АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

С. К. ГОДУНОВ, Е. В. ЗОЛОТАРЕВА

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Ответственный редактор
академик *С. Л. Соболев*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
НОВОСИБИРСК · 1974

УДК 517.916(075.8)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Г $\frac{20203-1581}{042(01)-74}$ 372-74

ПРЕДИСЛОВИЕ

Этот небольшой сборник, иллюстрирующий книгу С. К. Годунова «Уравнения математической физики», составлен нами из задач, предлагавшихся студентам Новосибирского университета преподавателями, ведущими семинарские занятия. Задачи разрабатывались А. Б. Шабатом, Е. В. Мамонтовым, В. В. Смеловым, Ю. Н. Валицким, В. Г. Романовым и нами.

На упражнениях разбирались обычно стандартные задачи, взятые из задачников М. М. Смирнова «Задачи по уравнениям математической физики» и Б. М. Будака, А. А. Самарского, А. Н. Тихонова «Сборник задач по математической физике», а также целый ряд задач, предназначенных для иллюстрации лекционного курса, читаемого С. К. Годуновым.

Мы отобрали для этого сборника те из задач, решавшихся на упражнениях в 1969—1972 гг., которые по своему характеру несколько отличаются от задач, входящих в распространенные задачники.

Хочется надеяться, что эта книжка окажется полезным подспорьем как для изучающих основы теории дифференциальных уравнений с частными производными, так и для преподающих этот предмет.

Авторы.

§ 1. ХАРАКТЕРИСТИКИ, СООТНОШЕНИЕ НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ, ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

1. Пусть дано уравнение

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+$$

$$+e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+f(x,y)u=h(x,y). \qquad (1)$$

Линия $\varphi(x, y)=C$ называется характеристикой уравнения (1), если она является решением уравнения

$$a(x,y)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2b(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}+c(x,y)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0. \qquad (2)$$

Иногда в качестве характеристического уравнения употребляют следующее выражение:

$$a(x, y)(dy)^2-2b(x, y)dx\,dy+c(x, y)(dx)^2=0. \qquad (3)$$

Оно получается из (2) с помощью соотношения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy=0.$$

Если $b^2-ac>0$, то уравнение (1) называется гиперболическим; оно имеет два семейства характеристик, дифференциальные уравнения которых следующие:

$$ady-(b+\sqrt{b^2-ac})\,dx=0;$$

$$ady-(b-\sqrt{b^2-ac})\,dx=0.$$

Если $b^2-ac=0$, то уравнение (1) называется параболическим; оно имеет одно семейство характеристик, дифференциальное уравнение которого

$$ady-bdx=0.$$

Если $b^2-ac<0$, то уравнение (1) называется эллиптическим, вещественных характеристик у него нет.

2. Пусть дана система уравнений

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y, u), \tag{4}$$

где

$$A = \|a_{ik}\|, \ B = \|b_{ik}\|, \ i, k = 1, 2, \ldots, n \text{ — матрицы,}$$

а

$$u = [u_1, \ldots, u_n], \ f = [f_1, \ldots, f_n] \text{ —вектора.}$$

Линии, вдоль которых

$$\det \begin{Vmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{Vmatrix} = 0, \tag{5}$$

называются характеристиками системы (4).
Требование, чтобы

$$\text{ранг } \begin{Vmatrix} A & B & f \\ dtE & dxE & du \end{Vmatrix} = \text{рангу } \begin{Vmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{Vmatrix}, \tag{6}$$

дает нам соотношения на характеристиках.

Системы, у которых все характеристики вещественны, называются гиперболическими. Системы, не имеющие вещественных характеристик, будем называть эллиптическими.
Если $\det\|A\| \neq 0$, то характеристический определитель (5) может быть переписан в виде

$$\det\|C - kE\| = 0,$$

где $C = A^{-1}B$ и $k = \dfrac{dx}{dt}$.

3. Пусть нам дана система уравнений

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, t, u), \tag{7}$$

где

$$A = \|a_{ik}\|, \ B = \|b_{ik}\|, \ C = \|c_{ik}\| \text{ — матрицы,}$$

а

$$u = [u_1, \ldots, u_n], \ f = [f_1, \ldots, f_n] \text{ — вектора.}$$

Поверхности $\varphi(x, y, t) = c$, на которых

$$\det \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} A + \frac{\partial \varphi}{\partial x} B + \frac{\partial \varphi}{\partial y} C \right\| = 0,$$

или, что то же самое,—

$$\det\|\tau A + \xi B + \eta C\| = 0,$$

где (ξ, η, τ) — вектор нормали к поверхности, называется характеристиками системы (7), а само уравнение

$$\det\|\tau A + \xi B + \eta C\| = 0. \tag{8}$$

называется конусом характеристических нормалей.

4. Если дана система уравнений второго порядка

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

где A, B, C — матрицы, а u и f — вектора, то линия $\varphi(x,\ y)=c$ называется характеристикой, если $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\det\left\|A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\|=0.$$

Со всеми названными определениями, а также с вопросом приведения к каноническому виду гиперболической системы первого порядка можно подробнее познакомиться в книгах:

1. **Годунов С. К.** Уравнения математической физики. М., «Наука», 1971, гл. I, § 6, гл. II, § 9.
2. **Петровский И. Г.** Лекции об уравнениях с частными производными. М.— Л., Гостехиздат, 1950, гл. I, § 5—7.

Найти характеристики у следующих уравнений и систем:

1. $\begin{cases}u_x-bv_x-cv_y=0,\\ u_y-av_x+bv_y=0\end{cases}$

(уравнение Бельтрами);

2. $yu_{xx}+u_{yy}=0$

(уравнение Трикоми);

3. $yu_{yy}-u_{xx}=0$;

4. $\begin{cases}xu_{xx}+2xv_{xx}-u_{yy}-2v_{yy}=(x+y)^2u,\\ u_{xx}-v_{xx}-2u_{xy}+2v_{xy}+u_{yy}-v_{yy}=0;\end{cases}$

5. $\begin{cases}u_{xx}-2v_{xy}-u_{yy}=0,\\ v_{xx}+2u_{xy}-v_{yy}=0\end{cases}$

(система Бицадзе. Если ввести обозначения $w=u+iv$, $z=x+iy$, $\bar z=x-iy$, она может быть переписана в форме $w_{\bar z\bar z}=0$);

6. $x^2u_{xx}-y^2u_{yy}-2yu_y=0$; **7.** $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$;

8. $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(уравнение теплопроводности);

9. $(1+x^2)u_{xx}-(1+y^2)u_{yy}+xu_x+yu_y=0.$

10. Привести уравнение минимальных поверхностей

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)=0$$

к квазилинейному виду и найти характеристики.

11. Написать уравнение характеристик

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u_x e^{-u_x^2-u_y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u_y e^{-u_x^2-u_y^2}\right)=0.$$

12. Написать уравнение характеристик

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2}}\right)=0.$$

13. Найти условие гиперболичности системы

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\alpha\dfrac{\partial u}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial t}+\gamma\dfrac{\partial u}{\partial x}+\delta\dfrac{\partial v}{\partial x}=0.\end{cases}$$

14. Найти условие эллиптичности

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho\cdot\varphi_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho\cdot\varphi_y)=0,\quad \rho=\rho\left(\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2}\right)$$

(уравнение Чаплыгина).

15. Найти условие эллиптичности системы

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho\cdot u)+\dfrac{\partial}{\partial y}(\rho\cdot v)=0,\end{cases}$$

$$\rho=(1-v^2-u^2)^\sigma,\ \sigma=\text{const}.$$

Проверить эквивалентность условия эллиптичности в задачах 14 и 15.

Выписать уравнение конуса характеристических нормалей у следующих систем:

16. $$\begin{cases}\dfrac{\partial p}{\partial t}+\rho_0 c_0^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=0,\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial y}=0\end{cases}$$

(система, описывающая распространение звуковых волн в двумерном случае).

17. $$\begin{cases} \frac{\mu}{c_0}\cdot\frac{\partial H_1}{\partial t}+\frac{\partial E_3}{\partial y}-\frac{\partial E_2}{\partial z}=0,\\ \frac{\mu}{c_0}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial t}+\frac{\partial E_1}{\partial z}-\frac{\partial E_3}{\partial x}=0,\\ \frac{\mu}{c_0}\cdot\frac{\partial H_3}{\partial t}+\frac{\partial E_2}{\partial x}-\frac{\partial E_1}{\partial y}=0,\\ \frac{\varepsilon}{c_0}\cdot\frac{\partial E_1}{\partial t}-\frac{\partial H_3}{\partial y}+\frac{\partial H_2}{\partial z}=0,\\ \frac{\varepsilon}{c_0}\cdot\frac{\partial E_2}{\partial t}-\frac{\partial H_1}{\partial z}+\frac{\partial H_3}{\partial x}=0,\\ \frac{\varepsilon}{c_0}\cdot\frac{\partial E_3}{\partial t}-\frac{\partial H_2}{\partial x}+\frac{\partial H_1}{\partial y}=0 \end{cases}$$

(уравнения Максвелла). Есть ли у характеристического уравнения этой системы кратные корни?

18. $$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=A_1\frac{\partial\Psi}{\partial x}+A_2\frac{\partial\Psi}{\partial y}+A_3\frac{\partial\Psi}{\partial z}+mA_4\Psi$$

(система уравнений Дирака), где

$$A_1=\begin{Vmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{Vmatrix};\quad A_2=\begin{Vmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\\i&0&0&0\end{Vmatrix};$$

$$A_3=\begin{Vmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{Vmatrix};\quad A_4=\begin{Vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{Vmatrix}.$$

Исследовать характеристическое уравнение этой системы на кратность корней.

19. $$\begin{cases} \sigma u_{tt}=u_{yy}+u_{zz}-v_{xy}-w_{xz},\\ \varkappa v_{tt}=v_{zz}+v_{xx}-w_{yz}-u_{xy},\\ \omega w_{tt}=w_{xx}+w_{yy}-u_{xz}-v_{yz} \end{cases}$$

(уравнения кристаллооптики, σ, $\varkappa$, ω — константы). Исследовать характеристическое уравнение этой системы и выяснить, могут ли у него быть кратные корни. Описать проекции конуса характеристических нормалей на координатные плоскости.

20. Проверить, что гиперповерхность

$$(t-t_0)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2-(z-z_0)^2=0$$

является характеристической для уравнения

$$u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}.$$

21. Написать уравнение плоскостей, проходящих через прямую $x=s$, $y=0$, $t=2s$ и являющихся характеристиками системы

$$\begin{cases} 4\dfrac{\partial u}{\partial t}+3\dfrac{\partial v}{\partial t}+2\dfrac{\partial w}{\partial x}=0, \\ 3\dfrac{\partial u}{\partial t}+7\dfrac{\partial v}{\partial t}+5\dfrac{\partial w}{\partial y}=0, \\ 2\dfrac{\partial u}{\partial x}+5\dfrac{\partial v}{\partial y}+6\dfrac{\partial w}{\partial t}=0 \end{cases}$$

22. Написать уравнение плоскостей, проходящих через прямую $x=s$, $y=s$, $t=2s$ и являющихся характеристиками системы

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial v}{\partial t}+8\dfrac{\partial w}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial w}{\partial y}=0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}+4\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial t}=0. \end{cases}$$

23. Написать уравнение плоскостей, проходящих через прямую $x=s$, $y=2s$, $t=s$ и являющихся характеристиками системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=v, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial v}{\partial x}+2\dfrac{\partial v}{\partial y}=w, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}-\dfrac{\partial w}{\partial x}-\dfrac{\partial w}{\partial y}=u. \end{cases}$$

24. Написать уравнение плоскостей, проходящих через прямую $x+y=1$, $t=0$ и являющихся характеристиками волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Найти соотношения на характеристиках для следующих систем:

25. $$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}+v=0,\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-\dfrac{\partial v}{\partial x}+u=0;\end{cases}$$

26. $$\begin{cases}\dfrac{1}{v}\cdot\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial t}+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r}+\dfrac{\varphi_1}{r}+\alpha_0\varphi_0=q_0,\\ \dfrac{3}{v}\cdot\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial r}+3\alpha_1\varphi_1=0,\end{cases}$$

$$v=\mathrm{const}$$

(P_1 — приближение метода сферических гармоник для кинетического уравнения, цилиндрическая симметрия);

27. $$\begin{cases}(1+x^2)\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+\dfrac{\partial u_2}{\partial t}+\dfrac{x}{t}(1+x^2)\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+\dfrac{x}{t}\dfrac{\partial u_2}{\partial x}+\dfrac{2x^2}{t}u_1=0,\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}-\dfrac{t}{x}\dfrac{\partial u_2}{\partial x}=0;\end{cases}$$

28. $$\begin{cases}\dfrac{\partial(P+\tau\cos 2\Psi)}{\partial x}+\dfrac{\partial(\tau\sin 2\Psi)}{\partial y}=0,\\ \dfrac{\partial(\tau\sin 2\Psi)}{\partial x}+\dfrac{\partial(P-\tau\cos 2\Psi)}{\partial y}=0,\end{cases}$$

$$\tau=\tau(P)$$

(система уравнений в напряжениях для плоской задачи теории пластичности);

29. $$\begin{cases}u_y-v_x=0,\\ (c^2-u^2)u_x-uv(u_y+v_x)+(c^2-v^2)v_y=0\end{cases}$$

(система, описывающая двумерный стационарный безвихревой поток);

30. $u_t+Au_x=0$, где

$$A=\begin{Vmatrix}1&0&0&0\\0&t^2&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-3t^2\end{Vmatrix};$$

31. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial t} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial u_k}{\partial t} + \dfrac{k+1}{2k+1} \cdot \dfrac{\partial u_{k+1}}{\partial x} + \dfrac{k}{2k+1} \cdot \dfrac{\partial u_{k-1}}{\partial x} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial u_{N-1}}{\partial t} + \dfrac{N}{2N-1} \cdot \dfrac{\partial u_N}{\partial x} + \dfrac{N-1}{2N-1} \cdot \dfrac{\partial u_{N-2}}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u_N}{\partial t} + \dfrac{N}{2N+1} \cdot \dfrac{\partial u_{N-1}}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

(система приближения метода сферических гармоник для односкоростного кинетического уравнения, описывающего плоский поток невзаимодействующих частиц).

32. Доказать, что для гиперболической системы без кратных характеристик нельзя получить на характеристиках двух разных соотношений (т. е. требование «ранг расширенной матрицы равняется рангу характеристической» однозначно определяет условия на характеристиках). Проиллюстрировать это на примере системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Привести к каноническому виду следующие системы:

33. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0; \end{cases}$$

34. $$\begin{cases} 2u_t + (2t-1)\,u_x - (2t+1)\,v_x = 0, \\ 2v_t - (2t+1)\,u_x + (2t-1)\,v_x = 0; \end{cases}$$

35. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (1+x)\dfrac{\partial v}{\partial x} + u = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + (1+x)\dfrac{\partial u}{\partial x} - v = 0; \end{cases}$$

36. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} + xu = 0, \\ (1+x^2)\dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - v = 0; \end{cases}$$

37. $\begin{cases} 2\dfrac{\partial u}{\partial t} + 4\dfrac{\partial v}{\partial x} + 2\dfrac{\partial w}{\partial x} = 2w - 2u - v, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + 8\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2w - 2u - v, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + 3\dfrac{\partial w}{\partial x} = 2u + v + 2w; \end{cases}$

38. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 6\dfrac{\partial u}{\partial x} + 5\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + 5\dfrac{\partial u}{\partial x} + 6\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2u, \\ 3\dfrac{\partial w}{\partial t} + 6\dfrac{\partial w}{\partial x} - 3\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2v + 3w - 3u. \end{cases}$

39. Можно ли привести к каноническому виду систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial u}{\partial x} = f,$$

где

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{Vmatrix}?$$

40. Для системы уравнений акустики

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

проиллюстрировать неоднозначность приведения к каноническому виду.

41. Когда риманов инвариант постоянен вдоль характеристики? Привести примеры, иллюстрирующие как постоянство, так и переменность римановых инвариантов вдоль характеристик.

Найти общее решение следующих систем:

42. $\begin{cases} (x-1)u_t - (x+1)v_t + u_x = 0, \\ (x+1)u_t - (x-1)v_t - v_x = 0; \end{cases}$

43. $\begin{cases} u_x + v_y = 2(u_x - v_y) - 3(v_x - u_y), \\ v_x + u_y = 3(u_x - v_y) + 2(v_x - u_y); \end{cases}$

44. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 4\dfrac{\partial u}{\partial x} + 5\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + 5\dfrac{\partial u}{\partial x} + 4\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + 3\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0; \end{cases}$$

45. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - 3\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} - 6\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + 4\dfrac{\partial u_3}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

§ 2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

1. При постановке смешанной задачи для гиперболических систем необходимо помнить о следующем: а) задание начальных данных Коши недостаточно для определения решения, если эти данные заданы не на всей оси x; необходимы краевые или граничные условия; б) на каждой границе надо ставить столько условий, сколько семейств характеристик уходит от этой границы; в) эти условия должны быть такими, чтобы их можно было разрешить относительно «римановых инвариантов», отвечающих уходящим характеристикам (нельзя, например, задавать соотношение на приходящей характеристике). Для получения гладких решений нужно заботиться о согласовании граничных и начальных условий. Более подробно об этом можно прочитать в книге С. К. Годунова «Уравнения математической физики» (гл. II, § 13).

