

Ответ на эти вопросы нам неизвестен. Можно поставить аналогичный вопрос для конечнопорожденных нильалгебр.

Общая теория радикалов колец и алгебр. К началу пятидесятих годов развитие структурной теории привело к появлению большого числа различных радикалов. Так, обобщением классического нильпотентного радикала явились нижний нильрадикал Бэра, локально нильпотентный радикал Левицкого, верхний нильрадикал Кёте, квазирегулярный радикал Джекобсона — Перлиса, присоединенно простой радикал Брауна — Маккоя и Сегала (см. Браун и Маккой [1, 2], Сегал [1], Курочкин [1], Андрунакиевич [1]) и многие другие. Появились радикалы и противоположного характера — регулярный радикал Неймана (см. Нейман [1], Браун, Маккой [3]), f -регулярный (наследственно идемпотентный) радикал Блэра [1] и др. Возникла необходимость в общей теории радикалов.

Начало общей теории радикалов колец и алгебр было положено в 1953 году А. Г. Курошем. В работе [2] им введены основные понятия и указаны основные методы построения радикалов: радикальные и полупростые классы и их характеристики, порядок для радикалов, нижний радикал, порожденный данным классом алгебр, и построение этого радикала, верхний радикал определенный некоторым классом алгебр и т. д. В этой же работе было замечено, что общую теорию радикалов можно развивать в любых алгебраических системах, в которых имеет смысл понятие ядра гомоморфизма с его обычными свойствами (ядра гомоморфизмов должны быть подсистемами или под-

алгебрами, должны быть верны «теоремы об изоморфизмах» и т. п.), т. е. в достаточно «хороших» категориях. Одновременно, аналогичные идеи были развиты в работах Амицура [1, 2].

Ясность изложения и богатство идей основополагающей работы Куроша [2] дали толчок многочисленным исследованиям по теории радикалов. Очень скоро в общей теории радикалов выделились такие разделы, как теория верхнерадикальных конструкций, теория нижнерадикальных конструкций («цепи Куроша»), теория наследственных радикалов и кручений и ряд других.

Во второй главе «Общая теория радикалов колец и алгебр» собраны основные результаты наиболее развитых разделов общей теории радикалов колец и алгебр. Все эти результаты тесно связаны с работами Куроша [2, 4].

Все результаты из § 1 принадлежат А. Г. Курошу, за исключением предложения 2, взятого из работы [5] авторов. Существование ненаследственных полупростых в смысле Куроша классов доказано в работе Армендарица и Левита [1]. Предложение 2 показывает, что в неассоциативном случае наследственность полупростоты — очень редкое исключение. Все результаты § 2 основаны на идеях работы Куроша [4] и содержатся в работе авторов. Наследственность нижнего радикала, порожденного наследственным свойством, впервые была доказана для колец и алгебр в работах Армендарица и Левита [2] и Рябухина [6]. Необрывающаяся цепь Куроша впервые была указана в работе Рябухина [3]. Все результаты из § 3 основаны на категорных идеях и принадлежат авторам [5]. Наследственные радикалы, меньшие радикала Бэра, были впервые описаны (для колец) в работе Армендарица [1]. Основные результаты § 4 основаны на лемме 1, принадлежащей Сулиньскому (см. Сулиньский, Андерсон и Дивинский [1]). В указанной работе доказан обрыв цепи Куроша на счетном шаге (в случае ассоциативных колец). Обрыв цепи Куроша на втором шаге для наследственных классов ассоциативных колец доказан в работе Армендарица и Левита [2]. Общий случай ассоциативных алгебр над ассоциативным кольцом с единицей рассмотрен в работе [5] авторов. Именно результаты этой работы изложены в § 4.

Результаты работы авторов [5] показывают, что в случае неассоциативных алгебр над полем обрыв цепи Куроша — довольно редкое явление. Поэтому, если до 1967 года стояла проблема нахождения классов алгебр, для которых цепь Куроша не обрывается, то в настоящее время приобретает смысл противоположная задача.

Проблема 5. Пусть основной класс совпадает с классом всех (неассоциативных!) алгебр над полем. Существует ли такой гомоморфно замкнутый класс алгебр, не радикальный в смысле Куроша, что соответствующая ему цепь Куроша стабилизируется на некотором шаге?

До настоящего времени такие классы алгебр неизвестны. Такое же положение и в некоторых других классах алгебр, «достаточно далеких» от ассоциативных. Если же рассматриваемые классы алгебр достаточно «близки» к ассоциативным, то можно ожидать обрыва цепи Куроша уже на счетном шаге (для альтернативных колец и алгебр — это известное утверждение, для йордановых и лиевых алгебр ответ пока неизвестен).

С конструкцией нижнего радикала естественно связать еще одну проблему. А именно, так как радикалы образуют «полную решетку», то можно говорить об атомах и коатомах этой «решетки» — минимальных ненулевых радикалах и максимальных собственных радикалах. Нас особо интересует случай ассоциативных колец и алгебр. В этом случае мы можем показать, что коатомов нет (основной класс — класс всех ассоциативных алгебр!), а атомы существуют.

Проблема 6. Описать атомы в «решетке» радикалов.

Проблема 7. Описать все такие простые алгебры Q , что нижний радикал, порожденный классом алгебр, изоморфных Q , является атомом в «решетке» радикалов.

В ассоциативном случае простые алгебры с единицей дают атомы. Другие примеры простых алгебр из проблемы 7 нам неизвестны.

Наследственные радикалы ассоциативных алгебр. Одним из важных разделов общей теории радикалов является теория кручений (идеально наследственных радикалов) — таких радикалов τ , что $\tau(B) = B \cap \tau(A)$ для любой алгебры A и любого идеала B алгебры A . Большинство известных радикалов и радикалов, наиболее часто применяемых в структурной теории, являются кручениями

Именно поэтому теория кручений развивалась и развивается многими авторами и во многих направлениях.

Начало теории наследственных радикалов ассоциативных колец и алгебр было положено в конце пятидесятих годов в работах Андрунакиевича [7—9]. А именно, из результатов работы Сулиньского, Андерсона, Дивинского [1] вытекает, что в случае ассоциативных алгебр понятие кручения совпадает с понятием наследственного радикала: достаточно потребовать, чтобы любой идеал радикальной алгебры сам был радикальной алгеброй. Поэтому класс кручений оказался весьма широк. В работах Андрунакиевича [7—9] из класса всех наследственных радикалов ассоциативных алгебр выделены два противоположных подкласса — класс наднильпотентных радикалов (все нильпотентные алгебры радикальны) и класс подыдемпотентных радикалов (все нильпотентные алгебры полупросты, т. е. все радикальные алгебры идемпотентны). В свою очередь, из класса наднильпотентных радикалов выделен наиболее богатый по содержанию класс специальных радикалов, к которому принадлежат все наиболее известные радикалы (обобщения классического нильпотентного радикала конечномерных алгебр). Именно с помощью специальных радикалов можно обобщать известные структурные теоремы и получать новые.

В работах Рябухина [1, 4] показано, что к наднильпотентным и специальным радикалам ассоциативных колец и алгебр можно естественным образом прийти с категорных соображений.

В первых двух параграфах третьей главы «Наследственные радикалы ассоциативных алгебр» отражены (с некоторыми уточнениями) основные результаты работ Андрунакиевича [8, 9]. Часть этих результатов (и результатов второй главы) отражены в монографиях Дивинского [1] и Саса [1].

В работе Андрунакиевича [8] с помощью теории дополнительных радикалов была установлена некоторая двойственность между наднильпотентными и подыдемпотентными радикалами. Однако понятие дополнительного радикала связано с необязательно наследственными радикалами и потому радикал, дополнительный наследственному, может оказаться ненаследственным. Если же рассматривать все радикалы, то в работе Андрунакиевича [8]

нет доказательства существования дополнительного радикала: существование дополнительного радикала было доказано только для наследственных радикалов.

В § 3 третьей главы исправляются указанные недостатки теории дополнительных радикалов. Для этого вводятся в рассмотрение два понятия дополнительности — дополнительность в классе всех радикалов и дополнительность в классе всех кручений. Дополнительность и двойственность в классе всех кручений описаны полностью. При этом выяснилась и природа двойственности между наднильпотентными и подыдемпотентными радикалами: двойственные кручения образуют «полную булеву решетку». Все результаты из § 3 принадлежат авторам и основаны на идеях теории дополнительности для радикальных замыканий в полных решетках (см. Андрунакиевич, Рябухин, Крачилов [1]).

Полученное описание дополнительных радикалов и кручений достаточно полное. Тем не менее возникло несколько вопросов, ответ на которые нам неизвестен. Все эти вопросы связаны с описанием дополнительных радикалов (дополнительность в классе всех радикалов).

Проблема 8. Описать радикалы, двойственные в классе всех радикалов. Образуют ли такие радикалы «булеву решетку»?

Проблема 9. Описать радикалы, дополнительные к кручениям, и кручения, двойственные в классе всех радикалов.

Для подыдемпотентных или наднильпотентных радикалов описание, требуемое в проблеме 9, дано в § 3. Поэтому ответ ясен в случае алгебр над полем. Однако уже в случае колец (т. е. алгебр над кольцом целых чисел) полное решение нам неизвестно.

В 1958 году в работе Андрунакиевича [8] была поставлена проблема: существуют ли наднильпотентные неспециальные радикалы? Эта проблема была снова поставлена в 1965 году в монографии Дивинского [1]. Но к этому времени проблема уже была решена — нужный пример был построен в работах Рябухина [1, 2]. Более того, в работе Рябухина [12] показано, что наднильпотентных неспециальных радикалов «очень много». Так, например, любой наднильпотентный радикал, отличный от нижнего нильрадикала (наименьшего наднильпотентного

радикала), является объединением некоторого семейства наднильпотентных неспециальных радикалов. В 1971 году Снайдер [1] показал (в случае колец), что специальные радикалы образуют «полную дистрибутивную решетку», не являющуюся подрешеткой «полной дистрибутивной решетки» наднильпотентных радикалов. В этой же работе показано, что в «решетке» наднильпотентных радикалов нет коатомов.

Изложение несколько усиленных и уточненных результатов работ Снайдера [1], Рябухина [2, 12] и составляет содержание § 4 третьей главы.

В связи с основными утверждениями этого параграфа возникает несколько проблем.

Проблема 10. Описать атомы в «решетке» наднильпотентных радикалов.

Отметим, что в § 4 доказано существование атомов и что все они являются наднильпотентными неспециальными радикалами.

Проблема 11. Описать атомы в «решетке» специальных радикалов.

В связи с примером Снайдера возникает проблема описания «полной подрешетки» в «решетке» наднильпотентных радикалов, порожденной специальными радикалами.

Проблема 12. Описать наднильпотентные радикалы, являющиеся объединениями специальных радикалов.

Конструкции из указанных работ основаны на алгебрах несчетных размерностей. В связи с этим возникают еще две проблемы (напомним, что все рассматриваемые алгебры ассоциативны).

Проблема 13. Пусть основной класс состоит из всех не более чем счетно порожденных (или счетномерных, в случае алгебр над полем) алгебр. Существуют ли в этом случае коатомы в решетке всех наднильпотентных радикалов?

Проблема 14. Пусть основное кольцо является полем, а основной класс совпадает с классом всех не более чем счетномерных алгебр. Существуют ли несравнимые нильрадикалы?

В заключение отметим еще одну проблему, связанную с «решетками» наднильпотентных и специальных радикалов.

Проблема 15. Является ли «решетка» всех наднильпотентных (всех специальных) радикалов атомной? В част-

ности, существуют ли атомы, содержащиеся в локально нильпотентном радикале?

Отметим, что на языке атомов «решетки» кручений нетрудно сформулировать вопрос, равносильный проблеме простого нилькольца. Дело в том, что атомы в «решетке» всех кручений, не содержащиеся в нижнем нильрадикале, тесно связаны с простыми алгебрами. Поэтому в случае алгебр над полем искомым вопросом будет, например, вопрос о числе атомов «решетки» кручений, содержащихся в верхнем нильрадикале: если атом один (нижний нильрадикал), то простых нильалгебр нет, а если их хотя бы два, то простая нильалгебра существует.

Полупервичные алгебры с условиями обрыва. В тридцатых годах в теории колец и алгебр начался переход от алгебр и колец с условиями конечности к произвольным кольцам и алгебрам. В общем случае стали невозможны разложения в конечную прямую сумму «более просто устроенных» колец и алгебр. Поэтому для доказательства структурных теорем стали применять более общие конструкции. Одной из самых распространенных стала конструкция подпрямых произведений (подпрямых сумм), введенная и впервые примененная в работах Маккоя [1—3] и Биркгофа [1].

Введение подпрямых произведений значительно усилило связь между структурной теорией и теорией радикалов ассоциативных колец и алгебр: как правило, новые радикалы вводятся так, что полупростые алгебры представимы в виде подпрямого произведения «более просто устроенных» алгебр. В результате, начало структурной теории колец и алгебр без условий конечности и начало теории радикалов было положено одними и теми же работами — Бэра, Маккоя, Левицкого, Джекобсона и Брауна. Было показано, что алгебры без нильпотентных идеалов (т. е. полупростые в смысле Бэра — Маккоя) представимы в виде подпрямого произведения первичных алгебр, алгебры без квазирегулярных идеалов (т. е. полупростые в смысле Перлиса — Джекобсона) — в виде подпрямого произведения примитивных алгебр, а алгебры полупростые в смысле Брауна — Маккоя — в виде подпрямого произведения простых алгебр с единицей.

Однако разложения в подпрямое произведение имеют существенный недостаток — одну и ту же алгебру можно

разлагать, во многих случаях, в подпрямое произведение различных алгебр и потому свойства «сомножителей» и свойства «произведения» связаны довольно слабо. Так, например, кольцо целых чисел разложимо, причем многими способами, и в подпрямое произведение полей и в подпрямое произведение колец с ненулевыми нильпотентными элементами. В связи с этим во многих структурных теоремах на рассматриваемые кольца и алгебры налагаются различные условия типа условий конечности, обеспечивающие разложение в подпрямые произведения специального вида или даже в прямую сумму колец или алгебр «более простого» вида.

В четвертой главе «Полупервичные алгебры, алгебры без нильпотентных элементов и разложения алгебр» в § 1 собраны структурные теоремы именно такого типа.

В 1950 году Капланский [1] доказал, что любая алгебра, полупростая в смысле Джекобсона и удовлетворяющая условию минимальности для главных правых идеалов, разлагается в прямую сумму простых алгебр с минимальными правыми идеалами. Блэр [1] в 1953 году нашел критерий разложимости кольца в прямую сумму простых колец — любой идеал кольца должен отщепляться в качестве прямого слагаемого, причем само кольцо должно быть наследственно идемпотентным. Результаты Капанского и Блэра были обобщены в 1954—1957 годах в работах Андрунакиевича [2—6, 8, 9].

Доказанные в § 1 четвертой главы теоремы о разложении в прямую сумму простых алгебр взяты из работ Андрунакиевича [2—6, 8, 9] или являются уточнением теорем из указанных работ (доказательства значительно изменены, так как основаны на других идеях).

В 1956 году Голди [1] дал критерий разложимости кольца, полупростого в смысле Джекобсона, в несократимое подпрямое произведение примитивных колец. Критерий разложимости любого полупервичного кольца в несократимое подпрямое произведение первичных колец и единственность таких разложений были доказаны в 1963 году Леви [1]. Обобщая результаты Голди и Леви, В. Г. Марин в 1972 году рассмотрел общий случай — в его работах [1, 2] доказаны теоремы существования и единственности разложений алгебр в несократимое подпрямое произведение алгебр из заданного специального

класса и указаны многочисленные приложения этих теорем для ряда конкретных специальных радикалов.

Доказанные в § 1 теоремы о разложениях полупервичных алгебр в несократимое подпрямое произведение первичных алгебр (для различных специальных классов и соответствующих специальных радикалов) взяты из указанных работ Марина.

Нетрудно заметить, что теоремы Леви о несократимых подпрямых произведениях первичных колец и доказательства этих теорем носят «решеточный» характер: элементы колец, как правило, не используются, а постоянно применяются только идеалы и свойства решетки идеалов кольца. Развивая эту идею, авторы [4] в 1971 году перенесли результаты Леви на мультипликативные решетки. В 1972 году Тэбырца [1] уточнил эти результаты.

С рассмотренными структурными теоремами о разложении колец и алгебр в прямые суммы простых алгебр тесно связаны теоремы о выделении радикала в качестве прямого слагаемого. В этих теоремах речь идет, как правило, о подыдемпотентном радикале или об идеалах, являющихся сильно полупростыми для некоторого специального радикала. При этом выделяемый в качестве прямого слагаемого идеал разлагается в прямую сумму простых алгебр. Одна из первых теорем такого типа была доказана Холлом [1] в 1940 году, рассмотревшим в кольцах с условием минимальности для идеалов те идеалы, которые являются классически полупростыми кольцами. В 1956—1962 годах было показано, что теоремы, аналогичные теореме Холла (и обобщающие ее) можно доказывать в значительно более широких классах ассоциативных колец и для любых подыдемпотентных радикалов (см. Андрунакиевич [4, 10]).

В последних трех параграфах четвертой главы отражены результаты о радикале Брауна—Маккоя, наследственно идемпотентном (f -регулярном) радикале Блэра, антипростом радикале и построенные радикалы применены для доказательства теорем из работ о выделении радикала в качестве прямого слагаемого (в несколько иной формулировке).

Наиболее известными теоремами о строении первичных и полупервичных алгебр стали теоремы Голди [1, 2], доказанные им в 1958 году (см., также, Ламбек [1],

Голди [4]). В настоящее время теоремы Голди стали классическими и излагаются с помощью различных колец частных: — применяются классические кольца частных, полные кольца частных (см., например, Ламбек [2], Дивинский [1]) и ряд других.

В четвертой главе в § 3 «Левые алгебры частных полупервичных алгебр» мы строим кольца частных Джонсона (инъективные или существенные кольца частных), впервые применившего кольца частных для изучения первичных колец с условием максимальнойности (см. Джонсон [1, 2]). Теоремы об алгебрах частных несократимых подпрямых произведений первичных алгебр Голди впервые были доказаны Мариным [1, 2] (для алгебр без нильпотентных элементов) и в 1974 году Марковым [1] (общий случай). Результаты этих работ и изложены в § 3 главы 4.

В связи с теоремами Голди и результатами указанного § 3 возникает

Проблема 16. Дать характеристику первичных и полупервичных ассоциативных колец (или алгебр) с условием максимальнойности для левых (правых) идеалов.

Дело в том, что с помощью колец частных дана характеристика колец Голди — класса колец более широкого, чем класс колец с условием максимальнойности. Более того, теоремы Голди показывают, что с помощью классического кольца частных нельзя отличить кольца Голди от колец с условием максимальнойности для левых или правых идеалов.

Алгебры без нильпотентных элементов. Как было сказано, первые структурные теоремы об алгебрах без нильпотентных элементов были доказаны во второй половине XIX века Вейерштрассом и Дедекиндом:

Любая конечномерная ассоциативно-коммутативная алгебра без нильпотентных элементов разлагается в конечную прямую сумму полей (конечных расширений основного поля).

При переходе к некоммутативному случаю вместо полей начали рассматривать тела и простые алгебры. Из результатов Молина, Картана и Веддербарна, доказанных в начале XX века, вытекает:

Любая конечномерная ассоциативная алгебра без нильпотентных элементов разлагается в конечную прямую сумму тел.

В тридцатых — сороковых годах начался переход к произвольным кольцам и алгебрам. Вместо разложений в конечные прямые суммы стали рассматривать бесконечные прямые суммы и подпрямые произведения. Наиболее известной теоремой о кольцах без нильпотентных элементов явилась следующая теорема, доказанная Круллем [1, 2] в 1929 году:

Любое ассоциативно-коммутативное кольцо без нильпотентных элементов разлагается в подпрямое произведение (подпрямую сумму) колец без делителей нуля.

С другой стороны, из теорем Артина и Нётер вытекает:

Любое ассоциативное кольцо без нильпотентных элементов, удовлетворяющее условию минимальности для левых (или правых) идеалов, разлагается в конечную прямую сумму тел.

Обобщая эту теорему, А. И. Герчиков [1] в 1940 году нашел критерий разложимости в прямую сумму тел (не обязательно конечную):

Ассоциативное кольцо разлагается в прямую сумму тел тогда и только тогда, когда оно не имеет нильпотентных элементов и удовлетворяет условию минимальности для главных правых (или левых) идеалов.

В 1957 году Андрунакиевич [7] и Тьеррен [1] вводят обобщенный нильрадикал (компрессивный радикал) и начинают изучение колец, разложимых в подпрямое произведение колец без делителей нуля (см. также Тьеррен [2] и Андрунакиевич [9]). Ясно, что все кольца, разложимые в подпрямое произведение колец без делителей нуля, не имеют нильпотентных элементов. В связи с этим возникает задача описания колец и алгебр без нильпотентных элементов. Очень близко к решению этой задачи находятся основные результаты работы Тьеррен [2]. Однако окончательное решение было дано авторами в 1968—1969 годах. В 1968 году была доказана теорема (Андрунакиевич и Рябухин [2]):

Любое ассоциативное кольцо без нильпотентных элементов разлагается в подпрямое произведение колец без делителей нуля.

В 1969 году Рябухин [7—9] полностью решил проблему описания не обязательно ассоциативных алгебр (над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом с еди-

ницей), разложимых в подпрямое произведение алгебр без делителей нуля:

Алгебра R разлагается в подпрямое произведение алгебр без делителей нуля тогда и только тогда, когда в R выполнены условные тождества

$$\begin{aligned} x^2 &= 0 \Rightarrow x = 0, \\ x(yz) &= 0 \Leftrightarrow (xy)z = 0. \end{aligned} \quad (*)$$

Основную роль в доказательстве этого результата играли конструкции аннулятора и некоторые близкие конструкции. На тех же идеях основано более простое доказательство основного результата работы авторов [2], данное в работах Стюарта [1] и Маккоя [5] (это доказательство для более общего случая содержится и в работе Рябухина [9]).

В работе Рябухина [7] дано и обобщение теоремы Герчикова — указан критерий разложимости алгебр (не обязательно ассоциативных) в прямую сумму алгебр с делением (однозначным). Оказалось, что в случае конечномерных алгебр этот критерий равносителен выполнению условных тождеств (*). А из этого результата вытекает обобщение теоремы Вейерштрасса:

Конечномерная (не обязательно ассоциативная) алгебра $R \neq 0$ разлагается в прямую сумму алгебр с делением тогда и только тогда, когда в R выполнены условные тождества (*). При этом, если основное поле Φ алгебраически замкнуто, то соответствующие алгебры с делением (компоненты разложения) изоморфны Φ , и потому алгебра R ассоциативно-коммутативна.

Прямое доказательство этой теоремы дано в работе авторов [3].

В четвертой главе в § 2 «Алгебры без нильпотентных элементов и обобщенный нильрадикал» изложены (для ассоциативных алгебр) основные результаты работ.

Радикалы и структурная теория в неассоциативных алгебрах и категориях. Мы рассматривали, в основном, ассоциативные алгебры. При переходе к неассоциативным алгебрам можно использовать теоретико-категорные идеи. А именно, ещё в работе Куроша [2], положившей начало общей теории радикалов колец и алгебр, было отмечено, что эту теорию (а значит и соответствующую структурную

теорию) можно развивать для любых алгебраических систем, для которых имеют смысл гомоморфизмы и ядра гомоморфизмов с их обычными свойствами (ядра гомоморфизмов должны быть подсистемами, должны быть верны «теоремы об изоморфизмах» и т. д.), т. е. для любых «достаточно хороших» категорий алгебраических систем. А категории линейных алгебр (или алгебр над ассоциативно-коммутативным кольцом с единицей) нужным требованиям удовлетворяют.

Начало теории радикалов в категориях было положено Шульгейфером [1] в 1960 году. Он указал ряд аксиом, при выполнении которых в категориях можно ввести понятие верхнего радикала (в смысле Куроша) с его обычными свойствами. Теоретико-категорный подход позволил Лившицу в работе [1] выяснить истоки двойственности между радикальностью и полупростотой. В том же 1964 году Рябухин [4] показал, что при достаточно малом наборе аксиом в теорию категорий переносятся все основные понятия, методы, конструкции и результаты общей теории радикалов Куроша (см., также, Рябухин [1]). Более того, развитая теория позволила получить и ряд новых результатов и конструкций, не известных ранее для конкретных категорий колец, алгебр и групп. Так, например, понятие обобщенно специального класса и характеристика, с помощью этого понятия, радикальных и полупростых классов, соответствующих идеально наследственным радикалам (кручениям), были найдены сначала в категориях, а затем перенесены на кольца и алгебры.

К настоящему времени теория радикалов в категориях развита до такого уровня, что позволяет переносить в категории (а значит, в качестве приложения, и в любые конкретные категории колец, алгебр и групп) большинство известных результатов и конструкций теории радикалов ассоциативных алгебр, даже если они внешне тесно связаны со спецификой ассоциативных алгебр. Так, например, Сулинский [1] в 1966 году перенес в категории понятие радикала Брауна — Маккоя, а Рябухин [1] в 1967 году — понятие наднильпотентного (слабо специального) радикала.

В пятой главе «Радикалы в категориях» изложены (с некоторыми уточнениями аксиоматики и определений)

основные результаты работ Рябухина [1, 4] о радикалах в категориях. Здесь же указаны и некоторые приложения полученных результатов. Приложением результатов этой главы являются, на самом деле, и многие результаты второй и третьей главы.

Отметим, что именно с теоретико-категорной точки зрения развивалась теория радикалов модулей. Основные результаты этой теории, вместе с ее многочисленными приложениями, отражены в монографиях Мишиной и Скорнякова [1] и Штенстрома [1].

В заключение сделаем краткий обзор развития теории радикалов и структурной теории неассоциативных алгебр.

В случае конечномерных алгебр теории радикалов фактически нет: под радикалом понимается, как правило, наибольший разрешимый идеал, существование которого легко доказывается. Структурная теория конечномерных неассоциативных алгебр развивалась и развивается параллельно теории ассоциативных алгебр — описываются простые алгебры (именно здесь проявляется специфика), доказываются структурные теоремы о разложении полупростых алгебр (т. е. алгебр без разрешимых идеалов) в прямую сумму простых алгебр и теоремы о расщеплении алгебр в полупрямую сумму радикала и полупростой подалгебры.

К началу пятидесятих годов структурная теория конечномерных алгебр, близких к ассоциативным, была, в основном, завершена и достигла уровня, вполне сравнимого с уровнем развития классической структурной теории конечномерных ассоциативных алгебр: простые алгебры, в основном, описаны и теоремы о разложении доказаны (алгебры Ли — Киллинг [1—4], Картан [1], Адо [1], Мальцев [1, 2], Хариш-Чандра [1, 2], Дынкин [1] и др.; альтернативные и йордановы алгебры — Алберт [1, 2], Скорняков [1, 2], Клейнфельд [1, 2] и др.). При этом, в отличие от ассоциативного случая, характеристика основного поля часто играет решающую роль. Так, в случае алгебр Ли над полем ненулевой характеристики описание конечномерных простых алгебр все еще не завершено, разрешимый радикал не является идеально наследственным (см. Андрунакиевич и Рябухин [1]).

При переходе к бесконечномерным алгебрам становится необходима теория радикалов. Общая теория радикалов

легко переносится с помощью теоретико-категорных соображений, а трудности, связанные с неассоциативностью рассматриваемых алгебр, позволяет преодолеть техника работы Ширшова [1]. К настоящему времени, благодаря исследованиям А. И. Ширшова, К. А. Жевлакова и их учеников, теория радикалов и соответствующая структурная теория успешно развиваются для альтернативных и йордановых алгебр и близких к ним.

К. А. Жевлаков в 1962—1967 годах построил структурную теорию альтернативных алгебр с условиями обрыва. При этом дано описание как полупростых, так и радикальных алгебр (см. [1—3, 6]). Другие доказательства и уточнения результатов Жевлакова даны в работах Слэйтера [2, 3].

В 1948 году Смайли рассматривает аналог квазирегулярного радикала — наибольший квазирегулярный идеал альтернативных алгебр. В 1955 году Клейнфельд вводит в рассмотрение другой аналог квазирегулярного радикала — пересечение всех максимальных правых модулярных идеалов. Возникает проблема о совпадении радикалов Смайли и Клейнфельда. В 1969 году Жевлаков [7—9] решает эту проблему — радикалы Смайли и Клейнфельда совпадают, причем получающийся радикал является идеально наследственным.

В 1967 году Жевлаков [5] строит нижний нильрадикал в альтернативных алгебрах и доказывает идеальную наследственность этого радикала. В работах [5, 9] дано некоторое описание первичных и полупервичных альтернативных алгебр (уточнение и развитие этих результатов см., например, в работах Слейтера [1, 4, 5] и Нивечежаля и Терликовской [1]).

В 1969 году Жевлаков [9] строит и изучает неймановский (регулярный) радикал. Развивая идеи этой работы, легко построить теорию дополнительных радикалов в альтернативных алгебрах.

После 1970 года теория радикалов альтернативных алгебр достигла уровня, вполне сравнимого с уровнем развития теории радикалов ассоциативных алгебр. Все основные результаты теории радикалов и структурной теории были перенесены с ассоциативных алгебр на альтернативные, а остальные результаты, как правило, легко переносятся (так, например, хотя теория специальных

радикалов и не построена для альтернативных алгебр, но построение этой теории на основе результатов работы Жевлакова [5] не представляет особых трудностей; см., также, работы Андерсон, Дивинский, Сулиньский [1] и Кремпа [1]).

К 1973 году были доведены до достаточно высокого уровня теория радикалов и структурная теория $(-1, 1)$ -колец и алгебр. Михеев [1] доказал теоремы об отщеплении радикала (разрешимого) для конечномерных $(-1, 1)$ -алгебр, а Роомельди [2] — структурные теоремы и нильпотентность радикала в $(-1, 1)$ -кольцах с условием минимальности. Этим завершено построение структурной теории для конечномерных $(-1, 1)$ -алгебр и $(-1, 1)$ -колец с условием минимальности. Роомельди [1] построил нижний нильрадикал и доказал, что он обладает обычными свойствами, а Никитин [1] доказал идеальную наследственность любого наднильпотентного радикала $(-1, 1)$ -колец и алгебр. После этих двух работ в $(-1, 1)$ -кольцах легко строится теория наднильпотентных и специальных радикалов.

На близком уровне находится теория радикалов йордановых алгебр. Здесь наиболее значительные результаты получил Слинько [1, 2], продолживший исследования Жевлакова [4].

Теория радикалов неассоциативных алгебр находит и несколько неожиданные применения — Жевлаков [10] и Шестаков [1, 2] применили нижний нильрадикал и квазирегулярный радикал к теории тождеств в альтернативных алгебрах.

В заключение отметим, что теорию радикалов (или аналог этой теории) можно развивать и не основываясь на теоретико-категорных соображениях, т. е. в не очень «хороших» категориях (см. Григор [1, 2], Рябухин [10, 11]).

КЛАССИЧЕСКИЕ РАДИКАЛЫ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

Понятие радикала возникло в классической структурной теории конечномерных ассоциативных алгебр над полями. Еще в 1893 году русский алгебраист Молин, изучая конечномерные ассоциативные алгебры над полем комплексных чисел, заметил, что в любой конечномерной алгебре существует наибольший нильпотентный идеал (классический радикал) и доказал по существу, что фактор-алгебра по этому идеалу является конечной прямой суммой алгебр матриц. К 1910 году Картан и Веддербарн перенесли результаты Молина на алгебры над полем действительных чисел, а затем и на алгебры над произвольным полем. Позднее классический радикал был применен и для изучения неассоциативных конечномерных алгебр.

Успех применения классического радикала в структурной теории конечномерных алгебр показал полезность понятия радикала в общем случае алгебр над полями и произвольных ассоциативных колец. Наиболее известны нильрадикалы (нижний нильрадикал Бэра, локально нильпотентный радикал Левицкого и верхний нильрадикал Кёте) и квазирегулярный радикал. Основные результаты об этих радикалах и будут даны в настоящей главе.

Всюду ниже мы считаем, что все рассматриваемые алгебры — ассоциативные алгебры над произвольным, но фиксированным ассоциативно-коммутативным кольцом Φ с единицей $1 \neq 0$. Никаких других условий на алгебры и кольцо Φ не налагается, если противное не оговорено особо. Все рассматриваемые классы алгебр предполагаются абстрактными, т. е. замкнутыми относительно изоморфных образов.

§ 1. Нижний нильрадикал

Алгебра A называется *нильпотентной*, если $A^n = 0$ для некоторого целого числа $n \geq 1$. Это равносильно тому, что $a_1 a_2 \dots a_n = 0$ для любых n элементов алгебры A . Идеал I алгебры R называется *нильпотентным*, если I нильпотентен как алгебра. Аналогично определяется понятие нильпотентного левого (правого) идеала и нильпотентной подалгебры.

Пусть R — произвольная алгебра. Обозначим символом $\mathfrak{N}(R)$ сумму всех нильпотентных идеалов алгебры R . Учитывая это обозначение, строим (по индукции) цепь идеалов алгебры R

$$0 = \mathfrak{N}_0(R) \subseteq \mathfrak{N}_1(R) \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{N}_\alpha(R) \subseteq \mathfrak{N}_{\alpha+1}(R) \subseteq \dots, \quad (1)$$

где α пробегает порядковые числа, полагая:

$$\mathfrak{N}_\mu(R) = \bigcup_{\alpha < \mu} \mathfrak{N}_\alpha(R), \quad (2)$$

если μ — предельное и идеалы $\mathfrak{N}_\alpha(R)$ уже построены для всех порядковых чисел $\alpha < \mu$, и

$$\mathfrak{N}_{\alpha+1}(R) = \sum \{ I \mid I \text{ — идеал в } R, I^n \subseteq \mathfrak{N}_\alpha(R) \text{ для некоторого целого числа } n \geq 1 \} \quad (3)$$

для любого порядкового числа α , т. е. $\mathfrak{N}_{\alpha+1}(R)$ — такой идеал алгебры R , содержащий идеал $\mathfrak{N}_\alpha(R)$, что

$$\mathfrak{N}_{\alpha+1}(R)/\mathfrak{N}_\alpha(R) = \mathfrak{N}(R/\mathfrak{N}_\alpha(R)). \quad (4)$$

В частности, $\mathfrak{N}_1(R) = \mathfrak{N}(R)$ — сумма всех нильпотентных идеалов алгебры R .

Определение 1. *Нижним нильрадикалом* (или радикалом Бэра) алгебры R называется идеал

$$\mathfrak{B}(R) = \bigcup_{\alpha \geq 0} \mathfrak{N}_\alpha(R), \quad (5)$$

построенный по идеалам $\mathfrak{N}_\alpha(R)$ из цепи (1).

Чтобы указать основные свойства нижнего нильрадикала, рассмотрим сначала несколько свойств нильпотентных идеалов.

Лемма 1. *Гомоморфный образ и подалгебра нильпотентной алгебры сами будут нильпотентными алгебрами. Если идеал I и фактор-алгебра A/I алгебры A нильпо-*

тентны, то и сама алгебра A нильпотентна. В любой алгебре R сумма любого конечного множества нильпотентных идеалов сама будет нильпотентным идеалом.

Действительно, первое утверждение с очевидностью вытекает из определения нильпотентной алгебры.

Пусть идеал I и фактор-алгебра A/I алгебры A нильпотентны. По определению нильпотентной алгебры найдутся такие целые числа $m \geq 1$, $n \geq 1$, что $I^m = 0$, $(A/I)^n = 0$. Последнее равенство равносильно включению $A^n \subseteq I$. Но тогда $A^{nm} \subseteq I^m = 0$, т. е. $A^{nm} = 0$. Поэтому алгебра A нильпотентна.

Учитывая доказанное, возьмем любую алгебру R и любые два нильпотентных идеала B , C алгебры R . Тогда по теоремам об изоморфизмах получаем $B + C/C \simeq B/B \cap C$. Но $B/B \cap C$ — нильпотентная алгебра как гомоморфный образ нильпотентной алгебры B . В результате получаем, что $B + C$ — расширение нильпотентной алгебры C с помощью нильпотентной алгебры $B + C/C \simeq B/B \cap C$. Поэтому $B + C$ — нильпотентная алгебра, т. е. сумма любых двух нильпотентных идеалов алгебры R сама является нильпотентным идеалом. Но тогда по индукции и сумма любого конечного множества нильпотентных идеалов алгебры R будет нильпотентным идеалом.

Лемма 2. Любой левый (правый) нильпотентный идеал A алгебры R порождает нильпотентный идеал $A + AR + RA + RAR$ алгебры R . Поэтому сумма $\mathfrak{N}(R)$ всех нильпотентных идеалов алгебры R совпадает с суммой всех левых нильпотентных идеалов и с суммой всех правых нильпотентных идеалов. В частности, если алгебра R не имеет ненулевых нильпотентных идеалов, то она не имеет и ненулевых односторонних нильпотентных идеалов.

Пусть A — левый нильпотентный идеал алгебры R . Из того, что A — левый идеал, вытекает, что идеал, порожденный A в R , совпадает с $A + AR$. Замечая, что

$$(A + AR)^2 = A^2 + A^2R + ARA + ARAR \subseteq A^2 + A^2R,$$

$$(A + AR)^3 \subseteq (A + AR)(A^2 + A^2R) \subseteq A^3 + A^3R, \dots,$$

получаем по индукции включение $(A + AR)^n \subseteq A^n + A^nR$ для всех целых чисел $n \geq 1$. Но $A^m = 0$ для некоторого m . Для того же m в силу доказанного включения $(A + AR)^m = 0$, т. е. $A + AR$ — нильпотентный идеал алгебры R .

Случай правых нильпотентных идеалов рассматривается аналогично. Все остальные утверждения леммы легко вытекают из доказанных.

Лемма 3. *Для любой алгебры R существует такое порядковое число $\tau = \tau(R)$, что $\mathfrak{B}(R) = \mathfrak{N}_\tau(R)$, т. е. цепь (1) стабилизируется на шаге τ .*

Доказательство. Покажем сначала, что если цепь (1) приостановится на некотором шаге, то она стабилизируется на этом шаге, т. е. для любого порядкового числа α верна импликация

$$\mathfrak{N}_\alpha(R) = \mathfrak{N}_{\alpha+1}(R) \Rightarrow \forall \beta \geq \alpha \mid \mathfrak{N}_\alpha(R) = \mathfrak{N}_\beta(R). \quad (6)$$

Действительно, пусть $\mathfrak{N}_\alpha(R) = \mathfrak{N}_{\alpha+1}(R)$. Тогда для $\beta = \alpha$ и $\beta = \alpha + 1$ равенство $\mathfrak{N}_\alpha(R) = \mathfrak{N}_\beta(R)$ верно. Допустим, что это равенство уже доказано для всех $\alpha \leq \beta < \gamma$. Если γ — предельное, то из индуктивного предположения вытекает в силу правила (2) $\mathfrak{N}_\gamma(R) = \bigcup_{\beta < \gamma} \mathfrak{N}_\beta(R) = \bigcup_{\alpha \leq \beta < \gamma} \mathfrak{N}_\beta(R) = \mathfrak{N}_\alpha(R)$, т. е. равенство $\mathfrak{N}_\alpha(R) = \mathfrak{N}_\beta(R)$ осталось верным и при $\beta = \gamma$. Если γ — не предельное, то $\gamma = \delta + 1$ для некоторого порядкового числа δ и

$$\mathfrak{N}_\alpha(R) = \mathfrak{N}_\delta(R),$$

по индуктивному предположению. Но тогда из правила (3) легко вытекает

$$\mathfrak{N}_{\alpha+1}(R) = \mathfrak{N}_{\delta+1}(R) = \mathfrak{N}_\gamma(R).$$

Так как $\mathfrak{N}_\alpha(R) = \mathfrak{N}_{\alpha+1}(R)$, то $\mathfrak{N}_\alpha(R) = \mathfrak{N}_\gamma(R)$. По индукции равенство $\mathfrak{N}_\alpha(R) = \mathfrak{N}_\beta(R)$ доказано для всех $\beta \geq \alpha$, что и доказывает импликацию (6).

Учитывая (6), возьмем любое такое порядковое число τ , что мощность отрезка $\{\alpha \mid 0 \leq \alpha \leq \tau\}$ строго больше мощности $|R|$ множества R . Покажем, что для этого τ цепь (1) стабилизируется на шаге τ , т. е. $\mathfrak{B}(R) = \mathfrak{N}_\tau(R)$.

Допустим противное. Тогда в силу (6) $\mathfrak{N}_\tau(R) \neq \mathfrak{N}_{\tau+1}(R)$. Еще раз применяя (6), получаем, что

$$\forall \beta \leq \tau \mid \mathfrak{N}_\beta(R) \subset \mathfrak{N}_{\beta+1}(R).$$

Учитывая это, выбираем для любого $\beta \leq \tau$ элемент $r_\beta \in \mathfrak{N}_{\beta+1}(R) \setminus \mathfrak{N}_\beta(R)$. Ясно, что все элементы r_β различны и потому множество $\{r_\beta \mid 0 \leq \beta \leq \tau\}$ выбранных элементов имеет такую же мощность, как и отрезок $\{\beta \mid 0 \leq \beta \leq \tau\}$. Но по построению указанный отрезок имеет мощность,

строго большую мощности множества R . Таким образом, множество R имеет подмножество с мощностью, строго большей мощности всего множества R . Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть φ — гомоморфизм алгебры R . Тогда для любого порядкового числа α верно включение

$$\varphi(\mathfrak{N}_\alpha(R)) \subseteq \mathfrak{N}_\alpha(\varphi(R)).$$

Ясно, что нужное нам включение верно при $\alpha = 0$. Из леммы 1 вытекает, что оно верно и при $\alpha = 1$, так как образ нильпотентного идеала является нильпотентным идеалом, а $\mathfrak{N}_1(R) = \mathfrak{N}(R)$ — сумма всех нильпотентных идеалов алгебры R .

Пусть включение

$$\varphi(\mathfrak{N}_\alpha(R)) \subseteq \mathfrak{N}_\alpha(\varphi(R)) \quad (7)$$

уже доказано для всех порядковых чисел $\alpha < \gamma$. Ясно, что если γ — предельное, то из индуктивного предположения и правил (2) вытекает

$$\varphi(\mathfrak{N}_\gamma(R)) \subseteq \mathfrak{N}_\gamma(\varphi(R)). \quad (8)$$

Пусть γ — не предельное. Тогда $\gamma = \alpha + 1$ для некоторого порядкового числа α , и для этого α верно включение (7). Пусть I — такой идеал алгебры R , что $I^n \subseteq \mathfrak{N}_\alpha(R)$ для некоторого $n \geq 1$. Тогда для этого же n имеем $(\varphi(I))^n = \varphi(I^n) \subseteq \varphi(\mathfrak{N}_\alpha(R)) \subseteq \mathfrak{N}_\alpha(\varphi(R))$, и потому $\varphi(I) \subseteq \mathfrak{N}_{\alpha+1}(\varphi(R))$ в силу правила (3). Но тогда в силу произвольности выбора идеала I снова получаем включение (8).

По индукции включение (7) доказано для всех порядковых чисел α .

Лемма 5. Пусть C — идеал алгебры B , B — идеал алгебры A и C_A — идеал алгебры A , порожденный множеством C . Тогда $C_A^3 \subseteq C \subseteq C_A$. В частности, C — нильпотентный идеал алгебры B в том и только том случае, когда C_A — нильпотентный идеал алгебры A .

Действительно, $C_A = C + AC + CA + ACA$, и, очевидно, $C_A \subseteq B$. Но тогда получаем с очевидностью

$$\begin{aligned} C_A^3 &\subseteq BC_A B = BCB + BACB + BCAB + BACAB \subseteq \\ &\subseteq BCB + BCB + BCB + BCB = BCB \subseteq C \subseteq C_A. \end{aligned}$$

Последнее утверждение леммы с очевидностью следует из доказанного включения, леммы 1 и определения нильпотентного идеала.

Лемма 6. Пусть I — идеал алгебры R . Тогда для любого порядкового числа α верно равенство

$$\mathfrak{N}_\alpha(I) = I \cap \mathfrak{N}_\alpha(R). \quad (9)$$

Если A — подалгебра алгебры R , то для всех порядковых чисел α

$$\mathfrak{N}_\alpha(A) \supseteq A \cap \mathfrak{N}_\alpha(R). \quad (10)$$

Доказательство. Ясно, что включение (10) верно при $\alpha=0$ и если оно уже доказано для всех $\alpha < \gamma$ и γ — предельное, то верно и включение

$$\mathfrak{N}_\gamma(A) \supseteq A \cap \mathfrak{N}_\gamma(R). \quad (11)$$

Допустим теперь, что γ не предельное, т. е. $\gamma = \alpha + 1$. По индуктивному предположению верно включение (10). Учитывая это, возьмем любой элемент $a \in A \cap \mathfrak{N}_\gamma(R)$. Переходя к образам при естественном гомоморфизме $R \rightarrow \bar{R} = R/\mathfrak{N}_\alpha(R)$, получаем включение

$$\bar{a} \in \mathfrak{N}(\bar{R}) = \sum \{ \bar{J}_i \mid \bar{J}_i \text{ — нильпотентный идеал } \bar{R} \}$$

в силу правил (3), (4). Но тогда по построению суммы идеалов $\bar{a} \in \sum_{i=1}^n J_i$ для некоторого конечного множества нильпотентных идеалов алгебры $\bar{R}$, и потому в силу леммы 1 главный идеал $(\bar{a})$ алгебры $\bar{R}$ нильпотентен. Возвращаясь к прообразам, получаем $(a)^n \subseteq A \cap \mathfrak{N}_\alpha(R) \subseteq \mathfrak{N}_\alpha(A)$ для некоторого целого числа $n \geq 1$, и потому $(a) \subseteq \mathfrak{N}_{\alpha+1}(A) = \mathfrak{N}_\gamma(A)$ в силу правила (3). Следовательно, включение (11) снова верно.

По индукции включение (10) доказано для всех порядковых чисел α .

Допустим теперь, что I — идеал алгебры R . Ясно, что равенство (9) верно при $\alpha=0$.

Пусть C — идеал алгебры I и $C^n \subseteq \mathfrak{N}_\alpha(I)$. Тогда в силу леммы 5 для идеала C_R алгебры R , порожденного множеством C , получаем $C_R^{3n} \subseteq \mathfrak{N}_\alpha(I)$. Поэтому, если верно равенство (9), то $C^n \subseteq \mathfrak{N}_\alpha(I)$ влечет $C_R^{3n} \subseteq \mathfrak{N}_\alpha(R)$ и потому $C_R \subseteq \mathfrak{N}_{\alpha+1}(R) \cap I$. В силу правила (3) получаем включение

$\mathfrak{N}_{\alpha+1}(I) \subseteq I \cap \mathfrak{N}_{\alpha+1}(R)$. Так как обратное включение уже доказано не только для идеалов, но и для подалгебр, то $\mathfrak{N}_{\alpha+1}(I) = I \cap \mathfrak{N}_{\alpha+1}(R)$.

По индукции легко получаем, что равенство (9) верно для всех α .

Определение 2. Алгебра R называется *$\mathfrak{B}$ -радикальной*, если $R = \mathfrak{B}(R)$. Алгебра Q называется *$\mathfrak{B}$ -полупростой*, если $\mathfrak{B}(Q) = 0$.

Предложение 1. Алгебра Q будет *$\mathfrak{B}$ -полупростой алгеброй тогда и только тогда, когда она не имеет ненулевых нильпотентных идеалов. Алгебра R будет *$\mathfrak{B}$ -радикальной тогда и только тогда, когда любой ненулевой гомоморфный образ алгебры R имеет ненулевые нильпотентные идеалы.**

Доказательство. Пусть алгебра Q $\mathfrak{B}$ -полупроста, т. е. $\mathfrak{B}(Q) = 0$. Тогда по построению нижнего нильрадикала (см. (1) и (4), (5)) $\mathfrak{N}_1(Q) = \mathfrak{N}(Q) = 0$. А это и значит, что алгебра Q не имеет ненулевых нильпотентных идеалов. Обратно, если алгебра Q не имеет ненулевых нильпотентных идеалов, т. е. $\mathfrak{N}(Q) = 0$, то

$$\mathfrak{N}_0(Q) = 0 = \mathfrak{N}_1(Q).$$

Но тогда в силу импликации (6) (см. доказательство леммы 3) $\mathfrak{N}_\beta(Q) = 0$ для всех порядковых чисел $\beta \geq 0$. Еще раз применяя лемму 3, получаем $\mathfrak{B}(Q) = \mathfrak{N}_\tau(Q) = 0$, т. е. алгебра Q $\mathfrak{B}$ -полупроста.

Пусть алгебра R $\mathfrak{B}$ -радикальна, т. е. $R = \mathfrak{B}(R)$. Тогда в силу леммы 4 для любого ненулевого гомоморфного образа $\bar{R}$ алгебры R получаем $\bar{R} = \mathfrak{B}(\bar{R}) \neq 0$, так как $\mathfrak{B}(R) = \mathfrak{N}_\tau(R)$ и $\mathfrak{B}(\bar{R}) = \mathfrak{N}_{\tau'}(\bar{R})$ для некоторых порядковых чисел τ, τ' . Но неравенство $\mathfrak{B}(\bar{R}) \neq 0$ влечет в силу доказанного выше существование ненулевых нильпотентных идеалов в алгебре $\bar{R}$. Таким образом, любой ненулевой гомоморфный образ $\bar{R}$ $\mathfrak{B}$ -радикальной алгебры R имеет ненулевые нильпотентные идеалы.

Обратно, пусть любой ненулевой гомоморфный образ алгебры R имеет ненулевые нильпотентные идеалы. В силу леммы 3 имеем $\mathfrak{B}(R) = \mathfrak{N}_\tau(R)$ для некоторого порядкового числа τ . Для этого τ получаем по построению $\mathfrak{N}_\tau(R) = \mathfrak{N}_{\tau+1}(R)$. Но тогда в силу правила (4) получаем

$$\mathfrak{N}(R/\mathfrak{N}_\tau(R)) = \mathfrak{N}_{\tau+1}(R)/\mathfrak{N}_\tau(R) = \mathfrak{N}_\tau(R)/\mathfrak{N}_\tau(R) = 0,$$

т. е. фактор-алгебра $R/\mathfrak{N}_\tau(R)$ не имеет ненулевых нильпотентных идеалов. Поэтому эта фактор-алгебра нулевая, т. е. $R = \mathfrak{N}_\tau(R) = \mathfrak{B}(R)$. Следовательно, алгебра R $\mathfrak{B}$ -радикальна.

Предложение доказано.

Следствие 1. Алгебра Q $\mathfrak{B}$ -полупроста тогда и только тогда, когда она не имеет ненулевых левых (правых) нильпотентных идеалов.

Это вытекает из предложения 1 и леммы 2.

Предложение 2. При любом гомоморфизме нижний нильрадикал переходит в нижний нильрадикал, т. е. $\varphi(\mathfrak{B}(R)) \subseteq \mathfrak{B}(\varphi(R))$ для любой алгебры R и любого гомоморфизма φ этой алгебры. Фактор-алгебра $R/\mathfrak{B}(R)$ всегда $\mathfrak{B}$ -полупроста, т. е.

$$\mathfrak{B}(R/\mathfrak{B}(R)) = 0.$$

Если I — идеал алгебры R , то верно равенство

$$\mathfrak{B}(I) = I \cap \mathfrak{B}(R). \quad (13)$$

В частности, алгебра $\mathfrak{B}(R)$ является $\mathfrak{B}$ -радикальной алгеброй.

Если A — подалгебра алгебры R , то $\mathfrak{B}(A) \cong A \cap \mathfrak{B}(R)$.

Все эти утверждения с очевидностью вытекают из лемм 3, 4 и 6.

Следствие 2. Гомоморфный образ и подалгебра $\mathfrak{B}$ -радикальной алгебры сами $\mathfrak{B}$ -радикальны. Любой идеал $\mathfrak{B}$ -полупростой алгебры сам будет $\mathfrak{B}$ -полупростой алгеброй.

А это вытекает из предложения 2. Например, если A — подалгебра $\mathfrak{B}$ -радикальной алгебры R , то $\mathfrak{B}(A) \cong A \cap \mathfrak{B}(R) = A \cap R = A$, т. е. $\mathfrak{B}(A) = A$, и алгебра A оказалась $\mathfrak{B}$ -радикальной алгеброй.

Определение 3. Идеал I алгебры R называется $\mathfrak{B}$ -радикальным идеалом алгебры R , если он является $\mathfrak{B}$ -радикальной алгеброй, т. е. $I = \mathfrak{B}(I)$. Идеал T называется $\mathfrak{B}$ -радикалом алгебры R , если T — наибольший $\mathfrak{B}$ -радикальный идеал.

Предложение 3. В любой алгебре R сумма любого множества $\mathfrak{B}$ -радикальных идеалов сама будет $\mathfrak{B}$ -радикальным идеалом. В частности, существует $\mathfrak{B}$ -радикал алгебры R и он совпадает с идеалом $\mathfrak{B}(R)$. Идеал $\mathfrak{B}(R)$ является наименьшим среди всех таких идеалов P алгебры R , что фактор-алгебра R/P $\mathfrak{B}$ -полупроста, т. е. не имеет нену-

левых нильпотентных идеалов. Подпрямое произведение $\mathfrak{B}$ -полупростых алгебр само $\mathfrak{B}$ -полупросто.

Действительно, с помощью равенства (13) из предложения 2 получаем для любого идеала I алгебры R

$$\mathfrak{B}(I) = I \Leftrightarrow I \subseteq \mathfrak{B}(R).$$

Но это означает, что $\mathfrak{B}(R)$ — наибольший $\mathfrak{B}$ -радикальный идеал алгебры R , т. е. $\mathfrak{B}$ -радикал алгебры R , причем $\mathfrak{B}$ -радикальные идеалы алгебры R — это в точности идеалы, содержащиеся в идеале $\mathfrak{B}(R)$. Учитывая это, возьмем любое множество $\{B_i | i \in \Gamma\}$ $\mathfrak{B}$ -радикальных идеалов алгебры R . Тогда в силу сказанного и доказанного $B_i \subseteq \mathfrak{B}(R)$ для всех $i \in \Gamma$. Но тогда, очевидно, и $\sum_{i \in \Gamma} B_i \subseteq \mathfrak{B}(R)$.

Поэтому сумма любого множества $\mathfrak{B}$ -радикальных идеалов алгебры R сама будет $\mathfrak{B}$ -радикальным идеалом в R .

Пусть P — любой такой идеал алгебры R , что фактор-алгебра R/P $\mathfrak{B}$ -полупроста, т. е. не имеет ненулевых нильпотентных идеалов. В силу предложения 2 $\varphi(\mathfrak{B}(R)) \subseteq \mathfrak{B}(\varphi(R)) = 0$ для естественного гомоморфизма $\varphi: R \rightarrow R/P$ алгебры R на алгебру R/P . А это влечет включение $\mathfrak{B}(R) \subseteq P$. С другой стороны, $\mathfrak{B}(R/\mathfrak{B}(R)) = 0$ в силу того же предложения 2. Поэтому идеал $\mathfrak{B}(R)$ является наименьшим среди указанных идеалов P алгебры R .

В частности, если R — подпрямое произведение $\mathfrak{B}$ -полупростых алгебр, то найдутся такие идеалы P_i в R , что $\mathfrak{B}(R/P_i) = 0$ для каждого i и $\bigcap_i P_i = 0$. Но тогда $\mathfrak{B}(R) = 0$, т. е. алгебра R сама $\mathfrak{B}$ -полупроста, так как $\mathfrak{B}(R) \subseteq P_i$ для каждого i по доказанному.

Предложение доказано.

Следствие 3. Пусть A — идеал алгебры R . Если алгебры A и R/A $\mathfrak{B}$ -радикальны, то $\mathfrak{B}$ -радикальна сама алгебра R . Если алгебры A и R/A $\mathfrak{B}$ -полупросты, то $\mathfrak{B}$ -полупроста и алгебра R . Если алгебра A $\mathfrak{B}$ -радикальна, а фактор-алгебра R/A $\mathfrak{B}$ -полупроста, то $A = \mathfrak{B}(R)$.

Действительно, пусть алгебры A и R/A $\mathfrak{B}$ -радикальны. Тогда $A \subseteq \mathfrak{B}(R)$, и потому $\mathfrak{B}(R)/A$ — идеал алгебры R/A , причем фактор-алгебра $(R/A)/(\mathfrak{B}(R)/A) \simeq R/\mathfrak{B}(R)$ $\mathfrak{B}$ -полупроста. Но тогда $\mathfrak{B}(R)/A \subseteq \mathfrak{B}(R/A) = R/A$ в силу предложения 3. Следовательно, $\mathfrak{B}(R)/A = R/A$, т. е. $\mathfrak{B}(R) = R$ и алгебра R $\mathfrak{B}$ -радикальна. Остальные утверждения рассматриваются аналогично.

Нижний нильрадикал можно построить и другим способом — с помощью первичных алгебр.

Определение 4. Алгебра Q называется *первичной*, если произведение любых двух ее ненулевых идеалов само является ненулевым идеалом. Алгебра R называется *полупервичной*, если R — подпрямое произведение первичных алгебр*). Идеал I алгебры A называется *первичным*, если A/I — первичная алгебра. Идеал T алгебры A называется *полупервичным*, если A/T — полупервичная алгебра.

Лемма 7. Для любого идеала I алгебры A равносильны условия:

1°. I — первичный идеал алгебры A .

2°. Для любых двух идеалов B, C алгебры A включение $BC \subseteq I$ влечет хотя бы одно из включений $B \subseteq I, C \subseteq I$.

3°. Для любых двух элементов x, y алгебры A включение $xAy \subseteq I$ влечет хотя бы одно из включений $x \in I, y \in I$.

Действительно, пусть I — первичный идеал алгебры A , т. е. фактор-алгебра A/I первична. Если B, C — идеалы алгебры A и $BC \subseteq I$, то, переходя к образам при гомоморфизме $A \rightarrow A/I = \bar{A}$, получаем: образы $\bar{B}, \bar{C}$ идеалов B и C являются идеалами алгебры $\bar{A}$ и $\bar{B}\bar{C} = 0$. В силу первичности алгебры $\bar{A}$ имеем $\bar{B} = 0$ или $\bar{C} = 0$. А это влечет $B \subseteq I$ или $C \subseteq I$. Следовательно, $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$.

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Пусть выполнено условие 2° . Пусть $x, y \in A$ и $xAy \subseteq I$. Тогда, переходя к главным идеалам $(x), (y)$, легко получаем $(x)A(y) \subseteq I$. Но тогда в силу 2° $(x) \subseteq I, A \subseteq I$ или $(y) \subseteq I$. Поэтому $x \in I$ или $y \in I$, т. е. верно 3° .

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Пусть выполнено условие 3, т. е. в алгебре $\bar{A}$ для любых двух элементов $\bar{x}, \bar{y}$ верно соотношение

$$\bar{x}\bar{A}\bar{y} = 0 \Rightarrow (\bar{x} = 0 \text{ или } \bar{y} = 0).$$

Пусть $\bar{B}$ и $\bar{C}$ — идеалы алгебры $\bar{A} = A/I$ и $\bar{B}\bar{C} = 0$. Тогда и $\bar{B}\bar{A}\bar{C} = 0$, так как, например, $\bar{B}\bar{A} \subseteq \bar{B}$. Поэтому $\bar{b}\bar{A}\bar{c} = 0$ для всех $\bar{b} \in \bar{B}, \bar{c} \in \bar{C}$. Допуская, что $\bar{B} \neq 0$, и выбирая элемент $\bar{b} \in \bar{B}, \bar{b} \neq 0$, получаем в силу 3° , что $\bar{c} = 0$ для всех $\bar{c} \in \bar{C}$, т. е. $\bar{C} = 0$. Следовательно, фактор-алгебра $\bar{A} = A/I$ первична. А это и означает, что I — первичный идеал алгебры A .

*) Это равносильно тому, что R — алгебра без ненулевых нильпотентных идеалов.

Лемма 8. Для любого идеала T алгебры A равносильны условия:

- 1°. T — полупервичный идеал алгебры A .
- 2°. Идеал T является пересечением некоторого множества первичных идеалов.
- 3°. Для любого идеала B алгебры A включение $B^2 \subseteq T$ влечет $B \subseteq T$.
- 4°. Для любого элемента x алгебры A включение $xAx \subseteq T$ влечет $x \in T$.
- 5°. Фактор-алгебра A/T не имеет ненулевых нильпотентных идеалов.

Пусть T — полупервичный идеал алгебры A . Это означает по определению, что фактор-алгебра $\bar{A} = A/T$ является подпрямым произведением некоторого множества $\{\bar{A}_i | i \in \Gamma\}$ первичных алгебр. Рассматривая ядра соответствующих гомоморфизмов $\bar{A} \rightarrow \bar{A}_i$, получаем: существует такое множество $\{\bar{P}_i | i \in \Gamma\}$ первичных идеалов алгебры $\bar{A}$, что $\bigcap_{i \in \Gamma} \bar{P}_i = 0$. Обозначим для каждого $i \in \Gamma$ символом P_i полный прообраз идеала $\bar{P}_i$ при естественном гомоморфизме $A \rightarrow \bar{A} = A/T$. Тогда P_i — первичные идеалы алгебры A , содержащие идеал T , так как $A/P_i \simeq \bar{A}/\bar{P}_i$, причем $\bigcap_{i \in \Gamma} P_i = T$, так как $\bigcap_{i \in \Gamma} \bar{P}_i = 0$. Следовательно, полупервичный идеал T является пересечением некоторого множества $\{P_i | i \in \Gamma\}$ первичных идеалов алгебры A , и мы доказали импликацию $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$.

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Пусть $T = \bigcap_{i \in \Gamma} P_i$ — пересечение первичных идеалов P_i алгебры A . Тогда в силу леммы 7 для любого идеала B алгебры A получаем

$$B^2 \subseteq T \Rightarrow \forall i \in \Gamma | B^2 \subseteq P_i \Rightarrow \forall i \in \Gamma | B \subseteq P_i \Rightarrow B \subseteq T.$$

$3^\circ \Rightarrow 4^\circ$. Пусть выполнено условие 3° . Тогда для любого элемента $x \in A$ получаем, переходя к главному идеалу (x) ,

$$xAx \subseteq T \Rightarrow (x)A(x) \subseteq T \Rightarrow (x)^4 \subseteq T \Rightarrow (x) \subseteq T \Rightarrow x \in T.$$

$4^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Пусть выполнено условие 4° . Если $T = A$, то доказывать нечего, так как A — первичный (несобственный) идеал в A . Поэтому будем считать, что $T \neq A$. Возьмем любой элемент $a \notin T$. В силу 4° $aAa \not\subseteq T$, и потому найдется такой элемент $x_1 \in A$, что $a_1 = ax_1a \notin T$. Обозна-

чая $a_0 = a$ и продолжая процесс построения последовательности

$$\sigma = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}, \quad (14)$$

допустим, что мы уже построили элемент $a_n \notin T$. Тогда в силу 4° найдется такой $x_{n+1} \in A$, что $a_{n+1} = a_n x_{n+1} a_n \notin T$. По индукции мы получили бесконечную последовательность σ (см. (14), n пробегает целые числа, $n \geq 1$) элементов, не принадлежащих идеалу T , заданную определяющим правилом

$$a_{n+1} = a_n x_{n+1} a_n \quad (15)$$

для некоторых элементов $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ алгебры A .

По построению множество таких идеалов I алгебры A , что $I \supseteq T$ и $I \cap \sigma = \emptyset$, непусто, так как одним из таких идеалов I будет идеал T . Ясно, что это множество идеалов индуктивно, так как объединение цепи идеалов, не пересекающих σ , само будет идеалом того же типа. В силу леммы Куратовского — Цорна среди указанных идеалов I существует максимальный элемент. Обозначим один из этих идеалов символом P_a и зафиксируем его. Таким образом, по построению $P_a \supseteq T$, $P_a \cap \sigma = \emptyset$ и любой идеал алгебры A , строго больший идеала P_a , уже пересекает последовательность σ .

Замечаем, что P_a — первичный идеал алгебры A .

Действительно, пусть B, C — идеалы алгебры A и $B \not\subseteq P_a$, $C \not\subseteq P_a$. Тогда по построению $B + P_a \supset P_a \subset C + P_a$, и потому $a_m \in B + P_a$, $a_n \in P_a + C$ для некоторых целых $m \geq 1$, $n \geq 1$. Учитывая, что в силу (15)

$$(a) \supseteq (a_1) \supseteq (a_2) \supseteq \dots \supseteq (a_k) \supseteq (a_{k+1}) \supseteq \dots,$$

получаем: если $k = \max\{m, n\}$, то $a_k \in (B + P_a) \cap (C + P_a)$. Но тогда снова в силу (15)

$$a_{k+1} = a_k x_{k+1} a_k \in (B + P_a)(C + P_a) \subseteq BC + P_a,$$

и потому $BC + P_a \supset P_a$. Следовательно, $BC \not\subseteq P_a$. А из доказанного вытекает, что P_a — первичный идеал алгебры A в силу леммы 7.

Для построенных первичных идеалов P_a , перебирая все элементы $a \notin T$, получаем $T = \bigcap \{P_a \mid a \notin T\}$. Поэтому T — пересечение некоторого множества первичных идеалов, т. е. верно 2°.

Замечаем, что 3° равносильно утверждению: в алгебре $\bar{A} = A/T$ нет таких идеалов $\bar{B} \neq 0$, что $\bar{B}^2 = 0$. Но это утверждение, как легко видеть, равносильно отсутствию в алгебре $\bar{A} = A/T$ ненулевых нильпотентных идеалов. Поэтому $3^\circ \Rightarrow 5^\circ$.

Импликация $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ очевидна. Лемма доказана.

А из лемм 7, 8 и предложения 3 вытекает

Предложение 4. *В любой алгебре R пересечение любого множества полупервичных идеалов само является полупервичным идеалом, причем полупервичные идеалы — это в точности пересечения первичных идеалов. В частности, нижний нильрадикал $\mathfrak{B}(R)$ алгебры R является наименьшим полупервичным идеалом алгебры R , и потому*

$$\mathfrak{B}(R) = \bigcap \{P \mid P \text{ — первичный идеал алгебры } R\}.$$

Поэтому $\mathfrak{B}$ -полупростые алгебры, алгебры без ненулевых нильпотентных идеалов, подпрямые произведения первичных алгебр и полупервичные алгебры — это одно и то же. $\mathfrak{B}$ -радикальные алгебры — это в точности алгебры, не отображающиеся гомоморфно на ненулевые первичные алгебры.

Действительно, в силу леммы 8 полупервичные идеалы алгебры R и такие идеалы P в R , что R/P — алгебра без ненулевых нильпотентных идеалов — это одно и то же. Но тогда все нужные нам утверждения вытекают из леммы 8, предложения 3 и определений.

Нижний нильрадикал можно строить и с помощью m -систем.

Определение 5. *Непустое подмножество σ алгебры R называется m -системой, если для любых $a, b \in \sigma$ найдется элемент $x \in R$, зависящий от a и b , такой, что $axb \in \sigma$.*

Применение m -систем основано на следующем утверждении, легко вытекающем из леммы 7 и определений:

Лемма 9. *Идеал I алгебры R , $I \neq R$, будет первичным тогда и только тогда, когда дополнение $R \setminus I$ является m -системой. В частности, алгебра R первична тогда и только тогда, когда множество $R \setminus \{0\}$ всех ненулевых элементов является m -системой (или пусто).*

Применим m -системы для нахождения минимальных первичных идеалов.

Определение 6. Пусть I — идеал алгебры R . Первичный идеал P алгебры R называется *минимальным над I первичным идеалом*, если $P \supseteq I$ и не существует такого

первичного идеала P' , что $P \supset P' \supseteq I$. Минимальные первичные идеалы — это минимальные над нулевым идеалом первичные идеалы.

Лемма 10. Пусть I — идеал алгебры R , σ — m -система в R и $I \cap \sigma = \emptyset$. Тогда:

а) Множество всех таких идеалов J алгебры R , что $J \supseteq I$, $J \cap \sigma = \emptyset$, индуктивно. Максимальные элементы этого множества являются первичными идеалами алгебры R , содержащими идеал I .

б) Множество всех таких m -систем σ' , что $\sigma' \supseteq \sigma$ и $\sigma' \cap I = \emptyset$, индуктивно. Максимальные элементы этого множества являются дополнениями к минимальным над I первичным идеалам.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{P}$ — множество всех таких идеалов J алгебры R , что $J \supseteq I$ и $J \cap \sigma = \emptyset$. Это множество непусто, так как $I \in \mathfrak{P}$, и индуктивно, так как объединение цепи идеалов, являющихся элементами из $\mathfrak{P}$, само является элементом из $\mathfrak{P}$. Поэтому к $\mathfrak{P}$ можно применить лемму Куратовского — Цорна. Пусть P — максимальный элемент из $\mathfrak{P}$. Тогда для любых двух идеалов B, C алгебры R получаем

$$(B \not\subseteq P, C \not\subseteq P) \Rightarrow (B + P) \cap \sigma \neq \emptyset \neq (C + P) \cap \sigma.$$

Но тогда, взяв элементы $b \in (B + P) \cap \sigma$, $c \in (C + P) \cap \sigma$, получаем

$$bxc \in (B + P)(C + P) \cap \sigma$$

для некоторого $x \in R$, так как σ — m -система. Но тогда $BC \not\subseteq P$, и мы доказали первичность идеала P . Кроме того, по построению $P \supseteq I$. Следовательно, верно а).

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех таких m -систем σ' , что $\sigma' \supseteq \sigma$ и $\sigma' \cap I = \emptyset$. Ясно, что это множество непусто и индуктивно. Снова можно применять лемму Куратовского — Цорна. Пусть σ^* — максимальный элемент из $\mathfrak{M}$. По построению

$$\sigma^* \supseteq \sigma, \quad \sigma^* \cap I = \emptyset,$$

а любая m -система, строго большая σ^* , уже пересекает идеал I . Учитывая а) и доказанное выше, строим по σ^* первичный идеал P алгебры R , такой, что

$$P \cap \sigma^* = \emptyset, \quad P \supseteq I.$$

Замечая, что $R \setminus P$ — m -система, $R \setminus P \supseteq \sigma^*$ и $(R \setminus P) \cap$

$\cap I = \emptyset$, получаем в силу максимальности σ^* равенство $\sigma^* = R \setminus P$. Если P' — первичный идеал, $P \supseteq P' \supseteq I$, то $R \setminus P \subseteq R \setminus P'$, $R \setminus P'$ — m -система, не пересекающая идеал I . Но тогда снова в силу максимальности $\sigma^* = R \setminus P$ получаем равенство $R \setminus P = R \setminus P'$, т. е. $P = P'$. Следовательно, P — минимальный над I первичный идеал.

Следствие 4. *Любой первичный идеал содержит некоторый минимальный первичный идеал. Поэтому в любой алгебре R ее нильрадикал $\mathfrak{B}(R)$ совпадает с пересечением всех минимальных первичных идеалов.*

Действительно, в силу предложения 4 достаточно доказать первое утверждение. Но если в алгебре R нет собственных первичных идеалов (т. е. алгебра R $\mathfrak{B}$ -радикальна), то доказывать нечего. Если же в R есть собственные первичные идеалы, то пусть P — любой из них. Тогда $\sigma = R \setminus P$ — m -система в силу леммы 9 и $\sigma \cap 0 = \emptyset$. Применяя лемму 10, получаем существование такого минимального первичного идеала P' , что $P' \cap \sigma = \emptyset$. Но тогда $P' \subseteq R \setminus \sigma = P$, т. е. первичный идеал P содержит некоторый минимальный первичный идеал P' .

Следствие 5. *Нижний нильрадикал $\mathfrak{B}(R)$ алгебры R состоит из тех и только тех элементов $r \in R$, что любая m -система σ , содержащая r , содержит и нулевой элемент 0.*

Действительно, пусть $r \notin \mathfrak{B}(R)$. Тогда в силу предложения 4 $r \notin P$ для некоторого первичного идеала P алгебры R . Но тогда $\sigma = R \setminus P$ — m -система, не содержащая 0 в силу леммы 9, но содержащая элемент r . Обратно, пусть r — такой элемент, что $r \in \sigma$ для некоторой m -системы σ , не содержащей 0. С помощью леммы 10 строим первичный идеал P , не пересекающий σ . Для этого первичного идеала P получаем $r \notin P$, и потому $r \notin \mathfrak{B}(R)$ по предложению 4.

§ 2. Верхний нильрадикал и локально нильпотентный радикал

Алгебра A называется *нильалгеброй*, если все ее элементы *нильпотентны*, т. е. для любого $a \in A$ существует такое целое $n \geq 1$, зависящее от a , что $a^n = 0$. Так, например, все нильпотентные алгебры являются нильалгебрами. Другим примером нильалгебр являются локально нильпотентные алгебры. Алгебра L называется *локально*

нильпотентной, если любое ее конечное множество элементов порождает в L нильпотентную подалгебру. Идеал I алгебры R называется *нильидеалом* (локально нильпотентным идеалом), если I — нильалгебра (локально нильпотентная алгебра). Аналогично определяется понятие левого (правого) нильидеала, нильподалгебры, локально нильпотентного левого (правого) идеала и локально нильпотентной подалгебры.

Лемма 1. *Гомоморфный образ и подалгебра локально нильпотентной алгебры сами будут локально нильпотентными алгебрами. Если идеал I и фактор-алгебра A/I алгебры A локально нильпотентны, то и сама алгебра A локально нильпотентна. В любой алгебре R сумма любого конечного множества локально нильпотентных идеалов сама локально нильпотентна.*

Действительно, первое утверждение с очевидностью вытекает из определения локально нильпотентной алгебры.

Пусть идеал I и фактор-алгебра A/I алгебры A локально нильпотентны. Возьмем любое конечное множество $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ элементов алгебры A . Переходя к образам при гомоморфизме $A \rightarrow \bar{A} = A/I$, получаем, что множество $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ порождает нильпотентную подалгебру в алгебре $\bar{A}$. Поэтому существует такое целое число $N \geq 1$, что $\bar{a}_{i_1} \bar{a}_{i_2} \dots \bar{a}_{i_N} = 0$ для любых $i_j = 1, 2, \dots, n$. Возвращаясь к прообразам, получаем, что $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_N} \in I$ для тех же i_j . Но множество $\{a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_N} \mid 1 \leq i_j \leq n, 1 \leq j \leq N\}$ конечно, и потому порождает нильпотентную подалгебру в алгебре I . Поэтому существует такое целое число $M \geq 1$, что $b_{s_1} b_{s_2} \dots b_{s_M} = 0$ для любых элементов b_{s_k} вида $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_N}$. Но тогда произведение любых MN элементов a_i равно нулю, и потому множество $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ порождает нильпотентную подалгебру в алгебре A . Следовательно, алгебра A локально нильпотентна. Поэтому верно второе утверждение.

Последнее утверждение леммы доказывается дословно так же, как и последнее утверждение леммы 1.1.

Определение 1. *Локально нильпотентным радикалом* (или радикалом Левицкого) алгебры R называется ее наибольший локально нильпотентный идеал $\mathcal{L}(R)$.

Предложение 1. *В любой алгебре R сумма любого множества локально нильпотентных идеалов сама будет*

локально нильпотентным идеалом. Поэтому в любой алгебре R существует локально нильпотентный радикал $\mathcal{L}(R)$, и он совпадает с суммой всех локально нильпотентных идеалов алгебры R . Если I — идеал алгебры R , то $\mathcal{L}(I) = I \cap \mathcal{L}(R)$. Для любой алгебры R фактор-алгебра $R/\mathcal{L}(R)$ не имеет ненулевых локально нильпотентных идеалов, и потому $\mathcal{L}(R/\mathcal{L}(R)) = 0$.

Действительно, пусть в алгебре R идеал I является суммой $\sum_{i \in \Gamma} L_i$ некоторого множества локально нильпотентных идеалов L_i алгебры R . Возьмем любое конечное множество $\mathcal{F}$ в L . Тогда из определения суммы идеалов вытекает, что $\mathcal{F} \subseteq \sum_{i \in \Delta} L_i$ для некоторого конечного множества идеалов L_i . Но в силу леммы 1 сумма любого конечного множества локально нильпотентных идеалов сама будет локально нильпотентным идеалом. Поэтому $\mathcal{F}$ порождает нильпотентную подалгебру в алгебре R . А из этого вытекает в силу произвольности $\mathcal{F}$, что сумма $L = \sum_{i \in \Gamma} L_i$ любого множества локально нильпотентных идеалов алгебры R сама будет локально нильпотентным идеалом алгебры R . В частности, сумма всех локально нильпотентных идеалов будет наибольшим локально нильпотентным идеалом, т. е. локально нильпотентным радикалом $\mathcal{L}(R)$ алгебры R .

Фактор-алгебра $R/\mathcal{L}(R)$ не имеет ненулевых локально нильпотентных идеалов, так как расширение локально нильпотентной алгебры с помощью локально нильпотентной алгебры само локально нильпотентно в силу леммы 1. Поэтому для любой алгебры R верно равенство $\mathcal{L}(R/\mathcal{L}(R)) = 0$.

Пусть I — идеал алгебры R . В силу леммы 1 $I \cap \mathcal{L}(R)$ — локально нильпотентный идеал алгебры I , и потому $I \cap \mathcal{L}(R) \subseteq \mathcal{L}(I)$. С другой стороны, пусть D — идеал алгебры R , порожденный множеством $\mathcal{L}(I)$. Тогда в силу леммы 1.5 $D^3 \subseteq \mathcal{L}(I)$, и потому алгебра D является расширением локально нильпотентной алгебры $\mathcal{L}(I)$ с помощью нильпотентной, а значит, и локально нильпотентной алгебры $D/\mathcal{L}(I)$. Поэтому в силу леммы 1 D — локально нильпотентный идеал алгебры R . Но тогда $\mathcal{L}(I) \subseteq D \subseteq \mathcal{L}(R)$, и потому $\mathcal{L}(I) \subseteq I \cap \mathcal{L}(R)$.

Предложение доказано.

Определение 2. Алгебра R называется $\mathcal{L}$ -радикальной, если $R = \mathcal{L}(R)$. Алгебра Q называется $\mathcal{L}$ -полупростой, если $\mathcal{L}(Q) = 0$.

Следствие 1. Алгебра R $\mathcal{L}$ -радикальна тогда и только тогда, когда она локально нильпотентна. Алгебра Q $\mathcal{L}$ -полупроста тогда и только тогда, когда она не имеет ненулевых локально нильпотентных идеалов. Любой идеал $\mathcal{L}$ -радикальной или $\mathcal{L}$ -полупростой алгебры сам будет соответственно $\mathcal{L}$ -радикальной или $\mathcal{L}$ -полупростой алгеброй.

Все эти утверждения легко вытекают из предложения 1. Например, если алгебра Q $\mathcal{L}$ -полупроста и I — идеал алгебры Q , то $\mathcal{L}(I) = I \cap \mathcal{L}(Q) = I \cap 0 = 0$, т. е. $\mathcal{L}$ -полупроста и алгебра I .

Лемма 2. Любой левый (правый) локально нильпотентный идеал A алгебры R порождает локально нильпотентный идеал $A + AR$ (соответственно, $A + RA$).

Действительно, пусть, например, A — левый локально нильпотентный идеал алгебры R и $A + AR$ — идеал алгебры R , порожденный множеством A . Пусть $\mathcal{F} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — произвольное конечное множество элементов идеала $A + AR$. Тогда найдется такое конечное множество $\{u_i, u_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, j \in \Delta\}$ элементов из A , что для каждого элемента x_i верно равенство

$$x_i = u_i + \sum_j u_{ij} a_{ij}$$

для некоторых элементов $a_{ij} \in R$. Обозначим $u_{ijk} = a_{ij} u_k$, $u_{ijks} = a_{ij} u_{ks}$. Ясно, что $\mathcal{E} = \{u_i, u_{ij}, u_{ijk}, u_{ijks}\}$ — конечное подмножество в A , и потому $\mathcal{E}$ порождает в A (локально) нильпотентную подалгебру. Следовательно, существует такое целое число $N \geq 1$, что произведение любых N элементов из $\mathcal{E}$ равно нулю. Но тогда и любое произведение любых N элементов из $\mathcal{F}$ равно нулю, так как оно будет суммой членов, каждый из которых содержит произведение некоторых N элементов из $\mathcal{E}$. Поэтому $\mathcal{F}$ порождает (локально) нильпотентную подалгебру, т. е. A порождает локально нильпотентный идеал $A + AR$.

Следствие 2. В любой алгебре R локально нильпотентный радикал $\mathcal{L}(R)$ содержит все односторонние локально нильпотентные идеалы. В частности, в любой $\mathcal{L}$ -полупростой алгебре нет ненулевых левых или правых локально нильпотентных идеалов.

Это вытекает из следствия 1 и леммы 2.

Определение 3. *Верхним нильрадикалом (или радикалом Кёте) алгебры R называется наибольший нильрадикал $\mathcal{K}(R)$ алгебры R .*

Так же, как и для локально нильпотентных алгебр, получаем, что верна

Лемма 3. *Гомоморфный образ и подалгебра нильалгебры сами будут нильалгебрами. Если идеал I и фактор-алгебра A/I являются нильалгебрами, то и A — нильалгебра. В любой алгебре R сумма любого конечного множества нильидеалов сама является нильидеалом.*

Предложение 2. *В любой алгебре R сумма любого множества нильидеалов сама будет нильидеалом. Поэтому в любой алгебре R существует верхний нильрадикал $\mathcal{K}(R)$, и он совпадает с суммой всех нильидеалов алгебры R . Если I — идеал алгебры R , то $\mathcal{K}(I) = I \cap \mathcal{K}(R)$. Для любой алгебры R фактор-алгебра $R/\mathcal{K}(R)$ не имеет ненулевых нильидеалов, и потому $\mathcal{K}(R/\mathcal{K}(R)) = 0$.*

Определение 4. *Алгебра R называется $\mathcal{K}$ -радикальной, если $R = \mathcal{K}(R)$. Алгебра Q называется $\mathcal{K}$ -полупростой, если $\mathcal{K}(Q) = 0$.*

Следствие 3. *Алгебра R $\mathcal{K}$ -радикальна тогда и только тогда, когда она является нильалгеброй. Алгебра Q $\mathcal{K}$ -полупроста тогда и только тогда, когда она не имеет ненулевых нильидеалов. Любой идеал $\mathcal{K}$ -радикальной или $\mathcal{K}$ -полупростой алгебры сам будет соответственно $\mathcal{K}$ -радикальной или $\mathcal{K}$ -полупростой алгеброй.*

Покажем теперь, что локально нильпотентный радикал и верхний нильрадикал связаны с первичными алгебрами некоторого специального вида.

Предложение 3. *В любой алгебре R верны равенства*

$$\mathcal{L}(R) = \bigcap \{P \mid P \text{ — первичный идеал алгебры } R, \text{ фактор-алгебра } R/P \text{ не имеет ненулевых локально нильпотентных идеалов}\}, \quad (1)$$

$$\mathcal{K}(R) = \bigcap \{P \mid P \text{ — первичный идеал алгебры } R, \text{ фактор-алгебра } R/P \text{ не имеет ненулевых нильидеалов}\} \quad (2)$$

В частности, алгебра R $\mathcal{L}$ -полупроста тогда и только тогда, когда она разлагается в подпрямое произведение первичных алгебр без ненулевых локально нильпотентных идеалов, алгебра R $\mathcal{K}$ -полупроста тогда и только тогда,

когда она разлагается в подпрямое произведение первичных алгебр без ненулевых нильидеалов, алгебра R $\mathcal{L}$ -радикальна тогда и только тогда, когда все ее ненулевые первичные гомоморфные образы содержат ненулевой локально нильпотентный идеал, алгебра R $\mathcal{K}$ -радикальна тогда и только тогда, когда все ее ненулевые первичные гомоморфные образы содержат ненулевой нильидеал.

Доказательство. Достаточно доказать указанные равенства, так как все остальные утверждения вытекают из этих равенств, определений, предложений 1, 2 и следствий 1, 3.

Пусть P — первичный идеал алгебры R и факторалгебра R/P не имеет ненулевых нильидеалов. Тогда в силу следствия 3 $\mathcal{K}(R/P) = 0$. Но в силу леммы 1 образом нильидеала является нильидеал. Поэтому при естественном гомоморфизме $R \rightarrow R/P$ образом нильидеала $\mathcal{K}(R)$ будет нулевой идеал. А это означает, что $\mathcal{K}(R) \subseteq P$. В силу произвольности выбора P получаем включение

$$\mathcal{K}(R) \subseteq \bigcap \{P \mid P \text{ — первичный идеал в } R, \mathcal{K}(R/P) = 0\}.$$

Аналогично доказывается включение,

$$\mathcal{L}(R) \subseteq \bigcap \{P \mid P \text{ — первичный идеал в } R, \mathcal{L}(R/P) = 0\}.$$

Возьмем любой элемент a алгебры R такой, что $a \notin \mathcal{K}(R)$. Тогда по построению верхнего нильрадикала главный идеал (a) алгебры R , порожденный элементом a , не является нильидеалом, и потому содержит ненильпотентный элемент b . Ясно, что тогда множество

$$\sigma = \{b^n \mid n \text{ — целое, } n \geq 1\}$$

будет m -системой (и даже мультипликативно замкнутой системой), не содержащей нуля. С помощью леммы 1.10 строим первичный идеал P — максимальный среди таких идеалов J алгебры R , что $J \cap \sigma = \emptyset$. Рассмотрим первичную алгебру R/P , соответствующую этому идеалу.

Пусть $\bar{A}$ — ненулевой идеал алгебры $\bar{R} = R/P$. Переходя к прообразам при естественном гомоморфизме $R \rightarrow R/P$, находим такой идеал A алгебры R , что $A \supseteq P$ и $\bar{A} = A/P$.

Из $\bar{A} \neq 0$ вытекает $A \supset P$. Но тогда в силу максимальной P $b^n \in A$ для некоторого целого $n \geq 1$. С другой стороны, для всех целых $m \geq 1$ $(b^n)^m = b^{nm} \notin P$.

Поэтому образ элемента b^n не нильпотентен в алгебре $\bar{A} = A/P$. А это влечет, что $\bar{A}$ — не нильидеал.

Таким образом, первичная алгебра R/P не имеет ненулевых нильидеалов, причем по построению $a \notin P$, так как $b \notin P$ и $b \in (a)$. В силу произвольности выбора элемента $a \notin \mathcal{H}(R)$ получаем равенство (2).

Возьмем любой элемент c алгебры R такой, что $c \notin \mathcal{L}(R)$. Тогда по построению локально нильпотентного радикала главный идеал (c) алгебры R , порожденный элементом c , не является локально нильпотентным. Поэтому существует такая конечнопорожденная подалгебра T в (c) , что $T^n \neq 0$ для всех целых чисел $n \geq 1$. Рассмотрим множество Γ всех таких идеалов I алгебры R , что $T^m \not\subseteq I$ для всех целых $m \geq 1$. Ясно, что это множество не пусто, так как Γ содержит, например, нулевой идеал 0 . Докажем, что оно индуктивно.

Возьмем любую цепь $\{I_j | j \in \Delta\}$ идеалов алгебры R и рассмотрим $I = \bigcup_{j \in \Delta} I_j$. Ясно, что I — идеал алгебры R .

Допустим, что все степени T^m подалгебры T конечнопорождены. Пусть $I \notin \Gamma$. Тогда по построению $T^k \subseteq I$ для некоторого целого числа $k \geq 1$. Но тогда из конечнопорожденности алгебры T^k и включения $T^k \subseteq \bigcup_{j \in \Delta} I_j$ вытекает включение $T^k \subseteq I_j$ для некоторого $j \in \Delta$, так как идеалы I_j образуют цепь. А это означает, что $I_j \notin \Gamma$ для того же $j \in \Delta$.

Таким образом, для доказательства индуктивности множества Γ остается показать, что все степени T^p конечнопорожденной алгебры T сами конечнопорождены. Но если алгебра T порождается конечным множеством $\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$, то все элементы из T являются линейными комбинациями произведений элементов t_i , и потому элементы степени T^p — это в точности линейные комбинации произведений $t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_s}$ с $s \geq p$. Но каждое такое произведение можно представить в виде произведения конечного числа элементов вида

$$t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_q}, \quad p \leq q \leq 2p. \quad (*)$$

Так как элементов вида $(*)$ конечное число — не более $k^p + k^{p+1} + \dots + k^{2p}$, — то алгебра T^p конечнопорождена.

Итак, множество Γ индуктивно и не пусто. Применяя лемму Куратовского — Цорна, строим максимальный эле-

мент P в Γ . Легко проверяется, что P — первичный идеал алгебры R , так как, если B, C — идеалы алгебры R и $B \supset P, C \supset P$, то $T^{m_1} \subseteq B, T^{m_2} \subseteq C, T^{m_1+m_2} \subseteq BC$ для некоторых целых $m_1 \geq 1, m_2 \geq 1$ и потому $BC \not\subseteq P$. Кроме того, любой ненулевой идеал $\bar{A}$ алгебры $\bar{R} = R/P$ не будет локально нильпотентным, так как, если A — идеал в R и $A \supset P$, то $T^m \subseteq A$ для некоторого целого $m \geq 1$, а все алгебры T^m конечнопорождены и $(T^m)^n = T^{mn} \not\subseteq P$ для всех целых $n \geq 1$.

Из доказанного вытекает, что алгебра R/P будет первичной алгеброй без ненулевых локально нильпотентных идеалов, причем по построению $c \notin P$, так как $T \not\subseteq P$ и $T \subseteq (c)$. В силу произвольности выбора $c \notin \mathcal{L}(R)$ получаем равенство (1).

Следствие 4. В любой алгебре R

$$\mathfrak{B}(\dot{R}) \subseteq \mathcal{L}(R) \subseteq \mathcal{K}(R).$$

Это вытекает из предложения 1.4 и предложений 1 — 3, так как, очевидно, любая локально нильпотентная алгебра является нильалгеброй.

Покажем, что нильрадикалы $\mathfrak{B}, \mathcal{L}$ и $\mathcal{K}$ различны, т. е. все включения в следствии 4 могут быть строгими. Для этого нам необходима свободная алгебра. Напомним построение этой алгебры.

Выбираем и фиксируем вспомогательное бесконечное множество

$$X = \{x_i \mid i - \text{целое}, i \geq 1\}, \quad x_i = x_j \Leftrightarrow i = j. \quad (3)$$

Множество X будем называть *алфавитом*, а его элементы — *буквами*. Словами над алфавитом X называются всевозможные конечные строки (непустые)

$$x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} = \omega, \quad (4)$$

составленные из букв. Если слово ω имеет вид (4), то число $d(\omega) = k$ букв в этом слове называется *длиной* слова ω . При этом, учитывая (3), два слова считаются равными тогда и только тогда, когда они полностью совпадают (по записи). Множество всех слов над алфавитом X обозначим символом $\Pi(X)$ и превратим в полугруппу, взяв в качестве операции умножения операцию приписывания слов: если нам дано слово ω вида (4) и

СЛОВО

$$x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_m} = u, \quad (5)$$

то их произведением считается слово

$$uw = x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_m} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}. \quad (6)$$

Полугруппа $\pi(X)$ называется *свободной полугруппой с множеством X свободных образующих*. Свободной (ассоциативной!) алгеброй с множеством свободных образующих X называется полугрупповая алгебра

$$A(X) = \Phi(\pi(X)) \quad (7)$$

полугруппы $\pi(X)$ над основным кольцом Φ . Элементы алгебры $A(X)$ будем называть *полиномами* над X . Таким образом, полиномы над X — это формальные суммы вида

$$f = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i, \quad \alpha_i \in \Phi, \quad u_i \in \pi(X). \quad (8)$$

Если в представлении (8) все $\alpha_i \neq 0$, а слова u_i попарно различны, то (8) называется *каноническим разложением* полинома f . Любой ненулевой полином f имеет и притом точно одно (с точностью до перестановки слагаемых) каноническое разложение по определению полугрупповой алгебры и в силу (7), так как за конечное число шагов можно прийти от произвольного разложения (8) до канонического, приводя подобные члены (одночлены вида αu , βu с одним и тем же словом u) и вычеркивая нулевые члены (одночлены вида $0u$).

Полином f называется *однородным* степени d , если его можно представить в виде линейной комбинации (8) слов u_i с одной и той же длиной d ($u_i = d$). *Однородные полиномы* — это однородные полиномы некоторой степени. Ясно, что для любого натурального числа $n \geq 1$ все множества

$$A^{(n)} = \{f \in A(X) \mid f \text{ — однородный полином степени } n\}$$

являются Φ -подмодулями унитарного левого Φ -модуля $A(X)$ и его прямыми слагаемыми, т. е. $A(X)$ как модуль разлагается в прямую сумму

$$A(X) = A^{(1)} \dot{+} A^{(2)} \dot{+} \dots \dot{+} A^{(n)} \dot{+} \dots$$

Поэтому каждый полином $f \neq 0$ однозначно представляется в виде суммы

$$f = f^{(1)} \dot{+} \dots \dot{+} f^{(j)} \dot{+} \dots \dot{+} f^{(n)}, \quad f^{(n)} \neq 0, \quad (9)$$

где $f^{(j)} \in A^{(j)}$. Однородный полином $f^{(j)}$ из разложения (9) называется *j-й однородной компонентой* полинома f , а натуральное число n — *степенью полинома* f . Ясно, что $n = \deg f$ — это просто максимальная длина слов u_i , входящих в каноническое разложение (8) ненулевого полинома f . Чтобы это доказать, достаточно заметить, что j -я компонента $f^{(j)}$ получается суммированием всех одночленов $\alpha_i u_i$ из разложения (8) (канонического или нет, все равно!) полинома f таких, что $d(u_i) = j$.

Отметим еще следующее соотношение для длин слов: для любых слов u, w

$$d(uw) = d(u) + d(w). \quad (10)$$

Это с очевидностью вытекает из соотношений (3) — (6) и определения длины слова. Соотношением (10) и введенными раньше понятиями мы будем пользоваться без всяких оговорок, считая множество X зафиксированным.

При построении примеров очень часто используются *однородные идеалы* свободной алгебры $A(X)$ — идеалы, порожденные некоторым множеством однородных полиномов. Одна из причин этого — сравнительная легкость проверки принадлежности полинома заданному идеалу. А именно, верна

Лемма 4. Пусть I — однородный идеал алгебры $A(X)$. Полином f принадлежит идеалу I тогда и только тогда, когда все его однородные компоненты принадлежат этому идеалу.

Действительно, пусть I порождается множеством $\{g_j \mid j \in \Gamma\}$ однородных полиномов. Возьмем любой полином $f \in I$. Тогда по построению идеала, порожденного заданным множеством элементов,

$$f = \sum_k \alpha_k u_k g_{j_k} v_k, \quad (11)$$

где $\alpha_k \in \Phi$, u_k, v_k — слова или пустые символы, а g_{j_k} — однородные полиномы из порождающего множества. Но, очевидно, тогда все полиномы $\alpha_k u_k g_{j_k} v_k$ из (11) однородны. Поэтому, собирая среди этих полиномов однородные компоненты степени i , получаем однородную компоненту

$$f^{(i)} = \sum \{ \alpha_k u_k g_{j_k} v_k \mid d(u_k g_{j_k} v_k) = i \}. \quad (12)$$

А из (12) вытекает, что все однородные компоненты полинома $\hat{f}$ лежат в I .

Применим доказанную лемму для доказательства следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть I — идеал алгебры $A(X)$, порожденный множеством всех таких слов w вида (4), что

$$k = d(w) > p(w) = \max \{i_j \mid 1 \leq j \leq k\}. \quad (13)$$

Тогда фактор-алгебра $A(X)/I$ локально нильпотентна, но не $\mathfrak{B}$ -радикальна. Более того, если основное кольцо Φ не имеет делителей нуля, то $A(X)/I$ — ненулевая первичная локально нильпотентная алгебра.

Доказательство. Будем называть для краткости слова w вида (4), удовлетворяющие условию (13), легкими, а слова, не содержащие легких подслов, — тяжелыми словами. Кроме того, натуральное число $p(w)$ из (13), т. е. максимальный индекс букв, входящих в слово w , назовем весом слова w . Ясно, что

$$p(uv) = \max \{p(u), p(v)\} \quad (14)$$

для любых двух слов u, v .

Возьмем любую конечнопорожденную подалгебру алгебры $A = A(X)$ и докажем, что она нильпотентна по модулю идеала I . Для этого достаточно доказать, что для любого целого $n \geq 1$ все подалгебры $A_n = \langle x_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle$ обладают этим свойством, так как любая конечнопорожденная подалгебра алгебры A содержится в подалгебре A_n , если выбрать n достаточно большим. Но если u — слово и $u \in A_n$, то, очевидно, верно включение $p(u) \leq n$. Поэтому в силу (14) для любого $n+1$ -го слова u_i из A_n получаем $d(u_1 u_2 \dots u_i \dots u_{n+1}) \geq n+1 > p(u_1 u_2 \dots u_i \dots u_{n+1})$. А из этого вытекает включение $A_n^{n+1} \subseteq I$, и потому все подалгебры A_n нильпотентны по модулю идеала I .

Из доказанного вытекает, что фактор-алгебра A/I локально нильпотентна.

Учтем теперь, что основное кольцо Φ является ненулевым ассоциативно-коммутативным кольцом с единицей. Ясно, что в таком случае Φ , как алгебра, гомоморфно отображается на ненулевые алгебры без делителей нуля *).

*) Если M — максимальный идеал в Φ , то Φ/M — поле.

Выберем и зафиксируем какую-либо ненулевую фактор-алгебру $\bar{\Phi} = \Phi/K$ без делителей нуля.

По построению и в силу (13) получаем, что

$$I = \sum_k \left\{ \alpha_k u_k \mid \alpha_k \in \Phi, u_k - \text{не тяжелые слова} \right\}. \quad (15)$$

Но каждое слово является либо тяжелым, либо не тяжелым, причем все буквы являются тяжелыми словами. Учитывая это, обозначим

$$\mathcal{T} = \left\{ \sum_i \beta_i \omega_i \mid \beta_i \in \Phi, \omega_i - \text{тяжелые слова} \right\}. \quad (16)$$

Тогда из (15) и (16) вытекает, что алгебра A , рассматриваемая как унитарный левый Φ -модуль, разлагается в прямую сумму подмодулей

$$A = \mathcal{T} \dot{+} I. \quad (17)$$

Учитывая (17), получаем, что для каждого полинома f существуют такие однозначно определенные полиномы $f_{\mathcal{T}} \in \mathcal{T}$ и $f_I \in I$, что $f = f_{\mathcal{T}} + f_I$. Но тогда $\mathcal{T}$ превращается в алгебру, изоморфную фактор-алгебре A/I , если дополнить операции унитарного левого Φ -модуля $\mathcal{T}$ следующей операцией умножения:

$$\forall f, g \in \mathcal{T} \mid f \cdot g = (fg)_{\mathcal{T}}. \quad (18)$$

Изоморфизм между алгебрами $\mathcal{T}$ и A/I устанавливается естественным образом с помощью соответствия $f_{\mathcal{T}} \leftrightarrow f + I$. При этом мы учитываем (17) и (18).

Вспомним теперь о фактор-алгебре $\bar{\Phi} = \Phi/K$. Учитывая, что K — идеал алгебры Φ , получаем, что $K\mathcal{T}$ — идеал алгебры $\mathcal{T}$. Ясно, что фактор-алгебра $\bar{\mathcal{T}} = \mathcal{T}/K\mathcal{T}$ является алгеброй и над ассоциативно-коммутативным кольцом $\bar{\Phi}$ с единицей и без делителей нуля при естественном определении умножения элементов из $\bar{\mathcal{T}}$ на элементы $\bar{\Phi}$: если $\bar{\alpha}$ — образ элемента $\alpha \in \Phi$, то для любого $\bar{f} \in \bar{\mathcal{T}}$ полагаем $\bar{\alpha}\bar{f} = \alpha\bar{f}$.

Замечаем, что $K\mathcal{T} = KA \cap \mathcal{T}$ и потому $\bar{\mathcal{T}} = \mathcal{T}/K\mathcal{T} \simeq A/(I + KA)$. Но идеал $I + KA$ является однородным: он порождается всеми легкими словами и однородными поли-

номами xx , где x пробегает K , а x пробегает все буквы. Поэтому можно применить лемму 4.

Возьмем любые два элемента a, b , не принадлежащие идеалу $K\mathcal{T}$. Отбрасывая слагаемые, принадлежащие этому идеалу, мы можем считать, что канонические разложения элементов a, b имеют вид

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, & \alpha_i \notin K, \\ b &= \sum_{j=1}^m \beta_j v_j, & \beta_j \notin K. \end{aligned} \quad (19)$$

При этом, так как мы рассматриваем элементы $a, b \in \mathcal{T}$, все слова u_i, v_j из канонических разложений (19) тяжелые. Учитывая это, строим число

$$M = \max \{p(u_i), p(v_j) \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}. \quad (20)$$

Из (19), (20) легко вытекает, что буква x_{2M+1} не входит ни в одно из слов u_i, v_j . Но тогда, как легко видеть, в силу каноничности разложений (19) все слова $u_i x_{2M+1} v_j$ попарно различны, и потому разложение

$$ax_{2M+1}b = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j u_i x_{2M+1} v_j \quad (21)$$

является каноническим. При этом $\alpha_i \beta_j \notin K$ снова в силу (19), так как $\bar{\Phi} = \Phi/K$ — алгебра без делителей нуля.

Возьмем любое слово $ux_{2M+1}v$ из разложения (21). По построению слова u, v тяжелые, и потому, если w — подслово слова u или слова v , то оно не легкое. Если же w имеет вид $u'x_{2M+1}v'$, где u' — подслово в u или пустой символ, v' — подслово в v или пустой символ, то в силу (20) и (21)

$$\begin{aligned} d(u'x_{2M+1}v') &= d(u') + d(v') + 1 \leq d(u) + d(v) + 1 \leq \\ &\leq p(u) + p(v) + 1 \leq 2M + 1 = p(u'x_{2M+1}v'), \end{aligned}$$

и потому слово w снова не легкое. Поэтому слово $ux_{2M+1}v$ тяжелое.

Таким образом, все слова $u_i x_{2M+1} v_j$ из разложения (21) являются тяжелыми словами, и все коэффициенты $\alpha_i \beta_j$ канонического разложения (21) не принадлежат идеалу K

алгебры Φ . Поэтому в силу однородности идеала $I + K\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} a \cdot x_{2M+1} \cdot b &= \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j u_i \cdot x_{2M+1} \cdot v_j = \\ &= \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j u_i x_{2M+1} v_j \notin K\mathcal{T}. \end{aligned}$$

А это означает в силу произвольности выбора элементов a , b , что $K\mathcal{T}$ — первичный идеал алгебры $\mathcal{T}$, и потому $\mathcal{F} = \mathcal{T}/K\mathcal{T}$ — ненулевая первичная алгебра.

Из доказанного вытекает, что алгебра $A/I \simeq \mathcal{F}$ не $\mathfrak{B}$ -радикальна и является первичной алгеброй, если кольцо Φ не имеет делителей нуля (в последнем случае достаточно положить $K=0$). Теорема доказана.

Следствие 5. *Нильрадикалы $\mathfrak{B}$ и $\mathcal{L}$ различны, т. е. существует такая алгебра R , что $\mathfrak{B}(R) \subset \mathcal{L}(R)$.*

Действительно, если $R = A/I$ — алгебра, построенная в теореме 1, то в силу этой теоремы $\mathfrak{B}(R) \subset R = \mathcal{L}(R)$.

Для построения примеров полезно следующее очевидное

Замечание 1. Пусть $\bar{\Phi}$ — ненулевой гомоморфный образ кольца Φ (или алгебры Φ , что все равно). Тогда любая алгебра R над $\bar{\Phi}$ является алгеброй (т. е. алгеброй над Φ) относительно естественной композиции $\alpha r = \bar{\alpha} r$, где $\bar{\alpha}$ — образ элемента $\alpha \in \Phi$ при гомоморфизме $\Phi \rightarrow \bar{\Phi}$, $r \in R$. При этом $\bar{\Phi}$ -подалгебры и подалгебры — это одно и то же, идеалы $\bar{\Phi}$ -алгебры R и идеалы алгебры R — это одно и то же, гомоморфизмы $\bar{\Phi}$ -алгебры R и гомоморфизмы алгебры R — это одно и то же, и т. д.

Но среди гомоморфных образов кольца Φ есть поля. Поэтому очень часто для построения контрпримера достаточно рассмотреть случай алгебр над полями.

Перейдем к построению примера не локально нильпотентной нильалгебры, впервые указанного Е. С. Голодом.

Ниже мы будем рассматривать свободную ассоциативную алгебру F над некоторым полем k , порожденную конечным множеством $\{x_1, x_2, \dots, x_d\}$ свободных образующих. Построение этой алгебры проводится так же, как и построение алгебры $A(X)$. Единственное отличие: букв конечное множество. Поэтому можно использовать все понятия и определения, введенные выше для слов: длина слова, степень полинома, однородные полиномы, однород-

ные идеалы и т. д. В частности, можно применять и лемму 4. Мы изменим только некоторые обозначения.

Мы будем допускать пустое слово. Поэтому свободная ассоциативная алгебра F , рассматриваемая ниже, будет алгеброй с единицей — единицей является пустое слово e . Полагаем $d(e) = 0$, что согласуется с определением длины слова как числа входящих в это слово букв.

Алгебра F , рассматриваемая как алгебра над некоторым полем k , свободно порождается некоторым конечным множеством $\{x_1, x_2, \dots, x_d\}$ свободных образующих — букв x_i . При этом всегда предполагается, что $d \geq 2$. По определению F является линейным пространством над полем k . Поэтому множества однородных полиномов заданной степени n

$$F_n = \left\{ \sum_i \alpha_i u_i \mid \alpha_i \in k, u_i - \text{слова}, d(u_i) = n \right\} \quad (22)$$

являются подпространствами в F , и F как линейное пространство разлагается в прямую сумму

$$F = F_0 \dot{+} F_1 \dot{+} F_2 \dot{+} \dots \dot{+} F_m \dot{+} \dots \quad (23)$$

При этом из того, что F порождается множеством $\{x_1, x_2, \dots, x_d\}$ из d букв, легко вытекает в силу (22) равенство

$$\forall n \geq 0 \mid \dim_k F_n = d^n. \quad (24)$$

Теорема Голода. Пусть F — свободная ассоциативная алгебра над полем k , свободно порожденная d свободными образующими $x_1, x_2, \dots, x_d$, $d \geq 2$. Пусть $f_1, f_2, \dots$ — однородные полиномы со степенями $n_1, n_2, \dots$ соответственно, причем $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots$, и I — идеал алгебры F , порожденный этими полиномами. Пусть r_n — число полиномов степени n из системы $\{f_1, f_2, \dots\}$. Если существует такой формальный степенной ряд

$$\xi = 1 - dt + \sum_{n=2}^{\infty} s_n t^n \quad (25)$$

с неотрицательными коэффициентами s_n , что все коэффициенты ряда ξ^{-1} неотрицательны и $r_m \leq s_m$ для всех $m \geq 2$, то фактор-алгебра $A = F/I$ бесконечномерна.

Доказательство. Из леммы 4 и однородности идеала I вытекает, что A как линейное пространство над полем k разлагается в прямую сумму

$$A = A_0 \dot{+} A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \dots \dot{+} A_m \dot{+} \dots \quad (26)$$

подпространств (см. (22) и (23))

$$A_m = F_m + I/I \simeq F_m/F_m \cap I. \quad (27)$$

Пусть $a_m = \dim A_m$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что ряд

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad (28)$$

не является многочленом (см. (26) и (27)). Это мы и будем показывать с помощью вспомогательных степенных рядов.

Рассмотрим ряд

$$\rho = 1 - dt + \sum_{n=2}^{\infty} r_n t^n. \quad (29)$$

Учитывая, что $r_m \leq s_m$ для всех $m \geq 2$ по условию теоремы, получаем в силу (25) и (29), что все коэффициенты ряда $\sigma = \xi - \rho$ (с нулевым свободным членом) неотрицательны. Кроме того, снова по условию и все коэффициенты ряда ξ^{-1} неотрицательны. Но тогда из равенства $\rho = \xi - \sigma = \xi(1 - \xi^{-1}\sigma)$ вытекает равенство $\rho^{-1} = \xi^{-1}(1 - \xi^{-1}\sigma)^{-1}$, и потому ряд ρ^{-1} тоже имеет неотрицательные коэффициенты, так как этим свойством обладают ряды

$$\xi^{-1}, \sigma \text{ и } (1 - \xi^{-1}\sigma)^{-1} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (\xi^{-1}\sigma)^m.$$

Из (28) и (29) вытекает равенство

$$\rho \xi = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_n - da_{n-1} + \sum_{m=2}^n r_m a_{n-m} \right) t^n. \quad (30)$$

Замечаем, что и ряд $\rho \xi$ имеет неотрицательные коэффициенты.

Действительно, пусть $I_n = I \cap F_n$, A_n^* — прямое дополнение подпространства I_n в F , т. е. $F_n = I_n \dot{+} A_n^*$. Пусть H_m — подпространство в F_m , порожденное однородными полиномами степени $m \geq 2$ из системы $\{f_1, f_2, \dots\}$.

Любой элемент из I_n является по построению линейной комбинацией полиномов степени n , имеющих вид $vf_i\omega$, где v, ω — слова (быть может, пустые). Ясно, что если $d(\omega) \geq 1$, то $vf_i\omega \in I_{n-1}F_1$. Если же $d(\omega) = 0$, то пусть f_j имеет степень m . Тогда $f_j \in H_m$, $v \in F_{n-m}$ и $m \geq 2$. Но $F_{n-m} = I_{n-m} + A_{n-m}^*$. Поэтому $v = v' + v''$, где $v' \in I_{n-m}$, $v'' \in A_{n-m}^*$. Но тогда

$$vf_j = v'f_j + v''f_j \in I_{n-m}f_j + A_{n-m}^*f_j \subseteq I_{n-1}F_1 + A_{n-m}^*H_m.$$

Из доказанного вытекает включение

$$I_n \subseteq I_{n-1}F_1 + \sum_{m=2}^n A_{n-m}^*H_m \quad (31)$$

для всех $n \geq 2$. Между тем по построению $\dim A_i^* = \dim A_i = a_i$, $\dim I_m + \dim A_m^* = \dim F_m = d^m$, $\dim H_m = r_m$. Поэтому из сравнения размерностей пространств, стоящих в левой и правой частях включения (31), вытекает неравенство

$$\dim I_n \leq d \dim I_{n-1} + \sum_{m=2}^n a_{n-m}r_m. \quad (32)$$

Вычитая обе части неравенства (32) из d^n , получим

$$a_n \geq da_{n-1} - \sum_{m=2}^n a_{n-m}r_m.$$

А это и означает в силу (30), что все коэффициенты ряда $\rho \zeta$ неотрицательны.

Теперь мы покажем, что ряд ρ^{-1} (с неотрицательными коэффициентами) не является многочленом.

Допустим противное. Пусть ρ^{-1} — многочлен и m — степень этого многочлена. Из (29) и равенства $\rho\rho^{-1} = 1$ вытекают равенства

$$\rho^{-1} = 1 + dt + \sum_{n=2}^{\infty} z_n t^n, \quad (33)$$

$$\rho^{-1} \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} r_n t^n \right) = 1 + \rho^{-1} dt. \quad (34)$$

Сравнивая коэффициенты, стоящие при t^{m+p} в правой и левой частях равенства (34), получаем в силу (33), что

для всех $p \geq 2$

$$z_m r_p + z_{m-1} r_{p+1} + \dots + d r_{m+p-1} + r_{m+p} = 0, \quad (35)$$

так как r^{-1} — многочлен степени m по допущению. Но все числа $r_p, r_{p+1}, \dots$ неотрицательны по построению, а числа $z_m, z_{m-1}, \dots$ — неотрицательны в силу (33) и доказанного. Кроме того, $z_m \neq 0$. Поэтому из (35) вытекает, что $r_p = 0$ для всех $p \geq 2$. Но тогда в силу (29) $\rho = 1 - dt$, и потому ряд

$$\rho^{-1} = (1 - dt)^{-1} = 1 + dt + d^2 t^2 + \dots + d^m t^m + d^{m+1} t^{m+1} + \dots$$

не может быть многочленом. Противоречие.

Итак, ряды $\rho \zeta$ и ρ^{-1} имеют неотрицательные коэффициенты, причем ряд ρ^{-1} не является многочленом. Но тогда из правила умножения рядов вытекает, что и ряд $\zeta = \rho^{-1}(\rho \zeta)$ не является многочленом.

Это заканчивает доказательство.

Теорема — пример Голода. Для любого целого $d \geq 2$ существует такая d -порожденная не нильпотентная (а значит, и не локально нильпотентная) нильалгебра A , что все $(d-1)$ -порожденные подалгебры в A нильпотентны.

Доказательство. В силу замечания 1 достаточно рассмотреть тот случай, когда основное кольцо Φ является полем. Поэтому всюду ниже (в доказательстве теоремы!) считаем, что $\Phi = k$ — поле. Нужный пример строится как фактор-алгебра алгебры

$$F' = F_1 + F_2 + \dots + F_m + F_{m+1} + \dots$$

всех полиномов без свободных членов с помощью теоремы Голода.

Выберем и зафиксируем такое число ε , что $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

Будем строить по индукции систему

$$f_1, f_2, \dots, f_{s_1}, f_{s_1+1}, \dots, f_{s_2}, \dots, f_{s_m+1}, f_{s_m+2}, \dots, f_{s_{m+1}}, \dots$$

однородных полиномов f_i степени ≥ 2 так, что степени n_i полиномов f_i образуют цепь

$$n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_{s_1} < n_{s_1+1} \leq n_{s_1+2} \leq \dots \leq n_{s_2} < n_{s_2+1} \leq \dots$$

и для каждого целого $m \geq 1$ выполнены условия:

(*) если $2 \leq p \leq n_{s_m}$, то $r_p \leq \varepsilon^2 (d - 2\varepsilon)^{p-2}$, где r_p — число однородных полиномов степени p из системы $\{f_i \mid 1 \leq i \leq s_m\}$;

(**) любые $d-1$ полином степени $\leq m-1$ из F' порождают подалгебру, нильпотентную по модулю идеала I_m , порожденного системой $\{f_i \mid 1 \leq i \leq s_m\}$.

Начиная процесс, мы можем построить «начальную» систему $\{f_i \mid 1 \leq i \leq s_1\}$ многими способами, так как условие (**) при $m=1$ выполняется автоматически — единственным полиномом степени 0 из F' является нулевой полином. Укажем один из способов построения «начальной» системы.

Берем любое целое число $s_1 \geq 2$. Учтывая, что $d - 2\varepsilon > 2 - 1 = 1$, получаем, что $(d - 2\varepsilon)^n \cdot \varepsilon^2 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому можно найти такое натуральное число $n_1 \geq 2$, что $s_1 \leq \varepsilon^2 (d - 2\varepsilon)^{n_1-2}$. Возьмем теперь любую цепь

$$n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_{s_1}$$

из s_1 целых чисел, начинающуюся с n_1 , и любую систему

$$f_1, f_2, \dots, f_{s_1}$$

однородных полиномов f_i со степенями $d(f_i) = n_i$. Эта система удовлетворяет условию (*), так как по построению

$$n_1 \leq p \leq n_{s_1} \Rightarrow r_p \leq s_1 \leq \varepsilon^2 (d - 2\varepsilon)^{n_1-2} \leq \varepsilon^2 (d - 2\varepsilon)^{p-2}.$$

А условие (**), как мы указывали, выполняется автоматически.

Пусть для некоторого натурального $m \geq 2$ мы уже построили систему однородных полиномов $\{f_i \mid 1 \leq i \leq s_m\}$, удовлетворяющую условиям (*) и (**). Нам нужно расширить эту систему до системы $\{f_i \mid 1 \leq i \leq s_{m+1}\}$.

Замечая, что $1 \leq d-1 < d-2\varepsilon$, получаем при $q = d + d^2 + \dots + d^m$ соотношение: если $N \rightarrow +\infty$, то

$$\begin{aligned} \frac{(d-1)^N (N+q-1)^{(q-1)(d-1)}}{\varepsilon^2 (d-2\varepsilon)^{N-2}} &= \\ &= \left(\frac{d-1}{d-2\varepsilon} \right)^{N-2} \frac{(d-1)^2 (N+q-1)^{(q-1)(d-1)}}{\varepsilon^2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Поэтому существует настолько большое натуральное число N , что N строго больше степеней n_i однородных полиномов f_i из системы $\{f_i \mid 1 \leq i \leq s_m\}$, построенной

на предыдущем шаге, и

$$(d-1)^N (N+q-1)^{(q-1)(d-1)} \leq \varepsilon^2 (d-2\varepsilon)^{N-2}. \quad (36)$$

Это число N выберем и зафиксируем.

Строим алгебру многочленов $F(T)$ с множеством

$$T = \{t_{j\beta} \mid 1 \leq j \leq d-1, 1 \leq \beta \leq q = d + d^2 + \dots + d^m, \\ j \text{ и } \beta - \text{целые}\} \quad (37)$$

перестановочных переменных $t_{j\beta}$. Выделим в этой алгебре $d-1$ многочлен

$$g_i^* = \sum_{\alpha=1}^q u_\alpha t_{i\alpha} \quad (1 \leq i \leq d-1), \quad (38)$$

где u_α пробегает все непустые слова u с длиной $d(u) \leq m$. При этом мы учитываем, что таких слов точно $q = d + d^2 + \dots + d^m$. Кроме того, мы считаем выбранной и зафиксированной нумерацию этих слов, т. е. для каждого α все символы u_α из (38) обозначают одно и то же слово.

Возьмем произведение

$$g^* = g_1^* g_2^* \dots g_N^* \quad (39)$$

любых N построенных многочленов g_i^* . Учитывая (38) и (39), получаем

$$g^* = \sum_{\alpha_1=1}^q \sum_{\alpha_2=1}^q \dots \sum_{\alpha_N=1}^q (u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \dots u_{\alpha_N}) (t_{i_1 \alpha_1} t_{i_2 \alpha_2} \dots t_{i_N \alpha_N}). \quad (40)$$

Ясно, что g^* тоже является многочленом от переменных $t_{j\beta}$.

Пусть многочлен g_i^* встречается в записи (39) многочлена g^* точно m_i раз. Тогда в силу (37) — (40) каждое из произведений $t_{i_1 \alpha_1} t_{i_2 \alpha_2} \dots t_{i_N \alpha_N}$ из разложения (40) совпадает и притом точно с одним произведением вида

$$\prod_{i=1}^{d-1} \prod_{j=1}^{m_i} t_{i\beta_{ij}} \quad (1 \leq \beta_{ij} \leq q). \quad (41)$$

Поэтому, приводя подобные в разложении многочлена g^* , получаем в силу равенства (40), что g^* является суммой произведений вида (41) с коэффициентами

$$\sum \left\{ u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \dots u_{\alpha_N} \mid t_{i_1 \alpha_1} t_{i_2 \alpha_2} \dots t_{i_N \alpha_N} = \prod_{i=1}^{d-1} \prod_{j=1}^{m_i} t_{i\beta_{ij}} \right\}. \quad (42)$$

Этот полином однороден, так как все слова $u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \dots u_{\alpha_n}$, входящие в разложение (42), получаются из одного и того же полинома-слова

$$\prod_{i=1}^{d-1} \prod_{j=1}^{m_i} u_{\beta_{ij}} = u_{\beta_{11}} \dots u_{\beta_{1m_1}} u_{\beta_{21}} \dots u_{\beta_{1j}} \dots u_{\beta_{d-1, m_{d-1}}}$$

с помощью некоторой перестановки сомножителей $u_{\beta_{ij}}$. Полученное множество однородных полиномов вида (42), т. е. коэффициентов многочлена g^* , обозначим символом $\mathfrak{P}(g^*)$. Отметим, что по построению степени полиномов из $\mathfrak{P}(g^*)$ больше или равны N .

Строим множество однородных полиномов, являющихся коэффициентами всех многочленов g^* вида (39), т. е. систему

$$\cup \{ \mathfrak{P}(g^*) \mid g^* = g_{i_1}^* g_{i_2}^* \dots g_{i_N}^*, 1 \leq i_j \leq d-1 \}.$$

Ясно, что система конечна, и потому ее можно перенумеровать. Нумерацию этой системы, т. е. представление ее в виде

$$\{ f_{s_m+1}, f_{s_m+2}, \dots, f_{s_m+i}, \dots, f_{s_m+1} \},$$

выберем так, чтобы степени n_i однородных полиномов f_i , входящих в эту систему, образовали цепь

$$n_{s_m+1} \leq n_{s_m+2} \leq \dots \leq n_{s_m+i} \leq \dots \leq n_{s_m+1}.$$

Вспоминая, что слова u_{α} пробегали все слова u с длиной $d(u) \leq m$, получаем для целых чисел l следующее соотношение:

$$s_m < l \leq s_{m+1} \Rightarrow N \leq n_l \leq mN \quad (43)$$

в силу построения (42) полинома f_l .

Учитывая все сказанное и доказанное, проверим, что расширенная система $\{f_i \mid 1 \leq i \leq s_{m+1}\}$ удовлетворяет условиям (*) и (**).

Чтобы проверить выполнение условия (*), оценим число «новых» однородных полиномов, добавленных к системе $\{f_i \mid 1 \leq i \leq s_m\}$.

С каждым многочленом g^* вида (39) мы связали множество $\mathfrak{P}(g^*)$ однородных полиномов вида (42) — коэффициентов многочлена g^* . Коэффициентов столько же, сколько произведений вида (41), если каждый многочлен g_i^* вхо-

дит в разложение (39) точно m_i раз ($1 \leq i \leq d-1$). Но для каждого i произведений вида $\prod_{i=1}^{m_i} t_{i\beta_{ii}}$ имеется точно $C_{m_i+q-1}^{q-1}$, так как переменные $t_{i\beta}$ перестановочны и в силу (37) β пробегает все целые числа от 1 до q . Поэтому коэффициентов будет точно $\prod_{i=1}^{d-1} C_{m_i+q-1}^{q-1}$. Но

$$\prod_{i=1}^{d-1} C_{m_i+q-1}^{q-1} \leq \prod_{i=1}^{d-1} (m_i + q - 1)^{q-1} \leq (N + q - 1)^{(q-1)(d-1)},$$

и потому с каждым многочленом g^* вида (39) мы связали не более $(N + q - 1)^{(q-1)(d-1)}$ однородных полиномов. Так как многочленов g^* вида (39) имеется в силу (37) и (38) $(d-1)^N$, то мы добавили не более

$$(d-1)^N (N + q - 1)^{(q-1)(d-1)} \leq \varepsilon^2 (d - 2\varepsilon)^{N-2}$$

однородных полиномов в силу (36).

По построению N строго больше степеней n_i однородных полиномов f_i из «старой» системы $\{f_i \mid 1 \leq i \leq s_m\}$. Поэтому, если p — целое число и $p \geq N$, то число r_p однородных полиномов степени p из системы $\{f_i \mid 1 \leq i \leq s_{m+1}\}$ не превосходит числа «новых» однородных полиномов, т. е. $r_p \leq \varepsilon^2 (d - 2\varepsilon)^{N-2} \leq \varepsilon^2 (d - 2\varepsilon)^{p-2}$. Если же $p < N$, то в силу (43) $p \leq s_m$, и потому неравенство $r_p \leq \varepsilon^2 (d - 2\varepsilon)^{p-2}$ верно по индуктивному предположению и снова в силу (43).

Следовательно, условие (*) выполнено.

Возьмем теперь любые $d-1$ полиномов g'_i из F' со степенью $\leq m$. Каждый полином g'_i представим в виде

$$g'_i = \sum_{\alpha=1}^q c_{i\alpha} u_{\alpha} \quad (1 \leq i \leq d-1, c_{i\alpha} \in k), \quad (44)$$

где u_{α} пробегает все непустые слова u с длиной $d(u) \leq m$. Сравнивая равенства (38) и (44), получаем в силу (39), (40) и построения однородных полиномов $f_{s_m+1}, f_{s_m+2}, \dots$, что произведение $g'_1 g'_2 \dots g'_N$ любых N полиномов g'_i является линейной комбинацией указанных однородных поли-

номов — суммой членов вида

$$\left(\prod_{i=1}^{d-1} \prod_{j=1}^{m_i} c_{i\beta_{ij}} \right) \sum \{ u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \dots u_{\alpha_N} \mid t_{i_1 \alpha_1} t_{i_2 \alpha_2} \dots t_{i_N \alpha_N} = \\ = \prod_{i=1}^{d-1} \prod_{j=1}^{m_i} t_{i\beta_{ij}} \}.$$

Поэтому все произведения $g'_1 g'_2 \dots g'_N$ принадлежат идеалу I_{m+1} , порожденному расширенной системой $\{f_i \mid 1 \leq i \leq s_{m+1}\}$.

Следовательно, выполнено и условие (**).

Итак, по индукции построена система $\{f_1, f_2, \dots, f_{s_m}, f_{s_m+1}, \dots\}$, такая, что для каждого целого $m \geq 1$ выполнены условия (*) и (**). Пусть I — однородный идеал, порожденный этой системой. Тогда в силу условия (**) фактор-алгебра $A = F'/I$ обладает тем свойством, что все $(d-1)$ -порожденные подалгебры в A нильпотентны. В частности, A — d -порожденная (образами букв $x_1, x_2, \dots, x_d$) нильалгебра. Так как любая конечнопорожденная нильпотентная алгебра над полем конечномерна (это легко проверить), то для окончания доказательства теоремы остается доказать бесконечномерность алгебры A . Но, очевидно, алгебра $A = F'/I$ бесконечномерна тогда и только тогда, когда бесконечномерна алгебра F/I . Поэтому в силу условия (*) и теоремы Голода остается показать, что для ряда

$$\zeta = 1 - dt + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^2 (d - 2\varepsilon)^{n-2} t^n$$

обратный ряд ζ^{-1} имеет неотрицательные коэффициенты.

Воспользуемся известными формулами

$$(1 - at)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n t^n,$$

$$((1 - at)^{-1})^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a^n t^n.$$

Применяя эти формулы, последовательно получаем

$$\begin{aligned}
 \zeta &= 1 - dt + \varepsilon^2 t^2 \sum_{n=0}^{\infty} (d - 2\varepsilon)^n t^n = \\
 &= 1 - dt + \varepsilon^2 t^2 (1 - (d - 2\varepsilon)t)^{-1} = \\
 &= (1 - (d - \varepsilon)t)^2 (1 - (d - 2\varepsilon)t)^{-1}, \\
 \zeta^{-1} &= (1 - (d - 2\varepsilon)t) (1 - (d - \varepsilon)t)^{-2} = \\
 &= (1 - (d - 2\varepsilon)t) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) (d - \varepsilon)^n t^n = \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (d - \varepsilon)^{n-1} (d + (n-1)\varepsilon) t^n.
 \end{aligned}$$

Так как $d - 2\varepsilon > 0$, то $d - \varepsilon > \varepsilon > 0$, и потому $(d - \varepsilon)^{(n-1)} \times \times (d + (n-1)\varepsilon) > 0$ для всех целых чисел $n \geq 1$. Следовательно, обратный ряд ζ^{-1} имеет неотрицательные коэффициенты.

Теорема доказана.

Следствие 6. *Нильрадикалы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{H}$ различны, т. е. существуют такие алгебры R , что $\mathcal{L}(R) \subset \mathcal{H}(R)$.*

Действительно, одна из таких алгебр — не локально нильпотентная нильалгебра F'/I из теоремы — примера Голода.

§ 3. Квазирегулярный радикал

Квазирегулярный радикал вводится в рассмотрение с помощью модулей. Но мы рассматриваем только алгебры — ассоциативные алгебры над фиксированным (основным) ассоциативно-коммутативным кольцом Φ с единицей. Поэтому при рассмотрении модулей мы должны всегда учитывать их связь с кольцом Φ . В связи с этим укажем основные определения и некоторые свойства рассматриваемых нами модулей.

Пусть R — алгебра. Левый унитарный Φ -модуль M называется *правым алгебра- R -модулем*, если для любых $r \in R$, $m \in M$ определено произведение $mr \in M$ так, что выполнены обычные аксиомы правого R -модуля

$$\begin{aligned}
 (m_1 + m_2)r &= m_1r + m_2r, \quad m(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2, \\
 (mr_1)r_2 &= m(r_1r_2)
 \end{aligned}$$

и аксиома, связывающая Φ -модульную и R -модульную структуры

$$\forall \alpha \in \Phi \forall r \in R \forall m \in M \mid \alpha(mr) = m(\alpha r) = (\alpha m)r.$$

Левые алгебра- R -модули определяются аналогично с помощью аксиомы

$$\forall \alpha \in \Phi \forall r \in R \forall m \in M \mid \alpha(rm) = (\alpha r)m = r(\alpha m).$$

Всюду ниже для краткости мы будем говорить «правый R -модуль» вместо «правый алгебра- R -модуль» и аналогично для левых модулей. Такой же договоренности будем придерживаться при рассмотрении подмодулей, фактор-модулей и гомоморфизмов модулей, все время учитывая связи с основным кольцом Φ . Так, например, если A и B — правые R -модули, то гомоморфизм φ группы $A(+)$ в группу $B(+)$ называется *модульным гомоморфизмом* или *R -гомоморфизмом*, если

$$\forall \alpha \in \Phi \forall a \in A \forall r \in R \mid \varphi(\alpha a) = \alpha \varphi(a), \quad \varphi(ar) = \varphi(a)r.$$

При этом ядро $\text{Ker } \varphi$ гомоморфизма φ будет подмодулем R -модуля A , образ $\text{Im } \varphi = \varphi(A)$ гомоморфизма φ — подмодулем R -модуля R , причем правый R -модуль $\varphi(A)$ изоморфен фактор-модулю $A/\text{Ker } \alpha$ и т. д.

Определение 1. Пусть M — правый R -модуль. Если N — подмодуль в M , а S — непустое подмножество, то *частным N по S* называется множество

$$(N : S) = \{r \in R \mid Sr \subseteq N\}.$$

Частное $(N : S)$ всегда является правым идеалом алгебры R (т. е. подмодулем правого R -модуля R). Если $N = 0$, $S = \{x\}$, то частное $(0 : x)$ называется *аннулятором элемента $x \in M$* . Множество $(0 : M)$ называется *аннулятором модуля M* и является, как легко видеть, идеалом алгебры R . Модуль M называется *точным*, если $(0 : M) = 0$.

При рассмотрении модулей мы иногда будем менять алгебры, над которыми заданы эти модули. В связи с этим полезна

Лемма 1. Пусть R — алгебра, $\bar{R}$ — гомоморфный образ алгебры R , причем ядром гомоморфизма $r \mapsto \bar{r}$ алгебры R на алгебру $\bar{R}$ является идеал B . Если M — правый $\bar{R}$ -модуль, то, полагая

$$\forall m \in M \forall \bar{r} \in \bar{R} \mid m\bar{r} = m\bar{r}, \quad (1)$$

мы превращаем M в правый R -модуль такой, что $MB = 0$, т. е. $B \subseteq (0 : M)$. Обратно, если M — правый R -модуль и $B \subseteq (0 : M)$, то M превращается в правый $\bar{R}$ -модуль, если определить произведение элементов из M на элементы из $\bar{R}$ по правилу (1). При указанных переходах аннуляторы $(0 : M)_R$ правого R -модуля M и $(0 : M)_{\bar{R}}$ — правого $\bar{R}$ -модуля M связаны гомоморфизмом $r \mapsto \bar{r}$, т. е.

$$(0 : M)_{\bar{R}} = \{\bar{r} \in \bar{R} \mid M\bar{r} = 0\} = \overline{(0 : M)_R} = \{\bar{r} \in \bar{R} \mid Mr = 0\}. \quad (2)$$

Кроме того, подмодули правого R -модуля M и подмодули правого $\bar{R}$ -модуля M — это одно и то же.

Действительно, если мы сделаем переход от правого $\bar{R}$ -модуля M с помощью правила (1), то, очевидно, все аксиомы правого R -модуля будут выполнены, и потому M превратится в правый R -модуль. Например, для любых $\alpha \in \Phi$, $m \in M$, $r \in R$ получаем

$$\begin{aligned} \alpha(mr) &= \alpha(m\bar{r}) = (\alpha m)\bar{r} = (\alpha m)r = \\ &= (\alpha m)\bar{r} = m(\alpha\bar{r}) = m\overline{\alpha r} = m(\alpha r), \end{aligned}$$

так как отображение $r \mapsto \bar{r}$ является гомоморфизмом алгебр. Кроме того, при этом переходе равенство (2) является очевидным следствием правила (1). Поэтому верно равенство (2) и, в частности, $(0 : M)_R \cong B$. Обратно, если M — правый R -модуль и $B \subseteq (0 : M)_R$, то правило (1) оказывается корректным (если $\bar{r}_1 = \bar{r}_2$, то $mr_1 = mr_2$). Но тогда, как легко видеть, M превращается в правый $\bar{R}$ -модуль. Последнее утверждение леммы — очевидное следствие определений и правила (1).

Следствие 1. Если M — правый R -модуль, то правило (1) превращает M в точный правый $R/(0 : M)$ -модуль.

Действительно, в этом случае $(0 : M)_{\bar{R}} = \overline{(0 : M)_R} = 0$.

Определение 2. Правый R -модуль M называется простым или неприводимым правым R -модулем, если $MR \neq 0$ (т. е. существуют такие элементы $m \in M$ и $r \in R$, что $mr \neq 0$) и единственными подмодулями в M являются нулевой подмодуль 0 и несобственный подмодуль M .

Следствие 2. Пусть R — алгебра, $\bar{R}$ — гомоморфный образ алгебры R , причем ядром гомоморфизма $r \mapsto \bar{r}$ алгебры R на алгебру $\bar{R}$ является идеал B . Если M — простой правый $\bar{R}$ -модуль, то правило (1) превращает M в простой правый R -модуль, для которого $(0 : M) \cong B$.

Обратно, если M — простой правый R -модуль и $(0 : M) \cong B$, то правило (1) превращает M в простой правый $\bar{R}$ -модуль.

Действительно, это все вытекает из леммы 1, так как в силу правила (1) $MR \neq 0$ тогда и только тогда, когда $M\bar{R} \neq 0$. Остается учесть определения.

Определение 3. Пусть R — алгебра. Идеал $*$)

$$\mathcal{J}(R) = \bigcap \{(0 : M)_R \mid M \text{ — простой правый } R\text{-модуль}\} \quad (3)$$

называется (правым) квазирегулярным радикалом (или радикалом Джекобсона) алгебры R . Алгебра R называется $\mathcal{J}$ -радикальной, если $\mathcal{J}(R) = R$ (т. е. если R не имеет простых правых R -модулей), и $\mathcal{J}$ -полупростой, если $\mathcal{J}(R) = 0$.

Чтобы указать основные свойства квазирегулярного радикала, рассмотрим сначала некоторые свойства простых модулей.

Лемма 2. Пусть R — алгебра, M — правый R -модуль и $M \neq 0$. Тогда для любого $m \in M$ все множества $mR = \{mr \mid r \in R\}$ являются подмодулями в M и модуль M прост тогда и только тогда, когда

$$\forall m \in M \mid m \neq 0 \Rightarrow mR = M. \quad (4)$$

Действительно, первое утверждение очевидно. Не менее очевидно, что если выполнено условие (4), то правый R -модуль M прост. Обратно, пусть M — простой правый R -модуль. Замечая, что множество $R^* = \{m \in M \mid mR = 0\}$ является подмодулем в M и $MR \neq 0$ в силу простоты M , получаем равенство $R^* = 0$ снова в силу простоты M . Но тогда $mR \neq 0$ для любого ненулевого элемента $m \in M$, и потому $mR = M$, т. е. выполнено условие (4).

Лемма 3. Пусть R — алгебра, I — идеал алгебры R . Если M — простой правый R -модуль и $MI \neq 0$, то M — простой правый I -модуль. Обратно, если M — простой правый I -модуль, то M можно превратить в простой правый R -модуль с помощью следующего правила: пусть $m \in M$ и $r \in R$, то полагаем $mr = m(er)$, где e — такой элемент из I , что $m = me$. Указанные переходы от правого простого R -модуля M (с $MI \neq 0$) к простому правому I -модулю M и обратно обратны друг другу. Аннулятор

*) Как обычно, пересечением пустого множества идеалов считается идеал R .

правого I -модуля M и аннулятор правого R -модуля M связаны равенством $(0 : M)_I = I \cap (0 : M)_R$.

Доказательство. Пусть M — простой правый R -модуль и $MI \neq 0$. Рассматривая множество $I^* = \{m \in M \mid mI = 0\}$, получаем в силу простоты M , что $I^* = 0$, так как I^* — подмодуль в M и $I^* \neq M$. Но тогда, как легко видеть, $mI = M$ для всех $m \in M$, $m \neq 0$, так как mI — подмодули правого R -модуля M . Переходя к правому I -модулю M получаем, что M — простой правый I -модуль в силу леммы 2. Обратно, пусть M — правый простой I -модуль. Тогда $MI \neq 0$ и в силу леммы 2

$$\forall m \in M \mid m \neq 0 \Rightarrow mI = M. \quad (5)$$

В частности, для любого $m \in M$ верно включение $m \in mI$ в силу (5), и потому для каждого $m \in M$ существует такой элемент $e = e(m) \in I$, что $m = me$. Поэтому правило превращения M в правый R -модуль имеет смысл.

Правило

$$\forall m \in M \forall r \in R \mid (m = me, e \in I) \Rightarrow mr = m(er) \quad (6)$$

корректно. Действительно, если $e \in I$, то $er \in I$ для всех $r \in R$ и потому произведение $m(er)$ определено, так как M — правый I -модуль. Остается показать, что произведение $m(er)$ не зависит от выбора элемента $e \in I$ такого, что $m = me$, и тогда, как легко видеть, мы превратим I в правый R -модуль. Пусть $m \in M$, $r \in R$. Тогда для любых $e_1, e_2 \in I$ получаем

$$\begin{aligned} me_1 = me_2 = m &\Rightarrow m(e_1 - e_2) = 0 \Rightarrow \forall x \in I \mid (m(e_1r - e_2r))x = \\ &= m((e_1r - e_2r)x) = m((e_1 - e_2)(rx)) = (m(e_1 - e_2))(rx) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow m(e_1r - e_2r) = 0 \Rightarrow m(e_1r) = m(e_2r), \end{aligned}$$

так как $\{n \in M \mid nI = 0\} = 0$ в силу простоты правого I -модуля M . А это и доказывает, что произведение $m(er)$ не зависит от выбора элемента $e \in I$ такого, что $m = me$.

Таким образом, правило (6) превращает M в правый R -модуль. При этом в силу правила (6) из соотношений (5) вытекают соотношения (4), и потому M — простой правый R -модуль в силу леммы 2.

Отсюда легко доказать, что переходы от простого правого R -модуля M к простому правому I -модулю M и обратно обратны друг другу. Действительно, достаточно

доказать, что (6) тривиально для элементов $r \in I$. Но это так: если $r \in I$, $e \in I$ и $m = me$, то $m(er) = (me)r = mr$.

Лемма доказана.

Теперь мы можем доказать

Предложение 1. Пусть R — произвольная алгебра. Тогда для любого гомоморфизма φ алгебры R верно включение

$$\varphi(\mathcal{J}(R)) \subseteq \mathcal{J}(\varphi(R)). \quad (7)$$

Более того,

$$\text{Ker } \varphi \subseteq \mathcal{J}(R) \Rightarrow \varphi(\mathcal{J}(R)) = \mathcal{J}(\varphi(R)), \quad (8)$$

и потому для любой алгебры R верно равенство

$$\mathcal{J}(R/\mathcal{J}(R)) = 0. \quad (9)$$

Для любого идеала I алгебры R верно равенство

$$\mathcal{J}(I) = I \cap \mathcal{J}(R). \quad (10)$$

В частности,

$$I \subseteq \mathcal{J}(R) \Leftrightarrow I = \mathcal{J}(I). \quad (11)$$

Доказательство. Пусть φ — гомоморфизм алгебры R на алгебру $\bar{R} = \varphi(R)$. Тогда в силу следствия 2 можно считать выполненным равенство

$$\begin{aligned} \{M \mid M \text{ — простой правый } \bar{R}\text{-модуль}\} = \\ = \{M \mid M \text{ — простой правый } R\text{-модуль и } (0 : M) \supseteq \text{Ker } \varphi\}. \end{aligned}$$

Но тогда в силу леммы 1 и определения 3.3 получаем

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\mathcal{J}(\varphi(R))) &= \varphi^{-1}(\mathcal{J}(R)) = \\ &= \varphi^{-1}(\cap \{(0 : M)_{\bar{R}} \mid M \text{ — простой правый } \bar{R}\text{-модуль}\}) = \\ &= \cap \{\varphi^{-1}((0 : M)_{\bar{R}}) \mid M \text{ — простой правый } \bar{R}\text{-модуль}\} = \\ &= \cap \{(0 : M)_R \mid M \text{ — простой правый } R\text{-модуль, } (0 : M) \supseteq \\ &\supseteq \text{Ker } \varphi\} \supseteq \cap \{(0 : M)_R \mid M \text{ — простой правый } R\text{-модуль}\} = \\ &= \mathcal{J}(R). \end{aligned}$$

Отсюда вытекают соотношения (7) и (8). В частности, для естественного гомоморфизма $\varphi: R \rightarrow R/\mathcal{J}(R)$ получаем $\text{Ker } \varphi = \mathcal{J}(R)$, и потому в силу (8) верно и равенство (9).

Возьмем теперь любой идеал I алгебры R . Тогда в силу леммы 3 можно считать выполненным равенство

$$\begin{aligned} \{M \mid M \text{ — простой правый } I\text{-модуль}\} = \\ = \{M \mid M \text{ — простой правый } R\text{-модуль и } MI \neq 0\}. \end{aligned}$$

Но тогда из определения 3.3 и в силу леммы 3 получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(I) &= \bigcap \{(0 : M)_I \mid M \text{ — простой правый } I\text{-модуль}\} = \\ &= \bigcap \{I \cap (0 : M)_R \mid M \text{ — простой правый } R\text{-модуль, } I \not\subseteq (0 : M)_R\} = \\ &= \bigcap \{I \cap (0 : M)_R \mid M \text{ — простой правый } R\text{-модуль}\} = \\ &= I \cap (\bigcap \{(0 : M)_R \mid M \text{ — простой правый } R\text{-модуль}\}) = \\ &= I \cap \mathcal{F}(R),\end{aligned}$$

и потому верно равенство (10). А соотношение (11) является очевидным следствием равенства (10). Поэтому верно и соотношение (11).

Предложение доказано.

Предложение 2. Пусть R — произвольная алгебра. Тогда

а) Сумма любого множества $\mathcal{F}$ -радикальных идеалов (идеалов, являющихся $\mathcal{F}$ -радикальными алгебрами) сама является $\mathcal{F}$ -радикальным идеалом. Наибольшим $\mathcal{F}$ -радикальным идеалом является квазирегулярный радикал $\mathcal{F}(R)$ алгебры R . Более того, $\mathcal{F}$ -радикальные алгебры — это в точности идеалы алгебры R , содержащиеся в идеале $\mathcal{F}(R)$.

б) Пересечение любого множества таких идеалов R , что фактор-алгебра R/P $\mathcal{F}$ -полупроста, само является идеалом того же типа. Наименьшим среди указанных идеалов R является идеал $\mathcal{F}(R)$.

Доказательство. В силу предложения 1 (см. соотношение (11)) идеал $\mathcal{F}(R)$ является наибольшим $\mathcal{F}$ -радикальным идеалом алгебры R , причем $\mathcal{F}$ -радикальные идеалы — это в точности идеалы, содержащиеся в идеале $\mathcal{F}(R)$. Но тогда для любого множества $\{I_i \mid i \in \Gamma\}$ идеалов алгебры R получаем

$$\begin{aligned}\forall i \in \Gamma \mid I_i = \mathcal{F}(I_i) &\Rightarrow \forall i \in \Gamma \mid I_i \subseteq \mathcal{F}(R) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{i \in \Gamma} I_i \subseteq \mathcal{F}(R) \Rightarrow \mathcal{F}\left(\sum_{i \in \Gamma} I_i\right) = \sum_{i \in \Gamma} I_i,\end{aligned}$$

т. е. сумма любого множества $\mathcal{F}$ -радикальных идеалов алгебры R сама будет $\mathcal{F}$ -радикальным идеалом.

Следовательно, верно утверждение а).

Рассмотрим множество $\mathfrak{P} = \{P \mid P \text{ — идеал в } R, \mathcal{F}(R/P) = 0\}$. В силу соотношения (7) из предложения 1

$$P \in \mathfrak{P} \Rightarrow 0 = \mathcal{F}(R/P) \cong (\mathcal{F}(R) + P)/P \Rightarrow P \supseteq \mathcal{F}(R),$$

а в силу равенства (9) верно включение $\mathcal{J}(R) \in \mathfrak{P}$. Поэтому $\mathcal{J}(R)$ является наименьшим среди всех таких идеалов P алгебры R , что фактор-алгебра R/P $\mathcal{J}$ -полу- проста.

Возьмем теперь любое множество $\{P_i | i \in \Gamma\}$ в $\mathfrak{P}$ и положим $P' = \bigcap_{i \in \Gamma} P_i$. Переходя к фактор-алгебре $\bar{R} = R/P'$ и обозначая образ идеала I символом $\bar{I}$, получаем $\bigcap_{i \in \Gamma} \bar{P}_i = 0$. Кроме того, по теоремам об изоморфизмах для любого $i \in \Gamma$ фактор-алгебры R/P_i и $\bar{R}/\bar{P}_i$ изоморфны. Поэтому в силу соотношения (8) из $\mathcal{J}$ -полупростоты алгебры R/P_i вытекает $\mathcal{J}$ -полупростота алгебр $\bar{R}/\bar{P}_i$. Применяя доказанное к алгебре $\bar{R}$, получаем $\mathcal{J}(\bar{R}) = 0$, так как $\mathcal{J}(\bar{R}) \subseteq \bar{P}_i$ для всех $i \in \Gamma$. В результате получили, что фактор-алгебра R/P' $\mathcal{J}$ -полупроста, т. е. пересечение любого множества таких идеалов P алгебры R , что фактор-алгебра R/P $\mathcal{J}$ -полупроста, само является идеалом того же типа.

Следовательно, верно и утверждение б).

Следствие 3. Любой идеал и любой гомоморфный образ $\mathcal{J}$ -радикальной алгебры сами являются $\mathcal{J}$ -радикальными алгебрами. Алгебра R $\mathcal{J}$ -радикальна тогда и только тогда, когда она не отображается гомоморфно на ненулевые $\mathcal{J}$ -полупростые алгебры. Если I — идеал алгебры R и алгебры I и R/I $\mathcal{J}$ -радикальны, то $\mathcal{J}$ -радикальна и сама алгебра R .

Следствие 4. Любой идеал $\mathcal{J}$ -полупростой алгебры сам является $\mathcal{J}$ -полупростой алгеброй. Подпрямое произведение $\mathcal{J}$ -полупростых алгебр само $\mathcal{J}$ -полупросто. Алгебра R $\mathcal{J}$ -полупроста тогда и только тогда, когда она не имеет ненулевых $\mathcal{J}$ -радикальных идеалов. Если I — идеал алгебры R и алгебры I и R/I $\mathcal{J}$ -полупросты, то $\mathcal{J}$ -полупроста и сама алгебра R .

Все это легко вытекает из предложений 1 и 2. Докажем, например, последнее утверждение следствия 3 и первое утверждение следствия 4.

Пусть I — идеал алгебры R , причем алгебры I и R/I $\mathcal{J}$ -радикальны. Из $\mathcal{J}$ -радикальности идеала I следует включение $I \subseteq \mathcal{J}(R)$ в силу предложения 2. Но тогда в силу (8) из предложения 1 $R/I = \mathcal{J}(R/I) = \mathcal{J}(R)/I$, т. е. $R = \mathcal{J}(R)$. Следовательно, сама алгебра R $\mathcal{J}$ -радикальна,

Пусть A — идеал алгебры B и алгебра B $\mathcal{F}$ -полу-проста. Тогда в силу предложения 1 $\mathcal{F}(A) = A \cap \mathcal{F}(B) = A \cap 0 = 0$, и потому алгебра A тоже $\mathcal{F}$ -полупроста.

Следствие 5. В любой алгебре R верны соотношения

$$\mathfrak{B}(R) \subseteq \mathcal{L}(R) \subseteq \mathcal{K}(R) \subseteq \mathcal{F}(R).$$

Действительно, в силу предложения 2, следствия 2.4 и предложения 2.2 достаточно доказать, что все ниль-алгебры $\mathcal{F}$ -радикальны, так как в любой алгебре R ниль-радикал $\mathcal{K}(R)$ является наибольшим нильидеалом, а квази-регулярный радикал $\mathcal{F}(R)$ — наибольшим $\mathcal{F}$ -радикальным идеалом.

Допустим, что существует не $\mathcal{F}$ -радикальная ниль-алгебра. Пусть A — эта нильалгебра. Тогда по определению существует простой правый A -модуль. Пусть M — этот модуль. Возьмем любой ненулевой элемент $m \in M$. Тогда в силу леммы 2 $mA = M$, и потому $ma = m$ для некоторого элемента $a \in A$. Но тогда $m = ma = ma^2 = \dots = ma^k$ для всех целых $k \geq 1$. Между тем, $a^k = 0$ для некоторого целого $k \geq 1$, так как A — нильалгебра, и потому $m = 0$. Получили противоречие с тем, что $m \neq 0$.

Следовательно, все нильалгебры $\mathcal{F}$ -радикальны, и нужное нам утверждение доказано.

Следствие 6. Все $\mathcal{F}$ -полупростые алгебры полупервичны, т. е. не имеют ненулевых нильпотентных идеалов. Поэтому в любой алгебре R ее квазирегулярный радикал является полупервичным идеалом.

А это с очевидностью вытекает из следствия 5, предложения 2 и построения нижнего нильрадикала.

Учитывая следствия 5, 6 и предложения 1.4 и 2.3, естественно поставить вопрос о представлении квазирегулярного радикала в виде пересечения первичных идеалов некоторого специального вида. Ответ на этот вопрос тоже легко получается с помощью простых модулей.

Определение 4. Алгебра Q называется *примитивной* (справа), если существует точный простой Q -модуль *). Идеал P алгебры R называется *примитивным*, если фактор-алгебра R/P примитивна.

*) Таким образом, по определению все примитивные алгебры — ненулевые.

Предложение 3. *Идеал P алгебры R будет примитивным тогда и только тогда, когда P совпадает с аннулятором $(0 : M)_R$ некоторого простого правого R -модуля. Любая примитивная алгебра Q первична. Поэтому примитивные идеалы любой алгебры R являются первичными идеалами. В любой алгебре R ее квазирегулярный радикал $\mathcal{J}(R)$ совпадает с пересечением всех примитивных идеалов.*

Действительно, если $P = (0 : M)_R$ для некоторого простого правого R -модуля, то в силу следствий 1, 2 M будет точным простым R/P -модулем и потому P — примитивный идеал алгебры R по определению. Обратно, пусть P — примитивный идеал алгебры R . Тогда в силу определения 4 алгебра $\bar{R} = R/P$ имеет точный простой R/P -модуль M . Но тогда снова в силу следствий 1, 2 и леммы 1 M — простой R -модуль и $P = (0 : M)_R$. Следовательно, примитивные идеалы алгебры R и аннуляторы простых правых R -модулей — это одно и то же. Но тогда по самому определению квазирегулярного радикала в любой алгебре R квазирегулярный радикал $\mathcal{J}(R)$ совпадает с пересечением всех примитивных идеалов. Остается доказать, что любая примитивная алгебра Q первична или, что то же самое, что примитивные идеалы любой алгебры R являются первичными идеалами.

Пусть Q — примитивная алгебра. По определению существует точный простой правый Q -модуль M . Учитывая это, возьмем любые два ненулевые идеала B, C алгебры Q . Из точности M вытекает, что $MB \neq 0 \neq MC$. Но, как легко видеть, MB и MC — подмодули в M . Поэтому в силу простоты M , $MB = M = MC$. Но тогда и $MBC = M$. Поэтому $BC \neq 0$, и мы доказали, что любая примитивная алгебра Q первична.

Следствие 7. *Алгебра R $\mathcal{J}$ -радикальна тогда и только тогда, когда она не отображается гомоморфно на примитивные алгебры. Алгебра R $\mathcal{J}$ -полупроста тогда и только тогда, когда она является подпрямым произведением примитивных алгебр.*

Все это вытекает из равенства

$$\mathcal{J}(R) = \bigcap \{P \mid P \text{ — примитивный идеал алгебры } R\},$$

верного в силу предложения 3.

Квазирегулярный радикал был введен нами «внешним» образом — с помощью модулей. Чтобы дать «внутреннюю» характеристику, нам понадобится еще одно определение.

Пусть R — произвольная алгебра. Введем на множестве R еще одну операцию $\circ$, называемую *присоединенным умножением* (или «круговой» композицией), по следующему правилу: для любых элементов $x, y \in R$

$$x \circ y = x + y - xy. \quad (12)$$

Из правила (12) легко вытекает, что $R(\circ)$ — полугруппа с единицей 0. Если алгебра R имеет единицу e , то e будет нулем полугруппы $R(\circ)$, причем

$$x \circ y = e - (e - x)(e - y), \quad (13)$$

в силу (12).

Определение 5. Пусть R — алгебра. Элемент $x \in R$ называется *квазирегулярным справа*, если он обратим справа в полугруппе $R(\circ)$, т. е. $x \circ x' = 0$ для некоторого $x' \in R$. Аналогично определяется *квазирегулярный слева* элемент. Элемент $z \in R$ называется *квазирегулярным*, если он квазирегулярен и справа и слева. Идеал I алгебры R называется *квазирегулярным справа* (квазирегулярным слева, квазирегулярным) *идеалом*, если все его элементы квазирегулярны справа (квазирегулярны слева, квазирегулярны). Аналогично определяется понятие квазирегулярного (слева, справа) одностороннего идеала. Алгебра R называется *квазирегулярной*, если все ее элементы квазирегулярны.

Замечание 1. Нет необходимости определять понятие алгебры, квазирегулярной справа (или слева), так как для алгебры R равносильны условия:

- 1°. Все элементы алгебры R квазирегулярны справа.
- 2°. Все элементы алгебры R квазирегулярны слева.
- 3°. Все элементы алгебры R квазирегулярны.
- 4°. Полугруппа $R(\circ)$ является группой.

Все это легко вытекает из известных характеристик групп и того факта, что $R(\circ)$ — полугруппа с единицей 0, т. е. $x \circ 0 = x = 0 \circ x$ для всех $x \in R$.

Лемма 4. Для любого идеала I алгебры R равносильны утверждения:

- 1°. Идеал I квазирегулярен справа.
- 2°. Идеал I квазирегулярен слева.

3°. Идеал I квазирегулярен.

4°. Алгебра I квазирегулярна.

Доказательство. Импликация $4^\circ \Rightarrow 3^\circ$ очевидна в силу определения 5 или замечания 1. В силу определения 5 очевидны и импликации $3^\circ \Rightarrow 2^\circ$ и $3^\circ \Rightarrow 1^\circ$.

$1^\circ \Rightarrow 4^\circ$. Пусть идеал I квазирегулярен справа. По определению для любого элемента $x \in I$ найдется такой элемент $x' \in R$, что

$$x + x' - xx' = x \circ x' = 0. \quad (14)$$

Но из (14) вытекает, что $x' = xx' - x \in I$, так как $x \in I$ и I — идеал в алгебре R . Следовательно, все элементы алгебры I квазирегулярны справа. Но тогда алгебра I квазирегулярна в силу замечания 1.

$2^\circ \Rightarrow 4^\circ$. По симметрии.

Лемма доказана.

Предложение 4. В любой алгебре R квазирегулярный радикал $\mathcal{J}(R)$ является наибольшим квазирегулярным идеалом и содержит все правые идеалы, квазирегулярные справа.

Доказательство. В силу леммы 4 достаточно доказать, что идеал $\mathcal{J}(R)$ квазирегулярен справа и содержит все правые идеалы (идеалы), квазирегулярные справа. Это мы и будем доказывать.

Допустим, что идеал $\mathcal{J}(R)$ не квазирегулярен справа. Тогда по определению существует не квазирегулярный справа элемент $x \in \mathcal{J}(R)$. Но тогда $-x \notin P_x = \{y - xy \mid y \in R\}$. Ясно, что P_x — правый идеал алгебры R . Поэтому $x \notin P_x$.

Рассматривая R как правый R -модуль, получаем, очевидно, что подмодули в R — это в точности правые идеалы алгебры R . Учитывая это, рассмотрим множество следующих собственных подмодулей в правом R — модуле R :

$$\mathfrak{P} = \{P' \mid P' \text{ — подмодуль в } R, x \notin P', P' \supseteq P_x\}.$$

Ясно, что частично упорядоченное (относительно теоретико-множественного включения) множество $\mathfrak{P}$ непусто, так как $P_x \in \mathfrak{P}$, и индуктивно. Применяя лемму Кураковского — Цорна, строим максимальный элемент P в $\mathfrak{P}$.

По построению $x \notin P$. Кроме того, $y - xy \in P$ для всех $y \in R$, так как $P_x \subseteq P$. Но тогда, очевидно, $x^2 \notin P$. Кроме того, если I — подмодуль (т. е. правый идеал) в R и $I \supset P$, то $x \in I$ в силу максимальной P в множестве $\mathfrak{P}$.

Но тогда $y = (y - xy) + xy \in P_x + I \subseteq P + I = I$ для всех $y \in R$, т. е. $I = R$. Следовательно, P — максимальный собственный подмодуль в правом R -модуле R и $x^2 \notin P$.

Из доказанного вытекает, что фактор-модуль $M = R/P$ не имеет собственных подмодулей, причем $MR \neq 0$, так как $R^2 \not\subseteq P$. Поэтому M является простым правым R -модулем. Отсюда вытекает по построению квазирегулярного радикала $\mathcal{J}(R)$ и простого правого R -модуля M включение

$$\mathcal{J}(R) \subseteq (0 : M)_R = \{r \in R \mid R_r \subseteq P\} = P : R.$$

Вспоминая, что $x \in \mathcal{J}(R)$, получаем $Rx \subseteq P$ и потому $x^2 \in P$.

Получили противоречие. Следовательно, идеал $\mathcal{J}(R)$ квазирегулярен справа, а значит, и квазирегулярен в силу леммы 4.

Возьмем теперь любой правый идеал K алгебры R , квазирегулярный справа. Допустим, что $K \not\subseteq \mathcal{J}(R)$. Тогда по построению квазирегулярного радикала найдется такой простой правый R -модуль A , что $AK \neq 0$. Поэтому существует такой элемент $a \in A$, что $aK \neq 0$. Но, как легко видеть, aK — подмодуль в A , так как K — правый идеал алгебры R . Поэтому $aK = A$ в силу простоты A . В частности, $ak = a$ для некоторого $k \in K$. Но $k + k' = kk'$ для некоторого $k' \in R$ в силу квазирегулярности справа правого идеала K . Поэтому $ak + ak' = akk' = ak'$, что влечет $a = ak = 0$. Но тогда и $A = aK = 0$. Противоречие.

Следовательно, все правые идеалы алгебры R , квазирегулярные справа, содержатся в квазирегулярном радикале $\mathcal{J}(R)$ алгебры R .

Предложение доказано.

Следствие 8. Алгебра R $\mathcal{J}$ -радикальна тогда и только тогда, когда она квазирегулярна. Алгебра Q $\mathcal{J}$ -полупроста тогда и только тогда, когда она не имеет ненулевых квазирегулярных идеалов.

Это с очевидностью вытекает из определений, так как в любой алгебре R ее квазирегулярный радикал $\mathcal{J}(R)$ оказался наибольшим квазирегулярным идеалом в силу предложения 4.

Определение 3 квазирегулярного радикала «несимметрично»: оно использует правые модули. Чтобы учесть «сторону», назовем квазирегулярный радикал $\mathcal{J}(R)$ алгебры

R *правым квазирегулярным радикалом* и обозначим символом $\mathcal{J}_p(R)$. Таким образом, в любой алгебре R

$$\mathcal{J}_p(R) = \bigcap \{(0 : M)_R \mid M - \text{простой правый } R\text{-модуль}\}.$$

По симметрии, рассматривая простые левые R -модули, мы приходим к *левому квазирегулярному радикалу*

$$\mathcal{J}_\lambda(R) = \bigcap \{(0 : M)_R \mid M - \text{простой левый } R\text{-модуль}\}.$$

В результате получим ряд «симметричных» понятий: левый квазирегулярный радикал $\mathcal{J}_\lambda$ и правый квазирегулярный радикал $\mathcal{J}_p$, левая $\mathcal{J}$ -радикальность ($\mathcal{J}_\lambda(R) = R$) и правая $\mathcal{J}$ -радикальность ($\mathcal{J}_p(R) = R$), левая $\mathcal{J}$ -полупростота ($\mathcal{J}_\lambda(R) = 0$) и правая $\mathcal{J}$ -полупростота ($\mathcal{J}_p(R) = 0$), левая примитивность и правая примитивность, левая квазирегулярность и правая квазирегулярность. Среди этих понятий есть не инвариантные относительно симметрии «право-лево»: Бергман [1] показал, что существуют алгебры, примитивные справа, но не примитивные слева. Все остальные понятия инвариантны, как показывает

Предложение 5. *В любой алгебре R следующие множества совпадают:*

- а) Правый квазирегулярный радикал $\mathcal{J}_p(R)$.
- б) Наибольший правый квазирегулярный справа идеал алгебры R .
- в) Наибольший квазирегулярный справа идеал алгебры R .
- г) Наибольший квазирегулярный идеал алгебры R .
- д) Наибольший квазирегулярный слева идеал алгебры R .
- е) Наибольший левый квазирегулярный слева идеал алгебры R .
- ж) Левый квазирегулярный радикал $\mathcal{J}_\lambda(R)$.

Действительно, первые четыре множества (см. а) — г)) совпадают, как легко видеть, в силу предложения 4, а последние четыре множества (см. г) — ж)) — в силу утверждения, «симметричного» предложению 4: в любой алгебре R левый квазирегулярный радикал $\mathcal{J}_\lambda(R)$ является наибольшим квазирегулярным идеалом и содержит все левые идеалы, квазирегулярные слева. Так как среди этих множеств одно оказалось общим, то все семь множеств совпадают.

Учитывая предложение 5, говорим только о квазирегулярном радикале $\mathcal{J}$.

Следствие 9. В любой алгебре R квазирегулярный радикал $\mathcal{J}(R)$ содержит все односторонние квазирегулярные идеалы. Сумма любого множества квазирегулярных идеалов сама будет квазирегулярным идеалом. Сумма любого множества левых (правых) квазирегулярных слева (справа) идеалов сама будет левым (правым) квазирегулярным слева (справа) идеалом.

