

Հ. Ս. Միքայելյան

ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ԴԱՍԸՆԹԱՑ

Հաստատված է

ՀՀ Կրթության և գիտության նախարարության կոլեգիայի
կողմից որպես բուհական դասագիրք

«Նաիրի» հրատարակչություն
Երևան, 2001

ԴՏՀ 514 (07)

ԳՄԴ 22.135 y 73

Մ 780

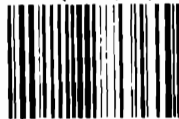
Միքայելյան Հ.Ս.

Մ 780 Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթաց: Դասագիրք,
Համլետ Միքայելյան, Եր. «Նաիրի» 2001, 464 էջ:

Գիրքը ամփոփում է բուհերի մաթեմատիկական ֆակուլտետների բարձրագույն հանրահաշվին նվիրված նյութը: Նախատեսված է բուհերի ուսանողների և ասպիրանտների համար:

Մասնագիտական խմբագիր՝ ֆիզմաթ գիտ. թեկն., դոցենտ Վ. Աթաբեկյան
Գրախոսողներ՝ ֆիզմաթ գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Յու. Մովսիսյան
ֆիզմաթ գիտ. թեկն., դոցենտ Ռ. Նազարյան
ֆիզմաթ գիտ. թեկն., դոցենտ Ա. Մալխասյան

ԵՊՀ Գրադարան



2502530972

Մ $\frac{1602010000}{705(01)2001}$ 2001

ISBN 5-550 - 01217-0

Դ ԳՄԴ 22.135 y 73

Ծ Համլետ Միքայելյան

Սասուն Միքայելյանի պայծառ հիշատակին

Համբաժանողի լեզուն չափազանց մեծ նշանակություն ունի ինչպես ժամանակակից մաթեմատիկայի կառուցման, այնպես էլ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի մեջ: Այդ պատճառով համբաժանողին մեծ աեղ և հուսկուցվում ինչպես մաթեմատիկայի ուսուցիչների, այնպես էլ սալազու մաթեմատիկասների սլուարուսաման ծրագրերում և ուսամնական սլումններում:

Ներկա դասընթացը աուսլին հեթին ընդգրկում է բուհերի մաթեմատիկական ֆակուլտետների բարձրագույն համբաժանողի ուվանդական նյութը: Խմբերի և դաշաերի ընդլայնումների սլուարուցլում կուսարվամ և քաշակի հավելում այն հաշվամ, առ ոնհրամշաության դեպում հնարավոր լինի աուանց լրացուցիչ նախալուարուսաման անցնել Գալուսլի տեսության ուսամնասլրությանը:

Հեղինակը աշխուսել և գերծ մնալ ուվեթող ֆորմալիզմից՝ աուանց այն էլ վերաուական նյութի շարադրումըը հնարավորինա սլարգ դարձնելու համար: Նայն նալուակից էլենելամ՝ սմնաութեր հասկալությանների ոսհմանումները աղեկցվում են մեծ թվամ օրլմակներամ, սրանց դլուարկումը սլարսաղլր և ընթելցաղլի համար, կարևոր հասկալությաններլն և սալալուցլումներլն աղվում են նաև մեկնալրումությաններ, հաւձալս՝ մամբումսան:

Դասընթացը բամանվում և գլուխների՝ ընդամենը 15 գլուխ, սրանց կազմվում են սլարալղալթներից: Վերջիններա համարակալվում են ողջ գրքի համար մլասանալար, սլումն ընդամենը 64-ն են:

Վերջին գլալղ նվիրվում է համբաժանողի սլուամությանը: Այսաեղ ումվաղվում են նաև կենաուղրական կարծ աեղեկությաններ այն գլումնականների մասլն, որանց սաեղծել են համբաժանողի:

Հայերեն սեթմիների գարծամությանը կաաարվամ և մեծ գգուշաղթությանը, մլայն այն դեպում, երբ հեղինակը վասուս և հայերեն համարթևքի աաուղելության ու կենսամակալության մեջ: Նամն դեպքերում գուղաեհալարալ գարծամվում են նաև միջաղղալլն համարթևքները: Մաունաղթալալա՝ դասաղթում թեթրենլ վոխուրեն գործամվում և «սլնյում» հայերեն սեթմիներ: Դասաղթլրի վերջում բերվում է ընդարձակ անվամուցանկ և գրակամության ցունկ:

Դասաղթրում ներսաղվում վարծությանները հլմնականում աենն սեասական նշանակության, և սրանց լաւծումլ չափազանց օղասակալ և ոասանողլ ուսամնաության համար: Իհարկե, բարձրագույն համբաժանողի աաամձին լոնդրաղթի աղկալությանը նոր քալ կլինը աաարկալի սրղյամաղեսա ուսուցումը կաղմակերսլելու ինդղում: Դասաղթրը Նրեսանլ պեսական համալալարանլ ֆլղիկալլի ֆակալաեսաում և Խ.Արալլանլ ումվում հայկական սեաական մանկաղթրմական ինասլաաուսլի մաթեմատիկայի ֆակալաեսաում հեղինակի երկարամալ աշխաաանքալլն վաթթի ամվաղվումն է:

Հեղինակը աաունձնաաաաալ սլրամ և հլշում իր այն ուսանողներին, որանց եեսա դասաղթաությանների ընթալցում կլաել է համբաժանողի խոթելղաղթը ուղաաալի կաաուցման հմայքը:

Հաստիկ այս գրքի ձևավորման համար հայերենի և փոխարկվել $\LaTeX$ 2 ϵ համակարգի՝ Ամերիկյան մաթեմատիկական ընկերություն (AMS) կողմից մշակված $\LaTeX$ $\LaTeX$ ընդլայնումը (documentclass amsbook): Որքան մեզ հայտնի և դասագիրքի աստիճան հայերեն գիրքն է, որ լայն է առանձին $\TeX$ համակարգի որևէ աստիճանական: Քանի որ $\TeX$ -ը ներկայումս մաթեմատիկական առարկաների արտադրության և ներկայացման համաշխարհային չափանիշն է, կարծում ենք, ժամանակն է այն լայնորեն կիրառել նաև Հայաստանում, նաև հայոց լեզվով: Օգտագործված համակարգի համար հեղինակը շնորհակալ է Ամերիկյան մաթեմատիկական ընկերությանը և Վահագն Հ. Մկրտչյանին, որը նաև հեղինակի հետ քննարկել և արժեքավոր դիալոգություններ է կատարել բուն նյութի վերաբերյալ: Արժեքավոր պատգամներ է կատարել նաև գրքի խմբագիր Վարդան Արարեկյանը: Չեռագիրը աշտարակումը բերեցել և լեզվական շակումներ է կատարել Մարինե Միքայելյանը: Բոլորին հեղինակը հայտնում է իր շնորհակալությունը:

Երևան, 31.12.2000 թ.

ԵՐԿՏԵՂ ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1.1. Բազմություն: Բազմության գաղափարը մաթեմատիկայում ներածվեց անցյալ դարի վերջերին՝ Կեյնանիսյում՝ Գեորգ Կոնտորի կողմից: Կոնտորն ժամանակում այն աննոստրեալ կիրառության ունեցով: Այսօր վաստակներն կարելի է տեսլ, որ ժամանակակից մաթեմատիկայի ողջ համակարգը խաբարվում է բարձրանում է բազմություն հասկացության հենքի վրա:

Կոնտորը *բազմություն* է անվանում ստորկաների յուրաքանչյուր համախմբություն, որը պատկանում է որպես մեկ սմբաջություն:

Ահա՝ բազմություն օրինակներ:

ա. Տվյալ խաբրումում գտնվող ռասանդների համախմբությունը:

բ. ՀՀ թաղարների բազմությունը:

գ. Բնական թվերի բազմությունը:

դ. Զայգ թվերի բազմությունը:

ե. $x(x - 1) = 0$ հավասարման լուծումների բազմությունը է այլև:

Բազմությունները տվելի հաճախ նշանակում են լատինական այբուրենի մեծատառերով: Հաշվի տոնելով որոշ բազմությունների հաճախակի գործածությունը մաթեմատիկայում՝ դրանց համար ընդունել են հատուկ նշանակումներ: Այդպիսիք են, տառային հերթին, հետևյալ թվային բազմությունները.

ա. $\mathbb{N}$ - բնական թվերի բազմությունը,

բ. $\mathbb{Z}$ - ամբողջ թվերի բազմությունը,

գ. $\mathbb{Q}$ - տոցիանալ թվերի բազմությունը,

դ. $\mathbb{R}$ - իրական թվերի բազմությունը:

Բազմությունը կոգմվում է ստորկաներից, որանք կազմում են այդ բազմության *ատրիբ*: Բերենք օրինակներ:

ա. 1 թվը $x(x - 1) = 0$ հավասարման լուծումների բազմության *ատրիբ* է, իսկ 2 թվը այդ բազմության *ատրիբ* չէ:

բ. -1 թվը $\mathbb{Z}$ բազմության *ատրիբ* է, իսկ $\mathbb{N}$ բազմության *ատրիբ* չէ:

գ. $1/2$ թվը $\mathbb{Q}$ բազմության *ատրիբ* է, իսկ $\mathbb{Z}$ բազմության *ատրիբ* չէ:

դ. π թվը $\mathbb{R}$ բազմության *ատրիբ* է, իսկ $\mathbb{Q}$ բազմության *ատրիբ* չէ:

Այսպիսով՝ յուրաքանչյուր բազմություն կոգմվում է իր *ատրիբերից*: Մենք կասենք նաև, որ բազմություն *ատրիբերը* ընկած են այդ բազմության մեջ կամ սլոակուում են այդ բազմությանը: Բազմությունների *ատրիբերը* տվելի հաճախ նշանակում

q. *tp* $A = B$ $\wedge$ $B = C$, *umy* $A = C$:

Ճավալայնություն ինտախիվ սկզբունքից հետևում է նաև, որ $x_1, x_2, \dots, x_n$ ստարերնավ կազմվում է միակ բազմությունը: Ընդունված է այդ բազմությունը գրառել

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

սեպարով:

Այսպես, օրինակ, $\{1\}$ բազմությունը ունի միակ ստարը՝ 1 թիվը: $\{1, 2\}$ բազմությունն ունի երկու ստար՝ 1 և 2, իսկ $\{\{1, 2\}\}$ բազմությունը ունի մեկ ստար: Այդ ստարը $\{1, 2\}$ բազմությունն է: $\{1, 2, 3\}$ բազմությունն ունի երեք ստար՝ 1, 2, 3, իսկ $\{1, \{2, 3\}\}$ բազմությունը ունի երկու ստար՝ 1 և $\{2, 3\}$: Հասկանալի է նաև, որ $\{x\} = \{x, x\}$, րանի որ այդ բազմություններից յուրաքանչյուրը կազմվում է միակ՝ x ստարից: Ընդհանրապես, կամայական բազմության մեջ յուրաքանչյուր ստարը գրառվում է միայն մեկ տեղում:

Բերենք ևս մի րանի օրինակ:

ա. $1 \in \{1, 2, 3\}$, $\{1, 2\} \in \{1, \{1, 2\}\}$,

բ. $\{\{1\}\} \in \{\{\{1\}\}\}$, $\{\{\{1\}\}\} \in \{\{\{\{1\}\}\}\}$,

գ. $4 \notin \{1, 2, 3\}$, $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2\}\}$,

դ. $1 \notin \{\{1\}\}$, $\{\{\{1\}\}\} \notin \{1\}$:

Բազմությունների գրառման վերը նշված ձևը տնչալի օգտակար է վերջավոր բազմությունները դիստարկելիս: Սակայն ռ վերջավոր, այսինքն՝ տնվերջ բազմությունների դիստարկման դեպքում նշված գրառումը հալմար չէ, և այսանդ մեկ օգնություն է գալիս բազմությունների ստացման և գրառման հալադղ կարեղու ձևը:

Նույն մեկ տնչրոմեշաւ ի իմանալ վափախական սլարանակաղ դասադության գաղափարը: Դիստարկենք, օրինակ, «21-ր տառնց մնացողի բաժանվում է x -ի» դասադայությունը: Այն սլարանակում է x վափախականը և այդ վափախականի ռքշ արժերների դեպքում դառնում է ճշմարիտ, իսկ այլ արժերների դեպքում դառնում է կեղծ: Երե x -ը ընդունի 1, 2, 3 կամ 7 արժերներ, սալաւ արվում դասադայությունը կդառնա ճշմարիտ, իսկ x -ի մնացած ընակուն արժերների դեպքում այն դառնում է կեղծ: x վափախականը սլարանակաղ դասադայություններ են նաև $5 < x$, $x(x+2) = 0$ բանաձևերը:

Փափախական սլարանակաղ դասադայությունների միջոցով բազմություններ կատարելու սկզբունքին տնցնելուց տառալ սլարանակաղներ մի գլառման վերաբերյալ: x վափախականը սլարանակաղ P դասադայությունը գրառենք $P(x)$ -ով: Այս նշանակումը հնարավորություն է սալիս նաև գրառել արված դասադայություն մեջ x վափախականի վախարեն a արժերը անդադրելուց հետաւ սաղգվում դասադայությունը՝ $P(a)$ սեպարով: Օրինակ, երե $P(x)$ -ը $x > 1$ դասադայություն է, տալա $P(a)$ -ն կլինի $a > 1$ դասադայությունը: Նման գրառումը թալլ է սալիս նաև սլարգկ $P(a)$ դասադայության ճշմարիտ կամ կեղծ լինելաւ հարցը: Օրինակ, վերջին գրառման դեպքում $P(2)$ -ը $2 > 1$ դասադայություն է, և այն ճշմարիտ է: Իսկ $P(0)$ -ն $0 > 1$ դասադայություն է, և այն ճշմարիտ չէ: Այժմ ձևակերպենք վափախական սլարանակաղ դասադայությունների միջոցով բազմությունների կառուցման սկզբունքը:

Երադարկման ինտախիվ սկզբունքը: Կամայական A բազմության և x վափախականը սլարանակաղ յուրաքանչյուր $P(x)$ դասադայության համար գայություն ունի

բազմություն, որը կազմված է A -ի այն և միայն այն a տարրերից, որոնց համար $P(a)$ պատայությունը ճշմարիտ է:

Համառոտ ծավալանքային խնամախիվ սկզբունքի՝ յուրաքանչյուր բազմություն որոշվում է իր տարրերով: Հետևաբար՝ սովոր A բազմություն է $P(x)$ պատայությունը համար վերացարկման խնամախիվ սկզբունքով որոշվող բազմությունը միակն է: Այդ բազմությունը գրավում է

$$\{x | x \in A, P(x)\}$$

տեսքով: Ենթադրվում է, որ մեր դիտարկած բոլոր տարրերը պատկանում են նախապես տրված ինչ-որ մի բնդիտարկման U բազմության: Նկատի ունենալով այս, համարվում է, որ $\{x | P(x)\}$ գրառումը $\{x | x \in U, P(x)\}$ գրառման փոխարեն: Այդ $\{x | P(x)\}$ գրառումը կարողացվում է այսպես. «այն x -երի բազմությունը, որոնց համար $P(x)$ » (իհարկե ոչանել նկատի է առնվում այն x տարրերի բազմությունը, որոնց համար ճշմարիտ է $P(x)$ պատայությունը):

Բերենք մի քանի օրինակ:

ա. $\{x | x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$: Աս զույգ թվերի բազմությունն է, որ գրավում է նաև $2\mathbb{Z}$ ձևով: Հետևապես՝ $\{x | x = 2k, k \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}$:

բ. $\{x | x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$: Աս կենտ թվերի բազմությունն է, որ գրավում է նաև $2\mathbb{Z} + 1$ ձևով: Հետևապես՝ $\{x | x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z} + 1$:

գ. $\{x | x \in \mathbb{Z}, -2 < x < 2\} = \{-1, 0, 1\}$:

դ. $\{x | x \in \mathbb{R}, -2 < x < 2\} = (-2, 2)$:

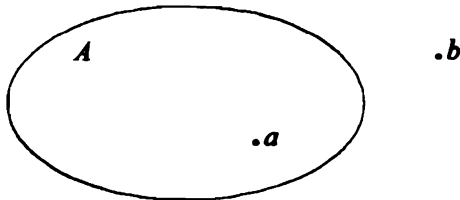
ե. $\{x | x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 2\} = [-2, 2]$:

զ. $\{x | x \in \mathbb{R}, x > 2\} = (2, \infty)$:

Դժվար չէ ցույց տալ նաև, որ կամայական A բազմության համար կարելի է գտնել x փոփոխականը արտահայտող դառադություն, որի միջոցով որոշվող բազմությունը կլինի եենց այդ A բազմությունը: Իսկապես՝

$$\{x | x \in A\} = A:$$

Համար բազմությունների մասին կատարվում պիտարկումները սովորի դիտադուկան դարձնելու համար դրանք արտահայտում են հարրություն շրջանակներով:



$$a \in A, b \in B$$

Գծադիր 1

Բազմություն տարրերը այդ դեպքում պատկերվում են շրջանակի ներսի կետերով, իսկ բազմությունը չարտահայտող տարրերը՝ շրջանակից դուրս գտնվող կետերով:

1.2. Ենթաբազմություններ: Բազմությունների ուսումնասիրության ընթացքում շտիպալու է կարևոր է և օգտակար այն բազմությունների դիստրիբյուցիան, որոնք կազմում են տրված բազմության որևէ մասը: Օրինակ, ֆակուլտետի ուսուցիչ կադրերի ուսանողները կամ ուսանողների բազմությունը կազմում է այդ ուսանողության մի մասը, կադրի ուսուցիչները կազմում են այդ կադրի մի մասը և այլն: Սա նշանակում է, որ յուրաքանչյուր տույնի կադրերի ուսանող մաս ֆակուլտետի ուսանող է, իսկ կադրի մասն է մի աղյուսի մաս այդ կադրի ուսանող է:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 1.2. A բազմությունը կոչվում է B բազմության **ենթաբազմություն**, եթե A բազմություն յուրաքանչյուր տարր մաս B բազմության տարր է: Նման դեպքերում մենք կտանք, որ A բազմությունը ընկած է B բազմության մեջ, A բազմությունը պարունակվում է կամ A բազմությունը ընկերվում է B բազմության մեջ:

A բազմությունը B բազմության ենթաբազմությունը լինելու վստասը կգրառենք այսպես՝

$$A \subseteq B \text{ կամ } B \supseteq A :$$

Վերջին դեպքում կտանք մաս, որ B բազմությունը պարունակում է A -ն:

Բերենք մի քանի օրինակ:

ա. Յուրաքանչյուր բնական թիվ մաս տարող թիվ է: Հետևապես՝ բնական թվերի բազմությունը տարող թվերի բազմության ենթաբազմությունն է՝ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$:

բ. Հասկանալի է մաս, որ $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$:

գ. Իսկ ենթաբազմությունը կհամոզվենք մաս, որ՝

$$\{1\} \subseteq \{1, 2\}, \{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\} :$$

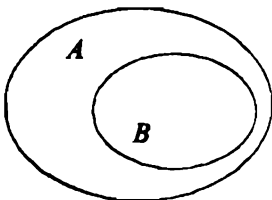
Մեզ տնիրամեշտ կլինի գրառել մաս A բազմությունը B -ի ենթաբազմությունը չլինելու հանգամանքը: Այն կտարվում է հետևյալ կերպ.

$$A \not\subseteq B :$$

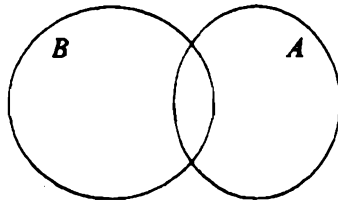
Օրինակ.

$$\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}, \{1, 2, 3\} \not\subseteq \{1, 2\}, \{1, 2\} \not\subseteq \{2, 3, 4, 5\}:$$

Ինչպե՞ս է որաակերվում շրջանակի տեսքով տրված բազմության ենթաբազմությունը:



$$B \subseteq A$$



$$B \not\subseteq A$$

Պարզ է, որ եթե A բազմությունը սխալկերված է հարթության որևէ շրջանակով, ապա նրա B ենթաբազմությունը կսխալկերվի A -ն սխալկերող ավտոբի մի մասով: Հարաբերակցությամբ բազմություն ենթաբազմություն է այդ նույն բազմությունը: Այսինքն՝ կամայական A բազմություն համար՝

$$A \subseteq A :$$

ՄԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 1.3. Եթե A բազմությունը B բազմության ենթաբազմությունն է և B -ից ստաբեր է, ապա այն կաչված է B -ի *սեփական* ենթաբազմություն:

$$A \subset B$$

գրառումը նշանակում է, որ A -ն B -ի սեփական ենթաբազմությունն է:

Հարաբերակցությամբ բազմության ունի եւ մի ենթաբազմություն. դասարկ բազմությունը: Այդպիսին է, օրինակ, $\mathbb{N}$ բազմության մեջ եղած բացասական թվերի բազմությունը, $\mathbb{Z}$ -ի մեջ եղած խառնվող թվերի բազմությունը և այլն: Բազմությունների ժողովրդագրության իմաստիսով սկզբունքից հետևում է, որ ցանկացած երկու դասարկ բազմությունների իրար հավասար են: Ուրեմն, ըստ էության գոյություն ունի միայն մեկ դասարկ բազմություն: Այն գրառվում է

$$\emptyset$$

նշանով: Դասարկ բազմությունը կտրելի է ստիմանել նաև հետևյալ կերպ.

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\} :$$

Քանի որ դասարկ բազմությունը վատառեն ոչ մի ստորը չունի, ապա այն, այսինքն՝ $\emptyset$ բազմությունը, յուրաքանչյուր բազմություն ենթաբազմություն է: Նկատենք նաև, որ $\emptyset$ բազմությունը միակ բազմությունն է, որ սեփական ենթաբազմություն չունի:

Բազմություն ենթաբազմությունների հետ տնդչվելիս օգտակար է նաև հետևյալ հասկացությունների իմացությունը:

ՊԼԴՌՈՒՄ 1.4. *Կամայական A, B, C բազմությունների համար.*

ա. եթե $A \subseteq B$ և $B \subseteq C$, ապա $A \subseteq C$,

բ. եթե $A \subseteq B$ և $B \subseteq A$, ապա $A = B$:

Ապացույց. ա. Դիցուք $a \in A$: Քանի որ $A \subseteq B$, ապա, համաձայն ենթաբազմության ստիմանման, $a \in B$: Բայց սրված է նաև $B \subseteq C$: Հետևապես՝ նորից, համաձայն ենթաբազմության ստիմանման, $a \in C$: Այսպիսով $a \in A$ ենթադրաբանից ստացվեց $a \in C$ եզրակացությունը: Իսկ դա նշանակում է $A \subseteq C$:

բ. Դիցուք՝ $a \in A$: Քանի որ $A \subseteq B$, ապա $a \in B$: Այժմ դիցուք՝ $a \in B$: Քանի որ $B \subseteq A$, ապա $a \in A$: Հետևապես՝ $A = B$: $\square$

Համախոսն ենթադրենք A լինում բազմություն բոլոր ենթաբազմությունները դիստակել միասին: Հետևյալ տնվանումը սրված է խորանդացի մաթեմատիկոս Ջորջ Բուլի պատվին:

ՄԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 1.5. Կամայական բազմություն բոլոր ենթաբազմությունների բազմությունը կաչվում է այդ բազմության *բալի*ում:

A բազմության բաղկանը գրառվում է $B(A)$ անաչով: Այսպիսով՝ համաձայն ստանդարտին՝

$$B(A) = \{X \mid X \subseteq A\} :$$

Օրինակ,

$$B(\emptyset) = \{\emptyset\}, \quad B(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$$

$$B\{1, 2\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} :$$

Բազմությունների ուսումնասիրության ընթացքում շատ կարևոր է տրվում բազմության ստորերի քիվի իմանալով՝ որոշել նրա բաղկանի ստորերի քիվը: Այս խնդիրը լուծվում է հետևյալ հոսկություն մեջ:

ՊԼԴՌԻՄ 1.6. *n քիվի ստորերի պարամետրիկ բազմություն բաղկանը պարամետրիկում է 2^n տարր:*

Արդյույց. ‘Իկցուր’ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$: A բազմություն յարարանչայր B ենթաբազմություն համար կազմենք 0-ներից և 1-ներից կազմված մի հաջորդականության՝ հետևյալ կերպ. այդ հաջորդականության j -րդ անդամը 1 է, եթե $a_j \in B$, իսկ եթե $a_j \notin B$, ապա այդ հաջորդականության j -րդ անդամը 0 է: Օրինակ, եթե $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{a_1, a_3\}$, ապա B -ի համար նշված հաջորդականությունը կլինի $(1, 0, 1)$:

Պարզ է, որ՝

ա. A -ի յարարանչայր ենթաբազմություն համար կազմվում է միայն մի հաջորդականություն,

բ. A -ի ստորերը ենթաբազմությունների համար կազմված հաջորդականությունները իրարից ատրբեր են,

գ. n հաա 1-ներից կամ 0-ներից կազմված յարարանչայր հաջորդականության համար կգտնվի A -ի մի B ենթաբազմություն, արի համար կազմված հաջորդականությունը կլինի հենց արված հաջորդականությունը:

Այս երեք վիստողությունները ցույց են տալիս, որ A -ի բոլոր ենթաբազմությունների քիվը այնքան է, ինչպես որ n հաա 1-ներից կամ 0-ներից կազմված բոլոր հաջորդականությունների քիվն է: Իսկ այդպիսի հաջորդականությունների քիվը դժվար չէ հաշվել. այն հավասար է 2^n -ի: $\square$

Վերջում զգալուցներ, որ պետք է կարսկումու հասակ ստրբերել $\in$ և $\subseteq$ նշանները: Բազմությունների անտայուն սանդման սկզբնական շրջանում այդ խնդիրը լավ չեն հասկացել նույնիսկ որոշ նշանավոր մարեմատիկոսներ: Այստեղ, մասնավորապես, օգաուկոր է իմանալ, որ եթե a -ն A բազմության ստրբն է, ապա $a \in A$ և $\{a\} \subseteq A$:

1.3. Գործողությունների բազմությունների հեա: Բազմությունների ուսումնասիրության մեջ կարևոր դեր են խաղում նրանց հեա կատարվող գործողությունները: Այդ գործողությունները որոշ կազմերով նման են քիվերի հեա կատարվող գործողություններին և, այդ պատճառով, կրում են նույն անվանումները:

Դիստրկենբ A և B բազմությունները:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 1.7. Բոլոր այն տարրերի բազմությունը, որոնք պատկանում են A -ին կամ B -ին, կոչվում է A և B բազմությունների *միավորում* կամ *գումար*:

A և B բազմությունների միավորումը գրավում է այսպես՝

$$A \cup B:$$

Այսպիսով, համաձայն ստեմանման՝

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ կամ } x \in B\}:$$

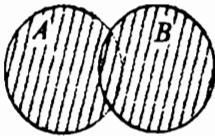
Օրինակներ:

$$\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\},$$

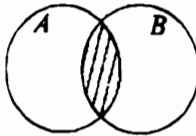
$$\{1, 2, 3, 4\} \cup \{5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}:$$

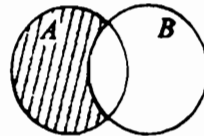
Հաջորդյան շրջանակներով արված բազմությունների միավորումը պատկերված է 3 գծապատկերում:



$A \cup B$



$A \cap B$



$A - B$

Գծապատկեր 3

Բազմությունների միավորման գործողությունը օժտված է մի շարք կարևոր հատկություններով: Այդ հատկությունների մի մասը նման է թվերի գումարման գործողության հատկություններին, մյուսները նոր են. թվերի գումարման գործողությունը նման հատկություններ չունի:

ՊՆԴՈՒՄ 1.8. *Կոմուտատիվ* A, B, C բազմությունների համար.

ա. $A \cup A = A$,

միավորման միագայություն հատկությունը,

բ. $A \cup B = B \cup A$,

միավորման տեղափոխականություն հատկությունը,

գ. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

միավորման ցուցաբերականության հատկությունը,

դ. $A \cup \emptyset = A$:

Ապացույց. գ. Դիցուք՝ $x \in (A \cup B) \cup C$: Այդ դեպքում, համաձայն միավորման ստեմանման, $x \in A \cup B$ կամ $x \in C$: Որեմն կարող ենք գտնազուգնել երկու դեպք: Առաջին դեպք՝ $x \in A \cup B$: Այս դեպքում, համաձայն միավորման ստեմանման,

կունենանք՝ $x \in A$ կամ $x \in B$: Եթե $x \in A$, ապա նորից, համաձայն ստեղծման, կունենանք՝ $x \in A \cup (B \cup C)$: Իսկ եթե $x \in B$, ապա $x \in B \cup C$, և դարձյալ՝ $x \in A \cup (B \cup C)$: Երկրորդ դեպք՝ $x \in C$: Այս դեպքում, համաձայն միավորման ստեղծման, նախ կունենանք՝ $x \in B \cup C$, և ապա՝ $x \in A \cup (B \cup C)$: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 1.9. Ապացուցեք 1.8 պնդման ա, բ, դ կետերը:

Գոյություն ունի չափազանց հետաքրքիր և օգտակար կոպի բազմությունների միավորման գործողություն և ընդգրկման ստեղծարար միջև:

ՊՆԴՈՒՄ 1.10. *Կամայական A բազմությանը B բազմության ներառվածությունն է այն և միայն այն դեպքում, երբ $A \cup B$ բազմությունը համասար է B բազմությանը: Այսինքն՝*

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B :$$

Ապացույց. Դիցուք՝ $A \subseteq B$: Յուրջ տանք, որ սպիղիս $A \cup B = B$: Քանի որ $B \subseteq A \cup B$, ապա բավական է ցույց առնել, որ $A \cup B \subseteq B$: Դիցուք՝ $x \in A \cup B$: Այդ դեպքում, համաձայն միավորման ստեղծման, կունենանք՝ $x \in A$ կամ $x \in B$: Եթե $x \in A$, ապա հաշվի առնելով $A \subseteq B$ պայմանը, կստանանք $x \in B$: Իսկ եթե ոչ, ապա $x \in B$ -ն ստացվում է անմիջականորեն: Այսպիսով՝ մենք ստացուցեցինք, որ եթե $x \in A \cup B$, ապա $x \in B$: Իսկ դա էլ նշանակում է, որ $A \cup B \subseteq B$:

Այժմ ենթադրենք, թե $A \cup B = B$ և ցույց տանք, որ $A \subseteq B$: Դիցուք՝ $x \in A$: Այդ դեպքում $x \in A \cup B$, և թանի որ $A \cup B = B$, ապա նույն $x \in B$: Հետևապես՝ $A \subseteq B$: $\square$

Այժմ նորից դիտարկենք A և B բազմությունները:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 1.11. Բոլոր այն ստորերկի բազմություններ, որոնք պարակաճում են A -ին և B -ին, կոչվում է A և B բազմությունների *հատում* կամ *սիստեմայի*:

A և B բազմությունների հատումը գրառվում է հետևյալ տեսքով՝

$$A \cap B :$$

Այսպիսով, համաձայն ստեղծման,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ և } x \in B\} :$$

Օրինակ,

$$\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\},$$

$$\{1, 2\} \cap \{1, \{1, 2\}\} = \{1\},$$

$$\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N} :$$

Երջանակներով սխառվելով բազմությունների հատումը սխառվելով է 3 գծագրում:

Բազմությունների նստման գործողություն որոշ հատկություններ նույնպես նման են թվերի բազմապատկման գործողության հատկություններին, մյուսները ունենալ նույնպես նաև են. թվերի բազմապատկման գործողությունը նման հատկություններ չունի:

ՊՆԴՈՒՄ 1.12. *Կոմուտատիվ A, B, C բազմությունների համար.*

ա. $A \cap A = A$,

հաաման միագործարար խտկությունը,

բ. $A \cap B = B \cap A$,

հաաման տեղափոխականություն խտկությունը,

գ. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,

հաաման զուգորդականություն խտկությունը,

դ. $A \cap \emptyset = \emptyset$:

Արդյույց. դ. ‘Իկցար’ գոյություն ունի այնպիսի x ատար, որի համար $x \in A \cap \emptyset$: Այդ դեպքում $x \in A$ և $x \in \emptyset$: Հետևապես՝ դրաարկ բազմությունը կոմենսիկնչ-որ ատար, որը ինտարտար չէ: Այսինքն՝ $A \cap \emptyset$ բազմությունը ատար չունի, այն դատարկ է: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 1.13. *Արդյույցեր պնդման ու, բ, գ կետերը:*

Բազմությունների հաաման գործողություն և ընդգրկման ոտնչություն միջև նայն-այն գոյություն ունի ինտարքիքի և օգտակար կապ:

ՊՆԴՈՒՄ 1.14. *Կոմուտատիվ A բազմությունը B բազմություն ենրարտգոմարյուն է այն և միայն այն դեպքում, երբ $A \cap B$ բազմությունը հախտար է A բազմությունը: Այսինքն՝*

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A :$$

Արդյույց. ‘Իկցար’ $A \subseteq B$: Յույց տանք, որ այդ դեպքում $A \cap B = A$: Ջոնի որ $A \cap B \subseteq A$, ատար բախկան է ցույց տալ, որ $A \subseteq A \cap B$: ‘Իկցար’ $x \in A$: Այդ դեպքում, բոնի որ ըստ պոյմանի $A \subseteq B$, ատար կոմենսանք $x \in B$: Հետևապես՝ $x \in A \cap B$:

Այնն ենրարքեր, թե $A \cap B = A$ և ցույց տանք, որ $A \subseteq B$: ‘Իկցար’ $x \in A$: Այդ դեպքում բոնի որ $A \cap B = A$, ատար $x \in A \cap B$: Իսկ ոյստեղից կատու-նանք՝ $x \in B$: Այսպիսով՝ ենրարքերով $x \in A$, մենք ստացանք $x \in B$: Հետևապես՝ $A \subseteq B$: $\square$

Ստիմաններ բազմությունների տարրերությունը գործողությունը: ‘Կիտարկենք A և B բազմություններ:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 1.15. Բոլոր այն ատարների բազմությունը, որոնք որատկանում են A -ին և չեն որատկանում B -ին, կոչվում է A և B բազմությունների տարրերություն: A և B բազմությունների տարրերությունը գրատվում է այսպես՝

$$A - B \text{ կամ } A \setminus B :$$

Այսպիսով, համոտույն ստիմանման,

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ և } x \notin B\} :$$

Օրինակներ:

$$\{1, 2\} - \{2, 3\} = \{1\},$$

$$\{1, 2\} \cup \{1, \{1, 2\}\} = \{2\}.$$

$$\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \emptyset,$$

$$\mathbb{Z} \cup 2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} \cup \{1\}:$$

Շրջանակներով պատկերված բազմությունների տարրերայունը պատկերված է 3 գծովգրում:

Բազմությունների համաժամ գործողություն որոշ հատկություններ նայելու նման են թվերի համաժամ գործողություն հատկություններին, մյուսները այստեղ նայելու նման են. թվերի համաժամ գործողությունը նման հատկություններ չունի:

ՊՆԴՈՒՄ 1.16. *Կոմուտատիվ A բազմություն համար.*

$$m. A \cup A = \emptyset,$$

$$p. A = \emptyset \cup A,$$

$$q. \emptyset \cup A = \emptyset:$$

Ապացույց. ա. Դիցուք՝ գոյություն ունի x , որի համար $x \in A = A$: Սա նշանակում է, որ $x \in A$ և $x \notin A$, ինչը անհնար է: Հետևաբար՝ $A = A$ բազմությունը տուրք չունի, այսինքն՝ դատարկ է: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 1.17. *Ապացույցեր պնդման բ և գ կետերը:*

Ինչպես թվերի գումարման, համաժամ և բազմադասվման, այնպես էլ բազմությունների միավորման, տարրերայուն և համաժամ գործողությունների միջև գոյություն ունի սերտ կապ, որը մասնակիորեն պատահելով է հետևյալ կարևոր հուսկարյունների մեջ:

ՊՆԴՈՒՄ 1.18. *Կոմուտատիվ A, B, C բազմությունների համար.*

$$m. A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

հաստատն բաշխատիվությունը միավորման նկատմամբ,

$$p. A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

միավորման բաշխատիվությունը հաստատն նկատմամբ,

$$q. A \cap (B \cup A) = A, A \cup (B \cap A) = A,$$

կրանման օրենքները,

$$r. C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B), C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B),$$

յի Մորգանի օրենքները:

Ապացույց. ա. Դիցուք՝ $x \in A \cap (B \cup C)$: Այդ դեպքում $x \in A$ և $x \in B \cup C$: Ձախադասների երկու դեպք. (1) $x \in B$: Հաշվի տանելով նաև այն, որ $x \in A$, կրատումնր $x \in A \cap B$: Հետևապես՝ $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$: (2) $x \in C$: Այստեղից կրատումնր $x \in A \cap C$: Հետևապես՝ $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$:

Հակառակը: Ենթադնքնր $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$: Նորից զանազումներ երկու դեպք. (1) $x \in A \cap B$: Այդ դեպքում $x \in A$ և $x \in B$: Ուրեմն՝ $x \in B \cup C$: Հետևապես՝ $x \in A \cap (B \cup C)$: (2) $x \in A \cap C$: Այդ դեպքում $x \in A$ և $x \in C$: Ուրեմն՝ $x \in B \cup C$: Հետևապես՝ $x \in A \cap (B \cup C)$: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 1.19. *Ապացույցեր 1.18 պնդման բ, գ, դ կետերը:*

2. ԵՐԿՏԵՂ ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

2.1. Բազմությունների դեկարտյան արտադրյալը: Երկանդ սանդորայուն հիմքում ընկած է կարգավորված զույգի գոտավաւրը: Դիտարկենք a և b սուրբերից կազմված բազմությունը: Նրա $\{a, b\}$ գրաւմուն մեջ սուրբերի հերթականությունը սմենենին նշանակարյուն չունի. քունի որ $\{a, b\} = \{b, a\}$, սալս սլղ մույն բազմությունը մենր կարող ենր գրաւել մաւս $\{b, a\}$ սեարով:

Սակայն, սրոշ իրադրություններում, երկու սուրբերից կազմված գույզը դիտարկելիս մենր պարաւավոր ենր սնարյուն հաշվի սոնեկ սուրբերի հերթականությունը: Օրինակ, երե բասարանի մասրի սոմաի վրա նշված են 3 և 15 թվերը, սալս դրանցից մեկը, սավորաւոր ուսաջինը, ցույց է սալիս շարքը, մյաւս՝ սավորաւոր երկարողը՝ մասաւելը սվլալ շարքում: Հեաւաւրս՝ երե դուր վախեր 3 և 15 թվերի սեղերը, սալս կասունսր 15 և 3 թվերով նշված՝ բարավին սլղ մասաւելը: Ահա մամն իրադրությունները նկարագրելու համար մարեմասիկալամ ներմուծվում է կարգավորված զույգի գոտավաւրը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 2.1. a և b սուրբերի a, b հաջորդականությունը կոչվում է սլղ սուրբերի *կարգավորված գույց* և գրաւվում է (a, b) սեարով:

Այս սահմանումից հեաւում է, որ սլղ մույն՝ a և b սուրբերի (b, a) կարգավորված գույզը՝ b, a հաջորդականությունը, սլղեն սլղ սաւակաւ և և պարաւավոր չէ հաւասարակ (a, b) կարգավորված գույցին: Սահմանումից հեաւում է մաւս հեաւեյալ հաւակարյունը:

ՊՆԴՈՒՄ 2.2. *Կամայական a, b, c, d սուրբերի համար*

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ և } b = d :$$

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 2.3. (a, b) կարգավորված զույգի մալս կոդմում գրված a սուրբը կոչվում է մրա *սաւաջին բաղաւրիչ*, իսկ սլղ կոդմում գրված b սուրբը՝ *երկրորդ բաղաւրիչ*:

Այն վերցնենք կամայական A և B բազմությունները և կազմենք բոլոր այն կարգավորված զույգերը, որոնց սաւաջին բաղաւրիչները A բազմության սուրբերն են, իսկ երկրորդ բաղաւրիչները՝ B բազմության սուրբերը: Համաժայն վերացարկմուն ինասալիսկ սկզբունքի՝ գոյություն ունի մի բազմություն, սրը կազմված է բոլոր սլղ սուրբերից: Այդ բազմությանը կոչվում է A և B բազմությունների դեկարտյան արտադրյալ:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 2.4. A և B բազմությունների *դեկարտյան արտադրյալ* է կոչվում բոլոր այն կարգավորված զույգերի բազմությունը, սրոնց սաւաջին բաղաւրիչը սլասկունում է A -ին, երկրորդ բաղաւրիչը՝ B -ին: A և B բազմությունների դեկարտյան արտադրյալը գրաւվում է $A \times B$ սեարով:

Այսպիսով, համաժայն սահմանմուն,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} :$$

Օրինակ,

$$\{1, 2\} \times \{3, 4, 5\} = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\},$$

$$\{1, -1\} \times \{+, -\} = \{(1, +), (1, -), (-1, +), (-1, -)\}:$$

Երկու բազմությունների ղեկավարյուն որսառըրյալը երբեմն նախատեղաբնայր է պատկերել տալուսակների միջոցով: Այսպես, օրինակ, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ բազմությունն ապրերբը գրենր ուղղաձիգ, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ բազմությունն տարրերը՝ հորիզոնական շարքերով, իսկ a_i -ով անցնող հորիզոնական շարքի և b_j -ով անցնող ուղղաձիգ շարքի հատման տեղում գրենր (a_i, b_j) կարգավորված գույգը: $A \times B$ ղեկավարյունն որսառըրյալը այդ ղեկարում կարտակերվի հետևյալ տալուսակի միջոցով.

	b_1	b_2	b_n
a_1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	(a_1, b_n)
a_2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	(a_2, b_n)
.....			
a_m	(a_m, b_1)	(a_m, b_2)	$\dots (a_m, b_n)$

Նման պատկերումը հնարավորություն է տալիս նաև որաշել երկու վերջավոր բազմությունների ղեկավարյունն որսառըրյալի ապրերբի թիվը՝ այդ բազմությունների ապրերբի թանակները իմանալու ղեսրում:

ՊԵՐՈՒՄ 2.5. Երբ A բազմությունն ունի m տարր, իսկ B բազմությունը՝ n տարր, ապա նրանց $A \times B$ ղեկավարյունն որսառըրյալը կունենա mn տարր:

Արդյույց. Դիցուք՝ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ և A, B բազմությունների ղեկավարյունն որսառըրյալը պատկերվում է վերևում ղխտարկված տալուսակի տեսքով: Այդ տալուսակում ունենր m տող, իսկ յուրաքանչյուր տողում՝ n տարր՝ կարգավորված գույգ: Հետևարար՝ կարգավորված գույգերի ընդհանուր թանակը, այսինքն՝ $A \times B$ ղեկավարյունն որսառըրյալի ապրերբի թիվը կլինի mn : $\square$

Բազմությունների ղեկավարյունն որսառըրյալը հետադրյալի ձևով է կապված բազմությունների հատման, միավորման և համման գործողությունների հետ:

ՊԵՐՈՒՄ 2.6. Կումուսիում A, B, C բազմությունների համար.

ա. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C),$

բ. $C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B),$

գ. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C),$

դ. $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B),$

ե. $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C):$

Արդյույց. ա. Դիցուք՝ $(x, y) \in (A \cap B) \times C$: Այդ ղեսրում $x \in A \cap B$ և $y \in C$: Հետևարար՝ $x \in A, x \in B$: Ուրեմն՝ $(x, y) \in A \times C, (x, y) \in B \times C$: Այսինքն՝ $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$:

Հավասարե, երբ $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$, ապա $(x, y) \in A \times C, (x, y) \in B \times C$: Հետևարար՝ $x \in A, y \in C, x \in B$: Այսինքն՝ $(x, y) \in (A \cap B) \times C$:

բ-և. Արդյույցումը կատարեք ինքնուրույն: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 2.7. Արդյո՞ր կամայական A, B, C բազմությունների համար.
 ա. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$,
 բ. $A \times B = B \times A$:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 2.8. Գտե՛ք A, B, C բազմությունները, եթե.
 ա. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$,
 բ. $A \times B = B \times A$:

2.2. Երկտեղ տոնչություններ: Խե՛ն տառայա կյանքում և թե մաթեմատիկայում ու նրա կիրառություններում համընկալող տառերկաները իրար ենա կարող են գտնվել գտնազան տոնչությունների մեջ: Այ՛ն մտրդ, օրինակ, կարող է մյուսի ծնաղը լինել, ալսինքն՝ գտնվել նրա հետ ծնող լինելու տոնչության մեջ: Թիվը կարող է մեծ լինել մյուս թվից, ալսինքն՝ գտնվել այդ թվի հետ մեծ լինելու տոնչության մեջ: Թիվը կարող է առանց մնացորդի բաժանվել մյուսի վրա. այդ դեպքում առաջին թիվը գտնվում է բաժանվելու տոնչության մեջ երկրորդի հետ և այլն: Միայնակի հասկանա՜նք, թե ընդհանրապես ի՞նչ է տոնչությունը, կառույթները որոշ նկատատումներ:

Նույն, տոնչության մեջ են մտնում մի բազմության ատրբերը մյուս բազմության ատրբերի հետ: Օրինակ, ներկայացման ժամանակ, երբ համընկալվածները նրստում են դուիվի տրտոներին, ապա նրանք, ալսինքն՝ համընկալվածների բազմության ատրբերը, նուսելու տոնչություն մեջ են մտնում տրտոների, ալսինքն՝ դուիվիի տրտոների բազմության ատրբերի հետ:

Այնուհետև, եթե մի ատրբիս մյուսի հետ մտնում է ինչ-որ տոնչության մեջ, ապա նախատիպաբանը է ոսել նուև, որ այդ ատրբիսների գույգը գտնվում է տվյալ տոնչության մեջ: Օրինակ, 1-ը 2-ի հետ մտնում է փոքր լինելու տոնչության մեջ, և մենք կոսենք, որ թվերի 1, 2 գույգը գտնվում է փոքր լինելու տոնչության մեջ: Կամ եթե Անտիխաը Գույսենի մույն է, ապա դա նշանակում է, որ Անտիխաը Գույսոնելի հետ մտնում է մույր լինելու տոնչության մեջ: Այս դեպքում էլ մենք կոսենք, որ Անտիխա է Գույսոնել գույգը գտնվում է մույր լինելու տոնչության մեջ:

Բեյլում օրինակներում կարեսը է նուև տոնչության մեջ մտնող ատրբկաների հերթականադանը. մի մտրդ մյուսի մույրը լինելու դեպքում՝ երկրորդը առաջինի մույրը լինել ալսին չի կարող: Ալսինքն՝ եթե Անտիխա, Գույսոնել գույգը գտնվում է մույր լինելու տոնչության մեջ, ապա Գույսոնել, Անտիխա գույգը տրդեն այդ տոնչության մեջ չի գտնվում: Թվերի 4, 2 գույգը գտնվում է մեծ լինելու տոնչության մեջ, իսկ 2, 4 գույգը այդ տոնչության մեջ չի գտնվում:

Ավտոմից հետևում է, որ ինչ-որ տոնչության մեջ կարող են գտնվել ատրբերի կարգադրվում գույգերը: Ալսինքն՝ յուրադանչյուր տոնչության կազմվում է ատրբերի կարգադրվում գույգերից: Եվ տվյալ տոնչությունը լիովին կարոշվի, եթե մենք ճշենք թուր այն կարգադրվում գույգերը, որոնք գտնվում են տվյալ տոնչության մեջ:

Այսպիսով, մենք տեսումք, որ յուրադանչյուր տոնչության կազմվում է ատրբերի կարգադրվում գույգերից, որոնց առաջին բազադրիչները վերցվում են մի բազմությանից, երկրորդ բազադրիչները՝ մյուս բազմությանից: Եթե այժմ հիշենք, որ մի բազմությանից առաջին բազադրիչ, մյուսից՝ երկրորդ բազադրիչ ունեցող բուր

կարգավորված գույգերի բազմությունը այդ երկու բազմությունների ղեկավարայան արատադրյալն է, ավել կատարվի, որ տանջությունը երկու բազմությունների ղեկավարայան արատադրյալի ենթաբազմություն է:

ՄԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 2.9. A բազմությունից B բազմության մեջ արված երկատեղ տառնադրություն է կոչվում $A \times B$ ղեկավարայան արատադրյալի յուրաքանչյուր ենթաբազմություն:

Որենք՝ ρ -ն A բազմությունից B բազմության մեջ արված երկատեղ տանջություն է, նշանակում է $\rho \subseteq A \times B$:

Օրինակ, $\{1, 2\}$ բազմությունից $\{2, 4, 5\}$ բազմության մեջ արված փոքր լինելու տանջությունը $\{1, 2\}$, $\{2, 4, 5\}$ բազմությունների

$$\{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 5)\}$$

ղեկավարայան արատադրյալի այն ստորերի բազմությունն է, որոնց ստացին բարադրիչը փոքր է երկրորդից, այսինքն՝ ղիստորկվող տանջությունը նշված ղեկավարայան արատադրյալի

$$\{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5)\}$$

ենթաբազմությունն է:

Եթե ρ -ն A բազմությունից B բազմության մեջ արված երկատեղ տանջություն է, այսինքն՝ $\rho \subseteq A \times B$ է a -ն գտնվում է b -ի հետ ρ տանջություն մեջ, ուստի

$$(a, b) \in \rho$$

գրառման փոխարեն ասումիս գործածվում է նաև հետևյալ գրառումը.

$$a \rho b :$$

Օրինակ, վերևում դիտարկված օրինակում $(1, 4)$ գույգը գտնվում է փոքր լինելու՝ $<$ տանջության մեջ, և մենք $(1, 4) \in <$ գրառման փոխարեն գործածում ենք $1 < 4$ գրառումը:

Համալս դիտարկվում են նաև կոմուտական բազմությունից այդ նույն բազմության մեջ արված տանջությունները:

ՄԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 2.10. A բազմությունից A -ի մեջ արված տանջությունը կոչվում է A բազմության վրա արված տանջություն:

Այստեղ արժև նշել, որ A բազմության վրա արված տանջությունը $A \times A$ բազմության յուրաքանչյուր ենթաբազմությունն է: $A \times A$ բազմության կարևոր ենթաբազմություններից են.

ա. $\{(a, a) \mid a \in A\}$ բազմությունը: Այն կոչվում է A բազմության վրա արված *հավաստություն* կամ *տնկյունագծային տանջություն* և նշանակվում է Δ_A : Այսպիսով՝

$$\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\} :$$

բ. $A \times A$ բազմությունը: Այն կոչվում է A բազմության վրա արված *լրիվ տանջություն* և նշանակվում է I_A : Այսպիսով՝

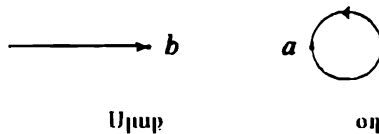
$$I_A = A \times A :$$

գ. թ քաղմությունը: Այն կոչվում է A քաղմության վրա արված *դատարկ տոնչություն*:

2.3. Երկտեղ տոնչությունների պատկերումը: Այստեղ մենք կոտորմնասիրենք երկտեղ տոնչությունների պատկերման մի քանի եղանակներ: Նույն դիտարկենք գրաֆների տեսքով երկտեղ տոնչությունների պատկերումը: Սովորաբար գրաֆով պատկերվում են վերջավոր քաղմության վրա արված երկտեղ տոնչությունները:

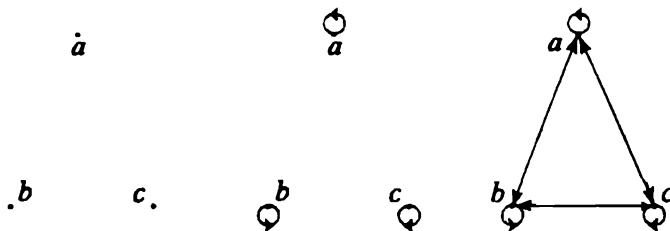
Պատկերենք A վերջավոր քաղմության տարրերը հորիզոնական կետերով: Այդ կետերը կոչվում են *գրաֆի գագաթներ*: ρ տոնչություն տարրերը պատկերենք գրաֆի գագաթների միացնող սղարներով, որոնք կոչվում են *գրաֆի կողեր*: Եթե a և b տարրերը սղղեն պատկերվում են կետերով և $a\rho b$, ապա այդ կետերը միացնում ենք a -ից դեպի b գնացող *սղարով*: $a\rho a$ -ն պատկերվում է a -ն a -ի հետ միացնող սղարով, որը կոչվում է նաև *օղ*: (Տես՝ գծ. 4):

Այս եղանակով աստիճան գրաֆները սովորաբար կոչվում են *կայմնորաչված գրաֆներ*: Ստույգ մենք այդ գրաֆների հետ գործ չենք ունենում, և դրանց կանվոններն ուտոտեն՝ *գրաֆներ*:



Գծազիր 4

Իհերենք տոնչությունները գրաֆներով պատկերելու մի քանի օրինակներ:



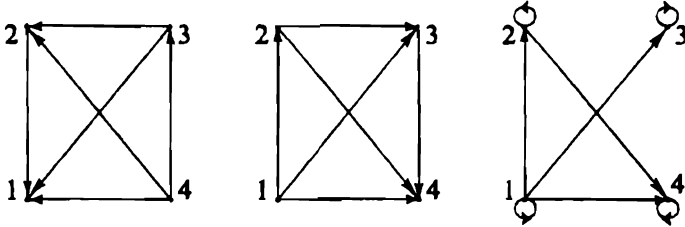
Գծազիր 5

Կոտմայտկան վերջավոր քաղմության վրա արված դատարկ տոնչությունը պատկերվում է կողեր չունեցող գրաֆի տեսքով (գծ. 5), հավաաւորության տոնչությանը պատկերվում է բոլոր գագաթներում օղեր և օղերից բացի այլ կողեր չունեցող գրաֆի տեսքով (գծ. 5), իսկ յրիվ տոնչությանը պատկերվում է բոլոր հնարավոր կողերն ունեցող գրաֆով (գծ. 5):

6 գծազրում պատկերվում են $\{1, 2, 3, 4\}$ քաղմության վրա արված՝ մեծ լինելու, վաղը լինելու և բաժանարար լինելու տոնչությունների գրաֆները:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 2.11. Նկարագրեր $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ բազմություն վրա առը-
ված *տնիստատարություն*, այսինքն՝ $\{(a, b) \mid a, b \in A, a \neq b\}$ ստեղծարար գրաֆը:

Երկտեղյալ ստեղծարարությունների հաջողությունը են պատկերվում նաև զանազան սոլ-
յատակներով: Դրանցից կարևորը ստեղծարարությունների պատկերումն է *երկտեղյալ սոլյա-
տակով*:



Գծագիր 6

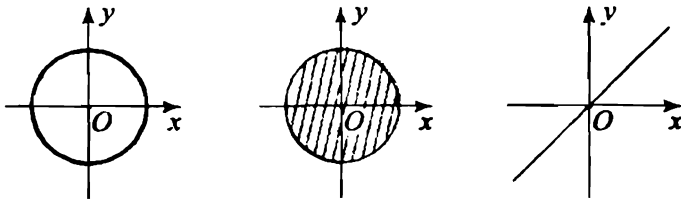
Դիցուք տներ A բազմությունից B -ի մեջ աղված ρ ստեղծարարներ և $a\rho b$: Այդ
դեպքում երկտեղյալ սոլյատակի վերին ստորում գրված է a ստորը, իսկ նրա ստակ՝ սառ-
վին ստորում, b ստորը:

Դիտարկենք, օրինակ, $\{1, 2, 3, 4\}$ բազմություն վրա աղված հավասարության,
վարդ լինելու և բաժանազար լինելու ստեղծարարությունները: Դրանք կախակերպ են
կալ սոլյատակներով:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} :$$

Պարզ է, որ կամայական $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ վերջավոր բազմություն համար

$$\Delta_A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & & a_n \\ a_1 & a_2 & & a_n \end{pmatrix}, I_A = \begin{pmatrix} a_1 & & a_n & a_n \\ a_1 & a_n & a_1 & a_n \end{pmatrix} :$$



Գծագիր 7

Իրական թվերի $\mathbb{R}$ բազմության կամ նրա կամայական ենթաբազմություն վրա
աղված երկտեղյալ ստեղծարարությունների հաջողությունը պատկերվում են կոորդինատական
հարթության վրա: 7 գծագրում պատկերվում են $\mathbb{R}$ -ի վրա աղված

$$\mu = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x + y = 1\},$$

$$\sigma = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x + y \leq 1\}, \Delta_{\mathbb{R}}$$

տոնչությունները:

2.4. Լանչություն տիրույթները: Դիտարկենք A բազմությունից B բազմության մեջ արված ρ տոնչությունը:

ՄԱՀԱՄԱՐՈՒՄ 2.12. Դիցուք՝ A բազմության a տարրը ρ տոնչություն մեջ է մտնում B -ի b տարրի հետ՝ *արե*: Այդ դեպքում b -ն կոչվում է a -ի *սրտակեր*, իսկ a -ն՝ b -ի *նախադասակեր*:

Օրինակներ:

ա. Ընտկան թվերի $\mathbb{N}$ բազմություն վրա արված $<$ տոնչության համար 5 թիվը է թվի պատկերն է, որովհետև $4 < 5$: 4-ի պատկերներն են մասնավորապես մեծ բոլոր բնական թվերը: 4-ի նախադասակերներն են 1, 2, 3 թվերը: Նշենք, որ այստեղ 1-ը նախադասակեր չունի:

բ. Նույն $\mathbb{N}$ բազմության վրա արված բազմաստիկ լինելու տոնչության համար 6 թվի պատկերներն են այն բնական թվերը, որոնց համար 6-ը բազմաստիկ է, այսինքն՝ 1, 2, 3, 6 թվերը՝ 6-ի բաժանարարները: 6-ի նախադասակերները միայն բոլոր բազմաստիկներն են՝ 6, 12, 18, ... :

գ. Մուրդկանց բազմություն վրա արված հայր լինելու տոնչության համար որևէ սղոմանորդ սրտակերները նրա գոտիակներն են, իսկ կամայք պատկերներ չունեն: Կամայակուն մարդ ունի միայն մեկ նախադասակեր՝ իր հայրը:

դ. Կամայակուն A բազմություն վրա արված լրիվ տոնչության համար A -ի a տարրի պատկերները և նախադասակերները A -ի բոլոր տարրերն են: Հսկողաբանության տոնչության համար a -ի թե՛ պատկերը և թե՛ նախադասակերը միայն ինքն է՝ a -ն:

Էրաժով պատկերված տոնչության համար b -ն a -ի պատկերն է և a -ն b -ի նախադասակերն է, այն է միայն այն դեպքում, երբ այդ գլուխը սարտունակում է a -ն b -ի հետ միացնող պար:

Եթե երկառող սղոմանակը սարտունակում է $\frac{a}{b}$ սյունը, ապա այստեղ b -ն a -ի սլոմակերն է, իսկ a -ն b -ի նախադասակերը:

Կոորդինատական հարթության վրա սրտակերված f տոնչության համար b թիվը a -ի պատկերն է, իսկ a -ն էլ b -ի նախադասակերը այն և միայն այն դեպքում, երբ (a, b) կետը պատկանում է f տոնչության պատկերին:

Այժմ մտից դիտարկենք A բազմությունից B բազմություն մեջ արված ρ տոնչությունը:

ՄԱՀԱՄԱՐՈՒՄ 2.13. ρ տոնչության *որոշման տիրույթ* է կոչվում A -ի բոլոր այն տարրերի բազմությունը, որոնք ունեն սրտակեր B -ի մեջ: ρ տոնչության *սրտերնակի տիրույթ* է կոչվում B -ի բոլոր այն տարրերի բազմությունը, որոնք ունեն նախադասակեր A -ի մեջ:

Բերենք մի քանի օրինակ:

ա. Ընտկան թվերի $\mathbb{N}$ բազմության վրա արված $<$ տոնչության որոշման տիրույթը $\mathbb{N}$ -ն է, իսկ սրտերնակի տիրույթը՝ 1-ից տարրեր բնական թվերի բազմությունը:

բ. Մտրդկանց բազմության վրա արված՝ հույր լինելու ատնչության որոշման ակնայր բոլոր այն ատնչական բազմությունն է, որոնք զավակներ են ունեցել, իսկ այդ ատնչության արժեքների ակնայր բոլոր մագդկանց բազմությունն է:

գ. Կոմպակտն է A բազմություն վրա արված յրիվ ատնչության և հսկաստորության ատնչություն որոշման ակնայրքներ և արժեքների ակնայրքները համընկնում են սկզբ բազմության հետ:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 2.14. Որոշեք A բազմության վրա արված անհսկաստարության ատնչություն որոշման ակնայրք և արժեքների ակնայրք:

8 գծագրում գրաֆով պատկերված ատնչության արժեքների ակնայրք կազմված է երկու աստիճանից, որոնք վերցված են վանդակների մեջ: Այդ ատնչություն որոշման ակնայրքի աստիճանը վերցված են շրջանակների մեջ: Ընդհանրապես, գրաֆով պատկերված ատնչություն որոշման ակնայրք այն աստիճանի բազմությունն է, որոնցից որևէ սլաք է շարժել զայիս, իսկ արժեքների ակնայրք այն աստիճանի բազմությունն է, որոնց մեջ որևէ սլաք է մտնում:

Երկտեղ ակնատեղով արված ատնչության որոշման ակնայրք այդ ակնատեղի վերին ստորում գրված աստիճանի բազմությունն է, իսկ արժեքների ակնայրք՝ նրա աստիճան ատնում գրված աստիճանի բազմությունը:

Կոորդինատական հարթություն f ակնայրքով պատկերված ատնչություն որոշման ակնայրք կազմված է արագիանների ստանցքի այն կետերից, որոնցով անցնող և այդ ստանցքին ուղղահայաց ուղիղները հասնում են f -ը: Նրա արժեքների ակնայրք կազմված է օրդինատների ստանցքի այն կետերից, որոնցով անցնող և այդ ստանցքին ուղղահայաց ուղիղները հասնում են f -ը (տես՝ գծ. 8):



Գծագիր 8

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 2.15. Կոորդինատական հարթություն վրա պատկերեք հետևյալ ատնչությունները, նրանց որոշման և արժեքների ակնայրքները:

- ա. $\{(x, \sin x) \mid x \in \mathbb{R}\}$,
- բ. $\{(x, \ln x) \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$,
- գ. $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x > 0\}$,
- դ. $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x + y > 0\}$,
- ե. $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x + y = 0\}$:

3. ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

3.1. *Անդրադարձելիություն և հակաանդրադարձելիություն:* Բազմագումար բազմաբնիկ են մեզ շրջապատող օտարկանների միջև գոյություն ունեցող տոնջությունները: Բայց այդ տոնջությունների ուսումնասիրությունը վեր է մարդկային հնարավորություններից ու տնիմտա: Մտքեմատիկայում, սովորաբար, ուսումնասիրում են այն տոնջությունները, որոնք ենթարկվում են ինչ-որ օրինաչափությունների, օժավում են այս կամ այն հատկությամբ:

Համարի մեկը գործ ենք ունենում այնպիսի տոնջությունների հետ, որոնց համար արվում բազմադաս յուրաքանչյուր առարկ ինքն իր հետ մանում է դիտարկվող տոնջություն մեջ: Դրանք անդրադարձելի տոնջություններն են:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 3.1. *Ա* բազմության վրա արվում ρ տոնջությունը կոչվում է *անդրադարձելի*, եթե *A*-ի յուրաքանչյուր *a* ատարի համար

$$a\rho a :$$

Անդրադարձելի են կամայական բազմության վրա արվում քիվ տոնջությունը և հավասարության տոնջությունը, կամայական թվային բազմության վրա արվում՝ վարք կամ հավասար լինելու, մեծ կամ հավասար լինելու, տառնց մնացորդի բաժանվելու տոնջությունները, մարդկանց կամայական բազմության վրա արվում՝ ուզ-գական լինելու տոնջությունը: Թվային բազմությունների վրա արվում՝ մեծ լինելու, վաղը լինելու, անհավասարության տոնջությունները, մարդկանց բազմության վրա արվում՝ ծնող լինելու, եղբայր լինելու տոնջությունները անդրադարձելի չեն:

Քանի որ $a\rho a$ պայմանը պատկերվում է գրաֆիկ օղակ, ապա պարզ է, որ գրաֆիկ պատկերվում տոնջությունը անդրադարձելի է այն և միայն այն դեպքում, եթե այդ գրաֆիկ յուրաքանչյուր գագաթ օղ ունի: 9 գծագրով պատկերվում μ գրաֆիկ պատկերում է անդրադարձելի տոնջություն, իսկ ρ գրաֆիկ մնում տոնջություն չի պատկերում:



Գծագիր 9

Երկուսով աղյուսակով պատկերվում տոնջությունը անդրադարձելի է, այն և միայն այն դեպքում, եթե այդ աղյուսակը պարունակում է a տեսիլի սյուն *A* բազմության կամայական *a* ատարի համար: Հետևյալ տոնջություններից առաջինը և երկրորդը անդրադարձելի են, իսկ երրորդը՝ ոչ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} :$$

R բազմություն վրա արված է կառլիինսառական հարաբերյալի վրա սրահակերված տոնջությունը ունդրողործելի է այն է միայն այն դեպքում, երբ այն սրարունակում է տուսչին է երրարդ թուտղյունելի կիստղղը:

ՊԼԴՈՒՄ 3.2. *Կամայակում բազմություն վրա արված տոնդրողործելի տոնջությունների հաաումը տոնդրողործելի է:*

Արդյույց. Դիցուր՝ μ -ն է σ -ն միենույն A բազմության վրա տրված տոնդրողործելի տոնջություններ են: Այդ դեպքում, երբ $a \in A$, ոսլու՝

$$a\mu a, a\sigma a \Rightarrow (a, a) \in \mu, (a, a) \in \sigma \Rightarrow (a, a) \in \mu \cap \sigma \Rightarrow a(\mu \cap \sigma)a :$$

Այսինքն՝ $\mu \cap \sigma$ տոնջությունը տոնդրողործելի է: □

ՊԼԴՈՒՄ 3.3. *Կամայակում բազմություն վրա սրիտո տոնջությունը տոնդրողործելի է այն է միայն այն դեպքում, երբ այն սրարունակում է այդ բազմությունը վրա արված հոսիստրություն տոնջությունը:*

Արդյույց. Ասացուցումը կասարեր ինքնուրույն: □

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 3.4. Կամայակում բազմություն բուլյունի վրա արված $\subset, \subseteq, \supset, \supseteq$, տոնջություններից ո՞րն է տոնդրողործելի:

Անդրադարձելի տոնջությունների նկատումը ծայրահեղ հակադիր դիրք են գրահում հակաանդրադարձելի տոնջությունները:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 3.5. A բազմության վրա արված ρ տոնջությունը կոչվում է *հսկատոնդրողործելի*, երբ A բազմություն յուրարանջուր a աարրի հումար

$$a\rho(a) :$$

Նկատենք, որ $a\rho(a)$ սրյումը նշանակում է $(a, a) \notin \rho$:

Հակատոնդրողործելի են կամայակում բազմության վրա արված դասարկ առընջությունը է տոնսովասարության տոնջությունը, իսկ լրիվ տոնջությունը է հովասաություն տոնջությունը հակատոնդրողործելի չեն, երբ բազմությունը դասարկ չէ:

Կամայակում բիտյին բազմություն վրա արված վարք, մեծ է տոնսովասար լինելու տոնջությունները հայնակն հակատոնդրողործելի են:

Ասրդիկանց բազմություն վրա արված՝ ճնող լինելու, հայր լինելու, մայր լինելու, եղրայր լինելու տոնջությունները հայնակն հակատոնդրողործելի են:

Գրաժով սրահակերված տոնջությունը հակատոնդրողործելի է այն է միայն այն դեպքում, երբ այդ գրաժը ոյ չումի:

Երկաաղ տղասառկով սրահակերված տոնջությունը հակատոնդրողործելի է այն է միայն գյն դեպքում, երբ այդ տղասառկը չի սրարունակում $\frac{a}{a}$ տեսրի սյում: A բազմության յուրարանջուր a աարրի հումար: Օրինակ, ետեկյալ տոնջություններից աուսչինը է երկրորդը հակատոնդրողործելի են, իսկ երրորդը՝ ոչ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} :$$

Ի բազմություն վրա տրված և կոորդինատական հարթության վրա սլաակեր-ված տոնչությունը հակառակորդործելի է այն և միայն այն դեպքում, եթե այն չի հասկում տառչին և երրորդ թատրոդների կխտրդի հետ:

ՊՆԴՈՒՄ 3.6. Կոմույական բազմություն վրա տրված հակառակորդործելի տոնչությունների հառումը հակառակորդործելի է:

Ապոցույց. Ասուցուցումը կսասարեք ինքնորայն: □

ՊՆԴՈՒՄ 3.7. Կոմույական Δ բազմության վրա տրված ρ տոնչությունը հա-կառակորդործելի է այն և միայն այն դեպքում, եթե

$$\rho \cap \Delta_A = \emptyset :$$

Ապոցույց. Դիցուք՝ ρ -ն հակառակորդործելի է: Քանի որ Δ_A տոնչության տարրերը ունեն (a, a) տեսքը, ապա դրանից հետևում է, որ $\rho \cap \Delta_A = \emptyset$:

Հակառակը, եթե տեղի ունի $\rho \cap \Delta_A \neq \emptyset$ պայմանը, ապա այդ էլ նշանակում է, որ ρ -ն չի սլառանակում (a, a) տեսքի տարրեր, հետևապես՝ այն հակառակորդործելի է: □

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 3.8. Կոմույական բազմություն բույանի վրա տրված $\subset, \subseteq, \supset, \supseteq, \sim$ տոնչություններից ո՞րն է հակառակորդործելի:

3.2. Համաչափելիություն և հակահամաչափելիություն: Առնչություննե-րի հուգարդ կարերը հուակայանը համաչափելիություն հասկությունն է:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 3.9. Δ բազմություն վրա տրված ρ տոնչությունը կոչվում է *հա-մաչափելի*, եթե Δ բազմություն կոմույական a և b տարրերի համար

$$a\rho b \Rightarrow b\rho a :$$

Համաչափելի են մուպկային բազմության վրա տրված՝ միևնույն ազգին սխա-կանելու, միևնույն թաղարում տալրելու, միևնույն կուրում տաղրելու տոնչություննե-րը:

Համաչափելի են նաև կոմույական բազմություն վրա տրված լրիվ տոնչությու-նը, հախասարության և ունհախասարության տոնչությունները:

Թվային բազմությունների վրա տրված՝ մեծ լինելու, մեծ կամ հախասար լինելու, փոքր լինելու, փոքր կամ հախասար լինելու տոնչությունները, մուդկանց բազմույ-յան վրա տրված՝ ծնող լինելու, հայր լինելու, սիրելու տոնչությունները համաչափելի չեն:

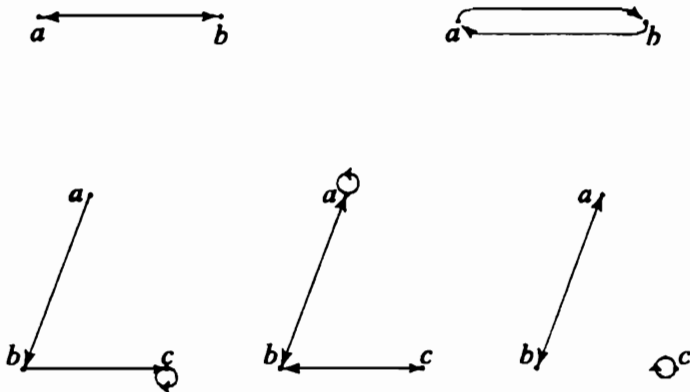
Քանի որ $a\rho b$ պայմանը սլաակերվում է a -ն b -ին միուցնող սլաքով, իսկ $b\rho a$ պայմանը՝ b -ն a -ին միուցնող սլաքով, ապա նարատվումայմար է այդ երկու սլաք-ները միապին սլաակերել մեկ՝ երկկողմանի սլաքով (տես՝ գծ.10):

Լայ դեպքում համաչափելի տոնչությունները կրնուրագրվեն որպես տոնչույ-յուններ, որոնց գրաֆները սլաքունակում են միմիայն երկկողմանի սլաքներ կամ օղեր (տես՝ գծ. 1.10, որում սլաակերված տառչին գրաֆը համաչափելի չէ, իսկ երկ-լարայն ու երրարայն համաչափելի են):

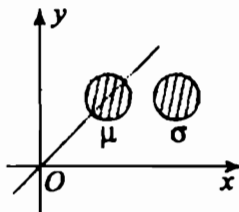
Էրկանոց ուղղաստեղծ սլուակերված հետևյալ առնչություններից առաջինը և երկրորդը համաչափելի են, իսկ երրորդը՝ ոչ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}:$$

Ընդհանրապես, երկանոց ուղղաստեղծ սլուակերված առնչությունը համաչափելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ ուղղաստեղծ $\frac{a}{b}$ և $\frac{b}{a}$ սյուներից մեկը պարզունակելիս ղեկարում պարզունակում է մյուս մյուսը:



Գծազիր 10



Գծազիր 11

Դեկլարացիան նախորդյալն վրա սլուակերված առնչությունը համաչափելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն համաչափելի է առաջին և երրորդ յուսաբղներն կլստղսլն նկատմամբ: 9 զծազրամ սլուակերված μ առնչությունը համաչափելի է, իսկ σ -ն՝ ոչ:

ՊՆԴՈՒՄ 3.10. Կոմուրսկան բազմություն վրա սրված համաչափելի առնչությունների հաստմը համաչափելի է:

Աղյուսակ 3.10. 'Ինցիդ' μ -ն և σ -ն միևնույն A բազմության վրա տրված համաչափելի առնչություններ են: Այդ դեպքում, եթե $a, b \in A$, ապա՝

$$\begin{aligned} a(\mu \cap \sigma)b &\Rightarrow (a, b) \in \mu \cap \sigma \Rightarrow (a, b) \in \mu, (a, b) \in \sigma \Rightarrow a\mu b, a\sigma b \Rightarrow \\ &\Rightarrow b\mu a, b\sigma a \Rightarrow (b, a) \in \mu, (b, a) \in \sigma \Rightarrow (b, a) \in \mu \cap \sigma \Rightarrow b(\mu \cap \sigma)a : \end{aligned}$$

Այսինքն՝ $\mu \cap \sigma$ առնչությունը համաչափելի է:

□

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 3.11. Կոմպակտ բազմություն բուլյանի վրա տրված $\subset, \subseteq, \supset, \supseteq, =$ առնչություններից ո՞րն է համաչափելի:

Դիտարկենք առնչությունների հույզող կարևոր հասկացությունը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 3.12. A բազմություն վրա տրված ρ առնչությունը կոչվում է *հակահամաչափելի*, եթե A բազմություն կոմպակտ a և b տարրերի համար

$$a\rho b \text{ և } b\rho a \Rightarrow a = b :$$

Հակահամաչափելի են քվայն բազմությունների վրա տրված՝ մեծ լինելու, մեծ կամ հավասար լինելու, փոքր լինելու, փոքր կամ հավասար լինելու առնչությունները, ինչպես նաև մարդկանց բազմություն վրա տրված՝ ծնող լինելու և հայր լինելու առնչությունները:

Մտրված ρ բազմություն վրա տրված՝ միևնույն ուղղին պատկանելու, միևնույն քաղաքում ապրելու, միևնույն կուրսում սովորելու առնչությունները հակահամաչափելի չեն:

Հակահամաչափելի չեն նաև կոմպակտ $\mathcal{O}$ դասարկ բազմություն վրա տրված լրիվ առնչությունը և առհավասարության առնչությունը, իսկ հավասարության առնչությունը հակահամաչափելի է:

Գլուխով պատկերված առնչությունը հակահամաչափելի է այն և միայն այն դեպքում, եթե այն երկկողմանի սլուքներ չի ստորադասվում: 10 զծագրում պատկերված առաջին գլուխը հակահամաչափելի է, իսկ երկրորդն ու երրորդը հակահամաչափելի չեն:

Երկտող աղյուսակով սլուակերված հետևյալ առնչություններից առաջինը և երկրորդը հակահամաչափելի են, իսկ երրորդը՝ ոչ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} :$$

Ընդհանրապես, երկտող աղյուսակով սլուակերված առնչությունը հակահամաչափելի է այն և միայն այն դեպքում, եթե այդ աղյուսակը $\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}$ և $\begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix}$ պայմանները մեկը սխառնակալ դեպքում մյուսը չի ստորադասվում:

Դեկլարայում հարթություն վրա սլուակերված առնչությունը հակահամաչափելի է, եթե այն չի ստորադասվում առաջին և երրորդ քառորդների կլաստրի նկատմամբ համաչափելի կետեր: 11 զծագրում սլուակերված σ առնչությունը հակահամաչափելի է, իսկ μ -ն՝ ոչ:

ՊՆԴՈՒՄ 3.13. Կոմպակտ բազմություն վրա տրված հակահամաչափելի առնչությունների համար հակահամաչափելի է:

Ապացույց. Դիցույ՝ μ -ն և σ -ն միևնույն A բազմության վրա տրված հավանականության տոնոլոգիաներ են: Այդ դեպքում, երև $a, b \in A$, ուստի՝

$$\begin{aligned} a(\mu \cap \sigma)b, b(\mu \cap \sigma)a &\Rightarrow (a, b) \in \mu \cap \sigma, (b, a) \in \mu \cap \sigma \Rightarrow \\ &\Rightarrow (a, b) \in \mu, (b, a) \in \mu, \Rightarrow a\mu b, b\mu a \Rightarrow a = b : \end{aligned}$$

Այսինքն՝ $\mu \cap \sigma$ տոնոլոգիաներ հավանականության է: □

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 3.14. Ապացուցեք, որ կամայական բազմության բոլորների վրա տրված $\subset, \subseteq, \supset, \supseteq$ տոնոլոգիաները հավանականության են:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 3.15. Կարո՞ղ է տոնոլոգիաներ միասնամանակ համաչափելի և հավանականության լինել:

ա. լինել, բ. չլինել:

3.3. Փոխանցելիություն: Դիտարկենք տոնոլոգիաների ևս մի կարևոր հատկություն:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 3.16. A բազմություն վրա տրված ρ տոնոլոգիաներ կոչվում է *փախանցելի*, երև A -ի կամայական a, b և c տարրերի համար

$$a\rho b \text{ և } b\rho c \Rightarrow a\rho c :$$

Փախանցելի են թվային բազմությունների վրա տրված՝ մեծ լինելու, մեծ կամ հավասար լինելու, վաղը լինելու, վաղը կամ հավասար լինելու, առանց մնացորդի բաժանելու տոնոլոգիաները, ինչպես նաև մտքային բազմության վրա տրված՝ սզգական լինելու, համակարգելի լինելու, միևնույն երկրորդ տոնոլոգիաները: Մտքային բազմության վրա տրված՝ ծնող լինելու, սիրելու, տալու, ընկեր լինելու, ըշնամի լինելու տոնոլոգիաները փախանցելի չեն:

Կամայական բազմության վրա տրված լրիվ տոնոլոգիաներ և հավասարության տոնոլոգիաներ փախանցելի են, իսկ անհավասարության տոնոլոգիաներ փախանցելի չեն:

Դրանով ստանկերված փախանցելի տոնոլոգիան է 10 գծագրի երրորդ տոնոլոգիաներ, իսկ առաջինը և երկրորդը՝ փախանցելի չեն: Երև առաջին օրինակում a կեսը լրացուցիչ միացնենք c -ին, ուստի կստանանք փախանցելի տոնոլոգիան:

Ընդհանրապես, զրոյով ստանկերված ρ տոնոլոգիաներ փախանցելի է այն և միայն այն դեպքում, երև ρ -ն a -ից b և b -ից c զմուտղ սրարներ անենալու դեպքում՝ անի նաև a -ից c զմուտղ սրար:

Երկաող աղյուսակով սրանկերված հետևյալ տոնոլոգիաներից առաջինը փախանցելի է, իսկ երկրորդը՝ ոչ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} :$$

Ընդհանրապես, երկաող աղյուսակով սրանկերված տոնոլոգիաներ փախանցելի է, այն և միայն այն դեպքում, երև այն $\frac{a}{b}$ և $\frac{b}{c}$ պայաները սրարանկելու դեպքում՝ սրարանկելում է նաև $\frac{a}{c}$ պայանը:

ՊՆԴՈՒՄ 3.17. *Կոմուտատիվ բազմություն վրա տրված փոխանցելի տոնջությունների հոստումը փոխանցելի է:*

Արդյույց. 'Իրցույ՝ μ -ն և σ -ն միևնույն A բազմության վրա տրված փոխանցելի տոնջություններ են: Այդ դեպքում, եթե $a, b, c \in A$, ապա՝

$$\begin{aligned} a(\mu \cap \sigma)b, b(\mu \cap \sigma)c &\Rightarrow (a, b) \in \mu \cap \sigma, (b, c) \in \mu \cap \sigma \Rightarrow \\ &\Rightarrow (a, b) \in \mu, (a, b) \in \sigma, (b, c) \in \mu, (b, c) \in \sigma \Rightarrow a\mu b, a\sigma b, b\mu c, b\sigma c \Rightarrow \\ &\Rightarrow a\mu c, a\sigma c \Rightarrow (a, c) \in \mu, (a, c) \in \sigma \Rightarrow (a, c) \in \mu \cap \sigma \Rightarrow a(\mu \cap \sigma)c: \end{aligned}$$

Այսինքն՝ $\mu \cap \sigma$ տոնջությունը փոխանցելի է: □

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 3.18. *Արդյույցեր, որ կամույական բազմության բուլյանի վրա տրված $\subset, \subseteq, \supset, \supseteq, =$ տոնջությունները փոխանցելի են:*

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 3.19. *Ե՛րբ և կոորդինատական հարթություն վրա պատկերված տոնջությունը փոխանցելի:*

4. ՀԱՄԱՐԺԵԶՈՒԹՅՈՒՆ

4.1. Հափաստություն և համարժեքություն: Ամենատարածված տոնջությունը, որի ինս մենք գործ ենք ունենում կյանքում, քրեա, հափաստության տոնջություն է: Մենք խառնում ենք ափյալ երկրի տանճամուղարկումը երկրի քաղաքայինների իրավունքների հափաստության մասին, կնոչ և սղումարդու իրավունքների հափաստության մասին, մենք սննդնդիստ տոնջվում ենք աղարկանների հափաստության խնդրին՝ նրանց չափմուն ընրացում:

Իսկ ի՞նչ է հափաստությունը: Այս հարցի պատասխանը ստանալու համար նախապես կուտորենք մի րանի նկատառումներ:

Նախ նկատենք, որ հափաստությունը տոնջություն է ստարկանների միջև. աղարկաններից մեկը կարող է հափաստ րինել մյուսին, իսկ երկրային՝ հափաստ չրինել: Այսինքն՝ հափաստություն յուրաքանչյուր տոնջությունը ինչ-որ բազմության վրա տրված երկանդ տոնջություն է:

Այնուհետև՝ հափաստության տոնջությունը ունի սլայմունակուն բնույթ և կախված է սլայ կոնկրետ իրողությունից, որի մեջ դիստարկվում է ափյալ տոնջությունը: Այսպես, վերևում րվարկված տոնջությունները կախված են ժամանակաշրջանից, երկրից, հոնգամանքներից և սլայն: Օրինակ, երկրի քաղաքայինների իրավունքների հափաստությունը միասեսակ չէ, րոյսը երկրներում, սլայ կախված է կոնկրետ երկրից ու նրա տոնճամուղարկումից: Միտեսակ չի տոնճամվում նուկ կնոչ ու սղումարդա իրավոնափաստությունը աղարկը երկրներում: Աղարկանների ու նրանց մեծությունների հափաստությունը կախում ունի չափիչ սղարկից:

Այս օրինակների կալելի է մանրումանել, կալելի է րերել սլայ օրինակներ, ուրան հաստատում են հափաստության տոնջություն սլայմունակուն, հարարերակուն րնույթը: Մակայն րոյսը դեպրերում, տնկալի իրողությունից, որում սլայ դիստարկվում է, հափաստություն տոնջությունը րովարդում է մի րանի սլայմունների:

Հռոմի, անկախ նյութից, թե ինչ համագումարներում ենք դիտարկում տաճարայուններ, յայտարարելով տոտորկա մենք միշտ համարում ենք ինքն իրեն հավասար: Իսկ դու նշանակում է, որ հավասարության երկուսը տաճարայունը միշտ անդրադարձելի է:

Այսինքն, երբ սրբի իրադրություն մեջ մի տոտորկա համարել ենք հավասար երկրորդին, այդ երկրորդին էլ իր հերթին կլինի տաճարայուն հավասար: Իսկ սա նշանակում է, որ հավասարության տաճարայունը, բոլոր դասերում, բավարարում է ինքնուրույնության սրբանունին:

Վերջապես, երբ մենք գիտենք, որ երկու տոտորկաներ առանձին-առանձին հավասար են երկրորդին, սակայն այդ տոտորկաները համարում ենք իրար հավասար: Սա էլ ըստ էության նշանակում է, որ հավասարության տաճարայունը անսրբանուն օժտված է նույն վախճանեցիկության հասկացությամբ:

Մյուս, հուշի տաճարով արված այս դիտարկությունները, մենք կարող ենք տալ ինքնուրույնության ճշգրիտ ամփոփումը: Հռոմային նկատենք միայն, որ մոթեմատիկայում *համարայուն* տերմինի վախճան, սովորաբար, գործածվում է *համարակարգայուն* տերմինը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 4.1. Համարակարգայուն բազմության վրա արված երկուսը տաճարայունի կաշվում է *համարակարգայուն տաճարայուն* կամ *համարակարգայուն*, երբ այն անդ-յապարկելի է, համաչափելի է վախճանեցիկ:

Բնքենք համարակարգայուն մի բանի օրինակ:

ա. Միևնույն ազգությանն ունենալու, նույն սեռին պատկանելու, միևնույն բուր-դարում ապրելու տաճարայունները մտքովանց կամայական բազմության վրա ազը-ված համարակարգայուն տաճարայուններ են: Իսկ ծնող լինելու, լոկեր լինելու, սիրելու տաճարայունները համարակարգայուններ չեն:

բ. Համարակարգայուններ են հայրության պատկերների կոնգլուտնություն, նմա-նություն, ուղիղների գուգուտնություն տաճարայունները, երբ գուգուտն համարներ նույն յուրաքանչյուր ուղիղ ինքն իրեն:

գ. Համարակարգայուն է կառուցվածքի հավասարության տաճարայունը:

դ. Վերջենք կամայական n բնական թվի է տարրից թվերի բազմության վրա դիտարկելի է հետևյալ տաճարայունը.

$$ap(n)b \Leftrightarrow n|a - b :$$

Այսինքն՝ a -ն և b -ն իրար հետ մասնում են $\rho(n)$ տաճարայուն մեջ, երբ նրանց ասը-բերայունը տաճանց մնացորդի բաժանվում է n բնական թվի վրա:

Հետադարձ կարելի է ցույց տալ, որ $\rho(n)$ -ը տարրից թվերի $\mathbb{Z}$ բազմության վրա արված համարակարգայուն տաճարայուն է:

Իսկապես, $\rho(n)$ -ը անդրադարձելի է, քանի որ $a - a$ աստիճանայունը բաժան-վում է ցանկացած բնական թվի վրա, այսինքն՝ $ap(n)a$: Այնուհետև, $\rho(n)$ -ը նույն համաչափելի է, քանի որ երբ $ap(n)b$, ապա $n|a - b$: Այստեղից կատարենք նույն $n|b - a$, իսկ սա նշանակում է $b\rho(n)a$: Վերջապես, երբ $ap(n)b$ և $b\rho(n)c$, ապա $n|a - b$ և $n|b - c$: Բայց

$$a - c = (a - b) + (b - c) :$$

Եվ բանի որ այս հավաստությունն ուժ մասը բաժանվում է n -ի, նրա ձախ մասը նույն-պես կբաժանվի n -ի, այսինքն՝ $n|a + c$: Իսկ առ նշանակում է $a\rho(n)c$: Այսինքն՝ $\rho(n)$ տոնջությունը նաև փոխառնցելի է:

Կամույակում բազմություն վրա տրված հավաստությունն տոնջությունը և լրիվ տոնջությունը համարժեքություններ են:



Գծապիր 12

Հետաքրքիր նկարագրություն ունեն գրաֆիկ պատկերված համարժեքությունները:

12 գծապատկերում պատկերված են մասն երկու օրինակներ: Դրանք լրիվ գրաֆիկների միավորումներ են:

ՊՆԴՈՒՄ 4.2. Գրաֆիկ պատկերված տոնջությունը այն և միայն այն դեպքում է համարժեքություն, երբ այն իրար հետ չհատվող լրիվ գրաֆիկների միավորում է:

Լարցույց. Եթե գրաֆիկ պատկերված է համարժեքություն, ապա նրա բոլոր գագաթներում օղբ կան: Այնուհետև, երբ գրաֆիկ երկու գագաթներ իրար հետ միացված են ինչ-որ ճանապարհով, ապա գրաֆիկում ունի նաև այդ գագաթները ուղղակի միացնող երկիջմանի պար, բանի որ այն համապատասխան է և փոխառնցելի:

Հավաստեք, դիցուք՝ տոնջությունը պատկերված է իրար հետ չհատվող լրիվ գրաֆիկների միավորումով: Այդ դեպքում այն անդրադարձելի է, բանի որ լրիվ գրաֆիկ յուրաքանչյուր գագաթում օղբ կան: Այնուհետև, երբ (x, y) գայգը պատկանում է տրված տոնջությանը, ապա գրաֆիկում ունի x, y կաղը, որը ըստ պայմանի պատկանում է ինչ-որ լրիվ գրաֆիկ: Իսկ այդ լրիվ գրաֆիկ էլ կանենա նաև y, x կաղը: Այսինքն՝ (y, x) գայգը նույնպես պատկանում է տրվող տոնջությանը: Ուրեմն՝ տրված տոնջությունը նաև համադարձելի է: Նայեն կերպ կատարագներ, որ տրված տոնջությունը նաև փոխառնցելի է: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 4.3. Ինչպե՞ս են բնութագրվում կոորդինատական հարթության վրա պատկերված համարժեքություն տոնջությունները:

ՊՆԴՈՒՄ 4.4. Կամույակում բազմություն վրա տրված համարժեքությունների հաստատված համարժեքություն է:

Լարցույց. Դիցուք՝ ունենք μ և ρ համարժեքությունները: Համաձայն 3.2 պրոպոզիցիան՝ $\mu \cap \rho$ տոնջությունը անդրադարձելի է: Համաձայն 3.10 պրոպոզիցիան՝ $\mu \cap \rho$ տոնջությունը համադարձելի է և, համաձայն 3.17 պրոպոզիցիան, այն փոխառնցելի է: Հետևապես՝ $\mu \cap \rho$ տոնջությունը համարժեքություն է:



ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 4.5. Արդյո՞ք համարժեքությունների միավորումը միշտ համարժեքություն է:

4.2. Համարժեքության դասեր: Կամայական բազմություն վրա հավասարության կամ համարժեքության յուրարոնչությամբ սանդուղյուն ենթադրում է ավել բազմություն տարրերի սրժուկի խմբակցությունների առաջացում. միևնույն խմբակցության մեջ են մտնում այն տարրերը, որոնք իրար հետ զանվում են դիտարկվող սանդուղյուն մեջ:

Այսպես, օրինակ, եթե դիտարկում ենք միևնույն ուղղին պատկանելու տոնչությունը, ապա մարդիկ իրար հետ միավորվում են ըստ ուղղությունների, և ստանում ենք տարրերի ուղղությունները: Եթե պիտուրկենք միևնույն սեռին պատկանելու տոնչությունը, ապա մարդիկ կմիավորվեն ըստ սեռերի և կտոնենանք երկու խմբակցություններ՝ տղամարդկանց և կանանց բազմությունները:

Դիտարկենք կամայական A բազմությունը և նրա վրա արված ρ համարժեքությունը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 4.6. A բազմության բոլոր այն տարրերի բազմությունը, որոնք ρ տոնչություն մեջ են մտնում A -ի a տարրի հետ, կոչվում է a տարրը պարամետրող *համարժեքության դաս* կամ ρ -*համարժեքության դաս*, եթե ուզում ենք ընդգծել նաև արված ρ համարժեքությունը:

Այսպիսով, եթե A բազմություն a տարրը պարամետրող համարժեքության դասը գլուխներ $|a|_\rho$ տեսնով, ապա

$$|a|_\rho := \{x | x \in A, x \rho a\} :$$

Բերենք մի քանի օրինակներ:

ա. Դիցուք՝ ρ -ն բոլոր մարդկանց բազմություն վրա արված միևնույն ուղղին պատկանելու տոնչությունն է, իսկ μ -ն՝ նույն բազմություն վրա արված՝ միևնույն երկրի քաղաքացին լինելու տոնչությունը: Այդ պեպքում $|\text{Շաղ Ազնավուր}|_\rho$ -ն հայ ժողովուրդն է, իսկ $|\text{Շաղ Ազնավուր}|_\mu$ -ն՝ ֆրանսիայի ժողովուրդը:

բ. Դիցուք՝ $\rho(n)$ -ը ընտրվում է ինչպես 4.1 կետի դ օրինակում: Այդ դեպքում

$$|2|_{\rho(2)} = 2\mathbb{Z}, \quad |1|_{\rho(2)} = 2\mathbb{Z} + 1 :$$

գ. Կամայական A բազմություն և նրա a տարրի համար

$$|a|_{\Delta_A} = \{a\}, \quad |a|_{1_A} = A :$$

Այժմ անցնենք համարժեքության դասերի սրժուկ հասկությունների ռեսումմասիրությանը:

ՊՆԴՈՒՄ 4.7. Կամայական A բազմություն, նրա վրա արված ρ համարժեքություն և a տարրի համար $a \in |a|_\rho$:

Ապացույց. Զանի որ ρ -ն ռեֆլեքսիվ է, ապա $a \rho a$: Այստեղից, համաձայն համարժեքության դասի սահմանման, $a \in |a|_\rho$: □

Հետևյալ հուսկությունը ցույց է տալիս, որ համարժեքություն դասի բոլոր ստարերը նրանում ունեն միևնույն դերը, և այն որոշվում է իր յուրաքանչյուր ստարով:

ՊՆԴՈՒՄ 4.8. *Կոմպակտն A բազմություն, նրա վրա սրված ρ համարժեքություն և a, b տարրերի համար՝ եթե $b \in |a|_\rho$, ապա $a \in |b|_\rho$ և $|a|_\rho = |b|_\rho$:*

Արդյույց. Դիցուք՝ $b \in |a|_\rho$: Այդ դեպքում՝ եթա և բանի որ ρ -ն համադասիկ է, ապա $a \rho b$: Հետևաբար՝ $a \in |b|_\rho$:

Այժմ ենթադրենք՝ $x \in |a|_\rho$: Այդ դեպքում՝ $x \rho a$: Ունենք նաև $a \rho b$: Քանի որ ρ -ն վախճանիկ է, ապա $x \rho b$: Հետևաբար՝ $x \in |b|_\rho$: Նույն կերպ ցույց կաանք, որ եթե $x \in |b|_\rho$, ապա $x \in |a|_\rho$: Այսինքն՝

$$|a|_\rho = |b|_\rho :$$

□

ՊՆԴՈՒՄ 4.9. *Կոմպակտն A բազմություն վրա սրված ρ համարժեքություն համար տարրեր համարժեքության դասեր իրար հետ չեն հատվում:*

Արդյույց. Դիցուք՝ $c \in |a|_\rho \cap |b|_\rho$: Այդ դեպքում $c \in |a|_\rho$ և $c \in |b|_\rho$: Այսինքն՝ $c \rho a$ և $c \rho b$: Այսանդից, օգտվելով ρ -ի համարժեքություն լինելու հանգամանքից, կատանումք $a \rho b$: Այա վերջին պայմանը օգտագործելով՝ նուխարդ պնդման ապացուցման եղանակով ցույց կաանք, որ $|a|_\rho = |b|_\rho$:

Մենք ցույց տվինք, որ եթե երկու համարժեքություն դասեր ունեն ընդհանուր ստար, ապա նրանք համընկնում են: Ուրեմն՝ տարրեր դասեր իրար հետ չեն հատվում: □

4.3. Տրոխում և ֆակտոր-բազմություն: Առայու կյանքում հաճախ է կատարվում տառերկաների արոնում՝ բաժանում իրար հետ չհատվող մասերի: Ֆակտորաւար արոնվում է կարերի, դպրոցը՝ դասարանների, երկրի ստարածքը արոնվում է մարզերի, բանակը արոնվում է զնդերի, շենքը՝ բնակարանների:

Իսկ ի՞նչ է արոնումը:

ՄԱՀԱՄԱՐՈՒՄ 4.10. Բազմություն *արոնումը* նրա ոչ դասարկ ենթաբազմությունների բազմությունն է, որանք գույց ու գույց իրար հետ չեն հատվում և միավորվելով՝ տառացում են տվյալ բազմությունը: Այսպիսով՝ μ -ն A բազմություն արոնում է՝ նշանակում է.

- ա. μ -ի ստարերը A բազմության ոչ դասարկ ենթաբազմություններ են,
- բ. μ -ի ստարերը գույց ու գույց չեն հատվում,
- գ. μ -ի ստարերի միավորումը հավասար է A -ի, այսինքն՝ A -ի յուրաքանչյուր ստար պաակումում է μ -ի ինչ-որ ստարի:

Բերենք արոնման մի քանի օրինակ:

ա. Բոլոր մարդկանց բազմություն բաժանումք ազգերի:

բ. Մարդկանց կամայական բազմության բաժանումք կամոնց և տղամարդկանց:

գ. $\{2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z} + 1\}$ բազմությունը $\mathbb{Z}$ բազմության արոնում է:

դ. $\{\mathbb{N}, \{0\}, -\mathbb{N}\}$ բազմությունը, որտեղ $-\mathbb{N}$ ը բացասական ամբողջ թվերի բազմությունն է, $\mathbb{Z}$ բազմություն մի այլ արտիում է:

ե. $\{A\}$ -ն A բազմության «ամենալայն» տրոհում է:

զ. $\{\{a\} | a \in A\}$ -ն A բազմության «ամենանեղ» տրոհումն է:

Տրոհման զտղավորը սերտորեն կապված է հավասարության կամ համարժեքության հավակցության հետ:

Նախորդ գլխի մեջ մենք տեսանք, որ կոմպյուտան բազմության վրա արված յուրաքանչյուր հավասարության կամ համարժեքության ստուգացում է ավելի բազմության ստորերկի խմբակցություններ: Իսկ բոլոր այլ խմբակցությունները միասին ստուգացնում են տվյալ բազմության տրոհում:

Դիտարկենք միեմայն ուղղին պրակտիկում տնչությունը: Այստեղ մարդիկ ինչպես ինքնավարում են ըստ ուղղությունների, և ստանում ենք մարդկային արդիւնքի տարբեր ուղղություններ: Դիտարկենք միեմայն սեղին պրակտիկում տնչությունը: Այստեղ մարդիկ կարող են միավորվել ըստ սեղների և կունենանք մարդկային արդիւնքի երկու խմբակցություններ՝ աղտմաբղկունց և կանոնց:

Այժմ նման դասադություններ կատարենք կոմպյուտան համարժեքության համար:

ՊՆԴՈՒՄ 4.11. *Կոմպյուտան բազմություն բոլոր համարժեքություն դասերի բազմությունը՝ ըստ այդ բազմության վրա արված յուրաքանչյուր համարժեքության, այդ բազմություն արտիում է:*

Աղտմաբղկ. Դիցուք՝ A բազմության վրա արված է ρ համարժեքությունը: Պեսաք է ցույց տանք, որ $\{|a|_\rho | a \in A\}$ բազմությունը A -ի արտիում է:

տ. Զանի որ $a \in |a|_\rho$, ապա ավելի բազմության ստորերկը A -ի ոչ դասարկ ենթաբազմություններն են:

բ. Համաձայն 4.9 պնդման $\{|a|_\rho | a \in A\}$ -ի ստորերկը զույգ ևս զույգ չեն հասվում:

գ. Զանի որ $a \in |a|_\rho$, ապա $\{|a|_\rho | a \in A\}$ -ի բոլոր ստորերկի միավորումից ստացված է A բազմությունը: $\square$

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 4.12. A բազմության բոլոր ρ -համարժեքության դասերի բազմությունը կաշվում է այդ բազմության *Ֆուխտր-բազմություն՝ ըստ ρ համարժեքության* և նշանակվում հետևյալ տեսքով՝

$$A/\rho :$$

Այսպիսով՝

$$A/\rho = \{|a|_\rho | a \in A\} :$$

Բերենք ֆուխտր-բազմության օրինակներ:

տ. Եթե A -ն որևէ կուրսի ուսանողների բազմությունն է, ρ -ն՝ միեմայն շարքում նստելու տնչությունը, ապա A/ρ -ն այդ կուրսի ուսանողական շարքերի բազմությունն է:

բ. $\mathbb{Z}/\rho(n) = \{C_0, C_1, \dots, C_{n-1}\}$, որտեղ $\rho(n)$ -ը 4.1 կետի η օրինակում դիտարկված տոնջությունն է, C_i -ն՝ այն ամբողջ թվերի բազմությունը, որոնք բաժանվելով n թվի վրա՝ տալիս են i մնացորդը, $i = 0, 1, \dots, n-1$: Մասնավորապես, $\mathbb{Z}/\rho(2) = \{2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z} + 1\}$:

գ. Կոմսյակյան A բազմության համար՝

$$A/\triangle A = \{\{a\} | a \in A\}, \quad A/1_A = \{A\} :$$

Մեր սալացուցած 4.11 սկզբում ցույց է տալիս, որ կոմսյակյան բազմության վրա արված յուրարանջյուր համարժեքության հետ բնական ճանապարհով կապված է այդ բազմության մի տրեհում: Այժմ ցույց առնք նաև հսկողուկը. բազմության յուրարանջյուր տրեհումներ՝ նույնպես բնական ճանապարհով, համապատասխանում է այդ բազմության վրա արված մի համարժեքություն:

Իսկապես, վերցնենք A բազմությունը և նրա μ տրեհումը: Սահեղենք A բազմության սուրբերի միջև μ^* տոնջությունը հետևյալ ճանապարհով. եթե $a, b \in A$, ապա

$$a\mu^*b \Leftrightarrow a, b \in \alpha, \alpha \in \mu :$$

Այսինքն՝ A բազմության երկու սուրբեր իրար հետ գտնվում են μ^* տոնջության մեջ այն և միայն այն դեպքում, եթե նրանք միաժամանակ ընկած են μ տրեհումն որևէ սուրբի մեջ:

ՊՆԴՈՒՄ 4.13. *Եթե μ -ն A բազմության տրեհում է, ապա μ^* -ը A -ի համարժեքություն է:*

Ապացույց. Պարզ է, որ A -ի կոմսյակյան a սուրբ ընկած է μ -ի որևէ α սուրբի մեջ, և $a\mu^*a$, քանի որ $a, a \in \alpha$: Այսինքն՝ μ^* -ը անդրադարձելի է: μ^* -ի համաչափությունը հետևում է այն քանից, որ $a, b \in \alpha$ պայմանից ստացվում է $b, a \in \alpha$: Դիցուք՝ $a\mu^*b$ և $b\mu^*c$: Այդ դեպքում $a, b \in \alpha$ և $b, c \in \beta$, որտեղ $\alpha, \beta \in \mu$: Բայց քանի որ α -ն և β -ն μ տրեհման սուրբեր են և ունեն b ընդհանուր սուրբը, ապա, համաձայն սահմանման, նրանք պետք է համընկնեն: Այդ դեպքում, սակայն, մենք կստանանք $a, c \in \alpha$: Իսկ սա նշանակում է, որ $a\mu^*c$: Այսպիսով՝ μ^* տոնջությունը նաև փոխոնցելի է: Հետևապես՝ այն համարժեքություն է: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 4.14. *Ապացուցեք, որ եթե ρ -ն A բազմության համարժեքություն է, ապա*

$$(A/\rho)^* = \rho :$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 4.15. *Ապացուցեք, որ եթե μ -ն A բազմության տրեհում է, ապա*

$$A/\mu^* = \mu :$$

ՊՆԴՈՒՄ 5.3. *Դրստֆուլ պատկերված ստնշուրյաուն ույն և միույն ույն դնսլրում է պատկերում ֆունկցիս, էրն զրսւֆի յուրսքսւնշյուր զսզսլրից ոյուրս է զսլլիս մնկից ու լսվնլի սլուր:*

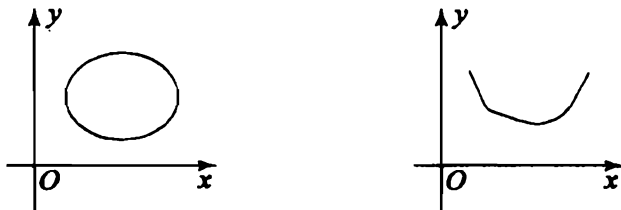
Ասլսցսլոյց. Ասլսցսլոյցսւմը կստսւրէր ինքնուրոյն: □

Հնտնյալ էրկստղ ուղյոսսակնէրից սոսսշլին էրկոսլը սլստկէրում էն ֆունկցիսնէր, իսկ վէրջինը՝ ոշ, որմվիէսն նրոս 5 տսւրրը ունի մնկից սվկլի սլստկէրնէր:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}:$$

Ընդիսնրոսլսն էրկտղ ուղյոսսակմ սլստկէրված ստնշուրյունը ֆունկցիս է ույն և միույն ույն դնսլրում, էրն ուղյոսսակի վէրին ստղում կրկնվող ստրրէր շկսն:

Ֆունկցիսլի զսղսվսրը մնծ կիւրստոյոսն ունի թվսլին բսզմոյոսննէրի ուստննոսլրոյոսն ընթսլցսւմ: ‘Կիցուր’ սլղսլլիսի ստնշուրյունը սլստկէրված է կտըրդինստսկսն հսրթոյոսն վրս: Ալլ դնսլրում ստնշուրյունը ֆունկցիս է ույն և միույն ույն դնսլրում, էրն օրղլինստսնէրի ստսնցրին զսզսնէն ուղլղը ստնշուրյուն սլստկէրի էնտ հստվում է մնկից ու լսվկլ կնտում: Օրլինսկ, 14 զծսզլի ծսիս կտղմում սլստկէրված ստնշուրյունը ֆունկցիս չէ, իսկ սշում սլստկէրվածը՝ ֆունկցիս է:



Գծսզիւր 14

Ֆունկցիսլի զսղսվսրը դիստրկվում է նսն դսրթցսկսն հսնրսնշվի դսսընթսլցսւմ: Այնտղ, մսսնսվորոսլսն, էրկու վսզվիսսկսն սլսրոնսկող որթշսկի հսվստսրոմնէրի միջոցվ կստցվում էն ֆունկցիսնէր: Ֆունկցիսնէր էն որթշում, օրինսկ,

$$y = x + 1, y = 1/x, y = \operatorname{tg} x, y = \ln x$$

հսվստսրոմնէրմ արվում ստնշուրյուննէրը, որստղ x և y վսզվիսսկսննէրը ընդունում էն իրսկսն սրծէրնէր:

Իսկ ի՞նչ կսսլ ունի դս ֆունկցիսլի զսղսվսրի ոսյս նոր ընկսլմսն էնտ: Բսնն ույն է, որ էրկու՝ x և y վսզվիսսկսննէրմ յուրսրսնշյուր հսվստսրում որթշում է մի ստնշուրյուն. ույն (x, y) զսլզէրի բսզմոյոսնը, ոյնը սրված հսվստսրումն լուծսւմնէր էն: Վէրնում վէրցրում $y = x + 1$ հսվստսրումը որթշում է $\{(x, x + 1) | x \in \mathbb{R}\}$ ստնշուրյունը, $y = 1/x$ հսվստսրումը՝ $\{(x, 1/x) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ ստնշուրյունը, $y = \operatorname{tg} x$ հսվստսրումը՝ $\{(x, \operatorname{tg} x) | x \in \mathbb{R}, x \neq \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$ ստնշուրյունը և $y = \ln x$ հսվստսրումը՝ $\{(x, \ln x) | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ ստնշուրյունը: Բոլոր ոսյս ստնշուրյուննէրը բսվսրսրում էն նսն ֆունկցիսլի՝ մնր բնրում սսնմսնմսնը: Նկստի

ունենալով ասվածը՝ հետազոտում նման հավասարումները նույնպես կամվանենք ֆունկցիաներ:

Ֆունկցիանալ առնչության որոշման ախրայրը և արժեքների ախրայրը կոչվում են նաև ֆունկցիայի որոշման ախրայր և արժեքների ախրայր: f ֆունկցիայի որոշման ախրայրը նշանակվում է $\text{Dom } f$: Այսպիսով՝ A բազմությունից B -ի մեջ արված f ֆունկցիայի համար՝

$$\text{Dom } f = \{x | x \in A, f(x) = y, y \in B\} :$$

Վերևում բերված $y = x + 1, y = 1/x, y = \lg x, y = \ln x$ հավասարումներով որոշված ֆունկցիաների որոշման ախրայրներն են համապատասխանաբար՝ իրական, գոյից ստորեր իրական, $\pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ թվերից ստորեր իրական և դրական իրական թվերի բազմությունները: Այս ֆունկցիաներից առաջինը, երրորդի և չորրորդի արժեքների ախրայրները նույնն է՝ իրական թվերի բազմությունը, իսկ երկրորդի արժեքների ախրայրը գոյից ստորեր իրական թվերի բազմությունն է:

Դիցա՛ք՝ ունենք A բազմությունից B -ի մեջ արված f ֆունկցիան: Այդ դեպքում, եթե $(x, y) \in f$, ապա x ստորով որոշվող միակ y ստորը կգրառենք նաև $f(x)$ տեսքով: Այսինքն՝

$$y = f(x) :$$

Երբեմն այս հավասարության մեջ մասնող x աստը անվանվում է f ֆունկցիայի *արգումենտ* կամ *անկողի փոփոխական*, իսկ y -ը անվանվում է *կոփյուղ փոփոխական*: y -ը անվանվում է նաև f ֆունկցիայի *արժեք*: x -ի համար կամ x կեսում:

Եթե f -ը A բազմությունից B -ի մեջ արված ֆունկցիա է և $M \subseteq \text{Dom } A$, ապա ընդունվում է

$$f(M) = \{f(x) | x \in M\}$$

նշանակումը: $f(M)$ -ը կոչվում է M -ի *պատկեր*: Մասնավորապես f ֆունկցիայի արժեքների ախրայրը համընկնում է $\{f(x) | x \in \text{Dom } f\}$ բազմության հետ: Այն նշանակվում է $\text{Im } f$ տեսքով: Այսպիսով՝

$$\text{Im } f = \{f(x) | x \in \text{Dom } f\} :$$

A բազմությունից B -ի մեջ արված f և g ֆունկցիաները կոչվում են հավասար, եթե նրանք հավասար են որսևս տոնչություններ:

ՊՆԴՈՒՄ 5.4. *A բազմությունից B -ի մեջ արված f և g ֆունկցիաները կլինեն հավասար այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանք ունեն միևնույն որոշման ախրայրը և այդ որոշման ախրայրի կոմուտական a ստորի համար՝ $f(a) = g(a)$:*

Արստույց. Ասպացուցումը կատարեք ինքնուրույն: □

5.2. Ֆունկցիաների հատկությունները: Ֆունկցիայի առաջին և տմենակարևոր հատկությունը կապված է նրա որոշման ախրայրի հետ:

ՄԱՀԱՐԱՈՒՄ 5.5. Եթե A բազմությունից B -ի մեջ արված f ֆունկցիայի որոշման ախրայրը համընկնում է A -ի հետ, ապա այն կոչվում է *որտուրյուտկերում*:

Ասում են նաև, որ f -ը A բազմության արտապատկերումն է B բազմության մեջ: Այդ դեպքում գործածվում են նաև հետևյալ նշանակումները.

$$f : A \rightarrow B, \quad f : x \rightarrow f(x), \quad x \in A :$$

Ֆունկցիայի արտապատկերման հասկացությունը նախասկսեալաբար է կատարելի՝ օգտվելով հետևյալ պնդումից:

ՊԼԴՌԻՄ 5.6. *A բազմությունից B -ի մեջ ստիված f ֆունկցիան արտապատկերում է այն և միայն այն դեպքում, երբ A -ի յուրաքանչյուր տարր ունի սրտակեր:*

Ապոցույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: □

Օրինակ, $y = x + 1$, $y = 1/x$, $y = \lg x$, $y = \ln x$ հավասարումներով արված ֆունկցիաներից միայն առաջինն է արտապատկերում, երբ մենք դրանք դիտում ենք որպես $\mathbb{R}$ -ից $\mathbb{R}$ -ի մեջ արված ֆունկցիաներ:

A բազմությունից B -ի մեջ արված՝ գրաֆով պատկերված ֆունկցիան արտապատկերում է այն և միայն այն դեպքում, երբ A -ն պատկերող բազմության յուրաքանչյուր կետից դուրս է գալիս պար (տես գծ. 15):

Կոորդինատական հարթության վրա պատկերված՝ $\mathbb{R}$ -ից $\mathbb{R}$ -ի մեջ արված ֆունկցիան արտապատկերում է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն հոսում է օրդինատների ստանդարտ գույուհե յուրաքանչյուր ուղիով:

Հետևյալ երկատոյ տոյուտակներով պատկերված են $\{1, 2, 3, 4\}$ բազմությունից $\{5, 6, 7\}$ բազմության մեջ արված ֆունկցիաներ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} :$$

Նյունցից ստաջինը արտապատկերում է, երկուոյը՝ ոչ:

Ընդհանրապես, A բազմությունից B -ի մեջ արված երկատոյ տոյուտակով սյաալկերված ֆունկցիան արտապատկերում է այն և միայն այն դեպքում, երբ տոյուտակի առաջին առոյում գրված տարրերի բազմությունը համընկնում է A բազմության հետ:

Հշատությունը կարելի է սալացուցել, որ A բազմությունից B -ի մեջ արված յուրաքանչյուր ֆունկցիա իր սրաշման տիրույթի արտապատկերումն է B բազմության մեջ: Օրինակ, չնայած այն բանին, որ $y = \ln x$ ֆունկցիան $\mathbb{R}$ -ից $\mathbb{R}$ -ի մեջ արված արտապատկերում չէ, բույց այն արտապատկերում է $\mathbb{R}^+$ -ից $\mathbb{R}$ -ի մեջ:

Ֆունկցիաների հաջորդ հասկացությունը կտալված է Ֆունկցիայի արժեքների տիրույթի հետ:

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 5.7. Երբ A բազմությունից B -ի մեջ արված f ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը համընկնում է B -ի հետ, ապա այն կոչվում է *վրադրում*, *սուրյեկցիա* կամ *վրադրող ֆունկցիա*: Երբ f -ը A -ից B -ի մեջ արված վրադրում է, ապա կոսենք նաև, որ այն վրադրում է A -ի և B -ի միջև:

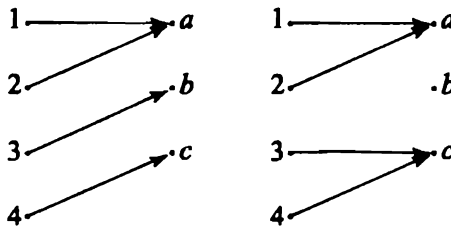
Վրադրումների հետ գործ ունենալիս նախասկսեալաբար է օգտվել հետևյալ հասկացությունից:

ՊՆԴՈՒՄ 5.8. *A* բազմությունից *B*-ի մեջ արված *f* ֆունկցիան վրադրում է այն և միայն այն դեպքում, եթե *B*-ի յուրաքանչյուր տարր ունի նախապատկեր:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեն ինքնուրույն: □

Օրինակ՝ $\mathbb{R}$ -ից $\mathbb{R}$ -ի մեջ արված $y = 1, y = \sin x, y = \lg x, y = \ln x$ հավասարումներով արված ֆունկցիաներից ուռաջին երկուսը վրադրում չեն, իսկ վերջին երկուսը վրադրում են:

A բազմությունից *B*-ի մեջ արված գրաֆով պատկերված ֆունկցիան վրադրում է այն և միայն այն դեպքում, եթե *B*-ն պատկերող բազմության յուրաքանչյուր կետ մտնում է արտ: 15 գծագրում պատկերված ֆունկցիաներից ուռաջինը վրադրում է, իսկ երկրորդը՝ ոչ::



Գծագիր 15

Կառքիլնուստական հարթության վրա պատկերված՝ $\mathbb{R}$ -ից $\mathbb{R}$ -ի մեջ արված ֆունկցիան վրադրում է այն և միայն այն դեպքում, եթե այն հաճում է արագիսների առանցքին զուգահեռ յուրաքանչյուր ուղիղ:

Հետևյալ երկառող աղյուսակներով պատկերված են $\{1, 2, 3, 4\}$ բազմությունից $\{5, 6, 7\}$ բազմության մեջ արված ֆունկցիաները:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} :$$

Նրանցից առաջինը վրադրում է, երկրորդը՝ ոչ:

Ընդհանրապես երկառող աղյուսակով *A* բազմությունից *B*-ի մեջ արված ֆունկցիան վրադրում է այն և միայն այն դեպքում, եթե աղյուսակի երկրորդ ստորում գրված տարրերի բազմությունը համընկնում է *B* բազմության եետ:

Հասկանալի է, որ *A* բազմությունից *B*-ի մեջ արված յուրաքանչյուր *f* ֆունկցիա վրադրում է *A* և *Im f* բազմությունների միջև: Օրինակ, շնույտը այն բանին, որ $y = \sin x$ ֆունկցիան $\mathbb{R}$ -ից $\mathbb{R}$ -ի մեջ արված վրադրում չէ, բայց այն վրադրում է $\mathbb{R}$ և $[-1, 1]$ բազմությունների միջև:

Ֆունկցիայի ևս մի հատկություն կապված է ֆունկցիանալ առնչության մեջ մտնող տարրերի քվի հետ:

ՄԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 5.9. Ելն ֆունկցիաները, որոնց որոշման սիրայքի տարրեր տարրեր ունեն տարրեր պատկերներ, կաշվում են *տարրադրումներ* կամ *ինյեկցիաներ*: Եթե

f -ը A -ից B -ի մեջ արվում ստորադրում է, ասես կոսենք մտն, որ այն ստորադրում է A -ի և B -ի միջև:

Տարադրումների հեռ գործ ժոնենպիս նսրաաակաւարմար է օգսվել հետևյալ հասկոթյունից:

ՊՆԴՈՒՄ 5.10. A բազմոթյունից B -ի մեջ արվում f ֆունկցիան ստորադրում է այն և միայն այն դեպքում, երև A -ի ստորերրի պատկերները համընկնելիս՝ հումընկնում են մոև այդ ստորերրի:

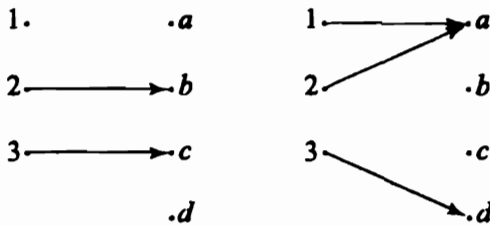
Արդյոթյց. Ասյացուցումը կասարեր ինքնօրոթյն:

□

Այս հասկոթյունից օգսվելիս A բազմոթյունից B -ի մեջ արվում f ֆունկցիայի ստորադրում լինելը աաաօվում է աթսպես. ցայց է արվում, որ f -ի որաշման տիրոթթի կամայական a և b ստորերրի համար

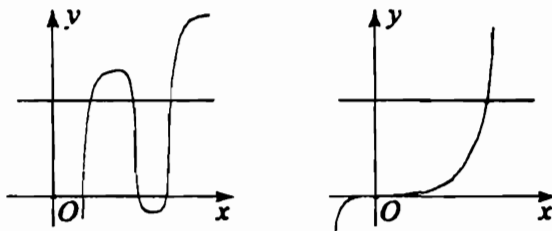
$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b :$$

$\mathbb{R}$ -ից $\mathbb{R}$ -ի մեջ արվում՝ $y = x + 1$, $y = \sin x$, $y = \lg x$, $y = \ln x$ ֆունկցիաներից աաաջինը և չորրորդը ստորադրումներ են, իսկ երկրորդը և երրորդը՝ ոչ:



Գծագիր 16

16 գծագրում պատկերվում առնչոթյուններից աաաջինը ստորադրում է, իսկ երկրորդը՝ ոչ: Շնդիանրաթես, A բազմոթյունից B -ի մեջ արվում զրաֆոժ պատկերվում ֆունկցիան ստորադրում է այն և միայն այն դեպքում, երև B -ն պատկերադ զրաֆի որևէ կես չի մըանում մեկից աժելի սլար:



Գծագիր 17

Կաթրդինասասկան հարթոթյան վրա պատկերվում է $\mathbb{R}$ -ից $\mathbb{R}$ -ի մեջ արվում ֆունկցիան ստորադրում է այն և միայն այն դեպքում, երև այն աբսցիսների աաանցքին

գույանեռ յուրարանշյուր սղիղ կարող է հուսել միայն մեկ կետում: 17 զծագրում սլատկերված ֆունկցիաներից առաջինը սարսղդում չէ, իսկ երկրորդը տարսղդում է:

Հետևյալ երկառիկ սղյուտակներով սլատկերված են $\{1, 2, 3, 4\}$ բազմությունից $\{5, 6, 7\}$ բազմության մեջ արված ֆունկցիաները: Նրանցից առաջինը սարսղդում է, երկրորդը՝ ոչ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 7 \end{pmatrix}:$$

Ընդհանրապես, երկառիկ սղյուտակով A բազմությունից B -ի մեջ արված ֆունկցիան սարսղդում է այն և միայն այն դեպքում, եթե սղյուտակի երկրորդ տողում կրկնվող սարքեր չկան:

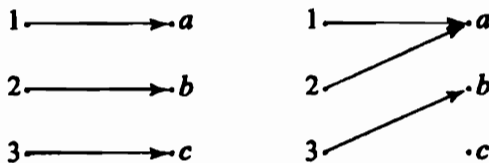
Ջուզակցելով ֆունկցիաների՝ բերված բոլոր հասկությունները, մենք կստանանք ֆունկցիայի «գավազույն» հասկությունը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 5.11. ֆունկցիան, որը միաժամանակ արսղուսակերում է, վրսղում և սղուսղդում, կոչվում է *վերսղյում կամ բիբեկցիո կամ վսղմխարծեր ֆունկցիա*: Եթե f -ը A -ից B -ի մեջ արված վերսղդում է, սղալ կասենք նաև, որ այն վերսղդում է A -ն B -ի վրս:

Օրինակ, $\mathbb{R}$ -ից $\mathbb{R}$ -ի մեջ արված՝ $y = x + 1$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = x^3$ ֆունկցիաներից առաջինը և վերջինը վերսղդում են, մյուս երկուսը՝ ոչ:

A բազմությունից B -ի մեջ արված գղսղով սղուսկերված ֆունկցիան վերսղդում է այն և միայն այն դեպքում, եթե A -ի յուրարանշյուր կետից դուրս է գղխս և B -ի յուրարանշյուր կետ մանում է մեկ և միայն մեկ սղուր: 18 զծագրում սղուսկերված ֆունկցիաներից առաջինը վերսղդում է, երկրորդը՝ ոչ:

Վտորդինասղական հարրսյան վրս սղուսկերված և $\mathbb{R}$ -ից $\mathbb{R}$ -ի մեջ արված ֆունկցիան վերսղդում է այն և միայն այն դեպքում, եթե այն հղսղում է արսցխաների և օրդինսաների աղսնցքներին գղուսեռ յուրարանշյուր սղիղ մեկ և միայն մեկ կետում: 19 զծագրում սղուսկերված ֆունկցիաներից առաջինը վերսղդում է, երկրորդը՝ ոչ:

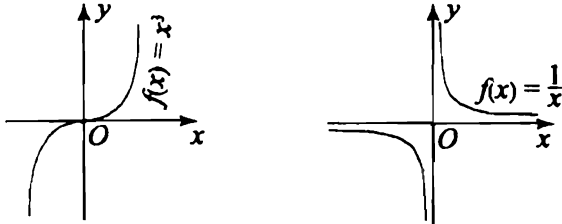


Հետևյալ երկսող տղյտասկներով սրասկերվում են $\{1, 2, 3, 4\}$ բազմությունից $\{5, 6, 7, 8\}$ բազմության մեջ արված ֆունկցիաներ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 5 & 5 \end{pmatrix}:$$

Նրանցից ստույիներ վերադրում է, երկայդը՝ ոչ:

Ընդհանրապես, երկսող տղյտասկով A բազմությունից B -ի մեջ արված ֆունկցիան վերադրում է ույն և միույն ույն դեպքում, երբ տղյտասկի ոտուջին տադում A -ի, երկայդ տադում՝ B -ի յարարումչար ստարր հոանդիարում է մեկ և միույն մեկ ոանգամ:



Գծագիր 19

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 5.12. Կիցուր՝ A բազմությունն ունի m ստարր, իսկ B -ն՝ n ստարր: Ինչի՞նչ է հոախոար A -ից B -ի մեջ արված.

- ա. ֆունկցիաների քիվր,
- բ. արսոտարտակերումների քիվր,
- գ. վրոդդումների քիվր,
- դ. ստարտղյումների քիվր,
- ե. վրադդող արսոտարտակերումների քիվր,
- զ. ստարտղյող ուրաարտակերումների քիվր,
- է. վերադդումների քիվր:

5.3. Տեղադրություններ: Համրահուշվում ոտումճնուպես կարեր դեր են կուսուրում կամույակում բազմությունը իր հետ վերադրող ֆունկցիաները: Դրանք կոչվում են ուղ բազմության տեղադրություններ:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 5.13. A բազմությունից A -ի մեջ արված վերադրումը կոչվում է A բազմության *սեղադրություն*:

A բազմության բոլոր տեղադրությունների բազմությունը գրադվում է $S(A)$ տեսքով: Երբ $A = \{1, 2, \dots, n\}$, ոալու $S(A)$ գրադումն վոխիտրեն ուվելի հոանախ գործածվում են $S(n)$ և S_n գրադումները:

Վերչալոր բազմությունների տեղադրությունների սրասկերումը ոտումճնուպես ոալյունովեսա է սաուցվում երկսող տղյտասկների տեսքով: Նարից ճշենք, որ երբ արվում է

$$f \begin{pmatrix} \cdot & i & \cdot \\ \cdot & j & \cdot \end{pmatrix}$$

տոնջությունը, ուստի ուշառելի վերին առողջում գրված i առարկի առակ գրված է նրա j սյուսակերը: Այսինքն՝ $f(i) = j$:

ՊՆԴՈՒՄ 5.14. *Դիցուք՝ ունենք $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$: A -ից A -ի մեջ արված*

$$f \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_n \end{pmatrix}$$

ֆունկցիան այն և միայն այն դեպքում է A բազմությունն անդադրություն, եթե

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} :$$

Ապացույց. Աստիճանաբար կուսարկեք ինքնարդյուն: □

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 5.15. Երկտեղ տպոտատկի անսրավ գրեր $\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}$ բազմությունների բախը անդադրությունները:

ՊՆԴՈՒՄ 5.16. *Եթե A բազմությունն ունի n տարր, ապա $S(A)$ բազմությունը ունի $n!$ տարր:*

Ապացույց. Դիցուք՝ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$: A բազմության a_1 տարրը A -ի անդադրությունը կարող է տրստալատկերվել $a_1, a_2, \dots, a_n$ տարրերից յուրաքանչ-յուրին. ունենք այդպիսի n հնարավորություն կամ դեպք: Այնուհետև, վերցնենք այդ դեպքերից մեկը. ուսենք a_1 -ը որդեն տրստալատկերվել է a_i -ին: Այդ դեպքում a_2 -ը այլևս այդ a_i -ին չի կարող տրստալատկերվել. այն կարող է տրստալատկերվել մնացած $n - 1$ տարրերից յուրաքանչյուրին: Այսինքն՝ a_1 -ի տրստալատկերման յուրաքանչյուր դեպքի համար կանենումք a_2 -ի տրստալատկերման $n - 1$ հնարավորություն: Նայեն կերպ a_2 -ի տրստալատկերման յուրաքանչյուր դեպքի համար կանենումք a_3 -ի տրստալատկերման $n - 2$ հնարավորություն և այլն: Այսպիսով՝ բախը n տարրերի համար դիստարկելով հնարավոր բոլոր դեպքերը, մենք կստանանք ընդամենը $n(n - 1)(n - 2) \cdots 2 \cdots 1$ կամ $n!$ դեպք: Այդքան էլ կլինի A բազմության անդադրությունների քիվը: □

5.4. Համարժեքություն և արտապատկերում: Գոյություն ունի սերտ կապ կամույական բազմություն վրա արված համարժեքությունների և այդ բազմության տրստալատկերումների միջև:

Դիստարկենք

$$f : A \rightarrow B$$

տրստալատկերումը: A բազմության տարրերի միջև տունումներ $\ker f$ երկտեղ տուն-չությունը հետևյալ կերպ:

ՄԱՀԱՄԱՐՈՒՄ 5.17. A բազմության կամայական x և y տարրերի համար ընդունենք՝

$$x(\ker f)y \Leftrightarrow f(x) = f(y) :$$

Այսինքն՝ A բազմության երկու սուբբեր մանում են $\ker f$ տանջություն մեջ այն և միայն այն դեպքում, եթե նրանք ռենն միևնույն սխտակերը: $\ker f$ տանջությունը կռ-վում է f սխտասխտակերման կորիզային տանջություն կամ կորիզ:

Բերենք մի քանի օրինակ:

ա. Դիցուք՝ $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = 1$, երբ x -ը զույգ է, $f(x) = -1$, երբ x -ը կենտ է:

Այդ դեպքում $\ker f$ -ը մի տանջություն է, որի մեջ մանում են զույգ թվերը իրար հետ, կենտ թվերը՝ իրար հետ: Այլ կերպ՝ $\ker f = \rho(2)$:

բ. Եթե $\tau: x \rightarrow x, x \in A$, ապա $\ker \tau = \Delta_A$:

գ. Եթե f -ը A բազմության յուրաքանչյուր սարք արտասխտակերտում է ինչ-որ բազմության միևնույն սարքին, ապա $\ker f = 1_A$:

ԴՆԴՈՒՄ 5.18. Կամայական արտասխտակերտման կորիզը համարժեքություն է:

Ապացույց. Դիտարկենք $f: A \rightarrow B$ արտասխտակերտը: Ջանի որ, համա-ժայն հավասարություն ուղղադարձեղության հատկություն, A բազմության կամա-յական x սարքի համար $f(x) = f(x)$, ապա $x(\ker f)x$:

Այնուհետև, եթե $x(\ker f)y$, ապա $f(x) = f(y)$: Այստեղից, օգտվելով հա-վասարության համաչափության հատկությունից, կստանանք $f(y) = f(x)$ կամ՝ $y(\ker f)x$:

Վերջապես, դիցուք՝ $x(\ker f)y$ և $y(\ker f)z$: Այդ դեպքում կստանանք $f(x) = f(y)$ և $f(y) = f(z)$: Այստեղից, օգտվելով հավասարության փոխանցելիության հատկությունից, կստանանք $f(x) = f(z)$: Իսկ սա նշանակում է $x(\ker f)z$:

Այսովստով՝ մենք ցույց տվինք, որ $\ker f$ տանջությունը բավարարում է համար-ժեքության բոլոր երեք պայմաններին: $\square$

Այժմ սյուրգենք, թե առյու՞ք կարելի է զանել մի արտասխտակերտում, որի կորիզը լինի նուիտալ սրված համարժեքությունը: Այս կարևոր հարցին սխտասխտանելու համար, նույն, ելնելով կոնկրետ բազմության վրա սրված կամայական համարժե-քությունից, կստուգենք նրա հետ բնականորեն կապված մի արտասխտակերտ:

Դիցուք՝ ρ -ն A բազմության վրա սրված համարժեքություն է:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 5.19.

$$i(\rho): A \rightarrow A/\rho, i(\rho)(x) = |x|_\rho, x \in A$$

արտասխտակերտը կռվում է ρ համարժեքությանն համապատասխանող *բնական արտասխտակերտ*:

Օրինակ, եթե A -ն բոլոր մարդկանց բազմությունն է, ρ -ն՝ միևնույն սեռին պատ-կանելու տանջությունը, ապա $i(\rho)$ -ն յուրաքանչյուր մարդու տանջում է նրա սեռը:

Հասկանալի է, որ կամայական A բազմության վրա սրված ρ համարժեքության համար $i(\rho)$ -ն վրողող արտասխտակերտում է A և A/ρ բազմությունների միջև:

ԴՆԴՈՒՄ 5.20. $i(\rho)$ արտասխտակերտման կորիզը ρ համարժեքությունն է:

Ապացույց. Դիցուք՝ ρ -ն A բազմության վրա սրված համարժեքություն է և $x, y \in A$: Այդ դեպքում՝

$$\begin{aligned} x(\ker i(\rho))y &\Leftrightarrow i(\rho)(x) = i(\rho)(y) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |x|_\rho = |y|_\rho \Leftrightarrow x\rho y : \end{aligned}$$

□

6. ԿԱՐԳԻ ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆ

6.1. Կարգի առնչությունը. Թե՛ առօրյա կյանքում և թե՛ մաթեմատիկայում հանդիպող կարևոր առնչություններից է անհավասարության առնչությունը։ Ինչպես առարկաների հավասարությունը, ույնպես էլ նրանց անհավասարությունը բացահայտվում է առարկաների համեմատության արդյունքում։ Նվազագույնի անհավասարությունը նույնպես մերի սլայմունական, հարաբերական բնույթ և կախված է այն իրադրությունից, որտեղ կատարվում է առարկաների անհավասարությունը բացահայտող համեմատությունը։

Այսպես, օրինակ, երբ մենք համեմատում ենք երկու քաղաքներ, ապա նրանցից մեկը կարող է լինել մեծ բնակչությամբ, մյուսը՝ տարածքով։ Բնակչությամբ նույնպես մի ժամանակ կարող է մեծ լինել քաղաքներից մեկը, մի այլ ժամանակ՝ մյուսը։

Սակայն բոլոր դեպքերում, անկախ իրադրությունից, որում այն դիտարկվում է, անհավասարության առնչությունը բավարարում է մի քանի սկզբունքների։

Նույն նշենք, որ եթե մաթեմատիկայում հավասարության առնչությունը հանդես է գալիս որպես համարժեքություն, ուստի առարկաների անհավասարությունը կիրառվում է կարգի առնչության ստեղծում։ Կարգի առնչություններ են, օրինակ, առարկաների միջև վաղը լինելու և մեծ լինելու առնչությունները։ Այսպիսով՝ ուսուցիչները մենք կիսատենք ոչ թե առարկաների անհավասարության, այլ առարկաների միջև սրված կարգի առնչության մասին։

Այնուհետև, ցանկացած անհավասարություն տեղի ունի որևէ կոնկրետ բազմության առարկաների կարգավորված զույգերի միջև. առարկաներից մեկը կարող է վաղը կամ մեծ լինել մյուսից։ Այսինքն՝ կարգի յուրաքանչյուր առնչություն ինչ-որ բազմության վրա սրված երկաթե առնչություն է։

Այլա, անկախ նրանից, թե ինչ հանգամանքներում ենք կատարում առարկաների համեմատությունը, եթե մի առարկա համարել ենք վաղը մի այլ առարկայից, այդ երկրորդը չի կարող վաղը լինել առաջինից։ Իսկ սա նշանակում է, որ կարգի առնչությունը բոլոր դեպքերում բավարարում է հսկայական ապահովության սկզբունքին։

Վերջուպես, եթե մենք տեսնել ենք, որ առաջին առարկան վաղը է երկրորդից, իսկ երկրորդն էլ վաղը է երրորդից, ապա առանց լրացուցիչ համեմատություն կատարելու եզրակացնում ենք, որ առարկաներից առաջինը վաղը է երրորդից։ Սա էլ նշանակում է, որ կարգի առնչությունը անպայման բավարարում է փոխանցելիության հատկությանը։

Այսպիսով՝ մենք հստակում ենք հետևյալ կարևոր ստեղծումները:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 6.1. Կամայական բազմություն վրա տրված երկսեղ առնչությունները կոչվում է *կարգի առնչություն*, եթե այն հսկայականացվելի է և վերահսկելի:

Օրինակներ և ժխտաթյուններ:

ա. Կարգի առնչակարևոր առնչություններն են կամայական թվային բազմության վրա տրված $<, >, \leq, \geq$ առնչությունները:

բ. Կարգի առնչություններ են նաև յուրաքանչյուր բազմություն *ենթաբազմությունների* շրջել բազմության վրա տրված $\subset, \subseteq, \supset, \supseteq$ առնչությունները:

գ. $\mathbb{N}$ բազմության վրա տրված՝ առանց մնացորդի բաժանման առնչությունը կարգի առնչություն է:

դ. Յուրաքանչյուր բազմության վրա տրված անկյունագծային առնչությունը կարգի առնչություն է, իսկ լրիվ առնչությունը՝ ոչ, եթե բազմությունը ունի մեկից ավելի ատար:

Օգտվելով գրառումներից և երկառի տրյուստիկներից՝ կարելի է հեշտությամբ կուտացել կարգի առնչության այլ օրինակներ:

Ամբողջությամբ իրարից ատրեբում են կարգի խիստ և ոչ խիստ առնչությունները:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 6.2. Կարգի առնչությունը կոչվում է *ոչ խիստ կարգի* առնչություն, եթե այն նաև ունդրադարձելի է, և *խիստ կարգի* առնչություն, եթե այն նաև հսկայականացվելի է:

Վերևում բերված $\leq, \geq, \subseteq, \supseteq$ առնչությունները ոչ խիստ կարգի առնչություններ են, իսկ $<, >, \subset, \supset$ առնչությունները՝ խիստ կարգի առնչություններ:

Դեռություն ունի սերա կապ միևնույն բազմության վրա տրված կարգի խիստ և ոչ խիստ առնչությունների միջև: Խիստ կարգի յուրաքանչյուր առնչություն հետ միասնաբերակ հսկայականություն առնչությունը, կատարանք ոչ խիստ կարգ և, հսկայականացվել, ոչ խիստ կարգի առնչությունից հանելով հսկայականություն առնչությունը, կատարանք խիստ կարգի առնչություն:

ՊՆԴՈՒՄ 6.3. Եթե ρ -ն A բազմություն վրա տրված խիստ կարգի առնչություն է, ապա $\rho \cup \Delta_A$ միավորումը կլինի A բազմություն վրա տրված ոչ խիստ կարգի առնչություն:

Ապացույց. Դիցուք՝ ρ -ն A բազմության վրա տրված խիստ կարգի առնչություն է: Քանի որ $\rho \cup \Delta_A$ միավորումը սրտաբանական է Δ_A առնչությունը, ուրեմն՝ այն անդրադարձելի է: Ցույց տանք նաև հսկայականացվելիությունը: Դիցուք՝ $x(\rho \cup \Delta_A)y$ և $y(\rho \cup \Delta_A)x$: Այդ դեպքում առաջին սրտաբանից կտեսնանք $x\rho y$ կամ $x = y$: Եթե անդի ունի $x = y$ սրտաբանը, ապա տալացուցելու բուն չի մնում: Դիցուք՝ անդի ունի $x\rho y$ սրտաբանը: Այդ դեպքում դիմենք $y(\rho \cup \Delta_A)x$ սրտաբանին: Այն ճշանակում է $y\rho x$ կամ $y = x$: Նույնից, եթե այստեղ անդի ունի երկրորդ սրտաբանը, ապա տալացուցելու բուն չի մնում, իսկ եթե անդի ունի $y\rho x$ սրտաբանը, ապա $x\rho y$ սրտաբանի հետ միասին կատարանք $x = y$, րանի որ ρ առնչությունը հսկայականացվելի է: Նույն կերպ ցույց կտանք, որ $\rho \cup \Delta_A$ -ն նաև վերահսկելի է: $\square$

Օրինակներ:

ա. Կամայական A թվային բազմության համար՝

$$\leq \text{--} < \cup \Delta_A, \geq \text{--} \supset \Delta_A \cup >:$$

բ. Կամայական A բազմության համար՝

$$\subseteq \text{--} \subset \cup \Delta_{2A}, \supseteq \text{--} \supset \cup \Delta_{2A}:$$

ՊԼՂՈՒՄ 6.4. Եթե ρ -ն A բազմություն վրա տրված ոչ իդիստ կարգի տոնջություն է, ապա $\rho \setminus \Delta_A$ ստորեկությունը կլինի A -ի վրա տրված իդիստ կարգի տոնջություն:

Արդյույթ: Արդյույթումը կատարել ինքնաբերաբար: □

Օրինակներ:

ա. Կամայական A թվային բազմության համար՝

$$< \text{--} \subseteq \setminus \Delta_A, > \text{--} \supseteq \setminus \Delta_A:$$

բ. Կամայական A բազմություն համար՝

$$\subset \text{--} \subseteq \setminus \Delta_{2A}, \supset \text{--} \supseteq \setminus \Delta_{2A}:$$

6.2. Կարգի հասկոթյունները: Դիտարկենք A բազմությունը և նրա վրա տրված կարգի ρ տոնջությունը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 6.5. A -ի x և y ստորերը կոչվում են *համեմատելի* ρ կարգի նկատմամբ կամ ρ -*համեմատելի*, եթե $x\rho y$ կամ $y\rho x$:

Օրինակներ:

ա. Թվային բազմությունների վրա տրված $>$ և $<$ կարգերի նկատմամբ համեմատելի են կամայական երկու անհավասար թվեր, իսկ հավասար թվերը համեմատելի չեն:

բ. Թվային բազմությունների վրա տրված $\geq$ և $\leq$ կարգերի նկատմամբ համեմատելի են կամայական երկու թվեր:

գ. Բնական թվերի բազմություն վրա տրված՝ ուսումն ցմացորդի բաժանման տոնջություն նկատմամբ 1 և 2 թվերը համեմատելի են, իսկ 3 և 2 թվերը համեմատելի չեն:

դ. Կամայական A բազմություն բաղկանի վրա տրված $\subseteq$ կարգի նկատմամբ A -ի X և Y ենթաբազմությունները համեմատելի են այն և միայն այն դեպքում, եթե X -ը Y -ի ենթաբազմություն է, իսկ $\subset$ կարգի նկատմամբ համեմատելիությունը նշանակում է, որ X -ը Y -ի սեփական ենթաբազմությունն է:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 6.6. Եթե բազմություն իրարից ստորերի ցանկացած երկու ստորերի համեմատելի են նրա վրա տրված կարգի նկատմամբ, ապա այդ կարգը կոչվում է *գծային կարգ*:

Վերևում դիտարկված ա և բ օրինակները գծային կարգի օրինակներ են, իսկ մնացածները՝ ոչ:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 6.7. Արդյույթեր, որ եթե A բազմությունը ունի մեկից ավելի ստոր, ապա նրա $B(A)$ բաղկանի վրա տրված $\subset$ կարգը չի կարող լինել գծային:

ՄԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 6.8. A բազմությունը կոչվում է *կարգավորված*, եթե նրա վրա արդված է ρ կարգի առնչություն: Նման դեպքերում հաճախ (A, ρ) գույգը անվանում են *մասնակի կարգավորված բազմություն*: Եթե բազմություն վրա արված կարգը գծային է, ապա բազմությունը կոչվում է նաև *գծորեն կարգավորված*:

Դիտարկենք (A, ρ) մասնակի կարգավորված բազմությունը:

ՄԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 6.9. A բազմության a տարրը անվանենք.