2. Для решения задач 46—52 и 85—88 следует найти вначале их общие решения, а потом входящие туда произвольные функции определить через известные начальные и краевые условия.

3. Задача называется корректной, если она разрешима при любых начальных (или граничных) данных, принадлежащих к некоторому классу, имеет единственное решение и это решение непрерывно зависит от начальных данных (см. книгу С. К. Годунова «Уравнения математической физики», гл. I, § 8). Задачи 89—93 исследовать путем попытки построения примера типа примера Адамара методом Фурье.

4. Для решения задач 94—98 необходимо использовать формулу Кирхгофа, дающую решение задачи Коши для волнового уравнения (см. книгу С. К. Годунова «Уравнения математической физики», гл. II, § 18).

46. Найти решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{1}{E}\dfrac{\partial \sigma}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho\dfrac{\partial w}{\partial t} = 0, \end{cases}$$
$$E, \rho = \mathrm{const},$$

описывающей продольные упругие колебания стержня, отвечающие начальным данным

$$w(x, 0)=\varphi(x), \ \sigma(x, 0)=\psi(x).$$

47. Найти решение типа плоской волны

$$u=f(t-ax-by-cz)$$

и сферической волны

$$u=\frac{f\left(t-a\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

у волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=A^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Можно ли отыскать у него решения типа цилиндрической волны

$$u=\varphi(x^2+y^2)\, f\left(t-a\sqrt{x^2+y^2}\right)?$$

Решить задачу Коши у следующих систем:

48. $$\begin{cases}2u_t-u_x-v_x=0,\\ 2v_t-u_x-v_x=0,\end{cases}$$

$$u(x, 0)=0, \ v(x, 0)=2x,$$
$$-\infty<x<\infty.$$

49. $$\begin{cases}2u_t-(2t-1)\,u_x+(2t+1)\,v_x=0,\\ 2v_t+(2t+1)\,u_x-(2t-1)\,v_x=0,\end{cases}$$

$$u(x, 0)=0, \ v(x, 0)=2x,$$
$$-\infty<x<\infty;$$

50. $$\begin{cases}3u_t+2v_t-u_x-v_x=0,\\ u_t+u_x+v_x=0,\end{cases}$$

$$u(x, 0)=0, \ v(x, 0)=x,$$
$$-\infty<x<\infty;$$

51. Решить задачу Гурса в области $t\geqslant|x|$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$

$$u(x, x)=\varphi(x), \ x>0,$$
$$u(x, -x)=\psi(x), \ x<0, \ \varphi(0)=\psi(0).$$

52. Найти решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + 6\dfrac{\partial u}{\partial y} + 5\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

удовлетворяющее на двух кусках характеристик следующим условиям:

$$u(x, x) = x, \ x > 0,$$
$$v(x, 5x) = x^2, \ x < 0.$$

53. Волновое уравнение

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - , \ldots , - \frac{\partial^2 u}{\partial x_{2n+1}^2}$$

с нечетным числом $(2n+1)$ пространственных переменных имеет решение вида

$$u = \Box^n \varphi\left(t - \sqrt{\sum_{k=1}^{2n+1} x_k^2}\right),$$

где $\varphi(\tau)$ — произвольная гладкая функция. Проверить это утверждение при $n=0, 1, 2$ $(2n+1 = 1, 3, 5)$.

Указать, какие из следующих ниже краевых задач правильно поставлены:

54. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

$$0 \leqslant x \leqslant l, \ t \geqslant 0.$$

Начальные данные: $u(x, 0) = \varphi(x)$, $v(x, 0) = \psi(x)$.
Краевые условия:

1) $u(0, t) = 0, u(l, t) = 1;$
2) $u(0, t) = 0, v(0, t) = t^2;$
3) $u(0, t) + v(0, t) = t, v(l, t) = 0;$
4) $u(0, t) - v(0, t) = t, v(l, t) = 0;$
5) $u(0, t) = 0, v(l, t) + 2u(l, t) = \sin t;$
6) $u(0, t) = 0, u(l, t) - v(l, t) = 0;$

7) $u(0, t)-v(0, t)=0,\ u(l, t)+v(l, t)=t;$

8) $u(0, t)-v(0, t)=0,\ u(l, t)-v(l, t)=0;$

9) $u(0, t)+v(0, t)=0,\ u(l, t)+v(l, t)=0;$

10) $u(0, t)-v(0, t)=0,\ u(l, t)+3v(l, t)=1.$

55. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}+v=0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-\dfrac{\partial v}{\partial x}+u=0, \end{cases}$$

$$u(x, 0)=\varphi(x),\ v(x, 0)=\psi(x),$$
$$u(0, t)-3v(0, t)=0,\ u(1, t)+7v(1, t)=0,$$
$$0\leqslant x\leqslant 1,\ t\geqslant 0.$$

56. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+2\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial x}=v+w, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+8\dfrac{\partial u}{\partial x}=w-u, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}+3\dfrac{\partial w}{\partial x}=u+v+w, \end{cases}$$

$$0\leqslant x\leqslant l,\quad t\geqslant 0.$$

Начальные данные: $u(x, 0)=\varphi(x)$, $v(x, 0)=\psi(x)$, $w(x, 0)=\omega(x)$.

Краевые условия:

1) $u(0, t)=t,\ v(l, t)-w(l, t)=t^2,\ u(l, t)=1;$

2) $u(0, t)=t,\ w(0, t)=t^2,\ v(l, t)+2u(l, t)=0;$

3) $u(0, t)=t,\ w(0, t)=t^2,\ v(l, t)-w(l, t)=t;$

4) $u(0, t)-3[v(0, t)+w(0, t)]=\sin t,\ v(l, t)-$ $-w(l, t)=t,\ 3v(0, t)-8u(0, t)=0.$

57. $$\begin{cases} \mu\dfrac{\partial H_2}{\partial t}+\dfrac{\partial E_3}{\partial x}=0, \\ \mu\dfrac{\partial H_3}{\partial t}-\dfrac{\partial E_2}{\partial x}=0, \\ \varepsilon\dfrac{\partial E_2}{\partial t}-\dfrac{\partial H_3}{\partial x}=0, \\ \varepsilon\dfrac{\partial E_3}{\partial t}+\dfrac{\partial H_2}{\partial x}=0, \end{cases}$$

$$0\leqslant x\leqslant 1,\quad t\geqslant 0.$$

Начальные данные: $H_2(x, 0)=h_2(x)$, $E_2(x, 0)=l_2(x)$, $H_3(x, 0)=h_3(x)$, $E_3(x, 0)=l_3(x)$.

Граничные условия:

1) $H_2(0, t)+E_3(0, t)=0$, $\begin{cases} H_3(1, t)+2E_2(1, t)=0, \\ H_2(1, t)-E_3(1, t)=0, \\ H_2(1, t)-H_3(1, t)=1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} H_2(0, t)+\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}E_3(0, t)=1, \\ \sqrt{\mu}[H_3(0, t)-2H_2(0, t)]=\sqrt{\varepsilon}[E_2(0, t)-2E_3(0, t)], \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{\mu}\, H_2(1, t)-\sqrt{\varepsilon}\, E_3(1, t)=0, \\ \sqrt{\mu}\, H_3(1, t)+\sqrt{\varepsilon}\, E_2(1, t)=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{\mu}\, H_2(0, t)-\sqrt{\varepsilon}\, E_3(0, t)=1, \\ H_3(0, t)-E_2(0, t)=0, \end{cases}$ $\begin{cases} H_2(1, t)=0, \\ H_3(1, t)=0. \end{cases}$

Привести примеры правильных постановок краевых задач в указанных областях:

58. $\begin{cases} 2\dfrac{\partial u_1}{\partial t}-6\dfrac{\partial u_2}{\partial t}+8\dfrac{\partial u_2}{\partial x}-3\dfrac{\partial u_1}{\partial x}=0, \\ -\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+3\dfrac{\partial u_1}{\partial x}-4\dfrac{\partial u_2}{\partial x}=0, \end{cases}$

$$0\leqslant t\leqslant 1-|x|,\ |x|\leqslant 1;$$

59. $\begin{cases} 6\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+4\dfrac{\partial u_2}{\partial x}+3\dfrac{\partial u_1}{\partial y}-4\dfrac{\partial u_2}{\partial y}=0, \\ 2\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+8\dfrac{\partial u_2}{\partial x}+\dfrac{\partial u_1}{\partial y}-2\dfrac{\partial u_2}{\partial y}=0, \end{cases}$

$$0\leqslant y\leqslant x,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x,\quad 0\leqslant x\leqslant 1;$$

60. $\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial y}-5\dfrac{\partial u_2}{\partial y}+2\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+2\dfrac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ 3\dfrac{\partial u_1}{\partial y}+\dfrac{\partial u_2}{\partial y}-4\dfrac{\partial u_2}{\partial x}=0, \end{cases}$

$$0\leqslant y\leqslant x,\ 0\leqslant x\leqslant\infty;$$

61. $\begin{cases} -\dfrac{\partial u_1}{\partial t}-\dfrac{\partial u_2}{\partial t}+\dfrac{\partial u_1}{\partial x}-5\dfrac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ 3\dfrac{\partial u_1}{\partial t}-3\dfrac{\partial u_2}{\partial t}+5\dfrac{\partial u_1}{\partial x}-7\dfrac{\partial u_2}{\partial x}=0, \end{cases}$

$$x\geqslant 0,\ t\geqslant 0;$$

62. $\begin{cases} 5\dfrac{\partial u_1}{\partial t} + 2\dfrac{\partial u_2}{\partial t} + 7\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + 3\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \end{cases}$

$$0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant \infty;$$

63. $\begin{cases} 7\dfrac{\partial u_1}{\partial x} - 2\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + 2\dfrac{\partial u_1}{\partial y} - \dfrac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \\ -\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + 10\dfrac{\partial u_1}{\partial y} - 3\dfrac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \end{cases}$

$$y \leqslant 2x,\ y \geqslant -x;$$

64. $\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + 3\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + 4\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \\ 4\dfrac{\partial u_1}{\partial t} + 2\dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + 4\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \end{cases}$

$$x \geqslant 0,\ t \geqslant 0.$$

В области $0 \leqslant x \leqslant 1$, $t \geqslant 0$ привести примеры правильных и неправильных постановок краевых задач для систем:

65. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 8\dfrac{\partial u}{\partial x} + 7\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + 7\dfrac{\partial u}{\partial x} + 8\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} - 2\dfrac{\partial v}{\partial x} - 3\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0; \end{cases}$

66. $\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial w}{\partial t} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ 2\dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial w}{\partial t} - 2\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0; \end{cases}$

67. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial w}{\partial t} - \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial t} - 2\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial w}{\partial t} - 2\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0. \end{cases}$

68. Для системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x} - 3\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} + \dfrac{\partial u_4}{\partial t} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x} - 2\dfrac{\partial u_4}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

привести примеры правильных постановок смешанных задач в областях:

а) $0 \leqslant x \leqslant x_0,\ t \geqslant 0$;

б) $t \leqslant x \leqslant x_0,\ t \geqslant 0$;

в) $3t \leqslant x \leqslant x_0,\ t \geqslant 0$;

г) $0 \leqslant x \leqslant x_0 - t,\ t \geqslant 0$;

д) $0 \leqslant x \leqslant x_0 - 2t,\ t \geqslant 0$.

69. Какие граничные условия требуются для системы

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial u}{\partial t} - (2t-1)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (2t+1)\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ 2\dfrac{\partial v}{\partial t} + (2t+1)\dfrac{\partial u}{\partial x} - (2t-1)\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

в области $t \geqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$, если начальные данные заданы? Указать область, в которой решение определится начальными данными.

70. Найти характеристики уравнения

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \alpha \varphi = q(r, \mu)$$

(кинетическое уравнение, случай сферической симметрии) и исследовать постановки задач в области $-1 \leqslant \mu \leqslant 1,\ 0 \leqslant r \leqslant R$. Требуются ли граничные условия при $\mu = \pm 1$?

Исследовать возможные постановки краевых задач у следующих систем:

71. $\begin{cases} (1+x^2)\, u_t + v_t + \dfrac{x}{t}(1+x^2)\, u_x + \dfrac{x}{t} v_x + 2\dfrac{x^2}{t} u = 0, \\ v_t - \dfrac{t}{x} v_x = 0; \end{cases}$

72. $\begin{cases} x(u_t - v_x) + t\ln t(u_t - v_t) = 0, \\ x(u_x - v_x) + t\ln t(u_x - v_t) = 0. \end{cases}$

73. В системе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \alpha \dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \gamma \dfrac{\partial u}{\partial x} + \delta \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

подобрать параметры α, β, γ, δ так, чтобы система стала гиперболической и чтобы

1) краевые условия можно было поставить при $x=0$, $x=l$ (по одному на каждой границе);

2) можно было поставить два краевых условия на левой границе $0\leqslant x\leqslant l$;

3) можно было поставить два краевых условия на правой границе $0\leqslant x\leqslant l$.

74. В системе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \alpha \dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \gamma \dfrac{\partial u}{\partial x} + \delta \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + \varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial v}{\partial x} + \nu \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

подобрать параметры α, β, γ, δ, ε, μ, ν так, чтобы система стала гиперболической и допускала постановку:

1) двух краевых условий при $x=0$ и одного краевого условия при $x=1$;

2) трех краевых условий при $x=0$;

3) трех краевых условий при $x=1$;

4) двух краевых условий при $x=1$ и одного краевого условия при $x=0$.

75. Для системы уравнений

$$\begin{cases} 4\dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + 2\dfrac{\partial u_1}{\partial x} - 5\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \\ 4\dfrac{\partial u_1}{\partial x} - \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - 2\dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

в области $x\geqslant 0$, $t\geqslant 0$ рассматривается задача

$$u_1(x, 0) = \varphi_n(x),\ u_2(x, 0) = \psi_n(x),$$
$$\alpha_1 u_1(0, t) + \alpha_2 u_2(0, t) = f(t),$$
$$n\leqslant x\leqslant n+1,\ n=0, 1, 2\ldots$$

В каком случае эта задача имеет непрерывное решение (разобрать различные значения α_1, α_2 и ограничения на $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$)?

76. В области $x^2+y^2\leqslant 1$ рассматривается система

$$\begin{cases} 4\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+3\dfrac{\partial u_2}{\partial x}+5\dfrac{\partial u_1}{\partial y}+5\dfrac{\partial u_2}{\partial y}=0, \\ 2\dfrac{\partial u_1}{\partial x}-\dfrac{\partial u_2}{\partial x}+\dfrac{\partial u_1}{\partial y}-3\dfrac{\partial u_2}{\partial y}=0. \end{cases}$$

Указать, на какой части границы круга можно задать граничные условия (и в каком виде), чтобы задача имела единственное решение.

77. Предложить способы свести волновое уравнение

$$u_{xx}+u_{yy}=u_{tt}$$

а) к системе трех уравнений первого порядка,

б) к системе двух уравнений первого порядка.

Рассмотреть характеристики полученных систем. Какие задачи для этих систем могут считаться эквивалентными задаче Коши для волнового уравнения?

78. Для системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial v}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \end{cases}$$

с начальными условиями $u(x, 0)=0$, $v(x, 0)=x^2(1-x)$, $0\leqslant x\leqslant 1$ найти параметры a_1, b_1, a_2, b_2, обеспечивающие непрерывность функций u, v вместе с их первыми производными у следующих граничных условий:

(1) $u(0, t)=a_1+b_1t$, $v(1, t)=a_2+b_2t$;

(2) $u(0, t)=a_1+b_1t$, $u(1, t)=a_2+b_2t$;

(3) $u(0, t)+v(0, t)=a_1+b_1t$, $v(1, t)=a_2+b_2t$;

(4) $u(0, t)=a_1+b_1t$, $v(1, t)+2u(1, t)=a_2+b_2t$;

(5) $u(0, t)-v(0, t)=a_1+b_1t$, $u(1, t)+v(1, t)=a_2+b_2t$;

(6) $u(0, t)-v(0, t)=a_1+b_1t$, $u(1, t)+3v(1, t)=a_2+$ $+b_2t$.

79. Для системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial v}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}+3\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases}$$

с начальными условиями $u(x, 0)=x$, $v(x, 0)=l-x$, $0\leqslant x\leqslant l$ поставить какую-нибудь разумную краевую задачу, обеспечивающую непрерывность решения вместе с первыми производными.

80. Система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t}-\dfrac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}-\dfrac{\partial u_1}{\partial x}=0 \end{cases}$$

дополнена граничными условиями

$$u_1(0, t)=t,\ u_1(1, t)+2u_2(1, t)=e^{-t}$$

и начальными данными

$$u_1(x, 0)=x,\ u_2(x, 0)=3x(1-x).$$

Существует ли решение с непрерывными первыми производными в области $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant t\leqslant 1$?

