В. П. МИНОРСКИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

ИЗДАНИЕ ТРИНАДЦАТОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1987

ББК 22.11
М62
УДК 517(075.8)

Минорский В. П. **Сборник задач по высшей математике:** Учеб. пособие для втузов. — 13-е изд. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 352 с.

Подобраны и методически распределены задачи по аналитической геометрии и математическому анализу. В начале каждого параграфа приведены формулы, определения и другие краткие пояснения теории, необходимые для решения последующих задач.

Сборник может быть использован при всех формах обучения.

12-е изд. — 1978 г.

Для студентов высших технических учебных заведений.

М $\frac{1702010000-021}{053(02)-87}$ 61-87

ОГЛАВЛЕНИЕ

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем «Сборнике» подобраны и методически распределены задачи и примеры по аналитической геометрии и математическому анализу.

В начале каждого параграфа приведены формулы, определения и другие краткие пояснения теории, необходимые для решения последующих задач.

В конце каждого параграфа «Сборника» приведены (после черты) задачи для повторения, составляющие около одной трети всего материала «Сборника». Эта особенность поможет преподавателю в подборе задач для работы в классе и для домашних заданий или для повторений перед контрольными работами. Кроме того, при таком распределении задач легко определить минимум, необходимый для усвоения курса, который можно рекомендовать заочникам или для работы на вечерних факультетах.

«Сборник» может быть использован как для работы под руководством преподавателя, так и для самостоятельного изучения курса высшей математики во втузах, так как почти все задачи имеют ответы, а некоторые и решения и, кроме того, ко многим задачам в тексте или в ответах даны указания к их решению. Этому же способствуют краткие пояснения теории.

ГЛАВА 1

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Координаты точки на прямой и на плоскости. Расстояние между двумя точками

1°. Расстояние d между точками $A(x_1)$ и $B(x_2)$ на оси:

$$d = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}. \tag{1}$$

2°. Величина AB (алгебраическая) *направленного отрезка на оси*:

$$AB = x_2 - x_1. \tag{2}$$

3°. Расстояние d между точками $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ на плоскости:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{3}$$

4°. Проекции на оси координат *направленного отрезка*, или *вектора* $\overline{AB}$ на плоскости с началом $A(x_1;\ y_1)$ и концом $B(x_2;\ y_2)$:

$$\text{пр}_x \overline{AB} = X = x_2 - x_1, \quad \text{пр}_y \overline{AB} = Y = y_2 - y_1. \tag{4}$$

1. Построить на числовой оси точки $A(-5)$, $B(+4)$ и $C(-2)$ и найти величины AB, BC и AC отрезков на оси. Проверить, что $AB + BC = AC$.

2. Выполнить предыдущее упражнение для точек $A(+1)$, $B(-4)$ и $C(+5)$.

3. Построить треугольник с вершинами $A(-4;\ 2)$, $B(0;\ -1)$ и $C(3;\ 3)$ и определить его периметр и углы.

4. Доказать, что треугольник с вершинами $A(-3;\ -2)$, $B(0;\ -1)$ и $C(-2;\ 5)$ прямоугольный.

5. Построить точки $A(-4;\ 0)$, $B(-1;\ 4)$ и точки A_1, B_1, симметричные данным относительно оси Oy. Вычислить периметр трапеции ABB_1A_1.

6. Точка B симметрична $A(4; -1)$ относительно биссектрисы первого координатного угла. Найти длину AB.

7. Найти точку, удаленную на 5 единиц как от точки $A(2; 1)$, так и от оси Oy.

8. На оси ординат найти точку, удаленную от точки $A(4; -1)$ на 5 единиц. Пояснить построением, почему получается два решения.

9. На оси абсцисс найти точку, удаленную от точки $A(a; b)$ на c единиц. Исследовать решение при $c > |b|$, $c = |b|$ и $c < |b|$.

10. На оси Ox найти точку, одинаково удаленную от начала координат и от точки $A(8; 4)$.

11. Найти центр и радиус круга, описанного около треугольника с вершинами $A(4; 3)$, $B(-3; 2)$ и $C(1; -6)$.

12. Даны точки $A(2; 6)$ и $B(0; 2)$; построить вектор $\overline{AB}$, его компоненты на осях и вычислить $\text{пр}_x \overline{AB}$, $\text{пр}_y \overline{AB}$ и длину AB.

13. В точке $A(2; 5)$ приложена сила, проекции которой на оси координат равны: $X = 3$ и $Y = 3$. Определить конец вектора $\overline{AB}$, изображающего силу, и величину силы.

14. В точке $A(-3; -2)$ приложена сила, проекция которой $Y = -1$, а проекция X положительна. Определить конец вектора $\overline{AB}$, изображающего силу, если ее величина равна $5\sqrt{2}$.

---

15 *). На числовой оси построить точки $A(1)$, $B(-3)$ и $C(-2)$ и найти величины AB, BC и CA отрезков на оси. Проверить, что $AB + BC + CA = 0$.

16. На плоскости построить точки $A(-7; 0)$ и $B(0; 1)$ и точки A_1 и B_1, симметричные точкам A и B относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Вычислить периметр трапеции ABB_1A_1.

17. На оси ординат найти точку, одинаково удаленную от начала координат и от точки $A(-2; 5)$.

18. На оси абсцисс найти точку, удаленную от точки $A(-2; 3)$ на $3\sqrt{5}$ единиц.

---

*) В каждом параграфе после черты приведены задачи, которые рекомендуются для задания на дом или для повторений.

19. Определить центр и радиус круга, описанного около треугольника с вершинами $A(-3;\ -1)$, $B(5; 3)$ и $C(6;\ -4)$.

20. Даны точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. В начале координат приложены силы, изображаемые векторами $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$. Построить их равнодействующую $\overline{OC}$ и доказать, что проекция равнодействующей на координатную ось равна сумме проекций составляющих на ту же ось.

21. Даны точки $A(1;\ 2)$, $B(3;\ 5)$, $C(5;\ 2)$ и $D(2;\ -2)$. В точке A приложены силы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$. Найти проекции на оси координат равнодействующей силы и ее величину.

§ 2. Деление отрезка в данном отношении. Площадь треугольника и многоугольника

1°. Деление отрезка в данном отношении. Даны точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$. Координаты точки $M(x;\ y)$, делящей отрезок AB в отношении $AM : MB = \lambda$, определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{1}$$

В частности, при делении пополам, т. е. в отношении $\lambda = 1 : 1 = 1$,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{2}$$

2°. Площадь многоугольника с вершинами $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$, ..., $F(x_n;\ y_n)$ равна

$$S = \pm\frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right]. \tag{3}$$

Выражение вида $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ равно $x_1y_2 - x_2y_1$ и называется *определителем второго порядка* *).

22. Построить точки $A(-2;\ 1)$ и $B(3;\ 6)$ и найти точку $M(x;\ y)$, делящую AB в отношении $AM : MB = 3 : 2$.

23. Даны точки $A(-2;\ 1)$ и $B(3;\ 6)$. Разделить отрезок AB в отношении $AM : MB = -3 : 2$.

24. В точках $A(x_1)$ и $B(x_2)$ оси Ox помещены массы m_1 и m_2. Найти центр масс этой системы.

---

*) Об определителях подробно изложено в гл. 4, с. 84—85.

25. В точках $A(x_1)$, $B(x_2)$ и $C(x_3)$ оси Ox помещены соответственно массы m_1, m_2 и m_3. Показать, что центр масс этой системы будет в точке $x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$.

26. На концы однородного стержня длиной 40 см и массой 500 г насажены шары массой 100 г и 400 г. Определить центр масс этой системы.

27. В точках $A(-2; 4)$, $B(3; -1)$ и $C(2; 3)$ помещены соответственно массы 60 г, 40 г и 100 г. Определить центр масс этой системы.

28. Определить середины сторон треугольника с вершинами $A(2; -1)$, $B(4; 3)$ и $C(-2; 1)$.

29. В треугольнике с вершинами $O(0; 0)$, $A(8; 0)$ и $B(0; 6)$ определить длину медианы OC и биссектрисы OD.

30. Найти центр масс треугольника с вершинами $A(1; -1)$, $B(6; 4)$ и $C(2; 6)$.

Указание. Центр масс треугольника находится в точке пересечения его медиан.

31. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(2; 0)$, $B(5; 3)$ и $C(2; 6)$.

32. Показать, что точки $A(1; 1)$, $B(-1; 7)$ и $C(0; 4)$ лежат на одной прямой.

33. Вычислить площадь четырехугольника с вершинами $A(3; 1)$, $B(4; 6)$, $C(6; 3)$ и $D(5; -2)$.

---

34. В точках $A(-3; -1)$ и $B(4; 6)$ приложены параллельные силы, соответственно равные 30 Н и 40 Н. На отрезке AB найти точку приложения равнодействующей.

35. В точках $O(0; 0)$, $A(2; -5)$ и $B(4; 2)$ помещены соответственно массы 500 г, 200 г и 100 г. Определить центр масс этой системы.

36. В треугольнике с вершинами $A(-2; 0)$, $B(6; 6)$ и $C(1; -4)$ определить длину биссектрисы AE.

37. Найти центр масс треугольника с вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$.

38. Найти центр масс четырехугольной однородной доски с вершинами $A(-2; 1)$, $B(3; 6)$, $C(5; 2)$ и $D(0; -6)$.

Указание. По формулам, полученным в задаче 37, найти центры масс треугольников ABC и ADC и разделить расстояние между ними в отношении, обратном отношению площадей треугольников.

39. Даны точки $A(1; 2)$ и $B(4; 4)$. На оси Ox определить точку C так, чтобы площадь $\triangle ABC$ была равна 5, и построить $\triangle ABC$.

40. В треугольнике с вершинами $A(-2; 2)$, $B(1; -4)$ и $C(4; 5)$ каждая сторона продолжена в направлении обхода периметра против часовой стрелки на одну треть своей длины. Определить концы M, N и P продолжений сторон и найти отношение k площади $\triangle MNP$ к площади $\triangle ABC$.

§ 3. Уравнение линии как геометрического места точек

Уравнением линии называется *уравнение с переменными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки этой линии и только они.*

Входящие в уравнение линии переменные x и y называются *текущими координатами*, а буквенные постоянные — *параметрами*. Например, в уравнении окружности (задача 41) $x^2+y^2=R^2$ переменные x и y — текущие координаты, а постоянная R — параметр.

Чтобы составить уравнение линии как геометрического места точек, обладающих одинаковым свойством, нужно:

1) взять произвольную (текущую) точку $M(x; y)$ линии,
2) записать равенством общее свойство всех точек M линии,
3) входящие в это равенство отрезки (и углы) выразить через текущие координаты точки $M(x; y)$ и через данные в задаче.

41. Показать, что уравнением окружности с радиусом R и с центром в начале координат будет $x^2+y^2=R^2$.

42. Написать уравнение окружности с центром $C(3; 4)$ и радиусом $R=5$. Лежат ли на этой окружности точки: $A(-1; 1)$, $B(2; 3)$, $O(0; 0)$ и $D(4; 1)$?

43. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x; y)$, равноудаленная от точек $A(0; 2)$ и $B(4; -2)$. Лежат ли на этой линии точки $C(-1; 1)$, $D(1; -1)$, $E(0; -2)$ и $F(2; 2)$?

44. Написать уравнение траектории точки $M(x; y)$, которая при своем движении остается втрое дальше от точки $A(0; 9)$, чем от точки $B(0; 1)$.

45. Написать уравнение траектории точки $M(x; y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(-1; 1)$, чем к точке $B(-4; 4)$.

46. Написать уравнения биссектрис координатных углов.

47. Написать уравнение геометрического места точек, сумма расстояний от каждой из которых до

точек $F(2; 0)$ и $F_1(-2; 0)$ равна $2\sqrt{5}$. Построить линию по ее уравнению.

48. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точки $F(2; 2)$ и от оси Ox. Построить линию по ее уравнению.

49. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x; y)$, оставаясь вдвое дальше от оси Ox, чем от оси Oy.

50. Построить линии: 1) $y = 2x + 5$; 2) $y = 7 - 2x$; 3) $y = 2x$; 4) $y = 4$; 5) $y = 4 - x^2$.

51. Определить точки пересечения линии $y = x^2 - 4x + 3$ с осями координат и построить ее.

52. Определить точки пересечения с осями координат линий: 1) $3x - 2y = 12$; 2) $y = x^2 + 4x$; 3) $y^2 = 2x + 4$. Построить эти линии.

53. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от оси Oy и от точки $F(4; 0)$, и построить линию по ее уравнению.

---

54. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x; y)$, равноудаленная от начала координат и от точки $A(-4; 2)$. Лежат ли на этой линии точки $B(-2; 1)$, $C(2; 3)$, $D(1; 7)$?

55. Написать уравнение траектории точки $M(x; y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(0; -1)$, чем к точке $B(0; 4)$. Построить траекторию движения.

56. Определить точки пересечения с осями координат линий: 1) $2x + 5y + 10 = 0$; 2) $y = 3 - 2x - x^2$; 3) $y^2 = 4 - x$. Построить линии.

57. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от оси Ox и от точки $F(0; 2)$, и построить линию по ее уравнению.

58. Написать уравнение геометрического места точек, разность расстояний от каждой из которых до точек $F_1(-2; -2)$ и $F(2; 2)$ равна 4. Построить линию по ее уравнению.

§ 4. Уравнение прямой: 1) с угловым коэффициентом, 2) общее, 3) в отрезках на осях

1°. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b. \tag{1}$$

Параметр k равен тангенсу угла α наклона прямой к оси Ox ($k = \operatorname{tg} \alpha$) и называется *угловым коэффициентом*, или иногда *наклоном* прямой. Парамер b — величина отрезка на оси Oy, или *начальная ордината*.

2°. Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0. \tag{2}$$

Особые случаи:

а) при $C = 0$ $y = -\frac{A}{B}x$ — прямая проходит через начало координат;

б) при $B = 0$ $x = -\frac{C}{A} = a$ — прямая параллельна оси Oy;

в) при $A = 0$ $y = -\frac{C}{B} = b$ — прямая параллельна оси Ox;

г) при $B = C = 0$ $Ax = 0$, $x = 0$ — ось Oy;

д) при $A = C = 0$ $By = 0$, $y = 0$ — ось Ox.

3°. Уравнение прямой в отрезках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{3}$$

где a и b — величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

59. Построить прямую, отсекающую на оси Oy отрезок $b = 3$ и составляющую с осью Ox угол: 1) 45°; 2) 135°. Написать уравнения этих прямых.

60. Построить прямую, отсекающую на оси Oy отрезок $b = -3$ и составляющую с осью Ox угол: 1) 60°; 2) 120°. Написать уравнения этих прямых.

61. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и составляющей с осью Ox угол: 1) 45°; 2) 60°; 3) 90°; 4) 120°; 5) 135°.

62. Построить прямую, проходящую через начало координат и через точку $(-2; 3)$, и написать ее уравнение.

63. Определить параметры k и b для каждой из прямых: 1) $2x - 3y = 6$; 2) $2x + 3y = 0$; 3) $y = -3$; 4) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

64. Построить прямые: 1) $3x + 4y = 12$; 2) $3x - 4y = 0$; 3) $2x - 5 = 0$; 4) $2y + 5 = 0$.

65. Определить параметры k и b прямой, проходящей через точку $A(2; 3)$ и составляющей с Ox угол 45°. Написать уравнение этой прямой.

66. Уравнения прямых: 1) $2x - 3y = 6$; 2) $3x - 2y + 4 = 0$ привести к виду в отрезках на осях.

67. Даны точки $O(0; 0)$ и $A(-3; 0)$. На отрезке OA построен параллелограмм, диагонали которого пересекаются в точке $B(0; 2)$. Написать уравнения сторон и диагоналей параллелограмма.

68. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(4; 3)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью, равной 3.

69. Прямые $y=-2$ и $y=4$ пересекают прямую $3x-4y-5=0$ соответственно в точках A и B. Построить вектор $\overline{AB}$, определить его длину и его проекции на оси координат.

70. Лежат ли точки $A(3; 5)$, $B(2; 7)$, $C(-1; -3)$ и $D(-2; -6)$ на прямой $y=2x-1$ или же они «выше» или «ниже» этой прямой?

71. Каков геометрический смысл неравенств:
1) $y>3x+1$; 2) $y<3x+1$; 3) $2x+y-4\geqslant 0$; 4) $2x+y-4<0$?

72. Построить области*), координаты точек которых удовлетворяют неравенствам:

1) $y<2-x,\quad x>-2,\quad y>-2;$

2) $y>2-x,\quad x<4,\quad y<0;$

3) $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}\leqslant 1,\quad y\geqslant x+2,\quad x\geqslant -4.$

73. Точка $M(x; y)$ движется так, что разность квадратов расстояний от нее до точек $A(-a; a)$ и $B(a; -a)$ остается равной $4a^2$. Написать уравнение ее траектории.

74. Написать уравнение траектории точки $M(x; y)$, проекция которой на ось Ox движется со скоростью m ед/с, а на ось Oy — со скоростью n ед/с. Начальное положение точки $M_0(a; b)$.

---

75. Построить прямые, заданные параметрами: 1) $b=-2$, $\varphi=60°$ и 2) $b=-2$, $\varphi=120°$, и написать их уравнения.

76. Определить параметры k и b прямой, проходящей через точку $(-2; 3)$ и составляющей с Ox угол 45°. Построить прямую и написать ее уравнение.

---

*) Слово «область» здесь означает часть плоскости xOy, координаты каждой точки которой удовлетворяют некоторым условиям (например, неравенствам). Область называется *замкнутой*, если в нее включены точки, лежащие на границе области. В противном случае область называется *открытой*.

77. Равнобедренная трапеция с основаниями 8 см и 2 см имеет острый угол 45°. Написать уравнения сторон трапеции, приняв за ось Ox большее основание и за ось Oy — ось симметрии трапеции.

78. Написать уравнения сторон ромба с диагоналями 10 см и 6 см, приняв бо́льшую диагональ за ось Ox и меньшую — за ось Oy.

79. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(-4;\ 6)$ и отсекающей от осей координат треугольник площадью 6.

80. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x;\ y)$, оставаясь вдвое дальше от оси Ox, чем от прямой $x=-3$.

81. Прямые $x=-1$ и $x=3$ пересекают прямую $y=2x+1$ в точках A и B. Определить длину вектора $\overline{AB}$ и его проекции на оси координат.

§ 5. Угол между прямыми. Уравнение пучка прямых, проходящих через данную точку. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Точка пересечения двух прямых

1°. Угол φ, отсчитанный против часовой стрелки от прямой $y=k_1x+b_1$ до прямой $y=k_2x+b_2$, определяется формулой

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \tag{1}$$

Для прямых, заданных уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \quad \text{и} \quad A_2x+B_2y+C_2=0,$$

формула (1) примет вид

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}.$$

Условие *параллельности*: $k_1=k_2$ или $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$.

Условие *перпендикулярности*: $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$ или $A_1A_2+B_1B_2=0$.

2°. Уравнение пучка прямых, проходящих через данную точку $A(x_1;\ y_1)$:

$$y-y_1=k(x-x_1). \tag{2}$$

3°. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \tag{3}$$

4°. Чтобы найти точку пересечения непараллельных прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, нужно решить совместно их уравнения. Получим:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

82. Определить угол между прямыми:

1) $y = 2x - 3, \quad y = \frac{1}{2}x + 1;$

2) $5x - y + 7 = 0, \quad 2x - 3y + 1 = 0;$

3) $2x + y = 0, \quad y = 3x - 4;$

4) $3x + 2y = 0, \quad 6x + 4y + 9 = 0;$

5) $3x - 4y = 6, \quad 8x + 6y = 11;$

6) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1.$

83. Среди прямых $3x - 2y + 7 = 0$, $6x - 4y - 9 = 0$, $6x + 4y - 5 = 0$, $2x + 3y - 6 = 0$ указать параллельные и перпендикулярные.

84. Написать уравнение пучка прямых, проходящих через точку $A(2; 3)$. Выбрать из этого пучка прямые, составляющие с осью Ox углы: 1) 45°; 2) 60°; 3) 135°; 4) 0°, и построить их.

85. Построить точку $A(-2; 5)$ и прямую $2x - y = 0$. Написать уравнение пучка прямых, проходящих через A, и выбрать из пучка: 1) прямую, параллельную данной; 2) прямую, перпендикулярную к данной.

86. В точках пересечения прямой $2x - 5y - 10 = 0$ с осями координат восставлены перпендикуляры к этой прямой. Написать их уравнения.

87. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1; 3)$ и $B(4; -2)$.

88. В треугольнике с вершинами $A(-2; 0)$, $B(2; 6)$ и $C(4; 2)$ проведены высота BD и медиана BE. Написать уравнения стороны AC, медианы BE и высоты BD.

89. Найти внутренние углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями $x + 2y = 0$, $x + 4y - 6 = 0$, $x - 4y - 6 = 0$.

Указание. Чтобы найти внутренние углы треугольника, нужно угловые коэффициенты сторон выписать в порядке убывания: $k_1 > k_2 > k_3$, затем вычислять тангенсы углов по формулам: $\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$, $\frac{k_2 - k_3}{1 + k_2 k_3}$, $\frac{k_3 - k_1}{1 + k_1 k_3}$. Убедиться в этом из чертежа, поместив одну из вершин в начале координат.

90. Написать уравнения прямых, проходящих через начало координат под углом 45° к прямой $y = 4 - 2x$.

91. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1;\ 1)$ под углом 45° к прямой $2x + 3y = 6$.

92. Из точки $A(5;\ 4)$ выходит луч света под углом $\varphi = \operatorname{arctg} 2$ к оси Ox и от нее отражается. Написать уравнения падающего и отраженного лучей.

93. Определить вершины и углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями $x + 3y = 0$, $x = 3$, $x - 2y + 3 = 0$.

94. Отрезок прямой $3x + 2y = 6$, отсеченный осями координат, служит гипотенузой равнобедренного прямоугольного треугольника. Найти вершину прямого угла, если известно, что она лежит «выше» данной прямой.

---

95. Дан треугольник с вершинами $A(-2;\ 0)$, $B(2;\ 4)$ и $C(4;\ 0)$. Написать уравнения сторон треугольника, медианы AE, высоты AD и найти длину медианы AE.

96. Написать уравнения сторон и найти углы треугольника с вершинами $A(0;\ 7)$, $B(6;\ -1)$ и $C(2;\ 1)$.

97. Прямая $2x - y + 8 = 0$ пересекает оси Ox и Oy в точках A и B. Точка M делит AB в отношении $AM : MB = 3 : 1$. Написать уравнение перпендикуляра, восставленного в точке M к прямой AB.

98. Построить треугольник, стороны которого заданы уравнениями $x + y = 4$, $3x - y = 0$, $x - 3y - 8 = 0$; найти углы и площадь треугольника.

99. Найти точку пересечения медиан и точку пересечения высот треугольника, вершины которого $A(-4;\ 2)$, $B(2;\ -5)$ и $C(5;\ 0)$.

100. Из точки $A(-5;\ 6)$ выходит луч света под углом $\varphi = \operatorname{arctg}(-2)$ к оси Ox и отражается от оси Ox, а затем от оси Oy. Написать уравнения всех трех лучей.

§ 6. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой. Уравнения биссектрис. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения двух данных прямых

1°. Нормальное уравнение прямой

$$x\cos\beta + y\sin\beta - p = 0, \qquad (1)$$

где p — длина перпендикуляра (нормали), опущенного из начала координат на прямую, а β — угол наклона этого перпендикуляра к оси Ox. Чтобы привести общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ к нормальному виду, нужно все члены его умножить на *нормирующий* множитель $M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, взятый со знаком, противоположным знаку свободного члена C.

2°. Расстояние d от точки $(x_0;\ y_0)$ до прямой *найдем, если в левую часть нормального уравнения прямой на место текущих координат подставим координаты* $(x_0;\ y_0)$ *и полученное число возьмем по абсолютной величине*:

$$d = |x_0\cos\beta + y_0\sin\beta - p|, \qquad (2)$$

или

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (2')$$

3°. Уравнения биссектрис углов между прямыми $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2+B^2}} = \pm\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}. \qquad (3)$$

4°. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения двух данных прямых:

$$\alpha(Ax + By + C) + \beta(A_1x + B_1y + C_1) = 0. \qquad (4)$$

Можно положить $\alpha = 1$, исключив этим из пучка (4) вторую из данных прямых.

101. Привести к нормальному виду уравнения прямых: 1) $3x - 4y - 20 = 0$; 2) $x + y + 3 = 0$; 3) $y = kx + b$.

102. Построить прямую, если длина нормали $p = 2$, а угол β наклона ее к оси Ox равен: 1) 45°; 2) 135°; 3) 225°; 4) 315°. Написать уравнения этих прямых.

103. Найти расстояния от точек $A(4;\ 3)$, $B(2;\ 1)$ и $C(1;\ 0)$ до прямой $3x + 4y - 10 = 0$. Построить точки и прямую.

104. Найти расстояние от начала координат до прямой $12x - 5y + 39 = 0$.

105. Показать, что прямые $2x-3y=6$ и $4x-6y=25$ параллельны, и найти расстояние между ними.

Указание. На одной из прямых взять произвольную точку и найти расстояние от нее до другой прямой.

106. Найти k из условия, что прямая $y=kx+5$ удалена от начала координат на расстояние $d=\sqrt{5}$.

107. Написать уравнение геометрического места точек, удаленных от прямой $4x-3y=0$ на расстояние $d=4$.

108. Составить уравнение прямой, удаленной от точки $A(4; -2)$ на расстояние $d=4$ и параллельной прямой $8x-15y=0$.

109. Написать уравнения биссектрис углов между прямыми $2x+3y=10$ и $3x+2y=10$.

110. Написать уравнения биссектрис углов между прямыми $3x+4y=12$ и $y=0$.

111. Написать уравнение траектории точки $M(x; y)$, которая при своем движении остается втрое дальше от прямой $y=2x-4$, чем от прямой $y=4-2x$.

112. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $2x+y+6=0$ и $3x+5y-15=0$ и через точку $N(1, -2)$ (не находя точки M).

113. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $5x-y+10=0$ и $8x+4y+9=0$ и параллельной прямой $x+3y=0$ (не находя точки M).

---

114. Найти длину высоты BD в треугольнике с вершинами $A(-3; 0)$, $B(2; 5)$ и $C(3; 2)$.

115. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 4)$ и удаленной от начала координат на расстояние $d=2$.

116. Проверить, что точки $A(-4; -3)$, $B(-5; 0)$, $C(5; 6)$ и $D(1; 0)$ служат вершинами трапеции, и найти ее высоту.

117. Через начало координат проведена прямая на одинаковом расстоянии от точек $A(2; 2)$ и $B(4; 0)$. Найти это расстояние.

118. Написать уравнения геометрического места точек, удаленных от прямой $x+2y-5=0$ на расстояние, равное $\sqrt{5}$.

119. Написать уравнение траектории точки $M(x; y)$, которая при своем движении остается вдвое дальше от прямой $y = x$, чем от прямой $y = -x$.

120. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $2x - 3y + 5 = 0$ и $3x + y - 7 = 0$ и перпендикулярной к прямой $y = 2x$ (не находя точки M).

§ 7. Смешанные задачи на прямую

121. Через начало координат провести прямую, образующую с прямыми $x + y = a$ и $x = 0$ треугольник площадью a^2.

122. Даны точки $A(-4; 0)$ и $B(0; 6)$. Через середину отрезка AB провести прямую, отсекающую на оси Ox отрезок, вдвое больший, чем на оси Oy.

123. Даны точки $A(-2; 0)$ и $B(2; -2)$. На отрезке OA построен параллелограмм $OACD$, диагонали которого пересекаются в точке B. Написать уравнения сторон, диагоналей параллелограмма и найти угол CAD.

124. Найти углы и площадь треугольника, образованного прямыми $y = 2x$, $y = -2x$ и $y = x + b$.

125. Из начала координат проведены две взаимно перпендикулярные прямые, образующие с прямой $2x + y = a$ равнобедренный треугольник. Найти площадь этого треугольника.

126. Найти внутренние углы треугольника, если даны уравнения его сторон: $(AB)\, x - 3y + 3 = 0$ и $(AC)\, x + 3y + 3 = 0$ и основание $D(-1; 3)$ высоты AD.

127. Даны уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $3x + y = 0$ и $x - 3y = 0$ и точка $(5; 0)$ на его основании. Найти периметр и площадь треугольника.

128. В треугольнике ABC даны: 1) уравнение стороны (AB) $3x + 2y = 12$; 2) уравнение высоты $(BM)\, x + 2y = 4$; 3) уравнение высоты $(AM)\, 4x + y = 6$, где M — точка пересечения высот. Написать уравнения сторон AC, BC и высоты CM.

129. Две стороны параллелограмма заданы уравнениями $y = x - 2$ и $5y = x + 6$. Диагонали его пересекаются в начале координат. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма и его диагоналей.

130. Дан треугольник с вершинами $A(0;\ -4)$, $B(3;\ 0)$ и $C(0;\ 6)$. Найти расстояние вершины C от биссектрисы угла A.

131. Написать уравнение траектории точки $M(x; y)$, движущейся так, что сумма расстояний от нее до прямых $y=2x$ и $y=-x/2$ остается постоянной и равной $\sqrt{5}$.

132. Построить области, координаты точек которых удовлетворяют неравенствам:

1) $x-2<y<0$ и $x>0$; 2) $-2\leqslant y\leqslant x\leqslant 2$;

3) $2<2x+y<8$, $x>0$ и $y>0$.

133. Стороны AB и BC параллелограмма заданы уравнениями $2x-y+5=0$ и $x-2y+4=0$, диагонали его пересекаются в точке $M(1;\ 4)$. Найти длины его высот.

134. Найти вершины прямоугольного равнобедренного треугольника, если дана вершина прямого угла $C(3;\ -1)$ и уравнение гипотенузы $3x-y+2=0$.

135. Даны две вершины треугольника $A(-4;\ 3)$ и $B(4;\ -1)$ и точка пересечения высот $M(3;\ 3)$. Найти третью вершину C.

136. Вычислить координаты вершины ромба, если известны уравнения двух его сторон: $x+2y=4$ и $x+2y=10$, и уравнение одной из его диагоналей: $y=x+2$.

137. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $A(0; 2)$ и уравнения высот: $(BM)\,x+y=4$ и $(CM)\,y=2x$, где M — точка пересечения высот.

138. Даны прямая $x+2y-4=0$ и точка $A(5; 7)$. Найти: 1) проекцию B точки A на данную прямую; 2) отражение C точки A в данной прямой.

Указание. Написав уравнение перпендикуляра AB и решив его совместно с уравнением данной прямой, найдем точку B, которая есть середина AC.

139. Дана прямая $2x+y-6=0$ и на ней две точки A и B с ординатами $y_A=6$ и $y_B=-2$. Написать уравнение высоты AD треугольника AOB, найти ее длину и $\angle DAB$.

§ 8. Окружность

Уравнение окружности с центром в точке $C(a;\ b)$ и радиусом, равным R:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (1)$$

Если в уравнении (1) раскрыть скобки, то оно примет вид

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0. \qquad (2)$$

Чтобы от уравнения (2) опять перейти к уравнению вида (1), нужно в левой части уравнения (2) выделить полные квадраты:

$$\left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{n}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p. \qquad (3)$$

140. Написать уравнение окружности с центром $C(-4;\ 3)$, радиусом $R = 5$ и построить ее. Лежат ли на этой окружности точки $A(-1;\ -1)$, $B(3;\ 2)$, $O(0;0)$?

141. Дана точка $(-4;\ 6)$. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок OA.

142. Построить окружности: 1) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$; 2) $x^2 + y^2 - 8x = 0$; 3) $x^2 + y^2 + 4y = 0$.

143. Построить окружность $x^2 + y^2 + 5x = 0$, прямую $x + y = 0$ и найти точки их пересечения.

144. Написать уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $A(1;\ 2)$.

145. Найти угол между радиусами окружности $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$, проведенными в точки пересечения ее с осью Oy.

146. Написать уравнение окружности, проходящей через точки $A(-1; 3)$, $B(0; 2)$ и $C(1; -1)$.

Указание. Написать уравнение искомой окружности в виде $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$, подставить в него координаты каждой точки и затем найти m, n и p.

147. Написать уравнение окружности, проходящей через точки пересечения окружности $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ с прямой $y = -x$ и через точку $A(4; 4)$.

148. Определить область расположения кривой $y = -\sqrt{-x^2 - 4x}$. Построить кривую.

149. Написать уравнения касательных к окружности $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$, проведенных из начала координат.

150. Дана точка $A(a;\ 0)$. Точка M движется так, что в $\triangle OMA$ угол OMA остается прямым. Определить траекторию движения точки M.

151. Даны точки $A(-6;\ 0)$ и $B(2; 0)$. Найти геометрическое место точек, из которых отрезки OA и OB видны под равными углами.

152. Определить траекторию точки $M(x;\ y)$, движущейся так, что сумма квадратов расстояний от нее до точек $A(-a; 0)$, $B(0; a)$ и $C(a; 0)$ остается равной $3a^2$.

153. Определить траекторию точки $M(x; y)$, движущейся так, что сумма квадратов расстояний от нее до биссектрис координатных углов остается равной a^2.

154. Дана окружность $x^2+y^2=a^2$. Из ее точки $A(a;\ 0)$ проведены всевозможные хорды. Определить геометрическое место середин этих хорд.

---

155. Даны точки $A(-3;\ 0)$ и $B(3;\ 6)$. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок AB.

156. Найти центры и радиусы окружностей: 1) $x^2+y^2-6x+4y-23=0$; 2) $x^2+y^2+5x-7y+2{,}5=0$; 3) $x^2+y^2+7y=0$. Построить окружности.

157. Окружнсстъ касается оси Ox в начале координат и проходит через точку $A(0;\ -4)$. Написать уравнение окружности и найти точки пересечения ее с биссектрисами координатных углов.

158. Написать уравнение окружности, проходящей через начало координат и через точки пересечения прямой $x+y+a=0$ с окружностью $x^2+y^2=a^2$.

159. Написать уравнения касательных, проведенных из начала координат к окружности, проходящей через точки $A(1;\ -2)$, $B(0;\ -1)$ и $C(-3;\ 0)$.

160. Найти угол между радиусами окружности $x^2+y^2-4x+6y-5=0$, проведенными в точки пересечения ее с осью Ox.

161. Показать, что точка $A(3;\ 0)$ лежит внутри окружности $x^2+y^2-4x+2y+1=0$, и написать уравнение хорды, делящейся в точке A пополам.

Указание. Искомая хорда перпендикулярна к CA, где C — центр окружности.

162. Точка $M(x; y)$ движется так, что сумма квадратов расстояний от нее до начала координат и до точки $A(-a;\ 0)$ остается равной a^2. Определить траекторию движения точки M.

163. Дана окружность $x^2+y^2=4$. Из точки ее $A(-2;\ 0)$ проведена хорда AB и продолжена на расстояние $BM = AB$. Определить геометрическое место точек M.

164. Отрезок $AM = a$ перемещается по плоскости xOy, оставаясь параллельным Ox, так, что левый конец его A скользит по окружности $x^2 + y^2 = a^2$. Определить траекторию движения точки M.

§ 9. Эллипс

Эллипсом называется *геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F и F_1* (фокусов) *есть постоянная величина* $2a$, *бо́льшая* F_1F.

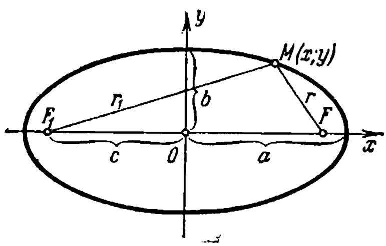

Рис. 1

Каноническое (простейшее) уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

Эллипс, заданный уравнением (1), симметричен относительно осей координат (рис. 1). Параметры a и b называются *полуосями* эллипса. Пусть $a > b$, тогда фокусы F и F_1 находятся на оси Ox на расстоянии $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ от центра. Отношение $\frac{c}{a} = \varepsilon < 1$ называется *эксцентриситетом* эллипса. Расстояния от точки $M(x; y)$ эллипса до его фокусов (*фокальные радиус-векторы*) определяются формулами

$$r = a - \varepsilon x, \qquad r_1 = a + \varepsilon x. \qquad (2)$$

Если же $a < b$, то фокусы находятся на оси Oy, $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $\varepsilon = \frac{c}{b}$, $r = b \pm \varepsilon y$.

165. Построить эллипс $x^2 + 4y^2 = 16$, найти его фокусы и эксцентриситет.

166. Написать каноническое уравнение эллипса, зная, что: 1) расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось $b = 3$; 2) большая полуось $a = 6$, а эксцентриситет $\varepsilon = 0{,}5$.

167. Найти малую полуось b и эксцентриситет ε эллипса, имеющего большую полуось $a = 5$ и параметр c, равный: 1) 4,8; 2) 4; 3) 3; 4) 1,4; 5) 0. Построить каждый из эллипсов.

168. Земля движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Наименьшее расстояние от Земли до Солнца равно приблизительно 147,5 миллиона километров, а наибольшее 152,5 миллиона километров. Найти большую полуось и эксцентриситет орбиты Земли.

169. Эллипс, симметричный относительно осей координат, проходит через точки $M(2;\ \sqrt{3})$ и $B(0;\ 2)$. Написать его уравнение и найти расстояния от точки M до фокусов.

170. Эллипс, симметричный относительно осей координат, фокусы которого находятся на оси Ox, проходит через точку $M(-4;\ \sqrt{21})$ и имеет эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{4}$. Написать уравнение эллипса и найти фокальные радиус-векторы точки M.

171. Найти длину хорды эллипса $x^2 + 2y^2 = 18$, делящей угол между осями пополам.

172. Найти эксцентриситет эллипса, если расстояние между фокусами равно расстоянию между концами большой и малой полуосей.

173. В эллипс $x^2 + 4y^2 = 4$ вписан правильный треугольник, одна из вершин которого совпадает с концом большой полуоси. Определить координаты двух других вершин треугольника.

Указание. Написать уравнение одной из сторон, имеющей наклон $k = \operatorname{tg} 30°$, и найти точки ее пересечения с эллипсом.

174. На эллипсе $9x^2 + 25y^2 = 225$ найти точку, расстояние от которой до правого фокуса в четыре раза больше расстояния от нее до левого фокуса.

175. Ординаты всех точек окружности $x^2 + y^2 = 36$ сокращены втрое. Написать уравнение полученной новой кривой.

176. Определить траекторию точки M, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $F(-1;\ 0)$, чем к прямой $x = -4$.

177. Отрезок AB постоянной длины $a + b$ движется так, что его конец A скользит по оси Ox, а конец B — по оси Oy. Определить траекторию движения точки M отрезка, делящей его на части $BM = a$ и $MA = b$ (эллиптический циркуль Леонардо да Винчи).

178. Даны окружности $x^2 + y^2 = b^2$ и $x^2 + y^2 = a^2 (b < a)$. Произвольный луч OBA пересекает их соответственно в точках B и A, из которых проведены прямые, параллельные осям координат, до пересечения их в точке M. Определить геометрическое место точек M.

179. Написать простейшее уравнение эллипса, у которого расстояния от одного из фокусов до концов большой оси равны 5 и 1.

180. Эллипс, симметричный относительно осей координат, проходит через точки $M(2\sqrt{3};\ \sqrt{6})$ и $A(6;\ 0)$. Написать его уравнение, найти эксцентриситет и расстояния от точки M до фокусов.

181. Найти длину хорды эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, направленной по диагонали прямоугольника, построенного на осях эллипса.

182. Найти общие точки эллипса $x^2+4y^2=4$ и окружности, проходящей через фокусы эллипса и имеющей центр в его «верхней» вершине.

183. На прямой $x=-5$ найти точку, одинаково удаленную от «левого» фокуса и от «верхней» вершины эллипса $x^2+5y^2=20$.

184. На эллипсе $x^2+5y^2=20$ найти точку, радиус-векторы которой перпендикулярны.

Указание. Искомые точки суть точки пересечения с эллипсом окружности, проходящей через фокусы эллипса и имеющей центр в начале координат.

185. Абсциссы точек окружности $x^2+y^2=4$ увеличены вдвое. Определить полученную кривую.

186. Определить траекторию точки M, которая при своем движении остается втрое ближе к точке $A(1;0)$, чем к прямой $x=9$.

§ 10. Гипербола

Гиперболой называется *геометрическое место точек, разность расстояний от каждой из которых до двух данных точек F и F_1* (фокусов) *есть постоянная величина* $2a$ $(0<2a<F_1F)$.

Каноническое (простейшее) уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1}$$

Гипербола, заданная уравнением (1), симмметрична относительно осей координат (рис. 2). Она пересекает ось Ox в точках $A(a;\ 0)$ и $A_1(-a;\ 0)$ — вершинах гиперболы и не пересекает ось Oy. Параметр a называется *вещественной* полуосью, b — *мнимой* полуосью. Параметр $c=\sqrt{a^2+b^2}$ есть расстояние от фокуса до центра. Отношение $\frac{c}{a}=\varepsilon>1$ называется *эксцентриситетом* гиперболы. Прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ называются *асимптотами* гиперболы. Расстояния от точки $M(x;\ y)$ гиперболы до ее фокусов (*фокальные радиус-векторы*) определяются формулами

$$r = |\varepsilon x - a|, \qquad r_1 = |\varepsilon x + a|. \tag{2}$$

Гипербола, у которой $a = b$, называется *равносторонней*, ее уравнение $x^2 - y^2 = a^2$, а уравнения асимптот $y = \pm x$. Гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ называются *сопряженными*.

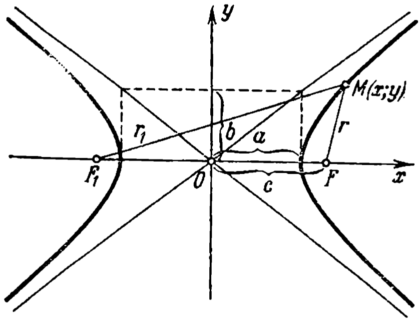

Рис. 2

187. Построить гиперболу $x^2 - 4y^2 = 16$ и ее асимптоты. Найти фокусы, эксцентриситет и угол между асимптотами.

188. На гиперболе $x^2 - 4y^2 = 16$ взята точка M с ординатой, равной 1. Найти расстояние от нее до фокусов.

189. Написать каноническое уравнение гиперболы, зная, что: 1) расстояние между фокусами $2c = 10$, а между вершинами $2a = 8$; 2) вещественная полуось $a = 2\sqrt{5}$, а эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{1{,}2}$.

190. Гипербола симметрична относительно осей координат, проходит через точку $M(6;\ -2\sqrt{2})$ и имеет мнимую полуось $b = 2$. Написать ее уравнение и найти расстояния от точки M до фокусов.