- ա. *մեծագույն*, եթե a -ից սուրբեր ցունկուցած x տարրի համար $x\rho a$,
- բ. *փոքրագույն*, եթե a -ից տարրեր ցունկուցած x տարրի համար $a\rho x$,
- գ. *մուսխմուս*, եթե $a\rho x$ -ից հետևում է $a = x$,
- դ. *միմիմուս*, եթե $x\rho a$ -ից հետևում է $a = x$:

Կարևոր է հասկնա սուրբերի բազմություն մեծագույն տարրը նրա մաքսիմալ աարրից և փոքրագույն տարրը՝ միմիմուս տարրից: Հասկանալի է, որ մեծագույն տարրը նաև մաքսիմալ է, բայց հակառակը միշա չէ, որ ճշմարիա է: Նույն կերպ՝ փոքրագույն տարրը նաև միմիմալ տարր է, բայց հակառակը միշա չէ, որ ճշմարիա է:

Օրինակներ:

ա. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ բազմությունների վրա արված $<, >$ կարգերը մեծագույն, փոքրագույն, միմիմուս կամ մաքսիմալ տարրեր չունեն:

Ն բազմության վրա արված $<$ կարգի նկատմամբ 1 թիվը փոքրագույն տարր է:

բ. 1 թիվ տարրեր բնակուն թվերի բազմության վրա բազմանաարր լինելու առնչություն համար բոլոր սարգ թվերը միմիմալ տարրեր են, իսկ մաքսիմալ տարր այդ բազմությունը չունի:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 6.10. Որոշեք 2^A բազմության վրա արված $<, \leq, \supset, \geq$ կարգերի միմիմալ և մաքսիմալ տարրերը: Արդու՞ք դրանք ունեն մեծագույն և փոքրագույն տարրեր:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 6.11. Ասացուցեք, որ գծորեն կարգավորված բազմությունների համար յուրաքանչյուր մաքսիմալ տարր նաև մեծագույն տարր է և յուրաքանչյուր միմիմալ տարր նաև փոքրագույն տարր է:

ՄԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 6.12. Դծորեն կարգավորված բազմությունը կոչվում է *լիմվին կարգավորված*, եթե նրա յուրաքանչյուր ենթաբազմությունը ունի փոքրագույն տարր:

Լիմվին կարգավորված է, օրինակ, $(\mathbb{N}, <)$ կարգավորված բազմությունը: Մինչդեռ $(\mathbb{Z}, >)$, $(\mathbb{Q}, <)$, $(\mathbb{R}, <)$ գծորեն կարգավորված բազմությունները լիմվին կարգավորված չեն:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 6.13. Ասացուցեք, որ եթե ρ -ն A բազմության վրա արված կարգի առնչություն է, ապա $\rho \cap 1_B$ -ն B -ի վրա արված կարգի առնչություն է: Ընդ որում՝

ա. եթե ρ -ն գծային է, ապա գծային է նաև $\rho \cap 1_B$ -ն,

բ. եթե A -ն լիմվին կարգավորված է ρ -ի նկատմամբ, ապա B -ն լիմվին կարգավորված է $\rho \cap 1_B$ -ի նկատմամբ:

6.3. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը: Բնական թվերի լիակից կարգավորված լինելու հանգամանքը հնարավորություն է տալիս ասպացուցելու բնական թվերի վերաբերյալ զանազան դատադրյալները: Այդպիսի ասպացուցումների համար հիմք է ծառայում հետևյալ հասկոթյունը:

ՊՆԴՈՒՄ 6.14. (Մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը): Եթե n փոփոխականը պարամետրի $P(n)$ դատադրյալը ճշմարիտ է 1 բնական թվի համար, այսինքն՝ $P(1)$ դատադրյալը ճշմարիտ է, և կամայական n բնական թվի համար $P(n)$ -ը ճշմարիտ լինելուց հետևում է նաև $P(n+1)$ -ի ճշմարիտ լինելը, ապա $P(n)$ -ը ճշմարիտ է կամայական n բնական թվի համար:

Այսպես, Նշանակենք M -ով այն բնական թվերի բազմությունը, որոնց համար $P(n)$ -ը ճշմարիտ է: Այսինքն՝

$$M = \{n \in \mathbb{N} | P(n)\} :$$

Եթե $M \neq \mathbb{N}$, ապա $\mathbb{N} - M$ բազմությունը դասարկ չէ: Զանի որ $\mathbb{N}$ -ը լիակից կարգավորված է, ապա նրա $\mathbb{N} - M$ ոչ դասարկ ենթաբազմությունը ունի ինչ, որ m փոքրագույն ստորը: Այդ դեպքում $P(m)$ -ը ճշմարիտ չէ, իսկ $P(m-1)$ -ը ճշմարիտ է: Ինչը անհնար է՝ համաձայն սլայմունի: Հետևապես՝ $\mathbb{N} - M = \emptyset$: Ուրեմն՝ $M = \mathbb{N}$: $\square$

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեջ սովորաբար $P(n)$ դատադրյալները անվանվում են *ինդուկցիոն ենթադրյալներ*, $P(1)$ դատադրյալը՝ *ինդուկցիայի հիմք* կամ *բազիս*, իսկ այն, որ $P(n)$ -ը ճշմարիտ լինելուց հետևում է նաև $P(n+1)$ -ի ճշմարիտ լինելը, անվանվում է *ինդուկցիոն քայլ*:

Այսպիսով՝ մաթեմատիկական ինդուկցիայով $P(n)$ դատադրյալն ասպացուցվում է հանգում է հետևյալ երկու դատադրյալներին՝ ասպացուցվում.

ա. ինդուկցիայի բազիսը. $P(1)$ դատադրյալը ճշմարիտ է,

բ. ինդուկցիոն քայլը. կամայական n բնական թվի համար եթե $P(n)$ -ը ճշմարիտ է, ապա ճշմարիտ է նաև $P(n+1)$ -ը:

Օրինակ, մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքով ասպացուցենք, որ n տարր ունեցող բազմության բովանդակությունը 2^n ստորը:

Նշանակենք « n տարր ունեցող բազմության բովանդակությունը 2^n տարր» դատադրյալը $P(n)$ -ով:

ա. ինդուկցիայի բազիսը. $P(1)$ դատադրյալը ճշմարիտ է 1 տարր ունեցող բազմության բովանդակությունը 2^1 ստորը, ինչը ակնհայտորեն ճշմարիտ է:

բ. ինդուկցիոն քայլը. կամայական n բնական թվի համար եթե $P(n)$ -ը ճշմարիտ է, ապա ճշմարիտ է նաև $P(n+1)$ -ը: Իսկապես, դիցուք՝ $P(n)$ -ը ճշմարիտ է, այսինքն՝ n տարր ունեցող բազմության բովանդակությունը 2^n տարր: Վերցնենք $n+1$ տարր ունեցող A բազմությունը: Նրանից առանձնացնենք որևէ a տարր: Ստացված $A - \{a\}$ բազմությունը կունենա n տարր և, համաձայն ինդուկցիայի ենթադրյալի, 2^n ենթաբազմություն: Այժմ նկատենք, որ A բազմության բոլոր ենթաբազմությունները $A - \{a\}$ բազմության ենթաբազմություններն են կամ ստացվում են այդ ենթաբազմություններից յուրաքանչյուրին a տարրը միավորելով: Այսպիսով՝ A բազմության բոլոր ենթաբազմությունների թիվն է $2^n + 2$ կամ 2^{n+1} :

Մենք է կիրառել ինդուկցիայի սկզբունքը:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 6.15. Մտքեմտասկսկում ինդուկցիայի սկզբունքով ուսուցողները հետևյալ դասողությունները:

ա. n սուրբ ունեցող յուրաքանչյուր բազմություն ուղղողությունների թիվն է $n!$:

բ. m սուրբ ունեցող բազմությունից m սուրբ ունեցող բազմություն մեջ տրված արտաստակերտմանի թիվն է m^n :

Վիտ է A բազմությունից B բազմության մեջ տրված բոլոր արտաստակերտմանների բազմություն A^B առարով գրողմուն պատմող:

գ. n սուրբ ունեցող բազմությունից m սուրբ ունեցող բազմության մեջ տրված փունկցիաների թիվն է $(2m)^n$:

ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

7. ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

7.1. *Երկանդ հանրահաշվական գործողություն:* Հանրահաշվի դսրացական դասերացում մենք սովորել ենք գործողություններ կատարել թվերի և հանրահաշվական արտահայտությունների հետ: Նախադր գլխում մենք սովորեցինք գործողություններ կատարել նաև կամայական բազմություն հերարազմությունների հետ: Մտքեմտախիկայում և նրա կիրառություններում հարկ է լինում ստեղծել նաև այլ տարկաների և նրանց հետ մույնայն կատարել գումարում գործողություններ: Իսկ ի՞նչ է գործողությունը:

Սկսենք օրինակից: Դիտարկենք սմբողջ թվերի $\mathbb{Z}$ բազմություն վրա սրվում համմում $+$ գործողությունը: Ի՞նչ է այն: Եթե վերցնենք 2 և 5 թվերը, ապա $+$ գործողությունը 2, 5 զույգին ստեղծում է նրանց 2 + 5 տարբերությունը: Նույն կերպ $-$ գործողությունը սմբողջ թվերի կամայական x , y զույգին ստեղծում է նրանց $x - y$ տարբերությունը: Իսկ եթե վերցնենք սմբողջ թվերի y , x զույգը, ապա $-$ գործողությունը այդ զույգին կստեղծի սղոեն $y - x$ թիվը, սրը կսղաղ է $x - y$ տարբերությունը հաժաար շլինել: Հետևապես՝ սմբողջ թվերի համմում $+$ գործողությունը սմբողջ թվերի յուրարանչյուր կարգավորվում զույգին ստեղծում է մի սմբողջ թվի հետ: Այսինքն $-$ գործողությունը $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ բազմությունը սղատաղատկերում է $\mathbb{Z}$ -ի մեջ.

$$- : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} :$$

Փախարինելով այստեղ $\mathbb{Z}$ -ը կամայական A բազմությամբ, իսկ $-$ -ը՝ $A \times A$ բազմությունից A -ի մեջ սրվում արտատաղատկերումով, մենք կստամունք երկանդ հանրահաշվական գործողության ստեմամունք:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 7.1. A բազմություն վրա սրվում երկանդ հանրահաշվական գործողություն է կոչվում $A \times A$ բազմությունից A -ի մեջ սրվում յուրարանչյուր արտատաղատկերումը: Այսպիսով՝ ρ -ն A բազմություն վրա սրվում երկանդ հանրահաշվական գործողություն է՝ նշանակում է

$$\rho : A \times A \rightarrow A :$$

Եթե ρ -ն A բազմություն վրա սրվում երկանդ հանրահաշվական գործողություն է և $x \in A$, $y \in A$, ապա A -ի $\rho(x, y)$ տարբր անվանվում է x և y տարբերի նկատմամբ ρ գործողության կիրառման *արդյունք*: Այն ընդունվում է գղատել $x \rho y$ տեսքով.

նայն կերպ են գրառվում նաև թվային բազմությունների վրա արված գործողությունների արդյունքները՝ ոչ թե $+(2, 3)$, այլ $2 + 3$, ոչ թե $-(3, 1)$, այլ $3 - 1$ և այլն:

7.2. Թվային բազմությունների վրա արված գործողությունները: Բերենք թվային բազմությունների վրա արված երկատեղ հանրահաշվական գործողությունների ելմնական օրինակները:

ա. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ բազմություններից յուրաքանչյուրի վրա արված երկատեղ հանրահաշվական գործողություն է գումարման $+$ գործողությունը:

Առաջիկայում մենք կդիտարկենք գումարման $+$ նշանով գրառված այլ գործողություններ նույնպես: Ընդհանրապես, եթե որևէ բազմություն վրա արված գործողությունը նշանակված է $+$ նշանով, որը կարող է և թվերի գումարման գործողությունը չլինել, ապա կասենք, որ ավելի գործողության համար ընդունված է *գումարային* կամ *ադիտիվ* գրառում: Այդ դեպքում a և b սուբբերի նկատմամբ $+$ գործողության $a + b$ արդյունքը կոչվում է այդ սուբբերի *գումար*:

բ. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ բազմություններից յուրաքանչյուրի վրա արված երկատեղ հանրահաշվական գործողություն է հանման $-$ գործողությունը: Այն բնական թվերի $\mathbb{N}$ բազմության վրա արված գործողություն չէ, քանի որ երկու բնական թվերի սուբբերությունը միշտ չէ, որ բնական թիվ է:

գ. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ բազմություններից յուրաքանչյուրի վրա արված երկատեղ հանրահաշվական գործողություն է բազմապատկման $\cdot$ գործողությունը:

Առաջիկայում մենք կդիտարկենք նաև բազմապատկման $\cdot$ գործողության նշանով գրառված այլ գործողություններ: Ընդհանրապես, եթե որևէ բազմություն վրա արված գործողությունը նշանակված է $\cdot$ նշանով, որը սխալաբան չէ թվերի բազմապատկման գործողությունը լինի, ապա կասենք, որ ավելի գործողության համար ընդունված է *արտադրյալային* կամ *մուլտիպլիկատիվ* գրառում:

դ. Բաժանման գործողությունը $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ բազմությունների վրա արված երկատեղ հանրահաշվական գործողություն չէ, քանի որ երկու բնական կամ մեքողջ թվերի հարաբերությունը միշտ չէ, որ բնական կամ մեքողջ թիվ է: Բաժանման գործողությունը նաև $\mathbb{Q}$ և $\mathbb{R}$ բազմությունների վրա արված գործողություն չէ, քանի որ զրոյի վրա բաժանում չի թույլտարվում. $(1, 0)$ կարգավորված զույգը սխալներ չունի: Եթե նշանակենք $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, ապա բաժանման գործողությունն արդեն կլինի $\mathbb{Q}^*$ և $\mathbb{R}^*$ բազմությունների վրա արված երկատեղ հանրահաշվական գործողություն:

7.3. Գործողություններ ըստ մոդուլի: Դիտարկենք կամայական n բնական թիվը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 7.2. Կամայական a և b մեքողջ թվերի՝ *ըստ n մոդուլի գումար* է կոչվում $a + b$ գումարը n թվի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդը: a և b մեքողջ թվերի՝ *ըստ n մոդուլի գումարը* գրառվում է $a +_n b$ տեսքով: Այսպիսով՝

$$a +_n b = r,$$

որտեղ $a + b = nq + r$, $0 \leq r < n$, $r, q \in \mathbb{Z}$:

Օրինակներ.

$$2 +_4 3 = 1, \quad 5 +_6 5 = 4, \quad 7 +_{10} 9 = 6:$$

Համումման ձևով կարող ենք ասեմանել նաև ըստ n մոդուլի համման և բազմապատկման գործողությունները:

ՍԱՀԱՆՈՒՄ 7.3. Կամայական a և b ամբողջ թվերի՝ ըստ n մոդուլի սուրբերությունը է կոչվում $a \cdot b$ սուրբերությունը n թվի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդը: a և b ամբողջ թվերի՝ ըստ n մոդուլի սուրբերությունը գրառվում է $a \cdot_n b$ տեսքով:

Օրինակներ.

$$2 -_4 3 = 3, \quad 5 -_3 8 = 0, \quad 7 -_5 1 = 1:$$

ՍԱՀԱՆՈՒՄ 7.4. Կամայական a և b ամբողջ թվերի՝ ըստ n մոդուլի տրասպոզիցիայի է կոչվում $a \cdot b$ տրասպոզիցիայի n թվի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդը: a և b ամբողջ թվերի՝ ըստ n մոդուլի գումարը գրառվում է $a \cdot_n b$ տեսքով:

Օրինակներ.

$$6 \cdot_5 3 = 3, \quad 9 \cdot_{13} 7 = 11, \quad 7 \cdot_5 7 = 4:$$

Այժմ կառուցենք

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

նշանակումը: Հեշտությամբ կարելի է համոզվել, որ $+_n$ -ը, $-_n$ -ը և $\cdot_n$ -ը $\mathbb{Z}_n$ բազմության վրա արված երկտեղ հանրահաշվական գործողություններ են:

7.4. Բազմության բոլիանի վրա արված գործողություններ: Հանրահաշվական գործողությունների կարևոր օրինակներ են ստացված կամայական բազմության ենթաբազմությունների հետ կառուցվող գործողությունների տրեյսներում:

ա. Բազմությունների հուման՝ $\cap$, միավորման՝ $\cup$ և հանման՝ $\setminus$ գործողությունները կամայական բազմության բոլիանի վրա արված երկտեղ հանրահաշվական գործողություններ են:

բ. Կամայական բազմության բոլիանի վրա արված երկտեղ հանրահաշվական գործողություն է նաև բազմությունների սիմետրիկ սուրբերությունը + գործողությունը, որը որոշվում է հետևյալ հավասարությամբ.

$$X + Y = (X - Y) \cup (Y - X):$$

7.5. Ֆունկցիաների բազմապատկման գործողությունը: Դիսարկենք կամայական $A, B \in C$ բազմությունները: Դիցուք՝ f -ը A -ից B -ի մեջ արված ֆունկցիա է, իսկ g -ն՝ B -ից C -ի մեջ արված ֆունկցիա:

ՍԱՀԱՆՈՒՄ 7.5. Սահմանենք A -ից C -ի մեջ արված $f \circ g$ տոնջությունը հետևյալ կերպ.

$x(f \circ g)y$ այն և միայն այն դեպքում, եթե B -ի ինչ-որ b ստորի համար xfb և bgy ,

որտեղ $x \in A, y \in C$:

ՊԼՈՒՄ 7.6. Եթե f -ը A -ից B -ի մեջ արված ֆունկցիա է, իսկ g -ն՝ B -ից C -ի մեջ արված ֆունկցիա, ապա $f \circ g$ -ն A -ից C -ի մեջ արված ֆունկցիա է:

Ապացույց. Դիցուք՝ $x(f \circ g)y, x(f \circ g)z$, որտեղ $x \in A, y, z \in C$: Այդ դեպքում, համաձայն սահմանման, B -ի b_1 և b_2 ատրիբուտները համար xfb_1 և b_1gy, xfb_2 և b_2gz : Հետևաբար՝ $b_1 = b_2$ և, ուրեմն՝ $y = z$: Այսպիսով՝ $f \circ g$ տոնջությունը ֆունկցիա է: $\square$

Հաշվի տոնջելով տարացուցված պնդումը՝ մենք կտրադ ենք $x(f \circ g)y$ գրառումը փոխարինել հետևյալ գրառումով:

$$y = g(f(x)), x \in A:$$

Այսպիսով՝

$$(f \circ g)(x) = g(f(x)), x \in A:$$

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 7.7. $f \circ g$ ֆունկցիան կապում է f և g ֆունկցիաների տրադուկտը: Նկատենք, որ մաթեմատիկական օժանդակի դասերն առաջին $f \circ g$ տրադուկտային համար գործածվում է բոլոր ֆունկցիա տերմիններ:

Բազմապատկերներ մի բանի կոնկրետ ֆունկցիաներ:

ա. Եթե $f(x) = x + 1, x \in \mathbb{Z}, g(x) = 2x, x \in \mathbb{Z}$, ապա $(f \circ g)(x) = 2x + 2, (g \circ f)(x) = 2x + 1$:

բ. Եթե $f(x) = 3x - 1, x \in \mathbb{R}, g(x) = 4x + 2, x \in \mathbb{R}$, ապա $(f \circ g)(x) = 12x - 2, (g \circ f)(x) = 12x + 5$:

Նշանակենք $\text{Fun}(A, B)$ -ով A -ից B -ի մեջ սրված բոլոր ֆունկցիաների բազմությունը:

ՊՐՈՒՄ 7.8. *Ֆունկցիաների բազմությունում $\circ$ գործողությունը $\text{Fun}(A, A)$ բազմության վրա սրված երկաթի համբաժանելիության գործողություն է կոմուտատիվ A բազմություն համար:*

Ապացույց. Հետևում է 7.6 պնդումից: $\square$

Այժմ դիտարկենք տրադուկտներումների բազմապատկման գործողությունը: Նախ ստացուցենք հետևյալ պնդումը:

ՊՐՈՒՄ 7.9. *Արադուկտներումների տրադուկտը տրադուկտներում է: Ավելի ճշգրիտ՝ եթե $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, ապա $f \circ g: A \rightarrow C$, որտեղ A -ն, B -ն, C -ն կոմուտատիվ բազմություններ են:*

Ապացույց. Իսկապես, բանի որ f -ը տրադուկտներում է, ապա A -ի յուրաքանչյուր x ատրիբուտները f -պատկերներ $f(x)$ -ը: Չունի որ տրադուկտներում է նաև g -ն, ապա B -ի յուրաքանչյուր ատրիբուտ, այդ թվում նաև $f(x)$ -ը կոնկրետ g -պատկերներ $g(f(x))$ -ը: Բայց հենց այդ ատրիբուտներն էլ, ըստ սահմանման, $(f \circ g)(x)$ -ն է: Այսինքն՝ $f \circ g$ -ն իրոք տրադուկտներում է: $\square$

Մասնավորապես, եթե A -ից B -ի մեջ սրված բոլոր տրադուկտներումների բազմությունը նշանակենք B^{-1} -ով, ապա կունենանք հետևյալ պնդումը:

ՊՐՈՒՄ 7.10. *Արադուկտներումների բազմությունում $\circ$ գործողությունը A^A -ի վրա սրված երկաթի համբաժանելիության գործողություն է կոմուտատիվ A բազմություն համար:*

ՊՆԴՈՒՄ 7.11. *Վերադարձվող արտադրյալը վերադարձ է: Այսինքն՝ եթե*

$$f : A \rightarrow B \text{ և } g : B \rightarrow C$$

արտադրատիեզերումների վերադարձներն են, ապա

$$f \circ g : A \rightarrow C,$$

արտադրատիեզերումը նույնպես կլինի վերադարձ, քանի A -ն, B -ն, C -ն կամայական բազմություններ են:

Լուրջությ. Անհրաժեշտ է ցույց առնել, որ $f \circ g$ -ն արտադրատիեզերում է, վրադարձ է և տարադարձ: Համաձայն 7.9 սեկցիոն՝ $f \circ g$ -ն արտադրատիեզերում է: Ցույց ստանք, որ այն վրադարձ է:

Վերցնենք C -ի բազմության կամայական c տարր: Զանի որ g -ն վրադարձ է, ապա կգտնվի B -ի այնպիսի b տարր, որ $f(b) = c$: Բայց վրադարձ է նաև f արտադրատիեզերումը: Հետևապես՝ A -ի ինչ-որ a տարրի համար $f(a) = b$: Տեղադրելով b -ի տեղ տրվերի $f(b) = c$ հավասարության մեջ՝ կստանանք $c = g(f(a))$: Բայց $(f \circ g)(a) = g(f(a))$: Հետևապես՝ $c = (f \circ g)(a)$ և, որենք, a -ն c -ի $f \circ g$ -նախադրատիեզերում է: Այսինքն՝ $f \circ g$ -ն վրադարձ է:

Ցույց ստանք, որ $f \circ g$ -ն նաև տարադարձ է: Իսկապես, դիցուք՝

$$(f \circ g)(x) = (f \circ g)(y), x \in A, y \in A$$

Այստեղից կստանանք $g(f(x)) = g(f(y))$: Բայց բանի որ g -ն տարադարձ է, ապա վերջինի հավասարությանից կստանանք $f(x) = f(y)$: Այստեղից էլ, հաշվի առնելով, որ f -ը տարադարձ է, կստանանք $x = y$: Հետևաբար՝ $f \circ g$ -ն տարադարձ է: $\square$

Այսպեսով մոտ սեկցիոնից, մասնավորապես, կստանանք հետևյալ հատկությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 7.12. *Կամայական A բազմության համար ֆունկցիոնների բազմադաստիան $\circ$ գործողությունը $S(A)$ -ի վրա ստիպած երկակի համընդհանրական գործողություն է:*

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 7.13. Այսպեսով, եթե վրադարձների արտադրյալը վրադարձ է: Այսինքն՝ եթե $f \in \text{Fun}(A, B)$, $g \in \text{Fun}(B, C)$ և f -ը և g -ն վրադարձներ են, ապա $f \circ g \in \text{Fun}(A, C)$ և $f \circ g$ -ն վրադարձ է:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 7.14. Այսպեսով, եթե տարադարձների արտադրյալը տարադարձ է: Այսինքն՝ եթե $f \in \text{Fun}(A, B)$, $g \in \text{Fun}(B, C)$ և f -ը և g -ն տարադարձներ են, ապա $f \circ g \in \text{Fun}(A, C)$ և $f \circ g$ -ն տարադարձ է:

7.6. Զնչի-Պյուրագորասի աղյուսակները: Վերադարձ բազմությունների վրա ստիպած երկակի գործողությունները ստանկերվում են Զնչի-Պյուրագորասի աղյուսակների միջանոց հետևյալ կերպ: Տրված A վերադարձ բազմության տարրերը գրվում են հորիզոնական և ուղղահայաց շարքերով A -ի x և y տարրերի նկատմամբ $*$ գործողության $x * y$ աղյուսակը գրվում է x -ով տնցնող հորիզոնական և y -ով տնցնող, ուղղահայաց ուղիղների հատման տեղում:

Օրինակ, $\{-1, 1\}$ բազմություն վրա տրված բազմապատկման, $\{0, 1, 2\}$ բազմություն վրա տրված՝ ըստ 3 մոդուլի գումարման և բազմապատկման գործողությունները ստանկերվում են Զեյլի-Պյութագորասի հետևյալ աղյուսակներով.

.	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

+3	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·3	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 7.15. Դիցուք՝ A բազմություն ունի n տարր: Ինչի՞նչ է հավասար A -ի վրա տրված երկտեղ հանրահաշվական գործողությունների քիվը:

8. ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

8.1. Տեղափոխելիություն: Հանրահաշվում և նրա կիրառություններում գործածվող գործողությունները սովորաբար օժտված են որոշ հատկություններով: Գործողությունների ամենատարածված ու կարևոր հատկություններից մեկը տեղափոխելիությունն է:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 8.1. A բազմության վրա տրված $*$ գործողությունը կոչվում է *տեղափոխելի*, եթե A -ի կամայական x և y տարրերի համար

$$x * y = y * x :$$

Տեղափոխելի գործողությունները կոչվում են նաև *աբելյան*՝ ճորվեգացի մաթեմատիկոս Նիկո Աբելի սրտովին:

Բերենք օրինակներ և ժխտօրինակներ:

ու. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ բազմությունների վրա տրված $+$ և $\cdot$ գործողությունները տեղափոխելի են, իսկ $-$ գործողությունը տեղափոխելի չէ:

բ. $\mathbb{Z}_n$ -ի վրա տրված $+$ և $\cdot$ գործողությունները տեղափոխելի են, իսկ $-$ -ը՝ ոչ:

գ. Կամայական A բազմության համար $B(A)$ -ի վրա տրված $\cap$, $\cup$ և $+$ գործողությունները տեղափոխելի են: Եթե A -ն դատարկ չէ, ապա $B(A)$ -ի վրա տրված $-$ գործողությունը տեղափոխելի չէ:

դ. Եթե A բազմություն ունի մեկ տարր, ապա $\text{Fun}(A, A)$ բազմության վրա տրված $\circ$ գործողությունը տեղափոխելի է:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 8.2. Ապացուցեք դ օրինակում տրված դատողությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 8.3. Եթե A բազմությունն ունի մեկից ավելի տարր, ապա $\text{Fun}(A, A)$ բազմության վրա տրված $\circ$ գործողությունը տեղափոխելի չէ:

Ապացույց. Դիցուք՝ A -ն ունի իրարից տարբեր x և y տարրերը: Կառուցենք

$$f(z) = x \text{ և } g(z) = y, z \in A$$

Ֆունկցիաները: Այդ դեպքում՝

$$(f \circ g)(x) = g(f(x)) = g(x) = y,$$

$$(g \circ f)(x) = f(g(x)) = f(y) = x :$$

Այսինքն՝

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

և, ուրեմն,

$$f \circ g \neq g \circ f :$$

□

Նույն կերպ կատարացրենք մոտ հետևյալ պնդումը:

ՊՆԴՈՒՄ 8.4. Եթե A բազմությունն ունի մեկից ավելի տարր, ապա A^A բազմություն վրա ստիպած $\circ$ գործողությունը անդամախելի չէ:

և. Տեղադրությունների համար ստեղծենք պատկերը մի վաքր այլ է: Նույն օգտակար է լուծել հետևյալ վարժությունը:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 8.5. Արարացրեք, որ եթե A բազմությունն ունի երկուսից ոչ ավելի տարր, ապա $S(A)$ -ի վրա ստիպած $\circ$ գործողությունը անդամախելի է:

Այլ է խնդիրը երկուսից ավելի տարր պարունակող բազմությունների համար:

ՊՆԴՈՒՄ 8.6. Եթե A բազմությունն ունի երկուսից ավելի տարր, ապա $S(A)$ -ի վրա ստիպած $\circ$ գործողությունը անդամախելի չէ:

Ապացույց. Դիցուք՝ x -ը, y -ը, z -ը A բազմության իրարից տարբեր տարրեր են: Կառուցենք $f, g \in S(A)$ անդամախելի չեղող կերպ.

$$f(y) = z, f(z) = y, f(t) = t, t \in A \setminus \{y, z\},$$

$$g(x) = y, g(y) = x, g(t) = t, t \in A \setminus \{x, y\} :$$

Այդ դեպքում՝

$$(f \circ g)(x) = g(f(x)) = g(x) = y,$$

$$(g \circ f)(x) = f(g(x)) = f(y) = z :$$

Այսինքն՝ $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ և, ուրեմն, $f \circ g \neq g \circ f :$

□

գ. Զեկի-Պյուրսգորասի աղյուսակով արված հետևյալ գործողություններից առաջին երկուսը անդամախելի են, երրորդը՝ ոչ:

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	a
c	c	a	a

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	b
b	b	a	c
c	b	c	a

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	b
b	c	a	b
c	c	c	a

Ընդհանրապես՝

ՊՆԴՈՒՄ 8.7. *Ընկի-Պյուրագրության սպյուսակով տրված գործողությունը անդամախնայի է այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ սպյուսակը համադասիկի է իր գլխավոր անկյունագծի նկատմամբ:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեն ինքնուրույն: □

8.2. Չուզորդեկիություն: Գործողությունների հաջորդ կտրերը հասկացվում են գուցորդեկությունն է:

ՄԱՀԱՆՈՒՄ 8.8. *A* բազմության վրա տրված * գործողությունը կոչվում է գուցորդեկ, երբ *A*-ի կամայական *x*, *y* և *z* տարրերի համար

$$(x * y) * z = x * (y * z) :$$

Բերենք գուցորդեկի գործողությունների օրինակներ և միաստիճաններ:

ա. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ բազմությունների վրա տրված $+$ և $\cdot$ գործողությունները գուցորդեկի են, իսկ $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ բազմությունների վրա տրված $-$ և Q^* և R^* բազմությունների վրա տրված $:$ գործողությունները գուցորդեկի չեն:

բ. $\mathbb{Z}_n$ -ի վրա տրված $+$ և $\cdot$ գործողությունները գուցորդեկի են, իսկ $-$ -ը՝ ոչ:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 8.9. Ապացուցեն վերջին դասադրությունը:

գ. Կամայական *A* բազմության համար *B(A)*-ի վրա տրված $\cap$, $\cup$ և $+$ գործողությունները գուցորդեկի են: Եթե *A*-ն դասարկ չէ, ապա *B(A)*-ի վրա տրված $-$ գործողությունը գուցորդեկի չէ:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 8.10. Ապացուցեն վերջին դասադրությունը:

դ. Վերցնենք կամայական *A* բազմությունը: Դիցուք $f, g, h \in \text{Fun}(A, A)$, $x \in A$: Այդ դեպքում՝

$$((f \circ g) \circ h)(x) = h((f \circ g)(x)) = h(g(f(x))),$$

$$(f \circ (g \circ h))(x) = (g \circ h)(f(x)) = h(g(f(x))) :$$

Հետևաբար՝

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$$

և, արեմն

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) :$$

Այսպիսով՝ մենք սպացուցեցինք եռանյալ հասկությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 8.11. *Կամայական A բազմության համար $\text{Fun}(A, A)$ բազմության վրա տրված $\circ$ գործողությունը գուցորդեկի է:*

Պատկերը նայեն է նաև A^A և $S(A)$ բազմությունների վրա տրված $\circ$ գործողության համար:

ՊՆԴՈՒՄ 8.12. *$\circ$ -ը A^A և $S(A)$ բազմությունների վրա տրված գուցորդեկի գործողություն է:*

ե. Քելլի-Պյուրսոգորասի ուղղասկզբ տրված հետևյալ գործողություններից առաջին երկուսը զուգորդելի են, երրորդը՝ ոչ:

$*$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	a	a

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

Ընդհանրապես Քելլի-Պյուրսոգորասի ուղղասկզբ տրված գործողությունների զուգորդականությունը բավականին դժվար է հայտնաբերել:

Եթե A բազմության վրա տրված $*$ գործողությանը զուգորդական է, ապա A -ի երեք՝ x, y, z տարրերի համար երկու եղանակով կազմում $(x*y)*z$ և $x*(y*z)$ իրար հավասար արտադրյալներից յուրաքանչյուրը կհամընկնեն ուսումնից վրակազների:

$$(x * y) * z = x * (y * z) = x * y * z :$$

Համանման ձևով օգտագործվում է նաև

$$a_1 * a_2 * \dots * a_n$$

գրառումը կամայական n բնական թվի համար՝

$$a_1 * a_2 * \dots * a_n = (a_1 * a_2 * \dots * a_{n-1}) * a_n :$$

Վերջին արտահայտության համար հաճախ գործածվում է նաև հետևյալ կարճ նշանակումը.

$$a_1 * a_2 * \dots * a_n = *_{i=1}^n a_i :$$

$*$ = $\cdot$ և $*$ = $+$ դեպքերի համար ընդունվում են հետևյալ նշանակումները.

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{i=1}^n a_i :$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i :$$

8.3. Չեզոք տարր: Անցնենք գործողությունների հաջորդ կարևոր հատկության ռաուժոսիրությունը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 8.13. A բազմության վրա տրված $*$ գործողությանը կաշվում է *չեզոք տարրով* գործողություն, եթե A -ի մեջ կա այնպիսի e տարր, որ նրա կամայական x տարրի համար

$$x * e = e * x = x :$$

Այդ դեպքում e -ն կաշվում է ** գործողության չեզոք տարր*:

Նույնպես չեզոք տարրով գործողությունների օրինակներին անցնելը ապացուցենք չեզոք տարրի միակության կարևոր հատկությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 8.14. Եթե A բազմության վրա տրված $*$ գործողությանը անի չեզոք տարր, ապա այն միակն է:

Ասրացույց. 'Կիցույ՛ք' A բազմություն վրա արված $*$ գործողությունը ունի e և e' երկու չեզոք տարրեր: Գրենք այդ տարրերի՝ չեզոք տարր լինելու պայմանները.

$$e * e' = e, \quad e * e' = e' :$$

Այստեղից կատանումք $e = e'$:

□

Անցնենք օրինակների և միասօրինակների դիսկուսիաներ:

ա. $\mathbb{R}$ բազմություն վրա արված $+$ գործողությունը ունի չեզոք տարր: Այն 0 քիվն է: Նույն բազմություն վրա արված $-$ գործողությունը նույնպես ունի չեզոք տարր՝ 1 քիվը: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ և $\mathbb{R}$ բազմությունների վրա արված $+$ և $\mathbb{Q}^*$ և $\mathbb{R}^*$ բազմությունների վրա արված $\cdot$ գործողությունների չեզոք տարր չունեն:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 8.15. Ասրացույցեր վերջին դասադրությունը:

բ. $\mathbb{Z}_n$ -ի վրա արված $+$ և $-$ գործողությունները ունեն համապատասխանաբար 0 և 1 չեզոք տարրերը, իսկ $\mathbb{Z}_n$ -ը չեզոք տարր չունի:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 8.16. Ասրացույցեր վերջին դասադրությունը:

գ. Կոմուտատիվ A բազմություն համար $B(A)$ -ի վրա արված $\cap$, $\cup$ և $+$ գործողությունները ունեն չեզոք տարրեր: $\cap$ -ի չեզոք տարրն է A -ն, $\cup$ և $+$ գործողությունների՝ $\emptyset$ դատարկ բազմությունը: Եթե A -ն դատարկ չէ, ապա $B(A)$ -ի վրա արված $-$ գործողությունը չեզոք տարր չունի:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 8.17. Ասրացույցեր վերջին դասադրությունը:

դ. Կոմուտատիվ A բազմություն համար դիսկուսիաներ

$$\varepsilon : A \rightarrow A, \quad \varepsilon(x) = x, \quad x \in A$$

նույնական արտադրատիեարմը: Ակնհայտ է, որ ε -ը A բազմության սեղադրություն է: Միևնույն ժամանակ, եթե $f \in \text{Fun}(A, A)$, ապա՝

$$(f \circ \varepsilon)(x) = \varepsilon(f(x)) = f(x), \quad (\varepsilon \circ f)(x) = f(\varepsilon(x)) = f(x) :$$

Այսինքն՝

$$f \circ \varepsilon = f, \quad \varepsilon \circ f = f :$$

Նշանակում է $\text{Fun}(A, A)$ -ի վրա արված $\circ$ գործողությունը ունի ε չեզոք տարրը: Եվ որովհետև $\varepsilon \in A^A$, $\varepsilon \in S(A)$, ապա մենք ասում ենք՝ նաև հետևյալ կարևոր հատկությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 8.18. $\text{Fun}(A, A)$, A^A և $S(A)$ բազմությունների վրա արված $\circ$ գործողությունը ունի չեզոք տարր. այն է՝ ε :

և. Քելլի-Պյուրսոբորտի ալլոմորֆիզմ արված հետևյալ գործողություններից առաջին երկուսը ունեն չեզոք տարր, իսկ երրորդը՝ ոչ:

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	a
c	c	a	a

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	c

$*$	a	b	c
a	a	b	a
b	b	b	c
c	a	c	c

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 8.19. Ինչպե՞ս խմանալ՝ Քեյլի-Պյուրոգորասի աղյուսակով սղորված գործողությունը ունի՞ չեզոք տարր, թե՞ ոչ:

8.4. Հակադարձելիություն: Ուսումնասիրենք գործողությունների ևս մի կարևոր հատկություն: Դիցուք՝ A բազմություն վրա սովորած $\cdot$ չեզոք տարրն ունեցող * գործողությունը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 8.20. A բազմության a տարրը ունի՞մենք *-հակադարձելի կամ հակադարձելի * գործողության նկատմամբ, եթե գոյություն ունի A -ի այնպիսի b տարր, որ

$$(1) \quad a * b = b * a = e :$$

Այս սկզբունքն բավարարող b տարրը ունի՞մենք a -ի հակադարձ կամ *-հակադարձ: Բազմության վրա սովորած գործողությունը կոչվում է հակադարձելի, եթե այդ բազմության կամայական տարր հակադարձելի է սովորած գործողության նկատմամբ:

Նախքան օրինակների դիտարկմանը կատարենք մեկ նկատառում: Այդպիսի A -ի a տարրի համար (1) սկզբունքով սրոշվող b տարրը միակը չէ: Չուզորդելի գործողությունների համար այս կարևոր հարցի դրական պատասխանը սալյա է ենտելյալ հատկությունը:

ՊԵՐՈՒՄ 8.21. Եթե A բազմության վրա սովորած $\cdot$ չեզոք տարրն ունեցող * գործողությունը գուցարդելի է, ապա A -ի կամայական a տարրի *-հակադարձը միակն է՝ եթե գոյություն ունի:

Ապացույց. Դիցուք՝ b -ի հետ միասին նույն e տարրն է բավարարում (1) սկզբունքին.

$$a * e = e * a = e :$$

Այդ դեպքում՝

$$b = e * b = (e * a) * b = e * (a * b) = e * e = e :$$

Ուրեմն՝

$$b = e :$$

□

Այժմ ունենենք օրինակներին:

ա. Իրական թվերի $\mathbb{R}$ բազմության վրա սովորած $+$ գործողությանը հակադարձելի է: x իրական թվի $+$ -հակադարձը x -ին հակադիր $-x$ թվն է: Գումարային գրառմամբ արված գործողությունների համար կամայական a տարրի $+$ -հակադարձը ունի՞մենք a -ի հակադիր և նշանակվում է $-a$ -ով:

$+$ գործողությունը հակադարձելի է նույն $\mathbb{Z}$ և $\mathbb{Q}$ բազմությունների վրա, սակայն $\mathbb{N}$ -ի վրա այն հակադարձելի չէ:

բ. Իսկ հակադարձ և հակադարձելի անբնիկները վերցվել են բազմապատկման գործողության համար ընդունված գործողություններից: Ջրոյից տարրեր յուրաքանչյուր իրական թվի հակադարձելի է բազմապատկման գործողության նկատմամբ: Բազմապատկման գործողությունը $\mathbb{R}$ -ի կամ $\mathbb{Q}$ -ի վրա հակադարձելի չէ, քանի

որ 0 -ն հակադարձ չունի: $\mathbb{R}^*$ և $\mathbb{Q}^*$ բազմությունների վրա աղյան բազմասլասակման գործողությունը հակադարձելի է:

գ. $\mathbb{Z}_n$ -ի վրա արված $+$ -ը գործողությունը հակադարձելի է: $\mathbb{Z}_n$ -ի m ստորի հակադիրը $n - m$ ստորն է: $+$ -ը գործողություն նկատմամբ $\mathbb{Z}_n$ -ի ոչ բոլոր ստորերն ունեն հակադարձ:

ՊՆԴՈՒՄ 8.22. $\mathbb{Z}_n$ -ի m ստորը հակադարձելի է $+$ -ը գործողությունը նկատմամբ այն և միայն այն դեպքում, երբ m -ը n -ի հետ փոխադարձաբար պարզ է:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 8.23. Ասուցուցեր վերջին պնդումը:

դ. Կամայական A ոչ դասարկ բազմության համար $B(A)$ -ի վրա արված $\cap$, $\cup$, գործողությունները հակադարձելի չեն:

ՊՆԴՈՒՄ 8.24. $B(A)$ -ի վրա արված $+$ գործողությունը հակադարձելի է: A -ի X ենթաբազմության $+$ -հակադարձը X -ն է:

Ասուցույց. Մենք արդեն գիտենք, որ $+$ գործողությունն ունի չեզոք ստոր, որը դասարկ բազմություն է: Մնում է նկատել նաև, որ A բազմության կամայական X ենթաբազմության համար

$$X + X = \emptyset :$$

□

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 8.25. Ասուցուցեր $X + X = \emptyset$ հավասարությունը:

ե. Երբ A բազմությունը ունի մեկից ավելի ստոր, ապա ուրասարակեթմնե-րի բազմասլասակման $\circ$ գործողությունը A^A բազմության վրա արված հակադարձելի գործողություն չէ:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 8.26. Ասուցուցեր վերջին դասողությունը:

դասակերը բոլորովին այլ է սեղողությունների սլարուզում:

ՊՆԴՈՒՄ 8.27. Տեղադրյալունների բազմասլասակման $\circ$ գործողությունը $S(A)$ բազմության վրա արված հակադարձելի գործողություն է՝ կամայական A ոչ դասարկ բազմության համար:

Ասուցույց. ‘Իցույթ’ ունենք

$$f : A \rightarrow A$$

վերողումը: A բազմության կամայական x և y ստորերի համար ընդունենք

$$x f^{-1} y \Leftrightarrow f(x) = y :$$

Հեշտությամբ ցույց կստանք, որ f^{-1} -ը ուրասարակեթմն է՝

$$f^{-1} : A \rightarrow A,$$

ընդ ոլամ՝

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y :$$

Պարզ է նաև, որ f^{-1} -ը վերադրում է: Այնուհետև՝

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(x) &= f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x, \\ (f^{-1} \circ f)(y) &= f(f^{-1}(y)) = f(x) = y:\end{aligned}$$

Ուրեմն՝

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \varepsilon:$$

□

Ինտրիկ, ոչ բոլոր տրաստատակերումներն են հակադարձելի: Հետևյալ հասկո-
չքումը բնութագրում է այդպիսի տրաստատակերումները:

ՊՆԴՈՒՄ 8.28. Կոմպակտ A բազմություն

$$f: A \rightarrow A$$

տրաստատակերումը հակադարձելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն վերադրում է:

Արդյույց. Եթե տրաստատակերումը վերադրում է, ապա այն, համաձայն նա-
խորդ այնդման, կլինի հակադարձելի:

Հակառակը, դիցուք՝

$$f: A \rightarrow A$$

տրաստատակերումը հակադարձելի է: Այդ դեպքում f -ը ունի հակադարձ, որը միակն
է, բունի որ $\circ$ գործառնությունը գոյություն ունի է: Նշանակենք այս միակ հակադարձը
 f^{-1} -ով: Ունենք՝

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \varepsilon:$$

Այժմ, եթե $y \in A$, ապա $(f^{-1} \circ f)(y) = \varepsilon(y)$ կամ $f(f^{-1}(y)) = y$: Եթե նշանակենք
նաև

$$f^{-1}(y) = x,$$

ապա կունենանք $y = f(x)$: Այսինքն՝ A -ի կոմպակտ y տարր ունի ինչ-որ x
նախատարակեր: Իսկ սա նշանակում է, որ f -ը վերադրում է: Զույգ առնք, որ այն
նաև տրաստատակ է:

Դիցուք՝ A -ի x և y տարրերի համար

$$f(x) = f(y):$$

Այստեղից կստանանք

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(y)),$$

կամ՝

$$(f^{-1} \circ f)(x) = (f^{-1} \circ f)(y):$$

Այժմ, նկատի ունենալով $f \circ f^{-1} = \varepsilon$ սլայմունը, նախորդ հավասարությունից կս-
տանանք՝

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(y):$$

Հետևաբար՝

$$x = y:$$



ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 8.29. Արդյո՞ք $\mathcal{L}$ -ի յուրաքանչյուր $\mathcal{A}$ -ի համար 8.3 կետում արված գործողությունները հակադարձելի են:

8.5. Բաշխականություն: Համարյա միևնույն բազմություն վրա արված են լինում մի քանի գործողություններ: Այդ դեպքում բնական է նրանց միջև ինչ-որ կապի առկայությունը: Երկու գործողությունների միջև ամենատարածված կապը բաշխական հատկությունն է:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 8.30. A բազմության վրա արված T գործողությունը կոչվում է *բաշխական* նրա վրա արված $\perp$ գործողության նկատմամբ, եթե A -ի կամայական x, y, z տարրերի համար՝

$$xT(y\perp z) = (xTy)\perp(xTz),$$

$$(x\perp y)Tz = (xTz)\perp(yTz):$$

Բերենք օրինակներ:

ու. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ և $\mathbb{R}$ բազմություններից յուրաքանչյուրի վրա արված բազմապատկման գործողությունը բաշխական է գումարման նկատմամբ, որովհետև կամայական x, y, z խոսկան թվերի համար

$$x(y + z) = xy + xz:$$

Նույն բազմությունների վրա արված $+$ գործողությունը բաշխական չէ $-$ -ի նկատմամբ:

Բազմապատկման գործողությունը բաշխական է նաև $-$ -ի նկատմամբ, քանի որ

$$x(y - z) = xy - xz:$$

բ. $\mathbb{Z}_n$ -ի վրա արված $\cdot_n$ գործողությունը բաշխական է $+_n$ -ի նկատմամբ:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 8.31. Ընտրույցեք վերջին դասողությունը:

գ. Կամայական A բազմության համար $B(A)$ -ի վրա արված $\cap$ և $\cup$ գործողություններից յուրաքանչյուրը բաշխական է մյուսի նկատմամբ: $\cap$ -ը բաշխական է $+$ -ի նկատմամբ, իսկ $\cup$ -ը $+$ -ի նկատմամբ բաշխական չէ:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 8.32. $B(A)$ -ի վրա արված $\cap$, $\cup$ և $+$ գործողություններից ո՞րն է բաշխական բազմությունների համանման գործողության նկատմամբ:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 8.33. Կիցուր՝ A բազմությունն ունի n տարր: Ինչի՞նչ է հավասար A -ի վրա արված

ա. ածրավորական,

բ. չեզոք տարր ունեցող

երկուսեղ համարադասական գործողությունների թիվը:

9. ԽՄՐԵՐ

9.1. Խումբ: Հանրահաշվում և նրա կիրառություններում բացառիկ կապեր գնահատություն ունեն այն գործողությունները, որոնք միավորմունակ գույքադեյլի են և հակադարձելի: Այդպիսի գործողությունները կոչվում են խմբային գործողություններ:

ՄԱՀՄԱՆՈՒՄ 9.1. G բազմության վրա արված $*$ գործողությունը կոչվում է *խումբային*, եթե այն գույքադեյլի և և հակադարձելի: $(G, *)$ գույքն այդ դեպքում կոչվում է *խումբ*:

Բերենք խմբի օրինակներ և միաստիմակներ:

ա. Թվերի գումարային խմբեր: Կարևոր խմբեր են $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ գույքերը, որոնք ունեն հոսանքի անվանումներ. դրանք համապատասխանաբար կոչվում են *ամբողջ*, *ռացիոնալ* և *իրատկան թվերի գումարային խմբեր*:

Հասկանալի է, որ $(\mathbb{N}, +)$ գույքը խումբ չի կազմում:

բ. Թվերի արտադրյալային խմբեր: Հասկանալի է, որ $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$ և $(\mathbb{R}, \cdot)$ գույքերը խումբ չեն կազմում: Կարևոր խմբեր են $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ և $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ գույքերը: Դրանք կոչվում են *ռացիոնալ* և *իրատկան թվերի արտադրյալային խմբեր*:

գ. Խումբ է $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ գույքը: Իսկ $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ գույքը խումբ չէ:

դ. Կամայական A ոչ դատարկ բազմության համար $(B(A), \cap)$ և $(B(A), \cup)$ գույքերը խմբեր չեն: Մինչդեռ $(B(A), +)$ գույքը խումբ է, բունի որ $+$ գործողությունը գույքադեյլական է, ունի միավոր՝ այն $\emptyset$ բազմությունն է, և հակադարձելի է. A բազմության կամայական X ենթաբազմության $+$ -հակադարձը X ենթաբազմությունն է:

ե. Կամայական A բազմության համար $(F_{\text{mat}}(A, A), \circ)$ գույքը խումբ չէ, եթե A -ն ունի մեկից ավելի տարր: Եթե A բազմությունը ունի մեկ տարր, ապա $(A^A, \circ)$ գույքը խումբ է: Եթե A բազմությունը ունի մեկից ավելի տարր, ապա $(A^A, \circ)$ գույքը խումբ չէ:

զ. Զեյլի-Պյուրսոգորաուի տղյառակավ արված հետևյալ գործողություններից առաջին երկուսը խմբային են, իսկ երրորդը՝ ոչ:

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

$\cdot$	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	c
c	b	c	a

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 9.2. Արտացույցե վերջին դատարկությունը:

Լ. Կամայական սլաակների բոլոր ինքնահամադաստիմակների բազմությունը կազմում է խումբ ֆունկցիաների բազմապատկման գործողության նկատմամբ: Այդ խումբը կոչվում է սվյալ բազմության *ինքնահամադաստիմակների* խումբ:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 9.3. Դաեք $\mathcal{H}$ համարի ինքնահամադաստիմակների խմբի բոլոր տարրերը:

Դոյություն ունեն պայմաններ, որոնք համարվել են խմբային գործողության ասոցիատիվ պայմաններին: Նման պայմաններից մեկը պատահական է հետևյալ վարժության մեջ:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 9.4. Ապացուցեք, որ $(G, \cdot)$ զույգը այն և միայն այն դեպքում է խումբ, եթե.

1. G -ն ոչ դասարկ բազմություն է,
2. $\cdot$ -ը G -ի վրա սրված գուգորդելի գործողություն,
3. G -ի կամայական a և b տարրերի համար

$$a \cdot x = b, x \cdot a = b$$

հավասարումները G -ի մեջ մենք միավելք լուծումներ:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 9.5. Եթե $(G, \cdot)$ զույգը խումբ է, ապա $\cdot$ գործողության 1 չեզոք տարրը կոչվում է խմբի *չեզոք տարր* կամ *միավելք*:

Ելքեն, երբ այդ բյուրեղանման չի հանգեցնում, խումբ ունեյվ կհասկանանք ոչ միայն $(G, \cdot)$ զույգը, այլև G -ն: Այդ դեպքում G -ի տարրերը կանվանենք նաև խմբի տարրեր:

Խմբային գործողությունը հետաքրքիր կաղմերով է բնութագրում հետևյալ հասկությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 9.6. $(G, \cdot)$ խմբի կամայական x, y, z տարրերի համար՝

ա. եթե $a \cdot x = a \cdot y$, ապա $x = y$,

բ. եթե $x \cdot a = y \cdot a$, ապա $x = y$:

Ապացույց. ա. Դիցույ՝

$$a \cdot x = a \cdot y$$

և b -ն a -ի հակադարձն է: Այդ դեպքում՝

$$x = e \cdot x = b \cdot a \cdot x = b \cdot a \cdot y = e \cdot y = y :$$

□

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 9.7. Ապացուցեք 9.6 սնդման բ կետը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 9.8. $(G, \cdot)$ խումբը կոչվում է *վերջավոր*, եթե սյուսիսին է G բազմությունը: Հսկուտակ պետքում խումբը կոչվում է *ունվերսալ*: G -ի տարրերի թիվը, երբ G -ն վերջավոր է, կոչվում է $(G, \cdot)$ խմբի *կարգ*: Իսկ երբ G -ն անվերջ է, ապա կուսենք, որ խումբն ունի *անվերջ կարգ*:

Օրինակներ:

ա. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ և $(\mathbb{R}, +)$ խմբերը անվերջ են:

բ. $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ և $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ խմբերը անվերջ են:

գ. $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ խումբը վերջավոր է, նրա կարգը n է:

դ. $(B(A), +)$ խումբը վերջավոր է, եթե վերջավոր է A բազմությունը: Այս դեպքում եթե A բազմությունն ունի n տարր, ապա $(B(A), +)$ խմբի կարգը 2^n է:

և. $(B(A), +)$ խումբը անվերջ է, եթե անվերջ է A բազմությունը:

գ. Երբ A -ն անվերջ բազմություն է, $(S(A), \circ)$ խումբը նույնպես անվերջ է: Իսկ երբ A -ն վերջավոր է, և ունի n տարր, վերջավոր է նաև $(S(A), \circ)$ խումբը և նրա կարգը հավասար է $n!$ -ի՝ համաձայն 5.15 պնդման:

9.2. Խմբերի իզոմորֆիզմը: Նախադի կեսում մենք բերեցինք խմբերի բազմաթիվ օրինակներ: Բայց արդյո՞ք այդ խմբերը իրարից տարբեր էին: Որպեսզի այս հարցադրումը լավ հասկացվի, բերենք խմբի երկու օրինակ՝ $(a, b, \cdot)$ և $(a', b', \cdot')$, որոնց գործողությունները արվում են Քեյլի-Պյութագորասի հետևյալ սուղասակներով.

$\cdot$	a	b	$\cdot'$	a'	b'
a	a	b	a'	a'	b'
b	b	a	b'	b'	a'

Ինչո՞վ են իրար նման այս խմբերը: Անմիջապես կարելի է նկատել ստույգին մասնությունը. եթե նրանցից առաջին՝ $\{a, b\}$ բազմությունը յուրաքանչյուր տարրի գլխին դնենք $\cdot$ նշանը, ապա կստանանք երկրորդ՝ $\{a', b'\}$ բազմությունը: Բայց նմանությունը սրանով չի վերջանում: Այս փոփոխությունը կաատրելով մենք կտեսնենք ստույգին խմբի $\cdot$ գործողության միջոցով ստանալ երկրորդ խմբի $\cdot'$ գործողությունը: Այնուամենայնիվ, երկրորդ խմբի տարրերի գլխից ջնջելով $\cdot'$ նշանը, մենք կստանանք ոչ միայն առաջին խմբի տարրերը, այլև կվերականգնենք նրա $\cdot'$ խմբային գործողությունը:

Այսպիսով՝ դիստրիբյուտիվ խմբերի միջև տարբերությունը ձևական է, և այդ խմբերը ըստ էության նույնն են: Այնուամենայնիվ, դիստրիբյուտիվ օրինակը քայլ է առաջիկա զանելու այն չափանիշը, որն ընկած է երկու խմբերի՝ ըստ էության նույնը լինելու հիմքում. այն է՝ իմանալով խմբերից մեկը՝ վերականգնել մյուսը՝ ինչպես բազմությունը, այնպես էլ խմբային գործողությունը:

Այժմ այս նկատագրական լինելիքն ունի կառույցի հստակ ստեղծում: Նույնպես ստանք, որ համրահաշվում էությունը իրարից չտարբերվող խմբերը ունվում ենք իզոմորֆ խմբեր:

ՄԱՀՄԱՆՈՒՄ 9.9. $(G_1, \cdot_1)$ և $(G_2, \cdot_2)$ խմբերը կոչվում են *իզոմորֆ*, եթե գոյություն ունի այնպիսի f վերադրում G_1 և G_2 բազմությունների միջև, որ G_1 -ի կամական x և y տարրերի համար

$$f(x \cdot_1 y) = f(x) \cdot_2 f(y) :$$

f -ը կոչվում է *իզոմորֆիզմ* նշված խմբերի միջև: $(G_1, \cdot_1)$ և $(G_2, \cdot_2)$ խմբերի իզոմորֆ լինելու համագումարը գրառվում է այսպես՝

$$(G_1, \cdot_1) \cong (G_2, \cdot_2) :$$

$(G_1, \cdot_1) \cong (G_2, \cdot_2)$ իզոմորֆիզմը ստանկերվում է 20 գծագրում:

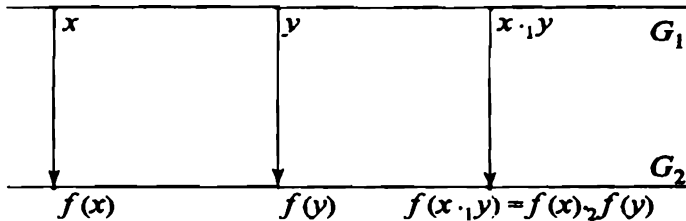
Օրինակ, վերևում դիստրիբյուտիվ խմբերը իրար իզոմորֆ են.

$$(\{a, b\}, \cdot) \cong (\{a', b'\}, \cdot') :$$

Ունենք նաև՝

$$(\{-1, 1\}, \cdot) \cong (\{a, b\}, \cdot) :$$

Նույնպես իրոմբոֆ խմբերի նոր օրինակների դիտարկումը մենք պետք է պատասխանենք մի շատ բնական ու կարևոր հարցադրման. եթե խմբերի իրոմբոֆիզմը լավում է նրանց՝ ըստ Լորյան իրար հավասար լինելու հարցը, ուստի ուղղո՞ւմ այն բովանդակում է հավասարության կամ, որ մասին է, համարվերայում սլոյմաննե-րին: Ընդ հարցին դրական պատասխան է տալիս հետևյալ հատկությունը:



Դժուգիր 20

ՊՆԴՈՒՄ 9.10. Խմբերի իզոմորֆ լինելու ստույգության համարժեքայինություն է:

Աղաջույց. ա. Նույն ցույց ստանք $\cong$ առնչությամբ սնդրադարձելիությունը, յուրարանցիոր ($G, \cdot$) խումբ իզոմորֆ է ինքն իրեն՝

$$(G, \cdot) \cong (G, \cdot) :$$

Դիտարկենք A բազմությունը $\rightarrow$ նույնական տարատարակերամբ՝

$$\pi(x) = x, x \in A:$$

Այն վերադարձում է: Այնուհետև:

$$\varepsilon(x \cdot y) = x \cdot y = \varepsilon(x) \cdot \varepsilon(y) :$$

Հետևապես γ -ը իզոմորֆիզմ է $(G, \cdot)$ և $(G', \cdot)$ խմբերի միջև:

բ. Յույց տանք $\cong$ տոնչությամբ համաչափելիությունը.

$$(G_1, \cdot_1) \cong (G_2, \cdot_2) \Rightarrow (G_2, \cdot_2) \cong (G_1, \cdot_1) :$$

Դիցուք՝ տրված է $(G_1, \cdot_1)$ և $(G_2, \cdot_2)$ խմբերի միջև f իզոմորֆիզմը.

$$f: G_1 \rightarrow G_2,$$

$$f(x \cdot_1 y) = f(x) \cdot_2 f(y), x, y \in G_1 :$$

Քունի որ f -ը վերադառնում է, ապա 8.28 սկզբնական ապացուցման նմանությամբ ցույց կառնենք, որ գոյություն ունի

$$f^{-1} : G_2 \rightarrow G_1$$

հսկողարժ տրամալստիկերումը, որտեղ $f^{-1}(y) = x$, երև $f(x) = y, x \in G_1, y \in G_2$: 8.27 պնդման տարացումն նմանապիտը ցույց կստնը, որ այն վերադրում է:

Դիցանք՝ $u, v \in G_2$: Այդ դեպքում

$$f(x) = u, f(y) = v,$$

սրանի $x, y \in G_1$: Կամ՝

$$f^{-1}(u) = x, f^{-1}(v) = y :$$

Ունենք՝

$$\begin{aligned} f^{-1}(u \cdot_2 v) &= f^{-1}(f(x) \cdot_2 f(y)) = \\ &= f^{-1}(f(x \cdot_1 y)) = x \cdot_1 y = f^{-1}(u) \cdot_1 f^{-1}(v) : \end{aligned}$$

Հետևապես՝ f^{-1} -ը իզոմորֆիզմ է $(G_2, \cdot_2)$ և $(G_1, \cdot_1)$ խմբերի միջև:

զ. Յույց ստանք $\cong$ տոնջություն վախճանցելիությունը.

$$(G_1, \cdot_1) \cong (G_2, \cdot_2), (G_2, \cdot_2) \cong (G_3, \cdot_3) \Rightarrow (G_1, \cdot_1) \cong (G_3, \cdot_3) :$$

‘Իզոմորֆ’ արված խմբերի միջև իզոմորֆիզմներն են. առաջին դեպքում՝ f -ը, երկրորդում՝ g -ն.

$$f : G_1 \rightarrow G_2, g : G_2 \rightarrow G_3$$

աբաասարակերտմները իզոմորֆիզմներ են: Դիտարկենք

$$f \circ g : G_1 \rightarrow G_3$$

աբաասարակերտմը: Այն վերադրում է՝ համաձայն 7.11 պնդման: Մինճույն ժամանակ,

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x \cdot_1 y) &= g(f(x \cdot_1 y)) = g(f(x) \cdot_2 f(y)) = \\ &= g(f(x)) \cdot_3 g(f(y)) = (f \circ g)(x) \cdot_3 (f \circ g)(y) : \end{aligned}$$

Հետևապես՝ $f \circ g$ -ն իզոմորֆիզմ է $(G_1, \cdot_1)$ և $(G_3, \cdot_3)$ խմբերի միջև: $\square$

Այժմ անցնենք օրինակներին:

ա. Մենք արդեն գիտենք, որ $(\mathbb{Z}, +)$ զույգը խումբ է: Հեշտությամբ կտրելի է զույց տալ, որ խումբ է նաև $(2\mathbb{Z}, +)$ զույգը: Դիտարկենք

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}, f(x) = 2x, x \in \mathbb{Z}$$

աբաասարակերտմը: Ակնհայտ է, որ այն վերադրում է: Մինճույն ժամանակ,

$$f(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = f(x) + f(y), x, y \in \mathbb{Z} :$$

Հետևապես՝ f -ը իզոմորֆիզմ է, ճշված խմբերի միջև: Հետևապես՝

$$(\mathbb{Z}, +) \cong (2\mathbb{Z}, +) :$$

բ. Կոմուտատիվ n բնական թվի համար ճշանակենք $n\mathbb{Z}$ -ով n -ին բազմապատկի սմբոջ թվերի բազմությունը՝

$$n\mathbb{Z} = \{nx | x \in \mathbb{Z}\} :$$

$(n\mathbb{Z}, +)$ զույգը խումբ է և իզոմորֆ է սմբոջ թվերի գումարային խմբին:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 9.11. Ակազացեք նախորդ նախադրամություն մեջ արված դասադրությունը:

գ. Նշանակենք $\mathbb{R}^+$ -ով դրական իրական թվերի բազմությունը.

$$\mathbb{R}^+ = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\} :$$

Հեշտությամբ կարելի է ստացուցել, որ $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ զույգը խումբ է: Դիտարկենք

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x, x \in \mathbb{R}^+$$

արտադրատվերումը: Մենք գիտենք, որ այն վերադասում է $\mathbb{R}^+$ և $\mathbb{R}$ բազմությունների միջև: Միաժամանակ,

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, x, y \in \mathbb{R}^+ :$$

Հետևապես՝ f -ը իզոմորֆիզմ է $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ և $(\mathbb{R}, +)$ խմբերի միջև: Այսինքն՝

$$(\mathbb{R}^+, \cdot) \cong (\mathbb{R}, +) :$$

$(\mathbb{R}, +)$ և $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ խմբերի միջև իզոմորֆիզմը կարելի է ստա հետևյալ կերպ.

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, g(x) = 2^x, x \in \mathbb{R} :$$

Ակնհայտ է, որ այս արտադրատվերումը վերադրում է և

$$g(x+y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = g(x) \cdot g(y) :$$

Այսինքն՝ g -ն իզոմորֆիզմ է:

գ. Վերցնենք ABC կոնսոլիդար եռանկյանը և դիտարկենք A, B, C բազմությամբ

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$$

անդադրությունը, որը նշանակենք s -ով:

Նշանակենք $f(s)$ -ով հարթության այն շարժումը, որի համար A -ի պատկերը A' -ն է, B -ինը՝ B' -ը, C -ինը՝ C' -ը: $f(s)$ -ը ABC կոնսոլիդար եռանկյան ինքնահամադրությունն է: Եթե այժմ դիտարկենք

$$f : s \rightarrow f(s)$$

արտադրատվերումը, ապա այն կլինի իզոմորֆիզմ A, B, C բազմության $S(A, B, C)$ անդադրությունների խմբի և ABC կոնսոլիդար եռանկյան ինքնահամադրությունների խմբի միջև:

Հետագայի համար օգտակար է իզոմորֆիզմի որոշ հասկացությունների ինսուցությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 9.12. *Խմբերի իզոմորֆիզմի ժամանակ առաջին խմբի շեղար տարրի պատկերը համապատասխանաբար է երկրորդ խմբի շեղար տարրին:*

Ապացույց. Դիցուք՝ f -ը իզոմորֆիզմ է $(G_1, \cdot_1)$ և $(G_2, \cdot_2)$ խմբերի միջև: Դիցուք՝ e_1 -ը առաջին խմբի շեղար տարրն է, e_2 -ը՝ երկրորդի: Ցույց տանք, որ

$$f(e_1) = e_2 :$$

Վերցնենք G_2 -ի կամայական $f(x)$ տարրը, որտեղ $x \in G_1$: Այդ դեպքում՝

$$f(e_1) \cdot_2 f(x) = f(e_1 \cdot_1 x) = f(x) :$$

Նույն կերպ ցույց կաանք, որ

$$f(x) \cdot_2 f(e_1) = f(x) :$$

$$\text{Հետևապես } f(e_1) = e_2 :$$

□

ՊԼԴՌԻՄ 9.13. *Իզոմորֆիզմի ժամանակ առաջին խմբի կամայական տարրի հակադարձի պատկերը հակադարձ է նրա պատկերի հակադարձին:*

Ապացույց. Դիցույ՝ f -ը իզոմորֆիզմ է $(G_1, \cdot_1)$ և $(G_2, \cdot_2)$ խմբերի միջև, $x \in G_1$: Նշանակենք x^{-1} -ով x -ի հակադարձը՝

$$x \cdot_1 x^{-1} = x^{-1} \cdot_1 x = e_1 :$$

Այդ դեպքում՝

$$e_2 = f(e_1) = f(x \cdot_1 x^{-1}) = f(x) \cdot_2 f(x^{-1}),$$

$$e_2 = f(e_1) = f(x^{-1} \cdot_1 x) = f(x^{-1}) \cdot_2 f(x) :$$

Այսինքն՝ $f(x^{-1})$ -ը $f(x)$ -ի հակադարձն է՝

$$f(x)^{-1} = f(x^{-1}) :$$

□

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 9.14. *Ապացուցեք, որ իզոմորֆ վերջավոր խմբերը ունեն նույն կարգը:*

9.3. Ենթախումք: Խմբերի ուսումնասիրության կարևոր խնդիրներից մեկը գոյություն ունեցող բոլոր խմբերի նկարագրությունն է: Այս անխրակամ աշխատքի խնդիրը, սակայն, խմբերի ուսումնասիրության լավ ուղենիշ կարող է ծառայել: Եթե ուսումնասիրության ընդոցքում հնարավոր է եղել նոր խմբի կամ խմբերի հայտնաբերում, ապա կատարված գործը սխալ է հաջողված համարել: Այս տեսակետից աշխատանքները հեշտամում են, երբ ելնելով արված $(G, \cdot)$ խմբից՝ մենք ուշիտաում ենք գտնել G բազմության այն ենթաբազմությունները, որոնք $\cdot$ գործողության հետ միասին կազմում են խումբ: Նման ենթաբազմությունները անվանվում են արված խմբի ենթախմբեր:

ՄԱՀԱՆՈՒՄ 9.15. *A բազմությունը կազմում է $(G, \cdot)$ խմբի ենթախումբ, եթե*
 ա. $A \subseteq G$,
 բ. $(A, \cdot)$ գույզը խումբ է:

Նախքան օրինակների վիտարկումն անցնելը՝ նշենք, որ խմբերի որոմումն ուշիտաումքները ենթախմբի պարագայում զգալիորեն հեշտամում են հետևյալ հատկության շնորհիվ:

ՊԼԴՌԻՄ 9.16. *G բազմություն A ոչ պատուրի ենթաբազմությունը այն և միայն այն դեպքում է $(G, \cdot)$ խմբի ենթախումբ, երև.*

ա. A -ի կամայական x, y տարրերի համար $x \cdot y \in A$,

բ. A -ի կամայական x տարրի հակադարձը նույնպես պատկանում է A -ին:

Լնդացայց. Եթե A -ն $(G, \cdot)$ խմբի ենթախումբ է, ապա $(A, \cdot)$ զույգը խումբ է և, բնականաբար, պնդման ա և բ սրայմանները տեղի ունեն:

Հսկառուկը: Դիցույ՝ պնդման ա և բ սրայմանները տեղի ունեն: Ցույց առնք, որ $(A, \cdot)$ զույգը խումբ է: Իսկապես, ա սրայմանից հետևում է, որ $\cdot$ -ը A բազմության վրա սրված երկակողմ կործողություն է: Այնուհետև՝ բանի որ A -ն դասարկ չէ, ապա այն ունի ինչ-որ a ստոր, և, համաձայն բ սրայմանի, ունի նաև այդ ստորին հակադարձ a^{-1} տարր: Նախից համաձայն ա սրայմանի A -ն կարգաւորակի $a \cdot a^{-1}$ տարր, որը հավասար է խմբի 1 միավորին: Այսինքն՝ A -ն պարունակում է $\cdot$ -ի 1 միավորը: Բ սրայմանից հետևում է, նաև, որ իւր յուրաքանչյուր ստորի հետ միասին A -ն պարունակում է նաև նրա հակադարձը: Անում է տեսնել $\cdot$ գործողությունը գուցարդելիությունը A -ի ստորերի խումբ: Այն հետևում է նրանից, որ $\cdot$ գործողությունը գուցարդելի է G -ի բոլոր ստորերի խումբ, իսկ A -ի ստորերը նաև G -ի տարրեր են: $\square$

ՊԼՂՈՒՄ 9.17. *Ենթախումբ լինելու տոնչությունը կամայական խմբի բոլոր ենթախմբերի բազմության վրա սրված մասնակի կարգի տոնչություն է:*

Լնդացայց. Ապացուցումը կատարքք ինքնուրույն: $\square$

Կամայական խմբի համար ենթախումբ է այդ խումբն ինքը և միայն չեզոք ստորից կազմված ենթաբազմությունը: Վերջինս կոչվում է խմբի *միույթը ենթախումբ*:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 9.18. Դաներ խումբ, որը նշված երկու ենթախմբերից բացի ուրիշ ենթախմբեր
ու ունի,
բ. չունի:

Անցնենք ենթախմբերի օրինակների դիտարկմանը:

ա. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ խմբերից յուրաքանչյուր նախորդը իր հաջորդների ենթախմբերն է: Դրանցից երկաորդը և երրորդը շուտ հուրուտա են ենթախմբերով: Իսկ առաջինը շուտ իրի ենթախմբեր ունի, որանք, առանց դժվարության, այստեղ մենք կարող ենք նկարագրել:

ՊԼՂՈՒՄ 9.19.

$$n\mathbb{Z}, n = 0, 1, 2, \dots$$

բազմությունները և միայն դրանք են ամբողջ թվերի գումարային խմբի ենթախմբեր:

Լնդացայց. Այն, որ $n\mathbb{Z}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ բազմությունները ամբողջ թվերի գումարային խմբի ենթախմբեր են, մենք տրդեն ցույց ենք տվել:

Հսկառուկը, դիցույ՝ A -ն $(\mathbb{Z}, +)$ խմբի ենթախումբ է և n -ը A -ի մեջ ընկած ամենափոքր դրական թիվն է: Եթե $m \in A$, ապա $m = nq + r$, որտեղ r -ը n -ից փոքր և 0-ից ոչ փոքր ամբողջ թիվ է: Այս սրայմանից կաւումանք $r \in A$: Հետևապես՝ $r = 0$: Այսինքն՝ $m = nq$: Ուրեմն՝ $A = n\mathbb{Z}$: $\square$

բ. $\mathbb{Q}^*$ -ը $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ -ի ենթախումբ է: $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ -ի ենթախմբեր են նաև $\mathbb{R}^+$ և $\{-1, 1\}$ բազմությունները:

գ. Կուրելի և նկարագրել նաև $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ խմբի ենթախմբերը:

ՊՆԴՈՒՄ 9.20. A -ն $(\mathbb{Z}_m, +_m)$ խմբի ոչ գրայնական ենթախումբ է այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի n -ի այնպիսի m բնական բաժանորդ, որի համար $A = \{0, m, 2m, \dots, (n/m - 1)m\}$:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարենք ինքնուրույն: □

դ. $(B(A), +)$ խմբի օրոշ ենթախմբեր կարելի է գտնել հետևյալ եղանակով. եթե X -ը A բազմության ենթաբազմություն է, ապա $B(X)$ -ը $(B(A), +)$ խմբի ենթախումբ է:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարենք ինքնուրույն: □

Ջենարկենք ենթախմբի կապի իզոմորֆիզմի ստեղծման հետ:

ՊՆԴՈՒՄ 9.21. *Իզոմորֆիզմի ժամանակ.*

ա. ենթախմբի պատկերը ենթախումբ է,

բ. ենթախմբի լիով նախադասվեքը ենթախումբ է:

Ապացույց. ‘Իիցուք’ $f : G_1 \rightarrow G_2$ արատալատկերումը իզոմորֆիզմ է $(G_1, \cdot_1)$ և $(G_2, \cdot_2)$ խմբերի միջև:

ա. Յույց ստանք, որ եթե A -ն սուսգին խմբի ենթախումբ է, ապա $f(A)$ -ն կլի-նի երկրայող խմբի ենթախումբ: Ենթադրենք $f(x)$ -ը և $f(y)$ -ը $f(A)$ -ի կոմուտական տարրեր են: Այդ դեպքում քանի որ

$$f(x) \cdot_2 f(y) = f(x \cdot_1 y)$$

և $x \cdot_1 y \in A$, ապա $f(x \cdot_1 y) \in f(A)$ և, արեմն, $f(x) \cdot_2 f(y) \in f(A)$: ‘Իիցուք’ x^{-1} -ը x -ի հակադարձն է: Այդ դեպքում $f(x^{-1})$ -ը կլինի $f(x)$ -ի հակադարձը: Այդ պատճառով, եթե $x \in A$, ապա $f(x^{-1}) \in f(A)$, քանի որ $x^{-1} \in A$: Այսպիսով՝ $f(A)$ -ն բավարարում է ենթախումբ լինելու պայմաններին:

բ. Յույց ստանք, որ եթե B -ն երկրորդ խմբի ենթախումբ է, ապա

$$C = \{x | f(x) \in B\}$$

բազմությունը սուսգին խմբի ենթախումբ է: Իսկապես, դիցուք՝ $x, y \in C$: Այդ դեպքում $f(x), f(y) \in B$: Բայց՝

$$f(x \cdot_1 y) = f(x) \cdot_2 f(y) \in B :$$

Հետևապես՝ $x \cdot_1 y \in C$: Այնուհետև՝ եթե x^{-1} -ը x -ի հակադարձն է, ապա $f(x^{-1})$ -ը $f(x)$ -ի հակադարձն է: Քանի որ $f(x^{-1})^{-1} \in B$, ապա նաև $f(x^{-1}) \in B$: Ուրեմն՝ $x^{-1} \in C$: Հետևապես՝ C -ն ենթախումբ է: □

10. ՏԵՂԱԴՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ՏԵՂԱԴՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԽՄԲԵՐ

10.1. *Տեղադրությունների լրիվ խումբը:* Դիստրիբյուցիոն A ոչ դատարկ բազմություն տեղադրությունների $S(A)$ բազմությունը և նրա վրա արված ֆունկցիաների կամ տեղադրությունների բազմապատկման $\circ$ գործողությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 10.1. $(S(A), \circ)$ զույգը խումբ է:

Լիպսցույց. Մենք արդեն ցույց ենք ավել, որ $\circ$ -ը $S(A)$ -ի վրա արված զուգորդելի և ասոցիատիվ գործողություն է (տես պնդում 8.12 և պնդում 8.27): Հետևապես՝ $(S(A), \circ)$ զույգը խումբ է: $\square$

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 10.2. $(S(A), \circ)$ խումբը կոչվում է A բազմության *սիմետրիաների* կամ *տեղադրությունների լրիվ խումբ*:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 10.3. Երկատաղ տալիստիկի տեսքով գրեք $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$ բազմությունների սիմետրիաների խմբերի բոլոր ատրիբուտները:

Տեղադրությունները երկատաղ տալիստիկների տեսքով գրառելու դեպքում հեշտությամբ է կատարվում նաև նրանց բազմապատկման գործողությունը: 449 Նախապես նշենք, որ $\{1, 2, \dots, n\}$ բազմություն վրա արված տեղադրությունների բազմապատկման գործողությունը կանկյևա տեղադրություններ բազմապատկելիս սովորաբար նշանակվում է $\cdot$ նշանով կամ էլ ուղղակի բաց է թողնվում: Օրինակ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} :$$

Նշենք, որ չափսզանց հեշտ է զանգված երկատաղ տալիստիկով սյուսկերված տեղադրություն հասկանալու: Ուղղակի պետք է շրջել տյ՛ն վախ՛ն վերին և ստորին տողերի տեղերը: Օրինակ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} :$$

Ընդհանրապես,

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} :$$

Կարևոր է նաև իմանալ տեղադրությունների լրիվ խմբի կարգը:

ՊՆԴՈՒՄ 10.4. Եթե A բազմությունն անվերջ է, ապա $(S(A), \circ)$ խումբը նույնպես անվերջ է:

Լիպսցույց. Դիցա՛ք՝ a -ն A բազմությունն ստարկ է: A -ի յուրաքանչյուր b տարրի համար կառուցենք նրա հետևյալ f_b արտադրատիպային f_b -ն՝ a -ն արտադրատիպային b -ի, b -ն՝ a -ի, իսկ A բազմության մնացած ատրիբուտներ թողնում է անփոփոխ:

Պարզ է, որ

$$f_b \in S(A)$$

և

$$b / c \Rightarrow f_b \neq f_c, \quad b, c \in A :$$

Հետևապես՝ $S(A)$ -ի մեջ f_b տեսքի ստորերի բաժանվող անվերջ է, լրանի որ անվերջ է A -ն: Բայց այդ դեպքում անվերջ կլինի նաև $S(A)$ -ն՝ ինքը: $\square$

ՊԼԴՌԻՄ 10.5. *Եթե A բազմությունը վերջուիոր է, ապա վերջավոր է նաև նրա տեղափոխությունների խումբը: Ընդ որում, եթե A -ն ունի n տարր, ապա $(S(A), \circ)$ խմբի կարգը $n!$ է:*

Ապացույց. Իհարկում է 5.15 սնդուսից: $\square$

10.2. *Տեղափոխություններ:* Հիշենք, որ $\{1, 2, \dots, n\}$ բազմության ստորերի չկրկնվող անդամներով հաջորդականությունը կոչվում է $1, 2, \dots, n$ ստորերի տեղափոխություն: Հասկանալի է, որ եթե $\{1, 2, \dots, n\}$ բազմության յուրաքանչյուր անդամը գրված է երկուսից և ավելի տարրերով, ապա նրա վերին և ստորին ստորերը $\{1, 2, \dots, n\}$ բազմության տեղափոխություններ են:

ՊԼԴՌԻՄ 10.6. *$1, 2, \dots, n$ տարրերի բոլոր հնարավոր տեղափոխությունների թիվը $n!$ է:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարենք ինդուկցիայով՝ ըստ n -ի:

Ինդուկցիայի բազիսը $n = 1$: Ապացույցն ակնհայտ է:

Ինդուկցիոն քայլ: Դիցուք՝ $1, 2, \dots, n-1$ տարրերի բոլոր հնարավոր տեղափոխությունների թիվը $(n-1)!$ է: Վերցնենք այդ տարրերի ուրև $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ տեղափոխություն: n թվով կցազրենք այդ տեղափոխությունը՝ այն դարձնելով $1, 2, \dots, n$ տարրերի տեղափոխություն: Ունենք կցազրված n հնարավորություն: Հետևապես՝ $1, 2, \dots, n-1$ տարրերի յուրաքանչյուր տեղափոխությունից ծնվում է $1, 2, \dots, n$ տարրերի n տեղափոխություն: Կունենանք ընդամենը՝ $(n-1)! \cdot n = n!$ տեղափոխություն: Մնում է նկատել, որ այս ճանապարհով ստացվում են $1, 2, \dots, n$ տարրերի բոլոր հնարավոր տեղափոխությունները: $\square$

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 10.7. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ տեղափոխություն մեջ նրա α_i անդամի *ունկարգային տասիծում* է կոչվում տեղափոխություն մեջ այդ անդամից ձախ գտնվող և նրանից մեծ տարրերի թիվը:

Օրինակ, $2, 3, 4, 1$ տեղափոխության մեջ $2, 3, 4$ անդամների անկարգային տասիծումները 0 են, իսկ 1-ինը՝ 3:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 10.8. Տեղափոխությունը *անկարգային տասիծում* է կոչվում նրա բոլոր անդամների անկարգային տասիծումների գումարը:

Օրինակ, $3, 2, 4, 1$ տեղափոխության անկարգային տասիծումը 4 է:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 10.9. Տեղափոխությունը կոչվում է *զույգ*, եթե նրա անկարգային տասիծումը զույգ է, *կենտ*՝ եթե նրա անկարգային տասիծումը կենտ է:

Օրինակ, $3, 2, 4, 1$ տեղափոխությունը զույգ է, իսկ $2, 3, 4, 1$ տեղափոխությունը՝ կենտ:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 10.10. Տեղափոխության *դիրքավորություն* է կազմում նրա երկու անդամների տեղափոխությունը:

Օրինակ, 3, 2, 4, 1 տեղափոխությունից 3 և 2 անդամների դիրքավորությունից կառանումք 2, 3, 4, 1 տեղափոխությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 10.11. *Մեկ դիրքավորությունը փոխում է տեղափոխության գույգույր-յունը:*

Անդադույց. Կառարենք

$$\dots, i, \dots, j, \dots$$

տեղափոխության մեջ i և j անդամների դիրքավորություն: Եթե դրանք լինեն խաբան ունդամներ, ապա տկնխադարեն տեղափոխույց ինտու կարգի խախտումների թվը մեկով կավելանու կում կարկաւի: Իսկ եթե նրանց միջև կու k անդամ, ապա սկզբում կարելի է i -ն ինքրաւանդարտոր տեղափոխել ալղ տնդամներից յորարանդարտրի ինտ, ալնոուինտ j -ն կարելի է նուկ տեղափոխել i -ի ինտ, ապա՝ նուկ ալղ բոլղրի ինտ: Արղարնրում կունենումք ընդումներ $2k + 1$ իտու իտենտ տնդամների դիրքավորություն: Այսինքն՝ տեղափոխություն գույգուրյունք կփախի $2k + 1$ տնգում: Իսկ դու նդանսկում է, որ սաուցփում տեղափոխարյունք և տրփումք կտնենում տարբեր գույգուրյուններ: $\square$

Այս սնդումք ինտրսփարյուն է տալիս ներմուծելու նուկ տեղաղարյան գույգուրյուն գաղսփարք: Նախ նկատենք, որ եթե մկենույն տեղաղարյունք գրփում է տարբեր երկաղղ աղյուտակներով, ապա դրանցից մեկից մյուսք կարելի է սաունալ սյուների դիրքավորարյուն միջսղղ: Արղարնրում՝ աղսլիսի յորարանդարտր դիրքավորարյուն ընրսղքում միաւումունակ կփախվեն րն՝ վերին, րն՝ սաղրին աղղերի գույգուրյուններք: Այսինքն՝ տեղաղարյուն վերին և սաղրին աղղերք կում միաւումունակ կունենում նույն գույգուրյունք, կում կունենում տաղբեր գույգուրյուններ:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 10.12. Տեղաղարյունք կոչփում է *գույց*, եթե նրա վերին և սաղրին աղղերը ունեն նույն գույգուրյունք: Իսկ եթե նրա վերին և սաղրին աղղերը ունեն տարբեր գույգուրյուններ, ապա տեղաղարյունք կոչփում է *կենտ*:

Օրինակ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}:$$

տեղաղարյուններից ուտսլին երկուսք գույց են, վերջինը՝ կենտ: Չույց է նուկ կումայական n սասիւնումք

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_n \\ i_1 & i_n \end{pmatrix}$$

միաղիք տեղաղարյունք:

10.3. Նշանակումիս խումբը: Միննայն՝ n տատիճոնի բոլոր զոյգ տեղադրու-
թյոննրի բազմությոնը ընկաճվոճ և գրառել $A(n)$ տեսրոճ:

ՊՆԴՈՒՄ 10.13. $(A(n), \cdot)$ զոյգը խոմը է:

Արդսոյց. Յոյց տոմը, որ $A(n)$ -ը $(S(n), \cdot)$ խմրի ենթխոմը է: Դրա համար
բաճկոն և ստոգել ենթախոմը լինելոճ երկոճ արդմոննրը:

տ. երե $f, g \in A(n)$, տարոճ $f \cdot g \in A(n)$: Իսկոպես, դիցոճր՝

$$f = \begin{pmatrix} i_1 & i_n \\ j_1 & j_n \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} j_1 & j_n \\ k_1 & k_n \end{pmatrix}:$$

Այտոնը g տեղադրությոն տոպին տողը հոմընկնոճ և f -ի երկրոյղ սոդի հես. նոմ գրոտոմոն միշոճ կարելի է հոմգել g տեղադրությոն սյոննրի դիլրաճիոտությոն միջոցոճ: Այդ պեսրոճ չոփոպոմնց հեշոճ և գոնճվոճ $f \cdot g$ արտոտրոյղը.

$$f \cdot g = \begin{pmatrix} i_1 & i_n \\ k_1 & k_n \end{pmatrix}:$$

Քոմի որ f -ը և g -ն զոյգ են, տարոճ նրոնց վերին և սոտրին սոդերը միոճոմոնոնկ զոյգ են կոճ միոճոմոնոնկ կենոճ: Եճ որոփիեսոճ նրոնց մեկոկոն սոդը ընդիոնոճր է, տարոճ ստոգճվոճ է, որ $f \cdot g$ արտոտրոյղի վերին և սոտրին սոդերը միոճոմոնոնկ զոյգ են կոճ միոճոմոնոնկ կենոճ: Այսինքն՝ $f \cdot g \in A(n)$:

բ. Յոյց տոմը, որ երե $f \in A(n)$, տարոճ $f^{-1} \in A(n)$:

Իսկոպես, երե տեղադրությոնը զոյգ է, տարոճ նրոճ վերին և սոտրին սոդերը միոճոմոնոնկ զոյգ են կոճ միոճոմոնոնկ կենոճ: Ըոպց տրվոճ տեղադրությոն վերին սոդը հոկոպորճ տեղադրությոն հոմոճր դոտոմոճ և սոտրին տող, իսկ սոճ-րին սոդը՝ վերին տող: Հետեոպես՝ դրոնց միոճոմոնոնկ զոյգ կոճ միոճոմոնոնկ կենոճ լինելը արոտրոնճվոճ է: Այսինքն՝ f -ի հոկոպորճը նոյնպես արոտրոնոճ է $A(n)$ -ին: $\square$

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 10.14. $(A(n), \cdot)$ -ը կոչվոճ և n -րդ տատիճոնի *նշոնոպիոս խոմը*:

Ռրոշենը n -րդ տատիճոնի *նշոնոպիոս խմրի կարգը*:

ՊՆԴՈՒՄ 10.15. $(A(n), \cdot)$ խմրի կարգը $n!/2$ է:

Արդսոյց. Ակնիոյաճ և, որ յորոտրոնչյոր տեղադրությոն կարելի է գրառել

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

տեսրոճ: Ընդ որոճ, ոյոճ տեսրոճ գրոտոճ տեղադրությոնը կլինի զոյգ, երե զոյգ է $i_1, i_2, \dots, i_n$ տեղաճիոտրոնը: Հետեոպես՝ $\{1, 2, \dots, n\}$ բոլրճոթյոն զոյգ տեղադրությոննրի թիվը հոտիոտը և $1, 2, \dots, n$ տորրերի զոյգ տեղաճիոտրոննրի թիվը:

Այժմ վերցնենք $1, 2, \dots, n$ ստորերի բալոր սեղավորաթյունները և բոլորի մեջ կատարենք 1 և 2 թվերի դիպրավորաթյուն: Այդ դեպքում իրավիճակ ստարերը բալոր սեղավորաթյունները կվերածվեն նույնպես իրավիճակ ստարերի սեղավորաթյունների և միասնամասկ, համաձայն 10.11 պնդման, բալոր գույգ սեղավորաթյունները կդառնան կենսա: Հետևապես՝ կենսա սեղավորաթյունների քանակը սլակաս չէ գույգ սեղավորաթյունների քանակից:

Նույն կերպ կատարենք, որ գույգ սեղավորաթյունների քանակը սլակաս չէ կենսաերի քանակից: Այսինքն՝ այդ քանակները իրար հավասար են: Ուրեմն՝ նրանցից յուրաքանչյուրը կլինի $n!/2$: $\square$

11. ՕՂԱԿՆԵՐ

11.1. Օղակ: Դիտարկենք ումբողջ թվերի $\mathbb{Z}$ բազմություն վրա արված գումարման $+$ և բազմապատկման $\cdot$ գործադրությունները: Դրանք ժաղված են բազմաթիվ հաակություններով: Սակայն դրանցից կարևորագույնները հետևյալներն են. $+$ -ի նկատմամբ $\mathbb{Z}$ -ը կազմում է սրեյուն խումբը, իսկ $\cdot$ -ը բաշխական է $+$ -ի նկատմամբ: Այս հաակությունները բացառիկ նշանակություն ունեն: Դրանցով ժաղված են ոչ միայն թվերի հետ կատարվող գործադրությունները: Ահա այս պատճառով նման գործադրությունները՝ համաարաաախաան բազմությունների հետ միասին ասուցել են հասաակ՝ օղակ անվանումը:

Բերենք օղակի առհմանումը: Նախապես նշենք, որ օղակ ասանալու համար պեսք է արված R բազմություն վրա վերցնենք երկու գործադրություններ, որանք կատարեն այն դերերը, ինչ կատարում են ումբողջ թվերի համար գումարման և բազմապատկման գործադրությունները: Համաարաաախաան հաակությունների ձևակերպումների ընկալումը դյուրին կդառնա, եթե մենք այդ R բազմություն վրա արված գործադրությունները նայնալես նշանակենք $+$ և $\cdot$ նշաններով: Նշենք, որ նման նշանակումը քյալըմբուման չի հանգեցնում. ամեն անգամ մենք հեշաությամբ, ոտունց քրուցուցիչ սյարգարանումների, կհասկանանք, թե խոսքը $+$ և $\cdot$ նշանների մ"ը գործադրություն մասին է:

Եվ ապաես, դիցուք՝ ունենք R բազմությունը և նրա վրա արված $+$ և $\cdot$ երկաեղ հանրաաաշխական գործադրությունները:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 11.1. $(R, +, \cdot)$ եռյակը կոչվում է *օղակ*, եթե.

ա. $(R, +)$ գույգը *սրեյուն խումբ* է, ապինքն՝ նրա ցանկացած x, y ստարերի համար՝ $x + y = y + x$. այդ խումբը կոչվում է օղակի *գումարային խումբ*,

բ. $\cdot$ -ը R -ի վրա արված երկաեղ գործադրություն է և բաշխական է $+$ -ի նկատմամբ, ապինքն՝ R բազմություն կամայական x, y, z ստարերի համար՝

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$$

$$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x:$$

Երբեմն կասենք նաև, որ R բազմությունն է կազմում օղակ $+$ և $\cdot$ գործադրությունների նկատմամբ:

Բերենք օղակների մի քանի օրինակներ և ժխտօրինակներ:

ա. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ եռյակները օղակներ են: Դրանք համապատասխանաբար կոչվում են մաթեմ, մոդյուլո և իրական թվերի օղակներ:

$(\mathbb{N}, +, \cdot)$ եռյակը օղակ չէ: Օղակ չէ նաև $(\mathbb{Z}, \cdot, +)$ եռյակը:

բ. $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ եռյակը օղակ է:

գ. Հանքամուշվի դարձական դուրսբերումից հայտնի բազմամոդուլների բազմությունը նույնպես կազմում է օղակ բազմամոդուլների գումարման և բազմապատկման գործողությունների նկատմամբ:

դ. 'Դիցուք' $(A, +)$ -ը տրեկյալ խումբ է: A բազմություն վրա սահմանենք «բազմապատկման» · գործողությունը հետևյալ կերպ.

$$x \cdot y = 0, \quad x, y \in A,$$

որտեղ 0 -ն + գործողության չեզոք տարրն է:

$(A, +, \cdot)$ եռյակը օղակ է: Այն կոչվում է $(A, +)$ խմբի զրոյական օղակ:

ե. 'Իխտրկենք

$$\{x + y\sqrt{2} | x, y \in \mathbb{Z}\}, \{x + y\sqrt{2} | x, y \in \mathbb{Q}\}$$

բազմությունները: Դրանք օղակ են կազմում թվերի գումարման և բազմապատկման գործողությունների նկատմամբ: Իսկ տես $\{x + \frac{1}{2}y | x, y \in \mathbb{Z}\}$ բազմությունը նույն գործողությունների նկատմամբ օղակ չի կազմում:

Վերջին դեպքում $1/2, 1/3 \in \{x + \frac{1}{2}y | x, y \in \mathbb{Z}\}$, բայց $1/2 \cdot 1/3 \notin \{x + \frac{1}{2}y | x, y \in \mathbb{Z}\}$: Այսինքն՝ թվերի բազմապատկման գործողությունը $\{x + \frac{1}{2}y | x, y \in \mathbb{Z}\}$ բազմության վրա արված երկտեղ հանրահաշվական գործողություն չէ:

զ. 'Դիցուք' $\mathbb{R}_3$ -ը ստորամասնություն բոլոր վեկտորների բազմությունն է, + -ը՝ վեկտորների գումարման գործողությունը, իսկ $\bullet$ -ը՝ վեկտորների վեկտորական արտադրյալի գործողությունը: Այդ դեպքում $(\mathbb{R}_3, +, \bullet)$ եռյակը օղակ է:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 11.2. Ապացուցեք վերջին սղորմը:

է. Կոմայական A բազմություն համար

$$(B(A), +, \cap)$$

եռյակը օղակ է:

Իսկ տես $(B(A), +, \cup)$ եռյակը օղակ չէ:

յ. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ -ով մենք նշանակել ենք իրական թվերի $\mathbb{R}$ բազմությունից $\mathbb{R}$ -ի մեջ սղդված բոլոր արտապատկերումների բազմությունը: Այն երկու եղանակով կարելի է դարձնել օղակ: Դիտարկենք առաջին եղանակը:

Եթե $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, ապա լինում ենք՝

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in \mathbb{R} :$$

ՊՆԴՈՒՄ 11.3. $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \circ)$ եռյակը օղակ է:

Ապացույց. Նույն ցույց տալով, որ $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +)$ գույզը տրեկյալ խումբ է: Իսկուպես՝

$$((f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x),$$

$$(f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) :$$

Այսինքն՝

$$((f + g) + h)(x) = (f + (g + h))(x), x \in \mathbb{R} :$$

Հետևապես՝

$$(f + g) + h = f + (g + h) :$$

Նույն կերպ ցույց կաանք, որ

$$f + g = g + f :$$

Ձրոյի դերը կատարում է

$$\theta(x) = 0, x \in \mathbb{R}$$

զրայական տրասպրտակերտը:

Իսկապես, եթե $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $x \in \mathbb{R}$, ապա

$$(\theta + f)(x) = \theta(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x) :$$

Հետևապես՝

$$f + \theta = \theta + f = f :$$

Այնուհետև, եթե $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $x \in \mathbb{R}$, ապա

$$(-f)(x) = -f(x)$$

սրայմանով որոշվող f տրասպրտակերտը f -ի հակադիրն է: Իրոք՝

$$(-f + f)(x) = (-f)(x) + f(x) = -f(x) + f(x) = 0 = \theta(x) :$$

Հետևապես՝

$$-f + f = \theta :$$

Այսինքն՝ f -ը f -ի հակադիրն է:

Յույց ատմք, որ տրասպրտակերտման բազմապատկման գործողությունը բաշխական է նրանց գումարման գործողության նկատմամբ: Իսկապես, դիցուք՝

$$f, g, h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, x \in \mathbb{R} :$$

Այդ դեպքում՝

$$((f + g) \circ h)(x) = h((f + g)(x)) = h(f(x) + g(x)) = h(f(x)) + h(g(x)) =$$

$$(f \circ h)(x) + (g \circ h)(x) = ((f \circ h) + (g \circ h))(x),$$

$$((f + g) \circ h)(x) = ((f \circ h) + (g \circ h))(x),$$

$$(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h) :$$

Նույն կերպ ցույց կարվի, որ

$$h \circ (f + g) = (h \circ f) + (h \circ g) :$$

Այսպիսով՝ մենք տալուցեցինք, որ $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \circ)$ եղյակը օղակ է: □

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 11.4. Արացուցեք, որ $h \circ (f + g) = (h \circ f) + (h \circ g)$:

ք. Այժմ $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ -ի մեջ բազմապատկման գործողությունը սահմանենք այլ կերպ: Եթե $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, ապա քննարենք

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x), x \in \mathbb{R} :$$

ՊՆԴՈՒՄ 11.5. $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ եղյակը օղակ է:

Արդյույց. Այն, որ $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +)$ գույզը տրեկտան խումբ է, մենք արդեն ապացուցել ենք: Մնում է ցույց տալ, որ $\cdot$ գործողությունը բաշխական է $+$ -ի նկատմամբ: Իսկապես՝

$$\begin{aligned} ((f + g) \cdot h)(x) &:= (f + g)(x) \cdot h(x) = (f(x) + g(x))h(x) = \\ &:= f(x)h(x) + g(x)h(x) = (f \cdot h)(x) + (g \cdot h)(x) = (f \cdot h + g \cdot h)(x), \\ ((f + g) \cdot h)(x) &:= (f \cdot h + g \cdot h)(x), \\ (f + g) \cdot h &:= f \cdot h + g \cdot h : \end{aligned}$$

Նույն կերպ կապրացուցենք նաև, որ

$$h \cdot (f + g) = h \cdot f + h \cdot g :$$

□

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 11.6. Ակտյո՞ր իբրև խումբի են $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \circ)$ և $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ օղակները:

11.2. Օղակի ստորերի հատկությունները: Հաճախ R բազմության ստորերը կոչվում են նաև $(R, +, \cdot)$ օղակի ստորերը:

Նախ օղակի մեջ ներմտմեն համաձայն գործառնությունը՝ գումարման գործողության միջոցով:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 11.7. Օղակի x և y ստորերի *ստորերաբաժան* է կոչվում R -ի այն z ստորը, որի համար $x = y + z$:

x և y ստորերի *ստորերաբաժանը* նշանակվում է՝

$$x - y :$$

Հիշենք նաև, որ y ստորի $-y$ հակադիրը նշանակելիս մայնպես գործածվում է $-$ նշանը: Այսպիսով՝ պետք է զգույշ լինել $-$ նշանը գործածելիս, քանի որ այն ունի երկակի նշանակություն:

ՊՆԴՈՒՄ 11.8. $(R, +, \cdot)$ օղակի *կամայտկան* x, y ստորերի *համար*

$$x - y := x + (-y) :$$

Արդյույց. Իսկապես,

$$(x + (-y)) + y = x + (y + (-y)) = x + 0 = x :$$

ՊՆԴՈՒՄ 11.9. $(R, +, \cdot)$ օղակի կամայական x, y, z տարրերի համար.

ա. երե $x + y = x$, ապա $y = 0$,

բ. երե $x + y = 0$, ապա $x = -y, y = -x$,

գ. երե $x = -y$, ապա $y = -x$,

դ. երե $x + z = y + z$, ապա $x = y$,

ե. $-(-x) = x$,

զ. $x - x = 0$:

Ապացույց. ա. Դիցուք՝ $x + y = x$: Այդ դեպքում՝

$$-x + x + y = -x + x :$$

Հետևապես՝ $0 + y = 0$ կամ $y = 0$:

դ. Դիցուք՝

$$x + z = y + z :$$

Այդ դեպքում՝

$$x + z + (-z) = y + z + (-z) :$$

Հետևապես՝ $x + 0 = y + 0$ կամ $x = y$:

□

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 11.10. Ապացուցեք պնդման բ, գ, ե, զ կետերը:

ՊՆԴՈՒՄ 11.11. $(R, +, \cdot)$ օղակի կամայական x, y, z տարրերի համար.

ա. $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$,

բ. $(-x)(-y) = xy$,

գ. $(-x)y = x(-y) = -(xy)$,

դ. $x(y - z) = xy - xz, (z - y)x = zx - yx$,

ե. $0 - x = -x$:

Ապացույց. ա.

$$0 \cdot x + x \cdot x = (0 + x) \cdot x = x \cdot x :$$

Հետևապես՝

$$0 \cdot x = 0 :$$

դ.

$$x(y - z) = x(y + (-z)) = xy + x(-z) = xy + (-xz) = xy - xz :$$

□

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 11.12. Ապացուցեք պնդման բ, գ, ե կետերը:

11.3. Օղակների իզոմորֆիզմը: Այժմ դիտարկենք օղակների՝ ըստ էության իդուր հավաար լինելու խնդիրը: Հասկանալի է, որ մասնատմանը այստեղ մույնը պետք է լինեն, ինչպիսին խմբերի համար էին: Նույն դիտարկենք մեկ օրինակ:

Քելլի-Պյուրսոգորասի հետևյալ տղյառակներով արված գործողությունների $+$, $\cdot$ և $+$, $\cdot$ գույգերի նկատմամբ $\{a, b\}$ և $\{a', b'\}$ բուգմությունները կուգմում են օղակներ:

$+$	a	b
a	a	b
b	b	a

$+$	a'	b'
a'	a'	b'
b'	b'	a'

$\cdot$	a	b
a	a	a
b	a	b

$\cdot$	a'	b'
a'	a'	a'
b'	a'	b'

Ինչո՞վ են սուրբերվում ուղ օղակները: Այստեղ մույնսև, ինչպես խմբերի իզոմորֆիզմի համար բերված օրինակներում, երևում է, որ սուգմում օղակի ինչպես հիմնական բուգմության սուրբերի, այնպես էլ մրումց հետ կատարվող գործողությունների մեջ յուրուբանչյուր սուրբի գլխին դենք $'$ մշումը, կատումը երկրորդ օղակի և հիմնական բուգմության բուր սուրբերը և մրումց հետ կատարվող գործողությունները: Նույն կերպ, երկրորդ օղակի սուրբերի գլխից ցմջելով $'$ մշումը, մենք կստանանք ռմխյն տուտջին օղակի բուր սուրբերը, ուղև կվերականգները մրումց հետ կատարվող գործողությունները:

Այսպիսով՝ ույն չուվումիչները, որոնք ընկում են օղակների՝ ըստ էության հավասար լինելու հիմքում, մույն են, ինչ խմբերի համար: Այն է. խմումսով օղակներից մեկը վերականգնել մուրը՝ ինչպես հիմնական բուգմությունը, ույնսև էլ օղակի գործողությունները: Այժմ ույն նկարագրական ընկալմունք սումք հատուկ ձևուկերսում: Նշենք, որ համրուսաշվում էությանմք իրարից չսուրբերվող օղակները մույնսևս անվանվում են իզոմորֆ:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 11.13. $(R_1, +_1, \cdot_1)$ և $(R_2, +_2, \cdot_2)$ օղակները կոչվում են *իզոմորֆ*, երև գոյություն ունի այնսլիսի f վերսղում R_1 և R_2 բուգմությունների միջև, որ R_1 -ի կամայական x և y սուրբերի համար՝

$$f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y),$$

$$f(x \cdot_1 y) = f(x) \cdot_2 f(y):$$

f -ը կոչվում է *իզոմորֆիզմ* նշված օղակների միջև:

$(R_1, +_1, \cdot_1)$ և $(R_2, +_2, \cdot_2)$ օղակների իզոմորֆ լինելու հանգամանքը գրուովում է այսպես՝

$$(R_1, +_1, \cdot_1) \cong (R_2, +_2, \cdot_2):$$

Օրինակ, վերևում դիտարկված օղակները իրար իզոմորֆ են.

$$(\{a, b\}, +, \cdot) \cong (\{a', b'\}, +', \cdot'):$$

$(R_1, +_1, \cdot_1) \cong (R_2, +_2, \cdot_2)$ իզոմորֆիզմը սլասկերված է 21 գմուգրում:

Այստեղ մույնսևս մենք սլուրասովոր ենք ցույց սուլ, որ օղակների իզոմորֆ լինելու տոնչությունը հավասարության կամ համարժեքության տոնչություն է:

ԴՆԴՈՒՄ 11.14. Օդակների իզոմորֆ լինելու ստեղծարարներ համարժեքության ստեղծարարն է:

Ապացույց. ա. Նախ ցույց տանք $\approx$ ստեղծարարն անդադարձելիությունը: Բա-
վական է դիտարկել կոմուտատիվ $(R, +, \cdot)$ օդակի R հիմնական բազմություն - նույ-
նական արտադրատվերումը, այն կլինի իզոմորֆիզմ $(R, +, \cdot)$ և $(R, +, \cdot)$ օդակների
միջև:

բ. Զայց տանք $\approx$ ստեղծարարն համաչափելիությունը.

$$(R_1, +_1, \cdot_1) \approx (R_2, +_2, \cdot_2) \Rightarrow (R_2, +_2, \cdot_2) \approx (R_1, +_1, \cdot_1):$$

Իսկապես, պիցուք՝ արված է

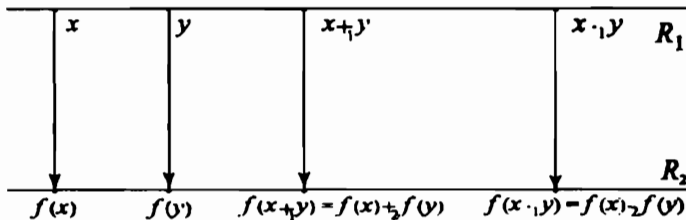
$$f: R_1 \rightarrow R_2$$

արտադրատվերումը, որը իզոմորֆիզմ է $(R_1, +_1, \cdot_1)$ և $(R_2, +_2, \cdot_2)$ օդակների միջև:
Այդ դեպքում

$$f^{-1}: R_2 \rightarrow R_1$$

արտադրատվերումը կլինի իզոմորֆիզմ $(R_2, +_2, \cdot_2)$ և $(R_1, +_1, \cdot_1)$ օդակների միջև:

գ. Վերջապես, եթե ունենք առաջին և երկրորդ օդակների միջև f իզոմորֆիզմը
և երկրորդ ու երրորդ օդակների միջև g իզոմորֆիզմը, ապա $f \circ g$ արտադրատվե-
րումը կլինի իզոմորֆիզմ առաջին և երրորդ օդակների միջև: Այսինքն՝ օդակների
իզոմորֆ լինելու ստեղծարարն նաև փոխանցական է: $\square$



Գծազիր 21

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 11.15. Վերականգնեք պնդման ու, բ, գ կետերի մանրամասն
ստացույցամենքը:

Ուսանելի է օդակների իզոմորֆիզմի հետևյալ օրինակը:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 11.16. Եթե C և D բազմությունների միջև գոյություն ունի վե-
րադրումը, ապա $(B(C), +, \cap)$ և $(B(D), +, \cap)$ օդակները յուրա իզոմորֆ են: Ա-
ստացույցեք:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 11.17. Աստացույցեք, որ $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ծղակը իզոմորֆ չէ $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
օդակին:

Նկատենք, որ օղակների իզոմորֆիզմը իզոմորֆիզմ է նաև այդ օղակների գումարային խմբերի միջև:

Հավասարեցնելով, ստեղծենք, միշտ չէ, որ ճշմարիտ է:

Օրինակ,

$$f(x) = 2x, x \in \mathbb{Z}$$

արտադրատեսակներում սկզբնապարհներն $(\mathbb{Z}, +)$ և $(2\mathbb{Z}, +)$ խմբերի իզոմորֆիզմ է, բայց $(\mathbb{Z}, \cdot)$ և $(2\mathbb{Z}, \cdot)$ օղակների իզոմորֆիզմ չէ: Իսկապես, եթե f -ը նշված օղակների միջև իզոմորֆիզմ լիներ, ապա կունենայինք

$$f(x) = 2x, f(y) = 2y, f(xy) = 2xy,$$

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y), 2x \cdot 2y = 2xy :$$

Օղակների իզոմորֆիզմների պատրվման ընթացքում օգտակար է հետևյալ ընդհանուր հասկացությունների խնդրությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 11.18. Եթե $f : R_1 \rightarrow R_2$ արտադրատեսակներում իզոմորֆիզմ է $(R_1, +, \cdot)$ և $(R_2, +, \cdot)$ օղակների միջև, ապա

ա. $f(0) = 0$,

բ. $f(-x) = -f(x)$,

գ. $f(x - y) = f(x) - f(y)$:

Ապացույց. ա. R_1 -ի կամայական x տարրի համար սենք

$$f(x) + f(0) = f(x + 0) = f(x) :$$

Հետևապես՝

$$f(0) = 0 :$$

բ.

$$f(-x) + f(x) = f(-x + x) = f(0) = 0 :$$

Ուրեմն՝

$$f(-x) = -f(x) :$$

$$\text{գ. } f(x - y) = f(x + (-y)) = f(x) + f(-y) = f(x) + (-f(y)) = f(x) - f(y): \quad \square$$

11.4. Ենթաօղակ: Ենթաօղակի հասկացությունը օղակներում խաղում է այն դերը, ինչ խումբում է ենթախմբի հասկացությունը խմբերի մեջ:

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 11.19. A բազմությունը կոչվում է $(R, +, \cdot)$ օղակի **ենթաօղակ**, եթե այն R -ի ենթաբազմություն է և $(A, +, \cdot)$ եղյակը նույնպես օղակ է:

Կամայական $(R, +, \cdot)$ օղակի համար ենթաօղակներ են R -ը և $\{0\}$ ենթաբազմությունը՝ օղակի **զրոյական ենթաօղակ**:

ՊՆԴՈՒՄ 11.20. R բազմություն A ոչ դասարկ ենթաբազմությունը $(R, +, \cdot)$ օղակի ենթաօղակ է այն և միայն այն դեպքում, երբ A բազմություն կամայական չափ ունի:

ա. $x - y \in A$.

բ. $x \cdot y \in A$:

Էությունը. Եթե A -ն արվում օղակի ենթաօղակ է, ապա ակնհայտորեն բավարարում է բ պայմանին: Այնուհետև, իր x և y տարրերի հետ միասին A -ն նախ կարծրանալի $-y$ տարրը, ապա՝ իր x և $-y$ տարրերի $x + (-y)$ գումարը, որը հավասար է $x - y$ -ին:

Հավաքակեր, ենթադրենք R բազմության A ոչ դասարկ ենթաբազմությունը բավարարում է ա, բ պայմաններին: Այդ դեպքում բ պայմանից հետևում է, որ $-p$ A -ի վրա արված երկաեղ համարադասական գործողություն է: A -ի վրա արված երկաեղ համարադասական գործողություն է նաև $+$ -ը, հետևյալ պատճառով: Վերցնենք A -ի x տարրը: Այդ դեպքում $x - x$ տարրը մի կողմից հավասար է 0 -ի, իսկ մյուս կողմից այն պատկանում է A -ին: Հետևապես՝ $0 \in A$: ա պայմանից հետևում է նաև, որ $0 - x \in A$: Այսինքն՝ $-x \in A$: A -ին կարատևորնի նաև նրա y և $-x$ տարրերի տարրերությունը՝ $y - (-x) \in A$: Իսկ սա էլ նշանակում է, որ $x + y \in A$: Այսպիսով՝ A -ն իր կամայական երկու տարրերի հետ միասին պարունակում է նաև նրանց գումարը: Մնում է ստուգել գուգորդական և տեղափոխական հատկությունների իրավացիությունը A -ի բոլոր տարրերի համար: Մտկայն այդ հատկությունները տեղի ունեն R -ի բոլոր տարրերի համար: Հետևապես՝ դրանք տեղի կունենան նաև A -ի բոլոր տարրերի համար: Այսինքն՝ $(A, +)$ -ը արելյան խումբ է:

Բաշխական՝

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$$

հատկությունների իրավացիությունը այն դեպքում, երբ x, y, z տարրերը վերցվում են A -ից, հետևում է այն բանից, որ դրանք իրավացի են այն դեպքում, երբ x, y, z տարրերը վերցվում են R -ից:

Այսինքն՝ A -ն օղակ է արվում գործողությունների նկատմամբ: $\square$

Այժմ անցնենք օրինակների դասարկմանը:

ա. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ օղակներից յուրաքանչյուրը իր հաջորդի ենթաօղակն է:

բ. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ օղակի բոլոր ենթաօղակները $n\mathbb{Z}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ բազմություններն են:

գ. Կամայական p սուրբ թվի համար

$$\{a + b\sqrt{p} | a, b \in \mathbb{Q}\}$$

բազմությունը $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ օղակի ենթաօղակ է:

ՊՆԴՈՒՄ 11.21. Ենթաօղակ չունի տոնջությունը կամայական օղակի բոլոր ենթաօղակների բազմություն վրա տրված մասնակի կարգի տոնջությամբ է:

Ապացույց. Աստուգուցումը կատարեն ինքնուրույն: $\square$

Դիստրիբյուցիոն և ասոցիատիվ օրենքները իրենցում պահպանում են:

ՊՆԴՈՒՄ 11.22. Օղակների իզոմորֆիզմի ժամանակ՝

ա. ենթաօղակի ստատիկոն ենթաօղակ է,

բ. ենթաօղակի լիով մոխտատիկոն ենթաօղակ է:

Ապացույց. Դիցուք՝ $f: R_1 \rightarrow R_2$ արտատիպակերմը իզոմորֆիզմ է $(R_1, +, \cdot)$ և $(R_2, +, \cdot)$ օղակների միջև:

ա. Ցույց տանք, որ եթե A -ն առաջին օղակի ենթաօղակն է, ապա $f(A)$ -ն կլինի երկրորդ օղակի ենթաօղակը:

Ենթադրենք $f(x)$ -ը և $f(y)$ -ը $f(A)$ -ի կամայական ատրրեր են: Այդ դեպքում՝ քանի որ

$$f(x) \cdot f(y) = f(x \cdot y), x \cdot y \in A,$$

ապա $f(x \cdot y) \in f(A)$ և, ուրեմն, $f(x) \cdot f(y) \in f(A)$: Քանի որ

$$f(x) - f(y) = f(x - y), x - y \in A,$$

ապա $f(x - y) \in f(A)$ և, ուրեմն, $f(x) - f(y) \in f(A)$:

բ. Ցույց տանք, որ եթե B -ն երկրորդ օղակի ենթաօղակ է, ապա

$$C = \{x \in R_1 | f(x) \in B\}$$

բազմությունը առաջին օղակի ենթաօղակ է: Իսկապես, դիցուք՝ $x, y \in C$: Այդ դեպքում՝ $f(x), f(y) \in B$: Բայց

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \in B:$$

Հետևապես՝ $x \cdot y \in C$:

Այնուհետև, քանի որ

$$f(x - y) = f(x) - f(y) \in B,$$

ապա $x - y \in C$:

Ուրեմն՝ իսկապես C -ն առաջին օղակի ենթաօղակ է: □

11.5. Օղակների հասկոթյունները: Դիստրիբյուցիոն և ասոցիատիվ օրենքները պահպանող $(R, +, \cdot)$ օղակը: Նրանում բազմատիպակերմ գործողությունը արտատիպակ է միայն բաշխական լինել գումարման գործողության նկատմամբ: Առանձին օղակներում, սակայն, այդ գործողությունը կարող է օժտված լինել լրացուցիչ հասկոթյուններով. լինել առնչափոխական, գուգարական, ունենալ չեզոք ատրր և այլն: Նման դեպքերում հաշվում է, որ համապատասխան այդ հասկոթյուններով օժտված է օղակը ինքը: Օղակների շատ կարևոր բնատվիք են կազմում գուգորդական օղակները:

ՄԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 11.23. Օղակը կոչվում է *գուգորդական*, եթե նրանում բազմատիպակերմ գործողությունը գուգորդական է:

Չուգորդական են բոլոր թվային օղակները:

$(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ օղակը նույնպես գուգորդական է:

Ջուզպերական են քազմանդամների օղակը, կամայական աբելյան խմբի գրույական օղակը,

$$\{x + y\sqrt{2} | x, y \in \mathbb{Z}\}, \{x + y\sqrt{2} | x, y \in \mathbb{Q}\}$$

օղակներից յուրաքանչյուրը, ինչպես նաև $(B(A), +, \cap)$ օղակը:

ՊՆՆՈՒՄ 11.24. $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \circ)$ օղակը գուգարական օղակ է:

Ապացույց. Աբսոլուտումը հետևում է նրանից, որ սրատասարակերումների բազմապատկման $\circ$ գործողությունը գուգարական է: $\square$

ՊՆՆՈՒՄ 11.25. $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ օղակը գուգարական օղակ է:

Ապացույց. Աբսոլուտումը հետևում է $\cdot$ գործողության գուգարական հատկությանից: $\square$

Ջուզպերական չէ $(\mathbb{R}_3, +, \bullet)$ օղակը, որտեղ $\bullet$ -ը վեկտորական սրտաղբյայի գործողությունն է:

Օղակների կուրեոր ընտանիք են կազմում նաև անդափոխական օղակները:

ՄԱՀՄԱՐՈՒՄ 11.26. *Տեղափոխական են կազմում այն օղակները, որոնցում բազմապատկման գործողությունը անդափոխական է:*

Տեղափոխական են՝ բոլոր քվային օղակները, $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ օղակը, բազմանդամների օղակը, կամայական աբելյան խմբի գրույական օղակը, $(B(A), +, \cap)$ օղակը, $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ օղակը:

Տեղափոխական չեն $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \circ)$ և $(\mathbb{R}_3, +, \bullet)$ օղակները:

Հույորդ հատկությունը, որով կաբող են օժտված լինել օղակները, $\cdot$ գործողության միավոր ունենալու հատկությունն է:

ՄԱՀՄԱՐՈՒՄ 11.27. Օղակը կազմում է *միավորով*, եթե միավորով է նրա քազմապատկման գործողությունը:

Վերևում քվարկված բոլոր օղակները միավորով են, բացառությամբ $(\mathbb{R}_3, +, \bullet)$ և աբելյան խմբի գրույական օղակների: Միավորով չէ նաև $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ օղակը:

ՄԱՀՄԱՐՈՒՄ 11.28. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ օղակի գրույից ատրերն a ատրերը կազմում է *Ռ-ի բաժանորար*, եթե գույություն ունի նայնպես գրույից ատրերն այնպիսի b ատրը, որի համար $a \cdot b = 0$:

Այս հատկությունը տնտալիւր է, որովհետև քվային օղակները գրույի բաժանորարներն չունեն: Ջրույի բաժանորարներն ունեն մեր դիտարկված հետևյալ օղակները:

ա. $(B(A), +, \cap)$ օղակը, երբ A բազմությունն ունի մեկից ավելի ատրը, ունի գրույի բաժանորար: Իսկապես, եթե այդ դեպքում վերցնենք A -ի իրարից ատրերն a և b ատրերը, ապա

$$\{a\} \neq \emptyset, \{b\} \neq \emptyset, \{a\} \cap \{b\} = \emptyset:$$

Հիշենք, որ այս օղակի գրուն $\emptyset$ բազմությունն է:

բ. $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ և $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \circ)$ օղակները ունեն գրույի բաժանորարներ: Եթե վերցնենք, օրինակ, f սրատասարակերումը, որը $\mid$ կետում ընդունում է $\mid$ արժեք, զնուցած

կետերում 0 ստեղծ, և g սրտասլակերումը, որը $\neq 1$ կետում ընդունում է 1 ստեղծը, իսկ մնացած կետերում 0 ստեղծը, սալս $f \neq 0, g \neq 0$, բայց

$$f \cdot g = 0, f \circ g = 0 :$$

Հիշենք, որ այս օղակներում գրան θ սրտասլակերումն է $\theta(x) = 0, x \in \mathbb{R}$:

գ. $(\mathbb{R}_3, +, \bullet)$ օղակը ունի գրայի բաժանարարներ:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 11.29. $(\mathbb{R}_3, +, \bullet)$ օղակի գրայի բաժանարարները:

ՊՆԴՈՒՄ 11.30. $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ օղակը այն և միայն այն դեպքում չունի 0 -ի բաժանարար, եթե n -ը սրտազ թիվ է:

Լարացայց. Եթե n -ը բաղադրյալ է $n = mk$, որտեղ m, k բնական թվերը սուրբեր են 1 -ից և $m, n \in \mathbb{Z}_n$, սալս $m \cdot_n k = 0$: Հետևապես՝ m -ը և k -ն 0 -ի բաժանարարներ են:

Հավաստվեք, դիցուք՝ n -ը սրտազ թիվ է, և միաժամանակ սրված օղակն ունի n գրայի բաժանարար:

$$m \cdot_n k = 0, k \neq 0, m, k \in \mathbb{Z}_n :$$

Այդ դեպքում $mk = nq, q \in \mathbb{Z}$: Սա նշանակում է, որ mk սրտադրյալը ուսանց մնացորդի բաժանվում է n սրտազ թվի վրա: Հետևաբար՝ այդ n սրտազ թվի վրա սլեսար է բաժանվի m, k թվերից մեկը, ինչը հնարավոր չէ, քանի որ երկուսն էլ n -ից վաղոր բնական թվեր են: $\square$

Թվային օղակներում միշտ աեղի ունի կրճատման հասկարչումը:

ՄԱՀԱՆՈՒՄ 11.31. Օղակում աեղի ունի կրճատման հասկարչումը, եթե նրա կոմույտկան a, b, c սարբերի համար

$$ac = bc, c \neq 0 \Rightarrow a = b \text{ և } ca = cb, c \neq 0 \Rightarrow a = b:$$

Ոչ թվային օղակներում միշտ չէ, որ այս հասկարչումը սրտալանված է: Հետաքրքիր է կրճատման հասկարչում հետևյալ բնարագրումը:

ՊՆԴՈՒՄ 11.32. Օղակը գրայի բաժանարարներ չունի այն և միայն այն դեպքում, եթե նրանում աեղի ունի կրճատման հասկարչումը:

Լարացայց. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ օղակը գրայի բաժանարարներ չունի և

$$ac = bc, c \neq 0 :$$

Այդ դեպքում

$$(a - b)c = 0 :$$

Եվ քանի որ օղակը գրայի բաժանարարներ չունի, սալս $a = b$:

Նաև կերայ գայց կաանք, որ եթե $ca = cb, c \neq 0$, սալս $a = b$:

Հավաստվեք, դիցուք՝ օղակում կրճատման հասկարչումը աեղի ունի և

$$ab = 0, a \neq 0 :$$

Այդ դեպքում

$$ab = a \cdot 0, a \neq 0 :$$

Այստեղից, համաձայն կրճատման հասկությամբ, կստանանք $b = 0$:

□

11.6. Ամբողջության ախրայթներ, մարմիններ, դաշտեր: Այժմ դիտարկենք օղակների կարեորագույն հասկությունները: Օղակների կարևոր դաս են կազմում ամբողջության ախրայթները:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 11.33. Տեղափոխելի և գույքայելի օղակը, որը չունի զրոյի բաժանարարներ, կոչվում է *ամբողջություն ախրայթ*:

Մեր դիտարկած օրինակներից ամբողջություն ախրայթներ են թվային օղակները և $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ օղակը, եթե n -ը սլարգ թիվ է:

Եթե օղակը զրոյի բաժանարարներ չունի, ապա նրա ենթօղակը նույնպես չունի զրոյի բաժանարարներ: Հետևապես՝ ամբողջություն ախրայթի ենթօղակը նույնպես ամբողջություն ախրայթ է:

ՊԴՐՈՒՄ 11.34. *Ամբողջություն ախրայթին իզամորֆ օղակը նույնպես ամբողջություն ախրայթ է:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարելք ինքնուրույն: □

Օղակների հաջորդ կարևոր դասը կազմում են մարմինները:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 11.35. $(R, +, \cdot)$ օղակը կոչվում է *մարմին*, եթե $(R^*, \cdot)$ գույքը խումբ է, որտեղ $R^* = R \setminus \{0\}$:

Մարմին են $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ օղակները: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ օղակը մարմին չէ: $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ օղակը մարմին է այն և միայն այն դեպքում, եթե n -ը սլարգ թիվ է:

Մարմնի ենթօղակը պարտավոր չէ ներկայացնում մարմին լինել:

ՎՃՃ

ՊԴՐՈՒՄ 11.36. *Մարմնին իզամորֆ օղակը մարմին է:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարելք ինքնուրույն: □

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 11.37. Տեղափոխելի մարմինը կոչվում է *դաշտ*:

Այսպիսով՝ $(R, +, \cdot)$ եղակը դաշտ է, նշանակում է.

ա. $(R, +)$ գույքը աբելյան խումբ է,

բ. $(R^*, \cdot)$ գույքը աբելյան խումբ է,

գ. $\cdot$ -ը բաշխական է $+$ -ի նկատմամբ:

Դաշտ են $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ և $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ օղակները: Դրանք համոպատասխանաբար կոչվում են ուղղանկյալ և իրական թվերի դաշտեր:

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ օղակը դաշտ չէ:

$(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ օղակը դաշտ է այն և միայն այն դեպքում, եթե n -ը սլարգ թիվ է:

Յուրաքանչյուր դաշտ ամբողջություն ախրայթ է: Ամբողջ թվերի օղակի օրինակը ցույց է տալիս, որ հավանաբար ճիշտ չէ: Մոկայան վերջավոր ամբողջության ախրայթները, համեմատելիս, դաշտեր են:

ՊՆԴՈՒՄ 11.38. *Ոչ գրայտիվ վերջավոր ամբողջություն տիրույթը դաշտ է:*

Ապացույց. Մենք կառուցումսկանք միայն այն դեպքի տպացուցումով, երբ ամբողջություն տիրույթն ունի 1 միավորը: 'Էիցուր' ունենք $(R, +, \cdot)$ վերջավոր ամբողջություն տիրույթը, $a \in R, a \neq 0$ և

$$R = \{a_1, \dots, a_n\}:$$

Այդ դեպքում

$$a \cdot a_1, \dots, a \cdot a_n$$

ստորերի իրարից ստորեր են և, ուրեմն,

$$R = \{a \cdot a_1, \dots, a \cdot a_n\}:$$

Հետևաբար՝ $a \cdot a_1, \dots, a \cdot a_n$ ստորերից մեկը, օրինակ, $a \cdot a_i$ -ն պետք է լինի հավասար 1-ի՝ $a \cdot a_i = 1$: Իսկ դա նշանակում է, որ a -ն հակադարձելի է: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 11.39. *Ապացուցեք, որ վերջավոր ամբողջություն տիրույթը ունի միավոր:*

Յուրաքանչյուր դաշտ նաև մարմին է: Դոյություն ունեն մարմիններ, որանք դաշտ չեն: Սակայն վերջավոր մարմինները նույնպես, ինչպես և վերջավոր ամբողջություն տիրույթները, դաշտեր են: Այս հրաշալի տրդյունքը հայտնագործել է Վեդերլեյնը:

ՊՆԴՈՒՄ 11.40. *(Վեդերլեյնի թեորեմը): Վերջավոր մարմինը դաշտ է:*

Ապացույց. Ապացուցումը այստեղ չենք կարող իրագործել: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 11.41. *Դաշտին իզոմորֆ օղակը դաշտ է:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարել ինքնուրույն: $\square$

Դաշտի ենթաօղակը կարող է դաշտ չլինել: Օրինակ, $\mathbb{Z}$ -ը $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ դաշտի ենթաօղակ է, բայց դաշտ չէ:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 11.42. *Դաշտի այն ենթաօղակը, որը նաև դաշտ է, կոչվում է դաշտի ենթադաշտ:*

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 11.43. Դաշտ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ դաշտի ենթադաշտ, որը ստորեր է $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ -ից:

ՊՆԴՈՒՄ 11.44. *R բազմություն A ոչ դատարկ ենթադաշտությունը այն և միայն այն դեպքում է $(R, +, \cdot)$ դաշտի ենթադաշտ, երբ A -ի կամայական x և y ստորերի համար.*

- ա. $x - y \in A$,
- բ. $x \cdot y \in A$,
- գ. $x^{-1} \in A$, երբ $x \neq 0$:

Ապացույց. Եթե A -ն $(R, +, \cdot)$ դաշտի ենթադաշտ է, ապա անհնայադրեն բու-
վաբազում է ա, բ, գ սրայմաններին:

Հովտաակր, դիցուք՝ A -ն R -ի ոչ դտաակր ենթաբազմաբազմ է և բավարարում
է ա, բ, գ սրայմաններին: Այդ դեպքում, համաձայն 11.20 սնդման, A -ն $(R, +, \cdot)$
օղակի ենթաօղակ է: Անում է ցույց առա, որ A -ի յուրաբանչուր աչ գրաբանկան տարր
ունի հակադարձ: Իսկ դա էլ հետևում է սնդման գ սրայմանից: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 11.45. Ապացուցեր, ալ $\{a + b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Z}\}$ և $\{a + b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Q}\}$
բազմաբազմներից առաջինը իրական րվերի դաշտի ենթադաշտ չէ, իսկ երկրոր-
դը ենթադաշտ է:

ՊՆԴՈՒՄ 11.46. *Դաշտի ենթադաշտերի հոտումը ենթադաշտ է:*

Ապացույց. Դիցուք՝ A -ն և B -ն $(R, +, \cdot)$ դաշտի ենթադաշտեր են: Ստուգենք
11.44 սնդման սրայմանները:

ա. Դիցուք՝ $x, y \in A \cap B$: Այդ դեպքում $x, y \in A$ և $x, y \in B$: Քունի որ A -ն և
 B -ն ենթադաշտեր են, ապա, համաձայն 11.44 սնդման, $x - y \in A$ և $x - y \in B$:
Հետևապես՝ $x - y \in A \cap B$:

բ-գ. Ապացուցումը կտաաերեք ինքնուրույն: $\square$

ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԹՎԵՐ

12. ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԹՎԵՐԻ ԴԱՇՏԸ

12.1. *Կոմպլեքս րվեր:* Գործողություններ կոմպլեքս րվերի հետ: Կոմպլեքս րվերի ներմուծման անհրաժեշտությունը, առաջին հերթին, կապված է հավասարաձայնների, մասնավորապես՝

$$x^2 + 1 = 0$$

հավասարման լուծման գոյություն խնդրի հետ: Իրական րվերի դաշտում ճշված և բազմաթիվ այլ հավասարումներ ունենալու համար: Իսկ դրանց լուծման անհրաժեշտությունը բերողվում է ոչ միայն հարցի համարաձայնվում կողմի հետաքրքրությունը, այլև կիրառական մեծ ճշանակությունը:

Այս առաջին խնդիրն է գտնել իրական րվերի դաշտը ստորադասակարգ այնպիսի մի դաշտ, որի մեջ ճշված հավասարումը ունենա լուծում:

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 12.1. *Կոմպլեքս րիվ* է կոչվում (a, b) կարգավորված զույգը, որտեղ a -ն և b -ն կոմպլեքս իրական րվեր են:

(a, b) և (c, d) կոմպլեքս րվերը կոչվում են *հավասար*, եթե $a = c$ և $b = d$:

Օրինակ, $(1, 2) = (1, 2)$, $(1, 2) \neq (2, 1)$:

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 12.2. (a, b) և (c, d) կոմպլեքս րվերի *գումարը* որոշվում է հետևյալ հավասարությամբ.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) :$$

Օրինակ, $(2, 1) + (3, 5) = (5, 6)$: $(1, 2) + (-1, 0) = (0, 2)$:

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 12.3. (a, b) և (c, d) կոմպլեքս րվերի *արտադրյալը* որոշվում է հետևյալ հավասարությամբ.

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) :$$

Օրինակ, $(2, 1) \cdot (3, 5) = (1, 13)$:

Կոմպլեքս րվերի հետ կապված այս գործողությունները ստանձնաթիղթից առաջ նախ դրանք օգտագործենք կոմպլեքս րվերի գրառումը ստորագրելու համար: Այսպիսով, նման ստորագրումը հնարավորություն կտա կոմպլեքս րվերի նկատմամբ կատարվող այս գործողությունները համապատասխանեցնելու իրական րվերի նկատմամբ կատարվող գործողությունների հետ:

Կոմպլեքս կոմպակտ a իրական թվի համար կոստորենը հետևյալ նշանակումը, որը թույլ կաու նայնուցներու ուղի իրական թիվը մի կոմպլեքս թվի հետ.

$$a := (a, 0) :$$

Նախ աներուեշու է կոստորեկ որոշ նկատառումներ:

ու. Եթե a և b իրական թվերի համար $a := b$, ապա $(a, 0) = (b, 0)$:

Աու նշանակում է, որ եթե իրական թվերը իրար հավասար են, ապա նրանց հետ նայնուցվում են նայնուցեա իրար հավասար կոմպլեքս թվեր:

բ. a և b իրական թվերի $a + b$ գումարը նայնուցվում է $(a + b, 0)$ գույզի հետ, ոյը հավասար է a և b թվերի հետ նայնուցվում գույզերի գումարին՝

$$(a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) :$$

գ. a և b իրական թվերի $a \cdot b$ արաուրյալը նայնուցվում է $(a \cdot b, 0)$ գույզի հետ, որը հավասար է a և b թվերի հետ նայնուցվում գույզերի արաուրյալին՝

$$(a \cdot b, 0) = (a, 0) \cdot (b, 0) :$$

Էյս նկատառումները ցույց են ապա, որ $a := (a, 0)$ նայնուցումը հավասարյուն մեջ չի մանում ինչպես կարգավորվում գույզի, այնպես էլ 12.2 և 12.3 սահմանումների հետ:

Կոստորենը ևս մեկ նշանակում: Ընդունենք՝

$$i := (0, 1) :$$

ՊՆԴՈՒՄ 12.4. Կոմպլեքս կոմպակտ (a, b) կոմպլեքս թվի համար

$$(a, b) = a + bi :$$

Ընդցույց. Իսկապես

$$a + bi = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = (a, 0) + (0, b) = (a, b) :$$

□

ՊՆԴՈՒՄ 12.5.

$$i^2 = -1 :$$

Ընդցույց.

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1 :$$

□

Ընդգրկելով ապաումը՝ մենք աեսնում ենք, որ կոմպլեքս թիվը $a + bi$ տեսքի արաուրյաուրյուն է, որտեղ a -ն և b -ն իրական թվեր են, իսկ i -ն՝ թիվ, որի ըաուկոսին հավասար է -1 -ին՝ $i^2 = -1$: a -ն կոչվում է $a + bi$ կոմպլեքս թվի *իրական մաս*, b -ն՝ *կեղծ մաս*, b -ն՝ կեղծ մասի *գործակից*, i -ն՝ *կեղծ միավոր*: Երկու կոմպլեքս թվեր հավասար են այն և միայն այն դեպքում, եթե նրանց իրական մասերն իրար են հավասար, կեղծ մասերի գործակիցները՝ իրար.

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c, b = d :$$

Կոմպլեքս թիվը իրական է այն և միայն այն դեպքում, եթե նրա կեղծ մասի գործակիցը զրո է:

12.2. Կոմպլեքս թվերի դաշտը: Կոմպլեքս թվերի բազմությունը նշանակենք $\mathbb{C}$ ստորով.

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} :$$

Այլ կերպ՝

$$\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\} :$$

Կոմպլեքս թվերի գումարման գործողությունը կուրելի է վերածնակերպել հետևյալ կերպ.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i :$$

Այսինքն՝ կոմպլեքս թվերը գումարելու համար պետք է նրանց իրական մասերը գումարել իրար, կեղծ մասերի գործակիցները՝ իրար:

$$\text{Օրինակ, } (2 + 3i) + (-1 + 7i) = 1 + 10i:$$

ՊՆԴՈՒՄ 12.6. $(\mathbb{C}, +)$ զույգը աբելյան խումբ է:

Ապացույց. Ձագորդական և անդափառական հատկությունները ստացվում են անմիջականորեն: Ձրույի դերը խաղում է 0 թիվը: $a + bi$ թվի հակադիրը կլինի $(-a) + (-b)i$ կոմպլեքս թիվը: $\square$

Կոմպլեքս թվերի սրտադրյալը ստեղծանված է հետևյալ կերպ.