81. Для системы уравнений

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u_1}{\partial t}-\dfrac{\partial u_2}{\partial t}+\dfrac{\partial u_1}{\partial x}-5\dfrac{\partial u_2}{\partial x}=0, \\ 3\dfrac{\partial u_1}{\partial t}-3\dfrac{\partial u_2}{\partial t}+5\dfrac{\partial u_1}{\partial x}-7\dfrac{\partial u_2}{\partial x}=0 \end{cases}$$

поставить в области $x\geqslant 0$, $t\geqslant 0$ разумную краевую задачу, имеющую в этой области дважды непрерывно дифференцируемое решение. Каким условиям должны удовлетворять начальные данные при заданных краевых условиях?

82. Для системы уравнений

$$\begin{cases} 7\dfrac{\partial u_1}{\partial x}-2\dfrac{\partial u_2}{\partial x}+2\dfrac{\partial u_1}{\partial y}-\dfrac{\partial u_2}{\partial y}=0, \\ -\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+10\dfrac{\partial u_1}{\partial y}-3\dfrac{\partial u_2}{\partial y}=0 \end{cases}$$

поставить в области $y\leqslant 2x$, $y\geqslant -x$ разумную краевую задачу, имеющую дважды непрерывно дифференцируемое решение. Каким условиям должны удовлетворять начальные данные?

83. Подобрать коэффициенты a, b, c так, чтобы решение системы

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = x + 1, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 2\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

определенное при $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ и удовлетворяющее начальным и граничным условиям

$$\begin{cases} u(x, 0) = x^2, \\ v(x, 0) = 0, \\ w(x, 0) = x, \end{cases} \qquad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ v(1, t) = bt + ct^2, \\ w(0, t) = at, \end{cases}$$

имело непрерывные вторые производные.

84. Для системы

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 2\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 8\frac{\partial u}{\partial x} = w, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 3\frac{\partial w}{\partial x} = u \end{cases}$$

с граничными условиями

$$u(0, t) = t, \; w(0, t) = t^2, \; v(1, t) = t$$

указать условия на начальные функции, которые бы обеспечивали существование дважды непрерывно дифференцируемого решения.

85. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

в области $t < kx$, если известны

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad x \geqslant 0;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x), \qquad x \geqslant 0;$$

$$u|_{t=kx} = \psi(x), \qquad x \geqslant 0, \; k > 1.$$

Каким условиям должны удовлетворять функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi(x)$, чтобы решение было непрерывным?

86. Найти решение системы

$$\begin{cases} 7\dfrac{\partial u}{\partial t} - 5\dfrac{\partial u}{\partial x} + 6\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ 7\dfrac{\partial v}{\partial t} + 4\dfrac{\partial u}{\partial x} + 5\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

в области $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, удовлетворяющее условиям $u(x, 0) = 0$, $v(x, 0) = x$, $u(0, t) = t$.

Будет ли оно один раз непрерывно дифференцируемым?

87. Для системы

$$\begin{cases} 6\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + 4\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + 3\dfrac{\partial u_1}{\partial y} - 4\dfrac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \\ 3\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + 8\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \dfrac{\partial u_1}{\partial y} - 2\dfrac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

в области $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ привести пример разумной краевой задачи, имеющей в этой области один раз непрерывно дифференцируемое решение и найти его.

88. Для системы

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial u_1}{\partial t} - 6\dfrac{\partial u_2}{\partial t} - 3\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + 8\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \\ -\dfrac{\partial u_1}{\partial t} + 3\dfrac{\partial u_1}{\partial x} - 4\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

в области $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ привести пример разумной краевой задачи, имеющей в этой области один раз непрерывно дифференцируемое решение и найти его.

Для следующих систем проверить, является ли корректной задача Коши с данными при $t = 0$:

89. $\begin{cases} u_{tt} + v_x = 0, \\ v_{tt} - u_x = 0; \end{cases}$

90. $\begin{cases} u_{tt} - u_x - v_x = 0, \\ v_{tt} + u_x - v_x = 0. \end{cases}$

91. $\begin{cases} u_{tt} + u_x + v_x = 0, \\ v_{tt} - u_x + v_x = 0. \end{cases}$

92. Показать, что задача

$$u_{tt} = u_{xx} - u_{yy},$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \; u_t(x, y, 0) = \psi(x, y)$$

некорректна.

93. Показать, что при любом комплексном a задача Коши с данными при $t=0$ для уравнения

$$u_{tt}=au_x$$

некорректна.

94. Решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

при $t=0$ удовлетворяет начальным условиям

$$u|_{t=0}=0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(x)\,\psi\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right),$$

где

$$\psi(r)=\begin{cases}1 & \text{при } r<a,\\ \psi_0(r) & \text{при } a\leqslant r\leqslant 2a, \quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\\ 0 & \text{при } r>2a.\end{cases}$$

Определить те интервалы времени, при которых оно может быть получено решением «одномерного» уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

95. Решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

при $t=0$ удовлетворяет начальным условиям

$$u|_{t=0}=0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\begin{cases}0 & \text{при } |z|\geqslant 2,\\ \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) & \text{при } |z|\geqslant 1,\\ \left[1-\left(\frac{z^2-1}{3}\right)^2\right]^2\varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) & \text{при } 1<|z|<2,\end{cases}$$

где $\varphi(\rho)=0$ при $|\rho-2|>1$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.

Изучая это решение на плоскости $z=0$, определить те интервалы времени, при которых оно может быть получено решением «двумерного» уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

При каких t заведомо $u(0, 0, 0, t)=0$?

96. Решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

при $t=0$ удовлетворяет начальным данным

$$u|_{t=0}=\varphi(x+y+z),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right).$$

Вывести формулу этого решения.

97. Дать физическую интерпретацию формулы Кирхгофа для волнового уравнения, если начальные данные отличны от нуля в ограниченной области. Почему у «сферической» волны есть передний и задний фронт, а у «цилиндрической» волны задний фронт отсутствует?

98. Решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

при $t=0$ удовлетворяет начальным условиям

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x),$$

$$-\infty<x<\infty.$$

Вывести формулу этого решения. Сравнить полученное решение с решением задачи Коши для «одномерного» уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x),$$

$$-\infty<x<\infty.$$

§ 3. ИНТЕГРАЛ ЭНЕРГИИ И ДИССИПАТИВНЫЕ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

1. Пусть дана система уравнений

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial y}+Qu=f, \tag{9}$$

где A, B, C — симметричные матрицы.

Умножим систему (9) скалярно на вектор $2u$ и проинтегрируем по некоторой области G, ограниченной поверхностью S. Используя теорему Гаусса — Остроградского, получим интегральное тождество

$$\iint\limits_S ([\tau A + \xi B + \eta C] u, u)\, dS = \\ = \iiint\limits_G [(Du, u) + 2(f, u)]\, dx\, dy\, dt, \qquad (10)$$

где (τ, ξ, η) — единичный вектор внешней нормали к поверхности S, а

$$D = \frac{\partial}{\partial t} A + \frac{\partial}{\partial x} B + \frac{\partial}{\partial y} C - (Q + Q^*).$$

Тождество (10) называется интегралом энергии для симметрической системы.

В частности, если число переменных равно двум и гиперболическая система не симметрическая, то мы можем привести ее к каноническому виду и для него выписать интеграл энергии.

2. Пусть гиперболическая система уравнений задана нам в каноническом виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + k_i \dfrac{\partial u_i}{\partial x} + \sum\limits_{l=1}^{n} m_{il} u_l = f_i \; (i = 1, 2, \ldots, n_0) \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial t} - k_i \dfrac{\partial u_i}{\partial x} + \sum\limits_{l=1}^{n} m_{il} u_l = f_i \; (i = n_0 + 1, \ldots, n) \end{cases} \qquad (11)$$

в полосе $0 \leqslant x \leqslant l$ для $0 \leqslant t \leqslant T$.

Рассмотрим для системы (11) следующие граничные условия:

$$\left.\begin{aligned} u_i &= \sum_{j=n_0+1}^{n} \alpha_{ij} u_j \text{ при } x = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n_0); \\ u_i &= \sum_{j=1}^{n_0} \beta_{ij} u_j \text{ при } x = l \quad (i = n_0 + 1, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Граничные условия (12) называются диссипативными, если в точках границы выполнено неравенство

$$-\sum_{\text{по приходящим } i} k_i u_i^2 + \sum_{\text{по уходящим } i} k_i u_i^2 < 0 \qquad (13)$$

(«по приходящим i» означает суммирование по всем тем i, для которых соответствующая характеристика — приходящая, аналогично «по уходящим i»).

Со всеми вышеприведенными определениями можно познакомиться более подробно в книге С. К. Годунова «Уравнение математической физики», гл. II, § 9, 13, 14.

99. Для системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

исследовать вопрос о диссипативности следующих краевых условий:

(1) $u(0, t)=0$, $u(l, t)=0$;

(2) $u(0, t)=0$, $v(l, t)=0$;

(3) $u(0, t)=v(0, t)$, $v(l, t)=0$;

(4) $u(0, t)=0$, $v(l, t)+2u(l, t)=0$;

(5) $u(0, t)=v(0, t)$, $u(l, t)+v(l, t)=0$;

(6) $u(0, t)=v(0, t)$, $u(l, t)+3v(l, t)=0$.

100. Для системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}+v=0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-\dfrac{\partial v}{\partial x}+u=0 \end{cases}$$

выписать какой-нибудь интеграл энергии и проверить, диссипативны ли граничные условия

$$u(0, t)=3v(0, t),\ u(1, t)+7v(1, t)=0$$

и как можно добиться их диссипативности?

101. Для системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma}{\partial t}-E\dfrac{\partial w}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}=0, \end{cases}$$

$$E,\ \rho=\mathrm{const}$$

проиллюстрировать неоднозначность интеграла энергии.

102. Для системы

$$\begin{cases} \mu\dfrac{\partial H_2}{\partial t}+\dfrac{\partial E_3}{\partial x}=0, \\ \varepsilon\dfrac{\partial E_2}{\partial t}-\dfrac{\partial H_3}{\partial x}=0, \\ \mu\dfrac{\partial H_3}{\partial t}-\dfrac{\partial E_2}{\partial x}=0, \\ \varepsilon\dfrac{\partial E_3}{\partial t}+\dfrac{\partial H_2}{\partial x}=0 \end{cases}$$

проиллюстрировать неоднозначность интеграла энергии.

103. Написать интеграл энергии для уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + 3\frac{\partial u_2}{\partial t} - y^2\frac{\partial u_1}{\partial x} - 3y^2\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x} - 2\frac{\partial u_2}{\partial y} + (1+t^2)\frac{\partial u_3}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + (1+t^2)\frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

приведя систему предварительно к симметричному виду выбором новых неизвестных функций.

104. Для системы уравнения Максвелла

$$\begin{cases} \mu\frac{\partial H_2}{\partial t} + \frac{\partial E_3}{\partial x} = 0, \\ \varepsilon\frac{\partial E_2}{\partial t} - \frac{\partial H_3}{\partial x} = 0, \\ \mu\frac{\partial H_3}{\partial t} - \frac{\partial E_2}{\partial x} = 0, \\ \varepsilon\frac{\partial E_3}{\partial t} + \frac{\partial H_2}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

в области $0 \leqslant x \leqslant 1$, $t \geqslant 0$ с начальными данными

$$H_2(x, 0) = h_2(x),\ E_2(x, 0) = e_2(x);$$
$$H_3(x, 0) = h_3(x),\ E_3(x, 0) = e_3(x)$$

получить оценку интеграла

$$I(t) = \int_0^1 \left[\mu\,\frac{H_2^2 + H_3^2}{2} + \varepsilon\,\frac{E_2^2 + E_3^2}{2}\right] dx$$

через $I(0)$, если заданы следующие граничные условия:

$$\sqrt{\mu}\,H_2(0, t) + \sqrt{\varepsilon}\,E_3(0, t) = 1;$$
$$H_3(0, t) - E_2(0, t) = 0;$$
$$H_2(1, t) = 0; \qquad H_3(1, t) = 0.$$

105. Привести для системы

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 2\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

с граничными условиями $u(-1, t)=2v(-1, t)$, $v(1, t)=$ $=u(1, t)$ диссипирующийся интеграл энергии и получить оценку

$$\int_{-1}^{+1}(u^2+v^2)\,dx\,|_{t=1} \quad \text{через} \int_{-1}^{+1}(u^2+v^2))dx|_{t=0}.$$

Для задач **106—109** проделать то же самое, что в задаче **105**.

106. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-3\dfrac{\partial v}{\partial x}=0, \end{cases}$

$u=v$ при $x=-1$,
$3v=u$ при $x=1$.

107. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+8\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-\dfrac{\partial v}{\partial x}=0, \end{cases}$

$u=v$ при $x=-1$,
$v=9u$ при $x=1$.

108. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-3\dfrac{\partial v}{\partial x}=0, \end{cases}$

$u=2v$ при $x=-1$.
$u=v$ при $x=1$.

109. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-7\dfrac{\partial v}{\partial x}=0, \end{cases}$

$u=4v$ при $x=-1$,
$u=v$ при $x=1$.

110. Привести систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}+v=0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-\dfrac{\partial v}{\partial x}+u=0 \end{cases}$$

с граничными условиями $u(0, t)=5v(0, t)$, $v(1, t)=$ $=3u(1, t)$ к диссипативному виду и оценить интеграл энергии.

111. При каких значениях параметров α, β у системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+a\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-b\dfrac{\partial v}{\partial x}=0, \end{cases}$$

$$a,\ b=\text{const}$$

граничные условия

$$u = \alpha v \quad \text{при} \quad x = -1,$$
$$v = \beta u \quad \text{при} \quad x = 1,$$
$$\alpha, \beta = \text{const}$$

будут диссипативными? Оценить интеграл энергии, если начальные данные

$$u(x, 0) = 0, \qquad v(x, 0) = x^2 - 1.$$

112. Вывести закон сохранения энергии

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^\pi \left(u_t^2 + u_x^2\right) dx\right] = 0$$

для решений $u(x, t)$ уравнения $u_{tt} - u_{xx} = 0$, удовлетворяющих граничным условиям $u(0, t) = 0$, $u(\pi, t) = 0$.

113. Доказать, что если $u(x, t)$ — гладкое решение уравнения $u_t = u_{xx}$, удовлетворяющее граничным условиям $u(0, t) = 0$, $u(\pi, t) = 0$, то

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^\pi u^2(x, t)\, dt\right] \leqslant 0.$$

114. Оценить

$$I(t) = \int_0^l \left[u^2(x, t) + u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)\right] dx$$

для решения смешанной задачи

$$u(x, 0) = \varphi(x),\ u_t(x, 0) = \psi(x),$$
$$u(0, t) = u(l, t) = 0,$$
$$0 \leqslant x \leqslant l,\ t \geqslant 0$$

у волнового уравнения $u_{tt} - u_{xx} = 0$.

115. Доказать единственность задачи Гурса $u(x, y, t)$ при $t \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$ для уравнения $u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0$. В качестве граничного условия полагается

$$u\left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}\right) = \varphi(x, y).$$

§ 4. УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ, ОБЛАСТЬ ЕДИНСТВЕННОСТИ

Пусть нам задана система уравнений

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial y}=f, \tag{14}$$

где матрицы A, B, C — симметричные и матрица A — положительно определенная. Равенство

$$\det\|\tau A+\xi B+\eta C\|=0$$

называется конусом характеристических нормалей. Он делит все пространство на несколько частей. Рассмотрим ту часть, которая содержит вектор $(1, 0, 0)$. Пусть граница этой части пространства описывается уравнением

$$\tau+H(\xi, \eta)=0, \tag{15}$$

которое называется уравнением Гамильтона — Якоби.

С помощью этого уравнения можно описывать области единственности у систем (14). Пусть начальные данные заданы в области $\varphi_0(x, y)\leqslant 0$. В какой области решение системы (14) по этим начальным данным можно однозначно определить? Обозначим границу этой области единственности $\varphi(x, y, t)=0$, причем выберем так, чтобы внутри области $\varphi(x, y, t)<0$. Оказывается, $\varphi(x, y, t)$ есть решение уравнения Гамильтона — Якоби

$$\varphi_t+H(\varphi_x, \varphi_y)=0,$$

удовлетворяющее начальным данным $\varphi(x, y, 0)=\varphi_0(x, y)$.

Более подробно с этими вопросами, а также с методами интегрирования уравнения Гамильтона — Якоби можно познакомиться в книге С. К. Годунова «Уравнения математической физики», гл. II, § 11, 12.