Все это вытекает из предложения 5, предложения 2, следствия 8 и леммы 4. Достаточно заметить, что любой односторонний идеал квазирегулярной алгебры сам будет квазирегулярной алгеброй.

Следствие 10. В любой алгебре R квазирегулярный радикал $\mathcal{J}(R)$ содержит все односторонние нильидеалы. Квазирегулярный радикал $\mathcal{J}$ и верхний нильрадикал $\mathcal{K}$ различны, т. е. существуют такие алгебры R , что $\mathcal{K}(R) \subsetneq \mathcal{J}(R)$.

Первое утверждение вытекает из следствий 5, 8 и 9, так как все нильалгебры являются $\mathcal{J}$ -радикальными алгебрами. Чтобы доказать второе утверждение, достаточно рассмотреть, в силу замечания 2.1, случай, когда основное кольцо Φ является полем. Но если Φ — поле, то алгебра $R = \Phi\{x\}$ формальных степенных рядов является ассоциативно-коммутативной алгеброй с единицей и без делителей нуля. Следовательно, верно равенство $\mathcal{K}(R) = 0$. С другой стороны, в силу (12) и (13) идеал xR квазирегулярен, так как все ряды вида $1 + xa$ обратимы. Но тогда $\mathcal{J}(R) = xR \neq 0$ в силу предложения 4. Следовательно, $\mathcal{K}(R) \subsetneq \mathcal{J}(R)$ для алгебры $R = \Phi\{x\}$.

§ 4. Нильалгебры с условиями обрыва

Выясним связь между построенными нильрадикалами $\mathcal{B}$, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{K}$ в алгебрах с некоторыми условиями конечности. При этом мы будем начинать рассмотрение с достаточно слабых условий, усиливая их по мере необходимости.

Для формулировки нужных условий нам необходимы понятия левого и правого аннуляторов.

Определение 1. Пусть S — непустое подмножество алгебры R . Множества

$$\begin{aligned} l_R(0, S) &= \\ &= \{z \in R \mid Sz = 0\}, \quad l_R(0, S) = \{z \in R \mid zS = 0\} \quad (1) \end{aligned}$$

называются соответственно *правым* и *левым аннулятором* S в R . Если ясно, о какой алгебре R идет речь, то мы будем применять более короткие обозначения $r(0, S)$, $l(0, S)$.

Из определения легко вытекает, что в любой алгебре R для любых непустых подмножеств B, C верны соотношения

$$B \subseteq C \Rightarrow (r(0, B) \supseteq r(0, C), l(0, B) \supseteq l(0, C)), \quad (2)$$

$$B \subseteq r(0, l(0, B)), C \subseteq l(0, r(0, C)), \quad (3)$$

$$r(0, l(0, r(0, C))) = r(0, C), \quad l(0, r(0, l(0, B))) = l(0, B). \quad (4)$$

А именно, соотношения (2) и (3) очевидны в силу равенств (1). Из соотношений (3) вытекает в силу произвольности B и C

$$r(0, C) \subseteq r(0, l(0, r(0, C))), \quad l(0, B) \subseteq l(0, r(0, l(0, B))). \quad (5)$$

С другой стороны, учитывая (2) и взяв соответствующие аннуляторы от правых и левых частей включений (3), получаем

$$l(0, B) \supseteq l(0, r(0, l(0, B))), \quad r(0, C) \supseteq r(0, l(0, r(0, C))). \quad (6)$$

А из включений (5) и (6) вытекают нужные нам равенства (4).

В дальнейшем мы будем применять соотношения (1) — (4) без особых оговорок, как и соотношения

$$\bigcap_{i \in I} r(0, S_i) = r\left(0, \bigcup_{i \in I} S_i\right), \quad \bigcap_{i \in I} l(0, S_i) = l\left(0, \bigcup_{i \in I} S_i\right).$$

Отметим только, что частично упорядоченные (относительно теоретико-множественного включения) множества правых и левых аннуляторов являются полными решетками. Эти полные решетки тесно взаимосвязаны, как показывает

Лемма 1. *В любой алгебре R правые аннуляторы являются правыми идеалами, левые аннуляторы — левыми идеалами, правые и левые аннуляторы идеалов сами являются идеалами. Соответствия*

$$C \mapsto r(0, C), \quad B \mapsto l(0, B)$$

устанавливают дуальный изоморфизм между полными

решетками левых и правых аннуляторов. При этом указанный изоморфизм переводит идеалы в идеалы (т. е. левые аннуляторы идеалов в правые аннуляторы соответствующих идеалов и наоборот).

Доказательство. Первое утверждение легко вытекает из определения 1. Например, если C — идеал алгебры R , то для любых $\alpha, \beta \in \Phi, z \in R$ получим

$$\begin{aligned} x, y \in r(0, C) &\Rightarrow \forall c \in C \mid cx = 0 = cy \Rightarrow \forall c \in \\ &\in C \mid c(\alpha x + \beta y) = \alpha(cx) + \beta(cy) = 0 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in r(0, C), \\ x \in r(0, C) &\Rightarrow Cx = 0 \Rightarrow Cxz = 0 \Rightarrow xz \in r(0, C), \\ y \in r(0, C) &\Rightarrow Cy = 0 \Rightarrow Czy \subseteq Cy = 0 \Rightarrow zy \in r(0, C), \end{aligned}$$

и потому $r(0, C)$ — идеал алгебры R . Далее указанные в формулировке соответствия между правыми и левыми аннуляторами обратны друг другу в силу (4). При этом в силу (2) и (4)

$$\begin{aligned} l(0, B_1) \subseteq l(0, B_2) &\Leftrightarrow r(0, l(0, B_1)) \supseteq r(0, l(0, B_2)), \\ r(0, C_1) \subseteq r(0, C_2) &\Leftrightarrow l(0, r(0, C_1)) \supseteq l(0, r(0, C_2)). \end{aligned}$$

Поэтому заданные соответствия являются обратными друг другу дуальными изоморфизмами полных решеток. Остальные утверждения леммы или вытекают из доказанных или доказываются аналогично.

Следствие 1. В любой алгебре R условие минимальности (максимальности) для левых аннуляторов равносильно условию максимальной (минимальности) для правых аннуляторов.

Следствие 2. В любой алгебре R условие минимальности (максимальности) для левых аннуляторов идеалов равносильно условию максимальной (минимальности) для правых аннуляторов идеалов.

Оба эти утверждения с очевидностью вытекают из леммы 1.

Следствие 3. В любой алгебре R равносильны условия:

- а) Алгебра R удовлетворяет и условию максимальной и условию минимальности для правых аннуляторов идеалов.
- б) Алгебра R удовлетворяет и условию максимальной и условию минимальности для левых аннуляторов идеалов.
- в) Алгебра R удовлетворяет условию максимальной и для правых и для левых аннуляторов идеалов.

г) Алгебра R удовлетворяет условию минимальности и для правых и для левых аннуляторов идеалов.

А это с очевидностью вытекает из следствия 2.

Определение 2. Скажем, что алгебра R удовлетворяет условию обрыва цепей аннуляторов идеалов, если верно хотя бы одно из утверждений а) — г) следствия 3, а значит, и все эти утверждения.

Теорема 1. Пусть алгебра R удовлетворяет условию обрыва цепей аннуляторов идеалов. Тогда:

1°. Сумма любого множества нильпотентных идеалов алгебры R сама будет нильпотентным идеалом в R .

2°. Нижний нильрадикал $\mathfrak{B}(R)$ алгебры R нильпотентен и является наибольшим нильпотентным идеалом алгебры R .

Доказательство. Пусть верно 1°. Тогда сумма Σ всех нильпотентных идеалов алгебры R будет наибольшим нильпотентным идеалом в R . Но в силу леммы 1.1 расширение нильпотентной алгебры с помощью нильпотентной алгебры само нильпотентно. Поэтому фактор-алгебра R/Σ не имеет нильпотентных ненулевых идеалов, т. е. полупервична. Но тогда в силу следствия 1.3 получаем равенство $\mathfrak{B}(R) = \Sigma$, и потому верно 2°. Остается доказать утверждение 1°.

Пусть $N = \sum_{i \in I} N_i$ — сумма некоторого множества $\{N_i | i \in I\}$ нильпотентных идеалов алгебры R . Нам нужно доказать, что идеал N нильпотентен. По условию и в силу следствия 3 алгебра R удовлетворяет и условию максимальности и условию минимальности для правых аннуляторов идеалов в силу определения 2. Но тогда для любого идеала A алгебры R и фактор-алгебра $R/r(0, A)$ удовлетворяет тем же условиям.

Действительно, возьмем любой идеал $\bar{B}$ алгебры $\bar{R} = R/r(0, A)$ и рассмотрим правый аннулятор $r(0, \bar{B})$. Обозначая образ элемента $x \in R$ при естественном гомоморфизме $R \rightarrow \bar{R}$ символом $\bar{x}$, получаем

$$\begin{aligned} r(0, \bar{B}) &= \{\bar{x} \in \bar{R} | \bar{B}\bar{x} = 0\} = \{\bar{x} \in \bar{R} | Bx \subseteq r(0, A)\} = \\ &= \{\bar{x} \in \bar{R} | ABx = 0\} = \{\bar{x} \in \bar{R} | x \in r(0, AB)\}, \end{aligned}$$

где B — полный прообраз идеала $\bar{B}$. Но тогда в алгебре $\bar{R}$ выполняются условие максимальности и условие минимальности для правых аннуляторов идеалов. Например, пусть $\{r(0, \bar{B}_j) | j \in \Gamma\}$ — непустое множество аннуляторов

идеалов в алгебре R . Ему соответствует непустое множество $\{r(0, AB_j) \mid j \in \Gamma\}$ правых аннуляторов идеалов в алгебре R . Но в последнем множестве есть максимальный элемент $r(0, AB)$. Тогда $(r(0, \bar{B}))$ будет максимальным среди $r(0, \bar{B}_j)$.

Учитывая сказанное и доказанное, возьмем любое целое число $p \geq 1$ и рассмотрим фактор-алгебру $R_{(p)} = R/r(0, N^p)$. Допустим, что идеал N не нильпотентен. Тогда $N^{k+1} \neq 0$ для любого целого $k \geq 1$. Но тогда и образ $\bar{N}$ идеала N при естественном гомоморфизме $R \rightarrow R_{(p)}$ будет ненильпотентным идеалом алгебры $R_{(p)}$, так как $N^{m+p} \neq 0$ для всех целых $m \geq 1$, т. е. $N^m \not\subseteq r(0, N^p)$. Кроме того, $\bar{N} = \sum_{i \in I} \bar{N}_i$ — сумма некоторого множества $\{\bar{N}_i \mid i \in I\}$ нильпотентных идеалов $\bar{N}_i$ алгебры $R_{(p)}$ — образов нильпотентных идеалов N_i .

Рассмотрим множество правых аннуляторов идеалов

$$\mathfrak{P} = \left\{ r\left(0, \sum_{i \in \Delta} \bar{N}_i\right) \mid \Delta \subseteq I, \Delta \text{ — конечно и непусто} \right\}.$$

В силу сказанного и доказанного $\mathfrak{P}$ имеет минимальный элемент. Пусть это будет

$$\bar{B} = r(0, \bar{M}), \text{ где } \bar{M} = \sum_{i \in \Delta_0} \bar{N}_i.$$

Ясно, что для любого $j \in I$ множество $\Delta_0 \cup \{j\}$ конечно и непусто, а для любого конечного и непустого $\Delta \subseteq I$ $r\left(0, \sum_{i \in \Delta} \bar{N}_i\right) = \bigcap_{i \in \Delta} r(0, \bar{N}_i)$. Поэтому из минимальности $\bar{B}$ в $\mathfrak{P}$ легко вытекает, что $\bar{B}$ — наименьший элемент в $\mathfrak{P}$, т. е.

$$r(0, \bar{M}) = \bar{B} = \bigcap_{i \in \Delta_0} r(0, \bar{N}_i) = \bigcap_{i \in I} r(0, \bar{N}_i) = r(0, \bar{N}). \quad (5)$$

По предположению $\bar{N}^2 \neq 0$, и потому $r(0, \bar{N}) \neq R_{(p)}$. Но тогда и $r(0, \bar{M}) \neq R_{(p)}$ в силу (5), и потому $\bar{M} \neq 0$. Следовательно, $\bar{M}^{m+1} = 0 \neq \bar{M}^m$ для некоторого целого $m \geq 1$, так как сумма любого конечного множества нильпотентных идеалов сама нильпотентна. Отсюда вытекает, что $r(0, \bar{M}) \neq 0$, а потому и $r(0, \bar{N}) \neq 0$ в силу (5). Переходя к прообразам при естественном гомоморфизме $R \rightarrow R_{(p)} = R/r(0, N^p)$, получаем

$$r(0, N^p) \subset r(0, N^{p+1}). \quad (6)$$

Итак, если идеал N не нильпотентен, то для всех целых $p \geq 1$ верно (6). А это противоречит условию максимальности для правых аннуляторов идеалов в R .

Теорема доказана.

Следствие 4. Если алгебра R удовлетворяет условию максимальности или минимальности для идеалов, то нижний нильрадикал $\mathfrak{B}(R)$ алгебры R нильпотентен и является наибольшим нильпотентным идеалом алгебры R .

Это с очевидностью вытекает из следствия 3, определения 2 и теоремы 1.

Рассмотренное нами условие обрыва достаточно слабое. Так как единственными аннуляторными идеалами в первичной алгебре R являются нулевой идеал 0 и тривиальный идеал R , то все первичные алгебры удовлетворяют условию обрыва цепей аннуляторов идеалов. Поэтому существуют локально нильпотентные не $\mathfrak{B}$ -радикальные и не локально нильпотентные нильалгебры, удовлетворяющие этому условию (см. теорему 2.1 и теорему — пример Голода).

Теорема 2. Пусть все гомоморфные образы алгебры R удовлетворяют условию максимальности или минимальности для правых аннуляторов. Тогда в алгебре R нижний нильрадикал $\mathfrak{B}(R)$, локально нильпотентный радикал $\mathcal{L}(R)$ и верхний нильрадикал $\mathcal{K}(R)$ совпадают. В частности, все нильидеалы в R $\mathfrak{B}$ -радикальны.

Доказательство. Достаточно доказать совпадение нижнего и верхнего нильрадикалов.

Переходим к образам при гомоморфизме $R \rightarrow \bar{R} = R/\mathfrak{B}(R)$. По условию алгебра $\bar{R}$ удовлетворяет условию максимальности или минимальности для правых аннуляторов. При этом $\mathfrak{B}(\bar{R}) = 0$, т. е. в алгебре $\bar{R}$ нет ненулевых нильпотентных идеалов. Остается доказать равенство $\mathcal{K}(\bar{R}) = 0$.

Допустим, что нужное нам равенство не верно. В силу следствия 1 алгебра $\bar{R}$ удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторов или условию максимальности для левых аннуляторов. Учитывая симметрию, мы можем считать, что в $\bar{R}$ выполнено условие максимальности для правых аннуляторов. Но тогда в непустом множестве $\{r(0, \bar{x}) \mid \bar{x} \in \mathcal{K}(\bar{R}), \bar{x} \neq 0\}$ правых аннуляторов должен быть максимальный элемент. Пусть это будет правый аннулятор $P_0 = r(0, \bar{x}_0)$, $\bar{x}_0 \in \mathcal{K}(\bar{R})$, $\bar{x}_0 \neq 0$.

Замечаем, что

$$\forall \bar{y}, \bar{z} \in \mathcal{K}(\bar{R}) \mid r(0, \bar{y}) = P_0 = r(0, \bar{z}) \Rightarrow \bar{y}\bar{z} = 0. \quad (7)$$

Действительно, пусть $\bar{y}, \bar{z} \in \mathcal{K}(\bar{R})$ и $r(0, \bar{y}) = P_0 = r(0, \bar{z})$. Если $\bar{z} = 0$, то $\bar{y}\bar{z} = 0$, и доказывать нечего. Если $\bar{z} \neq 0$, то найдется такое целое $s \geq 1$, что $\bar{z}^s \neq 0 = \bar{z}^{s+1}$ (так как $\mathcal{K}(\bar{R})$ — нильалгебра). Но тогда из очевидного включения $r(0, \bar{z}) \subseteq r(0, \bar{z}^s)$ следует равенство $r(0, \bar{z}) = P_0 = r(0, \bar{z}^s)$ в силу максимальности правого аннулятора $P_0 = r(0, \bar{z})$. Поэтому $\bar{z} \in r(0, \bar{z})$, так как включение $\bar{z} \in r(0, \bar{z}^s)$ верно по построению. Но тогда $\bar{z} \in P_0 = r(0, \bar{y})$, и мы снова получили равенство $\bar{y}\bar{z} = 0$.

Учитывая (7), возьмем любые $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{R}$. Если $\bar{a}\bar{x}_0 = 0$ или $\bar{b}\bar{x}_0 = 0$, то и $(\bar{a}\bar{x}_0)(\bar{b}\bar{x}_0) = 0$. Если же $\bar{a}\bar{x}_0 \neq 0 \neq \bar{b}\bar{x}_0$, то из очевидных включений $\bar{a}\bar{x}_0 \in \mathcal{K}(\bar{R})$, $r(0, \bar{a}\bar{x}_0) \supseteq r(0, \bar{x}_0) = P_0$ и максимальности P_0 вытекает равенство $r(0, \bar{a}\bar{x}_0) = P_0$. Аналогично и $r(0, \bar{b}\bar{x}_0) = P_0$. Но тогда в силу (7) снова получаем равенство $(\bar{a}\bar{x}_0)(\bar{b}\bar{x}_0) = 0$.

В силу произвольности выбора элементов $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{R}$ из доказанного легко вытекает, что элемент $\bar{x}_0 \neq 0$ порождает ненулевой нильпотентный левый идеал. Но тогда в алгебре $\bar{R}$ есть и ненулевой нильпотентный идеал. Противоречие.

Следовательно, $\mathcal{K}(\bar{R}) = 0$, т. е. $\mathcal{K}(R) = \mathfrak{B}(R)$.

Теорема доказана.

Следствие 5. Пусть алгебра R удовлетворяет условию максимальности или минимальности для правых идеалов. Тогда верно равенство $\mathfrak{B}(R) = \mathcal{L}(R) = \mathcal{K}(R)$, причем нильрадикал $\mathfrak{B}(R)$ является наибольшим нильпотентным идеалом алгебры R .

Это с очевидностью вытекает из теорем 1 и 2.

Совпадение нильрадикалов $\mathfrak{B}$, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{K}$ можно получить и при условиях, внешне далеких от условий обрыва.

Теорема 3. Пусть в алгебре R верно тождество вида

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1 x_2 \dots x_k + \sum_{\sigma} \alpha_{\sigma} x_{1\sigma} x_{2\sigma} \dots x_{k\sigma} = 0, \quad (8)$$

где $\alpha_{\sigma} \in \Phi$, а σ пробегает все перестановки чисел $\{1, 2, \dots, k\}$, отличные от тождественной. Тогда все нильподалгебры в R $\mathfrak{B}$ -радикальны. В частности, все нильрадикалы $\mathfrak{B}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{K}$ совпадут.

Действительно, достаточно доказать первое утверждение, так как второе из него вытекает. Но, очевидно, если в алгебре R верно тождество (8), то это тождество верно и в любой подалгебре алгебры R . Поэтому доказательство достаточно провести для нильалгебр.

Доказательство ведем индукцией по степени k полинома f .

Случай $k=1$ тривиален, так как тождество (8) принимает вид $x_1=0$, а этому тождеству удовлетворяет только нулевая алгебра.

Чтобы не начинать с тривиального случая, рассмотрим еще случай $k=2$. Тогда f принимает вид $x_1x_2=\alpha x_2x_1$ для некоторого $\alpha \in \Phi$. Но тогда, если a — нильпотентный элемент индекса m , то для любых $r_1, r_2, \dots, r_m \in R$ получим

$$r_1ar_2a \dots r_ma = \alpha r_1r_2a^2 \dots r_ma = \dots = \alpha^{m-1}r_1r_2 \dots r_ma^m = 0.$$

Поэтому каждый элемент нильалгебры R порождает левый нильпотентный идеал. Отсюда легко вытекает, что нильалгебра R $\mathfrak{B}$ -радикальна как сумма своих нильпотентных идеалов.

Пусть $n \geq 3$ и в нильалгебре R верно тождество, соответствующее полиному

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2 \dots x_n + \sum_{\sigma \neq \varepsilon} \beta_\sigma x_{1\sigma}x_{2\sigma} \dots x_{n\sigma}. \quad (9)$$

Представим полином g в виде

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1h(x_2, \dots, x_n) + q(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (10)$$

где в первое слагаемое $x_1h(x_2, \dots, x_n)$ мы собрали все одночлены, стоящие в правой части равенства (9) и начинающиеся с x_1 , а второе слагаемое q — сумма всех остальных одночленов. Ясно, что полином $h(x_2, \dots, x_n)$ имеет вид полинома f из (8) и его степень на единицу меньше степени полинома $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Пусть $\bar{R}$ — любой ненулевой гомоморфный образ алгебры R . Тогда в $\bar{R}$ есть такой элемент $\bar{a} \neq 0$, что $\bar{a}^2 = 0$. Но тогда в $\bar{R}$ есть ненулевые нильпотентные идеалы.

Действительно, допустим противное, т. е. допустим, что алгебра $\bar{R}$ полупервична. По выбранному элементу $\bar{a} \neq 0$ такому, что $\bar{a}^2 = 0$, строим левый идеал

$$A = R\bar{a}.$$

Ясно, что множество

$$\bar{B} = \{\bar{x} \in \bar{A} \mid \bar{a}\bar{x} = 0\} = \bar{A} \cap r(0, \bar{a})$$

является идеалом алгебры $\bar{A}$, причем $\bar{B}^2 = 0$.

Возьмем любые элементы $\bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n \in \bar{R}$. Сделав подстановку $x_1 \rightarrow \bar{a}$, $x_2 \rightarrow \bar{r}_2\bar{a}$, $\dots$, $x_n \rightarrow \bar{r}_n\bar{a}$, получаем в силу (11)

$$g(\bar{a}, \bar{r}_2\bar{a}, \dots, \bar{r}_n\bar{a}) = 0 = \\ = \bar{a}h(\bar{r}_2\bar{a}, \dots, \bar{r}_n\bar{a}) + q(\bar{a}, \bar{r}_2\bar{a}, \dots, \bar{r}_n\bar{a}),$$

так как $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ — тождество в алгебре R , а значит, и в алгебре $\bar{R}$. Но по построению все одночлены, входящие в полином $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, не начинаются с x_1 и потому содержат подслово вида $x_i x_1$ с $i \neq 1$. После подстановки получим $(\bar{r}_i\bar{a})\bar{a} = \bar{r}_i\bar{a}^2 = 0$, и потому $q(\bar{a}, \bar{r}_2\bar{a}, \dots, \bar{r}_n\bar{a}) = 0$. Но тогда $\bar{a}h(\bar{r}_2\bar{a}, \dots, \bar{r}_n\bar{a}) = 0$. В силу произвольности выбора элементов $\bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n \in \bar{R}$ получаем: в нильалгебре $\bar{A}/\bar{B}$ верно тождество $\bar{f} = 0$ вида (8) со степенью $\leq n-1$. По индукции получаем, что $\bar{A}/\bar{B}$ — $\mathfrak{B}$ -радикальная алгебра. Но тогда $\mathfrak{B}$ -радикальна и алгебра $\bar{A}$ как расширение $\mathfrak{B}$ -радикальной (нильпотентной!) алгебры $\bar{B}$ с помощью $\mathfrak{B}$ -радикальной алгебры $\bar{A}/\bar{B}$.

Итак, алгебра $\bar{A}$ $\mathfrak{B}$ -радикальна. Возьмем любой нильпотентный идеал $\bar{C}$ алгебры $\bar{A}$. Вспоминая, что $\bar{A} = \bar{R}\bar{a}$, получаем: $\bar{A}\bar{C}$ — нильпотентный левый идеал алгебры $\bar{R}$. Но по допущению алгебра $\bar{R}$ полупервична и потому не имеет односторонних ненулевых нильпотентных идеалов. Следовательно, $\bar{A}\bar{C} = 0$, т. е. $\bar{C} \subseteq r_{\bar{A}}(0, \bar{A})$. Отсюда вытекает, что $r_{\bar{A}}(0, \bar{A})$ — наибольший нильпотентный идеал алгебры $\bar{A}$. Но тогда, как легко видеть,

$$r_{\bar{A}}(0, \bar{A}) = \mathfrak{B}(\bar{A}) = \bar{A},$$

и потому $\bar{A}^2 = 0$. Еще раз учитывая полупервичность алгебры $\bar{R}$, получаем, что $\bar{A} = 0$, т. е. $\bar{R}\bar{a} = 0$. Следовательно, $\bar{a} \in r_{\bar{R}}(0, \bar{R})$. Но, очевидно, $r_{\bar{R}}(0, \bar{R})$ — идеал алгебры $\bar{R}$ и $(r_{\bar{R}}(0, \bar{R}))^2 = 0$. Поэтому снова в силу полупервичности алгебры $\bar{R}$ получим $r_{\bar{R}}(0, \bar{R}) = 0$. Но тогда $\bar{a} = 0$. Противоречие.

Итак, все ненулевые гомоморфные образы алгебры R имеют ненулевые нильпотентные идеалы. А это и означает, что алгебра R $\mathfrak{B}$ -радикальна.

Теорема доказана.

Если Φ — поле, то в любой алгебре с нетривиальным тождеством выполняется некоторое тождество вида (8). В частности, если R — конечномерная алгебра над полем, то $\mathfrak{B}(R) = \mathcal{L}(R) = \mathcal{K}(R)$ — наибольший нильпотентный идеал в R . Таким образом, в конечномерных алгебрах все нильрадикалы $\mathfrak{B}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{K}$ (и $\mathcal{J}$) совпадают с классическим нильпотентным радикалом.

ГЛАВА 2

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ РАДИКАЛОВ КОЛЕЦ И АЛГЕБР

Развитие структурной теории привело к появлению большого числа различных радикалов. Кроме радикалов $\mathcal{V}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{F}$, рассмотренных в предыдущей главе, в структурной теории ассоциативных алгебр применяются как близкие к ним радикалы (радикал Брауна — Маккоя, связанный с простыми алгебрами с единицей, компресивный радикал, связанный с алгебрами без нильпотентных элементов и др.), так и радикалы противоположного характера (идемпотентный и наследственно идемпотентный радикалы, связанные с идемпотентными алгебрами, регулярный радикал Неймана и др.). Все это вызвало необходимость построения общей теории радикалов.

Начало общей теории радикалов колец и алгебр было положено А. Г. Курошем в 1953 году. Почти одновременно аналогичные идеи были развиты Амицуrom. Ясность изложения и богатство идей основополагающей работы А. Г. Куроша дали толчок многочисленным исследованиям по теории радикалов колец, алгебр и других алгебраических систем, близких к кольцам и алгебрам. К настоящему времени теория радикалов развивается многими авторами и во многих направлениях. Основные направления общей теории радикалов колец и алгебр и будут отражены в настоящей главе.

Всюду ниже мы рассматриваем произвольные, не обязательно ассоциативные, алгебры над фиксированным ассоциативно-коммутативным кольцом Φ с единицей. Никаких других условий на основное кольцо Φ и алгебры над Φ не налагается, если противное не оговорено особо.

§ 1. Радикалы, радикальность и полупростота в смысле Куроша

Выберем и зафиксируем основной класс алгебр — произвольный класс $\mathfrak{A}$ алгебр, замкнутый относительно взятия идеалов и гомоморфных образов. Никаких других условий на основной класс $\mathfrak{A}$ не налагается, если противное не оговорено особо. Все рассматриваемые ниже алгебры — алгебры из класса $\mathfrak{A}$, а все рассматриваемые классы алгебр — абстрактные (т. е. замкнутые относительно изоморфизмов) подклассы в $\mathfrak{A}$, содержащие нулевую алгебру 0.

Определение 1. Пусть $\tau: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ — отображение класса $\mathfrak{A}$ в себя, ставящее в соответствие каждой алгебре R ее однозначно определенный идеал $\tau(R)$. Идеал I алгебры R называется τ -радикальным идеалом, если $\tau(I) = I$. Идеал T алгебры R называется τ -радикалом алгебры R , если T — наибольший τ -радикальный идеал алгебры R . Отображение $\tau: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ называется радикалом (в смысле Куроша), если выполнены следующие условия:

R1. Если $\varphi: A \rightarrow B$ — гомоморфизм алгебр, то $\varphi(\tau(A)) \subseteq \tau(\varphi(A))$.

R2. В любой алгебре R идеал $\tau(R)$ является τ -радикалом.

R3. Для любой алгебры R $\tau(R/\tau(R)) = 0$.

Определение 2. Пусть $\tau: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ — произвольный радикал (в классе $\mathfrak{A}$). Алгебра R называется τ -радикальной, если $\tau(R) = R$. Алгебра Q называется τ -полупростой, если $\tau(Q) = 0$. Класс всех τ -радикальных алгебр будем всегда обозначать символом $\mathcal{R}(\tau)$. Класс всех τ -полупростых алгебр будем всегда обозначать символом $\mathcal{P}(\tau)$.

Из определений легко вытекает, в силу предложений 1.1.2, 1.2.1 и 1.3.1, что рассмотренные в предыдущей главе радикалы $\mathfrak{B}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{K}$ и $\mathcal{J}$ являются радикалами в смысле Куроша. Обобщением соответствующих утверждений об этих конкретных радикалах является

Предложение 1. Пусть $\tau: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ — произвольный радикал. Тогда для любой алгебры R верны следующие утверждения:

а) Сумма любого множества τ -радикальных идеалов алгебры R сама будет τ -радикальным идеалом в R . Идеал $\tau(R)$ является наибольшим τ -радикальным идеалом алгебры

R и потому

$$\tau(R) = \sum \{T \mid T - \text{идеал алгебры } R, T \in \mathcal{R}(\tau)\}. \quad (1)$$

б) Пересечение любого множества таких идеалов P алгебры R , что фактор-алгебра R/P не имеет ненулевых τ -радикальных идеалов, само будет идеалом того же типа. Идеал $\tau(R)$ является наименьшим среди таких идеалов P алгебры R и потому

$$\tau(R) = \bigcap \{P \mid P - \text{идеал алгебры } R \mid R/P \in \mathcal{F}(\tau)\}. \quad (2)$$

в) Идеал $\tau(R)$ является единственным τ -радикальным идеалом алгебры R , фактор-алгебра по которому не имеет ненулевых τ -радикальных идеалов.

Доказательство. Пусть $\tau: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ — произвольный радикал. Заметим, прежде всего, что τ -радикальные алгебры, являющиеся идеалами алгебры R , и τ -радикальные идеалы алгебры R — это одно и то же в силу определений 1 и 2. Не менее очевидно в силу условия R2, что алгебры без ненулевых τ -радикальных идеалов и τ -полупростые алгебры — это одно и то же. Кроме того, конструкция радикала инвариантна относительно изоморфизмов: если $\theta: A \rightarrow B$ — изоморфизм алгебр, то из условия R1 легко вытекает равенство $\theta(\tau(A)) = \tau(\theta(A))$. Поэтому свойства τ -радикальности и τ -полупростоты сохраняются при изоморфизмах.

Учитывая все сказанное, возьмем любую алгебру R .

Пусть $T = \sum_{i \in \Gamma} T_i$ — сумма некоторого множества τ -радикальных идеалов алгебры R . Если множество Γ пусто, то по определению $T = 0$ и T будет τ -радикальным идеалом алгебры R , так как нулевая алгебра 0 τ -радикальна. Если же Γ непусто, то все T_i будут τ -радикальными идеалами алгебры T , так как все алгебры T_i τ -радикальны. Но тогда $\tau(T) \supseteq \sum_{i \in \Gamma} T_i = T$ в силу условия R2, т. е.

$T = \tau(T)$ — τ -радикальный идеал алгебры R .

Еще раз применяя условие R2, получаем равенство (1), так как идеал $\tau(R)$ является τ -радикалом — наибольшим τ -радикальным идеалом алгебры R .

Следовательно, верно утверждение а).

Пусть I — идеал алгебры R и фактор-алгебра R/I не имеет ненулевых τ -радикальных идеалов, т. е. τ -полу-

проста. Рассматривая естественный гомоморфизм $\varphi: R \rightarrow R/I$, получаем в силу условия R1, что $\varphi(r(R)) \subseteq r(\varphi(R)) = r(R/I) = 0$, т. е. $r(R) \subseteq I$. С другой стороны, $r(R/r(R)) = 0$ в силу условия R3. Поэтому верно равенство (2).

Пусть $P = \bigcap_{j \in \Delta} P_j$ — пересечение некоторого множества таких идеалов P_j алгебры R , что фактор-алгебра R/P_j r -полупроста. Если множество Δ пусто, то по определению $P = R$ и фактор-алгебра R/P r -полупроста, так как r -полупроста нулевая алгебра. Если же множество Δ непусто, то, переходя к фактор-алгебре $\bar{R} = R/P$, обозначим символом $\bar{P}_j$ образ идеала P_j . В силу теорем об изоморфизмах $R/P_j \simeq \bar{R}/\bar{P}_j$ для всех $j \in \Delta$, и потому все фактор-алгебры $\bar{R}/\bar{P}_j$ r -полупросты. Поэтому в силу доказанного выше $r(\bar{R}) \subseteq \bigcap_{j \in \Delta} \bar{P}_j = 0$, т. е. $r(\bar{R}) = 0$. Следовательно, фактор-алгебра R/P r -полупроста.

Таким образом, верно и утверждение б). А утверждение в) легко вытекает из а) и б).

Предложение доказано.

Следствие 1. Алгебра R r -радикальна тогда и только тогда, когда она не имеет ненулевых r -полупростых гомоморфных образов. Алгебра Q r -полупроста тогда и только тогда, когда она не имеет ненулевых r -радикальных идеалов.

Определение 3. Класс $\mathcal{R}$ алгебр называется *радикальным в смысле Куроша*, если $\mathcal{R}$ совпадает с классом $\mathcal{R}(r)$ всех r -радикальных алгебр для некоторого радикала r . Класс $\mathcal{P}$ алгебр называется *полупростым в смысле Куроша*, если $\mathcal{P}$ совпадает с классом $\mathcal{P}(\mathfrak{s})$ всех $\mathfrak{s}$ -полупростых алгебр для некоторого радикала $\mathfrak{s}$.

Из следствия 2 и предложения 1 вытекает, что радикал $r: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ однозначно «восстанавливается» по любому из классов $\mathcal{R}(r)$, $\mathcal{P}(r)$ (с помощью правил (1), (2)) и каждый из этих классов однозначно определяет другой. Поэтому радикалы r и $\mathfrak{s}$ в определении 3 однозначно определяются соответствующими классами. В связи с этим радикалы очень часто задают указанием соответствующего полупростого или радикального класса. Например, нижний нильрадикал $\mathfrak{N}$ соответствует полупростому классу всех алгебр без ненулевых нильпотентных идеалов, а верхний нильрадикал $\mathcal{H}$ — радикальному классу всех нильалгебр.

В силу сказанного, нам необходимы характеристики радикальных и полупростых классов алгебр. Начнем с характеристики радикальных классов.

Рассмотрим следующие условия, налагаемые на класс $\mathcal{K}$ алгебр:

A1. Гомоморфный образ алгебры из класса $\mathcal{K}$ сам будет алгеброй из класса $\mathcal{K}$.

A2. В любой алгебре R сумма $T = \sum_{i \in \Gamma} T_i$ любого множества идеалов, являющихся алгебрами из класса $\mathcal{K}$, сама будет алгеброй из класса $\mathcal{K}$.

A3. Если Σ — сумма всех идеалов алгебры R , являющихся алгебрами из $\mathcal{K}$, то фактор-алгебра R/Σ не имеет ненулевых идеалов, являющихся алгебрами из $\mathcal{K}$.

A4. В любой алгебре R объединение $T = \bigcup_{i \in \Gamma} T_i$ любой цепи идеалов, являющихся алгебрами из класса $\mathcal{K}$, само будет алгеброй из класса $\mathcal{K}$.

A5. Если B — идеал алгебры A , причем B и A/B — алгебры из класса $\mathcal{K}$, то и сама алгебра A будет алгеброй из $\mathcal{K}$.

Теорема 1. *Любой радикальный класс $\mathcal{K}$ алгебр удовлетворяет всем условиям A1—A5. Для любого класса $\mathcal{K}$ алгебр равносильны утверждения:*

1°. Класс $\mathcal{K}$ радикален в смысле Куроша.

2°. Класс $\mathcal{K}$ удовлетворяет условиям A1, A2 и A3.

3°. Класс $\mathcal{K}$ удовлетворяет условиям A1, A2 и A5.

4°. Класс $\mathcal{K}$ удовлетворяет условиям A1, A4 и A5.

Доказательство. Пусть класс $\mathcal{K}$ радикален в смысле Куроша и $\tau: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ — соответствующий радикал, т. е. $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\tau)$. Тогда из условия R1 легко вытекает, что класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно гомоморфных образов, т. е. удовлетворяет условию A1. Кроме того, в силу предложения 1 и следствия 1 класс $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\tau)$ удовлетворяет и условиям A2 и A3. Но тогда, очевидно, выполнено и условие A4 — ослабление условия A2.

Пусть B — идеал алгебры A , причем B и A/B — τ -радикальные алгебры. Тогда в силу условия R2 $B \subseteq \tau(A)$, так как B — τ -радикальный идеал алгебры A .

*) Напомним, что все рассматриваемые классы алгебр — абстрактные подклассы в $\mathfrak{A}$, содержащие нулевую алгебру 0.

Но тогда τ -полупростая, в силу условия R3, алгебра $A/\tau(A)$ будет τ -радикальной как гомоморфный образ τ -радикальной алгебры A/B . Следовательно, $A/\tau(A) = \tau(A/\tau(A)) = 0$, т. е. $A = \tau(A)$. Поэтому сама алгебра A τ -радикальна.

Следовательно, класс $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\tau)$ удовлетворяет всем условиям A1—A5.

С другой стороны, пусть $\mathcal{R}$ — произвольный класс алгебр.

1° $\Rightarrow$ 4°. Это вытекает из доказанного.

4° $\Rightarrow$ 3°. Пусть класс $\mathcal{R}$ удовлетворяет условиям A1, A4 и A5. Возьмем любую алгебру R . Идеал I алгебры R назовем для краткости $\mathcal{R}$ -радикальным, если алгебра I принадлежит классу $\mathcal{R}$.

Пусть A и B — $\mathcal{R}$ -радикальные идеалы алгебры R . Тогда алгебра $A+B$ будет расширением алгебры B из класса $\mathcal{R}$ с помощью алгебры $A+B/B \simeq A/A \cap B$. Но последняя алгебра тоже принадлежит классу $\mathcal{R}$ как гомоморфный образ алгебры A . Следовательно, $A+B$ — $\mathcal{R}$ -радикальный идеал алгебры R , в силу условия A5.

Из доказанного вытекает, что сумма любого конечного множества $\mathcal{R}$ -радикальных идеалов алгебры R сама будет $\mathcal{R}$ -радикальным идеалом в R .

Возьмем теперь сумму $T = \sum_{i \in \Gamma} T_i$ любого множества $\mathcal{R}$ -радикальных идеалов алгебры R . Если Γ конечно, то T будет $\mathcal{R}$ -радикальным идеалом алгебры R . Пусть Γ бесконечно. Тогда можно считать, что Γ совпадает с некоторым интервалом $\{i \mid 1 \leq i < \alpha\}$, где α — порядковое число. Для любого порядкового числа β с $1 < \beta \leq \alpha$ обозначим

$$T_{(\beta)} = \sum_{i < \beta} T_i.$$

Тогда очевидно, что все $T_{(\beta)}$ — идеалы алгебры R , причем они образуют цепь

$$T_1 = T_{(1)} \subseteq T_1 + T_2 = T_3 \subseteq \dots \subseteq T_{(\beta)} \subseteq T_{(\beta)} + T_\beta = T_{(\beta+1)} \subseteq \dots$$

и по построению $T = T_{(\alpha)}$. Но тогда по индукции легко получаем с помощью условия A4, что все $T_{(\beta)}$ — $\mathcal{R}$ -радикальные идеалы алгебры R . А именно, переход от $T_{(\gamma)}$ к $T_{(\gamma+1)}$ делается с помощью доказанного выше, а предельные переходы — с помощью условия A4. При $\beta = \alpha$

получаем, что T — алгебра из $\mathcal{R}$. А из доказанного вытекает, что класс $\mathcal{R}$ удовлетворяет условию A2.

$3^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Пусть класс $\mathcal{R}$ удовлетворяет условиям A1, A2 и A5.

Пусть Σ — сумма всех $\mathcal{R}$ -радикальных идеалов алгебры R . Из A2 вытекает, что Σ — наибольший $\mathcal{R}$ -радикальный идеал алгебры R . Учитывая это, возьмем любой $\mathcal{R}$ -радикальный идеал I алгебры $\bar{R} = R/\Sigma$. Переходя к прообразам, находим такой идеал I алгебры R , что $I \supseteq \Sigma$ и $I/\Sigma = I$. Но тогда I будет расширением алгебры Σ из класса $\mathcal{R}$ с помощью алгебры I из этого же класса. Поэтому в силу A5 I — $\mathcal{R}$ -радикальный идеал алгебры R . Поэтому $I = \Sigma$, т. е. $I = 0$.

Следовательно, класс $\mathcal{R}$ удовлетворяет условию A3.

$2^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Пусть класс $\mathcal{R}$ удовлетворяет условиям A1, A2, A3. Для любой алгебры R положим по определению

$$\tau(R) = \sum \{T \mid T \text{ — идеал } R, T \in \mathcal{R}\}. \quad (1')$$

Ясно, что $\tau(R)$ — наибольший $\mathcal{R}$ -радикальный идеал алгебры R в силу A2. Рассмотрим полученное отображение $\tau: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ основного класса алгебр в себя.

Из (1') вытекает, что алгебры из класса $\mathcal{R}$ и алгебры B , совпадающие с идеалом $\tau(B)$, — это одно и то же. Но тогда по построению отображение $\tau: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ удовлетворяет условию R2 определения τ -радикала, так как $\tau(R)$ — наибольший τ -радикальный (= $\mathcal{R}$ -радикальный) идеал алгебры R . А из A3 вытекает, что отображение $\tau: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ удовлетворяет и условию R3.

Пусть $\varphi: A \rightarrow B$ — гомоморфизм алгебр. В силу условия A1 $\varphi(\tau(A))$ — алгебра из класса $\mathcal{R}$, а значит и τ -радикальный идеал алгебры $\varphi(A)$. Но тогда $\varphi(\tau(A)) \subseteq \tau(\varphi(A))$ по построению. Следовательно, отображение $\tau: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ удовлетворяет и условию R1.

Таким образом, $\tau: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ — радикал, и потому $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\tau)$ — класс, радикальный в смысле Куроша.

Теорема доказана.

Прежде чем перейти к характеристике полупростых классов алгебр, укажем еще одну характеристику радикальных классов. Для этого введем некоторые обозначения.

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольный класс алгебр. Обозначим символом $\mathfrak{M}^{-1}$ класс всех тех и только тех алгебр, любой

ненулевой идеал которых не является алгеброй из класса $\mathfrak{M}$. Обозначим символом $^{-1}\mathfrak{M}$ класс всех тех и только тех алгебр, любой ненулевой гомоморфный образ которых не является алгеброй из класса $\mathfrak{M}$.

С помощью этих обозначений свяжем с классом $\mathfrak{M}$ следующие два класса:

$^{-1}(\mathfrak{M}^{-1})$ — класс всех тех и только тех алгебр, любой ненулевой гомоморфный образ которых имеет ненулевой идеал, являющийся алгеброй из класса $\mathfrak{M}$;

$(^{-1}\mathfrak{M})^{-1}$ — класс всех тех и только тех алгебр, любой ненулевой идеал которых имеет ненулевой гомоморфный образ, являющийся алгеброй из класса $\mathfrak{M}$.

Теорема 2. *Класс $\mathfrak{M}$ алгебр будет радикален в смысле Куроша тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условиям:*

K1. *Если R — алгебра из класса $\mathfrak{M}$, то любой ненулевой гомоморфный образ алгебры R имеет ненулевой идеал, являющийся алгеброй из $\mathfrak{M}$.*

K2. *Если любой ненулевой гомоморфный образ алгебры R имеет ненулевой идеал, являющийся алгеброй из $\mathfrak{M}$, то R — алгебра из класса $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. В наших обозначениях условие K1 равносильно включению $\mathfrak{M} \subseteq ^{-1}(\mathfrak{M}^{-1})$, а условие K2 — включению $\mathfrak{M} \supseteq ^{-1}(\mathfrak{M}^{-1})$. Поэтому нам надо доказать, что класс $\mathfrak{M}$ радикален в смысле Куроша тогда и только тогда, когда классы $\mathfrak{M}$ и $^{-1}(\mathfrak{M}^{-1})$ совпадают.

Пусть $\mathfrak{M}$ — класс, радикальный в смысле Куроша. По определению существует такой радикал $\gamma: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$, что класс $\mathfrak{M}$ совпадает с классом всех γ -радикальных алгебр. Но в силу следствия 1 класс $\mathcal{R}(\gamma)$ всех γ -радикальных алгебр и класс $\mathcal{P}(\gamma)$ всех γ -полупростых алгебр связаны соотношениями

$$\mathcal{R}(\gamma) = ^{-1}(\mathcal{P}(\gamma)), \quad \mathcal{P}(\gamma) = (\mathcal{R}(\gamma))^{-1}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{M} = \mathcal{R}(\gamma) = ^{-1}(\mathcal{P}(\gamma)) = ^{-1}((\mathcal{R}(\gamma))^{-1}) = ^{-1}(\mathfrak{M}^{-1}),$$

т. е. класс $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условиям K1 и K2.

Обратно, пусть класс $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условиям K1 и K2.

Пусть A — алгебра из $\mathfrak{M}$, $\bar{A}$ — гомоморфный образ алгебры A . Ясно, что любой гомоморфный образ алгебры

$\bar{A}$ является гомоморфным образом самой алгебры A . Поэтому в силу условия K1 любой ненулевой гомоморфный образ алгебры $\bar{A}$ имеет ненулевой идеал, являющийся алгеброй из $\mathfrak{M}$. Но тогда в силу K2 сама алгебра $\bar{A}$ будет алгеброй из класса $\mathfrak{M}$.

Следовательно, класс $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию A1.

Пусть $T = \sum_{i \in \Gamma} T_i$ — сумма некоторого множества идеалов T_i алгебры R , являющихся алгебрами из класса $\mathfrak{M}$. Возьмем любой гомоморфный образ $\bar{T}$ алгебры T . Если $\bar{T} \neq 0$, то, очевидно, гомоморфный образ $\bar{T}_i$ алгебры T_i будет ненулевым идеалом алгебры $\bar{T}$ для некоторого $i \in \Gamma$. Но в силу доказанного все $\bar{T}_i$ — алгебры из класса $\mathfrak{M}$. Поэтому в силу K2 $\bar{T}$ — алгебра из класса $\mathfrak{M}$.

Следовательно, класс $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию A2.

Пусть B — идеал алгебры A , причем B и A/B — алгебры из класса $\mathfrak{M}$. Возьмем любой ненулевой гомоморфный образ $\bar{A}$ алгебры A . Если образ $\bar{B}$ идеала B будет ненулевым, то $\bar{B}$ — ненулевой идеал алгебры $\bar{A}$, являющийся алгеброй из $\mathfrak{M}$. Если $\bar{B} = 0$, то алгебра $\bar{A}$ является гомоморфным образом алгебры A/B . Но тогда сама алгебра $\bar{A}$ будет ненулевым идеалом в $\bar{A}$, являющимся алгеброй из $\mathfrak{M}$. В силу K2 $A \in \mathfrak{M}$.

Следовательно, класс $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию A5.

Таким образом, класс $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условиям A1, A2, A5. В силу теоремы 1 класс $\mathfrak{M}$ радикален в смысле Куроша. Теорема доказана.

Теперь мы легко можем дать характеристику полупростых классов.

Теорема 3. Класс $\mathfrak{N}$ алгебр будет полупрост в смысле Куроша тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условиям:

*K*1. Если R — алгебра из класса $\mathfrak{N}$, то любой ненулевой идеал алгебры R гомоморфно отображается на ненулевые алгебры из класса $\mathfrak{N}$.*

*K*2. Если любой ненулевой идеал алгебры R гомоморфно отображается на ненулевые алгебры из класса $\mathfrak{N}$, то R — алгебра из класса $\mathfrak{N}$.*

Доказательство. В наших обозначениях условие K*1 равносильно включению $\mathfrak{N} \subseteq (-{}^1\mathfrak{N})^{-1}$, а условие K*2 — включению $\mathfrak{N} \supseteq (-{}^1\mathfrak{N})^{-1}$. Поэтому нам надо доказать, что

класс $\mathfrak{N}$ полупрост в смысле Куроша тогда и только тогда, когда $\mathfrak{N} = (-^1\mathfrak{N})^{-1}$.

Пусть $\mathfrak{N}$ — класс, полупростой в смысле Куроша. По определению существует такой радикал $\tau: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$, что $\mathfrak{N} = \mathcal{P}(\tau)$. Но тогда в силу следствия 1

$$\mathfrak{N} = \mathcal{P}(\tau) = (\mathcal{R}(\tau))^{-1} = (-^1(\mathcal{P}(\tau)))^{-1} = (-^1\mathfrak{N})^{-1},$$

и мы доказали, что класс $\mathfrak{N}$ удовлетворяет условиям K^*1 и K^*2 .

Обратно, пусть класс $\mathfrak{N}$ удовлетворяет условиям K^*1 и K^*2 , т. е. $\mathfrak{N} = (-^1\mathfrak{N})^{-1}$. Рассмотрим класс $\mathfrak{M} = -^1\mathfrak{N}$.

По построению, $\mathfrak{M}$ — класс всех алгебр, не отображающихся гомоморфно на ненулевые алгебры из класса $\mathfrak{N}$. Поэтому, как легко видеть, класс $\mathfrak{M}$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов. Но тогда, очевидно, класс $\mathfrak{M}$ удовлетворяет и условию $K1$.

Пусть любой ненулевой гомоморфный образ алгебры R имеет ненулевой идеал, являющийся алгеброй из $\mathfrak{M}$, т. е. не отображающийся гомоморфно на ненулевые алгебры из класса $\mathfrak{N}$. Тогда в силу условия K^*1 все ненулевые гомоморфные образы алгебры R не являются алгебрами из $\mathfrak{N}$. А это означает, что R — алгебра из класса $\mathfrak{M}$.

Следовательно, класс $\mathfrak{M}$ удовлетворяет и условию $K2$. В силу теоремы 2 класс $\mathfrak{M}$ радикален в смысле Куроша и потому $\mathfrak{M} = \mathcal{R}(\tau)$ для некоторого радикала τ . Но тогда в силу следствия 1

$$\mathfrak{N} = (-^1\mathfrak{N})^{-1} = \mathfrak{M}^{-1} = (\mathcal{R}(\tau))^{-1} = \mathcal{P}(\tau),$$

т. е. класс $\mathfrak{N}$ полупрост в смысле Куроша.

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 3 вытекает

Следствие 2. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольный класс алгебр, удовлетворяющий условию K^*1 , т. е. $\mathcal{M} \subseteq (-^1\mathcal{M}^{-1})$. Положим для любой алгебры R

$$S_{\mathcal{M}}(R) = \sum \{T \mid T \text{ — идеал в } R, T \in -^1\mathcal{M}\}. \quad (3)$$

Тогда отображение $S_{\mathcal{M}}: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ будет радикалом, причем верны утверждения:

а) Алгебра R $S_{\mathcal{M}}$ -радикальна тогда и только тогда, когда $R \in -^1\mathcal{M}$, т. е. когда алгебра R не отображается гомоморфно на ненулевые алгебры из класса $\mathcal{M}$.

б) Класс $\mathcal{P}(S_{\mathcal{M}})$ является наименьшим среди всех полупростых в смысле Куроша классов, содержащих класс $\mathcal{M}$.

в) Алгебра R $S_{\mathcal{M}}$ -полупроста тогда и только тогда, когда $R \in (-^1\mathcal{M})^{-1}$, т. е. когда все ненулевые идеалы алгебры R гомоморфно отображаются на ненулевые алгебры из класса $\mathcal{M}$.

Действительно, пусть класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию K^*1 . Тогда, как и при доказательстве теоремы 3, получаем, что класс $^{-1}\mathcal{M}$ радикален в смысле Куроша. Но тогда, в силу предложения 2 и следствия 1, отображение $S_{\mathcal{M}}: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$, определенное правилом (3), будет радикалом, соответствующим классу $^{-1}\mathcal{M}$, т. е. $\mathcal{R}(S_{\mathcal{M}}) = ^{-1}\mathcal{M}$. Поэтому верно утверждение а). Но тогда в силу следствия 1 $\mathcal{P}(S_{\mathcal{M}}) = (\mathcal{R}(S_{\mathcal{M}}))^{-1} = (-^1\mathcal{M})^{-1}$, и потому верно утверждение в). В частности, в силу условия K^*1 все алгебры из класса $\mathcal{M}$ будут $S_{\mathcal{M}}$ -полупросты. С другой стороны, пусть $\tau: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ — любой такой радикал, что все алгебры из класса $\mathcal{M}$ τ -полупросты, т. е. $\mathcal{P}(\tau) \supseteq \mathcal{M}$. Тогда в силу следствия 1 $\mathcal{P}(\tau) = (-^1\mathcal{P}(\tau))^{-1} \supseteq (-^1\mathcal{M})^{-1}$. Поэтому в силу в) верно и утверждение б): $\mathcal{P}(S_{\mathcal{M}})$ — наименьший полупростой в смысле Куроша класс, содержащий класс $\mathcal{M}$.

Определение 4. Если класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию K^*1 , то отображение $S_{\mathcal{M}}$ основного класса $\mathfrak{A}$ алгебр в себя, определенное правилом (3), называется *верхним радикалом, определенным классом $\mathcal{M}$* .

Конструкция верхнего радикала является одним из основных методов построения радикалов. Это вызвано тем, что верно

Следствие 3. Любой радикал τ совпадает с некоторым верхним радикалом $S_{\mathcal{M}}$ для подходящего класса $\mathcal{M}$ алгебр. Любой верхний радикал $S_{\mathcal{M}}$ является радикалом.

Действительно, второе утверждение вытекает из следствия 2 и определения 4. Кроме того, если τ — произвольный радикал, то в силу предложения 1 и следствия 1 класс $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\tau)$ удовлетворяет условию K^*1 , и радикал τ совпадает с верхним радикалом $S_{\mathcal{M}}$, определенным этим классом $\mathcal{M}$.

Сравнивая характеристики радикальных и полупростых классов, данные в теоремах 2 и 3, мы видим, что они связаны следующим образом: одно утверждение получается

из другого с помощью замены слов «идеал» на «гомоморфный образ», «радикальный» на «полупростой» и обратно. Такой же переход мы можем делать для условий, налагаемых на классы, для конструкций и т. д. Например, класс $\mathfrak{M}^{-1}$ переходит в класс $^{-1}\mathfrak{M}$ и обратно, класс $^{-1}(\mathfrak{M}^{-1})$ переходит в класс $(^{-1}\mathfrak{M})^{-1}$. В частности, теорема 2, сформулированная в виде: «Класс $\mathfrak{M}$ радикален в смысле Куроша тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} = ^{-1}(\mathfrak{M}^{-1})$ » переходит в теорему 3, сформулированную в виде: «Класс $\mathfrak{M}$ полупрост в смысле Куроша тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} = (^{-1}\mathfrak{M})^{-1}$ », условия A1 — A5 переходят, соответственно, в условия, налагаемые на класс $\mathcal{P}$:

A*1. Идеал алгебры из класса $\mathcal{P}$ сам будет алгеброй из $\mathcal{P}$.

A*2. В любой алгебре R пересечение $P = \bigcap_{j \in \Gamma} P_j$ любого множества таких идеалов P_j , что фактор-алгебры R/P_j принадлежат классу $\mathcal{P}$, само будет идеалом того же типа *).

A*3. Если Π — пересечение всех идеалов I алгебры R , таких, что R/I — алгебра из класса $\mathcal{P}$, то алгебра Π не отображается гомоморфно на ненулевые алгебры из $\mathcal{P}$.

A*4. В любой алгебре R пересечение $P = \bigcap_{j \in \Gamma} P_j$ любой цепи таких идеалов P_j , что фактор-алгебры R/P_j принадлежат классу $\mathcal{P}$, само будет таким же идеалом.

A*5 = A5. Если B — идеал алгебры A , причем B и A/B — алгебры из класса $\mathcal{P}$, то и сама алгебра A будет алгеброй из класса $\mathcal{P}$.

В связи с этим иногда говорят о «принципе двойственности»; очень часто, если верно некоторое утверждение $\mathcal{F}$ о радикальности или полупростоте, то верно и «двойственное» утверждение $\mathcal{F}^*$, полученное из $\mathcal{F}$ указанным способом. Так, например, теорема 2 и теорема 3 — «двойственные» друг другу утверждения. Однако в общем случае принцип двойственности не выполняется и потому может служить лишь для поиска верных утверждений и их доказательств, но не дает, как правило, точного доказательства. Ограничимся только одним примером.

Следствие 4. *Любой класс, полупростой в смысле Куроша, удовлетворяет условиям A*2 — A*5. Класс $\mathcal{P}$ по-*

*) Это равносильно замкнутости класса $\mathcal{P}$ относительно взятия подпрямых произведений (см. Курош, [5], гл. IV, § 5).

полупрост в смысле Куроша тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условиям K^*1 , A^*2 , A^*3 .

Действительно, в силу предложения 1 и следствия 1, если τ — радикал, то класс $\mathcal{P}(\tau)$ удовлетворяет условиям A^*2 , A^*3 , а значит и условию A^*4 . Кроме того, если B — идеал алгебры A и фактор-алгебра A/B τ -полупроста, то $\tau(A) \subseteq B$ в силу предложения 1, т. е. $\tau(A)$ — τ -радикальный идеал алгебры B . Поэтому, если τ -полупроста и алгебра B , то $\tau(A) = 0$ в силу следствия 1, т. е. сама алгебра A будет τ -полупроста. Таким образом, класс $\mathcal{P}(\tau)$ удовлетворяет и условию A^*5 . В частности, любой класс, полупростой в смысле Куроша, удовлетворяет условиям K^*1 , A^*2 и A^*3 в силу теоремы 3 и доказанного.

Обратно, пусть класс $\mathcal{P}$ удовлетворяет условиям K^*1 , A^*2 и A^*3 . Положим для любой алгебры R

$$\pi_{\mathcal{P}}(R) = \bigcap \{P \mid P \text{ — идеал в } R, R/P \in \mathcal{P}\} \quad (4)$$

и рассмотрим полученное отображение $\pi_{\mathcal{P}}: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$, замечая, что $\pi_{\mathcal{P}}(R)$ — идеал в R .

В силу следствия 2 отображение $S_{\mathcal{P}}: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ является радикалом, причем все алгебры из класса $\mathcal{P}$ будут $S_{\mathcal{P}}$ -полупросты и ${}^{-1}\mathcal{P} = \mathcal{R}(S_{\mathcal{P}})$. В силу предложения 1, для любой алгебры R верна импликация: если P — идеал алгебры R и $R/P \in \mathcal{P}$, то $P \supseteq S_{\mathcal{P}}(R)$. Поэтому в силу (4) $\pi_{\mathcal{P}}(R) \supseteq S_{\mathcal{P}}(R)$. С другой стороны, в силу условия A^*3 идеал $\pi_{\mathcal{P}}(R)$ будет $S_{\mathcal{P}}$ -радикальным и потому $\pi_{\mathcal{P}}(R) \subseteq S_{\mathcal{P}}(R)$. Следовательно, $\pi_{\mathcal{P}}(R) = S_{\mathcal{P}}(R)$ для любой алгебры R , и мы доказали, что отображение $\pi_{\mathcal{P}}$ является радикалом. Кроме того, в силу (4) и условия A^*2 $R/\pi_{\mathcal{P}}(R)$ — алгебра из класса $\mathcal{P}$ для любой алгебры R . Но тогда, еще раз применяя (4), получаем: алгебра R будет $\pi_{\mathcal{P}}$ -полупростой тогда и только тогда, когда R — алгебра из класса $\mathcal{P}$.

Следовательно, класс $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\pi_{\mathcal{P}})$ полупрост в смысле Куроша, что и требовалось доказать.

Мы не рассмотрели выполнение условия A^*1 , двойственного условию $A1$. Покажем, что, вообще говоря, класс, полупростой в смысле Куроша, может не быть замкнут относительно взятия идеалов (т. е. может не удовлетворять условию A^*1), хотя любой класс, радикальный в смысле Куроша, замкнут относительно взятия гомоморфных образов (т. е. удовлетворяет условию $A1$).

Предложение 2. Пусть основное кольцо Φ является полем, а основной класс $\mathfrak{A}$ совпадает с классом всех, не обязательно ассоциативных, алгебр над Φ . Тогда единственными классами, полупростыми в смысле Куроша и замкнутыми относительно взятия идеалов, являются нулевой класс $O = \{0\}$ и класс $\mathfrak{A}$ всех алгебр. Поэтому существуют классы, полупростые в смысле Куроша и не замкнутые относительно взятия идеалов.

Доказательство. Пусть τ — такой радикал, что класс $\mathcal{P}(\tau)$ замкнут относительно взятия идеалов и существует хотя бы одна ненулевая τ -полупростая алгебра A . Возьмем любую ненулевую алгебру B . Алгебры A и B выберем и зафиксируем. Из предложения 1 вытекает, что подпрямое произведение τ -полупростых алгебр само τ -полупросто. Но тогда очевидно, существуют ненулевые τ -полупростые алгебры с размерностью, большей любого наперед заданного кардинала n . Достаточно рассмотреть, например, прямые степени алгебры A и учесть, что $\dim A \geq 1$.

Выберем в алгебрах A и B базисы. Пусть базисами этих алгебр будут, соответственно, множества

$$\mathcal{B}(A) = \{a_i \mid i \in \Pi\}, \quad \mathcal{B}(B) = \{b_j \mid j \in \Gamma\}.$$

Учитывая сказанное выше, строим такую τ -полупростую алгебру C с базисом

$$\mathcal{B}(C) = \{c_k \mid k \in \Delta\},$$

что

$$\Delta \supseteq \Pi \times \Gamma = \{(i, j) \mid i \in \Pi, j \in \Gamma\}.$$

Строим линейное пространство D с базисом

$$\mathcal{B}(D) = \mathcal{B}(A) \cup \mathcal{B}(B) \cup \mathcal{B}(C),$$

считая, что множества A , B и C попарно не пересекаются (этого всегда можно добиться, переходя к изоморфным алгебрам). Превращаем линейное пространство D в алгебру, определяя произведение базисных элементов по следующим правилам:

а) Если $u \in \mathcal{B}(A)$, $v \in \mathcal{B}(A)$ и $uv \in \sum_i \alpha_i a_i$ в алгебре A , то $u \cdot v = \sum_i \alpha_i a_i$ и в алгебре D .

б) Если $u \in \mathcal{B}(B)$, $v \in \mathcal{B}(B)$, $uv = \sum_j \beta_j b_j$ в алгебре B , то $u \cdot v = \sum_j \beta_j b_j$ и в алгебре D .

в) Если $u \in \mathcal{B}(C)$, $v \in \mathcal{B}(C)$ и $uv = \sum_k \gamma_k c_k$ в алгебре C , то $u \cdot v = \sum_k \gamma_k c_k$ и в алгебре D .

г) Если $(i, j) \in \Pi \times \Gamma$, то $a_i \cdot c_{(i,j)} = b_j$, $c_{(i,j)} \cdot b_j = a_i$.

д) В остальных случаях, для базисных элементов u , v верно равенство $u \cdot v = 0$.

Рассмотрим построенную алгебру D .

По построению получаем, что $\mathcal{B}(A)$, $\mathcal{B}(B)$, $\mathcal{B}(C)$ порождают в алгебре D подалгебры, изоморфные алгебрам A , B и C , соответственно. Отождествляя изоморфные алгебры, мы можем считать, что сами алгебры A , B , C являются подалгебрами в алгебре D . Снова по построению, легко получаем, что $A + B = A \oplus B$ является идеалом в алгебре D и алгебра D является суммой

$$D = (A \oplus B) \dot{+} C$$

прямой суммы $A \oplus B$ алгебр A и B и подалгебры C . Замечаем, что построенная алгебра D τ -полупроста.

Действительно, пусть I — ненулевой идеал алгебры D . Если $I \cap (A \oplus B) = 0$, то алгебра I изоморфна ненулевому идеалу τ -полупростой алгебры C и потому не может быть τ -радикальной алгеброй. Пусть $I \cap (A \oplus B) \neq 0$. Тогда в I найдется ненулевой элемент вида

$$x = \sum_i \delta_i a_i + \sum_j \varepsilon_j b_j.$$

При этом $\delta_i \neq 0$ для некоторого $i \in \Pi$ или $\varepsilon_j \neq 0$ для некоторого $j \in \Gamma$.

Пусть существует такой $i_0 \in \Pi$, что $\delta_{i_0} \neq 0$. Тогда в силу правил в) и г) получаем

$$\forall j \in \Gamma \mid b_j = x \cdot (\delta_{i_0}^{-1} c_{(i_0, j)}) \in I.$$

Но тогда, еще раз применяя правила в) и г), получаем для любого $j \in \Gamma$

$$\forall i \in \Pi \mid a_i = c_{(i, j)} \cdot b_j \in I.$$

А из доказанного вытекает, что $I \supseteq A \oplus B$.

Пусть существует такой $j_0 \in \Gamma$, что $\varepsilon_{j_0} \neq 0$. Тогда, как и выше, получаем

$$\forall i \in \Pi \mid a_i = (\varepsilon_{j_0}^{-1} c(i, j_0)) \cdot x \in I,$$

и потому снова верно включению $I \supseteq A \oplus B$.

Итак, в обоих случаях мы получили включение $I \supseteq A \oplus B$.

Если $I = A \oplus B$, то алгебра I не τ -радикальна, так как она гомоморфно отображается на ненулевую τ -полупростую алгебру A .

Если $I \neq A \oplus B$, то $I \supset A \oplus B$, и потому алгебра I снова не τ -радикальна, так как она отображается на ненулевой идеал $I/A \oplus B$ τ -полупростой алгебры $D/A \oplus B \simeq C$.

Следовательно, алгебра D не имеет ненулевых τ -радикальных идеалов и потому τ -полупроста. Но по предположению любой идеал τ -полупростой алгебры сам будет τ -полупростой алгеброй. Поэтому τ -полупроста и прямая сумма $A \oplus B$. Но тогда τ -полупроста и алгебра B как идеал τ -полупростой алгебры $A \oplus B$.

В силу произвольности выбора алгебры B все алгебры τ -полупросты. Мы доказали первое утверждение предложения.

Остается доказать второе утверждение: существуют классы, полупростые в смысле Куроша и не замкнутые относительно взятия идеалов. В силу доказанного для этого достаточно привести пример полупростого класса, отличного от $O = \{0\}$ и $\mathcal{A}$. Для этого воспользуемся конструкцией верхнего радикала.

Пусть $\mathcal{M}$ — класс всех таких алгебр A , что $\dim A \leq 1$. Ясно, что класс $\mathcal{M}$ непуст и содержит хотя бы одну ненулевую алгебру (например, алгебру Φ). Не менее ясно, что класс $\mathcal{M}$ замкнут относительно взятия идеалов (и даже подалгебр), а потому, очевидно, удовлетворяет условию K^*1 . Переходя к соответствующему полупростому классу $\mathcal{P}(S_{\mathcal{M}}) = ({}^1\mathcal{M})^{-1}$, получаем: $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(S_{\mathcal{M}})$, и потому $\{0\} \neq \mathcal{P}(S_{\mathcal{M}})$, $\Phi_2 \notin \mathcal{P}(S_{\mathcal{M}})$, т. е. $\mathcal{P}(S_{\mathcal{M}}) \neq \mathcal{A}$. При этом мы учли, что алгебра Φ_2 всех 2×2 -матриц над Φ является простой алгеброй, и потому $\Phi_2 \in {}^1\mathcal{M}$, т. е. является $S_{\mathcal{M}}$ -радикальной алгеброй, так как $\dim \Phi_2 = 4$.

Предложение доказано.

В дальнейшем мы покажем, что в случае ассоциативных алгебр все классы, полупростые в смысле Куроша, замкнуты относительно взятия идеалов.

§ 2. Нижний радикал и цепи Куроша

Для радикалов естественно вводится частичный порядок. А именно, если нам даны два радикала r и s , то будем говорить, что *радикал r больше радикала s* (или *радикал s меньше радикала r* или r содержит s и т. д.), если в любой алгебре R верно включение $r(\mathcal{R}) \supseteq s(\mathcal{R})$. Порядок для радикалов естественно связан с теоретико-множественным включением для соответствующих полупростых или радикальных классов. Действительно, из определений и предложения 1.1 вытекает, что

$$\mathcal{R}(r) \supseteq \mathcal{R}(s) \Leftrightarrow r \geq s \Leftrightarrow \mathcal{P}(r) \subseteq \mathcal{P}(s) \quad (1)$$

для любых двух радикалов r и s . С помощью введенного порядка можно ввести обычным образом понятие объединения и пересечения радикалов. А именно, ясно, что наименьшим радикалом является нулевой радикал 0 ($0(A) = 0$ для любой алгебры A), а наибольшим радикалом — тривиальный радикал e ($e(A) = A$ для любой алгебры A). Считаем по определению, что объединение пустого семейства радикалов — нулевой радикал 0 , а пересечение пустого семейства радикалов — тривиальный радикал e . Если же семейство $\{r_i | i \in \Gamma\}$ радикалов непусто, то объединение $\bigvee_{i \in \Gamma} r_i$ и пересечение $\bigwedge_{i \in \Gamma} r_i$ — это

$$\text{такие радикалы, что для любых радикалов} \\ \delta \geq \bigvee_{i \in \Gamma} r_i \Leftrightarrow \forall i \in \Gamma | \delta \geq r_i, \quad u \leq \bigwedge_{i \in \Gamma} r_i \Leftrightarrow \forall i \in \Gamma | u \leq r_i. \quad (2)$$

Из определений легко вытекает

Предложение 1. *Класс всех радикалов является «полной решеткой», т. е. для любого семейства радикалов $\{r_i | i \in \Gamma\}$ существует объединение $\bigvee_{i \in \Gamma} r_i$ и пересечение*

$$\bigwedge_{i \in \Gamma} r_i.$$

*) Как и в § 1, все рассматриваемые алгебры — алгебры из основного класса $\mathfrak{A}$.

**) Семейство может не быть множеством,

Действительно, если семейство пусто, то доказывать нечего. Поэтому будем считать, что семейство $\{r_i | i \in \Gamma\}$ радикалов непусто.

В силу теоремы 1.1 радикальные классы в смысле Куроша — это в точности классы $\mathcal{R}$, удовлетворяющие условиям A1, A2, A5. Но тогда, как легко видеть, пересечение любого семейства классов, радикальных в смысле Куроша, само будет классом, радикальным в смысле Куроша. Поэтому существует такой радикал $r: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$, что $\mathcal{R}(r) = \bigcap_{i \in \Gamma} \mathcal{R}(r_i)$. Но тогда, из (1), (2) вытекает, что $r = \Delta_{i \in \Gamma} r_i$. Следовательно, пересечение любого семейства радикалов всегда существует, причем верно равенство

$$\mathcal{R}\left(\Delta_{i \in \Gamma} r_i\right) = \bigcap_{i \in \Gamma} \mathcal{R}(r_i). \quad (3)$$

Но тогда существует и объединение $\nabla_{i \in \Gamma} r_i$, так как оно совпадает с пересечением всех таких радикалов t , что $t \geq r_i$ для всех $i \in \Gamma$ (одним из таких радикалов t является тривиальный радикал e).

Предложение доказано.

Следствие 1. Пересечение любого семейства классов, радикальных в смысле Куроша, само будет классом, радикальным в смысле Куроша.

Это и утверждает равенство (3).

По «двойственности» между радикальностью и полупростотой естественно предположить, что пересечение любого семейства классов, полупростых в смысле Куроша, само будет полупростым в смысле Куроша. Однако это предположение оказывается ошибочным.

Предложение 2. Пусть основное кольцо Φ является полем, а основной класс $\mathfrak{A}$ совпадает с классом всех, не обязательно ассоциативных, алгебр над Φ . Пусть $\{\mathcal{P}_i | i \in \Gamma\}$ — непустое множество классов, полупростых в смысле Куроша, и $\mathcal{P} = \bigcap_{i \in \Gamma} \mathcal{P}_i$. Класс $\mathcal{P}$ полупрост в смысле Куроша тогда и только тогда, когда среди классов $\mathcal{P}_i$ есть наименьший, т. е. $\mathcal{P} = \mathcal{P}_i$ для некоторого $i \in \Gamma$. Поэтому пересечение классов, полупростых в смысле Куроша, может не быть классом, полупростым в смысле Куроша.

Доказательство. Рассмотрим сначала класс $\mathcal{P} = \bigcap_{i \in \Gamma} \mathcal{P}_i$. Допустим, что класс $\mathcal{P}$ полупрост в смысле

Куроша, но $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}_i$ для всех $i \in \Gamma$, т. е. среди классов $\mathcal{P}_i$ нет наименьшего. Тогда из соотношений $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}_i$ следует существование такого набора $\{A_i | i \in \Gamma\}$ алгебр, что для всех $i \in \Gamma$ верны следующие соотношения: $r_i(A_i) = 0$, $r(A_i) = R_i \neq 0$, где r_i — радикал, соответствующий классу $\mathcal{P}_i$, а r — радикал, соответствующий классу $\mathcal{P}$. Ясно, что для каждого i алгебра R_i не будет r_i -радикальной как ненулевой идеал r_i -полупростой алгебры A_i . Поэтому для всех $i \in \Gamma$ прямая сумма $R = \bigoplus_{i \in \Gamma} R_i$ не будет r_i -радикаль-

ной алгеброй. Пусть $\mathcal{B}(R)$ — базис алгебры R . Выберем несчетное множество X такое, что $X \cap R = \emptyset$, $X \supseteq \mathcal{B}(R) \times \mathcal{B}(R)$. По множеству X строим абсолютно свободную (неассоциативную!) алгебру F с множеством X свободных образующих. Хорошо известно, что F — алгебра без делителей нуля. Но тогда обозначая символом $|M|$ мощность множества M , а символом $\mathcal{B}(F)$ — базис алгебры F (множество всех неассоциативных слов над алфавитом X), легко получаем для любого ненулевого идеала I равенство

$$\dim F = |\mathcal{B}(F)| = |X| = \dim I. \quad (4)$$

Строим теперь прямую сумму линейных пространств

$$G = R \dot{+} F \quad (5)$$

и превращаем линейное пространство G в алгебру с базисом $\mathcal{B}(R) \cup \mathcal{B}(F)$, доопределяя умножение базисных элементов правилами: если $w \in \mathcal{B}(F)$, $e \in \mathcal{B}(R)$, то $we = 0$; $ew = a$, если $w = (e, a)$, $a \in \mathcal{B}(R)$; $ew = 0$ в остальных случаях.

Из построения алгебры G с помощью несложных вычислений вытекает, что G — подпрямо неразложимая алгебра, ее сердцевиной (наименьшим ненулевым идеалом) является алгебра R , причем $G/R \simeq F$, в силу (5).

Поскольку F — свободная алгебра, из неравенства $|X| \geq \dim R$, верного по построению, вытекает, что R — гомоморфный образ алгебры F . Но тогда для любого $i \in \Gamma$ алгебра F не r_i -радикальна, так как не r_i -радикальна алгебра $R = \bigoplus_{i \in \Gamma} R_i$. Но, как хорошо известно,

любая ненулевая подалгебра в F сама будет абсолютно свободной алгеброй*), и абсолютно свободная алгебра

*) См. Курош [1, 3].

определяется, с точностью до изоморфизма, мощностью множества свободных образующих. Поэтому в силу (4) все ненулевые идеалы алгебры F будут абсолютно свободными алгебрами, изоморфными алгебре F . А из этого вытекает, что для любого $i \in \Gamma$ в алгебре F нет ненулевых r_i -радикальных идеалов, т. е. алгебра F r_i -полупроста для всех $i \in \Gamma$.

Из равенства $r_i(F) = 0$ вытекает включение $r_i(G) \subseteq R$, так как алгебры F и G/R изоморфны. Но алгебра R не r_i -радикальна. Следовательно, $r_i(G) \subset G$, а это влечет равенство $r_i(G) = 0$, так как R — сердцевиной подпрямо неразложимой алгебры G .

Итак, мы доказали, что $r_i(G) = 0$ для всех $i \in \Gamma$, т. е. $G \in \bigcap_{i \in \Gamma} \mathcal{P}_i = \mathcal{P}$. Следовательно, алгебра G r -полупроста.

Между тем, по построению, R — ненулевой идеал алгебры G , и алгебра R r -радикальна как прямая сумма r -радикальных алгебр $R_i = r(A_i)$. Противоречие.

Из доказанного вытекает первое утверждение: пересечение $\mathcal{P} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{P}_i$ непустого множества классов, полупростых в смысле Куроша, будет классом, полупростым в смысле Куроша, тогда и только тогда, когда среди классов $\mathcal{P}_i$ есть наименьший, т. е. $\mathcal{P} = \mathcal{P}_i$ для некоторого $i \in \Gamma$.

Для окончания доказательства остается построить множество $\{\mathcal{P}_i | i \in \Gamma\}$ классов, полупростых в смысле Куроша, в котором нет наименьшего. Но существование таких множеств легко доказывается с помощью конструкции верхнего радикала *). Предложение доказано.

Вернемся к рассмотрению «полной решетки» радикалов.

Определение 1. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольный класс алгебр. *Нижним радикалом* $l_{\mathcal{M}}$, *порожденным классом* $\mathcal{M}$, называется наименьший среди всех таких радикалов r , что все алгебры из класса $\mathcal{M}$ r -радикальны.

Из определения 1 и следствия 1 вытекает

Следствие 2. Для любого класса $\mathcal{M}$ алгебр нижний радикал $l_{\mathcal{M}}$ существует. При этом, если $\bar{\mathcal{M}}$ — класс всех алгебр, являющихся гомоморфными образами алгебр из класса $\mathcal{M}$, то $l_{\mathcal{M}} = l_{\bar{\mathcal{M}}}$.

*) Достаточно применить, например, конструкцию верхнего радикала к несравнимым классам простых алгебр.

Действительно, в силу определения 1 и соотношений (1) $\mathcal{R}(l_{\mathcal{M}})$ — это наименьший радикальный в смысле Куроша класс алгебр, содержащий $\mathcal{M}$. А чтобы получить этот класс, достаточно, в силу следствия 1, взять пересечение всех классов, радикальных в смысле Куроша, содержащих класс $\mathcal{M}$. Поэтому нижний радикал $l_{\mathcal{M}}$ существует. Равенство $l_{\mathcal{M}} = l_{\overline{\mathcal{M}}}$ с очевидностью вытекает из сказанного, так как для любого класса $\mathcal{R}$, радикального в смысле Куроша, включения $\mathcal{R} \supseteq \mathcal{M}$ и $\mathcal{R} \supseteq \overline{\mathcal{M}}$ равносильны в силу замкнутости класса $\mathcal{R}$ относительно гомоморфных образов.

Однако построение нижнего радикала $l_{\mathcal{M}}$, указанное выше, слишком неконструктивно. Укажем более конструктивное построение, основанное на характеристике классов, радикальных в смысле Куроша, данной в теореме 1.2. Достаточно построить класс $\mathcal{R}(l_{\mathcal{M}})$ для классов $\mathcal{M}$, замкнутых относительно гомоморфных образов, в силу следствия 2.

Пусть $\mathcal{M}$ — произвольный класс алгебр, замкнутый относительно гомоморфных образов. Идеал B алгебры A будем называть (как и в теореме 1.1) $\mathcal{M}$ -радикальным, если B — алгебра из класса $\mathcal{M}$. Сумму всех $\mathcal{M}$ -радикальных идеалов алгебры A обозначим символом $\Sigma_{\mathcal{M}}(A)$. Таким образом, равенство $\Sigma_{\mathcal{M}}(A) = 0$ равносильно тому, что алгебра A не имеет ненулевых $\mathcal{M}$ -радикальных идеалов, т. е. $A \in \mathcal{M}^{-1}$.

Для произвольной алгебры R строим по индукции цепь идеалов

$$0 = \Sigma_{\mathcal{M}}^{(0)}(R) \subseteq \Sigma_{\mathcal{M}}^{(1)}(R) \subseteq \dots \subseteq \Sigma_{\mathcal{M}}^{(\alpha)}(R) \subseteq \dots, \quad (6)$$

где α пробегает все порядковые числа, полагая

$$\Sigma_{\mathcal{M}}^{(\alpha+1)}(R) / \Sigma_{\mathcal{M}}^{(\alpha)}(R) = \Sigma_{\mathcal{M}}(R / \Sigma_{\mathcal{M}}^{(\alpha)}(R)) \quad (7)$$

для любого порядкового числа α^* и

$$\Sigma_{\mathcal{M}}^{(\mu)}(R) = \bigcup_{\alpha < \mu} \Sigma_{\mathcal{M}}^{(\alpha)}(R), \quad (8)$$

*) Таким образом, $\Sigma_{\mathcal{M}}^{(\alpha+1)}(R)$ — это прообраз идеала $\Sigma_{\mathcal{M}} \times (R / \Sigma_{\mathcal{M}}^{(\alpha)}(R))$ при естественном гомоморфизме $R \rightarrow R / \Sigma_{\mathcal{M}}^{(\alpha)}(R)$.

если μ — предельное. Как и при построении нижнего нильрадикала (см. § 1 предыдущей главы), легко получаем в силу правил (7) и (8), что для любого порядкового числа α верно соотношение

$$\Sigma_{\mathcal{M}}^{(\alpha)}(R) = \Sigma_{\mathcal{M}}^{(\alpha+1)}(R) \Rightarrow \forall \beta \geq \alpha \mid \Sigma_{\mathcal{M}}^{(\alpha)}(R) = \Sigma_{\mathcal{M}}^{(\beta)}(R). \quad (9)$$

Но тогда, если τ — порядковое число с мощностью строго большей мощности $|R|$ множества R , то цепь (6) стабилизируется на некотором шаге $\alpha \leq \tau$, т. е.

$$\sigma_{\mathcal{M}}(R) = \bigcup_{\alpha \geq 0} \Sigma_{\mathcal{M}}^{(\alpha)}(R) = \Sigma_{\mathcal{M}}^{(\tau)}(R). \quad (10)$$

В результате мы получили некоторое отображение $\sigma_{\mathcal{M}}: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ основного класса $\mathfrak{A}$ алгебр в себя*). Это отображение обладает рядом свойств, сближающих его с радикалами, как показывает

Предложение 3. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольный класс алгебр, замкнутый относительно гомоморфных образов. Тогда отображение $\sigma_{\mathcal{M}}$ удовлетворяет требованиям R1 и R3 из определения радикала. При этом в любой алгебре R верно равенство

$$\sigma_{\mathcal{M}}(R) = \bigcap \{R \mid P \text{ — идеал в } R, R/P \in \mathcal{M}^{-1}\}. \quad (11)$$

Кроме того, в любой алгебре A

$$\sigma_{\mathcal{M}}(\sigma_{\mathcal{M}}(A)) = \sigma_{\mathcal{M}}(A).$$

Для любой алгебры R равносильны утверждения:

- а) Алгебра R $\sigma_{\mathcal{M}}$ -радикальна, т. е. $R = \sigma_{\mathcal{M}}(R)$.
- б) $R \in {}^{-1}(\mathcal{M}^{-1})$, т. е. любой ненулевой гомоморфный образ алгебры R имеет ненулевой $\mathcal{M}$ -радикальный идеал.
- в) Существует идеальный ряд**) алгебры R , все факторы которого принадлежат классу $\mathcal{M}$.

Доказательство. Пусть R — произвольная алгебра. Из правил (6) — (10) вытекает равенство

$$\Sigma_{\mathcal{M}}(R/\sigma_{\mathcal{M}}(R)) = \Sigma_{\mathcal{M}}(R/\Sigma_{\mathcal{M}}^{(\tau)}(R)) = \Sigma_{\mathcal{M}}^{(\tau+1)}(R)/\Sigma_{\mathcal{M}}^{(\tau)}(R) = 0,$$

*) При построении нижнего нильрадикала соответствующее отображение оказывалось радикалом $\mathfrak{N}$.

**) Идеальный ряд — это цепь идеалов $0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_{\alpha} \subseteq A_{\alpha+1} \subseteq \dots \subseteq A_{\gamma} = R$, где α — порядковые числа и на предельных местах стоят объединения всех предшествующих идеалов. Факторы — это фактор-алгебры $A_{\alpha+1}/A_{\alpha}$.

и потому фактор-алгебра $R/\sigma_{\mathcal{M}}(R)$ не имеет ненулевых $\mathcal{M}$ -радикальных идеалов. В частности, $\sigma_{\mathcal{M}}(R/\sigma_{\mathcal{M}}(R)) = 0$, и мы доказали, что отображение $\sigma_{\mathcal{M}}$ удовлетворяет требованию R3. С другой стороны, пусть P — любой такой идеал алгебры R , что фактор-алгебра R/P не имеет ненулевых $\mathcal{M}$ -радикальных идеалов. Из замкнутости класса $\mathcal{M}$ относительно гомоморфных образов вытекает, что при $\alpha = 0, 1$ верно включение $\Sigma_{\mathcal{M}}^{(\alpha)}(R) \subseteq P$. Но тогда, по индукции, это включение верно для всех α , и потому $\sigma_{\mathcal{M}}(R) \subseteq P$. А из доказанного вытекает верность равенства (11) и то, что $\sigma_{\mathcal{M}}(R)$ — наименьший среди указанных идеалов P . А из этого легко вытекает, что отображение $\sigma_{\mathcal{M}}$ удовлетворяет требованию R1.

Утверждения а) и б) равносильны в силу равенства (11).

Пусть любой ненулевой гомоморфный образ алгебры R имеет ненулевой идеал, являющийся алгеброй из класса $\mathcal{M}$, т. е. $\mathcal{M}$ -радикальный идеал. Если $R \neq 0$, то в самой алгебре R есть ненулевой $\mathcal{M}$ -радикальный идеал R_0 . Если $R \neq R_0$, то в фактор-алгебре R/R_0 есть ненулевой $\mathcal{M}$ -радикальный идеал. Переходя к прообразам, находим такой идеал R_1 в R , что $R_0 \subset R_1$ и фактор-алгебра R_1/R_0 принадлежит классу $\mathcal{M}$. Продолжая процесс, мы строим по индукции идеальный ряд $R_0 \subset R_1 \subset \dots \subset R_\alpha \subset R_{\alpha+1} \subset \dots$, все факторы $R_{\alpha+1}/R_\alpha$ которого являются алгебрами из класса $\mathcal{M}$. Так как процесс должен закончиться на некотором шаге (на предельных местах берем объединение всех предшествующих членов), то алгебра R имеет идеальный ряд

$$0 \subseteq R_0 \subseteq R_1 \subseteq \dots \subseteq R_\alpha \subseteq R_{\alpha+1} \subseteq \dots \subseteq R_\nu = R, \quad (13)$$

все факторы которого принадлежат классу $\mathcal{M}$.

Обратно, пусть алгебра R имеет идеальный ряд (13) такой, что все факторы $R_{\alpha+1}/R_\alpha$ — алгебры из класса $\mathcal{M}$. Возьмем любой ненулевой гомоморфный образ $\bar{R}$ алгебры R . Тогда существуют такие порядковые числа α , что образ $\bar{R}_\alpha$ идеала R_α отличен от нуля. Пусть β — наименьшее среди таких порядковых чисел. Если $\beta = 0$, то в силу замкнутости класса $\mathcal{M}$ относительно гомоморфных образов $\bar{R}_0$ будет ненулевым $\mathcal{M}$ -радикальным идеалом алгебры $\bar{R}$. Если $\beta \neq 0$, то, как легко видеть, β — непредельное, так как в ряде (13) на предельных местах стоят объединения всех предшествующих членов. Но тогда $\beta = \alpha + 1$, $\bar{R}_\alpha = 0$

и $R_{\alpha+1} \neq 0$. Отсюда вытекает, что $R_{\alpha+1}$ — ненулевой $\mathcal{M}$ -радикальный идеал алгебры $\bar{R}$ как гомоморфный образ алгебры $R_{\alpha+1}/R_\alpha$. Следовательно, любой ненулевой гомоморфный образ алгебры R имеет ненулевой $\mathcal{M}$ -радикальный идеал.

Поэтому равносильны утверждения б) и в).

Таким образом, утверждения а), б) и в) равносильны. Учитывая это, возьмем любую алгебру A . По построению отображения $\sigma_{\mathcal{M}}$ алгебра $\sigma_{\mathcal{M}}(A)$ имеет идеальный ряд с факторами $\Sigma_{\alpha+1}/\Sigma_\alpha = \Sigma_{\mathcal{M}}(A/\Sigma_\alpha)$. Расписывая теперь шаг от идеала Σ_α к идеалу $\Sigma_{\alpha+1}$, в ряд шагов, состоящих в прибавлении одного $\mathcal{M}$ -радикального идеала в алгебре A/Σ_α , получаем, как легко видеть, идеальный ряд алгебры $\sigma_{\mathcal{M}}(A)$ с факторами из класса $\mathcal{M}$. Но тогда в силу доказанного верно равенство (12).

Предложение доказано.

Определение 2. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольный класс алгебр, замкнутый относительно гомоморфных образов. *Цепью Куроша*, соответствующей классу $\mathcal{M}$, называется цепь классов

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^{(0)} \subseteq \mathcal{M}^{(1)} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{M}^{(\alpha)} \subseteq \mathcal{M}^{(\alpha+1)} \subseteq \dots, \quad (14)$$

где α пробегает все порядковые числа, такая, что

$$\mathcal{M}^{(1)} = \mathcal{R}(\sigma_{\mathcal{M}}) = {}^1(\mathcal{M}^{-1}) \quad (15)$$

и для любого порядкового числа $\beta > 1$

$$\mathcal{M}^{(\beta)} = \left(\bigcup_{\alpha < \beta} \mathcal{M}^{(\alpha)} \right)^{(1)}. \quad (16)$$

Предложение 4. Пусть (14) — цепь Куроша, соответствующая классу $\mathcal{M}$, замкнутому относительно гомоморфных образов. Тогда все члены этой цепи тоже замкнуты относительно гомоморфных образов, а класс

$$\mathcal{M}^{(*)} = \bigcup_{\alpha \geq 0} \mathcal{M}^{(\alpha)} \quad (17)$$

— наименьший радикальный в смысле Куроша класс алгебр, содержащий класс $\mathcal{M}$, т. е. $\mathcal{M}^{(*)} = \mathcal{R}(l_{\mathcal{M}})$.

Действительно, то, что все классы $\mathcal{M}^{(\alpha)}$ замкнуты относительно гомоморфных образов, легко вытекает из предложения 3 по индукции. Но тогда, очевидно, и класс $\mathcal{M}^{(*)}$ будет замкнут относительно гомоморфных образов. Следовательно, класс $\mathcal{M}^{(*)}$ удовлетворяет и условию K1 теоремы 1.2.

С другой стороны, пусть R такая алгебра, что любой ненулевой гомоморфный образ $\bar{R}$ алгебры R имеет ненулевой идеал $\bar{A}$, являющийся алгеброй из $\mathcal{M}^{(*)}$. Возьмем любой собственный идеал I алгебры R . Тогда, по предположению, в фактор-алгебре R/I есть ненулевой идеал $A/I \in \mathcal{M}^{(*)}$. Идеал A/I зафиксируем. В силу (17) существует такое порядковое число $\alpha = \alpha(J)$, что $A/I \in \mathcal{M}^{(\alpha)}$. Строим теперь порядковое β такое, что $\beta \geq \alpha(I)$ для всех собственных идеалов I алгебры R . Такое число β найдется, так как идеалы алгебры R образуют множество. По построению β получаем, что любой ненулевой гомоморфный образ $\bar{R}$ алгебры R имеет ненулевой идеал $\bar{A} \in \mathcal{M}^{(\beta)}$ в силу (14). Но тогда в силу (15) и (16) $R \in \mathcal{M}^{(\beta+1)} \subseteq \mathcal{M}^{(*)}$.

Следовательно, класс $\mathcal{M}^{(*)}$ удовлетворяет условиям K1 и K2, т. е. является классом, радикальным в смысле Куроша в силу теоремы 1.2. При этом, по построению, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}^{(*)}$.

Возьмем теперь любой класс $\mathcal{R}$, радикальный в смысле Куроша, содержащий класс $\mathcal{M}$. Тогда в силу теоремы 1.2 и замкнутости класса $\mathcal{M}$ относительно гомоморфных образов при $\alpha = 0, 1$ верно включение

$$\mathcal{R} = {}^{-1}(\mathcal{R}^{-1}) \supseteq \mathcal{M}^{(\alpha)}.$$

По индукции в силу (14) — (16) получаем, что это включение верно для всех порядковых чисел α . Но тогда в силу (17) $\mathcal{R} \supseteq \mathcal{M}^{(*)}$.

Предложение доказано.

Для описания алгебр из класса $\mathcal{M}^{(*)}$ полезно понятие нормального ряда.

Цепь подалгебр алгебры R (γ — порядковые числа)

$$R_0 \subseteq R_1 \subseteq \dots \subseteq R_\gamma \subseteq \dots \subseteq R_\nu = R \quad (18)$$

называется *нормальным рядом*, если для каждого $\gamma < \nu$ подалгебра R_γ является идеалом алгебры $R_{\gamma+1}$ и $R_\mu = \bigcup_{\alpha < \mu} R_\alpha$ для предельного μ . Фактор-алгебры $R_{\gamma+1}/R_\gamma$ подалгебры R_0 называются *факторами* нормального ряда (18). Если все подалгебры R_γ являются идеалами самой алгебры R , то приходим к понятию идеального ряда, которое уже было применено в предложении 3.

Говорим, что член R_γ нормального ряда (18) *достижим по этому ряду*, если найдется такая конечная последовательность порядковых чисел $\gamma \leq \gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_i \leq \gamma_n \leq \nu$, что цепь $R_\gamma \subseteq R_{\gamma_1} \subseteq \dots \subseteq R_{\gamma_i} \subseteq \dots \subseteq R_{\gamma_n} \subseteq R_\nu = R$ является (конечным!) нормальным рядом алгебры R .

Говорим, что нормальный ряд (18) *идеален на предельном месте μ* , $1 \leq \mu \leq \nu$, если существует такое непустое множество $\{\alpha_i \mid i \in \Gamma\}$ порядковых чисел α_i , строго меньших μ , что $R_\mu = \bigcup_{i \in \Gamma} R_{\alpha_i}$ и все R_{α_i} — идеалы алгебры R_μ .

Лемма 1. *Нормальный ряд (18) идеален на всех предельных местах тогда и только тогда, когда все его члены достижимы по ряду.*

Доказательство. Пусть все члены нормального ряда (18) достижимы по ряду. Возьмем любое предельное число μ такое, что $1 \leq \mu \leq \nu$. Пусть $\gamma < \mu$. Тогда в силу достижимости члена R_γ из ряда (18) можно выделить конечный нормальный ряд $R_\gamma = R_{\gamma_0} \subseteq \dots \subseteq R_{\gamma_i} \subseteq \dots \subseteq R_{\gamma_n} \subseteq \dots \subseteq R_{\gamma_{n+1}} = R_\nu = R$. Из неравенства $\gamma = \gamma_0 < \mu \leq \gamma_{n+1} = \nu$ вытекает существование такого натурального числа $i \leq n$, что $\gamma_i < \mu \leq \gamma_{i+1}$. Зафиксировав это i , положим $\gamma_i = \mu_\gamma$.

По построению для любого $\gamma < \mu$ мы нашли такое число μ_γ , что $\gamma \leq \mu_\gamma < \mu$. Но тогда $R_\gamma \subseteq R_{\mu_\gamma} \subseteq R_\mu$ и потому, очевидно,

$$R_\mu = \bigcup_{\gamma < \mu} R_\gamma = \bigcup_{\gamma < \mu} R_{\mu_\gamma}.$$

Кроме того, если $\gamma < \mu$, то $R_{\mu_\gamma} = R_{\gamma_i}$ — идеал алгебры R_μ , так как R_{γ_i} — идеал алгебры $R_{\gamma_{i+1}}$ и $R_{\gamma_i} \subseteq R_\mu \subseteq R_{\gamma_{i+1}}$.

Следовательно, если все члены нормального ряда (18) достижимы по ряду, то ряд (18) идеален на всех предельных местах.

Обратно, пусть ряд (18) идеален на всех предельных местах.

Допустим, что некоторый член R_γ нормального ряда (18) не достижим по этому ряду. Тогда множество всех таких порядковых чисел $\alpha \leq \nu$, что $\gamma \leq \alpha$ и член R_γ не достижим по нормальному ряду

$$R_0 \subseteq R_1 \subseteq \dots \subseteq R_\gamma \subseteq \dots \subseteq R_\alpha, \quad (18\alpha)$$

непусто. Среди всех указанных α выберем наименьшее. Пусть это будет число μ . Ясно, что μ — предельное, $\gamma <$

$\mu < \nu$. В силу идеальности ряда (18) на предельном месте μ найдется такое порядковое число $\beta < \mu$, что $\gamma \leq \beta$ и R_β — идеал алгебры R_μ . В силу минимальности μ член R_γ достижим по ряду (18 β). Но тогда, как легко видеть, член R_γ достижим и по самому ряду (18 μ), так как $R_\gamma \subseteq R_\beta$ и R_β — идеал в R_μ . Противоречие.

Лемма доказана.

Предложение 5. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольный класс алгебр, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов. Тогда для любой алгебры R равносильны утверждения:

а) Алгебра R $l_{\mathcal{M}}$ -радикальна (радикальна в смысле нижнего радикала $l_{\mathcal{M}}$, порожденного классом $\mathcal{M}$), т. е. $R \in \mathcal{M}^{(*)}$.

б) Существует нормальный ряд (18) алгебры R , все члены которого достижимы по ряду, а все факторы — алгебры из класса $\mathcal{M}$.

в) Существует нормальный ряд (18) алгебры R , идеальный на всех предельных местах, все факторы которого — алгебры из класса $\mathcal{M}$.

Доказательство. В силу леммы 1 утверждения б) и в) равносильны.

а) $\Rightarrow$ б). Пусть $R \in \mathcal{M}^{(*)}$. Тогда по построению (см. предложение 4) найдется такое порядковое число β , что $R \in \mathcal{M}^{(\beta)}$. Нам нужно доказать существование такого нормального ряда (18) алгебры R , что все его члены достижимы по ряду, а все факторы — алгебры из $\mathcal{M}$. Доказательство ведем индукцией по β , замечая, что при $\beta = 0$ нужное нам утверждение очевидно: если $R \in \mathcal{M}$, то ряд $0 \subseteq R$ будет искомым.

Пусть $\beta \geq 1$. По построению цепи Куроша $\mathcal{M}^{(\beta)} = {}^{-1}\left(\left(\bigcup_{\alpha < \beta} \mathcal{M}^{(\alpha)}\right)^{-1}\right)$, и потому в силу предложения 3 существует идеальный ряд алгебры R

$$0 \subseteq R'_1 \subseteq R'_2 \subseteq \dots \subseteq R'_\gamma \subseteq R'_{\gamma+1} \subseteq \dots, \quad (19)$$

все факторы которого принадлежат классу $\bigcup_{\alpha < \beta} \mathcal{M}^{(\alpha)}$. Возьмем любой фактор $R'_{\gamma+1}/R'_\gamma = A_\gamma$ ряда (19) (считаем, что $A_0 = R'_1$). В силу сказанного о ряде (19), $A_\gamma \in \mathcal{M}^{(\alpha)}$ для некоторого $\alpha < \beta$, и потому существует такой нормальный ряд алгебры A_γ , что все его члены достижимы по ряду, а все факторы — алгебры из класса $\mathcal{M}$. Переходя к про-

образам при естественном гомоморфизме $R'_{\gamma+1} \rightarrow A_\gamma$, получаем, как нетрудно видеть, такой нормальный ряд

$$R'_\gamma \subseteq R_{\gamma,1} \subseteq \dots \subseteq R_{\gamma,\delta} \subseteq \dots \subseteq R_{\gamma,v_\gamma} = R'_{\gamma+1} \quad (19\gamma)$$

алгебры $R'_{\gamma+1}$, что все его члены достижимы по ряду, а все факторы — алгебры из класса $\mathcal{M}$, за исключением, быть может, фактора R'_γ . Но тогда, как легко видеть, вставляя ряды (19 γ) в ряд (19) и учитывая, что все члены ряда (19) — идеалы алгебры R , получаем: цепь подалгебр

$$0 \subseteq R_{0,1} \subseteq \dots \subseteq R_{0,v_0} \subseteq R_{\gamma,0} \subseteq R_{\gamma,1} \subseteq \dots \subseteq R_{\gamma,\delta} \subseteq \dots$$

будет нормальным рядом алгебры R , причем все члены этого ряда достижимы по ряду, а все факторы — алгебры из класса $\mathcal{M}$.

По индукции нужное нам утверждение доказано.

в) $\Rightarrow$ а). Пусть алгебра R имеет нормальный ряд (18), идеальный на всех предельных местах, все факторы которого принадлежат классу $\mathcal{M}$.

Пусть τ — любой такой радикал, что все алгебры из класса $\mathcal{M}$ τ -радикальны. Докажем по индукции, что все члены R_γ ряда (18) тоже τ -радикальны, замечая, что при $\gamma=0$ это так.

Пусть для некоторого порядкового числа β мы уже доказали, что все члены R_γ ряда (18), где $\gamma < \beta$, τ -радикальны. Рассмотрим случаи, возникающие при $\beta \geq 1$.

Если β не предельное, то $\beta = \gamma + 1$ для некоторого порядкового числа $\gamma < \beta$ и по индуктивному предположению алгебра R_γ τ -радикальна. Но по условию фактор-алгебра $R_{\gamma+1}/R_\gamma$ тоже τ -радикальна как алгебра из класса $\mathcal{M}$. Поэтому и алгебра $R_\beta = R_{\gamma+1}$ τ -радикальна как расширение τ -радикальной алгебры с помощью τ -радикальной алгебры.

Если β — предельное, то в силу идеальности ряда (18) на всех предельных местах $R_\beta = \bigcup_{i \in \Gamma} R_{\alpha_i}$ для некоторого непустого множества порядковых чисел α_i , строго меньших β . По индуктивному предположению все алгебры R_{α_i} τ -радикальны, причем в силу идеальности ряда (18) на месте β можно считать, что все R_{α_i} — идеалы алгебры R_β . Но тогда алгебра R_β τ -радикальна как сумма τ -радикальных идеалов.

По индукции все члены R_β ряда (18) τ -радикальны. В частности, τ -радикальна и алгебра $R = R_v$. Положив $\tau = l_{\mathcal{M}}$, получаем $R \in \mathcal{M}^{(*)} = \mathcal{R}(l_{\mathcal{M}})$.

Предложение доказано.

Полученная характеристика $l_{\mathcal{M}}$ -радикальных алгебр позволяет переносить ряд свойств класса $\mathcal{M}$ на радикальный в смысле Куроша класс $\mathcal{R}(l_{\mathcal{M}}) = \mathcal{M}^{(*)}$, порожденный этим классом $\mathcal{M}$. Укажем только одно утверждение такого рода.

Следствие 3. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольный класс алгебр, замкнутый относительно гомоморфных образов, $l_{\mathcal{M}}$ — нижний радикал, порожденный этим классом. Тогда:

а) Если любой идеал алгебры из класса $\mathcal{M}$ является алгеброй из класса $\mathcal{M}$, то любой идеал $l_{\mathcal{M}}$ -радикальной алгебры — $l_{\mathcal{M}}$ -радикальная алгебра.

б) Если любая подалгебра алгебры из класса $\mathcal{M}$ является алгеброй из $\mathcal{M}$, то любая подалгебра $l_{\mathcal{M}}$ -радикальной алгебры — $l_{\mathcal{M}}$ -радикальная алгебра.

Докажем только одно из этих утверждений, например б), так как доказательство второго проводится аналогично.

Пусть класс $\mathcal{M}$ замкнут относительно взятия подалгебр.

Возьмем любую $l_{\mathcal{M}}$ -радикальную алгебру R и любую подалгебру A в R . В силу предложения 5 существует такой нормальный ряд

$$R_0 \subseteq R_1 \subseteq \dots \subseteq R_\gamma \subseteq \dots \subseteq R_v = R$$

алгебры R , что все его члены достижимы по ряду, а все его факторы — алгебры из класса $\mathcal{M}$. Для любого порядкового числа $\gamma \leq v$ положим $A \cap R_\gamma = A_\gamma$. В результате получаем цепь подалгебр

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_\gamma \subseteq \dots \subseteq A_v = A \quad (20)$$

алгебры A . При этом для любого $\gamma < v$,

$$\begin{aligned} A_\gamma A_{\gamma+1} &\subseteq A \cap R_\gamma R_{\gamma+1} \subseteq A \cap R_\gamma = A_\gamma, \\ A_{\gamma+1} A_\gamma &\subseteq A \cap R_{\gamma+1} R_\gamma \subseteq A \cap R_\gamma = A_\gamma. \end{aligned}$$

Но тогда, как легко видеть, (20) будет нормальным рядом алгебры A , идеальным на всех предельных местах или с членами, достижимыми по ряду, что одно и то же. При этом A_0 — подалгебра алгебры R_0 и для любого $\gamma < v$

$$A_{\gamma+1}/A_\gamma = A \cap R_{\gamma+1}/A \cap R_\gamma \simeq (A \cap R_{\gamma+1} + R_\gamma)/R_\gamma \subseteq R_{\gamma+1}/R_\gamma.$$

Но тогда все факторы ряда (20) будут алгебрами из класса $\mathcal{M}$ как подалгебры алгебр R_0 , $R_{\gamma+1}/R_\gamma$ или изоморфных им алгебр. Еще раз применяя предложение 5, получаем, что алгебра A $l_{\mathcal{M}}$ -радикальна.

В заключение этого параграфа рассмотрим вопрос о стабилизации цепи Куроша (14), соответствующей классу $\mathcal{M}$, замкнутому относительно гомоморфных образов.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{W}$ — такой класс алгебр, замкнутый относительно гомоморфных образов, что класс $\mathcal{W}^{-1}$ всех алгебр без ненулевых $\mathcal{W}$ -радикальных идеалов удовлетворяет условию K^*1 (например, замкнут относительно взятия идеалов). Тогда класс $\mathcal{W}^{-1}$ радикален в смысле Куроша, класс $\mathcal{W}^{-1}$ полупрост в смысле Куроша, и эти классы соответствуют одному и тому же радикалу.

Действительно, достаточно доказать, что класс $\mathcal{W}^{-1}$ полупрост в смысле Куроша. А для этого в силу теоремы 1.3 достаточно доказать, что класс $\mathcal{W}^{-1}$ всех алгебр без ненулевых $\mathcal{W}$ -радикальных идеалов удовлетворяет условию K^*2 .

Пусть любой ненулевой идеал алгебры R гомоморфно отображается на ненулевые алгебры без ненулевых $\mathcal{W}$ -радикальных идеалов. В силу замкнутости $\mathcal{W}$ относительно гомоморфных образов все ненулевые идеалы алгебры R не являются алгебрами из класса $\mathcal{W}$. Следовательно, R — алгебра без ненулевых $\mathcal{W}$ -радикальных идеалов.

Лемма доказана.

Следствие 4. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольный класс алгебр, замкнутый относительно гомоморфных образов. Цепь Куроша (14) стабилизируется на некотором шаге тогда и только тогда, когда для некоторого порядкового числа β класс $(\mathcal{M}^{(\beta)})^{-1}$ удовлетворяет условию K^*1 . Если для некоторого порядкового числа β класс $(\mathcal{M}^{(\beta)})^{-1}$ удовлетворяет условию K^*1 , то

$$\mathcal{R}(l_{\mathcal{M}}) = \mathcal{M}^{(*)} = \mathcal{M}^{(\beta+1)}, \quad \mathcal{P}(l_{\mathcal{M}}) = (\mathcal{M}^{(\beta)})^{-1}.$$

Действительно, в силу предложения 4 все члены цепи Куроша замкнуты относительно гомоморфных образов, и цепь Куроша может стабилизироваться только на члене, являющемся радикальным классом в смысле Куроша. Остается применить лемму 2, построение цепи Куроша и следствие 1.1.

Как будет показано в дальнейшем, в случае ассоциативных алгебр цепь Куроша всегда стабилизируется на некотором шаге. Однако в общем случае цепь Куроша может и не стабилизироваться, как показывает

Предложение 6. Пусть Φ — поле, а основной класс $\mathfrak{A}$ совпадает с классом всех, не обязательно ассоциативных, алгебр над Φ . Пусть класс $\mathcal{M}$ алгебр замкнут относительно взятия идеалов и гомоморфных образов. Если класс $\mathcal{M}$ не радикален в смысле Куроша, т. е. $\mathcal{M} \neq \mathcal{M}^{(1)}$, то цепь Куроша (14), соответствующая классу $\mathcal{M}$ не стабилизируется ни на каком порядковом шаге, т. е.

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^{(0)} \subset \mathcal{M}^{(1)} \subset \mathcal{M}^{(2)} \subset \dots \subset \mathcal{M}^{(\alpha)} \subset \mathcal{M}^{(\alpha+1)} \subset \dots$$

для всех порядковых чисел α .

Доказательство. Пусть класс $\mathcal{M}$ замкнут относительно взятия идеалов и гомоморфных образов. Допустим, что цепь Куроша (14), соответствующая классу $\mathcal{M}$, стабилизируется на некотором шаге, т. е.

$$\mathcal{M}^{(\alpha)} = \mathcal{M}^{(\alpha+1)} = {}^{-1}((\mathcal{M}^{(\alpha)})^{-1}) \quad (21)$$

для некоторого порядкового числа α . Среди всех этих α выберем наименьшее. Пусть в равенстве (21) записано именно это порядковое число. Рассмотрим возникающие случаи. Но для этого нам нужно одно вспомогательное утверждение: все члены цепи Куроша (14) замкнуты относительно взятия идеалов. А именно, при $\beta = 0$ класс $\mathcal{M}^{(\beta)}$ замкнут относительно взятия идеалов, так как класс $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{(0)}$ замкнут относительно взятия идеалов по условию. Но тогда по индукции нужное нам утверждение доказывается аналогично следствию 3, но с помощью идеальных рядов. Действительно, если класс $\mathcal{M}^{(\beta)}$ замкнут относительно взятия идеалов, то возьмем любую алгебру $R \in \mathcal{M}^{(\beta+1)}$. В силу предложения 3 алгебра R имеет идеальный ряд с факторами $R_{\gamma+1}/R_{\gamma} \in \mathcal{M}^{(\beta)}$. Если A — идеал алгебры R , то, положив $A_{\gamma} = A \cap R_{\gamma}$, получаем идеальный ряд алгебры A . Факторы $A_{\gamma+1}/A_{\gamma}$ этого ряда изоморфны идеалу соответствующего фактора $R_{\gamma+1}/R_{\gamma}$ и потому $A_{\gamma+1}/A_{\gamma} \in \mathcal{M}^{(\beta)}$ в силу замкнутости класса $\mathcal{M}^{(\beta)}$ относительно взятия идеалов. Еще раз применяя предложение 3, получаем, что $A \in \mathcal{M}^{(\beta+1)}$, и потому класс $\mathcal{M}^{(\beta+1)}$ замкнут относительно взятия идеалов. Точно так же делается

переход от классов $\mathcal{M}^{(\beta)}$ с $\beta < \gamma$ к классу

$$\mathcal{M}^{(\gamma)} = {}^{-1} \left(\left(\bigcup_{\beta < \gamma} \mathcal{M}^{(\beta)} \right) {}^{-1} \right).$$

Итак, все члены цепи Куроша (14) замкнуты относительно взятия гомоморфных образов и относительно взятия идеалов. По предположению нашлось такое α , что верно равенство (21) и в равенстве (21) записано наименьшее такое число.

а) $\alpha \geq 1$. Тогда в силу минимальности α для любого порядкового числа $\beta < \alpha$ можно найти такую алгебру $R_\beta \in \mathcal{M}^{(\alpha)}$, что $R_\beta \notin \mathcal{M}^{(\beta)}$. Зафиксировав эти алгебры R_β , строим прямую сумму $R = \bigoplus_{\beta < \alpha} R_\beta$. Ясно, что $R \in \mathcal{M}^{(\alpha)}$,

так как класс $\mathcal{M}^{(\alpha)}$ радикален в смысле Куроша в силу (21) и теоремы 1.2. Отметим еще, что $R \notin \mathcal{M}^{(\beta)}$ для всех $\beta < \alpha$, так как все R_β — гомоморфные образы алгебры R , а все члены цепи Куроша замкнуты относительно взятия гомоморфных образов.

Учитывая, что Φ — поле, выбираем в алгебре R базис $\mathcal{B}(R) = \{r_i \mid i \in \Gamma\}$. Ясно, что $R \neq 0$ и потому $\Gamma \neq \emptyset$. Среди индексов $i \in \Gamma$ выделим некоторый индекс и обозначим его символом 0. Строим алгебру A с базисом

$$\mathcal{B}(A) = \{a_{ij} \mid i \in \Gamma, j = 1, 2, 3, \dots\}.$$

Умножение базисных элементов задаем следующими правилами:

1) если в алгебре R верно равенство

$$r_{i_1} r_{i_2} = \sum_i \alpha_{i, i_1 i_2} r_i,$$

то для любого натурального $j \geq 1$

$$a_{i_1 j} a_{i_2 j} = \sum_i \alpha_{i, i_1 i_2} a_{ij};$$

2) Если j_1, j_2 — различные натуральные числа, то

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} = \begin{cases} a_{0 j_1}, & \text{если } j_2 = j_1 + 1, i_1 = i_2, \\ a_{i_1 j_2}, & \text{если } j_1 = j_2 + 1, i_2 = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (22)$$

Из построения алгебры A легко следует, что для любого натурального числа j множества

$$A_j = \left\{ \sum_i \alpha_i a_{ij} \mid \alpha_i \in \Phi \right\}$$

являются подалгебрами в A , а суммы

$$A^{(k)} = \sum_{j=1}^k A_j = \left\{ \sum_{j=1}^k \sum_{i \in \Gamma_j} \alpha_{ij} a_{ij} \mid \Gamma_j \subseteq \Gamma, \alpha_{ij} \in \Phi \right\} \quad (23)$$

(множества Γ_j конечные) являются идеалами алгебры A . Ясно, что

$$A^{(1)} \subset A^{(2)} \subset \dots \subset A^{(k)} \subset A^{(k+1)} \subset \dots \subset \bigcup_{n \geq 1} A^{(n)} = A. \quad (24)$$

Возьмем произвольный ненулевой элемент $a \in A$. Замечаем, что главный идеал (a) алгебры A , порожденный элементом a , совпадает с некоторым идеалом $A^{(k)}$.

Действительно, находим такое наименьшее натуральное число k , что $a \in A^{(k)}$. Для этого k получаем в силу (23)

$$a = \sum_{i=1}^k \sum_{i \in \Gamma_j} \gamma_{ij} a_{ij},$$

причем $\gamma_{ik} \neq 0$ для некоторого $i \in \Gamma_k$. Для этого i получим

$$a_{0k} = a \cdot (\gamma_{ik}^{-1} a_{i, k+1}) \in (a) \quad (25)$$

в силу (22). Еще раз применяя (22), получаем

$$a_{0j} = a_{0j} a_{0, j+1}$$

и потому

$$\forall j \leq k \mid a_{0j} \in (a) \quad (26)$$

в силу (25). Но тогда, снова в силу (22), из (26) выводим

$$\forall i \in \Gamma \forall j \leq k \mid a_{ij} = a_{i, j+1} \cdot a_{0j} \in (a). \quad (27)$$

А из (23) и (27) вытекает по построению равенство $(a) = A^{(k)}$.

Из доказанного легко вытекает, что в (24) выписаны все ненулевые идеалы алгебры A . Замечая, что по построению все алгебры A_k изоморфны алгебре R и $A^{(k+1)}/A^{(k)} \simeq A_k$ для любого натурального числа k , получаем, что ряд (24) — идеальный ряд алгебры A и все факторы этого ряда $\mathcal{M}^{(\alpha)}$ -радикальны в смысле Куроша. Поэтому $A \in \mathcal{M}^{(\alpha)}$.

По построению цепи Куроша из $A \in \mathcal{M}^{(\alpha)}$ вытекает, что любой ненулевой гомоморфный образ алгебры A должен иметь $\mathcal{M}^{(\beta)}$ -радикальный идеал для некоторого порядкового числа $\beta < \alpha$. В частности, сама алгебра A должна иметь такой ненулевой идеал. В силу замкнутости класса $\mathcal{M}^{(\beta)}$ относительно взятия идеалов наименьший ненулевой идеал $A_1 = A^{(1)}$ алгебры A является алгеброй из некоторого класса $\mathcal{M}^{(\beta)}$ с $\beta < \alpha$. Но алгебры A_1 и R изоморфны. Поэтому $R \in \mathcal{M}^{(\beta)}$ для некоторого $\beta < \alpha$. Противоречие.

Итак, случай а) разобран. Остается случай

б) $\alpha = 0$. Это означает, что

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^{(1)} = {}^{-1}(\mathcal{M}^{-1}),$$

т. е. класс $\mathcal{M}$ радикален в смысле Куроша.

Предложение доказано.

§ 3. Кручения. Радикальные и полупростые классы

Классические радикалы ассоциативных алгебр и многие другие радикалы, широко применяемые в структурной теории, обладают дополнительными свойствами: если A — идеал алгебры B , то $\tau(A) = A \cap \tau(B)$. Это свойство позволяет получить значительную информацию о полупростых и радикальных алгебрах. Поэтому такие радикалы изучались и изучаются многими авторами.

Определение 1. Пусть $\tau: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ — отображение основного класса $\mathfrak{A}$ алгебр в себя, ставящее в соответствие каждой алгебре R однозначно определенный идеал $\tau(R)$ алгебры R . Отображение τ назовем *кручением* или *идеально наследственным радикалом*, если выполнены следующие условия

R1. Если $\varphi: A \rightarrow B$ — гомоморфизм алгебр, то $\varphi(\tau(A)) \subseteq \tau(\varphi(A))$.

R3. Для любой алгебры R $\tau(R/\tau(R)) = 0$.

R4. Если A — идеал алгебры R , то $\tau(A) = A \cap \tau(R)$

Из определений вытекает

Следствие 1. Любое кручение τ является радикалом. Радикал τ будет кручением тогда и только тогда, когда выполнены требования:

а) *Любой идеал τ -радикальной алгебры — τ -радикальная алгебра.*

б) *Любой идеал τ -полупростой алгебры — τ -полупростая алгебра.*

Так как кручения являются радикалами, то к ним можно применять результаты, полученные в предыдущих двух параграфах. В частности, каждое кручение τ однозначно «восстанавливается» по любому из классов $\mathcal{R}(\tau)$, $\mathcal{P}(\tau)$, и потому кручения очень часто задают указанием одного из этих классов.

Определение 2. Класс $\mathcal{R}$ алгебр назовем *радикальным*, если $\mathcal{R}$ совпадает с классом $\mathcal{R}(\tau)$ всех τ -радикальных алгебр для некоторого кручения τ . Класс $\mathcal{P}$ алгебр назовем *полупростым*, если $\mathcal{P}$ совпадает с классом $\mathcal{P}(\rho)$ всех ρ -полупростых алгебр для некоторого кручения ρ .

В связи со сказанным нам полезны характеристики радикальных и полупростых классов алгебр. Для нахождения этих характеристик мы применим характеристики классов, радикальных в смысле Куроша и полупростых в смысле Куроша, данные в § 1.

Теорема 1. *Класс $\mathcal{R}$ алгебр радикален тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия идеалов и гомоморфных образов и удовлетворяет следующим условиям:*

A2. В любой алгебре R сумма $T = \sum_{i \in \Gamma} T_i$ любого множества идеалов, являющихся алгебрами из класса $\mathcal{R}$, сама будет алгеброй из класса $\mathcal{R}$.

A5. Если B — идеал алгебры A , причем B и A/B — алгебры из класса $\mathcal{R}$, то и сама алгебра A будет алгеброй из класса $\mathcal{R}$.

A6. Пусть B — идеал алгебры A , C — идеал алгебры B и C_A — идеал в A , порожденный множеством C . Если C — алгебра из $\mathcal{R}$, то и C_A — алгебра из класса $\mathcal{R}$.

Доказательство. В силу теоремы 1.1 и следствия 1 любой радикальный класс замкнут относительно взятия идеалов и гомоморфных образов и удовлетворяет

условиям A2 и A5. Покажем, что выполнено и условие A6.

Пусть B — идеал алгебры A , C — идеал алгебры B и C_A — идеал в A , порожденный множеством C . Из условия R4 вытекает

$$\begin{aligned} r(C) &= C \cap r(B), \\ r(B) &= B \cap r(A). \end{aligned}$$

Учитывая это, допустим, что алгебра C r -радикальна. Тогда $C = r(C) \subseteq r(B)$, и потому

$$C \subseteq r(A).$$

Но тогда и $C_A \subseteq r(A)$, так как $r(A)$ — идеал алгебры A . Поэтому

$$C_A = C_A \cap r(A) = r(C_A),$$

т. е. алгебра C_A r -радикальна.

Таким образом, любой радикальный класс замкнут относительно взятия идеалов и гомоморфных образов и удовлетворяет условиям A2, A5 и A6.

Обратно, пусть класс $\mathcal{R}$ замкнут относительно взятия идеалов и гомоморфных образов и удовлетворяет условиям A2, A5 и A6. В силу теоремы 1.1 класс $\mathcal{R}$ радикален в смысле Куроша и потому $\mathcal{R} = \mathcal{R}(r)$ для некоторого радикала r . В силу замкнутости класса $\mathcal{R}$ относительно взятия идеалов радикал r удовлетворяет требованию а) следствия 1.

Пусть алгебра A r -полупроста, B — идеал алгебры A . В силу условия A6 любой r -радикальный идеал C алгебры B порождает в A r -радикальный идеал C_A . Но в силу r -полупростоты алгебры A в A нет ненулевых r -радикальных идеалов. Поэтому нет ненулевых r -радикальных идеалов и в алгебре B . Следовательно, алгебра B r -полупроста.

Таким образом, радикал r удовлетворяет и требованию б) следствия 1. Поэтому r — кручение и класс $\mathcal{R} = \mathcal{R}(r)$ радикален.

Теорема доказана.

Следствие 2. Пересечение любого семейства радикальных классов само будет радикальным классом. В частности, для любого класса $\mathcal{M}$ алгебр существует наименьший радикальный класс, содержащий класс $\mathcal{M}$.

Это с очевидностью вытекает из теоремы 1.

Переходя к характеристике полупростых классов, введем в рассмотрение одну конструкцию, уже появлявшуюся ранее в частных случаях (см. доказательства следствия 1.4 и предложения 2.3).

Пусть $\mathcal{M}$ — произвольный класс алгебр. Идеал B алгебры A называется $\mathcal{M}$ -идеалом, если A/B — алгебра из класса $\mathcal{M}$. Для любой алгебры R обозначим

$$\pi_{\mathcal{M}}(R) = \cap \{P \mid P - \mathcal{M}\text{-идеал в алгебре } R\}. \quad (1)$$

Понятия $\mathcal{M}$ -идеала и отображения $\pi_{\mathcal{M}}$ очень часто применяются при построении радикалов и кручений. Например (см. гл. 1), если $\mathcal{M}$ — класс всех первичных алгебр, то $\mathcal{M}$ -идеалы — это первичные идеалы, и мы приходим (в случае ассоциативных алгебр) к нижнему нильрадикалу; если $\mathcal{M}$ — класс всех примитивных алгебр, то $\mathcal{M}$ -идеалы — это примитивные идеалы, и мы приходим к квазирегулярному радикалу.

Из (1) легко вытекает, что для любого класса $\mathcal{M}$ алгебр отображение $\pi_{\mathcal{M}}: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям R1, R3 из определения 1 кручения и определения 1.1 радикала. Это вытекает из того, что полный прообраз $\mathcal{M}$ -идеала всегда будет $\mathcal{M}$ -идеалом и понятие $\mathcal{M}$ -идеала инвариантно относительно изоморфизмов алгебр друг на друга. Напомним, что если $\mathcal{P}$ — класс, полупростой в смысле Куроша, то в силу предложения 1.1 отображение $\pi_{\mathcal{P}}$ дает радикал, соответствующий этому классу.

Теорема 2. *Класс $\mathcal{T}$ будет полупростым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия идеалов и подпрямых произведений и удовлетворяет следующим условиям:*

П1. Пусть B — идеал алгебры A , причем $B \cap I \neq 0$ для любого ненулевого идеала I в A . Если B — алгебра из класса $\mathcal{T}$, то и A — алгебра из $\mathcal{T}$.

П2. Пусть B — идеал алгебры A , C — идеал алгебры B и C не содержит ненулевых идеалов алгебры A . Если B/C — алгебра из класса $\mathcal{T}$, то и сама алгебра B — алгебра из $\mathcal{T}$.

Доказательство. В силу следствия 1 и предложения 1.1 или следствия 1.4 любой полупростой класс замкнут относительно взятия идеалов и подпрямых произведений.

Пусть τ — кручение, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\tau)$.

Пусть B — идеал алгебры A , причем $B \cap I \neq 0$ для любого ненулевого идеала I в A . Если $B \in \mathcal{F}$, то $r(B) = 0$ и потому $B \cap r(A) = 0$ в силу условия R4. Тогда из предположений об идеале B вытекает $r(A) = 0$, т. е. $A \in \mathcal{F}$.

Пусть B — идеал алгебры A , C — идеал алгебры B , не содержащий ненулевых идеалов алгебры A . Если $B/C \in \mathcal{F}$, т. е. $r(B/C) = 0$, то $r(B) \subseteq C$ в силу предложения 1.1. Но по условию R4 $r(B)$ — идеал алгебры A как пересечение идеалов B и $r(A)$. Тогда из предположений о C вытекает $r(B) = 0$, т. е. $B \in \mathcal{F}$.

Следовательно, любой полупростой класс замкнут относительно взятия идеалов и подпрямых произведений и удовлетворяет условиям П1, П2.

Обратно, пусть класс $\mathcal{F}$ замкнут относительно взятия идеалов и подпрямых произведений и удовлетворяет условиям П1, П2. Строим отображение $\pi_{\mathcal{F}}: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ основного класса $\mathfrak{A}$ в себя по правилу (1). В силу сказанного выше отображение $\pi_{\mathcal{F}}$ удовлетворяет требованиям R1 и R3. Кроме того, из замкнутости класса $\mathcal{F}$ относительно подпрямых произведений вытекает, что в любой алгебре R пересечение любого множества $\mathcal{F}$ -идеалов само будет $\mathcal{F}$ -идеалом, причем $\pi_{\mathcal{F}}(R)$ — наименьший $\mathcal{F}$ -идеал в алгебре R . Следовательно, $A \in \mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $\pi_{\mathcal{F}}(A) = 0$. Остается доказать, что отображение $\pi_{\mathcal{F}}$ удовлетворяет и условию R4.

Пусть B — идеал алгебры A . Замечаем, что $\pi_{\mathcal{F}}(B)$ — идеал алгебры A .

Действительно, пусть F — наибольший идеал алгебры A , содержащийся в подалгебре $C = \pi_{\mathcal{F}}(B)$, т. е. сумма всех идеалов из A , содержащихся в C . Переходя к прообразам и образам при гомоморфизме $A \rightarrow \bar{A} = A/F$, получаем, что $\bar{B} = B/F$ — идеал алгебры $\bar{A}$, $\bar{C} = C/F$ — идеал алгебры $\bar{B}$, причем $\bar{C}$ не содержит ненулевых идеалов алгебры $\bar{A}$. Но $\bar{B}/\bar{C} \simeq B/C = B/\pi_{\mathcal{F}}(B) \in \mathcal{F}$. В силу П2 $\bar{B} = B/F \in \mathcal{F}$, т. е. F является $\mathcal{F}$ -идеалом алгебры B . Но C — наименьший $\mathcal{F}$ -идеал алгебры B . Поэтому, по построению, $F = C = \pi_{\mathcal{F}}(B)$ — идеал алгебры A .

Учитывая доказанное, рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ всех таких идеалов I алгебры A , что $B \cap I = \pi_{\mathcal{F}}(B)$. Ясно, что это частично упорядоченное множество (относительно

теоретико-множественного включения) непусто и индуктивно. В силу леммы Куратовского — Цорна в $\mathfrak{M}$ есть максимальные элементы. Пусть M — один из них. По построению M — идеал алгебры A , $B \cap M = \pi_{\mathcal{T}}(B)$ и для любого идеала J алгебры A из $J \supset M$ вытекает $B \cap J \supset \pi_{\mathcal{T}}(B)$.

Переходим к образам при естественном гомоморфизме $A \rightarrow \tilde{A} = A/M$. Ясно, что $\tilde{B} = B + M/M$ — идеал в $\tilde{A}$, причем по построению M $\tilde{B} \simeq B/B \cap M = B/\pi_{\mathcal{T}}(B) \in \mathcal{T}$. Кроме того, если $\tilde{J}$ — ненулевой идеал в $\tilde{A}$, то, переходя к прообразам, находим такой идеал J в A , что $J \supset M$ и $\tilde{J} = J/M$. В силу максимальной M имеет место строгое включение $B \cap J \supsetneq \pi_{\mathcal{T}}(B)$ и потому $B \cap J \not\subseteq M$. Но тогда $\tilde{B} \cap \tilde{J} \supsetneq ((B \cap J) + M)/M \neq 0$.

В силу условия П1 $\tilde{A}$ — алгебра из класса $\mathcal{T}$, т. е. M — $\mathcal{T}$ -идеал алгебры A . Но тогда в силу (1) и построения идеала M

$$B \cap \pi_{\mathcal{T}}(A) \subseteq B \cap M = \pi_{\mathcal{T}}(B).$$

С другой стороны, фактор-алгебра $B/B \cap \pi_{\mathcal{T}}(A)$ изоморфна идеалу алгебры $A/\pi_{\mathcal{T}}(A) \in \mathcal{T}$ и потому $B/B \cap \pi_{\mathcal{T}}(A) \in \mathcal{T}$ в силу замкнутости класса $\mathcal{T}$ относительно взятия идеалов. Поэтому $B \cap \pi_{\mathcal{T}}(A)$ — $\mathcal{T}$ -идеал алгебры B , что влечет обратное включение

$$\pi_{\mathcal{T}}(B) \subseteq B \cap \pi_{\mathcal{T}}(A).$$

Следовательно, $\pi_{\mathcal{T}}(B) = B \cap \pi_{\mathcal{T}}(A)$, и мы доказали выполнение условия R4.

Теорема доказана.

Следствие 3. Пересечение любого семейства полупростых классов алгебр само будет полупростым классом. В частности, для любого класса $\mathcal{M}$ существует наименьший полупростой класс, содержащий $\mathcal{M}$.

Это с очевидностью вытекает из теоремы 2.

Следствие 4. Класс $\mathcal{T}$ алгебр будет полупростым тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условиям П1, П2 и полупрост в смысле Куроша.

В силу теоремы 2 достаточно доказать только обратное утверждение.

Пусть класс $\mathcal{T}$ удовлетворяет условиям П1, П2 и полупрост в смысле Куроша. По определению $\mathcal{T} = \mathcal{P}(r)$ для некоторого радикала r . Из свойств радикала вытекает, что в любой алгебре R идеал $r(R)$ является наименьшим $\mathcal{T}$ -идеалом и наибольшим r -радикальным (т. е. ${}^1\mathcal{T}$ -радикальным) идеалом. Остается доказать, что радикал r удовлетворяет условию R4.

Пусть B — идеал алгебры A . С помощью условия П2 получаем, как и при доказательстве теоремы 2, что $\pi_{\mathcal{T}}(B) = r(B)$ — идеал в A . Но тогда $r(B)$ — r -радикальный идеал в A и потому $r(B) \subseteq B \cap r(A)$. В частности, если алгебра A r -полупроста, то r -полупроста и алгебра B , т. е. класс $\mathcal{T} = \mathcal{P}(r)$ замкнут относительно взятия идеалов. Но тогда мы попали в условия теоремы 2, так как любой класс, полупростой в смысле Куроша, замкнут относительно взятия подпрямых произведений. Поэтому, повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2, и учитывая выполнение условия П1 (или применяя саму теорему 2), получаем равенство $r(B) = B \cap r(A)$. Следовательно, r — кручение, что и требовалось доказать.

С помощью следствий 2 и 3 покажем, что кручения образуют «полную дистрибутивную решетку».

Порядок для кручений вводится так же, как и для радикалов: если r и s — кручения, то $r \leq s$ тогда и только тогда когда $r(R) \subseteq s(R)$ для всех алгебр R . Как и для радикалов, вводим понятия пересечения и объединения кручений по правилам: пересечение $\bigwedge_{i \in \Gamma} r_i$ и объединение $\bigvee_{i \in \Gamma} r_i$ семейства $\{r_i \mid i \in \Gamma\}$ кручений — это такие кручения, что

$$\begin{aligned} s &\geq \bigvee_{i \in \Gamma} r_i \Leftrightarrow \forall i \in \Gamma \mid s \geq r_i, \\ u &\leq \bigwedge_{i \in \Gamma} r_i \Leftrightarrow \forall i \in \Gamma \mid u \leq r_i \end{aligned} \quad (2)$$

для любых кручений s , u (см. § 2).

Теорема 3. *Кручения составляют «полную решетку» $\text{Tors} = \text{Tors}(\mathcal{A})$, т. е. для любого семейства $\{r_i \mid i \in \Gamma\}$ кручений существуют пересечение $\bigwedge_{i \in \Gamma} r_i$ и объединение $\bigvee_{i \in \Gamma} r_i$.*

При этом

$$\left(\bigwedge_{i \in \Gamma} r_i \right) (A) = \bigcap_{i \in \Gamma} r_i (A) \quad (3)$$

для любой алгебры A и верны равенства

$$\mathcal{R}\left(\bigwedge_{i \in \Gamma} r_i\right) = \bigcap_{i \in \Gamma} \mathcal{R}(r_i), \quad \mathcal{P}\left(\bigvee_{i \in \Gamma} r_i\right) = \bigcap_{i \in \Gamma} \mathcal{P}(r_i). \quad (4)$$

Кроме того, для любого семейства $\{r_i | i \in \Gamma\}$ кручений и любого кручения $\mathfrak{s}$ верно равенство (бесконечная дистрибутивность)

$$\mathfrak{s} \wedge \left(\bigvee_{i \in \Gamma} r_i\right) = \bigvee_{i \in \Gamma} (\mathfrak{s} \wedge r_i). \quad (5)$$

«Полная решетка» кручений является полной подрешеткой «полной решетки» радикалов, т. е. для любого семейства $\{r_i | i \in \Gamma\}$ кручений $\bigwedge_{i \in \Gamma} r_i = \Delta \bigvee_{i \in \Gamma} r_i$ и $\bigvee_{i \in \Gamma} r_i = \nabla \bigwedge_{i \in \Gamma} r_i$ (справа — пересечение и объединение в «решетке» радикалов).

Доказательство. Ясно, что наименьшим кручением является нулевой радикал, а наибольшим кручением — не-собственный тривиальный радикал ϵ . Учитывая это, всюду ниже мы будем рассматривать только непустые семейства кручений, так как для пустого семейства все очевидно.

Пусть нам дано семейство $\{r_i | i \in \Gamma\}$ кручений. В силу следствий 2 и 3 существуют такие однозначно определенные кручения t_0 и $\mathfrak{s}_0$, что

$$\mathcal{R}(t_0) = \bigcap_{i \in \Gamma} \mathcal{R}(r_i), \quad \mathcal{P}(\mathfrak{s}_0) = \bigcap_{i \in \Gamma} \mathcal{P}(r_i). \quad (6)$$

Но, как и для радикалов, для любых кручений u, w

$$\mathcal{R}(u) \supseteq \mathcal{R}(w) \Leftrightarrow u \geq w \Leftrightarrow \mathcal{P}(u) \subseteq \mathcal{P}(w).$$

Поэтому из определений (2) вытекает, что пересечение $\bigwedge_{i \in \Gamma} r_i$ и объединение $\bigvee_{i \in \Gamma} r_i$ существуют, причем $\bigwedge_{i \in \Gamma} r_i = t_0$, $\bigvee_{i \in \Gamma} r_i = \mathfrak{s}_0$. Еще раз применяя (6), получаем, что кручения образуют «полную решетку», причем верны равенства (4).

Из (4) вытекает равенство (3), так как в силу следствия 1 идеал $\left(\bigwedge_{i \in \Gamma} r_i\right)(A)$ оказывается r_i -радикальным для всех $i \in \Gamma$, а наибольшим среди таких идеалов будет идеал $\bigcap_{i \in \Gamma} r_i(A)$. Из равенств (4) вытекает и то, что «решетка» кручений является полной подрешеткой «решетки» радикалов (см. соотношения (1) и (2) в начале § 2). Остается доказать равенство (5).

Возьмем любое кручение $\mathfrak{s}$. Ясно, что

$$\mathfrak{s} \wedge \left(\bigvee_{i \in \Gamma} r_i \right) = p \geq q = \bigvee_{i \in \Gamma} (\mathfrak{s} \wedge r_i).$$

Допустим, что равенство (5) не верно, т. е. $p > q$. Тогда по определению найдется такая алгебра K , что $p(K) \supset \supset q(K)$. Рассмотрим алгебру

$$A = p(K)/q(K), \quad A \neq 0. \quad (7)$$

Алгебра A p -радикальна как гомоморфный образ p -радикальной алгебры $p(K)$. Поэтому, в силу (3), (4)

$$\mathfrak{s}(A) = A = \left(\bigvee_{i \in \Gamma} r_i \right)(A). \quad (8)$$

С другой стороны, алгебра A q -полупроста как идеал q -полупростой алгебры $K/q(K)$. Поэтому в силу (4) и (3)

$$\forall i \in \Gamma \mid \mathfrak{s}(A) \cap r_i(A) = 0. \quad (9)$$

Учитывая, что $\mathfrak{s}(A) = A$ в силу (8), получаем, что $r_i(A) = 0$ для всех $i \in \Gamma$ в силу (9). А это означает, что $\left(\bigvee_{i \in \Gamma} r_i \right)(A) = 0$ в силу (4). Но тогда в силу (8) получаем равенство $A = 0$, что противоречит соотношению (7).

Следовательно, равенство (5) верно и теорема доказана.

Предложение 1.2 и следствие 1 наводят на мысль, что кручений «не слишком много». И действительно, в некоторых случаях (в зависимости от выбора основного кольца Φ и основного класса $\mathfrak{A}$) кручения образуют множество, которое можно описать. Чтобы это показать, укажем сначала один класс кручений, тесно связанных с модулями.

Все рассматриваемые ниже модули — унитарные левые Φ -модули. Если M — модуль, N — подмодуль в M и $m \in M$, то в силу коммутативности основного кольца Φ частное

$$(N : M) = \{ \alpha \in \Phi \mid \alpha m \in N \}$$

будет идеалом в Φ . Поэтому идеалами в Φ будут и все аннуляторы $(0 : m)$ элементов модуля M . Рассматривая Φ как модуль, получаем, что аннулятор $(0 : m)$ определяет подмодуль Φm в M с точностью до изоморфизма модулей, так как модули Φm и $\Phi/(0 : m)$ изоморфны. Нуж-

ный изоморфизм получается из модульного гомоморфизма $\rho_m: \Phi \rightarrow \Phi$ правого умножения на элемент $m \in M$.

Учитывая, что все алгебры являются по определению модулями, строим множество идеалов кольца Φ , определенное выбором основного класса $\mathfrak{A}$:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathfrak{A}) = \{(0 : a) \mid a \in A \in \mathfrak{A}\}.$$

При этом мы рассматриваем аннуляторы $(0 : a)$ как аннуляторы элементов модуля A , т. е.

$$(0 : a) = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha a = 0\}.$$

Множество $\mathcal{A}$ непусто. Более того, для любого класса $\mathcal{M}$ алгебр множество

$$\mathcal{A}(\mathcal{M}) = \{(0 : a) \mid a \in A \in \mathcal{M}\} \quad (10)$$

непусто, так как все рассматриваемые классы алгебр — абстрактные подклассы основного класса $\mathfrak{A}$, содержащих нулевую алгебру, а $(0 : 0) = \Phi$.

Ясно, что если M — модуль, то, полагая $xy = 0$ для всех $x, y \in M$, мы превращаем M в алгебру — алгебру с нулевым умножением. Легко видеть, что в алгебрах с нулевым умножением понятия идеала, подалгебры и подмодуля совпадают. Если M_1 и M_2 — алгебры с нулевым умножением, то любой модульный гомоморфизм $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ будет гомоморфизмом алгебр: равенство $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ будет выполняться тривиально, так как $\varphi(0) = 0$.

Этими и подобными утверждениями об алгебрах с нулевым умножением мы будем пользоваться без особых оговорок.

С каждой алгеброй A можно связать алгебру с нулевым умножением, полученную введением нулевого умножения на модуле A . Эту алгебру с нулевым умножением мы всегда будем обозначать символом A^0 .

Ниже мы будем считать, что основной класс $\mathfrak{A}$ алгебр содержит вместе с каждой своей алгеброй A и соответствующую алгебру A^0 с нулевым умножением.

При этом условии верна

Лемма 1. Для любого кручения τ равносильны условия:

а) Если $\varphi: A \rightarrow B$ — модульный изоморфизм алгебры A на алгебру B , то верно равенство $\varphi(\tau(A)) = \tau(B)$.

б) Если алгебры A и B изоморфны как модули и одна из них τ -радикальна, то τ -радикальна и вторая.

в) Если алгебры A и B изоморфны как модули и одна из них τ -полупроста, то τ -полупроста и вторая.

г) Для любой алгебры A верно равенство $\tau(A^0) = (\tau(A))^0$.

Доказательство. Импликации а) $\Rightarrow$ б) и а) $\Rightarrow$ в) очевидны.

б) $\Rightarrow$ г). Пусть верно б). Возьмем любую алгебру R , соответствующую ей алгебру R^0 с нулевым умножением и сравним алгебры $\tau(R^0)$ и $(\tau(R))^0$ с нулевым умножением.

В силу б) из τ -радикальности алгебры $\tau(R)$ вытекает τ -радикальность алгебры $(\tau(R))^0$. Но тогда $(\tau(R))^0$ — τ -радикальный идеал алгебры R^0 , и потому $\tau(R^0) \subseteq (\tau(R))^0$.

С другой стороны, пусть $\tau(R^0)$ совпадает, как подмножество множества R с некоторым множеством T . Ясно, что T — подмодуль в R . Замечаем, что T — идеал алгебры R .

Действительно, пусть $x \in R$. Тогда, очевидно, правое умножение ρ_x и левое умножение λ_x на элемент x будут по определению алгебры модульными гомоморфизмами $\rho_x: R \rightarrow Rx$, $\lambda_x: R \rightarrow xR$. Переходя к алгебре R^0 , получаем гомоморфизм алгебр $\rho_x: R^0 \rightarrow (Rx)^0$, $\lambda_x: R^0 \rightarrow (xR)^0$. При этом $(Rx)^0$ и $(xR)^0$ — идеалы алгебры R^0 . Поэтому,

$$\rho_x(\tau(R^0)) \subseteq \tau(\rho_x(R^0)) = \tau((Rx)^0) \subseteq \tau(R^0),$$

$$\lambda_x(\tau(R^0)) \subseteq \tau(\lambda_x(R^0)) = \tau((xR)^0) \subseteq \tau(R^0).$$

А это означает, что $Tx \subseteq T$, $xT \subseteq T$, т. е. T — идеал алгебры R .

По построению $T^0 = \tau(R^0)$. Поэтому в силу б) из τ -радикальности алгебры $\tau(R^0)$ вытекает τ -радикальность алгебры T . Но тогда T — τ -радикальный идеал алгебры R и потому $T \subseteq \tau(R)$, т. е. $\tau(R^0) \subseteq (\tau(R))^0$.

Следовательно, $\tau(R^0) = (\tau(R))^0$ в любой алгебре R , т. е. верно г).

в) $\Rightarrow$ г). Пусть верно в). Снова возьмем любую алгебру R , соответствующую ей алгебру R^0 с нулевым умножением и сравним алгебры $\tau(R^0)$ и $(\tau(R))^0$.

Ясно, что алгебры $(R/\tau(R))^0$ и $R^0/(\tau(R))^0$ изоморфны. Но в силу в) алгебра $(R/\tau(R))^0$ τ -полупроста, так как τ -полупроста алгебра $R/\tau(R)$. Поэтому τ -полупроста и алгебра $R^0/(\tau(R))^0$. Но тогда $(\tau(R))^0 \subseteq \tau(R^0)$.

С другой стороны, пусть $\tau(R^0)$ совпадает как подмножество множества R с множеством T . Как и при дока-

зательстве импликации б) $\Rightarrow$ г) получаем, что T — идеал алгебры R . Ясно, что алгебры $(R/T)^0$ и $R^0/\tau(R^0)$ изоморфны по построению. Поэтому алгебра $(R/T)^0$ τ -полупроста. Но тогда в силу в) τ -полупроста и алгебра R/T . Поэтому $T \cong \tau(R)$, т. е. $\tau(R^0) \cong (\tau(R))^0$.

Следовательно, верно г).

г) $\Rightarrow$ а). Пусть $\varphi: A \rightarrow B$ — модульный изоморфизм алгебры A на алгебру B , т. е. изоморфизм модуля A на модуль B . Тогда φ будет изоморфизмом алгебры A^0 на алгебру B^0 . Но тогда, если верно г), то

$$(\tau(B))^0 = \tau(B^0) = \varphi(\tau(A^0)) = (\varphi(\tau(A)))^0,$$

и потому $\tau(B) = \varphi(\tau(A))$, т. е. верно а).

Лемма доказана.

В связи с леммой 1 естественно

Определение 3. Кручение $\tau: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ называется *модульным*, если для него выполнено хотя бы одно из утверждений а) — г) леммы 1 (а значит и все эти утверждения).

Модульные кручения нетрудно перечислить, сопоставляя их с некоторыми множествами идеалов основного кольца Φ — непустыми подмножествами в $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathfrak{A})$ (см. (10)).

А именно, заметим сначала, что верна

Лемма 2. Пусть τ — модульное кручение и $\mathcal{F} = \mathcal{A}(\mathcal{R}(\tau))$. Тогда $\mathcal{F}$ — непустое подмножество в $\mathcal{A}$, удовлетворяющее требованиям *):

T1. Если $I \in \mathcal{F}$, $J \in \mathcal{A}$ и $I \subseteq J$, то $J \in \mathcal{F}$.

T2. Если $I \in \mathcal{F}$, то $(I : \lambda) \in \mathcal{F}$ для всех $\lambda \in \Phi$.

T3. Если $I \in \mathcal{F}$, $J \in \mathcal{A}$ и $(J : \iota) \in \mathcal{F}$ для всех $\iota \in I$, то $J \in \mathcal{F}$.

T4. Если $I \in \mathcal{F}$, $I' \in \mathcal{F}$, $J \in \mathcal{A}$ и $J \supseteq I \cap I'$, то $J \in \mathcal{F}$.

Доказательство. Напомним, что по указанному выше соглашению основной класс $\mathfrak{A}$ алгебр содержит вместе с каждой алгеброй A и соответствующую алгебру A^0 с нулевым умножением. Но тогда, очевидно,

$$\mathcal{A} = \{(0 : a) \mid a \in A^0 \in \mathfrak{A}\}.$$

*) Здесь мы рассматриваем Φ как модуль. Ясно, что его подмодули — это идеалы в Φ .

Кроме того, в силу леммы 1 и определения 3

$$\mathcal{F} = \mathcal{A}(\mathcal{R}(r)) = \{(0:a) \mid a \in A^0 \in \mathcal{R}(r)\}, \quad (11)$$

так как r — модульное кручение. Поэтому можно ограничиться рассмотрением только алгебр с нулевым умножением, отождествляя их с модулями. Замечая, что алгебра A^0 r -радикальна тогда и только тогда, когда r -радикальны ее однопорожжденные подмодули (т. е. главные идеалы) $(\Phi a)^0$ и, как было сказано выше, модули Φa и $\Phi/(0:a)$ изоморфны, легко получаем в силу (11)

$$\mathcal{F} = \{I \in \mathcal{A} \mid (\Phi/I)^0 \in \mathcal{R}(r)\}. \quad (12)$$

Пусть $I \in \mathcal{F}$, $J \in \mathcal{A}$ и $I \subseteq J$. В силу (12) $(\Phi/I)^0$ — r -радикальная алгебра. Но тогда r -радикальна и алгебра $(\Phi/J)^0$ как гомоморфный образ алгебры $(\Phi/I)^0$. В силу (12) $J \in \mathcal{F}$.

Пусть $I \in \mathcal{F}$, $J \in \mathcal{A}$, причем $(J:\iota) \in \mathcal{F}$ для всех $\iota \in I$. Замечая, что для любого $\bar{a} \in (I+J/J)^0$ существует прообраз $\iota \in I$, причем $(0:\bar{a}) = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha\bar{a} = 0\} = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha\iota \in J\} = (J:\iota) \in \mathcal{F}$, получаем, что все главные идеалы $(\Phi\bar{a})^0$ алгебры $(I+J/J)^0$ r -радикальны. Поэтому r -радикальна алгебра $(I+J/J)^0$ как сумма своих r -радикальных идеалов. Но r -радикальна и алгебра $(\Phi/I+J)^0$ как гомоморфный образ r -радикальной (в силу (12)) алгебры $(\Phi/I)^0$. Следовательно, r -радикальна и алгебра $(\Phi/J)^0$ как расширение r -радикальной алгебры $(I+J/J)^0$ с помощью r -радикальной алгебры $(\Phi/I+J)^0$, т. е. $J \in \mathcal{F}$.

Таким образом, множество $\mathcal{F}$ удовлетворяет требованиям T1, T3 (и непусто, так как $\Phi \in \mathcal{F}$). Но тогда $\mathcal{F}$ удовлетворяет и требованиям T2, T4.

Действительно, пусть $I \in \mathcal{F}$. Из $I \in \mathcal{A}$ вытекает существование такой алгебры A и такого элемента $a \in A$, что $I = (0:a)$. Но тогда для любого $\lambda \in \Phi$ получаем в силу определения частного $(I:\lambda) = ((0:a):\lambda) = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha\lambda a = 0\} = (0:\lambda a) \in \mathcal{A}$, так как $\lambda a \in A$. Кроме того, $(I:\lambda) \supseteq I$, так как I — идеал кольца Φ . Поэтому в силу T1 $(I:\lambda) \in \mathcal{F}$ для всех $\lambda \in \Phi$, т. е. выполнено требование T2.

Пусть $I \in \mathcal{F}$, $I' \in \mathcal{F}$, $J \in \mathcal{A}$ и $J \supseteq I \cap I'$. Возьмем любой $\iota \in I$. Тогда $(J:\iota) \in \mathcal{A}$ и $(I':\iota) \in \mathcal{F}$ в силу T2, и потому для всех $\iota \in I$ из $(J:\iota) \supseteq ((I \cap I'):\iota) = (I:\iota) \cap (I':\iota) = \Phi \cap (I':\iota) = (I':\iota)$ вытекает в силу T1

включение $(J : 1) \in \mathcal{F}$. Но тогда в силу ТЗ $J \in \mathcal{F}$, и мы доказали выполнение требования Т4.

Лемма доказана.

Из доказательства леммы вытекает, что для любого непустого подмножества $\mathcal{F}$ в $\mathcal{A}$ из выполнения условий Т1, ТЗ следует выполнение условий Т2, Т4. Учитывая это, даем такое

Определение 4. Непустое подмножество $\mathcal{F}$ идеалов кольца Φ назовем *радикальным фильтром* в $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{M})$, если $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ и удовлетворяет требованиям Т1, ТЗ леммы 2 (а значит и всем требованиям Т1 — Т4).

Теорема 4. Если $\mathcal{F}$ — радикальный фильтр в $\mathcal{A}$, то для любой алгебры A множество

$$\mathfrak{r}_{\mathcal{F}}(A) = \{a \in A \mid (0 : a) \in \mathcal{F}\} \quad (13)$$

является идеалом алгебры A , а полученное отображение $\mathfrak{r}_{\mathcal{F}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ — модульным кручением. При этом соответствия

$$\mathcal{F} \mapsto \mathfrak{r}_{\mathcal{F}}, \quad \mathfrak{r} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{R}(\mathfrak{r})) \quad (14)$$

являются обратными друг другу отображениями частично упорядоченного (относительно теоретико-множественного включения) множества всех радикальных фильтров в $\mathcal{A}$ на частично упорядоченный класс всех модульных кручений. В частности, оба эти частично упорядоченные множества являются изоморфными друг другу полными решетками.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ — радикальный фильтр в $\mathcal{A}$. Возьмем любую алгебру A и рассмотрим множество $\mathfrak{r}_{\mathcal{F}}(A)$, определенное равенством (13).

Пусть $a_1, a_2 \in \mathfrak{r}_{\mathcal{F}}(A)$, $x \in A$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \Phi$. В силу (13) $(0 : a_1), (0 : a_2) \in \mathcal{F}$. Применяя условие Т2 и учитывая определение 4, получаем

$$(0 : \alpha_1 a_1) = ((0 : a_1) : \alpha_1) \in \mathcal{F},$$

$$(0 : \alpha_2 a_2) = ((0 : a_2) : \alpha_2) \in \mathcal{F}.$$

Но, очевидно, верно включение

$$(0 : (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)) \supseteq (0 : \alpha_1 a_1) \cap (0 : \alpha_2 a_2).$$

Поэтому в силу Т4 $(0 : (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)) \in \mathcal{F}$, т. е. $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \in \mathfrak{r}_{\mathcal{F}}(A)$. Кроме того, из определения алгебры

легко следует, что

$$(0 : a_1 x) \supseteq (0 : a_1), \quad (0 : x a_2) \supseteq (0 : a_2),$$

и поэтому $(0 : a_1 x) \in \mathcal{F}$, $(0 : x a_2) \in \mathcal{F}$. А это означает, что $a_1 x, x a_2 \in r_{\mathcal{F}}(A)$. Следовательно, для любой алгебры A множество $r_{\mathcal{F}}(A)$ — идеал алгебры A .

Из (13) легко вытекает, что $r_{\mathcal{F}}(B) = B \cap r_{\mathcal{F}}(A)$ для любой алгебры A . Поэтому, очевидно, отображение $r_{\mathcal{F}}$ удовлетворяет требованию R4 из определения кручения. В частности, в любой алгебре A идеал $r_{\mathcal{F}}(A)$ будет наибольшим $r_{\mathcal{F}}$ -радикальным идеалом. Но тогда в силу T1 и равенства (13) отображение $r_{\mathcal{F}}$ удовлетворяет и требованию R1, так как при переходе к гомоморфным образам аннуляторы элементов модулей (гомоморфизм алгебр всегда является гомоморфизмом соответствующих модулей) увеличиваются.

Пусть $\bar{A} = A/r_{\mathcal{F}}(A)$. Возьмем любой элемент $\bar{a} \in r_{\mathcal{F}}(\bar{A})$ и какой-нибудь прообраз a элемента $\bar{a}$ при естественном гомоморфизме $v: A \rightarrow \bar{A}$. В силу (13) $(0 : \bar{a}) \in \mathcal{F}$. Кроме того для любого $\alpha \in (0 : \bar{a})$ получаем $v(\alpha a) = \alpha v(a) = \alpha \bar{a} = 0$ и поэтому $\alpha a \in r_{\mathcal{F}}(A)$. Но тогда в силу (13) и сказанного $((0 : a) : \alpha) = (0 : \alpha a) \in \mathcal{F}$ для всех $\alpha \in (0 : \bar{a})$. Применяя условие T3, получаем, что $(0 : a) \in \mathcal{F}$. Но тогда $a \in r_{\mathcal{F}}(A)$, т. е. $\bar{a} = 0$.

Следовательно, $r_{\mathcal{F}}(A/r_{\mathcal{F}}(A)) = 0$, т. е. отображение $r_{\mathcal{F}}$ удовлетворяет и требованию R3. Из доказанного вытекает, что отображение $r_{\mathcal{F}}$ удовлетворяет всем требованиям R1, R3, R4, т. е. является кручением. Но, очевидно, если $\varphi: A \rightarrow B$ — модульный изоморфизм, то $(0 : a) = (0 : \varphi(a))$ для любого элемента $a \in A$. Поэтому кручение $r_{\mathcal{F}}$, определяемое равенством (13), будет модульным в силу леммы 1 и определения 3.

Рассмотрим теперь соответствия (14). Для удобства обозначим

$$r(\mathcal{F}) = r_{\mathcal{F}}, \quad \mathcal{F}(r) = \mathcal{A}(\mathcal{R}(r))$$

для любого радикального фильтра $\mathcal{F}$ в $\mathcal{A}$ и любого модульного кручения r .

По доказанному $r(\mathcal{F})$ — модульное кручение для любого радикального фильтра $\mathcal{F}$ в $\mathcal{A}$. При этом из правила (13) с очевидностью вытекает, что для любых двух радикальных фильтров $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$

$$\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \Rightarrow r(\mathcal{F}_1) \leq r(\mathcal{F}_2).$$

С другой стороны в силу леммы 2 $\mathcal{F}(r)$ — радикальный фильтр в $\mathcal{A}$ для любого модульного кручения r , причем, очевидно

$$r_1 \leq r_2 \Rightarrow \mathcal{F}(r_1) \subseteq \mathcal{F}(r_2)$$

для любых двух модульных кручений r_1 и r_2 . Поэтому для окончания доказательства теоремы остается показать, что отображения r и $\mathcal{F}$ обратны друг другу.

Пусть $\mathcal{F}$ — радикальный фильтр в $\mathcal{A}$. Сравним его с радикальным фильтром $\mathcal{F}(r(\mathcal{F}))$.

По построению, $\mathcal{F}(r(\mathcal{F})) = \mathcal{A}(\mathcal{R}(r(\mathcal{F})))$. Но из доказательства леммы 2 вытекает (см. равенства (11) и (12)), что

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}(r(\mathcal{F}))) = \{I \in \mathcal{A} \mid r_{\mathcal{F}}((\Phi/I)^0) = (\Phi/I)^0\}. \quad (15)$$

Пусть $I \in \mathcal{F}$. Тогда для любого $\bar{a} \in (\Phi/I)^0$ получаем, обозначая символом a прообраз элемента $\bar{a}$, что

$$(0 : \bar{a}) = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha \bar{a} = 0\} = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha a \in I\} = (I : a) \in \mathcal{F}$$

в силу условия T2. Поэтому в силу (13) $r_{\mathcal{F}}((\Phi/I)^0) = (\Phi/I)^0$. Но тогда в силу (15) $I \in \mathcal{A}(\mathcal{R}(r(\mathcal{F})))$.

Обратно, пусть $I \in \mathcal{A}(\mathcal{R}(r(\mathcal{F})))$, т. е. $r_{\mathcal{F}}((\Phi/I)^0) = (\Phi/I)^0$ в силу (15). Тогда, обозначая символом e образ единицы 1 кольца Φ при модульном гомоморфизме $\Phi \rightarrow \Phi/I$, получаем

$$(0 : e) = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha e = 0\} = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha \in I\} = I,$$

и потому $I \in \mathcal{F}$ в силу (13).

Из доказанного вытекает, что для любого радикального фильтра $\mathcal{F}$ в $\mathcal{A}$

$$\mathcal{F}(r(\mathcal{F})) = \mathcal{F}. \quad (16)$$

Возьмем теперь любое модульное кручение r . Сравним его с модульным кручением $r(\mathcal{F}(r))$. Для этого заметим,

что (см. доказательство леммы 2)

$$\mathcal{F}(r) = \{I \in \mathcal{A} \mid r((\Phi/I))^0 = (\Phi/I)^0\}. \quad (17)$$

Для краткости пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}(r)$.

Пусть алгебра A r -радикальна. Тогда в силу леммы 1 и определения модульного кручения r -радикальна и алгебра A^0 . Поэтому для любого $a \in A$ r -радикальны и алгебры $(\Phi a)^0 \simeq (\Phi/(0:a))^0$. Применяя (17), получаем, что $(0:a) \in \mathcal{F}(r) = \mathcal{F}$ для всех $a \in A$ и поэтому в силу (13) алгебра A $r\mathcal{F}$ -радикальна. Из доказанного вытекает, что для любого модульного кручения r

$$r(\mathcal{F}(r)) = r. \quad (18)$$

Из (16) и (18) следует, что отображения $\mathcal{F}$ и r обратны друг другу, а значит и взаимно однозначны. Это заканчивает доказательство теоремы.

Следствие 5. Пусть все алгебры (в $\mathfrak{A}$) — алгебры с нулевым умножением. Тогда все кручения — модульные.

Это с очевидностью вытекает из леммы 1.

Следствие 6. Пусть основной класс $\mathfrak{A}$ совпадает с классом всех (вообще говоря неассоциативных) алгебр. Тогда все кручения — модульные.

Действительно, пусть алгебры A и B изоморфны как модули и $\varphi: A \rightarrow B$ — соответствующий модульный изоморфизм. Превратим множество

$$K = A \times B \times \Phi = \{(a, b, \alpha) \mid a \in A, b \in B, \alpha \in \Phi\}$$

в алгебру, полагая для любых $x, x_1, x_2 \in A, y, y_1, y_2 \in B, \beta, \alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \Phi$

$$(x_1, y_1, \alpha_1) + (x_2, y_2, \alpha_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, \alpha_1 + \alpha_2),$$

$$\beta(x, y, \alpha) = (\beta x, \beta y, \beta \alpha),$$

$$(x_1, y_1, \alpha_1) \cdot (x_2, y_2, \alpha_2) = (x_1 x_2 + \alpha_1 \varphi^{-1}(y_2), y_1 y_2 + \alpha_2 \varphi(x_1), 0).$$

Легко видеть, что мы действительно получим алгебру, причем множества

$$\{(a, 0, 0) \mid a \in A\}, \quad \{(0, b, 0) \mid b \in B\},$$

$$\{(x, y, 0) \mid x \in A, y \in B\}$$

— подалгебры алгебры K , изоморфные, соответственно, алгебре A , алгебре B и прямой сумме $A \oplus B$ этих алгебр. Отождествляя изоморфные алгебры, получаем, что $A \oplus B$ —

идеал алгебры K , порождаемый в K любой из подалгебр A , B . Но тогда, если τ — кручение и одна из алгебр A , B τ -радикальна, то в силу теоремы 1 (см. условие A6) τ -радикальна и алгебра $A \oplus B$, что влечет τ -радикальность обеих алгебр A , B .