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i :$$

Օրինակ,

$$(1 + 2i) \cdot (1 - 3i) = (1 + 6) + (-3 + 2)i = 7 - i :$$

ՊՆԴՈՒՄ 12.7. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ եռյակը դաշտ է:

Ապացույց. ա. $(\mathbb{C}, +)$ զույգը աբելյան խումբ է:

բ. $\cdot$ -ը բաշխական է $+$ -ի նկատմամբ.

$$\begin{aligned} ((a + bi) + (c + di)) \cdot (x + yi) &= ((a + c) + (b + d)i) \cdot (x + yi) = \\ &= ((a + c)x - (b + d)y) + ((a + c)y + (b + d)x)i = \\ &= (ax + cx - by - dy) + (ay + bx + cy + dx)i : \\ (a + bi) \cdot (x + yi) + (c + di) \cdot (x + yi) &= \\ &= (ax - by) + (ay + bx)i + (cx - dy) + (cy + dx)i = \\ &= (ax - by + cx - dy) + (ay + bx + cy + dx)i : \end{aligned}$$

Այս երկու հավասարություններից կստանանք

$$((a + bi) + (c + di)) \cdot (x + yi) = (a + bi) \cdot (x + yi) + (c + di) \cdot (x + yi)$$

հավասարությունը:

գ. $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ զույգը աբելյան խումբ է:

Անմիջական ստացումով ցույց է արվում, որ

$$((a + bi) \cdot (c + di)) \cdot (x + yi) = (a + bi) \cdot ((c + di) \cdot (x + yi)),$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (c + di) \cdot (a + bi)$$

բաճառները հավասարաբյուրեն են:

Այսպիսով, ցերը խաղում է $1 + 0i$ կոմպլեքս թիվը, որը նշանակվում է նաև 1 -ով.

$$(a + bi) \cdot (1 + 0i) = (a \cdot 1 - b \cdot 0) + (a \cdot 0 + b \cdot 1)i = a + bi :$$

Ջրայից ստորքեր $a + bi$ թվի համար $a \neq 0$ կամ $b \neq 0$: Այսինքն՝

$$a^2 + b^2 \neq 0,$$

և այդ թվի հակադարձը կլինի

$$\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

թիվը, քանի որ

$$(a + bi) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \right) = 1 :$$

Այսպիսով՝ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ եռյակը բավարարում է դաշտի բոլոր սկզբնականներին: $\square$

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 12.8. *ու. $(\mathbb{C}, +)$ խումբը կազմում է կոմպլեքս թվերի գումարային խումբ:*

բ. $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ խումբը կազմում է կոմպլեքս թվերի արտադրյալային խումբ:

գ. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ դաշտը կազմում է կոմպլեքս թվերի դաշտ:

12.3. *Կոմպլեքս թվի համալուծը:* Կոմպլեքս թվերի դաշտը ունի մի շարք հրաշալի հատկություններ, որոնց հետ մենք կծանոթանանք ուստիճանաբար: Այստեղ քննարկենք դրանցից մեկը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 12.9. $a + bi$ կոմպլեքս թվի *համալուծ* է կազմում $a - bi$ կոմպլեքս թիվը:

z կոմպլեքս թվի համալուծը նշանակվում է $\bar{z}$ -ով:

Օրինակ,

$$\overline{1 + 3i} = 1 - 3i :$$

ՊՆԴՈՒՄ 12.10. *Կոմպլեքս թվի համալուծի համալուծը հավասար է այդ թվին՝*

$$\overline{\bar{z}} = z :$$

Ապացույց. Ապացուցումը ուկնեայտ է: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 12.11. *Կոմպլեքս թիվը իրական է այն և միայն այն դեպքում, եթե այն համընկնում է իր համալուծի հետ:*

Ապացույց. Ապացուցումը ուկնեայտ է: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 12.12. *Կոմպլեքս թվի z և z' կոմպլեքս թվերի համար.*

$$\text{ու. } \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}',$$

$$\text{բ. } \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}':$$

Լևկոստյոյ. Ե. Լնմիջապես հետևում է առիմամոմից:

բ. Դիցուք՝ $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$: Այդ պեսքում՝

$$\overline{z \cdot z'} = \overline{(a + bi)(a' + b'i)} = \overline{(aa' - bb') + (ab' + ba')i} = (aa' - bb') - (ab' + ba')i,$$

$$\overline{z} \cdot \overline{z'} = (a - bi) \cdot (a' - b'i) = (aa' - bb') - (ab' + ba')i :$$

Հետևապես՝

$$\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'} :$$

□

ՄԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 12.13. Կոմպլեքսան օղակի և ույդ նույն օղակի միջև իզոմորֆիզմը կաշվում է ավստ օղակի *ափամուրֆիզմ*:

Նկարագրենք կոմպլեքս թվերի դաշտի հետադրերի ու կարեոր մի ավստմորֆիզմ:

ՊՆԻՈՒՄ 12.14.

$$f : z \rightarrow \bar{z}, z \in \mathbb{C}$$

տրաուտուտկերումը կոմպլեքս րվերի դաշտի ափամուրֆիզմ է, որը առնվածվածի է թողնում յուրաքանչյուր իրական րիվ:

Լևկոստյոյ. Պարզ է, որ f -ը վերադրում է: Դեմոստրման և բազմապատկման հետ f -ի կապը սալսցուցված է նախորդ պնդման մեջ: Վերջապես՝

$$f(a) = f(a + 0i) = a - 0i = a, a \in \mathbb{R} :$$

□

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 12.15. Ասլսցուցեք, որ կոմպլեքսան z_1 և z_2 կոմպլեքս թվերի համար

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) :$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 12.16. f, g, h տրաապատկերումներից ո՞րն է.

ա. $(\mathbb{C}, +)$ և $(\mathbb{C}, +)$ խմբերի իզոմորֆիզմ,

բ. $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ և $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ խմբերի իզոմորֆիզմ,

գ. կոմպլեքս թվերի դաշտի ավստմորֆիզմ, եթե.

ա. $f(z) = 1/z, z \in \mathbb{C}^*$,

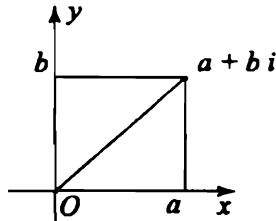
բ. $g(z) = |z|, z \in \mathbb{C}$,

գ. $h(z) = |iz|, z \in \mathbb{C}$:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 12.17. Ասլսցուցեք, որ տր գոյություն ունեն կոմպլեքս թվերի դաշտի միայն երկու ավստմորֆիզմներ, որոնք առնվածվածի է թողնում յուրաքանչյուր իրական րիվ:

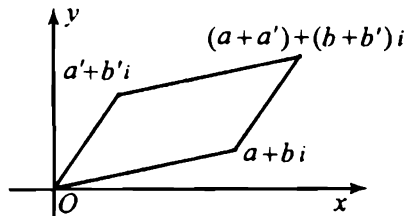
13. ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԹՎԻ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՏԵՍԸ

13.1. Կոմպլեքս հարթությունը: Վերցնենք դեկարտյան կոորդինատական համակարգը, և կամայական $a \in \mathbb{R}$ կոմպլեքս թվի ստատիկներն ճիշտ այն կետով, որի սրացիալ a է, իսկ օրդինատը՝ b (տես՝ գծ. 22):



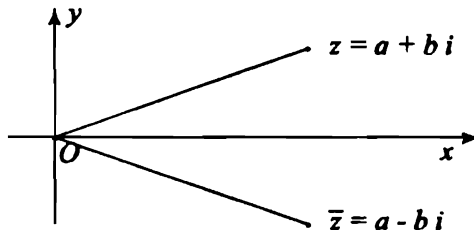
Գծազիր 22

Հատկանշի է, որ այս կետի մենք կրտսեղծենք վերադրում կոմպլեքս թվերի թագմություն և կաորդինատական հարթություն կետերի միջև: Այս կաորդինատական հարթությունը անվանվում է նուս *կոմպլեքս հարթություն*:



Գծազիր 23

Հատկանշի է, որ կոմպլեքս հարթություն մեջ սրացիաների առանցքի վրա սյուսկերվում են իրական թվերը, իսկ օրդինատների առանցքի վրա՝ bi տեսարի «կեղծ» թվերը: Ահա այս սյուսառտով կոմպլեքս հարթություն սրացիաների առանցքը անվանում ենք *իրական առանցք*, իսկ օրդինատների առանցքը՝ *կեղծ առանցք*:



Գծազիր 24

Պարզ է, որ կոորդինատական հարթություն վրա պատկերված երկու կոմպլեքս թվեր գումարելու եամար անկումեշա է նրանց արացխաները գումարել իրար, օրդինատները՝ իրար (տես՝ գծ. 23):

Համոմման ձևով՝ իրական թվը կոմպլեքս թվով բազմապատկելու համար աննրամեշա է սյդ թվի թե՛ արացխար, թե՛ օրդինատը բազմապատկել արված իրական թվով: Պարզ է, որ իրար համալած թվերը կոմպլեքս հարթություն այն կետերն են, սրոնը համալածվի են արացխաների ստանցքի նկատմամբ (տես՝ գծ. 24):

13.2. Կոմպլեքս թվի մոդուլը: Կոմպլեքս թվերի ուսումնասիրության մեջ կարևոր դեր է խաղում կոմպլեքս թվի մոդուլի հասկացությունը:

ՄԱՀՄԱՆՈՒՄ 13.1. $a + bi$ կոմպլեքս թվի *մոդուլ* է կոչվում $\sqrt{a^2 + b^2}$ թվը: z կոմպլեքս թվի մոդուլը նշանակվում է $|z|$ -ով:

Օրինակներ: $|1| = 1$, $|-1| = 1$, $|i| = 1$, $|-i| = 1$, $|3 + 4i| = 5$ և այլն:

Հատկանայի է, որ իրական թվի մոդուլը նրա բացարձակ արժեքն է: Պարզ է նաև, որ կոմպլեքս թվի մեկույր կոմպլեքս հարթություն վրա այդ թվը պատկերող կետի հեռավորությունն է կոորդինատական հարթության սկզբնակետից: Այստեղից, մասնավորապես, հետևում է, որ կոմպլեքս թվի հավասար է զրոյի այն և միայն այն դեպքում, երև նրա մոդուլը հավասար է զրոյի:

Մոդուլի հետևյալ հատկությունները հետագայում ունեն կարևոր կիրառություններ:

ՊՆԴՈՒՄ 13.2. Կոմպլեքս z կոմպլեքս թվի համար.

$$\text{ու. } |\overline{z}| = |z|,$$

$$\text{բ. } |z|^2 = z \cdot \overline{z}:$$

Ապացույց. Դիցուք՝ $z = a + bi$: Այդ դեպքում $\overline{z} = a - bi$: Հետևապես՝

$$\text{ու. } |\overline{z}|^2 = a^2 + (-b)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2:$$

$$\text{բ. } \overline{z} \cdot z = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2: \quad \square$$

Հստակումց ումեղ է մոդուլի կասը կոմպլեքս թվերի բազմապատկման գործուդության հետ:

ՊՆԴՈՒՄ 13.3. Կոմպլեքս թվերի արտադրյալի մոդուլը հավասար է արտադրիչների մոդուլների արտադրյալին: Այսինքն՝ կոմպլեքս z և t կոմպլեքս թվերի համար

$$(2) \quad |z \cdot t| = |z| \cdot |t|:$$

Ապացույց. Համոմայն նովարդ սնդման՝

$$|z \cdot t|^2 = (zt)(\overline{zt}) = (z\overline{z})(t\overline{t}) = |z|^2 \cdot |t|^2 = (|z||t|)^2:$$

Ստացված հավասարությունից, հուշվի ումեղով նաև այն, որ նրա երկու մասերում էլ թատկուրի բարձրացվող թվերը ոչ բացառական են, կստանումք (2) հավասարությունը: $\square$

Այս սնդումից ստացվում է նաև թվի մոդուլի կասը նրա հակադարձի հետ:

ՊՆԴՈՒՄ 13.4. *Ոչ զրոյական կոմպլեքս թվի հոմոկլոնուդի մադուլը հախտադր է նրա մադուլի հոմոկլոնուդին: Այսինքն՝ կոմպլեքս z ոչ զրոյական կոմպլեքս թվի հոմոլո*

$$|z^{-1}| = |z|^{-1}, z \neq 0 :$$

Ապացույց. Համաձայն 13.3 պնդման, ունենք՝

$$1 = |1| = |z \cdot z^{-1}| = |z| \cdot |z^{-1}| :$$

Հետևապես՝

$$|z^{-1}| = |z|^{-1} :$$

□

Օգտվելով մոդուլների տրանսլյուսիվի հասկացումից՝ հեշտությամբ կարող ենք ստանալ նույն նրանց բուննայի հասկացումը:

ՊՆԴՈՒՄ 13.5. *Կոմպլեքս թվերի բուննայի մադուլը հախտադր է նրանց մադուլների բուննային: Այսինքն՝ կոմպլեքս z և զրոյից տարբեր t կոմպլեքս թվերի հոմոլո*

$$\left| \frac{z}{t} \right| = \frac{|z|}{|t|} :$$

Ապացույց. Իսկության, համաձայն 13.3 պնդման, ունենք՝

$$|t| \cdot \left| \frac{z}{t} \right| = \left| \frac{z}{t} \cdot t \right| = |z| :$$

Հետևապես՝

$$\left| \frac{z}{t} \right| = \frac{|z|}{|t|} :$$

□

Հետևյալ հասկացումը ցույց է տալիս մադուլի կապը հակադիրի հետ:

ՊՆԴՈՒՄ 13.6. *Հակադիր կոմպլեքս թվերի մադուլները իրար հախտադր են: Այսինքն՝ կոմպլեքս z կոմպլեքս թվի հոմոլո*

$$|-z| = |z| :$$

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն:

□

Գումարման հետ, տրդեն, մոդուլի կապը տվելի բայլ է:

:

ՊՆԴՈՒՄ 13.7. *Կոմպլեքս z և t կոմպլեքս թվերի հոմոլո*

$$|z + t| \leq |z| + |t| :$$

Ապացույց. Նախ ցույց ստանք, որ կոմպլեքս n կոմպլեքս թվի հոմոլո

$$|n + 1| \leq |n| + 1 :$$

Իսկության, եթե $n = a + bi$, ապա

$$|n + 1|^2 = |n|^2 + 2a + 1 :$$

Բայց $a \leq |u|$: Հետևապես՝

$$|u|^2 + 2a + 1 \leq |u|^2 + 2|u| + 1 = (|u| + 1)^2 :$$

Ուրեմն՝

$$|u + 1| \leq |u| + 1 :$$

Այժմ հաշվի առնելով այս ունեավաստությունը կատանոնք

$$|z + t| = |t(z^{-1} + 1)| = |t| \cdot |z^{-1} + 1| \leq |t| \cdot (|z^{-1}| + 1) = |z| + |t| :$$

□

Համանման գործողություն հետ մոդուլի կապը ստրուկտուրալում է հետևյալ կերպ:

ՊՆԴՈՒՄ 13.8. Կոմպլեքս թվերի համար.

m. $|z - t| \leq |z| + |t|,$

p. $|z| - |t| \leq |z + t|,$

q. $|z| - |t| \leq |z - t|:$

Ապացույց. ա. Իսկապես,

$$|z - t| = |z + (-t)| \leq |z| + |-t| = |z| + |t| :$$

p. Բավական է ցույց ստալ, որ

$$|z| \leq |z + t| + |t| :$$

Իսկ այս ունեավաստությունը սնմիցապես հետևում է ու կետից:

q. Համաձայն p-ի՝

$$|z| - |t - z| \leq |z + t - z| \leq |t| :$$

Հետևապես՝

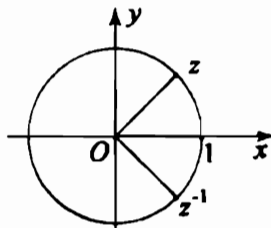
$$|z| - |t| \leq |t - z| = |z - t| :$$

□

Վերջում դիտարկենք 1 մոդուլով կոմպլեքս թվերի հետևյալ խմբային հասկությունը: Նախատես նշանակենք T -ով այդ թվերի բազմությունը: Այսինքն՝

$$T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} :$$

Պարզ է, որ T -ն պրահերվում է կոմպլեքս հարբություն միավոր շրջանագծով (տես՝ գծ. 25):



Գծազիր 25

T -ի դերը կտրեորվում է հետևյալ հասկացումը:

ՊՆԴՈՒՄ 13.9. $(T, \cdot)$ գույգը խումբ է:

Ապացույց. Յույց ստանք, որ T -ն կոմպլեքս թվերի $\mathbb{C}^*$ սրատողըյալային խմբի ենթախումբ է: Իրոք, եթե

$$|x| = |y| = 1,$$

ապա

$$|xy| = |x||y| = 1:$$

Այսինքն՝

$$x, y \in T \Rightarrow x \cdot y \in T:$$

Նույն կերպ՝

$$x \in T \Rightarrow x^{-1} \in T.$$

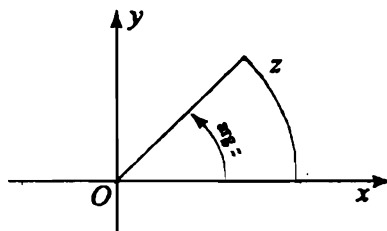
քանի որ եթե $|x| = 1$, ապա

$$|x^{-1}| = |x|^{-1} = 1^{-1} = 1:$$

□

13.3. *Կոմպլեքս թվի եռանկյունաչափական տեսքը:* Կոմպլեքս թվերի ու-տամնասիրություն մեջ մոդուլի հասկացություն հետ միասին գործածվում է նաև ար-գումենտի հասկացությամբ:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 13.10. «Կետը» գրայից ստորերև z կոմպլեքս թիվը սյուսկերված է կոմպլեքս հարթություն M կետով (տես՝ գծ. 26): Այդ z թվի *արգումենտ* է կոչվում արագյանների վրտական կլաստանցքի ե OM ճառագայթի կտգմած անկյանը: z թվի արգումենտը նշանակվում է $argz$:



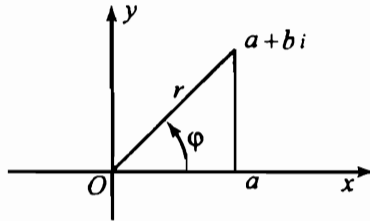
Գծագիր 26

Օրինակներ: $arg 1 = 0^\circ$, $arg i = 90^\circ$, $arg(-i) = 270^\circ$ և այլն:

Մտահմանումից հետևում է, որ կոմպլեքս թվի արգումենտը մխարմեքարեն շի ո-րոշվում: Ասենք, վերևում դիտարկված օրինակներում, մենք կարող էինք գրել նաև. $arg 1 = 360^\circ$, $arg i = -270^\circ$, $arg(-i) = -90^\circ$ և այլն: Երբեմն, արգումենտը մխարմեքարեն սրաշեղալ համար նրա մտահմանման մեջ դրվում է լրացուցիչ սյուսանջ՝

$$0 \leq argz < 2\pi \text{ կամ } -\pi < argz \leq \pi:$$

Պետք է նշել, սակայն, որ մեզնիս ստեղծագործությունները՝ ունենալով ժողովրդական տարածվածություն, նույն պարզ անհավանականություն և դժվարություն են մագնիսով կոմպլեքս փափախությունով ֆունկցիաների ուսումնասիրության մեջ:



Գծազկր 27

Կոմպլեքս թվի մոդուլի և արգումենտի հասկացությունները ենթարկվում են առկա մի մոր տեսքով գրտակ կոմպլեքս թվի: Իսկապես, դիցաք՝ $z = a + bi$: Նշանակենք

$$r = |z|, \varphi = \arg z :$$

27 գծազկրից երևում է, որ

$$a = r \cos \varphi, b = r \sin \varphi :$$

Հետևապես՝

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) :$$

ՄԱՀՄԱՐՈՒՄ 13.11. z կոմպլեքս թվի

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

տեսքը կաշվում է նրա *եռանկյունայնական տեսք*:

Այսպիսով՝ գրայից ստալեր յարարունչյուր կոմպլեքս թիվ կարող է ներկայացվել եռանկյունայնական տեսքով: Բերենք մի քանի օրինակ:

ա. $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0),$

բ. $-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi),$

գ. $i = 1(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}),$

դ. $-i = 1(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}),$

ե. $1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}),$

զ. $3 + 4i = 5(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, որտեղ φ -ն ստալին քառորդի այն անկյունն է, որի սինուսը հավասար է $4/5$ -ի:

Հուս պարզ ձևով է կատարվում եռանկյունայնական տեսքով ալքվում կոմպլեքս թվերի բազմաթաղանթ: Իսկապես, դիտարկենք մեզնի տեսքով ալքվում

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \text{ և } z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

կոմպլեքս թվերը: Կազմենք նրանց ալրաալյալը.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) = \\ = (r_1 \cdot r_2) (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) :$$

Այսպիսով՝ մենք տարացուցեցինք հետևյալ հասկությունը:

ՊԵՆԴՈՒՄ 13.12. *Եռանկյունաչափական տեսքով արված կոմպլեքս թվերը բազմապատկելիս նրանց մալուցները բազմապատկվում են, արգոմենտները՝ գումարվում: Այսինքն՝*

$$r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) :$$

Նույն կերպ, լրացուցիչ՝ ինդուկցիայի կիրառմամբ, կապացուցենք հետևյալ եռա-կությունը:

ՊԵՆԴՈՒՄ 13.13.

$$r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdots r_n (\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n) = \\ = (r_1 \cdots r_n) (\cos(\varphi_1 + \cdots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \cdots + \varphi_n)) :$$

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: □

Այստեղից՝ որպես հետևանք ստացվում է հետևյալ հասկությունը:

ՊԵՆԴՈՒՄ 13.14. *Կոմպլեքսական $z_1, z_2, \dots, z_n$ կոմպլեքս թվերի համար.*

$$\text{ու. } |z_1 \cdot z_2 \cdots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n|,$$

$$\text{բ. } \arg(z_1 \cdot z_2 \cdots z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + \cdots + \arg z_n:$$

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: □

13.13 պնդման մեջ ընդունելով բոլոր կոմպլեքս թվերը իրար հավասար՝ կատա-նանք հետևյալ՝ չափազանց կարևոր բանաձևը, որը ստացել է հատուկ աճում:

ՊԵՆԴՈՒՄ 13.15. *Կոմպլեքսական $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ կոմպլեքս n րմակում թվերի համար*

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) :$$

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: □

Վերջին հավասարությունը կոչվում է *Մուտլիի բանաձև*:

Օգտվելով Մուտլիի բանաձևից՝ հաշվենք, օրինակ, $(1 + i)^8$ -ը: Սովորական ե-ղանակով այն ստանալու համար բավականին դժվար է իրագործել:

$$(1 + i)^8 = \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right)^8 = (\sqrt{2})^8 \left(\cos \frac{8\pi}{4} + i \sin \frac{8\pi}{4} \right) = \\ = 16 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 16 :$$

Այսպիսով՝ $(1 + i)^8 = 16$:

Այժմ կատարենք եռանկյունաչափական տեսքով արված կոմպլեքս թվերի բա-ժանումը:

ՊՆԴՈՒՄ 13.16. Լեռնեկյանուստիտիան տեսքով արվում կոմպլեքս քվերը բաժանելիս նրանց մոդուլները բաժանվում են, որգամենտները՝ համկում: Այսինքն՝

$$\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

որտեղ կատարակի հայտարարը 0-ից տարբեր է:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարել ինքնուրույն: □

Վերջուպես գտնենք Լեռնեկյանաչափական տեսքով արված կոմպլեքս քվի հակադարձը:

ՊՆԴՈՒՄ 13.17. Լեռնեկյանուստիտիան տեսքով արվում կոմպլեքսն ոչ զրայական կոմպլեքս քվերի համար

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^{-1} = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) :$$

Ապացույց. Ապացուցումը կատարել ինքնուրույն: □

14. ԱՐՄԱՏՆԵՐ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԹՎԵՐԻՑ

14.1. *n-րդ ստտիճանի արմատի բանաձևը:* Մուսվրի բանաձևը ինարավորություն է տալիս ենչուստիտիան գտնելու կոմպլեքս քվի կոմպլեքսն ստտիճանի արմատի բանաձևը: Նախապես ստմը կոմպլեքս քվի *n*-րդ ստտիճանի արմատի ստիմունումը:

ՄԱՀՄԱՆՈՒՄ 14.1. *c* կոմպլեքս քվի *n*-րդ ստտիճանի արմատ է կոչվում

$$z^n = c$$

հավասարմունցանկացում կոմպլեքս լուծումը:

Օրինակ, 1 քվի քուտակուսի արմատներն են 1 և -1 քվերը, -1 քվի քուտակուսի արմատներն են i և $-i$ քվերը և այլն:

Արմատ հտնելու գաղձադրությունը իրական քվերի դաշտում լավ չի իրագործվում. կան իրական քվեր, արոնցից արմատ դուրս չի գալիս, կա իրական քվի, որից դուրս է գալիս մեկ արմատ, և կան իրական քվեր, որոնցից դուրս է գալիս երկու արմատ: Պատկերը արմատուպես փոխվում է կոմպլեքս քվերի պալադուպում: Այստեղ ամեն ինչ շատ հաստի է. գրայից ստարեր յուրարոնչյուր կոմպլեքս քվի ունի *n*-րդ ստտիճանի ճիշտ *n* հոտա արմատ: Այս կարեաք հասկոյությունը մենք կուպուցուցենք ստտիճանուրաք:

Դիարկենք $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ոչ գրայական կոմպլեքս քվի և *n* բնական քվի: Դիցուք՝ այդ քվի *n*-րդ ստտիճանի արմատն է $s(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ կոմպլեքս քվի: Այդ պեսլում՝

$$(s(\cos \alpha + i \sin \alpha))^n = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) :$$

Այստեղից, օգտվելով Մուսվրի բանաձևից, կստանանք՝

$$s^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) :$$

Հետևապես՝

$$s^n = r, \quad \cos n\alpha = \cos \varphi, \quad \sin n\alpha = \sin \varphi :$$

Լեքցիոն հոմոասպարյություններից կատանանք՝

$$s = \sqrt[n]{r}, \quad n\alpha = \varphi + 2\pi k \text{ կամ } \alpha = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}:$$

Այսինքն՝

$$(3) \quad s(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \sqrt[n]{r}(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n}), \quad k \in \mathbb{Z} :$$

Այսպիսով՝ մենք տարացուցեցինք հետևյալ հասկոթյունը:

ՊԵՐՈՒՄ 14.2.

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

աշ գրոյտկում կոմպլեքս բլի n -րդ տտաիծանի տրմտաները որոշվում են (3) բաժնոձեով:

Թվում է, թե (3) բաժնոձեր հնտարմոթոթյուն է ստլլա տրված աշ գրոյտկում բլի հոմտար զանկաւ նրա n -րդ տտաիծանի տնվերք բլով տրմտաներ: Ստկայն, ինչպես նշվեց վերում, աշ գրոյտկում բլի n -րդ տտաիծանի տրմտաների բլվր n է: Ինչպե՞ս զանենք սլլո տրմտաները, կոմ (3) տնվերք հոմտկարգից ինչպե՞ս տոանձնացնենք տրված կոմպլեքս բլի n հոտ տրմտաները:

ՊԵՐՈՒՄ 14.3. $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ աշ գրոյտկում կոմպլեքս բլի n -րդ տտաիծանի տրմտաները որոշվում են հետևյալ բաժնոձեով.

$$(4) \quad s(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \sqrt[n]{r}(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n}),$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1:$$

Մտանոթոթոյես՝ կոմպլեքս աշ գրոյտկում կոմպլեքս բլի տնի n -րդ տտաիծանի ճիշտ n տրմտա:

Ատրացոյց. Պտրվ է, որ $\sqrt[n]{r}(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n})$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ բլերը տրված կոմպլեքս բլի n -րդ տտաիծանի տրմտաներն են: Յոյց ստանք, որ նման սլլ տրմտաներ չկան:

Իսկոտես, վերցնենք k տմրոշք բլվր և այն մնոցոյոթով բաժանենք n բլի վրա.

$$k = nq + m, \quad 0 \leq m < n:$$

Ունենք՝

$$\begin{aligned} & \sqrt[n]{r}(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n}) = \\ & = \sqrt[n]{r}(\cos \frac{\varphi + 2\pi(nq + m)}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi(nq + m)}{n}) = \\ & = \sqrt[n]{r}(\cos \frac{\varphi + 2\pi m}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi m}{n}). \end{aligned}$$

որտեղ $0 \leq m < n$:

Անում է ցույց տալ նաև, որ (4) հավասարության ուշ մասում գրված քվերը իրարից սաղրբեր են: Դիցուք՝

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k_1}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k_1}{n} \right) = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k_2}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k_2}{n} \right),$$

որտեղ $0 \leq k_1 \leq k_2 < n$: Այստեղից կստանանք

$$\frac{\varphi + 2\pi k_1}{n} = \frac{\varphi + 2\pi k_2}{n} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} :$$

Հետևապես, $k_1 - k_2 = nl$: Որտեղից, հաշվի առնելով $0 \leq k_1 \leq k_2 < n$ պայմանը, կստանանք $k_1 - k_2 = 0$ կամ $k_1 = k_2$: $\square$

14.2. 1-ի n -րդ ստաիծանի արմատները: Առանձնահատուկ հետաքրքրություն են ներկայացնում 1 քվի n -րդ ստաիծանի արմատները: (4) բանաձևի մեջ առնալով $r = 1$, $\varphi = 0$, մենք կստանանք 1 քվի n -րդ ստաիծանի արմատները.

$$(5) \quad \varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, \dots, n-1 :$$

Մասնավորապես

$$\varepsilon_0 = 1 :$$

1 քվի n -րդ ստաիծանի արմատներն ունեն մի շարք հետաքրքիր հատկություններ:

ՊՆԴՈՒՄ 14.4. 1 քվի n -րդ ստաիծանի արմատների որսառդրյալը 1 քվի n -րդ ստաիծանի արմատ է:

Ապացույց. Դիցուք՝ x, y կոմպլեքս քվերը 1 քվի n -րդ ստաիծանի արմատներ են.

$$x^n = y^n = 1 :$$

Այդ դեպքում՝

$$(xy)^n = x^n \cdot y^n = 1 \cdot 1 = 1 :$$

$\square$

Նույն կերպ կատարացնենք 1 քվի n -րդ ստաիծանի արմատի հետևյալ հատկությունները:

ՊՆԴՈՒՄ 14.5. 1 քվի n -րդ ստաիծանի արմատների բազմադրը 1 քվի n -րդ ստաիծանի արմատ է:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեն ինքնուրույն: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 14.6. 1 քվի n -րդ ստաիծանի արմատի հակադարձը 1 քվի n -րդ ստաիծանի արմատ է:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեն ինքնուրույն: $\square$

1 քվի n -րդ ստաիծանի արմատների բազմությունը նշանակենք C_n : Այսպիսով՝

$$C_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\} :$$

ՊՆԴՈՒՄ 14.7. $(\mathbb{C}_n, \cdot)$ գոյգը տրեցում խումբ է:

Ապացույց. Ցույց տանք, որ $\mathbb{C}_n$ -ը կոմպլեքս թվերի տրաստրյուկտային խմբի ենթախումբ է: Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ 1-ի n -րդ ստաիծանի արժուանքի տրաստրյուկտը և 1-ի n -րդ ստաիծանի արժուաի հակադարձը նորից 1-ի n -րդ ստաիծանի արժուանք են: Իսկ այս հատկությունները ամփոփվում են 14.4 և 14.6 պնդումներում: $\square$

1 թվի n -րդ ստաիծանի բոլոր արժուանքների մեջ նպատակահարմար է որոշները առանձնացնել:

ՍԱՀԱՆՈՒՄ 14.8. 1 թվի n -րդ ստաիծանի արժուար սրտականում է n ցուցիչին կամ կոչվում է *նախնական*, երբ այն 1 թվի n -ից վաքը ստաիծանի արժուա չէ:

Օրինակներ և ժխտարկումներ:

ա. 1-ը 1-ի 2-րդ և 4-րդ ստաիծանի արժուա է: Այն 2-րդ ստաիծանի նախնական արժուա է, րայց 1-րդ ստաիծանի նախնական արժուա չէ:

բ. i -ն 1-ի 4-րդ ստաիծանի նախնական արժուա է: Այն 8-րդ ստաիծանի նախնական արժուա չէ, չնայում այն բանին, որ $i^8 = 1$:

ՊՆԴՈՒՄ 14.9. 1 թվի n -րդ ստաիծանի ε_k արժուար, որտեղ

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, \dots, n-1,$$

այն և միայն այն դեպքում է նախնական, երբ k -ն և n -ը վիժխադարձուար պարզ են:

Ապացույց. Դիցուք՝ k -ն և n -ը վախադարձուար պարզ են և m բնական թվի համար

$$\varepsilon_k^m = 1 :$$

Այդ դեպքում՝

$$\left(\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right)^m = \cos \frac{2\pi km}{n} + i \sin \frac{2\pi km}{n} = 1 :$$

Հետևապես՝

$$\cos \frac{2\pi km}{n} = 1 :$$

Այսինքն՝

$$\frac{2\pi km}{n} = 2\pi l, l \in \mathbb{Z} :$$

Այստեղից հետևում է, որ km -ը ստույց մնացորդի բաժանվում է n -ի վրա, և քանի որ k -ն և n -ը վախադարձուար պարզ են, սալա n -ի վրա բաժանվում է m -ը: Իսկ դա նշանակում է, որ m -ը չի կարող վաքը լինել n -ից, և ε_k -ն 1-ի n -րդ ստաիծանի նախնական արժուա չէ:

Հակառակը, դիցուք՝ ε_k -ն 1-ի n -րդ ստաիծանի նախնական արժուա չէ, և d -ն n և k թվերի աժնաժնեք բնդիւսմուր բաժանարարն է, մասնավաքապես,

$$n = dm_1, k = dk_1 :$$

Այդ դեպքում կամենանք՝

$$r_k = \cos \frac{2\pi k_1}{n_1} + i \sin \frac{2\pi k_1}{n_1} :$$

Հետևապես՝

$$r_k^{n_1} = 1 :$$

Այստեղից հետևում է, որ $m_1 = n$: Այսինքն՝ $d = 1$: Իսկ սա նշանակում է, որ n է k թվերի փոխադարձաբար պարզ են: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 14.10. Յույց տվեր, որ r_k -ն 1 -ի n -րդ տասիճանի նախնական արմատն է այն և միայն այն դեպքում, եթե

$$\mathbb{C}_n = \{r_k^m | m = 0, 1, \dots, n-1\} :$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 14.11. Մարցուցեք, որ եթե m և n բնական թվերը փոխադարձաբար պարզ են, ապա.

ա. գոյություն ունի միայն մեկ կոմպլեքս թիվ, որը 1 -ից միաժամանակ m և n տասիճանների արմատ է,

բ. 1 -ից m տասիճանի բոլոր արմատների կատարվեն, եթե իրար հետ բազմապատկե 1 -ից m տասիճանի և 1 -ից n տասիճանի բոլոր արմատները,

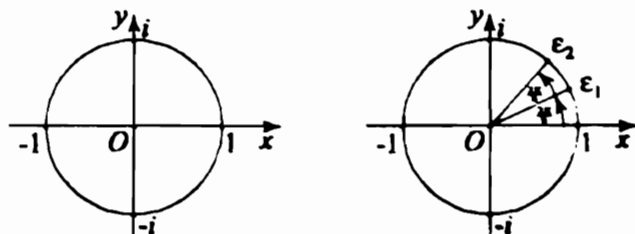
գ. 1 -ից m տասիճանի և 1 -ից n տասիճանի նախնական արմատների արտադրյալը 1 -ից m տասիճանի նախնական արմատ է,

դ. 1 -ից m տասիճանի յուրաքանչյուր նախնական արմատ 1 -ից n տասիճանի և 1 -ից m տասիճանի նախնական արմատների արտադրյալ է:

14.3. Շրջանի բաժանմուն հախտաբար: Կրկին անդրադառնաք 1 -ի n -րդ տասիճանի արմատներին: Հասկանալի է, որ 1 թվի m -րդ տասիճանի բոլոր արմատները բնկում են կոմպլեքս հարթության միավոր շրջանագծի վրա: Դրանք այդ շրջանագծի բաժանում են n հավասար մասերի, բանի որ հարևանները իրարից անջատվում են միևնույն՝ $\frac{2\pi}{n}$ արգամենտով:

ՊՐԴՈՒՄ 14.12. Միտախորից n տասիճանի բոլոր արմատները սրտիկերվում են կոմպլեքս հարթության միտախոր շրջանագծին ներգծած այն կամեղնավոր n -անկյուն գուգարներով, որի մի գագաթը գտնվում է 1 թվի սրտիկերոյ կետում (տես՝ գծ.28):

Մարցույց. Մարցուցումը կատարեք ինքնուրույն: $\square$



Գծադիր 28

Ջանի սր 1-ի n -րդ աստիճանի սրժումները $x^n - 1 = 0$ հավասարման արժանա-
նեկն են և, միևնույն ժամանակ, միավոր շրջանը բաժանում են n հավասար մասերի,
սալս

$$x^n - 1 = 0$$

հավասարումը կաշվում է շրջանի բաժանման հաղիսարում:

Լուծենք շրջանի բաժանման $x^n - 1 = 0$ հավասարումը, երբ n բնական թիվը
ընդունում է մի քանի սրժերներ:

ս. $n = 2$: Շրջանի բաժանման հավասարումն է՝

$$x^2 - 1 = 0 :$$

Նրա լուծումներն են՝ 1 և -1:

բ. $n = 3$: Շրջանի բաժանման հավասարումն է

$$x^3 - 1 = 0 :$$

Այն համարժեք է

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

հավասարմանը: Նրա լուծումներն են՝

$$1, -1/2 + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1/2 - i\frac{\sqrt{3}}{2} :$$

գ. $n = 4$: Շրջանի բաժանման հավասարումն է՝

$$x^4 - 1 = 0 :$$

Այն համարժեք է

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$$

հավասարմանը: Նրա լուծումներն են՝

$$1, -1, i, -i :$$

դ. $n = 5$: Շրջանի բաժանման հավասարումն է՝

$$x^5 - 1 = 0 :$$

Այն համարժեք է

$$(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

հավասարմանը: Լուծենք

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

հավասարումը: Բաժանենք այս հավասարման երկու մասերը x^2 -ու վրա, կտա-
նանք՝

$$x^2 + x^{-2} + x + x^{-1} + 1 = 0 :$$

Կոստորենք

$$y = x + x^{-1}$$

նշանակումը: Կտանումք՝

$$y^2 + y - 1 = 0 :$$

Սրա լուծումներն են՝

$$y_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad y_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} :$$

// փոփոխականի համար ստացվում այս արժեքները տեղադրենք

$$x^2 + yx + 1 = 0$$

հավասարման մեջ: Կստանանք՝

$$x^2 + y_1x + 1 = 0, \quad x^2 + y_2x + 1 = 0 :$$

Այս երկու հավասարումներից կգանենք x փոփոխականի 4 արժեք.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, & x_2 &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} - i \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \\ x_3 &= -\frac{\sqrt{5}-1}{4} + i \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, & x_4 &= -\frac{\sqrt{5}-1}{4} - i \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} : \end{aligned}$$

Մյուս կողմից, 1-ի 5-րդ ստորիմանի ε_k արմատը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{5} + i \sin \frac{2\pi k}{5} = \cos(k72^\circ) + i \sin(k72^\circ) :$$

Հետևաբար՝

$$\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} :$$

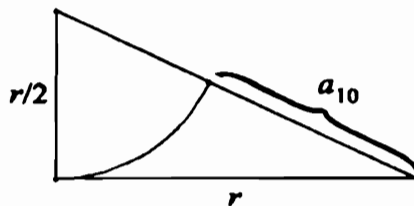
Դիմար չէ նկատել, որ ε շատավորով շրջանին ներգծում կամեռավոր 10-անկյան կողմի a_{10} երկարությունը որոշվում է.

$$a_{10} = 2r \cos \frac{2\pi}{5}$$

բանաձևով: Համեմատելով այն նախադր հավասարման հետ, կստանանք՝

$$a_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} r :$$

Ստացված բանաձևը բույլ է տալիս կառուցել կամեռավոր 10-անկյան կողմի a_{10} երկարությունը կարկինով և լուծեռով՝ օգտվելով 29 գծագրից:



Գծագիր 29

Կոտորցման այս եղանակը հաշտան էր դեռևս Էվկլիդի ժամանակներում: Հասկանալի է, որ մենք կտրադ ենք կտրելիմով և բանձնով կոտորցել նույն շրջանագծին ենթադրած կոմպլեքս ինվարիանտ կաշմը՝ օգտվելով α_{10} -ի կոտորցումից:

և, $n = 6$: Շրջանի բաժանման հավասարումն է

$$x^6 - 1 = 0 :$$

Այն համարժեք է

$$(x^3 - 1)(x^3 + 1) = 0$$

հավասարմանը, որն իր հերթին համարժեք է

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

հավասարմանը: Այստեղ ձախ մասի ստացին երեք արտադրիչների արժանաները 1 թվի 6-րդ ստախձանի նախնական արժանաներ չեն, որովհետև նրանք նույն 1 թվի տվելի ցածր ստախձանի, օրինակ, 3-րդ ստախձանի արժանաներ են: Դժվար չէ նկատել, որ

$$x^2 - x + 1 = 0$$

հավասարման արժանաները սրղեն 1 թվի 6-րդ ստախձանի նախնական արժանաներ են: Տվյալ հավասարման բոլոր արժանաներն են՝

$$1, -1, -1/2 + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1/2 - i\frac{\sqrt{3}}{2}, 1/2 + i\frac{\sqrt{3}}{2}, 1/2 - i\frac{\sqrt{3}}{2} :$$

ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

15. ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

15.1. *Վեկտորական տալանտություն:* Մինչև այժմ մենք ուսումնասիրել ենք երկուսից համարադասական գործողությունները: Դրանք «ներքին» գործողություններ են, այսինքն՝ տեղային գործողությունները կատարվում են միևնույն բազմության ստորերի հետ և տրվում են $\mathcal{A}$ ստացվում են այդ բազմության ստորեր: Մակայն մարմնադասական $\mathcal{A}$ նրա կիրառություններում երբեմն սահմանվում է ինքնուրույն կատարել տրամադրված գործողություններ, արվում բազմության ստորերը «բազմաստիկներ» մի այլ բազմության ստորերով՝ սկալյարներով:

Իսկ ի՞նչ է նշանակում վեկտոր բազմաստիկական սկալյարով: Նախ դիտարկենք մեկ օրինակ:

Վերցնենք հարթություն որևէ v վեկտոր և այն բազմաստիկներ 2 րվով կամ սկալյարով: Արդյունքում կառուցում $2v$ կամ $2 \cdot v$ վեկտոր: Նույն կերպ մենք կարող ենք բազմաստիկական հարթություն կառուցել վեկտոր կառուցելով սկալյարով, տրամադրված նույն կերպ վեկտոր: Այդ կերպ v վեկտոր α սկալյարով բազմաստիկական համար մենք սկսում (α, v) կորգործողվում գույքին համարադասականության մեջ դնենք $\alpha \cdot v$ կամ $\alpha \cdot v$ վեկտոր:

Այսպիսով՝ հարթության վեկտորների՝ իրական սկալյարներով բազմաստիկական գործողությունը $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_2$ բազմության ստիպաստիկներում է $\mathbb{R}_2$ բազմության մեջ: Այսինքն՝

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_2 :$$

Այժմ փոխարինենք սկալյարների $\mathbb{R}$ փոխարինում $(K, +, \cdot)$ դուշտով, իսկ $\mathbb{R}_2$ -ը՝ վեկտորների կառուցված V բազմությունը: Այդ դեպքում

$$\cdot : K \times V \rightarrow V$$

ստիպաստիկներում մեկ հնարավորություն կառուցված V -ում ներմուծելու սկալյարով բազմաստիկական գործողություն:

Անշուշտ այդ գործողությունը սկսում է բազմության որոշակի ստիպաստիկների, որոնց մասին մենք կխոսենք ստորև: Մակայն այդ խոսակցությունը տվելիս դուրսին դուրսին համար մոխաստիկ կատարենք նշանակումների այնպիսի ստիպաստիկներ, ինչպիսիք կատարենք երկուսից համարադասական գործողությունների ստիպաստիկներ: Այն

է. եթե

$$\cdot : (\alpha, v) \rightarrow w, \alpha \in K, v, w \in V,$$

ուսյա բնություններ $w = \alpha \cdot v$ կամ $w = -\alpha v$, այնպես, ինչպես կատարվում է հարթության վեկտորները սկսվողով բազմապատկելու դեպքում:

Բնականորեն, ինչպես հարթություն վեկտորների, այնպես էլ V -ի տարրերի հետ նախ սկսար է կատարել «ճերքին»՝ գումարման գործողությունը: Այն այստեղ նույնպես նշանակներ է նշանով:

Մենք գիտենք, որ $(\mathbb{R}_2, +)$ գույգը տրեկյան խումբ է: Պահանջներ նույն $(V, +)$ գույգից, որ այն լինի տրեկյան խումբ:

Իսկ ինչպիսի՞ն պայմանների սկսար է բավարարի սկսվողով բազմապատկման գործողությունը: Հստակացվի է, որ այն սկսար է «համաձայնեցված» լինի վեկտորների գումարման գործողության և K դաշտի $+$ և $\cdot$ գործողությունների հետ:

Այժմ կարող ենք բերել մեզ հետադրյալ և նշված հստակություններով օժտված հստակություն ստեղծում:

ՄԱՀԱՆՈՒՄ 15.1. $(V, +, \cdot)$ եղյակը կոչվում է K -վեկտորական տարածություն կամ K դաշտի վրա արված վեկտորական տարածություն, եթե.

1. $(V, +)$ գույգը տրեկյան խումբ է,
2. $\cdot$ -ը սկսվողով բազմապատկման գործողություն է, սովորի ճշգրիտ, այն

$$\cdot : K \times V \rightarrow V$$

տեսքի տրտապատկերում է և բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

- ա. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$,
- բ. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$,
- գ. $(\alpha \cdot \beta)v = \alpha(\beta v)$,
- դ. $1 \cdot v = v$,

որտեղ α -ն և β -ն՝ K -ի, իսկ u -ն և v -ն՝ V -ի կամայական տարրեր են:

Այս պայմաններն էլ տրտապատկերում են $\cdot$ -ի համաձայնեցվածությունը՝

- ա պայմանով՝ վեկտորների գումարման $+$ գործողություն հետ,
- բ պայմանով՝ K դաշտի գումարման $+$ գործողություն հետ,
- գ պայմանով՝ K դաշտի բազմապատկման $\cdot$ գործողություն հետ,
- դ պայմանով՝ K դաշտի 1 -ի հետ:

Վեկտորական տարածությունների մի շարք կարևոր օրինակներ քննարկելուց առաջ նշենք որոշ հստակություններ, որոնցով օժտված են կամայական վեկտորական տարածություն տարրերը:

ՊՆԴՈՒՄ 15.2. Կամայական V K -վեկտորական տարածություն համար, եթե $u, v \in V, \alpha, \beta \in K$, ապա.

- ա. $u + v = v + u$,
- բ. $0 \cdot u = 0$,
- գ. $\alpha \cdot 0 = 0$,
- դ. $(-1) \cdot u = -u$,
- է. $(-\alpha) \cdot u = -\alpha u$.

$$գ. \alpha \cdot (-u) = -\alpha u,$$

$$է. \alpha \cdot u = \alpha \cdot v \Rightarrow \alpha = 0 \text{ կամ } u = v,$$

$$մ. \alpha \cdot u = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ կամ } u = 0,$$

$$բ. \alpha \cdot u = \beta \cdot u \Rightarrow u = 0 \text{ կամ } \alpha = \beta,$$

$$ժ. (\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u,$$

$$ի. \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v:$$

Ապացույց. ա. Հավասարության երկու մասերին գումարենք $-u$:

բ. Ունենք՝

$$0 \cdot u + 0 \cdot u = (0 + 0) \cdot u = 0 \cdot u :$$

Անում է օգտվել ա-ից:

գ. Ունենք՝

$$\alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (0 + 0) = \alpha \cdot 0 :$$

Անում է օգտվել ա-ից:

դ. Ունենք՝

$$(-1) \cdot u + u = (-1) \cdot u + 1 \cdot u = (-1 + 1) \cdot u = 0 \cdot u = 0 :$$

Հետևապես՝ $(-1)u = -u$:

ե. Ունենք՝

$$\alpha \cdot u + (-\alpha) \cdot u = (\alpha + (-\alpha)) \cdot u = 0 \cdot u = 0 :$$

Հետևապես՝

$$(-\alpha) \cdot u = -\alpha u$$

զ. Ունենք՝

$$\alpha \cdot u + \alpha \cdot (-u) = \alpha \cdot (u + (-u)) = \alpha \cdot 0 = 0 :$$

Հետևապես՝

$$\alpha \cdot (-u) = -\alpha u$$

է. եթե $\alpha \neq 0$, ապա

$$\alpha \cdot u = \alpha \cdot v$$

հավասարության երկու կողմը ձախից բազմապատկենք α -ի հակադարձով և օգտվենք վեկտորական տարածություն ստեղծմանից:

ը. Ապացուցումը մնում է նույնը:

բ. Ունենք՝

$$\alpha \cdot u + \beta \cdot u \Rightarrow (\alpha + \beta) \cdot u = 0 :$$

Անում է օգտվել ը-ից:

□

ժ. Ունենք՝

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \cdot u &= (\alpha + (-\beta)) \cdot u = \\ &= \alpha \cdot u + (-\beta) \cdot u = \alpha \cdot u + (-\beta \cdot u) = \\ &= \alpha \cdot u - \beta \cdot u : \end{aligned}$$

ի. Ունենք՝

$$\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot (u + (-v)) =$$

$$\alpha \cdot u + \alpha \cdot (-v) = \alpha \cdot u + (-\alpha \cdot v) = \alpha \cdot u - \alpha \cdot v :$$

15.2. Վեկտորական տարածությունների օրինակներ: Այժմ դիտարկենք վեկտորական տարածությունների օրինակներ:

ա. $(\mathbb{R}_2, +, \cdot)$ եղյակը $\mathbb{R}$ -վեկտորական տարածություն է: $\mathbb{R}$ -վեկտորական տարածություններն ունենում են նաև *իրական վեկտորական տարածություններ*: Իրական վեկտորական տարածություն է նաև $(\mathbb{R}_3, +, \cdot)$ եղյակը:

բ. Յուրայունչյուր $(K, +, \cdot)$ դաշտ K -վեկտորական տարածություն է:

գ. Եթե K -ն $(L, +, \cdot)$ դաշտի ենթադաշտ է, ապա $(L, +, \cdot)$ եղյակը K -վեկտորական տարածություն է:

դ. Կոմպլեքս թվերի $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ դաշտը $\mathbb{C}$ -վեկտորական տարածություն է: $\mathbb{C}$ -վեկտորական տարածությունները կազմում են նաև *կոմպլեքս վեկտորական տարածություններ*: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ եղյակը նաև $\mathbb{R}$ -վեկտորական տարածություն է, եթե $-$ -ը դիտենք որպես կոմպլեքս թիվը իրական թվով բազմապատկելու գործադրություն: Առաջիկայում մենք կտեսնենք, որ այստեղ չնայած նույնն են և վեկտորների բազմությունները, և գումարման գործադրությունները, այնուամենայնիվ, վեկտորական տարածությունները տալիս տարբեր են իրարից:

ե. Վեկտորական տարածության չափազանց կարևոր օրինակ է *բիսթանական վեկտորական տարածությունը*, որ կստեղծանենք ստորև:

Դիտարկենք $(K, +, \cdot)$ դաշտը և n բնական թիվը: Ստեղծենք K^n -ը հետևյալ կերպ:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 15.3. K -ի տարրերի n -յակ կազմում է

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

ևսփորձականությունը, որտեղ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$: Ընդ սրում,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Leftrightarrow \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n :$$

K^n -ով մշտնական K -ի տարրերի բոլոր հնարավոր n -յակների բազմությունը՝

$$K^n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K\} :$$

Այժմ K^n բազմություն վրտ ստեղծենք գումարման գործադրությունը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 15.4. K դաշտի կոմպլեքսական $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ և $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ տարրերի համար քննարկենք՝

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n) :$$

ՊԵՐՈՒՄ 15.5. $(K^n, +)$ գույքը արկյուն խումբ է:

Ապացույց. Ձախողելությունը և աղեղավախելությունը ստադգում են ունեթյալունորեն: Ձախյի վերը խաղում է

$$(0, 0, \dots, 0)$$

n -յակը և

$$-(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n) :$$

□

Այնուհետև ստեղծում ենք K^n -ի ստորերը K դաշտի սկալյարներով բազմապատկելու օպերացիան՝

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 15.6. K դաշտի կամայական $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ տարրերի համար ընդունենք.

$$\alpha \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, \dots, \alpha\alpha_n) :$$

ՊՆԴՈՒՄ 15.7. $(K^n, +, \cdot)$ եղանակը K -վեկտորական տարածության է:

Ապացույց. $(K^n, +)$ գումարի օրենքներն ապահովում ենք: Սը-տացված սկալյարով բազմապատկման գործողությունն պայմանները: Ստացվեն, օրինակ, վեկտորական տարածության ստեղծմանն ու պայմանը:

$$\begin{aligned} \gamma((\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)) &= \gamma(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n) = \\ &= (\gamma(\alpha_1 + \beta_1), \gamma(\alpha_2 + \beta_2), \dots, \gamma(\alpha_n + \beta_n)) = \\ &= (\gamma\alpha_1 + \gamma\beta_1, \gamma\alpha_2 + \gamma\beta_2, \dots, \gamma\alpha_n + \gamma\beta_n) = \\ &= (\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2, \dots, \gamma\alpha_n) + (\gamma\beta_1, \gamma\beta_2, \dots, \gamma\beta_n) = \\ &= \gamma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + \gamma(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) : \end{aligned}$$

Նույն կերպ կառուցվեն նաև վեկտորական տարածության ստեղծման բ-դ պայմանները: $\square$

ՎԱՐՓՈՒԹՅՈՒՆ 15.8. Ապացուցենք, որ սկալյարով բազմապատկման 15.6 գործողությունը բավարարում է 15.1 ստեղծման բ-դ պայմաններին:

գ. $\mathbb{R}$ -ից $\mathbb{R}$ -ի մեջ սովորաբար արտապատկերումների $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ բազմության վրա մենք արդեն ստեղծում ենք գումարման գործողությունը՝

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), x \in \mathbb{R} :$$

Ստեղծում ենք նաև $\mathbb{R}$ -ի ստորերով ֆունկցիաների բազմապատկման գործողությունը.

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x), \alpha, x \in \mathbb{R} :$$

ՊՆԴՈՒՄ 15.9. $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ եղանակը իրական վեկտորական տարածության է:

Ապացույց. Մենք արդեն գիտենք, որ $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +)$ գումարի օրենքներն ապահովում ենք: Ստացված սկալյարով բազմապատկման գործողության հատկությունները:

ա. Ունենք՝

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot (f + g))(x) &= \alpha \cdot (f + g)(x) = \\ &= \alpha \cdot (f(x) + g(x)) = \alpha \cdot f(x) + \alpha \cdot g(x) = \\ &= (\alpha \cdot f)(x) + (\alpha \cdot g)(x) = (\alpha \cdot f + \alpha \cdot g)(x) : \end{aligned}$$

Հետևապես՝

$$\alpha \cdot (f + g) = \alpha \cdot f + \alpha \cdot g :$$

բ. Ունենք՝

$$\begin{aligned} ((\alpha + \beta) \cdot f)(x) &= (\alpha + \beta) \cdot f(x) = \\ &= \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(x) = (\alpha \cdot f)(x) + (\beta \cdot f)(x) = (\alpha \cdot f + \beta \cdot f)(x) : \end{aligned}$$

Հետևապես՝

$$(\alpha + \beta) \cdot f = \alpha \cdot f + \beta \cdot f :$$

c. Ունենք՝

$$\begin{aligned} ((\alpha \cdot \beta) \cdot f)(x) &= (\alpha \cdot \beta) \cdot f(x) = \\ &= \alpha \cdot (\beta \cdot f(x)) = \alpha \cdot (\beta \cdot f)(x) = (\alpha \cdot (\beta \cdot f))(x) : \end{aligned}$$

Հետևապես՝

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot f = \alpha \cdot (\beta \cdot f) :$$

d. Ունենք՝

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x) :$$

Հետևապես՝

$$1 \cdot f = f :$$

□

է. Դիցուք՝ V -ն K -վեկտորական տարածություն է, M -ը՝ կոմպակտ բազմություն: M -ից V -ի մեջ արված բոլոր ֆունկցիաների $\text{Fun}(M, V)$ բազմության մեջ սահմաններ գումարման և սկալյարով բազմապատկման գործողությունները հեռանալ կերպ.

1. $(f + h)(x) = f(x) + h(x),$
2. $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x):$

Այս գործողությունների հետ միասին $\text{Fun}(M, V)$ բազմությունը դառնում է K -վեկտորական տարածություն:

ԴՆԴՈՒՄ 15.10. $(\text{Fun}(M, V), +, \cdot)$ եռյակը K -վեկտորական տարածություն է:

Ապացույց. Դիմարման տեղափոխելիությունը և զուգորդականությունը, ինչպես նաև սկալյարով բազմապատկման գործողության հատկությունները ստուգվում են ունեցականորեն: Ջրոյի դերը խաղում է

$$\theta(x) = 0, x \in M$$

արտապատկերումը, իսկ f ֆունկցիայի հսկողիքն է

$$(-f)(x) = -f(x), x \in M$$

ֆունկցիան:

Սկալյարով բազմապատկման գործողության հատկությունները ստացուցվում են այնպես, ինչպես նախորդ սլեդման դեպքում: □

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 15.11. Կատարեք նախորդ սլեդման մանրամասն ապացուցումը:

15.3. *Վեկտորների գծային կախվածությունը և անկախությունը:* Վեկտորական տարածությունների ուսումնասիրություն ընթացքում շուրջագանց կարևոր դեր են խաղում վեկտորների համակարգերի գծային կախվածություն և անկախություն հասկացությունները:

Դիցուք՝ ունենք V K -վեկտորական տարածությունը և n րդ վեկտորների

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

համակարգը:

ՄԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 15.12. Վեկտորների $v_1, v_2, \dots, v_n$ համակարգի *գծային կոմբինացիա* է կոչվում

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

գումարը, որտեղ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ գործակիցները սխալակամ են K -ին:

Երբեմն անհրաժեշտ է լինում սուրբել, թե վեկտորների գծային կոմբինացիան ե՞րբ է դառնում 0: Իհարկե, այն դեպքում, երբ գծային կոմբինացիայի բոլոր գործակիցները զրո են, գծային կոմբինացիան կդառնա զրո: Իսկ այլ դեպք, թե ոչ, այս է խնդիրը: Եյս հարցի սխալասխալի դրական կամ բացասական լինելը շատ բան է ասում համակարգի մասին:

ՄԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 15.13. Եթե գոյություն ունեն այնպիսի $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ գործակիցներ, որոնցից գոնե մեկը գոյից սուրբեր է և

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0,$$

այսպիսի

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

համակարգը կոչվում է *գծորեն կախյալ*:

Հսկալակ դեպքում, այսինքն՝ երբ գծային կոմբինացիան զրո լինելուց ետևում է, որ բոլոր գործակիցները զրո են, համակարգը կոչվում է *գծորեն անկախ*:

Օրինակներ:

ա. $\mathbb{R}^2$ վեկտորական տարածության մեջ

$$(1, 1), (3, 3) \text{ և } (a, b), (b, a)$$

համակարգերը *գծորեն կախյալ* են, իսկ

$$(1, 1) \text{ և } (1, 1), (1, 0)$$

համակարգերը՝ *գծորեն անկախ*:

բ. $\mathbb{R}_2$ -ում երկու վեկտորներից կազմված համակարգը *գծորեն կախյալ* է այն և միայն այն դեպքում, եթե այդ վեկտորները համասլիծ են:

գ. $\mathbb{R}^3$ վեկտորական տարածություն մեջ

$$(1, 1, 1), (2, 2, 2)$$

համակարգը *գծորեն կախյալ* է, իսկ

$$(1, 1, 1), (2, 2, 1) \text{ և } (1, 1, 1), (2, 2, 1), (3, 3, 0)$$

համակարգերը՝ գծորեն անկախ:

դ. $\mathbb{R}_3$ վեկտորական տարածության մեջ երեք վեկտորներից կազմված համակարգը գծորեն կախյալ է այն ե միայն այն դեպքում, եթե այդ վեկտորները համահարթ են:

ե. K^n տարածության մեջ գծորեն անկախ է

$$e_1, e_2, \dots, e_n$$

համակարգը, որտեղ՝

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, \dots, 0),$$

$$\dots$$

$$e_n = (0, 0, \dots, 1) :$$

զ. Գծարեն կախյալ է յուրաքանչյուր համակարգ, որը սխառմանկամ է զրոյական վեկտորը:

ՊՆԴՈՒՄ 15.14. *Եթե ենթահամակարգը գծարեն կախյալ է, ապա համակարգը նույնպես գծարեն կախյալ է:*

Ապացույց. Աստիճանով կասարքեք ինքնությունը: □

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 15.15. Արդյո՞ք համակարգը գծորեն կախյալ լինելուց հետևում է, որ նրա ենթահամակարգը նույնպես գծորեն կախյալ է:

ՊՆԴՈՒՄ 15.16. *Եթե համակարգը գծարեն անկախ է, ապա ենթահամակարգը նույնպես գծարեն անկախ է:*

Ապացույց. Աստիճանով կասարքեք ինքնությունը: □

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 15.17. Արդյո՞ք ենթահամակարգը գծորեն անկախ լինելուց հետևում է, որ համակարգը նույնպես գծորեն անկախ է:

ՊՆԴՈՒՄ 15.18. *Համակարգը գծարեն կախյալ է այն ե միայն այն դեպքում, երբ նրա սրել վեկտոր իր նախորդների գծային կոմբինացիան է:*

Ապացույց. Դիցուք՝ $v_1, v_2, \dots, v_n$ համակարգի v_j վեկտորը իր նախորդների գծային կոմբինացիան է.

$$v_j = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{j-1} v_{j-1} :$$

Այդ դեպքում՝

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + (-1) \cdot v_j + 0 \cdot v_{j+1} + \dots + 0 \cdot v_n = 0$$

հավասարությունը ցույց է տալիս, որ $v_1, v_2, \dots, v_n$ համակարգը գծորեն կախյալ է:

Հակառակը, դիցուք՝ $v_1, v_2, \dots, v_n$ համակարգը գծորեն կախյալ է: Այդ դեպքում գոյություն ունի նրա այնպիսի գծային կոմբինացիա, որի աչ բոլոր գործակիցներն են զրո, բայց ույդ կոմբինացիան հավասար է զրոյի: Դիցուք՝ նման կոմբինացիայի մեջ զրոյից ստորերի վերջին գործակիցը v_j -ն է: Այդ v_j վեկտորը մենք կարող ենք սրտառնայանել իր նախորդների գծային կոմբինացիայի միջոցով: □

ՊՆԴՈՒՄ 15.19. Համակարգը զմարեն հախյալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա սրևէ վեկտոր մնուցածների զծային կոմբինուցիւնն է:

Ապացոյց. Ապացուցումը նման է նախորդ պնդման ստիացուցմանը: □

15.4. Բազիս և ռանգ: Վեկտորական տարածությունների ռատմնուսիրտ-րյուն մեջ մեծ դեր է խաղում բազիսի գաղսխարը: Այն ներմածերու համար մեզ աներածեշտ է ևս մեկ հուսկացություն:

Դիցուր՝ M -ը V K -վեկտորական տարածության կամայական ենթաբազմութ-յուն է՝ $M \subseteq V$:

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 15.20. M -ի վեկտորների

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

համակարգը կոչվում է M -ի մեջ լրիվ, երբ M -ի յարաբանշյուր վեկտոր ավյալ համա-կարգի զծային կոմբինուցիւնն է:

Օրինակ, $e_1, e_2, \dots, e_n$ համակարգը լրիվ է K^n տարածության մեջ, իսկ հե-տեկալ՝ $(1, 1, 1), (2, 2, 1), (3, 3, 2)$ համակարգը լրիվ չէ $\mathbb{R}^3$ տարածության մեջ:

Վեկտորական տարածություններին վերաբերալ հիմնական սրալյունքի ապա-ցուցման մեջ կիրառվում է հետեյալ պնդումը:

ՊՆԴՈՒՄ 15.21. *Երբ վեկտորների համակարգը լրիվ է M բազմության մեջ, և այդ համակարգի մի սրևէ վեկտոր մնուցածների զծային կոմբինուցիւնն է, ապա այդ վեկտորը համակարգից հետուցներաց հետո տուցիւմ համակարգը ցարձյալ կլինի լրիվ M բազմության մեջ:*

Ապացոյց. Դիցուր՝ $v_1, v_2, \dots, v_n$ համակարգը լրիվ է M բազմության մեջ և նրա v_1 վեկտորը մնուցածների զծային կոմբինուցիւնն է.

$$v_1 = \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n :$$

Երբ այժմ M -ի u վեկտորի համար

$$u = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n,$$

ապա u -ի ալս արտահայտություն մեջ տեկադրելով v_1 -ի սրժերը՝ կատանոնք u -ն՝ սրալս $v_2, \dots, v_n$ համակարգի զծային կոմբինուցիւնն: Այսինքն՝ $v_2, \dots, v_n$ համա-կարգը լրիվ է M բազմության մեջ: □

Այժմ ներմածեք վեկտորական տարածությունների հետ՝ կապված կարեքա-գայն գաղսխարը:

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 15.22. Վեկտորների համակարգը, սրի սնդումները սլուսկունոմ են վեկտորական տարածության ենթաբազմությանը, կոչվում է այդ ենթաբազմութ-յուն բազիս, երբ այն զծրեն ունկալի է և լրիվ է սրված ենթաբազմության մեջ:

Օրինակներ և մլատօրինակներ:

ա. $e_1, e_2, \dots, e_n$ համակարգը գծորեն անկախ է և, միաժամանակ, լրիվ է K^n տարածության մեջ: Հետևապես՝ $e_1, e_2, \dots, e_n$ համակարգը K^n տարածության բազիս է:

բ. u, v համակարգը, որտեղ u -ն և v -ն համագիծ չեն, գծորեն անկախ է, բայց լրիվ չէ R_3 տարածության մեջ: Հետևապես՝ այն R_3 տարածության բազիս չէ:

գ. $e_1, e_2, \dots, e_n, e_1 + e_2$ համակարգը լրիվ է K^n տարածության մեջ, բայց գծորեն անկախ չէ: Հետևապես՝ այդ համակարգը K^n տարածությունում բազիս չէ:

դ. Եթե կոմպլեքս թվերի $\mathbb{C}$ բազմությունը դիտարկենք որպես $\mathbb{R}$ -վեկտորական տարածություն, ապա մեկ ստորից կազմված համակարգը նրա բազիս չէ. այն $\mathbb{C}$ -ի մեջ լրիվ լինել չի կարող: Իսկ $1, i$ համակարգը $\mathbb{C}$ -ի բազիս է:

ե. Եթե կոմպլեքս թվերի $\mathbb{C}$ բազմությունը դիտարկենք որպես $\mathbb{C}$ -վեկտորական տարածություն, ապա $1, i$ համակարգը նրա բազիս չէ. այն գծորեն կախյալ է: Այդ տարածությունում բազիս կլինի նրա գրեթե ամբողջ ստորեր յուրաքանչյուր ստորեր:

Հետագայում անհրաժեշտ կլինի նաև բազիսի հետևյալ բնութագրումը:

ՊՐԴՈՒՄ 15.23. Վեկտորական տարածության ենթաբազմության համակարգը նրա բազիս է այն և միայն այն դեպքում, եթե այն այդ ենթաբազմության մաքսիմալ գծորեն անկախ համակարգ է, այսինքն՝

ա. այն գծորեն անկախ է,

բ. ենթաբազմություն յուրաքանչյուր վեկտոր նրան կցագրելիս ստացվում է գծորեն կախյալ համակարգ:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: □

Վեկտորական տարածությունների մասմասնաբաժանման մեջ կենտրոնական դեր է խաղում հետևյալ հասկացությունը:

ՊՐԴՈՒՄ 15.24. Իրեն վեկտորական տարածություն ենթաբազմությունը ունի բազիս, ապա նրա կամույակում երկու բազիսներ ունեն միևնույն թվով ունդումներ:

Ապացույց. Դիցուք՝ ունենք V վեկտորական տարածության M ենթաբազմության

$$v_1, v_2, \dots, v_n \text{ և } w_1, w_2, \dots, w_m$$

բազիսները և $m > n$: Դիտարկենք

$$w_1, v_1, v_2, \dots, v_n$$

համակարգը: Այն գծորեն կախյալ է: Հետևապես, համաձայն 15.18 սլոդման, նրա որևէ վեկտոր իր նախորդների գծային կոմբինացիան է: Այդ վեկտորը w_1 -ը չէ:

Հնուցենք այդ վեկտորը համակարգից: Կստանանք

$$w_1, v'_1, v'_2, \dots, v'_{n-1}$$

համակարգը, որը կլինի M -ի մեջ լրիվ՝ համաձայն 15.21 սլոդման: Հետևաբար՝

$$w_2, w_1, v'_1, v'_2, \dots, v'_{n-1}$$

համակարգը կլինի գծորեն կախյալ: Համաձայն 15.18 պնդման՝ նրա որևէ վեկտոր իր նախադրյունով գծային կամբինացիան է: Այդ վեկտորը ոչ w_2 -ն է, ոչ էլ w_1 -ը:

Հեռացնենք այդ վեկտորը ստացված համակարգից: Կստանանք

$$w_2, w_1, v_1'', v_2'', \dots, v_{n-2}''$$

համակարգը, որը դարձյալ կլինի M -ի մեջ լրիվ: Հետևաբար՝

$$w_3, w_2, w_1, v_1'', v_2'', \dots, v_{n-2}''$$

համակարգը կլինի գծորեն կախյալ: Ուրեմն՝ նրա որևէ վեկտոր իր նախադրյունների գծային կամբինացիան է: Այդ վեկտորը ոչ w_3 -ն է, ոչ w_2 -ը, ոչ էլ w_1 -ը:

Հեռացնենք այդ վեկտորը ստացված համակարգից: Կստանանք

$$w_3, w_2, w_1, v_1''', v_2''', \dots, v_{n-3}'''$$

համակարգը, որը դարձյալ կլինի լրիվ M -ի մեջ:

Շարունակելով այս ընթացքը՝ n քայլից հետո կստանանք M -ի մեջ լրիվ

$$w_n, \dots, w_3, w_2, w_1$$

համակարգը: Եվ քանի որ $m > n$, ապա

$$w_{n+1}, w_n, \dots, w_3, w_2, w_1$$

համակարգը կլինի գծորեն կախյալ, ինչը հակասում է $w_1, w_2, \dots, w_m$ համակարգի գծորեն անկախ լինելու սլայմունին: Ստացվեց հակասություն, որը արդյունք է $m > n$ ենթադրության:

Այսպիսով՝ եթե M ենթաբազմությունը ունի բազիս, ապա նրա բոլոր բազիսները ունեն միևնույն քվով անդամներ: $\square$

ՄԱՀԱՄԱՐՈՒՄ 15.25. V վեկտորական տարածության M ենթաբազմության որևէ բազիսի անդամների թվով կոչվում է M -ի *աստիճան* և նշանակվում է՝ $\text{rank } M$:

V տարածության ռանգը կոչվում է նրա *լավագույնությունը* և նշանակվում է $\dim V$: Այսպիսով՝

$$\dim V = \text{rank } V :$$

Երբեմն՝ n չավաղականություն ունեցող վեկտորական տարածությունը անվանվում է նույն n -*չավաղական* վեկտորական տարածություն:

Օրինակներ:

ա. $\dim K^n = n$,

բ. $\dim \mathbb{R}_2 = 2$,

գ. $\dim \mathbb{R}_3 = 3$:

Մենք արդեն գիտենք, որ կոմպլեքս թվերի բազմությունը կարելի է դիտել և՛ որպես իրական վեկտորական տարածություն, և՛ որպես կոմպլեքս վեկտորական տարածություն: Առաջին դեպքում նրա չավաղականությունը հավասար է 2-ի, երկրորդ դեպքում՝ 1-ի: Ահա նման դեպքերում, վեկտորական տարածության չավաղականությունը նշելիս, ամբողջական է լինում ցույց տալ նաև այն դաշտը, որի վրա

արված է սովոր առարածությունը: Այդ դեպքում տարածության չափադականությունը գրառում ենք այսպես՝ $\dim_K V$: Այսպիսով՝

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2, \quad \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1 :$$

Եթե տարածությունը ունի բազիս, ապա կուսենք, որ այն ունի վերջավոր չափադականություն: Անշուշտ կան տարածություններ, որոնք չունեն բազիս կամ վերջավոր չափադականություն: Այդպիսին է, օրինակ, $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ վեկտորական տարածությունը: Այսպիսիք են նաև $\mathbb{C}$ -ն և $\mathbb{R}$ -ը, եթե դուանք դիաներ, որպես $\mathbb{Q}$ -վեկտորական տարածություններ:

Հետագայի համար կարևոր նշանակություն ունի հետևյալ հասկացությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 15.26. *Վերջավոր չափադականության տարածության ցանկացած բազմաբյուրն գծային սնկախ համակարգը կարելի է լրացնել մինչև այդ բազմության բազիս:*

Ապացույց. Արսցացումը կուսարեք ինքնաբային: □

15.5. *Վեկտորի կոորդինատները:* Բազիսի սովաթությունը հնարավորություն է ապիս տարածության յուրաքանչյուր վեկտորի հետ ստնչել սկալյարների մի որոշակի համակարգ և վեկտորի ռատմնասիրությունը հանգեցնել սկալյարների այդ համակարգի ռատմնասիրություն: Նման դիսարկումների համար հիմք է ծառայում հետևյալ սնկումը:

ՊՆԴՈՒՄ 15.27. *Դիցուք ունենք վերջավոր չափադականության V K -վեկտորական տարածություն $v_1, v_2, \dots, v_n$ բազիսը: Այդ դեպքում V -ի յուրաքանչյուր v վեկտորի համար գաթություն ունեն K դուշաի միարժեքրեն որաշված ոյնպիսի $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ սուրբեր, սր*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n :$$

Ապացույց. Քանի որ $v_1, v_2, \dots, v_n$ համակարգը լրիվ է V -ի մեջ, ապա v -ն կներկայացվի որպես այդ համակարգի գծային կոմբինացիա՝

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n, \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K :$$

Ցույց աունք, որ այդ ներկայացումը միակն է: Իսկապես, երև նուն

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n, \quad \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in K :$$

ապա

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$$

և

$$(\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = 0 :$$

Այսանդից, հուշվի առնելով $v_1, v_2, \dots, v_n$ համակարգի գծային սնկախությունը, կսառնունք՝

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0$$

կամ՝

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n :$$



ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 15.28. $v_1, v_2, \dots, v_n$ բազիսային վեկտորների միջոցով v վեկտորի

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

անսքզով ներկայացման մեջ

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

գործուկիցները կազմում են v վեկտորի *բաղադրիչներ* կամ *կոորդինատներ* *արված* *բազիսում*:

Հետևյալ հասկացությունները ցայց են աալիս վեկտորի կոորդինատների աուսջին կիրառությունները:

ՊՆԴՈՒՄ 15.29. *Վեկտորների գումարի կոորդինատները հավասար են այդ վեկտորների համադրատասխան կոորդինատների գումարին:*

Արդյույց. Իսկապես, եթե $v_1, v_2, \dots, v_n$ համակարգը V K -վեկտորական տարածության բազիս է և

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n,$$

$$w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in K$, ապա

$$v + w = (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) + (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n) =$$

$$(\alpha_1 + \beta_1)v_1 + (\alpha_2 + \beta_2)v_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)v_n :$$



ՊՆԴՈՒՄ 15.30. *Եթե վեկտորի կոորդինատները բազմադրատկենք միևնույն սկալյարով, ապա կստանանք այդ վեկտորը արված սկալյարով բազմադրատկելուց ուտոջուցած վեկտորի կոորդինատները:*

Արդյույց. Իսկապես, եթե $v_1, v_2, \dots, v_n$ համակարգը V K -վեկտորական տարածության բազիս է և

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n,$$

$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$, ապա

$$\alpha v = \alpha(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha\alpha_1 v_1 + \alpha\alpha_2 v_2 + \dots + \alpha\alpha_n v_n :$$



15.6. Վեկտորական տարածությունների իզոմորֆիզմը: Դիտարկենք վեկտորական տարածությունների՝ ըստ էության իրար հավասար լինելու խնդիրը:

Հասկանալի է, որ այն չափանիշները, որոնք ընկած են վեկտորական տարածությունների՝ ըստ էության իրար հավասար լինելու հիմքում, պետք է նույնը լինեն, ինչ խմբերի և օղակների համար են: Դրանք են. իմունալով ըստ էության իրար հավասար վեկտորական տարածություններից մեկը՝ վերականգնել մյուսը՝ ինչպես հիմնական բազմությունը, այնպես էլ զամուրմուն և սկալյարով բազմապատկման գործողությունները: Այժմ այս ցկարագրական ընկալմանը սուսք հստակ սահմանում: Նշենք նաև, որ ըստ էության իրարից չտարբերվող վեկտորական տարածությունները նույնպես անվանվում են իզոմորֆ:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 15.31. $(V, +, \cdot)$ և $(W, +, \cdot)$ K -վեկտորական տարածությունները կոչվում են *իզոմորֆ*, եթե գոյություն ունի այնպիսի f վերադրում V և W բազմությունների միջև, որ V -ի կամայական x և y և K -ի կամայական α սուսքերի համար՝

$$\text{ա. } f(x + y) = f(x) + f(y),$$

$$\text{բ. } f(\alpha x) = \alpha f(x):$$

f -ը կոչվում է *իզոմորֆիզմ* նշված վեկտորական տարածությունների միջև:

$(V, +, \cdot)$ և $(W, +, \cdot)$ K -վեկտորական տարածությունների իզոմորֆ լինելու հանգամանքը գրառվում է այսպես՝

$$(V, +, \cdot) \cong (W, +, \cdot):$$

Համախոս նաև

$$(V, +, \cdot) \cong_K (W, +, \cdot),$$

եթե հսրկ է լինում շեշտել K դսւշալի մասնակցությունը, որը, ինչպես հսմոգվեցինք վերևում, կսրերո հսոնգսմսնք է:

Օրինակներ և միսսրինակներ:

$$\text{ա. } (\mathbb{R}_2, +, \cdot) \cong (\mathbb{R}^2, +, \cdot):$$

$$\text{բ. } (\mathbb{R}_3, +, \cdot) \cong (\mathbb{R}^3, +, \cdot):$$

գ. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ $\mathbb{C}$ -վեկտորական տարածությունը իզոմորֆ չէ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ $\mathbb{R}$ -վեկտորական տարածությանը և $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ $\mathbb{Q}$ -վեկտորական տարածությանը:

Այսսեղ նույնպես աներսմեշս է ցույց սսղ, որ վեկտորական տարածությունների իզոմորֆ լինելու սոնշությունը հսմսրժերթսյսն սոնշություն է:

ՊՆԴՈՒՄ 15.32. *Վեկտորական տարածությունների իզոմորֆ լինելու սոնշությունը հսմսրժերթսյսն սոնշություն է:*

Արսւսյց. Պետք է նսխ ցույց սսղ $\cong$ սոնշության սոնդրսդսրժելիությունը: Բսվսկան 1, դիսսրկել $(V, +, \cdot)$ վեկտորական տարածության V հիմնական բազմության ε նույնական տրսսսսսսկերումը. այն իզոմորֆիզմ է $(V, +, \cdot)$ և $(V, +, \cdot)$ վեկտորական տարածությունների միջև:

Այնուհետև՝ աներսմեշս է ցույց սսղ $\cong$ սոնշության հսմսսսսսսսսսսսսսսսս.

$$\text{եթե } (V, +, \cdot) \cong (W, +, \cdot), \text{ սսյս } (W, +, \cdot) \cong (V, +, \cdot):$$

Դրա համար բավական է նկատել, որ եթե

$$f : V \rightarrow W$$

արտապատկերումը իզոմորֆիզմ է $(V, +, \cdot)$ և $(W, +, \cdot)$ վեկտորական տարածությունների միջև, ապա

$$f^{-1} : W \rightarrow V$$

արտապատկերումը կլինի իզոմորֆիզմ $(W, +, \cdot)$ և $(V, +, \cdot)$ վեկտորական տարածությունների միջև:

Վերջապես, եթե ունենք առաջին և երկրորդ վեկտորական տարածությունների միջև f իզոմորֆիզմը և երկրորդ և երրորդ վեկտորական տարածությունների միջև g իզոմորֆիզմը, ապա $f \circ g$ արտապատկերումը կլինի իզոմորֆիզմ առաջին և երրորդ վեկտորական տարածությունների միջև: «Լյսինքն» վեկտորական տարածությունների իզոմորֆիզմները ունենում են հետևյալ հատկությունները: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 15.33. Կոտորակներ սլոնգման u, v, q կետերի մանրամասն ապացուցումները:

ՊԼԻՆԻՄ 15.34. Եթե f -ը իզոմորֆիզմ է $(V, +, \cdot)$ և $(W, +, \cdot)$ K -վեկտորական տարածությունների միջև, ապա.

ա. $f(0) = 0$,

բ. $f(-v) = -f(v)$,

գ. $f(v - w) = f(v) - f(w)$,

դ. $f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \dots + \alpha_n f(v_n)$,

որտեղ $v_1, v_2, \dots, v_n, v, w \in V, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: $\square$

ՊԼԻՆԻՄ 15.35. Վեկտորական տարածությունների իզոմորֆիզմի ժամանակ. ա. վեկտորների զծորեն ունկախ համակարգի անդամների պատկերները կազմում են զծորեն ունկախ համակարգ.

բ. վեկտորների զծորեն կախյալ համակարգի անդամների պատկերները կազմում են զծորեն կախյալ համակարգ.

գ. բազիսի անդամների պատկերները կազմում են բազիս:

Ապացույց. ա. Դիցուք ունենք $(V, +, \cdot)$ և $(W, +, \cdot)$ K -վեկտորական տարածությունների f իզոմորֆիզմը և V -ի վեկտորների զծորեն ունկախ $v_1, v_2, \dots, v_n$ համակարգը: Ցույց ստանք, որ զծորեն ունկախ կլինի նաև

$$f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$$

համակարգը: Ենթադրենք, թե

$$\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \dots + \alpha_n f(v_n) = 0 :$$

Այդ դեպքում կստանանք

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = f(0) :$$

էվ, թանի որ f -ը վերադաստ է, ապա կունենանք՝

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 :$$

Այստեղից էլ, հաշվի ունենալով $v_1, v_2, \dots, v_n$ համակարգի գծային ունկալվածությունը, կստանանք՝

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 :$$

բ. Դիցուք աւենք վեկտորների գծերեն կախյալ $v_1, v_2, \dots, v_n$ համակարգը: Այդ դեպքում կգտնվեն K դաշտի սյանայի $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ տարրեր, որոնք ոչ զրոյն են զրայի հավասար և

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 :$$

Այստեղից կստանանք

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = f(0),$$

կամ՝

$$\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \dots + \alpha_n f(v_n) = 0 :$$

Այս հավասարությունն էլ ցույց է տալիս $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ համակարգի գծային կախվածությունը:

գ. Դիցուք $v_1, v_2, \dots, v_n$ համակարգը V տարածությունը բազիս է: Այդ դեպքում $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ համակարգը կլինի W -ի մեջ գծերեն ունկալի: Եթե սլով վերցնենք W -ի կամայական $f(v)$ վեկտոր, ապա գոյություն կունենան K դաշտի սյանայի $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ տարրեր, որ

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n :$$

Այստեղից, վերցնելով հավասարմուն երկու մասերի f -սլուակներերը, կստանանք

$$f(v) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \dots + \alpha_n f(v_n) :$$

□

Վերջավոր չափադասականության վեկտորական տարածությունների իզոմորֆիզմները լինելու խնդիրը, ի տարբերության խմբերի կամ օղակների վերաբերյալ համապատասխան խնդրի, լուծվում է նեշտությամբ: Պարզվում է, որ այն կախված է ընդամենը մեկ բնական թվից՝ տարածության չափադասականությունից:

ՊԼԴՌԻՄ 15.36. *Միևնույն դաշտի վրա տրված վերջավոր չափադասականության երկու վեկտորական տարածություններ իզոմորֆ են այն և միայն այն դեպքում, եթե նրանք ունեն միևնույն չափադասականություն:*

Ապացույց. Դիցուք ստված և

$$f : V \rightarrow W$$

իզոմորֆիզմը վերջավոր չափադասականության $(V, +, \cdot)$ և $(W, +, \cdot)$ K -վեկտորական տարածությունների միջև: Քանի որ այդ դեպքում, համաձայն 15.35 սլոդման, բազիսի սլուակները բազիս և, ապա այլ տարածությունների չափադասականությունները նույնն են:

Հակառակը, դիցար $(V, +, \cdot)$ և $(W, +, \cdot)$ վեկտորական տարածությունները ունեն նույն չափադասականը՝

$$\dim V = \dim W =: n :$$

Վեցները բազիս $(V, +, \cdot)$ և $(W, +, \cdot)$ տարածություններից յուրաքանչյուրի մեջ.

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

բազիսը ուսուցին տարածությունում՝

$$w_1, w_2, \dots, w_n$$

բազիսը՝ երկրայում, և դիտարկենք

$$f : \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \rightarrow \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$$

արտասպասկերումը:

Դիվար չէ ցայց սալլը, որ $v_1, v_2, \dots, v_n$ և $w_1, w_2, \dots, w_n$ համակարգերի բազիս լինելուց հետևում է, որ f -ը ոչ միայն արտասպասկերում է, այլև վերադրում V և W ՝ բազմությունների միջև : Ցայց սամը, որ այն նույն իզոմորֆիզմ է :

Իսկապես, եթե $\gamma, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in K$, սալլ.

$$f((\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) + (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n)) =$$

$$= f((\alpha_1 + \beta_1) v_1 + (\alpha_2 + \beta_2) v_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) v_n) =$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1) w_1 + (\alpha_2 + \beta_2) w_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) w_n =$$

$$= (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n) + (\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \dots + \beta_n w_n) =$$

$$= f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) + f(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n) :$$

$$\gamma f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \gamma(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n) =$$

$$= \gamma \alpha_1 w_1 + \gamma \alpha_2 w_2 + \dots + \gamma \alpha_n w_n = f(\gamma \alpha_1 v_1 + \gamma \alpha_2 v_2 + \dots + \gamma \alpha_n v_n) =$$

$$=: f(\gamma(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n)) :$$

□

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 15.37. Ապացուցեք, որ յուրաքանչյուր n -չափանի K -վեկտորական տարածություն իզոմորֆ է $(K^n, +, \cdot)$ քվարանական վեկտորական տարածությունը:

16. ԵՆԹԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

16.1. *Ենթատարածության սահմանումը:* Վեկտորական տարածությունների ուսումնասիրության ընթացքում ավելի դյուրին է դիտարկել այն վեկտորական տարածությունները, որոնք ընկած են նախապես արված վեկտորական տարածության մեջ, այսինքն՝ այդ վեկտորական տարածության ենթատարածություններ են:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 16.1. U բազմությունը կոչվում է $(V, +, \cdot)$ K -վեկտորական տարածության ենթատարածություն, եթե.

ա. $U \subseteq V$,

բ. $(U, +, \cdot)$ եռյակը K -վեկտորական տարածություն է:

Վեկտորական տարածությունների որոշման աշխատանքները ենթատարածության սլայդայնում ունենումնալ հեշաւում են հետւյալ հուակության շնորհիվ, որը թույլ է սուլիս վեկտորական տարածություն սահմումման սասը սլայմաններից սաուգել միայն երկուսը:

ՊԼԴՈՒՄ 16.2. V բուզմություն U ոչ դուտուրկ ենրուրուզմությունը այն և միայն այն դեպքում է $(V, +, \cdot)$ K -վեկտուրական տարածություն ենրուտարածություն, եթե.
ա. U -ի կումայուկում x, y սուրբերի հումուր

$$x + y \in U,$$

բ. U -ի կումայուկան x սուրբի և K դուշաի կամույուկան α սուրբի հումար

$$\alpha \cdot x \in U :$$

Ուղղացույց. Եթե U -ն $(V, +, \cdot)$ K -վեկտորական տարածության ենթատարածություն է, ապա ակնհայտորեն ա և բ սլայմումները տեղի ունեն:

Հակառակը: Դիցուք՝ սմդման ա և բ սլայմումները տեղի ունեն: Յույց սուսը, որ $(U, +, \cdot)$ եռյակը K -վեկտորական տարածություն է:

Իսկուպես, ա սլայմանից հետևում է, որ $+$ -ը U բազմության վրա սրված երկ-ստեղ գործողություն է: Զւսնի որ U -ն դասարկ չէ, ապա այն ունի ինչ-որ u սուրբ և, համումայն բ սլայմանի, $0 \cdot u \in U$ կամ $0 \in U$: Նույն սլուսմառով $(-1) \cdot u \in U$ կամ $-u \in U$:

Սլայլիսով՝ U -ի վրա սրված $+$ գործողությունը ունի չեզոք սուրբ և հակադարձե-լի է:

Իսկ $+$ գործողության գուգորդելի և սեղափոխելի լինելը հետևում է նրանից, որ այդ սլայմանները տեղի ունեն V բազմություն տարրերի հումար, իսկ U բազմությունը V -ի ենթուրազմություն է: Վերջուպես, այն, որ U -ի մեջ սրված է K դուշաից վերցրած սկալարներով բազմապատկման $\cdot$ գործողությունը, հետևում է սմդման բ սլայմանից, իսկ $U \subseteq V$ սլայմանից հետևում է սկալարով բազմապատկման գործողություն վերաբերյալ վեկտորական տարածության սահմանման սլայմանների իրավացիությունը: $\square$

ՊԼԴՈՒՄ 16.3. *Ենթատարածության լինելու տոնչությունը կումույուկան վեկ-տարուկում տարածություն բարբ ենթատարածությունների բուզմության վրա սրված մասնուկի կարգի տոնչություն է:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: □

Կամայական վեկտորական ստորածության համար ենթաստորածություն է ինքը՝ այդ ստորածությունը, և միայն 0 ստորից կազմված ենթաստորածությունը: Վերջինս կոչվում է ստորածության *զրային* ենթաստորածություն:

Բերենք ենթաստորածությունների այլ օրինակներ:

ա. Կամայական ուղղին զուգահեռ բոլոր վեկտորների բազմությունը $\mathbb{R}_2$ ստորածության ենթաստորածություն է:

ՊԵՐՈՒՄ 16.4. $(\mathbb{R}_2, +, \cdot)$ ստորածություն ենթաստորածություններն են՝ $\mathbb{R}_2$ -ը, *զրային* ենթաստորածությունը և *հորիզոնական յուրյունչյալ ուղղի* համար այդ ուղղին զուգահեռ վեկտորների բազմությունը և միայն դրանք:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: □

բ. $(\mathbb{R}_3, +, \cdot)$ ստորածություն ենթաստորածություններ են մտադրող օրինակում դիտարկված ենթաստորածությունները, ինչպես մտնող կամայական հորիզոնական համար՝ այդ հորիզոնականը զուգահեռ բոլոր վեկտորների բազմությունը, և $\mathbb{R}_3$ -ը:

գ. K^n -ի այն վեկտորների բազմությունը, որոնց վերջին կոորդինատը հավասար է զրոյի, կազմում են $(K^n, +, \cdot)$ ստորածության ենթաստորածություն, որն իզոմորֆ է $(K^{n-1}, +, \cdot)$ ստորածությանը:

դ. Դիցուք՝ $\text{Fun}(M, V)$ -ն 15.2 կետի է օրինակն է: Այդ դեպքում՝ V^M -ը կլինի այդ ստորածության ենթաստորածություն:

Իսկ ինչպե՞ս են առնչվում ենթաստորածություն և չափադասականություն հասկացությունները: Դիցուք՝ U_1 -ը և U_2 -ը վերջավոր չափադասականություն V K -վեկտորական ստորածության ենթաստորածություններ են:

ՊԵՐՈՒՄ 16.5. Եթե $U_1 \subseteq U_2$, ապա $\dim U_1 \leq \dim U_2$: *Մասնավորապես՝ ենթաստորածության չափադասականությունը մեծ չէ ստորածության չափադասականությունից:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: □

ՊԵՐՈՒՄ 16.6. Եթե $U_1 \subseteq U_2$ և $\dim U_1 = \dim U_2$, ապա $U_1 = U_2$:

Ապացույց. Եթե $U_1 \neq U_2$, ապա գոյություն ունի U_2 -ի v տարր, որը U_1 -ի $v_1, \dots, v_n$ բազիսի գծային կոմբինացիան չէ: Հետևապես՝ $v_1, \dots, v_n, v$ համակարգը կլինի գծորեն սնկախ: Իսկ դա ճշմարտություն է, որ

$$\dim U_1 < \dim U_2 :$$

•

□

Հետևությանը կարելի է համոզվել, որ յուրաքանչյուր վեկտորական ստորածության ենթաստորածությունների միավորումը կարող է ենթաստորածություն չլինել: Այլ է պատկերը ենթաստորածությունների հուստմունքի դեպքում:

ՊԵՐՈՒՄ 16.7. Վեկտորական ստորածություն կամայական ենթաստորածությունների հաստատված ենթաստորածություն է:

Արդյույց. Գիցույ՝ U_1 -ը և U_2 -ը V K -վեկտորական տարածություն ենթաադրածություններ են: Եթե

$$v, w \in U_1 \cap U_2, \alpha \in K,$$

ապա $v, w \in U_1, v, w \in U_2$, և, որեւէ, $v + w, \alpha v \in U_1, v + w, \alpha v \in U_2$: Հետևապես՝

$$v + w, \alpha v \in U_1 \cap U_2 :$$

Իսկ առ նշանակում է, որ $U_1 \cap U_2$ հատումը ենթաադրածություն է: $\square$

Նույն կերպ ստացուցվում է, որ կամայական թվով ենթաադրածությունների հատումը նույնպես ենթաադրածություն է:

16.2. Գծային բաղաձր: Գիտարկենք V K -վեկտորական տարածության կամայական M ոչ դատարկ ենթաբազմությունը՝ $M \subseteq V$: Մենք կորոշ ենք կազմել M -ի տարրերի զամազում գծային կոմբինացիաներ: Նշանակենք $L(M)$ -ով նման բոլոր գծային կոմբինացիաների բազմությունը:

$$L(M) = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \mid v_1, \dots, v_n \in M, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K, n \in \mathbb{N}\} :$$

Մասնավորապես, եթե

$$M = \{v_1, v_2, \dots, v_n\},$$

ապա կգրենք

$$L(M) = L(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Այսպիսով՝

$$L(v_1, v_2, \dots, v_n) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K\} :$$

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 16.8. $L(M)$ -ը կոչվում է M ենթաբազմության *գծային բաղաձր*: Դատարկ բազմություն գծային բաղաձր է կոչվում $\{0\}$ բազմությունը: Եթե M -ը կոչվում է նաև M -ով *ծնիած ենթաադրածություն*:

Օրինակ, $(\mathbb{R}_2, +, \cdot)$ տարածության մեջ կամայական ոչ զրոյական v վեկտորի համար $L(v)$ -ն ուղի v վեկտորին զուգահեռ բոլոր վեկտորների բազմությունն է, որը $\mathbb{R}_2$ -ի ենթաադրածություն է:

Եթե $\mathbb{R}_2$ -ի v և w վեկտորները համադիր չեն, ապա

$$L(v, w) = \mathbb{R}_2 :$$

ՊՆԴՈՒՄ 16.9. *Վեկտորական տարածություն կամայական ենթաբազմություն գծային բաղաձրը ենթաադրածություն է:*

Արդյույց. Աստացուցումը հետևում է նրանից, որ M -ի տարրերի գծային կոմբինացիաների գումարը և M -ի տարրերի գծային կոմբինացիայի և կամայական սկալյարի որոտդյալը նորից M -ի տարրերի գծային կոմբինացիա է: $\square$

Վերջին պնդումից, մասնավորապես, աստցվում է հետևյալ հատկությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 16.10. Վեկտորական տարածություն կամայական M ոչ զրոյի ենթաբազմություն համար.

$$\text{ու. } L(L(M)) = L(M),$$

$$\text{բ. } L(M) = M \Leftrightarrow M\text{-ը ենթատարածություն է:}$$

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեն ինքնուրույն: □

Այժմ վեկտորների բազմության գծային բաղանիքը դիտարկենք այլ աեսանկյունից:

ՊՆԴՈՒՄ 16.11. Վեկտորական տարածություն կամայական M ենթաբազմություն գծային լայրանքը համընկնում է այդ տարածություն բայր այն ենթատարածությունների համանուն հետ, որոնք պարունակում են M -ը:

Ապացույց. Նշանակենք D -ով տվյալ տարածության բոլոր այն ենթատարածությունների համումը, որոնք պարունակում են M -ը: Հիմնի սր $L(M)$ -ը նույնպես ենթատարածություն է և պարունակում է M -ը, սակայն D -ն ստանուլիս համաժող բազմություններից մեկը կլինի $L(M)$ -ը: Հետևապես՝

$$D \subseteq L(M) :$$

Մյուս կողմից, քանի որ D -ն պարունակում է M -ը և ենթատարածություն է, սակայն կարտումակի M -ի տարրերի կամայական գծային կամբինացիան և հետևաբար՝ $L(M)$ -ը:

Այսպիսով կատանումք՝

$$D = L(M) :$$

□

Դիտարկենք V -ի M -ը պարունակող բոլոր ենթատարածությունների Ω բազմությունը, որի վրա արված է մասնակի կարգի $\subseteq$ տոնությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 16.12. $L(M)$ -ը Ω բազմություն մաքրագայն տարրն է կարգի $\subseteq$ տոնություն մկտամումք:

Պատկերավոր խտրով՝ M բազմության գծային բաղանիքը այդ տարածության այն փորրագայն ենթատարածությունն է, որը պարունակում է M -ը:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեն ինքնուրույն: □

ՊՆԴՈՒՄ 16.13. V վեկտորական տարածություն վեկտորների կամայական $v_1, v_2, \dots, v_n$ համակարգի համար.

$$\text{ու. } \dim L(v_1, v_2, \dots, v_n) = \text{rank}(v_1, v_2, \dots, v_n),$$

$$\text{ու. } \dim L(v_1, v_2, \dots, v_n) \leq n,$$

$$\text{բ. } \dim L(v_1, v_2, \dots, v_n) = n \Leftrightarrow v_1, v_2, \dots, v_n \text{ համակարգը գծորեն անկախ է,}$$

$$\text{գ. } \dim L(v_1, v_2, \dots, v_n) < n \Leftrightarrow v_1, v_2, \dots, v_n \text{ համակարգը գծորեն կախյալ է:}$$

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեն ինքնուրույն: □

16.3. *Ենթաստարածությունների գումարը և ուղիղ գումարը:* Վեկտորական սարածություն ենթաստարածություններից մեկը ենթաստարածություն ստանալու ճանապարհներից մեկը հասնում գործողությունն է: Միավորմուն գործողությունը մասն ենուրավորություն չի սուղիս: Սակայն կս մի ուղի գործողություն ևս, որի միջոցով ենթաստարածություններից սուղցվում են մոր ենթաստարածություններ:

Դիսարկենը V K -վեկտորական սարածության V_1 և V_2 ենթատարածությունները:

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 16.14. V_1 և V_2 ենթաստարածությունների *գումար* է կոչվում V_1 -ի ասարերի և V_2 -ի ասարերի բոլոր ենուրավոր գումարների բուղմությունը: Եթե V_1 և V_2 ենթաստարածությունների գումարը գրսոենը

$$V_1 + V_2$$

տենքով, տսլս, հսմսծսյն սսենմսմսն

$$V_1 + V_2 = \{x + y | x \in V_1, y \in V_2\} :$$

ՊՆԴՈՒՄ 16.15. *Վեկտորական սուրածության կսմսյսկսմ երկու ենթաստարածությունների գումարը ուղի վեկտորական սուրածության ենթաստարածություն է:*

Ապոցսյց. Եթե $x, y \in V_1$, $u, v \in V_2$, $\alpha \in K$, սսլս

$$(x + u) + (y + v) = (x + y) + (u + v) \in V_1 + V_2,$$

$$\alpha(x + u) = \alpha x + \alpha u \in V_1 + V_2 :$$

□

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 16.16. Յույց սվեք, որ ենթաստարածությունների գսմսրմսն գործողությունը սեղսվոխելի և գսգորղելի է:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 16.17. Յույց սվեք, որ եթե V_1 -ը և V_2 -ը ենթաստարածություններ են, սսլս

$$V_1 + V_2 = V_1 \Leftrightarrow V_2 \subseteq V_1 :$$

Ենթատարածությունների գումարը կսրելի է սսհնսնել մսկ մի քսմի գսմսրեղների հսմսր:

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 16.18. V վեկտորական սարածության $V_1, V_2, \dots, V_n$ ենթատարածությունների *գումարը* նշսնսկվում է

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

տենքով և որոշվում հեսելսլս հսվսսսրոթսրսմր.

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n = \{v_1 + v_2 + \dots + v_n | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \dots, v_n \in V_n\} :$$

Մյսսլսոմ՝ V վեկտորական սարածությունը իր ենթատարածությունների գսմսրն է, եթե V -ի յուրսյսնշյուր ասարը վեղումվում է $V_1, V_2, \dots, V_n$ ենթատարածությունների սուրերի գսմսրի տենքով:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 16.19. Ասացուցեք, որ կամայական քանակությամբ ենթատարածությունների գումարը ենթատարածություն է:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 16.20. V տարածությունը կոչվում է իր V_1 և V_2 ենթատարածությունների *ուղիղ գումար*, եթե V -ի յուրաքանչյուր տարր միարժեք ձևով ներկայացվում է V_1 և V_2 ենթատարածությունների տարրերի գումարի տեսքով:

Դիտարկենք հետևյալ օրինակը:

Նշանակենք A -ով $\mathbb{R}_3$ տարածությունը որևէ հարթությանը զուգահեռ բոլոր վեկտորների բազմությունը, B -ով՝ այդ հարթությանը ոչ զուգահեռ ինչ-որ հարթության զուգահեռ բոլոր վեկտորների բազմությունը, C -ով՝ ուստի՛ն հարթությանը ոչ զուգահեռ որևէ ուղղին զուգահեռ բոլոր վեկտորների բազմությունը: Հասկանալի է, որ A , B , C բազմությունները $\mathbb{R}_3$ -ի ենթատարածություններ են և մենք կունենանք.

$$\mathbb{R}_3 = A + \mathbb{R}_3,$$

$$\mathbb{R}_3 = A + B,$$

$$\mathbb{R}_3 = A + C:$$

Այս երեք օրինակներում էլ մինևույն $\mathbb{R}_3$ տարածությունը ստացվել է նրա երեք ենթատարածությունները միևնույն A ենթատարածությանը գումարելով: Ո՞ր դեպքում են ավելի քիչ տարրերի մասնակցում $\mathbb{R}_3$ -ը ստանալու համար: Հասկանալի է, որ նշված իմաստով բավագույնը երեքը վերլուծությունն է: Միավորմանով, այն միակն է, որն սղիլի գումար է և որի հումար ենթատարածությունների հասումը հավասար է զրոյական ենթատարածությանը: Պարզվում է, որ այս օրինաչափությունը պատահական չէ:

ՊՆԴՈՒՄ 16.21. V տարածության V_1 և V_2 ենթատարածությունների $V_1 + V_2$ գումարը *ուղիղ է այն և միայն այն դեպքում, եթե*

$$V_1 \cap V_2 = \{0\} :$$

Ապացույց. Դիցուք՝ V վեկտորական տարածության V_1 և V_2 ենթատարածությունների $V_1 + V_2$ գումարը սղիլ է: Եթե այդ դեպքում $u \in V_1 \cap V_2$, ապա կունենանք նուև $-u \in V_1 \cap V_2$ և հետևապես՝

$$0 = 0 + 0, \quad 0 = -u + u,$$

որտեղ $0, -u \in V_1, 0, u \in V_2$: Այստեղից կստանանք՝ $0 = u$:

Հսկասակը, եթե ունենք

$$V_1 \cap V_2 = 0,$$

ապա

$$w = u + v = a + b, \quad a, u \in V_1, b, v \in V_2$$

դեպքում կունենանք

$$u - a = b - v :$$

Այստեղից կհետևի, որ այս հավասարության ուղ և ձախ մասերը պատկանում են V_1 և V_2 բազմություններից յուրաքանչյուրին: Եվ քանի որ նրանց հասումը հավասար է զրոյի, ապա

$$u = a, v = b :$$

Ուրեմն, իսկապես, $V_1 + V_2$ զամարը ուղիղ է: □

ՄԱՀԱՆՈՒՄ 16.22. Եթե V վեկտորական տարածություն յուրաքանչյուր սուրբ միակ ձևով վերածվում է իր $V_1, V_2, \dots, V_n$ ենթատարածությունների սուրբերի գումարի տեսքով, ուստի V -ն կոչվում է այդ ենթատարածությունների *սուղի գումար*: Այդ դեպքում մենք կգրենք.

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n :$$

ՊՆԴՈՒՄ 16.23. V K -վեկտորական տարածություն $V_1, V_2, \dots, V_n$ ենթատարածությունների

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

գումարը սուղիղ է այն և միայն այն դեպքում, երբ 0 -ն միակ ձևով է ներկայացվում որպես $V_1, V_2, \dots, V_n$ ենթատարածությունների սուրբերի գումար: Այսինքն՝ եթե

$$0 = v_1 + v_2 + \dots + v_n, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \dots, v_n \in V_n,$$

տարա

$$v_1 = 0, v_2 = 0, \dots, v_n = 0 :$$

Լեզույց. Բավական է ցույց առնել, որ ճշվում սլայմունի դեպքում ենթատարածությունների գումարի յուրաքանչյուր սուրբ միությունը ձևով ներկայացվում է որպես նրա գումարելիներից վերցրած սուրբերի գումար:

‘Իրար’

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n,$$

սրանի $v_1, w_1 \in V_1, v_2, w_2 \in V_2, \dots, v_n, w_n \in V_n$:

Այդ դեպքում՝

$$v_1 - w_1 + v_2 - w_2 + \dots + v_n - w_n = 0,$$

$$v_1 - w_1 \in V_1, v_2 - w_2 \in V_2, \dots, v_n - w_n \in V_n :$$

Հետևապես՝

$$v_1 - w_1 = v_2 - w_2 = \dots = v_n - w_n = 0 :$$

Այսինքն՝

$$v_1 = w_1, v_2 = w_2, \dots, v_n = w_n :$$

Այսպիսով՝ ենթատարածությունների գումարը, իսկապես, ուղիղ է: □

17. ՍԿԱԼԱՐ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼՈՎ ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

17.1. *Վեկտորների սկալյար արտադրյալը:* Վեկտորների երկապայթյուն և ուղղահայացությունը հասկացությունների սկալյարայինը կարելի է սկզբնապես սահմանափակել իտալիական $\mathbb{R}_2$ և $\mathbb{R}_3$ վեկտորական տարածությունների վերաբերյալ մեր ուսումնասիրությունների խորությամբ: Այդ սահմանով բնական է սկզբնապես հասկացությունները ներմտնել նաև կամայական վեկտորական տարածություններում: Ինչպե՞ս անել այդ:

Ճանապարհներից մեկը կազմում է սկալյար արտադրյալի հասկացություն հետ:

Վերհիշենք $\mathbb{R}_3$ վեկտորական տարածություն մեջ սկալյար արտադրյալի սահմանումը: Իսկառ հետ α անկյուն կազմող x և y վեկտորների սկալյար արտադրյալ է անվանվում $|x||y| \cos \alpha$ քիվը՝

$$x \cdot y = |x||y| \cos \alpha :$$

Իմանալով վեկտորների սկալյար արտադրյալը՝ մենք կարող ենք որոշել և՛ վեկտորների ուղղահայացությունը, և՛ վեկտորի երկարությունը, վեկտորները ուղղահայաց են, եթե նրանց սկալյար արտադրյալը զրո է, իսկ x վեկտորի $|x|$ երկարությունը կորաշվի

$$|x| = \sqrt{x \cdot x}$$

բանաձևով:

Երբիմ դիտարկումները ցույց են տալիս, որ կամայական վեկտորական տարածություն մեջ նույնպես ուղղահայացություն և երկարություն հասկացությունները կկարողանանք ներմտնել, եթե իմենումք սկալյար արտադրյալի գոյությունը:

Իսկ ինչպե՞ս սահմանենք սկալյար արտադրյալը կամայական վեկտորական տարածություն համար: Նայից անդրադառնումք $\mathbb{R}_2$ տարածություն մեջ սկզբնապես սկալյար արտադրյալին: Հասկանալի է, որ այն վեկտորների յուրաքանչյուր կարգավորված զույգին տանում է մի իրական քիի հետ: Այսինքն՝ $\mathbb{R}$ դաշտի վրա սկզբնապես $\mathbb{R}_2$ վեկտորական տարածություն մեջ սահմանվում է սկալյար արտադրյալը $\mathbb{R}_2 \times \mathbb{R}_2$ բազմությունից $\mathbb{R}$ բազմության մեջ սկզբնապես արտադրյալներով՝

$$(\cdot) : \mathbb{R}_2 \times \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R} :$$

Հետևապես՝ K դաշտի վրա սկզբնապես V վեկտորական տարածություն մեջ արվելիք սկալյար արտադրյալն էլ պետք է լինի $V \times V$ -ից K -ի մեջ արված արտադրյալներով: Պարզ է նաև, որ սկալյար արտադրյալի այդ գործադրյալները պետք է բավարարի որոշակի սկզբնապես:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 17.1. g -ն կազմում է V K -վեկտորական տարածություն մեջ սկզբնապես սկալյար արտադրյալ, եթե

$$g : V \times V \rightarrow K$$

և V -ի կամայական u, v, w և K -ի կամայական k տարրերի համար.

$$\text{ա. } g(u, v) = g(v, u),$$

$$\text{բ. } g(u + v, w) = g(u, w) + g(v, w),$$

$$\text{գ. } g(\alpha u) = \alpha g(u):$$

Սկալյար արտադրյալը կոչվում է *չվերածվող*, եթե

$$u \neq 0 \Rightarrow g(u, u) \neq 0 :$$

K դաշտի $g(u, v)$ տարրը կոչվում է u և v վեկտորների *սկալյար արտադրյալ* կամ *ց-սկալյար արտադրյալ*, իսկ V տարածությունը՝ *ց-սկալյար արտադրյալով վեկտորական տարածություն*:

Օրինակներ:

ա. $\mathbb{R}_2$ և $\mathbb{R}_3$ տարածությունների վրա սրված՝ վերևում դիտարկված սկալյար արտադրյալը այս ընդհանուր հասկացություն մի մասնավոր օրինակ է: Այն չվերածվող է:

բ. V վեկտորական տարածության կամայական u և v տարրերի համար ընդունելով

$$u \cdot v = 0,$$

կստանանք զրոյական սկալյար արտադրյալը: Այն վերածվող է:

գ. $\mathbb{R}_2$ տարածություն մեջ վերցնենք երկու՝ u և v վեկտորներ, որոնք կազմում են 30° անկյուն, և a, b, c, d իրական թվերի համար ընդունենք՝

$$(au + bv) \cdot (cu + dv) = ac + bd :$$

Դժվար չէ ստուգել, որ այս կերպ մենք կստանանք $\mathbb{R}_2$ -ի մեջ սրված չվերածվող սկալյար արտադրյալ:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 17.2. Յույց սովեք, որ գ օրինակում սահմանված սկալյար արտադրյալը բավարարում է սկալյար արտադրյալի սահմանման պայմաններին և չվերածվող է:

դ. K^n տարածության մեջ սկալյար արտադրյալը կարելի է սահմանել հետևյալ կերպ.

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \cdot (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n :$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 17.3. Յույց սովեք, որ դ օրինակում սահմանված սկալյար արտադրյալը բավարարում է սկալյար արտադրյալի սահմանման պայմաններին: Այսպես, այս $K = \mathbb{R}$ դեպքում այն չվերածվող է:

ՊՆԴՈՒՄ 17.4. Եթե g -ն V -ի մեջ տրված ինչ-որ սկալյար արտադրյալ է, ապա V -ի կամայական u, v, w և K -ի կամայական α, β տարրերի համար՝

ա. $g(0, u) = g(u, 0) = 0,$

բ. $g(\alpha u + \beta v, w) = \alpha g(u, w) + \beta g(v, w),$

գ. $g(\alpha u - \beta v, w) = \alpha g(u, w) - \beta g(v, w),$

դ. $g(w, \alpha u + \beta v) = \alpha g(w, u) + \beta g(w, v),$

ե. $g(w, \alpha u - \beta v) = \alpha g(w, u) - \beta g(w, v):$

Արդյունք. ա. Իսկապես՝

$$g(0, u) = g(0 \cdot 0, u) = 0 \cdot g(0, u) = 0 :$$

բ. Ունենք՝

$$g(\alpha u + \beta v, w) = g(\alpha u, w) + g(\beta v, w) = \alpha g(u, w) + \beta g(v, w) :$$

գ. դ. ե. Այսպեսով մեր կառույցը լինքնուրույն: $\square$

17.2. Վեկտորների օրթոգոնալ համակարգը և օրթոգոնալ բազիսը: $\mathbb{R}_2$ տարածության մեջ վեկտորների ուղղահայացությունը նույնն է, ինչ նրանց սկալյար արտադրյալի գրա լինելը: Սկալյար արտադրյալի գրա լինելու միջոցով է ստեղծվում ուղղահայացությունը մաս ընդհանուր դեպքում:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 17.5. g սկալյար արտադրյալով V վեկտորական տարածության u և v վեկտորները կոչվում են *սուղահայաց* կամ *g-սուղահայաց*, եթե

$$g(u, v) = 0 :$$

Հասկանալի է, որ 0 վեկտորը ուղղահայաց է ցանկացած վեկտորի:

Դիտարկենք նախորդ կետի գ օրինակը: Ահմեդյա է, որ այնտեղ մեր վերջրած u և v վեկտորների համար $u \cdot v = 0$: Այսինքն՝ 30° անկյուն կազմող վեկտորները խլուր ուղղահայաց են: Այս համագումները չախար է մեզ մոտ քերականություն առաջացնի տառգված արդյունքների նկատմամբ, քանի որ այս դեպքում մենք վեկտորների ուղղահայացությունը դիտարկում ենք այլ սկալյար արտադրյալի նկատմամբ:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 17.6. Դուք նախորդ կետի դ օրինակում ստեղծված սկալյար արտադրյալի նկատմամբ $\mathbb{R}^n$ տարածության մեջ $(1, 0, \dots, 0)$ վեկտորին ուղղահայաց վեկտորների բազմությունը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 17.7. Վեկտորների համակարգը կոչվում է *օրթոգոնալ*, եթե նրա կամույակում երկու անդամներ վախճողուստիաց են:

ՊՆԴՈՒՄ 17.8. Եթե սխալար սրտադրյալը չվերածվող է, տարա վեկտորական տարածության ոչ գրայական վեկտորների ցանկացած օրթոգոնալ համակարգ գծաքնն անկախ է:

Ապացույց. Դիցույ՝ ունենք չվերածվող g սկալյար արտադրյալով վեկտորական տարածության ոչ գրայական վեկտորների $v_1, v_2, \dots, v_n$ օրթոգոնալ համակարգը և

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K :$$

Այլ դեպքում՝

$$0 = g(0, v_1) = g(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n, v_1) =$$

$$= \alpha_1 g(v_1, v_1) + \alpha_2 g(v_2, v_1) + \dots + \alpha_n g(v_n, v_1) = \alpha_1 g(v_1, v_1) :$$

Այստեղից, քանի որ $g(v_1, v_1) \neq 0$, կստանանք $\alpha_1 = 0$: Նույն կերպ ցույց կաանք, որ մաս

$$\alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 :$$

$\square$

Այս պնդումից մասնավորապես հետևում է, որ եթե չվերածվող սկալյար արտադրյալով վեկտորական տարածությունը ունի n չափադրականությունը, ապա n հատ ոչ զրոյական վեկտորների օրթոգոնալ համակարգը այդ տարածության բազիս է:

ՄԱՀԱՄԱՌԻՄ 17.9. Մկալար արտադրյալով վեկտորական տարածության բազիսը, որի անդամները զույգ տալիս զույգ վոլտադրականաց են, կոչվում է *օրթոգոնալ բազիս*:

ՊՆԴՈՒՄ 17.10. Չվերածվող սկալյար արտադրյալով վերջավոր չափադրականություն վեկտորական տարածությունն ունի օրթոգոնալ բազիս:

Ապացույց. Ապացուցման այս եղանակը կոչվում է նաև օրթոգոնալացման *սղացն*:

Դիցուք՝ ունենք g չվերածվող սկալյար արտադրյալով վերջավոր չափադրականություն V վեկտորական տարածությունը և նրա

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

բազիսը: Այս բազիսի միջոցով, ինդուկցիայով, կառուցենք V -ի օրթոգոնալ բազիս: Ընդդրենք՝

$$w_1 = v_1 :$$

Ենթադրենք՝ այդքն կառուցել ենք ոչ զրոյական վեկտորների

$$w_1, w_2, \dots, w_m$$

օրթոգոնալ համակարգը, $m < n$: w_{m+1} վեկտորը կառուցենք հետևյալ կերպ.

$$w_{m+1} = v_{m+1} + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_m w_m,$$

որտեղ

$$\alpha_i = -g(v_{m+1}, w_i) / g(w_i, w_i), i = 1, 2, \dots, m :$$

Այդ դեպքում՝

$$\begin{aligned} g(w_{m+1}, w_i) &= g(v_{m+1} + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_m w_m, w_i) = \\ &= g(v_{m+1}, w_i) + \alpha_1 g(w_1, w_i) + \alpha_2 g(w_2, w_i) + \dots + \alpha_m g(w_m, w_i) = \\ &= g(v_{m+1}, w_i) + \alpha_i g(w_i, w_i) = g(v_{m+1}, w_i) - g(v_{m+1}, w_i) = 0 : \end{aligned}$$

Այսինքն՝

$$g(w_{m+1}, w_i) = 0, i = 1, 2, \dots, m :$$

Միևնույն ժամանակ,

$$w_{m+1} \neq 0,$$

քանի որ հավասար դեպքում $v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}$ համակարգը կլինեք զծայեն կախյալ, ինչը հակասում է պնդման պայմաններին:

Շարունակելով այս ընթացքը՝ n քայլից հետո կառուցումք ոչ զրոյական վեկտորների

$$w_1, w_2, \dots, w_n$$

օրրոգումնայ համակարգը, որը և կլինի գծաբն ունկալի, ուրեմն՝ նուկ բազիս՝ V տարածության համար: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 17.11. Չվերածվող սկալյար տրաստրյուկտվ վերջուրը չստիպուկումայան վեկտորական տարածություն ոչ գրայուկան վեկտորների յուրարումչյուր օրրոգումնայ համակարգ կարելի է լրացնել մինչև այդ տարածություն օրրոգումնայ բազիս:

Արդյույց. Դիցուք՝ ունենք V վեկտորական տարածության ոչ գրայուկան վեկտորների $v_1, v_2, \dots, v_m$ օրրոգումնայ համակարգը: Համաձայն 17.8 պնդումն՝ այն կլինի գծաբն ունկալի: Լրացնենք այդ համակարգը մինչև V -ի

$$v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n$$

բազիս: Վերջինիս նկատմամբ կիրառելով օրրոգումնայացման պրոցեսը՝ սկսած m -րդ րայից, կատումնք պահանջվող սկալյուրնք: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 17.12. Լրացրեք վերջին պնդման տալուցույցի մամբամումնքը:

17.3. Օրրոգումնայ լրացում: Նորից դիտարկենք g սկալյար տրաստրյուկտվ V վեկտորական տարածությունը: Վերցնենք նրա M ներառումությունը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 17.13. V -ի n վեկտոր կոչվում է օրրոգումնայ M բազմությանը, եթե այն ուղղահայաց է M -ի յուրարումչյուր վեկտորին: M -ին օրրոգումնայ բալր վեկտորների բազմությանը անվումենք M -ի օրրոգումնայ լրացում և գրումենք $M^\perp$ տեսքով:

Օրինակներ:

ա. $\mathbb{R}_3$ -ի որևէ ոչ գրայուկան վեկտորի օրրոգումնայ լրացումը կլինի այդ վեկտորին ուղղահայաց հարությունը գազմեն վեկտորների բազմությանը:

բ. Դիտարկենք կամայական K դաշտից վերցրած գործակիցներով գծային համառն հավասարումների հեռայույ

$$(6) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

համակարգը: Նշումուկենք՝

$$u_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}),$$

$$u_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn}) :$$

Այդ դեսլրում՝ $u_1, \dots, u_m \in K^n$ և

$$\{u_1, \dots, u_m\}^\perp$$

բազմությանը (6) համակարգի լուծումների բազմությանն է, եթե սկալյար խրաույուրը ստիմումված է 17.1 կեսի պ օրինակով:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 17.14. Ասալուցեք վերջին դասադությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 17.15. Սկալյար արտադրյալով վեկտորական տարածություն կամայական ոչ լրատարի ենթաբազմություն օրրոգունու լրացումը նրա ենթաադրածություն է:

Ապացույց. Վերցնենք g սկալյար արտադրյալով V վեկտորական տարածության M ոչ լրատարի ենթաբազմությունը: Դիցուք՝ $u, v \in M^\perp$: Այդ դեպքում M -ի կամայական w վեկտորի համար

$$g(u, w) = g(v, w) = 0 :$$

Հաշվի տոնելով այս հավասարությունները՝ կստանանք

$$g(u + v, w) = g(u, w) + g(v, w) = 0 :$$

Այսինքն՝

$$u + v \in M^\perp$$

Նույն կերպ ցույց կստանք, որ K -ի կամայական α սուրբի համար

$$\alpha u \in M^\perp :$$

Այսպիսով՝ մենք ցույց սովեցինք, որ $M^\perp$ -ը V -ի ենթաադրածություն է: □

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 17.16. Ապացուցեք, որ եթե $u \in M^\perp$, ապա $\alpha u \in M^\perp$:

ՊՆԴՈՒՄ 17.17. Եթե $M_1 \subseteq M_2$, ապա $M_2^\perp \subseteq M_1^\perp$:

Ապացույց. Ապացուցումը կստանք ինքնուրույն: □

ՊՆԴՈՒՄ 17.18. Սկալյար արտադրյալով վեկտորական տարածություն կամայական M ենթաբազմություն օրրոգունու լրացումը հախաար L նրա զծույին բաղանքի օրրոգունու լրացումը: Այսինքն՝

$$M^\perp = L(M)^\perp :$$

Ապացույց. Համաձայն նախորդ սմդման՝

$$L(M)^\perp \subseteq M^\perp :$$

Ցույց ստանք, որ

$$M^\perp \subseteq L(M)^\perp :$$

Վերցնենք $v \in M^\perp$: Ցույց ստանք, որ $g(u, v) = 0$, որաեղ $u \in L(M)$: Դիցուք՝

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K, u_1, \dots, u_n \in M :$$

Այդ դեպքում

$$g(u, v) = g(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n, v) = \alpha_1 g(u_1, v) + \cdots + \alpha_n g(u_n, v) = 0 :$$

Հետևապես՝

$$v \in L(M)^\perp :$$

□

ՊԼԴՌԻՄ 17.19. Չվերածվող սկալյար արտադրյալով վերջավոր չափականության յուրաքանչյուր վեկտորական տարածություն համաստի է իր ցունկացած ենթատարածություն և այդ ենթատարածություն օրթոգոնալ լիսցման ուղիղ գումարին: Այսինքն՝

$$V = U \oplus U^\perp,$$

որտեղ V -ն և U -ն պնդման մեջ նշված տարածությունն ա նրա ենթատարածություն են:

Ապացույց. Համաձայն 16.21 պնդման՝ բովանդակում է սպացուցել երկու հավասարություն.

$$\text{ա. } U \cap U^\perp = \{0\};$$

Իսկույն, եթե $u \in U \cap U^\perp$, ապա $g(u, u) = 0$: Իսկ սա նշանակում է՝ $u = 0$, քանի որ g -ն չվերածվող սկալյար արտադրյալ է:

$$\text{բ. } V = U + U^\perp;$$

Իսկապես, վերցնենք U ենթատարածություն որևէ $u_1, \dots, u_k$ օրթոգոնալ բազիս և այն լրացնենք մինչև V -ի $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$ օրթոգոնալ բազիս. քանի որ V -ն ունի վերջավոր չափադասականություն, ապա մենք դա կարող ենք անել: Հասկանալի է, որ

$$u_{k+1}, \dots, u_n \in U^\perp;$$

հետևապես՝

$$V \subseteq U + U^\perp;$$

Իսկ $U + U^\perp \subseteq V$ ընդգրկումը աեղի ունի ականայտություն: $\square$

ՊԼԴՌԻՄ 17.20. Չվերածվող սկալյար արտադրյալով վերջավոր չափադասականություն V վեկտորական տարածություն կամայական U ենթատարածություն համար

$$(U^\perp)^\perp = U:$$

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: $\square$

17.4. Էվկլիդեսյան վեկտորական տարածություններ: Սկալյար արտադրյալի ուսկայությունը որաշակի հնարավորություններ է ավելացնում վեկտորական տարածությունների ուսումնասիրության խնդրում: Սակայն մենք դեռևս հետո ենք $\mathbb{R}_3$ վեկտորական տարածությունում աուկու հնարավորություններից. այնաեղ կա վեկտորի երկարություն հասկացությունը: Իսկ կամայական դաշտի վրա աքված վեկտորական տարածություններում մտցված սկալյար արտադրյալի գաղափարը դեռևս հնարավորություն չի տալիս ներմոծելու վեկտորի երկարության հասկացությունը: Անու այսուեղ երկարություն ընձևում հնարավորությունները ուսումնալու համար մենք ստիպված ենք սահմանափակվել միայն իրական վեկտորական տարածությունների պիստրկմամբ:

Հալիսալես մեզ անհրաժեշտ է առանձնացնել սկալյար արտադրյալի մի կարևոր աեսակ:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 17.21. V իրական վեկտորական տարածության մեջ արվում g սկալյար արտադրյալը կոչվում է *դրականորեն որոշված*, եթե V -ի կամայական v ոչ զրոյական վեկտորի համար

$$g(v, v) > 0 :$$

Օրինակներ: ա. $\mathbb{R}_3$ -ում արվում $u \cdot v = |u||v| \cos \alpha$ սկալյար արտադրյալը դրականորեն որոշված է:

բ. $\mathbb{R}^n$ իրական վեկտորական տարածություն մեջ սկալյար արտադրյալը սանձանքներ հետևյալ կերպ.

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n :$$

Մենք արդեն ցույց ենք տվել, որ այս կերպ արվում է սկալյար արտադրյալ: Այն դրականորեն որոշված է, քանի որ եթե $(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, ապա

$$(x_1, \dots, x_n)^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 > 0 :$$

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 17.22. Դասկանորեն որոշված սկալյար արտադրյալով վեկտորական տարածությունները կոչվում են *էվկլիդես վեկտորական տարածություններ*:

Օրինակներ: ա. $\mathbb{R}_2$ և $\mathbb{R}_3$ վեկտորական տարածությունները, նրանց վրա արված $u \cdot v = |u||v| \cos \alpha$ սկալյար արտադրյալով, էվկլիդես վեկտորական տարածություններ են:

բ. $\mathbb{R}^n$ իրական վեկտորական տարածությունը, նրա վրա արված

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

սկալյար արտադրյալով, էվկլիդես վեկտորական տարածություն է:

Այժմ դիտարկենք կամայական V էվկլիդես վեկտորական տարածությունը և, օգտագործելով նրա վրա արված դրականորեն որոշված g սկալյար արտադրյալը, ներմուծենք վեկտորի երկարության գաղափարը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 17.23. V -ի կամայական v վեկտորի *երկարություն* կամ *նորմ* է կոչվում $g(v, v)$ ոչ բացասական իրական րիի յուսակուսի արմուսը:

Եթե v վեկտորի նորմը գրառենք $|v|_g$ տեսքով, ապա, համաձայն այս սանձանքան,

$$|v|_g = \sqrt{g(v, v)} :$$

Մասնագրապես, $\mathbb{R}_3$ տարածություն ու նրա վրա արված սովորական սկալյար արտադրյալի համար ստանում ենք

$$|v| = \sqrt{x \cdot x}$$

հայանի հավասարությունը, որը և էվմք է ծառայել քերված սանձանքան համար:

Հասկանալի է, որ յուրաքանչյուր վեկտորի նորմը ոչ բացասական է: Օգտակար են նաև հետևյալ հատկությունները:

ՊՆԴՈՒՄ 17.24. g սկալյար արտադրյալով V էվկլիդես վեկտորական տարածություն կամայական v վեկտորի և α իրական րիի համար

$$|\alpha v|_g = |\alpha| |v|_g :$$

Ապացույց. Ասկսուցումը ունիքուպես հետևում է նորմի սահմանումից: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 17.25. (*Դուշի-Բունյուկովսկիի ունեաւիտարայունը*): g սկալյար ար-
տադրյալով V չվիլյույան վեկտորական տարածություն կամայական u և v վեկտոր-
ների համար

$$|g(u, v)| \leq |u|_g \cdot |v|_g :$$

Ապացույց. Կարող ենք դիտարկել միայն u, v վեկտորների՝ զրոյից տարբեր
դեպքերը: Օգտվելով դրականորեն որոշված սկալյար արաադրյալի հատկություն-
ներից՝ հաջորդաբար կստանանք.

$$\begin{aligned} g(|v|_g u - |u|_g v, |v|_g u - |u|_g v) &\geq 0, \\ |v|_g^2 g(u, u) - 2|u|_g |v|_g g(u, v) + |u|_g^2 g(v, v) &\geq 0, \\ 2|u|_g^2 |v|_g^2 - 2|u|_g |v|_g g(u, v) &\geq 0, \\ |u|_g |v|_g (|u|_g |v|_g - g(u, v)) &\geq 0 : \end{aligned}$$

Քանի որ

$$u \neq 0 \neq v,$$

ապա $|u|_g > 0, |v|_g > 0$ և վերջին անհավասարությանից կստանանք

$$|u|_g |v|_g - g(u, v) \geq 0$$

կամ՝

$$g(u, v) \leq |u|_g |v|_g :$$

Արված դատադրյուններում u -ն փոխարինելով $-u$ -ով կստանանք նաև

$$-g(u, v) \leq |u|_g |v|_g :$$

Հետևապես՝

$$|g(u, v)| \leq |u|_g |v|_g :$$

$\square$

ՊՆԴՈՒՄ 17.26. (*Եռունկյուն ունեաւիտարայունը*): g սկալյար արտադրյալով
 V չվիլյույան վեկտորական տարածություն կամայական u և v վեկտորների համար

$$|u + v|_g \leq |u|_g + |v|_g :$$

Ապացույց. Իսկապես,

$$\begin{aligned} |u + v|_g^2 &= g(u + v, u + v) = g(u, u) + 2g(u, v) + g(v, v) = \\ &= |u|_g^2 + |v|_g^2 + 2g(u, v) = \\ &= (|u|_g + |v|_g)^2 + 2(g(u, v) - |u|_g |v|_g) \leq (|u|_g + |v|_g)^2 : \end{aligned}$$

Վերջին անհավասարությունը գրելիս օգտագործվել է

$$g(u, v) \leq |u|_g |v|_g$$

անհավասարությունը: $\square$

f արաուսարակերանի կոչվում է *իզանոքֆիզ* *V* և *IV* սուրսածույթունների միջև:

Օրինակ:

Դիսարկներ $\mathbb{R}_3$ -ում

$$u \cdot v = |u||v| \cos \alpha$$

սկալյար արտադրյալը, իսկ $\mathbb{R}^3$ -ում սկալյար արտադրյալը ստանք

$$(a, b, c) \cdot (a', b', c') = aa' + bb' + cc'$$

բանաձևով: Այդ դեպքում ստացվում երկու էվկլիդեսյան վեկտորական սարածությունները կլինեն իրար իզոմորֆ:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 17.31. Կոտուցեր իզոմորֆիզմ նվազող օրինակում դիսարկ-ված էվկլիդեսյան տարածությունների միջև:

ՊՆԴՈՒՄ 17.32. Սկալյար արտադրյալով վեկտորական տարածությունների միջև տրված իզոմորֆիզմի տանջարթունքը համարժեքայուն է:

Ապացույց. Ինչպես լոմերիկ, օղակները և վեկտորական տարածությունները դեպքերում, այստեղ նույնպես անխլուժիչա է դիսարկել և ցույց տալ նույնական արտասլայակերման իզոմորֆիզմ լինելը, իզոմորֆ արտասլայակերմանը հակադարձ արտասլայակերման իզոմորֆիզմ լինելը և իզոմորֆիզմների արտադրյալի իզոմորֆիզմ լինելը:

Այս երեք հատկությունները բոլոր են ստվա համապատասխանորար սարացուցելու սկալյար արտադրյալով վեկտորական տարածությունների իզոմորֆիզմի անդրադարձելիությունը, համաչափությունը և վախտնցելիությունը: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 17.33. Լրացրեք նվազող պնդման սարացուցիչի մանրամասները:

Նկատենք, որ եթե սկալյար արտադրյալով վեկտորական տարածությունները իզոմորֆ են, ապա նրանք իզոմորֆ են նաև որպես վեկտորական տարածություններ: Այս դիտողությունը հաճախ է գործածվում:

ՊՆԴՈՒՄ 17.34. Վերջավոր չափադասությունում էվկլիդեսյան տարածությունները իզոմորֆ են այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանք ունեն միևնույն չափադասություն:

Ապացույց. Դիցուք՝ V և W վերջավոր չափադասությունում էվկլիդեսյան տարածությունները իզոմորֆ են: Համաձայն վերջին դիտողության՝ իզոմորֆ կլինեն նաև V և W վերջավոր չափադասությունում վեկտորական տարածությունները: Համաձայն 15.36 պնդման՝ մենք կստանանք

$$\dim V = \dim W :$$

Հսկառակը, դիցուք՝ g սկալյար արտադրյալով՝ V և h սկալյար արտադրյալով՝ W վերջավոր չափադասությունում էվկլիդեսյան տարածությունները ունեն նույն՝ n չափադասությունը: Դիսարկները նրանցից յուրաքանչյուրում մեկական օրթոնորմալիզացված բազիսներ՝

$$v_1, \dots, v_n \text{ և } w_1, \dots, w_n:$$

Այդ դեպքում V -ի յուրաքանչյուր v վեկտոր կգրվի

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

առնաքով: Դիստրիկենք հետևյալ տրամադրություններով.

$$f(v) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K :$$

Մենք արդեն ասվացուցել ենք, որ f -ը կլինի V և W վեկտորական տարածությունների իզոմորֆիզմ (տես՝ 15.36 պնդումը): Մնում է ասվացուցել 17.30 ստեմունման գ կեսով՝

$$h(f(u), f(v)) = g(u, v) :$$

Իսկապես, դիցուք՝

$$u = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n :$$

Այդ դեպքում՝

$$h(f(u), f(v)) = \alpha_1 \beta_1 + \cdots + \alpha_n \beta_n = g(u, v) :$$

Այն, ինչ սլուսումնջվում էր ասվացուցել:

□

ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎՆԵՐ ԵՎ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐ

18. ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎՆԵՐ

18.1. *Գծային հանրահաշիվ:* Վեկտորական ստորամոդուլներին ուսումնասիրություն ընթացքում վեկտորների գումարման գործադրյալն հետ միասին եւս՝ սահմանափակումներն ու լինում դիտարկել վեկտորական ստորամոդուլում վրա տրված այլ հանրահաշիվական գործադրյալներ: Այս կերպ ստացվում են հանրահաշիվական համակարգեր, որոնցից ամենակարեւորը գծային հանրահաշիվներն են:

ՄԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 18.1. K դաշտի վրա տրված *գծային հանրահաշիվ* է կոչվում այդ դաշտի վրա տրված վեկտորական ստորամոդուլներ, որի մեջ, բացի գումարման և սկալյարով բազմապատկման գործողություններից, սահմանվում է նաև մեկ այլ երկ-առի հանրահաշիվական գործողություն, որը գումարման գործողության հետ կապված է բաշխական օրենքով, իսկ սկալյարով բազմապատկման գործողության հետ՝ զուգորդական և տեղափոխական օրենքներով:

Այսպիսով՝ $(A, +, \cdot_1, \cdot_2)$ բոլորով կոչվում է K դաշտի վրա տրված գծային հանրահաշիվ, եթե տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

ա. $(A, +, \cdot_1)$ եռյակը օղակ է,

բ. $(A, +, \cdot_2)$ եռյակը K -վեկտորական ստորամոդուլն է,

գ. ինչպիսին էլ լինեն K -ի α և A -ի x, y աստիճանները՝

$$\alpha \cdot_2 (x \cdot_1 y) = (\alpha \cdot_2 x) \cdot_1 y = x \cdot_1 (\alpha \cdot_2 y) :$$

Երբեմն «գծային հանրահաշիվ» արտահայտություն փոխարեն կօգտագործենք հանրահաշիվ բառը: Հաճախ A -ն է անվանվում K դաշտի վրա տրված գծային հանրահաշիվ:

Ինչպես հանրահաշիվի ստորերը իրարով բազմապատկելիս, այնպես էլ հանրահաշիվի ստորեր սկալյարով բազմապատկելիս, ամբարտառ, գալծամվում է միևնույն՝ մշտն, իսկ հաճախ էլ այն բաց է թողնվում:

Հատկանայի է, որ գծային հանրահաշիվը միաժամանակ վեկտորական ստորամոդուլն է և օղակ: Հետևապես՝ նրա ստորերը բաժանարար են բոլոր այն սկալյաններին, որոնց բաժանարար են վեկտորական ստորամոդուլն ստորերը և օղակների ստորերը:

Գծային հանրահաշիվը՝ որպես վեկտորական ստորածություն, ունի բազիս. այն կազմում է նաև գծային հանրահաշիվի բազիս: Գծային հանրահաշիվը՝ որպես վեկտորական ստորածություն, ունի նաև չափադականություն, որը կազմում է *գծային հանրահաշիվի չափադականություն*:

Որպես օղակ՝ գծային հանրահաշիվը կարող է լինել տեղավորյալի, զուգարդյալի, միավորազ, առանց զրոյի բաժանարարների: Բայց այդ դեպքերում համապատասխան անվանումն ունի նաև գծային հանրահաշիվը: Ավելացնենք նաև, որ երբ գծային հանրահաշիվը՝ որպես օղակ, մարմին է, ապա այդ դեպքում գծային հանրահաշիվը կազմում է *բաժանումով հանրահաշիվ*:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 18.2. Ակայցուցեք, որ բաժանումով հանրահաշիվը զրոյի բաժանարարներ չունի:

Եթե ունենք K դաշտի վրա արված վերջավոր չափադականության A գծային հանրահաշիվի

$$v_1, \dots, v_n$$

բազիսը, ապա A -ի կամայական u և v ստորերրի համար

$$u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n, \quad v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n :$$

Այստեղից՝

$$uv = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j u_i v_j :$$

Այսպիսով՝ վերջավոր չափադականության գծային հանրահաշիվում կամայական ստորերրի բազմապատկումը հանգում է նրա բազիսային վեկտորների բազմապատկման: Նկատի ունենալով այս հանգամանքը՝ որոշ գծային հանրահաշիվներում բազմապատկման գործողության փոխարեն արվում է միայն բազիսային վեկտորների բազմապատկման աղյուսակը:

Բերենք գծային հանրահաշիվի մի քանի օրինակ:

ա. Եթե K դաշտը L դաշտի ենթադաշտ է, ապա L -ը K դաշտի վրա արված գծային հանրահաշիվ է: Մասնավորապես, կոմպլեքս թվերի $\mathbb{C}$ դաշտը իրական թվերի $\mathbb{R}$ դաշտի վրա արված գծային հանրահաշիվ է: Այն տեղավորյալի է, զուգարդյալի, միավորազ և բաժանումով: Նրա չափադականությունը հավասար է 2-ի: Որպես բազիսային վեկտորներ կարելի է վերցնել $1, i$ վեկտորները: Բազիսային վեկտորների բազմապատկման աղյուսակն է՝

$$1 \cdot 1 = 1, \quad 1 \cdot i = i \cdot 1 = i, \quad i \cdot i = -1 :$$

բ. Դիտարկենք $\mathbb{R}_3$ բազմությունը և նրա ստորերրի, այսինքն՝ ստորածության վեկտորների զուամբման, սկալյարով բազմապատկման և վեկտորական արտադրյալի գործողությունները: Այս գործողությունների նկատմամբ $\mathbb{R}_3$ -ը կազմում է 3 չափադականության հանրահաշիվ:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 18.3. Արդյո՞ք $\mathbb{R}_3$ հանրահաշիվը.