191. Написать уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы — в вершинах эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

192. Написать уравнение гиперболы, имеющей эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$, проходящей через точку $(2a;\ a\sqrt{3})$ и симметричной относительно осей координат.

193. Построить гиперболу $y^2 = a^2 + x^2$, найти координаты ее фокусов и угол между асимптотами.

194. Написать уравнения касательных к гиперболе $x^2 - 4y^2 = 16$, проведенных из точки $A(0; -2)$.

195. Найти расстояние от фокуса гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ до ее асимптот и угол между асимптотами.

196. Найти сторону квадрата, вписанного в гиперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, и исследовать, в какие гиперболы можно вписать квадрат.

197. Найти эксцентриситет гиперболы, асимптота которой составляет с вещественной осью угол: 1) $60°$; 2) α.

198. Определить область расположения кривой $y = -\sqrt{9 + x^2}$. Построить кривую.

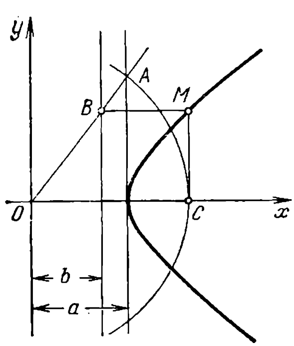

Рис. 3

199. Определить траекторию точки $M(x; y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к прямой $x = 1$, чем к точке $F(4; 0)$.

200. Даны точки $A(-1; 0)$ и $B(2; 0)$. Точка M движется так, что в $\triangle AMB$ угол B остается вдвое больше угла A. Определить траекторию движения.

201. Дана точка $A(a; 0)$. По оси Oy движется точка B. На прямой BE, параллельной Ox, откладываются отрезки BM и BM_1, равные AB. Определить геометрическое место точек M и M_1.

202. Даны прямые $x = \pm b$ и $x = \pm a$ $(b < a)$. Произвольный луч OA (рис. 3) пересекает прямую $x = b$ (или $x = -b$) в точке B и прямую $x = a$ (или $x = -a$) в точке A. Радиусом OA описана дуга, пересекающая Ox в точке C. Из точек B и C проведены прямые, параллельные соответственно Ox и Oy, до пересечения в точке M. Определить геометрическое место точек M.

---

203. Написать каноническое уравнение гиперболы, зная, что расстояния от одной из ее вершин до фокусов равны 9 и 1.

204. Найти точки пересечения асимптот гиперболы $x^2 - 3y^2 = 12$ с окружностью, имеющей центр в правом фокусе гиперболы и проходящей через начало координат.

205. Гипербола проходит через точку $M(6;\ 3\sqrt{5}/2)$, симметрична относительно осей координат и имеет вещественную полуось $a = 4$. Написать уравнения перпендикуляров, опущенных из левого фокуса гиперболы на ее асимптоты.

206. На гиперболе $9x^2 - 16y^2 = 144$ найти точку, расстояние от которой до левого фокуса вдвое меньше, чем до правого.

207. На гиперболе $x^2 - y^2 = 4$ найти точку, фокальные радиусы-векторы которой перпендикулярны (см. указание к задаче 184).

208. Точка M делит расстояние между фокусами гиперболы $9x^2 - 16y^2 = 144$ в отношении $F_1M : MF = 2 : 3$, где F_1 — левый фокус гиперболы. Через точку M проведена прямая под углом $135°$ к оси Ox. Найти точки пересечения этой прямой с асимптотами гиперболы.

209. Определить траекторию точки M, которая движется так, что остается вдвое дальше от точки $F(-8;\ 0)$, чем от прямой $x = -2$.

210. Даны точки $A(-a;\ 0)$ и $B(2a;\ 0)$. Точка M движется так, что угол MAB остается втрое меньше внешнего угла AMC треугольника AMB. Определить траекторию движения точки M.

§ 11. Парабола

Параболой называется *геометрическое место точек, одинаково удаленных от данной точки* (фокуса) *и данной прямой* (директрисы).

Каноническое уравнение параболы имеет два вида:

1) $y^2 = 2px$ — парабола симметрична относительно оси Ox (рис. 4);

2) $x^2 = 2py$ — парабола симметрична относительно оси Oy (рис. 5).

В обоих случаях *вершина* параболы, т. е. точка, лежащая на оси симметрии, находится в начале координат.

Парабола

$$y^2 = 2px$$

имеет фокус $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$ и директрису $x = -\frac{p}{2}$; фокальный радиус-вектор точки $M(x;\ y)$ на ней $r = x + \frac{p}{2}$.

Парабола

$$x^2 = 2py$$

имеет фокус $F\left(0;\ \frac{p}{2}\right)$ и директрису $y = -\frac{p}{2}$; фокальный радиус-вектор точки $M(x;\ y)$ на ней $r = y + \frac{p}{2}$.

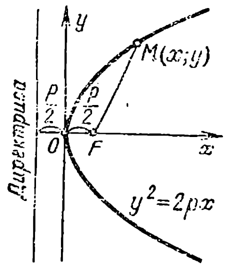

Рис. 4

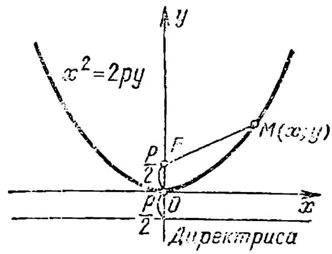

Рис. 5

211. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точки $F(0;\ 2)$ и от прямой $y = 4$. Найти точки пересечения этой кривой с осями координат и построить ее.

212. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от начала координат и от прямой $x = -4$. Найти точки пересечения этой кривой с осями координат и построить ее.

213. Построить параболы, заданные уравнениями: 1) $y^2 = 4x$; 2) $y^2 = -4x$; 3) $x^2 = 4y$; 4) $x^2 = -4y$, а также их фокусы и директрисы и написать уравнения директрис.

214. Написать уравнение параболы: 1) проходящей через точки (0; 0) и (1; —3) и симметричной относительно оси Ox; 2) проходящей через точки (0; 0) и (2; —4) и симметричной относительно оси Oy.

215. Канат подвесного моста имеет форму параболы (рис. 6). Написать ее уравнение относительно указанных на чертеже осей, если прогиб каната $OA = a$, а длина пролета $BC = 2b$.

216. Написать уравнение окружности, имеющей центр в фокусе параболы $y^2 = 2px$ и касающейся ее директрисы. Найти точки пересечения параболы и окружности.

217. Написать уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой $x+y=0$ и окружности $x^2+y^2+4y=0$ и симметрична относительно оси Oy. Построить окружность, прямую и параболу.

218. На параболе $y^2=6x$ найти точку, фокальный радиус-вектор которой равен 4,5.

219. Зеркальная поверхность прожектора образована вращением параболы вокруг ее оси симметрии.

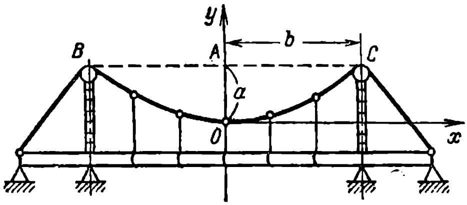

Рис. 6

Диаметр зеркала 80 см, а глубина его 10 см. На каком расстоянии от вершины параболы нужно поместить источник света, если для отражения лучей параллельным пучком он должен быть в фокусе параболы?

220. Определить область расположения кривой $y=-\sqrt{-x}$. Построить кривую.

221. Из вершины параболы $y^2=2px$ проведены всевозможные хорды. Написать уравнение геометрического места середин этих хорд.

222. Определить геометрическое место центров окружностей, касающихся окружности $x^2+y^2=2ax$ и оси Oy.

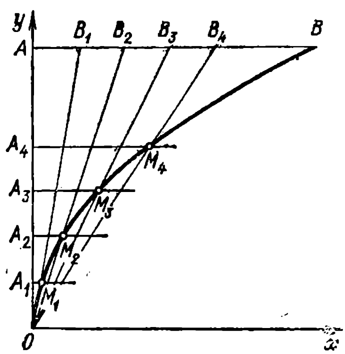

Рис. 7

223. Даны точки $A(0;\ a)$ и $B(a;\ a)$. Отрезки OA и AB разделены на n равных частей точками A_1, A_2, A_3, ... и B_1, B_2, B_3, ... (рис. 7). Пусть M_k — точка пересечения луча OB_k с прямой $A_kM_k \parallel Ox$. Показать, что такие точки M_k лежат на параболе $y^2=ax$.

Построить этим приемом параболы $y^2=4x$; $y^2=5x$; $y^2=3x$.

224. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от начала координат и от прямой $x = 4$. Найти точки пересечения этой кривой с осями координат и построить ее.

225. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точки $F(2; 0)$ и от прямой $y = 2$. Найти вершину параболы, точки пересечения ее с Ox и построить ее.

226. Написать уравнение параболы: 1) проходящей через точки $(0; 0)$ и $(-1; 2)$ и симметричной относительно оси Ox; 2) проходящей через точки $(0; 0)$ и $(2; 4)$ и симметричной относительно оси Oy.

227. Написать уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой $y = x$ и окружности $x^2 + y^2 + 6x = 0$ и симметрична относительно оси Ox. Построить прямую, окружность и параболу.

228. В параболу $y^2 = 2x$ вписан правильный треугольник. Определить его вершины (см. указание к задаче 173).

229. Написать уравнения касательных к параболе $y^2 = 8x$, проведенных из точки $A(0; -2)$.

230. Через фокус параболы $y^2 = -4x$ проведена прямая под углом $120°$ к оси Ox. Написать уравнение прямой и найти длину образовавшейся хорды.

§ 12. Директрисы, диаметры и касательные к кривым второго порядка

1°. Директрисами эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (при $a > b$) и гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ называются прямые, параллельные оси Oy и отстоящие от нее на расстояние $\frac{a}{\varepsilon}$, где ε — эксцентриситет кривой.

Уравнения директрис:

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}. \tag{1}$$

Свойство директрис: *отношение расстояний от точки кривой до фокуса и до соответствующей директрисы равно эксцентриситету кривой*

$$\frac{r}{d} = \varepsilon. \tag{2}$$

2°. Диаметром кривой второго порядка называется *геометрическое место середин параллельных хорд.* Диаметрами эллипса и гиперболы оказываются отрезки и лучи прямых, проходящих через центр, а диаметрами параболы — лучи, параллельные ее оси.

Уравнение диаметра, делящего пополам хорды с наклоном $\operatorname{tg}\alpha = k$, будет

для кривых $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$y = \mp \frac{b^2}{a^2k} x; \tag{3}$$

для параболы $y^2 = 2px$:

$$y = \frac{p}{k}. \tag{4}$$

Два диаметра эллипса и гиперболы, из которых каждый делит пополам хорды, параллельные другому, называются *взаимно сопряженными.* Их угловые коэффициенты k и k_1 связаны зависимостью $kk_1 = -\frac{b^2}{a^2}$ (у эллипса) и $kk_1 = \frac{b^2}{a^2}$ (у гиперболы).

3°. Уравнения касательной:

к эллипсу $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$;

к гиперболе $\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$;

к параболе $(y^2 = 2px)$ $yy_0 = p(x + x_0)$, где $(x_0;\ y_0)$ — точка касания.

231. Построить эллипс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, его директрисы и найти расстояния от точки эллипса с абсциссой $x = -3$ до правого фокуса и правой директрисы.

232. Построить гиперболу $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, ее директрисы и найти расстояния от точки гиперболы с абсциссой $x = 5$ до левого фокуса и левой директрисы.

233. Написать каноническое уравнение эллипса, директрисами которого служат прямые $x = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$ и большая полуось которого равна 2.

234. Написать уравнение гиперболы, асимптоты которой $y = \pm x$, а директрисы $x = \pm\sqrt{6}$.

235. Построить эллипс $x^2 + 4y^2 = 16$, диаметр $y = \frac{x}{2}$ и сопряженный ему диаметр и найти длины a_1 и b_1 построенных полудиаметров.

236. Построить гиперболу $x^2 - 4y^2 = 4$, диаметр $y = -x$ и сопряженный ему диаметр и найти угол между диаметрами.

237. Найти длину того диаметра эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, который равен своему сопряженному диаметру.

238. Асимптота гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ составляет с осью Ox угол 60°. Написать уравнение диаметра, сопряженного с диаметром $y = 2x$. Выбрав произвольно отрезок a, построить кривую, диаметры и хорды, параллельные данному диаметру.

239. Определить геометрическое место середин хорд параболы $y^2 = 4x$, составляющих с Ox угол 45°.

240. Дан эллипс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Через точку $(-2; 1)$ провести хорду, делящуюся в этой точке пополам.

241. Дана парабола $y^2 = -4x$. Через точку $(-2; -1)$ провести хорду, делящуюся в этой точке пополам.

242. На примере задачи 235 проверить теорему Аполлония: $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$ и $a_1 b_1 \sin\varphi = ab$, где a_1 и b_1 — длины сопряженных полудиаметров, a и b — полуоси эллипса, а φ — угол между сопряженными диаметрами.

243. Написать уравнения касательных к кривым: 1) $x^2 + 4y^2 = 16$; 2) $3x^2 - y^2 = 3$; 3) $y^2 = 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

244. Показать, что если прямая $Ax + By + C = 0$ есть касательная к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$.

Указание. Из пропорциональности коэффициентов уравнений $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ и $Ax + By + C = 0$ определить x_0 и y_0 и подставить их в уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

245. Написать уравнения касательных к эллипсу $x^2 + 4y^2 = 20$, параллельных биссектрисе первого координатного угла.

246. Написать уравнения касательных к эллипсу $x^2 + 2y^2 = 8$, проведенных из точки $(0; 6)$.

247. Написать уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, отсекающей на осях координат равные положительные отрезки.

248. Показать, что если прямая $Ax+By+C=0$ есть касательная к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, то $A^2a^2-B^2b^2=C^2$ (см. указание к задаче 244).

249. Написать уравнения касательных к гиперболе $4x^2-9y^2=36$, перпендикулярных к прямой $x+2y=0$.

250. Доказать, что нормаль к эллипсу есть биссектриса угла между радиус-векторами соответствующей точки эллипса.

251. Доказать, что касательная к гиперболе есть биссектриса угла между радиус-векторами точки касания.

252. Доказать, что лучи, выходящие из фокуса параболы, отражаются от параболы по прямым, параллельным ее оси.

Указание. Нужно написать уравнение нормали MN, найти точку N пересечения ее с осью параболы и доказать, что $FM=FN$, где F — фокус параболы.

---

253. Найти точки пересечения асимптот гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ с ее директрисами.

254. Построить эллипс $x^2+4y^2=16$, его диаметр $y=x$ и сопряженный ему диаметр и найти угол между этими диаметрами.

255. Определить геометрическое место середин хорд гиперболы $x^2-4y^2=16$, составляющих угол 45° с осью Ox.

256. Дана гипербола $4x^2-y^2=4$. Через точку $(2; 2)$ провести хорду, делящуюся в этой точке пополам.

257. На эллипсе $x^2+2y^2=6$ взята точка M с ординатой 1 и отрицательной абсциссой. Найти угол касательной к эллипсу в точке M с прямой OM.

258. Показать, что если прямая $Ax+By+C=0$ есть касательная к параболе $y^2=2px$, то $B^2p=2AC$ (см. указание к задаче 244).

259. Написать уравнение касательной к параболе $y^2=8x$, параллельной прямой $x+y=0$.

§ 13. Преобразование декартовых координат. Параболы $y = ax^2 + bx + c$ и $x = ay^2 + by + c$. Гипербола $xy = k$

1°. Координаты $(x;\ y)$ в данной системе преобразуются к координатам $(X;\ Y)$ в новой системе по формулам:

1) *при параллельном сдвиге осей* и перенесении начала координат в точку $O_1(\alpha;\ \beta)$

$$x = X + \alpha, \qquad y = Y + \beta; \tag{1}$$

2) *при повороте осей* на угол φ

$$x = X\cos\varphi - Y\sin\varphi, \qquad y = X\sin\varphi + Y\cos\varphi. \tag{2}$$

2°. Уравнение $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ переносом начала координат в точку $O_1(\alpha;\ \beta)$ приводится к виду $Y = aX^2$ и, следовательно, определяет *параболу* с вершиной $O_1(\alpha;\ \beta)$ и осью симметрии, параллельной Oy (рис. 8). Уравнение $y = ax^2 + bx + c$ выделением в правой части полного квадрата приводится к предыдущему и поэтому тоже определяет параболу. При $a > 0$ парабола от вершины направлена «вверх», при $a < 0$ — «вниз».

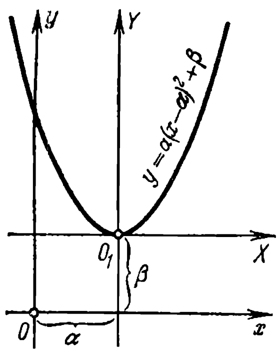

Рис. 8

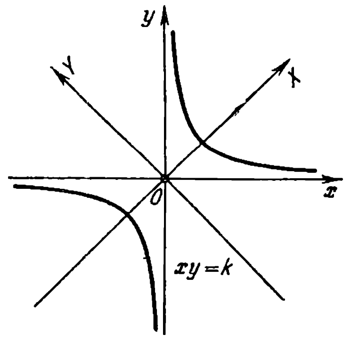

Рис. 9

3°. Уравнение $xy = k$ при повороте осей координат на угол $\varphi = 45°$ приводится к виду $X^2 - Y^2 = 2k$ и, следовательно, определяет *равностороннюю гиперболу*, асимптотами которой служат оси координат (рис. 9). Уравнение $(x-\alpha)(y-\beta) = k$ переносом начала координат в точку $O_1(\alpha;\ \beta)$ приводится к виду $XY = k$ и поэтому тоже определяет равностороннюю гиперболу.

260. 1) Точка $A(3;\ 1)$ при параллельном сдвиге осей координат получила новые координаты $(2;\ -1)$. Построить данные и смещенные оси координат и точку A.

2) Найти острый угол поворота осей координат, при котором точка $A(2;\ 4)$ получит новую абсциссу 4. Построить обе системы координат и точку A.

261. Перенесением начала координат упростить уравнения:

1) $\frac{(x-2)^2}{4}+(y+1)^2=1$; 2) $\frac{(x+3)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$;

3) $(y+2)^2=4(x-3)$; 4) $2y=-(x+2)^2$;

5) $x^2+4y^2-6x+8y=3$; 6) $y^2-8y=4x$;

7) $x^2-4y^2+8x-24y=24$; 8) $x^2+6x+5=2y$.

Построить старые и новые оси координат и кривые.

262. Поворотом осей координат на 45° упростить уравнения:

1) $5x^2-6xy+5y^2=32$; 2) $3x^2-10xy+3y^2+32=0$.

Построить старые и новые оси координат и кривые.

263. Построить по точкам кривую $xy=-4$ и поворотом осей на угол $\varphi=-45°$ преобразовать уравнение.

264. Переносом начала координат привести к виду $xy=k$ уравнения кривых: 1) $xy-2x=6$; 2) $xy-2x-y+8=0$; 3) $xy-x+2y=6$; 4) $xy+2x=3y$.

Указание. Уравнение $xy+Ax+By+C=0$ можно написать в виде $(x+B)(y+A)=AB-C$.

265. Построить параболы:

1) $y=(x-2)^2$; 2) $y=(x-2)^2+3$;
3) $y=(x+2)^2$; 4) $y=(x+2)^2-3$.

266. Построить параболы:

1) $y=x^2-4x+5$; 2) $y=x^2+2x+3$;

3) $y=-x^2+2x-2$,

выделив в правых частях уравнений полные квадраты.

267. Построить параболы:
1) $y=4x-x^2$ и 2) $2y=3+2x-x^2$,
найдя их точки пересечения с осью Ox.

268. Струя воды фонтана достигает наибольшей высоты 4 м на расстоянии 0,5 м от вертикали, проходящей через точку O выхода струи. Найти высоту струи над горизонталью Ox на расстоянии 0,75 м от точки O.

269. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy и отсекающей на ней отрезок b, а на оси Ox — отрезки a и $-a$.

Указание. В уравнении параболы вида $y = Ax^2 + Bx + C$ подставить координаты данных на параболе точек $(-a; 0)$, $(a; 0)$ и $(0; b)$ и затем найти A, B и C.

270. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $O(0; 0)$, $A(-1; -3)$ и $B(-2; -4)$. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок оси Ox, отсеченный параболой.

271. На какой угол нужно повернуть оси координат, чтобы исчез член, содержащий xy в уравнениях:

1) $x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$; 2) $5x^2 - 4xy + 2y^2 - 24 = 0$?

Построить старые и новые оси координат и кривые.

272. Определить траекторию движения пули, брошенной под углом φ к горизонту с начальной скоростью v_0. Определить также дальность полета пули и наивысшую точку траектории (сопротивлением воздуха пренебречь).

273. Написать уравнение геометрического места точек $M(x; y)$, отношение расстояний от которых до точки $F(4; 0)$ к расстояниям до прямой $x = -2$ равно 2.

274. Показать, что переносом начала координат в левую вершину эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ или в правую вершину гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ оба уравнения приводятся к одинаковому виду: $y^2 = 2px + qx^2$, где $p = \frac{b^2}{a}$, а $q = \varepsilon^2 - 1$.

275. По результатам задачи 274 определить эксцентриситет и тип кривой: 1) $y^2 = x - \frac{1}{4}x^2$; 2) $y^2 = x + \frac{1}{4}x^2$; 3) $y^2 = x$. Построить кривые, найдя для первых двух точки пересечения их с осью Ox и параметры a и b.

---

276. Выделением полных квадратов и переносом начала координат упростить уравнения линий:

1) $2x^2 + 5y^2 - 12x + 10y + 13 = 0$;

2) $x^2 - y^2 + 6x + 4y - 4 = 0$;

3) $y^2+4y=2x$;

4) $x^2-10x=4y-13$.

Построить старые и новые оси и кривые.

277. Поворотом осей координат на 45° упростить уравнение $3x^2-2xy+3y^2-8=0$. Определить координаты фокусов в старой системе координат.

278. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок, отсекаемый на оси Ox параболой $y=3-2x-x^2$. Построить обе кривые.

279. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок прямой $x+y=6$, отсеченный гиперболой $xy=8$. Построить все три линии.

280. Точка A — вершина параболы $y=x^2+6x+5$, B — точка пересечения параболы с осью Oy. Написать уравнение перпендикуляра, восставленного из середины отрезка AB.

281. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox и отсекающей на ней отрезок -4, а на оси Oy — отрезки 4 и -4.

Указание. Уравнение параболы должно иметь вид $x=ay^2+c$ (почему?).

282. Построить по точкам пересечения с осями координат параболы:

1) $3y=9-x^2$; 2) $y^2=9-3x$;

3) $y^2=4+x$; 4) $x^2=4+2y$.

283. Написать уравнение геометрического места точек $M(x;\ y)$, отношение расстояний от которых до точки $F(4;0)$ к расстояниям до прямой $x=10$ равно $1/2$.

§ 14. Смешанные задачи на кривые второго порядка

284. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок прямой $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, отсеченный осями координат.

285. Найти расстояние от центра окружности $x^2+y^2+ay=0$ до прямой $y=2(a-x)$.

286. Через центр окружности $x^2+y^2=2ax$ проведена прямая, параллельная прямой $x+2y=0$ и пересекающая окружность в точках A и B. Найти площадь $\triangle AOB$.

287. Показать, что геометрическое место точек M, которые удалены в m раз дальше от данной точки A, чем от другой данной точки B, есть прямая при $m = 1$ и окружность при $m \neq 1$.

288. Отрезок AB разделен на части $AO = a$ и $OB = b$. Показать, что геометрическое место точек, из которых отрезки AO и OB видны под равными углами, есть прямая при $a = b$ и окружность при $a \neq b$ (аполлониева окружность).

289. Определить траекторию точки $M(x; y)$, движущейся так, что сумма квадратов расстояний от нее до прямых $y = kx$ и $y = -kx$ остается постоянной и равной a^2.

290. Эллипс, симметричный относительно оси Ox и прямой $x = -5$, проходит через точки $(-1; 1{,}8)$ и $(-5; 3)$. Написать уравнение эллипса и построить его.

291. Найти площадь равностороннего треугольника, вписанного в гиперболу $x^2 - y^2 = a^2$.

292. Найти угол между диагоналями прямоугольника, вершины которого находятся в точках пересечения эллипса $x^2 + 3y^2 = 12l^2$ и гиперболы $x^2 - 3y^2 = 6l^2$.

293. Окружность с центром в начале координат проходит через фокусы гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$. Найти точки пересечения окружности с асимптотами гиперболы.

294. Построить гиперболы $xy = -4$ и $x^2 - y^2 = 6$ и найти площадь $\triangle ABC$, где A и B — вершины двух пересекающихся ветвей гипербол, а C — точка пересечения двух других ветвей гипербол.

295. Доказать, что произведение расстояний любой точки гиперболы от ее асимптот есть величина постоянная, равная $\frac{a^2b^2}{c^2}$.

296. Найти длину и уравнение перпендикуляра, опущенного из фокуса параболы $y = -\frac{x^2}{8}$ на прямую, отсекающую на осях координат отрезки $a = b = 2$.

297. Построить эллипс $x^2 + 4y^2 = 4$ и параболу $x^2 = 6y$ и найти площадь трапеции, основаниями которой служат большая ось эллипса и общая хорда эллипса и параболы.

298. Из фокуса параболы $y^2 = 2px$, как из центра, описана окружность так, что общая хорда кривых одинаково удалена от вершины и от фокуса параболы. Написать уравнение окружности.

299. Найти длину и уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины параболы $by = x^2 + 2ax + a^2 + b^2$ на прямую, отсекающую на осях координат отрезки a и b.

300. Построить по точкам пересечения с осями координат параболы $4y = 12 - x^2$ и $4x = 12 - y^2$ и найти длину их общей хорды.

301. Найти площадь четырехугольника с вершинами в точках пересечения параболы $y = 4 - x^2$ с осью Ox и с прямой $y = 3x$.

302. Написать уравнение окружности, проходящей через начало координат и через точки пересечения параболы $y = \frac{x^2}{a} - 2x + a$ с осями координат.

303. Дан эллипс $x^2 + 4y^2 = 16$. Из его вершины $A(4;\ 0)$ проведены всевозможные хорды. Определить геометрическое место середин этих хорд и построить кривые.

304. Определить траекторию точки $M(x;\ y)$, движущейся так, что разность квадратов расстояний от нее до биссектрис координатных углов остается равной 8.

305. Составить уравнение геометрического места центров окружностей, проходящих через точку $A(3;4)$ и касающихся оси Ox.

306. Выделением полных квадратов и переносом начала упростить уравнение линии $x^2 - y^2 - 4x - 6y - 9 = 0$. Построить старые и новые оси координат и кривую.

307. Найти геометрическое место середин фокальных радиус-векторов, проведенных из правого фокуса ко всем точкам гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

308. Написать уравнение эллипса, проходящего через точку $A(a;\ -a)$, если фокусы его находятся в точках $F(a;\ a)$ и $F_1(-a;\ -a)$.

Упростить уравнение поворотом осей координат на 45°.

309. Поворотом осей координат на угол $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ упростить уравнение линии $3x^2 + 8xy - 3y^2 = 20$. Построить старые и новые оси координат и кривую.

310. Написать уравнение геометрического места точек, разность квадратов расстояний от которых до прямой $3x+4y=0$ и до оси Ox остается постоянной и равной 2,4.

311. Написать уравнение геометрического места точек $M(x; y)$, отношение расстояний от которых до точки $F\left(\frac{p}{\varepsilon+1}; 0\right)$ к расстояниям до прямой $x=-\frac{p}{\varepsilon(\varepsilon+1)}$ равно ε.

312. Построить области, координаты точек которых удовлетворяют неравенствам:

1) $R^2 < x^2+y^2 < 4R^2$ и $x^2 > R^2/4$;
2) $x^2-y^2 > a^2$ и $x^2 < 4a^2$;
3) $xy > a^2$ и $|x+y| < 4a$;
4) $2x < y^2+4y$ и $x^2+y^2+4x+4y < 0$.

§ 15. Общее уравнение линии второго порядка

1°. Линией второго порядка называется линия, определяемая уравнением 2-й степени, которое в общем виде можно написать так:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0. \tag{1}$$

Составим из коэффициентов уравнения (1) два определителя:

$$\delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \qquad \Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ называется *дискриминантом уравнения* (1), а δ — *дискриминантом старших его членов.* В зависимости от значений δ и Δ уравнение (1) определяет следующий геометрический образ:

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	Эллипс (действительный или мнимый)	Точка
$\delta < 0$	Гипербола	Пара пересекающихся прямых
$\delta = 0$	Парабола	Пара параллельных прямых (действительных или мнимых)

2°. **Преобразование уравнения (1) к центру.** Если $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$, то линия имеет центр, координаты которого находятся из уравнений:

$$\Phi'_x(x,\ y) = 0, \qquad \Phi'_y(x,\ y) = 0, \tag{2}$$

где $\Phi(x,\ y)$ — левая часть уравнения (1). Перенеся начало в центр $O_1(x_0;\ y_0)$ (рис. 10), приведем уравнение (1) к виду

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + F_1 = 0, \tag{3}$$

где

$$F_1 = Dx_0 + Ey_0 + F = \frac{\Delta}{\delta}. \tag{4}$$

3°. **Преобразование уравнения (3) к осям симметрии.** Поворотом осей O_1x_1 и O_1y_1 на некоторый угол φ

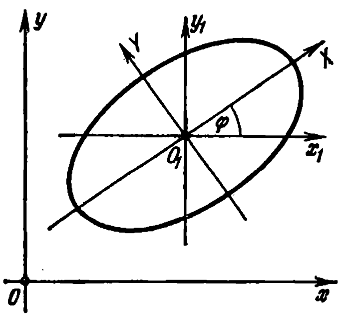

Рис. 10

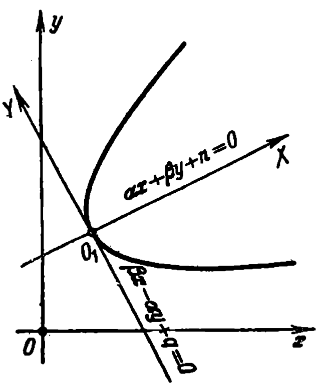

Рис. 11

(рис. 10) уравнение (3) приводится к каноническому виду:

$$A_1X^2 + C_1Y^2 + F_1 = 0. \tag{5}$$

Коэффициенты A_1 и C_1 являются корнями уравнения

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + \delta = 0. \tag{6}$$

Угол поворота φ находится по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{A_1 - C}. \tag{7}$$

4°. **Преобразование уравнения линии второго порядка, не имеющей центра.** Если $\delta = 0$, то линия не имеет центра или не имеет определенного центра. Ее уравнение можно тогда записать в виде

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{8}$$

Случай 1. D и E пропорциональны α и β: $D = m\alpha$, $E = m\beta$. Уравнение (2) примет вид $(\alpha x + \beta y)^2 + 2m(\alpha x + \beta y) + F = 0$, откуда

$$\alpha x + \beta y = -m \pm \sqrt{m^2 - F} \text{ — пара прямых.}$$

Случай 2. D и E не пропорциональны α и β. Уравнение (8) можно переписать в виде

$$(\alpha x + \beta y + n)^2 + 2m(\beta x - \alpha y + q) = 0. \qquad (9)$$

Параметры m, n и q найдутся сравнением коэффициентов в уравнениях (8) и (9). Далее, приняв за ось O_1X прямую $\alpha x + \beta y + n = 0$, за ось O_1Y прямую $\beta x - \alpha y + q = 0$ (рис. 11), найдем: $Y = \dfrac{\alpha x + \beta y + n}{\pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$, $X = \dfrac{\beta x - \alpha y + q}{\pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$. После этого уравнение (9) примет вид $Y^2 = 2pX$, где $p = \dfrac{|m|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$. Ось O_1X направляется в ту полуплоскость, в которой $\beta x - \alpha y + q$ имеет знак, противоположный знаку m, как это следует из уравнения (9).

313. Выяснить геометрический смысл уравнений:

1) $4x^2 - y^2 = 0$; 2) $4x^2 + y^2 = 0$;
3) $x^2 + y^2 + 2x + 2 = 0$;
4) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$; 5) $x^2 + xy = 0$;
6) $y^2 - 16 = 0$; 7) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$.

314. Найти центры и преобразовать к центру уравнения линий:

1) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$;
2) $x^2 - y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$;
3) $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 6x - 3y - 8 = 0$.

315. Поворотом осей координат преобразовать уравнения к каноническому виду и построить кривые:

1) $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 24$; 2) $2x^2 + 4xy - y^2 = 12$.

316. Преобразовать к каноническому виду уравнения и построить кривые:

1) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y - 12 = 0$;
2) $x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$.

317. Преобразовать к каноническому виду уравнения линий:

1) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 20x + 10y - 50 = 0$;
2) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 12y + 8 = 0$

и построить их.

318. По дискриминантам δ и Δ определить геометрический смысл уравнений:

1) $x^2 - 4xy + 3y^2 - 8x + 14y + 15 = 0$;
2) $x^2 + 2xy + 4y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$;
3) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x + 6y + 2 = 0$.

Решив первое и третье уравнения относительно y, построить линии, определяемые этими уравнениями.

319. Привести к каноническому виду уравнение кривой $y = \frac{3x^2 - 12x + 4}{4x - 8}$ и построить ее.

320. Написать уравнение кривой второго порядка, имеющей центром точку $O_1(1; 2)$ и проходящей через начало координат и через точки $(0; 4)$ и $(1; -1)$.

321. Показать, что уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ определяет дугу параболы, построить параболу и найти ее вершину.

Указание. Повернуть оси координат на угол $\varphi = -45°$.

322. Написать уравнение геометрического места точек $M(x; y)$, отношение расстояния от каждой из которых до точки $F(m; n)$ к расстоянию от нее до прямой $x \cos\alpha + y \sin\alpha - q = 0$ равно ε. Обозначив коэффициенты полученного уравнения через A, B, C, ..., определить инварианты $A + C$ и $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$.

---

323. Выяснить геометрический смысл уравнений:

1) $x^2 - 4y^2 = 0$;
2) $x^2 + 2y^2 + 4x - 8y + 12 = 0$;
3) $x^2 + 5xy - 6y^2 = 0$.

324. Преобразовать к каноническому виду уравнения и построить кривые:

1) $x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$;
2) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 12x - 12y + 4 = 0$.

325. Преобразовать к каноническому виду уравнения:

1) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;
2) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

и построить линии, изображаемые ими.

326. По дискриминантам δ и Δ определить геометрический смысл уравнений:

1) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0$;
2) $x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x + 10y - 7 = 0$.

Решив каждое уравнение относительно y, построить линию, определяемую им.

327. Написать уравнение геометрического места точек $M(x;\ y)$, отношение расстояний от которых до точки $F(3;\ 3)$ к расстояниям до прямой $x + y = 0$ равно: 1) $\varepsilon = \frac{1}{2}$; 2) $\varepsilon = 2$.

328. Написать уравнение геометрического места точек $M(x;\ y)$, одинаково удаленных от точки $F(a/2;\ a/2)$ и от прямой $x + y = 0$, и привести его к каноническому виду.

329. Написать уравнение геометрического места точек, разность квадратов расстояний от которых до прямой $x - 2y = 2$ и до оси Ox остается постоянной и равной 3,2. Преобразовать его к каноническому виду и построить кривую.

§ 16. Полярные координаты

Пусть на плоскости дана точка O — полюс и луч OP — полярная ось (рис. 12). Тогда положение точки M на плоскости определится:

1) *полярным углом* $\varphi = \angle MOP$;
2) *радиус-вектором* $r = OM$.

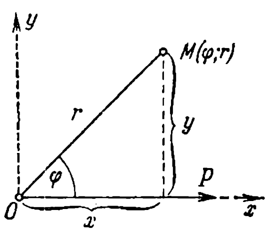

Рис. 12

При изучении уравнений, связывающих r и φ, бывает полезно рассматривать полярные координаты φ и r принимающими какие угодно положительные и отрицательные значения. При этом отрицательные углы φ отсчитываются по часовой стрелке, а отрицательные r откладываются не по лучу, а по его продолжению за полюс.

Если принять полюс за начало декартовых прямоугольных координат, а полярную ось OP — за ось Ox, то декартовы координаты $(x;\ y)$ точки M и ее полярные координаты $(\varphi;\ r)$ будут связаны зависимостью

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi; \tag{1}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Если принять фокус эллипса, гиперболы и параболы за полюс, а фокальную ось симметрии за полярную ось, направленную в сторону, противоположную ближайшей вершине, то уравнение всех трех кривых в полярных координатах будет одинаковым:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \tag{3}$$

где ε — эксцентриситет, а p — параметр. Для эллипса и гиперболы $p = \frac{b^2}{a}$.

330. В полярной системе координат (φ; r) построить точки $A(0;\ 3)$, $B(\pi/4;\ 2)$, $C(\pi/2;\ 3)$, $D(\pi;\ 2)$, $E(3\pi/2;\ 3)$.

331. Построить точки: $A(\pi/2;\ -2)$, $B(-\pi/2;\ 3)$, $C(-\pi/4;\ -4)$, $D(2\pi/3;\ -3)$.

332. Построить линию $r = 2 + 2\cos\varphi$.

Указание. Составить таблицу значений r для $\varphi = 0;\ \pm\pi/3;\ \pm\pi/2;\ \pm 2\pi/3;\ \pi$.

333. Построить линии (см. с. 346 и 348, рис. 80, 81 и 86):

1) $r = a\varphi$ (архимедова спираль);
2) $r = a(1 - \cos\varphi)$ (кардиоида);
3) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (лемниската);
4) $r = a/\varphi$ (гиперболическая спираль);
5) $r = a(1 + 2\cos\varphi)$ (улитка Паскаля).

334. Построить линии: 1) $r = a$; 2) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; 3) $r = \frac{b}{\sin\varphi}$.

335. Написать в полярных координатах уравнения: 1) прямой, отсекающей от полярной оси отрезок a и перпендикулярной к ней; 2) прямой, проходящей через точку $A(\alpha;\ a)$ и параллельной полярной оси.

336. Написать в полярных координатах уравнение прямой, проходящей через точку $A(\alpha; a)$ и составляющей с полярной осью угол β.

337. Написать в полярных координатах уравнение окружности с центром в точке $C(0;\ a)$ и радиусом, равным a.

338. Построить кривые:

1) $r = 3 - 2\sin 2\varphi$; 2) $r = 2 + \cos 3\varphi$;
3) $r = 1 - \sin 3\varphi$.

Указание. Определить сначала углы, при которых имеем r_{max} и r_{min}.

339. Построить линии (см. с. 347, рис. 82 и 83):

1) $r = a\sin 3\varphi$ (трехлепестковая роза);
2) $r = a\sin 2\varphi$ (четырехлепестковая роза).

340. Преобразовать к полярным координатам уравнения линий:

1) $x^2 - y^2 = a^2$; 2) $x^2 + y^2 = a^2$;
3) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$; 4) $y = x$;
5) $x^2 + y^2 = ax$;
6) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

341. Преобразовать к декартовым координатам уравнения линий и построить линии:

1) $r\cos\varphi = a$; 2) $r = 2a\sin\varphi$; 3) $r^2\sin 2\varphi = 2a^2$;
4) $r\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = a\sqrt{2}$; 5) $r = a(1 + \cos\varphi)$.

342. Написать канонические уравнения кривых второго порядка:

1) $r = \dfrac{9}{5 - 4\cos\varphi}$; 2) $r = \dfrac{9}{4 - 5\cos\varphi}$;
3) $r = \dfrac{3}{1 - \cos\varphi}$.

343. Конхоида. Через точку $A(\pi/2;\ a)$ проведена прямая, параллельная полярной оси. Произвольный луч OB пересекает эту прямую в точке B. На луче от точки B по обе ее стороны отложены отрезки $BM = BM_1 = b$. Определить геометрическое место точек M и M_1 в полярных координатах и построить кривую.

344. Строфоида. Прямая $x = a$ пересекает ось Ox в точке A и произвольный луч OB в точке B. На луче от точки B по обе ее стороны отложены отрезки BM_1 и BM_2, равные AB. Написать уравнение геометрического места точек M_1 и M_2 в полярных и декартовых координатах (рис. 84, с. 347).

345. Овал Кассини. Точка $M(\varphi; r)$ движется так, что произведение расстояний от нее до точек $F(0; a)$ и $F_1(\pi; a)$ остается равным b^2. Написать уравнение траектории движения точки M в полярных координатах.

346. Кардиоида. На произвольном луче OA от точки A пересечения его с окружностью $r = a\cos\varphi$

откладывается по обе стороны отрезок $AM = AM_1 = a$. Составить уравнение геометрического места точек M и M_1 в полярных и декартовых координатах.

347. Кардиоида (эпициклоида). Круг диаметра a катится без скольжения по кругу такого же диаметра снаружи его. Написать уравнение кривой, описанной точкой M катящейся окружности, если за полюс и начальное положение точки M принять точку касания кругов, а полярную ось провести через центры кругов (в начальном положении).

---

348. Построить кривые: 1) $r = 3 + 2\cos 2\varphi$; 2) $r = 3 - \sin 3\varphi$; 3) $r = a\cos 2\varphi$ (см. указание к задаче 338).

349. Построить 1) $r = 4(1 + \cos\varphi)$; 2) $r = 2 - \sin\varphi$.

350. Написать в полярных координатах уравнение прямой, проходящей через данные точки $A(\alpha;\ a)$ и $B(\beta;\ b)$.

Указание. Рассмотреть зависимость между площадями треугольников AOM, BOM и AOB, где $M(\varphi;\ r)$ — призвольная точка прямой.

351. Написать канонические уравнения кривых второго порядка:

1) $r = \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}\cos\varphi}$; 2) $r = \dfrac{1}{2 - \sqrt{5}\cos\varphi}$;

3) $r = \dfrac{1}{2 - 2\cos\varphi}$.

352. Лемниската Бернулли. Точка $M(\varphi; r)$ движется так, что произведение ее расстояний от точек $F(0; c)$ и $F_1(\pi; c)$ остается равным c^2. Написать уравнение траектории движения в полярных и декартовых координатах.

Указание. По теореме косинусов $FM^2 = r^2 + c^2 - 2rc\cos\varphi$ и $F_1M^2 = r^2 + c^2 + 2rc\cos\varphi$, причем по условию $FM^2 \cdot F_1M^2 = c^4$.

353. Улитка Паскаля. На произвольном луче OA от точки A пересечения его с окружностью $r = a\cos\varphi$ по обе стороны отложены отрезки $AM = AM_1 = b$. Составить уравнение геометрического места точек M в полярных координатах.

354. Четырехлепестковая роза. Концы отрезка $AB = 2a$ скользят по осям декартовых координат. Из начала координат опущен на AB перпендикуляр OM. Написать уравнение геометрического места точек $M(x; y)$ при всевозможных положениях отрезка AB.

