MONOGRAPHIES INTERNATIONALES
DE
MATHÉMATIQUES MODERNES
Sous la direction de S. Mandelbrojt

# Séries de Dirichlet

## PRINCIPES ET MÉTHODES

par S. Mandelbrojt
Professeur au Collège de France

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
1969

С. Мандельбройт

# Ряды Дирихле
## ПРИНЦИПЫ И МЕТОДЫ

Перевод с французского
О. М. Фоменко

Под редакцией
Ю. В. Линника

Издательство «Мир»
Москва 1973

УДК 517.5 + 511

Теория общих рядов Дирихле до настоящего времени не была представлена в монографической литературе на русском языке. Этот пробел восполняется книгой известного французского математика профессора С. Мандельбройта. Наряду с уже ставшими классическими результатами книга содержит также новые результаты автора и его последователей.

Книга привлечет внимание широкого круга математиков, в первую очередь специалистов по теории функций и теории чисел. Она будет полезна преподавателям, аспирантам и студентам старших курсов университетов и désинститутов.

*Редакция литературы по математическим наукам*

$М\,\frac{0223-013}{041\,(01)-73}$

## ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга выдающегося французского математика С. Мандельбройта «Ряды Дирихле. Принципы и методы» посвящена важному разделу теории функций — общим рядам Дирихле. Роль этих рядов как в теории чисел, так и в анализе хорошо известна. В более ранней монографии С. Мандельбройта «Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения», Париж, 1952 г. (русский перевод вышел в Издательстве иностранной литературы в 1955 г.) собственно рядам Дирихле отведено сравнительно мало места. Настоящая книга весьма полно и широко трактует этот сюжет.

Профессор С. Мандельбройт, сам много сделавший в данной области, сумел в книге сравнительно небольшого объема не только изложить классические результаты, но и достаточно полно описать новейшие достижения, вплоть до самых современных (в основном это результаты, полученные автором и его школой).

Многочисленные исторические и библиографические замечания собраны в конце книги и дополнены обширным списком литературы.

Важность затронутых вопросов, широта охвата материала и мастерство изложения, а также отсутствие обобщающих работ на эту тему на русском языке делают перевод книги С. Мандельбройта весьма актуальным.

*Ю. В. Линник*

# ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

В предисловии к французскому изданию я уже попытался обрисовать те идеи, которые играют определяющую роль на протяжении всей этой книги. Поэтому здесь я не буду останавливаться на собственно математической стороне работы.

Значительное число советских математиков успешно работает как в области теории рядов Дирихле, этой важной ветви анализа, так и в области приложения рядов Дирихле к теории чисел. Их работы часто имеют фундаментальное значение—разве не достаточно указать на труды Ю. В. Линника, в которых аналитические и арифметические аспекты так гармонично связаны? Поэтому я буду счастлив увидеть мою книгу переведенной на русский язык.

Мне было приятно узнать, что именно издательство «Мир», столько сделавшее для ознакомления советских математиков с работами математиков других стран, взяло на себя эту инициативу.

Я благодарю О. М. Фоменко, который выполнил этот перевод.

Март 1972

*С. Мандельбройт*
Профессор Коллеж де Франс

# ПРЕДИСЛОВИЕ

В намерение автора не входило писать трактат по рядам Дирихле. Эта часть гармонического анализа столь обширна, столь богата публикациями и фактами, что, как нам кажется, бессмысленно пытаться целиком охватить всю эту теорию, однако можно довольно полно осветить некоторые ее разделы.

Мы решили не излагать ни очень важных результатов Д. Пойа, открывшего связь между принадлежащим ему понятием максимальной плотности и аналитическим продолжением ряда, ни результатов исследований, которыми мы обязаны А. Островскому и В. Бернштейну, — в превосходной книге последнего, опубликованной более тридцати лет тому назад в коллекции Бореля, эти исследования изложены с образцовой ясностью. Однако отдельные факты, доказанные этими авторами, нашли здесь свое место среди результатов, с которыми они либо связаны формулировками, либо используются для их доказательства.

Отбор материала довольно субъективен — мы излагаем, как и указано в названии книги, принципы и методы, которые берут начало в наших собственных исследованиях и которые приводят к определенной совокупности результатов, составляющей вместе с результатами других авторов нечто единое целое.

Некоторые из глав не зависят от остальных частей книги. Такова, например, глава IV, которая, хотя и касается лишь рядов Тейлора, носит общий характер и, как мы полагаем, важна для дальнейшего.

Глава I элементарна — она содержит только классические результаты, необходимые для развиваемой впоследствии техники.

В первых девяти главах книги мы не делаем никаких библиографических ссылок; им специально посвящена глава X, представляющая собой очерк, в котором излагается история доказываемых в предыдущих главах результатов. Поясним, что цифра в квадратных скобках означает соответствующую публикацию (см. библиографию в конце книги).

Некоторые утверждения (например, часть предложений главы V, посвященной теоремам о композиции особенностей) воспроизводят в улучшенной форме результаты, которые были изложены в нашей монографии, изданной в серии „Rice Institute Pamphlet" и ставшей библиографической редкостью.

Что касается принципов, играющих важную роль на протяжении почти всех других глав, то среди них надо отметить прежде всего так называемый принцип арифметической изолированности показателей, суть которого состоит в том, что показатели с дробными частями, принадлежащими окрестностям дробных частей «полезных» показателей (размер этих окрестностей определяется рассматриваемой задачей), доставляют автономные характеристики, на которые не влияют другие показатели; эти показатели, изолированные (посредством своих дробных частей) от других показателей, в значительной степени определяют поведение аналитического продолжения ряда.

Следующий принцип — он уже использовался нами в других областях анализа — связан с неравенствами для модулей коэффициентов «примыкающих» рядов. В эти неравенства входит при заданных показателях максимум модуля функции в некоторой определенной части плоскости, вид и размер которой зависят от арифметических свойств показателей и от их роста.

Апрель 1969 г. *С. Мандельбройт*

## Глава I

# Последовательности показателей и ассоциированные последовательности. Элементарные теоремы о коэффициентах и сходимости

### I. 1. Возрастающие последовательности положительных чисел

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(n \geqslant 1)$ — строго возрастающая последовательность положительных чисел $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, стремящихся к бесконечности. Величина

$$D^{\bullet} = \overline{\lim} \frac{n}{\lambda_n}$$

называется *верхней плотностью последовательности* $\Lambda$ [1]), а величина

$$h = \underline{\lim} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)$$

— *шагом* последовательности $\Lambda$.

Если $h > 0$, то $D^{\bullet} h \leqslant 1$; действительно, любому $\varepsilon$, удовлетворяющему условию $0 < \varepsilon < h$, соответствует такое $n_\varepsilon$, что при $n > n_\varepsilon$ имеет место неравенство $\lambda_n - \lambda_{n_\varepsilon} > (n - n_\varepsilon - 1)(h - \varepsilon)$, откуда

$$D^{\bullet} \leqslant (h - \varepsilon)^{-1}.$$

Обозначим через $N(x)$ число тех $\lambda_n$, которые меньше, чем $x$ $(x > 0)$, и положим $D(x) = N(x)/x$. Функция $D(x)$ называется *функцией плотности последовательности* $\Lambda$. Имеем

$$D^{\bullet} = \overline{\lim} D(x).$$

Функция

$$\overline{D}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x D(y)\, dy \qquad (x > 0)$$

называется *усредненной функцией плотности последовательности* $\Lambda$, а величина

$$\overline{D}^{\bullet} = \overline{\lim}\, \overline{D}(x)$$

— *верхней усредненной плотностью последовательности* $\Lambda$.

---

[1]) Если не предполагается противное, то первый индекс последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$ всегда равен 1 и не равен 0; если индекс (или переменная) в $\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$, $\lim$ стремится к $+\infty$, то это явно не указывается. Например, $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, p_n$ обозначается через $\overline{\lim}\, p_n$.

Легко видеть, что $\bar{D}^{\bullet} \leqslant D^{\bullet}$. Можно построить такую последовательность, для которой $\bar{D}^{\bullet} < D^{\bullet}$. Вот пример последовательности, у которой $D^{\bullet} = 1$, $\bar{D}^{\bullet} = e^{-1}$. Пусть $\{\nu_n\}$ — возрастающая последовательность целых положительных чисел, и пусть $\lambda_n = \nu_k + (n - \nu_{k-1})/(\nu_k - \nu_{k-1})$ при $\nu_{k-1} < n \leqslant \nu_k$ $(k \geqslant 1,\ \nu_0 = 0)$. Легко видеть, что $D(x) < 1$ $(x > 0)$, и так как $\lambda_{\nu_k} = \nu_k + 1$, то

$$D^{\bullet} \geqslant \lim \frac{\nu_k}{\nu_k + 1} = 1;$$

следовательно, $D^{\bullet} = 1$. Кроме того, при $\nu_p \leqslant x < \nu_{p+1}$ $(p \geqslant 1)$ $\left(\text{поскольку } \lambda_{\nu_{p+1}} = \nu_{p+1} + (\nu_{p+1} - \nu_p)^{-1}\right)$ имеем

$$D(x) \leqslant \frac{\nu_p}{x},$$

$$xD(x) = \sum_{k \leqslant p-1} \int_{\nu_k}^{\nu_{k+1}} D(y)\,dy + \int_{\nu_p}^{x} D(y)\,dy.$$

Из этих соотношений при $\nu_p \leqslant x < \nu_{p+1}$ и из неравенства $D(x) < 1$ $(x > 0)$ следует, что

$$\bar{D}(x) \leqslant \frac{1}{\nu_p}\left[\nu_1 + \sum_{k \leqslant p-1} \nu_k \ln(\nu_{k+1}/\nu_k)\right] + \frac{\nu_p}{x} \ln(x/\nu_p).$$

А поскольку $\ln x/x \leqslant 1/e$ при $x > 0$, то

$$\bar{D}(x) \leqslant \frac{1}{\nu_p}\left[\nu_1 + \sum_{k \leqslant p-1} \nu_k \ln(\nu_{k+1}/\nu_k)\right] + \frac{1}{e}.$$

Если выбрать, например, $\nu_n = E[\exp(\exp n)]$ [1]), то при $\nu_p \leqslant x < \nu_{p+1}$ будем иметь

$$\bar{D}(x) \leqslant \frac{\nu_{p-1}(\ln \nu_p - \ln \nu_1)}{\nu_p} + \frac{\nu_1}{\nu_p} + \frac{1}{e};$$

следовательно,

$$\overline{\lim}\, \bar{D}(x) = \bar{D}^{\bullet} = e^{-1} < 1 = D^{\bullet}.$$

Заметим, что всегда $D^{\bullet} \leqslant e\bar{D}$ (это замечание принадлежит Дени и Дворецкому). В самом деле, так как $D(x) \geqslant n/x$ при $x > \lambda_n$, то

$$\bar{D}(x) \geqslant \frac{1}{x}\left[\int_0^{\lambda_n} D(y)\,dy + n \ln(x/\lambda_n)\right],$$

---

[1]) $Ea$ означает целую часть $a$.

и, выбирая $x=e\lambda_n$, получаем

$$\bar{D}(e\lambda_n)\geqslant\bar{D}(\lambda_n)/e+n/(e\lambda_n)\geqslant n/(e\lambda_n),$$

откуда

$$\bar{D}^{\bullet}=\overline{\lim}\,\bar{D}(x)\geqslant\overline{\lim}\,\bar{D}(e\lambda_n)\geqslant\overline{\lim}\,n/(e\lambda_n)=D^{\bullet}/e.$$

Рассмотренный выше пример показывает, что постоянная $e$ не может быть заменена меньшей величиной.

Кроме того, легко видеть, что величины $D^{\bullet}$ и $\bar{D}^{\bullet}$ одновременно равны нулю, конечны или бесконечны.

Если $D^{\bullet}<\infty$, то произведения

$$P_n=\prod_{m\neq n}|\lambda_n^2-\lambda_m^2|/\lambda_m^2\quad(n\geqslant 1)$$

сходятся; $P_n>0$. Сходимость сразу вытекает из неравенства $\lambda_n>kn$; здесь $k>0$. Последовательность $\{\Lambda_n\}$, где $\Lambda_n=P_n^{-1}$, назовем *последовательностью, ассоциированной с* $\Lambda$.

**Т. I. 1.1.** *Существует функция $A(a)$, определенная, конечная и положительная при $a>1$, такая, что если $h>0$, то*

$$\overline{\lim}\,\Lambda_n/\lambda_n\leqslant A(a)D^{\bullet}-2a\ln(hD^{\bullet})D^{\bullet}=L(a;\,h,\,D^{\bullet}).$$

*При $D^{\bullet}=0$ выражение $L(a;\,h,\,D^{\bullet})$ считается равным нулю.*

В качестве $A(a)$ можно взять следующую функцию:

$$A(a)=a\{4+a+\ln[(a^2-1)/a^3]+\ln[(a+1)/(a-1)]/a\}.$$

Полагая, например, $a=3/2$, имеем: $2a=3$ и $A(a)<8{,}5$. Следовательно,

$$\overline{\lim}\,\Lambda_n/\lambda_n\leqslant[8{,}5-3\ln(hD^{\bullet})]D^{\bullet}.$$

Пусть $m$ — целое положительное число и $p$ фиксировано; тогда положим $\mu_n=\lambda_{p+n}$ $(n\geqslant 1)$ и

$$\rho=\rho_{m,\,p}=\min_{0\leqslant n\leqslant N}(\mu_{n+1}-\mu_n)\quad(\mu_0=0),$$

где $N=N_p(a\mu_m)$ с фиксированным $a>1$, $N_p(x)$ — число тех $\mu_n$, которые меньше, чем $x$. Иначе говоря, $N_p(x)=N(x)-p$, если $x>\lambda_{p+1}$, и $N_p(x)=0$, если $x\leqslant\lambda_{p+1}$.

Обозначим через $\{M_n\}$ последовательность, ассоциированную с последовательностью $\{\mu_p\}$, и пусть

$$Q_m=A_mB_m,$$

где (полагая для простоты $\mu_m = \mu$)

$$A_m = \prod_{\substack{q \leqslant N \\ q \neq m}} \left|1 - \frac{\mu^2}{\mu_q^2}\right|, \quad B_m = \prod_{q > N+1} \left|1 - \frac{\mu^2}{\mu_q^2}\right|.$$

Но

$$\ln A_m = \sum_{\substack{q \leqslant N \\ q \neq m}} \ln \left|1 - \frac{\mu^2}{|\mu + (\mu_q - \mu)|^2}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k \leqslant m-1} \ln\left[\left(\frac{\mu}{\mu - k\rho}\right)^2 - 1\right] + \sum_{k \leqslant N-m} \ln\left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + k\rho}\right)^2\right].$$

Поскольку функция $1 - [\mu/(\mu + x\rho)]^2$ при $x > -\mu/\rho$ возрастает, имеем (с учетом неравенства $-\mu/\rho < 1 - m$)

$$\ln A_m \geqslant \int_{1-m}^{0} \ln[(\mu/(\mu + \rho x))^2 - 1]\, dx + \int_{0}^{N-m} \ln[1 - (\mu/(\mu + \rho x))^2]\, dx =$$

$$= \int_{1-m}^{N-m} \ln[\rho |x| (2\mu + \rho x)/(\mu + \rho x)^2]\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \rho^{-1} \int_{\rho(1-m)}^{\rho(N-m)} \ln[\, |t| / (\mu + t)]\, dt \geqslant$$

$$\geqslant (N-1)[\ln \rho - \ln(\mu + (N-m)\rho)] + \rho^{-1} \int_{\rho(1-m)}^{\rho(N-m)} \ln(|t|/\mu)\, dt.$$

Так как $N\rho = N_m(a\mu)\rho \leqslant a\mu$, то вместо $|t| \leqslant \rho N$ имеем $|t| \leqslant a\mu$. Кроме того,

$$\ln\left[1 - \frac{(N-m)\rho}{\mu}\right] \leqslant \frac{(N-m)\rho}{\mu},$$

что позволяет (с учетом неравенства $N\rho \leqslant a\mu$) написать

$$\ln A_m \geqslant 2\rho^{-1} \int_0^{\rho N} \ln(t/a\mu)\, dt + (N-1)\ln a - N(N-m)\rho\mu^{-1} \geqslant$$

$$\geqslant 2a\mu\rho^{-1} \int_0^{\rho\mathscr{D}(a\mu)} \ln \tau\, d\tau + (N-1)\ln a - a(N-m) =$$

$$= [2\ln\{\rho\mathscr{D}(a\mu)\} - (2 + a - \ln a)]N + ma - \ln a;$$

здесь $\mathscr{D}(x)$ означает функцию плотности последовательности $\{\mu_n\}$.

С другой стороны, интегрируя по частям, имеем

$$\ln B_m \geqslant \int\limits_{a\mu}^{\infty} \ln(1-\mu^2/x^2)\, dN_m(x) =$$

$$= -\ln(1-a^{-2})\, N_m(a\mu) - 2\mu^2 \int\limits_{a\mu}^{\infty} \frac{\mathscr{D}(x)}{x^2-\mu^2}\, dx,$$

так как $N_m(x) = O(x)$ $(x \to \infty)$ в силу того, что $D^{\bullet} < \infty$ (последовательности $\{\mu_n\}$ и $\Lambda$ имеют, очевидно, одну и ту же верхнюю плотность $D^{\bullet}$), и

$$\lim \ln(1-\mu^2/x^2)\, N_m(x) = 0.$$

Следовательно,

$$\ln B_m \geqslant -\ln(1-a^{-2})\, N - 2\mu^2 \mathscr{D}^{\bullet}(a\mu) \int\limits_{a\mu}^{\infty} \frac{dx}{x^2-\mu^2} =$$

$$= -\ln(1-a^{-2})\, N + \mu \mathscr{D}^{\bullet}(a\mu) \ln[(a-1)/(a+1)],$$

где

$$\mathscr{D}^{\bullet}(x) = \sup_{y \geqslant x} \mathscr{D}(y).$$

Это дает

$$\ln Q_m \geqslant [2\ln(\rho \mathscr{D}(a\mu)) - (2+a-\ln a)]\, N -$$

$$- \ln(1-a^{-2})\, N + \mu \mathscr{D}^{\bullet}(a\mu) \ln[(a-1)/(a+1)].$$

Следующие соотношения очевидны:

$$\lim_{n\to\infty} \ln(\Lambda_{n+p}/M_n)/\mu_n = 0; \quad \lim_{p\to\infty} \rho_{m,\,p} = h;$$

$$\lim \mathscr{D}^{\bullet}(x) = D^{\bullet};$$

и если $D^{\bullet} > 0$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ и достаточно большого $n$ имеем $n/\mu_n \leqslant (1+\varepsilon) D^{\bullet}$; следовательно, $\rho n/\mu_n (1+\varepsilon) e \leqslant \leqslant \rho D^{\bullet} e^{-1} \leqslant e^{-1}$. Ввиду того что $x \ln x$ убывает в $]0, e^{-1}]$, справедливо неравенство

$$[\rho n/\mu_n (1+\varepsilon) e] \ln[\rho n/\mu_n (1+\varepsilon) e] \geqslant [hD^{\bullet}/e] \ln(hD^{\bullet}/e]\,[1]).$$

Достаточно теперь устремить $p$ к бесконечности, чтобы увидеть, что, каково бы ни было $\delta > 0$, имеет место неравенство

$$\overline{\lim}\, \Lambda_n/\lambda_n \leqslant L(a;\ h,\ D^{\bullet}) + \delta.$$

Теорема I.1.1 доказана. Случай $D^{\bullet} = 0$ легче закончить, если начать с неравенства для $\ln Q_m$. Следующее предложение, доставляющее другое свойство последовательности с конечной верхней плотностью, используется нами в дальнейшем.

---

[1]) Напомним, что $hD^{\bullet} \leqslant 1$.

I.1.2. *Если* $D^{\bullet} < \infty$, *то произведение*

$$\Lambda_0(r) = \prod \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_n^2}\right) \quad (r > 0)$$

*равномерно сходится на каждом компакте полупрямой* $[0, \infty[$ *и*

$$\overline{\lim} \frac{\ln \Lambda_0(r)}{r} \leqslant \pi \overline{D}^{\bullet}.$$

Равномерная сходимость произведения вытекает из неравенства $\lambda_n > kn$, где постоянная $k > 0$.

При $r > 0$ имеем

$$\ln \Lambda_0(r) = \sum \ln \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_n^2}\right) = \int_0^\infty \ln \left(1 + \frac{r^2}{x^2}\right) dN(x),$$

и интегрирование по частям дает

$$\ln \Lambda_0(r) = 2r^2 \int_0^\infty \frac{D(x)\, dx}{x^2 + r^2};$$

члены, не находящиеся при интегрировании по частям под знаком интеграла, обращаются в нуль, ибо, с одной стороны, $N(0) = 0$, а, с другой стороны, $\lim N(x) \ln(1 + r^2/x^2) = 0$, так как $D^{\bullet} < \infty$.

Интегрируя по частям второй раз, получаем

$$\ln \Lambda_0(r) = -2r^2 \int_0^\infty x \overline{D}(x)\, d\left(\frac{1}{x^2 + r^2}\right).$$

Это дает при $x > 0$:

$$\ln \Lambda_0(r)/r = -2r \int_0^x y \overline{D}(y)\, d\left(\frac{1}{y^2 + r^2}\right) - 2r \int_x^\infty y \overline{D}(y)\, d\left(\frac{1}{y^2 + r^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \max_{0 \leqslant y \leqslant x} \overline{D}(y) \frac{x^3}{r(x^2 + r^2)} + \pi \sup_{y \geqslant x} \overline{D}(y),$$

и, так как $\overline{\lim\limits_{y \geqslant t}}\, \overline{D}(y) = \overline{D}^{\bullet}$, требуемое неравенство доказано.

## I.2. Общие свойства сходимости

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — строго возрастающая последовательность положительных чисел, стремящихся к бесконечности, и пусть $A = \{a_n\}$ — последовательность комплексных чисел.

Ряд

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s}, \tag{I.1}$$

где $s=\sigma+it$ ($\sigma$ и $t$ — вещественные числа), называется *рядом Дирихле*. При заданных последовательностях $\Lambda$ и $A=\{a_n\}$ ряд (I. 1) будет обозначаться символом $(A, \Lambda)$.

Если в ряде Тейлора (с $a_0=0$)

$$\sum a_n z^n \tag{I. 2}$$

положить $z=e^{-s}$, то он превращается в ряд Дирихле

$$\sum a_n e^{-ns}, \tag{I. 3}$$

который будет называться *рядом Тейлора-Д*. Здесь $\lambda_n=n$ ($n\geqslant 1$).

Другим примером ряда Дирихле является ряд

$$\sum \frac{1}{n^s}=\sum e^{-(\ln n)\,s}, \tag{I. 4}$$

определяющий функцию Римана $\zeta(s)$ — функцию, играющую столь важную роль в теории распределения простых чисел [1]).

Напомним, что ряд Тейлора имеет некоторый радиус сходимости $R$, который может равняться нулю, бесконечности или конечному положительному числу. В первом случае ряд сходится лишь в точке $z=0$; если $0<R<\infty$, то ряд сходится при $|z|<R$ и расходится при $|z|>R$. Круг $|z|<R$ является кругом сходимости ряда, а окружность $|z|=R$ — окружностью сходимости.

Во всех случаях справедлива формула

$$R^{-1}=\overline{\lim}\,|a_n|^{1/n}.$$

Кроме того, известно, что ряд Тейлора равномерно сходится на каждом компакте круга сходимости; его сходимость в этом круге является абсолютной.

Поскольку преобразование $z=e^{-s}$ задается формулами $\sigma=-\ln|z|$, $t=-\arg z$, ясно, что если $z$ изменяется на кривой $L$, расположенной внутри круга $|z|<a$, то переменная $s$ изменяется на кривой $L'=-\ln L$, расположенной в полуплоскости $\sigma>-\ln a$. (Сопоставим точке $z_0\in L$ точку $s_0=\sigma_0+it_0$, $0\leqslant t_0<2\pi$; если условиться, что $s$ непрерывно изменяется, когда $z$ непрерывно изменяется на кривой $L$, то кривая $L'$ будет вполне определена.)

Следовательно, ряд (I. 3) абсолютно сходится при

$$\sigma>\overline{\lim}\,\frac{\ln|a_n|}{n}=\sigma_c \tag{I. 5}$$

(если $\sigma_c<\infty$) и расходится при $\sigma<\sigma_c$ (если $-\infty<\sigma_c$). Кроме того, этот ряд равномерно сходится на любом компакте полу-

[1]) См., например, Ингам А. Е., Распределение простых чисел, ОНТИ, М. — Л., 1936. — *Прим. перев.*

плоскости (I. 5). Ряд (I. 3) не сходится ни в одной точке, если $\sigma_c = \infty$.

Сказанное только что о рядах (I.3) нельзя автоматически перенести на любой ряд Дирихле путем простой замены $n$ на $\lambda_n$. С точки зрения сходимости существенное отличие состоит в несовпадении различных полуплоскостей сходимости.

Начнем со следующей теоремы:

**Т. I. 2.1.** *Если ряд* $\sum a_n e^{-\lambda_n s_0}$ $(s_0 = \sigma_0 + it_0)$ *сходится, то ряд* $(A, \Lambda)$ *равномерно сходится на замкнутой угловой области, определяемой неравенством*

$$|\arg(s - s_0)| \leqslant \gamma < \frac{\pi}{2}.$$

Пусть $s = s_0 + s'$, $s' = \sigma' + it'$, $\sigma' > 0$, $|\arg s'| < \gamma$. Положим

$$\sum_{n \leqslant m} a_n e^{-\lambda_n s_0} = A_m(s_0) = A_m,$$

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s_0} = S = \lim A_m.$$

Имеем

$$\sigma' > 0, \quad |t'|/\sigma' \leqslant \operatorname{tg}\gamma = M < \infty.$$

Кроме того, если $s = s_0 + s'$ и $q > p \geqslant 2$, то

$$\sum_{p \leqslant n \leqslant q} a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{p \leqslant n \leqslant q} a_n e^{-\lambda_n s_0} e^{-\lambda_n s'} = \sum_{p \leqslant n \leqslant q} (A_n - A_{n-1}) e^{-\lambda_n s'} =$$

$$= \sum_{p \leqslant n \leqslant q} [(A_n - S) - (A_{n-1} - S)] e^{-\lambda_n s'} =$$

$$= \sum_{p \leqslant n \leqslant q-1} (A_n - S)\left(e^{-\lambda_n s'} - e^{-\lambda_{n+1} s'}\right) +$$

$$+ (A_q - S) e^{-\lambda_q s'} - (A_{p-1} - S) e^{-\lambda_p s'}.$$

При заданном $\varepsilon > 0$ выберем $p$ так, чтобы $|A_n - S| < \varepsilon$, если $n \geqslant p - 1$; тогда

$$\sum_{p \leqslant n \leqslant q} a_n e^{-\lambda_n s} \leqslant \sum_{p \leqslant n \leqslant q-1} |A_n - S| \left| e^{-\lambda_n s'} - e^{-\lambda_{n+1} s'} \right| +$$

$$+ |A_q - S| e^{-\lambda_q \sigma'} + |A_{p-1} - S| e^{-\lambda_p \sigma'} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{p \leqslant n \leqslant q-1} \left| e^{-\lambda_n s'} - e^{-\lambda_{n+1} s'} \right| + 2\varepsilon. \qquad (I.6)$$

Но

$$\left| e^{-\lambda_n s'} - e^{-\lambda_{n+1} s'} \right| = |s'| \left| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-us'}\, du \right| \leqslant |s'| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-u\sigma'}\, du =$$

$$= \frac{|s'|}{\sigma'} \left(e^{-\lambda_n \sigma'} - e^{-\lambda_{n+1} \sigma'}\right) \leqslant (M + 1)\left(e^{-\lambda_n \sigma'} - e^{-\lambda_{n+1} \sigma'}\right),$$

и из (I. 6) следует, что

$$\left|\sum_{p\leqslant n\leqslant q} a_n e^{-\lambda_n s}\right| \leqslant 2\varepsilon + \varepsilon(M+1)\sum_{p\leqslant n\leqslant q-1}\left(e^{-\lambda_n\sigma'} - e^{-\lambda_{n+1}\sigma'}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon(3+M),$$

ч. т. д.

Непосредственным следствием этой теоремы является

**Т. I. 2.2.** *Если ряд* $\sum a_n e^{-\lambda_n s_0}$ $(s_0 = \sigma_0 + it_0)$ *сходится, то ряд* $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ *сходится в любой точке* $s = \sigma + it$ *с* $\sigma > \sigma_0$ *и равномерно сходится на любом компакте полуплоскости* $\sigma > \sigma_0$.

Заменим ряд $(A, \Lambda)$ на

$$\sum |a_n| e^{-\lambda_n s}; \qquad (I.7)$$

тогда теорема I. 2.2 позволяет утверждать, что

**Т. I. 2.3.** *Если ряд* $(A, \Lambda)$ *абсолютно сходится в точке* $s = s_0 = \sigma_0 + it_0$, *то он абсолютно сходится в любой точке* $s = \sigma + it$, $\sigma > \sigma_0$.

Следовательно, имеет место

**Т. I. 2.4.** *Если* $(A, \Lambda)$ *сходится в некоторой точке плоскости, то могут иметь место два случая:* 1) $(A, \Lambda)$ *сходится при всех значениях* $s$; 2) *существует число* $\sigma_c$ $(-\infty < \sigma_c < \infty)$, *такое, что* $(A, \Lambda)$ *сходится при всех* $s$ *с* $\sigma > \sigma_c$ *и не сходится ни при одном значении* $s$ *с* $\sigma < \sigma_c$.

*Если* $(A, \Lambda)$ *абсолютно сходится в некоторой точке плоскости, то могут иметь место два случая:* 1) $(A, \Lambda)$ *абсолютно сходится во всей плоскости;* 2) *существует число* $\sigma_a$ $(-\infty < \sigma_a < \infty)$, *такое, что ряд* $(A, \Lambda)$ *абсолютно сходится при* $\sigma > \sigma_a$ *и не является абсолютно сходящимся ни в одной точке полуплоскости* $\sigma < \sigma_a$.

Если ряд $(A, \Lambda)$ не сходится ни в одной точке, то положим $\sigma_c = \infty$.

Если ряд $(A, \Lambda)$ не является абсолютно сходящимся ни в одной точке, то положим $\sigma_a = \infty$.

Если ряд $(A, \Lambda)$ сходится в любой точке, то положим $\sigma_c = -\infty$, и если он абсолютно сходится в любой точке, то положим $\sigma_a = -\infty$.

Числа $\sigma_c$ и $\sigma_a$ называются соответственно *абсциссой сходимости* и *абсциссой абсолютной сходимости ряда* $(A, \Lambda)$, а прямые $\sigma = \sigma_c$ и $\sigma = \sigma_a$ называются соответственно *осью сходимости* и *осью абсолютной сходимости ряда* $(A, \Lambda)$. Очевидно, что $\sigma_a \geqslant \sigma_c$. Для ряда Тейлора-Д $(\lambda_n = n)$ справедливо равенство $\sigma_a = \sigma_c$, однако в общем случае оно неверно. Известно, например, что ряд

$$\sum (-1)^n n^{-s} = \sum (-1)^n e^{-(\ln n)s}$$

сходится при $\sigma > 0$ и расходится при $\sigma < 0$. Напротив, ряд $\sum n^{-s}$ сходится при $\sigma > 1$ и расходится при $\sigma \leqslant 1$. Для ряда $\sum (-1)^n n^{-s}$ имеем $\sigma_c = 0$, $\sigma_a = 1$.

Впрочем, ряд Дирихле может сходиться во всей плоскости, но не сходиться абсолютно ни в одной точке. Вот простой пример.

Пусть $a_n = (-1)^n n^{-1}$, $\lambda_n = (\ln\ln n)^{1/2}$ ($n \geqslant 3$). При $k > 0$ имеют место следующие соотношения:

$$\lim a_n e^{\lambda_n k} = 0,$$
$$| a_n | e^{\lambda_n k} < | a_{n-1} | e^{\lambda_{n-1} k} \quad (n > n_k).$$

Первое соотношение очевидно; второе можно записать в виде

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) > k\left[(\ln\ln n)^{1/2} - (\ln\ln(n-1))^{1/2}\right] \quad (n > n_k)$$

(это неравенство вытекает из соотношений $\ln((n-1)/n) \sim -n^{-1}$ и

$$(\ln\ln n)^{1/2} - (\ln\ln(n-1))^{1/2} \sim \left(2n\ln n(\ln\ln n)^{1/2}\right)^{-1}).$$

Следовательно, ряд $\sum a_n e^{-\lambda_n k}$ сходится при любом $k$. Тем самым доказано, что $\sigma_c = -\infty$.

Напротив, ряд $\sum n^{-1} e^{-(\ln\ln n)^{1/2} k}$, как легко видеть, расходится при любом $k$; следовательно, $\sigma_a = \infty$. Заметим, что в обоих наших примерах

$$(\lambda_n = \ln n, \ \lambda_n = (\ln\ln n)^{1/2})$$

имеем $D^* = \infty$. Однако справедливо следующее элементарное предложение:

**Т. I. 2.5.** *Если* $D^* < \infty$, *то*

$$\sigma_a = \sigma_c = \overline{\lim} \frac{\ln | a_n |}{\lambda_n}.$$

Пусть $n/\lambda_n \leqslant L^{-1} < \infty$ ($n \geqslant 1$), и допустим сначала, что $\overline{\lim}(\ln| a_n |/\lambda_n) = a < \infty$. Если $b > a$, то при $n > n_b$ имеем $| a_n | \leqslant e^{\lambda_n b}$ и при $\sigma > b$

$$| a_n | e^{-\lambda_n \sigma} \leqslant e^{\lambda_n (b-\sigma)} < e^{L(b-\sigma)n}.$$

Следовательно, при $\sigma > a$ справедливо неравенство $\sum | a_n | e^{-\lambda_n \sigma} < \infty$. С другой стороны, если $-\infty < a \leqslant \infty$ и если $-\infty < \sigma < b < a$, то для бесконечного множества чисел $n$ имеем $| a_n | > e^{\lambda_n b}$ и $| a_n | e^{-\lambda_n \sigma} \geqslant e^{\lambda_n (b-\sigma)} > 1$ ($n > 1$); значит, ряд $(A, \Lambda)$ при $\sigma < a$ расходится. Предложение доказано.

В только что доказанном предложении условие $D^* < \infty$ можно заменить более слабым условием $\lim \ln n/\lambda_n = 0$. Мы не будем доказывать здесь этот факт (принадлежащий Валирону).

Однако мы докажем следующую теорему:

**Т. I. 2.6.** *Для любого ряда Дирихле*

$$\sigma_a - \sigma_c \leqslant \overline{\lim}\, \frac{\ln n}{\lambda_n}.$$

Обозначим значение правой части неравенства через $b$. Мы должны доказать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum | a_n | e^{-\lambda_n (\sigma_c + b + \varepsilon)} < \infty. \tag{I.8}$$

Из сходимости ряда $(A, \Lambda)$ в точке $s = \sigma_c + \varepsilon/2$ следует, что

$$\sum | a_n | e^{-\lambda_n (\sigma_c + \varepsilon/2)} < A < \infty$$

и

$$| a_n | e^{-\lambda_n (\sigma_c + b + \varepsilon)} < A e^{-\lambda_n (b + \varepsilon/2)}.$$

Но при $n > n_\varepsilon$ имеем $\ln n/\lambda_n \leqslant b + \varepsilon/4$, откуда следует, что общий член ряда (I. 8) при $n > n_\varepsilon$ не превосходит $An^{-(b+\varepsilon/2)(b+\varepsilon/4)}$, и теорема, таким образом, доказана.

Вот, наконец, теорема, доставляющая абсциссы сходимости и абсолютной сходимости в случае произвольной последовательности $\Lambda$:

**Т. I. 2.7.** *Положим*

$$a = \overline{\lim} \left( \ln \Big| \sum_{m \leqslant n} a_m \Big| / \lambda_n \right).$$

*Если $a < \infty$, то ряд $(A, \Lambda)$ сходится при $\sigma > \max(0, a)$, а если $a > 0$, то $\sigma_c = a$. Положим*

$$b = \overline{\lim} \left( \ln \sum_{m \leqslant n} | a_m | \right) / \lambda_n.$$

*Если $b < \infty$, то ряд $(A, \Lambda)$ абсолютно сходится при $\sigma > \max(0, b)$, а если $b > 0$, то $\sigma_a = b$.*

Вторая часть теоремы, касающаяся абсолютной сходимости, немедленно следует из первой, если заменить $a_n$ на $| a_n |$ в ряде $(A, \Lambda)$.

Положим $A_n = \sum\limits_{m \leqslant n} a_m$. Если $\varepsilon > 0$, то при $n > n_\varepsilon$

$$\ln | A_n | / \lambda_n < a + \varepsilon/2,$$

если $a > -\infty$, и $\ln | A_n | / \lambda_n < \varepsilon/2$, если $a = -\infty$. Следовательно,

$$| A_n | < e^{\lambda_n (a + \varepsilon/2)} \text{ (если } a > -\infty) \text{ и } | A_n | < e^{\lambda_n \varepsilon/2} \text{ (если } a = -\infty). \tag{I.9}$$

Положим $a' = \max(0, a)$. Тогда при $q > p \geqslant 2$

$$\sum_{p \leqslant n \leqslant q} a_n e^{-\lambda_n (a'+\varepsilon)} = \sum_{p \leqslant n \leqslant q} (A_n - A_{n-1}) e^{-\lambda_n (a'+\varepsilon)} =$$

$$= \sum_{p \leqslant n \leqslant q-1} A_n \left(e^{-\lambda_n (a'+\varepsilon)} - e^{-\lambda_{n+1} (a'+\varepsilon)}\right) +$$

$$+ A_q e^{-\lambda_q (a'+\varepsilon)} - A_{p-1} e^{-\lambda_p (a'+\varepsilon)}.$$

Из (I. 9) вытекает, что если $p > 1 + n_\varepsilon$, то

$$\left|\sum_{p \leqslant n \leqslant q} a_n e^{-\lambda_n (a'+\varepsilon)}\right| \leqslant \sum_{p \leqslant n \leqslant q-1} e^{\lambda_n (a'+\varepsilon/2)} \left(a^{-\lambda_n (a'+\varepsilon)} - e^{-\lambda_{n+1} (a'+\varepsilon)}\right) +$$

$$+ e^{\lambda_q (a'+\varepsilon/2)} e^{-\lambda_q (a'+\varepsilon)} + e^{\lambda_{p-1} (a'+\varepsilon/2)} e^{-\lambda_p (a'+\varepsilon)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p \leqslant n \leqslant q-1} e^{\lambda_n (a'+\varepsilon/2)} (a' + \varepsilon) \int\limits_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-u (a'+\varepsilon)} \, du + e^{-\lambda_q \varepsilon/2} + e^{\lambda_p \varepsilon/2} \leqslant$$

$$\leqslant (a' + \varepsilon) \int\limits_{\lambda_p}^{\lambda_q} e^{-u\varepsilon/2} \, du + e^{-\lambda_q \varepsilon/2} + e^{-\lambda_p \varepsilon/2}.$$

Последнее выражение стремится к нулю, когда $p$ стремится к бесконечности. Следовательно, ряд $(A, \Lambda)$ сходится в точке $s = a' + \varepsilon$, откуда вытекает неравенство $\sigma_c \leqslant a'$.

Докажем теперь, что если $(A, \Lambda)$ сходится при $s = \sigma_0 > 0$, то $a \leqslant \sigma_0$. Отсюда будет следовать, что если $a > 0$, то $a \leqslant \sigma_c$. Этот факт вместе с неравенством $\sigma_c \leqslant a'$ завершает доказательство теоремы.

Можно записать, что

$$A_n = \sum_{m \leqslant n} a_m = \sum_{2 \leqslant m \leqslant n-1} A_m(\sigma_0) \left(e^{\lambda_m \sigma_0} - e^{\lambda_{m+1} \sigma_0}\right) +$$

$$+ A_n(\sigma_0) e^{\lambda_n \sigma_0} + a_1 e^{\lambda_1 \sigma_0} \left(e^{\lambda_1 \sigma_0} - e^{\lambda_2 \sigma_0}\right)$$

$\left(\text{где } A_m(\sigma_0) = \sum_{n \leqslant m} a_n e^{-\lambda_n \sigma_0}\right)$. Если ряд $\sum a_n e^{-\lambda_n \sigma_0}$ сходится, то существует постоянная $M$, такая, что $|A_n(\sigma_0)| < M$ $(n \geqslant 1)$, и

$$|A_n| \leqslant M \left[\sum_{m \leqslant n-1} \left(e^{\lambda_{m+1} \sigma_0} - e^{\lambda_m \sigma_0}\right) + e^{\lambda_n \sigma_0}\right] =$$

$$= M \left(2e^{\lambda_n \sigma_0} - e^{\lambda_1 \sigma_0}\right) < 2M e^{\lambda_n \sigma_0},$$

откуда вытекает соотношение

$$a = \overline{\lim} \ln |A_n| / \lambda_n \leqslant \sigma_0.$$

Из теоремы I.2.7 сразу же следует такой результат:

**I.2.8.** *Если ряд* $\sum a_n e^{-\lambda_n s_0}$ *расходится, то*

$$\sigma_c = \sigma_0 + \overline{\lim}\left(\ln\left|\sum_{n\leqslant m} a_m e^{-\lambda_m \sigma_0}\right| \Big/ \lambda_n\right).$$

*Если* $\sum |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} = \infty$, *то*

$$\sigma_a = \sigma_0 + \overline{\lim}\left(\ln \sum_{n\leqslant m} |a_m| e^{-\lambda_n \sigma_0}/\lambda_n\right).$$

Нужно заметить, что в теореме I.2.7 условие $a > 0$ (как, впрочем, и условие $b > 0$) является существенным. В самом деле, предположим, что ряд (I.2) представляет функцию $f(z)$, голоморфную в $|z| < R_1$, $R_1 > 1$, и такую, что $f(1) \neq 0$. Радиус сходимости ряда

$$\varphi(z) = \frac{1}{1-z} f(z) = \sum A_n z^n \quad \left(A_n = \sum_{n\leqslant m} a_m\right)$$

равен 1, ибо точка $z = 1$ является для $\varphi(z)$ особой точкой, и, следовательно,

$$\overline{\lim}(\ln|A_n|/n) = 0;$$

однако для ряда (I.3) $\sigma_c \leqslant -\ln R_1 < 0$.

## I.3. Вычисление коэффициентов и некоторых важных комбинаций коэффициентов

Распространим сначала на ряды Дирихле классическую формулу Коши о коэффициентах ряда Тейлора. Допустим, что $\sigma_a < \infty$, хотя это условие не очень существенно. Формулы, установленные здесь, верны и в более общем случае, который, однако, не представляет для нас интереса.

**T.I.3.1.** *Если* $\sigma_a < \infty$, *то, обозначая при* $\sigma > \sigma_a$ *сумму ряда* $(A, \Lambda)$ *через* $f(s)$, *имеем*

$$a_n e^{-\lambda_n \sigma_1} = \lim \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T} f(\sigma_1 + it) e^{\lambda_n it}\, dt \quad (n \geqslant 1),$$

*где* $t_0$ *произвольно и* $\sigma_1$ — *любое вещественное число, удовлетворяющее условию* $\sigma_1 > \sigma_a$.

При $s=\sigma_1+it$ имеем

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{T} f(s)e^{\lambda_n s}dt=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{T}\sum a_m e^{(\lambda_n-\lambda_m)s}\,dt=$$

$$=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{T}\left(\sum_{m\leqslant n-1} a_m e^{(\lambda_n-\lambda_m)s}\right)dt+\frac{1}{T}\int_{t_0}^{T} a_n\,dt+$$

$$+\frac{1}{T}\int_{t_0}^{T}\left(\sum_{m\geqslant n+1} a_m e^{(\lambda_n-\lambda_m)s}\right)dt.$$

Так как при вещественном $k\neq 0$

$$\lim\frac{1}{T}\int_{t_0}^{T} e^{k(\sigma_1+it)}\,dt=0$$

и так как ряды под интегралами равномерно сходятся по $t$, $t\in\,]-\infty,\ \infty[$, то

$$\lim\frac{1}{T}\int_{t_0}^{T}\left(\sum_{m\geqslant n-1} a_m e^{(\lambda_n-\lambda_m)s}\right)dt=0,$$

$$\lim\frac{1}{T}\int_{t_0}^{T}\left(\sum_{m\geqslant n+1} a_m e^{(\lambda_n-\lambda_m)s}\right)dt=0.$$

Следовательно,

$$\lim\frac{1}{T}\int_{t_0}^{T} f(s)e^{\lambda_n s}\,dt=\lim\frac{1}{T}\int_{t_0}^{T} a_n\,dt=a_n,$$

и теорема доказана.

Ясно, что в только что доказанной теореме $\sigma_a$ можно заменить на $\sigma_u$ ($\sigma_u$ означает абсциссу равномерной сходимости ряда $(A,\ \Lambda)$, т. е. нижнюю границу чисел $\sigma'$, таких, что $(A,\ \Lambda)$ равномерно сходится в любой полуплоскости $\sigma\geqslant\sigma'+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ произвольно), поскольку при доказательстве использовалась лишь равномерная сходимость ряда. Нам потребуется теперь следующая лемма:

**I.3.2.** *Пусть $c>0$, $k$ — целое положительное число и $\omega$ — вещественное число; тогда*

$$\frac{1}{2\pi}\int\frac{e^{\omega(c+it)}}{(c+it)^k}\,dt=\begin{cases}\dfrac{\omega^{k-1}}{(k-1)!} & (\omega>0),\\ 0 & (\omega\leqslant 0).\end{cases}$$

Предположим сначала, что $\omega>0$. При $T>0$, $\sigma_1<0$ обозначим через $l_1(\pm T,\ \sigma_1)$ отрезки $(\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant c,\ t=\pm T)$ и через

$I_2(T,\ \sigma_1)$, $I_3(T)$ отрезки $(\sigma=\sigma_1,\ |t|\leqslant T)$ и $(\sigma=c,\ |t|\leqslant T)$. Пусть $R(T,\ \sigma_1)$ — прямоугольник, образованный этими отрезками. По теореме о вычетах имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{R(T,\ \sigma_1)}\frac{e^{\omega s}}{s^k}\,ds=\frac{\omega^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Но поскольку при фиксированном $\sigma_1$ интегралы, взятые по $I_1(T,\ \sigma_1)$ и $I_1(-T,\ \sigma_1)$, стремятся при $T\to+\infty$ к нулю, то

$$\frac{1}{2\pi}\int\frac{e^{\omega(c+it)}}{(c+it)^k}\,dt-\frac{1}{2\pi}\int\frac{e^{\omega(\sigma_1+it)}}{(\sigma_1+it)^k}\,dt=\frac{\omega^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Так как второй интеграл левой части этого равенства стремится к нулю при $\sigma_1\to-\infty$, лемма в случае $\omega>0$ доказана. При $\omega\leqslant 0$ доказательство аналогично; нужно лишь контур $R(T,\ \sigma_1)$ заменить контуром $R'(T,\ \sigma_2)$, $\sigma_2>c$, образованным отрезками

$$I_1'(\pm T,\ \sigma_2)=(c\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2,\ t=\pm T),$$
$$I_2(T,\ \sigma_2)=(\sigma=\sigma_2,\ |t|\leqslant T),\qquad I_3(T).$$

Написанный выше интеграл берется на этот раз по контуру $R'(T,\ \sigma_2)$ (вместо $R(T,\ \sigma_1)$) и равен нулю, так как подинтегральное выражение голоморфно внутри контура $R'(T,\ \sigma_2)$ (а также на самом контуре); устремляя сначала $T$ к $+\infty$, а затем $\sigma_2$ к $+\infty$, получаем требуемый результат.

Следующая теорема будет использоваться в дальнейшем.

**Т. I. 3.3.** *Пусть* $\sigma_a<\infty$. *Если* $\nu>0$ *и если* $k$ — *целое положительное число, то*

$$\frac{(k-1)!}{2\pi}\int\frac{f(c+it)\,e^{\nu(c+it)}}{(c+it)^k}\,dt=\begin{cases}\sum\limits_{\lambda_n<\nu}(\nu-\lambda_n)^{k-1}a_n, & \text{если}\quad \nu>\lambda_1,\\ 0, & \text{если}\quad \nu\leqslant\lambda_1,\end{cases}$$

*где* $c>\max(\sigma_a,\ 0)$ *и* $f(s)$ — *сумма ряда* $(A,\ \Lambda)$.

При $\nu>\lambda_1$ и $s=c+it$ имеем

$$\int\frac{f(s)\,e^{\nu s}}{s^k}\,dt=\int\frac{\sum\limits_{\lambda_n<\nu}a_ne^{(\nu-\lambda_n)s}}{s^k}\,dt+\int\frac{\sum\limits_{\lambda_n\geqslant\nu}a_ne^{(\nu-\lambda_n)s}}{s^k}\,dt.$$

Из леммы I. 3.2 и равномерной сходимости ряда под знаком последнего интеграла следует, что этот интеграл равен нулю.

Та же лемма I.3.2 позволяет, следовательно, записать, что

$$\frac{(k-1)!}{2\pi}\int \frac{f(s)}{s^k} e^{\nu s}\,dt = \frac{(k-1)!}{2\pi}\sum_{\lambda_n<\nu} a_n \int \frac{e^{(\nu-\lambda_n)s}}{s^k}\,dt =$$

$$= \sum_{\lambda_n<\nu} a_n (\nu-\lambda_n)^{k-1}.$$

Если $\nu \leqslant \lambda_1$, то интеграл равен нулю. Аналогично в этой теореме можно заменить $\sigma_a$ на $\sigma_u$.

Мы закончим эту главу элементарным неравенством, обобщающим неравенство Коши для коэффициентов ряда Тейлора.

**Т. I.3.4.** *Пусть* $\sigma_1 > \sigma_a$, $t_0$ — *любое вещественное число, и пусть* $M = \sup\limits_{t \geqslant t_0} |f(\sigma_1 + it)|$, *где* $f(s)$ — *сумма ряда* $(A, \Lambda)$. *Тогда при* $n \geqslant 1$

$$|a_n| \leqslant M e^{\lambda_n \sigma_1}. \tag{I.10}$$

Этот результат сразу вытекает из теоремы I.3.1.

Глава II

# Неравенства для коэффициентов

## II.1. Неравенства, связанные с арифметическим характером показателей

Допустим, что $\sigma_a \leqslant 0$, и обозначим через $T(\sigma)$ произвольную функцию, такую, что $T(\sigma) > -\infty$ при $\sigma > \sigma_a$. Пусть $\mathscr{D}_T$ — множество точек $\{s = \sigma + it \mid \sigma > \sigma_a,\ t \geqslant T(\sigma)\}$. Обозначив сумму ряда $(A, \Lambda)$ при $\sigma > \sigma_a$ через $f(s)$, положим

$$M = \sup_{s \in \mathscr{D}_T} |f(s)|.$$

Очевидно,

$$|a_n| \leqslant M,$$

так как в силу I.3.4 неравенство (I.10) выполняется при всех $\sigma_1 > 0$.

Покажем, что если член $\lambda_k$ последовательности $\Lambda$ «отличается» арифметическими свойствами от других ее членов — это отличие выражается, например, в терминах разности $\lambda_k - \lambda_m$ для всех натуральных $m \neq k$, — то (в предположении, что ряд $f(s) = (A, \Lambda)$ аналитически продолжается в некоторую область $\mathscr{D}$, *свойства которой зависят от арифметических свойств* $\lambda_k$, причем в этой области $|f(s)| \leqslant M$) можно утверждать, что $|a_k| \leqslant BM$, где постоянная $B$ не зависит от $\Lambda$ и $k$. Она зависит лишь от арифметических свойств числа $\lambda_k$. Никакое неравенство такого вида не будет выполняться, если опустить предположение об «исключительности» $\lambda_k$. (Иначе говоря, это неравенство становится ложным, каково бы ни было значение постоянной $B$.) В случае целого $\lambda_k$ необходимые арифметические свойства разности $\lambda_k - \lambda_m$ $(m \neq k)$ доставляет $\min(\lambda_k - \lambda_{k-1},\ \lambda_{k+1} - \lambda_k)$.

Начнем с нескольких определений.

Назовем $*$-*кривой* [1] (и будем обозначать ее прописной буквой со звездочкой, например $\Gamma^*$) любую замкнутую жорданову кривую на комплексной плоскости $z = x + iy = re^{i\theta}$ $(r = |z|)$, которая симметрична относительно вещественной оси, проходит через точку $z = 1$ и задается непрерывной функцией $r = \varphi(\theta)$ $(\theta \in [0, 2\pi]$,

---

[1]) У автора «courbe à astérisque». — *Прим. перев.*

$\varphi(0)=\varphi(2\pi)$), $\varphi(\theta)>0$, причем функция $\varphi$ имеет непрерывную производную в окрестности $\theta=0$, удовлетворяющую условию

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{1}{\theta}=c,$$

где $c$ — конечная величина.

Обозначим через $D(\Gamma^*)$ ограниченную область с границей $\Gamma^*$.

Будем говорить, что $*$-кривая $G^*$ *окружает $*$-кривую* $\Gamma^*$, если для любой точки $z\in\Gamma^*$, $z\neq 1$, имеем $z\in D(G^*)$ и если $c_1>c$, где

$$c_1=\lim_{\theta\to 0}\frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{1}{\theta}\quad(\text{предел берется при } z\in G^*).$$

Пусть $\Phi(z)$—некоторая функция, голоморфная на замкнутом круге $|z|\leqslant 1$, вещественная для вещественных $z$, и пусть $\Phi(1)=1$, $\Phi'(1)>-1$, $\Phi(z)\neq 0$ при $|z|<1$. Такая функция называется *связанной с $*$-кривой* $\Gamma^*$, если $z\Phi(z)\in D(\Gamma^*)$ при $|z|<1$. Пусть $\lambda>0$; целое число $m\geqslant 0$ называется *$\lambda$-полезным* для функции $\Phi$, если, полагая

$$(\Phi(z))^\lambda=d_0^{(\lambda)}+\sum d_m^{(\lambda)}z^m, \tag{II. 1}$$

имеем $d_m^{(\lambda)}\neq 0$. Говорят, что числа $\lambda>0$, $\lambda'>0$ *отличны по модулю* 1 *относительно* $\Phi$, если ни для одной пары $m\geqslant 0$, $m'\geqslant 0$, где $m$ $\lambda$-полезно, а $m'$ $\lambda'$-полезно (для функции $\Phi$), не может выполняться равенство

$$\lambda-\lambda'=m'-m.$$

Если $\Delta$ — какая-нибудь (открытая) область, содержащая начало, то через $\mathscr{L}\Delta$ обозначим область на плоскости $s=\sigma+it$, образованную всеми такими точками, что $e^{-s}\in\Delta$. Следовательно, $\mathscr{L}D(\Gamma^*)$ есть множество всех таких точек $s$-плоскости, что точки $z=e^{-s}$ образуют область, границей которой является $\Gamma^*$.

Обозначим через $P_{\sigma'}$ полуплоскость $\sigma>\sigma'$.

Пусть $\mathscr{D}$—область $s$-плоскости, которая содержит полуплоскость $P_{\sigma'}$ и граница которой является кривой, задаваемой непрерывной функцией $\sigma=\sigma(t)$ ($t\in]-\infty,\ \infty[$, $s=\sigma+it$).

Пусть $\mathscr{F}(s)$ — функция, голоморфная в $P_{\sigma'}$. Будем говорить, что эта функция может быть *прямо аналитически продолжена из $P_{\sigma'}$ в $\mathscr{D}$*, если $CP_{\sigma'}\cap\mathscr{D}\neq\emptyset$ [1]) и если существует голоморфная в $\mathscr{D}$ функция, совпадающая с $\mathscr{F}(s)$ в $P_{\sigma'}$. Будем обозначать это аналитическое продолжение в $\mathscr{D}$ (и только прямое аналитическое продолжение) той же самой буквой $\mathscr{F}$.

---

[1]) Через $CP_{\sigma'}$ обозначено дополнение множества $P_{\sigma'}$ относительно комплексной плоскости.— *Прим. перев.*

Теперь можно сформулировать следующую общую теорему, суть которой будет лучше понята после того, как мы приведем некоторые ее частные случаи.

**Т. II. 1.1.** *Пусть* $G^*$ *и* $\Gamma^*$ — *некоторые* $*$-*кривые, причем* $G^*$ *окружает* $\Gamma^*$, *и* $\Phi$ — *функция, связанная с* $\Gamma^*$.

*Если ряд* $(A, \Lambda)$ *имеет конечную абсциссу абсолютной сходимости* $\sigma_a$ *и если его сумма* $f(s)$ *может быть прямо аналитически продолжена из* $P_{\sigma'}$, *где* $\sigma' > \sigma_a$, *в* $\mathscr{L}D(G^*)$, *то существует постоянная* $H$, *зависящая лишь от* $G^*$ *и от* $\Phi$, *такая, что для любого* $\lambda_k \in \Lambda$, *отличного по модулю* 1 *относительно* $\Phi$ *от всех других* $\lambda_n$, *имеет место неравенство*

$$|a_k| \leqslant H \sup_{s \in \mathscr{L}D(G^*)} |f(s)| \inf \left( \left| d_m^{(\lambda_k)} \right| \sqrt{\lambda_k + m} \right)^{-1}. \qquad (\text{II. 2})$$

Напомним, что числа $d_m^{(\lambda)}$ определены в (II. 1).

Выбор конкретной кривой $\Gamma^*$, с одной стороны, и связанной с ней функции $\Phi$, с другой стороны (выбор, позволяющий уточнить требуемые свойства «исключительного» показателя $\lambda_k$), дает возможность, исходя из теоремы II. 1.1, получить следующие ее частные случаи.

**Т. II. 1.2.** *Любой* $*$-*кривой* $G^*$, *окружающей окружность* $|z| = 1$, *соответствует зависящая лишь от* $G^*$ *постоянная* $B$, *такая, что если* $\sigma_a < \infty$ *и если функция* $f(s)$, *определенная рядом* $(A, \Lambda)$, *может быть прямо аналитически продолжена из* $P_{\sigma'}$, *где* $\sigma' \geqslant \sigma_a$, *в* $\mathscr{L}D(G^*)$, *то для любого* $k$ *имеет место неравенство*

$$|a_k| \leqslant B \sup_{s \in \mathscr{L}(G^*)} |f(s)| \lambda_k^{-1/2}. \qquad (\text{II. 3})$$

**Т. II. 1.3.** *Пусть* $*$-*кривая* $G^*$ *окружает* $*$-*кривую, определенную уравнением* $r = \cos(\theta/3)$ $(|\theta| \leqslant \pi)$. *Предположим, что* $\sigma_a < \infty$ *и что функция* $f(s)$, *определенная рядом* $(A, \Lambda)$, *может быть прямо продолжена из* $P_{\sigma'}$, *где* $\sigma' > \sigma_a$, *в* $\mathscr{L}D(G^*)$.

*Тогда существует постоянная* $B_1$, *зависящая лишь от* $G^*$ *и такая, что неравенство*

$$|a_k| \leqslant B_1 \sup_{s \in \mathscr{L}D(G^*)} |f(s)| \qquad (\text{II. 4})$$

*справедливо для всех* $\lambda_k$, *таких, что* $\lambda_k - \lambda_n$ *не является целым числом, если* $n \neq k$.