116. При каких a плоскость

$$t=1-ax+ay$$

может служить верхней границей области единственности для системы

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}+3\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial t}+3\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}+2\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\,?\end{cases}$$

Описать область единственности, если начальные значения искомых функций заданы при $t=0$ в указанных областях:

117. $$\begin{cases} 3\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+\dfrac{\partial u_2}{\partial t}+6\dfrac{\partial u_3}{\partial x}=0, \\ 3\dfrac{\partial u_2}{\partial t}+\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+9\dfrac{\partial u_3}{\partial y}=0, \\ 3\dfrac{\partial u_3}{\partial t}+6\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+9\dfrac{\partial u_2}{\partial y}=0, \end{cases} \qquad y>3|x|;$$

118. $$\begin{cases} 3\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+2\dfrac{\partial u_2}{\partial t}+12\dfrac{\partial u_3}{\partial x}=0, \\ 3\dfrac{\partial u_2}{\partial t}+2\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+3\dfrac{\partial u_3}{\partial y}=0, \\ 3\dfrac{\partial u_3}{\partial t}+12\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+3\dfrac{\partial u_2}{\partial y}=0, \end{cases} \qquad xy>0;$$

119. $$\begin{cases} 3\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+2\dfrac{\partial u_2}{\partial t}+6\dfrac{\partial u_3}{\partial x}=0, \\ 3\dfrac{\partial u_2}{\partial t}+2\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+3\dfrac{\partial u_3}{\partial y}=0, \\ 3\dfrac{\partial u_3}{\partial t}+6\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+3\dfrac{\partial u_2}{\partial y}=0, \end{cases} \qquad y-x>2|x|;$$

120. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+2\dfrac{\partial v}{\partial t}+2\dfrac{\partial w}{\partial x}=0, \\ 2\dfrac{\partial u}{\partial t}+5\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial w}{\partial y}=0, \\ 2\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+4\dfrac{\partial w}{\partial t}=0, \end{cases} \qquad x\geqslant 0,\ y\geqslant 0;$$

121. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=v, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial v}{\partial x}+2\dfrac{\partial v}{\partial y}=w, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}-\dfrac{\partial w}{\partial x}-\dfrac{\partial w}{\partial y}=u, \end{cases} \qquad x+y\leqslant (x-y)^2;$$

122. $$\begin{cases} \frac{1}{v}\frac{\partial A_0}{\partial t} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_1) + \frac{\partial B_1}{\partial \theta}\right] + \alpha_0 A_0 = q, \\ \frac{3}{v}\frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{\partial A_0}{\partial r} + 3\alpha_1 A_1 = 0, \\ \frac{3}{v}\frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_0}{\partial \theta} + 3\alpha_1 B_1 = 0, \end{cases}$$

$$R_1 \leqslant r \leqslant R_2, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2};$$

123. $$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial w_1}{\partial x} + u_2 = 0, \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} - 2\frac{\partial w_1}{\partial y} + v_2 = 0, \\ \frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial x} - 2\frac{\partial v_1}{\partial y} + w_2 = 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - 2\frac{\partial w_2}{\partial x} + u_1 = 0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{\partial w_2}{\partial y} + v_1 = 0, \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} - 2\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial y} + w_1 = 0, \end{cases}$$

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 1.$$

124. Для системы

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

описать область единственности, если начальные данные заданы в следующих областях:

а) $x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1$;

б) $x > 0,\ y < 0,\ x - y > 1$;

в) $x < 0,\ y > 0,\ -x + y < 1$;

г) $x < 0,\ y < 0,\ x + y > -1$;

д) $x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 < 1$;

е) $x \leq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 < 1$;

ж) $x>0,\ y<0,\ x^2+y^2<1$;

з) $x<0,\ y<0,\ x^2+y^2<1$.

125. Для системы

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+2\dfrac{\partial u_1}{\partial y}+\dfrac{\partial w_1}{\partial x}+u_1+v_1+w_2=0,\\[2mm] \dfrac{\partial v_1}{\partial t}+\dfrac{\partial v_1}{\partial x}+2\dfrac{\partial v_1}{\partial y}+\dfrac{\partial w_1}{\partial y}+u_2+v_2+w_1=0,\\[2mm] \dfrac{\partial w_1}{\partial t}+\dfrac{\partial w_1}{\partial x}+2\dfrac{\partial w_1}{\partial y}+\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+\dfrac{\partial v_1}{\partial y}+w_2=0,\\[2mm] \dfrac{\partial u_2}{\partial t}+2\dfrac{\partial u_2}{\partial x}+\dfrac{\partial u_2}{\partial y}+4\dfrac{\partial w_2}{\partial x}+u_2+v_2+w_1=0,\\[2mm] \dfrac{\partial v_2}{\partial t}+2\dfrac{\partial v_2}{\partial x}+\dfrac{\partial v_2}{\partial y}+4\dfrac{\partial w_2}{\partial y}+u_1+v_1+w_2=0,\\[2mm] \dfrac{\partial w_2}{\partial t}+2\dfrac{\partial w_2}{\partial x}+\dfrac{\partial w_2}{\partial y}+4\dfrac{\partial u_2}{\partial x}+4\dfrac{\partial v_2}{\partial y}+v_1=0\end{cases}$$

описать область единственности, если начальные данные заданы в следующих областях:

а) $x\geqslant y$;

б) $x^2+y^2\leqslant 1$.

126.

$$\begin{cases}\rho_0\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{12}}{\partial y},\\[2mm] \rho_0\dfrac{\partial v}{\partial t}=\dfrac{\partial\sigma_{21}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{22}}{\partial y},\\[2mm] \dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial t}=\left(k+\dfrac{4}{3}\mu\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}+\left(k-\dfrac{2}{3}\mu\right)\dfrac{\partial v}{\partial y},\\[2mm] \dfrac{\partial\sigma_{22}}{\partial t}=\left(k-\dfrac{2}{3}\mu\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}+\left(k+\dfrac{4}{3}\mu\right)\dfrac{\partial v}{\partial y},\\[2mm] \dfrac{\partial\sigma_{12}}{\partial t}=\mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\end{cases}$$

(нестационарные уравнения линейной теории упругости: ρ_0 — плотность среды; $(u,\ v)$ — скорость деформации; σ_{ik} — тензор напряжений $(\sigma_{21}=\sigma_{12})$; k — модуль всестороннего сжатия; μ — модуль сдвига; напряжения и деформация вдоль прямых, параллельных оси z, постоянны).

Описать область единственности, если начальные данные заданы в области $x\leqslant y\leqslant 2x$.

Построить из бихарактеристик характеристические поверхности для заданных систем. Эти характеристики должны проходить через указанные прямые.

127.
$$\begin{cases} 3\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial w}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}+3\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial w}{\partial y}=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial t}=0, \end{cases}$$

прямая $x=0$, $y=t$.

128.
$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial u}{\partial t}+2\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial w}{\partial x}=0, \\ 2\dfrac{\partial u}{\partial t}+3\dfrac{\partial v}{\partial t}+4\dfrac{\partial w}{\partial y}=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+4\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial t}=0, \end{cases}$$

прямая $y=0$, $4x+3t=0$.

129. Для системы уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+v+w=0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial y}+u+w=0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}-\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+u+v=0 \end{cases}$$

начальные данные, заданные при $t=0$ и всех x, y, отличны от нуля лишь в полосе $0\leqslant x+y\leqslant 1$. В какой области полупространства x, y, $t>0$ решение так поставленной задачи будет нулевым?

130. Для системы уравнений
$$\begin{cases} 3\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+v=0, \\ 4\dfrac{\partial v}{\partial t}-\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial y}+w=0, \\ 4\dfrac{\partial w}{\partial t}-\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+u=(x+y)e^{t^2} \end{cases}$$

начальные данные Коши, заданные при $t=0$ и всех x, y, таковы: $u=v=w=0$ при $x+2y<0$, $u=v=w=1$ при $x+2y>1$. В полосе $0<x+2y<1$ начальные значения нам неизвестны. Для каких $t>0$ можно определить $[u(7, 0, t), v(7, 0, t), w(7, 0, t)]$ по этим данным?

§ 5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И МЕТОД ФУРЬЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1. Пусть функция $u(t)$, определенная при $0 \leqslant t < \infty$, удовлетворяет неравенствам

$$|u(t)| < Me^{kt};$$

$$|u'(t)| < Me^{kt};$$

$$|u'(t_1) - u'(t_2)| \leqslant N(T) \cdot \sqrt{|t_1 - t_2|} \text{ при } 0 \leqslant t_i \leqslant 2T.$$

Определим преобразование Лапласа $v(\lambda)$ формулой

$$v(\lambda) = \int_0^\infty u(t) e^{-\lambda t} dt.$$

(Иногда $v(\lambda)$ называют «образом» функции $u(t)$.)

Тогда при $0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant T$ справедливо неравенство

$$\left| u(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} v(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda \right| < \frac{M_1}{b}, \quad a > k,$$

т. е. $u(t)$ можно восстановить по $v(\lambda)$ с помощью обратного преобразования Лапласа.

Применение преобразования Лапласа бывает иногда удобным как при решении обыкновенных дифференциальных уравнений и систем, так и для уравнений и систем с частными производными.

В первом случае, т. е. когда задано обыкновенное дифференциальное уравнение, воспользовавшись тем, что

$$\int_0^\infty u'(t) e^{-\lambda t} dt = -u(0) + \lambda v(\lambda)$$

и т. д. для производных более высокого порядка, для нахождения «образа» функции $v(\lambda)$ надо решить алгебраическое уравнение.

Во втором случае, т. е. для уравнений с частными производными, задача нахождения «образа» функции сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

Иными словами, задача нахождения «образа» функции является более простой по сравнению с исходной задачей. Далее, зная «образ» функции, можно с помощью обратного преобразования Лапласа восстановить решение исходной задачи.

2. Способ отыскания решения краевой задачи в виде суперпозиции частных решений вида $e^{\lambda t} u(x)$, называемых «стоячими» волнами, носит название метода Фурье.

Рассмотрим гиперболическую систему двух уравнений, записанных в каноническом виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + k_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + m_{11}(x) u_1 + m_{12}(x) u_2 = 0, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - k_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + m_{21}(x) u_1 + m_{22}(x) u_2 = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Предполагается, что $k_1>0$, $k_2>0$, т. е. характеристики имеют разный наклон. Система (16) дополнена граничными

$$\begin{cases}\alpha_1 u_1(0, t)+\alpha_2 u_2(0, t)=0, \\ \beta_1 u_1(l, t)+\beta_2 u_2(l, t)=0\end{cases} \tag{17}$$

и начальными условиями

$$u_1(x, 0)=\varphi_1(x),\ u_2(x, 0)=\varphi_2(x). \tag{18}$$

Если все коэффициенты α_1, α_2, β_1, β_2 отличны от нуля, то решение можно строить как для $t \geqslant 0$, так и для $t \leqslant 0$. Такие краевые задачи для гиперболических систем называются обратимыми.

Ищем частное решение системы (16) вида

$$u_1(x, t)=e^{\lambda t} \tilde{u}_1(x);$$

$$u_2(x, t)=e^{\lambda t} \tilde{u}_2(x),$$

удовлетворяющее граничным условиям (17). Тогда вектор-функция $[\tilde{u}_1(x),\ \tilde{u}_2(x)]$ должна являться решением следующей задачи:

$$\begin{cases}\lambda \tilde{u}_1+k_1 \dfrac{d \tilde{u}_1}{d x}+m_{11} \tilde{u}_1+m_{12} \tilde{u}_2=0, \\ \lambda \tilde{u}_2-k_2 \dfrac{d \tilde{u}_2}{d x}+m_{21} \tilde{u}_1+m_{22} \tilde{u}_2=0;\end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases}\alpha_1 \tilde{u}_1(0)+\alpha_2 \tilde{u}_2(0)=0, \\ \beta_1 \tilde{u}_1(l)+\beta_2 \tilde{u}_2(l)=0 .\end{cases} \tag{20}$$

Те значения λ, при которых возможно нетривиальное решение задачи (19)—(20), называются собственными значениями, а соответствующее решение — собственной вектор-функцией.

Для обратимой гиперболической системы доказана возможность аппроксимации решения задачи (16)—(18) суммой «стоячих» волн

$$u=\sum_k C_k e^{\lambda_k t}\begin{pmatrix}\tilde{u}_{1k}(x) \\ \tilde{u}_{2k}(x)\end{pmatrix}, \tag{21}$$

где суммирование производится по всевозможным собственным значениям.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases}a_{11}(x) \dfrac{\partial u_1}{\partial t}+a_{12}(x) \dfrac{\partial u_2}{\partial t}+b_{11} \dfrac{\partial u_1}{\partial x}+b_{12} \dfrac{\partial u_2}{\partial x}+c(x) u_2=0, \\ a_{21}(x) \dfrac{\partial u_1}{\partial t}+a_{22}(x) \dfrac{\partial u_2}{\partial t}+b_{21} \dfrac{\partial u_1}{\partial x}+b_{22} \dfrac{\partial u_2}{\partial x}-c(x) u_1=0\end{cases} \tag{22}$$

и краевые условия (17). (Матрицы $A=\|a_{ik}(x)\|$, $B=\|b_{ik}\|$ симметричны и A положительно определенная матрица.) Гиперболическая система называется консервативной, если интеграл энергии не меняется со временем. Для этого достаточно краевые условия выбрать так, чтобы квадратичная форма $b_{11} u_1^2+2 b_{12} u_1 u_2+b_{22} u^2$ обращалась в нуль при $x=0$ и $x=l$; b_{ik} здесь предполагаются постоянными, В случае консервативной гиперболической системы собственные вектор-функции

$$\tilde{u}_k = \left[\tilde{u}_{k1}, \ \tilde{u}_{k2}\right] \ \text{и} \ \tilde{u}_p = \left[\tilde{u}_{p1}, \ \tilde{u}_{p2}\right],$$

соответствующие различным собственным значениям, ортогональны в таком скалярном произведении:

$$\left(\tilde{u}_k, \ \tilde{u}_p\right) = \int_0^l \left[a_{11}\tilde{u}_{k1}\overline{\tilde{u}}_{p1} + a_{12}\left(\tilde{u}_{k1}\overline{\tilde{u}}_{p2} + \tilde{u}_{k2}\overline{\tilde{u}}_{p1}\right) + a_{22}\tilde{u}_{k2}\overline{\tilde{u}}_{p2}\right] dx.$$

Это дает возможность для задачи (22), (17), (18) подбирать коэффициенты c_k решения (21) так, чтобы удовлетворились и начальные условия. (c_k суть коэффициенты Фурье при разложении начальной вектор-функции $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ в ряд Фурье по собственным вектор-функциям.)

Более подробно с преобразованиями Лапласа и методом Фурье для гиперболических систем можно ознакомиться в книгах:

1. **Годунов С. К.** Уравнения математической физики, гл. IV.
2. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 2-е. М., Физматгиз, 1958, гл. VI.

С помощью преобразования Лапласа решить следующие задачи:

131. $x''' - 2x'' + x' = 4,$

$$x(0) = 1, \ x'(0) = 2, \ x''(0) = -2;$$

132. $x'' + n^2 x = a \sin(nt + \alpha),$

$$x(0) = x'(0) = 0;$$

133. $\begin{cases} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + 2y - z, \\ z' = x - y + 2z, \end{cases}$

$$x(0) = y(0) = 0, \ z(0) = 1;$$

134. $\begin{cases} x' = 2x - y - z, \\ y' = 3x - 2y - 3z, \\ z' = 2z - x + y, \end{cases}$

$$x(0) = 1, \ y(0) = z(0) = 0;$$

135. $\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ -2x + y' - y = t, \end{cases}$

$$x(0) = 2, \ y(0) = 4.$$

136. Построить с помощью интеграла Дюамеля решение задачи

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ y' = x + 2y, \end{cases}$$

$$x(0) = 0,\ y(0) = 0.$$

Выведите асимптотические формулы для собственных значений следующих систем. Сравните с точными формулами собственных значений, если удастся их найти.

137. $$\begin{cases} \lambda u + (1+x)\dfrac{dv}{dx} + u = 0, \\ \lambda v + (1+x)\dfrac{du}{dx} - v = 0, \end{cases}$$

$$u(0) = 0,\ u(1) = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

138. $$\begin{cases} \lambda u + (2-x)\dfrac{dv}{dx} + x^2 u = 0, \\ \lambda v + (2-x)\dfrac{du}{dx} - x^2 v = 0, \end{cases}$$

$$u(0) = 0,\ v(1) = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1;$$

139. $$\begin{cases} \lambda u + \dfrac{dv}{dx} - 5v = 0, \\ \lambda v + \dfrac{du}{dx} - u = 0, \end{cases}$$

$$u(0) - 2v(0) = 0,\ 3u(1) + 2v(1) = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1;$$

140. $$\begin{cases} \lambda u + \dfrac{dv}{dx} + 2v = 0, \\ \lambda v + \dfrac{du}{dx} = 0, \end{cases}$$

$$u(0) - 3v(0) = 0,\ 2u(1) + v(1) = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1;$$

141. $$\begin{cases} \lambda u + \dfrac{dv}{dx} + xu = 0, \\ \lambda (1+x^2) v + \dfrac{du}{dx} - v = 0, \end{cases}$$

$$3u(0) - v(0) = 0,\ 4v(1) + u(1) = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Выписать и решить дифференциальные уравнения для преобразования Лапласа. С помощью формулы обращения разложить решение по собственным функциям.

142. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases}$

$u(0, t) = u(1, t) = 0, \ u(x, 0) = 0, \ v(x, 0) = \cos \pi x;$

143. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 9 \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases}$

$u(0, t) = u(1, t) = 0; \ u(x, 0) = \sin \pi x, \ v(x, 0) = 0;$

144. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 4 \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases}$

$u(0, t) = u(1, t) = 0, \ u(x, 0) = \sin \pi x, \ v(x, 0) = 0.$

Изучить применимость метода Фурье к системам:

145. $\begin{cases} e^x \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ (1+x^2) \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases}$

$$u(0, t) = 0, \ v(1, t) = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant 1;$$

146. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} + xv = 0, \\ (1+x^2) \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - xu = 0, \end{cases}$

$$u(0, t) = 0, \ u(1, t) = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

В каком скалярном произведении ортогональны собственные вектор-функции?