§ 17. Алгебраические кривые третьего и высших порядков

355. Построить кривые (см. с. 344, рис. 66—69):

1) $y = x^3/3$ (кубическая парабола);

2) $y^2 = x^3$, 3) $y^3 = x^2$ (полукубическая парабола);

4) $y^2 = x(x-4)^2$ (петлевая парабола).

356. Построить кривые:

1) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (астроида равносторонняя);

2) $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$, $b \neq a$ (астроида неравносторонняя).

Указание. Найти точки пересечения кривых с осями Ox и Oy и первой кривой с прямыми $y = \pm x$, а второй — с прямыми $y = \pm \frac{b}{a} x$ (рис. 78 на с. 346).

357. Построить на отрезке $[-1; 1]$ кривые: 1) $y = x^{2n+1}$; 2) $y = x^{2n}$; 3) $x^{2n} + y^{2n} = 1$ при $n = 1, 2, 4$. К каким ломаным приближаются эти кривые, когда $n \to \infty$?

Указание. Найти точки пересечения первой кривой с прямой $y = \frac{x}{2n}$, второй кривой с прямой $y = \frac{1}{2n}$ и третьей кривой с прямой $y = x$. За единицу масштаба принять 10 клеток клетчатой бумаги.

358. Астроида. Концы отрезка $AB = a$ скользят по осям декартовых координат. Прямые AC и BC, параллельные осям координат, пересекаются в точке C. Из C опущен на AB перпендикуляр CM. Написать уравнение геометрического места точек $M(x; y)$ при всевозможных положениях отрезка AB.

359. Построить кривые:

1) $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$ (циссоида, рис. 85, с. 347);

2) $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ (локон, рис. 76, с. 346).

360. Каждая точка $P(x_0; y_0)$ параболы $y^2 = 2px$ смещена параллельно оси Ox на расстояние $PM = \pm OP$. Найти геометрическое место точек M.

361. Стержень $OA = a$ вращается вокруг начала координат O. В точке A к нему прикреплен шарниром стержень $AB = 2a$, конец которого скользит по Ox. Написать уравнение линии, которую будет описывать при этом середина M отрезка AB.

362. Циссоида. Произвольный луч OA (рис. 85, с. 347) пересекает окружность $x^2 + y^2 = ax$ в точке A и прямую $x = a$ в точке B. На луче откладывается отрезок $OM = AB$. Составить уравнение геометрического места точек M.

363. Произвольный луч OB (рис. 85) пересекает прямую $x = a$ в точке B. C — проекция точки B на ось Oy и M — проекция точки C на прямую OB. Показать, что геометрическое место точек M есть циссоида.

364. Если из вершины параболы $y^2 = -4ax$ опускать перпендикуляры на касательные к этой кривой, то геометрическим местом оснований перпендикуляров будет циссоида. Доказать.

365. Локон. Произвольный луч OA пересекает окружность $x^2 + y^2 = 2ay$ и прямую $y = 2a$ в точках A и B, из которых проведены прямые, параллельные соответственно оси Ox и оси Oy до пересечения в точке M. Определить геометрическое место точек M.

366. Декартов лист $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Показать, что это уравнение поворотом осей координат на 45° приводится к виду $Y^2 = \dfrac{X^3(3b - X)}{3(b + X)}$, где $b = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Построить кривую, определив в новой системе координат область расположения кривой и ее симметрию, точки пересечения с прямой $y = x$ (т. е. с новой осью OX) и асимптоту. Показать, что уравнение асимптоты в новой системе координат будет $X = -b$, а в старой $x + y + a = 0$ (см. рис. 79, с. 346).

§ 18. Трансцендентные кривые

367. Циклоида. Круг радиуса a катится по прямой OX без скольжения. Составить параметрические уравнения кривой, описанной точкой M окружности, приняв за параметр t угол поворота катящегося круга и положив, что при $t=0$ точка M находится в начале координат.

368. Развертка круга. Нить, намотанная на окружность $x^2+y^2=a^2$, разматывается, оставаясь натянутой. Составить параметрические уравнения кривой, описанной концом нити, если вначале конец нити находится в точке $(a; 0)$. За параметр t принять длину смотанной дуги (в радиусах).

369. Квадратриса. Произвольный луч OM, составляющий с осью Oy угол t (в радианах), пересекает прямую $x=at$ в точке M. Написать уравнение геометрического места точек M.

370. Эпициклоида. Круг радиуса r катится без скольжения по кругу радиуса R снаружи его. Составить параметрические уравнения кривой, описанной точкой M катящейся окружности. (При $r=R$ эпициклоида обращается в кардиоиду. См. задачу 347.)

371. Гипоциклоида. Круг радиуса r катится без скольжения по кругу радиуса $R>r$ внутри него. Составить параметрические уравнения кривой, описанной точкой M катящейся окружности. (При $r=R/4$ гипоциклоида обращается в астроиду $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.)

ГЛАВА 2

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Сложение векторов. Умножение вектора на скаляр

1°. Определения. *Вектором* называется *направленный* отрезок $\overline{AB}$ (рис. 13), в котором точка A рассматривается как *начало*, а точка B — как *конец*. Вектор обозначается или указанием его начала и конца $\overline{AB}$ с чертой наверху, или одной какой-нибудь буквой, например $\boldsymbol{a}$. *Модуль* (длина) вектора обозначается $|\overline{AB}|$, или $|\boldsymbol{a}|$, или AB, или a. Векторы, параллельные одной прямой, называются *коллинеарными*. Векторы, параллельные одной плоскости, называются *компланарными*. Два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (рис. 13) называются *равными*, если они 1) имеют *равные модули*, 2) *коллинеарны*, 3) направлены *в одну сторону*.

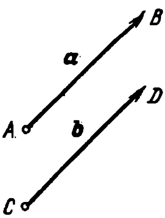

Рис. 13

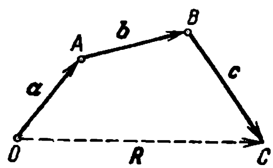

Рис. 14

2°. Умножение вектора на скаляр. *Произведением вектора $\boldsymbol{a}$ на число* (скаляр) m называется новый вектор, имеющий длину $a|m|$ и направленный одинаково с $\boldsymbol{a}$ (при $m > 0$) или противоположно $\boldsymbol{a}$ (при $m < 0$).

3°. Сложение векторов. *Суммой векторов* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ называется вектор $\boldsymbol{R} = \overline{OC}$ (рис. 14), замыкающий ломаную $OABC$, построенную из данных векторов. В частности, в параллелограмме, построенном на данных векторах $\overline{OA} = \boldsymbol{a}$ и $\overline{OB} = \boldsymbol{b}$, одна вектор-диагональ $\overline{OC}$ есть сумма $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, а другая $\overline{BA}$ есть разность $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ данных векторов.

4°. Проекция вектора на ось. Пусть вектор $\boldsymbol{a}$ составляет угол φ с осью Ox. Тогда *проекция вектора на эту ось* определяется формулой

$$\text{пр}_x \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos \varphi = a \cos (\widehat{\boldsymbol{a}, Ox}).$$

Проекция суммы векторов на ось *равна сумме проекций* составляющих векторов на ту же ось:

$$\text{пр}_x (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \text{пр}_x \boldsymbol{a} + \text{пр}_x \boldsymbol{b}.$$

372. По сторонам OA и OB прямоугольника $OACB$ отложены единичные векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ (рис. 15). Выразить через $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ векторы $\overline{OA}$, $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{BO}$, $\overline{OC}$ и $\overline{BA}$, если $OA = 3$ и $OB = 4$.

373. Пусть на рис. 15 M — середина BC и N — середина AC. Определить векторы $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ и $\overline{MN}$ при $OA = 3$ и $OB = 4$.

374. На плоскости даны точки $A(0; -2)$, $B(4; 2)$ и $C(4; -2)$. В начале координат приложены силы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$. Построить их равнодействующую $\overline{OM}$, найти ее проекции на оси координат и величину. Выразить силы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ и $\overline{OM}$ через единичные векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ координатных осей.

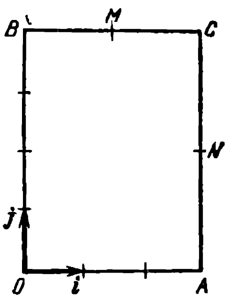

Рис. 15

375. Даны три компланарных единичных вектора $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{p}$, причем $(\widehat{\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}}) = 30°$ и $(\widehat{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p}}) = 60°$. Построить вектор $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{m} + 2\boldsymbol{n} - 3\boldsymbol{p}$ и вычислить его модуль.

Указание. В ломаной, построенной из векторов $\boldsymbol{m}$, $2\boldsymbol{n}$ и $-3\boldsymbol{p}$, продолжить первое звено до пересечения с третьим.

376. Проверить аналитически и геометрически векторные тождества:

1) $\boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}}{2} = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{2}$; 2) $\boldsymbol{a} - \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{2} = \frac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}}{2}$.

377. На трех некомпланарных векторах $\overline{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overline{OB} = \boldsymbol{b}$ и $\overline{OC} = \boldsymbol{c}$ построен параллелепипед. Указать те его вектор-диагонали, которые соответственно равны $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}$.

378. С помощью чертежа задачи 377 проверить переместительное свойство векторной суммы

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}.$$

379. Даны векторы $\overline{OA}=\boldsymbol{a}$ и $\overline{OB}=\boldsymbol{b}$, Вектор $\overline{OC}=\boldsymbol{c}$ — медиана $\triangle OAB$. Разложить аналитически и геометрически: 1) вектор $\boldsymbol{c}$ по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$; 2) вектор $\boldsymbol{a}$ по векторам $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

380. В прямоугольнике $OACB$ (рис. 15) M и N — середины сторон $BC=3$ и $AC=4$. Разложить геометрически и аналитически вектор $\overline{OC}=\boldsymbol{c}$ по векторам $\overline{OM}=\boldsymbol{a}$ и $\overline{ON}=\boldsymbol{b}$.

Указание. В условие $\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$ подставить выражения $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ через $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ и сравнить коэффициенты слева и справа при $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$.

381. Дан правильный шестиугольник $OABCDE$ со стороной $OA=3$. Обозначив единичные векторы направлений $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ через $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{p}$, установить зависимость между ними (например, рассмотрением трапеции $OABC$). Выразить затем через $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ векторы $\overline{OB}$, $\overline{BC}$, $\overline{EO}$, $\overline{OD}$ и $\overline{DA}$.

---

382. В равнобедренной трапеции $OACB$ (рис. 16) угол $BOA=60°$, $OB=BC=CA=2$, M и N — середины сторон BC и AC. Выразить векторы $\overline{AC}$, $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ и $\overline{MN}$ через $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ — единичные векторы направлений $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$.

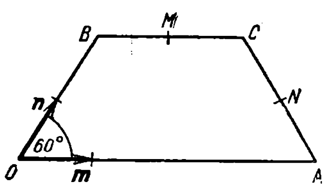

Рис. 16

383. Даны векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, угол между которыми 120°. Построить вектор $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-1{,}5\boldsymbol{b}$ и определить его модуль, если $a=3$ и $b=4$.

384. На плоскости даны точки $A(3;3)$, $B(-3;3)$ и $C(-3;0)$. В начале координат приложены силы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$. Построить равнодействующую $\overline{OM}$, найти ее проекции на оси координат и величину. Выразить силы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ и $\overline{OM}$ через единичные векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ координатных осей.

385. 1) В трапеции $OACB$ имеем $BC=OA/3$ и $BC \parallel OA$. Разложить геометрически и аналитически вектор $\overline{OA}=\boldsymbol{a}$ по векторам $\overline{OC}=\boldsymbol{c}$ и $\overline{OB}=\boldsymbol{b}$.

Указание. Из $\triangle OBC$ можно $\boldsymbol{c}$ выразить через $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}$ и затем решить полученное уравнение относительно $\boldsymbol{a}$.

2) Точка B делит дугу окружности $\overline{AC} = 90°$ в отношении $1:2$. O — центр окружности. Разложить вектор $\overline{OC} = \boldsymbol{c}$ по векторам $\overline{OA} = \boldsymbol{a}$ и $\overline{OB} = \boldsymbol{b}$.

§ 2. Прямоугольные координаты точки и вектора в пространстве

1°. Определение. Пусть даны три взаимно перпендикулярные координатные оси с общим началом O и дана точка M (рис. 17). *Проекции ее радиус-вектора* $\overline{OM} = \boldsymbol{r}$ на оси координат $OM_1 = x$, $OM_2 = y$ и $OM_3 = z$ называются *прямоугольными координатами* точки M или вектора $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$.

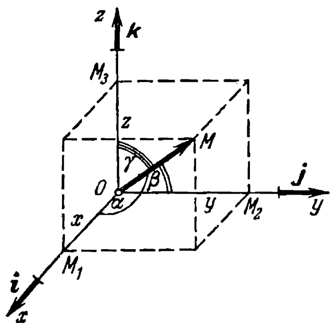

Рис. 17

2°. Радиус-вектор точки в пространстве. *Модуль* или длина *радиус-вектора* $\overline{OM} = \boldsymbol{r}$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (1)$$

Единичные векторы координатных осей $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ называются *ортами*. Радиус-вектор выражается через орты:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \qquad (2)$$

3°. Вектор, заданный координатами начала и конца. Пусть даны точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Проекции вектора $\boldsymbol{u} = \overline{AB}$ на оси координат будут:

$$\begin{aligned} \text{пр}_x \overline{AB} &= X = x_2 - x_1, \\ \text{пр}_y \overline{AB} &= Y = y_2 - y_1, \\ \text{пр}_z \overline{AB} &= Z = z_2 - z_1. \end{aligned} \qquad (3)$$

Можно написать формулы, аналогичные формулам (1), (2):

$$u = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \qquad (4)$$

$$\boldsymbol{u} = \overline{AB} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}. \qquad (5)$$

Если α, β и γ — углы вектора $\boldsymbol{u} = \overline{AB}$ с осями координат, то

$$\cos\alpha = \frac{X}{u}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{u}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{u}, \qquad (6)$$

причем

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \qquad (7)$$

т. е. *сумма квадратов направляющих косинусов вектора равна* 1.

Из формул (4)—(6) следует, что вектор $\boldsymbol{u}$ вполне определяется тремя числами: X, Y и Z — его проекциями или его *координатами*. Поэтому иногда пишут или говорят: дан вектор $\boldsymbol{u}\{X;\ Y;\ Z\}$.

386. Построить точку $M(5; -3; 4)$ и определить длину и направление ее радиус-вектора.

387. Построить вектор $\boldsymbol{r} = \overline{OM} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ и определить его длину и направление (проверить по формуле $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$).

388. Вектор составляет с осями Ox и Oz углы 40° и 80°. Найти его угол с осью Oy.

389. Радиус-вектор точки M составляет с осью Ox угол 45° и с осью Oy угол 60°. Длина его $r = 6$. Определить координаты точки M, если ее координата z отрицательна, и выразить вектор $\overline{OM} = \boldsymbol{r}$ через орты $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

390. Даны точки $A(1; 2; 3)$ и $B(3; -4; 6)$. Построить вектор $\overline{AB} = \boldsymbol{u}$, его проекции на оси координат и определить длину и направление вектора. Построить углы вектора $\boldsymbol{u}$ с осями координат.

391. Построить параллелограмм на векторах $\overline{OA} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ и $\overline{OB} = \boldsymbol{k} - 3\boldsymbol{j}$ и определить его диагонали.

392. В точке $A(2; 1; -1)$ приложена сила $R = 7$. Зная две координаты этой силы $X = 2$ и $Y = -3$, определить направление и конец вектора, изображающего силу.

393. На плоскости xOy даны точки $A(4; 2)$, $B(2; 3)$ и $C(0; 5)$ и построены векторы $\overline{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overline{OB} = \boldsymbol{b}$ и $\overline{OC} = \boldsymbol{c}$. Разложить геометрически и аналитически вектор $\boldsymbol{a}$ по векторам $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

---

394. Даны точки $A(2; 2; 0)$ и $B(0; -2; 5)$. Построить вектор $\overline{AB} = \boldsymbol{u}$ и определить его длину и направление.

395. Вектор $\overline{OM} = \boldsymbol{r}$ составляет с осями координат равные острые углы. Определить эти углы и построить вектор $\boldsymbol{r}$, если его длина равна $2\sqrt{3}$.

396. Вектор составляет с осями Oy и Oz углы 60° и 120°. Какой угол он составляет с осью Ox?

397. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1; -2; 3)$, $B(3; 2; 1)$ и $C(6; 4; 4)$. Найти его четвертую вершину D.

Указание. Из равенства $\overline{AD} = \overline{BC}$ следует, что равны и их координаты: $x - 1 = 6 - 3$ и т. д.

398. На плоскости xOy построить векторы $\overline{OA} = \boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i}$, $\overline{OB} = \boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ и $\overline{OC} = \boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}$. Разложить геометрически и аналитически вектор $\boldsymbol{c}$ по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

§ 3. Скалярное произведение двух векторов

1°. Определение. *Скалярным произведением* двух векторов называется *произведение их модулей, умноженное на косинус угла между ними.*

Скалярное произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ обозначается $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. Итак,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\varphi. \tag{1}$$

Из рис. 18 видно, что $b\cos\varphi = \text{пр}_a\,\boldsymbol{b}$. Поэтому

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\varphi = a\,\text{пр}_a\,\boldsymbol{b} = b\,\text{пр}_b\,\boldsymbol{a}. \tag{2}$$

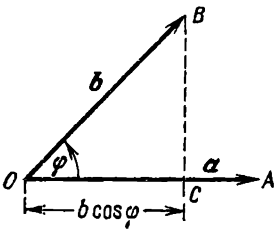

Рис. 18

2°. Свойства скалярного произведения:

I. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ — *переместительный* закон.

II. $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ — *распределительный* закон.

III. Если $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \pm ab$. В частности, $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = aa\cos 0° = a^2$; отсюда

$$a = \sqrt{\boldsymbol{a}^2}. \tag{3}$$

IV. Если $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos 90° = 0$.

V. Скалярные произведения ортов:

$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = 0$, $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = 0$, $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} = 0$, $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = 1$, $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = 1$. $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1$.

VI. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ заданы координатами: $\boldsymbol{a}\{a_x, a_y, a_z\}$ и $\boldsymbol{b}\{b_x, b_y, b_z\}$, то

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{4}$$

3°. Угол между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{5}$$

Условие *параллельности:* $\boldsymbol{b} = m\boldsymbol{a}$ или $\dfrac{b_x}{a_x} = \dfrac{b_y}{a_y} = \dfrac{b_z}{a_z} = m$.

Условие *перпендикулярности:* $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$ или $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

399. Определить угол между векторами $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.

400. Определить углы $\triangle ABC$ с вершинами $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; 1)$ и $C(0; 0; 5)$.

401. Даны точки $A(a; 0; 0)$, $B(0; 0; 2a)$ и $C(a; 0; a)$. Построить векторы $\overline{OC}$ и $\overline{AB}$ и найти угол между ними.

402. На плоскости дан треугольник с вершинами $O(0; 0)$, $A(2a; 0)$ и $B(a; -a)$. Найти угол, образованный стороной OB и медианой OM этого треугольника.

403. Найти угол между биссектрисами углов xOy и yOz.

404. Из вершины квадрата проведены прямые, делящие противоположные стороны пополам. Найти угол между этими прямыми.

405. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

406. Даны векторы $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$. Определить $\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$ и $\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$.

407. Раскрыть скобки в выражении

$$(2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}) \cdot \boldsymbol{j} + (\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{k} + (\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k})^2.$$

408. Вычислить: 1) $(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n})^2$, если $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ — единичные векторы с углом между ними 30°; 2) $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2$, если $a = 2\sqrt{2}$, $b = 4$ и $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = 135°$.

409. Раскрыть скобки в выражениях:

$$1)\ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2; \quad 2)\ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2$$

и выяснить геометрический смысл полученных формул.

410. Даны компланарные векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, причем $a = 3$, $b = 2$, $c = 5$, $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = 60°$ и $(\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}}) = 60°$. Построить вектор $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ и вычислить его модуль по формуле

$$u = \sqrt{(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})^2}.$$

411. Найти величину равнодействующей четырех компланарных сил, приложенных к точке O, если величина каждой силы равна 10 Н, а угол между двумя последовательными силами равен 45°.

412. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{m} - 2\boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ — единичные векторы, угол между которыми 60°.

413. Дан вектор $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{m} - \boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ — единичные векторы с углом $120°$ между ними. Найти $\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{m}})$ и $\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}})$.

414. Определить угол между биссектрисами двух плоских углов правильного тетраэдра, проведенными из одной его вершины.

Указание. Если $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{p}$ — единичные векторы ребер, то $\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{m} + \boldsymbol{p}$ — векторы, направленные по биссектрисам.

---

415. На осях Ox, Oy и Oz отложить равные отрезки $a = 4$ и на них построить куб. Пусть M — центр верхней грани, а N — центр правой боковой грани куба. Определить векторы $\overline{OM}$ и $\overline{ON}$ и угол между ними.

416. Даны векторы $\overline{OA} = \boldsymbol{a}$ и $\overline{OB} = \boldsymbol{b}$, причем $a = 2$, $b = 4$, а $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = 60°$. Определить угол между медианой $\overline{OM}$ треугольника AOB и стороной $\overline{OA}$.

417. Из вершины прямоугольника со сторонами 6 см и 4 см проведены прямые, делящие противоположные стороны пополам. Найти угол φ между ними.

418. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(-3;\ -2;\ 0)$, $B(3;\ -3;\ 1)$ и $C(5;\ 0;\ 2)$. Найти его четвертую вершину D и угол между векторами $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$.

419. Даны точки $A(3;\ 3;\ -2)$, $B(0;\ -3;\ 4)$, $C(0;\ -3;\ 0)$ и $D(0;\ 2;\ -4)$. Построить векторы $\overline{AB} = \boldsymbol{a}$ и $\overline{CD} = \boldsymbol{b}$ и найти $\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$.

420. В равнобедренной трапеции $OACB$ (рис. 16, с. 57) M и N — середины сторон $BC = 2$ и $AC = 2$. Острый угол трапеции $60°$. Определить угол между векторами $\overline{OM}$ и $\overline{ON}$.

421. Найти угол между векторами $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{m} + 4\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ — единичные векторы, образующие угол $120°$.

422. Показать, что угол между диагоналями прямоугольника, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b})$, определяется формулой $\cos\varphi = \pm\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

423. Проекции перемещения движущейся точки на оси координат $s_x = 2$ м, $s_y = 1$ м, $s_z = -2$ м. Проекции действующей силы $\boldsymbol{F}$ на оси координат равны

$F_x = 5$ Н, $F_y = 4$ Н и $F_z = 3$ Н. Вычислить работу A силы $\boldsymbol{F}$ ($A = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$) и угол между силой $\boldsymbol{F}$ и перемещением $\boldsymbol{s}$.

424. К вершине правильного тетраэдра с ребром a приложены три силы, изображаемые его вектор-ребрами. Определить величину равнодействующей.

Указание. Искомая величина равна $a\sqrt{(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p})^2}$, где $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{p}$ — единичные векторы данных сил.

425. Квадрат разделен на три полосы одинаковой ширины и затем свернут в правильную треугольную призму. Найти угол между двумя смежными звеньями ломаной, образованной при этом диагональю квадрата.

§ 4. Векторное произведение двух векторов

1°. Определение. *Векторным произведением* вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ называется такой *третий вектор* $\boldsymbol{c}$ (рис. 19), который:

1) имеет *модуль*, численно *равный площади параллелограмма*, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;

2) *перпендикулярен* к плоскости параллелограмма;

3) *направлен в такую сторону*, с которой кратчайшее *вращение от* $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$ рассматривается совершающимся *против часовой стрелки*. Такое расположение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называется *правой связкой*.

Векторное произведение обозначается $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. Итак,

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c},$$

если:

1) $c = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = ab\sin\varphi$,

2) $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$,

3) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ составляют *правую* связку.

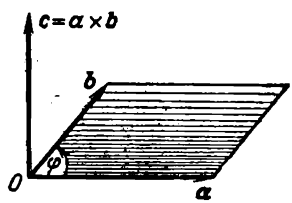

Рис. 19

2°. Свойства векторного произведения:

I. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

II. $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ — *распределительный закон.*

III. Если $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = 0$; в частности, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = 0$.

3°. Векторные произведения ортов:

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}. \tag{1}$$

Вообще произведение любых двух смежных векторов в последовательности

$$\overset{\longrightarrow +}{\underset{- \longleftarrow}{\boldsymbol{ijkij}}}$$

дает следующий вектор со знаком $+$, а в обратной последовательности — со знаком $-$.

4°. Выражение векторного произведения через координаты сомножителей $\boldsymbol{a}\{a_x, a_y, a_z\}$ и $\boldsymbol{b}\{b_x, b_y, b_z\}$:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

5°. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$S_{\square}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|, \qquad (3)$$

а площадь треугольника, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|. \qquad (4)$$

426. Определить и построить вектор $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, если: 1) $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{k}$; 2) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$; 3) $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$. Найти в каждом случае площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

427. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(7; 3; 4)$, $B(1; 0; 6)$ и $C(4; 5; -2)$.

428. Построить параллелограмм на векторах $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}$ и вычислить его площадь и высоту.

429. Раскрыть скобки и упростить выражения:

1) $\boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})-\boldsymbol{j}\times(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})+\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$;

2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}$;

3) $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$;

4) $2\boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+3\boldsymbol{j}\cdot(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+4\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})$.

430. Доказать, что $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, и выяснить геометрическое значение этого тождества.

431. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ составляют угол 45°. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ и $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$, если $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=5$.

432. Найти площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $2\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$ и $4\boldsymbol{m}-5\boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ — единичные векторы, образующие угол 45°.

Указание. Имеем $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{m}-5\boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — векторы-стороны параллелограмма. Перемножив, найдем вектор $2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$, модуль которого и равен удвоенной искомой площади.

---

433. Построить векторы $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{k}-2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. Вычислить модуль вектора $\boldsymbol{c}$ и площадь треугольника, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

434. Построить треугольник с вершинами $A(1; -2; 8)$, $B(0; 0; 4)$ и $C(6; 2; 0)$. Вычислить его площадь и высоту BD.

435. Вычислить диагонали и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

436. Доказать, что $(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) = 3\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

437. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{m} + 2\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ — единичные векторы, образующие угол 30°.

§ 5. Смешанное произведение трех векторов

1°. Определение. *Смешанным произведением* векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называется выражение вида $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$.

Если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ заданы своими координатами, то

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{1}$$

2°. Свойства смешанного произведения.

I. От перестановки двух любых сомножителей смешанное произведение меняет знак:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a}. \tag{2}$$

II. Если два из трех данных векторов равны или параллельны, то их смешанное произведение равно 0.

III. Знаки операций «точка» и «крест» можно поменять местами, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$; поэтому смешанное произведение принято записывать в виде $\boldsymbol{abc}$, т. е. без знаков действий и без скобок.

3°. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$:

$V = \pm\, \boldsymbol{abc}$ (+ при правой связке, — при левой связке).

Объем пирамиды, построенной на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$:

$$V_{\text{пир}} = \pm\, \boldsymbol{abc}/6.$$

4°. Условие компланарности. Если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ *компланарны*, то $\boldsymbol{abc} = 0$, и обратно. При этом между $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ существует *линейная зависимость* вида $\boldsymbol{c} = m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b}$.

438. Построить параллелепипед на векторах $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ и вычислить его объем. Правой или левой будет связка векторов $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$?

439. Построить пирамиду с вершинами $O(0; 0; 0)$, $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$ и $C(1; 2; 4)$ и вычислить ее объем, площадь грани ABC и высоту пирамиды, опущенную на эту грань.

451. Построить плоскость $2x+3y+6z-12=0$ и найти углы нормали к плоскости с осями координат.

452. Даны точки $M_1(0; -1; 3)$ и $M_2(1; 3; 5)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярной к вектору $N=\overline{M_1M_2}$.

453. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(a; a; 0)$ и перпендикулярной к вектору $\overline{OM}$. Построить плоскость.

454. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точек $A(a; -a/2; a)$ и $B(0; a/2; 0)$.

455. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Ox и проходящей через точки $M_1(0; 1; 3)$ и $M_2(2; 4; 5)$, и построить ее.

456. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $M_1(0; -2; 3)$. Построить плоскость.

457. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $M_1(2; -4; 3)$. Построить плоскость.

458. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Oy и отсекающей на осях Ox и Oz отрезки a и c. Построить ее.

459. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; -1; 3)$ и отсекающей на осях координат равные отрезки.

460. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(-4; 0; 4)$ и отсекающей на осях Ox и Oy отрезки $a=4$ и $b=3$.

---

461. Построить плоскости: 1) $2x+y-z+6=0$; 2) $x-y-z=0$; 3) $y-2z+8=0$; 4) $2x-5=0$; 5) $x+z=1$; 6) $y+z=0$.

462. Построить плоскость $2x-2y+z-6=0$ и найти углы ее нормали с осями координат.

463. Через точку $M(-1; 2; 3)$ проведена плоскость, перпендикулярная к OM. Написать ее уравнение.

464. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и через точку $(4; 0; 3)$. Построить плоскость.

465. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $M_1(2; 2; 0)$ и $M_2(4; 0; 0)$. Построить плоскость.

ГЛАВА 3

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Уравнение плоскости

1°. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и перпендикулярной к вектору $N\{A;\ B;\ C\}$.

Пусть $M(x;\ y;\ z)$ — произвольная точка плоскости (рис. 20). Тогда $\overline{M_1M} \perp N$ и по условию перпендикулярности векторов

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \qquad (1)$$

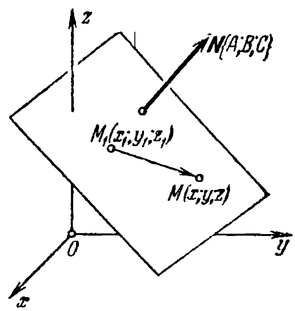

Рис. 20

2°. Общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (2)$$

Вектор $N\{A;\ B;\ C\}$ называется *нормальным* вектором к плоскости (2) или (1).

3°. Особые случаи уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$:

I. $D = 0$, $Ax + By + Cz = 0$ — плоскость проходит через начало координат.

II. $C = 0$, $Ax + By + D = 0$ — плоскость параллельна оси Oz.

III. $C = D = 0$, $Ax + By = 0$ — плоскость проходит через ось Oz.

IV. $B = C = 0$, $Ax + D = 0$ — плоскость параллельна плоскости yOz.

V. Уравнения координатных плоскостей: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4°. Уравнение плоскости в отрезках на осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (3)$$

450. Построить плоскости: 1) $5x - 2y + 3z - 10 = 0$; 2) $3x + 2y - z = 0$; 3) $3x + 2z = 6$; 4) $2z - 7 = 0$.

440. Показать, что точки $A(2;\ -1;\ -2)$, $B(1;\ 2;\ 1)$, $C(2;\ 3;\ 0)$ и $D(5;\ 0;\ -6)$ лежат в одной плоскости.

441. Показать, что векторы $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = -3\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ компланарны, и разложить вектор $\boldsymbol{c}$ по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

442. Показать, что 1) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot [(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{b}] = -\boldsymbol{abc}$; 2) $(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) \cdot [(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})] = 3\boldsymbol{abc}$.

443. Найти объем тетраэдра, построенного на векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, если эти векторы направлены по биссектрисам координатных углов и длина каждого вектора равна 2.

---

444. Построить пирамиду с вершинами $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 3;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 6)$ и $D(2;\ 3;\ 8)$, вычислить ее объем и высоту, опущенную на грань ABC.

445. Построить векторы $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, показать, что они компланарны, и найти линейную зависимость между ними.

446. Показать, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.

447. Даны единичные векторы $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{p}$. Угол $(\widehat{\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}}) = [\widehat{\boldsymbol{p}, (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n})}] = \alpha$. Доказать, что тогда $(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{p} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$.

448. При любых векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ векторы $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$ компланарны. Доказать это аналитически и геометрически (рассмотрением параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$).

449. Вычислить объем параллелепипеда $OABCO_1A_1B_1C_1$, в котором даны три вершины нижнего основания $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(2;\ -3;\ 0)$ и $C(3;\ 2;\ 0)$ и вершина верхнего основания $B_1(3;\ 0;\ 4)$, лежащая на боковом ребре BB_1, противоположном ребру OO_1.

466. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1; -3; 5)$ и отсекающей на осях Oy и Oz вдвое бо́льшие отрезки, чем на оси Ox.

§ 2. Основные задачи на плоскость

1°. Угол, образованный двумя плоскостями:

$$\cos\varphi = \pm\frac{\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N}_1}{NN_1} = \pm\frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{NN_1}, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{N}_1$ — нормальные векторы к плоскостям $Ax + By + Cz + D = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$.

Условие параллельности:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}. \qquad (2)$$

Условие перпендикулярности:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0. \qquad (3)$$

2°. Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{N}. \qquad (4)$$

3°. Уравнение пучка всех плоскостей, проходящих через линию пересечения двух данных плоскостей:

$$\alpha(Ax + By + Cz + D) + \beta(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0. \qquad (5)$$

Можно положить $\alpha = 1$, исключив этим из пучка (5) вторую из данных плоскостей.

467. Найти угол между плоскостями:

1) $x - 2y + 2z - 8 = 0$ и $x + z - 6 = 0$;

2) $x + 2z - 6 = 0$ и $x + 2y - 4 = 0$.

468. Найти плоскость, проходящую через точку $(2; 2; -2)$ и параллельную плоскости $x - 2y - 3z = 0$.

469. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(-1; -1; 2)$ и перпендикулярной к плоскостям $x - 2y + z - 4 = 0$ и $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

470. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(0; 0; a)$ и перпендикулярной к плоскостям $x - y - z = 0$ и $2y = x$.

471. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1; -2; 0)$ и $M_2(1; 1; 2)$ и перпендикулярной к плоскости $x + 2y + 2z - 4 = 0$.

472. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; -1; 2)$, $M_2(2; 1; 2)$ и $M_3(1; 1; 4)$.

473. Через ось Oz провести плоскость, составляющую с плоскостью $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ угол $60°$.

474. Найти расстояние от точки $(5;\ 1;\ -1)$ до плоскости $x - 2y - 2z + 4 = 0$.

475. Найти расстояние от точки $(4.\ 3;\ 0)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1;\ 3;\ 0)$, $M_2(4;\ -1;\ 2)$ и $M_3(3;\ 0;\ 1)$.

476. Найти расстояние между параллельными плоскостями

$$4x + 3y - 5z - 8 = 0 \text{ и } 4x + 3y - 5z + 12 = 0.$$

Указание. Взять на первой плоскости любую точку, например $(2;\ 0;\ 0)$, и найти ее расстояние от другой плоскости.

477. 1) Написать уравнения плоскостей, параллельных плоскости $x - 2y + 2z - 5 = 0$ и удаленных от нее на расстояние, равное 2.

2) Написать уравнения плоскостей, делящих пополам двугранный угол, образованный плоскостями $2x + 2y = z$ и $z = 0$, и построить данные и искомые плоскости.

478. 1) Написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x - y + 3z - 6 = 0$, $x + 2y - z + 3 = 0$ и через точку $(1;\ 2;\ 4)$.

2) Найти две взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через прямую пересечения плоскостей $x = y$ и $z = 0$, если одна из искомых плоскостей проходит через точку $(0;\ 4;\ 2)$. Построить прямую и искомые плоскости.

479. Найти точку пересечения плоскостей $2x - y + 3z - 9 = 0$, $x + 2y + 2z - 3 = 0$ и $3x + y - 4z + 6 = 0$.

---

480. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(2;\ -1;\ 1)$ и перпендикулярной к плоскостям $3x + 2y - z + 4 = 0$ и $x + y + z - 3 = 0$. Построить ее.

481. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $(0;\ -5;\ 0)$ и $(0;\ 0;\ 2)$ и перпендикулярной к плоскости $x + 5y + 2z - 10 = 0$. Построить ее.

482. Найти угол плоскости, проходящей через точки $O(0;\ 0;\ 0)$, $M_1(a,\ -a;\ 0)$ и $M_2(a;\ a;\ a)$, с плоскостью xOy.

483. Найти расстояние от начала координат до плоскости, проходящей через точки $M_1(a;\ 0;\ 0)$, $M_2(0;\ a;\ 0)$ и $M_3(a;\ a;\ a)$.

484. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и составляющей угол $60°$ с плоскостью $y = x$.

485. Найти расстояние от точки $(a;\ b;\ c)$ до плоскости, отсекающей на осях координат отрезки a, b и c.

486. Написать уравнения плоскостей, параллельных плоскости $2x + 2y + z - 8 = 0$ и удаленных от нее на расстояние $d = 4$.

487. Написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $4x - y + 3z - 6 = 0$ и $x + 5y - z + 10 = 0$ и перпендикулярной к плоскости $2x - y + 5z - 5 = 0$.

§ 3. Уравнения прямой

1°. Уравнения прямой, проходящей через точку $A(a;\ b;\ c)$ и параллельной вектору $\boldsymbol{P}\{m;\ n;\ p\}$. Пусть $M(x;\ y;\ z)$ — произвольная точка прямой (рис. 21), тогда $\overline{AM} \parallel \boldsymbol{P}$ и по условию параллельности векторов

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}. \qquad (1)$$

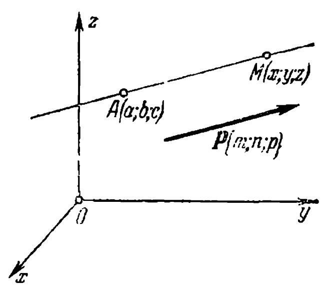

Рис. 21

Уравнения (1) называются *каноническими* уравнениями прямой. Вектор $\boldsymbol{P}\{m;\ n;\ p\}$ называется *направляющим* вектором прямой.

2°. Параметрические уравнения прямой получим, приравняв каждое из отношений (1) параметру t:

$$x = mt + a, \quad y = nt + b, \quad z = pt + c. \qquad (2)$$

3°. Уравнения прямой, проходящей *через две точки*

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (3)$$

4°. Общие уравнения прямой:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0. \qquad (4)$$

5°. Уравнения прямой в проекциях получим, исключив из общих уравнений (4) один раз y, другой раз x:

$$x = mz + a, \quad y = nz + b. \qquad (5)$$

Уравнения (5) можно записать в *канонической* форме:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-0}{1}.$$

488. Найти следы прямых:

$$1)\ x=z+5,\ y=4-2z \text{ и } 2)\ \frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{1}$$

на плоскостях xOy и xOz и построить прямые.

Указание. Положить в уравнениях прямой 1) $z=0$; 2) $y=0$.

489. Уравнения прямой $x+2y+3z-13=0$, $3x+y+4z-14=0$ написать: 1) в проекциях; 2) в канонической форме. Найти следы прямой на координатных плоскостях, построить прямую и ее проекции.

490. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $A(4;\ 3;\ 0)$ и параллельной вектору $\boldsymbol{P}\{-1;\ 1;\ 1\}$. Найти след прямой на плоскости yOz и построить прямую.

491. Построить прямую $x=4$, $y=3$ и найти ее направляющий вектор.

492. Построить прямые: 1) $y=3$, $z=2$; 2) $y=2$, $z=x+1$; 3) $x=4$, $z=y$ и определить их направляющие векторы.

493. Написать уравнения прямой, проходящей через точки $A(-1;\ 2;\ 3)$ и $B(2;\ 6;\ -2)$, и найти ее направляющие косинусы.

494. Построить прямую, проходящую через точки $A(2;\ -1;\ 3)$ и $B(2;\ 3;\ 3)$, и написать ее уравнения.

495. Написать уравнения траектории точки $M(x;\ y;\ z)$, которая, выйдя из точки $A(4;\ -3;\ 1)$, движется со скоростью $v\{2;\ 3;\ 1\}$.

496. Написать параметрические уравнения прямой:

1) проходящей через точку $(-2;\ 1;\ -1)$ и параллельной вектору $\boldsymbol{P}\{1;\ -2;\ 3\}$;

2) проходящей через точки $A(3;\ -1;\ 4)$ и $B(1;\ 1;\ 2)$.

497. Написать уравнения прямой, проходящей через точку (a, b, c): 1) параллельно оси Oz; 2) перпендикулярно к оси Oz.

498. Найти угол прямой $x=2z-1$, $y=-2z+1$ с прямой, проходящей через начало координат и через точку $(1;\ -1;\ -1)$.

499. Найти угол между прямыми: $x - y + z - 4 = 0$, $2x + y - 2z + 5 = 0$ и $x + y + z - 4 = 0$, $2x + 3y - z - 6 = 0$.

Указание. Направляющий вектор каждой из прямых можно определить как векторное произведение нормальных векторов плоскостей ($\boldsymbol{P} = \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}_1$).

500. Показать, что прямая $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$ перпендикулярна к прямой $x = z + 1$, $y = 1 - z$.

501. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $(-4;\ 3;\ 0)$ и параллельной прямой $x - 2y + z = 4$, $2x + y - z = 0$.

502. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $(2;\ -3;\ 4)$ на ось Oz.

Указание. Искомая прямая проходит еще через точку $(0;\ 0;\ 4)$.

503. Найти расстояние от точки $M(2;\ -1;\ 3)$ до прямой $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{5}$.

Указание. Точка $A\ (-1;\ -2;\ 1)$ лежит на прямой; $\boldsymbol{P}\{3;\ 4;\ 5\}$ — направляющий вектор прямой. Тогда

$$d = AM \sin\alpha = \frac{AM\,|\boldsymbol{P} \times \overline{AM}\,|}{P \cdot AM} = \frac{|\boldsymbol{P} \times \overline{AM}\,|}{P}.$$

504. Найти расстояние между параллельными прямыми $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$ и $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$.

---

505. Найти следы прямой $\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$ на координатных плоскостях и построить прямую.

506. Уравнения прямой $2x + y + 8z - 16 = 0$, $x - 2y - z + 2 = 0$ написать: 1) в проекциях; 2) в канонической форме. Найти следы прямой на координатных плоскостях, построить прямую и ее проекции.

507. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $A(0;\ -4;\ 0)$ и параллельной вектору $\boldsymbol{P}\{1;\ 2;\ 3\}$, найти след прямой на плоскости xOz и построить прямую.

508. Построить прямую $x = 3$, $z = 5$ и найти ее направляющий вектор.

509. Найти направляющей вектор прямой $x + y - z = 0$, $y = x$ и найти углы прямой с осями координат (см. указание к задаче 499).

510. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $(2; -3; 4)$ на ось Oy.

511. Найти угол между прямыми $2x - y - 7 = 0$, $2x - z + 5 = 0$ и $3x - 2y + 8 = 0$, $z = 3x$.

512. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $(-1; 2; -2)$ и параллельной прямой $x - y = 2$, $y = 2z + 1$.