**Т. II. 1.4.** *Если* $\lambda_k$ — *целое число и если заменить в формулировке теоремы* II. 1.3 *предположение относительно* $\lambda_k$ *таким предположением: «любое целое* $\lambda_n$ $(n \neq k)$ *удовлетворяет одному из двух неравенств* $\lambda_n > 2\lambda_k$, $\lambda_k > 2\lambda_n$», *а другие предположения этой теоремы оставить без изменения, то снова будет справедливо неравенство* (II. 4)

Ясно, что если в теореме II. 1.4 все $\lambda_n$ являются целыми, то можно записать равенство $F(z)=\sum a_n z^{\lambda_n}$, а используя предположение о $\lambda_k$, с одной стороны, и прямую аналитическую продолжимость функции $F(z)$ в $D(G^*)$, с другой стороны, можно представить результат в форме

$$|a_k| \leqslant B_1 \sup_{z\in D(G^*)} |F(z)|.$$

**Т. II. 1.5.** *Результаты теорем* II.1.3 *и* II. 1.4 *останутся справедливыми, если в их формулировках заменить* $G^*$ *некоторой* $*$*-кривой* $G_1^*$, *окружающей* $*$*-кривую* $\Gamma^*$, *образованную дугой* $r=\cos(\theta/2)$, $|\theta|\leqslant\pi/2$, *и симметричной ей относительно* $Oy$ *дугой*; *условие на* $\lambda_k$ *из теоремы* II. 1.3 *заменить таким условием*: «*при* $n\neq k$ *разность* $\lambda_k-\lambda_n$ *не является четным числом*»; *условие на* $\lambda_k$ *из теоремы* II. 1.4 *заменить следующим условием*: «*если* $\lambda_k$ — *целое, то любое целое* $\lambda_n$ $(n\neq k)$, *такое, что разность* $\lambda_n-\lambda_k$ *четна, удовлетворяет одному из двух неравенств*: $\lambda_n>3\lambda_k$, $\lambda_k>3\lambda_n$».

Для доказательства теоремы II. 1.1 необходимо сначала доказать следующий результат:

**Т. II. 1.6.** *Пусть* $\Gamma^*$, $G^*$, $\Phi$ *определены так же, как и в теореме* II. 1.1. *Обозначим через* $C_\alpha$ $(\alpha\geqslant 0)$ *кривую на плоскости* $z=re^{i\theta}$: $r=e^{\alpha\theta^2}$, $|\theta|\leqslant\pi$. *Тогда при достаточно малом* $\alpha$ *образ кривой* $C_\alpha$ *при отображении* $z\Phi(z)$ *принадлежит* $\overline{D(G^*)}$.

(В соответствии с введенными выше обозначениями $\overline{D(G^*)}$ — это компакт, границей которого является $G^*$.)

Положим $\Phi_1(z)=z\Phi(z)$. Поскольку $\Phi_1(1)=1$, $\Phi_1'(1)=1+\Phi'(1)>0$, существует круг $U_1$ с центром $z=1$, в котором функция $\Phi_1(z)$ однолистна. Кроме того, существует круг $U_2$ с центром $\zeta=1$, в котором функция $\overset{-1}{\Phi_1}(\zeta)$, обратная к $\Phi_1$ $\left(\Phi^{-1}(\Phi(z))=z\right)$, однолистна. Положим $\zeta=\xi+i\eta=\rho e^{i\gamma}$. Обозначим через $Q_\alpha$ образ кривой $C_\alpha$ при отображении $\Phi_1$. Каждому $\alpha\geqslant 0$ можно поставить в соответствие достаточно малые $\varepsilon=\varepsilon(\alpha)>0$ и $\gamma=\gamma(\alpha)>0$, так что, с одной стороны, образ дуги кривой $C_\alpha$, соответствующей $0\leqslant\theta\leqslant\varepsilon$, будет простой жордановой дугой $\mathcal{J}$, связывающей точку $\zeta=1$ с некоторой точкой полуплоскости $\eta>0$ $(\zeta=\xi+i\eta)$ и не пересекающей вещественную ось, а, с другой стороны, луч, выходящий из начала $(\zeta=0)$ и образующий с осью $\eta=0$ угол $\gamma$, пересекает $\mathcal{J}$ лишь в одной точке $p$. Кривая, образованная отрезками, соединяющими точки 0 и $p$, 0 и 1, и дугой $\mathcal{J}$, ограничивает тогда односвязную область $D$. При этом $\varepsilon(\alpha)$ и $\gamma(\alpha)$ можно выбрать таким образом, чтобы $\varepsilon(\alpha)=\varepsilon(0)$, $\gamma(\alpha)=\gamma(0)$ (для этого нужно взять достаточно малое $\gamma(\alpha)$) и чтобы область, заключенная между дугами кривых $Q_0$ и $Q_\alpha$, которые начинаются в точке $\zeta=1$ и кончаются на луче, выходящем из начала под углом $\gamma(0)=\gamma(\alpha)$ к оси $\eta=0$, принадлежала $U_2$. Кроме того, $\varepsilon(\alpha)=\varepsilon(0)$ можно выбрать столь малым, чтобы соответствующие дуги кривой $C_\alpha$ и кривой $C_0$ ($C_0$: $|z|=1$) содержались в $U_1$. Задавая $\alpha$ и выбирая надлежащим образом $\varepsilon$, $\gamma$, назовем соответствующую область $D$ «областью $D_\alpha$». Образ области $D_\alpha$ при отображении $\Phi_1^{-1}$ обозначим через $D_\alpha^{-1}$. Граница области $D_\alpha^{-1}$ является, очевидно, простой замкнутой жордановой кривой.

Если $\alpha$ достаточно мало, то область $D_\alpha$ можно выбрать так, чтобы $R_\alpha \subset \overline{D(G^*)}$ (где $R_\alpha$ — часть кривой $Q_\alpha$, принадлежащая границе области $D_\alpha$).

Это вытекает из следующих соображений. Если $L$ — кривая в плоскости $\zeta$, проходящая через точку $\zeta=1$ и представимая в окрестности этой точки уравнением (в полярных координатах) $\rho=\rho(\gamma)$, такая, что существует (конечный) предел

$$\lim_{\gamma\to 0}\frac{d\rho}{d\gamma}\cdot\frac{1}{\gamma},$$

то этот предел мы будем обозначать через $c(L)$. Из включения $R_\alpha\subset\overline{D(G^*)}$, справедливого при достаточно малых $\alpha$, вытекает, что при таких $\alpha$ имеет место неравенство

$$c(R_\alpha)<c(G^*).$$

В самом деле, пусть

$$\frac{d\ln\Phi_1(z)}{dz}=A(z)+iB(z).$$

Имеем

$$\lim_{\theta\to 0}A(e^{\alpha\theta^2+i\theta})=1+\Phi'(1)=A>0,$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{dB(e^{\alpha\theta^2+i\theta})}{d\theta}=\left.\frac{\partial B}{\partial y}\right|_{z=1}=\left.\frac{\partial A}{\partial x}\right|_{z=1}=A'(1),$$

где $A(x)$ — ограничение функции $A(z)$ на $\mathbf{R}$. Полагая $A'(1)=A_1$, легко видеть, что

$$c(\Gamma^*)=-\frac{A_1}{A^2}-\frac{1}{A},\quad c(R_\alpha)=\frac{2\alpha}{A}-\frac{A_1}{A^2}-\frac{1}{A},$$

и по определению $c(G^*)>c(\Gamma^*)$. Следовательно, если $\alpha>0$ достаточно мало, то $c(R_\alpha)<c(G^*)$. Таким образом, при подходящем выборе $\alpha$ имеем $\Phi_1(D_\alpha^{-1})\subset D(G^*)$. Если $\alpha$ достаточно мало, то образ при отображении $\Phi_1$ части области $D(C_\alpha)$, внешней к $D_\alpha^{-1}$ и к симметричной ей (относительно вещественной оси) области, конечно, содержится в $D(G^*)$. Но то же самое верно для образа при отображении $\Phi_1$ части области $D(C_\alpha)$, содержащейся в $D_\alpha^{-1}$ (и в симметричной ей относительно вещественной оси области). Таким образом, существует $\alpha>0$, такое, что образ области $D(C_\alpha)$ при отображении $\Phi_1$ лежит в $D(G^*)$, и лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы II.1.1. Функция $\Phi(z)$ по предположениям теоремы не равна нулю в круге $|z|<1$ (см. определение функции, связанной с кривой $\Gamma^*$); она голоморфна на $|z|\leqslant 1$. На окружности $|z|=1$ эта функция может иметь конечное число нулей; обозначим их через $z_1, \ldots, z_k$.

Выберем $\alpha>0$ столь малым, чтобы

1) $\Phi_1[D(C_\alpha)]\subset D(G^*)$ $(\Phi_1(z)=z\Phi(z))$ (это возможно в силу только что доказанной леммы);

2) $\Phi(z)$ имела в круге $|z|\leqslant e^{\alpha\pi^2}$ нули лишь в точках $z_j$ $(j=1, 2, \ldots, k)$.

Обозначим через $L_j$ $(j=1, 2, \ldots, k)$ луч, выходящий из точки $z=0$ и проходящий через точку $z_j$, а через $S_j$ — отрезок луча $L_j$, концами которого являются $z_j$ и точка из $C_\alpha$. Обозначим через $\mathscr{C}_\alpha$ кривую, составленную из $C_\alpha$ и $k$ отрезков $S_j$, а через $\Delta_\alpha$ — компакт, границей которого является $\mathscr{C}_\alpha$.

Положим

$$\Psi(s)=f[-\ln\Phi_1(e^{-s})]$$

с вещественным $\ln\Phi_1(e^{-\sigma})$ при $\sigma>0$. Функция $\Psi(s)$ голоморфна на $\mathscr{L}\Delta_\alpha$ и

$$\sup_{s\in\mathscr{L}\Delta_\alpha}|\Psi(s)|\leqslant\sup_{s\in\mathscr{L}D(G^*)}|f(s)|=M.$$

В самом деле, справедливо включение $\Delta_\alpha\subset D(G^*)$, и $\Phi_1(z)$ имеет в $\Delta_\alpha$ лишь простой нуль $z=0$.

Положим

$$\Phi(z)=d_0+\sum d_m z^m$$

(другими словами, согласно (II.1), $d_m=d_m^{(1)}$).

Ясно, что если $r>0$ достаточно мало, то

$$\sum|a_n|\left(r\sum|d_m|r^m\right)^{\lambda_n}<\infty;$$

поэтому если $\sigma$ достаточно велико, то

$$\Psi(s)=\sum a_n e^{-\lambda_n s}\left(\sum d_m e^{-ms}\right)^{\lambda_n}=$$
$$=\sum_n a_n\sum_m d_m^{(\lambda_n)}e^{-(m+\lambda_n)s}=\sum_p l_p e^{-\mu_p s},$$

где $\mu_p$ имеет вид $m+\lambda_n$, $l_p$ — сумма всех членов $a_n d_m^{(\lambda_n)}$, для которых $\mu_p=m+\lambda_n$.

Если $\sigma_1$ достаточно велико и $p\geqslant 1$, то

$$l_p=\lim\frac{1}{T}\int_0^T\Psi(\sigma_1+it)\,e^{\mu_p(\sigma_1+it)}\,dt.$$

Пусть $p$ таково, что $\alpha\pi^2\mu_p \geqslant 1$. Обозначим через $C_{\alpha, p}$ кривую, образованную дугой $\sigma = \mu_p^{-1} - \alpha t^2$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, и отрезками $S_{j,p}$, являющимися частями отрезков $-\ln S_j$ ($s \in -\ln S_j \Leftrightarrow e^{-s} \in S_j$; отрезки $S_j$, очевидно, параллельны вещественной оси $t=0$); отрезок $S_{j,p}$ ограничен по определению точкой дуги $C_{\alpha, p}$ и точкой прямой $\sigma = 0$, причем его «ордината» принадлежит $]0, \pi]$. Иначе говоря, отрезки $S_{j,p}$ имеют вид

$$t = t_j, \quad \mu_p^{-1} - \alpha t_j^2 \leqslant \sigma \leqslant 0, \quad 0 < t_j \leqslant \pi, \quad \text{причем} \quad \Phi(e^{-it_j}) = 0.$$

Обозначим через $C_{\alpha, p, m}$ объединение $m$ кривых, первая из которых $C'_{\alpha, p}$ является объединением кривой $C_{\alpha, p}$ и симметричной ей относительно прямой $t = \pi$ кривой, а остальные $m-1$ кривых получаются из $C'_{\alpha, p}$ последовательными сдвигами на $2n\pi i$ ($n = 1, 2, \ldots, m-1$). Тогда с помощью очевидного применения теоремы Коши получаем

$$l_p = \lim \frac{1}{2m\pi i} \int\limits_{C_{\alpha, p, m}} \Psi(s) e^{\mu_p s}\, ds,$$

причем (для любого $m$) интеграл вдоль каждого из отрезков, содержащихся в $C_{\alpha, p, m}$ и параллельных вещественной оси, берется в двух различных направлениях (кстати, $\Psi(s)$ принимает различные значения, когда $s$ стремится к точке такого отрезка с убывающим $t$ или возрастающим $t$, ибо $\Phi(e^{-it_j}) = 0$).

Так как на $C_{\alpha, p, m}$ имеет место неравенство $|\Psi(s)| \leqslant M$, то

$$|l_p| \leqslant \frac{M}{\pi} \left[ \int\limits_0^{\pi} e^{\mu_p (\mu_p^{-1} - \alpha t^2)}\, dt + 2 \sum_j \int\limits_0^{\alpha t_j^2 - \mu_p^{-1}} e^{-\mu_p \sigma}\, d\sigma \right].$$

Отсюда вытекает, что

$$|l_p| \leqslant \frac{M}{\pi} \left[ \int\limits_0^{\pi} e^{1 - \alpha\mu_p t^2}\, dt + k \int\limits_0^{\alpha\pi^2 - \mu_p^{-1}} e^{-\mu_p \sigma}\, d\sigma \right].$$

Но при $0 < \alpha < 1$ (и $\alpha\pi^2\mu_p \geqslant 1$) можно записать, что

$$\int\limits_0^{\pi} e^{-\alpha\mu_p t^2}\, dt = \int\limits_0^{\mu_p^{-1/2}} e^{-\alpha\mu_p t^2} dt + \int\limits_{\mu_p^{-1/2}}^{\pi} e^{-\alpha\mu_p t^2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\mu_p^{1/2}} + \mu_p^{1/2} \int\limits_{\mu_p^{-1/2}}^{\pi} e^{-\alpha\mu_p t^2} t\, dt = \frac{1}{\mu_p^{1/2}} + \frac{\mu_p^{1/2}}{2} \int\limits_{\mu_p^{-1}}^{\pi^2} e^{-\alpha\mu_p y}\, dy =$$

$$= \frac{1}{\mu_p^{1/2}} + \frac{1}{2\alpha\mu_p^{1/2}} \left(e^{\alpha} - e^{-\alpha\pi^2\mu_p}\right) \leqslant \frac{A}{\mu_p^{1/2}},$$

где $A < \infty$ — некоторая постоянная. Исходя из очевидного неравенства $|l_p| \leqslant M$ (при $\alpha\pi^2\mu_p \leqslant 1$), получаем также

$$|l_p| \leqslant M \leqslant \frac{M}{\pi\alpha^{1/2}\mu_p^{1/2}}.$$

Окончательно, каково бы ни было $p$,

$$|l_p| \leqslant K_\alpha M \mu_p^{-1/2}.$$

Но если $\lambda_k$ отлично по модулю 1 относительно $\Phi$ от любых других $\lambda_n$ $(n \neq k)$ и если $\mu_p = \lambda_k + m$ с $d_m^{(\lambda_k)} \neq 0$, то не существует никакой другой пары $\lambda_n$, $m'$ $(n \neq k)$, такой, что $\mu_p = \lambda_n + m'$, $d_{m'}^{(\lambda_n)} \neq 0$. Следовательно, в силу определения $\mu_p$ и $l_p$

$$\mu_p = \lambda_k + m, \quad l_p = a_k d_m^{(\lambda_k)},$$

и полученное для $l_p$ неравенство дает

$$|a_k| \left| d_m^{(\lambda_k)} \right| \leqslant K_\alpha M (\lambda_k + m)^{-1/2}.$$

Доказательство теоремы закончено.

Покажем теперь, что теорема II. 1.2 является частным случаем теоремы II. 1.1. В теореме II. 1.2 $*$-кривая $\Gamma^*$ есть окружность $|z| = 1$; при этом функция $\Phi(z)$, связанная с $\Gamma^*$, постоянна и равна 1, и, каково бы ни было $\lambda > 0$, лишь целое $m = 0$ является $\lambda$-полезным для $\Phi$. Тогда, каковы бы ни были $m$ и $n$, $\lambda_n$ и $\lambda_m$ отличны по модулю 1 относительно $\Phi$ (другими словами, они просто различны, т. е. $\Lambda$ строго возрастает). Следовательно, в предположениях теоремы II. 1.2 неравенство (II. 2) превращается в неравенство (II. 3).

Покажем теперь, как из теоремы II. 1.1 следуют теоремы II. 1.3 и II. 1.4. В этих теоремах $*$-кривая, окружаемая $G^*$, — это внешний контур образа окружности $|z| = 1$ при отображении $z\Phi(z) = z(1+z)/2$. При любом $\lambda > 0$, $\lambda \notin \mathbf{Z}$, каждое целое $m \geqslant 0$ является $\lambda$-полезным для $\Phi$, и если $\lambda$ целое, то $m$ является $\lambda$-полезным для $\Phi$ всякий раз, когда $0 \leqslant m \leqslant \lambda$. Неравенство (II. 1) можно тогда записать в виде

$$|a_k| \leqslant A \sup_{s \in \mathscr{L}D(G^*)} |f(s)| \inf_m \left( \left| d_m^{(\lambda_k)} \right| \sqrt{\lambda_k + m} \right)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant A \sup_{s \in \mathscr{L}D(G^*)} |f(s)| \left( \left| d_{E(\lambda_k/2)} \right| \sqrt{\lambda_k + E(\lambda_k/2)} \right)^{-1},$$

где, как и выше, $Ea$ означает целую часть от $a$. Очевидная оценка $d_{E(\lambda/2)}^{(\lambda)}$ дает требуемый результат.

В теореме II. 1.5 $*$-кривая $\Gamma^*$ является внешним контуром образа окружности $|z| = 1$ при отображении $z\Phi(z) = z(1+z^2)/2$.

Вывод теоремы II. 1.5 из теоремы II. 1.1 сходен с выводом теорем II. 1.3 и II. 1.4 из теоремы II. 1.1.

Заметим, что справедливость теоремы II. 1.1 нарушается, если не налагать условий на $\lambda_k$ ($k$ задано). Так, функция $f(s) = \sum(-1)^n ne^{-ns}$ ограничена в области $\mathscr{L}D(G^*)$, где $G^*$ — кривая из теоремы II. 1.3, но $|a_k| = k$ нельзя ограничить сверху величиной, не зависящей от $k$. В действительности в качестве $a_k$ можно взять $(-1)^k g(k)$, где $g(z)$ — целая функция минимального типа (т. е. целая функция нулевого экспоненциального типа)[1]) с положительными коэффициентами Тейлора; следовательно, $g(n) = |a_n|$ стремится к бесконечности быстрее любой степени числа $n$, и, однако, известно, что функция $F(z) = \sum g(n) z^n$ имеет лишь особую точку $z = 1$, т. е. что функция

$$f(s) = \sum(-1)^n g(n) e^{-ns}$$

ограничена в $\mathscr{L}D(G^*)$, где $G^*$ — кривая из теоремы II. 1.3.

## II.2. Общее неравенство для коэффициентов в случае конечной верхней плотности показателей

Ниже предполагается, что верхняя плотность $D^*$ последовательности $\Lambda$ конечна. Тогда из I. 2.5 следует, что $\sigma_a = \sigma_c = \overline{\lim}(\ln|a_n|/\lambda_n)$. Разумеется, мы предполагаем, что последняя величина не равна $+\infty$, т. е. что $\sigma_a = \sigma_c < \infty$. Как и прежде, обозначим при $\sigma > \sigma_c$ сумму ряда $(A, \Lambda)$ через $f(s)$.

Обозначим через $C(s_0, R)$ круг радиуса $R$ с центром $s_0$. Пусть $L$ — жорданова дуга, задаваемая уравнением $s = s(u)$, $u \in [\alpha, \beta]$. Объединение

$$\mathscr{C}(L;\ R) = \bigcup_{s \in L} C(s, R)$$

называется *каналом ширины* $2R$ *с центральной линией* $L$, а круги $C(\alpha, R)$, $C(\beta, R)$ — *крайними кругами* этого канала. Мы всегда будем предполагать, что крайний круг $C(\beta, R)$ принадлежит $P_{\sigma_c}$. Говорят, что $(A, \Lambda)$ допускает *прямое аналитическое продолжение* в $\mathscr{C}(L; R)$, если существует голоморфная в $\mathscr{C}(L; R)$ функция, совпадающая в $C(\beta, R)$ с $(A, \Lambda)$. При указании этого продолжения (которое обозначается через $f$, а не-

---

[1]) Целая функция $f(z)$ имеет экспоненциальный тип $\gamma$, если

$$\gamma = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln M(r)}{r} < \infty,$$

где

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$ — *Прим. перев.*

редко и через $(A, \Lambda)$) мы часто будем опускать прилагательное «прямое».

Докажем следующую общую теорему, которая играет очень важную роль в дальнейшем:

**Т. II. 2.1.** *Пусть $D^{\bullet} < \infty$, и предположим, что $\sigma_c < \infty$. Если $f(s)$, сумма ряда $(A, \Lambda)$, может быть аналитически продолжена в канал $\mathscr{C}(L; \pi R)$ с $R > \overline{D}^{\bullet}$ и если $C(s_0, \pi R)$ $(s_0 = \sigma_0 + it_0)$ — один из кругов канала,*

$$C(s_0, \pi R) \subset \mathscr{C}(L; \pi R),$$

*то*

$$|a_n| \leqslant C(R)\Lambda_n M(s_0) e^{\lambda_n \sigma_0},$$

*где $C(R) < \infty$ не зависит от $R$*[1]*), $\{\Lambda_n\}$ — последовательность, ассоциированная с $\Lambda$, и*

$$M(s_0) = \sup_{s \in C(s_0, \pi R)} |f(s)|.$$

Напомним, что $\overline{D}^{\bullet}$ — это верхняя усредненная плотность последовательности $\Lambda$. Положим

$$\Lambda_n(z) = \prod_{m \neq n} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_m^2}\right) \quad (n \geqslant 1).$$

Поскольку $D^{\bullet} < \infty$, то сразу видно, что это произведение равномерно сходится в любом компакте и что $\Lambda_n(z)$ является, следовательно, целой функцией, имеющей нули (лишь) в точках $\pm\lambda_m (m \neq n)$; при этом, согласно I. 1.2,

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{\ln \Lambda_n(ir)}{r} \leqslant \pi \overline{D}^{\bullet}, \tag{II. 5}$$

поскольку верхняя плотность и верхняя усредненная плотность последовательности, полученной из $\Lambda$ отбрасыванием одного члена (или конечного числа членов), совпадают с соответствующими плотностями последовательности $\Lambda$.

Ясно, что

$$\max_{|z|=r} |\Lambda_n(z)| = \Lambda_n(ir).$$

Следовательно, $\Lambda_n(z)$ является целой функцией экспоненциального типа $\leqslant \pi \overline{D}^{\bullet}$.

Положим

$$\Lambda_n(z) = \sum \alpha_p^{(n)} z^{2p};$$

ясно, что $(-1)^n \alpha_n > 0$, причем $\alpha_0 = 1$.

---

[1]) $C(\pi R) = \pi R L(\pi R)$, где $L$ — преобразование Лапласа функции $\Lambda_0$; см. I. 1.2.

Определим оператор $\mathscr{F}_n(f)$ следующим образом:

$$\mathscr{F}_n(f) = \sum \alpha_p^{(n)} f^{(2p)}. \tag{II. 6}$$

Функция $\mathscr{F}_n(f)$ голоморфна в канале $\mathscr{C}(L, \pi(R - \overline{D}^{\bullet}))$, так как при любом $\varepsilon > 0$ с $\varepsilon < R - \overline{D}^{\bullet}$ ряд (II. 6) равномерно сходится (по $s$) на любом замкнутом круге $\overline{C(s, \pi r)}$ с $s \in L$, $0 < r \leqslant R - \overline{D}^{\bullet} - \varepsilon$. Ясно, как можно начинать рассуждение, предполагая, что $f$ голоморфна на (замкнутом) канале $\overline{\mathscr{C}(L, \pi R)}$. Для любой точки $s'$, такой, что $|s' - s| = \pi(R - \overline{D}^{\bullet} - \varepsilon)$, где $s \in L$, можно написать ($q$ — любое целое положительное число), что

$$f^{(q)}(s') = \frac{q!}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - s')^{q+1}},$$

причем интеграл берется по окружности радиуса $\pi(\overline{D}^{\bullet} + \varepsilon)$ с центром $s'$. Это дает неравенство

$$|f^{(q)}(s')| \leqslant \frac{q!\, M(s)}{(\pi(\overline{D}^{\bullet} + \varepsilon))^q}, \tag{II. 7}$$

где $M(s)$ — максимум модуля $|f|$ на $\overline{C(s, \pi R)}$.

Поскольку тип функции $\Lambda_n(z)$ не превосходит $\pi\overline{D}^{\bullet}$, ряд $\sum \alpha_p^{(n)}(2p)!\, z^{-2p}$ имеет радиус сходимости $R \leqslant \pi\overline{D}^{\bullet}$ (ряд сходится вне этого круга). Следовательно, в силу (II. 7) ряд (II. 6) равномерно сходится в круге $C(s, \pi(R - \overline{D}^{\bullet} - \varepsilon))$. Функция $F_n(s) = \mathscr{F}_n[f(s)]$ голоморфна в канале $\mathscr{C}(L, \pi(R - \overline{D}^{\bullet} - \varepsilon))$, и на $L$ имеет место неравенство

$$|F_n(s)| \leqslant \sum (-1)^p \alpha_p^{(n)} (2p)!\, (\pi R)^{-2p} M(s) = A_n(R)\, M(s). \tag{II. 8}$$

(Достаточно положить в (II. 7) $\overline{D}^{\bullet} + \varepsilon = R$.) Но, полагая (см. I. 1.2)

$$\Lambda_0(r) = \sum (-1)^p \alpha_p r^{2p},$$

имеем $(-1)^p \alpha_p^{(n)} \leqslant (-1)^p \alpha_p$. Пусть

$$C(R) = \sum (-1)^p \alpha_p (2p)!\, (\pi R)^{-2p},$$

тогда при $R > \overline{D}^{\bullet}$ имеем $A_n(R) \leqslant C(R) < \infty$. Следовательно,

$$|F_n(s)| \leqslant C(R)\, M(s). \tag{II. 9}$$

Заметим, что, полагая $f_1(s) = \sum |a_n| e^{-\lambda_n s}$, будем иметь сходное с (II. 7) неравенство, в котором $f$ заменяется на $f_1$, а $M(s)$ — на $M_1(s)$; $M_1$ определяется так же, как $M$, но с заменой $f$ на $f_1$, причем точка $s$ принадлежит той части кривой $L$, для которой $C(s, \pi R) \subset P_{\sigma_c}$. Без ограничения общности можно предположить, что $L$ содержит часть вещественной оси. Вводя тогда обозначение $F_n^\bullet(s) = \sum (-1)^p \alpha_p^{(n)} f_1^{(2p)}(s)$, видим, что при достаточно больших $\sigma \in L$

$$F_n^\bullet(\sigma) = \sum (-1)^p \alpha_p^{(n)} f_1^{(2p)}(\sigma) = \sum_p (-1)^p \alpha_p^{(n)} \sum_m \lambda_m^{2p} |a_m| e^{-\lambda_m \sigma}.$$

Поскольку все члены двойной суммы положительны, порядок суммирования можно менять и в ряде

$$F_n(s) = \sum \alpha_p^{(n)} f^{(2p)}(s) = \sum \alpha_p^{(n)} \sum \lambda_m^{2p} a_m e^{-\lambda_m s} =$$
$$= \sum a_m e^{-\lambda_m s} \sum \alpha_p^{(n)} \lambda_m^{2p} = \sum a_m \Lambda_n(\lambda_m) e^{-\lambda_m s},$$

если $s \in L$ и $\sigma$ достаточно велико. Но если $m \neq n$, то $\Lambda_n(\lambda_m) = 0$; поэтому, наконец, получаем

$$F_n(s) = a_n \Lambda_n(\lambda_n) e^{-\lambda_n s} = \Lambda_n^{-1} a_n e^{-\lambda_n s},$$

где $\{\Lambda_n\}$ — последовательность, ассоциированная с $\Lambda$. Утверждение теоремы вытекает теперь из неравенства (II. 9) с $s = s_0$.

Из теоремы II. 2.1 сразу же вытекает такое следствие:

**II. 2.2.** *Пусть $D^\bullet < \infty$, $\sigma_c < \infty$. Если $(A, \Lambda)$ можно аналитически продолжить в канал $\mathscr{C}(L; \pi R)$ с $R > \overline{D}^\bullet$, причем $C(s_0, \pi R)$ $(s_0 = \sigma_0 + it_0)$ — круг, принадлежащий каналу, то*

$$\sigma_0 \geqslant \sigma_c - \overline{\lim} \frac{\ln \Lambda_n}{\lambda_n}.$$

Достаточно принять во внимание I. 2.5.

С помощью I. 1.1 получаем следующее предложение:

**II.2.3.** *Если шаг $h$ последовательности $\Lambda$ положителен и если другие предположения следствия* II. 2.2 *выполняются (неравенство $D^\bullet < \infty$ выполняется автоматически* [1]*), то при любом $a > 1$*

$$\sigma_0 \geqslant \sigma_c + [2a \ln(hD^\bullet) - A(a)] D^\bullet = \sigma_c - L(a, h, D^\bullet),$$

*где функция $A(a)$ определена в* I. 1.1.

*В частности, такой ряд $(A, \Lambda)$ нельзя аналитически продолжить в канал ширины $2\pi R$, $R > D^\bullet$, содержащий круг, абсцисса центра которого меньше, чем*

$$[3 \ln(hD^\bullet) - 8{,}5] D^\bullet + \sigma_c.$$

[1] Поскольку $h > 0$.

## Глава III

# Теоремы типа теорем Лиувилля, Вейерштрасса, Пикара арифметического и общего характера

### III. 1. Теоремы арифметического типа

Докажем следующую теорему:

**T. III. 1.1.** *Предположим, что $\lambda_k$ при заданном $k$ обладает следующим свойством: единственными рациональными числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $(m > k)$, а с $\alpha_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, удовлетворяющими соотношению*

$$\lambda_k = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \ldots + \alpha_m\lambda_m + \alpha,$$

*являются числа $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-1} = \alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_m = 0$, $\alpha_k = 1$, $\alpha = 0$.*

*Предположим, что функция $f(s)$, определенная рядом $(A, \Lambda)$ с $\sigma_a < \infty$, может быть (прямо) аналитически продолжена из $P_{\sigma'}$ $(\sigma' > \sigma_a)$ в $\mathscr{L}D(G^*)$, где $G^*$ есть $*$-кривая, окружающая кривую, определенную уравнением*

$$r = \cos(\theta/3) \qquad (|\theta| \leqslant \pi).$$

*Тогда множество значений, принимаемых функцией $f(s)$ в $\mathscr{L}D(G^*)$, всюду плотно в круге радиуса $|a_k|$ с центром в начале координат.*

Пусть комплексное число $a$ и $\varepsilon > 0$ таковы, что $|f(s) - a| > \varepsilon$ в $\mathscr{L}D(G^*)$. Если $\sigma \to \infty$, то $f(s) \to 0$ равномерно по $t$ (ибо $\lambda_1 > 0$). Отсюда следует, что $|a| \geqslant \varepsilon$. Положим

$$F(s) = \frac{1}{a - f(s)} - \frac{1}{a}.$$

Функция $F(s)$ является голоморфной функцией в $\mathscr{L}D(G^*)$, и в этой области $|F(s)| < \varepsilon^{-1} + |a|^{-1} \leqslant 2\varepsilon^{-1}$.

Пусть $\sigma$ удовлетворяет условию

$$\sum |a_n| e^{-\lambda_n\sigma} < |a|.$$

Тогда можно записать, что

$$F(s) = \frac{1}{a} \sum \left( \sum a_n e^{-\lambda_n s}/a \right)^m = \sum C_p e^{-L_p s},$$

где $\{L_n\}$ — (строго) возрастающая последовательность положительных чисел, стремящихся к бесконечности.

Каждое $L_n$ имеет вид

$$L_n = A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 + \ldots + A_m\lambda_m,$$

где $A_j$ — целые положительные числа.

Каково бы ни было целое положительное $p$, существует член $L_q$ последовательности $\{L_n\}$, равный $p\lambda_k$; но в силу наложенного на $\lambda_k$ условия никакая комбинация

$$A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 + \ldots + A_m\lambda_m + A,$$

где $A_j \geqslant 0$ ($j = 1, \ldots, m$) и $A$ — целые числа, не может равняться $p\lambda_k$, если исключить случай $A_j = 0$ ($j \neq k$), $A = 0$, $A_k = p$.

Иначе говоря, никакая разность

$$L_q - L_n \quad (n \neq q)$$

не является целым числом.

Так как при $L_q = p\lambda_k$ имеем $C_q = a_k^p/a^{p+1}$, то из теоремы II. 1.3 следует, что

$$|a_k^p| \leqslant B_1 |a|^{p+1} \sup_{s \in \mathcal{L}D(G^*)} |F(s)| = 2B_1 |a|^{p+1} \varepsilon^{-1}.$$

Извлекая корень $p$-й степени и устремляя $p$ к бесконечности, получаем

$$|a_k| \leqslant |a|,$$

что и доказывает теорему.

Пусть $M = \{\mu_p\}$ — некоторая возрастающая подпоследовательность последовательности $\Lambda: M \subset \Lambda$. Будем говорить, что $M$ — *линейно изолированная подпоследовательность последовательности* $\Lambda$, если разность между любой линейной комбинацией с целыми положительными коэффициентами

$$m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + \ldots + m_p\mu_p$$

и любой линейной комбинацией с целыми положительными коэффициентами

$$A_1\lambda_{n_1} + A_2\lambda_{n_2} + \ldots + A_q\lambda_{n_q}$$

не является целым числом, при этом случай совпадения этих комбинаций исключается: $q = p$, $\lambda_{n_j} = \mu_j$, $A_j = m_j$ ($j = 1, 2, \ldots, p$).

Докажем следующую теорему пикаровского типа с условиями на арифметические показатели:

**Т. III. 1.2.** *Пусть* $\{\lambda_{\nu_j}\}$ — *некоторая линейно изолированная подпоследовательность последовательности* $\Lambda$. *Предположим, что функция* $f(s)$, *определенная рядом* $(A, \Lambda)$ *с* $\sigma_a < \infty$, *может быть аналитически продолжена из* $P_{\sigma'}$ $(\sigma' > \sigma_a)$ *в* $\mathcal{L}D(G^*)$, *где* $G^*$ — *кривая, определенная в* III. 1.1, *Тогда $f(s)$ принимает в $\mathscr{L}D(G^*)$ все значения из круга $C\left(0, \sum|a_{\nu_j}|\right)\left(|s|<\sum|a_{\nu_j}|\right)$, за исключением, быть может, нуля и еще одного значения.*

Известно, что если $a \neq b$, то в комплексной плоскости существует функция $\chi(w)$, обладающая следующими свойствами: α) $\chi(w)$ регулярна в начале координат и, следовательно, в его окрестности $\chi(w)=\sum A_n w^n$; β) $\chi(w)$ можно аналитически продолжить вдоль любой кривой, не проходящей ни через $a$, ни через $b$, причем точки $w=a$, $w=b$ являются точками ветвления для $\chi(w)$; γ) $|\chi(w)|<1$. Очевидно,

$$\overline{\lim}|A_n|^{1/n}=[\min(|a|, |b|)]^{-1}=c^{-1}.$$

Предположим, что вопреки нашему утверждению $f(s)$ не принимает двух значений $a$, $b$, таких, что $a \neq b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $|a|<A=\sum|a_{\nu_j}|$, $|b|<A$, и рассмотрим функцию $F(s)= =\chi \circ f(=\chi(f(s))$, где $\chi$ — только что определенная функция.

Пусть $\sigma'$ удовлетворяет условию $\sum|a_n|e^{-\lambda_n\sigma'}<c$. Тогда ряд

$$\sum|A_m|\left(\sum|a_n|e^{-\lambda_n\sigma'}\right)^m$$

сходится, и, следовательно, при достаточно больших $\sigma$ функция $F(s)$ задается рядом Дирихле

$$F(s)=\sum A_m(f(s))^m=$$
$$=\sum A_n \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_q=n\\ 1\leqslant l_j<\infty\\ j=1,2,\ldots,q}} \frac{n!}{k_1!\ldots k_q!}\, a_{l_1}^{k_1}\ldots a_{l_q}^{k_q}\, e^{-s\left(k_1\lambda_{l_1}+\ldots+k_q\lambda_{l_q}\right)}=$$
$$=\sum C_\nu e^{-L_\nu s},$$

рядом, имеющим некоторую конечную абсциссу абсолютной сходимости. В $\mathscr{L}D(G^*)$ имеем $|F(s)|<1$. В силу предположения о $\{\lambda_{\nu_j}\}$ различные $L_k$, $L_\nu$ (являющиеся линейными комбинациями с целыми положительными коэффициентами чисел $\lambda_{\nu_j}$) отличаются друг от друга на нецелое число. Пусть

$$L_k=m_1\lambda_{\nu_1}+m_2\lambda_{\nu_2}+\ldots+m_p\lambda_{\nu_p}.$$

Для соответствующего коэффициента $C_k$ функции $F(s)$ верно соотношение

$$C_k=\frac{n!\,A_n}{m_1!\ldots m_p!}\,a_{\nu_1}^{m_1}\ldots a_{\nu_p}^{m_p}\quad (m_1+m_2+\ldots+m_p=n).$$

Теорема II. 1.3 позволяет получить такое неравенство:

$$\frac{n!}{m_1! \dots m_p!} |a_{\nu_1}|^{m_1} \dots |a_{\nu_p}|^{m_p} < \frac{B_1}{|A_n|}, \qquad \text{(III. 1)}$$

где $p$, $\nu_1, \dots, \nu_p$ и $n$ заданы, причем это неравенство справедливо для любых целых положительных $m_1, m_2, \dots, m_p$ с условием

$$m_1 + m_2 + \dots + m_p = n.$$

Фиксируем $p$ и целые $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p$. Рассмотрим $p$ положительных постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ с условием $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = 1$, и для каждого $n > 0$ положим

$$m_j = E(n\alpha_j) \quad (1 \leqslant j \leqslant p-1), \quad m_p = n - (m_1 + m_2 + \dots + m_{p-1}).$$

По формуле Стирлинга имеем

$$\lim_n \left(\frac{n!}{m_1! \dots m_p!}\right)^{1/n} = \alpha_1^{-\alpha_1} \dots \alpha_p^{-\alpha_p}.$$

Легко показать, что

$$\alpha_1^{-\alpha_1} \dots \alpha_p^{-\alpha_p} |a_{\nu_1}|^{\alpha_1} \dots |a_{\nu_p}|^{\alpha_p} \leqslant \left(\overline{\lim} |A_n|^{1/n}\right)^{-1} = $$
$$= c = \min(|a|, |b|). \qquad \text{(III. 2)}$$

Для этого достаточно положить в (III. 1) $n = n_j$, где $\{n_j\}$ — последовательность, удовлетворяющая условию $\lim |A_{n_j}|^{1/n_j} = \overline{\lim} |A_n|^{1/n}$, и устремить $j$ к бесконечности.

Можно предположить, что все $a_n$ отличны от нуля; тогда мы положим

$$\alpha_j = |a_{\nu_j}| / (|a_{\nu_1}| + \dots + |a_{\nu_p}|) \quad (1 \leqslant j \leqslant p).$$

Имеем $\alpha_j^{\alpha_j} = \left[|a_{\nu_j}| / (|a_{\nu_1}| + \dots + |a_{\nu_p}|)\right]^{\alpha_j}$, и из (III. 2) сразу вытекает неравенство

$$|a_{\nu_1}| + \dots + |a_{\nu_p}| \leqslant \min(|a|, |b|).$$

Поскольку $p$ произвольно, приходим к противоречию:

$$\sum |a_{\nu_j}| \leqslant \min(|a|, |b|) < A = \sum |a_{\nu_j}|.$$

Теорема III. 1.2, очевидно, более точна, чем теорема III. 1.1 (в то время как теорема III. 1.2 является теоремой пикаровского типа, теорема III. 1.1 является теоремой вейерштрассовского типа, причем радиус «круга распределения значений» в последней теореме меньше).

Мы полагали, что полезно доказать обе теоремы, так как, хотя они по существу и базируются на одной и той же теореме II. 1.3, переход от последней к теореме III. 1.1 элементарен, в то время как для перехода к III. 1.2 необходимо использовать модулярную функцию.

Вот непосредственное следствие теоремы III. 1.2:

**III. 1.3.** *Если* $\{\lambda_n\}$ — *такая последовательность, что никакая комбинация*

$$A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 + \ldots + A_n\lambda_n,$$

*где* $A_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ — *целые числа, не является целым числом, и если выполняются предположения из* III. 1.2 *о* $f(s)$, *то* $f(s)$ *принимает в* $\mathscr{L}D(G^*)$ *все значения из круга* $C(0, \sum |a_n|)$, *за исключением, быть может, нуля и еще одного значения.*

Следует подчеркнуть тот факт, что в теоремах III. 1.1 и III. 1.2 один коэффициент или подмножество коэффициентов, показатели которых отличаются по своей арифметической природе от других показателей, уже могут доставить важные сведения о некоторых свойствах функции; речь идет о тех свойствах, на которые не влияют коэффициенты, соответствующие другим показателям. В теореме III. 1.1 таким свойством является верхняя граница модуля $|f(s)|$ в области, форма которой зависит от характера показателя, а в теореме III. 1.2 — образ этой области при отображении $f$. Ниже мы увидим, что распределение особенностей функции $f$ может в значительной степени определяться коэффициентами, соответствующими в некотором смысле «изолированным» показателям.

## III. 2. Общие теоремы типа Лиувилля и Пикара

Предположим, что верхняя плотность $D^*$ последовательности $\Lambda$ конечна; кроме того, будем теперь предполагать, что ряд $(A, \Lambda)$ сходится во всей плоскости: $\sigma_c = -\infty$. Из $D^* < \infty$ следует, что $\sigma_c = \sigma_a = \lim \ln |a_n|/\lambda_n = -\infty$.

Функция $f(s)$, заданная рядом $(A, \Lambda)$, является, следовательно, целой функцией. Положим для любого вещественного $\sigma$

$$M(\sigma) = \sup_t |f(\sigma + it)|.$$

Если $f \not\equiv 0$, то $M(\sigma) \to \infty$ при $\sigma \to -\infty$. Пусть $f(s) \not\equiv 0$; тогда величина

$$\rho = \overline{\lim_{\sigma \to -\infty}} \frac{\ln \ln M(\sigma)}{-\sigma} \qquad \text{(III. 3)}$$

будет называться *(R)-порядком функции* $f$ (или *порядком Ритта функции* $f$). Не следует путать $R$-порядок функции с порядком этой целой функции в классическом смысле, т. е. с порядком, определяемым равенством

$$\delta = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln \mathcal{M}(r)}{\ln r},$$

где $\mathcal{M}(r) = \max|f(s)|$ $(|s|=r)$. Например, $(R)$-порядок функции $f(s)=e^{-s}$ равен нулю, а ее порядок (обычный, в классическом смысле) равен единице.

Следующее предложение окажется полезным в дальнейшем.

**Т. III. 2.1.** *Пусть*

$$\underline{\lim} \frac{\lambda_n}{\ln n} > 0. \tag{III. 4}$$

*Тогда условие*

$$\overline{\lim} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n \ln\lambda_n} = -\frac{1}{\rho} \tag{III. 5}$$

*необходимо и достаточно для того, чтобы* $(R)$*-порядок функции* $f$ *равнялся* $\rho$.

(Правая часть этого равенства равна $-\infty$, если $(R)$-порядок функции $f$ равен нулю, и обратно.)

Заметим, что мы не налагали ограничения $D^{\bullet} < \infty$; однако из неравенства $D^{\bullet} < \infty$ вытекает (III. 4). Так как в этом пункте предполагается, что $D^{\bullet} < \infty$, $(R)$-порядок функции $f$ всегда может задаваться формулой (III. 5).

Допустим, что $(R)$-порядок функции $f(s)$ конечен. При любом $\sigma$ (см. (I. 10))

$$|a_n| \leqslant M(\sigma)e^{\lambda_n\sigma}.$$

Из (III. 3) следует тогда, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, при достаточно больших $-\sigma$

$$\ln|a_n| \leqslant \ln M(\sigma) + \lambda_n\sigma < e^{-(\rho+\varepsilon)\sigma} + \lambda_n\sigma.$$

Но третий член достигает своего минимума при $\sigma = -\ln[\lambda_n/(\rho+\varepsilon)]/(\rho+\varepsilon)$; эта величина стремится к $-\infty$, когда $n \to +\infty$. Следовательно, при достаточно больших $n$

$$\ln|a_n| \leqslant \min(e^{-(\rho+\varepsilon)\sigma} + \lambda_n\sigma) = \lambda_n(1-\ln(\lambda_n/(\rho+\varepsilon)))/(\rho+\varepsilon),$$

откуда

$$\overline{\lim} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n\ln\lambda_n} \leqslant -\frac{1}{\rho+\varepsilon}.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то

$$\overline{\lim} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n\ln\lambda_n} \leqslant -\frac{1}{\rho}.$$

Очевидно, это неравенство справедливо и при $\rho=\infty$. С другой стороны, если оно выполняется при $\rho<\infty$, то каждому $\varepsilon>0$ можно сопоставить величину $B(\varepsilon)$, такую, что

$$|a_n|\leqslant B(\varepsilon)\,e^{-\lambda_n\ln\lambda_n/(\rho+\varepsilon)}=B(\varepsilon)\,\lambda_n^{-\lambda_n/(\rho+\varepsilon)};$$

это в свою очередь приводит к таким соотношениям:

$$M(\sigma)\leqslant\sum|a_n|\,e^{-\lambda_n\sigma}\leqslant B(\varepsilon)\sum\lambda_n^{-\lambda_n/(\rho+\varepsilon)}e^{-\lambda_n\sigma}\leqslant$$
$$\leqslant B(\varepsilon)\max\left[e^{-\lambda_n\ln\lambda_n/(\rho+2\varepsilon)-\lambda_n\sigma}\right]\sum e^{-a\lambda_n\ln\lambda_n},\qquad(\text{III}.6)$$

причем $a=\varepsilon/(\rho+\varepsilon)(\rho+2\varepsilon)$. Но из (III.4) вытекает, что для некоторой положительной постоянной $b$

$$\sum e^{-a\lambda_n\ln\lambda_n}\leqslant\sum e^{-ab\ln n\ln\lambda_n}=\sum n^{-ab\ln\lambda_n}<\infty.$$

Положим $k=(\rho+2\varepsilon)^{-1}$. Формула (III.6) позволяет тогда записать, что

$$M(\sigma)\leqslant C(\varepsilon)\max e^{-k\lambda_n\ln\lambda_n-\lambda_n\sigma}\leqslant C(\varepsilon)\max e^{-kx\ln x-x\sigma}=$$
$$=C(\varepsilon)\,e^{-(k+2\sigma)}e^{-(1+\sigma/k)}$$

Таким образом, при достаточно больших $-\sigma$

$$\ln M(\sigma)\leqslant e^{-(1/k+\varepsilon)\sigma},$$

что дает

$$\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\frac{\ln\ln M(\sigma)}{-\sigma}\leqslant\rho.$$

Это завершает доказательство теоремы III.2.1.

Определим теперь порядок функции $f$ в горизонтальной полосе. Обозначим через $S=S(t_0, a)$ полосу $|t-t_0|<a$. Пусть $f(s)$ — функция, голоморфная в замкнутой полосе $|t-t_0|\leqslant a$. Для любого $\sigma$ положим

$$M_S(\sigma)=\max_{|t-t_0|\leqslant a}|f(\sigma+it)|.$$

Величина

$$\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\frac{\ln\ln M_S(\sigma)}{-\sigma}=\rho_s$$

называется *порядком функции $f$ в полосе $S$*.

Мы можем теперь доказать следующую важную теорему:

**Т. III.2.2.** *Допустим, что шаг последовательности $\Lambda$ положителен. Предположим, что функция $f$, заданная рядом $(A, \Lambda)$, является целой. Тогда порядок функции $f$ в любой полосе $S=S(t_0, \pi a)$ с $a>\overline{D}^{\bullet}$ равен $(R)$-порядку функции $f$ (во всей плоскости).*

Пусть $\rho$ есть $(R)$-порядок функции $f$, и пусть $\rho_S$ — ее порядок в полосе $S(t_0, \pi a)$ (с $\bar{D}^* < a$). Ясно, что $\rho_S \leqslant \rho$. Следовательно, достаточно доказать неравенство $\rho_S \geqslant \rho$. Кроме того, можно ограничиться случаем $\rho > 0$, ибо ниже будет показано, что $\rho_S \geqslant 0$ для $f \not\equiv 0$. Положим

$$M_1(\sigma') = \max_{s \in C} |f(s)|,$$

где $C = C(\sigma' + it_0, \pi a)$. Из теоремы II.2.1 следует, что при любом $\sigma$ и любом $n \geqslant 1$

$$\ln M_1(\sigma) \geqslant \ln |a_n| - \ln \Lambda_n - \lambda_n \sigma - \ln C(a). \qquad \text{(III. 7)}$$

В силу (III. 5) каждому $\varepsilon > 0$ соответствует последовательность целых положительных чисел $\{n_j\}$, таких, что

$$\ln |a_{n_j}| \geqslant -\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon\right) \lambda_{n_j} \ln \lambda_{n_j} \quad (j \geqslant 1), \qquad \text{(III. 8)}$$

и в силу теоремы I. 1.1 существует постоянная $P$, такая, что

$$\ln \Lambda_n \leqslant P \lambda_n \quad (n \geqslant 1). \qquad \text{(III. 9)}$$

Неравенства (III. 7), (III. 8) и (III. 9) дают при $j > j_\varepsilon$ и всех $\sigma$ ($j_\varepsilon$ от $\sigma$ не зависит)

$$\ln M_1(\sigma) \geqslant -\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon\right) \lambda_{n_j} \ln \lambda_{n_j} - (P + \sigma) \lambda_{n_j} - C \geqslant$$

$$\geqslant -\left(\frac{1}{\rho} + 2\varepsilon\right) \lambda_{n_j} \ln \lambda_{n_j} - \sigma \lambda_{n_j}. \qquad \text{(III. 10)}$$

Здесь $C$ — постоянная, не зависящая от $\sigma$ и $j$. Полагая, в частности, в (III. 10) $\sigma = -(1/\rho + 3\varepsilon) \ln \lambda_{n_j}$, получаем при $j \geqslant j_\varepsilon$

$$\ln M_1 \left[ -\left(\frac{1}{\rho} + 3\varepsilon\right) \ln \lambda_{n_j} \right] \geqslant \varepsilon \lambda_{n_j} \ln \lambda_{n_j}. \qquad \text{(III. 11)}$$

Итак, каждому $\sigma$ соответствует $\alpha$ с $|\alpha| \leqslant \pi a$, для которого

$$M_S(\sigma + \alpha) \geqslant M_1(\sigma). \qquad \text{(III. 12)}$$

Обозначим через $\alpha_j$ значение $\alpha$, соответствующее

$$\sigma = -\left(\frac{1}{\rho} + 3\varepsilon\right) \ln \lambda_{n_j}.$$

Тогда в силу (III. 11) и (III. 12) имеем

$$\ln M_S \left[ -\left(\frac{1}{\rho} + 3\varepsilon\right) \ln \lambda_{n_j} + \alpha_j \right] \geqslant \varepsilon \lambda_{n_j} \ln \lambda_{n_j},$$

что позволяет написать такое неравенство:

$$\varlimsup_{\sigma\to-\infty}\frac{\ln\ln M_S(\sigma)}{-\sigma}\geqslant\varlimsup_{j\to\infty}\frac{\ln\ln M_S\left[-\left(\frac{1}{\rho}+3\varepsilon\right)\ln\lambda_{n_j}+\alpha_j\right]}{\left(\frac{1}{\rho}+3\varepsilon\right)\ln\lambda_{n_j}-\alpha_j}\geqslant$$

$$\geqslant\varlimsup\ln\lambda_{n_j}\Big/\left(\frac{1}{\rho}+3\varepsilon\right)\ln\lambda_{n_j}=\left(\frac{1}{\rho}+3\varepsilon\right)^{-1},$$

а поскольку $\varepsilon>0$ произвольно, теорема при $\rho>0$ доказана.

Из (III. 7) следует, что если $f\not\equiv 0$, то $\lim M_S(\sigma)=\infty$ $(\sigma\to-\infty)$ и необходимо $\rho_S\geqslant 0$. Теорема доказана полностью.

Перейдем теперь к обобщениям теорем Лиувилля и Пикара на общие ряды Дирихле ($D^{\bullet}<\infty$). Начнем со следующего определения. Пусть $s(u)=\sigma(u)+it(u)$ — комплекснозначная непрерывная функция от вещественной переменной $u\in\,]-\infty,\infty[$, такая, что

$$\lim_{u\to\infty}\sigma(u)=\infty,\qquad\lim_{u\to-\infty}\sigma(u)=-\infty,$$

причем $t(u)=t_0$ при $\sigma\geqslant\sigma_0$, а $t_0$ и $\sigma_0$ — постоянные. Если $R>0$, то объединение кругов $C(s(u),R)$ $(u\in\,]-\infty,\infty[)$ называется *криволинейной полосой ширины* $2R$ (*горизонтальной справа*), *идущей в* $-\infty$. Такая полоса будет обозначаться через $B(s(u),R)$. Горизонтальные полосы $S$, которые рассматривались выше, соответствуют случаю $t(u)=t_0$ при всех $u$.

Множество, образованное точками $s(u)$, называетсв *центральной линией полосы* $B$. Сформулируем обобщение теоремы Лиувилля.

**Т. III. 2.3.** *Пусть $D^{\bullet}<\infty$, и пусть $\sigma_c<\infty$ для ряда $(A,\Lambda)$. Если функция $f(s)$, заданная рядом $(A,\Lambda)$, может быть аналитически продолжена вдоль криволинейной полосы $B$ ширины $2\pi R$ $(R>\bar{D}^{\bullet})$, идущей в $-\infty$, и если это продолжение ограничено в $B$, то $f$ является тождественным нулем* (*т. е.* $a_n=0$ $(n\geqslant 1)$).

Эта теорема немедленно следует из теоремы II. 2.1, в которой следует положить $s_0=s(u)$, а затем $u$ устремить к $-\infty$.

Приведем теперь общую теорему пикаровского типа.

**Т. III. 2.4.** *Предположим, что $D^{\bullet}<\infty$ и что функция $f(s)$, заданная рядом $(A,\Lambda)$ (с $\sigma_c<\infty$), может быть аналитически продолжена вдоль полосы $B(s(u),\pi R)$ $(R>\bar{D}^{\bullet})$, идущей в $-\infty$; пусть $f\not\equiv 0$.*

*Тогда, какова бы ни была последовательность $\{u_n\}$ с $\lim u_n=-\infty$, справедливо одно из следующих утверждений:*

*1) $f(s)$ принимает на множестве кругов $C(s(u_n),\pi R)$ все значения, за исключением, быть может, одного;*

2) *каково бы ни было число* $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < R$,

$$\lim f(s) = \infty$$

*равномерно относительно* $s$, *когда* $n \to \infty$ *и* $s \in C(s(u_n), \pi(R-\varepsilon))$.

*Если* $s(u) \in \mathbf{R}$ *при* $u < u'$ $(s(u) = \sigma(u))$, *то в предыдущей формулировке круги* $C(s(u_n), \pi R)$, $C(s(u_n), \pi(R-\varepsilon))$ *можно заменить соответственно квадратами:*

$$|\sigma - \sigma(u_n)| < \pi R, \quad |t| < \pi R;$$
$$|\sigma - \sigma(u_n)| < \pi(R-\varepsilon), \quad |t| < \pi(R-\varepsilon).$$

Рассмотрим семейство $\mathcal{F}$ голоморфных функций

$$f_n(s) = f(s + s(u_n)),$$

определенных в круге $C = C(0, \pi R)$. Если утверждение 1 не имеет места, то это семейство нормально в $C$[1]). Но никакая последовательность, выбранная из семейства $\mathcal{F}$, не может быть ограниченной в круге $C$, ибо тогда по теореме II.2.1 $f(s) \equiv 0$. Следовательно, если утверждение 1 не имеет места, то из всякой последовательности функций $f_n(s)$ можно выбрать такую подпоследовательность, которая равномерно стремится к бесконечности в любом замкнутом круге, лежащем внутри $C$. Отсюда сразу следует, что имеет место утверждение 2. Последняя часть теоремы доказывается аналогичным образом.

Следующие леммы будут использованы в дальнейшем.

**III.2.5.** *Пусть* $\mathcal{F}$ — *семейство функций* $\varphi(s)$, *голоморфных в области* $\mathcal{D}$ *и таких, что* $|\varphi(s)| > 1$ *в* $\mathcal{D}$. *Тогда каждой ограниченной области* $\mathcal{D}_1$, $\overline{\mathcal{D}}_1 \subset \mathcal{D}$, *соответствует такая постоянная* $\alpha$, *что*

$$\frac{1}{\alpha} < \frac{\ln|\varphi(s_1)|}{\ln|\varphi(s_2)|} < \alpha,$$

*если* $\varphi \in \mathcal{F}$; $s_1$, $s_2 \in \overline{\mathcal{D}}_1$.

В самом деле, семейство гармонических функций

$$\Psi_{s_2}(s) = \frac{\ln|\varphi(s)|}{\ln|\varphi(s_2)|},$$

где $\varphi$ — какая-нибудь функция из $\mathcal{F}$ и $s_2$ — любая точка из $\overline{\mathcal{D}}_1$, является нормальным в $\mathcal{D}$, так как каждая функция $\Psi_{s_2}(s)$ положительна в $\mathcal{D}$. Это означает, что рассматриваемое семейство ограничено на $\overline{\mathcal{D}}_1$, так как $\Psi_{s_2}(s_2) = 1$, каково бы ни было $s_2 \in \overline{\mathcal{D}}_1$. Достаточно сделать то же замечание, заменяя $s_2$ на $s_1$, чтобы получить требуемое утверждение.

---

[1]) См. Валирон Ж., Аналитические функции, ГИТТЛ, М, 1957; Монтель П., Нормальные семейства аналитических функций, М.— Л., 1936. — *Прим. перев.*

**III.2.6.** *Пусть $a$ и $b$, $0 < a < b$, — постоянные, и пусть $F(s)$ — функция, голоморфная в горизонтальной полосе $S(t_0, b)$. Если порядок этой функции в полосе $S(t_0, a)$ бесконечен, то при $\sigma \to -\infty$ она не может равномерно стремиться к бесконечности в $S(t_0, b)$.*

Предположим, что вопреки нашему утверждению $F(s)$ при $\sigma \to -\infty$ равномерно стремится к бесконечности в $S(t_0, b)$. Рассмотрим семейство $\mathcal{F}$ функций $F_d(s) = F(s+d)$, где $d$ — произвольное отрицательное число, а $s$ изменяется в квадрате $\Delta_1 : |\sigma - \sigma_0| < b$, $|t - t_0| < b$. Тогда

$$\lim_{d \to -\infty} F_d(s) = \lim_{d \to -\infty} F(s+d) = \infty$$

равномерно по $s \in \Delta_1$. Если $\sigma_0 < 0$ достаточно велико по абсолютной величине, то для всех $d \leqslant 0$, $s \in \Delta_1$ имеем $|F_d(s)| > 1$. Обозначим через $n(l)$ целую часть от $-l/2a$. Применяя лемму III.2.5 к семейству $F_d(s)$ $(d < 0)$, видим, что, каковы бы ни были $s \in \overline{\Delta}_2$ и $s' \in \overline{\Delta}_2$, где $\overline{\Delta}_2$ — замкнутый квадрат $|\sigma - \sigma_0| \leqslant a$, $|t - t_0| \leqslant a$, существует постоянная $\alpha > 1$, такая, что

$$\frac{\ln|F_d(s)|}{\ln|F_d(s')|} < \alpha. \qquad \text{(III. 13)}$$

Пусть теперь $\sigma_1 < 0$ достаточно велико по абсолютной величине; запишем неравенства (III. 13) для $d$, $s$ и $s'$, выбранных следующум образом:

1) $d = \sigma_1$, $s$ — любое число из $\overline{\Delta}_2$, $s' = \sigma_0 + a$;
2) $d = \sigma_1 + 2ka$ $(1 \leqslant k \leqslant n(\sigma_1))$, $s = \sigma_0 - a$, $s' = \sigma_0 + a$;
3) $d = 0$, $s = \sigma_0 + a + 2an(\sigma_1) + \sigma_1$, $s' = \sigma_0 - a$.