147. $\begin{cases} (1+x) \dfrac{\partial u}{\partial t} + x \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ x \dfrac{\partial u}{\partial t} + (1+x) \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases}$

$$u(0, t) = 0, \ u(1, t) = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant 1;$$

148. $\begin{cases} (1+x) \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} + x^2 v = 0, \\ (2-x) \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - x^2 u = 0, \end{cases}$

$$u(0, t) = 0, \ v(1, t) = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Найти собственные функции следующих краевых задач:

149. $$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\end{cases}$$

$$u(0,\ t)=0,\ v(0,\ t)=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

150. $$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-\dfrac{\partial v}{\partial x}+u=0,\end{cases}$$

$$u(0,\ t)-\alpha v(0,\ t)=0,$$
$$u(1,\ t)+\beta v(1,\ t)=0,$$
$$\alpha\beta=\text{const},\ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Выписать асимптотику собственных значений и формулы вычисления коэффициентов Фурье у следующих систем:

151. $$\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial t}+2\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ \dfrac{1}{1-x^2}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial t}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\end{cases}$$

$$u(0,\ t)=0,\quad u\left(\frac{1}{2},\ t\right)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2};$$

152. $$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+(1+x^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}+e^{x}v=0,\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-\dfrac{\partial v}{\partial x}+e^{-x}u=0,\end{cases}$$

$$u(0,\ t)+v(0,\ t)=0,\ u(1,\ t)+v(1,\ t)=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

153. Указать граничные условия для системы

$$\begin{cases}2\dfrac{\partial u}{\partial t}+x\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x}+x^2v=0,\\ x\dfrac{\partial u}{\partial t}+5\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}-3\dfrac{\partial v}{\partial x}-x^2u=0\end{cases}$$

на отрезке $0\leqslant x\leqslant l$, при которых она будет консервативной. Выписать формулы для вычисления коэффициентов Фурье.

154. То же самое сделать для системы

$$\begin{cases} 5\dfrac{\partial u}{\partial t}+\sin x\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ \sin x\dfrac{\partial u}{\partial t}+2\dfrac{\partial v}{\partial t}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\end{cases}$$

$$0\leqslant x\leqslant\pi.$$

155. Указать граничные условия для системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$$

на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$, при которых она будет консервативной. Определить собственные значения и собственные функции.

156. То же самое сделать для системы

$$\begin{cases} 3\dfrac{\partial u}{\partial t}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\end{cases}\qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Вычислить преобразование Лапласа для решения следующих задач:

157. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+9\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\end{cases}$$

$$u(0,\ t)=v(\pi,\ t)=0,$$

$$u(x,\ 0)=x^2,\ v(x,\ 0)=0,\ 0\leqslant x\leqslant\pi;$$

158. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+9\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial w}{\partial x}=0,\end{cases}$$

$$u(x,\ 0)=0,\ v(x,\ 0)=0,\ w(x,\ 0)=x^2,$$

$$u(0,\ t)-3v(0,\ t)=0,$$

$$w(0,\ t)=0,\ v(1,\ t)=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1;$$

159. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 4\dfrac{\partial v}{\partial x} + u = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + v = 0, \end{cases}$ $\begin{array}{l} u(0, t) = v(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \ v(x, 0) = \sin^2 x, \\ 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{array}$

160. Разобрать вопрос о представлении решений системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 27\dfrac{\partial v}{\partial x} + u = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + 3\dfrac{\partial u}{\partial x} - v = 0, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u(0, t) + v(0, t) = 0, \\ u(1, t) - v(1, t) = 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{array}$$

через стоячие волны. Выписать асимптотическую формулу для собственных значений.

То же самое сделать для следующих систем:

161. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 27\dfrac{\partial v}{\partial x} - u = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + 3\dfrac{\partial u}{\partial x} - v = 0, \end{cases}$

$$u(0, t) = v(1, t) = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant 1;$$

162. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} + x^2 u + (1 - x^2) v = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + 4\dfrac{\partial u}{\partial x} + (1 - x^2) u + x^2 v = 0, \end{cases}$

$$u(0, t) = 0, \ u(1, t) - v(1, t) = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Решить методом Фурье следующие системы:

163. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 2\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + 5\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases}$

$$u(0, t) = 0, \ v(1, t) = 0, \ u(x, 0) = x, \ v(x, 0) = 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant 1;$$

164. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 2\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - 3\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases}$

$$u(0, t) = 0, \ v(1, t) = 0, \ u(x, 0) = 0, \ v(x, 0) = x, \\ 0 \leqslant x \leqslant 1;$$

165. $$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+2\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+3\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\end{cases}$$

$$v(0,\ t)=0,\ u(1,\ t)=0,$$
$$v(x,\ 0)=x,\ u(x,\ 0)=0,$$
$$0\leqslant x\leqslant 1;$$

166. $$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-3\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-5\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\end{cases}$$

$$u(0,\ t)=0,\ v(1,\ t)=0,$$
$$u(x,\ 0)=x,\ v(x,\ 0)=0,$$
$$0\leqslant x\leqslant 1;$$

167. $$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\end{cases}$$

$$v(0,\ t)=0,\ v(1,\ t)=0,$$
$$u(x,\ 0)=1,\ v(x,\ 0)=0,$$
$$0\leqslant x\leqslant 1;$$

§ 6. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА

1. Для решения задач № 168—173 и 179—184 необходимо знание материала гл. III § 20—23 книги С. К. Годунова «Уравнения математической физики».

2. Функция Грина для уравнения Лапласа первой краевой задачи (задачи Дирихле) определяется следующими условиями:

а) в трехмерном случае

$$G(M,\ P)=\frac{1}{4\pi r}+v(M,\ P), \qquad (23)$$

где $\sigma=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$ — расстояние между точками $M(x,\ y,\ z)$ и $P(\xi,\ \eta,\ \zeta)$, а $v(M,\ P)$ — функция регулярная и гармоническая всюду в рассматриваемой области T с границей σ. На границе σ функция G удовлетворяет условию

$$G|\sigma=0;$$

б) в двумерном случае

$$G(M,\ P)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}+v(M,\ P). \qquad (24)$$

Если функция Грина известна, то решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0,$$
$$u|_\sigma = f$$

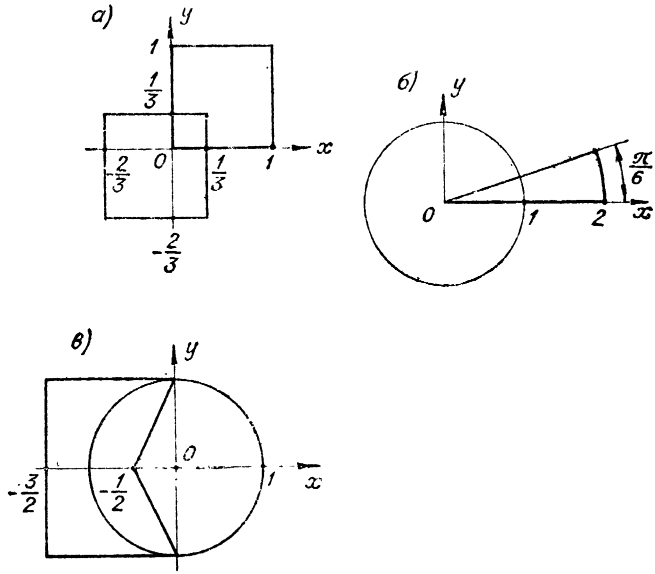
задается формулой

$$u(M) = -\int_\sigma f(P) \frac{\partial G}{\partial n_P} d\sigma, \tag{25}$$

где $\frac{\partial G}{\partial n_P}$ — производная функции G на границе σ, взятая по направлению внешней нормали к σ.

В качестве литературы по этому вопросу можно порекомендовать книгу А. Н. Тихонова, А. А. Самарского «Уравнения математической физики» (Изд. 3-е. М., «Наука», 1966, гл. IV, § 4).

168. Доказать разрешимость задачи Дирихле для составной области, предполагая ее разрешимость у исход-



ных областей. Дать оценки скорости сходимости альтернирующего процесса Шварца:

169. Пусть $u(x, y)$ внутри квадрата $0<x<1$, $0<y<1$ удовлетворяет следующим условиям: $u_{xx}+u_{yy}=0$, $u(x, y) \geqslant -2$, а в центре квадрата $u(1/2, 1/2) \leqslant \leqslant 1$. Оценить: а) $|u_{xy}|$ в точке $(3/8, 3/8)$; б) оценить сверху $u(1/8, 1/8)$.

170. Пусть $u(x, y)$ — гармоническая внутри равностороннего треугольника ABC; $u(P)<1$, где P — центр тяжести треугольника. Оценить сверху $u(Q)$, если точка Q лежит на отрезке AP и $AQ = \frac{1}{2} QP$.

171. Пусть $u(x, y)$ — гармоническая внутри области

$$D\{x > 0, y > 0, x + y < 1\} \text{ и } \iint_D u^2 dxdy \leqslant \frac{1}{2}.$$

Оценить $|u_{xxxy}|$ в точке $Q(^1/_3, {}^1/_3)$.

172. Пусть $u(x, y)$ — гармоническая внутри области

$$D\{x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\} \text{ и}$$

$$\text{и } \iint_D (x^2 + y^2) u^2 (x, y)\, dxdy < 1.$$

Оценить $|u_{xy}|$ в точке $Q(^1/_2, {}^1/_2)$.

173. Пусть $u(x, y)$ — гармоническая и положительна внутри квадрата $0<x<6$, $0<y<1$ и, кроме того,

$$\int_0^4 \int_0^4 u^2 (x, y)\, dxdy < 1.$$

Оценить сверху $u(x, y)$ в точке $P(5,2)$. Можно ли оценить $|u_x|$ и $|u_y|$ в той же точке?

174. Построить функцию Грина и решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве $z \geqslant 0$. Какие ограничения надо наложить на решение, чтобы обеспечить его единственность?

175. Решить с помощью функции Грина задачу Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости $y>0$, если

$$u|_{y=0} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ V & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

176. Построить функцию Грина для следующих областей:

а) слой пространства $0 \leqslant z \leqslant h$;

б) двугранный угол величины $\alpha = \frac{\pi}{n}$, где n — натуральное число.

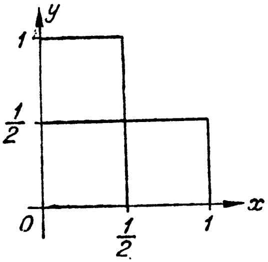
177. Построить функцию Грина для шара радиуса a. С помощью функции Грина решить внутреннюю задачу Дирихле.

178. Построить функцию Грина для следующих областей:

а) внутри полукруга;

б) внутри сферического слоя с радиусом a и b.

179. Сделать два приближения по методу Шварца для задачи $\Delta u=0$ внутри области



$u(0,\ y)=0,\ \ 0\leqslant y\leqslant 1,$
$u(x,\ 0)=0,\ \ 0\leqslant x\leqslant 1,$
$u(x,\ 1/2)=\sin 2\pi x,\ \ 1/2\leqslant x\leqslant 1,$
$u(1/2,\ y)=-\sin 2\pi y,\ 1/2\leqslant y\leqslant 1,$
$u(1,\ y)=0,\ \ 0\leqslant y\leqslant 1/2,$
$u(x,\ 1)=0,\ \ 0\leqslant x\leqslant 1/2.$

180. Можно ли получить с помощью вариационного принципа Дирихле решение задачи Дирихле в круге $0\leqslant r\leqslant R$, если:

$$\text{а)}\ u(R,\ \varphi)=\begin{cases} 0 & \text{при } 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2},\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2[4n^2\varphi]}{n^2} & \text{при } \frac{3\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant 2\pi;\end{cases}$$

$$\text{б)}\ u(R,\ \varphi)=\begin{cases} 0 & \text{при } 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2[3^n\varphi]}{n^3} & \text{при } \pi\leqslant\varphi\leqslant 2\pi;\end{cases}$$

в) $u(R,\ \varphi)=|\sin 2\varphi|$; г) $u(R,\ \varphi)=|\sin\varphi|$.

181. На двух концентрических окружностях заданы, соответственно, значения функции $u(r_0,\ \varphi)=0$ и $u(r_1,\ \varphi)=1$. Показать, что функция u допускает кусочно-гладкое продолжение внутрь кольца с конечным интегралом Дирихле.

182. В условиях предыдущей задачи показать, что интеграл Дирихле от гармонической функции $u=\dfrac{\ln\frac{r}{r_0}}{\ln\frac{r_1}{r_0}}$ не превосходит интеграла Дирихле от функции $\tilde{u}=\dfrac{r-r_0}{r_1-r_0}$. Решить задачу непосредственным сравнением интегралов Дирихле от функций u и $\tilde{u}$.

183. На контуре прямоугольника $0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 1$ заданы краевые условия

$$u(x,\ 0)=\begin{cases} x & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x & \text{при } 1\leqslant x\leqslant 2;\end{cases}$$

$$u(x,\ 1)=u(0,\ y)=u(2,\ y)=0.$$

Показать, что можно найти кусочно-гладкую функцию, определенную во всем прямоугольнике, удовлетворяющую краевым условиям, для которой интеграл Дирихле будет конечен.

184. Можно ли показать то же, что и в предыдущей задаче, для следующих краевых условий:

$$u(x, 0) = u(0, y) = 0;$$
$$u(x, b) = \frac{x}{a}, \quad u(a, y) = \frac{y}{b};$$
$$0 \leqslant x \leqslant a, \ 0 \leqslant y \leqslant b.$$

185. Разрешима ли задача Гильберта для уравнений

$$\begin{cases} u_x - v_y = 0, \\ u_y + v_x = 0 \end{cases}$$

в круге $x^2 + y^2 < 1$ с граничным условием

$$[5\cos\varphi + \sin 2\varphi]\, u(\cos\varphi, \sin\varphi) - [5\sin\varphi - \cos 2\varphi] \times$$
$$\times v(\cos\varphi, \sin\varphi) = 0?$$

§ 7. СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ

Этот параграф иллюстрирует основные положения теории представлений группы вращений и вытекающие по этой теории свойства сферических функций.

По этим вопросам можно рекомендовать следующую литературу:

1. **Любарский Г. Я.** Теория групп и ее применение в физике. М., Физматгиз, 1957.
2. **Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.** Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М., Физматгиз, 1958.
3. **Наймарк М. А.** Линейные представления группы Лоренца. М., Физматгиз, 1958.
4. **Виленкин Н. Я.** Специальные функции и теория представлений групп. М., «Наука», 1965.

186. Доказать, что любых два однородных гармонических полинома, один из которых 3-й степени, а другой — 5-й, ортогональны в смысле скалярного произведения:

$$(P, Q) = \frac{3}{4\pi} \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1} P(x, y, z)\, Q(x, y, z)\, dx\,dy\,dz.$$

187. То же самое сделать для полиномов 2-й и 5-й степени, если скалярное произведение брать в виде

$$(P, Q) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, P(x, y, z)\, Q(x, y, z) \times$$
$$\times\, dxdydz.$$

188. То же самое сделать для полиномов 5-й и 7-й степени, если скалярное произведение брать в виде

$$(P, Q) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty e^{-x^2-y^2-z^2}\, P(x, y, z)\, Q(x, y, z)\, dxdydz.$$

189. Представить функцию x^3 в виде

$$x^3 = P_3(x, y, z) + (x^2+y^2+z^2)\, P_1(x, y, z),$$

где P_1 и P_3 — гармонические полиномы 1-й и 3-й степени.

190. Пусть G — мультипликативная группа отличных от нуля комплексных чисел. Доказать, что существует представление G матрицами 2-го порядка с вещественными элементами.

191. Доказать, что все конечно-мерные представления какой-либо группы G, эквивалентные данному, эквивалентны между собой.

192. Доказать, что если во всех матрицах конечномерного представления некоторой группы совершить одну и ту же перестановку строк и столбцов, то полученные после такой перестановки матрицы образуют представление, эквивалентное исходному.

193. Пусть $G = [a]$ — бесконечная циклическая группа. Рассмотрим отображение

$$T(a^n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Доказать, что T — приводимое представление. Найти соответствующие инвариантные подпространства. Будет ли T вполне приводимым?

194. Пусть $T_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ — представления группы квадратными матрицами порядков m_i. Обозначим через T следующее отображение группы G в группу квадратных невырожденных матриц порядка $n = m_1 + \ldots + m_k$. Каждому элементу $g \in G$ сопоставляется клеточно-диагональная матрица $T(g)$ с диагональными клетками $T_1(g), \ldots, T_k(g)$. Доказать, что T — представление матрицами порядка n.

195. Найти все неприводимые конечно-мерные представления аддитивной группы вещественных чисел, все неприводимые унитарные представления.

196. Найти все неприводимые конечно-мерные унитарные представления группы вращений плоскости, или, что то же самое, группы ортогональных матриц с определителем $+1$ (группа $SO(2)$)

$$g(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

197. Рассматривая тождественное отображение $g(\varphi)\to g(\varphi)$ как представление группы $SO(2)$, разложить его на одномерные.

198. Выписать базис в пространстве однородных гармонических полиномов 4-й степени от двух независимых переменных. Ввести какое-нибудь скалярное произведение и подсчитать норму векторов базиса.