ա. տեղավորյալի է,	գ. միավորազ է,
բ. զուգարդյալի է,	դ. բաժանումով է:

18.2. Քվատերնիոնների հանրահաշիվը: Այժմ դիտարկենք ևս մի կարևոր գծային համարահաշիվ: Այն հասկանալի է մեզ նրանով, որ մեր դիտարկած առաջին մտրիցն է, սրը դաշտ $\mathbb{K}$:

Դիցուք՝ V -ն

$$e, i, j, k$$

բազիսով բառարանի իրական վեկտորական տարածություն է: Վերածենք այն գծային համարահաշիվի՝ բնորոշելով բազիսային վեկտորների բազմապատկման հետևյալ ստյուսակը:

.	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Այն կոչվում է *քվատերնիոնների համարահաշիվ*: Նրա տարրերը կոչվում են *քվատերնիոններ*:

Յուրաքանչյուր քվատերնիոն ունի

$$ae + bi + cj + dk$$

տեսք: Քվատերնիոնների հետագու ուսումնասիրությունից սուտջ, ինչպես կոմպլեքս թվերի դեպքում, կուսարենք զրոյումն մի սյուրգեցում: Կամայական a իրական թվի համար ae կոչվենք՝

$$a = ae :$$

Նույն կուսարենք հետևյալ նկատառումը: Կամայական a և b իրական թվերի համար.

$$\text{ու. եթե } a = b, \text{ ապա } ae = be,$$

$$\text{բ. } (a + b)e = ae + be,$$

$$\text{գ. } (a \cdot b)e = ae \cdot be :$$

Այս նկատառումները ցույց են տալիս, որ $a = ae$ մուլտիպլիկատիվ հակասության մեջ չի մտնում քվատերնիոնների գումարման ու բազմապատկման գործադրությունների հետ:

ՄԱՀԱՄԱՐՈՒՄ 18.4. $a + bi + cj + dk$ և $a - bi - cj - dk$ քվատերնիոնները կոչվում են իրար նկատմամբ *համալուծ*: z քվատերնիոնի համալուծը նշանակվում է $\bar{z}$ -ով:

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ թիվը կոչվում է $a + bi + cj + dk$ քվատերնիոնի *նորմ*: z քվատերնիոնի նորմը նշանակվում է նաև $|z|$:

ԴՆՆՈՒՄ 18.5. Յուրաքանչյուր քվատերնիոնի նորմը հուսարար է ուղի քվատերնիոնի և նրա համալուծի ուղիստրյուպին: Այսինքն՝ կամայական z քվատերնիոնի համար

$$|z| = z \cdot \bar{z} :$$

Ապոցույց. Իսկապես, երև

$$z = a + bi + cj + dk,$$

ապա

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \\ &+ (-ab + ba - cd + dc)i + (-ac + ac - db + bd)j + \\ &+ (-ad + da - bc + cb)k = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |z| : \end{aligned}$$

□

Այժմ անցնենք թվատերմիոնների հանրահաշվի ռատոմնափայտյունը:

ՊՆԴՈՒՄ 18.6. *Թվատերմիոնների Q հանրահաշիվը.*

ա. միավորով է,

բ. զուգարկական է,

գ. սլ տեղափոխական է,

դ. բաժանումով է,

ե. ունի 4 չտփոխականությունը:

Ապոցույց. Նույն անենք երկու դատողություն:

Առաջին: Ամմիական սատուումով կարող ենք ցույց տալ, որ թվատերմիոնները բազմապատկվում են հետևյալ կոմունով.

$$\begin{aligned} (a + bi + cj + dk)(a' + b'i + c'j + d'k) &= \\ &= aa' - bb' - cc' - dd' + \\ &+ (ab' + ba' + cd' - dc')i + \\ &+ (ac' + ca' + db' - bd')j + \\ &+ (ad' + da' + bc' - cb')k : \end{aligned}$$

Երկրորդ: Ընդհանրապես մենք անենք թվատերմիոնների հանրահաշվի արատ-դըրյալային հատկությունների տալուցուցմուն երկու ճանապարհ. կամ օգտվել թվատերմիոնների բազմապատկմուն բերվում կոմունից և սատուել բազմապատկմանը վերաբերող այս կամ այն հատկությունը, կամ էլ օգտվել բազմապատկման վերաբերող բազմապատկմուն տալուսակից և թվատերմիոնների բազմապատկմուն հատկությունները սատուել միայն բազմապատկմուն վերաբերող հատկությունները: Երկու դատողությունները հարակցություններ անելու համար:

Այս երկու դատողությունները հաշվի են տունվում այնդմուն մեք նշվում հատկությունները տալուցուցելու համար:

ա. Այսպիսի դերը խաղում է 1 թվատերմիոնը:

բ. Այսպիսիվում է ամմիականությունը:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 18.7. *Ցույց տվել բազմապատկմուն վերաբերողների բազմապատկմուն զուգարկականությունը:*

գ. Բազմապատկման ոչ տեղափոխականությունը հետևում է, օրինակ,

$$ij \neq ji$$

անհավասարությունից:

դ. z օչ գլուխկոն բխաւերնիւնի հակադարձն է $\frac{\bar{z}}{|z|}$ բխաւերնիւնը.

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|} :$$

Իրաք, համաժայն 18.5 սնդման, $|z| = z \cdot \bar{z}$: Հետևապես՝

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|} = 1 :$$

□

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 18.8. Յույց սվեք, որ կամայական z բխաւերնիւնի համար

$$z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 :$$

18.3. Դժային հանրահաշիվների իզոմորֆիզմը: Այժմ դիտարկենք միևնույն դաշտի վրա տրված գծային հանրահաշիվների՝ ըստ էության իրար հավասար լինելու խնդիրը: Հասկանալի է, որ այստեղ նույնպես չափանիշները նույնը պետք է լինեն, ինչ խմբերի, օղակների և վեկտորական սուբադալայանների համար են եղել: Դիտարկենք, որ հանրահաշիվում ստան խմանադով էությանը հավասար հանրահաշիվներից մեկը, վերականգնել մյուսը՝ ինչպես ինքնակամ բազմադրույունները, այնպես էլ լույսը գործողությունները: Իսկ յուս համար անհրաժեշտ է գտնել հանրահաշիվներից մեկի այնպիսի վերադրում մյուսի վրա, որը համաժայնեցված լինի հանրահաշիվներում արված՝ գումարման, բազմապատկման և սկալյարով բազմապատկման գործողությունների հետ: Այսպիսով մենք համարում ենք ետևյալ սահմանմանը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 18.9. Միևնույն K դաշտի վրա տրված V և W գծային հանրահաշիվները կոչվում են *իզոմորֆ*, եթե գոյություն ունի սլնալիսի f վերադրում V և W բազմադրույունների միջև, որ V -ի կամայական x և y և K -ի α սուրբերի համար.

ա. $f(x + y) = f(x) + f(y)$,

բ. $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$,

գ. $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$:

f -ը կոչվում է *իզոմորֆիզմ* նշված գծային հանրահաշիվների միջև:

V և W գծային հանրահաշիվների իզոմորֆ լինելու հանգամանքը գրաւվում է սլյալես՝

$$V \cong W :$$

Համալի նաև

$$V \cong_K W,$$

եթև հարկ է լինում ընդգծել K դաշտի մասնակցությունը:

Այստեղ նույնպես անհրաժեշտ է ցույց սալ, որ գծային հանրահաշիվների իզոմորֆ լինելու սահմանը համարժեքության սահմանը է:

ՊՆԴՈՒՄ 18.10. *Գծային համընդհանրությունների իզոմորֆիզմները իսոմորֆիզմներ են:*

Ապացույց. Աստիճանագրորդի նման է վեկտորական սուբսպացիաների իզոմորֆիզմի վերաբերյալ համապատասխան հոմոմորֆիզմի ստացումը: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 18.11. Կոստրեբ նախորդ պնդման ապացուցումը:

Հասկանալի է, որ գծային համընդհանրությունների իզոմորֆիզմի ուղղությամբ դեպքում իզոմորֆիզմ են դառնում նաև համապատասխան վեկտորական սուբսպացիաները և օղակները: Հետևապես՝ մենք կարող ենք ուղիղ օգտվել վեկտորական սուբսպացիաների և օղակների իզոմորֆիզմների հոմոմորֆիզմներից:

ՊՆԴՈՒՄ 18.12. *Եթե f -ը իզոմորֆիզմ է K դաշտի վրա աղյուսակ V և W գծային համընդհանրությունների միջև, ապա.*

ա. $f(0) = 0$,

բ. $f(-v) = -f(v)$,

գ. $f(v + w) = f(v) + f(w)$,

դ. V -ի վեկտորների զմայրենի տնկալի համակարգի տնկումների պատկերները կազմում են զմայրենի տնկալի համակարգ,

ե. W -ի վեկտորների զմայրենի տնկալի համակարգի տնկումների նախապատկերները կազմում են զմայրենի կոմպակտ համակարգ:

զ. V -ի բազիսի տնկումների պատկերները կազմում են W -ի բազիս:

Ապացույց. Աստիճանագրորդի կոստրեբ ինքնուրույն: $\square$

Բերենք գծային համընդհանրությունների իզոմորֆիզմի երկու օրինակ:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 18.13. Կոմպակտ V գծային համընդհանրության *ուղղանկյուն* է կոչվում

$$f : V \rightarrow V$$

տեսքի աբսոլյուտներում:

Օրինակներ:

ա. Դիստրիբյուցիոն կոմպակտ բազիսի համընդհանրություն:

ՊՆԴՈՒՄ 18.14. *Աբսոլյուտներում, որը տնկում է յուրաքանչյուր z կոմպակտ բազիսի իր $\mathbb{Z}$ համալուծի հետ, կոմպակտ բազիսի համընդհանրության աբսոլյուտները $\mathbb{Z}$ իզոմորֆիզմ է իրական բազիսի $\mathbb{R}$ դաշտի վրա աղյուսակ $\mathbb{C}$ և $\mathbb{C}$ համընդհանրությունների միջև:*

Ապացույց. Աստիճանագրորդի կոստրեբ ինքնուրույն: $\square$

բ. Դիստրիբյուցիոն բազիսների Q համընդհանրություն:

ՊՆԴՈՒՄ 18.15. *Աբսոլյուտներում, որը յուրաքանչյուր z բազիսների Q տնկում է իր $\mathbb{Z}$ համալուծի հետ, բազիսների Q համընդհանրության աբսոլյուտները $\mathbb{Z}$ իզոմորֆիզմ է:*

Ապացույց. Ակնհայտ է, որ

$$f : z \rightarrow \overline{z}, z \in Q$$

արտապատկերումը վերադրում է: Այն համաձայնեցված է նաև համապատասխան գաղափարայունների հետ, րանի որ

$$f(x + y) = \overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y} = f(x) + f(y),$$

$$f(x \cdot y) = \overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y} = f(x) \cdot f(y),$$

$$f(\alpha \cdot x) = \overline{\alpha \cdot x} = \alpha \cdot \overline{x} = \alpha \cdot f(x),$$

որտեղ $x, y \in Q, \alpha \in \mathbb{R}$

□

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 18.16. Ապացուցեք, որ կամայական x, y բխտանրհանների մի α իրական րվի համար.

ա. $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$,

բ. $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$,

գ. $\overline{\alpha \cdot x} = \alpha \cdot \overline{x}$:

18.4. *Ներահանրանալի:* Գծային հանրահաշիվների ուսումնասիրություններում կարևոր դեր է խաղում ենթահանրահաշիվի գաղափարը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 18.17. B -ն կոչվում է K դաշտի վրա արված $(A, +, \cdot, \cdot_2)$ գծային հանրահաշիվի *ենթահանրահալի*, եթե.

ա. $B \subseteq A$,

բ. $(B, +, \cdot, \cdot_2)$ թաղանթը K դաշտի վրա արված գծային հանրահալի է:

Ինչպես մեր դիտարկում այլ հանրահաշիվում համակարգերի, այնպես էլ այս դեպքում, ենթահանրահալի ուսումնասիրությունը տվելի դյուրին է, որովհետև հանրահալի ստիմանման մեջ մուծակցող մի տմբողջ շարք պայմաններից բավական է աշտակ ստուգել միայն երեքը:

ՊՆԴՈՒՄ 18.18. A թագմության B ոչ դատարկ ենթաթագմությանը այն է միայն այն դեպքում է K դաշտի վրա արված $(A, +, \cdot, \cdot_2)$ գծային հանրահալի ենթահանրահալի, եթե.

ա. B -ի կամայական x, y տարրերի համար $x + y \in B$,

բ. B -ի կամայական x, y տարրերի համար $x \cdot y \in B$,

գ. B -ի կամայական x տարրի և K դաշտի կամայական α տարրի համար $\alpha \cdot x \in B$:

Ապացույց. Եթե B -ն $(A, +, \cdot, \cdot_2)$ գծային հանրահալի ենթահանրահալի է, ապա տկնհայտորեն ա, բ և գ պայմանները տեղի ունեն:

Հակառակը: Դիցուք՝ պնդման ա, բ և գ պայմանները տեղի ունեն: Այդ դեպքում $(B, +, \cdot, \cdot_2)$ թաղանթը գծային հանրահալի է: Իսկայես, B -ն վեկատրական տալանություն է՝ համաձայն 16.2 պնդման, օղակ է՝ համաձայն 11.20 պնդման: Գծային հանրահալի մյուս պայմանները մույնպես տկնհայտորեն տեղի ունեն: □

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 18.19. Լրացրեք նախարդ տարացումն մանրամասները:

ՊՆԴՈՒՄ 18.20. *Էներստիանիաների ինդուկտիվ տեղադրումը կամայական գծային հանրահաշիվի բոլոր ենթահանրահաշիվների բազմության վրա սրված մասնակի կարգի տեղադրում է:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարենք ինքնուրույն: □

Կամայական գծային հանրահաշիվի համար ենթահանրահաշիվներ են ինքը և միայն 0 ստորից կազմված ենթաբազմությունը: Վերջինս կազմում է ստորոնդության գրության ենթահանրահաշիվ: Բերենք ենթահանրահաշիվների այլ օրինակներ:

Քվատերնիոնների հանրահաշիվ

$$\{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}, \quad \{a + bj | a, b \in \mathbb{R}\}, \quad \{a + bk | a, b \in \mathbb{R}\}$$

ենթաբազմություններից յուրաքանչյուրը այդ հանրահաշիվի ենթահանրահաշիվ է: Դրանք իզոմորֆ են իրար և յուրմյալ են կամային բվերի հանրահաշիվին:

$$f(a + bj) = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

ուրաստատակերումը, օրինակ, իզոմորֆիզմ է $\{a + bj | a, b \in \mathbb{R}\}$ $\mathbb{R}$ -հանրահաշիվի և կամային բվերի $\mathbb{R}$ -հանրահաշիվի միջև:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 18.21. Ապացուցեք, որ գծային հանրահաշիվի կամայական ենթահանրահաշիվների հաշվումը ենթահանրահաշիվ է:

18.5. Միավորի կցագրումը: Ինտերկոնեկտիվություն ունեն հանրահաշիվներ, որոնք չունեն միավորներ: Պարզվում է, որ մասն հանրահաշիվները՝ որպես ենթահանրահաշիվներ, կարելի է ներդնել միավոր ունեցող հանրահաշիվների մեջ:

ՊՆԴՈՒՄ 18.22. *Եթե A հանրահաշիվը չունի միավոր, սակայն այն ծրլես ենթահանրահաշիվ կարելի է ներդնել միավոր ունեցող հանրահաշիվի մեջ: Առանձնապես, n չափադասություն հանրահաշիվը կարելի է ներդնել միավոր ունեցող $n + 1$ չափադասություն հանրահաշիվի մեջ:*

Ապացույց. Դիցուք՝ A -ն K դաշտի վրա սրված հանրահաշիվ է: Դիտարկենք $B = K \times A$ դեկարայան ստատությունը և նրա վրա սահմանենք ենտելյալ զործադրությունները.

$$\begin{aligned}(\alpha_1, a_1) + (\alpha_2, a_2) &= (\alpha_1 + \alpha_2, a_1 + a_2), \\(\alpha_1, a_1) \cdot (\alpha_2, a_2) &= (\alpha_1 \alpha_2, \alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1 + a_1 a_2), \\ \alpha(\alpha_1, a_1) &= (\alpha \alpha_1, \alpha a_1),\end{aligned}$$

սրանի $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in K, a_1, a_2 \in A$:

Ընմիջականորեն ստուգվում է, որ B բազմությունը այս կերպ սահմանված գործողությունների նկատմամբ դառնում է գծային K -հանրահաշիվ: Մենք այն ժամանակ, $(1, 0)$ գույքը այդ հանրահաշիվի միավորն է, քանի որ

$$\begin{aligned}(1, 0) \cdot (\alpha, a) &= (1 \cdot \alpha, 1 \cdot a + \alpha \cdot 0 + 0 \cdot a) = (\alpha, a), \\(\alpha, a)(1, 0) &= (\alpha \cdot 1, \alpha \cdot 0 + 1 \cdot a + a \cdot 0) = (\alpha, a): \end{aligned}$$

Հեշտությամբ կարելի է ցույց ստել, որ $\{(0, a) | a \in A\}$ բազմությունը B հանրահաշիվի ենթահանրահաշիվ է և իզոմորֆ է A հանրահաշիվին:

Պահանջվող իզոմորֆիզմը ստացվում է

$$f : (0, a) \rightarrow a, a \in A$$

արտադրատեղանքում:

Այսպիսով՝ A հանրահաշիվը ներդրեցինք միավոր ունեցող B հանրահաշիվի մեջ: Հեշտությամբ կարելի է նկատել նաև, որ եթե $\dim A = n$, ապա $\dim B = n + 1$: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 18.23. Դիցուք՝ A -ն և B -ն նախորդ սեյման մեջ դիտարկված հանրահաշիվներն են: Ապացուցեք, որ.

ա. եթե $\dim A = n$, ապա $\dim B = n + 1$,

բ. եթե A -ն զուգադրելի է, ապա զուգադրելի է նաև B -ն,

գ. A -ն B օղակի իդեալ է և B/A օղակը իզոմորֆ է K դաշտին (տես՝ զեմի 10):

19. ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎԸ

19.1. Մատրիցներ: Այժմ մենք կկառուցենք չափազանց մեծ նշանակություն ունեցող մի գծային հանրահաշիվ:

Բովարանական վեկտորական տարածությունները դիտարկելիս մենք դաշտի տարրերը գրեցինք մեկ շարքով՝ n -յանի աեսքով: Մտքենաալիկայում և նրա կիրառություններում կարևոր դեր ունեն նաև դաշտի տարրերից կազմված ուղղանկյունաձև աղյուսակները, որոնք անվանվում են մատրիցներ:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 19.1. K դաշտի վրա տրված *մատրից* է կոչվում

$$(7) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

աեսքի յուրաքանչյուր աղյուսակ, որտեղ a_{ij} տարրերը, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$, սխալանում են K դաշտին: Մատրիցի իտրիզոնական շարքերը կոչվում են նրա *ստյեր*. Բերված (7) մատրիցն ունի m տող: Մատրիցի ուղղանկյուն շարքերը կոչվում են նրա *սյուններ*. Բերված մատրիցն ունի n սյուն: a_{ij} տարրերը կոչվում են նաև մատրիցի *անդամներ*: a_{ij} անդամի առաջին՝ i ինդեքսը ցույց է աալիս, թե որ ստյի մեջ է գտնվում ալյուս անդամը, իսկ երկրորդ՝ j ինդեքսը ցույց է աալիս, թե որ սյուն մեջ է գտնվում ալյուս անդամը: Հաճախ m տող և n սյուն ունեցող մատրիցը անվանվում է նաև $m \times n$ մատրից. m -ը և n -ը կոչվում են մատրիցի չափեր: Պարզ է, որ $m \times n$ մատրիցը ունի mn անդամներ: Նրկա մատրիցներ կոչվում են *հսիստա*, եթե նրանք ունեն միևնույն չափերը, այսինքն՝ նույնն է նրանց տողերի քիվը և նույնն է նրանց սյունների քիվը, և միևնույն աեղերում կանգնած անդամները նույնպես նույնն են երկու մատրիցի համար էլ: Այսպիսով՝

$$|a_{ij}|_{mn} = |b_{ij}|_{kl}$$



$$m = k, n = l, a_{ij} = b_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n :$$

Դիտարկենք մենք մատրիցների գրամման ապրեր ձևեր: Նախ, ընդունված է մատրիցը նշանակել թափանցիկ մեծատառերով, նրա տնդամները՝ թափանցիկ փոքրատառերով: Նշանակենք, օրինակ, վերը բերված (7) մատրիցը A -ով: Նրա համար ընդունված են նաև հետևյալ նշանակումները.

$$|a_{ij}|_{mn}, (a_{ij})_{mn} :$$

Բերենք մատրիցների մի քանի օրինակներ:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 1/3 \\ 2/5 & 1/7 & 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 2i & \sqrt{-2} \\ 1 & \sqrt{-5} & 1/2 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

մատրիցներից առաջինը $\mathbb{Q}$ -ի վրա արված 2×3 -մատրից է, երկրորդը՝ $\mathbb{R}$ -ի վրա արված 3×3 -մատրից, երրորդը՝ $\mathbb{C}$ -ի արված 3×3 -մատրից: Այս մատրիցներից երկրորդի և երրորդի ստորին և սյունների թվերը իրար համար են: Նման մատրիցները առանձնապես կարևոր են. դրանք կոչվում են թատկուսային մատրիցներ:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 19.2. $n \times n$ -մատրիցը կոչվում է *թատկուսային մատրից*:

$|a_{ij}|_{nn}$ թատկուսային մատրիցը նշանակվում է նաև այսպես՝

$$|a_{ij}|_n :$$

n թիվը կոչվում է այդ մատրիցի *կարգ*:

Թվարանական վեկտորները նույնպես կարելի է դիտել որպես մեկ ստղ և n սյուն մենցյալ մատրիցներ կամ $1 \times n$ -մատրիցներ:

Այստեղ հարկ է խոսել նաև $|a_{ij}|_{mn}$ մատրիցի i և j ինդեքսների մասին: Դրանք իրականում մատրիցի մեջ չեն մասնակցում, երև մատրիցը գրենք իր սմբողջական՝ (7) տեսքով: Այդ պատճառով կոչվում են *համը ինդեքսներ*: Համը է նաև

$$\sum_{i=1}^i a_i$$

արտահայտության մեջ i ինդեքսը: Այդ գումարի մեջ i ինդեքսը չի մասնակցում, եթե այդ գումարը գրենք իր սմբողջական տեսքով՝

$$\sum_{i=1}^i a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n :$$

Այստեղ i ինդեքսի փոխարեն կարելի է վերցնել մի այլ ինդեքս, օրինակ, j , և գումարը նույնը կմնա՝

$$\sum_{j=1}^n a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_n :$$

Նույնն է խնդիրը նաև մատրիցների դեպքում՝

$$|a_{ij}|_{mn} = |a_{k,l}|_{mn} :$$

19.2. Մատրիցների գումարումը և գումարային խումբը: Առաջիկայում մենք կ'անենք, որ ինչպես մատրիցներ, այնպես էլ նրանց գումարման գործողությունը տառադրամում են շատ բնական ճանապարհով: Իսկ տառային բավարարվենք ենտելյակ ձևական ստիմանումով:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 19.3. Մյենույն չափերն ունեցող և միենույն դուշաի վրա աբված $|a_{ij}|_{mn}$ և $|b_{ij}|_{mn}$ մատրիցների *գումար* է կոչվում նույն չափերն ունեցող և նույն դուշաի վրա աբված այն $|c_{ij}|_{mn}$ մատրիցը, որի համար

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

որտեղ $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$:

Օրինակ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 4 \\ 9 & 8 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Մյնչպես

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 4 \\ 9 & 8 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

մատրիցները չի կարելի գումարել, որովհետև նրանք ունեն տարբեր չափեր:

($K, +, \cdot$) դուշաի վրա աբված բոլոր $m \times n$ -մատրիցների բազմությունը, աբվաբարտը, նշանակվում է $M(m, n, K)$ կամ $M_{mn}(K)$: Հասկանալի է, որ մատրիցների գումարման գործողությունը «ծնվում» է K դուշաի գումարման գործողությունից և բնական է սպասել, որ այն «կիսառոնգի» նաև այդ գործողություն ուղե հասկաբությունները: Հետևյալ պնդումը այս փարկումը հաստատող տառային օրինակն է:

ՊՆԴՈՒՄ 19.4. ($M(m, n, K), +$) գույզը աբելյան խումբ է:

Արդյոցայց. Ջոնի որ մատրիցների գումարումը հանգում է նրանց համապատասխան տնդամների գումարման, իսկ վերջիններիս գումարումը օժտված է տեղափոխական և գուգարդական հասկաբություններով, ուստի տեղափոխական և գուգարդական է նաև մատրիցների գումարումը:

Ջրայի դերը կոստարում է $m \times n$ չափերն ունեցող

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

գրոյտիւմ մատրիցը: Այն նույնպէս նշանակվում է O նշանով: Իհարկէ, յուրաքանչ-յուր գործածարկում դեպքում մենք հեշտարկումը կկալմնարշվենք, քե O նշանը ինչ իմաստով է գործածվում՝ որպէս թիւի, քե՞ որպէս մատրից:

$[a_{ij}]_{mn}$ մատրիցի հակադիր մատրիցն է

$$[-a_{ij}]_{mn}$$

մատրիցը՝

$$--[a_{ij}]_{mn} = [-a_{ij}]_{mn} :$$

Մտուգելու համար այս յատողարկումը բախական է գումարել $[a_{ij}]_{mn}$ և $[-a_{ij}]_{mn}$ մատրիցները: Արդյունքում կստանանք գրոյտիւմ մատրիցը.

$$[a_{ij}]_{mn} + [-a_{ij}]_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} :$$

□

19.3. Մատրիցների օդակը: Մատրիցների բազմապատկման՝ ստաքե բեր-ված գործողարկումը ստաջին հայտաքից սնտալք է քվում: Հետագայում, սակայն, մենք կստենենք, որ այս կերպ մատրիցների բազմապատկումը տվելի բնական է, քան այն ձեր, երբ երկու մատրիցներ բազմապատկելու համար բազմապատկվում են նրանց համապատասխան տնդումները, ինչպէս գումարման դեպքում:

Նախ բազմապատկենք միննայն երկարարկումն ունեցող ստղը և այտուքը.

$$(a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) :$$

Այլն կտաղը ենք կատարել միննայն դաշտի վրա տրված ցանկացած $m \times n$ -մատրիցի *բազմապատկումը* մի այլ $n \times k$ -մատրիցի հետ: Արդյունքում ստացվում է նայն դաշտի վրա տրված $m \times k$ մատրից, որի i -րդ տողում և j -րդ սյուն մեջ կտնգնում տնդումը կամ կարձ՝ ij տնդումը գտնելու համար բազմապատկում ենք ստալին մատրիցի i -րդ տողը երկրորդի j -րդ սյուն հետ:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots\dots\dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix},$$

որտեղ

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$

$$i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, k :$$

Այսպիսով՝

$$|a_{ij}|_{mn} \cdot |b_{ij}|_{nk} = |c_{ij}|_{mk}.$$

սլաեղ

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il}b_{lj},$$

$$i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, k :$$

Այսպիսով՝ որպեսզի ինտերպոլ լինի բազմապատկել երկու մատրիցներ, մախնրոնք պետք է աղված լինեն միևնույն դաշտի վրա, տարւ առաջինի սյունների թիվը պետք է հավասար լինի երկրորդի սողերի թվին:

Օրինակներ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 17 \\ 4 & 6 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} :$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 7 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} :$$

Իսկ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 6 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

մատրիցները չի կարելի բազմապատկել, րանի որ առաջինի սյունների թիվը հավասար չէ երկրորդի սողերի թվին:

Հաւանապի է, որ միևնույն կարգի բառակառույցն մատրիցները միշտ կարելի է բազմապատկել. սրույունը կլինի մույն կարգի բառակառույցն մատրից: Ավելի նշանակալից դիտարկումներ կատարելու համար n -րդ կարգի բոլոր բառակառույցն մատրիցների բազմությունը նշանակենք $M(n, K)$ -ով:

ՊՆԴՈՒՄ 19.5. ($M(n, K), +, \cdot$) եղյակը օղակ է:

Լեպրոցույց. Մենք ուրդեն ցույց ենք տվել, որ $(M(n, K), +)$ զույգը տրեկան լատարի:

Մենք էլ ցույց տալ, այ մատրիցների բազմապատկման գործողությունը բաշխական է գումարման գործողության նկատմամբ:

Դիցար՝

$$[a_{ij}]_n, [b_{ij}]_n, [c_{ij}]_n \in M(n, K) :$$

Նշանակենք՝

$$|b_{ij}|_n + |c_{ij}|_n = |d_{ij}|_n, |a_{ij}|_n |d_{ij}|_n = |c_{ij}|_n :$$

Այդ դեպքում՝

$$|a_{ij}|_n (|b_{ij}|_n + |c_{ij}|_n) = |a_{ij}|_n |d_{ij}|_n = |c_{ij}|_n,$$

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} d_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) = \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj}, \end{aligned}$$

սրտեղ $i, j = 1, \dots, n$: Բայց ստացվում

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj}$$

գումարի տուփին գումարելին $|a_{ij}|_n |b_{ij}|_n$ մատրիցի ij տնդումն է, իսկ մյուս գումարելին՝ $|a_{ij}|_n |c_{ij}|_n$ մատրիցի ij տնդումը: Հետևապես՝ նրանց գումարը կլինի

$$|a_{ij}|_n |b_{ij}|_n + |a_{ij}|_n |c_{ij}|_n$$

մատրիցի ij տնդումը: Այսինքն՝ այս վերջին մատրիցի է

$$|a_{ij}|_n (|b_{ij}|_n + |c_{ij}|_n)$$

մատրիցի ij տնդումները իրար հավասար են բոլոր i, j -երի դեպքում: Հետևապես՝ հավասար կլինեն նաև այդ մատրիցները՝

$$|a_{ij}|_n (|b_{ij}|_n + |c_{ij}|_n) = |a_{ij}|_n |b_{ij}|_n + |a_{ij}|_n |c_{ij}|_n :$$

□

Այժմ ուսումնասիրենք $M(n, K)$ օղակի որոշ հատկություններ:

ՊՆԴՐՈՒՄ 19.6. $M(n, K)$ օղակը միավորով և գույրդղական օղակ է:

Լեպրոցույց. $M(n, K)$ օղակի միավորի դերը ստանում է

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

n -րդ կարգի միավոր մատրիցը:

Ֆույց ստանք նաեւ, որ մատրիցների բազմապատկման գործողությունը զուգորդական է:

Իսկապես, նշանակենք՝

$$|b_{ij}|_n |c_{ij}|_n = |d_{ij}|_n, |a_{ij}|_n |d_{ij}|_n = |c_{ij}|_n :$$

Այդ դեպքում

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} d_{kj} \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} \sum_{l=1}^n b_{kl} c_{lj} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} b_{kl} c_{lj} :$$

Նշանակենք նաեւ՝

$$|a_{ij}|_n |b_{ij}|_n = |g_{ij}|_n, |g_{ij}|_n |c_{ij}|_n = |h_{ij}|_n :$$

Այդ դեպքում՝

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \sum_{l=1}^n g_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} = \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl} c_{lj} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} b_{kl} c_{lj} : \end{aligned}$$

Այսպիսով՝

$$c_{ij} = h_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n :$$

Հետևապես՝

$$|a_{ij}|_n (|b_{ij}|_n |c_{ij}|_n) = (|a_{ij}|_n |b_{ij}|_n) |c_{ij}|_n :$$

□

ԹԴՂՈՒՄ 19.7. *ու. $(M(1, K), +, \cdot) \cong (K, +, \cdot)$:*

բ. Եթե $n > 1$, ապա $(M(n, K), +, \cdot)$ օպերի սեղանային չէ, և ունի զրոյի բաժանարարներ:

Ապացույց. *ու. 1 կարգի մատրիցները կգրվեն այսպես՝ $(a), a \in K$:*

Ընկերածեղա յոլոմորֆիզմը կլինի

$$f : (a) \rightarrow a, \quad a \in K$$

արտադրատեղումը:

բ. Քանի որ

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ապա $(M(n, K), +, \cdot)$ օպերի $n > 1$ դեպքում սեղանային չէ և ունի զրոյի բաժանարարներ:

□

Հետևյալ հատկությունը ցույց է տալիս, որ մատրիցների օդակը բավականին հարուստ է ենթօդակներով:

ՊՆԴՈՒՄ 19.8. $M(2, \mathbb{R})$ օդակը ունի համալիրս թվերի դաշտին իզոմորֆ ենթօդակ:

Ապացույց. Իսկապես,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

մատրիցների բազմությունը, կամայական a և b իրական թվերի համար $M(2, \mathbb{R})$ օդակի ենթօդակ է և իզոմորֆ է կամային թվերի դաշտին: Անհրաժեշտ իզոմորֆիզմը ստացվում է այսպես.

$$f : a + bi \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} :$$

□

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 19.9. Էյսցրեք վերջին պնդման ապացույցի մանրամասները:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 19.10. Յայց տվեք, որ եթե $m < n$, ապա $M(n, K)$ օդակը պարունակում է $M(m, K)$ օդակին իզոմորֆ ենթօդակ:

19.4. *Մատրիցների վեկտորական տարածությունը:* Մատրիցների գծումայման և բազմապատկման գործադրությունների հետ միասին կարևոր դեր է խաղում նաև մատրիցը սկալյարով բազմապատկելու գործողությունը:

ՄԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 19.11. Կամայական *սկալյարի և մատրիցի որտաղբյուր* է կաշվում այն մատրիցը, որը կատարվի արված մատրիցից, եթե նրա բոլոր տնդումները բազմապատկենք այդ սկալյարով: Այսինքն՝ եթե $|a_{ij}|_{mn}$ -ն K դաշտի վրա արված մատրից է, α -ն K -ի կամայական տարր, ապա

$$\alpha \cdot |a_{ij}|_{mn} = |\alpha a_{ij}|_{mn} :$$

Օրինակ.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} :$$

Ինչպես աստերի դեպքում, այստեղ նույնպես սկալյարի ու մատրիցի բազմապատկման նշանը համախոս բաց է թողնվում:

ՊՆԴՈՒՄ 19.12. $(M(mn, K), +, \cdot)$ եղյակը K -վեկտորական տարածություն է:

Ապացույց. Այն, որ $(M(mn, K), +)$ գույզը ուրեկան խումբ է, մենք տրդեն ապացուցել ենք: Մնում է ապացուցել, որ սկալյարով բազմապատկման $\cdot$ գործադրությունը բախարարում է վեկտորական տարածության ստիմանման մեջ նշված շորս պայմաններին:

Իսկության,

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)|a_{ij}|_{mn} &= |(\alpha + \beta)a_{ij}|_{mn} = |\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}|_{mn} = \\&= |\alpha a_{ij}|_{mn} + |\beta a_{ij}|_{mn} = \alpha|a_{ij}|_{mn} + \beta|a_{ij}|_{mn} : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha(|a_{ij}|_{mn} + |b_{ij}|_{mn}) &= \alpha|a_{ij} + b_{ij}|_{mn} = |\alpha(a_{ij} + b_{ij})|_{mn} = \\&= |\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}|_{mn} = |\alpha a_{ij}|_{mn} + |\alpha b_{ij}|_{mn} = \\&= \alpha|a_{ij}|_{mn} + \alpha|b_{ij}|_{mn} : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)|a_{ij}|_{mn} &= |(\alpha\beta)a_{ij}|_{mn} = \\&= |\alpha(\beta a_{ij})|_{mn} = \alpha|\beta a_{ij}|_{mn} = \alpha(\beta|a_{ij}|_{mn}) : \end{aligned}$$

$$1 \cdot |a_{ij}|_{mn} = |1 \cdot a_{ij}|_{mn} = |a_{ij}|_{mn} :$$

□

Մատրիցների $M(nm, K)$ վեկտորական տարածությունը վերջավոր չափադասկանություն տարածություն է: Կոստացներ նրա կարևոր բաղադրիչ մեկը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 19.13. Տարրական մատրից է կոչվում

$$e_{ij}$$

$m \times n$ -մատրիցը, որի i -րդ տողի և j -րդ սյան համաձայն տեղում եղած տեղումը 1 է, իսկ մնացած տեղումները՝ 0, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$:

ՊՐԴՈՒՄ 19.14. Եթե t տարրական մատրիցներից կազմված վեկտորների համակարգը $M(nm, K)$ -ի վեկտորական տարածության բազիս է:

Ենթադրյալ. Ակնհայտ է, որ կամույական $|a_{ij}|_{mn}$ մատրիցի համար

$$(8) \quad |a_{ij}|_{mn} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} e_{ij} :$$

Այս նախադրարյալները ցույց է տալիս, որ ստորական մատրիցների համակարգը լրիվ է $M(nm, K)$ -ի մեջ:

Եթե նաև

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} e_{ij} = 0,$$

ապա համաձայն (8)-ի՝

$$|a_{ij}|_{mn} = 0$$

կամ $a_{ij} = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$: Հետևապես՝ տարրական մատրիցների համակարգը նաև զմարեն տնկալի է: Ուրեմն՝ այն $M(nm, K)$ տարածության բազիս է: □

ՊՐԴՈՒՄ 19.15. $\dim M(nm, K) = nm$:

Լեյպցույց. Քանի որ ստացված մատրիցների թիվը m է և ստացված մատրիցների համակարգը կազմում է բազիս $M(m, K)$ ստացածության համար, սրեմն՝ սովոր ստացածության չափադասությանը m է: $\square$

19.5. *Մատրիցների գծային հանրահաշիվը:* Այժմ ի մի բերենք մատրիցների $M(n, K)$ բազմության վրա արված գումարման, բազմապատկման և սկալյարով բազմապատկման գործողությունների բոլոր հատկությունները: Դրանք ստացվում են հետևյալ սեղմումն մեջ:

ՊՆԴՈՒՄ 19.16. $(M(n, K), +, \cdot, \cdot)$ քառյակը՝ սրանով՝ գործողություններից առաջինը մատրիցների բազմապատկման, երկրորդը՝ մատրիցը սկալյարով բազմապատկման գործողություններն են, K դաշտի վրա արված միավորով և զուգադասական գծային հանրահաշիվ է:

Լեյպցույց. Նկատի առնելով 19.5 և 19.12 սեղմումները՝ բավական է ցույց սալ, որ սեղի ունեն

$$\alpha(XY) = (\alpha X)Y = X(\alpha Y)$$

հավասարությունները, որտեղ X -ը և Y -ը n -յո կարգի կամայական մատրիցներ են, $\alpha \in K$: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 19.17. Ասացուցեք $\alpha(XY) = (\alpha X)Y = X(\alpha Y)$ հավասարությունները, որտեղ X -ը և Y -ը n -յո կարգի կամայական մատրիցներ են, $\alpha \in K$:

ՊՆԴՈՒՄ 19.18. *ու. Եթե $n = 1$, ապա $(M(n, K), +, \cdot, \cdot) \cong (K, +, \cdot, \cdot)$, սրտեղ $(K, +, \cdot, \cdot)$ քառյակի մեջ՝ նշանի երկու գործողությունն էլ նշանակում են սկալյարների դաշտի բազմապատկման գործողությունը:*

բ. $(M(n, K))$ հանրահաշիվը զուգադասական է:

գ. Եթե $n > 1$, ապա $M(n, K)$ հանրահաշիվը անդամախոսական չէ,

դ. Եթե $n > 1$, ապա $M(n, K)$ հանրահաշիվը անի գրայի բաժանարարներ:

Լեյպցույց. *ու. Բավական է դիտարկել*

$$f: (\alpha) \rightarrow \alpha, \alpha \in K$$

որաաստիճանային:

բ, գ, դ կետերի ստացուցումները կատարեք ինքնուրույն: $\square$

Նկատենք, որ մատրիցների հանրահաշիվը բավականին «խառնատ» է ենթահանրահաշիվներով. նրանում սյուրոնակվում են բազմաթիվ այլ ենթահանրահաշիվներ:

Մատրիցների $M(2, \mathbb{R})$ հանրահաշիվի ենթահանրահաշիվ է

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

տեսքի բոլոր մատրիցների բազմությունը, որտեղ $a, b \in \mathbb{R}$: Այն իզոմորֆ է կոմպլեքս թվերի հանրահաշիվին:

Դիտարկենք $M(2, \mathbb{C})$ հանրահաշիվի մի այլ կտրեր ենթահանրահաշիվ:

Վերցնենք հետևյալ մատրիցները՝

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

և դիտարկենք այս մատրիցների A զծային թաղանթը, այսինքն՝ դրանք սլաքունակաղ նվազագույն ենթահանրահաշիվը:

ԴՆԴՈՒՄ 19.19. $A \in M(2, \mathbb{C})$ հանրահաշիվի ենթահանրահաշիվ է և իզոմորֆ է բիտերմիոնների հանրահաշիվին:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 19.20. Անվազուցել նախորդ պնդումը:

20. ՄԱՏՐԻՑԻ ՈԱՆԳԸ

20.1. *Մատրիցի տողային և սյունային ռանգերը:* Մատրիցների ռուսումնասիրության մեջ և նրանց կիրառություններում շտապագույն կարևոր նշանակություն ունի մատրիցի ռանգի գաղափարը: Ի՞նչ է մատրիցի ռանգը:

Գիտարկենք

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

մատրիցը: Նրա առդերը n -շտապակոնություն վեկատրոներ են՝ K^n թվաբանական վեկտորական տարածության ստորերը: Նշանակենք

$$u_1 := (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),$$

$$u_2 := (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}),$$

...

$$u_m := (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) :$$

ՄԱՂՄԱՂՈՒՄ 20.1. Մատրիցի տողային ռանգ է կոչվում նրա առդերի համակարգի ռանգը: Այսինքն՝ $|a_{ij}|_{mn}$ մատրիցի տողային ռանգը վեկատրոների

$$u_1, u_2, \dots, u_m$$

համակարգի ռանգն է:

Օրինակ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 6 & -4 \\ -3 & 0 & -9 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

մատրիցներից առաջինի տողային ռանգը 1 է, երկրորդինը՝ 3, որովհետև

$$\text{rank}(u_1, u_2, u_3) = 1, \text{rank}(u'_1, u'_2, u'_3) = 3,$$

արանդ

$$u_1 = (1, 0, 3, -2), u_2 = (2, 0, 6, -4), u_3 = (-3, 0, -9, 6),$$

$$u'_1 = (1, 2, 3), u'_2 = (0, 1, 2), u'_3 = (0, 0, 1) :$$

Նման ձևով՝ արված $|a_{ij}|_n$ մատրիցի սյուները կտված են m -ստվածայուն վեկտորներ՝ K^m քվարանտկան վեկտորական տարածություն ստորերբ.

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} :$$

ՄԱՀԱՄԱՌՈՒՄ 20.2. Մատրիցի *սյունային ռանգ* է կոչվում նրա սյունների համակարգի ռանգը: Այսինքն՝ $|a_{ij}|_{mn}$ մատրիցի սյունային ռանգը վեկտորների

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

համակարգի ռանգն է:

Օրինակ, վերևում բերված մատրիցներից առաջինի սյունային ռանգը 1 է, երկրորդինը՝ 3:

ՄԱՀԱՄԱՌՈՒՄ 20.3.

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_m & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

տեսքի մատրիցները կոչվում են *տնկյունագծային*:

$$a_1, a_2, \dots, a_m$$

և

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

հաջորդականություններից յուրաքանչյուրը կոչվում է *համապատասխան մատրիցի գլխավոր տնկյունագիծ*:

ՊԼԴՌՈՒՄ 20.4. *Անկյունագծային մատրիցի ստորային և սյունային ռանգերը իրար հավասար են, և դրանցից յուրաքանչյուրը հավասար է մատրիցի գլխավոր տնկյունագծի զրայից ստորերի տնկյունների րվին:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն:

□

20.2. Տարրական ձևափոխություններ: Նախադր կետի վերջում մենք ունենումք, որ տնկյունագծային մատրիցի ստույգային և սյունային ռոտացիոն իրար հավասար են: Այժմ մենք ցույց կտանք, որ կամայական մատրիցի առողային և սյունային ռոտացիոն մոմենտն իրար հավասար են: Այս կարևորագույն վստառը, սուկայն, հեշտ չէ սուպոցուցել, և մեզ մոխասախ տնկրաժեշա է կատարել որոշ մախասարառասախ կան աշխատանք:

ՄԱՀԱՐԱՌԻՄ 20.5. *Մատրիցի տարրական ձևափոխություններ են կոչվում.*

a. մատրիցի որևէ առողի բազմապատկումը դաշալ՝ O -ից ստարեր ստարով,

a'. մատրիցի որևէ սյուն բազմապատկումը դաշալ՝ O -ից ստարեր ստարով,

b. մատրիցի մի առողի ուվկուցումը մյախին՝ մախասախ ուվկուցվող առողը դաշալի որևէ ստարով բազմապատկելով,

b'. մատրիցի մի սյուն ուվկուցումը մյախին՝ մախասախ ուվկուցվող սյունը դաշալի որևէ ստարով բազմապատկելով:

ՊՐԴՌԻՄ 20.6. *ա. a և b տեսքի մի բանի հաջորդական տարրական ձևափոխությունների միջոցով կարելի է կատարել մատրիցի ցամկացում երկու առողերի դիրքափոխությունը:*

բ. a' և b' տեսքի մի բանի հաջորդական տարրական ձևափոխությունների միջոցով կարելի է կատարել մատրիցի ցամկացում երկու սյունների դիրքափոխությունը:

Ապացույց. Նշանակենք A մատրիցի i -րդ առողը u_i -ով, իսկ j -րդ առողը՝ u_j -ով: Այդ դեպքում կունենանք՝

$$A = \begin{pmatrix} \dots \\ u_i \\ \dots \\ u_j \\ \dots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \dots \\ u_i + u_j \\ \dots \\ u_j \\ \dots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \dots \\ u_i + u_j \\ \dots \\ -u_i \\ \dots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \dots \\ u_j \\ \dots \\ -u_i \\ \dots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \dots \\ u_j \\ \dots \\ u_i \\ \dots \end{pmatrix} :$$

Դժվար չէ համոզվել, որ այստեղ կատարվում են a և b տեսքի տարրական ձևափոխություններ և արդյունքում ուսացված մատրիցն էլ A մատրիցից աարերվում է երկու առողերի դիրքափոխումը:

Նայն կերպ կփորվենք մուն մատրիցի սյունների սրարագայում: □

Տարրական ձևափոխությունները հնարավորություն են տալիս արվում մատրիցից սաունուկ մոր, ուվկի ստարով տեսք ունեցող մատրիցներ:

ՊՐԴՌԻՄ 20.7. *Տարրական ձևափոխությունների միջոցով կամայական մատրիցից կարելի է սաունուկ տնկյունագծային մատրից:*

Ապացույց. Իսկախեն, դիցար՝ ունենք

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

մատրիցը: Նրե տյն գրայվում է, տալս տարագոցելու բուն չկա: Նրե գրա չէ, տալս տարրական ձևափոխությունների միջոցով կարելի է համեմել նրան, որ նոր ստացվում մատրիցի վերին ձախ սեկյունում գրվում տարրը գրայից տարրեր է: Ուրեմն՝ կարելի է հերոդել, որ հենց α_{11} սեկյունն է գրայից տարրեր:

Նրա ուղղափառ աշխատանքը, որն իրականացվում է ՀՀ Կոմիտեի կողմից, ուղղված է միայնակ երեխաների և անապառաճների համար անհրաժեշտ օգնություն ցուցաբերելուն:

$$= a_{11} \cdot a_{21}$$

ստորագրել և ղուամուրել Երկրորդ տողին: Նոր ստացված մուտքիցի տառաշին սյուն մեջ, Երկրորդ տողում կուսացվի Օ: Նայն կերպ Օ կղարծենեք մուս տառաշին սյուն հաջորդ տնդումները:

Կրկնելով նույն դրսևայությունները մատրիցի տառային աղղի և տառային սյան փնջումից հետո ստացվում մատրիցի վերաբերյալ՝ մենք սպրդող կստանումք կամ զրոյական մատրից կամ էլ σ_{22} տնդումք գրոյից տարրեր, իսկ երկրորդ սյուն մնացում տնդումները՝ գրաներ: Ընդ որում, ևնքտդրում ենք, որ ստացվում մատրիցի սյունների նկատմամք a' և b' ձևավոյադրոյանները կտատարելիս իտմանման ձևավոյադրոյաններ են կտատարվում նուև արվում մատրիցի սյն սյունների հետ, որոնց մեք ընկում են ստացվում մատրիցի ձևավոյադրոյ սյուններ:

Շարունակելով այս ընթացքը՝ $m < n$ դեպքում կստանանք

$$\begin{pmatrix} a_1 & * & & * & & * \\ 0 & a_2 & & * & & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_m & & * \end{pmatrix}$$

սուսքի մի սեղանածե մատորից:

Կոտայրեղով նոյննախալ տարրուկուն ձևովիտարյուններ և դուստդորայուններ ստուգված մոտարիցի սլոններու նկատմամբ՝ կատմմամբ տնկյունուգծույին մուտարից.

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_m & 0 \end{pmatrix} :$$

$m = n$ եւ $m > n$ դեպքերում համապատասխանաբար կստացվեն հետևյալ տեսքի սնկյանուզծային մոտրիցներ.

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} \mathbf{L} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} :$$



20.3. Մատրիցի լանգը: Տարբերակում ձևավորությունների կիրառությունը մեծ մասամբ կապված է նրանց հետևյալ հատկություն հետ:

ՊՆԴՈՒՄ 20.8. *Տարբերակում ձևավորություններից մատրիցի ստորային և սյունային ռանգերը չեն փոխվում:*

Ապացույց. Դիցուք՝ $\{a_{ij}\}_{m,n}$ մատրիցի նկատմամբ կատարվում են տարրական ձևավորություններ: Ահմայա L , որ a, b տեսքի ձևավորությունների դեպքում մատրիցի ստորային ռանգը չի փոխվում: Յուրջ տանք, որ a', b' տեսքի ձևավորությունների դեպքում նույնպես մատրիցի ստորային ռանգը չի փոխվում:

Այսինքն a' ձևավորությունից՝ Դիցուք՝ արված A մատրիցի ստորերն են՝

$$u_1 = (a_{11}, \dots, a_{1j}, \dots, a_{1n}).$$

$$u_m = (a_{m1}, \dots, a_{mj}, \dots, a_{mn}).$$

և A մատրիցի j -րդ սյունը բազմապատկվում է K դաշտի գրոյից տարրեր α սաարքով: Ստացվում մատրիցի ստորերը կլինեն՝

$$w_1 = (a_{11}, \dots, \alpha a_{1j}, \dots, a_{1n}),$$

$$w_m = (a_{m1}, \dots, \alpha a_{mj}, \dots, a_{mn}) :$$

Այժմ, եթե

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m = 0,$$

ապա կստանանք՝

$$\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m = 0 :$$

Ոչնչայիս L մուկ հակառակը, եթե

$$\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m = 0,$$

ապա

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m = 0 :$$

Այս դասադությունները ցույց են տալիս, որ

$$\text{rank}(u_1, \dots, u_m) = \text{rank}(w_1, \dots, w_m) :$$

Նույն կերպ ցույց է արվում նաև, որ b' ձևավորությունը նույնպես չի փոխում մատրիցի ստորային ռանգը: □

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 20.9. Կուսարեր սկնդման ապացուցումը՝ մունրամասնորեն դիտարկելով բայր հնարավոր դեպքերը:

ՊՆԴՈՒՄ 20.10. *Կումայրական մատրիցի ստորային և սյունային ռանգերը իրար հավասար են:*

Ապացույց. Վերցնենք որևէ մատրից A և կատարելով ատրրուկում ձևափոխություններ՝ այն բերենք ունկյունագծային տեսքի: Մի կողմից, ստացված մատրիցի ստորային ունգր հավասար է արված մատրիցի ստորային ունգին, այսինքն ունգը՝ արված մատրիցի ստորային ունգին: Մյուս կողմից, ստացված մատրիցը ունկյունագծային է, որի ստորային և ստորային ունգերը իրար հավասար են: Հետևապես՝ իրար հավասար կլինեն նաև արված մատրիցի ստորային և ստորային ունգերը: $\square$

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 20.11. *Մատրիցի ունգ է կոչվում նրա ստորային կամ ստորային ունգերից յուրաքանչյուրը:*

21. ՀԱԿԱԴԱՐՁԵԼԻ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐ

21.1. *Հակադարձելի մատրիցներ:* Մատրիցների բազմապատկման գործողությունը ունի միավոր. n -րդ կարգի մատրիցների համար այն n -րդ կարգի միավոր մատրիցն է, որը երբեմն նպատակահարմար է գրել նաև ատրրակում մատրիցների գումարի միջոցով.

$$I_n = e_{11} + e_{22} + \dots + e_{nn} :$$

Հետևապես՝ կարելի է խոսել հակադարձելի մատրիցների մասին: Ընդունված է K դաշտի վրա արված հակադարձելի մատրիցների բազմությունը գրառել $GL(n, K)$ աներով:

ԴՆՈՒՄ 21.1. $(GL(n, K), \cdot)$ զույգը խումբ է:

Ապացույց. Նախ պետք է ցույց տալ, որ մատրիցների բազմապատկման $\cdot$ գործողությունը $GL(n, K)$ բազմություն վրա արված երկտեղ գործողություն է: Այսինքն՝ պետք է ասանցուցել, որ հակադարձելի մատրիցների արտադրյալը հակադարձելի է: Իսկույան, դիցույ՝ հակադարձելի են A և B մատրիցները: Այդ դեպքում

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} :$$

Իբրեք,

$$AB \cdot B^{-1}A^{-1} = A \cdot I_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n :$$

Այնուհետև, մենք ուրդեն գիտենք, որ մատրիցների բազմապատկման գործողությունը գուգորդելի է:

Միավոր մատրիցը նայնպես հակադարձելի է: Հետևապես՝ մնում է ցույց տալ, որ հակադարձելի մատրիցի հակադարձը նայնպես հակադարձելի է: Իսկ դա բխում է կամայական միավորով օղակի հակադարձելի տարրի հատկությունից: $\square$

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 21.2. $(G(n, K), \cdot)$ խումբը կոչվում է K դաշտի վրա արված *մատրիցների լրիվ գծային խումբ*:

Մատրիցների լրիվ գծային խումբը չափսզումնց մեծ դեր է խողում մաթեմատիկայում և նրա կիրառություններում, և նրա ուսումնասիրությունը հանրահաշվի կարևոր խնդիրներից է:

ՊՆԴՈՒՄ 21.3. *Երե*

$$A \cdot B = C$$

և A, B, C մատրիցներից երկուսը հակադարձելի են, ապա հակադարձելի է նաև երրորդը:

Ապացույց. ա. Հակադարձելի են A -ն և B -ն: Այդ դեպքում

$$C^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} :$$

բ. Հակադարձելի են A -ն և C -ն: Այդ դեպքում, $A \cdot B = C$ հավասարության երկու մասերը ձախից բազմապատկելով A մատրիցի հակադարձով, կստանանք՝

$$A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot C$$

կամ

$$B = A^{-1} \cdot C :$$

□

Այժմ սլորգները հետևյալ կարևորագույն ելույցը. ժ՞ր մատրիցներն են հակադարձելի: Հասկանալի է, որ n -րդ կարգի մատրիցների օղակը, երբ $n > 1$, մտնում է չի կազմում և հեշտությամբ կտրելի է զանեւ զրոյից ստորեր մատրից, որը հակադարձելի չէ: Օրինակ, երկրայի կարգի c_{12} ստորուկան մատրիցը հակադարձելի չէ:

Առաջիկայում մենք կզանենք մատրիցը հակադարձելի լինելու հետադրերի սլայ-մաններ: Այստեղ նախ բերենք հակադարձելի մատրիցների կարևոր օրինակներ:

ՊՆԴՈՒՄ 21.4. *Անկյունագծային մատրիցը հակադարձելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա սանկյունագծի վրա կանգնած են միայն ոչ զրայական տարրեր:*

Ապացույց. Դիցուք՝ ունենք

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & & 0 \\ 0 & a_2 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

անկյունագծային մատրիցը:

Նախ ենթադրենք, որ

$$a_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n :$$

Այդ դեպքում

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 & & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & a_n^{-1} \end{pmatrix} :$$

Հակառակը, դիցուք՝ A սանկյունագծային մատրիցը հակադարձելի է՝ Դա նշանակում է, որ գոյություն ունի $|b_{ij}|_n$ մատրից, որի համար

$$A \cdot |b_{ij}|_n = I_n :$$

Այս հավասարությունից կստանանք՝

$$a_1 b_{11} \dots \dots = a_n b_{nn} = 1 :$$

Հետևաբն՝

$$a_i \neq 0, i = 1, \dots, n :$$

□

ՊՆԴՈՒՄ 21.5. *Անկյունագծային մատրիցը հակադարձելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա տանգը և կորագը հակառակորդ են իրար:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարենք ինքնուրույն: □

ՊՆԴՈՒՄ 21.6. *Եթե մատրիցը պարամետիզմ է գրայտկան տող կամ գրայտկան սյուն, ապա այն չի կորագը հակադարձելի լինել:*

Ապացույց. Եթե մատրիցի i -րդ առողը գրայտկան է, ապա այն բազմապատկելով գունկացում մատրիցով կստանանք մի նոր մատրից, որի i -րդ առողը նույնպես կլինի գրայտկան, հետևաբն՝ այն միավոր մատրից լինել չի կարողանա: □

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 21.7. Ոչ հակադարձելի տրասդրիչ ունեցող մատրիցը հակադարձելի լինել չի կարող: Ապացուցենք:

21.2. *Տրանսվեկցիաներ:* Ներմուծենք հակադարձելի մատրիցների հաջորդ կարերը ընտանիք:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 21.8. *Տրանսվեկցիա է կոչվում*

$$t_{ij}(\alpha) = I_n + \alpha e_{ij}$$

մատրիցը, որտեղ $\alpha \in K, i, j = 1, 2, \dots, n$:

Տրանսվեկցիաների հետ գործողություններ կատարելիս օգտակար է ստորա-կան մատրիցների բազմապատկման հետևյալ կոնոնը, որը ստացվում է անմիջա-կանորեն:

ՊՆԴՈՒՄ 21.9.

$$(9) \quad e_{ij} \cdot e_{kl} = \begin{cases} e_{il}, & \text{երբ } j = k, \\ 0, & \text{երբ } j \neq k: \end{cases}$$

ՊՆԴՈՒՄ 21.10. $t_{ij}(\alpha)$ *տրանսվեկցիան, որտեղ* $i = 1, 2, \dots, n, \alpha \neq -1$ *դեպքում հակադարձելի է: Ընդ որում,*

$$t_{ii}(\alpha)^{-1} = t_{ii}\left(\frac{-\alpha}{1+\alpha}\right) :$$

Ապացույց. Դիցուք՝ $\alpha \neq -1$: Այդ դեպքում, օգտվելով մատրիցների բազմա-պատկման հատկություններից և (9) հավասարությունից, կստանանք՝

$$t_{ii}(\alpha) \cdot t_{ii}\left(\frac{-\alpha}{1+\alpha}\right) = (I_n + \alpha e_{ii})(I_n + \frac{-\alpha}{1+\alpha} e_{ii}) =$$

$$= 1_n - \frac{\alpha}{1+\alpha} e_{ii} + \alpha e_{ii} - \frac{\alpha^2}{1+\alpha} e_{ii} = 1_n + \frac{\alpha + \alpha^2 - \alpha - \alpha^2}{1+\alpha} e_{ii} = 1_n :$$

□

ՊՆԴՈՒՄ 21.11. *Անհատատոր ինդեքսներով սյունավեկցիաները հակադարձելի են: Ընդ սրտմ՝ երե $i \neq j$, ստաց*

$$(t_{ij}(\alpha))^{-1} = t_{ij}(-\alpha) :$$

Ապացույց. Իսկապես, օգտվելով մատրիցների բազմապատկման հասկացություններից ե (9) հավաստությունից, կստանանք՝

$$\begin{aligned} t_{ij}(\alpha) \cdot t_{ij}(-\alpha) &= (1_n + \alpha e_{ij}) \cdot (1_n - \alpha e_{ij}) = \\ &= 1_n \cdot 1_n - 1_n \cdot \alpha e_{ij} + \alpha e_{ij} \cdot 1_n - \alpha e_{ij} \cdot \alpha e_{ij} = 1_n : \end{aligned}$$

□

ՊՆԴՈՒՄ 21.12. *Տյունավեկցիաների սրատայրայրը հակադարձելի է, երե նրանում բացակայում է $t_{ii}(-1)$, $i = 1, 2, \dots, n$ տեսրի սրատայրից:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեր ինքնուրույն: □

Հաստ կտրելու ե կամայական մատրիցի բազմապատկումը սյունավեկցիայով:

ՊՆԴՈՒՄ 21.13. *Մատրիցը ծախից բազմապատկել $t_{ij}(\alpha)$ սյունավեկցիայով նշանակում է մատրիցի j -րդ ստղը բազմապատկել α -ով ե գումարել նրա i -րդ ստղին:*

Ապացույց. Դիցալք՝

$$A = \|a_{ij}\|_n = \sum_{k,l=1}^n a_{kl} e_{kl} :$$

Այդ դեպքում՝

$$\begin{aligned} t_{ij}(\alpha) \cdot A &= (1_n + \alpha e_{ij}) \cdot A = A + \alpha e_{ij} \cdot \sum_{k,l=1}^n a_{kl} e_{kl} = \\ &= A + \alpha \sum_{k,l=1}^n a_{kl} e_{ij} e_{kl} = A + \alpha \sum_{l=1}^n a_{jl} e_{il} : \end{aligned}$$

Մնում է նկատել, որ A մատրիցին գումարվող $\alpha \sum_{l=1}^n a_{jl} e_{il}$ գումարելին մի մատրից է, որի i -րդից ստղերը ստղերում 0-յտիւն տնդումներ են, իսկ i -րդ ստղում A մատրիցի j -րդ ստղն է բազմապատկում α ստղով: □

ՊՆԴՈՒՄ 21.14. *Մատրիցը տչից բազմապատկել $t_{ij}(\alpha)$ սյունավեկցիայով նշանակում է մատրիցի i -րդ սյունը բազմապատկել α -ով ե գումարել նրա j -րդ սյունը:*

Լևկոսյաց. Դիցուք՝

$$A = |a_{ij}|_n = \sum_{k,l=1}^n a_{kl} e_{kl} :$$

Այդ դեպքում՝

$$A \cdot t_{ij}(\alpha) = A + \alpha \sum_{k,l=1}^n a_{kl} e_{kl} e_{ij} = A + \alpha \sum_{k=1}^n a_{ki} e_{kj} :$$

Մենք է նկատել, որ A մատրիցին զամարված $\alpha \sum_{k=1}^n a_{ki} e_{kj}$ մատրիցի j -րդից ստորերն սյուններում Օ-յական անդամներ են, իսկ j -րդ սյուն մեջ A մատրիցի i -րդ սյունն է՝ բազմապատկում α ստալով:

ՊԼԴՌԻՄ 21.15. *Մատրիցը ծախից բազմապատկել $t_{ii}(\alpha)$ արանսվեկցիայով նշանակում է մատրիցի i -րդ ստալ բազմապատկել $1 + \alpha$ -ով:*

Լևկոսյաց. Նշանակենք u_i -ով A մատրիցի i -րդ ստալը: Համաձայն 21.13 սլրնդ-ման՝ A մատրիցը ծախից բազմապատկել $t_{ii}(\alpha)$ -ով, նշանակում է u_i -ն բազմապատկել α -ով և զամարել u_i -ին: Այսինքն՝ ստացված մատրիցի i -րդ ստալը կլինի՝

$$u_i + \alpha u_i = (1 + \alpha) u_i :$$

□

ՊԼԴՌԻՄ 21.16. *Մատրիցը տից բազմապատկել $t_{ii}(\alpha)$ արանսվեկցիայով նշանակում է մատրիցի i -րդ սյունը բազմապատկել $1 + \alpha$ -ով:*

Լևկոսյաց. Ասլոցուցումը կասարել ինքնուլալն:

□

ՊԼԴՌԻՄ 21.17. *Մատրիցը հակադարձելի է ույն և միայն ույն դեպքում, եթե ույն կարելի է ներկայացնել որպես $t_{ii}(-1)$, $i = 1, 2, \dots, n$ տեսք չունեցող արանսվեկցիաների արսուլլալ:*

Լևկոսյաց. Պարզ է, որ նշված աեսքի արանսվեկցիաները և նրանց արադ-բայաները հակադարձելի են:

Հակադարձը, դիցուք՝ A մատրիցը հակադարձելի է: Այդ դեպքում, 21.13-21.16 սլնդումների համաձայն, արված մատրիցը $t_{ii}(-1)$, $i = 1, 2, \dots, n$ տեսք չունեցող արանսվեկցիաներով բազմապատկելով՝ կարելի է բերել անկլումուդալին աեսքի՝

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n$$

անկլումուդով: Համաձայն 21.3 սլնդման, ստացված անկլումուդալին մատրիցը հակադարձելի է: Հեսնալես՝ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ տարրերը գրայից սարբեր են: Սաացված անկլումուդալին մատրիցը հաջորդարար բազմապատկելով

$$t_{ii}\left(\frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i}\right), \quad i = 1, \dots, n$$

արանսվեկցիաներով և օգավելով 21.15-ից՝ կսամումը միավոր մատրիցը: Այսպիսով՝

$$t_1 \cdots t_k A t_{k+1} \cdots t_l = I_n,$$

որտեղ $t_1, \dots, t_l$ -երը արտանվեկցյալներ են, պահեց մեջ բացակայում են $t_{ii}(-1)$, $i = 1, 2, \dots, n$ տեսք ունեցողները, բանի որ $(1 - \alpha_i)/\alpha_i \neq -1$, $i = 1, \dots, n$:

Վերջին մատրիցային հավասարությունից կստանանք A մատրիցի ներկայացումը պահանջվող տեսքի արտանվեկցյալների արտադրյալի տեսքով: $\square$

21.3. Հիկրածվող մատրիցներ: Նախադր կեսում մենք դիտարկեցինք երկու ախախ հակադրարձեւի մատրիցներ՝ արտանվեկցյալները և անկյունագծային մատրիցները: Եվ այդ երկու դեպքում էլ դիտարկվող մատրիցի հակադրարձեւիությունը համարժեք էդուվ նրա ստնգի և կարգի համընկնելուն: Պարզվում է, որ այս ինտաքքիքը և չափազանց կարեւոր օրինաչափությունը սեղի ունի նաև կամայական մատրիցի համար:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 21.18. *Քստանվաւային մատրիցը կոչվում է չվերածվող, եթե նրա ստնգը և կարգը հավասար են իրար:*

Օրինակ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

մատրիցներից ստաջին երկուսը չվերածվող են, իսկ երրորդը վերածվող է:

ՊԵՐՈՒՄ 21.19. *Եթե մատրիցի ստղերը կամ սյուները գծորեն կախյալ են, ապա մատրիցը չի կարող հակադրարձեւի լինել:*

Լարացայց. Իսկապես, եթե մատրիցի ստղերը կամ սյուները գծորեն կախյալ են, ապա մի բանի հաջորդական ստորական ձևափոխություններից ինտու մենք այդ մատրիցից կստանանք մի մատրից, որի որեւէ ստղ կամ որեւէ սյուն գրայական է: Իսկ դա նշանակում է, որ ստացվում, ինտուստես՝ նաև սրված մատրիցը չի կարող հակադրարձեւի լինել: $\square$

ՊԵՐՈՒՄ 21.20. *Մատրիցը չվերածվող է այն և միայն այն դեպքում, եթե այն կարելի է ներկայացնել որպես $t_{ii}(-1)$, $i = 1, 2, \dots, n$ տեսք չունեցող արտանվեկցյալների արտադրյալ:*

Լարացայց. Դիցուք՝ մատրիցը սյնդման մեջ նշված տեսքի արտանվեկցյալների արտադրյալ է: Այդ դեպքում այն նաև հակադրարձեւի է, ինտուստես, իտամույն նախադր սյնդման, այն չվերածվող է:

Հակառակը, եթե մատրիցը չվերածվող է, ապա այն ստորական ձևափոխություններով կամ, որ նույնն է, արտանվեկցյալներով բազմապատկելով, ստանց մատրիցի ստնգը վախելաւ, նախ կրելենք անկյունագծային տեսքի, սրի անկյունագծի վրա կանգնում ստորերը գրայից ստորեր են: Այնուհետև, այդ ճոր մատրիցից կստանանք միավոր մատրիցը՝ դարձյալ ստորական ձևափոխությունների միջոցով կամ արտանվեկցյալներով բազմապատկելով: $\square$

ՊԵՐՈՒՄ 21.21. *Մատրիցը հակադրարձեւի է այն և միայն այն դեպքում, եթե այն չվերածվող է:*

Կորոշույց. Եթե u_i սյույններն էլ համարվեն n մատրիցի՝ $t_{ii}(1), i = 1, 2, \dots, n$ տեսք չունեցող արանավելիյունների տրատոլոյալի տեսքով ներկայացնելու: $\square$

21.4. Մատրիցների տրատոլոյալի ռանգը: Վերջում ամբողջաձևով մատրիցների տրատոլոյալի ռանգի որոշման խնդիրն: Նախ քննարկենք արված մատրիցի և այն չվերածվող մատրիցով բազմապատկելուց ստացված մատրիցի ռանգերի կապը:

ԴՆԴՈՒՄ 21.22. *Եթե n -րդ կարգի B մատրիցը չվերածվալ է, ապա n -րդ կարգի կոմպոսիտն A մատրիցի համար*

$$\text{rank}(AB) = \text{rank } A :$$

Կորոշույց. Օգտվելով 21.20 պնդումից՝ B մատրիցը ներկայացնենք որպես

$$t_{ij}(1), i = 1, 2, \dots, n$$

տեսք չունեցող արանավելիյունների տրատոլոյալ և նկատենք, որ այդ տեսք չունեցող արանավելիյունով բազմապատկելու դեպքում արված և ստացված մատրիցները ունեն մույն ռանգեր, բունի որ մնում բազմապատկումը համարվեն է մատրիցի ստորոտկան ձևով տխարյան: $\square$

Այժմ ամբողջաձևով կամայական մատրիցների տրատոլոյալի ռանգին:

ԴՆԴՈՒՄ 21.23. *Կոմպոսիտն բանախառնումը մատրիցների տրատոլոյալի ռանգը մեծ չէ տրատոլոյալներից յուրաքանչյուրի ռանգից: Մասնավորապես, եթե A և B մատրիցների տրատոլոյալը սրջվում է, ապա*

$$\text{rank}(AB) \leq \text{rank } A, \text{rank}(AB) \leq B :$$

Կորոշույց. Դիցուք՝ $A = [a_{ij}]_{mn}, B = [b_{ij}]_{nk}, AB = [c_{ij}]_{mk}$: Այդ դեպքում, օգտվելով մատրիցների բազմապատկման սահմանումից, կստանանք՝

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot b_{1j} + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot b_{nj} = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \dots \\ c_{mj} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \dots, k :$$

Այս հավասարությունը գույց է տույլ, որ A և B մատրիցների C ՝ տրատոլոյալի յուրաքանչյուր սյուն A մատրիցի սյուների գծային կոմբինացիան է: Հետևաբան՝ C -ի ռանգը չի կարող մեծ լինել A -ի ռանգից: Նույն կերպ գույց կանանք, որ C -ի յուրաքանչյուր տող B -ի տողերի գծային կոմբինացիան է, և այդ պատճառով C -ն չի կարող B -ի ռանգից մեծ ռանգ ունենալ:

Այլ բանի տրատոլոյալների տրատոլոյալի դեպքը ինդուկցիայով հանգեցվում է երկու տրատոլոյալների դեպքին: $\square$

ՈՐՈՇԻՉՆԵՐ

22. ՈՐՈՇԻՉՆԵՐ, ՆՐԱՆՑ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

22.1. *Որոշիչի սահմանումը:* Մատրիցների ուսումնասիրության մեջ կարևոր դեր են խաղում նրանց սրոշիչները, որոնց հետ մենք մասնակիորեն ծանոթ ենք համարածովի դպրոցական դասընթացից:

Գիտարկենք K դաշտի վրա սրված

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

քառակուսային մատրիցը: Նշանակենք այն A -ով և կազմենք նրա տեղումների այնպիսի օբյեկտայնները, որոնք պայտանավում են մեկական տեղում մատրիցի յուրաքանչյուր ստղից և մեկական տեղում նրա յուրաքանչյուր սյունից: Հասկանալի է, որ նման օբյեկտայնը տնայնում սխալ է ունենալ n օբյեկտայն:

ՊՆԴՈՒՄ 22.1. A մատրիցի տեղումների

$$a_{\alpha_1\beta_1} a_{\alpha_2\beta_2} \dots a_{\alpha_n\beta_n}$$

օբյեկտայնը այն և միայն այն դեպքում է սրված:

ու. մատրիցի յուրաքանչյուր ստղից մեկական տեղում, եթե

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

հաջորդականությունը $1, 2, \dots, n$ տարրերի տեղափոխություն է,

բ. մատրիցի յուրաքանչյուր սյունից մեկական տեղում, եթե

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$$

հաջորդականությունը $1, 2, \dots, n$ տարրերի տեղափոխություն է,

գ. մատրիցի յուրաքանչյուր ստղից և յուրաքանչյուր սյունից մեկական տեղում, եթե այդ տեղումների ինդեքսներից կազմված երկսայ ուղղասույր տեղադրություն է՝

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix} \in S(n) :$$

Ապացույց. Ապացուցումը կատարենք ինքնուրույն: □

Այս պնդումից ստանալուսին հետևում է հետևյալ հատկությամբ:

ՊԼԴՌԻՄ 22.2. *ո-րդ կարգի մատրիցի տնյումների այնպիսի արտադրյալները, որոնք ստացվում են մեկական տնդում նրա յուրաքանչյուր ստղից և մեկական տնյում նրա յուրաքանչյուր սյունից, ո՛! հասն են:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարենք ինքնուրույն: □

Այժմ վերցնենք *ո-րդ* կարգի որևէ մատրից և կազմենք նրա տնդումների այնպիսի արտադրյալները, որոնք ստացվում են մեկական տնդում նրա յուրաքանչյուր ստղից և մեկական տնդում նրա յուրաքանչյուր սյունից: Համաձայն նախորդ սլընդման՝ նման արտադրյալների թիվը *ո՛!* է:

Այնուհետև կազմենք ասուցված բոլոր արտադրյալների համառոնաշխական գումարները, ընդ որում, գումարի մեջ արտադրյալը վերցնենք $+$ նշանով, եթե նրա արտադրիչների ինդեքսներից կազմված սեղսդրոթյունը գոյզ է, $-$ նշանով՝ եթե նրա արտադրիչների ինդեքսներից կազմված սեղսդրոթյունը կենտ է: Ստացված գումարը տնվումենք սրված մատրիցի սրաշիչ:

Այսպիսով մենք համգում ենք հետևյալ կարևոր ստեմանմանը:

ՄԱՀՄԱՐՈՒՄ 22.3. *ո-րդ կարգի A մատրիցի որոշիչ է կոշվում K դուշտի ո՛! ստորեթիի համառոնաշխական գումարը, որոնցից յուրաքանչյուրը A մատրիցի յուրաքանչյուր ստղից և յուրաքանչյուր սյունից մեկական վերցրած արտադրիչների արտադրյալ է, ընդ որում, գումարի մեջ ույդ արտադրյալը մտնում է $+$ նշանով, եթե նրա արտադրիչների ինդեքսներից կազմված սեղսդրոթյունը գոյզ է, $-$ նշանով՝ եթե նրա արտադրիչների ինդեքսներից կազմված սեղսդրոթյունը կենտ է:*

A մատրիցի որոշիչը գրուովում է $|A|$ տեսքով: Ընդունված են նաև

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \det(A), |a_{ij}|_n$$

գրառումները:

Այս գրառումներից տուսիինի գործածոթյուն դեուլյում մատրիցի ստղերը, սյունեթեր և տնդումները համապատասխանուրուր կոշվում են նաև նրա որոշիչի՝ ստղեր, սյունեթեր և տնդումներ: Մենք կուսենք, օրինակ,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

որոշիչը ունի չորս սյուն, նրա վերջին սյունը կազմված է գրոնեթից, երկրորդ ստղն է՝ 2 1 2 0, և ույն:

Որոշիչի ստիմանումից անմիջապես հետևում է, որ եթե ընդունենք

$$\operatorname{sgn} f = \begin{cases} +, & \text{եթե } f\text{-ը դուրյալ է} \\ -, & \text{եթե } f\text{-ը կենսա է} \end{cases}$$

նշանակումը, ապա կոմպոզիցիոն $A := |a_{ij}|_n$ մատրիցի համար կունենանք.

$$(10) \quad |a_{ij}|_n = \sum_{f \in S(n)} \operatorname{sgn} f a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} :$$

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 22.4. (10) հավասարությունը անվանենք $|a_{ij}|_n$ որոշիչի *հիմնական վերլուծություն*:

Բերենք որոշիչների մի քանի օրինակներ:

$$|a_{11}| = a_{11}, \quad |2| = 2, \quad |-2| = -2 :$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1 :$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} :$$

ՊԴՐՈՒՄ 22.5. Միտխք մատրիցի սրոշիչը հավասար է 1-ի:

Լեյտցույց. Լսարցուցումը կատարենք ինքնուրույն: □

ՊԴՐՈՒՄ 22.6. Լենկյունագծային մատրիցի սրոշիչը հավասար է մատրիցի գլխավոր անկյունագծի վրա կանգնած անդամների արտադրյալին:

Լեյտցույց. Լսարցուցումը կատարենք ինքնուրույն: □

22.2. Որոշիչները հիմնական հատկությունները: Հետևյալ հատկություններով օժտված են բոլոր որոշիչները: Կլանց խմբությունը պարտադիր է որոշիչների հետ շուտ քե թիշ թուրջ տոնջություն ունենալու դեպքում:

ՊԴՐՈՒՄ 22.7. (Հատկություն 1): Եթե սրոշիչը պարունակում է գրքյական ապ (գրքյական սյուն), ապա այն հավասար է գրքյի:

Լեյտցույց. Լսարցուցումը կատարենք ինքնուրույն: □

ՊԴՐՈՒՄ 22.8. (Հատկություն 2): Մատրիցի երկու տողերի (սյունների) դիրքափոխությունից ստացված մատրիցի սրոշիչը հավասար է սրված մատրիցի սրոշիչի հակադիրին: Կուրծ. սրոշիչի տողերը (սյունները) դիրքափոխելիս նրա նշանը փոխվում է: Լ՛յսխնքն:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} :$$

Արդյունք. Դիցուք $|a_{ij}|_n$ մատրիցի i -րդ և j -րդ ստղերի դիրքափոխությունից ստացվել է B մատրիքը: Վերցնենք $|a_{ij}|_n$ որոշիչի (10) հիմնական վերլուծության օրենքը՝

$$(11) \quad a_{1f(1)} \cdots a_{if(i)} \cdots a_{jf(j)} \cdots a_{nf(n)} :$$

Նրա նշանը սրբովում է

$$f = \begin{pmatrix} 1 & i & j & n \\ f(1) & f(i) & f(j) & f(n) \end{pmatrix}$$

անդադրություն գոյությունը: Սակայն (11) արտադրյալը մասնակցում է նաև $|B|$ որոշիչի հիմնական վերլուծության մեջ: Բայց պետք է միջև կա ընդամենը երկու ստորերկայուն, $a_{ij(j)}$ տնդամբ բնկում է B մատրիցի j -րդ ստղի մեջ՝ $jf(i)$ տեղում, իսկ $a_{jJ(j)}$ տնդամբ՝ B մատրիցի i -րդ ստղի մեջ՝ $if(j)$ տեղում: Հետևապես $|B|$ որոշիչի հիմնական վերլուծության մեջ (11) տնդամբ նշանը կորոշվի

$$g = \begin{pmatrix} 1 & i & j & n \\ f(1) & f(j) & f(i) & f(n) \end{pmatrix}$$

անդադրություն գոյությունը: Բայց f և g անդադրություններն տնեն ստորեր գոյություններ: Հետևապես (11) արտադրյալը և, աբմն, $|a_{ij}|_n$ որոշիչի հիմնական վերլուծության յուսարանյուր գումարելի $|B|$ որոշիչի հիմնական վերլուծության հսմախատատախտն գումարելուց ստորերբում է միայն նշանով: Սա էլ նշանակում է, որ $|a_{ij}|_n = -|B|$: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 22.9. (Հտակություն 3): *Երև մատրիքը տնի երկու միտտեսակ սաղեր (սյաներ), սուր նրա որոշիչը հախտար է գրոյի: Այսինքն՝*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 :$$

Ապացույց. 'Գիցույ՝ մատրիցն ունի երկու միասեռակ ստդեր: 'Դիրքավախենք մատրիցի հենց այդ ստդերը: Այդ դեպքում, համաձայն նախորդ հասկոթյուն, որոշիչը նշանը կվախի: Այժա կողմից, բանի որ դիրքավախված տողերը միասեռակ են, տալա վիրքավախոթյունից ստուցված մատրիցը, հեռաեռալա՝ նուե նրա որոշիչը չեն վախվախ: Այսինքն՝ աքված մատրիցի որոշիչը դաշաի մի տարր է, որը հավատար է իր հասկոթյուն: Ուրեան՝ այն գրա է: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 22.10. (Հատկոթյուն 4): Երե մատրիցի սրեկ տողի (սյուն) բոլոր առկումները բազմադատակենք դաշաի սրեկ տարրալ, տալա ստուցված մատրիցի որոշիչը հասկատար կլինի տրված մատրիցի որոշիչի և այդ տարրի տրատոթյալին: Կարձ, որոշիչի տողը (սյունը) սկալոթալալ բազմադատակենիս այդ սկալոթալալ է բազմադատակված տրված որոշիչը: Այսինքն՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \dots & \alpha a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} :$$

Ապացույց. 'Գիցուր՝ $|a_{ij}|_n$ մատրիցի i -րդ տողը բազմադատակենք ենք K դաշաի α տարրալ և ստուցել B մատրիցը: Այդ դեպքում՝

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_{f \in S(n)} \operatorname{sgn} f a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots (\alpha a_{if(i)}) \dots a_{nf(n)} = \\ &= \alpha \sum_{f \in S(n)} \operatorname{sgn} f a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{if(i)} \dots a_{nf(n)} = \alpha |a_{ij}|_n : \end{aligned}$$

$\square$

ՊՆԴՈՒՄ 22.11. (Հատկոթյուն 5): Երե մատրիցի երկու տողեր (սյուններ) հոմադլիծ են, տալա նրա որոշիչը հասկատար է գրալի: Այսինքն՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \dots & \alpha a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 :$$

Ապացույց. Ապացուցումը հեռաեռալ է նախալոդ երկու հասկոթյուններից: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 22.12. Ապացուցեք նախորդ սմդումը:

ՊՆԴՈՒՄ 22.13. (Հատկություն 6): Եթե մատրիցի i -յն ստույի (սյուն) յարարումը-
 յար տնդում երկու գումարելիների գումար է, ապա նրա սրոշիչը հասարար է երկու
 մատրիցների սրոշիչների գումարին, սրոնցից առաջինի i -յն սադում (սյուն մեջ)
 կունգնում են սրված մատրիցի i -յն սադի (սյուն) առաջին գումարելիները, իսկ երկ-
 րորդ մատրիցի i -յն սադում (սյուն մեջ)՝ սրված մատրիցի i -յն սադի (սյուն) երկրորդ
 գումարելիները, իսկ այդ մատրիցների մնացած սադերը (սյունները) համընկնում են
 սրված մատրիցի համարարարարում սադերի (սյունների) ենս: Այսինքն՝

$$(12) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & a'_{ij} + a''_{ij} & a'_{in} + a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} & a'_{ij} & a'_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a''_{i1} & a''_{ij} & a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix} :$$

Այսպիսյ, Իսկապես, նշանակենք (12) հավասարություն ձախ մասը d -ով, աջ
 մասի գումարելիները՝ d' և d'' : Այդ դեպքում.

$$\begin{aligned} d &= \sum_{f \in S(n)} \operatorname{sgn} f a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots (a'_{if(i)} + a''_{if(i)}) \cdots a_{nf(n)} = \\ &= \sum_{f \in S(n)} (\operatorname{sgn} f a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a'_{if(i)} \cdots a_{nf(n)} + \\ &\quad + \operatorname{sgn} f a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a''_{if(i)} \cdots a_{nf(n)}) = \\ &= \sum_{f \in S(n)} \operatorname{sgn} f a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a'_{if(i)} \cdots a_{nf(n)} + \\ &\quad + \sum_{f \in S(n)} \operatorname{sgn} f a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a''_{if(i)} \cdots a_{nf(n)} = d' + d'' : \end{aligned}$$

Այսինքն՝

$$d = d' + d'' :$$

Իսկ սա նենց (12) հավասարությունն է:

□

ՊՆԴՈՒՄ 22.14. (Հատկություն 7): Եթե մատրիցի որևէ սաղ (սյուն) զրոշաի որևէ տարրով բազմապատկենք և գումարենք մի այլ սաղի (սյուն), ապա ստացված մատրիցի որոշիչը հավասար կլինի սրիված մատրիցի որոշիչին: Այսինքն՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + \alpha a_{j1} & a_{i2} + \alpha a_{j2} & \dots & a_{in} + \alpha a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} :$$

Ապացույց. Բավական է օգտվել 6 և 5 հատկություններից: □

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 22.15. Ապացուցեք նախորդ պնդումը:

ՊՆԴՈՒՄ 22.16. (Հատկություն 8): Եթե մատրիցի որևէ սաղին (սյունը) գումարենք նրա այլ սաղերի (սյուների) գծային կոմբինացիոն, ապա ստացված մատրիցի որոշիչը հավասար կլինի սրիված մատրիցի որոշիչին:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: □

ՊՆԴՈՒՄ 22.17. (Հատկություն 9): Եթե մատրիցի որևէ սաղը (սյունը) հավասար է մյուսների գծային կոմբինացիային, ապա նրա որոշիչը հավասար է զրոյի:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: □

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 22.18. $|b_{ij}|_n$ մատրիցը կոչվում է $|a_{ij}|_n$ մատրիցի շրջած մատրից, եթե $b_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$: A մատրիցի շրջած մատրիցը սովորաբար նշանակվում է A' -ով: Այսպիսով՝ եթե

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

ապա

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} :$$

Դժվար չէ նկատել, որ A' մատրիցը կառուցվի A մատրիցից՝ այն իր գլխավոր տնկյունագծի շուրջ 180 աստիճանով շրջելուց:

ՊՆԴՈՒՄ 22.19. (Հատկություն 10): Դամայական A մատրիցի և նրա շրջած մատրիցի որոշիչները իրար հավասար են: Այսինքն՝

$$|A| = |A'| :$$

Լեյպցույց. Վերցնենք $|a_{ij}|_n$ որոշիչի հիմնական վերլուծության

$$a_{1f(1)} \cdots a_{nf(n)}$$

գումարելին: Նրա նշանը որոշիչի հիմնական վերլուծության մեջ որոշվում է

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & n \\ f(1) & f(2) & f(n) \end{pmatrix}$$

անդադրության գույգությամբ: Այդ նույն գումարելին մասնակցում է նաև $|A'|$ որոշիչի հիմնական վերլուծության մեջ, իսկ նրա նշանը որոշվում է

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} f(1) & f(2) & f(n) \\ 1 & 2 & n \end{pmatrix}$$

անդադրության գույգությամբ: Իսկ f և f^{-1} անդադրությունների ունեն նույն գույգությունը: Հետևապես նույն նշանը կունենան $a_{1f(1)} \cdots a_{nf(n)}$ գումարելին և $|a_{ij}|_n$, և $|A'|$ որոշիչների մեջ: Ուրեմն՝ նշված որոշիչները յուրա հավասար են: $\square$

23. ՈՐՈՇԻՉԻ ԿԱՊԸ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԵՏ

23.1. *Մատրիցների տրասպոզալի որոշիչը:* Գործողությունների հետ որոշիչների կտավը հիմնականում պայմանավորված է հետևյալ հատկությամբ:

ՊԼՂՈՒՄ 23.1. *Կոմպոնիտ A մատրիցի և նույն կարգի T տրանսպոզիցիայի համար*

$$|TA| = |T||A| :$$

Լեյպցույց. Զոնազոններ երկու դեպք:

ա. $T = t_{ij}(\alpha)$: Այլ վերայում $|T| = 1 + \alpha$: Այնուհետև՝ TA մատրիցը ստացվում է A մատրիցից, նրա i -րդ ստոր $1 + \alpha$ -ով բազմապատկելով: Հետևապես՝ $|TA| = (1 + \alpha)|A|$: Ուրեմն՝ $|TA| = |T||A|$:

բ. $T = t_{ij}(\alpha)$, $i \neq j$: Այդ դեպքում $|T| = 1$: Այնուհետև՝ TA մատրիցը ստացվում է A մատրիցից, նրա j -րդ ստոր α -ով բազմապատկելով և i -րդ ստորին գումարելով: Իսկ նման ձևափոխությունը դեպքում մատրիցի սյուղիչը չի փոխվում: Հետևապես՝ $|TA| = |A|$: Ուրեմն՝ $|TA| = |T||A|$: $\square$

ՊԼՂՈՒՄ 23.2. *Կոմպոնիտ A մատրիցի և նրա հետ միեմույն կարգի $T_1, T_2, \dots, T_m$ տրանսպոզիցիաների համար*

$$|T_1 T_2 \cdots T_m A| = |T_1| |T_2| \cdots |T_m| |A| :$$

Լեյպցույց. Ափսոսներ ինդուկցիա ըստ m -ի:

Ինդուկցիայի բուգիսը. $m = 1$: Հետևում է նախորդ պնդումից:

Ինդուկցիան քայլ. $m = 1$ -ի համար պնդումը ճշմարիտ է, այսինքն՝

$$|T_1 T_2 \cdots T_{m-1} A| = |T_1| |T_2| \cdots |T_{m-1}| |A| :$$

Ապացուցենք պնդումը m -ի համար:

Ուրեմն՝

$$|AB| = |A||B|,$$

քանի որ մենք ունենք նաև $|A| = 0$:

□

23.2. Հակադարձ մատրիցի որոշիչը: Մատրիցների տրասպոզիցիայի որոշիչի հասկացությունից ամմիջուպես հետևում է, հակադարձ մատրիցի որոշիչի հասկացությունը:

ՊԼԴՌԴՄ 23.6. Հակադարձելի մատրիցի հակադարձի որոշիչը հավասար է նրա սրձիչի հակադարձին: Այսինքն՝ եթե A -ն հակադարձելի մատրից է, ապա

$$|A^{-1}| = |A|^{-1} :$$

Ապացույց. Քանի որ A -ն հակադարձելի է, ապա

$$A \cdot A^{-1} = I_n :$$

Այստեղից, համաձայն նախարդ պնդման, կատանանք՝

$$|A||A^{-1}| = |A \cdot A^{-1}| = |I_n| = 1 :$$

Այսինքն՝ $|A|^{-1} = |A^{-1}|$:

□

Մատրիցի որոշիչը նրա հակադարձելիությունը բնույթագրերու և հակադարձը գանելու ևս մի հրաշայի հնարավորություն է բնձեռում:

ՊԼԴՌԴՄ 23.7. Մատրիցը հակադարձելի է այն և միայն այն դեպքում, եթե նրա սրձիչը գրայից սաւրեր է:

Ապացույց. Եթե A մատրիցը հակադարձելի է, ապա նրա որձիչը չի կարող զրո լինել, քանի որ $|A||A^{-1}| = 1$:

Հակառակը, եթե որձիչը զրո չէ, ապա մատրիցը ամպայման հակադարձելի է, քանի սր հակառակ դեպքում մատրիցի սաղերը կլինեն զծորեն կախյալ, իսկ դրանից կհետևեր մատրիցի սրձիչի զրո լինելը:

□

23.3. Մատրիցի չվերածվող լինելու կապը նրա որոշիչի հետ: Մատրիցի չվերածվող լինելու հասկացությունը նայնպես բնութայրվում է նրա որձիչի միջջջով:

ՊԼԴՌԴՄ 23.8. Մատրիցը չվերածվող է այն և միայն այն դեպքում, եթե նրա սրձիչը գրայից սաւրեր է:

Ապացույց. Իսկապես, մենք սղդեն գիտենք (տես՝ հասկացություն 9), որ եթե մատրիցը վերածվող է, այսինքն՝ նրա սաղերը զծորեն կախյալ են, ապա նրա որձիչը հավասար է զրայի: Դիցուք՝ մատրիցը չվերածվող է: Այդ դեպքում այն հակադարձելի է և համաձայն նախորդ պնդման՝ նրա սրձիչը գրայից սաւրեր է:

□

ՊԼԴՌԴՄ 23.9. Հուրարանչար քառասյաային մատրիցի համար հետևյալ պայմանները համարվեր են.

ա. մատրիցի սաղերը զծորեն անկախ են,

բ. մատրիցի սյաները զծորեն անկախ են,

գ. մատրիցը հակադարձելի է,

դ. մատրիցը կտրելի է ներկայացնել որպես $t_{ii}(-1)$, $i = 1, 2, \dots, n$ անք չունեցող տարրական մատրիցների տրամադրյալ.

և. մատրիցը չփերսժվող է.

գ. մատրիցի պաշխյալ գրույից ստորեր է:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարել ինքնուրույն: □

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 23.10. Ի՞նչ կապ գոյություն ունի սրված մատրիցի որոշիչի և այն մատրիցի որոշիչի միջև, որն ստացվում է սրված մատրիցից, նրա տողերը հակադասի հերթականությամբ գրելով:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 23.11. Ապացուցեք, որ *Վոնդերմանդի որոշիչի* համար անդի ունի հետևյալ վերլուծությունը.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j):$$

24. ՄԻՆՈՐՆԵՐ ԵՎ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԼՐԱՑՈՒՄՆԵՐ

24.1. Մինոր և հանրահաշվական լրացում: Որոշիչների ենտազու ռասում-նասիրություն ընթացքում կարևոր դեր է խաղում մինորի գաղափարը:

ՄԱՀՄԱՆՈՒՄ 24.1. $|a_{ij}|_{mn}$ մատրիցի a_{ij} տնդումի մինոր է կոչվում այն մատրիցի որոշիչը, որը ստացվում է սրված մատրիցի i -րդ աաղը և j -րդ սյունը ջնջելուց: a_{ij} տնդումի մինորը նշանակվում է M_{ij} :

$$(-1)^{i+j} M_{ij}$$

արաաղդյալը կոչվում է a_{ij} տնդումի հանրահաշվական լրացում և նշանակվում է A_{ij} -ով: Այսպիսով՝

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}:$$

ՊԼԴՌՈՒՄ 24.2. Եթե $|a_{ij}|_n$ մատրիցի M_{nn} մինորի հիմնական վերլուծությունը կոմայտկում տնդում բուգմադատկենը a_{nn} տնդումով, աադ կաստմունք $|a_{ij}|_n$ որոշիչի հիմնական վերլուծությունը որեւ տնդում:

Ապացույց. M_{nn} մինորի հիմնական վերլուծությունը կոմայտկում տնդումը աւնի

$$\operatorname{sgn} f a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{n-1f(n-1)}$$

տեսքը, որաւդ $f \in S(n-1)$: Պարզ է, որ եթե

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n-1) & n \end{pmatrix}$$

ապա $g \in S(n)$ և

$$f(i) = g(i), i = 1, 2, \dots, n-1:$$

Հետևապես՝

$$\begin{aligned} & \operatorname{sgn} f a_1 f(1) a_2 f(2) \cdots a_{n-1} f(n-1) a_n \\ &= \operatorname{sgn} g a_1 g(1) a_2 g(2) \cdots a_{n-1} g(n-1) a_n g(n) : \end{aligned}$$

Բայց այս հավասարայուն ուղի մասը $|a_{ij}|_n$ որոշիչի հիմնական վերլուծության գումարելի է: Հետևապես՝ այդպիսին կլինի նաև հավասարայուն ձախ մասը: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 24.3. a_{nn}, M_{nn} սրատարրային $|a_{ij}|_n$ որոշիչի հիմնական վերլուծության գումարելիների գումար է:

Ապացույց. Աստիճանային ստացվում է նախադր պնդումից: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 24.4. Ապացուցեք նախադր պնդումը:

ՊՆԴՈՒՄ 24.5. *Քառակուսային մատրիցի կոմպլեքսային a_{ij} տնդամի և նրա A_{ij} համարակալիական յրացման $a_{ij} A_{ij}$ սրատարրային այդ մատրիցի որոշիչի հիմնական վերլուծության գումարելիների գումար է:*

Ապացույց. Վերցնենք $|a_{ij}|_n$ մատրիցը: Նախ նրա a_{ij} տնդամը սրարունակող i -րդ սողը թայլ սա թայլ վերրուվալիսներ իր հարևան՝ հաջորդող սողերի հետ. $n - i$ թայլից հետո a_{ij} տնդամը կհայանվի նոր մատրիցի վերջին սողում: Այնուհետև, ստացված մատրիցի j -րդ սաղը, որը սրարունակում է a_{ij} տնդամը, նայնպես թայլ սա թայլ վերրուվալիսներ իր հարևան՝ հաջորդող սղունների հետ. $n - j$ թայլից հետո a_{ij} տնդամը կհայանվի նոր մատրիցի վերջին սղուն մեջ: Այսպիսով՝ սրված մատրիցի a_{ij} տնդամը կգրադիցնի ստացված B մատրիցի սաղրին ուղ տնկյունը:

Այժմ կատարենք հետևյալ նկատառումները:

Նախ, սրված մատրիցի a_{ij} տնդամի միևորը հավասար է B մատրիցի վերջին սողրի և վերջին սղուն ջնջումից ստացված մատրիցի սրալիչին:

Այնուհետև, թանի որ B մատրիցի վերջին սաղրի և վերջին սղուն հաաման աեղում կանգնած է a_{ij} -ն, սալս հալվի տնենլով նավարդ պնդումը՝ կսաունանք, որ $a_{ij} M_{ij}$ -ն B մատրիցի որոշիչի հիմնական վերլուծության գումարելիների գումար է:

Վերջապես, աեսնենք, քե իրարից ինչո՞վ են հարրերվում $|a_{ij}|_n$ և B մատրիցներրի որոշիչները: Քանի որ B մատրիցը ստացվել է $|a_{ij}|_n$ մատրիցից՝ նրա տողերի $n - j$ և սղունների $n - j$ դիրքավալիտայումը, սալս, համաձայն որոշիչների 2 հաակության, կունենանք.

$$|a_{ij}|_n = (-1)^{n-i+j} |B| = (-1)^{i+j} |B| :$$

Այստեղից՝ թանի որ $a_{ij} M_{ij}$ -ն B մատրիցի որոշիչի հիմնական վերլուծության գումարելիների գումար է, սալս $(-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$ -ն էլ կլինի $|a_{ij}|_n$ սրալիչի հիմնական վերլուծության գումարելիների գումար: Մնում է նկատել, որ

$$(-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij} :$$

$\square$

24.2. *Որոշիչի վերլուծումը ըստ տողի կամ սյուն:* Այժմ կարող ենք ապացուցել հետևյալ հավաստյունը, սրբ կուրևսր ճշումնակարյուն ունի որոշիչների տաւաւ-նաւիրարյուն ճնջ:

ՊՆԴՈՒՄ 24.6. *(Որոշիչի վերլուծարյունը ըստ տողի կամ սյուն): Կումարյակում $|a_{ij}|_n$ մասարիցի համար*

$$|a_{ij}|_n = \sum_{l=1}^n a_{il} A_{il} = \sum_{l=1}^n a_{lj} A_{lj} :$$

Լարացարյց. Դիաարկենք

$$(13) \quad a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj}$$

գումարը: Հումաւայն ճալարող պնդումն (13) գումարի բոլոր n գումարելիները $|a_{ij}|_n$ որաշիչի իմննական վերլուծարյուն գումարելիների գումարներ են: Այս

$$a_{1j} A_{1j}, a_{2j} A_{2j}, \cdots, a_{nj} A_{nj}$$

գումարներից որարարնշարր իր աւարով սարբերվում է մյաններից: Այնուհետև, իրարից սարբերվում են մաս նշվում սարբեր գումարների ճնջ մասում գումարելիները: Հետևապես (13) գումարը բաղկացում է իրարից սարբեր $(n-1)!$ կամ $n!$ գումարելիներից, որոնք մանում են $|a_{ij}|_n$ որաշիչի իմննական վերլուծարյուն ճնջ՝ որպես գումարելի: Այստեղից հետևում է, որ

$$a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj} = |a_{ij}|_n :$$

Նայն կերպ կապացուցվի մաս մյուս հավասարարարյունը:

$$\begin{aligned} |a_{ij}|_n &= a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj}, \\ |a_{ij}|_n &= a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in} \end{aligned}$$

հավասարարարյուններից առաջինը կոշվում է $|a_{ij}|_n$ որաշիչի վերլուծարյուն ըստ j -րդ սյուն, իսկ երկրորդը՝ մրա վերլուծարյուն ըստ i -րդ տողի: $\square$

24.3. *Հակադարձ մասարիցի հաշվումը:* Միմորի և համրուհաշվական լրացման հոսկացարյունները հնարավորարյուն են սալլա որաշիչի հակարարծելի մասարիցի հոսկարարծը: Նալապես սարացուցներ իհետյալ պնդումը:

ՊՆԴՈՒՄ 24.7. *Կումարյակում $|a_{ij}|_n$ մասարիցի համար երբ $i \neq j$, սալա.*

$$m. \ a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \cdots + a_{in} A_{jn} = 0,$$

$$p. \ a_{i1} A_{1j} + a_{i2} A_{2j} + \cdots + a_{in} A_{nj} = 0:$$

Լարացարյց. ա. Դիաարկենք B մարիցը, որն սալացվում է A մարիցից՝ մրա j -րդ տաղը իր i -րդ տաղով փախարիներուց: Մի կարմից $|B| = 0$, րանի որ B -ն ունի երկու մյուհաւաոկ տաղեր: Մյուս կողմից, B -ի j -րդ տաղի աւղումների համրաւաշվական լրացումները համընկնում են A -ի j -րդ տաղի համարյաւաւարումն աւղումների

հանրահաշվարան լրացումների հետ: Հետևապես, վերլուծելով $|B|$ որոշիչը ըստ j -րդ առդի, կստանանք՝

$$0 = |B| = a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \dots + a_{in} \cdot A_{jn} :$$

Այստեղից էլ կստացվի սյուսանջվող հավասարությունը:

Նույն կերպ ստացուցվում է բ կետը:

□

ԴՆԴՈՒՄ 24.8. Կոմպակտ A հակադարձելի մատրիցի համար

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & \dots & A_{n1}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & \dots & A_{n2}/|A| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n}/|A| & A_{2n}/|A| & \dots & A_{nn}/|A| \end{pmatrix} :$$

Ընդգրկող. Դիցուք $A = [a_{ij}]_n$: Նշանակենք՝

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|}, i, j = 1, \dots, n, [a_{ij}]_n [b_{ij}]_n = [c_{ij}]_n :$$

Այդ դեպքում՝

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk}/|A| = \begin{cases} 1, & \text{եթե } i = j, \\ 0, & \text{եթե } i \neq j: \end{cases}$$

Այսինքն՝

$$[a_{ij}]_n [b_{ij}]_n = I_n :$$

□

24.4. *Մատրիցի ռանգի արտահայտումը որոշիչի միջոցով:* Կոմպակտ մատրիցի ռանգի հաշվումն համար, սովորաբար, օգտագործվում է որոշիչի գաղափարը: Համապատասխան դիստրիբյուցիաների համար անհրաժեշտ է ներմուծել մատրիցի ենթամատրիցի և միների հասկացությունները:

ՄԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 24.9. Կոմպակտ ուղղանկյունաձև մատրիցի *ենթամատրից* է կաշվում նրա որոշ թանկություններ առջեր և որոշ թանկություններ սյուսներ ջնջելուց հետո ստացված մատրիցը:

Օրինակ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

մատրիցի ենթամատրիցներ են հետևյալ մատրիցները՝

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} :$$

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 24.10. Մասարիցի r -րդ կարգի մինչը է կոչվում նրա τ -րդ կարգի յուրաքանչյուր լատտկուսային ենթամասրիցի որոշիչը: Մասարիցի կամուսյուկուն կարգի միները կոչվում է նաև այդ մասարիցի *միներ*:

Հասկանալի է, որ $|a_{ij}|_{m,n}$ մասարիցը ունի միայն m և n թվերից փոքրը չգերազանցող կարգ ունեցող միներներ: Պարզ է նաև, որ n -րդ կարգի լատտկուսային մասարիցի որևէ անդամի միները այդ մասարիցի $n - 1$ -րդ կարգի միներ է:

Ռոշլիյի միջոցով մասարիցի ուսնզի հաշվման համար հիմք է ծառայում հետևյալ հասկոթյունը:

ՊԵՐՈՒՄ 24.11. *Ոչ գրոյտկուն մասարիցի տունզը հափաստը է նրա ոչ գրոյտկուն միներների կարգերից ամենամեծին:*

Ապացոյց. Դիցուք՝ A ոչ գրոյտկուն մասարիցն ունի r ստղերից կազմված գծերն ունկալի համակարգ: Յույց ստմք, որ այն ունի նաև զրոյից ստուրբի τ -րդ կարգի միներ: Իսկաուկա, նշանակենք B -ով A մասարիցի r գծորեն ունկալի ստղերով կազմված մասարիցը: Այդ B -ի ստղային ուսնզը հափաստը է τ -ի: Ուրեմն՝ նրա սյունային ուսնզը նայնպես կլինի τ : Այսինքն՝ B -ն կունենա τ հաա սյուններ, որոնք կկազմեն գծորեն ունկալի համակարգ: Նշանակենք B -ի այդ τ սյուներից կազմված մասարիցը C -ով: C -ն կլինի լատտկուսային մասարից, որի կարգը և ուսնզը միաժամանակ հափաստը են τ -ի: Հետևաուկա, համոծայն 23.8 պնդմուն, $|C'| \neq 0$: Հասկանալի է նաև, որ $|C'|$ -ն A մասարիցի τ -րդ կարգի միներ է:

Հափասուկը, դիցուք՝ A մասարիցն ունի τ -րդ կարգի զրոյից ստուրբեր միներ, և B -ն A -ի այն ենթամասարիցն է, որի որոշիչը հենց այդ միներն է: Այդ դեպքում, համոծայն 23.8 պնդմուն, B -ի ուսնզը հափաստը է τ -ի: Հետևաուկա՝ նրա ստղերը կազմում են գծորեն ունկալի համակարգ: Ակնհայտորեն գծորեն ունկալի համակարգ կկազմեն նաև A մասարիցի այն ստղերը, որոնք սյուրումուկում են B մասարիցի ստղերը: Հետևաուկա՝ A -ն ունի τ ստղերից կազմված գծորեն ունկալի համակարգ:

Այսպիսով՝ մենք սարցուցեցինք, որ մասարիցն ունի τ ստղերից կազմված գծերն ունկալի համակարգ այն և միայն այն դեպքում, եթե այն ունի τ կարգի զրոյից ստուրբեր միներ: Մրանից էլ ամմիջաուկա հետևում է պնդումը: $\square$

Հարկ է նկատել, որ որոշիչների միջոցով մասարիցի ուսնզը հաշվելիս կարիք չկա դիսաուկել մասարիցի բոլոր միներները: Համաուասաուիտուն հաշվարկների սուրբեցմուն լայն հնարափորոթյուններ է սալիս հետևյալ հասկոթյունը:

ՊԵՐՈՒՄ 24.12. *Եթե մասարիցի τ -րդ կարգի որևէ միները հափաստը չէ զրոյի, իսկ այդ միները երկզո $\tau + 1$ -րդ կարգի բոլոր միներները հափաստը են զրոյի, ապա սրվում մասարիցի ուսնզը τ է:*

Ապացոյց. Դիցուք՝ սրվում A մասարիցը ունի τ -րդ կարգի B չվերածվող լատտկուսային ենթամասարիցը, որը երկզոյ լեկեր միներները հափաստը են զրոյի: Պարզ է, որ B -ի ստղերը գծորեն ունկալի են: Հետևաուկա՝ գծորեն ունկալի կլինեն նաև A -ի այն τ հաա ստղերը, որոնց մեջ ընկում է B -ն: A -ի այդ τ հաա ստղերից գծորեն կաիվում է նրա յուրաքանչյուր ստղ:

Իսկուպես, նշանակենք C' -ով A -ի այն ենթամուտքիցը, որը ստացվում է նշված r հատ տաղերից և լրացուցիչ, A -ի որևէ տաղից: Այս C' մուտքիցի այն r սյուները, որոնք միասին պարունակում են B մուտքիցը, գծորեն տնկալի են, իսկ C -ի յուրաքանչյուր այլ սյուն գծորեն կախյալ է այդ սյուններից: Հետևապես՝ C' -ի սյունային ռանգը հավասար է r -ի: Ուրեմն՝ նրա առդային ռանգն էլ է հավասար r -ի: Այսինքն՝ A -ի՝ մեր կողմից դիտարկված կամայական առողր գծորեն կախված է նշված r հատ տեղերից: Հետևապես՝ A -ի ռանգը հավասար է r -ի: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 24.13. Աստցուցեր, որ մուտքիցների տրուտյայալի ռանգը մեծ չէ արատղրիչնեյի ռանգերից յուրաքանչյուրից:

**ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍՏԱՐՈՒՄՆԵՐԻ
ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ**

25. ԳԾԼՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

25.1. Գծային հավասարումների համակարգը: Հանրահալի կիրառությամբ շատ խնդիրների լուծումներ համգում են գծային հավասարումների համակարգերի լուծումը: Գծային հավասարումների համակարգերը ընկած են մեկ մաթեմատիկական շատ ուսումնասիրաթյալների հիմքում:

Հանրահաշիվի դոկտորական դստերնությունը դիտարկվում են երկու կամ երեք ան-
հայտով գծային հավասարումների համակարգերը: Ընդ որում, արդեն անհայտանե-
րի գարծակիցներ վերցվում են կամայական իրական թվեր: Այժմ մենք կուսում-
նասիրենք կամայական թվով անհայտներ և կամայական թվով գծային հավասար-
ումների սկզբնական համակարգերը: Միասնամասկ. դիտարկվող համակարգե-
րում անհայտների գործակիցները կլինեն կամայական դուշաի ատորքեր:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 25.1. *Գծային հադիսադրամների համակարգ է կազմում նախաստ-
բումների ինտելեկտ համակարգը:*

$$(14) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

Քրտնեղ

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

աւտերը (14) եւամակարդի տնտեսներն են, իսկ

$$a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

գարծուկիցները՝ և

$$b_1, b_2, \dots, b_m$$

ուզումը ունդումները նախապես սրվում K դաշտի կամույակում տարրեր:

Գծային երկրաչափական (14) համակարգը կարելի է գրել նաև մատրիցային տեսքով: Այդ նպատակով համակարգի գործակիցներից, սինեյաններից և ուղանա

ունդումներից կազմված մատրիցների Խամոր կոտարենը հետևյալ նշանակումները.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} :$$

Այդ դեպքում (14) համակարգը կընդունի հետևյալ՝ մատրիցային տեսքը.

$$AX = B :$$

Համոզվելու Խամոր բավական է ստուգել այս հավասարությունը՝ օգտվելով մատրիցների բազմապատկման և մատրիցների հավասարության սահմանումներից:

Այսպիսով m հավասարումների համակարգը գրվում է մատրիցային մեկ հավասարման տեսքով: A -ն համակարգի մատրիցը, նրա մատրիցային հավասարման մեջ համընդհանուր է գտնվող արտադրյալի գործակից, իսկ B -ն՝ արտադրյալի ազատ անդամ:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 25.2. K դաշտի ստորերի

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

n -յակը կոչվում է (14) համակարգի լուծում, եթե

$$(15) \quad \begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{cases}$$

Այսպիսով n անհայտով գծային հավասարումների համակարգի լուծումը K^n թվաբանական վեկտորական տարածության տարր է:

Եթե դիտարկում ենք համակարգի մատրիցային գրառումը, ուստի նրա լուծումը դարձյալ սենթ է դիտել արտադրյալի n -չափումի վեկտոր, բայց գրառված ուղղաձիգ շարքի կամ, ինչպես ընդունվում է ստեղծ, այսին տեսքով: Իսկապես, եթե

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix},$$

ուստի, Խամումայն մատրիցների բազմապատկման գործադրության սահմանման, կունենանք՝

$$Aa = B,$$

որտեղ A -ն համակարգի մատրիցն է, իսկ B -ն՝ նրա ազատ անդամներից կազմված մատրիցը:

ՄԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 25.3. Համակարգը կոչվում է *համասեղելի*, եթե այն ունի որևէ լուծում: Հակառակ դեպքում այն կոչվում է *անհամասեղելի*:

Օրինակ,

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases} \cdot \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x - 2y + 4z = 1 \end{cases}$$

համակարգերը ուղիղմուկ բնական $\mathbb{Q}$ դաշտի վրա արված գծային հավասարումների համակարգեր են: Առաջինի անհայտները x -ը և y -ն են, երկրորդինը՝ x , y , z -ը: Նրանցից առաջինը համասեղելի է: Նրա լուծումն է $(1, 1)$ բավարարել: Երկրորդը համակարգը լուծում չունի, այն անհամասեղելի է:

25.2. Գծային հավասարումների համակարգի համասեղելիությունը:

Գծային հավասարումների համակարգերի ուսումնասիրության կարևորագույն խնդիրներից մեկը նրա լուծում ունենալ-չունենալու, այսինքն՝ համասեղելիության հարցի պարզարևումն է: Գծային հավասարումների համակարգի համասեղելիությունը կապված է նրա գործակիցների և ազատ անդամների հետ: Համաստատախան աբղյուսթը ձևակերպելու համար ներմուծենք ևս մեկ հասկացություն:

ՄԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 25.4. Գծային հավասարումների (14) համակարգի *քնդույնված մատրից* է կոչվում նրա գործակիցներից և ազատ անդամներից կազմված հետևյալ մատրիցը.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} :$$

ՊՆԴՈՒՄ 25.5. (Երանեկեր-Կոպեկիի բեռեմը): Գծային հավասարումների համակարգը համասեղելի է այն և միայն այն դեպքում, եթե այդ համակարգի մատրիցի և նրա քնդույնված մատրիցի ունեցնող իրար հավասար են:

Լկարցայց. Դիցուք՝ (14) համակարգը համասեղելի է: Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ n -յակ, որ սեղի ունեն (15) հավասարությունները: Դրանք կարելի է գրառել նաև վեկտորական տեսքով.

$$(16) \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot \alpha_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot \alpha_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \alpha_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} :$$

Այս հավասարությունը ցույց է տալիս, որ (14) համակարգի $\overline{A}$ քնդույնված մատրիցի վերջին սյունը այդ համակարգի A մատրիցի սյուների գծային կոմբինացիան է: Հետևաբար, *overline A* մատրիցի վերջին սյունը ավելացնելով A մատրիցի

սյունների համակարգին, այդ համակարգի ունեզը չենք ավելացնել: Այսինքն՝ A մատրիցի ունեզը հավասար է $\overline{A}$ մատրիցի ունեզին:

Հակառակը, դիցուք՝ A մատրիցի ունեզը հավասար է $\overline{A}$ մատրիցի ունեզին: Այդ դեպքում $\overline{A}$ մատրիցի վերջին սյունը չի կարող գծորեն լինել A մատրիցի սյուններից: Հեռանալով կգանձվի այնպիսի $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ n -յակ, որ սեղի ունի (16) վեկտորական հավասարությունը: Այդ հավասարությունից կստանանք (15) հավասարությունները: Իսկ դա էլ նշանակում է, որ (14) համակարգը համատեղելի է: $\square$

25.3. Համարժեք համակարգեր: Գծային հավասարումների համակարգերի հետ կապված կարևորագույն խնդիրը նրանց լուծումն է: Լուծումն հնարքներից մեկը սրված համակարգի փոխարինումն է այնպիսի համակարգով, որը, ունենալով նույն լուծումները, ինչ արված համակարգը, միևնույն ժամանակ՝ լուծման համար ուղեղի նպաստավոր տեսք ունի:

ՄԱՀՄԱՆՈՒՄ 25.6. Այնևնույն թվով անհայտների ունեցող գծային հավասարումների համակարգերը կոչվում են *համարժեք*, եթե նրանք ունեն նույն լուծումները:

(Օրինակ,

$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x + 6y = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} 4x - 12y = 8 \\ 8x + 24y = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

համակարգերից առաջինը համարժեք է երկրորդին, բայց երրորդին համարժեք չէ:

ՊԵՐՈՒՄ 25.7. Հավասարությունների համակարգերի համարժեք լինելու ուղեջայրյանը համարժեքության ուղեջայրյան է:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքներալյան: $\square$

Տրված համակարգից նրան համարժեք համակարգ ստանալու հնարավորություն են ապլիս ստորոակուն ձևավոխությունները:

ՄԱՀՄԱՆՈՒՄ 25.8. Համակարգի *ստորոակուն ձևախախտություններ* են կոչվում. ու. համակարգի որևէ հավասարմուն բազմասլասկումը դաշալի՝ Օ-յից սուրբքեք ստորոակ,

բ. համակարգի մի հավասարմուն ավելացումը մյուսին՝ նախաալեա ավելացվող հավասարումը դաշալի որևէ ստորոակ բազմասլասկելով:

ՊԵՐՈՒՄ 25.9. *ա և բ տեսքի մի քանի հաջորդակուն ստորոակուն ձևախախտությունների միջոցով կարելի է կատարել համակարգի ցունկացում երկու հավասարումների դիրրախախտություն:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքներալյան: $\square$

ՊԵՐՈՒՄ 25.10. Գծային հավասարումների համակարգից ստորոակուն ձևախախտությունների միջոցով ստացված համակարգը համարժեք է սրված համակարգին:

Այդպիսով, «Իջույ՛ր» սեննը (14) համակարգը:

ու. Այդ համակարգի i -յո հավասարումը 0-ից ասարբեր c հաստատունով բազմապատկելով՝ ստացել ենք մի նոր համակարգ. նշանակենք այն $(*)$ -ով: Պարզ է, որ սրվում և առացվում համակարգերը սարբերվում են միայն i -րդ հավասարումով: Եթե $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ n -յակը (14) համակարգի լուծում է, ապա տեղի ունեն (15) հավասարությունները: Բազմապատկելով նրա i -րդ հավասարությամբ երկու մասերը c հաստատունով՝ նորից կստանանք հավասարություն: Առացվում հավասարությունների այդ համակարգը ցույց է տալիս, որ $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ n -յակը $(*)$ համակարգի լուծումն է: Նույն կերպ ցույց կտանք հսկաստեղ. $(*)$ համակարգի լուծումը լուծում է նաև (14)-ի համար:

բ. «Իջույ՛ր» (14) համակարգի i -յո հավասարումը բազմապատկել է c հաստատունով և զտմարվել նրա j -րդ հավասարումը: Առացվում համակարգը նշանակենք $(**)$ -ով: Տրվում՝ (14) և ստացվում՝ $(**)$ համակարգերը յուրից կսարբերվեն միայն j -յո հավասարումով, որը $(**)$ համակարգի մեջ մինի հեռեյոյ սեսը.

$$(17) \quad (ca_{i1} + a_{j1})x_1 + \dots + (ca_{in} + a_{jn})x_n = cb_i + b_j :$$

Այժմ, եթե $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ n -յակը (14) համակարգի լուծում է, ապա այն նաև (17) հավասարման լուծում է. դա ցույց ստոյտ համար բավական է (15) համակարգի i -յո հավասարությամբ երկու մասերը բազմապատկենք c հաստատունով և զտմարենք նրա j -րդ հավասարությամբ:

Հսկաստեղ, եթե $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ n -յակը $(**)$ համակարգի լուծում է, ապա.

$$(ca_{i1} + a_{j1})\alpha_1 + \dots + (ca_{in} + a_{jn})\alpha_n = cb_i + b_j,$$

$$a_{i1}\alpha_1 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i$$

Համեյով ոտուջին հավասարությունից երկրորդը՝ նոխասեա այն c -ով բազմապատկելուց հեսա, կստանանք

$$a_{j1}\alpha_1 + \dots + a_{jn}\alpha_n = b_j$$

հավասարությամբ, որը ցույց է տալիս, որ $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ n -յակը նաև (14) համակարգի j -րդ հավասարման լուծումն է: Ուրեմն՝ այն այդ համակարգի լուծում է: $\square$

ՊԵՐՈՒՄ 25.11. Համակարգի ստորրոկում ձևախոխությունները հանգեցնում են այդ համակարգի ընդլայնվում մուտրիցի տաղերի ստորրոկում ձևախոխությունների: Հսկաստեղ, համակարգի ընդլայնվում մուտրիցի տաղերի ստորրոկում ձևախոխությունները հանգեցնում են այդ համակարգի ստորրոկում ձևախոխությունների:

Այդպիսով, Այդպիսյը ոկնեսայո է և հանձնարարվում է ինքնուրույն կատարելու համար: $\square$

25.4. Կրամերի կանոնը: Առաջիկայում մենք կդիտարկենք զըծույին հավասարումների համակարգերի լուծման ընդհանուր խնդիրը: Նախասեա մեզ ունեսր-ժեշա է հանգստոնորեն քննարկել մի մասնավոր դեսը: Խոսքը միենույն թվով անհայտներ և հավասարումներ սարրոմակաղ համակարգերի լուծման մասին է: Մեզ

ՊՆԴՈՒՄ 25.12. (Կրթման իրադրություն): Երե խափառապրումների

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$x_i = \frac{\Delta_i}{|A|}, i = 1, 2, \dots, n,$$

Հաշվի առնելով այն, որ A -ն հակադարձելի մատրից է, $AX = B$ հավասարման երկու մասերը ձախից բազմապատկենք A^{-1} -ով: Հաջորդաբար կստանանք.

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \quad X = A^{-1}B:$$

$$\frac{A_{1i}}{|A|} \cdot b_1 + \dots + \frac{A_{ni}}{|A|} \cdot b_n$$
$$(A_{1i} \cdot b_1 + \dots + A_{ni} \cdot b_n) \cdot \frac{1}{|A|}$$

**Հիմնական հասկոթյաւոնք ձեռնկերախոց տառոց դիտարկենք գծալլին հաժատա-
քաւոնքերի հաժատկարգերի բաժատկան հեշալ յաժժալ մի կարերոք տեսալ:**

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 25.13. Հավասարումների հեռեյալ համակարգը՝

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{1j_1}x_{j_1} + \dots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \phantom{c_{1j_1}x_{j_1} +} c_{2j_2}x_{j_2} + + c_{2n}x_n = d_2 \\ \phantom{c_{1j_1}x_{j_1} +} \phantom{c_{2j_2}x_{j_2} +} \phantom{c_{2n}x_n =} \\ \phantom{c_{1j_1}x_{j_1} +} \phantom{c_{2j_2}x_{j_2} +} c_{rj_r}x_{j_r} + \dots + c_{rn}x_n = d_r \\ \phantom{c_{1j_1}x_{j_1} +} \phantom{c_{2j_2}x_{j_2} +} \phantom{c_{rj_r}x_{j_r} +} 0 = d_{r+1} \\ \phantom{c_{1j_1}x_{j_1} +} \phantom{c_{2j_2}x_{j_2} +} \phantom{c_{rj_r}x_{j_r} +} \phantom{d_{r+1}} \\ \phantom{c_{1j_1}x_{j_1} +} \phantom{c_{2j_2}x_{j_2} +} \phantom{c_{rj_r}x_{j_r} +} \phantom{d_{r+1}} \\ \phantom{c_{1j_1}x_{j_1} +} \phantom{c_{2j_2}x_{j_2} +} \phantom{c_{rj_r}x_{j_r} +} 0 = d_m \end{array} \right. ,$$

որտեղ $c_{1j_1}, c_{2j_2}, \dots, c_{rj_r}$, գործակիցները գրայից ստորեր են, r -ը 0 -ից մեծ կամ հավասար տմրոջ թիվ, կոչվում է *սեղումածև համակարգ*:

Դիցուք՝ x_{j_1} -ը (14) համակարգի մեջ ծախից առաջին անհայտն է, որի ինչ-որ գարծակից, օրինակ, c_{1j_1} -ը, գրայից ստորեր է: Բնական է ենրույրել, որ $j_1 = 1$: Հավասարումը, որի x_1 կամ, որ նույնն է, x_{j_1} անհայտի գարծակիցն է c_{1j_1} -ը, աեղա-վախներ առաջին շարք: Այնուհետև կարող ենր ստորրական ձևափոխություններով հասնել նրան, որ հաջորդ բոլոր հավասարումներում x_{j_1} անհայտի գարծակիցները լինեն գրո: Դրա համար անհրաձևա կլինի առաջին հավասարումը բազմապատկել $-c \cdot c_{1j_1}^{-1}$ -ով և գումարել x_{j_1} անհայտի գրայից ստորեր c գործակիցը ստորումակաղ հավասարումը:

Հաջորդ րայում մենր կղխարկենր առաջված համակարգի ծախից առաջին այն x_{j_2} անհայտ, որն ունի գրայից ստորեր գարծակից համակարգի սրե հավա-սարումն մեջ՝ չհաղված առաջին հավասարումը: Նույն կերպ վարվելով այս դեպքում՝ մենր կհասնենր նրան, որ այս x_{j_2} անհայտը գրայից ստորեր գարծակից կունենա համակարգի երկրորդ հավասարումն մեջ, իսկ հաջորդ բոլոր հավասարումների մեջ՝ կունենա 0 գարծակիցը:

Դուտդորյությունների այս շղրան շարունակելով՝ վերջավոր րայերից ենաո մենր կստանանր սեղումածև մի համակարգ, որը ստացվում է արված համակարգից՝ ստոր-րական ձևափոխությունների միջոցով:

Իսկ ինչպե՞ս լուծենր սեղումածև համակարգը:

ՊՆԴՈՒՄ 25.14. *Սեղումածև (18) համակարգը.*

ա. լուծում չունի, երե $d_{r+1}, \dots, d_m$ ստորերից գուն մեկը գրայից ստորեր է,
բ. լուծում ունի, երե $d_{r+1}, \dots, d_m$ ստորերը բոլոր գրո են:

Այոցույց. Ասրացուցումը կասարեր ինքնալույն: □

Արված այս դխարկումները նախասկսիարմար է ձևակերպել մեկ ընդհանուր կումեմի մեջ:

ՊՆԴՈՒՄ 25.15. *(Ագարիրմ Դուտի կում գծային հախտարումների համակար-գերի լուծում): Դույին հախտարումների համակարգը լուծելու համար կարելի է կատարել հեռեյալ րայերը.*

ա. Դուտի մերոյով (14) համակարգը բերել սեղումածև (18) համակարգի աեաթի,

Ապացույց. Պետք է ցույց տալ, որ.

ա. X -ի և Y -ի $X + Y$ գումարը, որտեղ $Y \in U$, (21) համակարգի լուծում է: Իսկապես,

$$A(X + Y) = AX + AY = B + 0 = B,$$

որտեղ B -ն (21) համակարգի ազատ անդամներից կազմված սյունն է:

բ. Յույց ստանք, որ (21) համակարգի ցանկացած լուծում ներկայացվում է $X + Y$ գումարի տեսքով, որտեղ $Y \in U$: Իսկապես, դիցույ՝ Z -ը նույնպես (21) համակարգի լուծում է՝ $AZ = B$: Դիտարկենք $Z - X$ ստորբերությունը: Ունենք՝

$$A(Z - X) = AZ - AX = B - B = 0 :$$

Այսինքն՝ $Z - X$ ստորբերությունը (22) համակարգի լուծում է: Հետևապես՝ $Z - X = Y$, $Y \in U$: Այստեղից կատանումք՝ $Z = X + Y$: Այսինքն՝ $Z \in X + U$: $\square$

Այս սկզբումից մասնավորապես հետևում է հետևյալ հուսկությունը:

ՊԼԴՌԻՄ 26.8. *Գծային հավասարումների համաստեղեղի համակարգի կամա-յական լուծումը կատուցվի, եթե նրա ֆիքսած լուծումը գումարենք իր համասեռ հա-մակարգի ինչ-որ լուծում:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: $\square$

ՊԼԴՌԻՄ 26.9. *Գծային հավասարումների համաստեղեղի համակարգի ցանկա-ցած լուծման և նրա համասեռ համակարգի լուծման գումարը այդ համակարգի լու-ծում է:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: $\square$

ՊԼԴՌԻՄ 26.10. *Գծային հավասարումների՝*

ա. *համաստեղեղի համակարգի կամայական երկու լուծումների ստորբերությունը նրա համասեռ համակարգի լուծում է,*

բ. *համաստեղեղի համակարգի և նրա համասեռ համակարգի լուծումների գու-մարը համակարգի լուծում է:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: $\square$

26.3. *Լուծումների տարածության բազիսը և չափողականությունը:* Այ-ժրմ ազելի հանգումանդրեն ածամուսիրենք գծային հավասարումների համասեռ համակարգի լուծումների տարածությունը:

ՄԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 26.11. *Գծային հավասարումների համասեռ համակարգի լուծում-ների տարածության յուրաքանչյուր բազիս կազմում է նրա լուծումների ֆունդամեն-տալ համակարգ:*

Հուսկանալի է, որ միևնույն համակարգի երկու ֆունդամենտալ համակարգեր ունեն միևնույն թվով անդամներ, քանի որ նրանք միևնույն վեկտորական տարածու-թյան, այն է՝ գծային հավասարումների համասեռ համակարգի լուծումների տարա-ծության բազիսներ են:

ՊՆԴՈՒՄ 26.12. Երև գծային հալիստարամների համառոտ համակարգի կիմ-նտկան մտարիցի Ե տնգը փորը և նրա տնհայտների ու բլից, ստղա սղը համակար-գը տնի ու - Ե տնդրամներից բարկացած լուծումների ֆունկցիոննտուլ համակարգ:

$$\text{rank}(a_{ij})_{mn} =: r < n$$
$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{array} \right.$$
$$f : (k_{r+1}, \dots, k_n) \rightarrow (k_1, \dots, k_r, k_{r+1}, \dots, k_n)$$
$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}k_{r+1} - \cdots - a_{1n}k_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}k_{r+1} - \cdots - a_{rn}k_n \end{array} \right.$$

Հեշտությամբ կորեկի է ցույց տալ, որ f որսնապատկերումը իզոմորֆիզմ է K^n տարածության և (22) համակարգի լուծումների տարածության միջև: Այս-
տեղից հետևում է, որ (22) համակարգի լուծումների տարածության չափադականու-
թյունը համասար է $n - r$ -ի: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 26.13. *Երև ունիստաւ/ գծային հալիտաւորումների նմանատիպ հալիտայի կիմնուիւմ մատարիցի տունը Ի Լ, սուրս նրա լուծումների ստաւորածաւրյան շտիտայիտաւորայուն կիմնի ու Ի Լ:*

բ. $r < n$: Այս դեպքում կկիրառենք հավաքող պնդումը:

ԳԾԱՅԻՆ ԱՐՏԱՊԱԿՏԵՐՈՒՄՆԵՐ

27. ԳԾԱՅԻՆ ԱՐՏԱՊԱԿՏԵՐՈՒՄՆԵՐ

27.1. *Գծային արտապատկերումներ:* Այննույն դոմայնի վրա ստացված վեկտորական տարածությունների միջև գոյություն ունեցող արտապատկերումների մեջ առանձնապես կարևոր են նրանք, որոնք համաձայնեցված են այդ տարածություններում ստիմանված գործողությունների հետ: Նման արտապատկերումները կոչվում են գծային արտապատկերումներ:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 27.1. Դիցուք՝ V -ն և W -ն միևնույն K դոմայնի վրա ստացված վեկտորական տարածություններ են:

$$f : V \rightarrow W$$

արտապատկերումը կոչվում է *գծային արտապատկերում*, եթե.

$$\text{ա. } f(x + y) = f(x) + f(y),$$

$$\text{բ. } f(\alpha x) = \alpha f(x),$$

ինչպիսին էլ լինեն V -ի x, y և K -ի α տարրերը:

Գծային արտապատկերումների օրինակների դիտարկումից առաջ օգտակար է պարզել, թե ինչպես են գծային արտապատկերումները ստեղծվում վեկտորական տարածությունների հետ կապված այլ հասկացությունների հետ:

ՊՆԴՈՒՄ 27.2. *Եթե f -ը V և W վեկտորական տարածությունների գծային արտապատկերում է, ապա.*

$$\text{ա. } f(0) = 0,$$

$$\text{բ. } f(-x) = -f(x),$$

$$\text{գ. } f(x - y) = f(x) - f(y),$$

ինչպիսին էլ լինեն V -ի x, y տարրերը:

Ապացույց. ա. Համար որ

$$f(0) + f(0) = f(0 + 0) = f(0),$$

ապա

$$f(0) = 0 :$$

բ. Համար որ

$$f(-x) + f(x) = f(-x + x) = f(0) = 0,$$

ապր

$$f(-x) = -f(x) :$$

գ. Ունենք՝

$$\begin{aligned} f(x - y) &= f(x + (-y)) = f(x) + f(-y) = \\ &= f(x) + (-f(y)) = f(x) - f(y) : \end{aligned}$$

□

ՊԼՂՈՒՄ 27.3. Եթե f -ը V և W K -վեկտորական սուբուծությունների զծային արտապատկերում է, ապա

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m) = \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_m f(x_m),$$

ինչպիսին էլ լինեն V -ի $x_1, \dots, x_m$ և K -ի $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ սուբրերը:

Արդյույթ. Արդյույթը կառարենք ինդուկցիայով՝ ըստ գումարելիների m թվի: Ինդուկցիայի բազիսը՝ $m = 1$: Տեղի ունի՝ համաձայն 27.1 սահմանման p պայմանի:

Ինդուկցիոն քայլը. արված է

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{m-1} x_{m-1}) = \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_{m-1} f(x_{m-1}),$$

ապացուցենք, որ

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m) = \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_m f(x_m) :$$

Իսկապես,

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m) &= f((\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{m-1} x_{m-1}) + \alpha_m x_m) = \\ &= f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{m-1} x_{m-1}) + f(\alpha_m x_m) = \\ &= \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_{m-1} f(x_{m-1}) + \alpha_m f(x_m) : \end{aligned}$$

□

Հաջորդ հատկությունները բացահայտում են զծային արտապատկերման կապը ենթասուբուծության հատկացության հետ:

ՊԼՂՈՒՄ 27.4. Եթե f -ը V և W վեկտորական սուբուծությունների զծային արտապատկերում է, ապա.