Перемножая эти неравенства и используя соотношение

$$F_{\sigma_1 + 2ka}(\sigma_0 + a) = F_{\sigma_1 + 2(k+1)a}(\sigma_0 - a),$$

получаем для $s \in \overline{\Delta}_2$

$$\ln|F(\sigma_1 + s)| = \ln|F_{\sigma_1}(s)| \leqslant \alpha^{n(\sigma_1)+1} \ln|F(\sigma_1 + \sigma_0 + a + 2n(\sigma_1)a)| \leqslant$$
$$\leqslant \alpha^{n(\sigma_1)+2} \ln|F(\sigma_0 - a)| \leqslant \alpha^{2-\sigma_1/2a} \ln|F(\sigma_0 - a)|.$$

Из определения порядка в горизонтальной полосе следует, что

$$\rho_S \leqslant \ln\alpha/2a < \infty,$$

где $S = S(t_0, a)$. Это противоречит нашему предположению, и лемма доказана.

Объединяя III.2.2, III.2.4 и III.2.6, получаем следующую теорему:

**Т. III.2.7.** *Пусть шаг последовательности $\Lambda$ положителен. Предположим, что функция $\mathfrak{f}(s)$, заданная рядом $(A, \Lambda)$,* *является целой функцией, ($R$)-порядок которой равен бесконечности. Тогда в каждой горизонтальной полосе* $S(t_0, \pi a)$, $a > \overline{D}^{\bullet}$, *функция* $f(s)$ *принимает все значения, за исключением, быть может, одного, бесконечное множество раз.*

Заметим, что лемма III. 2.6 является частным случаем теоремы Бибербаха — Валирона, которую можно сформулировать следующим образом:

**III. 2.8.** *Пусть* $a$ *и* $b$, $0 < a < b$,— *постоянные числа. Если функция* $F(s)$ *голоморфна в полосе* $S(t_0, \pi b)$ *и если порядок* $F(s)$ *в полосе* $S(t_0, \pi a)$ *больше, чем* $1/2a$, *то эта функция принимает в любой полуполосе*

$$|t - t_0| < \pi b, \qquad \sigma < \sigma_1,$$

*все значения, за исключением, быть может, одного.*

Доказательство этой теоремы можно найти у Валирона [2].

Объединяя теоремы III. 2.2 и III. 2.8, получаем следующий результат:

**Т. III. 2.9.** *Если шаг последовательности* $\Lambda$ *положителен и* $\rho$ — *порядок целой функции, заданной рядом* $(A, \Lambda)$ $(\sigma_c = -\infty)$, *то* $f(s)$ *принимает в каждой горизонтальной полосе* $S(t_0, \pi a)$, $a > \max(\overline{D}^{\bullet}, 1/2\rho)$, *все значения, за исключением, быть может, одного, бесконечное множество раз.*

Глава IV

# Особенности функций, представимых рядом Тейлора

## IV. 1. Особенности рядов Тейлора

В этом пункте рассматривается случай $\lambda_n = n$, и, вместо того чтобы записывать ряд в форме Тейлора-Д: $\sum a_n e^{-ns}$, мы представим его в более привычной форме: $\sum a_n z^n$ $(z = x + iy)$. Существует обширная литература, посвященная аналитическому продолжению ряда Тейлора, распределению его особенностей, их природе и т. д. Однако мы возвращаемся к этим вопросам, так как хотим сначала изложить общую теорему, которая по отношению к аргументам особых точек (расположенных на окружности сходимости) играет роль, сходную с той ролью, которую играет теорема Адамара по отношению к модулям особых точек (формула Коши — Адамара, доставляющая радиус сходимости). Наша теорема является весьма общей и имеет много приложений. Поскольку ряд Тейлора-Д является весьма важным частным случаем общего ряда Дирихле, мы сочли полезным посвятить этому вопросу настоящую главу.

Вот теорема об аргументах особых точек:

**T. IV. 1.1.** *Пусть* $R$ $(0 < R < \infty)$ — *радиус сходимости ряда*

$$F(z) = \sum a_n z^n. \tag{IV. 1}$$

*Положим для* $h \geqslant 0$

$$D(h) = \overline{\lim} \left| a_0 h^n + C_n^1 a_1 h^{n-1} + \ldots + a_n \right|^{1/n}.$$

*Тогда функция* $D(h)$ *непрерывна в точке* $h = 0$ *и имеет в* $h = 0$ *производную справа*

$$D'_+(0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{D(h) - D(0)}{h},$$

*удовлетворяющую неравенству*

$$|D'_+(0)| \leqslant 1.$$

*Если положить*

$$D'_+(0) = \cos \varphi,$$

*то одна из точек $Re^{i\varphi}$, $Re^{-i\varphi}$ является особой точкой ряда* (IV. 1) *и притом ближайшей (из всех особых точек на окружности сходимости) к точке $z=R$* [1]).

Рассмотрим ряд

$$g_0(z)=\sum \frac{a_n}{z^n}. \tag{IV. 2}$$

Если $z_0$ — особая точка функции $F(z)$, то $z_0^{-1}$ — особая точка функции $g_0(z)$, и обратно.

Радиус сходимости ряда (IV. 2) равен $R^{-1}=D(0)$.

Так как функция $g_0(z+h)/z$ регулярна в бесконечности, то для достаточно больших $|z|$ можно написать, что

$$g_0(z)\frac{z+h}{z}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{d_n(h)}{(z+h)^n}=g_h(z) \tag{IV. 3}$$

с

$$d_n(h)=\frac{-1}{2\pi i}\oint\frac{g_0(z)}{z}(z+h)^n dz=$$
$$=\frac{-1}{2\pi i}\oint\frac{g_0(z)}{z}\left(z^n+C_n^1 z^{n-1}h+\ldots+h^n\right)dz=$$
$$=a_n+C_n^1 a_{n-1}h+\ldots+a_0h^n.$$

Радиус сходимости ряда (IV. 3) равен $D(h)$. Функции $g_0(z)$ и $g_h(z)$ имеют одни и те же особые точки, за исключением, возможно, точки $z_0=-h$, которая может быть особой для функции $g_0(z)$, но не для $g_h(z)$.

Обозначим через $S^+(h)$ и $S^-(h)$ соответственно области $|z+h|>D(h)$ и $|z+h|<D(h)$, а через $C(h)$ — их общую границу. Поскольку все особые точки функции $g_h(z)$ лежат в $\overline{S}^-(h)=S^-(h)\cup C(h)$ и поскольку, по крайней мере, одна особая точка функции $g_h(z)$ лежит на $C(h)$, ясно, что $D(h)>0$ при достаточно малых $h$, что множество $I(h)=S^-(h)\cap S^-(0)$ непусто и что все особые точки функции $g_0(z)$ лежат на $\overline{I}(h)$. Если $z_0=R$ — особая точка функции $F(z)$, то $z=D(0)$ является особой точкой функции $g_0(z)$, и так как $h\geqslant 0$, то

$$D(h)=D(0)+h.$$

Следовательно, в этом случае теорема тривиальна. Предположим, что $F(z)$ регулярна в $z_0=R$; тогда $g_0(z)$ регулярна в $z=D(0)$. Поскольку $I(z)$ непусто,

$$D(0)-h\leqslant D(h)\leqslant D(0)+h.$$

---

[1]) Напомним, что ряд Тейлора с радиусом сходимости $R$ *имеет в точке* $z_0$, $|z_0|=R$, *особенность*, если при любом $\varepsilon>0$ не существует голоморфной в круге $C(z_0, \varepsilon)$ функции, совпадающей с рядом в $C(0, R)\cap C(z_0, \varepsilon)$.

Иначе говоря, функция $D(h)$ непрерывна в точке $h=0$. Обозначим через $Re^{i\varphi}$ особую точку функции $F(z)$ на $|z|=R$ с наименьшим по абсолютному значению аргументом (или одну из таких точек, если $F(z)$ имеет особенности в точках $Re^{i\varphi}$, $Re^{-i\varphi}$). Точка $q=D(0)e^{-i\varphi}$ является особой точкой функции $g_0(z)$ на $|z|=D(0)$ с наименьшим по абсолютному значению аргументом. Обозначим через $A(h)$ дугу окружности $C(h)$, лежащую внутри $C(0)$. Поскольку $g_h(z)$ не имеет особых точек на $C(h)-\bar{A}(h)$, на $\bar{A}(h)$ лежит по крайней мере одна особая точка функции $g_h(z)$. Функция $g_0(z)$ не имеет особых точек на той части окружности $C(0)$, которая лежит вне $C(h)$. Поскольку точки $-h+D(h)e^{i\theta}$ окружности $C(h)$ стремятся к точкам окружности $C(0)$ равномерно по $\theta$, причем точки дуги $A(h)$ стремятся к точкам дуги $D(0)e^{i\psi}$, $|\psi|\leqslant\varphi$, и так как множество особых точек замкнуто, ясно, что точки пересечения окружностей $C(0)$ и $C(h)$ стремятся соответственно к $D(0)e^{i\varphi}$ и $D(0)e^{-i\varphi}$.

Пусть $x_h \pm iy_h$ — точки пересечения окружностей $C(0)$ и $C(h)$; тогда

$$x_h=\frac{D^2(h)-D^2(0)}{2h}-\frac{h}{2}, \tag{IV.4}$$

и в силу только что полученных результатов имеем

$$\lim_{h\downarrow 0} x_h=\lim_{h\downarrow 0}\frac{D^2(h)-D^2(0)}{2h}=D(0)\lim_{h\downarrow 0}\frac{D(h)-D(0)}{h}=D(0)\cos\varphi,$$

и теорема доказана.

Мы покажем, что, сохраняя вид слагаемых в сумме $d_n(h)$, можно пренебречь некоторым их числом (которое зависит от $n$ и от $h$). Это делает формулу более удобной для получения различных результатов. Например, будет доказана довольно любопытная теорема о распределении особенностей ряда $F(z)$ на его окружности сходимости. В дальнейшем мы постараемся выявить различие между этой теоремой и классическими «лакунарными» результатами.

Начнем с нескольких лемм.

**IV. 1.2.** *Пусть* $\overline{\lim}|a_n|^{1/n}=1$, *и пусть* $\alpha\leqslant 0$, $\lambda>0$ *таковы, что*

$$\alpha>\frac{\lambda}{1+\lambda}-\ln(1-\lambda). \tag{IV.5}$$

*Пусть* $\{u_j\}$ — *последовательность положительных чисел, стремящихся к нулю, и пусть каждому* $j$ *соответствует последовательность* $\{m_n^j\}$ *целых положительных чисел, таких, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|a_{m_n^j}\right|^{1/m_n^j}\geqslant 1+\alpha u_j+o(u_j) \qquad (j\to\infty), \tag{IV.6}$$

*причем*

$$a_m=0, \quad \text{если} \quad m \in \left]m_n^j(1-\lambda u_j),\ m_n^j(1+u_j)\right[, \qquad m \neq m_n^j.$$

*Положим* $h_j=u_je^{-\alpha}$, $\nu_n^j=E\left[m_n^j(1+u_j)\right]$ (*Ea означает целую часть от а*). *Тогда*

$$\overline{\lim_n}\left|d_{\nu_n^j}(h_j)\right|^{1/\nu_n^j} \geqslant 1+e^{\alpha}h_j+o(h_j) \quad (j\to\infty), \tag{IV.7}$$

*где*

$$d_n(h)=a_0h^n+C_n^1a_1h^{n-1}+\ldots+a_n. \tag{IV.8}$$

Замечание. Условие (IV.5) выполняется, в частности, если $\alpha$ и $\lambda$ удовлетворяют одному из следующих условий:

1) $\lambda=1$, $\alpha>\frac{1}{2}-\ln 2$;

2) $\alpha=0$, $\lambda>0$ любое.

Для доказательства леммы IV.1.2 нам необходимы леммы IV.1.3 и IV.1.4.

**IV.1.3.** *Пусть* $\overline{\lim}\,|a_n|^{1/n}=1$, $\delta>1$, *и пусть* $\{p_n\}$ *и* $\{q_n\}$ — *две последовательности целых положительных чисел, стремящихся к бесконечности. Если при* $h>0$

$$\overline{\lim}\,(q_n/p_n)\leqslant 1-\delta h, \tag{IV.9}$$

*то*

$$\overline{\lim}\left|a_0h^{p_n}+C_{p_n}^1a_1h^{p_n-1}+\ldots+C_{p_n}^{q_n}a_{q_n}h^{p_n-q_n}\right|^{1/p_n}\leqslant$$
$$\leqslant 1+\delta(1-\ln\delta)h+o(h) \quad (h\to 0). \tag{IV.10}$$

Положим

$$\delta_n(h)=a_0h^{p_n}+C_{p_n}^1a_1h^{p_n-1}+\ldots+C_{p_n}^{q_n}a_{q_n}h^{p_n-q_n}.$$

Ясно, что, каково бы ни было $a>1$,

$$\overline{\lim}\,|\delta_n(h)|^{1/p_n}\leqslant\overline{\lim}\left\{1+C_{p_n}^1\left(\frac{a}{h}\right)+\ldots+C_{p_n}^{q_n}\left(\frac{a}{h}\right)^{q_n}\right\}^{1/p_n}h.$$

Каково бы ни было $b>0$, имеем также

$$P_n(w)=1+C_{p_n}^1w+\ldots+C_{p_n}^{q_n}w^{q_n}=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint\left(1+\frac{w}{2}\right)^{p_n}(1+z+\ldots+z^{q_n})\frac{dz}{z},$$

причем интеграл берется по $|z|=b$; следовательно, при $b>1$

$$|P_n(w)|\leqslant\left(1+\frac{|w|}{b}\right)^{p_n}q_nb^{q_n}.$$

С учетом (IV. 9) это дает

$$\overline{\lim} |P_n(w)|^{1/p_n} \leqslant (b + |w|)\, b^{-\delta h}.$$

Для получения (IV. 10) достаточно теперь положить $w = h/a$, $a > 1$, $b = \delta$ с $a \downarrow 1$.

**IV. 1.4.** *Сохраняя обозначения и предположения леммы* IV. 1.3, *допустим, что* $c > \delta(1 - \ln \delta)$. *Если*

$$\overline{\lim} \left| C_{p_n}^{q_n} h^{p_n - q_n} + \ldots + a_{p_n} \right|^{1/p_n} \geqslant 1 + ch + o(h),$$

*то*

$$\overline{\lim} \left| d_{p_n}(h) \right|^{1/p_n} \geqslant 1 + ch + o(h) \quad (h \to 0),$$

*где* $d_n(h)$ *задается формулой* (IV. 7).

Эта лемма немедленно следует из леммы IV. 1.3 (в которой $q_n$ заменяется на $q_n - 1$).

Докажем теперь лемму IV. 1.2. Пусть $\varepsilon > 0$, и пусть при фиксированном $j$

$$p_n = E\left[m_n^j (1 + u_j)\right], \quad q_n = E\left[m_n^j (1 - \lambda u_j)\right] \quad (n \geqslant 1).$$

Если $j$ достаточно велико ($u_j$ достаточно мало), то, с одной стороны,

$$\overline{\lim} \frac{q_n}{p_n} = \frac{1 - \lambda u_j}{1 + u_j} = 1 + (1 + \lambda) u_j + o(u_j) =$$
$$= 1 - (1 + \lambda) e^{\alpha} h_j + o(h_j) \leqslant 1 - \{(1 + \lambda) e^{\alpha} - \varepsilon\} h_j, \quad \text{(IV. 11)}$$

а, с другой стороны,

$$\overline{\lim} \left| C_{p_n}^{q_n} a_{q_n} h^{p_n - q_n} + \ldots + a_{p_n} \right|^{1/p_n} = \overline{\lim} \left| C_{p_n}^{m_n^j} a_{m_n^j} h^{p_n - m_n^j} \right|^{1/p_n} \geqslant$$
$$\geqslant (1 + u_j) \left( \frac{h_j}{u_j} \right)^{u_j/(1 - u_j)} (1 + \alpha u_j + o(u_j))^{1/(1 + u_j)} =$$
$$= 1 + e^{\alpha} h_j + o(h_j) \quad (j \to \infty).$$

Из (IV. 11) следует, что при достаточно больших $j$

$$\overline{\lim} \frac{q_n}{p_n} \leqslant 1 - \delta h_j \quad (\delta = (1 + \lambda) e^{\alpha} - \varepsilon),$$
$$c = e^{\alpha} > \delta (1 - \ln \delta);$$

поэтому IV. 1.2 следует из IV. 1.4.

Теперь мы можем доказать следующую теорему:

**Т. IV. 1.5.** *Пусть*

$$F(z)=\sum a_n z^n$$

*— ряд Тейлора с радиусом сходимости* 1, *и пусть* $\lambda>0$, $0\geqslant\alpha>\lambda/(1-\lambda)-\ln(1+\lambda)$. *Пусть* $\{h_j\}$ *— последовательность положительных чисел, стремящихся к нулю. Предположим, что каждому* $j$ *соответствует такая последовательность целых положительных чисел* $\{m_n^j\}$ *и такая последовательность положительных чисел* $\{\beta_n^j\}$, *что*

1) $\mathscr{R}\left(a_m e^{i\beta_n^j}\right)\geqslant 0$, *если* $m\in\left](1-\lambda h_j)\,m_n^j,\ (1+h_j)\,m_n^j\right[$ [1];

2) $\overline{\lim}\left|\mathscr{R}\left(a_{m_n^j}e^{i\beta_n^j}\right)\right|^{1/m_n^j}\geqslant 1+\alpha h_j+o(h_j)\quad(j\to\infty)$.

*Тогда ряд* $F(z)$ *имеет по крайней мере одну особую точку* $e^{i\theta}$ *с*

$$|\theta|\leqslant|\arccos e^{\alpha}|\quad\left(|\arccos e^{\alpha}|\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

Следствие. *Пусть* $F$, $\alpha$, $\lambda$ *определены так же, как в теореме* IV. 1.5, *и* $\{u_j\}$ *— последовательность, стремящаяся к нулю. Предположим, что каждому* $j$ *соответствует такая последовательность целых положительных чисел* $m_n^j$, *что*

$$\begin{gathered}\overline{\lim}\left|a_{m_n^j}\right|^{1/m_n^j}\geqslant 1+\alpha u_j+o(u_j)\quad(j\to\infty),\\ a_m=0\quad\text{при}\quad m\in\left](1-\lambda h_j)\,m_n^j,\ (1+h_j)\,m_n^j\right],\quad m\neq m_n^j.\end{gathered}\tag{IV. 12}$$

*Тогда на каждой дуге окружности* $|z|=1$ *раствора* $2|\arccos e^{\alpha}|$ ($|\arccos e^{\alpha}|\leqslant\pi/2$) *имеется особая точка.*

Для доказательства теоремы IV. 1.5 достаточно положить

$$\nu_n^j=E\left[m_n^j(1+u_j)\right],\quad h_j=u_je^{-\alpha}$$

и заметить, что в силу леммы IV. 1.2 справедливы неравенства

$$\overline{\lim}\left|d_{\nu_n^j}(h_j)\right|^{1/\nu_n^j}\geqslant$$

$$\geqslant\overline{\lim}\left|\mathscr{R}\left(\left(a_0h_j^{\nu_n^j}+C_{\nu_n^j}^1a_1h_j^{\nu_n^j-1}+\ldots+a_{\nu_n^j}\right)e^{i\beta_n^j}\right)\right|^{1/\nu_n^j}\geqslant$$

$$\geqslant 1+e^{\alpha}h_j+o(h_j).$$

Поэтому, обозначая через $e^{i\varphi}$ особую точку функции $F(z)$ на $|z|=1$, ближайшую к $z=1$, имеем

$$\cos\varphi=D'_+(0)=\lim_{h\downarrow 0}\frac{D(h)-1}{h}\geqslant e^{\alpha},$$

---

[1]) $\mathscr{R}(a)$ означает вещественную часть числа $a$.

что доказывает теорему по крайней мере в случае, когда особая точка принадлежит дуге с центром в $z=1$ длины $2|\arccos e^{\alpha}|$. Общий случай доказывается теперь с помощью вращения.

Между теоремой IV. 1.5 и ее следствием, с одной стороны, и более старыми теоремами из того же круга идей, с другой стороны, имеется существенное различие.

В классических теоремах рассматривается поведение коэффициентов $a_m$ при изменении индекса $m$ в интервалах около индексов $m_n$, соответствующих «основным» коэффициентам, т. е. таким, для которых $\lim|a_{m_n}|^{1/m_n}=1$ (все другие $a_m$ равны, например, нулю, как это было в следствии теоремы IV. 1.5), причем длина каждого из этих интервалов пропорциональна $m_n$ с фиксированным коэффициентом пропорциональности. Здесь, напротив, мы ввели интервалы около индексов $m_n^j$ без предположения, что любая последовательность $\left\{a_{m_n^j}\right\}$ (при фиксированном $j$) будет «основной» (см. (IV. 12)), причем коэффициенты пропорциональности длин этих интервалов уменьшаются, а влияние последовательности $\left\{a_{m_n^j}\right\}$ возрастает (с уменьшением $u_j$ в (IV. 12); при этом $\alpha$ предполагается неотрицательным). Этот коэффициент пропорциональности $(\lambda+1)h_j$ стремится к нулю при $j\to\infty$, в то время как выражение

$$\overline{\lim_n}\left|a_{m_n^j}\right|^{1/m_n^j}$$

(в (IV. 12)) никогда не может равняться единице (если $\alpha<0$), но стремится к единице при $j\to\infty$.

Мы закончим эту главу следующей теоремой, которая по существу базируется на теореме IV. 1.1.

**Т. IV. 1.6.** *Если радиус сходимости ряда* (IV. 1) *равен единице, если*

$$\lim|a_{n_j}|^{1/n_j}=1$$

*и если существует такая постоянная* $\delta>0$, *что ни один из многочленов*

$$d_{n_j}(z)=a_0z^{n_j}+C_{n_j}^1a_1z^{n_j-1}+\ldots+a_{n_j}\quad (j=1,\ 2,\ \ldots)$$

*не обращается в нуль в круге* $|z|<\delta$, *то* $F(z)$ *имеет по крайней мере одну особую точку* $e^{i\varphi}$ *с*

$$\cos\varphi\geqslant\overline{\lim}\,\mathcal{R}\left(\frac{a_{n_j-1}}{a_{n_j}}\right).$$

Из этой теоремы следует, что если $\overline{\lim}\,\mathcal{R}(a_{n_j-1}/a_{n_j})=1$ и если выполняются другие условия теоремы, то $z=1$ — особая точка ряда (IV. 1).

Сохраняя обозначения теоремы IV. 1.1, при $h\geqslant 0$ имеем

$$\ln D(h)=\overline{\lim}\,\frac{\ln|d_n(h)|}{n}\geqslant\overline{\lim}\,\frac{\ln|d_{n_j}(h)|}{n_j}. \qquad \text{(IV. 13)}$$

Существуют постоянные $k>0$ и $L>0$, такие, что $|a_n|<$ $<Lk^n$ $(n\geqslant 0)$; следовательно,

$$|d_n(z)|=|a_0z^n+C_n^1a_1z^{n-1}+\ldots+a_n|\leqslant$$
$$\leqslant L(|z|^n+C_n^1k|z|^{n-1}+\ldots+k^n)=L(|z|+k)^n.$$

Так как $d_{n_j}(z)$ не обращается в нуль в круге $|z|<\delta$, можно определить $\arg d_{n_j}(z)$ в этом круге по непрерывности, полагая $\arg d_{n_j}(0)=\arg a_{n_j}$, причем $\arg a_{n_j}\in[0,\ 2\pi[$. Тогда функции $\ln d_{n_j}(z)=\ln|d_{n_j}(z)|+i\arg d_{n_j}(z)$ голоморфны в $|z|<\delta$, причем их вещественные части удовлетворяют неравенству

$$\mathcal{R}\ln d_{n_j}(z)=\ln|d_{n_j}(z)|\leqslant\ln L+n_j\ln(k+\delta).$$

Вещественные части функций

$$\varphi_{n_j}(z)=\frac{\ln d_{n_j}(z)}{n_j}$$

ограничены. Таким образом, эти функции образуют нормальное семейство в $|z|<\delta$. Следовательно, из последовательности $\{n_j\}$ можно выделить подпоследовательность $\{m_p\}$, обладающую следующими двумя свойствами:

1) $\lim\mathcal{R}\left(\dfrac{a_{m_p-1}}{a_{m_p}}\right)=\overline{\lim}\,\mathcal{R}\left(\dfrac{a_{n_j-1}}{a_{n_j}}\right)=a;$

2) последовательность $\varphi_{m_p}(z)=\ln d_{m_p}(z)/m_p$ равномерно стремится в $|z|\leqslant\delta/2$ к голоморфной в этом круге функции, так как

$$\lim\varphi_{m_p}(0)=\lim\frac{\ln a_{m_p}}{m_p}=\lim\frac{\ln|a_{m_p}|+i\arg a_{m_p}}{m_p}=0.$$

С другой стороны, легко доказать, что

$$d_n'(z)=nd_{n-1}(z),$$

и в $|z|<\delta$ имеем

$$\ln d_n(z)=\ln a_n+\int\limits_0^z\frac{d_n'(t)}{d_n(t)}\,dt=\ln a_n+n\int\limits_0^z\frac{d_{n-1}(t)}{d_n(t)}\,dt.$$

Следовательно, в силу (IV. 13) при $0 \leqslant h \leqslant \delta/2$

$$\ln D(h) \geqslant \lim \frac{\ln |d_{m_p}(h)|}{m_p} = \lim \left( \frac{\mathscr{R} \ln a_{m_p}}{m_p} + \mathscr{R} \int_0^h \frac{d_{m_p-1}(t)}{d_{m_p}(t)}\, dt \right).$$

Но в силу того, что

$$\lim \left( \frac{\mathscr{R} \ln a_{m_p}}{m_p} \right) = \lim \left( \frac{\ln |a_{m_p}|}{m_p} \right) = 0,$$

имеем

$$\ln D(h) \geqslant \lim \mathscr{R} \int_0^h \frac{d_{m_p-1}(t)}{d_{m_p}(t)}\, dt.$$

К тому же, поскольку $D'_+(0)$ существует (теорема IV. 1.1) и поскольку $D(0) = \overline{\lim} |a_n|^{1/n} = 1$,

$$D'_+(0) = (\ln D(h))'_+ \big|_{h=0} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\ln D(h)}{h} \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{h \downarrow 0} \left( \lim_{p \to \infty} \mathscr{R} \int_0^h \frac{d_{m_p-1}(t)}{d_{m_p}(t)}\, dt \right) = \lim_{p \to \infty} \left( \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int \frac{d_{m_p-1}(t)}{d_{m_p}(t)}\, dt \right) =$$

$$= \lim \mathscr{R} \frac{d_{m_p-1}(0)}{d_{m_p}(0)} = \lim \mathscr{R} \frac{a_{m_p-1}}{a_{m_p}} = a = \overline{\lim}\, \mathscr{R} \frac{a_{n_j-1}}{a_{n_j}}.$$

Но в силу теоремы IV. 1.1 ряд (IV. 1) имеет особую точку $e^{i\varphi}$ с $\cos\varphi = D'_+(0)$. Теорема, таким образом, полностью доказана.

## Глава V

# Композиция особенностей

### V.1. Композиция по Адамару и ее обобщения

Одной из наиболее важных теорем в теории распределения особенностей рядов Тейлора является, конечно, теорема Адамара об умножении особенностей, установленная в 1898 году.

Мы рассмотрим эту теорему в полной общности несколько позже, а сейчас приведем ее в форме (принадлежащей Адамару), которая в действительности справедлива лишь для изолированных особенностей, причем функции, разумеется, являются однозначными[1]).

*Пусть $E_1$ — множество особых точек функции, представимой рядом $\sum a_n z^n$, $E_2$ — множество особых точек функции, представимой рядом $\sum b_n z^n$, и пусть $E_3$ — множество особых точек функции, представимой рядом $\sum a_n b_n z^n$. Тогда каждой точке $e_3$ из $E_3$ соответствуют точка $e_1$ из $E_1$ и точка $e_2$ из $E_2$, такие, что $e_3 = e_1 e_2$.*

Для ряда Тейлора-Д эта теорема формулируется следующим образом.

Если $\gamma$ — особая точка функции, представимой рядом $\sum a_n b_n e^{-ns}$, то существуют особая точка $\alpha$ функции, представимой рядом $\sum a_n e^{-ns}$, и особая точка $\beta$ функции, представимой рядом $\sum b_n e^{-ns}$, такие, что $\gamma = \alpha + \beta$.

В этих формулировках предполагается, что радиусы сходимости рядов $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ конечны и отличны от нуля; в случае рядов Тейлора-Д надо предполагать, что абсциссы сходимости конечны.

Наше утверждение о рядах Тейлора-Д перестает быть справедливым для общих рядов Дирихле. Иначе говоря, функция, представимая рядом $\sum a_n b_n e^{-\lambda_n s}$, может иметь особые точки, которые нельзя представить в виде $\alpha + \beta$; здесь $\alpha$ — некоторая особая точка функции $f$, представимой рядом $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$, и $\beta$ — некоторая особая точка функции $\varphi$, представимой рядом $\sum b_n e^{-\lambda_n s}$. Это замечание справедливо и тогда, когда каждая

[1]) Многие авторы ошибочно полагали, что утверждение, которое мы сейчас сформулируем, справедливо во всех случаях.

из функций $f$, $\varphi$ имеет лишь одну особую точку, причем функции, разумеется, являются однозначными. Пусть, например, $a_n = b_n = 1$ $(n \geqslant 1)$, $\lambda_n = \ln n$; тогда каждая из функций $f$ и $\varphi$ является функцией Римана $\zeta(s)$, которая имеет лишь простой полюс в точке $s = 1$. Следовательно, в случае, когда теорема справедлива, функция, представимая «составным рядом» $\sum a_n b_n e^{-\lambda_n s}$, возможно, имела бы лишь особую точку $s = 2$. Но в данном случае «составной функцией» является опять $\zeta(s)$.

Тот факт, что утверждение для рядов Тейлора-Д, сформулированное выше, прямо не переносится на общие ряды Дирихле, вынуждает нас искать общую формулировку, *зависящую от свойств последовательности* $\Lambda$ и переходящую в указанное утверждение для рядов Тейлора-Д при $\Lambda = N$ $(\lambda_n = n)$.

Мы дадим несколько теорем о композиции особенностей рядов Дирихле, содержащих в качестве частного случая теорему Адамара (при $\lambda_n = n$), причем каждая из этих теорем имеет свой специфический характер общности.

Хотя теоремы, которые будут сформулированы ниже, справедливы (с некоторыми терминологическими уточнениями) и для многозначных функций, мы для простоты будем предполагать функции однозначными; по крайней мере они предполагаются «однозначными в полуплоскости» (это выражение уточняется ниже). Мы увидим, однако, что эти ограничения можно снять.

Итак, рассмотрим ряд $(A, \Lambda) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ с $\sigma_a < \infty$, и пусть $\sigma_1 > -\infty$. Возьмем какое-нибудь $\sigma' > \max(\sigma_1, \sigma_a)$ и обозначим через $\Delta$ некоторую область $P_{\sigma'} \subset \Delta \subset P_{\sigma_1}$, в которой существует однозначная аналитическая функция, совпадающая с $f(s)$ (суммой ряда $(A, \Lambda)$) в $P_{\sigma'}$. Если при заданном $\sigma_1$ существует область $\Delta(\sigma_1)$, обладающая перечисленными свойствами и содержащая все другие области $\Delta$, то мы будем говорить, что функция $f$ (которая голоморфна в $\Delta(\sigma_1)$ и является продолжением ряда $(A, \Lambda)$ из $P_{\sigma'}$ в $\Delta(\sigma_1)$) *однозначна в* $P_{\sigma_1}$. Обозначим $S_{\sigma_1}$ множество, образованное всеми точками из $\overline{P}_{\sigma_1}$, не принадлежащими $\Delta(\sigma_1)$. Назовем это множество *особым множеством функции* $f$ *относительно полуплоскости* $P_{\sigma_1}$. Точки прямой $\sigma = \sigma_1$ принадлежат, очевидно, $S_{\sigma_1}$. Теоремы будут представлять интерес лишь в том случае, когда $S_{\sigma_1}$ содержит точки, отличные от точек прямой $\sigma = \sigma_1$. Но для того чтобы приводимые ниже результаты имели место всегда, следует определить особое множество указанным выше образом.

Если $\sigma_1' < \sigma_1$, то аналитические продолжения ряда $(A, \Lambda)$ в $\Delta(\sigma_1)$, с одной стороны, и в $\Delta(\sigma_1')$, с другой стороны (если эти два продолжения однозначны), совпадают в $\Delta(\sigma_1') \cap \Delta(\sigma_1)$. Итак, можно обозначить такое продолжение (в $\Delta(\sigma_1)$) той же самой буквой ($f(s)$), которой обозначается сумма ряда $(A, \Lambda)$

в $P_{\sigma_a}$. Заметим, что $\Delta(\sigma_1) \subset \Delta(\sigma_1')$. Следовательно, утверждение «$f(s) = (A, \Lambda) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ однозначна в полуплоскости $P_{\sigma_1}$» означает, что область $\Delta(\sigma_1)$ существует, что $f$ голоморфна в $\Delta(\sigma_1)$, что в той части области $\Delta(\sigma_1)$, которая принадлежит $P_{\sigma_c}$, $f$ задается рядом $(A, \Lambda)$ и что $f$ нельзя аналитически продолжить в окрестность точки из $S_{\sigma_1}$, не продолжая ее вдоль кривой, пересекающей прямую $\sigma = \sigma_1$.

Общий ряд Дирихле не обязательно имеет особые точки на оси сходимости вопреки результатам, известным для рядов Тейлора-Д (ряд Тейлора имеет по крайней мере одну особую точку на окружности сходимости; следовательно, ряд Тейлора-Д имеет по крайней мере одну особую точку на каждом отрезке оси сходимости длины $2\pi$). Например, функция, заданная рядом $\sum (-1)^n n^{-s}$, является целой функцией, хотя для этого ряда $\sigma_c = 0$.

Пусть $H$ — нижняя грань величин $\sigma'$, таких, что $f(s) = (A, \Lambda)$ голоморфна в $P_{\sigma'}$. Эта величина $H$ называется *абсциссой голоморфности ряда* $(A, \Lambda)$. Очевидно, $H \leqslant \sigma_c \leqslant \sigma_a$. Прямая $\sigma = H$ называется *осью голоморфности ряда* $(A, \Lambda)$.

Величина

$$H(\sigma_1) = \sup_{s \in S_{\sigma_1}} \sigma \qquad (s = \sigma + it)$$

называется *абсциссой голоморфности ряда* $(A, \Lambda)$ *в полуплоскости* $P_{\sigma_1}$. Имеем $H(\sigma_1) = H$, если $\sigma_1 \leqslant H$, и $H(\sigma_1) = \sigma_1$, если $\sigma_1 > H$.

Пусть $E$ — замкнутое множество, содержащееся в полуплоскости $\sigma < \sigma_0$.

Выражение «*единственными возможными особыми точками ряда* $(A, \Lambda)$ *в* $P_{\sigma_1}$ *являются точки множества* $E$» имеет следующий смысл: если обозначить через $(P_{\sigma_1} \setminus E)$ ту часть разности $P_{\sigma_1} \setminus E$ ($P_{\sigma_1} \setminus E$ — это дополнение множества $E \cap P_{\sigma_1}$ относительно $P_{\sigma_1}$), которая образует область (т. е. связное множество внутренних точек), содержащую какую-то полуплоскость $P_{\sigma_2}$ с $\sigma_2 > \sigma_c$, то $f(s)$ голоморфна в $(P_{\sigma_1} \setminus E)$ (и в $P_{\sigma_2}$: $f(s) = (A, \Lambda)$).

Важно заметить, что неравенство $\sigma_1' < \sigma_1$ не влечет за собой включения $S_{\sigma_1} \subset S_{\sigma_1'}$. Поэтому в определении множества $S_{\sigma_1}$ мы использовали выражение «*относительно* $P_{\sigma_1}$», а не «*в* $P_{\sigma_1}$».

Пусть функция $f(s) = (A, \Lambda)$ однозначна в $P_{\sigma_1}$. Положим при $\varepsilon > 0$

$$S_{\sigma_1}(\varepsilon) = \bigcup_{s \in S_{\sigma_1}} C(s, \varepsilon).$$

Если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует постоянная $K$ $(=K(\varepsilon, \sigma_1))$, такая, что $|f(s)|<K$ на $\Delta(\sigma_1, \varepsilon)=\overline{(P_{\sigma_1} \setminus S_{\sigma_1}(\varepsilon))}$[1]), то мы будем говорить, что функция $f$ *ограничена в* $P_{\sigma_1}$, *за исключением особенностей*. Ясно, что ряд Тейлора-Д однозначен в $\sigma>\sigma'$ и ограничен там, за исключением особенностей. В случае общих рядов Дирихле это уже не так. Например, функция $\zeta(s)$ не является ограниченной, за исключением особенностей в любой полуплоскости $P_{\sigma_1}$, $\sigma_1=1-\delta$ $(\delta>0)$.

Предположим теперь, что функция $f(s)=(A, \Lambda)$, однозначная в $P_{\sigma_1}$, такова, что существует неотрицательная постоянная $m$, обладающая следующим свойством: любому $\varepsilon>0$ соответствует $K(\varepsilon, m)$ $(=K(\varepsilon, m, \sigma_1))$, такое, что в области $\Delta(\sigma_1, \varepsilon)$ при достаточно больших $|t|$ выполняется неравенство $|f(s)|<K(\varepsilon, m)|t|^m$. Пусть $\mu$ — нижняя грань таких величин $m$. Иначе говоря, любым $\delta>0$ и $\varepsilon>0$ соответствует постоянная

$$N(\varepsilon, \delta) \quad (=N(\varepsilon, \delta, \sigma_1)),$$

такая, что в $\Delta(\sigma_1, \varepsilon)$ при достаточно больших $|t|$ справедливо неравенство

$$|f(s)| \leqslant N(\varepsilon, \delta)|t|^{\mu+\delta};$$

никакая меньшая, чем $\mu$, величина этим свойством не обладает. Мы будем говорить тогда, что $f$ *имеет порядок* $\mu$ *в* $P_{\sigma_1}$, *за исключением особенностей*.

Пусть функция $A(t)$ положительна (при $t\geqslant 0$), возрастает и стремится к бесконечности $(t \to +\infty)$; будем говорить, что $f(s)=(A, \Lambda)$ *растет в* $P_{\sigma_1}$, *за исключением особенностей, не быстрее функции* $A(t)$, если любому $\varepsilon>0$ соответствует такое $K(\varepsilon)=K(\varepsilon, \sigma_1)$, что в $\Delta(\sigma, \varepsilon)$ справедливо неравенство $|f(s)| \leqslant K(\varepsilon) A(|t|)$.

Обозначим через $Q(\sigma_1, t_0)$ четверть плоскости: $\sigma>\sigma_1$, $t>t_0$. Предположим, что ряд $(A, \Lambda)$ обладает следующими свойствами. Пусть $\Delta$ — область, такая, что $Q(\sigma_1, t_0) \supset \Delta \supset Q(\sigma_2, t_0)$, где $\sigma_2 (>\sigma_1)$ — некоторая величина, причем функция $f(s)$, заданная в $P_{\sigma_2}$ рядом $(A, \Lambda)$, голоморфна и однозначна в $\Delta$. Предположим, что существует область $D(\sigma_1, t_0)$, которая содержит все только что описанные области $\Delta$. Будем тогда говорить, что функция $f(s)$, заданная рядом $(A, \Lambda)$, *однозначна в четверти плоскости* $Q(\sigma_1, t_0)$. Обозначим через $S_{\sigma_1, t_0}$ множество точек $s$, удовлетворяющих неравенствам $\sigma \geqslant \sigma_1$, $t>t_0$ и не принадлежащих $D(\sigma_1, t_0)$. Множество $S_{\sigma_1, t_0}$ называется *особым множеством функции* $f$ *относительно четверти плоскости* $Q(\sigma_1, t_0)$. Пусть $S_{\sigma_1, t_0}(\varepsilon)$ — объединение кругов $C(s, \varepsilon)$ с $s \in S_{\sigma_1, t_0}$. Если каждому $\varepsilon>0$ соответствует постоянная $K(\varepsilon)$ $(=K(\varepsilon, \sigma_1, t_0))$, такая, что в замкнутой области $\overline{(Q(\sigma_1, t_0) \setminus S_{\sigma_1, t_0}(\varepsilon))}$ (эта область

[1]) Следовательно, область $\Delta(\sigma_1, \varepsilon)$ связна, замкнута и содержит некоторую полуплоскость $\sigma>\sigma_2$.

есть часть множества $\overline{Q(\sigma_1, t_0) \setminus S_{\sigma_1, t_0}(\varepsilon)}$, связная с $Q(\sigma_2, t_1)$) справедливо неравенство $|f(s)| < K(\varepsilon)$, то мы будем говорить, что $f$ *ограничена в* $Q(\sigma_1, t_0)$, *за исключением особенностей*. Если функция $f$ однозначна и ограничена в $P_{\sigma_1}$, за исключением особенностей, то она обладает теми же свойствами в $Q(\sigma_1, t_0)$, каково бы ни было $t_0$.

Введем величины

$$\sigma_1^*(t_0) = \sup_{s \in S_{\sigma_1, t_0}} \sigma, \quad H^+(\sigma_1) = \lim_{t \to \infty} \sigma_1^*(t_0).$$

Ясно, что $H^+(\sigma_1)$ существует и что $H^+(\sigma_1) \geqslant \sigma_1$. Величину $H^+(\sigma_1)$ назовем *крайней* $(+)$ *абсциссой голоморфности функции* $f$ *в полуплоскости* $P_{\sigma_1}$.

Так как первая теорема этой главы касается функций $f(s) = (A, \Lambda)$, которые ограничены, за исключением особенностей, в полуплоскости или в четверти плоскости, важно доказать, что существуют ряды Дирихле, которые не являются рядами Тейлора-Д (или рядами вида $\sum a_n e^{-kns}$, где $k$ — некоторая постоянная) и которые обладают подобными свойствами. Пусть $(A, \Lambda)$ — произвольный ряд с $\sigma_a < 0$, и пусть $T(z) = \sum c_n z^n$ — целая функция. Рассмотрим функцию

$$F(s) = T\left[f(s) + \frac{1}{e^s - 1}\right] = T\left(\sum a_n e^{-\lambda_n s} + \sum e^{-ns}\right) =$$
$$= \sum c_m \left(\sum a_n e^{-\lambda_n s} + \sum e^{-ns}\right)^m.$$

Так как при $\sigma > 0$ ряд $\sum |c_m| (\sum |a_n| e^{-\lambda_n \sigma} + \sum e^{-n\sigma})^m$ сходится, функция $F(s)$ представима (при $\sigma > 0$) рядом Дирихле

$$F(s) = \sum d_n e^{-\nu_n s},$$

где $\nu_n$ имеют вид $\nu_n = \sum_{j \leqslant p} \alpha_j \lambda_j + \beta$, $\alpha_j$ и $\beta$ — целые неотрицательные числа. С другой стороны, функция $f(s) + (e^s - 1)^{-1}$ имеет в полуплоскости $\sigma > \sigma_a$ лишь простые полюсы $2k\pi i$ ($k$ — любое целое число). Впрочем, эта функция ограничена при $\sigma > \sigma_a + \varepsilon$ вне кругов $C(2k\pi i, \varepsilon)$.

В той же самой области функция $F(s)$ также ограничена. Но значения, которые принимает функция $f(s) + (e^s - 1)^{-1}$ в каждом из указанных кругов, покрывают окрестность бесконечности, и по теореме Пикара $F(s)$ принимает в этих кругах все значения, за исключением, быть может, одного, бесконечное множество раз. Точки $2k\pi i$ являются, следовательно, (существенно) особыми точками функции $F$. Таким образом, эта функция обладает при любом $\sigma_1 > \sigma_{a, f}$ всеми требуемыми свойствами.

Прежде чем доказывать теоремы, сделаем несколько замечаний по поводу обозначений. Так, если речь будет идти о нескольких рядах Дирихле (например, $f(s)=(A, \Lambda)$, $\varphi(s)=(B, M)$), то наши прежние обозначения будут снабжаться подходящим буквенным индексом. Таким образом, абсциссы простой или абсолютной сходимости ряда $f$ обозначаются соответственно через $\sigma_{c,f}$, $\sigma_{a,f}$; его абсцисса голоморфности — через $H_f$; особое множество ряда $f$ относительно $P_{\sigma_1}$ — через $S_{\sigma_1, f}$ и т. д.

Если аналитическое продолжение ряда $f(s)=(A, \Lambda)$ однозначно, то будем обозначать через $S_f$ его особое множество (во всей плоскости), т. е. дополнение области существования функции $f$ относительно всей плоскости (область существования функции $f$ — это область, в которую может быть аналитически продолжен ряд $(A, \Lambda)$). Мы предполагаем, что рассматриваемые ряды Дирихле имеют конечные абсциссы абсолютной сходимости, и в дальнейшем не будем упоминать об этом в формулировках.

Теорема V.1.1, к которой мы теперь переходим, содержит в качестве частного случая теорему Адамара о рядах Тейлора, хотя в ней рассматриваются значительно менее общие ряды, чем в последующей теореме V.2.1.

**T.V.1.1.** *Пусть функция $f(s)=(A, \Lambda)$ однозначна и ограничена в $Q(\sigma_1, t_0)$, за исключением особенностей, и пусть функция $\varphi(s)=(B, \Lambda)$ однозначна и ограничена в $P_{\sigma_2}$, за исключением особенностей. Пусть $S_{\sigma_1, t_0, f}$ — особое множество функции $f$ относительно $Q(\sigma_1, t_0)$, и пусть $S_{\sigma_2, \varphi}$ — особое множество функции $\varphi$ относительно $P_{\sigma_2}$.*

*Положим $c_n=a_nb_n$ $(n\geqslant 1)$, $C=\{c_n\}$. Тогда функция $F(s)=(C, \Lambda)$ обладает следующими свойствами: $\sigma_{a,F}\leqslant\sigma_{a,f}+\sigma_{a,\varphi}$, $F$ однозначна в $P_{\sigma_3}$, где $\sigma_3=H_f^+(\sigma_1)+\sigma_2$, и единственными возможными особыми точками функции $(C, \Lambda)$ в $P_{\sigma_3}$ являются точки множества $S_{\sigma_1, t_0, f}+S_{\sigma_2, \varphi}$* [1]) *и предельные точки этого множества.*

Пусть $c>\sigma_{a,f}$, $t_1>t_0$; положим $(z=x+iy)$

$$F_T(z)=\frac{1}{Ti}\int_{c+t_1 i}^{c+Ti} f(s)\varphi(z-s)\,ds,$$

причем интегрирование производится по прямой $\sigma=c$. Функция $F_T(z)$ голоморфна при $x>c+\sigma_{a,\varphi}$, ибо $z-s\in P_{\sigma_{a,\varphi}}$, если

[1]) Если $A$ и $B$ — два множества точек, то $A+B$ означает множество всех точек вида $\alpha+\beta$, $\alpha\in A$, $\beta\in B$.

$\sigma=c$. Пусть $z$ удовлетворяет этому условию; тогда

$$F_T(z)=\frac{1}{Ti}\int\limits_{c+t_1 i}^{c+Ti} f(s)\sum b_n e^{-\lambda_n(z-s)}\,ds=$$

$$=\sum b_n e^{-\lambda_n z}\frac{1}{Ti}\int\limits_{c+t_1 i}^{c+Ti} f(s)e^{\lambda_n s}\,ds.$$

Но по теореме I. 3.1 имеем

$$\frac{1}{Ti}\int\limits_{c+t_1 i}^{c+Ti} f(s)e^{\lambda_n s}\,ds=a_n+\varepsilon_n(T), \qquad \text{(V. 1)}$$

причем $\lim \varepsilon_n(T)=0$ $(T\to\infty)$. Таким образом,

$$F_T(z)=\sum a_n b_n e^{-\lambda_n z}+\sum \varepsilon_n(T)^{-\lambda_n z}.$$

Ряд $(C, \Lambda)$ абсолютно сходится при $x>\sigma_{a,\varphi}+c$, так как

$$\sum_{n>p}|a_n b_n|e^{-\lambda_n x}=$$

$$=\sum_{n>p}|b_n|e^{-\lambda_n x}\left|\lim_{T\to\infty}\frac{1}{Ti}\int\limits_{c+t_1 i}^{c+Ti} f(s)\,e^{\lambda_n s}\,ds\right|\leqslant \mathscr{M}(c)\sum_{n>p}|b_n|e^{-\lambda_n(x-c)},$$

где

$$\mathscr{M}(c)\leqslant \sup|f(c+it)|\leqslant \sum|a_n|e^{-\lambda_n c}.$$

Поэтому при $x-c>\sigma_{a,\varphi}$ имеем $\sum|b_n|e^{-\lambda_n(x-c)}<\infty$.

Следовательно, ряд $(C, \Lambda)$ абсолютно сходится при $\sigma>\sigma_{a,f}+$ $+\sigma_{a,\varphi}$ и $\sigma_F\leqslant\sigma_{a,f}+\sigma_{a,\varphi}$.

При $x>\sigma_{a,\varphi}+c$ имеем

$$|F_T(z)-F(z)|=\left|\sum b_n e^{-\lambda_n z}[a_n+\varepsilon_n(T)]-\sum a_n b_n e^{-\lambda_n z}\right|,$$

и поскольку в силу (V. 1) справедливо неравенство $|\varepsilon_n(T)|\leqslant$ $\leqslant 2\mathscr{M}(c)e^{\lambda_n c}$, то для любого $p$

$$|F_T(z)-F(z)|\leqslant\sum_{n\leqslant p}|b_n\varepsilon_n(T)|e^{-\lambda_n x}+2\mathscr{M}(c)\sum_{n>p}|b_n|e^{-\lambda_n(x-c)}.$$

Но, с одной стороны, при фиксированном $p$ $\varepsilon_n(T)\to 0$ $(T\to\infty,$ $n=1, 2, \ldots, p)$, а, с другой стороны, $\sum\limits_{n>p}|b_n|e^{-(\lambda_n-c)}\to 0$ $(p\to\infty,\ x-c>\sigma_{a,\varphi})$. Таким образом, ясно, что $\lim F_T(z)=F(z)$ при $x>\sigma_{a,\varphi}+c$.

Предположим теперь, что $c > \max(\sigma_{a,f}, \sigma_1)$, и разобьем полосу $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant c$ на равные квадраты, причем стороны этих квадратов параллельны осям и имеют длину $\varepsilon = (c - \sigma_1)/q$ ($q$ — целое число). Обозначим через $A$ некоторый квадрат полученной сетки, который обладает следующим свойством: замыкание объединения этого квадрата со всеми смежными с ним квадратами не содержит точек множества $S_{\sigma_1, t_0, f}$. Пусть $\mathscr{D}(\varepsilon)$ — множество, полученное объединением всех квадратов $A$ этой сетки. Если $\varepsilon$ достаточно мало ($q$ достаточно велико), то все квадраты, соприкасающиеся с прямой $\sigma = c$, составляют часть $\mathscr{D}(\varepsilon)$. Предположим, что $\varepsilon$ выбрано таким образом. Пусть $\mathscr{D}^*(\varepsilon)$ — наибольшая область, обладающая следующими свойствами: (i) $\mathscr{D}^*(\varepsilon) \subset \mathscr{D}(\varepsilon)$; (ii) прямая $\sigma = c$ принадлежит границе области $\mathscr{D}^*(\varepsilon)$. Пусть $\mathscr{D}^*(\varepsilon, t_1)$ — часть области $\mathscr{D}^*(\varepsilon)$, для которой $t > t_1$. Функция $f(s)$ голоморфна и ограничена на $\overline{\mathscr{D}^*(\varepsilon, t_1)}$. Пусть $C(\varepsilon)$ — граница области $\mathscr{D}^*(\varepsilon, t_1)$ и $\{\alpha_m\}$ — возрастающая последовательность, стремящаяся к $+\infty$, причем $\alpha_m > t_1$ ($m \geqslant 1$). Обозначим через $\mathscr{D}^*(\varepsilon, t_1, m)$ часть области $\mathscr{D}^*(\varepsilon, t_1)$, для которой $t < \alpha_m$, и через $C^\bullet(\varepsilon, t_1, m)$ часть ее границы, не содержащую точек прямой $\sigma = c$. Из теоремы Коши следует, что при $x > \sigma_{a,\varphi} + c$

$$F_{\alpha_m}(z) = \frac{1}{i\alpha_m} \int\limits_{C^\bullet(\varepsilon, t_1, m)} f(s)\varphi(z-s)\,ds \qquad \text{(V.2)}$$

(интеграл берется вдоль контура в надлежащем направлении) и, следовательно, для тех же значений $x$ функция $F(z)$ является пределом интеграла (V.2) при $m \to \infty$.

Пусть $l_m$ — множество точек, образующих отрезки, которые содержатся в $C^\bullet(\varepsilon, t_1, m)$ и для которых $t = \alpha_m$, и пусть $L$ — множество точек, образующих отрезки, которые содержатся в $C^\bullet(\varepsilon, t_1, m)$ и для которых $t = t_1$. Так как общая длина каждого из этих множеств отрезков при заданном $m$ не превосходит $c - \sigma_1$ и поскольку на этих отрезках функции $|f(s)|$ и $|\varphi(z-s)|$ (при $x > \sigma_{a,\varphi} + c$) ограничены, ясно, что $F(z) = \lim \overset{\bullet}{F}_{\alpha_m}(z)$, где

$$\overset{\bullet}{F}_{\alpha_m}(z) = \frac{1}{i\alpha_m} \int\limits_{C(\varepsilon, t_1, m)} f(s)\varphi(z-s)\,ds$$

и

$$C(\varepsilon, t_1, m) = C^\bullet(\varepsilon, t_1, m) \setminus l_m \setminus L.$$

Пусть теперь $\Delta$ — ограниченная область плоскости $z = x + iy$, содержащая точки с условием $x > \sigma_{a,\varphi} + c$, такая, что для любой точки $z \in \Delta$

$$x > H_f^+(\sigma_1) + \sigma_2 - 3\varepsilon,$$

и такая, что для любой пары $z$, $\gamma$ с $z \in \Delta$, $\gamma \in S_{\sigma_1, t_0, f} + S_{\sigma_2, f}$ имеем $|z - \gamma| > 6\varepsilon$. При достаточно большом $t_1$ для всех $s \in C(\varepsilon, t_1, m)$, $z \in \Delta$, $\beta \in S_{\sigma_2, \varphi}$ справедливы неравенства

$$\mathscr{R}(z - s) = x - \sigma > \sigma_2, \quad |z - s - \beta| > \varepsilon.$$

В самом деле, если $t_1$ достаточно велико, то для каждого $s \in C(\varepsilon, t_1, m)$ имеем $\sigma < H_f^+(\sigma_1) + 3\varepsilon$ и для каждого $z \in \Delta$ имеем неравенство $x - \sigma > \sigma_2$. Если бы для некоторых $z' \in \Delta$, $s' \in C(\varepsilon, t_1, m)$ и $\beta' \in S_{\sigma_2, \varphi}$ было бы справедливо неравенство $|z' - s' - \beta'| < \varepsilon$, то (поскольку каждому указанному $s'$ соответствует такое $\alpha' \in S_{\sigma_1, t_0, f}$, что $|s' - \alpha'| < 2\sqrt{2}\varepsilon$) выполнялось бы неравенство $|z' - \alpha' - \beta'| \leqslant |z' - s' - \beta'| + |s' - \alpha'| < (2\sqrt{2} + 1)\varepsilon$, что противоречит предположению $|z' - \alpha' - \beta'| > 6\varepsilon$. При нашем выборе $t_1$ для любого $s \in C(\varepsilon, t_1, m)$, $z \in \Delta$ переменная $u = z - s$ изменяется в некоторой части полуплоскости $\sigma > \sigma_2$, которая связна с полуплоскостью абсолютной сходимости ряда $\varphi$, и в этой части функция $\varphi(s)$ голоморфна, однозначна и ограничена. Рассмотренные выше функции $\overset{\bullet}{F}_{\alpha_m}(z)$ образуют, таким образом, ограниченное семейство голоморфных в $\Delta$ функций. Но в некоторой замкнутой части области $\Delta$, расположенной в полуплоскости $x > \sigma_{a, \varphi} + c$, последовательность $\overset{\bullet}{F}_{\alpha_m}(z)$ равномерно сходится к $F(z) = \sum a_n b_n e^{-\lambda_n s}$, и по теореме Стильтьеса — Витали $\overset{\bullet}{F}_{\alpha_m}(z)$ равномерно сходится на каждом компакте области $\Delta$ к голоморфной функции. Этот предел является аналитическим продолжением ряда $F(z)$. Итак, «составной ряд» $\sum a_n b_n e^{-\lambda_n s}$ может быть аналитически продолжен в каждую область $\Delta$, которую мы определили. Теорема доказана.

Теорема V. 1.1 содержит в качестве частного случая теорему Адамара, ибо для рядов Тейлора-Д $\sigma_1$ и $\sigma_2$ можно выбрать какими угодно, по крайней мере если функции однозначны (в случае многозначных функций можно также получить некоторое высказывание о рядах Дирихле, имеющее сравнимый с теоремой V. 1.1 порядок общности; ниже мы сделаем по этому поводу небольшое замечание).

Тот факт, что в формулировке теоремы V. 1.1 $t_0$ произвольно, нисколько не улучшает соответствующего утверждения для рядов Тейлора-Д, ибо функции $f$ и $\varphi$ являются тогда периодическими с периодом $2\pi i$. Но этот произвол в выборе $t_0$ играет важную роль в некоторых приложениях теоремы V. 1.1 к общим рядам Дирихле. Следует еще заметить, что для двух рядов Тейлора-Д сумма $S_{\sigma_1, f} + S_{\sigma_2, \varphi}$ замкнута, ибо сами множества $S_{\sigma_1, f}$, $S_{\sigma_2, \varphi}$ периодичны с периодом $2\pi i$.