513. Найти расстояние от точки $M(3; 0; 4)$ до прямой $y = 2x + 1$, $z = 2x$ (см. задачу 503).

§ 4. Прямая и плоскость

1°. Угол между прямой $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\sin\theta = \frac{|\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{P}|}{NP} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{NP}. \qquad (1)$$

Условие их параллельности ($\boldsymbol{N} \perp \boldsymbol{P}$):

$$Am + Bn + Cp = 0. \qquad (2)$$

Условие их перпендикулярности ($\boldsymbol{N} \parallel \boldsymbol{P}$):

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \qquad (3)$$

2°. Точка пересечения прямой и плоскости. Написав параметрические уравнения прямой $x = mt + a$, $y = nt + b$, $z = pt + c$, подставим в уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ вместо x, y, z их выражения через t. Найдем t_0, а затем x_0, y_0, z_0 — координаты точки пересечения.

3°. Условие расположения двух прямых в одной плоскости:

$$\begin{vmatrix} a - a_1 & b - b_1 & c - c_1 \\ m & n & p \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

514. Найти угол прямой $y = 3x - 1$, $2z = -3x + 2$ с плоскостью $2x + y + z - 4 = 0$.

515. Показать, что прямая $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}$ параллельна плоскости $2x + y - z = 0$, а прямая $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{3}$ лежит в этой плоскости.

516. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(-1;\ 2;\ -3)$ и перпендикулярной к прямой $x = 2,\ y - z = 1$.

517. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$ и точку $(3; 4; 0)$.

518. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ и перпендикулярной к плоскости $2x + 3y - z = 4$.

519. Написать уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$.

520. Написать уравнения прямой, проходящей через начало координат и составляющей равные углы с плоскостями $4y=3x$, $y=0$ и $z=0$. Найти эти углы.

521. Найти точку пересечения прямой $x = 2t - 1$, $y = t + 2$, $z = 1 - t$ с плоскостью $3x - 2y + z = 3$.

522. Найти точку пересечения прямой $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ с плоскостью $x + 2y + 3z - 29 = 0$.

523. Найти проекцию точки $(3;\ 1;\ -1)$ на плоскость $x + 2y + 3z - 30 = 0$.

524. Найти проекцию точки $(2;\ 3;\ 4)$ на прямую $x = y = z$.

525. Найти кратчайшее расстояние между непараллельными прямыми:

1) $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$ и $\frac{x-a_1}{m_1} = \frac{y-b_1}{n_1} = \frac{z-c_1}{p_1}$;

2) $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$.

Указание. Предполагая прямые в общем случае скрещивающимися, нарисуем параллельные плоскости, в которых они расположены. Из точек $A(a;\ b;\ c)$ и $A_1(a_1;\ b_1;\ c_1)$ проведем векторы $\overline{AB} = \overline{A_1B_1} = \mathbf{P}\{m;\ n;\ p\}$ и $\overline{AC} = \overline{A_1C_1} = \mathbf{P}_1\{m_1;\ n_1;\ p_1\}$. Высота призмы $ABCA_1B_1C_1$ и равна искомому расстоянию.

526. Показать, что прямые

$$x = z - 2,\quad y = 2z + 1 \text{ и } \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}$$

пересекаются, и написать уравнение плоскости, в которой они расположены.

527. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки (2; 1; 0) на прямую $x = 3z - 1$, $y = 2z$.

---

528. Построить плоскость $x + y - z = 0$ и прямую, проходящую через точки $A(0;\ 0;\ 4)$ и $B(2;\ 2;\ 0)$. Найти точку пересечения прямой с плоскостью и угол между ними.

529. Построить плоскость $y = z$, прямую $x = -z + 1$, $y = 2$ и найти: 1) точку их пересечения; 2) угол между ними.

530. Найти проекцию точки (3; 1; —1) на плоскость $3x + y + z - 20 = 0$.

531. Найти проекцию точки (1; 2; 8) на прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = z$.

532. Написать уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{3}$ и $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3}$.

533. Показать, что прямые $\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{1}$ и $x = 3z - 4$, $y = z + 2$ пересекаются, найти точку их пересечения.

534. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки (1; 0; —1) на прямую $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-3}$.

535. Найти кратчайшее расстояние между прямыми $x = -2y = z$ и $x = y = 2$.

§ 5. Сферические и цилиндрические поверхности

1°. Уравнение сферической поверхности с центром $C(a, b, c)$ и радиусом R:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2. \qquad (1)$$

2°. Уравнение $F(x, y) = 0$, не содержащее z, определяет *цилиндрическую* поверхность *с образующей, параллельной оси* Oz. Аналогично каждое из уравнений: 1) $F(y, z) = 0$ и 2) $F(x, z) = 0$ определяет цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной: 1) Ox; 2) Oy.

3°. Уравнение цилиндрической поверхности с направляющей $F(x, y) = 0$, $z = 0$ и с образующей, параллельной вектору $\boldsymbol{P}\{m;\ n;\ p\}$. Уравнение произвольной образующей будет $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z}{p}$, где $(x_0;\ y_0;\ 0)$ — точка на направляющей.

Определив отсюда x_0 и y_0 и подставив их в уравнение направляющей, получим уравнение цилиндрической поверхности:

$$F\left(x-\frac{m}{p}z,\quad y-\frac{n}{p}z\right)=0. \tag{2}$$

536. Найти центр и радиус сферы:

1) $x^2+y^2+z^2-3x+5y-4z=0$;

2) $x^2+y^2+z^2=2az$

и построить изображение второй сферы.

537. Написать уравнение сферической поверхности, вписанной в тетраэдр, образованный плоскостями

$$3x-2y+6z-18=0,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0.$$

538. Написать уравнение геометрического места точек, расположенных вдвое ближе к точке $A(2;0;0)$, чем к точке $B(-4;\ 0;\ 0)$.

539. Написать уравнение сферической поверхности, проходящей через окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=a$ и через точку $(a;\ a;\ a)$.

Указание. Искомое уравнение должно иметь вид:

$$x^2+y^2+z^2-a^2+\lambda(x+y+z-a)=0.$$

540. Построить в левой системе координат поверхности

1) $y^2+z^2=4$; 2) $y^2=ax$; 3) $xz=4$; 4) $x^2+y^2=ax$.

541. Написать уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от прямой $x=a$, $y=0$ и плоскости yOz. Построить поверхность.

542. Написать уравнения трех цилиндрических поверхностей, описанных около сферы $x^2+y^2+z^2-2ax=0$ с образующими, параллельными соответственно: 1) оси Ox; 2) оси Oy; 3) оси Oz.

543. Нарисовать в первом октанте левой системы координат кривую Вивиани:

$$x^2+y^2+z^2=16,\quad x^2+y^2=4x,$$

построив ее точки при $x=0$; 2 и 4. Показать, что проекция кривой на плоскость xOz есть парабола.

544. Найти центр и радиус окружности

$$x^2+y^2+z^2=10y,\quad x+2y+2z-19=0.$$

Указание. Центр окружности есть проекция центра шара на плоскость (см. задачу 530).

545. Написать уравнение цилиндрической поверхности с направляющей $y^2 = 4x$, $z = 0$ и с образующей, параллельной вектору $\boldsymbol{P}\{1;\ 2;\ 3\}$.

546. Построить в первом октанте поверхность $(x+y)^2 + az = a^2$ по сечениям плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = h \leqslant a$ и показать, что эта поверхность цилиндрическая с образующими, параллельными прямой $x + y = a$, $z = 0$.

547. Шар $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ освещен лучами, параллельными прямой $x = 0$, $y = z$. Найти форму тени шара на плоскости xOy.

Указание. Нужно написать уравнение цилиндрической поверхности, образованной лучами, касательными к шару. За ее направляющую принять линию сечения шара плоскостью, проходящей через центр шара и перпендикулярной к лучам.

---

548. Написать уравнение плоскости, проходящей через центр C поверхности $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - 3z = 0$ и перпендикулярной к прямой OC.

549. Написать уравнение геометрического места точек, удаленных вдвое дальше от начала координат, чем от точки $(0;\ -3;\ 0)$.

550. Найти проекцию на плоскость $z = 0$ сечения шаровой поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 4(x - 2y - 2z)$ плоскостью, проходящей через центр шара и перпендикулярной к прямой $x = 0$, $y + z = 0$.

551. В левой системе координат построить поверхности:

1) $z = 4 - x^2$; 2) $y^2 + z^2 = 4z$; 3) $y^2 = x^3$.

552. Построить в первом октанте левой системы координат кривую пересечения цилиндров $x^2 + z^2 = a^2$ и $x^2 + y^2 = a^2$.

Указание. Построив в плоскостях xOz и xOy четверти направляющих окружностей, разделить их приближенно на равные части (например, на 4) и через точки деления провести образующие цилиндров до их пересечения (см. рис. 60, с. 331).

553. Написать уравнение цилиндрической поверхности с образующей, параллельной вектору $\boldsymbol{P}\{1;\ 1;\ 1\}$, и с направляющей $x^2 + y^2 = 4x$, $z = 0$.

554. Построить тело, ограниченное поверхностями $y^2 = x$, $z = 0$, $z = 4$, $x = 4$, и написать уравнения диагоналей грани, лежащей в плоскости $x = 4$.

§ 6. Конические поверхности и поверхности вращения

1°. Конические поверхности. Пусть *коническая поверхность* имеет вершину в начале координат, а *направляющая* $F(x, y) = 0$ на плоскости $z = h$. Уравнение *образующей* будет: $\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{h}$, где $(x_0;\ y_0;\ h)$ — точка направляющей. Определив отсюда x_0 и y_0 и подставив их в уравнение $F(x, y) = 0$, получим *уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат*:

$$F\left(\frac{xh}{z},\ \frac{yh}{z}\right) = 0. \qquad (1)$$

Если вершина конуса будет в точке $(a;\ b;\ c)$, то уравнение примет вид

$$F\left[\frac{(x-a)(h-c)}{z-c} + a,\ \ \frac{(y-b)(h-c)}{z-c} + b\right] = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (1) *однородно* относительно x, y, z, а уравнение (2) *однородно* относительно $x - a$, $y - b$ и $z - c$. По *однородности* уравнения можно узнать уравнение *конической поверхности*.

2°. Поверхности вращения:

Уравнения кривой	Ось вращения	Уравнение поверхности вращения
$F(x, y) = 0,$ $z = 0$	Ox Oy	$F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ $F(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$
$F(x, z) = 0,$ $y = 0$	Ox Oz	$F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$
$F(y, z) = 0,$ $x = 0$	Oy Oz	$F(y, \sqrt{x^2 + z^2}) = 0$ $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$

555. Написать уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат и направляющей $x^2 + y^2 = a^2$, $z = c$. Построить изображение поверхности.

556. Написать уравнение конической поверхности с вершиной в точке $A(0;\ -a;\ 0)$ и направляющей $x^2 = 2py$, $z = h$. Построить изображение поверхности.

557. Определить вершину конуса $x^2 + (y - a)^2 - z^2 = 0$, его направляющую в плоскости $z = a$ и построить конус.

558. Определить вершину конуса $x^2=2yz$, его направляющую в плоскости $z=h$ и построить конус.

559. Исследовать поверхность *коноида* *) или *клина* $(a^2-x^2)y^2=h^2z^2$ по сечениям плоскостями $z=0$, $y=h$, $x=\pm c\,(c\leqslant a)$ и построить коноид в области $z\geqslant 0$.

560. Написать уравнение поверхности, образованной вращением кривой $z=x^2$, $y=0$: 1) вокруг оси Oz; 2) вокруг оси Ox. Построить обе поверхности.

561. Написать уравнение поверхности, образованной вращением вокруг оси Oz: 1) кривой $z=e^{-x^2}$, $y=0$; 2) кривой $z=\frac{4}{x^2}$, $y=0$. Построить обе поверхности (в левой системе координат).

562. Написать уравнение конической поверхности с вершиной $O(0;\ 0;\ 0)$, направляющей $x^2+(y-6)^2+z^2=25$, $y=3$ и нарисовать поверхность.

563. Написать уравнение конической поверхности с вершиной $C(0;\ -a;\ 0)$, направляющей $x^2+y^2+z^2=25$, $y=3$ и нарисовать поверхность.

564. Написать уравнение поверхности, образованной вращением прямой $z=y$, $x=0$: 1) вокруг оси Oy; 2) вокруг Oz, и нарисовать обе поверхности.

565. Показать, что сечение конуса $z^2=xy$ плоскостью $x+y=2a$ есть эллипс, и найти его полуоси.

§ 7. Эллипсоид, гиперболоиды и параболоиды

1°. Канонические уравнения. Кроме цилиндрических, существуют шесть основных видов поверхностей второго порядка, определяемых следующими каноническими (простейшими) уравнениями:

I. *Эллипсоид*: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

II. *Гиперболоиды*: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 & \text{— однополостный,} \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 & \text{— двуполостный.} \end{cases}$

III. *Конус второго порядка*: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

---

*) *Коноидом* называется поверхность, образованная движением прямой, параллельной данной плоскости и пересекающей данную кривую и данную прямую.

IV. *Параболоиды* (при $pq > 0$): $\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z \text{ — эллиптический,} \\ \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \text{ — гиперболический.} \end{cases}$

2°. Прямолинейные образующие. Через каждую точку *однополостного гиперболоида* проходят *две* его *прямолинейные образующие*:

$$\alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 + \frac{y}{b}\right), \qquad \gamma\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \delta\left(1 - \frac{y}{b}\right),$$

и

$$\beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 - \frac{y}{b}\right) \qquad \delta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \gamma\left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

Через каждую точку *гиперболического параболоида* тоже проходят *две* его *прямолинейные образующие* (при $p > 0$ и $q > 0$)

$$\alpha\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2\beta, \qquad \gamma\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = \delta z,$$

и

$$\beta\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = \alpha z \qquad \delta\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2\gamma.$$

3°. Круговые сечения. На всех поверхностях, имеющих *эллиптические* сечения, имеются также и *круговые* сечения. Наибольшие круговые сечения эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (при $a > b > c$) находятся на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$. Круговые сечения эллиптического параболоида $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z$, проходящие через вершину, находятся на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 2pz$ (при $p > q$).

566. Написать уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$ вокруг оси Oz.

567. Построить поверхность $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{25} = 1$ и найти площади ее сечений плоскостями: 1) $z = 3$; 2) $y = 1$.

568. Написать уравнение поверхности, образованной вращением кривой $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$: 1) вокруг оси Oz; 2) вокруг оси Ox. Построить обе поверхности (в левой системе координат).

569. Построить поверхности:

1) $x^2 + y^2 - z^2 = 4$; 2) $x^2 - y^2 + z^2 + 4 = 0$.

570. Построить гиперболоид $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{36}=1$ и найти его образующие, проходящие через точку $(4;\ 1;\ -3)$.

571. Нитяная модель цилиндра «закручена» поворотом верхнего круга на $\alpha°$ (рис. 22). Определить уравнение полученной «линейчатой» поверхности, если окружности ее оснований лежат в плоскостях $z=\pm c$, их центры — на оси Oz, а их радиусы равны $2a$. Рассмотреть частные случаи при $\alpha=90°$, $120°$, $180°$.

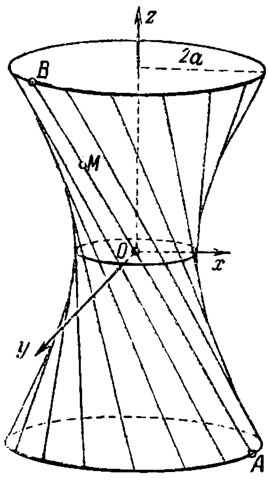

Рис. 22

Указание. Точка $M(x;\ y;\ z)$ делит расстояние между точками

$$A\,(2a\cos t;\ 2a\sin t;\ -c),$$

$$B\,[2a\cos(t+\alpha);\ 2a\sin(t+\alpha);\ c]$$

в отношении $AM:MB=(c+z):(c-z)$.

572. Написать уравнение поверхности, образованной вращением параболы $az=x^2$, $y=0$ вокруг оси Oz. Построить поверхность по сечениям плоскостями: $z=a$, $x=0$, $y=0$.

573. Построить поверхности:

1) $2z=x^2+\frac{y^2}{2}$; 2) $z=c\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$.

574. Построить (в левой системе координат) поверхность $x^2-y^2=4z$ и найти ее образующие, проходящие через точку $(3;\ 1;\ 2)$.

575. Написать уравнение геометрического места точек, отношение расстояний от каждой из которых до плоскости $x=2a$ к расстояниям до точки $F(a;\ 0;\ 0)$ равно $\sqrt{2}$. Построить поверхность.

576. Написать уравнение геометрического места точек, отношение расстояний от каждой из которых до точки $F(0;\ 0;\ 2a)$ и до плоскости $z=a$ равно $\sqrt{2}$. Построить поверхность.

577. Написать уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точки $F(-a;\ 0;\ 0)$ и от плоскости $x=a$. Построить поверхность.

578. Найти наибольшие круговые сечения эллипсоида $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1$.

579. Определить круговые сечения эллиптического параболоида $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=z$, проходящие через начало координат.

---

580. Назвать и построить каждую из поверхностей:

1) $x^2+y^2+z^2=2az$;	6) $x^2=2az$;
2) $x^2+y^2=2az$;	7) $x^2=2yz$;
3) $x^2+z^2=2az$;	8) $z=2+x^2+y^2$;
4) $x^2-y^2=2az$;	9) $(z-a)^2=xy$;
5) $x^2-y^2=z^2$;	10) $(z-2x)^2+4(z-2x)=y^2$.

581. Написать уравнения прямолинейных образующих гиперболоида $x^2-y^2+z^2=4$, проходящих через точку $(2;\ 4;\ 4)$.

582. Написать уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точки $F(0;\ 0;\ a/2)$ и от плоскости $z=-a/2$. Построить поверхность.

583. Написать уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точки $F(0;\ 0;\ a/2)$ и от плоскости $z=3a/2$. Построить поверхность.

584. Найти наименьшие круговые сечения гиперболоида

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{3z^2}{25}=1.$$

585. Написать уравнения прямолинейных образующих гиперболического параболоида $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=2z$, проходящих через точку $(4;\ 3;\ 0)$.

ГЛАВА 4

ВЫСШАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Определители

1°. Определители. *Определителем второго порядка* называется число, обозначаемое символом $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \tag{1}$$

Определителем третьего порядка называется число, обозначаемое символом $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Определители второго порядка, входящие в правую часть равенства (2), получаются из данного определителя третьего порядка вычеркиванием одной строки и одного столбца и называются его *минорами.* Формула (2) называется формулой разложения определителя третьего порядка по элементам первой строки.

2°. Свойства определителей.

I. Величина определителя не изменится от замены строк столбцами.

II. Величина определителя от перестановки двух любых параллельных его рядов меняет знак на обратный.

Из свойств I и II следует, что определитель можно разложить по элементам любого ряда, так как этот ряд можно сделать первой строкой.

III. Определитель с двумя одинаковыми параллельными рядами равен нулю.

IV. Общий множитель элементов одного ряда можно вынести за знак определителя.

V. Величина определителя не изменится, если к элементам одного ряда прибавить элементы параллельного ряда, умноженные на произвольное одинаковое число. Например:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + mc_1 & b_1 + nc_1 & c_1 \\ a_2 + mc_2 & b_2 + nc_2 & c_2 \\ a_3 + mc_3 & b_3 + nc_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

С помощью этого свойства можно в любом ряду определителя третьего порядка сделать два нуля, чем упростится разложение определителя по элементам этого ряда.

3°. Площадь треугольника с вершинами $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$:

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Вычислить определители:

586. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$. **587.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}$. **588.** $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$.

589. $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix}$. **590.** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

591. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta \end{vmatrix}$.

Вычислить определители, разложив их по элементам первого столбца:

592. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. **593.** $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$.

Вычислить определители, разложив их по элементам того ряда, который содержит наибольшее число нулей:

594. $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$. **595.** $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$.

Упростить и вычислить определители:

596. $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$. **597.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$.

598. $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$. **599.** $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}$.

600. $\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

601. $\begin{vmatrix} 2\cos^2\frac{\alpha}{2} & \sin\alpha & 1 \\ 2\cos^2\frac{\beta}{2} & \sin\beta & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

602. Найти площадь треугольника с вершинами

$A(2;\ 3)$, $B(4;\ -1)$ и $C(6;\ 5)$.

603. Лежат ли на одной прямой точки:

$A(1;\ 3)$, $B(2;\ 4)$ и $C(3;\ 5)$?

604. Написать с помощью определителя третьего порядка уравнение прямой, проходящей через точки:

1) $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$; 2) $(2;\ 3)$ и $(-1;\ 5)$.

Упростить и вычислить определители:

605. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$. **606.** $\begin{vmatrix} m+a & m-a & a \\ n+a & 2n-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix}$.

607. $\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix}$. **608.** $\begin{vmatrix} \sin 3\alpha & \cos 3\alpha & 1 \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 1 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$.

Указание. В примере 607 вынести a за знак определителя, затем из первой и второй строк вычесть третью и вынести $(x-z)$ и $(y-z)$ за знак определителя.

609. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} & \frac{y_1+y_2}{2} & 1 \\ \frac{x_1-x_2}{2} & \frac{y_1-y_2}{2} & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

610. Найти x из уравнений:

$$1)\ \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \qquad 2)\ \begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

и проверить подстановкой корней в определитель.

§ 2. Системы линейных уравнений

1°. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \tag{1}$$

имеет решение:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{2}$$

при условии, что определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$

2°. Система двух однородных линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

имеет решения, определяемые формулами:

$$x = k\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \qquad y = -k\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \qquad z = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

где k — произвольное число.

3°. Система трех однородных линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

имеет отличные от 0 решения, если определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$, и обратно.

4°. Система трех линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2, \\ a_3x + b_3y &= c_3 \end{aligned} \tag{6}$$

совместна, когда $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ и система не содержит попарно противоречивых уравнений.

5°. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \tag{7}$$

при условии, что определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

имеет следующее единственное решение:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \tag{8}$$

где

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

6°. Несовместные и неопределенные системы. Обозначим левые части уравнений (7) через X_1, X_2 и X_3. Пусть определитель системы (7) $\Delta = 0$. При этом возможны два предположения.

I. Элементы двух строк определителя Δ *пропорциональны*, например $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = m$. Тогда $X_2 = mX_1$ и

1) если $d_2 \neq md_1$, то *система несовместна* (первые два уравнения *противоречивы*);

2) если $d_2 = md_1$, то *система неопределенна* (если первое и третье уравнения не противоречивы).

II. В определителе Δ нет строк с пропорциональными элементами. Тогда существуют отличные от 0 числа m и n такие, при которых $mX_1 + nX_2 = X_3$, и

1) если $md_1 + nd_2 \neq d_3$, то *система несовместна*;

2) если $md_1 + nd_2 = d_3$, то *система неопределенна*.

Числа m и n можно подобрать по соображению или же найти их из уравнений $a_1m + a_2n = a_3$, $b_1m + b_2n = b_3$, $c_1m + c_2n = c_3$.

Решить с помощью определителей системы уравнений:

611. $3x + 2y = 7,$
$4x - 5y = 40.$

612. $ax - 3y = 1,$
$ax - 2y = 2.$

613. $5x + 2y = 4,$
$7x + 4y = 8.$

614. $mx - ny = (m - n)^2,$
$2x - y = n$ (при $m \neq 2n$).

Решить системы уравнений:

615. $2x - 3y + z - 2 = 0,$
$x + 5y - 4z + 5 = 0,$
$4x + y - 3z + 4 = 0.$

616. $2x - 4y + 3z = 1,$
$x - 2y + 4z = 3,$
$3x - y + 5z = 2.$

617. $2x - 5y + 2z = 0,$
$x + 4y - 3z = 0.$

618. $3x + 2y - z = 0,$
$2x - y + 3z = 0,$
$x + 3y - 4z = 0,$

619. $3x + 2y - z = 0,$
$2x - y + 3z = 0,$
$x + y - z = 0.$

620. $x + 2y + 3z = 4,$
$2x + 4y + 6z = 3,$
$3x + y - z = 1.$

621. $x + 2y + 3z = 4,$
$2x + y - z = 3,$
$3x + 3y + 2z = 7.$

622. $x + 2y + 3z = 4,$
$2x + y - z = 3,$
$3x + 3y + 2z = 10.$

623. Пересекаются ли в одной точке прямые:

1) $2x - 3y = 6,\ 3x + y = 9,\ x + 4y = 3$

и

2) $2x - 3y = 6,\ x + 2y = 4,\ x - 5y = 5.$

Выполнить в обоих случаях построение.

Решить системы линейных уравнений:

624. $2x - y + z = 2,$
$3x + 2y + 2z = -2,$
$x - 2y + z = 1.$

625. $x + 2y - 3z = 5,$
$2x - y - z = 1,$
$x + 3y + 4z = 6.$

626. $3x + 2y + 2z = 0,$
$5x + 2y + 3z = 0.$

627. $3x - y + 2z = 0,$
$2x + 3y - 5z = 0,$
$x + y + z = 0.$

628. $2x - y + 3z = 0,$
$x + 2y - 5z = 0,$
$3x + y - 2z = 0.$

629. $x - 2y + z = 4,$
$2x + 3y - z = 3,$
$4x - y + z = 11.$

§ 3. Комплексные числа

1°. Определения. *Комплексным числом* называется выражение вида $x + yi$, в котором x и y — вещественные числа, а i — некоторый символ, если при этом приняты условия:

1) $x + 0i = x,\ 0 + yi = yi$ и $1i = i,\ (-1)\,i = -i;$

2) $x + yi = x_1 + y_1 i$ тогда и только тогда, когда $x = x_1$ и $y = y_1;$

3) $(x+yi)+(x_1+y_1i)=(x+x_1)+(y+y_1)i$;

4) $(x+yi)(x_1+y_1i)=(xx_1-yy_1)+(xy_1+x_1y)i$.

Из условий 1) и 4) получаются степени числа i:

$$i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1,\ i^5=i \text{ и т. д.} \qquad (1)$$

Комплексное число $x+yi$, в котором $y\neq 0$, называется *мнимым числом*. Число i называется *мнимой единицей*.

2°. Действия над комплексными числами. Сложение, вычитание, умножение и возведение в степень комплексных чисел можно выполнять по правилам этих действий над многочленами с заменой степеней числа i по формулам (1).

Деление комплексных чисел и извлечение корня из комплексного числа определяются как действия обратные.

3°. Тригонометрическая форма комплексного числа. Комплексное число $x+yi$ определяется парой вещественных чисел (x, y) и поэтому изображается точкой $M(x; y)$ плоскости или ее радиус-вектором $r=\overline{OM}$ (см. с. 48, рис. 12). Длина этого вектора $r=\sqrt{x^2+y^2}$ называется *модулем* комплексного числа, а угол его φ с осью Ox называется *аргументом* комплексного числа. Так как $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, то

$$x+yi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \qquad (2)$$

4°. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\,r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)=$$
$$=(rr_1)[\cos(\varphi+\varphi_1)+i\sin(\varphi+\varphi_1)], \qquad (3)$$

$$\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}=\frac{r}{r_1}[\cos(\varphi-\varphi_1)+i\sin(\varphi-\varphi_1)], \qquad (4)$$

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi), \qquad (5)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \qquad (6)$$

где $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Формулы (5) и (6) называются *формулами Муавра*.

5°. Формула Эйлера: $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$. (7)

6°. Логарифм комплексного числа:

$$\ln z=\ln r+i\varphi_0+2k\pi i, \qquad (8)$$

где φ_0 — значение аргумента φ, удовлетворяющее неравенствам $-\pi<\varphi\leqslant\pi$. Выражение $\ln r+i\varphi_0$ называется *главным значением* логарифма.

630. Выполнить действия: 1) $(2+3i)(3-2i)$; 2) $(a+bi)(a-bi)$; 3) $(3-2i)^2$; 4) $(1+i)^3$; 5) $\frac{1+i}{1-i}$; 6) $\frac{2i}{1+i}$.

631. Решить уравнения: 1) $x^2+25=0$; 2) $x^2-2x+5=0$; 3) $x^2+4x+13=0$ и проверить подстановкой корней в уравнение.

Следующие комплексные числа изобразить векторами, определить их модули и аргументы и записать в тригонометрической форме:

632. 1) $z=3$; 2) $z=-2$; 3) $z=3i$; 4) $z=-2i$.

633. 1) $z=2-2i$; 2) $z=1+i\sqrt{3}$; 3) $z=-\sqrt{3}-i$.

634. 1) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; 2) $\sin\alpha+i(1-\cos\alpha)$.

635. Числа, данные в задачах 632—634, записать в форме $re^{\varphi i}$ (при $-\pi<\varphi\leqslant\pi$).

636. Построить области точек z по условиям:

1) $|z|<3$; 2) $|z|<2$ и $\pi/2<\varphi<\pi$;

3) $2<|z|<4$ и $-\pi<\varphi<-\pi/2$.

637. Показать, что $|z_1-z_2|$ есть расстояние между точками z_1 и z_2.

638. Дана точка $z_0=-2+3i$. Построить область точек z, для которых $|z-z_0|<1$.

639. Число, сопряженное с z, обозначается через $\bar{z}$. Доказать, что $z\cdot\bar{z}=|z|^2$.

640. Вычислить по формуле Муавра:

1) $(1+i)^{10}$; 2) $(1-i\sqrt{3})^6$; 3) $(-1+i)^5$;

4) $\left(1+\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^4$; 5) $(\sqrt{3}+i)^3$.

641. Выразить $\sin 3\alpha$ и $\cos 3\alpha$ через функции угла α, используя тождество $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3=\cos 3\alpha+$ $+i\sin 3\alpha$.

642. Найти все значения $z=\sqrt[6]{1}$ и изобразить их радиус-векторами, построив круг радиуса, равного 1.

643. Найти: 1) $\sqrt[3]{1}$; 2) $\sqrt[3]{i}$; 3) $\sqrt[6]{-1}$; 4) $\sqrt[3]{-2+2i}$.

644. Найти: 1) $\sqrt{i}$; 2) $\sqrt[3]{-1+i}$; 3) $\sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}}$.

645. Решить двучленные уравнения: 1) $x^3+8=0$; 2) $x^4+4=0$.

646. Найти главное значение логарифма: 1) $\ln(-2)$; 2) $\ln(1+i)$; 3) $\ln i$; 4) $\ln(x+yi)$; 5) $\ln(2-2i)$.

647. Найти сумму $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots$ $\ldots+\sin nx$.

Указание. По формуле Эйлера заменить $\sin x=\dfrac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}$ и т. д.

648. Найти сумму $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots$ $\ldots+\cos nx$.

649. Доказать тождество

$$x^5-1=$$
$$=(x-1)(x^2-2x\cos 72^\circ+1)(x^2-2x\cos 144^\circ+1).$$

---

650. Вычислить:

1) $\frac{4-3i}{4+3i}$; 2) $(a+bi)^3-(a-bi)^3$.

Следующие комплексные числа изобразить векторами, определить их модули и аргументы и записать в тригонометрической форме и в форме $re^{\varphi i}$ (при $-\pi<\varphi\leqslant\pi$):

651. 1) $z=4+4i$; 2) $z=-1+i\sqrt{3}$; 3) $z=1-i$.

652. 1) $z=5$; 2) $z=-i$; 3) $z=-\sqrt{2}-\sqrt{-2}$.

653. Построить область точек z по условиям

$$1<|z|<3 \text{ и } \pi/4<\varphi<3\pi/4.$$

654. Дана точка $z_0=3-4i$. Построить область точек z, для которых $|z-z_0|<5$.

655. Вычислить по формуле Муавра:

1) $(1-i)^6$; 2) $(2+i\sqrt{12})^5$; 3) $\left(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$.

656. Выразить $\sin 4\alpha$ и $\cos 4\alpha$ через функции угла α, используя тождество $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^4=\cos 4\alpha+$ $+i\sin 4\alpha$.

657. Найти все значения корней: 1) $\sqrt[4]{-1}$ и 2) $\sqrt[5]{1}$ и изобразить их радиус-векторами.

658. Решить уравнения: 1) $x^3-8=0$; 2) x^6+ $+64=0$; 3) $x^4-81=0$.

659. Найти сумму

$$\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\ldots+\cos(2n-1)x$$

(см. задачу 647).

§ 4. Уравнения высших степеней и приближенное решение уравнений

1°. Кубическое уравнение:

$$x^3+ax^2+bx+c=0. \qquad (1)$$

Если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения (1), то уравнение можно записать в виде $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$. Отсюда $a=$ $=-(x_1+x_2+x_3)$, $b=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$, $c=-x_1x_2x_3$.

Уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ приводится к виду $z^3 + pz + q = 0$ подстановкой $x = z - \frac{a}{3}$. Уравнение $z^3 + pz + q = 0$ решается по формуле Кардано:

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = u + v.$$

I. Если $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$, то $z_1 = u_1 + v_1$, $z_{2,3} = -\frac{u_1 + v_1}{2} \pm \frac{u_1 - v_1}{2} i\sqrt{3}$, где u_1 и v_1 — вещественные значения корней u и v.

II. Если $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, то $z_1 = \frac{3q}{p}$, $z_2 = z_3 = -\frac{3t}{2p} = -\frac{z_1}{2}$.

III. Если $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, то $z_1 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos\frac{\varphi}{3}$, $z_{2,3} = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos\left(\frac{\varphi}{3} \pm 120^\circ\right)$, где $\cos\varphi = -\frac{q}{2}\Big/\sqrt{\frac{-p^3}{27}}$.

2°. Отделение вещественного корня уравнения $f(x) = 0$. Между a и b содержится единственный корень уравнения $f(x) = 0$, если $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки, а $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и внутри него имеет производную $f'(x) \neq 0$. Будем считать еще, что на этом отрезке и $f''(x) \neq 0$.

3°. Способ хорд приближенного решения уравнения $f(x) = 0$. Пусть α_0 — тот из концов отрезка $[a, b]$, отделяющего корень, на котором $f(\alpha_0) \cdot f''(\alpha_0) < 0$. Тогда приближением к корню x будет точка α_1 пересечения с *Ox хорды AB* (рис. 23):

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{f(\alpha_0)}{k},$$

где $k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

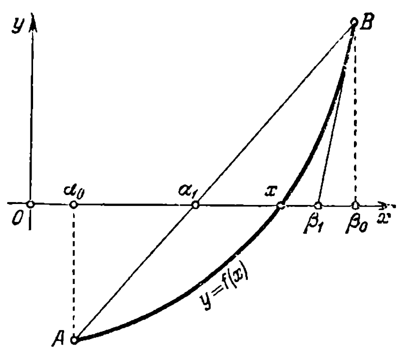

Рис. 23

4°. Способ касательных (способ Ньютона). Пусть β_0 — тот из концов отрезка $[a, b]$, на котором $f(\beta_0) f''(\beta_0) > 0$. Тогда приближением к корню x будет точка β_1 пересечения с *Ox касательной* к кривой $y = f(x)$ в точке

$[\beta_0, f(\beta_0)]$ (рис. 23):

$$\beta_1 = \beta_0 - \frac{f(\beta_0)}{k_1},$$

где $k_1 = f'(\beta_0)$.

Применяя повторно способ хорд и касательных, можно составить таблицу

α	β	$f(\alpha)$	$f(\beta)$	k	k_1	$\Delta\alpha$	$\Delta\beta$
..	..	..	..	..	..	..	..

(2)

где k и k_1 — наклоны хорд и касательных, а

$$\Delta\alpha = -\frac{f(\alpha)}{k} \quad \text{и} \quad \Delta\beta = -\frac{f(\beta)}{k_1}.$$

Последовательности получаемых в таблице (2) значений α и β сходятся к искомому корню.

5°. Способ итераций. Если уравнение $f(x) = 0$ можно привести к виду $x = \varphi(x)$, причем в некоторой окрестности корня $|\varphi'(x)| < 0 \leqslant 1$ и x_0 — любое число в этой окрестности, то сходящаяся последовательность приближенных решений будет

$$x_1 = \varphi(x_0), \quad x_2 = \varphi(x_1), \quad x_3 = \varphi(x_2), \ \ldots$$

В уравнениях 660, 661 среди целых множителей свободного члена подобрать один корень, разделить левую часть на $x - x_1$ и затем найти остальные корни.

660. 1) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$; 2) $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$. Решение проверить составлением выражений:

$$x_1 + x_2 + x_3, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3, \quad x_1x_2x_3.$$

661. 1) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$;

2) $x^4 + x^3 + 2x - 4 = 0$;

3) $9x^3 + 18x^2 - x - 2 = 0$; 4) $4x^3 - 4x^2 + x - 1 = 0$.

Решить по формуле Кардано следующие уравнения:

662. 1) $z^3 - 6z - 9 = 0$; 2) $z^3 - 12z - 16 = 0$.

663. 1) $z^3 - 12z - 8 = 0$; 2) $z^3 + 6z - 7 = 0$.

664. $x^3 + 9x^2 + 18x + 9 = 0$.

665. Дано уравнение $f(x) = x^4 - x - 10 = 0$. Составив таблицу знаков $f(x)$ при $x = 0, 1, 2, \ldots$, определить границы положительного корня и вычислить его с точностью до 0,01 по способу хорд и касательных.

666. Построить график функции $y = \frac{x^3}{3}$, определить графически границы корней уравнения $x^3 - 6x + 3 = 0$ и вычислить корни с точностью до единицы третьего знака.

667. По способу итераций (последовательных приближений) найти вещественные корни уравнений: 1) $x^3+60x-80=0$; 2) $2^x=4x$; 3) $x^3+l^2x+l^3=0$; 4) $x^4-2x-2=0$.

---

668. Подбором одного корня среди целых множителей свободного члена решить уравнения:

1) $x^3+8x^2+15x+18=0$; 2) $x^3-3x^2+4=0$.

Для проверки составить выражения $\sum x_i$, $\sum x_i x_j$ и $x_1x_2x_3$.

669. По формуле Кардано решить уравнения:

1) $z^3+18z-19=0$; 2) $z^3-6z-4=0$;

3) $z^3-3z+2=0$; 4) $x^3+6x^2+9x+4=0$.

670. Построив график функции $y=\frac{x^4}{5}$, определить границы корней уравнения $x^4+3x-15=0$ и вычислить корни с точностью до 0,01.

671. Найти с точностью до 0,01 положительные корни уравнений: 1) $x^3+50x-60=0$; 2) $x^3+x-32=0$.

672. По способу итераций найти вещественный корень уравнения $x^3+2x-8=0$, вычисляя последовательные приближения по формуле $x=\sqrt[3]{8-2x}$.

ГЛАВА 5

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 1. Переменные величины и функции

1°. Отрезки и интервалы. Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, называется *интервалом* и обозначается (a, b). Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, называется *отрезком* и обозначается $[a, b]$.

Эквивалентные неравенства (при $a > 0$)

$$x^2 < a^2, \text{ или } |x| < a, \text{ или } -a < x < a$$

определяют интервал, симметричный относительно нуля.

2°. Переменные величины и функции. Если каждому значению переменной x поставлено в соответствие одно число, то переменная y, определяемая совокупностью этих чисел, называется однозначной *функцией* x. Переменная x называется при этом *аргументом*, а данная совокупность значений аргумента — *областью определения* функции.

То, что y есть функция x, символически записывают в виде $y = f(x)$, или $y = F(x)$, или $y = \varphi(x)$ и т. п. *Символ* $f(x)$ или $F(x)$ и т. п. обозначает закон соответствия переменных x и y, в частности, он может означать *совокупность действий* или операций, которые нужно выполнить над x, чтобы получить соответствующее значение y.

673. Построить области изменения переменной x, удовлетворяющей неравенствам:

1) $|x| < 4$; 2) $x^2 \leqslant 9$; 3) $|x-4| < 1$;

4) $-1 < x-3 \leqslant 2$; 5) $x^2 > 9$; 6) $(x-2)^2 \leqslant 4$.

674. Записать неравенствами и построить интервалы изменения переменных: $[-1, 3]$; $(0, 4)$; $[-2, 1]$.

675. Определить область изменения переменной $x = 1 - \frac{1}{t}$, где t принимает любое значение $\geqslant 1$.

В задачах 676—678 построить по точкам на отрезке $|x| \leqslant 3$ графики указанных функций.

676. 1) $y=2x$; 2) $y=2x+2$; 3) $y=2x-2$.

677. 1) $y=x^2$; 2) $y=x^2+1$; 3) $y=x^2-1$.

678. 1) $y=\frac{x^3}{3}$; 2) $y=\frac{x^3}{3}+1$; 3) $y=\frac{x^3}{3}-1$.

679. Построить графики функций: 1) $y=\frac{6}{x}$; 2) $y=2^x$; 3) $y=\log_2 x$. Какую особенность в расположении этих кривых относительно осей координат можно заметить?

680. Построить на одном чертеже графики функций: 1) $y=\sin x$; 2) $y=\cos x$ по точкам, в которых y имеет наибольшее, наименьшее и нулевое значения. Сложением ординат этих кривых построить на том же чертеже график функции $y=\sin x+\cos x$.

681. Найти корни x_1 и x_2 функции $y=4x-x^2$ и построить ее график на отрезке $[x_1-1,\ x_2+1]$.

682. Построить графики функций:

1) $y=|x|$; 2) $y=-|x-2|$; 3) $y=|x|-x$.

В задачах 683—686 найти области определения вещественных значений функций и построить их графики.

683. 1) $y=\sqrt{x+2}$; 2) $y=\sqrt{9-x^2}$;

3) $y=\sqrt{4x-x^2}$.

684. 1) $y=\sqrt{-x}+\sqrt{4+x}$; 2) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$.

685. 1) $y=\frac{x(2\pm\sqrt{x})}{4}$; 2) $y=\pm x\sqrt{4-x}$.

686. 1) $y=-\sqrt{2\sin x}$; 2) $y=-\frac{x\sqrt{16-x^2}}{2}$.

687. 1) $f(x)=x^2-x+1$; вычислить $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(a+1)$; 2) $\varphi(x)=\frac{2x-3}{x^2+1}$; вычислить $\varphi(0)$, $\varphi(-1)$, $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{\varphi(x)}$.

688. $F(x)=x^2$; вычислить:

1) $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$; 2) $F\left(\frac{a+h}{2}\right)-F\left(\frac{a-h}{2}\right)$.

689. $f(x)=x^2$, $\varphi(x)=x^3$; вычислить $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$.

690. $F(x,y)=x^3-3xy-y^2$; вычислить $F(4,3)$ и $F(3,4)$.

691. Функция $f(x)$ называется *четной*, если $f(-x) = f(x)$; *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$. Указать, какие из следующих функций четные и какие нечетные:

1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; 2) $\varphi(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$; 3) $F(x) = a^x + \frac{1}{a^x}$; 4) $\Phi(x) = a^x - \frac{1}{a^x}$; 5) $\Psi(x) = x\sin^2 x - x^3$; 6) $f_1(x) = x + x^2$.