Остается применить лемму 1 и определение модульного кручения.

Следствие 7. Пусть основное кольцо Φ является полем, а основной класс $\mathfrak{M}$ совпадает с классом всех алгебр или с классом всех конечномерных алгебр над полем Φ . Тогда любое кручение является либо нулевым ($0(A) = 0$ для всех алгебр A) либо тривиальным ($\varepsilon(A) = A$ для всех алгебр A).

Действительно, алгебра $K = A \times B \times \Phi$, построенная выше, конечномерная, если конечномерны алгебры A и B . Поэтому, как и выше, получаем, что в рассматриваемом случае все кручения — модульные. Остается применить теорему 4 и учесть, что поле Φ имеет только два идеала.

В заключение этого параграфа отметим, что, вообще говоря, не всякое кручение будет модульным. Так, например, если основное кольцо Φ является полем, а основной класс $\mathfrak{M}$ совпадает с классом всех ассоциативных алгебр, то все радикалы $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{J}$, построенные в первой главе, будут ненулевыми нетривиальными кручениями. А модульными кручениями будут только нулевое и тривиальное.

Отметим еще, что модульные кручения всегда образуют полную сильно дистрибутивную решетку, являющуюся полной подрешеткой «решетки» всех радикалов или «решетки» всех кручений. Доказательство этого утверждения вполне аналогично доказательству теоремы 3. Достаточно заметить, что в силу леммы 1 и определения 3 пересечение любого семейства радикальных (полупростых) классов, соответствующих модульным кручениям, само будет радикальным (полупростым) классом, соответствующим модульному кручению.

§ 4. Специфика ассоциативных алгебр

В этом параграфе мы рассмотрим ряд утверждений, учитывающих специфику ассоциативных алгебр. Тем не менее, как и в предыдущих параграфах, все рассматриваемые алгебры — алгебры из основного класса $\mathfrak{M}$ и в $\mathfrak{M}$

могут быть и неассоциативные алгебры, если противное не оговорено особо.

Лемма 1. Пусть A — ассоциативная алгебра, B — идеал в A , C — идеал в B . Тогда для любых $x, y \in A$ множества

$${}^x C^y = C + xC + Cy = xCy \quad (1)$$

будут идеалами алгебры B , причем

а) C — идеал алгебры ${}^x C^0$ и фактор-алгебра ${}^x C^0/C$ — гомоморфный образ алгебры C ; аналогично для ${}^0 C^y$.

б) ${}^x C^0$ — идеал алгебры ${}^x C^y$ и фактор-алгебра ${}^x C^y/{}^x C^0$ — гомоморфный образ алгебры ${}^x C^0$; аналогично для ${}^0 C^y$.

в) Идеал C_A в A , порожденный множеством C , совпадает с $\sum_{x, y \in A} {}^x C^y$.

Доказательство. Из того, что C — идеал алгебры B , B — идеал алгебры A и алгебра A ассоциативна, вытекает

$$\begin{aligned} B {}^x C^y &= BC + BxC + BCy + BxCy \subseteq \\ &\subseteq BC + BCy \subseteq C + Cy \subseteq {}^x C^y, \end{aligned}$$

и потому ${}^x C^y$ — левый идеал алгебры B . Аналогично, ${}^x C^y B \subseteq {}^x C^y$, и потому ${}^x C^y$ — идеал алгебры B для всех $x, y \in A$. А из равенства $C_A = C + AC + CA + ACA$ вытекает равенство $C_A = \sum_{x, y \in A} {}^x C^y$.

Возьмем любой элемент $z \in A$. Замечая, что по построению ${}^z C^0 = C + zC$, строим отображение $\varphi: C \rightarrow {}^z C^0/C$, полагая $c\varphi = zc + C$ для всех $c \in C$. Ясно, что φ является Φ -модульным гомоморфизмом алгебры C на алгебру ${}^z C^0/C$. Кроме того, для любых $c_1, c_2 \in C$ получаем

$$\begin{aligned} (c_1 c_2) \varphi &= z c_1 c_2 + C = (z c_1) c_2 + C = 0 + C, \\ (c_1 \varphi) (c_2 \varphi) &= z c_1 z c_2 + C = (z c_1 z) c_2 + C = 0 + C, \end{aligned}$$

и потому $(c_1 c_2) \varphi = 0 = (c_1 \varphi) (c_2 \varphi)$. Следовательно, φ — гомоморфизм алгебры C на алгебру ${}^z C^0/C$.

Из доказанного следует справедливость утверждения а). Но тогда замечая, что ${}^x C^y = {}^0 ({}^x C^0)^y = {}^x ({}^0 C^y)^0$, причем по доказанному ${}^x C^0$ и ${}^0 C^y$ — идеалы алгебры B , доказываем справедливость и утверждения б).

Лемма доказана.

Предложение 1. Пусть τ — произвольный радикал, A — произвольная ассоциативная алгебра, B — идеал алгебры A . Тогда

а) Любой τ -радикальный идеал алгебры B порождает в A τ -радикальный идеал.

б) Идеал $\tau(B)$ алгебры B , т. е. τ -радикал алгебры B , является идеалом и в алгебре A .

в) Если алгебра A τ -полупроста, то τ -полупроста и алгебра B .

Доказательство. Пусть C — τ -радикальный идеал алгебры B . Тогда в силу леммы 1 для всех $x, y \in A$ будут τ -радикальными идеалами в B и подалгебры ${}^xC^0$, ${}^yC^0$ как расширения τ -радикальной алгебры C с помощью τ -радикальной алгебры, являющейся гомоморфным образом алгебры C . Но тогда, снова в силу леммы 1, и все ${}^xC^y$ будут τ -радикальными идеалами алгебры B , а значит и алгебры $C_A = \sum_{x, y \in A} {}^xC^y$. Поэтому τ -радикальна и алгебра C_A как сумма своих τ -радикальных идеалов.

Мы доказали утверждение а). Но тогда верно и утверждение в), так как τ -полупростые алгебры — это в точности алгебры без ненулевых τ -радикальных идеалов.

Рассмотрим теперь τ -радикал $\tau(B)$ алгебры B . В силу а) идеал R алгебры A , порожденный множеством $\tau(B)$ в A , будет τ -радикальным идеалом в A . Но, очевидно, $R \subseteq B$, так как B — идеал алгебры A . Поэтому R — τ -радикальный идеал и в алгебре B . Но тогда $R \subseteq \tau(B)$, так как $\tau(B)$ — наибольший τ -радикальный идеал алгебры B . Следовательно, $\tau(B) = R$ — идеал алгебры A .

Предложение доказано.

Следствие 1. Пусть все алгебры (в $\mathfrak{A}$) ассоциативны. Тогда любой класс $\mathcal{F}$ алгебр, полупростой в смысле Куроша, замкнут относительно взятия идеалов.

Это с очевидностью вытекает из предложения 1.

Следствие 2. Пусть все алгебры (в $\mathfrak{A}$) ассоциативны. Тогда пересечение любого семейства полупростых в смысле Куроша классов само будет классом, полупростым в смысле Куроша.

Действительно, пусть $\{\mathcal{F}_i \mid i \in \Gamma\}$ — произвольное семейство классов, полупростых в смысле Куроша. и $\mathcal{F} = \bigcap_{i \in \Gamma} \mathcal{F}_i$.

Так как все алгебры ассоциативны, то в силу следствия 1

все классы $\mathcal{F}_i$ замкнуты относительно взятия идеалов. Поэтому и класс $\mathcal{F}$ замкнут относительно взятия идеалов. В частности, класс $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию K^*1 : если R — алгебра из $\mathcal{F}$, то любой ненулевой идеал алгебры R будет ненулевой алгеброй из класса $\mathcal{F}$ и потому гомоморфно отображается на ненулевые алгебры из класса $\mathcal{F}$. Но, очевидно, класс $\mathcal{F}$ удовлетворяет и условию K^*2 , так как этому условию удовлетворяют все классы $\mathcal{F}_i$: если любой ненулевой идеал алгебры R гомоморфно отображается на ненулевые алгебры из класса $\mathcal{F} = \bigcap_{i \in \Gamma} \mathcal{F}_i$, то

R принадлежит всем классам $\mathcal{F}_i$ и потому $R \in \mathcal{F}$. В силу теоремы 1.3 класс $\mathcal{F}$ полупрост в смысле Куроша.

Следствие 3. Пусть все алгебры (в $\mathfrak{A}$) ассоциативны. Радикал τ будет кручением тогда и только тогда, когда он является наследственным радикалом, т. е. когда любой идеал τ -радикальной алгебры сам будет τ -радикальной алгеброй.

Это с очевидностью вытекает из предложения 1 и следствия 3.1.

Следствие 4. Пусть все алгебры (в $\mathfrak{A}$) ассоциативны. Тогда любой класс, радикальный в смысле Куроша, удовлетворяет условию A_6 . Поэтому радикальные классы — это в точности классы, радикальные в смысле Куроша, замкнутые относительно взятия идеалов.

Первое утверждение вытекает из предложения 1. Второе утверждение — из теорем 3.1, 1.1 и первого утверждения.

Следствие 5. Пусть все алгебры (в $\mathfrak{A}$) ассоциативны. Тогда любой класс, полупростой в смысле Куроша, удовлетворяет условию P_2 . Поэтому полупростые классы — это в точности классы, полупростые в смысле Куроша, удовлетворяющие условию P_1 .

Действительно, пусть класс $\mathcal{F}$ полупрост в смысле Куроша и τ — соответствующий радикал, т. е. $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\tau)$. Пусть B — идеал алгебры A , C — идеал алгебры B и C не содержит ненулевых идеалов алгебры A . Пусть B/C — алгебра из класса $\mathcal{F}$, т. е. $\tau(B/C) = 0$. Тогда $C \cong \tau(B)$. Но в силу ассоциативности алгебр $\tau(B)$ — идеал алгебры A согласно предложению 1. Поэтому из условий, налагаемых на C , вытекает равенство $\tau(B) = 0$. Следовательно, $B \in \mathcal{F}$, и мы доказали выполнение условия P_2 (см.

теорему 3.2). Следовательно, верно первое из нужных нам утверждений. Второе утверждение вытекает из первого в силу теоремы 3.2, так как любой класс, полупростой в смысле Куроша, замкнут относительно взятия идеалов (в силу следствия 1) и подпрямых произведений.

Предложение 2. *В утверждениях предложения 1 и следствий 1 — 5 ассоциативность рассматриваемых алгебр существенна.*

Действительно, достаточно доказать это для следствий 1 — 5, так как все они вытекают из предложения 1 и общих утверждений о классах, радикальных и полупростых в смысле Куроша.

Класс, полупростой в смысле Куроша, может не быть замкнут относительно взятия идеалов. Это показывает предложение 1.2.

Пересечение классов, полупростых в смысле Куроша, может не быть классом, полупростым в смысле Куроша. Это показывает предложение 2.2.

Чтобы показать существенность ассоциативности в утверждениях следствий 3 и 4, допустим, что основной класс $\mathfrak{A}$ совпадает с классом всех алгебр (вообще говоря неассоциативных). Из доказательства предложения 2.6 вытекает, что если класс $\mathcal{M}$ алгебр замкнут относительно взятия идеалов и гомоморфных образов, то и все члены цепи Куроша, соответствующей классу $\mathcal{M}$, будут замкнуты относительно взятия идеалов и гомоморфных образов. Но тогда для нижнего радикала $l_{\mathcal{M}}$ получаем, что и класс $\mathcal{R}(l_{\mathcal{M}}) = \mathcal{M}^{(*)} = \bigcup_{\alpha \geq 0} \mathcal{M}^{(\alpha)}$ замкнут

относительно взятия идеалов (см. также следствие 2.3). Учитывая это, возьмем в качестве класса $\mathcal{M}$ класс всех таких алгебр A , что либо A — простая алгебра (т. е. $A = A^2 \neq 0$ и единственными идеалами в A являются 0 и A), либо A — нулевая алгебра. Ясно, что класс $\mathcal{M}$ непуст, так как основной класс $\mathfrak{A}$ совпадает с классом всех алгебр, причем класс $\mathcal{M}$ замкнут относительно взятия идеалов и гомоморфных образов. Поэтому радикал $l_{\mathcal{M}}$ является наследственным радикалом, так как класс $\mathcal{M}^* = \mathcal{R}(l_{\mathcal{M}})$ замкнут относительно взятия идеалов. Не менее ясно, что $l_{\mathcal{M}} \neq 0$. С другой стороны, пусть $\bar{\Phi}$ — поле, являющееся гомоморфным образом алгебры Φ (основного кольца). Тогда, по построению, $\bar{\Phi} \in \mathcal{R}(l_{\mathcal{M}})$, так как

$\bar{\Phi} \in \mathcal{M}$. Легко видеть, что алгебра Φ^0 с нулевым умножением, соответствующая $\bar{\Phi}$, не имеет нетривиальных идеалов, так как модуль $\bar{\Phi}$ не имеет нетривиальных подмодулей. Поэтому в силу предложения 2.5 очевидное соотношение $\bar{\Phi}^0 \notin \mathcal{M}$ влечет соотношение $\bar{\Phi}^0 \notin \mathcal{R}(l_{\mathcal{M}})$. Таким образом, $\bar{\Phi} \in \mathcal{R}(l_{\mathcal{M}})$, $\bar{\Phi}^0 \notin \mathcal{R}(l_{\mathcal{M}})$. Но тогда в силу леммы 3.1 и определения 3.3 $l_{\mathcal{M}}$ не является модульным кручением. А отсюда в силу следствия 3.6 получаем, что наследственный радикал $l_{\mathcal{M}}$ не является кручением и потому радикальный в смысле Куроша класс $\mathcal{R}(l_{\mathcal{M}})$ не радикален, хотя и замкнут относительно взятия идеалов *).

Остается рассмотреть утверждение следствия 5.

Будем считать, как и выше, что основной класс $\mathfrak{A}$ — класс всех, не обязательно ассоциативных, алгебр (или Φ — поле и $\mathfrak{A}$ — класс всех конечномерных алгебр), $\mathcal{M}$ — класс, состоящий из всех простых алгебр и нулевой алгебры. Повторяя рассуждения, проведенные выше, убеждаемся, что радикал $\tau = l_{\mathcal{M}}$ является наследственным радикалом, но не является кручением. Поэтому соответствующий ему класс $\mathcal{P} = \mathcal{P}(l_{\mathcal{M}})$ не полупрост, хотя и полупрост в смысле Куроша. В силу следствия 3.4 класс $\mathcal{P}$ не удовлетворяет хотя бы одному из условий П1, П2.

Пусть B — идеал алгебры A , причем $B \cap C \neq 0$ для любого ненулевого идеала C алгебры A . Пусть $B \in \mathcal{P}$. В силу наследственности радикала $\tau = l_{\mathcal{M}}$, идеал $B \cap \tau(A)$ будет τ -радикальным идеалом и алгебры A и алгебры B . Но алгебра B не имеет ненулевых τ -радикальных идеалов, так как она τ -полупроста. Поэтому $B \cap \tau(A) = 0$. Но тогда $\tau(A) = 0$, т. е. $A \in \mathcal{P}$.

В результате мы получим, что $\mathcal{P}$ — класс, полупростой в смысле Куроша, удовлетворяющий условию П1, не удовлетворяющий условию П2 и не являющийся полупростым классом.

Предложение доказано.

Рассмотрим теперь процесс построения нижних радикалов с помощью цепей Куроша (см. § 2).

*) Более того, из доказательства следствий 3.6 и 3.7 легко получаем, что тот же результат можно получить и в случае, когда $\mathfrak{A}$ — класс всех конечномерных алгебр над полем Φ .

Пусть $\mathcal{M}$ — произвольный класс алгебр, замкнутый относительно гомоморфных образов и

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^{(0)} \subseteq \mathcal{M}^{(1)} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{M}^{(\alpha)} \subseteq \mathcal{M}^{(\alpha+1)} \subseteq \dots \quad (2)$$

— цепь Куроша, соответствующая классу $\mathcal{M}$. В силу предложения 2.4 все классы $\mathcal{M}^{(\alpha)}$ тоже замкнуты относительно взятия гомоморфных образов. Поэтому в силу предложения 2.3 с каждым классом $\mathcal{M}^{(\alpha)}$ связывается отображение $\sigma_{\mathcal{M}^{(\alpha)}}: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$, удовлетворяющее требованиям R1 и R3.

Следствие 6. Для любой алгебры R существует такое порядковое число $\alpha = \alpha(R)$, что

$$l_{\mathcal{M}}(R) = \sigma_{\mathcal{M}^{(\alpha)}}(R) = \bigcup_{\beta \geq 0} \sigma_{\mathcal{M}^{(\beta)}}(R). \quad (3)$$

Действительно, в силу предложения 2.3 для любого порядкового числа γ

$$\sigma_{\mathcal{M}^{(\gamma)}}(R) = \bigcap \{P \mid P \text{ — идеал в } R, R/P \in (\mathcal{M}^{(\gamma)})^{-1}\}, \quad (4)$$

т. е. $\sigma_{\mathcal{M}^{(\gamma)}}(R)$ — наименьший среди всех таких идеалов P алгебры R , что фактор-алгебра R/P не имеет ненулевых $\mathcal{M}^{(\gamma)}$ -радикальных идеалов (идеалов, являющихся алгебрами из класса $\mathcal{M}^{(\gamma)}$). Из (2) и (4) вытекает

$$\sigma_{\mathcal{M}}(R) = \sigma_{\mathcal{M}^{(0)}}(R) \subseteq \sigma_{\mathcal{M}^{(1)}}(R) \subseteq \dots \subseteq \sigma_{\mathcal{M}^{(\gamma)}}(R) \subseteq \dots \quad (5)$$

Но R — множество. Поэтому цепь идеалов (5) должна стабилизироваться на некотором порядковом шаге. Это означает, что

$$\bigcup_{\gamma \geq 0} \sigma_{\mathcal{M}^{(\gamma)}}(R) = \sigma_{\mathcal{M}^{(\alpha)}}(R) \quad (6)$$

для некоторого порядкового числа α . Сравним идеалы $l_{\mathcal{M}}(R)$ и $\sigma_{\mathcal{M}^{(\alpha)}}(R)$.

По построению

$$\mathcal{R}(l_{\mathcal{M}}) = \mathcal{M}^{(*)} = \bigcup_{\gamma \geq 0} \mathcal{M}^{(\gamma)}.$$

Поэтому

$$l_{\mathcal{M}}(R) = \sigma_{\mathcal{M}^{(*)}}(R) \supseteq \sigma_{\mathcal{M}^{(\alpha)}}(R). \quad (7)$$

С другой стороны, в силу (6) и (4) фактор-алгебра $R/\sigma_{\mathcal{M}^{(\alpha)}}(R)$ не имеет ненулевых $\mathcal{M}^{(\beta)}$ -радикальных идеалов для любого $\beta \geq \alpha$, а потому не имеет и ненулевых $\mathcal{M}^{(*)}$ -радикальных, т. е. $l_{\mathcal{M}}$ -радикальных идеалов. Поэтому верно включение, обратное включению (7), а значит верно и равенство (3), что и требовалось доказать.

Будем считать, что $\alpha(R)$ — это наименьшее среди всех порядковых чисел α , для которых верно равенство (3). Ясно, что тогда вопрос о стабилизации цепи Куроша (2) равносильно вопросу: существует ли такое порядковое число ν , что $\alpha(R) \leq \nu$ для всех алгебр R ?

В общем случае ответ на этот вопрос отрицателен, как показывает предложение 2.6: такого числа может не существовать, так как цепь Куроша (2) может не стабилизироваться ни на каком шаге.

Однако в случае ассоциативных алгебр цепь Куроша всегда стабилизируется.

Подалгебра M алгебры R называется *метаидеалом*, если M — член некоторого конечного нормального ряда алгебры R .

Теорема 1. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольный класс алгебр, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов, ω — первое бесконечное порядковое число. Тогда верны следующие утверждения:

а) Пусть M — метаидеал ассоциативной алгебры R , M_R — идеал алгебры R , порожденный множеством M . Если M — алгебра из класса $\mathcal{M}$, то M_R — алгебра из класса $\mathcal{M}^{(n)}$ для некоторого $n \leq \omega$.

б) Ассоциативная алгебра Q $l_{\mathcal{M}}$ -полупроста (где $l_{\mathcal{M}}$ — нижний радикал, порожденный классом $\mathcal{M}$) тогда и только тогда, когда она не имеет ненулевых метаидеалов, являющихся алгебрами из класса $\mathcal{M}$.

в) Для любой ассоциативной алгебры R верно равенство

$$l_{\mathcal{M}}(R) = \sigma_{\alpha < \omega} \mathcal{M}^{(\alpha)}(R) = \sigma_{\mathcal{M}^{(\omega)}}(R). \quad (8)$$

г) Если все алгебры (в $\mathcal{M}$) ассоциативны, то цепь Куроша, соответствующая классу $\mathcal{M}$, стабилизируется на ω -м шаге, т. е.

$$\mathcal{R}(l_{\mathcal{M}}) = \mathcal{M}^{(*)} = \bigcup_{\beta \geq 0} \mathcal{M}^{(\beta)} = \mathcal{M}^{(\omega)}. \quad (9)$$

Доказательство. Пусть M — метайдеал ассоциативной алгебры R , M_R — идеал алгебры R , порожденный множеством M . По определению метайдеала существует конечный нормальный ряд алгебры R , имеющий вид

$$M = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_m \subseteq M_{m+1} = R. \quad (10)$$

При этом всегда можно считать, что $m \geq 2$, так как в ряде (10) могут быть повторения. Положим $M^{(0)} = M$. Если для некоторого натурального $k \leq m$ мы уже построили подалгебру $M^{(k-1)}$, являющуюся идеалом алгебры M_k , то, продолжая процесс, строим идеал $M^{(k)}$ алгебры M_{k+1} , порожденный множеством $M^{(k-1)}$. Из нормальности ряда (10) легко вытекает, что на последнем шаге мы получим идеал $M^{(m)}$ алгебры R , совпадающий с идеалом M_R , порожденным M в R .

Учитывая проведенное построение, допустим, что $M \in \mathcal{M}$. Тогда $M^{(0)} \in \mathcal{M}^{(0)}$.

Пусть мы уже доказали, что $M^{(k-1)} \in \mathcal{M}^{(s)}$ для некоторого целого $s \geq 0$. Деля переход, обозначим $C = M^{(k-1)}$, $B = M_k$, $A = M_{k+1}$. В результате мы попадаем в условия леммы 1, причем по построению $M^{(k)}$ совпадает с идеалом C_A алгебры A , порожденным множеством C .

Пусть $x, y \in A$. В силу леммы 1 ${}^xC^0$ — расширение алгебры C с помощью некоторого гомоморфного образа алгебры C . Но тогда, как легко видеть, любой ненулевой гомоморфный образ алгебры ${}^xC^0$ имеет ненулевой идеал I , являющийся гомоморфным образом алгебры C . Но тогда из $C \in \mathcal{M}^{(s)}$ вытекает, что и $I \in \mathcal{M}^{(s)}$ для всех указанных идеалов. Поэтому

$${}^xC^0 \in {}^{-1}((\mathcal{M}^{(s)})^{-1}) = \mathcal{M}^{(s+1)}.$$

Еще раз применяя лемму 1, получаем, что ${}^xC^y$ — расширение алгебры ${}^xC^0$ с помощью некоторого гомоморфного образа алгебры ${}^xC^0$. Но тогда, как и выше, получаем, что

$${}^xC^y \in {}^{-1}((\mathcal{M}^{(s+1)})^{-1}) = \mathcal{M}^{(s+2)}.$$

В силу леммы 1 $C_A = \sum_{x, y \in A} {}^xC^y$. По доказанному все алгебры ${}^xC^y$ — алгебры из класса $\mathcal{M}^{(s+2)}$. Кроме того, все алгебры ${}^xC^y$ — идеалы алгебры C_A . А отсюда вытекает, что $C_A \in \mathcal{M}^{(s+3)}$.

Итак, мы доказали, что если $M^{(k-1)} \in \mathcal{M}^{(s)}$, то $M^{(k)} \in \mathcal{M}^{(s+3)}$, откуда последовательно получаем включения

$$M = M^{(0)} \in \mathcal{M}^{(6)}, M^{(1)} \in \mathcal{M}^{(3)}, \dots, M^{(k)} \in \mathcal{M}^{(3k)}, \dots \\ \dots, M_R = M^{(m)} \in \mathcal{M}^{(3m)}.$$

Следовательно, верно утверждение а).

Учитывая утверждение а), возьмем любую ассоциативную алгебру Q .

Если алгебра Q $l_{\mathcal{M}}$ -полупроста, то в силу предложения 1 и все идеалы алгебры Q будут $l_{\mathcal{M}}$ -полупростыми алгебрами. Но тогда $l_{\mathcal{M}}$ -полупростыми алгебрами будут все метаидеалы алгебры Q . Так как все алгебры из класса $\mathcal{M}$ $l_{\mathcal{M}}$ -радикальны, то Q не имеет ненулевых метаидеалов, являющихся алгебрами из класса $\mathcal{M}$.

Обратно, пусть алгебра Q не $l_{\mathcal{M}}$ -полупроста. Тогда Q имеет ненулевой $l_{\mathcal{M}}$ -радикальный идеал R . В силу предложения 2.5 алгебра R имеет нормальный ряд, все члены которого достижимы, а все факторы — алгебры из класса $\mathcal{M}$. Удаляя повторения и учитывая, что $R \neq 0$, мы можем записать этот нормальный ряд в виде

$$0 \subset R_0 \subset \dots \subset R_\gamma \subset R_{\gamma+1} \subset \dots \subset R_\mu = R.$$

Но тогда первый член R_0 этого ряда будет ненулевым метаидеалом алгебры R , являющимся алгеброй из класса $\mathcal{M}$.

Следовательно, верно утверждение б). То, что все $l_{\mathcal{M}}$ -полупростые ассоциативные алгебры не имеют ненулевых метаидеалов, являющихся алгебрами из класса $\mathcal{M}$, вытекает и из утверждения а).

Пусть R — произвольная ассоциативная алгебра. Из построения цепи Куроша с очевидностью вытекает включение

$$l_{\mathcal{M}}(R) \equiv \sigma_{\alpha < \omega} \mathcal{M}^{(\alpha)}(R). \quad (11)$$

С другой стороны, пусть $I = \sigma_{\alpha < \omega} \mathcal{M}^{(\alpha)}(R)$. В силу предложения 2.3 фактор-алгебра R/I не имеет ненулевых идеалов, являющихся алгебрами из классов $\mathcal{M}^{(\alpha)}$ с $\alpha < \omega$. Учитывая, что алгебра R/I ассоциативна, выводим в силу а), что алгебра R/I не имеет ненулевых метаидеалов, являющихся алгебрами из класса $\mathcal{M}$. Но тогда в силу б) ал-

гебра R/I $l_{\mathcal{M}}$ -полупроста и потому верно включение, обратное включению (11).

А из этого вытекает, что верно равенство (8), и мы доказали в).

Допустим теперь, что все алгебры ассоциативны. Тогда в силу предложения 2.3 и построения цепи Куроша выводим из справедливости утверждения в) равенство

$$\mathcal{R}(l_{\mathcal{M}}) = \mathcal{R}\left(\sigma_{\alpha < \omega} \bigcup_{\alpha < \omega} \mathcal{M}^{(\alpha)}\right) = {}^{-1}\left(\left(\bigcup_{\alpha < \omega} \mathcal{M}^{(\alpha)}\right)^{-1}\right) = \mathcal{M}^{(\omega)}.$$

А это и дает нам равенство (9). Следовательно, верно и утверждение г).

Теорема доказана.

Следствие 7. Пусть все алгебры (в $\mathfrak{A}$) ассоциативны. Пусть класс $\mathcal{M}$ замкнут относительно взятия идеалов и гомоморфных образов. Тогда класс $\mathcal{M}^{(\omega)}$ является наименьшим радикальным классом, содержащим класс $\mathcal{M}$, а нижний радикал $l_{\mathcal{M}}$ — наименьшим кручением, относительно которого все алгебры из класса $\mathcal{M}$ радикальны.

Это вытекает из теоремы 1, следствия 3 и следствия 3.1, так как $l_{\mathcal{M}}$ — наименьший радикал, относительно которого все алгебры из класса $\mathcal{M}$ радикальны.

Следствие 8. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольный подкласс основного класса $\mathfrak{A}$, замкнутый относительно взятия идеалов и гомоморфных образов («основной подкласс» в $\mathfrak{A}$). Тогда:

а) Если $\tau: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ — кручение, т.о., полагая

$$\tau_{\mathfrak{M}}(A) = \tau(A)$$

для любой алгебры A из $\mathfrak{M}$, мы получаем кручение $\tau_{\mathfrak{M}}: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$, которое называется кручением в $\mathfrak{M}$, индуцированным кручением τ .

б) Если все алгебры (в $\mathfrak{A}$) ассоциативны, то каждое кручение в $\mathfrak{M}$ индуцируется некоторым кручением в $\mathfrak{A}$.

Действительно, утверждение а) очевидно в силу определения кручения. Остается доказать утверждение б).

Пусть все алгебры ассоциативны и $\tau_{\mathfrak{M}}: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ — произвольное кручение в $\mathfrak{M}$. Ясно, что тогда класс $\mathcal{R}(\tau_{\mathfrak{M}})$ будет замкнут относительно взятия идеалов и гомоморфных образов. Поэтому в силу следствия 6 нижний радикал,

порожденный этим классом (в $\mathfrak{M}$), будет некоторым кручением τ . Замечаем, что верно равенство

$$\mathcal{R}(\tau) \cap \mathfrak{M} = \mathcal{R}(\tau_{\mathfrak{M}}). \quad (12)$$

Действительно, достаточно доказать, что τ -радикальные алгебры из $\mathfrak{M}$ — это в точности $\tau_{\mathfrak{M}}$ -радикальные алгебры. Но если алгебра R τ -радикальна и принадлежит классу $\mathfrak{M}$, то по построению нижнего радикала она имеет нормальный ряд, все члены которого достижимы, а все факторы — алгебры из класса $\mathcal{R}(\tau_{\mathfrak{M}})$. Но в силу замкнутости класса $\mathfrak{M}$ относительно взятия идеалов и гомоморфных образов все члены и все факторы этого ряда будут алгебрами из класса $\mathfrak{M}$. Поэтому, еще раз применяя предложения 2.4 и 2.5, но уже в классе $\mathfrak{M}$, получаем: алгебра R принадлежит наименьшему радикальному в $\mathfrak{M}$ классу, содержащему $\mathcal{R}(\tau_{\mathfrak{M}})$. Но этим классом и является класс $\mathcal{R}(\tau_{\mathfrak{M}})$. Поэтому $\mathcal{R}(\tau) \cap \mathfrak{M} \subseteq \mathcal{R}(\tau_{\mathfrak{M}})$. Так как обратное включение очевидно, то верно равенство (12).

Из равенства (12) и замкнутости класса $\mathfrak{M}$ относительно взятия идеалов и гомоморфных образов вытекает, что для любой алгебры $A \in \mathfrak{M}$

$$\begin{aligned} \tau(A) &= \sum \{I \mid I \text{ — идеал в } A, \quad I \in \mathcal{R}(\tau)\} = \\ &= \sum \{I \mid I \text{ — идеал в } A, \quad I \in \mathcal{R}(\tau_{\mathfrak{M}})\} = \tau_{\mathfrak{M}}(A). \end{aligned}$$

Следовательно, кручение $\tau_{\mathfrak{M}}$ в $\mathfrak{M}$ индуцируется построенным кручением τ . Поэтому верно и утверждение б).

Теперь мы можем получить значительное усиление основного результата теоремы 1 для классов $\mathcal{M}$ алгебр, замкнутых и относительно взятия идеалов и относительно взятия гомоморфных образов.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольный класс алгебр, замкнутый относительно взятия идеалов и гомоморфных образов. Тогда и класс $\mathcal{R}(\sigma_{\mathcal{M}})$ всех $\sigma_{\mathcal{M}}$ -радикальных алгебр замкнут относительно взятия идеалов и гомоморфных образов. При этом верны следующие утверждения:

а) Ассоциативная алгебра $QI_{\mathcal{M}}$ -полупроста тогда и только тогда, когда она не имеет ненулевых $\sigma_{\mathcal{M}}$ -радикальных идеалов.

б) Для любой ассоциативной алгебры A верно равенство

$$l_{\mathcal{M}}(A) = \sigma_{\mathcal{R}(\sigma_{\mathcal{M}})}(A) = \sigma_{\mathcal{M}^{(1)}}(A). \quad (13)$$

в) Если все алгебры (в $\mathfrak{A}$) ассоциативны, то

$$\mathcal{R}(l_{\mathcal{M}}) = \mathcal{M}^{(*)} = \mathcal{R}(\sigma_{\mathcal{R}(\sigma_{\mathcal{M}})}) = \mathcal{M}^{(2)}. \quad (14)$$

При этом нижний радикал $l_{\mathcal{M}}$ — наименьшее кручение, относительно которого все алгебры из класса $\mathcal{M}$ радикальны, а $\mathcal{M}^{(2)}$ — наименьший радикальный класс, содержащий класс $\mathcal{M}$.

Доказательство. Пусть мы доказали утверждение а).

Пусть A — ассоциативная алгебра. В силу предложения 2.3 фактор-алгебра $A/\sigma_{\mathcal{R}(\sigma_{\mathcal{M}})}(A)$ не имеет ненулевых $\sigma_{\mathcal{M}}$ -радикальных идеалов. В силу а) эта фактор-алгебра $l_{\mathcal{M}}$ -полупроста и потому верно включение

$$\sigma_{\mathcal{R}(\sigma_{\mathcal{M}})}(A) \supseteq l_{\mathcal{M}}(A).$$

Так как обратное включение очевидно, то верно равенство (13), поэтому верно утверждение б).

Но тогда, если все алгебры (в $\mathfrak{A}$) ассоциативны, то из равенств (13) вытекает справедливость равенств (14). Кроме того, из предложения 2.3 легко вытекает, что классы $\mathcal{M}^{(1)} = \mathcal{R}(\sigma_{\mathcal{M}})$ и $\mathcal{M}^{(2)} = \mathcal{R}(\sigma_{\mathcal{R}(\sigma_{\mathcal{M}})})$ замкнуты относительно взятия идеалов и гомоморфных образов, так как класс $\mathcal{M}$ обладает этим свойством. Но тогда в силу (14) из следствия 6 легко вытекает, что верно и утверждение в).

Остается доказать, что утверждение а) верно. А для этого достаточно доказать, что если алгебра Q не имеет ненулевых $\sigma_{\mathcal{M}}$ -радикальных идеалов и ассоциативна, то она $l_{\mathcal{M}}$ -полупроста.

Пусть $\mathcal{U}$ — класс всех ассоциативных алгебр (из $\mathfrak{A}$), а $\mathfrak{N}$ — класс всех алгебр (из $\mathfrak{A}$) с нулевым умножением.

Замечаем, что отображение $\sigma_{\mathcal{M}}$ индуцирует в $\mathfrak{N}$ некоторое кручение.

Действительно, из построения отображения $\sigma_{\mathcal{M}}$ легко вытекает, что в классе $\mathfrak{N}$ отображение $\sigma_{\mathcal{M}}$ совпадает с отображением $\sigma_{\mathcal{M} \cap \mathfrak{N}}$. В алгебрах с нулевым умножением понятие идеала и подалгебры совпадают. Поэтому в классе $\mathfrak{N}$

класс $(\mathcal{M} \cap \mathfrak{N})^{-1}$ замкнут относительно взятия идеалов, а класс $\mathcal{M} \cap \mathfrak{N}$ — относительно взятия идеалов и гомоморфных образов. Но тогда в силу леммы 2.2 $(\mathcal{M} \cap \mathfrak{N})^{-1}$ и $^{-1}((\mathcal{M} \cap \mathfrak{N})^{-1})$ оказываются, соответственно, полупростым и радикальным в смысле Куроша классами в классе $\mathfrak{N}$. При этом класс $^{-1}((\mathcal{M} \cap \mathfrak{N})^{-1})$ замкнут относительно взятия идеалов, так как этим свойством обладает класс $\mathcal{M} \cap \mathfrak{N}$. Но тогда в силу следствия 4 класс $^{-1}((\mathcal{M} \cap \mathfrak{N})^{-1})$ будет радикален в классе $\mathfrak{N}$, так как все алгебры с нулевым умножением ассоциативны. Но тогда для любой алгебры $N \in \mathfrak{N}$

$$\sigma_{\mathcal{M}}(N) = \sigma_{\mathcal{M} \cap \mathfrak{N}}(N) = \bigcap \{P \mid P \text{ — идеал в } N, N/P \in (\mathcal{M} \cap \mathfrak{N})^{-1}\},$$

и мы получили, что отображение $\sigma_{\mathcal{M}}$ индуцирует в классе $\mathfrak{N}$ некоторое кручение $\tau_{\mathfrak{N}}$, соответствующее полупростому в $\mathfrak{N}$ классу $(\mathcal{M} \cap \mathfrak{N})^{-1}$.

Итак, отображение $\sigma_{\mathcal{M}}: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}$ индуцирует кручение $\tau_{\mathfrak{N}}: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}$. Но тогда из включения $\mathfrak{N} \subseteq \mathcal{U}$ вытекает в силу следствия 7, что кручение $\tau_{\mathfrak{N}}$ в $\mathfrak{N}$ индуцируется некоторым кручением $\tau_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ ассоциативных алгебр. По построению получаем для любой алгебры N с нулевым умножением

$$\tau_{\mathcal{U}}(N) = \tau_{\mathfrak{N}}(N) = \sigma_{\mathcal{M}}(N). \quad (15)$$

Учитывая доказанное, возьмем любую ассоциативную алгебру Q без ненулевых $\sigma_{\mathcal{M}}$ -радикальных идеалов.

Допустим, что алгебра Q не $l_{\mathcal{M}}$ -полупроста. Тогда в силу теоремы 1 алгебра Q имеет ненулевой метайдеал Q_0 , являющийся алгеброй из класса $\mathcal{M}$. По определению метайдеала существует конечный нормальный ряд

$$0 \subset Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq \dots \subseteq Q_k \subseteq Q_{k+1} = Q. \quad (16)$$

В силу ассоциативности алгебры Q произведение

$$Q_k Q_{k-1} \dots Q_2 Q_1 Q_0 Q_1 Q_2 \dots Q_{k-1} Q_k \subseteq Q_0$$

будет идеалом алгебр Q и Q_0 . Но класс $\mathcal{M}$ замкнут относительно взятия идеалов. Поэтому указанное произведение будет алгеброй из класса $\mathcal{M}$, а значит и $\sigma_{\mathcal{M}}$ -радикальным идеалом алгебры Q . По условию алгебра Q

не имеет ненулевых $\sigma_{\mathcal{M}}$ -радикальных идеалов. Поэтому выписанное произведение равно нулю, что влечет $Q_0^{2k+1} = 0$.

Таким образом Q_0 — ненулевая (ассоциативная) нильпотентная алгебра, принадлежащая классу $\mathcal{M}$. Поэтому некоторая ее степень R_0 будет ненулевой алгеброй с нулевым умножением. Ясно, что R_0 — алгебра из $\mathcal{M}$, так как R_0 — идеал алгебры Q_0 из $\mathcal{M}$. В силу (15) алгебра R_0 $\tau_{\mathcal{U}}$ -радикальна. Поднимаясь по ряду (16), строим цепь подалгебр

$$0 \subset R_0 \subseteq R_1 \subseteq R_2 \subseteq \dots \subseteq R_k \subseteq R_{k+1} \subseteq Q. \quad (17)$$

А именно, начинаем с алгебры R_0 . Если для некоторого $i \leq k$ подалгебра R_i уже построена, то символом R_{i+1} обозначаем идеал алгебры Q_{i+1} , порожденный множеством R_i . Сделав k шагов, получим всю цепь (17).

По построению для каждого $i \leq k$ Q_i — идеал алгебры Q_{i+1} (в силу нормальности ряда (16)), R_i — идеал алгебры Q_i , R_{i+1} — идеал алгебры Q_{i+1} , порожденный множеством R_i . Поэтому в силу ассоциативности рассматриваемых алгебр, а также леммы 1.1.5 и предложения 1 нильпотентность и $\tau_{\mathcal{U}}$ -радикальность алгебры R_0 влекут нильпотентность и $\tau_{\mathcal{U}}$ -радикальность всех алгебр R_i . В частности, R_{k+1} — ненулевая (ассоциативная) нильпотентная $\tau_{\mathcal{U}}$ -радикальная алгебра, являющаяся идеалом алгебры Q .

Поэтому некоторая степень R идеала R_{k+1} будет ненулевым идеалом в Q , являющимся алгеброй с нулевым умножением. Но R — идеал и в R_{k+1} . Поэтому R — $\tau_{\mathcal{U}}$ -радикальная алгебра с нулевым умножением. В силу (15) R — ненулевой $\sigma_{\mathcal{M}}$ -радикальный идеал алгебры Q . Противоречие.

Следовательно, алгебра Q $\mathcal{I}_{\mathcal{M}}$ -полупроста и утверждение а), а вместе с ним и теорема доказана.

В заключение параграфа и главы применим доказанные утверждения для описания всех кручений в одном классе ассоциативных алгебр.

Нетрудно видеть, что нижний нильрадикал $\mathfrak{N}$ совпадает с нижним радикалом (в классе $\mathcal{U}$ всех ассоциативных алгебр), порожденным классом всех алгебр с нулевым умножением. Кроме того, нижний нильрадикал $\mathfrak{N}$ является кручением. Все это позволяет применить к ра-

дикалу $\mathfrak{B}$ доказанные выше теоремы о нижних радикалах. Так, например, ассоциативная алгебра A будет $\mathfrak{B}$ -радикальна тогда и только тогда, когда она имеет нормальный ряд

$$0 = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_\alpha \subseteq A_{\alpha+1} \subseteq \dots \subseteq A_\nu = A, \quad (18)$$

все члены которого достижимы по ряду, а все факторы $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ — алгебры с нулевым умножением (т. е. когда она $\mathfrak{B}$ -радикальна).

Теорема 3. Пусть все алгебры (в $\mathfrak{A}$) ассоциативны *), $\mathfrak{M}$ — произвольный класс алгебр, замкнутый относительно взятия идеалов и гомоморфных образов, причем все алгебры из $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{B}$ -радикальны, $\mathfrak{N}$ — класс всех алгебр с нулевым умножением из класса $\mathfrak{M}$. Тогда

а. Все кручения в $\mathfrak{N}$ — модульные, классы $\mathcal{K}(\mathfrak{M})$ всех кручений в $\mathfrak{M}$ и $\mathcal{K}(\mathfrak{N})$ всех кручений в $\mathfrak{N}$ являются множествами, и отображение π , ставящее в соответствие каждому кручению τ в $\mathfrak{M}$ индуцированное им кручение τ° в $\mathfrak{N}$, является изоморфизмом полных решеток $\mathcal{K}(\mathfrak{M})$ и $\mathcal{K}(\mathfrak{N})$.

б. Если $\mathfrak{M} = \mathcal{K}(\mathfrak{B})$ и основной класс $\mathfrak{A}$ совпадает с классом всех ассоциативных алгебр, то полная решетка $\mathcal{K}(\mathfrak{M})$ изоморфна полной решетке всех кручений в $\mathfrak{A}$, меньших радикала $\mathfrak{B}$. При этом все кручения в $\mathfrak{M}$ модульные и индуцируются модульными кручениями в $\mathfrak{A}$.

в. Если основной класс $\mathfrak{A}$ совпадает с классом всех ассоциативных алгебр, то для любого кручения τ в $\mathfrak{A}$, меньшего нижнего нильрадикала $\mathfrak{B}$, существует и притом точно одно модульное кручение τ' в $\mathfrak{A}$ такое, что $\tau = \mathfrak{B} \wedge \tau'$. А именно, множество идеалов кольца Φ

$$\mathcal{F} = \{I \mid I - \text{идеал кольца } \Phi, (\Phi/I)^0 \in \mathcal{K}(\tau)\} \quad (19)$$

совпадает с множеством аннуляторов

$$\mathcal{A}(\mathcal{K}(\tau)) = \{(0 : x) \mid x \in A^0 \in \mathcal{K}(\tau)\},$$

является радикальным фильтром (в множестве $\mathcal{A}$ всех

*) При чем, как и при рассмотрении модульных кручений в § 3, основной класс $\mathfrak{A}$ содержит вместе с каждой алгеброй A и соответствующую алгебру A^0 с нулевым умножением,

идеалов кольца Φ) и модульное кручение τ' совпадает с модульным кручением $\tau_{\mathcal{F}}$ (см. теорему 3.4).

Доказательство. То, что все кручения в $\mathfrak{M}$ — модульные, уже доказано (см. следствие 3.6). Поэтому, в частности, класс $\mathcal{K}(\mathfrak{M})$ всех кручений в $\mathfrak{M}$ является множеством. Кроме того в силу следствия 7 отображение $\pi: \mathcal{K}(\mathfrak{M}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathfrak{M})$, ставящее в соответствие каждому кручению τ в $\mathfrak{M}$ индуцированное им кручение τ° в $\mathfrak{M}$, является отображением «на» и, очевидно, монотонно: если $\tau_1 \leq \tau_2$, то и $\tau_1^\circ \leq \tau_2^\circ$. Для доказательства утверждения а) остается показать, что отображение π взаимно однозначно.

Пусть A — любая алгебра из класса $\mathfrak{M}$. По условию алгебра A $\mathfrak{B}$ -радикальна (и ассоциативна), как и любая другая алгебра из класса $\mathfrak{M}$. Поэтому в силу сказанного выше существует такой нормальный ряд (18) алгебры A , что все члены достижимы по ряду, а все факторы — алгебры с нулевым умножением, т. е. алгебры из класса $\mathfrak{M}$.

Пусть τ_1 и τ_2 — любые два таких кручения в $\mathfrak{M}$, что в $\mathfrak{M}$ верно равенство $\tau_1^\circ = \tau_2^\circ$. По построению τ° -радикальные алгебры в $\mathfrak{M}$ — это в точности τ -радикальные алгебры с нулевым умножением. Учитывая это, допустим, что алгебра A τ_1 -радикальна. Тогда все факторы $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ ряда (18) будут тоже τ_1 -радикальными алгебрами, так как τ_1 -кручение и все члены ряда (18) достижимы по ряду. Но тогда все факторы $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ — τ_1° -радикальные, а значит и τ_2° -радикальные алгебры. А отсюда вытекает, что алгебра A τ_2 -радикальна в силу предложений 2.4 и 2.5, так как наименьшим радикальным в смысле Куроша классом, содержащим класс $\mathcal{K}(\tau_2)$, является сам класс $\mathcal{K}(\tau_2)$.

Из доказанного вытекает, что $\mathcal{K}(\tau_1) = \mathcal{K}(\tau_2)$, и потому $\tau_1 = \tau_2$, если $\tau_1^\circ = \tau_2^\circ$. Следовательно, верно утверждение а).

Будем теперь считать, что основной класс $\mathfrak{M}$ совпадает с классом всех ассоциативных алгебр. Ясно, что в этом случае $\mathfrak{M}$ совпадает с классом всех алгебр с нулевым умножением и потому $\mathcal{A}(\mathfrak{M}) = \mathcal{A}(\mathfrak{M}) = \mathcal{A}$ — множество всех идеалов кольца Φ (любой модуль, т. е. левый унитарный Φ -модуль, можно превратить в алгебру с нулевым умножением, принадлежащую классу $\mathfrak{M}$).

С каждой алгеброй A (из $\mathfrak{A}$ или из $\mathfrak{M}$) можно связать алгебру A^0 с нулевым умножением. При этом ряду (18) соответствует цепь подалгебр

$$0 = A_0^0 \subseteq A_1^0 \subseteq \dots \subseteq A_\alpha^0 \subseteq A_{\alpha+1}^0 \subseteq \dots \subseteq A_\gamma^0 = A^0, \quad (18^0)$$

являющаяся, как легко видеть, идеальным рядом алгебры A^0 с факторами, изоморфными соответствующим факторам ряда (18): $A_{\alpha+1}/A_\alpha \simeq A_{\alpha+1}^0/A_\alpha^0$, так как фактор-алгебры $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ — алгебры с нулевым умножением. Но тогда, если $\mathfrak{M} = \mathcal{R}(\mathfrak{B})$, то $\mathfrak{A}$ совпадает с классом всех алгебр с нулевым умножением и потому из сравнения рядов (18) и (18⁰) легко вытекает: если τ — кручение в $\mathfrak{M}$, то τ -радикальность алгебры A равносильна τ -радикальности алгебры A^0 . Поэтому в силу леммы 3.3 все кручения в $\mathfrak{M} = \mathcal{R}(\mathfrak{B})$ — модульные. Но тогда из равенства $\mathcal{A}(\mathfrak{A}) = \mathcal{A}(\mathfrak{M}) = \mathcal{A}$ вытекает, что все эти кручения индуцируются модульными кручениями в $\mathfrak{A}$, определенными теми же радикальными фильтрами (см. теорему 3.4).

Из того, что все кручения в $\mathfrak{M} = \mathcal{R}(\mathfrak{B})$ модульные, вытекает в силу теоремы 3.4 существование взаимно однозначного соответствия между радикальными фильтрами в $\mathcal{A}$ и кручениями в $\mathfrak{M}$. При этом из доказательства теоремы 3.4 и сказанного вытекает, что если τ — кручение в $\mathfrak{M}$, то соответствующий ему радикальный фильтр $\mathcal{A}(\mathcal{R}(\tau)) = \{(0 : x) \mid x \in A \in \mathcal{R}(\tau)\}$ совпадает с множеством $\mathcal{F}$, указанным в утверждении в) нашей теоремы. Еще раз применяя теорему 3.4, получаем, что такое же взаимно однозначное соответствие существует между модульными кручениями в $\mathfrak{A}$ и теми же радикальными фильтрами, так как $\mathcal{A}(\mathfrak{M}) = \mathcal{A}(\mathfrak{A}) = \mathcal{A}$ — класс всех идеалов кольца Φ .

Замечаем теперь, что радикальные классы в $\mathfrak{M} = \mathcal{R}(\mathfrak{B})$ — это в точности радикальные классы в $\mathfrak{A}$, содержащиеся в $\mathfrak{M} = \mathcal{R}(\mathfrak{B})$. Это легко вытекает из следствия 4 и характеристики радикальных классов. Поэтому для любого кручения τ в $\mathfrak{M}$ отображение $r_\tau: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$, определенное правилом

$$r_\tau(A) = \sum \{T \mid T \text{ — идеал в } A, T \in \mathcal{R}(\tau)\}, \quad (20)$$

будет кручением в $\mathfrak{A}$, индуцирующим кручение τ . По

доказанному любое кручение τ в $\mathfrak{M}$ — модульное и совпадает в $\mathfrak{M}$ с модульным кручением, определенным радикальным фильтром $\mathcal{F}$ вида (19). Но тогда, рассматривая в $\mathfrak{M}$ соответствующее модульное кручение $\tau_{\mathcal{F}}$ и учитывая (20), легко получаем

$$\begin{aligned} r_{\mathfrak{M}}(A) &= \sum \{T - \text{идеал в } A, T \in \mathcal{K}(\tau)\} = \\ &= \sum \{T - \text{идеал в } A, T \in \mathcal{K}(\mathfrak{B}) \cap \mathcal{K}(\tau_{\mathcal{F}})\} = \\ &= \mathfrak{B}(A) \cap r_{\mathcal{F}}(A). \end{aligned}$$

А это означает, что $r_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{B} \wedge r_{\mathcal{F}}$.

Из всего доказанного вытекают утверждения б) и в). Теорема доказана.

Подчеркнем, что описание кручений, меньших радикала $\mathfrak{B}$, данное в теореме 3, зависит от кольца Φ . Например, если Φ — поле, то из теоремы 3 следует, что радикал $\mathfrak{B}$ является минимальным ненулевым кручением.

НАСЛЕДСТВЕННЫЕ РАДИКАЛЫ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

Понятие радикала является одним из инструментов структурной теории колец и алгебр. Это объясняется тем, что радикал дает возможность выделить в классе всех рассматриваемых алгебр два противоположных подкласса — класс полупростых и класс радикальных алгебр, причем в ряде случаев каждый из этих классов описывается более или менее удовлетворительно. Но для того чтобы получить большую информацию об алгебрах из соответствующего класса, необходимо налагать дополнительные условия не только на рассматриваемые алгебры, но и на радикалы.

В настоящей главе мы применим общую теорию радикалов для построения и изучения различных классов наследственных радикалов ассоциативных алгебр. В связи с этим всюду ниже считаем, что основной класс $\mathfrak{A}$ алгебр состоит только из ассоциативных алгебр. Поэтому все рассматриваемые алгебры ассоциативные, если противное не оговорено особо. Все рассматриваемые классы алгебр — абстрактные подклассы в $\mathfrak{A}$, содержащие нулевую алгебру.

§ 1. Кручения и верхние радикалы

В силу ассоциативности рассматриваемых алгебр кручения и наследственные радикалы — это одно и то же (см. следствие 2.4.3). Поэтому, если $\tau: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ — наследственный радикал, то $\tau(B) = B \cap \tau(A)$ для любой алгебры A и любого идеала B этой алгебры. Это позволяет легко строить кручения с помощью конструкции нижнего радикала. А именно, для любого класса $\mathfrak{M}$ алгебр, замкнутого относительно взятия идеалов и гомоморфных обра-

зов, нижний радикал l_M будет кручением. При этом любое кручение можно получить таким образом.

Однако в этом параграфе мы рассмотрим построение кручений с помощью конструкции верхнего радикала, так как конструкция нижнего радикала рассмотрена достаточно подробно в предыдущей главе.

Пусть $\mathcal{M}$ — произвольный класс алгебр, удовлетворяющий условию K^*1 , т. е. любой ненулевой идеал алгебры из класса $\mathcal{M}$ гомоморфно отображается на ненулевые алгебры из $\mathcal{M}$. В силу следствия 2.1.2 класс ${}^1\mathcal{M}$ всех алгебр, не отображающихся гомоморфно на ненулевые алгебры из класса $\mathcal{M}$, радикален в смысле Куроша и потому, полагая для любой алгебры R

$$S_{\mathcal{M}}(R) = \sum \{T \mid T \text{ — идеал в } R, T \in {}^1\mathcal{M}\}, \quad (1)$$

мы получаем радикал $S_{\mathcal{M}}: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ — *верхний радикал, определяемый классом $\mathcal{M}$* (см. определение 2.1.4). При этом

$$\mathcal{R}(S_{\mathcal{M}}) = {}^1\mathcal{M}, \quad \mathcal{P}(S_{\mathcal{M}}) = ({}^1\mathcal{M})^{-1}. \quad (2)$$

С понятием верхнего радикала тесно связано понятие $\mathcal{M}$ -идеала. А именно, идеал P алгебры A называется $\mathcal{M}$ -идеалом в A , если A/P — алгебра из класса $\mathcal{M}$. С помощью $\mathcal{M}$ -идеалов строим отображение $\pi_{\mathcal{M}}: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$, полагая для любой алгебры R

$$\pi_{\mathcal{M}}(R) = \bigcap \{P \mid P \text{ — } \mathcal{M}\text{-идеал алгебры } R\}. \quad (3)$$

Предложение 1. *Верхний радикал $S_{\mathcal{M}}$ является наследственным и совпадает с отображением $\pi_{\mathcal{M}}$ тогда и только тогда, когда класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет (кроме условия K^*1) условию K^*3 : если идеал B алгебры A имеет собственный (т. е. отличный от B) $\mathcal{M}$ -идеал, то существует $\mathcal{M}$ -идеал алгебры A , не содержащий B .*

Доказательство. Пусть верхний радикал $S_{\mathcal{M}}$ является наследственным и совпадает с отображением $\pi_{\mathcal{M}}$.

Пусть B — идеал алгебры A и алгебра B имеет собственный $\mathcal{M}$ -идеал. Тогда в силу (2) алгебра B не $S_{\mathcal{M}}$ -радикальна и потому идеал B не является $S_{\mathcal{M}}$ -радикальным идеалом алгебры A . Поэтому в силу наследственности радикала $S_{\mathcal{M}}$ идеал B не содержится в $S_{\mathcal{M}}$ -радикале $S_{\mathcal{M}}(A)$ — наибольшем $S_{\mathcal{M}}$ -радикальном идеале алгебры A . Но это означает в силу (3) и совпадения отображений

$S_M: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ и $\pi_M: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$, что идеал B не содержится в некотором $\mathcal{M}$ -идеале алгебры A .

Следовательно, класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию K^*3 .

Обратно, пусть класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условиям K^*1 и K^*3 . Из условия K^*3 вытекает в силу (2), что если идеал B алгебры A не является S_M -радикальной алгеброй, то и сама алгебра A не S_M -радикальна. Поэтому любой идеал S_M -радикальной алгебры сам будет S_M -радикальной алгеброй, т. е. S_M — наследственный радикал.

Сравним теперь в любой алгебре R идеалы $S_M(R)$ и $\pi_M(R)$.

В силу условия K^*1 $\mathcal{M} \subseteq (-^1\mathcal{M})^{-1}$, и потому в силу (2) все алгебры из $\mathcal{M}$ S_M -полупросты. Но тогда любой $\mathcal{M}$ -идеал алгебры R содержит идеал $S_M(R)$ (см. предложение 2.1.1), и потому $\pi_M(R) \supseteq S_M(R)$ в силу (3). С другой стороны, снова в силу (3) все $\mathcal{M}$ -идеалы алгебры R содержат идеал $\pi_M(R)$. Поэтому в силу условия K^*3 алгебра $\pi_M(R)$ не имеет собственных $\mathcal{M}$ -идеалов, т. е. $\pi_M(R) \subseteq {}^{-1}\mathcal{M}$. А это влечет в силу (1) включение $\pi_M(R) \subseteq S_M(R)$.

Следовательно, отображения $S_M: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ и $\pi_M: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ совпадают.

Предложение доказано.

Все классические радикалы можно строить как верхние радикалы S_M для подходящих классов $\mathcal{M}$. Но при этом соответствующий класс $\mathcal{M}$ (класс всех первичных алгебр, класс всех первичных алгебр без ненулевых локально нильпотентных идеалов или ненулевых ниль-идеалов, класс всех примитивных алгебр) удовлетворяют условиям значительно более сильным, чем условия K^*1 и K^*3 . А это позволяет получить большую информацию как о полупростых, так и о радикальных алгебрах. В связи с этим мы рассмотрим некоторые новые условия.

Лемма 1. Для любого класса $\mathcal{M}$ алгебр равносильны утверждения:

1°. Класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условиям:

S1. Любой идеал алгебры из класса $\mathcal{M}$ сам будет алгеброй из класса $\mathcal{M}$.

S2. Если идеал B алгебры A является алгеброй из класса $\mathcal{M}$ и $B \cap I \neq 0$ для любого ненулевого идеала I в A , то и A — алгебра из $\mathcal{M}$.

S3. Если C — идеал алгебры B , B — идеал алгебры A , причем C не содержит ненулевых идеалов алгебры A и B/C — алгебра из класса $\mathcal{M}$; то и сама алгебра B — алгебра из класса $\mathcal{M}$.

2°. Класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условиям:

И1. Если B — идеал алгебры A и P — $\mathcal{M}$ -идеал алгебры A , то $Q = P \cap B$ — $\mathcal{M}$ -идеал алгебры B .

И2. Если B — идеал алгебры A и Q — $\mathcal{M}$ -идеал алгебры B , то существует такой $\mathcal{M}$ -идеал P в A , что $B \cap P \subseteq Q$.

Доказательство. Пусть класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условиям S1, S2, S3.

Пусть B — идеал алгебры A и P — $\mathcal{M}$ -идеал алгебры A . Тогда по определению $\mathcal{M}$ -идеала A/P — алгебра из класса $\mathcal{M}$, содержащая в качестве идеала алгебру $B + P/P \simeq B/B \cap P$. В силу условия S1 $B/B \cap P$ — алгебра из класса $\mathcal{M}$, и потому $Q = B \cap P$ — $\mathcal{M}$ -идеал алгебры B .

Следовательно, класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию И1.

Пусть теперь B — идеал алгебры A и Q — $\mathcal{M}$ -идеал алгебры B . Нам нужно найти такой $\mathcal{M}$ -идеал P в A , что $P \cap B \subseteq Q$. Но если $Q = B$, то доказывать нечего, так как $A \cap B = B$. Поэтому будем считать, что Q — собственный $\mathcal{M}$ -идеал в B , т. е. B/Q — ненулевая алгебра из класса $\mathcal{M}$.

Пусть F — наибольший идеал алгебры A , содержащийся в Q , т. е. сумма всех идеалов из A , меньших Q . Переходя к прообразам при естественном гомоморфизме $A \rightarrow A/F$, обозначим $\bar{A} = A/F$, $\bar{B} = B/F$, $\bar{Q} = Q/F$. Тогда по построению $\bar{Q}$ — идеал алгебры $\bar{B}$, $\bar{B}$ — идеал алгебры $\bar{A}$, $\bar{B}/\bar{Q}$ — алгебра из $\mathcal{M}$, так как $\bar{B}/\bar{Q} \simeq B/Q \in \mathcal{M}$, причем $\bar{Q}$ не содержит ненулевых идеалов алгебры $\bar{A}$. В силу условия S3 сама алгебра $\bar{B}$ — алгебра из класса $\mathcal{M}$, т. е. F — $\mathcal{M}$ -идеал алгебры B , являющийся идеалом алгебры A и содержащийся в Q .

Из доказанного вытекает, что частично упорядоченное (относительно теоретико-множественного включения) множество

$$\mathcal{V} = \{I \mid I \text{ — идеал алгебры } A, I \cap B = F\}$$

непусто и, очевидно, индуктивно. В силу леммы Куратовского — Цорна в $\mathcal{V}$ есть максимальные элементы. Пусть P — один из них. Переходя к прообразам при естественном гомоморфизме $A \rightarrow A/F = \bar{A}$, легко получаем, что

$\bar{P} = P/F$ — максимальный среди идеалов алгебры $\bar{A}$, имеющих нулевое пересечение с идеалом $\bar{B}$. Учитывая это, рассмотрим фактор-алгебру $\bar{A}/\bar{P} \simeq A/P$.

Пусть $\tilde{I}$ — ненулевой идеал алгебры $\tilde{A} = \bar{A}/\bar{P}$. Переходя к прообразам при естественном гомоморфизме $\tilde{A} \rightarrow \bar{A}$, находим такой идеал I в $\bar{A}$, что $\tilde{I} = I/\bar{P}$ и $I \supset \bar{P}$. Но $\bar{P}$ — максимальный идеал алгебры $\bar{A}$, имеющий нулевое пересечение с идеалом $\bar{B}$. Поэтому $I \cap \bar{B} \neq 0$. Но тогда, возвращаясь к алгебре $\tilde{A}$, получаем для ее идеала $\tilde{B} = \bar{B} + \bar{P}/\bar{P}$ включение

$$\tilde{I} \cap \tilde{B} \supseteq (I \cap \bar{B} + \bar{P})/\bar{P} \simeq I \cap \bar{B} \neq 0.$$

Следовательно, любой ненулевой идеал $\tilde{I}$ алгебры $\tilde{A}$ имеет ненулевое пересечение с идеалом

$$\tilde{B} = \bar{B} + \bar{P}/\bar{P} \simeq \bar{B}/\bar{B} \cap \bar{P} \simeq \bar{B} = B/F \in \mathcal{M}.$$

В силу условия S2, сама алгебра $\tilde{A} = \bar{A}/\bar{P} \simeq A/P$ — алгебра из $\mathcal{M}$. А это означает, что P — $\mathcal{M}$ -идеал алгебры A .

По построению $P \cap B = F \subseteq Q$, и потому класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию И2.

Обратно, пусть класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условиям И1 и И2.

Если R — алгебра из класса $\mathcal{M}$, то нулевой идеал — $\mathcal{M}$ -идеал в R . Но тогда в силу И1 нулевой идеал будет $\mathcal{M}$ -идеалом и в любом идеале алгебры R . Поэтому все идеалы алгебры R будут алгебрами из класса $\mathcal{M}$.

Следовательно, класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию S1.

Пусть идеал B алгебры A является алгеброй из класса $\mathcal{M}$, причем $B \cap I \neq 0$ для любого ненулевого идеала I алгебры A . В силу условия И2 существует такой $\mathcal{M}$ -идеал P алгебры A , что $P \cap B = 0$, так как нулевой идеал — $\mathcal{M}$ -идеал в B . Но тогда по условию $P = 0$, и потому A — алгебра из класса $\mathcal{M}$.

Следовательно, класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию S2.

Пусть C — идеал алгебры B , B — идеал алгебры A , причем C не содержит ненулевых идеалов алгебры A . Если B/C — алгебра из класса $\mathcal{M}$, то C — $\mathcal{M}$ -идеал алгебры B , и потому $C \supseteq P \cap B$ для некоторого $\mathcal{M}$ -идеала P алгебры A в силу условия И2. Но $P \cap B$ — идеал алгебры A . Из условий вытекает, что $P \cap B = 0$. Но тогда

в силу условия И1 нулевой идеал — $\mathcal{M}$ -идеал алгебры B , т. е. B — алгебра из класса $\mathcal{M}$.

Следовательно, класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию S3. Лемма доказана.

Определение 1. Класс $\mathcal{M}$ алгебр называется *обобщенно специальным*, если он удовлетворяет условиям S1 — S3 леммы 1.

Обобщенно специальные классы алгебр тесно связаны с кручениями, как показывает

Теорема 1. *Радикал τ является кручением тогда и только тогда, когда класс $\mathcal{P}(\tau)$ всех τ -полупростых алгебр обобщенно специален. Это равносильно тому, что класс $\mathcal{P}(\tau)$ удовлетворяет условию S2. Для любого обобщенно специального класса $\mathcal{M}$ алгебр верхний радикал $S_{\mathcal{M}}$ является кручением, причем в любой алгебре R*

$$S_{\mathcal{M}}(R) = \bigcap \{P \mid P - \mathcal{M}\text{-идеал алгебры } R\}. \quad (4)$$

Поэтому $S_{\mathcal{M}}$ -полупростые алгебры — это в точности подпрямые произведения алгебр из класса $\mathcal{M}$, а $S_{\mathcal{M}}$ -радикальные алгебры — алгебры, не отображающиеся гомоморфно на ненулевые алгебры из $\mathcal{M}$.

Доказательство. Пусть τ — произвольный радикал. Тогда в силу следствий 2.4.1 и 2.4.5 класс $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\tau)$ удовлетворяет условиям S1 и S3, так как все рассматриваемые алгебры ассоциативны. Поэтому в силу определения 1 класс $\mathcal{P}$ обобщенно специален тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию S2. А это в силу следствия 2.4.5 равносильно тому, что класс $\mathcal{P}$ полупрост, т. е. $\tau = S_{\mathcal{P}}$ — кручение.

Остается доказать, что если $\mathcal{M}$ — обобщенно специальный класс, то верхний радикал является кручением и верно равенство (4). Ясно, что при этом можно говорить о верхнем радикале $S_{\mathcal{M}}$, так как из условия S1 (замкнутость относительно взятия идеалов) вытекает выполнение условия K*1.

Пусть $\mathcal{M}$ — обобщенно специальный класс. В силу леммы 1 класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условиям И1 и И2.

Пусть B — идеал алгебры A , Q — собственный $\mathcal{M}$ -идеал алгебры B . Тогда в силу И2 существует такой $\mathcal{M}$ -идеал P в A , что $P \cap B \subseteq Q$. Но тогда из неравенства $Q \neq B$ вытекает, что $\mathcal{M}$ -идеал P алгебры A не содержит идеал B .

Следовательно, класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию K*3

предложения 1 (и условию K^*1 в силу $I1$ или $S1$). Но тогда $S_{\mathcal{M}}$ — наследственный радикал, и верно равенство (4) в силу того же предложения. В силу следствия 2.4.3 $S_{\mathcal{M}}$ является кручением, так как все рассматриваемые алгебры ассоциативны.

Можно дать и непосредственное доказательство того, что $S_{\mathcal{M}}$ — кручение, не опираясь на ассоциативность рассматриваемых алгебр. А именно, учтем равенство (4) и то, что класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условиям $I1$ и $I2$. Получим: если B — идеал алгебры A , то

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{M}}(B) &= \cap \{Q \mid Q - \mathcal{M}\text{-идеал в } B\} \cong \\ &\cong \cap \{P \cap B \mid P - \mathcal{M}\text{-идеал в } A\} = B \cap S_{\mathcal{M}}(A) \cong \\ &\cong \cap \{Q \mid Q - \mathcal{M}\text{-идеал в } B\} = S_{\mathcal{M}}(B). \end{aligned}$$

(первое включение вытекает из условия $I2$, второе — из условия $I1$), и мы доказали равенство $S_{\mathcal{M}}(B) = B \cap S_{\mathcal{M}}(A)$. А это и показывает, что радикал $S_{\mathcal{M}}$ является кручением (см. определения 2.3.1 и 2.1.1)

Теорема доказана.

Таким образом, кручения и верхние радикалы $S_{\mathcal{M}}$, определяемые обобщенно специальными классами алгебр — это одно и то же. В связи с этим можно выделять из класса кручений те или иные подклассы, налагая различные условия на соответствующие обобщенно специальные классы алгебр. Мы укажем один из возможных способов «приближения» к классическим радикалам, основанный на лемме 1.

В силу определения 1 и леммы 1 обобщенно специальные классы алгебр — это в точности классы $\mathcal{M}$, удовлетворяющие условиям $I1$ и $I2$. Будем усиливать условие $I2$.

Определение 2. Класс $\mathcal{M}$ алгебр называется *слабо специальным*, если он удовлетворяет условиям $I1$ и $I3$. Если B — идеал алгебры A и Q — $\mathcal{M}$ -идеал алгебры B , то существует такой $\mathcal{M}$ -идеал P в A , что $P \cap B = Q$.

Определение 3. Класс $\mathcal{M}$ алгебр называется *специальным*, если он удовлетворяет условиям $I1$ и

$I4$. Если B — идеал алгебры A и Q — собственный $\mathcal{M}$ -идеал в B , то существует и притом точно один $\mathcal{M}$ -идеал P в A такой, что $P \cap B = Q$.

Из определений 1, 2, 3 и леммы 1 вытекает, что любой специальный класс алгебр является слабо специальным.

а любой слабо специальный класс — обобщенно специальным. Поэтому если $\mathcal{M}$ — специальный или слабо специальный класс алгебр, то верхний радикал $S_{\mathcal{M}}$ будет кручением в силу теоремы 1. В связи с этим дадим такое

Определение 4. Кручение τ называется *слабо специальным радикалом*, если $\tau = S_{\mathcal{M}}$ для некоторого слабо специального класса $\mathcal{M}$ алгебр. Кручение τ называется *специальным радикалом*, если $\tau = S_{\mathcal{M}}$ для некоторого специального класса $\mathcal{M}$ алгебр.

Предложение 2. Объединение любого семейства слабо специальных классов алгебр само будет слабо специальным классом. Поэтому существует наибольший слабо специальный класс алгебр $\mathcal{E}$. Для любого класса $\mathcal{M}$ алгебр равносильны утверждения:

- а) $\mathcal{M}$ — слабо специальный класс алгебр.
- б) $\mathcal{M}$ — обобщенно специальный класс алгебр, причем $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$.
- в) $\mathcal{M}$ — обобщенно специальный класс алгебр, причем $\mathcal{P}(S_{\mathcal{M}}) \subseteq \mathcal{E}$.
- г) Класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условиям S_1 , S_2 , причем $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$.
- д) Класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условиям S_1 , S_2 и

S_4 . Если C — идеал алгебры B , B — идеал алгебры A и $B/C \in \mathcal{M}$, то C — идеал в A .

Доказательство. Ясно, что если классы $\mathcal{M}_i$ удовлетворяют условиям $И1$ и $И3$, то этим условиям удовлетворяет и объединение $\bigcup \mathcal{M}_i$ этих классов. Но тогда из определения 1.2 вытекает, что объединение любого семейства слабо специальных классов алгебр само будет слабо специальным классом. В частности, объединение всех слабо специальных классов алгебр будет наибольшим слабо специальным классом $\mathcal{E}$.

Пусть $\mathcal{M}$ — слабо специальный класс алгебр. В силу сказанного выше $\mathcal{M}$ будет обобщенно специальным классом алгебр и потому $\mathcal{M}$ удовлетворяет условиям S_1 и S_2 . Покажем, что класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет и условию S_4 .

Пусть C — идеал алгебры B , B — идеал алгебры A и B/C — алгебра из класса $\mathcal{M}$. Тогда C — $\mathcal{M}$ -идеал алгебры B , и потому $C = B \cap P$ для некоторого $\mathcal{M}$ -идеала P алгебры A . Но тогда C — идеал алгебры A как пересечение идеалов,

Следовательно, любой слабо специальный класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет всем условиям S_1 , S_2 и S_4 .

Обратно, пусть класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условиям S_1 , S_2 и S_4 . Замечаем, что класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет и условию S_3 , т. е. является обобщенно специальным.

Действительно, пусть C — идеал алгебры B , B — идеал алгебры A , причем C не содержит ненулевых идеалов алгебры A и B/C — алгебра из класса $\mathcal{M}$. В силу условия S_4 C — идеал алгебры A , и потому $C=0$. Но тогда B — алгебра из $\mathcal{M}$.

Таким образом, класс $\mathcal{M}$ обобщенно специален и потому в силу леммы 1 удовлетворяет условиям I_1 , I_2 . Но при доказательстве леммы 1 доказано больше. А именно, пусть B — идеал алгебры A , Q — $\mathcal{M}$ -идеал алгебры B и F — наибольший идеал алгебры A , содержащийся в Q . Тогда из доказательства леммы 1 вытекает существование такого $\mathcal{M}$ -идеала P в A , что $P \cap B = F$. Но в рассматриваемом нами случае Q — идеал алгебры A в силу условия S_4 . Поэтому $F=Q$, т. е. $P \cap B = Q$. Следовательно, класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет и условию I_3 , т. е. слабо специален.

Из доказанного вытекает, что слабо специальные классы алгебр, классы, удовлетворяющие условиям S_1 , S_2 , S_4 , и обобщенно специальные классы, удовлетворяющие условию S_4 , — это одно и то же. Поэтому и наибольший слабо специальный класс $\mathcal{E}$ удовлетворяет условиям S_2 , S_1 , S_3 и S_4 . Но, как легко видеть, всякий подкласс класса, удовлетворяющего условию S_4 , сам удовлетворяет этому условию. Поэтому и все подклассы класса $\mathcal{E}$ удовлетворяют условию S_4 . Но тогда получаем, что утверждения а), б), г) и д) равносильны.

в) $\Rightarrow$ б). Это очевидно, так как $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(S_{\mathcal{M}})$ по построению верхнего радикала $S_{\mathcal{M}}$, определяемого классом $\mathcal{M}$.

б) $\Rightarrow$ в). Пусть $\mathcal{M}$ — обобщенно специальный класс алгебр, причем $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$. Тогда в силу сказанного и доказанного класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию S_4 . В силу теоремы 1 верхний радикал $S_{\mathcal{M}}$ является кручением и потому класс $\mathcal{P}(S_{\mathcal{M}})$ — обобщенно специален. Кроме того в силу теоремы 1 для любой алгебры R верно равенство (4). Но тогда для класса $\mathcal{P} = \mathcal{P}(S_{\mathcal{M}})$ получаем, что $\mathcal{P}$ -идеалы — это в точности пересечения некоторого мно-

жества $\mathcal{M}$ -идеалов. А отсюда вытекает, что класс $\mathcal{P}$ удовлетворяет условию S4.

Действительно, пусть C — идеал алгебры B , B — идеал алгебры A и фактор-алгебра B/C τ -полупроста. Тогда C — $\mathcal{P}$ -идеал алгебры B , и потому найдется такое множество $\{C_i | i \in \Gamma\}$ $\mathcal{M}$ -идеалов алгебры B , что $C = \bigcap_{i \in \Gamma} C_i$.

Но класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию S4. Поэтому все C_i — идеалы алгебры A . А это влечет, что и $C = \bigcap_{i \in \Gamma} C_i$ — идеал алгебры A .

Таким образом, класс $\mathcal{P} = \mathcal{P}(S_{\mathcal{M}})$ обобщенно специален и удовлетворяет условию S4. Это означает по доказанному, что $\mathcal{P}(S_{\mathcal{M}})$ — слабо специальный класс алгебр. Но тогда $\mathcal{P}(S_{\mathcal{M}}) \subseteq \mathcal{C}$.

Предложение доказано.

Следствие 1. Пересечение любого семейства слабо специальных радикалов само будет слабо специальным радикалом. Верхний радикал $S_{\mathcal{C}}$, определяемый наибольшим слабо специальным классом алгебр, является наименьшим слабо специальным радикалом, причем $\mathcal{P}(S_{\mathcal{C}}) = \mathcal{C}$. Кручение τ будет слабо специальным радикалом тогда и только тогда, когда класс $\mathcal{P}(\tau)$ всех τ -полупростых алгебр слабо специален. Это равносильно соотношению $\tau \geq S_{\mathcal{C}}$.

Все эти утверждения легко вытекают из предложения 2 и определения порядка для радикалов и кручений. Докажем, например, первое утверждение.

Пусть нам дано произвольное семейство $\{\tau_i | i \in \Gamma\}$ слабо специальных радикалов. В силу определения 4 существуют такие слабо специальные классы $\mathcal{M}_i$, что $\tau_i = S_{\mathcal{M}_i}$ для каждого $i \in \Gamma$. В силу предложения 2 $\bigcup_{i \in \Gamma} \mathcal{M}_i$ — слабо специальный класс алгебр, и потому $\tau = S_{\bigcup_{i \in \Gamma} \mathcal{M}_i}$ — слабо специальный радикал. Между тем, в силу теоремы 1 для любой алгебры R

$$\begin{aligned} \tau(R) &= \bigcap \{P | P \text{ — идеал в } R, R/P \in \bigcup_{i \in \Gamma} \mathcal{M}_i\} = \\ &= \bigcap (\bigcap \{P_i | P_i \text{ — идеал в } R, R/P \in \mathcal{M}_i\}) = \bigcap_{i \in \Gamma} \tau_i(R), \end{aligned}$$

и потому $\tau = \bigwedge_{i \in \Gamma} \tau_i$ в силу теоремы 2.3.3. Следовательно,

пересечение любого семейства слабо специальных радикалов само будет слабо специальным радикалом, что и требовалось доказать.

Выясним теперь, что собой представляет наибольший слабо специальный класс $\mathcal{E}$ и наименьший слабо специальный радикал $S_{\mathcal{E}}$. Нетрудно видеть, что это зависит от выбора основного класса $\mathfrak{A}$ алгебр. Например, если все алгебры (в $\mathfrak{A}$) с нулевым умножением, то все классы алгебр будут удовлетворять условию S_4 , и потому все обобщенно специальные классы алгебр будут слабо специальными. Следовательно, в этом случае класс $\mathcal{E}$ совпадает с классом всех алгебр, а наименьший слабо специальный радикал — с нулевым радикалом. Рассмотрим менее тривиальный случай.

Теорема 2. Пусть основной класс $\mathfrak{A}$ содержит все такие ассоциативно-коммутативные алгебры A , что $A^4 = 0$ (*). Тогда наибольший слабо специальный класс $\mathcal{E}$ совпадает с классом всех полупервичных алгебр, т. е. алгебр без ненулевых нильпотентных идеалов, и потому наименьший слабо специальный радикал $S_{\mathcal{E}}$ совпадает с нижним нильрадикалом $\mathfrak{B}$. Поэтому для любого кручения τ следующие утверждения равносильны:

- а) τ — слабо специальный радикал.
- б) τ — наднильпотентный радикал, т. е. все нильпотентные алгебры τ -радикальны.
- в) Все τ -полупростые алгебры полупервичны.
- г) В любой алгебре R ее τ -радикал $\tau(R)$ является полупервичным идеалом алгебры R .
- д) $\tau \geq \mathfrak{B}$.

Доказательство. Допустим, что мы доказали совпадение класса $\mathcal{E}$ с классом всех полупервичных алгебр.

Тогда для любой алгебры R

$$S_{\mathcal{E}}(R) = \bigcap \{P \mid P - \mathcal{E}\text{-идеал в } R\} =$$

$$= \bigcap \{P \mid P - \text{полупервичный идеал в } R\} = \mathfrak{B}(R),$$

т. е. наименьший слабо специальный радикал совпадает с нижним нильрадикалом $\mathfrak{B}$ (см. § 1 гл. 1). Но тогда в силу предложения 2 и следствия 1 легко получаем, что все утверждения а) — д) равносильны, так как нижний

*) На самом деле и это условие можно ослабить (см. доказательство).

нильрадикал $\mathfrak{N}$ совпадает с нижним радикалом, порожденным классом всех нильпотентных алгебр и является кручением.

Итак, остается доказать, что класс $\mathcal{E}$ совпадает с классом всех полупервичных алгебр.

Класс всех полупервичных алгебр является слабо специальным и потому содержится в наибольшем слабо специальном классе $\mathcal{E}$.

Действительно, из того, что нижний нильрадикал $\mathfrak{N}$ является кручением, вытекает в силу теоремы 1 обобщенная специальность класса $\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ всех полупервичных алгебр. Кроме того, если C — идеал алгебры B , B — идеал алгебры A и C_A — идеал в A , порожденный множеством C в A , то в силу леммы 1.1.5 C_A/C — нильпотентный идеал алгебры B/C , так как $C_A^2 \subseteq C \subseteq C_A$. Поэтому, если алгебра B/C полупервична, то $C_A/C = 0$, т. е. $C = C_A$ — идеал в A . Следовательно, класс $\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ удовлетворяет и условию S4. Но тогда в силу предложения 2 класс $\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ всех полупервичных алгебр слабо специален.

Наибольший слабо специальный класс $\mathcal{E}$ состоит только из полупервичных алгебр.

Допустим противное, т. е. допустим, что слабо специальный класс содержит неполупервичную алгебру. В силу предложения 2 (или обобщенной специальности класса $\mathcal{E}$) класс $\mathcal{E}$ замкнут относительно взятия идеалов. Поэтому из предположения вытекает существование ненулевых нильпотентных алгебр в $\mathcal{E}$. Так как некоторая степень нильпотентной алгебры является алгеброй с нулевым умножением, то в $\mathcal{E}$ существуют и ненулевые алгебры с нулевым умножением. Пусть R — одна из них, $r \in R$, $r \neq 0$. Тогда Φ -подмодуль Φr будет идеалом в алгебре R , как и любой другой подмодуль алгебры с нулевым умножением. Поэтому и Φr — алгебра из $\mathcal{E}$. Учитывая, что Φr — алгебра с нулевым умножением, строим фактор-алгебру $\bar{\Phi}$ алгебры Φ по идеалу $(0 : r) = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha r = 0\}$. Тогда получаем, что $\bar{\Phi}$ — ненулевая алгебра с единицей $\bar{1}$ и соответствующая ей алгебра $\bar{\Phi}^0$ с нулевым умножением принадлежит классу $\mathcal{E}$, так как $\bar{\Phi}^0 \simeq \Phi r \in \mathcal{E}$.

Учитывая, что $\bar{\Phi}$ — ассоциативно-коммутативная алгебра с единицей $\bar{1}$, строим алгебру

$$A = \{(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}) \mid \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} \in \bar{\Phi}\},$$

определяя операции сложения и умножения на элементы из Φ покомпонентно, а операцию умножения в A по правилу

$$(\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1, \bar{\gamma}_1)(\bar{\alpha}_2, \bar{\beta}_2, \bar{\gamma}_2) = (0, \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_1\bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_1\bar{\alpha}_2). \quad (5)$$

Замечаем, что A — ассоциативно-коммутативная нильпотентная алгебра, $A^4 = 0$. А именно, если положить $a = (\bar{1}, 0, 0)$, то

$$a = (\bar{1}, 0, 0), \quad a^2 = (0, \bar{1}, 0), \quad a^3 = (0, 0, \bar{1}), \quad a^4 = 0 \quad (6)$$

в силу правил (5). Но тогда в силу (5) и (6)

$$A = \Phi a + \Phi a^2 + \Phi a^3, \quad (7)$$

т. е. $A = \langle a \rangle$ — однопорожденная ассоциативно-коммутативная алгебра с определяющими соотношениями

$$a^4 = 0, \quad \forall \delta \in (0 : r) \mid \delta a = 0.$$

По условию теоремы алгебра A допустима для рассмотрения (т. е. она лежит в основном классе $\mathfrak{A}$ алгебр). Учитывая это, положим

$$B = \Phi a^2 + \Phi a^3, \quad C = \Phi a^2. \quad (8)$$

Из (5) — (8) вытекает, что C — идеал алгебры B , B — идеал алгебры A , причем $B/C \simeq \bar{\Phi}^0 \in \mathcal{C}$. Но класс $\mathcal{C}$ удовлетворяет условию S_4 , как и любой другой слабо специальный класс алгебр. Поэтому подалгебра C должна быть идеалом алгебры A . Между тем, в силу (8) и (7) $AC = CA = \Phi a^3 \not\subseteq C$, т. е. подалгебра C не является идеалом алгебры A . Противоречие.

Следовательно, все алгебры из наибольшего слабо специального класса $\mathcal{C}$ полупервичны. Теорема доказана.

Алгебра A называется *точным расширением* алгебры B , если B — идеал алгебры A и аннуляторный идеал $B^* = \{a \in A \mid aB = Ba = 0\}$ совпадает с нулевым идеалом.

Следствие 2. В условиях теоремы 2 для любого класса $\mathcal{M}$ алгебр равносильны утверждения:

а. Класс $\mathcal{M}$ обобщенно специален и состоит только из полупервичных алгебр (т. е. алгебр без ненулевых нильпотентных идеалов).

б. Класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условиям S_1 , S_2 , S_4 .

в. Класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условиям S_1 , S_2 и состоит только из полупервичных алгебр.

г. Класс $\mathcal{M}$ слабо специален.

д. Класс $\mathcal{M}$ состоит только из полупервичных алгебр и замкнут относительно взятия идеалов и точных расширений.

Действительно, из теоремы 2 и предложения 2 вытекает равносильность утверждений а) — г). Кроме того, если полупервичная алгебра B является идеалом алгебры A , то соотношения $I \cap B = 0$ и $I \subseteq B^*$ эквивалентны для любого идеала I алгебры A . Поэтому для любого класса $\mathcal{M}$ полупервичных алгебр выполнение условия S2 эквивалентно замкнутости класса $\mathcal{M}$ относительно точных расширений. Выполнение же условия S1 эквивалентно замкнутости класса $\mathcal{M}$ относительно взятия идеалов. Поэтому равносильны и утверждения в), д).

Рассмотрим теперь специальные классы и специальные радикалы.

Предложение 3. Объединение любого семейства специальных классов алгебр само будет специальным классом. Поэтому существует наибольший специальный класс $\mathcal{C}_0$ алгебр. Равносильны утверждения:

- а) $\mathcal{M}$ — специальный класс алгебр.
- б) $\mathcal{M}$ — обобщенно специальный класс алгебр, причем $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{C}_0$.
- в) $\mathcal{M}$ — слабо специальный класс алгебр, причем $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{C}_0$.
- г) Класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условиям S1, S2, причем $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{C}_0$.

Действительно, если классы $\mathcal{M}_i$ удовлетворяют условиям И1, И4, то этим условиям удовлетворяет и объединение $\bigcup \mathcal{M}_i$ этих классов. Поэтому в силу определения 1.3 объединение любого семейства специальных классов алгебр само будет специальным классом. В частности, объединение всех специальных классов алгебр будет наибольшим специальным классом $\mathcal{C}_0$. Ясно, что класс $\mathcal{C}_0$ слабо специален, как и любой другой специальный класс. Но тогда $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$, и потому все обобщенно специальные классы алгебр, содержащиеся в классе $\mathcal{C}_0$, будут слабо специальными в силу предложения 2. Замечая, что любой слабо специальный класс алгебр, содержащийся в специальном классе, удовлетворяет условию И4, легко получаем в силу предложения 2 и доказанного, что все утверждения а) — г) равносильны.

Предложение доказано.

Следствие 3. *Пересечение любого семейства специальных радикалов само будет специальным радикалом. Верхний радикал $S_{\mathcal{E}_0}$, определяемый наибольшим специальным классом алгебр, является наименьшим радикалом. В частности, $S_{\mathcal{E}_0} \geq S_{\mathcal{E}}$.*

Все эти утверждения легко вытекают из предложения 3.

Выясним, что представляют собой наибольший специальный класс $\mathcal{E}_0$ и соответствующий ему наименьший специальный радикал $S_{\mathcal{E}_0}$. Нетрудно видеть, что это зависит от выбора основного класса $\mathcal{A}$ алгебр. Например, если $\mathcal{A}$ совпадает с классом всех алгебр с нулевым умножением, то можно показать, что $\mathcal{E}_0$ совпадает с нулевым классом $\mathcal{O}$ и потому $S_{\mathcal{E}_0}$ совпадает с тривиальным радикалом ε . Рассмотрим более важный случай.

Теорема 3. *Пусть основной класс $\mathcal{A}$ содержит все алгебры с нулевым умножением*) или вместе с каждой алгеброй B содержит и прямую сумму $B \oplus B$. Тогда наибольший специальный класс $\mathcal{E}_0$ совпадает с классом π всех первичных алгебр и потому наименьший специальный радикал $S_{\mathcal{E}_0}$ совпадает с нижним нильрадикалом $\mathfrak{N} = S_{\pi}$. Поэтому для любого класса $\mathcal{M}$ равносильны утверждения:*

а) $\mathcal{M}$ — обобщенно специальный класс, состоящий из первичных алгебр.

б) $\mathcal{M}$ — слабо специальный класс, состоящий из первичных алгебр.

в) Класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условиям S_1 , S_2 и все алгебры в $\mathcal{M}$ первичны.

г) $\mathcal{M}$ — специальный класс алгебр.

д) Класс $\mathcal{M}$ состоит из первичных алгебр и замкнут относительно взятия идеалов и точных расширений.

Доказательство. Достаточно доказать в силу предложения 3 и следствия 2, что наибольший специальный класс $\mathcal{E}_0$ совпадает с классом π всех первичных алгебр.

Допустим, что в классе $\mathcal{E}_0$ есть непервичные алгебры. Пусть R — одна из них. Тогда по определению найдутся такие ненулевые идеалы I_1 и I_2 алгебры R , что верно равенство $I_1 I_2 = 0$. Рассмотрим возникающие случаи.

*) На самом деле и это условие можно ослабить (см. доказательство).

Если $I_1 \cap I_2 = 0$, то рассмотрим множество всех идеалов алгебры R , содержащих I_2 и имеющих нулевое пересечение с идеалом I_1 . В силу леммы Куратовского — Цорна в указанном множестве идеалов есть максимальные элементы. Пусть P — один из них. Из слабой специальности класса $\mathcal{C}_0$ вытекает, что $B = I_1$ — ненулевая алгебра из $\mathcal{C}_0$, так как R — алгебра из $\mathcal{C}_0$. Поэтому 0 является $\mathcal{C}_0$ -идеалом и в алгебре B и в алгебре R . Но по построению P — максимальный среди идеалов алгебры R , имеющих нулевое пересечение с идеалом $B = I_1$. Поэтому (см. доказательство леммы 1 или предложения 2) P — $\mathcal{C}_0$ -идеал алгебры R , причем $P \neq 0$, так как $P \supseteq I_2 \neq 0$. В результате нашлись два различных $\mathcal{C}_0$ -идеала алгебры R , имеющие нулевое пересечение с идеалом B . А это противоречит специальности класса $\mathcal{C}_0$ (см. условие И4 из определения 3).

Пусть $I_1 \cap I_2 = D \neq 0$. Тогда $D^2 \subseteq I_1 I_2 = 0$, и потому D — ненулевая алгебра с нулевым умножением. Кроме того по построению D — идеал алгебры R , и потому D — алгебра из класса $\mathcal{C}_0$. По условию теоремы алгебра $E = D \oplus D$ с нулевым умножением допустима для рассмотрения (т. е. лежит в основном классе $\mathfrak{N}$). Учитывая это, рассмотрим следующие подмножества в алгебре E :

$$D_1 = \{(x, 0) \mid x \in D\}, \quad D_2 = \{(0, y) \mid y \in D\}, \\ B = \{(z, z) \mid z \in D\}.$$

Ясно, что D_1 , D_2 и B — подалгебры алгебры E , изоморфные алгебре D . Но в алгебрах с нулевым умножением все подалгебры являются идеалами. Поэтому D_1 и D_2 являются $\mathcal{C}_0$ -идеалами алгебры E , имеющими нулевое пересечение с идеалом B . Снова получили противоречие со специальностью класса $\mathcal{C}_0$.

Следовательно, класс $\mathcal{C}_0$ состоит только из первичных алгебр, т. е. $\mathcal{C}_0 \subseteq \pi$. Остается доказать, что класс π всех первичных алгебр специален.

Пусть B — идеал алгебры A .

Возьмем любой первичный идеал P алгебры A . Если C и D — идеалы алгебры B , то в силу леммы 1.1.5, если C_A и D_A — идеалы алгебры A , порожденные множествами C и D соответственно, то $C_A^3 \subseteq C \subseteq C_A$, $D_A^3 \subseteq D \subseteq D_A$. Но тогда в силу первичности идеала P

получаем

$$CD \subseteq P \cap B \Rightarrow C_A^3 D_A^3 \subseteq P \Rightarrow (C_A \subseteq P \text{ или } D_A \subseteq P) \Rightarrow \\ \Rightarrow (C \subseteq P \cap B \text{ или } D \subseteq P \cap B)$$

в силу леммы 1.1.7. Еще раз применяя эту лемму, получаем, что $P \cap B$ — первичный идеал алгебры B .

Следовательно, класс π всех первичных алгебр удовлетворяет условию И1.

Пусть Q — собственный первичный идеал алгебры B . Строим множество

$$P_0 = (Q : B)_A = \{a \in A \mid aB \subseteq Q, Ba \subseteq Q\}. \quad (9)$$

Из первичности идеала Q вытекает, что Q — идеал и в алгебре A . Поэтому из (9) легко вытекает, что $(Q : B)_A$ — идеал алгебры A . Еще раз применяя первичность или полупервичность идеала Q в алгебре B , получаем (см. лемму 1.1.8)

$$IB \subseteq Q \Leftrightarrow BI \subseteq Q \Leftrightarrow I \cap B \subseteq Q \quad (10)$$

для любого идеала I алгебры A . Но тогда для любых двух идеалов C, D алгебры A получаем

$$CD \subseteq (Q : B)_A \Rightarrow BCDB \subseteq Q \Rightarrow (BC \subseteq Q \text{ или } DB \subseteq Q) \Rightarrow \\ \Rightarrow (C \subseteq (Q : B)_A \text{ или } D \subseteq (Q : B)_A)$$

в силу (9) и (10). А это означает, что $(Q : B)_A = P_0$ — первичный идеал в A .

По построению $(Q : B)_A \supseteq Q$, и потому $(Q : B)_A \cap B \supseteq Q$. С другой стороны,

$$((Q : B)_A \cap B)^2 \subseteq B(Q : B)_A \subseteq Q,$$

и потому $(Q : B)_A \cap B \subseteq Q$ в силу первичности (или полупервичности) идеала Q в алгебре B . Следовательно, $(Q : B)_A \cap B = Q$.

Таким образом, $P_0 = (Q : B)_A$ является одним из таких первичных идеалов P в A , что $P \cap B = Q$. С другой стороны, пусть P — любой из указанных первичных идеалов алгебры A . Тогда в силу (10) равенство $P \cap B = Q$ влечет включение $P \subseteq (Q : B)_A$. Кроме того, Q — собственный идеал в B , т. е. $Q \neq B$. Поэтому P не содержит идеала B . А так как $B(Q : B)_A \subseteq (Q : B)_A \cap B = Q \subseteq P$, то в силу первичности идеала P $(Q : B)_A \subseteq P$. Следовательно, суще-

ствуется точно один первичный идеал P алгебры A такой, что $P \cap B = Q$. А именно, им будет идеал $(Q : B)_A$.

Следовательно, класс π удовлетворяет и условию И4, т. е. специален.

Теорема доказана.

Следствие 4. *Любой наднильпотентный радикал слабо специален. Класс $\hat{\pi}$ всех полупервичных алгебр является слабо специальным классом. В условиях теоремы 2 класс $\hat{\pi}$ — наибольший слабо специальный класс. Класс $\mathcal{M}$ полупервичных алгебр слабо специален тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия идеалов и точных расширений.*

Это вытекает из предложения 2 и теоремы 2.

Следствие 5. *Класс π всех первичных алгебр является специальным классом алгебр. В условиях теоремы 3 класс π — наибольший специальный класс. Класс $\mathcal{M}$ первичных алгебр специален тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия идеалов и точных расширений.*

А это вытекает из теоремы 3.

§ 2. Атомность и булевость решетки кручений

В силу теоремы 2.3.3 кручения образуют «полную дистрибутивную решетку» $\text{Tors} = \text{Tors}(\mathfrak{A})$. В связи с этим можно выделять в классе Tors всех кручений те или иные интересные подклассы с помощью «решеточных» свойств.

Начнем с изучения атомов «решетки» Tors , т. е. минимальных ненулевых кручений. Они оказываются тесно связаны с квазипростыми (в смысле Бурбаки) алгебрами. Напомним, что ненулевая алгебра K называется *квазипростой*, если единственными идеалами в K являются 0 и K . Таким образом, *простые* алгебры — это в точности квазипростые алгебры K с $K = K^2$. С другой стороны, если квазипростая алгебра K не проста, то $K^2 = 0$, т. е. K — алгебра с нулевым умножением.

Описание квазипростых алгебр с нулевым умножением дает

Предложение 1. *Пусть K — квазипростая алгебра с нулевым умножением. Тогда существует и притом только один такой максимальный собственный идеал M*

в Φ , что алгебра K изоморфна алгебре $(\Phi/M)^0$ с нулевым умножением, полученной из простого модуля Φ/M . В частности, алгебра K порождается одним элементом и единственными подалгебрами в K являются 0 и K .

Действительно, в алгебре с нулевым умножением понятия идеала, подалгебры и подмодуля (унитарного левого Φ -модуля K) совпадают. Поэтому K — простой (унитарный левый) Φ -модуль. А это равносильно тому, что для некоторого максимального собственного идеала M (т. е. подмодуля) в Φ модули K и Φ/M изоморфны. Но тогда алгебры K и $(\Phi/M)^0$ изоморфны. При этом по построению

$$M = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha K = 0\} = (0 : K)_\Phi,$$

и потому существует точно один максимальный собственный идеал M в Φ , для которого алгебры K и $(\Phi/M)^0$ изоморфны.

Предложение доказано.

Напомним, что алгебра R называется *подпрямо неразложимой*, если *сердцевина* C алгебры R — пересечение всех ненулевых идеалов алгебры R — сама является ненулевым идеалом. В силу известной теоремы Биркгофа любая алгебра является подпрямым произведением подпрямо неразложимых алгебр.

Лемма 1. Пусть R — подпрямо неразложимая алгебра с сердцевиной C . Тогда либо $C^2 = 0$ (т. е. C — алгебра с нулевым умножением), либо C будет простой алгеброй. Алгебра R первична тогда и только тогда, когда алгебра C проста.

Действительно, пусть $C^2 \neq 0$. Тогда $C = C^2$, так как C — наименьший ненулевой идеал алгебры R . Учитывая это, возьмем любой ненулевой идеал D алгебры C . В силу леммы 1.1.5, если D_R — идеал в R , порожденный D в R , то $D_R^2 \subseteq D \subseteq D_R$. Кроме того, $D_R \subseteq C$, так как $D \subseteq C$. Но тогда $D_R = C$, так как D_R — ненулевой идеал алгебры R . Отсюда вытекает

$$C = D_R = C^2 = C^3 = D_R^2 \subseteq D \subseteq C,$$

т. е. $C = D$. Следовательно, C — простая алгебра. При этом алгебра R первична, так как для любых двух ненулевых идеалов I_1, I_2 получаем последовательно $I_1 \subseteq C, I_2 \subseteq C, I_1 I_2 \subseteq C^2 = C \neq 0$. Обратно, если алгебра R пер-

вична, то $C^2 \neq 0$, и потому $C = C^2$ — простая алгебра в силу доказанного выше. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть основной класс $\mathfrak{A}$ содержит хотя бы одну ненулевую алгебру. Тогда в $\mathfrak{A}$ есть квазипростые алгебры. При этом:

а) Кручение τ будет ненулевым тогда и только тогда, когда существуют квазипростые τ -радикальные алгебры.

б) Кручение τ будет атомом, т. е. минимальным ненулевым кручением, тогда и только тогда, когда существует такая квазипростая алгебра K , что τ совпадает с нижним радикалом $l_{\langle K \rangle}$, порожденным классом

$$\langle K \rangle = \{A \mid A \text{ — алгебра, изоморфная } K, \text{ или } A = 0\}. \quad (1)$$

в) Если K — квазипростая алгебра, то нижний радикал $l_{\langle K \rangle}$, порожденный классом $\langle K \rangle$, будет кручением. При этом ненулевая алгебра R будет $l_{\langle K \rangle}$ -радикальной тогда и только тогда, когда R имеет строго возрастающий нормальный ряд

$$0 \subset R_0 \subset R_1 \subset \dots \subset R_\alpha \subset R_{\alpha+1} \subset \dots \subset R_\gamma = R, \quad (2)$$

все члены которого достижимы по ряду, а все факторы изоморфны K . Алгебра Q будет $l_{\langle K \rangle}$ -полупростой тогда и только тогда, когда она не имеет ненулевых метайдеалов, являющихся алгебрами, изоморфными K .

г) Если K_1 и K_2 — квазипростые алгебры, то кручения $l_{\langle K_1 \rangle}$ и $l_{\langle K_2 \rangle}$ совпадают тогда и только тогда, когда алгебры K_1 и K_2 изоморфны. Поэтому, с точностью до изоморфизма алгебр, соответствие $K \mapsto l_{\langle K \rangle}$ является взаимно однозначным соответствием между квазипростыми алгебрами и атомами в «решетке» $\text{Tors} = \text{Tors}(\mathfrak{A})$ кручений.

Доказательство. Пусть кручение τ — ненулевое, т. е. существуют ненулевые τ -радикальные алгебры. Пусть A — одна из них. Тогда существует ненулевой гомоморфный образ $\bar{A}$ алгебры A , являющийся подпрямо неразложимой алгеброй. Пусть $\bar{C}$ — сердцевина алгебры $\bar{A}$. Тогда в силу леммы 1 $\bar{C}$ — либо простая алгебра, либо алгебра с нулевым умножением.

По построению алгебра A τ -радикальна. Поэтому τ -радикальна и алгебра $\bar{A}$. Но тогда τ -радикальна и алгебра $\bar{C}$ как идеал τ -радикальной алгебры $\bar{A}$. Поэтому, если $\bar{C}$ — простая алгебра, то квазипростые τ -радикальные алгебры существуют.

Если алгебра $\bar{C}$ не является простой, то $\bar{C}$ будет ненулевой τ -радикальной алгеброй с нулевым умножением. Возьмем любой ненулевой элемент $\bar{c} \in \bar{C}$. Тогда подмодуль $\Phi\bar{c}$ будет идеалом алгебры $\bar{C}$, так как в алгебре с нулевым умножением подмодули, подалгебры и идеалы — это одно и то же. Но тогда

$$(0 : \bar{c}) = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha\bar{c} = 0\}$$

— идеал в Φ , и мы получаем, что алгебры $(\Phi/(0 : \bar{c}))^0$ и $\Phi\bar{c}$ изоморфны. Поэтому из τ -радикальности алгебры $\bar{C}$ вытекает τ -радикальность алгебры $(\Phi/(0 : \bar{c}))^0 \simeq \Phi\bar{c} \neq 0$. Учитывая, что Φ — ассоциативно-коммутативное кольцо (или алгебра) с единицей, вкладываем, с помощью леммы Куратовского — Цорна, собственный идеал $(0 : \bar{c})$ алгебры Φ в максимальный идеал M . В результате получаем, что квазипростая в силу предложения 1 алгебра $(\Phi/M)^0$ с нулевым умножением является гомоморфным образом τ -радикальной алгебры $(\Phi/(0 : \bar{c}))^0$. Поэтому квазипростая алгебра $(\Phi/M)^0$ τ -радикальна. Мы снова получили, что квазипростые τ -радикальные алгебры существуют.

Из доказанного вытекает верность утверждения а), так как по определению все квазипростые алгебры — ненулевые. Кроме того, по условию в основном классе $\mathfrak{A}$ есть ненулевые алгебры. Поэтому тривиальный радикал ε ($\varepsilon(A) = A$ для всех алгебр A) отличен от нулевого радикала 0 ($0(A) = 0$ для всех алгебр A). Применяя утверждение а) к тривиальному радикалу ε , получаем, что в $\mathfrak{A}$ есть квазипростые алгебры.

Возьмем любую квазипростую алгебру K и рассмотрим класс $\langle K \rangle$, определенный равенством (1). Ясно, что класс $\langle K \rangle$ замкнут относительно взятия идеалов и гомоморфных образов, так как алгебра K квазипроста. Поэтому в силу следствия 2.4.7 нижний радикал $l_{\langle K \rangle}$ является кручением — наименьшим кручением, относительно которого алгебра K радикальна. Но тогда в силу теоремы 2.4.1 и предложения 2.2.5 верно утверждение в).

Учитывая это, возьмем любое такое кручение $\tau \neq 0$, что $\tau \leq l_{\langle K \rangle}$. Из $\tau \neq 0$ вытекает, что существует ненулевая τ -радикальная алгебра R . Из неравенства $\tau \leq l_{\langle K \rangle}$ вытекает, что алгебра R будет $l_{\langle K \rangle}$ -радикальной, и потому в силу утверждения в) существует строго возрастающий

нормальный ряд (2) алгебры R , все члены которого достижимы по ряду, а все факторы изоморфны алгебре K . Рассматривая алгебру R_0 или алгебру R_1/R_0 , получаем в силу достижимости членов ряда (2), что обе эти алгебры τ -радикальны, так как любой метаидеал τ -радикальной алгебры τ -радикален. Поэтому τ -радикальна и алгебра $K \simeq R_0 \simeq R_1/R_0$. Но в силу доказанного и сказанного выше $l_{\langle K \rangle}$ — наименьшее кручение, относительно которого алгебра K радикальна. Следовательно, $\tau \geq l_{\langle K \rangle}$, и потому $\tau = l_{\langle K \rangle}$.

А отсюда вытекает, что для любой квазипростой алгебры K нижний радикал $l_{\langle K \rangle}$ является атомом в «решетке» Tors кручений.

С другой стороны, возьмем любое ненулевое кручение τ . В силу утверждения а), существует квазипростая τ -радикальная алгебра K . Для этой алгебры K получаем соотношение $\tau \geq l_{\langle K \rangle}$. Поэтому если τ — атом, то $\tau = l_{\langle K \rangle}$.

Следовательно, верно утверждение б).

Возьмем любые две квазипростые алгебры K_1 и K_2 . Ясно, что если алгебры K_1 и K_2 изоморфны, то $l_{\langle K_1 \rangle} = l_{\langle K_2 \rangle}$. Обратно, пусть $l_{\langle K_1 \rangle} = l_{\langle K_2 \rangle}$. Тогда алгебра K_2 будет $l_{\langle K_1 \rangle}$ -радикальна, и потому в силу утверждения в) алгебра K_2 имеет строго возрастающий нормальный ряд с членами, достижимыми по ряду, и с факторами, изоморфными алгебре K_1 . Но единственным строго возрастающим нормальным рядом с достижимыми членами будет ряд $0 \subset K_2$, так как единственными метаидеалами алгебры K_2 являются 0 и K_2 . Поэтому алгебры K_1 и K_2 изоморфны.

Следовательно, верно утверждение г), и теорема доказана.

Следствие 1. «Решетка» Tors кручений атомна, т. е. любое ненулевое кручение содержит некоторый атом «решетки» Tors .

Действительно, в силу теоремы 1 каждое ненулевое кручение τ содержит некоторый атом $l_{\langle K \rangle}$, где K — квазипростая τ -радикальная алгебра.

Определение 1. Кручение τ назовем *атомным*, если τ — объединение некоторого семейства $\{a_i \mid i \in \Gamma\}$ атомов «решетки» Tors . В частности, нулевое кручение 0 будет атомным как объединение пустого семейства атомов.

С помощью теоремы 1 нетрудно описать все атомные кручения.

А именно, будем считать, что основной класс $\mathfrak{A}$ содержит хотя бы одну ненулевую алгебру. Тогда в силу теоремы 1 в $\mathfrak{A}$ есть и квазипростые алгебры. Положим

$$\mathfrak{U} = \{K \mid K \text{ — квазипростая алгебра или } K = 0\}.$$

Нетрудно видеть, что класс $\mathfrak{U}$ и все его подклассы*) замкнуты относительно взятия идеалов и гомоморфных образов. Поэтому в силу следствия 2.4.7 для любого подкласса $\mathcal{T}$ в $\mathfrak{U}$ нижний радикал $l_{\mathcal{T}}$ является кручением — наименьшим кручением, относительно которого все алгебры из класса $\mathcal{T}$ радикальны.

Теорема 2. *Нижний радикал $l_{\mathfrak{U}}$ является наибольшим атомным кручением. Соответствие $\mathcal{T} \mapsto l_{\mathcal{T}}$ индуцирует взаимно однозначное отображение класса $\mathfrak{B}(\mathfrak{U})$ всех подклассов в $\mathfrak{U}$ на класс $\mathfrak{U}(\mathfrak{A})$ всех атомных кручений. Более того, это соответствие является изоморфизмом «полной булевой решетки» $\mathfrak{B}(\mathfrak{U})$ на «полную решетку» $\mathfrak{U}(\mathfrak{A})$, так как*

$$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2 \Leftrightarrow l_{\mathcal{T}_1} \leq l_{\mathcal{T}_2} \quad (3)$$

для любых двух подклассов $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ в $\mathfrak{U}$. Если $\mathcal{T}$ — подкласс в $\mathfrak{U}$, то r -радикальные, в смысле атомного кручения $r = l_{\mathcal{T}}$, алгебры — это в точности алгебры, имеющие нормальный ряд, все члены которого достижимы по ряду, а все факторы — алгебры из класса $\mathcal{T}$, r -полупростые алгебры — алгебры без ненулевых метайдеалов, являющихся алгебрами из класса $\mathcal{T}$.

Доказательство. Возьмем любой подкласс $\mathcal{T}$ в $\mathfrak{U}$. Тогда по построению $\mathfrak{U}$ и в силу (1) получаем

$$\mathcal{T} = \bigcup \{ \langle K \rangle \mid K \text{ — квазипростая алгебра, } K \in \mathcal{T} \}.$$

Но тогда по построению нижнего радикала и определению кручений (или радикалов) получаем равенство

$$l_{\mathcal{T}} = \bigvee \{ l_{\langle K \rangle} \mid K \text{ — квазипростая алгебра, } K \in \mathcal{T} \},$$

так как и справа и слева стоит наименьшее кручение (или радикал), относительно которого все алгебры из $\mathcal{T}$

*) Напомним, что все рассматриваемые классы алгебр — абстрактные (замкнутые относительно изоморфных образов) подклассы в $\mathfrak{A}$, содержащие ненулевую алгебру.

радикальны. Но тогда в силу теоремы 1 и определения 1 кручение $l_{\mathcal{T}}$ является атомным. Кроме того в силу предложения 2.3.3 и теоремы 2.4.1, дающих характеристику нижнего радикала, если $r = l_{\mathcal{T}}$, то r -радикальные алгебры — это в точности алгебры, имеющие нормальный ряд с достижимыми членами и с факторами из $\mathcal{T}$, а r -полупростые алгебры — алгебры без ненулевых метаидеалов, являющихся алгебрами из $\mathcal{T}$.

Если $\mathcal{T} = \mathcal{U}$, то снова в силу теоремы 1 получаем, что $l_{\mathcal{T}}$ — объединение всех атомов «решетки» Tors кручений, и потому в силу определения 2.1 $l_{\mathcal{T}}$ — наибольшее атомное кручение.

Возьмем теперь любое атомное кручение r . В силу определения 1 найдется такое семейство $\{a_i \mid i \in \Gamma\}$ атомов в «решетке» Tors , что $r = \bigvee_{i \in \Gamma} a_i$. В силу теоремы 1 для каждого $i \in \Gamma$ найдется такая квазипростая алгебра K_i , что $a_i = l_{\langle K_i \rangle}$. Но тогда, как и выше, получаем, что

$$r = \bigvee_{i \in \Gamma} a_i = \bigvee l_{\langle K_i \rangle} = l_{\bigcup_{i \in \Gamma} \langle K_i \rangle},$$

и мы нашли такой подкласс $\mathcal{T}$ в $\mathcal{U}$, что $r = l_{\mathcal{T}}$.

Таким образом, атомные кручения и нижние радикалы $l_{\mathcal{T}}$, порожденные подклассами в $\mathcal{U}$, — это одно и то же. Остается доказать соотношение (3).

Докажем сначала, что для любого подкласса $\mathcal{T}$ в $\mathcal{U}$ верно равенство

$$\mathcal{T} = \mathcal{U} \cap \mathcal{R}(l_{\mathcal{T}}). \quad (4)$$

Пусть $K \in \mathcal{U} \cap \mathcal{R}(l_{\mathcal{T}})$. Если $K = 0$, то $K \in \mathcal{T}$. Пусть $K \neq 0$. Тогда по построению $\mathcal{U}$ K — квазипростая $l_{\mathcal{T}}$ -радикальная алгебра. Из $l_{\mathcal{T}}$ -радикальности вытекает существование такого нормального ряда алгебры K , что все его члены достижимы по ряду, а все факторы — алгебры из класса $\mathcal{T}$. Удаляя повторения, мы можем считать, что этот нормальный ряд строго возрастающий. Но в силу квазипростоты алгебры K единственным нормальным рядом в K , удовлетворяющим поставленным условиям, будет ряд $0 \subset K$. Поэтому $K \in \mathcal{T}$.

Следовательно, $\mathcal{U} \cap \mathcal{R}(l_{\mathcal{T}}) \subseteq \mathcal{T}$. Так как обратное включение очевидно по построению нижнего радикала, то верно и равенство (4).

Учитывая (4), получаем для любых подклассов $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ в $\mathcal{U}$

$$l_{\mathcal{T}_1} \leq l_{\mathcal{T}_2} \Rightarrow \mathcal{R}(l_{\mathcal{T}_1}) \subseteq \mathcal{R}(l_{\mathcal{T}_2}) \Rightarrow \mathcal{T}_1 = \mathcal{U} \cap \mathcal{R}(l_{\mathcal{T}_1}) \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{R}(l_{\mathcal{T}_2}) = \mathcal{T}_2.$$

Но обратная импликация очевидна в силу построения нижнего радикала. Поэтому верно и соотношение (3).

Теорема доказана.

Следствие 2. Кручение r атомно тогда и только тогда, когда $0 \leq r \leq l_{\mathcal{U}}$.

Действительно, в силу теоремы 2 кручение $l_{\mathcal{U}}$ является наибольшим кручением. Поэтому, если r — атомное кручение, то $r \leq l_{\mathcal{U}}$. Обратно, пусть $r \leq l_{\mathcal{U}}$ и r — кручение. В силу теоремы 2.3.3 «решетка» Tors «сильно дистрибутивна». Поэтому, записывая $l_{\mathcal{U}}$ в виде объединения атомов α_i , получаем

$$r = r \wedge l_{\mathcal{U}} = r \wedge \left(\bigvee_{i \in \Gamma} \alpha_i \right) = \bigvee_{i \in \Gamma} (r \wedge \alpha_i).$$

Но для каждого атома α_i либо $r \wedge \alpha_i = \alpha_i$, либо $r \wedge \alpha_i = 0$ в силу минимальности α_i . Поэтому, выбрасывая нулевые слагаемые, мы получаем, что $r = \bigvee_{i \in \Delta} \alpha_i$ — объединение некоторого семейства атомов, т. е. r — атомное кручение.

Следствие 3. Следующие свойства основного класса $\mathfrak{A}$ равносильны:

а) «Решетка» Tors кручений булева, т. е. для любого кручения r существует такое кручение $\bar{r}$, что $r \wedge \bar{r} = 0$, $r \vee \bar{r} = \epsilon$.

б) Все кручения атомные.

в) $l_{\mathcal{U}} = \epsilon$.

г) Любая ненулевая алгебра R (из $\mathfrak{A}$) имеет такой строго возрастающий нормальный ряд (2), что все члены достижимы по ряду, а все его факторы — квазипростые алгебры.

Действительно, утверждения б), в), и г) равносильны в силу теоремы 2 и следствия 2.

а) $\Rightarrow$ в). Пусть «решетка» Tors булева. Тогда, в частности, существует такое кручение $\bar{l}_{\mathcal{U}}$, что $l_{\mathcal{U}} \wedge \bar{l}_{\mathcal{U}} = 0$,

$l_{\mathcal{U}} \vee \bar{l}_{\mathcal{U}} = \varepsilon$. Из первого равенства вытекает, что кручение $\bar{l}_{\mathcal{U}}$ не содержит атомов, так как все атомы содержатся в $l_{\mathcal{U}}$ в силу теоремы 2. Но тогда в силу следствия 1 $\bar{l}_{\mathcal{U}} = 0$. Применяя теперь второе равенство, получаем $\varepsilon = l_{\mathcal{U}} \vee \bar{l}_{\mathcal{U}} = l_{\mathcal{U}} \vee 0 = l_{\mathcal{U}}$.

б) $\Rightarrow$ а). Пусть все кручения атомные. Тогда в силу теоремы 2 для любого кручения τ найдется такой подкласс $\mathcal{T}$ в $\mathcal{U}$, что $\tau = l_{\mathcal{T}}$. Но если

$$\overline{\mathcal{T}} = \bigcup \{ \langle K \rangle \mid K - \text{квазипростая алгебра, } K \notin \mathcal{T} \},$$

то, очевидно, $\mathcal{T} \cup \overline{\mathcal{T}} = \mathcal{U}$, $\mathcal{T} \cap \overline{\mathcal{T}} = \emptyset$. Применяя теорему 2 (см. (3)), получаем $l_{\mathcal{T}} \vee l_{\overline{\mathcal{T}}} = \varepsilon$, $l_{\mathcal{T}} \wedge l_{\overline{\mathcal{T}}} = 0$, так как наибольшим атомным кручением, в рассматриваемом случае, является наибольшее кручение ε . Следовательно, «решетка» Tors кручений булева.

А из доказанного вытекает, что все утверждения а) — г) равносильны.

К условиям булевости «решетки» Tors кручений можно подойти и с другой стороны. Начнем с одной общей леммы.

Лемма 2. Пусть τ — произвольный радикал, A — произвольная алгебра и $\{\tau_i \mid i \in \Gamma\}$ — любое семейство радикалов такое, что

$$\forall i \in \Gamma \mid \tau(\bar{A}) \cap \tau_i(\bar{A}) = 0 \quad (5)$$

для любого гомоморфного образа $\bar{A}$ алгебры A . Тогда

$$\tau(A) \cap \left(\bigvee_{i \in \Gamma} \tau_i(A) \right) = 0. \quad (6)$$

Доказательство. Положим, для краткости, $\vartheta = \bigvee_{i \in \Gamma} \tau_i$. Можно считать, что семейство $\{\tau_i \mid i \in \Gamma\}$ непусто,

так как в противном случае нужно нам утверждение очевидно (радикал ϑ совпадает с нулевым радикалом 0). В силу следствия 2.4.2 пересечение любого семейства классов, полупростых в смысле Куроша, само будет классом, полупростым в смысле Куроша (так как все рассматриваемые алгебры ассоциативны). Отсюда легко вытекает равенство $\mathcal{P}(\vartheta) = \bigcap_{i \in \Gamma} \mathcal{P}(\tau_i)$, и потому

$$\vartheta(B) = \bigcap \{ I \mid I - \text{идеал в } B, \tau_i(B/I) = 0 \text{ для всех } i \in \Gamma \} \quad (7)$$

для любой алгебры B в силу основных свойств радикалов (см., например, предложение 2.1.1). Учитывая (7), рассмотрим множество идеалов алгебры A

$$\mathfrak{P} = \{T \mid T - \text{идеал алгебры } A, T \subseteq \mathfrak{s}(A), T \cap \mathfrak{r}(A) = 0\}. \quad (8)$$

Допустим, что $\mathfrak{s}(A) \notin \mathfrak{P}$. Замечаем, что множество $\mathfrak{P}$ непусто и индуктивно в силу (8). В силу леммы Куратовского — Цорна в $\mathfrak{P}$ есть максимальные элементы. Пусть P — любой из них. Тогда из предположения вытекает, что $P \neq \mathfrak{s}(A)$, т. е. $P \subset \mathfrak{s}(A)$. Но тогда в силу (7) $\mathfrak{r}_j(A/P) \neq 0$ для некоторого $j \in \Gamma$. Зафиксировав этот j и переходя к прообразам при естественном гомоморфизме $A \rightarrow \bar{A} = A/P$, находим такой идеал R алгебры A , что

$$R/P = \mathfrak{r}_j(\bar{A}) \subseteq \mathfrak{s}(\bar{A}) = \mathfrak{s}(A)/P \quad (9)$$

и $R \supset P$. При этом равенство $\mathfrak{s}(\bar{A}) = \mathfrak{s}(A/P) = \mathfrak{s}(A)/P$ вытекает из основных свойств радикалов, так как $P \subseteq \mathfrak{s}(A)$ в силу (8).

Из (9) и (5) вытекает соотношение

$$(R \cap \mathfrak{r}(A) + P)/P \subseteq \mathfrak{r}_i(\bar{A}) \cap \mathfrak{r}(\bar{A}) = 0. \quad (10)$$

Из (10), переходя к прообразам при естественном гомоморфизме $A \rightarrow \bar{A} = A/P$, получаем включение $R \cap \mathfrak{r}(A) \subseteq P$. Но $P \in \mathfrak{P}$. Поэтому, пересекая обе части этого включения с $\mathfrak{r}(A)$, получаем равенство $R \cap \mathfrak{r}(A) = 0$. Кроме того в силу (9) верно и включение $R \subseteq \mathfrak{s}(A)$. Следовательно в силу (8) $R \in \mathfrak{P}$. Но по построению $R \supset P$. Получили противоречие с максимальнойностью P .

Из доказанного вытекает включение $\mathfrak{s}(A) \in \mathfrak{P}$. А это и означает в силу (8), что верно нужное нам равенство (6).

Лемма доказана.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{r}$ — произвольный радикал, $\mathcal{M}$ — произвольный класс радикалов, содержащий нулевой радикал 0. Скажем, что радикал $\mathfrak{s}$ является *дополнительным в классе $\mathcal{M}$ к радикалу $\mathfrak{r}$* , если $\mathfrak{s}$ — наибольший среди всех таких радикалов $\mathfrak{r}'$ из класса $\mathcal{M}$, что $\mathfrak{r}(A) \cap \mathfrak{r}'(A) = 0$ для любой алгебры A . Радикал $\mathfrak{r}$ будем называть *$\mathcal{M}$ -двойственным*, если существуют радикал $\mathfrak{r}^\diamond$, дополнительный в классе $\mathcal{M}$ к радикалу $\mathfrak{r}$, и радикал $\mathfrak{r}^{\diamond\diamond}$, дополнительный в классе $\mathcal{M}$ к радикалу $\mathfrak{r}^\diamond$, причём $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}^{\diamond\diamond}$.

Предложение 2. Пусть $\mathcal{M}$ — любой такой класс радикалов, что для любого *) семейства $\{r_i \mid i \in \Gamma\}$ радикалов из класса $\mathcal{M}$ объединение $\bigvee_{i \in \Gamma} r_i$ тоже является радикалом из класса $\mathcal{M}$. Тогда для любого радикала r существует радикал $r^\diamond$, дополнительный в классе $\mathcal{M}$ к радикалу r . При этом радикал r будет $\mathcal{M}$ -двойственным тогда и только тогда, когда он дополнителен в классе $\mathcal{M}$ к некоторому радикалу $\mathfrak{s}$ из класса $\mathcal{M}$.

Действительно, первое утверждение вытекает из леммы 2 и определения 2. А именно, радикал $r^\diamond$, дополнительный в классе $\mathcal{M}$ к радикалу r , совпадает с объединением всех таких радикалов $r' \in \mathcal{M}$, что $r(A) \cap r'(A) = 0$ для любой алгебры A .

Всюду ниже (в доказательстве леммы) мы будем обозначать символом $r^\diamond$ радикал, дополнительный в классе $\mathcal{M}$ к радикалу r . Из доказанного вытекает, что для любого радикала r существуют радикалы $r^\diamond$ и $r^{\diamond\diamond} = (r^\diamond)^\diamond$. Легко видеть, что для любых двух радикалов r_1 и r_2 верно соотношение

$$r_1 \leq r_2 \Rightarrow r_1^\diamond \geq r_2^\diamond. \quad (11)$$

Пусть r — $\mathcal{M}$ -двойственный радикал. Тогда по определению $r = r^{\diamond\diamond} = (r^\diamond)^\diamond$. Следовательно, радикал r дополнителен в классе $\mathcal{M}$ радикалу $\mathfrak{s} = r^\diamond$ из класса $\mathcal{M}$.

Обратно, пусть радикал r дополнителен в классе $\mathcal{M}$ к некоторому радикалу $\mathfrak{s}$ из класса $\mathcal{M}$. По доказанному существуют радикалы $\mathfrak{s}^\diamond$ и $\mathfrak{s}^{\diamond\diamond}$, причем по определению $\mathfrak{s}^{\diamond\diamond}(A) \cap \mathfrak{s}^\diamond(A) = 0$ для всех алгебр A . Но $\mathfrak{s}^\diamond \in \mathcal{M}$ и по доказанному существует радикал $\mathfrak{s}^{\diamond\diamond\diamond}$. Еще раз применяя определение, получаем, что $\mathfrak{s}^\diamond \leq \mathfrak{s}^{\diamond\diamond\diamond}$. С другой стороны, $\mathfrak{s}^\diamond(A) \cap \mathfrak{s}(A) = 0$ для любой алгебры A и $\mathfrak{s} \in \mathcal{M}$ по условию. Поэтому $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{s}^{\diamond\diamond}$. Но тогда, применяя (11), получаем, что $\mathfrak{s}^\diamond \geq \mathfrak{s}^{\diamond\diamond\diamond}$. Следовательно, $r = \mathfrak{s}^\diamond = \mathfrak{s}^{\diamond\diamond\diamond} = r^{\diamond\diamond}$, и мы доказали, что радикал r является $\mathcal{M}$ -двойственным. Предложение доказано.

Недостатком доказанного утверждения является его «неконструктивность»: оно не дает информации о ради-

*) В том числе и пустого. Поэтому нулевой радикал 0 принадлежит классу $\mathcal{M}$.

кальных или полупростых алгебрах, соответствующих радикалу $\tau^\diamond$. Чтобы исправить этот недостаток, замечаем, что верна

Лемма 3. Для любых радикалов τ_1 и τ_2 равносильны утверждения:

а) $\tau_1(A) \cap \tau_2(A) = 0$ для любой алгебры A .

б) $\tau_1(B) \cap \tau_2(B) = 0$ для любой подпрямо неразложимой алгебры B .

в) Все не τ_1 -полупростые подпрямо неразложимые алгебры τ_2 -полупросты.

Доказательство. Импликация а) $\Rightarrow$ б) очевидна.

б) $\Rightarrow$ в). Пусть верно б). Возьмем любую не τ_1 -полупростую подпрямо неразложимую алгебру B . Тогда по условию $\tau_1(B) \neq 0$ и $\tau_1(B) \cap \tau_2(B) = 0$. Но в подпрямо неразложимой алгебре пересечение любых двух ненулевых идеалов само будет ненулевым идеалом. Поэтому $\tau_2(B) = 0$. Следовательно, верно в).

в) $\Rightarrow$ а). Пусть верно в). Возьмем любую ненулевую алгебру A . Обозначим

$A_1 = \bigcap \{T_1 \mid T_1 \text{ — идеал алгебры } A, A/T_1 \text{ — подпрямо неразложимая } \tau_1\text{-полупростая алгебра}\},$

$A_2 = \bigcap \{T_2 \mid T_2 \text{ — идеал алгебры } A, A/T_2 \text{ — подпрямо неразложимая } \tau_2\text{-полупростая алгебра}\},$

$A'_1 = \bigcap \{T'_1 \mid T'_1 \text{ — идеал алгебры } A, A/T'_1 \text{ — подпрямо неразложимая не } \tau_1\text{-полупростая алгебра}\}.$

Из условий и построения вытекает, что $A_2 \subseteq A'_1$. По теореме Биркгофа $A_1 \cap A'_1 = 0$, так как любая алгебра является подпрямым произведением подпрямо неразложимых алгебр. Но тогда из основных свойств радикалов вытекает соотношение

$$\tau_1(A) \cap \tau_2(A) \subseteq A_1 \cap A_2 \subseteq A_1 \cap A'_1 = 0$$

и потому верно а).

Лемма доказана.

Предложение 3. Пусть τ — произвольный радикал, $\mathcal{M}$ — произвольный класс радикалов, содержащий нулевой радикал 0, причем существует радикал $\tau^\diamond$, дополнительный в классе $\mathcal{M}$ к радикалу τ . Тогда $\tau^\diamond$ — наибольший среди всех таких радикалов τ' из класса $\mathcal{M}$, что все не τ -полупростые подпрямо неразложимые алгебры τ' -полупросты.

А это с очевидностью вытекает из определения 2.2 и леммы 3.

Предложение 4. Пусть τ — произвольный радикал. Тогда существует такой радикал τ^* , дополнительный к радикалу τ в классе всех радикалов. При этом

а) Класс $\mathcal{P}(\tau^*)$ всех τ^* -полупростых алгебр является наименьшим полупростым классом в смысле Куроша, содержащим все не τ -полупростые подпрямые неразложимые алгебры.

б) Алгебра R τ^* -радикальна тогда и только тогда, когда она не отображается гомоморфно на ненулевые метайдеалы подпрямой неразложимой не τ -полупростой алгебры.

Доказательство. Утверждение а) вытекает из предложения 3 и свойств порядка для радикалов. Существование радикала τ^* — из предложения 2. Остается доказать утверждение б).

Учитывая а), строим класс алгебр

$\mathcal{M} = \{A \mid A \text{ — метайдеал некоторой не } \tau\text{-полупростой подпрямой неразложимой алгебры}\}.$

Ясно, что класс $\mathcal{M}$ замкнут относительно взятия идеалов и потому удовлетворяет условию K^*1 . Поэтому можно строить верхний радикал $S_{\mathcal{M}}$. В силу следствия 2.1.2 класс $\mathcal{P}(S_{\mathcal{M}})$ всех $S_{\mathcal{M}}$ -полупростых алгебр является наименьшим полупростым в смысле Куроша классом, содержащим класс $\mathcal{M}$. Но в силу ассоциативности рассматриваемых алгебр любой класс, полупростой в смысле Куроша, замкнут относительно взятия идеалов. Поэтому, если полупростой в смысле Куроша класс $\mathcal{P}$ содержит все не τ -полупростые подпрямые неразложимые алгебры, то он содержит и класс $\mathcal{M}$. Из сказанного и доказанного вытекает, что $\mathcal{P}(S_{\mathcal{M}})$ — наименьший полупростой в смысле Куроша класс, содержащий все не τ -полупростые подпрямые неразложимые алгебры. Поэтому в силу а) верно равенство $\mathcal{P}(S_{\mathcal{M}}) = \mathcal{P}(\tau^*)$. Следовательно, радикал τ^* , дополнительный радикалу τ в классе всех радикалов, совпадает с верхним радикалом $S_{\mathcal{M}}$, определенным классом $\mathcal{M}$. Еще раз применяя следствие 2.1.2, получаем, что верно и утверждение б).

Предложение доказано.

Теорема 3. Пусть τ — кручение, τ^* — дополнительный к радикалу τ радикал в классе всех радикалов. Тогда:

а) Класс $\mathcal{N}(r)$ всех подпрямо неразложимых алгебр с r -радикальной сердцевиной *) удовлетворяет условию K^*1 и определяет верхний радикал $S_{\mathcal{N}(r)}$, совпадающий с радикалом r^* .

б) Класс $\mathcal{P}(r^*)$ всех r^* -полупростых алгебр является наименьшим полупростым в смысле Куроша классом, содержащим все подпрямо неразложимые алгебры с r -радикальной сердцевиной.

в) Алгебра A r^* -радикальна тогда и только тогда, когда она сильно r -полупроста, т. е. когда любой гомоморфный образ $\bar{A}$ алгебры A будет r -полупростой алгеброй. Это равносильно тому, что любой гомоморфный образ алгебры A разлагается в подпрямое произведение подпрямо неразложимых алгебр с r -полупростой сердцевиной.

Доказательство. Пусть R — ненулевая подпрямо неразложимая алгебра с сердцевиной C . Если алгебра R не r -полупроста, то $r(R) \neq 0$, и потому по определению подпрямо неразложимой алгебры $r(R) \cong C$. Но тогда сердцевина C будет r -радикальной алгеброй как идеал r -радикальной алгебры $r(R)$, так как r — кручение. Обратно, если сердцевина C r -радикальна, то, очевидно, алгебра R не r -полупроста.

Таким образом, не r -полупростые подпрямо неразложимые алгебры и ненулевые подпрямо неразложимые алгебры с r -радикальной сердцевиной — это одно и то же в нашем случае. Но тогда в силу предложения 4 верно утверждение б) — оно просто совпадает с утверждением а) предложения 4.

Учитывая доказанное, рассмотрим класс $\mathcal{N}(r)$ всех подпрямо неразложимых алгебр с r -радикальной сердцевиной.

Пусть $R \in \mathcal{N}(r)$ и C — сердцевина подпрямо неразложимой алгебры R . Возьмем любой ненулевой идеал I алгебры R . По определению $I \cong C$, и можно считать, что $R \neq 0$, т. е. $C \neq 0$. Но по условию алгебра C r -радикальна. Поэтому алгебра I не r -полупроста. С помощью теоремы Биркгофа представляем алгебру I в виде подпрямого произведения подпрямо неразложимых алгебр I_α . Подпрямое произведение полупростых алгебр само явля-

*) В связи с нашей договоренностью, считаем, что нулевая алгебра 0 принадлежит классу $\mathcal{N}(r)$.

ется полупростой алгеброй. Поэтому I_α — не r -полупростая подпрямо неразложимая алгебра для некоторого α . Но тогда в силу доказанного выше I_α — ненулевая подпрямо неразложимая алгебра с r -радикальной сердцевиной.

Следовательно, класс $\mathcal{N}^*(r)$ удовлетворяет условию K^*1 . Но тогда, в силу б) и следствия 2.1.2 классы $\mathcal{P}(S_{\mathcal{N}^*(r)})$ и $\mathcal{P}(r^*)$ совпадают — это наименьший полупростой в смысле Куроша класс, содержащий класс $\mathcal{N}^*(r)$. Поэтому верхний радикал $S_{\mathcal{N}^*(r)}$ совпадает с радикалом r^* , дополнительным к радикалу r в классе всех радикалов. А это означает, что верно утверждение а).

Сравним теперь r^* -радикальные и сильно r -полупростые алгебры.

Пусть алгебра A сильно r -полупроста. По определению, все гомоморфные образы алгебры A r -полупросты. Это, как легко видеть, равносильно тому, что все подпрямо неразложимые гомоморфные образы алгебры A r -полупросты. Но тогда алгебра A не отображается на ненулевые подпрямо неразложимые алгебры с r -радикальной сердцевиной, т. е. $S_{\mathcal{N}^*(r)}$ -радикальна. А это влечет r^* -радикальность алгебры A , так как $S_{\mathcal{N}^*(r)} = r^*$ в силу а).

Обратно, если алгебра A r^* -радикальна, то r^* -радикальны и все гомоморфные образы алгебры A . Но тогда для любого гомоморфного образа B алгебры A получаем в силу определения 2.2

$$r(B) = B \cap r(B) = r^*(B) \cap r(B) = 0.$$

Следовательно, алгебра A сильно r -полупроста.

Замечаем, что подпрямо неразложимые алгебры с r -полупростой сердцевиной и r -полупростые подпрямо неразложимые алгебры — это одно и то же. А именно, пусть R — подпрямо неразложимая алгебра с сердцевиной C . Если алгебра C r -полупроста, то $r(R) \cap C = r(C) = 0$, и потому $r(R) = 0$, т. е. сама алгебра R r -полупроста. А обратное вытекает из того, что идеал r -полупростой алгебры сам r -полупрост.

Следовательно, верно и утверждение в). Теорема доказана.

Таким образом, если r — кручение, то радикал r^* , дополнительный к радикалу r в классе всех радикалов, имеет достаточно «конструктивное» описание. Однако ради-

кал τ^* может оказаться не кручением, как будет показано в следующем параграфе. Поэтому естественно рассмотреть дополнительную в классе Tors всех кручений.

Теорема 4. Пусть τ — кручение. Тогда существует кручение τ° , дополнительное к кручению τ в классе Tors всех кручений. При этом:

а) Класс $\mathcal{P}(\tau^\circ)$ всех τ° -полупростых алгебр является наименьшим полупростым классом, содержащим все прямо неразложимые алгебры с τ -радикальной сердцевиной.

б) Класс $\mathcal{R}(\tau^\circ)$ всех τ° -радикальных алгебр является наибольшим радикальным классом, содержащимся в классе $\mathcal{P}(\tau)$ всех τ -полупростых алгебр. Все τ° -радикальные алгебры сильно τ -полупросты.

в) Кручение τ° является наибольшим среди всех таких кручений τ' , что $\tau \wedge \tau' = 0$.

Доказательство. В силу теоремы 2.3.3 о «решетке» Tors кручений объединение любого семейства кручений само является кручением. Поэтому к классу Tors всех кручений можно применять предложения 2 и 3. Из предложения 2 вытекает существование кручения τ° , дополнительного кручению τ в классе Tors всех кручений. Утверждение а) вытекает из предложения 3 и доказывается так же, как и утверждение б) теоремы 3. Еще раз применяя теорему 2.3.3, получаем, что если τ и τ' — кручения, то $\tau \wedge \tau' = 0$ тогда и только тогда, когда $\tau(A) \cap \tau'(A) = 0$ для любой алгебры A . Достаточно вспомнить, что $(\tau \wedge \tau') \times \times (B) = \tau(B) \cap \tau'(B)$ для любой алгебры B . Но тогда, в силу определения 2, верно утверждение в).

Так же, как и при доказательстве утверждения в) теоремы 3, получаем, что все τ° -радикальные алгебры сильно τ -полупросты. Поэтому $\mathcal{R}(\tau^\circ) \subseteq \mathcal{P}(\tau)$. С другой стороны, пусть $\mathcal{R}$ — радикальный класс алгебр и $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\tau)$. Пусть кручение τ' соответствует радикальному классу $\mathcal{R}$, т. е. $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\tau')$ — класс всех τ' -радикальных алгебр. Тогда все τ' -радикальные алгебры будут τ -полупросты и потому

$$\tau(A) \cap \tau'(A) = \tau(\tau'(A)) = 0$$

для любой алгебры A . Это означает, по определению, что $\tau' \leq \tau^\circ$. Но тогда $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\tau') \subseteq \mathcal{R}(\tau^\circ)$, и мы доказали, что класс $\mathcal{R}(\tau^\circ)$ всех τ° -радикальных алгебр является наибольшим радикальным классом, содержащимся в классе

$\mathcal{P}(r)$ всех r -полупростых алгебр. Следовательно, верно утверждение б).

Теорема доказана.

Теперь мы можем указать еще один критерий булевости «решетки» Tors кручений. Ниже для любого кручения r символом r° обозначается кручение, дополнительное к кручению r в классе Tors всех кручений. Напомним, что $l\mathcal{A}$ — наибольшее атомное кручение, т. е. сумма всех атомов «решетки».

Следствие 4. *Равносильны утверждения:*

а) «Решетка» Tors кручений булева, т. е. для любого кручения r существует такое кручение $\bar{r}$, что $r \wedge \bar{r} = 0$, $r \vee \bar{r} = \varepsilon$.

б) Все кручения Tors -двойственны, т. е. $r = r^{\circ\circ}$ для любого кручения r .

в) Если r — кручение и $r^\circ = 0$, то $r = \varepsilon$.

г) $l\mathcal{A} = \varepsilon$.

Действительно, из теоремы 2.3.3 легко вытекает, что если $r \wedge \bar{r} = 0$ и, одновременно, $r \vee \bar{r} = \varepsilon$, то $\bar{r}$ — наибольшее среди всех таких кручений r' , что $r \wedge r' = 0$. Но тогда в силу теоремы 4 $\bar{r} = r^\circ$. Следовательно, если верно а), то $r = \bar{r} = r^{\circ\circ}$, и потому верно б). Если верно б), то для любого кручения r из $r^\circ = 0$ вытекает $r = r^{\circ\circ} = 0^\circ = \varepsilon$, т. е. верно в).

Пусть верно в). Из следствия 1 вытекает, что для любого ненулевого кручения $\mathfrak{a}$ кручение $l\mathcal{A} \wedge \mathfrak{a} \neq 0$, так как оно содержит некоторый атом. Но тогда, в силу теоремы 4 $l\mathcal{A} = 0$. А это влечет равенство $l\mathcal{A} = \varepsilon$, т. е. верно г).

Остается заметить, что г) $\Rightarrow$ а) в силу следствия 3.

§ 3. Дополнительность и двойственность

В этом параграфе мы рассмотрим дополнительность и двойственность (в смысле определения 2.2) в классе всех радикалов или в классе всех кручений, уделяя основное внимание кручениям. Описание дополнительных кручений во многом зависит от выбора основного класса $\mathcal{A}$ (ассоциативных) алгебр. Поэтому, во избежание лишних оговорок, мы будем ниже считать, что основной класс $\mathcal{A}$ содержит все ассоциативно-коммутативные алгебры. В частно-

сти, для любого (унитарного левого Φ -) модуля A алгебра A^0 , полученная введением нулевого умножения на модуле A , допустима для рассмотрения. На основное кольцо Φ — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей $1 \neq 0$ — дополнительных ограничений не налагаем, если противное не оговорено особо.

В силу теоремы 2.3.3 объединение любого семейства кручений само будет кручением. Поэтому согласно предложению 2.2 для любого радикала τ существует кручение, дополнительное к τ в классе всех кручений. С другой стороны, в силу предложения 2.4 (и снова в силу предложения 2.2) для любого радикала τ существует радикал, дополнительный к τ в классе всех радикалов. *Радикал, дополнительный к радикалу τ в классе всех радикалов, будем обозначать символом τ^* . Кручение, дополнительное к радикалу τ в классе всех кручений, будем обозначать символом τ° .*

Теоремы 2.3, 2.4 дают описание τ^* и τ° для кручений на языке подпрямо неразложимых алгебр с τ -радикальной сердцевиной. В связи с этим нам необходимы некоторые сведения о сердцевинах подпрямо неразложимых алгебр.

Лемма 1. Пусть C — сердцевина некоторой подпрямо неразложимой алгебры R . Тогда аннулятор (унитарного левого Φ -) модуля C

$$P = (0 : C)_\Phi \equiv \{\alpha \in \Phi \mid \alpha C = 0\}$$

будет собственным первичным идеалом в Φ , причем

$$\forall x \in C \mid x \neq 0 \Rightarrow (0 : x)_\Phi \equiv \{\alpha \in \Phi \mid \alpha x = 0\} = (0 : C)_\Phi. \quad (1)$$

Поэтому C является алгеброй и над ассоциативно-коммутативным кольцом $\bar{\Phi} = \Phi/P$ (без делителей нуля и с единицей $\bar{1} \neq 0$) относительно естественной композиции (символом $\bar{\alpha}$ обозначим образ элемента $\alpha \in \Phi$ при естественном гомоморфизме $\Phi \rightarrow \bar{\Phi}$)

$$\forall \alpha \in \Phi \quad \forall c \in C \mid \bar{\alpha}c = \alpha c. \quad (2)$$

Более того, структура C как алгебры над $\bar{\Phi}$ продолжается, и притом единственным способом, до структуры линейного пространства и алгебры над полем F_p дробей алгебры $\bar{\Phi} = \Phi/P$.

Доказательство. Для любого $\alpha \in \Phi$ множество αC является идеалом алгебры R , содержащимся в C . Поэтому

$$\forall \alpha \in \Phi \mid \alpha \notin (0 : C)_{\Phi} \Leftrightarrow \alpha C = C. \quad (3)$$

Но тогда для любых $\beta, \gamma \in \Phi$ из $\beta \notin (0 : C)_{\Phi}$ и $\gamma \notin (0 : C)_{\Phi}$ вытекает в силу (3) равенство $C = \beta C = \gamma C = \beta \gamma C$, т. е. $\beta \gamma \notin (0 : C)_{\Phi}$. А это и означает в силу ассоциативности и коммутативности кольца Φ , что $P = (0 : C)_{\Phi}$ — собственный первичный идеал в Φ .

Возьмем любой ненулевой элемент $x \in C$. Допуская, что $\alpha x = 0$ для некоторого $\alpha \in \Phi$, получаем, что для этого α множество $\{r \in C \mid \alpha r = 0\}$ является ненулевым идеалом алгебры R , содержащимся в C . Но тогда этот идеал должен совпадать с C , т. е. $\alpha C = 0$. Следовательно, верно соотношение (1).

Из (1) легко вытекает, что естественное правило (2) превращает C в алгебру над $\bar{\Phi}$, причем C оказывается точным $\bar{\Phi}$ -модулем. Но тогда

$$\forall u \in \bar{\Phi} \forall c \in C \mid uc = 0 \Leftrightarrow (u = 0 \text{ или } c = 0) \quad (4)$$

в силу (1) и (2). Кроме того, в силу (3), (4) и (2)

$$\forall u \in \bar{\Phi} \mid u \neq 0 \Leftrightarrow uC = C. \quad (5)$$

Из (5) вытекает, что для любого ненулевого $u \in \bar{\Phi}$ и любого $c \in C$ уравнение $c = ux$ имеет решение в C . А из (4) вытекает единственность этого решения в C . Будем обозначать решение указанного уравнения символом $\frac{c}{u}$. Теперь мы можем положить

$$\forall \frac{u}{v} \in F_P \forall c \in C \mid \frac{v}{u} c = v \frac{c}{u}. \quad (6)$$

Прямой проверкой легко убеждаемся в том, что правило (6) превращает C в алгебру над полем F_P . При этом из (6) и построения элемента $\frac{c}{u}$ с очевидностью вытекает, что полученная нами структура C как алгебры над полем F_P является продолжением структуры C как алгебры над полем $\bar{\Phi} = \Phi/P \subseteq F_P$. Единственность следует из построения элемента $\frac{c}{u}$, так как для любых $\frac{v}{u} \in F_P$,

$c \in C$ должно выполняться равенство $u\left(\frac{v}{u}c\right) = vc$. Лемма доказана.

Лемма 2. Для любого собственного первичного идеала P в Φ существует такая подпрямо неразложимая алгебра R с сердцевиной C , что $C^2 = 0$ (т. е. C — алгебра с нулевым умножением) и $(0 : C)_\Phi = P$.

Действительно, возьмем любую алгебру F , являющуюся полем. Строим двумерную алгебру $F^{(2)}$ над F с базисом $\{\bar{1}, e\}$, считая, что $\bar{1}$ — единица алгебры $F^{(2)}$ и $e^2 = 0$. Ясно, что $F^{(2)}$ — ассоциативно-коммутативная алгебра, и потому она лежит в основном классе $\mathfrak{A}$.

Возьмем любой ненулевой элемент $u\bar{1} + ve$ алгебры $F^{(2)}$. Если $u \neq 0$, то учитывая, что алгебра F является полем, получаем

$$(u\bar{1} + ve)(u^{-1}\bar{1} - u^{-2}ve) = \bar{1}.$$

Если же $u = 0$, то $v \neq 0$, и потому $ve \cdot v^{-1}\bar{1} = e$. Из доказанного легко вытекает, что единственным собственным ненулевым идеалом построенной алгебры $F^{(2)}$ является алгебра $Fe \simeq F^0$. Поэтому $R = F^{(2)}$ — подпрямо неразложимая алгебра и ее сердцевина $C = Fe$ является алгеброй с нулевым умножением, изоморфной алгебре F^0 .

При $F = F_P$ — алгебре дробей ассоциативно-коммутативной алгебры Φ/P без делителей нуля и с единицей — получаем искомую подпрямо неразложимую алгебру, так как $(0 : F_P)_\Phi = (0 : \Phi/P)_\Phi = P$.

Лемма 3. Пусть алгебра C с нулевым умножением является сердцевиной некоторой подпрямо неразложимой алгебры, $P = (0 : C)_\Phi$ — собственный первичный идеал в Φ , соответствующий этой алгебре в силу леммы 1. Пусть $\bar{\Phi} = \Phi/P$ и F_P — поле дробей кольца $\bar{\Phi}$. Тогда для любого кручения $\mathfrak{v}$ верны утверждения:

а) Соотношения $\mathfrak{v}(C) = 0$, $\mathfrak{v}(\bar{\Phi}^0) = 0$, $\mathfrak{v}(F_P) = 0$ равносильны.

б) Соотношения $\mathfrak{v}(C) = C$, $\mathfrak{v}(\bar{\Phi}^0) = \bar{\Phi}^0$, $\mathfrak{v}(F_P) = F_P$ равносильны.

Действительно, в алгебре с нулевым умножением идеалы, подалгебры и подмодули — это одно и то же. Поэтому в силу соотношения (1) из леммы 1

$$\forall x \in C \mid x \neq 0 \Rightarrow \Phi x \simeq (\Phi / (0 : x)_\Phi)^0 = \bar{\Phi}^0,$$

т. е. все ненулевые главные идеалы алгебры C изоморфны алгебре $\bar{\Phi}^0$. А отсюда, как легко видеть, вытекает, что для любого кручения ϑ алгебра $\bar{\Phi}^0$ ϑ -полупроста (ϑ -радикальна) тогда и только тогда, когда ϑ -полупроста (соответственно, ϑ -радикальна) алгебра C . Еще раз применяя лемму 1, рассматриваем C как алгебру над полем F_P . Выбирая базис $\{e_i | i \in \Gamma\}$ в линейном пространстве C , получаем, что модуль C разлагается в прямую сумму модулей $F_P e_i$, изоморфных модулю F_P . Но C — алгебра с нулевым умножением. Поэтому из доказанного вытекает, что $C = \sum_{i \in \Gamma} \oplus F_P e_i$, т. е. алгебра C является прямой суммой алгебр $F_P e_i$ с нулевым умножением, изоморфных алгебре F_P . Но тогда алгебра C ϑ -полупроста (ϑ -радикальна) в том и только в том случае, когда ϑ -полупроста (ϑ -радикальна) алгебра F_P^0 , даже если ϑ является только радикалом.

Следовательно, утверждения а) и б) верны. Лемма доказана.

Учитывая леммы 1 — 3, введем некоторые обозначения.

Символом Simple будем обозначать класс всех простых алгебр *). Напомним, что символом $\text{Spec } \Phi$ обозначается спектр алгебры (основного кольца) Φ , т. е. множество всех первичных собственных идеалов в Φ .

Если ϑ — кручение, то символом $\text{Sim}(\vartheta)$ обозначим класс всех простых ϑ -радикальных алгебр, а символом $\text{Sp}(\vartheta)$ — множество всех таких первичных собственных идеалов P в Φ , что алгебра $(\Phi/P)^0$ с нулевым умножением ϑ -радикальна. Так, например, для тривиального кручения ε ($\varepsilon(A) = A$ для всех алгебр A) и нулевого кручения 0 ($0(A) = 0$ для всех алгебр A) получаем

$$\text{Sim}(\varepsilon) = \text{Simple}, \quad \text{Sp}(\varepsilon) = \text{Spec } \Phi,$$

$$\text{Sim}(0) = \emptyset, \quad \text{Sp}(0) = \emptyset.$$

*) Здесь и ниже, в отличие от предыдущего, мы требуем от рассматриваемых классов алгебр (подклассы в $\mathfrak{A}$) только замкнутость относительно изоморфных образов (т. е. абстрактность), допуская пустые классы. Это естественно, так как все простые алгебры — ненулевые!

Лемма 4. Для любых двух кручений $\mathfrak{s}_1$ и $\mathfrak{s}_2$ верны соотношения

$$\mathfrak{s}_1^* = \mathfrak{s}_2^* \iff (\text{Sim}(\mathfrak{s}_1) = \text{Sim}(\mathfrak{s}_2), \\ \text{Sp}(\mathfrak{s}_1) = \text{Sp}(\mathfrak{s}_2)) \implies \mathfrak{s}_1^\circ = \mathfrak{s}_2^\circ. \quad (7)$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{s}$ — кручение и $\mathcal{N}(\mathfrak{s})$ — класс всех подпрямо неразложимых алгебр с $\mathfrak{s}$ -радикальной сердцевинной. В силу теорем 2.3 и 2.4 $\mathcal{P}(\mathfrak{s}^*)$ — наименьший среди полупростых в смысле Куроша классов, содержащих класс $\mathcal{N}(\mathfrak{s})$, $\mathcal{P}(\mathfrak{s}^\circ)$ — наименьший среди полупростых классов, содержащих класс $\mathcal{N}(\mathfrak{s})$.

Пусть R — подпрямо неразложимая алгебра с сердцевинной C .

Если C — простая алгебра, то C $\mathfrak{s}$ -радикальна тогда и только тогда, когда C — алгебра из класса $\text{Sim}(\mathfrak{s})$. Кроме того, если $C' \in \text{Sim}(\mathfrak{s})$, то, очевидно, существует такая подпрямо неразложимая алгебра R' с $\mathfrak{s}$ -радикальной сердцевинной, что C' изоморфна сердцевине этой алгебры (достаточно взять $R' = C'$).

Если C — алгебра с нулевым умножением, то для соответствующего ей в силу леммы 1 первичного собственного идеала $P = (0 : C)_\Phi$ в Φ получаем: C $\mathfrak{s}$ -радикальна тогда и только тогда, когда $P \in \text{Sp}(\mathfrak{s})$ в силу леммы 3. С другой стороны, в силу лемм 2 и 3, если $P' \in \text{Sp}(\mathfrak{s})$, то существует такая подпрямо неразложимая алгебра R' с $\mathfrak{s}$ -радикальной сердцевинной C' , что C' — алгебра с нулевым умножением и $(0 : C')_\Phi = P'$.

Так как сердцевинны подпрямо неразложимых алгебр являются либо простыми алгебрами, либо алгебрами с нулевым умножением, то в силу доказанного класс $\mathcal{N}(\mathfrak{s})$ и пара $(\text{Sim}(\mathfrak{s}), \text{Sp}(\mathfrak{s}))$ однозначно определяют друг друга. Но в силу сказанного в начале доказательства класс $\mathcal{N}(\mathfrak{s})$ однозначно определяет и радикалы $\mathfrak{s}^*$ и $\mathfrak{s}^\circ$. Поэтому и пара $(\text{Sim}(\mathfrak{s}), \text{Sp}(\mathfrak{s}))$ однозначно определяет эти радикалы. А это и означает, что верно соотношение (7).

Лемма доказана.

Учитывая леммы 1—4, естественно искать характеристики радикалов $\mathfrak{s}^*$ и $\mathfrak{s}^\circ$, соответствующих кручению $\mathfrak{s}$, на языке соответствующих пар $(\text{Sim}(\mathfrak{s}), \text{Sp}(\mathfrak{s}))$. Начнем с характеристики самих таких пар.

Предложение 1. Пусть $\Pi \in \text{Simple}$, $\mathfrak{P} \in \text{Spec } \Phi$. Пара $(\Pi, \mathfrak{P})$ совпадает с парой $(\text{Sim}(\mathfrak{s}), \text{Sp}(\mathfrak{s}))$ для неко-

того кручения $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда *) множество $\mathfrak{P}$ замкнуто относительно увеличений, т. е.

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}| = \{P' \in \text{Spec } \Phi \mid P' \supseteq P \text{ для некоторого } P \in \mathfrak{P}\}. \quad (8)$$

Доказательство. По построению, если $\mathfrak{g}$ — кручение, то $\text{Sp } (\mathfrak{g})$ — множество всех таких первичных собственных идеалов P в Φ , что алгебра $(\Phi/P)^0$ $\mathfrak{g}$ -радикальна. Но если алгебра $(\Phi/P)^0$ $\mathfrak{g}$ -радикальна, то $\mathfrak{g}$ -радикальны и все алгебры $(\Phi/I)^0$, где I — идеал в Φ и $I \supseteq P$, так как гомоморфный образ $\mathfrak{g}$ -радикальной алгебры сам $\mathfrak{g}$ -радикален. Поэтому множество $\text{Sp } (\mathfrak{g})$ замкнуто относительно увеличений для любого кручения $\mathfrak{g}$.

Обратно, пусть Π — произвольный класс простых алгебр, $\mathfrak{P}$ — любое подмножество спектра $\text{Spec } \Phi$ кольца Φ , причем множество $\mathfrak{P}$ замкнуто относительно увеличений, т. е. верно равенство (8).

Ясно, что класс Π , дополненный нулевой алгеброй, замкнут относительно взятия идеалов и гомоморфных образов. Поэтому нижний радикал l_Π , порожденный этим классом, является кручением.

С множеством $\mathfrak{P}$ свяжем класс $\mathbb{Z}_\mathfrak{P}$ всех таких алгебр A с нулевым умножением, что

$$a \in A \Rightarrow \exists P \in \mathfrak{P} \mid (0 : a)_\Phi \supseteq P \quad (\text{т. е. } Pa = 0). \quad (9)$$

Легко видеть, что класс $\mathbb{Z}_\mathfrak{P}$ тоже замкнут относительно взятия идеалов и гомоморфных образов. Поэтому нижний радикал $l_{\mathbb{Z}_\mathfrak{P}}$, порожденный этим классом, тоже является кручением.

В результате мы можем связать с парой $(\Pi, \mathfrak{P})$ кручение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\Pi, \mathfrak{P}) = l_\Pi \vee l_{\mathbb{Z}_\mathfrak{P}} = l_{\Pi \cup \mathbb{Z}_\mathfrak{P}}. \quad (10)$$

Покажем, что это кручение искомое, т. е. $\Pi = \text{Sim } (\mathfrak{g})$, $\mathfrak{P} = \text{Sp } (\mathfrak{g})$.

Пусть Q — простая алгебра. Тогда, очевидно, единственным ненулевым метаидеалом в Q является Q . Поэтому единственным ω -рядом алгебры Q будет $0 \subset Q$. Поскольку

*) При этом, конечно, считаем, что Π — класс алгебр, возможно, пустой (см. предыдущую сноску).

$Q \notin \mathbb{Z}_{\mathfrak{P}}$, из равенства (10) и предложения 2.2.5 вытекает, что $Q \in \text{Sim}(\mathfrak{s})$ тогда и только тогда, когда $Q \in \Pi$.

Пусть P_1 — первичный собственный идеал в Φ . Тогда, как легко видеть, все ненулевые главные идеалы в алгебре $(\Phi/P_1)^0$ изоморфны всей алгебре (это можно вывести и из лемм 1, 2). Кроме того, метаидеалы и идеалы в алгебре $(\Phi/P_1)^0$ — это одно и то же, как и в любой другой алгебре с нулевым умножением. Но тогда, применяя предложение 2.2.5 и учитывая замкнутость класса $\Pi \cup \mathbb{Z}_{\mathfrak{P}}$ относительно взятия идеалов, легко получаем, что $(\Phi/P_1)^0$ будет s -радикальной алгеброй тогда и только тогда, когда $(\Phi/P_1)^0 \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{P}}$. Но последнее в силу (9) равносильно тому, что $P_1 \in \mathfrak{P}^\uparrow$. В силу (8) отсюда вытекает, что $P_1 \in \text{Sp}(s)$ тогда и только тогда, когда $P_1 \in \mathfrak{P}$.

Следовательно, $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}(\Pi, \mathfrak{P})$ — искомое кручение. Предложение доказано.

Предложение 2. Пусть для любой простой алгебры Q символ l_Q обозначает нижний радикал, порожденный классом алгебр, изоморфных алгебре Q . Пусть для любого первичного собственного идеала P в Φ символ a_P обозначает нижний радикал, порожденный классом всех таких алгебр A с нулевым умножением, что $PA = 0$. Тогда l_Q и a_P — кручения, причем

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}^* &= \left(\left(\bigvee_{Q \in \text{Sim}(\mathfrak{s})} l_Q \right) \vee \left(\bigvee_{P \in \text{Sp}(\mathfrak{s})} a_P \right) \right)^* = \\ &= \left(\bigwedge_{Q \in \text{Sim}(\mathfrak{s})} l_Q^* \right) \wedge \left(\bigwedge_{P \in \text{Sp}(\mathfrak{s})} a_P^* \right), \\ \mathfrak{s}^\circ &= \left(\left(\bigvee_{Q \in \text{Sim}(\mathfrak{s})} l_Q \right) \vee \left(\bigvee_{P \in \text{Sp}(\mathfrak{s})} a_P \right) \right)^\circ = \\ &= \left(\left(\bigwedge_{Q \in \text{Sim}(\mathfrak{s})} l_Q^\circ \right) \wedge \left(\bigwedge_{P \in \text{Sp}(\mathfrak{s})} a_P^\circ \right) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

для любого кручения s . Для любого семейства кручений верны равенства

$$\left(\bigvee_{i \in \Gamma} \mathfrak{s}_i \right)^* = \bigwedge_{i \in \Gamma} \mathfrak{s}_i^*, \quad \left(\bigvee_{i \in \Gamma} \mathfrak{s}_i \right)^\circ = \bigwedge_{i \in \Gamma} \mathfrak{s}_i^\circ. \quad (12)$$

Доказательство. Начнем с доказательства равенств (12). При этом будем считать, что заданное нам семейство кручений непусто, так как для пустого семейства нужные нам равенства сводятся к очевидному равенству $0^* = 0^\circ = \varepsilon$.

Пусть t — произвольное кручение. Тогда в силу «сильной дистрибутивности решетки» Tors кручений, получаем соотношение

$$t \wedge \left(\bigvee_{i \in \Gamma} \mathfrak{s}_i \right) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \Gamma \mid t \wedge \mathfrak{s}_i = 0. \quad (13)$$

Но в силу теоремы 2.4 левая часть соотношения (13) равносильна тому, что $t \leq \left(\bigvee_{i \in \Gamma} \mathfrak{s}_i \right)^\circ$, а правая часть — $t \leq \bigwedge_{i \in \Gamma} \mathfrak{s}_i^\circ$. Поэтому верно и второе из равенств (12).