## V.2. Композиция функций с медленным ростом

Прежде чем заниматься рядами Дирихле более общего вида, необходимо ввести несколько новых определений. Пусть $M=\{\mu_n\}$ — строго возрастающая последовательность положительных чисел, стремящихся к бесконечности; пусть, как и прежде, $f(s)=(A, \Lambda)=\sum a_n e^{-\lambda_n s}$, и пусть $k$ — целое положительное число. Обозначим через $n_0$ наименьшее целое $n$, удовлетворяющее условию $\mu_n > \lambda_1$; положим

$$a_n^{(k)}=0 \qquad (0<n<n_0, \quad \text{если} \quad n_0>1),$$
$$a_n^{(k)}=\sum_{\lambda_m<\mu_n} (\mu_n-\lambda_m)^k a_m \qquad (n \geqslant n_0).$$

Величина $a_n^{(k)}$ называется *$n$-м коэффициентом порядка $k$ функции $f$ (или ряда $(A, \Lambda)$) относительно последовательности $M$.*

**T.V.2.1.** *Пусть функция $f(s)=(A, \Lambda)$ однозначна и порядка $\nu$ в $P_{\sigma_1}$, за исключением особенностей, и пусть функция $\varphi(s)=(B, M)$ однозначна и порядка $\mu$ в $P_{\sigma_2}$, за исключением особенностей.*

*Пусть $S_{\sigma_1, f}$ — особое множество функции $f$ относительно полуплоскости $P_{\sigma_1}$ и $S_{\sigma_2, \varphi}$ — особое множество функции $\varphi$ относительно полуплоскости $P_{\sigma_2}$. Пусть $H_f(\sigma_1)$ — абсцисса голоморфности функции $f$ в $P_{\sigma_1}$. Пусть $k$ — целое число, такое, что $k>\nu+\mu$. Тогда ряд $\sum a_n^{(k)} b_n e^{-\mu_n s}$, где $a_n^{(k)}$ — $n$-й коэффициент порядка $k$ функции $f$ относительно последовательности $\{\mu_n\}$, имеет абсциссу абсолютной сходимости, не превосходящую*

$$\max(\sigma_{a,\varphi}, \ \sigma_{a,\varphi}+\sigma_{a,f}).$$

*Функция $F_k(s)$, представимая этим рядом, однозначна в полуплоскости $\sigma>\max(H_f(\sigma_1), 0)+\sigma_2$, и единственными возможными особыми точками функции $F_k(s)$ в этой полуплоскости являются точки, принадлежащие $S_{\sigma_1, f}+S_{\sigma_2, \varphi}$, предельные точки этого множества и точки множества $S_{\sigma_2, \varphi}$.*

Пусть $c>\max(0, \sigma_{a,f})$; рассмотрим интеграл

$$F(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{f(s)\,\varphi(z-s)}{s^{k+1}}\,ds,$$

где интегрирование ведется по прямой $\sigma=c$.

Функция $F(z)$ голоморфна, если $x>c+\sigma_{a,\varphi}$ $(z=x+iy)$, ибо при $\sigma=c$ переменная $z-s$ остается в полуплоскости абсолютной сходимости функции $\varphi$. Для таких значений $z$

имеем

$$\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\sum b_n e^{-\mu_n(z-s)}\frac{ds}{s^{k+1}}=$$

$$=\sum_n b_n e^{-\mu_n z}\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\sum_m a_m e^{(\mu_n-\lambda_m)s}\frac{ds}{s^{k+1}}, \qquad (\mathrm{V}.3)$$

и из I.3.3 следует (для этих значений $z$), что

$$F(z)=\sum_{n\geqslant n_0} b_n e^{-\mu_n z}\sum_{\lambda_m<\mu_n} a_m(\mu_n-\lambda_m)^k=\sum a_n^{(k)} b_n e^{-\mu_n z};$$

здесь $n_0$ — наименьшее целое $n$, такое, что существует $\lambda_m<\mu_n$.

Написанный для $F(z)$ ряд сходится при $x>c+\sigma_{a,\varphi}$. Но (V.3) имеет место и при замене $f(s)$ на $\sum|a_n|e^{-\lambda_n s}$, а $\varphi(s)$ на $\sum|b_n|e^{-\mu_n s}$.

Следовательно, ряд

$$\sum_{n\geqslant n_0}\sum_{\lambda_m<\mu_n}|a_m|(\mu_n-\lambda_m)^k|b_n|e^{-\mu_n x}$$

сходится при $x>c+\sigma_{a,\varphi}$; значит, абсцисса абсолютной сходимости ряда $\sum a_n^{(k)} b_n e^{-\mu_n s}$ не превосходит $\max(\sigma_{a,\varphi},\ \sigma_{a,f}+\sigma_{a,\varphi})$ ($c$ должно удовлетворять лишь неравенству $c>\max(0,\sigma_{a,f})$).

Очевидно, $F(z)=F_k(z)$.

Выберем теперь $c>\max(0,\sigma_1,\sigma_{a,f})$. Как и при доказательстве теоремы V.1.1, разобьем полосу $\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant c$ на равные квадраты, причем стороны этих квадратов параллельны осям и имеют длину $\varepsilon=(c-\sigma_1)/q$. Пусть $\mathscr{D}_1(\varepsilon)$ — множество, полученное объединением всех квадратов этой сетки, обладающих следующим свойством: замыкание объединения такого квадрата со всеми смежными с ним квадратами не содержит ни одной точки множества $S_{\sigma_1,f}\cup\{0\}$. Если $\varepsilon$ достаточно мало, то все квадраты, соприкасающиеся с прямой $\sigma=c$, составляют часть области $\mathscr{D}_1^*(\varepsilon)$; последняя является наибольшей областью, обладающей следующими свойствами: (i) $\mathscr{D}_1^*(\varepsilon)\subset\mathscr{D}_1(\varepsilon)$; (ii) прямая $\sigma=c$ принадлежит границе области $\mathscr{D}_1^*(\varepsilon)$. Функция $f$ голоморфна на $\overline{\mathscr{D}_1^*(\varepsilon)}$, и каждому $\delta_1>0$ соответствует такая постоянная $N_1(\delta_1)(=N_1(\delta_1,\varepsilon,\sigma_1))$, что на $\overline{\mathscr{D}_1^*(\varepsilon)}$ имеет место неравенство $|f(s)|<N_1(\delta_1)|t|^{\mu+\delta_1}$ при достаточно больших $|t|$.

Пусть $\mathscr{D}_1^*(\varepsilon,T)$ — часть области $\mathscr{D}_1^*(\varepsilon)$, для которой $|t|<T$, и пусть $C_1^*(\varepsilon,T)$ — часть границы области $\mathscr{D}_1^*(\varepsilon,T)$, не содержащая точек прямой $\sigma=c$. При $x>\sigma_{a,\varphi}+c$ имеем (используя теорему Коши)

$$\int\limits_{C_1^*} f(s)\,\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{k+1}}=\int\limits_{c-iT}^{c+iT} f(s)\,\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{k+1}},$$

причем первый интеграл берется по $C_1^*=C_1^*(\varepsilon, T)$ (в надлежащем направлении), а второй — по отрезку прямой $\sigma=c$.

На частях кривой $C_1^*(\varepsilon, T)$, на которых $t=-T$ или $t=T$, интегралы при $T\to+\infty$ стремятся к нулю. Отсюда вытекает, что

$$F_k(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{C_1^*(\varepsilon)} f(s)\,\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{k+1}}, \tag{V. 4}$$

где $C_1^*(\varepsilon)$ — часть границы области $\mathscr{D}_1^*(\varepsilon)$, не содержащая точек прямой $\sigma=c$.

Пусть $\Delta$ — ограниченная область плоскости $z=x+iy$, содержащая точки $x>\sigma_{a,\varphi}+c$ и обладающая следующими свойствами: для любого $z\in\Delta$ выполняются неравенства $x>$ $>\max(H_f(\sigma_1), 0)+\sigma_2+2\varepsilon$; $|z-\gamma|>6\varepsilon$, каково бы ни было $z\in\Delta$ и каково бы ни было $\gamma\in(S_{\sigma_2,\varphi}+S_{\sigma_1,f})\cup S_{\sigma_2,\varphi}$. Ясно, что

$$\mathscr{R}(z-s)=x-\sigma>\sigma_2,$$

$|z-s-\beta|>\varepsilon$ для любых $z\in\Delta$, $s\in C_1^*(\varepsilon)$ и $\beta\in S_{\sigma_2,\varphi}$. Доказательство проводится с помощью рассуждений, близких к тем, которые использовались при выводе сходного факта в процессе доказательства теоремы V. 1.1. Следовательно, если $s\in C_1^*(\varepsilon)$, $z\in\Delta$, то переменная $u=z-s$ изменяется в некоторой части полуплоскости $\sigma>\sigma_2$, которая связна с полуплоскостью абсолютной сходимости, где функция $\varphi(s)$ голоморфна и однозначна и где каждому $\delta_2>0$ соответствует постоянная $N_2(\delta_2)$ $(=N_2(\delta_2, \varepsilon, \sigma_2))$, обладающая тем свойством, что при достаточно больших $|t|$

$$|\varphi(s)|\leqslant N_2(\delta_2)|t|^{\nu+\delta_2}.$$

В силу ограниченности $\Delta$ ясно, что если $s\in C_1^*(\varepsilon)$, $z\in\Delta$, то при достаточно больших $|t|$ имеет место неравенство $|\varphi(z-s)|<$ $<N_3(\delta_2)|t|^{\nu+\delta_2}$. Поскольку $\nu+\mu<k$, $\delta_1$ и $\delta_2$ можно выбрать так, чтобы

$$\mu+\nu+\delta_1+\delta_2<k;$$

тогда интеграл (V. 4) будет сходиться равномерно по $z$ на каждом компакте из $\Delta$. Следовательно, $F_k(z)$ голоморфна в $\Delta$, и теорема доказана. Теорема V. 2.1 также содержит теорему

Адамара, по крайней мере в том случае, когда ряд Тейлора представляет однозначную функцию. В самом деле, пусть

$$\psi(s)=\sum d_n e^{-ns}, \qquad \varphi(s)=\sum b_n e^{-ns}$$

(для упрощения расчетов полагаем, что $d_1=0$; как всегда, в нашем изложении: $d_0=b_0=0$). Пусть $z_0=e^{-s_0}$ есть одна из особых точек ряда $\sum d_n z^n$ на его окружности сходимости. Функция

$$\psi_1(s)=\sum d_n e^{-ns_0}e^{-ns}=\sum A_n e^{-ns}$$

имеет особенность в точке $s=0$. Положим

$$(1-e^{-s})^2 e^s \psi_1(s)=f(s)=\sum a_n e^{-ns}.$$

Имеем $(n\geqslant 2)$

$$A_n=(n-1)a_1+(n-2)a_2+\ldots+a_{n-1}=\sum_{m<n}(n-m)a_m.$$

Особые точки функции $f$ являются особыми точками функции $\psi_1$; исключение составляют точки $2k\pi i$, которые могут быть особыми точками для функции $\psi_1$, но не для $f$. Так как для рядов Тейлора-Д $f$ и $\varphi$ числа $\sigma_1$ и $\sigma_2$ можно взять отрицательными и сколь угодно большими по абсолютной величине и так как при таком их выборе число $k$ можно всегда выбрать равным единице, то в силу теоремы V. 2.1 легко видеть, что единственными особыми точками функции $F(s)=\sum a_n^{(1)}b_n e^{-ns}$, где

$$a_n^{(1)}=\sum_{m<n}a_m(n-m)=A_n \quad (n>1),$$

$a_1^{(1)}=0$, являются точки множества $S_f+S_\varphi$ и точки множества $S_\varphi$.

Обозначим через $S_{\psi_1}$ множество особых точек функции $\psi_1$; так как $S_{\psi_1}$ содержит $S_f$ и точку $s=0$, ясно, что $S_{\psi_1}+S_\varphi=(S_f+S_\varphi)\cup S_\varphi$. Иначе говоря, единственными возможными особыми точками функции

$$F(s)=\sum A_n b_n e^{-ns}=\sum d_n b_n e^{-ns_0}e^{-ns}$$

являются точки множества $S_{\psi_1}+S_\varphi$. Обозначив через $S_\psi$ множество особых точек функции $\psi$, мы видим, что каждая точка множества $S_\psi$ получается путем добавления $s_0$ к некоторой точке из $S_{\psi_1}$. Иначе говоря, единственными возможными особыми точками функции $\Phi=\sum d_n b_n e^{-ns}$ являются точки множества $S_\psi+S_\varphi$. Это наиболее точная формулировка теоремы Адамара в предположении, что рассматриваемые функции являются однозначными. Соответствующие замечания для многозначных функций будут сделаны ниже.

Возвращаясь к теореме V. 2.1, мы видим, что если $\sigma_1 < 0$ и если $s=0$ не принадлежит $S_{\sigma_1, f}$, то для достаточно малого $\varepsilon > 0$ граница $C_1^*(\varepsilon)$ содержит квадрат (со стороной длины $3\varepsilon$), содержащий внутри себя точку $s=0$, отделенную этим квадратом от всех других точек из $C_1^*(\varepsilon)$. Пусть $c(\varepsilon)$ — граница этого квадрата. Часть функции $F_k(z)$, получаемая при интегрировании по $c(\varepsilon)$, для достаточно больших $x$ представляется (по теореме о вычетах) в виде

$$I_k(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{c(\varepsilon)} f(s)\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{k+1}} = \frac{\partial^k [f(s)\varphi(z-s)]}{\partial s^k}\bigg|_{s=0} =$$

$$= (-1)^k \left[f(0)\varphi^{(k)}(z) - C_k^1 f'(0)\varphi^{(k-1)}(z) + \ldots + (-1)^k f^{(k)}(0)\varphi(z)\right].$$

С другой стороны, просматривая доказательство теоремы V. 2.1, мы видим, что единственными возможными особыми точками функции

$$F_k(z) - I_k(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{C_2^*(\varepsilon)} f(s)\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{k+1}},$$

где $C_2^*(\varepsilon) = C_1^*(\varepsilon) \setminus c(\varepsilon)$, являются точки множества $S_{\sigma_1, f} + S_{\sigma_2, \varphi}$.

Из вида $I_k(z)$ следует, что единственными возможными особыми точками этой функции являются особые точки функции $\varphi(z)$. Следовательно, теорема V. 2.1 может быть уточнена следующим образом:

**Т. V. 2.2.** *Сохраняя предположения теоремы* V. 2.1, *допустим, что в точке* $s=0$ *функция* $f(s)$ *регулярна. Тогда функция* $F_k(s) = \sum a_n^{(k)} b_n e^{-\mu_n s}$ *однозначна в полуплоскости* $\sigma > H_f(\sigma_1) + \sigma_2$, *и единственными возможными особыми точками функции*

$$F_k(s) - I_k(s)$$

*в этой полуплоскости, где*

$$I_k(s) =$$

$$= (-1)^k \left[f(0)\varphi^{(k)}(s) - C_k^1 f'(0)\varphi^{(k-1)}(s) + \ldots + (-1)^k f^{(k)}(0)\varphi(s)\right],$$

*являются точки множества* $\overline{S_{\sigma_1, f} + S_{\sigma_2, \varphi}}$.

Тот факт, что в теореме V. 2.1 (или V. 2.2) последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $M = \{\mu_n\}$ можно выбрать полностью независимыми, приводит к большому количеству интересных приложений. Так, поскольку распределение особенностей ряда Тейлора исследовано гораздо лучше, чем распределение особенностей общего ряда Дирихле, мы получаем ощутимый выигрыш, сближая проблему распределения особенностей ряда Дирихле, с одной стороны, с соответствующей проблемой для рядов Тейлора с коэффициентами, зависящими от последовательностей $A$ и $\Lambda$ (коэффициенты и показатели заданного ряда), и, с другой стороны, с исследованием особенностей ряда Дирихле с простыми коэффициентами (и даже заранее заданными). Например, мы покажем, что весьма часто информацию о расположении особых точек ряда $(A, \Lambda)$ можно получить исходя из знания особых точек ряда $\sum d_n e^{-\lambda_n s}$ (где $d_n$ выражаются простым образом через $\lambda_n$) и особых точек ряда Тейлора, коэффициенты которого образованы с помощью $a_n$ и $\lambda_n$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $\lambda_1 > 1$, $C = \{c_n\}$ — последовательность комплексных чисел, и пусть $k$ — целое положительное число.

Будем говорить, что *последовательность $C$ имеет последовательность образующих порядка $k$ $(G = \{g_n\})$ относительно $\Lambda$*, если существует последовательность $G = \{g_n\}$, такая, что при всех $n \geqslant 1$

$$c_n = \sum_{m < \lambda_n} (\lambda_n - m)^k g_m.$$

Вообще говоря, последовательность $C$ не имеет последовательности образующих заданного порядка относительно заданной последовательности $\Lambda$. Однако можно наложить такие условия на $\Lambda$, что *каждая последовательность $C$* будет иметь последовательность образующих заданного порядка $k$.

**V. 2.3.** *Обозначим через $e_n$ наибольшее целое число, меньшее чем $\lambda_n$ $(n \geqslant 1)$. Если существует последовательность $\{n_j\}$, такая, что $e_{n_j} = n_j$, и такая, что определитель $\Delta_{n_j}$ $(j \geqslant 1)$ порядка $n_j$ (каждый элемент которого, расположенный на пересечении $p$-й строки и $q$-го столбца, равен $(\lambda_p - q)^k$, если $1 \leqslant p \leqslant n_j$, $q \leqslant e_p$, и 0, если $1 \leqslant p < n_j$, $e_p < q \leqslant e_{n_j}$) отличен от нуля, то любая последовательность $C$ имеет последовательность образующих порядка $k$ относительно $\Lambda$.*

В самом деле, каждая система $(S_j)$ уравнений (в роли неизвестных выступают $g_m$)

$$\sum_{m < \lambda_1} (\lambda_1 - m)^k g_m = c_1,$$

$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

$$\sum_{m < \lambda_{n_j}} (\lambda_{n_j} - m)^k g_m = c_{n_j}$$

имеет решение. Если $n_{j_1} < n_{j_2}$ $(n_{j_1}, n_{j_2} \in \{n_j\})$, то величины $g_1^{(j_2)}, g_2^{(j_2)}, \ldots, g_{n_{j_1}}^{(j_2)}$, являющиеся первыми $n_{j_1}$ членами решения системы $(S_{j_2})$, образуют решение системы $(S_{j_1})$. Множество решений всех систем $(S_j)$ $(j \geqslant 1)$ составляет, таким образом, последовательность $\{g_n\}$ (причем каждому $n$ соответствует единственное $g_n$), которая удовлетворяет всем системам уравнений

$$\sum_{m<\lambda_1} (\lambda_1 - m)^k g_m = c_1,$$

$$\vdots$$

$$\sum_{m<\lambda_n} (\lambda_n - m)^k g_m = c_n.$$

**V.2.4.** *Если $n < \lambda_n \leqslant n+1$ $(n \geqslant 1)$, то каждая последовательность C имеет последовательность образующих любого порядка $k$ относительно $\Lambda$.*

Здесь $n_j = j$, и ясно, что

$$\Delta_n = [(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 2)\ldots(\lambda_n - n)]^k \neq 0;$$

утверждение следует теперь из V.2.3.

Теорема V.2.1 позволяет, таким образом, сформулировать следующую теорему:

**Т. V.2.5.** *Предположим, что функция $F(s)$ представима рядом $(A, \Lambda)$ $(\lambda_1 > 1)$, а функция $\varphi(s)$ — рядом $(D, \Lambda)$, $D = \{d_n\}$ $(d_n \neq 0,\ n \geqslant 1)$. Допустим, что $\varphi(s)$ однозначна и порядка $\mu$ в $P_{\sigma_2}$, за исключением особенностей. Предположим, что $\{a_n d_n^{-1}\}$ имеет последовательность образующих $\{g_n\}$ целого порядка $k > \mu$ относительно $\Lambda$ с*

$$\overline{\lim}\left(\frac{\ln|g_n|}{n}\right) = a < \infty,$$

*причем функция $f(s)$, представимая рядом $(G, N) = \sum g_n e^{-ns}$, однозначна.*

*Тогда функция $F$ однозначна и ее единственными возможными особыми точками в полуплоскости $\sigma > \max(a, 0) + \sigma_2$ являются точки множества $\overline{S_{\sigma_2, \varphi} + S_f}$ и точки множества $S_{\sigma_2, \varphi}$.*

В действительности эта теорема является частным случаем теоремы V.2.1, причем в роли величин $a_n$ из теоремы V.2.1 выступают теперь $g_n$, а в роли $b_n$ — величины $d_n$; в качестве $\sigma_1$ можно взять произвольную величину с $H_f(\sigma_1) = a$ при $\sigma_1 < a$.

Следовательно, из теоремы V.2.5 следует, что всякий раз, когда $\Lambda$ удовлетворяет условиям предложения V.2.3 (или, в частности, условиям предложения V.2.4), имеется лишь один ряд Дирихле, не являющийся рядом Тейлора-Д, особенности которого фигурируют при описании особенностей заданного ряда $(A, \Lambda)$. Здесь существенно то, что ряд Дирихле, о котором идет речь, можно выбрать заранее: $(D, \Lambda)=\sum d_n e^{-\lambda_n s}$. Другой ряд, участвующий в «композиции», является рядом Тейлора-Д.

Иногда полезен выбор $d_n=1$ $(n\geqslant 1)$; тогда ряд $(D, A)$ превращается в $\sum e^{-\lambda_n s}$ (аналог ряда $\sum e^{-ns}$). Можно также выбрать $d_n=1/\Lambda'(\lambda_n)$, где

$$\Lambda(z)=\prod\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)=\Lambda_0(iz); \tag{V.5}$$

функция $\Lambda_0(z)$ уже определялась в I. 1.2. В самом деле, известно, что если $\Lambda$ — достаточно регулярная последовательность, то ряд

$$\Phi(s)=\sum\frac{e^{-\lambda_n s}}{\Lambda'(\lambda_n)} \tag{V.6}$$

обладает некоторыми важными и интересными свойствами. Например, этот ряд можно аналитически продолжить с помощью интеграла, который представляет собой распространение на комплексную плоскость преобразования Фурье функции $1/\Lambda_0(ix)$.

Имеем $|\Lambda'(\lambda_n)|=2/\lambda_n\Lambda_n$, где $\{\Lambda_n\}$ — последовательность, ассоциированная с $\Lambda$. Если $\Lambda=N$ $(\lambda_n=n,\ n\geqslant 1)$, то $\Lambda(z)= =\sin\pi z/\pi z$,

$$\Lambda'(n)=(-1)^n/n \qquad (\Lambda_n=2),$$

$$\Phi(s)=\sum(-1)^n ne^{-ns}.$$

Укажем свойства ряда (V. 6). Но сначала достаточно точно оценим $\Lambda_n$ в одном частном случае.

**V. 2.6.** *Если шаг последовательности $\Lambda$ положителен и если существует целое $k$ с условием*

$$|\lambda_n-n|\leqslant k \qquad (n\geqslant 1),$$

*то существует такая постоянная $A$, что*

$$\Lambda_n\leqslant A\lambda_n^{4k} \qquad (n\geqslant 2k+1),$$

*причем $A$ зависит лишь от $\alpha=\inf(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$ и от $k$.*

Можно предположить, что $k>0$, ибо, как мы только что видели, $\Lambda_n=2\,(n\geqslant 2)$ при $\Lambda=N$. Тогда

$$\Lambda_n^{-1}=\prod_{m\leqslant n-1}\left(\frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2}-1\right)\prod_{m\geqslant n+1}\left(1-\frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2}\right)=C_nD_n,$$

причем, с одной стороны, при $n>2k+1$

$$C_n\geqslant\prod_{m\leqslant n-2k-1}\left[\frac{\lambda_n^2}{(m+k)^2}-1\right]\prod_{n-2k\leqslant m\leqslant n-1}\left(\frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2}-1\right)$$

и, с другой стороны,

$$D_n \geqslant \prod_{n+1 \leqslant m \leqslant n+2k} \left(1 - \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2}\right) \prod_{m \geqslant n+2k+1} \left[1 - \frac{\lambda_n^2}{(m-k)^2}\right].$$

Пусть $p_n$ — ближайшее к $\lambda_n$ целое число. Очевидно,

$$n - k - 1 < p_n < n + k + 1,$$

и предыдущие неравенства позволяют записать, что

$$\Lambda_n^{-1} \geqslant \prod_{0 < |m-n| \leqslant 2k} \left(1 - \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2}\right) \prod_{k+1 \leqslant m \leqslant n-k-1} \left(\frac{\lambda_n^2}{m^2} - 1\right) \prod_{m \geqslant n+k+1} \left(1 - \frac{\lambda_n^2}{m^2}\right) =$$

$$= \prod\nolimits_1 \prod\nolimits_2 \prod\nolimits_3^{-1},$$

где при фиксированном $n$

$$\prod\nolimits_1 = \prod_{0 < |m-n| \leqslant 2k} |\lambda_m - \lambda_n| \prod (\lambda_m + \lambda_n) / \prod \lambda_m^2,$$

что доказывает неравенство $\prod_1 > A_1 \lambda_n^{-4k}$, причем $A_1$ зависит лишь от $\alpha$ и $k$. Далее,

$$\prod\nolimits_2 = [|\sin \pi\lambda_n|/\pi |p_n - \lambda_n|] \, [p_n^2/\lambda_n(p_n + \lambda_n)] \geqslant A_2 > 0 \text{ [1]}.$$

Наконец,

$$\prod\nolimits_3 = \prod_{m \leqslant k} \left|\frac{\lambda_n^2}{m^2} - 1\right| \cdot \prod_{\substack{0 < |m-n| \leqslant k \\ m \neq p_n}} \left(1 - \frac{\lambda_n^2}{m^2}\right) = \prod\nolimits_4 \cdot \prod\nolimits_5$$

с $\prod_4 \leqslant A_3 \lambda_n^{2k}$, $\prod_5 \leqslant A_4 \lambda_n^{-2k}$, причем постоянные $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ зависят лишь от $\alpha$ и $k$. Отсюда сразу вытекает V.2.6.

Вот лемма о рядах Дирихле с показателями $\Lambda$, которые могут играть ту же роль, что и ряд $\sum e^{-ns}$ — а точнее, ряд $\sum (-1)^n n e^{-ns}$ — в случае, когда $\Lambda = N$.

**V.2.7.** *Если шаг последовательности $\Lambda$ положителен и если существует такая постоянная $k$, что*

$$|\lambda_n - n| \leqslant k,$$

*то ряд*

$$\Phi(s) = \sum \frac{e^{-\lambda_n s}}{\Lambda'(\lambda_n)},$$

*где $\Lambda(z)$ определяется в (V.5), абсолютно сходится при $\sigma > 0$.*

*Функция $\Phi(s)$ (аналитическое продолжение ряда) четна, голоморфна в плоскости, из которой удалены полупрямые $\sigma = 0$,*

---

[1]) При $\lambda_n = p_n$ вместо выражения $\sin \pi\lambda_n/\pi\lambda_n \left[1 - \lambda_n^2/p_n^2\right]$ надо взять $\prod_{m \neq p_n} \left(1 - p_n^2/m^2\right)$.

$|t| \geqslant \pi$; *в полосе* $|t| < \pi$

$$\Phi(s) = \frac{-1}{2\pi} \int \frac{e^{-isy}}{\Lambda(iy)} dy,$$

*причем этот интеграл сходится равномерно и абсолютно при* $|t| \leqslant \pi - \varepsilon$, *каково бы ни было* $0 < \varepsilon < \pi$. *В полосе* $|t| < \pi - \varepsilon$ *функция* $\Phi(s)$ *ограничена.*

В силу предложения V. 2.6 и в силу равенства (доказанного непосредственно перед ним) $|\Lambda'(\lambda_n)| = 2/\lambda_n \Lambda_n$, существуют постоянные $M$ и $d$, такие, что

$$|\Lambda'(\lambda_n)|^{-1} \leqslant M\lambda_n^d.$$

Так как шаг последовательности $\Lambda$ положителен, ясно, что ряд (V. 6) абсолютно сходится при $\sigma > 0$.

Рассмотрим теперь в плоскости $z = x + iy = re^{i\theta}$ замкнутый контур $C_R$, образованный отрезками $\theta = a$, $\theta = -a$, $0 < a < \pi/2$, $r \leqslant R$, и дугой окружности $r = R$, $|\theta| < a$, причем $R$ выбрано так, что ни одно из $\lambda_n$ не равно $R$. По теореме Коши имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_R} \frac{e^{-sz}}{\Lambda(z)} dz = \sum_{n \leqslant N(R)} \frac{e^{-\lambda_n s}}{\Lambda'(\lambda_n)},$$

где $N(R)$ — число тех $\lambda_n$, которые не превосходят $R$. Покажем, что если положить $R_m = (\lambda_m + \lambda_{m-1})/2$, то существуют такие постоянные $C$ и $c$, что

$$A_m = \min |\Lambda(R_m e^{i\theta})| \geqslant CR_m^{-c} \qquad (m \geqslant 1). \tag{V. 7}$$

Легко видеть, что

$$A_m = \Lambda(R_m) = \prod \left| 1 - \frac{R_m^2}{\lambda_n^2} \right|, \tag{V. 8}$$

и если обозначить через $M = \{\mu_n\}$ возрастающую последовательность, составленную из элементов последовательности $\Lambda$ и числа $R_m$ (при заданном $m$), то

$$|\Lambda(R_m)|^{-1} = M_{m+1},$$

где $\{M_n\}$ — последовательность, ассоциированная с $M$. Однако из предположений и способа образования последовательности $M$ вытекает существование такого целого положительного числа $l$, что

$$|\mu_n - n| \leqslant l,$$

так как шаг последовательности $M$ положителен; следовательно, в силу V. 2.6

$$M_{m+1} = |\Lambda(R_m)|^{-1} \leqslant C^{-1} \mu_{m+1}^{4l} = C^{-1} R_m^{4l},$$

откуда (если принять во внимание (V. 8)) вытекает (V. 7).

Из (V.7) следует, что при любом $\varepsilon > 0$ для $m \geqslant m(\varepsilon)$ на дуге $r = R_m$, $|\theta| \leqslant a < \pi/2$, выполняется неравенство

$$|\Lambda(z)| \geqslant e^{-\varepsilon r},$$

откуда при $s > 0$ вытекает неравенство

$$\left|\frac{e^{-sz}}{\Lambda(z)}\right| \leqslant e^{-(s\cos a-\varepsilon)r} \qquad (r = R_m,\ |\theta| < a,\ m > m(\varepsilon)).$$

Таким образом, при вещественном $r > 0$ имеем (интеграл берется вдоль $C_{R_m}$ в положительном направлении)

$$\lim \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{R_m}} \frac{e^{-sz}}{\Lambda(z)}\,dz = \lim \frac{1}{2\pi i}\left[-\int\limits_0^{R_m} \frac{e^{-sre^{ia}}}{\Lambda(re^{ia})}\,e^{ia}\,dr + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{R_m} \frac{e^{-sre^{-ia}}}{\Lambda(re^{-ia})}\,e^{-ia}\,dr\right] = \sum \frac{e^{-\lambda_n s}}{\Lambda'(\lambda_n)}. \qquad (V.9)$$

Из условий, наложенных на $\Lambda$, сразу же следует, что при $a \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ ($\delta > 0$ произвольно) справедливо неравенство

$$\left|1 - \frac{z^2}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2}\right| \leqslant \left|1 - \frac{r^2}{\lambda_n^2}\right|\left(1 + \frac{\delta^2 r^2}{4n^2}\right),$$

если $r$ и $n$ достаточно велики. Используя теперь каноническое произведение для $\cos\pi z$, получаем, что

$$|\cos\pi z|\,|\Lambda(z)|^{-1} \leqslant C_1 \prod\left(1 + \frac{\delta^2 r^2}{4n^2}\right) = C_2\left|\sin\left(\frac{\pi i\,\delta r}{2}\right)\right|\frac{1}{\delta r},$$

где $C_1$ и $C_2$ — некоторые постоянные, откуда следует, что при достаточно больших $r$ (при $a \leqslant |\theta| \leqslant \pi/2$)

$$|\cos\pi z| < |\Lambda(z)|\,e^{\delta r}. \qquad (V.10)$$

Теперь легко видеть, что при $a \leqslant |\theta| \leqslant \pi/2$ интеграл

$$I_\theta(s) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-sre^{i\theta}}}{\Lambda(re^{i\theta})}\,e^{i\theta}\,dr \qquad (V.11)$$

сходится абсолютно и равномерно в части плоскости $s = \sigma + it$, определяемой условием

$$t\sin\theta - \sigma\cos\theta \leqslant \pi|\sin\theta| - 2\delta,$$

и, следовательно, представляет в ней голоморфную функцию. Достаточно заметить, что ($\delta > 0$ задано) в силу (V.10)

$$\left|e^{-sre^{i\theta}}\right| \leqslant L\,|\Lambda(re^{i\theta})|\,e^{t\sin\theta - \sigma\cos\theta + \delta|\sin\theta|}, \qquad (V.12)$$

где $L$ — некоторая постоянная.

Возвращаясь теперь к (V. 9), мы видим, что любой из интегралов выражения

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-sre^{ia}}}{\Lambda(re^{ia})}e^{ia}\,dr-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-sre^{ia}}}{\Lambda(re^{-ia})}e^{-ia}\,dr$$

сходится абсолютно и равномерно в каждой части плоскости, определяемой условием

$$|t|\leqslant\sigma\operatorname{ctg}a+\pi-\varepsilon, \tag{V. 13}$$

и это выражение равно там $-\Phi(s)$.

Применяя теорему Коши и учитывая (V. 12), видим, что при $s>0$

$$I_a(s)=I_{-a}(s)=I_{\pi/2}(s)=I_{-\pi/2}(s)=I_0(s)=I_\pi(s).$$

Интеграл из утверждения V. 2.7, который абсолютно сходится при $|t|<\pi$ (согласно (V. 13) с $a=\pi/2$), равномерно сходится в каждой полосе $|t|<\pi-\varepsilon$ и представляет там функцию $-\Phi(s)$; $\Phi(s)$ ограничена в полосе $|t|<\pi-\varepsilon$. Из четности $\Lambda(z)$ следует четность $\Phi(s)$. Доказательство закончено.

Замечание. Если последовательность $\Lambda$ такова, что любому натуральному числу $k$ однозначно соответствует не более одного $\lambda_n$ с условием $k<\lambda_n\leqslant k+1$, другими словами, если в обозначениях предложения V. 2.3 $e_{n+1}-e_n\geqslant 1$ $(n\geqslant 1)$ (с $\lambda_1>1$), то ряд $(A, \Lambda)$ можно представить в виде $\sum a'_p e^{-L_p s}$, где $L_{e_n}=\lambda_n$ и где $L_p$ для $p\neq e_n$ $(n\geqslant 1)$ выбирается произвольно в $]p, p+1]$; $a'_{e_n}=a_n$ и $a'_p=0$ для $p\neq e_n$ $(n\geqslant 1)$. Следовательно, в силу теоремы V. 2.5 изучение распределения особенностей функции $(A, \Lambda)$ может быть сведено к изучению распределения особенностей функции, представимой рядом Дирихле $(D, L)$, $L=\{L_n\}$, коэффициенты которого $(D=\{d_n\})$ выбираются произвольно, и к изучению распределения особенностей ряда Тейлора-Д $\sum g_n e^{-ns}$, причем $G=\{g_n\}$ — последовательность образующих для $C=\{c_n\}$, $c_n=a_n d_n^{-1}$, некоторого порядка относительно $\Lambda$.

Порядок последовательности образующих зависит, разумеется, от порядка функции $(C, L)$, за исключением особенностей (если такой порядок существует).

Во всяком случае, следует отметить, что в задаче нахождения особенностей ряда Дирихле $(A, \Lambda)$ весьма часто можно «отделить» одни трудности от других, изучая, с одной стороны, ряды, в которые входит лишь последовательность $\Lambda$ (например, ряд $\sum e^{-\lambda_n s}$ или ряд $\sum[\Lambda'(\lambda_n)]^{-1}e^{-\lambda_n s}$), а с другой стороны, изучая особенности ряда Тейлора.

Некоторые из установленных теорем могут также применяться для получения обратных результатов, позволяя тем самым утверждать, что некоторая функция, представимая общим рядом Дирихле, обязательно имеет заданные особые точки.

Пусть $f(s)$ — функция, представимая рядом $(A, \Lambda)$, и пусть $k$ — целое положительное число. Мы будем называть $n$-й коэффициент порядка $k$ функции $f$ относительно последовательности $N$ *$n$-м коэффициентом Тейлора порядка $k$ функции $f$.* Обозначим эту величину через $a_T^{(k)}(n)$.

**Т. V.2.8.** *Пусть функция $f(s)=(A, \Lambda)$ однозначна в $P_{\sigma_1}$, и предположим, что $f$ имеет порядок $\nu$ в этой полуплоскости, за исключением особенностей.*

*Пусть $\beta$ — некоторая особая точка функции $F(s)$, представимой рядом $\sum a_T^{(k)}(n)e^{-ns}$, где целое $k>\nu$, и пусть $\beta \neq 2m\pi i$ ($m$ — целое число). Тогда каждому $\varepsilon>0$ соответствует целое $p$, такое, что существует точка $\alpha \in S_{\sigma_1, f}$ с условием*

$$|\alpha-(2p\pi i+\beta)|<\varepsilon.$$

Функция $\varphi(s)=\sum e^{-ns}$ однозначна в любой полуплоскости $P_{\sigma_2}$ и ограничена там, за исключением особенностей. Следовательно, можно применить теорему V. 2.1 к $f$ и $\varphi$ с $k>\nu$. Единственными возможными особыми точками функции $F$ во всей плоскости являются, следовательно, точки множества $\overline{S_{\sigma_1, f}+S_\varphi}=\overline{S}$ и точки множества $S_\varphi$. Но точки множества $S_\varphi$ — это точки $2m\pi i$. Если $\beta$ — особая точка функции $F$, отличная от $2m\pi i$, т. е. если $\beta \notin S_\varphi$, то эта точка заведомо должна принадлежать $\overline{S}$. Иначе говоря, или существуют точка $\alpha_1 \in S_{\sigma_1, f}$ и целое $m$, такие, что $\beta=\alpha_1+2m\pi i$, или существуют последовательность $\{\alpha_n\}$ с $\alpha_n \in S_{\sigma_1, f}$ $(n \geqslant 1)$ и последовательность целых чисел $\{m_n\}$, такие, что $\beta=\lim(\alpha_n+2m_n\pi i)$. В последнем случае ($\varepsilon>0$ задано) при достаточно больших $n$

$$|\beta-\alpha_n-2m_n\pi i|<\varepsilon.$$

Теорема, таким образом, доказана.

Только что доказанная теорема позволяет сопоставить каждой теореме, доставляющей условие того, что заданная точка является особой точкой ряда Тейлора, теорему для общих рядов Дирихле (конечного порядка, за исключением особенностей), указывающую положение некоторых их особых точек.

## V. 3. «Фиктивная композиция» особенностей

Важно уметь так формулировать теоремы о композиции рядов Дирихле с произвольной последовательностью $\Lambda$, чтобы в них не фигурировал порядок функций (за исключением особенностей) и a fortiori чтобы эти функции не предполагались ограниченными (разумеется, всегда, за исключением особенностей). Можно дать такие формулировки, прибавив к множествам $\overline{S_f + S_\varphi}$ и $S_\varphi$ некоторые множества, которые в случае $\Lambda = M = N$ включаются в только что указанные. Однако сначала дадим новые определения и сделаем предварительные замечания.

Предположим, что функция $f(s) = (A, \Lambda)$ однозначна в $P_{\sigma_1}$. Обозначим через $E_f(a, \sigma_1)$ множество точек $s \in P_{\sigma_1}$, в которых $f(s) = a$. Пусть функция $\varphi(s)$ однозначна в $P_{\sigma_2}$.

Определим множество $P = P[f, \sigma_1; \varphi, \sigma_2]$ следующим образом: $\gamma \in P$ тогда и только тогда, когда каждому значению $a$, за исключением, быть может, одного, и каждому $\varepsilon > 0$ соответствуют $\rho_a = \rho_a(\varepsilon) \in E_f(a, \sigma_1)$ и $\beta = \beta(\varepsilon) \in S_{\sigma_2, \varphi}$, такие, что $|\gamma - \rho_a - \beta| < \varepsilon$. Если $\Lambda = M = N$ (т. е. если оба ряда являются рядами Тейлора-Д), то

$$P[f, \sigma_1; \varphi, \sigma_2] \subset S_{\sigma_1, f} + S_{\sigma_2, \varphi}.$$

В самом деле, пусть $\beta_n \in S_{\sigma_2, \varphi}$, $\rho_{\omega_n} \in E_f(\omega_n, \sigma_1)$, такие, что $\lim \omega_n = \infty$, $\lim(\rho_{\omega_n} + \beta_n) = \gamma$. Но поскольку в нашем случае ($\Lambda = M = N$) функции $f$ и $\varphi$ периодичны (с периодом $2\pi i$), то, полагая $\rho_{\omega_n} = \rho'_{\omega_n} + i\rho''_{\omega_n}$, допустим, что

$$0 \leqslant \rho''_{\omega_n} < 2\pi$$

и существуют целые $k_1$ и $k_2$, обладающие следующим свойством: если положить $\beta_n = \beta'_n + i\beta''_n$, то $2k_1\pi \leqslant \beta''_n \leqslant 2k_2\pi$, причем все эти равенства и неравенства справедливы при всех $n \geqslant 1$.

Пусть, с другой стороны, $\sigma' > \sigma_{a, f}$. Если при $n > n_0$ выполняется неравенство $|\omega_n| > \sup\limits_{\sigma \geqslant \sigma'} |f(s)|$, то каждая из точек $\rho_{\omega_n}$ ($n > n_0$) расположена в прямоугольнике $\Delta_1$: $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma'$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, и, следовательно, точки $\beta_n$ ($n > n_0$) расположены в прямоугольнике $\Delta_2$. Поэтому существуют последовательность $\{n_j\}$ и точки $\rho \in \Delta_1$, $\beta \in \Delta_2$, такие, что $\lim \rho_{\omega_{n_j}} = \rho$, $\lim \beta_{n_j} = \beta$, $\gamma = \rho + \beta$. Но тогда $\rho \in S_{\sigma_2, f}$, $\beta \in S_{\sigma_2, \varphi}$; это доказывает наше утверждение.

С помощью теоремы Пикара легко показать, что если $\alpha_1 \in S_{\sigma_1, f}$ и если $\alpha_1$ — существенно особая точка функции $f$, то для любой точки $\beta$, принадлежащей $S_{\sigma_2, \varphi}$, имеем $\alpha_1 + \beta \in P[f, \sigma_1; \varphi, \sigma_2]$. В любом случае, если $f$ и $\varphi$ представимы рядами Тейлора-Д и если мы положим $S_{f, \varphi} = S_f + S_\varphi$, то $\overline{S}_{f, \varphi} = \overline{S_{f, \varphi} \cup P[f, \sigma_1; \varphi, \sigma_2]}$. Что касается общих рядов Дирихле, то нельзя утверждать, что замыкание этого объединения совпадает с замыканием $\overline{S}_{f, \varphi}$ множества $S_{f, \varphi}$. Введение множеств $P[f, \sigma_1; \varphi, \sigma_2]$ с целью получения теорем о композиции общих рядов Дирихле, в которых не фигурировал бы порядок функций (за исключением особенностей), кажется естественным и необходимым.

Если $\sigma_1 = \sigma_2 = -\infty$, то множество $P[f, \sigma_1; \varphi, \sigma_2]$ мы будем обозначать через $P[f; \varphi]$. Заметим, что, вообще говоря, множества $P[f; \varphi]$ и $P[\varphi; f]$ различны.

Что представляет собой множество $P[f; \varphi]$, становится понятным, если сказать, что принадлежащая ему точка $\gamma$ является в случае общего ряда Дирихле *«фиктивной суммой»* $\alpha + \beta$, *где* $\alpha \in S_f$, $\beta \in S_\varphi$.

Докажем следующую теорему:

**Т. V. 3.1.** *Пусть $F(s)$ — функция, представимая рядом $(A, \Lambda)$ $(\lambda_1 > 1)$. Предположим, что функция $\varphi(s)$, представимая рядом $(D, \Lambda)$, где $D = \{d_n\}$ $(d_n \neq 0,\ n \geqslant 1)$, однозначна, причем последовательность $\{a_n d_n^{-1}\}$ имеет последовательность образующих $G = \{g_n\}$ целого порядка $k$ относительно $\Lambda$. Если*

$$\overline{\lim}\left(\frac{\ln|g_n|}{n}\right) < \infty$$

*и если функция $f(s)$, представимая рядом $(G, N)$, однозначна, то функция $F(s)$ также однозначна, и ее единственными возможными особыми точками являются точки множеств $S_{f,\varphi} = \overline{S_f + S_\varphi}$, $\overline{P[\varphi; f]}$ и $S_\varphi$.*

Предположим сначала, что $\varphi$ принимает каждое значение, за исключением, быть может, одного. Представив, как и при доказательстве теоремы V. 2.1, $F(z)$ в виде интеграла (V. 3), в котором $a_n$ заменены на $g_n$, $b_n$ — на $d_n$, мы видим, что $\sigma_{a,F} \leqslant \sigma_{a,f} + \sigma_{a,\varphi}$ $(\sigma_{a,f} = \overline{\lim}(\ln|g_n|/n))$. Нам нужно доказать, что $F(s)$ голоморфна и однозначна в той части $\Delta$ дополнения множества

$$S_{f,\varphi} \cup S_\varphi \cup \overline{P[\varphi; f]}$$

относительно всей плоскости, которая образует область, содержащую некоторую полуплоскость $P_{\sigma'}$. Пусть $L$ — простая жорданова дуга в $z$-плоскости $(z = x + iy)$, $L = \overline{L} \subset \Delta$, причем один из концов этой дуги $z^*$ принадлежит $x > \sigma_{a,f} + \sigma_{a,\varphi}$, и пусть $z_0 \in L$.

Существуют $\delta > 0$ и различные числа $a$ и $b$, $a = a(z_0)$, $b = b(z_0)$, такие, что при любом $\beta \in S_\varphi$ выполняются следующие соотношения:

1) $|z_0 - \beta| > \delta$; для каждого $\rho_a \in E_\varphi(a, -\infty)$, каждого $\rho_b \in E_\varphi(b, -\infty)$ и каждого $\alpha \in S_f$ имеем

2) $|z_0 - \alpha - \rho_a| > \delta$,

3) $|z_0 - \alpha - \rho_b| > \delta$,

4) $|z_0 - \beta - \alpha| > \delta$.

Сразу ясно, что существует $\delta_1>0$, такое, что неравенства 1) и 4) для $\alpha$, $\beta$ удовлетворяются при $\delta=\delta_1$; в противном случае точка $z_0$ принадлежала бы либо $S_\varphi$, либо $\overline{S}_{f,\varphi}$. Если бы, с другой стороны, не существовало чисел $a$, $b$, $\delta_2>0$, для которых выполнялись бы неравенства 2) и 3) с $\delta=\delta_2$, то при всех $\delta>0$ имело бы место неравенство $|z-\alpha-\rho_c|\leqslant\delta$ для любого $c$, некоторого

$$\rho_c\in E_\varphi(c,\ -\infty)$$

и некоторого $\alpha$, за исключением, быть может, одного значения $c=c(\delta)$. Однако ясно, что при достаточно малых $\delta$ величина $c(\delta)$ (если она существует) имела бы одно и то же значение и точка $z_0$ принадлежала бы тогда $P[\varphi, f]$. Наименьшее из $\delta_1$ и $\delta_2$ является величиной $\delta$, фигурирующей в соотношениях 1) — 4). Из этих четырех неравенств следует, что каждому $z_0\in L$ соответствует $\varepsilon=\varepsilon(z_0)>0$, такое, что $|z-\beta|>\varepsilon$, $|z-\alpha-\rho_a|>\varepsilon$, $|z-\alpha-\rho_b|>\varepsilon$, $|z-\beta-\alpha|>\varepsilon$, если $z\in C(z_0, \varepsilon)$. Величина $\varepsilon=\varepsilon(z_0)$ зависит от $z_0$; однако если обозначить через $\varepsilon'(z_0)$ нижнюю грань всех $\varepsilon(>0)$ (для фиксированных $z_0$, принадлежащих $L$), имеющих указанные свойства, то

$$\inf_{z_0\in L}\varepsilon'(z_0)=\eta>0$$

(ибо $L$ — компактное множество). Иначе говоря, существует $\eta>0$, не зависящее от $z_0$, такое, что для $a=a(z_0)$, $b=b(z_0)$, любых $\rho_a\in E_\varphi(a(z_0),\ -\infty)$, любых $\rho_b\in E_\varphi(b(z_0),\ -\infty)$, любых $\alpha\in S_f$ и любых $\beta\in S_\varphi$ справедливы следующие неравенства:

$$\begin{gathered}|z-\beta|>\eta,\quad |z-\alpha-\rho_a|>\eta,\\ |z-\alpha-\rho_b|>\eta,\quad |z-\beta-\alpha|>\eta,\end{gathered}\tag{V. 14}$$

если $z\in\overline{C(z_0,\eta)}$ при $z_0\in L$.

Выберем конечное множество точек $z_0^{(1)}, z_0^{(2)}, \ldots, z_0^{(k)}$, таких, что $z_0^{(m+1)}\in\overline{C(z_0^{(m)}, \eta/2)}$ $(1\leqslant m\leqslant k-1)$, $z_0^{(j)}\in L$ $(1\leqslant j\leqslant k)$, $z_0^{(1)}=z^*$, причем другой конец $z_1^*$ дуги $L$ принадлежит $\overline{C(z_0^{(k)}, \eta/2)}$. Имеем $\lim\varphi(s)=0$ $(\sigma\to\infty)$ равномерно по $t$ (ибо $\lambda_1>0$; здесь $\lambda_1>1$). Но известно также, что $\varphi(s)\neq0$ при достаточно больших $\sigma$ (это ясно из равенств

$$\varphi(s)=\sum d_n e^{-\lambda_n s}=e^{-\lambda_1 s}\Bigl(1+\sum_{n\geqslant2}d_n e^{-(\lambda_n-\lambda_1)s}\Bigr),$$

причем последний ряд равномерно стремится к нулю при $\sigma\to\infty$). Следовательно, существует такое $\sigma_0$, что

$$\mathscr{R}\Bigl(\rho_{a(z_0^j)}\Bigr)<\sigma_0,\quad \mathscr{R}\Bigl(\rho_{b(z_0^j)}\Bigr)<\sigma_0.$$

Если $\sigma_1+\varepsilon<0$ и достаточно велико по абсолютной величине и если $s=\sigma_1+\varepsilon+it$, то для любых $z\in\overline{C(z_0^{(j)},\eta)}$ $(1\leqslant j\leqslant k)$, любых $\beta\in S_\varphi$ и любых $a=a(z_0^{(j)})$, $b=b(z_0^{(j)})$ $(1\leqslant j\leqslant k)$ имеем

$$|z-s-\rho_a|>\eta,\quad |z-s-\rho_b|>\eta,\quad |z-s-\beta|>\eta. \tag{V.15}$$

Пусть теперь $C_1^*(\varepsilon)$ — контур, определенный в (V.4). Из неравенств (V.14) и (V.15) следует, что при достаточно малых $\varepsilon>0$ неравенства (V.15) справедливы для любой точки $s$ из $C_1^*(\varepsilon)$ (если $\sigma_1<0$ и достаточно велико по абсолютной величине), и при достаточно малом $\varepsilon$ имеем $\mathcal{R}(z^*-s)\geqslant\mathcal{R}(z^*)-\sigma_{a,f}-2\varepsilon>\sigma_{a,\varphi}+\varepsilon$. Если $s$ — некоторая фиксированная точка из $C_1^*(\varepsilon)$, а $z$ изменяется на $L$, то точка $u=z-s$ изменяется на кривой $L(s)$, полученной сдвигом кривой $L$. Один из концов $u^*=z^*-s$ кривой $L$ принадлежит полуплоскости $\sigma>\sigma_{a,\varphi}+\varepsilon$; следовательно,

$$|\varphi(u^*)|=|\varphi(z^*-s)|\leqslant\sum|d_n|e^{-\lambda_n(\sigma_{a,\varphi}+\varepsilon)}=M$$

для любой точки $s\in C_1^*(\varepsilon)$.

Однако из теоремы Шоттки вытекает, что если $\Phi(z)$ голоморфна на $\overline{C(\alpha,R)}$, если $|\Phi(\alpha)|<N$, если $\Phi(z)$ не принимает на этом (замкнутом) круге значений $a$ и $b$, $a\neq b$, и если $0<\gamma<1$, то на $\overline{C(\alpha,\gamma R)}$ имеет место неравенство

$$|\Phi(z)|<K(a,b,N,\gamma)<\infty.$$

Следовательно, полагая при фиксированном $s$

$$u_2^*=z_0^{(2)}-s,\ \ldots,\ u_k^*=z_0^{(k)}-s,$$

имеем для $u\in\overline{C(u^*,\eta/2)}$

$$|\varphi(u)|<K\left(a(z_0^{(1)}),\ b(z_0^{(1)}),\ M,\ \frac{1}{2}\right)=K_1,$$

и, следовательно, $|\varphi(u_2^*)|<K_1$. Применяя теорему Шоттки второй раз, получаем для $u\in C(u_2^*,\eta/2)$ неравенство

$$|\varphi(u)|<K\left(a(z_0^{(2)}),\ b(z_0^{(2)}),\ K_1,\ \frac{1}{2}\right)=K_2,$$

и, следовательно, $|\varphi(u_3^*)|\leqslant K_2$ и т. д.

Применяя теорему Шоттки $k$ раз, видим, что $|\varphi(z-s)|<B$, когда $z$ изменяется в канале с центральной линией $L(s)$, причем $s$ — произвольная точка из $C_1^*(\varepsilon)$, а $B$ не зависит от $z$ и $s$.

Теперь легко видеть, что интеграл (V.4) снова определяет голоморфную функцию на $L$. Конец доказательства проводится без труда.

Выше предполагалось, что $\varphi(s)$ принимает любое значение, за исключением, быть может, одного. Если $\varphi(s)$ не принимает двух различных значений $(a_1\neq b_1)$, то рассуждения лишь упрощаются; действительно, тогда в том месте доказательства, где последний раз применяется теорема Шоттки, можно сразу использовать то, что $a(z_0^{(j)}) = a_1$, $b(z_0^{(j)}) = b_1$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$.

## V. 4. Композиция функций с быстрым ростом

В этом параграфе аналитическое продолжение ряда $(A, \Lambda)$ может расти (за исключением особенностей) быстрее любой степени $|t|$. На рост функции $f(s)$ налагается такое ограничение:

$$\ln|f(s)| < C(|t|), \tag{V. 15}$$

где $C(t)$ $(t > 0)$ стремится к бесконечности. Что же касается роста $C(t)$, то единственное требование состоит в сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty (C(t)/t^2)\,dt$ $(a > 0)$. Требование сходимости такого интеграла весьма характерно при изучении целых функций, получающихся распространением на плоскость комплексной переменной преобразования Фурье функций с компактным носителем. Изучение таких целых функций необходимо нам для дальнейшего.

Следующая далее лемма V. 4.1 дает более точный результат, чем это требуется при доказательстве теорем о композиции функций (и их особенностей). Нас вполне устраивает менее точный и более простой результат; однако сама лемма V. 4.1 потребуется в гл. IX.

**V. 4.1.** *Пусть $C(x)$ — неубывающая функция, равная нулю в окрестности* 0. *Предположим, что*

$$\int^\infty \frac{C(x)}{x^2}\,dx < \infty,$$

*и положим для $a > 0$*

$$h(a) = \int\limits_a^\infty \frac{C(x)}{x^2}\,dx.$$

*Пусть $p$ и $q$ — две такие постоянные, что $p > 2$, $0 \leqslant q < p - 2$.*

*Тогда для любого $a > 0$ существует целая четная функция $F_a(z)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

$$|F_a(z)| \leqslant e^{peh(a)|y| - C(|z|)} L_a(x), \tag{V. 16}$$

*где $L_a(x)$ — четная функция с положительными значениями, убывающая при $x \geqslant 0$; $L_a \in L$* [1]*), $\|L_a\| = 1$; при этом преобра-*

[1]) $L = L^1(-\infty, \infty)$. — *Прим. перев.*

*зование Фурье $\hat{F}_a(u)$ функции $F_a$ является четной функцией с неотрицательными значениями, удовлетворяющей таким условиям:*

$$\hat{F}_a(u)=\frac{e^{-C(a-0)}}{2e\sqrt{(p+q)/(p-q-2)}} \quad \text{при} \quad |u|\leqslant qeh(a), \tag{V.17}$$

$$\hat{F}_a(u)=0 \quad \text{при} \quad |u|\geqslant peh(a). \tag{V.18}$$

Напомним, что преобразование Фурье функции $F$ (если $F\in L$) определяется формулой

$$\hat{F}(u)=\int F(x)e^{-ixu}\,dx$$

(мы опускаем перед интегралом множитель $1/\sqrt{2\pi}$; в случае если границы интегрирования — нижняя и верхняя — равны соответственно $-\infty$ и $+\infty$, то мы их не пишем). Напомним, наконец, что для ($f\in L$)

$$\|f\|=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx.$$

Доказательство леммы V.4.1 по существу базируется на следующей лемме:

**V.4.2.** *Пусть $\{\mu_n\}$ — последовательность положительных чисел с условием*

$$\sum \mu_n<\infty. \tag{V.19}$$

*Тогда произведение*

$$F(z)=\prod\frac{\sin\mu_n z}{\mu_n z} \tag{V.20}$$

*равномерно сходится на каждом компакте плоскости $z=x+iy$ и определяет целую четную функцию. Полагая*

$$\mu=\sum\mu_n,$$

$$S(u)=\inf_{n\geqslant 0}\,(\mu_1\mu_2\ldots\mu_n u^n)^{-1}\,[1], \tag{V.21}$$

*имеем*

$$|F(z)|\leqslant e^{\mu|y|}S(|z|). \tag{V.22}$$

*Если $\hat{F}$ — преобразование Фурье ограничения функции $F$ на* $\mathbf{R}$,

---

[1]) Если $n=0$, то $(\mu_1\ldots\mu_n u^n)^{-1}=1$ (по определению). Таким образом, $S(u)\leqslant 1$.

то

$$\hat{F}(u) = 2\pi \lim_{n\to\infty} \int_{-\mu_1}^{\mu_1} dt_1 \int_{-\mu_2}^{\mu_2} dt_2 \ldots \int_{-\mu_n}^{\mu_n} f_n(u + t_1 + \ldots + t_n)\, dt_n, \tag{V.23}$$

где

$$f_n(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n+1}\mu_1 \ldots \mu_{n+1}} & \text{при} \quad |u| < \mu_{n+1}, \\ 0 & \text{при} \quad |u| \geqslant \mu_{n+1}. \end{cases}$$

Имеем $\left(\text{определяя ветвь логарифма равенством } \lim\limits_{z\to 0} \ln\left(\frac{\sin z}{z}\right) = 0\right)$

$$\ln\left(\frac{\sin z}{z}\right) = -\frac{z^2}{6} + O(z^4) \quad (z \to 0).$$

Следовательно, если $z$ изменяется на компакте $D$, то ряд

$$\sum \ln\left(\frac{\sin \mu_n z}{\mu_n z}\right)$$

в силу (V. 19) сходится равномерно[1]).

Поскольку $|\sin z| \leqslant e^{|y|}$, $|\sin z| \leqslant |z| e^{|y|}$, для $1 \leqslant k \leqslant n$ $(n \geqslant 1)$ имеем

$$|\sin \mu_k z| \leqslant e^{\mu_k |y|}$$

и для $k > n$ $(n \geqslant 0)$

$$|\sin \mu_k z| \leqslant \mu_k |z| e^{\mu_k |y|}.$$

Следовательно, каково бы ни было целое $n > 0$, получаем

$$|F(z)| = \left| \prod \frac{\sin \mu_k z}{\mu_k z} \right| \leqslant \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n |z|^n} e^{\mu |y|},$$

откуда следует (V. 22).

Обратимся теперь к (V. 23). Обозначая через $\varphi_n(u)$ выражение этого равенства, следующее за lim, имеем свертку[2])

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} * f_n \quad (n > 1), \qquad \varphi_1 = f_1,$$

причем $f_n$—это преобразование Фурье функции $(\sin \mu_n x / \mu_n x)(2\pi)^{-1}$. Таким образом, $2\pi\varphi_n$ является преобразованием Фурье функции

$$\prod_{k \leqslant n} \frac{\sin \mu_k x}{\mu_k x}. \tag{V.24}$$

---

[1]) На компакте $D$ этот ряд начинается лишь с члена с номером $n_0$ $(n \geqslant n_0)$, такого, что $\sin \mu_n z$ не обращается там в нуль.