ա. V -ի ենթասուբուծության սրահերը W -ի ենթասուբուծություն է:

բ. W -ի ենթասուբուծության լրիվ նախապատկերը V -ի ենթասուբուծություն է:

Արդյույթ. ա. Դիցուք՝ U -ն V սուբուծություն ենթասուբուծություն է: Ցայց սաունք, որ

$$f(U) = \{f(u) | u \in U\}$$

բազմությունը W սուբուծության ենթասուբուծություն է: Դրա համար անհրաժեշտ է ապացուցել, որ $f(U)$ -ի կամայական երկու $f(u_1)$ և $f(u_2)$ սուբրերի գումարը և $f(U)$ -ի կամայական $f(u)$ սուբրի և α սկալարի արտադրյալը նորից պատկանում է $f(U)$ -ին:

Քանի որ U -ն ենթաադրամություն է, ապա $u_1 + u_2 \in U$: Ուրեմն՝ $f(u_1 + u_2) \in f(U)$: Բայց $f(u_1) + f(u_2) = f(u_1 + u_2)$: Հետևապես՝ $f(u_1) + f(u_2) \in f(U)$:
Այնուհետև՝ բանի օր

$$\alpha f(u) = f(\alpha u), \alpha u \in U,$$

ապա $\alpha f(u) \in f(U)$:

բ. Այսպիսով, ար W -ի U ենթաադրամություն

$$M = \{v \in V \mid f(v) \in U\}$$

լրիվ նախադրամություն V -ի ենթաադրամություն է: Դրա համար անհրաժեշտ է ապացուցել, որ M -ի կամայական u_1 և u_2 տարրերի գումարը և M -ի կամայական α տարրի և α սկալարի արտադրյալը նորից պատկանում են M -ին:

Իսկապես, բանի օր $f(u_1) + f(u_2) = f(u_1 + u_2)$ և $f(u_1) + f(u_2) \in U$, ապա $f(u_1 + u_2) \in U$ և $u_1 + u_2 \in M$: Այնուհետև, բանի օր $\alpha f(u) = f(\alpha u)$ և $\alpha f(u) \in U$, ապա $\alpha u \in M$: $\square$

27.2. Գծային արտապատկերումների օրինակներ: Դիտարկենք գծային արտապատկերումների մի բանի կարևոր օրինակներ:

ա. Կամայական V և W K -վեկտորական տարածությունների համար սահմանենք θ գրայական արտապատկերումը հետևյալ կերպ՝

$$\theta : V \rightarrow W, \theta(x) = 0, x \in V :$$

Այս արտապատկերումը գծային է: Իսկապես,

$$\theta(x + y) = 0 = 0 + 0 = \theta(x) + \theta(y),$$

$$\theta(\alpha x) = 0 = \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot \theta(x),$$

որտեղ $x, y \in V, \alpha \in K$:

Կատարվում գծային արտապատկերումը անհետաքրքիր է հետևյալ առումով. յուրաքանչյուր գծային արտապատկերման դեպքում արտապատկերվող տարածությունը պատկերի իմացությունը որոշ անդեկություն է ապլիս նույն այդ արտապատկերվող տարածության մասին: Ահա գրայական արտապատկերման դեպքում նման անդեկությունը խաբու բացակայում է:

բ. Այժմ դիտարկենք մի այլ ժայռաին օրինակ. երբ արտապատկերվող տարածության պատկերի իմացությունը հնարավոր ամենաշատ անդեկություններն է ապլիս նույն արտապատկերվող տարածության մասին: Այլապիսին է բիյեկտիվ գծային արտապատկերումը, որը մենք անվանել ենք նույն իզոմորֆիզմ: Այստեղ տարածություններից մեկի տարրերը և նրա վրա տրված գումարման ու սկալարով բազմապատկման գործողությունները լիովին կարելի է վերականգնել, եթե դրանք «մոտացվել» են, բայց դրա փոխարեն հայտնի են այդ տարածությունը իզոմորֆ տարածությունը և տրված իզոմորֆիզմը:

գ. Դծային արտապատկերման հաջորդ կարևոր օրինակը նմանադրությունն է: Կամայական V K -վեկտորական տարածություն և K -ի α տարրի համար նշանակենք h_α -ով հետևյալ արտապատկերումը.

$$h_\alpha : V \rightarrow V, h_\alpha(x) = \alpha x, x \in V :$$

ՊՆԴՈՒՄ 27.9. *K -ից K -ի մեջ արված յուրարանչյուր գծային արտապատկերումն ճմանապարտյուն է:*

Ապացույց. Դիցուք՝ f -ը K -ից K -ի մեջ արված գծային արտապատկերում է և $f(1) = \alpha$: Ցույց տանք, որ

$$f = h_\alpha :$$

Իսկապես,

$$f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = x\alpha = \alpha x = h_\alpha(x), \quad x \in K :$$

□

27.3. *Համընդհանուր գծային արտապատկերումը:* Դիտարկենք գծային արտապատկերումների ևս մի՝ կարևոր օրինակ, որը ունիվերսալ՝ համընդհանուր է բոլոր վերջավոր չափադասիանությունն ապրումությունների գծային արտապատկերումների համար: Սա նշանակում է, որ վերջավոր չափադասիանությունն ապրումությունների յուրարանչյուր գծային արտապատկերում կարելի է ստանալ ստորև նկարագրված ճանապարհով:

ՊՆԴՈՒՄ 27.10. *Դիցուք արված է n չափադասիանություն V ՝ K -վեկտորական տարածություն*

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

բազիսը և W ՝ K -վեկտորական տարածություն կամայական վեկտորների

$$w_1, w_2, \dots, w_n$$

համակարգը: Այլ պայքար գոյություն ունի V -ից W -ի մեջ արված և միակ f գծային արտապատկերումը, որի համար

$$f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2, \dots, f(v_n) = w_n :$$

Ապացույց. Նախ կառուցենք f արտապատկերումը:

Վերցնենք V -ի կամայական v տարրը: Քանի որ $v_1, v_2, \dots, v_n$ համակարգը V -ի բազիս է, ապա կգտնվեն K դաշտի սկեյլարի $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ստորերը, որ

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n :$$

Եթե

$$w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n,$$

ապա բնյումներ

$$f: V \rightarrow W, \quad f(v) = w, \quad v \in V :$$

Քանի որ $v_1, v_2, \dots, v_n$ համակարգը V -ի բազիս է, ապա արված v -ի համար $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ստորերը որոշվում են միարժեքորեն և, որեւէ, f -ը արտապատկերում է:

Գծայնությունն երկու պայմանների ստուգումը դժվարություններ չի հարաջում: Իսկապես, եթե

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, \quad u = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n,$$

ապա

$$\begin{aligned}
 f(v+u) &= f((\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) + (\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n)) = \\
 &= f((\alpha_1 + \beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)v_n) = (\alpha_1 + \beta_1)w_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)w_n = \\
 &= (\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n) + (\beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n) = f(v) + f(u) : \\
 f(v+u) &= f(v) + f(u) : \\
 f(\alpha v) &= f(\alpha(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)) = \\
 &= f(\alpha \cdot \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha \cdot \alpha_n v_n) = f((\alpha \cdot \alpha_1)v_1 + \dots + (\alpha \cdot \alpha_n)v_n) = \\
 &= (\alpha \cdot \alpha_1)w_1 + \dots + (\alpha \cdot \alpha_n)w_n = \alpha \cdot \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha \cdot \alpha_n w_n = \\
 &= \alpha(\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n) = \alpha f(v) : \\
 f(\alpha v) &= \alpha f(v),
 \end{aligned}$$

որտեղ $u, v, v_1, \dots, v_n \in V$, $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in K$:

Հետադարձ կարելի է ստացուցել նաև առաջվան զծային արտապատկերման միակությունը:

Դիցուք՝

$$f: V \rightarrow W, \quad g: V \rightarrow W$$

արտապատկերումների համար

$$f(v_1) = w_1, \dots, f(v_n) = w_n, \quad g(v_1) = w_1, \dots, g(v_n) = w_n :$$

Այսինքն՝

$$f(v_1) = g(v_1), \dots, f(v_n) = g(v_n) :$$

Այդ դեպքում, եթե $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, ապա

$$\begin{aligned}
 f(v) &= f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = f(\alpha_1 v_1) + \dots + f(\alpha_n v_n) = \\
 &= \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n) = \alpha_1 g(v_1) + \dots + \alpha_n g(v_n) = \\
 &= g(\alpha_1 v_1) + \dots + g(\alpha_n v_n) = g(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = g(v) :
 \end{aligned}$$

Այսինքն՝ տեղի ունի

$$f(v) = g(v)$$

հավասարությունը V վեկտորական տարածության կամայական v տարրի համար: Ուրեմն՝

$$f = g :$$

□

Դիտարկված օրինակը ցույց է տալիս, որ վերջավոր չափադասականության վեկտորական տարածությունների զծային արտապատկերումները սուղու համար բավական է սուղ ձեռքի բազիսի բազիսային վեկտորների պատկերները: Այդ դեպքում զծային արտապատկերումը միորժեքորեն կարելի է կլինի վերականգնել: Ասվածից հետևում է նաև զծային արտապատկերումների հետևյալ հատկությունը:

ԴՆԴՈՒՄ 27.11. *Եթե միևնույն վեկտորական տարածություն երկու զծային արտապատկերումների համադրատախանոն պրժերները համընկնում են ինչ-որ բազիսի վրա, ապա համընկնում են նաև այդ զծային արտապատկերումները:*

Ապացույց. Արագացումը կապարեք ինքնուրույն: □

27.4. *Գծային արտապատկերման կորիզը և ղեֆեկտը:* Գծային արտապատկերումների ուսումնասիրությունների ընթացքում արտակարգ կարևոր դեր է խաղում գրռյի նախապատկերների բազմությունը:

ՄԱՀԱՆՈՒՄ 27.12. V և W K -վեկտորական սուբուծությունների f գծային արտապատկերման կորիզ և կոշվում W' սուբուծության O վեկտորի նախապատկերների բազմությունը: Այն նշանակվում է $\ker f$ -ով: Այսպիսով՝

$$\ker f = \{v \in V | f(v) = 0\} :$$

Օրինակներ:

ա. Ջրայական θ գծային արտապատկերման կորիզը արտապատկերվող ողջ գծային սուբուծությանն է. եթե

$$\theta : V \rightarrow W,$$

ապա

$$\ker \theta = V :$$

Վերևում մենք արդեն բացատրայտել էինք θ արտապատկերման «վտա» լինելը՝ ըստ համեմատության մի չափանիշի: Այս և նրա «վտա» լինելու մի այլ չափանիշ. արտապատկերվող ողջ սուբուծությունը կազմված է միայն կորիզից:

բ. Դիստրիկենք մյուս ծայրահեղ «լավ» գծային արտապատկերման օրինակը, երբ գծային արտապատկերման կորիզը հնարավոր ամենավոք ծավալն ունի: Հասկանալի է, որ արտապատկերվող սուբուծություն O սուպրա միշտ ընկած է արտապատկերման կորիզի մեջ: Իսկ կա՞նք գծային արտապատկերումներ, որոնց կորիզները կազմված են միայն O -ից: Պարզ է, որ ի հակադրություն θ արտապատկերման, արանք էլ իննց «ամենալավ» գծային արտապատկերումներն են:

ՊԵՆԴԻՄ 27.13. *Գծային արտապատկերումը ունի գրռյական կորիզ, եթե այն իզոմորֆիզմ է:*

Ապացույց. Դիցուք՝ V և W K -վեկտորական սուբուծությունների f գծային արտապատկերումը իզոմորֆիզմ է և $v \in \ker f$: Այդ դեպքում $f(v) = 0$: Մենք ունենք նաև $f(0) = 0$, և քանի որ f արտապատկերումը ասուրողում է, ապա $v = 0$: □

Տեղի ունի նաև հետևյալ՝ վերջին հասկության, ինչ-որ խոստով հակառակ հասկությունը:

ՊԵՆԴԻՄ 27.14. *Եթե գծային արտապատկերման կորիզը զրայական է, ապա այն իզոմորֆ ներքրում է:*

Ապացույց. Դիցուք՝ V և W K -վեկտորական սուբուծությունների f գծային արտապատկերումը ունի գրռյական կորիզ՝ $\ker f = \{0\}$: Այդ դեպքում, եթե

$$f(u) = f(v),$$

գծային արտապատկերման դեֆեկտի և ռանգի համար: Վերջավոր չափադասկանություն ունեցող արտապատկերման համար գոյություն ունի ավելի կոնկրետ կախվածություն՝ նշված հասկացությունների միջև:

ՊԼԴՈՒՄ 27.23. *Եթե V -ն վերջավոր չափադասկանության վեկտորական տարածություն է, ապա կամայական $f : V \rightarrow W$ գծային արտապատկերման դեֆեկտի և ռանգի գումարը հասխարհ է V -ի չափադասկանությանը: Այսինքն՝*

$$\text{rank } f + \text{def } f = \dim V :$$

Ապացույց. Դիցուք՝ $\dim V = n$ և $v_1, \dots, v_m$ համակարգը $\ker f$ -ի բազիս է, իսկ $w_1, \dots, w_s$ համակարգը՝ $\text{Im } f$ -ի բազիս: Վերցնենք V -ի մեջ այնպիսի $u_1, \dots, u_s$ վեկտորներ, որ

$$(26) \quad f(u_1) = w_1, \dots, f(u_s) = w_s :$$

Ֆայց ստանք, որ

$$(27) \quad v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_s$$

համակարգը V -ի համար բազիս է:

Այդ համակարգը գծորեն անկախ է: Իսկապես, դիցուք՝

$$(28) \quad \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_s u_s = 0 :$$

Այդ դեպքում՝

$$\begin{aligned} 0 &= f(0) = f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_s u_s) = \\ &= f(\alpha_1 v_1) + \dots + f(\alpha_m v_m) + f(\beta_1 u_1) + \dots + f(\beta_s u_s) = \\ &= \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_m f(v_m) + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_s w_s = \\ &= \alpha_1 \cdot 0 + \dots + \alpha_m \cdot 0 + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_s w_s = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_s w_s : \end{aligned}$$

Եվ ստացվում

$$\beta_1 w_1 + \dots + \beta_s w_s = 0$$

հավասարությունից, հաշվի առնելով $w_1, \dots, w_s$ համակարգի գծային անկախությունը, կստանանք՝

$$\beta_1 = \dots = \beta_s = 0 :$$

Հաշվի առնելով այս հավասարությունները՝ (28) հավասարությունից կստանանք՝

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$$

հավասարությունը: Իսկ այս վերջինից, հաշվի առնելով նույն $v_1, \dots, v_m$ համակարգի գծային անկախությունը, կստանանք

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0 :$$

Հեշտությամբ ցույց է ստացվում, որ (27) համակարգը լրիվ է V -ի մեջ: Իսկապես, դիցուք՝ $v \in V$: Պարզ է, որ $f(v)$ -ն $\text{Im } f$ -ի սուրբ է, իսկ $w_1, \dots, w_s$ համակարգը $\text{Im } f$ -ի բազիս: Հետևապես՝ կգտնվեն K դաշտի ույնսիսի $\beta_1, \dots, \beta_s$ սուրբեր, որ

$$f(v) = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_s w_s = \beta_1 f(u_1) + \dots + \beta_s f(u_s) = f(\beta_1 u_1 + \dots + \beta_s u_s) :$$

Կամ՝

$$f(v - (\beta_1 u_1 + \dots + \beta_s u_s)) = 0 :$$

Այսինքն՝

$$v - (\beta_1 u_1 + \dots + \beta_s u_s) \in \ker f :$$

Եվ քանի որ $v_1, \dots, v_m$ համակարգը $\ker f$ -ի բազիս է, ապա կգտնվեն K դաշտի այնպիսի $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ստորերև, որ

$$v - (\beta_1 u_1 + \dots + \beta_s u_s) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m :$$

Այսառեղից կստանանք՝

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_s u_s :$$

Այսպիսով՝ դիտարկված (27) համակարգը մաս լրիվ է V -ի մեջ: Ուրեմն՝ այն իսկապես V -ի բազիս է: $\square$

Վերջում անդրադառնանք ապացուցված քեռերնի մի կարևոր կիրառությանը: Մենք արդեն գիտենք, որ 27.2 կետի դ օրինակում դիտարկված գծային արտապատկերման ռոմբը հավասար է համակարգի մուտքիցի ռոմբին: Մյուսմասում, նրա կարիքը կազմում են համաստիսական համասեռ համակարգի լուծումները, որոնցից կազմված ապառնություն չափողականությունը հավասար է գծային արտապատկերման դեֆեկային: Այսպիսով՝ մենք ստանում ենք, որ համասեռ համակարգի լուծումների ապառնության չափողականությունը հավասար է անհայտների թվից հստատ համակարգի մուտքիցի ռոմբը: Այս պնդման ապացուցումը արդեն մենք կատարել ենք (տես՝ 26.12 պնդումը), րայց համեմատաբար երկար ճանապարհով:

28. ԳԾԱՅԻՆ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎԸ

28.1. *Գծային արտապատկերումների գումարային խումբը:* Դիտարկենք K դաշտի վրա արված V և W վեկտորական ապառնությունները: Նշանակենք $\text{Hom}(V, W)$ -ով V -ից W -ի մեջ արված բոլոր գծային արտապատկերումների բազմությունը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 28.1. V -ից W -ի մեջ արված f և g գծային արտապատկերումների $f + g$ գումարը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), x \in V :$$

ՊԼՆՈՒՄ 28.2. $(\text{Hom}(V, W), +)$ գույզը սրբյան խումբ է:

Ապացույց. Նախ ցույց ստանք, որ $+$ -ը $\text{Hom}(V, W)$ բազմության վրա արված երկառեղ հանրահաշվական գործողություն է: Դրա համար անհրաժեշտ է ապացուցել, որ V -ից W -ի մեջ արված f և g գծային արտապատկերումների $f + g$ գումարը մույնպես V -ից W -ի մեջ արված գծային արտապատկերում է:

Ունենք՝

$$(f + g)(x + y) = f(x + y) + g(x + y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) =$$

$$\begin{aligned} & \dots (f(x) + g(x)) + (f(y) + g(y)) = (f + g)(x) + (f + g)(y), \\ & (f + g)(\alpha x) = f(\alpha x) + g(\alpha x) = \alpha f(x) + \alpha g(x) = \\ & \quad \alpha(f(x) + g(x)) = \alpha(f + g)(x), \end{aligned}$$

սրանից $x, y \in V, \alpha \in K$:

Այսպիսով՝ $f + g$ օպերատորներումը բավարարում է գծայնության երկու պայմաններին: Հետևապես՝ այն V -ից W -ի մեջ արված գծային օպերատորներում է:

V -ից W -ի մեջ արված կոմուտատիվ երկու f և g գծային օպերատորներումների համար

$$f + g = g + f :$$

Իսկապես, երբ $x \in V$, ապա

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x) :$$

V -ից W -ի մեջ արված կոմուտատիվ երեք f, g և h գծային օպերատորներումների համար

$$(f + g) + h = f + (g + h) :$$

Իսկապես, երբ $x \in V$, ապա

$$\begin{aligned} & ((f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = \\ & = f(x) + (g(x) + h(x)) = f(x) + (g + h)(x) = (g + (f + h))(x) : \end{aligned}$$

Չեզոք ստորի դերը խաղում է θ օպերատորներումը: Իսկապես,

$$(f + \theta)(x) = f(x) + \theta(x) = f(x) + 0 = f(x), x \in V :$$

Հետևապես՝

$$f + \theta = f :$$

Կոմուտատիվ f գծային օպերատորներումը հակադիրը $-f$ օպերատորներումն է, որը ստիժումված է հետևյալ կերպ.

$$(-f)(x) = -f(x), x \in V :$$

Նախ, $-f$ -ը գծային օպերատորներում է: Իսկապես,

$$\begin{aligned} & (-f)(x + y) = -f(x + y) = -(f(x) + f(y)) = (-f(x)) + (-f(y)) = \\ & = (-f)(x) + (-f)(y), \\ & (-f)(\alpha x) = -f(\alpha x) = -\alpha f(x) = \alpha(-f(x)) = \alpha(-f)(x), \end{aligned}$$

սրանից $x, y \in V, \alpha \in K$:

Այսպիսով՝ $-f$ օպերատորներումը բավարարում է գծայնության երկու պայմաններին: Հետևապես՝ այն V -ից W -ի մեջ արված գծային օպերատորներում է:

Այնուհետև՝

$$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) + (-f(x)) = 0 = \theta(x), x \in V :$$

Հետևապես՝

$$f + (-f) = \theta :$$



28.2. Գծային արտապատկերումների վեկտորական տարածությունը: Նորից դիտարկենք K դաշտի վրա արված V և W վեկտորական տարածությունները:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 28.3. K դաշտից վերցրած α ստորիկ և V -ից W -ի մեջ արված f գծային արտապատկերումն $\alpha \cdot f$ արտադրույթը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x), x \in V :$$

ՊՆԴՈՒՄ 28.4. $(\text{Hom}(V, W), +, \cdot)$ եռյակը K -վեկտորական տարածություն է:

Արտադրույթ. Համաձայն 28.2 պնդման՝ $(\text{Hom}(V, W), +)$ գույզը արելյան խումբ է:

Ստուգենք սկսյալով բազմապատկման գործողություն հատկությունները:

Նախ անհրաժեշտ է ցույց տալ, որ կոմպոզիցիոն α և f գծային արտապատկերման նպատադրույթը նորից գծային արտապատկերում է: Իսկապես,

$$(\alpha f)(x + y) = \alpha f(x + y) = \alpha(f(x) + f(y)) =$$

$$= \alpha f(x) + \alpha f(y) = (\alpha f)(x) + (\alpha f)(y),$$

$$(\alpha f)(\beta x) = \alpha \cdot f(\beta x) = \alpha(\beta(f(x))) = (\alpha\beta)(f(x)) =$$

$$= (\beta\alpha)f(x) = \beta(\alpha f(x)) = \beta(\alpha f)(x),$$

որտեղ $x, y \in V$, $\alpha, \beta \in K$:

Վեկտորական տարածություն չորս պայմանները ստուգվում են անմիջականորեն: Ունենք.

ա.

$$((\alpha + \beta)f)(x) = (\alpha + \beta) \cdot f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) =$$

$$= (\alpha f)(x) + (\beta f)(x) = (\alpha f + \beta f)(x), x \in V, \alpha, \beta \in K :$$

Հետևապես՝

$$(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f :$$

բ.

$$(\alpha(f + g))(x) = \alpha \cdot (f + g)(x) = \alpha(f(x) + g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x) =$$

$$= (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x) = (\alpha f + \alpha g)(x), x \in V, \alpha \in K :$$

Ուրեմն՝

$$\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g :$$

գ.

$$(\alpha(\beta f))(x) = \alpha \cdot (\beta f)(x) = \alpha \cdot \beta f(x) =$$

$$= (\alpha\beta)f(x) = ((\alpha\beta)f)(x), x \in V, \alpha, \beta \in K :$$

Այսպիսով՝

$$\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f :$$

դ.

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x) :$$

Հետևապես՝

$$1 \cdot f = f :$$

Պնդումն ստացուցված է:

□

Այժմ տեսնենք, թե ինչպիսի՞ն կլինի զծային օպերատորականությունների

$$(\text{Hom}(V, W), +, \cdot)$$

K -վեկտորական սարածություն չափողականությունը, եթե հայտնի են V և W սարածությունների չափողականությունները:

ՊՆԴՈՒՄ 28.5. *Վերջավոր չափաչափանության կոմպակտ V և W K -վեկտորական սարածությունների համար*

$$\dim V = n, \dim W = m \Rightarrow \dim \text{Hom}(V, W) = nm :$$

Ապացույց. Կառուցենք $\text{Hom}(V, W)$ սարածության nm անդամ սլարմուսակառուցված բազիս: Դրա համար վերցնենք V -ի $v_1, v_2, \dots, v_n$ բազիսը և W -ի $w_1, w_2, \dots, w_m$ բազիսը: Դիտարկենք իեսակալ f_{ij} օպերատորականությունները.

$$f_{ij}(v_l) = \begin{cases} w_j, & \text{եթե } l = i, \\ 0, & \text{եթե } l \neq i, \end{cases}$$

սրտեղ $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$:

Համաձայն 27.10 պնդման՝ f_{ij} օպերատորականություններից յուրաքանչյուրը օբժարում է V -ից W -ի մեջ արված միակ զծային օպերատորականությունը, որը նույնպես նշանակենք f_{ij} -ով: Ցույց տանք, որ այս

$$f_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$$

համակարգը $\text{Hom}(V, W)$ վեկտորական սարածության բազիս է:

Նախ ստացուցենք այդ համակարգի լրիվությունը $\text{Hom}(V, W)$ -ի մեջ: Դիցուք՝ $f \in \text{Hom}(V, W)$: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր i -ի համար ($i = 1, 2, \dots, n$) գոյություն կունենան K վաշտի այնպիսի $\alpha_{ij}, j = 1, 2, \dots, m$ սարեր, որ

$$f(v_i) = \alpha_{i1}w_1 + \dots + \alpha_{im}w_m :$$

Ցույց տանք, որ

$$(29) \quad f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} f_{ij} :$$

Իսկապես, կոմպակտ l -ի համար, $l = 1, 2, \dots, n$, ունենք՝

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} f_{ij} \right)(v_l) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} f_{ij}(v_l) = \sum_{j=1}^m \alpha_{lj} w_j = f(v_l) :$$

Մնում է օգտվել 27.10 պնդումից՝ (29) հավասարությունը ստանալու համար:

Ցույց տանք $f_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ համակարգի զծային անկախությունը:

Դիցուք՝

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} f_{ij} = \theta, \alpha_{ij} \in K :$$

Քանի որ յուրաքանչյուր l -ի համար, $l = 1, 2, \dots, n$, աեղի ունի

$$\left(\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} f_{ij} \right)(v_l) = \alpha_{l1} w_1 + \dots + \alpha_{lm} w_m = 0,$$

և $w_1, \dots, w_m$ համակարգը W -ի բազիս է, ուստի $\alpha_{ij} = 0$, i -ի և j -ի նշված բոլոր արժեքների համար: $\square$

Առանձնահատուկ հեռապրոյություն է ներկայացնում $(\text{Hom}(V, K), +, \cdot)$ K -վեկտորական սարածությունը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 28.6. $(\text{Hom}(V, K), +, \cdot)$ K -վեկտորական սարածությունը կոչվում է V K -վեկտորական սարածության *համալրած* սարածություն:

Դիցուք՝ $\dim V = n$: Քանի որ $\dim K = 1$, ուստի համաձայն 28.5 պնդման՝ կունենանք.

$$\dim \text{Hom}(V, K) = \dim V \cdot \dim K = n \cdot 1 = n = \dim V :$$

համաձայն 15.36 պնդման՝ այսաեղից եետևում է վեկտորական սարածությունների հետևյալ իզոմորֆիզմը.

$$\text{Hom}(V, K) \cong V :$$

Այսպիսով՝ մենք ստացուցեցինք համալրած սարածության հետևյալ հասկառյունը:

ՊՆԴՈՒՄ 28.7. *Վերջուպի չտիպականություն յուրաքանչյուր վեկտորական սարածության իզոմորֆ է իր համալրած սարածությանը:*

28.3. *Դծային օպերատորների օղակը:* Հասկանալի է, որ կամայական, րեկուզե միենույն դուշաի վրա արված գծային սարածությունների միջև արված գծային արտապատկերումների արտադրյալը միշտ չէ, որ իմաստ ունի: Սակայն եթե դիտարկենք միենույն V գծային սարածությունից V -ի մեջ արված գծային արտապատկերումները, ուստի գծային արտապատկերումների արտադրյալը ոչ միայն կլինի գծային արտապատկերում, այլև կբավարարի մի շարք լրացուցիչ և կարևոր պայմանների:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 28.8. V գծային սարածությունից V -ի մեջ արված գծային արտապատկերումը կոչվում է V -ի վրա արված *գծային օպերատոր*:

V գծային սարածության վրա արված բոլոր գծային օպերատորների բազմությունը նշանակենք $\text{Hom } V$ -ով: Հիմնական արդյունքը ձևակերպելուց առաջ նշենք, որ գծային արտապատկերումները արտապատկերումների մասնավոր աեսակ են,

և գծային օպերատորներին $\text{Hom } V$ -ի տարրերը տեղադրվում է որպես օպերատորներին $\text{Hom } V$ -ի տարրերը: Մասկայն, ի տարբերություն կոմպակտ օպերատորներին, գծային օպերատորներին $\text{Hom } V$ -ի տարրերը f և g գծային օպերատորներին $\text{Hom } V$ -ի տարրերը նշանակվում է ոչ թե $f \circ g$, այլ $f \cdot g$ կամ ուղղակի fg :

ՊՆԴՈՒՄ 28.9. ($\text{Hom } V, +, \cdot$) ելակեր միասիրտ, գուցարկուն օղակ է:

Ապացույց. Մենք արդեն ցույց ենք տվել, որ $(\text{Hom } V, +)$ գույզը արելուն խումբ է: Մնում է ստուգել $\cdot$ -ի հատկությունները:

Նախ ցույց տանք, որ $\cdot$ -ը $\text{Hom } V$ -ի վրա արված երկանդ հանրահաշվական գործողություն է, այսինքն՝

$$f, g \in \text{Hom } V \Rightarrow fg \in \text{Hom } V :$$

Իսկույան, եթե $f, g \in \text{Hom } V$, ապա՝

$$\begin{aligned} (fg)(u + v) &= g(f(u + v)) = g(f(u) + f(v)) = \\ &= g(f(u)) + g(f(v)) = (fg)(u) + (fg)(v), \end{aligned}$$

$$(fg)(\alpha u) = g(f(\alpha u)) = g(\alpha f(u)) = \alpha g(f(u)) = \alpha (fg)(u),$$

որտեղ՝ $u, v \in V, \alpha \in K$: Այսինքն՝ fg օպերատորներին բավարարում է գծայնության երկու պայմաններին: Հետևապես՝ $f \cdot g \in \text{Hom } V$: Իսկ սա էլ նշանակում է, որ $\cdot$ -ը $\text{Hom } V$ բազմության վրա արված երկանդ հանրահաշվական գործողություն է:

Ցույց տանք, որ $\cdot$ -ը բաշխական է $+$ -ի նկատմամբ:

Իսկույան, դիցուք՝ $f, g, h \in \text{Hom } V$: Այդ դեպքում՝

$$\begin{aligned} (h(f + g))(x) &= (f + g)(h(x)) = f(h(x)) + g(h(x)) = \\ &= (hf)(x) + (hg)(x) = (hf + hg)(x), x \in V : \end{aligned}$$

Հետևապես՝

$$h(f + g) = hf + hg :$$

Այսպիսով՝ $(\text{Hom } V, +, \cdot)$ ելակեր, իսկույան, օղակ է:

Այդ օղակի գուցարկականությունը եետևում է նրանից, որ ֆունկցիաների բազմապատկման գործողությունը, հետևապես՝ մոտ օպերատորների բազմապատկման գործողությունը գուցարկական է:

Այսպիսով կամ նույնական

$$\varepsilon : x \rightarrow x, x \in V$$

օպերատորներին $\text{Hom } V$ -ի վրա արված գծային օպերատոր է, քանի որ

$$\varepsilon(x + y) = x + y = \varepsilon(x) + \varepsilon(y),$$

$$\varepsilon(\alpha x) = \alpha x = \alpha \varepsilon(x),$$

որտեղ $x, y \in V, \alpha \in K$:

□

Ուսումնասիրենք $(\text{Hom } V, +, \cdot)$ օղակը:

ՊՆԴՈՒՄ 28.10. Եթե $\dim V = 1$, ապա

$$(\text{Hom } V, +, \cdot) \cong (K, +, \cdot) :$$

Արդյույց. Եթե $\dim V = 1$, ապա կարելի է ենթադրել, որ արված V զծային տարածությունը համընկնում է K -ի հետ՝ սրախ զծային տարածությամբ: Այդ դեպքում մենք տրվեն գիտենք, որ K -ի յուրաքանչյուր զծային տրասպարանկրում համասեմիա է:

Դիտարկենք ճշված օղակների

$$\varphi: \alpha \rightarrow h_\alpha, \alpha \in K$$

տրասպարանկրումը: Այն վերադրում է: Իսկապես, սուրճ է, որ այն վրադրում է:

Ցույց տանք, որ φ -ն նաև տարադրում է: Եթե $\alpha, \beta \in K$ և

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta),$$

ապա $h_\alpha = h_\beta$: Այստեղից կատանումք՝ $h_\alpha(1) = h_\beta(1)$ կամ $\alpha = \beta$: Հետևապես՝ φ -ն տարադրում է:

Ցույց տանք նաև, որ φ -ն ճշված օղակների իզոմորֆիզմ է: Իսկապես,

$$\varphi(\alpha\beta)(x) = h_{\alpha\beta}(x) = \alpha\beta x,$$

$$(\varphi(\alpha)\varphi(\beta))(x) = \varphi(\beta)(\varphi(\alpha)(x)) = h_\beta(h_\alpha(x)) = \beta\alpha x,$$

որակ $x \in K$: Հետևապես՝

$$\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta):$$

Այնուհետև եթե $\alpha, \beta \in K$, ապա

$$\varphi(\alpha + \beta)(x) = h_{\alpha+\beta}(x) = (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x =$$

$$= h_\alpha(x) + h_\beta(x) = \varphi(\alpha)(x) + \varphi(\beta)(x) = (\varphi(\alpha) + \varphi(\beta))(x):$$

Հետևապես՝

$$\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta):$$

□

ՊԼԻՈՒՄ 28.11. Եթե $\dim V > 1$, ապա $(\text{Hom } V, +, \cdot)$ օղակը տեղափոխական չէ և ունի զրոյի բաժանորարներ:

Արդյույց. Դիցուք $v_1, \dots, v_n$ -ը V -ի բազիս է: Դիտարկենք հետևյալ՝ φ_1 և φ_2 սրայեկտումները.

$$\varphi_1(v_1) = v_1, \varphi_1(v_2) = 0, \dots, \varphi_1(v_n) = 0,$$

$$\varphi_2(v_1) = 0, \varphi_2(v_2) = v_2, \dots, \varphi_2(v_n) = 0:$$

Համաձայն 27.10 պնդման՝ φ_1 և φ_2 տրասպարանկրումները որոշում են V -ից V -ի մեջ արված մեկավոր զծային տրասպարանկրումներ: Դրանք նույնպես ճշանակներ φ_1 -ով և φ_2 -ով:

Հեշտությամբ կարելի է ցույց տալ, որ

$$\varphi_1 \circ \varphi_2 = 0:$$

Այսինքն՝ $\text{Hom } V$ -ն ունի զրոյի բաժանորարներ:

Մյևնությն ժամանակ, երև նշումակենք

$$\varphi(v_1) = v_2, \varphi(v_2) = v_1, \dots, \varphi(v_n) = 0,$$

ուպու համումայն 27.10 պնդումն՝ φ օրաուպուսկերումը սրդշում է V -ից V -ի մեջ սըրքված միակ գծային օրաուպուսկերումը: Այն նույնպես նշանակենք φ -ով: Ակն-հայտ է, որ

$$\varphi \cdot \varphi_1 \neq \varphi_1 \cdot \varphi,$$

քանի որ

$$(\varphi \cdot \varphi_1)(v_1) = \varphi_1(\varphi(v_1)) = \varphi_1(v_2) = 0,$$

$$(\varphi_1 \cdot \varphi)(v_1) = \varphi(\varphi_1(v_1)) = \varphi(v_1) = v_2 :$$

□

28.4. Գծային օպերատորների հանրահաշիվը: Այժմ ի մի քերենք նախադդ կեսերում սաուցված արդյունքները:

ՊՆԴՈՒՄ 28.12. *Կոմպակտն V K -վեկտորական սուպուծուրյուն բոլոր գծու-յին օպերատորների $\text{Hom } V$ բազմությունը կազմում է K դուշտի վրա արված գու-գորպուկում և միտլերով գծային հանրահաշիվ:*

Ապուցույց. Հնշուուրյումը կարելի է ցույց սուղ, որ կոմպակտն $f, g \in \text{Hom } V$, $\alpha \in K$ սուլրերի հումար

$$\alpha(f \cdot g) = (\alpha f) \cdot g = f \cdot (\alpha g) :$$

Իսկ գծային հանրահաշվի մյուս արյւմանները սալացուցված են 28.4 և 28.9 պնդումներում: □

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 28.13. Ապուցուցեք վերջին երկու հավասարությունները:

ՊՆԴՈՒՄ 28.14. *ու. երև $\dim V = 1$, սալու $\text{Hom } V$ գծային հանրահաշիվը իգամբ է K դուշտին, երև վերջինս դիտենք սրպես K -ի վրա արված գծային հան-րահաշիվ:*

բ. երև $\dim V > 1$, սալու $\text{Hom } V$ գծային հանրահաշիվը սեղսուփախելի չէ և սնի գրայի բաժանարարներ:

Ապուցույց. ա. Տես՝ 28.10 պնդումն սալուցուցումը:

բ. Տես՝ 28.11 պնդումն սալուցուցումը: □

ՊՆԴՈՒՄ 28.15. *երև $\dim V = n$, սալու $\text{Hom } V$ գծային հանրահաշիվի չսփա-դսկանությունն է n^2 :*

Ապուցույց. Տես՝ 28.5 պնդումն սալացուցումը: □

Վերևում մենք սեսումք, որ գծային օրաուպուսկերումների հանրահաշիվը գու-գորպուկում և միտլոդով հանրահաշիվ է: Այն նուս բուցուտիկ, լնդհանրուկում աեղ է գրսդեցնում սայ հասկուրյումներով օժտված հանրահաշիվների մեջ:

ՊՆԴՈՒՄ 28.16. Կոմուտատիվ K դաշտի վրա տրված n չափադասականության չափադասական n -գործողական n միասիրտով A գծային համարանշարի իզոմորֆ $\ell \operatorname{Hom} A$ գծային համարանշարի ինչ-որ ենթահամարանշարի:

Ապացույց. Կոմուտատիվ $a \in A$ ստորի համար կառուցենք

$$h_a : A \rightarrow A, \quad h_a(x) = xa, \quad x \in A$$

արտապատկերումը: h_a -ն A K -վեկտորական ստորածության գծային օպերատոր է: Իսկույեն,

$$h_a(x + y) = (x + y)a = xa + ya = h_a(x) + h_a(y),$$

$$h_a(\alpha x) = (\alpha x)a = \alpha(xa) = \alpha h_a(x) :$$

Այնուհետև, դիտարկենք $\operatorname{Hom} A$ K -վեկտորական ստորածություն $\{h_a | a \in A\}$ ենթաբազմությունը: Այն $\operatorname{Hom} A$ -ի ենթահամարանշարի է: Իրոք, A -ի կամայական a, b եւ x ստորերի համար՝

$$h_{a+b}(x) = x(a + b) = xa + xb = h_a(x) + h_b(x) = (h_a + h_b)(x),$$

$$h_{\alpha a}(x) = x(\alpha a) = \alpha xa = \alpha h_a(x),$$

$$h_{ab}(x) = x(ab) = (xa)b = h_a(x)b = h_b(h_a(x)) = (h_a h_b)(x) :$$

Հետևապես՝

$$h_a + h_b = h_{a+b},$$

$$\alpha h_a = h_{\alpha a},$$

$$h_a \cdot h_b = h_{a \cdot b} :$$

Իսկ այս սլայմանները ցույց են տալիս, որ, իրոք, $\{h_a | a \in A\}$ -ն $\operatorname{Hom} A$ -ի ենթահամարանշարի է:

Այժմ դիտարկենք

$$h : A \rightarrow \{h_a | a \in A\}, \quad h : a \rightarrow h_a, \quad a \in A$$

արտապատկերումը: Այն վրոյում է: Մինչույն ժամանակ, եթե $h_a = h_b$, ապա $h_a(1) = h_b(1)$: Հետևապես, $1a = 1b$ եւ $a = b$: Ուրեմն՝ h արտապատկերումը նաև ստորադրում է: Այսպիսով՝ այն վերադրում է:

Այնուհետև,

$$h(a + b) = h_{a+b} = h_a + h_b = h(a) + h(b),$$

$$h(\alpha a) = h_{\alpha a} = \alpha h_a = \alpha h(a),$$

$$h(ab) = h_{ab} = h_a h_b = h(a)h(b) :$$

Այսպիսով՝ h -ը իզոմորֆիզմ է $\operatorname{Hom} A$ եւ $\{h_a | a \in A\}$ գծային համարանշարների միջև: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 28.17. Կոմուտատիվ K դաշտի վրա տրված n չափադասականության չափադասական n -գործողական n -գծային համարանշարի իզոմորֆ $\ell \operatorname{Hom} V$ գծային համարանշարի ինչ-որ ենթահամարանշարի, որտեղ V -ն K դաշտի վրա տրված $n+1$ չափադասականության վեկտորական ստորածություն է:

Ապացույց. Համաձայն 18.20 պնդման՝ K դաշտի վրա տրվում n չափադասականությամբ յուրաքանչյուր գուգարդական գծային համարմաշիվ իզոմորֆ ներդրվում է K դաշտի վրա տրվում $n + 1$ չափադասանության միավորով և գուգարդական գծային համարմաշիվի մեջ: Մնում է կիսումել նույնպիսի պնդումը: $\square$

29. ԳԾԱՅԻՆ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՆԵՐԿԱՅԱՅՈՒՄՆԵՐԸ

29.1. *Գծային արտապատկերման մատրիցը:* Գիտարկենք վերջավոր չափադասականության W և V K -վեկտորական տալիսծությունները: Վերցնենք W -ի $w_1, \dots, w_m$ բազիսը և V -ի $v_1, \dots, v_n$ բազիսը: Գիցուր՝ f -ը W -ից V -ի մեջ տրվում գծային արտապատկերում է: $f(w_1), \dots, f(w_m)$ տրվերներ կարելի է արտահայտել V -ի $v_1, \dots, v_n$ բազիսի միջոցով: Կունենանք՝

$$f(w_1) = a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n,$$

$$f(w_m) = a_{m1}v_1 + \dots + a_{mn}v_n :$$

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 29.1.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ մատրիցը կաշվում է f գծային արտապատկերման մատրից: Նշանակենք այն $M(f)$ -ով:

ՊԵՐՈՒՄ 29.2. Եթե $\dim W = m$, $\dim V = n$, ապա

$$M : f \rightarrow M(f), \quad f \in \text{Hom}(W, V)$$

արտապատկերումը վերադրում է $\text{Hom}(W, V)$ և $M(m, n, K)$ բազմությունների միջև:

Ապացույց. Հասկանալի է, որ եթե f և g գծային արտապատկերումներն ունեն միևնույն մատրիցը՝ $M(f) = M(g)$, ապա

$$f(w_1) = g(w_1), \dots, f(w_m) = g(w_m) :$$

Իսկ արանից, համաձայն 27.10 պնդման, հետևում է, որ $f = g$: Այսպիսով՝ M արտապատկերումը տարադրում է:

Յույց ստանք, որ այն նաև վրադրում է: Վերցնենք $|a_{ij}|_{mn}$ մատրիցը: Գիտարկենք

$$f(w_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}v_j, \quad i = 1, \dots, m$$

արտապատկերումը: Դուրձյալ, 27.10 պնդման համաձայն, գոյություն ունի W -ից V -ի մեջ տրվում գծային արտապատկերում, որը $w_1, \dots, w_n$ տրվերների համար

համընկնում է f -ի հետ: Այդ գծային արտապատկերման մատրիցն էլ կլինի $|a_{ij}|_{mn}$ մատրիցը: $\square$

Օրինակներ:

ա. եթե W և V K -վեկտորական տարածությունների համար ժող $W = n$ և ժող $V = n$, ապա գոյություն ունի գծային արտապատկերման մատրիցն $L = [0]_{mn}$:

բ. եթե ժող $V = n$, ապա V -ից V -ի մեջ արված նույնական գծային արտապատկերման մատրիցն է միավոր մատրիցը I_n -ը:

գ. եթե ժող $V = n$, $\alpha \in K$, ապա V -ից V -ի մեջ արված h_α նմանադրության մատրիցն է հետևյալ *սկալյար մատրիցը*.

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & & 0 \\ 0 & \alpha & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

դ. Գծային նախատրամների համակարգով արված գծային արտապատկերման մատրիցը այդ համակարգի մատրիցն է:

29.2. Գծային օպերատորի մատրիցները տարբեր բազիսներում: Նման մատրիցներ: Այժմ դիտարկենք վերջավոր չափազանցություն V K -վեկտորական տարածություն f գծային օպերատորի մատրիցը:

Դիցուք՝ տներն V -ի $v_1, \dots, v_n$ բազիսը: Այդ դեպքում մենք չենք ընտրում երկբարդ բազիս f օպերատորի մատրիցը գրելու համար: Փարզապես $f(v_1), \dots, f(v_n)$ սորվերները արտահայտում ենք V -ի $v_1, \dots, v_n$ բազիսի միջոցով.

$$f(v_1) = a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n$$

$$f(v_n) = a_{n1}v_1 + \dots + a_{nn}v_n,$$

կամ, սովորի կարճ,

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}v_j, \quad i = 1, \dots, n:$$

Ստացվում $|a_{ij}|_n$ բառակուսային մատրիցը կլինի արված f գծային օպերատորի մատրիցը $v_1, \dots, v_n$ բազիսում:

Փոխելով վեկտորական տարածություն բազիսը՝ մենք կփոխենք նույն գծային օպերատորի մատրիցը: Արդյունք գոյություն ունի ինչ-որ կոստ ապրեր բազիսներում միևնույն գծային օպերատորի մատրիցների միջև:

Դիցուք՝ տներն V -ի երկու բազիսներ՝ $v_1, \dots, v_n$ և $w_1, \dots, w_n$: Ընդ որում,

$$(30) \quad w_i = \sum_{j=1}^n g_{ij}v_j, \quad i = 1, \dots, n:$$

Համակմույի է, որ $\Gamma = |g_{ij}|_n$ բառակուսային մատրիցը հակադարձելի է, քանի որ նրա ստորերի միջև յուրաքանչյուր զմույին կոմբինացիա համարժեք է $w_1, \dots, w_n$ վեկտորների՝ նույն գործակիցներով զմույին կոմբինացիային:

Դիցուք՝ այժմ ունենք V -ի f զմույին օպերատորի մատրիցները $v_1, \dots, v_n$ և $w_1, \dots, w_n$ բազիսներում.

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad |a_{ij}|_n = A,$$

$$f(w_i) = \sum_{j=1}^n b_{ij} w_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad |b_{ij}|_n = B:$$

Այստեղից, նկատի ունենալով (30) հավասարությունը, կստանանք՝

$$\begin{aligned} f(w_i) &= \sum_{j=1}^n f(g_{ij} v_j) = \sum_{j=1}^n g_{ij} f(v_j) = \\ &= \sum_{j=1}^n g_{ij} \sum_{l=1}^n a_{jl} v_l = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} a_{jl} v_l, \\ f(w_i) &= \sum_{j=1}^n b_{ij} w_j = \sum_{j=1}^n b_{ij} \sum_{l=1}^n g_{jl} v_l = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} g_{jl} v_l: \end{aligned}$$

Այստեղից կստանանք՝

$$\sum_{j=1}^n g_{ij} a_{jl} = \sum_{j=1}^n b_{ij} g_{jl}, \quad i, l = 1, \dots, n:$$

Հետևապես՝

$$\Gamma A = B \Gamma$$

կամ

$$B = \Gamma A \Gamma^{-1}:$$

Այսպիսով՝ մենք ապացուցեցինք հետևյալ հուսկությունը:

ՊԼԴՈՒՄ 29.3. Դիցուք՝ ունենք V K -վեկտորական սուբուծություն $v_1, \dots, v_n$ և $w_1, \dots, w_n$ բազիսները, որոնք կապված են (30) հավասարությամբ: Այդ դեպքում, եթե V սուբուծություն f զմույին օպերատորի մատրիցներն են. A -ն՝ $v_1, \dots, v_n$ բազիսում և B -ն՝ $w_1, \dots, w_n$ բազիսում, ապա

$$B = \Gamma A \Gamma^{-1}:$$

ՄԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 29.4. A և B մատրիցները կոչվում են նման, եթե գոյություն ունի այնպիսի հակադարձելի Γ մատրից, որ

$$B = \Gamma A \Gamma^{-1}:$$

Մենք կուսենք նաև, որ A մատրիցը նման է B մատրիցին:

Վերջին պնդումը ցույց է տալիս, որ միևնույն գծային օպերատորի մատրիցները ստաբեր բազիսներում իրար նման են: Դիշա է նաև հսկայական պնդումը:

ՊՆԴՈՒՄ 29.5. *Եթե V -ի f գծային օպերատորի մատրիցը $v_1, \dots, v_n$ բազիսում A -ն է և $B = \Gamma A \Gamma^{-1}$, ապա գոյություն ունի V -ի այնպիսի բազիս, որում f -ի մատրիցը B -ն է:*

Ապացույց. Նշանակենք

$$w_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} v_j, \quad i = 1, \dots, n:$$

Այդ դեպքում $w_1, \dots, w_n$ համակարգը կլինի V -ի բազիս, և նրանում f օպերատորի մատրիցը կլինի B -ն: $\square$

Վերջում նշենք մատրիցների նմանության մի կարևոր հատկություն ևս:

ՊՆԴՈՒՄ 29.6. *Մատրիցների նմանությանը առնչությունը համարժեքություն է:*

Ապացույց. Յուրաքանչյուր մատրից նման է ինքն իրեն: Իսկապես, կամայական n -րդ կարգի քառակուսային A մատրիցի համար

$$A = I_n \cdot A \cdot I_n^{-1},$$

Այսպիսով՝ մատրիցների նմանությանը առնչությունը անդրադարձելի է:

Դիցուք՝ A մատրիցը նման է B մատրիցին և $B = \Gamma A \Gamma^{-1}$: Այդ դեպքում կունենանք՝

$$A = \Gamma^{-1} B \Gamma:$$

Հետևապես՝ մատրիցների նմանությանը առնչությունը համապատասխան է:

Դիցուք՝ A մատրիցը նման է B մատրիցին, իսկ B մատրիցը նման է C մատրիցին, ընդ որում, $B = \Gamma A \Gamma^{-1}$ և $C = \Delta B \Delta^{-1}$: Այդ դեպքում կունենանք՝

$$C = \Delta B \Delta^{-1} = \Delta \Gamma A \Gamma^{-1} \Delta^{-1} = (\Delta \Gamma) A (\Delta \Gamma)^{-1}:$$

Հետևապես՝ մատրիցների նմանությանը առնչությունը նաև վախճանելի է: $\square$

29.3. *Գծային արտապատկերման և նրա մատրիցի ռանգերը:* Գծային արտապատկերումների և նրանց մատրիցների միջև գոյություն ունեն մի շարք հրաշալի կապեր, որոնք բույլ են տալիս գծային արտապատկերումների ուսումնասիրությունը հսկայական նրանց մատրիցների ուսումնասիրությանը: Նույն դիտարկենք գծային արտապատկերման և նրա մատրիցի ռանգերի կապը:

ՊՆԴՈՒՄ 29.7. *Եթե V վեկտորական տարածության վեկտորների $v_1, \dots, v_n$ համակարգը գծորեն անկախ է, ապա K դաշտի կամայական*

$$a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

ստաբերի համար վեկտորների

$$a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n,$$

$$a_{m1}v_1 + \dots + a_{mn}v_n$$

համակարգի տոնգը համախորհրդ է $|a_{ij}|_{mn}$ մատրիցի տոնգին:

Լեյպցույց. Ապացուցումը կատարեն ինքնուրույն: □

ՊՆԴՈՒՄ 29.8. *Վերջուրի չափադասականության վերջուրական տարածության գծային արտապատկերմուն տոնգը համախորհրդ է նրա մատրիցի տոնգին:*

Լեյպցույց. Դիցուք՝ ունենք f գծային արտապատկերումը վերջավոր չափադասականության W և V K -վեկտորական տարածությունների միջև, W -ի $w_1, \dots, w_m$ բազիսը և V -ի $v_1, \dots, v_n$ բազիսը: Այդ դեպքում նախ կտեսնանք՝

$$f(w_1) = a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n$$

$$f(w_m) = a_{m1}v_1 + \dots + a_{mn}v_n :$$

Այնուհետև,

$$\begin{aligned} \text{rank } f &= \text{rank}(f(w_1), \dots, f(w_m)) = \\ &= \text{rank}(a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n, \dots, a_{m1}v_1 + \dots + a_{mn}v_n) = \\ &= \text{rank}|a_{ij}|_{mn}, \end{aligned}$$

որտեղ $a_{ij} \in K$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$: □

Ապացուցված պնդումն ունի նաև կիրառական նշանակություն, քանի որ սվեյլի հաճախ դիտվում է մատրիցի, բուն գծային արտապատկերմուն ունեցի հաշվումը:

29.4. *Գծային արտապատկերումների և մատրիցների հանրահաշիվների իզոմորֆիզմը:* Նախորդ կետում մենք դիտարկեցինք կոմպակտ f գծային արտապատկերմուն և նրա $M(f)$ մատրիցի տոնգերի կապը: Այստեղ մենք կշտրտանակենք M արտապատկերմուն հետագա ուսումնասիրությամբ:

ՊՆԴՈՒՄ 29.9. *Եթե $\dim W = m$, $\dim V = n$, ապա*

$$M : f \mapsto M(f), f \in \text{Hom}(W, V)$$

արտապատկերումը իզոմորֆիզմ է $\text{Hom}(W, V)$ և $M(mn, K)$ գումարային խմբերի միջև: Հետևապես, սեղի ունի խմբերի

$$(\text{Hom}(W, V), +) \simeq (M(mn, K), +)$$

իզոմորֆիզմը: Ընտանադրապես, գծային արտապատկերումների գումարի մատրիցը համախորհրդ է գումարելիների մատրիցների գումարին:

Լեյպցույց. Վերցնենք W -ի $w_1, \dots, w_m$ և V -ի $v_1, \dots, v_n$ բազիսները: Դիցուք՝ $f, g \in \text{Hom}(W, V)$:

$$f(w_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}v_j, \quad g(w_i) = \sum_{j=1}^n b_{ij}v_j, \quad i = 1, \dots, m:$$

Այդ դեպքում՝

$$\begin{aligned}(f + g)(w_i) &= f(w_i) + g(w_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}v_j + \sum_{j=1}^n b_{ij}v_j = \\ &= \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij})v_j, \quad i = 1, \dots, m:\end{aligned}$$

Այսինքն՝

$$M(f + g) = M(f) + M(g):$$

Մենք այն փաստով, համաձայն 29.2 պնդման, M արտապատկերումը վերադրում է $\text{Hom}(W, V)$ և $M(mn, K)$ բազմությունների միջև: Հետևապես՝ M -ը իզոմորֆիզմ է $\text{Hom}(W, V)$ և $M(mn, K)$ զուսմարային խմբերի միջև: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 29.10. *Եթե $\dim W = m, \dim V = n$, ապա*

$$M: f \mapsto M(f), f \in \text{Hom}(W, V)$$

արտապատկերումը իզոմորֆիզմ է $\text{Hom}(W, V)$ և $M(mn, K)$ վեկտորական տարածությունների միջև: Մասնավորապես, տեղի տնի K -վեկտորական տարածությունների

$$(\text{Hom}(W, V), +, \cdot) \simeq (M(mn, K), +, \cdot)$$

իզոմորֆիզմը:

Ապացույց. Վերցնենք W -ի $w_1, \dots, w_m$ և V -ի $v_1, \dots, v_n$ բազիսները: Եթե $f, g \in \text{Hom}(W, V)$, ապա $M(f + g) = M(f) + M(g)$ սկայմունը ստացուցվում է նախորդ քննման մեջ:

Ինչպես $f \in \text{Hom}(W, V)$, $\alpha \in K$ և

$$f(w_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}v_j, \quad i = 1, \dots, m:$$

Այդ դեպքում՝

$$(\alpha f)(w_i) = \alpha f(w_i) = \alpha \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}v_j \right) = \sum_{j=1}^n \alpha a_{ij}v_j,$$

$i = 1, \dots, m$: Այսինքն՝ αf գծային արտապատկերման մատրիցն է $[\alpha a_{ij}]_n$: Հետևապես՝

$$M(\alpha f) = \alpha M(f):$$

Իսկ այս հավաստությունն էլ՝ $M(f + g) = M(f) + M(g)$ հավաստության հետ միասին ցույց է տալիս, որ f վեկտորումը իզոմորֆիզմ է պնդման մեջ նշված վեկտորական տարածությունների միջև: $\square$

Հարմարեցնել M արտապատկերման ուսումնասիրությանը: Նրա հաջորդ հատկությունը կապված է արտապատկերումների բազմապատկման գործողության հետ:

ՊՆԴՈՒՄ 29.11. *Եթե $\dim V = n$, ապա*

$$M : f \rightarrow M(f), f \in \text{Hom } V$$

արտադրատեղումը իզոմորֆիզմ է $\text{Hom } V$ և $M(n, K)$ օղակների միջև: Հետևապես՝ տեղի ունի օղակների

$$(\text{Hom } V, +, \cdot) \cong (M(n, K), +, \cdot)$$

իզոմորֆիզմը: Մասնավորապես, գծային օպերատորների արտադրյալի մասերիցը համասար է արտադրիչների մատրիցաների արտադրյալին:

$$M(fg) = M(f)M(g) :$$

Արդյունք. Վերցնենք V -ի $v_1, \dots, v_n$ բազիսը: Դիցուք՝ $f, g \in \text{Hom } V$: Մենք արդեն գիտենք, որ M արտադրատեղումը վերադրում է և համաձայնեցված է գծային օպերատորների գումարման գործողության հետ: Մենք էլ ստուգել նրա կապը գծային օպերատորների բազմապատկման գործողության հետ:

Դիցուք՝

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j, \quad g(v_i) = \sum_{j=1}^n b_{ij} v_j, \quad i = 1, \dots, n :$$

Այդ դեպքում՝

$$\begin{aligned} (fg)(v_i) &= g(f(v_i)) = g\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} v_j\right) = \sum_{j=1}^n a_{ij} g(v_j) = \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{l=1}^n b_{jl} v_l\right) = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jl}\right) v_l, \quad i = 1, \dots, n : \end{aligned}$$

Այստեղից հետևում է, որ fg գծային արտադրատեղումն մասերիցն է $[a_{ij}]_n [b_{ij}]_n$: Հետևապես՝

$$M(f \cdot g) = M(f) \cdot M(g) :$$

Իսկ այս հավաստությունն էլ՝ $M(f + g) = M(f) + M(g)$ հավաստությանը նեսո միասին ցույց է տալիս, որ f վերադրումը $(\text{Hom } V, +, \cdot)$ և $(M(n, K), +, \cdot)$ օղակների իզոմորֆիզմ է: $\square$

Այսպիսով այս կետում ուսուցացված բոլոր սնդուկները՝ կստանանք նեսոյալ հասկոյումը:

ՊՆԴՈՒՄ 29.12. *Եթե $\dim V = n$, ապա*

$$M : f \rightarrow M(f), f \in \text{Hom } V$$

արտադրատեղումը իզոմորֆիզմ է $\text{Hom } V$ և $M(n, K)$ գծային հանքսահիվների միջև: Մասնավորապես, տեղի ունի գծային հանքսահիվների

$$(\text{Hom } V, +, \cdot, \circ) \cong (M(n, K), +, \cdot, \circ)$$

իզոմորֆիզմը:

Ապացույց. Ասուցուցումը կատարեք ինքնուրույն: □

30. ՀԱԿԱԴԱՐՁԵԼԻ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐ

30.1. *Գծային տարածության ափսոմորֆիզմները:* Գծային օպերատորների մեջ առանձնահատուկ տեղ ունեն հակադարձելի օպերատորները: Դրանք կոչվում են արված գծային տարածության ավստմորֆիզմներ:

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 30.1. V K -վեկտորական տարածության *ափսոմորֆիզմ* է կոչվում V -ից V -ի մեջ արված գծային և հակադարձելի արտապատկերումը:

Հետևյալ տրոյությունները հնարավորության են տալիս գծային տարածության ավստմորֆիզմները բնութագրել կարելու այլ կաղնկով:

ՊՐԴՈՒՄ 30.2. V գծային տարածություն g ծային օպերատորը V -ի *ավստմորֆիզմ* է *այն և միայն այն դեպքում, երբ այն վերադարձնում է կամ, որ նայենք է, իզմմորֆիզմ է V և V վեկտորական տարածությունների միջև:*

Ապացույց. Ասուցուցումը կատարեք ինքնուրույն: □

ՊՐԴՈՒՄ 30.3. *Վերջուրի չափադակնության V գծային տարածություն f գծային օպերատորը V -ի ափսոմորֆիզմ է այն և միայն այն դեպքում, երբ անդի ունի հետևյալ սրայմուններից որևէ մեկը.*

ա. f -ը վերադարձնում է,

բ. $\ker f = \{0\}$,

գ. $dcff = 0$,

դ. $\text{rank } f = \dim V$,

ե. $\text{Im } f = V$,

զ. $M(f)$ մատրիցը հակադարձելի է:

Ապացույց. Եթե f -ը հակադարձելի գծային օպերատոր է, ապա այն վերադարձնում է: Ուրեմն՝ $\ker f = \{0\}$: Այսինքն՝ f -ի ավստմորֆիզմ լինելուց հետևում է ա-ն և ա-ից էլ հետևում է բ-ն:

բ-ից հետևում է գ: Ապացույցն ակնհայտ է:

գ-ից հետևում է դ: Համաձայն 27.23 սլնդմուն՝

$$dcff + \text{rank } f = \dim V :$$

Նկատի ունենալով, որ $dcff = 0$, այստեղից կստանանք $\text{rank } f = \dim V$:

դ-ից հետևում է ե: Ապացույցն ակնհայտ է:

ե-ից հետևում է զ: Իսկապես, ունենք $\text{rank } f = \text{rank } M(f)$: Միսմանանակ $\text{Im } f = V$ պայմանից հետևում է, որ $\text{rank } f = \dim V$: Այստեղից կստանանք, որ $M(f)$ մատրիցի ունգը հակադարձ է նրա կարգին: Այսինքն՝ $M(f)$ մատրիցը չվերադարձնում է: Հետևաբար՝ այն նուս հակադարձելի է:

զ-ից հետևում է, որ f -ը հակադարձելի գծային օպերատոր է: Իսկուպես, դիցուք՝ $AI(f)$ -ը հակադարձելի է և B մատրիցը նրա հակադարձն է: Նշանակենք g -ով v -ի այն գծային օպերատորը, որի մատրիցն է B -ն՝ $B = AI(g)$: Ունենք՝

$$AI(fg) = AI(f)AI(g) = I_n :$$

Այստեղից՝ բունի սը AI օպերատորակերտնր ստորադրում է և $AI(\varepsilon) = I_n$, ապա $fg = \varepsilon$: Այսինքն՝ f -ը հակադարձելի է: $\square$

Այս պնդումից մասնավորապես հետևում է հետևյալ հոսակոչությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 30.4. *Գծային օպերատորի հակադարձելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա մատրիցը հակադարձելի է:*

Ապացույց. Ասուցուցումը կատարեր ինքնուրույն: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 30.5. *Վերջուրի չափադրականություն V գծային ստորածություն f գծային օպերատորի համար հետևյալ սրայմոնները համարվեք են.*

ա. f -ը վերադրում է,

բ. f -ը վրադրում է,

գ. f -ը ստորադրում է:

Ապացույց. Ասուցուցումը կատարեր ինքնուրույն: $\square$

Այժմ նկարագրենք վերջավոր չափադրականության վեկտորական ստորածությունների բարդ ավազմաբխիզաները: Նախ նկատենք, որ յուրաքանչյուր ավազմաբխիզմ վեկտորական ստորածություն բազիսը օրաուսպատկերում է բազիսը:

ՊՆԴՈՒՄ 30.6. *Երև f -ը $V = K$ -վեկտորական ստորածություն օպերատորի f համայնական $v_1, \dots, v_n$ բազիսի համար $f(v_1), \dots, f(v_n)$ համակարգը նայնպես տրվում վեկտորական ստորածություն բազիս է:*

Ապացույց. Ասուցուցումը կատարեր ինքնուրույն: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 30.7. *Վերջուրի չափադրականություն V վեկտորական ստորածություն համայնական երկու $v_1, \dots, v_n$ և $w_1, \dots, w_n$ բազիսների համար գայություն ունի V -ի միակ f օպերատորի f , որի համար*

$$f(v_1) = w_1, \dots, f(v_n) = w_n :$$

Ապացույց. Այն, որ գայություն ունի նշված սրայմոններին բավարարող գծային օպերատորակերտն, հետևում է 27.10 պնդումից: Որ այդ գծային օպերատորակերտնը վերադրում է, հետևում է 30.3 պնդումից: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 30.8. *f -ը n չափադրականություն V վեկտորական ստորածություն օպերատորի f համայնական այն և միայն այն դեպքում, երբ գայություն ունեն V -ի այնպիսի $v_1, \dots, v_n$ և $w_1, \dots, w_n$ բազիսներ, որոնց համար*

$$f(v_1) = w_1, \dots, f(v_n) = w_n :$$

Ապացույց. Ասուցուցումը կատարեր ինքնուրույն: $\square$

30.2. *Վեկտորական ստորամուրյան ավտոմորֆիզմների խումբը:* Նշանակենք $\text{Aut } V$ -ով V վեկտորական ստորամուրյան բոլոր ավտոմորֆիզմների բազմությունը: Այն իրենից ներկայացնում է $\text{Hom } V$ Օպտի բոլոր հսկայաբաժնի ստորերի բազմությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 30.9. *($\text{Aut } V, \cdot$) զույգը, որտեղ $\cdot$ -ը ֆունկցիոնների բազմադասակնում գործողությունն է, խումբ է:*

Ապացույց. V վեկտորական ստորամուրյան f և g երկու ավտոմորֆիզմների $f \cdot g$ արատորյալը նորից ավտոմորֆիզմ է, որովհետև այդ $f \cdot g$ -ն նույն վերադրում է, սակայն գծային արտապատկերում է՝ համաձայն 28.9 պնդման:

Նույնովն՝ $\cdot$ արտապատկերումը գծային արտապատկերում է և հսկայաբաժնի է: Հետևապես՝

$$\cdot \in \text{Aut } V :$$

Այնուհետև, $\cdot$ գործողությունը զուգորդելիությունը ակնհայտ է: Ընդուն է ցույց սույլ նրա հսկայաբաժնիությունը:

Դիցուք՝ $f \in \text{Aut } V$: Պարզ է, որ f^{-1} արտապատկերումը վերադրում է:

Վերցնենք V -ի x, y և K -ի α տարրերը: Այդ դեպքում, երբ

$$f^{-1}(x) = x', f^{-1}(y) = y',$$

տալս $f(x') = x, f(y') = y$ և

$$f(x' + y') = f(x') + f(y') = x + y :$$

Այսինքն՝

$$f^{-1}(x + y) = x' + y' = f^{-1}(x) + f^{-1}(y) :$$

Այնուհետև, երբ $f(x') = x$, տալս

$$f(\alpha x') = \alpha f(x') = \alpha x :$$

Այսինքն՝ երբ $f^{-1}(x) = x'$, տալս

$$f^{-1}(\alpha x) = \alpha x' = \alpha f^{-1}(x) :$$

□

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 30.10. $\text{Aut } V$ խումբը կոչվում է V վեկտորական ստորամուրյան ավտոմորֆիզմների խումբ:

ՊՆԴՈՒՄ 30.11. *Երբ $\dim V = n$, տալս $V = K$ -վեկտորական ստորամուրյան ավտոմորֆիզմների խումբը իզոմորֆ է n -րդ կարգի հսկայաբաժնի մատրիցների $GL(n, K)$ լրիվ գծային խմբին:*

Ապացույց. Իհասարկենք

$$M : f \mapsto M(f), f \in \text{Aut } V$$

արտապատկերումը: Այն իզոմորֆիզմ է, այսինքն՝ վերադրում է և բազմադասակն է

$$M(f \cdot g) = M(f) \cdot M(g)$$

որոշմունքին, որտեղ $f, g \in \text{Aut } V$: Հետևապես M -ը իզոմորֆիզմ է նշված խմբերի միջև: $\square$

31. ՍԵՓԱԿԱՆ ՎԵԿՏՈՐՆԵՐ ԵՎ ՍԵՓԱԿԱՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐ

31.1. *Մեխանիկական վեկտորներ և սեփական արժեքներ:* Դիտարկենք V K -վեկտորական տարածությունը և նրա f գծային օպերատորը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 31.1. V -ի գծային օպերեր v վեկտորը կոչվում է f օպերատորի *սեփական վեկտոր*, եթե գոյություն ունի K -ի սեմպլիսի α ստոր, որ

$$f(v) = \alpha v :$$

Այս արձանանին բաժանարար α սկալյարը կոչվում է f օպերատորի *սեփական արժեք*: Այս դեպքում ստանում են նաև, որ f օպերատորի v *սեփական վեկտորը* *որտա-կանում է* α *սեփական արժեքին*:

ՊԵՐՈՒՄ 31.2. *Եթե v -ն f գծային օպերատորի սեփական վեկտոր է, ապա գոյություն ունի միակ α սկալյարը, որը բաժանարարում է $f(v)$ αv արձանանին: Այսինքն՝ միևնույն վեկտորը կարող է որտակունել միայն մեկ սեփական արժեքի:*

Լարդգույց. Դիցուք՝

$$f(v) = \alpha v, \quad f(v) = \beta v :$$

Այդ դեպքում՝

$$\alpha v = \beta v :$$

Հետևաբար՝

$$(\alpha - \beta)v = 0 :$$

Եվ քանի որ $v \neq 0$, ապա

$$\alpha - \beta = 0, \quad \alpha = \beta :$$

$\square$

Դիտարկենք օրինակներ և ժխտօրինակներ:

ա. Սեփական վեկտոր չունի R_2 սալարածության պատյալը, օրինակ, 90 աստիճանով:

բ. Դիտարկենք մյուս ծայրակեղ դեպքը: Կոմպակտ V K -վեկտորական տա-րածություն նմանադրության սեփական վեկտոր է V -ի յուրաքանչյուր ոչ զրոյական վեկտորը: Ընդ որում, h_α նմանադրություն սեփական արժեքն է α սկալյարը:

գ. $\sim$ նույնական օպերատորի համար սեփական է յուրաքանչյուր ոչ զրոյական վեկտոր, իսկ 1 սկալյարը այդ օպերատորի սեփական արժեքն է :

ՊԵՐՈՒՄ 31.3. *Դիցուք՝ f -ը V K -վեկտորական տարածություն գծային օպե-րատոր է, α -ն՝ նրա սեփական արժեքը: Այդ դեպքում, f -ի α սեփական արժեքին որտակունող սեփական վեկտորների բազմությունն է՝*

$$\ker(f - h_\alpha) \setminus \{0\} :$$

Լիպցույց. Դիցուք՝

$$x \in \ker(f - h_\alpha) \setminus \{0\} :$$

Այդ դեպքում՝

$$0 = (f - h_\alpha)(x) = f(x) - h_\alpha(x) = f(x) - \alpha x, \quad f(x) = \alpha x :$$

Հակառակը: Դիցուք՝ x վեկտորը f օպերատորի սեփական վեկտորն է՝ α սեփական արժեքով: Այդ դեպքում $f(x) = \alpha x$: Հետևապես՝

$$f(x) - h_\alpha(x) = 0$$

կամ

$$(f - h_\alpha)(x) = 0 :$$

Այսինքն՝ x ոչ զրոյան վեկտորը պատկանում է $f - h_\alpha$ գծային օպերատորի կերիին և, ուրեմն՝ $x \in \ker(f - h_\alpha) \setminus \{0\}$: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 31.4. *Դիցուք՝ f -ը V K -վեկտորական սուբսպացիան գծային օպերատոր է, α -ն՝ ճիշտ սեփական արժեքը: Այդ դեպքում f -ի սեփական վեկտորների բազմությունը, որոնք պատկանում են α սեփական արժեքին, 0 վեկտորի հետ միասին կազմում է V սուբսպացիան ենթասուբսպացիան:*

Լիպցույց. Լիպցուցումը հետևում է նույնպիսի պնդումից: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 31.5. *Դիցուք՝ U -ն 0 վեկտորից և f օպերատորի α սեփական արժեքին պատկանող սեփական վեկտորներից կազմված բազմությունն է: Անմիջականորեն տառեր, որ այն V -ի ենթասուբսպացիան է:*

31.2. Բնութագրիչ հոմոստորոմը, բնութագրիչ արմատները: Դիտարկենք K դաշտի վրա արված n -րդ կարգի A մատրիցը և x վավախականը:

ՄԱՀԱՄԱՐՈՒՄ 31.6. $A - x \cdot I_n$ մատրիցը կոչվում է A մատրիցի *բնութագրիչ մատրից*: Բնութագրիչ մատրիցի $|A - x \cdot I_n|$ որոշիչը կոչվում է A մատրիցի *բնութագրիչ բազմանդամ*, իսկ

$$|A - x \cdot I_n| = 0$$

հավասարումը՝ A մատրիցի *բնութագրիչ հոմոստորոմ*:

Հեշտությամբ կարող ենք ցույց տալ, որ n -րդ կարգի մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամը n աստիճանի բազմանդամ է: Անք կարող ենք գտնել բնութագրիչ բազմանդամի որոշ գործակիցներ: Այսպես՝ $|a_{ij}|_n$ մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամի առաջ տերմինի գործակիցն է $(-1)^n$, երկրորդ տերմինի գործակիցն է

$$(-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}),$$

իսկ ազատ տերմինը արված մատրիցի $|a_{ij}|_n$ որոշիչն է:

ՊՆԴՈՒՄ 31.7. *Նման մատրիցները տանն միևնույն բնութագրիչ բազմանդամների և միևնույն բնութագրիչ հոմոստորոմների:*

Վերջույց. Իսկուպես, դիցուք՝ A -ն և B -ն n -րդ կարգի նման մատրիցներ են և
 $A = \Gamma^{-1} B \Gamma$:

Այդ դեպքում՝

$$\begin{aligned} |A - x \cdot I_n| &= |\Gamma^{-1} B \Gamma - x \cdot I_n| = |\Gamma^{-1} (B - x \cdot I_n) \Gamma| = \\ &= |\Gamma|^{-1} |B - x \cdot I_n| |\Gamma| = |B - x \cdot I_n| : \end{aligned}$$

□

Մատրիցների ուսումնասիրության մեջ կարևոր դեր է խաղում բնութագրիչ արժանի գտնադրումը:

ՄԱՀԱՐԱՆԻՄ 31.8. Կոմպակտն բառակառուցված մատրիցի բնութագրիչ հավասարման արժանաները կոչվում են այդ մատրիցի *բնութագրիչ արժաններ*:

Օրինակ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամն է՝

$$\begin{vmatrix} 1 - x & 2 \\ 1 & -x \end{vmatrix}$$

կամ՝ $-(1 - x)x - 2$, բնութագրիչ հավասարումը՝

$$-(1 - x)x - 2 = 0,$$

բնութագրիչ արժանները՝ 2 և -1 :

31.7 սեկցիայի հետևում է, որ նման մատրիցների բնութագրիչ արժանները նայելու հավասար են: Մյևնույն ժամանակ, 31.7 սեկցիայի հետևում է ստախա ներմուծելու բնութագրիչ բազմանդամի, բնութագրիչ հավասարման և բնութագրիչ արժանի համակարգությունների մոտ գծային օպերատորի համար: Իսկուպես, քանի որ միևնույն գծային օպերատորի մատրիցները տարբեր բազիսներում իրար նման են, իսկ նման մատրիցներն էլ ունեն միևնույն բնութագրիչ հավասարումը, ուստի սեյդ-սիսի համակարգումը միտքը կլինի արված գծային օպերատորի համար: Այսպիսով՝ մենք կարող ենք ներմուծել հետևյալ ստեղծումը:

ՄԱՀԱՐԱՆԻՄ 31.9. Վերջույցի չափադասականության վեկտորական տարածության գծային օպերատորի *բնութագրիչ համաստրում* է կոչվում տարածության որևէ բազիսում այդ օպերատորի մատրիցի բնութագրիչ հավասարումը:

Նույն կերպ են ստեղծում նաև գծային օպերատորի բնութագրիչ բազմանդամի և բնութագրիչ արժանի համակարգությունները:

Օրինակ, գիտարկենք R_2 տարածությունը որևէ u , v օրթոգոնալ բազիս, և այդ տարածության f պրոյեկտոր v -ով անցնող ուղղի վրա:

Այնպես, որ f -ը R_2 -ի գծային օպերատոր է:

Պարզ է, որ $f(u) = 0 \cdot u + 0 \cdot v$, $f(v) = 0 \cdot u + 1 \cdot v$:

$$(35) \quad \begin{vmatrix} a_{11} - y & & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - y \end{vmatrix} = 0$$

բնութագրիչ հավասարման արձան է:

Հավասարել, դիցուք՝ K դաշտի α ոչ գրեյտիան աարքր f զծային օպերատորի (35) բնութագրիչ հավասարման արձան է: Այդ դեպքում տեղի ունի (34) հավասարությունը: Իսկ դա ճշմանակաւ է, որ (33) համատեւ համակարգը որպէս լուծում ունի $x_1, \dots, x_n$ աարքրից կազմված ոչ զրոյական X սյունը:

Մատրիցային տեսքով այդ համակարգը կգրվի (32) տեսքով, իսկ սրանից էլ կհետևի (34)-ը, որից կստանանք՝

$$f(x) = \alpha x :$$

Այսինքն՝ x ոչ զրոյական վեկտորը f օպերատորի սեփական վեկտորն է, իսկ α -ն՝ նրա սեփական արժեքը: $\square$

31.3. Պարզ սպեկտրով զծային օպերատորներ: Գիտարկենք այնպիսի զծային օպերատորները, որոնք ինչ-որ բազիսում ունեն համեմատաբար սիմետրիկ տեսք, օրինակ, անկյունագծային մատրիցներ են: Նախ ամենիսովեշտ է ապացուցել հետևյալ հատկությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 31.11. *Եթե կոմպակտ վեկտորական տարածության f զծային օպերատորի $x_1, \dots, x_n$ սեփական վեկտորները սրտականում են f զծային օպերատորի աարքրի սեփական արժեքների, ապա նրանք զծային անկախ են:*

Ապացույց. Կիրառենք ինդուկցիա ըստ n -ի:

Ինդուկցիայի բազիսը՝ $n = 1$: Պնդումը՝ ճմարկաւ է:

Ինդուկցիան բայլը՝ դիցուք ենթադրաբար δ ճմարկաւ է $n - 1$ վեկտորների համար, ցույց տանք, որ այն δ ճմարկաւ կլինի նաև n վեկտորների համար:

Դիցուք՝ V վեկտորական տարածության $x_1, \dots, x_n$ վեկտորները սրտականում են մինևույն f զծային օպերատորի աարքրի սեփական արժեքների, ուսինքն՝ կզանվեն K -ի այնպիսի $k_1, \dots, k_n$ աարքրեր, որ՝

$$(36) \quad f(x_1) = k_1 x_1, \dots, f(x_n) = k_n x_n,$$

ընդ որում, եթե $i \neq j$, ապա

$$(37) \quad k_i \neq k_j :$$

Ենթադրենք, որ

$$(38) \quad \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0 :$$

Այդ դեպքում,

$$\alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n) = 0 :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (36)-ը, կստանանք՝

$$\alpha_1 k_1 x_1 + \dots + \alpha_n k_n x_n = 0 :$$

(38) հավասարության երկու մասերը բազմապատկենք $-(k_n - \alpha)$ և զամաբենք վերջին հավասարությանը: Աստանանք՝

$$\alpha_1(k_1 - k_n)x_1 + \dots + \alpha_{n-1}(k_{n-1} - k_n)x_{n-1} = 0 :$$

Այստեղից, կիրառելով ինդուկտիվ ենթադրությունը, կստանանք՝

$$\alpha_1(k_1 - k_n) = \dots = \alpha_{n-1}(k_{n-1} - k_n) = 0 :$$

Եվ, քանի որ

$$k_n \neq k_i, i = 1, \dots, n-1,$$

ուսրա

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0 :$$

Նկատի ռեննալով նաև (38)-ը՝ կստանանք՝

$$\alpha_n x_n = 0 :$$

Րայց $x_n \neq 0$: Հետևալեա՝ անենք նաև $\alpha_n = 0$: Այսպիսով՝ մենք ստացումք, որ (38) հավասարությանից հետևում է, որ բոլոր գործակիցները զրո են: Հետևալեա՝ $x_1, \dots, x_n$ համակարգը գծորեն անկախ է: $\square$

ՄԱՀԱՄԱՐՈՒՄ 31.12. n -շտփողոկանություն վեկտորական տարածության f զրծույին օպերատորը, որն անի իլտրից ստորեր n սեփական արժեքներ, կոչվում է *սրտրզ սպեկտրով գծույին օպերատոր*: Պտրզ սպեկտրով գծույին օպերատորի սեփական արժեքների բազմությունը կոչվում է նրա *սպեկտր*:

31.11 անդումից ստացվում է հետևյալ հասկությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 31.13. *Դիցար՝ անենք V n -շտփողոկանություն վեկտորական տարածություն $\{k_1, \dots, k_n\}$ սրտրզ սպեկտրով f գծույին օպերատորը, և v_i -ն k_i -ին սրտականոլ սեփական վեկտորն է, $i = 1, \dots, n$: Այլ դեպքում վեկտորների $v_1, \dots, v_n$ համակարգը V տարածություն բազիս է:*

Էկտրզույց. Ասուցածումք կատարեր ինքնուրույն: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 31.14. *Դիցար՝ անենք V n -շտփողոկանություն վեկտորական տարածություն $\{k_1, \dots, k_n\}$ սրտրզ սպեկտրով f գծույին օպերատորը, և v_i -ն k_i -ին սրտականոլ սեփական վեկտորն է, $i = 1, \dots, n$: Այլ դեպքում $v_1, \dots, v_n$ բազիսում f գծույին օպերատորի մտարիցն է հետևյալ անկյունագծույին մտարիցը.*

$$(39) \quad \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

Արդյունք. Համաձայն սնդման պայմանների՝

$$f(v_i) = k_i c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n :$$

Մենք է գրել f գծային օպերատորի մատրիցը $v_1, \dots, v_n$ բազիսում:

□

32. ԷՎԿԼԻԴՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ԶԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

32.1. *Օրթոգոնալ ձևափոխություններ:* Էվկլիդեսյան տարածությունների գծային օպերատորների մեջ տառաձևափոխական դեր ունեն օրթոգոնալ ձևափոխությունները:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 32.1. g սկալյար արտադրյալով V էվկլիդեսյան տարածության f գծային օպերատորը կոչվում է V -ի *օրթոգոնալ ձևափոխություն*, եթե V -ի կամայական v տարրի համար

$$g(v, v) = g(f(v), f(v)) :$$

Ստեղծումովից հետևում է օրթոգոնալ ձևափոխությունների հետևյալ կորեկտությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 32.2. *Էվկլիդեսյան տարածություն օրթոգոնալ ձևափոխությունները այդ տարածություն այն գծային օպերատորներն են, որոնք որոշորոշում են տալիս տարածություն վեկտորների երկարությունները:*

Արդյունք. Իսկապես, եթե f -ը արված օրթոգոնալ ձևափոխությունն է, ապա էվկլիդեսյան տարածության կամայական v վեկտորի համար՝

$$|v|_g = \sqrt{g(v, v)}, \quad |f(v)|_g = \sqrt{g(f(v), f(v))} :$$

Հետևաբար՝

$$|v|_g = |f(v)|_g \Leftrightarrow \sqrt{g(v, v)} = \sqrt{g(f(v), f(v))} :$$

□

Այժմ դիտարկենք որոշ օրինակներ:

ա. Կամայական էվկլիդեսյան տարածության նույնական և գործակալն արտա-սրտիկերումները նրա օրթոգոնալ ձևափոխություններ են:

բ. $\mathbb{R}_2$ տալիսություն օրթոգոնալ ձևափոխություն է նրա համաչափությունը կամայական ուղղի նկատմամբ:

գ. $\mathbb{R}_2$ տարածություն օրթոգոնալ ձևափոխություն է նրա կամայական պատշաճ օրեն կետի շուրջ:

դ. $\mathbb{R}_3$ տարածություն օրթոգոնալ ձևափոխություն է նրա համաչափությունը կամայական հարթության նկատմամբ:

Դիտարկված բ-դ օրինակներում որպես x և y վեկտորների սկալյար արտադրյալ վերցվում է

$$|x||y| \cos \alpha$$

քվի:

Իհարկե, ստանձնածատույն հետադարձություն են ներկայացնում Լվկիյան ստորածության ավտոմորֆիզմները, նրա պլախի գծային օպերատորները, որոնք ավելի V Լվկիյան ստորածության V -ի միջև իզոմորֆիզմներ են: Օրրոգոնույ ձևավորությունների Լվկիյան կառույցի համակարգում ունի L , որ դրանք համընկնում են Լվկիյան ստորածության ավտոմորֆիզմների հետ:

ՊԼԴՈՒՄ 32.3. *Եթե g սկալյար արտադրությամբ V Լվկիյան ստորածություն f գծային օպերատոր V -ի օրրոգոնույ ձևավորություն L ունի L միայն ունի պետքում, երբ V -ի կամայական u և v ստորերի համար*

$$g(u, v) = g(f(u), f(v)) :$$

Ապացույց. Համակամայի L , որ $g(u, v) = g(f(u), f(v))$ պայմանից հետևում է $g(v, v) = g(f(v), f(v))$:

Համակամայի: Գիցույ V -ի կամայական v ստորերի համար ունենք՝ $g(v, v) = g(f(v), f(v))$: Այդ դեպքում, հաշվի տանելով

$$g(f(u + v), f(u + v)) = g(u + v, u + v)$$

հավասարությունը, հաջորդաբար կատանանք՝

$$\begin{aligned} g(f(u), f(u)) + g(f(u), f(v)) + g(f(v), f(u)) + g(f(v), f(v)) &= \\ &= g(u, u) + g(u, v) + g(v, u) + g(v, v), \\ g(f(u), f(v)) &= g(u, v) : \end{aligned}$$

□

ՊԼԴՈՒՄ 32.4. *Վերջույն շտիպակունություն Լվկիյան ստորածություն օրրոգոնույ ձևավորությունը պետքումում է վեկտորների օրրոգոնույությունը:*

Ապացույց. Զանի որ $g(u, v) = g(f(u), f(v))$, ապա $g(u, v) = 0$ հավասարությունից կհետևի՝ $g(f(u), f(v)) = 0$: □

ՊԼԴՈՒՄ 32.5. *Վերջույն շտիպակունություն Լվկիյան ստորածություն գծային օպերատոր g նրա օրրոգոնույ ձևավորություն L ունի L միայն ունի պետքում, երբ ունի ունի ստորածություն կամայական օրրոգոնույությունում բազիս արտադասականներում L օրրոգոնույությունում բազիս:*

Ապացույց. Զանի որ օրրոգոնույ ձևավորությունը պետքումում է վեկտորների օրրոգոնույությունը և Լեկտությունը, ապա ունի օրրոգոնույությունում բազիս կարողանալի օրրոգոնույությունում բազիս:

Համակամայի: Գիցույ f -ը V Լվկիյան ստորածություն գծային օպերատոր L , որը $e_1, \dots, e_n$ օրրոգոնույությունում բազիս արտադասականներում L $f(e_1), \dots, f(e_n)$ օրրոգոնույությունում բազիս: Երբ V -ի կամայական վեկտորի համար $u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$, ապա $f(u) = \alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_n f(e_n)$: Հետևաբար՝

$$\begin{aligned} g(f(u), f(u)) &= g(\alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_n f(e_n), \alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_n f(e_n)) = \\ &= \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 = g(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n, \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = g(u, u) : \end{aligned}$$



ՊՆԴՈՒՄ 32.6. *Վերջավոր չափադասականության Լվկլիդյան ստորաժառանգյուն օրթոգոնալ ձևախախտությանը վերադրում է:*

Արդյունք. Հետևում է նույնիսկ պնդումից:



32.2. *Օրթոգոնալ ձևախախտության մատրիցը: Այժմ ուսումնասիրենք վերջավոր չափադասականության Լվկլիդյան ստորաժառանգյուն օրթոգոնալ ձևախախտության մատրիցը օրթոնորմավորված բազիսում:*

ՄԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 32.7. *Իրական թվերի դուալի վրա արված A մատրիցը կոչվում է օրթոգոնալ, եթե*

$$AA' = I_n,$$

որտեղ A' -ը A մատրիցի չրջած մատրիցն է:

Օրինակ, հետևյալ մատրիցները օրթոգոնալ են.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \pm \sin \alpha & \pm \cos \alpha \end{pmatrix}:$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 32.8. *Արդյունքեր, որ եթե երկրորդ կարգի իրական անդամներով մատրիցը օրթոգոնալ է, ապա կգտնվի այնպիսի α անկյուն, որի համար արված մատրիցը հավասար է դիստրեկված երկրորդ օրինակի մատրիցին:*

ՊՆԴՈՒՄ 32.9. *Վերջավոր չափադասականության Լվկլիդյան ստորաժառանգյուն օրթոնորմալիտիտ բազիսից օրթոնորմալիտիտ բազիսի ունցման մատրիցը օրթոգոնալ է:*

Արդյունք. Դիցուք՝ վերջավոր չափադասականության V Լվկլիդյան ստորաժառանգյուն օրթոնորմալիտիտ բազիսներ են

$$e_1, \dots, e_n \text{ և } e'_1, \dots, e'_n:$$

Ընդ որում,

$$e'_i = a_{i1}e_1 + \dots + a_{in}e_n, \quad i = 1, \dots, n:$$

Այստեղից, հաշվի առնելով արված բազիսների օրթոնորմալիտիտ լինելը, կստանանք՝

$$1 = g(e'_i, e'_i) = a_{i1}^2 + \dots + a_{in}^2, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$0 = g(e'_i, e'_j) = a_{i1}a_{j1} + \dots + a_{in}a_{jn}, \quad j \neq i, i = 1, \dots, n:$$

Իսկ այս հավասարությունները գուցե են ասուիս, որ արված A մատրիցը օրթոգոնալ է:



ՊՆԴՈՒՄ 32.10. *Դիցուք՝ ունենք V Լվկլիդյան ստորաժառանգյուն օրթոնորմալիտիտ $e_1, \dots, e_n$ բազիսը և $(a_{ij})_n$ օրթոգոնալ մատրիցը: Այլ պետքում, եթե*

$$e'_i = a_{i1}e_1 + \dots + a_{in}e_n, \quad i = 1, \dots, n,$$

ապա $e'_1, \dots, e'_n$ համակարգը V -ի օրթոնորմալիտիտ բազիս է:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 32.11. Վերջույն չտիրոջտիկոնություն կվկիյիյուն ստորածություն օրթագնույ ձևափոխություն մատրիցը օրթոնորմալիտիւմ բուգիսում օրթագնույ L :

Ապացույց. Դիցուք ունենք V էվկլիդես ստորածության օրթոնորմալիտիւմ $e_1, \dots, e_n$ բուգիսը և f օրթագնույ ձևափոխություն: Մենք արդեն սալացուցել ենք, որ $f(e_1), \dots, f(e_n)$ համախորքը V -ի օրթոնորմալիտիւմ բուգիս է: Բայց f -ի մատրիցը $e_1, \dots, e_n$ բուգիսում կլինի սյդ բուգիսից $f(e_1), \dots, f(e_n)$ բուգիսին ունցման մատրիցը, որը, ինչուեա արդեն ցույց ենք ալել, կլինի օրթագնույ: $\square$

32.3. Օրթոգոնալ ձևափոխությունների խումբը և օրթոգոնալ մատրիցների խումբը: Նշանակենք $O(n, \mathbb{R})$ -ով $\mathbb{R}$ դուշալ վրա ալվում n -դ կարգի բոլոր օրթագնույ մատրիցների բուգմությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 32.12. $O(n, \mathbb{R})$ -ը $GL(n, \mathbb{R})$ խմբի ենթախումբ է:

Ապացույց. Սահմանումից հետևում է, որ օրթագնույ մատրիցները հակադարձելի են: Նախ՝ դժվար չէ ցույց սալ, որ

$$(AB)' = B'A', \quad (A')^{-1} = (A^{-1})' :$$

Այնուհետև, եթե $A, B \in O(n, \mathbb{R})$, սալա՝

$$AB(AB)' = ABB'A' = A1_n A' = 1_n,$$

$$A^{-1}(A^{-1})' = A^{-1}(A')^{-1} = (A'A)^{-1} = 1_n^{-1} = 1_n :$$

Այսալիսով՝ $AB, A^{-1} \in O(n, \mathbb{R})$: Ուրեմն՝ $O(n, \mathbb{R})$ -ն $GL(n, \mathbb{R})$ -ի ենթախումբ է: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 32.13. Ապացուցեք, որ կամայական A, B մատրիցների և C հակադարձելի մատրիցի համար.

ա. $(AB)' = B'A',$

բ. $(C^{-1})' = (C')^{-1} :$

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 32.14. $O(n, \mathbb{R})$ խումբը կռչվում է $GL(n, \mathbb{R})$ խմբի օրթագնույ ենթախումբ:

Այժմ դիտարկենք V էվկլիդես ստորածություն բոլոր օրթագնույ ձևափոխությունների $O(V)$ բուգմությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 32.15. $(O(V), \cdot)$ գույզը խումբ է, որաեղ $\cdot$ -ը աեղադրությունների բուգմությանիման գործողությունն է:

Ապացույց. Բուվական է ցույց սալ, որ $O(V)$ -ն $Aut(V)$ խմբի ենթախումբ է: Դիցուք՝ $f, h \in O(V)$, $v \in V$: Հալկանալի է, որ $f(h, f^{-1})$ արտապատկերումները V ստորածության գծային օպերատորներ են: Այնուհետև, բուցի որ

$$g(f(v), f(v)) = g(v, v), \quad g(h(v), h(v)) = g(v, v),$$

սակա

$$\begin{aligned} g((fh)(v), (fh)(v)) &= g(h(f(v)), h(f(v))) = g(h(v), h(v)) = g(v, v), \\ g(v, v) &= g(f(f^{-1}(v)), f(f^{-1}(v))) = g(f^{-1}(v), f^{-1}(v)) : \end{aligned}$$

Հետևապես՝ $fh, f^{-1} \in O(V)$:

□

ՊՆԴՈՒՄ 32.16. *Կերպարներ n չափաչափություն V էվկլիդեսյան սուբսպանսիայի վրա օրթոգոնալ ձևափախությունների $O(V)$ խումբը իզոմորֆ է $O(n, \mathbb{R})$ խումբին:*

Ապացույց. վերցնենք V -ի որևէ $e_1, \dots, e_n$ օրթոնորմավորված բազիս և f օրթոգոնալ ձևափախություն մատրիցը՝ այդ բազիսում, նշանակենք $M(f)$ -ով: M -ը կլինի որոշելի իզոմորֆիզմը: □

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 32.17. Լրացրեք նախորդ պնդման ապացույցի մանրամասնեքը:

ԽՄԲԵՐ

33. ՖԻԿԼԱՅԻՆ ԽՄԲԵՐ

33.1. *Ֆիկլային խումբ:* Խմբերի ուսումնասիրությունը մենք կսկսենք խմբերի մի սրտբազում, բայց չավագանց կարևոր առնակի նկարագրությունից: Նույնությամբ մեզ ամերումեշտ է լինելու խմբի տարրի ումբողջ տասխմանի գաղափարը: Դիտարկենք $(G, \cdot)$ խումբը, G -ի g տարրը և n ումբողջ թիվը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 33.1. g տարրի n ցուցիչով տասխմումը գրառվում է g^n տեսքով և ստեմանվում է հետևյալ կերպ:

ու. երբ n -ը բնական թիվ է, ապա

$$g^n = \overbrace{g \cdot g \cdots g}^n,$$

մասնավորապես,

$$g^1 = g :$$

Օրինակ, $g^2 = g \cdot g$, $g^3 = g \cdot g \cdot g$ և այլն:

բ. երբ n -ը բացասական ումբողջ թիվ է, ապա $-n$ -ը բնական է, և՝

$$g^n = (g^{-1})^{-n} :$$

Օրինակ, $g^{-2} = g^{-1} \cdot g^{-1}$, $g^{-3} = g^{-1} \cdot g^{-1} \cdot g^{-1}$, և այլն:

գ.

$$g^0 = 1 :$$

Խմբի տարրի ումբողջ ցուցիչով տասխմումը ծավալում է իրական թվի ումբողջ ցուցիչով տասխմանի մի շարք հատկություններով:

ԴՆԴՈՒՄ 33.2. *Կումուտական $(G, \cdot)$ խմբի և m ու n ումբողջ թվերի համար.*

ու. $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$,

բ. $(x^n)^m = x^{nm}$,

գ. $(x^n)^{-1} = x^{-n}$:

Ապացույց. Ապացուցումները բառ կարյան ոչնչով չեն տարբերվում իրական թվի ումբողջ ցուցիչով տասխմումի համաարտաախան հատկությունների տարացուցումներից: Նույն ամերումեշտ է վիտարկել այն դեպքը, երբ ցուցիչները բնական են: Այս դեպքում կարելի է կիրառել ինդուկցիա՝ ըստ ցուցիչի: Այնուհետև պետք է

դիստրիբյուցիոն կոմպոզիցիոն օպերացիան համար դիստրիբյուցիոն չէ։ □

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 33.3. Լրացրեք նախադասությունը մատչելիության համակարգում։

Հետևյալում կենտրոնական դեր է խաղում G բազմությունը հետևյալ հավանականությամբ որոշվող $gr(x)$ ենթաբազմությունը։

$$gr(x) = \{x^n | n \in \mathbb{Z}\} :$$

ՊՐԴՈՒՄ 33.4. $gr(x)$ -ը $(G, \cdot)$ խմբի ենթախումբ է։

Ապացույց. Իսկապես, եթե $x^n, x^m \in gr(x)$, ապա, կիրառելով 32.2 սկզբում, կստանանք՝

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m} \in gr(x),$$

$$(x^n)^{-1} = x^{-n} \in gr(x) :$$

Հետևապես՝ $gr(x)$ -ը G -ի ենթախումբ է։ □

ՄԱՆԿԱԿԱՆ 33.5. $gr(x)$ -ը կազմում է G խմբի x ստորախումբի ծնկարի ենթախումբ։ Եթե

$$G = gr(x),$$

ապա G -ն կոչվում է x ստորախումբի ծնկարի խումբ կամ *ցիկլիկ խումբ*։ x ստորախումբի կազմում է $gr(x)$ խմբի ծնկարը։

Դիտարկենք ցիկլային խմբերի օրինակներ և մատչելիություններ։

ա. Ամբողջ թվերի գումարային խումբը ցիկլային է, քան որում,

$$\mathbb{Z} = gr(1) = gr(-1) :$$

Հետևաբանում կարելի է ցույց տալ նաև հակադասելը. եթե $\mathbb{Z} = gr(x)$, ապա $x = 1$ կամ $x = -1$ ։ Այսինքն՝ միայն 1 և -1 ամբողջ թվերն են ամբողջ թվերի գումարային ցիկլիկ խմբի ծնկարներ։

բ. Ֆիկային չեն ուղեկցում և իրական թվերի գումարային խմբերը։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 33.6. Ապացուցեք վերջին դատողությունը։

գ. Ուսումնասիրենք արտադրյալային խմբերի ցիկլային ենթախմբերը։

$(\{1, -1\}, \cdot)$ արտադրյալային խումբը ցիկլային է և $\{1, -1\} = gr(-1)$ ։

Ֆիկային է նաև $(\{1\}, \cdot)$, արտադրյալային խումբը։ Ընդ որում,

$$\{1\} = gr(1) :$$

Իրական թվերի արտադրյալային $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ խումբը ցիկլային չէ։

Ապացույց. Ապացուցումը կատարենք ինքնուրույն։ □

դ. Կոմպլեքս թվերի արտադրյալային խմբի ցիկլային ենթախումբ է

$$\{1, -1, i, -i\}$$

բազմությունը, որի համար ծնկարներ են i և $-i$ կոմպլեքս թվերը։

ՊՆԴՈՒՄ 33.7. *Միավորից n ուստիծուծի կամայեքս արմատների $(\mathbb{C}(n), \cdot)$ խումբը ցիկլային է, ընդ որում,*

$$\mathbb{C}(n) = \text{gr}(x), x \in \mathbb{C}(n)$$

այն և միայն այն դեպքում, երբ x -ը միավորից n ուստիծուծի նուխնակում արմատ է:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեն ինքնուրույն: □

Ե. Վերջավոր խմբերից ցիկլային չէ, օրինակ, $S(3)$ -ը:

Այժմ անցնենք ցիկլային խմբերի ընդհանուր հատկությունների ուսումնասիրությանը:

Ակնհայտ է, որ ցիկլային խումբը արելյան է:

Ակնհայտ չէ հետևյալ հատկությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 33.8. *Ցիկլային խմբի ենթախումբը ցիկլային է:*

Ապացույց. Դիցուք՝ A -ն $\text{gr}(x)$ ցիկլային խմբի ենթախումբ է: Հասկանալի է, որ A -ի տարրերը ունեն x^n տեսքը, որտեղ $n \in \mathbb{Z}$: Դիցուք՝ m -ը այն ամենավաղը բնական թիվն է, որ $x^m \in A$: Յույց սաունք, որ այդ դեպքում

$$A = \text{gr}(x^m) :$$

Իսկապես, եթե $x^n \in A$ և

$$n = mq + r, \text{ որտեղ } 0 \leq r < m,$$

ապա

$$x^n = x^{mq+r} = x^{mq} \cdot x^r = (x^m)^q \cdot x^r,$$

$$x^n = (x^m)^q \cdot x^r :$$

Այստեղից, քանի որ $x^n, (x^m)^q \in A$, ապա $x^r \in A$, և քանի որ $r < m$, ապա $r = 0$: Այսինքն՝

$$x^n = (x^m)^q :$$

Հետևապես՝ $x^n \in \text{gr}(x^m)$ և ուրեմն՝ $A = \text{gr}(x^m)$: Այսինքն՝ A -ն x^m -ով ծնված ցիկլային խումբն է: □

ՊՆԴՈՒՄ 33.9. *Ցիկլային խմբին իզոմորֆ խումբը ցիկլային է:*

Ապացույց. Իսկապես, դժվոր չէ համոզվել, որ եթե ունենք $\text{gr}(x)$ ցիկլային խումբը և

$$f : \text{gr}(x) \rightarrow G$$

իզոմորֆիզմը, ապա $G = \text{gr}(f(x))$: □

33.2. *Խմբի տարրի կարգը:* Նախից դիտարկենք $\mathbb{C}(n)$ խումբը: Մենք զննենք, որ

$$\mathbb{C}(n) = \{z_k | k \in \mathbb{Z}\} = \{z_k | k = 0, 1, \dots, n-1\},$$

որտեղ

$$z_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z} :$$

Պարզ է նաև, որ

$$z_1^k = z_k, k \in \mathbb{Z}, z_1^n = 1 :$$

Այժմ ներառյալ ենք, քե $z_1^m = 1$: Այդ դեպքում $z_m = 1$: Հետևապես՝

$$\cos \frac{2\pi m}{n} + i \sin \frac{2\pi m}{n} = 1, \frac{2\pi m}{n} = 2\pi l, m = nl, l \in \mathbb{Z} :$$

Այսինքն՝ m -ը n -ի բազմապատիկ է: Այս ցույց է ապացիս, որ n -ը այն ամենափոքր բնական թիվն է, որ $z_1^n = 1$: n -ը կոչվում է z_1 տարրի *կարգ*: Այս հասկացությամբ նայառադկախորմոր է առիմանել նաև կամայական խմբի տարրերի համար:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 33.10. n բնական թիվը կոչվում է $(G, \cdot)$ խմբի x տարրի *կարգ*, եթե n -ը այն ամենափոքր բնական թիվն է, որի համար $x^n = 1$: Այդ դեպքում կոտենք նաև, որ x տարրը ունի *վերջավոր կարգ*:

x տարրի կարգը նշանակվում է $|x|$: Վերևի օրինակում $|z_1| = n$:

Իհարկե, խմբի ոչ բոլոր տարրերն են սարառավոր ամենադ վերջավոր կարգ: Օրինակ, եթե $G = \mathbb{Z}$ -ը դիտենք որպես $(\mathbb{Z}, +)$ աբառադյուպային խմբի տարր, ապա նրա կարգն է 2, այսինքն՝ $|2| = 2$: Մինչդեռ 1 -ը վերջավոր կարգ չունի, եթե այն դիտում ենք որպես ամբողջ թվերի գումարային խմբի տարր. չկա այնպիսի n բնական թիվ, որի համար $n \cdot (1) = 0$: Վերջին ե դրա նման դեպքերում կոտենք, որ համապատասխան տարրն ունի *անվերջ կարգ*: Համալի x տարրն ունի անվերջ կարգ աբառադյուպայում վոխարեն կգրենք $|x| = \infty$:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 33.11. Այսպեսցեք, որ եթե խմբի միավորից տարրեր յուրաքանչյուր տարրի կարգը հավասար է 2-ի, ապա այդ խումբը աբելյան է:

ՊԴԴՈՒՄ 33.12. $(G, \cdot)$ խմբի x տարրի ե n բնական թվի համար եթե $x^n = 1$, ապա x -ն ունի վերջավոր կարգ ե n -ը այդ $|x|$ կարգի բազմապատիկ է:

Ապացույց. Եթե կա $x^n = 1$ պայմանին բավարարող n բնական թիվ, ապա կա նաև ամենափոքր m բնական թիվը, որի համար $x^m = 1$: Այսինքն՝ x -ն ունի վերջավոր կարգ ե $m = |x|$: Յույց առնք, որ $m|m$:

Իսկապես, n -ը մնացորդով բաժանենք m -ի վրա.

$$n = mq + r, 0 \leq r < m :$$

Օգտվելով այս հավասարությունից՝ կստանանք.

$$1 = x^n = x^{mq+r} = x^{mq} \cdot x^r = x^r :$$

Այս հնարավոր է միայն այն դեպքում, եթե $r = 0$:

□

ՊՆԴՈՒՄ 33.13. Եթե խմբի x ստորյուն ունի վերջավոր n կարգ, ապա n -ը հավասար է x -ով ծնված ցիկլային խմբի կարգին:

Ապացույց. Դիցուք՝ $|x| = n$: Ցույց առնք, որ

$$\text{gr}(x) = \{x^0, x^1, \dots, x^{n-1}\} :$$

Իսկապես, ըստ սահմանման՝

$$\text{gr}(x) = \{x^m | m \in \mathbb{Z}\} :$$

Վերցնենք $m \in \mathbb{Z}$, և m -ը մնացորդով բաժանենք n -ի վրա.

$$m = nq + r, \quad 0 \leq r < n :$$

Կունենանք

$$x^m = x^{nq+r} = x^{nq} x^r = x^r :$$

Հետևապես՝

$$x^m \in \{x^0, x^1, \dots, x^{n-1}\} :$$

Այսինքն՝

$$\text{gr}(x) = \{x^0, x^1, \dots, x^{n-1}\} :$$

Միևնույն ժամանակ, եթե $i \neq j$, $0 < i < j < n$, ապա $x^i \neq x^j$: Իրոք, եթե $x^i = x^j$, ապա $x^{j-i} = 1$, որը հնարավոր չէ, քանի որ $0 < j-i < n$: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 33.14. Եթե $\text{gr}(x)$ ցիկլային խմբի կարգն է n , ապա n -ի յուրաքանչյուր m բաժանարարի համար $\text{gr}(x)$ խումբն ունի մեկ և միայն մեկ m կարգի ենթախումբ:

Ապացույց. Որոշենք ենթախումբն է՝ $\text{gr}(x^{n/m})$: $\square$

33.3. *Ցիկլային խմբերի նկարագրությունը:* Նախորդ կետերում մենք դիտարկեցինք ցիկլային խմբերի երկու առևտկ. $(\mathbb{Z}, +)$ և $(\mathbb{C}(n), \cdot)$ ցիկլային խումբը: Այժմ ցույց կառնք, որ այդ խմբերից բացի այլ ցիկլային խմբեր գոյություն չունեն, այսինքն՝ ըստ Լուրյան գոյություն ունի միայն մեկ ունվերջ ցիկլային խումբ, որն իզոմորֆ է $(\mathbb{Z}, +)$ խմբին, և յուրաքանչյուր n բնական թվի համար էլ՝ n -րդ կարգի միայն մեկ վերջավոր ցիկլային խումբ, որն իզոմորֆ է $(\mathbb{C}(n), \cdot)$ խմբին:

ՊՆԴՈՒՄ 33.15. Ցույնարանչյալ ունվերջ ցիկլային խումբ իզոմորֆ է ումբողք թվերի գումարային խմբին:

Ապացույց. Դիցուք՝ $\text{gr}(x)$ -ը ունվերջ ցիկլային խումբ է: Դիտարկենք

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \text{gr}(x), \quad f(m) = x^m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

ուրասարտակեաում: Այն վերադրում է $\mathbb{Z}$ և $\text{gr}(x)$ բազմությունների միջև, որովհետև եթե

$$x^m = x^n,$$

ապա $m = n$. Խակտուտկ դեպքում x աւարը կունենաւ վեջավոր կարգ:

Միենույն ժամանակ,

$$f(m+n) = x^{m+n} = x^m \cdot x^n = f(m) \cdot f(n) :$$

Այսինքն՝ f -ը, իսկապես, իզոմորֆիզմ է:

□

ՊՆԴՈՒՄ 33.16. *Յուրաքանչյուր վերջավոր՝ n -րդ կարգի ցիկլային խումբ իզոմորֆ է $(\mathbb{C}(n), \cdot)$ խմբին:*

Արտադրե՛ք. Դիցուք՝ $gr(x)$ -ը n -րդ կարգի ցիկլային խումբ է՝ $|x| = n$:

Նստվ նկատենք, որ

$$\mathbb{C}(n) = \{x_1^m \mid m = 0, 1, \dots, n-1\} :$$

Այնուհետև դիտարկենք

$$f : \mathbb{C}(n) \rightarrow gr(x), \quad f(x_1^m) = x^m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

արտապատկերումը: Այն վրաստում է $\mathbb{C}(n)$ և $gr(x)$ բազմությունների միջև: Միաժամանակ, երև

$$x^m = x^k, \quad m, k \in \mathbb{Z}, m \geq k,$$

այսինքն $x^{m-k} = 1$: Այստեղից՝ համաժայռ 32.12 պնդման, $m - k$ ստորբերությունը բաժանվում է n -ի: Հետևապես՝ $x_1^{m-k} = 1$ և, ուրեմն, $x_1^m = x_1^k$: Այսինքն՝ f -ը նաև ստորադրում է: Հետևապես՝ f -ը վերադրում է:

Միենույն ժամանակ,

$$f(x_1^m \cdot x_1^k) = f(x_1^{m+k}) = x^{m+k} = x^m \cdot x^k = f(m) \cdot f(k) :$$

Այսինքն՝ f -ը, իսկապես, իզոմորֆիզմ է:

□

Դիտարկենք նաև $\mathbb{C}_{p^\infty}$ խումբը.

$$\mathbb{C}_{p^\infty} = \{x \in \mathbb{C} \mid x^{p^n} = 1, n \in \mathbb{N}\},$$

որտեղ p -ն կոմպոզիտիվ պարզ թիվ է: Այս խումբը կազմում է *բիսպիցիկլային*: Կարելի է ցույց տալ, որ.

ա. $\mathbb{C}_{p^n} \subset \mathbb{C}_{p^\infty}$, $n = 1, 2, \dots$,

բ. $\mathbb{C}_{p^\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}_{p^n}$,

գ. $\mathbb{C}_{p^\infty}$ խումբը ունիկերն է,

դ. $\mathbb{C}_{p^\infty}$ խմբի բոլոր ենթախմբերն են

$$\mathbb{C}_{p^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

ենթախմբերը:

և. $\mathbb{C}_{p^n}$ -ի բոլոր սեփական ենթախմբերը վերջավոր են:

Այս վերջին՝ և հատկությունը օժտված ունիկերն խմբեր անչափ դժվար է կառուցել:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 33.17. Փորձեք տպացուցել ա-և դատադրությունները:

33.4. Ծնոդրյունների բազմությունը: Այժմ բնդիտմանը ենթարկվում ենք գաղափարը: Գիտարկները $(G, \cdot)$ խումբը: Վերցնենք G -ի որևէ M ոչ դատարկ ենթաբազմություն և կազմենք նրա ստորերկրի տմբող ստաիծումների բոլոր հնարավոր տրատոդրյալները: Նշանակենք ստացված բազմությունը $\text{gr}(M)$ -ով: Այսպիսով՝

$$\text{gr}(M) = \{x_1^{m_1} \cdots x_k^{m_k} \mid x_1, \dots, x_k \in M, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\} :$$

ՊՆԴՈՒՄ 33.18. $\text{gr}(M)$ -ը G -ի ենթախումբ է:

Արդյույց. Իսկապես, եթե վերցնենք M -ի ստորերկրի տմբող ստաիծումների երկու տրատոդրյալներ, ապա դրանց տրատոդրյալը նորից կլինի M -ի ստորերկրի տմբող ստաիծումների տրատոդրյալ: Այսինքն՝ $\text{gr}(M)$ -ի երկու ստորերկրի տրատոդրյալը նախից սխակումում է $\text{gr}(M)$ -ին:

Այնուհետև, M -ի $x_1, \dots, x_m$ ստորերկրի տմբող ստաիծումների $x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m}$ տրատոդրյալի հակադարձը նույնպես M -ի ստորերկրի տմբող ստաիծումների տրատոդրյալ է, քանի որ

$$(x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m})^{-1} = x_m^{-k_m} \cdots x_1^{-k_1} :$$

Հետևապես՝ $\text{gr}(M)$ -ը G -ի ենթախումբ է: □

ՄԱՀՄԱՆՈՒՄ 33.19. $\text{gr}(M)$ -ը կազմում է G -ի՝ M -ով ծնված ենթախումբ:

Բերենք մի քանի օրինակ:

ա. $(\mathbb{Z}, +)$ խմբի համար ունենք.

$$\mathbb{Z} = \text{gr}(1) = \text{gr}(-1) = \text{gr}(\{2, 3\}),$$

$$\text{gr}(2) = 2\mathbb{Z},$$

$$\text{gr}(n) = n\mathbb{Z},$$

$$\text{gr}(\{m, n\}) = (m, n)\mathbb{Z} :$$

բ. $(S(3), \cdot)$ խմբի համար ունենք.

$$S(3) = \text{gr}(f, g),$$

որտեղ $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 3, g(1) = 1, g(2) = 3, g(3) = 2$:

գ. $G(n, K)$ խմբի համար ունենք.

$$G(n, K) = \text{gr}(t_{ij}(\alpha) \mid i, j = 1, \dots, n, \alpha \in K \text{ և } \alpha \neq -1, \text{ եթե } i = j) :$$

Առանձնապես կարևոր է այն դեպքը, երբ M բազմությունը կազմված է մեկ ստորերկրի՝ $M = \{x\}$: Այդ դեպքում նշանակել ենք

$$\text{gr}(\{x\}) = \text{gr}(x) :$$

Այսպիսով՝ ցիկլային խումբը մեկ ստորերկրի ծնված խումբն է:

Ակնհայտ է, որ ցիկլային խումբը տրեկում է: Մինչդեռ երկու ստորերկրի ծնված խումբը տրեկում կապող է տրեկում չլինել: Օրինակ, $S(3)$ -ը տրեկում չէ և ծնված է իր երկու ստորերկրի:

34. ՆՈՐՄԱԼ ԲԱԺԱՆԱՐԱՐ ԵՎ ՖԱԿՏՈՐ-ԽՈՒՄԲ

34.1. Հայրակից դասեր: Կոմպոզիցիոն խմբի յուրաքանչյուր ենթախմբի հետ բնականորեն կապված է մի համարժեքություն, որը կարևոր դեր է խաղում խմբերի ուսումնասիրություն մեջ:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 34.1. Դիտարկենք $(G, \cdot)$ խումբը և նրա A ենթախումբը: G -ի վրա հետևյալ կերպ սահմանենք $\rho(A)$ տոնջությունը. G -ի կոմպոզիցիոն x և y ստորբերի համար ընդունենք՝

$$x\rho(A)y \Leftrightarrow x^{-1}y \in A :$$

ՊԵՐՈՒՄ 34.2. Կոմպոզիցիոն G խմբի և նրա A ենթախմբի համար $\rho(A)$ տոնջությունը համարժեքություն է:

Ապացույց. G -ի կոմպոզիցիոն x ստորբի համար

$$x^{-1}x = 1 \in A :$$

Հետևապես՝ $x\rho(A)x$, այսինքն՝ $\rho(A)$ -ն անդրադարձելի է:

Դիցուք՝ $x\rho(A)y$: Այդ դեպքում՝ $x^{-1}y \in A$: Եվ րանի որ

$$y^{-1}x = (x^{-1}y)^{-1} \in A,$$

սալս $y\rho(A)x$ և $\rho(A)$ -ն նաև համադրելի է:

Վերջապես, եթե $x\rho(A)y$ և $y\rho(A)z$, սալս $x^{-1}y \in A$, $y^{-1}z \in A$ և

$$x^{-1}z = x^{-1}y \cdot y^{-1}z \in A :$$

Հետևապես՝ $x\rho(A)z$, այսինքն՝ $\rho(A)$ -ն նաև փոխանցելի է: □

Այժմ տեսնենք, թե որոնք են $\rho(A)$ տոնջության համարժեքություն դասերը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 34.3. Վերցնենք $x \in G$ սալորը և

$$xA = \{xa | a \in A\}$$

ենթաբազմությունը տնփոններ G խմբի ծախս հայրակից դաս A ենթախմբի:

ՊԵՐՈՒՄ 34.4. G խմբի կոմպոզիցիոն A ենթախմբի համար $\rho(A)$ տոնջությունը համարժեքություն դասերը G խմբի ծախս հայրակից դասերն են՝ ըստ A ենթախմբի: Ավելի ճշգրիտ. G -ի կոմպոզիցիոն x ստորբի համար

$$|x|_{\rho(A)} := xA :$$

Ապացույց. Դիցուք՝ $y \in |x|_{\rho(A)}$: Այդ դեպքում՝ $x\rho(A)y$ կամ՝

$$x^{-1}y \in A, \quad y = xa, \quad a \in A :$$

Հետևապես՝ $y \in xA$:

Հակառակը, դիցուք՝ $y \in xA$: Այդ դեպքում՝

$$y = xa, \quad a \in A :$$

Այսանդից՝ $x^{-1}y \in A$ կամ՝ $x\rho(A)y$: Այսինքն՝ $y \in |x|_{\rho(A)}$: □

Ախրացուցված պնդումնից հետևում է, որ արված G խմբի յուրք հարակից դասերը՝ ըստ միևնույն A ենթախմբի, կազմում են G բազմության արտիտ: Քսնի որ խմբի միավորը անարայման պետք է պատկանի նրա ենթախմբին, ապա ըստ կամայական A ենթախմբի կազմված հարակից դասերի մեջ միայն A -ն է, որ կազմում է խմբի ենթախումբ:

Բերենք հարակից դասերի օրինակներ:

ա. Ամբողջ րվերի գումարային խմբի հարակից դասերը՝ ըստ գույզ րվերի ենթախմբի երկուսն են. գույզ րվերի $2\mathbb{Z}$ ենթախումբը և կենա րվերի $2\mathbb{Z} + 1$ բազմությունը:

բ. Վերցնենք n բնական րվքը: 4.1 կետի դ օրինակում $\rho(n)$ -ով նշանակել ենք $\mathbb{Z}$ -ի վրա արված այն տանշայությունը, րի համար

$$x\rho(n)y \Leftrightarrow n|x \cdots y, \quad x, y \in \mathbb{Z} :$$

Աենք արդեն զիսենք, որ $\rho(n)$ -ը համարժեքայություն է: Հասկանուղի է նաև, որ

$$\rho(n) = \rho(n\mathbb{Z}) :$$

$\mathbb{Z}$ -ի $\rho(n)$ -համարժեքայություն դասերը կամ, որ նույնն է, հարակից դասերը ըստ $n\mathbb{Z}$ ենթախմբի նրա

$$n\mathbb{Z}, n\mathbb{Z} + 1, \dots, n\mathbb{Z} + (n - 1)$$

ենթաբազմություններն են:

գ. Նշանակենք U -ով կարդյնատուական հարբայուն արացիսների տասնցքին գուզսեն վեկտորների բազմայությունը: Այն $(\mathbb{R}_2, +)$ խմբի ենթախումբ է: $(\mathbb{R}_2, +)$ խմբի՝ ըստ U ենթախմբի յուրարանշայոր հարակից դասը կտարդյնատուական հարբայուն այն վեկտորների բազմայունն է, որոնց սկզբնուկետը կտարդյնատուական հարբայուն սկզբնուկետն է, իսկ վերջնուկետը՝ կտարդյնատուական հարբայուն՝ այդ հարակից դասի համար հոսատասուն և արացիսների տասնցքին գուզսեն ուղիղը:

դ. Կամպլեքս րվերի $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ արատղրայային խմբի հարակից դասերը՝ ըստ

$$T = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}$$

ենթախմբի, կամպլեքս հարբայուն միավոր շրջանագծին համակենարոն շրջանագծերն են:

ե. $S(n)$ խմբի հարակից դասերը՝ ըստ $A(n)$ ենթախմբի, երկուսն են՝ գույզ սեղադրայունների $\Lambda(n)$ ենթաբազմայունը և կենա սեղադրայունների ենթաբազմայունը:

զ. Դիստրիկենք $GL(n, K)$ լրիվ գծային խմբի հարակից դասերը՝ ըստ *հասարկ գծային խմբի*՝ նրա

$$SL(n, K) = \{A \in GL(n, K) \mid |A| = 1\}$$

ենթախմբի: Զուրարանշայոր սլայսիսի հարակից դաս իրենից ներկայացնում է n -րդ կարգի այն մատրիցների բազմայությունը, որոնց որոշիչը հավասար է K դաշտի մահատես ֆիքսում և 0-ից ատրեր ատրին:

Լ. Կոմպակտն G խմբի և նրա A ենթախմբի համար A -ն ինքը G -ի հարակից դուա է: Դժվար չէ նկատել, որ

$$xA = A \Leftrightarrow x \in A :$$

ը. Կոմպակտն G խումբը մերի միայն մեկ հարակից դուա՝ ըստ մյու G ենթախմբի: Այդ դուա G -ն ինքն է:

ը. Մյուս կողմից, G խմբի հարակից դուանքը՝ ըստ E միավոր ենթախմբի, կազմված են մեկական ատրիբից.

$$xE = \{x\}, \quad a \in G :$$

Այժմ դիտարկենք G խմբի xA և yA հարակից դուանքը՝ լստ միենայն A ենթախմբի: Հնչատարյամբ կարելի է ցույց տալ, որ

$$xa \rightarrow ya, \quad x \in A$$

արատուականերամբ վերապրում է xA և yA բազմությունների միջև: Մասնավորապես՝ իրավացի է հետևյալ հատկությունը:

ՊՐՈՒՄ 34.5. *Եթե G խմբի A ենթախմբը վերջավոր է, ապա xA և yA հարակից դուանքը մույնպես վերջավոր են և ոմեն միենայն բխվատրերը՝ սյնքում, սրքում A -ն:*

Այժմ ենրադրենք, թե G -ն մույնպես վերջավոր է:

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 34.6. G -ի հաքակից դուանքի բխվլ՝ ըստ A ենթախմբի, տմվանենք A -ի ինցրս G -ի մեք և նշանակենք $|G : A|$ -ով:

ՊՐՈՒՄ 34.7. *(Լազյամմի թեորեմ): Կոմպակտն G վերջավոր խմբի և նրա A ենթախմբի համար*

$$|G| = |A| \cdot |G : A| :$$

Արաջույց. Քունի որ G -ի՝ ըստ A ենթախմբի բոլոր հարակից դուանքը ոմեն միենայն բխվատրեր, իսկ հարակից դուանքը կազմում են G -ի արռռում և հարակից դուանքի բխվն Լկ հավատար է $|G : A|$ -ի, ապա իրռք $|G| = |A| \cdot |G : A|$: $\square$

Այս պնդումից մասնավորապես սաուցվում են հետևյալ կարևոր հետևումքները:

ՊՐՈՒՄ 34.8. *Վերջավոր խմբի.*

ա. ենթախմբի կարգը խմբի կարգի բաժանարար է,

բ. սապրի կարգը խմբի կարգի բաժանարար է:

Արաջույց. Ապացուցումը կատարելք ինքնուրույն: $\square$

Այս պնդումը կարևոր է այն տաումով, որ հաճախ, երբ մեր ուսումնասիրություններում տնկրտեշա է լինում խմուն պռնկալ ենթախմբի ատրերի բխվ, մենք կատհմունավակենք միայն խմբի կարգի բաժանարարներով: Այս նկատառումն ունի գործնական կարևոր նշանակույթան:

ՊՐՈՒՄ 34.9. *Պույզ կարգ ոմեքալ խումքը ցիկլային է:*

Ապացույց. Դիցույ՝ G խումբն ունի p սուրբ կարգը: Վերցնենք նրա միավորից ստորերը x ստորը և դիստրիկենք $gr(x)$ ցիկլոպին խումբը: Նրա կարգը G -ի կարգի բաժանարար է: Հեռեալսին՝

$$|gr(x)| = |G| :$$

Ուրեմն՝ $gr(x) = G$:

□

34.2. Նորմալ բաժանարար: Խմբի ծախս հարակից դասի ստեղծման նմանությամբ կարող ենք ներմուծել նաև ուղի հարակից դասի գաղափարը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 34.10. Դիստրիկենք G խմբի A ենթախումբը և x ստորը և

$$Ax = \{ax | a \in A\}$$

ենթահարազմությունը տեղադրենք G -ի ուղի հարակից դաս՝ ըստ A ենթախմբի:

Պարզ է, որ այն տմենք, ինչ տեղեց ծախս հարակից դասերի մասին, կարելի է տեսել և ապացուցել նաև ուղի հարակից դասերի համար: Մասնավորապես, կոմուտատիվ խմբի՝ ըստ սրված ենթախմբի բոլոր ուղի հարակից դասերի բազմությունը կազմում է այդ խմբի արքանում:

Հասկանալի է, որ անդամախառն խմբերի ուղի և ծախս հարակից դասերը համընկնում են: Ոչ անդամախառն խմբերի համար, սակայն, ուղի հարակից դասերը սյուրսուրբ չեն լինել նաև ծախս հարակից դասեր, և հակառակը:

Օրինակ, եթե $S(3)$ խմբի մեջ վերցնենք

$$f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 3,$$

$$g(1) = 3, g(2) = 2, g(3) = 1,$$

ապա

$$g \, gr(f) \neq gr(f)g :$$

Լեյնուտմենայնիվ, յուրաքանչյուր խմբում կան ենթախմբեր, ըստ որոնց ուղի և ծախս հարակից դասերը համընկնում են: Օրինակ, եթե նույն $S(3)$ խմբի մեջ վերցնենք $A(3)$ նշանավորի խումբը, ապա՝ ըստ այդ ենթախմբի, ուղիքն ուղի և ծախս հարակից դասերը համընկնում են:

Պարզվում է, որ նշված օրինաչափությունը ունի շատ խալը արմատներ: Միաժամանակ, այդ օրինաչափությամբ բնութագրվող ենթախմբերը ունեն բացառիկ կարեք նշանակություն:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 34.11. $(G, \cdot)$ խմբի A ենթախումբը կոչվում է նրա *նորմալ բաժանարար*, եթե G -ի կամույակուն x ստորի համար

$$xA = Ax :$$

« A -ն G -ի նորմալ բաժանարար է» արտահայտությունը կարճ գրուովում է այսպես՝

$$A \triangleleft G :$$

Հասկանալի է, որ արեկուն խմբի ցանկացած ենթախումբը նրա նորմալ բաժանարար է: Յուրաքանչյուր խումբ ինքն իր նորմալ բաժանարարն է: Յուրաքանչյուր խմբի նորմալ բաժանարար է նաև միավոր ենթախումբը՝ միայն խմբի միավորից

կազմված ենթաբազմությունը: Եթե խումբը այլ նորմալ բաժանարարներ չունի, ապա այն կոչվում է պարզ խումբ:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 34.12. Խումբը կոչվում է *պարզ խումբ*, եթե այն, բացի իրենից և միավոր ենթախմբից, այլ նոյնապես բաժանարարներ չունի:

$S(3)$ խումբը ունի վեց ենթախումբ, որոնցից միայն երեքն են նրա նորմալ բաժանարար՝ $S(3)$ -ը, $A(3)$ -ը և միավոր ենթախումբը:

Ի ստորերերություն խմբի ենթախմբերի՝ նոյնապես բաժանարար լինելու առնչությունը մասնակի կարգի տոնչություն կարող է չլինել: Այստեղ կարող է խախտվել վախճանցելիություն հոսակայանը. նորմալ բաժանարար լինելու տոնչություն միշտ չէ, որ վախճանցական է: Օրինակ, $A(4)$ -ի նորմալ բաժանարար է միավոր տեղադրությունով և

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

տեղադրություններով կազմված ենթաբազմությունը: Վերջինիս համար նորմալ բաժանարար է միավոր տեղադրությունով և

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

տեղադրությունով կազմված ենթաբազմությունը, սրբ, սակայն, $A(4)$ -ի նորմալ բաժանարար չէ:

Համալս ենթախմբի նորմալ բաժանարար լինելու հոսակայանը նպատակահարմար է ստուգել հետևյալ հայտանիշի օգնությամբ:

ԴՆԴՈՒՄ 34.13. $(G, \cdot)$ խմբի A ենթախումբը նրա նորմալ բաժանարար է այն և միայն այն դեպքում, եթե A -ի կամայական a տարրի և G -ի կամայական x տարրի համար

$$x^{-1}ax \in A :$$

Ապացույց. Դիցուք՝ $A \triangleleft G$: Այդ դեպքում G -ի կամայական x տարրի համար՝ $xA = Ax$: Այժմ, եթե $a \in A$, ապա

$$ax \in xA,$$

այսինքն՝

$$ax = xa', a' \in A :$$

Հետևապես՝

$$x^{-1}ax = a' \in A :$$

Հակառակը: Դիցուք՝ պնդման մեջ նշված պայմանը տեղի ունի: Ցույց տանք, որ G -ի կամայական x տարրի համար $xA = Ax$: Իսկուպես, եթե $a \in A$, ապա

$$x^{-1}ax = a' \in A :$$

Հետևապես՝ $ax = xa', a' \in A$: Այսինքն՝ $Ax \subseteq xA$:

Նույն կերպ էլ ցույց կաանք, որ $x A \subseteq A x$: Հետևապես՝

$$x A = A x :$$

□

Հաճախ ենթախմբի նորմալ բաժանարար լինելը նարատկուստորմար է ստուգել հետևյալ հայտանիշի միջոցով:

ՊՆԴՈՒՄ 34.14. *Վերջավոր խմբի ենթախումբը նրա նորմալ բաժանարար է, եթե այդ ենթախմբի ինդեքսը սղլված խմբի մեջ հասխատար է 2-ի: Այսինքն՝ G խմբի և նրա A ենթախմբի համար*

$$|G : A| = 2 \Rightarrow A \triangleleft G :$$

Արդյույց. Իսկապես, խմբի ծովա հարակից դասերից մեկը A -ն է, իսկ մյուսը՝ $G \setminus A$ -ն: Սակայն նույնը տեղի ունի նաև այդ հարակից դասերի համար, բունի որ այլ ենթախմբություն չունենք: Հետևապես՝ խմբի այդ և ծովա հարակից դասերի բազմությունները համընկնում են իրար հետ: Որենն՝ $A \triangleleft G$: □

Անմիջապես օգտագործենք սարկցուցված պնդումը՝ հետևյալ կարևոր հասկությունը հիմնավորելու համար:

ՊՆԴՈՒՄ 34.15. *Խումայտկուն n բնական թվի համար n -րդ տասխծումնի զույգ տեղադրությունների խումբը n -րդ տասխծումնի տեղադրությունների թրիվ խմբի նորմալ բաժանարար է: Այսինքն՝*

$$A(n) \triangleleft S(n) :$$

Արդյույց. Պարզ է, որ

$$|S(n) : A(n)| = 2 :$$

Մնում է կիրտակ նախադղ պնդումը: □

Դիտարկենք նորմալ բաժանարարի ևս մեկ կարևոր օրինակ:

ՊՆԴՈՒՄ 34.16. *Հտատկ գծույին խումբը թրիվ գծույին խմբի նարմալ բաժանարար է: Այսինքն՝*

$$SL(n, K) \triangleleft GL(n, K) :$$

Արդյույց. Դիցուք՝

$$A \in SL(n, K), B \in GL(n, K) :$$

Այդ դեպքում $|A| = 1$ և մենք կունենումք՝

$$|B^{-1}AB| = |B|^{-1}|A||B| = 1 :$$

Հետևապես՝

$$B^{-1}AB \in SL(n, K) :$$

□

34.3. *Էներսիաների տրաուդրյալը:* Դիտարկենք ենթախմբերի ևս մի հասկոյուն, որը հասկումնշական է նորմալ բաժանաարաների համար: Դիցուք՝ A -ն և B -ն $(G, \cdot)$ խմբի ենթախմբեր են: Ելնելով խմբային գործողայունից՝ մենք կարող ենք ստեմանել նաև այդ ենթախմբերի տրաուդրյալը:

ՄԱՀՄԱՆՈՒՄ 34.17. A և B ենթախմբերի տրաուդրյալը գրաուվում է AB տեսակով և սրոշվում հետևյալ հաժաարայունքով.

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\} :$$

Օրինակ, $S(3)$ խմբի մեջ ունենք.

$$\begin{aligned} & \left\{1, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right\} \cdot \left\{1, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right\} = \\ & = \left\{1, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right\} : \\ & A(3) \cdot \left\{1, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right\} = S(3) : \end{aligned}$$

Դիտարկում օրինակներից առաջինը ցույց է տալիս, որ ենթախմբերի տրաուդրյալը միշտ չէ, որ ենթախմբ է:

ՊՆՆՈՒՄ 34.18. $(G, \cdot)$ խմբի A և B ենթախմբերի տրաուդրյալը այն և միայն այն դեպքում է նրա ենթախմբ, երբ

$$(40) \quad AB = BA :$$

Ապացույց. Դիցուք՝ տեղի ունի (40) սրայմանը: Ցույց տանք, որ AB -ն ենթախմբ է: Դա նշանակում է, որ նրա կամայական երկու տարրերի տրաուդրյալը և կամայական տարրի հակադարձը նորից սրաակումում են AB -ին: Վերցնենք $ab, a'b' \in AB$: Օգտակելով (40) սրայմանից՝ կստանանք՝

$$aba'b' = aa_1b_1b' \in AB,$$

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a_2b_2 \in AB,$$

սրակ $a_1, a_2, b_1, b_2 \in B$:

Հակառակը, դիցուք՝ AB -ն ենթախմբ է: Ցույց տանք, որ $AB = BA$: Զանի որ AB -ն ենթախմբ է և

$$A \subseteq AB, B \subseteq AB,$$

ապա տկնհայաբեն

$$BA \subseteq AB :$$

Դիցուք՝ տյմ $a \in A, b \in B$: Ելդ դեպքում $b^{-1}a^{-1} \in AB$: Հետևապես՝

$$b^{-1}a^{-1} = a_1b_1, a_1 \in A, b_1 \in B :$$

Այստեղից կառանանք՝

$$ab = (b^{-1}a^{-1})^{-1} = b_1^{-1}a_1^{-1} \in BA :$$

Ուրեմն՝

$$AB = BA :$$

□

ԴՆԴՈՒՄ 34.19. $(G, \cdot)$ խմբի կամայական A ենթախմբի և H նորմալ բաժանարարի համար

$$AH = HA :$$

Ապացույց. Դիցուք՝ $a \in A, h \in H$: Այդ դեպքում՝

$$ah = aha^{-1}a \in HA :$$

Հետևապես՝ $AH \subseteq HA$:

Այնպիսով, $ha = aa^{-1}ha \in AH$: Ուրեմն՝ $HA \subseteq AH$: Հետևապես՝ $AH = HA$: □

ԴՆԴՈՒՄ 34.20. H -ի ենթախմբի և նորմալ բաժանարարի տրատորքայալը նրա ենթախումբ է:

Ապացույց. Բավական է օգտվել նախորդ երկու պնդումներից: □

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 34.21. Ապացուցեք, որ խմբի կամայական քվոզ ենթախմբերի տրատորքայալը այն և միայն այն դեպքում է նրա ենթախումբ, եթե այդ ենթախմբերը զույգ առ զույգ անհամադրելի են:

34.4. Ֆակտոր-խումբը: $(G, \cdot)$ խմբի A նորմալ բաժանարարը ենթաբաժանարար է սակայն ավելի խմբի միջոցով կառուցել մի նոր խումբ: Այդ ստացվելիք խմբի տարրերը խմբի՝ ըստ ավելի նորմալ բաժանարարի նարմալից դասերն են:

Նշանակենք

$$G/A = \{xA | x \in G\} :$$

Ներմառնենք G/A բազմության վրա բազմապատկման գաղափարայունը հետևյալ կերպ (ի դեպ, այդ նոր գործողությունը նշանակվում ենք նույնիսկ նայն՝ $\cdot$ նշանով).

$$xA \cdot yA = xyA :$$

Նախ ցույց առնք, որ այս սահմանումը կոռեկտ է: Դա նշանակում է, որ եթե

$$xA = x'A, yA = y'A, \text{ ապա } xyA = x'y'A,$$

որտեղ $x, x', y, y' \in G$:

Իսկապես, դիցուք՝

$$xA = x'A, yA = y'A \text{ և } z \in xyA,$$

այսինքն՝

$$z = xy a, a \in A :$$

Այդ դեպքում՝

$$x = x \cdot 1 = x' a', \quad ya = y' a'', \quad a', a'' \in A :$$

Հետևապես՝

$$z = xya = x' a' y' a'' = x' y' (y')^{-1} a' y' a'' :$$

Եվ քանի որ $(y')^{-1} a' y' \in A$, ապա $z \in x' y' A$:

ՊՆԴՈՒՄ 34.22. $(G/A, \cdot)$ զույգը խումբ է:

Ապացույց. Յույց ստանք, որ $\cdot$ -ը զուգորդական է: Իսկապես,

$$\begin{aligned} (xA \cdot yA) \cdot zA &= xyA \cdot zA = (xy)zA = \\ &= x(yz)A = xA \cdot yzA = xA \cdot (yA \cdot zA) : \end{aligned}$$

Միավորի դերը խաղում է A հարակից դասը.

$$\begin{aligned} A \cdot xA &= 1A \cdot xA = (1 \cdot x)A = xA, \\ xA \cdot A &= xA \cdot 1A = (x \cdot 1)A = xA : \end{aligned}$$

Վերջապես, xA հարակից դասի հակադարձն է $x^{-1}A$ հարակից դասը՝

$$(xA)^{-1} = x^{-1}A :$$

Իսկապես,

$$xA \cdot x^{-1}A = xx^{-1}A = 1A = A, \quad x^{-1}A \cdot xA = x^{-1}xA = A :$$

□

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 34.23. $(G/A, \cdot)$ խումբը կոչվում է G խմբի *ֆակտոր-խումբ*՝ ըստ A նորմալ բաժանորարի:

Բերենք մի քանի օրինակ:

ա. Կամույական $(G, \cdot)$ խմբի համար

$$G/G = \{G\} :$$

Հետևապես՝ G/G ֆակտոր-խումբն ունի միայն մեկ տարր:

բ. Կամույական $(G, \cdot)$ խմբի համար

$$G/\{1\} = \{\{x\} | x \in G\} :$$

Հետևապես՝ $G/\{1\}$ ֆակտոր-խումբը իզոմորֆ է արված $(G, \cdot)$ խմբին: Անհրաժեշտ իզոմորֆիզմը ստացվում է հետևյալ կերպ.

$$f : G \rightarrow G/\{1\}, \quad f(x) = \{x\}, \quad x \in G :$$

գ. Ամբողջ քվերի զումարային խմբի համար

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z} + 1\} :$$

Ընդհանրապես դժվար չէ ցույց տալ, որ կամույական n բնական քվի համար

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n :$$

դ. Կոմպլեքս քվերի գումարային խմբի նորմալ բաժանույթը է իրական քվերի գումարային խումբը: Համապատասխան ֆակտոր-խմբի երանդ ունենք հետևյալ ի-գոմորֆիզմը.

$$\mathbb{C}/\mathbb{R} \cong \mathbb{R} :$$

Անհրաժեշտ իզոմորֆիզմը ստացվում է հետևյալ կերպ.

$$f : \mathbb{C}/\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x + iy + \mathbb{R}) = y, x, y \in \mathbb{R} :$$

ե. Կոմպլեքս քվերի սրատալքյալային խմբի ֆակտոր-խումբը՝ ըստ 1 մոդուլով կոմպլեքս քվերի ենթախմբի, իզոմորֆ է իրական դրական քվերի սրատալքյալային խմբին.

$$\mathbb{C}^+ / T \sim \mathbb{R}^+ :$$

Անհրաժեշտ իզոմորֆիզմը ստացվում է հետևյալ կերպ.

$$f : \mathbb{C}^+ / T \rightarrow \mathbb{R}^+, f(zT) = |z|, z \in \mathbb{C}^+ :$$

զ. Մենք ստանք գիտենք, որ $A(n) \triangleleft S(n)$: Կոզմենթ $S(n)/A(n)$ ֆակտոր-խումբը: Այն իզոմորֆ է $(\{1, -1\}, \cdot)$ սրատալքյալային խմբին:

$$S(n)/A(n) \cong \{1, -1\} :$$

Անհրաժեշտ իզոմորֆիզմը ստացվում է հետևյալ կերպ.

$$f(A(n)) = 1, f(B) = -1,$$

որտեղ B -ն կենտ անդադրադասիաների հալսակից դասն է:

է. Կոզմենթ լրիվ գծային խմբի ֆակտոր-խումբը՝ ըստ հաստիկ գծային խմբի:

$$GL(n, K)/SL(n, K) \cong K^* :$$

Անհրաժեշտ իզոմորֆիզմը կստացվի, եթե ընդունենք՝

$$f(ASL(n, K)) = |A|, A \in GL(n, K) :$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 34.24. Յույց սովեր, որ ա-է օրինակներում բերված դասադու-բյունները իրավացի են:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 34.25. Ապացուցեք, որ.

ա. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ խմբի յուրաքանչյուր ստոր ունի վերջավոր կարգ,

բ. յուրաքանչյուր n բնական քվի համար $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ խումբը ունի մեկ և միայն մեկ n կարգ ունեցող ենթախումբ, որը նաև ցիկլային է:

35. ԽՄԲԵՐԻ ՀՈՄՈՄՈՐՖԻԶՄԸ

35.1. *Խմբերի հոմոմորֆիզմը:* Խմբերի օբյեկտների մեջ տալանդ-նումիտառելի առկա են զրոյացնում նրանք, որոնք համաձայնեցված են լիմբային զար-ծողությունների հետ: Նման օբյեկտների մեջ կոչվում են հոմոմորֆիզմներ:

ՄԱՀՄԱՆՈՒՄ 35.1.

$$f: G_1 \rightarrow G_2$$

օբյեկտների միջև կոչվում է *հոմոմորֆիզմ* $(G_1, \cdot)$ և $(G_2, \cdot)$ լիմբերի միջև, եթե G_1 -ի կամայական x, y տարրերի համար

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y):$$

Երկու լիմբեր կոչվում են *հոմոմորֆ*, եթե նրանց միջև գոյություն ունի հոմոմորֆիզմ: Խմբերի f հոմոմորֆիզմը կոչվում է *վերադարձ*, *ստորադարձ* կամ *վերադարձ*, եթե ուղղակի և f օբյեկտների միջև:

Ներքևի լիմբերի հոմոմորֆիզմների օրինակներ:

ա. Ղիստերի լիմբերի $(\mathbb{Z}, +)$ գումարային և $(\{1, -1\}, \cdot)$ արտադրյա-լիմբերի լիմբեր:

$$f(x) = \begin{cases} +1, & \text{երբ } x \text{-ը գույզ է} \\ -1, & \text{երբ } x \text{-ը կենտ է} \end{cases}$$

արտադրյալիմբերի հոմոմորֆիզմ է նշված լիմբերի միջև:

բ. Երկու կամայական լիմբերի միջև հոմոմորֆիզմ է այն օբյեկտների միջև, որոնք ունենում են լիմբերի յուրաքանչյուր տարր օբյեկտների միջև:

գ. Խմբերի հոմոմորֆիզմ է նաև երկու լիմբերի իզոմորֆիզմը: Ընդ որում, հոմո-մորֆիզմը այն է միայն այն դեպքում, եթե այն վերադարձ է:

դ. Ղիստերի լիմբերի $(\mathbb{Z}, +)$ լիմբերի $(G, \cdot)$ լիմբերի և նրա A ճյուղի լիմբերի միջև: Ղիստերի լիմբերի $(G, \cdot)$ լիմբերի և նրա A ճյուղի լիմբերի միջև:

$$i_A: G \rightarrow G/A, \quad i_A(x) = xA, \quad x \in G:$$

Այն վերադարձ է G և G/A լիմբերի միջև: Միաժամանակ,

$$i_A(x \cdot y) = xAy = xA \cdot yA = i_A(x) \cdot i_A(y):$$

Այսինքն՝ i_A -ն հոմոմորֆիզմ է G և G/A լիմբերի միջև:

ՄԱՀՄԱՆՈՒՄ 35.2. i_A -ն կոչվում է *բնական հոմոմորֆիզմ* G և G/A լիմբերի միջև:

ՊՆԴՈՒՄ 35.3. *Ղիստերի f -ը հոմոմորֆիզմ է $(G_1, \cdot)$ և $(G_2, \cdot)$ լիմբերի միջև: Այդ դեպքում՝*

ա. *Առաջին լիմբերի միադարձի օբյեկտները երկրորդ լիմբերի միադարձն են՝*

$$f(1) = 1$$

բ. Առաջին խմբի կամայական տարրի հակադարձի պատկերը համապատասխանում է նրա պատկերի հակադարձին՝

$$f(x^{-1}) = (f(x))^{-1} :$$

Ապացույց. Ունենք.

ա.

$$f(1) \cdot f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) :$$

Հետևապես՝

$$f(1) = 1 :$$

բ.

$$f(x^{-1}) \cdot f(x) = f(x^{-1} \cdot x) = f(1) = 1,$$

$$f(x) \cdot f(x^{-1}) = f(x \cdot x^{-1}) = f(1) = 1 :$$

Հետևապես՝

$$f(x^{-1}) = (f(x))^{-1} :$$

□

ՊՆԴՈՒՄ 35.4. Դիցուք՝ f -ը համոմորֆիզմ է երկու խմբերի միջև: Այդ դեպքում՝
 ա. առաջին խմբի ենթախմբի պատկերը երկրորդ խմբի ենթախումբ է,
 բ. երկրորդ խմբի ենթախմբի լրիվ նախապատկերը առաջին խմբի ենթախումբ է:

Ապացույց. Դիցուք՝ f -ը համոմորֆիզմ է G_1 և G_2 խմբերի միջև:

ա. Այդ դեպքում, եթե A -ն G_1 խմբի ենթախումբն է, ապա $f(A)$ -ն կլինի երկրորդի ենթախումբը: Իրոք եթե $f(x), f(y) \in f(A)$, ապա ունենք՝

$$f(x) \cdot f(y) = f(x \cdot y) \text{ և } x \cdot y \in A:$$

Հետևապես՝

$$f(x \cdot y) \in f(A) :$$

Ուրեմն նաև՝

$$f(x) \cdot f(y) \in f(A) :$$

Այնևայն ժամանակ՝

$$(f(x))^{-1} = f(x^{-1}) \in f(A) :$$

Ուրեմն՝ $f(A)$ -ն G_2 խմբի ենթախումբ է:

բ. Դիցուք՝ այժմ էլ B -ն է G_2 -ի ենթախումբ: Դիտարկենք նրա

$$f^{-1}(B) = \{x \in G_1 | f(x) \in B\}$$

լրիվ նախապատկերը: Վերցնենք $x, y \in f^{-1}(B)$: Այդ դեպքում՝

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \in B :$$

Հետևապես՝

$$x \cdot y \in f^{-1}(B) :$$

Նմանապես՝

$$f(x^{-1}) = (f(x))^{-1} \in B :$$

Հետևապես՝

$$x^{-1} \in f^{-1}(B) :$$

Որքան՝ $f^{-1}(B)$ -ն G_1 խմբի ենթախումբ է:

□

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 35.5. Դիցուք՝ f հոմոմորֆիզմը վրադրում է երկու խմբերի միջև:

Այդ դեպքում ապացուցեք, որ.