199. Выписать базис в пространстве однородных гармонических полиномов 3-й степени от трех независимых переменных. Определить инфинитезимальные операторы поворотов вокруг координатных осей и привести соответствующие им матрицы в выбранном базисе.

200. Доказать, что гармонический полином, равный нулю на сфере

$$x^2+y^2+z^2=x+y+z,$$

тождественно равен нулю.

201. Коэффициенты a_{ijk} полинома

$$\sum_{i+j+k=4} a_{ijk}\,x^i y^j z^k$$

при повороте системы координат преобразуются по некоторому представлению группы вращений. На какие неприводимые это представление раскладывается?

202. Выписать явный вид полиномов E_n^{-m}, E_n^m, образующих базис в пространстве гармонических полиномов 2-й степени и матрицы представления, отвечающие поворотам на $\pi/4$ вокруг осей z и y. Полиномы E_n^{-m}, E_n^m определяются так:

$$E_{|m|}^m=\begin{cases}1, \ (m=0)\\ \sqrt{2\dfrac{3\cdot 5\ldots(2|m|-1)(2|m|+1)}{2\cdot 4\ldots(2|m|-2)\,2|m|}}\,[x+i\,(\operatorname{sign} m)y]^m, \\ \qquad\qquad (m\neq 0);\end{cases}$$

$$E_{|m|+1}^{m}=\frac{2|m|+1}{\sqrt{2|m|+1}}zE_{|m|}^{m};$$

$$E_{n}^{m}=\sqrt{\frac{(2n-1)(2n+1)}{n^2-m^2}}zE_{n-1}^{m}-\sqrt{\frac{2n+1}{2n-3}\cdot\frac{(n-1)^2-m^2}{n^2-m^2}}\times$$

$$\times E_{n-2}^{n}\ (n\geqslant m+2).$$

203. Доказать, что если $P(x, y, z)$ — однородный гармонический полином степени n, то

$$\left[\left(z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z}\right)^2+\left(x\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\right]P_n(x, g, z)=$$

$$=-n(n+1)P_n(x, y, z).$$

204. Проверить, что для группы вращений трехмерного пространства

$$(g_{\varphi_1}g_\theta g_{\varphi_2})^{-1}=(g_{\pi-\varphi_2}g_\theta g_{\pi-\varphi_1}),$$

где g_φ — матрица поворота на угол φ вокруг оси z; g_θ — матрица поворота на угол θ вокруг оси y.

205. Проверить, что для операторов

$$A=z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z},\quad B=x\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial x},\quad C=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}$$

действительно выполнены соотношения коммутации

$$AB-BA=C,\ BC-CB=A,\ CA-AC=B.$$

206. Для неприводимых представлений группы вращений в четно-мерном пространстве имеем

$$T_{g(\omega+2\pi)}=-T_{g(\omega)},$$

где $g(\varphi)$ — вращение на угол ω вокруг оси z. Доказать, что это равенство верно для вращения вокруг любой оси. Рассмотреть аналогичные тождества для неприводимых представлений в нечетно-мерном пространстве.

207. Представление группы вращений в пространстве всех однородных полиномов степени n разложить на неприводимые.

208. То же сделать для неоднородных полиномов степени n. Показать неоднозначность разложения.

209. Вращения сферы допускают представление дробно-линейными преобразованиями плоскости с матрицами

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{pmatrix},\quad (\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}=1).$$

При этом вращению $g_z(\omega)$ вокруг оси z на угол ω соответствует $\alpha=e^{\frac{i\omega}{2}}, \beta=0$; $g_x(\omega)$ аналогично $\alpha=\cos\frac{\omega}{2}$, $\beta=i\sin\frac{\omega}{2}$. Найти α и β, соответствующие $g_y(\omega)$.

210. Доказать, что операторы A, B, C из **205** задачи удовлетворяют тождеству

$$\frac{1}{2}(iA+B)(iA-B)+\frac{1}{2}(iA-B)(iA+B)+(iC)^2 = \\ = -(A^2+B^2+C^2).$$

Показать, что оператор $A^2+B^2+C^2$ перестановочен с A, B, C.

211. Доказать, что

$$(A^2+B^2+C^2)\,E_n^m = -n(n+1)\,E_n^m$$

(см. задачи **205, 210**).

212. Выписать матричные элементы спинорного представления, если в качестве базиса взять элементы

$$\hat{E}_n^m = (-1)^m E_n^{-m},$$

где $E_n^m = \sqrt{\dfrac{(2n+1)\,!}{(n-m)\,!\,(n+m)\,!}}\, t^{n-m} w^{n+m}$.

Сделать это при $n=\frac{1}{2}$ и при $n=1$. Спинорное представление в пространстве однородных полиномов

$$f(t, w) = \sum_{m=-n}^{m=n} \alpha_m E_n^m$$

задается как представление группы $SU(2)$ матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

с определителем, равным 1, порожденным преобразованием независимых переменных

$$\begin{cases} t' = \alpha t + \beta w, \\ w' = -\bar{\beta} t + \bar{\alpha} w. \end{cases}$$

213. Представление $SU(2)$ задается формулой

$$w_i' = \alpha w_i + \beta t_i;$$
$$t_i' = -\bar{\beta} w_i + \bar{\alpha} t_i$$

в пространстве четырехмерных полиномов

$$F=P_1t_1t_2+P_2t_1w_2+P_3t_2w_1+P_4w_1w_2.$$

Определить инфинитезимальные операторы этого представления.

214. На какие неприводимые представления раскладывается представление группы $SU(2)$ из задачи **213**?

215. Для решения задачи Дирихле

$$u(x, y, z) = Q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^k} Q_k(x, y, z),$$

где

$$Q_k(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} q_k(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) f(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi,$$

выполняются оценки

$$\left|\frac{1}{R^k} Q_k(x, y, z)\right| \leqslant \text{const}\,\frac{1}{K^{3/2}}.$$

Доказать, что всякую непрерывную функцию на сфере можно как угодно точно приблизить конечной линейной комбинацией гармонических полиномов (теорема о полноте множества гармонических полиномов на сфере).

216. Пусть

$$f(t, w) = \sum_{m=-n}^{n} a_m t^{n+m} w^{n-m} \qquad \left(n=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots\right)$$

— однородный полином (целый) степени $2n$. Вводим скалярное произведение

$$(f, g) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\left(e^{i\varphi}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}, 1\right)\overline{g\left(e^{i\varphi}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}, 1\right)}\times$$

$$\times \sin^{4n}\frac{\theta}{2}\sin\theta d\theta d\varphi.$$

Оно инвариантно относительно преобразования

$$T_g f(t, w) = f(\alpha t+\beta w, -\bar{\beta}t+\bar{\alpha}w)$$

(спинорного представления группы вращений), где матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

унитарна и ее определитель равен 1. Его можно записать в виде

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z, 1)\overline{g(z, 1)}}{(1+z\bar{z})^{2n+2}}\, dxdy.$$

Показать, что оно же равно

$$(f, g) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{e^{i\psi}}{\sqrt{1+|z|^2}}\right) \times$$

$$\times\, g\left(\frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{e^{i\psi}}{\sqrt{1+|z|^2}}\right) \frac{dxdyd\psi}{(1+|z|^2)^2}.$$

217. Инфинитезимальные операторы поворотов

$$A = \zeta \frac{\partial}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad B = \xi \frac{\partial}{\partial \zeta} - \zeta \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad C = \eta \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial}{\partial \eta}$$

рассмотреть в сферических координатах, получить

$$iA \pm B = e^{\mp i\psi}\left[i \frac{\partial}{\partial \theta} \pm \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi}\right], \quad iC = i \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

218. Применяя операторы $iA \pm B$, iC к базисным полиномам, получить рекурентные соотношения для них.

219. Мы имеем $\zeta E_n^m = \mathrm{const}\, E_{n+1}^m + \mathrm{const}\, E_{n-1}^m$. Какие рекурентные соотношения между полиномами Лежандра отсюда следуют? (Определение E_n^m см. в задаче **202**).

220. Пусть в пространстве L со скалярным произведением (x, y) действует представление T конечной группы $G = \{e, g_1, \ldots, g_N\}$. Доказать, что билинейная форма

$$\{x, y\} = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} (T(g)\, x,\ T(g)\, y), \quad x, y \in L$$

есть новое скалярное произведение, относительно которого все операторы представления унитарны.

221. Доказать, что любое представление конечной группы имеет эквивалентное унитарное представление.

222. Выписать матрицы инфинитезимальных операторов поворотов вокруг оси $(x=0,\ y=2z)$ и их коммутаторов. Как восстановить по ним матрицы однопараметрических подгрупп поворотов вокруг этой оси?

§ 8. РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ

Семейство функций $\{u_n(x)\}$ называется равномерно ограниченным, если найдется такая постоянная M, что

$$|u_n(x)| < M$$

для всех n.

Семейство функций $\{u_n(x)\}$ называется равностепенно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что, как только

$$|x_1 - x_2| < \delta$$

$$|u_n(x_1) - u_n(x_2)| < \varepsilon,$$

причем δ не зависит от x и n.

Для решения задач № 223—233 необходимо знание материала гл. II § 15—17 книги С. К. Годунова «Уравнения математической физики». Задачи № 234—244 основаны на материале гл. V той же книги.

223. Будет ли система функций $u_n(x) = \sin nx$ равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной на интервале $[-\pi, \pi]$?

224. Будет ли система функций

$$u_n(x, y) = \frac{2n+1}{n+1}x + \frac{n}{3n+2}y$$

равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной в квадрате $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$?

Оценить ε-энтропию множества вектор-функций $[u(x), v(x)]$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, удовлетворяющих неравенствам:

225. $|5u_x - 3v_x| + |u(0)| + |v(1)| \leqslant 1$;

226. $|u_x + v_x| + |u_x - v_x| + |u(0)| + |v(1)| \leqslant 1$;

227. $\int\limits_0^1 (u_x^2 + 100v_x^2)\,dx + u^2(0) + v^2(0) \leqslant 1$;

228. $\int\limits_0^1 (100u_x^2 + v_x^2 + u^2 + 10000v^2)\,dx \leqslant 1$;

229. $\int\limits_0^1 (u_x^2 + 2u_xv_x + v_x^2)\,dx \leqslant 1$,

$$|u_x| \leqslant 1, \quad |u(1/2)| + |v(1/2)| \leqslant 1,$$

230. Является ли семейство всех дифференцируемых функций $\{u(x)\}$ вещественного переменного $0<x<\infty$, каждая из которых удовлетворяет неравенствам

$$|u'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}+1, \quad |u(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}+1,$$

равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным? Компактно ли оно относительно равномерной сходимости?

231. Является ли семейство всех функций $\{u(x)\}$ вещественного переменного $-\infty<x<\infty$, каждая из которых удовлетворяет неравенствам

$$|u(x_1)-u(x_2)| \leqslant \sqrt{|x_1-x_2|}, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^4(x)\,dx \leqslant 1,$$

равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным? Компактно ли оно относительно равномерной сходимости?

232. Доказать компактность (относительно равномерной сходимости) семейства $\{u(x)\}$ функций одного переменного $0 \leqslant x \leqslant 1$, каждая из которых удовлетворяет неравенствам

$$|u(x_1)-u(x_2)| \leqslant \sqrt[4]{|x_1-x_2|}, \quad \int\limits_0^1 u^2(x)\,dx \leqslant 1.$$

233. Доказать компактность (относительно равномерной сходимости) семейства $\{u(x)\}$ функций одного переменного $0 \leqslant x \leqslant 1$, каждая из которых удовлетворяет неравенствам

$$|u(x_1)-u(x_2)| \leqslant \sqrt{|x_1-x_2|}, \quad \int\limits_0^1 u^2(x)\,dx \leqslant 1.$$

234. Рассматривается явная конечно-разностная схема

$$u_{k,\,j+1} = u_{k,\,j} + a^2 \frac{\tau}{h^2}\left(u_{k-1,\,j} - 2u_{k,\,j} + u_{k+1,\,j}\right) + f_{k,\,j}\tau;$$

$$u_{k0} = \varphi_k, \quad u_{0j} = \mu_j, \quad u_{nj} = \nu_j,$$

отвечающая задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t);$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = \nu(t).$$

Предполагается, что начальные данные конечно-разностной задачи взяты неточно $\tilde{u}_{k0}=\varphi_k+\Delta_k$, где Δ_k — погрешность. Исследовать эволюцию погрешности, допущенную в начальных данных, методом разделения переменных в конечно-разностной схеме. Рассмотреть случай, когда $r=a^2\frac{\tau}{h^2}\leqslant\frac{1}{2}$, $r>\frac{1}{2}$.

235. Как и в предыдущей задаче, исследовать эволюцию погрешности, допущенную в начальных данных, для случая неявной схемы:

$$u_{k,\,j+1}=u_{kj}+a^2\frac{\tau}{h^2}(u_{k-1,\,j+1}-2u_{k,\,j+1}+u_{k+1,\,j+1})+f_{kj}\tau.$$

236. Тот же самый вопрос для следующей схемы (рассматривается уравнение теплопроводности):

$$u_{k,\,j+2}=u_{kj}+a^2\frac{\tau}{h^2}(u_{k-1,\,j+1}-2u_{k,\,j+1}+u_{k+1,\,j+1})+f_{k,\,j+1}\tau.$$

На скольких временных слоях здесь надо задавать начальные значения? Как Вы предложите их определить по начальным данным решаемой задачи?

237. Процесс Дугласа — Рэкфорда. Укажите, какие параметры и сколько итераций в цикле следует взять при решении задачи Дирихле:

а) на квадрате $0\leqslant x\leqslant 5$, $0\leqslant y\leqslant 5$ с квадратной сеткой 3000×3000 точек;

б) на квадрате $0\leqslant x\leqslant 2$, $0\leqslant y\leqslant 2$ с квадратной сеткой $11\,000\times 11\,000$ точек;

в) на квадрате $0\leqslant x\leqslant 8$, $0\leqslant y\leqslant 8$ с квадратной сеткой 4000×4000 точек;

г) на квадрате $0\leqslant x\leqslant 7$, $0\leqslant y\leqslant 7$ с квадратной сеткой 2000×2000 точек.

238. Выписать расчетные формулы какой-либо неявной разностной схемы для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\left[(1+\sin^2 x)\frac{\partial u}{\partial x}\right];$$

$$u(0,\,t)=0,\quad u(1,\,t)=\sin t,\quad u(x,\,0)=0,\qquad 0\leqslant x\leqslant 1$$

и обсудить условия ее применимости.

239. То же самое проделать для системы

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+(1-2x)\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial t}+(1-2x)\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\end{cases}$$

$$u(0,\ t)=0,\quad u(1,\ t)=0,$$
$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad v(x,\ 0)=\varphi(x),$$
$$0\leqslant x\leqslant 1.$$

240. То же самое проделать для уравнения
$$\frac{\partial u}{\partial t}=4\frac{\partial u}{\partial x};$$
$$u(3,\ t)=0,\ u(x,\ 0)=\varphi(x),\ 0\leqslant x\leqslant 3.$$

241. Построить разностную схему решения задачи Дирихле
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(1+xy)\frac{\partial u}{\partial y}\right]=0;$$
$$0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ u|_{\Gamma}=f(s).$$

Дать обоснование этой схемы расчета гладких решений (апроксимация и устойчивость), аналогичные обоснованию такой же схемы для уравнения Лапласа.

242. Построить разностную схему и привести все расчетные формулы для следующей задачи:
$$(1+\cos^2 x)\frac{\partial u}{\partial t}=e^{-\sin(x+t)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$
$$u(0,\ t)=\sin t,\ \frac{\partial u(\pi,\ t)}{\partial x}+u(\pi,\ t)=\cos t,\quad 0\leqslant x\leqslant\pi$$

(схему желательно построить неявную и дать оценки обусловленности прогонки).

243. Поставить разумную смешанную задачу в области $t>0,\ 0<x<3$ для системы
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+x\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial p}{\partial x}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial p}{\partial t}+x\dfrac{\partial p}{\partial x}+4\dfrac{\partial u}{\partial x}=0.\end{cases}$$

Выписать расчетные формулы какой-либо неявной разностной схемы и предложить способ решения разностных уравнений.

244. При проведении процесса Дугласа — Рэкфорда (разностная задача Дирихле в квадрате $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant\leqslant y\leqslant 1$) значение итерационного параметра было фиксировано (а не менялось циклически). Сколько должно потребоваться итераций для уменьшения погрешности в 500 раз на сетке $N\times N$ точек.

ОТВЕТЫ

§ 1. Характеристики, соотношение на характеристиках, приведение к каноническому виду

1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2+ac}}{a}$. 2. $\dfrac{2}{3}(-y)^{3/2}=\pm x+C$ при $y<0$; при $y>0$ вещественных характеристик нет.

3. $2\sqrt{y}=\pm x+C$ при $y>0$; при $y<0$ вещественных характеристик нет.

4. $2x^{1/2}+y=C_1$; $-2x^{1/2}+y=C_2$; $x+y=C_3$.

5. Вещественных характеристик нет.

6. $y=C_1x$, $xy=C_2$. 7. $x\pm y=C$.

8. $y=C$. 9. $\arcsin x\pm\arcsin y=C$.

10. Вещественных характеристик нет.