В силу теоремы 2.3.3 верно равенство $\mathcal{P} \left(\bigvee_{i \in \Gamma} \mathfrak{s}_i \right) = \bigcap_{i \in \Gamma} \mathcal{P}(\mathfrak{s}_i)$. Поэтому алгебра R будет сильно $\bigvee_{i \in \Gamma} \mathfrak{s}_i$ -полу-проста тогда и только тогда, когда она сильно $\mathfrak{s}_i$ -полу-проста для всех $i \in \Gamma$. А это значит, в силу теоремы 2.3, что $\mathcal{R} \left(\left(\bigvee_{i \in \Gamma} \mathfrak{s}_i \right)^* \right) = \bigcap_{i \in \Gamma} \mathcal{R}(\mathfrak{s}_i^*)$. Еще раз применяя теорему 2.3.3, получаем первое из равенств (12).

Таким образом, равенства (12) верны для любого семейства кручений.

Из построения радикалов l_Q и a_P легко вытекает (см. (10) из доказательства предложения 1), что эти радикалы являются кручениями. Учитывая это, возьмем любое кручение $\mathfrak{s}$ и свяжем с ним кручение $\bar{\mathfrak{s}} = \left(\bigvee_{Q \in \text{Sim}(\mathfrak{s})} l_Q \right) \vee \left(\bigvee_{P \in \text{Sp}(\mathfrak{s})} a_P \right)$. Тогда в силу (12) и леммы 4, для доказательства равенств (11) нам достаточно (и необходимо) доказать справедливость равенств

$$\text{Sim}(\bar{\mathfrak{s}}) = \text{Sim}(\mathfrak{s}), \quad \text{Sp}(\bar{\mathfrak{s}}) = \text{Sp}(\mathfrak{s}). \quad (14)$$

Из построения вытекает, с очевидностью, что $\text{Sim}(\bar{\mathfrak{s}}) \supseteq \text{Sim}(\mathfrak{s})$, $\text{Sp}(\bar{\mathfrak{s}}) \supseteq \text{Sp}(\mathfrak{s})$. Например, если $P \in \text{Sp}(\mathfrak{s})$, то алгебра $(\Phi/P)^0$ будет a_P -радикальна, а значит и $\bar{\mathfrak{s}}$ -радикальна, что влечет включение $P \in \text{Sp}(\bar{\mathfrak{s}})$.

С другой стороны, если $Q \in \text{Sim}(\mathfrak{s})$, то по определению алгебра Q $\mathfrak{s}$ -радикальна и потому $l_Q \leq \mathfrak{s}$. Кроме того, если A — алгебра с нулевым умножением и $PA = 0$, то $(0 : a)_\Phi \supseteq P$ для всех $a \in A$, и потому из включения $P \in \text{Sp}(\mathfrak{s})$ и изоморфизма

$$\Phi a \simeq (\Phi / (0 : a)_\Phi)^0 \simeq (\Phi / P)^0 / ((0 : a)_\Phi / P)^0$$

вытекает, что все главные идеалы в A $\mathfrak{e}$ -радикальны. Но тогда $\mathfrak{e}$ -радикальна и сама алгебра A . А это влечет по построению, что если $P \in \text{Sp}(\mathfrak{e})$, то $a_P \leq \mathfrak{e}$. Из доказанного вытекает, что $\bar{\mathfrak{e}} \leq \mathfrak{e}$, т. е. любая $\bar{\mathfrak{e}}$ -радикальная алгебра будет и $\mathfrak{e}$ -радикальной. Но тогда, очевидно, $\text{Sim}(\bar{\mathfrak{e}}) \subseteq \text{Sim}(\mathfrak{e})$, $\text{Sp}(\bar{\mathfrak{e}}) \subseteq \text{Sp}(\mathfrak{e})$.

Следовательно, равенства (14) верны и предложение доказано.

Предложение 3. Пусть $\mathfrak{e}$ — кручение. Тогда и радикалы

$$l(\mathfrak{e}) = \bigvee_{Q \in \text{Sim}(\mathfrak{e})} l_Q, \quad a(\mathfrak{e}) = \bigvee_{P \in \text{Sp}(\mathfrak{e})} a_P, \quad (15)$$

построенные с помощью предложения 2, будут кручениями. При этом

$$\mathfrak{e}^* = (l(\mathfrak{e}))^* \wedge (a(\mathfrak{e}))^*, \quad \mathfrak{e}^\circ = (l(\mathfrak{e}))^\circ \wedge (a(\mathfrak{e}))^\circ, \quad (16)$$

$$\text{Sim}(l(\mathfrak{e})) = \text{Sim}(\mathfrak{e}), \quad \text{Sp}(l(\mathfrak{e})) = \emptyset, \quad (17)$$

$$\text{Sim}(a(\mathfrak{e})) = \emptyset, \quad \text{Sp}(a(\mathfrak{e})) = \text{Sp}(\mathfrak{e}). \quad (18)$$

Доказательство. Из предложения 2 вытекает в силу (15), что $l(\mathfrak{e})$ и $a(\mathfrak{e})$ — кручения, как объединения некоторых семейств кручений. Еще раз применяя предложение 2, получаем в силу (15), что верны равенства (16), так как эти равенства представляют собой другую запись равенств (11). Остается доказать выполнение равенств (17) и (18).

Из (15) легко вытекает, как и при доказательстве предложения 2, что верны равенства $\text{Sim}(l(\mathfrak{e})) = \text{Sim}(\mathfrak{e})$, $\text{Sp}(a(\mathfrak{e})) = \text{Sp}(\mathfrak{e})$.

Замечаем, что любая $l(\mathfrak{e})$ -радикальная алгебра полупервична, т. е. не имеет ненулевых нильпотентных идеалов.

Действительно, по построению $l(\mathfrak{e})$ совпадает с нижним радикалом, порожденным классом $\text{Sim}(\mathfrak{e})$. Поэтому по построению нижнего радикала любая ненулевая $l(\mathfrak{e})$ -радикальная алгебра имеет ненулевой метаидеал, являющийся простой алгеброй из класса $\text{Sim}(\mathfrak{e})$. Но в нильпотентных алгебрах не может быть ненулевых идемпотентных метаидеалов. Поэтому любая ненулевая $l(\mathfrak{e})$ -радикальная алгебра не имеет ненулевых нильпотентных идеалов, так как $l(\mathfrak{e})$ — кручение. Следовательно, все $l(\mathfrak{e})$ -радикальные алгебры полупервичны.

Из доказанного вытекает, что $\text{Sp}(l(\mathfrak{s})) = \emptyset$, так как ненулевых $l(\mathfrak{s})$ -радикальных алгебр с нулевым умножением не существует.

Замечаем, что любая $a(\mathfrak{s})$ -радикальная ненулевая алгебра неполупервична, а значит не является простей.

Действительно, по построению $a(\mathfrak{s})$ совпадает с нижним радикалом, порожденным некоторым классом алгебр с нулевым умножением. Поэтому по построению нижнего радикала любая ненулевая $a(\mathfrak{s})$ -радикальная алгебра имеет ненулевой нильпотентный метайдеал. Но из леммы 1.1.5 легко вытекает, что нильпотентный метайдеал порождает нильпотентный идеал. Поэтому все ненулевые $a(\mathfrak{s})$ -радикальные алгебры неполупервичны.

Из доказанного вытекает, что $\text{Sim}(a(\mathfrak{s})) = \emptyset$.

Следовательно, верны равенства (17), (18), и предложение доказано.

Предложения 1 — 3 сводят построение дополнительных радикалов $\mathfrak{s}^*$ и $\mathfrak{s}^0$, соответствующих кручениям, к построению радикалов, соответствующих кручениям некоторого специального вида. А именно, достаточно рассмотреть кручения следующих двух противоположных видов: кручения, соответствующие парам (Π, Φ) , и кручения, соответствующие парам $(\Phi, \mathfrak{F})$. При этом в силу предложения 1 Π пробегает все подклассы класса Simple всех простых алгебр, а $\mathfrak{F}$ — все подмножества спектра $\text{Spec } \Phi$, замкнутые относительно увеличения.

Рассмотрим первый случай — кручения, соответствующие парам (Π, Φ) .

Чтобы дать внутреннюю характеристику таких кручений, введем в рассмотрение один класс кручений.

Определение 1. Кручение $\mathfrak{s}$ называется *подыдемпотентным*, если все $\mathfrak{s}$ -радикальные алгебры идемпотентны.

Из определения легко вытекает, что кручение $\mathfrak{s}$ подыдемпотентно тогда и только тогда, когда все нильпотентные алгебры $\mathfrak{s}$ -полупросты. Поэтому подыдемпотентные радикалы «противоположны» наднильпотентным радикалам. Напомним

Определение 2. Кручение $\mathfrak{s}$ называется *наднильпотентным*, если все нильпотентные алгебры $\mathfrak{s}$ -радикальны.

Теорема 1. Пусть Π — произвольный класс простых алгебр. Тогда:

а) Класс $\mathfrak{M}_\Pi$ всех подпрямо неразложимых алгебр с сердцевинкой, принадлежащей классу Π , является специальным классом алгебр и потому определяет верхний радикал $S_{\mathfrak{M}_\Pi}$, являющийся специальным (а значит и над-nilпотентным) кручением.

б) Класс $\mathfrak{M}_{\neg\Pi}$ всех подпрямо неразложимых алгебр с сердцевинкой, не принадлежащей классу Π , удовлетворяет условиям K^*1 , K^*3 и потому определяет верхний радикал $S_{\mathfrak{M}_{\neg\Pi}}$, являющийся кручением. При этом кручение $S_{\mathfrak{M}_{\neg\Pi}}$ подыдемпотентно.

в) Верны равенства

$$S_{\mathfrak{M}_\Pi}^* = S_{\mathfrak{M}_\Pi}^\circ = S_{\mathfrak{M}_{\neg\Pi}}, \quad S_{\mathfrak{M}_{\neg\Pi}}^* = S_{\mathfrak{M}_{\neg\Pi}}^\circ = S_{\mathfrak{M}_\Pi}. \quad (19)$$

Доказательство. Будем считать, что класс Π непуст, так как для пустого класса все очевидно.

В силу леммы 1.1 все алгебры из класса $\mathfrak{M}_\Pi$ первичны.

Пусть $R \in \mathfrak{M}_\Pi$, C — сердцевина подпрямо неразложимой алгебры R . По построению C — простая алгебра из класса Π .

Пусть I — ненулевой идеал алгебры R . По определению подпрямо неразложимой алгебры $I \cong C$. Кроме того, в силу следствия 1.5 класс всех первичных алгебр специален. Поэтому I — первичная алгебра. Но тогда, если J — ненулевой идеал алгебры I , то $J \cong CJC = C$, так как CJC — ненулевой идеал алгебр I и R , содержащийся в C . Следовательно, $I \in \mathfrak{M}_\Pi$.

Пусть Q — точное расширение алгебры R . Тогда алгебра Q первична, и потому $A \cong ARCRA = C$ для любого ненулевого идеала A алгебры Q , так как $ARCRA$ оказывается ненулевым идеалом первичных алгебр Q и R , содержащимся в C . Следовательно, $Q \in \mathfrak{M}_\Pi$.

В силу следствия 1.5 класс $\mathfrak{M}_\Pi$ специален, и потому верно утверждение а).

Рассмотрим теперь класс $\mathfrak{M}_{\neg\Pi}$ всех подпрямо неразложимых алгебр с сердцевинкой, не принадлежащей классу Π . Для дальнейшего отметим, что если R — подпрямо неразложимая алгебра с сердцевинкой C , причем C — алгебра с нулевым умножением, то $R \in \mathfrak{M}_{\neg\Pi}$.

Пусть $K \in \mathfrak{M}_{\neg\Pi}$, D — сердцевина подпрямо неразложимой алгебры K . Возьмем любой ненулевой идеал I алгебры K . По определению, $I \cong D$.

Если D — простая алгебра, то получаем, как и выше, что I — подпрямо неразложимая алгебра и D — ее сердцевина. Но тогда $I \in \mathfrak{M}_{\neg \Pi}$.

Если D — алгебра с нулевым умножением, то берем произвольный ненулевой элемент $d \in D$. С помощью леммы Куратовского — Цорна находим максимальный среди идеалов алгебры I , не содержащих элемента d . Пусть M — этот идеал. Тогда $I = I/M$ — подпрямо неразложимая алгебра с сердцевиной $(d)_I + M/M$, где $(d)_I$ — главный идеал алгебры I , порожденный элементом d . Но D — алгебра с нулевым умножением. Поэтому и $(d)_I + M/M$ — алгебра с нулевым умножением, так как $(d)_I \subseteq D$. Но тогда $I \in \mathfrak{M}_{\neg \Pi}$.

Следовательно, класс $\mathfrak{M}_{\neg \Pi}$ удовлетворяет условию K^*1 , а значит определяет верхний радикал $S_{\mathfrak{M}_{\neg \Pi}}$.

Пусть Q — идеал алгебры B , B — идеал алгебры A , причем B/Q — (ненулевая) алгебра из класса $\mathfrak{M}_{\neg \Pi}$. Рассмотрим возникающие случаи.

Пусть B/Q — первичная алгебра, т. е. Q — собственный первичный идеал в B . Как и при доказательстве теоремы 1.3, строим множество $P = (Q : B)_A = \{a \in A \mid aB \subseteq Q, Ba \subseteq Q\}$ и показываем, что P — первичный идеал алгебры A , причем $P \cap B = Q$. Из последнего равенства следует, что A/P — первичная алгебра, содержащая в качестве ненулевого идеала алгебру $B + P/P \simeq B/B \cap P = B/Q$. Но в рассматриваемом нами случае алгебра B/Q является подпрямо неразложимой алгеброй с простой сердцевиной, не принадлежащей классу Π . А отсюда, как и выше, вытекает, что A/P — подпрямо неразложимая алгебра с той же сердцевиной (с точностью до изоморфизма). Поэтому $A/P \in \mathfrak{M}_{\neg \Pi}$, причем $P \not\subseteq B$ по построению.

Пусть B/Q — непервичная алгебра. Это означает, что сердцевина C/Q подпрямо неразложимой алгебры B/Q будет алгеброй с нулевым умножением (см. лемму 2.1). Пусть C_A — идеал алгебры A , порожденный множеством C — полным прообразом сердцевины C/Q . Тогда в силу леммы 1.1.5 $C_A \supseteq C \supseteq Q \supseteq C^2 \supseteq C_A^0$, и потому $C_A \supseteq C_A^0$. Учитывая это, находим такой $b \in C_A$, что $b \notin C_A^0$. С помощью леммы Куратовского — Цорна находим максимальный среди идеалов алгебры A , содержащих идеал C_A^0 и не содержащих элемента b . Пусть M — этот идеал. Тогда по построению A/M — подпрямо неразложимая алгебра и ее сердцевина

будет алгеброй с нулевым умножением, так как $C_A^2 \subseteq M$, $C_A \not\subseteq M$. Поэтому $A/M \in \mathfrak{M}_{\neg P}$ и, очевидно, $M \not\subseteq B$.

Из доказанного вытекает, что класс $\mathfrak{M}_{\neg P}$ удовлетворяет и условию K^*3 . Но тогда в силу предложения 1.1 верхний радикал $S_{\mathfrak{M}_{\neg P}}$ будет кручением. А это и означает, что верно утверждение б), так как подыдемпотентность кручения $S_{\mathfrak{M}_{\neg P}}$ очевидна: любая нильпотентная ненулевая алгебра является подпрямым произведением подпрямо неразложимых (нильпотентных!) алгебр из класса $\mathfrak{M}_{\neg P}$.

Таким образом, $S_{\mathfrak{M}_P}$ и $S_{\mathfrak{M}_{\neg P}}$ — кручения в силу утверждений а) и б). Учитывая это, будем доказывать равенства (19).

Пусть R — подпрямо неразложимая алгебра с сердцевиной C .

Если алгебра C $S_{\mathfrak{M}_P}$ -радикальна, то, очевидно, $C \notin P$, так как все алгебры из класса P просты и потому $P \subseteq \mathfrak{M}_P$. Обратно, пусть $C \notin P$, т. е. C — либо алгебра с нулевым умножением, либо простая алгебра, не принадлежащая классу P . В обоих случаях получаем с очевидностью, что алгебра C не отображается на ненулевые алгебры из $\mathfrak{M}_P$, т. е. $S_{\mathfrak{M}_P}$ -радикальна.

Следовательно, класс $\mathfrak{M}_{\neg P}$ совпадает с классом $\mathcal{N}(S_{\mathfrak{M}_P})$ всех подпрямо неразложимых алгебр с $S_{\mathfrak{M}_{\neg P}}$ -радикальной сердцевиной.

Если $C \in P$, то, очевидно, алгебра C $S_{\mathfrak{M}_{\neg P}}$ -радикальна. Обратно, пусть алгебра C $S_{\mathfrak{M}_{\neg P}}$ -радикальна. Тогда $C^2 \neq 0$, так как все нильпотентные алгебры $S_{\mathfrak{M}_{\neg P}}$ -полупросты. Поэтому C — простая алгебра. Еще раз применяя радикальность, получаем, что C не принадлежит классу $\neg P$, т. е. $C \in P$.

Следовательно, класс $\mathfrak{M}_P$ совпадает с классом $\mathcal{N}(S_{\mathfrak{M}_{\neg P}})$ всех подпрямо неразложимых алгебр с $S_{\mathfrak{M}_{\neg P}}$ -радикальной сердцевиной.

Из доказанного вытекает в силу теоремы 2.3 справедливость равенств

$$S_{\mathfrak{M}_P}^* = S_{\mathfrak{M}_{\neg P}}, \quad S_{\mathfrak{M}_{\neg P}}^* = S_{\mathfrak{M}_P}. \quad (20)$$

Еще раз учитывая, что $S_{\mathfrak{M}_\Pi}$ и $S_{\mathfrak{M}_{\neg\Pi}}$ — кручения, легко получаем в силу (20) и определения 2.2, равенства

$$S_{\mathfrak{M}_\Pi}^\circ = S_{\mathfrak{M}_{\neg\Pi}}, \quad S_{\mathfrak{M}_{\neg\Pi}}^\circ = S_{\mathfrak{M}_\Pi}. \quad (21)$$

А из (20) и (21) с очевидностью вытекают равенства (19), т. е. верно утверждение в).

Теорема доказана.

Покажем теперь, что на самом деле мы рассмотрели первый случай — кручения, соответствующие парам (Π, Φ) . Для этого замечаем, что верна

Теорема 2. *Кручение $\mathfrak{f}$ подыдемпотентно тогда и только тогда, когда оно соответствует некоторой паре вида (Π, Φ) , т. е. когда $\text{Sp}(\mathfrak{f}) = \Phi$. Если кручение $\mathfrak{f}$ подыдемпотентно и $\Pi = \text{Sim}(\mathfrak{f})$ — класс всех простых $\mathfrak{f}$ -радикальных алгебр, то (в обозначениях теоремы 1) верны равенства*

$$\mathfrak{f}^* = \mathfrak{f}^\circ = S_{\mathfrak{M}_\Pi}, \quad \mathfrak{f}^{**} = \mathfrak{f}^{*\circ} = \mathfrak{f}^{\circ*} = \mathfrak{f}^{\circ\circ} = S_{\mathfrak{M}_{\neg\Pi}}. \quad (22)$$

При этом класс $\mathfrak{M}_\Pi$ совпадает с классом всех подпрямо неразложимых алгебр с $\mathfrak{f}$ -радикальной сердцевиной, класс $\mathfrak{M}_{\neg\Pi}$ — с классом всех подпрямо неразложимых алгебр с $\mathfrak{f}$ -полупростой сердцевиной. Радикалы $\mathfrak{f}^*$ и $\mathfrak{f}^{**}$ будут (в классе всех радикалов и в классе всех кручений) дополнительными друг другу двойственными кручениями, причем $\mathfrak{f}^*$ — специальное (а значит и надильпотентное) кручение, а $\mathfrak{f}^{**}$ — подыдемпотентное кручение.

Доказательство. Если кручение $\mathfrak{f}$ подыдемпотентно, то в силу определения 1 все $\mathfrak{f}$ -радикальные алгебры идемпотентны. Но тогда, очевидно, ненулевых $\mathfrak{f}$ -радикальных алгебр с нулевым умножением не существует и потому $\text{Sp}(\mathfrak{f}) = \Phi$.

С другой стороны, пусть кручение $\mathfrak{f}$ таково, что $\text{Sp}(\mathfrak{f}) = \Phi$. Тогда в силу лемм 1—3 и построения множества $\text{Sp}(\mathfrak{f})$, если R — подпрямо неразложимая алгебра с сердцевиной C и C — алгебра с нулевым умножением, то алгебра C $\mathfrak{f}$ -полупроста. При этом мы учли, что алгебра C либо $\mathfrak{f}$ -радикальна, либо $\mathfrak{f}$ -полупроста, так как $\mathfrak{f}(C)$ — идеал алгебры R , содержащийся в C . Из того, что $\mathfrak{f}$ — кручение и алгебра C $\mathfrak{f}$ -полупроста, вытекает, что $\mathfrak{f}$ -полупроста и вся алгебра R . В частности, в силу доказанного все подпрямо неразложимые алгебры с нулевым умножением

$\mathfrak{f}$ -полупросты. Но тогда $\mathfrak{f}$ -полупросты и все алгебры с нулевым умножением как подпрямые произведения $\mathfrak{f}$ -полупростых алгебр. Поэтому все $\mathfrak{f}$ -радикальные алгебры идемпотентны, т. е. кручение $\mathfrak{f}$ подыдемпотентно.

Таким образом, кручение $\mathfrak{f}$ подыдемпотентно тогда и только тогда, когда $\text{Sp}(\mathfrak{f}) = \emptyset$.

Учитывая доказанное, возьмем любое подыдемпотентное кручение $\mathfrak{f}$. Из равенства $\text{Sp}(\mathfrak{f}) = \emptyset$ вытекает, как и выше, что класс $\mathcal{N}(\mathfrak{f})$ всех подпрямо неразложимых алгебр с $\mathfrak{f}$ -радикальной сердцевиной совпадает с классом $\mathfrak{M}_\Pi$ всех подпрямо неразложимых алгебр с сердцевиной из класса $\Pi = \text{Sim}(\mathfrak{f})$. Поэтому в силу теоремы 2.3 $\mathfrak{f}^* = S_{\mathfrak{M}_\Pi}$. Но в силу теоремы 1 $S_{\mathfrak{M}_\Pi}$ — кручение. Поэтому из определения 2.2 легко вытекает, что верно и равенство $\mathfrak{f}^\circ = S_{\mathfrak{M}_\Pi}$. Еще раз применяя теорему 1, получаем, что верны равенства (22), причем $\mathfrak{f}^*$ — специальное кручение, а $\mathfrak{f}^{**} = S_{\mathfrak{M}_{\neg\Pi}}$ — подыдемпотентное кручение. А из равенств (19) и (22) вытекает в силу определений, что $\mathfrak{f}^*$ и $\mathfrak{f}^{**}$ — дополнительные друг другу двойственные кручения.

Мы уже отмечали, что класс $\mathfrak{M}_\Pi$ совпадает с классом всех подпрямо неразложимых алгебр с $\mathfrak{f}$ -радикальной сердцевиной. Но тогда класс $\mathfrak{M}_{\neg\Pi}$ совпадает с классом всех подпрямо неразложимых алгебр с $\mathfrak{f}$ -полупростой сердцевиной, так как сердцевина либо $\mathfrak{f}$ -полупроста либо $\mathfrak{f}$ -радикальна.

Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть кручение t наднильпотентно и $\Pi^* = \text{Simple} \setminus \text{Sim}(t)$ — класс всех простых t -полупростых алгебр. Тогда (в обозначениях теоремы 1) верны равенства

$$t^* = t^\circ = S_{\mathfrak{M}_{\neg\Pi^*}}, \quad t^{**} = t^{*\circ} = t^{\circ*} = t^\infty = S_{\mathfrak{M}_{\Pi^*}}. \quad (23)$$

При этом класс $\mathfrak{M}_{\neg\Pi^*}$ совпадает с классом всех подпрямо неразложимых алгебр с t -радикальной сердцевиной, класс $\mathfrak{M}_{\Pi^*}$ — с классом всех подпрямо неразложимых алгебр с t -полупростой сердцевиной. Радикалы t^* и t^{**} будут (в классе всех радикалов и в классе всех кручений) дополнительными друг другу двойственными кручениями, причем t^* — подыдемпотентное, а t^{**} — специальное (а значит и наднильпотентное) кручение.

Доказательство. В силу определения 2 все алгебры с нулевым умножением t -радикальны. Отсюда легко вытекает, что класс $\mathcal{N}^*(t)$ всех подпрямо неразложимых алгебр с t -радикальной сердцевиной совпадает с классом $\mathcal{M}_{\neg P^*}$ всех подпрямо неразложимых алгебр с сердцевиной, не принадлежащей классу P^* всех простых t -полупростых алгебр. Поэтому в силу теоремы 2.3 верно равенство $t^* = S_{\mathcal{M}_{\neg P^*}}$. Но в силу теоремы 1 $S_{\mathcal{M}_{\neg P^*}}$ — кручение, причем подыдемпотентное. Поэтому и $t^{\circ} = S_{\mathcal{M}_{\neg P^*}}$. Еще раз применяя теорему 1, получаем, что верны равенства (23), причем $t^{**} = S_{\mathcal{M}_{P^*}}$ — специальное кручение.

Все остальные нужные нам утверждения получаются из доказанных, как и при доказательстве теоремы 2.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если кручение t наднильпотентно или подыдемпотентно, то t^* и t^{**} — кручения, причем, $t^* = t^{\circ}$, $t^{**} = t^{*\circ} = t^{\circ*} = t^{\circ\circ}$. При этом кручение t двойственно в классе всех радикалов тогда и только тогда, когда оно двойственно в классе всех кручений.*

Это с очевидностью вытекает из теорем 2 и 3, точнее из равенств (22) и (23).

Следствие 2. *Все наднильпотентные двойственные кручения специальные. Наднильпотентное кручение двойственно тогда и только тогда, когда оно представимо в виде $S_{\mathcal{M}_P}$ для некоторого класса P простых алгебр. Наднильпотентные двойственные кручения образуют «полную булеву решетку» $\mathcal{H}^{**}$, (изоморфную и) антиизоморфную «полной булевой решетке» $\mathcal{B}$ (Simple) всех подклассов класса Simple всех простых алгебр (с обычными теоретико-множественными операциями). Отображение $P \mapsto S_{\mathcal{M}_P}$ является антиизоморфизмом указанных «полных булевых решеток».*

Первые два утверждения вытекают из теорем 1, 2 и 3.

Для доказательства остальных утверждений достаточно показать, что для любых двух подклассов P_1 и P_2 в Simple верно соотношение

$$P_1 \subseteq P_2 \Leftrightarrow S_{\mathcal{M}_{P_1}} \supseteq S_{\mathcal{M}_{P_2}}. \quad (24)$$

Пусть P — произвольный подкласс в Simple, т. е. произвольный класс простых алгебр. В силу теоремы 1

класс $\mathfrak{M}_\Pi$ всех подпрямо неразложимых алгебр с сердцевиной из класса Π является специальным (а значит и обобщенно специальным) классом алгебр. Поэтому в силу теоремы 1.1 $S_{\mathfrak{M}_\Pi}$ -полупростые алгебры — это в точности подпрямые суммы алгебр из класса $\mathfrak{M}_\Pi$. Но тогда, как легко видеть, верно равенство

$$\Pi = \text{Simple} \cap \mathcal{P}(S_{\mathfrak{M}_\Pi}), \quad (25)$$

т. е. класс Π совпадает с классом всех простых $S_{\mathfrak{M}_\Pi}$ -полупростых алгебр.

Из равенства (25) вытекает, что для любых двух подклассов Π_1 и Π_2 в классе Simple всех простых алгебр верна импликация

$$S_{\mathfrak{M}_{\Pi_1}} \supseteq S_{\mathfrak{M}_{\Pi_2}} \Rightarrow \mathcal{P}(S_{\mathfrak{M}_{\Pi_1}}) \subseteq \mathcal{P}(S_{\mathfrak{M}_{\Pi_2}}) \Rightarrow \Pi_1 \subseteq \Pi_2.$$

Но обратная импликация вытекает из построения классов $\mathfrak{M}_\Pi$ и верхнего радикала $S_{\mathfrak{M}_\Pi}$. Поэтому соотношение (24) верно.

Но тогда верны и все нужные нам утверждения *).

Следствие 3. *Подыдемпотентное кручение двойственно тогда и только тогда, когда оно представимо в виде $S_{\mathfrak{M}_{\neg\Pi}}$ для некоторого класса Π простых алгебр.*

Подыдемпотентные двойственные кручения образуют «полную булеву решетку» $\mathcal{U}^{**}$, изоморфную (и антиизоморфную) «полной булевой решетке» $\mathcal{B}(\text{Simple})$ всех подклассов класса Simple всех простых алгебр. Отображение $\Pi \mapsto S_{\mathfrak{M}_{\neg\Pi}}$ является изоморфизмом указанных «полных булевых решеток».

Доказательство аналогично доказательству следствия 2. Нужно только доказать, что для любого класса Π простых алгебр

$$\Pi = \text{Simple} \cap \mathcal{R}(S_{\mathfrak{M}_{\neg\Pi}}) = \text{Sim}(S_{\mathfrak{M}_{\neg\Pi}}).$$

А это легко вытекает из теоремы 1 и предложения 1.1.

Следствие 4. *Надильпотентное кручение двойственно тогда и только тогда, когда оно дополнительно*

*) Здесь и ниже мы учитываем, что «полная булева решетка» $\mathcal{B}(\text{Simple})$ антиизоморфна самой себе. Нужным антиизоморфизмом будет отображение $\Pi \mapsto \text{Simple} \setminus \Pi$.

некоторому подыдемпотентному кручению. Подыдемпотентное кручение двойственно тогда и только тогда, когда оно дополнительно некоторому наднильпотентному кручению. Отображение $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ является антиизоморфизмом «полных булевых решеток» $\mathcal{U}^{**}$ всех подыдемпотентных двойственных кручений и $\mathcal{H}^{**}$ всех наднильпотентных двойственных кручений друг на друга.

А это вытекает из следствий 2.3 и теоремы 1.

Переходя ко второму случаю — изучению дополнительной и двойственности для кручений, соответствующих парам $(\Phi, \mathfrak{P})$, — докажем, что верна

Теорема 4. Пусть $\mathfrak{P}$ — произвольное множество первичных собственных идеалов алгебры (основного кольца) Φ , $\mathcal{E}_{\mathfrak{P}}$ — класс всех таких алгебр S с нулевым умножением, являющихся сердцевинами подпрямо неразложимых алгебр, что $(0 : S)_{\Phi} \in \mathfrak{P}$ (см. лемму 1.2). Тогда:

а) В любой алгебре A множество

$$\tau_{\mathfrak{P}}(A) = \{a \in A \mid (0 : a)_{\Phi} \subseteq P \text{ для всех } P \in \mathfrak{P}\} \quad (26)$$

является идеалом. При этом отображение $\tau_{\mathfrak{P}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ (основного класса $\mathcal{A}$ в себя), определенное правилом (26), будет кручением.

б) Класс $\mathcal{B}_{\mathfrak{P}}$ всех таких $\tau_{\mathfrak{P}}$ -полупростых алгебр R , что $\mathfrak{B}(I) \neq 0^*$ для любого ненулевого идеала I алгебры R , является обобщенно специальным и потому верхний радикал $S_{\mathcal{B}_{\mathfrak{P}}}$ — кручение.

в) Класс $\mathcal{P}(S_{\mathcal{B}_{\mathfrak{P}}})$ всех $S_{\mathcal{B}_{\mathfrak{P}}}$ -полупростых алгебр является наименьшим полупростым классом, содержащим класс $\mathcal{M}_{\mathcal{E}_{\mathfrak{P}}}$ всех подпрямо неразложимых алгебр с сердцевиной, принадлежащей классу $\mathcal{E}_{\mathfrak{P}}$.

Доказательство. Рассмотрим множество

$$\bar{\mathfrak{P}} = \{I \mid I \text{ — идеал в } \Phi, I \not\subseteq P \text{ для всех } P \in \mathfrak{P}\}. \quad (27)$$

Пусть I, J — идеалы в Φ , причем $I \in \bar{\mathfrak{P}}$ и $(J : \alpha)_{\Phi} \in \bar{\mathfrak{P}}$ для всех $\alpha \in I$. Возьмем любой идеал $P \in \mathfrak{P}$.

* Здесь символом $\mathfrak{B}$, как и в § 1 гл. 1, обозначен нижний нильрадикал. Поэтому соотношение $\mathfrak{B}(I) \neq 0$ равносильно тому, что в I есть ненулевые нильпотентные идеалы.

В силу (27) $I \not\subseteq P$, и потому существует такой элемент $\alpha \in I$, что $\alpha \notin P$. По условию $\alpha \in I$ влечет $(J : \alpha)_\Phi \not\subseteq P$. Но тогда в силу первичности идеала P $J \supseteq \alpha (J : \alpha)_\Phi \not\subseteq P$, потому $J \not\subseteq P$. А это означает в силу произвольности выбора P , что $J \in \bar{\mathfrak{P}}$.

В результате мы получили, что множество $\bar{\mathfrak{P}}$ удовлетворяет условию ТЗ. Но выполнение условия Т1 очевидно: из (27) вытекает, что множество $\bar{\mathfrak{P}}$ содержит с каждым идеалом I и все бóльшие идеалы в Φ . Поэтому множество $\bar{\mathfrak{P}}$ является радикальным фильтром в смысле определения 2.3.4. Но тогда в силу теоремы 2.3.4 верно утверждение а): отображение $\tau_{\bar{\mathfrak{P}}}$ будет модульным кручением, соответствующим радикальному фильтру $\bar{\mathfrak{P}}$.

Учитывая утверждение а), рассмотрим класс $\mathcal{B}$ всех таких алгебр R , что $\mathfrak{B}(I) \neq 0$ для любого ненулевого идеала I алгебры R . Замечаем, что класс $\mathcal{B}$ обобщенно специален, т. е. удовлетворяет условиям S1 — S3 из леммы 1.1.

Действительно, пусть $R \in \mathcal{B}$.

Пусть I — идеал алгебры R . Возьмем любой ненулевой идеал J алгебры I . В силу леммы 1.1.5, если J_R — идеал алгебры R , порожденный множеством J в R , то $J_R \supseteq J \supseteq J_R^3$. Если $J_R^3 \neq 0$ то $\mathfrak{B}(J) \supseteq \mathfrak{B}(J_R^3) \neq 0$, так как $R \in \mathcal{B}$, и потому $\mathfrak{B}(J) \neq 0$. Если же $J_R^3 = 0$, то и $J^3 = 0$. Но тогда $\mathfrak{B}(J) = J \neq 0$, и мы снова получили, что $\mathfrak{B}(J) \neq 0$. Следовательно, $I \in \mathcal{B}$ в силу произвольности выбора J .

Пусть Q — существенное расширение алгебры R , т. е. R — идеал алгебры Q , имеющий ненулевое пересечение с любым ненулевым идеалом в Q . Тогда для любого ненулевого идеала K алгебры Q получаем, что $\mathfrak{B}(K) \supseteq \mathfrak{B}(K \cap R) \neq 0$. А это означает, что $Q \in \mathcal{B}$.

Следовательно, класс $\mathcal{B}$ удовлетворяет условиям S1, S2.

Пусть C — идеал алгебры B , B — идеал алгебры A , причем C не содержит ненулевых идеалов алгебры A . Пусть $B/C \in \mathcal{B}$.

Возьмем любой ненулевой идеал D алгебры B . Если $D \cap C = 0$, то получаем, что $D \simeq D + C/C$ — ненулевому идеалу алгебры $B/C \in \mathcal{B}$. Но тогда, очевидно, $\mathfrak{B}(D) \neq 0$, так как $\mathfrak{B}(D + C/C) \neq 0$. Если же $D \cap C \neq 0$, то $\mathfrak{B}(D) \neq 0$, так как $(D \cap C)^3 = 0$. А именно, из условий вытекает, что

для идеала C_A алгебры A , порожденного множеством C в A , верно равенство $C_A^3 = 0$, так как в силу леммы 1.1.5 C_A — идеал алгебры A , содержащийся в C . Но тогда $C^3 = 0$, что влечет нужное нам равенство $(D \cap C)^3 = 0$. Итак, $\mathfrak{B}(D) \neq 0$ и во втором случае. Поэтому $B \in \mathcal{B}$ в силу произвольности выбора D .

Следовательно, класс $\mathcal{B}$ удовлетворяет и условию S3, т. е. является обобщенно специальным классом алгебр.

Но в силу теоремы 1.1 класс $\mathcal{P}(r_{\overline{\mathfrak{F}}})$ всех $r_{\overline{\mathfrak{F}}}$ -полупростых алгебр обобщенно специален, так как $r_{\overline{\mathfrak{F}}}$ — кручение, в силу утверждения а). Кроме того, как легко видеть, пересечение любого семейства обобщенно специальных классов само будет обобщенно специальным классом: выполнение условий S1 — S3 сохраняется при взятии пересечений классов. Замечая, что по построению $\mathcal{B}_{\overline{\mathfrak{F}}} = \mathcal{P}(r_{\overline{\mathfrak{F}}}) \cap \mathcal{B}$, получаем в силу сказанного и доказанного, что класс $\mathcal{B}_{\overline{\mathfrak{F}}}$ обобщенно специален. Поэтому верно утверждение б).

Из построения класса $\mathcal{B}_{\overline{\mathfrak{F}}}$ с очевидностью вытекает, что все $r_{\overline{\mathfrak{F}}}$ -полупростые алгебры с нулевым умножением принадлежат классу $\mathcal{B}_{\overline{\mathfrak{F}}}$, так как все алгебры с нулевым умножением принадлежат классу $\mathcal{B}$.

Пусть $P \in \mathfrak{P}$ и C — такая алгебра с нулевым умножением, являющаяся сердцевиной подпрямо неразложимой алгебры R , что $(0 : C)_{\Phi} = P$. Тогда

$$\forall c \in C \mid c \neq 0 \Rightarrow (0 : c)_{\Phi} = P \quad (28)$$

в силу леммы 1. С другой стороны, по построению кручения $r_{\overline{\mathfrak{F}}}$ алгебра A будет $r_{\overline{\mathfrak{F}}}$ -полупроста тогда и только тогда, когда для ее элементов верно соотношение

$$a \neq 0 \Rightarrow \exists P' \in \mathfrak{P} \mid (0 : a)_{\Phi} \subseteq P'. \quad (29)$$

Сравнивая (28) и (29), получаем, что алгебра C $r_{\overline{\mathfrak{F}}}$ -полупроста. Поэтому $C \in \mathcal{B}_{\overline{\mathfrak{F}}}$. Но тогда и $R \in \mathcal{B}_{\overline{\mathfrak{F}}}$ в силу обобщенной специальности класса $\mathcal{B}_{\overline{\mathfrak{F}}}$, так как подпрямо неразложимая алгебра R является существенным расширением своей сердцевины.

Из доказанного вытекает, что полупростой класс $\mathcal{P}(S\mathcal{B}_{\mathfrak{P}})$ содержит класс $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_{\mathfrak{P}}}$ всех подпрямо неразложимых алгебр с сердцевиной, принадлежащей классу $\mathcal{C}_{\mathfrak{P}}$, так как $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_{\mathfrak{P}}} \subseteq \mathcal{B}_{\mathfrak{P}}$.

С другой стороны, пусть $\mathfrak{g}$ — кручение и все алгебры из класса $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_{\mathfrak{P}}}$ являются $\mathfrak{g}$ -полупростыми, т. е. $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_{\mathfrak{P}}} \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{g})$. В силу обобщенной специальности класса $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ это равносильно включению $\mathcal{C}_{\mathfrak{P}} \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{g})$. А это, в свою очередь, в силу лемм 2 и 3 равносильно тому, что все алгебры с нулевым умножением $(\Phi/P)^0$, где $P \in \mathfrak{P}$, являются $\mathfrak{g}$ -полупростыми алгебрами. Но тогда $\mathcal{P}(S\mathcal{B}_{\mathfrak{P}}) \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{g})$. Действительно, допустим противное, т. е. допустим, что существуют не $\mathfrak{g}$ -полупростые $S\mathcal{B}_{\mathfrak{P}}$ -полупростые алгебры. Тогда, очевидно, существуют ненулевые $\mathfrak{g}$ -радикальные $S\mathcal{B}_{\mathfrak{P}}$ -полупростые алгебры. Отсюда вытекает существование ненулевых $\mathfrak{g}$ -радикальных алгебр в классе $\mathcal{B}_{\mathfrak{P}}$. Пусть R — одна из таких алгебр. Тогда по построению класса $\mathcal{B}_{\mathfrak{P}}$ в R есть ненулевые нильпотентные идеалы, так как $\mathfrak{V}(R) \neq 0$. Но тогда в R есть и ненулевые идеалы, являющиеся алгебрами с нулевым умножением. Пусть A — один из этих идеалов.

По построению A — ненулевая $\mathfrak{g}$ -радикальная $r_{\mathfrak{P}}$ -полупростая алгебра с нулевым умножением. Возьмем любой ненулевой элемент $a \in A$. Тогда Φa — ненулевой главный идеал в A , так как A — алгебра с нулевым умножением, и потому Φa — ненулевая $\mathfrak{g}$ -радикальная алгебра как идеал $\mathfrak{g}$ -радикальной алгебры A . С другой стороны, в силу $r_{\mathfrak{P}}$ -полупросты алгебры A $(0 : a)_{\Phi} \subseteq P$ для некоторого $P \in \mathfrak{P}$, и потому алгебра $\Phi a \simeq (\Phi / (0 : a)_{\Phi})^0$ гомоморфно отображается на ненулевую $\mathfrak{g}$ -полупростую, по доказанному, алгебру $(\Phi/P)^0$. Поэтому алгебра Φa не может быть $\mathfrak{g}$ -радикальной алгеброй. Противоречие.

Следовательно, $\mathcal{P}(S\mathcal{B}_{\mathfrak{P}}) \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{g})$, и мы доказали утверждение в).

Теорема доказана.

В рассматриваемом нами случае множество $\mathfrak{P}$ можно менять, не изменяя верхнего радикала $S\mathcal{B}_{\mathfrak{P}}$. А именно,

положим для любого подмножества $\mathfrak{P}$ в $\text{Spec } \Phi$

$$\mathfrak{P}\downarrow = \{P' \in \text{Spec } \Phi \mid P' \subseteq P \text{ для некоторого } P \in \mathfrak{P}\}. \quad (30)$$

Лемма 5. *Для любого множества $\mathfrak{P}$ собственных первичных идеалов алгебры (основного кольца) Φ верно равенство*

$$\mathfrak{P}\downarrow = \text{Spec } \Phi \setminus \text{Sp } (S_{\mathcal{B}_{\mathfrak{P}}}), \quad (31)$$

т. е. $\mathfrak{P}\downarrow$ совпадает с множеством всех таких собственных первичных идеалов P в Φ , что алгебра $(\Phi/P)^0$ $S_{\mathcal{B}_{\mathfrak{P}}}$ -полупроста. В частности

$$S_{\mathcal{B}_{\mathfrak{P}_1}} \leq S_{\mathcal{B}_{\mathfrak{P}_2}} \Leftrightarrow \mathfrak{P}_1\downarrow \supseteq \mathfrak{P}_2\downarrow \quad (32)$$

для любых подмножеств $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$ в $\text{Spec } \Phi$.

Доказательство. Из лемм 1—3 вытекает, что если $P \in \text{Spec } \Phi$ и $\mathfrak{p}$ — кручение, то алгебра $(\Phi/P)^0$ либо $\mathfrak{p}$ -полупроста, либо $\mathfrak{p}$ -радикальна, так как сердцевина подпрямо неразложимой алгебры либо $\mathfrak{p}$ -полупроста, либо $\mathfrak{p}$ -радикальна.

Учитывая сказанное, возьмем любое множество $\mathfrak{P}$ первичных идеалов (собственных) в Φ .

Из (27) и (30) вытекает, что $\overline{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{P}\downarrow}$, т. е. $r_{\overline{\mathfrak{P}}} = r_{\overline{\mathfrak{P}\downarrow}}$. Но тогда и $\mathcal{B}_{\mathfrak{P}} = \mathcal{B}_{\mathfrak{P}\downarrow}$. Поэтому из доказательства теоремы 4 вытекает, что для всех $P \in \mathfrak{P}\downarrow$ алгебры $(\Phi/P)^0$ $S_{\mathcal{B}_{\mathfrak{P}}}$ -полупросты, так как они лежат в классе $\mathcal{B}_{\mathfrak{P}}$.

Обратно, пусть $P_1 \in \text{Spec } \Phi$ и алгебра $(\Phi/P_1)^0$ $S_{\mathcal{B}_{\mathfrak{P}}}$ -полупроста. Это означает, что алгебра $(\Phi/P_1)^0$ отображается гомоморфно на некоторую ненулевую алгебру из класса $\mathcal{B}_{\mathfrak{P}}$. Поэтому существует такой идеал I в Φ , что $P_1 \subseteq I \subset \Phi$ и $(\Phi/I)^0$ — $r_{\mathfrak{P}}$ -полупростая алгебра. Но тогда, обозначая символом $\bar{1}$ образ единицы 1 при естественном гомоморфизме $\Phi \rightarrow \Phi/I$, получаем $P_1 \subseteq J = (0 : \bar{1})_{\Phi} \subseteq P$ для некоторого $P \in \mathfrak{P}$ в силу $r_{\mathfrak{P}}$ -полупростоты алгебры $(\Phi/I)^0$, т. е. $P \in \mathfrak{P}\downarrow$.

Таким образом, $\mathfrak{P}\downarrow$ совпадает с множеством всех таких собственных первичных идеалов P в Φ , что алгебра $(\Phi/P)^0$ с нулевым умножением $S_{\mathcal{B}_{\mathfrak{P}}}$ -полупроста. А это и означает, что верно равенство (31).

Возьмем теперь любые два подмножества $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$ в $\text{Spes } \Phi$. Тогда получаем цепь импликаций

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_1 \downarrow \supseteq \mathfrak{P}_2 \downarrow &\Rightarrow (\overline{\mathfrak{P}}_1 = \overline{\mathfrak{P}}_1 \downarrow \subseteq \overline{\mathfrak{P}}_2 \downarrow = \overline{\mathfrak{P}}_2) \Rightarrow r_{\overline{\mathfrak{P}}_1} \leq r_{\overline{\mathfrak{P}}_2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathcal{B}_{\mathfrak{P}_1} \supseteq \mathcal{B}_{\mathfrak{P}_2} \Rightarrow S_{\mathcal{B}_{\mathfrak{P}_1}} \leq S_{\mathcal{B}_{\mathfrak{P}_2}} \end{aligned} \quad (33)$$

по построению и в силу сказанного. С другой стороны по построению и в силу (31) верны и импликации

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{B}_{\mathfrak{P}_1}} \leq S_{\mathcal{B}_{\mathfrak{P}_2}} &\Rightarrow \text{Sp}(S_{\mathcal{B}_{\mathfrak{P}_1}}) \subseteq \\ &\subseteq \text{Sp}(S_{\mathcal{B}_{\mathfrak{P}_2}}) \Rightarrow \mathfrak{P}_1 \downarrow \supseteq \mathfrak{P}_2 \downarrow. \end{aligned} \quad (34)$$

А из (33) и (35) вытекает нужное нам соотношение (32).

Лемма доказана.

Теперь мы можем описать дополнительную и двойственность в классе всех кручений. В этом описании существенную роль будут играть максимальные (собственные!) идеалы в Φ . Множество всех максимальных идеалов в Φ обозначим символом $\text{Max } \Phi$. Ясно, что все максимальные идеалы в Φ будут первичными собственными идеалами, т. е. $\text{Max } \Phi \subseteq \text{Spes } \Phi$.

Для любого кручения $\mathfrak{s}$ положим

$$\text{Mx}(\mathfrak{s}) = \text{Sp}(\mathfrak{s}) \cap \text{Max } \Phi. \quad (35)$$

Таким образом, по построению $\text{Sp}(\mathfrak{s})$ множество $\text{Mx}(\mathfrak{s})$ совпадает с множеством всех таких максимальных идеалов P в Φ , что алгебра $(\Phi/P)^0$ с нулевым умножением $\mathfrak{s}$ -радикальна. Но тогда в силу предложения 2.1 совокупность $\{(\Phi/P)^0 \mid P \in \text{Mx}(\mathfrak{s})\}$ совпадает, с точностью до изоморфизма алгебр, с классом всех $\mathfrak{s}$ -радикальных квазипростых алгебр с нулевым умножением. В связи с этим напомним, что по построению $\text{Sim}(\mathfrak{s})$ совпадает с классом всех $\mathfrak{s}$ -радикальных простых (= идемпотентных квазипростых) алгебр.

Теорема 5. Пусть $\mathfrak{s}$ — кручение, $\mathfrak{s}^\circ$ — кручение, дополнительное к $\mathfrak{s}$ в классе всех кручений. Тогда

$$\mathfrak{s}^\circ = S_{\mathfrak{M}_{\text{Sim}(\mathfrak{s})}} \wedge S_{\mathcal{B}_{\text{Mx}(\mathfrak{s})}} = S_{\mathfrak{M}_{\text{Sim}(\mathfrak{s})}} \wedge S_{\mathcal{B}_{\text{Sp}(\mathfrak{s})}}. \quad (36)$$

При этом ласс всех квазипростых (ненулевых!) $\mathfrak{s}$ -радикальных алгебр совпадает, с точностью до изоморфизма алгебр, с совокупностью $\text{Sim}(\mathfrak{s}) \cup \{(\Phi/P)^0 \mid P \in \text{Mx}(\mathfrak{s})\}$. Кроме

того верны равенства

$$\text{Sim}(\mathfrak{s}^\circ) = \text{Simple} \setminus \text{Sim}(\mathfrak{s}), \quad \text{Mx}(\mathfrak{s}^\circ) = \text{Max } \Phi \setminus \text{Mx}(\mathfrak{s}), \quad (37)$$

т. е. простые $\mathfrak{s}^\circ$ -радикальные алгебры — это в точности простые $\mathfrak{s}$ -полупростые алгебры, а квазипростые $\mathfrak{s}^\circ$ -радикальные алгебры с нулевым умножением — это в точности квазипростые $\mathfrak{s}$ -полупростые алгебры с нулевым умножением.

Доказательство. В силу теоремы 2.4, если t — кручение и t° — кручение, дополнительное к t в классе всех кручений, то класс $\mathcal{P}(t^\circ)$ всех t° -полупростых алгебр является наименьшим классом, содержащим класс $\mathcal{A}^*(t)$ всех подпрямо неразложимых алгебр с t -радикальной сердцевиной. Учитывая это и будем вести доказательство.

Пусть $\mathfrak{s}$ — кручение. Тогда в силу предложения 3

$$\mathfrak{s}^\circ = (l(\mathfrak{s}))^\circ \wedge (a(\mathfrak{s}))^\circ, \quad (38)$$

причем кручение $l(\mathfrak{s})$ соответствует паре $(\text{Sim}(\mathfrak{s}), \Phi)$, а кручение $a(\mathfrak{s})$ — паре $(\Phi, \text{Sp}(\mathfrak{s}))$.

В силу теоремы 2 верно равенство

$$(l(\mathfrak{s}))^\circ = S_{\mathfrak{M}_{\text{Sim}(\mathfrak{s})}}, \quad (39)$$

причем в силу теоремы 1 класс $\mathfrak{M}_{\text{Sim}(\mathfrak{s})}$ специален, а значит и обобщенно специален.

Пусть $\mathfrak{P} = \text{Sp}(\mathfrak{s})$. Из того, что кручение $a(\mathfrak{s})$ соответствует паре $(\Phi, \mathfrak{P})$, т. е. $\text{Sim}(a(\mathfrak{s})) = \Phi$, $\text{Sp}(a(\mathfrak{s})) = \mathfrak{P} = \text{Sp}(\mathfrak{s})$, легко вытекает, что класс $\mathcal{A}^*(a(\mathfrak{s}))$ всех подпрямо неразложимых алгебр с $a(\mathfrak{s})$ -радикальной сердцевиной совпадает с классом $\mathfrak{M}_{\mathcal{E}_{\mathfrak{P}}}$ всех подпрямо неразложимых алгебр с сердцевиной из класса $\mathcal{E}_{\mathfrak{P}}$ (см. теорему 4). Но тогда в силу сказанного выше о кручении t° , дополнительном к кручению t , получаем равенство

$$(a(\mathfrak{s}))^\circ = S_{\mathcal{B}_{\text{Sp}(\mathfrak{s})}} \quad (40)$$

в силу теоремы 4. Кроме того в силу предложения 1 множество $\text{Sp}(\mathfrak{s})$ замкнуто относительно увеличений. Отсюда в силу (35) легко вытекает равенство

$$(\text{Sp}(\mathfrak{s}))\downarrow = (\text{Mx}(\mathfrak{s}))\downarrow. \quad (41)$$

А из равенства (41) вытекает в силу леммы 5 равенство

$$S_{\mathcal{B}_{\text{Sp}(\mathfrak{s})}} = S_{\mathcal{B}_{\text{Mx}(\mathfrak{s})}}. \quad (42)$$

Наконец, из равенств (38), (39), (40) и (42) вытекает нужное нам основное равенство (36).

В силу сказанного перед теоремой класс всех квазипростых (ненулевых по определению) $\mathfrak{B}$ -радикальных алгебр совпадает, с точностью до изоморфизма алгебр, с совокупностью $\text{Sim}(\mathfrak{B}) \cup \{(\Phi/P)^0 \mid P \in \text{Mx}(\mathfrak{B})\}$. Достаточно вспомнить, что в силу предложения 2.1 квазипростая алгебра либо проста, либо является алгеброй с нулевым умножением, и применить это предложение.

Остается доказать равенства (37). Для этого достаточно доказать, что кручения $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}^0$ производят разбиение класса $\mathcal{U}$ всех квазипростых алгебр, т. е. верны равенства

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}(\mathfrak{B}) \cap \mathcal{U}) \cup (\mathcal{K}(\mathfrak{B}^0) \cap \mathcal{U}) &= \mathcal{U}, \\ (\mathcal{K}(\mathfrak{B}) \cap \mathcal{U}) \cap (\mathcal{K}(\mathfrak{B}^0) \cap \mathcal{U}) &= \emptyset. \end{aligned} \quad (43)$$

Пусть R — произвольная квазипростая алгебра. По определению дополнительного кручения верно равенство $\mathfrak{B}(R) \cap \mathfrak{B}^0(R) = 0$. Но тогда $\mathfrak{B}(R) = 0$ или $\mathfrak{B}^0(R) = 0$, так как $R \neq 0$ и R — квазипростая алгебра.

Поэтому верно второе из равенств (43): одновременное выполнение равенств $\mathfrak{B}(R) = R$, $\mathfrak{B}^0(R) = R$ невозможно.

В силу квазипростоты алгебра R либо $\mathfrak{B}$ -радикальна, либо $\mathfrak{B}$ -полупроста. Пусть алгебра R не $\mathfrak{B}$ -радикальна. Тогда она $\mathfrak{B}$ -полупроста. Но тогда в силу квазипростоты алгебра R не принадлежит классу $\mathfrak{M}_{\text{Sim}(\mathfrak{B})}$, так как она не отображается гомоморфно на ненулевые алгебры из этого класса. Следовательно, алгебра R будет $S_{\mathfrak{M}_{\text{Sim}(\mathfrak{B})}}$ -радикальной.

Допустим, что алгебра R не $S_{\mathcal{B}_{\text{Mx}(\mathfrak{B})}}$ -радикальна. Тогда $R \in \mathcal{B}_{\text{Mx}(\mathfrak{B})}$. Но тогда по построению алгебра R будет алгеброй с нулевым умножением в силу своей квазипростоты, так как $\mathfrak{B}(R) \neq 0$. Кроме того алгебра R будет и $\mathfrak{r}_{\text{Mx}(\mathfrak{B})}$ -полупростой алгеброй. Но в силу предложения 2.1 из доказанного вытекает существование такого максимального идеала P в Φ , что алгебра R изоморфна алгебре $(\Phi/P)^0$ с нулевым умножением. При этом в силу $\mathfrak{r}_{\text{Mx}(\mathfrak{B})}$ -полупростоты $P = (0 : 1)_{\Phi} \subseteq P'$ для некоторого $P' \in \text{Mx}(\mathfrak{B})$. Но тогда $P = P' \in \text{Mx}(\mathfrak{B})$ в силу максимальной P , т. е. $(\Phi/P)^0$ — квазипростая $\mathfrak{B}$ -радикальная алгебра

с нулевым умножением. Но тогда и алгебра R $\mathfrak{g}$ -радикальна, так как $R \simeq (\Phi/P)^0$. Противоречие.

Следовательно, алгебра R и $S_{\mathcal{B}_{\text{Mx}(\mathfrak{g})}}$ -радикальна. В результате получаем, что алгебра R $\mathfrak{g}^0$ -радикальна, так как $\mathcal{R}(\mathfrak{g}^0) = \mathcal{R}(S_{\text{Sim}(\mathfrak{g})}) \cap \mathcal{R}(S_{\mathcal{B}_{\text{Mx}(\mathfrak{g})}})$ в силу равенств (36).

Поэтому верно и первое из равенств (43).

Теорема доказана.

Для краткости будем называть Tors-двойственные кручения (кручения, двойственные в классе всех кручений) Т-двойственными.

Теорема 6. *Кручение τ Т-двойственно тогда и только тогда, когда оно представимо в виде*

$$\tau = S_{\mathfrak{M}_\Pi} \wedge S_{\mathcal{B}_{\mathfrak{P}}}, \quad \text{где } \Pi \subseteq \text{Simple}, \mathfrak{P} \subseteq \text{Max } \Phi. \quad (44)$$

Это представление единственно: если кручение τ представимо в виде (44), то $\Pi = \text{Sim}(\tau^0)$, $\mathfrak{P} = \text{Mx}(\tau^0)$. Пересечение любого семейства Т-двойственных кручений само будет Т-двойственным кручением. Поэтому Т-двойственные кручения образуют «полную решетку» Tors^0 . Более того, для любого семейства Т-двойственных кручений, представимых в виде (44), их пересечение и объединение задаются правилами:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i \in \Gamma} (S_{\mathfrak{M}_{\Pi_i}} \wedge S_{\mathcal{B}_{\mathfrak{P}_i}}) &= S_{\mathfrak{M}_{\bigcup_{i \in \Gamma} \Pi_i}} \wedge S_{\mathcal{B}_{\bigcup_{i \in \Gamma} \mathfrak{P}_i}}, \\ \bigvee_{i \in \Gamma} (S_{\mathfrak{M}_{\Pi_i}} \wedge S_{\mathcal{B}_{\mathfrak{P}_i}}) &= S_{\mathfrak{M}_{\bigcap_{i \in \Gamma} \Pi_i}} \wedge S_{\mathcal{B}_{\bigcup_{i \in \Gamma} \mathfrak{P}_i}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Поэтому «полная решетка» Tors^0 является «полной булевой решеткой», изоморфной и антиизоморфной «полной булевой решетке» $\mathcal{B}(\mathcal{U})$ всех подклассов класса $\mathcal{U}$ всех квази-простых алгебр.

Доказательство. Непосредственно из определения Т-двойственных кручений вытекает в силу теоремы 5, что любое Т-двойственное кручение представимо в виде (44).

С другой стороны, пусть $\Pi \subseteq \text{Simple}$, $\mathfrak{P} \subseteq \text{Max } \Phi$. Замечаем, что для любой такой пары $(\Pi, \mathfrak{P})$ верны равенства

$$\begin{aligned} \text{Sim}(S_{\mathfrak{M}_\Pi} \wedge S_{\mathcal{B}_{\mathfrak{P}}}) &= \text{Simple} \setminus \Pi, \\ \text{Mx}(S_{\mathfrak{M}_\Pi} \wedge S_{\mathcal{B}_{\mathfrak{P}}}) &= \text{Max } \Phi \setminus \mathfrak{P}. \end{aligned} \quad (46)$$

Действительно, пусть R — простая алгебра. Ясно, что алгебра R не отображается гомоморфно на ненулевые алгебры из $\mathcal{B}_{\mathfrak{F}}$, так как R не принадлежит этому классу: все ненулевые алгебры из $\mathcal{B}_{\mathfrak{F}}$ содержат ненулевые нильпотентные идеалы. Поэтому алгебра R будет $S_{\mathfrak{M}_L} \wedge S_{\mathcal{B}_{\mathfrak{F}}}$ -радикальной тогда и только тогда, когда она $S_{\mathfrak{M}_L}$ -радикальна. Последнее, снова в силу простоты алгебры R , равносильно тому, что R не принадлежит классу $\mathfrak{M}_L$. А это, в свою очередь, равносильно тому, что R не принадлежит классу Π , т. е. $R \in \text{Simple} \setminus \Pi$. Следовательно, верно первое из равенств (46). Возьмем теперь квазипростую алгебру $Q = (\Phi/P)^0$ с нулевым умножением, соответствующую заданному максимальному идеалу P в Φ . Ясно, что алгебра Q не отображается гомоморфно на ненулевые алгебры $\mathfrak{M}_L$, так как все алгебры из $\mathfrak{M}_L$ первичны. Поэтому алгебра Q будет $S_{\mathfrak{M}_L} \wedge S_{\mathcal{B}_{\mathfrak{F}}}$ -радикальной тогда и только тогда, когда она $S_{\mathcal{B}_{\mathfrak{F}}}$ -радикальна, т. е. когда алгебра Q не принадлежит классу $\mathcal{B}_{\mathfrak{F}}$. Последнее по построению класса $\mathcal{B}_{\mathfrak{F}}$ равносильно тому, что алгебра $Q = (\Phi/P)^0$ не $\tau_{\mathfrak{F}}$ -полупроста, т. е. $\tau_{\mathfrak{F}}$ -радикальна. А это, в свою очередь, равносильно тому, что P не принадлежит множеству $\mathfrak{F}$ в силу максимальной P , т. е. соотношению $P \in \text{Max } \Phi \setminus \mathfrak{F}$. Следовательно, верно и второе из равенств (46).

Из равенств (46) и теоремы 5 вытекает единственность представления кручения τ в виде (44). А именно, если кручение τ представлено в виде (44), то

$$\Pi = \text{Sim}(\tau^0), \quad \mathfrak{F} = \text{Max}(\tau^0). \quad (47)$$

Учитывая сказанное и доказанное, возьмем любое кручение τ , представленное в виде (44). Тогда

$$\tau^{\infty} = S_{\mathfrak{M}_{\text{Sim}(\tau^0)}} \wedge S_{\mathcal{B}_{\text{Max}(\tau^0)}} = S_{\mathfrak{M}_L} \wedge S_{\mathcal{B}_{\mathfrak{F}}} = \tau$$

в силу (47) и теоремы 5. А это и означает, что τ — Т-двойственное кручение, т. е. кручение, двойственное в классе всех кручений.

То, что пересечение любого семейства Т-двойственных кручений само будет Т-двойственным, вытекает из предложения 2, точнее, из второго равенства (12). Поэтому.

Т-двойственные кручения образуют «полную решетку» Tors° .

Возьмем любые два Т-двойственных кручения $\mathfrak{s}_1$ и $\mathfrak{s}_2$. По доказанному, Т-двойственные кручения — это в точности кручения τ , представимые (и притом единственным образом) в виде (44). Поэтому найдутся такие два класса Π_1 , Π_2 простых алгебр и такие два множества $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ максимальных идеалов в Φ , что

$$\mathfrak{s}_1 = S_{\mathfrak{M}\Pi_1} \wedge S_{\mathcal{B}\mathfrak{P}_1}, \quad \mathfrak{s}_2 = S_{\mathfrak{M}\Pi_2} \wedge S_{\mathcal{B}\mathfrak{P}_2}.$$

Но тогда в силу (46) легко получаем соотношение

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_1 \geq \mathfrak{s}_2 &\Leftrightarrow (\Pi_1 \subseteq \Pi_2 \text{ и } \mathfrak{P}_1 \subseteq \mathfrak{P}_2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\Pi_1 \cup \{(\Phi/P_1)^0 \mid P_1 \in \mathfrak{P}_1\}) \subseteq (\Pi_2 \cup \{(\Phi/P_2)^0 \mid P_2 \in \mathfrak{P}_2\}). \end{aligned} \quad (48)$$

Из (48) вытекает, что «полная решетка» Tors° будет полной булевой решеткой, в которой пересечение и объединение задаются правилами (45). Более того, если кручение τ представимо в виде (44), то в силу теоремы 5 класс всех квазипростых τ -радикальных алгебр совпадает, с точностью до изоморфизма алгебр, с совокупностью $(\text{Simple} \setminus \Pi) \cup \{(\Phi/P)^0 \mid P \in \text{Max } \Phi \setminus \mathfrak{P}\}$ в силу равенства (48). Это равносильно тому, что класс всех квазипростых τ -полупростых алгебр совпадает, с точностью до изоморфизма алгебр, с совокупностью $\Pi \cup \{(\Phi/P)^0 \mid P \in \mathfrak{P}\}$. Но тогда из (48) легко вытекает, что отображения $\tau \mapsto \mathcal{R}(\tau) \cap \mathcal{U}$, $\tau \mapsto \mathcal{P}(\tau) \cap \mathcal{U}$ являются, соответственно, изоморфизмом и антиизоморфизмом «полной булевой решетки» Tors° всех Т-двойственных кручений на «полную булеву решетку» $\mathcal{B}(\mathcal{U})$ всех подклассов класса $\mathcal{U}$ всех квазипростых алгебр.

Теорема доказана.

Переходя к рассмотрению дополненности в классе всех радикалов, напомним, что для любого множества $\mathfrak{P}$ собственных первичных идеалов в Φ , замкнутого относительно увеличений, существует кручение $\mathfrak{s}$, соответствующее паре $(\Phi, \mathfrak{P})$, т. е. $\text{Sim}(\mathfrak{s}) = \Phi$, $\text{Sp}(\mathfrak{s}) = \mathfrak{P}$ (см. предложение 1).

Теорема 7. Пусть $\mathfrak{P}$ — произвольное множество первичных собственных идеалов в Φ . Тогда класс $\mathcal{R}(f_{\mathfrak{P}})$ всех таких алгебр A , что для всех идеалов I в A и всех $P \in \mathfrak{P}$ верно равенство $I = PI + I^2$, радикален в смысле Куроша,

а значит определяет некоторый радикал $f_{\mathfrak{P}}$. При этом можно считать, что множество $\mathfrak{P}$ замкнуто относительно увеличений, т. е. $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\uparrow$, так как $f_{\mathfrak{P}} = f_{\mathfrak{P}\uparrow}$. Более того, если $\mathfrak{g}$ — кручение, причем $\text{Sim}(\mathfrak{g}) = \emptyset$, $\text{Sp}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{P}$, то радикал $f_{\mathfrak{P}}$ совпадает с радикалом $\mathfrak{g}^*$, дополнительным к $\mathfrak{g}$ в классе всех радикалов.

Доказательство. Будем называть алгебры из класса $\mathcal{R}(f_{\mathfrak{P}})$ $f_{\mathfrak{P}}$ -радикальными алгебрами, хотя у нас еще и нет радикала $f_{\mathfrak{P}}$. Ясно, что если равенство $I = PI + I^2$ верно для всех $P \in \mathfrak{P}$, то оно верно и для всех $P \in \mathfrak{P}\uparrow$. Поэтому можно считать, что $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\uparrow$, т. е. что подмножество $\mathfrak{P}$ в $\text{Spec } \Phi$ замкнуто относительно увеличений, так как $f_{\mathfrak{P}}$ -радикальные алгебры и $f_{\mathfrak{P}\uparrow}$ -радикальные алгебры — это одно и то же.

Итак, будем считать, что $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\uparrow$. Докажем, что класс $\mathcal{R}(f_{\mathfrak{P}})$ всех $f_{\mathfrak{P}}$ -радикальных алгебр радикален в смысле Куроша. Для этого в силу теоремы 2.1.2 достаточно (и необходимо) доказать выполнение условий K1 и K2 этой теоремы. Но, как легко видеть, гомоморфный образ $f_{\mathfrak{P}}$ -радикальной алгебры сам будет $f_{\mathfrak{P}}$ -радикальной алгеброй, и потому условие K1 выполняется. Остается доказать выполнение условия K2.

Пусть алгебра R не $f_{\mathfrak{P}}$ -радикальна. Тогда по определению найдется такой идеал I в R и такой $P \in \mathfrak{P}$, что $I \neq PI + I^2$. Зафиксировав I и P , находим такой элемент $\mathfrak{r} \in I$, что $\mathfrak{r} \notin PI + I^2$. Рассмотрим множество $\mathcal{C}$ всех таких идеалов в R , которые содержат идеал $PI + I^2$ и не содержат элемента $\mathfrak{r}$. Ясно, что множество $\mathcal{C}$ идеалов непусто и индуктивно. Поэтому в силу леммы Куратовского — Цорна в множестве $\mathcal{C}$, частично упорядоченном относительно теоретико-множественного включения, есть максимальные элементы. Пусть M — один из этих максимальных элементов. Рассмотрим фактор-алгебру $\bar{R} = R/M$.

По построению $\bar{R}$ — подпрямо неразложимая алгебра. При этом, если $\bar{C}$ — сердцевина этой алгебры, то $\bar{C} \subseteq I = I + M/M$, так как $\mathfrak{r} \in I$. Кроме того, по построению $M \supseteq PI + I^2$. Поэтому $PI = 0 = I^2$. Но тогда в силу доказанного и $\bar{C}^2 = 0 = P\bar{C}$, т. е. $\bar{C}$ — алгебра с нулевым умножением и $(0 : \bar{C})_{\Phi} \supseteq P$, т. е. $(0 : \bar{C})_{\Phi} \in \mathfrak{P}$.

Учитывая доказанное, возьмем любой ненулевой идеал $\bar{B}$ алгебры $\bar{R}$. Тогда в силу того, что алгебра R подпрямо неразложима, верно включение $\bar{B} \supseteq \bar{C}$, и потому $\bar{C}$ — идеал в алгебре $\bar{B}$. Но $P\bar{C} + \bar{C}^2 = 0 \neq \bar{C}$. Поэтому алгебра $\bar{B}$ не является $f_{\mathfrak{P}}$ -радикальной алгеброй.

Таким образом, если алгебра R не $f_{\mathfrak{P}}$ -радикальна, то существует такой ненулевой гомоморфный образ $\bar{R}$ алгебры R , что все ненулевые идеалы $\bar{B}$ в $\bar{R}$ не $f_{\mathfrak{P}}$ -радикальны. Но тогда, если все ненулевые гомоморфные образы алгебры A имеют ненулевые $f_{\mathfrak{P}}$ -радикальные идеалы, то сама алгебра будет $f_{\mathfrak{P}}$ -радикальной алгеброй. А это и означает, что класс $\mathcal{R}(f_{\mathfrak{P}})$ всех $f_{\mathfrak{P}}$ -радикальных алгебр удовлетворяет условию K2.

Из доказанного вытекает, что класс $\mathcal{R}(f_{\mathfrak{P}})$ радикален в смысле Куроша, и потому существует (и притом точно один) радикал $f_{\mathfrak{P}}$ такой, что класс $\mathcal{R}(f_{\mathfrak{P}})$ совпадает с классом всех $f_{\mathfrak{P}}$ -радикальных алгебр в смысле этого радикала (как и должно быть согласно обозначениям).

Мы считаем, что множество $\mathfrak{P}$ замкнуто относительно увеличений. Поэтому в силу предложения 1 существуют такие кручения $\mathfrak{s}$, что $\text{Sim}(\mathfrak{s}) = \emptyset$, $\text{Sp}(\mathfrak{s}) = \mathfrak{P}$. Пусть $\mathfrak{s}$ — любое из таких кручений. Сравним радикал $f_{\mathfrak{P}}$ с радикалом $\mathfrak{s}^*$, дополнительным к $\mathfrak{s}$ в классе всех радикалов.

По множеству $\mathfrak{P}$ строим, как и в теореме 4, класс $\mathcal{C}_{\mathfrak{P}}$ всех таких алгебр C с нулевым умножением, являющихся сердцевинами подпрямо неразложимых алгебр, что $(0:C)_{\Phi} \in \mathfrak{P}$. Тогда в силу выбора кручения $\mathfrak{s}$ получаем, что класс $\mathcal{N}(\mathfrak{s})$ всех подпрямо неразложимых алгебр с $\mathfrak{s}$ -радикальной сердцевиной совпадает с классом $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_{\mathfrak{P}}}$ всех подпрямо неразложимых алгебр с сердцевиной из класса $\mathcal{C}_{\mathfrak{P}}$. Отсюда вытекает равенство

$$S_{\mathcal{M}_{\mathcal{C}_{\mathfrak{P}}}} = S_{\mathcal{N}(\mathfrak{s})} = \mathfrak{s}^*. \quad (49)$$

Пусть R — $f_{\mathfrak{P}}$ -радикальная алгебра. Возьмем любой (ненулевой) подпрямо неразложимый гомоморфный образ $\bar{R}$ алгебры R . Алгебра $\bar{R}$ тоже будет $f_{\mathfrak{P}}$ -радикальна. Поэтому для сердцевины $\bar{C}$ подпрямо неразложимой алгебры $\bar{R}$ верно равенство $\bar{C} = P\bar{C} + \bar{C}^2$ для всех $P \in \mathfrak{P}$. Отсюда

вытекает, что одновременное выполнение соотношений $(0 : \bar{C})_{\Phi} \in \mathfrak{P}$ и $\bar{C}^2 = 0$ невозможно, т. е. $\bar{C} \notin \mathcal{C}_{\mathfrak{P}}$. Но тогда и $\bar{R} \notin \mathfrak{M}_{\mathcal{C}_{\mathfrak{P}}}$, т. е. алгебра R не отображается гомоморфно на ненулевые алгебры из класса $\mathfrak{M}_{\mathcal{C}_{\mathfrak{P}}}$. В силу (49) алгебра R $\mathfrak{v}^*$ -радикальна.

Обратно, пусть алгебра R не является $f_{\mathfrak{P}}$ -радикальной. Тогда, как и выше, существует такой подпрямо неразложимый гомоморфный образ $\bar{R} = R/M$ алгебры R , что для сердцевин $\bar{C}$ подпрямо неразложимой алгебры R верны соотношения $\bar{C}^2 = 0$ и $(0 : \bar{C})_{\Phi} \in \mathfrak{P}$. Последнее означает, что $\bar{R} \in \mathfrak{M}_{\mathcal{C}_{\mathfrak{P}}}$. Поэтому в силу (49) алгебра R не $\mathfrak{v}^*$ -радикальна.

Таким образом, класс $\mathcal{R}(f_{\mathfrak{P}})$ всех $f_{\mathfrak{P}}$ -радикальных алгебр совпадает с классом $\mathcal{R}(\mathfrak{v}^*)$ всех $\mathfrak{v}^*$ -радикальных алгебр. Но тогда совпадают и радикалы $f_{\mathfrak{P}}$ и $\mathfrak{v}^*$, что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы легко вытекает описание радикалов, дополнительных в классе всех радикалов некоторым кручениям, так как теорема 7 дает описание радикалов, дополнительных в классе всех радикалов кручениям, соответствующим парам вида $(\Phi, \mathfrak{P})$. А именно, справедлива

Теорема 8. *Если $\mathfrak{v}$ — кручение, то для радикала $\mathfrak{v}^*$, дополнительного к кручению $\mathfrak{v}$ в классе всех радикалов, верно равенство*

$$\mathfrak{v}^* = S_{\mathfrak{M}_{\text{Sim}(\mathfrak{v})}} \wedge f_{\text{Sp}(\mathfrak{v})}. \quad (50)$$

Радикал τ дополнителен в классе всех радикалов к некоторому кручению тогда и только тогда, когда он представим в виде

$$\tau = S_{\mathfrak{M}_{\Pi}} \wedge f_{\mathfrak{P}}, \quad \text{где } \Pi \subseteq \text{Simple}, \quad \mathfrak{P} \subseteq \text{Spec } \Phi. \quad (51)$$

Действительно, равенство (50) вытекает из предложения 3 и теоремы 2.7. Поэтому, если радикал τ дополнителен к некоторому кручению в классе всех радикалов, то он представим в виде (51). Обратно, пусть радикал τ представим в виде (51). В силу теоремы 7 можно считать, что множество $\mathfrak{P}$ замкнуто относительно увеличений, т. е. $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\uparrow$, так как $f_{\mathfrak{P}} = f_{\mathfrak{P}\uparrow}$. Но тогда в силу предложения 1

существует такое кручение ϑ , что $\text{Sim}(\vartheta) = \Pi$ и $\text{Sp}(\vartheta) = \mathfrak{F}$. Сравнивая (50) и (51), получаем равенство $\tau = \vartheta^*$ для этого кручения ϑ , т. е. радикал τ дополнителен в классе всех радикалов к некоторому кручению.

В заключение параграфа покажем, что не для любого кручения ϑ дополнительный радикал ϑ^* будет кручением, т. е. равенство $\vartheta^* = \vartheta^0$ может и не быть верным. Для этого мы укажем условия, при которых радикал ϑ^* будет кручением для любого кручения ϑ .

В силу следствия 1 из теорем 2 и 3, если кручение ϑ наднильпотентно или подыдемпотентно, то радикал ϑ^* будет кручением. В связи с этим укажем условия, при которых любое кручение наднильпотентно или подыдемпотентно.

Теорема 9. *Для того чтобы любое кручение было наднильпотентным или подыдемпотентным, необходимо и достаточно, чтобы основное кольцо Φ было локальным*) и наибольший собственный идеал в Φ — нильпотентным.*

Доказательство. Пусть основное кольцо Φ локально и наибольший идеал в Φ нильпотентен. Ясно, что тогда наибольшим собственным идеалом в Φ будет его нильрадикал N — множество всех нильпотентных элементов кольца Φ , причем по условию, $\text{Spec } \Phi = \{N\}$ и $N^n = 0$ для некоторого целого $n \geq 1$.

Предположим, что кручение ϑ не является подыдемпотентным. Это означает в силу теоремы 2, что $\text{Sp}(\vartheta) \neq \emptyset$, и потому по предположению $\text{Sp}(\vartheta) = \{N\} = \text{Spec } \Phi$. Поэтому по построению множества $\text{Sp}(\vartheta)$, алгебра $(\Phi/N)^0$ ϑ -радикальна. Но, очевидно, $\Phi/N = F$ — поле. Поэтому одномерная алгебра с нулевым умножением над полем F будет ϑ -радикальной. Но тогда и для любого линейного пространства L над полем F алгебра L^0 с нулевым умножением ϑ -радикальна как прямая сумма ϑ -радикальных алгебр — одномерных подпространств в L . Учитывая это, возьмем любую алгебру C с нулевым умножением и любой элемент $c \in C$. По условию, $N^n = 0$ для некоторого целого числа $n \geq 1$. Рассмотрим ряд $\Phi c \supseteq Nc \supseteq \dots \supseteq N^i c \supseteq \dots \supseteq$

*) Напомним, что ассоциативно-коммутативное кольцо Φ называется локальным, если среди собственных идеалов в Φ существует наибольший. Ясно, что если множество $\text{Spec } \Phi$ одноэлементно, то кольцо Φ локально, так как Φ — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей.

$\cong N^n c = 0$. Ясно, что все $N^i c$ — идеалы алгебры Φc (главного идеала алгебры C), так как C — алгебра с нулевым умножением. При этом $N(N^i c/N^{i+1} c) = 0$ для любого $i \geq 0$. Поэтому все факторы $N^i c/N^{i+1} c$ являются линейными пространствами над полем $F = \Phi/N$, а значит — $\mathfrak{F}$ -радикальными алгебрами. Поэтому и алгебра Φc $\mathfrak{F}$ -радикальна. Но тогда в силу произвольности выбора элемента $c \in C$ алгебра C тоже $\mathfrak{F}$ -радикальна как сумма $\mathfrak{F}$ -радикальных идеалов. Поэтому все алгебры с нулевым умножением $\mathfrak{F}$ -радикальны. Но тогда, как легко видеть, и все нильпотентные алгебры $\mathfrak{F}$ -радикальны, т. е. кручение $\mathfrak{F}$ наднильпотентно.

Таким образом, любое кручение $\mathfrak{F}$ наднильпотентно или подыдемпотентно. Мы доказали достаточность.

Докажем теперь необходимость условий, налагаемых на Φ .

Пусть любое кручение $\mathfrak{F}$ наднильпотентно или подыдемпотентно.

Возьмем любой первичный собственный идеал P в Φ . Зафиксировав P , рассмотрим класс $\mathcal{K}(\mathcal{K}_P)$ всех таких нильалгебр A , что для любого элемента $a \in A$ верно равенство $P^m a = 0$ для некоторого целого $m \geq 1$. Такие нильалгебры A назовем, для краткости, $\mathcal{K}_P$ -радикальными.

Как и для обычных нильалгебр (см. § 2 гл. 1) легко получаем, что гомоморфный образ и подалгебра любой $\mathcal{K}_P$ -радикальной алгебры сами $\mathcal{K}_P$ -радикальны, расширение $\mathcal{K}_P$ -радикальной алгебры с помощью $\mathcal{K}_P$ -радикальной алгебры само $\mathcal{K}_P$ -радикально и потому сумма любого множества $\mathcal{K}_P$ -радикальных идеалов будет $\mathcal{K}_P$ -радикальным идеалом. Поэтому в любой алгебре R существует наибольший $\mathcal{K}_P$ -радикальный идеал $\mathcal{K}_P(R)$, отображение $\mathcal{K}_P: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ будет кручением и, как и должно быть согласно обозначениям, класс всех алгебр, радикальных относительно построенного кручения, совпадает с классом $\mathcal{K}(\mathcal{K}_P)$.

Ясно, что кручение $\mathcal{K}_P$ не является подыдемпотентным, так как $\mathcal{K}_P$ -радикальные неидемпотентные алгебры существуют: такой будет, например, алгебра $(\Phi/P)^0$. Поэтому по предположению, кручение $\mathcal{K}_P$ должно быть наднильпотентным. Но тогда все алгебры с нулевым умножением $\mathcal{K}_P$ -радикальны. В частности, $\mathcal{K}_P$ -радикальна и алгебра Φ^0 с нулевым умножением, полученная из мо-

дуля Φ . А это означает, как легко видеть, что $P^m = 0 = P^{m+1}$ для некоторого $m \geq 1$.

В силу произвольности выбора P получаем, что все первичные собственные идеалы в Φ нильпотентны. Но тогда, как легко видеть, $\text{Срес } \Phi = \{P\}$ и по доказанному $P^m = 0$ для некоторого целого $m \geq 1$.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает, в частности, что если Φ — поле, то для любого кручения $\mathfrak{B}$ радикал $\mathfrak{B}^*$ будет кручением, так как любое кручение является, в этом случае, наднильпотентным или подыдемпотентным.

Теорема 10. *Равносильны утверждения:*

а) Для любого кручения $\mathfrak{B}$ радикал $\mathfrak{B}^*$ является кручением.

б) Для любого $\mathfrak{B} \in \text{Срес } \Phi$ радикал $f_{\mathfrak{B}}$ является кручением.

в) Радикал $f_{\text{Мах } \Phi}$ является кручением.

г) $\text{Срес } \Phi = \text{Мах } \Phi$, т. е. все первичные собственные идеалы в Φ максимальны.

д) Для любого $P \in \text{Срес } \Phi$ радикал a_P^* является кручением.

Доказательство. Импликация а) $\Rightarrow$ б) вытекает из теоремы 7 и предложения 1, а импликация б) $\Rightarrow$ в) очевидна, так как $\text{Мах } \Phi \subseteq \text{Срес } \Phi$.

в) $\Rightarrow$ г). Допустим, что г) неверно, т. е. существуют не максимальные первичные собственные идеалы в Φ . Пусть P — один из них.

По первичному собственному идеалу P строим поле дробей F_P кольца Φ/P . По полю F_P строим, как и в лемме 2, двумерную алгебру R над F_P с базисом $\{\bar{1}, e\}$, считая, что $\bar{1}$ — единица, а $e^2 = 0$. В результате получаем, что единственным собственным ненулевым идеалом алгебры (ассоциативно-коммутативной!) R будет $F_P e \simeq F_P^0$, причем $R/F_P e \simeq F_P \bar{1} \simeq F_P$. Но, очевидно, множество $\text{Мах } \Phi$ замкнуто относительно увеличений. Поэтому алгебра R будет $f_{\text{Мах } \Phi}$ -радикальной, так как она не отображается гомоморфно на (ненулевые) подпрямо неразложимые алгебры с сердцевинкой из класса $\mathcal{E}_{\text{Мах } \Phi}$: по предположению первичный собственный идеал $P = (0 : F_P e)_{\Phi}$ не максимален.

С другой стороны, возьмем любую подпрямо неразложимую алгебру Q с нулевым умножением. Тогда сердцевина S алгебры Q будет квазипростой алгеброй с нуле-

вым умножением, так как в алгебре Q все подмодули (т. е. все подалгебры) будут идеалами, а C — наименьший ненулевой идеал в C . Но тогда в силу предложения 2.1 $(0 : C)_\Phi \in \text{Max } \Phi$, и потому $Q \in \mathfrak{M}_{\mathcal{C}'}$, где $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_{\text{Max } \Phi}$.

Из доказанного легко вытекает, что все алгебры с нулевым умножением будут $f_{\text{Max } \Phi}$ -полупросты, так как $f_{\text{Max } \Phi} = S_{\mathfrak{M}_{\mathcal{C}'}}$. Но тогда, в частности, будет $f_{\text{Max } \Phi}$ -полупроста и сердцевина F_{pe} подпрямо неразложимой алгебры $R = F_P \bar{1} \dot{+} F_{pe}$. Поэтому радикал $f_{\text{Max } \Phi}$ не является кручением. Следовательно утверждение в) неверно.

г) $\Rightarrow$ д). Пусть верно г), т. е. все первичные собственные идеалы в Φ максимальны. Допустим, что утверждение д) неверно, т. е. для некоторого $P \in \text{Spec } \Phi$ радикал a_P^* не является кручением. Этот идеал P выберем и зафиксируем.

Пусть $\mathfrak{P} = \{P\}$. По предположению множество $\mathfrak{P}$ замкнуто и относительно увеличений и относительно уменьшений, так как в рассматриваемом нами случае $(\text{Max } \Phi = \text{Spec } \Phi)$ все первичные собственные идеалы в Φ попарно не сравнимы. Замечая, что для кручения a_P верны равенства

$$\text{Sim}(a_P) = \emptyset, \quad \text{Sp}(a_P) = \{P\} = \mathfrak{P}$$

(см. предложения 2 и 3), получаем в силу теорем 5 и 8 равенства

$$a_P^* = f_{\mathfrak{P}}, \quad a_P^* = S_{\mathfrak{P}}.$$

Но по предположению радикал a_P^* не является кручением. Поэтому верно строгое неравенство $a_P^* > a_P^*$. Но тогда, как легко видеть, существует ненулевая $f_{\mathfrak{P}}$ -радикальная алгебра в классе $\mathcal{B}_{\mathfrak{P}}$. Пусть A — эта алгебра.

По построению A — $f_{\mathfrak{P}}$ -радикальная алгебра, $A \in \mathcal{B}_{\mathfrak{P}}$ и $A \neq 0$. Из последних двух соотношений вытекает, что алгебра A $f_{\mathfrak{P}}$ -полупроста,

$$(a \in A, a \neq 0) \Rightarrow (0 : a)_\Phi \subseteq P, \quad (52)$$

причем в алгебре A есть ненулевые нильпотентные идеалы. Но тогда в A есть и ненулевые идеалы, являющиеся алгебрами с нулевым умножением. Пусть B — один из таких идеалов. По построению, $B^2 = 0 \neq B$.

Выберем и зафиксируем ненулевой элемент $b \in B$.

С помощью леммы Куратовского — Цорна строим прямо неразложимую алгебру $\bar{A} = A/M$, где M — максимальный среди идеалов алгебры A , не содержащих элемента b . Пусть $\bar{C}$ — сердцевина подпрямо неразложимой алгебры $\bar{A} = A/M$. Тогда из $b \notin M$ вытекает, что образ $\bar{B}$ идеала B не равен 0 и потому $\bar{B} \supseteq \bar{C}$. Но B — алгебра с нулевым умножением. Поэтому и $\bar{C}$ — алгебра с нулевым умножением, так как $\bar{C}^2 \subseteq \bar{B}^2 = 0$. Но тогда $\bar{C} \notin \mathcal{C}_{\mathfrak{F}}$ в силу $f_{\mathfrak{F}}$ -радикальности алгебры A , т. е. $(0 : \bar{C})_{\Phi} \neq P$. С другой стороны, в силу леммы 1 $(0 : b)_{\Phi} \subseteq (0 : \bar{b})_{\Phi} = (0 : \bar{C})_{\Phi}$. Таким образом,

$$(0 : b)_{\Phi} \subseteq (0 : \bar{C})_{\Phi}, \quad (0 : b)_{\Phi} \subseteq P, \quad P \neq (0 : \bar{C})_{\Phi} \in \text{Срес } \Phi \quad (53)$$

в силу (52) и доказанного.

Возьмем произвольный элемент $\delta \in P$. В силу леммы 1.1.10 множество $\Phi \setminus P$ будет максимальной m -системой, не содержащей 0, так как в рассматриваемом нами случае все первичные собственные идеалы будут минимальными первичными идеалами. Замечая, что любая мультипликативно замкнутая система является m -системой, получаем в силу коммутативности Φ , что $\Phi \setminus P$ — максимальная мультипликативно замкнутая система, не содержащая 0. Но множество

$$\Delta = \{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \mid \alpha_i \in \Phi, \text{ причем } \alpha_i = \delta \text{ или } \alpha_i \notin P\} \quad (54)$$

будет мультипликативно замкнуто и строго больше $\Phi \setminus P$, так как $\delta \in \Delta$. Поэтому $0 \in \Delta$ в силу максимальной мультипликативно замкнутой системы $\Phi \setminus P$. Еще раз применяя коммутативность Φ , получаем в силу (54), что $0 = \delta^m \gamma$ для некоторого $\gamma \in \Phi \setminus P$ и некоторого целого числа $m \geq 1$.

Из $\gamma \notin P$, $\gamma \in (0 : \delta^m b)_{\Phi}$ вытекает в силу (52), что $\delta^m b = 0$. Следовательно $\delta^m \in (0 : \bar{C})_{\Phi}$ в силу (53). Но $(0 : \bar{C})_{\Phi}$ — первичный идеал в Φ . Поэтому $\delta \in (0 : \bar{C})_{\Phi}$ в силу коммутативности Φ . Но тогда в силу произвольности выбора элемента $\delta \in P$ получаем включение $P \subseteq (0 : \bar{C})_{\Phi}$. Но в рассматриваемом нами случае все первичные собственные идеалы максимальны. Поэтому $P = (0 : \bar{C})_{\Phi}$. Противоречие.

д) $\Rightarrow$ а). Пусть верно д), т. е. все радикалы $a_{\mathfrak{F}}^*$ с $P \in \text{Срес } \Phi$ являются кручениями. Но, как легко видеть,

для любой простой алгебры Q кручение l_Q будет подыдемпотентным. Поэтому в силу теоремы 2 и все радикалы l_Q^* , где $Q \in \text{Simple}$, будут кручениями. Но тогда в силу предложения 2 для любого кручения $\mathfrak{g}$ радикал $\mathfrak{g}^*$ тоже будет кручением как пересечение некоторого семейства кручений.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает, в частности, что если $\Phi = \mathbb{Z}$ — кольцо всех целых чисел (т. е. мы рассматриваем просто ассоциативные кольца — любое кольцо является алгеброй над $\mathbb{Z}$), то существуют такие кручения $\mathfrak{g}$, что радикал $\mathfrak{g}^*$ не является кручением.

§ 4. Наднильпотентные и специальные радикалы

В этом параграфе мы рассмотрим более подробно наднильпотентные и специальные радикалы и взаимосвязь между ними. Всюду ниже будем считать, что *основной класс $\mathfrak{A}$ алгебр совпадает с классом всех ассоциативных алгебр*. На основное кольцо Φ (ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей $1 \neq 0$) никаких дополнительных ограничений не налагается, если противное не оговорено особо.

Ясно, что наднильпотентные радикалы *) — это в точности кручения s , большие нижнего нильрадикала $\mathfrak{B}$ (см. теорему 1.2). Поэтому в силу теоремы 2.3.3 получаем, что верно

Предложение 1. Совокупность $\mathcal{K}$ всех наднильпотентных радикалов является «полной дистрибутивной решеткой» — подрешеткой («главным фильтром») «полной решетки» Tors всех кручений. Более того, для любого непустого семейства наднильпотентных радикалов $\mathfrak{g}_i$ их пересечение $\bigwedge_{i \in \Gamma} \mathfrak{g}_i$ и объединение $\bigvee_{i \in \Gamma} \mathfrak{g}_i$ в «решетке» $\mathcal{K}$ те же, что и в «решетке» Tors , и потому $\mathfrak{g} \wedge (\bigvee_{i \in \Gamma} \mathfrak{g}_i) = \bigvee_{i \in \Gamma} (\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}_i)$

для любого наднильпотентного радикала $\mathfrak{g}$ (т. е. «решетка» $\mathcal{K}$ сильно дистрибутивна, как и «решетка» Tors).

Из этого предложения вытекает, что свойства «полных решеток» $\mathcal{K}$ и Tors должны быть достаточно близки. Тем не менее мы не смогли ответить на следующий естественно возникающий вопрос:

*) Наднильпотентные радикалы и наднильпотентные кручения — это одно и то же по определению. Аналогично для специальных радикалов и специальных кручений.

Будет ли «полная дистрибутивная решетка» $\mathcal{K}$ всех наднильпотентных радикалов атомной?

Мы можем дать лишь частичный ответ на этот вопрос: атомы в «полной решетке» $\mathcal{K}$ есть. А именно, верно

Предложение 2. Пусть a — атом в «решетке» Tors всех кручений, не содержащийся в нижнем нильрадикале $\mathfrak{B}$. Тогда $\mathfrak{B} \vee a$ — атом в «решетке» $\mathcal{K}$. При этом, если a_1 и a_2 — различные атомы «решетки» Tors , не содержащиеся в нижнем нильрадикале $\mathfrak{B}$, то и атомы $\mathfrak{B} \vee a_1$, $\mathfrak{B} \vee a_2$ «решетки» $\mathcal{K}$ будут различными. Атом a «решетки» Tors всех кручений не содержится в нижнем нильрадикале $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $a = l_Q$ для некоторой простой алгебры Q .

Доказательство. Последнее утверждение легко вытекает из описания атомов «решетки» Tors , данного в теореме 2.1.

Пусть a — атом в «решетке» Tors всех кручений, не содержащийся в нижнем нильрадикале, и Q — соответствующая простая алгебра, т. е. $a = l_Q$. Тогда из свойств нижнего радикала вытекает, что кручение $\mathfrak{B} \vee a$ совпадает с нижним радикалом, порожденным классом всех таких алгебр R , что алгебра R либо $\mathfrak{B}$ -радикальна, либо изоморфна заданной простой алгебре Q . Учитывая это и будем вести доказательство.

Пусть $\mathfrak{v}$ — кручение и $\mathfrak{B} \vee a \geq \mathfrak{v} > \mathfrak{B}$. Из $\mathfrak{v} > \mathfrak{B}$ вытекает существование $\mathfrak{v}$ -радикальной не $\mathfrak{B}$ -радикальной алгебры A . Эта алгебра, как и любая другая ненулевая $\mathfrak{B} \vee a$ -радикальная алгебра, имеет строго возрастающий ω -ряд (см. предложение 2.2.5), все факторы которого или $\mathfrak{B}$ -радикальны или изоморфны алгебре Q . Так как алгебра A $\mathfrak{B}$ -радикальна, этот ω -ряд имеет хотя бы один фактор, изоморфный Q . Но все факторы ω -ряда $\mathfrak{v}$ -радикальной алгебры $\mathfrak{v}$ -радикальны. Поэтому $\mathfrak{v}$ -радикальна и алгебра Q . Но тогда $\mathfrak{v} \geq a$, так как $a = l_Q$ — нижний радикал, порожденный классом алгебр, изоморфных Q . Поэтому $\mathfrak{v} \geq \mathfrak{B} \vee a$, т. е. $\mathfrak{v} = \mathfrak{B} \vee a$.

В силу произвольности выбора $\mathfrak{v}$ $\mathfrak{B} \vee a$ — атом в «решетке» $\mathcal{K}$.

Пусть теперь a_1 и a_2 — разные атомы «решетки» Tors , не содержащиеся в $\mathfrak{B}$. Тогда $a_1 \wedge a_2 = 0$ и потому $(\mathfrak{B} \vee a_1) \wedge (\mathfrak{B} \vee a_2) = \mathfrak{B}$. А отсюда вытекает, что кручения $\mathfrak{B} \vee a_1$ и $\mathfrak{B} \vee a_2$ различны.

Предложение доказано.

Переходя к специальным радикалам, дадим одну «рабочую» характеристику специальных классов алгебр. Напомним, что все специальные классы алгебр являются подклассами класса π всех первичных алгебр. Здесь и ниже нам удобно считать, что все первичные алгебры ненулевые. Поэтому наименьшим специальным классом алгебр будет пустой класс, а наибольшим — класс π .

Лемма 1. *Класс $\mathcal{M}$ первичных алгебр специален тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условиям:*

C1. *Если B — ненулевой идеал алгебры A из класса $\mathcal{M}$, то и B — алгебра из $\mathcal{M}$.*

C2. *Если ненулевой идеал B первичной алгебры A является алгеброй из класса $\mathcal{M}$, то и A — алгебра из $\mathcal{M}$.*

Действительно, первичная алгебра является точным расширением любого своего ненулевого идеала. Поэтому любой специальный класс $\mathcal{M}$ алгебр удовлетворяет условиям C1 и C2, так как он замкнут относительно взятия идеалов и точных расширений в силу следствия 1.5. Обратно, пусть класс $\mathcal{M}$ первичных алгебр удовлетворяет условиям C1 и C2. В силу условия C1 класс $\mathcal{M}$ замкнут относительно взятия идеалов. А в силу условия C2 он замкнут относительно точных расширений, так как точное расширение первичной алгебры само будет первичной алгеброй. Но тогда в силу следствия 1.5 $\mathcal{M}$ — специальный класс алгебр.

Лемма 2. *Пересечение и объединение любого семейства специальных классов сами являются специальными классами алгебр. Более того, если $\mathcal{M}_i$ — специальные классы алгебр, то $S_{\bigcup_{i \in \Gamma} \mathcal{M}_i} = \bigcap_{i \in \Gamma} S_{\mathcal{M}_i}$.*

Действительно, первое утверждение легко вытекает из леммы 1. Кроме того, если нам дано некоторое семейство специальных классов $\mathcal{M}_i$, $i \in \Gamma$, то в силу сказанного $\bigcup_{i \in \Gamma} \mathcal{M}_i$ — специальный класс алгебр, и потому для любой алгебры A

$$\begin{aligned} S_{\bigcup_{i \in \Gamma} \mathcal{M}_i}(A) &= \bigcap \{P \mid P \text{ — идеал в } A, A/P \in \bigcup_{i \in \Gamma} \mathcal{M}_i\} \\ &= \bigcap (\bigcap \{P \mid P \text{ — идеал в } A, A/P \in \mathcal{M}_i\}) = \\ &= \bigcap_{i \in \Gamma} S_{\mathcal{M}_i}(A). \end{aligned}$$

А это и означает, что $S_{\bigcup_{i \in \Gamma} \mathcal{M}_i} = \bigcap_{i \in \Gamma} S_{\mathcal{M}_i}$.

Предложение 3. Для любого кручения $\mathfrak{z}$ класс $\pi(\mathfrak{z}) = \pi \cap \mathcal{P}(\mathfrak{z})$ всех первичных $\mathfrak{z}$ -полупростых алгебр специален и потому верхний радикал $S_{\pi(\mathfrak{z})}$ будет специальным радикалом. Радикал $S_{\pi(\mathfrak{z})}$ является наименьшим специальным радикалом, большим заданного кручения $\mathfrak{z}$. Кручение $\mathfrak{z}$ будет специальным тогда и только тогда, когда любая ненулевая $\mathfrak{z}$ -полупростая алгебра гомоморфно отображается на некоторую первичную $\mathfrak{z}$ -полупростую алгебру. Это равносильно совпадению кручения $\mathfrak{z}$ и специального радикала $S_{\pi(\mathfrak{z})}$.

Доказательство. Ясно, что класс $\pi(\mathfrak{z})$ всех первичных $\mathfrak{z}$ -полупростых алгебр удовлетворяет условию C1, так как и класс π всех первичных алгебр и класс $\mathcal{P}(\mathfrak{z})$ всех $\mathfrak{z}$ -полупростых алгебр удовлетворяют этому условию.

Пусть ненулевой идеал B первичной алгебры A является $\mathfrak{z}$ -полупростой алгеброй. Тогда $\mathfrak{z}(A) \cap B = \mathfrak{z}(B) = 0$, и потому $\mathfrak{z}(A)B = 0$. Но тогда в силу первичности алгебры A $\mathfrak{z}(A) = 0$, т. е. A — первичная $\mathfrak{z}$ -полупростая алгебра. Поэтому класс $\pi(\mathfrak{z})$ удовлетворяет и условию C2.

В силу леммы 1 класс $\pi(\mathfrak{z})$ специален, и потому верхний радикал $S_{\pi(\mathfrak{z})}$ будет специальным радикалом. Кроме того, очевидно, $S_{\pi(\mathfrak{z})} \supseteq S_{\mathcal{P}(\mathfrak{z})} = \mathfrak{z}$. С другой стороны, по определению верхнего радикала, если $\mathcal{M}$ — специальный класс алгебр и $s \leq S_{\mathcal{M}}$, то $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(S_{\mathcal{M}}) \cap \pi \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{z}) \cap \pi = \pi(\mathfrak{z})$, и потому $S_{\mathcal{M}} \supseteq S_{\pi(\mathfrak{z})}$.

Следовательно, $S_{\pi(\mathfrak{z})}$ — наименьший специальный радикал, больший заданного кручения $\mathfrak{z}$. В частности, кручение $\mathfrak{z}$ будет специальным радикалом тогда и только тогда, когда оно совпадает со специальным радикалом $S_{\pi(\mathfrak{z})}$.

Учитывая доказанное, допустим, что кручение $\mathfrak{z}$ является специальным радикалом. Тогда $\mathfrak{z} = S_{\pi(\mathfrak{z})}$, и потому в силу теоремы 1.1 $\mathfrak{z}$ -полупростые алгебры — это в точности подпрямые произведения первичных $\mathfrak{z}$ -полупростых алгебр. Но тогда, очевидно, любая ненулевая $\mathfrak{z}$ -полупростая алгебра гомоморфно отображается на первичные $\mathfrak{z}$ -полупростые алгебры.

Обратно, пусть любая ненулевая $\mathfrak{z}$ -полупростая алгебра отображается гомоморфно на первичные $\mathfrak{z}$ -полупростые алгебры. Тогда класс $\mathcal{R}(\mathfrak{z})$ всех $\mathfrak{z}$ -радикальных алгебр (т. е. класс алгебр, не отображающихся гомоморфно

на ненулевые $\mathfrak{F}$ -полупростые алгебры) совпадает с классом $\mathcal{K}(S_{\pi(\mathfrak{F})})$ всех $S_{\pi(\mathfrak{F})}$ -радикальных алгебр (т. е. с классом алгебр, не отображающихся гомоморфно на первичные $\mathfrak{F}$ -полупростые алгебры). Но тогда кручение $\mathfrak{F}$ будет специальным, так как оно совпадет со специальным радикалом $S_{\pi(\mathfrak{F})}$.

Предложение доказано.

Теорема 1. *Совокупность $\mathfrak{F}$ всех специальных радикалов является «полной решеткой». Более того, верны утверждения:*

а) Если $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — специальные радикалы, то $\mathfrak{F}_1 \leq \mathfrak{F}_2$ тогда и только тогда, когда $\pi(\mathfrak{F}_1) \supseteq \pi(\mathfrak{F}_2)$ ($\pi(\mathfrak{F})$ — класс всех первичных $\mathfrak{F}$ -полупростых алгебр).

б) Пересечение любого семейства специальных радикалов (как кручений) само будет специальным радикалом.

в) Для любого семейства специальных радикалов $\mathfrak{F}_i$, $i \in \Gamma$, их объединением $\bigvee_{i \in \Gamma} \mathfrak{F}_i$ в $\mathfrak{F}$, т. е. наименьшим специальным радикалом, большим всех специальных радикалов $\mathfrak{F}_i$, будет верхний радикал $S_{\bigcap_{i \in \Gamma} \pi(\mathfrak{F}_i)}$.

г) Полная решетка $\mathfrak{F}$ дистрибутивна. Более того, для любого специального радикала $\mathfrak{F}$ и любого семейства специальных радикалов $\mathfrak{F}_i$ верно равенство $\mathfrak{F} \wedge (\bigvee_{i \in \Gamma} \mathfrak{F}_i) = \bigvee_{i \in \Gamma} (\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{F}_i)$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что если $\mathfrak{F}$ — кручение, то класс $\pi(\mathfrak{F})$ всех первичных $\mathfrak{F}$ -полупростых алгебр является наибольшим специальным классом алгебр, содержащимся в классе $\mathcal{P}(\mathfrak{F})$ всех $\mathfrak{F}$ -полупростых алгебр. Но тогда утверждение а) с очевидностью вытекает из предложения 3.

Утверждение б) вытекает из леммы 2.

Возьмем любое семейство специальных радикалов $\mathfrak{F}_i$, $i \in \Gamma$. В силу предложения 3 класс $\pi(\bigvee_{i \in \Gamma} \mathfrak{F}_i)$ — специальный класс алгебр, причем $S_{\pi(\bigvee_{i \in \Gamma} \mathfrak{F}_i)}$ — наименьший специальный радикал, содержащий кручение $\bigvee_{i \in \Gamma} \mathfrak{F}_i$. Но это кручение является по определению наименьшим кручением, содержащим все кручения $\mathfrak{F}_i$. Поэтому $S_{\pi(\bigvee_{i \in \Gamma} \mathfrak{F}_i)}$ — наименьший специальный радикал, больший всех специ-

альных радикалов $\mathfrak{s}_i$. Следовательно, объединение $\bigvee_{i \in \Gamma} \mathfrak{s}_i$ в $\mathfrak{S}$ существует и совпадает со специальным радикалом $S_{\pi}(\bigvee_{i \in \Gamma} \mathfrak{s}_i)$. Но в силу теоремы 2.3.3

$$\begin{aligned} \pi(\bigvee_{i \in \Gamma} \mathfrak{s}_i) &= \pi \cap \mathcal{P}(\bigvee_{i \in \Gamma} \mathfrak{s}_i) = \pi \cap (\bigcap_{i \in \Gamma} \mathcal{P}(\mathfrak{s}_i)) = \\ &= \bigcap_{i \in \Gamma} (\pi \cap \mathcal{P}(\mathfrak{s}_i)) = \bigcap_{i \in \Gamma} \pi(\mathfrak{s}_i). \end{aligned}$$

Следовательно, верно утверждение в).

Остается доказать равенство $\mathfrak{s} \wedge (\bigvee_{i \in \Gamma} \mathfrak{s}_i) = \bigvee_{i \in \Gamma} (\mathfrak{s} \wedge \mathfrak{s}_i)$ для любого специального радикала $\mathfrak{s}$ и любого семейства специальных радикалов $\mathfrak{s}_i$.

Допуская, что это равенство неверно, получаем строгое неравенство — верно соотношение $\mathfrak{s} \wedge (\bigvee_{i \in \Gamma} \mathfrak{s}_i) > \bigvee_{i \in \Gamma} (\mathfrak{s} \wedge \mathfrak{s}_i)$.

Поэтому в силу утверждения а) найдется такая первичная алгебра A , что

$$[\mathfrak{s} \wedge (\bigvee_{i \in \Gamma} \mathfrak{s}_i)](A) = A, \quad [\bigvee_{i \in \Gamma} (\mathfrak{s} \wedge \mathfrak{s}_i)](A) = 0. \quad (1)$$

Первое из равенств (1) дает нам равенство $\mathfrak{s}(A) = A$. Поэтому второе из равенств (1) дает $\mathfrak{s}_i(A) = 0$ для всех $i \in \Gamma$, так как $\mathfrak{s}(A) \cap \mathfrak{s}_i(A) = 0$ для всех $i \in \Gamma$. Но тогда, в силу утверждения в) получаем $[\bigvee_{i \in \Gamma} \mathfrak{s}_i](A) = 0$, так как

алгебра A оказалась первичной $\mathfrak{s}_i$ -полупростой алгеброй для всех $i \in \Gamma$. Отсюда вытекает в силу первого из равенств (1), что $A = \mathfrak{s}(A) \cap [\bigvee_{i \in \Gamma} \mathfrak{s}_i](A) = 0$. Между тем мы

считаем, что $A \neq 0$ как первичная алгебра. Противоречие.

Следовательно, верно и утверждение г).

Теорема доказана.

И в этом случае возникает вопрос, на который мы не смогли ответить:

Будет ли «полная дистрибутивная решетка» $\mathfrak{S}$ всех специальных радикалов атомной?

Снова мы можем дать лишь частичный ответ на поставленный вопрос: атомы в «полной решетке» $\mathfrak{S}$ есть. Как и в случае «полной решетки» $\mathcal{H}$ всех наднильпотентных радикалов, мы можем получить их из атомов «полной решетки» Toys всех кручений. А именно, верно

Предложение 4. Пусть α — атом в «полной решетке» Tors всех кручений, не содержащийся в нижнем нильрадикале $\mathfrak{B}$, т. е. $\alpha = I_Q$ для некоторой простой алгебры Q *). Тогда класс $\pi(\alpha)$ всех первичных α -полупростых алгебр совпадает с классом всех первичных алгебр, не имеющих ненулевых идеалов, изоморфных алгебре Q , и является специальным классом алгебр. При этом специальный радикал $S_{\pi(\alpha)}$ будет атомом в «полной решетке» $\mathfrak{S}$ всех специальных радикалов. Если α_1 и α_2 — различные атомы «полной решетки» Tors , то и атомы $S_{\pi(\alpha_1)}$, $S_{\pi(\alpha_2)}$ «полной решетки» $\mathfrak{S}$ будут различными (α_1 и α_2 — атомы, не содержащиеся в $\mathfrak{B}$).

Доказательство. Пусть α — атом в «полной решетке» Tors всех кручений, не содержащийся в нижнем нильрадикале $\mathfrak{B}$, и Q — соответствующая простая алгебра, т. е. $\alpha = I_Q$. Тогда в силу теоремы 2.4.1 α -полупростые алгебры — это в точности алгебры, не имеющие ненулевых метаидеалов, изоморфных алгебре Q . Но из леммы 1.1.5 легко вытекает, что все идемпотентные метаидеалы являются идеалами. Поэтому алгебры без ненулевых метаидеалов, изоморфных простой алгебре Q , и алгебры без ненулевых идеалов, изоморфных Q , — это одно и то же. Следовательно, класс $\mathcal{P}(\alpha)$ всех α -полупростых алгебр совпадает с классом всех алгебр без ненулевых идеалов, изоморфных заданной простой алгебре Q . Но тогда класс $\pi(\alpha)$ всех первичных α -полупростых алгебр, являющийся специальным классом алгебр в силу предложения 3, совпадает с классом всех первичных алгебр, не имеющих идеалов, изоморфных алгебре Q .

Учитывая доказанное, возьмем любой такой специальный радикал $\mathfrak{s}$, что верно строгое неравенство $S_{\pi(\alpha)} > \mathfrak{s}$. Тогда в силу теоремы 1 $\pi(\mathfrak{s}) \supset \pi(S_{\pi(\alpha)}) = \pi(\alpha)$. Поэтому существует первичная $\mathfrak{s}$ -полупростая алгебра, содержащая алгебру Q в качестве ненулевого идеала. Но тогда сама алгебра Q будет $\mathfrak{s}$ -полупростой алгеброй. Нетрудно видеть, что первичные алгебры, содержащие ненулевой идеал, изоморфный простой алгебре Q , и подпрямо неразложимые алгебры с сердцевинной, изоморфной Q , — это одно и то же.

*) Алгебра Q однозначно определена, с точностью до изоморфизма, в силу теоремы 2.1.

Учитывая это или лемму 1, получаем, что все первичные алгебры, содержащие ненулевой идеал, изоморфный алгебре Q , будут $\mathfrak{B}$ -полупростыми. Но и все первичные алгебры, не содержащие ненулевых идеалов, изоморфных алгебре Q , тоже $\mathfrak{B}$ -полупросты. Поэтому все первичные алгебры $\mathfrak{B}$ -полупросты, т. е. $\pi(\mathfrak{B}) = \pi$. Но тогда $\mathfrak{B} = S_\pi = \mathfrak{B}$ в силу специальности радикала $\mathfrak{B}$.

Из доказанного вытекает, что специальный радикал $S_{\pi(a)}$ является атомом в «полной решетке» $\mathfrak{E}$ всех специальных радикалов. Кроме того, если a_1 и a_2 — различные атомы «полной решетки» Tors , не содержащиеся в нижнем нильрадикале $\mathfrak{B}$, и Q_1, Q_2 — соответствующие им простые алгебры, то $Q_2 - S_{\pi(a_1)}$ -радикальная не $S_{\pi(a_2)}$ -радикальная алгебра. Поэтому специальные радикалы $S_{\pi(a_1)}$ и $S_{\pi(a_2)}$ различны.

Предложение доказано.

Рассмотрим теперь вопрос о коатомах в «полных решетках» $\mathcal{K}$ и $\mathfrak{E}$, т. е. о максимальных элементах этих «решеток».

Теорема 2. *В «полной решетке» $\mathcal{K}$ всех наднильпотентных радикалов не существует коатомов.*

Доказательство. Пусть r — произвольный наднильпотентный радикал, отличный от тривиального радикала e .

Пусть m — любой такой бесконечный кардинал, что $m \geq |\Phi|$ (*). Символом $\mathfrak{A}_m$ мы будем обозначать класс всех таких алгебр R , что $|R| \leq m$. Символом $A(m)$ будем обозначать свободную алгебру с таким множеством X свободных образующих, что $|X| = m$. Из условия $m \geq |\Phi|$ и бесконечности кардинала m легко вытекает, что $|A(m)| = m$. При этом, как хорошо известно, любая алгебра из класса $\mathfrak{A}_m$ будет гомоморфным образом алгебры $A(m)$.

По условию существуют не r -радикальные алгебры. Поэтому существует такой бесконечный кардинал m , что $m \geq |\Phi|$ и алгебра $A(m)$ не r -радикальна. Этот кардинал m выберем и зафиксируем. Ясно, что тогда и для любого кардинала $n > m$ алгебра $A(n)$ не r -радикальна.

*) Символом $|M|$ здесь и ниже обозначается мощность множества M .

Класс $\mathfrak{A}_m$ замкнут, очевидно, относительно гомоморфных образов и идеалов (даже подалгебр). Поэтому в силу следствия 2.4.7 нижний радикал $l_{\mathfrak{A}_m}$, порожденный классом $\mathfrak{A}_m$, будет кручением. Из равенства $|A(m)| = m$ вытекает, что алгебра $A(m)$ будет $l_{\mathfrak{A}_m}$ -радикальной. Поэтому по выбору кардинала m верно строгое неравенство

$$r < r \vee l_{\mathfrak{A}_m}, \quad (2)$$

так как алгебра $A(m)$ не r -радикальна.

Возьмем теперь любой кардинал $n > m$. В силу сказанного свободная алгебра $A(n)$ не r -радикальна и потому

$$V = r(A(n)) < A(n). \quad (3)$$

Поэтому в силу наднильпотентности радикала r и соотношения (3) V — собственный полупервичный идеал. Рассмотрим алгебру $F = A(n)/V$.

В силу (3) F — ненулевая r -полупростая алгебра.

Пусть I — ненулевой идеал в F , $\bar{a}$ — ненулевой элемент из идеала I и a — прообраз элемента $\bar{a}$ при естественном гомоморфизме $A(n) \rightarrow F$. По построению $A(n)$ — свободная алгебра, порожденная таким множеством X свободных образующих, что $|X| = n$. Но множество букв из X , входящих в запись элемента a , конечно. Поэтому, если X_a — множество букв из X , не входящих в запись элемента a , то $|X_a| = n$ в силу бесконечности кардинала n . Замечаем, что

$$\forall x, y \in X_a \mid x \neq y \Rightarrow \bar{a}x \neq \bar{a}y, \quad (4)$$

где мы обозначили символом $\bar{u}$ образ элемента $u \in A(n)$ при естественном гомоморфизме $A(n) \rightarrow F = A(n)/V$.

Действительно, допустим противное. Пусть нашлись такие буквы $x, y \in X$, не входящие в запись элемента a , что $\bar{a}x = \bar{a}y$. Переходя к прообразам, получаем включение $a(x - y) \in V$.

В силу бесконечности множества X существует такое отображение θ множества X в $A(n)$, что все буквы, входящие в запись элемента a , остаются на месте, $\theta(y) = 0$, $\theta(x) = \omega$ — наперед заданный фиксированный элемент из $A(n)$ и $X \subseteq \theta(X)$.

Поскольку алгебра $A(n)$ свободна, это отображение продолжается до эндоморфизма $\varphi: A(n) \rightarrow A(n)$. Но по

построению $\varphi(X) = \theta(X) \supseteq X$. Поэтому $\varphi(A(n)) = A(n)$. В таком случае из свойств радикалов вытекает

$$\varphi(V) = \varphi(r(A(n))) \subseteq r(\varphi(A(n))) = r(A(n)) = V. \quad (5)$$

Кроме того снова по построению $\varphi(a) = a$, $\varphi(x) = \omega$, $\varphi(y) = 0$. Поэтому в силу (5) из $a(x-y) \in V$ вытекает, что $a\omega = \varphi(a(x-y)) \in V$. Между тем, ω — произвольный элемент из $A(n)$. Поэтому $aA(n) \subseteq V$. Но тогда $a \in V$ в силу собственности полупервичного идеала V . Между тем $a \notin V$, так как образ $\bar{a}$ элемента a при гомоморфизме $A(n) \rightarrow A(n)/V$ является ненулевым. Противоречие.

Таким образом, соотношение (4) верно. Поэтому идеал I содержит множество $\bar{a}\bar{X}_a$, причем $|\bar{a}\bar{X}_a| = |X_a| = n = |A(n)|$. Но тогда, очевидно, сам идеал I имеет такую мощность, т. е. $|I| = n$.

В силу леммы 1.1.5 из полупервичности алгебры F , т. е. отсутствия в ней ненулевых нильпотентных идеалов, вытекает, что любой ненулевой метаидеал алгебры F содержит некоторый ненулевой идеал. Но тогда в силу доказанного получаем, что если M — ненулевой идеал в F , то $|M| = n$, и поэтому $M \not\subseteq \mathfrak{A}_m$, так как верно строгое неравенство $m < n$.

Отсюда вытекает, что $F - I_{\mathfrak{A}_m}$ -полупростая алгебра в силу теоремы 2.4.1.

Таким образом, ненулевая алгебра F оказалась и r -полупростой и $I_{\mathfrak{A}_m}$ -полупростой алгеброй. Поэтому в силу теоремы 2.3.3 алгебра F будет $(r \vee I_{\mathfrak{A}_m})$ -полупростой ненулевой алгеброй. Следовательно,

$$r \vee I_{\mathfrak{A}_m} < \varepsilon. \quad (6)$$

А из (2) и (6) вытекает, что наднильпотентный радикал r не будет коатомом в «полной решетке» $\mathcal{K}$ всех наднильпотентных радикалов, так как, очевидно, все кручения, большие наднильпотентного, сами наднильпотентны.

Теорема доказана.

В связи с доказанной теоремой естественно возникает вопрос: существуют ли коатомы в «полной решетке» $\mathfrak{E}$ всех специальных радикалов? Чтобы ответить на этот вопрос, нам понадобятся несколько вспомогательных утверж-

дений. Некоторые из них имеют и самостоятельный интерес.

Предложение 5. Пусть A — первичная алгебра, π_A — наименьший специальный класс алгебр, содержащий алгебру A . Первичная алгебра R принадлежит классу π_A тогда и только тогда, когда в R существует ненулевой идеал I , изоморфный некоторому метаидеалу алгебры A .

Доказательство. Назовем, для краткости, алгебру R π_A -алгеброй, если R — первичная алгебра и существует ненулевой идеал I алгебры R , изоморфный некоторому метаидеалу алгебры A .

Из леммы 1 вытекает, что любой специальный класс алгебр, содержащий алгебру A , содержит и все π_A -алгебры. Поэтому остается доказать, что класс всех π_A -алгебр специален, т. е. удовлетворяет условиям C1 и C2.

Пусть R — π_A -алгебра и I — ее ненулевой идеал, изоморфный некоторому метаидеалу алгебры A . Пусть первичная алгебра Q или является идеалом в R , или содержит алгебру R в качестве идеала. В обоих случаях получаем, как легко видеть, что $QRIRQ$ — ненулевой идеал алгебр I , Q и R . Но тогда $QRIRQ$ — ненулевой идеал алгебры Q , изоморфный некоторому метаидеалу алгебры A . Поэтому Q — π_A -алгебра.

В силу леммы 1 класс всех π_A -алгебр специален.

Предложение 6. Специальный радикал $\mathfrak{s}$ будет коатомом в «полной решетке» $\mathfrak{S}$ всех специальных радикалов тогда и только тогда, когда класс $\pi(\mathfrak{s})$ всех первичных $\mathfrak{s}$ -полупростых алгебр непуст и $\mathfrak{s} = S_{\pi_A}$ для всех $A \in \pi(\mathfrak{s})$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{s}$ — специальный радикал и $\pi(\mathfrak{s}) \neq \emptyset$, т. е. $\mathfrak{s} \neq \varepsilon$.

Пусть $\mathfrak{s}$ — коатом. Тогда, если $A \in \pi(\mathfrak{s})$, то $\pi_A \subseteq \pi(\mathfrak{s})$, и потому $S_{\pi_A} \geq S_{\pi(\mathfrak{s})} = \mathfrak{s}$. Но тогда $\mathfrak{s} = S_{\pi_A}$ в силу максимальности $\mathfrak{s}$ в «полной решетке» $\mathfrak{S}$.

Обратно, пусть $\mathfrak{s} = S_{\pi_A}$ для всех $A \in \pi(\mathfrak{s})$. Пусть $\mathfrak{s}'$ — специальный радикал, причем $\mathfrak{s}' \geq \mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}' \neq \varepsilon$. Тогда в силу теоремы 1 $\pi(\mathfrak{s}') \subseteq \pi(\mathfrak{s})$, $\pi(\mathfrak{s}') \neq \emptyset$. Возьмем любую алгебру $B \in \pi(\mathfrak{s}')$. Тогда $B \in \pi(\mathfrak{s})$, и потому в силу условий, налагаемых на $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}' = S_{\pi(\mathfrak{s}')} \leq S_{\pi_B} = \mathfrak{s}$, т. е. $\mathfrak{s}' = \mathfrak{s}$. А это и означает в силу произвольности выбора $\mathfrak{s}'$ что $\mathfrak{s}$ — коатом в «полной решетке» $\mathfrak{S}$.

Предложение доказано.

Лемма 3. Пусть A — первичная алгебра, B — ненулевой идеал или метаидеал в A . Тогда $|A| \leq 2^{|B|}$.

Доказательство. В алгебре A , как и в любой другой полупервичной алгебре, любой ненулевой метаидеал содержит ненулевой идеал. Поэтому достаточно доказать первое утверждение.

Пусть B — ненулевой идеал первичной алгебры A . Поставим в соответствие каждому элементу $a \in A$ отображение $\rho_a: B \rightarrow B$, действующее по правилу: для всех $b \in B$ верно равенство $b\rho_a = ba$. Если $a_1, a_2 \in A$ и $\rho_{a_1} = \rho_{a_2}$, то по построению $B(a_1 - a_2) = 0$. Но тогда $a_1 = a_2$ в силу первичности алгебры A . Следовательно, элементов в A не больше чем отображений ρ множества B в себя. А это и означает, что $|A| \leq 2^{|B|}$.

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $\mathfrak{g}$ — коатом в «полной решетке» $\mathfrak{S}$ всех специальных радикалов и $n = \min \{|A| \mid A \in \pi(\mathfrak{g})\}$. Тогда $n \leq |R| \leq 2^n$ для всех $R \in \pi(\mathfrak{g})$.

Доказательство. Из непустоты класса $\pi(\mathfrak{g})$ следует существование указанного кардинала n (конечного или бесконечного). Учитывая это, выберем такую алгебру $A \in \pi(\mathfrak{g})$, что $|A| = n$.

Пусть $R \in \pi(\mathfrak{g})$. Тогда, в силу предложения 6 $\mathfrak{g} = S_{\pi R}$. В частности, из $\mathfrak{g}$ -полупростоты алгебры A вытекает, что алгебра A отображается гомоморфно на некоторую первичную алгебру $Q \in \pi_R$. В силу предложения 5 в алгебре Q существует ненулевой идеал I , изоморфный некоторому метаидеалу алгебры R . В силу леммы 3 $|R| \leq 2^{|I|}$. Но, очевидно, $|I| \leq |Q| \leq |A| = n$. Поэтому $|R| \leq 2^n$.

Лемма доказана.

Предложение 7. Для любой первичной алгебры B существует такая первичная алгебра A с единицей, что B — ненулевой идеал алгебры A . Поэтому любой непустой специальный класс алгебр содержит хотя бы одну первичную алгебру с единицей. Класс $\mathcal{M}$ первичных алгебр с единицей будет специальным тогда и только тогда, когда все алгебры в $\mathcal{M}$ являются простыми алгебрами.

Доказательство. Пусть B — первичная алгебра. Присоединяя к алгебре B обычным способом единицу, получаем алгебру $R = B \dot{+} \Phi 1 = \{b + \alpha 1 \mid b \in B, \alpha \in \Phi\}$ с единицей,

содержащую алгебру B в качестве идеала. Ясно, что $B^* = \{r \in R \mid Br = rB = 0\}$ является идеалом алгебры R , причем $B \cap B^* = 0$ в силу первичности алгебры B . Но тогда, как легко видеть, алгебра $\bar{R} = R/B^*$ будет первичной алгеброй с единицей, содержащей в качестве идеала алгебру $B + B^*/B^*$, изоморфную алгебре B . Отождествляя изоморфные алгебры, получаем первичную алгебру A с единицей, содержащую алгебру B в качестве идеала.

Из доказанного вытекает в силу леммы 1, что любой специальный класс $\mathcal{M}$ алгебр, отличный от пустого, содержит хотя бы одну первичную алгебру с единицей.

Возьмем теперь любой класс $\mathcal{M}$ первичных алгебр с единицей.

Пусть класс $\mathcal{M}$ специален, $A \in \mathcal{M}$. Пусть B — ненулевой идеал алгебры A . Тогда в силу леммы 1 B — алгебра из $\mathcal{M}$, и потому по предположению B — алгебра с единицей e . Но, как легко видеть, $(a - ae)B = 0 = B(a - ea)$ для всех $a \in A$. Поэтому в силу первичности алгебры A $a = ae = ea$ для всех $a \in A$, т. е. $A = B$. А это означает в силу произвольности выбора B , что A — простая алгебра с единицей.

Обратно, пусть все алгебры в $\mathcal{M}$ являются простыми алгебрами с единицей. Ясно, что класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию C1, так как ненулевой идеал простой алгебры совпадает со всей алгеброй. Кроме того, как и выше, показываем, что если первичная алгебра A содержит в качестве ненулевого идеала алгебру B с единицей, то $A = B$. Поэтому класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет и условию C2, т. е. специален.

Предложение доказано.

Предложение 8. Пусть A — первичная алгебра с единицей 1 и $\mathcal{Z} = \{a \in A \mid ab = ba \text{ для всех } b \in A\}$ — ее центр. Тогда:

а) $\mathcal{Z}$ — подалгебра алгебры A , причем все элементы из $\mathcal{Z}$ не являются делителями нуля в A . В частности, $\mathcal{Z}$ — коммутативная алгебра без делителей нуля и с единицей 1.

б) Пусть $A_{\mathcal{Z}} = \left\{ \frac{a}{z} \mid a \in A, z \in \mathcal{Z}, z \neq 0 \right\}$ — алгебра частных алгебры A по ее центру $\mathcal{Z}$, т. е. верны следующие

соотношения

$$\frac{a}{z} = \frac{a'}{z'} \Leftrightarrow az' = a'z, \quad (7)$$

$$\frac{a_1}{z_1} + \frac{a_2}{z_2} = \frac{a_1 z_2 + a_2 z_1}{z_1 z_2}, \quad \frac{a_1}{z_1} \cdot \frac{a_2}{z_2} = \frac{a_1 a_2}{z_1 z_2}.$$

Тогда $A_{\mathfrak{Z}}$ — первичная алгебра с единицей $\frac{1}{1} = e$, $A' = \left\{ \frac{a}{1} \mid a \in A \right\}$ — подалгебра алгебры $A_{\mathfrak{Z}}$, изоморфная алгебре A , причем центром алгебры $A_{\mathfrak{Z}}$ будет поле дробей $\left\{ \frac{z_1}{z} \mid z_1, z \in \mathfrak{Z} \right\}$ алгебры $\mathfrak{Z}$.

Доказательство. Ясно, что центр $\mathfrak{Z}$ алгебры A будет коммутативной подалгеброй в A , причем 1 — единица алгебры $\mathfrak{Z}$, так как $1 \in \mathfrak{Z}$.

Пусть $z \in \mathfrak{Z}$, $z \neq 0$ и $za = 0$ для некоторого $a \in A$. Тогда, как легко видеть, если (x) — главный идеал алгебры A , порожденный элементом x , то $(z)(a) = 0$. В силу первичности алгебры A отсюда получаем $(a) = 0$, т. е. $a = 0$. Следовательно, все элементы из центра $\mathfrak{Z}$ алгебры A не являются делителями нуля в A . В частности, $\mathfrak{Z}$ — коммутативная алгебра без делителей нуля и с единицей 1 .

Поэтому верно утверждение а).

Учитывая а), рассмотрим множество $A_{\mathfrak{Z}} = \left\{ \frac{a}{z} \mid a \in A, z \in \mathfrak{Z}, z \neq 0 \right\}$ всех дробей со знаменателями из центра. Прямой проверкой убеждаемся в том, что правила (7) действительно превращают множество $A_{\mathfrak{Z}}$ в алгебру с единицей $\frac{1}{1}$.

Из правил (7) вытекает в силу а), что дробь $\frac{a}{z}$ будет равна нулю в алгебре $A_{\mathfrak{Z}}$ тогда и только тогда, когда $a = 0$. Но тогда, как легко видеть, отображение $a \rightarrow \frac{a}{1}$ будет изоморфным вложением алгебры A в алгебру $A_{\mathfrak{Z}}$.

Отсюда вытекает справедливость утверждения б).

Предложение доказано.

Лемма 5. Пусть A — первичная алгебра с единицей, причем центр алгебры A бесконечен. Тогда для любого множества X алгебра многочленов $A[X]$ будет первичной алгеброй и подпрямым произведением алгебр, изоморфных A .

Доказательство. Для первичности алгебры $A[X]$ необходимо и достаточно для любых двух многочленов g, h найти такой многочлен q , что $gqh \neq 0$, как только $g \neq 0$ и $h \neq 0$.

Если $g = g(x)$ и $h = h(x)$ для некоторого $x \in X$, причем $g \neq 0 \neq h$, то берем старшие члены $g_n x^n$ и $h_m x^m$ этих многочленов. Из $g_n \neq 0 \neq h_m$ вытекает существование такого $a \in A$, что $g_n a h_m \neq 0$. Но тогда и $g_n x^n a h_m x^m = g_n a h_m x^{m+n} \neq 0$. Поэтому $g(x) a h(x) \neq 0$.

Остается применить индукцию: мы уже получили, что $A[x]$ — первичная алгебра для любого $x \in X$, поэтому $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$ — первичная алгебра для любого конечного набора $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X$. Но тогда и вся алгебра $A[X]$ будет первична, так как в записи любого многочлена участвует лишь конечное число переменных $x_i \in X$.

Из определения алгебры многочленов легко вытекает, что любое отображение $\theta: X \rightarrow \mathfrak{Z}$ множества X в центр $\mathfrak{Z}$ алгебры A продолжается до такого гомоморфизма $\varphi_\theta: A[X] \rightarrow A$ алгебры $A[X]$ на алгебру A , что $\varphi_\theta(a) = a$ для всех элементов $a \in A$. А именно, гомоморфизм φ_θ действует по правилу

$$\varphi_\theta(g(x_1, x_2, \dots, x_n)) = g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_i = \theta(x_i). \quad (8)$$

Нам нужно доказать, что алгебра $A[X]$ является подпрямым произведением алгебр, изоморфных A . Для этого достаточно доказать равенство

$$\cap \{\text{Кер } \varphi_\theta \mid \theta: X \rightarrow \mathfrak{Z} \text{ — произвольное отображение}\} = 0. \quad (9)$$

Сравнивая (8) и (9) получаем, что нам нужно доказать для любого многочлена $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ соотношение

$$(\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathfrak{Z} \mid g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (10)$$

Пусть $g = g(x)$ для некоторого $x \in X$, причем $g(\alpha) = 0$ для всех $\alpha \in \mathfrak{Z}$. Записываем многочлен g в каноническом виде

$$g = g_0 + g_1 x + \dots + g_k x^k, \quad g_i \in A. \quad (11)$$

A — алгебра с единицей $1 \neq 0$. Замечаем, что центр первичной алгебры A конечен.

Действительно, допустим противное. Тогда в силу леммы 5 для любого множества X алгебра многочленов $A(X)$ будет первичной δ -полупростой алгеброй. Но в силу леммы 4 существует такой кардинал n , что $|R| \leq 2^n$ для всех $R \in \pi(\delta)$. Поэтому $|X| \leq 2^n$ для всех множеств X . Противоречие.

Таким образом, центр $\mathfrak{Z}$ алгебры A конечен. В силу предложения 8 $\mathfrak{Z}$ — конечная алгебра без делителей нуля, т. е. конечное поле, причем $1 \in \mathfrak{Z}$. Но тогда, замечая, что отображение $\alpha \rightarrow \alpha 1$ является гомоморфизмом Φ в $\mathfrak{Z}$, получаем, что Φ отображается на некоторое конечное поле — подалгебру $\Phi 1$ центра $\mathfrak{Z}$.

Обратно, пусть основное кольцо Φ отображается гомоморфно на некоторое конечное поле. Тогда алгебры, являющиеся конечными полями, существуют.

Пусть алгебра F является конечным полем. В силу предложения 7 класс $\langle F \rangle$ алгебр, изоморфных F , будет специальным классом алгебр и потому определяет специальный радикал S_F . Замечаем, что верно равенство

$$\pi(S_F) = \langle F \rangle, \quad \text{т. е.} \quad A \in \pi(S_F) \Rightarrow A \simeq F. \quad (13)$$

Действительно, пусть A — первичная S_F -полупростая алгебра. Тогда A — подпрямое произведение некоторого множества алгебр, изоморфных F . Так как подпрямое произведение коммутативных алгебр коммутативно, то A — коммутативная алгебра, как и алгебра F . В силу конечности F существует такое натуральное $n \geq 2$, что в F верно тождество $x^n = x$. Еще раз учитывая, что A — подпрямое произведение алгебр, изоморфных F , получаем, что тождество $x^n = x$ верно и в алгебре A . Коммутативные первичные алгебры — это алгебры без делителей нуля. Поэтому A — коммутативная алгебра без делителей нуля с тождеством $x^n = x$.

Пусть e — ненулевой идемпотент в A . Тогда $(ae - a)e = 0$, и потому $ae = a$. Таким образом, если e — ненулевой идемпотент в A , то e — единица алгебры A .

Возьмем любой ненулевой элемент $a \in A$. Из тождества $x^n = x$ вытекает, что $(a^{n-1})^2 = a^{n-2}a^n = a^{n-2}a = a^{n-1}$, и потому a^{n-1} — ненулевой идемпотент. Следовательно,

в алгебре A существует единица e , причем $a^{n-1} = e$ для всех ненулевых $a \in A$. Но тогда все элементы в A обратимы, т. е. A — поле.

Но A — подпрямое произведение алгебр, изоморфных F . Поэтому из того, что A — поле, вытекает, что $A \simeq F$. Следовательно, имеет место соотношение (13).

Из (13) с очевидностью вытекает, что $S_F = S_{\pi_A}$ для всех $A \in \pi(S_F)$. Поэтому в силу предложения 6 S_F — коатом в «полной решетке» $\mathcal{C}$.

Теорема доказана.

Уже из сравнения теорем 2 и 3 вытекает, что неспециальные наднильпотентные радикалы могут существовать. На самом деле мы можем показать, что наднильпотентных неспециальных радикалов «очень много». Для этого введем в рассмотрение одну конструкцию.

Пусть A — произвольная ненулевая алгебра, G — произвольная полугруппа. Рассмотрим множество всевозможных формальных сумм $\sum_{g \in G} a_g g$ с коэффициентами из алгебры A , в которых лишь конечное число коэффициентов

a_g отлично от нуля. Определим для таких сумм операции по естественным правилам: если $\alpha \in \Phi$ и

$$u = \sum_{g \in G} a_g g, \quad v = \sum_{g \in G} b_g g$$

— суммы указанного вида, то полагаем по определению:

$$u + v = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g, \quad \alpha u = \sum_{g \in G} (\alpha a_g) g,$$

$$uv = \sum_{g \in G} \left(\sum_{g_1 g_2 = g} a_{g_1} b_{g_2} \right) g.$$

В результате получаем, как легко видеть, некоторую алгебру. Построенную алгебру будем называть *полугрупповой алгеброй полугруппы G над алгеброй A* и в дальнейшем всегда обозначать символом $A(G)$.

Если L — линейное упорядоченное множество, то L превращается в полугруппу, если положить $x \cdot y = \max \{x, y\}$ для всех $x, y \in L$. Поэтому можно строить и полугрупповые алгебры $A(L)$. При этом мы всегда будем считать, что линейно упорядоченное множество L превращается в полугруппу именно указанным способом.

Лемма 6. Пусть A — произвольная ненулевая алгебра, L — произвольное линейно упорядоченное множество. Тогда верны утверждения:

а) Алгебра $A(L)$ является подпрямым произведением алгебр, изоморфных A .

б) Если Q — первичный гомоморфный образ алгебры $A(L)$, то Q изоморфен некоторому первичному гомоморфному образу самой алгебры A .

Доказательство. Пусть $x \in L$. Тогда по построению $(ax)(bx) = (ab)x$, $ax + bx = (a + b)x$, $\alpha(ax) = (\alpha a)x$. Поэтому множество $Ax = \{ax \mid a \in A\}$ будет подалгеброй алгебры $A(L)$, а отображение $a \rightarrow ax$ — изоморфизмом алгебры A на эту подалгебру. Из сказанного легко вытекает, что полугрупповая алгебра $A(L)$ разлагается, как модуль, в прямую сумму

$$A(L) = \sum_{g \in L} Ag. \quad (14)$$

Возьмем любые два элемента $x, y \in L$. Так как L — линейно упорядоченное множество, то без ограничения общности можно считать, что $x \leq y$. При таком допущении легко получаем для любых $a, b \in A$ равенство $(ax - ay)(bx - by) = (ab)x - (ab)y$. Поэтому множество $A(x - y) = \{ax - ay \mid a \in A\}$ тоже является подалгеброй в $A(L)$, причем если $x \neq y$, то отображение $a \rightarrow ax - ay$ — изоморфизм алгебры A на эту подалгебру. Но тогда с помощью (14) получаем еще одно разложение алгебры $A(L)$

$$A(L) = \left(\sum_{x < y} A(x - y) \right) \dot{+} \left(\sum_{y < z} Az \right) \dot{+} Ay \quad (15)$$

для любого $y \in L$. При этом если y — наименьший элемент в L , то считаем первое слагаемое в разложении (15) равным 0, а если y — наибольший элемент, то считаем равным 0 второе слагаемое.

Прямой проверкой убеждаемся, что и первое и второе слагаемое в разложении (15) будут идеалами алгебры $A(L)$. Поэтому будет идеалом и их сумма

$$I_y = \left(\sum_{x < y} A(x - y) \right) \dot{+} \left(\sum_{y < z} Az \right) \quad (16)$$

для всех $y \in L$. Сравнивая (15) и (16), получаем, что $A(L) = I_y + Ay$. А отсюда вытекает, что фактор-алгебра $A(L)/I_y \simeq Ay$ изоморфна алгебре A , как и алгебра Ay . Кроме того, если u — ненулевой элемент из $A(L)$, то, представляя его в виде $u = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_ix_i + \dots + a_nx_n$, где $a_i \in A$, $a_1 \neq 0$, $x_i \in L$ и $x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_n$, легко получаем в силу (16), что $u \in I_y$ при $y = x_1$. В силу произвольности выбора y и получаем $\bigcap_{y \in L} I_y = 0$.

Из доказанного вытекает, что алгебра $A(L)$ является подпрямым произведением алгебр $A(L)/I_y$, изоморфных алгебре A , т. е. верно утверждение а).

Возьмем любой собственный первичный идеал P алгебры $A(L)$. В силу (14) из собственности P вытекает, что $Ag \not\subseteq P$ для некоторого $g \in L$. Выберем и зафиксируем какой-либо из этих элементов g . Пусть это будет g_0 . Докажем равенство

$$A(L) = Ag_0 + P. \quad (17)$$

Для этого в силу (14) достаточно доказать, что $Ag \subseteq Ag_0 + P$ для всех $g \in L$.

Пусть $x \in L$. Если $Ax \subseteq P$, то доказывать нечего. Поэтому будем считать, что $Ax \not\subseteq P$. Рассмотрим все возможные случаи.

Пусть $x < g_0$. Легко видеть, что $\sum_{g < t_0} A(t - g_0)$ и $\sum_{z \geq g_0} Az$ являются идеалами в алгебре $A(L)$, причем произведение этих идеалов равно нулю. Но второй из этих идеалов не равен нулю и не содержится в P , так как $Ag_0 \not\subseteq P$. Поэтому $\sum_{t < g_0} A(t - g_0) \subseteq P$ в силу первичности P . В частности $A(x - g_0) \subseteq P$. Но тогда $Ax \subseteq Ag_0 + A(x - g_0) \subseteq Ag_0 + P$, и нужное нам включение получено.

Пусть $x > g_0$. Тогда, рассматривая идеалы $\sum_{t < x} A(t - x)$ и $\sum_{z \geq x} Az$, получаем, что $\sum_{t < x} A(t - x) \subseteq P$, так как $Ax \not\subseteq P$. Но тогда снова получаем нужное нам включение, так как $A(g_0 - x) \subseteq P$.

Пусть $x = g_0$. Тогда, очевидно, $Ax \subseteq Ag_0 + P$.

Мы рассмотрели все возможные случаи и потому равенство (17) верно. Но тогда фактор-алгебра $A(L)/P \simeq Ag_0/Ag_0 \cap P$ будет изоморфна некоторой фактор-алгебре алгебры A , так как алгебры Ag_0 и A изоморфны.

Следовательно, любой первичный гомоморфный образ алгебры $A(L)$ изоморфен некоторому первичному гомоморфному образу самой алгебры A , т. е. верно утверждение б).

Лемма доказана.

Пусть нам дан бесконечный кардинал $\aleph_\alpha$. Пусть ω_α — наименьшее порядковое число, мощность которого (т. е. мощность отрезка $[1, \omega_\alpha]$) равна $\aleph_\alpha$. Превратим множество Ω_α всех последовательностей вида $a = \{a_\gamma \mid 1 \leq \gamma < \omega_\alpha\}$, где a_γ — натуральные числа, в цепь, т. е. в линейно упорядоченное множество, вводя порядок лексикографически: $\{a_\gamma \mid 1 \leq \gamma < \omega_\alpha\} < \{b_\gamma \mid 1 \leq \gamma < \omega_\alpha\}$ тогда и только тогда, когда существует такое порядковое число ξ , $1 \leq \xi < \omega_\alpha$, что $a_\gamma = b_\gamma$ для всех $\gamma < \xi$, но $a_\xi < b_\xi$. Легко видеть, что мы действительно линейно упорядочили множество Ω_α . Всюду ниже символом Ω_α обозначается именно это линейно упорядоченное множество.

Лемма 7. Пусть $\aleph_\alpha$ — бесконечный кардинал и Ω_α — соответствующее ему линейно упорядоченное множество. Если $x, y \in \Omega_\alpha$ и $x < y$, то отрезок $[x, y] = \{z \in \Omega_\alpha \mid x \leq z \leq y\}$ равномошен всей цепи Ω_α . А именно,

$$|[x, y]| = |\Omega_\alpha| = 2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha.$$

Действительно, $x, y \in \Omega_\alpha$, $x < y$. По определению найдется такое порядковое число ξ , $1 \leq \xi < \omega_\alpha$, что $x_\gamma = y_\gamma$ для $\gamma < \xi$ и $x_\xi < y_\xi$. Учитывая это, возьмем любой элемент $z = \{z_\gamma \mid 1 \leq \gamma < \omega_\alpha\}$ из Ω_α . Из бесконечности кардинала $\aleph_\alpha$ вытекает, что если $1 \leq \gamma_1 < \omega_\alpha$ и $1 \leq \gamma_2 < \omega_\alpha$, то и $\gamma_1 + \gamma_2 < \omega_\alpha$. Кроме того, если $\gamma > \xi$, $\gamma < \omega_\alpha$, то существует и притом точно одно порядковое число δ такое, что $1 \leq \delta < \omega_\alpha$ и $\gamma = \xi + \delta$. Учитывая все сказанное, по последовательности z строим последовательность $z' \in \Omega_\alpha$, полагая $z'_\gamma = x_\gamma$ для $\gamma \leq \xi$ и $z'_{\xi+\delta} = x_{\xi+\delta} + z_\delta$, если $1 \leq \delta < \omega_\alpha$. Построенное нами отображение $z \rightarrow z'$ будет, очевидно, взаимно однозначным отображением (вложением) множества Ω_α в множество $[x, y]$. Поэтому эти множества равномощны. А из построения Ω_α и бесконечности кардинала $\aleph_\alpha$ вытекает равенство $|\Omega_\alpha| = \aleph_0^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$.

Лемма 8. Пусть A — ненулевая полупервичная алгебра, $\aleph_\alpha$ — бесконечный кардинал, Ω_α — соответствующее ему линейно упорядоченное множество и $A(\Omega_\alpha)$ — полугрупповая алгебра полугруппы Ω_α над алгеброй A . Если $\aleph_\alpha \geq |A|$, то:

а) Алгебра $A(\Omega_\alpha)$ полупервична.

б) Если I — ненулевой метайдеал в $A(\Omega_\alpha)$, то $|I| = |A(\Omega_\alpha)| = |\Omega_\alpha| = 2^{\aleph_\alpha}$.

Доказательство. Утверждение а) вытекает из утверждения а) леммы 6. Для доказательства утверждения б) достаточно рассмотреть случай идеалов, так как в силу полупервичности алгебры $A(\Omega_\alpha)$ любой ненулевой метайдеал алгебры $A(\Omega_\alpha)$ содержит некоторый ненулевой идеал этой алгебры.

Пусть I — ненулевой идеал алгебры $A(\Omega_\alpha)$. Выберем в I любой ненулевой элемент a . По построению алгебры $A(\Omega_\alpha)$ элемент a однозначно записывается в виде

$$a = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n,$$

$$\text{где } a_i \in A, a_i \neq 0, x_i \in \Omega_\alpha, x_1 < \dots < x_n. \quad (18)$$

Если $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$, то выбираем такой $b \in A$, что $b \sum_{i=1}^n a_i \neq 0$. Это возможно в силу полупервичности алгебры A . Для выбранного элемента b получаем по построению полугрупповой алгебры $A(\Omega_\alpha)$ соотношение

$$(x \in \Omega_\alpha, x \geq x_n) \Rightarrow \left(b \cdot \sum_{i=1}^n a_i \right) x = (bx) a \in I. \quad (19)$$

Если $\sum_{i=1}^n a_i = 0$, то $n \geq 2$ и $\sum_{i=1}^{n-1} a_i = -a_n \neq 0$ в силу

(18). Выбираем такой элемент $c \in A$, что $ca_n \neq 0$. Для выбранного элемента c получаем

$$(y \in \Omega_\alpha, x_{n-1} \leq y \leq x_n) \Rightarrow -ca_n y + ca_n x = (cy) a \in I. \quad (20)$$

Одно из соотношений (19), (20) должно быть справедливо. Но в обоих случаях получаем в силу леммы 7, что

$$|I| \geq |\Omega_\alpha| = 2^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha} |A| = |\Omega_\alpha| |A| = |A(\Omega_\alpha)|.$$

Поэтому верно утверждение б).

Теорема 4. Пусть m — любой такой бесконечный кардинал, что $m \geq |\Phi|$. Пусть $\mathfrak{A}_m$ — класс всех таких алгебр R , что $|R| \leq m$. Тогда нижний радикал $l_{\mathfrak{A}_m}$, порожденный классом $\mathfrak{A}_m$, будет наднильпотентным, но неспециальным радикалом. Более того, если r — наднильпотентный радикал, отличный от нижнего нильрадикала $\mathfrak{B}$, и $r \leq l_{\mathfrak{A}_m}$, то и радикал r не будет специальным радикалом.

Доказательство. Ясно, что $l_{\mathfrak{A}_m}$ — кручение, так как класс $\mathfrak{A}_m$ замкнут относительно взятия идеалов и гомоморфных образов.

Из $m \geq |\Phi|$ вытекает, что алгебра Φ^0 с нулевым умножением, построенная по модулю Φ , принадлежит классу $\mathfrak{A}_m$. Поэтому алгебра Φ^0 будет $l_{\mathfrak{A}_m}$ -радикальной. Но тогда и любая алгебра с нулевым умножением $l_{\mathfrak{A}_m}$ -радикальна, так как все алгебры с нулевым умножением являются гомоморфными образами некоторой прямой суммы алгебр, изоморфных Φ^0 . А отсюда легко вытекает, что и все нильпотентные алгебры $l_{\mathfrak{A}_m}$ -радикальны. Поэтому кручение $l_{\mathfrak{A}_m}$ будет наднильпотентным радикалом. Но алгебра Φ тоже $l_{\mathfrak{A}_m}$ -радикальна и, очевидно, не $\mathfrak{B}$ -радикальна, как и любая другая ненулевая алгебра с единицей. Поэтому $l_{\mathfrak{A}_m} > \mathfrak{B}$.

Учитывая доказанное, возьмем любой такой наднильпотентный радикал r , что $l_{\mathfrak{A}_m} \geq r > \mathfrak{B}$. Из $r > \mathfrak{B}$ вытекает существование ненулевых полупервичных r -радикальных алгебр. Пусть R — одна из них. Алгебра R будет $l_{\mathfrak{A}_m}$ -радикальной, как и любая другая r -радикальная алгебра. Поэтому в силу теоремы 2.4.1 R имеет ненулевые метаидеалы, являющиеся алгебрами из класса $\mathfrak{A}_m$. Пусть A — один из таких метаидеалов.

Ясно, что A — ненулевая полупервичная алгебра, как и алгебра R . Кроме того по построению $|A| \leq m$. Выберем бесконечный кардинал $\aleph_\alpha \geq m$ и строим полугрупповую алгебру $A(\Omega_\alpha)$.

По построению $\aleph_\alpha \geq m \geq |A|$. Применяя лемму 8, получаем, что $A(\Omega_\alpha)$ — полупервичная алгебра, причем

если I — ненулевой метаидеал, то $|I| = 2^{\aleph_\alpha} > m$. Поэтому в силу теоремы 2.4.1 алгебра $A(\Omega_\alpha)$ будет $l_{\aleph_m}$ -полупроста, а значит и r -полупроста. С другой стороны, в силу леммы 6 все первичные гомоморфные образы алгебры $A(\Omega_\alpha)$ r -радикальны, так как алгебра A r -радикальна.

В силу предложения 3 наднильпотентный радикал r не специален.

Теорема доказана.

Теорема 5. *Любой наднильпотентный радикал, отличный от нижнего нильрадикала, является объединением некоторого семейства наднильпотентных неспециальных радикалов. Более того, если $\mathfrak{s}$ и r — наднильпотентные радикалы и $\mathfrak{s} > r$, то существует такое семейство наднильпотентных, но неспециальных радикалов r_i , лежащих между $\mathfrak{s}$ и r , что $\mathfrak{s} = \bigvee_{i \in I} r_i$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{s}$ и r — наднильпотентные радикалы, причем $r < \mathfrak{s}$. Ясно, что тогда $\mathcal{R}(\mathfrak{s}) \supset \mathcal{R}(r)$, т. е. класс $\mathcal{R}(\mathfrak{s}) \setminus \mathcal{R}(r)$ всех $\mathfrak{s}$ -радикальных не r -радикальных алгебр непуст.

Возьмем любую алгебру $Q \in \mathcal{R}(\mathfrak{s}) \setminus \mathcal{R}(r)$. Ясно, что $\bar{Q} = Q / r(Q)$ ненулевая r -полупростая $\mathfrak{s}$ -радикальная алгебра. Алгебра Q и полупервична, так как r — наднильпотентный радикал.

Пусть $\mathfrak{N}_Q$ — класс всех алгебр, изоморфных факторам конечных нормальных рядов алгебры Q . Ясно, что класс $\mathfrak{N}_Q$ замкнут относительно взятия идеалов и гомоморфных образов. Поэтому нижний радикал $l_{\mathfrak{N}_Q}$ — кручение. Но тогда и радикал $r_Q = r \vee l_{\mathfrak{N}_Q}$ тоже будет кручением, а значит и наднильпотентным радикалом, причем, как легко видеть, $\mathfrak{s} \geq r_Q \geq r \geq \mathfrak{B}$.

Выбираем такой бесконечный кардинал $\aleph_\alpha$, что $\aleph_\alpha \geq |Q|$. Тогда, очевидно, $\aleph_\alpha \geq |R|$ для всех алгебр $R \in \mathfrak{N}_Q$, так как $|R| \leq |\bar{Q}| \leq |Q|$.

По кардиналу $\aleph_\alpha$ и ненулевой полупервичной алгебре $\bar{Q}$ строим полугрупповую алгебру $\bar{Q}(\Omega_\alpha)$. В силу леммы 6 алгебра $\bar{Q}(\Omega_\alpha)$ r -полупроста, так как алгебра $\bar{Q}$ r -полупроста. Кроме того, как и при доказательстве теоремы 1, получаем, что алгебра $\bar{Q}(\Omega_\alpha)$ и $l_{\mathfrak{N}_Q}$ -полупроста, так как если M — ненулевой метаидеал этой алгебры, то в силу

леммы 8 $|M| = 2^{N^{\alpha}} > |R|$ для всех $R \in \mathfrak{N}_Q$. Поэтому алгебра $\bar{Q}(\Omega_{\alpha})$ будет и r_Q -полупростой, так как $\mathcal{P}(r_Q) = \mathcal{P}(r) \cap \cap \mathcal{P}(l_{\mathfrak{N}_Q})$.

С другой стороны, снова в силу леммы 6 все первичные гомоморфные образы алгебры $\bar{Q}(\Omega_{\alpha})$ будут принадлежать классу $\mathfrak{N}_Q \equiv \mathcal{R}(l_{\mathfrak{N}_Q}) \leq \mathcal{R}(r_Q)$. Поэтому все первичные гомоморфные образы алгебры $Q(\Omega_{\alpha})$ не r_Q -полупросты.

В результате получаем в силу предложения 3, что для всех алгебр $Q \in \mathcal{R}(\mathfrak{s}) \setminus \mathcal{R}(r)$ радикалы r_Q будут наднильпотентными неспециальными радикалами, лежащими между радикалами r и $\mathfrak{s}$. Но тогда в силу произвольности выбора Q легко получаем, что кручение $\mathfrak{s}$ совпадет с объединением $\bigvee r_Q$, где Q пробегает класс $\mathcal{R}(\mathfrak{s}) \setminus \mathcal{R}(r)$. Достаточно заметить, что $Q \in \mathcal{R}(r_Q)$, так как $\bar{Q} = Q/r(Q) \in \mathfrak{N}_Q$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Все атомы в «полной решетке» $\mathcal{N}$ всех наднильпотентных радикалов будут неспециальными радикалами.

Это с очевидностью вытекает из теоремы 5.

Следствие 2. Любой атом «полной решетки» $\mathfrak{s}$ всех специальных радикалов не будет атомом в «полной решетке» $\mathcal{N}$ всех наднильпотентных радикалов.

Это с очевидностью вытекает из следствия 1.

Следствие 3. Пусть $\mathfrak{s}$ и r — наднильпотентные радикалы и $\mathfrak{s} > r$. Если радикал $\mathfrak{s}$ специален, то между радикалами $\mathfrak{s}$ и r лежит бесконечно много наднильпотентных неспециальных радикалов.

Действительно, строим наднильпотентный неспециальный радикал r_Q как и в доказательстве теоремы 5. Легко видеть, что при этом мы получим $r_Q > r$, так как алгебра Q будет r_Q -радикальной. Но и $\mathfrak{s} > r_Q$, так как радикал $\mathfrak{s}$ специален. Мы получим новую пару $(\mathfrak{s}, r_Q)$ и можем продолжать процесс до бесконечности.

В заключение покажем, что верна

Теорема 6. «Полная решетка» $\mathfrak{s}$ всех специальных радикалов не является подрешеткой «полной решетки» $\mathcal{N}$ всех наднильпотентных радикалов. А именно, объединение

в $\mathcal{K}$ специальных радикалов может не быть специальным радикалом.

Для доказательства нам нужна одна конструкция.

Пусть нам дана возрастающая цепь алгебр

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \dots, \quad (21)$$

где n пробегает все натуральные числа, такая, что для каждого n алгебра A_n является подалгеброй алгебры A_{n+1} (т. е. мы имеем цепь подалгебр некоторой алгебры). Пусть R — множество всех периодических последовательностей с элементами $a_i \in A_i$. Таким образом, если $a \in R$, то существует такая конечная строка $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ с элементами $c_j \in A_j$ (период последовательности a), что

$$a = \langle c_1, c_2, \dots, c_m \rangle = (c_1, c_2, \dots, c_m, c_1, c_2, \dots, c_m, \dots), \quad (22)$$

т. е. $a_{j+mt} = c_j$ для всех целых чисел $t \geq 0$, $1 \leq j \leq m$. Легко видеть, что R будет подалгеброй прямого произведения $\prod_{n \geq 1} A_n$ алгебр A_n . Это позволяет естественным

образом превратить R в алгебру. Полученную алгебру будем называть *периодическим произведением цепи алгебр A_n* .

Лемма 9. *Периодическое произведение R цепи алгебр A_n является подпрямым произведением тех же алгебр. Более того, если Δ — любое множество натуральных чисел, содержащее отрезки сколь угодно большой длины (т. е. для любого натурального числа $k \geq 1$ существуют такие натуральные числа $n \geq k$ и m , что $[m, m+n] \subseteq \Delta$), то периодическое произведение R цепи алгебр A_n будет подпрямым произведением алгебр A_i , где $i \in \Delta$.*

Действительно, пусть $Q = \prod_{n \geq 1} A_n$ — прямое произведение алгебр A_n . Из построения периодического произведения R алгебр A_n легко вытекает, что

$$p_n(Q) = p_n(R) = A_n \quad (23)$$

для любого проектирования $p_n: Q \rightarrow A_n$. Достаточно вспомнить, что по определению проектирования p_n являются гомоморфизмами, действующими по правилу

$$(a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots) p_n = a_n. \quad (24)$$

А из равенства (23) вытекает, снова по определению, что алгебра R является подпрямым произведением алгебр R_n .

Для любого натурального числа n положим

$$I_n = R \cap \text{Ker } p_n. \quad (25)$$

Тогда в силу (23) все I_n будут идеалами алгебры R , причем фактор-алгебры R/I_n изоморфны алгебрам A_n .

Пусть Δ — любое множество натуральных чисел, содержащее отрезки сколь угодно большой длины. Мы хотим доказать, что алгебра R является подпрямым произведением алгебр A_i , где $i \in \Delta$. Для этого в силу сказанного достаточно доказать равенство $\bigcap_{n \in \Delta} I_n = 0$.

Возьмем любую периодическую последовательность $\langle c_1, c_2, \dots, c_m \rangle = a \in \bigcap_{n \in \Delta} I_n$. В силу (24) и (25) в последовательности a для всех $i \in \Delta$ на i -м месте стоит нуль. Но по построению в Δ есть отрезки с длиной, большей $2m$. Поэтому в последовательности a , начиная с некоторого места, стоят подряд $2m$ нулей. Но тогда все c_j равны нулю в силу периодичности последовательности $a = (c_1, c_2, \dots, c_m, c_1, c_2, \dots, c_m, \dots)$. Следовательно, $a = 0$, и мы доказали нужное нам равенство.

Лемма 10. Пусть R — периодическое произведение цепи (21) простых алгебр A_n с общей единицей e . Тогда R — алгебра с единицей $\langle e \rangle$, причем все первичные гомоморфные образы алгебр R будут простыми алгебрами с единицей.

Доказательство. Ясно, что $\langle e \rangle = \langle ee \rangle = \langle ee \dots e \rangle$ — единица алгебры R .

Введем теперь несколько обозначений.

Пусть m — произвольное натуральное число, $1 \leq j \leq m$. Символом $R^{(m)}$ обозначим множество всех последовательностей с периодом длины m , символом $R_j^{(m)}$ — множество всех таких последовательностей $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ с периодом длины m , что $a_i = 0$ для всех $i \neq j$, $1 \leq j \leq m$. Из равенств

$$\langle a_1, \dots, a_m \rangle \langle b_1, \dots, b_m \rangle = \langle a_1 b_1, \dots, a_m b_m \rangle,$$

$$\alpha \langle a_1, \dots, a_m \rangle = \langle \alpha a_1, \dots, \alpha a_m \rangle,$$

$$\langle a_1, \dots, a_m \rangle + \langle b_1, \dots, b_m \rangle = \langle a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m \rangle$$

вытекает, что $R^{(m)}$ и $R_j^{(m)}$ — подалгебры в R , причем $R_j^{(m)} \simeq A_j$. Алгебра $R^{(m)}$ является алгеброй с той же единицей $\langle e \rangle$, что и вся алгебра R . Единицей алгебры $R_j^{(m)}$

будет последовательность $E_j^{(m)}$ с периодом длины m , в записи которого на j -м месте стоит e , а на остальных местах — нули.

Ясно, что E_j^m — попарно ортогональные центральные идемпотенты в алгебре R , причем верны равенства

$$\langle e \rangle = \sum_{j=1}^m E_j^{(m)}, \quad a = \sum_{j=1}^m a E_j^{(m)} \quad (26)$$

для всех $a \in R^{(m)}$. При этом $a E_j^{(m)} \in R_j^{(m)}$ для всех j , $1 \leq j \leq m$.