[2]) По поводу определения и свойств свертки см., например, Мандельбройт С., Теоремы замкнутости и композиции, ИЛ, М., 1962. — *Прим. перев.*

Так как произведение (V. 24) стремится при $n \to \infty$ к пределу $(F(x))$ и так как абсолютная величина этого произведения ограничена сверху функцией, не зависящей от $n$ и принадлежащей $L$, то предел в (V. 23) существует и равен преобразованию Фурье функции $F(x)$.

Перейдем теперь к доказательству леммы V.4.1. Пусть $C_a(x)$ — функция, равная нулю на $[0, a[$ и равная ограничению функции $C(x)$ на $[a, \infty[$; пусть $Q_a(t) = E[C_a(e^{t+1})]$ (напомним, что $Ed$ означает целую часть от $d$). Из (V. 15) следует, что интегралы

$$\int_{\ln a-1}^{\infty} e^{-t} Q_a(t)\,dt = \int_{\ln a-1-0}^{\infty} dQ_a(t)\,^{1)}$$

сходятся, причем равенство между ними доказывается интегрированием по частям с использованием того факта, что существует последовательность $N_j \uparrow \infty$ с условием

$$Q_a(N_j)e^{-N_j} \to 0.$$

Функция $Q_a(t)$ — ступенчатая функция, скачки которой в точках разрыва $q_k$ $(k \geqslant 1)$ равны целым положительным числам $m_k$. Положим $\nu_k = e^{-q_k}$, и пусть $\{\mu_n\}$ — множество чисел $\nu_k$, причем каждое считается $m_k$ раз. Имеем

$$\sum \mu_n = \int_{\ln a-1-0}^{\infty} e^{-t}\,dQ_a(t) = \int_{\ln a-1}^{\infty} Q_a(t)e^{-t}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant e\int_a^{\infty} \frac{C(x)}{x^2}\,dx = eh(a). \qquad \text{(V. 25)}$$

Построим теперь функцию $F(z)$ из леммы V. 4.2 с только что определенными $\mu_n$. Положим

$$\beta = (p-q-2)\,eh(a)/2, \quad \gamma = (p+q)\,eh(a)/2,$$

$$F_a(z) = \frac{e^{-C(a-0)}}{2\pi e}\cdot\frac{1}{\sqrt{\beta\gamma}}\cdot\frac{\sin\beta z}{z}\cdot\frac{\sin\gamma z}{z}F(z).$$

Имеем

$$\left|\frac{\sin\gamma z}{\gamma z}\cdot\frac{\sin\beta z}{\beta z}\right| \leqslant e^{(\gamma+\beta)|y|}\min\left(1, \frac{1}{\beta\gamma|z|^2}\right) \leqslant 2e^{(\gamma+\beta)|y|}\frac{1}{1+\beta\gamma x^2},$$

---

1) Для интеграла Стильтьеса $\int_{a-0}^{b}$ означает предел интеграла $\int_{a-\varepsilon}^{b}$, когда $\varepsilon$ стремится к нулю, оставаясь положительным.

откуда следует (если подставить вместо $\beta$ и $\gamma$ их значения)

$$|F_a(z)| \leqslant \frac{1}{e} e^{(\beta+\gamma)|y| - C(a-0)} |F(z)| L_a(z) =$$

$$= \frac{1}{e} e^{(p-1)eh(a)|y| - C(a-0)} |F(z)| L_a(x), \qquad (V.26)$$

где $\|L_a\| = 1$.

При нашем выборе чисел $\mu_n$ равенство (V. 20) можно представить в виде

$$\ln F(z) = \int\limits_{\ln a-1-0}^{\infty} \{\ln(\sin e^{-t}z) + t - \ln z\}\, dQ_a(t)$$

(ясно, какую ветвь $\ln$ под знаком интеграла мы выбираем).

Поскольку $S(|z|) \leqslant (\mu_1\mu_2 \ldots \mu_n |z|^n)^{-1}$ для любого $n$, то при $y > 0$ и любом $B > 0$

$$\ln|F(z)| \leqslant y \int\limits_{\ln a-1-0}^{\infty} e^{-t}\, dQ_a(t) + \int\limits_{\ln a-1-0}^{B} t\, dQ_a(t) - $$

$$- \ln|z| \int\limits_{\ln a-1-0}^{B} dQ_a(t).$$

Полагая $B = \ln|z|$ и производя во втором интеграле интегрирование по частям, находим

$$\ln|F(z)| \leqslant y \int\limits_{\ln a-1-0}^{\infty} e^{-t}\, dQ_a(t) - \int\limits_{\ln a-1}^{\ln|z|} Q_a(t)\, dt =$$

$$= y \int\limits_{\ln a-1}^{\infty} Q_a(t) e^{-t}\, dt - \int\limits_{\ln a-1}^{\ln|z|} Q_a(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant ey \int\limits_{a}^{\infty} \frac{C(u)}{u^2}\, du - \int\limits_{\ln a-1}^{\ln|z|} E[C(e^{t+1})]\, dt.$$

Если $|z| \geqslant a$, то

$$\ln|F(z)| \leqslant ey \int\limits_{a}^{\infty} \frac{C(u)}{u^2}\, du - \int\limits_{\ln|z|-1}^{\ln|z|} E[C(e^{t+1})]\, dt \leqslant$$

$$\leqslant ey \int\limits_{a}^{\infty} \frac{C(u)}{u^2}\, du - C(|z|) + 1 = eh(a)\, y - C(|z|) + 1.$$

Это неравенство вместе с неравенством (V. 26) дает неравенство (V. 16). При $|z| < a$ (V. 16) сразу следует из неравенства (V. 26) и неравенства (V. 22), взятого для функции $F$ из нашего доказательства (причем в последнем неравенстве $S(|z|)$ можно заменить на 1; $\mu$ не превосходит $eh(a)$).

Определим теперь $\Delta_\gamma$ и $\Delta_\beta$ следующим образом:

$$\Delta_\gamma(u)=1 \quad \text{при} \quad |u|\leqslant\gamma, \qquad \Delta_\gamma(u)=0 \quad \text{при} \quad |u|>\gamma,$$
$$\Delta_\beta(u)=\frac{1}{2\beta} \quad \text{при} \quad |u|\leqslant\beta, \qquad \Delta_\beta(u)=0 \quad \text{при} \quad |u|>\beta.$$

Имеем (при нашем выборе величин $\beta$ и $\gamma$)

$$\widehat{F}_a(u)=\frac{\sqrt{\beta/\gamma}}{2e}e^{-C(a-0)}\Delta_\gamma(u)*\Delta_\beta(u)*\widehat{F}(u).$$

Но из (V. 25) следует, что если $\mu=\sum\mu_n$, $\gamma=(p+q)eh(a)/2$; $\beta=(p-q-2)eh(a)/2$, то $\gamma-\beta-\mu\geqslant q$. В силу (V. 23) и определения функций $f_n$

$$\Delta_\gamma(u)*\Delta_\beta(u)*\widehat{F}(u)=\Delta_\gamma(u) \quad \text{при} \quad |u|\leqslant\gamma-\beta-\mu.$$

В частности, свойства (V. 17) и (V. 18) следуют теперь из (V. 16) и теоремы Пэли — Винера[1]). Итак, лемма V. 4.1 доказана.

Теперь мы в состоянии сформулировать следующую теорему:

**Т. V. 4.3.** *Пусть $M=\{\mu_n\}$ — последовательность, шаг которой $h>0$, и пусть $\Lambda$ — такая последовательность, что*

$$|\lambda_n-\mu_n|\leqslant g<h/2. \tag{V. 27}$$

*Пусть $C_1(u)$, $C_2(u)$ — возрастающие функции на интервале $[0, \infty[$, удовлетворяющие условиям*

$$\int\limits_1^\infty\frac{C_1(u)}{u^2}du<\infty, \qquad \int\limits_1^\infty\frac{C_2(u)}{u^2}du<\infty, \tag{V. 28}$$

*причем $C_2(u)$ — вогнутая функция.*

*Допустим, что функция $f(s)=(A, \Lambda)$ однозначна и возрастает в $P_{\sigma_1}$, за исключением особенностей, не быстрее функции $e^{C_1(|t|)}$ и что функция $\varphi(s)=(B, M)$ однозначна и возрастает в $P_{\sigma_2}$, за исключением особенностей, не быстрее функции $e^{C_2(|t|)}$.*

*Положим $C=\{c_n\}$, где $c_n=a_nb_n$ $(n\geqslant1)$, и пусть $F(s)=(C, M)$. Тогда $\sigma_{a,F}\leqslant\sigma_{a,f}+\sigma_{a,\varphi}$; при $\sigma>\sigma_2+H(\sigma_1)$ функция $F(s)$ однозначна, причем ее единственными возможными особыми точками в этой полуплоскости являются точки множества $\overline{S_{\sigma_1,f}+S_{\sigma_2,\varphi}}$; далее, $F(s)$ возрастает в этой полуплоскости, за исключением особенностей, не быстрее функции $e^{C_2(|t|)}$.*

---

[1]) Напомним формулировку теоремы Пэли — Винера (а точнее, нужный нам ее частный случай): если $F(x)$ принадлежит $L$ на $\mathbf{R}$, то $F$ является ограничением целой функции $F(z)$, удовлетворяющей условию $|F(z)|\leqslant Ae^{a|y|}$ ($A$ — постоянная) тогда и только тогда, когда носитель функции $\widehat{F}(u)$ принадлежит интервалу $[-a, a]$.

Доказательство этой теоремы сходно с доказательством теоремы V. 2.1.

Полагая $c > \sigma_{a, f}$, рассмотрим теперь интеграл

$$\Phi(z) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\varphi(z-s)H(-is)\,ds, \tag{V. 29}$$

где $H(z)$ — целая функция экспоненциального типа, убывающая в каждой полосе $|y| < d$ как $L(x)e^{-C_1(x)-C_2(x)}$, $L(x) \in L$.

При доказательстве теоремы V. 2.1 рассматривался аналогичный интеграл, в котором вместо $H(-is)$ фигурировала функция $s^{-k-1}$ ($k > \nu + \mu$, где $\nu$, $\mu$ — порядки функций $f$ и $\varphi$ соответственно). Быстрое убывание функции $H(-is)$ в любой полосе $|\sigma| < d$ (при $|t| \to \infty$) позволяет компенсировать быстрое возрастание функций $f$ и $\varphi$ в такой полосе, за исключением особенностей. И из того факта, что $H$ — целая функция, следует, что при интегрировании $s = 0$ уже не прибавляется к особым точкам функции $f$; другими словами, $S_{\sigma_2, \varphi}$ уже не фигурирует в качестве подмножества множества возможных особых точек функции $F$ (как это имело место в теореме V. 2.1). Другое важное преимущество этой теоремы по сравнению с теоремой V. 2.1 состоит в получении простейшего выражения для коэффициентов «составного ряда» ($c_n = a_n b_n$).

В свою очередь важное преимущество теоремы V. 2.1 по сравнению с теоремой V. 4.3 состоит в отсутствии каких-либо предположений о последовательностях $\Lambda$, $M$; между тем в теореме V. 4.3 требуется положительность шага последовательности $M$ и условие (V. 27).

Так как изменение конечного числа коэффициентов и показателей в $(A, \Lambda)$ и в $(B, M)$ не меняет ни предположений, ни заключения теоремы, то, не теряя общности, можно положить, что

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > h_1 = h - \delta > 0 \quad (n \geqslant 1), \tag{V. 30}$$

где $\delta > 0$ — достаточно малое число, для которого

$$|\lambda_n - \mu_n| \leqslant g < h_1/2. \tag{V. 31}$$

Определим теперь функцию $H$ в (V. 29).

Используя условия (V. 28) и лемму V. 4.1, можно выбрать такие постоянные $p$, $q$, $a$, что если

$$C(x) = C_1(x) + C_2(x),$$

то существует целая четная функция $F_a(z)$, удовлетворяющая условиям (V. 16), (V. 17), (V. 18) с

$$peh(a) \leqslant h_1/2,$$
$$qeh(a) \geqslant g,$$

т. е. удовлетворяющая условиям

$$|F_a(z)| \leqslant e^{(h_1/2)|y| - C(|x|)} L(x) \qquad (L(x) \in L),$$

где $L(x)$ — четная функция, убывающая на $[0, \infty[$,

$$\hat{F}_a(u) = P \quad \text{при} \quad |u| \leqslant g, \tag{V.32}$$

$$\hat{F}_a(u) = 0 \quad \text{при} \quad |u| \geqslant h_1/2, \tag{V.33}$$

причем $P > 0$ — постоянная величина.

Положим теперь $H(z) = F_a(z)$ и рассмотрим интеграл (V. 29) с $c > \sigma_{a,f}$, в котором интегрирование производится по прямой $\sigma = c$. Копируя рассуждения доказательства теоремы V. 2.1, мы видим, что (V. 29) равномерно сходится в каждом компакте полуплоскости $x > \sigma_{a,\varphi} + c$ и

$$\Phi(z) = \sum b_n e^{-\mu_n z} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum a_m e^{(\mu_n - \lambda_m)s} H(-is)\, ds.$$

Имеем также

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum a_m e^{(\mu_n - \lambda_m)s} H(-is)\, ds = \sum a_m \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{(\mu_n - \lambda_m)s} H(-is)\, ds.$$

В силу свойств функции $H$, применяя теорему Коши, получаем

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{(\mu_n - \lambda_m)s} H(-is)\, ds = i \int e^{it(\mu_n - \lambda_m)} H(t)\, dt = i\hat{H}(\lambda_m - \mu_n).$$

Следовательно, можно написать, что

$$\Phi(z) = i \sum b_n e^{-\mu_n z} \sum a_m \hat{H}(\lambda_m - \mu_n).$$

Однако $|\mu_n - \lambda_n| < g$ в силу (V. 31); значит, согласно (V. 32),

$$\hat{H}(\mu_n - \lambda_n) = P > 0.$$

Используя (V. 30) и (V. 31), при $m \neq n$ имеем $|\lambda_m - \mu_n| \geqslant h_1/2$, т. е. $\hat{H}(\lambda_m - \mu_n) = 0$ (см. (V. 33)).

Таким образом,

$$\Phi(z) = iP \sum a_n b_n e^{-\mu_n z} \tag{V.34}$$

и

$$F(z) = -iP\Phi(z).$$

Ясно, что

$$\sigma_{a,F} = \overline{\lim} \ln(|c_n|/\mu_n) \leqslant \overline{\lim} \ln(|a_n|/\lambda_n) + \overline{\lim} \ln(|b_n|/\mu_n) = \\ = \sigma_{a,f} + \sigma_{a,\varphi}.$$

Далее рассуждаем по образцу доказательства теоремы V. 2.1. Построим такую же квадратную сетку; множество $\mathcal{D}_1(\varepsilon)$ определяется аналогичным образом, но с одним исключением: точке $s=0$ не приписывается теперь никакой особой роли — она фигурирует лишь тогда, когда принадлежит $S_{\sigma_1, f}$ наряду с любыми другими точками этого множества.

Заметив, что $C_2(u)$ — вогнутая возрастающая функция при $u>0$, имеем

$$C_2(|t-y|)\leqslant C_2(|t|+|y|)\leqslant C_2(|t|)+C_2(|y|). \quad \text{(V.35)}$$

Определим $C_1^*(\varepsilon)$ и $\Delta$ так же, как в доказательстве теоремы V.2.1 с заменой (в определении $\Delta$) неравенства

$$x>\max(H_f(\sigma_1),\, 0)+\sigma_2+2\varepsilon$$

неравенством

$$x>H_f(\sigma_1)+\sigma_2+2\varepsilon$$

и включения

$$\gamma\in(S_{\sigma_2, \varphi}+S_{\sigma_1, f})\cup S_{\sigma_2, \varphi}$$

включением $\gamma\in S_{\sigma_2, \varphi}+S_{\sigma_1, f}$. Используя рассуждения из этого доказательства, мы сначала придем к неравенству ($s\in C_1^*(\varepsilon)$, $z\in\Delta$)

$$|\varphi(y-s)|\leqslant Ne^{C_2(|t-y|)},$$

т. е. в силу (V.35) к неравенству

$$|\varphi(z-s)|\leqslant Ne^{C_2(|t|)+C_2(|y|)},$$

а в результате, при $z\in\Delta$, — к неравенству

$$|\Phi(z)|\leqslant P(\varepsilon)\,e^{C_2(|y|)},$$

где функция $\Phi$ однозначна и голоморфна. Доказательство теоремы закончено.

Мы завершим этот параграф теоремой, которая получается из теоремы V.4.3 точно таким же образом, как теорема V.2.8 — из теоремы V.2.1.

**T.V.4.4.** *Допустим, что последовательность $\Lambda$ удовлетворяет условию*

$$|\lambda_n-n|\leqslant k<\frac{1}{2} \quad (k \text{ — постоянная}),$$

*и пусть $f(s)=(A,\Lambda)$. Предположим, что существует точка $\alpha=\sigma_{a,f}+it_0$, обладающая следующими свойствами:*

*1) $f(s)$ голоморфна в множестве кругов $C_q=C(\alpha+2q\pi i,\,\delta)$, где $q$ — любое целое число и $\delta$ — некоторая постоянная;*

*2) существует возрастающая последовательность положительных чисел $\{p_m\}$, такая, что в $C_{\pm m}$ $(m\geqslant 0)$ имеет место неравенство $|f(s)|\leqslant p_m$, и такая, что*

$$\sum\frac{\ln p_m}{m^2}<\infty.$$

*Тогда функцию $F(s)=(A, N)$ (ряд Тейлора-Д с $\sigma_{a,F}=\sigma_{a,f}$) можно аналитически продолжить в круги $C_q$. В частности, точка $\alpha$ является регулярной точкой функции $F$.*

Для получения этой теоремы достаточно положить в V.4.3

$$\varphi(s)=\frac{1}{e^s-1}=\sum e^{-ns}.$$

## V.5. Композиция по Гурвицу

Напомним сначала исходную теорему Гурвица о композиции рядов Тейлора, причем, как и в случае теоремы Адамара из § V.1, наша формулировка является неполной.

*Если $E_1$ — множество особых точек функции, представимой рядом $\sum a_n z^{-(n+1)}$, $E_2$ — множество особых точек функции, представимой рядом $\sum b_n z^{-(n+1)}$, и $E_3$ — множество особых точек функции, представимой рядом $\sum c_n z^{-(n+1)}$, где $c_n=a_nb_0+$ $+C_n^1a_{n-1}b_1+\ldots+a_0b_n$, то каждой точке $e_3$ из $E_3$ соответствуют точка $e_1$ из $E_1$ и точка $e_2$ из $E_2$, такие, что $e_3=e_1+e_2$* [1]).

Если $z=0$ является регулярной точкой функции $\psi(z)$, представимой рядом $\sum a_n z^{-(n+1)}$, то будем говорить, что функция $f(s)$, представимая рядом $\sum a_n e^{-(n+1)s}$, регулярна в $-\infty$. Будем говорить, что $-\infty$ является особой точкой функции $f(s)$, если $z=0$ — особая точка функции $\psi(z)$.

Пусть $z=e^s$; теперь можно сформулировать теорему Гурвица следующим образом:

Если $f(s)=\sum a_n e^{-(n+1)s}$, $\varphi(s)=\sum b_n e^{-(n+1)s}$ и $F(s)=$ $=\sum c_n e^{-(n+1)s}$ с $c_n=a_nb_0+C_n^1a_{n-1}b_1+\ldots+a_0b_n$, то каждая особая точка функции $F(s)$ имеет вид $\gamma=\ln(e^\alpha+e^\beta)$, где $\alpha$ — некоторая точка из $S_f$ и $\beta$ — некоторая точка из $S_\varphi$. Очевидно, что если $\alpha=-\infty$ — особая точка функции $f$, то следует считать, что она принадлежит $S_f$, и каждую точку $\ln(e^{-\infty}+e^\beta)=\beta$, принадлежащую $S_\varphi$, следует рассматривать как возможную особую точку функции $F$. Аналогично, если $\beta=-\infty$ — особая точка функции $\varphi$, то каждая точка $\alpha$ из $S_f$ является возможной особой точкой функции $F$.

Пусть функция $\theta(s)=\sum d_n e^{-\lambda_n s}$ однозначна. Будем говорить, что $s=-\infty$ является *регулярной точкой* функции $\theta$, если выполнены следующие условия:

---

[1]) Выше мы условились о том, что суммирования $\sum$ ведутся (если не оговорено противное) по $n\geqslant 1$; в этой же теореме, как и в теореме V.5.1, суммирования ведутся по $n\geqslant 0$.

1) $\theta(s)$ голоморфна в некоторой полуплоскости $\sigma<\sigma_0$;

2) $\theta(s)$ стремится к некоторому конечному пределу $\theta(-\infty)$ равномерно по $t$, когда $\sigma\to-\infty$;

3) $[\theta(s)-\theta(-\infty)]e^{-s}$ стремится к некоторому конечному пределу $\theta'(-\infty)$ равномерно по $t$, когда $\sigma\to-\infty$.

Если одно из этих трех условий не выполняется, то будем говорить, что $s=-\infty$ является *особой точкой* функции $\theta$, т. е. $-\infty\in S_\theta$.

Следующая теорема является простым обобщением теоремы Гурвица в случае, когда один из рядов является рядом Тейлора-Д, а другой — рядом любого типа.

**Т. V. 5.1.** *Предположим, что оба ряда*

$$f(s)=\sum a_n e^{-(n+1)s} \quad \textit{и} \quad \varphi(s)=\sum b_n e^{-\lambda_{n+1}s}$$

*однозначны во всей плоскости. Пусть* $\{l_n\}$ $(n\geqslant 1)$ — *последовательность всех сумм* $\lambda_q+m$ $(q\geqslant 1,\ m\geqslant 0$ *целые), причем эти суммы записаны в порядке возрастания* [1]). *Положим*

$$d_n=\sum\sum a_m b_q A(q,\ m),$$

*где*

$$A(q,\ m)=\lambda_{q+1}(\lambda_{q+1}+1)\ldots(\lambda_{q+1}+m-1)/m! \qquad (q\geqslant 0,\ m\geqslant 1),$$
$$A(q,\ 0)=1,$$

*причем двойная сумма берется по всем* $q\geqslant 0$, $m\geqslant 0$, *таким, что* $\lambda_{q+1}+m=l_{n+1}$.

*Положим*

$$F(s)=\sum d_n e^{-l_{n+1}s}\ ^{2)}.$$

*Тогда*

$$\sigma_{a,F}\leqslant \ln\left(e^{\sigma_{a,f}}+e^{\sigma_{a,\varphi}}\right).$$

*Функция* $F(s)$ — *однозначная функция, и ее единственными возможными конечными особыми точками являются точки* $\gamma$, *такие, что* $\gamma=\ln(e^\alpha+e^\beta)$ *(причем берутся все ветви* $\ln$*), где* $\alpha$ — *любая точка из* $S_f$, $\beta$ — *любая точка из* $S_\varphi$, *а также предельные точки этого множества* [3]).

---

[1]) Точнее, в этой теореме, как и в теореме V. 5.2, $l_n$ расположены в порядке неубывания, ибо две пары $(q_1,\ m_1)$, $(q_2,\ m_2)$ могут дать одно и то же $l_n=\lambda_{q_1}+m_1=\lambda_{q_2}+m_2$. Следовательно, в ряде, который определяет $F$, один и тот же показатель может встретиться несколько раз. Это, однако, не мешает при доказательстве.

[2]) См. предыдущее примечание.

[3]) Если $-\infty\in S_f$, то каждую точку $\gamma=\ln\left(e^{-\infty}+e^\beta\right)=\beta+2k\pi i$ следует рассматривать как возможную особую точку функции $F$. Аналогично, если $-\infty\in S_\varphi$, то каждую точку $\alpha+2k\pi i$, где $\alpha\in S_f$, следует рассматривать как возможную особую точку функции $F$.

*Если $-\infty$ есть регулярная точка функции $f$, если существует $\delta > 0$, такое, что $|e^{\alpha}+e^{\beta}| \geqslant \delta$ для любых $\alpha \in S_f$, $\beta \in S_{\varphi}$, и если $F(s)$ голоморфна в полуплоскости $\sigma < \sigma_0$, то $F(s)$ при $\sigma \to -\infty$ стремится к конечному пределу равномерно по $t$ $(s=\sigma+it)$.*

Пусть $c > \sigma_{a,f}$; докажем, что при достаточно больших $x$

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c}^{c+2\pi i} f(s)\,\varphi\,[\ln(e^z-e^s)]\,e^s\,ds, \tag{V.36}$$

где при $\sigma=c$ и при достаточно больших $x$

$$\varphi\,[\ln(e^z-e^s)]=\sum b_n(e^z-e^s)^{-\lambda_{n+1}}=$$
$$=\sum b_n e^{-\lambda_{n+1}z}\left[1-e^{(s-z)}\right]^{-\lambda_{n+1}}=\sum b_n e^{-\lambda_{n+1}z}\sum A(n,\ m)\,e^{m(s-z)}, \tag{V.37}$$

причем интегрирование ведется по отрезку прямой, соединяющей точки $c$ и $c+2\pi i$. Если $\ln|e^z-e^s| \geqslant c > \sigma_{a,\varphi}$, то интеграл в (V. 36) можно представить в виде

$$\int\limits_{c}^{c+2\pi i} f(s)\sum b_n e^{-\lambda_{n+1}z}\sum A(n,\ m)\,e^{m(s-z)}e^s\,ds=$$
$$=\sum\sum b_n A(n,\ m)\,e^{-(\lambda_{n+1}+m)z}\int\limits_{c}^{c+2\pi i} f(s)\,e^{(m+1)s}\,ds, \tag{V.38}$$

и поскольку последний интеграл равен $2\pi i a_m$, ясно, что имеет место формула (V. 36).

Установленные равенства верны при замене $a_n$ и $b_n$ на $|a_n|$ и $|b_n|$; следовательно, $F$ абсолютно сходится при $x > \ln\left(e^c+e^{\sigma_{a,\varphi}}\right)$, и если $c$ — любое число, удовлетворяющее неравенству $c > \sigma_{a,f}$, то

$$\sigma_{a,F} \leqslant \ln\left(e^{\sigma_{a,f}}+e^{\sigma_{a,\varphi}}\right).$$

Пусть $\sigma_1 < \sigma_{a,f}$, и пусть $E(\sigma_1)$ — множество особых точек аналитического продолжения ряда $\sum a_n z^{-n-1}$, расположенных в $|z| > e^{\sigma_1}$; пусть (при $\varepsilon > 0$) $E(\sigma_1,\ \varepsilon)$ есть объединение конечного числа кругов $C(z,\ \varepsilon)$ с $z \in E(\sigma_1)$, содержащее $E(\sigma_1)$. Положим $S_{\sigma_1,f}(\varepsilon)=\ln E(\sigma_1,\ \varepsilon)$; другими словами, $S_{\sigma_1,f}(\varepsilon)$ является образом множества $E(\sigma_1,\ \varepsilon)$ при отображении $\ln(s \in S_{\sigma_1,f}(\varepsilon)$, если $e^s \in E(\sigma_1,\ \varepsilon))$.

Пусть $D(\sigma_1,\ \varepsilon)$ — наибольшая область, которая образована точками прямоугольника $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant c$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, не принадлежащими $S_{\sigma_1,f}(\varepsilon)$, и граница которой содержит точки отрезка

$\sigma=c$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ (это возможно при достаточно малом $\varepsilon>0$; последнее условие будет предполагаться выполненным). Пусть

$$\varphi[\ln(e^z-e^s)]=\psi(z,\ s).$$

Если число $z$ (при достаточно большом $x$) фиксировано, то

$$\Phi(z,\ s)=f(s)\,\psi(z,\ s)\,e^s$$

— голоморфная функция от $s$ на $\overline{D(\sigma_1,\ \varepsilon)}$, причем $\psi(z,\ s)$ — аналитическое продолжение функции, задаваемой на $\sigma=c$ рядом (V.37), вдоль кривых (на которых изменяется $s$), принадлежащих $\overline{D(\sigma_1,\ \varepsilon)}$. Функция $\Phi$ (при фиксированном $z$) принимает одинаковые значения в точках $\sigma'$ и $\sigma'+2\pi i$, принадлежащих границе $B(\sigma_1,\ \varepsilon)$ области $D(\sigma_1,\ \varepsilon)$. Обозначая через $B^*=B^*(\sigma_1,\ \varepsilon)$ подмножество множества $B(\sigma_1,\ \varepsilon)$, образованное точками, не принадлежащими ни $\sigma=c$, ни прямым $t=0$, $t=2\pi$ (на которых $\Phi$ при фиксированном $z$ принимает, в силу способа построения $S_{\sigma_1,\,f}(\varepsilon)$ и $D(\sigma_1,\ \varepsilon)$, одинаковые значения), по теореме Коши имеем

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{B^*} f(s)\,\psi(z,\ s)\,e^s\,ds. \qquad (V.39)$$

Пусть $\Delta$ — некоторая компактная область, содержащая точки полуплоскости $x>\ln\left(e^c+e^{\sigma_{a,\,\varphi}}\right)$, такая, что при всех $z\in\Delta$, всех $s\in B^*$ и всех $\beta\in S_\varphi$ (за исключением $\beta=-\infty$, если $-\infty\in S_\varphi$) имеем

$$|z-\ln(e^s+e^\beta)|>\varepsilon_1, \qquad (V.40)$$

$$|z-s+2k\pi i|>\varepsilon_2 \quad (k \text{ — любое целое число}), \qquad (V.41)$$

где величины $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$ заданы, причем берутся все ветви $\ln$.

Тогда существуют $\delta_1>0$, $\varepsilon>0$ и $N>-\infty$ ($\delta_1=\delta_1(\varepsilon_1)$, $\varepsilon=\varepsilon(\varepsilon_1)$, $N=N(\varepsilon_2)$), такие, что при $z\in\Delta$, $s\in B^*$, $\beta\in S_\varphi$ ($\beta\neq-\infty$)

$$|e^z-e^s-e^\beta|>\delta_1,$$

$$|\ln(e^z-e^s)-\beta|>\varepsilon,$$

$$\mathscr{R}\ln(e^z-e^s)=\ln|e^z-e^s|>N.$$

Функция под знаком интеграла в (V.39) голоморфна по $s$ и $z$ ($z\in\Delta$, $s\in B^*$); следовательно, $F$ — голоморфная функция в $\Delta$. Так как $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ можно выбрать произвольно малыми, а $\sigma_1<0$ по абсолютному значению сколь угодно велико, ясно, что $F$ голоморфна в каждой компактной области, содержащей точки полуплоскости $\sigma>\ln\left(e^c+e^{\sigma_{a,\,\varphi}}\right)$, но не содержащей ни одной точки вида $\ln(e^\alpha+e^\beta)$. Следовательно, если $s=-\infty$ является особой точкой функции $\varphi$, то теорема доказана.

Предположим теперь, что $s=-\infty$ — регулярная точка функции $\varphi$. Определим $\Delta$ прежним способом, но без условия (V.41) и докажем голоморфность $F$ в $\Delta$.

Действительно, $\psi(z, s)$ голоморфна как функция от $z$ в $\Delta$, если положить $\psi(z, z)=\varphi(-\infty)$ $(z\in\Delta)$, поскольку $\psi$ является тогда непрерывной по $z$ (при фиксированном $s$) и дифференцируемой по $z$ (при $z\in\Delta$). Это очевидно, если $z=z_0\in\Delta$, $z_0\not\equiv s \pmod{2\pi i}$. При $z_0\equiv s \pmod{2\pi i}$ имеем

$$\left.\frac{\partial\psi(z, s)}{\partial z}\right|_{z=z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\psi(z\ s)-\varphi(-\infty)}{z-z_0}=$$
$$=\lim_{z\to z_0}\frac{\psi(z, s)-\varphi(-\infty)}{e^z-e^{z_0}}\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{e^z-e^{z_0}}{z-z_0}=\varphi'(-\infty)e^{z_0}. \qquad (V.42)$$

Из голоморфности $\psi$ в $\Delta$ при любом $s\in B^*$ следует тогда голоморфность $F$ в $\Delta$.

Предположим теперь, что $-\infty$ является регулярной точкой функции $f$.

Заметим, что множество $(S_{\sigma_1, f})$ — подмножество множества $S_{\sigma_1, f}$, принадлежащее полосе $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, — содержит точки отрезка $L(\sigma_1)$: $\sigma=\sigma_1$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Пусть $\sum(\sigma_1, \varepsilon)$ — объединение образов (при отображении ln) кругов, входящих в $E(\sigma_1, \varepsilon)$ и содержащих точки отрезка $L(\sigma_1)$. Поскольку $-\infty$ является регулярной точкой функции $f$, ясно, что при достаточно больших $-\sigma_1$ ($\varepsilon>0$ фиксировано) $\sum(\sigma_1, \varepsilon)$ отделяется от образов (при отображении ln) других кругов из $E(\sigma_1, \varepsilon)$ и что $f$ голоморфна на $\sum(\sigma_1, \varepsilon)$. Предположим, что величина $\varepsilon>0$ достаточно мала и что величина $\sigma_1$ выбрана указанным выше образом; пусть $l=l(\sigma_1, \varepsilon)$ — граница области $\sum(\sigma_1, \varepsilon)$, и пусть $C^*=C^*(\sigma_1, \varepsilon)=B^*(\sigma_1, \varepsilon)-l(\sigma_1, \varepsilon)$. В силу (V.39) можно тогда написать, что

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l} f(s)\psi(z, s)e^s\,ds+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^*} f(s)\psi(z, s)e^s\,ds. \qquad (V.43)$$

Ясно, что если выполняются последние предположения теоремы, то первый интеграл в (V.43) при достаточно больших $x$ равен нулю, ибо функция под интегралом голоморфна как функция от $s$ на $\overline{\sum(\sigma_1, \varepsilon)}$ с границей $l$. Следовательно,

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^*} f(s)\psi(z, s)e^s\,ds. \qquad (V.44)$$

Это выражение при $x\to-\infty$ сходится равномерно по $y$ к

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^*} f(s)\varphi(\pi i+s)e^s\,ds.$$

Теорема полностью доказана.

Легко проверить, что теорема V.5.1 содержит в качестве частного случая: $\lambda_n = n$ $(n \geqslant 1)$ — наиболее общую форму теоремы Гурвица (по крайней мере в случае однозначных функций). Достаточно заметить, что утверждение о том, что аналитическое продолжение ряда $\mathscr{F}(z) = \sum d_n z^{-n-1}$ голоморфно при $0 < |z| < \eta$ и стремится к конечному пределу, когда $z$ стремится к нулю, эквивалентно тому факту, что эта функция голоморфна в круге $|z| < \eta$.

Более общую теорему о двух общих рядах Дирихле $(A, \Lambda)$, $(B, M)$ (показатели которых a priori различны) можно получить, вводя в рассмотрение понятие порядка каждой функции (за исключением особенностей).

**T.V.5.2.** *Пусть $f(s) = (A, M)$ — однозначная функция порядка $\nu$ в $P_{\sigma_1}$, за исключением особенностей, и пусть $\varphi(s) = (B, \Lambda)$ — однозначная функция порядка $\mu$ в $P_{\sigma_2}$, за исключением особенностей. Пусть $k > \nu + \mu$ — целое число, и пусть $a_T^{(k)}(n)$ — $n$-й коэффициент Тейлора порядка $k$ функции $f$. Пусть $L = \{l_n\}$ $(n \geqslant 1)$ — последовательность всех сумм $\lambda_q + m$ $(q \geqslant 1,$ $m \geqslant 1)$, где $m$ — целые положительные числа, причем суммы располагаются в порядке возрастания* [1]. *Положим*

$$d_n = \sum \sum a_T^{(k)}(m)\, b_q A(q-1, m)$$

(*определение* $A(q, m)$ *дано в теореме* V.5.1), *причем двойная сумма берется по всем* $q \geqslant 2$, $m \geqslant 1$, *таким, что* $\lambda_{q-1} + m = l_n$.

*Положим*

$$\max(\sigma_{a,f}, 0) = \sigma_f,$$
$$\max(H_f(\sigma_1), 0) = \sigma'_f.$$

*Пусть* $F(s) = (D, L)$ $(D = \{d_n\})$ [1]. *Тогда*

$$\sigma_{a,F} \leqslant \ln\left(e^{\sigma_f} + e^{\sigma_{a,\varphi}}\right), \tag{V.45}$$

*функция $F$ однозначна в полуплоскости $\sigma > \ln\left(e^{\sigma'_f} + e^{\sigma_2}\right)$, и в этой полуплоскости единственными возможными особыми точками функции $F$ являются точки вида*

$$\gamma = \ln(e^{\alpha} + e^{\beta}), \quad \gamma = \ln(e^{\beta} + 1),$$

*где $\alpha \in S_{\sigma_1, f}$, $\beta \in S_{\sigma_2, \varphi}$, и предельные точки множества таких точек (причем берутся все ветви* ln).

[1]) См. примечание [1]) на стр. 94.

Пусть $c > \max(0, \sigma_{a,f})$; докажем, что

$$F(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\,\varphi[\ln(e^z - e^s)]\,\frac{ds}{s^{k+1}}, \qquad \text{(V. 46)}$$

где функция $\varphi[\ln(e^z - e^s)] = \psi(z, s)$ при достаточно больших $x$ задается формулой (V. 37).

В самом деле, выражение, стоящее в правой части (V. 46), при достаточно больших $x$ можно представить (см. I. 3.2) в виде

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s) \sum b_n e^{-\lambda_n z} \sum A(n-1, m)\, e^{m(s-z)} \frac{ds}{s^{k+1}} =$$

$$= \sum b_n \sum A(n-1, m)\, e^{-(\lambda_n + m)z} \frac{k!}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\, e^{ms} \frac{ds}{s^{k+1}} =$$

$$= \sum \sum a_T^{(k)}(m)\, b_n A(n-1, m)\, e^{-(\lambda_n + m)z} = \sum d_n e^{-l_n z}\,{}^{1)}.$$

Эти равенства справедливы при $x > \ln\left(e^c + e^{\sigma_{a,\varphi}}\right)$. Они остаются справедливыми (при тех же значениях $x$), если заменить $a_n$, $b_n$ соответственно на $|a_n|$, $|b_n|$. Это доказывает абсолютную сходимость ряда $(D, L)$ при тех же самых значениях $\mathscr{R}z$. Но так как $c$ выбрано лишь с условием $c > \max(0, \sigma_{a,f})$, ясно, что имеет место (V. 45).

Пусть теперь $c > \max(0, \sigma_1, \sigma_{a,f})$. Определяя $C_1^*(\varepsilon)$, как в (V. 4), мы по аналогии с (V. 4) можем легко показать, что

$$F(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C_1^*(\varepsilon)} f(s)\,\varphi[\ln(e^z - e^s)]\,\frac{ds}{s^{k+1}}. \qquad \text{(V.47)}$$

Пусть $\Delta$ — компактная область, содержащая точки с $x > \ln\left(e^c + e^{\sigma_{a,\varphi}}\right)$ и такая, что при любом заданном $\varepsilon > 0$, любом $z \in \Delta$, любом $\alpha \in S_f$ и любом $\beta \in S_\varphi$ справедливо неравенство

$$|z - \ln(e^\alpha + e^\beta)| > \varepsilon$$

(какую бы ветвь $\ln$ мы ни взяли).

Предположим также, что при $z \in \Delta$ выполняется следующее неравенство:

$$x > \ln\left(e^{\sigma_f' + 2\varepsilon} + e^{\sigma_2}\right). \qquad \text{(V.48)}$$

[1]) Напомним, что $a_T^{(k)}(m) = 0$ при $m \leqslant \mu_1$.

Легко видеть, что каждому $s \in C_1^*(\varepsilon)$ соответствует $\alpha \in S_{\sigma_1, f}$, такое, что

$$| e^s - e^\alpha | < \eta = \eta(\varepsilon),$$

где $\eta(\varepsilon)$ стремится к нулю вместе с $\varepsilon$.

С одной стороны, из написанных неравенств следует существование такого $\delta > 0$, что при достаточно малом $\varepsilon$ для любого $z \in \Delta$, $s \in C_1^*(\varepsilon)$ и каждого $\beta \in S_{\sigma_2, \varphi}$ выполняется неравенство

$$| \ln(e^z - e^s) - \beta | > \delta.$$

С другой стороны, из (V.48) следует, что для $z \in \Delta$, $s \in C_1^*(\varepsilon)$

$$\mathscr{R}[\ln(e^z - e^s)] = \ln| e^z - e^s | \geqslant \ln(e^x - e^\sigma) \geqslant$$

$$\geqslant \ln\left(e^x - e^{\sigma_f' + 2\varepsilon}\right) > \sigma_2. \qquad (V.49)$$

Иначе говоря, если $z \in \Delta$, $s \in C_1^*(\varepsilon)$ и если задано $\delta > 0$, то при достаточно большом $| \arg(e^z - e^s) |$

$$| \varphi[\ln(e^z - e^s)] | < N(\delta) | \arg(e^z - e^s) |^{\mu+\delta},$$

где $\arg(e^z - e^s)$ «хорошо определен», так как из данного выше разложения для $(e^z - e^s)^{-\lambda_n}$ следует, что $\ln(e^z - e^s)$ принимает вещественные значения при вещественных $z$ и $s$ и что для других пар $z$ и $s$ эта функция определена посредством аналитического продолжения.

Однако компактность $\Delta$ влечет за собой существование такой постоянной $A < \infty$, что для $z \in \Delta$, $s \in C_1^*(\varepsilon)$ и достаточно больших $| t |$

$$| \arg(e^z - e^s) | < A | \arg e^s | = A | t |.$$

Следовательно, с одной стороны, каждому $\delta_2 > 0$ соответствует $N_2 = N_2(\delta_2)$, такое, что при достаточно больших $| t |$

$$| \varphi[\ln(e^z - e^s)] | \leqslant N_2(\delta_2) | t |^{\mu+\delta_2},$$

и, с другой стороны, каждому $\delta_1 > 0$ соответствует $N_1(\delta_1)$, такое, что при $s \in C_1^*$ и достаточно больших $| t |$

$$| f(s) | \leqslant N_1(\delta_1) | t |^{\nu+\delta_1}.$$

Значит, при достаточно малых $\delta_1$, $\delta_2$ интеграл (V. 47) равномерно сходится в $\Delta$ и определяет там голоморфную функцию. Доказательство окончено.

Теорему V.5.2 можно уточнить следующим образом:

**Т. V. 5.3.** *Сохраним обозначения и предположения теоремы* V. 5.2. *Если* $s = 0$ — *регулярная точка функции* $f(s)$, *то функция*

$$F(s) = \sum d_n e^{-l_n s}$$

*однозначна в полуплоскости* $P$:

$$\sigma > \ln\left(e^{\sigma_f''} + e^{\sigma_2}\right), \quad \sigma_f'' = H_f(\sigma_1),$$

*и единственными возможными особыми точками разности* $F(s) - I(s)$, *где*

$$I(s) = f(0) \left.\frac{d^k \varphi[\ln(e^s - e^\xi)]}{d\xi^k}\right|_{\xi=0} +$$
$$+ C_k^1 f'(0) \left.\frac{d^{k-1}\varphi[\ln(e^s - e^\xi)]}{d\xi^{k-1}}\right|_{\xi=0} + \ldots + f^{(k)}(0)\,\varphi[\ln(e^s - 1)],$$

*в полуплоскости* $P$ *являются точки* $\gamma$ *вида* $\gamma = \ln(e^\alpha + e^\beta)$ ($\alpha$ *и* $\beta$ *определены в теореме* V.5.2) *и предельные точки множества таких точек* (*причем надо брать все ветви* ln).

Переход от теоремы V.5.2 к теореме V.5.3 аналогичен переходу от теоремы V.2.1 к теореме V.2.2.

Замечание. Если функции $f$ и $\varphi$, участвующие в различных «теоремах композиции» этой главы, не являются однозначными, то соответствующие утверждения все же остаются справедливыми при условии, что $S_{\sigma_1, f}$, $S_{\sigma_2, \varphi}$ являются особыми множествами функций $f$ и $\varphi$ (соответственно относительно полуплоскостей $P_{\sigma_1}$, $P_{\sigma_2}$), к которым прибавлены разрезы, делающие эти функции однозначными вне полученных таким образом множеств. Однако теперь не утверждается, что «составная функция» $F$ сама является однозначной в соответствующей области.

## Глава VI

# Некоторые приложения установленных принципов к аналитическому продолжению

### VI. 1. Арифметические свойства показателей и аналитическое продолжение

В этом параграфе мы изложим несколько приложений результатов § II. 1. Мы хотим убедиться в том, что показатели ряда $f(s)=(A, \Lambda)$, «отличающиеся» от других показателей, например, своими дробными частями, играют роль, которую можно квалифицировать как «автономную» при определении свойств аналитического продолжения этого ряда. Коэффициенты ряда, соответствующие этим показателям, определяют некоторые важные свойства продолжения, которые сохраняются, каковы бы ни были значения других коэффициентов. Таким образом, если $\Lambda^* \subset \Lambda$ обладает тем свойством, что каждый показатель $\lambda_{n_j} \in \Lambda^*$ имеет дробную часть, отличную от дробных частей всех других $\lambda_n \in \Lambda$, $n \neq n_j$, то порядок величины коэффициентов $a_{n_j}$ определяет некоторое множество областей (полученных сдвигами одной из них на $2k\pi i$, где $k$ пробегает все целые числа), в которых $f$ не может быть голоморфной и ограниченной.

Можно было бы сравнить доказанные ниже теоремы с теоремами гл. VII, в которых на основании арифметических свойств некоторого подмножества показателей делаются утверждения об аналитическом продолжении и которые тем не менее имеют совершенно другой характер.

**Т. VI. 1.1.** *Пусть* $f(s)=(A, \Lambda)$, *причем* $\sigma_{a,f}=0$, *и пусть подмножество* $\Lambda^* \subset \Lambda$ *таково, что каждый показатель* $\lambda_{n_j} \in \Lambda^*$ *обладает одним из следующих свойств*:

1) *для любого* $n \neq n_j$ $\lambda_{n_j} \not\equiv \lambda_n \pmod 1$;

2) $\lambda_{n_j}$ — *целое число, и если существует другой целый показатель* $\lambda_n \in \Lambda$, *то выполняется одно из двух неравенств*: $\lambda_{n_j} > 2\lambda_n$, $\lambda_n > 2\lambda_{n_j}$.

*Положим*

$$\overline{\lim}\left(\frac{\ln|a_{n_j}|}{\lambda_{n_j}}\right)=\sigma_1 \text{ [1]} \qquad \text{(VI. 1)}$$

[1] Легко видеть, что $\sigma_{a,f}=0 \Rightarrow \sigma_1 \leqslant 0$.

*и допустим, что* $\sigma_1 > -\ln 2$. *Пусть* $t_0$ — *любое вещественное число, и пусть*

$$0 < \varepsilon < \ln 2 + \sigma_1;$$

*обозначим через* $\mathscr{D}$ *прямоугольник*

$$\sigma_1 - \varepsilon < \sigma < \varepsilon, \quad |t - t_0| < 3 \arccos e^{\sigma_1 - \varepsilon} \leqslant \pi.$$

*Тогда функция* $f(s)$ *не может быть голоморфной и ограниченной в объединении прямоугольника* $\mathscr{D}$ *со всеми прямоугольниками, полученными посредством сдвигов* $\mathscr{D} + 2k\pi i$ ($k$ — *любое целое число*).

Положим

$$F(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n(\sigma_1 - \varepsilon + it_0)} e^{-\lambda_n s} = \sum c_n e^{-\lambda_n s} = (C, \Lambda)$$

и обозначим через $D$ область в плоскости $z = re^{i\theta}$, образованную объединением круга $|z| < e^{\sigma_1}$ с областью $\{z \mid r < 1, \ |\theta| < 3 \arccos e^{\sigma_1 - \varepsilon}\}$.

Легко устанавливается, что $*$-кривая $\Gamma^*$, определяемая уравнением $r = \cos(\theta/3)$ ($|\theta| < \pi$) (см. формулировку теоремы II. 1.3), расположена, если исключить точку $z = 1$, внутри области $D$ и что, в частности, часть кривой $\Gamma^*$, для которой $|\theta| \geqslant 3 \arccos e^{\sigma_1 - \varepsilon}$, принадлежит замкнутому кругу $|z| \leqslant e^{\sigma_1 - \varepsilon}$.

Если бы заключение теоремы не выполнялось, т. е. если бы $f(s)$ была голоморфной и ограниченной в объединении прямоугольников, определенных в формулировке теоремы, то существовала бы некоторая $*$-кривая $G^*$, окружающая $\Gamma^*$ и такая, что функция $(C, \Lambda)$ была бы голоморфной и ограниченной в $\mathscr{L}D(G^*)$.

Пусть, например, свойство 1) формулировки теоремы выполняется для всех $\lambda_{n_j}$, принадлежащих $\Lambda^*$. Тогда с помощью теоремы II. 1.3 мы получили бы, что

$$|c_{n_j}| = |a_{n_j}| e^{-\lambda_{n_j}(\sigma_1 - \varepsilon)} \leqslant B_1 \sup_{s \in \mathscr{L}D(G^*)} |F(s)| = P,$$

где $P$ — некоторая постоянная, откуда

$$\overline{\lim} \left( \frac{\ln |a_{n_j}|}{\lambda_{n_j}} \right) \leqslant \sigma_1 - \varepsilon;$$

последнее неравенство противоречит (VI. 1). Сходное заключение можно вывести, предполагая, что для каждого $\lambda_{n_j} \in \Lambda^*$ выполнено свойство 1) или 2); для этого надо применить рассуждения, использованные при доказательстве теорем II. 1.3 и II. 1.4.

Теорема VI. 1.1 немедленно подсказывает следующую, более общую теорему:

**Т. VI. 1.2.** *Пусть* $f(s)=(A, \Lambda)$ *с* $\sigma_{a,f}=0$. *Пусть* $\Gamma^*$ *есть* $*$-*кривая, определенная уравнением* $r=r(\theta)$ $(|\theta|\leqslant\pi)$, *причем* $r(\theta)$ *строго убывает на* $[0, \pi]$ *и* $r(\pi)=a$ $(0<a<1)$, *и пусть*

$$\theta(r) \quad (r\in[a, 1])$$

— *обратная к* $r(\theta)$ *функция. Пусть* $\Phi(z)$ — *функция, связанная с* $\Gamma^*$, *и пусть* $\Lambda^*(\subset\Lambda)$ — *множество показателей* $\lambda_n$, *каждый из которых отличен по модулю* 1 *относительно* $\Phi$ *от всех других членов множества* $\Lambda$.

*Запишем формулу* (VI. 1) *и допустим, что* $\sigma_1>\ln a$. *Пусть* $t_0$ — *любое вещественное число, и пусть* $0<\varepsilon<\sigma_1-\ln a$.

*Тогда функция* $f(s)$ *не может быть голоморфной и ограниченной в объединении прямоугольника*

$$\mathscr{D}=\{s\,|\,\sigma_1-\varepsilon<\sigma<\varepsilon,\ |t-t_0|\leqslant\theta(e^{\sigma_1-\varepsilon})\}$$

*со всеми прямоугольниками, полученными посредством сдвигов* $\mathscr{D}+2k\pi i$ ($k$ — *любое целое число*).

Для доказательства этой теоремы достаточно повторить доказательство теоремы VI. 1.1, используя новую кривую $\Gamma^*$.

Из только что доказанных теорем следует, в частности, такой результат:

**Т. VI. 1.3.** *Если добавить к предположениям теорем* VI. 1.1 *или* VI. 1.2 *условие* $\sigma_1=0$, *то, каковы бы ни были вещественное* $t_0$ *и* $\varepsilon>0$, *функция* $f(s)$ *не может быть голоморфной и ограниченной в множестве кругов*

$$C[(t_0+2k\pi)i, \varepsilon]$$

($k$ — *любое целое число*).

Отсюда вытекает, например, следующий весьма частный случай классической теоремы Адамара: если целые числа $\lambda_n$ образуют последовательность, в которой $\lambda_{n+1}/\lambda_n>2$, то окружность сходимости ряда Тейлора $\sum a_n z^{\lambda_n}$ с конечным радиусом сходимости является купюрой для этого ряда. Очевидно, можно обобщить данное в § II. 1 понятие «$\lambda$ и $\lambda'$ отличны по модулю 1 относительно $\Phi$», заменив его следующим: «$\lambda$ и $\lambda'$ отличны по модулю $1/p$ (где $p$, например, целое положительное число) относительно $\Phi$». Последнее означает, что, каковы бы ни были $m\geqslant 0$, $m'\geqslant 0$ с условием

$$d_m^{(\lambda)}\neq 0, \quad d_{m'}^{(\lambda')}\neq 0$$

см. формулу (II. 1)), имеем $p(\lambda-\lambda')\neq m-m'$. Заменяя тогда во всех рассуждениях из § II. 1 $\Phi_1(z)=z\Phi(z)$ на $\Phi_p(z)=z^p\Phi(z)$, убеждаемся в том, что теоремы § II. 1 можно легко обобщить (там мы рассматривали случай $p=1$ исключительно ради простоты изложения). Равным образом могут быть обобщены и теоремы этой главы. Тогда довольно частный случай только что сформулированной теоремы превращается в следующую теорему Адамара, о которой упоминалось выше: если

$$\lambda_{n+1}/\lambda_n \geqslant \lambda > 1 \qquad (\lambda_n \text{ — целые числа}),$$

то окружность сходимости является купюрой для ряда Тейлора $\sum a_n z^{\lambda_n}$. Последняя теорема является лишь частным случаем весьма общего явления. Мы не останавливаемся больше на этом вопросе, ибо в следующем параграфе будет получено обобщение теоремы Адамара — теорема Фабри и Пойа для общих рядов Дирихле, — являющееся в свою очередь весьма частным случаем предложения II. 2.3.

## VI. 2. Аналитическое продолжение общих рядов Дирихле

Первые результаты этого параграфа касаются рядов $(A, \Lambda)$ с конечной абсциссой сходимости и конечным шагом для $\Lambda$; следовательно, в силу теорем § II. 2 эти ряды имеют особые точки. Затем мы займемся рядами, абсциссы сходимости которых равны $-\infty$ и которые, следовательно, представляют целые функции. Сформулируем сначала теорему, являющуюся непосредственным следствием предложения II. 2.3:

**Т. VI. 2.1.** *Допустим, что шаг $h$ последовательности $\Lambda$ положителен. Пусть $D^\bullet$ — верхняя плотность этой последовательности. Пусть $f(s)=(A, \Lambda)$, причем $-\infty < \sigma_{a,f} < \infty$.*

*Тогда при $\alpha > 0$, $\beta \geqslant 0$ существует непрерывная функция $A(\alpha, \beta)$ с $A(\alpha, 0)=0$, такая, что для любого вещественного значения $t_0$ функция $f(s)$ имеет особую точку, лежащую на прямоугольнике*

$$\sigma_{a,f} - A(h, D^\bullet) \leqslant \sigma \leqslant \sigma_{a,f}, \quad |t-t_0| \leqslant \pi D^\bullet.$$

*В качестве $A(\alpha, \beta)$ можно взять следующую функцию:*

$$A(\alpha, \beta) = \pi\beta - [3\ln(\alpha\beta) - 8{,}5]\beta, \quad \text{если} \quad \beta > 0;$$
$$A(\alpha, 0) = 0.$$

При $D^\bullet = 0$ выражение «особая точка, лежащая на прямоугольнике ...» означает, что точка $\sigma_{a,f} + it_0$ сама является особой точкой. Другими словами, имеет место следующая теорема:

**Т. VI. 2.2.** *Если $h > 0$, $D^\bullet = 0$, $-\infty < \sigma_{a,f} < \infty$, то любая точка на оси сходимости является особой точкой функции $f$.*

Этот факт выражается еще и так: ось сходимости ряда $(A, \Lambda)$ является купюрой для $(A, \Lambda)$.

Теорема VI. 2.2 принадлежит Пойя и обобщает на ряды Дирихле следующую классическую теорему Фабри о рядах Тейлора: *окружность сходимости ряда Тейлора* $\sum a_n z^{\lambda_n}$ ($\lambda_n$ — *целые числа*) *с* $\lim(n/\lambda_n)=0$ *является купюрой* — теорему, обобщающую в свою очередь упомянутую в предыдущем параграфе теорему Адамара.

Ясно, что в качестве $A(\alpha, \beta)$ $(\beta > 0)$ можно взять любую функцию вида

$$A(\alpha, \beta)=\pi\beta+[A(a)-2a\ln(\alpha\beta)]\beta=\pi\beta+L(a, \alpha, \beta),$$

где $a$ — любое вещественное число $>1$ и $A(a)$ — функция

$$A(a)=a\{4+a+\ln[(a^2-1)/a^3]+\ln[(a+1)/(a-1)]/a\}$$

(см. II. 2.3).

В выражение для $L(a, h, D^{\bullet})$ (а следовательно, в выражение для $A(h, D^{\bullet})$) входит $\ln(hD^{\bullet})$. При $hD^{\bullet}\leqslant 1$ величина $-2aD^{\bullet}\ln(hD^{\bullet})>0$ и при фиксированном $h$ (например, при $h=1$) $L(a, h, D^{\bullet})$ и $A(h, D^{\bullet})$ стремятся к нулю, как $-2aD^{\bullet}\ln D^{\bullet}$ (если $D^{\bullet}\to 0$). Мы хотим показать, что такая скорость стремления к нулю не случайна. Более того, необходимо имеет место неравенство (шаг $h$ фиксирован):

$$\varliminf_{D^{\bullet}\to 0} A(h, D^{\bullet})/(-D^{\bullet}\ln D^{\bullet})=\varliminf_{D^{\bullet}\to 0} L(a, h, D^{\bullet})/(-D^{\bullet}\ln D^{\bullet})\geqslant 1.$$

Другими словами, в выражении для $A(\alpha, \beta)$ из теоремы VI. 2.1 число 3 нельзя заменить числом $<1$. Тем более нельзя брать в качестве $A(h, D^{\bullet})$ (при фиксированном $h$) величину вида $cD^{\bullet}$, где $c$ не зависит от $D^{\bullet}$.

В самом деле, можно доказать следующую теорему:

**Т. VI. 2.3.** *Пусть целое* $p\geqslant 2$, *и пусть* $\{\mu_n\}$ — *последовательность целых положительных чисел, удовлетворяющих условиям*

$$\mu_{n+1}/\mu_n>p/(p-1), \qquad \lim\Big(\sum_{k\leqslant n}\mu_k\Big)\Big/\mu_{n+1}=0.$$

*Пусть* $\{b_n\}$ — *такая последовательность, что*

$$\overline{\lim}|b_n|^{1/n}=1. \tag{VI. 2}$$

*Тогда ряд*

$$\sum b_n\left(\frac{e^{-ps}-e^{-(p-1)s}}{2}\right)^{\mu_n}$$

*сходится при* $\sigma>0$ *и представляет там голоморфную функцию* $f(s)$. *Таким образом,* $f(s)$ *представима в этой полуплоскости рядом* $(A, \Lambda)$, *обладающим следующими свойствами:*

1) $\lambda_n$ — *целые числа,* $h=1$;

2) $\sigma_{a,f}=0$;

3) $D^{\bullet}=1/p$;

4) $f(s)$ *голоморфна на полуполосе* $|t|\leqslant \pi D^{\bullet}$, $\sigma \geqslant -\mu D^{\bullet}$, *где* $\mu$ — *положительный корень уравнения*

$$D^{\bullet 2}e^{2\mu}(\mu^2+\pi^2)=4. \qquad \text{(VI. 3)}$$

*Когда* $p$ *стремится к бесконечности, определенная таким образом величина* $\mu$ *удовлетворяет соотношению*

$$\mu=-\ln D^{\bullet}-\ln(-\ln D^{\bullet})-\ln 2+o(1) \quad (D^{\bullet}=1/p\to 0). \qquad \text{(VI. 4)}$$

Замечание. Сравнение этой теоремы с предложением II. 2.3 показывает, что, каков бы ни был выбор функции $A(\alpha,\beta)$ из формулировки теоремы VI. 2.1, при $D^{\bullet}\to 0$ имеет место неравенство

$$A(1,\ D^{\bullet})\geqslant -[\ln D^{\bullet}+\ln(-\ln D^{\bullet})-\ln 2+o(1)]\,D^{\bullet}\sim -D^{\bullet}\ln D^{\bullet}.$$

Далее, последняя фраза предложения II. 2.3 становится неверной, если число 3, фигурирующее в $[3\ln(hD^{\bullet})-8{,}5]\,D^{\bullet}+\sigma_c$, заменить числом $<1$.