692. Середина любой хорды графика некоторой функции $f(x)$ лежит выше графика этой функции. Записать это свойство функции неравенством. Проверить, что этим свойством обладает функция $f(x) = x^2$.

693. Какая из элементарных функций обладает свойствами $f(1) = 0$, $f(a) = 1$, $f(xy) = f(x) + f(y)$?

694. Какая из элементарных функций обладает свойствами $f(0) = 1$, $f(1) = a$, $f(x + y) = f(x)f(y)$?

---

695. Построить области изменения переменной x, удовлетворяющей неравенствам:

1) $|x| < 3$; 2) $x^2 \leqslant 4$; 3) $|x - 2| < 2$; 4) $(x - 1)^2 \leqslant 4$.

696. Определить область изменения переменной $x = 2 + \frac{1}{t}$, где t принимает любое значение $\geqslant 1$.

697. Построить графики функций:

1) $y = 4 - \frac{x^3}{2}$ на отрезке $|x| \leqslant 2$;

2) $y = 3{,}5 + 3x - \frac{x^2}{2}$ между точками пересечения с осью абсцисс.

698. Построить графики функций:

1) $y = x - 4 + |x - 2|$ на отрезке $[-2, 5]$;

2) $y = 1 - \cos x$ на отрезке $|x| \leqslant 2\pi$.

699. Построить графики функций:

1) $y = -\frac{4}{x}$; 2) $y = 2^{-x}$.

700. Найти области определения вещественных значений функций:

1) $y = \sqrt{4 - x^2}$; 2) $y = \sqrt{x + 1} - \sqrt{3 - x}$;

3) $y = 1 - \sqrt{2\cos 2x}$; 4) $y = \frac{4}{1 + \sqrt{x^2 - 4}}$

и построить их графики.

701. Для функции $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+1}$ вычислить $f(0)$, $f(-2)$, $f(-1/2)$, $f(x-1)$, $f(1/2)$;

2) для функции $\varphi(x)=x^3$ вычислить $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x-h)}{h}$;

3) для функции $f(x)=4x-x^2$ вычислить $f(a+1)-f(a-1)$.

§ 2. Пределы последовательности и функции. Бесконечно малые и бесконечно большие

1°. Числовая последовательность. Пусть каждому натуральному числу $n=1, 2, 3, \ldots$ по некоторому закону поставлено в соответствие число x_n. Тогда говорят, что этим определена *последовательность* чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$ или, короче, последовательность $\{x_n\}=\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Отдельные числа последовательности $\{x_n\}$ называются ее *элементами*. Говорят еще, что переменная x_n пробегает значение последовательности $\{x_n\}$.

2°. Предел последовательности (предел переменной). Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, или пределом переменной x_n (обозначается $x_n \to a$), если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется зависящее от ε число n_0 такое, что $|x_n-a|<\varepsilon$ для всех натуральных $n>n_0$. Интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ называется *ε-окрестностью* числа a (или точки a). Таким образом, $x_n \to a$ обозначает, что для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое число n_0, что для всех $n>n_0$ числа x_n будут находиться в ε-окрестности числа a.

3°. Предел функции. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой ε-окрестности точки a, за исключением быть может самой точки a. Говорят, что число b является *пределом функции* $f(x)$ при $x\to a$ (пишут $f(x)\to b$ при $x \to a$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$), если для любого $\varepsilon>0$ существует зависящее от ε число $\delta>0$ такое, что $|f(x)-b|<\varepsilon$ при $0<|x-a|<\delta$. Аналогично, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, если для всякого $\varepsilon>0$ существует зависящее от ε число N такое, что $|f(x)-b|<\varepsilon$ при $|x|>N$. Употребляется также запись $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, которая обозначает, что для всякого числа $A>0$ существует зависящее от A число δ такое, что $|f(x)|>A$ при $0<|x-a|<\delta$.

Если $x\to a$ и при этом $x<a$, то пишут $x\to a-0$; аналогично, если $x \to a$ и при этом $x>a$, то пишут $x\to a+0$. Числа $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ называются соответственно *пределом слева* функции $f(x)$ в точке a и *пределом справа* функции $f(x)$ в точке a. Для существования предела функции $f(x)$ при $x\to a$ необходимо и достаточно, чтобы было $f(a-0)=f(a+0)$. Вместо $x\to 0-0$ и $x \to 0+0$ пишут $x\to -0$ и $x\to +0$ соответственно.

4°. Бесконечно малые. Если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x)=0$, т. е. если $|\alpha(x)|<\varepsilon$ при $0<|x-a|<\delta(\varepsilon)$, то функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to a$. Аналогично определяется бесконечно малая $\alpha(x)$ при $x\to\infty$.

5°. **Бесконечно большие.** Если для любого сколь угодно большого числа N существует такое $\delta(N)$, что при $0 < |x-a| < \delta(N)$ выполнено равенство $|f(x)| > N$, то функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$. Аналогично определяется бесконечно большая $f(x)$ при $x \to \infty$.

702. Полагая $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, написать последовательности значений переменных:

$$\alpha = \frac{1}{2^n}, \quad \alpha = -\frac{1}{2^n}, \quad \alpha = \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Начиная с какого n модуль каждой из переменной сделается и будет оставаться меньше 0,001, меньше данного положительного ε?

703. Написать последовательность значений переменной $x = 1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Начиная с какого n модуль разности $x - 1$ сделается и будет оставаться меньше 0,01, меньше данного положительного ε?

704. Прибавляя к 3 (или вычитая из 3) сначала 1, затем 0,1, потом 0,01 и т. д., записать «десятичными» последовательностями приближения переменной к пределу: $x_n \to 3 + 0$, $x_n \to 3 - 0$.

705. Записать «десятичными» последовательностями приближения переменных к пределам: $x_n \to 5 + 0$, $x_n \to 5 - 0$, $x_n \to -2 + 0$, $x_n \to -2 - 0$, $x_n \to 1 + 0$, $x_n \to 1 - 0$, $x_n \to 1{,}2 + 0$, $x_n \to 1{,}2 - 0$.

706. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$. Пояснить таблицами значений x и x^2.

707. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 3} (2x - 1) = 5$. По данному числу $\varepsilon > 0$ найти наибольшее число $\delta > 0$ такое, чтобы при любом x из δ-окрестности числа 3 значение функции $y = 2x - 1$ оказалось в ε-окрестности числа 5. Пояснить графически.

708. Доказать, что $\lim\limits_{x \to -1} (3 - 2x - x^2) = 4$. Из какой наибольшей δ-окрестности числа -1 нужно взять значение x, чтобы значение функции $y = 3 - 2x - x^2$ отличалось от ее предела меньше чем на $\varepsilon = 0{,}0001$?

709. Доказать, что $\sin\alpha$ есть бесконечно малая при $\alpha \to 0$.

Указание. Построить чертеж и показать, что $|\sin\alpha| < |\alpha|$.

710. Доказать, что $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$.

Указание. Положив $x = a + \alpha$, составить разность $\sin x - \sin a$ и затем положить $\alpha \to 0$.

711. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+4}{x} = 3$. Пояснить таблицами значений x и $\frac{3x+4}{x}$ при $x=1, 10, 100, 1000, \ldots$

712. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x-3}{2x+1} = 2$. При каких x значения функции будут отличаться от своего предела меньше чем на 0,001?

713. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-2x^2}{2+4x^2} = -0{,}5$. При каких x значения функции будут отличаться от своего предела меньше чем на 0,01?

714. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} 0{,}\underbrace{333\ldots3}_{n\text{ знаков}} = \frac{1}{3}$, составив разности $\frac{1}{3} - 0{,}3$; $\frac{1}{3} - 0{,}33$; $\frac{1}{3} - 0{,}333$; ...; $\frac{1}{3} - 0{,}\underbrace{333\ldots3}_{n\text{ знаков}}$.

715. Написать последовательности:

1) $x_n = \frac{n}{n+1}$; 2) $x_n = -\frac{n}{n+1}$; 3) $x_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$;

4) $x_n = \frac{8\cos n\frac{\pi}{2}}{n+4}$; 5) $x_n = \frac{2n+(-1)^n}{n}$;

6) $x_n = 2^{-n} a \cos n\pi$.

Существует ли $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ в каждом примере и чему он равен?

716. Найти $\lim\limits_{x\to 2+0} \frac{3}{x-2}$ и $\lim\limits_{x\to 2-0} \frac{3}{x-2}$ и пояснить таблицами.

717. Найти $\lim\limits_{x\to 0+0} 2^{1/x}$ и $\lim\limits_{x\to 0-0} 2^{1/x}$ и пояснить таблицами.

718. Выяснить точный смысл «условных» записей:

1) $\frac{2}{\infty} = 0$; 2) $\frac{2}{0} = \pm\infty$; 3) $3^{\infty} = \infty$; 4) $3^{-\infty} = 0$;

5) $\lg 0 = -\infty$; 6) $\operatorname{tg} 90^\circ = \pm\infty$.

719. Показать, что $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ не существует, составив последовательности значений $\sin x$:

1) при $x = n\pi$; 2) при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; 3) при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$.

720. Показать, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ не существует.

721. Показать, что $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ при любом способе приближения x к 0.

722. В круг радиуса R вписан правильный многоугольник с числом сторон n и стороной a_n. Описав около круга квадрат, показать, что $a_n < \varepsilon$, как только $n > 8R/\varepsilon$, т. е. $a_n \to 0$, когда $n \to \infty$.

723. Пусть r_n — апофема правильного, вписанного в круг n-угольника. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = R$, где R — радиус круга.

724. Вершина B треугольника ABC перемещается по прямой $BE \parallel AC$, неограниченно удаляясь вправо. Как будут при этом изменяться стороны треугольника, его площадь, внутренние углы и внешний угол BCD?

---

725. Написать «десятичные» последовательности приближений переменных к пределам: $x_n \to 4+0$; $x_n \to 4-0$; $x_n \to -1{,}5+0$; $x_n \to -1{,}5-0$.

726. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{x\to 3} x^3 = 27$; 2) $\lim\limits_{x\to 1} (x^2 + 2x) = 3$.

727. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x+2}{2x} = 2{,}5$, показав, что разность $\frac{5x+2}{2x} - 2{,}5$ есть бесконечно малая при x бесконечно большом. Пояснить таблицей, полагая $x = 1, 10, 100, 1000, \ldots$

728. Доказать, что $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$ (см. задачу 709).

729. Написать последовательности значений переменных:

1) $x_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; 2) $x_n = (-1)^n + \frac{1}{2^n}$;

3) $x_n = (-1)^n (2n+1)$; 4) $x_n = \frac{2n \sin\frac{n\pi}{2}}{n+1}$.

Какая из последовательностей имеет предел при $n \to +\infty$?

730. Найти: 1) $\lim\limits_{x \to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}}$; 2) $\lim\limits_{x \to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}}$;

3) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}-0} 3^{\operatorname{tg} 2x}$; 4) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}+0} 3^{\operatorname{tg} 2x}$; 5) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+0} \frac{2}{1+2^{\operatorname{tg} x}}$;

6) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{2}{1+2^{\operatorname{tg} x}}$; 7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a}{1+a^x}$.

731. Доказать, что $\lim\limits_{n \to \infty} \underbrace{0{,}666\ldots6}_{n \text{ знаков}} = \frac{2}{3}$, составив разности $\frac{2}{3} - 0{,}6$; $\frac{2}{3} - 0{,}66$; $\ldots$; $\frac{2}{3} - 0{,}\underbrace{666\ldots6}_{n \text{ знаков}}$.

732. Пусть α_n — внутренний угол правильного n-угольника. Доказать, что $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = \pi$.

733. На продолжении отрезка $AB = a$ справа взята точка M на расстоянии $BM = x$. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{AM}{BM}$.

§ 3. Свойства пределов. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

1°. Предел постоянной равен самой постоянной.

2°. $\lim (u + v) = \lim u + \lim v$,
3°. $\lim (uv) = \lim u \cdot \lim v$,
если $\lim u$ и $\lim v$ существуют.

4°. $\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}$, если $\lim u$ и $\lim v$ существуют и $\lim v \neq 0$.

5°. Если для всех значений x в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, $x = a$, функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ равны и одна из них имеет предел при $x \to a$, то и вторая имеет тот же предел.

Это свойство применяется при раскрытии неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Например, $\frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$ при любых x, кроме $x = a$. По свойству 5° $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} (x + a) = 2a$.

Найти пределы:

734. 1) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 1}{2x + 1}$; 2) $\lim\limits_{x \to \pi/4} \frac{1 + \sin 2x}{1 - \cos 4x}$.

735. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ (пояснить таблицей).

736. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-3x+2}$.

737. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$.

Указание. Решить пример 736 двумя способами: 1) полагая $x=2+\alpha$; 2) разлагая знаменатель на множители.

738. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}$.

739. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$.

740. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

741. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{ax}-x}{x-a}$.

742. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

743. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$.

Указание. В примере 742 положить $x=t^6$, а в примере 743 $1+mx=t^3$.

744. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

745. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$.

746. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2-4x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-7x}{1-2x^3}$.

Указание. Можно решить двумя способами: 1) разделив числитель и знаменатель на x в высшей степени; 2) положив $x=1/\alpha$.

747. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x^2+1}$.

748. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^2+1}$.

749. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$.

750. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{1-2n}$.

751. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+1}}{2n-1}$.

752. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$.

Найти пределы:

753. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x+6}{x^3+8}$.

754. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$.

755. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$.

756. $\lim\limits_{x\to\pi+0}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$.

757. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$. 758. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{\sqrt{3n^2+1}}$.

759. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x^2}{1-x^2}+2^{\frac{1}{x}}\right)$.

760. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots+n}$.

761. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$. 762. $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\cos x-\sin x}$.

§ 4. Предел отношения $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ при $\alpha\to 0$

Если угол α выражен в радианах, то

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha}=1; \qquad \lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{\sin\alpha}=1.$$

Найти пределы:

763. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{x}$. 764. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\frac{x}{3}}{x}$.

Указание. В примере 763 умножить числитель и знаменатель на 4 (или положить $4x=\alpha$).

765. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$. 766. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$. 767. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$.

768. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$. 769. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{h}$.

770. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$.

Указание. Положить в примере 1) $\operatorname{arctg} x=\alpha$, а в примере 2) $\arcsin(1-2x)=\alpha$.

771. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$. 772. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

Найти пределы:

773. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin 3x}$. 774. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$.

775. $\lim\limits_{x\to -0} \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$. 776. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\sin x}{\sec x-1}$.

777. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos mx}{x^2}$. 778. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin x}$.

779. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{\sin(x-2)}{x^2-4}+2^{-\frac{1}{(x-2)^2}}\right]$ (положить $x=2+\alpha$).

780. 1) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x-h)}{h}$;

2) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$.

781. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$.

§ 5. Неопределенности вида $\infty-\infty$ и $0\cdot\infty$

Найти пределы:

782. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$.

783. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$.

784. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x})$.

785. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$.

786. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\right)$.

787. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{n+3}-n\right]$.

788. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$ (положить $x=1-\alpha$).

789. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x})$.

790. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{4}{x^2-4}\right)$.

Найти пределы:

791. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-x+1})$.

792. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-a^2})$.

793. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x\right)$.

794. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$.

795. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x$ $\left(\text{положить } x=\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

§ 6. Смешанные примеры на вычисление пределов

Найти пределы:

796. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$.

797. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}$.

798. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax}\right)$.

799. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-2x}{\sqrt[3]{1+8x^3}}+2^{-x^2}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{1-5x}$.

800. 1) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+1}{\sin(x+1)}$; 2) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x}$.

801. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x(\sqrt{1+x}-1)}$; 2) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi}$.

802. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$; 2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-10^n}{1+10^{n+1}}$.

803. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{3x^4}{1-2x^4}-2^{\frac{1}{x}}\right]$; 2) $\lim\limits_{n\to-\infty}\frac{3-10^n}{2+10^{n+1}}$.

804. 1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{2x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to-1}\cos\frac{\pi(x+1)}{\sqrt[3]{x}+1}$.

§ 7. Сравнение бесконечно малых

1°. Определения. Пусть при $x\to a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми. Тогда:

I. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha}=0$, то β называется *бесконечно малой высшего порядка* относительно α.

II. Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{\beta}{\alpha^n} = A$ (конечен и отличен от 0), то β называется *бесконечно малой n-го порядка* относительно α.

III. Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{\beta}{\alpha} = 1$, то β и α называются *эквивалентными бесконечно малыми*. Эквивалентность записывается так: $\beta \approx \alpha$.

2°. Свойства эквивалентных бесконечно малых:

а) Разность двух эквивалентных бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка относительно каждой из них.

б) Если из суммы нескольких бесконечно малых разных порядков отбросить бесконечно малые высших порядков, то оставшаяся часть, называемая *главной*, эквивалентна всей сумме.

Из первого свойства следует, что эквивалентные бесконечно малые могут сделаться приближенно равными со сколь угодно малой относительной погрешностью. Поэтому знак $\approx$ мы применяем как для обозначения эквивалентности бесконечно малых, так и для записи приближенного равенства их достаточно малых значений.

805. Определить порядки бесконечно малых: 1) $1 - \cos x$; 2) $\operatorname{tg} x - \sin x$ относительно бесконечно малой x.

Показать на чертеже, что при уменьшении угла x вдвое величина $1 - \cos x$ уменьшается приблизительно в четыре раза, а величина $\operatorname{tg} x - \sin x$ — приблизительно в восемь раз.

806. Определить порядки бесконечно малых:

1) $2\sin^4 x - x^5$; 2) $\sqrt{\sin^2 x + x^4}$; 3) $\sqrt{1 + x^3} - 1$

относительно бесконечно малой x.

807. Определить порядок малости «стрелы» кругового сегмента относительно бесконечно малой дуги сегмента.

808. Доказать, что при $x \to 0$:

1) $\sin mx \approx mx$; 2) $\operatorname{tg} mx \approx mx$; 3) $\sqrt[3]{1+x} - 1 \approx \frac{1}{3}x$.

809. Коэффициент объемного расширения тела принимается приближенно равным утроенному коэффициенту линейного расширения. На эквивалентности каких бесконечно малых это основано?

810. По теореме $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta_1}{\alpha_1}$, если $\alpha \approx \alpha_1$, $\beta \approx \beta_1$ и один из пределов существует, найти пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax + x^2}{\operatorname{tg} bx}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x + \sin^2 x}{\sin 2x - x^3}$.

811. Капля воды испаряется так, что ее радиус стремится к 0. Определить порядки бесконечно малых поверхности и объема капли относительно ее радиуса.

812. Определить порядки бесконечно малых:

1) $\sqrt{1+x^2}-1$; 2) $\sin 2x-2\sin x$; 3) $1-2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

относительно бесконечно малой x.

813. Доказать, что при $x\to 0$: 1) $\operatorname{arctg} mx\approx mx$;

2) $\sqrt{1+x}-1\approx\frac{1}{2}x$; 3) $1-\cos^3 x\approx 1{,}5\sin^2 x$.

§ 8. Непрерывность функции

1°. Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* при $x=a$, если она определена в некоторой окрестности a и

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Это определение содержит такие четыре условия непрерывности:

1) $f(x)$ должна быть определена в некоторой окрестности a;

2) должны существовать конечные пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$;

3) эти пределы (слева и справа) должны быть одинаковыми;

4) эти пределы должны быть равны $f(a)$.

Функция называется *непрерывной на отрезке* $[x_1,\ x_2]$, если она непрерывна в каждой точке внутри отрезка, а на его границах $\lim\limits_{x\to x_1+0} f(x)=f(x_1)$ и $\lim\limits_{x\to x_2-0} f(x)=f(x_2)$.

Элементарные функции: степенная x^n, показательная a^x, логарифмическая, тригонометрические и им обратные, а также их сумма, произведение, частное непрерывны при всяком x, при котором они имеют определенное значение.

2°. Разрывы функции. Функция имеет *разрыв* при $x=a$, если она определена слева и справа от a, но в точке a не соблюдено хотя бы одно из условий непрерывности. Различают два основных вида разрыва.

1) *Разрыв* I *рода* — когда существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, т. е. когда выполнено второе условие непрерывности и не выполнены остальные (или хотя бы одно из них).

Например, функция $y=\dfrac{x-a}{|x-a|}$, равная -1 при $x<a$ и $+1$ при $x>a$, имеет при $x=a$ разрыв I рода (рис. 24), ибо существуют пределы $\lim\limits_{x\to a-0} y=-1$ и $\lim\limits_{x\to a+0} y=+1$, но эти пределы не равны.

2) *Разрыв* II *рода* — когда $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ слева или справа равен $\pm\infty$.

Например, функция $y = f(x) = \frac{a}{x-a}$ (рис. 25) имеет при $x = a$ разрыв II рода. Все дробные функции, знаменатель которых при $x = a$ равен 0, а числитель не равен 0, имеют при $x = a$ разрыв II рода. Функция $f(x) = 2^{1/x}$ (задача 819, рис. 38 на с. 281) также имеет при $x = 0$ разрыв II рода, так как $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = 0$, но $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \infty$.

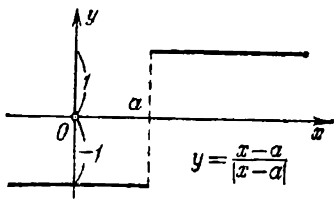

Рис. 24

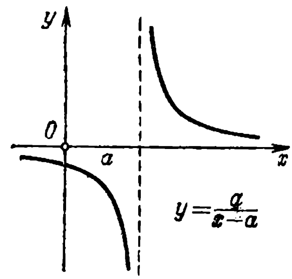

Рис. 25

814. Указать точку разрыва функции $y = \frac{4}{x-2}$, найти $\lim\limits_{x \to 2-0} y$, $\lim\limits_{x \to 2+0} y$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y$ и построить кривую по точкам

$$x = -2,\ 0,\ 1,\ 3,\ 4 \text{ и } 6.$$

815. Найти точки разрыва и построить графики функций:

1) $y = -\frac{6}{x}$; 2) $y = \operatorname{tg} x$; 3) $y = \frac{4}{4-x^2}$.

816. Построить график функции

$$y = \begin{cases} x/2 & \text{при } x \neq 2, \\ 0 & \text{при } x = 2 \end{cases}$$

и указать точку ее разрыва. Какие из четырех условий непрерывности в этой точке выполнены и какие не выполнены?

817. Построить графики функций: 1) $y = \frac{x+1}{|x+1|}$ и 2) $y = x + \frac{x+1}{|x+1|}$. Какие из условий непрерывности в точках разрыва этих функций выполнены и какие не выполнены?

818. Построить график функции

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 2 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

и указать точку ее разрыва. Какие из условий непрерывности в ней выполнены и какие нет?

819. Указать точку разрыва функции $y = 2^{1/x}$, найти $\lim\limits_{x \to -0} y$, $\lim\limits_{x \to +0} y$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y$ и построить график функции. Какие условия непрерывности в точке разрыва не выполнены?

820. Построить график функции

$$y = f(x) = \begin{cases} 0{,}5x^2 & \text{при } |x| < 2, \\ 2{,}5 & \text{при } |x| = 2, \\ 3 & \text{при } |x| > 2 \end{cases}$$

и указать точки ее разрыва.

821. Найти точки разрыва и построить графики функций

1) $y = \frac{1}{1 + 2^{1/x}}$; 2) $y = \operatorname{arctg} \frac{a}{x - a}$; 3) $y = \frac{x^3 - x^2}{2|x - 1|}$.

822. Сколько однозначных функций задано уравнением $x^2 - y^2 = 0$? Определить из них: 1) четную функцию; 2) нечетную функцию так, чтобы они имели конечные разрывы (I рода) при $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, и построить их графики.

---

823. Указать точку разрыва функции $y = \frac{x}{x + 2}$, найти $\lim\limits_{x \to -2-0} y$, $\lim\limits_{x \to -2+0} y$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y$ и построить график по точкам $x = -6, -4, -3, -1, 0, 2$.

824. Построить график функции

$$y = f(x) = \begin{cases} 2 & \text{при } x = 0 \text{ и } x = \pm 2, \\ 4 - x^2 & \text{при } 0 < |x| < 2, \\ 4 & \text{при } |x| > 2 \end{cases}$$

и указать точки разрыва. Какие условия непрерывности выполнены в точках разрыва и какие нет?

825. Найти точки разрыва и построить графики функций:

1) $y=2-\frac{|x|}{x}$; 2) $y=2^{\frac{1}{x-2}}$; 3) $y=1-2^{\frac{1}{x}}$;

4) $y=\frac{x^3+x}{2|x|}$; 5) $y=\frac{4-x^2}{|4x-x^3|}$.

826. Сколько однозначных функций задано уравнением $x^2+y^2=4$? Определить из них: 1) две непрерывные на отрезке $|x|\leqslant 2$; 2) ту из них, которая отрицательна на отрезке $|x|\leqslant 1$ и положительна для всех остальных допустимых значений x. Построить график и указать разрывы последней функции.

§ 9. Асимптоты

Асимптотой кривой называется прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при ее удалении по кривой в бесконечность.

I. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, то прямая $x=a$ есть асимптота кривой $y=f(x)$. Например, кривая $y=\frac{a}{x-a}$ имеет асимптоту $x=a$ (рис. 25).

II. Если в правой части уравнения кривой $y=f(x)$ можно выделить линейную часть $y=f(x)=kx+b+\alpha(x)$ так, что оставшаяся часть $\alpha(x)\to 0$, когда $x\to\pm\infty$, то прямая $y=kx+b$ есть асимптота кривой. Примеры: 1) кривая $y=\frac{x^3+x^2+1}{x^2}=x+1+\frac{1}{x^2}$ имеет асимптоту $y=x+1$ (и асимптоту $x=0$); 2) кривая $y=\frac{a}{x-a}=0+\frac{a}{x-a}$ имеет асимптоту $y=0$ (рис. 25).

III. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to+\infty \text{ или } -\infty}\frac{f(x)}{x}=k$ и $\lim\limits_{x\to+\infty \text{ или } -\infty}[f(x)-kx]=b$, то прямая $y=kx+b$ есть асимптота.

827. Определить асимптоты кривой $y=1-\frac{4}{x^2}$ и построить кривую по точкам $x=\pm 1$, ± 2, ± 4.

В примерах 828—830 найти асимптоты кривых, выделив из дроби линейную целую часть; построить асимптоты и кривые.

828. 1) $y=\frac{x^2+1}{x}$; 2) $y=\frac{x^2}{x+1}$; 3) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$,

829. 1) $y=\frac{2}{|x|}-1$; 2) $y=\frac{x^2-x-1}{x}$;

3) $y=\frac{ax+b}{mx+n}$.

830. 1) $y=\frac{1-4x}{1+2x}$; 2) $y=\frac{x^3}{x^2+1}$; 3) $y=\frac{4x-x^3}{x^2+4}$.

Найти асимптоты кривых и построить кривые:

831. 1) $x^2-y^2=a^2$; 2) $x^3+y^3=3axy$;

3) $y=x-2\operatorname{arctg} x$; 4) $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{a-x}$.

832. 1) $y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$;

2) $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$; 3) $y=x-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

833. Построить кривые: 1) $y=\frac{x^4+1}{3x}$; 2) $y=\frac{x^3+x^2-2}{x+1}$ и параболы, к которым эти кривые асимптотически приближаются.

---

834. Найти асимптоты кривых: 1) $y=\left(1-\frac{2}{x}\right)^2$; 2) $y=-x+\frac{1}{x^2}$ и построить кривые по точкам $x=\pm\frac{1}{2}$, ± 1, ± 2.

835. Найти асимптоты кривых и построить кривые:

1) $y=\frac{x-4}{2x+4}$; 2) $y=\frac{x^2}{2-2x}$; 3) $y=\frac{x^2}{x^2-4}$;

4) $y=\frac{x^3}{1-x^2}$.

§ 10. Число e

Числом e называется предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$$

Это число иррациональное и приближенно равно $e=2{,}71828\ldots$ Логарифмы с основанием e называются *натуральными* и обозначаются $\log_e x=\ln x$.

Десятичный логарифм: $\lg x=M\ln x$, где $M=0{,}43429\ldots$

Найти пределы:

836. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}\right)^{n}$ $\left(\text{положить } -\frac{5}{n}=\alpha\right)$.

837. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{n}$; 2) $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n+3}$.

838. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$.

839. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$.

840. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} n[\ln(n+3)-\ln n]$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

841. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$ (положить $\sin^2 x=\alpha$).

842. 1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{2x}-1}{x}$.

Указание. В примере 2) положить $e^{-x}-1=\alpha$.

843. Найти последовательные целые числа, между которыми содержится выражение $6(1-1{,}01^{-100})$.

Найти пределы:

844. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n}\right)^{n/2}$.

845. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{-3x}-1}{x}$.

846. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$ (положить $\cos^2 2x=\alpha$).

847. 1) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+xt)}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} n[\ln n-\ln(n+2)]$.

ГЛАВА 6
ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 1. Производные алгебраических и тригонометрических функций

1°. Определения. *Производной* функции $y = f(x)$ в точке x называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Если этот предел *конечный*, то функция $f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x; при этом она оказывается обязательно и *непрерывной* в этой точке.

Если же предел (1) равен $+\infty$ (или $-\infty$), то будем говорить, что функция $f(x)$ имеет в точке x *бесконечную производную*, однако при дополнительном условии, что функция в этой точке непрерывна.

Производная обозначается y' или $f'(x)$, или $\frac{dy}{dx}$, или $\frac{df(x)}{dx}$. Нахождение производной называется *дифференцированием* функции.

2°. Основные формулы дифференцирования:

1) $(c)' = 0$; 2) $(x^n)' = nx^{n-1}$; 3) $(cu)' = cu'$;

4) $(u+v)' = u' + v'$; 5) $(uv)' = u'v + uv'$;

6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$; 7) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

8) $(\sin x)' = \cos x$; 9) $(\cos x)' = -\sin x$;

10) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; 11) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

848. Вычислением $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ найти производные функций:

1) $y = x^3$; 2) $y = x^4$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = \sin x$;

5) $y = \frac{1}{x}$; 6) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; 7) $y = \frac{1}{x^2}$; 8) $y = \operatorname{tg} x$;

9) $y=\frac{1}{x^3}$; 10) $y=\sqrt{1+2x}$; 11) $y=\frac{1}{3x+2}$;
12) $y=\sqrt{1+x^2}$.

Найти по формулам производные функций:

849. 1) $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+4x-5$; 2) $y=\frac{bx+c}{a}$.

850. 1) $y=\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x$; 2) $y=\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^2$.

851. 1) $y=x+2\sqrt{x}$; 2) $y=(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2$.

852. 1) $y=\frac{10}{x^3}$; 2) $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$.

853. 1) $y=x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{5x^5}$; 2) $y=3x-6\sqrt{x}$.

854. 1) $y=6\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x}$; 2) $y=\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$.

855. 1) $y=\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}$; 2) $y=\frac{8}{\sqrt[4]{x}}-\frac{6}{\sqrt[3]{x}}$.

856. 1) $y=x-\sin x$; 2) $y=x-\operatorname{tg} x$.

857. 1) $y=x^2\cos x$; 2) $y=x^2\operatorname{ctg} x$.

858. 1) $y=\frac{\cos x}{x^2}$; 2) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$.

859. 1) $y=\frac{x}{1-4x}$; 2) $y=\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$.

860. 1) $f(x)=\frac{\cos x}{1-\sin x}$; 2) $\varphi(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

861. 1) $s=\frac{gt^2}{2}$; 2) $x=a(t-\sin t)$.

862. $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+x$; вычислить $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(-1)$.

863. $f(x)=x^2-\frac{1}{2x^2}$; вычислить $f'(2)-f'(-2)$.

864. $f(x)=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$; вычислить $0{,}01\cdot f'(0{,}01)$.

Найти производные функций:

865. 1) $y=(a-bx^2)^3$; 2) $y=(1+\sqrt[3]{x})^2$.

866. 1) $y=\frac{1}{10x^5}-\frac{1}{4x^4}$; 2) $y=\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}$.

867. 1) $y=x+\sin x$; 2) $y=x+\operatorname{ctg} x$.

868. 1) $y = x^2 \sin x$; 2) $y = x^2 \operatorname{tg} x$.

869. 1) $y = \sqrt{x} \cos x$; 2) $s = \frac{t}{2} - \frac{2}{t}$.

870. 1) $y = x - \frac{2}{x} - \frac{1}{3x^3}$; 2) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

871. 1) $y = \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$; 2) $y = \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x}$.

872. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$; найти $f'(-8)$.

873. $f(x) = \frac{x}{2x - 1}$; найти $f'(0)$, $f'(2)$ и $f'(-2)$.

§ 2. Производная сложной функции

Если $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, то y называется *функцией от функции* или *сложной функцией* от x. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{или} \quad y' = f'(u) \cdot u'. \tag{1}$$

Формулы предыдущего параграфа примут теперь общий вид

1) $(u^n)' = nu^{n-1}u'$; 2) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

3) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$; 4) $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$;

5) $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$; 6) $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$.

Найти производные функций:

874. 1) $y = \sin 6x$; 2) $y = \cos(a - bx)$.

875. 1) $y = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$; 2) $y = 6 \cos \frac{x}{3}$.

876. 1) $y = (1 - 5x)^4$; 2) $y = \sqrt[3]{(4 + 3x)^2}$.

877. 1) $y = \frac{1}{(1 - x^2)^5}$; 2) $y = \sqrt{1 - x^2}$;

3) $y = \sqrt{\cos 4x}$.

878. $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$. 879. $y = \sin^4 x = (\sin x)^4$.

880. 1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = \cos^2 x$; 3) $y = \sec^2 x$.

881. $y = \sin^3 x + \cos^3 x$. 882. $y = \operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x + 3x$.

883. $y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$. 884. $y = \sin \sqrt{x}$.

885. $y = \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}$.

886. $y = \frac{1}{(1 + \cos 4x)^5}$. 887. $y = \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{3}$.

888. $y=\frac{\sin^2 x}{\cos x}$.   889. $y=x\sqrt{x^2-1}$.

890. $y=\frac{\sqrt{2x-1}}{x}$.   891. $s=a\cos^2\frac{t}{a}$.

892. 1) $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$; 2) $r=\sqrt{2\varphi+\cos^2\left(2\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}$.

893. $f(t)=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos t}$; вычислить $f'(\pi/2)$, $f'(\pi)$, $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$. 894. $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x}}$; найти $f'(1)$.

Найти производные функций:

895. $y=\sqrt{4x+\sin 4x}$.   896. $y=x^2\sqrt{1-x^2}$.

897. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.   898. $y=\sqrt[3]{1+\cos 6x}$.

899. 1) $y=\operatorname{tg} x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$; 2) $y=\sin^2 x^3$.

900. $y=\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$.   901. $s=\sqrt{\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}}$.

902. $r=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$.   903. $y=\frac{\sqrt{4x+1}}{x^2}$.

904. $f(t)=\sqrt{1+\cos^2 t^2}$; найти $f'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

§ 3. Касательная и нормаль к плоской кривой

Угловой коэффициент касательной к кривой $y=f(x)$ в точке кривой $(x_0;\ y_0)$ *равен значению производной функции* $f(x)$ в точке x_0:

$$k=\operatorname{tg}\varphi=f'(x_0)=y'\big|_{x=x_0}. \quad (1)$$

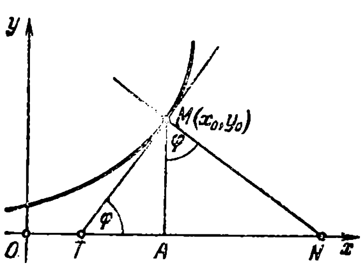

Рис. 26

Это число k называют иногда *наклоном* кривой в точке $(x_0;\ y_0)$. Уравнение *касательной* в точке $M(x_0;\ y_0)$ на кривой (рис. 26):

$$y-y_0=k(x-x_0). \quad (2)$$

Уравнение *нормали:*

$$y-y_0=-\frac{1}{k}(x-x_0), \quad (3)$$

где k определяется формулой (1).

Отрезки $TA=y_0\operatorname{ctg}\varphi$, $AN=y_0\operatorname{tg}\varphi$ (рис. 26) называются соответственно *подкасательной* и *поднормалью*, а длины отрезков MT и MN — длинами касательной и нормали.

905. Найти наклоны параболы $y=x^2$ в точках $x=\pm 2$.

906. Написать уравнение касательной и нормали к параболе $y=4-x^2$ в точке пересечения ее с осью Ox (при $x>0$) и построить параболу, касательную и нормаль.

В задачах 907—910 написать уравнения касательных к кривым и построить кривые и касательные:

907. К кривой $y=\frac{x^3}{3}$ в точке $x=-1$.

908. К кривой $y^2=x^3$ в точках $x_1=0$ и $x_2=1$.

909. К локону $y=\frac{8}{4+x^2}$ в точке $x=2$.

910. К синусоиде $y=\sin x$ в точке $x=\pi$.

911. Под каким углом кривая $y=\sin x$ пересекает ось Ox?

912. Под каким углом пересекаются кривые

$$2y=x^2 \quad \text{и} \quad 2y=8-x^2?$$

913. Найти длину подкасательной, поднормали, касательной и нормали кривой: 1) $y=x^2$; 2) $y^2=x^3$ в точке $x=1$.

914. Доказать, что подкасательная параболы $y^2=2px$ равна удвоенной абсциссе точки касания, а поднормаль равна p.

915. В уравнении параболы $y=x^2+bx+c$ определить b и c, если парабола касается прямой $y=x$ в точке $x=2$.

---

916. Написать уравнения касательных к гиперболе $xy=4$ в точках $x_1=1$ и $x_2=-4$ и найти угол между касательными. Построить кривую и касательные.

В задачах 917—919 написать уравнения касательных к кривым и построить кривые и касательные к ним:

917. $y=4x-x^2$ в точках пересечения с осью Ox.

918. $y^2=4-x$ в точках пересечения с осью Oy.

919. $y^2=(4+x)^3$ в точках пересечения с осями Ox и Oy.

920. Найти расстояние вершины параболы $y=x^2-4x+5$ от касательной к ней в точке пересечения параболы с осью Oy.

921. Под каким углом прямая $y=0{,}5$ пересекает кривую $y=\cos x$?

922. В какой точке касательная к параболе $y = x^2 + 4x$ параллельна оси Ox?

923. В какой точке параболы $y = x^2 - 2x + 5$ нужно провести касательную, чтобы она была перпендикулярна к биссектрисе первого координатного угла?

924. Найти длину подкасательной, поднормали, касательной и нормали кривой $y = \frac{2}{1 + x^2}$ в точке $x = 1$.

925. Какие углы образует парабола $y = \frac{x^2}{4}$ с ее хордой, абсциссы концов которой равны 2 и 4?

§ 4. Случаи недифференцируемости непрерывной функции

1°. Угловая точка. Точка $A(x_1; y_1)$ кривой $y = f(x)$ (рис. 27) называется *угловой*, если в этой точке производная y' не существует, но существуют *левая* и *правая* различные производные: $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k_1$ и $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k_2$. Из угловой точки выходят два касательных луча с наклонами k_1 и k_2.

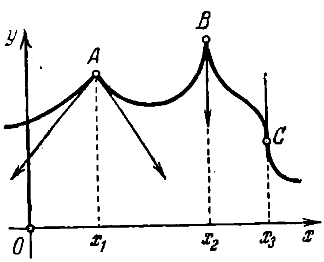

Рис. 27

2°. Точка возврата с вертикальной касательной. Точка $B(x_2; y_2)$ (рис. 27) называется *точкой возврата* с вертикальной касательной, если в этой точке производная y' не существует, но существуют *левая и правая бесконечные производные* разного знака ($+\infty$ и $-\infty$). Такая точка является частным случаем угловой. Из нее выходит один вертикальный касательный луч или, можно считать, что из нее выходят два слившихся касательных луча.

3°. Точка перегиба с вертикальной касательной. Точка $C(x_3; y_3)$ (рис. 27) называется *точкой перегиба с вертикальной касательной*, если в ней существует бесконечная производная $y' = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ (или $-\infty$). В такой точке существует вертикальная касательная.

В точках A и B функция $y = f(x)$ не имеет производной; в точке C она имеет бесконечную производную. Во всех трех точках функция непрерывна, но *недифференцируема.*

926. Построить график функции $y = \sqrt{x^2}$ (или $y = |x|$) и найти левую y'_- и правую y'_+ производные в угловой точке графика.

927. На отрезке $[0, 4]$ построить график функции $y=0{,}5\sqrt{(x-2)^2}$ и найти левую y'_- и правую y'_+ производные в угловой точке графика функции.

928. На отрезке $[-\pi, \pi]$ построить график функции $y=\sqrt{\sin^2 x}$ и написать уравнения касательных в угловой точке кривой.

929. На отрезке $[0, 2\pi]$ построить график функции $y=\sqrt{1+\cos x}$, написать уравнения касательных в угловой точке кривой и найти угол между ними.

930. На отрезке $[-2, 2]$ построить график функции $y=\sqrt[3]{x^2}$ и написать уравнение касательной в точке $x=0$.

931. На отрезке $[0, 4]$ построить график функции $y=1-\sqrt[3]{(x-2)^2}$ и написать уравнение касательной к ней в точке $x=2$.

932. На отрезке $[-2, 2]$ построить кривую $y^3=4x$ и написать уравнение касательной к ней в точке $x=0$.

933. На отрезке $[0, 4]$ построить кривую $y^3= =4(2-x)$ и написать уравнение касательной к ней в точке $x=2$.

---

934. На отрезке $[0, \pi]$ построить график функции $y=1-\sqrt{\cos^2 x}$ и написать уравнения касательных к кривой в угловой точке.

935. На отрезке $[-2, 0]$ построить график функции $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-1$ и написать уравнение касательной к кривой в точке $x=-1$.

936. На отрезке $[-1, 5]$ построить график функции $y=|4x-x^2|$ и написать уравнения касательных в угловой точке $x=0$ и найти угол между ними.

§ 5. Производные логарифмических и показательных функций

Основные формулы:

$$(\ln u)'=\frac{u'}{u};\quad (e^u)'=e^u\cdot u';\quad (a^u)'=a^u\ln a\cdot u'.$$

Найти производные функций:

937. 1) $y=x\ln x$; 2) $y=\frac{1+\ln x}{x}$; 3) $y=\lg(5x)$.

938. 1) $y=\ln x-\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}$; 2) $y=\ln(x^2+2x)$.

939. 1) $y=\ln(1+\cos x)$; 2) $y=\ln\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x$.

940. $y=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$.

941. $y=\ln\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$. 942. $y=\ln\frac{x^2}{1-x^2}$.

943. $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. 944. $y=\ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$.

945. $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$.

946. $y=2\sqrt{x}-4\ln(2+\sqrt{x})$.