Учитывая введенные обозначения, возьмем любой первичный гомоморфный образ $\bar{R}$ алгебры R . Пусть $\varphi: R \rightarrow \bar{R}$ — соответствующий гомоморфизм алгебры R на алгебру $\bar{R} = \varphi(R)$. Тогда, очевидно, $\varphi(\langle e \rangle)$ — единица алгебры $\bar{R} = \varphi(R)$, и потому $\varphi(\langle e \rangle) \neq 0$.

Возьмем любое натуральное число m . Из равенства (26) вытекает $\sum_{j=1}^m \varphi(E_j^{(m)}) = \varphi(\langle e \rangle) \neq 0$. Но в первичной алгебре не может быть ненулевых попарно ортогональных центральных идемпотентов. Поэтому $\varphi(E_j^{(m)}) \neq 0$ точно для одного j , $1 \leq j \leq m$. Будем обозначать этот j символом $\varphi(m)$. Тогда для любой последовательности $a \in R^{(m)}$ получаем в силу (26) соотношение

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \sum_{j=1}^m \varphi(a) \varphi(E_j^{(m)}) = \varphi(a) \varphi(E_{\varphi(m)}^{(m)}) = \\ &= \varphi(a E_{\varphi(m)}^{(m)}) \in \varphi(R_{\varphi(m)}^{(m)}). \end{aligned}$$

Но тогда из простоты алгебры $R_{\varphi(m)}^{(m)} \simeq A_{\varphi(m)}$ и соотношения $\varphi(E_{\varphi(m)}^{(m)}) = \varphi(\langle e \rangle) \neq 0$ вытекает соотношение

$$\varphi(R^{(m)}) = \varphi(R_{\varphi(m)}^{(m)}) \simeq R_{\varphi(m)}^{(m)} \simeq A_{\varphi(m)}. \quad (27)$$

Обозначим

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 2^2 3^2, \quad \dots, \quad x_k = 2^k 3^k \dots p_k^k, \quad (28)$$

где p_k — k -е простое число. Из (28) вытекает, что для каждого $k \geq 1$ число x_k будет делителем числа x_{k+1} , причем каждое натуральное число x является делителем

некоторого x_k . Но тогда из определения вытекает, что

$$R^{(x_1)} \subseteq R^{(x_2)} \subseteq \dots \subseteq R^{(x_k)} \subseteq \dots \subseteq \bigcup_{k \geq 1} R^{(x_k)} = R. \quad (29)$$

Переходя к прообразам при гомоморфизме $\varphi: R \rightarrow \bar{R} = \varphi(R)$, получаем в силу (27), (29), что алгебра $\bar{R}$ совпадает с объединением цепи

$$\varphi(R^{(x_1)}) \subseteq \varphi(R^{(x_2)}) \subseteq \dots \subseteq \varphi(R^{(x_k)}) \subseteq \dots$$

простых алгебр с общей единицей $\varphi(\langle e \rangle)$. А отсюда вытекает, что и сама алгебра $\bar{R} = \varphi(R)$ будет простой алгеброй с той же единицей.

Лемма доказана.

Теперь мы можем доказать теорему.

Действительно, ясно, что существуют алгебры являющиеся полями, так как в алгебре (основном кольце!) Φ существуют максимальные идеалы. Отсюда легко вытекает, что существуют цепи (21) попарно не изоморфных простых алгебр A_n с общей единицей e . Выберем и зафиксируем одну из таких цепей и построим алгебру R , являющуюся периодическим произведением цепи алгебр A_n .

Строим следующие два множества натуральных чисел

$$\Delta' = \bigcup_{m \geq 1} \{i \mid (2m-1)^2 \leq i < (2m)^2\},$$

$$\Delta'' = \bigcup_{m \geq 1} \{i \mid (2m)^2 \leq i < (2m+1)^2\}.$$

Ясно, что $\Delta' \cap \Delta'' = \emptyset$, причем и Δ' и Δ'' содержат сколь угодно длинные отрезки. Поэтому, если $\mathcal{M}'$ — класс всех таких алгебр A , что $A \simeq A_{i'}$ для некоторого $i' \in \Delta'$, $\mathcal{M}''$ — класс всех таких алгебр A , что $A \simeq A_{i''}$ для некоторого $i'' \in \Delta''$, то алгебра R будет $S_{\mathcal{M}'}$ -полупростой и $S_{\mathcal{M}''}$ -полупростой в силу леммы 9. При этом в силу предложения 7 $\mathcal{M}'$ и $\mathcal{M}''$ — специальные классы алгебр, и потому $S_{\mathcal{M}'}$, $S_{\mathcal{M}''}$ — специальные радикалы.

Строим объединение $S_{\mathcal{M}'} \vee S_{\mathcal{M}''}$ специальных радикалов $S_{\mathcal{M}'}$ и $S_{\mathcal{M}''}$ в полной решетке $\mathcal{H}$ всех наднильпотентных радикалов. В силу сказанного алгебра R будет $S_{\mathcal{M}'} \vee S_{\mathcal{M}''}$ -полупростой алгеброй. С другой стороны, пусть $\bar{R}$ — первичный гомоморфный образ алгебры R . Тогда в силу леммы 10 $\bar{R}$ — простая алгебра с единицей. Но в классе

$\pi(S_{\mathcal{M}'})$ простыми алгебрами будут только алгебры из класса $\mathcal{M}'$, в классе $\pi(S_{\mathcal{M}''})$ — только алгебры из класса $\mathcal{M}''$. Поэтому, учитывая, что простые алгебры A_n попарно не изоморфны и $\Delta' \cap \Delta'' = \emptyset$, получаем: в классе $\pi(S_{\mathcal{M}'}) \cap \pi(S_{\mathcal{M}''}) = \pi(S_{\mathcal{M}' \vee S_{\mathcal{M}''}})$ нет простых алгебр с единицей. Следовательно, наднильпотентный радикал $S_{\mathcal{M}' \vee S_{\mathcal{M}''}}$ неспециален в силу предложения 3.

Таким образом объединение в $\mathcal{H}$ двух специальных радикалов может не быть специальным радикалом. Аналогично, рассматривая множества $\Delta_k = \{i \mid i \geq k\}$ и замечая, что $\bigcap_{k \geq 1} \Delta_k = \emptyset$, получаем: объединение цепи специальных радикалов может не быть специальным радикалом. Это показывает та же алгебра R .

ПОЛУПЕРВИЧНЫЕ АЛГЕБРЫ, АЛГЕБРЫ БЕЗ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И РАЗЛОЖЕНИЯ АЛГЕБР

В этой главе мы докажем ряд структурных теорем об алгебрах, полупростых в смысле того или иного специального радикала. Кроме того, будут введены в рассмотрение несколько конкретных радикалов (специальных или подыдемпотентных), которые, наряду с классическими радикалами из первой главы, нашли наиболее многочисленные приложения в структурной теории. Введенные подыдемпотентные радикалы применены для доказательства теорем о разложении — теорем о выделении радикалов прямым слагаемым.

Как и в предыдущей главе, первичные алгебры считаются ненулевыми, все рассматриваемые алгебры — ассоциативные алгебры над Φ . На основное кольцо Φ — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей $1 \neq 0$ — никаких дополнительных ограничений нет.

§ 1. Полупервичные алгебры с условиями обрыва

Структурные теоремы доказываются, обычно, для алгебр с некоторыми условиями конечности — условиями обрыва возрастающих или убывающих цепей правых, левых или двусторонних идеалов специального вида. В классических структурных теоремах рассматриваются и более сильные условия (например, конечномерность алгебр над полями). Мы будем начинать рассмотрение с достаточно слабых условий, усиливая их по мере необходимости.

Для формулировки нужных условий нам необходимо понятие аннулятора. Напомним, что если S — непустое

подмножество в алгебре R , то множества

$$r_R(0, S) = \{x \in R \mid Sx = 0\}, \quad l_R(0, S) = \{x \in R \mid xS = 0\}$$

называются, соответственно, правым и левым аннулятором S в R . При этом, очевидно, правые и левые аннуляторы идеалов сами будут идеалами.

Определение 1. *Аннулятором* (непустого) подмножества S алгебры R называется множество

$$S_R^* = r_R(0, S) \cap l_R(0, S).$$

Идеал I алгебры R назовем *аннуляторным идеалом*, если $I = J_R^*$ для некоторого идеала J алгебры R . Если ясно, о какой алгебре R идет речь, то мы будем применять более короткие обозначения $r(0, S)$, $l(0, S)$, S^* .

Из определений легко вытекает, что для любого непустого подмножества S верны соотношения

$$S^{**} \supseteq S, \quad S^{***} = S^*, \quad (1)$$

так как импликация

$$S \subseteq T \Rightarrow S^* \supseteq T^* \quad (2)$$

очевидна. Мы будем применять соотношения (1), (2) без особых оговорок, как и вытекающее из них соотношение

$$\bigcap_{i \in \Gamma} S_i^* = \left(\bigcup_{i \in \Gamma} S_i \right)^*, \quad (3)$$

показывающее, что пересечение любого семейства аннуляторов всегда является аннулятором.

Нас особо интересует случай полупервичных алгебр и аннуляторных идеалов в таких алгебрах.

Лемма 1. *В любой алгебре R аннулятор любого идеала является идеалом, а значит и аннуляторным идеалом. Если A — идеал алгебры R , причем алгебра A полупервична, то*

$$r(0, A) = l(0, A) = A^*. \quad (4)$$

В частности, если сама алгебра R полупервична, то равенства (4) верны для любого идеала A алгебры R . При этом

$$B \subseteq A^* \Leftrightarrow A \cap B = 0 \quad (5)$$

для любого идеала B , т. е. аннулятор A^* идеала A (полупервичной) алгебры R является наибольшим идеалом в R , имеющим нулевое пересечение с идеалом A .

Доказательство. То, что аннулятор любого идеала является идеалом, а значит и аннуляторным идеалом, легко вытекает из определения 1 и соотношений (1) и (2).

Допустим теперь, что A — идеал алгебры R , причем алгебра A полупервична. В силу предложения 1.1.4 и следствия 1.1.1 алгебра A не имеет односторонних нильпотентных идеалов. Но тогда для любого $x \in R$ получаем

$$xA = 0 \Rightarrow (Ax)^2 = AxAx = 0 \Rightarrow Ax = 0,$$

$$Ax = 0 \Rightarrow (xA)^2 = xAxA = 0 \Rightarrow xA = 0,$$

и потому верны равенства (4). Соотношения (5) доказываются аналогично, так как $(B \cap A)^2 \subseteq BA \subseteq B \cap A$ для любых идеалов.

Лемма 2. Пусть R — полупервичная алгебра. Тогда

$$(BC)^* = (B^{**}C)^* = (BC^{**})^* = (B \cap C)^* \quad (6)$$

для любых идеалов B, C алгебры R .

Доказательство. Пусть I — произвольный идеал алгебры R . Из отсутствия в R ненулевых нильпотентных идеалов легко вытекает соотношение

$$A_1 A_2 \dots A_n = 0 \Leftrightarrow A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = 0$$

для любых идеалов A_i алгебры R . Но тогда в силу леммы 1 для заданного идеала I и произвольных идеалов B, C получим

$$I \subseteq (BC)^* \Leftrightarrow BCI = 0 \Leftrightarrow B \cap C \cap I = 0 \Leftrightarrow I \subseteq (B \cap C)^*,$$

и потому верно равенство $(BC)^* = (B \cap C)^*$. Учитывая и это равенство, получаем соотношение

$$\begin{aligned} I \subseteq (BC)^* \Leftrightarrow B \cap C \cap I = 0 \Leftrightarrow C \cap I \subseteq B^* = B^{***} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow B^{**} \cap C \cap I = 0 \Leftrightarrow I \subseteq (B^{**}C)^*. \end{aligned}$$

Следовательно, верно и равенство $(BC)^* = (B^{**}C)^*$. Оставшееся равенство $(BC)^* = (BC^{**})^*$ доказывается аналогично.

Лемма доказана.

Все нужные нам сведения об аннуляторных идеалах полупервичных алгебр, постоянно используемые в дальнейшем, соберем в следующее

Предложение 1. Пусть R — полупервичная алгебра. Тогда частично упорядоченное (относительно теоретико-множественного включения) множество $\text{Ann}(R)$ всех аннулятор-

ных идеалов алгебры R является полной решеткой, причем для любого семейства $\{A_i | i \in \Gamma\}$ аннуляторных идеалов их пересечение $\bigcap_{i \in \Gamma} A_i$ и объединение $\bigvee_{i \in \Gamma} A_i$ определяются по правилам

$$\bigcap_{i \in \Gamma} A_i = \bigcap_{i \in \Gamma} A_i = \left(\sum_{i \in \Gamma} A_i^* \right)^*, \quad \bigvee_{i \in \Gamma} A_i = \left(\sum_{i \in \Gamma} A_i \right)^{**} = \left(\bigcap_{i \in \Gamma} A_i^* \right)^*. \quad (7)$$

Полная решетка $\text{Ann}(R)$ сильно дистрибутивна, т. е. для любого аннуляторного идеала A и любого семейства $\{A_i | i \in \Gamma\}$ аннуляторных идеалов

$$A \wedge \left(\bigvee_{i \in \Gamma} A_i \right) = \bigvee_{i \in \Gamma} (A \wedge A_i), \quad A \vee \left(\bigcap_{i \in \Gamma} A_i \right) = \bigcap_{i \in \Gamma} (A \vee A_i). \quad (8)$$

Наименьшим элементом полной решетки $\text{Ann}(R)$ является нулевой идеал $0 = R^*$, а наибольшим элементом — несобственный идеал $R = 0^*$. Для любого аннуляторного идеала A в решетке $\text{Ann}(R)$ верны равенства

$$A \wedge A^* = 0, \quad A \vee A^* = R, \quad (9)$$

т. е. аннуляторный идеал A^* будет дополнением к A в дистрибутивной решетке $\text{Ann} R$. Поэтому $\text{Ann}(R)$ — булева решетка. Отображение $*$: $\text{Ann}(R) \rightarrow \text{Ann}(R)$, ставящее в соответствие каждому аннуляторному идеалу A его аннулятор A^* , является инволюцией (дуальным автоморфизмом) полной решетки $\text{Ann}(R)$, т. е.

$$A^{**} = A, \quad B \subseteq C \Leftrightarrow B^* \supseteq C^* \quad (10)$$

для любых аннуляторных идеалов A, B, C алгебры R .

Доказательство. Соотношения (10) вытекают из леммы 1. Поэтому отображение $*$: $\text{Ann}(R) \rightarrow \text{Ann}(R)$ является инволюцией частично упорядоченного множества $\text{Ann}(R)$ в силу лемм 1 и 2. Но тогда легко получаем, что $\text{Ann}(R)$ — полная решетка и верны равенства (7).

Действительно, из лемм 1, 2 вытекает, что теоретико-множественное пересечение любого семейства аннуляторных идеалов само будет аннуляторным идеалом, так как для любого семейства $\{I_i | i \in \Gamma\}$ идеалов верно равенство

$$\bigcap_{i \in \Gamma} I_i^* = \left(\sum_{i \in \Gamma} I_i \right)^*.$$

Но по определению пересечения в частично упорядоченном множестве пересечение $\bigwedge_{i \in \Gamma} A_i$ аннуляторных идеалов

A_i — это наибольший аннуляторный идеал, содержащийся во всех аннуляторных идеалах A_i . Так как таким аннуляторным идеалом является $\bigcap_{i \in \Gamma} A_i$ в силу сказанного,

то пересечение $\bigwedge_{i \in \Gamma} A_i$ всегда существует, причем верна

первая группа равенств (7). Учитывая (10) и применяя инволюцию $*$, получаем, что $\bigvee_{i \in \Gamma} A_i$ всегда существует и

верна вторая группа равенств (7). Поэтому $\text{Ann}(R)$ — полная решетка, причем верны равенства (7).

Ясно, что $0^* = R$ — наибольший элемент в полной решетке $\text{Ann}(R)$, а $0 = R^*$ (алгебра R полупервична 1) — наименьший элемент. Кроме того, в силу леммы 2 $A \cap A^* = 0$ для любого идеала A алгебры R , и потому верно первое из равенств (9). Применяя инволюцию $*$, получаем

$$A \vee A^* = (A^* \wedge A)^* = 0^* = R,$$

и мы доказали выполнение равенств (9).

Остается доказать выполнение равенств (8). Достаточно доказать одно из этих равенств, так как второе получается применением инволюции $*$.

Пусть A — аннуляторный идеал и $\{A_i \mid i \in \Gamma\}$ — произвольное семейство аннуляторных идеалов. Из леммы 3 и равенств (7) вытекает

$$\begin{aligned} A \wedge \left(\bigvee_{i \in \Gamma} A_i \right) &= \left(A \wedge \left(\bigvee_{i \in \Gamma} A_i \right) \right)^{**} = \left(A \left(\sum_{i \in \Gamma} A_i \right)^{**} \right)^{**} = \\ &= \left(A \left(\sum_{i \in \Gamma} A_i \right) \right)^{**} = \left(\sum_{i \in \Gamma} A A_i \right)^{**} = \left(\bigcap_{i \in \Gamma} (A A_i)^* \right)^* = \\ &= \bigvee_{i \in \Gamma} (A A_i)^{**} = \bigvee_{i \in \Gamma} (A \cap A_i)^{**} = \bigvee_{i \in \Gamma} (A \wedge A_i), \end{aligned}$$

и мы доказали первое из равенств (8).

Предложение доказано.

Следствие 1. Для любой ненулевой полупервичной алгебры R следующие условия равносильны:

а) В алгебре R в множестве всех ненулевых аннуляторных идеалов существуют минимальные элементы и каждый ненулевой аннуляторный идеал содержит минимальный ненулевой аннуляторный идеал.

а*) В алгебре R в множестве всех собственных (т. е. отличных от R) аннуляторных идеалов существуют максимальные элементы и каждый собственный аннуляторный идеал содержится в максимальном собственном аннуляторном идеале.

Действительно, это вытекает из предложения 1, так как инволюция $*$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между атомами (минимальными ненулевыми элементами) и коатомами (максимальными собственными элементами) полной решетки $\text{Ann}(R)$, переводя их друг в друга.

Теперь мы можем сформулировать одно из условий обрыва.

Определение 2. Пусть R — полупервичная алгебра. Скажем, что алгебра R удовлетворяет слабому условию обрыва цепей аннуляторов, если выполнено хотя бы одно, а значит и оба, из условий а), а*) следствия 1. При этом считаем, что $R \neq 0$.

Мы свяжем полупервичные алгебры со слабым условием обрыва цепей аннуляторов с несократимыми подпрямыми произведениями первичных алгебр.

Определение 3. Пусть ненулевая алгебра R является подпрямым произведением некоторого множества $\{R_i \mid i \in \Gamma\}$ алгебр и $\{P_i \mid i \in \Gamma\}$ — соответствующее множество идеалов алгебры R , т. е.

$$\bigcap_{i \in \Gamma} P_i = 0, \quad \forall i \in \Gamma \mid R/P_i \cong R_i. \quad (+)$$

Скажем, что алгебра R является несократимым подпрямым произведением алгебр R_i , если в разложении (+) нет лишних членов, т. е.

$$\forall j \in \Gamma \mid \bigcap_{i \neq j} P_i \neq 0, \quad (++)$$

Приступая к исследованию алгебр со слабым условием обрыва, посмотрим сначала, что представляют собой атомы и коатомы в решетке $\text{Ann}(R)$.

Лемма 4. Пусть R — ненулевая полупервичная алгебра. Для любого идеала I алгебры R равносильны следующие утверждения:

- а) I — ненулевая первичная алгебра.
- б) I^* — первичный собственный идеал алгебры R .

в) I^* — коатом в полной решетке $\text{Апп}(R)$, т. е. максимальный собственный аннуляторный идеал в алгебре R .

г) I^{**} — атом в полной решетке $\text{Апп}(R)$; т. е. минимальный ненулевой аннуляторный идеал в алгебре R .

Доказательство. Пусть R — ненулевая полупервичная алгебра, I — идеал в R .

а) $\Rightarrow$ г). Пусть I — ненулевая первичная алгебра. Ясно, что тогда $I^{**} \neq 0$, так как $I^{**} \supseteq I$. Поэтому I^{**} — ненулевой аннуляторный идеал. Пусть A — любой такой аннуляторный идеал алгебры R , что $A \subset I^{**}$. Тогда $A^* \supset I^*$, и потому $A^*I \neq 0$. Но тогда, замечая, что IA и A^*I — идеалы алгебры I и $IA \cdot A^*I = 0$, получаем, в силу первичности алгебры I , равенство $IA = 0$. А это означает, что $A \subseteq I^*$. Но по условию $A \subseteq I^{**}$. Поэтому $A = 0$, так как $I^* \cap I^{**} = 0$. Отсюда вытекает в силу произвольности выбора аннуляторного идеала A , что I^{**} — атом в полной решетке $\text{Апп}(R)$.

г) $\Rightarrow$ в). Это вытекает из предложения 1.

в) $\Rightarrow$ б). Пусть I^* — коатом в решетке $\text{Апп}(R)$. По определению I^* — собственный идеал алгебры R , так как I^* — максимальный собственный аннуляторный идеал в алгебре R . Пусть B, C — такие идеалы алгебры R , что $B \not\subseteq I^*$ и $C \not\subseteq I^*$. Тогда $BI \neq 0$, и потому $(BI)^* \neq R$. Но $(BI)^* \supseteq I^*$, так как $BI \subseteq I$. Поэтому $(BI)^* = I^*$ в силу максимальной I^* . Но тогда из $C \not\subseteq I^*$ вытекает $C \not\subseteq (BI)^*$, т. е. $CB \neq 0$. Поэтому $CB \not\subseteq I^*$, и мы доказали, что I^* — первичный собственный идеал алгебры R .

б) $\Rightarrow$ а). Пусть I^* — первичный собственный идеал в алгебре R . Ясно, что в таком случае $I \neq 0$, так как $I^* \neq R$. Учитывая это, возьмем любые два ненулевых идеала B, C алгебры I . Из равенства $I \cap I^* = 0$ вытекает $B \not\subseteq I^*$, и потому $BI \neq 0$, так как $B \neq 0$. Но тогда $BI \not\subseteq I^*$, и потому $IBI \neq 0$. Следовательно, $IBI \not\subseteq I^*$. Аналогично, $ICI \not\subseteq I^*$. Замечая, что IBI и ICI — идеалы алгебры R , получаем: $IBI \cdot ICI \not\subseteq I^*$ в силу первичности идеала I^* . Поэтому $IBIICI \neq 0$. Но тогда и $BC \neq 0$, так как B и C — идеалы алгебры I . А из доказанного вытекает, что I — ненулевая первичная алгебра.

Лемма доказана.

Таким образом, атомы и коатомы в решетке $\text{Апп}(R)$ оказались связанными с такими ненулевыми идеалами I

полупервичной алгебры R , что алгебра I первична. Учитывая это, дадим такое

Определение 4. Пусть R — полупервичная алгебра, причем в алгебре R существуют ненулевые идеалы, являющиеся первичными алгебрами. Скажем, что идеал A является *первичной компонентой* алгебры R , если A — максимальный среди идеалов алгебры R , являющихся первичными алгебрами. Ясно, что все первичные компоненты являются (ненулевыми!) идеалами алгебры R , так как в R по условию есть ненулевые идеалы, являющиеся первичными алгебрами.

Предложение 2. Пусть R — полупервичная алгебра, причем в алгебре R есть ненулевые идеалы, являющиеся первичными алгебрами (это равносильно в силу леммы 4 существованию атомов или коатомов в решетке $\text{Ann}(R)$). Тогда алгебра R имеет первичные компоненты. Каждый ненулевой идеал алгебры R , являющийся первичной алгеброй, содержится в одной и только одной первичной компоненте. Если

$$\{A_j \mid j \in \Gamma\}, \quad A_i = A_j \Leftrightarrow i = j, \quad (11)$$

— множество всех первичных компонент алгебры R , то их сумма является прямой суммой соответствующих первичных алгебр, т. е.

$$\sum_{j \in \Gamma} A_j = \bigoplus_{i \in \Gamma} A_j. \quad (12)$$

При этом для любого ненулевого идеала I алгебры R равносильны утверждения:

а) I — первичная компонента алгебры R , т. е. $I = A_j$ для некоторого $j \in \Gamma$.

б) I^* — первичный собственный идеал алгебры R , причем $I = I^{**}$.

в) I^* — коатом в полной решетке $\text{Ann}(R)$, причем $I = I^{**}$.

г) I^{**} — атом в полной решетке $\text{Ann}(R)$, причем $I = I^{**}$, т. е. I — атом.

д) I — ненулевая первичная алгебра, причем $I = I^{**}$, т. е. $I \in \text{Ann}(R)$.

е) $I = A^{**}$ для некоторого ненулевого идеала A в R , являющегося первичной алгеброй.

Доказательство. В силу леммы 4 утверждения б), в), г), д) равносильны. Импликация д) $\Rightarrow$ е) очевидна,

е) $\Rightarrow$ д). Пусть $I \equiv A^{**}$ для некоторого ненулевого идеала A в R , являющегося первичной алгеброй. В силу леммы 4 получаем, что A^* — коатом. Но $A^* = A^{***} = (A^{**})^*$. Поэтому, еще раз применяя лемму 4, получаем, что $A^{**} = I$ — ненулевая первичная алгебра. Кроме того, $I = I^{**}$, так как $A^{****} = A^{**}$.

а) $\Rightarrow$ д). Пусть I — первичная компонента алгебры R . Тогда $I \neq 0$, и потому $I^{***} = I^*$ — коатом. Но тогда снова в силу леммы 4 I^{**} — первичная алгебра. Из включения $I^{**} \supseteq I$ вытекает в силу определения 4 равенство $I = I^{**}$.

д) $\Rightarrow$ а). Пусть I — ненулевая первичная алгебра, причем $I = I^{**}$. Возьмем любой такой идеал J алгебры R , что $J \supset I^{**}$. Тогда $J I^* \neq 0$, и потому $J I^*$ — ненулевой идеал алгебры J . Кроме того, I^{**} тоже является, очевидно, ненулевым идеалом алгебры J . Но тогда алгебра J не является первичной алгеброй, так как $(J I^*) I^{**} = 0$. А отсюда в силу произвольности выбора идеала J вытекает, что I — первичная компонента.

Из доказанного вытекает, что первичные компоненты и атомы решетки $\text{Ann}(R)$ — это одно и то же, так как условия а) — е) равносильны. Кроме того, в силу равносильности условий а) и е) каждый ненулевой идеал A алгебры R , являющийся ненулевой первичной алгеброй, содержится в первичной компоненте A^{**} . В частности, в R есть первичные компоненты.

Учитывая все доказанное, воспользуемся множеством (11) первичных компонент. Ясно, что (11) — множество всех атомов. Поэтому для любых $i, j \in \Gamma$

$$i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = 0 \Rightarrow A_i A_j = 0.$$

Но тогда для любого $j \in \Gamma$ получаем

$$\left(A_j \cap \sum_{i \neq j} A_i \right)^2 \subseteq A_j \sum_{i \neq j} A_i = \sum_{i \neq j} A_j A_i = 0,$$

и потому $A_j \cap \sum_{i \neq j} A_i = 0$ в силу полупервичности алгебры R . А это означает по определению, что верно равенство (12).

Предложение доказано.

Пусть I — идеал алгебры R . Напомним, что алгебра R является *точным расширением* алгебры I , если $I \bar{R} = 0$.

Теперь мы можем рассмотреть вопрос о существовании и единственности разложений алгебры в несократимое подпрямое произведение первичных алгебр.

Теорема 1 (теорема существования). *Для ненулевой алгебры R равносильны следующие утверждения:*

1°. R — полупервичная алгебра со слабым условием обрыва цепей аннуляторов.

2°. Алгебра R разлагается в несократимое подпрямое произведение первичных алгебр.

3°. Алгебра R является точным расширением прямой суммы первичных алгебр.

Доказательство. Заметим сначала, что если верно хотя бы одно из утверждений 1°, 2°, 3°, то алгебра R полупервична. А именно, если верно 1°, то это очевидно. Если верно 2°, то R будет полупервичной алгеброй, как и любая другая алгебра, разложимая в подпрямое произведение первичных алгебр в силу предложения 1.1.4. Остается рассмотреть последний случай. Пусть верно 3°, т. е. алгебра R является точным расширением прямой суммы I первичных алгебр. Ясно, что алгебра I полупервична, причем по определению I — идеал алгебры R и $I_R^* = 0$. Возьмем любой нильпотентный идеал B алгебры R . Тогда BI — нильпотентный идеал алгебры I , и потому $BI = 0$ в силу первичности алгебры I . Но тогда, в силу леммы 2 $B \subseteq I_R^* = 0$, т. е. $B = 0$. Следовательно, алгебра R полупервична.

Учитывая сказанное и доказанное, будем считать, что R — ненулевая полупервичная алгебра. Поэтому можно применять предложения 1, 2 и лемму 4.

1° $\Rightarrow$ 3°. Пусть R удовлетворяет слабому условию обрыва цепей аннуляторов. По определению 2 и следствию 1 в полной решетке $\text{Ann}(R)$ есть атомы и любой ненулевой элемент решетки $\text{Ann}(R)$ содержит некоторый атом. В силу предложения 2 атомы и первичные компоненты — это одно и то же, причем идеал Σ , равный сумме всех первичных компонент A_j , является прямой суммой соответствующих первичных алгебр, т. е.

$$\Sigma = \sum_{j \in \Gamma} A_j = \bigoplus_{j \in \Gamma} A_j. \quad (13)$$

По построению, идеал Σ содержит все атомы A_j решетки $\text{Ann}(R)$, и потому из равенства $\Sigma \cap \Sigma^* = 0$ вытекает, что

аннуляторный идеал Σ^* не содержит атомов. Поэтому $\Sigma^* = 0$, т. е. алгебра R является точным расширением прямой суммы Σ первичных алгебр A_j .

$3^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Пусть алгебра R является точным расширением прямой суммы Σ первичных алгебр A_j . Тогда, по условию и по определению 5 Σ — идеал алгебры R , $\Sigma_R^* = 0$ и верно равенство (13). Можно считать, что все $A_j \neq 0$.

Замечаем, что все аннуляторы $P_j = (A_j)_R^*$ являются первичными идеалами алгебры R ($j \in \Gamma$).

Действительно, пусть A — идеал алгебры Σ . Тогда $\Sigma A \Sigma$ — идеал и в алгебре R и в алгебре Σ , причем в силу полупервичности алгебры Σ равенства $A = 0$ и $\Sigma A \Sigma = 0$ равносильны. Кроме того, снова в силу полупервичности алгебры Σ , Σ не имеет односторонних нильпотентных идеалов и потому для любого $x \in R$ получаем

$$xA = 0 \Rightarrow (A\Sigma x)^2 = 0 \Rightarrow A\Sigma x = 0 \Rightarrow \Sigma A\Sigma x = 0,$$

$$\Sigma A\Sigma x = 0 \Rightarrow (xA)^4 = xAxAxAx \subseteq \Sigma A\Sigma xA = 0 \Rightarrow xA = 0.$$

Следовательно, $xA = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in (\Sigma A \Sigma)_R^*$. По симметрии $Ax = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in (\Sigma A \Sigma)_R^*$. Следовательно,

$$A_R^* = (\Sigma A \Sigma)_R^*, \quad (14)$$

т. е. аннулятор A_R^* оказался аннуляторным идеалом алгебры R . Допуская теперь, что алгебра A — ненулевая первичная алгебра, получаем, как легко видеть, что и $\Sigma A \Sigma$ — ненулевая первичная алгебра. Но тогда в силу (14) и леммы 4 аннулятор A_R^* будет собственным первичным идеалом алгебры R , так как $\Sigma A \Sigma$ — идеал в алгебре R , являющийся ненулевой первичной алгеброй. Положим $A_j = A$, получаем, что все аннуляторы P_j — собственные первичные идеалы алгебры R , что нам и требовалось.

Но из (13) и построения первичных идеалов $(A_j)_R^* = P_j$ вытекает

$$\bigcap_{j \in \Gamma} P_j = \bigcap_{j \in \Gamma} (A_j)_R^* = \left(\sum_{j \in \Gamma} A_j \right)_R^* = \Sigma_R^* = 0,$$

$$\forall i \in \Gamma \mid \bigcap_{j \neq i} P_j = \bigcap_{j \neq i} (A_j)_R^* \supseteq A_i \neq 0.$$

В силу определения 3 R — несократимое подпрямое произведение первичных алгебр R/P_j ($j \in \Gamma$).

$2^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Пусть алгебра R разлагается в несократимое подпрямое произведение некоторого семейства $\{R_i | i \in \Pi\}$ первичных алгебр и $\{P_i | i \in \Pi\}$ — соответствующее множество первичных идеалов алгебры R (т. е. выполнены соотношения $(+)$ и $(++)$ из определения 3).

Пусть $j \in \Pi$. Тогда в силу $(++)$ $\bigcap_{i \neq j} P_i \neq 0$. С другой стороны, $P_j \cap \left(\bigcap_{i \neq j} P_i\right) = 0$ в силу $(+)$. Поэтому $P_j^* \neq 0$ в силу леммы 2. Но тогда из равенства $P_j \cap P_j^* = 0$ вытекает $P_j \not\subseteq P_j^*$. Следовательно, $P_j \supseteq P_j^{**}$, так как $P_j^* P_j^{**} = 0$ и идеал P_j первичен. Так как обратное включение тоже верно, то $P_j = P_j^{**}$. Кроме того, из $(++)$ с очевидностью вытекает, что все P_j — собственные первичные идеалы алгебры R . Поэтому $P_j = P_j^{**}$ — первичный собственный идеал алгебры R . В силу леммы 4 все $P_j = P_j^{**}$ — коатомы в полной решетке $\text{Ann}(R)$.

С другой стороны, пусть A — собственный аннуляторный идеал в алгебре R . Тогда $A^* \neq 0$, и потому в силу $(+)$ $A^* \not\subseteq P_i$ для некоторого $i \in \Pi$. Но $A^* A = 0$. Поэтому $A \subseteq P_i$ для того же i , т. е. каждый собственный аннуляторный идеал A содержится в некотором коатоме P_i .

Следовательно, R удовлетворяет слабому условию обрыва цепей аннуляторов.

Теорема доказана.

Теорема 2 (теорема единственности). Пусть ненулевая полупервичная алгебра R представлена как несократимое подпрямое произведение первичных алгебр R_i и $\{P_i | i \in \Pi\}$ — соответствующее множество первичных идеалов алгебры R , т. е. верны соотношения $(+)$ и $(++)$ из определения 3. Пусть алгебра R представлена и как точное расширение прямой суммы $\Sigma = \bigoplus_{j \in \Gamma} A_j$ (ненулевых!) первичных алгебр A_j .

Тогда верны следующие утверждения:

1° . Можно так согласовать индексацию первичных идеалов P_i алгебры R и первичных алгебр A_j , что $\Gamma = \Pi$ и $P_i = A_i^*$ для всех $i \in \Pi$.

2° . Для каждого $i \in \Pi$ P_i^* — первичная компонента алгебры R , причем алгебра R_i изоморфна некоторому точному расширению алгебры P_i^* .

3° . Каждый аннуляторный идеал алгебры R представим, и притом единственным образом, в виде $\bigcap_{i \in \Delta} P_i$, где $\Delta \subseteq \Pi$.

В частности, полная решетка $\text{Апп}(R)$ всех аннуляторных идеалов алгебры R дуально изоморфна (и изоморфна) полной булевой решетке $\mathcal{B}(\Pi)$ всех подмножеств множества Π .

4°. Для любого первичного идеала P алгебры R равносильны условию:

- а) P^* — первичная компонента алгебры R ;
- б) P^{**} — первичный собственный идеал алгебры R ;
- в) P^{**} — максимальный собственный аннуляторный идеал алгебры R , т. е. коатом в полной решетке $\text{Апп}(R)$;
- г) P^* — минимальный ненулевой аннуляторный идеал алгебры R , т. е. атом в полной решетке $\text{Апп}(R)$;
- д) P — коатом в решетке $\text{Апп}(R)$;
- е) $P^* \neq 0$;
- ж) $P^{**} \neq R$;
- з) $P = P_i$ для некоторого $i \in \Pi$;
- и) $P = A_j^*$ для некоторого $j \in \Gamma$;
- к) $P^* \cong A_j$ для некоторого $j \in \Gamma$.

Доказательство. Повторяя доказательство импликации $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ из теоремы 1, получаем, что первичные идеалы P_i — это в точности коатомы в полной решетке $\text{Апп}(R)$. Но тогда верно утверждение 3° .

Действительно, в силу $(+)$ $\bigwedge_{i \in \Pi} P_i = 0$. Но тогда для любого аннуляторного идеала A получаем в силу предложения 1

$$A = A \vee 0 = A \vee \left(\bigwedge_{i \in \Pi} P_i \right) = \bigwedge_{i \in \Pi} (A \vee P_i) = \bigcap \{P_i \mid A \subseteq P_i\},$$

так как если $A \not\subseteq P_i$, то $A \vee P_i = R$ в силу максимальной P_i . Поэтому для каждого аннуляторного идеала A найдется такое $\Delta \subseteq \Pi$, что $A = \bigcap_{i \in \Delta} P_i$. Аналогично, при-

меняя предложение 1 еще раз, получаем, что для любых двух подмножеств Δ_1 и Δ_2 множества Π верно соотношение

$$\bigcap_{i \in \Delta_1} P_i \subseteq \bigcap_{j \in \Delta_2} P_j \Leftrightarrow \Delta_1 \supseteq \Delta_2.$$

А из сказанного и доказанного и вытекает утверждение 3° .

Снова из доказательства теоремы 1 (см. (14)) вытекает, что если $A = A_j$ для некоторого $j \in \Gamma$, то $A^* = (\Sigma A \Sigma)^*$ — аннуляторный идеал и первичный идеал алгебры R . А это влечет в силу леммы 4, что A^* — коатом в решетке $\text{Апп}(R)$. С другой стороны, пусть P — коатом в решетке $\text{Апп}(R)$,

Тогда $P^* \neq 0$, и потому $P^* \Sigma \neq 0$, так как $\Sigma^* = 0$. Но тогда $P^* A_j \neq 0$ для некоторого $j \in \Gamma$. Для этого j получаем $P^* \not\subseteq A_j^*$, и потому $P \subseteq A_j^*$, так как $P^* P = 0$ и, по доказанному, A_j^* — первичный идеал алгебры R . Но тогда $P = A_j^*$, так как P и A_j^* — коатомы в решетке $\text{Апп}(R)$.

Из всего доказанного вытекает, что первичные идеалы P_i , коатомы в полной решетке $\text{Апп}(R)$ и аннуляторы A_j^* — это одно и то же. При этом $A_i^* = A_j^*$ тогда и только тогда, когда $i = j$: из того, что $\Sigma = \bigoplus_{i \in \Gamma} A_i$ вытекает, что если

$i \neq j$, то $A_i^* \supseteq A_j$, но $A_j^* \not\supseteq A_j$, так как $A_j \neq 0$.

Поэтому верно утверждение 1°.

Мы уже доказали, что первичные идеалы P_i и коатомы в решетке $\text{Апп}(R)$ — это одно и то же. Но тогда в силу предложения 2 аннуляторные идеалы P_i^* , атомы в решетке $\text{Апп}(R)$ и первичные компоненты в алгебре R — это одно и то же. Кроме того, $P_i \cap P_i^* = 0$ влечет, что P_i^* изоморфно ненулевому идеалу $P_i^* + P_i / P_i$ первичной алгебры $R/P_i \simeq R_i$. Но, как легко видеть, первичная алгебра является точным расширением любого своего ненулевого идеала. Поэтому алгебра R_i изоморфна некоторому точному расширению алгебры P_i^* . Следовательно, верно утверждение 2°.

Остается доказать утверждение 4, т. е. доказать равносильность условий а) — к), налагаемых на первичный идеал P алгебры R .

Из предложения 2 и всего доказанного выше следует равносильность условий а), б), в), г), д), з), и). Равносильность утверждений е) и ж) очевидна.

и) $\Rightarrow$ к). Пусть $P = A_j^*$. Тогда $P^* = A_j^{**} \supseteq A_j$ в силу леммы 1.

к) $\Rightarrow$ е). Если $P^* \supseteq A_j$, то $P^* \neq 0$, так как $A_j \neq 0$.

е) $\Rightarrow$ б). Пусть $P^* \neq 0$. Тогда $P^* \not\subseteq P$, так как $P^* \cap P = 0$, и потому $P^{**} \subseteq P$ в силу первичности идеала P . Так как обратное включение тоже верно, то $P^{**} = P$ — первичный собственный идеал в R .

Следовательно, все условия а) — к) равносильны, т. е. верно утверждение 4°. Теорема доказана.

Скажем, что *полупервичная алгебра R удовлетворяет условию обрыва цепей аннуляторных идеалов*, если она удовлетворяет условию минимальности (условию обрыва убывающих цепей) или условию максимальности (условию обрыва возрастающих цепей) для аннуляторных идеалов.

Это определение достаточно корректно, так как из теорем 1 и 2 вытекает

Следствие 2. Для любой полупервичной алгебры R равносильны утверждения:

1°. Алгебра R удовлетворяет условию минимальности для аннуляторных идеалов, т. е. любая строго убывающая цепь аннуляторных идеалов обрывается на конечном шаге.

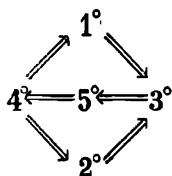
2°. Алгебра R удовлетворяет условию максимальности для аннуляторных идеалов, т. е. любая строго возрастающая цепь аннуляторных идеалов обрывается на конечном шаге.

3°. Алгебра R удовлетворяет или условию максимальности или условию минимальности для аннуляторных идеалов.

4°. Алгебра R удовлетворяет и условию максимальности и условию минимальности для аннуляторных идеалов.

5°. В алгебре R лишь конечное число аннуляторных идеалов.

Действительно, рассмотрим следующую схему импликаций:



В схеме очевидны все импликации, кроме импликации $3^\circ \Rightarrow 5^\circ$. Поэтому, если мы докажем эту импликацию, то все утверждения $1^\circ - 5^\circ$ будут равносильны.

Пусть 5° неверно, т. е. пусть в алгебре R бесконечно много (попарно различных) аннуляторных идеалов. Рассмотрим возникающие случаи.

Если алгебра R не удовлетворяет слабому условию обрыва цепей аннуляторов, то в силу следствия 1 найдется такой аннуляторный идеал $A \neq 0$, что все ненулевые аннуляторные идеалы, содержащиеся в A , не являются атомами в решетке $\text{Ann}(R)$, т. е. минимальными аннуляторными ненулевыми идеалами. Но тогда легко получаем бесконечную строго убывающую цепь аннуляторных идеалов $A = A_1 \supset \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$. Применяя инволюцию $*$, получаем в силу предложения 1 строго возрастающую цепь

аннуляторных идеалов $A_1^* \subset A_2^* \subset \dots \subset A_n^* \subset \dots$. Но тогда 3° неверно.

Если алгебра R удовлетворяет слабому условию обрыва цепей аннуляторов, то в силу теорем 1° и 2° в алгебре R бесконечно много коатомов и атомов. Но тогда в решетке $\text{Апп}(R)$ можно выделить счетно-бесконечное множество $\{A_n | n — \text{целое}, n \geq 1\}$ попарно различных коатомов. Еще раз применяя теорему 2, получаем

$$\bigcap_{n \geq 1} A_n \subset \bigcap_{n \geq 2} A_n \subset \dots \subset \bigcap_{n \geq k} A_n \subset \bigcap_{n \geq k+1} A_n \subset \dots$$

и, аналогично,

$$A_1 \supset A_1 \cap A_2 \supset \dots \supset A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \supset \dots$$

Поэтому снова 3° неверно.

Таким образом, если неверно 5°, то неверно и 3°, т. е. $3^\circ \Rightarrow 5^\circ$.

Следовательно, все утверждения 1°—5° равносильны, что и требовалось доказать.

Мы можем дать описание полупервичных алгебр с условием обрыва цепей аннуляторных идеалов.

Теорема 3. *Для любой ненулевой алгебры R равносильны утверждения:*

1°. R — полупервичная алгебра с условием обрыва цепей аннуляторных идеалов.

2°. Алгебра R разлагается в подпрямое произведение конечного множества первичных алгебр.

3°. Алгебра R является точным расширением конечной прямой суммы первичных алгебр.

4°. Алгебра R полупервична и решетка $\text{Апп}(R)$ конечна.

Действительно, утверждения 1 и 4 равносильны в силу следствия 2. Но тогда равносильны и все утверждения 1—4 в силу теорем 1 и 2, так как любое конечное подпрямое произведение можно «сократить» до конечного несократимого подпрямого произведения, выбрасывая в разложении $\bigcap_{i \in \Gamma} P_i = 0$ лишние члены P_i .

В результате мы получили теорему существования разложений в конечное произведение первичных алгебр. Можно доказать и теорему единственности для таких разложений, «сокращая» их до несократимых. Дополним теорему 2.

Теорема 4. *Пусть ненулевая полупервичная алгебра R представлена как несократимое подпрямое произведение*

конечного множества $\{R_i | i \in \Gamma\}$ первичных алгебр и $\{P_i | i \in \Gamma\}$ — соответствующее множество первичных идеалов алгебры R . Если множество Γ имеет n элементов, то решетка $\text{Anp}(R)$ имеет точно 2^n элементов. При этом коатомы в решетке $\text{Anp}(R)$, первичные идеалы P_i и минимальные первичные идеалы в алгебре R (см. следствие 1.1.4) — это одно и то же.

Действительно, в силу теоремы 2 остается доказать, что первичные идеалы P_i — это в точности минимальные первичные идеалы алгебры R .

В рассматриваемом нами случае, можно считать, что $\Gamma = \{i | 1 \leq i \leq n, i \text{ — целое}\}$, и потому мы получаем разложение нулевого идеала

$$0 = P_1 \cap \dots \cap P_i \cap \dots \cap P_n \quad (15)$$

в пересечение конечного числа первичных идеалов. Но тогда, если P — минимальный первичный идеал алгебры R , то из (15) и первичности P вытекает включение $P \supseteq P_i$ для некоторого i , и потому $P = P_i$ для того же i в силу минимальности P . Следовательно, в разложении (15) среди идеалов P_i есть все минимальные первичные идеалы. С другой стороны, возьмем любой первичный идеал P_i . В силу следствия 1.1.4 существует такой минимальный первичный идеал P'_i , что $P_i \supseteq P'_i$. Но тогда в силу доказанного $P'_i = P_j$ для некоторого j . Так как в (15) нет лишних членов, то все идеалы, входящие в разложение (15), попарно несравнимы. Поэтому из $P_i \supseteq P'_i = P_j$ следует, что $P_i = P'_i = P_j$ (и $i = j$), т. е. все идеалы P_i являются минимальными первичными идеалами алгебры R . Таким образом, в разложении (15) выписаны все минимальные первичные идеалы алгебры R и только они. Предложение доказано.

Применим доказанные утверждения для доказательства структурных теорем, близких к классическим.

Напомним, что в любой алгебре R левым цоколем называется сумма всех минимальных левых (ненулевых!) идеалов, а правым цоколем — сумма всех минимальных правых идеалов. Если алгебра R полупервична, то левый цоколь и правый цоколь алгебры R совпадают. Поэтому в этом случае говорят о цоколе алгебры R . В частности, полупервичная алгебра с ненулевым цоколем имеет и (ненулевые!) минимальные левые и минимальные правые идеалы. Строение простых алгебр с ненулевым цоколем хорошо изве-

стно (см. например, Курош [5], стр. 241 — 255). Поэтому мы будем применять такие понятия как цоколь алгебры, однородная компонента цоколя и т. д. без особых оговорок. Простую алгебру назовем *классически простой*, если она удовлетворяет условию минимальности для правых (левых) идеалов, т. е. является алгеброй матриц D_n над некоторым телом D .

Теорема 5. *Следующие утверждения о ненулевой полупервичной алгебре R равносильны:*

1°. *Алгебра R разлагается в несократимое подпрямое произведение некоторого множества $\{R_i | i \in \Gamma\}$ первичных алгебр с ненулевыми цоколями.*

2°. *Алгебра R является точным расширением прямой суммы простых алгебр с ненулевыми цоколями.*

3°. *Алгебра R является точным расширением своего цоколя.*

4°. *Любой ненулевой идеал алгебры R содержит некоторый минимальный правый идеал.*

5°. *Любой ненулевой идеал алгебры R содержит некоторый минимальный левый идеал.*

Доказательство. Пусть R — ненулевая полупервичная алгебра и Z — ее цоколь. Докажем сначала, что утверждения 3°, 4° и 5° равносильны.

Пусть верно 3, т. е. $Z^* = 0$. Тогда если I — ненулевой идеал алгебры R , то $ZI \neq 0 \neq IZ$. Но тогда найдутся такие минимальный правый идеал P и минимальный левый идеал L алгебры R , что $PI \neq 0 \neq IL$. Следовательно, $P = PI \subseteq I$ и $L = IL \subseteq I$ в силу минимальности P и L . Поэтому верны утверждения 4° и 5°.

Обратно, если верно хотя бы одно из утверждений 4°, 5°, то, очевидно, для любого ненулевого идеала I алгебры R получаем $I \cap Z \neq 0$. Но тогда $Z^* = 0$.

Таким образом, утверждения 3°, 4° и 5° действительно равносильны.

$3^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Очевидно, так как цоколь является прямой суммой своих однородных компонент, а все однородные компоненты являются простыми алгебрами с ненулевыми цоколями.

$2^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Пусть алгебра R является точным расширением прямой суммы $\Sigma = \bigoplus_{i \in \Delta} A_i$ простых алгебр A_i с ненулевыми цоколями. В силу теорем 1 и 2 алгебра R может

быть представлена в виде несократимого подпрямого произведения некоторых первичных алгебр R_j , являющихся точными расширениями алгебр A_j . Но если P — минимальный правый идеал алгебры A_j , то, как легко видеть,

$$P = P^2 = P^2 A_j = P R_j,$$

и потому P — минимальный правый идеал алгебры R_j (можно применить и лемму 1.1.3). Поэтому все алгебры R_j имеют ненулевой цоколь.

$1^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Пусть алгебра R разлагается в несократимое подпрямое произведение некоторого множества $\{R_i | i \in \Gamma\}$ первичных алгебр с ненулевыми цоклями и $\{P_i | i \in \Gamma\}$ — соответствующее множество первичных идеалов алгебры R . Тогда в силу теорем 1 и 2 можно считать, что каждая алгебра R_i является точным расширением соответствующей первичной компоненты P_i^* алгебры R . Учитывая это, рассмотрим одно вспомогательное утверждение.

Пусть A — ненулевой идеал полупервичной алгебры Q . Если L — минимальный левый идеал алгебры A , то $L^2 = L$ и потому $L = QL^2 = QL$, т. е. L — левый идеал алгебры Q . Но тогда легко видеть, что L — минимальный левый идеал в Q . Следовательно, цокль $\text{Soc}(A)$ алгебры A содержится в цокле $\text{Soc}(Q)$ алгебры Q . Обратно, пусть L — минимальный левый идеал алгебры Q , причем $AL \neq 0$. Тогда $AL = L$, и потому из вышесказанного легко вытекает, что L — минимальный левый идеал алгебры A .

Из доказанного вытекает, что цокли алгебр R_i и P_i^* совпадают. Но тогда из того, что R_i — первичные алгебры с ненулевыми цоклями, вытекает, что и алгебры P_i^* такие же. Но тогда в силу первичности алгебр P_i^* каждая алгебра P_i^* является точным расширением своего цокля Z_i , как и любого своего ненулевого идеала. Замечая, что цокли Z_i алгебр P_i^* содержатся в цокле Z алгебры R , получаем

$$\begin{aligned} Z^* Z = 0 &\Rightarrow (\forall i \in \Gamma | Z^* Z_i = 0) \Rightarrow (\forall i \in \Gamma | Z^* P_i^* Z_i = 0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\forall i \in \Gamma | Z^* P_i^* = 0) \Rightarrow (\forall i \in \Gamma | Z^* \subseteq P_i^{**} = P_i) \Rightarrow \\ &\Rightarrow Z^* \subseteq \bigcap_{i \in \Gamma} P_i = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $Z^* = 0$. Теорема доказана.

Теорема 6. *Ненулевая полупервичная алгебра R является прямой суммой простых алгебр тогда и только*

тогда, когда $I^{**} \neq R$ для любого собственного идеала I алгебры R . Это равносильно тому, что все идеалы в R — аннуляторные.

Доказательство. Пусть $R = \bigoplus_{i \in \Gamma} R_i$ — прямая сумма простых алгебр R_i . Тогда, как легко видеть, прямые суммы $\bigoplus_{i \in \Delta} R_i$, где $\Delta \subseteq \Gamma$, и только такие алгебры будут идеалами в алгебре R . Но для любого $\Delta \subseteq \Gamma$ получаем, как легко видеть,

$$\left(\bigoplus_{i \in \Delta} R_i\right)^* = \bigoplus_{i \notin \Delta} R_i, \quad \left(\bigoplus_{i \in \Delta} R_i\right)^{**} = \bigoplus_{i \in \Delta} R_i,$$

и потому все идеалы в R аннуляторные. В частности, $I^{**} = I \neq R$ для любого собственного идеала I алгебры R .

Обратно, пусть $I^{**} \neq R$ для любого собственного идеала I алгебры R . Тогда, в частности, $P^{**} \neq R$ для любого минимального первичного идеала P в R , и потому $P^* \neq 0$. Но тогда (см. доказательство импликации е) $\Rightarrow$ б) из теоремы 2) $P = P^{**}$, и потому в силу леммы 4 (при $I = P^*$) $P = P^{**}$ — коатом в полной решетке $\text{Апп}(R)$. С другой стороны, если A — собственный аннуляторный идеал, то $A^* \neq 0$, и потому $A^* \not\subseteq P$ для некоторого минимального первичного идеала P в силу следствия 1.1.4 и полупервичности алгебры R . Поэтому равенство $AA^* = 0$ влечет $A \subseteq P$ в силу первичности P .

Таким образом, в силу следствия 1 и определения 2 алгебра R удовлетворяет слабому условию обрыва цепей аннуляторов, причем минимальные первичные идеалы и коатомы в полной решетке $\text{Апп}(R)$ — это одно и то же. Но по условию каждый собственный идеал алгебры R содержится в некотором собственном аннуляторном идеале, так как $I \subseteq I^{**}$. Поэтому минимальные первичные идеалы, коатомы в решетке $\text{Апп}(R)$ и максимальные (собственные!) идеалы — это одно и то же. Но тогда в силу теорем 1 и 2, алгебра R является несократимым подпрямым произведением некоторого множества $\{R_i \mid i \in \Gamma\}$ простых алгебр — фактор-алгебр R/P , где P пробегает минимальные первичные идеалы. Переходя к первичным компонентам алгебры R , получаем, что для каждого $i \in \Gamma$ первичная компонента P_i^* изоморфна алгебре R_i , так как она изоморфна ненулевому идеалу этой простой алгебры. Еще раз применяя теорему 2, получаем, что R — точное рас-

ширение прямой суммы $\Sigma = \bigoplus_{i \in \Gamma} P_i^*$. Но по условию $\Sigma^{**} = 0^* = R$ влечет $\Sigma = R$, и потому R — прямая сумма простых алгебр.

Теорема доказана.

Следствие 3. *Ненулевая полупервичная алгебра R является прямой суммой простых алгебр с ненулевым цоколем тогда и только тогда, когда любой ненулевой идеал алгебры R содержит некоторый минимальный правый (левый) идеал, а любой собственный идеал содержится в некотором собственном аннуляторном идеале.*

Действительно, достаточно доказать только обратное утверждение. Но в силу теоремы 5 первое условие обеспечивает равенство $Z^* = 0$, где Z — цоколь алгебры R , а второе условие дает нам равенство $R = Z$ в силу теоремы 6.

Мы можем обобщить доказанные утверждения, рассматривая произвольный специальный радикал.

Всюду ниже символом $\mathcal{M}$ обозначен произвольный, но фиксированный специальный класс алгебр, а символом $S_{\mathcal{M}}$ — соответствующий специальный радикал. Из определений вытекает, что все $S_{\mathcal{M}}$ -полупростые алгебры полупервичны, так как они являются подпрямыми произведениями первичных алгебр — алгебр из специального класса $\mathcal{M}$. Напомним, что идеал P алгебры R называется $\mathcal{M}$ -идеалом, если R/P — алгебра из $\mathcal{M}$.

Теорема 7. *Для любой ненулевой полупервичной алгебры R равносильны утверждения:*

1°. *Алгебра R разлагается в несократимое подпрямое произведение алгебр из специального класса $\mathcal{M}$.*

2°. *Алгебра R является точным расширением прямой суммы алгебр из класса $\mathcal{M}$.*

3°. *Любой ненулевой идеал алгебры R содержит ненулевой идеал, являющийся алгеброй из $\mathcal{M}$.*

4°. *Алгебра R удовлетворяет слабому условию обрыва цепей аннуляторов, причем все максимальные (собственные) аннуляторы являются $\mathcal{M}$ -идеалами.*

5°. *Алгебра R удовлетворяет слабому условию обрыва цепей аннуляторов, причем все минимальные (ненулевые) аннуляторы являются алгебрами из класса $\mathcal{M}$.*

Эта теорема легко вытекает из теорем существования и единственности несократимых подпрямых разложений

полупервичных алгебр и определения специальных классов алгебр.

Теорема 8. *Если в $S_{\mathcal{M}}$ -полупростой алгебре R аннулятор Q^* любого вполне неприводимого идеала Q *) отличен от нуля, то R — прямая сумма простых алгебр из специального класса $\mathcal{M}$. Обратно, если R — прямая сумма простых алгебр из $\mathcal{M}$, то R — $S_{\mathcal{M}}$ -полупростая алгебра, причем аннулятор любого собственного идеала не равен нулю.*

Действительно, пусть алгебра R $S_{\mathcal{M}}$ -полупроста, причем аннулятор любого вполне неприводимого идеала отличен от нуля.

Возьмем любой собственный идеал I алгебры R . Обычным образом вкладываем I в некоторый вполне неприводимый идеал Q . По условию $Q^* \neq 0$ и потому $Q^{**} \neq R$ в силу полупервичности алгебры R . Но $I \subseteq Q$ и потому $I^{**} \subseteq Q^{**}$. Следовательно, верно и неравенство $I^{**} \neq R$.

В силу произвольности выбора идеала I R — прямая сумма простых $S_{\mathcal{M}}$ -полупростых алгебр (см. теорему 6). Но простые $S_{\mathcal{M}}$ -полупростые алгебры и простые алгебры из класса $\mathcal{M}$ — это одно и то же в силу специальности класса $\mathcal{M}$. Поэтому R — прямая сумма некоторого множества простых алгебр из класса $\mathcal{M}$.

Обратно, если R — прямая сумма простых алгебр из специального класса $\mathcal{M}$, то, очевидно, алгебра R $S_{\mathcal{M}}$ -полупроста. При этом в силу теоремы 6, аннулятор любого собственного идеала алгебры R отличен от нуля.

Из теорем 8 и 5 вытекает

Следствие 4. *Ненулевая $S_{\mathcal{M}}$ -полупростая алгебра R является прямой суммой простых алгебр из $\mathcal{M}$ с ненулевым цоклем тогда и только тогда, когда любой ненулевой идеал алгебры R содержит некоторый минимальный правый идеал и аннулятор любого вполне неприводимого идеала в R отличен от нуля.*

А из доказанных утверждений вытекает

Теорема 9. *Ненулевая $S_{\mathcal{M}}$ -полупростая алгебра R является прямой суммой простых алгебр из $\mathcal{M}$ с условием*

*) Идеал Q алгебры R называется вполне неприводимым, если R/Q — подпрямо неразложимая (ненулевая!) алгебра. Из леммы Куратовского — Цорна вытекает, что любой собственный идеал является пересечением вполне неприводимых (теорема Биркгофа).

минимальности для главных правых идеалов тогда и только тогда, когда условию минимальности для главных правых идеалов удовлетворяет сама алгебра R .

Доказательство. Достаточно доказать, что в любой полупервичной алгебре с условием минимальности для главных правых идеалов аннулятор любого вполне неприводимого идеала отличен от нуля.

Пусть R — полупервичная алгебра с условием минимальности для главных правых идеалов. Пусть Q — произвольный собственный идеал алгебры R . Ясно, что в алгебре R есть минимальные правые идеалы. Замечаем, что в R есть минимальные правые идеалы, не содержащиеся в идеале Q .

Допустим противное, т. е. допустим, что идеал Q содержит цоколь алгебры R . По условию $Q \neq R$. Поэтому множество $\mathfrak{P} = \{P \mid P \text{ — главный правый идеал алгебры } R, P \text{ не содержится в идеале } Q\}$ непусто. В силу условия минимальности для главных правых идеалов в $\mathfrak{P}$ есть минимальный элемент. Пусть это будет главный правый идеал $P = |a)$. По построению $a \notin Q$. Применяя условие минимальности для главных правых идеалов, находим минимальный правый идеал P' алгебры R , содержащийся в P . В силу полупервичности алгебры R минимальный правый идеал P' ненильпотентен, и потому $P' = eR$ для некоторого (ненулевого) идемпотента e . Применяя пирсовское разложение, получаем разложение правого идеала P : $P = |a) = P' \dot{+} |a - ea)$. При этом $P'' = |a - ea) \subset P$. В силу минимальности P в $\mathfrak{P}$ верно включение $P'' \subseteq Q$. Но и $P' \subseteq Q$ по предположению — все минимальные правые идеалы содержатся в Q . В результате получаем включение $P = P' + P'' \subseteq Q$. Противоречие.

Итак, в алгебре R есть минимальный правый идеал M , не содержащийся в Q . В силу минимальности M имеем $Q \cap M = 0$. Но тогда и $MQ = 0$, так как Q — идеал, M — правый идеал. Поэтому $Q^* \neq 0$. Теорема доказана.

Из доказанных теорем, заменяя $\mathcal{M}$ на конкретные специальные классы алгебр, мы получаем «конкретные» структурные теоремы. Например, взяв в качестве $\mathcal{M}$ класс всех первичных алгебр, выводим из теоремы 9

Следствие 5. *Алгебра R разлагается в прямую сумму простых алгебр с условием минимальности для главных правых идеалов тогда и только тогда, когда R —*

полупервичная алгебра с условием минимальности для главных правых идеалов.

Нетрудно видеть, что класс примитивных алгебр специален. Этому специальному классу соответствует квазирегулярный радикал. Но тогда из теоремы 7 вытекает

Следствие 6. Алгебра R разлагается в несократимое подпрямое произведение примитивных алгебр тогда и только тогда, когда она полупервична (или не содержит ненулевых квазирегулярных идеалов) и любой ненулевой идеал алгебры R содержит ненулевой идеал, являющийся примитивной алгеброй.

Мы можем перейти от бесконечных разложений к конечным разложениям, применяя условия минимальности или максимальности для всех правых идеалов (артиновость или нетеровость). Это вытекает из того, что верно

Следствие 7. Пусть ненулевая полупервичная алгебра R удовлетворяет условию максимальности или минимальности для идеалов. Тогда R разлагается в подпрямое произведение конечного множества первичных алгебр с тем же условием.

Достаточно заметить, что алгебра R удовлетворяет условию обрыва цепей аннуляторных идеалов в силу следствия 2.

С помощью более тонких рассуждений мы можем получить тот же результат, рассматривая условия минимальности для правых идеалов некоторого специального вида. Укажем, например, одно уточнение классической структурной теоремы Веддербарна — Артина.

Мы будем применять теорему 9. Но, как хорошо известно, простые (идемпотентные) алгебры с ненулевым цоколем примитивны. Поэтому достаточно рассмотреть случай $\mathcal{J}$ -полупростых (т. е. полупростых в смысле квазирегулярного радикала) алгебр.

Напомним, что правый идеал P алгебры R называется правым модулярным идеалом, если существует такой $e \in R$, что $r - er \in P$ для всех $r \in R$. Ясно, что для любого $a \in R$ множество

$$(1 - a)R \equiv \{r - ar \mid r \in R\}$$

является правым модулярным идеалом. Этот правый модулярный идеал называется главным правым модуляр-

ным идеалом, порожденным элементом $a \in R$ (являющимся левой единицей по модулю этого правого модулярного идеала).

Теорема 10. Для любой ненулевой $\mathcal{J}$ -полупростой алгебры R равносильны утверждения:

а) Алгебра R артинова справа, т. е. удовлетворяет условию минимальности для правых идеалов.

б) Алгебра R классически полупроста, т. е. разлагается в прямую сумму классически простых алгебр.

в) Алгебра R имеет единицу и удовлетворяет условию минимальности для главных правых идеалов.

г) Алгебра R удовлетворяет условию минимальности для главных правых модулярных идеалов.

Доказательство. Импликации а) $\Rightarrow$ г) и б) $\Rightarrow$ а) очевидны. Остается доказать импликации в) $\Rightarrow$ б) и г) $\Rightarrow$ в).

в) $\Rightarrow$ б). Пусть алгебра R имеет единицу 1 и удовлетворяет условию минимальности для главных правых идеалов. Из теоремы 9 вытекает, что R — прямая сумма простых алгебр с единицей, удовлетворяющих условию минимальности для главных правых идеалов. Но простое кольцо с минимальными правыми идеалами удовлетворяет условию минимальности для правых идеалов (а значит классически полупросто) тогда и только тогда, когда оно имеет единицу. Поэтому $R = \bigoplus_{i \in \Gamma} R_i$ — прямая сумма клас-

сически простых алгебр. Эта сумма должна быть конечной, так как единица 1 принадлежит некоторой конечной сумме $\bigoplus_{i \in \Delta} R_i$ указанных алгебр.

г) $\Rightarrow$ в). Пусть алгебра R удовлетворяет условию минимальности для главных правых модулярных идеалов. Если алгебра R имеет единицу 1, то главные правые модулярные идеалы и главные правые идеалы — это одно и то же. А именно, если $a + b = 1$, то главный правый модулярный идеал с «левой единицей» a , т. е. $(1 - a)R$, совпадает с главным правым идеалом bR алгебры R , порожденным элементом $b = 1 - a$.

Остается показать, что алгебра R имеет единицу.

В силу условия минимальности для главных правых модулярных идеалов в R есть минимальные правые модулярные идеалы. Достаточно заметить, что минимальные правые модулярные идеалы и минимальные главные правые модулярные идеалы — это одно и то же.

Пусть $P = (1 - e)R$ — минимальный правый модулярный идеал и e — соответствующая ему «левая единица». Если $P = 0$, то по построению $r = er$ для всех $r \in R$. Но тогда $(s - se)r = s(r - er) = 0$ для всех $r, s \in R$, и потому $s = se$ для всех $s \in R$ в силу полупервичности R . В результате получаем, что e — единица алгебры R .

Остается показать, что $P = 0$.

Допустим, что $(1 - e)R = P \neq 0$. Тогда в силу $\mathcal{J}$ -полупростоты алгебры R правый идеал P неквазирегулярен. В частности, алгебра P неквазирегулярна и потому существует такой $e' \in P$, что $P \neq (1 - e')P \equiv \{p - e'p \mid p \in P\} = P'$. Из того, что P — правый идеал в алгебре R , вытекает, что и P' — правый идеал в R . Поэтому в силу минимальности P правый идеал P' не может быть правым модулярным идеалом в R . Между тем, $r - er \in P = (1 - e)R$ для любого $r \in R$ и потому

$$\begin{aligned} r - (e' \cdot e)r &= r - (e' + e - e'e)r = \\ &= (r - er) - e'(r - er) \in (1 - e')P = P', \end{aligned}$$

т. е. P' — правый модулярный идеал в R . Противоречие.

§ 2. Алгебры без нильпотентных элементов и обобщенный нильрадикал

Введем в рассмотрение еще один специальный радикал, близкий к классическим нильрадикалам и совпадающий с ними в ассоциативно-коммутативном случае.

Нетрудно видеть, что в ассоциативно-коммутативном случае множество всех нильпотентных элементов данной алгебры R является идеалом в R . Этот идеал и называется нильрадикалом ассоциативно-коммутативных алгебр.

При переходе к некоммутативному случаю множество всех нильпотентных элементов перестает быть идеалом — оно не будет даже подалгеброй. Тем не менее, нильрадикал ассоциативно-коммутативных алгебр можно перенести на некоммутативный случай с помощью конструкции верхнего радикала.

А именно, положим для любой алгебры R

$$\mathcal{A}(R) = \bigcap \{P \mid P - \text{идеал в } R, \text{ фактор-алгебра } R/P - \text{алгебра без делителей нуля}\}^*) \quad (1)$$

Построенное отображение $\mathcal{A}: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ основного класса $\mathfrak{A}$ алгебр в себя будем называть *обобщенным нильрадикалом*.

Предложение 1. *Класс $\mathcal{D}$ всех алгебр без делителей нуля является специальным классом алгебр. Поэтому обобщенный нильрадикал $\mathcal{A}$ будет специальным радикалом — верхним радикалом S_2 , определенным специальным классом $\mathcal{D}$. При этом $\mathcal{A}$ -полупростые алгебры — это в точности подпрямые произведения алгебр без делителей нуля, $\mathcal{A}$ -радикальные алгебры — алгебры, не отображающиеся гомоморфно на алгебры без делителей нуля.*

Действительно, в силу (1) достаточно доказать, что класс $\mathcal{D}$ всех алгебр без делителей нуля является специальным классом алгебр.

Пусть алгебра B без делителей нуля является ненулевым идеалом первичной алгебры A . Возьмем любые ненулевые элементы $x, y \in A$. Из первичности алгебры A вытекает $Bx \neq 0$, $yB \neq 0$, так как B — ненулевой идеал в A . Но B — алгебра без делителей нуля и $Bx \subseteq B$, $yB \subseteq B$. Поэтому $BxyB \neq 0$. Но тогда, очевидно, $xy \neq 0$. Следовательно, A — алгебра без делителей нуля.

Ясно, что любой идеал (и даже любая подалгебра) алгебры без делителей нуля сама не имеет делителей нуля. Поэтому в силу леммы 3.4.1 класс $\mathcal{D}$ всех алгебр без делителей нуля будет специальным классом.

Предложение доказано.

Нетрудно показать, что класс всех алгебр без нильпотентных элементов является полупростым классом, соответствующим некоторому наднильпотентному радикалу. Будет ли этот радикал специальным? Но нетрудно показать, что алгебры без делителей нуля и первичные алгебры без нильпотентных элементов — это одно и то же. Поэтому в силу предложения 3.4.3 указанный вопрос эквивалентен следующему: любая ли алгебра без нильпотентных элементов является подпрямым произведением алгебр без делителей нуля?

*) Алгебры без делителей нуля, как и первичные алгебры, считаем ненулевыми. Поэтому в (1) идеалы P считаются собственными идеалами. Как обычно, по определению, пересечение пустого множества идеалов алгебры R совпадает с несобственным идеалом R .

Мы дадим положительный ответ на поставленные вопросы. Но для этого нам необходимы некоторые леммы об алгебрах без нильпотентных элементов.

Лемма 1. Пусть R — алгебра без нильпотентных элементов. Тогда для любого непустого подмножества S в R правый аннулятор $r(0, S)$, левый аннулятор $l(0, S)$ и аннулятор $S^* = r(0, S) \cap l(0, S)$ совпадают. Поэтому аннулятор S^* является идеалом алгебры R .

Действительно, отсутствие в R нильпотентных элементов равносильно выполнению в R условного тождества

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0. \quad (2)$$

Но из (2) вытекает, что в R верно и условное тождество

$$xy = 0 \Leftrightarrow yx = 0. \quad (3)$$

А именно, если $xy = 0$, то $(yx)^2 = yx yx = 0$, и потому $yx = 0$. А из (3) вытекает, в свою очередь, что для любого непустого $S \subseteq R$ множества

$$r(0, S) = \{z \in R \mid Sz = 0\}, \quad l(0, S) = \{z \in R \mid zS = 0\}$$

совпадают. Между тем, очевидно, правый аннулятор $r(0, S)$ является правым идеалом, а левый аннулятор $l(0, S)$ — левым идеалом алгебры R . Поэтому из равенства $r(0, S) = l(0, S) = S^*$ вытекает, что аннулятор S^* — идеал алгебры R .

Лемма 2. Пусть R — алгебра без нильпотентных элементов. Тогда для любого конечного множества элементов из R при $n \geq 2$ верно соотношение *)

$$x_1 x_2 \dots x_n = 0 \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^n (x_i) = 0. \quad (4)$$

Поэтому для любых двух конечных непустых множеств элементов алгебры R верно соотношение

$$\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\} = \{y_j \mid 1 \leq j \leq m\} \Rightarrow \\ \Rightarrow (x_1 x_2 \dots x_i \dots x_n = 0 \Leftrightarrow y_1 \dots y_j \dots y_m = 0). \quad (5)$$

Ясно, что соотношение (5) вытекает из соотношения (4). Остается доказать (4).

*) Напомним, что символом (x) или $(x)_R$ обозначается главный идеал алгебры R , порожденный элементом $x \in R$.

Пусть $x, y \in R$ и $xy = 0$. Аннулятор y^* элемента y является идеалом в R в силу леммы 1. Поэтому из $x \in y^*$ вытекает, что и $(x) \subseteq y^*$, т. е. $(x)y = 0$.

Учитывая доказанное, возьмем любое конечное непустое множество $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ элементов из R и $n \geq 2$. Из (3) и доказанного вытекает

$$\begin{aligned} x_1 x_2 \dots x_n = 0 &\Leftrightarrow (x_1) x_2 \dots x_n = 0 \Leftrightarrow x_2 x_3 \dots x_n (x_1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x_2) x_3 \dots x_n (x_1) = 0 \Leftrightarrow x_3 x_4 \dots x_n (x_1) (x_2) = 0 \Leftrightarrow \dots \\ &\dots \Leftrightarrow x_n (x_1) (x_2) \dots (x_{n-1}) = 0 \Leftrightarrow (x_1) (x_2) \dots (x_{n-1}) (x_n) = 0. \end{aligned}$$

Но, очевидно, в алгебре без нильпотентных элементов нет и нильпотентных (ненулевых!) идеалов. Поэтому

$$(x_1) (x_2) \dots (x_n) = 0 \Rightarrow \left(\bigcap_{i=1}^n (x_i) \right)^n = 0 \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n (x_i) = 0.$$

А из доказанного вытекает нужное нам соотношение (4), так как включение $x_1 x_2 \dots x_n \in \bigcap_{i=1}^n (x_i)$ очевидно.

Лемма 3. Пусть R — алгебра без нильпотентных элементов. Тогда для любой мультипликативно замкнутой подсистемы M в R (т. е. подполугруппы мультипликативной полугруппы алгебры R) множество

$$M^* = \{r \in R \mid rt = 0 \text{ для некоторого } t \in M\} \quad (6)$$

является идеалом алгебры R . Если M — максимальная мультипликативно замкнутая подсистема в R , не содержащая нуля, то

$$M \cap M^* = \emptyset, \quad M \cup M^* = R, \quad \text{т. е. } M^* = R \setminus M. \quad (7)$$

Доказательство. Пусть M — мультипликативно замкнутая подсистема в алгебре R без нильпотентных элементов.

Пусть $x, y \in M^*$. В силу (6) $xa = 0 = yb$ для некоторых $a, b \in M$. Но тогда для любых $\alpha, \beta \in \Phi, z \in R$, получаем в силу леммы 2 равенство

$$(\alpha x + \beta y) ab = x y a b = x z a b = z y a b = 0. \quad (8)$$

Между тем $ab \in M$. Поэтому из (6) и (8) вытекает, что M^* — идеал алгебры R .

Допустим теперь, что M — мультипликативно замкнутая подсистема в R , являющаяся максимальной среди

мультипликативно замкнутых подсистем, не содержащих 0. Ясно, что тогда в силу (6) $M \cap M' = \emptyset$, так как $0 \notin M$.

Пусть $r \in R$, $r \notin M$. Строим множество

$$M' = \{r_1 \dots r_i \dots r_n \mid n - \text{целое } n \geq 1, r_i \in M \cup \{r\}\}. \quad (9)$$

Ясно, что M' — мультипликативно замкнутая подсистема в R , строго содержащая M , так как $r \in M'$, $r \notin M$. В силу максимальной M $0 \in M'$. Поэтому в силу (9) $r_1 \dots r_i \dots r_n = 0$ для некоторых $r_i \in M \cup \{r\}$, $1 \leq i \leq n$.

Если все r_i равны r , то $r^n = 0$, и потому $r = 0$. Но тогда $r \in M$.

Если не все r_i равны r , то из $0 \notin M$ вытекает, что $n \geq 2$, причем среди элементов r_i есть и элементы из M и элементы, равные r . Но тогда, применяя лемму 2 и учитывая мультипликативную замкнутость M , получаем равенство $rm = 0$ для некоторого $m \in M$. Но тогда в силу (6) снова получаем, что $r \in M$.

Следовательно, $M \cup M' = R$, т. е. верно и соотношение (7).

Лемма доказана.

Теорема 1. *Алгебра R будет алгеброй без нильпотентных элементов тогда и только тогда, когда R — подпрямое произведение алгебр без делителей нуля. Если R — алгебра без нильпотентных элементов, то верны следующие утверждения:*

а) *Если σ — m -система в R , не содержащая 0, то порожденная системой σ мультипликативно замкнутая подсистема $\hat{\sigma}$ тоже не содержит 0.*

б) *Если P — минимальный первичный идеал в R , то фактор-алгебра R/P будет алгеброй без делителей нуля.*

Доказательство. В любой алгебре без делителей нуля выполнение условного тождества (2) очевидно. Не менее очевидно, что выполнение условного тождества (2) сохраняется при взятии подалгебр и прямых произведений, а значит и при переходе к подпрямым произведениям. Поэтому все алгебры, являющиеся подпрямыми произведениями алгебр без делителей нуля, будут алгебрами без нильпотентных элементов.

Обратно, пусть R — алгебра без нильпотентных элементов. Будем считать, что $R \neq 0$, так как для нулевой алгебры все очевидно. Ясно, что каждый ненулевой элемент $a \in R$ содержится в некоторой мультипликативно

замкнутой подсистеме, не содержащей 0, например в $\{a^n | n - \text{целое}, n \geq 1\}$. В силу леммы Куратовского — Цорна любая мультипликативно замкнутая подсистема в R , не содержащая 0, содержится в некоторой максимальной среди таких систем. Поэтому каждый ненулевой элемент алгебры R содержится в некоторой максимальной мультипликативно замкнутой подсистеме, не содержащей 0.

С каждым ненулевым элементом $a \in R$ свяжем некоторую максимальную мультипликативно замкнутую подсистему M_a , не содержащую 0, такую, что $a \in M_a$. С помощью леммы 3 строим соответствующие идеалы M'_a . Тогда $a \notin M'_a$, и потому очевидно равенство $\bigcap \{M'_a | a \in R, a \neq 0\} = 0$. Но из (7) и мультипликативной замкнутости системы M_a вытекает, что для любого $a \in R, a \neq 0$, фактор-алгебра $R_a = R/M'_a$ будет алгеброй без делителей нуля.

Следовательно, алгебра R является подпрямым произведением алгебр R_a без делителей нуля, и мы доказали первое утверждение теоремы.

Возьмем любую m -систему σ в алгебре R . Ясно, что порожденная σ мультипликативно замкнутая подсистема $\hat{\sigma}$ имеет вид

$$\hat{\sigma} = \{r_1 \dots r_l \dots r_n | n - \text{целое}, n \geq 1, r_i \in \sigma\}. \quad (10)$$

Допустим, что $0 \in \hat{\sigma}$. Тогда в силу (10) $0 = r_1 \dots r_l \dots r_n$ для некоторых $r_i \in \sigma$. Если $n = 1$, то $0 = r_1 \in \sigma$. Если $n \geq 2$, то из определения m -системы (см. определение 1.1.5) вытекает, что $r_1 x_1 r_2 x_2 \dots r_{n-1} x_{n-1} r_n \in \sigma$ для некоторых $x_i \in R$. Но в силу леммы 2 из равенства $r_1 \dots r_l \dots r_n = 0$ вытекает $r_1 x_1 r_2 \dots x_{n-1} r_n = 0$. Поэтому снова $0 \in \sigma$.

Следовательно, верно утверждение а).

Пусть P — минимальный первичный идеал в R . Тогда в силу леммы 1.1.9 дополнение $\sigma = R/P$ будет максимальной m -системой в R , не содержащей 0. Но в силу утверждения а) мультипликативно замкнутая подсистема $\hat{\sigma}$, порожденная σ , тоже не содержит 0 и, очевидно, является m -системой. Поэтому в силу максимальной $\sigma = \hat{\sigma}$, т. е. сама m -система $\sigma = R \setminus P$ будет мультипликативно замкнута. Но тогда, очевидно, R/P — алгебра без делителей нуля.

Следовательно, верно и утверждение б). Теорема доказана.

Теперь мы можем построить обобщенный нильрадикал с помощью процесса, аналогичного процессу построения нижнего нильрадикала.

Предложение 2. *Класс $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ всех $\mathcal{A}$ -полупростых алгебр совпадает с классом всех алгебр без нильпотентных элементов. Поэтому в любой алгебре R ее $\mathcal{A}$ -радикал $\mathcal{A}(R)$ является наименьшим среди таких идеалов P в R , что фактор-алгебра R/P не имеет нильпотентных элементов. Если*

$$0 \subseteq \mathcal{A}_1(R) \subseteq \mathcal{A}_2(R) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{A}_{n-1}(R) \subseteq \mathcal{A}_n(R) \subseteq \dots \quad (11)$$

— такая цепь идеалов алгебры R (n — целые числа, $n \geq 1$), что $\mathcal{A}_1(R)$ — идеал алгебры R , порожденный всеми нильпотентными элементами в R , а $\mathcal{A}_{n+1}(R)/\mathcal{A}_n(R) = \mathcal{A}_1(R/\mathcal{A}_n(R))$ для $n \geq 1$, то $\mathcal{A}(R) = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{A}_n(R)$.

Действительно, первое утверждение вытекает из теоремы 1 и предложения 1. Но тогда второе утверждение вытекает из первого в силу основных свойств радикалов.

Учитывая сказанное, возьмем любую алгебру R и построим в ней цепь (11) идеалов, как указано в условии предложения.

Фактор-алгебра $R/\mathcal{A}(R)$ не имеет нильпотентных элементов. Но при гомоморфизмах нильпотентные элементы переходят в нильпотентные элементы или 0. Поэтому $\mathcal{A}(R)$ содержит все нильпотентные элементы алгебры R , т. е. $\mathcal{A}(R) \supseteq \mathcal{A}_1(R)$. Но тогда по индукции легко получаем, что $\mathcal{A}(R) \supseteq \mathcal{A}_n(R)$ для всех целых $n \geq 1$, и потому $\mathcal{A}(R) \supseteq \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{A}_n(R)$.

С другой стороны, пусть $Q = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{A}_n(R)$. Пусть $\bar{r}$ — нильпотентный элемент в фактор-алгебре $\bar{R} = R/Q$. Переходя к прообразам, получаем, что $r^m \in Q$ для некоторого целого $m \geq 1$ и потому $r^n \in \mathcal{A}_n(R)$ для некоторого $n \geq 1$. Но тогда по построению $r \in \mathcal{A}_{n+1}(R) \subseteq Q$, и потому $\bar{r} = 0$. Следовательно, R/Q — алгебра без нильпотентных элементов, и потому $\mathcal{A}(R) \subseteq \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{A}_n(R)$.

Предложение доказано.

Для получения структурных теорем об алгебрах без нильпотентных элементов, уточняющих теорему 1, необходимо налагать на рассматриваемые алгебры некоторые условия конечности. Но, очевидно, все алгебры без ниль-

потентных элементов полупервичны. Поэтому естественно начать с условий конечности для аннуляторов (см. § 1).

Напомним, что *полупервичная алгебра R удовлетворяет по определению слабому условию обрыва цепей аннуляторов*, если каждый ненулевой аннуляторный идеал содержит некоторый минимальный ненулевой аннуляторный идеал (или, что равносильно, каждый собственный аннуляторный идеал содержится в некотором максимальном собственном аннуляторном идеале).

Теорема 2. *Пусть R — ненулевая алгебра без нильпотентных элементов. Тогда равносильны утверждения:*

а) *Алгебра R удовлетворяет слабому условию обрыва цепей аннуляторов.*

б) *R — несократимое подпрямое произведение алгебр без делителей нуля.*

в) *R — точное расширение прямой суммы алгебр без делителей нуля.*

г) *Любой ненулевой идеал алгебры R содержит ненулевой идеал, являющийся алгеброй без делителей нуля.*

Доказательство. Из леммы 2 вытекает, что первичные алгебры без нильпотентных элементов и алгебры без делителей нуля — это одно и то же. Учитывая это, и будем вести доказательство.

а) $\Rightarrow$ г). Пусть алгебра R удовлетворяет слабому условию обрыва цепей аннуляторов. Это равносильно атомности и коатомности полной булевой решетки $\text{Ann}(R)$ всех аннуляторных идеалов алгебры R . Поэтому пересечение всех коатомов в этой решетке равно 0. Учитывая это, возьмем любой ненулевой идеал I в алгебре R . В силу сказанного I не содержится в некотором коатоме A^* полной булевой решетки $\text{Ann}(R)$. Это равносильно тому, что $I \cap A^{**} \neq 0$. Но A^{**} — атом в решетке $\text{Ann}(R)$, и потому, в силу леммы 1.4 A^{**} — ненулевая первичная алгебра. Поэтому $I \cap A^{**}$ — ненулевой идеал алгебры R , являющийся алгеброй без делителей нуля и содержащийся в заданном идеале I .

г) $\Rightarrow$ в). Пусть любой ненулевой идеал алгебры R содержит ненулевые идеалы, являющиеся алгебрами без делителей нуля. Тогда, в силу предложения 1.2 алгебра R имеет первичные компоненты — максимальные среди идеалов в R , являющихся первичными алгебрами — и все они ненулевые.

В силу сказанного выше первичные компоненты P_i^* являются алгебрами без делителей нуля. Но в силу предложения 1.2 сумма $\sum_{i \in \Gamma} P_i^*$ будет прямой, т. е. $\sum_{i \in \Gamma} P_i^* = \bigoplus_{i \in \Gamma} P_i^*$. Обозначая эту сумму символом Σ , получаем, что $\Sigma \cap \Sigma^* = 0$, и потому Σ^* не может содержать ненулевых идеалов, являющихся алгебрами без делителей нуля — все такие идеалы содержатся в идеале Σ . Но тогда по условию $\Sigma^* = 0$. Следовательно, алгебра R является точным расширением своего идеала Σ , являющегося прямой суммой алгебр P_i^* без делителей нуля.

в) $\Rightarrow$ б). Это вытекает из теоремы 1.2 и предложения 1.

б) $\Rightarrow$ а). А это вытекает из теоремы 1.1.

Теорема доказана.

Предложение 3. Пусть R — ненулевая алгебра без нильпотентных элементов, удовлетворяющая слабому условию обрыва цепей аннуляторов. Пусть алгебра R представлена каким-либо образом в виде несократимого подпрямого произведения некоторого множества $\{R_i | i \in \Pi\}$ первичных алгебр. Пусть в алгебре R произвольным образом выбран такой идеал Σ , что $\Sigma = \bigoplus_{j \in \Gamma} D_j$ — прямая сумма некоторого множества $\{D_j | j \in \Gamma\}$ первичных алгебр и $\Sigma^* = 0$, т. е. R — точное расширение алгебры Σ . Тогда:

а) Все первичные компоненты алгебры R являются алгебрами без делителей нуля, каждая алгебра D_j является идеалом алгебры R и алгеброй без делителей нуля. При этом каждый идеал D_j содержится в одной и только одной первичной компоненте.

б) Множество идеалов $\{D_j^{**} | j \in \Gamma\}$ совпадает с множеством всех первичных компонент алгебры R . При этом R — точное расширение прямой суммы $\bigoplus_{j \in \Gamma} D_j^{**}$ алгебр D_j^{**} без делителей нуля.

в) Все алгебры R являются алгебрами без делителей нуля. Если $\{P_i | i \in \Pi\}$ — множество первичных идеалов алгебры R , соответствующее разложению R в несократимое подпрямое произведение алгебр R_i , т. е. $\bigcap_{i \in \Pi} P_i = 0$ и $R/P_i \simeq R_i$, $\bigcap_{j \neq i} P_j \neq 0$ для каждого $i \in \Pi$, то множества $\{P_i | i \in \Pi\}$ и $\{D_j^* | j \in \Gamma\}$ совпадают. Поэтому можно счи-

тать, что $\Pi = \Gamma$, причем для всех $j \in \Gamma$ верны равенства $P_j = D_j^*$.

г) Если мы отождествим Π и Γ так, как указано выше, то для любого $j \in \Gamma$ первичная алгебра R_j содержит ненулевой идеал, изоморфный алгебре D_j .

Все это легко вытекает из теорем 2 и 1.2. Нужно только доказать, что каждая алгебра D_j является идеалом всей алгебры R , а не только алгебры Σ . Это мы и докажем.

Нам дано, что Σ — идеал алгебры R , причем $\Sigma = \bigoplus_{j \in \Gamma} D_j$ — прямая сумма первичных алгебр D_j . Возьмем любой $j \in \Gamma$; в силу леммы 1 аннулятор D_j^{**} является идеалом алгебры R . Поэтому $\Sigma \cap D_j^{**}$ — тоже идеал алгебры R , причем, очевидно, $D_j \subseteq \Sigma \cap D_j^{**}$.

Допустим, что верно строгое включение $D_j \subset \Sigma \cap D_j^{**}$. Тогда найдется такой $i \in \Gamma$, $i \neq j$, что $D_i \cap (\Sigma \cap D_j^{**}) \neq 0$. Это влечет неравенство $D_i \cap D_j^{**} \neq 0$ и потому $D_i D_j^{**} \neq 0$, т. е. D_i не содержится в D_j^* . Между тем из $i \neq j$ вытекает, что $D_i \cap D_j = 0$, и потому $D_i \subseteq D_j^*$. Противоречие.

Таким образом, для любого $j \in \Gamma$ верно равенство $D_j = \Sigma \cap D_j^{**}$. Но тогда все алгебры D_j — идеалы алгебры R .

Предложение доказано.

С помощью теоремы 2 и предложения 3 мы можем получать разложения алгебр без нильпотентных элементов в несократимые подпрямые произведения простых алгебр без делителей нуля и с единицей или в несократимые подпрямые произведения тел. Чтобы это показать, замечаем, что верны следующие две леммы.

Лемма 4. Пусть D — алгебра без делителей нуля. Если e — ненулевой идемпотент в D , то e — единица алгебры D .

Действительно, пусть $e^2 = e \neq 0$, $e \in D$. Тогда для любого $x \in D$ получаем $(x - xe)e = 0$, и потому $x = xe$. Аналогично получаем $x = ex$, и потому e — единица алгебры D .

Лемма 5. Пусть R — алгебра без нильпотентных элементов, $R \neq 0$. Если e — идемпотент в R , то e — центральный идемпотент. Если L — минимальный левый идеал в R , то L — тело. При этом L — идеал в алгебре R .

Доказательство. Пусть e — ненулевой идемпотент в R . Тогда для любого элемента $x \in R$ получаем $e(xe - xe) = 0$, и потому $(exe - xe)^2 = 0$. Но тогда $exe = xe$,

так как R — алгебра без нильпотентных элементов. Аналогично получаем $ex = ex$, и потому $xe = ex$. Следовательно, идемпотент e будет центральным идемпотентом.

Пусть L — минимальный левый идеал в R . Если $a \in L$, $a \neq 0$, то $a^2 \neq 0$ и $a^2 \in La$. Поэтому из минимальности L вытекает, что $L = La$ для всех ненулевых $a \in L$. Учитывая это, возьмем любой ненулевой элемент $x \in L$. Тогда $L = Lx$, и потому $x = ex$, $e = ux$ для некоторых ненулевых $e, u \in L$. Из равенства $(e^2 - e)x = 0$ вытекает в силу леммы 2 или леммы 1 равенство $(e^2 - e)e = (e^2 - e)ux = 0$. Но тогда $(e^2 - e)^2 = 0$, т. е. $e^2 = e$ — ненулевой идемпотент в L . Но по доказанному все идемпотенты центральные. Поэтому $L = Le = eL$. А отсюда вытекает, что e — единица алгебры L . Но по построению $e = ux$. Поэтому все ненулевые элементы в L обратимы, т. е. L — тело.

Учитывая, что e — центральный идемпотент во всей алгебре R , получаем $L = Re = eR$. Но тогда L — идеал алгебры R . Лемма доказана.

Теорема 3. Для алгебры R без нильпотентных элементов равносильны следующие утверждения:

а) Алгебра R является несократимым подпрямым произведением простых алгебр с единицей и без делителей нуля.

б) Алгебра R является точным расширением прямой суммы простых алгебр с единицей и без делителей нуля.

в) R — несократимое подпрямое произведение простых алгебр с единицей.

г) R — точное расширение прямой суммы простых алгебр с единицей.

д) R — специальное подпрямое произведение простых алгебр с единицей и без делителей нуля (т. е. существует такое множество $\{R_i | i \in \Gamma\}$ простых алгебр с единицей и без делителей нуля, что, с точностью до изоморфизма, алгебра R является подалгеброй прямого произведения $\prod_{i \in \Gamma} R_i$ алгебр R_i , содержащей прямую сумму $\bigoplus_{i \in \Gamma} R_i$ тех же алгебр).

е) Алгебра R удовлетворяет слабому условию обрыва цепей аннуляторов, причем каждый ненулевой идеал в R содержит ненулевой идемпотент.

ж) Существует такая система $\{e_i | i \in \Gamma\}$ попарно ортогональных ненулевых центральных идемпотентов

алгебры R , что каждый ненулевой идеал алгебры R содержит некоторый идемпотент e_i из этой системы.

Доказательство. Если первичная алгебра B является идеалом некоторой простой алгебры A с единицей или содержит эту алгебру в качестве идеала, то верно равенство $A=B$. Поэтому в силу теоремы 2 и предложения 3 утверждения а), б), в) и г) равносильны. Ниже считаем, что $R \neq 0$.

г) $\Rightarrow$ е). Пусть алгебра R является точным расширением своего ненулевого идеала $\Sigma = \bigoplus_{j \in \Gamma} D_j$, являющегося прямой суммой некоторого множества $\{D_j \mid j \in \Gamma\}$ простых алгебр с единицей. Тогда в силу теоремы 1.1 алгебра R удовлетворяет слабому условию обрыва цепей аннуляторов. Кроме того, если I — ненулевой идеал алгебры R , то $I\Sigma \neq 0$, и потому $ID_j \neq 0$ для некоторого $j \in \Gamma$. В силу простоты алгебры D_j имеем $ID_j = D_j$. Но тогда $I \supseteq D_j$, и потому идеал I содержит некоторый ненулевой идемпотент — единицу алгебры D_j .

е) $\Rightarrow$ ж). Пусть алгебра R удовлетворяет слабому условию обрыва цепей аннуляторов, причем каждый ненулевой идеал в R содержит ненулевой идемпотент. В силу теоремы 2 и предложения 3 все первичные компоненты алгебры R являются алгебрами без делителей нуля, причем R — точное расширение прямой суммы $\Sigma = \bigoplus_{j \in \Gamma} D_j$ своих первичных компонент. Первичные компоненты D_j должны по условию содержать ненулевые идемпотенты, как и любые другие ненулевые идеалы. Поэтому в силу лемм 4 и 5 каждая первичная компонента D_j является алгеброй с единицей e_j и без делителей нуля, причем e_j — центральные идемпотенты.

Рассмотрим систему $\{e_j \mid j \in \Gamma\}$ полученных центральных идемпотентов. Ясно, что идемпотенты e_j попарно ортогональны, так как $\Sigma = \bigoplus_{j \in \Gamma} D_j$. Кроме того, если I — ненулевой идеал в R , то и ID_j — ненулевой идеал в R для некоторого $j \in \Gamma$. Но тогда по условию ID_j должен иметь центральный ненулевой идемпотент e . Но $ID_j \subseteq D_j$ и D_j — алгебра без делителей нуля. Поэтому в силу леммы 4 e — единица алгебры D_j . Следовательно, $e_j = e \in I$, так как $I \supseteq ID_j$.

ж) $\Rightarrow$ д). Пусть в R существует такая система $\{e_i | i \in \Gamma\}$ попарно ортогональных ненулевых центральных идемпотентов, что каждый ненулевой идеал алгебры R содержит некоторый идемпотент e_i из этой системы.

Ясно, что для каждого $i \in \Gamma$ $D_i = e_i R$ — ненулевой идеал алгебры R , причем e_i — единица алгебры D_i . Замечаем, что все D_i являются простыми алгебрами без делителей нуля и с единицей.

Действительно, пусть J — ненулевой идеал алгебры D_i . Тогда $D_i J D_i$ — ненулевой идеал алгебры R , содержащийся в J . Поэтому по условию $D_i J D_i$ должен содержать некоторый идемпотент e_j . Из того, что e_i — единица алгебры D_i и $e_j \in J \subseteq D_i$, вытекает $e_i e_j = e_j$. Поэтому из ортогональности системы центральных идемпотентов вытекает, что $e_j = e_i$ — единица алгебры D_i . Но тогда получаем равенство $J = D_i$, и мы доказали, что D_i — простая алгебра с единицей. Остается заметить, что D_i — алгебра без делителей нуля, как и любая другая первичная алгебра без нильпотентных элементов.

Учитывая доказанное, рассмотрим прямое произведение $Q = \prod_{i \in \Gamma} D_i$ полученных простых алгебр без делителей нуля

с единицами e_i . Строим отображение $\xi: R \rightarrow Q$, полагая для любого $r \in R$

$$r\xi = \{re_i | i \in \Gamma\}. \quad (12)$$

Ясно, что ξ — гомоморфизм в силу центральности идемпотентов e_i . Кроме того, если $r\xi = 0$, то в силу (12) $re_i = 0$ для всех $i \in \Gamma$, и потому $(r)e_i = 0$ для всех $i \in \Gamma$. Поэтому идеал (r) не может содержать ни одного из центральных идемпотентов e_i . Это дает по условию равенство $(r) = 0$, и потому $r = 0$. Следовательно, ξ — изоморфное вложение алгебры R в прямое произведение $\prod_{i \in \Gamma} D_i$ простых алгебр D_i без делителей нуля и с единицами e_i .

Кроме того, как легко видеть, $Re_i = D_i$ для всех $i \in \Gamma$. Поэтому, еще раз применяя (12), получаем, что если $\Sigma = \sum_{i \in \Gamma} D_i$, то $\Sigma = \bigoplus_{i \in \Gamma} D_i$ в силу ортогональности центральных идемпотентов e_i , и потому

$$\Sigma = \bigoplus_{i \in \Gamma} D_i = \Sigma\xi \subseteq R\xi \subseteq \prod_{i \in \Gamma} D_i. \quad (13)$$

А из (13) вытекает, что R — специальное подпрямое произведение простых алгебр D_i без делителей нуля и с единицей, так как алгебры R и R_e изоморфны.

д) $\Rightarrow$ б). А это очевидно.

Теорема доказана.

Предложение 4. *Для алгебры R без нильпотентных элементов равносильны следующие утверждения:*

а) R — несократимое подпрямое произведение тел.

б) R — точное расширение прямой суммы тел.

в) R — специальное подпрямое произведение тел.

г) *Каждый ненулевой идеал алгебры R содержит минимальный левый (или правый) идеал.*

Действительно, утверждения а), б) и в) равносильны в силу теоремы 3 и предложения 3.

в) $\Rightarrow$ г). Пусть R — специальное подпрямое произведение тел D_i , $i \in \Gamma$. Тогда по определению с точностью до изоморфизма можно считать, что R — подалгебра прямого произведения $\prod_{i \in \Gamma} D_i$, содержащая прямую сумму $\bigoplus_{i \in \Gamma} D_i$.

Но из $\bigoplus_{i \in \Gamma} D_i \subseteq R \subseteq \prod_{i \in \Gamma} D_i$ легко вытекает, что D_i — минимальные идеалы алгебры R , причем каждый ненулевой идеал алгебры R содержит некоторый из идеалов D_i . Но D_i — минимальные левые (и минимальные правые) идеалы в R . Поэтому верно г).

г) $\Rightarrow$ в). Пусть каждый ненулевой идеал алгебры R содержит минимальный левый идеал. Тогда в силу леммы 5 каждый ненулевой идеал алгебры R содержит ненулевой идеал, являющийся телом. В частности, в силу теоремы 2 алгебра R удовлетворяет слабому условию обрыва цепей аннуляторов, причем каждый ненулевой идеал в R содержит ненулевой идемпотент. Но тогда в силу теоремы 3 алгебра R — специальное подпрямое произведение простых алгебр R_i с единицей, причем по доказанному R_i — как ненулевые идеалы алгебры R — должны содержать ненулевые идеалы, являющиеся телами. Но тогда сами R_i — тела, т. е. R — специальное подпрямое произведение тел.

Предложение доказано.

Теорема 4. *Пусть R — ненулевая алгебра без нильпотентных элементов. Тогда:*

а) Алгебра R разлагается в прямую сумму простых алгебр без делителей нуля и с единицей тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов, причем каждый ненулевой идеал (или каждый минимальный идеал) алгебры R содержит ненулевой идемпотент.

б) Алгебра R разлагается в прямую сумму тел тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию минимальности для главных левых (или правых) идеалов.

Доказательство. Пусть алгебра R (без нильпотентных элементов) разложима в прямую сумму простых алгебр R_i без делителей нуля и с единицами e_i , т. е. $R = \bigoplus_{i \in \Gamma} R_i$. Свяжем с каждым элементом $r \in R$ множество

$$\Delta(r) = \{i \in \Gamma \mid re_i \neq 0\}. \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что для любого ненулевого элемента $r \in R$ множество $\Delta(r)$ конечно, причем в силу (14)

$$r = \sum_{i \in \Delta(r)} re_i, \quad (r) = \bigoplus_{i \in \Delta(r)} R_i. \quad (15)$$

А из (15) легко вытекает, что для любых ненулевых элементов a, b

$$(a) \subseteq (b) \Leftrightarrow \Delta(a) \subseteq \Delta(b). \quad (16)$$

В силу конечности множеств $\Delta(r)$ соотношение (16) влечет выполнение условия минимальности для главных идеалов.

Если все R_i — тела, то для главных левых идеалов $(r|$ получаем равенство $(r| = \bigoplus_{i \in \Delta(r)} R_i$ и соотношение $(a| \subseteq (b| \Leftrightarrow \Delta(a) \subseteq \Delta(b)$. Но тогда R будет удовлетворять условию минимальности для главных левых идеалов.

В обоих случаях каждый ненулевой идеал алгебры R содержит некоторую из алгебр R_i , а потому содержит и ненулевой идемпотент — единицу e_i этой алгебры. Мы доказали необходимость условий в утверждениях а) и б).

Пусть алгебра R без нильпотентных элементов удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов, причем каждый ненулевой идеал алгебры R содержит ненулевой идемпотент.

Пусть M — минимальный идеал в R . Пусть $x, y \in M$ и $xy = 0$. Тогда в силу леммы 2 $(x) \cap (y) = 0$, причем (x)

и (y) — идеалы алгебры R , содержащиеся в M . В силу минимальности M получаем $(x) = 0$ или $(y) = 0$. Но тогда $x = 0$ или $y = 0$. Следовательно, M — алгебра без делителей нуля.

Из выполнения условия минимальности для главных идеалов вытекает, что каждый ненулевой идеал алгебры R содержит некоторый минимальный идеал. Но по доказанному все минимальные идеалы являются алгебрами без делителей нуля. Поэтому в силу теоремы 2 алгебра R удовлетворяет слабому условию обрыва цепей аннуляторов. Кроме того, по условию каждый ненулевой идеал содержит ненулевой идемпотент. Поэтому в силу теоремы 3 R — точное расширение прямой суммы $\Sigma = \bigoplus_{i \in \Gamma} D_i$

некоторых простых алгебр D_i без делителей нуля и с единицами e_i .

Возьмем любой ненулевой элемент $r \in R$ и построим по нему соответствующее множество $\Delta(r)$ с помощью равенства (14).

Из $\Sigma^* = 0$ вытекает, что множество $\Delta(r)$ непусто, так как $rD_i \neq 0$ для некоторого $i \in \Gamma$, а $D_i = e_i R$. Возьмем любой $i_1 \in \Delta(r)$. Тогда, полагая

$$r_1 = r - re_{i_1},$$

получаем в силу ортогональности центральных идемпотентов e_i , что либо $r_1 = 0$, либо $\Delta(r_1) = \Delta(r) \setminus \{i_1\} \neq \emptyset$. Если $r_1 \neq 0$, то мы можем продолжить процесс. Если мы уже построили ненулевой элемент

$$r_n = r - \sum_{i=1}^n re_{i_i},$$

то берем любой $i_{n+1} \in \Delta(r_n)$. Полагая

$$r_{n+1} = r_n - r_n e_{i_{n+1}} = r - \sum_{i=1}^{n+1} re_{i_i},$$

получаем, что либо $r_{n+1} = 0$, либо $\Delta(r_{n+1}) = \Delta(r_n) \setminus \{i_{n+1}\} \neq \emptyset$. Во втором случае мы можем продолжить процесс.

Замечаем, что если для некоторого целого $n \geq 1$ мы построили элемент r_{n+1} , то $e_{i_{n+1}} r_n = e_{i_{n+1}} r \neq 0$, $e_{i_{n+1}} r_{n+1} = 0$

по построению. Но тогда в силу леммы 1 $e_{i_{n+1}} \in (r_{n+1})^*$ и $e_{i_{n+1}} \notin (r_n)^*$, т. е. $(r_{n+1}) \neq (r_n)$. В результате получаем строго убывающую цепь главных идеалов

$$(r) \supset (r_1) \supset \dots \supset (r_n) \supset (r_{n+1}) \supset \dots$$

В силу условия минимальности для главных идеалов эта цепь должна оборваться на конечном шаге. Но это означает, что процесс построения элементов r_i должен закончиться на некотором шаге. Но тогда по построению $r_n = 0$

для некоторого целого $n \geq 1$, т. е. $r = \sum_{i=1}^n r e_{i_j} \in \Sigma$.

В силу произвольности выбора элемента $r \in R$ алгебра $R = \bigoplus_{i \in \Gamma} D_i$ — прямая сумма некоторого множества $\{D_i | i \in \Gamma\}$ простых алгебр без делителей нуля и с единицей. Следовательно, верно утверждение а).

Пусть алгебра R без нильпотентных элементов удовлетворяет условию минимальности для главных левых идеалов. Тогда, очевидно, любой ненулевой идеал алгебры R содержит некоторый минимальный левый идеал. Поэтому в силу предложения 4 алгебра R — точное расширение прямой суммы $\Sigma = \bigoplus_{i \in \Gamma} D_i$ некоторых тел. Но тогда учи-

тывая, что единицы e_i тел D_i будут центральными идемпотентами в R , мы можем повторить процесс построения элементов r_i по заданному элементу r и получить строго убывающую цепь главных левых идеалов $(r) \supset (r_1) \supset \dots \supset (r_n) \supset \dots$. В силу условия минимальности для главных левых идеалов эта цепь конечна. Но тогда, как и выше, $R = \bigoplus_{i \in \Gamma} D_i$ — прямая сумма тел D_i .

Следовательно, верно утверждение б). Теорема доказана.

Переходя к конечным разложениям, напомним, что полупервичная алгебра R удовлетворяет по определению условию обрыва цепей аннуляторных идеалов, если она удовлетворяет условию минимальности для аннуляторных идеалов (или, что равносильно, условию максимальности для аннуляторных идеалов). Учитывая это, мы можем доказать, что верно

Предложение 5. Для алгебры R без нильпотентных элементов равносильны следующие утверждения:

а) Алгебра R разлагается в подпрямое произведение конечного числа алгебр без делителей нуля.

б) R — точное расширение конечной прямой суммы алгебр без делителей нуля.

в) R удовлетворяет условию обрыва цепей аннуляторных идеалов.

г) R не содержит бесконечных прямых сумм своих ненулевых идеалов, т. е. если I_j — идеалы в R , $I_j \neq 0$ и

$\sum_{j \in \Gamma} I_j = \bigoplus_{j \in \Gamma} I_j$, то Γ — конечное множество.

Доказательство. Равносильность утверждений а), б) и в) легко вытекает из предложения 3 и теоремы 2.

в) $\Rightarrow$ г). Пусть г) неверно. Тогда найдется такое бесконечное множество попарно различных идеалов $I_j \neq 0$, что в алгебре R верно равенство $\sum_{j \in \Gamma} I_j = \bigoplus_{j \in \Gamma} I_j$. Без огра-

ничения общности можно считать, что $\Gamma = \{n \mid n \text{ — целое число, } n \geq 1\}$. Но тогда, полагая $A_n = \sum_{j=1}^n I_j$ для всех $n \geq 1$, получаем строго убывающую цепь

$$A_1^* \supset A_2^* \supset \dots \supset A_n^* \supset A_{n+1}^* \supset \dots \quad (17)$$

аннуляторных идеалов, так как $I_{n+1}A_n = 0$, $I_{n+1}A_{n+1} \neq 0$. Поэтому алгебра R не удовлетворяет условию обрыва цепей аннуляторных идеалов, т. е. в) неверно.

г) $\Rightarrow$ в). Пусть в) неверно. Тогда в алгебре R найдется строго убывающая цепь (17) аннуляторных идеалов A_n^* , где n — целые числа, $n \geq 1$. Зафиксировав эту цепь, положим для любого целого $n \geq 1$

$$I_n = A_n^* A_{n+1}^{**}. \quad (18)$$

Из (17) и (18) легко вытекает, что все I_n — ненулевые идеалы алгебры R . Кроме того, если m, n — различные натуральные числа и, например, $m > n$, то $n+1 \leq m$ и потому $A_{n+1}^* \subseteq A_m^*$. Но тогда

$$I_n I_m = A_n^* A_{n+1}^* A_m^* A_{m+1}^{**} \subseteq A_n^* A_{n+1}^{**} A_{n+1}^* A_{m+1}^{**} = 0,$$

т. е. $I_n I_m = 0$, если $m \neq n$. А отсюда легко вытекает, что $\sum_{n \geq 1} I_n = \bigoplus_{n \geq 1} I_n$, так как $\left(I_n \cap \sum_{m \neq n} I_m\right)^2 \subseteq \sum_{m \neq n} I_n I_m = 0$ для всех $n \geq 1$. Поэтому г) неверно.

Предложение доказано.

Теперь мы легко можем получить утверждения о разложении в прямую сумму тел или простых алгебр с единицей и без делителей нуля. Ограничимся случаем тел.

Следствие 1. Для ненулевой алгебры R без нильпотентных элементов равносильны следующие утверждения:

- а) R — конечная прямая сумма тел.
- б) R удовлетворяет условию обрыва цепей аннуляторных идеалов, причем каждый ненулевой идеал содержит минимальный левый идеал.
- в) R удовлетворяет условию минимальности для левых (или правых) идеалов, т. е. R — артинова алгебра.

Это с очевидностью вытекает из доказанных структурных теорем.

§ 3. Левые алгебры частных полупервичных алгебр

Для получения структурных теорем оказывается полезной конструкция левой алгебры частных. Среди возможных конструкций алгебр частных мы выберем связанную с большими левыми идеалами, большими подмодулями и инъективными оболочками.

Пусть R — произвольная ненулевая алгебра. Мы будем рассматривать левые алгебра- R -модули (см. § 3 гл. 1) и всюду ниже под R -модулем будем понимать левый алгебра- R -модуль над соответствующей алгеброй R . Аналогично понимаются подмодули, фактор-модули, R -модульные гомоморфизмы и т. д. В частности, подмодули R -модуля R (т. е. левого алгебра- R -модуля ${}_R R$) и левые идеалы алгебры R — это одно и то же. Поэтому можно говорить о R -модульных гомоморфизмах левых идеалов алгебры R друг в друга.

Пусть $M = {}_R M$ — произвольный ненулевой R -модуль. Подмодуль N в M называется *большим*, если N имеет ненулевое пересечение с любым ненулевым подмодулем в M . Множество всех больших подмодулей модуля M будем обозначать символом $B({}_R M)$. Ясно, что $B({}_R M) \neq \emptyset$, так как $M \in B({}_R M)$. Большие левые идеалы алгебры R — это, по определению, большие подмодули R -модуля ${}_R R$.

Лемма 1. Пусть $M = {}_R M$ — произвольный ненулевой R -модуль. Если $A, B \in B({}_R M)$, то и $A \cap B \in B({}_R M)$. Более того, если $A, B \in B({}_R M)$, то для произвольного

R -модульного гомоморфизма $f: A \rightarrow M$ имеем $f^{-1}(B) = \{x \in A \mid xf \in B\} \in B({}_R M)$.

Действительно, пусть L — подмодуль в M и $L \cap f^{-1}(B) = 0$. Переходя к образам, получаем равенство $(L \cap A)f \cap B = 0$. Но $B \in B({}_R M)$. Поэтому $(L \cap A)f = 0$, т. е. $L \cap A \subseteq \text{Ker } f_A = f_A^{-1}(0) \subseteq f^{-1}(B)$. Но тогда $L \cap A = (L \cap A) \cap f^{-1}(B) = 0$, и потому $L = 0$, так как $A \in B({}_R M)$. В силу произвольности L имеем $f^{-1}(B) \in B({}_R M)$. Но, очевидно, тождественное вложение $\varepsilon_A: A \rightarrow M$ является R -модульным гомоморфизмом. Поэтому в силу доказанного $A \cap B = \varepsilon_A^{-1}(B) \in B({}_R M)$.

Лемма доказана.

Свяжем с ненулевым R -модулем $M = {}_R M$ множество $\mathcal{H}({}_R M) = \{f: A \rightarrow M \mid f - R\text{-модульный гомоморфизм, } A \in B({}_R M)\}$. (1)

Будем обозначать, для краткости, R -модульный гомоморфизм $h: N \rightarrow M$, где N — подмодуль в M , символом h_N . В частности, если C — подмодуль в M и $C \subseteq N$, то символом h_C будет обозначен R -модульный гомоморфизм $h_C: C \rightarrow M$, индуцированный h_N на C , т. е. $xh_C = xh_N$ для всех $x \in C$.

Учитывая введенные обозначения, полагаем

$$\alpha f_A + \beta g_B = (\alpha f + \beta g)_{A \cap B}, \quad f_{AgB} = (fg)_{f_A^{-1}(B)} \quad (2)$$

для любых $\alpha, \beta \in \Phi$, $f_A, g_B \in \mathcal{H}({}_R M)$. Таким образом, по построению $\alpha f_A + \beta g_B$ и f_{AgB} — это такие R -модульные гомоморфизмы, действующие на указанных в (2) подмодулях $A \cap B$ и $f_A^{-1}(B)$, что для всех $x \in A \cap B$, $y \in f_A^{-1}(B)$

$$x(\alpha f_A + \beta g_B) = \alpha(xf_A) + \beta(xg_B), \quad y(f_{AgB}) = (yf_A)g_B. \quad (3)$$

Из (3) вытекает, что $\alpha f_A + \beta g_B$, f_{AgB} действительно являются R -модульными гомоморфизмами, причем $\alpha f_A + \beta g_B$, $f_{AgB} \in \mathcal{H}({}_R M)$ в силу (1), (2) и леммы 1.

Вводим на множестве $\mathcal{H}({}_R M)$ бинарное отношение $\sim$ по правилу

$$f_A \sim g_B \Leftrightarrow \exists C \in B({}_R M) \mid (C \subseteq A \cap B \text{ и } f_C = g_C). \quad (4)$$

Ясно, что это бинарное отношение рефлексивно и симметрично. Более того, справедлива

Лемма 2. Для любого ненулевого R -модуля $M = {}_R M$ бинарное отношение $\sim$, введенное по правилу (4), является конгруенцией универсальной алгебры $\mathcal{K}({}_R M)$.

Действительно, бинарное отношение $\sim$ транзитивно, так как пересечение любых двух больших подмодулей само будет большим подмодулем в силу леммы 1. Поэтому бинарное отношение $\sim$ является эквивалентностью. Кроме того, если $f_A \sim f'_A$ и $g_B \sim g'_B$, то в силу (4) $f_C = f'_C$, $g_D = g'_D$ для некоторых $C, D \in B({}_R M)$ таких, что $C \subseteq A \cap A'$ и $D \subseteq B \cap B'$. Но тогда в силу леммы 1 $E = f'_A(D) \cap C \cap D \in B({}_R M)$, причем по построению $(fg)_E = (f'g')_E$, $(\alpha f + \beta g)_E = (\alpha f' + \beta g')_E$. Но это означает, что

$$(f \sim f', g \sim g') \Rightarrow (fg \sim f'g', \alpha f + \beta g \sim \alpha f' + \beta g'). \quad (5)$$

А выполнение соотношений (5) и означает, что эквивалентность $\sim$ является конгруенцией универсальной алгебры $\mathcal{K}({}_R M)$.

Учитывая лемму 2, мы можем построить фактор-алгебру $\mathcal{K}({}_R M)/\sim$ универсальной алгебры $\mathcal{K}({}_R M)$ по ее конгруенции $\sim$, определяя операции по правилам

$$\alpha \langle f \rangle + \beta \langle g \rangle = \langle \alpha f + \beta g \rangle, \quad \langle f \rangle \langle g \rangle = \langle fg \rangle. \quad (6)$$

Здесь мы обозначим символом $\langle h \rangle$ класс эквивалентности, содержащий заданный элемент $h \in \mathcal{K}({}_R M)$. Таким образом, $\langle h \rangle = \langle h' \rangle$ тогда и только тогда, когда $h \sim h'$, и потому правила (6) корректны в силу леммы 2.

Множество $\mathcal{U}({}_R M) = \mathcal{K}({}_R M)/\sim$, с операциями, введенными по правилам (6), (4) и (2), назовем *левой алгеброй частных R -модуля ${}_R M$* . Левая алгебра частных $\mathcal{U}({}_R R)$ R -модуля ${}_R R$ называется *левой алгеброй частных алгебры R* .

Для любого R -модуля ${}_R M$ существует (и притом единственный, с точностью до модульных изоморфизмов) инъективный R -модуль ${}_R E = E({}_R M)$, содержащий ${}_R M$ в качестве большого подмодуля, — *инъективная оболочка R -модуля ${}_R M$* . Учитывая это, мы можем доказать, что левая алгебра частных $\mathcal{U}({}_R M)$ любого R -модуля M является алгеброй (т. е. ассоциативной алгеброй над Φ).

Предложение 1. Пусть ${}_R M$ и ${}_R N$ — произвольные ненулевые R -модули, ${}_R E = E({}_R M)$ — инъективная оболочка R -модуля ${}_R M$. Тогда:

а) Множество $\text{sg}({}_R N) = \{f \in \text{End}({}_R N) \mid \text{Ker } f \in \mathcal{B}({}_R N)\}$ является идеалом в алгебре $\text{End}({}_R N)$ всех эндоморфизмов R -модуля ${}_R N$.

б) Если ${}_R M$ — большой подмодуль в ${}_R N$, то левые алгебры частных $\mathcal{U}({}_R M)$, $\mathcal{U}({}_R N)$ R -модулей ${}_R M$ и ${}_R N$ изоморфны.

в) Левые алгебры частных $\mathcal{U}({}_R M)$, $\mathcal{U}({}_R E)$ и фактор-алгебра $\text{End}({}_R E)/\text{sg}({}_R E)$ изоморфны. В частности, левая алгебра частных $\mathcal{U}({}_R M)$ — алгебра с единицей.

Доказательство. Из построения универсальной алгебры $\mathcal{K}({}_R N)$ вытекает, что алгебра $\text{End}({}_R N)$ является подалгеброй в этой универсальной алгебре. Но тогда, если $\nu: \mathcal{K}({}_R N) \rightarrow \mathcal{K}({}_R N)/\sim$ — естественный гомоморфизм, то $\nu(\text{End}({}_R N))$ является алгеброй с единицей и подалгеброй в $\mathcal{U}({}_R N)$, являющейся гомоморфным образом алгебры $\text{End}({}_R N)$. Ясно, что подмодуль, содержащий большой подмодуль, сам является большим. Поэтому из (4) вытекает, что ядром гомоморфизма $\text{End}({}_R N) \rightarrow \nu(\text{End}({}_R N))$ будет как раз множество $\text{sg}({}_R N)$, так как $f \sim 0_R$ тогда и только тогда, когда, $Lf = 0$ для некоторого $L \in \mathcal{B}({}_R N)$.

Следовательно, верно а), причем $\nu(\text{End}({}_R N)) \simeq \text{End}({}_R N)/\text{sg}({}_R N)$.

Допустим теперь, что ${}_R M \in \mathcal{B}({}_R N)$. Ясно, что тогда все большие подмодули R -модуля M будут большими подмодулями в N и если $A \in \mathcal{B}({}_R N)$, то $A \cap M \in \mathcal{B}({}_R M)$.

Пусть $g_B \in \mathcal{K}({}_R M)$. В силу (1) $B \in \mathcal{B}({}_R M)$, и потому $B \in \mathcal{B}({}_R N)$. Но тогда для тождественного вложения $\varepsilon_M: M \rightarrow N$ получаем, очевидно, включение $g_B \varepsilon_M \in \mathcal{K}({}_R N)$. С другой стороны, возьмем любой $f_A \in \mathcal{K}({}_R N)$. Тогда из леммы 1 легко вытекает, что $M \cap f_A^{-1}(M) = B \in \mathcal{B}({}_R M)$. Но по построению $Bf_A \subseteq M$. Поэтому, рассматривая индуцированный f R -модульный гомоморфизм $g_B: B \rightarrow M$, получаем равенство $f_B = g_B \varepsilon_M$. А отсюда вытекает, что $\langle f_A \rangle = \langle f_B \rangle = \langle g_B \varepsilon_M \rangle$.

Из сказанного легко следует, что соответствие $\langle g_B \rangle \mapsto \langle g_B \varepsilon_M \rangle$ является изоморфизмом алгебры $\mathcal{U}({}_R M)$ на алгебру $\mathcal{U}({}_R N)$, т. е. верно б).

В силу б) алгебры $\mathcal{U}({}_R M)$ и $\mathcal{U}({}_R E)$ изоморфны, так как ${}_R M \in \mathcal{B}({}_R E)$ по определению инъективной оболочки ${}_R E = E({}_R M)$. Кроме того, рассматривая естественный гомоморфизм $\nu: \mathcal{K}({}_R E) \rightarrow \mathcal{K}({}_R E)/\sim = \mathcal{U}({}_R E)$, получаем в силу сказанного выше соотношение $\nu(\text{End}({}_R E)) \simeq \text{End}({}_R E)/\text{sg}({}_R E)$.

Пусть $f_L \in {}_R E$. Из инъективности R -модуля ${}_R E$ вытекает существование такого эндоморфизма $g: {}_R E \rightarrow {}_R E$, что $f_L = g_L$. Но $L \in B({}_R E)$ и потому $f_L \sim g$. Переходя к левой алгебре частных, получаем $\langle f_L \rangle = \langle g \rangle$, т. е. $\mathcal{U}({}_R E) = v(\text{End}({}_R E))$ в силу произвольности выбора f_L . А это означает, что левая алгебра частных $\mathcal{U}({}_R E)$ изоморфна фактор-алгебре $\text{End}({}_R E)/\text{sg}({}_R E)$.

Следовательно, верно и утверждение в). Предложение доказано.

Напомним, что алгебра Q называется *регулярной*, если для любого $q \in Q$ существует такой $x \in Q$, что $q = qxq$. Ясно, что при этом qx и xq — идемпотенты и верны равенства $Qq = Qqxq$, $qQ = qxqQ$.

Предложение 2. Пусть $M = {}_R M$ — произвольный ненулевой R -модуль. Тогда

а) Если A — подмодуль в M , то среди подмодулей в M , имеющих ненулевое пересечение с A , есть максимальные относительно этого свойства. Для любого такого подмодуля B верно включение $A + B \in B({}_R M)$.

б) Если A и B — такие подмодули в M , что $A \cap B = 0$ и $A + B \in B({}_R M)$, то, полагая $(a + b)f = a$ для всех $a \in A$, $b \in B$, мы получаем R -модульный гомоморфизм $f_{A+B} \in \mathcal{H}({}_R M)$. При этом $\langle f_{A+B} \rangle = \langle f_{A+B} \rangle^2$, т. е. $\langle f_{A+B} \rangle$ — идемпотент в алгебре $Q = \mathcal{U}({}_R M)$. Таким способом можно получить любой идемпотент алгебры Q .

в) Левая алгебра частных $\mathcal{U}({}_R M)$ регулярна.

Доказательство. Пусть A — подмодуль в M . Тогда в силу леммы Куратовского—Цорна среди подмодулей в M , имеющих нулевое пересечение с A , есть максимальное относительно этого свойства. Пусть B — любой из таких подмодулей.

Допустим, что $A + B$ не является большим подмодулем. Тогда $(A + B) \cap L = 0$ для некоторого ненулевого подмодуля L . Ясно, что тогда $B \cap L = 0$, и потому $B + L \supset \supset B$. Следовательно, в силу максимальнойности B $A \cap (B + L) \neq 0$. Поэтому $0 \neq b + l \in A$ для некоторых $b \in B$, $l \in L$. Между тем, $l = (b + l) - b \in (A + B) \cap L = 0$ и потому $b \in A \cap B = 0$. Получили противоречие с тем, что $b + l \neq 0$.

Следовательно, $A + B \in B({}_R M)$, т. е. доказано а).

Ясно, что в условиях утверждения б) мы получаем $f_{A+B}^{-1}(A + B) = A + B$, и потому $f_{A+B}^2 = f_{A+B}$. Но тогда, очевидно, и $\langle f_{A+B} \rangle^2 = \langle f_{A+B} \rangle$.

С другой стороны, пусть $e = \langle f_L \rangle =$ произвольный идемпотент алгебры $\mathcal{Y}({}_R M)$. Тогда по построению $f_L \sim f_L^2$, и потому существует такой $C \in B({}_R M)$, что $C \subseteq f_L^{-1}(L)$ и $f_C = f_C^2$. В силу леммы 1 $f_C^{-1}(C) = D \in B({}_R M)$. Полагаем $A = Df_C$, $B = \text{Ker } f_C$. Тогда, очевидно, f действует тождественно на A и нулевым образом на B . Поэтому $A \cap B = 0$ и для всех $a \in A$, $b \in B$ верно равенство $(a+b)f = a$. Кроме того, если $d \in D$, то по построению $df_C \in C$, и потому $d - df_C \in C$, так как $D \subseteq C$. Но $(df_C)f_C = df_C$, и потому $(d - df_C)f_C = 0$. Поэтому из равенства $d = df_C + (d - df_C)$ вытекает в силу произвольности выбора d , что $C \supseteq A + B \supseteq D$. Но тогда $A + B \in B({}_R M)$, так как $D \in B({}_R M)$, и потому верно равенство $e = \langle f_L \rangle = \langle f_C \rangle = \langle f_{A+B} \rangle$.

Следовательно, верно утверждение б).

Возьмем теперь произвольный элемент $q = \langle g_a \rangle \in \mathcal{Y}({}_R M) = Q$.

С помощью леммы Куратовского — Цорна находим максимальный среди подмодулей в M , содержащихся в G и имеющих ненулевое пересечение с $\text{Ker } g = g\bar{a}^{-1}(0)$. Пусть это будет K . Еще раз применяя лемму Куратовского — Цорна, находим максимальный среди подмодулей в M , имеющих нулевое пересечение с K_g . Пусть это будет подмодуль N . Тогда в силу а) получаем, что

$$K + \text{Ker } g = E \in B({}_R M), \quad Kg + N = H \in B({}_R M).$$

Ясно, что g индуцирует на K R -модульный изоморфизм: для любых $k_1, k_2 \in K$ равенства $k_1 g = k_2 g$, $k_1 = k_2$ равносильны, так как $K \cap \text{Ker } g = 0$. Поэтому каждый элемент из H однозначно представляется в виде $kg + z$, где $k \in K$ и $z \in N$, в силу равенства $Kg \cap N = 0$, и элемент k однозначно определен. Но тогда, полагая $(kg + z)h = kg$ для всех $k \in K$, $z \in N$, мы получаем R -модульный гомоморфизм $h_H \in \mathcal{H}({}_R M)$. Полагаем $C = g\bar{e}^{-1}(h_H^{-1}(E))$. Получаем, что $C \in B({}_R M)$ и $C \subseteq E$. Из последнего соотношения следует, что если $c \in C$, то $c = k + u$ для некоторых однозначно определенных элементов $k \in K$, $u \in \text{Ker } g$. Но тогда $c(g\bar{e}h_H g\bar{e}) = ((cg)h)g = ((kg)h)g = kg = cg_E$ по построению. Следовательно, $g\bar{e}h_H g\bar{e} \sim g_E$, $C \in B({}_R M)$.

Переходя к алгебре $Q = \mathcal{Y}({}_R M)$, получаем $q = \langle q_a \rangle = \langle g_E \rangle = \langle g\bar{e}h_H g\bar{e} \rangle = \langle g_E \rangle \langle h_H \rangle \langle g_E \rangle = q \langle h_H \rangle q$. А это озна-

чает в силу произвольности выбора элемента q , что алгебра $\mathcal{U}({}_R M)$ регулярна. Следовательно, верно в).

Предложение доказано.

В приложениях левой алгебры частных $\mathcal{U}({}_R R)$ алгебр большую роль играет *левый сингулярный идеал* алгебры R

$$z(R) = \{x \in R \mid l(0, x) \in B({}_R R)\}. \quad (7)$$

Напомним, что $l(0, x)$ — это левый аннулятор элемента $x \in R$. Если S — подмножество в R , то $l(0, S) = \{x \in R \mid xS = 0\}$. Правый аннулятор $r(0, S)$ определяется симметрично, т. е. $r(0, S) = \{x \in R \mid Sx = 0\}$. Замечаем, что левый сингулярный идеал всегда является идеалом.

Предложение 3. Пусть R — произвольная ненулевая алгебра. Тогда:

а) Для любого $r \in R$ правое умножение $\rho_r: R \rightarrow R$ ($x\rho_r = xr$ для всех элементов $x \in R$) является R -модульным гомоморфизмом и потому $\rho_r \in \mathcal{K}({}_R R)$.

б) Отображение $\rho: R \rightarrow \mathcal{U}({}_R R)$, действующее по правилу $\rho(r) = \langle \rho_r \rangle$, является гомоморфизмом алгебры R в ее левую алгебру частных $\mathcal{U}({}_R R)$, причем ядром этого гомоморфизма как раз и является левый сингулярный идеал $z(R)$.

в) Если R — регулярная алгебра, то $z(R) = 0$. В частности, для любой алгебры R верно равенство $z(\mathcal{U}({}_R R)) = 0$.

Доказательство. Утверждение а) очевидно (так как все рассматриваемые алгебры ассоциативны).

Ясно по построению, что для любых $a, b \in R$, $\alpha, \beta \in \Phi$ верны равенства $\rho_a \rho_b = \rho_{ab}$, $\alpha \rho_a + \beta \rho_b = \rho_{\alpha a + \beta b}$. А отсюда вытекает, что указанное в утверждении б) отображение ρ является гомоморфизмом алгебры R в ее левую алгебру частных $\mathcal{U}({}_R R)$. При этом по построению, $\text{Ker } \rho = \{r \in R \mid \rho_r \sim 0_R\}$. Но левый идеал, содержащий большой левый идеал, сам будет большим левым идеалом. Поэтому из (4) и (7) вытекает равенство $\text{Ker } \rho = z(R)$.

Следовательно, верно утверждение б).

Пусть алгебра R регулярна.

Допустим, что $z(R) \neq 0$. Тогда $Lr = 0$ для некоторого ненулевого элемента $r \in R$ и некоторого $L \in B({}_R R)$. В силу регулярности алгебры R имеем $r = rxr$ для некоторого $x \in R$. Но тогда $r = rxrxr$, и потому $Rrx \neq 0$. В силу леммы 1 и утверждения а) верно включение $\rho_{rx}^{-1}(L) \in B({}_R R)$. Поэтому $Rrx \cap \rho_{rx}^{-1}(L) \neq 0$, т. е. $0 \neq arx \in \rho_{rx}^{-1}(L)$ для некоторого $a \in R$. Но тогда $arx = arxrx = (arx)rx \in L$,

и потому $ar = arxr = (arx)r \in Lr = 0$. А это противоречит тому, что $arx \neq 0$.

В силу предложения 2 верно и утверждение в).

Предложение доказано.

Предложение 4. Пусть R — ненулевая алгебра и $z(R) = 0$. Тогда алгебра R изоморфно вкладывается в свою левую алгебру частных $\mathcal{U}({}_R R) = Q$. При этом верны следующие утверждения:

а) Левая алгебра частных $\mathcal{U}({}_R R)$ алгебры R изоморфна алгебре $\text{End}({}_R E)$ эндоморфизмов инъективной оболочки ${}_R E = E({}_R R)$ и $\text{sg}({}_R E) = 0$.

б) Для любого элемента $x \in E_R$ существует и притом точно один эндоморфизм $\hat{x} \in \text{End}({}_R E)$ такой, что $rx = r\hat{x}$ для всех $r \in R$. Полагая по определению $x \cdot y = \hat{x}y$ для всех $x, y \in {}_R E$, мы превращаем R -модуль ${}_R E$ в алгебру, изоморфную левой алгебре частных $Q = \mathcal{U}({}_R R)$.

в) Полагая $rq = \langle \rho_r \rangle q$ для всех $r \in R, q \in Q$, мы превращаем левую алгебру частных $Q = \mathcal{U}({}_R R)$ в инъективный R -модуль, являющийся инъективной оболочкой своего подмодуля $\rho(R)$. Поэтому, если мы отождествим R и $\rho(R)$, то ${}_R Q$ станет инъективной оболочкой своего подмодуля ${}_R R$.

г) Левая алгебра частных $Q = \mathcal{U}({}_R R)$ является ненулевой алгеброй с единицей и нулевым левым сингулярным идеалом $z(Q)$. При этом ${}_Q Q$ является инъективным унитарным Q -модулем, и потому левые алгебры частных $Q = \mathcal{U}({}_R R)$ и $\mathcal{U}({}_Q Q) = \mathcal{U}(\mathcal{U}({}_R R))$ изоморфны.

Доказательство. В силу предложения 3 из равенства $z(R) = 0$ вытекает, что отображение $\rho: R \rightarrow \mathcal{U}({}_R R)$ является изоморфным вложением алгебры R в ее левую алгебру частных $Q = \mathcal{U}({}_R R)$.

Пусть ${}_R E = E({}_R R)$ — инъективная оболочка R -модуля ${}_R R$. Тогда множество $\{\omega \in {}_R E \mid R\omega = 0\}$ будет нулевым подмодулем в ${}_R E$, так как указанное множество будет подмодулем, имеющим нулевое пересечение с ${}_R R$ в силу равенства $z(R) = 0$ и включения $R \in \mathcal{B}({}_R R)$. Поэтому $Rx \neq 0$ для всех ненулевых элементов $x \in {}_R E$.

Учитывая сказанное, возьмем любой ненулевой $f \in \text{End}({}_R E)$ и любой $L \in \mathcal{B}({}_R E)$. Из $f \neq 0$ вытекает, что $ef \neq 0$ для некоторого $e \in {}_R E$. Поэтому $Ref \neq 0$, а значит и $Ref \cap R \neq 0$, так как $R \in \mathcal{B}({}_R E)$. Следовательно, $0 \neq ref \in R$ для некоторого $r \in R$. Еще раз учитывая, что

$R \in \mathcal{B}({}_R E)$, получаем $\rho_{re} \in \mathcal{K}({}_R E)$, и потому в силу леммы 1 $\rho_{re}^{-1}(L) \in \mathcal{B}({}_R E)$. Но по построению $\rho_{re}^{-1}(L) \subseteq R$. Следовательно, $\rho_{re}^{-1}(L) \in \mathcal{B}({}_R R)$, и потому $\rho_{re}^{-1}(L)(ref) \neq 0$ в силу равенства $z(R) = 0$. Между тем $\rho_{re}^{-1}(L)(ref) = (\rho_{re}^{-1}(L)(re))f \subseteq Lf$ откуда $Lf \neq 0$.

Следовательно, $\text{sg}({}_R E) = 0$. Но тогда в силу предложения 1 верно утверждение а).

Снова возьмем любой элемент $x \in {}_R E$. В силу инъективности ${}_R E$ правое умножение $\rho_x: R \rightarrow {}_R E$ продолжается до некоторого эндоморфизма $\hat{x} \in \text{End}({}_R E)$. Из равенства $\text{sg}({}_R E) = 0$ и включения $R \in \mathcal{B}({}_R E)$ следует единственность продолжения, так как $rx = r\hat{x}$ для всех $r \in R$. Кроме того, если для некоторых $x, y \in {}_R E$ верно равенство $\hat{x} = \hat{y}$, то $r(x - y) = rx - ry = r\hat{x} - r\hat{y} = 0$ для всех $r \in R$, и потому $x = y$, так как по доказанному $\{z \in {}_R E \mid Rz = 0\} = 0$.

В результате мы получаем отображение $x \mapsto \hat{x}$ множества ${}_R E$ в множестве $\text{End}({}_R E)$ эндоморфизмов инъективного R -модуля ${}_R E$. Покажем, что это отображение является взаимно однозначным отображением множества ${}_R E$ на множество $\text{End}({}_R E)$. Для этого достаточно доказать, что указанное отображение является отображением «на».

Присоединяем к алгебре R внешним образом единицу, т. е. строим множество

$$R' = \{(r, \alpha) \mid r \in R, \alpha \in \Phi\}$$

и определяем на этом множестве операции по правилам

$$(r_1, \alpha_1) + (r_2, \alpha_2) = (r_1 + r_2, \alpha_1 + \alpha_2), \quad \beta(r, \alpha) = (\beta r, \beta \alpha),$$

$$(r_1, \alpha_1)(r_2, \alpha_2) = (r_1 r_2 + \alpha_1 r_2 + \alpha_2 r_1, \alpha_1 \alpha_2).$$

В результате получаем алгебру R' с единицей $(0, 1)$, содержащую в качестве идеала подалгебру $\{(r, 0) \mid r \in R\}$, изоморфную алгебре R . отождествляя R с этой подалгеброй, мы можем считать, что сама алгебра R является подалгеброй в R' . Поэтому алгебра R' естественным образом превращается в R -модуль ${}_R R'$.

В силу инъективности R -модуля ${}_R R$ тождественное вложение $e_R: R \rightarrow {}_R E$ продолжается до некоторого R -модульного гомоморфизма $\bar{e}_R: R' \rightarrow {}_R E$. Обозначая символом $\bar{1}$ элемент $\bar{e}_R((0, 1))$, мы получаем, что для любого эндоморфизма f инъективного R -модуля ${}_R E$ и для всех $r \in R$

верно равенство

$$r(\bar{1}f) = (r\bar{1})f = (r((0, 1)\bar{e}_R))f = ((r(0, 1))\bar{e}_R)f = (r\bar{e}_R)f = rf.$$

А это означает в силу произвольности выбора элемента $r \in R$, что $f = \bar{1}f$. Но тогда в силу произвольности выбора f мы получаем, что отображение $x \mapsto \hat{x}$ является отображением множества ${}_R E$ на множество $\text{End}({}_R E)$.

Таким образом, мы доказали, что отображение $x \mapsto \hat{x}$ является взаимно однозначным отображением множества ${}_R E$ на множество $\text{End}({}_R E)$. Но тогда обратное отображение $\hat{x} \mapsto x$ позволяет перенести структуру алгебры с множества $\text{End}({}_R E)$ на множество ${}_R E$ и превращается, после этого перенесения, в изоморфизм алгебры $\text{End}({}_R E)$ на получающуюся алгебру ${}_R E$. Посмотрим, какие получаются операции на ${}_R E$.

Возьмем любые элементы $x, y \in {}_R E$, $\alpha, \beta \in \Phi$. Ясно, что для всех $r \in R$

$$r(\alpha\hat{x} + \beta\hat{y}) = \alpha(rx) + \beta(ry) = r(\alpha x + \beta y) = r\widehat{\alpha x + \beta y}.$$

Поэтому $\alpha\hat{x} + \beta\hat{y} = \widehat{\alpha x + \beta y}$, т. е. операции сложения и умножения элементов из ${}_R E$ на элементы из Φ остаются теми же, что и были. Кроме того,

$$r(\hat{x}\hat{y}) = (r\hat{x})\hat{y} = (rx)\hat{y} = r(\hat{x}y) = r\hat{xy},$$

и потому $\hat{x}\hat{y} = \widehat{xy} = \widehat{\hat{x} \cdot \hat{y}}$. Поэтому операция умножения на множестве ${}_R E$ будет именно та, которая указана в утверждении б). Но тогда, в силу а), верно утверждение б).

Ясно, что полагая $rq = \langle \rho_r \rangle q$ для всех $r \in R$, $q \in Q = \mathcal{Y}({}_R R)$, мы превращаем Q в R -модуль ${}_R Q$. Кроме того, как нетрудно видеть, отображение $x \mapsto \langle \hat{x}_{R \cap \hat{x}^{-1}(R)} \rangle$ оказывается R -модульным изоморфизмом R -модуля ${}_R E$ на R -модуль ${}_R Q$ в силу всего доказанного выше (см. также доказательство предложения 1). При этом изоморфизме образом $R = {}_R R$ будет $\rho(R)$, так как $\hat{r}_{R \cap \hat{r}^{-1}(R)} = \rho_r$ для всех $r \in R$.

Поэтому верно утверждение в).

В силу предложений 2 и 3 $Q = \mathcal{Y}({}_R R)$ — регулярная алгебра с единицей 1 и $z(Q) = 0$. Поэтому к алгебре Q

можно применять доказанные утверждения а), б) и в). При этом мы будем считать, что R отождествлено с ${}_R(R)$, т. е. $R \subseteq Q$.

Рассмотрим Q как (левый унитарный алгебра-) Q -модуль ${}_Q Q$.

Пусть L — произвольный левый идеал алгебры Q . Тогда, очевидно, L — подмодуль в R -модуле ${}_R Q$, так как $R \subseteq Q$, и потому в силу инъективности модуля ${}_R Q$ любой Q -модульный гомоморфизм $\bar{f}: L \rightarrow Q$ продолжается до эндоморфизма $\bar{f}: Q \rightarrow Q$ инъективного R -модуля ${}_R Q$. Но тогда, как при доказательстве утверждения б), с помощью алгебры R' находим такой элемент $q \in Q$, что $rq = r\bar{f}$ для всех $r \in R$, т. е. верно равенство $\bar{f} = \hat{q}$. Отсюда вытекает, что $xq = x\bar{f}$ для всех $x \in Q$, и потому, в частности, $x\bar{f} = xq$ для всех $x \in L$.

В силу известного критерия Бэра инъективности модулей унитарный Q -модуль ${}_Q Q$ оказывается инъективным Q -модулем, а значит, и своей инъективной оболочкой. Но тогда в силу б) для любого $q \in Q$ существует и притом единственный эндоморфизм $\hat{q} \in \text{End}({}_Q Q)$ такой, что $y\hat{q} = yq$ для всех $y \in Q$. Еще раз применяя б), получаем, что полагая $y \cdot q = y\hat{q}$ для всех $y, q \in Q$, мы превращаем модуль ${}_Q Q$ в алгебру, изоморфную левой алгебре частных $\mathcal{U}({}_Q Q)$ алгебры Q . Но в рассматриваемом нами случае получаем, что $y \cdot q = yq$, т. е. операция умножения не изменилась. Поэтому сама алгебра Q изоморфна своей левой алгебре частных $\mathcal{U}(Q)$.

Следовательно, верно и утверждение г). Предложение доказано.

Предложение 5. Пусть R — ненулевая полупервичная алгебра. Идеал I алгебры R будет большим левым идеалом в R тогда и только тогда, когда $I^* = 0$, т. е. когда R — точное расширение алгебры I . Если R является точным расширением алгебры I , то левые алгебры частных $\mathcal{U}({}_R R)$ и $\mathcal{U}({}_I I)$ изоморфны.

Доказательство. Пусть I — идеал ненулевой полупервичной алгебры R .

Если $I \in \mathcal{B}({}_R R)$, то $I^* = 0$, так как $I \cap I^* = 0$ в силу полупервичности алгебры R . Обратно, пусть $I^* = 0$. Если L — левый идеал алгебры R и $I \cap L = 0$, то $IL = 0$,

так как $IL \subseteq I \cap L$. Но тогда $L \subseteq r(0, I) = I^* = 0$ в силу полупервичности алгебры R , т. е. $L = 0$. Следовательно, $I \in \mathcal{B}({}_R R)$.

Таким образом, I — большой левый идеал в R тогда и только тогда, когда $I^* = 0$, т. е. когда R — точное расширение алгебры I .

Учитывая доказанное, будем считать, что R — точное расширение алгебры I .

Пусть $L \in \mathcal{B}({}_R R)$. Возьмем любой ненулевой левый идеал L_0 алгебры I . Ясно, что I — полупервичная алгебра, как и алгебра R . Поэтому IL_0 — ненулевой левый идеал алгебр R и I , содержащийся в L_0 . Но тогда $IL_0 \cap L \neq 0$, а потому и $IL \cap L_0 \neq 0$, так как $IL \cap L_0 \supseteq I(L \cap IL_0)$. Следовательно, $IL \in \mathcal{B}({}_I I)$.

Пусть $L' \in \mathcal{B}({}_I I)$. Ясно, что IL' — левый идеал алгебр R и I , содержащийся в L' . Возьмем любой ненулевой левый идеал L_1 алгебры R . Из $I \in \mathcal{B}({}_R R)$ вытекает, что $L_1 \cap I \neq 0$. Но тогда $(L_1 \cap I) \cap L' \neq 0$, так как $L' \in \mathcal{B}({}_I I)$, и потому $L_1 \cap IL' \supseteq ((L_1 \cap I) \cap L')^2 \neq 0$. Поэтому $IL' \in \mathcal{B}({}_R R)$.

Учитывая доказанное, возьмем любой $f_A \in \mathcal{K}({}_R R)$. В силу доказанного выше $IA \in \mathcal{B}({}_I I)$, причем $(IA)f = I(Af) \subseteq I$. Поэтому f_{IA} можно рассматривать как I -модульный гомоморфизм из $IA \in \mathcal{B}({}_I I)$ в I . Но тогда $f_{IA} \in \mathcal{K}({}_I I)$.

С другой стороны, пусть $g_B \in \mathcal{K}({}_I I)$. Тогда $IB \in \mathcal{B}({}_R R)$. Кроме того, в силу I -модульности гомоморфизма g имеем $z'((zx)g) = (z'zx)g = z'z(xg)$, т. е. $(zx)g - z(xg) \in r(0, J)$ для всех $z' \in I$, $z \in R$, $x \in IB$. Но так как $r(0, I) = I^* = 0$ в силу полупервичности алгебры R , то $(zx)g = z(xg)$. Поэтому g_{IB} — R -модульный гомоморфизм. Но тогда можно считать, что $g_{IB} \in \mathcal{K}({}_R R)$.

В результате получаем отображения $f_A \mapsto f_{IA}$, $g_B \mapsto g_{IB}$ мультиоператорных алгебр $\mathcal{K}({}_R R)$ и $\mathcal{K}({}_I I)$ друг в друга. Легко видеть, что эти отображения согласованы с конгруенцией $\sim$. Поэтому отображения

$$\langle f_A \rangle \mapsto \langle f_{IA} \rangle, \quad \langle g_B \rangle \mapsto \langle g_{IB} \rangle$$

алгебр $\mathcal{Y}({}_R R)$ и $\mathcal{Y}({}_I I)$ друг в друга корректно определены и являются гомоморфизмами этих алгебр. Но из доказанного выше вытекает, что $\langle f_A \rangle = \langle f_{IA} \rangle$, $\langle g_B \rangle = \langle g_{IB} \rangle$. Поэтому построенные гомоморфизмы являются обратными друг другу изоморфизмами. Предложение доказано.

Применим доказанное предложение к полупервичным алгебрам со слабым условием обрыва цепей аннуляторов, т. е. к несократимым подпрямым произведениям первичных алгебр (см. § 1).

Предложение 6. Пусть R — ненулевая полупервичная алгебра со слабым условием обрыва цепей аннуляторов. Тогда левая алгебра частных $\mathcal{U}(R)$ алгебры R изоморфна прямому произведению $\prod_{i \in \Gamma} \mathcal{U}(R_i)$ левых алгебр частных $\mathcal{U}(R_i)$ первичных алгебр R_i , где $\{R_i | i \in \Gamma\}$ — множество всех первичных компонент полупервичной алгебры R .

Доказательство. В силу структурных теорем 1.1 и 1.2 R — точное расширение прямой суммы $\bigoplus_{i \in \Gamma} R_i$ первичных компонент R_i полупервичной алгебры R , и потому в силу предложения 5,

$$\mathcal{U}(R) \simeq \mathcal{U}\left(\bigoplus_{i \in \Gamma} R_i\right). \quad (8)$$

Любая первичная алгебра является идеалом некоторой первичной алгебры с единицей. Учитывая это, связываем с каждой первичной алгеброй R_i соответствующую ей первичную алгебру $\tilde{R}_i$ с единицей e_i . Первичная алгебра является точным расширением своих ненулевых идеалов. Поэтому в силу предложения 5

$$\forall i \in \Gamma \mid \mathcal{U}(R_i) \simeq \mathcal{U}(\tilde{R}_i), \quad (9)$$

причем, как легко видеть, прямая сумма $\bigoplus_{i \in \Gamma} \tilde{R}_i$ является полупервичной алгеброй и точным расширением прямой суммы $\bigoplus_{i \in \Gamma} R_i$. Но тогда, снова в силу предложения 5,

$$\mathcal{U}\left(\bigoplus_{i \in \Gamma} R_i\right) \simeq \mathcal{U}\left(\bigoplus_{i \in \Gamma} \tilde{R}_i\right). \quad (10)$$

Возьмем произвольный левый идеал L алгебры $\Sigma = \bigoplus_{i \in \Gamma} \tilde{R}_i$. Ясно, что для любого элемента $x \in \Sigma$ почти все элементы $e_i x$ равны нулю и $x = \sum_{i \in \Gamma} e_i x$. Но тогда, как легко видеть, для любого $i \in \Gamma$ множества $e_i L = L_i$ будут левыми идеалами алгебры Σ и $e_i \Sigma = \tilde{R}_i$, причем $L = \bigoplus_{i \in \Gamma} L_i$. Обратно, для любого набора $(L_i | i \in \Gamma)$ левых идеалов

алгебр $\tilde{R}_i$ получаем, что $L = \bigoplus_{i \in \Gamma} L_i$ — левый идеал алгебры Σ , причем $e_i L = L_i$ для всех $i \in \Gamma$.

Учитывая указанную связь между левыми идеалами алгебры Σ и левыми идеалами ее прямых слагаемых, легко получаем, что

$$\bigoplus_{i \in \Gamma} L_i \in B \left(\bigoplus_{i \in \Gamma} \tilde{R}_i \right) \Leftrightarrow \forall i \in \Gamma \mid L_i \in B(\tilde{R}_i). \quad (11)$$

Возьмем произвольный $f_L \in \mathcal{K}(\Sigma)$. По построению $L \in B(\Sigma)$ и потому в силу (11) $e_i L = L_i \in B(\tilde{R}_i)$ для всех $i \in \Gamma$. Кроме того, $L_i f = (e_i L) f = e_i (L f) \in \tilde{R}_i$ для всех $i \in \Gamma$, и потому мы можем рассматривать индуцированные f Σ -модульные гомоморфизмы f_{L_i} как $\tilde{R}_i$ -модульные гомоморфизмы из $L_i \in B(\tilde{R}_i)$ в $\tilde{R}_i$. Рассматривая их именно так, получаем, что $(f_{e_i L} \mid i \in \Gamma) \in \prod_{i \in \Gamma} \mathcal{K}(\tilde{R}_i)$.

Обратно, пусть $(f_L^{(i)} \mid i \in \Gamma) \in \prod_{i \in \Gamma} \mathcal{K}(\tilde{R}_i)$. Тогда $L_i \in B(\tilde{R}_i)$ для каждого $i \in \Gamma$, и потому $\bigoplus_{i \in \Gamma} L_i = L \in B(\Sigma)$ в силу (11). Но из равенства $\Sigma = \bigoplus_{i \in \Gamma} \tilde{R}_i$ легко вытекает,

что все $f_L^{(i)}$ будут Σ -модульными гомоморфизмами. Вспоминая, что для любого $x \in \Sigma$ почти все элементы $e_i x$ равны нулю и $x = \sum_{i \in \Gamma} e_i x$, мы можем построить Σ -модульный гомоморфизм $f: L \rightarrow \Sigma$, полагая $x f = \sum_{i \in \Gamma} (e_i x) f_L^{(i)}$ для всех $x \in L$. В результате получаем, что $f_L \in \mathcal{K}(\Sigma)$.

Таким образом, мы получаем взаимно однозначное отображение $f_L \mapsto (f_{e_i L} \mid i \in \Gamma)$ универсальной алгебры $\mathcal{K}(\Sigma)$ на прямое произведение универсальных алгебр $\mathcal{K}(\tilde{R}_i)$. Из построения вытекает, что это отображение является изоморфизмом $\mathcal{K}(\Sigma)$ на $\prod_{i \in \Gamma} \mathcal{K}(\tilde{R}_i)$, причем оно согласовано с конгруенцией $\sim$, т. е. верны соотношения

$$f_A \sim g_B \Leftrightarrow \forall i \in \Gamma \mid f_{e_i A} \sim g_{e_i B}. \quad (12)$$

А из (12) и построения левых алгебр частных вытекает, что отображение

$$\langle f_L \rangle \mapsto (\langle f_{e_i L} \rangle \mid i \in \Gamma)$$

корректно определено и является изоморфизмом алгебры $\mathcal{U}(\Sigma)$ на прямое произведение алгебр $\mathcal{U}(\tilde{R}_i)$. Поэтому

$$\mathcal{U}\left(\bigoplus_{i \in \Gamma} \tilde{R}_i\right) \simeq \prod_{i \in \Gamma} \mathcal{U}(\tilde{R}_i). \quad (13)$$

В силу (8), (9), (10) и (13) предложение доказано.

Начнем применение левых алгебр частных для доказательства структурных теорем с рассмотрения левых алгебр частных алгебр без нильпотентных элементов.

Алгебра Q называется *самоинъективной*, если Q -модуль ${}_Q Q$ является инъективным Q -модулем. Так, например, в силу предложения 4 левые алгебры частных алгебр с нулевым сингулярным левым идеалом будут самоинъективными.

Напомним, что алгебра Q называется *строго регулярной*, если для любого $q \in Q$ существует такой $x \in Q$, что $q = q^2 x$. Легко видеть, что строго регулярные алгебры и регулярные алгебры без нильпотентных элементов — это одно и то же.

Теорема 1. Пусть R — ненулевая алгебра без нильпотентных элементов. Тогда

а) В алгебре R верно равенство $z(R) = 0$ и потому «канонический» гомоморфизм $\rho: R \rightarrow \mathcal{U}(R)$ является изоморфным вложением алгебры R в алгебру $\mathcal{U}(R)$.

б) Левая алгебра частных $\mathcal{U}(R)$ алгебры R является самоинъективной регулярной алгеброй с единицей, изоморфной своей левой алгебре частных $\mathcal{U}(\mathcal{U}(R))$.

в) Алгебра $\mathcal{U}(R)$ не имеет нильпотентных элементов тогда и только тогда, когда

$$\forall x, y \in R \mid Rx \cap Ry = 0 \Leftrightarrow xy = 0. \quad (14)$$

г) Если в алгебре R верно соотношение (14), то для любого идемпотента e алгебры $\mathcal{U}(R)$ существует такой аннуляторный идеал A^* и такой R -модульный гомоморфизм $f_{A^* + A^{**}}$, действующий тождественно на A^{**} и нулевым образом на A^* , что $e = \langle f_{A^* + A^{**}} \rangle$.

Доказательство. В силу предложений 2 и 4 верна импликация а) $\Rightarrow$ б).

Пусть $r \in R$, $r \neq 0$. Ясно, что тогда и $Rr \neq 0$. Но $l(0, r) \cap Rr = 0$, так как для любого $y \in R$ равенства $yr^2 = 0$ и $yr = 0$ равносильны в силу леммы 2.2. Поэтому $z(R) = 0$ в силу (7). Но тогда в силу предложения 3 верно а).

Предположим, что алгебра $Q = \mathcal{U}(R)$ не имеет нильпотентных элементов.

Пусть $x, y \in R$ и $Rx \cap Ry = 0$. Применяя предложение 2, строим такой левый идеал B алгебры R , что $B \supseteq Rx$, $B \cap Ry = 0$ и $Ry + B \subseteq B({}_R R)$. Полагая $(a + b)g = a$ для всех $a \in Ry$, $b \in B$, получаем в силу того же предложения R -модульный гомоморфизм $g \in \mathcal{H}({}_R R)$. Но по построению $B \supseteq Rx$. Поэтому $\rho_x g \sim 0_R$. Переходя к алгебре $\mathcal{U}(R)$, получаем равенство $\langle \rho_x \rangle \langle g \rangle = 0$, а значит и равенство $\langle g \rangle \langle \rho_x \rangle = 0$, так как $\mathcal{U}(R) = Q$ — алгебра без нильпотентных элементов по предположению. Поэтому $g\rho_x \sim 0_R$, т. е. $(Lg)\rho_x = 0$ для некоторого большого левого идеала $L \subseteq B \cap Ry + B$. Но тогда по построению g получаем равенства $(L \cap Ry)x = 0$. Поэтому $(L \cap Ry)(x) = 0$, так как в силу леммы 2.1 любой левый (или правый) аннулятор в алгебре без нильпотентных элементов является идеалом. Но тогда $L \cap Ry \cap (x) = 0$, так как $(L \cap Ry \cap (x))^2 = 0$. Между тем $L \subseteq B({}_R R)$, и потому $L \cap Ry \cap (x) = 0$ влечет $Ry \cap (x) = 0$. Но тогда, очевидно, верно равенство $xy = 0$.

Следовательно, в алгебре R верно соотношение (14) в силу леммы 2.2.

Обратно, пусть в алгебре R верно соотношение (14). Тогда как легко видеть, для любых двух левых идеалов A, B алгебры R равенства $A \cap B = 0$, $AB = 0$ равносильны.

Возьмем любой идемпотент $e \in Q = \mathcal{U}(R)$. В силу предложения 2 существуют такие левые идеалы A, B алгебры R и такой R -модульный гомоморфизм $f: A + B \rightarrow R$, действующий тождественно на A и нулевым образом на B , что $A \cap B = 0$, $A + B \subseteq B({}_R R)$ и $e = \langle f_{A+B} \rangle$. Но тогда в силу (14) и $AB = 0$. Поэтому $B \subseteq A^*$. Для полученного аннуляторного идеала A^* включение $A \subseteq A^{**}$ и равенство $A^{**} \cap A^* = 0$ очевидны. Поэтому $A^{**} + A^* \subseteq B({}_R R)$. Но тогда, полагая $(\bar{a} + \bar{b})\bar{f} = \bar{a}$ для всех $\bar{a} \in A^{**}$, $\bar{b} \in A^*$, мы получаем R -модульный гомоморфизм $\bar{f}_{A^{**} + A^*} \sim \bar{f}_{A+B}$.

Поэтому $e = \langle \bar{f} \rangle$, т. е. верно утверждение г).

Возьмем, далее, любой $g_N \in \mathcal{H}({}_R R)$. Из R -модульности гомоморфизма g легко вытекают включения

$$(N \cap A^{**})g \subseteq A^{**}, \quad (N \cap A^*)g \subseteq A^*. \quad (15)$$

Кроме того, из рассуждений, проведенных в конце доказательства предложения 5, вытекает, что $A^{**}N + A^*N = (A^{**} + A^*)N$ — большой левый идеал, и потому $C = (N \cap A^{**}) + (N \cap A^*) \in B({}_R R)$. Но тогда из (15) вытекает, что R -модульные гомоморфизмы $\bar{f}g_N$ и $g_N\bar{f}$ определены на некоторых левых идеалах, содержащих большой левый идеал C .

Возьмем любой $c \in C$. Тогда $c = x + y$ для некоторых однозначно определенных элементов $x \in N \cap A^{**}$ и $y \in N \cap A^*$. Но по построению $\bar{f}$ действует тождественно на A^{**} и нулевым образом на A^* . Поэтому в силу (15)

$$c(\bar{f}g_N) = ((x + y)\bar{f})g_N = xg_N = (xg_N + yg_N)\bar{f} = c(g_N\bar{f}).$$

А это означает, что $\bar{f}g_N \sim g_N\bar{f}$.

Переходя к алгебре $Q = \mathcal{U}(R)$, получаем

$$e\langle g_N \rangle = \langle \bar{f}g_N \rangle = \langle g_N\bar{f} \rangle = \langle g_N \rangle e,$$

и мы доказали, что в алгебре Q все идемпотенты центральны. Но если $q \in Q$, то $q = qxq$ для некоторого $x \in Q$ в силу регулярности алгебры Q . Поэтому $q = q^2x$, так как qx — идемпотент. В результате получаем, что алгебра $\mathcal{U}(R)$ оказывается строго регулярной алгеброй, а значит и алгеброй без нильпотентных элементов.

Следовательно, верно и утверждение в). Теорема доказана.

Говорим, что алгебра R удовлетворяет левому условию Орэ, если для любого $a \in R$, не являющегося делителем нуля, и любого $b \in R$ существуют такие элементы $d \in R$ и $c \in R$ (причем c не является делителем нуля), что $da = cb$. Алгебру R назовем *левой областью Орэ*, если R — алгебра без делителей нуля с левым условием Орэ (т. е. $Ra \cap Rb \neq 0$ для любых $a, b \in R$, $a \neq 0 \neq b$).

Говорим, что R -модуль ${}_R M$ *конечномерен в смысле Голди*, если он не содержит бесконечных прямых сумм своих ненулевых подмодулей. Алгебра R *конечномерна в смысле Голди*, если R -модуль ${}_R R$ обладает этим свойством. В силу сказанного выше получаем, например, что любая левая область Орэ конечномерна в смысле Голди.

Пусть R — подалгебра алгебры Q с единицей, причем в алгебре R есть делители нуля. Алгебра Q называется *классической левой алгеброй частных алгебры R* , если все делители нуля алгебры R обратимы в Q и каждый элемент $q \in Q$ представим в виде $a^{-1}b$ для некоторого $b \in R$ и некоторого $a \in R$, не являющегося делителем нуля в R . Ясно, что если R — алгебра без делителей нуля и классическая левая алгебра частных $\mathcal{U}_{cl}(R)$ существует, то она является телом. Поэтому в этом случае говорят о *классическом левом теле частных*. Если классическая левая алгебра частных алгебры R существует, то, как легко видеть (см. ниже), выполняется левое условие Орэ. А из этого выводится единственность классической левой алгебры частных, с точностью до изоморфизма.