11. $\dfrac{dy}{dx}=-2u_xu_y\pm\sqrt{2u_x^2+2u_y^2-1}$.

12. $$\frac{(dy)^2}{\sqrt{1+u_y^2}}+u_xu_y\left[\frac{1}{(\sqrt{1+u_y^2})^3}+\frac{1}{(\sqrt{1+u_x^2})^3}\right]dx\,dy+\frac{(dx)^2}{\sqrt{1+u_x^2}}=0.$$

13. $\dfrac{(\alpha-\delta)^2}{4}+\gamma\beta>0$.

14. $\dfrac{d}{dw}[w\rho(w)]>0$, где $w=\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2}$.

15. $\tau\left[\tau^2-c_0^2(\xi^2+\eta^2)\right]=0$.

17. $\dfrac{\mu\varepsilon}{c_0^2}\tau^2\left(\dfrac{\mu\varepsilon}{c_0^2}\tau^2-\xi^2-\eta^2-\zeta^2\right)^2=0$. Указание: при вычислении

характеристического определителя удобно пользоваться формулой

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - BC|,$$

если $CA = AC$, где A, B, C, D — матрицы.

18. $(\tau^2 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2)^2 = 0$. См. указание к предыдущей задаче.

19. $$\tau^2 \{\varkappa\sigma\omega\tau^4 - \tau^2 [\varkappa\sigma(\xi^2 + \eta^2) + \varkappa\omega(\eta^2 + \zeta^2) + \sigma\omega(\xi^2 + \zeta^2)] + (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(\sigma\xi^2 + \varkappa\eta^2 + \omega\zeta^2)\} = 0.$$

21. Три плоскости: 1) $y = 0$; 2) $-2x + \left(-\frac{3}{5} + \sqrt{\frac{19}{50}}\right)y + t = 0$;

3) $-2x + \left(-\frac{3}{5} - \sqrt{\frac{19}{50}}\right)y + t = 0$.

22. Три плоскости: 1) $x = y$; 2) $x + 3y - 2t = 0$; 3) $3x + 37y - 20t = 0$.

23. Пучок плоскостей $x + \alpha y - (1 + 2\alpha)t = 0$.

24. Две плоскости: $x + y + \sqrt{2}\,t - 1 = 0$, $x + y - \sqrt{2}t - 1 = 0$.

25. $dv + u\,dt = 0$ на $x + t = C_1$; $du + v\,dt = 0$ на $x - 2t = C_2$.

26. $$\pm \frac{\sqrt{3}}{v} d\varphi_1 + \frac{1}{v} d\varphi_0 + dt\left(-q_0 + \frac{\varphi_1}{r} + \alpha_0\varphi_0 \pm \sqrt{3}\,\alpha_1\varphi_1\right) = 0, \text{ если } r = \pm\frac{v}{\sqrt{3}}t.$$

27. Если $x^2 + t^2 = C_1$, то $u_2 = C_2$; если $x = C_3 t$, то $t(1 + x^2)du_1 + t\,du_2 + 2u_1x^2dt = 0$.

28. $$2\tau d\Psi \pm dP\sqrt{1 - \tau'^2} = 0, \text{ если } \frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2\Psi \pm \sqrt{1 - \tau'^2}}{\cos 2\Psi + \tau'}.$$

29. 1) если $u^2 + v^2 < c^2$ (дозвуковой поток), то система эллиптическая, вещественных характеристик нет;

2) если $u^2 + v^2 > c^2$ (сверхзвуковой поток), то система гиперболическая.

Тогда $dv(c^2 - v^2) + du[-uv \mp \sqrt{c^2(u^2 + v^2 - c^2)}] = 0$ вдоль характеристик $(c^2 - v^2)\,dx = [-uv \mp \sqrt{c^2(u^2 + v^2 - c^2)}]\,dy$.

30. $u_1 = c_1$, если $x - t = c_2$; $u_2 = c_3$, если $x - \frac{t^3}{3} = C_4$; $u_3 = C_5$, если $x + t = C_6$; $u_4 = C_7$, если $x + t^3 = C_8$.

31. Характеристический определитель

$$I_N = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{3} & -\lambda & \frac{2}{3} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \,.\,.\, 0 & \frac{k}{2k+1} & -\lambda & \frac{k+1}{2k+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{N-1}{2N-1} & -\lambda & \frac{N}{2N-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{N}{2N+1} & -\lambda \end{vmatrix}$$

связан с полиномами Лежандра. А именно $I_k = \alpha_k P_{k+1}(\lambda)$, где $\alpha_k = \mathrm{const}$. Так как полиномы Лежандра имеют все корни различные и вещественные, то система гиперболическая.

Соотношение на характеристиках:

$$u_0 + 3P_1(\lambda_k)\,u_1 + \ldots + (2N+1)\,P_N(\lambda_k)\,u_N = C$$

вдоль характеристики

$$x - \lambda_k t = C_k, \text{ где } \lambda_k \text{ корень } I_N(\lambda) = 0.$$

33. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \text{ где } u_1 = u - v, \ u_2 = u + v. \end{cases}$$

34. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + 2t\,\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \text{ где } u_1 = u + v, \ u_2 = u - v. \end{cases}$$

35. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + (1+x)\,\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 = 0, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - (1+x)\,\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 = 0, \text{ где } u_1 = u + v, \ u_2 = u - v. \end{cases}$$

36. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{x^3+x-1}{2(1+x^2)}\,u_1 + \dfrac{x^3+x+1}{2(1+x^2)}\,u_2 - \\ \quad - \dfrac{x(u_1 - v_1)}{2\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2)} = 0, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \dfrac{x^3+x+1}{2(1+x^2)}\,u_1 + \dfrac{x^3+x-1}{2(1+x^2)}\,u_2 - \\ \quad - \dfrac{x(u_1 - v_1)}{2\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2)} = 0, \end{cases}$$

где $u_1 = u + \sqrt{1+x^2}\,v, \quad u_2 = u - \sqrt{1+x^2}\,v.$

37. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + 3\dfrac{\partial u_1}{\partial x} = u_2, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + 4\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 8u_1, \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} - 4\dfrac{\partial u_3}{\partial x} = 2u_2, \end{cases}$$

где $u_1 = w$, $u_2 = 2u + v + 2w$, $u_3 = -14u + 7v + 2w$.

38. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + 11\dfrac{\partial u_1}{\partial x} = u_1 + u_2, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = -u_1 - u_2, \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} + 2\dfrac{\partial u_3}{\partial x} = 3u_1 + 2u_2 + u_3, \end{cases}$$

где $u_1 = u + v$, $u_2 = u - v$, $u_3 = -4u + 5v + 9w$.

39. Нет.

42. $$\begin{cases} u = g(t + 2x) + f(t - x^2), \\ v = g(t + 2x) - f(t - x^2). \end{cases}$$

43. $$\begin{cases} u = (\sqrt{5} + 1) f(3x - \sqrt{5}y) + (\sqrt{5} - 1) g(3x + \sqrt{5}y), \\ v = (\sqrt{5} + 3) f(3x - \sqrt{5}y) + (\sqrt{5} - 3) g(3x + \sqrt{5}y). \end{cases}$$

44. $$\begin{cases} u = f(9t - x) + g(t + x), \\ v = f(9t - x) - g(t + x), \\ w = \dfrac{3}{11} f(9t - x) + 3g(t + x) + \omega(2t + x). \end{cases}$$

45. $$\begin{cases} u_1 = f(x - t) - h(x + 2t) + 3g(x - 3t), \\ u_2 = 3h(x + 2t) + g(x - 3t), \\ u_3 = 3h(x + 2t) + 6g(x - 3t). \end{cases}$$

§ 2. Краевые задачи

46. $$\sigma(x, t) = \frac{\psi\left(x + \sqrt{\frac{E}{\rho}}\, t\right) + \psi\left(x - \sqrt{\frac{E}{\rho}}\, t\right)}{2} + \sqrt{\rho E}\, \frac{\varphi\left(x + \sqrt{\frac{E}{\rho}}\, t\right) - \varphi\left(x - \sqrt{\frac{E}{\rho}}\, t\right)}{2};$$

$$w(x,t)=\frac{\psi\left(x+\sqrt{\frac{E}{\rho}}\,t\right)-\psi\left(x-\sqrt{\frac{E}{\rho}}\,t\right)}{2\sqrt{\rho E}}+$$
$$+\frac{\varphi\left(x+\sqrt{\frac{E}{\rho}}\,t\right)+\varphi\left(x-\sqrt{\frac{E}{\rho}}\,t\right)}{2}.$$

47. При плоской волне $a^2+b^2+c^2=\frac{1}{A^2}$; при сферической волне $a=\pm\frac{1}{A}$; цилиндрической волны нет.

48. $u=t,\ v=2x+t.$ **49.** $u=-t(1+t),\ v=2x-t+t^2.$

50. $u=-t,\ v=x+2t.$

51. $u=\varphi\left(\frac{x+t}{2}\right)+\varphi\left(\frac{x-t}{2}\right)-\varphi(0).$

52. $u_1=\frac{5y-x}{4}-\frac{25}{16}(x-y)^2,\ u_2=\frac{x-5y}{20}+\frac{25}{16}(x-y)^2.$

54. 1, 4, 5, 7, 10 — правильно (при согласовании с начальными условиями), 2, 3, 6, 8, 9 — неправильно.

55. Правильно (при согласовании с начальными условиями).

56. 2, 3, 4 — правильно, 1 — неправильно.

57. 1, 2 — неправильно, 3 — правильно.

69. Область ограничена линиями $x=t,\ x=1-t^2$.

70. $r^2(1-\mu^2)=C^2$, не требуется.

73. Для гиперболичности системы надо, чтобы $\frac{(\alpha-\delta)^2}{4}+\gamma\beta>0$:

1) $\alpha\delta-\gamma\beta=0$; 2) $\alpha\delta-\gamma\beta>0,\ \alpha+\delta>0$;

3) $\alpha\delta-\gamma\beta>0,\ \alpha+\delta<0$.

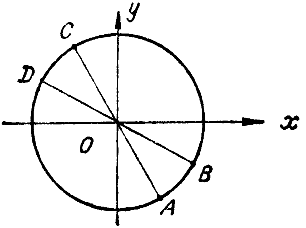
74. Для гиперболичности системы надо, чтобы $\frac{(\alpha-\delta)^2}{4}+\gamma\beta>0$:

1) $\alpha\delta-\gamma\beta<0,\ \nu>0$ или $\alpha\delta-\gamma\beta>0,\ \alpha+\delta>0,\ \nu<0$;

2) $\alpha\delta-\beta\gamma>0,\ \alpha+\delta>0,\ \nu>0$;

3) $\alpha\delta-\beta\gamma>0,\ \alpha+\delta<0,\ \nu<0$;

4) $\alpha\delta-\beta\gamma<0,\ \nu<0$, или $\alpha\delta-\beta\gamma>0,\ \alpha+\delta<0,\ \nu>0$.



75. $\varphi_n(n)=\varphi_{n-1}(n)$
$\psi_n(n)=\psi_{n-1}(n)$.

76. $AC: x+y=0,$
$BD: 2y+x=0.$

Одно краевое условие можно задавать на $\smile AC$ (нельзя задавать $7u_2-8u_1$), второе краевое условие можно задавать на $\smile BD$ (нельзя задавать u_2+8u_1).

77. 1) $\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \dfrac{\partial u_3}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = \dfrac{\partial u_2}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = \dfrac{\partial u_3}{\partial t}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$

78. (1) $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$;

(2) $a_1 = a_2 = b_1 = 0, \quad b_2 = -1$;

(3) неправильно поставлена;

(4) $a_1 = a_2 = b_1 = 0,\ b_2 = -2$;

(5) $a_1 = a_2 = b_1 = 0,\ b_2 = -1$;

(6) $a_1 = a_2 = b_1 = 0,\ b_2 = -1$.

80. Нет. **83.** $a = -2,\ b = 0,\ c = -\dfrac{1}{2}$.

84. Если $u(x, 0) = \varphi(x)$, $v(x, 0) = \psi(x)$ $\omega(x, 0) = \omega(x)$, то $\varphi(0) = 0$, $\psi(1) = 0$, $\omega(0) = 0$, $\omega'(0) = 0$, $1 = \psi(0) - 2\psi'(0)$, $1 = \omega(1) - 8\varphi'(1)$, $16\varphi''(0) - 3\omega''(0) - 9\varphi'(0) = 0$; $1 = 9\omega''(0) - 3\varphi'(0)$, $0 = \varphi(1) - 3\omega'(1) - 8\psi'(1) +$

$$+16\psi''(1) + 8\omega''(1).$$

85. 1) $$u(x, t) = \frac{\varphi_0(x-t) + \varphi_0(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \varphi_1(z)\,dz$$

$$\text{при} \quad 0 < t < x;$$

$$u(x, t) = \psi\left(\frac{x-t}{1-k}\right) + \frac{\varphi_0(x+t) - \varphi_0\left(\dfrac{1+k}{1-k}(x-t)\right)}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1+k}{1-k}(x-t)}^{x+t} \varphi_1(z)\,dz \text{ при } x < t < kx;$$

2) $\varphi_0(0) = \psi(0)$.

86. 1) $u=-\frac{6}{7}t, \quad v=x-\frac{5}{7}t$ при $0<t<x$;

$$u=-\frac{13}{7}x+t, \quad v=-\frac{19}{7}x+3t \text{ при } 0<x<t;$$

2) нет.

89. Некорректна. 90. Некорректна. 91. Некорректна.

94. Пусть $\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}=r_0$. Если $r_0<a$ и $ct<a-r_0$, то решение зависит только от x. Если $a<r_0<2a$ и $ct>r_0+a$, то решение равно нулю. Если $r_0>2a$, то решение равно нулю при $ct<r_0-2a$ и $ct>r_0+2a$.

95. 1) пусть $\sqrt{x_0^2+y_0^2}=r_0$. Если $r_0>3$ и $r_0-3<ct<$ $<\sqrt{1+(r_0-3)^2}$, то решение зависит только от x, y. Если $r_0<1$ и $1-r_0<ct<\sqrt{2}-r_0$, то решение также зависит только от x, y; 2) при $ct<1$ и при $ct>\sqrt{13}$.

96. $$u=\frac{1}{2}\left[\varphi\left(x+y+z+c\sqrt{3}\,t\right)+\varphi\left(x+y+z-c\sqrt{3}\,t\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{2r}\int_{r-t}^{r+t}\rho\psi(\rho)\,d\rho.$$

§ 3. Интеграл энергии и диссипативные краевые условия

99. Все диссипативны.

100. Не диссипативны. Замена: $u=e^{\alpha y}\tilde{u}$, $v=e^{-\alpha y}\tilde{v}$, где

$$y=x-\frac{1}{2} \text{ и } \alpha\leqslant-\frac{1}{2}(2\ln 3+\ln 2).$$

103. Замена: $u_1+3u_2=v_1$, $u_2=v_2$, $u_3=v_3$,

$$\iint_S\left[\frac{v_1^2+v_2^2+v_3^2}{2}\tau+\left(v_2v_3-y^2\frac{v_1^2}{2}\right)\xi+\left((1+t^2)\,v_3v_2-v_2^2\right)\eta\right]dS=0,$$

где (τ, ξ, η) — вектор нормали к S.

104. $I(t)\leqslant I(0)+\dfrac{t}{4\sqrt{\mu\varepsilon}}$.

105. Замена: $\tilde{u}=e^{x}u$, $\tilde{v}=e^{-x}v, I(t)\leqslant I(0)\,e^{4t}$

106. Граничные условия диссипативны; $I(t)\leqslant I(0)$.

107. Замена: $\tilde{u}=e^{x}u$, $\tilde{v}=e^{-x}v$; $I(t)\leqslant I(0)\,e^{16t}$.

108. $I(t)\leqslant I(0)\,e^{6t}$. 109. $I(t)\leqslant I(0)\,e^{14t}$.

110. Замена: $x-\frac{1}{2}=y$, $u=e^{-2y}\tilde{u}$, $v=e^{2y}\tilde{v}$,

$$I(t)\leqslant I(0)\,e^{(4+\operatorname{ch}2)t}.$$

111. $\beta^2 < \frac{a}{b}$, $\alpha^2 < \frac{b}{a}$, $I(t) \leqslant \frac{16}{15}$.

114. $$\int_0^l \left[u^2(x, t) + u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)\right] dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^l \left(\varphi^2(x) + \varphi_x'^2(x) + \psi^2(x)\right) dx.$$

115. Указание: воспользоваться интегралом энергии
$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[2\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right] -$$
$$- \frac{\partial}{\partial y}\left[2\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right] = 0.$$

§ 4. Уравнение Гамильтона — Якоби, область единственности

116. $a = \pm \frac{1}{\sqrt{17}}$.

117. Если $x \geqslant 0$, то $\sqrt{\frac{513}{8}}\,t + 3x - y \leqslant 0$;

если $x \leqslant 0$, то $-\sqrt{\frac{297}{8}}\,t + 3x + y \geqslant 0$.