947. 1) $y=\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 2) $y=\ln\frac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}$.

948. Написать уравнение касательной к кривой $y=\ln x$ в точке пересечения ее с осью Ox. Построить кривую и касательную.

949. Показать, что парабола $y=\frac{x^2}{2e}$ касается кривой $y=\ln x$, и найти точку касания. Построить кривые.

Найти производные функций:

950. 1) $y=x^2+3^x$; 2) $y=x^2\cdot 2^x$; 3) $y=x^2e^x$.

951. 1) $y=a^{\sin x}$; 2) $y=e^{-x^2}$; 3) $y=x^2e^{-2x}$.

952. $y=2(e^{x/2}-e^{-x/2})$. 953. $y=\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}$.

954. $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$. 955. $y=e^{x/a}\cos\frac{x}{a}$.

956. 1) $y=e^{-x}(\sin x+\cos x)$; 2) $y=\ln(e^{-x}+xe^{-x})$.

957. $y=\ln\frac{e^x}{x^2+1}$. 958. $y=(e^{ax}-e^{-ax})^2$.

959. $f(t)=\ln(1+a^{-2t})$; найти $f'(0)$.

960. Под каким углом кривая $y=e^{2x}$ пересекает ось Oy?

961. Доказать, что длина подкасательной в любой точке кривой $y=e^{x/a}$ равна a.

962. Предварительным логарифмированием найти производные функций: 1) $y=x^x$; 2) $y=x^{\sin x}$.

Найти производные функций:

963. $y=\ln\cos x-\frac{1}{2}\cos^2 x$.

964. $y=\ln\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)$. **965.** $y=\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$.

966. $y=\ln\left(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right)$.

967. $y=\ln\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **968.** $y=\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg} x+\ln\cos x$.

969. $y=\ln\sqrt{\frac{\sin 2x}{1-\sin 2x}}$. **970.** $y=\ln(1+\sec x)$.

971. $y=a\ln\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right)-\sqrt{x^2+ax}$.

972. $y=ae^{-x/a}+xe^{-x/a}$. **973.** $y=\frac{a}{2}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)$.

974. $y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$. **975.** $y=\ln\left(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+1}\right)$.

976. $y=\ln\sqrt{\frac{e^{4x}}{e^{4x}+1}}$. **977.** $y=x^{1/x}$.

978. $f(t)=\ln\frac{2+\operatorname{tg} t}{2-\operatorname{tg} t}$; найти $f'(\pi/3)$.

979. Написать уравнение касательной к кривой $y=1-e^{x/2}$ в точке пересечения ее с осью Oy. Построить кривую, касательную и асимптоту кривой.

§ 6. Производные обратных тригонометрических функций

$$(\arcsin u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};\quad (\arccos u)'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} u)'=\frac{u'}{1+u^2};\quad (\operatorname{arcctg} u)'=-\frac{u'}{1+u^2}.$$

Найти производные функций:

980. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$.

981. $y=x-\operatorname{arctg} x$. **982.** $y=\arcsin\sqrt{1-4x}$.

983. $y=\arcsin\frac{x}{a}$. **984.** $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$.

985. $y=\arccos(1-2x)$. **986.** $y=\operatorname{arcctg}\frac{1+x}{1-x}$.

987. 1) $y=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$; 2) $y=\arcsin\left(e^{3x}\right)$.

988. $y=\operatorname{arctg} x+\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. 989. $y=\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}$.

990. $y=x\operatorname{arctg}\frac{x}{a}-\frac{a}{2}\ln(x^2+a^2)$.

Найти производные функций:

991. $y=\arcsin\sqrt{x}$. 992. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{6x-1}$.

993. 1) $y=\arccos(1-x^2)$; 2) $y=\operatorname{arcctg} x-\frac{1}{x}$.

994. $y=e^x\sqrt{1-e^{2x}}+\arcsin e^x$.

995. $y=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$.

996. $y=\operatorname{arctg} e^{2x}+\ln\sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}}$.

997. $s=\sqrt{4t-t^2}+4\arcsin\frac{\sqrt{t}}{2}$.

998. $y=\arccos\sqrt{1-2x}+\sqrt{2x-4x^2}$.

999. $f(z)=(z+1)\operatorname{arctg} e^{-2z}$; найти $f'(0)$.

§ 7. Производные гиперболических функций

1°. Определения. Выражения $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ и их отношения называются соответственно *гиперболическими синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом* и обозначаются

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},$$

$$\operatorname{cth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

2°. Свойства гиперболических функций:

1) $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$;
2) $\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x=\operatorname{ch} 2x$;
3) $\operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x$;
4) $\operatorname{sh} 0=0$, $\operatorname{ch} 0=1$;
5) $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$, $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$;
6) $(\operatorname{th} x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$,

$$(\operatorname{cth} x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Найти производные функций:

1000. 1) $y=\operatorname{sh}^2 x$; 2) $y=x-\operatorname{th} x$; 3) $y=2\sqrt{\operatorname{ch} x-1}$.

1001. $f(x)=\operatorname{sh}\frac{x}{2}+\operatorname{ch}\frac{x}{2}$; найти $f'(0)+f(0)$.

1002. 1) $y=\ln[\operatorname{ch}x]$; 2) $y=\operatorname{th}x+\operatorname{cth}x$.

1003. 1) $y=x-\operatorname{cth}x$; 2) $y=\ln[\operatorname{th}x]$.

1004. 1) $y=\arcsin[\operatorname{th}x]$; 2) $y=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 4x}$.

1005. Линия $y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ называется *цепной*. Написать уравнение нормали к этой линии в точке $x=a$ (см. таблицы гиперболических функций на с. 349). Построить кривую и нормаль.

1006. Написать уравнение касательной к кривой $y=\operatorname{sh}x$ в точке $x=-2$. Построить кривую и касательную к ней.

1007. Доказать, что проекция ординаты любой точки цепной линии $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ на ее нормаль есть величина постоянная, равная a.

§ 8. Смешанные примеры и задачи на дифференцирование

Найти производные функций:

1008. 1) $y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+\arcsin\frac{1}{x}$; 2) $y=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln\cos x$.

1009. $y=\sqrt{4x-1}+\operatorname{arcctg}\sqrt{4x-1}$.

1010. $x=\ln(e^{2t}+1)-2\operatorname{arctg}(e^t)$.

1011. $y=4\ln(\sqrt{x-4})+\sqrt{x^2-4x}$.

1012. $s=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 t-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 t-\ln(\cos t)$.

1013. $f(x)=(x^2+a^2)\operatorname{arctg}\frac{x}{a}-ax$; найти $f'(a)$.

1014. 1) $y=\ln\left[x-\frac{a^2}{x}\right]$; 2) $y=x(\cos\ln x+\sin\ln x)$.

1015. $f(x)=\arcsin\frac{x-1}{x}$; найти $f'(5)$.

1016. $\varphi(u)=e^{-u/a}\cos\frac{u}{a}$; показать, что $\varphi(0)+a\varphi'(0)=0$.

1017. $f(y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{a}-\ln\sqrt[4]{y^4-a^4}$; найти $f'(2a)$.

1018. $F(z)=\frac{\cos^2 z}{1+\sin^2 z}$; показать, что $F\left(\frac{\pi}{4}\right)-3F'\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$.

1019. Показать, что функция $s=\frac{1}{t\ln ct}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $t\frac{ds}{dt}+s=-ts^2$.

1020. Показать, что функция $x=\frac{t-e^{-t^2}}{2t^2}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $t\frac{dx}{dt}+2x=e^{-t^2}$.

§ 9. Производные высших порядков

Пусть мы нашли для функции $y=f(x)$ ее производную $y'=f'(x)$. Производная от этой производной называется *производной второго порядка* функции $f(x)$ и обозначается y'' или $f''(x)$ или $\frac{d^2y}{dx^2}$. Аналогично определяются и обозначаются

производная третьего порядка $y'''=f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}$,

производная четвертого порядка $y^{\mathrm{IV}}=f^{\mathrm{IV}}(x)=\frac{d^4y}{dx^4}$,

и вообще

производная n-го порядка $y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}$.

1021. Найти производную второго порядка функции:

1) $y=\sin^2 x$; 2) $y=\operatorname{tg} x$; 3) $y=\sqrt{1+x^2}$.

1022. Найти производную третьего порядка функции:

1) $y=\cos^2 x$; 2) $y=\frac{1}{x^2}$; 3) $y=x\sin x$.

1023. Найти производную третьего порядка функции:

1) $y=x\ln x$; 2) $s=te^{-t}$; 3) $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$.

1024. $s=\frac{t}{2}\sqrt{2-t^2}+\arcsin\frac{t}{\sqrt{2}}$; найти $\frac{d^3s}{dt^3}$.

Найти производную n-го порядка функции:

1025. 1) $e^{-x/a}$; 2) $\ln x$; 3) $\sqrt{x}$.

1026. 1) x^n; 2) $\sin x$; 3) $\cos^2 x$.

1027. Последовательным дифференцированием вывести формулы Лейбница:

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'';$$

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''';$$

$$(uv)^{IV} = u^{IV}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{IV} \text{ и т. д.}$$

1028. По формуле Лейбница найти производную второго порядка функции:

1) $y = e^x \cos x$; 2) $y = a^x x^3$; 3) $y = x^2 \sin x$.

1029. По формуле Лейбница найти производную третьего порядка функции:

1) $y = e^{-x} \sin x$; 2) $y = x^2 \ln x$; 3) $y = x \cos x$.

1030. $f(x) = xe^{x/a}$; найти $f'''(x)$, $f^{(n)}(x)$, $f^{(n)}(0)$.

1031. $f(x) = (1+x)^m$; найти $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $\ldots$, $f^{(n)}(0)$.

1032. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$; показать, что при $n \geqslant 2$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^{n-1}} n.$$

1033. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$; показать, что

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} n! & \text{при} \quad n = 2m, \\ 0 & \text{при} \quad n = 2m-1. \end{cases}$$

Указание. Применить тождество

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right).$$

1034. Продифференцировав тождество $(x-1) \times (x^2 + x^3 + \ldots + x^n) = x^{n+1} - x^2$ три раза по x и положив затем $x = 1$, найти сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k-1) = \dfrac{(n+1)n(n-1)}{3}$ и затем сумму квадратов чисел натурального ряда

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1035. Найти производную второго порядка функции:

1) $y=e^{-x^2}$; 2) $y=\operatorname{ctg} x$; 3) $y=\arcsin\frac{x}{2}$.

1036. Найти производную n-го порядка функции:

1) $y=a^x$; 2) $y=\frac{1}{1+2x}$; 3) $y=\sin^2 x$.

1037. $f(x)=\arcsin\frac{1}{x}$; найти $f(2)$, $f'(2)$ и $f''(2)$.

1038. По формуле Лейбница найти производную третьего порядка функции:

1) $y=x^3e^x$; 2) $y=x^2\sin\frac{x}{a}$;

3) $y=xf'(a-x)+3f(a-x)$.

1039. Показать, что функция $y=e^x\cos x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y^{\text{IV}}+4y=0$.

1040. Показать, что функция $y=xe^{-1/x}$ удовлетворяет уравнению $x^3y''-xy'+y=0$.

1041. $f(x)=x^2e^{-x/a}$; показать, что $f^{(n)}(0)=\frac{n(n-1)(-1)^n}{a^{n-2}}$.

1042. $f(x)=e^{-x^2}$; показать, что

$$f^{(n)}(0)=-2(n-1)f^{(n-2)}(0),\qquad f^{(2m-1)}(0)=0,$$
$$f^{2m}(0)=(-2)^m(2m-1)(2m-3)\cdot\ \ldots\ \cdot5\cdot3\cdot1.$$

1043. $f(x)=x^n$; показать, что

$$f(1)+\frac{f'(1)}{1}+\frac{f''(1)}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}=2^n.$$

§ 10. Производная неявной функции

Если уравнение $F(x, y)=0$, неразрешенное относительно y, определяет y как однозначную функцию x, то y называется *неявной* функцией x. Чтобы найти производную y' этой неявной функции, нужно обе части уравнения $F(x, y)=0$ продифференцировать по x, рассматривая y как функцию от x. Из полученного уравнения найдем искомую производную y'. Чтобы найти y'', нужно уравнение $F(x, y)=0$ дважды продифференцировать по x и т. д.

Найти y' из уравнений:

1044. 1) $x^2+y^2=a^2$; 2) $y^2=2px$; 3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

1045. 1) $x^2+xy+y^2=6$; 2) $x^2+y^2-xy=0$.

1046. 1) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$; 2) $e^y-e^{-x}+xy=0$.

1047. $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$.

1048. $x=y+\operatorname{arcctg} y$.

1049. $e^{xy}-x^2+y^3=0$; найти $\frac{dy}{dx}$ при $x=0$.

1050. Найти y'' из уравнений:

1) $x^2+y^2=a^2$; 2) $ax+by-xy=c$; 3) $x^my^n=1$.

1051. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; найти y'' в точке $(0; b)$.

1052. Написать уравнения касательных к кривой $x^2+y^2+4x-2y-3=0$ в точках пересечения ее с осью Oy.

1053. Найти точки пересечения нормали гиперболы $x^2-y^2=9$, проведенной из точки $(5; 4)$, с асимптотами.

1054. Написать уравнение касательной в точке $(x_0; y_0)$ к кривой:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 2) $y^2=2px$.

1055. Написать уравнения касательных к астроиде $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ в точках пересечения ее с прямой $y=x$.

1056. Под каким углом пересекаются кривые

$$x^2+y^2=5 \quad \text{и} \quad y^2=4x?$$

1057. Найти y' из уравнений:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 2) $x^3+y^3-3axy=0$.

1058. Найти y'' из уравнений:

1) $x^2-y^2=a^2$; 2) $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$;

3) $\operatorname{arctg} y=x+y$; 4) $x^2+xy+y^2=a^2$.

1059. Написать уравнения касательных к окружности $x^2+y^2+4x-4y+3=0$ в точках пересечения ее с осью Ox. Построить окружность и касательные.

1060. Написать уравнение касательной к эллипсу $x^2+4y^2=16$ в точке, в которой делится пополам отрезок касательной, отсеченный осями координат, и которая лежит в первой четверти.

1061. $te^{-s/2}+se^{-t/2}=2$; найти $\frac{ds}{dt}$ при $t=0$.

1062. $t\ln x - x\ln t = 1$: найти $\frac{dx}{dt}$ при $t=1$.

1063. $x^2\sin y - \cos y + \cos 2y = 0$; найти y' при $y=\pi/2$.

§ 11. Дифференциал функции

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x, т. е. имеет в этой точке конечную производную y', то $\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\alpha$, где $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$; отсюда

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha\,\Delta x. \tag{1}$$

Главная часть $y'\Delta x$ приращения Δy функции, *линейная* относительно Δx, называется *дифференциалом* функции и обозначается dy:

$$dy = y'\Delta x. \tag{2}$$

Положив в формуле (2) $y=x$, получим $dx = x'\Delta x = 1\cdot\Delta x = \Delta x$, и поэтому

$$dy = y'\,dx. \tag{3}$$

Формула (3) верна и в том случае, если x есть функция новой переменной t.

Из (1) следует, что $\Delta y\approx dy$, т. е. при достаточно малом $dx=\Delta x$ *приращение* функции приближенно равно ее *дифференциалу*.

В частности, для линейной функции $y=ax+b$ имеем: $\Delta y = dy$.

Найти дифференциалы функций:

1064. 1) $y=x^n$; 2) $y=x^3-3x^2+3x$.

1065. 1) $y=\sqrt{1+x^2}$; 2) $s=\frac{gt^2}{2}$.

1066. 1) $r=2\varphi-\sin 2\varphi$; 2) $x=\frac{1}{t^2}$.

1067. 1) $d(\sin^2 t)$; 2) $d(1-\cos u)$.

1068. 1) $d\left(\frac{a}{x}+\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)$; 2) $d(\alpha+\ln\alpha)$;

3) $d\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)$; 4) $d\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)$.

1069. Нахождением дифференциала каждого члена уравнения найти $\frac{dy}{dx}$ из уравнений:

1) $x^2+y^2=a^2$; 2) $xy=a^2$; 3) $x^2-xy-y^2=0$.

1070. 1) $y=x^2$; найти приближенно изменение $y (\Delta y \approx dy)$, когда x изменяется от 2 до 2,01; 2) $y=\sqrt{x}$; найти приближенно изменение y, когда x изменяется от 100 до 101.

1071. 1) Сторона куба $x=5$ м $\pm 0{,}01$ м. Определить абсолютную и относительную погрешность при вычислении объема куба.

2) Длина телеграфного провода $s=2b\left(1+\frac{2f^2}{3b^2}\right)$, где $2b$ — расстояние между точками подвеса, а f — наибольший прогиб. На сколько увеличится прогиб f, когда провод от нагревания удлинится на ds?

1072. 1) С какой точностью нужно измерить абсциссу кривой $y=x^2\sqrt{x}$ при $x \leqslant 1$, чтобы при вычислении ее ординаты допустить погрешность не более 0,1?

2) С какой относительной точностью нужно измерить радиус шара, чтобы при вычислении объема шара допустить погрешность не более 1 %?

1073. Определить приближенно: 1) площадь кругового кольца; 2) объем сферической оболочки. Сравнить с их точными значениями.

Найти дифференциалы функций:

1074. 1) $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$; 2) $r=\cos(a-b\varphi)$; 3) $s=\sqrt{1-t^2}$.

1075. 1) $y=\ln\cos x$; 2) $z=\operatorname{arctg}\sqrt{4u-1}$; 3) $s=e^{-2t}$.

1076. 1) $d(\sqrt{x}+1)$; 2) $d(\operatorname{tg}\alpha-\alpha)$; 3) $d(bt-e^{-bt})$.

1077. 1) $y=x^3$; определить Δy и dy и вычислить их при изменении x от 2 до 1,98.

2) Период колебания маятника $T=2\pi\sqrt{l/980}$ с, где l — длина маятника в сантиметрах. Как нужно изменить длину маятника $l=20$ см, чтобы период колебания уменьшился на 0,1 с?

3) С какой точностью нужно измерить абсциссу кривой $xy=4$ при $x \geqslant 0{,}5$, чтобы при вычислении ее ординаты допустить погрешность не более 0,1?

§ 12. Параметрические уравнения кривой

Пусть кривая задана параметрическими уравнениями $x = f(t)$ и $y = \varphi(t)$. Обозначая точками производные по параметру, найдем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\dot{y}/\dot{x})}{dx} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}.$$

1078. Построить кривые по параметрическим уравнениям:

$$1)\ x = t^2, \quad y = \frac{1}{2}t^3; \qquad 2)\ x = t^2, \quad y = \frac{t^3}{3} - t.$$

Исключив из уравнений t, написать уравнение каждой кривой в обычном виде: $F(x, y) = 0$.

Привести к виду $F(x, y) = 0$ (или $y = f(x)$) уравнения кривых, заданных параметрически:

1079. 1) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$;

2) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

1080. 1) $x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$, $y = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$;

2) $x = \operatorname{tg} t$, $y = \cos^2 t$.

1081. Построить «развертку», или «эвольвенту», круга (см. задачу 368)

$$x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t),$$

давая t значения: $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$.

1082. Положив $y = xt$, получить параметрические уравнения «декартова листа» $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (см. задачу 366) и исследовать движение точки по кривой при монотонном изменении t: 1) от 0 до $+\infty$; 2) от 0 до -1; 3) от $-\infty$ до -1.

1083. Написать уравнение касательной к циклоиде (см. задачу 367) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ в точке, где $t = \pi/2$. Построить кривую и касательную.

1084. Написать уравнение касательной к гипоциклоиде (астроиде) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ в точке $t = \pi/4$. Построить кривую и касательную.

Указание. Для построения кривой составить таблицу значений x и y при $t = 0$; $\pi/4$; $\pi/2$; $3\pi/4$ и т. д.

1085. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ из уравнений:

1) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$;

2) $x=t^2,\ y=\frac{t^3}{3}-t;$

3) $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t).$

1086. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями:

1) $x=2t-1,\ y=1-4t^2;$ 2) $x=t^3,\ y=t^2-2,$

найдя точки пересечения их с осями координат и заметив, что для второй кривой $\frac{dy}{dx}=\infty$ при $t=0$. Написать уравнения кривых в виде $F(x, y)=0$.

1087. Написать уравнение касательной к циклоиде $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ в точке $t=3\pi/2$. Построить кривую и касательную.

1088. Написать уравнение касательной к развертке круга $x=a(\cos t+t\sin t),\quad y=a(\sin t-t\cos t)$ в точке $t=\pi/4$.

1089. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$ из уравнений:

1) $x=2\cos t,\ y=\sin t;$ 2) $x=t^2,\ y=t+t^3;$

3) $x=e^{2t},\ y=e^{3t}.$

ГЛАВА 7
ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

§ 1. Скорость и ускорение

Пусть точка движется по оси Ox и в момент t имеет координату $x = f(t)$. Тогда в момент t

$$\textit{скорость } v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt},$$

$$\textit{ускорение } w = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

1090. Зенитный снаряд выброшен вертикально вверх с начальной скоростью a м/с. На какой высоте x он будет через t секунд? Определить скорость и ускорение движения снаряда. Через сколько секунд снаряд достигнет наивысшей точки и на каком расстоянии от земли?

1091. Тело движется по прямой Ox по закону $x = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$. Определить скорость и ускорение движения. В какие моменты тело меняет направление движения?

1092. Колебательное движение материальной точки совершается по закону $x = a\cos\omega t$. Определить скорость и ускорение движения в точках $x = \pm a$ и $x = 0$. Показать, что ускорение $\frac{d^2x}{dt^2}$ и отклонение x связаны «дифференциальным» уравнением $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$.

1093. Вращающееся маховое колесо, задерживаемое тормозом, за t секунд поворачивается на угол $\varphi = a + bt - ct^2$, где a, b и c — положительные постоянные. Определить угловую скорость и ускорение вращения. Когда колесо остановится?

1094. Колесо радиуса a катится по прямой. Угол φ поворота колеса за t секунд определяется уравнением $\varphi = t + \frac{t^2}{2}$. Определить скорость и ускорение движения центра колеса.

1095. Пусть v — скорость и w — ускорение точки, движущейся по оси Ox. Показать, что $w\,dx = v\,dv$.

1096. Точка движется прямолинейно так, что $v^2 = 2ax$, где v — скорость, x — пройденный путь и a — постоянная. Определить ускорение движения.

1097. Тело с высоты 10 м брошено вертикально вверх с начальной скоростью 20 м/с. На какой высоте x оно будет через t секунд? Определить скорость и ускорение движения. Через сколько секунд тело достигнет наивысшей точки и на какой высоте?

1098. Сосуд в форме полушара радиуса R см наполняется водой с постоянной скоростью a л/с. Определить скорость повышения уровня на высоте уровня h см и показать, что она обратно пропорциональна площади свободной поверхности жидкости.

Указание. Объем шарового сегмента $V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right)$. Обе части этого равенства нужно продифференцировать по t, причем $\frac{dV}{dt} = a$ (по условию).

1099. Зависимость между количеством x вещества, получаемого в некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением $x = A(1 - e^{-kt})$. Определить скорость реакции.

1100. Пусть угловая скорость $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, угловое ускорение $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$. Показать, что $\frac{d(\omega^2)}{d\varphi} = 2\varepsilon$.

§ 2. Теоремы о среднем

1°. Теорема Ролля. Если $f(x)$: 1) непрерывна на отрезке $[a, b]$, 2) имеет производную внутри него, 3) $f(a) = f(b)$, то между a и b найдется такое $x = c$, при котором

$$f'(c) = 0. \qquad (1)$$

2°. Теорема Лагранжа. Если $f(x)$: 1) непрерывна на отрезке $[a, b]$, 2) имеет производную внутри него, то между a и b найдется такое $x = c$, при котором

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c). \tag{2}$$

3°. Теорема Коши. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$: 1) непрерывны на отрезке $[a, b]$, 2) имеют производные внутри него, причем $\varphi'(x) \neq 0$, то между a и b найдется такое $x = c$, при котроом

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{3}$$

Эти теоремы носят название теорем о среднем потому, что в них говорится о некотором значении $x = c$, среднем между a и b.

Геометрически теоремы Ролля и Лагранжа утверждают, что на дуге AB непрерывной кривой $y = f(x)$, имеющей в каждой точке определенную касательную и не имеющей точек возврата, найдется внутренняя точка, касательная в которой параллельна хорде AB.

На дугах, содержащих угловые точки или точки возврата, условия теорем о среднем, очевидно, не выполнены.

Теорему Ролля в частном случае при $f(b) = f(a) = 0$ формулируют так: между двумя корнями a и b функции $f(x)$ найдется по крайней мере один корень ее производной $f'(x)$, если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную внутри него.

1101. Проверить, что между корнями функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$ находится корень ее производной. Пояснить графически.

1102. Применима ли теорема Ролля к функции $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[-1, 1]$? Пояснить графически.

1103. Построить дугу $\breve{AB}$ кривой $y = |\sin x|$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$. Почему на дуге нет касательной, параллельной хорде AB? Какое из условий теоремы Ролля здесь не выполнено?

1104. В какой точке касательная к параболе $y = x^2$ параллельна хорде, стягивающей точки $A(-1;\ 1)$ и $B(3;\ 9)$? Пояснить графически.

1105. Написать формулу Лагранжа для функции $f(x) = x^2$ на отрезке $[a, b]$ и найти c. Пояснить графически.

1106. Написать формулу Лагранжа для функции $f(x) = \sqrt{x}$ на отрезке $[1, 4]$ и найти c.

1107. Показать, что на отрезке $[-1, 2]$ теорема Лагранжа неприменима к функциям $\frac{4}{x}$ и $1 - \sqrt[3]{x^2}$. Пояснить графически.

1108. Построить $\smile{AB}$ кривой $y=|\cos x|$ на отрезке $[0, 2\pi/3]$. Почему на дуге нет касательной, параллельной хорде AB? Какое из условий теоремы Лагранжа здесь не выполнено?

1109. Пусть $f(x)=\begin{cases} x \text{ при } |x|<2, \\ 1 \text{ при } |x|\geqslant 2. \end{cases}$ Построить график этой функции и, взяв на нем точки $O(0; 0)$ и $B(2; 1)$, показать, что между O и B на этом графике нет точки, касательная в которой была бы параллельна OB. Какие условия теоремы Лагранжа для этой функции на отрезке $[0, 2]$ выполнены и какие нет?

1110. Поезд прошел расстояние между станциями со средней скоростью $v_0=40$ км/ч. Теорема Лагранжа утверждает, что был момент движения, в который истинная (а не средняя) скорость движения $\frac{ds}{dt}$ была равна 40 км/ч. Показать это.

1111. Дано, что $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную в каждой точке внутри него. Применив теорему Ролля к функции

$$\Phi(x)=\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix},$$

получить теорему Лагранжа. Выяснить геометрическое значение функции $\Phi(x)$.

1112. Написать формулу Коши $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$ для функций $f(x)=x^3$ и $\varphi(x)=x^2$ и найти c.

1113. Геометрически теорема Коши утверждает, что на дуге кривой $x=\varphi(t)$, $y=f(t)$ для значений t на отрезке $a\leqslant t\leqslant b$ найдется внутренняя точка, в которой касательная параллельна хорде, если функции $\varphi(t)$ и $f(t)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши. Доказать это.

1114. Написать формулу Лагранжа в виде $f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta x f'(x+\theta\Delta x)$, где $0<\theta<1$, для функций: 1) $f(x)=x^2$; 2) $f(x)=x^3$, и показать, что для первой функции θ не зависит от x, а для второй зависит от x и Δx.

1115. Показать, что $\sqrt{101}=10+\frac{1}{2\sqrt{100+\theta}}\approx 10{,}05$.

1116. С помощью формулы Коши доказать, что если

$$f(0)=f'(0)=f''(0)= \ldots =f^{(n-1)}(0)=0,$$

то

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!},$$

где

$$0<\theta<1.$$

1117. Написать формулу Лагранжа

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

для функции $f(x)=x^3$ и найти c.

1118. Написать формулу Лагранжа и найти c для функций:

1) $f(x)=\operatorname{arctg} x$ на отрезке $[0, 1]$;

2) $f(x)=\arcsin x$ на отрезке $[0, 1]$;

3) $f(x)=\ln x$ на отрезке $[1, 2]$.

1119. Написать формулу Коши и найти c для функций:

1) $\sin x$ и $\cos x$ на отрезке $[0; \pi/2]$;

2) x^2 и $\sqrt{x}$ на отрезке $[1, 4]$.

1120. Построить график функции $y=|x-1|$ на отрезке $[0, 3]$. Почему здесь нельзя провести касательную, параллельную хорде? Какое из условий теоремы Лагранжа здесь не выполнено?

1121. В какой точке касательная к кривой $y=4-x^2$ параллельна хорде, стягивающей точки $A(-2; 0)$ и $B(1; 3)$? Пояснить графически.

§ 3. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя

1°. Неопределенность $\frac{0}{0}$. Первое правило Лопиталя. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, когда последний существует.

2°. Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Второе правило Лопиталя. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, когда последний существует.

3°. Неопределенности $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ и 0^0 сводятся к неопределенностям $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ путем алгебраических преобразований.

Найти пределы:

1122. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$.

1123. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$.

1124. $\lim\limits_{x\to a} \frac{x-a}{x^n - a^n}$.

1125. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x}$.

1126. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$.

1127. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

1128. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$.

1129. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$.

1130. 1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x^3}$.

1131. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x}$.

1132. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

1133. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$.

1134. $\lim\limits_{x\to \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

1135. $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x$.

1136. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n \cdot e^{-x}$.

1137. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

1138. $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

1139. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$.

1140. Определить порядок бесконечно малой $xe^x - \sin x$ относительно $x \to 0$.

1141. Доказать, что при $x \to 0$:

1) $x - \operatorname{arctg} x \approx \frac{x^3}{3}$; 2) $a^x - b^x \approx x \ln \frac{a}{b}$;

3) $e^{2x} - 1 - 2x \approx 2x^2$; 4) $2x - \ln(1+2x) \approx 2x^2$.

1142. Доказать, что (при $x \to 0$) $x - \sin x \approx \frac{x^3}{6}$ и отсюда $\sin x \approx x$ с погрешностью, приближенно равной $x^3/6$. Вычислить $\sin 1°$ и $\sin 6°$ и оценить погрешность.

1143. Доказать, что (при $\alpha \to 0$) $\sqrt[3]{1+\alpha} - 1 - \frac{1}{3}\alpha \approx -\frac{\alpha^2}{9}$ и отсюда $\sqrt[3]{1+\alpha} \approx 1 + \frac{1}{3}\alpha$ с погрешностью $\approx \alpha^2/9$. Вычислить $\sqrt[3]{1{,}006}$, $\sqrt[3]{0{,}991}$, $\sqrt[3]{65}$, $\sqrt[3]{210}$ и оценить погрешность.

Найти пределы:

1144. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x}$.

1145. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

1146. $\lim\limits_{x \to \pi/2a} \frac{1 - \sin ax}{(2ax - \pi)^2}$.

1147. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - l^x}{\operatorname{tg} x}$.

1148. $\lim\limits_{x \to \pi/6} \frac{1 - 2\sin x}{\cos 3x}$.

1149. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$.

1150. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 2x)}$.

1151. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{1 - x^3}$.

1152. $\lim\limits_{x \to 0} (1 - e^{2x}) \operatorname{ctg} x$.

1153. $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

1154. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$.

1155. $\lim\limits_{x \to 0} (e^{2x} + x)^{1/x}$.

1156. Доказать, что при $x \to 0$ $\arcsin x - x \approx \frac{x^3}{6}$.

1157. Доказать, что (при $\alpha \to 0$) $\sqrt{1+\alpha} - 1 - \frac{\alpha}{2} \approx -\frac{\alpha^2}{8}$ и отсюда $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}$ с погрешностью, приближенно равной $\alpha^2/8$. Вычислить $\sqrt{1{,}006}$, $\sqrt{1{,}004}$, $\sqrt{0{,}998}$, $\sqrt{0{,}994}$, $\sqrt{65}$, $\sqrt{85}$ и оценить погрешность.

§ 4. Возрастание и убывание функции. Максимум и минимум

1°. Определения. I. Функция $f(x)$ называется *возрастающей в точке* x_0, если в некоторой ε-окрестности этой точки

$$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$$

при любом положительном $h < \varepsilon$.

II. Функция $f(x)$ называется *возрастающей на отрезке* $[a, b]$, если для любых x_1 и x_2 на этом отрезке $f(x_1) < f(x_2)$, когда $x_1 < x_2$.

Аналогично определяется убывание функции в точке и на отрезке.

III. Функция $f(x)$ называется имеющей *экстремум (максимум* или *минимум)* в точке x_0, если $f(x_0)$ является наибольшим или наименьшим значением функции в некоторой двусторонней окрестности этой точки.

2°. Достаточные признаки возрастания и убывания функции $y = f(x)$ (в точке и на отрезке):

если $y' > 0$, то функция *возрастает*;
если $y' < 0$, то функция *убывает*.

3°. Необходимое условие эстремума. Функция $y = f(x)$ может иметь экстремум только в точках, где $y' = 0$ или не существует. Такие точки называются *критическими*. В них касательная или горизонтальна ($y' = 0$), или вертикальна (в точке возврата), или нет определенной касательной (например, в угловой точке). В двух последних случаях y' не существует.

4°. Достаточные условия эстремума. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет в некоторой окрестности x_0, кроме, быть может, точки x_0, конечную производную и если при переходе x через x_0:

y' меняет знак с $+$ на $-$, то $f(x_0) = y_{max}$,
y' меняет знак с $-$ на $+$, то $f(x_0) = y_{min}$,
y' не меняет знака, то экстремума нет.

Третий случай имеет место в обыкновенной точке (при $y' > 0$ или $y' < 0$), а также в точке перегиба и в угловой точке.

Итак, чтобы найти экстремум функции, нужно:

1) Найти y' и критические точки, в которых $y' = 0$ или не существует.

2) Определить знак y' слева и справа от каждой критической точки, составив таблицу, например, вида

x		x_1		x_2		x_3		x_4	
y'	$-$	0	$+$	не существует	$-$	0	$-$	$-\infty$	$-$
y	убывает	min	возрастает	max	убывает	перегиб	убывает	перегиб	убывает

Далее можно найти y_{max} и y_{min} и построить кривую. На рис. 28 построена кривая, соответствующая приведенной выше таблице.

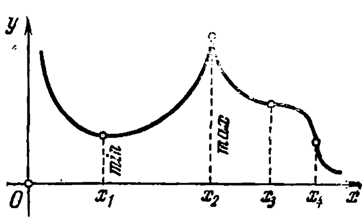

Рис. 28

5°. Достаточные условия экстремума (второй способ исследования).

Если в некоторой точке $x = x_0$:

1) $y' = 0$, а $y'' < 0$, то $f(x_0) = y_{max}$;

2) $y' = 0$, а $y'' > 0$, то $f(x_0) = y_{\min}$;

3) $y' = 0$ и $y'' = 0$, то вопрос остается нерешенным и нужно обратиться к первому способу исследования.

Исследовать возрастание и убывание функций:

1158. 1) $y = x^2$; 2) $y = x^3$; 3) $y = \frac{1}{x}$; 4) $y = \ln x$.

1159. 1) $y = \operatorname{tg} x$; 2) $y = e^x$; 3) $y = 4x - x^2$.

Найти экстремум функции и построить ее график*):

1160. $y = x^2 + 4x + 5$.

1161. $y = 4x - \frac{x^3}{3}$.

1162. $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.

1163. $y = 1 + 2x^2 - \frac{x^4}{4}$.

1164. $y = \frac{x^4}{4} - x^3$.

1165. $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.

1166. $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$.

1167. $y = \frac{1}{1 + x^2}$.

1168. $y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$.

1169. $y = x^2(1 - x)$.

1170. $y = 1 - \sqrt[3]{(x-4)^2}$.

1171. $y = e^{-x^2}$.

1172. $y = x + \cos 2x$ в интервале $(0, \pi)$.

1173. $x = 4x - \operatorname{tg} x$ в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

1174. $y = \frac{1 + \ln x}{x}$.

1175. $y = x - \operatorname{arctg} 2x$.

1176. 1) $y = xe^{-\frac{x}{2}}$; 2) $y = x \ln x$.

1177. 1) $y = \sqrt{\sin x^2}$; 2) $y = \sqrt{e^{x^2} - 1}$.

1178. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

1179. $y = x\sqrt{1 - x}$.

1180. $y = \frac{4\sqrt{x}}{x + 2}$.

1181. $y = \frac{x}{(x-1)(x-4)}$.

1182. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$.

1183. $y = x^{2/3} + (x - 2)^{2/3}$.

1184. $y = \frac{x^5}{5} - x^4 + x^3$.

---

*) В задачах 1165, 1168, 1173 и некоторых других для построения кривой нужно найти ее асимптоты (см. гл. 5, § 9, с. 112).

1185. $y = x^3(x+2)^2$. 1186. $y = 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$.

1187. $y = \frac{x^3}{x^2-3}$. 1188. $y = 2\,\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}^2\,x$.

1189. $y = x + \ln(\cos x)$.

1190. 1) $y = \ln\sqrt{1+x^2} - \mathrm{arctg}\,x$; 2) $y = |x|(x+2)$.

1191. $y = x^2e^{-x}$.

1192. $y = 3\sqrt[3]{(x+1)^2} - 2x$.

Найти экстремум функции и построить ее график:

1193. $y = 4x - x^2$. 1194. $y = x^2 + 2x - 3$.

1195. $y = \frac{x^3}{3} + x^2$. 1196. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$.

1197. $y = \frac{x^2}{x-2}$. 1198. $y = x^3 + \frac{x^4}{4}$.

1199. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2$. 1200. $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

1201. $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$. 1202. $y = xe^{-x^2/2}$.

1203. $y = x - 2\ln x$. 1204. $y = x^{2/3}(x-5)$.

1205. $y = \sin 2x - x$ в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$.

1206. $y = 2x + \mathrm{ctg}\,x$ в интервале $(0, \pi)$.

1207. $y = x + \mathrm{arcctg}\,2x$. 1208. $y = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

1209. $y = 2\sin x + \cos 2x$ в интервале $(0, \pi)$.

1210. $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$. 1211. $y = \frac{\ln x}{x}$.

1212. $y = \frac{3-x^2}{x+2}$. 1213. $y = x + \frac{1}{x}$.

1214. 1) $y = ae^{-x}\cos x$ (при $x > 0$); 2) $y = 3x^5 - 5x^3$.

1215. $y = \frac{(4-x)^3}{9(2-x)}$. 1216. $y = \frac{12\sqrt[3]{(x+2)^2}}{x^2+8}$.

1217. $y = \frac{2x^2-1}{x^4}$. 1218. $y = (1-x^2)(1-x^3)$.

1219. $y = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$. 1220. $y = x + 2\sqrt{-x}$.

1221. 1) $y = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$; 2) $y = \sqrt{1-\cos x}$.

§ 5. Задачи о наибольших и наименьших значениях величин

1222. Решеткой длиной 120 м нужно огородить прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади. Определить размеры прямоугольной площадки.

1223. Разложить число 10 на два слагаемых так, чтобы произведение их было наибольшим.

1224. В треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник наибольшей площади. Определить площадь прямоугольника.

1225. Из квадратного листа картона со стороной a вырезаются по углам одинаковые квадраты и из оставшейся части склеивается прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы объем коробки был наибольшим?

1226. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м^3 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

1227. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны 10 см. Определить ее большее основание так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

1228. В полукруг вписана трапеция, основание которой есть диаметр полукруга. Определить угол трапеции при основании так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

1229. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр сечения 18 м. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?

1230. Вблизи завода A проводится по намеченной прямой к городу B железная дорога. Под каким углом α к проектируемой железной дороге нужно провести шоссе с завода A, чтобы доставка грузов из A в B была наиболее дешевой, если стоимость 1 тонно-километра при перевозке по шоссе в m раз дороже, чем по железной дороге?

1231. Два источника света расположены в 30 м друг от друга. На прямой, соединяющей их, найти наименее освещенную точку, если силы света источников относятся, как 27 : 8.

1232. Два самолета летят в одной плоскости и прямолинейно под углом 120° с одинаковой скоростью

v км/ч. В некоторый момент один самолет прилетел в точку пересечения линий движения, а второй не долетел до нее на a км. Через какое время расстояние между самолетами будет наименьшим и чему равно это расстояние?

1233. Балка прямоугольного сечения со свободно опертыми концами равномерно нагружена по всей длине. Стрела ее прогиба обратно пропорциональна моменту инерции сечения балки $I=\frac{xy^3}{12}$, где x и y — размеры балки. Определить размеры балки при наименьшей стреле прогиба, если балка вырезана из круглого бревна с диаметром D.

1234. Во сколько раз объем шара больше объема наибольшего цилиндра, вписанного в этот шар?

1235. Два коридора шириной 2,4 м и 1,6 м пересекаются под прямым углом. Определить наибольшую длину лестницы, которую можно перенести (горизонтально) из одного коридора в другой.

1236. В конус с радиусом 4 дм и высотой 6 дм вписан цилиндр наибольшего объема. Найти этот объем.

1237. В полукруг радиуса R вписан прямоугольник наибольшей площади. Определить его размеры.

1238. На параболе $y=x^2$ найти точку, наименее удаленную от прямой $y=2x-4$.

1239. Картина повешена на стене. Нижний ее конец на b см, а верхний на a см выше глаза наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен встать наблюдатель, чтобы рассмотреть картину под наибольшим углом?

1240. Общая длина стен изображенного на плане дома (рис. 29) должна быть равна 90 м. При какой ширине x коридора площадь трех остальных комнат будет наибольшей?

1241. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 8 см и углом 60° вписан прямоугольник, основание которого расположено на гипотенузе. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

1242. Даны точки $A(0;3)$ и $B(4;5)$. На оси Ox найти точку M так, чтобы расстояние $S=AM+MB$ было наименьшим.

1243. Сопротивление балки продольному сжатию пропорционально площади поперечного сечения. Определить размеры балки, вырезанной из круглого бревна диаметром D, так, чтобы сопротивление ее сжатию было наибольшим.

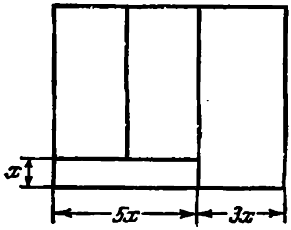

Рис. 29

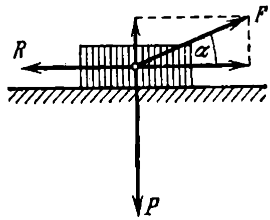

Рис. 30

1244. Из круга вырезается сектор, содержащий угол α, а затем сектор свертывается в конус. При каком значении угла α объем конуса будет наибольшим?