Теорема 2. *Для любой ненулевой алгебры R без нильпотентных элементов равносильны утверждения:*

- а) *Алгебра R — левая область Орэ.*
- б) *Левая алгебра частных $\mathcal{U}(R)$ алгебры R является алгеброй без делителей нуля.*
- в) *Левая алгебра частных $\mathcal{U}(R)$ алгебры R является телом.*
- г) *Алгебра R имеет классическое тело частных.*
- д) *R — конечномерная в смысле Голди алгебра без делителей нуля.*

Доказательство. В силу теоремы 1 можно считать, что R — алгебра без делителей нуля, так как если верно хотя бы одно из утверждений а) — д), то алгебра R этим свойством обладает.

а) $\Rightarrow$ в) & г) & д). Пусть R — левая область Орэ. Ясно, что тогда $Ra \cap Rb \neq 0$ для любых ненулевых элементов $a, b \in R$, и потому алгебра R конечномерна в смысле Голди. Кроме того, в силу теоремы 1 алгебра $\mathcal{U}(R)$ не имеет нильпотентных элементов, так как условие (14) выполнено. В силу той же теоремы единственным ненулевым идемпотентом в $Q = \mathcal{U}(R)$ является единица 1, поскольку единственным ненулевым аннуляторным идеалом в алгебре R без делителей нуля является R . Но если $q \in Q$, то $q = qxq$ для некоторого элемента $x \in Q$, причем если $q \neq 0$, то qx и xq — ненулевые идемпотенты. Поэтому в силу сказанного $qx = 1 = xq$, т. е. Q — тело.

Ясно, что все ненулевые левые идеалы в R будут большими. Учитывая это, возьмем любой элемент $\langle f_L \rangle \in Q =$

$= \mathcal{U}(R)$ и любой ненулевой элемент $a \in R$. Из $Ra \neq 0$ вытекает, что $Ra \in B(RR)$. Но R — алгебра без делителей нуля. Поэтому, полагая $(ra)i_a = r$ для всех $r \in R$, мы получаем R -модульный гомоморфизм (изоморфизм!) $i_a \in \mathcal{H}(RR)$. При этом по построению $(ra)i_a \rho_a = ra = (ra)\rho_a i_a$ для всех $r \in R$, и потому $i_a \rho_a \sim_{\varepsilon_R} \rho_a i_a$, $\langle i_a \rangle = \langle \rho_a \rangle^{-1}$. Но $L \neq 0$, так как $L \in B(RR)$. Поэтому считая, что $a \in L$, получаем $(ra)i_a \rho_{af} = r(af) = (ra)f$ для всех $r \in R$, т. е. $i_a \rho_{af} \sim_{f_L}$. Следовательно, $\langle f_L \rangle = \langle \rho_a \rangle^{-1} \langle \rho_{af} \rangle$.

А из доказанного вытекает, что левая алгебра частных $\mathcal{U}(R)$ алгебры R станет классическим телом частных алгебры R , если отождествить R и $\rho(R) \subseteq \mathcal{U}(R)$.

б) $\Rightarrow$ а). Если $\mathcal{U}(R)$ — алгебра без делителей нуля, то $Ra \cap Rb \neq 0$ для любых ненулевых $a, b \in R$ в силу теоремы 1, и потому R — левая область Орэ.

г) $\Rightarrow$ а). Пусть R имеет классическую левую алгебру частных Q . Возьмем $a, b \in R$, $a \neq 0$. По определению в алгебре Q существует элемент a^{-1} , а значит и элемент ba^{-1} . Еще раз применяя определение, получаем, что $ba^{-1} = c^{-1}d$ для некоторых $c, d \in R$, $c \neq 0$. Но тогда $cb = da$, и мы доказали выполнение левого условия Орэ.

д) $\Rightarrow$ а). Пусть $a, b \in R$, причем $a \neq 0 \neq b$. Допустим, что $Ra \cap Rb = 0$. Тогда для любых элементов $r_0, r_1, r_2, \dots, r_n \in R$ из равенства $r_0 a + r_1 ab + r_2 ab^2 + \dots + r_n ab^n = 0$ последовательно получаем $r_0 a \in Ra \cap Rb$, и потому $r_0 a = 0$, но тогда $r_1 a + r_2 ab + \dots + r_n ab^{n-1} = 0$, так как R — алгебра без делителей нуля и потому $r_1 a = 0, \dots, r_n a = 0$. В результате получаем, что в R -модуле ${}_R R$ подмодули $Rab^m \neq 0$ образуют бесконечную прямую сумму.

Поэтому если алгебра R конечномерна в смысле Голди, то $Ra \cap Rb \neq 0$, и мы получаем, что R — левая область Орэ.

Теорема доказана, так как импликация б) $\Rightarrow$ в) очевидна.

Следствие 1. Любая нетерова слева алгебра без делителей нуля является левой областью Орэ и имеет классическое левое тело частных.

Достаточно заметить, что из условия максимальности для подмодулей (нетеровость) вытекает конечномерность в смысле Голди и применить теорему 2.

Теорема 3. Для любой ненулевой алгебры R без нильпотентных элементов равносильны утверждения:

а) Алгебра R удовлетворяет условию обрыва цепей аннуляторных идеалов и левому условию Орэ.

б) Левая алгебра частных $\mathcal{U}(R)$ алгебры R является алгеброй без нильпотентных элементов и удовлетворяет условию обрыва цепей аннуляторных идеалов.

в) Левая алгебра частных $\mathcal{U}(R)$ является артиновой (слева или справа) алгеброй без нильпотентных элементов.

г) Левая алгебра частных $\mathcal{U}(R)$ является нетеровой (слева или справа) алгеброй без нильпотентных элементов.

д) Левая алгебра частных $\mathcal{U}(R)$ является конечной прямой суммой тел.

е) Алгебра R имеет классическую левую алгебру частных $\mathcal{U}_{cl}(R)$, причем $\mathcal{U}_{cl}(R)$ — конечная прямая сумма тел.

ж) Алгебра R конечномерна в смысле Голди.

з) R — подпрямое произведение конечного множества левых областей Орэ.

Доказательство. Импликации д) $\Rightarrow$ г), д) $\Rightarrow$ в), г) $\Rightarrow$ б), в) $\Rightarrow$ б) очевидны.

а) $\Rightarrow$ д) & е) & ж) & з). Пусть алгебра R удовлетворяет условию обрыва цепей аннуляторных идеалов и левому условию Орэ. В силу структурных теорем об алгебрах без нильпотентных элементов (см. § 2), алгебра R имеет лишь конечное число первичных компонент D_i , все ее первичные компоненты — алгебры без делителей нуля и R — точное расширение прямой суммы $\Sigma = \bigoplus_{i=1}^n D_i$ своих первичных компонент.

Возьмем любые ненулевые элементы $a_i, b_i \in D_i$. Из того, что все D_i — алгебры без делителей нуля и $\Sigma^* = 0$, вытекает, что $a = \sum_{i=1}^n a_i$ и $b = \sum_{i=1}^n b_i$ — неделители нуля в R .

Поэтому в силу левого условия Орэ $da = cb$ для некоторого $d \in R$ и некоторого $c \in R$, не являющегося делителем нуля. Но тогда для всех i получаем, что $a_i d \neq 0 \neq a_i c$ и $(a_i d) a_i = (a_i c) b_i$. Поэтому все алгебры D_i являются левыми областями Орэ.

Из теоремы 2 и предложения 5 (или непосредственно), получаем, что точное расширение левой области Орэ само будет левой областью Орэ. Поэтому R — подпрямое произведение конечного множества левых областей Орэ R/D_i^* .

В силу теоремы 2 все алгебры D_i конечномерны в смысле Голди. Но тогда, как нетрудно видеть, и сама алгебра R будет конечномерна в смысле Голди, являясь точным расширением конечной прямой суммы $\Sigma = \bigoplus_{i=1}^n D_i$.

Из предложения 6 вытекает, что левая алгебра частных $\mathscr{U}(R)$ изоморфна конечной прямой сумме $\bigoplus_{i=1}^n \mathscr{U}(D_i)$ левых алгебр частных $\mathscr{U}(D_i) = Q_i$. Но тогда в силу теоремы 2 все Q_i — тела, и левая алгебра частных $\mathscr{U}(R)$ оказалась конечной прямой суммой тел.

Отождествим каждую алгебру D_j с соответствующей изоморфной ей подалгеброй левой алгебры частных $\mathscr{U}(D_j) = Q_j$. Тогда из рассуждений, проведенных в начале доказательства теоремы 2, вытекает, что Q_j станет классической левой алгеброй частных алгебры D_j , точнее, ее классическим телом частных. Но тогда, как нетрудно проверить, $Q = \sum_{j=1}^n Q_j = \mathscr{U}(R)$ станет классической левой алгеброй частных алгебры R (после отождествления R и $\rho(R)$).

з) $\Rightarrow$ а). Это вытекает из структурных теорем об алгебрах без нильпотентных элементов, так как все первичные компоненты (и их конечное число!) оказываются в рассматриваемом случае левыми областями Орэ.

ж) $\Rightarrow$ а). Пусть R — конечномерна в смысле Голди.

Возьмем любую строго возрастающую цепь $A_1^* \subset A_2^* \subset \dots$ аннуляторных идеалов. Из $A_n^* \subset A_{n+1}^*$ вытекает, что $A_n^{**} A_{n+1}^*$ — ненулевые идеалы алгебры R , попарно аннулирующие друг друга. Но тогда (R — алгебра без нильпотентных элементов!) эти идеалы образуют прямую сумму. Эта сумма должна быть конечной и потому цепь $A_1^* \subset A_2^* \subset \dots$ должна обрываться на конечном шаге.

Следовательно, алгебра R удовлетворяет условию обрыва цепей аннуляторных идеалов и потому является точным расширением конечной прямой суммы $\bigoplus_{i=1}^n D_i$ своих первичных компонент. Но алгебры D_i будут конечномерными в смысле Голди алгебрами без нильпотентных элементов, как и сама алгебра R . Более того, D_i — алгебры без делителей нуля, и потому в силу теоремы 2 все D_i —

левые области Орэ. Но тогда и алгебра R удовлетворяет левому условию Орэ.

е) $\Rightarrow$ а). Пусть R имеет классическую левую алгебру частных Q и Q — конечная прямая сумма тел. Ясно, что алгебра Q удовлетворяет условию максимальности для аннуляторов $S_Q^* = r_Q(0, S) = l_Q(0, S)$. Но если $S \subseteq R$, то $S_Q^* = R \cap S_Q^*$. Поэтому алгебра R удовлетворяет условию обрыва цепей аннуляторных идеалов и левому условию Орэ.

б) $\Rightarrow$ а). В силу теоремы 1, если $\mathcal{U}(R)$ — алгебра без нильпотентных элементов, то все первичные компоненты (как и все идеалы, являющиеся алгебрами без делителей нуля) будут левыми областями Орэ. Остается повторить рассуждения проведенные выше.

Теорема доказана.

Следствие 2. *Любая нетерова слева алгебра без нильпотентных элементов удовлетворяет левому условию Орэ и имеет классическую левую алгебру частных, являющуюся конечной прямой суммой тел.*

Теорема 4. *Для любой ненулевой алгебры R без нильпотентных элементов равносильны утверждения:*

а) R — несократимое подпрямое произведение левых областей Орэ.

б) *Каждый ненулевой идеал алгебры R содержит ненулевой идеал, являющийся левой областью Орэ.*

в) *Левая алгебра частных $\mathcal{U}(R)$ алгебры R не имеет нильпотентных элементов и удовлетворяет слабому условию обрыва цепей аннуляторов.*

г) $\mathcal{U}(R)$ — несократимое (специальное) подпрямое произведение тел.

д) $\mathcal{U}(R)$ — прямое произведение тел.

Доказательство. Импликации д) $\Rightarrow$ г) и г) $\Rightarrow$ в) очевидны, а импликация б) $\Rightarrow$ а) вытекает из структурных теорем об алгебрах без нильпотентных элементов (см. 2). Импликация а) $\Rightarrow$ д) вытекает из теоремы 2 и предложения 6.

в) $\Rightarrow$ б). В силу теоремы 1 любой идеал алгебры R , являющейся алгеброй без делителей нуля, будет левой областью Орэ. Поэтому остается доказать, что если верно в), то каждый ненулевой идеал алгебры R содержит ненулевой идеал, являющийся алгеброй без делителей нуля. Для этого в силу структурных теорем об алгебрах без

нильпотентных элементов мы замечаем, что алгебра $Q = \mathcal{U}(R)$ этому условию удовлетворяет.

Пусть I — ненулевой идеал в R . Тогда I_Q^{**} — ненулевой (аннуляторный) идеал в Q , и потому найдется такой идеал J алгебры Q , являющийся (ненулевой!) алгеброй без делителей нуля, что $J \subseteq I_Q^{**}$. Но $R \in \mathcal{B}(RQ)$ в силу теоремы 1 и предложения 4. Поэтому $J \cap R$ — ненулевой идеал алгебры R , являющийся алгеброй без делителей нуля и содержащийся в I_Q^{**} . Но тогда $J \cap I = J \cap R \cap I \neq 0$ — идеал алгебры R , являющийся алгеброй без делителей нуля и содержащийся в I .

Теорема доказана.

Переходя к полупервичным алгебрам, докажем две технические леммы.

Лемма 3. Пусть Q — регулярная алгебра. Тогда каждый конечнопорожденный левый идеал будет главным левым идеалом. При этом, если Q — алгебра с единицей, то Q классически полупроста тогда и только тогда, когда она вполне приводима, т. е. совпадает с суммой всех своих минимальных левых идеалов.

Доказательство. Пусть $a, b \in Q$. В силу регулярности Q имеем $Qa = Qe$ и $Q(b - be) = Qf$ для некоторых идемпотентов e, f . Ясно, что при этом $fe = 0$, так как $(b - be)e = 0$. Но тогда для $c = e + f - ef$ получаем $ec = e$, $fc = f$, и потому $Qc = Qe + Qf = Qa + Qb$.

Поэтому верно первое утверждение леммы. А второе утверждение легко вытекает из того, что если алгебра Q с единицей является суммой некоторых левых идеалов L_i , то она является суммой некоторого конечного множества этих идеалов.

Лемма 4. Пусть алгебра Q артинова слева и имеет единицу. Если $a, b \in Q$ и $ab = 1$, то и $ba = 1$.

Действительно, пусть $ab = 1$. В силу артиновости слева $Qa^n = Qa^{n+1}$ для некоторого целого $n \geq 1$, и потому $a^n = ga^{n+1}$ для некоторого $g \in Q$. Но тогда $1 = a^n b^n = ga^{n+1} b^n = ga$, откуда $b = gab = g$. Следовательно, $ba = 1$.

Теорема 5. Пусть R — ненулевая полупервичная алгебра $z(R) = 0$. Равносильны следующие утверждения:

- Алгебра R первична и конечномерна в смысле Голди.
- Левая алгебра частных $\mathcal{U}(R)$ алгебры R первична и конечномерна в смысле Голди.
- Левая алгебра частных $\mathcal{U}(R)$ классически проста.

г) Алгебра R имеет классическую левую алгебру частных $\mathcal{U}_{cl}(R)$, причем алгебра $\mathcal{U}_{cl}(R)$ классически проста.

Доказательство. Учитывая равенство $z(R)=0$, мы будем отождествлять R с подалгеброй $\rho(R)$ левой алгебры частных $\mathcal{U}(R)=Q$, т. е. считать, что сама алгебра R является подалгеброй в $\mathcal{U}(R)$. При этом в силу предложения 4 R -модуль ${}_R R$ будет подмодулем в R -модуле ${}_R Q$.

а) $\Rightarrow$ б). Пусть алгебра R конечномерна в смысле Голди и первична. Если левые идеалы L_i образуют, как подмодули в ${}_Q Q$, прямую сумму, то и $L_i \cap R$ образуют в алгебре R , как подмодули в ${}_R R$, прямую сумму. Но тогда из конечномерности в смысле Голди для алгебры R вытекает конечномерность в смысле Голди для алгебры Q . Кроме того, если A, B — идеалы в Q и $AB=0$, то $A \cap R, B \cap R$ — идеалы в R и, очевидно, $(A \cap R)(B \cap R)=0$. Но тогда $A \cap R=0$ или $B \cap R=0$, т. е. $A=0$ или $B=0$. Поэтому из первичности алгебры R вытекает первичность алгебры Q .

б) $\Rightarrow$ в). Пусть левая алгебра частных $\mathcal{U}(R)=Q$ алгебры R первична и конечномерна в смысле Голди. Замечаем, что каждый ненулевой идеал алгебры Q содержит некоторый минимальный левый идеал.

Действительно, в силу регулярности алгебры Q каждый ненулевой левый идеал алгебры Q содержит ненулевой идемпотент. Учитывая это, возьмем любой ненулевой идемпотент $e_1 \in Q$. Начиная процесс, допустим, что Qe_1 — не минимальный левый идеал. Тогда найдется такой ненулевой идемпотент $e_2 \in Qe_1$, что $Qe_1 \supset Qe_2$. Продолжая процесс, мы получим последовательность ненулевых идемпотентов $e_1, e_2, \dots$ такую, что если процесс не закончился на n -м шаге, то $e_{n+1} \in Qe_n$ и $Qe_n \supset Qe_{n+1}$.

Из построения вытекает, что $e_i e_j = e_i$ для $i \geq j$. Кроме того, если $Qe_n \supset Qe_{n+1}$, то, очевидно, $e_n \neq e_n e_{n+1}$ и потому $e_n - e_n e_{n+1} \neq 0$. Учитывая это, допустим, что для некоторых элементов $q_1, q_2, \dots, q_n \in Q$ верно равенство $q_1(e_1 - e_1 e_2) + q_2(e_2 - e_2 e_3) + \dots + q_n(e_n - e_n e_{n+1}) = 0$. Умножая это равенство справа на e_2 , получим $q_2(e_2 - e_2 e_3) + \dots + q_n(e_n - e_n e_{n+1}) = 0$. Следовательно, $q_1(e_1 - e_1 e_2) = 0$. Но тогда, умножая «укороченное» равенство на e_3 , получаем, аналогично, $q_2(e_2 - e_2 e_3) = 0$ и т. д. В результате получим $q_i(e_i - e_i e_{i+1}) = 0$ для всех i . Но это означает, что ненулевые

левые идеалы $Q_i (e_i - e_i e_{i+1}) = 0$ образуют, как модули, прямую сумму. А так как сумма должна быть конечной, процесс должен закончиться на конечном шаге.

Между тем по построению, заканчивая процесс, мы получаем минимальный левый идеал Qe_m , содержащийся в Qe_1 . Поэтому в силу произвольности e_1 любой ненулевой левый идеал в Q содержит минимальный левый идеал.

Учитывая доказанное, строим сумму C всех минимальных левых идеалов алгебры Q . Тогда C как Q -модуль является прямой суммой некоторого множества минимальных левых идеалов. Поэтому в силу конечномерности в смысле Голди C — конечнопорожденный левый идеал, а значит и главный левый идеал в силу леммы 3. Следовательно, $C = Qe$ для некоторого идемпотента e . Но тогда $C \cap Q(1 - e) = 0$, и потому левый идеал $Q(1 - e)$ не может содержать минимальных левых идеалов алгебры Q . Это означает в силу доказанного, что $Q(1 - e) = 0$, т. е. $e = 1$. Но тогда $C = Q1 = Q$, и потому в силу леммы 3 алгебра Q классически полупроста.

Первичные классически полупростые алгебры — это в точности классически простые алгебры. Поэтому алгебра $\mathcal{U}(R)$ классически проста.

в) $\Rightarrow$ г). Пусть алгебра $\mathcal{U}(R)$ классически проста. Докажем, что тогда она сама будет классической левой алгеброй частных алгебры R .

Пусть $a \in R$ и $l(0, a) = 0$. Переходя к алгебре Q , получаем $0 = l_Q(0, a) \cap R$, т. е. $l_Q(0, a) = 0$. Но $a = aa'a$ для некоторого $a' \in Q$. Для этого a' получаем $(1 - aa')a = 0$ и потому $aa' = 1$. Но тогда в силу леммы 4 элемент a обратим в Q и $a^{-1} = a'$. Кроме того, если $Ra \cap B = 0$ для некоторого левого идеала B алгебры R , то $(Ba^{-1} \cap R)a = 0$ и, следовательно, $Ba^{-1} \cap R = 0$, т. е. $Ba^{-1} = 0$, откуда $B = 0$. Это означает, что $Ra \in B({}_R R)$.

С другой стороны, пусть $L \in B({}_R R)$. По условию алгебра $Q = \mathcal{U}(R)$ классически проста, а значит и нетерова справа. Поэтому среди правых идеалов вида qQ , $q \in L$, есть максимальный относительно этого свойства. Пусть это будет lQ , $l \in L$.

Из регулярности алгебры Q вытекает $l = l'l$ для некоторого $l' \in Q$. Ясно, что тогда $l'l = e$ и $l'l = e'$ будут идемпотентами. Покажем, что они равны 1.

Пусть $b \in Q(1 - e') \cap L$. Тогда $be' = 0$ и потому $(l + b)e' = l$. Следовательно, $l + b \in L$ и $(l + b)Q \subseteq lQ$. В силу максимальности идеала lQ имеем $(l + b)Q = lQ$, откуда $b \in lQ$.

В результате получаем, что $Q(1 - e') \cap L \subseteq lQ$. Но $(1 - e)l = 0$. Поэтому верно и равенство $(Q(1 - e) \cap L)(Q(1 - e') \cap L) = 0$. Но тогда $Q(1 - e) \cap L = 0$ или $Q(1 - e') \cap L = 0$ в силу первичности алгебры R . Замечая, что $L \subseteq B({}_R Q)$, так как $R \subseteq B({}_R Q)$, получаем $Q(1 - e) = 0$ или $Q(1 - e') = 0$, т. е. $e = 1$ или $e' = 1$. Но тогда в силу леммы 4 элемент l будет обратим в алгебре Q , так как $ll' = 1 = l'l$.

А из обратимости l в Q вытекает, что $l \in L$ не является делителем нуля в алгебре R (и в Q), т. е. любой большой левый идеал L алгебры R содержит неделимый ноль.

Учитывая все сказанное и доказанное, возьмем любой $q = \langle f_A \rangle \in \mathcal{U}(R)$. По построению, $A \in B({}_R R)$, и потому в A есть элемент a , не являющийся делителем нуля. Но все неделители нуля алгебры R обратимы в Q . Кроме того, $Ra \in B({}_R R)$. Поэтому, повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве импликации а) $\Rightarrow$ в) & г) & д) из теоремы 2, строим элемент $a^{-1} = \langle i_a \rangle$ и получаем, что $q = \langle f_A \rangle = a^{-1}(af)$.

Следовательно, левая алгебра частных $\mathcal{U}(R)$ алгебры R действительно является классической левой алгеброй частных алгебры R .

г) $\Rightarrow$ а). Пусть R имеет классическую левую алгебру частных $Q = \mathcal{U}_{cl}(R)$, причем алгебра Q классически проста.

Ясно, что алгебра R удовлетворяет левому условию Орэ. Но тогда для любых двух «дробей» $a^{-1}b$ и $c^{-1}d$ легко получаем равенства

$$\begin{aligned} a^{-1}b + c^{-1}d &= (ua)^{-1}(ub + vd), \\ a^{-1}b \cdot c^{-1}d &= (sa)^{-1}(td), \end{aligned}$$

где $u, v, s, t \in R$, причем u, v, s — неделители нуля и $ua = vc, sb = tc$. Существование нужных элементов вытекает из левого условия Орэ. Следовательно, в алгебре $\mathcal{U}_{cl}(R)$ возможно «приведение к общему знаменателю»: для любого конечного множества $\{q_i \mid i \in \Delta\}$ элементов из Q всегда можно найти такое множество $\{r_i \mid i \in \Delta\}$ элементов из R и такой элемент $c \in R$, не являющийся делителем нуля, что $q_i = c^{-1}r_i$ для всех $i \in \Delta$. С помощью «приведения к общему знаменателю» легко получаем, что из

конечномерности в смысле Голди алгебры Q вытекает конечномерность в смысле Голди алгебры R .

Пусть A — ненулевой идеал алгебры R . Тогда $Q A Q = Q$ в силу простоты алгебры Q , и потому $1 = \sum q_i a_i v_i$ для некоторых $q_i, v_i \in Q, a_i \in A$. Приводя q_i «к общему знаменателю», получаем для некоторых элементов $r_i \in R$ и некоторого $c \in R$, не являющегося делителем нуля, что $q_i = c^{-1} r_i$ для всех i , и потому $1 = c^{-1} \sum r_i a_i v_i$.

Возьмем теперь любой такой идеал B алгебры R , что $BA = 0$. Тогда $Bc = Bc \cdot 1 = B \sum r_i a_i v_i \subseteq \sum B r_i a_i v_i \subseteq \sum B a_i v_i = 0$. Но c — не делитель нуля. Поэтому $B = 0$.

Следовательно, алгебра R первична и конечномерна в смысле Голди. Теорема доказана.

Теорема 6. Пусть R — ненулевая полупервичная алгебра и $z(R) = 0$. Равносильны следующие утверждения:

а) Алгебра R конечномерна в смысле Голди.
б) Левая алгебра частных $\mathcal{U}(R)$ алгебры R конечномерна в смысле Голди.

в) Левая алгебра частных $\mathcal{U}(R)$ алгебры R классически полупроста.

г) R имеет классическую левую алгебру частных $\mathcal{U}_{cl}(R)$, причем алгебра $\mathcal{U}_{cl}(R)$ классически полупроста.

Доказательство. Импликации а) $\Rightarrow$ б), б) $\Rightarrow$ в) и г) $\Rightarrow$ а): повторяются, с некоторыми очевидными сокращениями, доказательства тех же импликаций для теоремы 5.

в) $\Rightarrow$ г). Пусть алгебра $Q = \mathcal{U}(R)$ классически полупроста. Тогда, очевидно, Q удовлетворяет условию минимальности для левых аннуляторов. Поэтому и алгебра R удовлетворяет этому условию. Но тогда в силу полупервичности алгебра R удовлетворяет и условию обрыва цепей аннуляторных идеалов. Поэтому R — точное расширение прямой суммы $\Sigma = \bigoplus_{i \in \Gamma} R_i$ всех своих первичных компонент, причем множество первичных компонент конечно.

Нетрудно видеть, что из равенства $z(R) = 0$ вытекает равенство $z(R_i) = 0$ для всех первичных компонент R_i , так как если L_i — большой левый идеал алгебры R_i , то сумма $L_i + \sum_{j \neq i} R_j$ будет большим левым идеалом во всей

алгебре R . Поэтому к алгебрам R_i можно применять теорему 5. Но в силу предложения 6 $\mathcal{U}(R) \simeq \prod_{i \in \Gamma} \mathcal{U}(R_i) = \bigoplus_{i \in \Gamma} \mathcal{U}(R_i)$, так как Γ конечно, и все алгебры $Q_i = \mathcal{U}(R_i)$ первичны (см. доказательство импликации а) $\Rightarrow$ б) для теоремы 5). Поэтому, считая, что $Q = \bigoplus_{i \in \Gamma} Q_i$, мы получаем, что все Q_i будут классически простыми алгебрами — первичными компонентами классически полупростой алгебры $Q = \mathcal{U}(R)$. Но тогда, повторяя доказательство импликации в) $\Rightarrow$ г) для теоремы 5, получаем, что в каждой алгебре R_j есть делители нуля и Q_j — классические левые алгебры частных алгебр R_j .

Пусть $a \in R$, причем a — делитель нуля. Возьмем произвольный набор таких $b_j \in R_j$, что все b_j — делители нуля в R_j . Элементы ab_j — тоже делители нуля в алгебре R_j , и потому $(ab_j)c_j = e_j$ для некоторых $c_j \in Q_j$, где e_j — единица алгебры Q_j . Но тогда, полагая $b = \sum_{j \in \Gamma} b_j$, $c = \sum_{j \in \Gamma} c_j$, получаем, что $abc = 1$, и потому в силу леммы 4 элемент a обратим в алгебре Q . С другой стороны, пусть $q \in Q$. Тогда $q = \sum_{i \in \Gamma} q_i$, где $q_i = qe_i \in Q_i$. Но тогда $q_i = a_i^{-1}b_i$ для некоторых $a_i, b_i \in R_i$, откуда $q = a^{-1}b$, где $a = \sum_{i \in \Gamma} a_i, b = \sum_{i \in \Gamma} b_i$.

Следовательно, левая алгебра частных $\mathcal{U}(R)$ алгебры R действительно будет классической левой алгеброй частных алгебры R .

Теорема доказана.

Лемма 5. Если полупервичная алгебра R удовлетворяет условию максимальности для левых аннуляторов, то $z(R) = 0$.

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $a \in z(R)$.

В силу условия максимальности для левых аннуляторов существует такое натуральное число $n \geq 1$, что $l(0, a^n) = l(0, a^{m+n})$ для всех целых чисел $m \geq 0$. Ясно, что тогда верно и равенство $l(0, a^n) = l(0, a^{2n})$. Допустим, что $a^n \neq 0$. Из $a^n \in z(R)$ вытекает, что левый аннулятор $l(0, a^n)$ будет большим левым идеалом. Поэтому

из $Ra^n \neq 0$ следует, что и $Ra^n \cap l(0, a^n) \neq 0$. Но тогда $ya^n \neq 0$ и $ya^n \in l(0, a^n)$ для некоторого $y \in R$. Между тем второе соотношение дает нам $ya^{2n} = 0$, т. е. $y \in l(0, a^{2n}) = l(0, a^n)$, или $ya^n = 0$. Противоречие. Следовательно, $a^n = 0$.

В результате мы получили, что $z(R)$ — нильдеал в алгебре R . Учитывая это, будем выбирать $a \in z(R)$ так, чтобы левый аннулятор $l(0, a)$ был максимальным среди всех левых аннуляторов вида $l(0, b)$ с $b \in z(R)$, $b \neq 0$. Если $x \in R$, то $ax \in z(R)$, и потому при $ax \neq 0$ получаем $l(0, ax) = l(0, a)$ в силу максимальности $l(0, a)$. Но согласно доказанному элемент ax нильпотентен, и потому при $ax \neq 0$ получаем $(ax)^k = 0 \neq (ax)^{k-1}$ для некоторого $k \geq 2$. Но тогда $ax \in l(0, (ax)^{k-1}) = l(0, a)$ снова в силу максимальности $l(0, a)$, и потому $axa = 0$. Если же $ax = 0$, то равенство $axa = 0$ очевидно. В результате получаем равенство $aRa = 0$ и приходим в противоречие с полупервичностью алгебры R . Следовательно, $z(R) = 0$.

Лемма доказана.

Следствие 3. Пусть R — ненулевая полупервичная алгебра, конечномерная в смысле Голди. В алгебре R верно равенство $z(R) = 0$ тогда и только тогда, когда R удовлетворяет условию максимальности для левых аннуляторов.

Это вытекает из леммы 5 и теоремы 6, так как любая классически полупростая алгебра удовлетворяет условию максимальности для левых аннуляторов.

Говорим, что алгебра R является алгеброй Голди, если R конечномерна в смысле Голди и удовлетворяет условию максимальности для левых аннуляторов.

Следствие 4. Любая полупервичная алгебра Голди имеет классическую левую алгебру частных, которая классически полупроста. Любая первичная алгебра Голди имеет классическую левую алгебру частных, которая классически проста. Полупервичные алгебры Голди и подпрямые произведения конечного множества первичных алгебр Голди — это одно и то же.

Это вытекает из следствия 3 и теорем 5, 6.

Следствие 5. Любая полупервичная нетерова слева алгебра имеет классическую левую алгебру частных, которая классически полупроста. Любая первичная нетерова слева алгебра имеет классическую левую алгебру частных, которая является классически простой алгеброй.

Это вытекает из следствия 4, так как все нетеровы слева алгебры — алгебры Голди.

Следствие 6. Если алгебра R является несократимым подпрямым произведением первичных алгебр Голди, то $z(R) = 0$ и левая алгебра частных $\mathcal{U}(R)$ алгебры R будет прямым произведением классически простых алгебр — левых алгебр частных $\mathcal{U}(R_i)$ первичных компонент R_i алгебры R .

А это вытекает из структурных теорем о полупервичных алгебрах (см. § 1), предложения 6 и теоремы 5.

§ 4. Простые алгебры с единицей и присоединенно простой радикал

В предыдущей главе (см. предложение 3. 4. 7) было отмечено, что любой класс $\mathcal{M}$ простых алгебр с единицей является специальным и потому верхний радикал $S_{\mathcal{M}}$, определяемый этим классом, является специальным радикалом. Наименьший среди всех таких специальных радикалов $S_{\mathcal{M}}$, т. е. верхний радикал $\mathcal{T}$, определяемый классом всех простых алгебр с единицей, называется *присоединенно простым радикалом* (или радикалом Брауна — Маккоя).

Таким образом, по построению, верно

Предложение 1. Для любой алгебры A

$$\mathcal{T}(A) = \bigcap \{ P \mid P \text{ — идеал в } A, A/P \text{ — простая алгебра с единицей} \}. \quad (1)$$

Поэтому присоединенно простой радикал $\mathcal{T}$ является специальным радикалом, а значит и кручением. $\mathcal{T}$ -полупростые алгебры — это в точности подпрямые произведения простых алгебр с единицей. Простые $\mathcal{T}$ -полупростые алгебры — это в точности простые алгебры с единицей. Алгебра R будет $\mathcal{T}$ -радикальной тогда и только тогда, когда она не отображается гомоморфно на (ненулевые) алгебры с единицей.

Действительно, равенство (1) вытекает из определения специального радикала $S_{\mathcal{M}}$, определяемого заданным специальным классом $\mathcal{M}$ алгебр. А из равенства (1) вытекают все утверждения о $\mathcal{T}$ -полупростых алгебрах. Остается доказать последнее утверждение.

Если алгебра R не отображается гомоморфно на ненулевые алгебры с единицей, то, очевидно, она не отобра-

жается гомоморфно и на простые алгебры с единицей (ненулевые по определению). А это и означает, что алгебра R $\mathcal{T}$ -радикальна.

Обратно, пусть алгебра R отображается гомоморфно на некоторую ненулевую алгебру $\bar{R}$ с единицей $\bar{e}$. Тогда, очевидно, собственные идеалы в $\bar{R}$ — это в точности идеалы, не содержащие элемента $\bar{e}$. Но тогда в силу леммы Куратовского — Цорна в $\bar{R}$ есть максимальные (собственные!) идеалы и потому алгебра $\bar{R}$ отображается гомоморфно на некоторую простую алгебру с единицей. Поэтому и алгебра R отображается гомоморфно на некоторую простую алгебру с единицей, т. е. алгебра R не $\mathcal{T}$ -радикальна.

Предложение доказано.

Идеал I алгебры A называется *модулярным*, если A/I — алгебра с единицей. При этом мы будем считать, как обычно, что все алгебры с единицей ненулевые, т. е. все модулярные идеалы — собственные. Но тогда, как и в предложении 1, получаем, что если в алгебре A есть модулярные идеалы, то есть и максимальные модулярные идеалы, причем каждый модулярный идеал содержится в некотором максимальном модулярном идеале.

В силу сказанного максимальные модулярные идеалы алгебры A — это в точности такие идеалы P в A , что A/P — простая алгебра с единицей. Поэтому в силу равенства (1) в любой алгебре A ее присоединенно простой радикал $\mathcal{T}(A)$ совпадает с пересечением всех максимальных модулярных идеалов. В результате возникает большая аналогия с квазирегулярным радикалом $\mathcal{J}(A)$ — пересечением всех максимальных модулярных правых (левых) идеалов. Эта аналогия позволяет строить и изучать присоединенно простой радикал с помощью присоединенного умножения $x \cdot y = x + y - xy$ (см. § 3 гл. 1).

Непустое подмножество I алгебры A называется *присоединенным идеалом* алгебры A , если выполнены следующие условия

$$(x \in I, a \in A) \Rightarrow (x \cdot a, a \cdot x \in I), \quad (2)$$

$$\left(x_1, x_2, \dots, x_m \in I, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \Phi, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \right) \Rightarrow \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \in I. \quad (3)$$

Алгебра A называется *присоединенно простой*, если ее единственным присоединенным идеалом является вся алгебра A .

Лемма 1. Если I — собственный присоединенный идеал алгебры A , то существует такой гомоморфизм $\varphi: A \rightarrow \bar{A}$ алгебры A на некоторую алгебру $\bar{A}$ с единицей $\bar{e} \neq 0$, что

$$I = \varphi^{-1}(\bar{e}) = \{a \in A \mid \varphi(a) = \bar{e}\}. \quad (4)$$

Обратно, если существует гомоморфизм $\varphi: A \rightarrow \bar{A}$ алгебры A на некоторую алгебру $\bar{A}$ с единицей $\bar{e} \neq 0$, то $\varphi^{-1}(\bar{e})$ — собственный присоединенный идеал алгебры A .

Доказательство. Пусть I — собственный присоединенный идеал алгебры A . Замечаем, что множество $I - I = \{x - y \mid x, y \in I\}$ является идеалом в алгебре A .

Действительно, пусть $x, y, z, t, u \in I$. Тогда для любых $\beta, \gamma \in \Phi$ и элемента $\delta = 1 - \beta - \gamma$ получаем

$$(\beta x + \gamma z + \delta u) - (\beta y + \gamma t + \delta u) \in I - I \quad (5)$$

в силу (3), так как $\beta + \gamma + \delta = 1$. Кроме того, для любого $a \in A$

$$\begin{aligned} (x - y)a &= xa - ya = (x - x \cdot a + y \cdot a) - y \in I - I, \\ a(x - y) &= ax - ay = (x - a \cdot x + a \cdot y) - y \in I - I \end{aligned} \quad (6)$$

в силу (2) и (3). А из (5) и (6) вытекает, что $I - I$ — идеал алгебры A .

Рассмотрим фактор-алгебру $A = A/I - I$. Возьмем любой элемент $e \in I$. Замечаем, что образ $\bar{e}$ элемента e при естественном гомоморфизме $\varphi: A \rightarrow \bar{A} = A/I - I$ является единицей алгебры $\bar{A}$.

Действительно, возьмем любой элемент $a \in A$. Тогда в силу (2) $a \cdot e$ и $e \cdot a$ — элементы из I , так как $e \in I$. Но тогда $ae - a = a \cdot e - e \in I - I$ и $ea - a = e \cdot a - e \in I - I$ в силу (2) и (3). Поэтому, переходя к образам при гомоморфизме $\varphi: A \rightarrow \bar{A}$, получаем $a\bar{e} = \bar{a}$, $\bar{e}a = \bar{a}$ для любого $\bar{a} \in \bar{A}$, т. е. $\bar{e}$ — единица алгебры $\bar{A}$.

Если $a \in I$, то $a - e \in I - I$, и потому $0 = \varphi(a) - \varphi(e)$, т. е. $\varphi(a) = \bar{e}$. Обратно, если $\varphi(a) = \bar{e}$, то $\varphi(a - e) = \varphi(a) - \varphi(e) = 0$, т. е. $a - e \in \text{Ker } \varphi = I - I$. Поэтому $a - e = x - y$ для некоторых $x, y \in I$. Но тогда $a = e + x - y \in I$ в силу (3), так как $e, x, y \in I$.

Следовательно, верно равенство $I = \varphi^{-1}(\bar{e})$ для построенной алгебры $\bar{A} = A/I - I$ и естественного гомоморфизма $\varphi: A \rightarrow \bar{A}$. При этом $\bar{e} \neq 0$, так как $I \neq A$.

Обратно, пусть $\varphi: A \rightarrow \bar{A}$ — гомоморфизм алгебры A на некоторую алгебру $\bar{A}$ с единицей $\bar{e} \neq 0$. Строим множество $I = \varphi^{-1}(\bar{e})$. Ясно, что множество I непусто и $I \neq A$, так как $0 \notin I$.

Если $x \in I$, то в силу (4) для любого $a \in A$ получаем $\varphi(x \cdot a) = \varphi(x) \cdot \varphi(a) = \bar{e} \cdot \varphi(a) = \bar{e}$ и, аналогично, $\varphi(a \cdot x) = \bar{e}$. Поэтому $x \cdot a, a \cdot x \in I = \varphi^{-1}(\bar{e})$, т. е. непустое множество I удовлетворяет условию (2).

Если $x_1, x_2, \dots, x_m \in I, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \Phi$ и $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, то, переходя к образам при гомоморфизме φ , получаем $\varphi(\sum \alpha_i x_i) = \sum \alpha_i \varphi(x_i) = (\sum \alpha_i) \bar{e} = 1 \bar{e} = \bar{e}$. Следовательно, $\sum \alpha_i x_i \in I$, т. е. выполнено и условие (3).

Таким образом, I удовлетворяет условиям (2) и (3), т. е. является присоединенным идеалом алгебры A .

Лемма доказана.

Теперь мы можем дать еще одну характеристику $\mathcal{T}$ -радикальных алгебр, а значит и присоединенно простого радикала $\mathcal{T}$, оправдывающую его название.

Предложение 2. Если простая алгебра Q имеет левую (правую) единицу $e \neq 0$, то Q — простая алгебра с единицей e . Для любой алгебры A равносильны следующие утверждения:

- Алгебра A присоединенно проста.
- Алгебра A не имеет модулярных идеалов, т. е. не отображается гомоморфно на алгебру с единицей.
- Алгебра A $\mathcal{T}$ -радикальна, т. е. не отображается гомоморфно на простые алгебры с единицей.
- Алгебра A не отображается гомоморфно на (ненулевые) алгебры с левой (или правой) единицей.

Доказательство. Равносильность утверждений б) и в) вытекает из предложения 1, а равносильность утверждений а) и б) — из леммы 1. Кроме того, очевидно, верна импликация г) $\Rightarrow$ б).

в) $\Rightarrow$ г). Пусть г) неверно, т. е. алгебра A отображается, для определенности, на некоторую алгебру $\bar{A}$ с левой единицей $\bar{e} \neq 0$. Ясно, что тогда все собственные идеалы в $\bar{A}$ не содержат элемента $\bar{e}$. Поэтому в силу леммы Кура-

товского — Цорна в $\bar{A}$ есть максимальные (собственные!) идеалы. Но тогда алгебра $\bar{A}$ отображается гомоморфно на некоторую простую алгебру $\bar{\bar{A}}$ с левой единицей $\bar{\bar{e}} \neq 0$.

Пусть Q — произвольная простая алгебра с левой единицей e . Тогда для любых $x, y \in Q$ получаем $(xe - x)y = x(ey - y) = 0$. Но в силу простоты алгебры Q ее левый аннулятор $\{q \in Q \mid qQ = 0\}$ является нулевым идеалом. Поэтому в силу доказанного $xe - x = 0$, т. е. $xe = x$ для всех $x \in Q$. Следовательно, левая единица e будет единицей, т. е. Q — простая алгебра с единицей $e \neq 0$.

Возвращаясь к алгебре $\bar{A}$, получаем, что $\bar{\bar{A}}$ — простая алгебра с единицей $\bar{\bar{e}} \neq 0$. Но тогда алгебра A отображается гомоморфно на некоторые простые алгебры с единицей, т. е. утверждение в) неверно.

Предложение доказано.

Пусть A — произвольная алгебра, $a \in A$. Множество

$$[a] = \left\{ ax - x + ya - y + \sum_i (x_i a y_i - x_i y_i) \mid x, y, x_i, y_i \in A \right\} \quad (7)$$

называется *главным модулярным идеалом* алгебры A , соответствующим элементу a . Присоединенно простые алгебры можно характеризовать и с помощью главных модулярных идеалов.

A именно, справедливо

Предложение 3. *В любой алгебре A все главные модулярные идеалы являются идеалами. При этом, если $[a] \neq A = [0]$, то $[a]$ — модулярный идеал алгебры A , наименьший среди всех таких модулярных идеалов I в A , что образ $\bar{a}$ элемента a при естественном гомоморфизме $A \rightarrow \bar{A} = A/I$ является единицей алгебры $\bar{A}$. Для любого элемента $a \in A$ равенство $[a] = A$ равносильно включению $a \in [a]$, т. е. существованию такого конечного множества элементов $x, y, x_i, y_i \in A$, что*

$$a = ax - x + ya - y + \sum_{i=1}^n (x_i a y_i - x_i y_i). \quad (8)$$

Присоединенно простой радикал $\mathcal{J}(A)$ алгебры A совпадает с множеством всех таких элементов $b \in A$, что $[a] = A$ для любого элемента a из главного идеала (b) .

В частности, алгебра A будет присоединенно проста в том и только в том случае, когда $[a] = A$ для всех $a \in A$.

Доказательство. Из (7) с очевидностью вытекает, что главный модулярный идеал $[a]$ всегда является идеалом, причем $[0] = A$.

Пусть элемент $a \in A$ таков, что $[a] \neq A$.

Пусть I — любой такой модулярный идеал алгебры A , что образ $\bar{a}$ элемента a является единицей алгебры $\bar{A} = A/I$. Тогда, для любых $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{A}$ получаем, с очевидностью, равенства $\bar{a}\bar{x} - \bar{x} = \bar{y}\bar{a} - \bar{y} = \bar{x}\bar{a}\bar{y} - \bar{x}\bar{y} = 0$. Но тогда, переходя к прообразам, получаем, что для всех $x, y \in A$ элементы $ax - x, ya - y, xay - xy$ будут принадлежать идеалу I , и потому $I \supseteq [a]$ в силу (7).

С другой стороны, снова в силу (7) $ax - x, ya - y \in [a]$ для всех $x, y \in A$, и потому образ элемента a будет единицей в алгебре $A/[a]$. Поэтому $[a]$ — наименьший среди указанных модулярных идеалов I . Но тогда в силу (8) для любого элемента $a \in A$ равенство $[a] = A$ равносильно включению $a \in [a]$, т. е. существованию элементов, обеспечивающих равенство (8).

Пусть $b \in \mathcal{T}(A)$. Пусть $a \in (b)$. Допустим, что $a \notin [a]$. Тогда в силу доказанного $A/[a]$ — алгебра с единицей $\bar{e} \neq 0$, причем $\bar{e}$ — образ элемента a . Но тогда в силу леммы Куратовского — Цорна в $A/[a]$ есть максимальные модулярные идеалы. Переходя к прообразам при естественном гомоморфизме $A \rightarrow A/[a]$, находим такой максимальный модулярный идеал I в алгебре A , что $a \notin I$. Между тем, по построению, $a \in \mathcal{T}(A)$, так как $a \in (b) \subseteq \mathcal{T}(A)$, и потому $a \in I$, так как $\mathcal{T}(A)$ — пересечение всех максимальных модулярных идеалов алгебры A . Противоречие. Следовательно, $a \in [a]$, т. е. $[a] = A$ для всех $a \in (b)$ и для всех элементов $b \in \mathcal{T}(A)$.

Обратно, пусть элемент $b \in A$ таков, что $a \in [a]$ для всех $a \in (b)$. Допустим, что $b \notin \mathcal{T}(A)$. Тогда существует такой максимальный модулярный идеал P в A , что $b \notin P$. В силу максимальной P имеем $A = P + (b)$. Единица $\bar{e} \neq 0$ простой алгебры A/P является образом некоторого элемента $e \in (b)$. Поэтому в силу сказанного о главных модулярных идеалах $P \supseteq [e]$. С другой стороны, в силу условий, налагаемых на элемент b , $e \in (b)$ влечет $e \in [e]$ и потому $[e] = A$. Получили противоречие с тем, что $A \neq P$. Следовательно, $b \in \mathcal{T}(A)$.

Предложение доказано.

Присоединенно простой радикал $\mathcal{T}$ находит многочисленные приложения в структурной теории алгебр. Дело в том, что для получения структурных теорем о $\mathcal{T}$ -полупростых алгебрах оказывается достаточным выполнение условий значительно более слабых чем те, которые налагаются на полупервичные алгебры для получения соответствующих структурных теорем (см. § 1).

Лемма 2. Пусть идеал I алгебры A является алгеброй с единицей e . Тогда элемент e является центральным идемпотентом алгебры A и алгебра A разлагается в прямую сумму $A = I \oplus I^*$, где I^* — аннулятор идеала I в A .

Доказательство. Для любого элемента $a \in A$ получаем $ea = e(ea) = eae = (ae)e = ae$, так как $ea, ae \in I$ и e — единица алгебры I . Поэтому e — центральный идемпотент алгебры A . Но тогда $a \in I^*$ в том и только в том случае, когда $ae = 0$, т. е. когда $a = b - be$ для некоторого элемента $b \in A$. С другой стороны, $a \in I$ тогда и только тогда, когда $ae = a$, т. е. когда $a = be$ для некоторого элемента $b \in A$. Замечая, что для любого $c \in A$ верно равенство $c = ce + (c - ce)$, получаем разложение алгебры A в прямую сумму $A = I \oplus I^*$.

Лемма 3. Пусть M — минимальный идеал полупервичной алгебры A . Тогда M — простая алгебра. Если A — $\mathcal{T}$ -полупростая алгебра, то M — простая алгебра с единицей.

Доказательство. Пусть I — ненулевой идеал алгебры M . Алгебра M , как и алгебра A , полупервична. Поэтому $I^3 \neq 0$, а значит и $MIM \neq 0$. Но тогда $M = MIM$ в силу минимальности M . Между тем $MIM \subseteq I \subseteq M$, так как I — идеал алгебры M . Следовательно, M — простая алгебра.

Если A — $\mathcal{T}$ -полупростая алгебра, то и алгебра M будет $\mathcal{T}$ -полупростой. Но тогда M — простая алгебра с единицей, в силу предложения 1, как и любая другая простая $\mathcal{T}$ -полупростая алгебра.

Лемма доказана.

Теорема 1. Для любой ненулевой $\mathcal{T}$ -полупростой алгебры A равносильны следующие утверждения:

а) Алгебра A удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов.

б) Любой ненулевой главный идеал алгебры A является алгеброй с условием минимальности для идеалов.

в) Любой ненулевой главный идеал алгебры A является алгеброй с условием минимальности для главных идеалов.

г) Любой ненулевой главный идеал алгебры A разлагается в конечную прямую сумму простых алгебр с единицей.

д) Алгебра A разлагается в прямую сумму простых алгебр с единицей.

Доказательство. Из лемм 2, 3 легко вытекает, что если верно хотя бы одно из утверждений а), б), в), г), то в алгебре A и во всех ее ненулевых идеалах всегда есть минимальные идеалы, причем минимальные идеалы и идеалы, являющиеся простыми алгебрами с единицей, — это одно и то же. Учитывая это, и будем вести доказательство теоремы.

а) $\Rightarrow$ г). Возьмем любой ненулевой элемент $a \in A$.

В силу условий минимальности для главных идеалов ненулевой идеал (a) содержит некоторый минимальный идеал M_1 . В силу леммы 3 M_1 — простая алгебра с некоторой единицей e_1 . Но тогда в силу леммы 2 $A = M_1 \oplus M_1$, и потому и для алгебры (a) получаем разложение $(a) = M_1 \oplus (M_1^* \cap (a))$. Но тогда, как легко видеть, идеал $M_1^* \cap (a)$ будет совпадать с главным идеалом (a_1) алгебры A , порожденным элементом $a_1 = a - ae_1$. Если $a_1 = 0$, то $(a) = M_1$ — простая алгебра с единицей. Если $a_1 \neq 0$, то продолжаем процесс.

Пусть мы уже получили некоторый элемент $a_n \neq 0$. Продолжая процесс, находим такой центральный идемпотент e_{n+1} и такой элемент $a_{n+1} = a_n - a_n e_{n+1}$, что $(e_{n+1}) = M_{n+1}$ — простая алгебра с единицей e_{n+1} и минимальный идеал алгебры A , содержащийся в главном идеале (a_n) , причем $(a) = M_{n+1} \oplus (a_{n+1})$.

В ходе процесса мы получаем строго убывающую цепь $(a) \supset (a_1) \supset (a_2) \supset \dots$ главных идеалов. В силу условия минимальности для главных идеалов, процесс должен закончиться на некотором шаге. Но это означает по построению, что для некоторого целого $m \geq 1$ мы получим $a_m = 0$, т. е. $(a) = M_1 \oplus \dots \oplus M_m$ — прямая сумма некоторого конечного множества простых алгебр M_i с единицей.

г) $\Rightarrow$ б). Пусть ненулевой главный идеал (a) алгебры A разлагается в конечную прямую сумму $(a) = \bigoplus_{i \in \Delta} M_i$ простых алгебр M_i с единицами e_i . Тогда в силу леммы 2 e_i — центральные попарно ортогональные идемпотенты в алгебре (a) , и потому $\sum_{i \in \Delta} e_i$ — единица алгебры (a) . Но тогда для любого ненулевого элемента $b \in (a)$ получаем равенство $b = \sum_{i \in \Delta(b)} e_i b$, где $\Delta(b) = \{i \in \Delta \mid e_i b \neq 0\}$. А отсюда

вытекает, что если I — ненулевой идеал алгебры (a) , то $b \in I$ тогда и только тогда, когда $e_i b \in I$ для всех $i \in \Delta(b)$. Но если $i \in \Delta(b)$, то в силу простоты алгебры M_i элемент $e_i b$ порождает в алгебре (a) идеал $e_i(a) = M_i$. Из сказанного вытекает, что идеалами в алгебре $(a) = \bigoplus_{i \in \Delta} M_i$ будут прямые суммы $\bigoplus_{i \in \Delta'} M_i$, $\Delta' \subseteq \Delta$, и только такие алгебры. Поэтому в алгебре (a) лишь конечное число идеалов в силу конечности Δ . Но тогда, в частности, алгебра (a) удовлетворяет условию минимальности для идеалов.

б) $\Rightarrow$ в). Это очевидно.

в) $\Rightarrow$ а). Пусть любой ненулевой главный идеал алгебры A является алгеброй с условием минимальности для главных идеалов.

Возьмем любой ненулевой элемент $b \in A$. Тогда по условию $(b) = B$ — алгебра с условием минимальности для главных идеалов. При этом алгебра B будет $\mathcal{T}$ -полупроста, как и алгебра A . Но мы уже доказали импликацию а) $\Rightarrow$ г). Поэтому любой ненулевой главный идеал $(a)_B$ алгебры B разлагается как алгебра в конечную прямую сумму простых алгебр с единицей. В частности, $(a)_B$ — алгебра с некоторой единицей e , и потому в силу леммы 2 e — центральный идемпотент алгебры B . Но тогда $(a)_B = eB = Be$. Учитывая, что $B = (b)$ — идеал алгебры A , $e \in (a)_B$, получаем $eB \subseteq eA = e(eA) \subseteq eB$, т. е. $eB = eA$. Аналогично, $Be = eA$, и мы получили равенство $(a)_B = eB = eA = Be = Ae$, т. е. $(a)_B = (a)$ — главный идеал всей алгебры A , порожденный элементом a .

Учитывая доказанное, возьмем любую строго убывающую цепь главных идеалов $(b) \supset (b_1) \supset (b_2) \supset \dots$ алгебры A . В силу доказанного все идеалы (b_i) из этой цепи будут

главными идеалами алгебры $B = (b)$. Но так как алгебра B удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов, то цепь $(b) \supset (b_1) \supset (b_2) \supset \dots$ должна обрываться на некотором конечном шаге. В силу произвольности выбора этой цепи сама алгебра A удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов.

а) $\Rightarrow$ д). Пусть алгебра A удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов. Ясно, что тогда в A есть минимальные идеалы, причем каждый ненулевой идеал алгебры A содержит некоторый минимальный идеал.

Пусть $\{M_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ — множество всех минимальных идеалов алгебры A , причем $M_\alpha = M_\beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta$. Тогда для любых $\alpha, \beta \in \Gamma$ из $\alpha \neq \beta$ вытекает $M_\alpha \cap M_\beta = 0$ в силу минимальности рассматриваемых идеалов, и потому $M_\alpha M_\beta = 0$. Но тогда в силу полупервичности алгебры A для любого $\alpha \in \Gamma$ получаем $M_\alpha \cap \bigcap_{\beta \neq \alpha} M_\beta = 0$, так как $(M_\alpha \cap \sum_{\beta \neq \alpha} M_\beta)^2 \subseteq M_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} M_\beta = 0$.

$$= \sum_{\beta \neq \alpha} M_\alpha M_\beta = 0.$$

Из сказанного вытекает, что алгебра $\sum_{\alpha \in \Gamma} M_\alpha$ совпадает с прямой суммой $\bigoplus_{\alpha \in \Gamma} M_\alpha$ алгебр M_α . При этом в силу леммы 3 все M_α — простые алгебры с единицей как минимальные идеалы алгебры A . Но мы уже доказали импликацию а) $\Rightarrow$ г). Вспоминая, что минимальные идеалы в алгебре A и идеалы, являющиеся простыми алгебрами с единицей, — это одно и то же, получаем: если $a \in A$, $a \neq 0$, то $(a) = \sum_{i \in \Delta} M_i$ для некоторого $\Delta \subseteq \Gamma$, и потому $a \in \sum_{\alpha \in \Gamma} M_\alpha$.

Следовательно, $A = \sum_{\alpha \in \Gamma} M_\alpha = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} M_\alpha$ — прямая сумма простых алгебр с единицей (своих минимальных идеалов M_α).

д) $\Rightarrow$ г). Пусть $A = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} M_\alpha$ — прямая сумма простых алгебр с единицей. Пусть e_α — единица простой алгебры M_α .

Возьмем любой ненулевой элемент $a \in A$. Учитывая разложение алгебры A , получаем, что найдется такое конечное подмножество Δ в Γ , что $a = \sum_{\alpha \in \Delta} a_\alpha$ для неко-

торых ненулевых элементов $a_\alpha \in M_\alpha$. Но тогда, учитывая, что e_α — попарно ортогональные центральные идемпотенты и единицы соответствующих алгебр M_α , легко получаем: множество $\Delta(a) = \{\alpha \in \Gamma \mid e_\alpha a \neq 0\}$ конечно и $a = \sum_{\alpha \in \Delta(a)} e_\alpha a$.

А отсюда легко вытекает, что $(a) = \bigoplus_{\alpha \in \Delta(a)} M_\alpha$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Для любой ненулевой $\mathcal{T}$ -полупростой алгебры A равносильны следующие утверждения:

а) Алгебра A удовлетворяет условию минимальности для главных правых (или левых) идеалов.

б) Алгебра A удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов, причем любой ненулевой главный идеал алгебры A содержит некоторый минимальный правый (или левый) идеал.

в) Алгебра A разлагается в прямую сумму классически простых алгебр (т. е. матричных алгебр Δ_n над некоторыми телами).

г) Каждый ненулевой главный идеал алгебры A является классически полупростой алгеброй (т. е. конечной прямой суммой классически простых алгебр).

д) Каждый главный идеал алгебры A является алгеброй с условием минимальности для правых (или левых) идеалов.

Это легко вытекает из теоремы 1. Достаточно вспомнить классическую теорему о том, что простая алгебра с единицей будет классически проста тогда и только тогда, когда она имеет минимальные правые (левые) идеалы.

Следствие 2. Для любой ненулевой $\mathcal{T}$ -полупростой алгебры A равносильны следующие утверждения:

а) Алгебра A удовлетворяет условию минимальности для идеалов.

б) Алгебра A имеет единицу и удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов.

в) Алгебра A удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов и существует такой ненулевой элемент $a \in A$, что $A = (a)$.

г) Любой ненулевой идеал алгебры A является алгеброй с единицей.

д) A — конечная прямая сумма простых алгебр с единицей.

Равносильность утверждений а), б), в) и д) и импликация д) $\Rightarrow$ г) вытекают из теоремы 1.

г) $\Rightarrow$ д). Пусть любой ненулевой идеал алгебры A является алгеброй с единицей. Тогда, в частности, сама алгебра A является алгеброй с единицей.

В силу $\mathcal{F}$ -полупростоты алгебры A в алгебре A есть максимальные модулярные идеалы. Пусть P — один из них. Тогда A/P — простая алгебра с единицей. Но P , как и любой идеал алгебры A , либо равен 0, либо является алгеброй с единицей. Случай $P=0$ тривиален: сама алгебра A оказывается простой алгеброй с единицей. Поэтому будем считать, что $P \neq 0$. В этом случае в силу леммы 2 $A = P \oplus P^*$. Но тогда $P^* = A/P$, т. е. идеал P^* алгебры A является простой алгеброй с единицей. Следовательно, в алгебре A есть и минимальные идеалы — P^* является одним из них.

Рассмотрим сумму $S = \sum_{\alpha \in \Gamma} M_\alpha$ всех минимальных идеалов алгебры A . Как и в доказательстве теоремы 1 (см. импликацию а) $\Rightarrow$ д)), получаем, что $S = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} M_\alpha$ — прямая сумма простых алгебр M_α с единицей. Но по условию алгебра S является алгеброй с единицей. Поэтому S — конечная прямая сумма простых алгебр M_α с единицей. Остается показать, что $S = A$.

Допустим, что $S \neq A$. Тогда, учитывая, что A — алгебра с единицей, вкладываем S в некоторый максимальный идеал P . Получаем $S \subseteq P$ и по доказанному P^* — минимальный идеал алгебры A . Но тогда $P^* \subseteq S$, и потому $P^* \subseteq P$. А так как $(P^*)^2 \subseteq P^*P = 0$, то $P^* = 0$. Между тем $P^* \neq 0$. Противоречие.

Следовательно, $A = S = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} M_\alpha$ — конечная прямая сумма простых алгебр с единицей.

Это заканчивает доказательство.

Отметим, что если A — такая ненулевая алгебра, что все ненулевые идеалы в A являются алгебрами с единицей, то в силу предложения 1 и основных свойств кручений алгебра A будет $\mathcal{F}$ -полупростой. Более того,

достаточно потребовать, чтобы любой ненулевой главный идеал алгебры A был алгеброй с единицей.

Алгебра A называется *бирегулярной*, если любой ее главный идеал порождается центральным идемпотентом. Из леммы 2 легко вытекает, что алгебра A бирегулярна тогда и только тогда, когда любой ее ненулевой главный идеал является алгеброй с единицей. Поэтому в силу сказанного выше все бирегулярные алгебры $\mathcal{T}$ -полупросты (даже сильно $\mathcal{T}$ -полупросты).

Следствие 3. Ненулевая бирегулярная алгебра A разлагается в конечную прямую сумму простых алгебр с единицей тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию обрыва цепей аннуляторных идеалов.

Действительно, в силу леммы 2 в бирегулярной алгебре все главные идеалы являются аннуляторными идеалами. Поэтому, если бирегулярная алгебра A удовлетворяет условию обрыва цепей аннуляторных идеалов, то A имеет лишь конечное число главных идеалов в силу следствия 1.2. Но тогда алгебра A удовлетворяет условию минимальности для идеалов, так как и их будет конечное число. Остается применить следствие 2.

Теорема 2. Ненулевая алгебра A разлагается в конечную прямую сумму простых алгебр с единицей тогда и только тогда, когда она $\mathcal{T}$ -полупроста и удовлетворяет условию минимальности для главных модулярных идеалов.

Доказательство. Пусть алгебра A $\mathcal{T}$ -полупроста и удовлетворяет условию минимальности для главных модулярных идеалов.

Пусть M_0 — минимальный главный модулярный идеал.

Допустим, что $M_0 \neq 0$. Тогда M_0 , как и сама алгебра A , будет ненулевой $\mathcal{T}$ -полупростой алгеброй. Поэтому в силу предложения 1 или предложения 2 в алгебре M_0 существует такой идеал I , что $\bar{M}_0 = M_0/I$ — простая алгебра с единицей $\bar{e} \neq 0$. Из полупервичности алгебры M_0/I вытекает, что I — идеал всей алгебры A . Поэтому можно рассмотреть фактор-алгебру $\bar{A} = A/I$. В силу леммы 2 $\bar{A} = M_0 \oplus M_0^*$, и потому $M_0^* \simeq \bar{A}/M_0 \simeq A/M_0$ — алгебра с единицей (или нулевая алгебра) в силу предложения 3. Но тогда и $\bar{A} = A/I$ — алгебра с единицей, так как $\bar{M}_0$ — алгебра с единицей. Следовательно, I — модулярный идеал алгебры A . Еще раз применяя предложение 3, получаем,

что для некоторого $a \in A$ верны соотношения $M_0 \supset I \cong \cong [a]$. А это противоречит минимальности главного модулярного идеала M_0 .

Следовательно, $M_0 = 0$. Поэтому A — алгебра с некоторой единицей 1.

Пусть $a \in A$. Сравним главный идеал $(a - 1)$ и главный модулярный идеал $[a]$.

Из (7) и равенства $a - 1 = a1 - 1$ вытекает, что $a - 1 \in [a]$. Но тогда $(a - 1) \subseteq [a]$. С другой стороны, для любых элементов $x, y, x_i, y_i \in A$ имеем $ax - x + ya - y + + \sum_i (x_i a y_i - x_i y_i) = (a - 1)x + y(a - 1) + \sum_i x_i(a - 1)y_i \in \in (a - 1)$. Поэтому в силу (7) верно и обратное включение $(a - 1) \supseteq [a]$.

Следовательно, $(a - 1) = [a]$ для всех $a \in A$, т. е. в алгебре A главные идеалы и главные модулярные идеалы — это одно и то же.

В результате получаем, что A — ненулевая $\mathcal{T}$ -полупростая алгебра с единицей, удовлетворяющая условию минимальности для главных идеалов. В силу следствия 2 алгебра A разлагается в конечную прямую сумму простых алгебр с единицей.

Обратно, если алгебра A разлагается в конечную прямую сумму простых алгебр с единицей, то A удовлетворяет условию минимальности для идеалов (их конечное число). Но тогда A удовлетворяет и условию минимальности для главных модулярных идеалов (все они — идеалы).

Теорема доказана.

Следствие 4. Ненулевая алгебра A классически полупроста тогда и только тогда, когда она $\mathcal{T}$ -полупроста, удовлетворяет условию минимальности для главных модулярных идеалов и любой ненулевой идеал алгебры A содержит некоторый минимальный правый (левый) идеал.

Это с очевидностью вытекает из теоремы 2 и следствия 1.

Присоединенно простой радикал $\mathcal{T}$ и квазирегулярный радикал $\mathcal{J}$ достаточно близки друг другу: в любой алгебре A идеал $\mathcal{T}(A)$ совпадает с пересечением всех максимальных модулярных идеалов, а идеал $\mathcal{J}(A)$ — с пересечением всех максимальных модулярных правых (левых) идеалов. Сравним радикалы $\mathcal{T}$ и $\mathcal{J}$.

Все простые алгебры с единицей $\mathcal{J}$ -полупросты. Поэтому $\mathcal{J}(A) \subseteq \mathcal{T}(A)$ в любой алгебре A . В частности, все квазирегулярные алгебры присоединенно просты.

Теорема 3. Для любой присоединенно простой алгебры R равносильны следующие утверждения:

а) Алгебра R квазирегулярна.

б) Алгебра R удовлетворяет условию минимальности для модулярных правых (левых) идеалов.

в) В алгебре R есть хотя бы один минимальный модулярный правый (левый) идеал.

Доказательство. Из построения и основных свойств квазирегулярного радикала $\mathcal{J}$ (см. § 3 гл. 1) вытекает, что алгебра R квазирегулярна тогда и только тогда, когда ее единственным модулярным правым идеалом является сама алгебра R .

Поэтому верна импликация а) $\Rightarrow$ б). Импликация б) $\Rightarrow$ в) очевидна.

в) $\Rightarrow$ а). Пусть R — ненулевая присоединенно простая алгебра, причем в алгебре R есть хотя бы один минимальный модулярный правый идеал. Пусть это будет правый идеал P и e — левая единица по модулю P .

Допустим, что алгебра P неквазирегулярна. Тогда в алгебре P существует модулярный правый идеал $P' \neq P$. Пусть $e' \in P$ — левая единица по модулю P' в алгебре P , т. е. $e'p - p \in P'$ для всех $p \in P$. Тогда, очевидно, множество $\{e'p - p \mid p \in P\}$ является правым идеалом всей алгебры R , содержащимся в P' . Между тем, для любого $x \in R$ получаем $(e + e' - e'e)x - x = e'(x - ex) - (x - ex) \in \{e'p - p \mid p \in P\}$. Поэтому $\{e'p - p \mid p \in P\}$ — модулярный правый идеал алгебры R , содержащийся в P и отличный от P . Получили противоречие с минимальностью P .

Следовательно, алгебра P квазирегулярна. Но квазирегулярный радикал $\mathcal{J}(R)$ является наибольшим квазирегулярным правым идеалом. Поэтому $P \subseteq \mathcal{J}(R)$. Но тогда для всех $x \in R$ получаем, что $ex - x \in \mathcal{J}(R)$. Поэтому $R/\mathcal{J}(R)$ — алгебра с левой единицей. Между тем алгебра R присоединенно проста и потому не отображается гомоморфно на ненулевые алгебры с левой единицей, в силу предложения 2.

Следовательно, $R = \mathcal{J}(R)$, т. е. сама алгебра R квазирегулярна.

Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть алгебра A удовлетворяет условию минимальности для правых (левых) идеалов. Тогда ее присоединенно простой радикал нильпотентен. Поэтому в алгебре A совпадут нижний нильрадикал $\mathfrak{B}(A)$, локально нильпотентный радикал $\mathcal{L}(A)$, верхний нильрадикал $\mathcal{K}(A)$, квазирегулярный радикал $\mathcal{J}(A)$ и присоединенно простой радикал $\mathcal{T}(A)$.

Доказательство. В силу теоремы 1.4.1 в рассматриваемых условиях нижний нильрадикал $\mathfrak{B}(A)$ алгебры A нильпотентен и фактор-алгебра $\bar{A} = A/\mathfrak{B}(A)$ — классически полупроста. Но любая классически полупростая алгебра $\mathcal{T}$ -полупроста как прямая сумма простых алгебр с единицей. Поэтому $\mathcal{T}$ -полупроста и алгебра $A/\mathfrak{B}(A)$, что влечет включение $\mathfrak{B}(A) \supseteq \mathcal{T}(A)$ и нильпотентность присоединенно простого радикала $\mathcal{T}(A)$ алгебры A . Остается заметить, что всегда верны включения $\mathfrak{B}(A) \subseteq \mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{K}(A) \subseteq \mathcal{J}(A) \subseteq \mathcal{T}(A)$.

Теорема доказана.

Следствие 5. Пусть алгебра A удовлетворяет условию минимальности для правых (левых) идеалов. Тогда все квазирегулярные идеалы нильпотентны.

Действительно, все квазирегулярные идеалы содержатся в квазирегулярном радикале $\mathcal{J}(A) \subseteq \mathcal{T}(A)$, а идеал $\mathcal{T}(A)$ нильпотентен в силу теоремы 4.

В общем случае квазирегулярный радикал $\mathcal{J}$ строго меньше присоединенно простого радикала $\mathcal{T}$, так как существуют простые алгебры без единицы, но с идемпотентом $e \neq 0$. Такой будет, например, алгебра всех линейных преобразований конечного ранга бесконечномерного линейного пространства.

В заключение этого параграфа построим подыдемпотентный радикал $\mathcal{T}^*$ — кручение (или радикал), дополнительное к присоединенно простому радикалу $\mathcal{T}$. Для этого нам понадобится несколько лемм, представляющих и самостоятельный интерес.

Лемма 4. Пусть I — идеал алгебры A , $a \in I$. Тогда верны соотношения

$$(a)_A = (a)_A^2 \Rightarrow (a)_I = (a)_A \Leftarrow (a)_I = (a)_I^2, \quad (9)$$

$$(a)_A = (a)_A^2 \Leftrightarrow (a)_I = (a)_I^2. \quad (10)$$

Доказательство. Учтем, что в силу леммы 1.1.5,

$$(a)_A^3 \subseteq (a)_I \subseteq (a)_A. \quad (11)$$

Пусть $(a)_A = (a)_A^3$. Тогда $(a)_A = (a)_A^3$, и потому $(a)_I = (a)_I$ в силу (11).

Пусть $(a)_I = (a)_I^3$. Тогда в силу (11) $(a)_A^3 \subseteq (a)_I^3 = (a)_I \subseteq (a)_A^3$, и потому $(a)_I = (a)_A^3$. Но тогда $(a)_I$ — идеал в A , что влечет равенство $(a)_I = (a)_A$.

Следовательно, верно соотношение (9). Но тогда, очевидно, верно и (10).

Лемма доказана.

Элемент a алгебры A назовем $\mathcal{T}^*$ -регулярным в A , если в алгебре A

$$(a) = \bigcap \{I - \text{идеал } A \mid I + [e] = A \text{ для всех } e \in (a)\}. \quad (12)$$

Идеал R алгебры A назовем $\mathcal{T}^*$ -регулярным идеалом, если все его элементы $\mathcal{T}^*$ -регулярны в A . Алгебра K называется $\mathcal{T}^*$ -регулярной алгеброй, если все ее элементы $\mathcal{T}^*$ -регулярны, т. е. K — $\mathcal{T}^*$ -регулярный идеал в K .

Оказывается, что $\mathcal{T}^*$ -регулярные идеалы и идеалы, являющиеся $\mathcal{T}^*$ -регулярными алгебрами, — это одно и то же, как показывает

Лемма 5. Пусть R — идеал алгебры A , $a \in R$. Элемент a $\mathcal{T}^*$ -регулярен в алгебре A тогда и только тогда, когда он $\mathcal{T}^*$ -регулярен в алгебре R . Если элемент $x \in A$ $\mathcal{T}^*$ -регулярен, то $(x) = (x)^2$.

Доказательство. Начнем со второго утверждения.

Пусть элемент x алгебры A $\mathcal{T}^*$ -регулярен, т. е. верно равенство (12) при $a = x$.

Возьмем произвольный элемент $e \in (x)$. По определению главного модулярного идеала $e^2 - e \in [e]$. Но $e^2 \in (x)^2$ и $[e]$ — идеал в A . Поэтому $e \in (x)^2 + [e]$. А это влечет равенство $A = (x)^2 + [e]$ в силу предложения 3 или построения идеала $[e]$. В силу произвольности выбора $e \in (x)$ и $\mathcal{T}^*$ -регулярности элемента x получаем включение $(x) \subseteq (x)^2$.

Так как обратное включение очевидно, то $(x) = (x)^2$.

Допустим теперь, что R — идеал алгебры A и $a \in R$. Рассмотрим условия:

$$(a)_A = \bigcap \{I_A - \text{идеал } A \mid I_A + [e]_A = A \text{ для всех } e \in (a)_A\}, \quad (12_A)$$

$$(a)_R = \bigcap \{I_R - \text{идеал } R \mid I_R + [e]_R = R \text{ для всех } e \in (a)_R\}. \quad (12_R)$$

Нам нужно доказать равносильность этих условий.

Пусть верно равенство (12_A) , т. е. элемент $a \in \mathcal{T}^*$ -регулярен в алгебре A . По доказанному выше $(a)_A = (a)_A^2$. Поэтому в силу леммы 4 $(a)_R = (a)_A$.

Возьмем любой такой идеал I_R в алгебре R , что $I_R + [e]_R = R$ для всех $e \in (a)_R$. Тогда, обозначая символом I_A идеал в A , порожденный множеством I_R , и учитывая, что $I_R \subseteq I_A$, $[e]_R \subseteq [e]_A$, получаем: для всех $e \in (a)_R = (a)_A$ верно включение $e \in I_A + [e]_A$, а значит, и равенство $I_A + [e]_A = A$. Но тогда, в силу (12_A) , получаем $I_A \supseteq (a)_A = (a)_R$, и потому $I_R \supseteq I_A^3 \supseteq (a)_A^3 = (a)_A = (a)_R$.

В силу произвольности выбора идеала I_R алгебры R и справедливости равенств $(a)_R + [e]_R = R$ для всех $e \in (a)_R$ верно и равенство (12_R) .

Обратно, пусть верно равенство (12_R) , т. е. элемент $a \in \mathcal{T}^*$ -регулярен в алгебре R . По доказанному $(a)_R = (a)_R^2$, и потому $(a)_A = (a)_R$ в силу леммы 4.

Возьмем любой такой идеал I_A в алгебре A , что $I_A + [e]_A = A$ для всех $e \in (a)_A$. Тогда $a_R \in I_A + [e]_A$ для всех $e \in (a)_R = (a)_A$, и потому для тех же e верно включение $(a)_R = (a)_R^2 \subseteq (a)_R I_A (a)_R + (a)_R [e]_A (a)_R \subseteq R I_A R + R [e]_A R$. Но из построения главного модулярного идеала вытекает, что $R [e]_A R \subseteq [e]_R$. Поэтому для идеала $R I_A R$ алгебры R получаем, что $(a)_R \subseteq R I_A R + [e]_R$ для всех $e \in (a)_R$, и потому $R I_A R + [e]_R = R$ для тех же e . Но тогда в силу (12_R) $I_A \supseteq R I_A R \supseteq (a)_R = (a)_A$.

Поэтому верно равенство (12_A) и лемма доказана.

Лемма 6. В любой алгебре A сумма любого множества идемпотентных идеалов сама будет идемпотентным идеалом *).

Действительно, возьмем любое множество $\{R_i \mid i \in \Gamma\}$ идемпотентных идеалов алгебры A . Тогда $\left(\sum_{i \in \Gamma} R_i\right)^2 \equiv$

*) Более того, можно показать, что класс идемпотентных алгебр радикален в смысле Куроша.

$\cong \sum_{i \in \Gamma} R_i^2 = \sum_{i \in \Gamma} R_i$, т. е. идеал $\sum_{i \in \Gamma} R_i = \left(\sum_{i \in \Gamma} R_i \right)^2$ — идемпотентный идеал, как и идеалы R_i .

Предложение 4. В любой алгебре A сумма любого множества $\mathcal{T}^*$ -регулярных идеалов сама будет $\mathcal{T}^*$ -регулярным идеалом, причем $\mathcal{T}^*$ -регулярные идеалы и идеалы, являющиеся $\mathcal{T}^*$ -регулярными алгебрами, — это одно и то же. Гомоморфный образ и идеал $\mathcal{T}^*$ -регулярной алгебры сами являются $\mathcal{T}^*$ -регулярными алгебрами, расширение $\mathcal{T}^*$ -регулярной алгебры с помощью $\mathcal{T}^*$ -регулярной алгебры само $\mathcal{T}^*$ -регулярно. Поэтому класс всех $\mathcal{T}^*$ -регулярных алгебр является радикальным классом. Соответствующее кручение (ставящее в соответствие каждой алгебре A ее наибольший $\mathcal{T}^*$ -регулярный идеал) совпадает с кручением $\mathcal{T}^*$, дополнительным к присоединенно простому радикалу $\mathcal{T}$ и является подидемпотентным радикалом. В любой алгебре A ее $\mathcal{T}^*$ -радикал $\mathcal{T}^*(A)$ является наибольшим $\mathcal{T}^*$ -регулярным идеалом и верно равенство $\mathcal{T}^*(A) = \{b \in A \mid a \in (b) \Rightarrow a - \mathcal{T}^*\text{-регулярный элемент}\}$. (13)

Доказательство. Из леммы 5 вытекает, что $\mathcal{T}^*$ -регулярные идеалы и идеалы, являющиеся $\mathcal{T}^*$ -регулярными алгебрами — это одно и то же. Из той же леммы вытекает, что любой идеал $\mathcal{T}^*$ -регулярной алгебры сам является $\mathcal{T}^*$ -регулярной алгеброй. А из леммы 6 следует идемпотентность любой $\mathcal{T}^*$ -регулярной алгебры в силу леммы 5. Продолжая, мы сможем доказать, что класс всех $\mathcal{T}^*$ -регулярных алгебр радикален. Однако прямое доказательство этого утверждения достаточно громоздко.

Допустим, что для кручения $\mathcal{T}^*$, дополнительного к присоединенно простому радикалу $\mathcal{T}$, мы доказали совпадение классов $\mathcal{T}^*$ -радикальных и $\mathcal{T}^*$ -регулярных алгебр. Тогда, как легко видеть, все утверждения предложения о $\mathcal{T}^*$ -регулярных алгебрах и идеалах будут с очевидностью вытекать из основных свойств радикалов и кручений. Следовательно, будет верно и равенство (13).

Действительно, пусть $b \in \mathcal{T}^*(A)$. Тогда алгебра (b) $\mathcal{T}^*$ -регулярна как идеал $\mathcal{T}^*$ -регулярной ($= \mathcal{T}^*$ -радикальной по допущению) алгебры $\mathcal{T}^*(A)$. Но тогда и все элементы идеала (b) $\mathcal{T}^*$ -регулярны в алгебре A .

Обратно, если элемент $b \in A$ таков, что все элементы идеала (b) $\mathcal{T}^*$ -регулярны, то (b) — $\mathcal{T}^*$ -регулярный идеал алгебры A . Но тогда $b \in (b) \subseteq \mathcal{T}^*(A)$, где $\mathcal{T}^*(A)$ — наибольший $\mathcal{T}^*$ -регулярный идеал алгебры A .

Следовательно, верно равенство (13).

Остается доказать, что если $\mathcal{T}^*$ — кручение (радикал), дополнительное к присоединенно простому радикалу $\mathcal{T}$, то $\mathcal{T}^*$ -радикальные алгебры и $\mathcal{T}^*$ -регулярные алгебры — это одно и то же. Но в силу теоремы 3.2.3 класс $\mathcal{T}^*$ -радикальных алгебр совпадает с классом сильно $\mathcal{T}$ -полупростых алгебр. Поэтому нужное нам утверждение вытекает из следующего предложения:

Предложение 5. Для любой алгебры $R \neq 0$ равносильны утверждения:

- а) Алгебра R $\mathcal{T}^*$ -регулярна.
- б) Любой гомоморфный образ алгебры R является подпрямым произведением простых алгебр с единицей, т. е. алгебра R сильно $\mathcal{T}$ -полупроста.
- в) Любой идеал в R является пересечением максимальных модулярных идеалов.
- г) Каждый подпрямо неразложимый гомоморфный образ алгебры R будет простой алгеброй с единицей.

д) Сердцевина любого подпрямо неразложимого гомоморфного образа алгебры R является алгеброй с единицей.

Доказательство. Ясно, что утверждения б) и в) равносильны. Равносильность утверждений г) и д) легко вытекает из леммы 2, так как сердцевина подпрямо неразложимой алгебры — либо простая алгебра, либо алгебра с нулевым умножением. В силу теоремы Биркгофа равносильны и утверждения б) и г). Следовательно, все утверждения б), в), г) и д) равносильны.

а) $\Rightarrow$ д). Пусть алгебра R $\mathcal{T}^*$ -регулярна. Возьмем любой подпрямо неразложимый гомоморфный образ $\bar{R}$ алгебры R и рассмотрим его сердцевину $\bar{C}$.

Можно считать, что $\bar{R} = R/V$ для некоторого идеала V алгебры R , $V \neq R$. Поэтому, если $\bar{C}$ — полный прообраз сердцевины $\bar{C}$, то $\bar{C} = V + (a)$ для некоторого элемента $a \in R$, $a \notin V$, причем любой идеал алгебры R , строго больший идеала V , содержит и элемент a .

Из $\mathcal{T}^*$ -регулярности алгебры R вытекает, что a — $\mathcal{T}^*$ -регулярный элемент. Но тогда по определению $a \notin V$ влечет существование такого элемента $e \in (a)$, что $V \nsubseteq$

$+ [e] \neq R$. Для этого e получаем, что $e \notin B + [e]$, и потому идеал $B + [e]$ не содержит главный идеал (a) , т. е. не содержит элемента a . Но тогда в силу сказанного об идеале B и элементе a получим $B + [e] = B$, т. е. $B \supseteq [e]$.

В силу предложения 3 алгебра $\bar{R} = R/B$ будет алгеброй с единицей $\bar{e}$ как гомоморфный образ алгебры $R/[e]$. Но $e \in (a)$ влечет $\bar{e} \in (\bar{a}) = \bar{C}$. Следовательно, сердцевина $\bar{C}$ подпрямой неразложимой алгебры $\bar{R}$ является алгеброй с единицей.

в) $\Rightarrow$ а). Пусть любой идеал алгебры R является пересечением максимальных модулярных идеалов.

Возьмем произвольный элемент $a \in R$. Пусть идеал I алгебры R таков, что $I + [e] = R$ для всех $e \in (a)$.

Рассмотрим любой максимальный модулярный идеал M алгебры R , содержащий идеал I . Допуская, что $a \notin M$, получаем в силу максимальной M равенство $M + (a) = R$. Но $\bar{R} = R/M$ — простая алгебра с некоторой единицей $\bar{e}$ и потому $\bar{R} = (\bar{e})$. Переходя к прообразам, мы можем найти такой прообраз e элемента $\bar{e}$, что $e \in (a)$. Для этого элемента e получаем в силу предложения 3 включение $M \supseteq [e]$, а значит, и равенство $M + [e] = M$. Между тем, в силу условий, налагаемых на идеал I , $R = I + [e] \subseteq M + [e]$. Получили противоречие с тем, что $M \neq R$.

Таким образом, все максимальные модулярные идеалы алгебры R , содержащие идеал I , содержат и элемент a . Но по условию I совпадает с пересечением максимальных модулярных идеалов, его содержащих. Поэтому $a \in I$, т. е. верно включение $(a) \subseteq I$.

В силу произвольности выбора идеала I элемент a $\mathcal{F}^*$ -регулярен.

Предложение доказано.

§ 5. Наследственно идемпотентный радикал и антипростой радикал

В приложениях большую роль играет наибольший подыдемпотентный радикал. К его построению мы и приступаем.

Алгебра R называется *наследственно идемпотентной*, если все идеалы в R идемпотентны, т. е. $I = I^2$ для любого идеала I алгебры R . Из леммы 4.6 вытекает, что алгебра

R наследственно идемпотентна тогда и только тогда, когда для любого $a \in R$ верно равенство $(a) = (a)^2$. Идеал R алгебры A называется *наследственно идемпотентным идеалом*, если R — наследственно идемпотентная алгебра.

Замечаем, что наследственно идемпотентные алгебры тесно связаны с нижним нильрадикалом $\mathfrak{N}$ и кручением $\mathfrak{N}^*$, дополнительным к $\mathfrak{N}$. А именно, наследственно идемпотентные алгебры и сильно $\mathfrak{N}$ -полупростые алгебры — это одно и то же.

Предложение 1. Для любой алгебры $R \neq 0$ равносильны утверждения:

- а) Алгебра R наследственно идемпотентна.
- б) Любой гомоморфный образ алгебры R полупервичен.
- в) Все идеалы алгебры R полупервичны.
- г) Любой подпрямо неразложимый гомоморфный образ алгебры R первичен.

д) Сердцевина любого подпрямо неразложимого гомоморфного образа алгебры R является простой алгеброй.

е) Для любых идеалов A, B алгебры R верно равенство $AB = A \cap B$.

Доказательство. Ясно, что утверждения б) и в) равносильны. Равносильность утверждений г) и д) вытекает из леммы 3. 2. 1. Из той же леммы вытекает импликация б) $\Rightarrow$ д). А в силу теоремы Биркгофа верна импликация г) $\Rightarrow$ б), так как подпрямое произведение первичных алгебр всегда является полупервичной алгеброй.

Следовательно, утверждения б), в), г) и д) равносильны.

в) $\Rightarrow$ е). Пусть все идеалы алгебры R полупервичны. Возьмем любые два идеала A, B алгебры R . Тогда $A \cap B \subseteq AB \subseteq (A \cap B)^2$, и потому $AB = A \cap B$ в силу полупервичности идеала AB .

е) $\Rightarrow$ а). Это очевидно (достаточно положить $A = B$).

а) $\Rightarrow$ в). Пусть алгебра R наследственно идемпотентна. Тогда для любых двух идеалов A и P алгебры R включения $A \subseteq P$, $A^2 \subseteq P$ равносильны, так как $A = A^2$. Но это означает, что любой идеал P в R полупервичен.

Следствие 1. В любой алгебре Q сумма любого множества наследственно идемпотентных идеалов сама будет наследственно идемпотентным идеалом, гомоморфный образ и идеал наследственно идемпотентной алгебры сами наследственно идемпотентны, расширение наследственно идемпотентной алгебры с помощью наследственно

идемпотентной алгебры само наследственно идемпотентно. Поэтому класс всех наследственно идемпотентных алгебр является радикальным классом. Соответствующее кручение (ставящее в соответствие каждой алгебре Q ее наибольший наследственно идемпотентный идеал) совпадает с кручением $\mathfrak{B}^*$, дополнительным к нижнему нильрадикалу $\mathfrak{B}$. Кручение $\mathfrak{B}^*$ является наибольшим подыдемпотентным радикалом.

Действительно, в силу теоремы 3.2.3 и предложения 1 $\mathfrak{B}^*$ -радикальные алгебры, сильно $\mathfrak{B}$ -полупростые алгебры и наследственно идемпотентные алгебры — это одно и то же. Остается учесть основные свойства кручений и радикальных классов.

В связи с доказанным кручение $\mathfrak{B}^*$ называется наследственно идемпотентным радикалом. Ясно, что $\mathfrak{B}^*$ — двойственное подыдемпотентное кручение.

Нетрудно дать «элементное» построение наследственно идемпотентного радикала. А именно, элемент a алгебры A называется $\mathfrak{B}^*$ -регулярным (в A), если для некоторого конечного множества элементов $x_i, y_i, z_i \in A$

$$a = \sum_i x_i a y_i a z_i. \quad (1)$$

Алгебра R называется $\mathfrak{B}^*$ -регулярной, если все ее элементы $\mathfrak{B}^*$ -регулярны.

Предложение 2. *Наследственно идемпотентные алгебры и $\mathfrak{B}^*$ -регулярные алгебры — это одно и то же. В любой алгебре верно равенство*

$$\mathfrak{B}^*(A) = \{b \in A \mid a \in (b) \Rightarrow a - \mathfrak{B}^*\text{-регулярный элемент}\}. \quad (2)$$

Класс $\mathcal{N}(\mathfrak{B})$ всех подпрямо неразложимых алгебр с $\mathfrak{B}$ -радикальной сердцевиной (т. е. сердцевиной, являющейся алгеброй с нулевым умножением) удовлетворяет условиям K^*1 , K^*3 , причем $\mathfrak{B}^* = S_{\mathcal{N}(\mathfrak{B})}$. Поэтому в любой алгебре A верно равенство

$$\mathfrak{B}^*(A) = \bigcap \{P - \text{идеал } A \mid A/P \in \mathcal{N}(\mathfrak{B})\}. \quad (3)$$

Доказательство. Заметим, сначала, что элемент a алгебры A $\mathfrak{B}^*$ -регулярен тогда и только тогда, когда $(a) = (a)^2$.

Действительно, если элемент a $\mathfrak{B}^*$ -регулярен, то $a \in (a)^2$ в силу (1). Но тогда равенство $(a) = (a)^2$ очевидно.

Обратно, пусть $(a) = (a)^2$. Тогда для всех целых чисел $n \geq 1$ верно равенство $(a) = (a)^n$, и потому $a \in (a)^n$. Но каждый элемент из главного идеала (a) представим в виде конечной суммы $\alpha a + ca + da + \sum_i u_i a v_i$ для некоторых $\alpha \in \Phi$, $c, d, u_i, v_i \in A$. Поэтому каждый элемент из идеала $(a)^5$ представим в виде конечной суммы $\sum_i x_i a y_i a z_i$. В частности, элемент a $\mathfrak{B}^*$ -регулярен в силу (1), так как $a \in (a)^5$.

Из доказанного вытекает, что наследственно идемпотентные алгебры и $\mathfrak{B}^*$ -регулярные алгебры — это одно и то же.

Возьмем теперь любую алгебру A и рассмотрим ее наследственно идемпотентный радикал $\mathfrak{B}^*(A)$.

Пусть $b \in \mathfrak{B}^*(A)$. Тогда $(b) \subseteq \mathfrak{B}^*(A)$, и потому алгебра (b) наследственно идемпотентна. Но тогда в силу леммы 4.4 $(a) = (a)^2$ для любого элемента $a \in (b)$, поэтому в силу доказанного все элементы $a \in (b)$ $\mathfrak{B}^*$ -регулярны. Обратно, если все элементы $a \in (b)$ $\mathfrak{B}^*$ -регулярны, то снова в силу леммы 4.4 и доказанного алгебра (b) наследственно идемпотентна. Но тогда, очевидно, $b \in \mathfrak{B}^*(A)$. Следовательно, верно равенство (2).

В силу теоремы 3.2.3 и следствия 1 верно равенство $\mathfrak{B}^* = S_{\mathcal{N}}(\mathfrak{B})$ (класс $\mathcal{N}(\mathfrak{B})$ удовлетворяет условию K^*1 , требуемому по построению верхнего радикала). Но тогда в силу предложения 3.1.1 остается доказать равенство (3).

По построению верхнего радикала все алгебры из класса $\mathcal{N}(\mathfrak{B})$ будут $\mathfrak{B}^*$ -полупросты, так как $\mathfrak{B}^* = S_{\mathcal{N}}(\mathfrak{B})$. Поэтому в силу основных свойств радикалов, если F — идеал алгебры A , стоящий в правой части равенства (3), то верно включение $F \supseteq \mathfrak{B}^*(A)$.

Допустим, что равенство (3) неверно, т. е. $F \supsetneq \mathfrak{B}^*(A)$. Тогда в силу равенства (2) в F существует не $\mathfrak{B}^*$ -регулярный элемент a . Для этого элемента получаем по доказанному, что $a \notin (a)^2$. Но тогда множество идеалов $\{B \text{ — идеал } A \mid a \notin B \supseteq (a)^2\}$ непусто и индуктивно. В силу леммы Куратовского — Цорна, в указанном множестве идеалов есть максимальный элемент.

Пусть P — один из таких максимальных элементов. Тогда по построению A/P — подпрямо неразложимая

алгебра с сердцевиной $((a) + P)/P$. Но снова по построению $P \cong (a)^2$. Поэтому сердцевина подпрямо неразложимой алгебры A/P является алгеброй с нулевым умножением, т. е. $A/P \in \mathcal{N}(\mathfrak{B})$. По построению F получаем включение $P \cong F$. Между тем $a \in F$, $a \notin P$.

Получили противоречие. Следовательно, равенство (3) верно.

Предложение доказано.

Построим еще один подыдемпотентный радикал, тесно связанный с обобщенным нильрадикалом $\mathcal{N}$, во многом «подобный» наследственно подыдемпотентному радикалу.

Алгебра R называется *вполне идемпотентной*, если для любого элемента $a \in R$ верно равенство $(a) = (a^2)$. Идеал R алгебры A называется *вполне идемпотентным идеалом*, если алгебра R вполне идемпотентна.

Предложение 3. Для любой алгебры $R \neq 0$ равносильны утверждения:

а) Алгебра R вполне идемпотентна.

б) Любой гомоморфный образ алгебры R является алгеброй без нильпотентных элементов.

в) Любой подпрямо неразложимый гомоморфный образ алгебры R является алгеброй без делителей нуля.

г) Для любых $a, b \in R$ верно равенство $(a) \cap (b) = (ab)$.

Доказательство. В силу теоремы Биркгофа о подпрямо неразложимых алгебрах утверждения б) и в) равносильны, так как алгебры без нильпотентных элементов — это в точности подпрямые произведения алгебр без делителей нуля.

а) $\Rightarrow$ б). Пусть алгебра R вполне идемпотентна. Возьмем любой гомоморфный образ $\bar{R}$ алгебры R . Пусть $\bar{a} \in \bar{R}$ и $\bar{a} \neq 0$. Переходя к прообразам и возвращаясь к образам, получаем $(\bar{a}^2) = (\bar{a}) \neq 0$. Поэтому и $\bar{a}^2 \neq 0$. А это и означает, что $\bar{R}$ — алгебра без нильпотентных элементов.

в) $\Rightarrow$ г). Пусть любой подпрямо неразложимый гомоморфный образ алгебры R является алгеброй без делителей нуля. Пусть $a, b \in R$. Алгебра $\bar{R} = R/(ab)$ представима, как и любая другая алгебра, в виде подпрямого произведения подпрямо неразложимых алгебр. Поэтому существует такое множество $\{P_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$ идеалов алгебры $\bar{R}$, что $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} P_\alpha = (ab)$ и все алгебры $R_\alpha = R/P_\alpha$ подпрямо

неразложимы. Но тогда по условию все алгебры R_α — алгебры без делителей нуля. По построению $ab \in P_\alpha$. Поэтому из того, что $R_\alpha = R/P_\alpha$ — алгебра без делителей нуля, вытекает: хотя бы одно из включений $a \in P_\alpha$, $b \in P_\alpha$ справедливо. Но тогда $(a) \subseteq P_\alpha$ или $(b) \subseteq P_\alpha$. Поэтому $(a) \cap (b) \subseteq P_\alpha$. В силу произвольности выбора P_α получаем включение $(a) \cap (b) \subseteq (ab)$.

Но обратное включение очевидно. Поэтому $(a) \cap (b) = (ab)$.

г) $\Rightarrow$ а). Это очевидно.

Предложение доказано.

Следствие 2. В любой алгебре Q сумма любого множества вполне идемпотентных идеалов сама будет вполне идемпотентным идеалом, гомоморфный образ и идеал вполне идемпотентной алгебры сами вполне идемпотентны, расширение вполне идемпотентной алгебры с помощью вполне идемпотентной алгебры само вполне идемпотентно. Поэтому класс всех вполне идемпотентных алгебр является радикальным классом. Соответствующее кручение совпадает с кручением $\mathcal{A}^*$, дополнительным к обобщенному нильрадикалу $\mathcal{A}$, и является подыдемпотентным радикалом. Поэтому в любой алгебре A ее $\mathcal{A}^*$ -радикал $\mathcal{A}^*(A)$ является наибольшим вполне идемпотентным идеалом.

Действительно, все это вытекает из основных свойств дополнительных радикалов и кручений, так как в силу теоремы 3.2.3 и предложений 3 и 2.2 вполне идемпотентные алгебры, сильно $\mathcal{A}$ -полупростые алгебры и $\mathcal{A}^*$ -радикальные алгебры — это одно и то же.

В связи с доказанным кручение $\mathcal{A}^*$ называется вполне идемпотентным радикалом.

Возвращаясь к наследственно идемпотентному радикалу $\mathfrak{B}^*$, замечаем, что $\mathfrak{B}^*$ является наибольшим двойственным подыдемпотентным радикалом. Но тогда в силу следствий 3.3.1 — 3.3.3, выявляющих связи между двойственными подыдемпотентными и двойственными наднильпотентными радикалами, кручение $\mathfrak{B}^{**}$, дополнительное к наследственно идемпотентному радикалу $\mathfrak{B}^*$, является наименьшим двойственным наднильпотентным радикалом.

Кручение $\mathfrak{B}^{**}$ называется антипростым радикалом, а $\mathfrak{B}^{**}$ -радикальные алгебры — антипростыми алгебрами.

Предложение 4. Класс $\mathcal{A}^*(\mathfrak{B}^*)$ всех подпрямо неразложимых алгебр с $\mathfrak{B}^*$ -радикальной сердцевиной (т. е.

сердцевиной, являющейся простой алгеброй) является наибольшим специальным классом подпрямых неразложимых алгебр. Специальный радикал $S_{\mathcal{N}}(\mathfrak{B}^*)$, определяемый этим специальным классом алгебр, совпадает с антипростым радикалом $\mathfrak{B}^{**}$ и является наименьшим двойственным специальным радикалом. Поэтому антипростые алгебры — это в точности сильно $\mathfrak{B}^*$ -полупростые алгебры, а алгебры без ненулевых антипростых идеалов (т. е. $\mathfrak{B}^{**}$ -полупростые алгебры) — подпрямые произведения подпрямых неразложимых алгебр с простой сердцевинкой, и в любой алгебре A верно равенство

$$\mathfrak{B}^{**}(A) = \bigcap \{P - \text{идеал } A \mid A/P \in \mathcal{N}(\mathfrak{B}^*)\}.$$

*Алгебра B будет антипроста (т. е. $\mathfrak{B}^{**}$ -радикальна) тогда и только тогда, когда любой идеал алгебры B не отображается гомоморфно на простые алгебры *). Антипростой радикал $\mathfrak{B}^{**}$ является наибольшим среди всех таких кручений τ , что все простые алгебры τ -полупросты.*

Докажем только последние два утверждения, так как все остальные утверждения легко вытекают из характеристик двойственных подидемпотентных и наднильпотентных радикалов (см. § 3 гл. 3).

Пусть алгебра B антипроста. Это означает в силу равенства $\mathfrak{B}^{**} = S_{\mathcal{N}}(\mathfrak{B}^*)$, что алгебра B не отображается гомоморфно на (ненулевые!) алгебры из класса $\mathcal{N}(\mathfrak{B}^*)$. Так как $\mathfrak{B}^{**}$ — кручение, то и любой идеал алгебры B обладает тем же свойством. Но все простые алгебры лежат в классе $\mathcal{N}(\mathfrak{B}^*)$. Поэтому любой идеал алгебры B не отображается гомоморфно на простые алгебры. Обратно, если любой идеал алгебры B не отображается гомоморфно на простые алгебры, то, как легко видеть, алгебра B не отображается гомоморфно на подпрямые неразложимые алгебры с простой сердцевинкой. А это и означает, что алгебра B антипроста, так как $\mathfrak{B}^{**} = S_{\mathcal{N}}(\mathfrak{B}^*)$.

Из сказанного и доказанного вытекает, в частности, что все простые алгебры $\mathfrak{B}^{**}$ -полупросты. С другой стороны, пусть τ — любое такое кручение, что все простые алгебры τ -полупросты. Тогда из свойств полупростых

*) Именно этим и объясняется название $\mathfrak{B}^*$ -радикальных алгебр и радикала $\mathfrak{B}^{**}$.

классов вытекает, что и все подпрямо неразложимые алгебры с простой сердцевиной r -полупросты, т. е. $\mathcal{N}(\mathfrak{B}^*) \subseteq \mathfrak{P}(r)$. Но тогда $\mathfrak{B}^{**} = S_{\mathcal{N}}(\mathfrak{B}^*) \supseteq S_{\mathfrak{P}}(r) = r$.

Предложение доказано.

Антипростой радикал $\mathfrak{B}^{**}$ достаточно близок к присоединенно простому радикалу $\mathcal{T}$, квазирегулярному радикалу $\mathcal{J}$ и нильрадикалам.

Так, например, в коммутативном случае понятия поля, примитивной алгебры, простой алгебры и подпрямо неразложимой алгебры с простой сердцевиной совпадают. Поэтому в коммутативных алгебрах антипростой радикал $\mathfrak{B}^{**}$, присоединенно простой радикал $\mathcal{T}$ и квазирегулярный радикал $\mathcal{J}$ совпадают. Кроме того, нетрудно доказать, что простых локально нильпотентных алгебр не существует. Поэтому в силу предложения 4 все локально нильпотентные алгебры антипросты. С другой стороны, верна

Теорема 1. *Если алгебра A удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов, то антипростой радикал $\mathfrak{B}^{**}(A)$ алгебры A совпадает с нижним нильрадикалом $\mathfrak{B}(A)$ алгебры A и потому локально нильпотентен. Если алгебра A удовлетворяет условию минимальности для всех идеалов, то антипростой радикал $\mathfrak{B}^{**}(A)$ алгебры A нильпотентен.*

Доказательство. Докажем, сначала, что если I — ненулевой конечнопорожденный идеал алгебры A , содержащийся в антипростом радикале $\mathfrak{B}^{**}(A)$ алгебры A , то $I \neq I^2$.

Допустим противное, т. е. допустим, что найдется такой ненулевой идеал I алгебры A и такое конечное множество $\{a_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ элементов из антипростого радикала $\mathfrak{B}^{**}(A)$ алгебры A , что

$$I^2 = I = \overline{(a_i \mid 1 \leq i \leq m)}_A. \quad (4)$$

Множество $\{a_i \mid 1 \leq i \leq m\}$, порождающее идеал I в алгебре A , будем считать минимальным, т. е. никакое подмножество множества $\{a_i\}$ уже не порождает идеала I .

Пусть $m=1$, т. е. $I = (a_1)_A$ — главный идеал алгебры A , содержащийся в антипростом радикале $\mathfrak{B}^{**}(A)$. Тогда в силу (4) и леммы 4.4 $I = (a_1)_I$. Поэтому в ненулевой идемпотентной алгебре I есть собственные идеалы и все они не содержат элемента a_1 . Но тогда в силу леммы Куратовского — Цорна в алгебре I есть максимальные

идеалы. Поэтому в силу идемпотентности I алгебра I отображается гомоморфно на простые алгебры. А этого не может быть в силу предложения 4, так как I — идеал антипростой алгебры $\mathfrak{B}^{**}(A)$.

Пусть $m \geq 2$. Тогда в силу минимальности порождающего множества $\{a_i\}$ верно строгое включение $B = (a_i \mid 2 \leq i \leq m)_A \subset I$. Поэтому, переходя к образам при гомоморфизме $A \rightarrow \bar{A} = A/B$, получаем, что $I^2 = I = (\bar{a}_1)_{\bar{A}} \neq 0$ в силу (4). В результате для алгебры $\bar{A}$ мы оказались в условиях первого случая, так как из включения $a_1 \in \mathfrak{B}^{**}(A)$ вытекает $\bar{a}_1 \in \mathfrak{B}^{**}(\bar{A})$. Снова получаем противоречие.

Нужное нам утверждение доказано.

Будем теперь считать, что алгебра A удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов.

Допустим, что равенство $\mathfrak{B}^{**}(A) = \mathfrak{B}(A)$ неверно. Так как включение $\mathfrak{B}^{**}(A) \supseteq \mathfrak{B}(A)$ верно всегда, то $\mathfrak{B}^{**}(A) \supset \mathfrak{B}(A)$. Идеал $R = \mathfrak{B}^{**}(A)$, как и любой другой идеал, является суммой главных идеалов. Но сумма $\mathfrak{B}$ -радикальных идеалов сама является $\mathfrak{B}$ -радикальным идеалом. Поэтому из строгого включения $\mathfrak{B}^{**}(A) \supset \mathfrak{B}(A)$ вытекает существование $\mathfrak{B}^{**}$ -радикальных не $\mathfrak{B}$ -радикальных главных идеалов. Но тогда в силу условия минимальности для главных идеалов, в указанном множестве главных идеалов есть минимальные элементы.

Пусть (r) — минимальный $\mathfrak{B}^{**}$ -радикальный не $\mathfrak{B}$ -радикальный идеал. Тогда по доказанному $(r) \supset (r)^2$, откуда в силу минимальности главного идеала (r) в указанном множестве главных идеалов все главные идеалы алгебры A , содержащиеся в идеале $(r)^2$, будут $\mathfrak{B}$ -радикальны. Поэтому алгебра $(r)^2$ $\mathfrak{B}$ -радикальна. Но тогда $\mathfrak{B}$ -радикальна и алгебра (r) как расширение $\mathfrak{B}$ -радикальной алгебры $(r)^2$ с помощью $\mathfrak{B}$ -радикальной алгебры (с нулевым умножением!) $(r)/(r)^2$. Получили противоречие с тем, что идеал (r) не $\mathfrak{B}$ -радикален.

Следовательно, верно равенство $\mathfrak{B}^{**}(A) = \mathfrak{B}(A)$.

Будем теперь считать, что алгебра A удовлетворяет условию минимальности для всех идеалов. Нам нужно доказать, что алгебра $R = \mathfrak{B}^{**}(A)$ нильпотентна.

Допустим, что алгебра R ненильпотентна. Тогда ряд идеалов $R \supseteq R^2 \supseteq \dots$ не может остановиться на нулевом идеале. Но в силу условия минимальности для идеалов

этот ряд останавливается на конечном шаге. Поэтому существует такое целое число $m \geq 1$, что $Q = R^m = R^{m+1}$. Следовательно, $Q^2 = Q \neq 0$.

Для полученного идемпотентного ненулевого идеала Q рассмотрим множество всех таких идеалов D , что $D \subseteq Q$ и $DQ \neq 0$. Это множество непусто, так как среди указанных идеалов есть идеал Q . Поэтому среди указанных идеалов D есть минимальный идеал. Пусть это будет идеал C .

По построению $CQ \neq 0$. Поэтому существует такой $c \in C$, что $(c)Q \neq 0$. Но $(c)Q \subseteq Q$ и $(c)QQ = (c)Q \neq 0$. Отсюда в силу минимальности C

$$C = (c) = (c)Q \neq 0. \quad (5)$$

Из (5) вытекает, что $c \in (c)Q$, и потому $c = \sum_{i=1}^m c_i q_i$ для некоторого конечного множества элементов $c_j \in (c)$, $q_i \in Q$. Но тогда найдется такой конечнопорожденный идеал $I_1 \subseteq Q \subseteq R = \mathfrak{B}^{**}(A)$, что $c \in (c)I_1$, и потому

$$C = (c) = (c)I_1 \quad (6)$$

в силу (5). А именно, в качестве идеала I_1 можно взять $I_1 = (q_j \mid 1 \leq j \leq m)$. Из конечной порожденности идеала I_1 вытекает строгое включение $I_1 \supset I_1^2$ в силу доказанного, так как $I_1 \neq 0$. Но в силу (6) $C = (c) = (c)I_1^2$. Поэтому из $c \in (c)I_1^2$ вытекает существование такого конечнопорожденного идеала $I_2 \subseteq I_1^2$, что $(c) = (c)I_2$, и мы можем повторять процесс. В результате получаем бесконечную цепь идеалов $I_1 \supset I_1^2 \supseteq I_2 \supset I_2^2 \supseteq \dots \supseteq I_k \supset I_k^2 \supseteq \dots$

Получили противоречие с условием минимальности для идеалов.

Следовательно, если алгебра A удовлетворяет условию минимальности для всех идеалов, то ее антипростой радикал $\mathfrak{B}^{**}(A)$ нильпотентен.

Теорема доказана.

В заключение отметим, что вопрос о существовании неантипростой нильалгебры равносильен вопросу о существовании простой нильалгебры.

§ 6. Минимальные идеалы и разложения алгебр

Применим построенные подыдемпотентные радикалы для доказательства некоторых структурных теорем, тесно связанных с минимальными идеалами алгебр. Для этого укажем сначала некоторые свойства минимальных идеалов и сумм минимальных идеалов определенного вида.

Основные свойства указывает

Лемма 1. Если M — минимальный идеал *) алгебры A , то либо $M^2 = 0$ (т. е. M — алгебра с нулевым умножением), либо $M^2 = M$. В последнем случае алгебра M проста, и если алгебра A — идеал некоторой алгебры K , то и M — идеал в алгебре K . Пусть $\{M_i | i \in \Gamma\}$ — любое (непустое) семейство идемпотентных минимальных идеалов алгебры A , причем $M_i = M_j$ тогда и только тогда, когда $i = j$. Тогда для идеала $\Sigma = \sum_{i \in \Gamma} M_i$ верны следующие утверждения:

а) Любой идеал алгебры Σ является идеалом всей алгебры A и совпадает с суммой $\sum_{i \in \Delta} M_i$ для некоторого $\Delta \subseteq \Gamma$.

б) Множество всех минимальных идеалов алгебры Σ совпадает с заданным множеством $\{M_i | i \in \Gamma\}$ идемпотентных минимальных идеалов.

в) Алгебра Σ разлагается в прямую сумму $\Sigma = \bigoplus_{i \in \Gamma} M_i$ простых алгебр M_i .

Доказательство. Пусть M — минимальный идеал алгебры A . Тогда в силу минимальности M либо $M^2 = 0$, либо $M^2 = M$.

Пусть $M^2 = M$. Возьмем любой ненулевой элемент $a \in M$. В силу минимальности M имеем $M = (a)_A$. Но тогда согласно лемме 3.4 $M = (a)_M$. Поэтому алгебра M проста. Аналогично показывается, что если A — идеал некоторой алгебры K , то и M — идеал в алгебре K .

Возьмем теперь любое такое непустое множество $\{M_i | i \in \Gamma\}$ идемпотентных минимальных идеалов алгебры A , что $M_i = M_j$ тогда и только тогда, когда $i = j$. В силу доказанного все M_i — простые алгебры. Строим идеал $\Sigma = \sum_{i \in \Gamma} M_i$ алгебры A .

*) Напомним, что M называется минимальным идеалом алгебры A , если M минимален в множестве ненулевых идеалов этой алгебры.

Из условий вытекает, что если $i, j \in \Gamma$ и $i \neq j$, то $M_i \cap M_j = 0$ в силу минимальности рассматриваемых идеалов. Но тогда $M_i M_j = 0$. Кроме того, из простоты алгебр M_i вытекает, что все M_i — минимальные идеалы алгебры Σ . Учитывая все это, рассмотрим утверждения а), б) и в).

Возьмем любой ненулевой элемент $a \in \Sigma$. Из построения алгебры Σ вытекает, что верно равенство $a = \sum_{j=1}^m a_j$

для некоторого конечного множества ненулевых элементов $a_j \in M_{i_j}$. Приводя подобные, мы можем считать, что идеалы M_{i_j} попарно различны. Но тогда они будут друг друга аннулировать. Поэтому для любого a_j получим $(a)_\Sigma \supseteq M_{i_j} a M_{i_j} = M_{i_j} a_j M_{i_j} = M_{i_j}$, так как a_j — ненулевой элемент простой алгебры M_{i_j} . Но тогда $(a)_\Sigma \supseteq \Sigma M_{i_j} \supseteq (a)_\Sigma$.

Из доказанного вытекает, что если $a \in \Sigma$ и $a \neq 0$, то $(a)_\Sigma = \sum_{i \in \Delta(a)} M_i$ для некоторого конечного непустого подмножества $\Delta(a) \subseteq \Gamma$. Но тогда, как легко видеть, для любого ненулевого идеала I алгебры Σ верно равенство $I = \sum_{i \in \Delta} M_i$ для подходящего множества $\Delta \subseteq \Gamma$. Поэтому верны утверждения а) и б).

Из утверждения а) и простоты алгебр M_i с очевидностью вытекает полупервичность алгебры Σ . Но тогда для любого $i \in \Gamma$ получаем, что $M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j = 0$, так как $(M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j)^2 \subseteq M_i \sum_{j \neq i} M_j = \sum_{j \neq i} M_i M_j = 0$. А это означает, что алгебра $\Sigma = \sum_{i \in \Gamma} M_i$ разлагается в прямую сумму $\Sigma = \bigoplus_{i \in \Gamma} M_i$ простых алгебр M_i . Следовательно, верно и утверждение в).

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $\{M_i | i \in \Gamma\}$ — любое непустое множество идемпотентных минимальных идеалов алгебры A . Пусть $\Sigma(B) = \sum \{M_i | i \in \Gamma, M_i \subseteq B\}$ для любого идеала B алгебры A , если указанные идеалы M_i существуют, и

$\Sigma(B) = 0$, если таких нет. Тогда

$$\Sigma(B) = B \cap \Sigma(A) = B\Sigma(A) = \Sigma(A)B. \quad (1)$$

Доказательство. Из леммы 1 легко вытекает, что алгебра $\Sigma = \Sigma(A)$ наследственно идемпотентна как сумма наследственно идемпотентных (простых!) алгебр. Поэтому $B \cap \Sigma = (B \cap \Sigma)^2 \subseteq B\Sigma \subseteq B \cap \Sigma$ для любого идеала B алгебры A , т. е. $B \cap \Sigma = B\Sigma$. По симметрии $B \cap \Sigma = \Sigma B$.

Еще раз применяя лемму 1 и построение $\Sigma(B)$, получаем (1).

Лемма доказана.

Из леммы 1 с очевидностью вытекает, что минимальный идеал M алгебры A будет простой алгеброй с единицей тогда и только тогда, когда M — алгебра с единицей. Учитывая это, будем называть такие минимальные идеалы алгебры A *минимальными идеалами с единицей*.

Для любой алгебры A положим

$$E(A) = \sum \{M \mid M \text{ — минимальный идеал с единицей в алгебре } A\}. \quad (2)$$

Если алгебра A не имеет минимальных идеалов с единицей, то $E(A) = 0$. Из леммы 1, равенства (2) и леммы 2 или равенства (1) для любого идеала B алгебры A получаем

$$E(B) = B \cap E(A) = BE(A) = E(A)B. \quad (3)$$

Лемма 3. Пусть в алгебре A $E = E(A)$ и E^* — аннулятор идеала E . Алгебра A разлагается в прямую сумму $A = E \oplus E^*$ тогда и только тогда, когда любой ее главный идеал содержит лишь конечное число минимальных идеалов с единицей (или не имеет их!).

Доказательство. В силу леммы 1 и равенства (2) E — прямая сумма простых алгебр с единицей. В частности, алгебра E полупервична и потому в алгебре A верно равенство $E \cap E^* = 0$. Поэтому алгебра A разлагается в прямую сумму $A = E \oplus E^*$ тогда и только тогда, когда A совпадает с суммой $E + E^*$ идеалов E и E^* .

Пусть любой главный идеал алгебры A содержит лишь конечное число минимальных идеалов с единицей.

Возьмем любой элемент $a \in A$. В силу (3), если $E((a)_A) = 0$, то $a \in E^*$, и потому $a \in E + E^*$. Если

$E((a)) \neq 0$, то в силу (2) и леммы 1 $E((a)_A)$ — алгебра с некоторой единицей $e \neq 0$ как конечная прямая сумма простых алгебр с единицей (минимальных идеалов с единицей, содержащихся в главном идеале $(a)_A$). Но тогда из леммы 4.3, равенства (2) и соотношений (3) вытекает, что $(a)_A = (e)_A \oplus (a - ae)_A$, $E((a)_A) = (e)_A$, $E((a - ae)_A) = 0$ и потому $a - ae \in E^*$. Отсюда снова следует включение $a \in E + E^*$.

Но тогда $A = E + E^*$, т. е. алгебра A разлагается в прямую сумму $A = E \oplus E^*$.

Обратно, пусть A разлагается в прямую сумму $A = E \oplus E^*$.

Возьмем любой $a \in A$. Тогда $a = x + y$ для некоторых однозначно определенных элементов $x \in E$, $y \in E^*$. Еще раз учитывая разложение $A = E \oplus E^*$, получаем равенства $(x)_A \oplus (y)_A = (a)_A$, $E((a)_A) = E \cap (a)_A = (x)_A$. Но E — прямая сумма простых алгебр с единицей, а потому и наследственно идемпотентная алгебра. Поэтому $(x)_A = (x)_E$ — главный идеал алгебры E в силу леммы 4.4. Но тогда в силу теоремы 4.1 $E((a)_A) = (x)_E$ — конечная прямая сумма простых алгебр с единицей. Отсюда вытекает в силу равенства (2) и леммы 1, что в алгебре $(a)_A$ лишь конечное число минимальных идеалов с единицей.

Следовательно, любой главный идеал алгебры A содержит лишь конечное число минимальных идеалов с единицей.

Лемма доказана.

В следующей теореме $\mathcal{T}^*$ — кручение, дополнительное к присоединенно простому радикалу $\mathcal{T}$ (см. § 4), а $(\mathcal{T}^*(A))^*$ — аннулятор $\mathcal{T}^*$ -радикала $\mathcal{T}^*(A)$ алгебры A . Кроме того, как и в лемме 3, $E = E(A)$.

Теорема 1. Любая алгебра A с условием минимальности для главных идеалов разлагается в прямую сумму

$$A = \mathcal{T}^*(A) \oplus (\mathcal{T}^*(A))^*. \quad (4)$$

При этом алгебра $\mathcal{T}^*(A)$ разлагается в прямую сумму простых алгебр с единицей и является $\mathcal{T}^*$ -радикальной алгеброй с условием минимальности для главных идеалов, а $(\mathcal{T}^*(A))^*$ — $\mathcal{T}^*$ -полупростая алгебра с условием минимальности для главных идеалов (не имеющая минимальных идеалов с единицей). Обратно, если алгебра A разложена

в прямую сумму $A = R \oplus Q$, где R — $\mathcal{T}^*$ -радикальная алгебра, а Q — $\mathcal{T}^*$ -полупростая алгебра, то $R = \mathcal{T}^*(A)$ и $Q = (\mathcal{T}^*(A))^*$. При этом, если алгебры R и Q удовлетворяют условию минимальности для главных идеалов, то и вся алгебра A удовлетворяет этому условию.

Доказательство. Начнем с последних двух утверждений.

Пусть алгебра A разложена в прямую сумму $A = R \oplus Q$, где R — $\mathcal{T}^*$ -радикальная алгебра, а Q — $\mathcal{T}^*$ -полупростая алгебра.

Из $\mathcal{T}^*$ -радикальности алгебры R вытекает включение $R \subseteq \mathcal{T}^*(A)$. Из $\mathcal{T}^*$ -полупростоты алгебры $A/R \simeq Q$ вытекает обратное включение $R \supseteq \mathcal{T}^*(A)$. Поэтому верно равенство $R = \mathcal{T}^*(A)$.

Алгебра R полупервична, как и любая другая $\mathcal{T}^*$ -радикальная (т. е. сильно $\mathcal{T}$ -полупростая) алгебра. Поэтому $R \cap R^* = 0$ в алгебре A . Но $Q \subseteq R^*$. Еще раз применяя равенство $A = R \oplus Q$, получаем $R^* = R^* \cap (R + Q) = Q$. Поэтому верно равенство $Q = R^* = (\mathcal{T}^*(A))^*$.

Допустим теперь, что алгебры R и Q удовлетворяют условию минимальности для главных идеалов.

Возьмем любой элемент $a \in A$. Тогда a однозначно представляется в виде суммы $a = r + q$, где $r \in R$, $q \in Q$. Но алгебра R будет $\mathcal{T}$ -полупростой (даже сильно $\mathcal{T}$ -полупростой) алгеброй с условием минимальности для главных идеалов. Поэтому R — прямая сумма простых алгебр с единицей в силу теоремы 4.1. Но тогда из той же теоремы легко вытекает, что $er = r$ для некоторого элемента $e \in R$. Поэтому $r = er = ea \in (a)_A$. Но тогда, очевидно, и $q \in (a)_A$. А отсюда вытекает, что $(a)_A = (r)_R \oplus (q)_Q$. При этом, как легко видеть, $(r)_R = R \cap (a)_A$, $(q)_Q = Q \cap (a)_A$.

В силу произвольности выбора элемента $a \in A$ из полученных равенств вытекает, что алгебра A удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов, если этому условию удовлетворяют алгебры R и Q . Обратное ясно: если алгебра A удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов, то этому условию удовлетворяют и алгебра R , и алгебра Q .

Допустим теперь, что алгебра A удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов.

В силу леммы 1 алгебра $E = E(A)$ разлагается в прямую сумму простых алгебр с единицей. Поэтому алгебра E

$\mathcal{T}^*$ -радикальна как прямая сумма $\mathcal{T}^*$ -радикальных алгебр. Поэтому $\mathcal{T}^*(A) \cong E(A) = E$.

С другой стороны, алгебра $\mathcal{T}^*(A)$ наследственно идемпотентна, как и любая другая $\mathcal{T}^*$ -радикальная алгебра. Поэтому в силу леммы 4.4 любой главный идеал алгебры $\mathcal{T}^*(A)$ является главным идеалом всей алгебры A . Следовательно, алгебра $\mathcal{T}^*(A)$ удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов, как и алгебра A . Но тогда в силу теоремы 4.1 алгебра $\mathcal{T}^*(A)$ разлагается в прямую сумму простых алгебр с единицей, и потому $\mathcal{T}^*(A) \subseteq E = E(A)$.

Следовательно, $\mathcal{T}^*(A) = E$ и $(\mathcal{T}^*(A))^* = E^*$. Остается доказать равенство (4), так как $\mathcal{T}^*$ -полупростота алгебры $(\mathcal{T}^*(A))^*$ (и отсутствие в ней минимальных идеалов с единицей) вытекает из равенства $\mathcal{T}^*(A) \cap (\mathcal{T}^*(A))^* = 0$.

Пусть $a \in A$. Допустим, что множество $\{M_i \mid i \in \Gamma\}$ минимальных идеалов с единицей, содержащихся в главном идеале $(a)_A$, бесконечно. Тогда мы можем считать, что Γ содержит все целые числа $m \geq 1$, причем $M_i = M_j$ тогда и только тогда, когда $i = j$.

В силу леммы 1 все M_i — простые алгебры с единицами $e_i \neq 0$ и $\sum_{i \in \Gamma} M_i = \bigoplus_{i \in \Gamma} M_i$. Но тогда в силу леммы 4.2 $\{e_i \mid i \in \Gamma\}$ — ортогональная система центральных идемпотентов в алгебре A .

Для всех целых чисел $m \geq 1$ положим $a_m = a - \sum_{i=1}^m a e_i$. Тогда несложным вычислением получаем, что $a_{m+1} = a_m - a_m e_{m+1}$, и потому $(a_m) \supseteq (a_{m+1})$ для всех $m \geq 1$. Еще раз учитывая центральность и ортогональность идемпотентов e_i , получаем $(a_{m+1}) e_{m+1} = (a_{m+1} e_{m+1}) = 0 \neq M_{m+1} = (e_{m+1}) = (e_{m+1})(a) = (a e_{m+1}) = (a_m e_{m+1}) = (a_m) e_{m+1}$. А отсюда вытекает, что $(a_m) \supset (a_{m+1})$ для всех целых $m \geq 1$. Получили противоречие с тем, что алгебра A удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов.

Следовательно, любой главный идеал алгебры A содержит лишь конечное число минимальных идеалов с единицей. Но тогда в силу леммы 3 $A = E \oplus E^*$, и потому верно равенство (4).

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть алгебра A удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов. Алгебра A разлагается в прямую сумму

$$A = \mathcal{T}^*(A) \oplus \mathcal{T}(A) \quad (5)$$

тогда и только тогда, когда идеал $(\mathcal{T}^*(A))^*$ является присоединенно простой алгеброй. Это равносильно равенству $\mathcal{T}(A) = (\mathcal{T}^*(A))^*$, которое в свою очередь, равносильно тому, что фактор-алгебра $A/\mathcal{T}^*(A)$ присоединенно проста.

Действительно, в силу теоремы 1 алгебра A разлагается в прямую сумму $A = \mathcal{T}^*(A) \oplus \mathcal{T}(A)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}(A) = (\mathcal{T}^*(A))^*$. Но по построению дополнительного радикала $\mathcal{T}(A) \cap \mathcal{T}^*(A) = 0$, и потому в силу полупервичности алгебры $\mathcal{T}^*(A)$ всегда верно включение $\mathcal{T}(A) \subseteq (\mathcal{T}^*(A))^*$. Поэтому равенство $\mathcal{T}(A) = (\mathcal{T}^*(A))^*$ равносильно включению $\mathcal{T}(A) \supseteq (\mathcal{T}^*(A))^*$. А это включение равносильно тому, что алгебра $(\mathcal{T}^*(A))^*$ присоединенно проста. Остается учесть, что $(\mathcal{T}^*(A))^* \simeq A/\mathcal{T}^*(A)$ снова в силу теоремы 1.

При доказательстве теоремы 1 и леммы 3 существенную роль играла одна особенность минимальных идеалов с единицей: такие минимальные идеалы всегда являются прямыми слагаемыми соответствующих алгебр. В связи с этим введем в рассмотрение класс алгебр, в которых все идемпотентные минимальные идеалы обладают указанным свойством.

Лемма 4. Для любого идемпотентного минимального идеала M алгебры A равносильны утверждения:

- а) Аннулятор M^* — максимальный идеал в A .
- б) Алгебра A разлагается в прямую сумму $A = M \oplus M^*$.
- в) M — прямое слагаемое в A , т. е. $A = M \oplus M'$ для некоторого идеала M' .

Доказательство. Из простоты алгебры M вытекает ее полупервичность. Поэтому в алгебре A верно равенство $M \cap M^* = 0$, причем M^* — наибольший идеал в A , имеющий нулевое пересечение с идеалом M (см. лемму 1.1). В частности, идеал M не содержится в своем аннуляторе, так как $M \neq 0$.

а) $\Rightarrow$ б). Пусть аннулятор M^* является максимальным идеалом в A . Тогда $A = M + M^* = M \oplus M^*$, так как M не содержится в M^* ,

б) $\Rightarrow$ в). Это очевидно.

в) $\Rightarrow$ а). Пусть $A = M \oplus M'$ для некоторого идеала M' алгебры A . Тогда $M^* \supseteq M'$, и потому $M^* = M^* \cap (M + M') = M'$. Но тогда M^* — максимальный идеал в алгебре A , так как $A/M^* = A/M' \simeq M$ — простая алгебра.

Лемма доказана.

Алгебра A называется *алгеброй с аннуляторным условием*, если для любого идемпотентного минимального идеала M выполнено хотя бы одно (а значит и все) из утверждений а), б), в) леммы 4 (если идемпотентные минимальные идеалы есть!).

Лемма 5. Любой идеал алгебры с аннуляторным условием сам будет алгеброй с аннуляторным условием. Прямая сумма любого множества алгебр с аннуляторным условием — алгебра с аннуляторным условием.

Доказательство. Пусть I — идеал алгебры A с аннуляторным условием.

Возьмем любой идемпотентный минимальный идеал M в алгебре I . В силу леммы 1 M — идемпотентный минимальный идеал во всей алгебре A . Но A — алгебра с аннуляторным условием. Поэтому $A = M \oplus M^*$, в силу леммы 4. Переходя к алгебре I , получаем $I = I \cap A = I \cap (M + M^*) = M \oplus (I \cap M^*)$. Поэтому I — алгебра с аннуляторным условием.

Таким образом, идеал алгебры с аннуляторным условием сам является алгеброй с аннуляторным условием.

Допустим теперь, что $R = \bigoplus_{i \in \Gamma} R_i$ — прямая сумма некоторого множества алгебр с аннуляторным условием.

Возьмем любой идемпотентный минимальный идеал N в алгебре R . Замечая, что $NR = N \neq 0$, получаем $NR_i \neq 0$ для некоторого $i \in \Gamma$. Но тогда для некоторого идеала N' в алгебре R_i получаем $R = N \oplus \left(N' \oplus \sum_{i \neq i} R_j \right)$.

Поэтому прямая сумма любого множества алгебр с аннуляторным условием сама будет алгеброй с аннуляторным условием.

Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть M — идемпотентный минимальный идеал алгебры A и $(a)_A = M \oplus M'$ для некоторого главного идеала $(a)_A$ алгебры A и некоторого идеала M' алгебры $(a)_A$. Тогда M' — главный идеал алгебры A , причем $M' = M^* \cap (a)_A$.

Доказательство. Пусть $B = (a)_A$. Тогда M — идемпотентный минимальный идеал алгебры B , и потому в силу леммы 4 и ее доказательства $M' = M_B^*$ — аннулятор идеала M в алгебре B . Но тогда $M' = M^* \cap B$ — идеал алгебры A , так как M^* и $B = (a)_A$ — идеалы в A .

Учитывая доказанное, представляем элемент a в виде $a = x + y$, где $x \in M$, $y \in M'$. Ясно, что $(a)_A = (x)_A \oplus (y)_A$, так как $(x)_A = (x)_M = MxM = MaM$ в силу простоты алгебры M и равенства $MM' = M'M = 0$. Но тогда $M' = M' \cap ((x)_A + (y)_A) = (y)_A$, т. е. M' — главный идеал в A .

Лемма доказана.

Теперь мы можем дать аналоги леммы 3, теоремы 1 и следствия 1 для наследственно идемпотентного радикала $\mathfrak{B}^*$.

Обозначим для любой алгебры A

$$H(A) = \sum \{M \mid M \text{ — идемпотентный минимальный идеал в } A\}. \quad (6)$$

При этом, если в алгебре A нет идемпотентных минимальных идеалов, то $H(A) = 0$. Из леммы 1, равенства (6) и леммы 2 или равенства (1) для любого идеала B алгебры A получаем

$$H(B) = B \cap H(A) = BH(A) = H(A)B. \quad (7)$$

Лемма 7. Пусть в алгебре A $H = H(A)$ и H^* — аннулятор идеала H . Алгебра A разлагается в прямую сумму $A = H \oplus H^*$ тогда и только тогда, когда она является алгеброй с аннуляторным условием и любой ее главный идеал содержит лишь конечное число идемпотентных минимальных идеалов.

Доказательство. Из леммы 1 вытекает, что H — прямая сумма простых алгебр. Поэтому H — наследственно идемпотентная, а значит и полупервичная алгебра. В частности, $H \cap H^* = 0$, и потому алгебра A разлагается в прямую сумму $A = H \oplus H^*$ тогда и только тогда, когда $A = H + H^*$ — сумма идеалов H и H^* .

Пусть алгебра A удовлетворяет аннуляторному условию, причем любой главный идеал алгебры A содержит лишь конечное число идемпотентных минимальных идеалов.

Возьмем любой $a \in A$. В силу (7) $H((a)_A)$ — идеал алгебр A , H и $(a)_A$. Еще раз применяя (7), получаем, что если $H((a)_A) = 0$, то $a \in H^*$ и потому $a \in H + H^*$.

Пусть $H((a)_A) \neq 0$. Тогда, в силу (6) и леммы 1 $H((a)_A) = \sum_{i=1}^m M_i = \bigoplus_{i=1}^m M_i$ — конечная прямая сумма простых алгебр M_i (идемпотентных минимальных идеалов, содержащихся в главном идеале $(a)_A$). Но тогда, учитывая, что A — алгебра с аннуляторным условием, и применяя леммы 4, 5, последовательно получаем

$$\begin{aligned} A &= M_1 \oplus M_1^*, \quad M_1^* \supseteq M_2, \quad M_1^* = M_2 \oplus (M_1^* \cap M_2^*), \dots \\ \dots, \quad M_1^* \cap M_2^* \cap \dots \cap M_{m-1}^* &\supseteq M_m, \quad M_1^* \cap M_2^* \cap \dots \cap M_{m-1}^* = \\ &= M_m \oplus (M_1^* \cap \dots \cap M_{m-1}^* \cap M_m^*). \end{aligned}$$

А из полученных равенств легко вытекает равенство

$$A = H((a)_A) \oplus (H((a)_A))^*, \quad (8)$$

так как $H((a)_A) = \sum_{i=1}^m M_i$, и потому $(H((a)_A))^* = \bigcap_{i=1}^m M_i^*$.

Пересекая обе части равенства (8) с главным идеалом $(a)_A$, получаем равенство

$$(a)_A = H((a)_A) \oplus K, \quad \text{где } K = (a)_A \cap (H((a)_A))^*. \quad (9)$$

Но из (7), (9) и леммы 1 легко вытекает, что $H(K) = 0$. Еще раз применяя (7), получаем, что $KH = HK = 0$, т. е. $K \subseteq H^*$. Но тогда в силу (9), $(a) \subseteq H + H^*$, т. е. $a \in H + H^*$.

В силу произвольности выбора элемента a получаем $A = H + H^* = H \oplus H^*$.

Обратно, пусть алгебра A разлагается в прямую сумму $A = H \oplus H^*$.

Ясно, что любая простая алгебра удовлетворяет аннуляторному условию. Поэтому в силу леммы 5 и алгебра H удовлетворяет аннуляторному условию как прямая сумма простых алгебр. Но в силу (7) H^* — алгебра, не имеющая идемпотентных минимальных идеалов. Поэтому и H^* — алгебра с аннуляторным условием. Еще раз применяя лемму 5, получаем, что и сама алгебра $A = H \oplus H^*$ — алгебра с аннуляторным условием.

Возьмем теперь любой элемент $a \in A$. Из равенства $A = H \oplus H^*$ вытекает, что $a = e + b$ для некоторых однозначно определенных элементов $e \in H$, $b \in H^*$. Но алгебра H

наследственно идемпотентна. Поэтому $e \in HeH = HaH \subseteq (a)_A$. Но тогда, как легко видеть, верно равенство $(a)_A = (e)_A \oplus \oplus (b)_A$. Учитывая (7) и равенство $H \cap H^* = 0$, получаем $(e)_A = H \cap (a)_A = H((a)_A)$. Но из леммы 1 вытекает, что все главные идеалы алгебры $H = H(A)$ являются главными идеалами всей алгебры A и разлагаются в конечную прямую сумму простых алгебр. Еще раз применяя лемму 1, получаем, что $H((a)_A) = (e)_A$ — алгебра, имеющая лишь конечное число идемпотентных минимальных идеалов. А это означает в силу (6), что главный идеал $(a)_A$ содержит лишь конечное число идемпотентных минимальных идеалов.

Следовательно, A — алгебра с аннуляторным условием, причем любой главный идеал алгебры A содержит лишь конечное число идемпотентных минимальных идеалов.

Лемма доказана.

Теорема 2. Для любой ненулевой алгебры A равносильны утверждения:

а) A — полупервичная алгебра с аннуляторным условием и условием минимальности для главных идеалов.

б) Любой главный идеал алгебры A , отличный от нулевого, является конечной прямой суммой простых алгебр.

в) Любой главный идеал алгебры A является полупервичной алгеброй с аннуляторным условием и условием минимальности для идеалов.

г) Алгебра A разлагается в прямую сумму простых алгебр.

Доказательство. Из леммы 1 вытекает, что утверждения б) и г) равносильны. Кроме того, в силу леммы 5 верны импликации г) $\Rightarrow$ а), б) $\Rightarrow$ в).

а) $\Rightarrow$ г). Пусть A — полупервичная алгебра с аннуляторным условием и условием минимальности для главных идеалов. Ясно, что тогда в A есть минимальные идеалы, все они идемпотентны и каждый ненулевой идеал содержит некоторый минимальный.

Пусть $\{M_i \mid i \in \Gamma\}$ — множество всех минимальных идеалов алгебры A , причем $M_i = M_j$ тогда и только тогда, когда $i = j$. В силу леммы 1 и сказанного

$$\sum_{i \in \Gamma} M_i = H(A) = \bigoplus_{i \in \Gamma} M_i, \quad (10)$$

т. е. $H = H(A)$ — прямая сумма простых алгебр M_i , причем $H^* = 0$.

Возьмем произвольный элемент $a \in A$, $a \neq 0$. Ненулевой идеал (a) должен содержать некоторый минимальный идеал M_1 . Но M_1 — идемпотентный минимальный идеал в алгебре A и A — алгебра с аннуляторным условием. Поэтому в силу леммы 6 найдется такой элемент $a_1 \in A$, что $(a) = M_1 \oplus (a_1)$, причем $(a_1) = M_1^* \cap (a)$. Если в главном идеале (a) есть минимальный идеал $M_2 \neq M_1$, то $M_2 \subseteq M_1^* \cap (a) = (a_1)$, и потому $(a_1) = M_2 \oplus (a_2)$ для некоторого такого элемента $a_2 \in A$, что $(a_2) = M_2^* \cap (a_1) = M_1^* \cap M_2^* \cap (a)$. Продолжая процесс, мы получаем строго убывающую цепь главных идеалов $(a_1) \supset (a_2) \supset \dots$ таких, что для каждого члена (a_n) этой цепи верно равенство $(a_n) = (a) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n M_i^* \right)$.

В силу условия минимальности для главных идеалов процесс должен закончиться на некотором конечном шаге. Но если мы закончили процесс на n -м шаге, то $\{M_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ — множество всех минимальных идеалов алгебры A , содержащихся в главном идеале (a) .

Следовательно, любой главный идеал алгебры A содержит лишь конечное число минимальных идеалов. Поэтому в силу леммы 7 $A = H$, так как $H^* = 0$. Но тогда в силу (10) $A = \bigoplus_{i \in \Gamma} M_i$ — прямая сумма простых алгебр M_i .

в) $\Rightarrow$ б). Пусть любой главный идеал алгебры A , отличный от нулевого, является полупервичной алгеброй с аннуляторным условием и условием минимальности для идеалов.

Возьмем любой ненулевой элемент $a \in A$ и положим $B = (a)$. Повторяя для алгебры B рассуждения, проведенные выше для алгебры A , получаем, что B — прямая сумма простых алгебр. Но алгебра B удовлетворяет условию минимальности для идеалов. Поэтому B — конечная прямая сумма простых алгебр.

Теорема доказана.

Теорема 3. Любая алгебра A с аннуляторным условием и условием минимальности для главных идеалов разлагается в прямую сумму

$$A = \mathfrak{B}^*(A) \oplus (\mathfrak{B}^*(A))^*. \quad (11)$$

При этом алгебра $\mathfrak{B}^*(A)$ разлагается в прямую сумму простых алгебр и является $\mathfrak{B}^*$ -радикальной (т. е. наследственно идемпотентной) алгеброй с аннуляторным условием и условием минимальности для главных идеалов,

$a(\mathfrak{B}^*(A))^*$ — $\mathfrak{B}^*$ -полупростая алгебра с условием минимальности для главных идеалов (не имеющая идемпотентных минимальных идеалов). Обратно, если алгебра A разложена в прямую сумму $A = R \oplus Q$, где R — $\mathfrak{B}^*$ -радикальная алгебра, а Q — $\mathfrak{B}^*$ -полупростая алгебра, то верны равенства $R = \mathfrak{B}^*(A)$ и $Q = (\mathfrak{B}^*(A))^*$. При этом алгебра A удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов тогда и только тогда, когда алгебры R и Q удовлетворяют этому условию, A — алгебра с аннуляторным условием тогда и только тогда, когда R — алгебра с аннуляторным условием.

Доказательство. Начнем с последних двух утверждений.

Пусть алгебра A разложена в прямую сумму $A = R \oplus Q$, где R — наследственно идемпотентная, т. е. $\mathfrak{B}^*$ -радикальная, алгебра, а Q — $\mathfrak{B}^*$ -полупростая алгебра.

Повторяя соответствующую часть доказательства теоремы 1 с заменой $\mathcal{T}^*$ на $\mathfrak{B}^*$, получаем равенства $R = \mathfrak{B}^*(A)$ и $Q = (\mathfrak{B}^*(A))^*$.

Пусть $a \in A$. Тогда $a = r + q$ для некоторых однозначно определенных элементов $r \in R$, $q \in Q$. Но R — наследственно идемпотентная алгебра и верны равенства $RQ = QR = 0$. Поэтому $r \in RrR = RaR \subseteq (a)_A$. Но тогда, как легко видеть, $(a)_A = (r)_R \oplus (q)_Q$, $(r)_R = R \cap (a)_A$, $(q)_Q = Q \cap (a)_A$.

Из полученных равенств вытекает в силу произвольности выбора элемента a , что алгебра A удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов тогда и только тогда, когда этому условию удовлетворяют алгебры R и Q .

Ясно, что все простые алгебры наследственно идемпотентны. Поэтому алгебра Q , как и любая другая $\mathfrak{B}^*$ -полупростая алгебра, не имеет идеалов, являющихся простыми алгебрами, т. е. не имеет идемпотентных минимальных идеалов. Но тогда Q — алгебра с аннуляторным условием.

В силу леммы 5 из сказанного об алгебре Q вытекает, что A — алгебра с аннуляторным условием тогда и только тогда, когда R — алгебра с аннуляторным условием.

Следовательно, последние два утверждения теоремы верны.

Допустим теперь, что A — алгебра с аннуляторным условием, удовлетворяющая условию минимальности для главных идеалов.

В силу леммы 1 алгебра $H = H(A)$ разлагается в прямую сумму простых алгебр. Поэтому алгебра H наследственно идемпотентна, т. е. $\mathfrak{B}^*$ -радикальна. Но тогда $H \subseteq \mathfrak{B}^*(A)$ в силу следствия 5.1 и предложения 5.1.

С другой стороны, наследственно идемпотентная алгебра $\mathfrak{B}^*(A)$ — алгебра с аннуляторным условием в силу леммы 5 как идеал алгебры с аннуляторным условием. Кроме того, в силу леммы 4.4 любой главный идеал алгебры $\mathfrak{B}^*(A)$ является идеалом всей алгебры A . Поэтому алгебра $\mathfrak{B}^*(A)$ удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов, как и алгебра A . В результате получаем, что $\mathfrak{B}^*(A)$ — наследственно идемпотентная алгебра с аннуляторным условием, удовлетворяющая условию минимальности для главных идеалов. Но тогда в силу теоремы 2 алгебра $\mathfrak{B}^*(A)$ разлагается в прямую сумму простых алгебр, и потому $\mathfrak{B}^*(A) \subseteq H(A) = H$.

Следовательно, $\mathfrak{B}^*(A) = H$ и $(\mathfrak{B}^*(A))^* = H^*$. Остается доказать равенство (11), так как $\mathfrak{B}^*$ -полупростота алгебры $(\mathfrak{B}^*(A))^*$ вытекает из равенства $\mathfrak{B}^*(A) \cap (\mathfrak{B}^*(A))^* = 0$.

Пусть $a \in A$, $\{M_i \mid i \in \Gamma\}$ — множество всех минимальных (идемпотентных!) идеалов, содержащихся в главном идеале $(a)_A$. Докажем, что это множество конечно. При этом будем считать, что $\Gamma \neq \emptyset$, т. е. в главном идеале $(a)_A$ есть идемпотентные минимальные идеалы.

Пусть M_1 — любой идемпотентный минимальный идеал, содержащийся в $(a)_A$. Тогда в силу леммы 6 $(a) = M_1 \oplus (a_1)$, $(a_1) = M_1^* \cap (a)$ для некоторого элемента $a_1 \in A$. Пусть в главном идеале (a) есть идемпотентные минимальные идеалы, отличные от M_1 , и M_2 — один из них. Тогда $M_2 \subseteq M_1^* \cap (a) = (a_1)$, и потому $(a_1) = M_2 \oplus (a_2)$, $(a_2) = M_2^* \cap (a_1)$ для некоторого элемента $a_2 \in A$. Но тогда $(a_2) = M_1^* \cap M_2^* \cap (a)$. Пусть в главном идеале (a) есть идемпотентные минимальные идеалы, отличные от M_1 , M_2 , и M_3 — один из них. Тогда $M_3 \subseteq M_1^* \cap M_2^* \cap (a) = (a_2)$, и мы продолжаем процесс.

В ходе процесса строится строго убывающая цепь главных идеалов $(a) \supset (a_1) \supset (a_2) \dots$. Поэтому в силу условия минимальности для главных идеалов процесс должен закончиться на конечном шаге. А это означает, что множество $\{M_i \mid i \in \Gamma\}$ всех идемпотентных минимальных идеалов, содержащихся в главном идеале $(a)_A$, конечно.

Таким образом, A — алгебра с аннуляторным условием и любой главный идеал алгебры A содержит лишь конечное число идемпотентных минимальных идеалов. Поэтому в силу леммы 7 алгебра A разлагается в прямую сумму $A = H \oplus H^*$. Но по доказанному $\mathfrak{B}^*(A) = H$. Следовательно, верно равенство (11).

Теорема доказана.

Следствие 2. Пусть алгебра A удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов и аннуляторному условию. Равносильны утверждения:

а) Алгебра A разлагается в прямую сумму $A = \mathfrak{B}^*(A) \oplus \mathfrak{B}^{**}(A)$.

б) Алгебра A разлагается в прямую сумму $A = \mathfrak{B}^*(A) \oplus \mathfrak{B}(A)$.

в) Аннулятор $(\mathfrak{B}^*(A))^*$ идеала $\mathfrak{B}^*(A)$ является антипростой алгеброй.

г) Верно равенство $\mathfrak{B}^{**}(A) = (\mathfrak{B}^*(A))^*$.

д) Аннулятор $(\mathfrak{B}^*(A))^*$ идеала $\mathfrak{B}^*(A)$ — $\mathfrak{B}$ -радикальная алгебра.

е) Верно равенство $\mathfrak{B}(A) = (\mathfrak{B}^*(A))^*$.

ж) Фактор-алгебра $A/\mathfrak{B}^*(A)$ является антипростой алгеброй.

з) Фактор-алгебра $A/\mathfrak{B}^*(A)$ — $\mathfrak{B}$ -радикальная алгебра.

Действительно, в силу теоремы 3 алгебра A разлагается в прямую сумму $A = \mathfrak{B}^*(A) \oplus (\mathfrak{B}^*(A))^*$. Но алгебры $\mathfrak{B}(A)$, $\mathfrak{B}^{**}(A)$ и $(\mathfrak{B}^*(A))^*$ являются $\mathfrak{B}^*$ -полупростыми алгебрами. Поэтому, снова в силу теоремы 3, верны соотношения а) $\Leftrightarrow$ г), б) $\Leftrightarrow$ е). Кроме того, $(\mathfrak{B}^*(A))^* \simeq A/\mathfrak{B}^*(A)$. Поэтому в) $\Leftrightarrow$ ж), д) $\Leftrightarrow$ з).

По построению дополнительного радикала $\mathfrak{B}^*(A) \cap \mathfrak{B}^{**}(A) = \mathfrak{B}^*(A) \cap \mathfrak{B}(A) = 0$. Поэтому $\mathfrak{B}(A) \subseteq \mathfrak{B}^{**}(A) \subseteq (\mathfrak{B}^*(A))^*$. Но тогда в силу основных свойств кручений верны соотношения в) $\Leftrightarrow$ г), д) $\Leftrightarrow$ е).

Но в силу теоремы 5.1 в алгебре A , как и в любой другой алгебре с условием минимальности для главных идеалов, верно равенство $\mathfrak{B}^{**}(A) = \mathfrak{B}(A)$. Поэтому очевидны соотношения а) $\Leftrightarrow$ б), г) $\Leftrightarrow$ е).

Следовательно, утверждения а) — з) равносильны.

Таким образом, аннуляторное условие позволяет доказывать структурные теоремы как для полупервичных алгебр (теорема 2), так и для любых алгебр с некоторыми условиями конечности (теорема 3).

Анализируя доказательства теорем 1 и 3, легко заметить, что мы можем доказывать аналогичные теоремы не только для радикалов $\mathcal{F}^*$ и $\mathcal{B}^*$, но и для любых двойственных подыдемпотентных радикалов.

А именно, пусть Π — произвольный непустой класс простых алгебр. Из описания двойственных подыдемпотентных радикалов (см. §§ 2, 3 гл. 3) вытекает, что класс Π совпадает с классом всех простых $\mathfrak{v}^*$ -радикальных алгебр для некоторого двойственного подыдемпотентного радикала $\mathfrak{v}^*$.

Минимальный идеал M алгебры A назовем *минимальным идеалом из Π* , если алгебра M является простой алгеброй из класса Π . Обозначим для любой алгебры A

$$H_{\Pi}(A) = \sum \{M \mid M \text{ — минимальный идеал из } \Pi \text{ в алгебре } A\}.$$

Если в алгебре A нет минимальных идеалов из Π , то полагаем $H_{\Pi}(A) = 0$.

Говорим, что A — *алгебра с Π -аннуляторным условием*, если для любого минимального идеала M из Π выполнено хотя бы одно (а значит и все) из утверждений а), б), в) леммы 4.

Для алгебр с Π -аннуляторным условием легко доказывается, как и для алгебр с аннуляторным условием, что любой идеал алгебры с Π -аннуляторным условием и прямая сумма алгебр с Π -аннуляторным условием сами будут алгебрами с Π -аннуляторным условием. Но тогда верна

Лемма 8. Пусть в алгебре A $H_{\Pi} = H_{\Pi}(A)$ и H_{Π}^* — аннулятор идеала H_{Π} . Алгебра A разлагается в прямую сумму $A = H_{\Pi} \oplus H_{\Pi}^*$ тогда и только тогда, когда она является алгеброй с Π -аннуляторным условием и любой ее главный идеал содержит лишь конечное число минимальных идеалов из Π .

Доказательство почти дословно повторяет доказательство леммы 7. А из леммы 8 вытекает

Теорема 4. Пусть $\mathfrak{v}^*$ — произвольный двойственный подыдемпотентный радикал, $\Pi = \Pi(\mathfrak{v}^*)$ — класс всех простых $\mathfrak{v}^*$ -радикальных алгебр. Любая алгебра A с Π -аннуляторным условием и условием минимальности для главных идеалов разлагается в прямую сумму

$$A = \mathfrak{v}^*(A) \oplus (\mathfrak{v}^*(A))^*.$$

При этом $\mathfrak{v}^*(A) = H_{\Pi}(A)$, алгебра $\mathfrak{v}^*(A)$ разлагается

в прямую сумму простых алгебр из класса Π и является $\mathfrak{B}^*$ -радикальной алгеброй с Π -аннуляторным условием и условием минимальности для главных идеалов, а $(\mathfrak{B}^*(A))^*$ — $\mathfrak{B}^*$ -полупростая алгебра с условием минимальности для главных идеалов (не имеющая минимальных идеалов из Π). Обратно, если алгебра A разложена в прямую сумму $A = R \oplus Q$, где R — $\mathfrak{B}^*$ -радикальная алгебра, а Q — $\mathfrak{B}^*$ -полупростая алгебра, то верны равенства $R = \mathfrak{B}^*(A)$ и $Q = (\mathfrak{B}^*(A))^*$. При этом алгебра A удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов тогда и только тогда, когда алгебры R и Q удовлетворяют этому условию, A — алгебра с Π -аннуляторным условием тогда и только тогда, когда R удовлетворяет этому условию.

Доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы 3.

Нетрудно получить и аналог следствий 1, 2.

Ясно, что теорема 4 является обобщением теорем 1 и 3: если Π — класс всех простых алгебр, то приходим к теореме 3, а если Π — класс всех простых алгебр с единицей — к теореме 1.

ГЛАВА 5

РАДИКАЛЫ В КАТЕГОРИЯХ

В работе А. Г. Куроша «Радикалы колец и алгебр», положившей начало общей теории радикалов, было отмечено, что общая теория радикалов и основные методы построения радикалов могут быть перенесены с колец и алгебр на любые другие алгебраические системы, для которых имеют смысл понятия гомоморфизма, ядра и образа гомоморфизма и верны обычные теоремы о гомоморфизмах (изоморфизмах). Поэтому, чтобы избежать параллелизма при развитии теории радикалов в различных алгебраических системах, близких к кольцам и алгебрам, общую теорию радикалов и кручений необходимо развивать для категорий. Один из вариантов развития теории радикалов в категориях, достаточно близкий к общей теории радикалов колец и алгебр, и отражен ниже.

§ 1. Необходимые понятия и результаты из теории категорий

Категория $\mathcal{K}$ — это пара $(\text{Ob } \mathcal{K}, \text{Mor } \mathcal{K})$, где $\text{Ob } \mathcal{K}$ — класс, элементы которого называются *объектами* категории $\mathcal{K}$ (и обозначаются большими латинскими буквами $A, B, C, \dots$; быть может с индексами), а $\text{Mor } \mathcal{K}$ — класс, элементы которого называются *морфизмами* категории $\mathcal{K}$ (и обозначаются малыми греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, быть может с индексами). Объекты и морфизмы категории должны быть связаны между собой следующими условиями:

1. Каждой упорядоченной паре объектов A, B сопоставлено некоторое множество $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$ морфизмов, называемых *морфизмами объекта A в объект B* .

2. Каждый морфизм принадлежит одному и только одному из множеств $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$.

3. В классе $\text{Mog } \mathcal{K}$ введена частичная бинарная операция умножения: *произведение* $\alpha\beta$ морфизмов $\alpha \in \text{Mog } \mathcal{K}(A, B)$ и $\beta \in \text{Mog } \mathcal{K}(C, D)$ определено тогда и только тогда, когда объекты B, C совпадают и при этом $\alpha\beta \in \text{Mog } \mathcal{K}(A, D)$.

4. Введенная частичная операция умножения морфизмов должна быть ассоциативна, т. е. если $\alpha \in \text{Mog } \mathcal{K}(A, B)$, $\beta \in \text{Mog } \mathcal{K}(B, C)$ и $\gamma \in \text{Mog } \mathcal{K}(C, D)$, то $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

5. Для каждого объекта A в множестве $\text{Mog } \mathcal{K}(A, A)$ выделен такой морфизм e_A , называемый *тождественным морфизмом объекта A* , что для полученной системы тождественных морфизмов верно соотношение

$$\alpha \in \text{Mog } \mathcal{K}(B, C) \Rightarrow e_B \alpha = \alpha = \alpha e_C. \quad (1)$$

Из (1) легко вытекает, что система тождественных морфизмов единственна и потому для каждого объекта A существует точно один тождественный морфизм этого объекта. Поэтому, для краткости, мы будем иногда писать e вместо e_A , если ясно о каком объекте идет речь. Как правило, категория $\mathcal{K}$ будет выбрана и зафиксирована. Поэтому вместо $\text{Mog } \mathcal{K}(A, B)$ будем писать $\text{Mog}(A, B)$. Вместо $\alpha \in \text{Mog}(A, B)$ чаще будем употреблять более привычную запись $\alpha: A \rightarrow B$.

Каждой категории $\mathcal{A}$ можно сопоставить новую категорию $\mathcal{A}^*$. А именно, объекты и морфизмы в $\mathcal{A}^*$ — те же, что и в категории $\mathcal{A}$. Для любой пары объектов A, B полагаем по определению $\text{Mog}_{\mathcal{A}^*}(A, B) = \text{Mog}_{\mathcal{A}}(B, A)$. При этом, если морфизм α категории $\mathcal{A}$, рассматриваемый как морфизм категории $\mathcal{A}^*$, обозначить символом α^* , то полагаем $\beta^* \gamma^* = (\gamma\beta)^*$. Легко видеть, что при этом мы действительно получаем категорию — *категорию $\mathcal{A}^*$, двойственную категории $\mathcal{A}$* .

Существование двойственной категории приводит к «принципу двойственности». А именно, с каждым утверждением $\mathcal{F}$ о морфизмах и объектах связывается двойственное утверждение $\mathcal{F}^*$ и аналогично для понятий, формулировок и доказательств — переход совершается, как правило, простым «изменением направления стрелок», изменением порядка сомножителей в произведениях на противоположный и т. п. Если условия, налагаемые на рассматривае-

мую категорию, верны и для двойственной категории, т. е. с каждым условием выполняется и двойственное, то утверждения $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}^*$ равносильны. При этом, если известно доказательство одного из этих утверждений, то доказательство второго получается переходом к двойственному доказательству.

Однако в силу сказанного принцип двойственности применим не всегда, так как категории $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}^*$ достаточно далеки друг от друга по своим свойствам: условия, выполняющиеся в $\mathcal{K}$, могут не выполняться в $\mathcal{K}^*$, и наоборот. Тем не менее, мы будем избегать доказательства двойственных утверждений, если они получаются «по двойственности» (с помощью указанных выше простых замен слов, изменений направлений стрелок и т. п.).

Всюду ниже мы считаем, что категория $\mathcal{K}$ выбрана и зафиксирована. Поэтому все рассматриваемые объекты и морфизмы — объекты и морфизмы категории $\mathcal{K}$.

Объект O категории $\mathcal{K}$ называется *нулевым объектом*, если для любого объекта A множества $\text{Mog}(A, O)$ и $\text{Mog}(O, A)$ одноэлементны. Всюду ниже считаем, что в рассматриваемой категории $\mathcal{K}$ выполняется

Аксиома 1. В категории $\mathcal{K}$ есть нулевой объект O .

Морфизм $\theta: A \rightarrow B$ называется *изоморфизмом*, если существует такой морфизм $\pi: B \rightarrow A$, что $\theta\pi = \varepsilon_A$ и $\pi\theta = \varepsilon_B$. Легко видеть, что морфизм π определяется изоморфизмом θ однозначно и сам является изоморфизмом. В связи с этим π называется изоморфизмом, обратным изоморфизму θ и обозначается символом θ^{-1} . Из определений вытекает, что произведение изоморфизмов (если оно определено) само является изоморфизмом, причем $(\theta_1\theta_2)^{-1} = \theta_2^{-1}\theta_1^{-1}$, $(\theta^{-1})^{-1} = \theta$. Будем говорить, для краткости, что объекты A, B *изоморфны*, если существует изоморфизм $\theta: A \rightarrow B$.

Скажем, что в категории $\mathcal{K}$ существуют *нулевые морфизмы*, если для любой упорядоченной пары объектов A, B в множестве $\text{Mog}(A, B)$ можно выбрать морфизм 0_A^B , называемый *нулевым морфизмом объекта A в объект B* , так, что для полученной системы нулевых морфизмов верно соотношение

$$\gamma \in \text{Mog}(C, D) \Rightarrow (0_A^C \gamma = 0_A^D, \gamma 0_D^B = 0_C^B). \quad (2)$$

Из (2) легко вытекает, что система нулевых морфизмов (если она существует) единственна и поэтому для каждой

упорядоченной пары A, B объектов существует точно один нулевой морфизм объекта A в объект B . Этот морфизм будет всегда обозначаться символом 0_A^B , как и в определении. Иногда будем писать, для краткости, просто символ 0 , если ясно о каких объектах A, B идет речь.

Предложение 1. *В категории $\mathcal{K}$ существуют нулевые морфизмы. А именно, если O — нулевой объект категории $\mathcal{K}$ и $\text{Mog}(A, O) = \{\omega_A\}$, $\text{Mog}(O, A) = \{\omega^A\}$ для любого объекта A , то морфизмы $\omega_B \omega^C$ дадут нам систему нулевых морфизмов. Любые два нулевых объекта изоморфны и объект, изоморфный нулевому, сам будет нулевым объектом.*

Доказательство. Пусть O — нулевой объект категории $\mathcal{K}$ и ω_A, ω^A — морфизмы, введенные выше. Для любых объектов B, C получаем по построению, что $\omega_B \omega^C \in \text{Mog}(B, C)$. Кроме того, если $\alpha \in \text{Mog}(C, A)$, то $\alpha \omega_A \in \text{Mog}(C, O)$, и потому $\alpha \omega_A = \omega_C$. Аналогично получаем, что если $\beta \in \text{Mog}(B, D)$, то $\omega^B \beta = \omega^D$. Но тогда $\alpha(\omega_A \omega^B) = \omega_C \omega^B$ и $(\omega_A \omega^B)\beta = \omega_A \omega^D$. Сравнивая полученные соотношения с соотношениями (2), получаем, что морфизмы $0_A^B = \omega_A \omega^B$ дают нам систему нулевых морфизмов.

Пусть объект X изоморфен нулевому объекту O , т. е. $\theta\pi = \varepsilon_O$ и $\pi\theta = \varepsilon_X$ для некоторых изоморфизмов $\theta: O \rightarrow X$, $\pi: X \rightarrow O$. Тогда $\theta = \omega^X$ и $\pi = \omega_X$, так как O — нулевой объект. Но тогда для любого объекта A получаем

$$\begin{aligned} \gamma \in \text{Mog}(A, X) &\Rightarrow \gamma = \gamma \varepsilon_X = \gamma \omega_X \omega^X = \omega_A \omega^X, \\ \delta \in \text{Mog}(X, A) &\Rightarrow \delta = \varepsilon_X \delta = \omega_X \omega^X \delta = \omega_X \omega^A, \end{aligned} \quad (3)$$

так как $\omega_B \omega^C$ — нулевые морфизмы по доказанному. А из (3) вытекает по определению, что X — нулевой объект.

Обратно, пусть X — нулевой объект. Тогда множество $\text{Mog}(X, X)$ одноэлементно и $\varepsilon_X = \omega_X \omega^X$. Но одноэлементно и множество $\text{Mog}(O, O)$, так как и O — нулевой объект. В результате получаем, что ω_X и ω^X — обратные друг другу изоморфизмы. А это и означает, что объекты O и X изоморфны.

Предложение доказано.