ա. Առաջին խմբի նորմալ բաժանառարի պատկերը երկրորդ խմբի նորմալ բաժանառար է:

բ. Երկրորդ խմբի նորմալ բաժանառարի յրիվ նախապատկերը առաջին խմբի նորմալ բաժանառար է:

35.2. Հոմոմորֆիզմի կորիզը: Խմբերի հոմոմորֆիզմների ռատոնալիտյուն մեջ կարևոր դեր ունի սուսապատկերվող խմբի այն տարրերի բազմությունը, որոնց պատկերը երկրորդ խմբի միավորն է:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 35.6. Դիցուք՝ արված է խմբերի

$$f : G_1 \rightarrow G_2$$

հոմոմորֆիզմը: G_1 խմբի $\{x \in G_1 \mid f(x) = 1\}$ ենթաբազմությունը կոչվում է f հոմոմորֆիզմի *կորիզ* և նշանակվում՝ $\ker f$.

$$\ker f = \{x \in G_1 \mid f(x) = 1\} :$$

Օրինակներ:

ա. Դիցուք՝

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n, f(x) = r,$$

որտեղ r -ը՝ x ամբողջ թիվը n -ի վրա բաժանումից ստացված մնացորդն է: f -ը հոմոմորֆիզմ է և

$$\ker f = n\mathbb{Z} :$$

բ. Դիցուք՝

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^+, f(z) = |z|, z \in \mathbb{C}^* :$$

Այդ դեպքում f -ը հոմոմորֆիզմ է և

$$\ker f = \{c \in \mathbb{C}^* \mid |c| = 1\} = T :$$

գ. Դիցուք՝

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^+, f(z) = |z|, z \in \mathbb{R}^* :$$

Այդ դեպքում f -ը հոմոմորֆիզմ է և

$$\ker f = \{1, -1\} = T \cap \mathbb{R}^* :$$

դ. Դիցուք՝

$$f : S(n) \rightarrow \{1, -1\},$$

որտեղ զույգ անդադրությունների պատկերը 1 է, իսկ կենտ անդադրությունների պատկերը՝ -1 : Այդ դեպքում f -ը հոմոմորֆիզմ է : Նրա կորիզն է զույգ անդադրությունների խումբը :

$$\ker f = A(n) :$$

և.

$$\det : A \rightarrow |A|$$

արտադասկերտն է հոմոմորֆիզմ է լինիլ գծային խմբի՝ $GL(n, K)$ -ի և K դաշտի $(K^*, \cdot)$ սրտադրյալային խմբի միջև : Նրա կորիզը հստակ գծային խումբն է՝

$$\ker \det = SL(n, K) :$$

գ. Դիստրիկներ կոմպակտն երկու խմբերի սյնային հոմոմորֆիզմը, որը առաջին խմբի յուրաքանչյուր տարր սրտադասկերտն է երկրորդ խմբի միավորին : Նրա կորիզը առաջին խումբն է :

Լ. Խմբերի իզոմորֆիզմի կորիզը կազմված է սրտադասկերպույ խմբի միավորից :

ՊՆԴՈՒՄ 35.7. *Յուրաքանչյուր հոմոմորֆիզմի կորիզը սրտադասկերպույ խումբի նորմալ բաժանուր է :*

Ապացույց. Դիցուք՝ ունենք խմբերի

$$f : G_1 \rightarrow G_2$$

հոմոմորֆիզմը և $x, y \in \ker f$: Այսինքն՝

$$f(x) = f(y) = 1 :$$

Այդ դեպքում՝

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) = 1 \cdot 1 = 1 :$$

Որեւն՝

$$x \cdot y \in \ker f :$$

Նույն կերպ՝

$$f(x^{-1}) = (f(x))^{-1} = 1^{-1} = 1 :$$

Որեւն՝

$$x^{-1} \in \ker f :$$

Այսպիսով՝ կորիզը ենթախումբ է :

Յույց տանք, որ այն նաև նորմալ բաժանուր է :

Ը Իսկապես, դիցուք՝ $x \in G, a \in \ker f$: Այդ դեպքում՝ $f(a) = 1$ և

$$f(x^{-1} \cdot a \cdot x) = f(x^{-1}) \cdot f(a) \cdot f(x) = (f(x))^{-1} \cdot f(x) = 1 :$$

Հետևապես՝

$$x^{-1} \cdot a \cdot x \in \ker f :$$

Այսինքն՝ $\ker f$ -ը նաև նորմալ բաժանուր է :

□

Այսպիսով՝ յուրաքանչյուր համմուրֆիզմի կորիզ սրտատատկերվող խմբի ներմուլ բաժանորսուր է։ Իսկ սրվուր՝ խմբի յուրաքանչյուր ներմուլ բաժանորսուր ինչ-որ համմուրֆիզմի կորիզ չէ։ Այս հոպրյի սրտատախանր աուվիս է հետեյուկ հուսակուրյուր։

ՊՆԴՈՒՄ 35.8. *Կոմույուրիւմ G խմբի A նորմուլ բաժանորսուրը i_A բնուկում համմուրֆիզմի կորիզն է։ Այսինքն՝*

$$A = \ker i_A :$$

Արդուրյց. Դիցուր՝ $x \in \ker i_A$ ։ Այդ դեպրում՝

$$i_A(x) = xA = A$$

և, ուրեմն, $x \in A$ ։

Հուկուուուկր, երե $x \in A$, ուրու $xA = A$ ։ Հետեուկււ՝ $i_A(x) = A$ ։ Այսինքն՝ $x \in \ker i_A$ ։ Ուրեմն՝

$$\ker i_A = A :$$

□

ՊՆԴՈՒՄ 35.9. *Դիցուր՝ f -ը համմուրֆիզմ է $(G_1, \cdot)$ և $(G_2, \cdot)$ խմբերի միջև։ Այդ դեպրում G_1 -ի կոմույուրիւմ x և y աուրրերի հոմուր*

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \ker f = y \ker f :$$

Արդուրյց. Երե

$$(41) \quad f(x) = f(y),$$

աուր

$$(42) \quad f(x^{-1} \cdot y) = 1 :$$

Հետեուկււ՝

$$(43) \quad x^{-1} \cdot y \in \ker f$$

և, ուրեմն,

$$(44) \quad x \ker f = y \ker f :$$

Հուկուուուկր, երե աեղի ունի (44) հոմուսուրյուրնր, ուրու նրունից կսուունք (43)-ը։ Նշուունվում է աեղի ունի (42) հոմուսուրյուրնր, որից էլ սուսցվում է (41)-ը։ □

35.3. Հոմոմորֆիզմների բերքում: ԽճՐԵՐԻ աւետարյան մեջ չափազանց կուրևոր դեր է խաղում հոմոմորֆիզմների հետևյալ հատկությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 35.10. (Հոմոմորֆիզմների բերքում): Դիցուք՝ $(G_1, \cdot)$ և $(G_2, \cdot)$ խմբերի f հոմոմորֆիզմը վրաստում է: Այդ դեպքում գոյություն ունի սլեմպիսի g իզոմորֆիզմ $G_1 / \ker f$ և G_2 խմբերի միջև, որ

$$f = i_{\ker f} \circ g :$$

Այսինքն՝ յուրաքանչյուր վրաստող հոմոմորֆիզմ համարում է բնական հոմոմորֆիզմի և իզոմորֆիզմի արտադրյալի:

Արտացոյց. Կոտուցենք g սունչությունը հետևյալ կերպ.

$$g(x \ker f) = f(x) :$$

Յույց ստանք, որ g -ն սլաւասարտակերում է: Իսկապես, երև

$$x \ker f = y \ker f,$$

ապա

$$x^{-1}y \in \ker f, \quad f(x^{-1}y) = 1,$$

որտեղից կստանանք՝

$$f(x) = f(y) :$$

Հանձնի որ f -ը վրաստում է, ապա վրաստում է նաև g -ն:

Յույց ստանք, որ այն սարտարում է: Իսկապես, դիցուք՝

$$g(x \ker f) = g(y \ker f) :$$

Այդ դեպքում $f(x) = f(y)$ կամ $f(x^{-1}y) = 1$:

Այստեղից կստանանք $x^{-1}y \in \ker f$: Հետևապես՝

$$x \ker f = y \ker f :$$

Վերջապես, ցույց ստանք, որ

$$f = i_{\ker f} \circ g :$$

Իսկապես, դիցուք՝ $x \in G$: Այդ դեպքում

$$(i_{\ker f} \circ g)(x) = g(i_{\ker f}(x)) = g(x \ker f) = f(x) :$$

Հետևապես՝

$$f = i_{\ker f} \circ g :$$

□

Պնդումն սալացուցվում է: Նրանից մասնավորապես հետևում է, որ երբ ունենք

$$f : G_1 \rightarrow G_2$$

վրաստող հոմոմորֆիզմը G_1 և G_2 խմբերի միջև, ապա սեղի ունի հետևյալ իզոմորֆիզմը

$$G_1 / \ker f \cong G_2 :$$

Ամպարապար խմբերի իզոմորֆիզմի վերաբերյալ գործնական խնդիրներ լուծելիս օգտվում են հենց այս հատկությունից:

Բերենք տարացուցված բերեմի կիրառություն մի բունի օրինակ:

տ. Դիստրիկներ 35.2 կետի ու օրինակը: Ունենք $\ker f = n\mathbb{Z}$: Հետևապես, օգտվելով իզոմորֆիզմների բերեմից, կստանանք՝

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n :$$

բ. Զրոյից տարբեր յուրաքանչյուր կոմպլեքս թվի համապատասխանություն մեջ դնենք իր մոդուլը.

$$f(x) = |x|, x \in \mathbb{C}^*$$

Կանոնումք՝ $\ker f = T$ և, օգտվելով իզոմորֆիզմների բերեմից, կստանանք՝

$$\mathbb{C}^*/T \cong \mathbb{R}^+ :$$

գ. Զրոյից տարբեր սղաշիջով յուրաքանչյուր n -րդ կարգի բուռնկոսային մուտ-րիցի համապատասխանություն մեջ դնենք իր սղաշիջը.

$$\det(A) = |A|, A \in GL(n, K) :$$

Կստանանք՝ $\ker f = SL(n, K)$: Օգտվենք իզոմորֆիզմների բերեմից՝

$$GL(n, K)/SL(n, K) \cong K^* :$$

դ. Վերցնենք n բնական թվեր և n -րդ կարգի յուրաքանչյուր անդադրությունը տանչենք 1, երև անդադրությունը գույց 1, և $\dots$ 1, երև անդադրությունը կենա 1: Այս տոնչությունը իզոմորֆիզմ 1, սրի կորիզը $A(n)$ -ն 1: Հետևապես՝

$$S(n)/A(n) \cong \mathbb{C}(2) :$$

Այսու և $A(n) \triangleleft S(n)$ պնդման ես մի տարացուցում:

Խմբերի առումնադրությունը ընթացքում մեծ կիրառություն ունի հետևյալ սղն-դումը:

ՊԼՂՈՒՄ 35.11. $(G, \cdot)$ խմբի կամայական A ենթոխմբի և H նսքմուլ բուժա-նոսրոթի համուր

$$AH/H \cong A/A \cap H :$$

Անրացույց. Դիստրիկներ

$$f : A \rightarrow AH/H, f(a) = aH, a \in A$$

արտասպակերումը: Այն իզոմորֆիզմ 1, բունի սր

$$f(ab) = abH = aHbH = f(a)f(b), a, b \in A :$$

f իզոմորֆիզմի սրտակերը AH/H -ն 1, իսկ կորիզը՝ $A \cap H$ -ը: Հետևապես՝

$$AH/H \cong A/\ker f = A/A \cap H :$$

ՊՆԴՈՒՄ 35.12. *Եթե $(G, \cdot)$ խմբի A ենթախումբը H նորմալ բաժանույթի է վերջավոր են, ապա վերջավոր է նաև AH ենթախումբը: Ընդ որում,*

$$|AH| : |H| = |A| : |A \cap H| :$$

Լնդցույց. Բազմական L օգտվել նովորդ պնդումից և Լագրանժի թեորեմից: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 35.13. Լկայուցուցեր վերջին պնդումը:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 35.14. Մանրամասներեն կառույթներ ու-դ օրինակներում նշված կառույցումները:

36. ԽՄԲԵՐԻ ՈՒՂԻՂ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԸ

36.1. *Երկու խմբերի ուղիղ տրամադրյալը:* Խմբերի ուսումնասիրության մեջ կարևոր դեր են խաղում խմբերի հետ կառուցվող գործադրյալները. գործողություններ, որոնք հնարավորություն են ստվիս տրված խմբերից ստանալ նոր խմբեր կամ էլ արված խմբի ուսումնասիրությունը հանգեցնել ույլ՝ ուղեի պարզ խմբերի ուսումնասիրության: Նման խնդիր մենք խուգործել ենք վեկտորական տարածությունների ուղիղ տրամադրյալի հասկացության դիտարկման ընթացքում: Նշված խնդիրների խուգործման համար չափազանց սարդումնալիս է նաև խմբերի ուղիղ տրամադրյալի հասկացությունը: Նախ դիտարկենք երկու տրամադրյալների դեպքը: Պարզության համար խմբային գործողությունը երկու խմբում էլ նշանակենք միևնույն՝ $\cdot$ նշանով: Դիցույ՝ ունենք $(G_1, \cdot)$ և $(G_2, \cdot)$ խմբերը: G_1 և G_2 բազմություններ

$$G_1 \times G_2$$

դեկարայան տրամադրյալի վրա սահմանենք երկակող հանրահաշվական գործողություն հետևյալ՝ բնական ճանապարհով:

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 36.1. G_1 բազմություն կամայական x_1 , y_1 և G_2 բազմության կամայական x_2 , y_2 տարրերի համար ընդունենք՝

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2) :$$

Լկայիսով՝ $G_1 \times G_2$ բազմություն վրա $\cdot$ գործողությունը սահմանվում է ըստ կողայինումների: Լկայ ստանաում էլ նոր սահմանում $\cdot$ գործողությունը պոնալումում է արված խմբերի խմբային գործողությունների հիմնական հասկությունները:

ՊՆԴՈՒՄ 36.2. $(G_1 \times G_2, \cdot)$ գույր խումբ է:

Լնդցույց. $\cdot$ գործողություն գույրականությունը ստուգվում է անմիջականորեն: Սխալի դերը խաղում է $(G_1, \cdot)$ և $(G_2, \cdot)$ խմբերի միավորներից կազմված $(1, 1)$ գույր, որը գործողության նշանակելն է-ով՝

$$1 = (1, 1) :$$

ՊՆԴՈՒՄ 36.10. *ու. G'_i -ը $G_1 \times \cdots \times G_n$ խմբի ենթախումբ է և իզոմորֆ է $(G_i, \cdot)$ խմբին, $i = 1, \dots, n$:*

բ. G'_i խումբը $(G_1, \cdot) \times \cdots \times (G_n, \cdot)$ ուղիղ տրատոյրյալի նորմալ բաժանադասը է, $i = 1, \dots, n$:

գ. $G'_1 \times \cdots \times G'_n = G'_1 \cdots G'_n$:

դ. $G'_i \cap G'_1 \cdots G'_{i-1} G'_{i+1} \cdots G'_n = \{1\}$, $i = 1, \dots, n$:

Ապացույց. ա-դ. Նման են 36.4 պնդման համապատասխան կետերի ապացույտներին: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 36.11. *Ապացույցներ նախադրյալ պնդման ա-դ կետերը:*

36.3. *Խոփի վերաբերմամբ ենթախմբերի ուղիղ տրատոյրյալի: Այժմ խմբերի ուղիղ տրատոյրյալի հասկացությունը մոտենումք այլ տեսանկյունով:*

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 36.12. *Մենք կտանք, որ $(G, \cdot)$ խումբը վերաբերվում է իր A և B նորմալ բաժանադասերի ուղիղ տրատոյրյալի, եթե.*

ա. $G = AB$,

բ. $A \cap B = \{1\}$:

Օրինակ, եթե $S(4)$ խմբի մեջ վերցնենք.

$$f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 4, f(4) = 3,$$

$$g(1) = 3, g(2) = 1, g(3) = 1, g(4) = 2,$$

$$h(1) = 4, f(2) = 3, f(3) = 2, f(4) = 1,$$

այսպիսի $\{1, f, g, h\}$ -ը խումբ է, $\{1, f\}$ -ը և $\{1, g\}$ -ն՝ նրա նորմալ բաժանադասեր են և

ա. $\{1, f, g, h\} = \{1, f\} \cdot \{1, g\}$,

բ. $\{1, f\} \cap \{1, g\} = \{1\}$:

ՊՆԴՈՒՄ 36.13. *Եթե խմբի երկու նորմալ բաժանադասերի հատումը հավասար է միավոր ենթախմբին, ապա այդ նորմալ բաժանադասերի ստորերը իրար եկառ տեղափոխելի են:*

Ապացույց. Ակնհայտ է, որ եթե A և B նորմալ բաժանադասերի հատումը հավասար է միավոր ենթախմբին և $a \in A, b \in B$, ապա $a^{-1}b^{-1}ab \in A \cap B$ և $a^{-1}b^{-1}ab = 1$: Ուրեմն՝ $ab = ba$: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 36.14. *Եթե G խումբը վերաբերվում է իր A և B նորմալ բաժանադասերի ուղիղ տրատոյրյալի, ապա*

$$G = AB \simeq A \times B:$$

Ապացույց. Դիցուք՝ G խումբը վերաբերվում է իր A և B նորմալ բաժանադասերի ուղիղ տրատոյրյալի: Դիտարկենք

$$f(ab) = (a, b), a \in A, b \in B$$

առնչարյունը: Այն արատաստակերում է:

$$\text{Իսկության, եթե } a_1 b_1 = a_2 b_2, a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B, \text{ ապա } a_2^{-1} a_1 = b_2 b_1^{-1}:$$

Հետևապես՝ $a_2^{-1}a_1 = b_2b_1^{-1} = 1$: Կամ՝ $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$:

f -ը նաև վերադարձ է: Այստեղից հետևում է, որ

$$f(a_1b_1a_2b_2) = f(a_1a_2b_1b_2) \quad (a_1a_2, b_1b_2) = (a_1, b_1)(a_2, b_2) :$$

Հետևապես՝ f -ը իզոմորֆիզմ է: $\square$

ԳԼԴՌԻՄ 36.15. *Դիցուք՝ G խումբը ունի այնպիսի $H_1, \dots, H_n$ նորմալ բաժանարարներ, որ*

$$a. \quad G = H_1 \cdots H_n,$$

$$բ. \quad H_j \cap H_1 \cdots H_{j-1}H_{j+1} \cdots H_n = 1, j = 1, 2, \dots, n:$$

Այդ դեպքում՝

$$G = H_1 \cdots H_n \cong H_1 \times \cdots \times H_n :$$

Լուծում. Այսպեսլուծումը նման է նախորդ սինդրոմ տալիսը: Կատարել այն ինքնուրույն: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 36.16. *Այսպեսլուծել, որ $S(3)$ խումբը տնկերված է իր ենթախմբերի ուղիղ արտադրյալի:*

37. ՏԵՂԱԴՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԽՄԲԵՐ

37.1. Յիկլեր: Երկուսը տալիս ենք տեղադրությունների զրոյան խումբը միայն է, սակայն շատ ծավալուն տեղ է գրառվում, և հաճախ նրանցում մասնակցում են տվյալի թվեր, իսկ միևնույն թվին էլ մասնակցում է երկու տեղում: Այժմ մենք կծանոթանանք տեղադրությունների զրոյան մի նոր եղանակի հետ, որը գերի է նշված տեղադրությունների և օգտակար՝ տեղադրությունների հետագա ուսումնասիրության ընթացքում:

Վերցնենք $\{1, 2, 3\}$ բազմություն

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

տեղադրություն: Այն զրոյան մեկ ուղիղ՝ ցիկլի տեսքով.

$$(13) :$$

Այս ցիկլում 1 թվից հետո գրառվում է նրա պատկերը՝ 3-ը: 3-ից հետո գրվում փակագծից հետո 1, սակայն, որ ցիկլը ավարտվել է, պետք է վերադառնալ նրա սկիզբը, որտեղ գրվում է թվին էլ հենց 3-ի պատկերն է: Մնաց 2 թվի: Մեր տեղադրության մեջ այն հավասար է իր պատկերին: Նման թվերը ստանդարտորվում են որոշակի չգրել ցիկլային զրոյան մեջ: Այսպիսով՝

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (13) :$$

Այժմ ներմուծենք կոմպակտ ցիկլի գաղափարը: Նախապես բերենք հետևյալ օրինակներ:

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 37.1. $\{1, 2, \dots, n\}$ բազմություն i տարրը կոչվում է f -*անշարժ* կամ *անշարժ* $\{1, 2, \dots, n\}$ բազմության f տեղադրություն նկատմամբ, եթե

$$f(i) = i :$$

Օրինակ, եթե վերցնենք

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13),$$

այս 1 և 3 թվերը f -անշարժ չեն, իսկ 2 -ը f -անշարժ է:

$1, 2, \dots, n$ տարրերի տեղադրություն յուրաքանչյուր f դիրքափոխություն համար գոյություն ունեն $n - 2$ հոտ f -անշարժ թվեր: (ij) դիրքափոխություն համար գոյություն ունի i -ից և j -ից տարրեր թվերն են:

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 37.2. $\{1, 2, \dots, n\}$ բազմության f տեղադրությունը կոչվում է *ցիկլային*, եթե այդ բազմություն կամուրջակում ոչ f -անշարժ i, j տարրերի համար գոյություն ունի այնպիսի k բնական թիվ, որ

$$f^k(i) = j :$$

Օրինակ,

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = g \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

տեղադրություններից առաջինը ցիկլային չէ: 3 և 4 թվերը f -անշարժ չեն, սակայն մննհար 1 գտնել այնպիսի k բնական թիվ, որ $f^k(3) = 1$: Հեշտությամբ կարելի է համոզվել, որ մյուս՝ g տեղադրությունը ցիկլային է: Ըսենք՝

$$g^1(1) = 2, \quad g^2(1) = 3, \quad g^3(1) = 4, \quad g^4(1) = 5$$

և այլն:

Ցիկլային է $1, 2, \dots, n$ տարրերի յուրաքանչյուր $f = (ij)$ դիրքափոխություն: Լայստեղ f -անշարժ չեն միայն i, j թվերը, որոնց համար ունենք՝

$$f(i) = j, f(j) = i :$$

Յուրաքանչյուր ցիկլային տեղադրություն կարելի է գրառել *ցիկլի* տեսքով: f ցիկլային տեղադրության գրառումը կարելի է սկսել նրա ցունկացած, օրինակ, i ոչ f -անշարժ տարրից, որից սկսած՝ յուրաքանչյուր տարրից հետո գրվում է այդ տարրի f -սրտակերը: Վերջում գրվում է այն տարրը, որի f -սրտակերն է i -ն և ցիկլը փակվում է:

Օրինակ,

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1354) :$$

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 37.3 Ցիկլի մեջ գրառված տարրերի թիվը կոչվում է այդ *ցիկլի երկարություն*:

Պարզ է, որ դիրքափոխությունը ցիկլային տեղադրություն է, և նրա երկարությունը հավասար է երկրորդ:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 37.4. Նշված ցիկլեր կաշվում են *անկախ*, եթե նրանց գրառման մեջ ընդհանուր քվեր չկան:

Օրինակ, (123) և (14) ցիկլերը անկախ չեն, իսկ (23) և (14) ցիկլերը անկախ են:

ՊՐԴՈՒՄ 37.5. *Յուրադանշյալ առկայություն միարժեք ձևով ներկայացվում է անկախ ցիկլերի ուղղադրյալի տեսքով:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարել ինքնուրույն: □

Կոնկրետ f առկայությունը անկախ ցիկլերի ուղղադրյալի տեսքով ներկայացնելու համար փաթեկներ հետևյալ կերպ. վերցնենք f առկայությունը որևէ σ_2 f -անշարժ i տարր, բացենք ցիկլը. i -ից հետո գրենք $f(i)$ տարրը, այնուհետև $f^2(i)$ տարրը և այլն: Արքայում մենք կատանումք մի j տարր, որի համար $f(j) = i$: Այդ j -ից հետո ցիկլը փակենք: Այնուհետև վերցնենք այնպիսի մի k տարր, որը չկա նախորդ ցիկլի մեջ և f -անշարժ չէ, ու բացելով նոր ցիկլը՝ նախորդ դասադրություն մեջ որովամ քայլերը կրկնենք այդ k տարրի համար և այլն:

Օրինակներ:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} = (132)(45)(678) :$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = (1642)(35)(78) :$$

Ակնհայտ է, որ անկախ ցիկլերի ուղղադրյալը տեսլավորակաճ է: Հետագա կիրառություն համար օգտակար է հետևյալ հասկությունը:

ՊՐԴՈՒՄ 37.6. *k երկարություն յուրադանշյալ ցիկլ ներկայացվում է $k-1$ հաս դիրքափոխությունների ուղղադրյալի տեսքով: Այլևի կանկրետ՝*

$$(i_1, i_2, \dots, i_k) = (i_1, i_2)(i_1, i_3) \cdots (i_1, i_k) :$$

Ապացույց. Ապացուցումը կատարել ինքնուրույն: □

Օգտվելով այս հասկությունից՝ հեշտությամբ կուսացուցենք նույն հետևյալ պըճ-դումը:

ՊՐԴՈՒՄ 37.7. *k երկարությամբ ցիկլի գոյգայությունը համընկնում է $k-1$ քվի գոյգայություն հետ: Մասնավորապես, յուրադանշյալ դիրքափոխություն կենա առկայություն է, իսկ եղյակ ցիկլը գոյգ է:*

Ապացույց. Ակնհայտ է, որ յուրադանշյալ դիրքափոխություն կենա առկայություն է: Այնուհետև, համոզմունք նախորդ պնդման, k երկարությամբ ցիկլը հավասար է $k-1$ հաս դիրքափոխությունների ուղղադրյալի: Նշե՛ք դրանց թիվը գոյգ է, ուստի գոյգ կլինի նույն ցիկլը, եթե կենա է՝ կենա կլինի ցիկլը: □

ՄԱՀՄԱՆՈՒՄ 37.8. n - s -րկիվ կոչվում է n առաիծառնի f տեղադրության *դեկ-րեմենտ*, եթե s -ը f -ի անկախ ցիկլերի և f -անշարժ առարների բանակների զամարն է:

Օրինակ, 4-րդ առաիծառնի (12)(34) տեղադրության դեկրեմենտը հավասար է 2-ի, 8-րդ առաիծառնի (124)(78) տեղադրության դեկրեմենտը 3 է:

Հետաքրքիր ծեռվ է տեղադրության գույգությունը ոյաշվում նրա դեկրեմենտի միջոցով:

ՊՆԴՈՒՄ 37.9. *Յարարանշար տեղադրայում գայգայրայունը հումքնկնում է նրա դեկրեմենտի գույգարբուն հեա:*

Արտցայց. Օգավելով 37.6 պնդումից՝ անկախ ցիկլերի տրաադրայի տեսքով գրվում n առաիծառնի f տեղադրայումը գրենք դիրբապիտարբայունների տրաադրայու-լի անարով: Նմուն արաադրիչների բիվը n -ից պակաս է. նախ՝ f -անշարժ առարների բվով, ապա՝ անկախ ցիկլերի բվով, որովհեաև k երկարության գրկլը ներկայացվում է $k \cdots 1$ հաա դիրբապիտարբայունների տրաադրայի տեսքով: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 37.10. $S(n)$ խումքը ծնվում է.

ա. բոլար դիրբապիտարբայուններով,

բ. (12), ..., (1*n*) դիրբապիտարբայուններով:

Արտցայց. ա. Հեաեում է 37.5 և 37.6 պնդումներից:

բ. Հեաեում է ա -ից, եթե հաշվի տոնենք, որ

$$(ij) = (1i)(1j)(1i) :$$

$\square$

ՊՆԴՈՒՄ 37.11. $A(n)$ խումքը ծնվում է բոլար եայակ ցիկլերով:

Արտցայց. Հեաեում է այն բունից, որ

$$(ij)(ik) = (ijk), (ij)(kl) = (ij)(ik)(ki)(kl) = (ijk)(kil) :$$

$\square$

37.2. *Նորմալ բաժանարարները:* Մենք տրքեն գիտենք, որ կամայական n բնական բվի համար $A(n)$ -ը $S(n)$ խմբի նորմալ բաժանարար է: Պեսար է նկատել, աուպն, որ $S(n)$ և, ժամավանդ, $A(n)$ խմբերը հարաաա չեն նորմալ բաժանարար-ներով:

ՊՆԴՈՒՄ 37.12. $A(4)$ խումքը պայգ խամք չէ:

Արտցայց. Քրայնի

$$K_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

խումքը $A(4)$ խմբի նորմալ բաժանարար է:

$\square$

Պարգվում է, որ այա դեպքը բացառիկ է նշանավախ խմբի համար:

ՊԼԴՈՒՄ 37.13. (*Դպրատյի բեքերը*): *Եթե n բնական թիվը 4-ից ստորեր է, ապա $A(n)$ խումբը սրբազ է:*

Լրացույց. Դիցուք՝ II -ր $A(n)$ խմբի ոչ տրիվիալ նորմալ բաժանարար է, $n > 4$: Ցույց տանք, որ $II = A(n)$: Դիցուք՝ a -ն II -ից վերցրած և նույնականից տարբեր այն տեղադրությունն է, որը $1, 2, \dots, n$ թվերի մեջ տմեկնում է թվով ստորերն է թողնում մնացածը: Ցույց տանք, որ եթե

$$(15) \quad a(i) \neq i,$$

ապա i -ն ընդունում է ճիշտ երեք արժեք:

ա. Դիտարկենք ունեն միայն չորս թվեր, որոնք բավարարում են (45) սրբամանին: Այդ դեպքում $a = (12)(34)$: Ինտերկև, $1, 2, 3, 4$ թվերի փոխարեն կարող են համարվել գույ $\{1, 2, \dots, n\}$ բազմություն այլ ստորեր, բայց մեր դասադասությունների ընդհանրությունը պահպանելիս խախտվում:

Բանի որ $n \geq 5$, ապա $(345) \in A(n)$: Այդ դեպքում՝

$$(345)^{-1}(12)(34)(345) = (12)(45) \in H :$$

Այնուհետև՝

$$(12)(34)(12)(45) = (354) \in H :$$

Այսպիսով՝ մենք II -ում գտանք (354) տեղադրությունը, որը ավելի շատ ստորերն է մնացածը թողնում, քան a -ն: Ստացված հավաստությունը ցույց է տալիս, որ այս տեղադրությունը տեղի ունենալի կարող:

բ. Ենթադրենք, որ կան չորսից ավելի ստորեր, որոնք բավարարում են (45) սրբամանին: a -ն ներկայացնենք անկախ ցիկլերի արտադրյալի տեսքով, ընդ որում, նախ գրենք ամենամեծից ցիկլը: Այդ դեպքում a -ն կարող է ունենալ հետևյալ հնարավոր տեսքերը.

$$1. \ a = (12345 \dots) \dots,$$

$$2. \ a = (1234) \dots,$$

$$3. \ a = (123)(45 \dots) \dots,$$

$$4. \ a = (12)(34)(56) \dots:$$

Նշանակենք նաև՝

$$f = a^{-1}(234)^{-1}a(234) :$$

Ամփոփական ստացումով կարգենք, որ.

$$1 \text{ դեպքում } f(1) = 1, f(i) = i, i > 5,$$

$$2 \text{ դեպքում } f(i) = i, i > 4,$$

$$3 \text{ դեպքում } f(4) = 4, f(i) = i, i > 5,$$

$$4 \text{ դեպքում } f(i) = i, i > 4:$$

Այսպիսով՝ բոլոր այս դեպքերում մենք նույն գտանք II -ին արտադրող մի f տեղադրություն, որը ավելի շատ ստորերն է մնացածը թողնում, քան a -ն: Ստացված հավաստությունը ցույց է տալիս, որ այս բոլոր նույնական տեղի ունենալի կարող:

Անում է մի դեպք՝ a -ն մնացածը չի թողնում միայն երեք թվեր: Այսինքն՝ H -ը արտադրանքով է կազմված ցիկլ: Դիցուք՝

$$(123) \in H :$$

Այլ դեպքում՝

$$(213) = (123)(123) \in H, \\ ((12)(3k))(213)((12)(3k))^{-1} = (12k) \in H, k > 3 :$$

Դժվար չէ ցույց տալ նաև, որ բոլոր

$$(12k), (3 < k < n)$$

տեսքի ցիկլերը ծնում են $A(n)$ -ը: Հետևապես՝ $H = A(n)$: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 37.14. Ապացուցեք, որ $A(n)$ -ը ծնվում է $(12k)$, $k = 3, 4, \dots, n$ ցիկլերով:

Այժմ դիտարկենք $S(n)$ -ի նորմալ բաժանարարները:

ՊՆԴՈՒՄ 37.15. $S(n)$ -ը $n > 4$ դեպքում $A(n)$ -ից բացի այլ ոչ արիվիայի նորմալ բաժանարարներ չունի:

Ապացույց. Եթե B -ն $S(n)$ -ի $A(n)$ -ից տարբեր ոչ արիվիայի նորմալ բաժանարար է, ապա $B \cap A(n) = \{1\}$: Հետևապես՝

$$S(n) = A(n) \times B :$$

Այստեղից սկզնիությամբն հետևում է, որ $|B| = 2$: Այժմ, եթե $B = \text{gr}(f)$, ապա f -ը տեղափոխելի է $S(n)$ -ի բոլոր տարրերի հետ: Յույց ստանք, որ դա հնարավոր չէ: Իսկույեա, քանի որ $n > 4$, ապա կգտնվեն իրարից տարբեր i, j, k, l քվեր: Եթե

$$a. f = (ij)(kl) \dots, \text{ ապա}$$

$$((ik)f)(i) = f((ik)(i)) = f(k) = l, (f(ik))(i) = (ik)f(i) = (ik)(j) = j :$$

Հետևապես՝ $(ik)f \neq f(ik)$:

$$b. \text{ Եթե } f = (ij) \dots \text{ և } k\text{-ն } f\text{-անշարժ է, ապա}$$

$$((ik)f)(k) = f((ik)(k)) = f(i) = j, (f(ik))(k) = (ik)(f(k)) = (ik)(k) = i :$$

Դարձյալ ունեցումք $(ik)f \neq f(ik)$: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 37.16. Նկարագրեք $S(n)$ խմբի ոչ արիվիայի նորմալ բաժանարարները, եթե $n = 2, 3, 4$:

37.3. *Տեղադրությունների խմբեր:* Տեղադրությունների խմբեր են կոչվում սիմետրիաների լրիվ խմբի, այսինքն՝ կամույսված A բազմության բոլոր տեղադրությունների $S(A)$ խմբի ենթախմբերը: Հետևյալ պնդումը ցույց է տալիս, որ այդ խմբերով, ըստ էության, ապավինում են բոլոր խմբերը:

ՊՆԴՈՒՄ 37.17. (*Հեյլիի բերանը*): Յուրադանշյալ խումբ իզամորֆ է տեղադրությունների արևել խմբի:

Ապացույց. Դիցուք՝ ունենք $(G, \cdot)$ խումբը: Մենք ցույց կառնք, որ այն իզամորֆ է $(S(G), \cdot)$ խմբի արևել ենթախմբին:

Անդգնենք $g \in G$: Դիցուք՝

$$f_g : x \mapsto xg, x \in G :$$

Յույց տանք, որ $f_g \in S(G)$:

Իսկապես, G -ի կամայական x ստորիի նախապատկերը xg^{-1} ստորն է, քանի որ

$$f_g(xg^{-1}) = (xg^{-1})g = x \cdot 1 = x :$$

Այսինքն՝ f_g -ն վրադրում է: Այն նաև տարադրում է, սրովհետև, եթե

$$f_g(x) = f_g(y), x, y \in G,$$

ապա $xg = yg$: Հետևապես՝ $x = y$:

Նշանակենք

$$G' = \{f_g | g \in G\} :$$

G' -ը $(S(A), \cdot)$ խմբի ենթախումբ է: Իսկապես, երևում են $g, h \in G$, ապա

$$f_g \cdot f_h = f_{gh} :$$

Իրոք,

$$(f_g \cdot f_h)(x) = f_h(f_g(x)) = f_h(xg) = xgh = f_{gh}(x), x \in G :$$

Այսինքն՝ G' -ի կամայական երկու անդամների արտադրյալը նորից պատկանում է G' -ին:

Այնուհետև՝

$$f_{g^{-1}} = (f_g)^{-1}, g \in G :$$

Իրոք,

$$(f_{g^{-1}} \cdot f_g)(x) = f_g(f_{g^{-1}}(x)) = xg^{-1}g = x \cdot 1 = x = \varepsilon(x) :$$

Հետևապես՝ $f_{g^{-1}} \cdot f_g = \varepsilon$: Սա էլ նշանակում է, որ $f_{g^{-1}}$ -ը f_g -ի հակադարձն է: Իսկ սա, իր հերթին, նշանակում է, որ G' -ը իր յուրաքանչյուր f_g անդամի հետ արաբանական է նաև նրա f_g^{-1} հակադարձը:

Այսպիսով՝ G' -ը բավարարում է ենթախումբ լինելու պայմաններին: Ուրեմն՝ այն $(S(A), \cdot)$ խմբի ենթախումբ է:

Այժմ պատրկենք

$$f : G \rightarrow G', f(g) = f_g, g \in G$$

արտապատկերումը: Այն վերադրում է:

Իսկապես, նախ սկսենայա է, որ այն վրադրում է:

Այնուհետև, այն նաև տարադրում է: Իրոք, երև $f(g) = f(h)$, ապա $f_g = f_h$:

Իսկ սա նշանակում է $f_g(x) = f_h(x), x \in G$: Այսինքն՝ $xg = xh$: Կամ՝ $g = h$:

Յույց տանք, որ f -ը նաև յուրաքանչյուրն է: Իսկապես,

$$f(gh) = f_{gh} = f_g \cdot f_h = f(g) \cdot f(h), g, h \in G :$$

□

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 37.18. Վերցրեք $\mathbb{C}(n)$ խումբը և Ջեյլիի բեռնման ճշված եղանակով այն ներկայացրեք որպես անդադրությունների խումբ:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 37.19. Ասկսույցներ, որ $S(n) = gr((12), (123 \dots n))$:

38. ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ԽԱՐԵՐ

38.1. *Լքիվ գծային խմբի ենթախմբերը:* Լքիվ գծային խումբը բավականին հարուստ է ենթախմբերով: Դիտարկենք դրանցից կարևորագույնները:

Դիցուք՝ K -ն կամայական դաշտ է: Մենք սպելեն դիտարկել ենք լքիվ գծային խմբի $SL(n, K)$ ենթախմբը՝ հաստի գծային խումբը: Մենք սպելեն գիտենք, որ այն նաև լքիվ գծային խմբի նորմալ բաժանալու է:

ՊՆԴՈՒՄ 38.1. $SL(n, K)$ բազմությունը $GL(n, K)$ խմբի նորմալ բաժանալու է:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 38.2. Ընմիջակամորեն, օգտակար միայն նորմալ բաժանալույի ստանդարտից, ստացույցեր, որ $SL(n, K) \triangleleft GL(n, K)$:

Նշանակենք $D(n, K)$ -ով K դաշտի վրա արված n -յո կարգի բոլոր անկյունագծային մատրիցների բազմությունը, այն մատրիցների, որոնց գլխավոր անկյունագծի վրա կանգնած են ոչ զրոյական ստորեր, իսկ մնացած տեղերում՝ զրոներ:

ՊՆԴՈՒՄ 38.3. $D(n, K)$ բազմությունը $GL(n, K)$ խմբի ենթախումբ է:

Ընդացույց. Ապացուցումը կատարել ինքնուրույն: □

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 38.4. Ինչի՞նչ է հավասար $SL(n, K)$ և $D(n, K)$ խմբերի հասումը:

Նշանակենք $T(n, K)$ -ով K դաշտի վրա արված n -րդ կարգի բոլոր *տոնկյունաձև* մատրիցների բազմությունը, այն մատրիցների, որոնց գլխավոր անկյունագծի վրա կանգնած են ոչ զրոյական ստորեր, անկյունագծից ներքև՝ զրոներ, իսկ անկյունագծից վերև՝ կամայական ստորեր:

ՊՆԴՈՒՄ 38.5. $T(n, K)$ բազմությունը $GL(n, K)$ խմբի ենթախումբ է:

Ընդացույց. Ապացուցումը կատարել ինքնուրույն: □

Նշանակենք $UT(n, K)$ -ով K դաշտի վրա արված n -յո կարգի բոլոր *միտևաձև* մատրիցների բազմությունը, այն մատրիցների, որոնց գլխավոր անկյունագծի վրա կանգնած են 1-եր, անկյունագծից ներքև՝ զրոներ, իսկ անկյունագծից վերև՝ կամայական ստորեր:

ՊՆԴՈՒՄ 38.6. $UT(n, K)$ բազմությունը $GL(n, K)$ խմբի ենթախումբ է:

Ընդացույց. Ապացուցումը կատարել ինքնուրույն: □

Դիտարկենք $GL(n, K)$ խմբի եւ մի ենթախումբ:

Հիշենք, որ կամայական A բառակառուցված մատրիցի շրջած մատրիցը նշանակվում է A' -ով:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 38.7. Ապացուցեք, որ կամայական A , B մատրիցների և C' հակադարձելի մատրիցի համար

$$\text{ա. } (AB)' = B'A' :$$

$$\text{բ. } (A^{-1})' = (A')^{-1} :$$

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 38.8. Կոմպոնենտ K դաշտի վրա ստիված n -րդ կարգի A մատրիցը կոչվում է *օրթոգոնալ*, եթե

$$AA' = A'A = I_n :$$

Նշանակենք $O(n, K)$ -ով K դաշտի վրա ստիված n -րդ կարգի բոլոր օրթոգոնալ մատրիցները բազմությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 38.9. $O(n, K)$ -ն $GL(n, K)$ խմբի ենթախումբ է:

Ապացույց. Ստանանումից եետևում է, որ օրթոգոնալ մատրիցները իակադարձելի են: Այնուետև, $\square$

$$(AB)' = B'A', \quad (A')^{-1} = (A^{-1})' :$$

Այժմ, եթե $A, B \in O(n, K)$, ապա

$$AB(AB)' = ABB'A' = AI_nA' = I_n :$$

$$A^{-1}(A^{-1})' = A^{-1}(A')^{-1} = (A'A)^{-1} = I_n^{-1} = I_n :$$

Այսպիսով՝ $AB, A^{-1} \in O(n, K)$: Ուրեմն՝ $O(n, K)$ -ն $GL(n, K)$ -ի ենթախումբ է: $\square$

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 38.10. $O(n, K)$ խումբը կոչվում է $GL(n, K)$ խմբի *օրթոգոնալ ենթախումբ*:

Կոմպլեքս րվերի դաշտի վրա դիտարկվում է ես մեկ մատրիցային խումբ: Նույնպես նշանակենք $\overline{A}$ -ով A կոմպլեքս մատրիցի *համարյաժ* մատրիցը, այն մատրիցը, որը ստացվում է A -ի յուրաքանչյուր տնդումը իր համարյաժով վադարինելուց:

Օրինակ,

$$\text{եթե } A = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ 2-i & 3 \end{pmatrix}, \text{ ապա } \overline{A} = \begin{pmatrix} 1-i & -i \\ 2+i & 3 \end{pmatrix} :$$

ՊՆԴՈՒՄ 38.11. Կոմպոնենտ A, B կոմպլեքս մատրիցների համար.

$$\text{ա. } \overline{\overline{AB}} = AB,$$

$$\text{բ. } \overline{A^{-1}} = \overline{A}^{-1} :$$

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: $\square$

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 38.12. Կոմպլեքս տնդումներով n -րդ կարգի A մատրիցը կոչվում է *ունիտար*, եթե

$$A\overline{A}' = \overline{A}'A = I_n :$$

Նշանակենք U_n -ով n -րդ կարգի բոլոր ունիտար մատրիցների բազմությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 38.13. U_n -ը $GL(n, \mathbb{C})$ խմբի ենթախումբ է:

Լեյպցույց. Իսկապես, n -րդ կարգի կոմպլուտան A, B ունիաւոր մատրիցներն իւմար ունենը.

$$AB\overline{AB}' = AB(\overline{A} \cdot \overline{B})' = AB\overline{B}'\overline{A}' = A1_n\overline{A}' = 1_n,$$

$$A^{-1}\overline{A^{-1}'} = A^{-1}(\overline{A}')^{-1} = (\overline{A}'A)^{-1} = 1_n^{-1} = 1_n:$$

Այսինքն՝ AB և A^{-1} մատրիցները նույնպես ունիաւոր են: Ուրեմն՝ իսկապես U_n -ը $GL(n, \mathbb{C})$ խմբի ենթախումբ է: $\square$

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 38.14. U_n խումբը կոչվում է $GL(n, \mathbb{C})$ խմբի *ունիաւոր ենթախումբ*:

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 38.15. K դուշալի վրա արվում n -րդ կարգի *սկալյար մատրից* է կոչվում n -րդ կարգի այն մատրիցը, որի անկյունագծի վրա կոնգնում է K դաշտի միւնիւն աւորքը, իսկ մնացած տեղերում՝ զրոն:

ՊԴՐՈՒՄ 38.16. *Կոմպլուտան դուշալի վրա արվում ա՛յ գրոյուկում սկալյար մատրիցների բազմաւթյանը այդ դուշալի վրա արվում լրիվ մատրիցային խմբի ենթախումբ է:*

Լեյպցույց. Ասպացուցումը կատարեր ինքնուրույն: $\square$

38.2. Մատրիցային խմբեր: Ուսումնասիրենք լրիվ գծային խմբի ենթախմբերին իզոմորֆ խմբերը:

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 38.17. Լրիվ գծային խմբի ենթախմբերին իզոմորֆ խմբերը կոչվում են *մատրիցային խմբեր*: Այսպիսով՝ $(G, \cdot)$ խումբը մատրիցային է, նշանակում է՝ գոյություն ունեն այնպիսի n բնական թիվ և այնպիսի K դաշտ, որ $(G, \cdot)$ խումբը իզոմորֆ է $GL(n, K)$ խմբի որեւէ ենթախմբին:

Անշուշտ, ոչ բոլոր խմբերն են մատրիցային խմբեր: Սակայն նման օրինակներ այս դասընթացի շրջանակներում չենք դիտարկում: Մեր խնդիրն է պարզել, թե մատրիցային են մեզ հայտնի որոշ խմբեր, թե՞ ոչ:

ՊԴՐՈՒՄ 38.18. *Կոմպլեքս թվերի արտադրյալային $\mathbb{C}^*$ խումբը 2-րդ աստիճանի իրական մատրիցային խումբ է:*

Լեյպցույց. Դիտարկենք

$$(46) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

անալի մատրիցների բազմաւթյանը: Դիցուք՝

$$f: \mathbb{C}^* \rightarrow GL(2, \mathbb{R})$$

արտապատկերումը $a + bi$ աչ գրոյուկում կոմպլեքս թվին համապատասխանության մեջ է դնում (46) մատրիցը: Այդ դեպքում f -ը կլինի իզոմորֆ ներդրում, որի սուտակերն է (46) անալի աչ գրոյուկում մատրիցների բազմաւթյանը: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 38.19. Կոմպակտն n ընտանիքի $S(n)$ խմբի խումբը մատրիցային խումբ է:

Լարսոնյց. Էրմիտյան n -րդ կարգի ունեցող մատրիցաների $M(n)$ բազմությունը, որոնց յուրաքանչյուր տողում և յուրաքանչյուր սյուն մեջ գրված է միայն մեկ նույն, իսկ մնացած տեղերում գրված են զրոեր: Այդպիսի մատրիցաների թիվը $n!$ է: Նրանց սյուշիչները հավասար են -1 կամ 1 : Հետևապես՝ դրանք հակասարժեքի մատրիցաներ են: Այսպիսով, մատրիցաները կարելի է գրել

$$(47) \quad c_{\alpha_1 \beta_1} + \dots + c_{\alpha_n \beta_n}$$

տեսքով, որտեղ

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_n \end{pmatrix} \in S(n) :$$

Հետևյալ հավասարությունը ցույց է տալիս, թե ինչպես են բազմապատկվում այդ մատրիցաները.

$$(48) \quad (c_{\alpha_1 \beta_1} + \dots + c_{\alpha_n \beta_n})(c_{\beta_1 \gamma_1} + \dots + c_{\beta_n \gamma_n}) = c_{\alpha_1 \gamma_1} + \dots + c_{\alpha_n \gamma_n} :$$

Դժվար չէ ստուգել նույն, որ

$$(c_{\alpha_1 \beta_1} + \dots + c_{\alpha_n \beta_n})^{-1} = c_{\beta_1 \alpha_1} + \dots + c_{\beta_n \alpha_n} :$$

Այսպիսով՝ $M(n)$ -ը $GL(n, K)$ լրիվ մատրիցային խմբի ենթախումբ է: Նրա տարրերը կոչվում են *տեղադրարկային-մատրիցաներ* կամ *մոնոմիալ մատրիցաներ*, իսկ $M(n)$ -ը կոչվում է *մոնոմիալ խումբ*:

Այժմ դիտարկենք հետևյալ տրամադրությունները.

$$f : S(n) \rightarrow M(n), f(\sigma) = c_{\alpha_1 \beta_1} + \dots + c_{\alpha_n \beta_n},$$

որտեղ

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_n \end{pmatrix}, \sigma \in S(n) :$$

Մենք ունենք վերադրում $S(n)$ և $M(n)$ խմբերի միջև: Միևնույն ժամանակ (48) հավասարությունից հետևում է, որ f տրամադրությունները իզոմորֆիզմ է $S(n)$ և $M(n)$ խմբերի միջև: $\square$

Ըստ էության, մենք կարող ենք գտնել նաև յուրաքանչյուր տեղադրարկային-մատրիցի ռոշիլը:

ՊՆԴՈՒՄ 38.20. Կոմպակտն $\sigma \in S(n)$ տեղադրարկային համար

$$|f(\sigma)| = \text{sgn } \sigma :$$

Լարսոնյց. Ապացուցումը կատարեն ինքնուրույն: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 38.21. Զուգարկային վերջավոր խումբ մատրիցային խումբ է:

Լնդացույց. Համաձայն Քեյլիի թեորեմի՝ յուրաքանչյուր վերջավոր A խումբ ի-գոմորֆ է վերջավոր բազմություն տեղադրությունների լրիվ խմբի ինչ-որ ենթախմբի։ Համաձայն 38.19 սեղմումն՝ տեղադրությունների լրիվ խումբն էլ իզոմորֆ է մաս-րիցային խմբի ինչ-որ ենթախմբի։ Բազմապատկելով սչյ իզոմորֆիզմները՝ մենք կստանանք A խմբի իզոմորֆ ենթախումբ մասրիցային խմբի մեջ։ $\square$

38.3. *Վոտորակագծային ֆունկցիաների խումբը և սրոյեկտիվ հաստիկ գծային խումբը։* Գիտարկենք K դաշտը և նրա վրա արված

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

տեսիի կոտորակագծային ֆունկցիաների D բազմությունը։

ՊՆԴՈՒՄ 38.22. $(D, \circ)$ զույգը խումբ է։

Լնդացույց. Իսկապես, եթե նույն

$$g(x) = \frac{a'x + b'}{c'x + d'}, \quad a'd' - b'c' \neq 0,$$

ուրիս անմիջական ստացումով կարգենք, որ

$$(49) \quad (f \circ g)(x) = \frac{(aa' + cb')x + (ba' + db')}{(ac' + cd')x + (bc' + dd')} :$$

Ընդ որում,

$$\begin{aligned} & (aa' + cb')(bc' + dd') - (ba' + db')(ac' + cd') = \\ & = a'd'(ad - bc) + b'c'(bc - ad) - (ad - bc)(a'd' - b'c') = 1 : \end{aligned}$$

Հետևապես՝ $f \circ g \in D$ ։ Եվ եթե

$$h(x) = \frac{dx + b}{-cx + a},$$

ուրիս $h \in D$ և

$$\begin{aligned} (f \circ h)(x) &= h(f(x)) = h\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right) \\ &= \frac{d \cdot \frac{ax+b}{cx+d} + b}{c \cdot \frac{ax+b}{cx+d} + a} = \frac{x}{1} = x = e(x) : \end{aligned}$$

Այսինքն՝ $f \circ h = e$ և ուրեմն՝ $f \circ h$ -ը նույնական ֆունկցիոն է։ Հետևապես՝ $h = f^{-1}$ ։ Գնդումն սարքացված է։ $\square$

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 38.23. Վոտորակում K դաշտի համար նրա վրա արված հաստիկ գծային խմբի ֆակտոր-խումբը՝ ըստ 1 սրոյեկտիվ սկալյար մասրիցներից կազմված նորմով բաժանաբարի, կոչվում է *սրոյեկտիվ հաստիկ գծային խումբ*։

Պրոյեկտիվ հատուկ գծային խումբը գրառվում է այսպես՝ $PSL(n, K)$: Այսպիսով՝ երե նշանակենք $S(n, K)$ -ով K դաշտի վրա արված սկալյար մատրիցների խումբը, ապա

$$PSL(n, K) = SL(n, K) / SL(n, K) \cap S(n, K) :$$

Դիտարկենք սլոյեկտիվ հատուկ գծային խմբի երկու կարևոր հատկություն:

ՊԼՆՈՒԽ 38.24. *Կամայական K դաշտի վրա արված երկրորդ կարգի մատրիցների սլոյեկտիվ հատուկ գծային խումբը իզոմորֆ է K -ի վրա արված կռառքակազմային ֆունկցիաների խմբին:*

Լկարցույց. Դիտարկենք

$$f : SL(2, K) \rightarrow D$$

արտասլոյեկտրումը, ուր

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

մատրիցին համապատասխանությամբ մեջ է դնում

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad ad - bc = 1$$

կռառքակազմային ֆունկցիան:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{pmatrix}$$

համապատասխանում, համեմատելով (50)-ի հետ, մենք տեսնում ենք, որ f արտասլոյեկտրումը համոմորֆիզմ է $SL(2, K)$ և D խմբերի միջև: Գտնենք նրա կորիզը:

Պարզ է, որ երե վերջենքեր կոմուտատիւն ոչ գլոյեկտր սկալյար մատրից, ապա նրա սլոյեկտրը նույնակամ արտասլոյեկտրումն է: Հսկառուկը, եթե

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = x,$$

ապա կունենանք

$$cx^2 + (d - a)x - b = 0 :$$

ճայնությոնը, որտեղ $ad - bc = 1$: Եթե այստեղ K դաշտն ունի երկուսից սովելի տարրեր, ապա դրոնք բոլորը երկուսից ոչ բարձր ստալիոննի համապատասխան արմատնեկ են: Ուրեմն՝ այդ համապատասխան բոլոր գործակիցները այնտար է հավասար լինեն գլոյեկտր: Այսինքն՝

$$a = d, b = c = 0 :$$

Իսկ եթե $K = \{0, 1\}$, ապա ստուգված ճայնությոն մեջ տեղադրելով $x = 0$ կատունումք $b = 0$ և $ad = 1$: Ենթադնալ $c = 0$ դկարում կունենումք $(d - a)x = 0$ կամ $d = a$: Իսկ եթե $c = 1$, ապա կունենումք $x^2 + (d - a)x = 0$: Ընդունելով $x = a$ կատունումք $a^2 + da - a^2 = 0$ կամ $1 = 0$, ինչը հնարավոր չէ: Ուրեմն՝ ճայնուկուն ֆունկցիային համապատասխանը սկալյար մատրից է:

Մնում է կիրառել հոմոմորֆիզմների յեորեմը:

□

Պարզվում է, որ համարյա միշտ սլոայնկսով հասուկ գծային խումբը սլարգ խումբ է:

ՊՆԴՈՒՄ 38.25. (Ժորդան-Դիրսոնի ընթերցում): Քաղաղությունը $PSL(2, \mathbb{Z}_2)$ և $PSL(2, \mathbb{Z}_3)$ ղեկավարի, $PSL(n, K)$ խումբը սլարգ խումբ է:

Ապացույց. Ապացուցումը տես, օրինակ, [7]:

□

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 38.26. Ապացուցեք, որ $SL(2, \mathbb{Q})$ խմբի մեջ.

ա. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ստորի կարգը հավասար է 4, իսկ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ստորի կարգը՝ 3:

բ. Յույց տվեք, որ $gr(A, B)$ խումբը անվերջ է:

գ. Կարո՞ղ է արելյան խմբի վերջավանջ կարգ ունեցող երկու տարրերով ծնվել անվերջ խումբ:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 38.27. Կառուցեք $S(3)$ խմբի ներկայացումը մատրիցային խմբի տեսքով՝ 38.19 պնդման մեջ նշված եղանակով:

39. ԱՐԵԼՅԱՆ ԽՄԲԵՐ

39.1. Արելյան խմբերը: Արելյան խմբերը կազմում են խմբերի տեսության կարևորագույն բաժիններից մեկը: Նախևառաջ նրանք ուշի են ընկնում իրենց լայն կիրառությամբ: Մինչև այժմ մեր դիտարկած բազմաթիվ կիրառություններում հանդիպող խմբերը հիմնականում արելյան էին: Իսկապես, կամայական օղակի և, մասնավորապես, դաշտի գումարային խումբը արելյան խումբ է: Արելյան է նաև կամայական դաշտի վրա արված վեկտորական տարածություն գումարային խումբը:

Արելյան խմբերի կառուցման հնարավորության է ասվա խմբերի ուղիղ արտադրյալի գործողությունը: Նախապես նշենք, որ վերջ հիշատակված երկու հիմնական կիրառություններում արելյան խմբերի համար օգտագործվում է գումարային գրառումը: Գումարային գրառում է գործածվում նաև կամայական արելյան խմբերի համար: Նման դեպքերում խմբերի ուղիղ արտադրյալի հասկացություն վախճարեն օգտագործվում է խմբերի ուղիղ գումարի հասկացությունը: A և B խմբերի ուղիղ գումարը նշանակվում է այսպես՝ $A \oplus B$:

ՊՆԴՈՒՄ 39.1. Արելյան խմբերի ուղիղ գումարը արելյան է:

Ապացույց. Դիտարկենք երկու արտադրյալների դեպքը: Դիցուք՝ $G = A \oplus B$: Այդ դեպքում

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (b, a),$$

որտեղ $a, c \in A, b, d \in B$: Նույն կերպ է տալուցովում նաև կամայական թվով գումարելիների դեպքը: □

Ահա ելման համարում այս հասկացությունը հնարավորություն է առկա մի կողմից՝ արվում արեւյան խմբերից առանց մոր արեւյան խմբեր, մյուս կողմից՝ համեմատաբար բոլոր արեւյան խմբի առամնախորհրդանշանը համակցվել նրա՝ ավելի պարզ տեսք ունեցող ենթախմբերի առամնախորհրդանշանը: Այս հնարքը մենք առաջիկայում բազմիցս կօգտագործենք:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 39.2. Արդյո՞ք վերլուծելի է ուղիղ գումարի ռացիոնալ բվերի գումարային խումբը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 39.3. Խմբի այն ատյանների բազմությունը, որտեղ ունեն վերջավոր կարգ, կոչվում է խմբի *սրտրերտկան մաս*:

Նշանակենք $P(A)$ -ով A խմբի սրտրերտկան մասը: Կոմպակտ խմբի սրտրերտկան մասը կարող է նրա ենթախմբի չլինել: Այլ է պատկերը արեւյան խմբերի դեպքում:

ՊՆԴՈՒՄ 39.4. Կոմպակտ արեւյան խմբի սրտրերտկան մասը նրա ենթախումբ է:

Ապացույց. Դիցուք՝ ունենք A արեւյան խումբը:

Նախ՝ $0 \in P(A)$: Հետևապես՝ $P(A)$ -ն դատարկ չէ:

Այնուհետև եթե $x, y \in P(A)$, ապա գոյություն ունեն այնպիսի m և n բնական բվեր, որ $mx = ny = 0$: Այստեղից կատանումք՝

$$(nm)(x + y) = nm \cdot x + nm \cdot y = 0 + 0 = 0:$$

$$m(-x) = -mx = -0 = 0:$$

Հետևապես՝ $x + y, -x \in P(A)$: Այսինքն՝ $P(A)$ -ն ենթախումբ է: □

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 39.5. Դիցուք՝ p -ն կոմպակտ սրտրի բիլ է: A խմբի x ատյանը կոչվում է p -ստոր, եթե

$$|x| = p^m, m \in \mathbb{N}:$$

ՊՆԴՈՒՄ 39.6. Կոմպակտ A արեւյան խմբի խումբը նրա բոլոր p -ստորերի A_p բազմությունը կազմում է A -ի ենթախումբ:

Ապացույց. Ապացուցումը նման է նախորդ պնդման ապացուցմանը: □

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 39.7. ա. Ապացուցեք նախադր պնդումը:

բ. Յուրջ ավեր, որ կոմպակտ խմբի p -ստորերի բազմությանը կարող է նրա ենթախումբ չլինել:

Հասկանալի է, որ խմբի p -ստորերը ընկած են նրա սրտրերտկան մասի մեջ:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 39.8. Խումբը կոչվում է *ռառնց սրտրոն խումբ*, եթե նրա սրտրերտկան մասը կազմվում է միայն այդ խմբի միավորից:

Կոմպակտ սրտրոն խմբեր են բոլոր բիլային գումարային խմբերը:

ՊՆԴՈՒՄ 39.9. *Արեկյան խմբի ֆախտուր-խումբը՝ լստ նրա պայրերական մասի, առանց սրբանան խումբ է։ Այսինքն՝ կամայական Λ արեկյան խմբի համայն $A/P(\Lambda)$ խումբը առանց սրբանան խումբ է։*

Ապացույց. Դիցույ՝ m բնական թվի համար $m(x + P(\Lambda)) = P(\Lambda) : \forall x$ դեպքում $m.x + P(\Lambda) = P(\Lambda)$, $m.x \in P(\Lambda) : \forall x$ անհատական $m.x$ ստորր պայրերական է։ Այսինքն՝ ինչ-որ n բնական թվի համար $n.m.x = 0$ ։ Իսկ դա նշանակում է, որ x ստորրը նույնպես պայրերական է։ Այսինքն՝ $x \in P(\Lambda)$ ։ Ուրեմն՝ $A/P(\Lambda)$ խմբում միայն զրոյական $P(\Lambda)$ ստորն է պայրերական։ Ուրեմն՝ այն առանց սրբանան խումբ է։ $\square$

39.2. *Ֆիկային խմբերի վերլուծությունները։* Արեկյան խմբերը լայն կիրառություն ունեն և օգտագործվում են նաև կամայական խմբի կառույցի և առանձնախորշային մեկ նաև այն սրբանում, որ խմբի յուրաքանչյուր ստորքով ծնված ցիկլային խումբը արեկյան է։

Կուստերների ցիկլային խմբերի ուսումնասիրություն՝ դրանք ներկայացնելով ավելի սրբալ խմբերի ուղիղ գումարի անսրբալ։

ՊՆԴՈՒՄ 39.10. *Դիցույ՝ m բնական թվը հախտուր է n և k փախտուր՝ լստ սրբալ բնական թվերի սրբանային։ Այդ վերլուծում m կարգի ցիկլային խումբը հախտուր է իր n և k կարգի ցիկլային ենթախմբերի ուղիղ գումարին։ Այսինքն՝*

$$\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_k :$$

Նման վերլուծությունը միակն է։

Ապացույց. Ապացուցանք կուստերն ինքնուրույն։ $\square$

Դիտարկենք n բնական թվի կամայական վերլուծությունը.

$$n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r} :$$

ՊՆԴՈՒՄ 39.11. *n -յոց կարգի ցիկլային խումբը վերլուծվում է համապատասխանաբար $p_1^{k_1}, \dots, p_r^{k_r}$ կարգեր անհատ ցիկլային ենթախմբերի ուղիղ գումարին։ Այսինքն՝*

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_r^{k_r}} :$$

Ապացույց. Ապացուցանք կուստերն ինքնուրույն։ $\square$

Չպետք է կարծել, սակայն, որ լուրջ արեկյան խմբերն են վերլուծվում այլ խմբերի ուղիղ գումարին։

ՊՆԴՈՒՄ 39.12. *Կամայական p սրբալ թվի համար p^r կարգ անհատ ցիկլային խումբը անվերջադեմի է խմբերի ուղիղ գումարին։*

Ապացույց. Բավական է նկատել, որ եթե $A = \text{gr}(a)$, $|a| = p^r$, ապա A -ի թույլ ենթախմբերը կազմում են այսպիսի մի շղթա.

$$\begin{aligned} A &= \text{gr}(a) \supset \text{gr}(pa) \supset \text{gr}(p^2a) \supset \cdots \supset \text{gr}(p^i) \supset \text{gr}(p^{i+1}) \supset \cdots \\ &\cdots \supset \text{gr}(p^{r-1}) \supset \text{gr}(p^r) = \{0\} : \end{aligned}$$



ՊՆԴՈՒՄ 39.13. *Կոմպակտն ունի զիկլոյին խումբը ունի բաժանելի է ռադիկալի:*

Ապացույց. Կիցուք՝ $\mathbb{Z}$ անվերջ զիկլոյին խումբը վերածվել է իր ոչ գրայական A և B ենթախմբերի գումարի աւարով՝

$$\mathbb{Z} = A + B :$$

Քանի որ A և B ենթախմբերը նույնպէս զիկլոյին են, ապա կունենանք՝

$$A = \text{gr}(a), B = \text{gr}(b), a, b \in \mathbb{Z} :$$

ab ոչ գրայական ամբողջ թիվը սլասկսնում է A և B ենթախմբերից յուրաքանչյուրին և հետևապէս՝ նրանց համամբ: Այդ սլասածառով $A + B$ գումարը ուղիղ չէ: □

39.3. *Արեւյան p -խմբեր:* Արեւյան արեւյան խմբերի նկարագրութեանից առաջ անհրաժեշտ է ուսումնասիրել արեւյան p -խմբերը: Նախ կատարենք հետեւյալ կարեւոր դիտարկումը:

Անք վիտենք, որ վերջուկոր խմբի յուրաքանչյուր ստորի կարգը ուղի խմբի կարգի բաժանարարն է: Մասնավարասեա, յաւարանչյուր p -խումբը կարող է սլաստունակել միայն p -ստորերը, այսինքն՝ տարրեր, որոնցից յուրաքանչյուրի կարգը p -ի ոչ բազմապատկան աւարիճան է: Այդպիսով ճշմարիտ է հակառակ պնդումը: Այսինքն՝ եթե խումբը սլարտունակում է միայն p -ստորերը, ապա այն սլաստունակում է լինել p -խումբ: Այս հարցի պատասխանը արեւյան խմբերի համար ստվա է հետեւյալ հասկումութեանը:

ՊՆԴՈՒՄ 39.14. *(Կուշտ լեռներ):* Եթե վերջուկոր արեւյան խումբը պարամունակում է միայն p -ստորերը, ապա այն p -խումբ է:

Ապացույց. Կիրառենք ինդուկցիա՝ ըստ խմբի կարգի:

Ինդուկցիայի բազիսը՝ $n = 1$: Ենթադրութեանը ակնհայտորեն ճշմարիտ է:

Ինդուկցիոն քայլը՝ n -ից վաղը կարգ ունեցող խմբերի համար ենթադրութեանը ճշմարիտ է: Ապացուցենք, որ այն ճշմարիտ է նաև n կարգն ունեցող A արեւյան խմբի համար:

Արեւյան A խմբի որևէ ոչ գրայական a ստոր: Եթե $A = \text{gr}(a)$, ապա ակնհայտորեն A -ի կարգը p -ի աւարիճան է: Իսկ եթե $A \neq \text{gr}(a)$, ապա համաձայն ինդուկցիոն ենթադրութեան՝ $A/\text{gr}(a)$ և $\text{gr}(a)$ խմբերի կարգերը p թվի աւարիճաններ են:

$$|A/\text{gr}(a)| = p^i \text{ և } |\text{gr}(a)| = p^j :$$

Այդ դեպքում, համաձայն Լագրանժի թեորեմի, կունենանք՝

$$|A| = p^{i+j} :$$



Վերջավոր սրբյան p -խմբի օրինակներ են ցիկլային p -խմբերը՝

$$\mathbb{Z}_{p^i}, i = 1, 2, \dots$$

խմբերը: Սրբյան p -խմբեր են նաև ճշված խմբերի բոլոր ենարավոր ուղիղ սրբաաղ-
բյալները: Կա՞ն արդյոք վերջավոր սրբյան խմբեր բացի այդ խմբերից: Այս կարևոր
խնդրի պատասխանը ստացվում է հետևյալ նաակաթյունից: Մյուսմամանակ՝ նրա-
նում կաատարվում է վերջավոր սրբյան p -խմբերի լիակատար նկարագրությունը:

ՊԵՂՈՒՄ 39.15. Կամայական վերջավոր սրբյան p -խումբ վերլուծվում է ցիկ-
լային p -խմբերի ուղիղ գումարի:

Ապացույց. Կամայական վերջավոր սրբյան խմբի կարգն է p^n , որտեղ n -ը
բնական թիվ է: Պնդման ապացուցումը կատարենք ինդուկցիայով՝ ըստ այդ n բնա-
կան թվի:

Ինդուկցիայի բազիսը՝ $n = 1$: Այս դեպքում խմբի կարգը կլինի p , այսինքն՝
խումբը կլինի իզոմորֆ $\mathbb{Z}_p$ խմբին և ինքն էլ կլինի ցիկլային:

Ինդուկցիոն րայրը: Դիցուք՝ ինդուկցիոն ենթադրույունը ճշմարիտ է այն խմբե-
րի նամար, որոնց կարգն է p^k , $k < n$, և ցույց տանք, որ այն ճշմարիտ կլինի նաև
այնպիսի խմբերի նամար, որոնց կարգը p^n է:

Իսկապես, դիցուք՝ A վերջավոր սրբյան խմբի կարգն է p^n : Վերցնենք նրա
որևէ մարսիմալ B ենթախումբ. ենթախումբ, որի և A -ի միջև ույ ենթախումբ չկա:
 B -ի կարգը կլինի p^{n-1} : Իսկապես, եթե ուղղակի չլինի, ապա բավական է դիտարկել
 A/B խումբը և վերցնել նրա ոչ ալիլիալ C/B ենթախումբը: A -ի C ենթախումբը
ընկած կլինի A և B խմբերի միջև և նրանց հալիաաար չի լինի. նակասություն:

Համաձայն ինդուկցիոն ենթադրություն՝ B խումբը վերլուծվում է իր ցիկլային
ենթախմբերի ուղիղ գումարի:

$$(50) \quad B = D_1 \oplus \dots \oplus D_m,$$

որտեղ D_i -ն p^{t_i} կարգի ցիկլային խումբ է, և ունի d_i ծնորդը, $|d_i| = p^{t_i}$, $i = 1, \dots, m$: Ընդ որում, կարելի է արսաղլիչների սեղավորիման միջոցով հասնել
նրան, որ ունենանք.

$$t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_{m-1} \geq t_m :$$

Անհավասարությունների այս շղթայից հետևում է, որ կամայական γ ամբողջ թվի
նամար

$$(51) \quad \gamma d_r = 0 \Rightarrow \gamma d_{r+i} = 0, i = 1, \dots, m-r :$$

Այժմ, քանի որ B -ն մարսիմալ է A -ի մեջ, ապա ինչպիսի $a \in A - B$ աարը էլ
վերցնենք, կստանանք՝

$$(52) \quad pa \in B \text{ և } \text{gr}(a) + B = A :$$

Հաշվի տոնելով (50) նավասաթյունը՝ մենք կարող ենք B -ի pa աարի հա-
մար միարժեքորեն ընարել այնպիսի $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ամբողջ թվեր, որ

$$(53) \quad pa = \alpha_1 d_1 + \dots + \alpha_m d_m,$$

$$0 \leq \alpha_i < p^{t_i}, i = 1, \dots, m :$$

Ընդ որում, α ստորիք կտրելի է քնտրել այնպես, որ (53) վերլուծության մեջ ոչ գրայական գործակիցները չլինեն $\mathcal{I}$ -ի քնտրված բազմապատիկներ: Իսկապես, եթե արված α ստորիքի համար ինչ-որ

$$\alpha_j = \beta_j p^s, \quad (\beta_j, p) = 1, \quad \alpha_j \neq 0, \quad s \geq 1,$$

սարս դիտարկելով B -ին չստատկանող

$$a' = a - \beta_j p^{s-1} d_j$$

ստորք, և նկատի ունենալով (53)-ը՝ կատանանք՝

$$pa' = \alpha_1 d_1 + \dots + \alpha_{j-1} d_{j-1} + \alpha_{j+1} d_{j+1} + \dots + \alpha_m d_m :$$

Այս հնարքը կրկնելով այնքան անգամ, ինչքան գործակիցներ (53) վերլուծության մեջ կլինեն $\mathcal{I}$ -ի բազմապատիկներ, մենք ի վերջո, կունենանք մի վերլուծություն, որի բոլոր ոչ գրայական գործակիցները կլինեն փոխադարձաբար սրագ $\mathcal{I}$ -ի հետ:

Եթե ոչ գրայական գործակիցներ ընդհանրապես չլինեն, այսինքն՝ բոլոր գործակիցները լինեն գրայական, ապա pa -ն նույնպես կլինի գրո և A -ն կլինի $D_1, \dots, D_m$ և $\text{gr}(a)$ ցիկլոցին խմբերի ուղիղ գումար:

Այդ սրածառով դիտարկենք այն դեպքը, երբ (53) վերլուծությունը տնի ոչ գրայական և $\mathcal{I}$ -ի հետ փոխադարձաբար սրագ գործակիցներ: ‘Իիցուր’ α_r -ը դասնցից առաջինն է: Այդ դեպքում

$$(54) \quad pa = \alpha_r d_r + \dots + \alpha_m d_m :$$

Հաշվի առնելով այն, որ $(\alpha_r, p) = 1$, կգտնենք այնպիսի u սամրոջ թիվ, որ

$$\alpha_r \cdot u \equiv 1 \pmod{p} :$$

Նշանակենք $a' = ua$: (54)-ից կատանանք՝

$$(55) \quad pa' = d_r + \alpha'_{r+1} d_{r+1} + \dots + \alpha'_m d_m :$$

Կտան՝

$$d_r = pa' - \alpha'_{r+1} d_{r+1} - \dots - \alpha'_m d_m :$$

Որեմն՝

$$D_r \subseteq \text{gr}(a') + \sum_{i>r} D_i :$$

Հետևապես՝

$$(56) \quad A = \text{gr}(a') + B = \text{gr}(a') + \sum_{i \neq r} D_i :$$

Յուրջ տանք նույն, որ (56)-ի աջ մասի երկու գումարելիների հաաումը հավասար է գրայի: Իսկապես, վերցնենք այդ հաաումն c ստորք: Եթե $c = \beta a'$ և β -ն չի բաժանվում $\mathcal{I}$ -ի, ապա $c \notin B$ և, որեմն, $c \notin \sum_{i \neq r} D_i$:

Դիցուր՝ $c = kpa' \neq 0$: Այդ դեպքում, նկատի ունենալով (55)-ը, կստանանք՝

$$c = kd_r + k\alpha'_{r+1} d_{r+1} + \dots + k\alpha'_m d_m :$$

Քանի որ $c \neq 0$, ուստի, համաձայն (51)-ի, նաև $kd_r \neq 0$:

Այժմ, եթե $c \in \sum_{i \neq r} D_i$, ուստի կստանանք նաև $kd_r \in \sum_{i \neq r} D_i$, և քանի որ

$$D_r + \sum_{i \neq r} D_i$$

գումարը ուղիղ է, ուստի սկսած է, որ $kd_r = 0$: Ստուգվեց հակասություն: Հետևապես՝ $c = 0$ է (56) գումարը խկապես ուղիղ է: $\square$

39.4. Վերջավոր արեկյան խմբեր: Այժմ ունենենք վերջավոր արեկյան խմբերի մասնամոսկությունը:

ՊԼՂՈՒԽ 39.16. *Յուրաքանչյուր վերջավոր արեկյան խումբ վեր է լուծվում իր մուսխմուլ p -ենրխխմբերի ուղիղ գումարի:*

Ապուցույց. Դիցուք՝ $p_1, p_2, \dots, p_k$ թվերը A վերջավոր խմբի կարգի բաժար սխաբգ արտաաղիչներն են: Եթե $a \in A$ և

$$n = |a| = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

որտեղ $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ սուրբերը ոչ բուցասական սմբաղջ թվեր են, ուստի $n/p_i^{\alpha_i} a \in A_{p_i}$, $i = 1, \dots, k$ և

$$gr(a) = gr(n/p_1^{\alpha_1}) + \cdots + gr(n/p_k^{\alpha_k}) :$$

Հետևապես՝

$$A = A_{p_1} + \cdots + A_{p_k} :$$

Մյուս կողմից,

$$A_{p_i} \cap (A_{p_1} + \cdots + A_{p_{i-1}} + A_{p_{i+1}} + \cdots + A_{p_k}) = \{0\} :$$

Ուրեմն՝

$$A = A_{p_1} \oplus \cdots \oplus A_{p_k} :$$

Ուրեմն՝ սնդման մեջ նշված վերլուծությունը սեղի ունի: $\square$

Վերջավոր արեկյան խմբերի կարեոր օրինակներ են վերջավոր ցիկլային խմբերը: Պարզ է, որ կազմելով սյղ խմբերի ուղիղ գումարները՝ մենք նորից կստանանք վերջավոր արեկյան խմբեր: Ընտ սխաբգվում է, որ սյղ կերպ ստացվում են բոլոր վերջավոր արեկյան խմբերը:

ՊԼՂՈՒԽ 39.17. *(Վերջավոր արեկյան խմբերի հիմնական թեսերմը): Յուրաքանչյուր վերջավոր արեկյան խումբ վերջավոր ցիկլային խմբերի աղիղ գումար է:*

Ապուցույց. Իրականում մենք կարող ենք սուլուցուցել հետևյալ՝ ուվելի ումեղ ապուցումը: $\square$

ՊԼՂՈՒԽ 39.18. *Յուրաքանչյուր վերջավոր արեկյան խումբ վերլուծվում է սյն-սղիսի ցիկլային խմբերի ուղիղ գումարի, սրաեց կարգերը սխաբգ թվերի աաաիծաններ են:*

Ապուցույց. Բավական է կիրառել 39.15 և 39.16 սնդումները: $\square$

40. ԽՄԲԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

40.1. Խմբի կենսայանը: Իհարկե, խումբը կարող է տեղավորված լինել, սակայն նրա տառնձին տարրեր կարող են իրար հետ լինել տեղավորված: Ուշադրության արժանի են խմբի այն տարրերը, որոնք տեղավորված են խմբի յուրաքանչյուր տարրի հետ: Այդպիսին է, օրինակ, խմբի միավորը: Կո՞ խմբի մեջ միավորից տարրեր տալով, որը տեղավորված է խմբի մնացած բոլոր տարրերի հետ: Այս հարցադրումը հնարավորություն է ստվիս յուրաքանչյուր խմբում առանձնացնելու մի կարևոր ենթախումբ և դիսարկելու խմբերի մի կարևոր դաս:

ՄԱՀՄԱՐՈՒՄ 40.1. Խմբի կենտրոն է կոչվում նրա այն տարրերի բազմությունը, որոնք տեղավորվելի են այդ խմբի բոլոր տարրերի հետ:

$(G, \cdot)$ խմբի կենտրոնը նշանակվում է $C(G)$ -ով: Այսպիսով՝

$$C(G) = \{a \in G \mid ax = xa, x \in G\} :$$

ԴՆԴՈՒՄ 40.2. Խմբի կենտրոնը նրա նարմալ բաժանուրար է: Այսինքն՝ կամայական $(G, \cdot)$ խմբի համար

$$C(G) \triangleleft G :$$

Ապացույց. Դիցուք՝ $a, b \in C(G)$, $x, y \in G$: Այդ դեպքում՝ $ax = xa$, $bx = xb$: Հետևապես՝

$$(ab)x = axb = x(ab), a^{-1}x = xa^{-1}, (y^{-1}ay)x = ax = xa = x(y^{-1}ay) :$$

Այսինքն՝ $ab, a^{-1}, y^{-1}ay \in C(G)$: Ուրեմն՝ $C(G) \triangleleft G$: □

Հասկանալի է, որ G խումբը արելյան է այն և միայն այն դեպքում, եթե նրա կենտրոնը համընկնում է այդ խմբի հետ: Հաշվենք որոշ ոչ արելյան խմբերի կենտրոնները:

Դիսարկենք տեղադրությունների խմբերը: Հասկանալի է, որ $S(2)$ և $A(2)$, $A(3)$ խմբերը արելյան են և, ուրեմն, համընկնում են իրենց կենտրոնների հետ:

ԴՆԴՈՒՄ 40.3. Եթե $n \geq 3$, ապա՝

$$C(S(n)) = \{1\} :$$

Այսինքն՝ սիմետրիաների լրիվ խումբը $n \geq 3$ դեպքում կենտրոն չունի:

Ապացույց. Վերցնենք n -ը չգերազանցող և իրարից տարբեր i, j, k բնական թվերը: Դիցուք՝ n աստիճանի f տեղադրություն վերլուծությունը անկախ ցիկլերի ունի հետևյալ տեսքը՝ $f = (ij \dots) \dots$: Այդ դեպքում՝

$$(f(ik))(i) = (ik)(f(i)) = (ik)(j) = j,$$

$$((ik)f)(i) = f((ik)(i)) = f(k) \neq j :$$

Հետևապես՝

$$f(ik) \neq (ik)f :$$

Այսինքն՝ $S(n)$ -ի կենտրոնին սլավականող տարրը այնտեղ է լինի միայն նրա միավոր տեղադրությունը: □

$A(n)$ նշանակալի խումբը $n < 4$ դեպքերում աբելյան է և, ուրեմն, համընկնում է իր կենտրոնի հետ: Պարզվում է, որ մնացած բոլոր դեպքերում $A(n)$ -ը նույնպես կենտրոն չունի:

ՊՆԴՈՒՄ 40.4. Եթե $n \geq 4$, ապա

$$C(A(n)) = \{1\} :$$

Այսինքն՝ նշանակալի խումբը $n \geq 4$ դեպքում կենտրոն չունի:

Ապացույց. Վերցնենք n -ը չգերազանցող և իրարից տարբեր i, j, k, l բնական թվերը: Դիցուք՝ n տատիճանի f զույգ տեղադրության վերլուծությունը անկախ ցիկլերի ունի հետևյալ տեսքը՝ $f = (ij \cdots) \cdots$: Այդ դեպքում՝

$$(f(jkl))(i) = (jkl)(f(i)) = (jkl)(j) = k,$$

$$((jkl)f)(i) = f((jkl)(i)) = f(i) = j :$$

Հետևապես՝

$$f(jkl) \neq (jkl)f :$$

Այսինքն՝ $A(n)$ -ի կենտրոնին սխալկանող տարրը պետք է լինի միայն նրա միավոր տեղադրությունը: $\square$

Դիտարկենք մատրիցային խմբերի կենտրոնները:

ՊՆԴՈՒՄ 40.5. Լքիվ մատրիցային խմբի կենտրոնը սկալյար մատրիցաների խումբն է: Այսինքն՝

$$C(GL(n, K)) = S(n, K) :$$

Ապացույց. Ամմիջական ստուգումով կարելի է համոզվել, որ մատրիցը թե՛ ա-ջից, թե՛ ձախից սկալյար մատրիցով բազմապատկել նշանակում է այդ մատրիցի յուրաքանչյուր տնդամը բազմապատկել սկալյար մատրիցի ունկյունագծի վրա կանգնած տարրով: Հետևապես՝ սկալյար մատրիցը առնվազնից է յուրաքանչյուր մատրիցի հետ:

Հակառակը, դիցուք՝

$$A = (a_{ij})_n \in C(GL(n, K)) :$$

Այսինքն՝ A -ն առնվազնից է n -րդ կարգի յուրաքանչյուր հակադարձելի մատրիցի հետ: Մասնավորապես,

$$At_{ij} = t_{ij}A :$$

Այստեղից կստանանք.

$$a_{ij} = 0, \text{ եթե } i \neq j \text{ և } a_{ii} = a_{jj}, \text{ որտեղ } i, j = 1, 2, \dots, n:$$

$\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 40.6. Ապացուցեք, որ եթե $|K| \neq 2$, ապա

$$C(T(n, K)) = S(n, K) :$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 40.7. Գտնեք $SL(n, K)$ խմբի կենտրոնը:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 40.8. Կոմպոն $(K, +, \cdot)$ -ը դառա է: Ուսումնասիրեք

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in K, \alpha \neq 0 \right\}$$

մտարիցային խումբը: Աստիճաններ, որ եթե $|K| \neq 2$, ապա այն կենտրոն չունի:

40.2. Նիպոտենտ խմբեր: Խմբի կենտրոնի գոտավորը հնարավորություն է տալիս դիտարկելու խմբերի մի կտրված դաս: Նույն ներմուծենք մի հասկացություն, որը սերտորեն կապված է խմբի կենտրոնի հետ:

Խմբի ստորերի տեղափոխելիության խնդիրը դիտարկենք մի այլ տեսանկյունով: Լեյնհայտ է, որ $(G, \cdot)$ խմբի կամայական a և b ստորերի տեղափոխելիության $ab = ba$ պայմանը համարժեք է

$$a^{-1}b^{-1}ab = 1$$

պայմանին: Պարզվում է, որ վերջին հավասարության ձախ մասում գրված $a^{-1}b^{-1}ab$ արտահայտությունների բազմությունը, սակայն ճշգրիտ՝ այդ բազմությամբ ծնված ենթախումբը շատ մեծ դեր ունի խմբի բնութագրման և, ընդհանրապես, նրա ուսումնասիրության խնդրում:

ՄԱՀԱՄԱՆԻՄ 40.9. $(G, \cdot)$ խմբի a և b ստորերի կոմուտատոր է կոչվում նրա $a^{-1}b^{-1}ab$ տարբը: a և b ստորերի կոմուտատորը նշանակվում է՝ $[a, b]$: Այսպիսով՝

$$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab :$$

Հասկանալի է, որ $(G, \cdot)$ խմբի կամայական a և b ստորերի համար

$$ab = ba[a, b] :$$

Պարզ է նաև, որ a և b ստորերը տեղափոխելի են այն և միայն այն դեպքում, եթե նրանց կոմուտատորը հավասար է խմբի միավորին:

ՊԵՐՈՒՄ 40.10. Դիցուք՝ H -ը $(G, \cdot)$ խմբի նորմալ բաժանարարն է: $(G, \cdot)$ խմբի a և b ստորերը տեղափոխելի են ըստ H մոդուլի այն և միայն այն դեպքում, եթե $[a, b] \in H$:

Արդյունք. Իսկապես,

$$aHbH = bHaH \Leftrightarrow abH = baH \Leftrightarrow [a, b]H = H \Leftrightarrow [a, b] \in H :$$

□

ՊԵՐՈՒՄ 40.11. Դիցուք՝ H -ը $(G, \cdot)$ խմբի նորմալ բաժանարարն է, $a \in G$: Այդ պայմանով $aH \in C(G/H)$ այն և միայն այն դեպքում երբ G -ի կամայական x ստորի համար $[a, x] \in H$:

Արդյունք. Իսկապես,

$$aH \in C(G/H), x \in G \Rightarrow aHxH = xHaH \Rightarrow axH = xaH \Rightarrow [a, x] \in H :$$

Հակառակը. նույն կերպ ցույց կաանք, որ G -ի կամայական x ստորի համար՝ եթե $[a, x] \in H$, ապա $aH \in C(G/H)$ □

Այժմ վերցնենք $(G, \cdot)$ խմբի $C'(G)$ կենտրոնը: Այն անվանենք նաև խմբի առաջին կենտրոն և նշանակենք $C_1(G)$ -ով: Մենք գիտենք, որ այն արվում խմբի նորմալ բաժանարար է: Հետևապես՝ կարող ենք կազմել $G/C_1(G)$ ֆակտոր-խումբը: Այն նույնպես ունի իր կենտրոնը: Հասկանալի է, որ G խմբում կգտնվի մի $C_2(G)$ ենթախումբ, որի համար

$$(57) \quad C(G/C_1(G)) = C_2(G)/C_1(G) :$$

ՄԱՀԱՄԱՐՈՒՄ 40.12. (57) սլայմանով որոշվող $C_2(G)$ ենթախումբը կոչվում է $(G, \cdot)$ խմբի *երկրորդ կենտրոն*:

ՊԼՆՈՒՄ 40.13. *Խմբի երկրորդ կենտրոնը այդ խմբի նորմալ բաժանարար է՝*

$$C_2(G) \triangleleft G :$$

Ապացույց. Կուտարեն ինքնուրույն: □

Քանի որ $(G, \cdot)$ խմբի երկրորդ կենտրոնը այդ խմբի նորմալ բաժանարար է, ապա կարող ենք կազմել $G/C_2(G)$ ֆակտոր-խումբը և առանսկ այդ խմբի կենտրոնը: Եթե G խմբի $C_3(G)$ ենթախմբի համար $C'(G/C_2(G)) = C_3(G)/C_2(G)$, ապա B -ն այդ խմբի երրորդ կենտրոնն է և այլն: Դիցուք՝ արդեն ստիմանել ենք $(G, \cdot)$ խմբի $C_i(G)$ i -րդ կենտրոնը, որը նրա նորմալ բաժանարար է: Մենք կարող ենք կազմել $G/C_i(G)$ ֆակտոր-խումբը: Դիցուք՝

$$C_{i+1}(G)/C_i(G) = C'(G/C_i(G)) :$$

$C_{i+1}(G)$ -ն անվանենք G խմբի $i+1$ -րդ կենտրոն: Պարզ է, որ $C_{i+1}(G) \triangleleft G$:

Այսպիսով՝ յուրաքանչյուր $(G, \cdot)$ խմբի համար սենք նրա կենտրոնների

$$C_1(G) \subseteq C_2(G) \subseteq \dots \subseteq C_i(G) \subseteq C_{i+1}(G) \subseteq \dots$$

հաջորդականությունը: Կետևանալով, թե՞ ոչ այս հաջորդականությունն որևէ անդամը արված $(G, \cdot)$ խմբին: Այս հարցի դրական պատասխանը բնութագրում է խմբերի մի կարևորագույն դաս:

ՄԱՀԱՄԱՐՈՒՄ 40.14. Խումբը կոչվում է *նիլպոտենտ*, եթե այն հավասար է իր որևէ կենտրոնին: Այսինքն՝ $(G, \cdot)$ խումբը նիլպոտենտ է՝ նշանակում է գոյություն ունի այնպիսի մի k բնական թիվ, որի համար

$$G = C_k(G) :$$

Հասկանալի է, որ յուրաքանչյուր արելյան խումբ նիլպոտենտ է:

Դիտարկենք թվատերմինների Q խումբը: Նրա առաջին կենտրոնն է՝ $\{1, -1\}$.

$$C(Q) = \{1, -1\} :$$

Քանի որ $Q/\{1, -1\}$ խումբը արելյան է, ապա

$$C(Q/\{1, -1\}) = Q/\{1, -1\} :$$

Հետևապես՝ $C_2(Q) = Q$: Այսինքն՝ Q -ն նիլպոտենտ է:

Պարզ է, որ $n > 2$ դեպքում $S(n)$ խումբը նիլպոտենտ չէ:

ՊԼՂՈՒՄ 40.15. Նիկոտանա խմբի ենթախումբը մույնպես նիկոտանա է:

Ապացույց. Ինդուկցիայով՝ բառ k -ի, ցույց առնք, որ կամայական $(G, \cdot)$ խմբի և նրա A ենթախմբի համար

$$C'_k(A) \supseteq C'_k(G) \cap A :$$

Ինդուկցիայի բազիսը՝ $k = 1$: Այդ դեպքում ակնհայտ է, որ $C'(A) \supseteq C'(G) \cap A$: Ինդուկցիոն քայլը՝ k բնական թվի համար ունենք՝

$$C'_k(A) \supseteq C'_k(G) \cap A :$$

Ցույց առնք, որ

$$C'_{k+1}(A) \supseteq C'_{k+1}(G) \cap A :$$

Դիցուք՝ $a \in C'_{k+1}(G) \cap A$: Այդ դեպքում, համաձայն 40.11 պնդման, G -ի կամայական x ատրքի համար $[a, x] \in C'_k(G)$: Քանի որ ունենք նաև $a \in A$, ապա $[a, x] \in A$: Ուրեմն՝ $[a, x] \in C'_k(G) \cap A$: Այստեղից, հաշվի առնելով ինդուկցիոն ենթադրությունը, A բազմության յուրաքանչյուր x ատրքի համար կատարվում է $[a, x] \in C'_k(A)$: Իսկ սա է, համաձայն 40.11 պնդման, նշանակում է, որ $a \in C'_{k+1}(A)$:

Այժմ ենթադրենք, թե ինչ-որ n բնական թվի համար $C'_n(G) = G$: Այդ դեպքում՝

$$C'_n(A) \supseteq C'_n(G) \cap A = G \cap A = A :$$

Այսինքն՝ $C'_n(A) = A$: Հետևապես՝ A -ն նիկոտանա է: □

ՊԼՂՈՒՄ 40.16. Նիկոտանա խմբի ֆուկսոր-խումբը մույնպես նիկոտանա է:

Ապացույց. Դիցուք՝ $f : G \rightarrow G'$ արատաստելեքամը վրսողոդ հոմոմորֆիզմ է: Ինդուկցիայով՝ բառ k -ի, ցույց առնք, որ

$$f(C'_k(G)) \subseteq C'_k(f(G)) :$$

Ինդուկցիայի բազիսը՝ $k = 1$: Մենք ունենք՝ $f(C'(G)) \subseteq C'(f(G))$, որը ակնհայտաբերն ճշմարիտ է:

Ինդուկցիոն քայլը. արված է, որ $f(C'_k(G)) \subseteq C'_k(f(G))$, ասպցուցենք, որ $f(C'_{k+1}(G)) \subseteq C'_{k+1}(f(G))$: Դիցուք՝ $a \in C'_{k+1}(G)$: Այդ դեպքում, համաձայն 40.11 պնդման, G -ի կամայական x ատրքի համար ունենք $[a, x] \in C'_k(G)$: Հետևապես՝ $[f(a), f(x)] \in f(C'_k(G))$: Համաձայն ինդուկցիոն ենթադրության՝ այստեղից կատանոնք. $[f(a), f(x)] \in C'_k(f(G))$: Համաձայն 40.11 պնդման՝ այստեղից էլ կատանոնք $f(a) \in C'_{k+1}(f(G))$:

Այժմ, եթե $C'_n(G) = G$, ապա

$$C'_n(f(G)) \supseteq f(C'_n(G)) = f(G) :$$

Ուրեմն՝ $C'_n(f(G)) = f(G)$: Հետևապես՝ $f(G)$ -ն նիկոտանա է: □

ՊԼՂՈՒՄ 40.17. Վերջավոր թվով նիկոտանա խմբերի ուղիղ արտադրյալը նիկոտանա է:

Ապացույց. Ասպցուցումք կատարեք ինքնուրույն: □

40.3. *Վերջավոր p -խմբեր:* Խմբերի ուսումնասիրության մեջ կարևոր դեր ունեն p -խմբերը: Դիցուք՝ p -ն կամայական բնական թիվ է:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 40.18. Վերջավոր խումբը կոչվում է *p -խումբ*, եթե նրա կարգը p թվի աստիճանն է:

Զվատերնյանների խումբը, օրինակ, 2-խումբ է: Նրա կարգն է 2^3 : Կոմպակտ p սլարգ թվի համար $\mathbb{Z}_p$ -ն p -խումբ է. նրա կարգն է p : Վերջավոր p -խմբերի վերաբերյալ հիմնական արդյունքը հետևյալն է:

ԴՆԴՈՒՄ 40.19. *Վերջավոր p -խումբը ունի ոչ սլիլիկոլ կենտրոն:*

Ապացույց. Դիցուք՝ G -ն կամայական վերջավոր խումբ է, a -ն՝ նրա ստորբը: Կոստորենք հետևյալ նշանակումը.

$$N_G(a) = \{x \in G \mid xa = ax\} :$$

Հեշտությամբ ուսպացուցվում է, որ $N_G(a)$ -ն G խմբի ենթախումբ է:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 40.20. Ապացուցեք, որ $N_G(a)$ -ն G խմբի ենթախումբ է:

Դիտարկենք $\{x^{-1}ax \mid x \in G\}$ բազմությունը: Յուրյ սաանք, որ

$$|\{x^{-1}ax \mid x \in G\}| = |G : N_G(a)| :$$

Իսկապես դիտարկենք հետևյալ որոնասլուակերումը.

$$f : x^{-1}ax \rightarrow N_G(a)x, \quad x \in G :$$

Այն վերադրում է: Իրոք՝

$$\begin{aligned} f(x^{-1}ax) = f(y^{-1}ay) &\Rightarrow N_G(a)x = N_G(a)y \Rightarrow \\ &\Rightarrow yx^{-1} \in N_G(a) \Rightarrow yx^{-1}a = ayx^{-1} \Rightarrow x^{-1}ax = y^{-1}ay : \end{aligned}$$

Այժմ դիտարկենք

$$(58) \quad \cup_{a \in G} \{x^{-1}ax \mid x \in G\}$$

բազմությունը: Հեշտությամբ ցույց է տրվում, որ այն G բազմության տրոհում է: Այդ-անդից, մասնավորապես, կատանանք՝

$$(59) \quad G = \cup_{a \in G} \{x^{-1}ax \mid x \in G\} :$$

Միևնույն ժամանակ, համաձայն վերևում արված նկատառման, (58) միավորմուն գումարելիների աուրերի թիվը p -ի աստիճանն է: Այսպիսով՝ (59) հավասարության ինչպես ձախ մասի աուրերի թիվը, այնպես էլ նրա ուղ մասի յուրաքանչյուր գումարելու աուրերի թիվը p -ի տասիճանն է: Բայց (59)-ի ուղ մասի գումարելիներից մեկն է $\{x^{-1}1x \mid x \in G\}$, որը սլարունակում է միայն մեկ ստոր: Հետևապես՝ պետք է լինեն միայն մեկ ստոր սլարունակող այլ գումարելիներ նույնպես: Դիցուք՝ $\{x^{-1}ax \mid x \in G\}$ գումարելիներ ուղղվածին է: Դա նշանակում է, որ G -ի յուրաքանչյուր x ստորի համար

$$x^{-1}ax = a,$$

և $a \neq 1$: Իսկ սա էլ նշանակում է ոչ այլ ինչ, եթե ոչ՝ $a \in C(G)$ և $a \neq 1$: □

ՊՆԴՈՒՄ 40.21. *Վերջավոր p -խումբի միությունն է:*

Ապացույց. Դիցե՛ք՝ ունենք P վերջավոր p -խումբը: Համաձայն մախարդ սլեմդ-ման՝ P խումբը ռանի ոչ սրիվիլյու կենտրոն: $P/C'(P)$ -ն p -խումբ է և ունի ոչ սրիվիլյու կենտրոն: Հետևապես՝ $C_2(P) \supset C(P)$: Հարժուցանելով այս ընթացքը՝ յուրաքանչ-յուր i բնական թվի համար կառանոնք՝ $C_{i+1} \supset C_i(P)$. քանի դեռ չենք ստացել մի այնպիսի k բնական թիվ, որի համար $C_k(P) = P$: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 40.22. *ու. Ապացուցեք, որ կամայական p սրորդ թվի համար p^2 կարգի խումբը արելյան է:*

բ. Նշեք p^3 կարգի խումբ, որը արելյան չէ:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 40.23. *Ապացուցեք, որ եթե խումբը արելյան չէ, ապա նրա ֆակտոր-խումբը ըստ իր կենտրոնի չի կարող լինել ցիկլային:*

40.4. *Խմբի ածանցյալը:* Այժմ ուսումնասիրենք խմբի բոլոր տարրերի կա-ծուսառարկներով ծնված ենթախումբը: Այն ունի հաատուկ տնվումնում:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 40.24. $(G, \cdot)$ խմբի *ածանցյալ* է կոչվում նրա տարրերի բոլոր ենուրավոր կաժուսառարկներով ծնված ենթախումբը: $(G, \cdot)$ խմբի ածանցյալը նշու-մակվում է G' : Այսպիսով՝

$$G' = \langle [a, b] \mid a, b \in G \rangle :$$

Խմբի ածանցյալը մեծ դեր է խաղում հաակուպես հափոսառարկները արմա-առանշումներով լուծելու խնդիրը ուսումնասիրելու:

ՊՆԴՈՒՄ 40.25. *Խմբի ածանցյալը նրա նորմալ բաժանարար է: Այսինքն՝ կա-մայական $(G, \cdot)$ խմբի համար՝*

$$G' \triangleleft G :$$

Ապացույց. Իբրք, եթե $a, b, x \in G$, ապա

$$x^{-1}a^{-1}b^{-1}abx = x^{-1}a^{-1}xx^{-1}b^{-1}xx^{-1}a:xx^{-1}bx = c^{-1}d^{-1}cd \in G',$$

որտեղ $c = x^{-1}ax, d = x^{-1}bx$: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 40.26. *Կամայական $(G, \cdot)$ խմբի համար G/G' խումբը արելյան է:*

Ապացույց. Իբրք, եթե $a, b \in G$, ապա

$$aG' \cdot bG' = abG' = (ba)(a^{-1}b^{-1}ab)G' = baG' = bG' \cdot aG' :$$

Հետևապես՝ G/G' խումբը արելյան է: $\square$

Ապացուցենք հաակուպարծ սնդումը, որը ցույց է տալիս, որ խմբի ածանցյալը նրա նվազագույն նորմալ բաժանարարն է, ըստ որի խմբի ֆակտոր-խումբը արել-յան է:

ՊՆԴՈՒՄ 40.27. *Կամայական $(G, \cdot)$ խմբի և նրա A նորմալ բաժանարարի հա-մար՝ եթե G/A խումբը արելյան է, ապա $G' \subseteq A$:*

Ապացույց. Կիցայք՝ G/A խումբը աբելյան է և $x, y \in G$: Այդ դեպքում՝

$$xyA = xA \cdot yA = yA \cdot xA = yxA :$$

Հետևապես՝

$$x^{-1}y^{-1}xyA = A \text{ և } x^{-1}y^{-1}xy \in A :$$

Ուրեմն՝ $G' \subseteq A$:

□

Այժմ գտնենք մի բանի խմբերի ուժանցյալները:

Հասկանալի է, որ աբելյան խմբի ուժանցյալը հավասար է այդ խմբի միավոր ենթախմբին: Մյուսմասնակ, եթե խմբի ուժանցյալը հավասար է նրա միավոր ենթախմբին, ապա խումբը աբելյան է:

Վերջին դատողությունից հետևում է, որ

$$S(2)' = \{1\}, A(3)' = \{1\} :$$

ՊՆԴՈՒՄ 40.28. Կոմպակտ n բնական թվի համար

$$S(n)' = A(n) :$$

Ապացույց. Կոմպակտ f և g աեղադրությունների համար $f^{-1}g^{-1}fg$ աեղադրությունը սկենայադրեն գույզ է: Հետևապես՝ $S(n)' \subseteq A(n)$: Մյուս կողմից,

$$(ijk) = (ik)^{-1}(ij)^{-1}(ik)(ij) :$$

Այստեղից՝ հաշվի տոմեյսվ այն, որ $A(n)$ խումբը ծնվում է բայր եռյակ ցիկլերով, կատանանք.

$$A(n) \subseteq S(n)' :$$

□

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 40.29. Ապացուցեք, որ

$$A(4)' = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} :$$

ՊՆԴՈՒՄ 40.30. Եթե $n > 4$, ապա

$$A(n)' = A(n) :$$

Ապացույց. Բավական է նկատել, որ

$$(ijk) = (ikl)^{-1}(ijm)^{-1}(ikl)(ijm),$$

որտեղ n -ից աչ մեծ i, j, k, l, m բնական թվերը իրարից ասարեր են (հիշենք, որ $n > 4$):

□

ՊՆԴՈՒՄ 40.31. Եթե $|K| \neq 2$, ապա

$$GL(n, K)' = SL(n, K) :$$

Ապացույց. Եթե $A, B \in GL(n, K)$, ապա

$$|A^{-1}B^{-1}AB| = |A|^{-1}|B|^{-1}|A||B| = 1 :$$

Հետևապես $|A, B| \in SL(n, K)$: Ուրեմն՝ $GL(n, K)' \subseteq SL(n, K)$:

Հակառակը հետևում է

$$t_{ik}(\alpha)^{-1}t_{kj}(\beta)^{-1}t_{ik}(\alpha)t_{kj}(\beta) = t_{ij}(\alpha\beta)$$

հավաստությունից, որտեղ $\alpha, \beta \in K, i \neq j$:

□

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 40.32. Լրացրեք վերջին պնդման ապացուցման մանրամասները:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 40.33. Դետեր $GL(n, K)'$ -ը, եթե $|K| = 2$:

40.5. Լուծելի խմբեր: Խմբի ածանցյալը նորից խումբ է և ունի իր ածանցյալը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 40.34. Խմբի ածանցյալի ածանցյալը կոչվում է այդ խմբի *երկրորդ ածանցյալ*: G խմբի երկրորդ ածանցյալը նշանակվում է G'' : Այսպիսով՝

$$G'' = (G')' :$$

Դիցուք՝ արդեն ստեղծված է G խմբի i -րդ ածանցյալը՝ $G^{(i)}$ -ն, i բնական թվի համար: Այդ դեպքում $G^{(i)}$ -ի $i+1$ -րդ ածանցյալը նշանակենք $G^{(i+1)}$ -ով և որոշենք հետևյալ կերպ.

$$G^{(i+1)} = (G^{(i)})' :$$

Օրինակ, թվատերմիզմների Q խմբի համար

$$Q' = \{1, -1\}, \quad Q'' = \{1\}$$

ՊՆԴՈՒՄ 40.35. Խմբի k -րդ ածանցյալը այդ խմբի նորմալ բաժանարար է յուրաքանչյուր k բնական թվի համար:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն:

□

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 40.36. $(G, \cdot)$ խումբը կոչվում է *լուծելի*, եթե որևէ k բնական թվի համար այդ խմբի k -րդ ածանցյալը հավասար է խմբի միավորին՝ $G^{(k)} = \{1\}$:

ՊՆԴՈՒՄ 40.37. $(G, \cdot)$ խումբը *լուծելի է այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունի նրա նորմալ բաժանարարների այնպիսի*

$$(60) \quad G = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n = \{1\}$$

շարք, որ A_{i-1}/A_i ֆակտոր-խումբը արելյան է, $i = 1, 2, \dots, n$:

Լեյպցույց. 'Իիցույթ' G խումբը լուծելի է: Այդ դեպքում նրա ածանցյալների

$$G = G_0 \supset G' \supset G^{(2)} \supset \dots \supset G^{(n)} = \{1\}$$

շարքը, համաձայն 40.26 պնդման, բավարարում է պնդման մեջ նշված պայմանին:

Հսկայական, դիցույ՝ ունենք (60) շարքը: Յուրջ ստանք, որ G խումբը լուծելի է: Ինդուկցիայով՝ բառ i -ի, ցույց տանք, որ $G^{(i)} \subseteq A_i$:

Ինդուկցիայի բազիսը. $i = 1$: Այդ դեպքում, քանի որ G/A_1 խումբը արելյան է, ապա, համաձայն 40.27 պնդման, $G' \subseteq A_1$:

Ինդուկցիոն քայլը: Դիցույ՝ $G^{(i)} \subseteq A_i$: Այդ դեպքում A_i/A_{i+1} խմբի արելյան լինելուց կհետևի $G^{(i)}A_{i+1}/A_{i+1}$ խմբի աղյուսիկապատվածությունը: Բայց

$$G^{(i)}A_{i+1}/A_{i+1} \cong G^{(i)}/G^{(i)} \cap A_{i+1} :$$

Ուրեմն՝ $G^{(i)}/G^{(i)} \cap A_{i+1}$ խումբը նույնպես արելյան է:

Հետևապես՝ $G^{(i+1)} \subseteq G^{(i)} \cap A_{i+1}$: Այսինքն՝ $G^{(i+1)} \subseteq A_{i+1}$:

Այժմ, քանի որ $A_n = \{1\}$, ապա $G^{(n)} \subseteq A_n = \{1\}$: Ուրեմն՝ $G^{(n)} = \{1\}$, և G խումբը լուծելի է: $\square$

ԴՆԴՈՒՄ 40.38. *Լուծելի խմբի ենթախումբը լուծելի է:*

Լեյպցույց. Բավական է նկատել, որ եթե A -ն G խմբի ենթախումբն է, ապա $A^{(i)} \subseteq G^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots$: $\square$

ԴՆԴՈՒՄ 40.39. *Լուծելի խմբի ֆակտոր-խումբը լուծելի է:*

Լեյպցույց. 'Իիցույթ' G -ն լուծելի խումբ է, ունի արելյան ֆակտոր-խմբերով (60) շարքը, և արված է $f : G \rightarrow G'$ վրսողող համոտորֆիզմը: Դիսաուրկենք հետևյալ շարքը.

$$f(G) = f(A_0) \supset f(A_1) \supset f(A_2) \supset \dots \supset f(A_n) = \{1\} :$$

Վերցնենք $f(A_i)$ խմբի կամայական $f(a)$ և $f(b)$ տարրեր: Այդ դեպքում $a, b \in A_i$, և քանի որ A_i/A_{i+1} խումբը արելյան է, ապա $[a, b] \in A_{i+1}$: Հետևապես՝ $[f(a), f(b)] \in f(A_{i+1})$: Ուրեմն՝ $f(A_i)/f(A_{i+1})$ խումբը արելյան է, $i = 0, 1, \dots, n-1$: Համաձայն 40.37 պնդման՝ ոչստեղծից հետևում է, որ $f(G)$ -ն լուծելի խումբ է: $\square$

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 40.40. Եթե A խումբը G խմբի նորմալ բաժանալուրն է, և G/A ֆակտոր-խումբը իզոմորֆ է B խմբին, ապա G խումբը կոչվում է A խմբի *ընդլայնում* B խմբի միջոցով:

ԴՆԴՈՒՄ 40.41. *Լուծելի խմբի ընդլայնումը լուծելի խմբի միջոցով լուծելի է:*

Լեյպցույց. Աստացույունը կատարեք ինքնաբերաբար: $\square$

ԴՆԴՈՒՄ 40.42. *Լուծելի խմբերի ուղիղ տրանսպլայսը լուծելի է:*

Լեյպցույց. Աստացույունը կատարեք ինքնաբերաբար: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 40.43. Հնարապանչյուր խմբի ելակալ լուծելի նորմալ բաժանա-
րարների սրտաողբյալը լուծելի է: Ապացուցեք:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 40.44. Ասրացուցեր, որ վերջավոր p -խումբը լուծելի է:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 40.45. Ապացուցեք, որ նիլսոսեմա խումբը լուծելի է:

Պարզ λ , որ $S(2)$ խումբը լուծելի է: Լաժելի λ նաև $S(3)$ խումբը, որովհետև այն
 $A(3)$ խմբի ընդլայնումն է $\mathbb{C}_2$ խմբի միջոցով, իսկ այդ վերջիններս լուծելի են:

ՊՆՐՈՒՄ 40.46. $S(n)$ խումբը լուծելի չէ, երև $n > 3$:

Ասրացույց. Ասրացուցումը կատարեք ինքնուրույն: □

ՊՆՐՈՒՄ 40.47. $n > 1$ ղեկքում $GL(n, K)$ և $SL(n, K)$ խմբերը լուծելի չեն:

Ասրացույց. Ասրացուցումը կատարեք ինքնուրույն: □

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 40.48. Լոսանկյանման մասրիցների $T(n, K)$ խումբը լուծելի
է: Ապացուցեք:

41. ԽՄԲԵՐԻ ԱՎՏՈՄՈՐՖԻԶՄՆԵՐԸ

41.1. *Խմբի ավտոմորֆիզմները, ավտոմորֆիզմների խումբը:* Խմբերի
ուսումնասիրությամբ մեջ կարևոր դեր են խաղում այն իզոմորֆիզմները, որոնք նաև
խմբի անդադրություններ են:

ՄԱՀՄԱՆՈՒՄ 41.1. $(G, \cdot)$ խմբի *ավտոմորֆիզմ* է կոչվում

$$f : G \rightarrow G$$

անալի յուրապանչյուր իզոմորֆիզմը: Այսպիսով՝ f -ը $(G, \cdot)$ խմբի ավտոմորֆիզմ է,
նշանակում է՝

ա. $f \in S(G)$,

բ. f -ը հոմոմորֆիզմ է $(G, \cdot)$ և $(G, \cdot)$ խմբերի միջև:

Քանի որ $(G, \cdot)$ խմբի ավտոմորֆիզմները նաև G բազմության անդադրություն-
ներ են, ապա ավտոմորֆիզմների բազմապատկման համար գործածվում է ոչ թե
Ֆունկցիաների բազմապատկման $\circ$ նշանը, այլ անդադրությունների բազմապատկ-
ման $\cdot$ նշանը: Այսպիսով՝ կամայական խմբի f և g ավտոմորֆիզմների սրտաողբյալը
գրավում է $f \cdot g$ անալով: Ելրեմն նման գրառման մեջ $\cdot$ նշանը բաց է թողնվում:

Այսպիսով՝ $(G, \cdot)$ խմբի x տարրի և f ու g ավտոմորֆիզմների համար ունենք՝

$$(f \cdot g)(x) = g(f(x)) :$$

$(G, \cdot)$ խմբի բոլոր ավտոմորֆիզմների բազմությունը գրավում է $\text{Aut } G$ անե-
րով:

ՊՆՐՈՒՄ 41.2. *Խումբայտիւն* $(G, \cdot)$ խմբի համար $(\text{Aut } G, \cdot)$ զայգը խումբ է:

Լեյբնիցայից. Բավական է ցույց տալ, որ $\text{Aut } G$ բազմությունը կազմում է G բազմության սեղսղաբաշխումների $S(G)$ խմբի ենթախումբ: Այսինքն՝ սխալ է ցույց տալ, որ

$$f, g \in \text{Aut } G \Rightarrow f \cdot g, f^{-1} \in \text{Aut } G :$$

Իրար, եթե $f, g \in \text{Aut } G$, ապա նաև $f, g \in S(G)$, և $f \cdot g, f^{-1} \in S(G)$:

Մնում է ցույց տալ խմբի բազմապատկման փոքրծաղություն հետ $f \cdot g$ և f^{-1} արատարականների համաձայնեցվածությունը: Եթե $f, g \in \text{Aut } G$, ապա

$$\begin{aligned}(fg)(xy) &= g(f(xy)) = g(f(x)f(y)) = \\&= g(f(x))g(f(y)) = (fg)(x)(fg)(y), \quad x, y \in G : \end{aligned}$$

Հետևապես՝

$$fg \in \text{Aut } G :$$

Այնուհետև, եթե $x = f(u)$, $y = f(v)$, $x, y, u, v \in G$, ապա

$$xy = f(u)f(v) = f(uv) :$$

Այստեղից կատանումք՝

$$f^{-1}(xy) = uv = f^{-1}(x)f^{-1}(y) :$$

Հետևապես՝

$$f^{-1} \in \text{Aut } G :$$

□

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 41.3. $(\text{Aut } G, \cdot)$ խումբը կազմում է G խմբի *ափստմորֆիզմների խումբ*:

41.2. *Խմբի ներքին ափստմորֆիզմների խումբը:* Կատարկներ ափստմորֆիզմների մի կարևոր տեսակ:

Վերցնենք $(G, \cdot)$ խումբը և G բազմություն կամայական a տարրի համար կազմենք հետևյալ արատարականը.

$$\sigma_a : G \rightarrow G, \quad \sigma_a(x) = a^{-1}xa, \quad x \in G :$$

ՊՆԴՈՒՄ 41.4. σ_a -ն $(G, \cdot)$ խմբի *ափստմորֆիզմ* է:

Լեյբնիցայից. Նախ ցույց տանք, որ σ_a -ն վերադարձ է: Իրար, եթե x -ը G -ի կամայական տարր է, ապա

$$\sigma_a(a^{-1}xa^{-1}) = a^{-1}a^{-1}xa^{-1}a = x :$$

Այսինքն՝ x -ի նախադասակերպն է $a^{-1}xa^{-1}$ աստիճանով: Ուրեմն՝ σ_a -ն վերադարձ է:

Այնուհետև, եթե $\sigma_a(x) = \sigma_a(y)$, ապա $a^{-1}xa = a^{-1}ya$ և, որեմն, $x = y$: Այսինքն՝ σ_a -ն նաև սուրադարձ է:

Վերջապես, ցույց տանք σ_a -ի համաձայնեցվածությունը խմբային գործադրության հետ: Իսկապես, եթե $x, y \in G$, ապա

$$\sigma_a(xy) = a^{-1}xya = a^{-1}x a a^{-1}ya = \sigma_a(x)\sigma_a(y) :$$

□

ՄԱՀՄԱՆՈՒՄ 41.5. σ_a տեսքի ավտոմորֆիզմը կոչվում է $(G, \cdot)$ խմբի *ճեքքին ավտոմորֆիզմ*:

Հասկանալի է, որ տրեցյուն խումբը ունի միայն մեկ ճեքքին ավտոմորֆիզմ, այն է՝ արված խմբի նույնական պատասխանելությունը: Կարելի է ապացուցել նաև հակառակը. եթե խումբը ունի միայն մեկ ճեքքին ավտոմորֆիզմ, ապա այն տրեցյուն է:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 41.6. Ապացուցեք վերջին դաստիարակումը:

Խմբի ճեքքին ավտոմորֆիզմների միջոցով ենտալքերի ձևով են բնութագրվում նաև խմբի նորմալ բաժանաարարները:

ՊԼԴՈՒՄ 41.7. G' խմբի A ենթախումբը այն և միայն այն դեպքում է նրա նորմալ բաժանաարար, եթե այդ խմբի կամայական σ_x ճեքքին ավտոմորֆիզմի համար՝

$$\sigma_x(A) = A :$$

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնաբերաբար: □

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 41.8. Ապացուցեք, որ կամայական $(G, \cdot)$ խմբի համար $\sigma_a = \sigma_{a^{-1}}$ այն և միայն այն դեպքում, եթե $a \in C'(G)$:

Նշանակենք $\text{Inn } G$ -ով G խմբի բոլոր ներքին ավտոմորֆիզմների բազմությունը:

ՊԼԴՈՒՄ 41.9. (Լոռ $G, \cdot$) գոյալ խումբ է:

Ապացույց. Բավական է ապացուցել, որ $\text{Inn } G$ -ն $\text{Aut } G$ -ի ենթախումբ է: Այսինքն՝ անհրաժեշտ է ցույց ստալ, որ եթե $a, b \in G$, ապա $\sigma_a \sigma_b, \sigma_a^{-1} \in \text{Inn } G$:

Նախ ցույց առնեք, որ.

$$(61) \quad \sigma_a \sigma_b = \sigma_{ab} :$$

Իրոք, եթե $x \in G$, ապա

$$\begin{aligned} (\sigma_a \sigma_b)(x) &= \sigma_b(\sigma_a(x)) = \sigma_b(a^{-1}xa) = \\ &= b^{-1}a^{-1}xab = (ab)^{-1}x(ab) = \sigma_{ab}(x) : \end{aligned}$$

Այստեղից կատանանք նաև՝

$$\sigma_{a^{-1}}\sigma_a = \sigma_{a^{-1}a} = \sigma_1 = F :$$

Հետևապես՝

$$\sigma_a^{-1} = \sigma_{a^{-1}} :$$

Այսպիսով, իրոք, $\sigma_a \sigma_b, \sigma_a^{-1} \in \text{Inn } G$: □

Պարզվում է, որ խմբի ճեքքին ավտոմորֆիզմների խումբը ոչ միայն նրա ավտոմորֆիզմների խմբի ենթախումբ է, այլև նրա նորմալ բաժանաարար:

ՊԼԴՈՒՄ 41.10. Կամայական $(G, \cdot)$ խմբի համար

$$\text{Inn } G \triangleleft \text{Aut } G :$$

Ապացույց. Դիցույ՝ $f \in \text{Aut } G, a \in G$: Յույց տանք, որ այդ դեպքում

$$f^{-1} \sigma_a f = \sigma_{f(a)} :$$

Իսկույան, երե $x \in G$, ապա

$$\begin{aligned} (f^{-1} \sigma_a f)(x) &= f(\sigma_a(f^{-1}(x))) = f(a^{-1} f^{-1}(x) a) = \\ &= f(a^{-1}) f(f^{-1}(x)) f(a) = f(a)^{-1} x f(a) = \sigma_{f(a)}(x) : \end{aligned}$$

□

Վերջում ապացուցենք հետևյալ հետադրելի հասկացությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 41.11. *Կոմպակտ $(G, \cdot)$ խմբի համար*

$$\text{Inn } G \cong G/C(G) :$$

Ապացույց. Դիտարկենք

$$\sigma : G \rightarrow \text{Inn } G, \sigma : a \mapsto \sigma_a, a \in G$$

որառաջադասելիումը: Ակնհայտ է, որ այն վրայադրում է:

Մյուս կողմից, օգտվելով (61) նախադրությունից, կառանանք՝

$$\sigma(ab) = \sigma_{ab} = \sigma_a \sigma_b = \sigma(a) \sigma(b) :$$

Հետևապես՝ σ որառաջադասելիումը վրայդրող հոմոմորֆիզմ է: Հեշտությամբ կատարյալ ենք, որ նրա կոռնիզը G խմբի կենտրոնն է: Հետևապես՝ կարծի ենք կիրառել հոմոմորֆիզմների թեորեմը: Կունենանք՝

$$\text{Inn } G \cong G/C(G) :$$

□

41.3. *Ավտոմորֆիզմների խմբերի օրինակներ:* Այժմ դիտարկենք խմբերի ավտոմորֆիզմների և նախադրությունների խմբերի որոշ օրինակներ: Այստեղ, առաջին հերթին, կմկարագրենք ածրող և ուսցիտմալ թվերի գումարային խմբերի ավտոմորֆիզմների խմբերը:

ՊՆԴՈՒՄ 41.12. *Ամբողջ թվերի գումարային խմբի ավտոմորֆիզմների խումբը իզոմորֆ է $(\{1, -1\}, \cdot)$ խմբին: Այսինքն՝*

$$\text{Aut } \mathbb{Z} \cong (\{1, -1\}, \cdot) :$$

Ապացույց. Ամբողջ թվերի գումարային խմբի ավտոմորֆիզմներ են.

ա. $f : x \mapsto x, x \in \mathbb{Z}$ նույնական որառաջադասելիումը,

բ. $f : x \mapsto -x, x \in \mathbb{Z}$ որառաջադասելիումը:

Այս f որառաջադասելիումը ունենալու են վերադրում է և միաստանալ

$$f(x + y) = -(x + y) = -(x) + (-y) = f(x) + f(y), x, y \in \mathbb{Z} :$$

Ապացուցենք, որ $(\mathbb{Z}, +)$ խումբը այլ ավտոմորֆիզմներ չունի: Իսկապես, եթե φ -ն $(\mathbb{Z}, +)$ -ի ավտոմորֆիզմ է, ապա պարզ է, որ $\varphi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$: Այնուհետև, եթե $\varphi(1) = k$, ապա

$$\varphi(x) = \varphi(x \cdot 1) = x\varphi(1) = xk :$$

Հետևապես՝ $\varphi(\mathbb{Z}) = k\mathbb{Z}$: Այսինքն՝ $\mathbb{Z} = k\mathbb{Z}$: Այստեղից, բանի որ f -ը վերադարձ է, կատանումք՝ $k = 1$ կամ $k = -1$: Հետևաբար՝ $\varphi = \text{id}$ կամ $\varphi = f$: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 41.13. *Ռացիոնալ թվերի զամուրային խմբի ավտոմորֆիզմների խումբը իզոմորֆ է ռացիոնալ թվերի արտադրյալային խմբին: Այսինքն՝*

$$\text{Aut } \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^* :$$

Ապացույց. Դիցուք՝ $f \in \text{Aut } \mathbb{Q}$: Այդ դեպքում.

ա. $f(m) = mf(1)$, $m \in \mathbb{Z}$:

բ. $f(ma) = mf(a)$, $m \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Q}$:

գ. $f(\frac{1}{m}) = \frac{1}{m} \cdot f(1)$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$:

Իսկապես, $m \cdot \frac{1}{m} = 1$ հավասարությանից կատանումք $f(m \cdot \frac{1}{m}) = f(1)$ կամ՝ $mf(\frac{1}{m}) = f(1)$ և $f(\frac{1}{m}) = \frac{1}{m}f(1)$:

դ. $f(\frac{n}{m}) = \frac{n}{m}f(1)$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$:

Իսկապես,

$$f(\frac{n}{m}) = f(n \cdot \frac{1}{m}) = n \cdot f(\frac{1}{m}) = n \cdot \frac{1}{m} \cdot f(1) = \frac{n}{m} \cdot f(1) :$$

Այժմ դիտարկենք

$$\rho : \text{Aut } \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}^*, \quad \rho(f) = f(1), \quad f \in \text{Aut } \mathbb{Q}$$

արտապատկերումը: Այն վերադարձ է: Այնևայն ժամանակ ենթադրենք՝

$$f_1, f_2 \in \text{Aut } \mathbb{Q}, \quad f_1(1) = m_1/n_1, \quad f_2(1) = m_2/n_2,$$

որտեղ $m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, $n_1 \neq 0$, $n_2 \neq 0$: Այդ դեպքում՝

$$\begin{aligned} \rho(f_1 \cdot f_2) &= (f_1 \cdot f_2)(1) = f_2(f_1(1)) = \\ &= f_2\left(\frac{m_1}{n_1}\right) = \frac{m_1}{n_1} \cdot f_2(1) = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \\ &= f_1(1) \cdot f_2(1) = \rho(f_1) \cdot \rho(f_2) : \end{aligned}$$

$\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 41.14. Ապացուցեք, որ.

ա. $\text{Aut}(\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}) \cong GL(n, \mathbb{Z})$,

բ. $\text{Aut}(\mathbb{Q} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}) \cong GL(n, \mathbb{Q})$,

գ. $\text{Aut } S(n) \cong S(n)$:

ՕՂԱԿՆԵՐ

42. ԻԴԵԱԼ ԵՎ ՖԱԿՏՈՐ-ՕՂԱԿ

42.1. *Օղակի իդեալը:* Խմբերի ուսումնասիրության ընթացքում մեծ է խմբի նորմալ բաժանարարի դերը: Այդ պատճառով բնական է զամել մի Խ-ի օղակացություն, որի օղակների ուսումնասիրության ընթացքում խաղաղ այն դերը, ինչ խմբերի մեջ խաղաղում է խմբի նորմալ բաժանարարը: Այս այս նպատակին է ծառայում օղակի իդեալի գաղափարը:

ՄԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 42.1. R բազմության I ոչ դասուրկ ենթաբազմությունը կոչվում է $(R, +, \cdot)$ օղակի *իդեալ*, եթե.

ա. I -ի կամայական երկու սուբրերի սուբրերությունը ընկած է I -ի մեջ, այսինքն՝

$$x + y \in I, \text{ եթե } x, y \in I,$$

բ. I -ի կամայական սուբրի և R -ի կամայական սուբրի արտադրյալը ընկած է I -ի մեջ, այսինքն՝

$$x \cdot r, r \cdot x \in I, \text{ եթե } x \in I, r \in R: \quad \chi r, r \chi$$

Մանածմունն ա կեսից ամմիջուայեա իեսեում է, որ $(R, +, \cdot)$ օղակի I իդեալը նրա $(R, +)$ գումարային խմբի ենթախումբ է: Միաժամանակ, իդեալը մաս օղակի ենթաօղակ է:

Հսկառուկ պնդումը միշտ չէ, որ ճիշտ է. քիչ եեսա մենք կատենենք, որ օղակի ենթաօղակը պարսաովոր չէ լինել նրա իդեալ:

Անցենք օրինակների դիտարկմանը:

ա. Յարարանչյուր ոչ գրայական $(R, +, \cdot)$ օղակ ունի ամենաքիչը երկու իդեալ՝ R -ը և $\{0\}$ -ն: Անվանենք այս իդեալները արված օղակի տրիվիալ իդեալներ:

բ. Յարարանչյուր դաշտ մաս օղակ է և, ուրեմն, ունի տրիվիալ իդեալներ:

ԴՆԴՈՒՄ 42.2. *Դաշտը ոչ տրիվիալ իդեալներ չունի:*

Ապացույց. Կիցայ $(R, +, \cdot)$ -ը դաշտ է, I -ն՝ նրա ոչ գրայական իդեալը և a -ն էլ այդ իդեալի ոչ գրայական սուբրը: Վերցնենք R -ի կամայական r սուբրը: Քանի որ R -ը դաշտ է, ապա նրանում լուծելի է $a \cdot x = r$ հավասարումը: Եթե b -ն այդ հավասարման լուծումն է, ապա $a \cdot b$ արտադրյալը մի կողմից հավասար է r -ի, մյուս կողմից՝ սրտականում է I իդեալին: Հետևապես՝ I -ն սրտականում է R -ի կամայական r սուբրը: Ուրեմն՝ $I = R$: $\square$

զ. Վերևում մենք նշեցինք, որ օղակի ենթաօղակը կարող է խղետև չլինել: Նման օրինակի կառուցման հնարավորություն է տալիս վերջին պնդումը: Իսկապես վերջ-
նենք ուսցնենք թվերի $\mathbb{Z}$ դադմությունը նրա ենթաօղակ է:

դ. Դիտարկենք խղետևի եւ մի կարևոր օրինակ: Դիցուք $(R, +, \cdot)$ -ը կամայական անդամայական և գուգորյական օղակ է: Վերցնենք նրա a ստորր և կազմենք aR սրսաղրյակը՝

$$aR = \{ar \mid r \in R\} :$$

ՊՆԴՈՒՄ 42.3. Կամայական R անդամայական օղակի և նրա a ստորրի հա-
մար aR -ը R օղակի խղետև է:

Լիարցույց. Իրոք՝ եթե $r_1, r_2 \in R$, ապա

$$ar_1 + ar_2 = a(r_1 + r_2) \in aR, \quad r_2(ar_1) = ar_1r_2 \in aR :$$

Հետևապես՝ aR -ը R օղակի խղետև է: $\square$

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 42.4. $(R, +, \cdot)$ անդամայական և գուգորյական օղակի aR խղե-
տևը կազմում է նրա a ստորրով ծնված գլխավոր խղետև: Այն նշանակվում է նաև այս-
պես՝ (a) :

Օրինակ՝ սմբողջ թվերի $\mathbb{Z}$ օղակի կամայական n ստորրով ծնված խղետևը $n\mathbb{Z}$ բազմությունն է՝

$$(n) = n\mathbb{Z} :$$

ՊՆԴՈՒՄ 42.5. Տեղամայական, գուգորյական և միավորով $(R, +, \cdot)$ օղակի
 a ստորրով ծնված aR գլխավոր խղետևը սրսրումնական է այդ a ստորրը և օղակի՝ այդ
ստորրը սրսրումնակող նիսգուգույն խղետևն է:

Լիարցույց. Քանի որ օղակը սրսրումնական է 1 միավորը, և $a \cdot 1 \in aR$, ապա
 $a \in aR$: Այնուհետև, եթե I -ն R օղակի խղետև է և $a \in I$, ապա, ըստ խղետևի
սահմանման, $a \cdot r \in I$: Հետևապես՝ $aR \subseteq I$: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 42.6. Լիարցույցեր, որ անդամայական և միավորով օղակի
որևէ ստորրով ծնված գլխավոր խղետևը օղակի բոլոր այն խղետևների հասարմն է,
սրանք սրսրումնական են այդ ստորրը:

42.2. Դործողություններ խղետևների հետ: Միևնույն օղակի ստորրեր ի-
դետևների հետ կարելի է կատարել մի շարք գործողություններ, որոնց արդյունքում
նորից ստացվում են խղետևեր: Նախ դիտարկենք երկու խղետևների հասարմնը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 42.7. R օղակի I և J խղետևների հասարմն է կազմում I և J բազ-
մությունների

$$I \cap J$$

հասարմնը:

Օրինակ, կամայական m և n ամբողջ թվերի համար

$$m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = |m, n|\mathbb{Z},$$

որտեղ $|m, n|$ -ը m և n ամբողջ թվերի ամենավաղը ընդհանուր բազմապատիկն է:

ՊՆԴՈՒՄ 42.8. Օղակի երկու խղետների հատումը նորից այդ օղակի խղետ է:

Ապացույց. Դիցուք՝ I -ն և J -ն R օղակի խղետներ են, $x, y \in I \cap J, r \in R$: Այդ դեպքում՝ $x, y \in I$, $x, y \in J$: Հետևապես՝

$$x - y, r \cdot x, x \cdot r \in I, x - y, r \cdot x, x \cdot r \in J :$$

Այդ սխառությունով

$$x - y, x \cdot r, r \cdot x \in I \cap J :$$

Ուրեմն՝ $I \cap J$ -ն R օղակի խղետ է:

Նայեն կերպ կտրելի է ապացուցել, որ օղակի ռ՝ միայն երկու, այլև կամայական բազմապատիկ խղետների հատումը նույնպես նրա խղետ է: $\square$

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 42.9. R օղակի I և J խղետների գումարը նշանակվում է $I + J$ -ով և որոշվում է հետևյալ հավասարությամբ.

$$I + J = \{x + y | x \in I, y \in J\} :$$

Օրինակ, կամայական m և n ամբողջ թվերի համար՝

$$m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = (m, n)\mathbb{Z},$$

որտեղ (m, n) -ը m և n ամբողջ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է:

ՊՆԴՈՒՄ 42.10. Օղակի խղետների գումարը նորից այդ օղակի խղետ է:

Ապացույց. Դիցուք՝ I -ն և J -ն R օղակի խղետներ են, $x, x' \in I$, $y, y' \in J, r \in R$: Այդ դեպքում՝

$$(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y') \in I + J,$$

$$r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y \in I + J,$$

$$(x + y) \cdot r = x \cdot r + y \cdot r \in I + J :$$

Հետևապես՝ $I + J$ բազմաթյունը R օղակի խղետ է: $\square$

Ներածածներ խղետների հետ կատարվող եւ մեկ գործողություն:

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 42.11. R օղակի I և J խղետների տրատոյչյալ է կոչվում նրա

$$x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$$

առաջի բոլոր հնարավոր գումարների բազմությունը, որտեղ

$$x_1, \dots, x_n \in I, y_1, \dots, y_n \in J, n \in \mathbb{N} :$$

I և J խղետների տրատոյչյալը նշանակվում է $I \cdot J$ -ով կամ IJ -ով:

Օրինակ, կամայական m և n ամբողջ թվերի համար

$$m\mathbb{Z} \cdot n\mathbb{Z} = |mn|\mathbb{Z} :$$

ՊՆԴՈՒՄ 42.12. *Ջուգայությունն օղակի երկու խղեպների արտադրյալը այս օղակի խղեպ է:*

Ապացույց. Դիցուք՝ I -ն և J -ն R օղակի խղեպներ են,

$$x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n, x'_1 \cdot y'_1 + \cdots + x'_m \cdot y'_m \in IJ, \tau \in R:$$

Այդ դեպքում՝

$$\begin{aligned} & (x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n) - (x'_1 \cdot y'_1 + \cdots + x'_m \cdot y'_m) = \\ & = x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n + (-x'_1) \cdot y'_1 + \cdots + (-x'_m) \cdot y'_m \in IJ, \\ & \tau \cdot (x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n) = (\tau \cdot x_1) \cdot y_1 + \cdots + (\tau \cdot x_n) \cdot y_n \in IJ: \end{aligned}$$

□

Ինչպես են դասակարգվում իրար նկատմամբ խղեպների հետ կապարված գործադրյալների արդյունքում ստացված խղեպները:

ՊՆԴՈՒՄ 42.13. R գույրդրյալուն օղակի կամայական I և J խղեպների համար

$$IJ \subseteq I \cap J \subseteq I + J:$$

Ապացույց. Համաձայն խղեպի ստեղծման՝

$$RI \subseteq I, IR \subseteq I, RJ \subseteq J, JR \subseteq J:$$

Հետևապես՝ $IJ \subseteq I$, $IJ \subseteq J$: Որեմն՝ $IJ \subseteq I \cap J$: Այնուհետև, $I \subseteq I + J$, $J \subseteq I + J$: Որեմն՝ $I \cap J \subseteq I + J$: □

42.3. Ըննադրների դաս: *Բաղդատումներ ըստ մոդուլի:* Օղակի յուրաքանչյուր խղեպի համար կարելի է կազմել իւրյուրկից դասեր՝ խղեպը դիտարկելով որպես օղակի գումարային խմբի նորմալ բաժանարար: Ստացված արդյունքը այսպես դուրսից արդյունավետ է, ինչքան խմբերի դեպքում:

Դիցուք՝ մենք $(R, +, \cdot)$ օղակը և նրա I խղեպը:

ՄԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 42.14. Օղակի x և y տարրերը կոչվում են *բարդասելի*՝ ըստ I խղեպի կամ մոդուլի, եթե $x - y \in I$:

« x և y տարրերը բաղդատելի են՝ ըստ I մոդուլի» նախադասության վիճաբան մենք համալի կոտենք նույն, որ « x -ը բաղդատելի է y -ի հետ» ըստ I մոդուլի» և կարճ կզրենք եկտեյալ բաղդատումով՝

$$x \equiv y \pmod{I}:$$

Օրինակ, ամբողջ թվերի օղակի և նրա $n\mathbb{Z}$ խղեպի համար x և y ամբողջ թվերը բաղդատելի են ըստ $n\mathbb{Z}$ խղեպի այն և միայն այն դեպքում, երբ $x - y$ տարրերությունը բաժանվում է n -ի վրա առանց մնացորդի: Այս փոխար Թվերի աեսություն մեջ գրուովում է այսպես՝

$$x \equiv y \pmod{n}:$$

ՊՆԴՈՒՄ 42.15. *Կամայական օղակի մեջ ըստ յուրաքանչյուր խղեպի բաղդատումն առնչությունը համարժեքության առնչություն է:*

Անդադրյալ. Իսկության, եթե I -ն $(R, +, \cdot)$ օղակի իդեալն է և x -ը R -ի կամայական տարրը, ապա $x - x = 0$, հետևապես՝ $x - x \in I$: Այսինքն՝ $x \equiv x \pmod{I}$ և $\equiv$ առնչությունը անդադարձելի է:

Դիցուք՝ $x \equiv y \pmod{I}$: Այդ դեպքում՝ $x - y \in I$: Հետևապես՝ $y - x \in I$: Ուրեմն՝ $y \equiv x \pmod{I}$: Այսինքն՝ $\equiv$ առնչությունը համադասիելի է:

Վերջապես, դիցուք՝ $x \equiv y \pmod{I}$ և $y \equiv z \pmod{I}$: Այդ դեպքում՝ $x - y \in I$, $y - z \in I$: Հետևապես՝

$$x - z = (x - y) + (y - z) \in I :$$

Ուրեմն՝ $x \equiv z \pmod{I}$: Այսինքն՝ $\equiv$ առնչությունը նաև փոխանցելի է: □

Որո՞նք են ըստ ավելի I իդեալի բաղդատման առնչության համարժեքության դասերը:

ՊՆԴՈՒՄ 42.16. Կամայական $(R, +, \cdot)$ օղակի և նրա I իդեալի համար՝
 ա. ըստ I իդեալի բաղդատման առնչության համարժեքության դասերն են $x + I$, $x \in R$, հարսակից դասերը, որոնք կազմում են նաև մնացորների դասեր՝ ըստ I իդեալի:
 բ. համարժեքության դասերի $\{x + I | x \in R\}$ բազմությունը կազմում է R բազմության արտիստ:

Անդադրյալ. ա. Դիցուք՝ $y \in x + I$: Այդ դեպքում՝ $x - y \in I$: Հետևապես՝ $x \equiv y \pmod{I}$: Հակառակը, եթե $x \equiv y \pmod{I}$, ապա $x - y \in I$, և ուրեմն՝ $y \in x + I$:

բ. Հետևում է նրանից, որ $\{x + I | x \in R\}$ բազմությունը $(R, +)$ խմբի հարակից դասերի բազմությունն է՝ ըստ I ենթախմբի: □

Աստիճան առոճումը նշանակվում է՝ R/I : Այսինքն՝

$$R/I = \{x + I | x \in R\} :$$

Բաղդատումները ունեն մի շարք հաակություններ, որոնք սլայմանավորված են բաղդատման և գործողությունների փոխադարձ կապով:

ՊՆԴՈՒՄ 42.17. Կամայական օղակի համար՝ ըստ միևնույն իդեալի.
 ա. բաղդատումները կարելի է անդամ առ անդամ գումարել,
 բ. բաղդատման երկու մասերին կարելի է գումարել կամ հանել օղակի կամայական տարրը,
 գ. բաղդատման երկու մասերին կարելի է բազմապատկել կամայական ամբողջ թվով,
 դ. բաղդատման երկու մասերին կարելի է բազմապատկել օղակի կամայական տարրով,
 ե. բաղդատումները կարելի է անդամ առ անդամ բազմապատկել:

Անդադրյալ. Աստիճանումը կատարել ինքնուրույն: □

42.4. Օղակի ֆակտոր-օղակը: Կամայական $(R, +, \cdot)$ օղակի և նրա I իդեալի համար մենք կարող ենք օղակում ստված գործողությունների միջոցով սահմանել գործողություններ օղակի մնացրների դասերի R/I բազմության վրա: Նման կերպ մենք վարվել ենք խմբերի դեպքում: Համաստատարում գործողությունները մենք կնշանակենք ցույց $+$ և $\cdot$ նշաններով:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 42.18. R օղակի կամայական I իդեալի և x, y տարրերի համար ընդունենք՝

$$(x + I) + (y + I) = (x + y) + I,$$

$$(x + I) \cdot (y + I) = (x \cdot y) + I :$$

Այնպես, ինչպես խմբերի դեպքում, մենք ցույց կաւանք, որ գործողությունների այս սահմանումը կառեկա է: Այսինքն՝

$$x + I = x' + I, y + I = y' + I$$

$\Downarrow$

$$(x + y) + I = (x' + y') + I, (x \cdot y) + I = (x' \cdot y') + I :$$

Սա նշանակում է, որ իրար $+$ -ը և $\cdot$ -ը R/I բազմության վրա տրված գործողություններ են:

ՊՆԴՈՒՄ 42.19. $(R/I, +, \cdot)$ եղյակը օղակ է:

Ապացույց. Այն, որ $(R/I, +)$ գույրը արելյուն խումբ է, եեսւում է խմբի ֆակտոր-խմբի հատկությունից: Նշենք, որ զրոյի դերը ախսուղ խաղում է I իդեալը, իսկ $x + I$ մնացրների դասի հակադիրն է մնացրների $-x + I$ դասը:

Ցույց տաւնք, որ $\cdot$ -ը բաշխական է $+$ -ի նկատմամբ: Իսկուպես,

$$\begin{aligned} (x + I)((y + I) + (z + I)) &= (x + I)((y + z) + I) = \\ &= x(y + z) + I = (xy + xz) + I = (xy + I) + (xz + I) = \\ &= (x + I)(y + I) + (x + I)(z + I) : \end{aligned}$$

□

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 42.20. $(R/I, +, \cdot)$ օղակը կոչվում է R օղակի ֆակտոր-օղակը քաա I իդեալի:

Բերենք ֆակտոր-օղակի օրինակներ:

ա. Կամայական $(R, +, \cdot)$ օղակի համար $(R/R, +, \cdot)$ ֆակտոր-օղակը ունի մեկ տարր: Հետևապես՝ այն իզոմորֆ է միայն զրոյից կազմված՝ զրոյական օղակին:

բ. Կամայական $(R, +, \cdot)$ օղակի համար $(R/\{0\}, +, \cdot)$ ֆակտոր-օղակն է

$$(\{\{x\} | x \in R\}, +, \cdot)$$

օղակը: Այն իզոմորֆ է $(R, +, \cdot)$ օղակին: Անհրաժեշտ իզոմորֆիզմը ստացվում է եետևյալ կերպ՝

$$f(x) = \{x\}, x \in R :$$

գ. Կամայական n բնական թվի համար

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{C_0, C_1, \dots, C_{n-1}\},$$

որտեղ C_i -ն այն ամբողջ թվերի բազմությունն է, որոնք n -ի վրա բաժանվելիս ստալիս են i մնացորդը, $i = 0, 1, \dots, n-1$: Դժվար չէ ցույց տալ, որ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ օղակը իզոմորֆ է $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ օղակին: Անհրաժեշտ իզոմորֆիզմը ստացվում է հետևյալ կերպ.

$$f(C_i) = i, i = 0, 1, \dots, n-1:$$

Օղակի մի շարք հատկություններ ստեղծում են նաև նրա ֆակտոր-օղակի համար:

ՊՆԴՈՒՄ 42.21. *Եթե օղակը.*

ա. միավորավ է,

բ. գուցարյուկ է,

գ. տեղափոխելի է,

ապա համարարատեսիան հասկությամբ օժտված է օղակի ֆակտոր-օղակը:

Արդյունք. ա. Եթե ունենք I միավորավ R օղակը և նրա I իդեալը, ապա R/I օղակը նույնպես միավորավ է. միավորի դերը խաղում է $1 + I$ իդեալը: Իսկապես,

$$(1 + I) \cdot (x + I) = 1 \cdot x + I = x + I:$$

բ, գ դեպքերի ապացուցումները կատարենք ինքնուրույն: □

Օղակը կարող է զրոյի բաժանարարներ չունենալ, լինել տնգամ ամբողջության տիրույթ, բայց նրա ֆակտոր-օղակում կարող են առաջանալ զրոյի բաժանարարներ: Նման պարզագույն օրինակ կարող է ստլ ամբողջ թվերի ամբողջության տիրույթը, որի $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ֆակտոր-օղակում կան զրոյի բաժանարարներ:

42.5. *Օղակի պարզ և մաքսիմալ իդեալները:* Օղակների ուսումնասիրության մեջ կարևոր դեր են խաղում նրա պարզ և մաքսիմալ իդեալները:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 42.22. $(R, +, \cdot)$ օղակի I իդեալը տնգամներ *պարզ իդեալ*, եթե R -ի կամայական x, y տարրերի համար $xy \in I$ առնչությունից հետևում է, որ $x \in I$ կամ $y \in I$:

Օրինակ, ամբողջ թվերի օղակի $p\mathbb{Z}$ իդեալը պարզ իդեալ է յուրաքանչյուր p պարզ թվի համար, իսկ $6\mathbb{Z}$ իդեալը պարզ չէ:

ՊՆԴՈՒՄ 42.23. R օղակի P իդեալը այն և միայն այն դեպքում է *պարզ*, եթե կամայական I, J իդեալների համար $IJ \subseteq P$ պայմանից հետևում է $I \subseteq P$ կամ $J \subseteq P$:

Արդյունք. Իսկապես, դիցուք՝ I, J իդեալների համար $IJ \subseteq P$, բայց $I \not\subseteq P$ և $J \not\subseteq P$: Հետևաբար՝ կգտնվեն I -ի x և J -ի y տարրեր, որոնք չեն պատկանում P -ին, բայց xy ստորը պատկանում է P -ին: Իսկ դա ճշմանակամ է, որ P -ն պարզ իդեալ չէ:

Հակառակը, եթե P -ն սլարգ իդեալ չէ, ապա գոյություն ունեն նրան չսլավանող x և y տարրեր, որոնց համար $xy \in P$: Հեռևաբար կոմենսանք՝ $(x) \not\subseteq P, (y) \not\subseteq P$, բայց $(x)(y) \subseteq P$: $\square$

ՊՐԻՆԻՄ 42.24. Տեղափոխական և զուգոչափական $(R, +, \cdot)$ օղակի I իդեալը պարզ իդեալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ R/I ֆակտոր-օղակը մաքուրություն ափսոսյալ է:

Ապացույց. Դիցուք՝ R տեղավորական և զուգորդական օղակի I իդեալը սլարգ է և

$$(x + I)(y + I) = I :$$

Այս հավասարությունից կհետևի $xy + I = I$: Հետևապես՝ $xy \in I$: Այստեղից՝ $x \in I$ կամ $y \in I$: Այսինքն՝ $x + I = I$ կամ $y + I = I$: Ուրեմն՝ R/I ֆակտոր-օղակը զրոյի բաժանարարներ չունի: Հետևապես՝ այն մաքուրություն ափսոսյալ է:

Հակառակը, դիցուք՝ R/I ֆակտոր-օղակը մաքուրություն ափսոսյալ է: Այդ դեպքում, եթե $xy \in I$, ապա $xy + I = I$ և, ուրեմն, $(x + I)(y + I) = I$: Հետևապես՝ $x + I = I$ կամ $y + I = I$: Այսինքն՝ $x \in I$ կամ $y \in I$: Իսկ սա նշանակում է, որ I -ն սլարգ իդեալ է: $\square$

ՊՐԻՆԻՄ 42.25. Տեղափոխական և զուգոչափական օղակը մաքուրություն տիրապալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա զրոյական իդեալը պարզ իդեալ է:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: $\square$

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 42.26. R օղակի I իդեալը կոչվում է *մաքսիմալ*, եթե այն R -ից առաքեր է և չի սլարանակվում R -ի R -ից և I -ից առաքեր իդեալի մեջ:

Օրինակ, մաքուր բվերի օղակի $2\mathbb{Z}$ իդեալը մաքսիմալ է: Նույն օղակի զրոյական իդեալը նրա սլարգ իդեալ է, բայց մաքսիմալ իդեալ չէ:

ՊՐԻՆԻՄ 42.27. *Միտլերի, տեղափոխական և զուգոչափական օղակի մաքսիմալ իդեալը նրա պարզ իդեալ է:*

Ապացույց. Դիցուք՝ R միավորով, տեղավորական և զուգորդական օղակի և նրա I մաքսիմալ իդեալի համար $x \cdot y \in I$, բայց x, y առաքերը չեն սլասկանում I -ին: Այդ դեպքում $I + xR = R$ և $I + yR = R$: Հետևապես՝

$$R = (I + xR)(I + yR) = I + xyR = I, R = I :$$

Հակասություն: $\square$

ՊՐԻՆԻՄ 42.28. *Միտլերի, տեղափոխական և զուգորդական R օղակի I իդեալը այն և միայն այն դեպքում է նրա մաքսիմալ իդեալ, երբ R/I ֆակտոր-օղակը դաշտ է:*

Ապացույց. Դիցուք՝ R միավորով, տեղավորական և զուգորդական օղակի I իդեալը մաքսիմալ է և $x + I \neq I$: Այդ դեպքում $(x) + I = R$: Այստեղից կստանանք՝ $xy + a = 1$, որտեղ $y \in R, a \in I$: R/I օղակի մեջ կոմենսանք՝

$$(x + I)(y + I) = 1 + I :$$

Այսինքն՝ R/I օղակի գրեյից ստորերը կամայական $x + I$ ստորը ունի հսկադարձ: Նկատի ունենալով նաև R/I -ի զուգորդականությունը և սեղսփոխականությունը՝ կատանանք, որ R/I -ն դաշտ է:

Հակառակը, ենթադրենք R/I -ն դաշտ է: Յուրաքանչյուր, որ I -ն R -ի մաքսիմալ իդեալ է: Իսկապես, եթե կա J իդեալ, որը ստորեր է և R -ից և I -ից և ընկած է նրանց միջև, ապա R/I դաշտում մենք կունենանք J/I ոչ սրիվիալ իդեալը. հանգստանաք, որը հակասում է 42.2 սեղմանը: $\square$

43. ՕՂԱԿՆԵՐԻ ՀՈՄՈՄՈՐՖԻԶՄԸ

43.1. *Օղակների հոմոմորֆիզմը:* Օղակների արտասխակերտմանների մեջ բնական է ստանձնացնել և դիտարկել նրանք, որոնք համաձայնեցված են օղակում սահմանված գործողությունների հետ: Այս ճանապարհին մենք ստանում ենք օղակի հոմոմորֆիզմի հասկացությունը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 43.1. Դիցուք՝ ունենք $(R_1, +_1, \cdot_1)$ և $(R_2, +_2, \cdot_2)$ օղակները:

$$f: R_1 \rightarrow R_2$$

արտասխակերտումը կոչվում է *հոմոմորֆիզմ* այդ օղակների միջև, եթե R_1 -ի կամայական x, y ստորերի համար՝

$$\text{ա. } f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y),$$

$$\text{բ. } f(x \cdot_1 y) = f(x) \cdot_2 f(y):$$

Երկու օղակներ կոչվում են *հոմոմորֆ*, եթե նրանց միջև գոյություն ունի հոմոմորֆիզմ: Օղակների f հոմոմորֆիզմը կոչվում է *վրայբերում*, *ստորաբերում* կամ *վերաբերում*, եթե համապատասխան հասկացությամբ օժտված է f արտասխակերտումը:

Հասկանալի է, որ հոմոմորֆիզմը վերադրում է այն և միայն այն դեպքում, եթե այն իզոմորֆիզմ է:

¹ Բերենք օղակների հոմոմորֆիզմների օրինակներ:

ա. Կամայական R և R օղակների համար $\theta(x) = 0, x \in R$ արտասխակերտումը հոմոմորֆիզմ է: Այն կոչվում է այդ օղակների գրեյական հոմոմորֆիզմ:

բ. Դիտարկենք $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n, f(m) = r, m \in \mathbb{Z}$ արտասխակերտումը, որտեղ r -ը m ամբողջ քիվի n բնական քվի վրա բաժանումից ստացված մնացորդն է: Այս f արտասխակերտումը հոմոմորֆիզմ է $\mathbb{Z}$ և $\mathbb{Z}_n$ օղակների միջև:

գ. Գոյություն ունի մի շատ կարևոր հոմոմորֆիզմ կամայական օղակի և նրա ֆակտոր-օղակի միջև: Դիցուք՝ ունենք $(R, +, \cdot)$ օղակը և նրա I իդեալը: Դիտարկենք հետևյալ արտասխակերտումը.

$$i_I: R \rightarrow R/I, i_I(x) = x + I, x \in R:$$

Սա վրադրում է R և R/I բազմությունների միջև: Միաժամանակ՝

$$i_I(x + y) = (x + y) + I = (x + I) + (y + I) = i_I(x) + i_I(y),$$

$$i_I(x \cdot y) = (x \cdot y) + I = (x + I) \cdot (y + I) = i_I(x) \cdot i_I(y):$$

Այսինքն՝ i_j -ն համոմորֆիզմ է R և R/I օդակների միջև:

– ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 43.2. R և R/I օդակների միջև i_j համոմորֆիզմը կոչվում է *բնական համամորֆիզմ*:

ՊԼԻՄԵՐ 43.3. *Դիցուք՝ f -ը համամորֆիզմ է $(R_1, +, \cdot)$ և $(R_2, +, \cdot)$ օդակների միջև: Այդ դեպքում՝*

ա. Առաջին օդակի զրոյի պատկերը երկրորդ օդակի զրոն է՝

$$f(0) = 0 :$$

բ. Առաջին օդակի կամայական ստորի հակադրի պատկերը հակադր է երրորդ օդակների հակադրին՝

$$f(-x) = -f(x), x \in R :$$

$$գ. f(x - y) = f(x) - f(y), x, y \in R:$$

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: □

ՊԼԻՄԵՐ 43.4. *Դիցուք՝ f -ը համամորֆիզմ է $(R_1, +, \cdot)$ և $(R_2, +, \cdot)$ օդակների միջև: Այդ դեպքում՝*

ա. Առաջին օդակի ենթօդակի պատկերը երկրորդ օդակի ենթօդակ է:

բ. Երկրորդ օդակի ենթօդակի լրիվ նախապատկերը առաջին օդակի ենթօդակ է:

Ապացույց. ա. ‘Դիցուք՝ A -ն R_1 -ի ենթօդակն է: Այդ դեպքում, եթե $u, v \in f(A)$, ապա $u = f(x), v = f(y), x, y \in A$: Մոմահմանով, $x - y \in A$: Հետևապես՝

$$u - v = f(x) - f(y) = f(x - y) \in f(A) :$$

Ինչու նույն կերպ կապացուցենք նաև, որ $u \cdot v \in f(A)$: Հետևապես՝ $f(A)$ -ն R_2 -ի ենթօդակ է:

բ. Դիցուք՝ U -ն R_2 -ի ենթօդակն է: Ցույց ստանք, որ

$$A = \{x \in R_1 | f(x) \in U\}$$

քաղմույթունը R_1 -ի ենթօդակ է: Իսկուպես, եթե $x, y \in A$, ապա

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \in U, f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \in U :$$

Հետևապես՝ $x + y, x \cdot y \in A$: □

ՊԼԻՄԵՐ 43.5. *Դիցուք՝ f -ը վրաստայ համամորֆիզմ է $(R_1, +, \cdot)$ և $(R_2, +, \cdot)$ օդակների միջև: Այդ դեպքում՝*

ա. առաջին օդակի խլեռի պատկերը երկրորդ օդակի խլեռն է,

բ. երկրորդ խլեռի լրիվ նախապատկերը առաջին օդակի խլեռն է:

Ապացույց. ա. Ցույց ստանք, որ եթե A -ն R_1 -ի խլեռն է, ապա $f(A)$ -ն կլինի R_2 -ի խլեռ: Բավական է ցույց ստալ, որ եթե $u \in f(A), v \in R_2$, ապա $u \cdot v, v \cdot u \in f(A)$: Դիցուք՝ $u = f(x), x \in A, v = f(y), y \in R_1$: Ունենք՝

$$uv = f(x)f(y) = f(xy) \in f(A),$$

քանի որ $xy \in A$: Նույն կերպ՝ $yu \in f(A)$:

բ. Ասկացուցումը կատարեք ինքնուրույն: □

ՊՆԴՈՒՄ 43.6. Եթե *օղակը*.