118. Если $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \end{cases}$ то $\begin{cases} 3t - \sqrt{5}y \leqslant 0, \\ 12t - \sqrt{5}x \leqslant 0; \end{cases}$

если $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \leqslant 0, \end{cases}$ то $\begin{cases} \sqrt{5}y + 3t \leqslant 0, \\ \sqrt{5}x + 12t \leqslant 0. \end{cases}$

119. Если $x \geqslant 0$, то $9t + 3x - y \leqslant 0$;

если $x \leqslant 0$, то $\sqrt{\frac{21}{5}}\,t - x - y \leqslant 0$.

120. Если $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \end{cases}$ то $\begin{cases} \sqrt{5}t - x \leqslant 0, \\ t - 2y \leqslant 0. \end{cases}$

121. Если $x - y > \frac{5}{2}$, то $x + y - 3t \leqslant (x - y - t)^2$;

если $|x - y| \leqslant \frac{5}{2}$, то $2t + x + y \leqslant (x - y)^2$;

если $x - y < -\frac{5}{2}$, то $x + y - 3t \leqslant (x - y + t)^2$.

122. $\begin{cases} t - \dfrac{\sqrt{3}}{v} r \sin\theta \leqslant 0, \\ t - \dfrac{\sqrt{3}}{v}(r - R_1) \leqslant 0, \\ t - \dfrac{\sqrt{3}}{v}(R_2 - r) \leqslant 0, \\ t - \dfrac{\sqrt{3}}{v} r \cos\theta \leqslant 0. \end{cases}$

123. $\begin{cases} 2t - x \leqslant 0, \\ 2t - y \leqslant 0, \\ x + y + \sqrt{5}\,t - 1 \leqslant 0. \end{cases}$

124. а) $\begin{cases} t - x \leqslant 0, \\ t - y \leqslant 0, \\ -t + x + y - 1 \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} t - x \leqslant 0, \\ y \leqslant 0, \\ x - y + t \leqslant 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ t - y \leqslant 0, \\ -x + y - 1 + t \leqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \leqslant 0, \\ -x - y + 2t - 1 \leqslant 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} t - x \leqslant 0, \\ t - y \leqslant 0, \\ (x - t)^2 + y^2 \leqslant 1, \\ x^2 + (y - t)^2 \leqslant 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ t - y \leqslant 0, \\ (x - t)^2 + y^2 \leqslant 1; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} t - x \leqslant 0, \\ y \leqslant 0, \\ x^2 + (y - t)^2 \leqslant 1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \leqslant 0, \\ (x - t)^2 + (y - t)^2 \leqslant 1. \end{cases}$

125. а) $y - x + (1 + 4\sqrt{2})\,t \leqslant 0;$

б) $\sqrt{(x - 2t)^2 + (y - t)^2} + 4t - 1 \leqslant 0.$

126. $x - y + \dfrac{\frac{4}{3}\mu + k}{\rho_0}\sqrt{2}t \leqslant 0, \quad -2x + y + \dfrac{\frac{4}{3}\mu + k}{\rho_0}\sqrt{5}t \leqslant 0.$

127. $5x + 3y - 3t = 0, \quad x - y + t = 0.$

128. $4x + 3t + \left(-1 \pm \dfrac{\sqrt{31}}{4}\right) y = 0.$

129. 1) $x + y + 2t \leqslant 0;$ 2) $x + y - t - 1 \geqslant 0;$

3) $\begin{cases} x + y \leqslant 0, \\ x + y + 2t - 1 \geqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y - 1 \geqslant 0, \\ x + y - t \leqslant 0. \end{cases}$

130. $0 < t < 20, \quad t > 28.$

§ 5. Преобразование Лапласа и метод Фурье для гиперболических систем

131. $x(t) = 4t + 3 - 2e^t$.

132. $x(t) = \dfrac{a}{2n^2}[\sin nt \cos\alpha - nt\cos(nt+\alpha)]$.

133. $\begin{cases} x(t) = e^{3t} - e^{2t}, \\ y(t) = -e^{2t} + e^t, \\ z(t) = e^{3t} - e^{2t} + e^t. \end{cases}$

134. $\begin{cases} x(t) = -1 + 2e^t, \\ y(t) = -3 + 3e^t, \\ z(t) = 1 - e^t. \end{cases}$

135. $\begin{cases} x(t) = \dfrac{28}{9}e^{3t} - e^{-t} - \dfrac{t}{3} - \dfrac{1}{9}, \\ y(t) = \dfrac{28}{9}e^{3t} + e^{-t} - \dfrac{t}{3} - \dfrac{1}{9}. \end{cases}$

136. $\begin{cases} x(t) = -\dfrac{1}{3}e^t - \dfrac{8}{3}e^{4t} + 3e^{5t}, \\ y(t) = \dfrac{1}{3}e^t - \dfrac{4}{3}e^{4t} + e^{5t}. \end{cases}$

137. $\lambda_n = \dfrac{\pi i}{\ln 2} n + O\left(\dfrac{1}{|n|}\right)$.

138. $\lambda_n = i\pi\dfrac{2n-1}{2\ln 2} + O\left(\dfrac{1}{|n|}\right)$.

139. $\lambda_n = i\pi\left(n - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\ln 15 + O\left(\dfrac{1}{|n|}\right)$.

140. $\lambda_n = i\pi\left(n - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\ln 6 + O\left(\dfrac{1}{|n|}\right)$.

141. $\lambda_n = i\pi\dfrac{2n-1}{\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})} +$

$$+\frac{\ln 7 + \ln 2 - \ln(9 - 4\sqrt{2}) + \ln(1+\sqrt{2}) - \dfrac{4-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}}{\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})} + O\left(\frac{1}{|n|}\right).$$

142. $u = \sin\pi x \sin\pi t, \quad v = \cos\pi x\cos\pi t$.

143. $u = \sin\pi x\cos 3\pi t, \quad v = -\dfrac{1}{3}\cos\pi x\sin 3\pi t$.

144. $u = \cos 2\pi t\sin\pi x, \quad v = -\dfrac{1}{2}\sin 2\pi t\cos\pi x$.

145. Метод Фурье применим. **146.** Применим.

147. $\int\limits_0^1 \{u_k \bar{u}_p + v_k \bar{v}_p + x(u_k + v_k)(\bar{u}_p + \bar{v}_p)\}\, dx = 0.$

148. $\int\limits_0^1 \left[(1+x)\, u_k \bar{u}_p + u_k \bar{v}_p + u_p \bar{v}_k + (2-x)\, v_k \bar{v}_p\right] dx = 0.$

149. $u_n = i \sin \frac{2n+1}{2} \pi x, \quad v_n = \cos \frac{2n+1}{2} \pi x.$

150. $u_k = e^{-\frac{\lambda_k}{2} x}, \quad v_k = -\frac{2}{3\lambda_k} e^{-\frac{\lambda_k}{2} x} + \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{2\alpha}{3\lambda_k}\right) e^{\lambda_k x},$

где λ_k — корень $D(\lambda) = \left(1 + \frac{2\alpha}{3\lambda}\right) \beta e^{\lambda} + \left(1 - \frac{2\beta}{3\lambda}\right) \alpha e^{-\frac{\lambda}{2}}.$

151. $\lambda_n = \dfrac{2i\pi n - 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{\varkappa} + O\left(\frac{1}{|n|}\right),$

где $\quad \varkappa = \int\limits_0^{1/2} \dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}}.$

152. $\lambda_n = \dfrac{2i\pi n}{1 + \pi/4} + O\left(\frac{1}{|n|}\right).$ Коэффициенты Фурье вычисляются по следующей формуле.

$$c_k = \int\limits_0^1 \left(\frac{\varphi \cdot \bar{u}_k}{1+x^2} + \psi \cdot \bar{v}_k\right) dx,$$

где u_k, v_k — нормированные собственные функции, а $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — начальные условия.

153. Граничные условия должны иметь вид $u - v = 0$ или $u + 3v = 0$. Коэффициенты Фурье вычисляются по следующей формуле:

$$c_k = \int\limits_0^l \left(2\varphi \bar{u}_k + x\varphi \bar{v}_k + x\psi \bar{u}_k + 5\psi \bar{v}_k\right) dx,$$

где u_k, v_k — нормированные собственные функции, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — начальные условия,

154. Граничные условия должны иметь вид $u+(2+\sqrt{5})v=0$ или $u+(2-\sqrt{5})v=0$. Коэффициенты Фурье вычисляются по следующей формуле:

$$c_k=\int_0^{\pi}\left[5\varphi\cdot\bar{u}_k+\sin x\left(\varphi\bar{v}_k+\psi\bar{u}_k\right)+2\psi\bar{v}_k\right]dx.$$

157. $$u=6\frac{\operatorname{sh}\frac{\lambda}{3}x}{\operatorname{ch}\frac{\lambda}{3}\pi}\left(\frac{\pi}{\lambda^2}-\frac{3}{\lambda^3}e^{\frac{\lambda}{3}\pi}\right)-\frac{18}{\lambda^3}e^{\frac{\lambda}{3}x}+\frac{x^2}{\lambda}+\frac{18}{\lambda^3};$$

$$v=2\frac{\operatorname{ch}\frac{\lambda}{3}x}{\operatorname{ch}\frac{\lambda}{3}\pi}\left(-\frac{\pi}{\lambda^2}+\frac{3}{\lambda^3}e^{\frac{\lambda}{3}\pi}\right)+\frac{6}{\lambda}e^{\frac{\lambda}{3}x}-\frac{2x}{\lambda^2}.$$

158. $$\begin{cases} u=\dfrac{9}{4\lambda^3}e^{\frac{\lambda}{3}x}+\dfrac{9}{4\lambda^3}e^{-\frac{\lambda}{3}(x-1)}\left(e^{\frac{\lambda}{3}}-3\right)+\dfrac{1}{4\lambda^3}e^{-\lambda x}+\dfrac{2}{\lambda^3}-\dfrac{2x}{\lambda^2},\\ v=-\dfrac{3}{4\lambda}e^{\frac{\lambda}{3}x}+\dfrac{3}{4\lambda^3}e^{-\frac{\lambda}{3}(x-1)}\left(e^{\frac{\lambda}{3}}-3\right)+\dfrac{1}{4\lambda^3}e^{-\lambda x}+\dfrac{2}{\lambda^3},\\ w=-\dfrac{2}{\lambda^3}e^{-\lambda x}+\dfrac{x^2}{\lambda}-\dfrac{2x}{\lambda^2}+\dfrac{2}{\lambda^3}. \end{cases}$$

159. $$\begin{cases} u=\dfrac{16}{(\lambda+1)\left[(\lambda+1)^2+16\right]}\dfrac{\operatorname{sh}\frac{\lambda+1}{2}x}{\operatorname{ch}\frac{\lambda+1}{2}\pi}-\\ \qquad\qquad-\dfrac{4}{\left[(\lambda+1)^2+16\right]}\sin 2x,\\ v=-\dfrac{8}{(\lambda+1)\left[(\lambda+1)^2+16\right]}\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\lambda+1}{2}x}{\operatorname{ch}\frac{\lambda+1}{2}\pi}-\\ \qquad\qquad-\dfrac{\lambda+1}{2\left[(\lambda+1)^2+16\right]}\cos 2x+\dfrac{1}{2(\lambda+1)}. \end{cases}$$

160. $\lambda_n=9i\pi n-9\ln 2+O\left(\frac{1}{|n|}\right).$

161. $\lambda_n=1+\frac{(2n-1)9}{2}\pi i+O\left(\frac{1}{|n|}\right).$

162. $\lambda_n=(2n-1)\pi i-\ln 3-\frac{1}{3}+O\left(\frac{1}{|n|}\right).$

163. $$\binom{u}{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 2\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)x\cos\sqrt{10}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)t \\ -\sqrt{10}\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)x\sin\sqrt{10}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)t \end{pmatrix}.$$

164. $$\binom{u}{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{\frac{\pi}{2}+k\pi} - \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2}\right] \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{6}}\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)x\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\sqrt{6}\,t \\ 2\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)x\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\sqrt{6}\,t \end{pmatrix}.$$

165. $$\binom{u}{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2} \times$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3\sqrt{6}}\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)x\ \sin\sqrt{6}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)t \\ 2\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)x\ \cos\sqrt{6}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)t \end{pmatrix}.$$

166. $$\binom{u}{v} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)x\ \cos\sqrt{15}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)t \\ \frac{\sqrt{5}}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)x\ \sin\sqrt{15}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)t \end{pmatrix}.$$

167. $u \equiv 1, \quad v \equiv 0.$

§ 6. Уравнение Лапласа

174. $$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int \frac{2z}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2} f(\xi, \eta)\, d\xi d\eta.$$

175. $$u(x, y) = V\left(1 - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right).$$

176. а) $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_n'} \right)$,

где $$r_n = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [z - (2nl + \zeta)]^2};$$

$$r_n' = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [z - (2nl - \zeta)]^2};$$

б) указание — перейти к цилиндрическим координатам, направив ось z вдоль ребра двугранного угла:

$$G(\rho, \varphi, z, s, \psi, \zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_k'} \right),$$

где $$r_k = \sqrt{\rho^2 + s^2 - 2\rho s \cos[\varphi - (\psi + 2\alpha k)] + (z - \zeta)^2};$$

$$r_k' = \sqrt{\rho^2 + s^2 - 2\rho s \cos[\varphi - (2\alpha k - \psi)] + (z - \zeta)^2}.$$

177. $$u(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{a^2 - \rho_0^2}{\left(a^2 - 2a\rho_0 \cos\gamma + \rho_0^2\right)^{3/2}} \times$$

$$\times f(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta,$$

где $\cos\gamma = \cos\theta \cdot \cos\theta_0 + \sin\theta \cdot \sin\theta_0 \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)$.

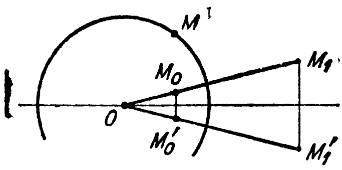
178. а) $G(\rho, \varphi, \rho_0, \varphi_0) = g(\rho, \varphi, \rho_0, \varphi_0) - g(\rho, \varphi, \rho_0, 2\pi - \varphi_0)$,

где $g = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\rho_0 r_1}{a r_0}$ (a — радиус круга, $r_0 = MM_0$, $r_1 = MM_1$, $\rho_0 = OM_0$);

б) $G(M, M_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e_n}{r_n} - \frac{e_n'}{r_n'} \right)$,

где $r_n = MM_n$; $r_n' = MM_n'$;

$r_0 = OM_0$;



$$e_n = \begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^k & \text{при } n = 2k, \\ \left(\frac{b}{a}\right)^{k+1} & \text{при } n = 2k + 1; \end{cases} \qquad e_n' = \begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^k \frac{a}{r_0} & \text{при } n = 2k, \\ \left(\frac{b}{a}\right)^k \frac{b}{r_0} & \text{при } n = 2k + 1. \end{cases}$$

180. а) да; б) нет; в) да; г) да. **185**. Разрешима.

§ 7. Сферические функции и представления группы вращений

189. $x^3 = \left[x^3 - \frac{3}{5}(x^2+y^2+z^2)\,x\right] + \frac{3}{5}(x^2+y^2+z^2)\,x.$

193. Не будет вполне приводимым: нетривиальное инвариантное подпространство состоит из векторов вида $(0, x)$.

195. Представления, не являющиеся: 1) приводимыми — $R_э\lambda \to e^{ik\lambda}$ (одномерно); 2) вполне приводимыми — $R_э\lambda \to e^{iK\lambda}$ (произвольной размерности), где жорданова нормальная форма K есть

$$\begin{pmatrix} k & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & k \end{pmatrix}.$$

Неприводимые унитарные представления — $R_э\lambda \to e^{ik\lambda}$ (одномерно).

196. $g(\varphi) \to e^{im\varphi}$, где m — целое. Все они одномерны.

197. Состоит из векторов пропорциональных $(1, \pm i)$.

201. На девяти-, пяти- и одномерное.

207. Пусть $P(x, y, z)$ — однородный полином степени n, тогда

$$P = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (x^2+y^2+z^2)^k P_{n-2k},$$ где P_j — гармонические однородные полиномы степени j. Представление разлагается в сумму $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ представлений: $(2n+1)$-мерного, $(2n-3)$-мерного, ..., $(2n+1)-4\left[\frac{n}{2}\right]$-мерного.

208. Разложим полином сначала на однородные полиномы, дальнейшее сделаем по предыдущей задаче.

§ 8. Разностные методы

223. Равномерно ограничена, но не равностепенно непрерывна.
224. Да. **230.** Нет при $0 < x < \infty$. **231.** Да.

234. Если $r = a^2 \frac{\tau}{h^2} \leqslant \frac{1}{2}$, то разностная схема устойчива; если $r > \frac{1}{2}$, то неустойчива.

235. Устойчива всегда. **236.** Устойчива всегда.

Сергей Константинович Годунов
Елена Владимировна Золотарева

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Ответственный редактор *Сергей Львович Соболев*

Редактор *Т. М. Назарянц*
Художественный редактор *В. И. Шумаков*
Художник *В. М. Амельченко*
Технический редактор *А. В. Семкова*
Корректор *Н. Н. Тясто*

Сдано в набор 11 января 1974 г. Подписано в печать 12 апреля 1974 г. МН 02118. Бумага машиномелованная $84 \times 108^1/_{32}$. 2,375 печ. л., 4 усл. печ. л., 3,7 уч.-изд. л. Тираж 21 000 экз. Заказ 255. Цена 13 коп.

Издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.

4-я типография издательства «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.