Морфизм $\mu: A \rightarrow B$ называется *мономорфизмом*, если для любых двух морфизмов $\alpha, \beta: C \rightarrow A$ из равенства $\alpha\mu = \beta\mu$ вытекает равенство $\alpha = \beta$. Морфизм $\nu: B \rightarrow A$ называется *эпиморфизмом*, если для любых двух морфиз-

мов $\gamma, \delta: A \rightarrow C$ из равенства $\nu\gamma = \nu\delta$ вытекает равенство $\gamma = \delta$.

Лемма 1. Пусть морфизм φ представлен в виде произведения $\varphi = \varphi_1\varphi_2$. Если φ — мономорфизм, то и морфизм φ_1 является мономорфизмом. Если φ_1 и φ_2 — мономорфизмы, то и φ — мономорфизм. Если φ — эпиморфизм, то и морфизм φ_2 является эпиморфизмом. Если φ_1 и φ_2 — эпиморфизмы, то и φ — эпиморфизм.

Доказательство. Пусть φ — мономорфизм. Тогда для любых морфизмов α, β

$$\alpha\varphi_1 = \beta\varphi_1 \Rightarrow \alpha\varphi = \alpha\varphi_1\varphi_2 = \beta\varphi_1\varphi_2 = \beta\varphi \Rightarrow \alpha = \beta.$$

А это означает, что φ_1 — мономорфизм. Обратно, пусть φ_1 и φ_2 — мономорфизмы. Тогда для любых морфизмов α, β получаем

$$\alpha\varphi = \beta\varphi \Rightarrow \alpha\varphi_1\varphi_2 = \beta\varphi_1\varphi_2 \Rightarrow \alpha\varphi_1 = \beta\varphi_1 \Rightarrow \alpha = \beta.$$

Поэтому сам морфизм φ является мономорфизмом.

Последние два утверждения доказываются по двойственности.

Лемма 2. Любой изоморфизм является мономорфизмом и эпиморфизмом. Для любого объекта A нулевой морфизм 0_A^0 является мономорфизмом, а нулевой морфизм 0_A^0 — эпиморфизмом.

Действительно, если θ — изоморфизм, то $\varepsilon = \theta\theta^{-1}$ и $\varepsilon = \theta^{-1}\theta$. Кроме того, для любого объекта A получаем по определению нулевого объекта $0_A^0 0_A^0 = \varepsilon_0$. Остается учесть, что тождественный морфизм является и эпиморфизмом и мономорфизмом, а затем применить лемму 1.

Пусть A — произвольный объект категории $\mathcal{K}$.

Рассмотрим класс всех пар вида (C, γ) , где $\gamma: C \rightarrow A$ — мономорфизм. Если нам даны две пары (C_1, γ_1) и (C_2, γ_2) указанного вида, то скажем, что пара (C_1, γ_1) эквивалентна паре (C_2, γ_2) , если $\gamma_1 = \theta\gamma_2$ для некоторого изоморфизма θ . Из свойств изоморфизмов вытекает, что установленное отношение между парами действительно является эквивалентностью (т. е. рефлексивно, симметрично и транзитивно). Поэтому класс всех пар указанного вида разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных пар.

Каждый класс эквивалентных пар вида (C, γ) , где $\gamma: C \rightarrow A$ — мономорфизм, называется *подобъектом объекта A* .

Подобъект, содержащий пару (C, γ) , будем обозначать символом $[C, \gamma]$. Говорим, что *подобъект* $[B, \beta]$ *меньше подобъекта* $[C, \gamma]$ (или содержится в подобъекте $[C, \gamma]$ и т. п.), и писать $[B, \beta] \leq [C, \gamma]$, если $\beta = \tau\gamma$ для некоторого морфизма τ .

Предложение 2. Для любого объекта A введенное бинарное отношение $\leq$ между подобъектами объекта A является частичной упорядоченностью. При этом наибольшим подобъектом объекта A является несобственный подобъект $[A, \varepsilon_A]$, а наименьшим подобъектом — нулевой подобъект $[O, 0_O^A]$.

Доказательство. Пусть $[B, \beta]$ и $[C, \gamma]$ — подобъекты объекта A .

Пусть для некоторой пары (B', β') из класса $[B, \beta]$ и некоторой пары (C', γ') из класса $[C, \gamma]$ найден такой морфизм τ' , что $\beta' = \tau'\gamma'$. Возьмем любую пару (B'', β'') из класса $[B, \beta]$ и любую пару (C'', γ'') из класса $[C, \gamma]$. Тогда по определению подобъекта и эквивалентности пар $\beta' = \pi\beta''$ и $\gamma' = \theta\gamma''$ для некоторых изоморфизмов π, θ . Но тогда $\beta'' = \pi^{-1}\beta' = \pi^{-1}\tau'\gamma' = (\pi^{-1}\tau'\theta)\gamma''$, т. е. найден такой морфизм τ'' , что $\beta'' = \tau''\gamma''$.

Из доказанного вытекает корректность определения бинарного отношения $\leq$.

Пусть $[B, \beta] \leq [C, \gamma]$ и $[C, \gamma] \leq [B, \beta]$. Это означает, по определению, что для некоторых морфизмов τ и θ верны равенства $\beta = \tau\gamma$, $\gamma = \theta\beta$. Но тогда верны и равенства $\varepsilon_B\beta = \beta = \tau\theta\beta$, $\varepsilon_C\gamma = \gamma = \theta\tau\gamma$. Учитывая, что β и γ — мономорфизмы, получаем равенства $\varepsilon = \tau\theta$ и $\varepsilon = \theta\tau$. Поэтому τ и θ — обратные друг другу изоморфизмы, т. е. пары (B, β) и (C, γ) эквивалентны. Но тогда $[B, \beta] = [C, \gamma]$.

Следовательно бинарное отношение $\leq$ антисимметрично. Кроме того, это отношение рефлексивно, так как $\gamma = \varepsilon_C\gamma$ для любого морфизма $\gamma: C \rightarrow A$, и транзитивно в силу ассоциативности умножения морфизмов. А это и означает, что введенное бинарное отношение $\leq$ является частичной упорядоченностью.

В силу леммы 2 ε_A и 0_O^A — мономорфизмы. Кроме того, $\beta = \beta\varepsilon_A$ для любого морфизма $\beta: B \rightarrow A$ и $0_O^A = 0_O^C\gamma$ для любого морфизма $\gamma: C \rightarrow A$. А это означает по определению, что несобственный подобъект $[A, \varepsilon_A]$ — наибольший под-

объект объекта A , а нулевой подобъект $[0, 0_A]$ — наименьший подобъект объекта A .

Предложение доказано.

Чтобы избежать логических трудностей, связанных с аксиоматикой теории множеств, нам удобно считать, что подобъекты любого объекта образуют множества. Более того, мы всегда будем предполагать, что в категории $\mathcal{K}$ выполнена

Аксиома 2. Подобъекты любого объекта образуют частично упорядоченное множество.

Пусть $\alpha: A \rightarrow B$ — произвольный морфизм в категории $\mathcal{K}$.

Мономорфизм $\gamma: C \rightarrow A$ назовем *ядерным относительно морфизма α* , если $\gamma\alpha = 0$ и для любого морфизма $\delta: D \rightarrow A$ из равенства $\delta\alpha = 0$ вытекает равенство $\delta = \delta'\gamma$ для некоторого морфизма δ' .

Предложение 3. Пусть $\gamma': C' \rightarrow A$ и $\gamma'': C'' \rightarrow A$ — мономорфизмы. Если мономорфизм γ' является ядерным относительно морфизма α и пары (C', γ') , (C'', γ'') эквивалентны, то и мономорфизм γ'' является ядерным относительно морфизма α . Обратно, если оба мономорфизма γ' и γ'' являются ядерными относительно морфизма α , то пары (C', γ') , (C'', γ'') эквивалентны.

Доказательство. Пусть пары (C', γ') , (C'', γ'') эквивалентны и мономорфизм γ' является ядерным относительно морфизма α . Из эквивалентности пар вытекает равенство $\gamma'' = \theta\gamma'$ для некоторого изоморфизма θ . Но тогда $\gamma''\alpha = \theta\gamma'\alpha = 0$ по определению нулевого морфизма, так как $\gamma'\alpha = 0$. С другой стороны, пусть $\delta\alpha = 0$ для некоторого морфизма δ . Тогда $\delta = \delta'\gamma'$ для некоторого морфизма δ' , так как γ' — мономорфизм, ядерный относительно морфизма α . Но тогда $\delta = (\delta'\theta^{-1})\gamma''$ и потому мономорфизм γ'' тоже является ядерным относительно морфизма α .

Обратно, пусть оба мономорфизма γ' и γ'' являются ядерными относительно α . Тогда $\gamma'\alpha = 0$, $\gamma''\alpha = 0$ и потому $\gamma'' = \tau\gamma'$, $\gamma' = \theta\gamma''$ для некоторых морфизмов τ и θ . Но тогда $\gamma'' = \tau\theta\gamma''$, $\gamma' = \theta\tau\gamma'$ откуда, как и в доказательстве предложения 2, θ и τ — обратные друг другу изоморфизмы. Поэтому пары (C', γ') , (C'', γ'') эквивалентны.

Предложение доказано.

Подобъект $[C, \gamma]$ объекта A называется *ядром морфизма $\alpha: A \rightarrow B$* , если мономорфизм $\gamma: C \rightarrow A$ — ядерный

относительно морфизма α . Корректность этого определения вытекает из предложения 3.

Подобъект объекта A называется *идеалом объекта A* , если он является ядром некоторого морфизма. Мы всегда будем предполагать, что в категории $\mathcal{K}$ выполнена

Аксиома 3. Идеалы любого объекта образуют полную подрешетку частично упорядоченного множества под-объектов этого объекта.

Это означает следующее: если $[C_i, \mu_i]$ идеалы объекта A , то существуют пересечение $\bigwedge [C_i, \mu_i] = [C, \mu]$ — наибольший подобъект, содержащийся во всех $[C_i, \mu_i]$, и объединение $\bigvee [C_i, \mu_i] = [P, \sigma]$ — наименьший подобъект, содержащий все $[C_i, \mu_i]$, причем $[C, \mu]$, $[P, \sigma]$ — идеалы объекта A .

Отметим, что, как легко видеть, наименьшим идеалом объекта A является нулевой идеал $[O, 0]$ объекта A , являющийся ядром тождественного морфизма ε , а наибольшим идеалом — несобственный идеал $[A, \varepsilon]$, являющийся ядром нулевого морфизма 0 .

В силу предложения 3 определение ядра морфизма корректно, причем морфизм имеет не более одного ядра. Мы всегда будем предполагать, что в категории $\mathcal{K}$ выполнена

Аксиома 4. Любой морфизм в категории $\mathcal{K}$ имеет ядро. Ядро морфизма α всегда будем обозначать символом $\text{Ker } \alpha$.

Лемма 3. Пусть морфизм $\alpha: A \rightarrow B$ имеет ядро $\text{Ker } \alpha = [K, \mu]$. Если $\mu = \lambda\sigma$ для некоторого мономорфизма σ , то λ — мономорфизм и $\text{Ker } \sigma\alpha = [K, \lambda]$.

Действительно, λ — мономорфизм в силу леммы 1. При этом $\lambda(\sigma\alpha) = \mu\alpha = 0$. С другой стороны, пусть $\delta(\sigma\alpha) = 0$ для некоторого морфизма δ . Тогда $(\delta\sigma)\alpha = 0$, и потому по определению ядра $\delta\sigma = \delta'\mu = (\delta'\lambda)\sigma$ для некоторого морфизма δ' . Но тогда $\delta = \delta'\lambda$, так как σ — мономорфизм, и, следовательно, $\text{Ker } \sigma\alpha = [K, \lambda]$.

Лемма 4. Для любого морфизма $v: A \rightarrow C$ и любого мономорфизма $\gamma: C \rightarrow B$ верно равенство $\text{Ker } \gamma v = \text{Ker } v$.

Доказательство. Пусть морфизм v имеет ядро $\text{Ker } v = [K, \mu]$. По определению ядра $\mu v = 0$. Но тогда и $\mu(\gamma v) = 0$. Кроме того, если $\delta(\gamma v) = 0$ для некоторого морфизма δ , то $(\delta v)\gamma = 0$, откуда $\delta v = 0$, так как γ — моно-

морфизм. Поэтому $\delta = \delta' \mu$ для некоторого морфизма δ' , так как $\text{Ker } v = [K, \mu]$. Еще раз применяя определение ядра, получаем равенство $\text{Ker } v\gamma = [K, \mu] = \text{Ker } v$.

Лемма доказана.

Эпиморфизм $v: A \rightarrow B$ называется *нормальным*, если для любого морфизма $\delta: A \rightarrow D$ такого, что

$$\forall \lambda \in \text{Mor}(E, A) \mid \lambda v = 0 \Rightarrow \lambda \delta = 0, \quad (4)$$

существует такой морфизм δ' , что $\delta = v\delta'$

Учитывая аксиому 4, мы можем дать более ясную характеристику нормальных эпиморфизмов (ее часто берут в качестве определения).

Лемма 5. Эпиморфизм $v: A \rightarrow B$ с ядром $\text{Ker } v = [K, \mu]$ будет нормальным эпиморфизмом тогда и только тогда, когда для любого морфизма $\delta: A \rightarrow D$ из равенства $\mu\delta = 0$ вытекает равенство $\delta = v\delta'$ для некоторого морфизма δ' .

Доказательство. Пусть $v: A \rightarrow B$ — эпиморфизм с ядром $\text{Ker } v = [K, \mu]$.

Пусть эпиморфизм v нормален. Возьмем любой такой морфизм δ , что $\mu\delta = 0$. Если для некоторого морфизма λ верно равенство $\lambda v = 0$, то по определению ядра $\lambda = \lambda' \mu$ для некоторого морфизма λ' , и потому $\lambda \delta = \lambda' \mu \delta = 0$. Следовательно соотношение (4) выполняется для любого морфизма λ . Но тогда в силу нормальности v получаем $\delta = v\delta'$ для некоторого морфизма δ' .

Обратно, пусть эпиморфизм v таков, что для любого морфизма δ из равенства $\mu\delta = 0$ вытекает равенство $\delta = v\delta'$ для некоторого морфизма δ' . Возьмем любой такой морфизм δ , что для любого морфизма λ верно соотношение (4). Тогда, в частности, при $\lambda = \mu$ получаем, что $\mu v = 0$ влечет $\mu\delta = 0$. А из последнего равенства вытекает в силу условий, налагаемых на эпиморфизм v , равенство $\delta = v\delta'$ для некоторого морфизма δ' . Следовательно эпиморфизм v нормален.

Лемма доказана.

Предложение 4. Пусть морфизм $\alpha: A \rightarrow B$ представлен в виде произведения $\alpha = v\gamma$ нормального эпиморфизма $v: A \rightarrow C$ и мономорфизма $\gamma: C \rightarrow B$. Если $\alpha = v'\gamma'$ для некоторого нормального эпиморфизма $v': A \rightarrow C'$ и некоторого мономорфизма $\gamma': C' \rightarrow B$, то пары (C', γ') и (C, γ) эквивалентны. Обратно, если пары (C', γ') и (C, γ) экви-

валентны, то $\alpha = v'\gamma'$ для некоторого нормального эпиморфизма $v': A \rightarrow C'$ и заданного мономорфизма $\gamma': C' \rightarrow B$.

Доказательство. Пусть морфизм $\alpha: A \rightarrow B$ представлен в виде произведения $\alpha = v\gamma$ нормального эпиморфизма $v: A \rightarrow C$ и мономорфизма $\gamma: C \rightarrow B$. Пусть морфизм α имеет ядро $\text{Ker } \alpha = [K, \mu]$. Тогда в силу леммы 4 $\text{Ker } v = \text{Ker } \alpha = [K, \mu]$. Учитывая все это, и будем вести доказательство.

Пусть $\alpha = v'\gamma'$, где $v': A \rightarrow C'$ — нормальный эпиморфизм, $\gamma': C' \rightarrow B$ — мономорфизм. В силу леммы 4 $\text{Ker } v' = \text{Ker } \alpha = \text{Ker } v$. Поэтому в силу леммы 5 из нормальности эпиморфизмов v' и v вытекает, что $v' = v\theta$, $v = v'\pi$ для некоторых морфизмов θ и π . Но тогда $v'\varepsilon_{C'} = v' = v'\pi\theta$, $v\varepsilon_C = v = v\theta\pi$, и потому $\varepsilon_{C'} = \pi\theta$, $\varepsilon_C = \theta\pi$, так как v' и v — эпиморфизмы. Следовательно π и θ — обратные друг другу изоморфизмы. Но $v'(\pi\gamma) = (v'\pi)\gamma = v\gamma = \alpha = v'\gamma'$. Еще раз учитывая, что v' — эпиморфизм, получаем равенство $\gamma' = \pi\gamma$. А это означает, что пары (C', γ') и (C, γ) эквивалентны, так как π — изоморфизм.

Обратно, пусть пары (C', γ') и (C, γ) эквивалентны, т. е. $\gamma' = \pi\gamma$ для некоторого изоморфизма π . Тогда $\alpha = v\gamma = (v\pi^{-1})(\pi\gamma)$, т. е. $\alpha = v'\gamma'$ для $v' = v\pi^{-1}$. В силу лемм 1 и 2 v' — эпиморфизм. Кроме того, в силу леммы 4 $\text{Ker } v' = \text{Ker } v$, так как изоморфизм π^{-1} является мономорфизмом. Но тогда из леммы 5 легко вытекает, что эпиморфизм v' нормален. Следовательно $\alpha = v'\gamma'$ для некоторого нормального эпиморфизма $v': A \rightarrow C'$ и заданного мономорфизма $\gamma': C' \rightarrow B$. Предложение доказано.

Подобъект $[C, \gamma]$ объекта B называется *образом морфизма $\alpha: A \rightarrow B$* , если $\alpha = v\gamma$ для некоторого нормального эпиморфизма $v: A \rightarrow C$ и указанного мономорфизма $\gamma: C \rightarrow A$.

В силу предложения 4 определение образа морфизма корректно, причем любой морфизм имеет не более одного образа. Всюду ниже считаем, что выполнена

Аксиома 5. Любой морфизм в категории $\mathcal{K}$ имеет образ.

Образ морфизма α всегда будем обозначать символом $\text{Im } \alpha$.

Лемма 6. Морфизм $\alpha: A \rightarrow B$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда ядром морфизма α является нулевой идеал $[0, 0]$. Нормальный эпиморфизм v :

$A \rightarrow C$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он является мономорфизмом. Любой изоморфизм является и мономорфизмом и нормальным эпиморфизмом.

Доказательство. Пусть ядром нормального эпиморфизма $v: A \rightarrow C$ является нулевой идеал, т. е. $\text{Ker } v = [0, 0_O^A]$ (см. предложение 2). Замечая, что $0_O^A \varepsilon_A = 0_O^A$, получаем в силу леммы 5, что $\varepsilon_A = v\theta$ для некоторого морфизма $\theta: C \rightarrow A$. Но тогда $v\varepsilon_C = v = \varepsilon_A v = v\theta v$, и потому $\varepsilon_C = \theta v$, так как v — эпиморфизм. Поэтому v — изоморфизм.

Пусть ядром морфизма $\alpha: A \rightarrow B$ является нулевой идеал, т. е. $\text{Ker } \alpha = [0, 0]$. В силу аксиомы 5 $\alpha = v\gamma$ для некоторого нормального эпиморфизма $v: A \rightarrow C$ и некоторого мономорфизма γ . При этом, в силу леммы 4 $\text{Ker } v = \text{Ker } \alpha = [0, 0]$. Но тогда согласно доказанному выше v — изоморфизм. Поэтому в силу лемм 1 и 2 морфизм $\alpha = v\gamma$ является мономорфизмом.

Обратно, пусть α — мономорфизм, $\text{Ker } \alpha = [K, \mu]$. В силу предложения 2 верно соотношение $[K, \mu] \geq [0, 0_O^A]$. С другой стороны, по определению ядра и нулевых морфизмов $\mu\alpha = 0_K^B = 0_K^A \alpha = 0_K^O 0_O^A \alpha$, и потому $\mu = 0_K^O 0_O^A$. Поэтому верно и обратное соотношение $[K, \mu] \leq [0, 0_O^A]$. Следовательно $[K, \mu] = [0, 0_O^A]$, т. е. ядром мономорфизма α является нулевой идеал $[0, 0]$.

Лемма доказана, так как оставшееся утверждение очевидно.

Лемма 7. Идеалы объекта A — это в точности ядра нормальных эпиморфизмов $v: A \rightarrow B$ объекта A . Для любого морфизма $\alpha: A \rightarrow B$ его ядро $\text{Ker } \alpha$ является наибольшим среди таких подобъектов $[C, \gamma]$ объекта A , что $\gamma\alpha = 0$.

Действительно, первое утверждение вытекает из определения идеала, леммы 4 и аксиомы 5. А второе утверждение вытекает из определения ядра морфизма и частичной упорядоченности для подобъектов.

Предложение 5. Пусть $\mu: K \rightarrow A$ и $\mu': K' \rightarrow A$ — мономорфизмы. Если пары (K, μ) и (K', μ') эквивалентны, то $\text{Im } \mu\alpha = \text{Im } \mu'\alpha$ для любого морфизма α объекта A , т. е. образы морфизмов $\mu\alpha: K \rightarrow B$ и $\mu'\alpha: K' \rightarrow B$ совпадают.

Доказательство. Пусть пары (K, μ) и (K', μ') эквивалентны. Это означает по определению, что для данных мономорфизмов μ и μ' существует такой изоморфизм $\theta:$

$K' \rightarrow K$, что $\mu' = \theta\mu$. Возьмем любой морфизм $\alpha: A \rightarrow B$. В силу аксиомы 5 существуют такие нормальные эпиморфизмы $v: K \rightarrow C$, $v': K' \rightarrow C'$ и мономорфизмы $\gamma: C \rightarrow B$, $\gamma': C' \rightarrow B$, что $\mu\alpha = v\gamma$ и $\mu'\alpha = v'\gamma'$. Но тогда верно и равенство $(\theta v)\gamma = \theta(v\gamma) = \theta(\mu\alpha) = (\theta\mu)\alpha = \mu'\alpha = v'\gamma'$.

По построению, $\theta: K' \rightarrow K$ — изоморфизм, $v: K \rightarrow C$ — эпиморфизм. Поэтому в силу лемм 1 и 2 $\theta v: K' \rightarrow C$ — эпиморфизм. Пусть $\text{Ker } v = [K, \varphi]$. Тогда, очевидно, верно равенство $\varphi = (\varphi\theta^{-1})\theta$ и θ — мономорфизм. Но тогда в силу леммы 3 $\text{Ker } \theta v = [K, \varphi\theta^{-1}]$. Учитывая это, возьмем любой такой морфизм δ , что $(\varphi\theta^{-1})\delta = 0$. Тогда $\varphi(\theta^{-1}\delta) = 0$, и потому из равенства $\text{Ker } v = [K, \varphi]$ вытекает в силу леммы 5 $\theta^{-1}\delta = v\delta'$ для некоторого морфизма δ' , так как v — нормальный эпиморфизм. Из полученного равенства вытекает равенство $\delta = (\theta v)\delta'$. Еще раз применяя лемму 5, получаем, что θv — нормальный эпиморфизм.

Итак, θv , v и v' — нормальные эпиморфизмы, γ и γ' — мономорфизмы, причем верны равенства $\mu\alpha = v\gamma$, $\mu'\alpha = v'\gamma' = (\theta v)\gamma$. Но тогда в силу предложения 4 и определения образа $\text{Im } \mu'\alpha = [C', \gamma'] = [C, \gamma] = \text{Im } \mu\alpha$.

Предложение доказано.

Образом подобъекта $[K, \mu]$ объекта A при морфизме $\alpha: A \rightarrow B$ называется образ морфизма $\mu\alpha: K \rightarrow B$.

Корректность этого определения вытекает из предложения 5. При этом по определению образа морфизма образом подобъекта $[K, \mu]$ объекта A при морфизме $\alpha: A \rightarrow B$ является некоторый подобъект $[C, \gamma]$ объекта B . Мы всегда будем считать, что в рассматриваемой категории выполнена

Аксиома 6. При любом нормальном эпиморфизме $v: A \rightarrow B$ образом любого идеала объекта A всегда является некоторый идеал объекта B .

Для дальнейшего нам необходимо понятие, двойственное понятию подобъекта.

Пусть A — произвольный объект категории $\mathcal{K}$.

Рассмотрим класс всех пар вида (v, C) , где $v: A \rightarrow C$ — эпиморфизм. Если нам даны две пары (v_1, C_1) и (v_2, C_2) указанного вида, то скажем, что пара (v_1, C_1) эквивалентна паре (v_2, C_2) , если $v_1 = v_2\theta$ для некоторого изоморфизма θ . Из свойств изоморфизмов вытекает, что установленное отношение между парами действительно является эквивалентностью. Поэтому класс всех пар указанного

вида разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных пар.

Каждый класс эквивалентных пар вида (v, C) , где $v: A \rightarrow C$ — эпиморфизм, называется *фактор-объектом объекта A* . Фактор-объект, содержащий пару (v, C) , будем обозначать символом $[v, C]$. Говорим, что *фактор-объект $[f, F]$ меньше фактор-объекта $[v, C]$* , если $f = v\tau$ для некоторого морфизма τ .

Ясно, что понятие эпиморфизма двойственно понятию мономорфизма, и потому понятие фактор-объекта двойственно понятию подобъекта. Но тогда по двойственности из предложения 2 получаем

Предложение 2*. Введенное бинарное отношение $\leq$ между фактор-объектами объекта A является частичной упорядоченностью. При этом наибольшим фактор-объектом объекта A является несобственный фактор-объект $[e, A]$, а наименьшим фактор-объектом — нулевой фактор-объект $[0, 0]$.

Пусть $\alpha: B \rightarrow A$ — произвольный морфизм в категории $\mathcal{K}$.

Эпиморфизм $v: A \rightarrow C$ назовем *коядерным относительно морфизма α* , если $\alpha v = 0$ и для любого морфизма $\delta: A \rightarrow D$ из равенства $\alpha \delta = 0$ вытекает равенство $\delta = v\delta'$ для некоторого морфизма δ' . Понятие коядерного эпиморфизма двойственно понятию ядерного мономорфизма. Поэтому по двойственности из предложения 3 получаем

Предложение 3*. Пусть $v': A \rightarrow C'$ и $v'': A \rightarrow C''$ — эпиморфизмы. Если эпиморфизм v' является коядерным относительно морфизма α и пары $(v', C'), (v'', C'')$ эквивалентны, то и эпиморфизм v'' является коядерным относительно морфизма α . Обратно, если оба эпиморфизма v' и v'' являются коядерными относительно морфизма α , то пары $(v', C'), (v'', C'')$ эквивалентны.

Фактор-объект $[v, C]$ объекта A называется *коядерным для морфизма $\alpha: B \rightarrow A$* и обозначается символом $\text{Кокер } \alpha$, если $v: A \rightarrow C$ — эпиморфизм, коядерный относительно морфизма α . Корректность этого определения вытекает из предложения 3*. Фактор-объект объекта A называется *коидеалом объекта A* , если он совпадает с коядром некоторого морфизма $\alpha: B \rightarrow A$.

Предложение 6. Любой морфизм в категории $\mathcal{K}$ имеет коядро. Фактор-объект $[v, C]$ объекта A будет

коидеалом объекта A тогда и только тогда, когда v — нормальный эпиморфизм. При этом, если $\text{Ker } v = [K, \mu]$, то $\text{Koker } \mu = [v, C]$.

Доказательство. Возьмем любой морфизм $\alpha: B \rightarrow A$. В силу аксиомы 5 морфизм α имеет образ $\text{Im } \alpha$. При этом по определению существуют такой нормальный эпиморфизм $\varphi: B \rightarrow T$ и мономорфизм $\gamma: T \rightarrow A$, что $\text{Im } \alpha = [T, \gamma]$ и $\alpha = \varphi\gamma$. В силу предложения 2 $\text{Im } \alpha = [T, \gamma] \leq [A, \varepsilon]$, и потому существуют идеалы объекта A , содержащие подобъект $\text{Im } \alpha$. Но тогда в силу аксиом 3 и 4 среди указанных идеалов существует наименьший — пересечение всех этих идеалов. Пусть наименьшим среди указанных идеалов будет идеал $[K, \mu]$. В силу леммы 7 $[K, \mu] = \text{Ker } v$ для некоторого нормального эпиморфизма $v: A \rightarrow C$.

По построению $\text{Im } \alpha = [T, \gamma] \leq [K, \mu] = \text{Ker } v$. Поэтому $\gamma = \tau\mu$ для некоторого морфизма τ . Но тогда $\alpha v = \varphi\gamma v = \varphi\tau\mu v = 0$, т. е. $\alpha v = 0$. С другой стороны, возьмем любой такой морфизм $\delta: A \rightarrow D$, что $\alpha\delta = 0$. Тогда $\varphi(\gamma\delta) = 0$, а потому $\gamma\delta = 0$, так как φ — эпиморфизм. Поэтому в силу леммы 7 $[T, \gamma] \leq \text{Ker } \delta = [K', \mu']$. Но тогда по построению идеала $[K, \mu] = \text{Ker } v$ верно и соотношение $\text{Ker } v = [K, \mu] \leq [K', \mu'] = \text{Ker } \delta$. Отсюда легко вытекает равенство $\mu\delta = 0$. А из полученного равенства следует, что $\delta = v\delta'$ для некоторого морфизма δ' в силу леммы 5.

Из доказанного вытекает по определению, что нормальный эпиморфизм $v: A \rightarrow C$ является коядерным относительно морфизма $\alpha: B \rightarrow A$. А это означает, что морфизм α имеет коядро $\text{Koker } \alpha = [v, C]$.

Таким образом, мы дали построение коядра $\text{Koker } \alpha$ для любого морфизма $\alpha: B \rightarrow A$, и потому верно первое утверждение предложения.

Пусть $v: A \rightarrow C$ — нормальный эпиморфизм, $\text{Ker } v = [K, \mu]$. Из равенства $\mu = \varepsilon\mu$ вытекает, что образом $\text{Im } \mu$ морфизма μ будет идеал $[K, \mu] = \text{Ker } v$. Но тогда по построению коядра $\text{Koker } \mu = [v, C]$, т. е. фактор-объект $[v, C]$ объекта A является коидеалом этого объекта, совпадая с коядром мономорфизма $\mu: K \rightarrow A$.

Обратно, пусть $[v', C']$ — коидеал объекта A . Тогда по построению коядра найдется такой нормальный эпиморфизм $v: A \rightarrow C$, что $[v', C'] = \text{Koker } \alpha = [v, C]$ для некоторого морфизма $\alpha: B \rightarrow A$. Но тогда по определению

фактор-объектов $v' = v\theta$ для некоторого изоморфизма θ . Поэтому в силу леммы 4 $\text{Ker } v' = \text{Ker } v$. Но тогда из леммы 5 легко вытекает, что v' — нормальный эпиморфизм.

Предложение доказано.

В силу предложения 6 и леммы 7 каждый идеал $[K, \mu]$ объекта A однозначно определяет коидеал $\text{Koker } \mu = [v, C]$ (при этом $v: A \rightarrow C$ — нормальный эпиморфизм и $\text{Ker } v = [K, \mu]$). Фактор-объект $[v, C]$ будем называть *фактор-объектом объекта A по идеалу $[K, \mu]$* . Еще раз применяя предложение 6, получаем, что коидеалы объекта A и фактор-объекты объекта A по его идеалам — это одно и то же.

Предложение 7. Коидеалы любого объекта A образуют полную решетку, дуально изоморфную решетке идеалов. Дуальный изоморфизм устанавливается переходом от идеалов к фактор-объектам по этим идеалам.

Доказательство. Каждому идеалу $[K, \mu]$ объекта A ставим в соответствие коидеал $\text{Koker } \mu$, а каждому коидеалу $[v, C]$ — идеал $\text{Ker } v$. Тогда в силу предложения 6 и леммы 7 эти переходы будут отображениями семейства всех идеалов объекта A на семейство всех коидеалов объекта A и обратно. Замечаем, что при этом

$$\text{Ker } v = [K, \mu] \Leftrightarrow \text{Koker } \mu = [v, C]. \quad (5)$$

Действительно, пусть для коидеала $[v, C]$ верно равенство $\text{Ker } v = [K, \mu]$. В силу предложения 6 v — нормальный эпиморфизм. Но тогда по построению коядра (или снова в силу предложения 6) $\text{Koker } \mu = [v, C]$. Обратно, пусть для идеала $[K, \mu]$ верно равенство $\text{Koker } \mu = [v, C]$. Тогда по определению $\mu v = 0$, и потому верно включение $[K, \mu] \leq \text{Ker } v$. С другой стороны, в силу леммы 7 $[K, \mu] = \text{Ker } v'$ для некоторого нормального эпиморфизма v' . Но тогда равенства $\mu v' = 0$ и $\text{Koker } \mu = [v, C]$ дают нам по определению коядра равенство $v' = v\theta$ для некоторого морфизма θ . А из этого равенства легко вытекает, что $\text{Ker } v \leq \text{Ker } v' = [K, \mu]$. Поэтому $\text{Ker } v = [K, \mu]$.

Таким образом, соотношение (5) верно для любого идеала $[K, \mu]$ и любого коидеала $[v, C]$, т. е. указанные переходы дают нам взаимно однозначное отображение семейства всех идеалов объекта A на семейство всех коидеалов этого объекта. Остается доказать, что построенное отображение (ставящее в соответствие каждому идеалу объекта A фактор-объект объекта A по этому

идеалу) меняет порядок на противоположный, т. е. если $v_1: A \rightarrow C_1$, $v_2: A \rightarrow C_2$ — нормальные эпиморфизмы, $\text{Ker } v_1 = [K_1, \mu_1]$ и $\text{Ker } v_2 = [K_2, \mu_2]$, то

$$[K_1, \mu_1] \leq [K_2, \mu_2] \Leftrightarrow [v_1, C_1] \geq [v_2, C_2]. \quad (6)$$

Пусть $[K_1, \mu_1] \leq [K_2, \mu_2]$, т. е. $\mu_1 = \tau\mu_2$ для некоторого морфизма τ . Тогда $\mu_1 v_2 = \tau\mu_2 v_2 = 0$, и потому $v_2 = v_1\theta$ для некоторого морфизма θ в силу леммы 5. А это означает, что $[v_1, C_1] \geq [v_2, C_2]$. Обратно, пусть $[v_1, C_1] \geq [v_2, C_2]$, т. е. $v_2 = v_1\theta$ для некоторого морфизма θ . Тогда $\mu_1 v_2 = \mu_1 v_1\theta = 0$, и потому $\mu_1 = \tau\mu_2$ для некоторого морфизма τ по определению ядра. А это означает, что $[K_1, \mu_1] \leq [K_2, \mu_2]$.

Следовательно, соотношение (6) верно и предложение доказано.

Лемма 8. *Любой морфизм сохраняет отношение порядка между подобъектами.*

Доказательство. Пусть $[B_1, \beta_1]$ и $[B_2, \beta_2]$ — подобъекты объекта A , а $[\bar{B}_1, \bar{\beta}_1]$ и $[\bar{B}_2, \bar{\beta}_2]$ — образы этих подобъектов при морфизме $\alpha: A \rightarrow B$. По определению существуют такие нормальные эпиморфизмы v_1, v_2 , что $\beta_1\alpha = v_1\bar{\beta}_1$ и $\beta_2\alpha = v_2\bar{\beta}_2$. Учитывая это, допустим, что $[B_1, \beta_1] \geq [B_2, \beta_2]$, т. е. $\beta_2 = \beta\beta_1$ для некоторого морфизма β . Тогда по определению образа морфизма $\beta v_1 = v\mu$ для некоторого нормального эпиморфизма v и мономорфизма μ . Но тогда $v_2\bar{\beta}_2 = \beta_2\alpha = \beta\beta_1\alpha = \beta v_1\bar{\beta}_1 = v\mu\bar{\beta}_1 = v(\mu\bar{\beta}_1)$. Между тем, в силу леммы 1 $\mu\bar{\beta}_1$ — мономорфизм, и потому по определению образа морфизма $[\bar{B}_2, \bar{\beta}_2] = \text{Im } v_2\bar{\beta}_2 = \text{Im } v(\mu\bar{\beta}_1) = [\bar{B}_2, \mu\bar{\beta}_1] \leq [\bar{B}_1, \bar{\beta}_1]$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Если $\alpha: A \rightarrow B$ и $\lambda: B \rightarrow \bar{B}$ — нормальные эпиморфизмы, то и морфизм $\alpha\lambda: A \rightarrow \bar{B}$ является нормальным эпиморфизмом. При этом $\text{Ker } \alpha\lambda \geq \text{Ker } \alpha$, и образом идеала $\text{Ker } \alpha\lambda$ объекта A при нормальном эпиморфизме α будет идеал $\text{Ker } \alpha$ объекта B . Обратно, если $\alpha: A \rightarrow B$ и $\beta: A \rightarrow D$ — нормальные эпиморфизмы и $\alpha = \beta\gamma$ для некоторого морфизма $\gamma: D \rightarrow B$, то γ — нормальный эпиморфизм.*

Доказательство. В силу леммы 1 $\alpha\lambda$ и γ — эпиморфизмы.

Пусть $\text{Ker } \alpha = [C, \mu]$. По определению образа морфизма $\alpha\lambda = \bar{\alpha}\bar{\lambda}$ для некоторого нормального эпиморфизма $\bar{\alpha}$ и

мономорфизма $\bar{\lambda}$. Поэтому $\mu\alpha\lambda = \mu\bar{\alpha}\lambda = 0$, а значит, и $\mu\bar{\alpha} = 0$, так как $\bar{\lambda}$ — мономорфизм. В частности, в силу леммы 4 из полученного равенства вытекает $\text{Ker } \alpha \leq \text{Ker } \bar{\alpha} = \text{Ker } \alpha\bar{\lambda}$. Кроме того, в силу нормальности эпиморфизма α из равенства $\mu\bar{\alpha} = 0$ вытекает равенство $\bar{\alpha} = \alpha\bar{\alpha}$ для некоторого морфизма $\bar{\alpha}$. При этом в силу леммы 1 $\bar{\alpha}$ — эпиморфизм.

Пусть $\text{Ker } \lambda = [M, \kappa]$. Тогда $\kappa\lambda = 0 = \kappa\bar{\alpha}\bar{\lambda}$, так как из равенства $\alpha\lambda = \bar{\alpha}\bar{\lambda} = \alpha\bar{\alpha}\bar{\alpha}$ вытекает равенство $\lambda = \bar{\alpha}\bar{\lambda}$ в силу того, что α — эпиморфизм. Но тогда $\kappa\bar{\alpha} = 0$, так как $\bar{\lambda}$ — мономорфизм, и потому $\bar{\alpha} = \lambda\bar{\lambda}$ для некоторого морфизма $\bar{\lambda}$ в силу нормальности эпиморфизма λ . При этом согласно лемме 1 $\bar{\lambda}$ — эпиморфизм, так как $\bar{\alpha}$ — эпиморфизм.

В результате получаем $\lambda = \bar{\alpha}\bar{\lambda} = \bar{\lambda}\bar{\lambda}\bar{\lambda} = \lambda\bar{\epsilon}$, и потому $\bar{\lambda}\bar{\lambda} = \bar{\epsilon}$, так как λ — эпиморфизм. Но тогда $\bar{\lambda}\bar{\lambda}\bar{\lambda} = \bar{\epsilon}\bar{\lambda} = \bar{\lambda} = \bar{\lambda}\bar{\epsilon}$, и потому $\bar{\lambda}\bar{\lambda} = \bar{\epsilon}$, так как $\bar{\lambda}$ — эпиморфизм. Следовательно, $\bar{\lambda}$ и $\bar{\bar{\lambda}}$ — обратные друг другу изоморфизмы.

Пусть $\text{Ker } \alpha\lambda = [P, \sigma]$. Замечая, что $\text{Ker } \alpha\lambda = \text{Ker } \bar{\alpha}\bar{\lambda} = \text{Ker } \bar{\alpha}$ в силу леммы 4, возьмем любой морфизм χ такой, что $\sigma\chi = 0$. Тогда в силу нормальности эпиморфизма $\bar{\alpha}$ имеем $\chi = \bar{\alpha}\chi' = \alpha\bar{\lambda}\bar{\lambda}^{-1}\chi' = \alpha\bar{\lambda}\chi''$ для некоторого морфизма χ'' . Но тогда, еще раз применяя лемму 5, получаем, что $\alpha\bar{\lambda}$ — нормальный эпиморфизм.

Пусть $[\bar{P}, \bar{\sigma}]$ — образ идеала $[P, \sigma] = \text{Ker } \alpha\lambda$ объекта A при нормальном эпиморфизме α . По определению образа $\sigma\alpha = \bar{\sigma}\bar{\alpha}$ для некоторого нормального эпиморфизма $\bar{\alpha}$. Но в силу аксиомы 6 $[\bar{P}, \bar{\sigma}]$ — идеал объекта A , и потому $[\bar{P}, \bar{\sigma}] = \text{Ker } \nu$ для некоторого нормального эпиморфизма ν . Так как $\bar{\alpha}$ — эпиморфизм, то из равенства $\bar{\sigma}\bar{\alpha}\lambda = \sigma\alpha\lambda = 0$ вытекает равенство $\bar{\sigma}\bar{\lambda} = 0$. Поэтому $\bar{\lambda} = \nu\bar{\bar{\nu}}$ для некоторого морфизма $\bar{\bar{\nu}}$ в силу нормальности эпиморфизма ν . С другой стороны, $\sigma\alpha\bar{\lambda} = \bar{\sigma}\bar{\alpha}\bar{\lambda} = 0$, и потому $\alpha\bar{\lambda} = \alpha\bar{\bar{\nu}}$ для некоторого морфизма $\bar{\bar{\nu}}$, так как $\alpha\bar{\lambda}$ — нормальный эпиморфизм с ядром $[P, \sigma]$. Поэтому и $\bar{\lambda} = \nu\bar{\bar{\nu}}$, так как α — эпиморфизм. А из равенств $\bar{\lambda} = \nu\bar{\bar{\nu}}$ и $\bar{\bar{\lambda}} = \bar{\lambda}\bar{\bar{\nu}}$ вытекает, что $\bar{\bar{\nu}}$ и $\bar{\bar{\bar{\nu}}}$ — обратные друг другу изоморфизмы, так как $\bar{\lambda}$ и ν — эпиморфизмы.

В результате получаем в силу леммы 4 и доказанного, что $\text{Ker } \lambda = \text{Ker } v\bar{v} = \text{Ker } v = [\bar{P}, \bar{\sigma}]$, т. е. образ идеала $\text{Ker } \alpha\lambda$ объекта A при нормальном эпиморфизме α совпадает с идеалом $\text{Ker } \lambda$ объекта B . Следовательно, верны первые два утверждения леммы. Остается доказать последнее утверждение.

По определению образа $\gamma = \gamma'\gamma''$ для некоторого нормального эпиморфизма γ' и мономорфизма γ'' . Из $\alpha = \beta\gamma = \beta\gamma'\gamma''$ следует в силу леммы 4, что $\text{Ker } \alpha = \text{Ker } \beta\gamma'$. Еще раз применяя лемму 4, получаем и равенство $\text{Ker } \gamma = \text{Ker } \gamma'$. Но в силу доказанного выше $\text{Ker } \gamma' = \text{Ker } \gamma$ является образом $\text{Ker } \beta\gamma' = \text{Ker } \alpha$ при нормальном эпиморфизме β . Поэтому, если $\text{Ker } \gamma = [\bar{C}, \bar{\mu}]$ и, как и выше, $\text{Ker } \alpha = [C, \mu]$, то для некоторого нормального эпиморфизма $\bar{\beta}$ верно равенство $\bar{\mu}\beta = \bar{\beta}\bar{\mu}$. Возьмем любой такой морфизм ξ , что $\bar{\mu}\xi = 0$. Тогда $\bar{\mu}\beta\xi = \bar{\beta}\bar{\mu}\xi = 0$, и потому в силу нормальности эпиморфизма α получаем $\beta\xi = \alpha\xi' = \beta\gamma\xi'$ для некоторого морфизма ξ' . Из этого равенства вытекает равенство $\xi = \gamma\xi'$, так как β — эпиморфизм. Но тогда в силу леммы 5 γ — нормальный эпиморфизм. Лемма доказана.

Первая теорема об изоморфизмах. Пусть $\alpha: A \rightarrow B$ — нормальный эпиморфизм. Тогда верны следующие утверждения:

а) Для любого идеала $[M, \kappa]$ объекта B существует и притом точно один идеал $[P, \sigma]$ объекта A , содержащий ядро $\text{Ker } \alpha$ морфизма α такой, что $[M, \kappa]$ — образ идеала $[P, \sigma]$ при морфизме α (этот идеал $[P, \sigma]$ здесь и в дальнейшем называется прообразом идеала $[M, \kappa]$ объекта B при морфизме $\alpha: A \rightarrow B$).

б) Если $[M, \kappa]$ — идеал объекта B , $[P, \sigma]$ — прообраз этого идеала при морфизме α , $[\bar{\lambda}, \bar{A}]$ — фактор-объект объекта A по идеалу $[P, \sigma]$, $[\bar{\lambda}, \bar{B}]$ — фактор-объект объекта B по идеалу $[M, \kappa]$, то $[P, \sigma] = \text{Ker } \alpha\lambda$ и объекты $\bar{A}$ и $\bar{B}$ изоморфны.

в) Переход от идеалов B к их прообразам при морфизме $\alpha: A \rightarrow B$ дает изоморфизм полной решетки всех идеалов объекта B на полную решетку всех идеалов объекта A , содержащих ядро $\text{Ker } \alpha$ морфизма α .

Доказательство. Пусть $[M, \kappa]$ — идеал объекта B , $[\bar{\lambda}, \bar{B}]$ — фактор-объект объекта B по идеалу $[M, \kappa]$, т. е.

$\lambda: B \rightarrow \bar{B}$ — нормальный эпиморфизм с ядром $\text{Ker } \lambda = [M, \kappa]$ (см. предложения 6 и 7).

Пусть $[P, \sigma] = \text{Ker } \alpha\lambda$. Тогда в силу леммы 9 $[P, \sigma] \geq \geq \text{Ker } \alpha$, и образом идеала $[P, \sigma]$ при нормальном эпиморфизме α будет как раз идеал $\text{Ker } \lambda = [M, \kappa]$.

Возьмем теперь любой такой идеал $[P', \sigma']$ объекта A , что $[P', \sigma'] \geq \text{Ker } \alpha$ и образом идеала $[P', \sigma']$ при морфизме α является идеал $[M, \kappa]$. Пусть $[\lambda', A']$ — фактор-объект объекта A по идеалу $[P', \sigma']$, т. е. $\lambda': A \rightarrow A'$ — нормальный эпиморфизм с ядром $\text{Ker } \lambda' = [P', \sigma']$.

По определению образа $\sigma'\alpha = v'\kappa$ для некоторого нормального эпиморфизма v' . Из равенства $\sigma'\alpha\lambda = v'\kappa\lambda = 0$ вытекает в силу нормальности эпиморфизма λ' , что $\alpha\lambda = = \lambda'\lambda''$ для некоторого морфизма λ'' .

По условию $[P', \sigma'] \geq \text{Ker } \alpha = [C, \mu]$. Поэтому $\mu = \gamma'\sigma'$ для некоторого морфизма γ' . Из $\mu\lambda' = \gamma'\sigma'\lambda' = 0$ вытекает в силу нормальности эпиморфизма α , что $\lambda' = \alpha\xi$ для некоторого морфизма ξ . При этом в силу леммы 1 ξ — эпиморфизм, так как λ' — эпиморфизм. Из $\alpha\xi\lambda'' = \lambda'\lambda'' = \alpha\lambda$ вытекает, что $\xi\lambda'' = \lambda$, так как α — эпиморфизм. С другой стороны, из $v'\kappa\xi = \sigma'\alpha\xi = \sigma'\lambda' = 0$ вытекает, что $\kappa\xi = 0$, так как v' — эпиморфизм. Но тогда в силу нормальности эпиморфизма λ имеем $\xi = \lambda\theta$ для некоторого морфизма θ .

В результате получаем, что $\xi\lambda'' = \lambda$, $\lambda\theta = \xi$, причем λ и ξ — эпиморфизмы. Но тогда λ'' и θ — обратные друг другу изоморфизмы. Поэтому из равенства $\alpha\lambda = \lambda'\lambda''$ вытекает в силу леммы 4, что $[P', \sigma'] = \text{Ker } \lambda' = \text{Ker } \lambda'\lambda'' = \text{Ker } \alpha\lambda$. Кроме того, в силу того же равенства $[\lambda', A'] = [\alpha\lambda, \bar{B}]$, причем $\alpha\lambda$ — нормальный эпиморфизм в силу леммы 9. А отсюда вытекает, что объекты A' и $\bar{B}$ изоморфны (соответствующим изоморфизмом будет как раз $\lambda'': A' \rightarrow \bar{B}$).

Следовательно, верны утверждения а) и б).

Пусть $[M_1, \kappa_1]$ и $[M_2, \kappa_2]$ — два идеала объекта B , $[P_1, \sigma_1]$ и $[P_2, \sigma_2]$ — прообразы этих идеалов при нормальном эпиморфизме $\alpha: A \rightarrow B$. Из доказанного выше следует (см. утверждение б)), что если $[M_1, \kappa_1] = \text{Ker } \lambda_1$, $[M_2, \kappa_2] = \text{Ker } \lambda_2$, где $\lambda_1: B \rightarrow B_1$ и $\lambda_2: B \rightarrow B_2$ — нормальные эпиморфизмы, то $[P_1, \sigma_1] = \text{Ker } \alpha\lambda_1$, $[P_2, \sigma_2] = \text{Ker } \alpha\lambda_2$. При этом в силу леммы 9 $\alpha\lambda_1$ и $\alpha\lambda_2$ — нормальные эпиморфизмы.

Если $[M_1, \kappa_1] \geq [M_2, \kappa_2]$, то в силу предложения 7 $[\lambda_1, B_1] \leq [\lambda_2, B_2]$, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2\pi$ для некоторого морфизма π .

Но тогда и $[\alpha\lambda_1, B_1] \leq [\alpha\lambda_2, B_2]$, что влечет соотношение $[P_1, \sigma_1] \geq [P_2, \sigma_2]$ снова в силу предложения 7.

Обратно, если $[P_1, \sigma_1] \geq [P_2, \sigma_2]$, то и $[M_1, \kappa_1] \geq [M_2, \kappa_2]$ в силу леммы 8.

Кроме того, если $[P'', \sigma'']$ — идеал объекта A и $[P'', \sigma''] \geq \text{Ker } \alpha$, то в силу а) идеал $[P'', \sigma'']$ совпадает с образом своего образа при морфизме $\alpha: A \rightarrow B$.

Из доказанного вытекает, что верно и утверждение в).

Теорема доказана.

Вторая теорема об изоморфизмах. Пусть $[C, \gamma]$ и $[D, \delta]$ — идеалы объекта A , $[S, \sigma] = [C, \gamma] \vee [D, \delta]$, $[G, \kappa] = [C, \gamma] \wedge [D, \delta]$. Пусть:

а) $[\bar{D}, \bar{\delta}]$ — образ идеала $[D, \delta]$ при нормальном эпиморфизме $v: A \rightarrow \bar{A}$ с ядром $[G, \kappa]$;

б) $[\bar{D}_1, \bar{\delta}_1]$ — образ идеала $[D, \delta]$ при нормальном эпиморфизме $v_1: A \rightarrow A_1$ с ядром $[C, \gamma]$;

в) $[\bar{S}_1, \bar{\sigma}_1]$ — образ идеала $[S, \sigma]$ при том же нормальном эпиморфизме $v_1: A \rightarrow A_1$ с ядром $[C, \gamma]$,

г) κ' — такой мономорфизм, что $\kappa = \kappa'\delta$.

Тогда $\text{Ker } \delta v_1 = [G, \kappa']$, $[\bar{S}_1, \bar{\sigma}_1] = [\bar{D}_1, \bar{\delta}_1]$ и объекты $\bar{D}$, $\bar{D}_1$, $\bar{S}_1$ изоморфны.

Доказательство. В силу определения частичного порядка для подобъектов найдутся такие мономорфизмы γ' и κ' , что $\kappa = \gamma'\gamma = \kappa'\delta$. По определению образа найдутся такие нормальные эпиморфизмы $\bar{v}_1: D \rightarrow \bar{D}_1$ и $\bar{v}: D \rightarrow \bar{D}$, что $\delta v_1 = \bar{v}_1\bar{\delta}_1$ и $\xi v = \bar{v}\bar{\delta}$. При этом в силу лемм 3 и 4 $\text{Ker } \bar{v} = \text{Ker } \delta v = [G, \kappa']$. Кроме того, обозначим $\text{Ker } \bar{v}_1 = \text{Ker } \delta v_1 = [P, \xi_2]$. Тогда из $\xi_2 \delta v_1 = 0$ вытекает, что $\xi_2 \delta = \xi_1 \gamma$ для некоторого мономорфизма ξ_1 , так как $\text{Ker } v_1 = [C, \gamma]$ и ξ_2, δ, γ — мономорфизмы. Но тогда $[P, \xi_2 \delta] \leq [D, \delta]$, $[P, \xi_1 \gamma] \leq [C, \gamma]$, $[P, \xi_2 \delta] = [P, \xi_1 \gamma]$, и потому $[P, \xi_1 \gamma] = [P, \xi_2 \delta] \leq [G, \kappa]$. Это означает, что $\xi_2 \delta = \xi_1 \gamma = \xi \kappa$ для некоторого мономорфизма ξ . Из $\xi_2 \delta = \xi \kappa = \xi \kappa' \delta$ следует $\kappa' = \xi^{-1} \xi_2$. С другой стороны, из $\kappa' \delta v_1 = \kappa v_1 = \gamma' \gamma v_1 = 0$ следует равенство $\kappa' = \xi' \xi_2$ для некоторого мономорфизма ξ' , так как $\text{Ker } \delta v_1 = [P, \xi_2]$. А из равенств $\xi_2 = \xi \kappa'$, $\kappa' = \xi' \xi_2$ вытекает, что ξ и ξ' — изоморфизмы, так как κ' и ξ_2 — мономорфизмы.

В результате получаем, что $\text{Ker } \delta v_1 = [P, \xi_2] = [G, \kappa'] = \text{Ker } \delta v$. Отсюда вытекает, что объекты $\bar{D}_1$ и $\bar{D}$ изо-

морфны, так как им соответствует фактор-объект $[\bar{v}_1, \bar{D}_1] = = [\bar{v}, \bar{D}]$ объекта D по идеалу $\text{Ker } \delta v_1 = \text{Ker } \delta v$.

Остается доказать равенство $[\bar{S}_1, \bar{\sigma}_1] = [\bar{D}_1, \bar{\delta}_1]$.

В силу аксиомы 6 $[\bar{D}_1, \bar{\delta}_1]$ — идеал объекта A_1 . Поэтому $[\bar{D}_1, \bar{\delta}_1] = \text{Ker } \rho$ для некоторого эпиморфизма ρ . Тогда в силу первой теоремы об изоморфизмах $[F, \varphi] = = \text{Ker } v_{1\rho}$ является прообразом идеала $[\bar{D}_1, \bar{\delta}_1]$ объекта A_1 при нормальном эпиморфизме $v_1: A \rightarrow A_1$. В частности, $[F, \varphi] \geq [C, \gamma] = \text{Ker } v_1$. С другой стороны, $\delta v_{1\rho} = \bar{v}'_1 \bar{\delta}_{1\rho} = 0$, и потому $[D, \delta] \leq \text{Ker } v_{1\rho} = [F, \varphi]$. Поэтому в силу определения объединения $[F, \varphi] \geq [S, \sigma] = [C, \gamma] \vee [D, \delta]$. Но тогда, переходя к образам при нормальном эпиморфизме $v_1: A \rightarrow A_1$, получаем, что $[\bar{D}_1, \bar{\delta}_1] \geq [\bar{S}_1, \bar{\sigma}_1]$. С другой стороны, в силу леммы 8 $[\bar{S}_1, \bar{\sigma}_1] \geq [\bar{D}_1, \bar{\delta}_1]$, так как $[S, \sigma] \geq [D, \delta]$. Следовательно, верно и нужное нам равенство.

Теорема доказана.

Доказательство первой и второй теорем об изоморфизмах и было целью этого параграфа. В заключение сделаем несколько замечаний, которыми мы будем в дальнейшем пользоваться без особых оговорок.

Пусть $\alpha: A \rightarrow B$ — произвольный нормальный эпиморфизм, $[M_i, \kappa_i]$ — произвольные идеалы объекта B , а $[P_i, \sigma_i]$ — прообразы этих идеалов при морфизме α . Из первой теоремы об изоморфизмах легко вытекает (см. утверждение в)), что прообразом пересечения $\bigwedge [M_i, \kappa_i]$ будет пересечение $\bigwedge [P_i, \sigma_i]$, а прообразом объединения $\bigvee [M_i, \kappa_i]$ — объединение $\bigvee [P_i, \sigma_i]$. В частности, если $\bigwedge [P_i, \sigma_i] = \text{Ker } \alpha$, то $\bigwedge [M_i, \kappa_i] = [O, 0]$, так как прообразом нулевого идеала $[O, 0]$ объекта B при нормальном эпиморфизме $\alpha: A \rightarrow B$ является ядро $\text{Ker } \alpha$ морфизма α .

Пусть $[C, \gamma]$ и $[D, \delta]$ — идеалы объекта A , $[S, \sigma] = [C, \gamma] \vee [D, \delta]$. Из первой и второй теорем об изоморфизмах вытекает, что $[S, \sigma]$ является прообразом идеала $[D, \delta]$ при нормальном эпиморфизме с ядром $[C, \gamma]$.

Пусть $\alpha: A \rightarrow B$ — произвольный нормальный эпиморфизм, $[M, \kappa]$ — идеал объекта B и $[P, \sigma]$ — прообраз идеала $[M, \kappa]$ при морфизме α . Из леммы 8 и первой теоремы об изоморфизмах вытекает, что $[P, \sigma]$ — наибольший

среди таких подобъектов объекта A , что их образ при морфизме α содержится в $[M, \kappa]$.

В дальнейшем мы будем допускать некоторую вольность речи, если это не приводит к недоразумениям. А именно, очень часто мы будем рассматривать объекты с точностью до изоморфизма. В связи с этим, мы часто будем говорить, что *объект B является подобъектом (или идеалом объекта A)*, если $[B, \mu]$ — подобъект (или идеал) объекта A и известно, о каком мономорфизме μ идет речь, или это ясно из контекста. Аналогично для фактор-объектов, коидеалов, ядер, коядер, образов и т. д. Например, говорим, что *объект C является фактор-объектом объекта A по идеалу B* и пишем $C = A/B$, если $[B, \mu]$ — идеал объекта A , $[v, C]$ — фактор-объект объекта A по идеалу $[B, \mu]$ и ясно, о каком идеале $[B, \mu]$ и соответствующем ему коидеале $[v, C]$ идет речь.

При указанной договоренности доказанные выше теоремы, предложения и леммы приобретают знакомый вид теорем об изоморфизмах и гомоморфизмах, хорошо известных или очевидных для групп, колец, модулей, мультиоператорных групп (Ω -групп) и других алгебраических систем, достаточно близких к кольцам и алгебрам. Приведем несколько примеров такого перехода.

Из определения образа морфизма $\alpha: A \rightarrow B$ и фактор-объекта по идеалу вытекает в силу леммы 4, что если $\text{Im } \alpha$ — образ морфизма α , а $\text{Ker } \alpha$ — ядро морфизма α , то $\text{Im } \alpha \simeq A/\text{Ker } \alpha$ (т. е. соответствующие объекты изоморфны).

Лемма 3 утверждает, что если C — идеал объекта A , D — подобъект объекта A и $C \leq D$, то C — идеал и объекта D . Поэтому можно говорить о фактор-объекте D/C . При этом в силу аксиомы 6, если и D — идеал объекта A , то D/C — идеал объекта A/C . А в силу первой теоремы об изоморфизмах в последнем случае оказывается, что $A/C/D/C \simeq A/D$.

Основное утверждение второй теоремы об изоморфизмах приобретает следующий вид: если C и D — идеалы объекта A , то $C \vee D/D \simeq C/C \wedge D$. При этом в силу первой и второй теорем об изоморфизмах $C \vee D$ совпадает с прообразом образа идеала C при нормальном эпиморфизме $A \rightarrow A/D$ с ядром D ,

На самом деле указанные теоремы об объектах и морфизмах являются обобщениями соответствующих теорем об алгебраических системах (достаточно близких к кольцам и алгебрам) и гомоморфизмах таких систем, так как эти алгебраические системы и их гомоморфизмы образуют категорию, в которой верны все аксиомы 1—6.

§ 2. Радикалы, радикальность и полупростота в смысле Куроша в категориях

Пусть $\mathcal{K}$ — произвольная категория, в которой выполнены аксиомы 1—6. Все рассматриваемые ниже объекты и морфизмы — объекты и морфизмы из категории $\mathcal{K}$. Мы будем рассматривать только нормальные эпиморфизмы. Поэтому под эпиморфизмом всегда понимается нормальный эпиморфизм. В частности, все рассматриваемые фактор-объекты будут нормальными фактор-объектами, т. е. коидеалами соответствующих объектов (см. предложения 1.6 и 1.7).

Мы будем рассматривать свойства *) объектов. Объекты, обладающие свойством ϑ , будем называть ϑ -объектами. При этом рассматриваются только такие свойства ϑ , что объект, изоморфный ϑ -объекту, сам является ϑ -объектом.

Пусть ϑ — произвольное свойство объектов. Скажем, что идеал $[C, \mu]$ объекта A является ϑ -идеалом, если объект C обладает свойством ϑ . Скажем, что коидеал $[v, C]$ объекта A является ϑ -коидеалом, если объект C обладает свойством ϑ . Для любого объекта A символом $\vartheta(A)$ обозначим объединение всех ϑ -идеалов, а символом $(A)\vartheta$ — объединение всех ϑ -коидеалов объекта A . При этом по договоренности считаем, что объединение пустого семейства идеалов или коидеалов является, соответственно, нулевым идеалом или коидеалом. Поэтому $\vartheta(A) \neq [0, 0]$ тогда и только тогда, когда объект A имеет хотя бы один ненулевой ϑ -идеал, $(A)\vartheta \neq [0, 0]$ тогда и только тогда, когда объект A имеет хотя бы один ненулевой ϑ -коидеал **).

*) Понятие «свойство» и «класс» считаем синонимами, чтобы избежать трудностей, связанных с аксиоматикой теории множеств.

**) В дальнейшем мы будем часто обозначать нулевой морфизм, нулевой объект, нулевой идеал и т. п. одним и тем же символом 0, если ясно, о чем идет речь,

Скажем, что *свойство $\mathfrak{z}$ объектов радикально в смысле Куроша*, если выполнены следующие требования (обратные друг другу):

P1. Если A — $\mathfrak{z}$ -объект, то $\mathfrak{z}(\bar{A}) \neq 0$ для любого ненулевого коидеала $\bar{A}$ объекта A .

P2. Если $\mathfrak{z}(\bar{A}) \neq 0$ для любого ненулевого коидеала $\bar{A}$ объекта A , то A — $\mathfrak{z}$ -объект.

Скажем, что *свойство $\mathfrak{z}$ объектов определяет радикал $\mathfrak{z}$* (в смысле Куроша), если выполнены следующие требования:

P3. Любой коидеал $\mathfrak{z}$ -объекта A будет $\mathfrak{z}$ -коидеалом этого объекта A .

P4. Для любого объекта A идеал $\mathfrak{z}(A)$ является $\mathfrak{z}$ -идеалом в A .

P5. Для любого объекта A верно равенство $\mathfrak{z}(A/\mathfrak{z}(A)) = 0$.

Рассмотрим еще следующие требования, которым может удовлетворять (или не удовлетворять) заданное свойство $\mathfrak{z}$ объектов.

P4'. В любом объекте A объединение любого множества $\mathfrak{z}$ -идеалов само является $\mathfrak{z}$ -идеалом.

P6. Если $[v, c]$ — $\mathfrak{z}$ -коидеал объекта A , а $\text{Кег } v$ — $\mathfrak{z}$ -идеал в A , то A — $\mathfrak{z}$ -объект.

Теорема 1. Для любого свойства $\mathfrak{z}$ объектов равносильны утверждения:

а) *Свойство $\mathfrak{z}$ радикально в смысле Куроша, т. е. выполнены требования P1, P2.*

б) *Для свойства $\mathfrak{z}$ выполнены требования P2, P3.*

в) *Определен радикал $\mathfrak{z}$, т. е. выполнены требования P3, P4, P5.*

г) *Для свойства $\mathfrak{z}$ выполнены требования P3, P4, P6.*

д) *Для свойства $\mathfrak{z}$ выполнены требования P3, P4', P6.*

Доказательство. В силу леммы 1.9 произведение нормальных эпиморфизмов само является нормальным эпиморфизмом. Отсюда легко вытекает, что утверждения а) и б) равносильны. А именно, если выполнены требования P1, P2, то выполнено и требование P3, так как если $[v, C]$ — коидеал объекта A , $[\lambda, D]$ — коидеал объекта C , то и $[v\lambda, D]$ — коидеал объекта A . Обратно, если выполнено требование P3, то выполнено и требование P1, по тем же соображениям.

б) $\Rightarrow$ д). Пусть для свойства $\wp$ выполнены требования P2 и P3.

Пусть $[C_i, \gamma_i]$ — идеалы объекта A и $[C, \gamma] = \bigvee_{i \in I} [C_i, \gamma_i]$.

По определению порядка для подобъектов, найдутся такие мономорфизмы κ_i , что $\gamma_i = \kappa_i \gamma$. При этом в силу леммы 1.3 $[C_i, \kappa_i]$ — идеалы объекта C .

Возьмем любой такой подобъект $[C', \kappa']$ объекта C , что $[C', \kappa'] \geq [C_i, \kappa_i]$ для всех i . Тогда $[C', \kappa' \gamma] \geq [C_i, \kappa_i \gamma] = [C_i, \gamma_i]$ для всех i . Отсюда по определению объединения $[C', \kappa' \gamma] \geq \bigvee_{i \in I} [C_i, \gamma_i] = [C, \gamma] \geq [C', \kappa' \gamma]$. Поэтому $[C', \kappa' \gamma] = [C, \gamma]$. Это означает, что $\kappa' \gamma = \theta \gamma$ для некоторого изоморфизма θ и потому $\kappa' = \theta$ — изоморфизм. Но тогда $[C', \kappa'] = [C, \varepsilon]$.

Из доказанного вытекает равенство $[C, \varepsilon] = \bigvee_{i \in I} [C_i, \kappa_i]$.

Допустим теперь, что все идеалы $[C_i, \gamma_i]$ являются $\wp$ -идеалами. Это означает, что все объекты C_i — $\wp$ -объекты. Поэтому все идеалы $[C_i, \kappa_i]$ объекта C являются $\wp$ -идеалами. Учитывая это, возьмем любой ненулевой коидеал $[\nu, \bar{C}]$ объекта C . По определению $\nu: C \rightarrow \bar{C}$ — нормальный эпиморфизм, причем объект $\bar{C}$ ненулевой. Но тогда $\text{Ker } \nu \neq [C, \varepsilon]$ в силу предложений 6 и 7. Но по доказанному $[C, \varepsilon]$ совпадает с объединением $\wp$ -идеалов $[C_i, \kappa_i]$. Поэтому ядро $\text{Ker } \nu$ нормального эпиморфизма $\nu: C \rightarrow \bar{C}$ не содержит хотя бы один из $\wp$ -идеалов $[C_i, \kappa_i]$. В силу первой теоремы об изоморфизмах образ этого $\wp$ -идеала $[C_i, \kappa_i]$ будет ненулевым идеалом объекта $\bar{C}$. Но если $[\bar{C}_i, \bar{\kappa}_i]$ — образ выбранного $\wp$ -идеала $[C_i, \kappa_i]$ при эпиморфизме ν , то $\kappa_i \nu = \bar{\nu} \bar{\kappa}_i$ для некоторого нормального эпиморфизма $\bar{\nu}: C_i \rightarrow \bar{C}_i$, т. е. $[\nu, \bar{C}_i]$ — коидеал объекта C_i . Поэтому в силу P3 $\bar{C}_i$ — $\wp$ -объект. Но тогда $[\bar{C}_i, \bar{\kappa}_i]$ — ненулевой $\wp$ -идеал объекта $\bar{C}$. В результате получаем, что $\wp(\bar{C}) \neq 0$ для любого ненулевого коидеала $\bar{C}$ объекта C . Применяя теперь P2, получаем, что C — $\wp$ -объект, т. е. $[C, \gamma]$ — $\wp$ -идеал объекта A .

Следовательно для свойства $\wp$ выполнено требование P4'.

Пусть объект A таков, что для некоторого $\wp$ -коидеала $[\nu, C]$ объекта A ядро $\text{Ker } \nu$ нормального эпиморфизма $\nu: A \rightarrow C$ является $\wp$ -идеалом.

Возьмем любой ненулевой коидеал $[\lambda, \bar{A}]$ объекта A . Если ядро $\text{Ker } \lambda$ нормального эпиморфизма λ содержит $\text{Ker } v$, то $\bar{A} \simeq A/\text{Ker } \lambda \simeq A/\text{Ker } v/\text{Ker } \lambda/\text{Ker } v \simeq C/D$ для некоторого идеала D объекта C . Но тогда в силу РЗ $\bar{A} - \mathfrak{g}$ -объект, и потому объект $\bar{A}$ имеет ненулевой $\mathfrak{g}$ -идеал: им оказывается несобственный идеал $[A, \mathfrak{g}]$. Если же ядро $\text{Ker } \lambda$ нормального эпиморфизма λ не содержит $\text{Ker } v$, то снова в силу РЗ ненулевым $\mathfrak{g}$ -идеалом объекта $\bar{A}$ будет образ $\mathfrak{g}$ -идеала $\text{Ker } v$ объекта A при нормальном эпиморфизме λ : $A \rightarrow \bar{A}$.

В результате получаем, что $\mathfrak{g}(\bar{A}) \neq 0$ для любого ненулевого коидеала $\bar{A}$ объекта A . Поэтому в силу Р2 $A - \mathfrak{g}$ -объект.

Следовательно свойство $\mathfrak{g}$ удовлетворяет и требованию Р6.

д) $\Rightarrow$ г). Это очевидно в силу построения идеала $\mathfrak{g}(A)$.

г) $\Rightarrow$ в). Пусть для свойства $\mathfrak{g}$ выполнены требования РЗ, Р4, Р6.

Возьмем произвольный объект A и рассмотрим фактор-объект $\bar{A} = A/\mathfrak{g}(A)$ объекта A по идеалу $\mathfrak{g}(A)$. По определению существует нормальный эпиморфизм $v: A \rightarrow \bar{A}$ с ядром $\text{Ker } v = \mathfrak{g}(A)$.

Пусть $[M, \kappa]$ — произвольный $\mathfrak{g}$ -идеал объекта $\bar{A}$. В силу первой теоремы об изоморфизмах существует такой идеал $[P, \sigma]$ объекта A , что $[P, \sigma] \geq \text{Ker } v$ и образом идеала $[P, \sigma]$ при нормальном эпиморфизме v является как раз идеал $[M, \kappa]$. По определению образа существует такой нормальный эпиморфизм $\lambda: P \rightarrow M$, что $\sigma v = \lambda \kappa$. При этом, если $\text{Ker } v = [C, \mu]$, то $\mu = \gamma \sigma$ для некоторого мономорфизма $\gamma: C \rightarrow P$ и $[C, \gamma] = \text{Ker } \sigma v = \text{Ker } \lambda$ в силу лемм 1.3 и 1.4. В результате получаем, что $[\lambda, M] - \mathfrak{g}$ -коидеал объекта P и $\text{Ker } \lambda = [C, \gamma] - \mathfrak{g}$ -идеал объекта P , так как $[C, \mu] = \text{Ker } v = \mathfrak{g}(A) - \mathfrak{g}$ -идеал объекта A в силу Р4. Но тогда согласно Р6 $P - \mathfrak{g}$ -объект объекта A , и потому $[P, \sigma] - \mathfrak{g}$ -идеал объекта A . Поэтому $[P, \sigma] \leq \mathfrak{g}(A) = \text{Ker } v \leq [P, \sigma]$, т. е. $[P, \sigma] = \text{Ker } v$. А отсюда вытекает, что $[M, \kappa]$ как образ идеала $[P, \sigma] = \text{Ker } v$ при нормальном эпиморфизме v совпадает с нулевым идеалом объекта $\bar{A}$.

Из доказанного вытекает, что $\mathfrak{g}(\bar{A}) = 0$, т. е. выполнено требование Р5.

в) $\Rightarrow$ б). Пусть для свойства $\mathfrak{F}$ выполнены требования РЗ, Р4, Р5.

Пусть объект A таков, что $\mathfrak{F}(\bar{A}) \neq 0$ для любого ненулевого коидеала $\bar{A}$ объекта A . Тогда в силу Р5 $A/\mathfrak{F}(A) = 0$, т. е. $\mathfrak{F}(A) = [A, \mathfrak{F}]$. А это означает в силу Р4 что A — $\mathfrak{F}$ -объект.

Следовательно свойство $\mathfrak{F}$ удовлетворяет требованию Р2.

Теорема доказана.

Предложение 1. Пусть свойство $\mathfrak{F}$ радикально в смысле Куроша. Тогда верны следующие утверждения:

а) Для любого объекта A идеал $\mathfrak{F}(A)$ является наибольшим среди $\mathfrak{F}$ -идеалов объекта A и наименьшим среди таких идеалов D , что $\mathfrak{F}(A/D) = 0$.

б) Пусть $\alpha: A \rightarrow B$ — нормальный эпиморфизм. Тогда образом $\mathfrak{F}$ -идеала объекта A всегда будет некоторый $\mathfrak{F}$ -идеал объекта B . В частности, образ идеала $\mathfrak{F}(A)$ объекта A при морфизме α содержится в идеале $\mathfrak{F}(B)$ объекта B . Если же $\text{Ker } \alpha \leq \mathfrak{F}(A)$, то идеал $\mathfrak{F}(A)$ совпадает с прообразом идеала $\mathfrak{F}(B)$ при эпиморфизме $\alpha: A \rightarrow B$.

в) Пусть ядро $\text{Ker } \alpha$ нормального эпиморфизма $\alpha: A \rightarrow B$ является $\mathfrak{F}$ -идеалом объекта A . Тогда переход от $\mathfrak{F}$ -идеалов объекта B к их прообразам при морфизме α устанавливает изоморфизм частично упорядоченного множества всех $\mathfrak{F}$ -идеалов объекта B на частично упорядоченное множество $\mathfrak{F}$ -идеалов объекта A , содержащих идеал $\text{Ker } \alpha$.

Доказательство. В силу теоремы 1 свойство $\mathfrak{F}$ удовлетворяет всем требованиям Р1 — Р6. В частности, для любого объекта A идеал $\mathfrak{F}(A)$ является наибольшим $\mathfrak{F}$ -идеалом объекта A в силу Р4 и $\mathfrak{F}(A/\mathfrak{F}(A)) = 0$ в силу Р5.

Пусть $\alpha: A \rightarrow B$ — нормальный эпиморфизм.

Возьмем любой $\mathfrak{F}$ -идеал $[P, \sigma]$ объекта A . Пусть $[\bar{P}, \bar{\sigma}]$ — образ этого идеала при морфизме α . Тогда $[\bar{P}, \bar{\sigma}]$ — идеал объекта B , так как $\alpha: A \rightarrow B$ — нормальный эпиморфизм. Кроме того по определению образа $\sigma\alpha = \bar{\alpha}\bar{\sigma}$ для некоторого нормального эпиморфизма $\bar{\alpha}: P \rightarrow \bar{P}$. Применяя РЗ, получаем, что коидеал $[\bar{\alpha}, \bar{P}]$ $\mathfrak{F}$ -объекта P является $\mathfrak{F}$ -коидеалом. Поэтому $\bar{P}$ — $\mathfrak{F}$ -объект. Но тогда образ $[\bar{P}, \bar{\sigma}]$ заданного $\mathfrak{F}$ -идеала $[P, \sigma]$ объекта A при нормальном эпиморфизме $\alpha: A \rightarrow B$ будет $\mathfrak{F}$ -идеалом объекта B .

Из доказанного вытекает, в частности, что образ идеала $\mathfrak{F}(A)$ объекта A при нормальном эпиморфизме $\alpha: A \rightarrow B$ будет содержаться в идеале $\mathfrak{F}(B)$ объекта B , так как

$s(A)$ — наибольший $\mathfrak{f}$ -идеал объекта A , $\mathfrak{f}(B)$ — наибольший $\mathfrak{f}$ -идеал объекта B и образ $\mathfrak{f}$ -идеала является $\mathfrak{f}$ -идеалом.

Пусть $\mathfrak{f}(B) = 0$. Тогда образом идеала $\mathfrak{f}(A)$ при нормальном эпиморфизме $\alpha: A \rightarrow B$ будет нулевой идеал. В силу первой теоремы об изоморфизмах $\mathfrak{f}(A) \leq \text{Ker } \alpha$. А из всего доказанного выше вытекает, что верно утверждение а).

Пусть ядро $\text{Ker } \alpha$ нормального эпиморфизма $\alpha: A \rightarrow B$ содержится в наибольшем $\mathfrak{f}$ -идеале $\mathfrak{f}(A)$ объекта A . Тогда в силу первой теоремы об изоморфизмах идеал $\mathfrak{f}(A) \geq \text{Ker } \alpha$ совпадает с прообразом своего образа $[M, \kappa]$, и потому объекты $A/\mathfrak{f}(A)$ и B/M изоморфны. Но $\mathfrak{f}(A/\mathfrak{f}(A)) = 0$. Поэтому, как легко видеть, и $\mathfrak{f}(B/M) = 0$. Но тогда в силу утверждения а), примененного к объекту B , верно соотношение $[M, \kappa] \geq \mathfrak{f}(B)$. С другой стороны, верно и обратное соотношение $[M, \kappa] \leq \mathfrak{f}(B)$. Поэтому $\mathfrak{f}(B) = [M, \kappa]$ — образ идеала $\mathfrak{f}(A) \geq \text{Ker } \alpha$ при нормальном эпиморфизме $\alpha: A \rightarrow B$. Следовательно, идеал $\mathfrak{f}(A)$ совпадает с прообразом идеала $\mathfrak{f}(B)$ при морфизме α . Но тогда в силу всего доказанного выше верно утверждение б).

Допустим теперь, что ядро $\text{Ker } \alpha$ нормального эпиморфизма $\alpha: A \rightarrow B$ является $\mathfrak{f}$ -идеалом объекта A . Тогда в силу первой теоремы об изоморфизмах переход от идеалов объекта B к их прообразам при нормальном эпиморфизме α устанавливает изоморфизм частично упорядоченного множества всех идеалов объекта B на частично упорядоченное множество всех идеалов объекта A , содержащих $\mathfrak{f}$ -идеал $\text{Ker } \alpha$. Кроме того в силу доказанного образ любого $\mathfrak{f}$ -идеала объекта A будет $\mathfrak{f}$ -идеалом объекта B . Остается доказать, что прообраз любого $\mathfrak{f}$ -идеала объекта B будет $\mathfrak{f}$ -идеалом объекта A .

Пусть $[M, \kappa]$ — любой $\mathfrak{f}$ -идеал объекта B , $[P, \sigma]$ — прообраз этого идеала при нормальном эпиморфизме $\alpha: A \rightarrow B$. По определению образа и прообраза $[P, \sigma] \geq \text{Ker } \alpha = [C, \mu]$ и $\sigma\alpha = \bar{\alpha}\kappa$ для некоторого нормального эпиморфизма $\bar{\alpha}: P \rightarrow M$. Из первого соотношения вытекает, что $\mu = \gamma\sigma$ для некоторого мономорфизма $\gamma: C \rightarrow P$. При этом $\text{Ker } \bar{\alpha} = \text{Ker } \bar{\alpha}\kappa = \text{Ker } \sigma\alpha = [C, \gamma]$. Но тогда в силу допущений получаем, что $[\bar{\alpha}, M]$ — $\mathfrak{f}$ -коидеал объекта P и $\text{Ker } \bar{\alpha} = [C, \gamma]$ — $\mathfrak{f}$ -идеал объекта P . Поэтому P — $\mathfrak{f}$ -объект в силу Р6. Но тогда $[P, \sigma]$ — $\mathfrak{f}$ -идеал объекта A , содержащий $\mathfrak{f}$ -идеал $\text{Ker } \alpha = [C, \mu]$.

Следовательно, верно и утверждение в).

Предложение доказано.

Пусть τ — отображение, ставящее в соответствие каждому объекту A однозначно определенный идеал $\tau(A)$ объекта A . Объект A называется τ -радикальным, если $A = \tau(A)$ (т. е. $\tau(A)$ совпадает с несобственным идеалом $[A, \varepsilon]$ объекта A). Идеал T объекта A называется τ -радикальным идеалом объекта A , если объект T τ -радикален *). Идеал R объекта A называется τ -радикалом объекта A , если R — наибольший τ -радикальный идеал объекта A . Объект A называется τ -полупростым, если $\tau(A) = 0$. Так, например, для нулевого объекта получаем $\tau(0) = 0$, и потому нулевые объекты (и только они) будут одновременно и τ -радикальны и τ -полупросты.

Отображение τ называется *радикалом* (в смысле Куроша), если оно удовлетворяет следующим требованиям:

R1. Если $\alpha: A \rightarrow B$ — нормальный эпиморфизм, то образ идеала $\tau(A)$ объекта A при морфизме α содержится в идеале $\tau(B)$ объекта B .

R2. Для любого объекта A идеал $\tau(A)$ является τ -радикалом объекта A .

R3. Для любого объекта A фактор-объект $A/\tau(A)$ τ -полупрост.

Из выполнения требования R1 легко вытекает, что для любого радикала τ свойства τ -радикальности и τ -полупростоты инварианты относительно изоморфизмов, т. е. объект, изоморфный τ -радикальному, сам τ -радикален, а объект, изоморфный τ -полупростому объекту, сам τ -полупрост.

Теорема 2. Если свойство δ объектов радикально в смысле Куроша, то отображение $A \mapsto \delta(A)$ является радикалом. Обратно, если τ — радикал, то свойство τ -радикальности радикально в смысле Куроша. Указанные переходы устанавливают взаимно однозначное соответствие между радикалами и свойствами объектов, радикальными в смысле Куроша.

Доказательство. Пусть свойство δ объектов радикально в смысле Куроша. Тогда в силу теоремы 1 и

*) Здесь и ниже мы рассматриваем только конструкции, инвариантные относительно изоморфизмов. Поэтому отображение τ должно быть таким, что для любого изоморфизма $\theta: A \rightarrow A'$ образом идеала $\tau(A)$ должен быть идеал $\tau(A')$ объекта A' .

предложения 1 отображение, ставящее в соответствие каждому объекту A его наибольший $\mathfrak{g}$ -идеал $\mathfrak{g}(A)$, удовлетворяет требованиям R_1 , R_2 , R_3 и потому является радикалом. Обозначая этот радикал символом $\mathfrak{r}$, получаем, что $\mathfrak{r}(A) = \mathfrak{g}(A)$ для любого объекта A , и потому свойство $\mathfrak{g}$ совпадает со свойством $\mathfrak{r}$ -радикальности для построенного радикала $\mathfrak{r}$.

Обратно, пусть $\mathfrak{r}$ — радикал и свойство $\mathfrak{g}$ объектов совпадает со свойством $\mathfrak{r}$ -радикальности. Тогда $\mathfrak{g}$ -идеалы и $\mathfrak{r}$ -радикальные идеалы — это одно и то же. Поэтому в силу R_2 для любого объекта A его $\mathfrak{r}$ -радикал $\mathfrak{r}(A)$ совпадает с объединением $\mathfrak{g}(A)$ всех $\mathfrak{g}$ -идеалов объекта A . Отсюда вытекает, что выполнение требований R_1 , R_2 , R_3 для отображения $\mathfrak{r}$ влечет выполнение требований R_3 , R_4 , R_5 для свойства $\mathfrak{g}$. Но тогда в силу теоремы 1 свойство $\mathfrak{g}$ радикально в смысле Куроша.

Теорема доказана, так как указанные переходы обратны друг другу.

Из определения вытекает, что каждый радикал $\mathfrak{r}$ определяет два противоположных свойства объектов: свойство $\mathfrak{r}$ -радикальности и свойство $\mathfrak{r}$ -полупростоты. При этом в силу теоремы 2 и предложения 1 каждое из этих свойств однозначно «восстанавливает» радикал $\mathfrak{r}$: для любого объекта A верны равенства

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}(A) &= \bigvee \{B \mid B \text{ — идеал в } A, \text{ объект } B \text{ } \mathfrak{r}\text{-радикален}\}, \\ \mathfrak{r}(A) &= \bigwedge \{P \mid P \text{ — идеал в } A, \text{ объект } A/P \text{ } \mathfrak{r}\text{-полупрост}\}. \end{aligned} \quad (1)$$

В связи с этим радикалы очень часто задаются указанием свойства $\mathfrak{r}$ -радикальности или свойства $\mathfrak{r}$ -полупростоты. А для этого необходимы характеристики таких свойств. Свойства, совпадающие с $\mathfrak{r}$ -радикальностью для некоторого радикала $\mathfrak{r}$, уже получили характеристику: в силу теоремы 2 — это в точности свойства, радикальные в смысле Куроша, и характеристика таких свойств дана в теореме 1. Остается дать характеристику свойств, совпадающих с $\mathfrak{r}$ -полупростотой для некоторого радикала $\mathfrak{r}$.

Скажем, что *свойство $\mathfrak{g}$ объектов полупросто в смысле Куроша*, если выполнены следующие требования (двойственные требованиям P_1 , P_2):

P^*1 . Если A — $\mathfrak{g}$ -объект, то $(C) \mathfrak{g} \neq 0$ для любого ненулевого идеала C объекта A .

Р*2. Если $(C) \mathfrak{f} \neq 0$ для любого ненулевого идеала C объекта A , то A — $\mathfrak{f}$ -объект.

Идеал M объекта B назовем *ко- $\mathfrak{f}$ -идеалом* объекта B , если B/M — $\mathfrak{f}$ -объект. Для любого объекта A полагаем

$$\pi_s(A) = \bigwedge \{P \mid P \text{ — ко-}\mathfrak{f}\text{-идеал объекта } A\}. \quad (2)$$

В силу двойственности между идеалами и коидеалами, ко- $\mathfrak{f}$ -идеалы и $\mathfrak{f}$ -коидеалы тесно связаны и определяют, фактически, одно и то же. А именно, пусть идеал $[P, \sigma]$ объекта A и коидеал $[\nu, C]$ объекта A взаимно связаны, т. е. идеал $[P, \sigma]$ является ядром нормального эпиморфизма $\nu: A \rightarrow C$. Тогда $[P, \sigma]$ будет по определению ко- $\mathfrak{f}$ -идеалом в том и только в том случае, когда $[\nu, C]$ — $\mathfrak{f}$ -коидеал. Напомним, что для любого объекта A

$$(A) \mathfrak{f} = \bigvee \{C \mid C \text{ — }\mathfrak{f}\text{-коидеал объекта } A\}. \quad (3)$$

Но тогда ввиду двойственности между идеалами и коидеалами (см. предложения 1.6, 1.7 и лемму 1.7) получаем в силу (2), (3) и определения фактор-объекта, что верно равенство $(A) \mathfrak{f} = A/\pi_s(A)$. Точнее, если $(A) \mathfrak{f} = [\nu, C]$ и $[P, \sigma] = \pi_s(A)$, то $\text{Ker } \nu = \pi_s(A)$, $\text{Coker } \sigma = (A) \mathfrak{f}$. Это позволяет во многих случаях заменять коидеал $(A) \mathfrak{f}$ на идеал $\pi_s(A)$, что иногда удобнее для применений.

С каждым свойством $\mathfrak{f}$ объектов мы свяжем свойство $\mathfrak{f}^{-1}$ быть объектом без ненулевых $\mathfrak{f}$ -коидеалов и свойство $^{-1}\mathfrak{f}$ быть объектом без ненулевых $\mathfrak{f}$ -идеалов. В этих обозначениях получаем, например, что свойство $\mathfrak{f}$ радикально в смысле Куроша тогда и только тогда, когда $\mathfrak{f} = (^{-1}\mathfrak{f})^{-1}$, и свойство $\mathfrak{f}$ полупросто в смысле Куроша тогда и только тогда, когда $\mathfrak{f} = ^{-1}(\mathfrak{f}^{-1})$.

Теорема 3. Если свойство $\mathfrak{f}$ объектов полупросто в смысле Куроша, то свойство $\mathfrak{f}^{-1}$ радикально в смысле Куроша, причем свойство $\mathfrak{f}$ совпадает со свойством τ -полупростоты для радикала τ , соответствующего радикальному в смысле Куроша свойству $\mathfrak{f}^{-1}$. Обратно, если τ — радикал и тем же символом τ обозначено соответствующее свойство, радикальное в смысле Куроша, то свойство τ -полупростоты полупросто в смысле Куроша и совпадает со свойством $^{-1}\tau$. Указанные переходы $\mathfrak{f} \mapsto \mathfrak{f}^{-1}$, $\tau \mapsto ^{-1}\tau$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между свойствами, полу-

простыми в смысле Куроша, и свойствами, радикальными в смысле Куроша.

Доказательство. В силу сказанного выше, если верны первые два утверждения теоремы, то указанные переходы будут обратны друг другу, а потому они устанавливают взаимно однозначное соответствие между свойствами, полупростыми в смысле Куроша, и свойствами, радикальными в смысле Куроша. Остается доказать первые два утверждения теоремы.

Пусть τ — радикал и тем же символом τ обозначено соответствующее свойство объектов, радикальное в смысле Куроша. Тогда в силу равенств (1) и определения τ -радикальности и τ -полупростоты для свойства δ τ -полупростоты и свойства τ τ -радикальности получаем равенства $\tau = \delta^{-1}$, $\delta = -^1\tau$. Но тогда, очевидно, верно и равенство $\delta = -^1(\delta^{-1})$. Расшифровывая это, получаем, что свойство $\delta = -^1\tau$ удовлетворяет требованиям P^*1 , P^*2 , т. е. является свойством, полупростым в смысле Куроша.

С другой стороны, возьмем любое свойство δ объектов, удовлетворяющее требованию P^*1 . Строим свойство $\tau = \delta^{-1}$ быть объектом без нулевых δ -коидеалов. Тогда, в силу (2) и (3), объект A будет τ -объектом в том и только в том случае, когда $(A)\delta = 0$, т. е. когда $\pi_\delta(A) = A$.

Если $[\nu, C]$ — коидеал объекта A , $[\lambda, D]$ — коидеал объекта C , то $[\nu\lambda, D]$ — коидеал объекта A , так как произведение нормальных эпиморфизмов само является нормальным эпиморфизмом. Поэтому любой δ -коидеал D коидеала C объекта A является δ -коидеалом самого объекта A . Но тогда, если объект A является δ^{-1} -объектом, т. е. не имеет ненулевых δ -коидеалов, то и любой коидеал C объекта A обладает тем же свойством, т. е. будет δ^{-1} -коидеалом. Следовательно, свойство $\tau = \delta^{-1}$ удовлетворяет требованию $P3$, а значит и требованию $P1$.

Обратно, пусть A — такой объект, что $\delta^{-1}(B) \neq 0$ для любого ненулевого коидеала B . Это означает, что любой ненулевой коидеал B имеет хотя бы один ненулевой δ^{-1} -идеал C . Последнее равносильно равенству $(C)\delta = 0$. Но в силу P^*1 любой ненулевой идеал δ -объекта имеет ненулевые δ -коидеалы и потому не является δ^{-1} -идеалом. Поэтому любой ненулевой коидеал B объекта A не является δ -коидеалом, т. е. A — δ^{-1} -объект. Следовательно, свойство $\tau = \delta^{-1}$ удовлетворяет и требованию $P2$.

В результате получаем, что для любого свойства δ , удовлетворяющего требованию P^*1 , свойство $\tau = \delta^{-1}$ удовлетворяет требованиям $P1$ и $P2$, т. е. радикально в смысле Куроша.

Допустим теперь, что свойство δ полупросто в смысле Куроша, т. е. удовлетворяет и требованию P^*1 и P^*2 . Тогда по доказанному свойство $\tau = \delta^{-1}$ радикально в смысле Куроша. Кроме того в силу P^*1 и P^*2 $\delta = -1$ (δ^{-1}). Но тогда в силу доказанного выше свойство δ совпадает со свойством τ -полупростоты для радикала τ , соответствующего радикальному в смысле Куроша свойству $\tau = \delta^{-1}$, так как из (1), (2) и (3) вытекает равенство $\tau(A) = \pi_{\delta}(A)$ для любого объекта A .

Теорема доказана.

Для дальнейшего полезно еще одно определение.

Скажем, что объект A аппроксимируется семейством $\{B_i | i \in I\}$ объектов, если существует такое семейство $\{P_i | i \in I\}$ идеалов объекта A , что $\bigwedge_{i \in I} P_i = 0$ и $A/P_i \simeq B_i$ для каждого $i \in I$.

Предложение 2. Пусть τ — радикал. Если объект A аппроксимируется τ -полупростыми объектами, то он сам τ -полупрост. Более общо, если для семейства $\{P_i | i \in I\}$ идеалов объекта A все объекты A/P_i τ -полупросты, то τ -полупрост и объект A/P , где $P = \bigwedge_{i \in I} P_i$.

Доказательство. Докажем сначала второе утверждение. Пусть в объекте A задано некоторое множество $\{[P_i, \sigma_i] | i \in I\}$ идеалов, причем для нормальных эпиморфизмов $\nu_i: A \rightarrow B_i$ с ядрами $\text{Ker } \nu_i = [P_i, \sigma_i]$ объекты B_i τ -полупросты. Пусть $[P, \sigma] = \bigwedge_{i \in I} [P_i, \sigma_i]$. Нам нужно

доказать, что для нормального эпиморфизма $\nu: A \rightarrow B$ с ядром $\text{Ker } \nu = [P, \sigma]$ объект B τ -полупрост, т. е. не имеет ненулевых τ -радикальных идеалов. Возьмем любой τ -радикальный идеал $[M, \kappa]$ объекта B . Учитывая первую теорему об изоморфизмах, строим прообраз $[R, \rho]$ идеала $[M, \kappa]$ объекта B при нормальном эпиморфизме $\nu: A \rightarrow B$. Тогда $[R, \rho] \geq [P, \sigma]$, и потому $\sigma = \gamma\rho$ для некоторого мономорфизма $\gamma: P \rightarrow R$. При этом $\rho\nu = \xi\kappa$ для некоторого нормального эпиморфизма $\xi: R \rightarrow M$ по определению образа. В силу лемм 1.3 и 1.4 верно равенство $\text{Ker } \rho\nu = \text{Ker } \xi = [P, \gamma]$.

Пусть $[R_i, \rho_i]$ — образы идеала $[R, \rho]$ объекта A при нормальных эпиморфизмах $v_i: A \rightarrow B_i$. По определению образа $\rho v_i = \xi_i \rho_i$ для некоторых нормальных эпиморфизмов $\xi_i: R \rightarrow R_i$. Кроме того, из очевидных включений $[P, \sigma] \leq [P_i, \sigma_i]$ вытекает существование таких мономорфизмов $\gamma_i: P \rightarrow P_i$, что $\sigma = \gamma_i \sigma_i$. Но тогда в силу леммы 1.9 и предложения 1.7 $v_i = v \eta_i$ для некоторых нормальных эпиморфизмов $\eta_i: B \rightarrow B_i$, и потому $\gamma \xi_i \rho_i = \gamma \rho v_i = \gamma \rho v \eta_i = \gamma \xi \kappa \eta_i = 0$. Поэтому $\gamma \xi_i = 0$, так как ρ_i — мономорфизмы. Но тогда для некоторых нормальных эпиморфизмов $\xi_i: M \rightarrow R_i$ верны равенства $\xi_i = \xi \xi_i$. Здесь мы применили и лемму 1.9. Из полученных равенств вытекает $\xi \kappa \eta_i = \rho v \eta_i = \rho v_i = \xi_i \rho_i = \xi \xi_i \rho_i$, и потому верны равенства $\kappa \eta_i = \xi_i \rho_i$, так как ξ — эпиморфизм. А это означает, что $[R_i, \rho_i]$ — образы τ -радикального идеала $[M, \kappa]$ объекта B при нормальных эпиморфизмах $\eta_i: B \rightarrow B_i$.

Но по условию все объекты B_i τ -полупросты и потому не имеют ненулевых τ -радикальных идеалов. Поэтому в силу P3 или R1 все $[R_i, \rho_i]$ совпадают с нулевыми идеалами соответствующих объектов B_i , т. е. ρ_i — нулевые морфизмы. Но тогда $\rho v_i = \xi_i \rho_i = 0$ для всех $i \in I$, т. е. $[R, \rho] \leq \bigwedge_{i \in I} \text{Ker } v_i = \bigwedge_{i \in I} [P_i, \sigma_i] = [P, \sigma]$. Между тем верно и обратное соотношение. Поэтому верно равенство $[R, \rho] = [P, \sigma] = \text{Ker } v$. Но тогда $[M, \kappa]$ — нулевой идеал объекта B как образ идеала $[R, \rho] = \text{Ker } v$ при нормальном эпиморфизме $v: A \rightarrow B$.

Следовательно, объект B τ -полупрост, и мы доказали второе утверждение предложения. Но тогда верно и первое утверждение.

Действительно, пусть объект A аппроксимируется τ -полупростыми объектами. Это означает, что существуют такие идеалы $[P_i, \sigma_i]$ объекта A , что для нормальных эпиморфизмов $v_i: A \rightarrow B_i$ с ядрами $\text{Ker } v_i = [P_i, \sigma_i]$ объекты B_i τ -полупросты, причем $\bigwedge_{i \in I} [P_i, \sigma_i] = [O, 0]$. Но $\varepsilon: A \rightarrow A$ — нормальный эпиморфизм с ядром $\text{Ker } \varepsilon = [O, 0]$. Поэтому в силу доказанного сам объект A τ -полупрост. Это заканчивает доказательство.

Предложение доказано.

Теперь мы можем дать еще несколько характеристик свойств, полупростых в смысле Куроша, учитывая, что такие свойства совпадают со свойством

τ -полупростоты для подходящего радикала в силу теоремы 3.

Скажем, что *свойство δ объектов определяет корадикал δ* , если выполнены следующие требования (двойственным требованиям P_3, P_4, P_5):

P^*3 . Любой идеал δ -объекта A будет δ -идеалом этого объекта A .

P^*4 . Для любого объекта A коидеал $(A)\delta$ является δ -коидеалом объекта A (т. е. идеал $\pi_\delta(A)$ является ко- δ -идеалом объекта A).

P^*5 . Для любого объекта A верно равенство $(\pi_\delta(A))\delta = 0$ (что равносильно выполнению равенства $\pi_\delta(\pi_\delta(A)) = \pi_\delta(A)$).

Рассмотрим еще следующие требования (равносильные требованию, двойственному P_4).

P^*4' . В любом объекте A объединение любого множества δ -коидеалов само является δ -коидеалом объекта A (т. е. пересечение любого множества ко- δ -идеалов само является ко- δ -идеалом).

P^*4'' . Если объект A аппроксимируется δ -объектами, то он является δ -объектом.

Отметим, еще что требование P_6 двойственно самому себе.

Теорема 4. *Если свойство δ объектов определяет корадикал δ , то свойство δ полупросто в смысле Куроша. Более того, свойство δ , полупростое в смысле Куроша, определяет корадикал δ тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет требованию P^*3 . Любое свойство δ объектов, полупростое в смысле Куроша, удовлетворяет требованию P_6 . Равносильны утверждения:*

а) *Свойство δ полупросто в смысле Куроша, т. е. выполнены требования P^*1, P^*2 .*

б) *Для свойства δ выполнены требования P^*1, P^*4, P^*5 .*

в) *Для свойства δ выполнены требования P^*1, P^*4', P^*5 .*

г) *Для свойства δ выполнены требования P^*1, P^*4'', P^*5 .*

Доказательство. Пусть свойство δ объектов полупросто в смысле Куроша. Тогда в силу теоремы 3 свойство δ^{-1} радикально в смысле Куроша, причем свойство δ совпадает со свойством τ -полупростоты для радикала τ ,

соответствующего свойству δ^{-1} . В частности, $\delta^{-1}(A) = \pi_{\delta}(A)$ для любого объекта A , и потому идеал $\pi_{\delta}(A)$ является δ^{-1} -идеалом. Но тогда, очевидно, свойство δ удовлетворяет требованию R^*5 . Кроме того, в силу предложения 2 свойство δ удовлетворяет и требованию R^*4'' .

Пусть объект A таков, что коидеал $[v, \bar{A}]$ и идеал $[C, \mu] = \text{Ker } v$ являются δ -коидеалом и δ -идеалом объекта A соответственно. Из r -полупростоты объекта $\bar{A}$ вытекает в силу предложения 1 включение $r(A) = [R, \rho] \leq [C, \mu] = \text{Ker } v$. Но тогда $\rho = \gamma\mu$ для некоторого мономорфизма $\gamma: R \rightarrow C$, причем согласно лемме 1.3 $[R, \gamma]$ — идеал объекта C . Но тогда в силу (1) $[R, \gamma]$ — нулевой идеал как r -радикальный идеал r -полупростого объекта C . Но тогда и $r(A) = 0$, т. е. сам объект A r -полупрост. Поэтому A — δ -объект.

Следовательно, любое свойство δ , полупростое в смысле Куроша, удовлетворяет требованию $R6$. Но тогда, как легко видеть, для окончания доказательства теоремы достаточно доказать равносильность условий а) — г) для любого свойства δ , так как оставшиеся два утверждения будут легко вытекать из определений и доказанных утверждений.

а) $\Rightarrow$ г). Это уже доказано.

г) $\Rightarrow$ в). Пусть свойство δ удовлетворяет требованию R^*4'' . Возьмем любое такое множество $\{P_i \mid i \in I\}$ идеалов объекта A , что A/P_i — δ -объекты для всех $i \in I$. Тогда в силу первой теоремы об изоморфизмах, если $P = \bigwedge_{i \in I} P_i$, то $\bar{P}_i = P_i/P$ — идеалы объекта $\bar{A} = A/P$, $\bar{A}/\bar{P}_i \simeq A/P_i$ и $\bigwedge_{i \in I} \bar{P}_i = 0$. Но тогда в силу R^*4'' A/P — δ -объект. Поэтому δ удовлетворяет и требованию R^*4' .

в) $\Rightarrow$ б). Это очевидно по построению идеала $\pi_{\delta}(A)$ объекта A .

б) $\Rightarrow$ а). Пусть для свойства δ выполнены требования R^*4 и R^*5 . Если объект A таков, что $(C) \delta \neq 0$ для любого ненулевого идеала C объекта A , то в силу R^*5 $\pi_{\delta}(A) = 0$. Но тогда в силу R^*4 нулевой идеал объекта A является δ -идеалом. А это означает, что A — δ -объект, так как $A = A/0$. Следовательно, свойство δ удовлетворяет и требованию R^*2 .

Теорема доказана.

Доказанные теоремы показывают, что понятия радикальности и полупростоты в смысле Куроша двойственны друг другу и эта двойственность иногда позволяет переходить от верного утверждения о радикальных свойствах к двойственному и тоже верному утверждению о полупростых свойствах (или наоборот). Например:

а) Свойство τ радикально в смысле Куроша тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет требованиям P_1 , P_2 . — Свойство δ полупросто в смысле Куроша тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет требованиям P^*1 , P^*2 .

б) Свойство τ радикально в смысле Куроша тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет требованиям P_1 , P_4 , P_5 . — Свойство δ полупросто в смысле Куроша тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет требованиям P^*1 , P^*4 , P^*5 .

в) Объединение любого множества τ -радикальных идеалов объекта A само является τ -радикальным идеалом. — Объединение любого множества τ -полупростых коидеалов объекта A само является τ -полупростым коидеалом.

Однако указанная двойственность неполна: при переходе к двойственному утверждению мы можем получить неверное утверждение из верного.

Пример. Пусть $\mathfrak{A}$ — категория всех (не обязательно ассоциативных) алгебр над некоторым (фиксированным) полем Φ . Таким образом, объекты в $\mathfrak{A}$ — это алгебры, а морфизмы в $\mathfrak{A}$ — гомоморфизмы $\varphi: A \rightarrow B$ алгебр друг в друга. Ясно, что мы действительно получаем категорию. Нулевым объектом в $\mathfrak{A}$ будет нулевая алгебра. Поэтому в категории $\mathfrak{A}$ верна аксиома 1.

Нетрудно проверить, что гомоморфизм $\varphi: A \rightarrow B$ алгебр будет мономорфизмом в категории $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда φ — изоморфное вложение алгебры A в алгебру B . Но тогда подобъекты объекта A — это пары $[C, \varepsilon_C^A]$, где C — подалгебра в A и $\varepsilon_C^A: C \rightarrow A$ — тождественное вложение подалгебры C в алгебру A . При этом, если C_1 и C_2 — подалгебры алгебры A , то подобъекты $[C_1, \varepsilon]$, $[C_2, \varepsilon]$ будут эквивалентны тогда и только тогда, когда подалгебры C_1 и C_2 совпадают. Но тогда нетрудно убедиться в том, что $[C, \varepsilon_C^A]$ будет ядром морфизма α :

$A \rightarrow B$ тогда и только тогда, когда C совпадает с ядром $\text{Ker } \alpha$ гомоморфизма α . При этом нормальные эпиморфизмы в категории $\mathfrak{A}$ и гомоморфизмы алгебр друг на друга — это одно и то же. Применяя теперь теоремы об изоморфизмах и гомоморфизмах алгебр, легко получаем, что в категории $\mathfrak{A}$ верны аксиомы 2—6.

В силу сказанного мы можем применить полученные выше результаты к категории $\mathfrak{A}$. Сравнивая эти результаты с результатами из § 1 гл. 2, мы приходим к тому, что радикальные свойства в смысле Куроша объектов категории $\mathfrak{A}$ соответствуют классам алгебр, радикальным в смысле Куроша, полупростые свойства в смысле Куроша объектов категории $\mathfrak{A}$ соответствуют классам алгебр, полупростым в смысле Куроша, радикалы в категории $\mathfrak{A}$ — это радикалы алгебр и т. д. Другими словами, полученные выше результаты о радикалах, радикальных и полупростых свойствах в смысле Куроша являются обобщениями соответствующих результатов из § 1 гл. 2.

Учитывая все сказанное, мы можем получить нужные нам контрпримеры.

В силу теоремы 1 свойство $\mathfrak{B}$ объектов радикально в смысле Куроша тогда и только тогда, когда свойство $\mathfrak{B}$ определяет радикал $\mathfrak{B}$. Переход по двойственности приводит нас к утверждению: свойство $\mathfrak{B}$ объектов полупросто в смысле Куроша тогда и только тогда, когда свойство $\mathfrak{B}$ определяет корадикал $\mathfrak{B}$. Это утверждение неверно.

Действительно, в силу теорем 2, 3 и 4, нужное нам двойственное утверждение равносильно следующему: любое свойство $\mathfrak{B}$, полупростое в смысле Куроша, удовлетворяет требованию P^*3 , т. е. если $\mathfrak{r}$ — радикал, то любой идеал $\mathfrak{r}$ -полупростого объекта сам будет $\mathfrak{r}$ -полупростым. Но последнее утверждение неверно, как показывает предложение 2.1.2, уже в категории $\mathfrak{A}$ всех алгебр над полем Φ .

В силу теоремы 1 свойство $\mathfrak{B}$ радикально в смысле Куроша тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет требованиям $P3$, $P4'$ и $P6$. Переход по двойственности приводит нас к утверждению: свойство $\mathfrak{B}$ объектов полупросто в смысле Куроша тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет требованиям P^*3 , P^*4' и $P^*6 \equiv P6$. Это утверждение не верно ни в одну сторону.

А именно, как уже было показано, свойство, полупростое в смысле Куроша, может не удовлетворять тре-

бованию P^*3 . Остается показать, что свойство, удовлетворяющее требованиям P^*3 , P^*4' и $P6$, может не быть полупростым в смысле Куроша.

Пусть n — свойство быть алгеброй без нильпотентных элементов, т. е. такой алгеброй A , что $a^2 \neq 0$ для любого ненулевого элемента $a \in A$. Нетрудно видеть, что класс алгебр без нильпотентных элементов замкнут относительно взятия подалгебр и подпрямых произведений, причем расширение алгебр без нильпотентных элементов с помощью алгебры без нильпотентных элементов само будет такой же алгеброй. Поэтому свойство n удовлетворяет требованиям P^*3 , P^*4' и $P6$. Однако (из-за неассоциативности рассматриваемых алгебр!) требование P^*2 не выполняется.

Действительно, пусть A — трехмерная алгебра с базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ и следующей таблицей умножения базисных элементов

$$\begin{aligned} e_1^2 &= e_1, & e_1e_2 &= e_2e_1 = e_3e_1 = e_2, \\ e_1e_3 &= e_3e_2 = e_3, & e_2e_3 &= e_3^2 = 0. \end{aligned}$$

Прямой проверкой убеждаемся, что в алгебре A есть точно один ненулевой собственный идеал. Им будет $B = \Phi e_2 + \Phi e_3$. В свою очередь, в алгебре B имеется точно один ненулевой собственный идеал. Им будет $C = \Phi e_3$. При этом $A/B \simeq B/C \simeq \Phi$. В результате получаем, что для любого ненулевого идеала J алгебры A верно соотношение $(J)n \neq 0$ (т. е. алгебра J отображается гомоморфно на ненулевые алгебры без нильпотентных элементов). Однако алгебра A не обладает свойством n , так как $e_3^2 = 0 \neq e_3$.

Следовательно, свойство n не полупросто в смысле Куроша, так как оно не удовлетворяет требованию P^*2 .

Можно привести и другие примеры нарушения двойственности.

§ 3. «Решетка» радикалов. Верхний и нижний радикалы

Как и в предыдущем параграфе, мы будем считать, что $\mathcal{K}$ — категория, в которой верны аксиомы 1 — 6, все рассматриваемые объекты и морфизмы — объекты и морфизмы из категории $\mathcal{K}$, а все рассматриваемые свойства объектов инвариантны относительно изоморфизмов. Очень часто мы будем рассматривать вместо свойства δ класс

всех $\mathfrak{g}$ -объектов. Ясно, что при этом получаются классы объектов, замкнутые относительно изоморфизмов. В связи со сказанным можно говорить о классах, полупростых или радикальных в смысле Куроша, — это такие классы $\mathcal{M}$, что свойство быть объектом из класса $\mathcal{M}$ полупросто или, соответственно, радикально в смысле Куроша.

Пусть τ — произвольный радикал (в категории $\mathcal{K}$). В силу результатов из § 2 τ определяет полупростой в смысле Куроша класс $\mathcal{P}(\tau)$ — класс всех τ -полупростых объектов, радикальный в смысле Куроша класс $\mathcal{R}(\tau)$ — класс всех τ -радикальных объектов и, в свою очередь, «восстанавливается» по каждому из классов $\mathcal{P}(\tau)$, $\mathcal{R}(\tau)$, так как

$$\begin{aligned}\tau(A) &= \bigvee \{B \mid B \text{ — идеал в } A, B \in \mathcal{R}(\tau)\}, \\ \tau(A) &= \bigwedge \{P \mid P \text{ — идеал в } A, A/P \in \mathcal{P}(\tau)\}\end{aligned}\quad (1)$$

для любого объекта A .

Пусть τ_1 и τ_2 — два радикала. Скажем, что радикал τ_1 меньше радикала τ_2 (или содержится в τ_2) или что радикал τ_2 больше радикала τ_1 (или содержит τ_1) и будем писать $\tau_1 \leq \tau_2$, если $\tau_1(A) \leq \tau_2(A)$ для любого объекта A . Из сказанного и (1) вытекает, что

$$\mathcal{R}(\tau_1) \subseteq \mathcal{R}(\tau_2) \Leftrightarrow \tau_1 \leq \tau_2 \Leftrightarrow \mathcal{P}(\tau_1) \supseteq \mathcal{P}(\tau_2). \quad (2)$$

Из (2) или непосредственно из определения вытекает, что введенное нами бинарное отношение $\leq$ является частичной упорядоченностью, т. е. рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Но тогда для любого семейства радикалов τ_i можно говорить об объединении $\bigvee_{i \in I} \tau_i$ и пересечении $\bigwedge_{i \in I} \tau_i$ этих радикалов. А именно, по определению $\bigvee_{i \in I} \tau_i$ и $\bigwedge_{i \in I} \tau_i$ — это такие радикалы, что для любых $\mathfrak{g}$ и t верны соотношения

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} \geq \bigvee_{i \in I} \tau_i &\Leftrightarrow \forall i \in I \mid \mathfrak{g} \geq \tau_i, \\ t \leq \bigwedge_{i \in I} \tau_i &\Leftrightarrow \forall i \in I \mid t \leq \tau_i.\end{aligned}\quad (3)$$

Теорема 1. *Радикалы образуют полную «решетку» Rad, т. е. для любого семейства радикалов τ_i всегда суще-*

ствуют объединение $\bigvee_{i \in I} r_i$ и пересечение $\bigwedge_{i \in I} r_i$ этих ради-

калов r_i . При этом наименьшим элементом в полной «решетке» Rad является нулевой радикал 0 ($0(A) = 0$ для любого объекта A), а наибольшим элементом — тривиальный радикал ε ($\varepsilon(A) = A$ для любого объекта A).

Доказательство. Последнее утверждение теоремы очевидно. Поэтому объединение и пересечение пустого семейства радикалов существует.

Возьмем любое непустое семейство радикалов r_i , $i \in I$. По соответствующим классам $\mathcal{R}(r_i)$, радикальным в смысле Куроша, строим класс $\mathcal{R} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{R}(r_i)$. Из теоремы 2.1 и

2.2 вытекает, что для каждого $i \in I$ свойство $\mathfrak{r}_i$ быть объектом из класса $\mathcal{R}(r_i)$ (т. е. r_i -радикальным объектом) удовлетворяет требованиям P_3 , P_4 и P_6 как свойство, радикальное в смысле Куроша. Но тогда, как легко видеть, и свойство $\mathfrak{r}$ быть объектом из класса $\mathcal{R}$ удовлетворяет тем же требованиям P_3 , P_4 и P_6 , т. е. радикально в смысле Куроша. Поэтому существует и притом точно один радикал r такой, что $\mathcal{R} = \mathcal{R}(r)$ — класс всех r -радикальных объектов. Но тогда в силу (2) и (3) $r = \bigwedge_{i \in I} r_i$.

Таким образом, для любого семейства радикалов всегда существует пересечение. Но тогда в силу (3) всегда существует и объединение, так как $\bigvee_{i \in I} r_i$ совпадает с пересе-

чением всех таких радикалов $\mathfrak{r}$, что $\mathfrak{r} \geq r_i$ для всех $i \in I$.

Теорема доказана.

Пусть $\mathcal{M}$ — произвольный класс объектов категории $\mathcal{K}$, удовлетворяющий следующему условию

K^*1 . Если A — объект из $\mathcal{M}$ и $[B, \beta]$ — ненулевой идеал объекта A , то существует такой ненулевой коидеал $[v, C]$ объекта B , что C — объект из $\mathcal{M}$.

Другими словами, свойство быть объектом из класса $\mathcal{M}$ удовлетворяет требованию P^*1 . Из доказательства теоремы 2.3 вытекает, что в таком случае свойство $\mathcal{M}^{-1}$ быть объектом, не имеющим ненулевых коидеалов из класса $\mathcal{M}$, является радикальным в смысле Куроша. *Верхним радикалом, определенным классом $\mathcal{M}$* , называется радикал $S_{\mathcal{M}}$, соответствующий указанному свойству $\mathcal{M}^{-1}$, радикальному в смысле Куроша.

Предложение 1. Для любого класса $\mathcal{M}$ с условием K^*1 верхний радикал $S_{\mathcal{M}}$ является наибольшим среди всех таких радикалов τ , что все объекты из $\mathcal{M}$ τ -полупросты. Для любого радикала τ класс $\mathcal{P}(\tau)$ всех τ -полупростых объектов удовлетворяет условию K^*1 и определяет верхний радикал $S_{\mathcal{P}(\tau)}$, совпадающий с радикалом τ .

Доказательство. Последнее утверждение вытекает из теоремы 2.3 и ее доказательства, как и то, что $S_{\mathcal{M}}$ — радикал. При этом по построению радикала $S_{\mathcal{M}}$ из условия K^*1 вытекает, что объекты A из класса $\mathcal{M}$ не имеют ненулевых $S_{\mathcal{M}}$ -радикальных идеалов. А это означает, что все объекты из класса $\mathcal{M}$ будут $S_{\mathcal{M}}$ -полупросты.

С другой стороны, пусть τ — любой такой радикал, что все объекты из класса $\mathcal{M}$ τ -полупросты. Тогда $\mathcal{R}(\tau) \subseteq \mathcal{R}(S_{\mathcal{M}})$, так как любой τ -радикальный объект не имеет ненулевых τ -полупростых коидеалов, а значит и ненулевых коидеалов из $\mathcal{M}$. Но тогда $\tau \leq S_{\mathcal{M}}$ в силу (2).

Предложение доказано.

Во многих случаях верхний радикал $S_{\mathcal{M}}$ удовлетворяет условию:

(*) $S_{\mathcal{M}}$ -полупростые объекты — это в точности объекты, аппроксимируемые объектами из класса $\mathcal{M}$.

Например, если $\mathfrak{B}$ — радикал и $\mathcal{M}$ — класс всех $\mathfrak{B}$ -полупростых объектов, то $\mathfrak{B} = S_{\mathcal{M}}$ в силу предложения 1, и верхний радикал $S_{\mathcal{M}}$ удовлетворяет условию (*) в силу предложения 2.2.

Предложение 2. Для любого класса $\mathcal{M}$ с условием K^*1 равносильны утверждения:

а) Верхний радикал $S_{\mathcal{M}}$ удовлетворяет условию (*).

б) Если идеал $[C, \mu]$ объекта A не содержится в $S_{\mathcal{M}}$ -радикале $S_{\mathcal{M}}(A)$ объекта A , то $[C, \mu]$ не содержится и в некотором ко- $\mathcal{M}$ -идеале $[P, \sigma]$ объекта A .

в) Для любого объекта A идеал $S_{\mathcal{M}}(A)$ совпадает с пересечением всех ко- $\mathcal{M}$ -идеалов объекта A .

Действительно, все объекты из класса $\mathcal{M}$ $S_{\mathcal{M}}$ -полупросты, и потому для любого объекта A получаем $S_{\mathcal{M}}(A) \leq \bigwedge \{[P, \sigma] \mid [P, \sigma] \text{ — ко-}\mathcal{M}\text{-идеал в } A\}$. Поэтому утверждения б) и в) равносильны. С другой стороны, если верно утверждение в), то для любого $S_{\mathcal{M}}$ -полупростого объекта A получаем, что $[0, 0] = S_{\mathcal{M}}(A) = \bigwedge \{[P, \sigma] \mid [P, \sigma] \text{ — ко-}\mathcal{M}\text{-идеал в } A\}$. А это означает по определению, что любой $S_{\mathcal{M}}$ -полупростой объект аппрок-

симируется объектами из класса $\mathcal{M}$. Обратно, любой объект, аппроксимируемый объектами из класса $\mathcal{M}$, будет $S_{\mathcal{M}}$ -полупростым. Поэтому верна импликация $\text{в)} \Rightarrow \text{а)}$. Остается заметить, что верна и обратная импликация $\text{а)} \Rightarrow \text{в)}$ (см. доказательство импликации $\text{г)} \Rightarrow \text{в)}$ для теоремы 2.4).

Радикал τ называется *наследственным*, если всякий идеал τ -радикального объекта сам τ -радикален.

Предложение 3. Радикал τ является наследственным тогда и только тогда, когда для любого объекта A идеалы, содержащиеся в τ -радикале $\tau(A)$ объекта A и τ -радикальные идеалы объекта A — это одно и то же. Для того, чтобы верхний радикал $S_{\mathcal{M}}$, определяемый классом $\mathcal{M}$ с условием K^*1 , являлся наследственным и удовлетворял условию (), необходимо и достаточно, чтобы класс $\mathcal{M}$ удовлетворял условию*

(**) Если $[B, \beta]$ — идеал объекта A и объект B обладает хотя бы одним ко- $\mathcal{M}$ -идеалом, отличным от $[B, \varepsilon]$, то идеал $[B, \beta]$ не содержится в некотором ко- $\mathcal{M}$ -идеале $[P, \sigma]$ объекта A .

Доказательство. Первое утверждение легко вытекает из определения наследственного радикала, так как для любого объекта A его τ -радикал $\tau(A)$ является наибольшим τ -радикальным идеалом. Остается доказать последнее утверждение.

Пусть $S_{\mathcal{M}}$ — наследственный радикал, причем верхний радикал $S_{\mathcal{M}}$ удовлетворяет условию (*). Пусть $[B, \beta]$ — идеал объекта A и объект B обладает хотя бы одним ко- $\mathcal{M}$ -идеалом, отличным от $[B, \varepsilon]$. Это означает по построению верхнего радикала, что идеал $[B, \beta]$ не является $S_{\mathcal{M}}$ -радикальным идеалом. Но тогда в силу наследственности радикала $S_{\mathcal{M}}$ идеал $[B, \beta]$ не содержится в $S_{\mathcal{M}}$ -радикале $S_{\mathcal{M}}(A)$ объекта A . А это означает в силу предложения 2, что идеал $[B, \beta]$ не содержится в некотором ко- $\mathcal{M}$ -идеале $[P, \sigma]$ объекта A . Поэтому выполнено условие (**).

Обратно, пусть выполнено условие (**). Из этого условия вытекает, в частности, что если A — $S_{\mathcal{M}}$ -радикальный объект, т. е. A не имеет ненулевых коидеалов из $\mathcal{M}$, то и любой идеал B объекта A обладает тем же свойством, т. е. $S_{\mathcal{M}}$ -радикален. Поэтому $S_{\mathcal{M}}$ — наследственный радикал. Но тогда получаем, что для любого объекта A и любого

идеала B объекта A идеал B не содержится в $S_{\mathcal{M}}$ -радикале $S_{\mathcal{M}}(A)$ тогда и только тогда, когда объект B имеет хотя бы один ко- $\mathcal{M}$ -идеал, отличный от B . Поэтому из выполнения условия (**) следует выполнение условия (*) в силу предложения 2. Следовательно, радикал $S_{\mathcal{M}}$ наследственный и условие (*) выполнено.

Предложение доказано.

Укажем еще одно применение конструкции верхнего радикала.

Пусть нам дано некоторое непустое семейство радикалов r_i , $i \in I$. Тогда в силу теоремы 1 верно равенство

$$\mathcal{R}\left(\bigwedge_{i \in I} r_i\right) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{R}(r_i). \quad (4)$$

Равенство (4) дает удобный для применений способ построения пересечения радикалов, так как радикалы очень часто задаются указанием соответствующего класса, радикального в смысле Куроша. По двойственности естественно предположить, что верно и равенство

$$\mathcal{P}\left(\bigvee_{i \in I} r_i\right) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{P}(r_i). \quad (5)$$

А это дает удобный для применений способ построения объединения радикалов, так как радикалы можно задавать и указанием соответствующего класса, полупростого в смысле Куроша. Однако это естественное предположение оказывается неверным: равенство (5) не выполняется, как показывает предложение 2.2.2. В связи с этим представляет интерес

Предложение 4. Пусть нам дано такое семейство радикалов r_i , $i \in I$, что для каждого $i \in I$ свойство $\mathfrak{g}_i$ объектов, совпадающее с r_i -полупростотой, определяет корадикал $\mathfrak{g}_i$. Тогда равенство (5) верно.

Доказательство. Пусть r — радикал и $\mathfrak{g}$ — свойство r -полупростоты. Тогда в силу теоремы 2.4 $\mathfrak{g}$ определяет корадикал $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда свойство $\mathfrak{g}$ удовлетворяет условию P^*3 , т. е. когда любой идеал r -полупростого объекта сам является r -полупростым объектом.

Учитывая сказанное, допустим, что радикалы r_i удовлетворяют условиям предложения. Это означает, что соответствующие классы $\mathcal{P}(r_i)$ замкнуты относительно взятия идеалов. Но тогда замкнут относительно взятия

идеалов и класс $\mathcal{P} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{P}(r_i)$. Отсюда с очевидностью вытекает, что класс $\mathcal{P}$ удовлетворяет условию K^*1 . Поэтому можно строить верхний радикал $r = S_{\mathcal{P}}$. Из включений $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(r_i)$ вытекает в силу предложения 1, что $r \geq r_i$. Поэтому $\mathcal{P}(r) \subseteq \mathcal{P}(r_i)$ для всех $i \in I$ в силу (2). Но тогда $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(r) \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathcal{P}(r_i) = \mathcal{P}$, т. е. $\mathcal{P} = \mathcal{P}(r)$ для радикала $r = S_{\mathcal{P}}$. Поэтому в силу (3) верно равенство $r = \bigvee_{i \in I} r_i$. Но тогда по построению верно равенство (5).

Предложение доказано.

Пусть ϑ — произвольное свойство объектов. Для каждого объекта A строим цепь

$$O = P_{0,A}^{\vartheta} \leq \vartheta(A) = P_{1,A}^{\vartheta} \leq \dots \leq P_{i,A}^{\vartheta} \leq \dots \quad (6)$$

идеалов $[P_{i,A}^{\vartheta}, \sigma_{i,A}^{\vartheta}]$, пронумерованных порядковыми числами, полагая $P_{i,A}^{\vartheta} = \bigvee_{j < i} P_{j,A}^{\vartheta}$ для предельных i , а при переходе от j к $j+1$ в качестве идеала $P_{j+1,A}^{\vartheta}$ берем прообраз объединения $\vartheta(A/P_{j,A}^{\vartheta})$ всех ϑ -идеалов объекта $A/P_{j,A}^{\vartheta}$ (т. е. нужно рассмотреть нормальный эпиморфизм $v_{j,A}^{\vartheta}: A \rightarrow A_j^{\vartheta}$ с ядром $\text{Ker } v_{j,A}^{\vartheta} = [P_{j,A}^{\vartheta}, \sigma_{j,A}^{\vartheta}]$ и взять в качестве идеала $[P_{j+1,A}^{\vartheta}, \sigma_{j+1,A}^{\vartheta}]$ прообраз $\vartheta(A_j^{\vartheta})$ при нормальном эпиморфизме $v_{j,A}^{\vartheta}$).

По трансфинитной индукции цепь (6) идеалов $[P_{i,A}^{\vartheta}, \sigma_{i,A}^{\vartheta}]$ построена для любого объекта A и любого свойства ϑ объектов.

Лемма 1. Пусть свойство ϑ объектов удовлетворяет требованию $P3$. Если $v: A \rightarrow \bar{A}$ — нормальный эпиморфизм, то для любого i образ $[M_{i,A}^{\vartheta}, \kappa_{i,A}^{\vartheta}]$ идеала $[P_{i,A}^{\vartheta}, \sigma_{i,A}^{\vartheta}]$ объекта A при нормальном эпиморфизме $v: A \rightarrow \bar{A}$ содержится в идеале $[P_{i,\bar{A}}^{\vartheta}, \sigma_{i,\bar{A}}^{\vartheta}]$ объекта $\bar{A}$.

Доказательство будем вести трансфинитной индукцией по i , замечая, что нужное нам утверждение очевидно при $i=0$.

Введем более удобные обозначения: $[P_{i,A}^{\vartheta}, \sigma_{i,A}^{\vartheta}] = [P_j, \sigma_j]$, $[P_{i,\bar{A}}^{\vartheta}, \sigma_{i,\bar{A}}^{\vartheta}] = [\bar{P}_j, \bar{\sigma}_j]$, $[M_{i,A}^{\vartheta}, \kappa_{i,A}^{\vartheta}] = [M_j, \kappa_j]$,

$v_j: A \rightarrow A_j = A/P_j$ — нормальный эпиморфизм с ядром $\text{Ker } v_j = [P_j, \sigma_j]$; $\bar{v}_j: \bar{A} \rightarrow \bar{A}_j = \bar{A}/\bar{P}_j$ — нормальный эпиморфизм с ядром $\text{Ker } \bar{v}_j = [\bar{P}_j, \bar{\sigma}_j]$; $\xi_j: \bar{A} \rightarrow A'_j$ — нормальный эпиморфизм с ядром $\text{Ker } \xi_j = [M_j, \kappa_j]$.

Пусть для некоторого j верно включение $M_j \leq \bar{P}_j$.

По определению существует такой мономорфизм γ_j , что $\kappa_j = \gamma_j \bar{\sigma}_j$. В силу определения образа $\sigma_j v = \bar{v} \kappa_j$ для некоторого нормального эпиморфизма $\bar{v}$. Но тогда из равенств $\kappa_j \bar{v}_j = \gamma_j \bar{\sigma}_j \bar{\gamma}_j = 0$, $\sigma_j v \xi_j = 0 = \bar{v} \kappa_j \xi_j$ вытекает, что $\bar{v}_j = \xi_j \zeta_j$, $v \xi_j = v_j \eta_j$ для некоторых нормальных эпиморфизмов ξ_j и η_j . Следовательно, $v \bar{v}_j = v \xi_j \zeta_j = v_j \eta_j \zeta_j$, причем все рассматриваемые морфизмы и их произведения — нормальные эпиморфизмы.

Возьмем любой $\mathfrak{A}$ -идеал $[R_j, \rho_j]$ объекта A_j и обозначим символом $[R, \rho]$ прообраз этого идеала при нормальном эпиморфизме $v_j: A \rightarrow A_j = A/P_j$, а символом $[R^*, \rho^*]$ — образ идеала $[R, \rho]$ при нормальном эпиморфизме v . Из первой и второй теорем об изоморфизмах вытекает по построению цепи (б), что объединение всех получающихся идеалов $[R, \rho]$ дает идеал $[P_{j+1}, \sigma_{j+1}]$, а объединение соответствующих идеалов $[R^*, \rho^*]$ дает образ идеала $[P_{j+1}, \sigma_{j+1}]$, т. е. идеал $[M_{j+1}, \kappa_{j+1}]$.

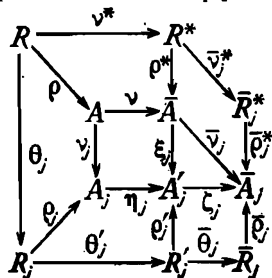
Учитывая сказанное, обозначим символом $[R'_j, \rho'_j]$ образ $[R_j, \rho_j]$ при нормальном эпиморфизме η_j , $[R_j, \bar{\rho}_j]$ — образ $[R'_j, \rho'_j]$ при нормальном эпиморфизме ξ_j и $[R_j^*, \bar{\rho}_j^*]$ — образ $[R^*, \rho^*]$ при нормальном эпиморфизме $\bar{v}_j$.

В силу определения образа и прообраза, получаем равенства

$$\rho v = v^* \rho^*, \quad \rho^* \bar{v}_j = \bar{v}_j^* \bar{\rho}_j^*,$$

$$\rho v_j = \theta_j \rho_j, \quad \rho_j \eta_j = \theta'_j \rho'_j, \quad \rho'_j \xi_j = \bar{\theta}_j \bar{\rho}_j$$

для некоторых нормальных эпиморфизмов v^* , $\bar{v}_j^*$, θ_j , θ'_j , $\bar{\theta}_j$.



Из первой группы равенств вытекает равенство

$$\rho v \bar{v}_j = v^* \rho^* \bar{v}_j = v^* \bar{v}_j^* \bar{\rho}_j^*.$$

А это означает в силу нормальности эпиморфизма $v^* \bar{v}_j^*$, что $[\bar{R}_j^*, \bar{\rho}_j^*]$ — образ идеала $[R, \rho]$ объекта A при нормальном эпиморфизме $v \bar{v}_j: A \rightarrow \bar{A}_j$. С другой стороны, из второй группы равенств вытекают равенства

$$\begin{aligned} \rho v \bar{v}_j &= \rho v \eta_j \zeta_j = \theta_j \rho_j \eta_j \zeta_j = \theta_j \theta'_j \rho'_j \zeta_j = \theta_j \theta'_j \bar{\theta}_j \bar{\rho}_j, \\ \rho_j \eta_j \zeta_j &= \theta'_j \rho'_j \zeta_j = \theta'_j \bar{\theta}'_j \bar{\rho}_j. \end{aligned}$$

Первое из этих равенств означает, что образ идеала $[R, \rho]$ объекта A при нормальном эпиморфизме $v \bar{v}_j: A \rightarrow \bar{A}_j$ является идеалом $[\bar{R}_j, \bar{\rho}_j]$ объекта $\bar{A}_j$. Поэтому $[\bar{R}_j^*, \bar{\rho}_j^*] = [\bar{R}_j, \bar{\rho}_j]$. А из второго равенства вытекает, что $[\bar{R}_j, \bar{\rho}_j]$ — образ $\bar{\theta}$ -идеала $[R_j, \rho_j]$ объекта A_j при нормальном эпиморфизме $\eta_j \zeta_j: A_j \rightarrow \bar{A}_j$. Поэтому в силу требования РЗ $[\bar{R}_j^*, \bar{\rho}_j^*] = [\bar{R}_j, \bar{\rho}_j]$ — $\bar{\theta}$ -идеал объекта $\bar{A}_j$. Но тогда в силу построения цепи (6), переходя к прообразам и учитывая первую и вторую теоремы об изоморфизмах, получаем $[R^*, \rho^*] \leq [\bar{P}_{j+1}, \bar{\sigma}_{j+1}]$.

В силу произвольности выбора $\bar{\theta}$ -идеала $[R_j, \rho_j]$ объекта A_j получаем нужное нам соотношение $M_{j+1} \leq \bar{P}_{j+1}$.

Таким образом, при переходе от j к $j+1$ соотношение $M_i \leq \bar{P}_i$ сохраняется. Остается рассмотреть предельный переход.

Пусть i — предельное и для всех $j < i$ верно соотношение $M_j \leq \bar{P}_j$. В силу первой и второй теорем об изоморфизмах для любого идеала P объекта A идеал $P \vee \text{Ker } \alpha$ совпадает с прообразом образа идеала P при нормальном эпиморфизме v . Но тогда в силу первой теоремы об изоморфизмах из равенств $P_i \vee \text{Ker } v = \bigvee_{j < i} \{P_j \vee \text{Ker } v\}$ следует $M_i = \bigvee_{j < i} M_j \leq \bigvee_{j < i} \bar{P}_j = \bar{P}_i$, т. е. $M_i \leq \bar{P}_i$.

Лемма доказана.

Для любого объекта A и любого свойства $\bar{\theta}$ полагаем

$$P_A^{\bar{\theta}} = \bigvee_{i \geq 0} P_{i, A}^{\bar{\theta}}, \quad (7)$$

где $[P_{i, A}^{\bar{\theta}}, \sigma_{i, A}^{\bar{\theta}}]$ — идеалы объекта A , образующие цепь (6). Скажем, что объект A является $\bar{\theta}$ -объектом, если

$P_A^\delta = A$ (т. е. идеал $[P_A^\delta, \sigma_A^\delta]$ из равенства (7) совпадает с несобственным идеалом $[A, \varepsilon]$ объекта A).

Предложение 5. Пусть δ — произвольное свойство объектов, удовлетворяющее требованию РЗ. Тогда для любого объекта A идеал P_A^δ является наименьшим среди всех таких идеалов P объекта A , что фактор-объект A/P не имеет ненулевых δ -идеалов, т. е. верно равенство

$$P_A^\delta = \pi_{-1\delta}(A). \quad (8)$$

Поэтому свойство $\bar{\delta}$ совпадает со свойством $(^{-1}\delta)^{-1}$. Кроме того, свойство $\bar{\delta}$ удовлетворяет требованию РЗ и $\delta \leq \bar{\delta}$ (т. е. любой δ -объект является и $\bar{\delta}$ -объектом).

Доказательство. Напомним, что для любого свойства t объектов t^{-1} — это свойство быть объектом без ненулевых t -коидеалов, ^{-1}t — это свойство быть объектом без ненулевых t -идеалов и для любого объекта A символом $\pi_t(A)$ обозначается пересечение всех ко- t -идеалов объекта A (таких идеалов P , что A/P — t -объект). Учитывая все это, будем вести доказательство.

Пусть δ — произвольное свойство объектов, удовлетворяющее требованию РЗ.

Из построения цепи (6) вытекает, что для любого порядкового числа i

$$P_{i,A}^\delta = P_{i+1,A}^\delta \Rightarrow \forall j \geq i \mid P_{i,A}^\delta = P_{j,A}^\delta. \quad (9)$$

Но идеалы объекта A образуют множество (как и под-объекты объекта A), так как по определению решетка является множеством. Поэтому в силу (9) существует такое порядковое число i_0 , зависящее от выбора A , что в силу (7) верно равенство

$$P_A^\delta = P_{i_0,A}^\delta = P_{i_0+1,A}^\delta \quad (10)$$

(цепь (6) не может постоянно строго возрастать!). Из равенства (10) вытекает равенство $\delta(A/P_A^\delta) = \delta(A/P_{i_0,A}^\delta) = \delta(A/P_{i_0+1,A}^\delta) = P_{i_0+1,A}^\delta / P_{i_0,A}^\delta = P_{i_0,A}^\delta / P_{i_0,A}^\delta = 0$. А это означает, что объект A/P_A^δ не имеет ненулевых δ -идеалов, т. е. явля-

ется $^{-1}\bar{\mathfrak{A}}$ -объектом. Это означает, в свою очередь, что $P_A^{\bar{\mathfrak{A}}}$ — ко- $^{-1}\bar{\mathfrak{A}}$ -идеал объекта A .

С другой стороны, возьмем любой ко- $^{-1}\bar{\mathfrak{A}}$ -идеал P объекта A . По определению объект $\bar{A} = A/P$ является $^{-1}\bar{\mathfrak{A}}$ -объектом, т. е. не имеет ненулевых $\bar{\mathfrak{A}}$ -идеалов. По определению фактор-объекта A/P существует нормальный эпиморфизм $v: A \rightarrow \bar{A}$ с ядром $\text{Ker } v = P$. По построению цепи (6) для объекта $\bar{A}$ получаем равенство $P_{0, \bar{A}}^{\bar{\mathfrak{A}}} = 0 = \mathfrak{A}(\bar{A}) = P_{1, \bar{A}}^{\bar{\mathfrak{A}}}$. Поэтому в силу (9) $P_{i, \bar{A}}^{\bar{\mathfrak{A}}} = 0$ для всех порядковых чисел j . Но в силу леммы 1 для любого порядкового числа i образ идеала $P_{i, A}^{\bar{\mathfrak{A}}}$ при нормальном эпиморфизме $v: A \rightarrow \bar{A}$ содержится в идеале $P_{i, \bar{A}}^{\bar{\mathfrak{A}}}$. Поэтому в силу доказанного образ любого идеала $P_{i, A}^{\bar{\mathfrak{A}}}$ будет совпадать с нулевым идеалом, т. е. $P_{i, A}^{\bar{\mathfrak{A}}} \leq P = \text{Ker } v$ для всех порядковых чисел i . Но тогда в силу (7) $P_A^{\bar{\mathfrak{A}}} \leq P$.

Из доказанного вытекает, что идеал $P_A^{\bar{\mathfrak{A}}}$ является наименьшим $^{-1}\bar{\mathfrak{A}}$ -идеалом объекта A , и потому верно равенство (8). Но $A = \pi_t(A)$ тогда и только тогда, когда A — t^{-1} -объект. Поэтому в силу (8) свойство $\bar{\mathfrak{A}}$ совпадает со свойством $(^{-1}\bar{\mathfrak{A}})^{-1}$. Кроме того по построению для любого объекта A верно включение $\mathfrak{A}(A) \leq P_A^{\bar{\mathfrak{A}}}$. Поэтому $\mathfrak{A} \leq \bar{\mathfrak{A}}$, т. е. любой $\bar{\mathfrak{A}}$ -объект является $\bar{\mathfrak{A}}$ -объектом. Остается доказать, что свойство $\bar{\mathfrak{A}}$ удовлетворяет условию РЗ. Но это равносильно тому, что для любого нормального эпиморфизма $v: A \rightarrow \bar{A}$ из того, что A — $\bar{\mathfrak{A}}$ -объект вытекает, что и $\bar{A}$ — $\bar{\mathfrak{A}}$ -объект. Поэтому нужное нам утверждение следует из леммы 1 и равенства (7) или (10).

Предложение доказано.

Теорема 2. Если свойство $\bar{\mathfrak{A}}$ удовлетворяет требованию РЗ, а свойство $^{-1}\bar{\mathfrak{A}}$ (быть объектом без ненулевых $\bar{\mathfrak{A}}$ -идеалов) — требованию Р*1, то свойство $\bar{\mathfrak{A}}$ радикально в смысле Куроша и верны утверждения:

а) $\bar{\mathfrak{A}}$ -полупростые объекты — это в точности $^{-1}\bar{\mathfrak{A}}$ -объекты, т. е. объекты без ненулевых $\bar{\mathfrak{A}}$ -идеалов.

б) Для любого объекта A его $\bar{\mathfrak{v}}$ -радикал $\bar{\mathfrak{v}}(A)$ совпадает с идеалом $P_A^{\mathfrak{v}}$.

Доказательство. Пусть свойство $\mathfrak{v}$ удовлетворяет требованию R_3 , а свойство $^{-1}\mathfrak{v}$ — требованию R^*1 . Тогда по построению верхнего радикала (или из доказательства теоремы 2.3) свойство $\bar{\mathfrak{v}}$ радикально в смысле Куроша. Но в силу предложения 5 $\bar{\mathfrak{v}} = (^{-1}\mathfrak{v})^{-1}$. Поэтому свойство $\bar{\mathfrak{v}}$ радикально в смысле Куроша и в силу предложения 1 все объекты без ненулевых $\mathfrak{v}$ -идеалов (т. е. $^{-1}\mathfrak{v}$ -объекты) $\bar{\mathfrak{v}}$ -полупросты. С другой стороны, все $\mathfrak{v}$ -объекты являются $\bar{\mathfrak{v}}$ -объектами, и потому все $\bar{\mathfrak{v}}$ -полупростые объекты не имеют ненулевых $\mathfrak{v}$ -идеалов. Следовательно $\bar{\mathfrak{v}}$ -полупростые объекты и объекты без ненулевых $\mathfrak{v}$ -идеалов — это одно и то же. Но тогда в силу предложений 2.1 и 5 для любого объекта A верно равенство $\bar{\mathfrak{v}}(A) = \pi_{^{-1}\mathfrak{v}}(A) = P_A^{\mathfrak{v}}$.

Теорема доказана.

Пусть $\mathfrak{v}$ — произвольное свойство объектов.

Скажем, что объект B является $\mathfrak{v}_1$ -объектом, если для некоторого $\mathfrak{v}$ -объекта A существует нормальный эпиморфизм $v: A \rightarrow B$. Ясно, что свойство $\mathfrak{v}_1$ удовлетворяет требованию R_3 , так как произведение нормальных эпиморфизмов само является нормальным эпиморфизмом. При этом, очевидно, $\mathfrak{v} \subseteq \mathfrak{v}_1$, т. е. любой $\mathfrak{v}$ -объект является $\mathfrak{v}_1$ -объектом, так как тождественный морфизм является нормальным эпиморфизмом.

Пусть свойство $\mathfrak{v}_j$ уже построено для всех таких чисел j , что $1 \leq j < i$. Пусть все свойства $\mathfrak{v}_j$ удовлетворяют требованию R_3 . Ясно, что тогда и свойство $\bigcup_{j < i} \mathfrak{v}_j$ быть $\mathfrak{v}_j$ -объектом для некоторого порядкового числа $j < i$ удовлетворяет требованию R_3 . Но тогда в силу предложения 5, свойство

$$\mathfrak{v}_i = (^{-1}(\bigcup_{j < i} \mathfrak{v}_j))^{-1} \quad (11)$$

удовлетворяет требованию R_3 , причем $\bigcup_{j < i} \mathfrak{v}_j \subseteq \mathfrak{v}_i$.

Таким образом, правило (11) позволяет строить по индукции цепь свойств

$$\mathfrak{v} \subseteq \mathfrak{v}_1 \subseteq \mathfrak{v}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{v}_i \subseteq \dots, \quad (12)$$

пронумерованных порядковыми числами $i \geq 1$, причем все свойства $\hat{v}_i$ удовлетворяют требованию РЗ. Но тогда и свойство

$$\hat{v} = \bigcup_{i \geq 1} \hat{v}_i \quad (13)$$

быть $\hat{v}_i$ -объектом для некоторого порядкового числа $i \geq 1$ удовлетворяет требованию РЗ.

Отображение $l_{\hat{v}}$, ставящее в соответствие каждому объекту A идеал

$$l_{\hat{v}}(A) = \bigvee_{i \geq 0} P_A^{\hat{v}_i}, \quad (14)$$

называется *нижним радикалом, порожденным свойством $\hat{v}$* . Цепь свойств (12), построенная с помощью правила перехода (11) из свойства $\hat{v}$, называется *цепью Куроша свойств, соответствующей свойству $\hat{v}$* .

Введенное название «нижний радикал, порожденный свойством $\hat{v}$ » оправдывается тем, что верна

Теорема 3. *Для любого свойства $\hat{v}$ нижний радикал $l_{\hat{v}}$ порожденный свойством $\hat{v}$, действительно является радикалом. А именно, $l_{\hat{v}}$ — наименьший среди всех таких радикалов r , что все $\hat{v}$ -объекты r -радикальны. При этом свойство $\hat{v}$ радикально в смысле Куроша и совпадает со свойством $l_{\hat{v}}$ -радикальности.*

Доказательство. В силу сказанного выше свойство $\hat{v}$, построенное по правилу (13) с помощью цепи Куроша (12), удовлетворяет требованию РЗ.

С другой стороны, возьмем любой объект A . Цепь Куроша (12) индуцирует цепь

$$P_A^{\hat{v}_1} \leq P_A^{\hat{v}_2} \leq \dots \leq P_A^{\hat{v}_i} \leq \dots \quad (15)$$

идеалов объекта A . Но идеалы объекта A образуют множество. Поэтому существует такое порядковое число j , что в силу (15) верно равенство

$$P_A = \bigvee_{i \geq 1} P_A^{\hat{v}_i} = P_A^{\hat{v}_j}. \quad (16)$$

Допустим теперь, что объект A является $\hat{v}$ -объектом, т. е. $A = P_A^{\hat{v}}$. Но из (16) и предложения 5 легко выте-

кает, что $P_A^{\hat{\mathfrak{g}}} = P_A$, так как $P_A^{\mathfrak{g}_i} \leq P_A^{\hat{\mathfrak{g}}}$ и, с другой стороны, объект A/P_A не имеет ненулевых $\mathfrak{g}_i$ -идеалов для всех $i \geq 1$, т. е. не имеет ненулевых $\hat{\mathfrak{g}}$ -идеалов, что дает $P_A^{\mathfrak{g}_j} = P_A \geq P_A^{\hat{\mathfrak{g}}}$. Следовательно, $A = P_A^{\mathfrak{g}_j}$, т. е. A — $\mathfrak{g}_{j+1}$ -объект, так как $\mathfrak{g}_{j+1} = (-^1\mathfrak{g}_j)^{-1} = \bar{\mathfrak{g}}_j$. Но тогда объект A является $\mathfrak{g}_{j+1}$ -объектом, а значит и $\hat{\mathfrak{g}}$ -объектом, т. е. все $\hat{\mathfrak{g}}$ -объекты являются $\hat{\mathfrak{g}}$ -объектами. Так как верно и обратное, то $\hat{\mathfrak{g}} = \bar{\hat{\mathfrak{g}}} = (-^1\hat{\mathfrak{g}})^{-1}$ в силу предложения 5.

А из полученного равенства вытекает, что свойство $\hat{\mathfrak{g}}$ удовлетворяет требованиям P1 и P2, т. е. является свойством, радикальным в смысле Куроша. Кроме того, в силу (16) для любого объекта A идеал P_A является наименьшим среди всех таких идеалов P в A , что A/P — объект без ненулевых $\hat{\mathfrak{g}}$ -идеалов. Поэтому в силу (14) и (16) отображение $l_{\hat{\mathfrak{g}}}$ является радикалом, соответствующим свойству $\hat{\mathfrak{g}}$, радикальному в смысле Куроша, и свойству $-^1\hat{\mathfrak{g}}$, полупростому в смысле Куроша. В частности, все $\hat{\mathfrak{g}}$ -объекты $l_{\hat{\mathfrak{g}}}$ -радикальны, так как они являются $\hat{\mathfrak{g}}$ -объектами в силу (13) и (11).

С другой стороны, пусть τ — любой такой радикал, что все $\hat{\mathfrak{g}}$ -объекты τ -радикальны. Тогда, обозначая тем же символом τ свойство τ -радикальности, получаем соотношение $\hat{\mathfrak{g}} \subseteq \tau$. Но тогда в силу теоремы 2.1 верно и соотношение $\mathfrak{g}_1 \subseteq \tau$. Еще раз применяя теорему 2.1, получаем в силу правила (11), что $\mathfrak{g}_i \subseteq \tau$ для всех порядковых чисел i . Но тогда $\hat{\mathfrak{g}} \subseteq \tau$, т. е. радикал $l_{\hat{\mathfrak{g}}}$ меньше радикала τ . Теорема доказана.

При построении нижнего радикала $l_{\hat{\mathfrak{g}}}$, порожденного заданным свойством $\hat{\mathfrak{g}}$ объектов, естественно возникает вопрос: стабилизируется ли цепь Куроша (12), соответствующая свойству $\hat{\mathfrak{g}}$? В общем случае ответ отрицателен, как показывает предложение 2.2.6. Однако, если категория достаточно близка к категории ассоциативных алгебр или групп, то ответ положителен.

Скажем, что категория $\mathcal{K}$ обладает свойством S , если для любого объекта A , любого идеала $[B, \beta]$ объекта A и любого идеала $[C, \mu]$ объекта B идеал объекта A ,

порожденный подобъектом $[C, \mu\beta]$, является c_2 -идеалом, где c — свойство быть объектом, изоморфным объекту C . Нетрудно видеть, что категория $\mathcal{K}$ обладает свойством S тогда и только тогда, когда для любого объекта A и любого свойства $\mathfrak{v}$ объектов всякий $\mathfrak{v}$ -идеал идеала объекта A порождает в A $\mathfrak{v}_2$ -идеал.

Теорема 4. Пусть категория $\mathcal{K}$ обладает свойством S . Тогда:

а) Если τ — радикал, $[B, \beta]$ — идеал объекта A и $[R_B, \rho_B]$ — τ -радикал объекта B , то $[R_B, \rho_B\beta]$ — τ -радикальный идеал объекта A . В частности, идеал $[R_B, \rho_B\beta]$ содержится в τ -радикале $[R_A, \rho_A]$ объекта A .

б) Любое свойство $\mathfrak{v}$, полупростое в смысле Куроша, удовлетворяет требованию P^*3 , т. е. определяет корадикал.

в) Пересечение любого семейства классов, полупростых в смысле Куроша, само является классом, полупростым в смысле Куроша. Поэтому для любого семейства радикалов τ_i верно равенство $\mathcal{P}\left(\bigvee_{i \in I} \tau_i\right) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{P}(\tau_i)$.

Доказательство. Пусть τ — радикал, $[B, \beta]$ — идеал объекта A и $[R_B, \rho_B]$ — радикал объекта B . Ясно, что тогда $[R_B, \rho_B\beta]$ — подобъект объекта A . Строим идеал $[R, \rho]$ объекта A , порожденный подобъектом $[R_B, \rho_B\beta]$ (т. е. пересечение всех идеалов объекта A , содержащих данный подобъект).

Пусть τ — свойство τ -радикальности. Тогда свойство τ радикально в смысле Куроша и потому по построению цепи Куроша или в силу теоремы 3 $\tau = \tau_1 = \tau_2 = \hat{\tau}$. Но по условию категория $\mathcal{K}$ обладает свойством S . Поэтому идеал $[R, \rho]$ объекта A будет τ -радикален, так как τ -радикален идеал $[R_B, \rho_B]$ объекта B . По построению $[R, \rho] \leq [B, \beta]$, так как $[R_B, \rho_B\beta] \leq [B, \beta]$. Поэтому $\rho = \rho'\beta$ для некоторого мономорфизма ρ' . Но тогда снова по построению $[R, \rho] = [R, \rho'\beta] \geq [R_B, \rho_B\beta]$, и потому как легко видеть $[R, \rho'] \geq [R_B, \rho_B]$. При этом $[R, \rho']$ — идеал объекта B , так как $[R, \rho'\beta] = [R, \rho]$ — идеал объекта A . Но объект R τ -радикален. Поэтому $[R, \rho']$ — τ -радикальный идеал объекта B , откуда $[R, \rho'] \leq [R_B, \rho_B]$. В результате получаем, что верно равенство $[R, \rho'] = [R_B, \rho_B]$, а значит и равенство $[R_B, \rho_B\beta] = [R, \rho'\beta] = [R, \rho]$. Поэтому $[R_B, \rho_B\beta]$ — τ -радикальный идеал объекта A .

Следовательно, верно утверждение а). Но тогда, как легко видеть, верно и утверждение б), так как свойство, полупростое в смысле Куроша, и свойство, совпадающее со свойством τ -полупростоты для некоторого радикала τ , — это одно и то же. Но тогда, в силу предложения 4, верно и утверждение в).

Теорема доказана.

Для формулировки и доказательства следующей теоремы нам необходимо понятие метаидеала, обобщающее понятие идеала.

Пусть нам дана конечная цепь подобъектов объекта A ,
 $[O, 0] = [C_0, \mu_0] \leq [C_1, \mu_1] \leq \dots \leq [C_n, \mu_n] \leq \dots$
 $\dots \leq [C_m, \mu_m] = [R, \varepsilon]. \quad (17)$

Тогда по определению порядка для подобъектов, если $n < m$, то $\mu_n = \gamma_n \mu_{n+1}$ для некоторого мономорфизма $\gamma_n: C_n \rightarrow C_{n+1}$. Цепь (17) подобъектов объекта A называется (конечным!) *нормальным рядом объекта A* , если для всех целых чисел n таких, что $0 \leq n < m$, подобъект $[C_n, \gamma_n]$ является идеалом объекта C_{n+1} . Подобъект $[C, \mu]$ объекта A называется *метаидеалом* (конечного индекса), если он является членом некоторого (конечного) нормального ряда (17) объекта A *).

Теорема 5. Пусть категория $\mathcal{K}$ обладает свойством S . Тогда для любого свойства $\hat{v}$ объектов соответствующая ему цепь Куроша (12) стабилизируется. А именно, если ω — первое бесконечное порядковое число, то $\hat{v} = \hat{v}_\omega$. При этом для любого объекта B равносильны утверждения:

а) Объект B l_ε -полупрост, т. е. не имеет ненулевых $\hat{v}$ -идеалов.

б) Объект B не имеет ненулевых $\hat{v}_n$ -идеалов для всех $n < \omega$, $n \geq 1$.

в) Объект B не имеет ненулевых $\hat{v}_1$ -метаидеалов.

Доказательство. Пусть (12) — цепь Куроша, соответствующая заданному свойству $\hat{v}$. С помощью этой цепи строим свойство $\tilde{v} = \bigcup_{n < \omega} \hat{v}_n$ быть $\hat{v}_n$ -объектом для некоторого $n < \omega$. Тогда по построению цепи Куроша и в силу

*) Всюду ниже мы рассматриваем только конечные нормальные ряды. Поэтому под метаидеалами всегда понимаются метаидеалы конечного индекса.

предложения 5 все свойства $\mathfrak{g}_n$ с $n < \omega$, а значит, и свойство $\tilde{\mathfrak{g}}$, удовлетворяют требованию РЗ. Кроме того по построению объект B не имеет ненулевых $\tilde{\mathfrak{g}}$ -идеалов, т. е. является $^{-1}\tilde{\mathfrak{g}}$ -объектом, тогда и только тогда, когда объект B не имеет ненулевых $\mathfrak{g}_n$ -идеалов для всех $n < \omega$.

Пусть объект A имеет ненулевой $\mathfrak{g}_n$ -идеал $[B, \beta]$ для некоторого $n < \omega$, $n \geq 1$. Если $n = 1$, то объект A имеет ненулевой $\mathfrak{g}_1$ -метаидеал: им будет идеал $[B, \beta]$. Если $n \geq 2$, то объект B , как и любой другой ненулевой $\mathfrak{g}_n$ -объект, имеет некоторый ненулевой $\mathfrak{g}_{n-1}$ -идеал $[B_1, \beta_1]$, так как $\mathfrak{g}_n = \bar{\mathfrak{g}}_{n-1} = (-^1\mathfrak{g}_{n-1})^{-1}$. Но тогда $[B_1, \beta_1\beta]$ — ненулевой $\mathfrak{g}_{n-1}$ -метаидеал объекта A . Продолжая процесс, получаем, что объект A имеет некоторый ненулевой $\mathfrak{g}_1$ -метаидеал $[B_{n-1}, \beta_{n-1} \dots \beta_1\beta]$.

Обратно, пусть объект A имеет ненулевой $\mathfrak{g}_1$ -метаидеал. Тогда по определению метаидеала существует такой нормальный ряд (17) объекта A , что $[C_1, \mu_1] \neq [0, 0]$ и объект C_1 является ненулевым $\mathfrak{g}_1$ -объектом. Если $m \leq 2$, то $[C_1, \mu_1]$ будет ненулевым $\mathfrak{g}_1$ -идеалом объекта A . Если же $m \geq 3$, то, начиная процесс, замечаем, что $[C_1, \gamma_1]$ — ненулевой $\mathfrak{g}_1$ -идеал объекта C_2 , $[C_2, \gamma_2]$ — идеал объекта C_3 . Поэтому в силу свойства S подобъект $[C_1, \gamma_1\gamma_2]$ объекта C_3 порождает $\mathfrak{g}_2$ -идеал $[D_2, \delta_2]$ этого объекта, так как $(\mathfrak{g}_1)_2 = \bar{\mathfrak{g}}_1 = \mathfrak{g}_2$ в силу предложения 5 и построения цепи Куроша (12). Если для некоторого натурального числа $k \geq 2$ мы уже построили ненулевой $\mathfrak{g}_k$ -идеал $[D_k, \delta_k]$ объекта C_{k+1} и $k+1 < m$, то, продолжая процесс и учитывая свойство S категории $\mathcal{K}$ и равенство $(\mathfrak{g}_k)_2 = \bar{\mathfrak{g}}_k = \mathfrak{g}_{k+1}$, строим $\mathfrak{g}_{k+1}$ -идеал $[D_{k+1}, \delta_{k+1}]$ объекта C_{k+2} , порожденный подобъектом $[D_k, \delta_k\gamma_{k+1}]$ этого объекта. Через конечное число шагов процесс закончится, и мы построим ненулевой $\mathfrak{g}_n$ -идеал объекта A для некоторого $n < \omega$.

Из доказанного вытекает равносильность утверждений б) и в). А это означает в силу сказанного выше, что свойство $^{-1}\tilde{\mathfrak{g}}$ совпадает со свойством быть объектом без ненулевых $\mathfrak{g}_1$ -метаидеалов.

Но если $[C, \mu]$ — метаидеал объекта B и $[B, \beta]$ — идеал (или метаидеал) объекта A , то $[C, \mu\beta]$ — метаидеал объекта A в силу определения метаидеала. Поэтому любой идеал

$^{-1}\tilde{\mathfrak{g}}$ -объекта, т. е. объекта без ненулевых $\mathfrak{g}_1$ -метaideалов, сам будет $^{-1}\tilde{\mathfrak{g}}$ -идеалом.

В результате получаем, что для свойства $\tilde{\mathfrak{g}}$, удовлетворяющего требованию P3, свойство $^{-1}\tilde{\mathfrak{g}}$ удовлетворяет требованию P*3 (а значит, и требованию P*1). Поэтому в силу теоремы 2 и предложения 5 свойство $(^{-1}\tilde{\mathfrak{g}})^{-1} = = (^{-1}(\bigcup_{n < \omega} \mathfrak{g}_n))^{-1} = \mathfrak{g}_\omega$ радикально в смысле Куроша. Но

тогда в силу теоремы 3 $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_\omega$ — свойство l_s -радикальности для нижнего радикала l_s , порожденного свойством $\mathfrak{g}$, т. е. цепь Куроша (12) стабилизируется на первом бесконечном шаге ω .

Еще раз применяя предложение 5 и теорему 2, получаем, что $l_{\mathfrak{g}}$ -полупростые объекты — это в точности $^{-1}\tilde{\mathfrak{g}}$ -объекты, т. е. утверждения а) и б) равносильны.

Теорема доказана.

В заключение укажем несколько примеров категорий, удовлетворяющих свойству S.

Пример. Пусть $\mathcal{H}$ — произвольный класс Ω -групп, замкнутый относительно взятия идеалов (а значит, и метaideалов) и гомоморфных образов. Нетрудно проверить, что тогда, взяв в качестве объектов Ω -группы из $\mathcal{H}$, а в качестве морфизмов — гомоморфизмы Ω -групп из $\mathcal{H}$ друг в друга (точнее, гомоморфизмы $\varphi: G \rightarrow H$ Ω -группы G на метaideал Ω -группы H), мы получаем категорию $\mathcal{K}$, в которой выполнены аксиомы 1 — 6. Все рассматриваемые ниже категории предполагаются категориями Ω -групп, полученными указанным выше способом.

Для любого кольца (или алгебры) R категории R -модулей удовлетворяют условию S. Достаточно заметить, что в таких категориях понятия подобъекта, идеала и метaideала совпадают.

Категории ассоциативных алгебр удовлетворяют условию S, что вытекает из леммы 2.4.1.

Покажем еще, что категории групп удовлетворяют условию S. Для этого нам нужен аналог леммы 2.4.1.

Пусть K — инвариантная подгруппа группы H , N — инвариантная подгруппа группы G , $\tilde{K}$ — инвариантная подгруппа группы G , порожденная подгруппой K .

В силу инвариантности N для каждого $g \in G$ отображение $h \rightarrow ghg^{-1}$ является автоморфизмом группы N . Поэ-

тому gKg^{-1} — инвариантная подгруппа группы H для всех $d \in G$. Подгруппа, порожденная всеми этими подгруппами gKg^{-1} , как раз и совпадает с $\tilde{K}$. Применяя обычную запись h^g вместо ghg^{-1} и K^g вместо gKg^{-1} , получаем, что KK^g — инвариантные подгруппы в $\tilde{K}$, так как они являются инвариантными подгруппами в H , причем $\tilde{K}$ совпадает с произведением всех этих инвариантных подгрупп KK^g , $g \in G$.