Перейдем к доказательству теоремы. Утверждения 1) и 2) очевидны: достаточно рассмотреть ряд $\sum b_n[(z^p-z^{p-1})/2]^{\mu_n}$, приняв во внимание (VI. 2).

Для доказательства утверждения 3) заметим, что, обозначая через $\mathcal{N}(x)$ $(x>0)$ число тех $\lambda_n$, которые не превосходят $x$ [1]), имеем

$$\mathcal{N}(p\mu_n)=\sum_{k\leqslant n}(\mu_k+1)=n+\sum_{k\leqslant n}\mu_k;$$

следовательно,

$$\frac{\mathcal{N}(p\mu_n)}{p\mu_n}=\frac{n}{p\mu_n}+\frac{1}{p}+\sum_{k\leqslant n-1}\mu_k(p\mu_n)^{-1}.$$

Иными словами (ясно, что $\lim(n/\mu_n)=0$),

$$D^{\bullet}\geqslant\overline{\lim}\,(\mathcal{N}(p\mu_n)/(p\mu_n))=\frac{1}{p}.$$

Поэтому при $p\mu_{n-1}<\lambda_k\leqslant p\mu_n$ $(n\geqslant 2)$ имеем

$$\frac{k}{\lambda_k}\leqslant\frac{\mathcal{N}(p\mu_n)}{p\mu_n},$$

и, следовательно,

$$D^{\bullet}=\overline{\lim}\,\frac{k}{\lambda_k}=\frac{1}{p}.$$

---

[1]) Для упрощения записи мы предпочли вместо функции $N(x)$ $\left(=\sum_{\lambda_n<x}1\right)$ рассмотреть функцию $\mathcal{N}(x)$ $\left(=\sum_{\lambda_n\leqslant x}1\right)$.

Докажем теперь утверждение 4). Заметим сначала, что при $0 < D < 1$, $\mu \geqslant 0$: $\cos \pi D > 1 - (\pi D^2)/2$, $1 - e^{-\mu D} < \mu D$; можно, следовательно, написать, что

$$e^{2\mu}(1 + e^{-2\mu D} - 2e^{-\mu D}\cos \pi D) < e^{2\mu}[1 + e^{-2\mu D} - 2e^{-\mu D} + \\ + e^{-\mu D}(\pi D)^2] < e^{2\mu}[(1 - e^{-\mu D})^2 + (\pi D)^2] < e^{2\mu}(\mu^2 + \pi^2) D^2. \quad \text{(VI.5)}$$

Если $s \in S = \{s \mid |t| < \pi D^*, \ -\mu D^* \leqslant \sigma \leqslant 0\}$, то

$$|e^{-ps} - e^{-(p-1)s}| = e^{-(p-1)\sigma}|e^s - 1| \leqslant \\ \leqslant e^{\mu(p-1)D^*}(e^{2\mu D^*} + 1 - 2e^{\mu D^*}\cos \pi D^*)^{1/2} = \\ = e^{\mu(1-D^*)}(e^{2\mu D^*} - 2e^{\mu D^*}\cos \pi D^* + 1)^{1/2},$$

т. е. в силу (VI. 5)

$$|e^{-ps} - e^{-(p-1)s}|^2 \leqslant e^{2\mu}(e^{-2\mu D^*} - 2e^{-\mu D^*}\cos \pi D^* + 1) < \\ < e^{2\mu}(\mu^2 + \pi^2) D^{*2},$$

и если $\mu$ — положительный корень уравнения (VI. 3), то

$$\left| \frac{e^{-ps} - e^{-(p-1)s}}{e} \right| < 1.$$

Следовательно, в силу (VI. 2) функция $f(s)$ голоморфна на $S$. Положим

$$\mu = -\ln D^* - \ln(-\ln D^*) + \ln 2 + c(D^*)$$

и докажем, что $c = c(D^*) = o(1)$ $(D^* \to 0)$. В самом деле, имеем

$$\frac{4}{D^{*2}} = e^{2\mu}(\mu^2 + \pi^2) = \frac{4e^{2c}}{D^{*2}(\ln D^*)^2}[-\ln D^* - \ln(-\ln D^*) + \ln 2 + c]^2 \times \\ \times \frac{\mu^2 + \pi^2}{\mu^2} \sim \frac{4e^{2c}}{D^{*2}},$$

откуда следует оценка $c(D^*) = o(1)$.

Теорема, таким образом, полностью доказана.

## VI. 3. Целые функции, представимые рядами Дирихле

В этом параграфе мы предположим, что $\sigma_{a,f} = -\infty$ и что $D^* < \infty$. Функция $f(s) = (A, \Lambda)$ является, следовательно, целой функцией с

$$\lim \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n} = -\infty.$$

В силу классической теоремы Жюлиа любая целая функция, не являющаяся многочленом, обладает следующим свойством: существует луч, выходящий из точки 0, такой, что в любом угле, содержащем этот луч, функция принимает бесконечное число раз каждое значение, за исключением, быть может, одного. Такой луч называется *прямой Жюлиа*.

Переведенная на язык ряда Тейлора-Д, теорема Жюлиа формулируется следующим образом. Если $f(s)=\sum a_n e^{-ns}$ — целая функция, не являющаяся многочленом (от $e^{-s}$), то существует число $t_0$ (в каждом интервале $[2k\pi, 2(k+1)\pi[$ ), такое, что при любом $\varepsilon>0$ функция $f(s)$ принимает в полосе $S(t_0, \varepsilon)$ бесконечное число раз каждое значение, за исключением, быть может, одного.

Введем аналог прямой Жюлиа для любой целой функции $f(s)$, представимой рядом $(A, \Lambda)$. Прямая $t=t_0$ называется *прямой* $J^*$ *для* $f$, если, каково бы ни было $\varepsilon>0$, $f(s)$ принимает в полосе $S(t_0, \varepsilon)$ бесконечное число раз каждое значение, за исключением, быть может, одного. Функция $f$ обладает, если она не является тождественным нулем (напомним, что неравенство $\lambda_1>0$ всегда предполагается выполненным), прямой $J$ (классической прямой Жюлиа), однако она может иметь и прямые $J^*$. Легко видеть, что если $t=t_0$ есть прямая $J^*$, то полупрямая $\sigma<0$, $t=0$ является прямой $J$. Для $f(s)=e^{-s}$ луч $\sigma=0$, $t>0$ (или $t<0$) является прямой $J$, но эта функция не имеет никакой прямой $J^*$. Впрочем, ни один из рядов $(A, \Lambda)$ лишь с конечным числом коэффициентов $a_n \neq 0$ не имеет прямой $J^*$.

Теоремы III. 2.6 и III. 2.9 приводят к следующим теоремам:

**Т. VI. 3.1.** *Предположим, что шаг последовательности $\Lambda$ положителен, и пусть $f(s)=(A, \Lambda)$ — целая функция, $(R)$-порядок которой бесконечен. Тогда $f$ имеет прямую $J^*$ в каждой полосе $S(t_0, \pi a)$, где $a>\bar{D}^{\bullet}$ и $t_0$ — любое вещественное число.*

**Т. VI. 3.2.** *Пусть $f(s)=(A, \Lambda)$ — целая функция. Если существуют $t_0$ и $a>\bar{D}^{\bullet}$, такие, что порядок функции $f$ в $S(t_0, \pi a)$ бесконечен, то, каково бы ни было $d>a$, $f$ имеет в $S(t_0, \pi d)$ прямую $J^*$.*

**Т. VI. 3.3.** *Предположим, что шаг последовательности $\Lambda$ положителен, и пусть $f(s)=(A, \Lambda)$ — целая функция, $(R)$-порядок которой равен $\rho>0$. Тогда $f$ имеет прямую $J^*$ в каждой полосе $S(t_0, \pi a)$, где $a>\max(\bar{D}^{\bullet}, 1/2\rho)$ и $t_0$ — любое вещественное число.*

Заметим, что в теореме VI. 3.2 не требуется положительности шага последовательности $\Lambda$. Если добавить это предположение, то теорема VI. 3.2 превращается лишь в частный случай теоремы VI. 3.1.

Теорема VI. 3.1 есть частный случай теоремы VI. 3.3. Докажем сначала теорему VI. 3.2.

Пусть $\mathscr{D}$ — квадрат $|\sigma-\sigma_0|<\pi d$, $|t-t_0|<\pi d$, где $\sigma_0$ — произвольное вещественное число; рассмотрим семейство голоморфных в $\mathscr{D}$ функций $F_c(s)=f(s+c)$, где $s \in \mathscr{D}$, $c \leqslant 0$ —

любое число. Это семейство не является нормальным в $\mathscr{D}$. В противном случае могли бы иметь место лишь два случая:

1) существует последовательность $\{c_n\} \to -\infty$, для которой

$$|F_{c_n}(s)| \leqslant M < \infty$$

на квадрате $\mathscr{D}_a = \{s \,\|\, \sigma - \sigma_0| \leqslant \pi a,\ |t - t_0| \leqslant \pi a\}$, откуда в силу § II.2, если положить там $R = a$, вытекает, что $f \equiv 0$;

2) $\lim F_c(s) = \infty$ равномерно на $\mathscr{D}_a$, если $\lim c = -\infty$. Это, однако, противоречило бы теореме III.2.6.

Итак, семейство $F_c(s)$ не является нормальным в $\mathscr{D}$; следовательно, оно имеет там по крайней мере одну иррегулярную точку $s' = \sigma' + it'$. И каково бы ни было $\varepsilon > 0$, семейство $F_c(s)$ не является нормальным в $C(s', \varepsilon)$. Это означает, что $f$ принимает в $S(t', \varepsilon)$ бесконечное число раз каждое значение, за исключением, быть может, одного. Следовательно, прямая $t = t'$ является прямой $J^*$.

Теорема VI.3.3 доказывается аналогично, однако на этот раз используется теорема III.2.9.

## VI.4. Некоторые приложения теорем композиции

Прежде чем формулировать утверждения, которым по существу и посвящен настоящий параграф, нам необходимо доказать классическую теорему Крамера. Мы изложим как обобщение теоремы Крамера, принадлежащее Пойа (называемое теоремой Крамера — Пойа), так и важный вклад в эту теорему В. Бернштейна, хотя на самом деле будет использоваться лишь первоначальная теорема Крамера.

**Т. VI.4.1.** *Пусть $f(s) = (A, \Lambda)$ — однозначная функция с конечной абсциссой сходимости $\sigma_a (= \sigma_{a,f})$, и пусть $\varphi(z)$ — целая функция экспоненциального типа $\delta$. Пусть $S_f$ — особое множество функции $f$ и $S_{f,\delta}$ — объединение кругов радиуса $\delta$, центрами которых являются точки из $S_f$. Пусть $\Delta$ — часть дополнения множества $S_{f,\delta}$ относительно $s$-плоскости, связная с полуплоскостью $P_{\sigma'}$, $\sigma' > \sigma_a + \delta$. Тогда функция $F(s) = (C, \Lambda)$, где $C = \{c_n\}$, $c_n = \varphi(\lambda_n) a_n$, голоморфна в $\Delta$.*

Пусть $\Phi(z)$ — преобразование Лапласа функции $\varphi(z)$:

$$\Phi(z) = \int_0^\infty \varphi(u) e^{-uz} du.$$

Известно, что функция $\Phi(z)$ голоморфна при $|z| > \delta$, и, каково бы ни было $\varepsilon > 0$,

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} e^{zw} \Phi(w) \, dw, \tag{VI.6}$$

где $C_\varepsilon$ — окружность $|z| = \delta + \varepsilon$. Впрочем, это очевидно, поскольку если

$$\varphi(z) = \sum_{n \geqslant 0} d_n z^n,$$

то при $|z| > \delta$

$$\Phi(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{n! d_n}{z^{n+1}}.$$

Используя (VI. 6), легко показать, что при достаточно больших $\sigma$

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} f(s - w) \Phi(w) \, dw. \qquad \text{(VI. 7)}$$

Отсюда следует, что если $s \in \Delta$, то функцию $F(s)$ можно продолжить вдоль каждой кривой Жордана, расположенной в $\Delta$ (причем один из концов кривой лежит в полуплоскости $\sigma > \sigma'$, $\sigma'$ достаточно велико), лишь бы $\varepsilon$ было достаточно малым. Таким образом, теорема доказана.

Пусть теперь $h(\theta)$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ — *тип функции* $\varphi$ *на луче* $re^{i\theta}$, $r > 0$, т. е.

$$h(\theta) = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\ln |\varphi(re^{i\theta})|}{r}.$$

Назовем *сопряженной диаграммой* функции $\varphi$ замкнутую область $\mathscr{D}$, точки $z = x + iy$ которой удовлетворяют неравенству

$$x \cos \theta - y \sin \theta \leqslant h(\theta).$$

Пойа доказал, что $\mathscr{D}$ является наименьшей выпуклой областью, вне которой функция $\Phi(z)$ голоморфна. Следовательно,

$$\mathscr{D} \subset \overline{C(0, \delta)}.$$

Таким образом, если обозначить через $\mathscr{D}_\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ объединение кругов $C(z, \varepsilon)$, где $z$ — любая точка области $\mathscr{D}$, и через $L_\varepsilon$ границу области $\mathscr{D}_\varepsilon$, то в силу (VI. 7) можно написать, что

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} f(s - w) \Phi(w) \, dw.$$

Отсюда мы легко получаем следующую теорему:

**Т. VI. 4.2.** *Если* $f$, $\varphi$ *и* $F$ *определены, как в теореме* VI. 4.1, $S_F$ — *особое множество функции* $F$ *и* $\mathscr{D}$ — *сопряженная диаграмма функции* $\varphi$, *то*

$$S_F \subset S_f + \mathscr{D}.$$

Используя методы гл. V, т. е. производя подходящее разбиение плоскости (или скорее части плоскости), соответствующее особенностям функции $\Phi$, и исходя сначала из равенства (VI. 7), справедливого для достаточно больших $\sigma$, а затем заменяя по теореме Коши правую часть этого равенства интегралом от той же самой функции, но взятым по множеству контуров, соответствующих нашему разбиению, получаем следующий результат, принадлежащий В. Бернштейну:

**Т. VI. 4.3.** *Если функции $f$, $\varphi$ и $F$ определены, как в теореме* VI. 4.2, *$\Phi$ — преобразование Лапласа функции $\varphi$ и $S_\Phi$ — особое множество функции $\Phi$, то*

$$S_F \subset S_f + S_\Phi.$$

Теоремы V. 1.1 и VI. 4.1 позволяют сформулировать следующую теорему о дополнительных рядах:

**Т. VI. 4.4.** *Пусть $P = \{p_n\}$ и $Q = \{q_n\}$ — непересекающиеся подпоследовательности последовательности $\Lambda$ ($P \cup Q = \Lambda$, $P \cap Q = \emptyset$); пусть $\varphi(z)$ — целая функция экспоненциального типа $\delta$.*

*Если $A$ и $B$ — последовательности комплексных чисел, то обозначим через $\varphi(\Lambda)$, $\varphi(P)$ и $A\varphi(P)$ последовательности $\{\varphi(\lambda_n)\}$, $\{\varphi(p_n)\}$, $\{a_n\varphi(p_n)\}$ и положим*

$$f(s) = (A, P),$$
$$\psi(s) = (A\varphi(P), P),$$
$$\vartheta(s) = (\varphi(\Lambda), \Lambda) - (B, Q).$$

*Допустим, что $f$ и $\vartheta$ являются однозначными и ограниченными, за исключением особенностей, в каждой полуплоскости $P_{\sigma'}$.*

*Тогда функция $\psi$ также является однозначной, и особые множества $S_f$, $S_\psi$ и $S_\vartheta$ связаны следующим образом:* a) *каково бы ни было $\delta' > \delta$, любой круг $C(s, \delta')$ с $s \in S_\psi$ содержит некоторую точку из $S_f$;* b) $S_\psi \subset \overline{S_f + S_\vartheta}$.

*В частности, если $\varphi$ — целая функция минимального типа* ($\delta = 0$), *то утверждение* a) *может быть заменено следующим:* c) $S_\psi \subset S_f$, *и заключения об особых множествах могут быть сформулированы в этом случае так:*

d) $S_\psi \subset (\overline{S_f + S_\vartheta}) \cap S_f$.

Заметим, что если $f$ и $\vartheta$ не предполагаются однозначными, то утверждение все еще остается справедливым при условии, что $S_f$ и $S_\vartheta$ обозначают (как это уже делалось в конце гл. V для теорем композиции) особые множества функций $f$ и $\vartheta$, к которым прибавлены разрезы, делающие эти функции однозначными вне полученных таким образом множеств.

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что из того факта, что $P$ и $Q$ — непересекающиеся подпоследовательности последовательности $\Lambda$, следует такое утверждение: если

$$f(s)=(A,\ P)=(C,\ \Lambda),\quad \psi(s)=(D,\ \Lambda),\quad C=\{c_n\},\quad D=\{d_n\},$$

то для $\lambda_n=p_m$: $c_n=a_m$, $d_n=a_m\varphi(p_m)$ и для $\lambda_n=q_k$: $c_n=0$. Теорема V.1.1 дает тогда утверждение b). Утверждение a) следует из теоремы VI.4.1.

Вот частный случай теоремы VI.4.4, касающийся рядов Тейлора ($\Lambda=N$, $e^{-s}=z$):

**T. VI.4.5.** *Пусть* $P=\{p_n\}$, $Q=\{q_n\}$ — *непересекающиеся последовательности целых положительных возрастающих чисел. Если существует ряд*

$$\sum c_n z^{q_n} \tag{VI.8}$$

*с конечным радиусом сходимости, имеющий среди особых точек на окружности сходимости полюс, то любой ряд*

$$\sum d_n z^{p_n} \tag{VI.9}$$

*с конечным радиусом сходимости имеет на своей окружности сходимости по крайней мере две особые точки.*

Если $\alpha$ — полюс ряда (VI.8) на его окружности сходимости и если $R$ — радиус сходимости ряда (VI.9), то положим

$$(B,\ Q)=\sum \alpha^{q_n}c_n e^{-q_n s}=\sum b_n e^{-q_n s},$$
$$(A,\ P)=\sum R^{p_n}d_n e^{-p_n s}=\sum a_n e^{-p_n s}.$$

Легко видеть, что существует многочлен $\varphi(z)$ (и, следовательно, функция минимального типа), удовлетворяющий следующему условию: ряд

$$\sum \varphi(n)\, z^n$$

является главной частью функции $(B,\ Q)$ при полюсе 1; здесь $e^{-s}$ было заменено на $z$.

Следовательно, все точки $2k\pi i$ ($k$ — любое целое число) являются регулярными точками функции $\vartheta(s)=(\varphi(\Lambda),\ \Lambda)-(B,\ Q)$ (здесь $\Lambda=N$). Если бы ряд $(A,\ P)$ имел на своей оси сходимости $\sigma=0$ лишь одну особую точку $(\mathrm{mod}\, 2\pi i)$, например точку $it_0 (\mathrm{mod}\, 2\pi i)$, то мы имели бы $it_0\notin S_f+S_\vartheta$, что противоречит теореме VI.4.4. Теорема VI.4.5, таким образом, доказана.

Более прямое доказательство теоремы VI.4.5 можно получить, принимая во внимание, что если $\varphi(z)$ — многочлен, то ряд $(A\varphi(P),\ P)$ $(P\subset N)$ не имеет других особых точек, кроме особых точек ряда $(A,\ P)$, а затем применяя классическую теорему композиции Адамара к рядам Тейлора (или, точнее, — в использованных нами обозначениях — к рядам Тейлора-Д) $(A,\ P)$ и $(\varphi(N),\ N)-(B,\ Q)$, $Q\subset N$, $Q\cap P=\emptyset$, Теорема VI. 4.5 обобщалась в различных направлениях; впрочем, эти обобщения всегда касались рядов Тейлора. Так, например, слово «полюс» может быть заменено выражением «алгебраико-логарифмическая особенность».

Мы заканчиваем параграф некоторыми теоремами о рядах Тейлора; для этого нам по существу потребуется лишь классическая теорема Гурвица о рядах Тейлора.

**Т. VI. 4.6.** *Пусть $A=\{a_n\}$ — некоторая последовательность рациональных чисел, для которой существует целое $N$, обладающее таким свойством: все числа $a_n N^n$ $(n \geqslant 1)$ являются целыми.*

*Предположим, что функция $F(z)=\sum a_n z^n$ регулярна в бесконечности и что она голоморфна при*

$$|z-N^2/(N^2-1)| \geqslant N/(N^2-1), \quad \textit{если} \quad N \geqslant 2,$$

*и голоморфна при*

$$x \leqslant \frac{1}{2}(z=x+iy), \quad \textit{если} \quad N=1.$$

*Тогда*

$$F(z)=\frac{P(z)}{(1-z)^h}, \tag{VI. 10}$$

*где $P(z)$ — многочлен и $h$ — целое положительное число.*

Положим

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum \frac{a_n N^n}{z^n}, \\ \varphi(z) &= \sum \frac{(-1)^{n-1} N^{n-1}}{z^n}. \end{aligned} \tag{VI. 11}$$

Особые точки функции $f$ получаются из особых точек функции $F$ посредством преобразования $N/z$. Таким образом, все особые точки функции $f$ расположены в круге $C(N, 1)$.

Поскольку $\varphi$ имеет лишь одну особую точку $-N$, теорема Гурвица (см. § V. 5) в применении к рядам (VI. 11) позволяет заключить, что функция

$$\psi(z)=\sum \frac{\gamma_{n-1}}{z^n}$$

с

$$\gamma_n=(a_1 N) N^n - C_n^1 (a_2 N^2) N^{n-1} + \ldots \pm (a_{n+1} N^{n+1}) = \delta N^{n+1} \Delta_n a_1,$$

где $\Delta_n a_1$ — $n$-я разность последовательности $\{a_n\}$ относительно $a_1$ и $\delta = \pm 1$, голоморфна при $|z| \geqslant 1$.

Следовательно,

$$\overline{\lim} |\gamma_n|^{1/n} = \theta < 1.$$

Но так как $\gamma_n$ — целые числа (по предположению), то $\gamma_n = 0$ при $n > n_0$. Тогда из тождества

$$\sum a_n \frac{y^{n-1}}{(1+y)^n} = \sum_{p \geqslant 0} y^p \sum_{n \leqslant p+1} a_n C_p^{n-1} (-1)^{p-n+1}$$

следует, что

$$\sum a_n z^{n-1} = \sum_{0 \leqslant p \leqslant n_0} \left(\frac{z}{1-z}\right)^p \frac{1}{1-z} (-1)^p \Delta_p a_1 = \frac{P_1(z)}{(1-z)^h},$$

где $P_1(z)$ — многочлен. Теорема доказана.

Сделаем теперь следующее замечание. Если целое положительное $N$ таково, что величины $a_n N^n$ $(n \geqslant 1)$ — целые, то, обозначая через $\rho$ наибольшее расстояние между точкой 1 и особыми точками функции $F$ (см. формулировку теоремы VI. 4.6), необходимо имеем

$$N \geqslant \frac{1}{\rho} - 1,$$

если только $F(z) = \sum a_n z^n$ не имеет вида (VI. 10).

Таким образом, мы получаем нижнюю границу для целых $N$, для которых функция, представимая рядом с рациональными коэффициентами, является, например, алгебраической, но не рациональной функцией. Рассмотрим опять функцию $F(z)$ с целыми коэффициентами Тейлора и ненулевым радиусом сходимости, причем эта функция однозначна и либо регулярна в бесконечности, либо имеет там полюс. Пусть $S$ — дополнение области существования функции $F$ относительно открытой комплексной плоскости. Тогда в силу наших предыдущих определений $S$ является особым множеством функции (из которого выброшена бесконечно удаленная точка, если функция имеет там полюс). Если $E$ — некоторое множество в $\mathbf{R}^2$, то положим $H = \overline{E} \cap S$. Если множество $H$ конечно и содержит лишь полюсы функции $F$, причем эти полюсы являются алгебраическими точками, то существует многочлен $P(z)$ с целыми коэффициентами, такой, что функция $F(z)P(z)$ регулярна во всех точках множества $H$. Обозначая множество таких многочленов через $\Pi(F, E)$, назовем *полярным алгебраическим индексом множества $E$ относительно функции $F$* наименьшую из степеней многочленов, принадлежащих $\Pi(F, E)$, и обозначим этот индекс через $p(F, E)$.

Если многочлена $P$ с целыми коэффициентами и с условием, что $F(z)P(z)$ — регулярная функция в точках множества $H$, не существует, т. е. если $\Pi(F, E) = \emptyset$, то будем считать, что *полярный алгебраический индекс $p(F, E)$ множества $E$ относительно $F$* равен $+\infty$. Индекс $p(F, E) = \infty$, если

a) множество $H$ бесконечно;

b) множество $H$ конечно, но содержит по крайней мере одну точку из $S$, которая не является одновременно полюсом и алгебраической точкой; иначе говоря, множество содержит либо точку, не являющуюся полюсом, либо трансцендентную точку, являющуюся полюсом.

Следующая теорема непосредственно вытекает из теоремы VI. 4.6 (при $N=1$).

**T. VI. 4.7.** *Если аналитическое продолжение ряда* $F(z)=\sum a_n z^n$ *с целыми коэффициентами является однозначной функцией, регулярной в бесконечности или имеющей там полюс, то полярный алгебраический индекс (замкнутой) полуплоскости* $x \leqslant 1/2$ $(z = x+iy)$ *относительно* $F$ *не меньше полярного индекса (открытой) полуплоскости* $x > 1/2$, *из которой исключена точка* $z=1$. *Другими словами,*

$$p\left(F, \left\{z \mid x \leqslant \frac{1}{2}\right\}\right) \geqslant p\left(F, \left\{z \mid x > \frac{1}{2},\ z \neq 1\right\}\right). \quad \text{(VI. 12)}$$

*Аналогично имеет место более общий факт:*

$$\Pi\left(F, \left\{z \mid x \leqslant \frac{1}{2}\right\}\right) \subset \Pi\left(F, \left\{z \mid x > \frac{1}{2},\ z \neq 1\right\}\right). \quad \text{(VI. 13)}$$

*Соотношения* (VI. 12) *и* (VI. 13) *остаются справедливыми, если в членах слева заменить полуплоскость* $x \leqslant 1/2$ *этой же полуплоскостью, из которой исключены полюсы функции* $F$, *являющиеся рациональными точками.*

Допустим, что соотношение (VI. 13) неверно, если заменить полуплоскость $x \leqslant 1/2$ этой же полуплоскостью, из которой исключены полюсы, являющиеся рациональными точками: $p_1/q_1$, $p_2/q_2, \ldots, p_m/q_m$, где $p_j$, $q_j$ — целые числа. Тогда существует многочлен $P(z)$ с целыми коэффициентами степени меньше $p(F, \{z \mid x > 1/2,\ z \neq 1\})$, такой, что произведение $F(z)P(z)$ имеет в полуплоскости $x \leqslant 1/2$ особенности, расположенные на конечном расстоянии от начала, лишь в точках $p_j/q_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$; кроме того, это произведение имеет в полуплоскости $x > 1/2$ особые точки, расположенные на конечном расстоянии от начала и отличные от точки 1.

С другой стороны, существует многочлен $Q(z)$ с целыми коэффициентами вида

$$(q_1 z - p_1)^{\alpha_1} (q_2 z - p_2)^{\alpha_2} \ldots (q_m z - p_m)^{\alpha_m}$$

($\alpha$ , ..., $\alpha_m$ — целые положительные числа), такой, что функция $\Psi(z) = F(z)P(z)Q(z)$ голоморфна на любом компакте полуплоскости $x \leqslant 1/2$ и имеет в полуплоскости $x > 1/2$ те же особые точки, что и $F(z)P(z)$.

Ясно, что существует также многочлен (с целыми коэффициентами) $R(z)$ степени $k$, такой, что функция $(\Psi(z)-R(z))z^{-k-1}$ является рядом Тейлора с целыми коэффициентами, представляющим функцию, регулярную в бесконечности, голоморфную при $x \leqslant 1/2$ и имеющую в полуплоскости $x > 1/2$ особые точки, отличные от точки 1; это, однако, противоречит теореме VI. 4.6.

Из теоремы VI. 4.7 сразу же вытекает следствие:

**VI. 4.8.** *Если целые неотрицательные $a_n$ таковы, что $\overline{\lim}\, a_n^{1/n}=a$, $1 < a < 2$, и если аналитическое продолжение $F$ ряда $\sum a_n z^n$ является однозначной функцией, регулярной в бесконечности или имеющей там полюс, то $F$ имеет на конечном расстоянии от начала, помимо особой точки $z=a^{-1}$, некоторую особую точку, расположенную на полуплоскости $x \leqslant 1/2$.*

## Глава VII

# О поведении остатков ряда Дирихле в области существования функции. Приложения

### VII. 1. Вычисление остатков ряда $(A, \Lambda)$

В этой главе мы допустим, что последовательность $\Lambda$ имеет положительный шаг $h$, и положим

$$\inf(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=p.$$

Имеем $0<p\leqslant h$. Для упрощения формулировок предположим также, что абсцисса сходимости равна нулю, т. е. что

$$\sigma_a=\sigma_c=\overline{\lim}\frac{\ln|a_n|}{\lambda_n}=0.$$

Пусть $C=\{c_n\}$ — вещественная последовательность, такая, что бесконечное число ее членов может равняться $-\infty$, и такая, что бесконечное число ее членов конечно. Допустим, что

$$\overline{\lim}\frac{c_n}{\lambda_n}=0.$$

Тогда существует *вогнутая функция* $C(x)$ $(x\geqslant\lambda_1)$, обладающая следующими свойствами:

1) $C(\lambda_n)\geqslant c_n$ $(n\geqslant 1)$;

2) $C(x)\geqslant 0$;

3) любая другая вогнутая функция $C_1(x)$ $(x\geqslant\lambda_1)$, удовлетворяющая тем же неравенствам, удовлетворяет и неравенству $C_1(x)\geqslant C(x)$. Функция $C(x)$ называется *наименьшей неотрицательной вогнутой оболочкой последовательности точек* $P_n=(\lambda_n, c_n)$ $(n\geqslant 1)$.

Легко видеть, что $\lim(C(x)/x)=0$.

Если задан ряд $f=(A, \Lambda)$, то через $f_n$ мы обозначим функцию, представимую суммой

$$\sum_{m>n} a_m e^{-\lambda_m s},$$

т. е. «$n$-й остаток» ряда $(A, \Lambda)$.

Докажем следующую теорему:

**Т. VII. 1.1.** *Предположим, что функция* $f=(A, \Lambda)$ *голоморфна в односвязной области* $D$, *содержащей полуплоскость сходимости* $(\sigma>0)$. *Пусть* $C(x)$ — *наименьшая неотрицательная вогнутая оболочка последовательности точек* $(\lambda_n, \ln|a_n|)$ $(n\geqslant 1)$.

*Тогда, какова бы ни была компактная область $\overline{\Delta}$, содержащаяся в $D$, существует постоянная $P = P(\Delta)$, такая, что, полагая $q_n = e^{C(\lambda_n)}$, при $s \in \overline{\Delta}$ имеем*

$$|f_n(s)|\, e^{\lambda_n \sigma} \leqslant P q_n.$$

Положим

$$\eta_n = \frac{C(\lambda_{n+1}) - C(\lambda_n)}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}. \tag{VII. 1}$$

Сразу видно, что $\eta_n$ стремится к нулю, убывая. Рассмотрим функцию

$$\varphi_n(s) = f_n(s + \eta_n)\, e^{\lambda_n (s+\eta_n)} q_n^{-1}.$$

При достаточно больших $n$ и $s \in \Delta$

$$|\varphi_n(s)| = \left| f(s + \eta_n)\, e^{\lambda_n (s+\eta_n)} q_n^{-1} - \sum_{m \leqslant n} a_m q_n^{-1} e^{-(\lambda_m - \lambda_n)(s+\eta_n)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant M_n e^{\lambda_n (\eta_n + \sigma)} q_n^{-1} + \sum_{m \leqslant n} q_m q_n^{-1} e^{-(\lambda_m - \lambda_n)(\sigma+\eta_n)} = I_n(s) + J_n(s),$$

где $M_n = \max |f(s + \eta_n)|$, когда $s \in \overline{\Delta}$, $n \geqslant n_0$.

Ясно, что $M_n \leqslant M < \infty$, если $n \geqslant n_0$.

Принимая во внимание (VII. 1) и вогнутость функции $C(x)$, имеем при $1 \leqslant m < n$ $(n > 1)$

$$\frac{C(\lambda_n) - C(\lambda_m)}{\lambda_n - \lambda_m} \geqslant \eta_n. \tag{VII. 2}$$

Следовательно, если $\sigma < 0$, то, используя (VII. 2) при $m = 1$, получаем

$$I_n(s) \leqslant M e^{\lambda_n \eta_n} e^{-C(\lambda_n)} \leqslant M e^{\lambda_1 \eta_1}. \tag{VII. 3}$$

Из того же неравенства (VII. 2) получаем (все еще при $\sigma < 0$)

$$J_n(s) = \sum_{m \leqslant n} e^{-C(\lambda_n) + C(\lambda_m) + (\lambda_n - \lambda_m)\eta_n} e^{(\lambda_n - \lambda_m)\sigma} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m \leqslant n} e^{(\lambda_n - \lambda_m)\sigma} \leqslant \sum e^{np\sigma} \leqslant \frac{1}{1 - e^{p\sigma}}, \tag{VII. 4}$$

где $p$ — величина, определенная в начале этой главы.

При $\sigma < 0$, $s \in \overline{\Delta}$ неравенства (VII. 3) и (VII. 4) дают такое неравенство:

$$|\varphi_n(s)| \leqslant \frac{K}{1 - e^{p\sigma}}, \tag{VII. 5}$$

где $K$ — постоянная, не зависящая от $n$, $n \geqslant n_0$.

При $s \in \bar{\Delta}$, $\sigma > 0$ имеем

$$|\varphi_n(s)| = \left|\sum_{m>n} a_m q_n^{-1} e^{-(\lambda_m-\lambda_n)(s+\eta_n)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m>n} e^{C(\lambda_m)-C(\lambda_n)-(\lambda_m-\lambda_n)\eta_n} e^{(\lambda_m-\lambda_n)\sigma}$$

и в силу (VII. 1)

$$|\varphi_n(s)| = \sum_{m>n} e^{-(\lambda_m-\lambda_n)\sigma} \leqslant \sum e^{-np\sigma} \leqslant \frac{1}{1-e^{-p\sigma}}.$$

Следовательно, как при $\sigma > 0$, так и при $\sigma < 0$, $s \in \bar{\Delta}$ $(n \geqslant n_0)$

$$|\varphi_n(s)| \leqslant \frac{K_1}{|1-e^{-p\sigma}|}, \tag{VII. 6}$$

где $K_1 = K_1(\Delta)$ — некоторая постоянная.

Обозначим через $R[s_0, \alpha]$ квадрат $|\sigma - \sigma_0| < \alpha$, $|t - t_0| < \alpha$ $(s_0 = \sigma_0 + it_0)$ и рассмотрим функцию

$$\psi_n(s) = [1 - e^{-p(s-i(t_0-2\delta))}][1 - e^{-p(s-i(t_0+2\delta))}]\varphi_n(s).$$

В силу (VII. 6) функция $f$ (и $\psi_n(s)$) голоморфна в $R[it_0, 3\delta]$, если $\delta > 0$ достаточно мало. На границе квадрата $R[it_0, 2\delta]$ функция $\psi_n(s)$ удовлетворяет неравенству

$$|\psi_n(s)| \leqslant B < \infty \quad (n \geqslant 1),$$

причем $B$ не зависит от $n$ $(n \geqslant n_0)$.

Так как на границе квадрата $R[it_0, \delta]$ для достаточно малых $\delta$

$$\mu = \min|1 - e^{-p(s-i(t_0-2\delta))}| = \min|1 - e^{-p(s-i(t_0+2\delta))}| > 0,$$

то при $s \in \overline{R[it_0, \delta]}$ получаем

$$|\varphi_n(s)| \leqslant L\mu^{-2} \quad (n \geqslant 1),$$

где $L$ — некоторая постоянная.

Следовательно, каково бы ни было $s_0 \in \bar{\Delta}$, существует некоторый квадрат с центром в этой точке, такой, что на этом квадрате $\max|\varphi_n(s)| < M_0$, где $M_0$ не зависит от $s_0$. По теореме Бореля — Лебега функция $\varphi_n(s)$ ограничена (величиной, не зависящей от $n$) на $\bar{\Delta}$. Этим завершается доказательство.

Сделаем замечание о наименьшей неотрицательной вогнутой оболочке последовательности $\{c_n\}$. Если $\overline{\lim}\, c_n = \infty$, то существует такая последовательность $\{n_j\}$, что $C(\lambda_{n_j}) = c_{n_j}$ $(j \geqslant 1)$, причем точки $(\lambda_{n_j}, c_{n_j})$ являются вершинами ломаной линии, определенной уравнением $y = C(x)$ $(x \geqslant \lambda_1)$. Если $\overline{\lim}\, c_n = l$, причем $-\infty < l < \infty$, то каждой последовательности $\{n_j\}$, такой, что

$$\underline{\lim}\, c_{n_j} > -\infty,$$

соответствует некоторая постоянная $c$, такая, что

$$c_{n_j} \leqslant C(\lambda_{n_j}) \leqslant c_{n_j} + c. \tag{VII. 7}$$

Последовательность $\{n_j\}$, которая удовлетворяет условию (VII. 7), называется *последовательностью главных индексов последовательности* $\{c_n\}$.

Теорема VII. 1.1 приводит к следующему утверждению:

**VII. 1.2.** *Пусть* $\{n_j\}$ — *некоторая последовательность главных индексов последовательности* $\{\ln |a_n|\}$.

*Допустим, что* $f = (A, \Lambda)$ *голоморфна в односвязной области* $D$, *содержащей полуплоскость* $\sigma > 0$. *Тогда, какова бы ни была компактная область* $\overline{\Delta}$, *содержащаяся в* $D$, *при* $s \in \overline{\Delta}$ *и всех* $j \geqslant 1$

$$|f_{n_j}(s)|\, e^{\lambda_{n_j}\sigma} \leqslant Q\, |a_{n_j}|,$$

*где* $Q$ — *некоторая постоянная.*

Следующая элементарная лемма представляется нам полезной.

**VII. 1.3.** *Если* $f = (A, \Lambda)$ *имеет на своей оси сходимости полюс, то*

$$\overline{\lim}\, |a_n| > 0. \tag{VII. 8}$$

Предположим, что (VII. 8) не выполняется; тогда каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $n_0$, что при $n > n_0$ выполняется неравенство $|a_n| < \varepsilon$, а при $\sigma > 0$ имеет место оценка

$$|f(s)| \leqslant \sum |a_n|\, e^{-\lambda_n\sigma} = \sum_{n \leqslant n_0} |a_n|\, e^{-\lambda_n\sigma} + \sum_{n > n_0} |a_n|\, e^{-\lambda_n\sigma} \leqslant$$

$$\leqslant A(\sigma) + \varepsilon \sum e^{-np\sigma} \leqslant A(\sigma) + \varepsilon (1 - e^{-p\sigma})^{-1},$$

где $p > 0$ — использованная выше постоянная.

Далее, $A(\sigma)$ ограничена при $\sigma \geqslant 0$. Следовательно, при $\sigma \downarrow 0$ имеет место оценка

$$f(\sigma + it) = o(\sigma^{-1})$$

(равномерно по $t$). Никакая точка $it_0$ на оси сходимости, следовательно, не может быть полюсом в противоречии с нашим предположением.

Теорема VII. 1.1 (или ее следствие VII. 1.2) позволяет наряду с функцией $f = (A, \Lambda)$ рассмотреть вспомогательную функцию, которая осуществляет «отделение» особенностей функции на ее оси сходимости от всех других ее особенностей.

**Т. VII. 1.4.** *Пусть* $\{n_j\}$ — *некоторая последовательность главных индексов последовательности*

$$\{\ln|a_n|\} \quad (\{a_n\}=A).$$

*Предположим, что ось сходимости* ($\sigma=0$) *не является купюрой для* ($A$, $\Lambda$), *и пусть* $T$ — *множество, образованное полуплоскостями* $\sigma<0$, $\sigma>0$ *и множеством регулярных точек* $f$ *на* $\sigma=0$.

*Тогда из последовательности* $\{n_j\}$ *можно выделить некоторую подпоследовательность* $\{p_k\}$, *обладающую следующим свойством: последовательность*

$$f_{p_k}(s)\, e^{\lambda_{p_k}s} a_{p_k}^{-1} \quad (k \geqslant 1)$$

*равномерно сходится на любом компакте, содержащемся в* $T$, *к голоморфной в* $T$ *функции* $g(s)$.

*Далее, существуют последовательности* $M=\{\mu_n\}$ *и* $M'=\{\mu_n'\}$, *такие, что*

$$\mu_1 \geqslant h, \quad \mu_{n+1}-\mu_n \geqslant h \quad (n \geqslant 1),$$
$$\mu_1' \geqslant h, \quad \mu_{n+1}'-\mu_n' \geqslant h \quad (n \geqslant 1),$$

*причем* $h$ — *шаг последовательности* $\Lambda$, *и последовательности* $B=\{b_n\}$, $B'=\{b_n'\}$, *такие, что при* $\sigma>0$, $\sigma<0$ *имеем соответственно*

$$g(s)=\sum b_n e^{-\mu_n s},$$

$$g(s)=\sum b_n' e^{-\mu_n' s}-1.$$

*Функция* $g(s)$ *имеет на оси* $\sigma=0$ *особые точки. Все они являются особыми точками функции* $f(s)$.

*Любая изолированная особая точка функции* $g$ *является простым полюсом.*

Замечание. Условие, что $n_j$ — главные индексы последовательности $\{\ln|a_n|\}$, т. е. что

$$\ln|a_{n_j}| \leqslant C(\lambda_{n_j}) \leqslant \ln|a_{n_j}|+c,$$

где $C(x)$ — наименьшая неотрицательная вогнутая оболочка последовательности точек ($\lambda_n$, $\ln|a_n|$), можно заменить более общим условием, однако доказательство при этом усложняется. Данная здесь формулировка достаточна для рассматриваемых нами приложений.

Последовательность функций $\{F_j(s)\}$, заданных соотношением

$$F_j(s)=f_{n_j}(s)e^{\lambda_{n_j}s}\left|a_{n_j}\right|^{-1} \quad (j\geqslant 1), \tag{VII.9}$$

образует нормальное семейство, ограниченное на области $\overline{\Delta}$, определенной в теореме VII. 1.1. Из нее можно выделить подпоследовательность $F_{j_\nu}(s)$, которая равномерно сходится на любом компакте, содержащемся в $\Delta$, к голоморфной функции, которую мы обозначим через $g(s)$.

Из вогнутости функции $C(x)$ и из равенства

$$\lim\left(C(\lambda_n)/\lambda_n\right)=0$$

следует, что

$$\lim\left[C(\lambda_{n+1})-C(\lambda_n)\right]=0;$$

другими словами, полагая, как и в теореме VII. 1.1, $\ln q_n = C(\lambda_n)$, имеем

$$\lim(q_{n+1}/q_n)=1. \tag{VII.10}$$

Положим $n_{j_\nu}=m_\nu$ $(\nu\geqslant 1)$. Принимая во внимание неравенство $q_{m_\nu}\leqslant C\left|a_{m_\nu}\right|$ (где $C$ — некоторая постоянная) и (VII. 10), получаем для целых положительных $m$

$$\left|\frac{a_{m_\nu\pm m}}{a_{m_\nu}}\right|\leqslant\frac{q_{m_\nu\pm m}}{\left|a_{m_\nu}\right|}\leqslant C\frac{q_{m_\nu\pm m}}{q_{m_\nu}} \tag{VII.11}$$

($m_\nu - m$ рассматривается лишь при $m<m_\nu$), т. е.

$$\overline{\lim}\left|\frac{a_{m_\nu\pm m}}{a_{m_\nu}}\right|\leqslant C. \tag{VII.12}$$

Заметим, что общность теоремы не уменьшится, если допустить, что существует постоянная $H<\infty$ с условием

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n\leqslant H. \tag{VII.13}$$

В самом деле, если это предположение не выполняется, то достаточно, с одной стороны, заменить последовательность $\Lambda$ некоторой последовательностью $\Lambda'\supset\Lambda$ с тем же шагом и, с другой стороны, заменить последовательность $A$ последовательностью $A'$, элементы которой, соответствующие $\lambda_n\in\Lambda$, совпадают с элементами из $A$, в то время как все другие элементы из $A'$ равны нулю. Легко заметить, что, доказав теорему для $(A', \Lambda')$, мы тем самым докажем ее и для $(A, \Lambda)$. Поэтому в дальнейшем предполагается, что выполняется условие (VII. 13).

Если $h$ — шаг последовательности $\Lambda$, то пусть $0 < \varepsilon < h - \varepsilon$. Для достаточно больших $\nu$ имеем

$$(\alpha) \quad m(h-\varepsilon) \leqslant \lambda_{m_\nu+m} - \lambda_{m_\nu} \leqslant mH,$$

$$(\beta) \quad m(h-\varepsilon) \leqslant \lambda_{m_\nu} - \lambda_{m_\nu-m} \leqslant mH,$$

причем неравенство между первым и вторым членами в ($\beta$) имеет место лишь при $m_\nu - m \geqslant p = p(\varepsilon)$.

Отсюда следует, что из последовательности $\{m_\nu\}$ можно выделить подпоследовательность $\{p_k\}$ (например, с помощью диагонального процесса), обладающую следующим свойством: пределы

$$\lim\left(\lambda_{p_k+m} - \lambda_{p_k}\right) = \mu_m, \qquad \lim a_{p_k+m} a_{p_k}^{-1} = b_m,$$

$$\lim\left(\lambda_{p_k} - \lambda_{p_k-m}\right) = \mu'_m, \qquad \lim a_{p_k-m} a_{p_k}^{-1} = b'_m$$

существуют и удовлетворяют неравенствам

$$|b_m| \leqslant C, \qquad |b'_m| \leqslant C, \tag{VII. 14}$$

$$\begin{gathered} \mu_1 \geqslant h, \qquad \mu_{m+1} - \mu_m \geqslant h, \\ \mu'_1 \geqslant h, \qquad \mu'_{m+1} - \mu'_m \geqslant h. \end{gathered} \tag{VII. 15}$$

Положим соответственно при $\sigma > 0$ и $\sigma < 0$

$$g^+(s) = \sum b_m e^{-\mu_m s}, \tag{VII. 16}$$

$$g^-(s) = \sum b'_m e^{\mu'_m s}. \tag{VII. 17}$$

В силу неравенств (VII. 14) и (VII. 15) ряды (VII. 16) и (VII. 17) сходятся соответственно в полуплоскостях $\sigma > 0$ и $\sigma < 0$. А в силу определения функции $g(s)$ (которая в $\Delta$ является пределом последовательности $F_{l_\nu}(s)$ $\left(n_{l_\nu} = m_\nu\right)$) при $\sigma > 0$ имеем

$$g(s) = g^+(s).$$

Пусть $D$ — определенная в теореме VII. 1.1 область; предположим, что компакт $\bar{\Delta}$, содержащийся в $D$, пересекается с полуплоскостью $\sigma < 0$. Тогда равномерно на $\bar{\Delta}$

$$\lim f(s)\, e^{\lambda_{m_\nu} s} a_{m_\nu}^{-1} = 0.$$

Это позволяет записать, что

$$\lim F_{l_\nu}(s) = -\lim \sum_{m < m_\nu} \frac{a_{m_\nu - m}}{a_{m_\nu}} e^{\left(\lambda_{m_\nu} - \lambda_{m_\nu - m}\right) s} - 1 = g(s). \tag{VII. 18}$$

В силу определения последовательностей $\{\mu'_n\}$, $\{b'_n\}$ при $\sigma < 0$

$$g(s) = g^-(s) - 1.$$

Следовательно, $g(s)$ не может иметь особых точек вне оси сходимости ($\sigma = 0$), и эти особые точки являются также особыми точками функции $f(s)$. Из (VII. 14) и (VII. 15) следует, что при $\sigma > 0$

$$|g(s)| = |g^+(s)| \leqslant C \sum e^{-mh\sigma} = Ce^{-h\sigma}(1 - e^{-h\sigma})^{-1}.$$

Подобное неравенство справедливо для $|g^-(s)|$ в полуплоскости $\sigma < 0$. Итак, при $\sigma \neq 0$, $|\sigma| \leqslant 1$ имеет место неравенство $|g(s)| \leqslant K|\sigma|^{-1}$, где $K$ — некоторая постоянная.

Предположим теперь, что вопреки нашему утверждению $g(s)$ регулярна на $\sigma = 0$. Пусть $0 < a < 1$ и $t_0 (\in \mathbf{R})$ — какие-нибудь величины; рассмотрим на квадрате $R[it_0, 2a]$ ($|\sigma| \leqslant 2a$, $|t - t_0| \leqslant \leqslant 2a$) функцию

$$G(s) = g(s)[s - i(t_0 + 2a)][s - i(t_0 - 2a)]. \qquad \text{(VII. 19)}$$

Тогда $G(s)$ голоморфна на квадрате $R$, а на сторонах этого квадрата имеет место неравенство $|G(s)| \leqslant 20Ka^{-1}$.

Иначе говоря, функция $g(s)$ является целой функцией, ограниченной на всей плоскости; следовательно, она постоянна; однако $g(s)$ стремится к нулю, когда $\sigma$ стремится к $+\infty$, и к $-1$, когда $\sigma$ стремится к $-\infty$. Получается противоречие. Итак, $g(s)$ необходимо имеет особые точки на оси $\sigma = 0$. Эти особые точки являются в силу определения функции $g$ особыми точками функции $f$.

Докажем, наконец, что каждая изолированная особая точка функции $g$ является простым полюсом. В самом деле, пусть $i\tau$ — такая точка; опять рассмотрим функцию $G(s)$, определенную в (VII.19), где величина $a > 0$ выбрана так, что замкнутый квадрат $\overline{R[i\tau, 3a]}$ не содержит никаких других особых точек, кроме $i\tau$, причем $t_0 = \tau \pm 3a$.

Оказывается, что на $t_0 \mp a = \tau \pm 2a$, $|\sigma| \leqslant a$ имеет место неравенство $|g(s)| \leqslant 20Ka^{-1}$. Следовательно, на сторонах квадрата $R[i\tau, 2a]$ имеем $|g(s)| \leqslant Pa^{-1}$ (если $|\sigma| = 2a$, то

$$|g(s)| \leqslant K(2a)^{-1}),$$

где $P$ — некоторая постоянная. Значит, $i\tau$ может быть лишь простым полюсом. Теорема доказана.

## VII. 2. Приложение результатов главы III и § VII. 1 к рядам, мероморфным на отрезке оси сходимости

Докажем следующую теорему:

**Т. VII. 2.1.** *Пусть* $\overline{D^{\bullet}}$ — *верхняя усредненная плотность последовательности* $\Lambda$; *допустим, что последовательности* $\Lambda$

(*шага* $h$) *и* $A$ *таковы, что существуют три постоянные* $H > 0$, $C > 0$, $N \geqslant 1$, *удовлетворяющие условиям*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n < H \qquad (n \geqslant 1), \tag{VII.20}$$

$$C^{-1} \leqslant \min_{1 \leqslant \nu \leqslant N} |a_{n+\nu}| \leqslant C \qquad (n \geqslant 1). \tag{VII.21}$$

*Предположим, что* $f(s) = (A, \Lambda)$ *не имеет в какой-то полосе* $S$: $a < t < b$ (*где* $b - a > 2\pi(\overline{D}^{\bullet} + h^{-1})$) *никаких других особых точек, кроме простых полюсов* $i\alpha_p$ $(p = 1, 2, \ldots, q)$, $\alpha_p \in \mathbf{R}$, *причем функция* $f(s)$ *остается ограниченной в* $S$ *вне каждой окрестности точек* $i\alpha_p$ $(p = 1, 2, \ldots, q)$.

*Функция* $f(s)$ *является тогда голоморфной при* $\sigma < 0$, *где она задается рядом*

$$f(s) = \sum a'_n e^{\lambda'_n s} + d \qquad (d \text{ — постоянная}).$$

*Имеем*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant h,$$
$$\lambda'_{n+1} - \lambda'_n \geqslant h,$$
$$|a'_n| \leqslant C.$$

*Любая изолированная особая точка* $i\alpha$ *функции* $f$ *на* $\sigma = 0$ *является простым полюсом, и существует* $q$ *целых чисел* $m_1, m_2, \ldots, m_q$, *таких, что*

$$\alpha = m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \ldots + m_q\alpha_q. \tag{VII.22}$$

Иначе говоря, полюсы $i\alpha_p$ $(p = 1, \ldots, q)$ образуют «целый базис» для всех изолированных особых точек функции $f$ на оси сходимости.

Напомним, что шаг $h$ последовательности $\Lambda$ предполагается в этой главе положительным и что аналитическое продолжение ряда $(A, \Lambda)$ в $S$ (откуда удалены точки $i\alpha_p$ $(p = 1, 2, \ldots, q)$) является прямым аналитическим продолжением.

Замечание. Условия (VII.20) и (VII.21) вытекают из других условий формулировки теоремы VII.2.1, а именно из того факта, что $f$ имеет лишь простые полюсы на указанном интервале оси сходимости. Однако доказательство в случае нецелых $\lambda_n$ нельзя получить непосредственно.

Из условий (VII.20), (VII.21) следует, что существует некоторая последовательность $\{n_j\}$ главных индексов последовательности $\{\ln|a_n|\}$, удовлетворяющая условиям

$$n_{j+1} - n_j \leqslant N, \tag{VII.23}$$

$$C_1^{-1} \leqslant |a_{n_j}| \leqslant q(n_j) = e^{C(\lambda_{n_j})} \leqslant C_1, \tag{VII.24}$$

причем $C(x)$ — наименьшая неотрицательная вогнутая оболочка множества точек $P_n = (\lambda_n, \ln|a_n|)$ $(n \geqslant 1)$, $C_1$ — некоторая постоянная, такая, что $C(x) \leqslant \ln C_1$ $(x \geqslant \lambda_1)$.

Рассмотрим семейство функций

$$f_x^*(s) = \left[f(s) - \sum_{\lambda_n \leqslant x} a_n e^{-\lambda_n s}\right] e^{xs} \qquad (x > 0).$$

Пусть $j(x)$ — наибольшее целое число $j$, такое, что $\lambda_{n_j} \leqslant x$; положим $m(x) = n_{j(x)}$. Пусть $n(x)$ — наибольшее целое $n$, такое, что $\lambda_n \leqslant x$. Имеем

$$0 \leqslant n(x) - m(x) \leqslant N.$$

Если $n(x) \geqslant m(x) + 1$, то можно написать

$$f_x^*(s) = \left[f_{m(x)}(s) - \left(a_{m(x)+1} e^{-\lambda_{m(x)+1} s} + \ldots + a_{n(x)} e^{-\lambda_{n(x)} s}\right)\right] e^{xs},$$

причем $x - \lambda_{m(x)+1} \leqslant NH$; если $n(x) = m(x)$, то

$$f_x^*(s) = f_{m(x)}(s)\, e^{xs}.$$

Из теоремы VII. 1.4 следует, что семейство $f_x^*(s)$ $(x > 0)$ ограничено на любом компакте, не содержащем особых точек функции $f$, и что из каждой последовательности $\{x_k\}$, $x_k > 0$, $x_k \uparrow \infty$, можно выделить такую подпоследовательность $\{y_j\}$, что последовательность $f_{y_j}^*(s)$ равномерно сходится на каждом компакте к некоторой функции $G(s)$, обладающей следующими свойствами:

1) для $\sigma > 0$ и $\sigma < 0$ имеем соответственно

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum d_n e^{-\nu_n s} + c, \\ G(s) &= \sum d_n' e^{\nu_n' s} + d, \end{aligned} \tag{VII. 25}$$

где $c$ и $d$ — некоторые постоянные и где при $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned} \nu_{n+1} - \nu_n &\geqslant h, \qquad |d_n| \leqslant C, \\ \nu_{n+1}' - \nu_n' &\geqslant h, \qquad |d_n'| \leqslant C \end{aligned} \tag{VII. 26}$$

(легко видеть, что $C$ — постоянная, фигурирующая в (VII. 21));

2) $G(s)$ голоморфна вне особых точек функции $f$ на оси сходимости $(\sigma = 0)$;

3) $G(s)$ имеет особые точки на $\sigma = 0$;

4) изолированные особые точки функции $G(s)$ являются простыми полюсами.

(В действительности 3) при $d \neq c$ следует из теоремы VII. 1.4, однако ниже мы докажем это утверждение непосредственно.)

Покажем теперь, что любой простой полюс функции $f$, расположенный на $\sigma=0$, является также простым полюсом функции $G$. Пусть, в самом деле, $i\beta$ — такой полюс функции $f$; можно написать, что

$$f(s)=\frac{r}{s-i\beta}+\varphi(s),$$

где $\varphi(s)$ — функция, голоморфная в некотором круге $C(i\beta, \delta)$ $(\delta>0)$. В этом круге функции $f^*_{y_j}(s)$ имеют особенности лишь в точке $i\beta$, а именно $i\beta$ — простой полюс для каждой из них с вычетом $re^{i\beta y_j}$; функции

$$\varphi_{y_j}=f^*_{y_j}(s)-\frac{re^{i\beta y_j}}{s-i\beta}$$

являются, следовательно, голоморфными в $C(i\beta, \delta)$. Если выделить из $\{y_j\}$ какую-нибудь подпоследовательность $\{y'_j\}$, стремящуюся к бесконечности и такую, что $e^{i\beta y'_j}$ стремится к некоторому пределу $l$, то функции $\varphi_{y'_j}$ равномерно сходятся на границе этого круга, а значит, и на замкнутом круге к пределу, голоморфному в круге. Предел последовательности $f^*_{y'_j}(s)$, который равен $G(s)$, имеет, следовательно, вид

$$G(s)=\frac{r'}{s-i\beta}+G_0(s), \qquad \text{(VII. 27)}$$

где $r'=lr$, причем $G_0(s)$ голоморфна в $C(i\beta, \delta)$.

Так как $G(s)$ определена последовательностью $\{y_j\}$, величина $l$ и, следовательно, величина $r'=rl$ $(|l|=1)$ не могут изменяться с выбором последовательности $\{y'_j\}\subset\{y_j\}$. Отсюда следует, что $\lim e^{i\beta y_j}$ существует — он равен $l$. Иначе говоря, (VII. 27) имеет место с $r'=r\lim e^{i\beta y_j}$.

Отсюда следует, что если $\{y_j\}$ — такая последовательность, что $f^*_{y_j}(s)$ стремится к определенной выше функции $G(s)$, то $G(s)$ имеет в точках $i\alpha_p$ $(p=1, 2, \ldots, q)$ простые полюсы. Если вычеты функции $f$ в полюсах $i\alpha_p$ равны

$$r_p \quad (p=1, 2, \ldots, q),$$

то вычеты функции $G$ в тех же полюсах равны $r_p l_p$, где $l_p=\lim e^{i\alpha_p y_j}$, причем эти пределы существуют при $p=1, 2, \ldots, q$.