1245. Груз весом P, лежащий на горизонтальной плоскости, нужно сдвинуть приложенной к нему силой F (рис. 30). Под каким углом α к горизонту нужно направить силу F, чтобы она была наименьшей. Коэффициент трения $\mu = 0{,}25$.

§ 6. Направление выпуклости и точки перегиба кривой. Построение кривых

1°. Выпуклость. Кривая называется *выпуклой* «вверх» («вниз») в точке $x = x_0$, если в некоторой окрестности этой точки (слева и справа) кривая расположена «ниже» («выше») касательной в этой точке. Если в точке $x = x_0$:

1) $y'' > 0$, то кривая выпукла «вниз»;
2) $y'' < 0$, то кривая выпукла «вверх».

2°. Точкой перегиба называется точка, в которой кривая переходит с одной стороны касательной на другую (и, следовательно, меняет направление выпуклости). *Необходимым* условием точки перегиба является то, что в ней $y'' = 0$ или не существует, а *достаточным* — то, что y'' при этом меняет знак.

3°. Для построения кривой рекомендуется определить: 1) симметрию; 2) область расположения; 3) точки пересечения с осями Ox и Oy; 4) точки разрыва функции $y = \varphi(x)$ или $x = f(y)$ и асимптоты; 5) возрастание или убывание y или x и экстремальные точки; 6) направление выпуклости и точки перегиба.

1246. Исследовать направление выпуклости и построить кривые:

1) $y=x^2$; 2) $y=x^3$; 3) $y=e^x$; 4) $y=\ln x$;

5) $y=x^{5/3}$.

1247. Определить экстремальные точки и точки перегиба кривых и построить кривые:

1) $y=\frac{x^3}{6}-x^2$; 2) $y=e^{-x^2}$; 3) $y=\frac{2x}{1+x^2}$;

4) $y=2^{1/x}$.

Применяя некоторые из правил п. 3°, построить кривые, заданные в задачах 1248—1262 уравнениями:

1248. $y^2=2x+9$. **1249.** $y=-x^2-4x$.

Указание. В задаче 1248 определить симметрию, область расположения и точки пересечения с осями, а в задаче 1249—точку экстремума и точки пересечения с Ox.

1250. $y=\sin x$, $y=\cos x$. **1251.** $y=\operatorname{sh} x$, $y=\operatorname{ch} x$.

Указание. В задачах 1250, 1251 определить точки экстремума и перегиба.

1252. $y=\ln(x+2)$. **1253.** $y=e^{-x}$.

Указание. В задачах 1252, 1253 определить область расположения, точки пересечения с осями, асимптоту и направление выпуклости.

1254. 1) $y^2=x^3$; 2) $y^2=(x+3)^3$.

1255. 1) $y=2+\frac{12}{x^2-4}$; 2) $y=\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$.

1256. 1) $y=\frac{e\ln x}{x}$; 2) $y=exe^{-x}$.

1257. 1) $y=x+\frac{4}{x+2}$; 2) $y=\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^2}$.

1258. 1) $y=x-\ln x$; 2) $y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})$.

1259. 1) $y=\frac{x^4}{x^3-1}$; 2) $y=\frac{4}{x}+\frac{1}{x^4}$.

1260. 1) $y^2=2x^2-x^4$; 2) $x(y-x)^2=4$.

1261. $y=(x+2)^{2/3}-(x-2)^{2/3}$.

1262. $y^2=xe^{-x}$.

ГЛАВА 8
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Неопределенный интеграл. Интегрирование разложением

1°. Неопределенным интегралом $\int f(x)\,dx$ называется функция $F(x)+C$, содержащая произвольное постоянное C, дифференциал которой равен *подынтегральному* выражению $f(x)dx$, т. е.

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C,$$

если

$$d[F(x)+C] = f(x)\,dx.$$

2°. Таблица основных интегралов:

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ $(n \neq -1)$.
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C$.
3. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$.
4. $\int e^x\,dx = e^x+C$.
5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ \text{или} \\ -\operatorname{arcctg} x + C_1. \end{cases}$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ \text{или} \\ -\arccos x + \\ +C. \end{cases}$

3°. Свойства неопределенного интеграла:

I. $d\int u\,dx = u\,dx$. II. $\int du = u + C$.

III. $\int Au\,dx = A\int u\,dx$. IV. $\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$.

Интегрирование *разложением* есть приведение данного интеграла (по свойству IV) к сумме более простых интегралов.

1263. В следующих равенствах заполнить пропущенные места по соображению:

1) $d(\quad)=2x\,dx$; 2) $d(\quad)=x^3\,dx$;

3) $d(\quad)=\cos x\,dx$; 4) $d(\quad)=\frac{dx}{x}$;

5) $d(\quad)=\frac{dx}{\cos^2 x}$; 6) $d(\quad)=\frac{dx}{1+x^2}$.

Найти затем интегралы $\int 2x\,dx$, $\int x^3\,dx$ и т. д.

Найти интегралы:

1264. 1) $\int\left(x^2+2x+\frac{1}{x}\right)dx$; 2) $\int\frac{10x^8+3}{x^4}\,dx$.

1265. 1) $\int\frac{x-2}{x^3}\,dx$; 2) $\int\frac{(x^2+1)^2}{x^3}\,dx$.

1266. 1) $\int(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})\,dx$; 2) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$.

1267. 1) $\int\frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}\,dx$; 2) $\int\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

1268. 1) $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$; 2) $\int a^x\left(1+\frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right)dx$.

1269. 1) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,dx$; 2) $\int\operatorname{ctg}^2 x\,dx$.

1270. 1) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$; 2) $\int\frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}\,dx$.

1271. 1) $\int\sin^2\frac{x}{2}\,dx$; 2) $\int\cos^2\frac{x}{2}\,dx$.

1272. 1) $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$; 2) $\int\frac{x^4}{1+x^2}\,dx$.

Найти интегралы:

1273. 1) $\int\frac{(x^2-1)^2}{x^3}\,dx$; 2) $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx$.

1274. 1) $\int\frac{x-2}{\sqrt{x^3}}\,dx$; 2) $\int\frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{x^2}\,dx$.

1275. 1) $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx$;

2) $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$.

1276. 1) $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$; 2) $\int a^x\left(1+\frac{a^{-x}}{x^5}\right)dx$.

1277. $\int\frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$. **1278.** $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

§ 2. Интегрирование подстановкой и непосредственное

Положив $x=\varphi(u)$, $dx=\varphi'(u)du$, получим

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,du. \qquad (1)$$

Такое преобразование интеграла называется *интегрированием подстановкой.*

В простых случаях введение новой переменной u рекомендуется выполнять в уме, применяя следующие преобразования дифференциала dx:

$$dx=\frac{1}{a}\,d(ax+b);\qquad 2x\,dx=d(x^2);$$

$$\cos x\,dx=d(\sin x);\qquad \frac{dx}{x}=d(\ln x)\ \text{и т. п.,}$$

и обозначая мысленно выражение в скобках через u. Такой прием интегрирования называют *непосредственным.*

Найти интегралы:

1279. $\int\cos 3x\,dx$. **1280.** $\int\sin\frac{x}{2}\,dx$.

Указание. Пример 1279 можно решить двумя способами: 1) положив $3x=u$, $x=u/3$, $dx=du/3$; 2) приведя интеграл к виду $\frac{1}{3}\int\cos 3x\,d(3x)$.

1281. $\int e^{-3x}dx$. **1282.** $\int\frac{dx}{\cos^2 5x}$.

1283. $\int\left(e^{x/2}+e^{-x/2}\right)dx$. **1284.** $\int\sqrt{4x-1}\,dx$.

1285. $\int(3-2x)^4 dx$. **1286.** $\int\sqrt[3]{5-6x}\,dx$.

1287. $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$. **1288.** $\int\sin(a-bx)\,dx$.

1289. $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+7}\,dx.$ **1290.** $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}.$

Указание. Примеры 1289—1298 решаются по формуле

$$\int \frac{u'\,dx}{u} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C,$$

т. е. если *числитель* подынтегральной дроби есть *производная от знаменателя, то интеграл равен логарифму знаменателя.*

1291. $\int \frac{dx}{1-10x}.$ **1292.** $\int \frac{e^{2x}\,dx}{1-3e^{2x}}.$

1293. $\int \operatorname{ctg} x\,dx.$ **1294.** $\int \operatorname{tg} x\,dx.$

1295. $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x}\,dx.$ **1296.** $\int \frac{\sin x\,dx}{1+3\cos x}.$

1297. $\int \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx.$ **1298.** $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}.$

1299. $\int \sin^2 x \cos x\,dx.$ **1300.** $\int \cos^3 x \sin x\,dx.$

Указание. Пример 1299 можно решить подстановкой $\sin x = u$ или непосредственно, заменив $\cos x\,dx$ через $d(\sin x)$.

1301. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^4 x}.$ **1302.** $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^3 x}.$

1303. $\int \frac{1-2\cos x}{\sin^2 x}\,dx.$ **1304.** $\int \sin x \cos x\,dx.$

1305. $\int e^{\cos x} \sin x\,dx.$ **1306.** $\int e^{x^3} x^2\,dx.$

Указание. Пример 1306 можно решить подстановкой $x^3 = u$ или непосредственно, заменив x^2dx через $\frac{1}{3}d(x^3)$.

1307. $\int e^{-x^2} x\,dx.$ **1308.** $\int \frac{e^{\sqrt{x}}\,dx}{\sqrt{x}}.$

1309. $\int \sqrt{x^2+1}\,x\,dx.$ **1310.** $\int \sqrt[3]{x^3-8}\,x^2\,dx.$

Указание. Пример 1309 можно решить подстановкой $x^2 + 1 = u$ или непосредственно, записав интеграл в виде $\frac{1}{2}\int (x^2+1)^{1/2}\,d(x^2+1)$.

1311. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$ **1312.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

1313. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos x}}.$ **1314.** $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}\,dx}{x}.$

1315. $\int \sqrt{1+4\sin x}\cos x\,dx$.

1316. $\int \sqrt[3]{1-6x^5}\,x^4\,dx$.

Найти интегралы:

1317. $\int (e^x+e^{-x})^2\,dx$.

1318. $\int \sin^3 x\cos x\,dx$.

1319. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x}}$.

1320. $\int \cos(a-bx)\,dx$.

1321. $\int \sqrt[3]{1+3x}\,dx$.

1322. $\int \sqrt[6]{1-2x^3}\,x^2\,dx$.

1323. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

1324. $\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}\,dx$.

1325. $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x}\,dx$.

1326. $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$.

1327. $\int \frac{x^2\,dx}{1-x^3}$.

1328. $\int \frac{dx}{(a-bx)^3}$.

§ 3. Интегралы вида $\int \frac{dx}{x^2\pm a^2}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}$ и к ним приводящиеся

1329. Показать, что

1) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$, положив $x=a\operatorname{tg}t$;

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C$, положив $x=a\sin t$;

3) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$, разложив

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\,\frac{a+x+a-x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right);$$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|+C$, положив $\sqrt{x^2+k}= = t-x$.

1330. 1) $\int \frac{dx}{x^2-25}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2+9}$.

1331. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$.

1332. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2+3}$.

1333. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$; 2) $\int \frac{x^2\,dx}{4+x^6}$.

1334. 1) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-x^4}}$; 2) $\int \frac{dx}{b^2x^2-a^2}$.

1335. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$; 2) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^8-1}}$.

1336. 1) $\int \frac{5x-2}{x^2+4}\,dx$; 2) $\int \frac{3x-4}{x^2-4}\,dx$.

1337. 1) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$; 2) $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

1338. $\int \frac{x^2\,dx}{x^2+1}$. **1339.** $\int \frac{x^4\,dx}{x^2-3}$.

Указание. В примерах 1338, 1339 нужно из подынтегральной *неправильной* дроби исключить целое выражение.

1340. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$. **1341.** $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$.

Указание. В примерах 1340—1347 нужно из квадратного трехчлена выделить полный квадрат.

1342. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$. **1343.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

1344. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$. **1345.** $\int \frac{dx}{x^2+3x+3}$.

1346. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$. **1347.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x-1}}$.

Найти интегралы:

1348. $\int \left(\frac{3}{x^2+3}+\frac{6}{x^2-3}\right)dx$.

1349. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\right)dx$.

1350. $\int \frac{4x-5}{x^2+5}\,dx$. **1351.** $\int \frac{x^2\,dx}{x^2-2}$.

1352. $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+2}$. **1353.** $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

1354. $\int \frac{x\,dx}{x^4+0{,}25}$. **1355.** $\int \frac{dx}{x^2+4x+29}$.

1356. $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$. **1357.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

1358. $\int \frac{x\,dx}{x^2+x+1}$. **1359.** $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$.

§ 4. Интегрирование по частям

Из формулы дифференциала произведения $d(uv) = u\,dv + v\,du$ получается формула интегрирования по частям:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Эта формула чаще всего применяется тогда, когда под интегралом имеется произведение алгебраической и трансцендентной функций, например $\int x^2e^x\,dx$ или $\int x^2 \ln x\,dx$. При этом за u принимается функция, которая дифференцированием упрощается, а за dv — та часть подынтегрального выражения, содержащая dx, интеграл от которой известен или может быть найден.

Из трансцендентных функций за u обычно принимаются $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\arcsin x$.

Например, в интеграле $\int x^2 \ln x\,dx$ за u нужно принять $\ln x$ (а не x^2), а в интеграле $\int x^2e^x\,dx$ за u нужно принять x^2 (а не e^x).

Найти интегралы:

1360. $\int \ln x\,dx$. **1361.** $\int x\ln(x-1)\,dx$.

1362. $\int xe^{2x}\,dx$. **1363.** $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$.

1364. $\int x^2\cos x\,dx$. **1365.** $\int e^x \sin x\,dx$.

1366. Показать, что

$$\int \sqrt{x^2+k}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+k} + k\ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)\right] + C.$$

Найти интегралы:

1367. $\int (\ln x)^2\,dx$. **1368.** $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$.

1369. $\int \frac{\ln x\,dx}{x^2}$. **1370.** $\int \frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1+x}}$.

1371. $\int \arcsin x\,dx$. **1372.** $\int x^3e^{-x}\,dx$.

1373. $\int \ln(x^2+1)\,dx$. **1374.** $\int \cos(\ln x)\,dx$.

Найти интегралы:

1375. $\int \sqrt{x} \ln x\, dx.$ **1376.** $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx.$

1377. $\int \operatorname{arctg} x\, dx.$ **1378.** $\int \frac{x\, dx}{\cos^2 x}.$

1379. $\int e^x \cos x\, dx.$ **1380.** $\int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}} dx.$

1381. $\int \frac{x \cos x\, dx}{\sin^3 x}.$

1382. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1}\, dx.$

§ 5. Интегрирование тригонометрических функций

1°. Интегралы от квадратов и других четных степеней синуса и косинуса находят, применяя следующие формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

2°. Интегралы от кубов и других нечетных степеней синуса и косинуса находят, отделяя от нечетной степени один множитель и полагая *кофункцию* равной новой переменной u.

Интеграл $\int \cos^m x \sin^n x\, dx$ находится по правилу 1°, если m и n оба четные, и по правилу 2°, если m или n нечетно.

Найти интегралы:

1383. $\int \sin^2 3x\, dx.$ **1384.** $\int (1+2\cos x)^2 dx.$

1385. $\int (1-\sin 2x)^2 dx.$ **1386.** $\int \cos^4 x\, dx.$

1387. $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx.$ **1388.** $\int \sin^4 x \cos^4 x\, dx.$

1389. $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx.$ **1390.** $\int \sin^5 x\, dx.$

1391. $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx.$ **1392.** $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx.$

1393. $\int \cos^7 x\, dx.$ **1394.** $\int (1+2\cos x)^3 dx.$

1395. $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\sin^2 x}.$ **1396.** $\int \frac{\sin^3 x\, dx}{\cos^2 x}.$

1397. $\int \frac{dx}{\sin 2x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2 \sin x \cos x} dx = ?$

1398. 1) $\int \frac{dx}{\sin x}$; 2) $\int \frac{dx}{\cos x}$.

1399. $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin 2x} dx$.

1400. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$.

1401. $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$.

1402. $\int \operatorname{ctg}^3 x \, dx$.

Указание. В примере 1401 положить $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arctg} t$.

1403. $\int \sin 3x \cos x \, dx$.

1404. $\int \cos mx \cos nx \, dx$.

Указание. В примерах 1403—1406 применить формулы

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)],$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)],$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)].$$

1405. 1) $\int \sin 3x \sin 5x \, dx$; 2) $\int \sin mx \sin nx \, dx$.

1406. $\int \sin \left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx$.

1407. Интегрируя по частям, вывести формулы «понижения степени»:

$$1) \int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx;$$

$$2) \int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \cos^{n-2} x \, dx$$

и по этим формулам найти: 1) $\int \sin^6 x \, dx$; 2) $\int \cos^6 x \, dx$.

1408. Найти интегралы: 1) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$, 2) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

Указание. Применить формулы задачи 1407 к интегралам $\int \frac{dx}{\sin x}$ и $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Найти интегралы:

1409. $\int (1+3\cos 2x)^2\,dx$. **1410.** $\int \sin^4 x\,dx$.

1411. $\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx$. **1412.** $\int \cos^5 x\,dx$.

1413. $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$. **1414.** $\int (1+2\sin x)^3\,dx$.

1415. $\int \frac{(\sin x-\cos x)^2}{\sin 2x}\,dx$. **1416.** $\int \sin 3x\sin x\,dx$.

1417. $\int \frac{\sin^3 x+1}{\cos^2 x}\,dx$.

1418. $\int \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos x\,dx$.

§ 6. Интегрирование рациональных алгебраических функций

1°. Если подынтегральная дробь *неправильная*, то нужно исключить из нее целое выражение.

2°. Знаменатель правильной дроби разлагается на множители вида $(x-a)^\alpha$ и $(x^2+px+q)^\beta$, а правильная дробь разлагается на сумму элементарных дробей следующим образом:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha(x^2+px+q)^\beta\ldots}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_\beta x+N_\beta}{(x^2+px+q)^\beta}+\ldots,$$

где $P(x)$ — полином степени ниже степени знаменателя.

Найти интегралы:

1419. 1) $\int \frac{x^3}{x-2}\,dx$; 2) $\int \frac{x^4}{x^2+a^2}\,dx$; 3) $\int \frac{x^5}{x^3-a^3}\,dx$.

1420. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}\,dx$. **1421.** $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}\,dx$.

1422. $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}\,dx$. **1423.** $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}\,dx$.

1424. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}\,dx$. **1425.** $\int \frac{3x-2a}{x^4-ax^3}\,dx$.

1426. $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$. **1427.** $\int \frac{5x-1}{x^3-3x-2}\,dx$.

1428. $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}\,dx.$ **1429.** $\int \frac{4x-2{,}4}{x^2-0{,}2x+0{,}17}\,dx.$

Указание. В примере 1428 выделить в знаменателе полный квадрат и затем положить $x+1=t$.

1430. $\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4}\,dx.$ **1431.** $\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}\,dx.$

1432. $\int \frac{dx}{x^3+8}.$ **1433.** $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx.$

1434. 1) $\int \frac{dx}{(x^2+b^2)^2}$; 2) $\int \frac{dx}{(x^2+b^2)^3}.$

Указание. Положить $x=b\,\mathrm{tg}\,t$ и затем (во втором примере) использовать формулу 2) задачи 1407.

1435. 1) $\int \frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+2x+5)^2}$; 2) $\int \frac{dx}{(x^2-6x+10)^3}.$

1436. $\int \frac{4x\,dx}{(1+x)(1+x^2)^2}.$ **1437.** $\int \frac{x+1}{x^4+4x^2+4}\,dx.$

Найти интегралы, не применяя общего метода неопределенных коэффициентов:

1438. $\int \frac{dx}{x(x+a)}.$ **1439.** $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}.$

Указание к задачам 1438—1442. В числителе подынтегральной дроби написать разность множителей знаменателя, разделив интеграл на соответствующее число.

1440. $\int \frac{dx}{x^2-2x}.$ **1441.** $\int \frac{dx}{(x^2-3)(x^2+2)}.$

1442. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}.$ **1443.** $\int \frac{dx}{x^3+4x}.$

Найти интегралы:

1444. $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,dx.$ **1445.** $\int \frac{3x+2}{2x^2+x-3}\,dx.$

1446. $\int \frac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4}\,dx.$

1447. $\int \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2}\,dx.$

1448. $\int \frac{5x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx.$ **1449.** $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}\,dx.$

1450. $\int \frac{x-a}{x^3+a^2x}\,dx.$ **1451.** $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}.$

1452. $\int \frac{dx}{x^3-8}.$ **1453.** $\int \frac{x\,dx}{(x^2+2x+2)^2}.$

В примерах 1454—1457 выполнить интегрирование, не прибегая к методу неопределенных коэффициентов.

1454. $\int \frac{dx}{x^2+5x}.$ **1455.** $\int \frac{dx}{x^4+3x^2}.$

1456. $\int \frac{dx}{x^4-1}.$ **1457.** $\int \frac{dx}{x^4-x^2-2}.$

§ 7. Интегрирование некоторых иррациональных алгебраических функций

1°. Интеграл $\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx$, где $R(x, y)$ — рациональная функция, находится подстановкой $ax+b=t^n$, а интеграл более общего вида $\int R\left(x^m, \sqrt[n]{ax^m+b}\right)x^{m-1}\,dx$ — подстановкой $ax^m+b=t^n$.

2°. Интеграл $\int \frac{Mx+N}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ находится подстановкой $x-\alpha=\frac{1}{t}$.

3°. Тригонометрические подстановки. К рациональному тригонометрическому виду приводятся интегралы

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx \text{ — подстановкой } x=a\sin t,$$

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx \text{ — подстановкой } x=a\operatorname{tg} t.$$

4°. Из интеграла $\int \frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ можно выделить алгебраическую часть по формуле

$$\int \frac{a_0x^m+\ldots+a_m}{W}\,dx=(A_0x^{m-1}+\ldots+A_{m-1})\,W+A_m\int \frac{dx}{W},$$

где $W=\sqrt{ax^2+bx+c}$. Коэффициенты A находятся после дифференцирования равенства и освобождения его от знаменателя сравнением коэффициентов слева и справа при одинаковых степенях x.

5°. Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ берется в конечном виде в трех случаях:

1) когда p — целое число, разложением; 2) когда $\frac{m+1}{n}$ — целое число, подстановкой $a+bx^n=t^s$; 3) когда $\frac{m+1}{n}+p$ — целое число, подстановкой $ax^{-n}+b=t^s$, где s—знаменатель дроби p.

Используя подстановки 1°, найти интегралы:

1458. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,dx.$ **1459.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+1}+1}.$

1460. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}.$ **1461.** $\int x\sqrt{a-x}\,dx.$

1462. $\int \frac{x^3\,dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}.$ **1463.** $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+2}}.$

Используя подстановку 2°, найти интегралы:

1464. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$ **1465.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}.$

1466. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}}.$

1467. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}.$

Найти интегралы, используя подстановки 3°:

1468. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$ **1469.** $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}.$

1470. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx.$ **1471.** $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2)^5}}.$

1472. $\int \sqrt{3+2x-x^2}\,dx.$ **1473.** $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(2-x^2)^3}}.$

Найти интегралы, применяя правило 4°:

1474. $\int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$ **1475.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}.$

1476. $\int \sqrt{x^2+k}\,dx.$ **1477.** $\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx.$

Найти интегралы от дифференциальных биномов

1478. $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^3}}.$ **1479.** $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}.$

1480. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$.   1481. $\int \frac{x^3\,dx}{(a-bx^2)^{3/2}}$.

Найти интегралы:

1482. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}\,dx$.   1483. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$.

1484. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}+1}$.   1485. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{a-x}}\,dx$.

1486. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$.   1487. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}$.

1488. $\int \frac{x\,dx}{x^2+2+2\sqrt{1+x^2}}$.   1489. $\int \frac{x^3\,dx}{2+\sqrt{4-x^2}}$.

1490. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x}}$.

1491. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$.

1492. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.   1493. $\int \sqrt{\frac{x}{2-x}}\,dx$.

Указание. В примере 1493 положить $x = 2\sin^2 t$.

1494. $\int \sqrt{4x+x^2}\,dx$.

1495. $\int \frac{x^2}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx$.

1496. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^2}}$.   1497. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

1498. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$.

1499. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$.

§ 8. Интегрирование некоторых трансцендентных функций

К рациональному алгебраическому виду приводятся интегралы:

$\int R(e^x)\,dx$ — подстановкой $e^x = t,\ x = \ln t,\ dx = \frac{dt}{t}$;

$\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$ — подстановкой $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$;

$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ — подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Найти интегралы:

1500. $\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1}\,dx.$ **1501.** $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx.$

1502. $\int \frac{e^{3x}\,dx}{e^x+2}.$ **1503.** $\int \frac{dx}{\sin x}.$

1504. $\int \frac{dx}{5+3\cos x}.$ **1505.** $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x}.$

1506. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}.$ **1507.** $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}.$

Указание. В примерах 1506, 1507, 1512, 1513, где под интегралом $\sin x$ и $\cos x$ содержатся только в четной степени, лучше применять подстановку

$$\operatorname{tg} x = t, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Найти интегралы:

1508. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^x-1}.$ **1509.** $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx.$

1510. $\int \frac{e^{3x}\,dx}{e^{2x}-1}.$ **1511.** $\int \frac{dx}{3+\cos x}.$

1512. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$ **1513.** $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}.$

1514. $\int \frac{dx}{2\sin x+\sin 2x}.$ **1515.** $\int \frac{1+\cos x}{\sin^3 x}\,dx.$

1516. $\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx.$ **1517.** $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,dx.$

§ 9. Интегрирование гиперболических функций. Гиперболические подстановки

1. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$ 2. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

3. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$ 4. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

Интегралы от квадратов и других четных степеней $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ находятся применением формул:

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}, \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}, \quad \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{sh} 2x}{2}.$$

Интегралы от нечетных степеней $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ находятся тем же способом, что и интегралы от нечетных степеней $\sin x$ и $\cos x$.

Гиперболические подстановки иногда применяются при нахождении интегралов вида

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\, dx \text{ — подстановкой } x = a \operatorname{ch} t;$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})\, dx \text{ — подстановкой } x = a \operatorname{sh} t.$$

При этом: если $x = a \operatorname{ch} t$, то $t = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right|$,

если $x = a \operatorname{sh} t$, то $t = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}$.

Найти интегралы:

1518. 1) $\int \operatorname{sh}^2 3x\, dx$; 2) $\int (1 + \operatorname{sh} 2x)^2\, dx$.

1519. $\int \operatorname{ch}^3 x\, dx$. **1520.** $\int \operatorname{th} x\, dx$.

1521. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x + 1}$. **1522.** $\int \frac{dx}{\operatorname{th} x - 1}$.

1523. $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx$. **1524.** $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$.

1525. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}$. **1526.** $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 5)^3}}$.

Найти интегралы:

1527. $\int \operatorname{sh}^3 3x\, dx$. **1528.** $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x\, dx$.

1529. $\int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch} x\, dx$. **1530.** $\int \operatorname{cth}^2 x\, dx$.

1531. $\int \sqrt{\operatorname{ch} x + 1}\, dx$. **1532.** $\int \frac{1 + 2 \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}\, dx$.

1533. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 - 8}}$. **1534.** $\int \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x^2}\, dx$.

§ 10. Смешанные примеры на интегрирование

Найти интегралы:

1535. $\int \frac{\sqrt{1+x}\,dx}{x}$. **1536.** $\int \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{1+x^2}$.

1537. $\int \frac{dx}{x^3+ax^2}$. **1538.** $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

1539. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$. **1540.** $\int \frac{dx}{\frac{\sin^2 x}{a^2}+\frac{\cos^2 x}{b^2}}$.

1541. $\int x\cos^2 x\,dx$. **1542.** $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x}$.

1543. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$. **1544.** $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^4 x}$.

1545. $\int x\operatorname{tg}^2 x\,dx$. **1546.** $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin x}$.

1547. $\int \frac{\sin x\,dx}{b^2+\cos^2 x}$. **1548.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}}$.

1549. $\int \frac{ax-b}{(ax+b)^4}\,dx$. **1550.** $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$.

1551. $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$. **1552.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+b\ln x}}$.

1553. $\int \frac{x^2\,dx}{(a-bx^3)^n}$. **1554.** $\int \sqrt{1-2x-x^2}\,dx$.

1555. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^3}$. **1556.** $\int \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x^2}$.

1557. $\int \frac{e^x-2}{e^{2x}+4}\,dx$. **1558.** $\int \frac{dx}{(2x+1)(1+\sqrt{2x+1})}$.

1559. $\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx$. **1560.** $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$.

1561. 1) $\int \frac{\cos x}{\cos 3x}\,dx$; 2) $\int \frac{\sin x}{\sin 3x}\,dx$.

1562. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

1563. $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2}\,dx$. **1564.** $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x^3}\,dx$.

1565. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^3-1}}$.

1566. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$.

1567. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

1568. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x}\,dx$.

1569. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x}\,dx$.

1570. $\int \frac{\ln(\cos x)\,dx}{\sin^2 x}$.

1571. $\int \frac{dx}{e^{3x}-e^{x}}$.

1572. $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^5 x}$.

1573. $\int \frac{\ln(x+1)\,dx}{x^2}$.

1574. $\int \sqrt{1-\sin x}\,dx$.

1575. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

1576. $\int \frac{x\,dx}{x^4-x^2-2}$.

1577. $\int e^{-\sqrt{x}}\,dx$.

1578. $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}}$.

1579. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx}{\sin 2x}$.

1580. $\int \frac{\ln(x^2+1)\,dx}{x^3}$.

1581. $\int \frac{a^x\,dx}{a^{2x}+1}$.

1582. $\int \frac{1-\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

1583. $\int \sqrt{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}}\,dx$.

1584. $\int \frac{x\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1585. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

1586. $\int \frac{x^2\,dx}{(x+1)^4}$.

1587. $\int \frac{x-a}{\sqrt{2ax+x^2}}\,dx$.

1588. $\int \frac{4x+1}{2x^3+x^2-x}\,dx$.

1589. $\int \frac{\cos^3 x+1}{\sin^2 x}\,dx$.

1590. $\int \frac{dx}{x^4+4}$.

ГЛАВА 9

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Вычисление определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a, b]$ определена функция $f(x)$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками $a=x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Из каждого интервала (x_{i-1}, x_i) возьмем произвольную точку ξ_i и составим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Сумма вида $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ называется *интегральной суммой*, а ее предел при $\max \Delta x_i \to 0$, если он существует и конечен, называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i. \tag{1}$$

Функция $f(x)$ в этом случае называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$.

Для *интегрируемости* достаточно, чтобы на отрезке $[a, b]$ функция была *непрерывна* или же имела конечное число конечных разрывов.

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда на этом отрезке существует неопределенный интеграл

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{2}$$

и имеет место формула

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \int f(x)\,dx\,\Big|_a^b, \tag{3}$$

т. е. *определенный интеграл* от непрерывной функции *равен разности значений первообразной функции* (или неопределенного интеграла) при верхнем и нижнем пределах. Формула (3) называется формулой Ньютона — Лейбница.

1591. Составлением интегральных сумм и переходом к пределу найти интегралы:

$$1)\ \int_0^a x\,dx;\quad 2)\ \int_0^a x^2\,dx;\quad 3)\ \int_0^a e^x\,dx;\quad 4)\ \int_0^\pi \sin x\,dx.$$

Указание. При решении второго и четвертого примеров воспользоваться результатами задач 1034 и 647.

1592. Вычислить «нижнюю» и «верхнюю» интегральные суммы s_5 и S_5 для интеграла $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, разбив отрезок [1, 2] на пять равных частей. Сравнить с точным значением интеграла.

Указание. $s_5 = \sum_{i=1}^{5} m_i\,\Delta x$, $S_5 = \sum_{i=1}^{5} M_i\,\Delta x$, где m_i — наименьшее, а M_i — наибольшее значение подынтегральной функции в i-м частичном промежутке.

Вычислить:

1593. $\int_1^3 x^3\,dx.$ **1594.** $\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx.$

1595. $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx.$ **1596.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

1597. $\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2}.$ **1598.** $\int_0^3 e^{x/3}\,dx.$

1599. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$ **1600.** $\int_0^{\pi/4} \sin 4x\,dx.$

1601. $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}.$ **1602.** $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}\,dx.$

Указание. В примере 1601 нужно применить подстановку $x=t^2$; при этом пределы интеграла изменятся, что записывается в виде таблицы $\frac{x \mid 4 \mid 9}{t \mid 2 \mid 3}$. Аналогично в примере 1602 при интегрировании подстановкой $\operatorname{tg} x = t$ нужно соответственно изменить пределы.

1603. $\displaystyle\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$. **1604.** $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

1605. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$. **1606.** $\displaystyle\int\limits_0^{a/2} \sqrt{\frac{x}{a-x}}\,dx$.

1607. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 x\,dx$. **1608.** $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{a}} x^2\sqrt{a-x^2}\,dx$.

1609. $\displaystyle\int\limits_0^1 \ln(x+1)\,dx$. **1610.** $\displaystyle\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$.

1611. $\displaystyle\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. **1612.** $\displaystyle\int\limits_1^3 \frac{dx}{x+x^2}$.

1613. Из формулы задачи 1407 получить, что

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx,$$

и вычислить:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$; 2) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx$; 3) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 x\,dx$.

Вычислить:

1614. $\displaystyle\int\limits_0^a (x^2-ax)\,dx$. **1615.** $\displaystyle\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^2}$.

1616. $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$. **1617.** $\displaystyle\int\limits_{\pi/8}^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^2 2x}$.

1618. $\displaystyle\int\limits_1^4 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^2}$. **1619.** $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$.

1620. $\displaystyle\int\limits_1^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{4x+5}}$. **1621.** $\displaystyle\int\limits_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx$.

1622. $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x\,dx.$ **1623.** $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^3 x\,dx.$

1624. Из формулы задачи 1407 получить, что

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x\,dx,$$

и вычислить:

1) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx;$ 2) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx;$ 3) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^6 x\,dx.$

§ 2. Вычисление площадей

1°. Площадь криволинейной трапеции A_1ABB_1, прилежащей к оси Ox (рис. 31):

$$S = \lim_{\Delta x\to 0}\sum y\,\Delta x = \int\limits_{x_1}^{x_2} y\,dx. \qquad (1)$$

Дифференциал переменной площади A_1AMM_1 равен $dS = y\,dx$.

Если кривая задана уравнениями $x = f(t)$ и $y = \varphi(t)$, то $dS = \varphi(t)\cdot f'(t)\,dt$.

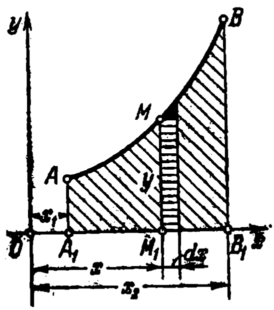

Рис. 31

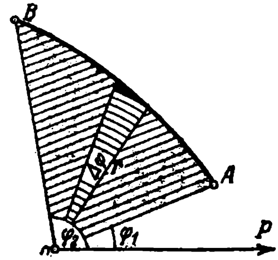

Рис. 32

2°. Площадь криволинейной трапеции, прилежащей к оси Oy:

$$S = \lim_{\Delta y\to 0}\sum x\,\Delta y = \int\limits_{y_1}^{y_2} x\,dy. \qquad (2)$$

Дифференциал переменной площади $dS = x\,dy$.

3°. Площадь сектора *OAB* (рис. 32) кривой, заданной в *полярных* координатах:

$$S = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \sum \frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2} r^2 \, d\varphi. \tag{3}$$

Дифференциал переменной площади $dS = \frac{1}{2} r^2 \, d\varphi$.

Вычислить площадь, ограниченную линиями:

1625. $y = 4 - x^2$, $y = 0$.

1626. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1627. $y^2 = 2px$, $x = h$.

1628. $y = 3 - 2x - x^2$, $y = 0$.

1629. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

1630. $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$.

1631. $y^2 = 2x + 4$, $x = 0$.

1632. $y^2 = x^3$, $y = 8$, $x = 0$.

1633. $y^2 = (4 - x)^3$, $x = 0$.

1634. Петлей кривой $4(y^2 - x^2) + x^3 = 0$.

1635. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.

1636. $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$.

1637. $a^2 y^2 = x^3 (2a - x)$.

1638. $(y - x)^2 = x^3$, $x = 1$.

1639. Петлей строфоиды $y^2 (2a - x) = x (x - a)^2$.

1640. Цепной линией $y = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a})$, $x = \pm a$ и $y = 0$.

1641. Одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox.

1642. Астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

1643. Лемнискатой $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

1644. Кардиоидой $r = a(1 - \cos\varphi)$.

1645. $r = 3 + \sin 2\varphi$ между смежными наибольшим и наименьшим радиус-векторами.

1646. $r = 2 - \cos 3\varphi$ между смежными наибольшим и наименьшим радиус-векторами.

1647. $r = a \cos 2\varphi$.

1648. $r = a \sin 3\varphi$.

1649. $r = a(\sin\varphi + \cos\varphi)$.

1650. $r = \frac{a}{\varphi}$, $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

1651. $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$, лежащей ниже полярной оси.

1652. Петлей декартова листа $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (см. рис. 79 на с. 346) (перейти к полярным координатам).

Указание. В интеграле $\int \frac{\sin^2\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi}{(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi)^2}$ положить $\operatorname{tg}\varphi = u$, разделив сначала числитель и знаменатель на $\cos^6\varphi$.

Вычислить площадь, ограниченную линиями:

1653. $y = 6x - x^2$, $y = 0$.

1654. $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$.

1655. $y^2 = 1 - x$ и $x = -3$. **1656.** $y^2 + x^4 = x^2$.

1657. $y = x^2 + 4x + 5$, $x = 0$, $y = 0$ и минимальной ординатой.

1658. Одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и $y = 0$.

1659. $4y = x^2$ и $y^2 = 4x$.

1660. $xy = 6$ и $x + y - 7 = 0$.

1661. Петлей кривой $x^3 + x^2 - y^2 = 0$.

1662. $r = 3 - \cos 2\varphi$ между смежными наибольшим и наименьшим радиус-векторами.

1663. $r = 2 + \sin 3\varphi$ между смежными наибольшим и наименьшим радиус-векторами.

1664. $r = a \sin 2\varphi$. **1665.** $r = a \cos 3\varphi$.

1666. $r = ae^{\varphi}$ от $\varphi = -\pi$ до $\varphi = \pi$.

1667. Общей части эллипсов $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ (перейти к полярным координатам).

1668. $r = a(1 + \sin^2 2\varphi)$ и $r = a$.

§ 3. Объем тела вращения

1°. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции A_1ABB_1 (рис. 33), где $\overset{\frown}{AB}$ — дуга кривой $y = f(x)$, определяется формулой

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \pi y^2 \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} \pi y^2 \, dx. \quad (1)$$

Дифференциал переменного объема $dV = \pi y^2 dx$.

2°. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, прилежащей к оси Oy, определяется формулой

$$V = \lim_{\Delta y \to 0} \sum \pi x^2 \Delta y = \int_{y_1}^{y_2} \pi x^2 \, dy. \quad (2)$$

Дифференциал переменного объема $dV = \pi x^2 dy$.

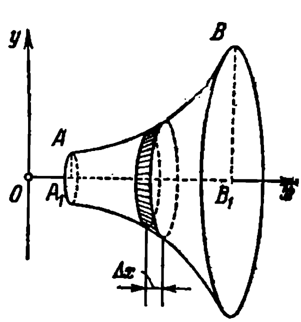

Рис. 33

Определить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

1669. $y^2 = 2px$ и $x = h$ вокруг оси Ox.

1670. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $y = \pm b$ вокруг оси Oy.

1671. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ вокруг оси Ox.

1672. $y^2 = (x+4)^3$ и $x = 0$ вокруг оси Oy.

1673. $x^2 + y^2 = a^2$ вокруг прямой $x = b > a$.

Указание. $dV = \pi(b+x)^2\,dy - \pi(b-x)^2\,dy = 4\pi bx\,dy$.

1674. $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $x = \pm a$, $y = 0$ вокруг оси Ox.

1675. $y^2 = 4 - x$, $x = 0$ вокруг оси Oy.

1676. $(y-a)^2 = ax$, $x = 0$, $y = 2a$ вокруг оси Ox.

1677. $y = \cos x$ и $y = -1$ вокруг прямой $y = -1$ при $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

1678. $y = x\sqrt{-x}$, $x = -4$ и $y = 0$ вокруг оси Oy.

1679. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $x = 0$, $y = 0$ (при $x > 0$) вокруг оси Ox.

1680. $y = a - \frac{x^2}{a}$ и $x + y = a$ вокруг оси Oy.

Определить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

1681. $y = \sin x$ (одной полуволной), $y = 0$ вокруг оси Ox.

1682. $x^2 - y^2 = 4$, $y = \pm 2$ вокруг оси Oy.

1683. $y = \frac{1}{1+x^2}$, $x = \pm 1$, $y = 0$ вокруг оси Ox.

1684. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Oy.

1685. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ вокруг оси Ox.

1686. $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$ вокруг оси Oy.

1687. $x^2 - y^2 = a^2$, $x = \pm 2a$ вокруг оси Ox.

1688. $y = x^2$, $y = 4$ вокруг прямой $x = 2$.

Указание. $dV = \pi(2+x)^2dy - \pi(2-x)^2dy$.

1689. Одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ вокруг оси Ox.

1690. $(y-3)^2 + 3x = 0$, $x = -3$ вокруг оси Ox.

§ 4. Длина дуги плоской кривой

1°. Длина дуги $\smile{AB}$ кривой $y=f(x)$:

$$s=\int\limits_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{1}$$

Дифференциал дуги $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{dx^2+dy^2}$.

2°. Длина дуги $\smile{AB}$ кривой $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$:

$$s=\int\limits_{t_A}^{t_B}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt. \tag{2}$$

3°. Длина дуги $\smile{AB}$ кривой $r=f(\varphi)$:

$$s=\int\limits_{\varphi_A}^{\varphi_B}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi. \tag{3}$$

Определить длину дуги кривой:

1691. $y^2=x^3$, отсеченной прямой $x=4/3$.

1692. Всей кривой $x^2+y^2=a^2$.

1693. Всей кривой $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

1694. $y^2=(x+1)^3$, отсеченной прямой $x=4$.

1695. Одной арки циклоиды

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t).$$

1696. $x=\frac{t^6}{6}$, $y=2-\frac{t^4}{4}$ между точками пересечения осями координат.

1697. $y=\frac{x^2}{2}-1$, отсеченной осью Ox.

Указание. $\int\sqrt{1+x^2}\,dx$ можно или найти по частям, или написать по формуле задачи 1366.

1698. $y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ между прямыми $x=\pm a$.

1699. $y=\ln x$ от $x=3/4$ до $x=12/5$.