Ясно, что K — инвариантная подгруппа в группе KK^g . Поэтому можно рассмотреть фактор-группу KK^g/K . Строим отображение $\varphi_g: K \rightarrow KK^g/K$, полагая $\varphi_g(k) = Kk^g$ для всех $k \in K$. Тогда из равенства $Kk_1^g \cdot Kk_2^g = Kk_1^g k_2^g = K(k_1 k_2)^g$ получаем, что φ_g — гомоморфизм группы K на группу KK^g . Следовательно, каждая группа KK^g является расширением группы K с помощью некоторого гомоморфного образа $\varphi_g(K)$ этой группы.

Теперь мы можем доказать выполнение условия S .

Пусть f — свойство быть группой, изоморфной группе K . Тогда по построению f_1 — свойство быть гомоморфным образом группы K . Учитывая это, возьмем любой гомоморфный образ $\psi(\tilde{K})$ группы $\tilde{K}$. Пусть $\psi(\tilde{K})$ — неединичная группа. Тогда в силу доказанного $\psi(KK^g)$ — неединичная инвариантная в $\psi(\tilde{K})$ подгруппа для некоторого $g \in G$. Если $\psi(\tilde{K})$ — неединичная подгруппа, то $\psi(K)$ — неединичная инвариантная f_1 -подгруппа. Если $\psi(K)$ — единичная, то в силу теорем об изоморфизмах $\psi(KK^g)$ — гомоморфный образ группы $KK^g/K = \varphi_g(K)$. Поэтому $\psi(KK^g)$ — неединичная инвариантная f_1 -подгруппа. Следовательно, $\tilde{K}$ — f_2 -группа.

§ 4. Идеально наследственные радикалы (кручения).

Радикальность и полупростота

В этом и следующем параграфах мы предполагаем, не оговаривая этого особо, что в рассматриваемой категории $\mathcal{K}$, кроме аксиом 1 — 6, выполнена

Аксиома 7. Решетка идеалов любого объекта непрерывна по пересечениям.

Подробнее это означает следующее: для любой цепи $\{C_i | i \in I\}$ идеалов и любого идеала B объекта A верно

равенство

$$B \wedge \left(\bigvee_{i \in I} C_i \right) = \bigvee_{i \in I} (B \wedge C_i).$$

Для любого радикала τ и любого объекта A полагаем $\tau(A) = [R_A^\tau, \rho_A^\tau]$.

Радикал τ называется *идеально наследственным радикалом* или *кручением*, если для любого объекта A и его идеала $[B, \beta]$ верно равенство

$$[R_A^\tau, \rho_A^\tau] \wedge [B, \beta] = [R_B^\tau, \rho_B^\tau \beta]. \quad (1)$$

Применяя упрощенную запись, получаем

Предложение 1. *Отображение τ , ставящее в соответствие каждому объекту A однозначно определенный идеал $\tau(A)$ этого объекта, будет кручением тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет требованиям R1, R3 (см. § 2) и*

R4. *Если B — идеал объекта A , то $\tau(B) = B \wedge \tau(A)$.*

Действительно, если τ — кручение, то отображение τ удовлетворяет требованию R4, так как это требование представляет собой упрощенную запись *) справедливости равенства (1). Обратно, пусть отображение τ , ставящее в соответствие каждому объекту A однозначно определенный идеал $\tau(A)$ этого объекта, удовлетворяет требованиям R1, R3, R4. Возьмем любой объект A . Тогда, если $\tau(A) = R$, то $\tau(R) = R \wedge \tau(A) = R$ в силу требования R4, т. е. $\tau(A)$ — τ -радикальный идеал объекта A . С другой стороны, если B — τ -радикальный идеал объекта A , то снова в силу R4 $B = \tau(B) \leq \tau(A)$. Поэтому идеал $\tau(A)$ является τ -радикалом объекта A , т. е. выполнено требование R2. Из доказанного вытекает по определению, что отображение τ является радикалом. Но тогда, еще раз применяя требование R4, получаем, что τ — кручение.

Предложение доказано.

*) Если $[B, \beta]$ и $[R, \rho]$ — идеалы объекта A , то $[B, \beta] \wedge [R, \rho]$ — идеал объекта A и $[B, \beta] \wedge [R, \rho] = [D, \gamma\beta] = [D, \mu\rho]$ для некоторых мономорфизмов $\gamma: D \rightarrow B$ и $\mu: D \rightarrow R$. Поэтому $D = B \wedge R$ можно считать идеалом и объекта B , и объекта R , так как $[D, \gamma]$ — идеал объекта B , $[D, \mu]$ — идеал объекта R .

Предложение 2. Любой идеально наследственный радикал является наследственным. Для любого наследственного радикала τ равносильны утверждения:

а) τ — идеально наследственный радикал.

б) Если $[B, \beta]$ — идеал объекта A , то и $[R_B^{\tau}, \rho_B^{\tau} \beta]$ — идеал объекта A (в упрощенной записи: если B — идеал объекта A , то и $\tau(B)$ — идеал объекта A).

в) Если $[B, \beta]$ — идеал объекта A , $[C, \gamma]$ — τ -радикальный идеал объекта B , то подобъект $[C, \gamma\beta]$ порождает τ -радикальный идеал объекта A (в упрощенной записи: если B — идеал объекта A , то любой τ -радикальный идеал объекта B порождает в A τ -радикальный идеал).

г) Если $[B, \beta]$ — идеал τ -полупростого объекта A , то и объект B τ -полупрост (в упрощенной записи: любой идеал τ -полупростого объекта сам τ -полупрост).

Доказательство. Пусть τ — идеально наследственный радикал. Тогда в силу (1), если $[B, \beta]$ — τ -радикальный идеал объекта A , то $[B, \beta] \leq [R_A^{\tau}, \rho_A^{\tau}]$, и обратно, если $[B, \beta] \leq [R_A^{\tau}, \rho_A^{\tau}]$, то $[B, \beta] = [R_A^{\tau}, \rho_A^{\tau}] = [R_B^{\tau}, \rho_B^{\tau} \beta]$ — τ -радикальный идеал объекта A . Поэтому в силу предложения 3.3 τ — наследственный радикал.

Пусть τ — наследственный радикал.

а) $\Rightarrow$ б). Это очевидно в силу аксиом и равенства (1).

б) $\Rightarrow$ г). Возьмем любой идеал $[B, \beta]$ τ -полупростого объекта A . Если верно б), то подобъект $[R_B^{\tau}, \rho_B^{\tau} \beta]$ будет τ -радикальным идеалом объекта A , и потому $[R_B^{\tau}, \rho_B^{\tau} \beta]$ — нулевой идеал объекта A в силу τ -полупростоты объекта A . Но тогда $[R_B^{\tau}, \rho_B^{\tau} \beta] = [0, 0]$, т. е. сам объект B τ -полупрост.

г) $\Rightarrow$ в). Пусть $[C, \gamma]$ — τ -радикальный идеал объекта B , $[B, \beta]$ — идеал объекта A . Рассмотрим нормальный эпиморфизм $v: A \rightarrow \bar{A} = A/\tau(A)$ с ядром $\text{Ker } v = [R_A^{\tau}, \rho_A^{\tau}]$. Объект $\bar{A}$ τ -полупрост по определению радикала. Поэтому, если верно г) и $[\bar{B}, \bar{\beta}]$ — образ идеала $[B, \beta]$ при нормальном эпиморфизме v , то и объект $\bar{B}$ τ -полупрост. Но по определению образа $\rho v = \bar{\rho} \bar{\beta}$ для некоторого нормального эпиморфизма $\bar{v}: B \rightarrow \bar{B}$. Поэтому из τ -полупростоты объекта $\bar{B}$ вытекает, что $[C, \gamma] \leq [R_{\bar{B}}^{\tau}, \rho_{\bar{B}}^{\tau}] \leq \text{Ker } \bar{v}$, т. е. $\gamma \bar{v} = 0$. Но тогда и $\gamma \beta v = 0$, т. е. $[C, \gamma \beta] \leq \text{Ker } v = [R_A^{\tau}, \rho_A^{\tau}]$.

Поэтому идеал объекта A , порожденный подобъектом $[C, \gamma\beta]$, содержится в r -радикале $r(A) = [R_A^r, \rho_A^r]$ этого объекта, т. е. является r -радикальным идеалом объекта A в силу предложения 3.3.

в) $\Rightarrow$ а). Пусть $[B, \beta]$ — идеал объекта A , $[R, \rho] = [R_A^r, \rho_A^r] \wedge [B, \beta]$. В силу наследственности радикала r R — r -радикальный объект, так как $\rho = \mu \rho_A^r$ для некоторого мономорфизма $\mu: R \rightarrow R_A^r$ и $[R, \mu]$ — идеал объекта A . Но $\rho = \gamma\beta$ для некоторого мономорфизма $\gamma: R \rightarrow B$ и для этого мономорфизма подобъект $[R, \gamma]$ оказывается r -радикальным идеалом объекта B . Поэтому $[R, \gamma] \leq [R_B^r, \rho_B^r]$, т. е. $[R, \rho] \leq [R_B^r, \rho_B^r \beta]$. С другой стороны, если верно в), то $[R_B^r, \rho_B^r \beta]$ порождает в A r -радикальный идеал, и потому $[R_B^r, \rho_B^r \beta] \leq [R_A^r, \rho_A^r] \wedge [B, \beta]$. Следовательно, верно равенство (1), т. е. радикал r является идеально наследственным.

Предложение доказано.

Из предложения 2 и теоремы 3.4 вытекает, что если категория $\mathcal{K}$ обладает свойством S , то наследственные радикалы и идеально наследственные радикалы — это одно и то же. В частности, это будет так в случае ассоциативных алгебр и групп. В общем случае наследственный радикал может не быть идеально наследственным, как показывает предложение 2.2.

С каждым идеально наследственным радикалом r связывается класс $\mathcal{R}(r)$ всех r -радикальных объектов и класс $\mathcal{P}(r)$ всех r -полупростых объектов. При этом, как и для любого радикала r , классы $\mathcal{R}(r)$ и $\mathcal{P}(r)$ однозначно определяют друг друга и «восстанавливают» идеально наследственный радикал r .

Свойство r объектов назовем *радикальным*, если оно совпадает со свойством r -радикальности для некоторого идеально наследственного радикала r . Свойство β объектов назовем *полупростым*, если оно совпадает со свойством r -полупростоты для некоторого идеально наследственного радикала r .

В силу сказанного выше, если r — радикальное свойство, то существует и притом точно один идеально наследственный радикал r такой, что класс всех r -объектов совпадает с классом $\mathcal{R}(r)$ всех r -радикальных объектов. Аналогично,

если δ — полупростое свойство, то существует и притом точно один идеально наследственный радикал τ такой, что класс всех δ -объектов совпадает с классом $\mathcal{P}(\tau)$ всех τ -полупростых объектов.

Поэтому для характеристики идеально наследственных радикалов нам нужны характеристики радикальных и полупростых свойств. Начнем с характеристики радикальных свойств, так как она легко вытекает из предложения 2. Ограничимся одной характеристикой.

Предложение 3. Любое радикальное свойство является свойством, радикальным в смысле Куроша. Свойство τ объектов, радикальное в смысле Куроша, будет радикальным тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет требованию P^*3 (т. е. всякий идеал τ -объекта сам будет τ -идеалом) и требованию

P7. Если $[B, \beta]$ — идеал объекта A , $[C, \gamma]$ — идеал объекта B и $[R, \rho]$ — идеал объекта A , порожденный подобъектом $[C, \gamma\beta]$, то из того, что объект C обладает свойством τ , вытекает, что и объект R обладает этим свойством.

Действительно, оба утверждения с очевидностью вытекают из предложения 2 и предложения 3.3, так как требование $P7$ совпадает с утверждением в) предложения 2 (для радикала τ , соответствующего свойству τ , радикальному в смысле Куроша).

Переходя к характеристике полупростых свойств, укажем сначала одну характеристику идеально наследственных радикалов с помощью конструкции верхнего радикала. Напомним, что в силу предложения 3.1 любой радикал τ совпадает с верхним радикалом $S_{\mathcal{M}}$ для подходящего класса $\mathcal{M}$ с условием K^*1 .

Класс $\mathcal{M}$ объектов назовем обобщенно специальным, если выполнены условия

N1. Если $[B, \beta]$ — идеал объекта A из класса $\mathcal{M}$, то и B — объект из $\mathcal{M}$.

N2. Если $[B, \beta]$ — ненулевой идеал объекта A , имеющий ненулевое пересечение с любым ненулевым идеалом объекта A , и B — объект из $\mathcal{M}$, то и $A \in \mathcal{M}$.

N3. Если $[B, \beta]$ — идеал объекта A , $[C, \gamma]$ — ко- $\mathcal{M}$ -идеал*) объекта B , то существует такой идеал $[D, \delta\beta]$

*) То есть B/C — объект из класса $\mathcal{M}$.

объекта A , что $[D, \delta]$ — ко- $\mathcal{M}$ -идеал в B и $[D, \delta] \leq [C, \gamma]$.

Будем говорить, что объект A является *существенным расширением* объекта B , если существует такой мономорфизм $\beta: B \rightarrow A$, что подобъект $[B, \beta]$ является ненулевым идеалом объекта A , имеющим ненулевое пересечение с любым ненулевым идеалом.

При такой договоренности условие Н2 означает, что класс $\mathcal{M}$ замкнут относительно взятия существенных расширений, а условие Н1 — что класс $\mathcal{M}$ замкнут относительно взятия идеалов.

Мы можем заменить условие Н3 на более «удобное» условие. Для этого заметим, что для любого подобъекта $[C, \mu]$ объекта A среди идеалов объекта A , содержащихся в этом подобъекте, всегда существует наибольший идеал: им будет объединение всех идеалов объекта A , содержащихся в подобъекте $[C, \mu]$. При этом указанный идеал, как и любой подобъект, содержащийся в $[C, \mu]$, будет иметь вид $[D, \delta\mu]$ для некоторого мономорфизма $\delta: D \rightarrow C$.

Лемма 1. Для любого класса $\mathcal{M}$ условие Н3 равносильно любому из условий

НЗ'. Если $[B, \beta]$ — идеал объекта A , $[C, \gamma]$ — ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B и $[D, \delta\gamma\beta]$ — наибольший идеал в A , содержащийся в подобъекте $[C, \gamma\beta]$, то $[D, \delta\gamma]$ — ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B .

НЗ". Если $[B, \beta]$ — идеал объекта A , $[C, \gamma]$ — ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B и подобъект $[C, \gamma\beta]$ не содержит ненулевых идеалов объекта A , то B — объект из класса $\mathcal{M}$.

Доказательство. Импликация НЗ' $\Rightarrow$ НЗ очевидна.

НЗ" $\Rightarrow$ НЗ'. Пусть $[B, \beta]$ — идеал объекта A , $[C, \gamma]$ — ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B и $[D, \delta\gamma\beta]$ — наибольший идеал объекта A , содержащийся в подобъекте $[C, \gamma\beta]$.

Переходя к образам при нормальном эпиморфизме $\nu_A: A \rightarrow \bar{A} = A/D$ с ядром $\text{Ker } \nu_A = [D, \delta\gamma\beta]$, находим последовательно такие нормальные эпиморфизмы $\nu_B: B \rightarrow \bar{B}$, $\nu_C: C \rightarrow \bar{C}$ и мономорфизмы $\bar{\beta}: \bar{B} \rightarrow \bar{A}$, $\bar{\delta}: \bar{C} \rightarrow \bar{B}$, что $\bar{\beta}\nu_A = \nu_B\bar{\beta}$, $\gamma\nu_B = \nu_C\bar{\gamma}$. При этом в силу первой теоремы об изоморфизмах $[B, \beta]$ — идеал объекта $\bar{A}$, $[\bar{C}, \bar{\gamma}]$ — ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта $\bar{B}$ (достаточно заметить, что $D \leq C \leq B$, $\bar{B} = B/D$ и $\bar{C} = C/D$).

Возьмем любой идеал объекта $\bar{A}$, содержащийся в подобъекте $[\bar{C}, \bar{\gamma}\bar{\beta}]$. Этот идеал имеет вид $[\bar{D}_1, \delta_1\bar{\gamma}\bar{\beta}]$

для некоторого мономорфизма $\bar{\delta}_1: D_1 \rightarrow \bar{C}$. Переходя к прообразам, находим такой идеал $[D_1, \mu_1]$ объекта A , что $[D_1, \mu_1] \geq [D, \delta\gamma\beta] = \text{Ker } v_A$ и $\mu_1 v_A = v_1 \bar{\delta}_1 \bar{\gamma} \bar{\beta}$ для некоторого нормального эпиморфизма $v_1: D_1 \rightarrow \bar{D}_1$. Но в силу первой теоремы об изоморфизмах идеал $[B, \beta]$ совпадает с прообразом идеала $[\bar{B}, \bar{\beta}]$ при нормальном эпиморфизме v_A . Поэтому из $[\bar{B}, \bar{\beta}] \geq [D_1, \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma} \bar{\beta}]$ вытекает $[B, \beta] \geq [D_1, \mu_1]$, т. е. $\mu_1 = \mu_2 \beta$ для некоторого мономорфизма $\mu_2: D_1 \rightarrow B$.

Но тогда $v_1 \bar{\delta}_1 \bar{\gamma} \bar{\beta} = \mu_1 v_A = \mu_2 \beta v_A = \mu_2 v_B \bar{\beta}$, и потому $v_1 \bar{\delta}_1 \bar{\gamma} = \mu_2 v_B$, так как $\bar{\beta}$ — мономорфизм. Из полученного равенства вытекает, что $[D_1, \mu_2]$ — прообраз $[\bar{D}_1, \bar{\delta}_1 \bar{\gamma}]$ при нормальном эпиморфизме $v_B: B \rightarrow \bar{B} = B/D$, так как $\text{Ker } v_B = [D, \delta\gamma]$. Поэтому в силу первой теоремы об изоморфизмах из $[\bar{C}, \bar{\gamma}] \geq [\bar{D}_1, \bar{\delta}_1 \bar{\gamma}]$ вытекает $[C, \gamma] \geq [D_1, \mu_2]$. Но тогда верно и соотношение $[C, \gamma\beta] \geq [D_1, \mu_2 \beta] = [D_1, \mu_1]$. Вспоминая, что $[D, \delta\gamma\beta]$ — наибольший идеал объекта A , содержащийся в подобъекте $[C, \gamma\beta]$, а $[D_1, \mu_1]$ — идеал объекта A , содержащий идеал $[D, \delta\gamma\beta]$, получаем $[D_1, \mu_1] = [D, \delta\gamma\beta] = \text{Ker } v_A$. Возвращаясь к образам, получаем, что $[\bar{D}_1, \bar{\delta}_1 \bar{\gamma} \bar{\beta}] = [0, 0]$.

В результате получили, что подобъект $[\bar{C}, \bar{\gamma}\bar{\beta}]$ не содержит ненулевых идеалов объекта A . Допуская теперь, что выполнено условие НЗ'', получаем: $\bar{B}$ — объект из $\mathcal{M}$. Но по построению $v_B: B \rightarrow \bar{B}$ — нормальный эпиморфизм с ядром $\text{Ker } v_B = [D, \delta\gamma]$. Поэтому по определению ко- $\mathcal{M}$ -идеала $[D, \delta\gamma]$ — ко- $\mathcal{M}$ -идеал в B , т. е. выполнено условие НЗ'.

НЗ $\Rightarrow$ НЗ''. Пусть $[D, \beta]$ — идеал объекта A , $[C, \gamma]$ — ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B , причем подобъект $[C, \gamma\beta]$ не содержит ненулевых идеалов объекта A . Если выполнено условие НЗ, то существует такой идеал $[D, \delta\gamma\beta]$ объекта A , что $[D, \delta\gamma]$ — ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B . Но тогда $[D, \delta\gamma\beta] = [0, 0]$, так как $[D, \delta\gamma\beta]$ — идеал объекта A , содержащийся в подобъекте $[C, \gamma\beta]$. Поэтому D — нулевой объект. Отсюда вытекает, что нулевой идеал будет ко- $\mathcal{M}$ -идеалом объекта B , т. е. $B \in \mathcal{M}$. Но тогда выполнено условие НЗ''.

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $[B, \beta]$ — ненулевой идеал объекта A . Тогда:

а) Среди идеалов объекта A , имеющих нулевое пересечение с идеалом $[B, \beta]$, существует максимальный относительно этого свойства идеал $[B^*, \beta^*]$.

б) Если $v: A \rightarrow \bar{A}$ — нормальный эпиморфизм с ядром $\text{Ker } v = [B^*, \beta^*]$, то объект $\bar{A}$ является существенным расширением объекта B .

Доказательство. Частично упорядоченное множество $\mathcal{U}$ всех идеалов объекта A , имеющих нулевое пересечение с идеалом $[B, \beta]$, непусто, так как нулевой идеал принадлежит $\mathcal{U}$. Кроме того, в силу аксиомы 7 множество $\mathcal{U}$ индуктивно. Применяя лемму Куратовского — Цорна, получаем, что в $\mathcal{U}$ есть максимальные элементы, т. е. верно а).

Пусть $[B^*, \beta^*]$ — максимальный элемент в $\mathcal{U}$. По построению верно равенство $B^* \wedge B = 0$. Но тогда в силу второй теоремы об изоморфизмах, если $[\bar{B}, \bar{\beta}]$ — образ идеала $[B, \beta]$ при нормальном эпиморфизме $v: A \rightarrow \bar{A} = A/B^*$ с ядром $\text{Ker } v = [B^*, \beta^*]$, то $\bar{\beta}v = \bar{v}\bar{\beta}$ для соответствующего нормального эпиморфизма $\bar{v}: B \rightarrow \bar{B}$ и $\bar{v}$ — изоморфизм как нормальный эпиморфизм с нулевым ядром (т. е. мономорфизм). Поэтому $[\bar{B}, \bar{v}\bar{\beta}]$ — идеал объекта $\bar{A}$, совпадающий с идеалом $[\bar{B}, \bar{\beta}]$. Кроме того, в силу первой и второй теорем об изоморфизмах прообразом этого идеала при нормальном эпиморфизме $v: A \rightarrow \bar{A}$ будет $B \vee B^*$.

Пусть $\bar{P}$ — любой идеал объекта $\bar{A}$, имеющий нулевое пересечение с идеалом $\bar{B}$. Переходя к прообразам при нормальном эпиморфизме v , получаем в силу первой теоремы об изоморфизмах равенство $P \wedge (B \vee B^*) = B^*$. При этом по определению прообраза мы учли, что прообраз $\bar{P}$ идеала $\bar{P}$ является идеалом объекта A , содержащим идеал B^* . Пересекая обе части полученного равенства с идеалом B , получаем $P \wedge B = P \wedge (B \vee B^*) \wedge B = B^* \wedge B = 0$. Поэтому в силу максимальной идеала B^* верно равенство $P = B^*$. Возвращаясь к образам при нормальном эпиморфизме $v: A \rightarrow \bar{A} = A/B^*$, получаем, что $\bar{P}$ — нулевой идеал в $\bar{A}$.

Следовательно, объект $\bar{A}$ является существенным расширением объекта B .

Лемма доказана *).

*) Мы перешли к упрощенной записи, так как она легко расшифровывается (см. окончание § 1).

Теорема 1. Для того чтобы радикал τ был идеально наследственным, необходимо и достаточно, чтобы класс $\mathcal{P}(\tau)$ всех τ -полупростых объектов являлся обобщенно специальным. Если $\mathcal{M}$ — обобщенно специальный класс объектов, то класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию K^*1 и верхний радикал $S_{\mathcal{M}}$, определяемый классом $\mathcal{M}$, будет идеально наследственным радикалом. При этом

$$S_{\mathcal{M}}(A) = \bigwedge \{P \mid P - \text{ко-}\mathcal{M}\text{-идеал объекта } A\} \quad (2)$$

для любого объекта A . Поэтому $S_{\mathcal{M}}$ -полупростые объекты — это в точности объекты, аппроксимируемые объектами из класса $\mathcal{M}$, а $S_{\mathcal{M}}$ -радикальные объекты — объекты, не имеющие собственных ко- $\mathcal{M}$ -идеалов.

Доказательство. Пусть τ — идеально наследственный радикал.

В силу предложения 2 класс $\mathcal{P}(\tau)$ удовлетворяет условию $H1$.

Пусть объект A является существенным расширением τ -полупростого объекта B . По определению существует такой мономорфизм $\beta: B \rightarrow A$, что $[B, \beta]$ — ненулевой идеал объекта A , имеющий ненулевое пересечение с любым ненулевым идеалом этого объекта. Но в силу предложения 1 $0 = \tau(B) = B \wedge \tau(A)$. Поэтому $\tau(A) = 0$, т. е. объект A τ -полупрост, как и объект B . Следовательно, класс $\mathcal{P}(\tau)$ замкнут относительно взятия существенных расширений, т. е. удовлетворяет условию $H2$.

Пусть B — идеал объекта A , C — ко- $\mathcal{P}(\tau)$ -идеал объекта B , т. е. объект B/C — τ -полупрост. Пусть подобъект C не содержит ненулевых идеалов объекта A . Тогда из соотношения $C \geq \tau(B)$, вытекающего из τ -полупростоты объекта B/C , следует равенство $\tau(B) = 0$, так как $\tau(B) = B \wedge \tau(A)$ — идеал объекта A . Следовательно, объект B τ -полупрост, и мы доказали выполнение условия $H3''$.

В силу леммы 1 класс $\mathcal{P}(\tau)$ всех τ -полупростых объектов обобщенно специален для любого идеально наследственного радикала τ . В результате получаем, что если τ — идеально наследственный радикал, то существует такой обобщенно специальный класс $\mathcal{M}$, что радикал τ совпадает с верхним радикалом $S_{\mathcal{M}}$.

Обратно, пусть $\mathcal{M}$ — произвольный обобщенно специальный класс объектов. Из выполнения условия $H1$ вытекает выполнение условия K^*1 . Поэтому можно строить верх-

ний радикал $S_{\mathcal{M}}$. Замечаем, что класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию (**) из предложения 3.3.

Действительно, пусть $[B, \beta]$ — идеал объекта A , $[C, \gamma]$ — ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B и $[D, \delta\gamma\beta]$ — наибольший идеал объекта A , содержащийся в подобъекте $[C, \gamma\beta]$. В силу леммы 1 класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию НЗ', и потому D — ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B . Поэтому $\bar{B} = B/D$ — объект из класса $\mathcal{M}$ и идеал объекта $\bar{A} = A/D$.

Допустим теперь, что C — собственный ко- $\mathcal{M}$ -идеал, т. е. $C \neq B$ (в точной записи это означает, что $[C, \gamma] \neq [B, \varepsilon]$). Тогда $\bar{B}$ — ненулевой идеал объекта $\bar{A}$. В силу леммы 2 существует идеал $\bar{B}^*$, являющийся максимальным среди идеалов объекта $\bar{A}$, имеющих нулевое пересечение с идеалом $\bar{B}$, причем $\bar{A}/\bar{B}^*$ — существенное расширение объекта $\bar{B}$. Но $\bar{B}$ — объект из $\mathcal{M}$. Поэтому в силу условия Н2 объектом из $\mathcal{M}$ является и $\bar{A}/\bar{B}^*$. А это означает, что $\bar{B}^*$ — ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта $\bar{A}$.

Переходя к прообразам при нормальном эпиморфизме $v: A \rightarrow \bar{A} = A/D$ и учитывая первую теорему об изоморфизмах, строим такой ко- $\mathcal{M}$ -идеал P объекта A (прообраз $\bar{B}^*$), что $P \wedge B = D$. Но тогда построенный ко- $\mathcal{M}$ -идеал $[P, \sigma]$ объекта A не содержит идеал $[B, \beta]$, так как $[P, \sigma] \wedge [B, \beta] = [D, \delta\gamma\beta]$ строго меньше идеала $[B, \beta]$.

А это и означает, что выполнено условие (**) из предложения 3.3.

В силу предложения 3.3 верхний радикал $S_{\mathcal{M}}$ является наследственным и для любого объекта A верно равенство (2). Остается доказать, что радикал $S_{\mathcal{M}}$ является идеально наследственным. Для этого в силу предложения 2 достаточно доказать, что класс $\mathcal{P}(r)$ замкнут относительно взятия идеалов для $r = S_{\mathcal{M}}$.

Пусть B — идеал объекта A . Замечаем, что для любого ко- $\mathcal{M}$ -идеала P объекта A верно включение $P \wedge B \geq r(B)$ (т. е. $[P, \sigma] \wedge [B, \beta] \geq [R_B^r, \rho_B^r \beta]$), где $r = S_{\mathcal{M}}$.

Действительно, в силу первой и второй теорем об изоморфизмах получаем, что $B/P \wedge B \simeq B \vee P/P$ — идеал объекта A/P из класса $\mathcal{M}$. Поэтому в силу Н1 объект $B/P \wedge B$ — объект из класса $\mathcal{M}$, т. е. $P \wedge B$ — ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B . Но все объекты из класса $\mathcal{M}$ r -полупросты, так как $r = S_{\mathcal{M}}$. Поэтому $P \wedge B \geq r(B)$.

Допустим теперь, что объект A $S_{\mathcal{M}}$ -полупрост. Тогда в силу равенства (2) пересечение всех ко- $\mathcal{M}$ -идеалов P объекта A совпадает с нулевым идеалом. Но по доказанному все ко- $\mathcal{M}$ -идеалы P объекта A содержат $S_{\mathcal{M}}(B)$ (точнее, все они содержат подобъект $[R_B^r, \rho_B^r]$, где $[R_B^r, \rho_B^r] = S_{\mathcal{M}}(B)$). Поэтому $S_{\mathcal{M}}(B) = 0$, т. е. и объект B $S_{\mathcal{M}}$ -полупрост.

Следовательно, верхний радикал $S_{\mathcal{M}}$, определяемый обобщенно специальным классом $\mathcal{M}$ объектов, всегда является идеально наследственным радикалом.

Теорема доказана.

Теперь мы можем дать характеристику полупростых свойств *).

Предложение 4. Для любого свойства $\wp$ объектов равносильны утверждения

а) Свойство $\wp$ объектов полупросто.

б) Свойство $\wp$ объектов полупросто в смысле Куроша, причем класс всех $\wp$ -объектов обобщенно специален.

в) Свойство $\wp$ объектов удовлетворяет требованиям P^*3 (т. е. замкнуто относительно взятия идеалов), P^*4'' (т. е. замкнуто относительно аппроксимируемости), $H2$ (т. е. замкнуто относительно расширений) и $H3''$.

г) Свойство $\wp$ объектов полупросто в смысле Куроша и удовлетворяет требованиям $H2$ и $H3'$.

Доказательство. Из теоремы 1 вытекает равносильность утверждений а) и б), а импликации б) $\Rightarrow$ в) и б) $\Rightarrow$ г) очевидны.

в) $\Rightarrow$ а). Если верно в), то класс $\mathcal{M}$ всех $\wp$ -объектов обобщенно специален в силу совпадения требований P^*3 и $H1$. Кроме того, в силу теоремы 1 (точнее, в силу равенства (2)) класс $\mathcal{M}$ совпадает с классом всех $S_{\mathcal{M}}$ -полупростых объектов, так как класс $\mathcal{M}$ замкнут относительно аппроксимируемости в силу P^*4'' . Поэтому по определению свойство $\wp$ полупросто, так как оно совпадает со свойством $S_{\mathcal{M}}$ -полупростоты, а $S_{\mathcal{M}}$ — идеально наследственный радикал.

*) Как и в § 3, мы будем отождествлять свойство $\wp$ и класс всех $\wp$ -объектов, класс $\mathcal{M}$ и свойство быть объектом из класса $\mathcal{M}$. Поэтому, например, требования P^*3 и $H1$ дают одно и то же: замкнутость относительно взятия идеалов.

г) $\Rightarrow$ б). Пусть свойство δ объектов полупросто в смысле Куроша и удовлетворяет требованиям Н2 и Н3'. Пусть τ — радикал, соответствующий свойству δ , т. е. класс $\mathcal{M}$ всех δ -объектов совпадает с классом $\mathcal{P}(\tau)$ всех τ -полупростых объектов. Нам нужно доказать, что класс $\mathcal{M}$ обобщенно специален. Для этого достаточно доказать, что он удовлетворяет требованию Н1.

Возьмем любой объект A и любой идеал $[B, \beta]$ этого объекта. Из того, что τ — радикал и $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\tau)$, вытекает: идеал $[R_B^r, \rho_B^r]$ — наименьший ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B . Но в силу Н3', если $[D, \delta\rho_B^r\beta]$ — наибольший идеал объекта A , содержащийся в подобъекте $[R_B^r, \rho_B^r\beta]$, то $[D, \delta\rho_B^r]$ — ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B . Поэтому верно равенство $[D, \delta\rho_B^r] = [R_B^r, \rho_B^r]$, а значит, и равенство $[R_B^r, \rho_B^r\beta] = [D, \delta\rho_B^r\beta]$. А последнее равенство означает, что $[R_B^r, \rho_B^r\beta]$ — идеал объекта A .

Но тогда в силу предложения 2, если объект A τ -полупрост, то τ -полупрост и объект B . Следовательно, класс $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\tau)$ удовлетворяет требованию Н1.

Предложение доказано.

Теорема 2. Идеально наследственные радикалы образуют «полную подрешетку» «полной решетки» всех радикалов. При этом для любого семейства идеально наследственных радикалов τ_i , $i \in I$ верны равенства

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\left(\bigwedge_{i \in I} \tau_i\right) &= \bigcap_{i \in I} \mathcal{R}(\tau_i), \\ \mathcal{P}\left(\bigvee_{i \in I} \tau_i\right) &= \bigcap_{i \in I} \mathcal{P}(\tau_i)\end{aligned}\tag{3}$$

и для любого объекта A верно равенство $\left(\bigwedge_{i \in I} \tau_i\right)(A) = \bigwedge_{i \in I} \tau_i(A)$. Более того, для любого идеально наследственного радикала τ и любого семейства идеально наследственных радикалов τ_i верно равенство

$$\tau \wedge \left(\bigvee_{i \in I} \tau_i\right) = \bigvee_{i \in I} (\tau \wedge \tau_i),\tag{4}$$

т. е. «полная решетка» идеально наследственных радикалов дистрибутивна.

Доказательство. Из предложения 3 вытекает, что класс $\mathcal{R}$ будет радикальным тогда и только тогда, когда он удовлетворяет требованиям P_3 , P^*_3 , P_4' , P_6 и P_7 . Поэтому, как легко видеть, пересечение любого семейства радикальных классов само будет радикальным классом. Аналогично из предложения 4 вытекает, что класс $\mathcal{P}$ будет полупростым тогда и только тогда, когда он удовлетворяет требованиям P^*_3 , P^*_4 , H_2 и H_3 , откуда следует, что пересечение любого семейства полупростых классов само будет полупростым классом. Но тогда, как легко видеть, идеально наследственные радикалы образуют «полную подрешетку» «полной решетки» Rad всех радикалов (т. е. объединение и пересечение любого семейства идеально наследственных радикалов сами являются идеально наследственными радикалами), причем верны равенства (3).

Возьмем любое семейство идеально наследственных радикалов r_i , $i \in I$.

Пусть A — произвольный объект. Первое из равенств (3) влечет, что идеал $(\bigwedge_{i \in I} r_i)(A)$ является r_i -радикальным идеалом для всех $i \in I$, и потому верно соотношение $(\bigwedge_{i \in I} r_i)(A) \leq \bigwedge_{i \in I} r_i(A)$. С другой стороны, наследственность радикалов r_i влечет, что $\bigwedge_{i \in I} r_i(A)$ — объект из класса $\bigcap_{i \in I} \mathcal{R}(r_i)$. Но тогда, еще раз применяя первое из равенств (3), получаем $(\bigwedge_{i \in I} r_i)(A) \geq \bigwedge_{i \in I} r_i(A)$. Поэтому верно и равенство

$$(\bigwedge_{i \in I} r_i)(A) = \bigwedge_{i \in I} r_i(A). \quad (5)$$

Возьмем еще один идеально наследственный радикал r . Положим

$$u = r \wedge (\bigvee_{i \in I} r_i), \quad w = \bigvee_{i \in I} (r \wedge r_i). \quad (6)$$

Нам нужно доказать равенство (4). В силу (6) оно равносильно равенству $u = w$.

Допустим, что $u \neq w$. Тогда $u > w$, так как соотношение $u \geq w$ очевидно. Поэтому найдется такой объект B , что $u(B) > w(B)$. Но тогда, учитывая идеальную наследственность радикалов u , w , легко получаем для ненуле-

вого объекта $C = u(B)/w(B)$

$$w(C) = 0 \neq C = u(C). \quad (7)$$

Из равенств (5), (6), равенства $w(C) = 0$ и второго из равенств (3) вытекает равенство $r(C) \wedge r_i(C) = 0$ для всех $i \in I$. С другой стороны, из равенств (5), (6), равенства $u(C) = C$ и первого из равенств (3) вытекают равенство $r(C) = C$ и равенство $(\bigvee_{i \in I} r_i)(C) = C$. Но $r(C) = C$ и $r(C) \wedge r_i(C) = 0$ влекут равенства $r_i(C) = 0$ для всех $i \in I$. Поэтому, еще раз применяя второе из равенств (3), получаем равенство $(\bigvee_{i \in I} r_i)(C) = 0$.

В результате получаем равенство $C = 0$, что противоречит (7).

Следовательно, $u = w$, т. е. верно равенство (4). В частности, «полная решетка» идеально наследственных радикалов дистрибутивна (даже «сильно дистрибутивна», так как равенство (4) верно для любого семейства радикалов r_i , $i \in I$).

Теорема доказана.

В заключение дадим еще одну характеристику обобщенно специальных классов.

Предложение 5. Класс $\mathcal{M}$ объектов обобщенно специален тогда и только тогда, когда он удовлетворяет требованиям

M1. Если ко- $\mathcal{M}$ -идеал $[P, \sigma]$ объекта A не содержит идеал $[B, \beta]$ этого объекта и $[D, \delta\beta] = [P, \sigma] \wedge [B, \beta]$, то $[D, \delta]$ — собственный ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B .

M2. Если $[C, \gamma]$ — собственный ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B , $[B, \beta]$ — идеал объекта A , то существует такой ко- $\mathcal{M}$ -идеал $[P, \sigma]$ объекта A , что $[P, \sigma] \wedge [B, \beta] \leq [C, \gamma\beta]$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ — обобщенно специальный класс объектов.

В силу второй теоремы об изоморфизмах из выполнения требования N1 вытекает выполнение требования M1. Поэтому класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет требованию M1.

Пусть $[B, \beta]$ — идеал объекта A , $[C, \gamma]$ — собственный ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B . Тогда из доказательства теоремы 1 вытекает существование такого ко- $\mathcal{M}$ -идеала $[P, \sigma]$ объекта A , что $[P, \sigma] \wedge [B, \beta] = [D, \delta\gamma\beta]$ — наибольший идеал объекта A , содержащийся в подобъекте $[C, \gamma\beta]$. Поэтому класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет требованию M2.

Следовательно, любой обобщенно специальный класс $\mathcal{M}$ объектов удовлетворяет требованиям $M1$ и $M2$.

Обратно, пусть класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет требованиям $M1$ и $M2$.

Пусть $[B, \beta]$ — идеал объекта A из класса $\mathcal{M}$. Тогда нулевой идеал является ко- $\mathcal{M}$ -идеалом объекта A . Но тогда в силу $M1$ нулевой идеал будет ко- $\mathcal{M}$ -идеалом и объекта B . Поэтому B — объект из $\mathcal{M}$, и мы доказали выполнение требования $N1$.

Пусть A — существенное расширение объекта B из класса $\mathcal{M}$. По определению существует такой мономорфизм $\beta: B \rightarrow A$, что $[B, \beta]$ — ненулевой идеал объекта A , имеющий ненулевое пересечение с любым ненулевым идеалом этого объекта. Но B — объект из $\mathcal{M}$. Поэтому нулевой идеал является собственным ко- $\mathcal{M}$ -идеалом объекта B . Применяя $M2$, получаем равенство $[P, \sigma] \wedge [B, \beta] = [O, 0]$ для некоторого ко- $\mathcal{M}$ -идеала $[P, \sigma]$ объекта A . Но A — существенное расширение объекта B . Поэтому из полученного равенства вытекает равенство $[P, \sigma] = [O, 0]$, т. е. A — объект из класса $\mathcal{M}$. Следовательно, выполнено требование $N2$.

Пусть $[B, \beta]$ — идеал объекта A , $[C, \gamma]$ — собственный ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B . Тогда в силу $M2$ существуют такой ко- $\mathcal{M}$ -идеал $[P, \sigma]$ объекта A и такой мономорфизм $\delta: D \rightarrow C$, что $[P, \sigma] \wedge [B, \beta] = [D, \delta\gamma\beta]$. Но тогда в силу $M1$ $[D, \delta\gamma]$ — ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B , содержащийся в ко- $\mathcal{M}$ -идеале $[C, \gamma]$. А из доказанного легко вытекает выполнение требования $N3$.

Следовательно, класс $\mathcal{M}$ обобщенно специален.

Предложение доказано.

§ 5. Слабо специальные и специальные радикалы в категориях

Учитывая предложение 4.5, только что нами доказанное (и применяя упрощенную запись), рассмотрим следующие требования, которым может удовлетворять или не удовлетворять заданный класс $\mathcal{M}$ объектов:

$M1$. Если B — идеал объекта A , P — ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта A , не содержащий идеала B , то $P \wedge B$ — собственный ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B ,

М2. Если C — собственный ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B , B — идеал объекта A , то существует такой ко- $\mathcal{M}$ -идеал P объекта A , что $P \wedge B \leq C$.

М3. Если C — собственный ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B , B — идеал объекта A , то существует такой ко- $\mathcal{M}$ -идеал P объекта A , что $P \wedge B = C$.

М4. Если C — собственный ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B , B — идеал объекта A , то существует и притом точно один ко- $\mathcal{M}$ -идеал P объекта A такой, что $P \wedge B = C$.

Класс $\mathcal{M}$ объектов назовем *слабо специальным*, если он удовлетворяет требованиям М1, М3, и *специальным*, если он удовлетворяет требованиям М1, М4.

Ясно, что любой специальный класс слабо специален, а любой слабо специальный класс обобщенно специален в силу предложения 4.5, так как очевидна импликация $M4 \Rightarrow M3 \Rightarrow M2$. Поэтому в силу теоремы 4.1, если класс $\mathcal{M}$ специален или слабо специален, то $\mathcal{M}$ удовлетворяет требованию K^*1 и определяет верхний радикал $S_{\mathcal{M}}$, являющийся идеально наследственным радикалом.

Радикал τ называется *слабо специальным радикалом*, если $\tau = S_{\mathcal{M}}$ для некоторого слабо специального класса $\mathcal{M}$ объектов. Если $\tau = S_{\mathcal{M}}$ для некоторого специального класса $\mathcal{M}$, то радикал τ называется *специальным радикалом*. Эти названия оправданы тем, что в случае ассоциативных алгебр мы приходим к обычным слабо специальным (= наднильпотентным) радикалам и специальным радикалам, как показано в § 1 гл. 3.

Теорема 1. *Любой слабо специальный радикал τ является идеально наследственным радикалом. Для идеально наследственного радикала τ равносильны следующие утверждения:*

а) Радикал τ слабо специален.

б) Класс $\mathcal{P}(\tau)$ всех τ -полупростых объектов слабо специален.

в) Если C — идеал объекта B , B — идеал объекта A и объект B/C τ -полупрост, то C — идеал объекта A .

г) Если C — идеал объекта B , B — идеал объекта A и D — идеал объекта A , порожденный подобъектом C в A , то объект D/C τ -радикален.

Доказательство. В силу сказанного выше достаточно доказать равносильность утверждений а) — г) для любого идеально наследственного радикала,

Пусть τ — произвольный идеально наследственный радикал.

б) $\Rightarrow$ а). Это вытекает из определения слабо специального радикала, так как любой радикал τ совпадает с верхним радикалом $S_{\mathcal{S}}(\tau)$.

а) $\Rightarrow$ г). Пусть радикал τ слабо специален. По определению $\tau = S_{\mathcal{M}}$ для некоторого слабо специального класса $\mathcal{M}$. Класс $\mathcal{M}$ выберем и зафиксируем.

Пусть C — идеал объекта B , B — идеал объекта A и D — идеал объекта A , порожденный подобъектом C . Ясно, что $C \leq D \leq B$, и потому C — идеал объекта D , так как C — идеал объекта B . Поэтому можно рассматривать объект D/C (т. е. существует нормальный эпиморфизм $v: D \rightarrow \bar{D}$ с ядром $\text{Ker } v = C$).

Переходя к прообразам при нормальном эпиморфизме $B \rightarrow B/C$, находим такой идеал R объекта B , что $C \leq R$ и $R/C = \tau(B/C)$. В силу теоремы 4.1 идеал $\tau(B/C)$ объекта B/C совпадает с пересечением всех ко- $\mathcal{M}$ -идеалов этого объекта. Поэтому в силу первой теоремы об изоморфизмах $R = \bigwedge \{D_i \mid D_i \text{ — ко-}\mathcal{M}\text{-идеалы в } B, D_i \geq C\}$. В силу МЗ для каждого ко- $\mathcal{M}$ -идеала D_i объекта B найдется такой ко- $\mathcal{M}$ -идеал P_i объекта A , что $P_i \wedge B = D_i$. Но тогда для полученных ко- $\mathcal{M}$ -идеалов P_i верны включения $D \leq P_i$, так как все идеалы P_i содержат подобъект C , а D — идеал объекта A , порожденный этим подобъектом. Поэтому $R = \bigwedge (P_i \wedge B) \geq D$. А отсюда вытекает, что $D/C \leq R/C = \tau(B/C)$, что влечет τ -радикальность объекта D/C , ибо $D/C = (D/C) \wedge \tau(B/C) = \tau(D/C)$.

г) $\Rightarrow$ в). Пусть C — идеал объекта B , B — идеал объекта A и объект B/C τ -полупрост. Пусть D — идеал объекта A , порожденный подобъектом C . Если верно г), то D/C — τ -радикальный идеал τ -полупростого объекта B/C . Но тогда D/C — нулевой идеал, т. е. $C = D$ — идеал объекта A .

в) $\Rightarrow$ б). В силу теоремы 4.1 существуют такие обобщенно специальные классы $\mathcal{M}$, что $\tau = S_{\mathcal{M}}$. Учитывая это, возьмем любые два таких обобщенно специальных класса $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, что $S_{\mathcal{M}_1} = \tau = S_{\mathcal{M}_2}$.

Пусть для класса $\mathcal{M}_1$ выполнено требование

Н4. Если C — идеал объекта B , B — идеал объекта A и B/C — объект из $\mathcal{M}$ (т. е. C — ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B), то C — идеал объекта A ,

Замечаем, что тогда класс $\mathcal{M}_2$ слабо специален.

Действительно, нам нужно доказать только выполнение требования МЗ.

Пусть C — собственный ко- $\mathcal{M}_2$ -идеал объекта B , B — идеал объекта A . По построению верхнего радикала объект B/C r -полупрост, как и любой другой объект из класса $\mathcal{M}_2$. Но $r = S_{\mathcal{M}_1}$. Поэтому из теоремы 4.1 и первой теоремы об изоморфизмах вытекает, что верно равенство $C = \bigwedge \{C_i \mid C_i \text{ — ко-}\mathcal{M}_1\text{-идеалы в } B, C_i \geq C\}$. В силу выполнения требования Н4 для класса $\mathcal{M}_1$ все C_i — идеалы объекта A . Поэтому и $C = \bigwedge C_i$ — идеал объекта A (т. е. и класс $\mathcal{M}_2$ удовлетворяет требованию Н4). Между тем (см. доказательство предложения 4.5) любой обобщенно специальный класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет требованию

М2'. Если C — ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B , B — идеал объекта A и F — наибольший идеал объекта A , содержащийся в подобъекте C , то существует такой ко- $\mathcal{M}$ -идеал P объекта A , что $P \wedge B = F$.

Поэтому в рассматриваемом нами случае получаем, что класс $\mathcal{M}_2$ удовлетворяет требованию МЗ, так как C совпадает с $\bar{F}$, будучи идеалом объекта A .

Допуская теперь, что верно утверждение в), т. е. что класс $\mathcal{P}(r)$ удовлетворяет требованию Н4, и полагая $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = \mathcal{P}(r)$, получаем, что верно утверждение б).

Теорема доказана.

Следствие 1. *Обобщенно специальный класс $\mathcal{M}$ слабо специален тогда и только тогда, когда он удовлетворяет требованию Н4. Поэтому класс $\mathcal{M}$ объектов слабо специален тогда и только тогда, когда он удовлетворяет требованиям Н1, Н2 и Н4.*

Достаточно заметить, что из выполнения требования Н4 вытекает выполнение требований НЗ, НЗ' и НЗ''.

Следствие 2. *Если r — слабо специальный радикал и $\mathcal{M}$ — такой обобщенно специальный класс, что $r = S_{\mathcal{M}}$, то класс $\mathcal{M}$ слабо специален.*

Действительно, если r — слабо специальный радикал, то класс $\mathcal{P}(r)$ слабо специален и $S_{\mathcal{P}(r)} = r = S_{\mathcal{M}}$. При этом класс $\mathcal{P}(r)$ удовлетворяет требованию Н4. Остается повторить рассуждения, проведенные при доказательстве импликации в) $\Rightarrow$ б) теоремы 1.

Следствие 3. Объединение и пересечение любого семейства слабо специальных классов сами будут слабо специальными классами.

А это с очевидностью вытекает из следствия 1.

С помощью теоремы 1 легко получить характеристику радикальных и полупростых свойств, соответствующих слабо специальным радикалам.

Как и § 3, мы будем часто отождествлять свойство $\mathfrak{g}$ объектов и класс всех $\mathfrak{g}$ -объектов. При такой договоренности можно говорить, что свойство $\mathfrak{g}$ удовлетворяет требованиям H_1 , H_2 или H_4 . Например, свойство $\mathfrak{g}$ удовлетворяет требованию H_2 тогда и только тогда, когда существенное расширение любого $\mathfrak{g}$ -объекта само будет $\mathfrak{g}$ -объектом, а требование H_1 совпадает с требованием P^*3 .

Предложение 1. Для любого свойства $\mathfrak{g}$ объектов равносильны утверждения:

а) *Свойство $\mathfrak{g}$ полупросто и соответствует слабо специальному радикалу.*

б) *Свойство $\mathfrak{g}$ полупросто и удовлетворяет требованию H_4 .*

в) *Свойство $\mathfrak{g}$ удовлетворяет требованиям H_1 , H_2 , H_4 и P^*4 ".*

Действительно, импликации б) $\Rightarrow$ в) и а) $\Rightarrow$ б) вытекают из теоремы 1. Остается доказать импликацию в) $\Rightarrow$ а). Но если верно в), то в силу следствия 1 класс $\mathcal{M}$ всех $\mathfrak{g}$ -объектов слабо специален, причем любой объект, аппроксимируемый объектами из $\mathcal{M}$, сам будет объектом из $\mathcal{M}$ в силу P^*4 ". В силу теоремы 4.1 $\mathcal{M} = \mathcal{P}(S_{\mathcal{M}})$, т. е. свойство $\mathfrak{g}$ совпадает со свойством $\mathfrak{r}$ -полупростоты для слабо специального радикала $\mathfrak{r} = S_{\mathcal{M}}$.

Для характеристики радикальности рассмотрим следующее требование, которому может удовлетворять или не удовлетворять заданное свойство $\mathfrak{r}$ объектов:

P_8 . Если C — идеал объекта B , B — идеал объекта A и D — идеал объекта A , порожденный подобъектом C , то D/C — $\mathfrak{r}$ -объект.

Предложение 2. Для любого свойства $\mathfrak{r}$ объектов равносильны утверждения:

а) *Свойство $\mathfrak{r}$ радикально и соответствует слабо специальному радикалу.*

б) *Свойство $\mathfrak{r}$ радикально и удовлетворяет требованию P_8 .*

в) Свойство τ радикально в смысле Куроша (т. е. удовлетворяет требованиям P_1 , P_2) и удовлетворяет требованиям P^*3 и P_8 .

Действительно, импликации а) $\Leftrightarrow$ б) и б) $\Leftrightarrow$ в) вытекают из теоремы 1 и предложения 4.3, так как для любого свойства τ , радикального в смысле Куроша, верна импликация $P_8 \Rightarrow P_7$ в силу выполнения требования P_6 .

С помощью предложения 2 мы можем построить в категориях один конкретный радикал, являющийся аналогом нижнего нильрадикала ассоциативных алгебр.

А именно, скажем, что объект N обладает свойством π , если существует такой объект F с конечным нормальным рядом

$$0 \leq F_1 \leq F_2 \leq \dots \leq F_i \leq F_{i+1} \leq \dots \leq F_m \leq F, \quad (1)$$

что $m \geq 2$, F_m — идеал объекта F , порожденный подобъектом F_1 , и $N \simeq F_{i+1}/F_i$ для некоторого такого натурального числа i , что $1 \leq i < m$.

Лемма 1. Свойство π удовлетворяет требованиям P_3 , P^*3 и P_8 .

Доказательство. Пусть N — произвольный π -объект и (1) — соответствующий ему нормальный ряд некоторого объекта F , т. е. $m \geq 2$, F_m — идеал объекта F , порожденный подобъектом F_1 , $1 \leq i \leq m$, и $N \simeq F_{i+1}/F_i$. Последнее означает, что существует нормальный эпиморфизм $\nu: F_{i+1} \rightarrow N$ с ядром $\text{Ker } \nu = F_i$.

Пусть J — произвольный идеал объекта N . В силу первой теоремы об изоморфизмах, переходя к прообразам при нормальном эпиморфизме $\nu: F_{i+1} \rightarrow N$, находим такой идеал G объекта F_{i+1} , что $F_i \leq G$ и $G/F_i \simeq J$. Вставляя подобъект G в нормальный ряд (1), получаем нормальный ряд

$$0 \leq F_1 \leq \dots \leq F_i \leq G \leq F_{i+1} \leq \dots \leq F_m \leq F. \quad (2)$$

Нормальный ряд (2) удовлетворяет тем же требованиям, что и нормальный ряд (1). Но при этом $G/F_i \simeq J$, и потому $F_{i+1}/G \simeq N/J$. По определению получаем, что J и N/J — π -объекты.

Следовательно, свойство π удовлетворяет требованиям P^*3 и P_3 .

Пусть C — идеал объекта B , B — идеал объекта A и D — идеал объекта A , порожденный подобъектом C . Тогда

C — идеал объекта D , и мы получаем конечный нормальный ряд $0 \leq C \leq D \leq A$. Но тогда по определению D/C — π -объект.

Следовательно, свойство π удовлетворяет и требованию $R8$.

Лемма 2. Пусть свойство ϑ объектов удовлетворяет требованию R^*3 . Тогда и все члены цепи Куроша

$$\vartheta \subseteq \vartheta_1 \subseteq \vartheta_2 \subseteq \dots \subseteq \vartheta_\alpha \subseteq \dots \quad (8)$$

будут свойствами, удовлетворяющими требованию R^*3 .

Доказательство. Будем вести индукцию по порядковому числу α .

Пусть $\bar{A}$ — ϑ_1 -объект. По построению цепи Куроша (3) существует нормальный эпиморфизм $\nu: A \rightarrow \bar{A}$ для некоторого ϑ -объекта A . Поэтому мы можем считать, что $\bar{A} = A/J$ для некоторого ϑ -объекта A и некоторого идеала J объекта A . Но тогда, если $\bar{B}$ — идеал объекта $\bar{A}$, то $\bar{B} = B/J$ для некоторого идеала B объекта A , содержащего идеал J . По условию свойство ϑ удовлетворяет требованию R^*3 . Поэтому $\bar{B} = B/J$ — ϑ_1 -объект.

Следовательно, свойство ϑ_1 удовлетворяет требованию R^*3 .

Пусть для некоторого порядкового числа $\alpha \geq 2$ мы уже доказали, что все свойства ϑ_β с $\beta < \alpha$ удовлетворяют требованию R^*3 . Рассмотрим свойство ϑ_α , учитывая, что $\vartheta_\alpha = \left({}^{-1} \left(\bigcup_{\beta < \alpha} \vartheta_\beta \right) \right)^{-1}$ по построению цепи Куроша (3). Напомним, что все свойства ϑ_γ удовлетворяют требованию $R3$ по построению цепи Куроша. Поэтому по индуктивному предположению легко получаем, что свойство $\bigcup_{\beta < \alpha} \vartheta_\beta$ удовлетворяет требованиям $R8$ и R^*3 .

Возьмем любое свойство $\bar{t}$ объектов, удовлетворяющее требованиям $R3$ и R^*3 . Рассмотрим переход от свойства $\bar{t}$ к свойству $\bar{t}$ (см. § 3).

Пусть A — произвольный $\bar{t}$ -объект. Строим цепь идеалов объекта A

$$0 = P_0 \leq \bar{t}(A) = P_1 \leq \dots \leq P_\gamma \leq P_{\gamma+1} \leq \dots, \quad (4)$$

беря на предельных местах объединения предшествующих членов, а при переходе от γ к $\gamma+1$ действуя по правилу

$P_{\gamma+1}/P_{\gamma} = t(A/P_{\gamma})$. По построению свойства $\bar{t}$ существует такое порядковое число μ , что

$$\bigvee_{\gamma \geq 0} P_{\gamma} = P_{\mu} = A. \quad (5)$$

Пусть B — идеал объекта A . Строим для объекта B соответствующую цепь

$$0 = Q_0 \leq t(B) = Q_1 \leq \dots \leq Q_{\delta} \leq Q_{\delta+1} \leq \dots \quad (6)$$

идеалов по тем же правилам.

По построению $P_{\gamma+1}/P_{\gamma} = t(A/P_{\gamma})$. Но если $\bar{R}$ — t -идеал объекта $\bar{A} = A/P_{\gamma}$, а $\bar{J}$ — любой идеал этого объекта, то $\bar{J} \vee \bar{R}/\bar{J} \simeq \bar{R}/\bar{J} \wedge \bar{R}$ — t -объект, так как свойство t удовлетворяет требованию РЗ. Поэтому, последовательно перебирая t -идеалы объекта A/P_{γ} и переходя к прообразам, мы сможем получить из ряда (4) такой ряд идеалов объекта A (см. (5))

$$0 = T_0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_{\rho} \leq T_{\rho+1} \leq \dots \leq T_{\pi} = A, \quad (7)$$

что для всех порядковых чисел $\rho < \pi$ объект $T_{\rho+1}/T_{\rho}$ обладает свойством t , а на предельных местах стоят объединения предшествующих членов. Но тогда, замечая, что в силу теорем об изоморфизмах

$$B \wedge T_{\rho+1}/B \wedge T_{\rho} = B \wedge T_{\rho+1}/B \wedge T_{\rho} \wedge T_{\rho+1} \simeq (B \wedge T_{\rho+1}) \vee T_{\rho}/T_{\rho}, \quad (8)$$

строим из ряда (7) соответствующий ряд идеалов объекта B

$$0 = B \wedge T_0 \leq B \wedge T_1 \leq \dots \leq B \wedge T_{\rho} \leq \dots \leq B \wedge T_{\rho+1} \leq \dots \leq B \wedge T_{\pi} = B. \quad (9)$$

В силу аксиомы 7 на предельных местах ряда (9) стоят объединения предшествующих членов, так как этим свойством обладал ряд (7). Кроме того, в силу (8) для любого порядкового числа ρ объект $B \wedge T_{\rho+1}/B \wedge T_{\rho}$ обладает свойством t , так как свойство t удовлетворяет требованию Р*3.

Теперь сравним ряды (6) и (9). Замечаем, что $B \wedge T_{\rho} \leq Q_{\rho}$ для любого порядкового числа $\rho \leq \pi$.

Действительно, при $\rho = 0$ нужное нам включение очевидно. Не менее очевидно, что это включение сохраняется при предельных переходах. Остается рассмотреть переход от ρ к $\rho + 1$. Но если $B \wedge T_{\rho} \leq Q_{\rho}$ для некоторого

порядкового числа ρ , то верно соотношение

$$(B \wedge T_{\rho+1}) \vee Q_{\rho}/Q_{\rho} \simeq B \wedge T_{\rho+1}/B \wedge T_{\rho+1} \wedge Q_{\rho} \simeq \\ \simeq (B \wedge T_{\rho+1}/B \wedge T_{\rho})/(B \wedge T_{\rho+1} \wedge Q_{\rho}/B \wedge T_{\rho})$$

в силу первой и второй теорем об изоморфизмах. Из этого соотношения вытекает, что $(B \wedge T_{\rho+1}) \vee Q_{\rho}/Q_{\rho}$ — $\bar{t}$ -идеал объекта A/Q_{ρ} , так как свойство $\bar{t}$ удовлетворяет требованию P_3 , а объект $B \wedge T_{\rho+1}/B \wedge T_{\rho}$ обладает свойством $\bar{t}$. Но тогда по построению $(B \wedge T_{\rho+1}) \vee Q_{\rho}/Q_{\rho} \leq \bar{t}(A/Q_{\rho}) = Q_{\rho+1}/Q_{\rho}$, и мы получаем нужное нам соотношение $B \wedge T_{\rho+1} \leq Q_{\rho+1}$.

Таким образом, $B \wedge T_{\rho} \leq Q_{\rho}$ для всех порядковых чисел ρ . В частности, в силу (7) $B = B \wedge T_{\pi} \leq Q_{\pi}$, т. е. $B = Q_{\pi}$. А это означает по построению ряда (6), что B — $\bar{t}$ -объект.

Мы доказали, что для любого свойства $\bar{t}$, удовлетворяющего требованиям P^*3 и P_3 , свойство $\bar{t}$ тоже удовлетворяет требованию P^*3 . Кроме того, в силу предложения 3.5 свойство $\bar{t}$ удовлетворяет требованию P_3 и совпадает со свойством объектов $(^{-1}\bar{t})^{-1}$. Но тогда при $\bar{t} = \bigcup_{\beta < \alpha} \vartheta_{\beta}$ получаем, что свойство ϑ_{α} объектов удовлетворяет требованию P^*3 .

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть свойство ϑ объектов удовлетворяет требованиям P_3 и P_8 . Тогда цепь Куроша (3), соответствующая свойству ϑ , стабилизируется на первом бесконечном шаге, т. е. $\hat{\vartheta} = \vartheta_{\omega}$. При этом для любого объекта A и нижнего радикала l_{ϑ} , порожденного свойством ϑ , равносильны утверждения:

а) Объект A l_{ϑ} -полупрост, т. е. не имеет ненулевых $\hat{\vartheta}$ -идеалов.

б) Объект A не имеет ненулевых ϑ_m -идеалов для всех $m < \omega$.

в) Объект A не имеет ненулевых ϑ -метаидеалов.

Доказательство. Из анализа доказательства теоремы 3.5 вытекает, что достаточно доказать утверждение: если объект A имеет ненулевой ϑ -метаидеал, то объект A имеет и ненулевой ϑ_m -идеал для некоторого $m < \omega$. Это мы и докажем,

Пусть M — ненулевой $\mathfrak{B}$ -метаидеал объекта A . По определению существует такой конечный нормальный ряд

$$0 = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_q \leq A_{q+1} \leq \dots \leq A_p \leq A_{p+1} = A \quad (10)$$

объекта A , что $M = A_1$. При этом без ограничения общности можно считать, что $p \geq 2$, так как в ряду (10) могут быть повторения.

Полагаем $M_1 = M$, M_2 — идеал объекта A_2 , порожденный подобъектом M_1 , ..., M_q — идеал объекта A_{q+1} , порожденный подобъектом M_{q-1} ($q < p$), ..., M_p — идеал объекта $A_{p+1} = A$, порожденный подобъектом M_{p-1} . В результате получаем еще один нормальный ряд объекта A

$$0 \leq M_1 \leq M_2 \leq \dots \leq M_q \leq \dots \leq M_p \leq A. \quad (11)$$

При этом по построению для каждого $q \leq p$ подобъект M_{q-1} — идеал объекта A_q , A_q — идеал объекта A_{q+1} и M_q — идеал объекта A_{q+1} , порожденный подобъектом M_{q-1} . Но по условию свойство $\mathfrak{B}$ удовлетворяет требованию Р8. Поэтому все объекты M_q/M_{q-1} обладают свойством $\mathfrak{B}$ для $q \geq 2$. Кроме того, по предположению объект $M_1 = M$ тоже обладает свойством $\mathfrak{B}$.

Начиная движение по ряду (11), замечаем, что объект M_1 является $\mathfrak{B}_1$ -объектом (свойства $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}_1$ совпадают, так как $\mathfrak{B}$ удовлетворяет требованию Р3).

Пусть для некоторого $q < p$ мы уже доказали, что объект M_q является $\mathfrak{B}_q$ -объектом. Переходя к объекту M_{q+1} , возьмем любой нормальный эпиморфизм $\nu: M_{q+1} \rightarrow \bar{M}_{q+1}$. Если ядро $\text{Ker } \nu$ не содержит идеала M_q объекта M_{q+1} , то образ $\bar{M}_q$ этого идеала будет ненулевым идеалом в $\bar{M}_{q+1}$. Но тогда объект $\bar{M}_{q+1}$ имеет ненулевой $\mathfrak{B}_q$ -идеал. Если же ядро $\text{Ker } \nu$ содержит идеал M_q , то найдется нормальный эпиморфизм $\bar{\nu}: M_{q+1}/M_q \rightarrow \bar{M}_{q+1}$. Поэтому объект M_{q+1} оказывается $\mathfrak{B}$ -объектом, так как M_{q+1}/M_q — $\mathfrak{B}$ -объект и свойство $\mathfrak{B}$ удовлетворяет требованию Р3. Но тогда если $\bar{M}_{q+1} \neq 0$, то он будет и ненулевым $\mathfrak{B}_q$ -идеалом в самом себе. Следовательно, объект M_{q+1} является $\mathfrak{B}_{q+1}$ -объектом, так как $\mathfrak{B}_{q+1} = (-^1\mathfrak{B}_q)^{-1}$ по построению цепи Куроша.

Заканчивая движение по ряду (11), получаем, что M_p — ненулевой $\mathfrak{B}_p$ -идеал объекта A . Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{b}_0$ — нижний радикал, порожденный свойством $\mathfrak{n}$ объектов, т. е. $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{l}_n$. Тогда:

а) Свойство $\hat{n}$ b_0 -радикальности совпадает со свойством n_ω , т. е. построение радикала b_0 заканчивается на первом бесконечном шаге.

б) Класс $\mathcal{P}(b_0)$ всех b_0 -полупростых объектов совпадает с классом всех объектов без ненулевых n -метаидеалов и является наибольшим слабо специальным классом объектов.

в) Радикал b_0 является наименьшим слабо специальным радикалом. Более того, идеально наследственный радикал r будет слабо специальным тогда и только тогда, когда $r \geq b_0$.

Доказательство. С помощью цепи Куроша строим свойство $\hat{n}$. В силу леммы 1 свойство n удовлетворяет требованиям $P3$ и P^*3 . Поэтому в силу леммы 2 и свойство $\hat{n}$ удовлетворяет P^*3 . Здесь мы учли, что свойство n удовлетворяет требованию $P8$ в силу леммы 1 и потому $\hat{n} = n_\omega$ в силу леммы 3.

В результате получаем, что верно утверждение а), причем свойство $\hat{n}$ b_0 -радикальности удовлетворяет требованию P^*3 , т. е. радикал b_0 является наследственным радикалом. Но, очевидно, при «увеличении» свойства выполнение требования $P8$ сохраняется. Поэтому в силу предложения 2 радикал b_0 является слабо специальным радикалом. Еще раз применяя предложение 2, из тех же соображений о требовании $P8$ выводим, что любой идеально наследственный радикал, содержащий радикал b_0 , будет слабо специальным радикалом.

Из лемм 3 и 1 вытекает также, что класс $\mathcal{P}(b_0)$ всех b_0 -полупростых объектов совпадает с классом всех объектов без ненулевых n -метаидеалов. Класс $\mathcal{P}(b_0)$ слабо специален в силу теоремы 1, так как радикал b_0 слабо специален по доказанному.

Для доказательства утверждений б), в) и окончания доказательства теоремы остается показать, что b_0 — наименьший слабо специальный радикал. Для этого по построению радикала $b_0 = l_n$ достаточно доказать, что если r — слабо специальный радикал, то все n -объекты r -радикальны.

Пусть r — слабо специальный радикал. Возьмем любой n -объект N . По определению существуют такой объект F и такой конечный нормальный ряд (1) объекта A , что F_m — идеал объекта F , порожденный подобъектом F_1 , и

существует такое натуральное число i , что $1 \leq i < m$ и $N \simeq F_{i+1}/F_i$. Без ограничения общности можно считать, что $m \geq i + 3$.

Допустим, что объект N не r -радикален. Применяя первую теорему об изоморфизмах, получаем, что $F_i \leq P_i \neq F_{i+1}$ и объект F_{i+1}/P_i r -полупрост для некоторого идеала P_i объекта F_{i+1} . Но в силу теоремы 1 класс $\mathcal{F}(r)$ слабо специален и потому удовлетворяет требованию МЗ. Поэтому существует такой идеал P_{i+1} объекта F_{i+2} , что объект F_{i+2}/P_{i+1} r -полупрост и $P_i = P_{i+1} \wedge F_{i+1}$. Из полученного равенства вытекает, что $P_{i+1} \neq F_{i+2}$, так как $P_i \neq F_{i+1}$. Продолжая применять правило МЗ и поднимаясь по ряду (1), последовательно получаем

$$P_i = P_{i+1} \wedge F_{i+1}, \quad P_{i+1} = P_{i+2} \wedge F_{i+2}, \quad \dots, \quad P_{m-1} = P_m \wedge F_m, \quad (12)$$

где подобъект P_m уже является идеалом всего объекта A . Из (12) вытекает соотношение $F_1 \leq F_i \leq P_i = P_m \wedge F_{i+1} \leq P_m$. Но F_m — идеал объекта A , порожденный подобъектом F_1 . Потому $F_m \leq P_m$. Но тогда и $F_{i+1} \leq P_m$, так как $i < m$. А из этого включения вытекает равенство $P_i = P_m \wedge F_{i+1} = F_{i+1}$. Получили противоречие с тем, что $P_i \neq F_{i+1}$.

Теорема доказана.

С помощью лемм 1 — 3 можно дать общий метод построения слабо специальных радикалов с помощью конструкции нижнего радикала.

Предложение 3. Пусть свойство $\mathfrak{B}$ объектов удовлетворяет требованию P^*3 , причем $n \subseteq \mathfrak{B}$, т. е. все n -объекты являются $\mathfrak{B}$ -объектами. Тогда:

а) Свойство $\mathfrak{B}$ совпадает со свойством $\mathfrak{B}_\omega$, т. е. построение нижнего радикала $l_\mathfrak{B}$, порожденного свойством $\mathfrak{B}$, с помощью цепи Куроша заканчивается на первом бесконечном шаге.

б) Класс $\mathcal{F}(l_\mathfrak{B})$ всех $l_\mathfrak{B}$ -полупростых объектов совпадает с классом всех объектов без ненулевых $\mathfrak{B}$ -метаидеалов.

в) Радикал $l_\mathfrak{B}$ слабо специален.

Действительно, свойство $\mathfrak{B}$ удовлетворяет требованию $P8$, так как этому требованию удовлетворяет свойство n . Поэтому достаточно повторить первую часть доказательства теоремы 2, заменив свойство n на свойство $\mathfrak{B}$.

Переходя к рассмотрению специальных радикалов, будем считать, что в рассматриваемой категории $\mathcal{K}$, кроме аксиом 1—7, верна

Аксиома 8. Решетка идеалов любого объекта дедекиндова (модулярна).

Лемма 4. Пусть $\mathcal{M}$ — специальный класс объектов. Если B — идеал объекта A , P — ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B , то среди таких идеалов J объекта A , что $J \wedge B \leq P$, существует наибольший идеал $(P : B)$. При этом $(P : B) \wedge B = P$. Если P — собственный ко- $\mathcal{M}$ -идеал, то $(P : B)$ — единственный ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта A , дающий в пересечении с идеалом B ко- $\mathcal{M}$ -идеал P .

Доказательство. Можно считать, что P — собственный ко- $\mathcal{M}$ -идеал, так как, очевидно, $(B : B) = A$. Но тогда в силу требования M_4 существует и притом точно один ко- $\mathcal{M}$ -идеал Q объекта A такой, что $Q \wedge B = P$.

Возьмем любой идеал J объекта A такой, что $J \wedge B \leq P$. Тогда частично упорядоченное множество $\mathcal{U}$ таких идеалов J' объекта A , что $J' \geq J$ и $J' \wedge B = P$, непусто в силу аксиом 7 и 8 — одним из идеалов J' будет $J \vee P$ — и индуктивно. Поэтому в силу леммы Куратовского — Цорна в $\mathcal{U}$ существуют максимальные элементы. Пусть M — один из них. Переходя к образам при нормальном эпиморфизме $A \rightarrow \bar{A} = A/P$, получаем, что $\bar{M} = M/P$ — максимальный среди идеалов объекта $\bar{A}$, имеющих нулевое пересечение с идеалом $\bar{B} = B/P$. Но тогда в силу леммы 4.2 $A/M \simeq \bar{A}/\bar{M}$ — существенное расширение объекта $\bar{B} \in \mathcal{M}$, и потому A/M — объект из класса $\mathcal{M}$. А это означает, что M — ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта A , причем $M \wedge B = P$ по построению. Но тогда $Q = M \geq J$.

Следовательно, искомым идеалом $(P : B)$ будет ко- $\mathcal{M}$ -идеал Q .

Лемма доказана.

Из леммы 4 вытекает, что если $\mathcal{M}$ — специальный класс объектов, B — идеал объекта A , то между собственными ко- $\mathcal{M}$ -идеалами объекта B и ко- $\mathcal{M}$ -идеалами объекта A , не содержащими идеала B , существует взаимно однозначное соответствие, устанавливаемое по правилам $P \mapsto (P : B)$, $Q \mapsto Q \wedge B$. На самом деле это свойство является характеристическим, как показывает

Теорема 3. *Класс $\mathcal{M}$ объектов специален тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим требованиям *):*

C1. Если B — идеал объекта A , P — ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B , то среди таких идеалов J объекта A , что $J \wedge B \leq P$, существует наибольший идеал $(P : B)$.

C2. Если B — идеал объекта A , Q — ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта A , не содержащий идеала B , то $Q \wedge B$ — собственный ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B и $(Q \wedge B) : B = Q$.

C3. Если B — идеал объекта A , P — собственный ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта B , то $(P : B)$ — ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта A , не содержащий идеала B , и $(P : B) \wedge B = P$.

Доказательство с очевидностью вытекает из леммы 4 и определений.

С помощью теоремы 3 мы можем построить еще один конкретный радикал, являющийся аналогом нижнего нильрадикала ассоциативных алгебр.

Предложение 4. *Пересечение и объединение любого непустого семейства специальных классов объектов сами будут специальными классами. В частности, объединение π всех специальных классов объектов является наибольшим специальным классом объектов. Более того, слабо (или обобщенно) специальный класс $\mathcal{M}$ будет специальным тогда и только тогда, когда $\mathcal{M} \subseteq \pi$. Верхний радикал $S_\pi = \mathfrak{b}$ является наименьшим специальным радикалом.*

Действительно, первое утверждение вытекает из теоремы 3, так как выполнение требований C1, C2 и C3 сохраняется при переходе к объединениям и пересечениям. Второе утверждение с очевидностью вытекает из первого. Третье утверждение вытекает из второго и определений, так как выполнение требований M3 и M4 сохраняется при переходе к меньшим обобщенно специальным классам. Последнее утверждение тоже вытекает из второго, так как если $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ — специальные (или обобщенно специальные) классы объектов и $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$, то $S_{\mathcal{M}_1} \supseteq S_{\mathcal{M}_2}$. Предложение доказано.

Объект A назовем *первичным*, если A — объект из наибольшего специального класса π объектов. Объект B назовем *полупервичным*, если объект B полупрост в смысле

*) Здесь и ниже предполагаем, что все рассматриваемые классы содержат нулевой объект.

наименьшего специального радикала $b = S_\pi$. Эти названия оправданы тем, что в случае ассоциативных алгебр мы приходим к обычным понятиям первичности и полупервичности, как показано в § 1 гл. 3.

Из определений вытекает, что полупервичные объекты — это в точности объекты, аппроксимируемые первичными объектами, так как класс π всех первичных объектов специален, а значит, и обобщенно специален. Из тех же соображений вытекает, что все полупервичные объекты b_0 -полупросты, так как наименьший слабо специальный радикал b_0 меньше наименьшего специального радикала b . Не менее ясно, что первичность и полупервичность сохраняются при переходе к идеалам и существенным расширениям.

Специфику первичных и полупервичных объектов указывает

Предложение 5. Если A — первичный объект, то пересечение любых двух ненулевых идеалов объекта A само будет ненулевым идеалом в A . Если ненулевой полупервичный объект B является идеалом объекта C , то среди идеалов объекта C , имеющих нулевое пересечение с B , есть наибольший идеал B^* .

Доказательство. Пусть A — первичный объект. Возьмем любой ненулевой идеал J объекта A . В силу специальности класса π объект J первичен, и потому 0 — собственный ко- π -идеал объекта J . Но нулевой идеал 0 является ко- π -идеалом объекта A . Поэтому в силу теоремы 3 или леммы 4 $0 = (0 : J)$ — наибольший идеал объекта A , имеющий нулевое пересечение с идеалом J . Поэтому идеал J имеет ненулевое пересечение с любым ненулевым идеалом объекта A , т. е. пересечение ненулевых идеалов всегда будет ненулевым.

Пусть ненулевой полупервичный объект B является идеалом объекта C . В силу (обобщенной) специальности класса π всех первичных объектов из теоремы 4.1 вытекает существование такого множества $\{P_i \mid i \in I\}$ собственных ко- π -идеалов объекта B , что $\bigwedge_{i \in I} P_i = 0$. Применяя теорему 3, строим для каждого P_i идеал $(P_i : B)$ объекта C и получаем равенство $(P_i : B) \wedge B = P_i$. Но тогда, если $B^* = \bigwedge_{i \in I} (P_i : B)$, то B^* — идеал объекта C и верно равенство $B^* \wedge B = 0$. С другой стороны, если D — идеал объ-

екта C и $D \wedge B = 0$, то $D \wedge B \leq P_i$ для всех $i \in I$, и поэтому в силу теоремы 3 $D \leq (P_i : B)$ для тех же i , т. е. $D \leq \bigwedge_{i \in I} (P_i : B) = B^*$. Следовательно, B^* — наибольший

идеал объекта C , имеющий нулевое пересечение с идеалом B .

Предложение доказано.

С помощью предложения 5 мы можем дать еще одну характеристику специальных классов и объектов на языке первичных объектов.

Теорема 4. *Класс $\mathcal{M}$ объектов специален тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим требованиям:*

A1. *Все объекты из класса $\mathcal{M}$ первичны.*

A2. *Любой ненулевой идеал объекта из $\mathcal{M}$ сам будет объектом из $\mathcal{M}$.*

A3. *Если ненулевой объект B из класса $\mathcal{M}$ является идеалом первичного объекта A , то и A — объект из $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Пусть класс $\mathcal{M}$ специален. Тогда класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет требованиям A1 и A2 в силу предложения 4. Но в силу предложения 5 любой первичный объект является существенным расширением каждого своего ненулевого идеала. Поэтому класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет и требованию A3, так как $\mathcal{M}$ замкнут относительно существенных расширений.

Обратно, пусть класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет требованиям A1, A2 и A3. Из специальности, а значит, и слабой специальности класса π всех первичных объектов вытекает импликация $A1 \Rightarrow H4$. Ясно, что требования A2 и H1 совпадают. Кроме того, из специальности класса π и предложения 5 вытекает, что $A3 \Rightarrow H2$. Поэтому класс $\mathcal{M}$ будет слабо специальным классом первичных объектов. Но тогда класс $\mathcal{M}$ специален в силу предложения 4.

В заключение дадим характеристику первичных объектов. Для этого нам будет необходима еще одна конструкция.

Пусть A — произвольный объект категории $\mathcal{K}$.

Строим по индукции классы $\mathcal{K}_n(A)$, где n — натуральные числа, $n \geq 0$, по следующим правилам: а) $\mathcal{K}_0(A)$ совпадает с классом объектов, изоморфных объекту A , и нулевых объектов; б) Если класс $\mathcal{K}_n(A)$ уже построен, то класс $\mathcal{K}_{n+1}(A)$ состоит из нулевых объектов и таких

объектов B , что B — существенное расширение некоторого объекта D , являющегося ненулевым идеалом некоторого объекта C из класса $\mathcal{K}_n(A)$.

Ясно, что любой ненулевой объект является и ненулевым идеалом и существенным расширением самого себя. Поэтому построенные классы $\mathcal{K}_n(A)$ образуют цепь $\mathcal{K}_0(A) \subseteq \mathcal{K}_1(A) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{K}_n(A) \subseteq \mathcal{K}_{n+1}(A) \subseteq \dots$. Полагая $\mathcal{K}(A) = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{K}_n(A)$.

Лемма 5. Для любого объекта A класс $\mathcal{K}(A)$ удовлетворяет требованиям Н1 и Н2. Более того, $\mathcal{K}(A)$ — наименьший среди таких классов*) $\mathcal{M}$, удовлетворяющих требованиям Н1 и Н2, что A — объект из класса $\mathcal{M}$. Объект A b_0 -полупрост тогда и только тогда, когда класс $\mathcal{K}(A)$ слабо специален. Объект A первичен тогда и только тогда, когда класс $\mathcal{K}(A)$ специален.

Доказательство. Пусть A — произвольный ненулевой объект. Тогда по построению включение $B \in \mathcal{K}(A)$ равносильно тому, что для некоторого натурального числа n (без ограничения общности можно считать, что $n \geq 3$) существует такая цепочка ненулевых объектов

$$B_n, C_n, B_{n-1}, C_{n-1}, \dots, B_i, C_i, B_{i-1}, \dots, C_2, B_1, C_1, B_0,$$

что $B_n \simeq B$, $B_0 \simeq A$ и для каждого i объект B_i является существенным расширением объекта C_i , а объект C_i — ненулевым идеалом объекта B_{i-1} ($n \geq i \geq 1$). При этом мы будем считать, что объект A — ненулевой, так как случай нулевого объекта тривиален: $\mathcal{K}(0)$ совпадает с классом всех нулевых объектов.

Пусть C — ненулевой идеал объекта B . Тогда, рассматривая цепочку

$$C, B_n, C_n, B_{n-1}, \dots, C_2, B_1, C_1, B_0,$$

получаем, что C — объект из класса $\mathcal{K}(A)$. Аналогично, если C — существенное расширение объекта B , то рассматриваем цепочку

$$C, B, B_n, C_n, B_{n-1}, \dots, C_2, B_1, C_1, B_0$$

и снова получаем, что C — объект из класса $\mathcal{K}(A)$.

*) Напомним, что все рассматриваемые классы содержат нулевой объект.

А из доказанного с очевидностью вытекает по построению, что $\mathcal{K}(A)$ — наименьший класс объектов, удовлетворяющий требованиям Н1, Н2 и содержащий объект A .

Если класс $\mathcal{K}(A)$ слабо специален, то по построению наименьшего слабо специального радикала b_0 объект A b_0 -полупрост, так как $\mathcal{P}(b_0)$ — наибольший слабо специальный класс объектов. Аналогично, если класс $\mathcal{K}(A)$ специален, то объект A первичен, так как класс π всех первичных объектов — наибольший специальный класс объектов.

Обратно, пусть объект A b_0 -полупрост. Тогда в силу слабой специальности класса $\mathcal{P}(b_0)$ и построения класса $\mathcal{K}(A)$, все объекты из класса $\mathcal{K}(A)$ b_0 -полупросты. Но тогда класс $\mathcal{K}(A)$ удовлетворяет требованиям Н4, Н1 и Н2, т. е. слабо специален. Аналогично, если объект A первичен, то все объекты из класса $\mathcal{K}(A)$ первичны, и потому класс $\mathcal{K}(A)$ специален в силу теоремы 4 или предложения 4.

Лемма доказана.

Теорема 5. *Ненулевой объект A первичен тогда и только тогда, когда верны следующие утверждения:*

а) *Объект A не имеет ненулевых π -метаидеалов, т. е. b_0 -полупрост.*

б) *Объект A однороден, т. е. пересечение любых двух ненулевых идеалов объекта A само будет ненулевым идеалом объекта A .*

в) *Если ненулевой объект B из класса $\mathcal{K}(A)$ является идеалом объекта C , то среди идеалов объекта C , имеющих нулевое пересечение с B , есть наибольший идеал B^* .*

Доказательство. Если объект A первичен, то все утверждения а), б) и в) верны в силу предложения 5 и леммы 5.

Обратно, пусть для ненулевого объекта A верны все утверждения а), б) и в).

Замечаем, что класс $\mathcal{U}$ всех однородных b_0 -полупростых объектов слабо специален, т. е. удовлетворяет требованиям Н1, Н2 и Н4.

Действительно, выполнение требования Н4 очевидно так как класс $\mathcal{P}(b_0)$ всех b_0 -полупростых объектов слабо специален.

Возьмем любой однородный b_0 -полупростой объект A' .

Пусть B — идеал объекта A' . В силу слабой специальности класса $\mathcal{P}(b_0)$ объект B b_0 -полупрост. Допустим, что объект B неоднороден. Это означает по определению (см. утверждение б)), что $C_1 \wedge C_2 = 0$ для некоторых ненулевых идеалов C_1 и C_2 объекта B . С помощью леммы 4.2 строим максимальный среди идеалов объекта B , имеющих нулевое пересечение с идеалом C_2 и содержащих C_1 . Пусть это будет $\tilde{C}_1$. Аналогично, учитывая равенство $\tilde{C}_1 \wedge C_2 = 0$, строим максимальный среди идеалов объекта B , имеющих нулевое пересечение с идеалом $\tilde{C}_1$ и содержащих идеал C_2 . Пусть это будет $\tilde{C}_2$. Тогда в силу леммы 4.2 $B/\tilde{C}_1$ — существенное расширение объекта C_2 , а $B/\tilde{C}_2$ — существенное расширение объекта $\tilde{C}_1$. Но объекты C_2 и $\tilde{C}_1$ будут b_0 -полупростыми в силу слабой специальности класса $\mathcal{P}(b_0)$. Еще раз применяя слабую специальность этого класса, получаем, что $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ — ко- $\mathcal{P}(b_0)$ -идеалы объекта B , а потому $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ — идеалы объекта A' . Между тем, $\tilde{C}_1 \wedge \tilde{C}_2 = 0$ и $\tilde{C}_1 \neq 0 \neq \tilde{C}_2$, так как $C_1 \leq \tilde{C}_1$, $C_2 \leq \tilde{C}_2$. Получили противоречие с однородностью объекта A' .

Следовательно, любой идеал однородного b_0 -полупростого объекта A' сам будет однородным b_0 -полупростым объектом, т. е. класс $\mathcal{U}$ удовлетворяет требованию Н1.

Пусть Q — существенное расширение объекта A' . В силу слабой специальности класса $\mathcal{P}(b_0)$ объект Q b_0 -полупрост. Кроме того, если D_1 и D_2 — ненулевые идеалы объекта Q , то $D_1 \wedge A'$ и $D_2 \wedge A'$ — ненулевые идеалы объекта A' , и потому $(D_1 \wedge A') \wedge (D_2 \wedge A') \neq 0$ в силу однородности объекта A' . Но тогда и $D_1 \wedge D_2 \neq 0$, и мы получили, что объект Q однороден.

Следовательно, класс $\mathcal{U}$ удовлетворяет и требованию Н2.

Учитывая слабую специальность класса $\mathcal{U}$, вернемся к объекту A . Строим по объекту A соответствующий ему класс $\mathcal{K}(A)$. Из а) и леммы 5 вытекает, что класс $\mathcal{K}(A)$ слабо специален. Из слабой специальности класса $\mathcal{U}$ вытекает снова в силу леммы 5, что $\mathcal{K}(A) \subseteq \mathcal{U}$, так как $A \in \mathcal{U}$ в силу а) и б). Кроме того, если $A' \in \mathcal{K}(A)$, то $\mathcal{K}(A') \subseteq \mathcal{K}(A)$. Но тогда получаем, что для любого объекта $A' \in \mathcal{K}(A)$ выполнены все утверждения а), б), в), т. е. A' — b_0 -полупростой однородный объект, и если ненулевой объект B' из класса $\mathcal{K}(A')$ является идеалом

объекта C' , то среди идеалов объекта C' , имеющих нулевое пересечение с B' , есть наибольший идеал.

Докажем, что класс $\mathcal{K}(A)$ специален. Для этого достаточно доказать, что класс $\mathcal{K}(A)$ удовлетворяет требованию М4, так как класс $\mathcal{K}(A)$ слабо специален.

Пусть C — собственный ко- $\mathcal{K}(A)$ -идеал объекта B , B — идеал объекта Q . В силу слабой специальности класса $\mathcal{K}(A)$, C — идеал в Q . Переходя к образам при нормальном эпиморфизме $Q \rightarrow \bar{Q} = Q/C$, получаем, что $\bar{B} = B/C$ — ненулевой идеал объекта $\bar{Q}$, причем $\bar{B} \in \mathcal{K}(A)$. В силу в) среди идеалов объекта $\bar{Q}$, имеющих нулевое пересечение с идеалом $\bar{B}$, существует наибольший идеал $\bar{B}^*$. Обозначая прообраз идеала $\bar{B}^*$ при нормальном эпиморфизме $Q \rightarrow \bar{Q} = Q/C$ символом $(C : B)$, получаем в силу первой теоремы об изоморфизмах, что для любого идеала J объекта Q верно соотношение

$$J \wedge B = C \Leftrightarrow C \leq J \leq (C : B). \quad (13)$$

Кроме того, по построению в силу первой теоремы об изоморфизмах

$$Q/C : B \simeq \bar{Q}/\bar{B}^* \in \mathcal{K}(A),$$

так как $\bar{Q}/\bar{B}^*$ — существенное расширение объекта $\bar{B} \in \mathcal{K}(A)$ в силу леммы 4.2. Поэтому $(C : B)$ — ко- $\mathcal{K}(A)$ -идеал объекта Q .

С другой стороны, возьмем любой такой ко- $\mathcal{K}(A)$ -идеал P объекта Q , что верно равенство $P \wedge B = C$. Тогда в силу (13) $P \leq (C : B)$. Переходя к образам при нормальном эпиморфизме $Q \rightarrow Q/P$, получаем, что Q/P — объект из класса $\mathcal{K}(A)$, содержащий в качестве идеалов объекты $B \vee P/P$ и $(C : B)/P$. При этом в силу первой теоремы об изоморфизмах

$$\begin{aligned} ((C : B)/P) \wedge (B \vee P/P) &= ((C : B) \wedge (B \vee P))/P = \\ &= (((C : B) \wedge B) \vee P)/P = C \vee P/P = P/P = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Но $B \vee P/P \simeq B/B \wedge P = B/C = \bar{B} \neq 0$. Поэтому из равенства (14) вытекает равенство $(C : B)/P = 0$, так как объект Q/P однороден, как и любой другой объект из класса $\mathcal{K}(A)$. Следовательно, $(C : B) = P$.

Таким образом, класс $\mathcal{K}(A)$ слабо специален и удовлетворяет требованию М4. Поэтому класс $\mathcal{K}(A)$ удовле-

творяет требованиям $M1$ и $M4$, т. е. является специальным классом. В силу леммы 5 объект A первичен.

Теорема доказана.

Одновременно мы нашли еще один конкретный радикал, являющийся аналогом нижнего нильрадикала ассоциативных алгебр.

А именно, в ходе доказательства теоремы 5 показано, что класс $\mathcal{U}$ всех b_0 -полупростых однородных объектов слабо специален. Поэтому верхний радикал $b_1 = S_{\mathcal{U}}$ является слабо специальным радикалом.

В силу теоремы 5 $\pi \subseteq \mathcal{U}$. Поэтому для построенных слабо специальных радикалов b_0 , b_1 и b верно соотношение $b_0 \leq b_1 \leq b$.

§ 6. Примеры идеально наследственных, слабо специальных и специальных радикалов в конкретных категориях

В этом параграфе мы укажем несколько конкретных категорий, в которых верны все аксиомы 1—8, и рассмотрим в этих категориях идеально наследственные, слабо специальные и специальные радикалы, обращая особое внимание на радикалы b_0 , b_1 и b . При этом мы ограничимся категориями, внешне «достаточно далекими» от категорий всех ассоциативных колец и алгебр, так как случай ассоциативных алгебр подробно рассмотрен в гл. 3.

1. Категории конечных групп. Пусть $\mathcal{H}$ — произвольный непустой класс конечных групп, замкнутый относительно взятия инвариантных подгрупп и гомоморфных образов. Объектами будем считать группы из $\mathcal{H}$ и только такие группы, а морфизмами — такие гомоморфизмы $f: G \rightarrow H$ групп из $\mathcal{H}$ друг в друга, что $\text{Im } f$ — достижимая подгруппа группы H (т. е. член некоторого конечного нормального ряда этой группы). Ясно, что при этом мы получаем категорию $\mathcal{H}$, в которой выполнены все аксиомы 1—8, причем, как показано в конце § 3 (см. пример), полученная категория обладает свойством S .

Предложение 1. *Для любого класса $\mathcal{H}$ простых групп нижний радикал $l_{\mathcal{H}}$ будет идеально наследственным радикалом. С другой стороны, если τ — идеально наслед-*

ственный радикал, то τ совпадает с нижним радикалом $l_{\Pi(\tau)}$, где $\Pi(\tau)$ — класс всех простых τ -радикальных групп. Соответствия $\Pi \mapsto l_{\Pi}$, $\tau \mapsto \Pi(\tau)$ устанавливают изоморфизм между полной решеткой всех идеально наследственных радикалов (в $\mathcal{H}$) и полной булевой решеткой всех подклассов класса всех простых (конечных) групп.

Доказательство. Из выполнения требования S вытекает в силу теорем 3.4, 3.5, предложения 4.2 и леммы 5.2, что для любого свойства δ , сохраняющегося при взятии гомоморфных образов и инвариантных подгрупп, нижний радикал l_{δ} является идеально наследственным радикалом. При этом идеально наследственные радикалы и наследственные радикалы — это одно и то же. Но тогда, в частности, для любого класса Π простых групп нижний радикал l_{Π} будет идеально наследственным радикалом. Нетрудно видеть, что при этом класс Π совпадает с классом всех простых l_{Π} -радикальных групп. Поэтому для любых двух классов Π_1 и Π_2 простых групп соотношения $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$ и $l_{\Pi_1} \leq l_{\Pi_2}$ равносильны.

С другой стороны, любая неединичная группа G имеет такой конечный нормальный ряд $E = G_0 \subset \dots \subset G_m \subset \subset G_{m+1} \subset \dots \subset G_k = G$, что все факторы этого ряда — фактор-группы G_{m+1}/G_m — будут простыми группами (все рассматриваемые группы конечны как группы из $\mathcal{H}$). Но тогда, если τ — идеально наследственный радикал, то группа G τ -радикальна тогда и только тогда, когда все соответствующие ей простые группы G_{m+1}/G_m τ -радикальны. А отсюда легко вытекает равенство $\tau = l_{\Pi(\tau)}$, где $\Pi(\tau)$ — класс всех простых τ -радикальных групп.

Предложение доказано.

Таким образом, идеально наследственные радикалы в категории $\mathcal{H}$ описаны. Описание слабо специальных и специальных радикалов существенно зависит от конкретного задания класса $\mathcal{H}$: между радикалами b_0 , b_1 и b могут быть различные соотношения, уточняющие общее соотношение $0 \leq b_0 \leq b_1 \leq b \leq e$. Мы рассмотрим только некоторые из возможных случаев. Для дальнейшего отметим, что из конечности рассматриваемых групп легко вытекает равенство $b_0 = b_1$.

Предложение 2. Если $\mathcal{H}$ — класс всех конечных групп, то $b_0 = b = e$.

Действительно, возьмем любую неединичную группу H . Пусть $G = H \times H$ — прямое произведение группы H на себя, $Q = GZ_2$ — полупрямое произведение группы G на циклическую группу $Z_2 = \{0, 1\}$ порядка 2, причем порождающий элемент 1 группы Z_2 действует на элементы из G по правилу $1(x, y) = (y, x)$, а единица 0 — тождественным образом. По построению

$$G = \{(x, y) \mid x, y \in H\}, \quad (x, y)(a, b) = (xa, yb),$$

$$Q = \{(g, \theta) \mid g \in G, \theta \in Z_2\}, \quad (g_1, \theta_1)(g_2, \theta_2) = (g_1(\theta_1 g_2), \theta_1 \theta_2).$$

Пусть e — единица группы H . Производя отождествление с помощью изоморфных вложений $h \mapsto (h, e)$, $g \mapsto (g, 0)$, получаем, что H — инвариантная подгруппа в G , G — инвариантная подгруппа в Q . Но для всех $h \in H$ получаем

$$((e, e), 1)((h, e), 0)((e, e), 1) = ((e, h), 0),$$

так как $1 \cdot 1 = 0$ в группе Z_2 . Отсюда вытекает, что инвариантная подгруппа в Q , порожденная подгруппой H , совпадает с подгруппой G . Замечая, что $G/H \simeq H$, получаем в силу теорем 5.1 и 5.2, что группа H b_0 -радикальна.

Таким образом, все группы b_0 -радикальны в рассматриваемом случае, т. е. радикал b_0 совпадает с тривиальным радикалом ε . Но тогда, очевидно, верно равенство $b_0 = b = \varepsilon$.

Предложение доказано.

Хорошо известно, что любая подгруппа и любой гомоморфный образ циклической группы сами будут циклическими группами. Поэтому рассмотрение всех циклических групп в качестве основного класса $\mathcal{H}$ допустимо.

Всюду ниже символом Z_n мы будем обозначать циклическую группу из n элементов ($n \geq 2$). Для абелевых групп будем применять аддитивную запись.

Предложение 3. Если $\mathcal{H}$ — класс всех конечных циклических групп, то $0 = b_0 = b$. При этом ненулевыми первичными объектами в категории $\mathcal{H}$ будут, с точностью до изоморфизма, группы Z_{p^k} (p — простое число, k — целое, $k \geq 1$) и только они.

Доказательство. В силу выбора основного класса $\mathcal{H}$ все рассматриваемые группы абелевы. Но в абелевых группах понятия подгруппы и инвариантной подгруппы совпадают. Поэтому любой класс групп будет удовлетво-

рядь требованию Н4, т. е. слабо специальные классы в $\mathcal{H}$ — это в точности классы, удовлетворяющие требованиям Н1 и Н2. В частности, наибольшим слабо специальным классом в $\mathcal{H}$ будет сам $\mathcal{H}$, т. е. все объекты категории $\mathcal{H}$ b_0 -полупросты. Кроме того, любая циклическая группа Z_n разлагается, и притом единственным образом, в конечную прямую сумму циклических примарных групп Z_{p^k} . Поэтому однородные ненулевые объекты категории $\mathcal{H}$ — это, с точностью до изоморфизма, группы Z_{p^k} , где p — простое число, k — целое, $k \geq 1$, и только такие группы.

Кроме того, если группа Z_{p^m} является подгруппой некоторой группы Z_n , то натуральное число n представляется единственным образом в виде $n = p^s q$ для некоторого целого $s \geq m$ и некоторого натурального числа q , взаимно простого с простым числом p . При этом группа Z_n единственным образом разлагается в прямую сумму $Z_n = G \oplus H$, где $G \simeq Z_{p^s}$, $H = Z_q$. Но тогда, как легко видеть, H будет наибольшей подгруппой в Z_n , имеющей нулевое пересечение с подгруппой Z_{p^m} (точнее, с подгруппой в Z_n , изоморфной Z_{p^m}). А из доказанного вытекает в силу теоремы 5.5, что для всех простых p и всех целых $k \geq 1$ группы Z_{p^k} будут первичными объектами в категории $\mathcal{H}$. Предложение доказано.

Символом $|G|$ мы всегда будем обозначать мощность множества G . Ясно, что для любого натурального числа n класс всех таких групп G , что $|G| \leq n$, замкнут относительно взятия подгрупп и гомоморфных образов. Поэтому рассмотрение такого класса в качестве основного класса $\mathcal{H}$ допустимо.

Предложение 4. Если $\mathcal{H}$ — класс всех таких конечных групп G , что $|G| \leq 8$, то $0 < b_0 = b < e$. Если $\mathcal{H}$ — класс всех таких конечных групп G , что $|G| \leq 9$, то $0 < b_0 < b < e$.

Доказательство. В рассматриваемом нами случае имеются, с точностью до изоморфизма, только следующие неоднородные группы: абелевы группы $Z_2, Z_3, Z_2 \oplus Z_2, Z_4, Z_5, Z_6 \simeq Z_2 \oplus Z_3, Z_7, Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2, Z_2 \oplus Z_4, Z_8, Z_3 \oplus Z_3$ и Z_9 ; неабелевы группы S_3 (группа всех перестановок множества из трех элементов), K (группа кватернионов).

и $(Z_2 \oplus Z_2)Z_2$ (полупрямое произведение группы $Z_2 \oplus Z_2$ на группу Z_2 , см. доказательство предложения 2).

Мы рассматриваем два случая: 1) $\mathcal{H}$ — класс всех таких групп G , что $|G| \leq 8$, 2) $\mathcal{H}$ — класс всех таких групп G , что $|G| \leq 9$. Но в обоих этих случаях группа $(Z_2 \oplus Z_2)Z_2$ допустима для рассмотрения. Поэтому из доказательства предложения 2 вытекает, что группа Z_2 будет b_0 — радикальной в обоих случаях. Но тогда b_0 — радикальны (и снова в обоих случаях) все 2-группы (группы $Z_2, Z_2 \oplus Z_2, Z_4, Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2, Z_2 \oplus Z_4, Z_8, K$ и $(Z_2 \oplus Z_2)Z_2$). Кроме того, группа S_3 имеет инвариантную подгруппу, изоморфную группе Z_2 , и потому S_3 — не b_0 — полупростая группа. По тем же соображениям не b_0 — полупроста и группа $Z_6 \simeq Z_2 \oplus Z_3$.

Пусть $\mathcal{H}$ — класс всех таких групп G , что $|G| \leq 8$. Тогда в силу доказанного b_0 — полупростыми группами могут быть, с точностью до изоморфизма, только группы $0, Z_3, Z_6$ и Z_7 . Прямой перебор убеждает, что класс групп

$$\pi_8 = \{G \mid |G| \in \{1, 3, 5, 7\}\}$$

удовлетворяет требованиям Н1, Н2 и Н4, т. е. слабо специален. Более того, этот класс специален в силу теоремы 5.5, так как если $G \in \pi_8$, $G \neq 0$ и G — подгруппа группы H , то либо $G = H$, либо $G \simeq Z_3$ и $H \simeq Z_3 \oplus Z_2$ (в рассматриваемом случае группы $Z_3 \oplus Z_3$ и Z_9 не принадлежат классу $\mathcal{H}$, так как они имеют 9 элементов). Но тогда в силу доказанного $b_0 = b = S_{\pi_8}$, и потому $0 < b_0 = b < e$.

Пусть $\mathcal{H}$ — класс всех таких групп G , что $|G| \leq 9$. В этом случае в силу доказанного b_0 — полупростыми группами могут быть, с точностью до изоморфизма, только группы $0, Z_3, Z_6, Z_7, Z_3 \oplus Z_3$ и Z_9 . Прямой перебор убеждает, что класс групп, изоморфных указанным группам, т. е. класс

$$\mathcal{P}_9 = \{G \mid |G| \in \{0, 3, 5, 7, 9\}\}$$

удовлетворяет требованиям Н1, Н2 и Н4, т. е. слабо специален.

А именно, выполнение требований Н1 и Н2 очевидно. Кроме того, если C — инвариантная подгруппа группы B , B — инвариантная подгруппа группы A и $B/C \in \mathcal{P}_9$, то прямым перебором получаем: или $C = B$, или $B = A$, или

$C=0$. Во всех этих случаях оказывается, что C — инвариантная подгруппа в A и потому выполнено требование Н4. Класс $\mathcal{P}_9$ неспециален. А именно, в группе $G = Z_3 \oplus Z_3$ для подгруппы $H = \{(x, x) \mid x \in Z_3\}$, изоморфной Z_3 , среди подгрупп, имеющих нулевое пересечение с H , нет наибольшей. Но G — абелева группа, и потому все подгруппы в G инвариантны. Поэтому в силу теоремы 5.5 группа Z_3 , а значит, и группы $Z_3 \oplus Z_3$, Z_9 не будут первичными объектами в категории III. Выбрасывая из класса $\mathcal{P}_9$ указанные непервичные объекты, получаем класс

$$\pi_9 = \{G \mid |G| \in \{1, 5, 7\}\},$$

групп, изоморфных либо нулевой группе, либо группе Z_5 , либо группе Z_7 . Но тогда, если $B \in \pi_9$, $B \neq 0$ и группа B является подгруппой группы C , то $B=C$, что легко проверить простым перебором всех групп из класса III. А отсюда легко вытекает в силу теоремы 5.5, что все ненулевые группы из класса π_9 являются первичными объектами категории III.

В результате получаем, что $\mathcal{P}_9$ — наибольший слабо специальный класс, а π_9 — наибольший специальный класс в категории III. Поэтому $b_0 = S_{\mathcal{P}_9}$, $b = S_{\pi_9}$. Но тогда группа Z_2 b_0 -радикальна, группа Z_3 b -радикальна и b_0 -полупроста, группа Z_5 b -полупроста. Следовательно, $0 < b_0 < b < \varepsilon$. Предложение доказано.

2. Категории конечномерных алгебр. Пусть Φ — произвольное поле, $\mathfrak{A}$ — любой непустой класс конечномерных над Φ алгебр, замкнутый относительно взятия идеалов и гомоморфных образов. Объектами будем считать алгебры из класса $\mathfrak{A}$ и только такие алгебры, а морфизмами — такие гомоморфизмы $f: A \rightarrow B$ алгебр из $\mathfrak{A}$ друг в друга, что $\text{Im } f$ — метайдеал алгебры B . Ясно, что при этом мы получаем категорию, в которой выполнены все аксиомы 1 — 8.

Полученная категория $\mathfrak{A}$ может не удовлетворять условию S . Тем не менее, в ряде случаев мы можем дать достаточно полное описание идеально наследственных, слабо специальных и специальных радикалов. Это описание существенно зависит от конкретного задания основного класса $\mathfrak{A}$. Поэтому мы рассмотрим только некоторые из возможных случаев. Кроме того, для простоты

будем считать, что основное поле Φ имеет характеристику 0.

Для дальнейшего отметим, что с помощью леммы 5.2 получается описание всех наследственных радикалов на языке классов простых алгебр*). А именно, для любого класса Π простых алгебр нижний радикал l_Π будет наследственным. Обратно, если τ — наследственный радикал, то $\tau = l_\Pi(\tau)$, где $\Pi(\tau)$ — класс всех простых τ — радикальных алгебр. Но тогда соответствия $\Pi \mapsto l_\Pi$ и $\tau \mapsto \Pi(\tau)$ устанавливают изоморфизм между полной решеткой всех наследственных радикалов и полной булевой решеткой всех подклассов класса всех простых алгебр.

Предложение 5. Пусть класс $\mathcal{A}$ содержит хотя бы одну простую идемпотентную алгебру, двумерную алгебру с нулевым умножением и $\dim A \leq 2$ для любой алгебры A из $\mathcal{A}$. Тогда верны утверждения:

- а) *Все наследственные радикалы слабо специальные.*
- б) *Наследственный радикал τ специален тогда и только тогда, когда одномерная алгебра с нулевым умножением τ -радикальна.*
- в) *Ненулевыми первичными объектами в категории $\mathcal{A}$ являются подпрямо неразложимые алгебры с простой идемпотентной сердцевиной и только они.*

г) *Верно соотношение $0 = b_0 < b < e$.*

Доказательство. Пусть C — идеал алгебры B , B — идеал алгебры A . Тогда из соотношений $\dim C \leq \dim B \leq \dim A \leq 2$ вытекает, что или $0 = C$, или $C = B$, или $B = A$. Во всех случаях C оказывается идеалом алгебры A . А из этого легко вытекает в силу предложения 4.2 и теоремы 5.1, что верно утверждение а).

Из конечномерности рассматриваемых алгебр легко вытекает, что ненулевые однородные объекты категории $\mathcal{A}$ и подпрямо неразложимые алгебры — это одно и то же. Кроме того, в силу а) $b_0 = 0$, и потому все объекты в $\mathcal{A}$ b_0 -полупросты.

Пусть Q — ненулевой первичный объект в $\mathcal{A}$. Тогда в силу сказанного Q — подпрямо неразложимая алгебра с некоторой сердцевиной B . Но тогда и B — ненулевой

*) Здесь и ниже мы считаем, что простые алгебры — это такие ненулевые алгебры Q , что единственными идеалами в Q являются 0 и Q . Поэтому допустимо рассмотрение пустых классов алгебр. Ясно, что $l_\Phi = 0$.

первичный объект в $\mathfrak{A}$. Из доказанного выше вытекает, что алгебра B будет простой алгеброй. Кроме того, $B = B^2$.

Действительно, если $B \neq B^2$, то $B \supset B^2$, и потому $B^2 = 0$. Из этого вытекает, что одномерная алгебра с нулевым умножением будет первичным объектом как идеал алгебры B . Но если Φa — одномерная алгебра с нулевым умножением, то в двумерной алгебре $\Phi a \oplus \Phi a$ с нулевым умножением подалгебра $\Phi(a, a)$ будет идеалом и для этого идеала в алгебре $\Phi a \oplus \Phi a$ нет наибольшего среди пересекающихся с $\Phi(a, a)$ по нулю. Поэтому в силу теоремы 5.5 алгебра Φa не может быть первичным объектом в $\mathfrak{A}$. Получили противоречие, и потому $B = B^2$.

Таким образом, если Q — первичный объект в $\mathfrak{A}$, то Q — подпрямо неразложимая алгебра с простой идемпотентной сердцевинной B (либо $Q = 0$).

Обратно, пусть Q — подпрямо неразложимая алгебра с простой идемпотентной сердцевинной B . Из специфики рассматриваемого случая вытекает, что либо $B = Q$, либо B — единственный идеал алгебры Q , отличный от 0 и Q . Из тех же соображений вытекает, что ненулевыми алгебрами в классе $\mathcal{K}(B)$ — наименьшем слабо специальном классе, содержащем алгебру B , — будут подпрямо неразложимые алгебры с сердцевинной, изоморфной B , и только такие алгебры.

Допустим, что алгебра Q не является первичным объектом в категории $\mathfrak{A}$. Тогда и алгебра B не будет первичным объектом, так как Q — существенное расширение объекта B . Но, очевидно, B — однородный $\mathfrak{h}_0$ -полупростой объект. Поэтому в силу теоремы 5.5 существует такая ненулевая алгебра $A \in \mathcal{K}(B)$ и такая алгебра C , содержащая алгебру A в качестве идеала, что среди идеалов алгебры C , имеющих нулевое пересечение с A , нет наибольшего. Но тогда в алгебре C найдутся такие два ненулевых идеала X и Y , что $X \neq Y$, но $X \cap A = Y \cap A = 0$. Из $\dim C \leq 2$ и полученных равенств вытекает, что алгебра C разлагается в прямую сумму $X \oplus A = Y \oplus A = C$ и $A \simeq B$. Возьмем любой $x \in X$. Найдутся такие $a \in A$ и $y \in Y$, что $x = y + a$. Но $xA = yA = Ay = Ax = 0$. Поэтому $aA = Aa = 0$. Между тем, $\{z \in A \mid zA = Az = 0\}$ — идеал алгебры A и A — простая идемпотентная алгебра. Поэтому $a = 0$, т. е. $x = y \in Y$. В результате получаем включение

$X \subseteq Y$. По симметрии верно и включение $Y \subseteq X$. Следовательно, $X = Y$. Противоречие.

Мы доказали утверждение в). Поэтому наибольшим специальным классом в $\mathfrak{A}$ будет класс π всех подпрямо неразложимых алгебр с простой идемпотентной сердцевиной. Но тогда, если r — специальный радикал, то все алгебры с нулевым умножением r -радикальны, так как $r \geq b = S_\pi$ и в классе π нет ненулевых алгебр с нулевым умножением.

Обратно, пусть r — наследственный радикал и одномерная алгебра с нулевым умножением r -радикальна. Тогда r -радикальны и все алгебры с нулевым умножением. Замечая, что класс $\pi(r) = \pi \cap \mathcal{P}(r)$ специален как слабо специальный класс в категории $\mathfrak{A}$, состоящий из первичных объектов этой категории, сравним радикал r и специальный радикал $\hat{r} = S_{\pi(r)}$.

Ясно, что все $\hat{r}$ -полупростые алгебры r -полупросты. С другой стороны, пусть Q — ненулевая r -полупростая алгебра. Тогда в Q нет ненулевых идеалов, являющихся алгебрами с нулевым умножением. Но тогда алгебра Q либо является подпрямо неразложимой алгеброй с простой сердцевиной, либо прямой суммой двух простых идемпотентных алгебр. В обоих случаях алгебра Q $\hat{r}$ -полупроста.

Следовательно, $r = \hat{r}$, и потому верно утверждение б). А утверждение г) с очевидностью вытекает из всего доказанного. Предложение доказано.

Как показано в главе 2 (см. предложение 2.4.2), если основной класс алгебр совпадает с классом всех алгебр над полем, то нетривиальных идеально наследственных радикалов не будет. Специфику «существенно неассоциативного случая» выявляет

Предложение 6. Пусть n — целое, $n \geq 3$, и основной класс $\mathfrak{A}$ состоит из всех тех и только тех алгебр A , для которых $\dim A \leq n$. Тогда для любого наследственного радикала r верно и притом точно одно из следующих утверждений (все указанные возможности реализуются): 1) $r = 0$; 2) $r \neq 0$ — все ненулевые r -радикальные алгебры A являются простыми идемпотентными алгебрами с $\dim A \geq n - 1$; 3) r — слабо специальный радикал; 4) r не является идеально наследственным радикалом. Кроме того:

а) Первичными объектами в категории $\mathcal{A}$ будут такие и только такие алгебры Q , что Q — подпрямо неразложимая алгебра с простой идемпотентной сердцевиной C и $\dim C \geq n-1$.

б) Наследственный радикал τ специален тогда и только тогда, когда все не являющиеся простыми алгебры R с $\dim R = n-1$ τ -радикальны. В этом случае все алгебры с размерностью $k \leq n-2$ тоже будут τ -радикальными.

в) Идеально наследственный радикал τ специален тогда и только тогда, когда существует хотя бы одна ненулевая τ -радикальная алгебра R с $\dim R \leq n-2$.

г) Любой слабо специальный класс специален, и потому любой слабо специальный радикал является специальным радикалом.

Доказательство. Строим трехмерную алгебру с базисом $\{e, f, g\}$ и следующей таблицей умножения базисных элементов

$$ef = fe = e^2 = f^2 = g^2 = 0, \quad eg = -ge = e + f, \\ fg = -gf = f. \quad (1)$$

Из (1) вытекает, что в получающейся алгебре $L = \Phi e + \Phi f + \Phi g$ подпространство $\Phi e + \Phi f$ будет идеалом, порожденным подалгеброй Φe , причем Φe — идеал в $\Phi e + \Phi f = \Phi e \oplus \Phi f$. Но тогда в силу теоремы 5.1 одномерная алгебра Φf с нулевым умножением будет δ -радикальной для любого слабо специального радикала δ , так как, очевидно, $\Phi e + \Phi f / \Phi e \simeq \Phi f$.

Пусть τ — идеально наследственный радикал, причем существует хотя бы одна ненулевая τ -радикальная алгебра R_0 с $\dim R_0 \leq n-2$. Алгебру R_0 выберем и зафиксируем вместе с ее базисом $\mathcal{B}(R_0) = \{e_i \mid 1 \leq i \leq m\}$.

По условию $1 \leq m \leq n-2$. Учитывая это, строим алгебру A_0 с $\dim A_0 = m+2$, взяв в качестве базиса множество $\mathcal{B}(A_0) = \mathcal{B}(R_0) \cup \{u, v\}$ и доопределяя умножение базисных элементов с помощью правил ($1 \leq i \leq m$)

$$ue_i = e_i u = u^2 = v^2 = uv = vu = 0, \quad ve_i = e_i v = u. \quad (2)$$

В результате получаем, что $R_0 + \Phi u$ — идеал алгебры A_0 , порожденный подалгеброй R_0 , причем R_0 — идеал алгебры $R_0 + \Phi u$. Но по условию алгебра R_0 τ -радикальна. Поэтому в силу предложения 4.2 τ -радикальна и алгебра

Φu как гомоморфный образ (или идеал) r -радикальной алгебры $R_0 + \Phi u = R_0 \oplus \Phi u$.

Возьмем любую ненулевую алгебру R_1 с $\dim R_1 \leq n-2$. Дополняем базис $\mathcal{B}(R_1) = \{a_j \mid 1 \leq j \leq k\}$ алгебры R_1 до базиса $\mathcal{B}(A_1) = \mathcal{B}(R_1) \cup \{u, w\}$ новой алгебры A_1 с $\dim A_1 = k+2$, доопределяя умножение базисных элементов по правилам

$$ua_j = a_j u = u^2 = w^2 = 0, \quad wu = uw = a_1, \\ wa_1 = a_1 w = u, \quad \text{если } k=1, \quad (3)$$

$$wa_1 = a_1 w = a_2, \dots, wa_{k-1} = a_{k-1} w = a_k, \\ wa_k = a_k w = u, \quad \text{если } k \geq 2.$$

Сравнивая (2) и (3), получаем, что r -радикальная алгебра Φu является подалгеброй алгебры A_1 и порождает в этой алгебре идеал $R_1 + \Phi u$, причем Φu — идеал алгебры $R_1 + \Phi u$. В силу предложения 4.2 алгебра $R_1 + \Phi u$ r -радикальна. Но тогда r -радикальна и алгебра R_1 — любая ненулевая алгебра с размерностью $k \leq n-2$.

Возьмем любую алгебру R_2 с $\dim R_2 = n-1$. Если алгебра R_2 не является простой, то в ней найдется ненулевой идеал R_1 с $\dim R_1 \leq n-2$. Выберем базис алгебры R_2 так, что $\mathcal{B}(R_2) = \{a_j \mid 1 \leq j \leq n-1\}$, $\mathcal{B}(R_1) = \{a_j \mid 1 \leq j \leq k\}$. Строим алгебру A_2 с $\dim A_2 = n$, взяв в качестве базиса множество $\mathcal{B}(A_2) = \mathcal{B}(R_2) \cup \{t\}$ и доопределяя умножение базисных элементов по правилу

$$ta_1 = a_1 t = a_2, \dots, ta_{n-2} = a_{n-2} t = a_{n-1}, \\ ta_{n-1} = a_{n-1} t = t^2 = 0. \quad (4)$$

Из (4) вытекает, что идеал R_1 алгебры R_2 порождает в алгебре A_2 весь идеал R_2 . Но алгебра R_1 r -радикальна по доказанному. Поэтому в силу предложения 4.2 r -радикальна и алгебра R_2 .

Возьмем любую ненулевую r -полупростую алгебру Q . Все ненулевые метайдеалы алгебры Q будут r -полупростыми, а значит, и не r -радикальными алгебрами. Поэтому все они будут алгебрами с размерностью $k \geq n-1$. Но $n \geq 3$, и потому $2(n-1) \geq n+1$. Отсюда легко вытекает, что Q — подпрямая неразложимая алгебра с простой идемпотентной сердцевиной C , причем $\dim C \geq n-1$. При этом

либо $C = Q$, либо C — единственный идеал в Q , отличный от 0 и Q .

Пусть B — простая идемпотентная алгебра и $\dim B \geq n - 1$. Нетрудно убедиться в том, что в классе $\mathcal{K}'(B)$ — наименьшем классе, замкнутом относительно взятия идеалов и существенных расширений, содержащем алгебру B , — ненулевыми алгебрами будут подпрямо неразложимые алгебры с сердцевиной, изоморфной B , и только такие алгебры. Еще раз учитывая, что $\dim B \geq n - 1$, легко получаем, что класс $\mathcal{K}(B)$ удовлетворяет и требованию Н4, т. е. слабо специален. Поэтому, в частности, все алгебры из $\mathcal{K}(B)$ будут однородными b_0 -полупростыми объектами категории $\mathfrak{A}$. Повторяя теперь рассуждения из доказательства предложения 5, получаем, что слабо специальный класс $\mathcal{K}(B)$ будет состоять только из первичных объектов категории $\mathfrak{A}$ (т. е. специален).

Возвращаясь к идеально наследственному радикалу τ , получаем, что все τ -полупростые алгебры будут первичными объектами в категории $\mathfrak{A}$, и потому класс $\mathcal{P}(\tau)$ всех τ -полупростых алгебр специален (как обобщенно специальный класс, состоящий из первичных объектов). А отсюда вытекает, что радикал τ специален.

Из доказанного легко вытекает справедливость утверждений а), в) и г).

Пусть радикал τ специален. Тогда в силу доказанного выше существует хотя бы одна ненулевая τ -радикальная алгебра с размерностью $k \leq n - 2$, и потому τ -радикальны все алгебры размерности $n - 1$, не являющиеся простыми. Обратно, пусть наследственный радикал τ таков, что все алгебры размерности $n - 1$, не являющиеся простыми, τ -радикальны. Тогда, рассматривая алгебры вида $D \oplus \oplus \Phi \oplus \dots \oplus \Phi$, получаем, что все алгебры с размерностью $k \leq n - 2$ тоже τ -радикальны как гомоморфные образы некоторой τ -радикальной алгебры размерности $n - 1$. Учитывая это, допустим, что C — τ -радикальный идеал алгебры B , B — идеал алгебры A . Если C — идеал в A , то C порождает в A τ -радикальный идеал — самого себя. Если C — не идеал в A , то $0 \subset C \subset B \subset A$. Но тогда алгебра B не является простой и $\dim B \leq n - 1$, а значит, τ -радикальная алгебра. Поэтому в силу наследственности радикала τ C снова порождает в A τ -радикальный идеал. Но тогда в силу предложения 4.2 радикал τ будет иде-

ально наследственным. А из всего доказанного вытекает, что тогда радикал r специален.

Следовательно, верно и утверждение б).

Снова рассмотрим наследственный радикал r .

Если $r=0$, то r — идеально наследственный не слабо специальный радикал.

Если $r \neq 0$ и все ненулевые r -радикальные алгебры являются простыми идемпотентными алгебрами с размерностью $k \geq n-1$ (например, $r = e_{\Pi}$, где Π — класс всех указанных простых алгебр), то радикал r не слабо специален в силу в) и г). Однако с помощью предложения 4.2 легко получаем, что r — идеально наследственный радикал.

Если r — ненулевой идеально наследственный не слабо специальный радикал, то в силу в) и г) все ненулевые r -радикальные алгебры имеют размерность $k \geq n-1$. Но тогда из соотношения $2(n-1) \geq n+1$ и наследственности радикала r вытекает, что все ненулевые r -радикальные алгебры будут простыми идемпотентными алгебрами. Предложение доказано.

В заключение рассмотрим случай алгебр Ли.

Напомним, что в любой (конечномерной) алгебре Ли A существует наибольший разрешимый идеал $\sigma(A)$, причем фактор-алгебра $A/\sigma(A)$ уже не имеет ненулевых разрешимых идеалов. Из тождеств

$$x^2 = 0, \quad (xy)z + (yz)x + (zx)y = 0, \quad (5)$$

определяющих алгебры Ли, следует, что произведение любых двух идеалов алгебры Ли само будет идеалом. Но тогда из определения разрешимых алгебр Ли легко вытекает, что разрешимый радикал σ совпадает с нижним радикалом, порожденным классом всех алгебр с нулевым умножением (т. е. абелевых алгебр Ли). Радикал σ будем называть *классическим радикалом*, а σ -полупростые алгебры — *классическими полупростыми алгебрами Ли*.

Из тождеств (5) вытекает, что алгебры Ли тесно связаны с дифференцированиями. А именно, если A — алгебра Ли, то для любого элемента $a \in A$ умножение U_a на этот элемент ($xU_a = xa$ для всех $x \in A$) оказывается дифференцированием алгебры A . Дифференцирования U_a называются *внутренними дифференцированиями* алгебры Ли A . Алгебра Ли A называется *совершенной*, если все ее дифференци-

рования внутренние. Так, например, если поле Φ имеет характеристику 0, то все классически полупростые алгебры Ли совершенны.

Предложение 7. Пусть поле Φ имеет характеристику 0 и основной класс $\mathfrak{A}$ состоит из всех конечномерных алгебр Ли. Тогда

а) Первичными ненулевыми объектами в категории $\mathfrak{A}$ будут простые идемпотентные алгебры Ли и только они. В частности, класс $\mathfrak{M}$ алгебр Ли специален тогда и только тогда, когда все ненулевые алгебры в $\mathfrak{M}$ являются простыми идемпотентными алгебрами Ли.

б) Наименьший слабо специальный радикал $\mathfrak{b}_0$, наименьший специальный радикал $\mathfrak{b}$ и классический радикал σ совпадают.

в) Любой слабо специальный радикал специален. Более того, наследственный радикал τ специален тогда и только тогда, когда $\tau \geq \sigma$, т. е. когда все τ -полупростые алгебры Ли классически полупросты.

Доказательство. В рассматриваемом нами случае классически полупростые алгебры Ли — это в точности прямые суммы простых идемпотентных алгебр Ли, причем все классически полупростые алгебры Ли совершенны.

Сравним наименьший слабо специальный радикал $\mathfrak{b}_0$ и классический радикал σ . Для этого рассмотрим трехмерную алгебру L с базисом $\{e, f, g\}$ и таблицей (1) умножения базисных элементов (см. начало доказательства предложения 6). Прямой проверкой убеждаемся, что в L выполнены тождества (5), т. е. L — алгебра Ли. Но тогда в силу теоремы 5.1 одномерная алгебра с нулевым умножением будет τ -радикальной для любого слабо специального радикала. Поэтому и все алгебры с нулевым умножением τ -радикальны. В результате получаем, что если τ — слабо специальный радикал, то $\tau \geq \sigma$, так как σ совпадает с нижним радикалом, порожденным классом всех алгебр с нулевым умножением. В частности, $\mathfrak{b}_0 \geq \sigma$, т. е. все $\mathfrak{b}_0$ -полупростые алгебры Ли классически полупросты.

С другой стороны, в рассматриваемом нами случае любой идеал классически полупростой алгебры Ли сам будет классически полупростой алгеброй Ли. Поэтому в силу предложения 4.2 классический радикал σ будет идеально наследственным радикалом. А отсюда вытекает

в силу теоремы 4.1, что класс $\mathcal{P}(\sigma)$ всех классически полупростых алгебр Ли удовлетворяет требованиям Н1 и Н2 (т. е. замкнут относительно взятия идеалов и существенных расширений), как и любой другой обобщенно специальный класс.

Пусть классически полупростая алгебра Ли B является идеалом алгебры Ли A . Из тождеств (5) вытекает, что *аннулятор идеала* B в алгебре A , т. е. множество $B^* = \{a \in A \mid Ba = 0\}$, является идеалом алгебры A . Кроме того, алгебра B совершенна как классически полупростая алгебра Ли, и потому для любого $a \in A$ всегда существует такой $b \in B$, что $B(a - b) = 0$, т. е. $a - b \in B^*$. Поэтому $A = B + B^*$. Замечая, что $(B \cap B^*)^2 = 0$, получаем равенство $0 = B \cap B^*$, так как B не имеет ненулевых разрешимых идеалов. А из всего доказанного вытекает, что алгебра A разлагается в прямую сумму

$$A = B \oplus B^*, \quad (6)$$

причем B^* — наибольший идеал алгебры A , имеющий нулевое пересечение с идеалом B , так как если J — идеал алгебры A и $J \cap B = 0$, то $BJ = 0$.

Учитывая доказанное, допустим, что P — идеал алгебры Ли R , R — идеал алгебры Ли Q , причем фактор-алгебра R/P классически полупроста. Из последнего вытекает, что $P \cong \sigma(R) = R \cap \sigma(Q)$. Переходя к образам при гомоморфизме $Q \rightarrow Q/\sigma(R)$ и полагая $A = Q/\sigma(R)$, $B = R/\sigma(R)$, $C = P/\sigma(R)$, получаем: классически полупростая алгебра Ли B является идеалом алгебры Ли A , C — идеал в B . Но тогда верно равенство (6). Из этого равенства с очевидностью вытекает, что любой идеал алгебры B будет идеалом всей алгебры A . Поэтому, в частности, C — идеал в A . Возвращаясь к прообразам, получаем, что P — идеал алгебры Q . А отсюда следует, что класс $\mathcal{P}(\sigma)$ удовлетворяет требованию Н4.

Таким образом, класс $\mathcal{P}(\sigma)$ всех классически полупростых алгебр Ли удовлетворяет требованиям Н1, Н2 и Н4, т. е. слабо специален. Это означает, что классический радикал σ слабо специален, и потому $\sigma = \mathfrak{b}_0$ в силу доказанного. Но тогда, снова учитывая (6) и то, что классически полупростые алгебры Ли — это в точности конечные прямые суммы простых идемпотентных алгебр Ли, легко получаем: первичные объекты в категории $\mathcal{A}$ — это в точности про-

стые идемпотентные алгебры Ли, причем для любого первичного объекта Q наименьший специальный класс $\mathcal{K}(Q)$, содержащий Q , совпадает с классом всех алгебр, изоморфных алгебре Q .

Из доказанного вытекает справедливость утверждений а) и б). А из утверждений а) и б) легко следует утверждение в). Предложение доказано.

Таким образом, если поле Φ имеет характеристику 0, то для идеально наследственных, слабо специальных и специальных радикалов конечномерных алгебр Ли положение точно такое же, как для ассоциативных конечномерных алгебр (аналогично для альтернативных и йордановых алгебр). Положение существенно изменяется, если поле Φ имеет характеристику $p \neq 0$.

Предложение 8. Пусть поле Φ имеет ненулевую характеристику $p \geq 3$, основной класс $\mathcal{A}$ — класс всех конечномерных алгебр Ли. Тогда:

а) Первичных ненулевых объектов в категории $\mathcal{A}$ не существует.

б) Наименьший слабо специальный радикал b_0 и наименьший специальный радикал b совпадают с тривиальным (наибольшим!) радикалом ε .

в) Классический радикал σ не является идеально наследственным. Более того, если τ — идеально наследственный радикал и $\tau \geq \sigma$, то $\tau = \varepsilon$.

Доказательство. Повторяя соответствующую часть доказательства предложения 7, получаем, что $b \geq b_0 \geq \sigma$. Но тогда из справедливости утверждения в) вытекает справедливость утверждений а) и б). Поэтому остается доказать, что если τ — идеально наследственный радикал и $\tau \geq \sigma$, то $\tau = \varepsilon$. Это мы и будем доказывать.

Пусть τ — идеально наследственный радикал и $\tau \geq \sigma$, т. е. все разрешимые алгебры Ли τ -радикальны.

Допустим, что $\tau \neq \varepsilon$, т. е. существует ненулевая не τ -радикальная алгебра. Тогда существует ненулевая τ -полупростая алгебра. В силу выбора τ все ненулевые τ -полупростые алгебры не имеют ненулевых разрешимых идеалов. Отсюда вытекает, что ненулевая τ -полупростая алгебра R , имеющая наименьшую размерность среди ненулевых τ -полупростых алгебр, будет простой идемпотентной алгеброй. Простую идемпотентную τ -полупростую алгебру $R \neq 0$ выберем и зафиксируем.

Строим ассоциативно-коммутативную алгебру $A = \Phi(z)/Z^p\Phi(z)$, где p — характеристика поля Φ . Ясно, что A — алгебра с единицей 1, с базисом $\{1, z, z^2, \dots, z^{p-1}\}$ и определяющим соотношением $z^p = 0$. Не менее ясно, что нильрадикал (наибольший нильпотентный идеал) алгебры A совпадает с $N = \Phi z + \dots + \Phi z^{p-1} = zA$, тензорное произведение $L = R \otimes A$ является (конечномерной) алгеброй Ли, причем $N \otimes A$ — разрешимый (даже нильпотентный) идеал в L . Но $R \otimes A / R \otimes N \simeq R \otimes 1 \simeq R$, причем по построению R — простая идемпотентная τ -полупростая алгебра. Поэтому верно равенство $\tau(L) = \sigma(R \otimes A) = R \otimes N$.

Прямой проверкой убеждаемся, что отображение $D: A \rightarrow A$, определенное правилом

$$\left(\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i z^i \right) D = \sum_{i=1}^{p-1} i \alpha_i z^{i-1} \quad (z^0 = 1) \quad (7)$$

является дифференцированием алгебры A . Но тогда, как легко видеть, полагая

$$\left(\sum_j r_j \otimes a_j \right) D = \sum_j r_j \otimes a_j D, \quad (8)$$

мы получаем дифференцирование алгебры Ли $L = R \otimes A$. Учитывая (7) и (8), строим прямую сумму линейных пространств $Q = L + \Phi d$. Она превращается в алгебру Ли, если положить для любых $x, y \in L$, $\alpha, \beta \in \Phi$

$$(x + \alpha d)(y + \beta d) = xy - \alpha yD + \beta xD, \quad (9)$$

где произведение xy вычисляется в алгебре L , а элементы yD и xD — по правилам (7) и (8). Из (9) вытекает, что L — идеал алгебры Q . Но τ — идеально наследственный радикал. Поэтому $\tau(L) = R \otimes N$ тоже должен быть идеалом алгебры Q . Это означает в силу (9), что $(R \otimes N)D \subseteq R \otimes N$. Между тем, в силу (7) и (8) $(R \otimes z)D = R \otimes 1$ не содержится в $R \otimes N$. Противоречие.

Предложение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

Адо И. Д.

1. Представления алгебр Ли матрицами. — УМН, 1947, 2, № 6, с. 159—173.

Альберт (Albert A. A.)

1. A structure theory for Jordan algebras. — Ann. Math., 1947, 48, p. 546—567.
2. The structure of right alternative algebras. — Ann. Math., 1954, 59, p. 408—417.

Амицур (Amitsur S. A.)

1. A general theory of radicals, I: Radicals in complete lattices. — Amer. J. Math., 1952, 74, p. 774—786.
2. A general theory of radicals, II: Radicals in rings and bicategories. — Amer. J. Math., 1954, 76, p. 100—125.
3. Nil radicals. Historical notes and some new results. — В кн.: Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai: Rings, modules and Radicals, 1973, p. 47—66.

Андерсон, Дивинский, Сулинский (Anderson T., Divinsky N., Sulinski A.)

1. Hereditary radicals in associative and alternative rings. — Canad. J. Math., 1965, 17, p. 594—603.

Андрунакиевич В. А.

1. К определению радикала кольца. — ИАН СССР, 1952, 16, с. 217—224.
2. Кольца с условием минимальности для идеалов. — ДАН СССР, 1954, 98, № 3, с. 329—332.
3. Кольца, обладающие минимальными двусторонними идеалами. — ДАН СССР, 1955, 100, № 3, с. 405—408.
4. Кольца с аннуляторным условием. — ДАН СССР, 1956, 20, № 3, с. 547—568.
5. Антипростые и сильно идемпотентные кольца. — ИАН СССР, 1957, 21, с. 125—144.
6. Модулярные идеалы, радикалы и полупростота колец. — УМН, 1957, 12, № 3, с. 133—139.
7. К теории радикалов ассоциативных колец. — ДАН СССР, 1957, 113, № 3, с. 487—490.
8. Радикалы ассоциативных колец, I. — Матем. сб., 1958, 44, № 2, с. 179—212.
9. Радикалы ассоциативных колец, II. — Матем. сб., 1961, 55, № 3, с. 329—346.
10. Радикал и разложение кольца. — ДАН СССР, 1962, 145, № 1, с. 9—12.

Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М.

1. О существовании радикала Брауна—Маккоя в алгебрах Ли. — ДАН СССР, 1968, 179, № 3, с. 503—506.
2. Кольца без нильпотентных элементов и вполне простые идеалы. — ДАН СССР, 1968, 180, № 1, с. 9—11.
3. Прямые суммы алгебр с делением. — ДАН СССР, 1969, 189, № 5, с. 927—929.
4. О разложении элементов частично упорядоченных алгебраических систем в пересечение простых элементов. — ДАН СССР, 1971, 198, № 1, с. 13—15.
5. Кручения и цепи Куроша в алгебрах, Тр. Моск. матем. о-ва, 1973, 29, с. 19—49.

Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М., Крачилов К. К.

1. Радикальные замыкания в полных решетках. — Матем. сб., 1976, 100, № 3, с. 339—355.

Армендариз (Armendaritz E.)

1. Hereditary subradicals of the lower radical Baer. — Publ. Math. 1968, 15, p. 91—94.

Армендариз, Левит (Armendaritz E., Leawitt W.)

1. Non—hereditary radicals and semisimple classes. — Proc. Amer. Math. Soc., 1967, 18, p. 1114—1117.
2. The hereditary properties in the lower radical construction. — Canad. J. Math., 1968, 20, p. 472—476.

Артин (Artin E.)

1. Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen. — Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1927, 5, S. 251—260.

Артин, Несбит, Тролл (Artin E., Nesbitt C., Thrall R.)

1. Rings with Minimum condition. — University of Michigan, 1944.

Бабич А. М.

1. О радикале Левицкого. — ДАН СССР, 1959, 126, № 2, с. 242—244.

Бергман (Bergman G. M.)

1. A ring primitive on the right not on the left. — Proc. Amer. Math. Soc., 1964, 15, № 3, p. 473—475.

Биркгоф (Birkhoff G.)

1. Subdirect unions in universal algebra. — Bull. Amer. Math. Soc., 1944, 50, p. 764—768.

Блэр (Blair R.)

1. Ideal lattices and the structure of rings. — Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 75, p. 136—153.
2. A note on f -regularity in rings. — Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, p. 511—515.

Браун, Маккой (Brown B., McCoy N. H.)

1. Radicals and subdirect sums. — Amer. J. Math., 1947, 69, p. 46—58.
2. The radical of a ring. — Duke Math. J., 1948, 15, p. 495—499.
3. The maximal regular ideal of a ring. — Proc. Amer. Math. Soc., 1950, 1, p. 165—171.

Бэр (Baer R.)

1. Radicals ideals. — J. Math., 1943, 65, p. 537—568.

Веддербарн (Wedderburn J. M.)

1. On Hypercomplex numbers. — Proc. London Math. Soc., 1908, 6, p. 77—118.

Вейерштрасс (Weierstrass K.)

1. Zur theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grossen. — Gott. Nachr., 1884.

Герчиков А. И.

1. Кольца разложимые в прямую сумму тел. — Матем. сб., 1940, 7, с. 591—597.

Голди (Goldie A. W.)

1. Decomposition of semi-simple rings. — J. London Math. Soc., 1956, 31, p. 40—48.
2. The structure of prime rings under ascending chain condition. — Proc. London Math. Soc., 1958, 8, p. 589—608.
3. The structure of prime rings with maximum condition. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1958, 44, p. 584—586.
4. Semi-prime rings with maximum condition. — Proc. London Math. Soc. 1960, 10, p. 201—220.

Голод Е. С.

1. О нильалгебрах и финитно-аппроксимируемых p -группах, ИАН СССР, сер. матем., 1964, 28, с. 273—276.

Григор Р. С.

1. Аннуляторные кручения, I. — Матем. исследов., 1975, 10, № 1, с. 107—125.
2. Аннуляторные кручения. II. — Матем. исследов., 1975, 10, № 2, с. 89—105.

Дедекинд (Dedekind R.)

1. Zur theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grossen. — Gott. Nachr., 1885.

Джекобсон (Jacobson N.)

1. The Theory of Rings. — Amer. Math. Soc. Math. Surveys. — New York, 1943. Русский перевод: Джекобсон Н. Теория колец. — М.: ИЛ, 1947.
2. The radical and semi-simplicity for arbitrary rings. — Amer. J. Math., 1945, 67, p. 300—320.
3. Structure theory of simple rings without finiteness assumptions. — Trans. Amer. Math. Soc., 1945, 57, p. 228—245.
4. Structure of rings. — Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., 1956, 37. Русский перевод: Джекобсон Н. Строение колец, — М.: ИЛ, 1961.

Джонсон (Johnson R.)

1. Prime rings. — Duke Math. J., 1951, 18, p. 799—809.
2. Representation of prime rings. — Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 74, p. 351—357.

Дивинский (Divinsky N.)

1. Rings and radicals. — University of Toronto, 1965.

Дынкин Е. Б.

1. Структура полупростых алгебр Ли. — УМН, 1947, 2, № 4, с. 59—127.

Жевлаков К. А.

1. Разрешимость альтернативных ниль-колец, Сиб. матем. ж., 1962, 3, № 3, с. 368—377.
2. Радикальные идеалы альтернативного кольца. — Алгебра и логика, 1965, 4, № 4, с. 87—102.

3. Альтернативные артиновы кольца. — Алгебра и логика, 1966, 5, № 3, с. 11—36.
4. Разрешимость и нильпотентность йордановых колец. — Алгебра и логика, 1966, 5, № 3, с. 37—58.
5. Нижний нильрадикал альтернативных колец. — Алгебра и логика, 1967, 6, № 4, с. 11—17.
6. Нильидеалы альтернативного кольца, удовлетворяющего условию максимальной нильпотентности. — Алгебра и логика, 1967, 6, № 4, с. 18—26.
7. О радикалах Клейнфельда и Смайли в альтернативных кольцах. — Алгебра и логика, 1969, 8, № 2, с. 176—180.
8. Совпадение радикалов Клейнфельда и Смайли в альтернативных кольцах. — Алгебра и логика, 1969, 8, № 3, с. 309—319.
9. О радикалах и неймановских идеалах. — Алгебра и логика, 1969, 8, № 4, с. 425—439.
10. Квазирегулярные идеалы в конечно-порожденных альтернативных кольцах. — Алгебра и логика, 1972, 11, № 2, с. 162—173.

Капланский (Kaplansky J.)

1. Topological representation of Algebras, II. — Trans. Amer. Math. Soc., 1950, 68, p. 62—75.

Картан (Cartan E.)

1. Sur la structure des groupes de transformations finis et continues (Thèse). — Paris, 1894.
2. Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes. — Ann. Fac. Sci. Toulouse, 1898.

Кёте (Köthe G.)

1. Abstrakte Theorie nicht kommutativen Ringe mit einer Anwendung auf die Darstellungstheorie kontinuierlicher Gruppen. — Math. Ann., 1930, 103, S. 545—572.
2. Die Structure der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radical vollständig reduzibl ist. — Math. Z., 1930, 32, S. 161—186.

Киллинг (Killing W.)

1. Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen, I. — Math. Ann., 1888, 31, S. 252—290.
2. Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen, II. — Math. Ann., 1889, 33, S. 1—48.
3. Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen, III. — Math. Ann., 1889, 34, S. 57—112.
4. Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen, IV. — Math. Ann., 1890, 34, S. 161—189.

Клейнфельд (Kleinfeld E.)

1. Simple alternative rings. — Ann. Math., 1953, 58, p. 543—547.
2. Primitive alternative rings and semisimplicity. — Amer. J. Math., 1955, 77, p. 725—730.

Кремпа (Krempa J.)

1. Lower Radical Properties for Alternative Rings. — Bull. Acad. Sci. Pol., ser. sci. math., astron. et phys., 1975, 23, № 2, p. 139—142.

Круль (Krull W.)

1. Idealtheorie in Ringe ohne Endlichkeitsbedingung. — Math. Ann., 1929, 101, S. 729—744.

2. Subdirecte Summendarstellungen von Integritätsbereichen. — *Math. Z.*, 1950, 52, S. 810—826.
- Курочкин В. М.
1. Кольца с условием минимальности для присоединенных идеалов. — *ДАН СССР*, 1949, 66, № 3, с. 549—551.
- Курош А. Г.
1. Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр. — *Матем. сб.*, 1947, 20, 239—262.
 2. Радикалы колец и алгебр. — *Матем. сб.*, 1953, 33, № 1, с. 13—26.
 3. Неассоциативные свободные суммы алгебр. — *Матем. сб.*, 1955, 37, 254—264.
 4. Радикалы в теории групп. — *Сиб. матем. ж.*, 1962, 3, № 6, с. 912—931.
 5. Лекции по общей алгебре. — 2-е изд. — М.: Наука, 1973.
- Ламбек (Lambek J.)
1. On the structure of semi-prime rings and their rings of quotients. — *Canad. J. Math.*, 1961, 13, p. 392—417.
 2. Lectures on rings and modules. — Blaisdel Publ. Comp., 1966. Русский перевод: Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971.
- Леви (Levy L.)
1. Unique subdirect sums of prime rings. — *Trans. Amer. Math. Soc.* 1963, 106, p. 64—76.
- Левицкий (Levitzki J.)
1. On the radical of a general ring. — *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1943, 49, p. 462—466.
 2. Semi-nilpotent ideals. — *Duke Math. J.*, 1943, 10, p. 553—556.
 3. Prime ideals and the lower radical. — *Amer. J. Math.*, 1951, 73, p. 25—29.
- Лившиц А. Х.
1. Теоретико-категорные основы двойственности радикальности и полупростоты. — *Сиб. матем. ж.*, 1964, 5, № 2, с. 319—336.
- Маккой (McCoy N. H.)
1. Subrings of infinite direct sums. — *Duke Math. J.*, 1938, 4, p. 486—494.
 2. Subdirectly irreducible commutative rings. — *Duke Math. J.* 1945, 12, p. 381—387.
 3. Subdirect sums of rings. — *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1947, 53, p. 856—877.
 4. Prime ideals in general rings. — *Amer. J. Math.*, 1949, 71, p. 823—833.
 5. Completely prime and semi-prime ideals. — В кн.: *Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai: Rings, modules and Radicals*, 1973, p. 147—152.
- Мальцев А. И.
1. О разложении алгебры в полупрямую сумму радикала и полупростой подалгебры. — *ДАН СССР*, 1942, 36, № 2, с. 46—50.
 2. О разложимых алгебрах Ли, *ИАН СССР*, 1945, 9, с. 329—336.
 3. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.
- Марин В. Г.
1. Несократимые подпрямые произведения первичных колец, I. — *Матем. исследов.*, 1972, 7, № 3, с. 257—266.

2. Несократимые подпрямые произведения первичных колец, II. — Матем. исследов., 1972, 7, № 4, с. 165—173.
 3. О несократимых подпрямых произведениях колец Голди для делителей нуля. — Матем. исследов., 1973, 8, № 1, с. 225—228.
- Марин В. Г., Рябухин Ю. М.
1. Кольца Голди без нильпотентных элементов. — Матем. исследов., 1972, 7, № 2, с. 105—116.
- Марков В. Т.
1. Полные кольца частных несократимых подпрямых произведений. — Матем. исследов., 1974, 9, № 2, с. 237—245.
- Мишина А. П., Скорняков Л. А.
1. Абелевы группы и модули. — М.: Наука, 1969.
- Михеев И. М.
1. Теорема Веддербарна об отщеплении радикала для $(-1, 1)$ -алгебр. — Алгебра и логика, 1973, 12, № 3, с. 298—304.
- Молин Ф. Э. (Molien T.)
1. Veber Systeme höherer complexer Zahlen. — Math. Ann., 1893, 41, S. 83—156.
- Нейман (Neumann J.)
1. On regular rings. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1936, 22, p. 707—713.
- Нётер (Noether E.)
1. Hypercomplexe Grossen und Darstellungstheorie. — Math. Z., 1929, 30, S. 641—692.
- Нивечежаль, Терликовская (Niewiczzerzal D., Terlikowska B.)
1. A note on alternative semi-prime rings. — Bull. Acad. pol. Sci., ser. sci. math., astron. et phys., 1972, 20, № 4, p. 265—268.
- Никитин А. А.
1. О наднильпотентных радикалах $(-1, 1)$ -колец. — Алгебра и логика, 1973, 12, № 3, с. 305—311.
- Пирс Б. (Peirce B.)
1. Linear associative algebra. — Amer. J. Math., 1881, 4, p. 97—221.
- Пирс Ч. (Peirce C.)
1. On the relative forms of the algebras. — Amer. J. Math., 1881, 4, p. 221—225.
 2. On the algebras in which division is unambiguous. — Amer. J. Math., 1881, IV, p. 225—229.
- Перлис (Perlis S.)
1. A characterization of the radical of an algebra. — Bull. Amer. Math. Soc., 1942, 48, p. 128—132.
- Роомельди Р. Э.
1. Нильпотентность идеалов в $(-1, 1)$ -кольцах. — Алгебра и логика, 1973, 12, № 3, с. 333—347.
 2. Нижний нильрадикал $(-1, 1)$ -колец. — Алгебра и логика, 1973, 12, № 3, с. 323—332.
- Рябухин Ю. М.
1. Радикалы в категориях. — ИАН МССР, 1964, № 6, с. 58—74.
 2. О наднильпотентных и специальных радикалах. — Исслед. по алгебре и мат. анализу. — Кишинев: Штиинца, 1965, с. 65—72.

3. О нижних радикалах колец. — Матем. заметки, 1967, 2, № 3, с. 7—12.
4. Радикалы в категориях. — Матем. исследований. 1967, 2, № 3, с. 107—164.
5. Об одном классе локально нильпотентных колец. — Алгебра и логика, 1968, 7, № 5, с. 100—108.
6. К теории радикалов неассоциативных колец. — Матем. исследований., 1968, 3, № 1, с. 86—98.
7. Алгебры без нильпотентных элементов. — ДАН СССР, 1969, 187, № 1, с. 43—46.
8. Алгебры без нильпотентных элементов, I. — Алгебра и логика, 1969, 8, № 2, с. 181—214.
9. Алгебры без нильпотентных элементов, II. — Алгебра и логика, 1969, 8, № 2, с. 215—240.
10. Алгебры ассоциативные по нулю, I. — Матем. исследований., 1969, 4, № 4, с. 94—117.
11. Алгебры ассоциативные по нулю, II. — Матем. исследований., 1969, 4, № 4, с. 118—133.
12. Несравнимые нильрадикалы и неспециальные наднильпотентные радикалы. — Алгебра и логика, 1975, 14, № 1, с. 86—99.
13. О счетнопорожденных локально $\mathfrak{M}$ -алгебрах. — ИАН СССР, сер. матем., 1976, 40, № 6, 1203—1223.

Са с (Szasz F.)

1. Radicale der ringe. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1975.

Сегал (Segal J.)

1. The group algebra of locally compact group. — Trans. Amer. Math. Soc., 1947, 61, p. 59—105.

Скорняков Л. А.

1. Альтернативные тела. — Укр. матем. ж., 1950, 2, с. 70—85.
2. Правоальтернативные тела. — ИАН СССР, сер. матем., 1951, 15, № 1, с. 177—184.

Слинько А. М.

1. О радикалах йордановых алгебр. — Алгебра и логика, 1972, 11, № 2, с. 206—215.
2. О радикале Джекобсона и абсолютных делителях нуля специальных йордановых алгебр. — Алгебра и логика, 1972, 11, № 6, 716—728.

Слэйттер (Slater M.)

1. Ideals in semiprime alternative rings. — J. Algebra, 1968, 8, № 1, p. 60—76.
2. Alternative rings with DCC, I. — J. Algebra, 1969, 11, № 1, p. 102—110.
3. Alternative rings with DCC, II. — J. Algebra, 1970, 14, № 4, p. 464—484.
4. Prime alternative rings, I. — J. Algebra, 1970, 15, № 2, p. 229—243.
5. Prime alternative rings, II. — J. Algebra, 1970, 15, № 2, p. 244—251.

Снайдер (Snider R.)

1. Lattices of radicals. — Pacific J. Math., 1972, 40, p. 207—220.

Стьюарт (Stewart P.)

1. Semi-simple radicals classes. — Pacific J. Math., 1970, 32, p. 249—254.

Сулинский (Sulinski A.)

1. The Brown—McCoy radical in categories. — Fund. Math., 1966, 59, p. 23—41.

Сулинский, Андерсон, Дивинский (Sulinski A., Anderson J., Divinsky N.)

1. Lower radical properties for associative and alternative rings. — J. London Math. Soc., 1966, 41, p. 417—424.

Тьеррен (Thierrin G.)

1. Sur les ideaux completement premiers d'un anneau quelconque. — Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci., 1957, 43, p. 124—132.
2. Quelques caracterisation du radical d'un anneau. — Canad. Math. Bull., 1967, 10, p. 643—647.

Тэбырце Е. И.

1. О разложении в пересечение простых элементов в мультипликативных полурешетках. — Матем. исследов., 1972, 7, № 3, с. 176—193.

Фробениус (Frobenius G.)

1. Theorie der hypercomplexen Grossen. — Berlin: Sitzungsber-Verlag, 1903.

Харис-Чандра (Harish-Chandra)

1. On representation of Lie algebras. — Ann. Math., 1949, 50, p. 900—915.
2. Some applications of the universal enveloping algebra of a semi-simple Lie algebra. — Trans. Amer. Math. Soc., 1951, 70, p. 28—99.

Холл (Hall M.)

1. The position of the radical in an algebra. — Trans. Amer. Math. Soc., 1940, 48, p. 391—404.

Хопкинс (Hopkins C.)

1. Rings with minimal conditions for left ideals. — Ann. of Math. 1939, 40, p. 712—730.

Шестаков И. П.

1. Радикалы и нильпотентные элементы свободных альтернативных алгебр. — Алгебра и логика, 1975, 14, № 3, с. 354—365.
2. Абсолютные делители нуля и радикалы конечнопорожденных альтернативных алгебр. — Алгебра и логика, 1976, 15, № 5, с. 587—604.

Шефферс (Sheffers G.)

1. Zurückführung complexer Zahlssysteme auf typische Formen. — Math. Ann., 1891, 39, S. 293—390.

Ширшов А. И.

1. Некоторые вопросы теории колец близких к ассоциативным. — УМН, 1958, 13, № 1, с. 3—20.

Штенстром (Stenstrom B. T.)

1. Rings of Quotients. — Berlin: Springer-Verlag, 1975.

Шульгейфер Е. Г.

1. К общей теории радикалов в категориях. — Матем. сб., 1960, 51, № 3, с. 487—500.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Алгебра 29, 90, 159
 — антипростая 356, 357
 — бирегулярная 341
 — квазипростая 176
 — квазирегулярная 69, 76
 — классически полупростая 9, 283
 — — простая 9, 276
 — конечномерная в смысле Голди 318, 324, 328
 — наследственно идемпотентная 351
 — нильпотентная 30
 — первичная 38, 259
 — полупервичная 38, 259
 — примитивная 74
 — присоединенно простая 333, 334
 — простая 176
 — регулярная 306
 — с аннуляторным условием 368, 371
 — — нулевым умножением 132
 — — условием минимальности для идеалов 282, 358
 — — — главных идеалов 364, 368, 371
 — — — — модулярных идеалов 343, 345
 — — — — правых (левых) идеалов 281, 298, 341
 — — — обрыва цепей аннуляторных идеалов 272, 274
 — — — — аннуляторов идеалов 83
 — свободная ассоциативная 51
 — со слабым условием обрыва цепей аннуляторов 264, 268, 291
 — строго регулярная 316
 — частных алгебры (левая) 304, 324, 328
 — — модуля 304, 305

Алгебра $\mathcal{A}$ -полупростая (= алгебра без нильпотентных элементов) 285, 289
 — $\mathcal{A}$ -радикальная 285, 289
 — $\mathcal{A}^*$ -полупростая 355, 356
 — $\mathcal{A}^*$ -радикальная 355, 356
 — $\mathfrak{A}$ -полупростая (= полупервичная) 35, 38
 — $\mathfrak{A}$ -радикальная 35, 38
 — $\mathfrak{A}^*$ -полупростая 353, 354
 — $\mathfrak{A}^*$ -радикальная (= наследственно идемпотентная) 351, 353
 — $\mathfrak{A}^*$ -регулярная 353
 — $\mathfrak{A}^{**}$ -полупростая 356, 358
 — $\mathfrak{A}^{**}$ -радикальная (= антипростая) 353
 — $\mathfrak{Z}$ -полупростая 69, 76
 — $\mathfrak{Z}$ -радикальная (= квазирегулярная) 69, 76
 — $\mathcal{H}$ -полупростая 47, 48
 — $\mathcal{H}$ -радикальная (= нильалгебра) 47, 48
 — $\mathcal{L}$ -полупростая 46, 48
 — $\mathcal{L}$ -радикальная (= локально нильпотентная) 46, 48
 — $\mathfrak{r}$ -полупростая 91
 — $\mathfrak{r}$ -радикальная 91
 — $\sigma_{\mathcal{M}}$ -радикальная 111
 — $\mathcal{T}$ -полупростая 331
 — $\mathcal{T}$ -радикальная (=присоединенно простая) 331
 — $\mathcal{T}^*$ -полупростая 349, 350
 — $\mathcal{T}^*$ -радикальная 350
 — $\mathcal{T}^*$ -регулярная 347, 349, 350
 Аннулятор (подмножества алгебры) 259, 260
 — левый 80, 81, 259
 — правый 80, 81, 259
 Аннуляторный идеал 260, 261

Атомы в решетке $\text{Ann}(R)$ аннуляторных идеалов 261, 264, 268
 — — — кручений 179
 — — — наднильпотентных радикалов 230
 — — — специальных радикалов 235

Двойственные кручения 185, 219
 — радикалы 185, 188, 199
 Дополнительное кручение 191, 215
 Дополнительный радикал 188, 189
 Достижимость по ряду (нормальному) 159

Идеал аннуляторный 260, 261
 — вполне неприводимый 280
 — главный модулярный 335
 — квазирегулярный 76
 — минимальный 361
 — — первичный 41, 42
 — — с единицей 363
 — модулярный 332
 — — правый 77, 345
 — нильпотентный 30
 — объекта (категории) 385, 388
 — однородный 52
 — первичный 38
 — полупервичный 38, 39
 — примитивный 74, 75
 — присоединенный 332, 333
 — τ -радикальный 91
 — $\mathcal{M}$ -радикальный 110

Идеальность (нормального ряда) на предельных местах 159
 Изоморфизм (объектов категории) 380

Категория 378
 Класс 29, 90, 159
 — обобщенно специальный 164, 438, 447
 — полупростой 124, 126
 —, — в смысле Куроша 93, 98
 — радикальный 124
 —, — в смысле Куроша 93, 94
 — слабо специальный 165, 449
 — специальный 165, 449
 Коидеал объекта 390, 399

Ко- $\mathcal{M}$ -идеал объекта 408, 419
 Кручение (= идеально наследственный радикал) 123, 435
 — атомное 180, 183
 — двойственное 185, 218
 —, дополнительное к кручению 191, 215
 — модульное 134
 — наднильпотентное 169, 202, 229
 — — не специальное 251, 253
 — подыдемпотентное 202
 — специальное 166
 — слабо специальное 166

Метаидеал 147
 Мономорфизм 381
 Морфизмы (объектов категории) 378
 — нулевые 380
 $\mathcal{M}$ -идеал 126, 160

Несократимое подпрямое произведение 264
 Нормальный ряд 114
 — эпиморфизм 386

Образ морфизма 387
 — подобъекта 389
 Объект 378
 — нулевой 380
 — τ -полупростой 406
 — τ -радикальный 406

Первичная компонента 266
 Подобъект 382

Радикал (в смысле Куроша) 91, 406
 — антипростой 353
 — Брауна — Маккоя (=присоединенно простой) 331, 371
 — Бэра — Маккоя (=нижний нильрадикал) 35
 — вполне идемпотентный 356
 —, дополнительный к радикалу 185, 188
 —, — — кручению 185, 191

Радикал квазирегулярный (= радикал Джекобсона) 69, 76
— Кете (= верхний нильрадикал) 47, 48
— компрессивный (= обобщенный нильрадикал) 285, 290
— Левицкого (= локально нильпотентный) 46, 48
— наднильпотентный 169, 202
— наследственно идемпотентный 353
— наследственный 143, 159
— нильпотентный 9, 10
Решетка аннуляторных идеалов 264
— атомных кручений 183
— идеалов (объекта или алгебры) 385
— коидеалов объекта 392
— кручений 129, 445
— наднильпотентных радикалов 229
— радикалов 106, 407
— специальных радикалов 233

Свойство объектов (= класс объектов) 400
— полупростое 437
—, — в смысле Куроша 407, 408
— радикальное 437
—, — в смысле Куроша 401

Теорема об изоморфизмах в категориях 395, 397

Фактор-объект 390, 399

Цепь Куроша 113

Эпиморфизм 382

Ядро морфизма 384

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathfrak{J}$ — нижний нильрадикал

$\mathcal{L}$ — локально нильпотентный радикал

$\mathcal{K}$ — верхний нильрадикал

$\mathfrak{z}$ — квазирегулярный радикал

$\mathcal{A}$ — обобщенный нильрадикал

$\mathcal{T}$ — присоединенно простой радикал

$\mathcal{R}(\mathfrak{r})$ — класс всех $\mathfrak{r}$ -радикальных алгебр или объектов

$\mathcal{P}(\mathfrak{r})$ — класс всех $\mathfrak{r}$ -полупростых алгебр или объектов

$\pi_{\mathcal{M}}(R)$ — пересечение всех $\mathcal{M}$ -идеалов

$\Sigma_{\mathcal{M}}(R)$ — сумма всех $\mathcal{M}$ -радикальных идеалов

$$\sigma_{\mathcal{M}}(R) = \bigcup_{\alpha \geq 0} \Sigma_{\mathcal{M}}^{(\alpha)}(R)$$

$S_{\mathcal{M}}$ — верхний радикал, определенный классом $\mathcal{M}$

$I_{\mathcal{M}}$ — нижний радикал, порожденный классом $\mathcal{M}$

Simple — класс всех простых алгебр

Sim($\mathfrak{s}$) — класс всех простых $\mathfrak{s}$ -радикальных алгебр

$\mathfrak{M}_{\Pi}$ — класс всех подпрямо неразложимых алгебр с сердцевинной, принадлежащей классу Π простых алгебр

$\mathfrak{M}_{\neg\Pi}$ — класс всех подпрямо неразложимых алгебр, не принадлежащих классу $\mathfrak{M}_{\Pi}$

$\mathfrak{r}^*$ — радикал, дополнительный к радикалу $\mathfrak{r}$

$\mathfrak{r}^{\circ}$ — кручение, дополнительное к кручению $\mathfrak{r}$

$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}^{(1)} = {}^{-1}(\mathcal{M}^{-1}) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{M}^{(\alpha)} \subseteq \dots$ — цепь Куроша, соответствующая классу $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M}^{(*)} = \bigcup_{\alpha \geq 1} \mathcal{M}^{(\alpha)} = \mathcal{R}(I_{\mathcal{M}})$$

$\mathfrak{s}(A)$ — объединение всех $\mathfrak{s}$ -идеалов объекта (или алгебры) A

$(A) \mathfrak{s}$ — объединение всех $\mathfrak{s}$ -коидеалов объекта A