Однако в силу теоремы Дирихле о приближениях можно выбрать последовательность $y_j$, стремящуюся к бесконечности и обладающую тем свойством, что

$$l_p=1 \qquad (p=1, 2, \ldots, q),$$

т. е. $\lim \alpha_p y_j \pmod{2\pi} = 0$, каково бы ни было

$$p = 1, 2, \ldots, q.$$

Таким образом, на интервале $]ia, ib[$ прямой $\sigma = 0$ функция $F(s) = f(s) - G(s)$ голоморфна. Обозначим через $\{\gamma_n\}$ объединение $\{\lambda_n\} \cup \{\nu_n\}$ и положим

$$F(s) = \sum e_n e^{-\gamma_n s} = \sum a_n e^{-\lambda_n s} - \sum d_n e^{-\nu_n s}. \qquad \text{(VII. 28)}$$

Легко видеть, что ($\overline{D}^{\bullet}_{\gamma}$ — верхняя усредненная плотность последовательности $\gamma_n$)

$$\overline{D}^{\bullet}_{\gamma} \leqslant \overline{D}^{\bullet} + h^{-1}.$$

Таким образом, функция $F(s)$, заданная рядом (VII. 28), голоморфна и ограничена в полосе $S$, ширина которой превосходит $2\pi\overline{D}^{\bullet}_{\gamma}$. В силу теоремы III. 2.3 мы получаем тогда, что $F(s) \equiv 0$, т. е.

$$f(s) = G(s) - c. \qquad \text{(VII. 29)}$$

Отсюда сначала следует (в силу 4)), что изолированные особые точки функции $f$ на $\sigma = 0$ являются простыми полюсами, а также что $f(s)$ голоморфна при $\sigma < 0$. В силу (VII. 25), (VII. 26) и (VII. 29) имеем $\lambda_n = \nu_n$; следовательно,

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant h \qquad (n \geqslant 1);$$

при $\sigma < 0$

$$f(s) = \sum a'_n e^{\lambda'_n s} + d,$$

где $\lambda'_n = \nu'_n$, $a'_n = d'_n$; значит,

$$\lambda'_{n+1} - \lambda'_n \geqslant h \qquad (n \geqslant 1),$$
$$|a'_n| < C.$$

Остается доказать существование $q$ целых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_q$, для которых выполняется равенство (VII. 22).

Предположим противное и покажем, что это приводит к противоречию.

Если $\alpha$ — такое число, что существуют целые $m, p_1, p_2, \ldots, p_q$, удовлетворяющие соотношению

$$m\alpha = p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \ldots + p_q\alpha_q, \qquad \text{(VII. 30)}$$

то обозначим через $\mu$ наименьшее целое положительное число $m$ со свойством (VII. 30). Если бы (VII. 22) не выполнялось, то мы имели бы $\mu > 1$, и любое другое целое $m$, удовлетворяющее (VII. 30), было бы кратно $\mu$. Положим $\beta = \mu^{-1}$ ($< 1$); тогда числа $\alpha, \beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_q$ должны обладать следующим свойством:

1/4 4 Зак. 272

для любых целых $n, n_1, \ldots, n_q$, таких, что

$$n\alpha + n_1\alpha_1 + \ldots + n_q\alpha_q = 0, \qquad \text{(VII.31)}$$

величина $n\beta$ $(0 < \beta < 1)$ есть целое число.

Из упрощенного варианта теоремы Кронекера о совместных приближениях [1]) тогда следует, что, каковы бы ни были заданные $\varepsilon > 0$, $T > 0$, система неравенств

$$\begin{aligned} -\varepsilon < t\alpha - \beta < \varepsilon \pmod 1, \\ -\varepsilon < t\alpha_p < \varepsilon \pmod 1 \quad (p = 1, 2, \ldots, q) \end{aligned} \qquad \text{(VII.32)}$$

имеет некоторое решение $t > T$.

Если (VII.31) не выполняется ни для какой системы целых чисел $n, n_1, n_2, \ldots, n_q$, то система (VII.32) также будет иметь некоторое решение $t > T$, и притом это верно при любом $\beta$: $0 < \beta < 1$.

Иначе говоря, если $\alpha$ нельзя представить в виде линейной комбинации (с целыми коэффициентами) чисел $\alpha_p$ $(p = 1, 2, \ldots, q)$, то существует $\beta$, $0 < \beta < 1$, такое, что система (VII.32) имеет некоторое решение $t > T$.

Тогда существует некоторое число $\eta_0$: $0 < \eta_0 < 1/2$, такое, что произвольным $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ соответствуют $t > T$ и целые $n, n_1, n_2, \ldots, n_q$, удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{gathered} |t\alpha_p - n_p| < \varepsilon \qquad (p = 1, 2, \ldots, q), \\ \eta_0 < |t\alpha - n| < 1 - \eta_0, \end{gathered}$$

и с каждой последовательностью $\{\varepsilon_j\}$, $\varepsilon_j \downarrow 0$, можно связать такие последовательности $\{y_j\}$ и $\{n_j^{(0)}\}, \{n_j^{(1)}\}, \ldots, \{n_j^{(q)}\}$, что

$$\begin{aligned} \left|y_j\alpha_p - 2\pi n_j^{(p)}\right| < \varepsilon_j \qquad (p = 1, 2, \ldots, q;\ j \geqslant 1), \\ 2\eta_0\pi < \left|y_j\alpha - 2\pi n_j^{(0)}\right| < 2(1 - \eta_0)\pi \qquad (j \geqslant 1). \end{aligned} \qquad \text{(VII.33)}$$

Выбирая функцию $G(s)$ с $y_j$, удовлетворяющими (VII.33), следует показать, как и выше, что $G(s)$ имеет полюсы $i\alpha_1$, $i\alpha_2, \ldots, i\alpha_q$ с теми же вычетами, как у $f$; но если вычет функции $f$ в точке $i\alpha$ равен, например, $r$, то вычет функции $G$ в этом же полюсе равен $r' = re^{2\pi i\theta} \neq r$ (так как $e^{2\pi i\theta} = \lim e^{i\alpha y_j}$ с $\eta_0 \leqslant \theta \leqslant 1 - \eta_0$); мы пришли к противоречию. Теорема, таким образом, доказана.

---

[1]) См. Касселс Дж. В. С., Введение в теорию диофантовых приближений, ИЛ, М., 1961, стр. 66. — *Прим. перев.*

# Глава VIII

# Приложение к обобщенному функциональному уравнению Римана

## VIII. 1. Число независимых решений. Связь между показателями

Функция Римана $\zeta(s)$ — аналитическое продолжение ряда Дирихле

$$\sum \frac{1}{n^s} = \sum e^{-\ln ns},$$

играющая, как известно, фундаментальную роль в теории чисел (например, в проблеме распределения простых чисел), удовлетворяет так называемому *функциональному уравнению Римана*

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s). \qquad \text{(VIII. 1)}$$

Гамбургер показал, что если ряды

$$f(s) = \sum \frac{a_n}{n^s}, \; g(1-s) = \sum \frac{b_n}{n^{1-s}} \qquad \text{(VIII. 2)}$$

абсолютно сходятся соответственно при $\sigma > 1$, $\sigma < c < 0$, причем функция $f(s)$ имеет вид $G(s)/P(s)$, где $G(s)$ — целая функция конечного порядка, $P(s)$ — многочлен, а $f$ и $g$ связаны функциональным уравнением

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)f(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)g(1-s), \qquad \text{(VIII. 3)}$$

то $f(s) = g(s) = a_1\zeta(s)$.

Следовательно, уравнение (VIII. 3) до некоторой степени характеризует функцию $\zeta(s)$ при условии, что функции $f$ и $g$ представимы рядами Дирихле, у которых (используя язык, принятый в этой книге) последовательностью показателей является $\{\ln n\}$; правда, при этом следует сделать некоторые простые предположения о поведении этих функций во всей плоскости.

Более общая проблема формулируется тогда следующим образом. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $M = \{\mu_n\}$ — две положительные строго возрастающие последовательности, и пусть

$$\varphi(s) = \sum \frac{a_n}{\lambda_n^s}, \; \psi(s) = \sum \frac{b_n}{\mu_n^s} \qquad \text{(VIII. 4)}$$

— ряды с конечными абсциссами абсолютной сходимости. Пользуясь принятыми выше обозначениями, положим $\varphi = (A, \ln \Lambda)$,

$\psi=(B, \ln M)$, понимая под $\varphi$, $\psi$ не только суммы рядов, но и соответствующие аналитические продолжения. При заданном $\delta>0$ предположим, что имеет место следующее соотношение:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\varphi(s)=\pi^{-\left(\frac{\delta-s}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{\delta-s}{2}\right)\psi(\delta-s). \qquad \text{(VIII. 5)}$$

Ясно, что поведение функций $\varphi$ и $\psi$ в плоскости должно быть уточнено.

Если последовательности $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ и величина $\delta>0$ заданы, то можно спросить, сколь «широк» класс пар $(\varphi, \psi)$, удовлетворяющих (VIII. 5). Интересно также выяснить, в каких пределах можно выбирать сами последовательности $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$ (в общем случае или в связи с заданным $\delta$). Все эти задачи обсуждаются в настоящей главе.

Уточним теперь, какой смысл вкладываем мы в выражение «пара $(\varphi, \psi)$ удовлетворяет (обобщенному) уравнению Римана (VIII. 5)».

Пусть $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$ — заданные выше последовательности, $\delta>0$ — заданная величина и $\varphi$, $\psi$ — ряды из (VIII. 4) с конечными абсциссами абсолютной сходимости; предположим, что существует функция $\chi(s)\not\equiv 0$, голоморфная вне некоторого компакта $K$ и имеющая нулевой экспоненциальный тип в любой вертикальной полосе, т. е.

$$\lim_{|t|\to\infty}\frac{\ln|\chi(\sigma+it)|}{t}=0 \qquad \text{(VIII. 6)}$$

равномерно по $\sigma$, $a\leqslant\sigma\leqslant b$, каковы бы ни были $a$ и $b$; при этом функция $\chi$ связана с функциями $\varphi$ и $\psi$ следующими соотношениями.

При достаточно большом $\sigma>0$

$$\chi(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\varphi(s). \qquad \text{(VIII. 7)}$$

При достаточно большом $-\sigma>0$

$$\chi(s)=\pi^{-\frac{\delta-s}{2}}\Gamma\left(\frac{\delta-s}{2}\right)\psi(\delta-s). \qquad \text{(VIII. 8)}$$

В этом случае мы будем говорить, что пара $(\varphi, \psi)$ удовлетворяет уравнению (VIII. 5).

Однако, как указывалось выше, мы стремимся найти такие условия, налагаемые на *последовательности* $\Lambda=\{\lambda_n\}$, $M=\{\mu_n\}$ и на $\delta>0$, чтобы существовали $a_n$ и $b_n$ $(n\geqslant 1)$ (не все равные нулю), для которых ряды $\varphi(s)$, $\psi(s)$ удовлетворяют соотношению (VIII. 5) (более общо, мы хотим определить число таких последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, через которые можно выразить все остальные последовательности). Условимся также говорить, что пара $(\varphi, \psi)$ есть *решение функционального уравнения Римана, принадлежащее классу* $(\Lambda, M, \delta)$.

Начнем со следующей леммы:

**VIII. 1.1.** *Если пара* $(\varphi, \psi)$, *определенная равенствами* (VIII. 4), *удовлетворяет уравнению* (VIII. 5), *то, полагая*

$$g(s) = (B, 2\pi M) = \sum b_n e^{-2\pi\mu_n s}, \tag{VIII. 9}$$

*имеем* $\sigma_{a,g} = 0$; *при* $\sigma > 0$ *и достаточно большом* $d_0$ *справедливо соотношение*

$$g(s) = K(s) + \pi^{-q}\Gamma(q) \sum a_n \left( \frac{s}{(s^2+\lambda_n^2)^q} + \sum_{0 \leqslant 2j \leqslant d_0 - 2q} A_j \frac{s^{1+2j}}{\lambda_n^{2q+2j}} \right), \tag{VIII. 10}$$

*где*

$$A_j = \frac{(-1)^j\Gamma(q+j)}{j!\,\Gamma(q)} \qquad \left(q = \frac{\delta+1}{2}\right) \tag{VIII. 11}$$

*и где* $K(s)$ — *функция, аналитическая на римановой поверхности функции* $\ln s$ *с*

$$K(s) = O(|s|^m) \qquad (|s| \to \infty,\ m \text{ — постоянная}) \tag{VIII. 12}$$

*в каждом угле* $|\arg s| \leqslant \theta_0$ ($\theta_0 > 0$ *произвольно,* $m$ *зависит от* $\theta_0$).

При $\sigma > 0$, $d_0 > 0$ имеем

$$e^{-s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{d_0 - i\infty}^{d_0 + i\infty} \Gamma(w) s^{-w}\, dw. \tag{VIII. 13}$$

Кроме того,

$$\Gamma(w) = \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{w-1} \Gamma\left(\frac{w}{2}\right)\Gamma\left(\frac{w+1}{2}\right), \tag{VIII. 14}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{d_0 - i\infty}^{d_0 + i\infty} z^{-w}\Gamma(p-w)\Gamma(w)\, dw =$$

$$= \Gamma(p)\left[(1+z)^{-p} + \sum_{0 \leqslant j < d_0 - p} A_j z^{-p-j}\right] \tag{VIII. 15}$$

с

$$A_j = \frac{(-1)^j\Gamma(p+j)}{j!\,\Gamma(p)} \text{ при } |\arg z| < \pi,\ d_0 > p > 0.$$

Пусть $\sigma > 0$ и $d_0$ достаточно велико. Соотношения (VIII. 13) и (VIII. 4) (для $\psi$) дают

$$g(s) = \frac{1}{2\pi i} \sum b_n \int_{d_0 - i\infty}^{d_0 + i\infty} \Gamma(w)(2\pi\mu_n s)^{-w}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{d_0 - i\infty}^{d_0 + i\infty} G(w, s)\, dw,$$

где
$$G(w,\ s)=\Gamma(w)(2\pi s)^{-w}\ \psi(w).$$

Следовательно, согласно (VIII. 14) и (VIII. 8) можно написать:
$$G(w,\ s)=\frac{1}{2}\pi^{-\frac{w+1}{2}}s^{-w}\Gamma\left(\frac{w+1}{2}\right)\chi(\delta-w). \qquad \text{(VIII. 16)}$$

Полагая
$$K(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} G(w,\ s)\,dw, \qquad \text{(VIII. 17)}$$

где $C$ — некоторая спрямляемая кривая, окружающая $K$ (причем интеграл берется вдоль $C$ в положительном направлении), имеем при $\sigma>0$ по теореме Коши ($d_0$ достаточно велико) и в силу (VIII. 6)
$$g(s)=K(s)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta-d_0-i\infty}^{\delta-d_0+i\infty} G(w,\ s)\,dw=$$
$$=K(s)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{d_0-i\infty}^{d_0+i\infty} G(\delta-w,\ s)\,dw$$

с
$$G(\delta-w,\ s)=\frac{1}{2}\pi^{-\frac{\delta+1}{2}}s^{-\delta}\pi^{\frac{w}{2}}s^{w}\Gamma\left(\frac{\delta-w+1}{2}\right)\chi(w).$$

Формула (VIII. 7) позволяет тогда написать, что
$$G(\delta-w,\ s)=\frac{1}{2}\pi^{-\frac{\delta+1}{2}}s^{-\delta+w}\Gamma\left(\frac{w}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\delta-w+1}{2}\right)\varphi(w).$$

В силу (VIII. 4) и (VIII. 15), где мы положили $p=q=(\delta+1)/2$,
$$\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{d_0-i\infty}^{d_0+i\infty} s^{w}\Gamma\left(\frac{w}{2}\right)\Gamma\left(q-\frac{w}{2}\right)\varphi(w)\,dw=$$
$$=\Gamma(q)\sum a_n\left[\left(1+\frac{\lambda_n^2}{s^2}\right)^{-q}+\sum_{0\leqslant 2j<d_0-2q} A_j\left(\frac{s^2}{\lambda_n^2}\right)^{q+j}\right].$$

Это доказывает (VIII. 10). Что касается оценки (VIII. 12), то она сразу следует из (VIII.16) и (VIII.17).

Если $(\varphi_1,\ \psi_1)$, $(\varphi_2,\ \psi_2)$ — решения функционального уравнения Римана, принадлежащие классу $(\Lambda,\ M,\ \delta)$, то таким решением является и пара $(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2,\ c_1\psi_1+c_2\psi_2)$, где $c_1$, $c_2$ — любые постоянные. Решения
$$(\varphi_j,\ \psi_j)\quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

уравнения (VIII. 5) называются *линейно зависимыми*, если существуют постоянные $c_j$ ($j=1, 2, \ldots, k$), не все равные нулю, такие, что

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_k\varphi_k \equiv 0, \quad c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \ldots + c_k\psi_k \equiv 0.$$

В противном случае решения называются *линейно независимыми*.

В следующей ниже теореме оценивается число линейно независимых решений функционального уравнения Римана, принадлежащих классу ($\Lambda$, $M$, $\delta$) (последовательности $\Lambda$, $M$ и постоянная $\delta > 0$ заданы).

**T. VIII. 1.2.** *Пусть $\overline{D}^{\bullet}_{\mu}$ — верхняя усредненная плотность последовательности $M$; предположим, что $\overline{D}^{\bullet}_{\mu} < \infty$.*

*Тогда число линейно независимых решений функционального уравнения Римана, принадлежащих классу* ($\Lambda$, $M$, $\delta$), *не превосходит наименьшего числа точек $\lambda_n$ последовательности $\Lambda$, лежащих в интервале (расположенном на* $[0, \infty[$) *длины $> \overline{D}^{\bullet}_{\mu}$.*

Пусть $[a, b]$ — какой-либо интервал, $a > 0$, $b - a > \overline{D}^{\bullet}_{\mu}$, содержащий точки $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_{p+k}$ и не содержащий других $\lambda_n$. Докажем, что существует самое большее $k$ линейно независимых решений уравнения (VIII. 5), принадлежащих классу ($\Lambda$, $M$, $\delta$).

Пусть ($\varphi_q$, $\psi_q$) ($q = 1, 2, \ldots, k$) суть $k$ решений уравнения (VIII. 5). Если бы эти решения (при любом их выборе) были линейно зависимыми, то теорема была бы доказана. Предположим, следовательно, что эти $k$ решений линейно независимы.

Положим

$$\varphi_q(s) = \sum \frac{a_n^{(q)}}{\lambda_n^s}, \quad \psi_q(s) = \sum \frac{b_n^{(q)}}{\mu_n^s}.$$

Тогда не существует множества постоянных $c_1, \ldots, c_k$, из которых не все равны нулю и таких, что

$$\sum_{1 \leqslant q \leqslant k} c_q a_{p+j}^{(q)} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \qquad \text{(VIII. 18)}$$

В самом деле, если (VIII. 18) имеет место и не все $c_q$ — нули, то функция

$$F(s) = \sum \Big[ \sum_{1 \leqslant q \leqslant k} c_q b_n^{(q)} e^{-2\pi\mu_n s} \Big] = \sum d_n e^{-2\pi\mu_n s}$$

обладает двумя следующими свойствами: 1) $F(s)$, по VIII. 1.1, будет голоморфной в любой полосе $a < t < b$; 2) в этой полосе, согласно лемме VIII. 1.1, $F(s) = O(|\sigma|^r)$ при $\sigma \to -\infty$ ($r$ — постоянная). Обозначая через $\mu$ некоторую постоянную $0 < \mu < \mu_1$ и полагая $F_1(s) = F(s) e^{2\pi\mu s}$, будем иметь

$$F_1(s) = \sum d_n e^{-2\pi(\mu_n - \mu)s} = \sum d_n e^{-\nu_n s},$$

причем $F_1(s)$ голоморфна и ограничена в полосе $a < t < b$. Однако верхняя усредненная плотность $\overline{D}^{\bullet}_{\nu}$ последовательности $\{\nu_n\}$ равна $\overline{D}^{\bullet}_{\mu}/2\pi$. Таким образом, функция $F_1(s)$, абсцисса абсолютной сходимости которой конечна ($=0$), голоморфна и ограничена в некоторой горизонтальной полосе ширины $> 2\pi\overline{D}^{\bullet}_{\nu}$. По теореме III. 2.3 $F_1(s) \equiv 0$, что противоречит нашему предположению о том, что решения $(\varphi_q, \psi_q)$ линейно независимы.

Мы только что доказали, что линейная независимость решений $(\varphi_q, \psi_q)$ $(q = 1, 2, \ldots, k)$ влечет за собой линейную независимость векторов $(a^{(q)}_{p+1}, a^{(q)}_{p+2}, \ldots, a^{(q)}_{p+k})$ $(q = 1, 2, \ldots, k)$. Каков бы ни был $(k+1)$-й вектор $(a^{(k+1)}_{p+1}, a^{(k+1)}_{p+2}, \ldots, a^{(k+1)}_{p+k})$, существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, такие, что

$$a^{(k+1)}_{p+j} = \alpha_1 a^{(1)}_{p+j} + \alpha_2 a^{(2)}_{p+j} + \ldots + \alpha_k a^{(k)}_{p+j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Рассматривая тогда решение $(\varphi_{k+1}, \psi_{k+1})$ уравнения (VIII. 5)

$$\varphi_{k+1}(s) = \sum \frac{a^{(k+1)}_n}{\lambda^s_n}, \quad \psi_{k+1}(s) = \sum \frac{b^{(k+1)}_n}{\mu^s_n},$$

устанавливаем, применяя еще раз лемму VIII. 1.1, что для некоторой постоянной $\mu'$, $0 < \mu' < \mu_1$, функция

$$F_2(s) = \sum d'_n e^{-2\pi(\mu_n - \mu')s} =$$
$$= \sum \Big[ \sum_{1 \leqslant q \leqslant k} \alpha_q b^{(q)}_n e^{-2\pi(\mu_n - \mu')s} \Big] - \sum b^{(k+1)}_n e^{-2\pi(\mu_n - \mu')s}$$

голоморфна и ограничена в полосе $a < t < b$ (ширина которой $> 2\pi\overline{D}^{\bullet}_{\nu'}$, где $\overline{D}^{\bullet}_{\nu'}$ — верхняя усредненная плотность последовательности $\{\nu'_n\}$ с $\nu'_n = 2\pi(\mu_n - \mu')$). Снова применяя теорему III. 2.3, имеем $F_2(s) \equiv 0$, откуда

$$(\varphi_{k+1}, \psi_{k+1}) = (\alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_k\varphi_k, \alpha_1\psi_1 + \ldots + \alpha_k\psi_k).$$

Теорема, таким образом, доказана.

В нижеследующей теореме приведены условия, которым должны удовлетворять последовательности $\Lambda$, $M$ и постоянная $\delta$ для того, чтобы функциональное уравнение Римана имело решение, принадлежащее классу $(\Lambda, M, \delta)$. По существу эта теорема показывает, что если шаг последовательности $M$ положителен ($h_\mu > 0$), то последовательность $\Lambda$ имеет «целый базис», который, кстати говоря, может быть взят из произвольного интервала длины $> \overline{D}^{\bullet}_{\mu} + h^{-1}_{\mu}$.

**Т. VIII. 1.3.** *Пусть $M$ — последовательность шага $h_\mu > 0$. Пусть $\overline{D}^{\bullet}_{\mu}$ — верхняя усредненная плотность последовательности $M$. Пусть $\delta = 1$ или $\delta = 3$; допустим, что последовательности $\Lambda$ и $A$*

*удовлетворяют следующим условиям: существуют три постоянные $\mathscr{H}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{N} \geqslant 1$, такие, что для $n \geqslant 1$*

$$\mu_{n+1} - \mu_n < \mathscr{H}; \tag{VIII.19}$$

$$\begin{aligned} &\mathscr{C}^{-1} \leqslant \max_{1 \leqslant \nu \leqslant \mathscr{N}} |b_{n+\nu}| \leqslant \mathscr{C}, \quad \text{если} \quad \delta = 1; \\ &\mathscr{C}^{-1} \leqslant \max_{1 \leqslant \nu \leqslant \mathscr{N}} \left| b_{n+\nu}\mu_{n+\nu}^{-1} \right| \leqslant \mathscr{C}, \quad \text{если} \quad \delta = 3. \end{aligned} \tag{VIII.20}$$

*Предположим, что пара* $(\varphi, \psi)$,

$$\varphi(s) = \sum \frac{a_n}{\lambda_n^s}, \quad \psi(s) = \sum \frac{b_n}{\mu_n^s},$$

*является решением уравнения Римана, принадлежащим классу* $(\Lambda, M, \delta)$.

*Пусть $p$ и $k$ — целые положительные числа с условием*

$$\lambda_{p+k+1} - \lambda_p > \bar{D}_\mu^{\bullet} + h_\mu^{-1}.$$

*Справедливо неравенство $k \geqslant 2$, и каждое $\lambda_n$ имеет вид*

$$\lambda_n = m_1^{(n)}\lambda_{p+1} + m_2^{(n)}\lambda_{p+2} + \ldots + m_k^{(n)}\lambda_{p+k}, \tag{VIII.21}$$

*где $m_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ — целые числа.*

*Существует по крайней мере одно $\lambda_n$, превосходящее $(\bar{D}_\mu^{\bullet} + h_\mu^{-1})/2$. Если $q$ — наименьшее целое число с условием $\lambda_{q+1} > (\bar{D}_\mu^{\bullet} + h_\mu^{-1})/2$, то каждое $\lambda_n$ имеет вид*

$$\lambda_n = p_1^{(n)}\lambda_1 + p_2^{(n)}\lambda_2 + \ldots + p_q^{(n)}\lambda_q, \tag{VIII.22}$$

*где $p_j$ $(j = 1, 2, \ldots, q)$ — целые положительные числа.*

*Имеем*

$$\mu_{n+1} - \mu_n \geqslant h_\mu \quad (n \geqslant 1).$$

*Положим при $\sigma > 0$*

$$\begin{aligned} &\Psi(s) = (B, 2\pi M) = \sum b_n e^{-2\pi\mu_n s}, \quad \text{если} \quad \delta = 1, \\ &\Psi(s) = (BM^{-1}, 2\pi M) = \sum b_n \mu_n^{-1} e^{-2\pi\mu_n s}, \quad \text{если} \quad \delta = 3; \end{aligned}$$

*тогда функция $\Psi(s)$ голоморфна и однозначна вне оси сходимости $(\sigma = 0)$, на которой единственными особыми точками являются простые полюсы $s = \pm i\lambda_n$ и $s = 0$. При $\sigma < 0$ имеем ($c$ и $d$ — подходящие постоянные)*

$$\begin{aligned} &\Psi(s) = -\sum b_n e^{2\pi\mu_n s} + c, \quad \text{если} \quad \delta = 1, \\ &\Psi(s) = \sum b_n \mu_n^{-1} e^{2\pi\mu_n s} + d, \quad \text{если} \quad \delta = 3. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что условия (VIII. 19) и (VIII. 20) формулировки теоремы VIII. 1.3 излишни: заключение справедливо и без них, а сами эти условия следуют из других предположений теоремы. Настоящая теорема является, впрочем, почти непосредственным следствием теоремы VII. 2.1, где, как мы уже видели, условия (VII. 20) и (VII. 21) вытекали из других предположений той же самой теоремы, а именно из того факта, что ряд $(A, \Lambda)$ имеет лишь простые полюсы на отрезке оси сходимости некоторой длины. Здесь условия (VIII. 19) и (VIII. 20) следуют из того факта, что $(\varphi, \psi)$ есть решение функционального уравнения Римана.

Вот в основных чертах доказательство теоремы VIII. 1.3. Тот факт, что $k \geqslant 2$, является немедленным следствием теоремы III. 2.3. В самом деле, если бы имело место неравенство $0 \leqslant k \leqslant 1$, то существовало бы достаточно малое $\varepsilon > 0$, для которого

$$l = (\lambda_{p+2} - \varepsilon) - (\lambda_p + \varepsilon) > \overline{D}^{\bullet}_{\mu} + h_{\mu}^{-1}.$$

Интервал длины $l$ содержал бы самое большее одно $\lambda_n$ (а именно $\lambda_{p+1}$). И так как $\overline{D}^{\bullet}_{\mu} \leqslant h_{\mu}^{-1}$, то существовал бы интервал $l_1$ длины $> \overline{D}^{\bullet}_{\mu}$, не содержащий никакого $\lambda_n$.

Функция $\Psi(s)$, которая имеет особые точки лишь на оси сходимости $\sigma = 0$, а именно простые полюсы $s = \pm i\lambda_n$ и (по теореме VII. 2.1 и лемме VIII. 1.1) $s = 0$, будет голоморфной в горизонтальной полосе, которая вырезает на оси $\sigma = 0$ отрезок $l_1$; следовательно, в этой полосе $\Psi(s) = O(|\sigma|^m)$ $(\sigma \to -\infty)$. Теорема III. 2.1 тогда давала бы $\Psi \equiv 0$. Можно было бы также сразу применить теорему VIII. 1.2, которая сама является почти непосредственным следствием теоремы III. 2.3 и леммы VIII. 1.1.

Формула (VIII. 21) сразу вытекает из VII. 2.1. Формула (VIII. 22) следует из того факта, что на интервале $[-i(\lambda_{q+1} - \varepsilon), i(\lambda_{q+1} - \varepsilon)]$ (возьмем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы длина этого интервала была $> \overline{D}^{\bullet}_{\mu} + h_{\mu}^{-1}$) особыми точками функции $\Psi(s)$ являются лишь простые полюсы $s = \pm i\lambda_n (1 \leqslant n \leqslant q)$ и $s = 0$. Следовательно, формула (VIII. 22) не отличается от формулы (VIII. 21). Переходя к другим утверждениям теоремы, применим сначала VII. 2.1 к $\Psi(s) e^{\mu s}$ $(0 < \mu < 2\pi\mu_1)$. В силу леммы VIII. 1.1 тогда ясно, что при $\delta = 1$ или $\delta = 3$ функция $\Psi(s)$ (минус некоторая постоянная) является соответственно нечетной или четной.

Вот несколько следствий теоремы VIII. 1.3. Мы молчаливо предполагаем, что условия (VIII. 19) и (VIII. 20) выполнены. Предположим также, что $(\varphi, \psi)$ — решение функционального уравнения Римана, принадлежащее классу $(\Lambda, M, \delta)$ с $\delta = 1$ или $\delta = 3$.

**VIII. 1.4.** *Если $h_{\mu}\lambda_2 > 1$, то существует возрастающая последовательность целых положительных чисел $\{m_n\}$, таких, что*

$\lambda_n = m_n\lambda_1$ $(n \geqslant 1)$; *существует целое* $\nu$, *такое, что* $\mu_\nu\lambda_1 = 1$, $b_n = b_q$, *если* $n \equiv q \pmod \nu$.

В силу теоремы VIII. 1.3 имеем $0 < \lambda_1 < (\overline{D}^{\bullet}_\mu + h_\mu^{-1})/2$, и так как по предположению $\lambda_2 > h_\mu^{-1} \geqslant (\overline{D}^{\bullet}_\mu + h_\mu^{-1})/2$, та же самая теорема VIII. 1.3 дает $\lambda_n = m_n\lambda_1$ $(n \geqslant 1)$.

Следовательно, функция

$$\Phi(s) = \sum a_n e^{-2\pi\lambda_n s}$$

(при $\delta = 1$) или

$$\Phi(s) = \sum a_n \lambda_n^{-1} e^{-2\pi\lambda_n s}$$

(при $\delta = 3$) является периодической с периодом $i\lambda_1^{-1}$. Поскольку единственные особые точки функции $\Phi$ — это точки $s = \pm i\mu_n$ и $s = 0$ (по лемме VIII. 1.1), существует целое $\nu$ с условием $\mu_\nu = \lambda_1^{-1}$. Следовательно, для каждого $n$ имеем $\mu_n = \mu_q + m\lambda_1^{-1}$, где $0 \leqslant q < \nu$ $(\mu_0 = 0)$, причем $m$ — некоторое целое число. Из периодичности функции $\Phi$ следует поэтому, что $b_n \equiv b_q \pmod \nu$.

Замечание. Поскольку единственными особыми точками функции $\Phi$ являются лишь простые полюсы $s = \pm i\mu_n$ и $s = 0$, из периодичности $\Phi$ сразу следует, что $a_n$ и $\lambda_n$ удовлетворяют условиям (VIII. 19), (VIII. 20), в которых $b_n$ и $\mu_n$ заменены соответственно на $a_n$ и $\lambda_n$ (и выбираются подходящие постоянные $\mathscr{H}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{N}$).

**VIII. 1.5.** *Если* $h_\mu\lambda_2 > 1$ *и если* $2h_\mu\lambda_1 > 1$, *то* $\lambda_n = n\lambda_1$ $(n \geqslant 1)$.

В силу следствия VIII. 1.4 имеем $\lambda_n = m_n\lambda_1$, где $m_n$ — возрастающая последовательность целых положительных чисел. Если бы высказанное утверждение не имело места, то нашлось бы такое $n_0$, что

$$\lambda_{n_0+1} - \lambda_{n_0} \geqslant 2\lambda_1,$$

а так как $2h_\mu\lambda_1 > 1$, то отсюда следовало бы, что

$$\lambda_{n_0+1} - \lambda_{n_0} > h_\mu^{-1} \geqslant \overline{D}^{\bullet}_\mu,$$

и снова в силу III. 2.3 мы имели бы $\Phi \equiv 0$.

Замечание. Условия предложения VIII. 1.5 удовлетворяются, если $h_\mu\lambda_1 \geqslant 1$.

**VIII. 1.6.** *Если к предположениям из* VIII. 1.5 *добавить неравенство* $\mu_2\lambda_1 > 1$, *то существует возрастающая последовательность целых положительных чисел* $\{m'_n\}$, *таких, что* $\mu'_n = m'_n\mu_1$, *а* $\lambda_1\mu_1$ — *рациональное число.*

Обратимся сначала к замечанию, которое следует за доказательством предложения VIII. 1.4. По VIII. 1.5 имеем $\lambda_n = n\lambda_1$, следовательно, $h_\lambda$ (шаг последовательности $\Lambda$) $= \lambda_1$; равенство

$\mu_n = m'_n\mu_1$ $(n \geqslant 1)$ вытекает тогда из VIII. 1.4. И так как $\mu_n = \mu_q + m\lambda_1^{-1}$ $(0 \leqslant \mu_q \leqslant \lambda_1^{-1},\ \mu_0 = 0)$ (см. доказательство предложения VIII. 1.4), то заключаем, что для $n$ с условием $\mu_n > \lambda_1^{-1}$ имеет место равенство $m'_n\mu_1 = m'_q\mu_1 + m\lambda_1^{-1}$ $(m'_n - m'_q > 0)$, т. е. $\lambda_1\mu_1 = m/(m'_n - m'_q)$.

**VIII. 1.7.** *Если* $h_\mu\lambda_2 > 1$, $2h_\mu\lambda_1 > 1$, $\mu_2\lambda_1 > 1$, $2\mu_1\lambda_1 > 1$, *то* $\mu_n = n\mu_1$ $(n \geqslant 1)$.

Это сразу вытекает из VIII. 1.5 и первой части предложения VIII. 1.6.

В частности, если $\lambda_1 = 1$, $\mu_n = n$, то $\lambda_n = n$.

**VIII. 1.8.** *Если* $\mu_n = n$ $(n \geqslant 1)$ *и если* $\lambda_1 \geqslant 1$, *то каждое решение* $(\varphi, \psi)$, *принадлежащее классу* $(\Lambda, M, \delta)$[1], *равно* $a\zeta(s)$, *где* $a$ *— некоторая постоянная и* $\zeta$ *— дзета-функция Римана.*

Действительно, VIII. 1.5 и рассуждения, использованные при доказательстве предложения VIII. 1.4, дают $a_n = a_{n+1} = b_1$ $(n \geqslant 1)$.

---

[1]) Напомним, что, начиная с теоремы VIII. 1.3, мы предполагаем, что $\delta = 1$ или $\delta = 3$.

## Глава IX

# Влияние арифметических свойств показателей ряда Дирихле на его аналитическое продолжение

### IX.1. Дробные части изолированных показателей и возможность аналитического продолжения

Существует интересная связь между двумя внешне далекими явлениями: с одной стороны, зависимостью свойств функции, представимой рядом Дирихле (речь идет в основном о распределении ее особенностей), от арифметической природы показателей этого ряда и, с другой стороны, поведением функции класса $A$ ($A$ — класс, образуемый преобразованиями Фурье функций из $L$) с компактным носителем, или (что, в силу теоремы Пэли — Винера, то же самое) поведением целой функции экспоненциального типа, интегрируемой на вещественной прямой.

Весьма частный случай такой связи уже использовался в гл. V при доказательстве теоремы V.4.3, в котором важную роль играла лемма V.4.1. Однако в действительности сама эта лемма, тесно связывающая поведение целой функции экспоненциального типа на прямых, параллельных вещественной оси, показатель типа и порядок максимума преобразования Фурье этой функции, найдет свое полное применение лишь в этой главе — в большей степени в § 2, чем в § 1. Речь теперь пойдет не о «композиции особенностей», как в гл. V, а о «распределении особенностей», хотя некоторые важные детали используемой здесь техники заимствованы из гл. V.

Во всем последующем мы, как и выше, предполагаем, что шаг последовательности $\Lambda$ положителен. Предположим также, что абсцисса сходимости ряда $(A, \Lambda)$ есть $\sigma_a = 0$ (напомним, что если шаг положителен, то

$$\sigma_c = \sigma_a = \overline{\lim}\,(\ln|\,a_n\,|/\lambda_n)).$$

Будем предполагать, что (прямое аналитическое) продолжение ряда $f(s) = (A, \Lambda)$ в $P_{\sigma'}$ с $\sigma' < \sigma_a$ однозначно. Если $S_{\sigma'} (= S_{\sigma', f})$ — особое множество функции $f$ относительно $P_{\sigma'}$, то через $S^*_{\sigma'} (= S^*_{\sigma', f})$ мы будем обозначать замыкание множества всех точек $\alpha + 2k\pi i$, где $\alpha$ — любая точка из $S_{\sigma'}$ и $k$ — любое целое число; через $\Sigma$ обозначим пересечение множества $S^*_{\sigma'}$ с осью сходимости. Множество $\Sigma$ не зависит от $\sigma'$, если $\sigma' < \sigma_a$. Если $\Sigma$ отлично от всей прямой $\sigma = \sigma_a$, то будем говорить, что *ряд* $f = (A, \Lambda)$ *продолжим по модулю* $2\pi i$. В противном случае будем говорить, что *ось сходимости этого ряда является купюрой по модулю* $2\pi i$. Если точки множества $\Sigma$ являются изолированными точками множества $S^*_{\sigma'}$, то будем говорить, что *особое множество функции $f$ на оси сходимости является изолированным по модулю $2\pi i$.*

Обозначим через $(\lambda_n)$ дробную часть числа $\lambda_n$, т. е. $\lambda_n - E\lambda_n$ (напомним, что $Ea$ есть целая часть от $a$). Последовательность $\{(\lambda_n)\}$ дробных частей будет поэтому обозначаться через $(\Lambda)$.

Теоремы, к доказательству которых мы теперь переходим, имеют следующий смысл: если ряд $f = (A, \Lambda)$ продолжим по модулю $2\pi i$ через его ось сходимости и если $f$ в $P_{\sigma'}$ $(\sigma' < \sigma_a)$ растет, за исключением особенностей, не быстрее функции $A(t)$ (подчиненной некоторым условиям), то значения, принимаемые дробными частями $(\lambda_n)$, должны быть достаточно «скучены», причем «скученность» зависит от роста функции $A(t)$. Эта скученность дробных частей $(\lambda_n)$ должна быть еще большей (например, почти все изолированные точки множества значений, принимаемых последовательностью $\{(\lambda_n)\}$, должны повторяться в этой последовательности бесконечное число раз), если особое множество функции $f$ на оси сходимости изолировано по модулю $2\pi i$.

Для того чтобы сформулировать эти теоремы более точно, нам потребуется несколько новых определений.

Обозначим через $\Omega$ множество значений, принимаемых членами последовательности $(\Lambda)$, т. е. дробными частями $(\lambda_n)$ чисел $\lambda_n$. Если $\omega \in \Omega$, то существует $\lambda_n \in \Lambda$, такое, что $(\lambda_n) = \omega$, причем таких $\lambda_n$ может существовать даже бесконечно много. Обозначим через $\Lambda_\omega$ множество всех $\lambda_n$ с условием $(\lambda_n) = \omega$. Через $\lambda^{(\omega)}$ обозначим наименьшее из $\lambda_n \in \Lambda_\omega$, а через $\nu^{(\omega)}$ — число элементов множества $\Lambda_\omega$ ($\nu^{(\omega)}$ может равняться бесконечности). Если $\omega \neq 0$ и является изолированной точкой $\Omega$, то через $\delta^{(\omega)}$ мы обозначим наименьшее расстояние от $\omega$ до других точек замыкания множества $\Omega$ (если такие точки существуют). Интервал $I^{(\omega)} = ]\omega - \delta^{(\omega)}, \omega + \delta^{(\omega)}[$ назовем *интервалом изолированности* $\omega$. В интервале изолированности $\omega$ нет других точек из $\Omega$, а один из его концов принадлежит $\overline{\Omega}$.

В этом параграфе мы докажем следующие теоремы:

**Т. IX. 1.1.** 1) *Допустим, что ряд $f = (A, \Lambda)$ продолжим по модулю $2\pi i$ через его ось сходимости* $(\sigma = 0)$ *в* $P_{\sigma'}$ $(\sigma' < 0)$. *Допустим, что $f$ в $P_{\sigma'}$ растет, за исключением особенностей, не быстрее $A(t)$, где $A(t)$ $(t \geqslant 0)$ — некоторая неубывающая функция с положительными значениями, удовлетворяющая условию*

$$\int^{\infty} \frac{\ln A(t)}{t^2}\, dt < \infty. \qquad \text{(IX. 1)}$$

2) *Положим*

$$h(a) = \int_a^{\infty} \frac{\ln A(t)}{t^2}\, dt \qquad (a > 0) \qquad \text{(IX. 2)}$$

*и предположим, что множество* $\Omega$ *значений* $\omega$, *принимаемых членами последовательности* $(\Lambda)$ *дробных частей чисел* $\lambda_n$, *содержит бесконечную последовательность изолированных в* $\Omega$ *значений* $\{\omega_n\}$, *удовлетворяющих условию*

$$h\left(\lambda^{(\omega_n)}\right) \leqslant c\delta^{(\omega_n)} \qquad (n \geqslant 1), \tag{IX.3}$$

*где* $c$ — *некоторая постоянная* $< 1/2e$.

3) *В каждом* $\Lambda_{\omega_n}$ *существует хотя бы одно* $\lambda_{m_n}$, *такое, что*

$$\lim \frac{\ln |a_{m_n}|}{\lambda_{m_n}} = 0 \qquad (= \sigma_a). \tag{IX.4}$$

*Тогда справедливо такое утверждение*:

$$\underline{\lim} \frac{\nu^{(\omega_n)}}{\lambda^{(\omega_n)}} > 0. \tag{IX.5}$$

Заметим, что из положительности шага последовательности $\Lambda$ и $\sigma_a = 0$ следует, что $\overline{\lim} \ln (|a_n|/\lambda_n) = 0$.

Таким образом, порядок кратности изолированного значения $\omega \in \Omega$, являющегося «полезным» (в смысле (IX.4)), по меньшей мере равен наименьшему из членов последовательности $(\Lambda)$, имеющему дробную часть, равную $\omega$.

Если $A(t) \equiv 1$, то $h(a) \equiv 0$, и условие (IX.3) выполняется автоматически. Таким образом, из теоремы IX.1.1 вытекает следующий ее частный случай:

**Т. IX. 1.2.** *Утверждение теоремы* IX.1.1 *остается в силе, если ее условия заменить следующими условиями*:

*Ряд* $f = (A, \Lambda)$ *продолжим по модулю* $2\pi i$ *через ось сходимости в полуплоскость* $P_{\sigma'}$ $(\sigma' < 0)$, *в которой (прямое аналитическое) продолжение* $f$ *однозначно и ограничено, за исключением особенностей. Множество значений, принимаемых последовательностью* $(\Lambda)$, *содержит бесконечную последовательность* $\{\omega_n\}$ *изолированных в* $\Omega$ *значений, удовлетворяющих условию* 3) *теоремы* IX.1.1.

Построим пример, в котором ряд $(A, \Lambda)$ удовлетворяет всем условиям теоремы IX.1.2 (которая, как мы видели, является частным случаем теоремы IX.1.1) и не является рядом Тейлора-Д.

Рассмотрим, с одной стороны, последовательность целых положительных четных чисел $M = \{\mu_n\}$, таких, что $\mu_{n+1} > 2\mu_n$, и, с другой стороны, убывающую последовательность положительных чисел $\{\omega_n\}$, $\omega_1 < 1$, стремящихся к нулю. Эти последовательности будем, кроме того, считать выбранными так, что для некоторого $a < -\ln 2$

$$\sum \omega_n e^{-2\mu_n a} < \infty. \tag{IX.6}$$

Рассмотрим функцию

$$f(s)=\sum e^{-\omega_n s}\left(\frac{e^{-s}+e^{-2s}}{2}\right)^{\mu_n}. \tag{IX.7}$$

Многочлены $(z+z^2)^{\mu_n}$, соответствующие различным $n$, не имеют одинаковых степеней $z$, ибо $\mu_{n+1}>2\mu_n$; поэтому ясно, что $f(s)$ при $\sigma>0$ может быть представлена в виде

$$f(s)=\sum a_m e^{-\lambda_m s}=(A,\ \Lambda),$$

где $\lambda_m$ пробегает все числа вида $\omega_n+q$, $\mu_n\leqslant q\leqslant 2\mu_n$ $(n\geqslant 1)$. Из неравенств $1>\omega_1>\omega_2>\dots$ и $\mu_{n+1}>2\mu_n+1$ следует, что последовательность $\Lambda$ имеет шаг $h>0$ (так как $h\geqslant 1-\omega_1$). Поскольку для $\lambda_m=\omega_n+q$ имеем $(\lambda_m)=\omega_n$, то очевидно, что $\Omega\equiv\{\omega_n\}$, $\lambda^{(\omega_n)}=\mu_n+\omega_n$, $\nu^{(\omega_n)}=\mu_n+1$. Ясно также, что для $\lambda_m=\omega_n+q$

$$a_m=2^{-\mu_n}C_{\mu_n}^{q-\mu_n}.$$

Полагая $\lambda_{m_n}=\omega_n+3\mu_n/2$, видим, что условие 3) теоремы IX. 1.1 выполнено, ибо $\sigma_a=0$.

С другой стороны, легко видеть, что функция $f$ голоморфна в области $D$, ограниченной кривой $C$, задаваемой уравнением $|e^{-s}+e^{-2s}|=2$ и содержащей полупрямую $\sigma>0$, и что эта кривая является для $f(s)$ купюрой.

В самом деле, функция

$$f_1(s)=\sum\left(\frac{e^{-s}+e^{-2s}}{2}\right)^{\mu_n}$$

обладает, конечно, этими свойствами в силу теоремы Адамара о лакунарных рядах, которая является весьма частным случаем теоремы VI. 2.2 (окружность сходимости $|z|=1$ ряда $\sum z^{\mu_n}$ является купюрой); при $\sigma>0$ имеем

$$f(s)-f_1(s)=\sum\left(e^{-\omega_n s}-1\right)\left(\frac{e^{-s}+e^{-2s}}{2}\right)^{\mu_n}, \tag{IX.8}$$

откуда находим (если $a<-\ln 2$ и выбрано так, чтобы выполнялось неравенство (IX. 6)), что на каждом компакте, содержащемся в $P_a$,

$$|f(s)-f_1(s)|\leqslant K\sum\omega_n|s|e^{-2\mu_n a}\leqslant K_1\sum\omega_n e^{-2\mu_n a}<\infty, \tag{IX.9}$$

причем $K$ и $K_1$ — некоторые постоянные.

Так как $\overline{D}\subset P_a$ (при $a<-\ln 2$), то отсюда видно, что $f(s)$ голоморфна в $D$; из (IX. 8) и (IX. 9) следует, что $f(s)-f_1(s)$ голоморфна в $P_a$; $C$ (граница $D$) является купюрой для $f_1$, а значит, и для $f$.

Неравенство

$$|f(s)-f_1(s)| \leqslant \sum \left(1+e^{-\omega_n\sigma}\right)\delta^n,$$

$0<\delta<1$ $(\delta=\delta(\varepsilon))$, которое справедливо в силу (IX.8) на $\overline{D}_\varepsilon$ ($\overline{D}_\varepsilon$ — множество, получающееся из $D$ удалением точек, которые находятся от $C$ на расстоянии, меньшем, чем $\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$), показывает, что $f(s)$ ограничена на $\overline{D}_\varepsilon$ (ибо $f_1(s)$ ограничена на $\overline{D}_\varepsilon$). Теперь ясно, что $f(s)$ удовлетворяет всем условиям теоремы IX. 1.2.

Для этого ряда, очевидно, имеем

$$\lim \frac{\nu^{(\omega_n)}}{\lambda^{(\omega_n)}}=1.$$

Следовательно, существует ряд Дирихле, который не является рядом Тейлора-Д и удовлетворяет всем условиям теоремы IX. 1.1 и ее частного случая — теоремы IX. 1.2.

Перейдем теперь к доказательству теоремы IX. 1.1. Предположим, что теорема неверна. Тогда из последовательности $\{\omega_n\}$ можно выбрать некоторую подпоследовательность $\{\alpha_n\}$, обладающую следующими свойствами:

1) $\alpha_n$ монотонно стремится к некоторой величине $\alpha^0$; пусть, например, $\alpha_n$ убывает (случай, когда $\alpha_n$ возрастает, требует лишь небольших изменений в рассуждениях);

2) $0<\alpha_n-\alpha^0<\frac{1}{2}\inf(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=r$; $\alpha_1+\eta^{(\alpha_1)}<1$;

3) $\nu^{(\alpha_n)}=o\left(\lambda^{(\alpha_n)}\right)$;

4) $\sum\limits_{k\leqslant n-1}\nu^{(\alpha_k)}=o\left(\lambda^{(\alpha_n)}\right)$;

5) $\lambda^{(\alpha_{n+1})}$ больше наибольшего из членов множества $\Lambda_{\alpha_n}$ (напомним, что $\Lambda_\omega=\{\lambda_n\in\Lambda\,|\,(\lambda_n)=\omega\}$);

6) $\alpha_n-\delta^{(\alpha_n)}>\alpha_{n+1}+\delta^{(\alpha_{n+1})}$ $(n\geqslant 1)$.

Пусть $\Lambda'=\{\lambda'_n\}$ — последовательность элементов $\lambda_n\in\bigcup\limits_\nu\Lambda_{\alpha_\nu}$, расположенных в порядке возрастания ее членов. Другими словами, $\Lambda'$ состоит из тех $\lambda_n$, которые принадлежат всем $\Lambda_{\alpha_\nu}$, где $\nu\geqslant 1$. Положим $m_n=E\lambda'_n$. Имеем $\lambda'_n=m_n+\varepsilon'_n$, $0<\varepsilon'_n-\alpha^0<r$, где $\{\varepsilon'_n\}$ — убывающая последовательность, стремящаяся к $\alpha^0$. Каждому $n$ соответствует одно $\nu$, такое, что $\varepsilon'_n=\alpha_\nu$; последовательность $\{\alpha_\nu\}$, убывая, стремится к $\alpha^0$. Ясно, что $\{m_n\}$, возрастая, стремится к бесконечности, и из 3) и 4) следует, что

$$\lim\left(\frac{n}{m_n}\right)=0. \qquad \text{(IX.10)}$$

Обозначим через $\lambda_{r_\nu}$ один из членов множества $\Lambda_{\alpha_\nu}$, выбранный таким образом, что

$$\lim\left(\frac{\ln|a_{r_\nu}|}{\lambda_{r_\nu}}\right)=0; \tag{IX. 11}$$

это возможно в силу условия (IX. 4) теоремы. Построим теперь по лемме V. 4.1 функцию $F_a(z)$, отвечающую следующему выбору входящих в нее величин: пусть $x_0>0$ удовлетворяет условию $A(x_0)\geqslant 1$, тогда положим $C(x)=0$ при $0<x<x_0$, $C(x)=\ln A(x)$ при $x\geqslant x_0$. В качестве $p$ из V. 4.1 возьмем $(ce)^{-1}$, а в качестве $q$ (опять из V. 4.1) — какую-нибудь величину, такую, что $0\leqslant q<(ce)^{-1}-2$. Полагая $a=\lambda^{(\alpha_n)}$, обозначим соответствующую функцию (в смысле леммы V. 4.1) через $\Phi_n(z)$.

Поскольку для $a>0$

$$h(a)=\int_a^\infty \frac{C(t)}{t^2}\,dt\geqslant\frac{C(a)}{a}, \tag{IX. 12}$$

из построения $F_a$ (см. (V. 16), (V. 17) и (V. 18)) следует, что $\Phi_n(z)$ — целая четная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$|\Phi_n(z)|\leqslant e^{\delta(\alpha_n)|y|-C(|z|)}\mathscr{L}_n(x), \tag{IX. 13}$$

где $\mathscr{L}_n$ — четная функция с положительными значениями, убывающая при $x\geqslant 0$, $\mathscr{L}_n\in L$, $\|\mathscr{L}_n\|=1$; при этом преобразование Фурье $\hat{\Phi}_n(u)$ функции $\Phi_n(x)$ является четной функцией с неотрицательными значениями, удовлетворяющей условиям

$$\hat{\Phi}_n(u)\geqslant g e^{-\varepsilon_n\lambda^{(\alpha_n)}} \quad \text{при} \quad |u|\leqslant l\delta^{(\alpha_n)}, \tag{IX. 14}$$

$$\hat{\Phi}_n(u)=0 \quad \text{при} \quad |u|\geqslant\delta^{(\alpha_n)}, \tag{IX. 15}$$

где $\varepsilon_n=h(\lambda^{(\alpha_n)})$ (величина, стремящаяся к нулю), $g$ — некоторая числовая постоянная и $0\leqslant l<(1-2ec)$.

Положим

$$\Phi(z)=\sum\frac{1}{n^2}e^{i\alpha_n z}\Phi_n(z). \tag{IX. 16}$$

В силу (IX. 13) (и определения функции $C(x)$) имеем, причем $\Phi(z)$ — целая функция,

$$|\Phi(z)|\leqslant[A(|z|)]^{-1}e^{d|y|}L(x), \tag{IX. 17}$$

где $d$ — некоторая постоянная и $L(x)$ при $|x|\to\infty$ стремится к нулю, убывая; $L(x)\in L$.

Пусть $\hat{\Phi}(u)$ — преобразование Фурье функции $\Phi(x)$; тогда

$$\hat{\Phi}(u)=\sum \frac{1}{n^2}\hat{\Phi}_n(u-\alpha_n).$$

Принимая во внимание (IX. 14) и (IX. 15), легко видеть, что при целом положительном $m$

$$\hat{\Phi}(\lambda_n - m)=0,$$

если только $\lambda_n$ не совпадает с одним из $\lambda'_q \in \Lambda'$, а $m$ — целая часть числа $\lambda'_q$. Если дробная часть числа $\lambda'_q$ равна $\alpha_n$, то

$$\hat{\Phi}(\lambda'_q - m)=\hat{\Phi}(\alpha_n)=\frac{1}{n^2}\hat{\Phi}_n(0)\geqslant\frac{1}{n^2}e^{-\varepsilon_n\lambda^{(\alpha_n)}}.$$

Положим

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{e^{\zeta}-1}$$

и рассмотрим при $\sigma > c > 0$ интеграл

$$\Psi(s)=\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(z)\,\psi(s-z)\,\Phi(-iz)\,dz. \qquad \text{(IX. 18)}$$

Условия теоремы и неравенство (IX. 17) показывают, что при $\sigma > c$ этот интеграл имеет смысл.

При $\sigma \geqslant c' > c$ формулу (IX. 18) можно записать в следующем виде:

$$\Psi(s)=\sum e^{-ns}\sum a_m \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{(n-\lambda_m)z}\,\Phi(-iz)\,dz;$$

на основании свойств $\Phi$, используя теорему Коши, имеем

$$\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{(n-\lambda_m)z}\Phi(-iz)\,dz=i\int e^{-i(\lambda_m-n)y}\Phi(y)\,dy=i\hat{\Phi}(\lambda_m-n).$$

Следовательно, при $\sigma \geqslant c'$

$$\Psi(s)=i\sum e^{-ns}\sum a_m\hat{\Phi}(\lambda_m-n).$$

Отсюда, согласно сделанному выше замечанию относительно функции $\hat{\Phi}$, находим, что

$$\Psi(s)=i\sum a_{n_q}e^{-m_q s}\frac{1}{\nu_q^2}\hat{\Phi}_{\nu_q}(0), \qquad \text{(IX. 19)}$$

где величины $m_q$, $n_q$, $\nu_q$ определены следующим образом: $m_q = E\lambda'_q$; напомним, что числа $\lambda'_q$ образуют возрастающую последовательность $\Lambda'$, образованную объединением всех множеств

$\Lambda_{\alpha_\nu}$ $(\nu \geqslant 1)$; в силу 2) каждому $m_q$ соответствует единственное целое $\nu = \nu_q$, такое, что $\lambda'_q \in \Lambda_{\alpha_{\nu_q}}$, т. е. такое, что

$$\lambda'_q = m_q + \alpha_{\nu_q};$$

обозначим через $n_q$ целое число с условием $\lambda'_q = \lambda_{n_q}$.

Запишем тогда $\Psi(s)$ в виде

$$\Psi(s) = \sum c_q e^{-m_q s}. \tag{IX. 20}$$

Из ограниченности $|\widehat{\Phi}_n(u)|$ следует неравенство $\sigma_\Psi \leqslant 0$; докажем, что $\sigma_\Psi = 0$.

Существует возрастающая последовательность целых положительных чисел $\{q_n\}$, такая, что последовательность $w_n = \nu_{q_n}$ возрастает, и такая, что если $r_\nu$ задано посредством (IX. 11), то, полагая $r_{w_n} = s_n$, имеем

$$\lambda_{s_n} \in \Lambda_{\alpha_\nu} \quad \text{с} \quad \nu = w_n,$$

$$\lim \left( \frac{\ln |a_{s_n}|}{\lambda_{s_n}} \right) = 0.$$

Поскольку шаг последовательности $\Lambda$ положителен и поскольку $\{\lambda_{s_n}\}$ — подпоследовательность последовательности $\Lambda$, причем последовательности $\{w_n\}$ и $\{\lambda_{s_n}\}$ возрастают (по свойству 5)), существует постоянная $A$, такая, что

$$1 \leqslant w_n \leqslant A\lambda^{(\alpha_{w_n})} \leqslant A\lambda_{s_n}.$$

Следовательно,

$$\lim \left( \frac{\ln w_n}{\lambda_{s_n}} \right) = 0.$$

Поэтому из (IX. 14) вытекает неравенство

$$\widehat{\Phi}_{w_n}(0) \geqslant g e^{-\eta_n \lambda_{s_n}},$$

$$\lim \eta_n = 0 \ (\eta_n > 0), \ \text{ибо} \ \lambda_{s_n} \geqslant \lambda^{(\alpha_{w_n})}.$$

Значит,

$$\overline{\lim} \left( \frac{\ln |\widehat{\Phi}_{w_n}(0)|}{\lambda_{s_n}} \right) \geqslant 0.$$

Итак, имеем $\sigma_\Psi \geqslant 0$; следовательно, $\sigma_\Psi = 0$. Радиус сходимости ряда

$$T(z) = \sum c_q z^{m_q} \tag{IX. 21}$$

равен поэтому единице; по теореме Фабри (частный случай теоремы VI. 2.2) из (IX. 10) следует, что окружность сходимости для $T(z)$ является купюрой.