Указание. Интеграл $\int\frac{\sqrt{1+x^2}\,dx}{x}$ находится подстановкой $1+x^2=t^2$.

1700. $y=\ln(2\cos x)$ между смежными точками пересечения с осями координат Oy и Ox.

1701. 1) $9y^2 = x(x-3)^2$ между точками пересечения с осью Ox.

2) $e^{2y}\operatorname{th} x = 1$ от $x = 1$ до $x = 2$.

1702. 1) Кардиоиды $r = a(1-\cos\varphi)$.

2) Первого завитка спирали $r = a\varphi$.

1703. Всей кривой $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

1704. Гибкая нить подвешена в точках A и B, находящихся на одной высоте на расстоянии $AB = 2b$, и имеет стрелу прогиба f. Считая форму нити параболой, показать, что длина нити $s \approx 2b\left(1+\frac{2}{3}\frac{f^2}{b^2}\right)$ при достаточно малом $\frac{f}{b}$.

Указание. Применить приближенную формулу $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha$ задачи 1157.

Определить длину дуги кривой:

1705. $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^3$, отсеченной прямой $x = -1$.

1706. $y = \ln(\sin x)$ от $x = \pi/3$ до $x = 2\pi/3$.

1707. $y = \ln(1-x^2)$ от $x = -1/2$ до $x = 1/2$.

1708. $y^2 = 2px$, отсеченной прямой $x = p/2$.

1709. $x = t^2$, $y = \frac{t}{3}(t^2-3)$ между точками пересечения с осью Ox.

§ 5. Площадь поверхности вращения

1°. Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги $\overset{\frown}{AB}$ кривой $y = f(x)$:

$$P_x = 2\pi\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} y\,ds, \quad \text{где} \quad ds = \sqrt{dx^2+dy^2}.$$

2°. Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy дуги $\overset{\frown}{AB}$ кривой $x = \varphi(y)$:

$$P_y = 2\pi\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} x\,ds, \quad \text{где} \quad ds = \sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Определить площадь поверхности, образованной вращением кривой:

1710. $x^2+y^2 = R^2$ вокруг оси Ox.

1711. $y=x^2/2$, отсеченной прямой $y=1{,}5$, вокруг оси Oy.

1712. $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ между $x=\pm a$ вокруг оси Ox.

1713. $4x^2+y^2=4$ вокруг оси Oy.

Указание. Приняв y за независимую переменную, получим, что искомая площадь $P=\pi\int\limits_0^2\sqrt{16-3y^2}\,dy$. Далее применяем подстановку $y=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin t$.

1714. Одной полуволны кривой $y=\sin x$ вокруг оси Ox.

1715. Одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ вокруг оси Ox.

1716. Петли кривой $x=t^2$, $y=\frac{t}{3}(t^2-3)$ вокруг оси Ox.

1717. $x^2+y^2=a^2$ вокруг прямой $x=b>a$.

Указание. $dP=2\pi(b+x)ds+2\pi(b-x)ds$.

Определить площадь поверхности, образованной вращением вокруг Ox:

1718. Дуги кривой $y=\frac{x^3}{3}$ от $x=-2$ до $x=2$.

1719. Дуги кривой $y^2=4+x$, отсеченной прямой $x=2$.

1720. Всей кривой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

1721. Дуги кривой $x=\frac{t^3}{3}$, $y=4-\frac{t^2}{2}$ между точками пересечения с осями координат.

§ 6. Задачи из физики

1722. Определить силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 8 м и высотой 6 м. Определить также силу давления на нижнюю половину шлюза.

1723. Определить силу давления воды на вертикальную треугольную площадку, основание которой a расположено на поверхности воды, а высота равна h.

1724. Определить силу давления воды на вертикальный полукруг, диаметр которого $2R$ расположен на поверхности воды.

1725. Плотина имеет форму трапеции с верхним основанием 20 м, нижним 10 м и высотой 6 м. Определить силу давления воды на плотину.

1726. Найти моменты инерции относительно осей Ox и Oy площади прямоугольника, ограниченного линиями $x=0$, $x=a$, $y=0$ и $y=b$.

Указание. Разбив прямоугольник на горизонтальные площадки, умножим каждую площадку на квадрат ее расстояния от оси Ox, т. е. на y^2. Суммируя и перейдя к пределу, получим

$$J_x = \lim_{\Delta y \to 0} \sum a\,\Delta y\, y^2 = \int_0^b ay^2\,dy.$$

Аналогично $J_y = \int_0^a bx^2\,dx$.

1727. Найти момент инерции относительно осей Ox и Oy площади треугольника, ограниченного линиями $x=0$, $y=0$ и $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

1728. Найти момент инерции относительно оси Oy площади, ограниченной линиями $x=2$, $y=x^2$ и $y=0$.

1729. Найти статические моменты относительно Ox и Oy и координаты центра масс треугольника, образованного линиями $x=0$, $y=0$ и $x+y=a$.

Указание. Статические моменты: $M_x = \int_0^a xy\,dy$, $M_y = \int_0^a xy\,dx$. Координаты центра масс: $x_c = \frac{M_y}{S}$, $y_c = \frac{M_x}{S}$, где S — площадь фигуры.

1730. Найти центр масс площади, ограниченной линиями $a^2y = bx^2$, $x=a$ и $y=0$.

1731. Найти центр масс полукруга $x^2+y^2=a^2$, отсеченного осью Ox.

1732. 1) Вычислить работу, которую нужно затратить на выкачивание воды из цилиндрического бассейна с радиусом основания 0,5 м, если в начальный момент уровень воды в бассейне равен 2,8 м и на 0,2 м ниже выпускающего воду отверстия в цилиндре.

2) Вычислить работу, которую нужно затратить на выкачивание воды из полушара радиусом R м.

1733. Определить работу, которую нужно затратить, чтобы поднять массу m с поверхности земли на высоту h.

Указание. Сила F земного притяжения на расстоянии x от центра земли определяется из пропорции $F : mg = R^2 : x^2$, где R — радиус земного шара.

1734. Котел имеет форму параболоида вращения глубиной $H = 0{,}5$ м и радиусом основания $R = 0{,}4$ м. Определить работу, которую нужно затратить на выкачивание воды из такого наполненного котла.

1735. В цилиндре под поршнем находится воздух объемом $V_0 = 0{,}1$ м^3 с давлением $p_0 = 1{,}033 \cdot 10^5$ Па. Определить работу изотермического сжатия воздуха до объема $V_1 = 0{,}03$ м^3. (По закону Бойля-Мариотта $pV = p_0 V_0$.)

1736. Вычислить работу растяжения на 0,001 м медной проволоки длиной 1 м с радиусом сечения 2 мм.

Указание. Сила F Н натяжения проволоки длиной l м и площадью сечения s мм^2 при удлинении ее на x м определяется формулой $F = E\dfrac{sx}{l}$, где E — модуль упругости. Для меди можно принять $E \approx 1{,}2 \cdot 10^5$ Н/мм^2.

1737. За какое время вода, наполняющая цилиндрический сосуд с площадью основания $S = 420$ см^2 и высотой $H = 40$ см, вытечет через отверстие на дне площадью $s = 2$ см^2?

Указание. Скорость истечения жидкости при уровне ее на высоте x см определяется по формуле $v = \mu\sqrt{2gx}$, где μ — коэффициент, зависящий от вязкости жидкости, формы сосуда и отверстия. Мы примем здесь, как и в задаче 1738, $\mu = 0{,}6$.

1738. За какое время вода вытечет из конической воронки высотой $H = 40$ см, радиусом нижнего основания $r = 0{,}3$ см и верхнего $R = 6$ см (см. указание к задаче 1737)?

1739. Определить силу давления воды на вертикальную треугольную площадку высотой h, основание которой a параллельно поверхности воды, а противоположная вершина находится на поверхности воды.

1740. Определить силу давления воды на вертикальный параболический сегмент, основание которого равно 4 м и расположено на поверхности воды, а вершина находится на глубине 4 м.

1741. Найти глубину x, на которой прямоугольный шлюз высотой h разделится горизонтально на такие две части, величина силы давления на которые одинакова.

1742. Цилиндрическая цистерна с горизонтальной осью наполовину наполнена маслом (плотность 0,9). Определить силу давления масла на каждую из плоских стенок цилиндра, если радиус ее равен 2 м.

1743. Определить момент инерции относительно Ox площади четверти круга $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

1744. Найти координаты центра масс площади, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = 0$.

1745. Вычислить работу, необходимую для выкачивания воды из ямы, имеющей форму конуса (с вершиной на дне), высота которого $H = 2$ м, а радиус основания $R = 0{,}3$ м.

1746. Определить работу адиабатического сжатия воздуха объемом $V_0 = 0{,}1$ м^3 и с давлением $p_0 = 1{,}033 \cdot 10^5$ Па до объема $V_1 = 0{,}03$ м^3. (Адиабатическое сжатие происходит по закону Пуассона: $pV^k = p_0V_0^k$, где $k \approx 1,4$.)

1747. За какое время вода, наполняющая чашу формы полушара радиусом 40 см, вытечет из отверстия на дне площадью 2 см^2? (См. указание к задаче 1737; положим коэффициент вязкости $\mu = 0{,}8$.)

§ 7. Несобственные интегралы

1°. Определения.

I. Интегралом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$, если этот предел существует и конечен. Аналогично определяются интегралы $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

II. Если $f(x)$ непрерывна для всех значений x отрезка $[a, b]$, кроме точки c, в которой $f(x)$ имеет разрыв II рода, то интеграл лом от $f(x)$ в пределах от a до b называется сумма

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to 0}\int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx,$$

если эти пределы существуют и конечны.

Интегралы с *бесконечными пределами* и интегралы от *разрывных (неограниченных)* функций называются *несобственными*.

Если приведенные выше пределы конечны, то говорят, что несобственные интегралы *сходятся*, если нет, — то *расходятся*.

2°. Сходимость несобственного интеграла часто устанавливается методом сравнения: если при $x > a$ $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$ и $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится, то сходится и $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Аналогичный признак сходимости можно указать и для интеграла от разрывной функции.

Вычислить интегралы:

1748. 1) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$; 2) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$; 3) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$; 4) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^n}$.

1749. 1) $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$; 2) $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$; 3) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$;

4) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$; 5) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+x}$; 6) $\int_0^{\infty} x^2e^{-x/2}dx$.

1750. 1) $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; 2) $\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x^2}$; 3) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

1751. 1) $\int_2^{6}\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$; 2) $\int_0^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}$; 3) $\int_0^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

1752. Исследовать сходимость интегралов:

1) $\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$; 2) $\int_2^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$; 3) $\int_1^{\infty}\frac{e^{-x}\,dx}{x}$;

4) $\int_1^{\infty}\frac{\sin x\,dx}{x^2}$; 5) $\int_2^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+1}}$; 6) $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

1753. 1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^n}$; 2) $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$ (при $b > a$).

Указание. Рассмотреть три случая: $n = 1 - \alpha < 1$, $n = 1$ и $n = 1 + \alpha > 1$.

1754. Вычислить площадь, заключенную между локоном $y = \frac{1}{1+x^2}$ и асимптотой этой кривой.

1755. Вычислить площадь, заключенную между кривой $y = xe^{-x^2/2}$ и ее асимптотой (при $x > 0$).

1756. Вычислить площадь, заключенную между циссоидой $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ и ее асимптотой.

Указание. Положив $x = 2a\sin^2 t$, перейти к параметрическим уравнениям.

1757. Найти объем тела, образованного вращением циссоиды $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ вокруг ее асимптоты (см. задачу 1756).

1758. Определить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox бесконечной дуги кривой $y = e^{-x}$ при положительных x.

1759. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox бесконечной ветви кривой $y = 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$ при $x \geqslant 1$.

1760. Показать, что при m целом и положительном *):

1) $\int\limits_0^\infty e^{-x} x^m\, dx = m!$; 2) $\int\limits_0^\infty e^{-x^2} x^{2m+1}\, dx = \frac{m!}{2}$.

1761. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x^2}$; 2) $\int\limits_0^\infty x^2 e^{-x^3}\, dx$; 3) $\int\limits_1^\infty \frac{\ln x\, dx}{x^2}$; 4) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x \ln x}$.

---

*) Функция $\int\limits_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\, dx = \Gamma(t)$ называется гамма-функцией от t. При целом $t > 1$, как это следует из задачи 1760, 1), $\Gamma(t) = (t-1)!$ Полагая здесь $t = 1$, получим условно $0! = \Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-x} x^0\, dx = 1$. Поэтому принято считать $0! = 1$.

Указание. В примере 3) при нахождении $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$ применить правило Лопиталя.

1762. 1) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; 2) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(1+x)^3}}$; 3) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+x^4}$.

1763. Вычислить площадь, заключенную между кривой $y=e^{-2x}$ и осями координат (при $x>0$).

1764. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy площади бесконечной длины, заключенной между линиями:

$$xy=4,\ y=1,\ x=0.$$

1765. Определить объем тела, образованного вращением кривой $y=xe^{-x/2}$ (при $x>0$) вокруг ее асимптоты.

§ 8. Среднее значение функции

Теорема о среднем. Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ непрерывна, то между пределами интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ найдется такое $x=c$, при котором

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(c). \qquad (1)$$

Значение функции

$$y_m=f(c)=\frac{\int\limits_a^b f(x)\,dx}{b-a} \qquad (2)$$

называется *средним* значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

1766. Определить среднее значение функции:

1) $y=\sin x$ на отрезке $[0, \pi]$;
2) $y=\operatorname{tg} x$ на отрезке $[0, \pi/3]$;
3) $y=\ln x$ на отрезке $[1, e]$;
4) $y=x^2$ на отрезке $[a, b]$;
5) $y=\frac{1}{1+x^2}$ на отрезке $[-1, 1]$.

Указать на чертеже среднее значение функции в каждом примере.

§ 9. Формула трапеций и формула Симпсона

1°. Формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right], \tag{I}$$

где $h=(b-a)/n$, а $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ — равноотстоящие ординаты кривой $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Погрешность формулы (I):

$$\varepsilon(h) \leqslant \frac{(b-a)h^2}{12}|y''|_{\max}. \tag{1}$$

2°. Параболическая формула Симпсона для двух полос:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2), \tag{II}$$

где $h=(b-a)/2$.

3°. Формула Симпсона для $2n$ полос:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0+y_{2n}+4\sum_{i=1}^{n} y_{2i-1}+2\sum_{i=1}^{n-1} y_{2i}\right], \tag{III}$$

где $h=(b-a)/2n$. Погрешность формул (II) и (III):

$$\varepsilon(h) \leqslant \frac{(b-a)h^4}{180}|y^{\mathrm{IV}}|_{\max}, \tag{2}$$

т. е. формула (II) является точной для парабол второй и третьей степеней: $y=a+bx+cx^2+dx^3$.

1767. Вычислить по формуле трапеций $\ln 2=\int_1^2 \frac{dx}{x}$ и оценить погрешность по формуле (1).

1768. По формуле Симпсона (III) вычислить интеграл $\int_1^5 x^3\,dx$ и $\int_0^2 x^4\,dx$, оценить погрешность по формуле (2) и результаты сравнить с точным значением интеграла.

1769. По формуле Симпсона (III) вычислить интегралы:

1) $\int_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx\ (2n=4)$; 2) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{3-\cos 2x}\,dx\ (2n=6)$;

3) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+x^4}$ $(2n=4)$, и оценить погрешность, полагая в формуле (2) приближенно $h^4|y^{IV}|_{max} \approx |\Delta^4 y|_{max}$.

1770. Найти по формуле Симпсона (II) объем бочки высотой 50 см с диаметром каждого дна 20 см и с диаметром среднего сечения 30 см.

1771. Вывести формулы объема пирамиды и шара из формулы Симпсона (II).

1772. Вычислить $\ln 2 = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ по общей формуле Симпсона (III) (при $2n=10$) и оценить погрешность по формуле (2).

1773. Найти длину дуги эллипса $x=5\cos t$, $y=3\sin t$, применив к интегралу, определяющему первую четверть всей дуги, формулу Симпсона (II).

1774. Вычислить приближенно $\pi = 6\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$, применив к интегралу формулу Симпсона (II).

1775. Вычислить $\frac{\pi}{4} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ по общей формуле Симпсона (III) (при $2n=10$) и оценить погрешность, полагая в формуле (2) приближенно $h^4|y^{IV}|_{max} \approx |\Delta^4 y|_{max}$.

1776. Рассматривая площадь части круга, ограниченного кривой $x^2+y^2=32$, показать, что $\int\limits_0^4 \sqrt{32-x^2}\,dx = 4\pi + 8$; найти π, вычисляя интеграл по формуле Симпсона (при $2n=4$).

1777. Вычислить по формуле Симпсона (III) длину дуги полуволны синусоиды $y=\sin x$, разбив отрезок $[0, \pi]$ на шесть равных частей.

ГЛАВА 10

КРИВИЗНА ПЛОСКОЙ И ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ

§ 1. Кривизна плоской кривой. Центр и радиус кривизны. Эволюта

1°. Кривизна:

$$k = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \qquad (1)$$

2°. Радиус кривизны:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{|\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}|}. \qquad (2)$$

3°. Координаты центра кривизны:

$$\begin{aligned} X &= x - \frac{1 + y'^2}{y''} y' = x + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}} \dot{y}, \\ Y &= y + \frac{1 + y'^2}{y''} = y + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}} \dot{x}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Геометрическое место центров кривизны $C(X; Y)$ называется *эволютой*. Уравнения (3) и будут *параметрическими уравнениями* эволюты.

4°. Радиус кривизны кривой $r = f(\varphi)$, где r и φ — полярные координаты:

$$R = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}. \qquad (4)$$

Определить радиус кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой в ее вершине:

1778. $y = 4x - x^2$.

1779. $y = e^{-x^2}$.

1780. $x^2 + 4y^2 = 4$.

1781. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

1782. $y = xe^{-x}$.

Определить координаты центра кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой:

1783. $xy=4$ в точке $x=2$.

1784. $y=\ln x$ в точке пересечения с Ox.

1785. $y=\dfrac{x^3+1}{3}$ в точке пересечения с Ox.

Написать уравнение эволюты кривой и построить кривую и ее эволюту:

1786. $y=1-\dfrac{x^2}{2}$. **1787.** $x=2\cos t$, $y=\sin t$.

1788. $x^2-y^2=a^2$ (или $x=a\operatorname{ch} t$ и $y=a\operatorname{sh} t$).

1789. $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$.

1790. Найти максимальную кривизну кривой $y=e^x$.

1791. Доказать, что радиус кривизны цепной линии $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ в любой точке равен $\dfrac{y^2}{a}$ и равен отрезку нормали между кривой и осью Ox.

1792. Определить радиус кривизны в произвольной точке кривой: 1) $r=a(1-\cos\varphi)$; 2) $r^2=a^2\cos 2\varphi$; 3) $r^2=\dfrac{a^2}{\cos 2\varphi}$.

Определить радиус кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой в ее вершине:

1793. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$. **1794.** $x^2-y^2=4$.

1795. $y=\sin x$. **1796.** $2y=x^2+4x$.

Определить координаты центра кривизны и построить кривую и круг кривизны кривой:

1797. $y=e^x$ в точке пересечения ее с Oy.

1798. $y=x^3/3$ в точке $(-1;\ -1/3)$.

1799. $y^2=x^3$ в точке $(1;\ 1)$.

1800. $y=\cos x$ в точке $x=\pi/4$.

Написать уравнение эволюты кривой и построить кривую и ее эволюту:

1801. $y^2=2(x+1)$. **1802.** $x=t^2$, $y=t^3/3$.

1803. $xy=4$. **1804.** $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

1805. Показать, что в любой точке астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ радиус кривизны равен $3\sqrt[3]{a|xy|}$.

§ 2. Длина дуги кривой в пространстве

Дифференциал дуги: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, или

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt.$$

Длина дуги: $s = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt.$

Найти длину дуги кривой:

1806. $x = t$, $y = t^2$, $z = 2t^3/3$ от $t = 0$ до $t = 3$.

1807. $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = 4t$ от $t = 0$ до произвольного t.

1808. $y = x^2/2$, $z = x^3/6$ от $x = 0$ до $x = 3$.

Найти длину дуги кривой:

1809. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\sin\frac{t}{2}$ от $t = 0$ до $t = \pi$.

1810. $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$ от $t = 0$ до $t = 1$.

1811. $y = \frac{1}{2}\ln x$, $z = \frac{x^2}{2}$ от $x = 1$ до $x = 2$.

§ 3. Производная вектор-функции по скаляру и ее механическое и геометрическое значение. Естественный трехгранник кривой

Радиус-вектор $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ точки кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ есть *вектор-функция* скаляра t. Производная $\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}$ есть тангенциальный вектор и имеет модуль $|\dot{\boldsymbol{r}}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \dot{s} = \frac{ds}{dt}$. Поэтому, если t — время, а кривая — траектория движения, то $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$ есть вектор скорости, $\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{w}$ — вектор ускорения.

Через точку $M(x;\ y;\ z)$ кривой (рис. 34) проведем три плоскости:

1) перпендикулярную к $\dot{\boldsymbol{r}}$; она называется *нормальной*;

2) содержащую $\dot{\boldsymbol{r}}$ и $\ddot{\boldsymbol{r}}$; она называется *соприкасающейся*;

3) перпендикулярную к первым двум.

Они образуют *естественный трехгранник* (триедр) кривой.

В пересечении плоскостей имеем три прямые: *касательную*, *бинормаль* и *главную нормаль*, определяемые векторами:

1) $\dot{\boldsymbol{r}}$ — *тангенциальный*,

2) $\boldsymbol{B} = \dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}$ — *бинормальный*,

3) $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{B} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ — *главный нормальный*.

Единичные векторы этих направлений обозначим $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\nu}$; они связаны зависимостью $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\nu}$.

Пусть $M_1(X;\ Y;\ Z)$ — точка касательной (рис. 34). Тогда $\overline{MM_1} \parallel \dot{\boldsymbol{r}}$ и из условия параллельности векторов получим уравнения касательной

$$\frac{X-x}{\dot{x}} = \frac{Y-y}{\dot{y}} = \frac{Z-z}{\dot{z}}. \qquad \text{(I)}$$

Пусть $M_2(X;\ Y;\ Z)$ — точка на нормальной плоскости. Тогда $\overline{MM_2} \perp \dot{\boldsymbol{r}}$ и из условия перпендикулярности векторов получим уравнение нормальной плоскости:

$$\dot{x}(X-x) + \dot{y}(Y-y) + \dot{z}(Z-z) = 0. \qquad \text{(II)}$$

Уравнения бинормали и главной нормали получим, заменив в уравнениях (I) $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ соответственно на B_x, B_y, B_z или на N_x, N_y, N_z. Уравнение соприкасающейся плоскости получим, заменив в уравнении (II) $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ на B_x, B_y, B_z.

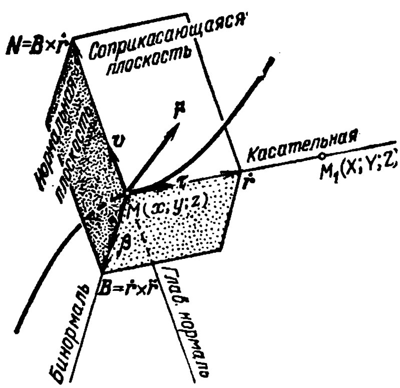

Рис. 34

1812. Радиус-вектор движущейся точки в момент t задан уравнением $\boldsymbol{r} = 4t\boldsymbol{i} - 3t\boldsymbol{j}$. Определить траекторию, скорость и ускорение движения.

1813. Уравнение движения $\boldsymbol{r} = 3t\boldsymbol{i} + (4t - t^2)\boldsymbol{j}$. Определить траекторию и скорость движения. Построить траекторию и векторы скорости в моменты $t = 0, 1, 2$ и 3 с.

1814. В задаче 1813 определить ускорение w движения и его тангенциальную $w_\tau = \frac{dv}{dt}$ и нормальную $w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2}$ составляющие в любой момент t и при $t = 0$.

1815. Уравнение движения $\boldsymbol{r} = a\cos t\cdot\boldsymbol{i} + b\sin t\cdot\boldsymbol{j}$. Определить траекторию, скорость и ускорение движения и построить векторы скорости и ускорения в точках $t = 0, \pi/4, \pi/2$.

В задачах 1816—1818 написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости кривой:

1816. $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ в любой точке и при $t = 1$.

1817. $y=x^2$, $z^2=x$ в любой точке $(x\geqslant 0)$ и при $x=4$.

1818. $x^2+y^2=10$, $y^2+z^2=25$ в точке $(1;\ 3;\ 4)$.

Указание. Взяв дифференциал от левой и правой частей каждого уравнения, найти затем отношения $dx:dy:dz$.

1819. Найти тангенциальный $\dot{\boldsymbol r}$, бинормальный $\boldsymbol B$ и главный нормальный $\boldsymbol N$ векторы кривой $x=1-\sin t$, $y=\cos t$, $z=t$ в точке $t=0$. Найти также $\boldsymbol\tau$, $\boldsymbol\beta$ и $\boldsymbol\nu$ в той же точке.

1820. Написать уравнения главной нормали, бинормали и соприкасающейся плоскости к кривой $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ в точке $t=1$.

1821. Написать уравнения главной нормали и бинормали кривой $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=t$ в точке $t=0$.

1822. Показать, что уравнения $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$ определяют *коническую* винтовую линию, и написать уравнения главной нормали, бинормали и касательной к ней в начале координат.

1823. Написать уравнения касательной к винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ в любой точке и при $t=\pi/2$. Показать, что винтовая линия пересекает образующие цилиндра $x^2+y^2=a^2$ под одинаковым углом $\gamma=\arccos\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

1824. Найти углы с осями координат тангенциального вектора кривой $x^2=2az$ и $y^2=2bz$ в точке $z=\sqrt{ab}$.

1825. Плоскость $y=0$, на которой дана кривая $2z=x^2$, $y=0$, накручивается на цилиндр $x^2+y^2=2y$. Написать параметрические уравнения образованного кривой винта и определить бинормальный вектор кривой в любой точке и в точке $t=\pi/2$, где t — угол поворота плоскости.

1826. Радиус-вектор движущейся точки в момент t задан уравнением $\boldsymbol r=a(t-\sin t)\boldsymbol i+a(1-\cos t)\boldsymbol j$. Определить и построить векторы скорости и ускорения при $t=\pi/2$ и $t=\pi$.

В задачах 1827—1829 написать уравнения касательной к кривой:

1827. $y=x$, $z=2x^2$ в точке $x=2$.

1828. $x^2+y^2+z^2=14$, $x+2y-z=2$ в точке $(1;\ 2;\ 3)$ (см. задачу 1818).

1829. $x=2t$, $y=\ln t$, $z=t^2$ в точке $t=1$.

1830. $\boldsymbol{r} = e^t\boldsymbol{i} + e^{-t}\boldsymbol{j} + t\sqrt{2}\boldsymbol{k}$. Найти углы с осями координат бинормального вектора $\boldsymbol{b}$ в точке $t = 0$.

1831. Написать уравнения главной нормали и бинормали кривой $y = x^2$, $z = y^2$ в точке $x = 1$.

1832. Написать уравнения главной нормали и бинормали кривой $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\sin\frac{t}{2}$ в точке $t = \pi$.

§ 4. Кривизна и кручение пространственной кривой

Кривизна $1/R$ есть предел отношения угла φ поворота *касательной* к длине дуги Δs, когда $\Delta s \to 0$. *Кручение* $1/\rho$ есть предел отношения угла θ поворота *бинормали* к Δs, когда $\Delta s \to 0$. Так как $\varphi \approx |\Delta\tau|$ и $\theta \approx \pm|\Delta\beta|$, то $1/R$ и $1/\rho$ численно оказываются модулями векторов:

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R}\nu, \quad \frac{d\beta}{ds} = -\frac{1}{\rho}\nu. \tag{1}$$

Если кривая задана уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, то

$$\frac{1}{R} = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}\dddot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|^2}. \tag{2}$$

1833. Продифференцировав равенство $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau}$ по t, с помощью первой формулы (1) получить разложение ускорения $\boldsymbol{w}$ на тангенциальное и нормальное:

$$\boldsymbol{w} = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{\nu}.$$

1834. Точка движется по параболе $x = t$, $y = t - t^2$, где t — время движения. Определить кривизну $1/R$ траектории и тангенциальное и нормальное ускорения в момент t и при $t = 0$.

1835. Точка движется по эллипсу $x = 4\cos t$, $y = 3\sin t$, где t — время движения. Определить кривизну $1/R$ траектории и тангенциальное и нормальное ускорения при $t = \pi/4$.

1836. Для движения с уравнением $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}t^3\boldsymbol{k}$ определить кривизну $1/R$ траектории и тангенциальное и нормальное ускорения в любой момент t и при $t = 1$.

Определить кривизну $1/R$ и кручение $1/\rho$ кривой:

1837. $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ в любой точке и при $t = 0$.

1838. $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=t\sqrt{2}$ в любой точке и при $t=0$.

1839. $y=x^2/2$, $z=x^3/3$ в любой точке и при $x=1$.

1840. Показать, что на правом винте ($x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$) кручение положительно, а на левом ($x=a\cos t$, $y=-a\sin t$, $z=bt$) — отрицательно.

Определить кривизну $1/R$ и кручение $1/\rho$ кривой:

1841. $x=2t$, $y=\ln t$, $z=t^2$ в любой точке и при $t=1$.

1842. $x=y^2/2$, $z=x^2$ в любой точке и при $y=1$.

1843. $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$, $z=e^t$ в точке $t=0$.

ГЛАВА 11

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ, ПОЛНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Функции двух переменных и их геометрическое изображение

1°. Определение. Переменная z называется однозначной *функцией* переменных x и y, если каждой паре значений x и y в некоторой области их изменения поставлено в соответствие одно значение z. Функциональную зависимость z от x и y записывают в виде

$$z = F(x, y). \tag{1}$$

2°. Геометрическое изображение. Уравнение (1) геометрически определяет некоторую поверхность. Пара значений x и y определяет на плоскости xOy точку $P(x;\ y)$, а $z = F(x, y)$ — аппликату соответствующей точки $M(x;\ y;\ z)$ на поверхности. Поэтому говорят, что z есть функция точки $P(x;\ y)$, и пишут $z = F(P)$.

3°. Предел функции $\lim\limits_{P \to P_0} F(P) = A$, если разность $F(P) - A$ есть бесконечно малая, когда $\rho = P_0P \to 0$ при любом способе приближения P к P_0 (например, по любой линии).

4°. Непрерывность функции. Функция $F(x, y)$ называется *непрерывной* в точке P_0, если $\lim\limits_{P \to P_0} F(P) = F(P_0)$. Иначе говоря, функция $F(x, y)$ *непрерывна* в некоторой точке $(x;\ y)$, если

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} F(x + \Delta x,\ y + \Delta y) = F(x, y).$$

1844. Указать области изменений x и y, для которых следующие функции имеют вещественные значения:

1) $z = x^2 + y^2$; 2) $az = a^2 - x^2 - y^2$; 3) $z = \dfrac{4}{x^2 + y^2}$;

4) $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$; 5) $z = \sqrt{xy}$;

6) $z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$; 7) $z = \dfrac{xy}{y - x}$.

и построить геометрические изображения функций по сечениям поверхностей плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $z = h$.

1845. Дан периметр $2p$ треугольника. Определить площадь S треугольника как функцию двух его сторон x и y. Определить и построить область возможных значений x и y.

1846. Для функции $F(x, y) = \frac{x - 2y}{2x - y}$ вычислить $F(3, 1)$, $F(1, 3)$, $F(1, 2)$, $F(2, 1)$, $F(a, a)$, $F(a, -a)$.

1847. Доказать, что если $F(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4} - 2xy$, то $F(tx, ty) = t^2F(x, y)$.

1848. Для $z = x^2 - xy = y^2$ определить $\Delta_x z$, $\Delta_y z$ и Δz.

Вычислить $\Delta_x z$, $\Delta_y z$, Δz, если x изменяется от 2 до 2,1, а y изменяется от 2 до 1,9.

1849. Показать, что уравнение $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ определяет z как бесчисленное множество однозначных функций x и y, из которых две непрерывны. Указать область определения всех этих функций и построить геометрическое изображение положительной непрерывной функции. Привести пример однозначной, но разрывной функции $z = F(x, y)$, определяемой тем же уравнением $x^2 - y^2 = z^2$.

1850. Построить линии уровней (при $z = 0$, 1, 2 и т. д.) функций:

1) $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2}$; 2) $z = x^2 - y$;

3) $z = x^2 - y^2$; 4) $z = xy$.

1851. Показать, что при $x \to 0$ и $y \to 0$ выражение $u = \frac{y}{x - y}$ может стремиться к любому пределу. Привести примеры такого приближения точки $(x; y)$ к точке $(0; 0)$, при котором $\lim u = 3$, $\lim u = 2$, $\lim u = 1$, $\lim u = 0$, $\lim u = -2$.

Указание. Рассмотреть изменение x и y вдоль прямых $y = kx$.

1852. Показать, что:

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy} = -\frac{1}{4}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$;

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin(xy)}{x} = 0$

при любом способе приближения точки $(x; y)$ к точке $(0; 0)$.

Указание. Положить $xy = \alpha$.

1853. Изобразить геометрически функцию:

$$z = F(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ при } xy > 0, \\ 0 \text{ при } xy = 0, \\ -1 \text{ при } xy < 0 \end{cases}$$

и указать линии ее разрыва.

1854. Указать области определения функций:

1) $z = x + y$; 2) $z = \frac{4}{x+y}$; 3) $\frac{z}{c} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$;

4) $\frac{z}{c} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$; 5) $z = x + \sqrt{x^2 - y^2}$;

6) $\sqrt{z} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

и построить геометрические изображения этих функций.

1855. Доказать, что если $F(x, y) = \frac{x}{x-y}$, то $F(a, b) + F(b, a) = 1$.

1856. Показать, что уравнение $z^2 = \frac{4}{4 - x^2 - y^2}$ определяет z как бесчисленное множество однозначных функций x и y, из которых две непрерывны. Указать область определения всех этих функций и построить геометрическое изображение функции, положительной в области $x^2 + y^2 \leqslant 1$ и отрицательной вне ее.

1857. Построить геометрическое изображение однозначной функции $z = F(x, y)$, определяемой уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, положительной в области $x^2 + y^2 \leqslant \frac{a^2}{4}$ и отрицательной вне ее. Указать линию ее разрыва.

§ 2. Частные производные первого порядка

Производная функции $z = F(x, y)$ по x, найденная в предположении, что y остается постоянным, называется *частной производной* z по x и обозначается $\frac{\partial z}{\partial x}$ или $F'_x(x, y)$. Аналогично определяется и обозначается *частная производная* z по y: $\frac{\partial z}{\partial y} = F'_y(x, y)$.

Найти частные производные функций:

1858. $z=x^3+3x^2y-y^3$. **1859.** $z=\ln(x^2+y^2)$.

1860. $z=\frac{y}{x}$. **1861.** $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

1862. $z=\frac{xy}{x-y}$. **1863.** $u=\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)$.

1864. $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$.

1865. $u=\frac{y}{x}+\frac{z}{y}-\frac{x}{z}$. **1866.** $u=xe^{-yx}$.

1867. $u=\frac{2x-t}{x+2t}$. **1868.** $\alpha=\arcsin(t\sqrt{x})$.

1869. Доказать, что если $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$, то

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}.$$

1870. Доказать, что если $z=\sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$, то

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{2}.$$

1871. Доказать, что если $u=e^{x/t^2}$, то

$$2x\frac{\partial u}{\partial x}+t\frac{\partial u}{\partial t}=0.$$

1872. Доказать, что если $u=x^y$, то

$$\frac{x}{y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial u}{\partial y}=2u.$$

1873. Ниже, в задаче 1898, будет доказана следующая теорема Эйлера:

«Если $z=F(x,y)$ — однородная функция n-го измерения, то $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=nz$».

Проверить эту теорему Эйлера для функций:

1) $z=x^3+xy^2-2y^3$; 2) $z=\sqrt{x^2+xy+y^2}$;

3) $z=\frac{1}{x^3-y^3}$; 4) $z=e^{x/y}$.

Найти частные производные функций:

1874. $z=\cos(ax-by)$. **1875.** $z=\arcsin\frac{y}{x}$.

1876. $z=\frac{x}{3y-2x}$. **1877.** $u=\ln\sin(x-2t)$.

1878. $u=\sin^2(x+y)-\sin^2x-\sin^2y$.

1879. Доказать, что если $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, то
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=1.$$

1880. Доказать, что если $z=e^{x/y}\ln y$, то $x\frac{\partial z}{\partial x}+$ $+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{\ln y}$.

1881. Доказать, что если $T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, то $l\frac{\partial T}{\partial l}+$ $+g\frac{\partial T}{\partial g}=0$.

1882. Доказать, что если $z=e^{x/2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{y}{2}\right)$, то
$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{2}e^x\sin^2\frac{y}{2}.$$

1883. Проверить теорему Эйлера об однородных функциях (см. задачу 1873) для функций:

1) $z=\frac{x^3}{x-y}$; 2) $z=\frac{1}{x^2+y^2}$; 3) $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

§ 3. Полный дифференциал первого порядка

Если функция $z=F(x, y)$ имеет в точке $(x; y)$ непрерывные частные производные, то ее полное приращение может быть представлено в виде
$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\varepsilon\cdot\rho, \qquad (1)$$
где $\varepsilon\to 0$ при $\rho=\sqrt{|\Delta x|^2+|\Delta y|^2}\to 0$. Тогда выражение $\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ есть *главная часть полного приращения* Δz; она *называется полным дифференциалом* функции и обозначается dz:
$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \qquad (2)$$
Полагая в формуле (2) z равным: 1) x; 2) y, найдем: $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$. Поэтому
$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (3)$$
Из (1) следует, что
$$\Delta z\approx dz, \qquad (4)$$
т. е. при достаточно малых Δx и Δy *полное приращение* функции приближенно равно *ее полному дифференциалу* (гл. V, § 7).

Функция $F(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке $(x; y)$, если она имеет в этой точке полный дифференциал.

1884. Найти полные дифференциалы функций:

1) $z=x^2y$; 2) $z=\frac{xy}{x-y}$; 3) $u=e^{s/t}$;

4) $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

1885. Найти значение полного дифференциала функции:

1) $z=\frac{y}{x}$ при $x=2$, $y=1$, $dx=0{,}1$, $dy=0{,}2$;

2) $u=e^{xy}$ при $x=1$, $y=2$, $dx=-0{,}1$, $dy=0{,}1$.

1886. Вычислить dz и Δz для функции $z=xy$ при $x=5$, $y=4$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=-0{,}2$.

1887. Подсчитать приближенно изменение функции $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, когда x изменяется от 2 до 2,1, а y — от 3 до 2,5.

1888. При деформации цилиндра его радиус R увеличился с 20 см до 20,5 см, а высота H уменьшилась со 100 см до 98 см. Найти приближенно изменение объема V по формуле $\Delta V\approx dV$.

1889. Катеты прямоугольного треугольника, измеренные с точностью до 0,1 см, оказались равными 7,5 см и 18 см. Определить абсолютную погрешность при вычислении гипотенузы.

1890. Найти полные дифференциалы функций:

1) $z=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$; 2) $s=x\ln t$; 3) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1891. Найти значение dz и Δz для функции $z=\ln(x^2+y^2)$, когда x изменяется от 2 до 2,1 а y — от 1 до 0,9.

1892. Подсчитать приближенно изменение функции $z=\arcsin\frac{y}{x}$, когда x изменяется от 5 до 4,5, а y — от 3 до 3,3.

1893. При деформации конуса его радиус R увеличился с 30 см до 30,1 см, а высота H уменьшилась с 60 см до 59,5 см. Найти приближенно изменение объема по формуле $\Delta V\approx dV$.

§ 4. Производные сложных функций

1°. Если $z=F(x, y)$, $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, то z называется *сложной функцией* от t. При этом

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}, \tag{1}$$

если функция F, f и φ *дифференцируемы*.

2°. Если $z = F(x, y)$, где $x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$, и если функции F, f и φ дифференцируемы, то

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \quad (2)$$

1894. Найти по формуле (1) $\frac{dz}{dt}$ из уравнений:

1) $z = x^2 + xy + y^2$, $x = t^2$, $y = t$;

2) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$.

Проверить предварительной подстановкой значений x и y в выражение для функции z.

1895. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = \frac{y}{x}$, $x = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$.

1896. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = u^v$, где u и v — функции от x.

1897. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = xe^y$, где y — функция от x.

1898. Функция $z = F(x, y)$ называется *однородной*, если $F(xt, yt) = t^n \cdot F(x, y)$. Дифференцируя обе части этого равенства по t и полагая в результате $t = 1$, доказать теорему Эйлера об однородных функциях: $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz$.

1899. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \frac{x^2}{y}$, где $x = u - 2v$, $y = v + 2u$.

1900. Пусть $z = F(x, y)$. Выразить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ через $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если:

1) $u = mx + ny$, $v = px + qy$; 2) $u = xy$, $v = y/x$.

1901. Пусть $u = F(x, y)$, где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Выразить $\frac{\partial u}{\partial r}$ и $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ через $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ и показать, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

1902. Пусть $z = y + F(u)$, где $u = x^2 - y^2$. Доказать, что $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x$ для любой дифференцируемой функции $F(u)$.

1903. Найти $\frac{dz}{dt}$ из уравнений:

1) $z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, $x = \sin t$, $y = \cos t$;

2) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $x = e^{2t} + 1$, $y = e^{2t} - 1$.

1904. Доказать, что если $z = xy + xF(u)$, где $u = y/x$, то

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z + xy.$$

1905. Доказать, что если $z = y\varphi(u)$, где $u = x^2 - y^2$, то

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

1906. Пусть $z = F(x, y)$. Выразить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ через $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если: 1) $u = x + 2y$, $v = x - y$; 2) $u = \sqrt{xy}$, $v = x + y$.

§ 5. Производные неявных функций

1°. Уравнение $F(x, y) = 0$, имеющее решение $(x_0;\ y_0)$, определяет в окрестности x_0 переменную y как непрерывную функцию x при условии, что производная $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ и непрерывна в некоторой окрестности точки $(x_0;\ y_0)$.

Если, сверх того, в окрестности точки $(x_0;\ y_0)$ существует и непрерывная производная $\frac{\partial F}{\partial x}$, то *неявная функция* имеет производную $\frac{dy}{dx}$, определяемую формулой

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial y}. \tag{1}$$

2°. Уравнение $F(x, y, z) = 0$ при аналогичных условиях определяет z как неявную функцию x и y, имеющую частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}. \tag{2}$$

Найти $\frac{dy}{dx}$ из уравнений:

1907. $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$.

1908. 1) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$; 2) $xe^{2y} - ye^{2x} = 0$.