ա. միասիրավ է,

բ. գույությունի է,

գ. տեղափոխելի է,

ապա համապատասխան հատկությամբ օժտված է նաև նրա համամորֆիզմները:

Ապացույց. գ. 'Իյցույթ' ունենք f համամորֆիզմը R_1 և R_2 օղակների միջև, որոնցից առաջինը տեղափոխական է և $f(R_1) = R_2$: Ցույց տանք, որ տեղափոխական է նաև R_2 -ը: Իսկապես, վերցնենք $u, v \in R_2, u = f(x), v = f(y), x, y \in R_1$: Այդ դեպքում

$$u \cdot v = f(x) \cdot f(y) = f(x \cdot y) = f(y \cdot x) = f(y) \cdot f(x) = v \cdot u :$$

ա, բ. Ասկացուցումը կատարեք ինքնուրույն: □

43.2. Համամորֆիզմի կորիզը: Օղակների ուսումնասիրության մեջ մայնպես կարևոր դեր ունի համամորֆիզմի կորիզի գաղափարը:

ՄԱՀՄԱՆՈՒՄ 43.7. Եթե տվենք օղակների $f : R_1 \rightarrow R_2$ համամորֆիզմը, ապա R_1 -ի այն տարրերի բազմությունը, որոնց պատկերը 0-ն է՝ R_2 -ի գրան, կոչվում է f համամորֆիզմի *կորիզ* և նշանակվում $\ker f$.

$$\ker f = \{x \in R_1 \mid f(x) = 0\} :$$

Օրինակներ:

ա. Դիտարկենք օղակների համամորֆիզմը, որը առաջին օղակի յուրաքանչյուր տարր արտասուական է երկրորդ օղակի գրոյին: Նրա կորիզը առաջին օղակն է:

բ. Օղակների իզոմորֆիզմի կորիզը կազմված է արտասուական զրո օղակի գրանյական տարրից:

գ. 'Իյցույթ' f -ը 43.1 կետի բ օրինակում դիտարկված համամորֆիզմն է: Այդ դեպքում $\ker f = n\mathbb{Z}$:

ՊՆԴՈՒՄ 43.8. Օղակների համամորֆիզմի կորիզը արտասուականներով օղակի խլակ է:

Ապացույց. 'Իյցույթ' ունենք

$$f : R_1 \rightarrow R_2$$

համամորֆիզմը, և $r \in R_1, x, y \in \ker f$: Այսինքն՝

$$f(x) = f(y) = 0 :$$

Այդ դեպքում

$$f(x - y) = f(x) - f(y) = 0 - 0 = 0 :$$

Ուրեմն՝ $x - y \in \ker f$: Նույն կերպ՝

$$f(x \cdot r) = f(x) \cdot f(r) = 0 \cdot f(x) = 0 :$$

Ուրեմն՝ $x \cdot r \in \ker f$, $r \cdot x \in \ker f$: Հետևապես՝ f հոմոմորֆիզմի կորիզը իդեալ է: $\square$

Մենք ցույց ավինք, որ յուրաքանչյուր հոմոմորֆիզմի կորիզ արատապասկերվող օղակի իդեալ է: Իսկ արդյո՞ք օղակի յուրաքանչյուր իդեալ ինչ-որ հոմոմորֆիզմի կորիզ չէ: Այս հարցի սրտատախտը ստախ է հետևյալ հասկոթյունը:

ՊՆԴՈՒՄ 43.9. *Կոմույտկում R օղակի I իդեալը i_I բնական համամորֆիզմի կորիզն է: Այսինքն՝*

$$I = \ker i_I :$$

Ապացույց. Դիցուք՝ $x \in \ker i_I$: Այդ դեպքում $x + I = I$ կամ $x \in I$:

Հակառակը, եթե $x \in I$, ապա $x + I = I$: Հետևապես՝ $i_I(x) = x + I = I$: Ուրեմն՝ $x \in \ker i_I$: Այսպիսով՝ $\ker i_I = I$: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 43.10. *Դիցուք՝ f -ը համամորֆիզմ է $(R_1, +, \cdot)$ և $(R_2, +, \cdot)$ օղակների միջև: Այդ դեպքում R_1 -ի կոմույտկում x և y ստորբերի համար*

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x + \ker f = y + \ker f :$$

Ապացույց. Դիցուք՝ $x, y \in R_1$: Այդ դեպքում, եթե $f(x) = f(y)$, ապա կատանք՝ $f(x - y) = 0$: Հետևապես՝ $x - y \in \ker f$ և ուրեմն՝ $x + \ker f = y + \ker f$:

Հակառակը, եթե $x + \ker f = y + \ker f$, ապա $x - y \in \ker f$: Այսինքն՝ $f(x - y) = 0$: Կամ՝ $f(x) = f(y)$: $\square$

43.3. *Հոմոմորֆիզմների բերրեմը:* Օղակների ուսումնասիրություն մեջ կաբևոր դեր է խաղում հոմոմորֆիզմների հետևյալ հասկոթյունը:

ՊՆԴՈՒՄ 43.11. *(Հոմոմորֆիզմների բերրեմը):* Դիցուք՝ $(R_1, +, \cdot)$ և $(R_2, +, \cdot)$ օղակների միջև f համամորֆիզմը վրստղում է: Այդ դեպքում գալարյաում սոնի այնպիսի g իզոմորֆիզմ $(R/\ker f, +, \cdot)$ և $(R_2, +, \cdot)$ օղակների միջև, որ

$$f = i_{\ker f} \circ g :$$

Այսինքն՝ յուրաքանչյուր վրստղուղ համամորֆիզմ հասկատար է բնական համամորֆիզմի և իզոմորֆիզմի արատաղրյալի:

Ապացույց. Կոռուցենք g աոնշոթյունը հետևյալ կերպ.

$$g(x + \ker f) = f(x) :$$

Այնպես, ինչպես խմբերի հոմոմորֆիզմների բերրեմի սակացուցման մեջ, ցույց կատանք, որ g -ն վերստղում է: g -ն մոտ իզոմորֆիզմ է: Իսկապես,

$$\begin{aligned} g((x + \ker f) + (y + \ker f)) &= g((x + y + \ker f) = f(x + y) = \\ &= f(x) + f(y) = g(x + \ker f) + g(y + \ker f), \\ g((x + \ker f) \cdot (y + \ker f)) &= g((x \cdot y + \ker f) = \\ &= f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) = g(x + \ker f) \cdot g(y + \ker f) : \end{aligned}$$

Վերջուպես, ցույց տանք, որ

$$f = i_{\ker f} \circ g :$$

Իսկուպես, դիցույ՝ $x \in R$: Այդ դեպքում՝

$$(i_{\ker f} \circ g)(x) = g(i_{\ker f}(x)) = g(x + \ker f) = f(x) :$$

Հետևապես՝ $f = i_{\ker f} \circ g$: □

Ասարացված սնդույմից մասնավորապես հետևում է, որ եթե ունենք

$$f : R_1 \rightarrow R_2$$

վրայդրոյ հոմոմորֆիզմը R_1 և R_2 օղակների միջև, ապա սեղի ունի հետևյալ իզոմորֆիզմը, որից և ստիպարաբ օգտվում են գործնական խնդիրներ լուծելիս.

$$R_1 / \ker f \cong R_2 :$$

Օրինակ, վերցնենք n բնական թվի և յուրաքանչյուր ամբողջ թվի առնչներ այդ թվը n -ի վրա բաժանմանից ստացված մնացորդը: Այդ f օտոնոմորֆիզմը կլինի օղակների հոմոմորֆիզմ, որի կարկըն է $n\mathbb{Z}$ -ը: Կիրառելով հոմոմորֆիզմների թեորեմը՝ կստանանք օղակների հետևյալ իզոմորֆիզմը՝

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n :$$

44. ՕՂԱԿԻ ՆՎԱԶԱԳՈՒՅՆ ԵՆԹԱՕՂԱԿԸ ԵՎ ԵՆԹԱԴԱՇՏԸ

44.1. Օղակի բնութագրիչը: Դիտարկենք $(R, +, \cdot)$ միավորավ օղակը: Այդ օղակի 1 միավորը՝ արդեն նրա գումարային խմբի աարը, կարող է ունենալ վերջավոր կամ անվերջ կարգ: Պարզվում է, որ այս հանգամանքը կարևոր նշանակություն ունի սովոր օղակի համար:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 44.1. Եթե օղակի միավորը նրա գումարային խմբում ունի անվերջ կարգ, ապա կոտենք, որ օղակն ունի *զրո բնութագրիչ*, իսկ եթե օղակի միավորը նրա գումարային խմբում ունի m վերջավոր կարգը, ապա այդ m թվը կոչվում է *օղակի բնութագրիչ*:

Այսպիսով՝ m բնական բնութագրիչով օղակի համար m -ը այն ամենավաղը բնական թվն է, որի համար $m1 = 0$ կամ $|1| = m$: Իսկ զրո բնութագրիչով օղակի համար $m1 \neq 0$, ինչպիսի m բնական թվով էլ վերցնենք կամ $|m| = \infty$:

Բերենք երկու օրինակ:

ա. Ամբողջ թվերի $\mathbb{Z}$ օղակի բնութագրիչը հավասար է 0-ի, քանի որ նրանում $m1 \neq 0$ ինչպիսի m բնական թվով էլ վերցնենք:

բ. $\mathbb{Z}_n$ օղակը ունի n բնութագրիչը:

ՊՆԴՈՒՄ 44.2. Եթե R միավորով օղակի բնութագրիչը հավասար է m -ի, ապա օղակի կամայական x տարրի համար $m \cdot x = 0$:

Արտադրյալ. Իսկապես,

$$mx := m(1 \cdot x) = m1 \cdot x = 0 \cdot x := 0 :$$

□

ՊՆԴՈՒՄ 44.3. *Միավորով սմբողջություն ախրույրի բնութագրիչը երե գրո չէ, ապա սարգ թիվ է:*

Արտադրյալ. Դիցուք՝ R միավորով սմբողջության ախրույրի m բնութագրիչի հաւմար $m = nk$, որանեղ n և k բնական թվերը փոքր են m -ից: Այդ դեպքում

$$0 = m1 \quad nk1 := n1 \cdot k1, \quad n1 \cdot k1 = 0 :$$

Այսանեղից, թանի որ R -ը սմբողջության ախրույր է, ապա $n1 = 0$ կամ $k1 = 0$, ընդ որում, n -ը և k -ն երկուսն էլ m -ից փոքր բնական թվեր են: Սաուցվեց հսկաստայում, որը ցույց է աուլիս, որ m -ը սարգ թիվ է:

□

44.2. *Միավորով օղակի նվազագույն ենթաօղակը: Դիցուք՝ R -ը 1 միավորով օղակ է: Դիսարկենք նրա $\{m1 | m \in \mathbb{Z}\}$ ենթաուգծությունը: Այն R -ի ենթաօղակ է: Իսկապես*

$$m1 - n1 := (m - n)1 \in \{m1 | m \in \mathbb{Z}\},$$

$$m1 \cdot n1 = (mn)1 \in \{m1 | m \in \mathbb{Z}\},$$

որանեղ $m, n \in \mathbb{Z}$:

Քանի որ բնական m -ի դեպքում՝

$$m1 = 1 + 1 + \dots + 1,$$

որանեղ գումարելիների թիվը m է, ապա $1 \in \{m1 | m \in \mathbb{Z}\}$ և $\{m1 | m \in \mathbb{Z}\}$ -ը R -ի՝ 1-ը սարունակող նվազագույն ենթաօղակն է: Այլ կերպ աատում են նաև, որ $\{m1 | m \in \mathbb{Z}\}$ -ը R -ի՝ 1-ով ծնված ենթաօղակն է:

ՊՆԴՈՒՄ 44.4. *Երե R միավորով օղակի բնութագրիչը հսկասար է 0-ի, ապա նրա նվազագույն ենթաօղակը իզանութ է սմբողջ թվերի օղակին: Իսկ երե օղակի բնութագրիչը n է, ապա նրա նվազագույն ենթաօղակը իզանութ է $\mathbb{Z}_n$ օղակին:*

Արտադրյալ. Դիսարկենք

$$f : m \rightarrow m1, m \in \mathbb{Z}$$

սրասարուկերումը: Այն ունհույաներն $\mathbb{Z}$ և $\{m1 | m \in \mathbb{Z}\}$ օղակների հոմոմորֆիզմ է:

ու. Երե օղակի բնութագրիչը 0 է, ապա f սրասարուկերումը վերսողում է և ուրեմն՝ իզանորֆիզմ: Այսինքն՝

$$\mathbb{Z} \cong \{m1 | m \in \mathbb{Z}\} :$$

բ. Եթե օղակի բնութագրիչը n է, ապա f եռամուֆիզմի կոքիզը կլմնի $n\mathbb{Z}$ -ը: Հետևապես, համաձայն եռամուֆիզմների թեորեմի,

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \{m \mid m \in \mathbb{Z}\} :$$

Մնում է նկատել, որ իրավացի է մաս օղակների $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$ իզոմորֆիզմը: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 44.5. Եթե միասխյուլ մաթոջադրյուն ախրայրի բնութագրիչը $0 \neq 1$, ապա նրա նվագագայն ենթաօղակը դաշա է:

Արդստյց. Իսկապես, եթե n բնական թիվը R մաթոջադրյուն ախրայրի բնութագրիչն է, ապա n -ը սլարզ թիվ է, և R -ի նվագագայն օղակը իզոմորֆ է $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ օղակին, որը դաշա է, րամնի այ n -ը սլարզ թիվ է: $\square$

44.3. Դաշաի նվագագայն ենթադաշաը: Ուսումնասիրենք դաշաների նվագագայն ենթադաշաները:

ՊՆԴՈՒՄ 44.6. Դաշաի նվագագայն ենթադաշաը իզոմորֆ է.

ա. տոցիանոլ թվերի դաշաին, եթե առվում դաշաի բնութագրիչը զրա է,
բ. $\mathbb{Z}_n$ դաշաին, եթե այդ դաշաի բնութագրիչը n է:

Արդստյց. ա. Դիցուք՝ K -ն 0 բնութագրիչով դաշա է: Վերեում մենք ցույց սվեցինք, որ K դաշաի 1 միավորի համար $\mathbb{Z} \cong \{m \mid m \in \mathbb{Z}\}$: Դիտարկենք K -ի հետևյալ ենթադաշությունը.

$$\{m \mid (n1)^{-1} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} :$$

Հնշաւայումք ցույց է առվում, որ այդ րագմաւայումք կազմում է K դաշաի ենթադաշա, որը իզոմորֆ է տոցիանոլ թվերի $\mathbb{Q}$ դաշաին: Որոնելի իզոմորֆիզմը սասցվում է սրպես

$$f : m/n \rightarrow m \cdot (n1)^{-1}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

արասալատկերում: Նշենք մաս, որ սասցվում նվագագայն դաշաը սվյալ K դաշաի միակ նվագագայն ենթադաշան է:

բ. Հետևում է 44.5 պնդումից: $\square$

45. ԱՄԲՈՂՁՈՒԹՅԱՆ ՏԻՐՈՒՅԹԻ ՔԱՆՈՐԴՆԵՐԻ ԴԱՇԵԸ

45.1. *Անրադադրյուն ախրայրի քանդույների դաշաը:* Օղակների ուսումնասիրաւայում մեք կարեք սեղ է զբաղեցնում դաշաի մեք օղակի ներդրում խնդիրը: Այսինքն՝ ապրիլից հնուրավոր է նախասլու առվում օղակի համար գումնկ մի դաշա, որի ենթաօղակն է կամ որի ենթաօղակին իզոմորֆ է առվում օղակը:

Հասկանալի է, որ եթե մնում ներայրում գայրայրում ունենա, ապա ընդգրկող դաշաի սեղաւախաւայում եւասկայրայումից կհետել մաս առվում օղակի սեղաւախաւայումնայրումը: Բայց ընդգրկող դաշաը մաս գագորդաւայում է և չունի գրայի րաւաւանարաներ: Հետևապես՝ գագորդաւայում կլինի և գրայի րաւաւանարաներ չի ունենա մաս

տրված օղակը: Այսինքն՝ օղակը, որն ընդգրկելի է դաշտի մեջ, անհրաժեշտաբան պետք է լինի ամբողջության տիրույթ:

Պարզվում է, որ ամբողջության տիրույթն, ուղեն, միշտ կապելի է մեղդենյ դաշտի մեջ: Լավագույն օրինակը այստեղ ամբողջ թվերի ամբողջության տիրույթի է ուսցիմանս թվերի դաշտի փոխադարձությունն է, որը, ըստ Լուրյան պոստսոնված է մոտ ընդհանուր դեպքում՝ կոմպակտ ամբողջության տիրույթի է այն ընդգրկեղ մվագուցոյն դաշտի համուր:

Դիցուք՝ R օղակը K դաշտի ենթօղակ է: Պայմանավորվենք օղակի x, y տարրերի համուր, ուսցիմանս թվերի օրինակով, $x \cdot y^{-1}$ որտաղքայր ճշունակել x/y է անվանել x է y տարրերի հարաբերություն կամ բանուր: Հեշտությամբ ցույց է աքվում, որ K դաշտի համուր այս բանդդների բուզմությունը կուզմում է ենթադաշտ: Միաժամանակ այդ ենթադաշտը R օղակը ընդգրկեղ մվագուցոյն ենթադաշտն է: Այն անվանում են R -ի բանդդների դաշտ:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 45.1. K դաշտը կազմում է R ամբողջության տիրույթի *բանդդների դաշտ*, եթե.

- ա. R -ը K -ի ենթաօղակ է,
- բ. K -ի կոմպակտն a տարրի համուր զայսություն ունեն R -ի այնպիսի x, y տարրեր, որ $a = x \cdot y^{-1}$:

Օրինակ, ուսցիմանս թվերի դաշտը ամբողջ թվերի ամբողջության տիրույթի քանդոցների դաշտն է:

Ռերենք քանդոցների դաշտի ես մեկ օրինակ: Նշունակենք

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} :$$

Հասկանալի է, որ $\mathbb{Z}[i]$ -ի տարրերը կոմպլեքս հարթության ամբողջ կոորդինատներով կետերն են:

ՊՆԴՈՒՄ 45.2. $\mathbb{Z}[i]$ -ն կոմպլեքս թվերի օղակի ենթօղակ է:

Ապացույց. Դիցուք՝ $a + bi, c + di \in \mathbb{Z}[i]$: Այդ դեպքում անհնայա է, որ

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i \in \mathbb{Z}[i],$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \in \mathbb{Z}[i] :$$

□

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 45.3. $\mathbb{Z}[i]$ օղակը կոզվում է *գոտայան ամբողջ թվերի օղակ*: Նրա տարրերը կազվում են *գոտայան ամբողջ թվեր*:

Պարզ է, որ գոտայան ամբողջ թվերի օղակը ամբողջության տիրույթ է: Այն նաև միավորով է, սրբվեաև

$$1 = 1 + 0i \in \mathbb{Z}[i] :$$

Նշունակենք՝

$$\mathbb{Q}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\} :$$

ՊՆԴՈՒՄ 45.4. $\mathbb{Q}[i]$ -ն կոմպլեքս թվերի դաշտի ենթադաշտ է:

Լեյպցույց. Ասկացուցումը կատարել ինքնուրույն: □

ՄԱՀԱՆՈՒՄ 45.5. $\mathbb{Q}(i)$ -ն կոչվում է *գոտայան ռացիոնալ թվերի դաշտ*:

ԴՆԴՈՒՄ 45.6. *Գոտայան ռացիոնալ թվերի դաշտը գոտայան մաթեզ թվերի մաթեզությունն ախրայի բանորդների դաշտն է:*

Լեյպցույց. Բավական է նկատել, որ եթե $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$, ապա

$$(a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot i,$$

իսկ այս հավասարությունն այն մասում զրված թվի սխառնումն է $\mathbb{Q}(i)$ -ին: □

Վերջում նշենք, որ մաթեզությունն ախրայի բանորդների դաշտը այն ընդգրկող նվազագույն ենթադաշտն է:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 45.7. Ասկացուցել վերջին դաստիարակությունը:

45.2. *Քանորդների դաշտի գոյությունը:* Հետևյալ պնդումը ցույց է տալիս, որ յուրաքանչյուր մաթեզությունն ախրայի մեկ բանորդների դաշտ:

ԴՆԴՈՒՄ 45.8. *(Քանորդների դաշտի գոյությունը):* Կոմպակտն մաթեզությունն ախրայի մեկ բանորդների դաշտ:

Լեյպցույց. ու. Վերցնենք $(R, +, \cdot)$ մաթեզությունն ախրայը: Նշանակենք $R^* = R \setminus \{0\}$ և $R \times R^*$ բազմությունը վրա առնում ենք ρ երկաթե առնչությունը հետևյալ կերպ՝

$$(x, y)\rho(z, t) \Leftrightarrow x \cdot t = y \cdot z :$$

ρ առնչությունը համարվելությունն է:

Իսկապես, եթե $(x, y) \in R \times R^*$, ապա $x \cdot y = y \cdot x$ հավասարությունից հետևում է $(x, y)\rho(x, y)$, այսինքն՝ ρ առնչությունը առնչադարձելի է:

Այնուհետև,

$$(x, y)\rho(z, t) \Rightarrow x \cdot t = y \cdot z \Rightarrow z \cdot y = t \cdot x \Rightarrow (z, t)\rho(x, y) :$$

Այսինքն՝ ρ առնչությունը նաև համաչափելի է:

Վերջապես,

$$\begin{aligned} (x, y)\rho(z, t), (z, t)\rho(u, v) &\Rightarrow x \cdot t = y \cdot z, z \cdot v = t \cdot u \Rightarrow \\ &\Rightarrow xtzv = yztu \Rightarrow tz(xv - yu) = 0 \Rightarrow xv - yu = 0 \text{ կամ } z = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow xv = yu \text{ կամ } z = 0 \Rightarrow (x, y)\rho(u, v) : \end{aligned}$$

Իսկ ուր էլ նշանակում է, որ ρ -ն վախճանելի է:

Նշանակենք $R \times R^* / \rho$ ֆակտոր-բազմությունը K' -ով՝

$$K' = R \times R^* / \rho :$$

K' -ի աարերի համար ընդունել հետևյալ նշանակումը.

$$|(x, y)|_\rho = x/y :$$

Այսպիսով՝

$$x/y = z/t \Leftrightarrow x \cdot t = y \cdot z :$$

բ. K' բազմության վրա սահմանենք երկու գործողություն.

ՄԱՀՄԱՆՈՒՄ 45.9. K' բազմության կամայական x/y և z/t ստորերի համար հետևյալ կերպ սահմանենք $+$ ' և $\cdot$ ' գործողությունները.

$$x/y + z/t := (xt + yz)/yt,$$

$$x/y \cdot z/t := xz/yt :$$

$+$ '-ը և $\cdot$ '-ը K' բազմության վրա արված երկատեղ համընդհանուր գործողություններ են:

Իսկապես, քանի որ R -ը ամբողջություն տիրույթ է և y -ը և t -ն՝ նրա՝ O -ից տարբեր ստորեր, ապա գրե՛նք՝ yt -ն: Այսինքն՝ $(xt + yz)/yt, xz/yt \in K'$:

Այնուամենայնիվ, անհրաժեշտ է ցույց տալ, որ՝

$$x/y = a/b, z/t = c/d \Rightarrow (xt + yz)/yt = (ad + bc)/bd \text{ և } xz/yt = ac/bd:$$

Իսկապես,

$$x/y = a/b, z/t = c/d$$

հավասարություններից կատանանք

$$xb = ya, zd = tc :$$

Հետևապես՝

$$(xt + yz)bd = xtbd + yzbd = yatd + tcyb = yt(ad + cb) :$$

Այսինքն՝

$$(xt + yz)bd = yt(ad + cb) :$$

Ուրեմն՝

$$(xt + yz)/yt = (ad + bc)/bd :$$

Այնուհետև, մյուս հավասարություններից կատանանք մաս $xbzd = yatc$: Այսինքն՝ $xzbd = ytac$: Ուրեմն՝ $xz/yt = ac/bd$:

գ. Ցույց տանք, որ $(K', +', \cdot')$ եռյակը կազմում է դուալ:

Մտադրենք դուալի բոլոր սկզբնականները: $+$ ' և $\cdot$ ' գործողությունների առկա փակակազմությունը և գումարյականությունը անմիջապես հետևում է այդ գործողությունների սահմանումից: $+$ ' գործողության միավորի, այսինքն՝ գումարի դերը խաղում է O/r դասը կամ կատարակը, որտեղ $r \in R, r \neq 0$, իսկ $\cdot$ գործողության միավորի դերը խաղում է r/r դասը կամ կատարակը, որտեղ $r \in R, r \neq 0$: x/y կատարակի հակադիր կատարակն է $(-x)/y$ կատարակը, իսկ x/y կատարակի հակադարձ կատարակն է y/x կատարակը, որտեղ $y \neq 0, x \neq 0$:

Այսպիսով՝ $(K', +')$ և $((K')^*, \cdot')$ զույգերը կազմում են իսբեյան խմբեր: Մնում է ստուգել $\cdot$ '-ի քաղցկականությունը $+$ '-ի նկատմամբ: Ունենք՝

$$\begin{aligned} u/v \cdot x/y + u/v \cdot z/t &= ux/vy + uz/vt = (uxvt + vyuz)/svyt = \\ &= u(xt + yz)/svyt = u/v \cdot (xt + yz)/yt = u/v \cdot (x/y + z/t) : \end{aligned}$$

Այստեղ մենք օգտվելիք կոստորակների կրճատման հետևյալ հասկացումից, որն ստուգվում է ամփոփականորեն.

Եթե $z \neq 0$, ապա կամայական x/y կոստորակի համար $xz/yz = x/y$:

դ. Այժմ վերցնենք R -ի ոչ գրքյական x աարբը և ղխարկներ R բազմությունից K' -ի մեջ արված

$$f : r \rightarrow rx/x, r \in R$$

արտաստակներումը:

Քանի որ

$$f(a + b) = (a + b)x/x = ax/x + bx/x = f(a) + f(b),$$

$$f(a \cdot b) = (a \cdot b)x/x = ax/x \cdot bx/x = f(a) \cdot f(b),$$

ապա f արտաստակներումը իզոմորֆիզմ է R օղակի և նրա R' ստակների միջև, որտեղ $R' = \{rx/x | r \in R\}$:

Պարզ է նույն, որ K' -ը R' -ի բանադրների դաշտն է. եթե $u, v \in R$, $v \neq 0$, ապա

$$ux/x \cdot (vx/x)^{-1} = ux/x \cdot x/vx = uxx/vxx = u/v :$$

Այսպիսով՝ մենք R -ին իզոմորֆ R' ամբողջություն ակրույքի համար կառուցելիք նրա K' բանադրների դաշտը:

Ե. Անք բնդիտալ մտաւցել նք մեր վերցնական նարատկին. աներամշա է կառուցել մի դաշա, որն իզոմորֆ է K' -ին և, որպես ենթադաշա, արարմանամ է R օղակը: Վարվենք հետևյալ կերալ. նշանակենք

$$K = (K' \setminus R') \cup R :$$

Այսինքն՝ K' դաշտի մեջ R' ենթաօղակի աարբերը փոխարինենք R օղակի աարբերալ: Անշաշա այս փափախարյունից հետա սաուցվում K բազմարյուն մեջ չեն լինի K' -ի գործողարյունները, բայց արագվում է, որ դրանք հեշաարյամբ կարելի է փախարինել նոր գործողարյուններալ, որոնք արդեն հրաշալի կերալով կաալվում են նաև R օղակի գործողարյունների հետ: Վարձ՝ ննարալար է K բազմարյան վրա ալանա սանմանել օղակի գործողարյունները, որ.

1. նրանց նկատամար K -ն լինի դաշա,

2. R -ը լինի նրա ենթաօղակ,

3. K -ն լինի R -ի բանադրների դաշալ:

Նախ կառուցենք φ արտաստակներումը K' և K բազմարյունների միջև.

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{եթե } x \in K' \setminus R', \\ f^{-1}(x), & \text{եթե } x \in R': \end{cases}$$

Ակնադա է, որ այս φ արտաստակներումը K' և K բազմարյունների վերադրամ է և, արենն, մնի իր φ^{-1} հակադարձ արտաստակներումը: Այն ննարալարարյուն է սալլա ասանմանելու գործողարյուններն նաև K բազմարյուն վրա՝ K' -ի վրա արվաճ գործողարյունների միջոցալ: Իակաաես, K -ի կամայական u, v աարբերի համար ընդունենք.

$$u + v = \varphi(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)),$$

$$u \cdot v = \varphi(\varphi^{-1}(u) \cdot \varphi^{-1}(v)) :$$

Միակ առարկայությունը կամ տարակուսանքը, որ կարող է առաջանալ գործողությունների նման առեմանման նկատմամբ, $\vdash$ և $\vdash$ նշանների գործածությունն է. չէ՞ որ դրանք արդեն գործածվում են K բազմության R ենթաբազմության ստորերի նկատմամբ: Բայց ստորև մենք ցույց կստանք, որ այսանի էլ անհամագատանալու հիմքեր չունենք. R բազմության վրա այս նոր ձևով առեմանված գործողությունները համընկնում են արդեն նրանում եղածների հետ: Հասկանալի է, որ առեմանված գործողությունների նկատմամբ K -ն դառնում է K' դաշտին իզոմորֆի պաշա: Մրանով մենք իրագործեցինք վերը նշված երեք խնդիրներից 1 -ը:

Այնուհետև, պարզվում է, որ R -ը, նրա վրա արված նախկին գործողություններով, K' -ի ենթաօղակն է:

Իսկապես, դիցուք՝ $u, v \in R$: Այդ դեպքում՝

$$u + v = \varphi(\varphi^{-1}(u) +' \varphi^{-1}(v)) = \varphi(f(u) +' f(v)) = \varphi(f(u + v)) = u + v :$$

Ատանցված բանաձևը սովորաբար չէ. նրա սկզբում գրված է $u + v$ գումարը, որը առեմանված K' բազմության վրա: Բանաձևի վերջում գրված է R բազմության վրա նախկինում արված $u + v$ գումարը: Եվ առանցված հավասարությունն էլ ցույց է առնում, որ դրանք իրար հետ համընկնում են:

Ցույց տանք, որ R -ի վրա իրար հետ համընկնում են նաև K' բազմության վրա առեմանված բազմապատկման և R -ի վրա եղած բազմապատկման գործողությունները: Իսկապես, դիցուք՝ $u, v \in R$: Այդ դեպքում՝

$$u \cdot v = \varphi(\varphi^{-1}(u) \cdot' \varphi^{-1}(v)) = \varphi(f(u) \cdot' f(v)) = \varphi(f(u \cdot v)) = u \cdot v :$$

Ավսածից հետևում է նաև, որ արված $(R, +, \cdot)$ օղակը $(K', +, \cdot)$ դաշտի ենթաօղակ է: Սա ցույց է առնում, որ մենք իրագործել ենք նաև վերը նշված 2 խնդիրը: Մնաց իրագործել 3 խնդիրը:

Դիցուք՝ $a \in K'$: Այդ դեպքում՝

$$u = \varphi(v) = \varphi(a \cdot' b^{-1}) = \varphi(a) \cdot \varphi(b^{-1}) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)^{-1},$$

որտեղ $x \in K'$, $a, b \in R'$: Հետևապես՝ $\varphi(a), \varphi(b) \in R$: Այսպիսով K' -ի յուրաքանչյուր ատարը հնուգումիս եղով ներկայացնել R -ի ատարերի հարաբերություն կամ բանորդի տեսքով: Սա էլ նշանակում է, որ իսկ K -ն R -ի բանորդների դաշտն է: $\square$

45.3. Հանրողների դաշտերի իզոմորֆիզմը: Անշուշտ, միևնույն ամբողջության տիրության համար կարելի է կառուցել բանորդների ստորերի դաշտեր: Բայց նման դաշտերի ստորերը գրվում են արված ամբողջության տիրության ստորերի նախորդությունների տեսքով, և բնական է սպասել, որ դրանք, ըստ էության, իրարից չեն տարբերվի: Հաշվի առնելով խնդրի կարևորությունը՝ բերենք նրա լուծման համազանգույնից ու հիմնավոր մի ստորերակ:

ԴՆՆՈՒՄ 45.10. Դիցուք՝ $(K_1, +_1, \cdot_1)$ -ը և $(K_2, +_2, \cdot_2)$ -ը $(R, +, \cdot)$ ամբողջություն տիրության բանորդների դաշտեր են: Այդ դեպքում գոյություն ունի այդ դաշտերի այնպիսի φ իզոմորֆիզմ, որը R բազմության վրա դառնում է նույնական տրասպոսիկում, այսինքն՝ $\varphi(x) = x, x \in R$:

Ապացույց. Դիցուք՝ $u \in K_1$: Այդ դեպքում R -ի x և y ստորերի համար $u = x \cdot_1 y^{-1}$: Դիտարկենք K_1 և K_2 բազմությունների միջև ստիպված հետևյալ ρ առնչությունը.

$$\rho(x \cdot_1 y^{-1}) = x \cdot_2 y^{-1}, \quad x, y \in R :$$

Յույց տանք, որ ρ -ն K_1 և K_2 բազմությունների միջև ստիպված վերադրում է: Իսկապես, եթե

$$x \cdot_1 y^{-1} = a \cdot_1 b^{-1}, \quad a, b \in R,$$

ապա $x \cdot b = a \cdot y$: Հետևապես՝

$$x \cdot_2 y^{-1} = a \cdot_2 b^{-1} :$$

Ուրեմն՝ ρ -ն արատապատկերում է:

Այնուհետև, եթե

$$x \cdot_2 y^{-1} = a \cdot_2 b^{-1},$$

ապա $x \cdot b = a \cdot y$: Հետևապես՝

$$x \cdot_1 y^{-1} = a \cdot_1 b^{-1} :$$

Այսինքն՝ ρ -ն ադապտորում է: Ակնհայտ է նաև, որ ρ -ն վրդադրում է: Հետևապես՝ ρ -ն վերադրում է:

ρ -ի առեմնումովից հետևում է, որ այն նաև իզոմորֆիզմ է: Իսկապես,

$$\rho(x \cdot_1 y^{-1} +_1 z \cdot_1 t^{-1}) = \rho((xt + yz) \cdot_1 (yt)^{-1}) = (xt + yz) \cdot_2 (yt)^{-1} =$$

$$= x \cdot_2 y^{-1} +_2 z \cdot_2 t^{-1} = \rho(x \cdot_1 y^{-1}) +_2 \rho(z \cdot_1 t^{-1}),$$

$$\rho(x \cdot_1 y^{-1} \cdot_1 z \cdot_1 t^{-1}) = \rho((xz) \cdot_1 (yt)^{-1}) =$$

$$= (xz) \cdot_2 (yt)^{-1} = (x \cdot_2 y^{-1}) \cdot_2 (z \cdot_2 t^{-1}) = \rho(x \cdot_1 y^{-1}) \cdot_2 \rho(z \cdot_1 t^{-1}) :$$

Հաշվենք ρ -ի ստիպվածությունը R բազմության վրա: Դիցուք՝ $u, r \in R, r \neq 0$: Այդ դեպքում

$$u = ur \cdot_1 r^{-1} :$$

Հետևապես՝

$$\rho(u) = \rho(ur \cdot_1 r^{-1}) = ur \cdot_2 r^{-1} = u :$$

Այսինքն՝ ρ -ն նայնական արատապատկերում է R բազմության վրա: □

46. ԳԱՌՄՅԱՆ ՕՂԱԿՆԵՐ

46.1. *Բաժանականության սյարգագույն հասկությունները:* Ամբողջ թվերի բաժանականություն շատ հասկություններ տեղի ունեն մոտ կամայական՝ միավորով և տեղափոխական օղակներում: Դրանց ուսումնասիրությունը հանգեցնում է նոր և օգտակար արդյունքների:

Դիստրիկեն $(R, +, \cdot)$ միավորով, տեղափոխական և գոգորդական օլսկը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 46.1. Եթե R -ի x, y, z տարրերի համար՝

$$x = yz,$$

տալս y -ը և z -ը կոչվում են x -ի բաժանարարներ, իսկ x -ը՝ y -ի և z -ի բազմապատիկ:

Եթե y -ը x -ի բաժանարարն է, տալս գրում ենք մոտ $y|x$: R օղակի 1 միավորի բաժանարարների բազմությունը, որ նույնն է, քն հակադարձելի տարրերի բազմությունը, կնշանակենք R^* -ով: Հիշենք, որ մոլիկինում մենք մոտն նշանակում օգտագործել ենք օղակի $R \setminus \{0\}$ ենթարազմություն համար: Բայց այդ դեպքերում պիտարկվում օղակները իմնականում եղել են դուշանր, իսկ դուշաի հակադարձելի տարրերի բազմությունը մույնն է, ինչ գրայից տարրեր տարրերի բազմությունը:

ՊՐԴՐՈՒՄ 46.2. *Եթե $(R, +, \cdot)$ -ը միասիրով, տեղափոխական և գոգորդական օղակ է, տալս $(R^*, \cdot)$ գույցը արեղան խամր է:*

Ապացույց. Եթե $x, y \in R^*$, տալս

$$x \cdot x^{-1} = 1, \quad y \cdot y^{-1} = 1 :$$

Այստեղից կունենանք՝

$$(x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) = 1 :$$

Հետևաղեն՝ xy տարրը հակադարձելի է կամ, որ նույնն է, այն միավորի բաժանարար է, այսինքն՝ $x \cdot y \in R^*$: Այսպիսով՝ $\cdot$ -ը R^* -ի վրա արված երկսող գործողություն է: Այդ գործողության տեղափոխականությունը և գոգորդականությունը իենտում է արվում օղակի հասկություններից: Ակնհայտաբեն՝ $1 \in R^*$: Վերջաղեն, եթե $x \in R^*$, տալս $x^{-1} \in R^*$: $\square$

Օգտակար է ընդգծել, որ եթե $x, y \in R^*$, տալս

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} :$$

ՊՐԴՐՈՒՄ 46.3. *R միավորով, տեղափոխական և գոգորդական օղակի կամայական a և b տարրերի համար*

$$b|a \Leftrightarrow (a) \subseteq (b) :$$

Ապացույց. Դիցուք՝ $b|a$: Այդ դեպքում $a = bc, c \in R$: Հետևաղեն՝ $a \in (b)$:

Հակառակը, եթե $(a) \subseteq (b)$, տալս $a = bc, c \in R$: Հետևաղեն՝ $b|a$: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 46.4. *R միավորով, տեղափոխական և զուգարկական օղակի համար.*

ա. երև $x|y$, ապա $xz|yz$.

բ. երև $z|x, z|y$, ապա $z|x + y$,

գ. երև $z|x, z|y$, ապա $z|x - y$.

դ. երև $z|x_1, \dots, z|x_n$, ապա $z|y_1x_1 + \dots + y_nx_n$.

որտեղ $x, y, z, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n \in R$:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: □

ՄԱՀԱՆՈՒՄ 46.5. *R օղակի x և y ստորերր կոչվում են **տաջուցվում R -ում**, եթե նրանցից յուրաքանչյուրի մյուսի բաժանարարն է, այսինքն՝ երև $x|y$ և $y|x$:*

Օրինակ, 2 և -2 թվերը տաջուցվում են $\mathbb{Z}$ -ում:

ՊՆԴՈՒՄ 46.6. *Միավորով, զուգարկական և տեղափոխական R օղակի x և y ստորերրի տաջուցվում են այն և միայն այն դեպքում, երև $(x) = (y)$:*

Ապացույց. Ապացուցումը ունեիջապես հետևում է 46.3 պնդմանը: □

ՊՆԴՈՒՄ 46.7. *Տեղափոխական և միավորով յուրաքանչյուր օղակում տաջուցվում լինելու տոնջությունը համարժեքություն տոնջարյուն է:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: □

ՊՆԴՈՒՄ 46.8. *Դիցուք՝ R -ը միավորով ամբողջություն տիրույթ է, ρ -ն՝ նրա ստորերրի միջև տաջուցվում լինելու տոնջությունը: Այդ դեպքում R -ի կոմուտական x ստորրի համար $|x|_\rho = xR^*$: Այսինքն՝ x -ը և y -ը տաջուցվում են R -ում այն և միայն այն դեպքում, երև գոյություն ունի R^* -ի այնպիսի z ստորր, որ $x = y \cdot z$:*

Ապացույց. Դիցուք՝ x -ը և y -ը տաջուցվում են R -ում: Այդ դեպքում R -ի z և t ստորերրի համար

$$x = yz, \quad y = xt :$$

Հետևապես՝

$$x = x(tz)$$

կամ

$$x(1 - tz) = 0 :$$

Այժմ, երև $x \neq 0$, ապա նաև $y \neq 0$: Այդ դեպքում կունենանք՝ $y = 1 \cdot x$: Իսկ երև $x \neq 0$, ապա բանի որ R -ը ամբողջություն տիրույթ է, կատանք՝ $1 - tz = 0$ կամ $tz = 1$: Այսինքն՝ z -ը հակադարձելի է և $x = yz$: □

46.2. *Օղակի պարզ և բաղադրյալ ստորերրեր:* Դիտարկենք $(R, +, \cdot)$ օղակը: Նրա յուրաքանչյուր x ստորր ունալայման ունի երկու տիպի բաժանարարներ. R -ի հակադարձելի ստորերրը՝ R^* բազմություն ստորերրեր, և x -ի հա տաջուցված ստորերրը՝ xR^* բազմություն ստորերրեր: Այդ երկու տիպի բաժանարարներն ունվաենք x -ի *սլոկիկալ բաժանարարներ*:

ՊՆԴՈՒՄ 46.9. *Միավորով, զուգարդական և տեղափոխական R օղակի y ստոր-
քը նրա x ստորի ոչ արիվիայ բաժանորդուն է այն և միայն այն դեպքում, եթե*

$$(x) \subset (y) \neq R :$$

Ապացույց. Դիցա՛ք՝ $(x) \subset (y) \neq R$: Այդ դեպքում $x = y\ell$, $\ell \in R$: Եթե այժմ y -ը լինի x -ի եևա տաղացված, ապա կունենանք $(x) = (y)$, իսկ եթե $y \in R^*$, ապա կունենանք $(y) = R$:

Հակառակը, դիցու՛ք՝ y -ը x -ի ոչ արիվիայ բաժանորդուն է: Այդ դեպքում $x = y\ell$: Հետևապես՝ $(x) \subseteq (y)$: Եթե $(x) = (y)$, ապա x -ը և y -ը կլինեն տաղացված, որը հնարավոր չէ: Հետևապես՝ $(x) \subset (y)$: Բայց հնարավոր չէ նաև $(y) = R$, քանի որ այդ դեպքում կունենանք $y \in R^*$: Հետևապես՝ $(y) \subset R$: $\square$

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 46.10. $(R, +, \cdot)$ օղակի x ստորքը կոչվում է *բաղադրյալ*, եթե այն գլայից ստորքեր է և ունի ոչ արիվիայ բաժանորդար:

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 46.11. $(R, +, \cdot)$ օղակի x ստորքը կոչվում է *սլորգ*, եթե այն հա-
կադարձելի չէ և նրա բաժանարարները միայն արիվիայ են:

Օրինակ, $\mathbb{Z}$ օղակի մեջ 2, 3 և մնացած սլորգ թվերը և նրանց հակադիրները
այդ օղակի սլորգ ստորքերն են, բաղադրյալ թվերը՝ բաղադրյալ ստորքերը:

Կամայական R օղակի ստորքերը բաժանվում են չորս խմբի՝ $\{0\}$, R^* , R -ի սլորգ
ստորքերի ենթաբազմությունը, R -ի բաղադրյալ ստորքերի ենթաբազմությունը:

Եթե R -ը զուշա է, ապա այն չունի յնչպես սլորգ, այնպես էլ բաղադրյալ ստոր-
քեր:

$\mathbb{Z}_6$ օղակը ունի 0-ից բացի երկու հակադարձելի ստորքեր՝ 1 և 5, իսկ մնացած
երեք ստորքերը բաղադրյալ են.

$$2 = 4 \cdot 2,$$

$$3 = 3 \cdot 3,$$

$$4 = 2 \cdot 2 :$$

Այսինքն՝ $\mathbb{Z}_6$ օղակը սլորգ ստորքեր չունի:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 46.12. Ուսումնասիրեք օղակը, որը բաղադրյալ ստորքեր չու-
նի:

46.3. *Գաումայան օղակներ:* Ամբողջ թվերի օղակում յուրաքանչյուր բաղադ-
րյալ թիվ ներկայացվում է սլորգ արտադրյալների արտադրյալի տեսքով: Ընդ որում,
նման ներկայացումը, արտադրյալների տեղափոխության ճշտությամբ, միակն է: Այս
հատկությունը այնքան կարևոր է, որ հաճախ կոչվում է *թիվաբաժանման հիմնական
թեորեմ*: Կամայական օղակի համար նման հատկություն ձևակերպելու նպատակով
ներմուծենք հետևյալ սահմանումը:

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 46.13. $(R, +, \cdot)$ միավորով ունեցողության սիբոյթի x ստորքը *մի-
արժեքորեն վերածվում է սլորգ արտադրյալների*, եթե.

ա. գոյություն ունեն R -ի այնպիսի $p_1, \dots, p_n$ սլորգ ստորքեր, որ

$$x = p_1 \cdots p_n,$$

բ. եթե մոտ $x = q_1 \cdots q_m$, որտեղ $q_1, \dots, q_m$ -ը R -ի սլարգ տարրեր են, ապա $m - n$ է ինդիքաների որոշ հնարավոր վերադասավորությունից հետո

$$p_i := a_i q_i, a_i \in R^*, i = 1, \dots, n:$$

Մենք ուրիշն զիտենք, որ ամբողջ թվերի օղակում յուրաքանչյուր բաղադրյալ տարր միարժեքորեն ներկայացվում է սլարգ տարրերի արտադրյալի տեսքով: Սակայն ոչ բոլոր ամբողջության ակնույթներն են օժտված այս հատկությամբ: Իսկական, դիստրիկենը

$$\{m + n\sqrt{-3} | m, n \in \mathbb{Z}\}$$

բազմությունը: Հեշտությամբ ցույց է արվում, որ այն կոմպլեքս թվերի դաշտի ենթաօղակ է, որենն մոտ՝ ամբողջության ակնույթ: Նրանում

$$2, 1 + \sqrt{-3}, 1 - \sqrt{-3}$$

թվերը սլարգ տարրեր են: Միաժամանակ,

$$4 := 2 \cdot 2 := (1 + \sqrt{-3}) \cdot (1 - \sqrt{-3}):$$

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 46.14. Այսպիսով ամբողջություն ակնույթը կոչվում է *գառաշուն օղակ*, եթե նրա յուրաքանչյուր բաղադրյալ տարր միարժեքորեն վերլուծվում է սլարգ արտադրիչների:

Օրինակներ և միատրինակներ:

ա. Ամբողջ թվերի օղակը գառաշուն է:

բ. Վերևում դիտարկվում $\{m + n\sqrt{-3} | m, n \in \mathbb{Z}\}$ օղակը գառաշուն չէ:

դ. Յուրաքանչյուր դաշտ գառաշուն օղակ է:

ե. Գառաշուն ամբողջ թվերի $\mathbb{Z}[i]$ օղակը գառաշուն օղակ է:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 46.15. Փորձեք ստացուցել վերջին պնդումը:

Եթե R -ը գառաշուն օղակ է, ապա նրա միավորի բաժանադրից և գրայից տարրեր յուրաքանչյուր a տարր վերլուծվում է սլարգ արտադրիչների: Ենթադրելով, որ մնան վերլուծության մեջ համընկալող իրարից տարրեր սլարգ արտադրիչներն են՝ $p_1, \dots, p_n$, մենք կարող ենք առանց a տարրի հետևյալ վերլուծությունը.

$$(62) \quad a = \epsilon \cdot p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n},$$

որտեղ ϵ -ն միավորի բաժանադր է, իսկ $k_1, \dots, k_n$ տարրերը՝ ոչ բացասական ամբողջ թվեր:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 46.16. (1) վերլուծությունը կոչվում է a տարրի *կամոնական վերլուծություն*:

Հատկանալի է, որ a տարրը կարող է ունենալ մոտ այդ կամոնական վերլուծություններ: Սակայն այդ նոր վերլուծությունը ունարյունակ պետք է ունենա

$$a = \epsilon' \cdot (\epsilon_1 p_1)^{k_1} \cdots (\epsilon_n p_n)^{k_n}$$

տեսքը, որտեղ $\epsilon', \epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ տարրերը միավորի բաժանադրներն են:

46.4. *Ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն ու ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը գտալու օղակներում:* Անգ հայտնի է երկու կամ ավելի ամբողջ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի գոտափայրը: Այն կարելի է ստանձնել նաև օղակների շատ ավելի լայն դասի վրա:

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 46.17. Միավորով և տեղափոխական R օղակի $a_1, \dots, a_n$ ստորերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար է կոչվում R -ի այն d ստորը, եթե.

ա. d -ն բաժանարար է $a_1, \dots, a_n$ ստորերից յուրաքանչյուրի նսմար,

բ. $a_1, \dots, a_n$ ստորերի յուրաքանչյուր ընդհանուր բաժանարար բաժանարար է նաև d -ի նսմար:

$a_1, \dots, a_n$ ստորերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը հաճախ նշանակվում է $(a_1, \dots, a_n)$:

ՊՆԴՈՒՄ 46.18. *Երե d -ն միավորով և տեղափոխական R օղակի $a_1, \dots, a_n$ ստորերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է, սպա d -ի հետ տաղացվում յուրաքանչյուր ստոր նույնպես $a_1, \dots, a_n$ ստորերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար է:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեր ինքնուրույն: □

Ոչ բոլոր օղակներն են, որոնց ստորերն ունեն ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար:

ՊՆԴՈՒՄ 46.19. *Դատալում օղակի կամայական երկու աչ գրայական ստորերն ունեն ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար: Ընդ որում, երե սպիում են a և b ստորերի*

$$a = c \cdot p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}, \quad b = c' \cdot p_1^{l_1} \cdots p_n^{l_n}$$

կամոնական վերածորյունները, սրանդ ստորդ տրատարիչների որոշ ցուցիչներ կառայ են լինել նսև 0, սպա

$$(a, b) = c'' p_1^{\max(k_1, l_1)} \cdots p_n^{\max(k_n, l_n)},$$

սրանդ $c'' \in R^\times$:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեր ինքնուրույն: □

Այժմ անցնենք ամենափայր ընդհանուր բազմապատիկի ծառմնասիրայանը:

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 46.20. Միավորով և տեղափոխական R օղակի $a_1, \dots, a_n$ ստորերի ամենափայր ընդհանուր բազմապատիկ է կոչվում R -ի այն q ստորը, որի հաճաք.

ա. q -ն բազմապատիկ է $a_1, \dots, a_n$ ստորերից յուրաքանչյուրի հսմար,

բ. $a_1, \dots, a_n$ ստորերի յուրաքանչյուր ընդհանուր բազմապատիկ բազմապատիկ է նսև q -ի հսմար:

$a_1, \dots, a_n$ ստորերի ամենափայր ընդհանուր բազմապատիկը հաճախ նշանակվում է $[a_1, \dots, a_n]$:

ՊՆԴՈՒՄ 46.21. *Եթե q -ն R օղակի $a_1, \dots, a_n$ ստորերիի տմենտիարը ընդհու-
նուր բազմապատիկ է, ապա d -ի հետ տաղադրված յուրաքանչյուր ստորը նույնպես
 $a_1, \dots, a_n$ ստորերիի տմենտիարը ընդհանուր բազմապատիկ է:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարենք ինքնուրույն: □

ՊՆԴՈՒՄ 46.22. *Դառախոն օղակի կոմուտատիվ երկու ոչ զրոյական ստորերի
տմենտմենտիարը ընդհանուր բազմապատիկ է: Ընդ որում, եթե ամենք a և b ստոր-
երիի*

$$a = c p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}, \quad b = c' \cdot p_1^{l_1} \dots p_n^{l_n}$$

*կոմունտիվում վերլուծարյունները, որտեղ պարզ արատալիչների որոշ ցուցիչներ կա-
յալ են լինել նույն 0, ապա*

$$|a, b| = c'' p_1^{max(k_1, l_1)} \dots p_n^{max(k_n, l_n)},$$

որտեղ $c'' \in R^*$:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարենք ինքնուրույն: □

47. ԳԼԽԱՎՈՐ ԻԴԵԱԼՆԵՐԻ ՕՂԱԿ

47.1. *Գլխավոր իդեալների օղակը:* Առանձնապատկեր հետադիմացությամբ
են ներկայացնում այն սահմանափակում ախրայրները, որոնցում յուրաքանչյուր իդեալ
զվազվազ է:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 47.1. Միավարված սահմանափակում ախրայրը, որի յուրաքանչյուր ի-
դեալ զվազվազ է, կոչվում է *գլխավոր իդեալների օղակ*:

Օրինակներ և միատարինություններ:

տ. Յուրաքանչյուր **գլխավոր իդեալների օղակ** է:

բ. Սահմանափակում օղակը զվազվազ իդեալների օղակ է:

գ. Չույզ լավերի օղակը զվազվազ իդեալների օղակ չէ, քանի որ այն միավոր
չունի:

ՊՆԴՈՒՄ 47.2. *Եթե գլխավոր իդեալների օղակի պարզ ստորը բաժանում է
նրա ստորերի արատալիչայր, ապա այն կրժառնի նույն արատալիչներից որևէ մեկը:*

Ապացույց. Վերցնենք զվազվազ իդեալների R օղակը: Նույն պատկերներ երկու
արատալիչների արատալիչայրի դեպքը: Դիցուք՝ տմենտ R -ի x, y ստորերները, p պարզ
ստորեր և $p|xy$: Դիցուք՝ z -ն չի բաժանում x -ը: Դիտարկենք R -ի $pR + xR$ իդեալը:
Ըստ սկզբունքի՝ այն զվազվազ է: Հետևապես՝ R -ի ինչ-որ a ստորիի համար

$$pR + xR = aR :$$

Այս a ստորի բաժանում է z -ն և x -ը՝ $a|p, a|x$: Քանի որ $a|p$ և z -ն պարզ ստորեր է,
ապա կամ $(a) = pR^*$, կամ էլ $(a) = R^*$:

Դիցա՛ր՝ $(a) := pR^*$: Այդ դեպքում $p|a$, և բունի որ $a|x$, ապա կունենանք $p|x$, որը հակասում է մեր ենթադրությանը: Այդ պատճառով $(a) := R$: Այսինքն՝

$$pR + xR = R :$$

Հետևաբն՝ գոյություն ունեն R -ի սյնայիսի u և v տարրեր, որ

$$1 = pu + xv :$$

Այս հավասարության երկու մասերը բազմապատկելով y -ով՝ կստանանք՝

$$y = py + xv y :$$

Բայց p -ն բաժանում է $xv y$ -ը: Այն կբաժանի նաև $xv y$ -ը: Ակնհայտորեն p -ն բաժանում է py տարրը: Հետևաբն՝ p -ն կբաժանի $py + xv y$ գումարը կամ այդ գումարին հավասար y տարրը:

Այժմ ենթադրենք, րե $p|x_1 \cdots x_n$: Յույց տանք, որ p -ն բաժանում է $x_1, \dots, x_n$ տարրերից զոմն մեկը: Ասացուցու՛մք կտատրենք ինդուկցիայով՝ ըստ արտադրիչների քվի:

Երե $n = 2$, պնդումն ասրեն ասացուցվում է:

Դիցու՛ր՝ $n > 2$: Նշանակենք՝

$$x_1 \cdots x_{n-1} = y :$$

Այդ դեպքում՝

$$x_1 \cdots x_n = y \cdot x_n, \quad p|y \cdot x_n :$$

Հետևաբն՝ $p|y$ կամ $p|x_n$: Երե $p|x_n$, ապա պնդումն ասացուցվում է: Իսկ $p|y$ դեպքում կունենանք $p|x_1 \cdots x_{n-1}$, և մնում է օգտվել ինդուկցիոն ենթադրությունից: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 47.3. Գլխավոր խելայների օղակի I խելայր այն և միայն այն դեպքում է սրտրգ խելայ, երե այդ օղակի սրեւ p սրտրգ տարրի համար $I = (p)$:

Ապացույց. Իսկապես, երե p -ն սրտրգ տարր է, և $xy \in (p)$, ապա $xy = pz$, $z \in R$: Համաժայն նախադ պնդմուն՝ x, y տարրերից սրեւ մեկը սլեսք է բաժանվի p սրտրգ տարրի վրա, հետևաբն՝ կպատկանի (p) խելային:

Իսկ երե q տարրը սրտրգ չէ, ապա $q \neq xy$, որտեղ x, y տարրերը միավորի բաժանարարներ չեն: Այդ դեպքում $xy \in (q)$, և երե $x \in (q)$, ապա կստանանք՝ $x = qa$ կամ $q = xy = qay$: Այստեղից կստանանք՝ $ay = 1$, այսինքն՝ y -ը միավորի բաժանարար է: Հակասություն: Հետևաբն՝ (q) -ն սրտրգ խելայ չէ: $\square$

47.2. Գլխավոր խելայների օղակը գաուսյան է: Այս կեսում մենք կասացուցենք հետևյալ հիմնական հասկարյունը:

ՊՆԴՈՒՄ 47.4. Գլխավոր խելայների օղակը գաուսյան օղակ է:

Ապացույց. Դիցա՛ր՝ R -ը գլխավոր խելայների օղակ է: Նախ ցայց տանք նրանում սրտրգ արտադրիչների վերաբառյուն գոյությանը:

Դիցա՛ր՝ R օղակում գոյություն ունի x ոչ գրայական, միավորի բաժանարար չանդիլիտացող և ոչ սրտրգ տարր, որը հնարավոր չէ ներկայացնել սրտրգ արտադրիչների տրաադրյալի տեսքով: Այդ դեպքում կարելի է գտնել R -ի ոչ գրայական,

միավորի բաժանարար չհամդիսուցող x_1 և y_1 այնպիսի ստորեր, որոնցից առնվածն մեկը, օրինակ x_1 -ը, սլարգ ստոր γ և

$$x = x_1 \cdot y_1 :$$

Հասկանալի է, որ x_1 -ը x -ի սեփական բաժանարար է և, հետևաբար, $(x) \subset (x_1)$:

Նայեն դատադրությունները ունեն x_1 -ի նկատմամբ: Կատանանք $x_1 = x_2 \cdot y_2$, որտեղ x_2 -ը x_1 -ի սեփական բաժանարարն է: Հետևապես՝ $(x_1) \subset (x_2)$:

Շարունակելով այս ընթացքը՝ մենք կատանանք յուրից ստորեր իդեալների հետևյալ անվերջ շղթան.

$$(x) \subset (x_1) \subset (x_2) \subset \dots \subset (x_n) \subset \dots :$$

Հեշտությամբ կարելի է համոզվել, որ իդեալների այս շղթայի անդամների U միավորումը նայնպես արված օդակի իդեալ է: Հետևապես՝ այն նաև գլխավոր իդեալ է և ծնված է R օդակի որևէ ստորով. $U = (z)$, $z \in R$: Բայց U -ն հավասար է արված շղթայի անդամների միավորմանը: Հետևապես՝ U -ի z ստորր կուսակաճի ուղղ միավորման անդամներից որևէ մեկին, օրինակ, (x_n) -ին: Մակայն ուղղ դեպքում U -ն ամբողջությամբ կարտանակվի (x_n) իդեալի մեջ: Հետևապես՝ արված շղթան անվերջ շարունակվել չի կարող: Ստացված հավաստությունը ցույց է տալիս, որ R -ի մեջ չի կարող լինել ստոր, որը չվերածվի սլարգ արտադրիչների:

Այժմ ցույց տանք սլարգ արտադրիչների վերլուծության միակությունը: Կիրառենք ինդուկցիոն՝ ըստ ստորի սլարգ արտադրիչների բլի:

Նքե x -ի սլարգ արտադրիչների բլի 1 է, այսինքն՝ x -ը սլարգ ստոր է, ապա ունեն ինչ հասկանալի է:

Ենթադրենք սլարգ արտադրիչների վերլուծության միակությունը առնի ունի $n - 1$ սլարգ արտադրիչներով արտադրյալի համար, և ունենք x ստորի՝ սլարգ արտադրիչների արտադրյալի առնալով երկու վերլուծություն.

$$x = p_1 \cdots p_n = q_1 \cdots q_m :$$

Քանի որ p_n սլարգ ստոր բաժանում է $q_1 \cdots q_m$ արտադրյալը, ապա համաձայն 17.2 պնդման՝ այն կբաժանի նրա արտադրիչներից գոնե մեկը, դիցուք՝ q_m -ը: Եվ բունի որ p_n -ը և q_m -ը սլարգ ստորեր են, ապա $p_n = a q_m$, որտեղ a -ն միավորի բաժանարար է: Տեղադրելով p_n -ի այս արժեքը $p_1 \cdots p_n = q_1 \cdots q_m$ հավաստություն մեջ և կատարելով կրճատում՝ կունենանք՝

$$p_1 \cdots p_{n-1} = q_1 \cdots (a q_{m-1}) :$$

Օդակներ ինդուկցիոն ենթադրությունից: Կատանանք՝ $n - 1 \Rightarrow m - 1$ և ինդեքսների որոշ հնարավոր վերադասավորումից հետո՝

$$p_1 = a_1 q_1, \dots, p_{n-1} = a_{n-1} q_{n-1},$$

որտեղ $a_1, \dots, a_{n-1} \in R^*$: Միավորելով այս հավաստություններին $p_n = a q_n$ հավաստությունը՝ կստանանք պնդման պահանջը: $\square$

☐☐
$$(64) \quad d = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n :$$

Քանի որ $a_i \in (d)$, ապա d -ն a_i -ի բաժանարար է: Դիցե՛ք՝ c -ն նույնպես բաժանարար է յարարանշյալ a_i -ի համար. $a_i = c\beta_i, i = 1, \dots, n$: Օգտվելով (64)-ից՝ կստանանք՝

$$d = \alpha_1\beta_1c + \dots + \alpha_n\beta_nc :$$

Այստեղից հետևում է, որ c -ն d -ի բաժանարարն է: Հետևապես՝ d -ն $a_1, \dots, a_n$ ստորերիկ տմենումն ընդհանուր բաժանարարն է:

Հսկաստակը, դիցե՛ք՝ d -ն $a_1, \dots, a_n$ ստորերիկ տմենումն ընդհանուր բաժանարարն է: Քանի որ R -ը գլխավոր խղեպների օդակ է, ապա նրա ինչ-որ c ստորիկ համար

$$(a_1, \dots, a_n) = (c) :$$

Այստեղից հետևում է, որ c -ն $a_1, \dots, a_n$ ստորերիկ տմենումն ընդհանուր բաժանարարն է: Հետևապես՝ c եւ d ստորերիկ տառցուցված են եւ, որեւէն, $(c) = (d)$: Այսինքն՝ $(a_1, \dots, a_n) = (d)$: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 47.8. Գլխավոր խղեպների R օդակի $a_1, \dots, a_n$ ստորերիկ d ընդհանուր բաժանարարը այդ ստորերիկ տմենումն ընդհանուր բաժանարարն է այն եւ միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունեն R -ի այնուիսի $x_1, \dots, x_n$ ստորերի, որ

$$d = x_1a_1 + \dots + x_na_n :$$

Ապացույց. Համաձայն նախորդ պնդման՝ d -ն $a_1, \dots, a_n$ ստորերիկ տմենումն ընդհանուր բաժանարարն է. նշանակում է՝ $(a_1, \dots, a_n) = (d)$: Կամ՝

$$(d) = a_1R + \dots + a_nR :$$

Իսկ արանից հետևում է՝ $d = x_1a_1 + \dots + x_na_n$:

Հսկաստակը, երբ $d = x_1a_1 + \dots + x_na_n$, ապա $a_1, \dots, a_n$ ստորերիկ յարարանշյալ ընդհանուր բաժանարար բաժանարար է նաեւ d -ի համար: Իսկ դա էլ նշանակում է, որ d -ն $a_1, \dots, a_n$ ստորերիկ տմենումն ընդհանուր բաժանարարն է: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 47.9. Երբ d -ն գլխավոր խղեպների R օդակի $x_1, \dots, x_n$ ստորերիկ տմենումն ընդհանուր բաժանարարն է եւ $z \in R$, ապա zd -ն $x_1z, \dots, x_nz$ ստորերիկ տմենումն ընդհանուր բաժանարարն է:

Ապացույց. Աստուծոյմը կատարեն ինքնուրույն: $\square$

47.4. *Ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը գլխավոր խղեպների օդակներում:* Ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը գլխավոր խղեպների օդակում նայնպես ունի մի շարք յուսցուցիչ հատկոյյուններ:

ՊՆԴՈՒՄ 47.10. Գլխավոր խղեպների R օդակի կոմսյուտիւն $a_1, \dots, a_n$ ստորերիկ տմենումն ընդհանուր բազմապատիկ: Ընդ որում, q ստորիկ այն եւ միայն այն դեպքում է այդ օդակի $a_1, \dots, a_n$ ստորերիկ տմենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը, երբ

$$(q) = (a_1) \cap \dots \cap (a_n) :$$

Ապացույց. Համաձայն 47.4 պնդման զվտավոր խղճանքների R օղակը գաղափարն է, որի կամայական տարրերի ունենումն առնաձայնոր ընդհանուր բազմապատիկ, համաձայն 46.22 պնդման: Դիցուք՝ մաս R օղակի q և $a_1, \dots, a_n$ տարրերի համար $(a_1) \cap \dots \cap (a_n) = (q)$: Այդ դեպքում q -ն ընդհանուր բազմապատիկ է այս $a_1, \dots, a_n$ տարրերի համար: Մյուս կողմից, եթե q' -ը ընդհանուր բազմապատիկ է $a_1, \dots, a_n$ տարրերի համար, ապա

$$q' \in (a_1), \dots, q' \in (a_n) :$$

Հետևապես՝

$$q' \in (a_1) \cap \dots \cap (a_n)$$

կամ $q' \in (q)$: Այսինքն՝ q' -ը q -ի բազմապատիկ է: Իսկ սա նշանակում է, որ q -ն $a_1, \dots, a_n$ տարրերի առնաձայնոր ընդհանուր բազմապատիկն է:

Հակառակը: Դիցուք՝ q -ն $a_1, \dots, a_n$ տարրերի առնաձայնոր ընդհանուր բազմապատիկն է: Քանի որ R -ը զվտավոր խղճանքների օղակ է, ապա գոյություն ունի այնպիսի մի q'' տարր, որ

$$(a_1) \cap \dots \cap (a_n) = (q'') :$$

Վերևում մենք ասացուցեցինք, որ այս հավասարությանից հետևում է, որ q'' -ը $a_1, \dots, a_n$ տարրերի առնաձայնոր ընդհանուր բազմապատիկ է: Հետևապես՝ q'' և q տարրերը ստացուցված տարրեր են և, արևմ, $(q'') = (q)$: Հետևապես՝

$$(a_1) \cap \dots \cap (a_n) = (q) :$$

□

Նշանակենք $|x_1, \dots, x_n|$ -ով կամայական օղակի $x_1, \dots, x_n$ տարրերի առնաձայնոր ընդհանուր բազմապատիկը, եթե, ինտրիկ, այն գոյություն ունի:

ՊԼԴՌԻՄ 47.11. Գլխավոր խղճանքների R օղակի կամայական x, y և z տարրերի համար

$$|zx, zy| = z|x, y| :$$

Ապացույց. $z = 0$ դեպքում ասացույցն ակնհայտ է: Դիցուք՝ $z \neq 0$: Ենթադրենք՝ $q = |x, y|$: Պարզ է, որ qz -ը xz և yz տարրերի ընդհանուր բազմապատիկ է: Ցույց տանք, որ այն մասն այդ տարրերի առնաձայնոր ընդհանուր բազմապատիկն է: Դիցուք՝ q' -ը xz, yz տարրերի ընդհանուր բազմապատիկ է: Այսինքն՝

$$q' = axz, q' = byz, a, b \in R :$$

Այստեղից կատանոնք $axz = byz$ կամ

$$(ax - by)z = 0 :$$

Եվ որովհետև $z \neq 0$, ապա $ax - by = 0$ կամ $ax = by$: Իսկ սա, համաձայն 47.10 պնդման, նշանակում է, որ ax -ը q -ի բազմապատիկ է՝ $ax = qr, r \in R$: Այստեղից, հաշվի առնելով $q' = axz$ հավասարությունը, կատանոնք՝

$$q' = axz = qrz :$$

Այսինքն՝ q' -ը qz -ի բազմապատիկ է։ Ուրեմն՝ q' -ը xz, yz ստորերի ամենավաքը ընդհանուր բազմապատիկն է։ $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 47.12. *Դվատար խեղաների R օղակի կամայական $x_1, \dots, x_n$ և z ստորերի համար*

$$|x_1 z, \dots, x_n z| = z |x_1, \dots, x_n| :$$

Ապացույց. Ապացուցումը կատարվում է ինդուկցիայով՝ ելնելով միադրդ սակայցից։ $\square$

47.5. *Փոխադարձաբար պարզ ստորերը գլխավոր խեղաների օղակներում։* Կամայական օղակի համար ընդհանրացնենք սմբողջ թվերի օղակից հայտանի ևս մի հասկացություն։

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 47.13. *R օղակի $a_1, \dots, a_n$ ստորերը կոչվում են փախսարձաբար պարզ, եթե նրանց ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը օղակի միավորի բաժանարար է։*

ՊՆԴՈՒՄ 47.14. *Եթե գլխավոր խեղաների R օղակի $a_1, \dots, a_n$ ստորերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գրայից ստորերի d ստորն է, ապա $a_1/d, \dots, a_n/d$ ստորերը փախսարձաբար պարզ են։*

Ապացույց. Դիցուք՝ $a_1, \dots, a_n$ ստորերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը նրա գրայից ստորեր d ստորն է։ Համաձայն 47.8 պնդման, գոյություն ունեն R -ի այնպիսի $x_1, \dots, x_n$ ստորեր, որ

$$d = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով $d \neq 0$ պայմանը, կստանանք՝

$$1 = x_1 a_1/d + \dots + x_n a_n/d :$$

Իսկ սա էլ նշանակում է, որ 1-ը $a_1/d, \dots, a_n/d$ ստորերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է։ Այսինքն՝ $a_1/d, \dots, a_n/d$ ստորերը փոխադարձաբար պարզ են։ $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 47.15. *Դվատար խեղաների R օղակի $a_1, \dots, a_n$ ստորերը այն և միայն այն դեպքում են փախսարձաբար պարզ, երբ գոյություն ունեն R -ի այնպիսի $x_1, \dots, x_n$ ստորեր, որ*

$$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = 1 :$$

Ապացույց. Ապացուցումը կատարենք ինքնաբերական։ $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 47.16. *Եթե գլխավոր խեղաների R օղակի x և a ստորերը փախսարձաբար պարզ են և $a \nmid xy$, ապա $a \nmid y$ ։*

Ապացույց. Համաձայն մտաբեր պնդման, գոյություն ունեն R -ի այնպիսի u և v ստորեր, որ

$$ux + va = 1 :$$

Այստեղից կստանանք՝

$$u:xy + va:y = y :$$

Քանի որ՝ ըստ սլոյմանի, $a \mid xy$ և օկենիայութեն նաև $a \mid va:y$, ապա վերջին հավասարայությունից կստանանք $a \mid y$: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 47.17. Եթե գլխավոր իդեալների R օղակի x և y տարրերը վախժադարձաբար սլորգ են, ապա նրանց ամենախաբր ընդիանուր բազմադասիկը տաճուցիվոժ է $:xy$ տարրի հետ:

Արդյույց. Դիցուք՝ q -ն x և y տարրերի ընդիանուր բազմադասիկն է: Ցույց տանք, որ այն բազմադասիկ է նաև $:xy$ տարրի համար: Իսկուպես, $q = xa$, և քանի որ $y \mid q$, ապա $y \mid xa$: Մյուս կողմից, քանի որ x և y տարրերը վախժադարձաբար սլորգ են, ապա $y \mid a$: Հետևապես՝ $a = yb$ կամ $q = xyb$: Այսինքն՝ $xy \mid q$: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 47.18. Դիվիզոր իդեալների R օղակի աչ գրայտիւն x և y տարրերի ամենախաբր ընդիանուր բազմադասիկի և ամենամեծ ընդիանուր բաժանուրարի որտուղրայոլը տաճուցիվոժ է $:xy$ տարրի հետ:

Արդյույց. Դիցուք՝ d -ն x, y տարրերի ամենամեծ ընդիանուր բաժանուրարն է: Համաձայն 47.14 պնդման՝ $x/d, y/d$ տարրերը փոխադարձաբար սլորգ են: Հետևապես՝ համաձայն 47.17 պնդման, $x/d, y/d$ տարրերի ամենափաբր ընդիանուր բազմադասիկը հավասար է $x/d \cdot y/d$: Այսինքն՝ $[x/d, y/d] = x/d \cdot y/d$: Բայց $[x, y] = d[x/d, y/d]$: Հետևապես՝

$$[x, y] = d \cdot x/d \cdot y/d = xy/d \text{ կամ } [x, y]d = xy:$$

$\square$

48. ԷՎԿԼԻԴՅԱՆ ՕՂԱԿՆԵՐ

48.1. *Էվկլիդեսի օղակը:* Ամբողջ թվերի օղակի ուսումնասիրության մեջ չափագունց մեծ դեր է խաղում մնացորդով բաժանման հասկերայունը: Բնական է այդ հասկերայունը ներգրավել այլ օղակների ուսումնասիրության մեջ նույնպես: Հասկանալի է, որ ցունկուկի արայունքը պեսոք է սարսակ աչ բոլոր օղակների համար: Արդյունքում տաումճումնում է օղակների մի հաաաուկ դաս, որն անվանվում է Էվկլիդի անվումը:

ՄԱՀՄԱՆՈՒՄ 48.1. Արոժորով R ումրողայայուն սրբոյրքը կոչվում է *Էվկլիդեսի օղակ*, եթե նրա յարսարունչայուր աչ գրայտիւն a տարրի հետ տունչվում է մի $n(a)$ բնական թիվ, ընդ որում, R -ի կումայտիւն a և գրայից տարրեր b տարրերի համար կարելի է գանել նրա ույնսլիսի q և r տարրեր, որ

$$a = bq + r,$$

որսեղ $r = 0$ կամ $n(r) < n(b)$:

Օրինակ, յուրաքանչյուր m ամբողջ թվի համար ընդունենք

$$n(m) = |m| :$$

Այդ դեպքում ամբողջ թվերի օղակը դառնում է էվկլիդեսյան օղակ:
Բերենք էվկլիդեսյան օղակի ևս մեկ օրինակ:

ՊՆԴՈՒՄ 48.2. *Դասայան ամբողջ թվերի օղակը էվկլիդեսյան օղակ է:*

Ապացույց. Նշանակենք

$$n(a + bi) = a^2 + b^2, \quad a, b \in \mathbb{Z} :$$

Դժվար չէ նկատել, որ.

$$\text{ա. } n(x) = |x|^2,$$

$$\text{բ. } n(xy) = n(x)n(y), \quad x, y \in \mathbb{Z}[i]:$$

Այնուհետև, դիցուք՝

$$x, y \in \mathbb{Z}[i], y \neq 0, x/y = a + bi, a, b \in \mathbb{Q} :$$

Վերցնենք հետևյալ սրայմաններին բավարարող k և l ամբողջ թվերը՝

$$|a - k| \leq 1/2, |b - l| \leq 1/2,$$

և նշանակենք $u = a - k, v = b - l$: Այսինքն՝ $a = u + k, b = v + l$: Կունենանք՝

$$\begin{aligned} x &= y(u + k + (v + l)i) = y((k + li) + (u + vi)) = \\ &= y(k + li) + y(u + vi) = yq + r, \end{aligned}$$

որտեղ $q = k + li, r = y(u + vi)$: Այսինքն՝ $x = yq + r$: Պարզ է, որ $q, r \in \mathbb{Z}[i]$:
Այնուհետև՝

$$\begin{aligned} n(r) &= n(y)(u^2 + v^2) \leq n(y)(1/4 + 1/4) = \\ &= n(y) \cdot 1/2 < n(y), \quad n(r) < n(y) : \end{aligned}$$

□

48.2. *Էվկլիդեսյան օղակի հատկությունները:* Այստեղ մենք կապացուցենք էվկլիդեսյան օղակի երկու կարևոր հատկությունները:

ՊՆԴՈՒՄ 48.3. *Էվկլիդեսյան օղակը գլխավոր խելայների օղակ է:*

Ապացույց. Դիցուք՝ ունենք $(R, +, \cdot)$ էվկլիդեսյան օղակը: Վերցնենք նրա որևէ A խելալը: Նշանակենք

$$M = \{n(a) | a \in A \setminus \{0\}\} :$$

Դիցուք՝ m -ը բնական թվերի M բազմության ամենափոքր տարրն է, և A բազմության x տարրի համար $n(x) = m$: Ցույց տանք, որ $A = (x)$: Իսկույես, վերցնենք $y \in A$: Քանի որ R -ը էվկլիդեսյան է, ապա գոյություն ունեն R -ի q և r տարրեր, որոնց համար $y = qx + r, r = 0$ կամ $n(r) < n(x)$: Պարզ է, որ $y = qx + r$ հավասարությունից կատանումք՝ $r = y - qx$, և քանի որ A -ն խելալ է, ապա $r \in A$: Ուրեմն՝ ըստ սրայմանի, չի կարող լինել $n(r) < n(x)$: Հետևապես՝ $r = 0$: Այսինքն՝ $y = qx$ կամ $y \in (x)$: Այսպիսով՝ R -ի կամույտկան A խելալը եղավ գլխավոր: Ուրեմն՝ R -ը գլխավոր խելայների օղակ է. □

ՊՆԴՈՒՄ 48.4. *Յուրաքանչյուր Էվկլիդեսյան օղակ մաս գումայան օղակ է:*

Ապացույց. Հանքի որ Էվկլիդեսյան օղակը գլխավոր խնդիրների օղակ է, իսկ զըլ-խավոր խնդիրների օղակը գումայան օղակ է, ապա Էվկլիդեսյան օղակը կլինի մաս գումայան օղակ: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 48.5. *Գումայան ամբողջ թվերի օղակը գումայան օղակ է և գլխավոր խնդիրների օղակ է:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: $\square$

48.3. *Ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը Էվկլիդեսյան օղակներում: Էվկլիդիսի ալգորիթմը:* Էվկլիդեսյան օղակներում գոյություն ունի երկու տարրերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գտնելու մի եղանակ, որը հույանի է *Էվկլիդիսի ալգորիթմ* անվամբ:

Դիցուք՝ R Էվկլիդեսյան օղակում ունենք x և y տարրերը և $n(y) \geq n(x)$: Համաձայն բաժանման ալգորիթմի՝ ունենք՝

$$\begin{aligned} y &= xq_1 + r_1, & n(r_1) &< n(x), \\ x &= r_1q_2 + r_2, & n(r_2) &< n(r_1), \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, & n(r_3) &< n(r_2): \end{aligned}$$

Շարունակելով այս ընթացքը՝ մենք ինչ-որ թվում կստանանք զրո մնացորդ.

$$r_k = r_{k+1}q_{k+2}:$$

Յույց ստանք, որ այս վերջին՝ ոչ զրոյական r_{k+1} մնացորդը կլինի x և y տարրերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը: Իսկապես, զրված հավասարությունները ցույց են առվիս, որ r_{k+1} մնացորդը կլինի x և y տարրերի ընդհանուր բաժանարարը: Եթե ույժմ $c|x, c|y$, ապա վերևում զրված հավասարություններից առաջինը ցույց է առվիս, որ c -ն r_1 -ի բաժանարար է, երկրորդը ցույց է առվիս, որ c -ն r_2 -ի բաժանարար է, երրայդը ցույց է առվիս, որ c -ն r_3 -ի բաժանարար է և այլն, $k+1$ -րդը ցույց է առվիս, որ c -ն r_{k+1} -ի բաժանարար է: Հեռուսյես՝ r_{k+1} -ը x և y տարրերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար է:

ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ

49. ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՕՂԱԿԸ

49.1. Հաջորդականությունների օղակը: Վերցնենք միավորով, անդավա-
խական և զուգորդական $(R, +, \cdot)$ օղակը: Դիտարկենք R -ի ստորերի այնպիսի

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$$

անվերջ հաջորդականությունները, որոնցում միայն վերջավոր թվով անդամներ կա-
րող են լինել զրոյից ստորեր: Նշանակենք L' -ով նման բոլոր հաջորդականություն-
ների բազմությունը: Ստեղծենք L' -ի վրա զամուրմուն $+$ ' գործողությունը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 49.1. L' -ի $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ և $(b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$ կամա-
յական ստորերի համար բնդումենք՝

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) + (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, \dots) :$$

ՊՆԴՈՒՄ 49.2. $(L', +')$ գույզը տրեկում խամբ է:

Ապացույց. Հասկանալի է, որ $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, \dots)$ հաջորդակա-
նություն մեզ միայն վերջավոր անդամներ կարող են լինել զրոյից ստորեր անդամներ:
Հետևապես՝ այն պատկանում է L' -ին: Այսինքն՝ L' -ի կամայական երկու ստորերի
զամուրք պատկանում է L' -ին: Ուրեմն՝ $+$ '-ը L' -ի վրա արված երկանդ գործողություն
է: Այդ գործողության անդավախականությունը և զուգորդականությունը ակնհայտ
են: Ջրայի դերը խաղում է

$$(0, 0, \dots, 0, \dots)$$

գրդյական հաջորդականությունը: $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ հաջորդականության հա-
կալիրն է

$$(-a_0, -a_1, \dots, -a_n, \dots)$$

հաջորդականությունը՝

$$-(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) = (-a_0, -a_1, \dots, -a_n, \dots) :$$

□

Ստեղծենք L' -ի վրա նուե բազմասպակմուն $\cdot'$ գործողությունը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 49.3. L' -ի կամայական

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \text{ և } (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$$

սարքերի համար

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \cdot' (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) = (c_0, c_1, \dots, c_n, \dots),$$

որտեղ

$$c_0 = a_0 \cdot b_0, c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \dots:$$

Ընդհանրապես՝

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0, k = 0, 1, \dots:$$

Այս հավասարությունը կարելի է գրառել նաև հետևյալ կերպ.

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j, k = 0, 1, 2, \dots:$$

ՊԼԴՌՈՒՄ 49.4. $(L', +', \cdot')$ եսյուկը միավորավ, անդամախառն և զուգորդական օպերա է:

Ապացույց. Նույնտիպի պնդման համաձայն՝ $(L', +')$ զույգը արելյան խումբ է: Ստադենք $\cdot'$ գործադրության հասկանալիությունը:

Համաձայնի է, որ L' -ի $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ և $(b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$ սարքերի ուրառադրյալի մեջ միայն վերջավոր տեղերում կարող են լինել զրոյից սուրբեր անդամներ: Հետևորար՝ այն պատկանում է L' -ին: Այսինքն՝ $\cdot'$ -ը L' -ի վրա աղբված երկանդ գործադրություն է: Այդ գործադրությունը բաշխական է $+$ -ի նկատմամբ: Իսկապես, օգտվելով L' -ի սարքերի գումարման և բազմապատկման ստիմանման ներկից, ուղվենք

$$\begin{aligned} & (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \cdot' ((b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) +' (c_0, c_1, \dots, c_n, \dots)), \\ & (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \cdot' (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) +' \\ & +' (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \cdot' (c_0, c_1, \dots, c_n, \dots) \end{aligned}$$

հաջորդականությունների k -րդ անդամները. առաջինը նշանակենք x_k , երկրորդը՝ y_k , և երրորդ տանք, որ զրանք իրար հավասար են:

$$\begin{aligned} x_k &= a_0(b_k + c_k) + a_1(b_{k-1} + c_{k-1}) + \dots + a_{k-1}(b_1 + c_1) + a_k(b_0 + c_0) = \\ & a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0 + (a_0 c_k + a_1 c_{k-1} + \dots + a_{k-1} c_1 + a_k c_0) = y_k, \\ & x_k = y_k, k = 0, 1, 2, \dots: \end{aligned}$$

Բազմապատկման զուգորդականությունը ցույց ապառ համար հաշվենք

$$\begin{aligned} & ((a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \cdot' (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)) \cdot' (c_0, c_1, \dots, c_n, \dots), \\ & (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \cdot' ((b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) \cdot' (c_0, c_1, \dots, c_n, \dots)) \end{aligned}$$

երկու արատյայտների k -րդ անդամները. առաջինինը նշանակենք x_k , երկրորդինը՝ y_k , և ցույց տանք, որ դրանք իրար հավասար են:

$$x_k = \sum_{i+j=k} \left(\sum_{r+l=i} a_r b_l \right) c_j = \sum_{r+l+j=k} a_r b_l c_j,$$

$$y_k = \sum_{r+i=k} a_r \sum_{l+j=i} (b_l c_j) = \sum_{r+l+j=k} a_r b_l c_j, k = 0, 1, 2, \dots :$$

Ցույց տանք, որ

$$\begin{aligned} (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \cdot' (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) &= \\ &= (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) \cdot' (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) : \end{aligned}$$

Այս հավասարության ձախ մասի k -րդ անդամը նշանակենք x_k , աջ մասինը՝ y_k , և ցույց տանք, որ դրանք իրար հավասար են: Իսկապես,

$$x_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j, y_k = \sum_{j+i=k} b_j a_i :$$

Ուրեմն՝ $x_k = y_k, k = 0, 1, 2, \dots :$

Այսպիսով՝ հաջորդականությունների բազմաստիճան $\cdot'$ գործողությունը անդադարձիկ է:

Հեշտությամբ կարելի է ցույց տալ նաև, որ միավորի դերը խաղում է

$$(1, 0, \dots, 0, \dots)$$

հաջորդականությունը:



ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 49.5. Ասլացույցեր, որ կամայական $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ հաջորդականության համար

$$(1, 0, \dots, 0, \dots) \cdot' (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) =$$

$$= (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \cdot' (1, 0, \dots, 0, \dots) = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) :$$

Այն բանի հաջորդականությունների բազմաստիճան դեպքում շատ օգտակար է հետևյալ հատկությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 49.6. *Կամայական*

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots), (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots), (c_0, c_1, \dots, c_n, \dots)$$

երեք հաջորդականությունների տրատյայտի d_l անդամը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$d_l = \sum_{i+j+k=l} a_i b_j c_k, l = 0, 1, 2, \dots :$$

Ասլացույց. Ասլացույցումը կապարեք ինքնություն:



49.2. Օղակի պարզ արանցենդենտ ընդայնումը: Նորից դիտարկենք միայն միավորով, տեղափոխական և գուպարյական օղակները:

ՍԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 49.7. L օղակը կազմում է R օղակի պարզ ընդայնում իր x ստորի միջոցով, եթե.

ա. R -ը L -ի ենթաօղակ է,

բ. L -ի յուրաքանչյուր ատրք կարելի է ներկայացնել

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, a_0, a_1, \dots, a_n \in R$$

առաջով:

Օրինակներ:

ա. Գաուսյան տմբողջ րվերի օղակը տմբողջ րվերի օղակի պարզ ընդայնումն է իր i ստորի միջոցով:

բ. Կամպլեքս րվերի $\mathbb{C}$ օղակը իրական րվերի $\mathbb{R}$ օղակի պարզ ընդայնումն է իր i ստորի միջոցով:

գ. $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ օղակը $\mathbb{Q}$ օղակի պարզ ընդայնումն է իր $\sqrt{2}$ աարի միջոցով:

Եթե L օղակը R օղակի պարզ ընդայնումն է իր x ստորի միջոցով, ապա ընդունված է $L = R[x]$ նշանակումը:

Այսպես, օրինակ, $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$:

Սահմանումից հետևում է, որ միևնույն օղակը կարելի է ընդայնել աարքեր ստորերի միջոցով: Առաջացած պարզ ընդայնումները միշտ չէ, որ իրար հավասար են կամ յուսմորի: Օրինակ, տմբողջ րվերի օղակի $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ և $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ ընդայնումները իրար յուսմորի չեն: Իսկուպես, երև գայություն ունենա f իզոմորֆիզմ այդ օղակների միջև, ապա տկնեսայտ է, որ $f(m) = m, m \in \mathbb{Z}$: Դիցուք՝

$$f(\sqrt{2}) = a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Z} :$$

Այդ դեպքում,

$$f(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = (a + b\sqrt{3})(a + b\sqrt{3}) :$$

Կամ,

$$2 = aa + 2ab\sqrt{3} + 3bb :$$

Այստեղից կատանոք՝ $a = 0$ կամ $b = 0$:

ա. $a = 0$: Այդ դեպքում $2 = 3bb$, որը հնարավոր չէ:

բ. $b = 0$: Այդ դեպքում $2 = aa$, որը նույնպես հնարավոր չէ:

Այսպիսով՝ գոյություն ունեն միևնույն օղակի՝ ըստ էության իրարից սարքերովոր րուզմորիվ պարզ ընդայնումներ: Դիտարկենք այդ ընդայնումների մի կարեոր ընտանիք:

ՍԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 49.8. L օղակի x ստորը կազմում է *արանցենդենտ L -ի R ենթաօղակի նկատմամբ*, եթե R -ի կամայական $a_0, a_1, \dots, a_n$ ստորերի համար

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0 :$$

$R[x]$ օղակը կազմում է R օղակի *պարզ արանցենդենտ ընդայնում*, եթե x ստորը արանցենդենտ է R -ի նկատմամբ:

Վերևում դիտարկված օրինակներից ոչ մեկը համապատասխան օղակի սրբոց տրանսցենդենտ ընդլայնումը չէ: Մուսնավորուպես, գոտայուն մտքոջ քվերի օղակի համար մենք ունենք՝

$$1 + 1 \cdot i^2 = 0 :$$

Բերենք սրբոց տրանսցենդենտ ընդլայնմուն օրինակ:

Վերցնենք նսխտող կետում դիտարկված R և L' օղակները: Նշանակենք

$$R' = \{(a, 0, \dots, 0, \dots) | a \in R\} :$$

ՊՆԴՈՒՄ 49.9. *ա. R' -ը ($L', +', \cdot'$) օղակի ենթաօղակն է:*

բ. ($L', +', \cdot'$) օղակը R' օղակի սրբոց տրանսցենդենտ ընդլայնմուն է:

Ապացույց. *ա. 'Իցուր' $a, b \in R$: Այդ դեպքում՝*

$$a - b \in R, a \cdot b \in R :$$

Հետևույնս՝

$$(a, 0, 0, \dots, 0, \dots) - (b, 0, 0, \dots, 0, \dots) = (a - b, 0, 0, \dots, 0, \dots) \in R',$$

$$(a, 0, 0, \dots, 0, \dots) \cdot' (b, 0, 0, \dots, 0, \dots) = (a \cdot b, 0, 0, \dots, 0, \dots) \in R' :$$

բ. Նշանակենք

$$x = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots) :$$

Այդ դեպքում.

ա. $x^n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$, որտեղ մինչև 1 եղում 0-ների քիվը հսվսսար է n -ի:

$$\begin{aligned} \text{b. } (0, 0, \dots, 0, a, 0, \dots, 0, \dots) = \\ (a, 0, \dots, 0, \dots) \cdot' (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots) = (a, 0, \dots, 0, \dots) \cdot' x^n, \end{aligned}$$

որտեղ մինչև 1 և մինչև a եղում 0-ների քիվը հսվսսար է n -ի:

գ. $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) = (a_0, 0, \dots, 0, \dots) +' (a_1, 0, \dots, 0, \dots) \cdot' x +' \dots +' (a_n, 0, \dots, 0, \dots) \cdot' x^n$, որտեղ $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ հսջորդակնմության մեջ a_n -ից ուջ 0-ից սսորբեր ունդամներ չկուն:

Այս պնդումներից յուրսսանչյուրը սսրսցուցվում է հեշտությամբ: Մլսմսմսնակ c -ից հետևում է, որ L' օղակը R' օղակի սրբոց ընդլայնմուն է x սսորբի միջոցով: Ֆսլյց սսունք մսս, սր x սսորբը տրանսցենդենտ է R' օղակի նկսսսմսմբ: Իսկսսպես, դիցուր՝

$$(a_0, 0, \dots, 0, \dots) +' (a_1, 0, \dots, 0, \dots) \cdot' x +' \dots +' (a_n, 0, 0, \dots, 0, \dots) \cdot' x^n = 0 :$$

Այդ դեպքում, հսմսմսսյն c -ի, կունենումք՝

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) = 0$$

կսսմ

$$a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0 :$$

Այսինքն՝ x սսորբը տրանսցենդենտ է R' օղակի նկսսսմսմբ: □

49.3. *Պարզ արանդեկներն առնդլայնումս գոյությունը: Ղախաղ կեսում մենք կստուցեցինք սխարզ արանդեկներն առնդլայնումս բազմակումին ընդեսնրական մի օրինակ: Սակայն հիմնական հագեցիւց մեկը դեռնս բաց է մնում: Այն է՝ աղլւո՞ք կամույական օղակի համար գոյություն առնի նրա սխարզ արանդեկներն առնդլայնում: Այս կետում մենք կսանք ոյլ հագիցի պրակումս սրտաախումր:*

ՊԵՐՈՒՄ 49.10. *Եթե R -ը, R' -ը և L -ը, L' -ը նախարդ կեսում դիտարկիւմ օղակներն են, տարա*

$$f: R \rightarrow L', f(\tau) \quad (\tau, 0, \dots, 0, \dots), \tau \in R$$

արաուպականը R օղակի իզմարֆ ներկայում է L' օղակի մեջ և

$$f(R) \subseteq R':$$

Արդւոյց. Ասացուցումք կատարեք ինքնություն:

□

Վերջին պնդումը բույլ է տալիս կատարելու հիմնական խնդրի լուծման տաւ-ջին բալլը: Միեւնոյն ժամանակ այն քերտղում է նաև հագարդ բույլը. մենք արդեն տեսնք արքիւմ R օղակին իզմարֆ R' օղակի սխարզ արանդեկներն առնդլայնումը: Նշումակներ՝

$$L = (L' \setminus R') \cup R,$$

և դիտարկենք եեսելալ՝ $\varphi: L \rightarrow L'$ արաուպականը.

$$\varphi(u) := \begin{cases} u, & \text{եթե } u \notin R \\ f(u), & \text{եթե } u \in R: \end{cases}$$

Պարզ է, որ φ -ն վերադրում է, առնի φ^{-1} հակադրածը: Այն հնարապարտւոյուն է տալիս L' -ում առնմանվում գործողութաններին միջոցով առնմանել գործողութուններն նաև L -ի մեջ:

L -ի կամույական u, v տարրերի համար ընդունենք՝

$$u + v := \varphi^{-1}(\varphi(u) +' \varphi(v)),$$

$$u \cdot v := \varphi^{-1}(\varphi(u) \cdot' \varphi(v)):$$

ՊԵՐՈՒՄ 49.11. *ա. $(L, +, \cdot)$ եղակը օղակ է,*

բ. $(L, |, \cdot)$ օղակը իզմարֆ է $(L', +', \cdot')$ օղակին,

գ. $(R, +, \cdot)$ օղակը $(L, +, \cdot)$ օղակի ենրաօղակ է,

դ. $(L, +, \cdot)$ օղակը $(R, |, \cdot)$ օղակի սխարզ արանդեկներն առնդլայնումն է և

$$L = R[|, \cdot]:$$

Արդւոյց. Մենք արդեն գիտենք, որ φ արաուպականը վերադրում է: Ցայց տանք, որ նաև

$$\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v), \varphi(u \cdot v) = \varphi(u) \cdot \varphi(v), \quad u, v \in L:$$

Իսկապես

$$\varphi(u + v) = \varphi(\varphi^{-1}(\varphi(u) +' \varphi(v))) = \varphi(u) +' \varphi(v),$$

$$\varphi(u \cdot v) = \varphi(\varphi^{-1}(\varphi(u) \cdot' \varphi(v))) = \varphi(u) \cdot' \varphi(v), \quad u, v \in L :$$

Ապացուցվում ևս փաստարարյուններից հետևում է, որ $(L, +, \cdot)$ եռյակը նույնպես միավորավ, տեղավորակալան և գործարդական օղակ է: Մասնավորապես, այն դեպքում և կեսար տարացուցվում է: Միավորմանով, φ -ն իզոմորֆիզմ է $(L, +, \cdot)$ և $(L', +', \cdot')$ օղակների միջև: Ուրեմն՝ տարացուցվում է նաև $\mathbf{p}$ կեսար:

Դիցուք՝ $u, v \in R$: Այդ դեպքում՝

$$\begin{aligned} u + v &= \varphi^{-1}(\varphi(u) +' \varphi(v)) = \\ &= f^{-1}(f(u) +' f(v)) = f^{-1}(f(u + v)) = u + v, \end{aligned}$$

որտեղ ծախ մասում կիրառվում է գործարդյունը L -ում ստեղծանված գործողությունն է, իսկ աջ մասում գրված է նույնպես աղակում $(R, +, \cdot)$ օղակի գումարման գործողությունը:

Նույն կերպ՝

$$\begin{aligned} u \cdot v &= \varphi^{-1}(\varphi(u) \cdot' \varphi(v)) = \\ &= f^{-1}(f(u) \cdot' f(v)) = f^{-1}(f(u \cdot v)) = u \cdot v : \end{aligned}$$

Այսպիսով՝ մենք տարացուցեցինք նաև այն դեպքում φ կեսար:

Անցնենք վերջին կեսի տարացումներ: Քանի որ L' -ը R' -ի պարզ արանցներենա ընդլայնումն է, ապա φ^{-1} իզոմորֆիզմի ժամանակ L' -ի L պատկերը կլինի R' -ի R պատկերի պարզ արանցներենա ընդլայնումը: Հասկանալի է նաև, որ $L \cap R[x] = R[x]$, քանի որ $\varphi^{-1}(x) = x$ և $L' = R'[x]$: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 49.12. Կոմպակտն ոչ գրոյական, միավորավ, տեղավորակալան և գործարդական օղակի համար գոյություն ունի նրա պարզ արանցներենա ընդլայնում:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: $\square$

49.4. Օղակի պարզ արանցներենա ընդլայնումների իզոմորֆիզմը: Վերևում մենք տեսանք, որ միևնույն օղակի երկու պարզ ընդլայնումները կարող են իրար իզոմորֆ չլինել: Պարզ արանցներենա ընդլայնումների պարզությամբ, սակայն, պատկերը այլ է:

ՊՆԴՈՒՄ 49.13. Միավորավ, գործարդական և տեղավորակալան օղակի երկու պարզ արանցներենա ընդլայնումները իրար իզոմորֆ են: Ընդ որում, գոյություն ունի այնպիսի իզոմորֆիզմ՝ ճշիվ ընդլայնումների միջև, որը ընդլայնված օղակի վրա նայնալույն արատարակերում է:

Ապացույց. Դիցուք՝ ունենք տեղավորակալան, գործարդական և միավորավ R օղակի երկու պարզ արանցներենա ընդլայնումներ՝ $L = R[x]$ և $K = R[y]$:

Վերցնենք $u \in L$: Այդ դեպքում կգանվեն R -ի այնպիսի $a_0, a_1, \dots, a_n$ տարրեր, որ

$$(65) \quad u = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n :$$

Նշանակենք՝

$$f(u) = a_0 + a_1 y^1 + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n :$$

Քանի որ L -ի յուրաքանչյուր ատրը մխարժեքային է ներկայացվում (65) տեսքով, ապա f -ը տրաստատկերում է L և K բազմությունների միջև:

Միևնույն ժամանակ K -ի յուրաքանչյուր w ատրրի համար կգտնվեն R օղակի այնպիսի $b_0, b_1, \dots, b_n$ ատրեր, որոնց համար

$$w = b_0 + b_1 y + \dots + b_n y^n :$$

Այդ դեպքում, առկայեն՝

$$f(b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n) = w :$$

Հետևապես՝ f տրաստատկերումը վստողում է:

Յույց ատմը, որ f -ը նաև տարադրում է: Դիցուք՝

$$f(u) = f(v), u = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, v = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n :$$

Այդ դեպքում

$$f(u) = a_0 + a_1 y + \dots + a_n y^n = f(v) = b_0 + b_1 y + \dots + b_n y^n :$$

Հետևապես՝

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)y + \dots + (a_n - b_n)y^n = 0 :$$

Այստևից, եռշվի տունելով y -ի տրանցենդենտությունը, կստանանք՝

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n :$$

Հետևապես՝ $u = v$: Այսինքն՝ f -ը տարադրում է:

Այսպիսով՝ f -ը վերադրում է L և K բազմությունների միջև:

Այն, որ L -ի կամայական u , v ատրերի և R -ի կամայական τ ատրրի համար առկա ունեն

$$f(u + v) = f(u) + f(v), f(u \cdot v) = f(u) \cdot f(v), f(\tau) = f(\tau)$$

հավասարությունները, ստուգվում է առանց դժվարության: Պնդումն ապացուցված է: $\square$

49.5. Բազմանդամների օղակի ընդհանրական հատկությունը: Այժմ ընդհանրացնենք նախորդ կետում ապացուցված հատկությունը: Հետևյալ սնդումը ցույց է տալիս նաև բազմանդամների օղակի կտրերը դերը միավորով, տեղադրված կամ և զուգորդական օղակների մեջ ընդհանրապես:

ՊՆԴՈՒՄ 49.14. Դիցուք՝ R և L միավորով, տեղադրված և զուգորդական օղակների միջև տրված է

$$\rho : R \rightarrow L$$

համադրվիզմը: L -ի յուրաքանչյուր c ատրրի համար գոյություն ունի և միակ ρ_c համադրվիզմը $R[x]$ և L օղակների միջև, որի համար՝

$$\text{ու. } \rho_c(x) = c,$$

$$\text{բ. } \rho_c(\tau) = \rho(\tau), \tau \in R:$$

Այս իզոմորֆիզմից, մասնավորապես, կստանանք՝

$$\ker \rho_c = 0 \Rightarrow R[x] \cong R[c] :$$

Իսկ

$$\ker \rho_c = \{0\}$$

սրայմանը համարժեք է նրան, որ c -ն սրմանցենդենտ է R -ի նկատմամբ: Այսպիսով՝ մենք մի այլ կերպ ստացանք նախորդ կետում ստացուցված 49.13 կորեկորագույն առդյունքի տարացուցումը:

50. ԲԱԶՄԱՆԴԱՄԻ ԱՐՄԱՏՆԵՐԸ

50.1. *Բազմանդամի կատարյալ տեսքը, ազատ և ափսոսանքով, ատիժանք:* Կիսարկեր ($R, +, \cdot$) տեղափոխական, զագորդական և միավորով օղակի վրա արված բազմանդամների $R[x]$ օղակը: Հասկանալի է, որ x փոփոխականով յուրաքանչյուր բազմանդամ կարելի է գրել տարբեր տեսքերով: Օրինակ,

$$1 + 2x + x^2$$

բազմանդամը կարելի է գրառել նաև $(1 + x)^2$ տեսքով, քանի որ $R[x]$ օղակում առկա է

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

հավասարությունը: Լենք կարող ենք $1 + 2x + x^2$ բազմանդամը ներկայացնել նաև բազմաթիվ այլ տեսքերով:

ՄԱՀԱՆՈՒՄ 50.1. *Բազմանդամի կատարյալ տեսք է կոչվում նրա*

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

գրառումը, եթե $a_n \neq 0$:

Օրինակ, վերևում դիտարկված $(1 + x)^2$ բազմանդամի կատարյալ տեսքն է $1 + 2x + x^2$ գրառումը: Նկատենք, որ բազմանդամը կատարյալ տեսքով գրառելու համար անհրաժեշտ է կատարել նրա *նման տնդամների միացում*, այսինքն՝ նրանում $ax^i + bx^i$ գումարելիի առկայության դեպքում այդ գումարելին գրառել $(a + b)x^i$ տեսքով:

ՄԱՀԱՆՈՒՄ 50.2. R օղակի $a_0, a_1, \dots, a_n$ տարրերը կոչվում են կատարյալ տեսքով գրառված

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

բազմանդամի *գործակիցներ*, a_0 գործակիցը կոչվում է *ազատ տնդում*, իսկ a_n գործակիցը՝ *ափսոսանքով գործակից*: Բազմանդամի ափսոսանքով գործակիցը սրմանակառն տնդումը կոչվում է նրա *ափսոսանքով*:

Օրինակ, $1 + 2x + 3x^2$ բազմանդամի ազատ տնդումը 1 է, ափսոսանքով գործակիցը՝ 3, ափսոսանքով տնդումը՝ $3x^2$:

ՍԱՀԱՆՈՒՄ 50.3. *՝ n ոչ բազմանդամ ամբողջ քիվը կոչվում է $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ բազմանդամի սասիծում, եթե $a_n \neq 0 : 0$:*

Ստանանոմից հետևում է, որ a_0 բազմանդամի սասիծումը հավասար է 0-ի:

Օրինակ, $2 + 5x^4$ բազմանդամի սասիծումը 1 է:

Անհրաժեշտ է նկատի ունենալ, որ բազմանդամի սասիծումը որոշելու համար անհրաժեշտ է այն գյուտել կոտորյալ տեսքով: Օրինակ, $x + x^4 = x^4$ բազմանդամի սասիծումը հավասար չէ 4-ի՝ շնայած այն բանին, որ նրանում մասնակցում է x^4 գումարելին, սկզբնական սասիծումի բազմանդամ է:

Երկու բազմանդամների գումարի սզոտ անդամը հավասար է գումարելիների սզոտ անդամների գումարին: Բազմանդամների գումարի սզոտ անդամը կարող է հավասար չլինել գումարելիների սզոտ անդամների գումարին: Օրինակ, $1 + x^2$ և $x + x^2$ բազմանդամների գումարի սզոտ անդամն է x բազմանդամը, մինչդեռ նրանց սզոտ անդամների գումարը հավասար է զրոյի:

ՊԼԴՌԻՄ 50.4. *Երկու բազմանդամների գումարի սասիծումը մեծ չէ գումարելիներից յուրաքանչյուրի սասիծումից:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարել ինքնուրույն: □

Չափազանց կարևոր է բազմանդամների որսառդրյալի սզոտ անդամի, սզազ անդամի և սասիծումի որոշման խնդիրը:

ՊԼԴՌԻՄ 50.5. *Բազմանդամների որսառդրյալի սզոտ անդամը հավասար է որսառդրիչների սզոտ անդամների որսառդրյալին:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարել ինքնուրույն: □

ՊԼԴՌԻՄ 50.6. *ա. Բազմանդամների որսառդրյալի սասիծումը փքր է կոտ հավասար որսառդրիչների սասիծումների գումարից:*

բ. Ամբողջարյուն ախրյրի վրտ սրիտ բազմանդամի որսառդրյալի սասիծումը հավասար է որսառդրիչների սասիծումների գումարին:

Ապացույց. ա. Կոտարել ինքնուրույն: Նկատի ունեցել, օրինակ, որ $\mathbb{Z}_6$ -ի վրտ արվում $1 + 2x$ և $x + 3x^2$ բազմանդամների որսառդրյալն է $x + 5x^2$ բազմանդամը:

բ. Դիցալ՝ առաջին բազմանդամի սզոտ անդամն է a_nx^n , երկրորդինը՝ b_mx^m : Այլ բազմանդամների որսառդրյալի սզոտ անդամը կլինի $a_nb_mx^{n+m}$, քանի որ $a_nb_m \neq 0$: Հետևապես՝ որսառդրյալ բազմանդամի սասիծումը կլինի $n + m$: □

Ապացուցվում քեորեմից, մասնավորապես, հետևում է հետևյալ կարևոր արդյունքը:

ՊԼԴՌԻՄ 50.7. *Ամբողջարյուն ախրյրի վրտ սրիտ բազմանդամների օլակը մոյնպիս ամբողջարյուն ախրյր է:*

Լիպոցույց. Իսկուսյա, դիցուք՝ երկու բազմանդամների տրամադրյալը հավասար է զրոյի: Եթե այդ տրամադրյալի երկու տրամադրիչներն էլ լինեն զրոյից սուրբեր, ապա նրանցից յուրսորանշյուրը, հեաեուսյա՝ նուե այդ տրամադրյալը, կունենում տատիծումներ: Կուուսցվի, որ տատիծում ունեցող բազմանդամը հավասար է զրոյի: Ինըը սնենար է: $\square$

50.2. *Քաղմանդամի արժատները:* Դիտարկենք $(R, +, \cdot)$ տեղափոխական, գուգորյուսկան և մխափորով օղուկը: Անունծնուսյա կուրերն են R օղուկի այն սուրբերը, սրանք փոփոխականի փախարեն բազմանդամի մեջ տեկաղրեղյա սաունում ենը գլա: Դումն սուրբերը սաուցեկ են նաաուկ սնում:

ՄԱՀՄԱՆՈՒՄ 50.8. $f(x)$ բազմանդամի արժատ է կազվում R օղուկի այն c սուրբը, սրի համար $f(c) = 0$:

Օրինակներ:

ա. $x + 1$ բազմանդամի արժատն է -1 րիվը:

բ. $1 - x^2$ բազմանդամն ունի երկու արժատ՝ 1 և -1 :

գ. $1 + 2x$ բազմանդամը արժատա չունի, եթե այն դիատում ենը որայեա սմբաղջ րվերի օղուկի փու արվում բազմանդում: Այլ կերալ սասում են նուե, որ բազմանդամը սմբաղջ րվերի օղուկում արժատա չունի:

դ. Դուխաղ օրինակում դիտարկվում է $1 + 2x$ բազմանդամը ունի $-1/2$ արժատը, սաղխանալ րվերի դաշատում:

ե. $2 - x^2$ բազմանդամը արժատա չունի ոուցլանալ րվերի դաշատում, իսկ իրուկան րվերի դաշատում ունի երկու արժատ՝ $\sqrt{2}$ և $-\sqrt{2}$:

զ. $1 + x^2$ բազմանդամը արժատա չունի իրուկան րվերի դաշատում, իսկ կամայլերա րվերի դաշատում ունի երկու արժատ՝ i և $-i$:

Ընդիտնրուսյա բազմանդամի՝ արժատները ունենաու, ինչալեա նուե բազմանդամի արժատները գանելու խնդիրները հանրաուաղվի կուրերաղաղայն խնդիրներից են, որանցով մենք կգրաղվենք սաուջիկալում: Աաույծ լուծենք միայն մի եեղ հաղք՝ կաալվում բազմանդամների բաժսումն խնդրի եեա, որը ունի շատ արղյունաղեա կիրատուրյուն:

ՊՆԴՈՒՄ 50.9. *(Քեզուի րերենը):* Տեղափոխական, գուգորյուսկան և մխափորով օղուկի փու արվում յուրսորանշյուր $f(x)$ բազմանդամը $x - c$ երկանդամի փու բաժսումից սաուցիվում մնուցորղն է $f(c)$:

Լիպոցույց. Եթե $f(x)$ -ը 0 բազմանդամն է, սալա սալացույցն սկնենալա է: Դիցուք՝ այն գրոյից սուրբեր է և

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n :$$

Այդ դեալում

$$f(c) = a_0 + a_1c + \cdots + a_nc^n,$$

և մենք ունենք՝

$$f(x) - f(c) = a_1(x - c) + \cdots + a_n(x^n - c^n) = (x - c)g(x) :$$

Այստեղից կստանանք՝

$$f(x) = (x - c)q(x) + f(c) :$$

□

Բեզուի բեռքերից ստացվում է հետևյալ՝ չափազանց կարևոր արդյունքը:

ՊԼԴՌԻՄ 50.10. *Բ օղակի c ստորրբ ույն է միայն ույն դեպքում է B -ի վրա արդիւմ $f(x)$ բազմանդամի արմատը, երև $f(x)$ -ը տաւնց մնուցորդի բաժանվում է $x - c$ բազմանդամի վրա:*

Արդսցայց. Նքև

$$f(x) = (x - c)q(x),$$

տարւ ուկնուայարեն $f(c) = 0$:

Դիցուք՝ հուկաուակը՝ c -ն $f(x)$ բազմանդամի արմատն է, ույսինքն՝ $f(c) = 0$: Համաժույն Բեզուի բեռքերնի՝

$$f(x) = (x - c)q(x) + f(c) :$$

Այստեղից, հուշվի տոնելով $f(c) = 0$ հաժաարորայունը, կստանանք՝

$$f(x) = (x - c)q(x) :$$

□

50.3. Բազմանդամի արմատների բիվը: Նույնարդ կեսում մենք տեսանք, որ արվում բազմանդամը օղակներից մեկում կարող է արմատներ չունենալ, իսկ ուվելի լույն օղակում ունենալ մի բունի արմատ: Ավելին, հիմնական օղակի ընդլայնմանը զուգընթաց, ույը ընդլայնման մեջ բազմանդամի արմատների բիվը նույնպես կարող է մեծանալ: Կու՞մի սուիման, ուրից ուվելի բիվով արմատներ արվում բազմանդամը չի կարող ունենալ: Այս կարևոր հարցի պատասխանը կախվում է, ինուրկև, դիսուրկվող օղակից: Մուսնուվորասպես, եքև հիմնական օղակը ամբողջությամբ աիբույթ է, ույսու մենք ստանում ենք քննուրկվող հարցի հրուշուվի ու ուսուիյ պատասխան:

ՊԼԴՌԻՄ 50.11. *Միուվորով ամբողջությամբ աիբույթի վրա արվում ու ուսաիծանի բազմանդամը կարող է ունենալ ուից ոչ ուվիկի արմատներ:*

Արդսցայց. Դիցուք՝ ունենք B միուվորով ամբողջությամբ աիբույթը և դիսուրկում ենք նրա վրա արվում բազմանդամները: Կիբաուներ ինդուկցիա՝ ըսա բազմանդամի ո ուսաիծանի:

Ինդուկցիայի բազիսը. $n = 1$: Այս դեպքում բազմանդամը B -ի վրա արվում է-ին ուսաիծանի $ax + b$, $a \neq 0$ տեսի բազմանդամ է: Նքև $ac + b = 0$ և $ad + b = 0$, ոարւ $a(c - d) = 0$ և, բունի որ $a \neq 0$, ոարւ $c = d$: Հետևապես՝ բազմանդամի արմատների բիվը էից ուվելի չէ:

Ինդուկցիոն քայլը. ենրայրենք, քև $n - 1$ ոսաիծանի յուրաբանչյուր բազմանդամ ունի $n - 1$ -ից ոչ ուվիկի արմատ, և ցույց տուեր, որ արվում ո ուսաիծանի $f(x)$ բազմանդամը ունի n -ից ոչ ուվելի արմատ:

Հասկանալի է, որ եթե n մասիժումն $f(x)$ բազմանդամը արժույթ չունի, ապա նրա արժանանքի քիվը n -ից ուժեղ լինելու պատճառով ենթադրենք, որ $f(x)$ -ը ունի ինչ-որ c արժույթ: Այդ դեպքում, համաձայն 50.10 սկզբում,

$$f(x) = (x - c)g(x),$$

որտեղ $g(x)$ -ը R մեթոդաբանական անդամի վրա արժույթ բազմանդամ է: Հետևապես՝ նրա մասիժումն $n - 1$ է: Այժմ ենթադրենք, որ R օղակի c սարքից սարքեր d սարքեր $f(x)$ բազմանդամի արժույթ է: Այդ դեպքում, քանի որ

$$0 = f(d) = (d - c)g(d), \quad d - c \neq 0,$$

ապա $g(d) = 0$: Այսինքն՝ d -ն արժույթ է նաև $g(x)$ բազմանդամի համար: Բայց, համաձայն ինդուկցիոն ենթադրության, $g(x)$ բազմանդամի արժանանքի քիվը մեծ չէ $n - 1$ -ից: Հետևապես՝ $f(x)$ բազմանդամի արժանանքի քիվը n -ից մեծ լինել չի կարող: $\square$

Վիտուրկենք ես մեկ ուսանելի օրինակ: $\mathbb{Z}_8$ օղակի վրա արժույթ 3-րդ մասիժումն $f(x) = x^3$ բազմանդամն ունի 4 արժույթ:

$$f(0) = f(2) = f(4) = f(6) = 0 :$$

Հասկանալի է, որ $\mathbb{Z}_8$ -ը մեթոդաբանական անդամ է:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 50.12. Ասպացուցեք, որ եթե միավորով մեթոդաբանական անդամի վրա արժույթ $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ բազմանդամը ունի n -ից ուժեղ արժանանք, ապա այն զրոյական բազմանդամն է:

50.4. *Բազմանդամները որպես ֆունկցիաներ:* Վերցնենք R օղակի վրա արժույթ սրբել բազմանդամ: Պարզ է, որ եթե x միավորականի միավորն է $f(x)$ բազմանդամի մեջ տեղադրենք R -ի կոմպակտ c արժեքը, ապա բազմանդամը կընդունի այդ R օղակին սրտականով $f(c)$ արժեքը: Այսպիսով՝ մենք ունենք

$$c \rightarrow f(c)$$

արտասրտականներով կամ ֆունկցիոն: Այն նշանակենք f ստույգ: Հասկանալի է, որ իրար հավասար բազմանդամների համար նման ճանապարհով ստացված ֆունկցիաները իրար հավասար են:

Հետադարձի է ստանալ հակառակ հարցի պատասխանը. արդյո՞ք սարքեր բազմանդամների համար նշված ճանապարհով ստացված ֆունկցիաները կարող են իրար հավասար լինել:

Վերցնենք, օրինակ, $\mathbb{Z}_2$ դաշտի վրա արժույթ, իրարից տարբեր 1 և $1 + x + x^2$ բազմանդամները: Վճիպոր չէ կառուցվել, որ այս բազմանդամները՝ որպես ֆունկցիաներ, իրար հավասար են:

Պատկերը, սակայն, բոլորովին այլ է, եթե զործ ունենանք անվերջ մեթոդաբանական անդամների հետ:

ՊԵՂՈՒՄ 50.13. *Որոշյալով և ունվելոյ տմբողոյրյուն տիլալոյի վրոտ ալոիւծ $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամներոյ իրար հախոտար են ոյն և միայն ոյն դեպքում, երբ նրոնք իրար հախոտար են ոյսլեա խոնկցիոններ: Լ'յսինքն՝*

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f = g :$$

Արդացոյց. Հասկանալի է, որ

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f = g :$$

Հակառակը, դիցոր՝ $f = g$: Այդ նշանակում է, որ R օղակի կամոյական c ստորի համար $f(c) = g(c)$ կամ $f(c) - g(c) = 0$: Հետեւեալ $f(x) - g(x)$ բազմանդամը ունի ունվելոյ բազմոյրյունը սրմոտանը: Այստեղից ետեւում է, որ $f(x) = g(x)$ ստորբերոյրյունը գրոյսկան բազմանդամն է: Լ'յսինքն՝ $f(x) = g(x)$: $\square$

51. ԴԱՇՏԻ ՎՐԱ ՏՐՎԱԾ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ

51.1. *Բազմանդամների Լվկլիլոյան օղակը:* Դաշտի վրա սրված բազմանդամների օղակը ունի մի շարք լրացուցիչ հատկոյրյուններ, որոնց իմացոյրյունը ավելի պարզին է դարձնում ուղղակի օղակների ուսումնասիրոյրյունը: Այստեղ ունենալարեոր հատկոյրյուններից մեկը մնացորդով բաժանման քեորեմի առկայոյրյունն է:

ՊԵՂՈՒՄ 51.1. *(Քեորեմ մնացորդով բաժանման վերաբերյալ):* F դաշտի վրա սրված կամոյական $f(x)$ և ու գրոյրական $g(x)$ բազմանդամների համար գոյոյրյուն ունեն նայն դաշտի վրա սրված և միարժեքորեն սրաշվաղ ոյնուլիսի $q(x)$ և $r(x)$ բազմանդամներ, ոյր

$$(66) \quad f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

որտեղ $r(x)$ -ի աստիճանը վարր է $g(x)$ -ի աստիճանից կամ էլ $r(x) = 0$:

Արդացոյց. Մնացորդով բաժանման գոյոյրյուն սուրացոյրյունը: Աւարացոյրյունը կատարենք ինդուկցիալով՝ բոտ բաժանվող բազմանդամի աստիճանի:

Ինդուկցիայի բազիսը. գրոտ աստիճանի $f(x)$ բազմանդամի և կամոյական ու գրոյրական $g(x)$ բազմանդամի համար գոյոյրյուն ունեն (66) հախոտարոյրյունը բուվալարաղ $q(x)$ և $r(x)$ բազմանդամներ: Իսկուպեա, եթե $g(x)$ -ը հաստատուն է, ալար բանի ոյր F -ը դաշտ է և $f(x), g(x) \in F$, ալար

$$f(x) = g(x)a + 0,$$

որտեղ $a \in F$: Իսկ երե $g(x)$ -ը հաստատուն չէ, ալար կանենումք՝

$$f(x) = g(x) \cdot 0 + f(x) :$$

Ինդուկցիոն բույր. ենրալներ, քե n բնուկան քիլից վարր աստիճան ունեցող բոլոր բազմանդամների համար քեորեմի մեջ նշվող վերլուծոյրյունը գոյոյրյուն ունի, և ցույց սաւնք, որ նման վերլուծոյրյուն գոյոյրյուն ունի նաև n բնուկան աստիճան

$$f(x) = g(x) \cdot 0 + f(x) :$$
$$(G7) \quad h(x) = f(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x)$$
$$h(x) := q(x)q'(x) + r(x),$$
$$f(x) = q(x)(a_n b_m^{-1} x^{n+m} + q'(x)) + r(x) :$$
$$f(x) = q(x)q'(x) + r(x) \text{ and } f(x) = g(x)q'(x) + r'(x).$$
$$r'(x) \quad r(x) := q(x)(q(x) - q'(x)) :$$
$$q(x) = q'(x), \quad r(x) = r'(x) :$$

Ապագույց. Ասլացուցումը հետևում է նախորդ սյնդումից:

Վերջում նշենք նաև, որ դաշտի վրա ստացված բազմանդամների օղակում տեղի ունեն օղակների թույր այն հաախոյդաններ, սրանք իրավացի են Լվկիլյան օղակներում: Մուսնավորապես, սլառնեղ կոմպակտն երկու բազմանդամներ աւնեն աւնենումն ընդլառնոր բաժանորսոր և աւնենալոր ընդլառնոր բազմապաաիկ, ընդ սրան, կուրելի Լ կիլառնեղ Լվկիլի ուղորիոր երկու բազմանդամների աւնենումն ընդլառնոր բաժանորսոր զառնելու համար:

Մյանայն ժամանակ $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների $d(x)$ ընդլառնոր բաժանորսոր սրանց աւնենումն ընդլառնոր բաժանորսորն Լ ալն և միայն այն դեպքում, երև զալորյառն աւնեն $u(x)$ և $v(x)$ ալնալիս բազմանդամներ, որոնց համար

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x) :$$

Մուսնավորապես, $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամները փոխալործորսոր սրորզ են ալն և միայն այն դեպքում, երև զալորյառն ունեն $u(x)$ և $v(x)$ ալնալիս բազմանդամներ, սրանց համար

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1 :$$

Նշենք նաև, որ դաշտի վրա ստացված բազմանդամների օղակի սրորզ աալրելոր ալկելի համալի կոչվում են *չբերկող բազմանդամներ*: Չբերկող բազմանդամների համար իրավացի է, օրինակ, հետևյալ հաալորյառնը. երև բազմանդամների սրաաաղյալոր բաժանվում Լ չբերկող բազմանդամի վրա, աալա վերջին բազմանդամի վրա են բաժանվում սրաաղյալրելից զառն մեկը:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 51.5. Կրկեն Լվկիլյան, զլիաալոր իղեալներ և զաաալառն օղակների վերաերելալ նյալրերը, և դրանք շարաղրել դաշտի վրա ստացված բազմանդամների օղակի համար:

51.2. Արմաաի զոլորյառնը: Բազմանդամների հետ կաալվում հիմնակառն խնդիրներից մեկը բազմանդամի սրմաաի զալորյառն խնդիրն է. սրդյո՞ր կաաալալառն R օղակի վրա ստացված յաալորանչյառ $f(x)$ բազմանդամ առնի սրմաա. երև ոչ R -ում, աալա զոռն այն ալալառնակաղ թեկալն շաա յալն մի օղակում: Ալժա ալա խնդիրը կշաալալրենք և դրակառնորեն կլառենք դաշտերի համար:

ՊԼԴՈՒՄ 51.6. Կաաալալառն F դաշտի վրա ստացված յաալորանչյառ $f(x)$ աչ հաաաաաառն բազմանդամի համար զոլորյառն առնի F -ի ալնալիսի K ընդլալնառ՝ F -ը սրալառնակաղ դաշա, որի մեջ $f(x)$ -ն առնի սրմաա:

Արաղյալ. Նալի ենրալրենք, թև $f(x)$ -ը F -ի նկաաառնոր չբերկող բազմանդամ է: Յալց աառնք, սր $(f(x))$ զլիաալոր իղեալը $F[x]$ օղակի մաալմալ իղեալ է: Խալապես, դիցալոր՝

$$(f(x)) \subset I \subseteq F[x],$$

որառնեղ I -ն $F[x]$ օղակի իղեալ է: Երև

$$g(x) \in I - (f(x)),$$

աալա $g(x)$ -ը չի բաժանվում $f(x)$ -ի վրա: Նշառնակում է $g(x)$ -ը և $f(x)$ -ը փալաալործորսոր սրորզ են: Ուրեմն՝ կզառնվեն $F[x]$ օղակից վերցվում ալնալիսի $u(x)$ և

$v(x)$ բազմանդամներ, որ

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1 :$$

Այստեղից հեշտությամբ կատարմանը՝ $1 \in I$: Իսկ դա նշանակում է՝ $I = F[x]$: Ուրեմն՝ իսկապես, $(f(x))$ -ը $F[x]$ օղակի մաքսիմալ իդեալ է:

Վերջին տարրերից, հաշվի առնելով 42.28 պնդումը, կատարմանը, որ $F[x]/(f(x))$ ֆակտոր-օղակը դաշտ է: Նշանակենք այն $\overline{F}$ -ով և դիտարկենք նրա

$$\overline{F} := \{a + (f(x)) \mid a \in F\}$$

ներսրազմաբյուրեղ:

$$\rho : F \rightarrow \overline{F}, \quad \rho(a) := a + (f(x)), a \in F$$

արտադրատեսակումը իզոմորֆիզմ է F և $\overline{F}$ դաշտերի միջև:

Նշանակենք նաև

$$\overline{g(x)} := g(x) + (f(x)), \quad g(x) \in F[x] :$$

Այդ դեպքում, երև $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, ապա բազմանդամների $F[y]$ օղակում կանենումք՝

$$\overline{f(y)} := \overline{a_0} + \overline{a_1}y + \dots + \overline{a_n}y^n \in \overline{F}[y] :$$

Այնուհետև,

$$\overline{f(\overline{x})} := \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \overline{x} + \dots + \overline{a_n} \cdot \overline{x}^n = \overline{f(x)} = f(x) + (f(x)) = (f(x)) = 0 :$$

Այսինքն՝ $\overline{F}$ դաշտի $\overline{x}$ ստորրբ $\overline{f(y)}$ բազմանդամի սրմուսն է:

Այսպիսով՝ մենք տարացուցեցինք արմատի գոյությունը F օղակին իզոմորֆ $\overline{F}$ օղակի վրա տրված չբերվող բազմանդամի համար: $\overline{F}$ -ից F -ին անցնելու հնարքը մեզ տալեն ծանոթ է և ուսումնական դժվարություն չի ներկայացնում:

Քննարկենք այն դեպքը, երբ $f(x)$ -ը բերվող է: Այդ դեպքում այն կներկայացնենք չբերվող արատղրիչների արատղրյալի աեսքով և, հաշվի առնելով այն, որ արատղրիչի յուրաքանչյուր արմատը արմատ է նաև արատղրյալի համար, վերսեիշյալ կստույցը կդիտարկենք $f(x)$ -ի չբերվող և ոչ հոտատաւուն արատղրիչներից որևէ մեկի համար: $\square$

51.3. Բազմանդամի վերլուծության դաշտը: Քանի որ դաշտի վրա տրված բազմանդամների օղակը գատայան օղակ է, ապա նրա՝ $\mathcal{O}$ -ից և միավորի բաժանալովներից, ուսյինքն՝ այդ դաշտի ստորերից տարրեր յուրաքանչյուր բազմանդամ միարժեքորեն վեր է լուծվում չբերվող բազմանդամների արատղրյալի աեսքով: Իսկ հնալաւսվո՞ր է գտնել կիմնուկան դաշտի այնպիսի մի ընդլայնում, որի նկատմամբ, որյն, արված բազմանդամը վերլուծվի գծային արատղրիչների արատղրյալի աեսքով:

Հիշենք, որ երև $f(x)$ բազմանդամն ունի ինչ-որ c արմատ, ապա այն վերլուծվում է $f(x) = (x - c)g(x)$ արատղրյալի տեսքով: Արանյց հեաւում է, որ իմնյիլը հաւգում է այնպիսի մի դաշտի սլուման, որի մեջ գտնվում են արված բազմանդամի բոլոր արմատները:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 51.7. F դաշտի վրա արվում $f(x)$ բազմանդամի՝ F -ի նկատմամբ վերլուծության դաշտ է կոչվում այն K դաշտը, որը սպորտնակում է $f(x)$ -ի բոլոր արմատները և որի մեջ ընկած չէ $f(x)$ -ի բոլոր արմատները սպորտնակող այլ դաշտ:

Հասկանալի է, որ եթե K -ն $f(x)$ բազմանդամի վերլուծության դաշտն է, ապա $K[x]$ օղակում $f(x)$ բազմանդամը կվերլուծվի գծային աղաատրիչների:

ՊԵՂՈՒՄ 51.8. *Դաշտի վրա արված յուրաքանչյուր բազմանդամ առնի վերլուծության դաշտ:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարենք ինդուկցիայով՝ ըստ բազմանդամի աստիճանի:

Ինդուկցիայի բազիսը. F դաշտի վրա արված գրե կամ առաջին աստիճանի բազմանդամն առնի վերլուծության դաշտ. այն F -ն է:

Ինդուկցիոն քայլը. դիցույ՝ n -ից փոքր աստիճան ունեցող յուրաքանչյուր բազմանդամ առնի վերլուծության դաշտ: Յուրջ տունը, որ նման դաշտ ունի նաև n աստիճանի կամայական բազմանդամը: Դիցույ՝ $f(x)$ -ը F դաշտի վրա արված n աստիճանի բազմանդամ է: Համաձայն 51.6 պնդման՝ գոյություն ունի F -ի K ընդլայնում, որի մեջ $f(x)$ -ը առնի ինչ-որ α պնդում: Այլ K -ն վերցնենք այնպիսին, որը նման հասկայությամբ օժտված այլ ընդլայնում չի պարունակում: Ըստ Բեզուի թեորեմի՝ $f(x) = (x - \alpha)g(x)$, որտեղ $g(x)$ -ի աստիճանն է $n - 1$: Համաձայն ինդուկցիոն ենթադրության՝ գոյություն ունի K ՝ դաշտի վրա արված $n - 1$ աստիճանի $g(x)$ բազմանդամի L վերլուծության դաշտը: Այն կլինի նաև $f(x)$ բազմանդամի վերլուծության դաշտը: $\square$

51.4. Բազմանդամի ածանցյալը: Բազմանդամների ռատմնասիրության ընթացքում կարևոր դեր է խաղում բազմանդամի ածանցյալի գաղափարը: Ընդ աբում, այստեղ խոսքը գնում է աշ միայն իրական թվերի դաշտի վրա արված բազմանդամների մասին, որոնց ածանցյալը հայտնի է մարեմնաթիկական անոթիզի դասընթացից:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 51.9. Կամայական F դաշտի վրա արված

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

բազմանդամի ածանցյալ է կոչվում

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$$

բազմանդամը:

Ստիմնումից հետոնում է, որ իսկապես, իրական թվերի դաշտի վրա արված բազմանդամների համար՝ թերվում է մաթյանալիզից հայտնի ստիմնումնեքով որդվում են նմայն հասկացությունները: Միեմույն ժամանակ բազմանդամի ածանցիալի՝ այստեղ թերվում ընդհանուր հասկացությամբ օժտվում է իրական գործակիցներով բազմանդամի ածանցյալի հիմնական հասկացություններով:

ՊԵՂՈՒՄ 51.10. Կամայական F դաշտի վրա արված $f(x), g(x)$ բազմանդամների և F -ի a ստորի համար.