Однако, так как особыми точками функции $\psi(s)$ являются лишь точки $2k\pi i$, $k$ — любое целое число, простое повторение рассуждения, примененного при доказательстве теоремы V. 4.3, показывает, что особыми точками функции $\Psi$, заданной формулой (IX. 18), могут быть лишь точки множества $S_{\sigma', f}$, т. е. точки вида $\alpha + 2k\pi i$, где $\alpha$ — любая точка из $S^*_{\sigma' f}$ и $k$ — произвольное целое число. Но в силу условий теоремы множество $\Sigma$ (пересечение $S^*_{\sigma', f}$ с осью сходимости) отлично от всей оси ($\sigma = 0$). Другими словами, эта ось не является для $\Psi$ купюрой. Таким образом, предполагая, что утверждение теоремы неверно, мы пришли к противоречию. Если предположить, что последовательность $\alpha_n$ стремится к $\alpha^0$, возрастая, то рассуждения не меняются — нужно лишь в (IX. 18) заменить $\Phi(-iz)$ на $\Phi(iz)e^z$. Теорема доказана полностью.

Множество $S$ называется *изолированной частью по модулю* $2\pi i$ *множества* $S_d$, если оно обладает следующими свойствами: $S \subset S^*_d$ и существует простая замкнутая жорданова кривая, лежащая в $P_d \setminus S^*_d$ и содержащая внутри себя множество $S$.

Ясно, что в построенном выше (после формулировки теоремы IX. 1.2) примере ни одна из точек $S_d$ ($= S_{d, f}$), лежащих на прямой $\sigma = 0$ ($= \sigma_a$), не принадлежит какой-либо изолированной части по модулю $2\pi i$ множества $S_d$ (впрочем, в нашем примере это имеет место вообще для каждой точки множества $S_d$). Это замечание показывает, что наш пример служит иллюстрацией предположений следующих теорем:

**Т. IX. 1.3.** *Если к предположениям теоремы* IX. 1.1 *добавить следующее предположение*:

4) *для бесконечного множества значений* $n$

$$\nu^{(\omega_n)} < \infty,$$

*то на прямой* $\sigma = \sigma_a$ *найдется по крайней мере одна точка* $S_d$, $d < 0$, *не принадлежащая ни одной из изолированных частей по модулю* $2\pi i$ *множества* $S_d$.

**Т. IX. 1.4.** *Если к предположениям теоремы* X. 1.2 *добавить предположение* 4) *теоремы* IX. 1.3, *то имеет место утверждение теоремы* IX. 1.3.

Предположим, что теорема IX. 1.3 неверна. Тогда любая точка $S_d$, лежащая на $\sigma = 0$, принадлежит некоторой изолированной части по модулю $2\pi i$ множества $S_d$. Это значит, что все точки из $S^*_d$, лежащие на прямой $\sigma = 0$, можно окружить простой замкнутой жордановой кривой, лежащей в $P_d$ и не имеющей общих точек с множеством $S_d^*$.

Затем можно выделить из последовательности $\{\omega_n\}$ подпоследовательность $\{\alpha_n\}$, которая в силу условия 4) теоремы IX. 1.3 должна удовлетворять условиям 1)[1]) и 6) из доказательства теоремы IX. 1.1 (см. стр. 145) и (если обозначить через $\lambda_1^{(\alpha_n)}$ наибольший член множества $\Lambda_{\alpha_n}$) следующему условию:

$$\lim\left(\frac{\lambda_1^{(\alpha_{n+1})}}{\lambda_1^{(\alpha_n)}}\right)=\infty.$$

Сохраняя все обозначения и рассуждения, использованные при доказательстве теоремы IX. 1.1, нужно сделать лишь следующие замечания: в силу того что мы знаем о точках множества $S_d^*$, расположенных на прямой $\sigma=0$ $(=\sigma_c)$ (мы предположили, что теорема неверна), функция $T(z)$ (см. (IX. 21)) имеет на окружности своего круга сходимости $|z|=1$ лишь такие особые точки, каждая из которых может быть окружена жордановой кривой, лежащей в круге $|z|<e^{-d}$, причем на этой кривой $T(z)$ голоморфна. С другой стороны, последовательность $\{m_n\}$ обладает следующим свойством: существует подпоследовательность $\{m_{n_p}\}$, такая, что

$$\lim\left(\frac{m_{n_p+1}}{m_{n_p}}\right)=\infty.$$

Но по теореме Островского[2]) область существования функции, ряд Тейлора которой имеет такие лакуны, необходимо односвязна. Мы получили противоречие, и теорема доказана.

Теорема IX. 1.4 является частным случаем теоремы IX. 1.3.

## IX. 2. Зависимость между изолированностью дробных частей показателей и распределением особенностей

Вот несколько дополнительных определений. Если $Q=\{q_n\}$ и $\Delta=\{\delta_n\}$ — две последовательности положительных вещественных чисел, то множество

$$\Delta[Q]=\bigcup_n (q_n-\delta_n,\ q_n+\delta_n)$$

называется *$\Delta$-окрестностью последовательности $Q$*.

---

[1]) В этом доказательстве рассуждения проводятся в предположении, что $\alpha_n \downarrow \alpha^0$; при незначительном изменении они проходят и для случая $\alpha_n \uparrow \alpha^0$.

[2]) См. Ostrowski A., Über Potenzreihen die überkonvergente Abschnittsfolgen besitzen, *Sitzungsber. Dtsch. Acad. Wiss.* (1921). — *Прим. перев.*

Следовательно,

$$\Delta[(\Lambda)] = \bigcup_n ((\lambda_n) - \delta_n,\ (\lambda_n) + \delta_n).$$

Пусть $D^{\bullet}$ — верхняя плотность последовательности $\Lambda$, и пусть $t_0$ — некоторое вещественное число. Если $D^{\bullet} > 0$, то обозначим через $D(\Lambda;\ t_0)$ полуполосу:

$$|t - t_0| \leqslant \pi D^{\bullet}, \qquad \sigma \geqslant -3[4 - \ln D^{\bullet}]\, D^{\bullet}; \tag{IX.22}$$

если $D^{\bullet} = 0$, то $D(\Lambda;\ t_0)$ означает полупрямую $t = t_0$, $\sigma \geqslant 0$.

Если $S$ — какая-нибудь область, то $S^*$ обозначает множество, образованное всеми точками вида $s + 2k\pi i$, где $s$ — любая точка из $S$ и $k$ — любое целое число. Назовем $S^*$ *областью* $S$ *по модулю* $2\pi i$. Если $l$ — произвольное вещественное число, то $c[l]$ обозначает множество всех чисел вида $l + k$, где $k$ — любое целое число (таким образом, $c[l]$ — это класс чисел, сравнимых с $l$ по модулю 1). Говорят, что вещественное число *a принадлежит по модулю* 1 *множеству A*, если существует некоторое целое $k$, такое, что $a + k \in A$. Если $P$ — некоторая последовательность и $Q \subset P$, то множество элементов из $P$, принадлежащих по модулю 1 множеству $\Delta[Q]$, будет называться *изолированным по модулю* 1 *посредством* $\Delta$*-окрестности последовательности* $Q$.

Докажем следующую теорему:

**Т. IX. 2.1.** *Допустим, что шаг последовательности* $\Lambda$ *положителен, и пусть*

$$f(s) = (A,\ \Lambda)$$

*с* $\sigma_a = 0$. *Пусть* $M = \{\lambda_{n_p}\}$ $(\subset \Lambda = \{\lambda_n\})$, *причем если положить* $\lambda_{n_p} = \mu_p$, $a_{n_p} = b_p$, *то*

$$\lim\left(\frac{\ln|b_n|}{\mu_n}\right) = 0. \tag{IX.23}$$

*Пусть* $\Delta = \{\delta_n\}$ — *последовательность положительных чисел, такая, что* $\lim \delta_n = 0$, *и пусть* $A(t)$ $(t \geqslant 0)$ — *неубывающая функция с положительными значениями, удовлетворяющая условию* (IX. 1). *Определим функцию* $h(a)$ $(a > 0)$ *формулой* (IX. 2).

*Предположим, что выполняется следующее условие*:

$$h(\mu_n) \leqslant c\delta_n \quad (n \geqslant 1), \tag{IX. 24}$$

*где* $c$ — *некоторая постоянная* $< 1/2e$.

*Тогда* $f$ *не может быть аналитически продолжена в* $S^*$ (*область* $S$ *по модулю* $2\pi i$), *где* $S$ — *некоторая* (*открытая*) *область, такая, что*

$$S \supset D(\Lambda';\ t_0) \tag{IX. 25}$$

*с каким угодно* (*фиксированным*) *вещественным* $t_0$ (*причем* $\Lambda'$ — *множество членов* $\lambda_n \in \Lambda$, *принадлежащих по модулю* 1 *множеству* $\Delta[(M)]$), *и не может удовлетворять в* $S^*$ *условию*

$$f(s)=O[A(|t|)] \quad (|t|\to\infty) \qquad \text{(IX. 26)}$$

*равномерно по* $\sigma$, *когда* $\sigma$ *изменяется на некотором компакте.*

Заметим, что эта теорема нетривиальна лишь при условии, что $D_1^*$ (верхняя плотность последовательности $\Lambda'$) $< 1$. Действительно, если $1 \leqslant D_1^* \leqslant e^4$, то $S^*$ покрывает в силу определения полуполосы $D(\Lambda'; t_0)$ любую полуплоскость $P_d$, $d<0$, куда $f$ не может быть продолжена ipso facto ($\sigma_a$ является абсциссой голоморфности функции $f$); при $D_1^* > e^4$ область $S^*$, если она не содержит некоторой полуплоскости $P_d$, $d<0$, сама составляет часть полуплоскости сходимости ряда $f$, и вопрос об аналитическом продолжении в $S^*$ просто не ставится.

Интуитивно эту теорему можно сформулировать следующим образом. Для того чтобы ряд $f(s)=(A, \Lambda)$ ($\sigma_a=0$) можно было аналитически продолжить в полуполосу $|t|\leqslant b$, $\sigma\geqslant 3(4-\ln b)b$ по модулю $2\pi i$, причем в ней $f(s)=O[A(|t|)]$, необходимо, чтобы каждая $\Delta$-окрестность последовательности дробных частей некоторой «полезной» (в смысле (IX. 23)) последовательности $M(\subset\Lambda)$, изолирующая по модулю 1 (посредством $\Delta[(M)]$) некоторую подпоследовательность $\Lambda'$ последовательности $\Lambda$ с верхней плотностью $\leqslant b$, была достаточно мала относительно «полезных» членов (т. е. необходимо, чтобы не выполнялось условие (IX. 24)).

Переходим к доказательству теоремы.

Можно выделить из последовательности $M$ подпоследовательность $M'=\{\mu'_n\}$, такую, что, полагая

$$\mu'_n=\mu_{m_n} \ (n\geqslant 1), \quad \delta'_n=\delta_{m_n}, \quad \Delta'=\{\delta'_n\}$$

и обозначая через $\Delta'[(M')]$ множество $\bigcup((\mu'_n)-\delta'_n, (\mu'_n)+\delta'_n))$, имеем

$$\sup \Delta'[(M')] - \inf \Delta'[(M')] \leqslant \min(1, h_1),$$

где $h_1$ — шаг последовательности $\Lambda'$. Множество

$$\Lambda'_1=\{\lambda_n \mid \lambda_n \in \Lambda, \ c[\lambda_n]\cap\Delta'[M']\}=\emptyset$$

является подпоследовательностью последовательности $\Lambda'$; в силу определения множеств $D$ получаем отсюда, что $D(\Lambda'_1; t_0)\subset \subset D(\Lambda'; t_0)$. Следовательно, $S\supset D(\Lambda'_1; t_0)$. Поэтому, если доказать теорему для случая последовательности $M$, удовлетворяющей дополнительному условию

$$\sup \Delta[(M)] - \inf \Delta[(M)] < \min(1, h_1), \qquad \text{(IX. 27)}$$

где $h_1$ — шаг последовательности $\Lambda'$, то теорема будет доказана и в общем случае.

Допустим, что ряд $f(s)=(A, \Lambda)$ может быть продолжен в $S^*$ и удовлетворяет там условию $f(s)=O[A(|t|)]$ $(|t|\to\infty)$, и покажем, что это приводит к противоречию.

Как и при доказательстве теоремы IX. 1.1, построим функции $F_a(z)$ из V. 4.1 с $C(x)=\ln A(x)$ при $x>x_0$ ($x_0$ удовлетворяет условию $A(x_0)\geqslant 1$) и $C(x)=0$ при $x\leqslant x_0$ [1]), причем величины $p$ и $q$ выбраны так же, как в доказательстве теоремы IX. 1.1. Положим $a=\mu_n$, и пусть

$$\Phi_n(z)=F_{\mu_n}(z) \quad (n\geqslant 1).$$

Определим $\Phi(z)$ формулой (IX. 16), заменив в ней $\alpha_n$ на $(\mu_n)$ (дробная часть числа $\mu_n$). Неравенства (IX. 13), (IX. 14) и (IX. 15) заменяются теперь соответственно неравенствами

$$|\Phi_n(z)|\leqslant e^{\delta_n|y|-C(|z|)}\mathscr{L}_n(x),$$

$$\widehat{\Phi}_n(u)\geqslant ge^{-\varepsilon_n'\mu_n} \quad \text{при} \quad |u|\leqslant l\delta_n, \tag{IX. 28}$$

$$\widehat{\Phi}_n(u)=0 \quad \text{при} \quad |u|\geqslant\delta_n, \tag{IX. 29}$$

где $\mathscr{L}_n$ имеет тот же смысл, что и в (IX. 13), $g$ и $l$ имеют те же значения, что и в (IX. 14) и (IX. 15), а $\varepsilon_n'=h(\mu_n)$. Затем покажем, что выполняются следующие соотношения:

$$\Delta[(M)]\supset \text{носитель функции } \widehat{\Phi}(u), \tag{IX. 30}$$

$$\lim\left(\frac{\ln\widehat{\Phi}(\mu_n)}{\mu_n}\right)=0. \tag{IX. 31}$$

Полагая, как и в доказательстве теоремы IX. 1.1, $\psi(\zeta)=(e^\zeta-1)^{-1}$, определим $\Psi(s)$ интегралом (IX. 18) (причем $\Phi$ означает только что определенную функцию, а $f$ задана в формулировке теоремы). Поскольку $c$ в (IX. 18) — произвольное положительное число, функция $\Psi(s)$ голоморфна при $\sigma>0$ и ограничена при $\sigma\geqslant\varepsilon>0$, где $\varepsilon>0$ произвольно.

Существуют $R$ и $a$, такие, что ($B$ означает полуполосу $|t-t_0|<\pi R$, $\sigma>a$) справедливы соотношения $S\supset\overline{B}$, $B\supset D(\Lambda'; t_0)$, $R>D_1^*$, $a<\sigma_0$, где $D_1^*$ — верхняя плотность последовательности $\Lambda'$ и $\sigma_0=\inf\sigma$ для $s\in D(\Lambda'; t_0)$.

Обозначим через $D_c$ границу области $B_c=B^*\cup P_c$; тогда, применяя использованные ранее методы, получаем для $\sigma>0$, что

$$\Psi(s)=\int\limits_{D_c} f(z)\psi(s-z)\Phi(-iz)\,dz.$$

Полагая

$$0<\varepsilon<R-D_1^*,$$

---

[1]) Положим $C(x)\equiv 0$, если $A(x)\leqslant 1$ $(x>0)$.

легко убеждаемся в том, что если $s$ изменяется в полуполосе $B(\varepsilon)$, определенной условиями $|t-t_0|<\pi(R-\varepsilon)$, $\sigma>a+\pi\varepsilon$, а $z$ изменяется на $D_c$, то $\psi(s-z)$ голоморфна по $s$ и $z$, а также в том, что эта функция ограничена. Отсюда следует голоморфность $\Psi(s)$ в $B^*(\varepsilon)\cup P_{c+2\varepsilon}$. Так как $\varepsilon>0$ произвольно мало, $\Psi(s)$ голоморфна в $B^*\cup P_c$.

Повторяя рассуждения, использованные в доказательстве теоремы IX. 1.1, получаем

$$\Psi(s)=i\sum e^{-ns}\sum a_m\hat{\Phi}(\lambda_m-n).$$

Но в силу (IX. 30) $\hat{\Phi}(\lambda_m-n)\neq 0$ только тогда, когда $\lambda_m\in\Lambda'$, и в силу (IX. 27) каждому $\lambda_m\in\Lambda'$ соответствует единственное $n$, такое, что

$$\lambda_m-n\in\Delta[(M)].$$

Аналогично, в силу того же неравенства (IX. 27) при достаточно большом $n$ существует $\lambda_m\in\Lambda'$, такое, что $\lambda_m-n\in\Delta[(M)]$, причем лишь одно $\lambda_m$ обладает этим свойством. Обозначим через $\{\nu_j\}$ последовательность таких целых $n$, и пусть $\lambda_{m_j}$ — член из $\Lambda'$, соответствующий $\nu_j$ (следовательно, $\lambda_{m_j}-\nu_j\in\Delta[(M)]$). Может существовать лишь конечное число целых $n$, таких, что каждому из них соответствует более одного $\lambda_m$ с $\lambda_m-n\in\Delta[(M)]$; каждому из этих $n$ соответствует лишь конечное число таких $\lambda_m$.

Следовательно, функцию $\Psi$ можно представить при $\sigma>0$ в следующем виде:

$$\Psi(s)=\sum_{n\leqslant k}q_ne^{-ns}+i\sum a_{m_j}\hat{\Phi}(\lambda_{m_j}-\nu_j)e^{-\nu_js}, \qquad \text{(IX. 32)}$$

где $k<\infty$ — некоторое целое неотрицательное число. Ряд правой части сходится при $\sigma>0$; поэтому $\Psi(s)$ голоморфна в этой полуплоскости.

При $m_j=n_p$ имеем $(\lambda_{m_j}-\nu_j)=(\lambda_{n_p})=(\mu_p)$; имеем также $a_{m_j}=b_p$. Но

$$\hat{\Phi}(u)=\sum\frac{\hat{\Phi}_p(u-(\mu_p))}{p^2},$$

причем все $\hat{\Phi}_p\geqslant 0$; следовательно,

$$\frac{\hat{\Phi}_p(0)}{p^2}\leqslant\hat{\Phi}((\mu_p)). \qquad \text{(IX. 33)}$$

Таким образом, в силу (IX. 28), (IX. 31) и (IX. 33) мы видим, что для ряда Тейлора-Д

$$A(s)=\sum a_{m_j}\hat{\Phi}(\lambda_{m_j}-\nu_j)e^{-\nu_js}=\sum d_je^{-\nu_js}$$

абсцисса сходимости равна нулю.

Но мы уже знаем, что функция $\Psi(s)$ (а следовательно, и $A(s)$) может быть аналитически продолжена в полуполосу

$$|t-t_0| \leqslant \pi D_1^{\bullet}, \quad \sigma > -3(4-\ln D_1^{\bullet}) D_1^{\bullet},$$

где $D_1^{\bullet}$ — верхняя плотность последовательности $\Lambda' = \{\lambda_{m_j}\}$, а значит, и последовательности $\{\nu_j\}$. Это противоречит теореме VI. 2.1. Доказательство закончено.

## IX. 3. Вариация показателей и аналитическое продолжение

Пусть $\Lambda$ и $M$ — две последовательности показателей, $d$ — некоторое положительное число; тогда множество всех разностей $d_{n,m} = \lambda_n - \mu_m$ с $\lambda_n \in \Lambda$, $\mu_m \in M$ и $|\lambda_n - \mu_m| < d$ обозначается через $(\Lambda - M)_d$. Если $\nu(x)$ — некоторая функция с положительными значениями при $x \geqslant 0$ и $\Omega$ — какое-то подмножество множества всех $d_{n,m}$, то множество всех $d_{n,m}$, содержащихся в

$$\bigcup_{d_{p,q} \in \Omega} (d_{p,q} - \nu(d_{p,q}),\ d_{p,q} + \nu(d_{p,q})),$$

называется *$\nu$-окрестностью* множества $\Omega$ и обозначается через $\nu(\Omega)$. Множество $\lambda_n (\in \Lambda)$, таких, что существует некоторое $\mu_m \in M$ с $d_{n,m} \in \nu(\Omega)$, называется *$\Lambda$-компонентой* $\nu$-окрестности $\nu(\Omega)$.

Если $E$ — некоторое множество, принадлежащее полуплоскости $\sigma \leqslant 0$, то множество точек, которые нельзя соединить кривой Жордана с полуплоскостью $P_0$ без прохождения через какую-то точку из $\overline{E}$, называется *оболочкой* множества $E$. Оболочка множества $E$ обозначается через $E_*$ — это дополнение наибольшей области, принадлежащей $CE$ (дополнение множества $E$) и связной с $P_0$.

Пусть функция $\varphi = (B, M)$ голоморфна в некоторой области $D \supset P_0$ и $Q(t)$ $(t \geqslant 0)$ — некоторая функция с положительными значениями; говорят, что $\varphi$ *растет в $D$ не быстрее $Q(t)$*, если в дополнении множества $\bigcup_{s \in CD} C(s, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ — любое, $\varphi(s) = O[Q(|t|)]$ $(|t| \to \infty)$ равномерно по $\sigma$, когда $\sigma$ изменяется на некотором компакте (до сих пор мы использовали это определение лишь в случае, когда $D$ было дополнением особого множества функции $\varphi$ относительно некоторой полуплоскости).

Пусть $M' = \{\mu_{n_j}\} \subset M$; говорят, что $M'$ — *полезная подпоследовательность последовательности $M$ относительно $B$*,

если
$$\lim(\ln|b_{n_j}|/\mu_{n_j})=\sigma_{a,\varphi}.$$

Пусть $S$ — некоторое замкнутое множество, лежащее в полуплоскости $\sigma\leqslant 0$, и пусть $M'\subset M$. Говорят, что $S$ *пересекает область* $\mathcal{D}$ *по модулю* $[M, M', Q]$, если, какова бы ни была область $D\supset P_0$, такая, что существует функция $\varphi=(B, M)$, голоморфная в $D$ и растущая в $D$ не быстрее $Q(t)$, причем $M'$ — «полезная» подпоследовательность последовательности $M$ относительно $B$, имеем
$$[S+CD]_*\cap\mathcal{D}\neq\varnothing.$$

Очевидно, что если $S$ пересекает $\mathcal{D}$ по модулю $[M, M', Q]$, то $S$ пересекает по модулю $[M, M', Q]$ любое множество $\mathcal{D}_\gamma$, получающееся из $\mathcal{D}$ сдвигом на $i\gamma$ ($\gamma$ вещественно). Чтобы в этом убедиться, достаточно заменить $b_n$ ($B=\{b_n\}$) на $b_n e^{-i\gamma\mu_n}$.

С помощью теоремы этого параграфа можно убедиться в том, что если ряды $f=(A, \Lambda)$ и $\varphi=(B, M)$ допускают однозначное аналитическое продолжение в $D_1$ и $D_2$ соответственно, причем эти области содержат полуплоскость сходимости ($\sigma>0$ для обоих рядов), то верхняя плотность $\Lambda$-компоненты достаточно большой окрестности $\nu((\Lambda'-M')_d)$ (где $\Lambda'$ и $M'$ — некоторые «полезные» подпоследовательности последовательностей $\Lambda$ и $M$ соответственно) определяет важную связь между $D_1$ и $D_2$. Впрочем, «размер» этой окрестности зависит от функций $P(t)$ и $Q(t)$, определяющих порядок роста функций $f$ и $\varphi$ в областях $D_1$ и $D_2$ соответственно. Другими словами, последовательности $\Lambda, M, \Lambda', M'$ и функции $P(t), Q(t)$ налагают на $[CD_1+CD_2]_*$ некоторый закон *дисперсии*, каковы бы ни были функции $f=(A, \Lambda)$ и $\varphi=(B, M)$, лишь бы $f$ и $\varphi$ можно было (прямо аналитически) продолжить из $P_0$ соответственно в $D_1$ и в $D_2$.

**Т. IX. 3.1.** *Пусть $\Lambda$ и $M$ — две последовательности положительного шага. Пусть $D$ — некоторая область с $D\supset P_0$, и пусть $P(t)$ и $Q(t)$ $(t\geqslant 0)$ — две неубывающие функции с положительными значениями, причем $\ln P(t)$ — вогнутая функция.*

*Предположим, что $f=(A, \Lambda)$ растет в $D$ не быстрее $P(t)$. Пусть $M'\subset M$, и пусть $\Lambda'$ — некоторая «полезная» подпоследовательность последовательности $\Lambda$ относительно $A$. Пусть $0\leqslant\nu(x)\leqslant\tau<h_M/2$, где $h_M$ — шаг последовательности $M$, и пусть $d>0$. Если, полагая $C(t)=\ln[P(t)Q(t)]$, для бесконечного множества $\lambda_n$ и $\mu_m$ с $(\lambda_n-\mu_m)\in(\Lambda'-M')_d$ мы имеем*
$$\int\limits_{\lambda_n}^{\infty}\frac{C(t)}{t^2}dt\leqslant c\nu(\lambda_n-\mu_m)$$

*с* $2ec < 1$, *то* $CD$ *пересекает полуполосу*

$$|t| \leqslant \pi D^{\bullet}, \ \sigma > -3\,[4 - \ln(hD^{\bullet})]\,D^{\bullet}$$

*по модулю* $[M, M', Q]$; *здесь* $h$ *и* $D^{\bullet}$ *— соответственно шаг и верхняя плотность* $\Lambda$*-компоненты множества* $(\Lambda' - M')_d$.

Мы не даем развернутого доказательства этой теоремы. При желании читатель может воспользоваться методами, которые применялись при доказательстве других утверждений этой главы (и использовать вогнутость функции $\ln P(t)$ подобно тому, как это делалось при доказательстве теоремы V. 4.3).

Глава X

# Библиографические замечания

Результаты гл. I в значительной мере являются классическими — так, например, это относится ко всем теоремам о различных областях сходимости. Заметим, однако, что понятие верхней усредненной плотности было введено автором в [12], где впервые излагается намеченный здесь метод для вычисления членов ассоциированной последовательности; значения этих членов были найдены в исследованиях Островского [1] и Бернштейна [1].

Все результаты гл. II принадлежат автору. Теоремы из § II.1 излагались в работах автора [18], [19], [22]. Однако случай, когда *все* $\lambda$ различны между собой по модулю 1, уже рассматривался автором в более старых работах [7] и [11]. Добавим, что на форму области (если переформулировать все рассматриваемые результаты в терминах переменной $s$) в наших старых статьях налагалось гораздо больше ограничений, чем в более поздних работах или в этой главе.

Второй параграф гл. II по существу посвящен «фундаментальному неравенству» для коэффициентов ряда Дирихле (теорема II. 2.1). Для рядов с конечной абсциссой сходимости (а именно этот случай здесь и рассматривается) это неравенство в несколько менее общей форме уже излагалось автором в [8]. Впоследствии оно было обобщено автором на ряды, которые a priori нигде не сходятся — «примыкающие ряды», — что нашло применение в различных областях анализа (проблема моментов, весовые приближения, обобщенная квазианалитичность и т. д.); см. [12] по поводу более общего результата и библиографии на эту тему. Позднее результаты, позволяющие оценивать коэффициенты многочленов Дирихле, стремящихся к некоторой функции, были получены Шварцем [1]. Суньер-и-Балагер [1], [2], [3], [4] в значительной степени обобщил неравенство автора, касающееся примыкающих рядов, перенеся его с помощью некоторых новых понятий, связанных с «логарифмической точностью» (примыкания), на многочлены Дирихле — «примыкающие многочлены». Предложения II. 2.2 и II. 2.3 (в последнем получен более явный результат) — частные случаи фундаментального неравенства — широко используются в последующих главах книги.

Теорема III. 1.1 является следствием результатов § II. 1. Она излагалась автором много лет назад в гораздо менее общем виде ([7], [11]). В этих работах предполагалось, что *все* $\lambda$ и единица линейно независимы. Теорема III. 1.2, изложенная автором в [22], обобщает предложение III. 1.3 (которое в данной книге является следствием теоремы III. 1.2), доказанное Аронйшайном [1], [2], который базировался на работе автора [7] и использовал модулярную функцию при выводе своего результата из теоремы, опубликованной мною в [7]. Он налагал, как это делалось и в [7], на область больше ограничений, чем в настоящей книге.

Теорема III. 2.1 является классической — она принадлежит Ритту [1]. Теорему III. 2.2 доказали в менее общей форме автор и Джерген [1]. Настоящая формулировка этой теоремы приведена автором в [12]. Те же замечания можно сделать и относительно теоремы III. 2.3, доказанной автором в [12]. Теорема III. 2.4 была доказана автором в [12]. Предложение III. 2.5 о семействах функций, стремящихся к бесконечности, принадлежит автору [6]. Лемма III. 2.6 является частным случаем теоремы III. 2.8 Валирона — Бибербаха (см. Валирон [1]). Доказательство, данное здесь и базирующееся на лемме III. 2.5, впервые было изложено автором в [12]. Теоремы III. 2.7 и III. 2.9 принадлежат автору [12].

Глава IV посвящена рядам Тейлора и некоторым их приложениям; в первую очередь здесь надо отметить теорему автора IV. 1.1, опубликованную в 1937 г. (см. [9]). Эту теорему обобщали многие авторы: например, Данжуа [1], Леви [1], Перрон [1], Булиган [1], фон Мизес [1], Дворецкий [1], [2]; Бергман [1] распространил ее на случай многих переменных и т. д. Теоремы IV. 1.5 и IV. 1.6 — приложения теоремы IV. 1.1 — принадлежат автору; первая опубликована в [14], вторая — в [10]. Теорема IV. 1.6 была открыта повторно и обобщена Валироном [2].

Теоремы V. 1.1, V. 2.1, следующие за ними леммы и теорема V. 2.5 принадлежат автору [4]. Введенный мною интеграл (V. 3) позволил Уиддеру [1] (по совету автора) установить частный случай теоремы V. 2.1. Теорема V. 1.1 была обобщена Бохнером [1], который сформулировал ее для общих почти периодических функций. Лемма V. 2.7 является частным случаем теоремы Бернштейна [1]. Теорема V. 2.8 принадлежит автору [4], [11]. «Фиктивную композицию» (гл. V, § 3) ввел автор [5]; ему же принадлежит относящаяся к ней теорема V. 3.1 (см. [5]). Брунк [1] доказал несколько интересных результатов, относящихся к такой композиции. Бламбер [1] дал необходимые условия для того, чтобы «составная» точка была особой.

Функции $F_a$ из гл. V, обладающие свойствами, сформулированными в лемме V. 4.1, были введены автором (см. [15]

и особенно [21]). Вариант, изложенный в V. 4.1, более точен, чем тот, который имеется в [15] и [21]. Уточнение неравенств как для этих функций, так и для их преобразований Фурье, данное в (V. 16), (V. 17) (и в (V. 18) — очевидном следствии (V. 16), получаемом с помощью теоремы Пэли — Винера), играет существенную роль, особенно в приложениях леммы V. 4.1 в гл. IX. Существование функции $F$, которая (вместе со своим преобразованием Фурье) удовлетворяет менее точным неравенствам, доказали Левинсон [1] и Агмон [2]. Лемма V. 4.2 принадлежит автору [15]. Теорема V. 4.3 установлена Агмоном (изложившим ее в несколько иной форме). Теорема V. 4.4 также принадлежит Агмону [2]. Результаты § 5 гл. V (теоремы V. 5.1, V. 5.2 и V. 5.3) принадлежат автору [4], [11]. Теорема V. 5.1 является более точной, чем соответствующая теорема из [11]. Шотлендер [1] дал интересный синтез теорем композиции, в особенности для рядов Тейлора.

Теоремы VI. 1.1 и VI. 1.2 ранее не публиковались.

Напротив, старая теорема автора [3], доказанная также (в несколько более общей форме) Ароншайном [2], весьма близка к теореме VI. 1.3.

Теорема VI. 2.1 принадлежит автору [11]. Она содержит в качестве частного случая теорему Островского [1], в силу которой функция не может оставаться голоморфной на круге с центром на оси сходимости и радиусом, мало отличающимся от $A(h, D^{\bullet})$. Теорема VI. 2.3 ранее не публиковалась.

Теоремы VI. 3.1, VI. 3.2 и VI. 3.3 принадлежат автору [11]. Для рядов Тейлора (Тейлора-Д, если сохранить наши обозначения) теоремы VI. 3.1, VI. 3.2 доказал Пойа [3]. Однако в теоремах Пойа фигурирует «максимальная плотность» — величина, которая не меньше $D^{\bullet}$ (и которая может равняться $\infty$, когда $D^{\bullet} < \infty$).

Теорема VI. 4.1 — это классическая теорема Крамера (см. Бернштейн [1]). Теорема VI. 4.2 принадлежит Пойа [1], [3] (теорема Крамера — Пойа), а теорема VI. 4.3 — Бернштейну [1].

Теорема VI. 4.4 ранее не публиковалась. Она обобщает теорему VI. 4.5 автора [1]. Теорему VI. 4.5 обобщили Пойа [2] и Юнген [1], заменившие слово «полюс» выражением «алгебраико-логарифмическая особая точка». Теорема VI. 4.6 принадлежит автору (для $N \geqslant 2$ см. [2]; для $N = 1$ см. [20]). Теорема VI. 4.7 и ее следствие VI. 4.8 принадлежат автору [20].

Теоремы § 1 гл. VII принадлежат Агмону [1], [3]. Что же касается теоремы VII. 2.1 (из § 2), то она является модификацией теоремы Агмона [4]. В том виде, как она сформулирована здесь (за исключением условий (VII. 20), (VII. 21), которые, как объясняется в замечании, следующем за формулировкой, выполняются ipso facto благодаря другим предположениям теоремы), эта теорема содержится в совместной работе Чандрасекхарана и автора [1]. Модификации теоремы Агмона представляют интерес для приложений к обобщенному уравнению Римана, изложенному в гл. VIII. Кстати, переход от теоремы Агмона к сформулированной здесь теореме осуществляется с помощью теоремы III. 2.3.

Глава VIII помещена в этой монографии в основном для иллюстрации некоторых новых приложений теоремы III. 2.3, которая сама непосредственно вытекает из теоремы II. 2.1.

Лемма VIII. 1.1 по существу принадлежит Бохнеру и Чандрасекхарану [1]. Формулировка, приданная здесь этой лемме, получена в работе Кахана и Мандельбройта [1] и была сообщена первому из авторов этой работы Чандрасекхараном.

Теорема VIII. 1.2 опубликована в работе Чандрасекхарана и автора [1]. Она улучшает один результат Бохнера и Чандрасекхарана [1]. Теорема VIII. 1.3 изложена в совместной работе Чандрасекхарана и автора [1]; там же содержатся следствия, вытекающие из теоремы VIII. 1.3. Отметим, что условия (VIII. 19) и (VIII. 20) в этой работе не фигурируют, ибо они (так же, как и условия (VII. 20), (VII. 21) теоремы VII. 2.1) являются излишними.

Все результаты гл. IX принадлежат автору. Они изложены в настоящей монографии с менее ограничительными и более простыми предположениями, чем в более ранних работах автора. Так, условие (IX. 3) теоремы IX. 1.1 значительно проще соответствующего условия в работе автора [13], которая также содержит теоремы IX. 1.2, IX. 1.3 и IX. 1.4. Теорема IX. 2.1, без сомнения, являющаяся наиболее важной в гл. IX, при менее общих предположениях доказана автором в [15].

Теорема IX. 3.1, доказательство которой в этой книге мы опустили (автор надеется, что терпеливый читатель, прочитавший и изучивший доказательства предшествующих теорем этой главы, получит его сам), опубликована в несколько более сложном виде в [16]. Последняя работа содержит некоторые другие теоремы, относящиеся к данной теме. Кроме того, в ней изложены новые приложения к обобщенному уравнению Римана.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

# О рядах Дирихле, представляющих мероморфные функции

Пусть $f=(A, \Lambda)$, и пусть $\sigma_1<\sigma_a=\sigma_{a,f}$. Если $s'\in P_{\sigma_1}$, то множество всех точек вида $s'+2k\pi i$ ($k$ — целое), принадлежащих $S_{\sigma_1,f}$, называется *классом* $E_f(s')$ *множества* $S_{\sigma_1,f}$ или просто *классом* $E(s')$ (если это не приводит к неопределенности).

Если $E(s')$ содержит лишь полюсы, то будем называть этот класс *полярным*. Если порядки полюсов множества $E(s')$ имеют конечный максимум $r$, то будем называть $E(s')$ *полярным классом порядка* $r$.

Пусть $\alpha=s'+2k\pi i$ — некоторая точка полярного класса порядка $r$, и пусть

$$\sum_{n=1}^{r} A_n^{(k)}(s')\cdot(s-\alpha)^{-n}$$

— главная часть функции $f$ в этом полюсе. Если $\alpha$ — полюс порядка $q<r$, то $A_{q+1}^{(k)}(s')=\ldots=A_r^{(k)}(s')=0$. Если для некоторого целого $k$ имеем $s'+2k\pi i\notin E(s')$, то положим $A_j^{(k)}(s')=0$ для $1\leqslant j\leqslant r$. Положим также

$$p(s')=\sup_j \varlimsup_{|k|\to\infty}\frac{\ln\left|A_j^{(k)}(s')\right|}{\ln|k|}.$$

Если $f$ не имеет в $P_{\sigma_1}$ других особых точек, кроме полюсов, принадлежащих классам $E(s^{(1)}),\ldots, E(s^{(m)}),\ldots$, и если порядок функции $f$ в $P_{\sigma_1}$, за исключением особенностей, есть $\nu$, то будем говорить, что $f$ *мероморфна в* $P_{\sigma_1}$ и что *полярный порядок функции* $f$ *в* $P_{\sigma_1}$ *с бесконечностью равен* $p$, где

$$p=\sup(\nu, p(s^{(1)}), p(s^{(2)}),\ldots, p(s^{(m)}),\ldots).$$

Ниже предполагается, что $\sigma_1<\sigma_a=\sigma_{a,f}=0$.

Имеет место следующая теорема [1]):

**Т. 1.** а) *Пусть* $f=(A, \Lambda)$ *однозначна, мероморфна, обладает конечным полярным порядком в* $P_{\sigma_1}$ *с бесконечностью и имеет в этой полуплоскости лишь конечное число классов* $E(s^{(1)}),\ldots$

[1]) В менее общей форме эта теорема доказана в работе автора [4].

$\ldots, E(s^{(l)})$. *Предположим, что классы* $E(s^{(1)}), \ldots, E(s^{(m)})$ $(m < l)$ *с порядками соответственно* $r_1, \ldots, r_m$ *лежат на* $\sigma = 0$; *положим* $s^{(j)} = \sigma^{(j)} + it^{(j)}$, *и пусть* $\sigma_P = \sup\limits_{j \geqslant m} \sigma^{(j)}$.

b) *Пусть* $p$ — *полярный порядок функции* $f$ *в* $P_{\sigma_1}$ *с бесконечностью. Обозначим через* $C_n^{(g)}$ $n$*-й коэффициент Тейлора (целого) порядка* $g > p$ *функции* $f$.

*Пусть*

$$N = \sum_{j \leqslant m} r_j + g + 1,$$

*если* $f$ *имеет в точке* $s = 0$ *полюс или регулярна в ней, причем* $f(0) \neq 0$, *и пусть*

$$N = \sum_{j \leqslant m} r_j + \max(g + 1 - h, 0),$$

*если* $f$ *имеет в* $s = 0$ *нуль порядка* $h > 0$. *Тогда, полагая*

$$D_{n,N} = \begin{vmatrix} C_n^{(g)} & \ldots & C_{n+N}^{(g)} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ C_{n+N}^{(g)} & \ldots & C_{n+2N}^{(g)} \end{vmatrix},$$

*имеем*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left( \frac{\ln |D_{n,N}|}{n} \right) \leqslant \sigma_P.$$

*Если все классы* $E(s^{(1)}), E(s^{(2)}), \ldots, E(s^{(l)})$ *лежат на* $\sigma = 0$ $(m = l)$, *то*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left( \frac{\ln |D_{n,N}|}{n} \right) \leqslant \sigma_1.$$

Доказательство. Пусть $c > 0$; положим

$$\varphi(s) = (e^s - 1)^{-1}$$

и рассмотрим интеграл

$$F(z) = \frac{g!}{2\pi} \int\limits_{c - i\infty}^{c + i\infty} f(s) \varphi(z - s) \frac{dt}{s^{g+1}} \quad (z = x + iy,\ s = \sigma + it) \tag{1}$$

при $x > c$. Для таких значений $z$

$$F(z) = \frac{g!}{2\pi i} \sum \sum \int\limits_{C_\varepsilon^{k,q}} f(s) \varphi(z - s) \frac{ds}{s^{g+1}} + \\ + \frac{g!}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1 + \varepsilon - i\infty}^{\sigma_1 + \varepsilon + i\infty} f(s) \varphi(z - s) \frac{ds}{s^{g+1}}; \tag{2}$$

суммирование $\sum\sum$ ведется по $1 \leqslant q \leqslant l$ и всем целым $k$ (если $E(0)$ не является полярным классом, то добавляется член с $q=0$, $k=0$); $C_\varepsilon^{0,0}$ — окружность $|s|=\varepsilon$, $C_\varepsilon^{k,q}$, $1 \leqslant q \leqslant l$, — окружность $|s - s^{(q)} - 2k\pi i| = \varepsilon$; $\varepsilon$ выбрано столь малым, что каждый замкнутый круг с границей $C_\varepsilon^{k,q}$ содержит лишь точку $s^{(q)} + 2k\pi i$, если $q \geqslant 1$, и лишь точку $s=0$, если $q=0$, причем эти (замкнутые) круги содержатся в $P_{\sigma_1+\varepsilon}$ и в полуплоскости $\sigma < c - \varepsilon$.

Если для некоторого заданного $k$ имеем $s^{(q)} + 2k\pi i \notin E(s^{(q)})$, то

$$\int\limits_{C_\varepsilon^{k,q}} f(s)\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{g+1}} = 0.$$

С другой стороны, ясно, что функция от $z$, представимая последним интегралом в (2), голоморфна при $x > \sigma_1 + \varepsilon$.

Функцию $F(z)$ можно представить (при $x > c$) в виде

$$F(z) = \frac{g!}{2\pi i}\sum\sum \int\limits_{C_\varepsilon^{k,q}} f(s)\frac{ds}{(e^{z-s}-1)s^{g+1}} + T(z),$$

где $T(z)$ голоморфна в полуплоскости $x > \sigma_1 + \varepsilon$.

Поскольку полярный порядок функции $f$ в $P_{\sigma_1}$ с бесконечностью $< g$, то в силу нашего предположения мы видим, что сумма

$$F_q(z) = \sum_{|k| \geqslant 0} \int\limits_{C_\varepsilon^{k,q}} f(s)\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{g+1}}$$

абсолютно и равномерно сходится на каждом компакте с достаточно большими $x$. Если $r_q$ — порядок полярного класса $E(s^{(q)})$, отличного от класса $E(0)$ (если он существует!), то устанавливаем, что особые точки $s^{(q)} + 2k\pi i$ функции $F_q(z)$ в $P_{\sigma_1}$ — это полюсы порядка $\leqslant r_q$. Напротив, точки $2k\pi i$ могут быть полюсами порядка $r_0 + g + 1$, если $E(0)$ — полярный класс порядка $r_0$ или порядка $g+1$, если $f(s)$ регулярна в $s=0$.

С другой стороны, при достаточно больших $x$ интеграл в (1) представим рядом $(2\pi/g!)\sum C_n^{(g)}e^{-nz}$.

Следовательно, этот ряд Тейлора-Д представляет мероморфную функцию в $P_{\tau_1}$, имеющую там самое большее $N$ полюсов.

Между тем по теореме V. 2.1 расстояние от каждого из этих полюсов, находящихся в полуплоскости $\sigma < 0$, до оси $\sigma = 0$ не превосходит $\sigma_P$. Для завершения доказательства достаточно теперь применить теорему Адамара о полюсах ряда Тейлора.

**Т. 2.** *Предположим, что последовательность* $\Lambda$ *удовлетворяет условию*

$$|\lambda_n - a| \leqslant a < 1/2 \quad (n \geqslant 1),$$

*выполняется условие* a) *теоремы* 1, *а условие* b) *теоремы* 1 *заменяется следующим условием:*

c) $f(s)$ *растет в* $P_{\sigma_1}$, *за исключением особенностей, не быстрее* $\exp C(t)$, *где* $C(t)\,(t > 0)$ *не убывает и удовлетворяет условию*

$$\int_1^\infty \frac{C(t)}{t^2}\,dt < \infty.$$

*Полагая*

$$N = \sum_{1 \leqslant j \leqslant m} r_j$$

*и*

$$D_{n,N} = \begin{vmatrix} a_n & \dots & a_{n+N} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n+N} & \dots & a_{n+2N} \end{vmatrix},$$

*имеем*

$$\overline{\lim}\left(\frac{\ln|D_{n,N}|}{n}\right) \leqslant \sigma_p.$$

Для доказательства теоремы 2 вместо (1) используем интеграл

$$F(z) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\,\varphi(z-s)\,H(-is)\,ds,$$

где $\varphi(s)$ — функция, определенная в процессе доказательства теоремы 1, и где $H(z)$ определяется в процессе доказательства теоремы V. 4.3, причем теперь $C_1(u) = C(u) + au$, где $a > \sup(p(s^{(1)}), \dots, p(s^{(l)})$, и $C_2(u) \equiv 0$, а $\{\mu_n\}$ — последовательность натуральных чисел. Далее повторяются рассуждения, использованные при доказательстве теоремы V. 4.3 и теоремы 1 этого приложения. При завершении доказательства снова используется теорема Адамара.

# ЛИТЕРАТУРА [1])


Агмон (Agmon S.)

[1] Sur les séries de Dirichlet, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, **66** (1949).
[2] A composition theorem for Dirichlet series, *J. d'Analyse Math.*, **1** (1951), 232—243.
[3] Complex variable Tauberians, *Trans. Am. Math. Soc.*, **74** (1953).
[4] On the singularities of a class of Dirichlet series, *Bull. Research Counc. of Israel*, **3** (1954).

Адамар (Hadamard J.)

[1] Théorème sur les séries entières, *Acta Math.*, **22** (1898).

Аронщайн (Aronszajn N.)

[1] Sur les séries de Dirichlet à exposants linéairement indépendants, *C. R. Acad. Sci.*, **199** (1934), 335.
[2] Sur les séries de Dirichlet à exposants linéairement indépendants, *C. R. Acad. Sci.*, **199** (1934), 1564.

Бергман (Bergman S.)

[1] Essential singularities of a class of linear partial differential equations in three variables, *J. Rat. Mech. Analysis*, **3** (1954).

Берндт (Berndt Bruce C.)

[1*] On the zeros of a class of Dirichlet series. I, *Ill. J. Math.*, **14**, № 2 (1970), 244—258; II, *Ill. J. Math.*, **14**, № 4 (1970), 678—691.

Бернштейн (Bernstein V.)

[1] Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Gauthier-Villars, Paris, 1933.

Бламбер (Blambert M.)

[1] Un problème de composition des singularités des séries de Dirichlet générales, *Acta Math.*, **89** (1953).

Бохнер (Bochner S.)

[1] Hadamard's theorem for Dirichlet series, *Annals of Math.*, **41** (1940).

Бохнер и Чандрасекхаран (Bochner S., Chandrasekharan K.)

[1] On Riemann's functional equation, *Annals of Math.*, **63** (1956), 336—360. (Перевод в сб. *Математика*, **3** : **2** (1959), 39—61.)

Бронштейн Б. С.

[1*] Об особенностях одного класса рядов Дирихле, *ДАН СССР*, **131**, № 5 (1960), 996—999.
[2*] О распределении особенностей одного класса функций, *ДАН СССР*, **134**, № 5 (1960), 1009—1012.


---

[1]) Звездочкой отмечена литература, добавленная при переводе.

[3*] О решении уравнений типа Римана в классе рядов Дирихле, *Матем. сб.*, **54**, № 4 (1961), 425—452.
[4*] О рядах Тейлора — Дирихле, *ДАН СССР*, **165**, № 1 (1965), 17—18.

Булиган (Bouligand G.)
[1] Sur la distance d'un point variable à un ensemble fixe, *C. R. Acad. Sci.*, **206** (1938).

Брунк (Brunk H.)
[1] Some generalizations for Dirichlet series of Hadamard's theorem with applications, *Thèse*, The Rice Institute, 1944.

Валирон (Valiron G.)
[1] Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable, *Mém. Sciences Math. fasc.*, **11** (1925).
[2] Sur les singularités des fonctions définies par les séries de Taylor, Publications math. Univ. Belgrad, **VI—VII** (1937/1938).

Гамбургер (Hamburger E.)
[1*] Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion, I, II, III, *Math. Z.*, **10** (1921), 240—254; **11** (1922), 224—245; **13** (1922), 283—311.

Гекке (Hecke E.)
[1*] Dirichlet series, modular functions and quadratic forms, Princeton, 1938.

Гурвиц (Hurwitz A.)
[1] Sur un théorème de M. Hadamard, *C. R. Acad. Sci.*, **128** (1899).

Данжуа (Denjoy A.)
[1] Etude sur la détermination des singularités de la fonction analytique définie par une série de Taylor, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, **55** (1938).

Дворецкий (Dvoretzky A.)
[1] Sur les arguments des singularités des fonctions analytiques, *C. R. Acad. Sci.*, **205** (1937).
[2] Sur les singularités des fonctions analytiques, *Bull. Soc. Math. France*, **66** (1938).

Зигель (Siegel C. L.)
[1*] Bemerkung zu einer Satz von Hamburger uber die Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-funktion, *Math. Ann.*, **86** (1922), 276—279.

Кахан и Мандельбройт (Kahane J. P., Mandelbrojt S.)
[1] Sur l'equation fonctionnelle de Riemann et la formule sommatoire de Poisson, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, **75** (1959).

Леви (Levy P.)
[1] Sur la variation du maximum d'une fonction, *C. R. Acad. Sci.*, **206** (1938).

Левинсон (Levinson N.)
[1] Gap and density theorems, Amer. Math. Soc. Colloq. Publications, vol. 26, 1940.

Мандельбройт (Mandelbrojt S.)
[1] Sur les séries de Taylor qui présentent des lacunes, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, **40** (1923).
[2] La recherche des points singuliers d'une fonction analytique représentée par une série entière, *Jour. de Liouville*, **5** (1926).
[3] Sur une classe de séries de Dirichlet, *Prace Mat. Fis.*, **36** (1928).
[4] Contribution à la théorie du prolongement analytique des séries de Dirichlet, *Acta Math.*, **55** (1929), 1—32.

[5] Sur la recherche des points singuliers d'une série de Dirichlet, *Bull. Soc. Math. de France*, **57** (1929).
[6] Sur les suites de fonctions holomorphes, les suites correspondantes de fonctions dérivées. Fonctions entières, *Jour. de Liouville*, 8 (1929).
[7] Sur les séries de Dirichlet dont les exposants possèdent quelques propriétés arithmétiques, *Bull. Soc. Math. de France*, **60** (1932).
[8] Séries lacunaires, Actualités scientifiques et industrielles, n° 305, Hermann, Paris, 1936.
[9] Théorème général fournissant l'argument des points singuliers situés sur le cercle de convergence, *C. R. Acad. Sci.*, **204** (1937).
[10] Applications d'un théorème sur les arguments des singularités, *C. R. Acad. Sci.*, **206** (1938).
[11] Dirichlet series, *The Rice Institute Pamphlet*, **31**, № 4 (1944), 159—272.
[12] Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications, Gauthier-Villars, Paris, 1952. (Перевод: Мандельбройт С., Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения, ИЛ, М., 1955.)
[13] Influence des propriétés arithmétiques des exposants dans une série de Dirichlet, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, **71** (1955), 301—320. (Перевод в сб. *Математика*, 2 : 3 (1958), 47—62.)
[14] Sur les singularités d'une série de Taylor sur son cercle de convergence, *Annales Univ. Scient. Budapest. Rolando Eötvös*, Sectio Mathematica nominatae, **III—IV** (1960/1961).
[15] Transformées de Fourier de fonctions entières et séries de Dirichlet: un principe de dualité, *Journal d'Analyse math.*, **10** (1962/1963), 381—404.
[16] Dirichlet series, Studies in Math. Analysis and related topics, Essays in honor of George Pólya, Stanford University Press, 1962.
[17*] Теоремы замкнутости и теоремы композиции, ИЛ, М., 1962.
[18] Considérations arithmétiques dans l'analyse harmonique, сб. «Современные проблемы теории аналитических функций», «Наука», М., 1966, 218—224.
[19] Arithmétique dans la théorie des fonctions, *C. R. Acad. Sci.*, **262** (1966).
[20] Considérations arithmétiques dans la théorie des fonctions d'une variable complexe, *C. R. Acad. Sci.*, **262** (1966).
[21] Fonctions entières et transformées de Fourier. Applications, The Mathematical Society of Japan, 1967.
[22] Considérations arithmétiques dans la théorie des fonctions analytiques, *Israel Journal of Math.*, **6**, № 1 (1968).
[23*] Influence des propriétés arithmétiques des exposants d'une série de Dirichlet sur son prolongement analytique, *J. d'Analyse math.*, **23** (1970), 269—280.

Мандельбройт и Джерген (Mandelbrojt S., Gergen J.)
[1] On entire functions defined by Dirichlet series, *Amer. Jour. Math.*, **53** (1931).

фон Мизес (von Mises R.)
[1] La base géometrique du théorème de Mandelbrojt sur les points singuliers d'une fonction analytique, *C. R. Acad. Sci.*, **205** (1937).

Островский (Ostrowski A.)
[1] Einige Bemerkungen über Singularitäten Taylorscher und Dirichletscher Reihen, Berl. Sitz., 1921.
[2*] Über das Hadamardsche Singularitätenkriterium in der Theorie der Taylorschen und Dirichletschen Reihen, *S.-B. Berlin Math. Ges.*, **27** (1928), 32—47.

Перрон (Perron O.)
[1] Über die Lage eines singulären Punktes auf dem Konvergenzkreis, *Sitzgsb. Bayr. Akad. Wiss.*, Math.-naturwiss. Kl., (1937).

Пойа (Pólya G.)

[1] Über die Existenz unendlich vieler Singulären Punkte auf der Konvergenzgerade gewisser Dirichletischer Reihen, *Berl. Sitz.* (1923).

[2] Sur les singularités des séries lacunaires, *C. R. Acad. Sci.*, **184** (1927).

[3] Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, *Math. Zeitschrift*, **29** (1929).

Ритт (Ritt J. F.).

[1] On certain points in the theory of Dirichlet series, *Amer. Jour. Math.*, **50** (1928).

Суньер-и-Балагер (Sunyer y Balaguer F.)

[1] Sur des résultats de M. S. Mandelbrojt, *C. R. Acad. Sci.*, **231** (1950).

[2] Une généralisation de la précision logarithmique de M. S. Mandelbrojt, *C. R. Acad. Sci.*, **232** (1951).

[3] Approximacion de funciones por sumas de exponenciales, *Collectanea Mathematica*, **5** (1952).

[4] Approximation of functions by linear combinations of exponentials, *Seminario Matemático de Barcelona, Collectanea Mathematica*, **17** (1965).

Уиддер (Widder D.)

[1] The singularities of a function defined by a Dirichlet series, *Amer. Jour. Math.*, **49** (1927).

Чандрасекхаран и Мандельбройт (Chandrasekharan K., Mandelbrojt S.)

[1] On Riemann's functional equation, *Annals of Math.*, **66** (1957), 285—296. (Перевод в сб. *Математика*, **3** : 2 (1959), 63—74.)

Шварц (Schwartz L.)

[1] Etude des sommes d'exponentielles réelles, Actualités scientifiques et industrielles, n° 959, Paris, 1943.

Шотлендер (Schottländer S.)

[1] Der Hadamardsche Multiplikationssatz und weitere Kompositionssätze der Funktionnentheorie, *Math. Nachr.*, **11** (1954).

Штернхаймер (Sternheimer D.)

[1*] Construction de séries de Dirichlet dont le prolongement analytique direct uniforme possède une croissance voulue en dehors des singularites, *C. R. Acad. Sci.*, **256** (1963), 1204—1207.

Шекел (Schackell J. R.)

[1*] On a conjecture of V. Bernstein, *Ark. Mat.*, (1969), 83—101.

[2*] Over-convergence of Dirichlet series with complex exponents, *J. Analyse Math.*, **22** (1969), 135—170.

Юнген (Jungen R.)

[1] Sur les séries de Taylor n'ayant que des singularités algébrico-logarithmiques sur le cercle de convergence, *Comm. math. Helv.*, **3** (1931).

# ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора перевода . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5
Предисловие к русскому изданию . . . . . . . . . . . . . . . 6
Предисловие . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

*Глава I.* **Последовательности показателей и ассоциированные последовательности. Элементарные теоремы о коэффициентах и сходимости** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

I. 1. Возрастающие последовательности положительных чисел . . 9
I. 2. Общие свойства сходимости . . . . . . . . . . . . . . . 14
I. 3. Вычисление коэффициентов и некоторых важных комбинаций коэффициентов . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21

*Глава II.* **Неравенства для коэффициентов** . . . . . . . . . . . 25

II. 1. Неравенства, связанные с арифметическим характером показателей . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25
II. 2. Общее неравенство для коэффициентов в случае конечной верхней плотности показателей . . . . . . . . . . . . . 33

*Глава III.* **Теоремы типа теорем Лиувилля, Вейерштрасса, Пикара арифметического и общего характера** . . . . . . . . . . 37

III. 1. Теоремы арифметического типа . . . . . . . . . . . . . 37
III. 2. Общие теоремы типа Лиувилля и Пикара . . . . . . . . 41

*Глава IV.* **Особенности функций, представимых рядом Тейлора** . . . 49

IV. 1. Особенности рядов Тейлора . . . . . . . . . . . . . . . 49

*Глава V.* **Композиция особенностей** . . . . . . . . . . . . . . 58

V. 1. Композиция по Адамару и ее обобщения . . . . . . . . . 58
V. 2. Композиция функций с медленным ростом . . . . . . . . 67
V. 3. «Фиктивная композиция» особенностей . . . . . . . . . 79
V. 4. Композиция функций с быстрым ростом . . . . . . . . . 84
V. 5. Композиция по Гурвицу . . . . . . . . . . . . . . . . . 93

*Глава VI.* **Некоторые приложения установленных принципов к аналитическому продолжению** . . . . . . . . . . . . . . . . . 102

VI. 1. Арифметические свойства показателей и аналитическое продолжение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 102
VI. 2. Аналитическое продолжение общих рядов Дирихле . . . . 105
VI. 3. Целые функции, представимые рядами Дирихле . . . . . 108
VI. 4. Некоторые приложения теорем композиции . . . . . . . . 110

*Глава VII.* **О поведении остатков ряда Дирихле в области существования функции. Приложения** . . . . . . . . . . . . . . . . 118

VII. 1. Вычисление остатков ряда $(A, \Lambda)$ . . . . . . . . . . . . . . 118

VII. 2. Приложение результатов главы III и § VII. 1 к рядам, мероморфным на отрезке оси сходимости . . . . . . . . . . 125

*Глава VIII.* **Приложение к обобщенному функциональному уравнению Римана** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 131

VIII. 1. Число независимых решений. Связь между показателями . . 131

*Глава IX.* **Влияние арифметических свойств показателей ряда Дирихлė на его аналитическое продолжение** . . . . . . . . 141

IX. 1. Дробные части изолированных показателей и возможность аналитического продолжения . . . . . . . . . . . . . . . . 141

IX. 2. Зависимость между изолированностью дробных частей показателей и распределением особенностей . . . . . . . . 150

IX. 3. Вариация показателей и аналитическое продолжение . . . 155

*Глава X.* **Библиографические замечания** . . . . . . . . . . . . . . 158

*Приложение.* **О рядах Дирихле, представляющих мероморфные функции** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 162

Литература . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 166