տ. $\alpha' = 0$, այսինքն՝ հաստատունի ածանցյալը հախտաւոր է զրոյի,

բ. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$, այսինքն՝ բազմանդամների գումարի ածանցյալը հախտաւոր է գումարելիների ածանցյալների գումարին,

գ. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$, այսինքն՝ բազմանդամների ստորբերարկայուն ածանցյալը հախտաւոր է նրանց ածանցյալների ստորբերարկայունը,

դ. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

ե. $(f_1(x)f_2(x) \cdots f_n(x))' = f_1'(x)f_2(x) \cdots f_n(x) + f_1(x)f_2'(x) \cdots f_n(x) + \cdots + f_1(x)f_2(x) \cdots f_n'(x)$,

զ. $(f(x)^n)' = n f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$, $n \in \mathbb{N}$,

է. $(af(x))' = af'(x)$:

Արտադրյ. տ -գ. Կատարեք ինքնաբերական:

դ. Փոսնի որ յուրաքանչյուր բազմանդամ կարելի է ներկայացնել ax^n տեսքի գումարելիների տեսքով, սակայն, նկատելով որ k -ն, բազմական է ցույց ստով, որ

$$(ax^n \cdot bx^m)' = (ax^n)'bx^m + ax^n \cdot (bx^m)'$$

Ունենք՝

$$(ax^n \cdot bx^m)' = (abx^{n+m})' = ab(n+m)x^{n+m-1} =$$

$$= anx^{n-1}bx^m + ax^n \cdot mbx^{m-1} = (ax^n)'bx^m + ax^n \cdot (bx^m)'$$

ե. Արտադրողներ կատարեք ինքնաբերական: Յաջում. կիրառեք ինդուկցիա՝ ըստ n -ի:

գ. Ստուգվում է ե կետից՝ ենթադրելով, որ

$$f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_n(x) :$$

է. Ստուգվում է սահմանումից: □

51.5. Բազմանդամի բազմադասարկ արտադրիչները: Դիտարկենք զրո բնութագրիչով F դաշտը և k բնական թիւը:

ՊԼԴՈՒՄ 51.11. *Ջրա բնութագրիչով F դաշտի վրա տրված $f(x)$ բազմանդամի k -ստիպիկ չբերվող արտադրիչը $f'(x)$ ածանցյալի $k-1$ -ստիպիկ արտադրիչն է:*

Արտադրյ. Դիցուք՝

$$f(x) = p^k(x)g(x),$$

սրանի $p(x)$ -ը չբերվող բազմանդամ է և չի բաժանում $g(x)$ -ը: Այդ դեպքում, տրված հավասարությանից ածանցմուն միջոցով կստանանք՝

$$f'(x) = p^{k-1}(x)(p(x)g'(x) + kp'(x)g(x)) :$$

Այստեղ վստահեցնում ամփոփվում արտադրիչի ստույգին գումարելին բաժանվում է $p(x)$ չբերվող բազմանդամի վրա, իսկ երկրորդ գումարելին՝ չի բաժանվում: Հետևապես՝ սղջ գումարը նույնպես չի բաժանվում $p(x)$ -ի վրա: Իսկ դա նշանակում է, որ $p(x)$ -ը $f'(x)$ ածանցյալի $k-1$ -ստիպիկ արտադրիչն է: □

ՊԼԴՌԻՄ 51.12. *‘Կիցոր’ զրո բնությանգրիչով F դաշտի վրա ստիված $f(x)$ բազմանդամի համար*

$$f(x) = ap_1^{k_1}(x) \cdots p_l^{k_l}(x),$$

որտեղ $a \in F$, իսկ $p_1(x), \dots, p_l(x)$ ստորերը F դաշտի վրա ստիված չբերվող բազմանդամներ են: Այդ դեպքում՝

$$(f(x), f'(x)) = p_1^{k_1-1}(x) \cdots p_l^{k_l-1}(x) :$$

Ապացույց. Ապացուցումը եևաևում է նախորդ պնդումից: □

ՊԼԴՌԻՄ 51.13. *Ձրո բնությանգրիչով F դաշտի վրա ստիված $f(x)$ բազմանդամը չունի բազմադաստիկ սղատարիչներ այն և միայն այն դեպքում, երև այն փոխադարձաբար սղարգ է իր ածանցյալի հետ:*

Ապացույց. Ապացուցումը կուտարևք ինքնուրույն: □

ՊԼԴՌԻՄ 51.14. *Երև F դաշտի վրա ստիված $f(x)$ բազմանդամը չունի F դաշտի վրա ստիված բազմադաստիկ սղատարիչներ, ուղղա այն չունի նաև կամայական դաշտի վրա ստիված բազմադաստիկ սղատարիչներ:*

Ապացույց. Իսկապևս, ինչպևս բազմանդամի ածանցյալի, այնպևս էլ ածնևսանևս ընդհանուր բազմանդարի հաակացուրչանևներ կախում չունևն դիսարկվող դաշտից: Հևաևապևս՝ կուրևլի է կիրաուել 51.13 պնդումը: □

51.6. *Բազմանդամի բազմադաստիկ արմատները: Դիսարկևներ կամայական F դաշտի վրա ստիված $f(x)$ բազմանդամը: Համաժայն Բևգալի բևորևնի՝ դաշտի c տարրը ալխալ բազմանդամի արմատն է այն և միայն այն դեպքում, երև բազմանդամը առանց մնացորդի կրամանվի $x - c$ բազմանդամի վրա: Այսինքն՝*

$$f(c) = 0 \Leftrightarrow f(x) = (x - c)g(x) :$$

Բայց $f(x)$ -ը կարող է առանց մնացորդի բաժանվել $x - c$ բազմանդամի ոչ միայն առաջին աստիճանի վրա:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 51.15. *F դաշտի c տարրը կաշվում է այդ դաշտի վրա ստիված $f(x)$ բազմանդամի k -աղղատիկ արմատ (k-ն կամայական բնական թիվ է), երև գոյություն ունի F դաշտի վրա ստիված այնպևսի $g(x)$ բազմանդամ, որի համար c -ն արմատ չէ, և*

$$f(x) = (x - c)^k g(x) :$$

Բազմանդամի 1-ասղատիկ արմատը կաշվում է նաև նրա սղարգ արմատ:

Նևրմաժվում հաակացուրչաև հևա սևրադրևն կապվում է բազմանդամի ածանցյալի գաղալարը:

ՊԼԴՌԻՄ 51.16. *Ձրո բնությանգրիչով դաշտի վրա ստիված բազմանդամի k -աղղատիկ ($k > 1$) արմատը նրա ածանցյալի $k - 1$ -աղղատիկ արմատն է:*

Ապացույց. Դիցաք՝ c -ն զրո բնութագրիչով F դաշտի վրա արված $f(x)$ բազմանդամի k -աստիճանի արժույթն է.

$$f(x) = (x - c)^k g(x), \quad g(c) \neq 0 :$$

Համաձայն բազմանդամի ուծանցյալի ստեղծման՝

$$f'(x) = ((x - c)^k)' g(x) + (x - c)^k g'(x) =$$

$$= k(x - c)^{k-1} g(x) + (x - c)^k g'(x) = (x - c)^{k-1} (kg(x) + (x - c)g'(x)) :$$

Եթե c -ն լինի $kg(x) + (x - c)g'(x)$ բազմանդամի արժույթ, ապա կստանանք $g(c) = 0$, որը հնարավոր չէ: Այսինքն՝ խկապես c -ն $f'(x)$ -ի $k - 1$ -աստիճանի արժույթ է: $\square$

Այս պնդումից անմիջապես տրամադվում է հետևյալ հավելությունը:

ՊԼԴՌԻՄ 51.17. *Ջրա բնութագրիչով դաշտի վրա արված բազմանդամը բազմադաստիկ արժույթներ չունի այն և միայն այն դեպքում, երբ այն փոխադարձաբար պարզ է իր ուծանցյալի հետ:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: $\square$

ՊԼԴՌԻՄ 51.18. *Ջրա բնութագրիչով դաշտի վրա արված չբերվող բազմանդամը բազմադաստիկ արժույթներ ունենալ չի կարող:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: $\square$

51.7. **Վիևսի բաժանները:** Համարադասի դարձրածից հայտանի են բաժանատույին եռանդամի արժույթների և գործակիցների կապի մասին Վիևսի բաժանները: Պարզվում է, որ մասն կապեր գոյություն ունեն նաև կոմպակտ դաշտի վրա արված և կոմպակտ տոտիժումի բազմանդամի համար:

ՊԼԴՌԻՄ 51.19. *Դիցաք՝ F դաշտի վրա արված է*

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_k x^{n-k} + \dots + a_n$$

բազմանդամը, որն ունի $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ արժույթները: Այդ դեպքում իրավացի են Վիևսի հետևյալ բաժանները.

$$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n),$$

$$a_k = (-1)^k \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k},$$

$$a_n = (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n :$$

Լեյպցույց. 'Կիցույ՛ք' F դաշտի ինչ-որ I ՝ ընդլայնման մեջ $f(x)$ բազմանդամն ունի $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ արմատները: Այդ դեպքում

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) :$$

Այս հավաստության այ մասում գրված տարտուրյալը վերածելով գծմարի և հավասարեցնելով նրա այ և ձախ մասերում գրված միևնույն տառի՝ համար-ընկերների գործակիցները՝ կատանումք որոնելի բաժանակները: $\square$

51.8. *Բազմանդամների վեկտորական տարածությունը և հանքահաշի-վը:* Կամայական F դաշտի համար բազմանդամների $F[x]$ բազմություն վրա սահ-մանված են բազմանդամների գումարման և բազմանդամների F դաշտի ստորերեքով բազմապատկելու գործողությունները: Անք ստիվն գիտենք, որ բազմանդամների գումարման գործողության նկատմամբ $F[x]$ -ը կազմում է սթեյան խումբ:

Դժվար չէ ստուգել նաև, որ F -ի ստորերեքով բազմանդամների բազմապատկման գործողությունը բազմապատկում է վեկտորական տարածության բոլոր սլոյմաններին: Հետևապես՝ մենք ունենք F դաշտի վրա տրված $F[x]$ վեկտորական տարածությու-նը:

ՊՆԴՈՒՄ 51.20. Կամայական F դաշտի համար բազմանդամների $F[x]$ բազ-մությունը բազմանդամների գումարման և F դաշտի ստորերեքով բազմանդամների բազմապատկման գործողությունների նկատմամբ կազմում է վեկտորական տարու-ծություն:

Լեյպցույց. Աստիճանային կատարեր ինքնուրույն: $\square$

$F[x]$ վեկտորական տարածությունը վերջավոր չափադասականության տարածու-թյուն չէ: Այնուամենայնիվ, նրա համար գոյություն ունի բազիսի մի այլ տեսակ: Այստեղ մեզ անհրաժեշտ է ներմուծել տարածության անվերջ բազիսի գաղափարը: Այն լայնորեն գործածվում է նաև մաթեմատիկայի այլ բաժիններում:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 51.21. V վեկտորական տարածության վեկտորների կամայական անվերջ համակարգը կանվանենք այդ տարածություն բազիս, եթե՝

ա. այն յրիվ է տարածության մեջ, այսինքն՝ V -ի յուրաքանչյուր տարր այդ համակարգի վերջավոր տարրերի գծային կոմբինացիան է,

բ. համակարգը գծաբն աճկովի է, այսինքն՝ գծաբն աճկովի է նրա յուրաքանչ-յուր վերջավոր ենթահամակարգը:

ՊՆԴՈՒՄ 51.22. $F[x]$ վեկտորական տարածություն համար բազիս է

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

անվերջ համակարգը:

Լեյպցույց. Աստիճանային կատարեր ինքնուրույն: $\square$

$F[x]$ վեկտորական տարածության ենթատարածություններ են n -ից ոչ բարձր տասիման անեցող բոլոր բազմանդամների

$$\{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in F\}$$

բազմությունը՝ կամայական n բնական թվի համար: Ենթատարածություններ են նաև

$$\{ax^n | a \in F\}, n \in \mathbb{N}$$

Ենթաբազմությունները:

Հասկանալի է, որ $F[x]$ ստորածությունը հավասար է իր

$$\{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n | a_0, a_1, \dots, a_n \in F\}, n \in \mathbb{N}$$

Ենթատարածությունների միավորմանը՝

$$F[x] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n | a_0, a_1, \dots, a_n \in F\} :$$

ՊՆԴՈՒՄ 51.23. $\{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n | a_0, a_1, \dots, a_n \in F\}$ գծային ստորածությունը հախաժուր է իր $\{ax^k | a \in F\}, k \leq n$ ենթատարածությունների ուղիղ գումարին:

$$\begin{aligned} & \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n | a_0, a_1, \dots, a_n \in F\} = \\ & = \{a_0 | a_0 \in F\} \oplus \{a_1x | a_1 \in F\} \oplus \dots \oplus \{a_nx^n | a_n \in F\} : \end{aligned}$$

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեն ինքնուրույն: □

Վերջավոր բաժանկարյունը ենթատարածությունների ուղիղ գումարի նմանությամբ օգտակար է ներածել նաև անվերջ բաժանկարյունը ենթատարածությունների ուղիղ գումարի գաղափարը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 51.24. V F վեկտորական ստորածությունը կոչվում է իր

$$V_i, i \in I$$

ենթատարածությունների ուղիղ գումար, եթե V -ի յուրաքանչյուր տարր, գումարելիների աղյուսակությամբ ճշտությամբ միարժեքորեն ներկայացվում է $V_i, i \in I$ ենթատարածությունների տարրերի գումարի տեսքով:

ՊՆԴՈՒՄ 51.25. $F[x]$ գծային ստորածությունը հախաժուր է իր

$$\{ax^n | a \in F\}, n \in \mathbb{N}$$

ենթատարածությունների ուղիղ գումարին:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեն ինքնուրույն: □

Բազմանդամների բազմությունը կազմում է նաև օղակ: Հետևապես՝ առաջանում է նրա՝ գծային համարակալիվ լինելու խնդիրը:

ՊՆԴՈՒՄ 51.26. Կոմուտատիվ F դաշտի համար $F[x]$ -ը F դաշտի վրա տրված գծային համարակալիվ է:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեն ինքնուրույն: □

Քանի որ

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

համակարգը կազմում է տրված հանրահաշվի բազիս, ապա բազմաարտևման գործադրությունը նրանում կարելի է անել նաև

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

բանաձևերով, որտեղ m -ը և n -ը ոչ բացասականամբողջ թվեր են, և $x^0 = 1$:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 51.27. Յույց ավեր, որ $F[x]^* = F^*$:

51.9. Ռացիոնալ կոտորակների դաշտը: Մենք արդեն գիտենք, որ կամայական F դաշտի վրա տրված բազմանդամների $F[x]$ օղակը ամբողջությամբ տիրույթ է: Հետևապես՝ կարելի է կոտորակ սյղ $F[x]$ օղակի բանադրոների դաշտը: Այն կազմում է F դաշտի վրա տրված ռացիոնալ կոտորակների դաշտ:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 51.28. Կամայական ամբողջություն տիրույթի բանադրոների դաշտի կոտորցման սխեմայով կոտորակ F դաշտի վրա տրված ռացիոնալ կոտորակների դաշտը և ռաժոնալիթերն այն:

52. ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ԳԱՌՄՅԱՆ ՕՂԱԿԸ

52.1. Պրիմիալի բազմանդամներ: Կատայան օղակների վրա տրված բազմանդամների ռաժոնալիթություն մեջ կարևոր դեր է խաղում պրիմիալի բազմանդամի հոսկուցությունը:

ՄԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 52.1. R օղակի վրա տրված ոչ գրայական բազմանդամը կոչվում է *պրիմիալի R -ի մեջ*, եթե նրա գործակիցները վախապործաբար սլարգ են R -ում:

Օրինակներ և ժխտօրինակներ:

ա. Ամբողջ թվերի օղակի վրա տրված $2x^2 + 3x + 10$ բազմանդամը պրիմիալի է:

բ. Պրիմիալի է նաև յուրաքանչյուր բազմանդամ, որի գործակիցներից որևէ մեկը հսկադարձելի է տվյալ օղակում:

գ. Կաշտի վրա տրված յուրաքանչյուր բազմանդամ պրիմիալի է:

դ. Ամբողջ թվերի օղակի վրա տրված $2x^2 + 6x + 4$ բազմանդամը պրիմիալի չէ:

Մասնաժամայից ինտեռնում է, որ $R \subseteq L$ սույնամիկ բազմարժեք R և L օղակների վրա տրված $f(x)$ բազմանդամը կաբող է լինել պրիմիալի L -ի մեջ, իսկ R -ի մեջ պրիմիալի չլինել: Վերևում, դ օրինակում դիտարկված բազմանդամը պրիմիալի է ռացիոնալ թվերի օղակում, բայց ամբողջ թվերի օղակում պրիմիալի չէ: Հասկանալի է, որ R -ի մեջ պրիմիալի բազմանդամը պրիմիալի է նաև L -ի մեջ:

ՄԱՀԱՄԱՆՈՒՄ 52.2. Բազմանդամի գործակիցների աժնեռումն ընդհանուր բաժանարարը կազմում է նրա *սլաբանալիթություն*:

Պարզ է, որ բազմանդամը սրիմիտիվ է այն և միայն այն դեպքում, եթե նրա սլարանոակուրյունը հուկուրյութելի է:

Պրիմիտիվ բազմանդամը կարող է վերլուծվող լինել: Օրինակ, $x^2 - 1$ բազմանդամը սրիմիտիվ է և վերլուծվող: Այնինչ չվերլուծվող բազմանդամները համարյա միշտ սրիմիտիվ են:

ՊՆԴՈՒՄ 52.3. *Հաստատունից սուրբեր յուրսրանշյուր չվերլուծվող բազմանդամ սրիմիտիվ է:*

Արդյույց. Դիցուք՝ R օղակի վրա սրված $f(x)$ բազմանդամը չվերլուծվող է $R[x]$ -ում, հաստատունից սուրբեր է և նրա d սլարանոակուրյունը հուկուրյութելի չէ: Այլ դեպքում $f(x) = dg(x)$, որտեղ $g(x) \in R[x]$ և $g(x)$ -ը նորից հաստատունից սուրբեր է: Այսինքնով՝ $f(x)$ -ը վերլուծվել $R[x]$ -ի սչ հուկուրյութելի սուրբերի սրսուղյուլի աեսրով: Ուրեմն՝ այն վերլուծվող է: $\square$

Հասկանալի է նուև, որ եթե d -ն $f(x)$ բազմանդամի սլարանոակուրյունն է, և $f(x) = dg(x)$, ապա $g(x)$ -ը սրիմիտիվ բազմանդամ է:

ՊՆԴՈՒՄ 52.4. *Դիցուք՝ R -ը գումայան օղակ է, c -ն d -ն նրա սչ գրայսկան սուրբեր, $f(x)$ -ը և $g(x)$ -ը՝ R -ի վրա սրված բազմանդամներ, որանք սրիմիտիվ են $R[x]$ -ում: Այլ դեպքում, երև*

$$cf(x) = dg(x),$$

սուր c -ն տանցուցիվ է d -ի հետ R -ում և $f(x)$ -ը տանցուցիվ է $g(x)$ -ի հետ $R[x]$ -ում:

Արդյույց. Դիցուք՝

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m:$$

Այլ դեպքում

$$cf(x) = dg(x)$$

սույմանից հեսուում է

$$(68) \quad m = n, ca_0 = db_0, ca_1 = db_1, \dots, ca_n = db_m:$$

Քումի որ $a_0, a_1, \dots, a_n$ սուրբերը վոլսուրյութարուր սուրզ են, ապա $ca_0, ca_1, \dots, ca_n$ սուրբերի տմենումն ընդիսումուր բուծումարուր կլինի c -ն: Նույն կերպ՝ $db_0, db_1, \dots, db_m$ սուրբերի տմենումն ընդիսումուր բուծումարուր կլինի d -ն: Այստեղից, հուշվի տմենով (68) հուվսուրյութանները, կսումանք, որ $ca_1, \dots, ca_n$ սուրբերի տմենումն ընդիսումուր բուծումարուր նուև d -ն է: Հեսուսկես՝ c -ն և d -ն տանցուցիվ են: Այսինքն՝ R -ի ինչ-որ e հուկուրյութելի սուրբի համար $c = ed$:

Այժմ $cf(x) = dg(x)$ հուվսուրյութանից կսումանք $edf(x) = dg(x)$ կամ $d(cf(x) - g(x)) = 0$: Հուշվի տմենով տյն, որ d -ն գրայից սուրբեր է, կսումանք՝ $cf(x) - g(x) = 0$ կամ $g(x) = cf(x)$: Ուրեմն՝ իսկուսես $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամները տանցուցիվ են: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 52.5. *(Դումսի լեմմա): Դումայան օղակի վրա սրված կումայսկան երկու սրիմիտիվ բազմանդամների սրսուղյուլը սրիմիտիվ է:*

Ապոստրոֆ. Դիցուք՝ R գումայան օղակի վրա սրված են

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$$

սյրմիաիվ բազմանդամները, որոնց համար $a_n \neq 0 \neq b_m$: Անքցնենք R օղակի կումայական p պարզ աստիճանը: Յայց տանք, որ $f(x)g(x)$ արատադրյալի գործակիցներից գտնենք մեկը, չի բաժանվում p -ի վրա: Իսկապես, $f(x)$ -ի գործակիցների մեջ կգտնվի մեկը, որը չի բաժանվում p -ի վրա: Դիցուք՝ a_k -ն դրանց մեջ առաջինն է: $g(x)$ -ի գործակիցների մեջ կգտնվի մեկը, որը չի բաժանվում p -ի վրա: Դիցուք՝ b_l -ը դրանց մեջ առաջինն է: Հաշվենք $f(x)g(x)$ արատադրյալի $k+l$ աստիճանով անդամի գործակիցը: Այն է.

$$a_kb_l + (a_{k+1}b_{l-1} + a_{k+2}b_{l-2} + \dots + a_{k-1}b_{l+1} + a_{k-2}b_{l+2} + \dots) :$$

Այս գումարի առաջին գումարելին չի բաժանվում p -ի վրա, իսկ երկրորդ՝ փակագրծերում առնչված գումարելին բաժանվում է p -ի վրա: Հետևապես՝ յոչ գումարը չի կարող բաժանվել p -ի վրա: Ուրեմն՝ $f(x)g(x)$ արատադրյալը, իրար, սյրմիաիվ է: $\square$

52.2. *Դասը բանորդների դաշտի հետ:* Հատկանայի է, որ Լեքե մեներ ինչ-որ R օղակի վրա սրված $f(x)$ բազմանդամ, ապա այն կարող է չերկույ լինել $R[x]$ օղակում, սակայն $L[x]$ օղակում $f(x)$ -ը կարող է արդեն վերլուծվել արատադրիչների, որակ L -ը R -ի ինչ-որ բնդույնում է: Օրինակ, $x^2 - 2$ բազմանդամը ամբողջ թվերի օղակում արատադրիչների չի վերլուծվում, սակայն իրական թվերի դաշտում այն վերլուծվում է արատադրիչների.

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) :$$

Բնական է այս խնդիրը լուծել R օղակը սրտանակող հնարավորին չափ վաթք ընդլայնումն մեջ: Եթե Լեներ R գումայան օղակից, ապա այն սրտանակող ամենավաթք դաշտը R -ի բանորդների դաշտն է: Պարզվում է, որ R -ի բանորդների դաշտում նման արանումներն ասարդյուն են: Այժմ մենք կատարուցենք այս կարևոր աշխատքը:

ՊԼԴՌԻՄ 52.6. *Դիցուք՝ տներ գումայան R օղակը, նրա վրա սրված $f(x)$ բազմանդամը և R -ի բանորդների դաշտը: Եթե $f(x)$ բազմանդամը չվերլուծվող է $R[x]$ օղակում, ապա այն չվերլուծվող է նաև $L[x]$ օղակում:*

Ապոստրոֆ. Կառարենք հակասող ենթադրություն. դիցուք՝ $f(x)$ բազմանդամը վերլուծելի չէ $R[x]$ -ում, սակայն վերլուծելի է $L[x]$ -ում: Հաննի որ L -ը դաշտ է, ապա $f(x)$ -ը կվերլուծվի L -ից վերցրած գործակիցներով ոչ հաստատուն բազմանդամների արատադրյալի. $f(x) = g(x)h(x)$: Հատկանայի է, որ $f(x)$ -ը սյրմիաիվ է $R[x]$ -ում: Դիցուք՝

$$g(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n, \quad c_0, c_1, \dots, c_n \in L :$$

Այդ դեպքում $c_i = a_i \cdot b_i^{-1}$, որակ $a_i, b_i \in R$, $i = 0, 1, \dots, n$:

‘Դիցուք’ $b := b_0 b_1 \cdots b_n$: Այդ դեպքում $bg(x) \in R[x]$, և եթե d -ն $bg(x)$ -ի սլա-
լանակայությունն է, ապա

$$(69) \quad bg(x) := dg_1(x),$$

ընդ որում, $g_1(x)$ -ը դրական սասիժանի և $R[x]$ -ում սլիմիալի բազմանդամ է:

Համանման դատողություններով կատանմոր R -ի այնպիսի b' և d' ստորեր, որ

$$(70) \quad b'h(x) := d'h_1(x),$$

և $h_1(x)$ -ը դրական սասիժանի և $R[x]$ -ում սլիմիալի բազմանդամ է:

Այժմ (69) և (70) հավաստություններից, հաշվի առնելով նաև $f(x) = g(x)h(x)$ հավաստությունը, կատանմոր՝

$$bb'f(x) := dd'g_1(x)h_1(x),$$

որտեղ bb' -ը և dd' -ը R օղակի ոչ գրեյտկան տարրեր են: Համաձայն Դատարի լեմ-
մի՝ $g_1(x)h_1(x)$ բազմանդամը սլիմիալի է: Պրիմիալի է նաև $f(x)$ բազմանդամը:
Հետևապես՝ կտրելի է կլիրտել 52.4 պնդումը: Այդ դեպքում կատանմոր՝ $f(x) :=$
 $c g_1(x)h_1(x)$, որտեղ c -ն R -ի հսկայադձելի տարր է, իսկ $g_1(x)$ -ը և $h_1(x)$ -ը՝ դրա-
կան սասիժանի բազմանդամներ: Ստացվեց հսկայադձումը: $\square$

‘Իրտարիկներ գառույան օղակի և նրա լանդարիների դաշտի վրա արվում բազ-
մանդամների օղակի կապի եւ մի կարեւոր դրստություն:

ՊԵՐՈՒՄ 52.7. ‘Դիցուք’ L -ը գառույան R օղակի բանդաձների դաշտն է: Այդ
դեպքում, եթե R օղակի վրա արվում $f(x)$ և $g(x)$ սլիմիալի բազմանդամները ու-
սացուցվում են $L[x]$ օղակում, ապա նրանք սացուցվում են նաև $R[x]$ օղակում:

Ապացույց. ‘Դիցուք’ $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամները սացուցվում են $L[x]$ օղա-
կում: Այդ դեպքում L -ի ինչ-որ c ոչ գրեյտկան տարրի համար $f(x) = cg(x)$: Պարզ
է, որ R -ի a և b տարրերի համար $c := ab^{-1}$: Հետևապես՝ $f(x) := ab^{-1}g(x)$ կամ
 $bf(x) = ag(x)$: Այստեղից, համաձայն 52.4 պնդման, կատանմոր, որ $f(x)$ և $g(x)$
բազմանդամները սացուցվում են $R[x]$ օղակում: $\square$

52.3. Բազմանդամների գառույան օղակը: Այժմ ունցնենք այս պարագ-
րաֆի էինակում արդյունքի շարտորմանը:

ՊԵՐՈՒՄ 52.8. ‘Գառույան օղակի վրա արվում բազմանդամների օղակը նայն-
պես գառույան է:

Ապացույց. ‘Դիցուք’ R -ը գառույան օղակ է:

Նախ ստացուցենք $R[x]$ -ում չվերլումվալ տրատդիչների տրատդյալի տես-
քով վերլումության գոյությունը: Նիստներ ինդուկցիա՝ ըստ բազմանդամների սա-
սիժանների:

Ինդուկցիայի բուգիսը, գրա ոստիժանի յուրաքանչյուր բազմանդամ, այսինքն՝
յուրաքանչյուր a հաստատան բազմանդամ, որը հսկայադձելի չէ և գրայից տարրեր

և, վեր է լուծվում չվերլուծվող տրաստրիչների տրաստրիչայի տեսքով: Իսկապես, R -ի $R[x]$ -ում ոչ հուկադարձելի a ստորրի հուկադարձելի չէ նաև R -ում: Այսպիսով՝ մենք ունենք R -ի ոչ գրոյական և ոչ հուկադարձելի a ստորրի. այն վեր է լուծվում R -ի չվերլուծվող (սուրգ) տարրերի տրաստրիչայի տեսքով:

Ինդուկցիոն թալլը. n կրական ստաիճանից ցածր ստաիճան ունեցող յուրաքանչյուր ոչ հուկադարձելի բազմանդամ վեր է լուծվում $R[x]$ -ի չվերլուծվող բազմանդամների տրաստրիչայի տեսքով, և պետք է ցույց տանք, որ $R[x]$ -ի n ստաիճանի կոմուտական $f(x)$ բազմանդամ նույնպես վեր է լուծվում $R[x]$ -ի չվերլուծվող բազմանդամների տրաստրիչայի տեսքով:

Իսկապես, սուրգ է, որ $f(x) = ag(x)$, որտեղ a -ն $f(x)$ բազմանդամի պարունակությունն է և, ուրեմն, $g(x)$ -ը սլլիմիտիվ է $R[x]$ -ում: Տարբերներ երկու դեպք.

ա. $g(x)$ -ը չվերլուծվող է $R[x]$ -ում: Այդ դեպքում R -ում վերլուծելով սուրգ տրաստրիչների նրա a ոչ գրոյական և ոչ հուկադարձելի ստորրի՝ $f(x) = ag(x)$ հուկաստարայանից կատանոնք $R[x]$ -ում չվերլուծվող տրաստրիչների տեսքով տնեքուժա վերլուծությունը $f(x)$ բազմանդամի համար:

բ. $g(x)$ բազմանդամը վերլուծելի է $R[x]$ -ում: Այդ նշանակում է, որ այն ներկայացվում է $R[x]$ -ից վերցրած երկու՝ u -ից վուրք ստաիճան ունեցող $g_1(x)$ և $g_2(x)$ բազմանդամների տրաստրիչայի տեսքով. $g(x) = g_1(x)g_2(x)$: Կիրառելով ինդուկցիոն ենթադրությունը $g_1(x)$ և $g_2(x)$ բազմանդամների նկատմամբ՝ կատանոնք նրանց վերլուծությունները չվերլուծվող բազմանդամների տրաստրիչայի տեսքով: Տեղադրելով $f(x) = ag(x)$ հուկաստարման մեջ նշված վերլուծությունները, ինչպես նաև a ստորի վերլուծությունը R -ի սուրգ տարրերի տրաստրիչայի տեսքով՝ կատանոնք $f(x)$ բազմանդամի վերլուծությունները $R[x]$ -ի չվերլուծվող բազմանդամների տրաստրիչայի տեսքով:

Անցնենք միակարյան տպուցացմանը: Դիցուք՝ $R[x]$ -ից վերցրած կանույական $f(x)$ բազմանդամ ունի չվերլուծվող տարրերի տրաստրիչայի տեսքով հետևյալ վերլուծությունները՝

$$(71) \quad f(x) = p_1 \cdots p_n \varphi_1(x) \cdots \varphi_n(x) = p'_1 \cdots p'_m \varphi'_1(x) \cdots \varphi'_m(x),$$

որտեղ $p_1, \dots, p_n$ -ը և $p'_1, \dots, p'_m$ -ը R օղակի չվերլուծվող տարրեր են, իսկ $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ -ը և $\varphi'_1(x), \dots, \varphi'_m(x)$ -ը՝ $R[x]$ օղակի չվերլուծվող տարրեր: Հասկանալի է, որ նշված բոլոր այս բազմանդամները սլլիմիտիվ են: Համաձայն Գաուսի լեմմի՝ սլլիմիտիվ են նաև $\varphi_1(x) \cdots \varphi_n(x)$ և $\varphi'_1(x) \cdots \varphi'_m(x)$ տրաստրիչայները: Այդ սրտոճոռով մենք կարող ենք (71) հուկաստարայան նկատմամբ կիրառել 52.4 սլլեդյունը: Կատանոնք.

նույն $p_1, \dots, p_n$ ստորրի տացցացված է $p'_1, \dots, p'_m$ ստորրի հետ R -ում: Այստեղից, նկատել տնեքույով R օղակի գուտայան լինելը, կատանոնք $n = m$, և նամուրակվում ենարավոր փոփոխությունից հետո նաև կատանոնք, որ p_i -ն տացցացված է p'_i -ի հետ, $i = 1, \dots, n$:

Այնուհետև, $\varphi_1(x) \cdots \varphi_n(x)$ ստորրի տացցացվում է $\varphi'_1(x) \cdots \varphi'_m(x)$ ստորրի հետ $R[x]$ -ում: Համաձայն 52.6 սլլեդման՝

$$\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \varphi'_1(x), \dots, \varphi'_m(x)$$

բազմանդամները չվերլուծվող են $L|x|$ -ում, որտեղ L -ը R օղակի բանորդների դաշտն է: Քանի որ $L|x|$ օղակը գտնայան է, և նրա $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{n'}(x)$ առարը տառցացված է $\varphi'_1(x) \cdots \varphi'_{m'}(x)$ առարի հետ $L|x|$ -ում, ապա $n' = m'$, և համարակազմուն հնարավոր փոփոխությունից հետո՝ $\varphi_i(x)$ -ն առցացված է $\varphi'_i(x)$ -ի հետ, $i = 1, \dots, n'$: Այնուհետև, $\varphi_i(x)$ և $\varphi'_i(x)$ բազմանդամները չվերլուծվող են $R|x|$ -ում: Հետևապես՝ նրանք նաև պրիմիալի են $R|x|$ -ում: Այնույն ժամանակ այդ բազմանդամները առցացված են $L|x|$ -ում: Համաձայն 52.7 պնդման՝ $\varphi_i(x)$ և $\varphi'_i(x)$ բազմանդամները տառցացված են $R|x|$ -ում, $i = 1, \dots, n'$: $\square$

Այս պնդման մեջ R օղակի գտնայան իննկոս պատմաջը էական է: Օրինակ, $\mathbb{Z}_8|x|$ օղակի մեջ $x, x - 2, x + 2$ բազմանդամները չվերլուծվող են, և

$$f(x) = x^4 = (x - 2)^2(x + 2)^2 :$$

ՄԻ ԶԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՈՎ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ

53. ՄԻ ԶԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՈՎ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՕՂԱԿԸ

53.1. *Օղակների բնորոշումը:* Դիտարկենք $(L, +, \cdot)$ օղակի R ենթաօղակը և L բազմություն M ենթաբազմությունը: $(L, +, \cdot)$ օղակի ենթաօղակների մեջ կան այնպիսիները, որոնք ստորաբազմում են $M \cup R$ ենթաբազմությունը. այդպիսին է, օրինակ, L -ը: Այնուամենայնիվ L օղակի $M \cup R$ ենթաբազմությունը ստորաբազմում է $M \cup R$ -ը: Նշանակենք այն $R[M]$ -ով:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 53.1. $R[M]$ -ը կոչվում է L -ի R ենթաօղակով և M ենթաբազմությամբ ձևավոր ենթաօղակ:

Օրինակ, $\mathbb{R}$ օղակի $\mathbb{Z}$ ենթաօղակով և $\{\sqrt{2}\}$ ենթաբազմությամբ ($\sqrt{2}$ ստորբով) ձևավոր ենթաօղակն է $\{m + n\sqrt{2} | m, n \in \mathbb{Z}\}$ օղակը:

ՊՐԴՈՒՄ 53.2. $(L, +, \cdot)$ օղակի R ենթաօղակով և M ենթաբազմությամբ ձևավոր ենթաօղակը նրա $R \cup M$ ենթաբազմությանը ստորաբազմող նվազագույն ենթաօղակն է:

Ապացույց. Անպաճությունը կատարենք ինքնուրույն: □

ՊՐԴՈՒՄ 53.3. *Յարարանցյալը* $(L, +, \cdot)$ օղակի կամայական R, R_1, R_2 ենթաօղակների և $M, M_1, M_2, \dots, M_n$ ենթաբազմությամբների համար.

ա. $R[M] := R \Leftrightarrow M \subseteq R$,

բ. $R[M][M] := R[M]$,

գ. $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow R[M_1] \subseteq R[M_2]$,

դ. $R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow R_1[M] \subseteq R_2[M]$,

ե. $R_1 \subseteq R_2, M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow R_1[M_1] \subseteq R_2[M_2]$,

զ. $R[M_1 \cup M_2] := R[M_1][M_2]$,

է. $R[M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n] := R[M_1][M_2] \dots [M_n]$:

Ապացույց. ա. - ե.: Կատարենք ինքնուրույն:

զ. Նախ իրավիճիկ են հետևյալ հետևությունները.

$$M_1, M_2 \subseteq R[M_1][M_2] \Rightarrow M_1 \cup M_2 \subseteq R[M_1][M_2] \Rightarrow R[M_1 \cup M_2] \subseteq R[M_1][M_2] :$$

Լյնոսեան,

$$R[M_1 \cup M_2] = R[M_1 \cup M_2][M_1 \cup M_2] \supseteq R[M_1][M_2] :$$

Է. Կիրառվում է ինդուկցիա ըստ n -ի, օրի բնութայրում կիրառվում է նույն զ հաւ-
կույթումը: (Կուսարեք ինքնութայն): $\square$

53.2. Օղակի հանրահաշվորեն անկախ տարրերը: Մի բանի վախճան-
կանով բազմանդամի գուղալորի ներմուման համար անհրաժեշտ է ընդլայնել օ-
ղակի արմանցենդենտ տարրի հասկացութայնը: Վերցնենք $(L, +, \cdot)$ տեղավախճ-
կան և գուղալորական օղակը և նրա R ենրաօղակը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 53.4. L տեղավախճական և գուղալորական օղակի $x_1, \dots, x_n$
տարրերով կազմվում է R -ից վերցրած գործակցով *միանդամ* է կոչվում

$$(72) \quad a.x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

արտադրույթը, որանդ a -ն պատկանում է R օղակին և կոչվում է միանդամի *գործա-
կից*, իսկ $i_1, \dots, i_n$ տարրերը ոչ բացասական տմրայք թվեր են: L օղակի $x_1, \dots, x_n$
տարրերով կազմվում է R -ից վերցրած գործակցիցներով *բազմանդամ* է կոչվում նրա
 $x_1, \dots, x_n$ տարրերով կազմվում միանդամների գումարը: Լյդ միանդամների գոր-
ծակցիցները կոչվում են նաև *բազմանդամի գործակցիցներ*: L օղակի $x_1, \dots, x_n$
տարրերով կազմվում

$$a.x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \text{ և } b.x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$$

միանդամները կոչվում են *նման*, եթե

$$i_1 = j_1, \dots, i_n = j_n :$$

$x_1, \dots, x_n$ տարրերով կազմվում բազմանդամի գրառումը կոչվում է նրա *նորմալ
տեսք*, եթե նրանում չկան իրար նման գումարելիներ:

Պարզ է, որ $x_1, \dots, x_n$ տարրերով կազմվում յուրաքանչյուր բազմանդամ կա-
րելի է գրառել նորմալ տեսքով. դրա համար անհրաժեշտ է կատարել *նման տնդամ-
ների միացում*, այսինքն՝ բազմանդամի գումարելիների նկատմամբ կիրառել բաշ-
խական օրենքը հետևյալ կերպ.

$$a.x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} + b.x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} = (a + b).x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} :$$

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 53.5. L տեղավախճական և գուղալորական օղակի $x_1, \dots, x_n$
տարրերը կոչվում են R -ի *նկատմամբ համընդհանրորեն անկախ*, եթե $x_1, \dots, x_n$
տարրերով կազմվում է նորմալ տեսքով գրառված բազմանդամի գրառի հավասար
լինելուց հետևում է, որ նրա բոլոր գործակցիցները նույնպես հավասար են զրոյի:

Ստանդարտապես, $n = 1$ դեպքում մենք համգում ենք R -ի նկատմամբ արանս-
ցենդենտ տարրի հասկացութայնը. L օղակի x տարրը համընդհանրորեն անկախ է
 L -ի R ենրաօղակի նկատմամբ նշանակում է x -ը արմանցենդենտ է R ենրաօղակի
նկատմամբ:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 53.6. Արալցուցեք վերջին դասադութայնը:

Լ: Այստեղից՝ բանի որ, համաձայն սնդման պայմանի, x_m -ը արամսցենդենա Լ $R[x_1, \dots, x_{m-1}]$ օդակի նկատմամբ, կսամանը՝

$$a_0 = a_1 = \dots = a_k = 0 :$$

Այժմ, օդակելով ինդուկցիոն ենթդդդրդդյունից, կսամանը, որ $a_0, a_1, \dots, a_k$ բազմանդամներն թողը գործակիցները հափստը են գրայի: Եվ որդմենա նման սնդմանների միացում χ կստարված, սար $a_0, a_1, \dots, a_k$ սարքերի թողը գործակիցները նա $f(x_1, \dots, x_m)$ բազմանդամի գործակիցներ են: Իսկ դրամից կենաի, որ գրայի են հափստը նա $f(x_1, \dots, x_m)$ բազմանդամի թողը գործակիցները: $\square$

53.3. *Այլ բանի փոփոխականով բազմանդամներ:* Կանի որ, 49.12 սրնդման համաձայն, միսփոխով սնկափոխական և գուգորդական օդակի համար գայարյուն ունի սարգ արամսցենդենա ընդդյունում, սար սուղգոխի կամայական R օդակի համար մներ կարող են իրակամացնել հենայող օդակների իմդուկսիվ կստացումը: Նախ մներ կկատուցներ R օդակի $R[x_1]$ սարգ արամսցենդենա ընդդյունումը x_1 սարքի միջոցով: Այնուհետև՝ կկատուցներ $R[x_1]$ օդակի սարգ արամսցենդենա ընդդյունումը x_2 սարքի միջոցով և սյլն: Երև ենթդդրդդներ, որ $R[x_1] \cdots [x_{n-1}]$ օդակը արդեն կատուցված Լ, սար կկատուցներ նրա

$$R[x_1] \cdots [x_{n-1}][x_n] = R[x_1, \dots, x_{n-1}, x_n]$$

սարգ արամսցենդենա ընդդյունումը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 53.8. $R[x_1, \dots, x_n]$ օդակը կոչված Լ R միսփոխով, սնկափոխական և գուգորդական օդակի վրա սարած $x_1, \dots, x_n$ փոփոխականներով բազմանդամների օդակ կամ R օդակի n -սարստիկ արամսցենդենա ընդդյունում, եթե

$$R \subset R[x_1] \subset \dots \subset R[x_1, \dots, x_n]$$

չդրայի յարսարմչյար հաչար ոնդում իր նախարդի սարգ արամսցենդենա ընդդյունումն Լ:

Վերնում կստարված պիսարկումներից սուղգում է հենայող հասկարյունը:

ՊՆԴՈՒՄ 53.9. *Կամայրդական R միսփոխով, սնկափոխական և գուգորդական օդակի և n բնական թվի համար գայարյուն ունի R -ի վրա սարած n փոփոխականներով բազմանդամների $R[x_1, \dots, x_n]$ օդակ:*

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 53.10. Բազմանդամների $R[x_1, \dots, x_n]$ օդակի սարքերը կոչվում են նա $x_1, \dots, x_n$ փոփոխականներով, R օդակի վրա սարած բազմանդամներ: Երբեմն $x_1, \dots, x_n$ փոփոխականներով կոչված բազմանդամը կամվաններ նա $x_1, \dots, x_n$ փոփոխականներով բազմանդամ կամ $x_1, \dots, x_n$ փոփոխականներից կարիած բազմանդամ:

Օրինակ: Իրական թվերի $\mathbb{R}$ դաչուի վրա սարած երկու՝ x և y փոփոխականներով բազմանդամներ են՝

$$1 + x + y, \quad xy, \quad 2 + 4xy + y^4, \quad y - 7x^3y^3 - 11y^7 :$$

Սահմանումից հետևում է, որ R օղակի վրա արված $x_1, \dots, x_n$ փոփոխականներով յուրաքանչյուր բազմանդամ իրենից ներկայացնում է

$$(74) \quad ax_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

աեսքի գումարելիների՝ միանդամների գումար, որտեղ $a \in R$, իսկ $i_1, \dots, i_n$ -ը ոչ բացասական ամբողջ թվեր են: a ապար կոչվում է ավյու միանդամի և նաև ռդջ բազմանդամի գործակից:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 53.11. (74) միանդամի *աստիճան* և կոչվում նրա փոփոխականների աստիճանների գումարը, այսինքն՝ հետևյալ թիվը.

$$i_1 + \cdots + i_n :$$

Օրինակ, x, y փոփոխականներով $2x^2y^3$ բազմանդամի աստիճանը 5 է:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 53.12. Բազմանդամի *սիւղ տնդամ* է կոչվում նրա նորմալ աեսքի մեջ ամենաբարձր աստիճան տնեցող միանդամը:

Օրինակ, $1 + 2xyz^6 - 3x^4y^5$ բազմանդամի ավագ տնդամն է $3x^4y^5$ միանդամը: Բազմանդամի ավագ տնդամը կարող է միակը չլինել: Օրինակ, $3 + 2xyz^6 - 5x^4y^4$ բազմանդամի ավագ տնդամներն են $2xyz^6$ և $3x^4y^4$ միանդամները:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 53.13. Բազմանդամի *սզոտ տնդամ* է կոչվում նրա նորմալ աեսքի մեջ 0 աստիճան տնեցող միանդամը:

Օրինակ, $1 + 2xyz^6 - 3x^4y^5$ բազմանդամի սզոտ տնդամն է 1 միանդամը: Ի ստորբերություն ավագ տնդամի՝ բազմանդամի սզոտ տնդամը միակն է:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 53.14. Բազմանդամի *աստիճան* է կոչվում նրա ավագ տնդամի աստիճանը:

Օրինակ, x, y, z փոփոխականներով $1 + 2xyz^6 - 3x^4y^5$ բազմանդամի աստիճանը հավասար է 9-ի:

53.4. *Մի քանի փոփոխականով բազմանդամների օղակների իզոմորֆիզմը:* Հետևյալ համակարյունը ցույց է տալիս բազմանդամների օղակի կարևոր դերը միավորով, տեղափոխական և գուգորդական օղակների մեջ:

ՊԵՐՈՒՄ 53.15. *Դիցուք՝ R և L միավորով, տեղափոխական և գուգորդական օղակների միջև արված է*

$$\rho : R \rightarrow L$$

համոմորֆիզմը: L -ի կամայական $c_1, \dots, c_n$ տարրերի համար գույրյուն տնի և միայն մեկ $\rho_{c_1, \dots, c_n}$ համոմորֆիզմ $x_1, \dots, x_n$ փոփոխականներով բազմանդամների $R[x_1, \dots, x_n]$ օղակի և L օղակի միջև, որը բախարտում է հետևյալ պայմաններին.

$$\text{m. } \rho_{c_1, \dots, c_n}(x_i) = c_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\text{բ. } \rho_{c_1, \dots, c_n}(r) = \rho(r), \quad r \in R:$$

Ապացույց. Կիրառենք ինդուկցիա՝ ըստ փոփոխականների քվի:

Ինդուկտիվ ենթադրադրույունը. n փոփոխականով բազմանդամների օղակի համար պնդման մեջ արված դասադրադրույունը ճշմարիտ է:

Ինդուկցիայի բազիսը: $n = 1$. մեկ փոփոխականով բազմանդամների օղակի համար պնդման մեջ արված դասադրադրույունը ճշմարիտ է: Այս դասադրադրույունը ամփոփված է 49.15 պնդման մեջ:

Ինդուկցիոն քայլը: Դիցուք՝ $n = l$ փոփոխականով բազմանդամների օղակի համար ինդուկցիոն ենթադրադրույունը իրավացի է: Յույց տանք նրա իրավացիությունը n փոփոխականով բազմանդամների $R[x_1, \dots, x_{n-1}]$ օղակի համար: Մենք ունենք

$$\rho_{c_1, \dots, c_{n-1}} : R[x_1, \dots, x_{n-1}] \rightarrow L$$

համոզմաբխիզմը, սրը R -ի վրա համընկնում է ρ -ի հետ և x_i -ն արտասպասակեքում է c_i -ին, $i = 1, \dots, n-1$: 49.15 պնդման մեջ որպես R օղակ վերցնենք բազմանդամների $R[x_1, \dots, x_{n-1}]$ օղակը: Այդ դեպքում մենք կկառուցենք

$$\rho_{c_1, \dots, c_n} : R[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n] \rightarrow L$$

արտասպասակեքումը, որը համընկնում է $\rho_{c_1, \dots, c_{n-1}}$ հետ $R[x_1, \dots, x_{n-1}]$ -ի վրա և արտասպասակեքում է x_n -ը c_n -ին: Մնում է նկատել, որ

$$R[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n] = R[x_1, \dots, x_{n-1}, x_n] :$$

□

Ապացուցված թեորեմը ենթադրադրույուն է ստույի ցույց ստալու, որ միավորավ, տեղավախական և գուգորդական օղակի վրա արված n փոփախականներով բազմանդամների երկու օղակներ իրար իզոմորֆ են:

ՊՆԴՈՒՄ 53.16. *Միտախով, տեղավախական և գուգորդական օղակի վրա աղբված n փոփոխականներով բազմանդամների երկու օղակներ իրար իզոմորֆ են: Ավելի, փոփոխականների յուրաքանչյուր վերադրման համար գոյադրույուն ունի միակ իզոմորֆիզմը նշիւծ օղակների միջև, որը փոփոխականների վրա համընկնում է այդ վերադրման հետ և նույնական է հիմնական օղակի վրա:*

Ապացույց. Իսկապես, վերցնենք միավորավ, տեղավախական և գուգորդական R օղակը և նրա վրա արված բազմանդամների $R[x_1, \dots, x_n]$ և $R[y_1, \dots, y_n]$ օղակները: Նախորդ կեսում ապացուցված պնդման մեջ վերցնենք

$$L = R[y_1, \dots, y_n], \quad \rho : R \rightarrow R[y_1, \dots, y_n], \quad \rho(r) = r, \quad r \in R :$$

Այդ դեպքում մենք կունենանք

$$\rho_{c_1, \dots, c_n} : R[x_1, \dots, x_n] \rightarrow R[y_1, \dots, y_n]$$

հոմոմորֆիզմը, որը նույնական է R օղակի վրա և x_i փոփոխականը արտասպասակեքում է y_i փոփոխականին, $i = 1, \dots, n$: Հստակնալի է, որ $\rho_{c_1, \dots, c_n}$ արտասպասակեքումը վերադրում է: Հստակնալի է, որ այն նույն հոմոմորֆիզմն է, ապա կլինի իզոմորֆիզմը: □

53.5. *Մի քանի փափախականով բազմանդամների օղակի հասկերթյունները:* Ուսումնասիրենք մի քանի փափախականով բազմանդամների օղակը:

ՊԵՐՈՒՄ 53.17. *Կոմպակտն F դաշտի վրա արված մի քանի փափախականով բազմանդամների օղակը մեթոդաբար սիրայք է:*

Ապացույց. Կիցուք՝ $F[x_1, \dots, x_n]$ օղակը F դաշտի վրա արված բազմանդամների օղակն է: Ինդուկցիայով՝ ըստ n -ի, ստացուցենք, որ $F[x_1, \dots, x_n]$ -ը մեթոդաբար սիրայք է:

Ինդուկցիոն ենթադրությունը, եթե F -ի դաշտ է, սալս $F[x_1, \dots, x_n]$ օղակը մեթոդաբար սիրայք է:

Ինդուկցիայի բազիսը, $n = 1$ $F[x_1]$ օղակը մեթոդաբար սիրայք է: Այս դասադրությունը 50.7 պնդումն է:

Ինդուկցիոն քայլը, ենթադրենք, թե $n - 1$ -ի համար ինդուկցիոն ենթադրությունը ճշմարիտ է: Յույց ստանք, որ այն ճշմարիտ է նաև n -ի համար, այսինքն՝ ստացուցենք, որ $F[x_1, \dots, x_n]$ օղակը մեթոդաբար սիրայք է:

Իսկապես, քանի որ $F[x_1, \dots, x_{n-1}]$ -ի մեթոդաբար սիրայք է, սալս, համաձայն 50.7 պնդումն, մեթոդաբար սիրայք կլինի նաև $F[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n]$ օղակը: Եվ քանի որ

$$F[x_1, \dots, x_n] = F[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n],$$

սալս մեթոդաբար սիրայք է նաև $F[x_1, \dots, x_n]$ օղակը: $\square$

ՊԵՐՈՒՄ 53.18. *Կոմպակտն F դաշտի վրա արված մի քանի փափախականով բազմանդամների օղակը գոտայուն օղակ է:*

Ապացույց. Կիցուք՝ $F[x_1, \dots, x_n]$ օղակը F դաշտի վրա արված բազմանդամների օղակն է:

Ինդուկցիայով՝ ըստ n -ի, ստացուցենք, որ $F[x_1, \dots, x_n]$ -ը գոտայուն է:

Ինդուկցիոն ենթադրությունը, եթե F -ը դաշտ է, սալս $F[x_1, \dots, x_n]$ օղակը գոտայուն է:

Ինդուկցիայի բազիսը, $n = 1$ $F[x_1]$ օղակը գոտայուն է: Այս դասադրությունը 52.8 պնդումն է:

Ինդուկցիոն քայլը, ենթադրենք, թե $n - 1$ -ի համար ինդուկցիոն ենթադրությունը ճշմարիտ է: Յույց ստանք, որ այն ճշմարիտ է նաև n -ի համար, այսինքն՝ $F[x_1, \dots, x_n]$ օղակը գոտայուն է:

Իսկապես, քանի որ $F[x_1, \dots, x_{n-1}]$ -ը գոտայուն է, սալս, համաձայն 52.8 պնդումն, գոտայուն կլինի նաև $F[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n]$: Եվ քանի որ

$$F[x_1, \dots, x_n] = F[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n],$$

սալս գոտայուն է նաև $F[x_1, \dots, x_n]$ օղակը: $\square$

ՊԵՐՈՒՄ 53.19. *Կոմպակտն F դաշտի վրա արված մի քանի (մեկից տվելի) փափախականով բազմանդամների օղակը.*

ա. գլխավոր իդեալների օղակ չէ,

բ. նվկիսյուն օղակ չէ:

Ապացույց. ա. $F[x_1, \dots, x_n]$ օղակի x_1 և x_2 տարրերով ձևված խեղադր այդ օղակի որևէ մեկ տարրով χ ի կտրույ ձևվել: Հետևապես՝ $F[x_1, \dots, x_n]$ օղակը գլխավոր խեղադրների օղակն է:

բ. Համի որ $F[x_1, \dots, x_n]$ օղակը գլխավոր խեղադրների օղակն է, ապա այն նաև Լվկլիդան է: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 53.20. Դիցուք F -ը կոմուտատիվ դաշտ է, x -ը և y -ը՝ F -ի նըկատումը արտահայտություններ: Արդյո՞ք.

ա. $F[x, y]/(x + y) \simeq F[x],$

բ. $F[x, y]/(x - y) \simeq F[x],$

գ. $F[x, y]/(x \cdot y) \simeq F[x]:$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 53.21. Արդյո՞ք չբերվող են K ՝ դաշտի վրա ստացված հետևյալ բազմանդամները.

ա. $x^2 + y^2,$

բ. $x^2 + y,$

գ. $2x^2 - y,$

որտեղ՝

ա. $K = \mathbb{Q},$

բ. $K = \mathbb{C}:$

54. ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ

54.1. *Բազմանդամի բառարանագրական դասադասությունը:* Մեկ վաժմադրանքով բազմանդամների առաժնատվությունը սովորյալ դասերն է, դասում, երբ մենք նման անդամների միացման և փոխարեկներին անդադարման միջոցով նրա անդամները դասավորում ենք ըստ վաժմադրանքի առաժնատվության: Այն բանի վաժմադրանքով բազմանդամի անդամների համար այդպիսի դասավորությունը ցանկալի է միտքեր տրդրանքի χ ի հաճում, բանի որ այն կարող է անհնալ միևնույն առաժնատի տարրեր անդամներ, որոնք նաև իրար նման չեն: Օրինակ, $x^2 + y^2$ բազմանդամն ունի երկու անդամ, որոնք իրար նման չեն, երկուսն էլ ունեն 2 -րդ առաժնատ, և մենք, հետևելով մեկ վաժմադրանքով բազմանդամների դասավորության սկզբունքին, այն չենք կարող դասավորել: Այս նման դեպքերում մեզ օգնում է այն սկզբունքը, որով բառերը դասավորվում են բառարաններում:

Եվ այսպես, $x_1, x_2, \dots, x_n$ վաժմադրանքներով և նորմալ տեսքով գրուված բազմանդամի անդամները դասավորվեն ձուվից ոչ, հետևյալ՝ *բառարանագրական* սկզբունքով.

ա. բազմանդամի երկու անդամներից նույն դասավորվում է այն, որի մեջ մեծ է x_1 վաժմադրանքի ցուցիչը,

բ. եթե բազմանդամի երկու անդամների մեջ x_1 վաժմադրանքի ցուցիչները իրար հավասար են, ապա նույն դասավորվում է այն, որի մեջ մեծ է x_2 վաժմադրանքի ցուցիչը,

զ. եթե բազմանդամի երկու անդամների մեջ $x_1, \dots, x_i$ փոփոխականների ցուցիչները յուրա հավասար են, ապա նույն դասավորվում է այն, որի մեջ մեծ է x_{i+1} փոփոխականի ցուցիչը և այլն:

Բազմանդամի երկու անդամներից տվելի բարձր համարները այն, որը նրա բաադարանագրական դասավորայրյուն մեջ տվելի ձուխ է դասավորվում: Հոսակնույի է, որ բաադարանագրական դասավորայրյունը յարարանչյուր բազմանդամի անդամները դասավորվում են գծույին կարգով:

ՄԱՀԱՆՈՒՄ 54.1. Բազմանդամի ոմենարարձր կամ ոմենոմոխ դասավորվում անդամը կաշվում է նրա *բարձրագույն անդամ*:

Օրինակ, $2x_1x_2 - 3x_2^5$ բազմանդամը 5 սուսիձանի բազմանդամ է, որը գրվում է բաադարանագրական դասավորայրյունը: Այս օրինակը ցույց է աույիս, որ բազմանդամի բարձրագույն անդամը կարող է չհամընկնել նրա տվող անդամի հետ: Նկատենք նոս, որ բազմանդամը կարող է ոմենույ մի բանի տվող անդամներ, բույց նրա բարձրագույն անդամը միակն է:

ՊՆԴՈՒՄ 54.2. *Ամրողչայրյուն սիրայրի վրա աքիում երկու բազմանդամների սրասույրյույի բարձրագույն անդամը հավասար է սրասույրիչների բարձրագույն անդամների սրասույրյույին:*

Ապոցույց. Բավական է նկատել, որ եթե ոտուջին բազմանդամի բարձրագույն անդամը բազմարուսիներ երկրորդի բարձրագույն և ոչ բարձրագույն անդամներով, ապա աուուցվում միանդամներից տվելի բարձր կլինի աուուջինը: $\square$

54.2. *Սիմետրիկ բազմանդամներ:* Դիսուրկներ R օղակի վրա աքվում $x_1, \dots, x_n$ փոփոխականներով հետևյալ բազմանդամները.

$$s_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

$$s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n,$$

$$s_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n,$$

$$s_{n-1} = x_1x_2 \dots x_{n-1} + \dots + x_2x_3 \dots x_{n-1}x_n,$$

$$s_n = x_1x_2 \dots x_n :$$

Նրանցից յարարանչյուրի մեջ փոփոխների կամույսական երկու կում մի քանի փոփոխականների աեղերը: Պուրգ է, որ դրանից նշվում բազմանդամների չեն փոխվի:

ՄԱՀԱՆՈՒՄ 54.3. R օղակի վրա աքվում $f(x_1, \dots, x_n)$ բազմանդամը կաշվում է *սիմետրիկ*, եթե $\{1, \dots, n\}$ բազմույրյուն կամույսական σ աեղուղուրյուն հուուս

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) :$$

Սիմետրիկ բազմանդամների օրինակներ:

ու. Վերևում դիտարկված $s_1, s_2, \dots, s_n$ բազմանդամները սիմետրիկ բազմանդամներ են: Դրանք կոչվում են *ստորսիւսն սիմետրիկ բազմանդամներ*:

բ. R օղակի ստարերը նույնպես R -ի վրա արված կամայական փափուկականերով սիմետրիկ բազմանդամներ են:

Սիմետրիկ բազմանդամների գումարը, ստարերայությունը, ադաուդրյալը նույնպես սիմետրիկ բազմանդամներ են: Ավելին, իրավացի է հետևյալ պնդումը:

ՊԼԴՈՒԽ 54.4. $R[x_1, \dots, x_n]$ օղակի $R[s_1, \dots, s_n]$ ենթօղակը կազմված է սիմետրիկ բազմանդամներից:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: □

54.3. *Սիմետրիկ բազմանդամների հիմնական թեորեմը:* Այժմ դիտարկենք սիմետրիկ բազմանդամների մի շարք հատկություններ, որոնք կօգտագործենք առաջիկայում: Նախորդ կետում մենք ցույց տվինք, որ ստարական սիմետրիկ բազմանդամներից կազմված յուրաքանչյուր բազմանդամ նույնպես սիմետրիկ բազմանդամ է: Պարզվում է, որ ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը: Այսինքն՝ R օղակի վրա արված յուրաքանչյուր սիմետրիկ բազմանդամ $R[x_1, \dots, x_n]$ օղակի $s_1, \dots, s_n$ ստարերով կազմված R օղակից վերցված գործակիցներով բազմանդամ է: Այս սրբյուրերը հանրահաշվում մեր կարևոր կիրառություն:

ՊԼԴՈՒԽ 54.5. (*Սիմետրիկ բազմանդամների հիմնական թեորեմը*): Կամայական R ամբողջություն տիրույթից վերցրած գործակիցներով սիմետրիկ բազմանդամ R -ից վերցրած գործակիցներով և $s_1, \dots, s_n$ ստարական սիմետրիկ բազմանդամներով կազմված բազմանդամ է: Այսինքն՝ կամայական R ամբողջություն տիրույթի նամար $R[x_1, \dots, x_n]$ օղակի սիմետրիկ բազմանդամների բազմությունը համընկնում է նրա $R[s_1, \dots, s_n]$ ենթօղակի հետ:

Ապացույց. Վերցնենք R ամբողջություն տիրույթի վրա արված $f(x_1, \dots, x_n)$ սիմետրիկ բազմանդամը: Դիցույ՝ նրա բարձրագույն անդամն է $ax_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$: Քանի որ վափուկականների յուրաքանչյուր աղետալախարայունից հետո այս միանդամից ստացված միանդամը դարձյալ $f(x_1, \dots, x_n)$ բազմանդամի անդամ է, ապա մենք ունենք

$$k_1 \geq \dots \geq k_n :$$

Հակառակ դեպքում, եթե լինեք, օրինակ, $k_i > k_{i+1}$, ապա աղետալախարով

$$ax_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$$

միանդամի մեջ x_i և x_{i+1} անդամները կատանույինք $f(x_1, \dots, x_n)$ բազմանդամի բարձրագույն անդամից ավելի բարձր անդամ:

Դիտարկենք հետևյալ բազմանդամը.

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = as_1^{k_1-k_2}s_2^{k_2-k_3} \dots s_{n-1}^{k_{n-1}-k_n}s_n^{k_n} :$$

Այն R ամբողջություն տիրույթի վրա արված սիմետրիկ բազմանդամ է, որի բարձրագույն անդամն է $ax_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$: Սա նշանակում է, որ $f - g_1 \dots f_1$ բազմանդամի

բարձրագույն անդամը ունի գումար 1 , քան f -ի բարձրագույն անդամը: Մյուսոմանակ, $f = g_1 + f_1$: Կրկներ օգտված դասադրությունները f_1 բազմանդամի եամար կստանանք՝

$$f_1 = g_2 + f_2,$$

արեւ g_2 -ը ստորական բազմանդամների ոչ բացասական տատանումների սրատարբյակ 1 R -ից վերցրած գործակիցներով, իսկ f_2 -ը R -ից վերցրած գործակիցներով սիմետրիկ բազմանդամ: Ընդ որում, f_2 բազմանդամի բարձրագույն անդամը ունի գումար 1 , քան f_1 -ի բարձրագույն անդամը: Վերջին երկու հավասարություններից կստանանք՝

$$f = g_1 + g_2 + f_2 :$$

Շարունակելով այս ընթացքը՝ վերջավոր l քայլից հետո կստանանք $f_l = b, b \in R$: Հետևապես, կունենանք՝

$$f = g_1 + g_2 + \dots + g_l + b :$$

արեւ ուշ մասի բոլոր գումարելիները ստորական սիմետրիկ բազմանդամների ոչ բացասական տատանումների սրատարբյակներ են R -ից վերցրած գործակիցներով: $\square$

Պարզվում է, որ յարարունշար սիմետրիկ բազմանդամ՝ արեւ ստորական սիմետրիկ բազմանդամներով կազմված բազմանդամ, գումարելիների տեղափոխման ճշտությամբ ունի միակ նորմալ տեսքը:

ՊՐԴՈՒՄ 54.6. *Տարրական սիմետրիկ բազմանդամներով կազմված, գրայից ստորերի բազմանդամը գրայից ստորեր է նաև որպես $x_1, \dots, x_n$ փոփոխականներով բազմանդամ:*

Լեզուայց. Դիցուք՝

$$f(s_1, \dots, s_n) = a s_1^{k_1} \dots s_n^{k_n} + b s_1^{l_1} \dots s_n^{l_n} + \dots :$$

Ընդ որում, կատարված է նման անդամների միացում: Որպես $x_1, \dots, x_n$ փոփոխականներով բազմանդամ,

$$a s_1^{k_1} \dots s_n^{k_n}$$

բազմանդամի ունիկ տեսքն է

$$a x_1^{k_1 + \dots + k_n} x_2^{k_2 + \dots + k_n} \dots x_n^{k_n},$$

իսկ

$$b s_1^{l_1} \dots s_n^{l_n}$$

բազմանդամի ունիկ տեսքն է

$$b x_1^{l_1 + \dots + l_n} x_2^{l_2 + \dots + l_n} \dots x_n^{l_n} :$$

Հետադրությամբ կարելի է համոզվել, որ այս երկու միանդամները չեն կարող իրար նման լինել. նրանցից մեկը ունի բարձր 1 : Հսկողովի դեպքում մենք կստանանք

$$k_n = l_n, \dots, k_1 = l_1 :$$

$\square$

Այսպեսգլխով սմբռնվից անմիջապես հետևում է նուև սուրբրուկում սիմետրիկ բազմանդամներով սիմետրիկ բազմանդամի ներկայացման միակերպությունը. էրե իրարից սուրբրեր սյղղյխի էրկու ներկայացումներ լինեն, տալս նրանց սուրբրերությամբ կլինեն գրայից սուրբրեր՝ որպես սուրբրական բազմանդամներով կազմված բազմանդամ, և գրայական բազմանդամ՝ որպես $x_1, \dots, x_n$ վափոխականներով բազմանդամ:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 54.7. Յույց սվեր, որ.

$$\text{ա. } x_1^2 + \dots + x_n^2 = s_1^2 - 2s_2,$$

$$\text{բ. } x_1^3 + \dots + x_n^3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3:$$

Հիմնական բերերնից ստացվում է նուև հետևյալ կարեր հետևությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 54.8. *Դիցուք՝ $f(x)$ -ը տիպզ անդամի 1 գործակցով և F դաշտի վրա սրված բազմանդամ է: Այլ պեպքում F -ից վերցրած գործակիցներով և $f(x)$ -ի բոլոր սրմասներով կազմված յուրսրանշյուր սիմետրիկ բազմանդամ F դաշտի սուրբ է:*

Այսպսյց. Իսկապես, նման բազմանդամը, համաձայն հիմնական բերերնի, սուրբրական բազմանդամներով, սյսլինքն՝ ալված բազմանդամի գործակիցներով կազմված բազմանդամ է: Հետևապես՝ սյն F դաշտի սուրբ է: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 54.9. Գուեր հետևյալ բազմանդամի բոլոր սրմասների բաաուկուսներից գամուրբ.

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0:$$

55. ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՌԵԶՈՒՆՏԱՆՏԸ: ԱՆՀԱՅՏԻ ԱՐՏԱԶՍՈՒՄԸ

55.1. *Բազմանդամների ռեզույտանտը:* Կամույական դաշտի վրա սրված բազմանդամների ընդհանուր սրմասա տնենույու խնդիրը հանգում է նրանց դրսկան ոտսիձանի ընդհանուր բաժանուրսր ունենույու խնդրին: Իսկ վերջինս լուծվում է Էվկլիդի սկզբրիքի միջոցով: Օգտակար է խմանալ նուև բազմանդամների ընդհանուր սրմասներ և պրսկան ոտսիձանի ընդհանուր բաժանուրսրներ ունենույու և դյանք գտնելու ևս մի մտուեցում:

Դիսուրկենք F դաշտի վրա սրված

$$(75) \quad f(x) = a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad g(x) = b_0x^m + \dots + b_{m-1}x + b_m$$

բազմանդամները, որսուղ n -ը և m -ը բնական թվեր են: Այստեղ a_0 և b_0 գործակիցները կարող են լինել գյու, սյսլինքն՝ $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների նշված սեսերերը կարող են կաաուրյալ չլինել, իսկ բազմանդամների գործակիցների գրսամանն նոր կարգը նորսուսկիսիսարմար է հետուգա նշանուկուսներում տվելի սյարզ սեսք սաաոնույու համար:

ԴՆԴՈՒՄ 55.1. $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամները, որոնցից զոմեն մեկի համար (75) համաստրություններում գրված առարկ կոտարյայ L , այն և միայն այն դեպքում առնեն ընդհանուր տրմուտ, երև գոյություն ունեն F դուշուի փուտ սրվում $u(x)$ և $v(x)$ բազմանդամներ, որոնցից զոմեն մեկը գոյելց ստարեր L , տուտջինի տստիծանը մեն չէ ու L -ից, երկրարյինը՝ ու L -ից, և

$$(76) \quad f(x)v(x) = g(x)u(x) :$$

Լկարցույց. Երև $f(x)$ -ը և $g(x)$ -ը ունեն α ընդհանուր տրմուտը, տարու նրանք փոխտարծարար սարզ չեն: Հետևաբես՝ նրանք ունեն դրական տստիծանի $h(x)$ ընդհանուր բաժանարար, որը սլտսկումում L $F[x]$ -ին: Այսինքն՝ գոյություն ունեն $u(x)$ և $v(x)$ բազմանդամներ, որոնց համար՝

$$f(x) = u(x)h(x), \quad g(x) = v(x)h(x) :$$

Այս համաստրություններից կատումունք՝

$$f(x)v(x) = u(x)h(x)v(x) = g(x)u(x) :$$

Իսկ այստեղից ստացվում է (76) համաստրությունը և այնդման մնուցում սլտստնջները:

Հուկատակը, դիցուք՝ գոյություն ունեն (76) համաստրությունը և այնդման մնուցում սլտստնջներին բաժարարող $u(x)$ և $v(x)$ բազմանդամներ: Առունց մեր դուտայությունների ընդհանրությունը խոխտակու, մենք կարող ենք ենքստարել, որ (75)-ում $f(x)$ -ի առարք կոտարյայ է: Հետևաբես՝ $f(x)$ -ը դրական տստիծանի բազմանդամ է: (76) համաստրություն երկու մասերը կլուտակով $u(x)$ և $v(x)$ բազմանդամների տննումեն ընդհանուր բաժանարարով՝ կատումունք՝

$$f(x)v_1(x) = g(x)u_1(x)$$

համաստրությունը, որտեղ $u_1(x)$ և $v_1(x)$ բազմանդամները փոխտարծարար սարզ են: Հետևաբես՝ այս վերջին համաստրությունից կատումունք՝ $f(x) = u_1(x)t(x)$: Ակնհայտ է, որ $t(x)$ -ը դրական տստիծանի բազմանդամ է: Արենույն ժամումակ $g(x) = v_1(x)t(x)$: Հետևաբես՝ դրական տստիծանի $t(x)$ բազմանդամը $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների ընդհանուր բաժանարարն է: Ուրեմն՝ այդ բազմանդամներն ունեն ընդհանուր տրմուտ: $\square$

Երկու բազմանդամների ընդհանուր տրմուտի մասին կարելի է ձևակերպել տվելի հետարրրի իտյատմիչ, եթե ներմումենք հետեյակ հասկացությունը:

ՄԱՀՄԱՆՈՒՄ 55.2. (75) Խափասարություններով որոշվող $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների *ոեգուլատմա* է կոչվում այդ բազմանդամների գործակիցներից կազմված հետևյալ որոշվելը.

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_m \end{vmatrix},$$

որտեղ նախ գրված են $f(x)$ -ի գործակիցներից կազմված m , ապա $g(x)$ -ի գործակիցներից կազմված n առողեր, իսկ դասարկ աղեկբում ամենաուրեք գրոներ են:

$f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամների *ոեգուլատմա*ը նշանակվում է $R(f, g)$ -ով: Օրի-
նակ, եթե

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = x^2 + 3x + 2,$$

ապա կունենանք՝

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}:$$

Անմիջապես կարելի է նկատել, որ օրինակում դիտարկված $x + 1$ և $x^2 + 3x + 2$ բազմանդամները ունեն ընդհանուր արմատ: Միևնույն ժամանակ, այդ բազմանդամների *ոեգուլատմա*ը խափասար է գրոյի: Պարզվում է, որ այս օրինակավորությունը սրտատեսական չէ և աղեի ունի մոտ կամայական բազմանդամների եամար:

ՊՆԴՈՒՄ 55.3. Դիցուք՝ F դաշտի վրա տրված $f(x)$ և $g(x)$ բազմանդամներից գրեն մեկի համար (75) աղարի կատարոյա է: Այդ դեպքում $f(x)$ -ը և $g(x)$ -ը ունեն ընդհանուր արմատ այն և միայն այն դեպքում, եթե նրանց *ոեգուլատմա*ը հախատար է գրոյի:

Արտոյց. Դիցուք՝

$$u(x) = c_0 x^{n-1} + \cdots + c_{n-2} x + c_{n-1}, \quad v(x) = d_0 x^{m-1} + \cdots + d_{m-2} x + d_{m-1}:$$

Այդ դեպքում (75) Խափասարությունից կունենանք՝

$$\begin{aligned} a_0 d_0 &= b_0 c_0, \\ a_1 d_0 + a_0 d_1 &= b_1 c_0 + b_0 c_1, \\ a_2 d_0 + a_1 d_1 + a_0 d_2 &= b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2, \\ &\vdots \\ a_n d_{m-2} + a_{n-1} d_{m-1} &= b_{m-2} c_n + b_{m-1} c_{n-1}, \end{aligned}$$

$$a_n d_{m-1} = b_m c_{n-1} :$$

Այստեղ մենք ունենք $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, d_0, d_1, \dots, d_{m-1} \mid n + m$ անհայտներով զծային համասեռ հավասարումների համակարգ: Այն ունի ոչ զրոյական լուծում այն և միայն այն դեպքում, երև նրա սլոշիչը հավասար է զրոյի: Առանց դժվարության կարելի է ցույց տալ, որ համակարգի սլոշիչի զրո լինելը նույնն է, ինչ ստված բազմանդամների ռեզուլտանտի զրո լինելը: $\square$

ԴՆԴՈՒՄ 55.4. (75) *բազմանդամների ռեզուլտանտը հավասար է զրոյի այն և միայն այն դեպքում, երև նրանք մենն ընդհանուր արմատ կամ էլ $a_n = b_m = 0$:*

Ապացույց. Կռատարեք ինքնուրույն: $\square$

55.2. Անհայտի արտաքստմը: Մինչև այժմ մենք դիտարկել ենք միայն զծային հավասարումների համակարգերը: Հոսկանույի է, որ ոչ զծային հավասարումների համակարգերի լուծումը որակապես աստիճանավորվում է զծային հավասարումների համակարգերի լուծումից: Այժմ կիրառենք ռեզուլտանտի գաղափարը երկու անհայտով համասեռ շարժական հավասարումների համակարգից անհայտներից մեկը արտաքսելու համար:

Դիցուք՝ F -ը կամայական դաշտ է, $f(x, y)$ -ը և $g(x, y)$ -ը՝ F -ի վրա արված x և y երկու փոփոխականներով բազմանդամներ: Դիտարկենք

$$(77) \quad \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

համակարգը: Այս $f(x, y)$ և $g(x, y)$ բազմանդամները կարելի է դիտել որպես $F[y]$ օդակի վրա արված բազմանդամներ: Նշանակենք նրանց ռեզուլտանտը $R(y)$ -ով:

Դիցուք՝ (77) համակարգը F -ի ինչ-որ ընդլայնման մեջ ունի (α, β) լուծումը: Տրված $f(x, y)$ և $g(x, y)$ բազմանդամները զրենք հետևյալ կերպ.

$$(78) \quad f(x, y) = a_0(y)x^n + \dots + a_{n-1}(y)x + a_n(y),$$

$$(79) \quad g(x, y) = b_0(y)x^m + \dots + b_{m-1}(y)x + b_m(y),$$

որտեղ $a_i(y), b_j(y) \in F[y], i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, m$:

Այդ դեպքում x փոփոխականով

$$f(x, \beta) = a_0(\beta)x^n + \dots + a_{n-1}(\beta)x + a_n(\beta),$$

$$g(x, \beta) = b_0(\beta)x^m + \dots + b_{m-1}(\beta)x + b_m(\beta)$$

բազմանդամները մենն α ընդհանուր արմատը: Համաձայն 55.3 պնդման՝ ույդ բազմանդամների $F(\beta)$ ռեզուլտանտը հավասար է զրոյի: Այսինքն՝ β -ն $R(y)$ ռեզուլտանտի արմատն է:

Հտիտակը, երև β -ն $R(y)$ ռեզուլտանտի արմատն է, ապա, համաձայն 55.3 պնդման, $f(x, \beta)$ և $g(x, \beta)$ բազմանդամներն մենն α ընդհանուր արմատը: Այդ դեպքում (α, β) գույր կլինի (77) հավասարումների համակարգի լուծումը:

Այսովառվ՝ (77) հավասարումների համակարգի լուծման համար անհրաժեշտ է լուծել մեկ փոփոխականով $R(y) = 0$ հավասարումը:

Լուծենք, օրինակ, հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} 2yx^2 + yx - 3 = 0 \\ yx - y - 2 = 0 \end{cases}$$

Հաշվենք $R(y)$ -ը.

$$R(y) = \begin{vmatrix} 2y & y & -3 \\ y & y-2 & 0 \\ 0 & y & y-2 \end{vmatrix} :$$

Այստեղից կստանանք՝

$$2y(y-2)^2 - 3y^2 - y^2(y-2) = 0 :$$

Այս հավասարման լուծումներն են՝ 0, 1 և 8: Տրված համակարգի համար կստանանք $(1, 1)$ և $(-3/4, 8)$ լուծումները:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 55.5. a -ի ի՞նչ արժեքի դեպքում $x^2 + a^2 - 2$ և $x^3 - 2ax + a^3$ բազմանդամներն ունեն ընդհանուր արմատ:

ԿՈՄՊԼԵՔՍ, ԻՐԱԿԱՆ, ՌԱՅԻՈՆԱԼ ԳՈՐԾԱԿԻՅՆԵՐՈՎ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ

56. ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԹՎԵՐԻ ԴԱՇՏԻ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ՓԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

56.1. *Իրական գործակիցներով բազմանդամների սրժերները:* Այս սկս-
րագրա՞ծում մենք կապուցուցենք կոմպլեքս թվերի դաշտի կարևորագույն հասկա-
րյաունք, այն է. կոմպլեքս գործակիցներով յուրաքանչյուր ոչ հաստատուն բազման-
դամ ունի կոմպլեքս սրժառա: Նախ ունեիրա՞ծե՞լա՞ են լինելու իրական գործակիցներով
բազմանդամների որոշ հասկարյուններ, որոնք կուսումնասիրենք սառրեն:

ՊՆԴՈՒՄ 56.1. *(Լեմմա սոխոգ անդամի մադուլի մոսին):* Իրական գործակիցներ-
ով

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

աչ հաստատուն բազմանդամի համար գալարյուն ունի այնուխի c դրական թիվ, որ

$$|x| > c \Rightarrow |a_nx^n| > |a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}| :$$

Այսինքն՝ բազմանդամի սոխոգ անդամի մադուլի սրժերը՝ փոփոխականի ինչ-որ սր-
ժերից սկսա՞ծ, մե՞ծ է նրա մնացա՞ծ անդամների գումարի մադուլի սրժերից:

Ասրացույց. Դիցուք՝

$$a := \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|) :$$

Անրցենք $c = \frac{a}{|a_n|} + 1$: Այդ դեպքում՝

$$|x| > c \Rightarrow |x| > \frac{a}{|a_n|} + 1 \Rightarrow |x| - 1 > \frac{a}{|a_n|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{|x| - 1} < |a_n| \Rightarrow \frac{a|x|^n}{|x| - 1} < |a_nx^n| :$$

Օգտագործելով վերջին անհավասարությանը՝ կսառմա՞նք՝

$$|a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}| \leq$$

$$\leq |a_0| + |a_1||x| + \dots + |a_{n-1}||x|^{n-1} \leq a(1 + |x| + \dots + |x|^{n-1}) =$$

$$= \frac{a(|x|^n - 1)}{|x| - 1} < \frac{a|x|^n}{|x| - 1} < |a_n x^n| :$$

Այն, ինչ պահանջվում էր տալուցուցել:

□

Այսուցուցվում պնդումից, մասնավորապես, ստացվում է, որ իրական գործակիցներով ոչ հաստատուն բազմանդամի նշանը՝ վաժմախառնի մոդուլի բավականաչափ մեծ ուղեքների համար, համընկնում է նրա սովորական նշանի հետ:

Այժմ մենք կարող ենք տալուցուցել հետևյալ հոսակությունը:

ՊՆԴՈՒՄ 56.2. *Իրական գործակիցներով, կենսա ոստիծանի յուրաքանչյուր բազմանդամ ունի զոնե մեկ իրական արմատ:*

Ապացույց. Դիցուք՝ ունենք իրական գործակիցներով, կենսա ոստիծանի $f(x)$ բազմանդամը: Համաձայն 56.1 պնդման՝ x վաժմախառնի մոդուլի բավականաչափ մեծ ուղեքների համար $f(x)$ -ի նշանը համընկնում է նրա $a_n x^n$ սովորական նշանի հետ: Բայց, քանի որ n -ը կենսա է, սարս $a_n x^n$ -ը x -ի դրական և բացասական ուղեքների համար ընդունում է տարբեր նշանների ուղեքներ: Նման՝ ատրբեր նշանի արժեքներ է ընդունում նաև սովորական $f(x)$ բազմանդամը: Այսինքն՝ կգանգեմ այնպիսի a և b իրական րվեր, որ $f(a) > 0$ և $f(b) < 0$: Քանի որ բազմանդամը անընդհատ փոսկցիտ է, սարս, համաձայն Կոշու քեդրեմի, a և b րվերի միջև կգանգվի մի այնպիսի c իրական րվ, որ $f(c) = 0$:

□

56.2. *Իրական գործակիցներով բազմանդամի կոմպլեքս արմատի գոյությունը:* Նախարդ կենսում մենք անումք, որ իրական գործակիցներով կենսա ոստիծանի բազմանդամը անալոյմում ունի իրական արմատ: Ձույզ ոստիծանի բազմանդամների համար նման հոսակություն անդի չունի. օրինակ, $x^2 + 1$ իրական գործակիցներով բազմանդամը իրական արմատ չունի: Պայգվում է, սակայն, որ ինչպես նշվում է $x^2 + 1$, այնպես էլ իրական գործակիցներով զույգ ոստիծանի յուրաքանչյուր այլ բազմանդամ ունի կոմպլեքս արմատ:

ՊՆԴՈՒՄ 56.3. *Իրական գործակիցներով դրական ոստիծանի յուրաքանչյուր բազմանդամ ունի զոնե մեկ կոմպլեքս արմատ:*

Ապացույց. Յուրաքանչյուր բնական րվ կարելի է գրառել $2^k q$ տեսքով, որտեղ q -ն կենսա րվ է, իսկ k -ն՝ ոչ բացասական ամբողջ րվ: Անգամենք k -ն 2 րվի ցուցիչ $2^k q$ րվի մեջ: Օրինակ, 1 րվի մեջ 2 րվի ցուցիչը 2 է, 10 -ի մեջ՝ 1 , 5 -ի մեջ՝ 0 :

Պնդման տալուցուցումը կոտարներ ինդուկցիայով՝ ըստ բազմանդամի ոստիծանի մեջ 2 րվի k ցուցիչի:

Ինդուկտիվ ներադրությունը. իրական գործակիցներով դրական ոստիծանի յուրաքանչյուր բազմանդամ, որի ոստիծանի մեջ 2 րվի ցուցիչը k է, ունի զոնե մեկ կոմպլեքս արմատ:

Ինդուկցիայի բազիսը. $k = 0$: Այդ դեպքում բազմանդամը կլինի կենսա ոստիծանի: Համաձայն 56.2 պնդման՝ նման բազմանդամում ունի իրական, ենսեսպես՝ նաև կոմպլեքս արմատ:

Ինդուկցիոն րայր. ենքուդրենք, րե իրական գործակիցներով կոմպլեքսական բազմանդամ, որի ոստիծանի մեջ 2 րվի ցուցիչը k է, ունի զոնե մեկ կոմպլեքս արմատ,

և տարացուցենք, որ իրական գործակիցներով բազմանդամը, որի աստիճանի մեջ 2 րվի ցուցիչը $k + 1$ է, ունի զրոն մեկ կոմպլեքս տրմառ:

Իսկուպես, պիցտո՝ իրական գործակիցներով $f(x)$ բազմանդամի աստիճանի մեջ 2 րվի ցուցիչը $k + 1$ է: Այդ դեպքում նրա աստիճանը ունի $2^{k+1}q$ տեսքը, որտեղ q -ն կենտ է: Հասկանալի է, որ $f(x)$ -ը նաև կոմպլեքս րվերի $\mathbb{C}$ դաշտի վրա տրված բազմանդամ է: Եվ, որպես այդպիսին, այն ունի վերլուծությունների P դաշտը, որտեղ զանգվում են $f(x)$ բազմանդամի բոլոր՝ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ արմատները: Պարզ է, որ $n = 2^{k+1}q$:

Երեցներ c իրական թիվը և դիտարկենք P դաշտի վրա տրված հետևյալ բազմանդամը.

$$g(x) = \prod_{i < j \leq n} (x - \beta_{ij}), \quad \beta_{ij} = \alpha_i \alpha_j + c(\alpha_i + \alpha_j), \quad i < j:$$

Այս բազմանդամի աստիճանը հավասար է β_{ij} ստարերի թվին, որտեղ $i < j$: Այն կլինի.

$$(80) \quad n(n-1)/2 = 2^{k+1}q(2^{k+1}q-1)/2 = 2^kq(2^{k+1}q-1):$$

$g(x)$ բազմանդամի գործակիցները β_{ij} ստարերից կախված ստարական սիմետրիկ բազմանդամներ են: Հեանուպես՝ նրանք կլինեն իրական գործակիցներով սիմետրիկ բազմանդամներ՝ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ստարերից: Համաձայն սիմետրիկ բազմանդամների երմնական քեորեմի՝ այստեղից հեանում է, որ $g(x)$ բազմանդամի գործակիցները կլինեն իրական գործակիցներով բազմանդամներ՝ $f(x)$ բազմանդամի գործակիցներից: Բայց $f(x)$ -ը իրական գործակիցներով բազմանդամ է: Հեանուպես՝ $g(x)$ բազմանդամի գործակիցները կլինեն իրական թվեր: (80)-ից հեանում է, որ $g(x)$ -ի աստիճանի մեջ 2 րվի ցուցիչը հավասար է k -ին: Համաձայն ինդուկտիվ ենթադրության՝ $g(x)$ -ը ունի զրոն մեկ կոմպլեքս տրմառ: Այսինքն՝ β_{ij} ստարերից զրոն մեկը կոմպլեքս թիվ է: Ուրեմն՝ այդպիսին է նաև

$$\alpha_i \alpha_j + c(\alpha_i + \alpha_j)$$

զամարներից մեկը:

Այսպիսով՝ c իրական թվի յուրաքանչյուր արժեքի համար կարելի է նշել զրոն մեկ i, j զույգ, որի համար $\alpha_i \alpha_j + c(\alpha_i + \alpha_j)$ զամարը կոմպլեքս թիվ է: Քանի որ նշված i, j զույգերի թիվը վերջավոր է, իսկ c -ի իրական արժեքների քանակը՝ անվերջ, տալի կզանգվեն c -ի իրարից տարբեր այնպիսի c_1 և c_2 իրական արժեքներ, որոնց համար

$$\alpha_i \alpha_j + c_1(\alpha_i + \alpha_j) = a, \quad \alpha_i \alpha_j + c_2(\alpha_i + \alpha_j) = b,$$

որտեղ a -ն և b -ն կոմպլեքս թվեր են: Այս վերջին հավասարություններից կսաանանք՝

$$(c_1 - c_2)(\alpha_i + \alpha_j) = a - b$$

կամ՝

$$\alpha_i + \alpha_j = \frac{a - b}{c_1 - c_2}, \quad \alpha_i \alpha_j = a - c_1 \cdot \frac{a - b}{c_1 - c_2}:$$

Առաջվում համակարգը ցույց է առվում, որ α_i և α_j առարերը կոմպլեքս րվեր են, յունի որ նրանք կոմպլեքս զործուկիցներով երկրորդ տեսիծանի րուզմանդումի աըմատներ են:

Ելյավիսով՝ մենք տալացուցեցինք, որ $f(x)$ րուզմունդումը ունի կոմպլեքս աըմատ: $\square$

56.3. Կոմպլեքս զործուկիցներով րուզմունդաններ: Ելծմ դիտարկենք կոմպլեքս զործուկիցներով րուզմունդումները: Նախ լածներ նման րուզմունդումների կոմպլեքս աըմատներ ունենալու իմդիրը:

ՊՆԴՈՒՄ 56.4. (Համըստիւշվի եիմնուկում րերերը): Կոմպլեքս զործուկիցներով և հոստուտումից առարեր յորտըրունշյոր րուզմունդում ունի կոմպլեքս աըմատ:

Ընդացույց. Դիտարկենք կոմպլեքս զործուկիցներով

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

րուզմունդումը: Նշումուկենք՝

$$\overline{f}(x) = \overline{a_0} + \overline{a_1}x + \dots + \overline{a_n}x^n, \quad g(x) = f(x)\overline{f}(x) :$$

Հեշտուրյումը կարելի է համոզվել, որ $g(x)$ րուզմունդումի զործուկիցներից յորտարունշյորի համալումը համըսկնում է իր հետ: Ելյալինք՝ $g(x)$ րուզմունդումի զործուկիցները յորտկում րվեր են: Համոծույն նույնորը կեսում տալացուցվում րերերնի՝ $g(x)$ -ն ունի զանե մեկ՝ α կոմպլեքս աըմատ.

$$g(\alpha) = f(\alpha)\overline{f}(\alpha) = 0 :$$

Ելյատեղից կատումունք՝ $f(\alpha) = 0$ կամ $\overline{f}(\alpha) = 0$: Առաջին դեսլլում կարելի է համարել, որ պնդումն տալացուցվում է: Իսկ երե սելի ունի երկրորդ դեսլլը, տալուկնեույարուն $\overline{\alpha}$ -ը կլինի $f(x)$ րուզմունդումի աըմատը: $\square$

ՄԱՀԱՆՈՒՄ 56.5. Իուշար կուշում է համըստիւշվիւրեն փուկ, երե նրա վրա աըմատ կամուրկում րուզմունդում ույդ դաշտի մեջ ունի աըմատ:

ՊՆԴՈՒՄ 56.6. Կոմպլեքս րվերի դաշտը համըստիւշվիւրեն փուկ է:

Ընդացույց. Հետում է համըստիւշվի եիմնուկում րերերնից: $\square$

Համըստիւշվարեն փուկ լինելը շատ նշումուկից հոսակուրյուն է, որով առաջմ մեր իմացում դաշտերից օծավում է միայն կոմպլեքս րվերի դաշտը:

Լումենք նուե կոմպլեքս զործուկիցներով րուզմունդումի շրեքվող աըսուդրիչների հույցը:

ՊՆԴՈՒՄ 56.7. Ընուշլին տաուիծումի րուզմունդումները և միայն նրանք են կոմպլեքս րվերի դաշտի նկուսումար շրեքվող րուզմունդումներ:

Լեյպցույց. Ապացուցումը կատարենք ինդուկցիայով՝ ըստ բազմանդամի աստիճանի: Ինդուկցիայի բազիսը, ակնհայտորեն ճշմարիտ է: ‘Իիցուք’ օրենքը կոմպլեքս գործակիցներով, հաստատունից ստորեր $f(x)$ բազմանդամը: Համաձայն հիմնովան քեորեմի՝ այն ունի զմեռ մեկ՝ α_1 կոմպլեքս սրմառ: Ունենք՝

$$f(x) = (x - \alpha_1)g(x),$$

որտեղ $g(x)$ -ը $n - 1$ աստիճանի բազմանդամ է: Համաձայն ինդուկցիոն ենթադրության՝

$$g(x) = a(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n), \quad a, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C} :$$

Հետևապես՝

$$(81) \quad f(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) :$$

□

Լեյժմ մենք կարող ենք հեշտությամբ լուծել մառ կոմպլեքս գործակիցներով բազմանդամի սրմառների թվի հարցը:

ՊԼԴՈՒՄ 56.8. *Նոմալերա գործակիցներով ոչ գրադուր բազմանդամի կոմպլեքս սրմառների թիվը՝ բազմասրաիկ սրմառների հուշիստումով, հաիիսադ է մրա սասիճումին:*

Լեյպցույց. Բազմակում է օգաղել (81) վերլուծությունից: □

56.4. *Իրական թվերի դաշտի վրա սրված չբրվող բազմանդամները:* Նաի մկարագրենք իրական թվերի դաշտի վրա սրված չբրվող բազմանդամները: Ալնհայտադեն ուղղիլիլր են ուադիմ սասիճումի բազմանդամները: Կում մառ երկադղ սասիճումի չբրվող բազմանդամներ. օրինակ, $x^2 + 1$: Հետևյալ հաակօրյաումը ցույց է սաղիս, որ իրական թվերի դաշտի վրա սրված երրադղ ու բարձր սասիճումի չբրվող բազմանդամներ սրղեն չեն կարող լինել:

ՊԼԴՈՒՄ 56.9. *Իրական թվերի դաշտի վրա սրված չբրվող բազմանդամի աստիճանը մեծ չէ 2-ից:*

Այս սլնդումը սաղադացելա համար մեզ աենրաժեշա է լինելա հետևյալ հասկությունը, որը մառ ինքնորայն հետադրրրություն է մերկայացում:

ՊԼԴՈՒՄ 56.10. *Եթե α կոմպլեքս թիվը իրական գործակիցներով $f(x)$ բազմանդամի սրմառն է, ադա մրառ համարում $\overline{\alpha}$ թիվը մույմուկա $f(x)$ -ի սրմառն է:*

Լեյպցույց. Իսկապես, դիցաք՝ ունենք $f(\alpha) = 0$: Այսաղից կսառումք՝

$$0 = \overline{0} = \overline{f(\alpha)} = \overline{f(\overline{\alpha})} = f(\overline{\alpha}) :$$

Այսինքն՝ $f(\overline{\alpha}) = 0$: Հետևապես՝ $\overline{\alpha}$ -ը $f(x)$ բազմանդամի սրմառն է:

Լեյժմ ունցենք 56.9 սլնդումն սաղացույլին: Դիցաք՝ α -ն իրական գործակիցներով $f(x)$ չվերլուծվող բազմանդամի կոմպլեքս սրմառն է: Այսաղե հմարավոր է երկաղ դեպք.

ու. α -ն իրական է: Այդ դեպքում $x - \alpha$ արատաղրիչը կլինի $f(x)$ -ի բաժանորար և, քանի որ $f(x)$ -ը չբերվող է, սակայն այն աստղացվում կլինի այդ $x - \alpha$ բաժանադամի հետ, այսինքն՝ $f(x)$ -ը ինքն էլ կլինի ուռուչին աստիճանի:

բ. α -ն իրական չէ: Այդ դեպքում, համաձայն 56.10 սինդամ, նրա համար արմատ կլինի նաև $\bar{\alpha}$ -ը: Հետևապես՝

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})g(x) :$$

Բայց

$$(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha} :$$

Այս հավասարության ուղ ժուում իրական գործակիցներով բաժանողում է, քանի որ $\alpha + \bar{\alpha}$ և $\alpha\bar{\alpha}$ րվերը իրական են: Հետևապես՝ $g(x)$ -ը ևս իրական գործակիցներով բաժանողում է: Եվ քանի որ $f(x)$ -ը չբերվող է $\mathbb{R}$ -ի նկատմամբ, սակայն $g(x) \in \mathbb{R}$ և $f(x)$ -ը երկրորդ աստիճանի է: $\square$

Աստղացվում սկնքումից աստղացում են մի շարք հետևանքներ:

ՊՆԴՈՒՄ 56.11. *Իրական գործակիցներով յուրաքանչյուր բաժանողում ունի զույգ րվի ոչ իրական արմատներ:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 56.12. *Իրական գործակիցներով յուրաքանչյուր աստիճանի յուրաքանչյուր բաժանողում միադժերսրեն ներկայացվում է իրական րվի և ուռուչին կամ երկրորդ աստիճանի չբերվող բաժանողումների արտադրյալի տեսքով:*

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 56.13. Յայց տվեք, որ իրական գործակիցներով երկրորդ աստիճանի $f(x)$ բաժանողումը չերվող է իրական րվերի դուշտի նկատմամբ այն և միայն այն դեպքում, երե կարելի է գտնել այնպիսի a և գրոյից սարքեր b իրական րվեր, որ $f(x)$ -ը աստղացվում է $(x - a)^2 + b$ բաժանողումի հետ:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 56.14. Ապացուցեք, որ $x^{3m} + x^{3n} + x^{3p}$ բաժանողումը առանց մնացորդի բաժանվում է $x^2 + x + 1$ բաժանողումի վրա:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 56.15. Դիցուք իրական գործակիցներով f բաժանումնի ավագ և տգուտ անկումներն ունեն սարքեր նշումներ: Ապացուցեք, որ այդ դեպքում f բաժանումն ունի իրական արմատ:

57. ՑԱԾՐ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

57.1. *Երկրորդ աստիճանի հավասարումների լուծումը:* Հանքուհաշվի դպրոցական դուրերացից հայտնի է իրական գործակիցներով բաժանողությի նա-վասարումների լուծումը իրական րվերի դուշտում: Երե ունենք

$$ax^2 + bx + c = 0$$

քառակուսային հավասարումը, ուստի այն լուծվում է հավասարման ձախ ժախջ լրիվ քառակուսու ուղղանկյունով: Ստացվում է դարձյալուն դարձյալից հայտնի բանաձևը:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} :$$

Այստեղ երեւոյրն աւանտաւորութիւնը կամ աւարբերիչը գրայից մեծ է կամ հավասար, ուստի աւելի քառակուսային հավասարումը ունի իրական ուրմաներ: Իսկ երեւոյրն աւարբերիչը յայտնական է, ուստի հավասարումը նորից ունի երկու ուրմաներ, որոնք այս դեպքում ուրդեն իրական չեն, բայց կոմպլեքս են:

Երեւոյրն աւարբում հավասարման գործակիցները լինեն կոմպլեքս կոմպլեքս թվեր, ապա նայն կերպ վալվիկով՝ մենք կաւանանք ուղղալիս հավասարման ուրմաների բանաձևը: Ստացվում ուղղութիւնը կարելի է աւարբիկ եւանայալ հասկալթյան մեջ:

ՊԵՐՈՒՄ 57.1. Կոմպլեքս գործակիցներով

$$ax^2 + bx + c = 0$$

քառակուսային հավասարման ուրմաները սլաշվում են

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

բանաձևով: Ընդ որում, երեւոյրն հավասարման աւարբերիչը լինի գրո, ուստի այն կոմեւան մեկ կոմպլեքս ուրմաւ: Մնացած բոլոր դեպքերում հավասարում ունի երկու ուրմաւ:

Աւարցոյց. Աւարցոյցում կաւարբեր ինքնաւորայն: □

57.2. Երրորդ աւարիճումնի հավասարումների լուծումը: Կոմպլեքս թվերի դաշտի վրա աւարում երրորդ աւարիճումնի հավասարման ընդհանուր աւարն է

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

որտեղ a -ն՝ գրոյից աւարեր, իսկ b -ն, c -ն, d -ն՝ կոմպլեքս կոմպլեքս թվեր են: Բաժանելով այս հավասարման երկու մասերը a թվի վրա, մենք կաւանանք նրան համարձեւ մի հավասարում, որի մեջ աւար աւարում գործակիցը 1 է: Ուրեմն՝ հենց սկզբից, ուստից ընդհանուրայնում իստիաւելու, մենք կարող ենք դիտարկել աւար աւարում 1 գործակիցով հավասարում՝

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 :$$

Պարզվում է, աւարայն, որ կարելի է նորից, ուստից դիտարկումների ընդհանրայնում իստիաւելու, բաւարարել սկզբից աւար աւարում հավասարումով: Իսկաւելու, երեւոյրն ներմումներ y նոր վալվիկումնի՝ հեւանայալ կերպ.

$$y = x + \frac{a}{3},$$

ապա կոմեւանք՝

$$x^3 + ax^2 + bx + c = y^3 + py + q,$$

որտեղ $p := b - a^2/3$, $q := 2a^3/27 - ab/3 + c$: Հետևապես՝ երրորդ ստաիճանի կամայական հավասարում լուծելու համար մեզ մնում է լուծել միայն

$$x^3 + px + q = 0$$

տեսքի հավասարումները:

Այս հավասարման մեջ զրոյծյալ կաստրերն փոփոխականի փոխարինում: Նշանակենք՝

$$(82) \quad x = z - \frac{p}{3z} :$$

Կաստումներ՝

$$\left(z - \frac{p}{3z}\right)^3 + \left(pz - \frac{p^2}{3z}\right) + q = z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0 :$$

Այստեղից՝

$$(83) \quad z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0 :$$

Ստացումք քեպես 6-րդ ստաիճանի, բայց բառակուսայինի բերվող հավասարում: Եթե նշանակենք

$$r = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

ապու կանենանք՝

$$z^3 = -\frac{q}{2} + r \quad \text{կամ} \quad z^3 = -\frac{q}{2} - r :$$

Այստեղից կատցվեն z փոփոխականի համար վեց արժեքներ, որոնք բավարարում են (83) հավասարմանը.

$$z_1, z_2, z_3 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + r}, \quad z_4, z_5, z_6 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - r} :$$

Ահա z փոփոխականի այս արժեքները տեղադրելով (82) հավասարման մեջ՝ կատումներ x -ի սրունի արժեքները.

$$(84) \quad x_i = z_i - \frac{p}{3z_i}, \quad i = 1, \dots, 6 :$$

Հատկանայի է, որ ստացված այդ արժեքների մեջ տոնվածն էրեք զույգ պեսաք է համընկնի. չէ՞ որ երրորդ ստաիճանի հավասարումը երեքից ավելի արմատ ունենալ չի կարող: Յույց ստուք, որ

$$\{x_1, x_2, x_3\} = \{x_4, x_5, x_6\} :$$

Իսկապես, նկատի առնենալով $z_1^6 + qz_1^3 - p^3/27 = 0$ և $z_1^3 = -q/2 + r$ հավասարաբայությունները, i -ի 4, 5, 6 արժեքների համար կատումներ՝

$$z_i = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - r} = \sqrt[3]{-q - \left(-\frac{q}{2} + r\right)} = \sqrt[3]{-q - z_1^3} = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27z_1^3}} = -\frac{p}{3z_j},$$

որտեղ $j = 1, 2, 3$: Այսպիսով՝ $z_i z_j = -p/3$: Այստեղից կատանանք՝

$$x_i = z_i - \frac{p}{3z_i} = z_j - \frac{p}{3z_j} = x_j :$$

Հետևապես՝ z_i -ն, $i = 4, 5, 6$, հանգեցնում է արված հավասարման նույն լուծումներին, ինչ z_j -ն, $j = 1, 2, 3$:

Այժմ, հաշվի առնելով (81) հավասարոյությունը, կատանանք արված հավասարման լուծումները՝

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - p / \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

որտեղ խառնարդ սրմնաք երկու գծմարեկներում էլ միաժամանակ ընդունում է միևնույն արժեքը:

Եթե մենք օգտվեինք նաև խորանարդ սրմնաքների համար ստացված բոլոր վեց արժեքներից, ապա արված հավասարման սրմնաքների բանաձևերի համար կարելի է ստանալ տվելի արդք տեսք: Իսկապես, հաշվի առնելով, որ $z_i z_j = -p/3$, կատանանք՝

$$x_j = z_j - \frac{p}{3z_j} = z_j - \frac{pz_i}{3z_j z_i} = z_j + z_i :$$

Կամ՝

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} :$$

Ահա այս տեսքով էլ երկուդ տառիձանի հավասարումների լուծման բանաձևը հայտնի է դրանց հայտնագործող Կարդանոյի անունով: Սակայն, պետք է նկատի առնենալ, որ Կարդանոյի բանաձևում մասնակցող երկու խորանարդ սրմնաքների երեքական արժեքներից արված հավասարման երեք լուծումները ստանալու համար պետք է նկատի առնենալ նաև լրացուցիչ $z_i z_j = -p/3$ պայմանը:

57.3. Չորրորդ աստիճանի հավասարումների լուծումը: Կոմպլեքս քվեյի դաշտի վրա արված չորրորդ աստիճանի հավասարման լուծման համար նույնպես, ստանց ընդհանրադրյալներ խախտելու, կարելի է դիտարկել միայն

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

տեսքի հավասարումները:

Պարզվում է սակայն, որ այս հավասարումն, իր հերթին, կարելի է փափոխակազմի փոխարինման միջոցով հանգեցնել տվելի պարզ տեսք ունեցող հավասարման: Իսկապես, ներմուծենք y նոր փոփոխականը հետևյալ տեսքով՝

$$y = x + \frac{a}{4} :$$

Այդ դեպքում կունենանք՝

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = y^4 + py^2 + qy + r,$$

որտեղ p -ն, q -ն և r -ը կոմպլեքս թվեր են: Սա նշանակում է, որ չորրորդ տասիճանի կոմպլեքս կոմպլեքսում լուծելու համար բավական է լուծել միայն

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

տեսքի հավասարումը:

Դիտարկենք հետևյալ հավասարությունը.

$$x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + r)^2 - ((2r - a)x^2 - bx + (r^2 - c)) :$$

Ընտրենք r սպորմենտի սթթերն ունայն, որ վերջին հավասարություն ուղ մուսի երկրորդ գումարելու՝ $(2r - a)x^2 - bx + (r^2 - c)$ բոտոկոտային ետոնդումի ստարերիւնը լինի գրո: Այսինքն՝

$$b^2 - 4(2r - a)(r^2 - r) = 0 :$$

Ստացվել է r -ի նկատմամբ երրորդ տասիճանի հավասարում, որը մենք կարող ենք լուծել և, ուրեմն, նշված բնադարյունը միշտ հնարավոր է կատարել:

Նման բնարոյքան դեպքում, ուսկայն, $(2r - a)x^2 - bx + (r^2 - c)$ ետոնդումը կլուտոն լրիվ բոտոկոտի, ուսինքն՝ ինչ-որ $px + q$ երկտոնդումի բոտոկոտի: Հետևապես՝ տրված հավասարումը համարթեր կլինի հետևյալին՝

$$(x^2 + r)^2 - (px + q)^2 = 0 :$$

Այս հավասարումն, իր եկրթին, համարթեր է հավասարումների հետևյալ համալումբին.

$$x^2 - px + (r + q) = 0 \text{ կամ } x^2 - px + (r - q) = 0:$$

Իսկ ույս վերջին հավասարումների լուծումը ոտոնճնակի դժվարություն չի ներկայացնում:

58. ԲԱԶՄԱՆԴԱՄԻ ԻՐԱԿԱՆ ԱՐՄԱՏՆԵՐԻ ԹԻՎԸ

58.1. Բազմանդամների Շատրմի համակարգը: Իրական գործակիցներով բազմանդամի բոլոր կամ տրված հասվածում ընկած իրական սորձառների թիվը որոշելու լոնդիրը կոտվում է բազմանդամի Շատրմի համակարգի հոսկուցություն հետ: Այստեղ ներադրվում է, որ բազմանդամը բազմապատիկ սորձառներ չունի: Բազմապատիկ սորձառների համար համապատասխան լոնդիրը կոտելի է լուծել՝ նախորդա այն բաժանելով իր և իր տմանցյալի տմանումն ընդհանուր բաժանալորի վրո:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 58.1. Իրական գործակիցներով բազմանդամների

$$(85) \quad f_0(x) = f(x), \quad f_1(x) = f'(x), \quad f_2(x), \dots, \quad f_k(x)$$

հույորդականությունը կոչվում է $f(x)$ բազմանդամի Շատրմի հոմակարգ, եթե այն ուրշվում է հետևյալ հավասարություններով.

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(x)q_1(x) + f_2(x), \\ f'(x) &= f_2(x)q_2(x) + f_3(x), \\ f_2(x) &= f_3(x)q_3(x) + f_4(x), \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$f_{k-2}(x) = f_{k-1}(x)q_{k-1}(x) - f_k(x),$$

$$f_{k-1}(x) = f_k(x)q_k(x),$$

սրտեղ յուրաքանչյուր հավասարություն ստացվում է (85) հույսդրականության սրել տնդումը նրա հույսդրի վրա մնացորդով բաժանումով, իսկ մնացորդը գրվում է հասարակ ճշանով:

Բազմանդամի Շատուրմի համակարգն ունի մի շարք կայուն հասակություններ:

ՊՆԴՈՒՄ 58.2. *Իրական գործակիցներով և բազմանդամի իրական սրմուսներ չունեցող $f(x)$ բազմանդամի Շատուրմի (85) համակարգի մեջ.*

ա. հարևան տնդումները չունեն ընդհանուր իրական սրմուս,

բ. վերջին $f_k(x)$ տնդումը չունի իրական սրմուս,

գ. երև $f_j(\alpha) = 0$, ապա $f_{j-1}(\alpha)$ և $f_{j+1}(\alpha)$ թվերն ունեն սուրբեր ճշաններ, որտեղ $j = 1, 2, \dots, k-1$:

Ապացույց. ա. Երև (85) համակարգի երկու հարևան $f_i(x)$ և $f_{i+1}(x)$ տնդումներ ունենում ընդհանուր սրմուս, ապա ընդհանուր տնդումներ կունենան նաև այդ տնդումներից մոխտրդող բոլոր տնդումները. այդ թվում $f(x)$ -ը և $f'(x)$ -ը, ինչը տնենում է, բանի որ ըստ պոյմանի, $f(x)$ -ը բազմանդամիկ տրմուսներ չունի:

բ. Երև $f_k(x)$ -ը ունենա սրմուս, ապա սրմուս կունենա նաև $f_{k-1}(x)$ -ը: Մնում է կիրտուել ա դեսլլը:

գ. Դիցուք $f_i(\alpha) = 0$: Այդ դեսլլքում $f_{i-1}(\alpha) = f_i(\alpha)q_i(\alpha) = f_{i+1}(\alpha)$ հավասարությունից կստանանք $f_{i-1}(\alpha) = f_{i+1}(\alpha)$: Մնում է նկատի ունենալ ա-ն: $\square$

Օրինակ, $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ բազմանդամի համար ունենք.

$$f_1(x) = f'(x) = 3x^2 - 4x + 4 :$$

Այնուհետև,

$$f(x) = f'(x)\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\right) - \left(-\frac{16}{9}x + \frac{1}{9}\right) :$$

Այսինքն՝

$$f_2(x) = -\frac{16}{9}x + \frac{1}{9} :$$

Այնուհետև՝

$$3x^2 - 4x + 4 = \left(-\frac{16}{9}x + \frac{1}{9}\right)\left(-\frac{27}{16}x - \frac{117}{256}\right) - \left(\frac{195}{256}\right) :$$

Այսինքն՝

$$f_3(x) = -\frac{195}{256} :$$

Այսպիսով՝ $x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ բազմանդամի Շատուրմի համակարգն է՝

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 3, 3x^2 - 4x + 4, -\frac{16}{9}x + \frac{1}{9}, -\frac{195}{256} :$$

58.2. Հույորդականության նշանավորությունների բիվլը: Վերցնենք իրական բիվլի որևէ հույորդականություն՝

$$(86) \quad 2, -3, -1, -2, 3, -3, 6, 7, -2, -11, 18 :$$

Այս հույորդականություն մեջ առաջին և երկրորդ անդամները ունեն ստորեր նշաններ: Մեր կասենք, որ նրանց միջև *կա նշանափոխություն*: Իսկ նրա երկրորդ և երրորդ անդամներն ունեն միևնույն նշանը. նրանց միջև *նշանափոխություն չկա*:

ՄԱՀԱՆՈՒՄ 58.3. Եթե հույորդականություն երկու հարևան անդամները ունեն ստորեր նշաններ, ապա նրանց միջև *կա նշանափոխություն*, իսկ եթե նրանք ունեն նույն նշանը, ապա *նշանափոխություն չկա*:

Օրինակ, (86) հույորդականություն վերջին երկու անդամների միջև կա նշանափոխություն, իսկ նախափոխին երկու անդամների միջև նշանափոխություն չկա:

ՄԱՀԱՆՈՒՄ 58.4. ա. Զրոյական անդամ չսլարտունակող բվային հույորդականության *նշանափոխությունների բիվլ* է կոչվում նրա սլայվայի հարևան անդամներից կազմված գույզերի բիվլը, որոնց միջև կա նշանափոխություն:

բ. Զրոյական անդամ սլարտունակող բվային հույորդականություն *նշանափոխությունների բիվլ* է կոչվում նրա գրոյական անդամների ջնջումից հետո ստացված հույորդականություն նշանափոխությունների բիվլը:

Օրինակներ:

ա. (86) հույորդականություն նշանափոխությունների բիվր 6 է:

բ. 1, 2, 3 հույորդականություն նշանափոխությունների բիվր 0 է:

գ. 1, -2, 3 հույորդականություն նշանափոխությունների բիվր 2 է:

դ. Զրոյական անդամ սլարտունակող 3, 0, -1, 0, -2 հույորդականություն նշանափոխությունների բիվր որոշվում է 3, -1, -2 հույորդականություն նշանափոխությունների բիվլ. այն հավասար է 1-ի:

ե. Զրոյական անդամ սլարտունակող 1, -2, 0, 3, 0 հույորդականություն նշանափոխությունների բիվր 2 է, բունի որ նրանից ստացվում է գրոյական անդամ չսլարտունակող 1, -2, 3 հույորդականությունը, որի նշանափոխությունների բիվր 2 է:

Վերջում նշենք, որ եթե ունենք բազմանդամների $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ հույորդականությունը, ապա կամայական c իրական բվի համար ստանում ենք

$$f_1(c), f_2(c), \dots, f_k(c)$$

բվային հույորդականությունը և կարող ենք պիտարկել ստացված այդ բվային հույորդականություն նշանափոխությունների բիվր: Մտանալորապես $f(x)$ բազմանդամի և c իրական բվի համար ընդունվում է $W(c)$ -ով նշանակել

$$f(c), f'(c), f_2(c), \dots, f_k(c)$$

հույորդականություն նշանափոխությունների բիվր, որտեղ

$$f(x), f'(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$$

հույորդականությունը $f(x)$ բազմանդամի Շաուրմի համակարգն է:

58.3. Հատորմի րեորևմը: Այժմ մենք կտեսնենք, թե ինչ կարևոր կիրառություն է գտնում նշանավախությունների թվի հասկացությունը բազմանդամի իրական սորմատների թվի որոշելիս:

ՊՆԴՈՒՄ 58.5. (Հատորմի րեորևմը): Դիցուք՝ a և b ($a < b$) իրական թվերը իրական գործակիցներով և բազմադասարան սորմատներ չունեցող $f(x)$ բազմանդամի սորմատները չեն: Այդ դեպքում (a, b) միջակայքում $f(x)$ բազմանդամի իրական սորմատների թիվն է՝

$$W(a) - W(b) :$$

Ապացույց. Տրոհենք (a, b) միջակայքը ենթամիջակայքերի՝ որպես նրանց ծայրակետեր բնդունելով (a, b) միջակայքում $f(x)$ բազմանդամի Հատորմի (85) համակարգի բազմանդամների իրական սորմատները: Ուսումնասիրենք $W(c)$ թվի փոփոխությունը, երբ c -ն փոփոխվում է նշված ենթամիջակայքերում: Այդ ենթամիջակայքերից յուրաքանչյուրի ներսում (85) համակարգի սանդակներ ունեն հաստատուն նշաններ: Հետևապես՝ երբ c -ն փոփոխվում է պրանցում, $W(c)$ թիվը չի փոփոխվում:

Դիցուք՝ α -ն և β -ն հարևան ենթամիջակայքերի ներքին կետեր են ($\alpha < \beta$), որոնք բաժանվում են γ կետով, որը $f_i(x)$ բազմանդամի սորմատն է և $i > 0$: Այդ դեպքում $f_{i-1}(\gamma)$ և $f_{i+1}(\gamma)$ թվերն ունեն հակադիր նշաններ: Հակադիր նշաններ կունենան նաև $f_{i-1}(\alpha)$ և $f_{i+1}(\alpha)$ թվերը, ինչպես նաև $f_{i-1}(\beta)$ և $f_{i+1}(\beta)$ թվերը: Դրանից հետևում է, որ

$$f_{i-1}(\alpha), f_i(\alpha), f_{i+1}(\alpha) \text{ և } f_{i-1}(\beta), f_i(\beta), f_{i+1}(\beta)$$

հաջորդականություններն ունեն մեկական նշանավախություն:

Հետևապես՝ երբ c -ն անցնում է միջանկյալ հաջորդականության սորմատի վրայով, $W(c)$ թիվը դարձյալ չի փոփոխվում:

Լինում է պատահել այն դեպքը, երբ c -ն անցնում է $f(x)$ բազմանդամի սորմատի վրայով: Դիցուք՝ $f(\gamma) = 0$: Այդ դեպքում γ -ն $f'(x)$ բազմանդամի սորմատը չէ, և $f'(\alpha)$ -ն և $f'(\beta)$ -ն ունեն նույն նշանը: Դիտարկենք երկու դեպք.

ա. $f'(\alpha) > 0$: Այդ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան սնում է: Ուրեմն՝ $f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$: Այսինքն՝ $f(\alpha), f'(\alpha)$ հաջորդականության նշանավախությունների թիվը 1 է, իսկ $f(\beta), f'(\beta)$ հաջորդականության նշանավախությունների թիվը 0:

բ. $f'(\alpha) < 0$: Այդ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան նվազում է: Ուրեմն՝ $f(\alpha) > 0$, $f(\beta) < 0$: Այսինքն՝ դարձյալ $f(\alpha), f'(\alpha)$ հաջորդականության նշանավախությունների թիվը 1 է, իսկ $f(\beta), f'(\beta)$ հաջորդականության նշանավախությունների թիվը 0:

Այսպիսով՝ երբ c -ն անցնում է $f(x)$ բազմանդամի սորմատի վրայով, $W(c)$ թիվը մեկով սրվաւում է: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 58.6. Էստե՞ն իրական սորմատ ունի իրական գործակիցներով $x^n + px + q$ բազմանդամը:

59. ՌԱՅԻՈՆԱԼ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ

59.1. *Ամբողջ գործակիցներով բազմանդամի ամբողջ և ռացիոնալ արմատները:* Ամբողջ գործակիցներով բազմանդամների ամբողջ և ռացիոնալ արմատների որոնումը առանձնառիտաբար հետաքրքրության է ներկայացնում: Նախ դիտարկենք ամբողջ արմատների դեպքը:

ՊԼՂՈՒՄ 59.1. *Ամբողջ գործակիցներով բազմանդամի ամբողջ արմատներ կոչվող են լինել միայն նրա ազատ անդամի բաժանորարները:*

Ապացույց. Դիցուք՝ անենք ամբողջ գործակիցներով

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

բազմանդամը, և α ամբողջ թիվը նրա արմատն է՝ $f(\alpha) = 0$: Այդ դեպքում՝

$$-a_0 = \alpha(a_1 + \dots + a_n\alpha^{n-1}),$$

որտեղից հետևում է, որ α -ն a_0 -ի բաժանորարն է: □

Օրինակներ:

ա. $2x^3 + 3x^2 - 5 = 0$ հավասարման ազատ անդամը 5-ն է, որի 1 սրտաշղիշը ապլյալ հավասարման բաժան է:

բ. $x^4 + 6x^2 - 1 = 0$ հավասարման ամբողջ արմատներ չունի, քանի որ նրա ազատ անդամի բաժանորարներից՝ 1, -1, 2, -2, 4, -4 թվերից և ոչ մեկը նրա համար արմատ չէ:

ՊԼՂՈՒՄ 59.2. *Դիցուք՝ k -ն և l -ը վախճարյալաբար պարզ ամբողջ թվեր են: Եթե k/l կատարյալ ամբողջ գործակիցներով $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ բազմանդամի արմատն է, ապա a_0 -ն բաժանվում է k -ի վրա, իսկ a_n -ը բաժանվում է l -ի վրա:*

Ապացույց. Դիցուք՝

$$a_0 + a_1(k/l) + \dots + a_n(k/l)^n = 0 :$$

Այդ դեպքում

$$a_0l^n + a_1kl^{n-1} + \dots + a_{n-1}k^{n-1}l + a_nk^n = 0 :$$

Այստեղից քանի որ

$$l(a_0l^{n-1} + a_1kl^{n-2} + \dots + a_{n-1}k^{n-1}) = -a_nk^n,$$

և $(l, k) = 1$, ապա $l|a_k$:

Նույն կերպ ցույց կաանք, որ $k|a_0$: □

ՊԼՂՈՒՄ 59.3. *Եթե ամբողջ գործակիցներով բազմանդամը, որի ազատ անդամի գործակիցը 1 է, ունի ռացիոնալ արմատ, ապա այդ արմատը ամբողջ թիվ է:*

Ապացույց. Ապացուցումը հետևում է նույնպիսի քերականից: □

59.2. Ռացիոնալ գործակիցներով չվերլուծվող բազմանդամներ: Ամբողջ գործակիցներով բազմանդամի վերլուծության կարևոր խնդիրներից մեկը հետևյալն է. տպլոմ³ը նման բազմանդամը կարող է լինել չվերլուծվող ամբողջ թվերի օդակի նկատմամբ, բայց վերլուծվել տրասպրիչների մացիոնալ թվերի դաշտի նկատմամբ: Այս խնդիրը մենք լուծել ենք կամայական ամբողջությամբ աիբության և նրա բանադրների դաշտի վրա ալգամ բազմանդամների վոլիմարաբերաթյունները բննարկելիս: Առանմոքողալես, սաուգվել է հետևյալ տպլոմերը:

ՊՆԴՈՒՄ 59.4. *Եթե ամբողջ գործակիցներով բազմանդամը չվերլուծվող է ամբողջ թվերի օդակի նկատմամբ, ապա այն չվերլուծվող կլինի նաև մացիոնալ թվերի դաշտի նկատմամբ:*

Ամբողջ գործակիցներով բազմանդամների վերլուծության հետ կապված կարևոր խնդիրներից է նաև չվերլուծվող բազմանդամի առաիժամնի խնդիրը: Աենք սրդեն գիտենք, որ կամպլեքս գործակիցներով բազմանդամների մեչ չվերլուծվող են միայն սուուչին առաիժամնի բազմանդամները, իսկ իրական գործակիցներով բազմանդամների մեչ՝ սուուչին առաիժամնի բոլոր և երկրորդ առաիժամնի սրդ բազմանդամներ: Իսկ ինչպիսի՞ն կարող է լինել ամբողջ գործակիցներով չվերլուծվող բազմանդամի առաիժամը: Հետևյալ հայտամիշը սարտիչ սրասոսիսում է տալիս այդ հարցին:

ՊՆԴՈՒՄ 59.5. *(Էյգենշտեյնի հայտամիշը): Դիցուք՝ տնենք ամբողջ գործակիցներով*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

բազմանդամը և ք սրարդ թիվը, ընդ սրամ, $f(x)$ բազմանդամի.

ա. տիող տնդամի a_n , գործակիցը չի բաժանվում ք թվի վրա,

բ. մնացած բոլոր գործակիցները բաժանվում են ք-ի վրա,

գ. a_0 ազատ տնդամը չի բաժանվում $\mathbb{P}^2$ -ու վրա:

Այդ դեպքում սրվում $f(x)$ բազմանդամը մացիոնալ թվերի դաշտի նկատմամբ չվերլուծվող է:

Էյդպոյց. Կաուարենք հակասող ենթադրություն. դիցուք՝ $f(x)$ բազմանդամը վերլուծվող է և

$$f(x) = (c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k)(d_0 + d_1x + \dots + d_lx^l),$$

որտեղ $k, l \geq 1$: Համաժայն 59.4 սնդման, կարելի է ենթադրել, որ ուչ մասի սրասադրիչների գործակիցները ամբողջ թվեր են: Ունենք՝

$$a_0 = c_0 \cdot d_0,$$

$$a_1 = c_0 \cdot d_1 + c_1 \cdot d_0,$$

$$a_2 = c_0 \cdot d_2 + c_1 \cdot d_1 + c_2 \cdot d_0,$$

$$a_n = c_k \cdot d_l :$$

Այս համակարգի սուուչին հավասարությանից հետևում է, որ c_0 և d_0 սրասադրիչների սրասադրյալը սխար է բաժանվի ք սրարդ թվի վրա: Եվ բանի որ a_0 -ն չի բաժանվում

p^2 -ու վրա, ապա p սրբագ ստորի վրա կրժմանվի c_0 և d_0 սաքրերից միայն մեկը: Դիցույ՝ c_0 -ն է բաժանվում p -ի վրա, իսկ d_0 -ն՝ չի բաժանվում:

Ջանի որ a_n -ը չի բաժանվում p -ի, ապա c_k -ն նույնպես չի բաժանվի p -ի: Դիցույ՝ c_s -ը $c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k$ բազմանդամի սառաջին գործակիցն է, որը չի բաժանվում p -ի, $s < k$: Ջանի որ

$$a_s = c_s + d_0 + (c_{s-1} + d_1 + \dots + c_0 + d_s),$$

ապա այս հավասարության ձախ մասը և վաակագծում աճիավված գումարեին բաժանվում են p -ի: Հետևապես՝ p -ի կրժմանվի նաև $c_s + d_0$ սրաադրյալն ու նրա d_0 սրաադրիչը: Սառագվեց հակասադրյուն: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 59.6. Կաճադրյուն n բնական թվի հաճադր գադրյուն աճի բազմանդամների $\mathbb{Z}[x]$ օդակաճ չվերաճիող n սաաիճունի բազմանդամ:

Ադրադրյ. Վերցնենք կաճադրյուն n բնական թիվը և n սաաիճունի $x^n + 2$ բազմանդամը: Հաճաճայն Էյզենշտեյնի հադաունիչի՝ այդ բազմանդամը չվերաճիող է: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 59.7. Ասուգուցեք, որ կաճադրյուն p սրբագ թվի հաճադր

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + \dots + x + 1$$

բազմանդամը չերվող է $\mathbb{Q}$ -ի նկաճամբ :

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 59.8. Ասուգուցեք, որ սմբող գործակիցներով $f(x)$ բազմանդամը սմբող սրճաուներ չունի, եթե $f(0)f(1)$ թիվը կենա է:

ԴԱՇՏԵՐԻ ԸՆԴԱՅՆՈՒՄՆԵՐԸ

60. ԴԱՇՏԵՐԻ ՊԱՐՁԱԳՈՒՅՆ ԸՆԴԱՅՆՈՒՄՆԵՐԸ

60.1. *Դաշտի պարզագույն ընդլայնումները:* Հիշենք, որ եթե F դաշտը L դաշտի ենթադաշտն է, ապա L -ը կոչվում է F -ի ընդլայնում: Այստեղ մենք կդիտարկենք դաշտերի որոշ կարևոր ընդլայնումներ:

Պիցյուր՝ L դաշտը F դաշտի ընդլայնումն է, եթե $a_1, \dots, a_n$ ստորերը պատկանում են L -ին: L դաշտի F -ը պարունակող ենթադաշտերի մեջ կան նաև այդ $a_1, \dots, a_n$ ստորերը պարունակողներ, օրինակ, ինքը L -ը: Պարզ է նաև, որ L -ի F -ը ե $a_1, \dots, a_n$ ստորերը պարունակող ենթադաշտերի հաաումը նրա ենթադաշտ է և պարունակում է նաև F -ը և այդ ստորերը: Նշանակենք $F(a_1, \dots, a_n)$ -ով L -ի $a_1, \dots, a_n$ ստորերը և F -ը պարունակող բոլոր ենթադաշտերի հաաումը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 60.1. $F(a_1, \dots, a_n)$ -ը կոչվում է F -ով և $a_1, \dots, a_n$ ստորերքով առաջացած կամ ծնված ընդլայնում:

Օրինակ, $\mathbb{C}$ -ն $\mathbb{R}$ -ով և i ստորով առաջացած ընդլայնում է:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 60.2. Ապացուցեք, որ

$$F(a_1, \dots, a_n) = F$$

այն և միայն այն դեպքում, եթե $a_1, \dots, a_n \in F$:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 60.3. Ապացուցեք, որ եթե L դաշտը F -ի ընդլայնումն է, և $a_1, \dots, a_n \in L$, ապա $F(a_1, \dots, a_n)$ -ը L -ի $a_1, \dots, a_n$ ստորերը և F -ը պարունակող նվազագույն ենթադաշտն է:

Հիշենք, որ եթե L դաշտը F -ի ընդլայնումն է, ապա նրա a ստորը կոչվում է *համընդհանրական F -ի նկատմամբ*, եթե այն F -ից վերցնում գործակիցներով սրեկ ոչ գրայական բազմանդամի սրմաան է: R -ի նկատմամբ համընդհանրական է $\mathbb{C}$ -ի i ստորը, այն $x^2 + 1$ բազմանդամի սրմաան է: ϵ թվի համընդհանրական չէ $\mathbb{Q}$ -ի նկատմամբ: Հիշենք նաև, որ ոչ համընդհանրական ստորերը ունենեղ ենք նաև *սրմանցիղենա*:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 60.4. F դաշտի L ընդլայնումը կոչվում է F -ի *համընդհանրական առաջացած ընդլայնում*, եթե գոյություն ունեն L -ի վերջավոր թվով այնախիս

$a_1, \dots, a_n$ ստորեր, որոնք համընդհանրապես են F -ի նկատմամբ և

$$L = F(a_1, \dots, a_n) :$$

Օրինակ, $\mathbb{C}$ -ն $\mathbb{R}$ -ի համընդհանրապես ստացուցած ընդլայնումն է:

Համընդհանրապես ստացուցած ընդլայնման մասնավոր առևտու է սլորդ հանրա-
հալվական ընդլայնումը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 60.5. F դաշտի L ընդլայնումը կոչվում է նրա *սլորդ համընդհանրա-
վական ընդլայնում*, եթե գոյություն ունի L -ի a սլորդ, որը համընդհանրապես է F -ի
նկատմամբ և $L = F(a)$:

Օրինակ, $\mathbb{C}$ -ն $\mathbb{R}$ -ի սլորդ համընդհանրապես ընդլայնումն է, քանի որ $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$:
Դիտարկենք ընդլայնումների հաջորդ առևտու: Մենք գիտենք, որ եթե L դաշ-
տը F -ի ընդլայնումն է, ապա L -ը կլինի նաև F դաշտի վրա սրված վեկտորական
ստորամասքում:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 60.6. F դաշտի L ընդլայնումը կոչվում է նրա *վերջավոր ընդլայ-
նում*, եթե L -ի՝ որպես F դաշտի վրա սրված վեկտորական ստորամասքում, մեծի
վերջավոր չափադասակարգում:

Օրինակներ և ժխտարկումներ:

ա. Կոմպլեքս թվերի $\mathbb{C}$ դաշտը իրական թվերի $\mathbb{R}$ դաշտի վերջավոր ընդլայնումն
է:

բ. $\mathbb{R}$ -ը ռացիոնալ թվերի դաշտի վերջավոր ընդլայնումը չէ:

գ. Գաուսյան ռացիոնալ թվերի $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ դաշտը $\mathbb{Q}$ -ի վերջավոր ընդ-
լայնումն է:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 60.7. Եթե L -ը F դաշտի վերջավոր ընդլայնումն է, ապա L վեկ-
տորական ստորամասքում բազիսը կոչվում է նաև L -ի *բազիս* F -ի *նկատմամբ*: L -ի
չափադասակարգումը կոչվում է նաև L -ի *ստիճան* F -ի *նկատմամբ* և նշանակվում
է $[L : F]$:

Օրինակ 1, i համակարգը $\mathbb{C}$ -ի բազիս է $\mathbb{R}$ -ի նկատմամբ և $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 60.8. Ասլուցուցեք, որ $[L : F] = 1$ այն և միայն այն դեպքում,
եթե $L = F$:

Դիտարկենք ընդլայնման ևս մի առևտու:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 60.9. F դաշտի L ընդլայնումը կոչվում է նրա *համընդհանրապես
ընդլայնում*, եթե L -ի յուրաքանչյուր ստորը համընդհանրապես է F -ի նկատմամբ:

Օրինակ, կոմպլեքս թվերի $\mathbb{C}$ դաշտը իրական թվերի $\mathbb{R}$ դաշտի հանրահալվա-
կան ընդլայնումն է:

60.2. *Դաշտի սյուրգ հանրահաշիվական ընդլայնումը:* Այժմ ներածենք մի գաղափար, որը հնարավորություն կտա նկատագրելու դաշտի սյուրգ հանրահաշիվական ընդլայնումները:

Նրե α -ն F դաշտի նկատմամբ հանրահաշիվական աստիճան է, ապա գոյություն ունի F -ի վրա արված այնպիսի բազմանդամ, որի արմատն է α -ն:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 60.10. F -ի վրա արված ամենացածր ուստիճանի բազմանդամը, որի արմատն է F -ի նկատմամբ հանրահաշիվական α աստիճանը և որի ածականը ամբողջական է, կոչվում է α -ի *միմիմալ բազմանդամ*: α -ի միմիմալ բազմանդամի ուստիճանը կոչվում է α *ստիճանի ուստիճան* F *դաշտի նկատմամբ*:

ՊՆԴՈՒՄ 60.11. *Կոմպակտ F դաշտի նկատմամբ հանրահաշիվական աստիճանի միմիմալ բազմանդամը այդ դաշտի վրա սպիտակ չվերլուծվող բազմանդամ է:*

Լեպոցայց. Իսկապես, դիցուք՝ α աստիճանի հանրահաշիվական է F դաշտի նկատմամբ, և $f(x) \in F[x]$ բազմանդամի համար $f(\alpha) = 0$: Նրե $f(x)$ -ը վերլուծվող է, ապա $F[x]$ -ից վերցրած և հաստատունից աստիճանի $g(x)$ և $h(x)$ բազմանդամների համար $f(x) = g(x)h(x)$ և $f(\alpha) = g(\alpha)h(\alpha) = 0$: Հետևապես՝ $g(\alpha) = 0$ կամ $h(\alpha) = 0$: Իսկ դա նշանակում է, որ α -ն $f(x)$ -ի ուստիճանից ածականի ցածր ուստիճանի բազմանդամի արմատ է: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 60.12. *Նրե $f(x)$ -ը F դաշտի նկատմամբ հանրահաշիվական α աստիճանի միմիմալ բազմանդամն է, և $g(x) \in F[x]$ բազմանդամի համար $g(\alpha) = 0$, ապա $f(x)|g(x)$:*

Լեպոցայց. Քանի որ $g(x)$ և $f(x)$ բազմանդամներն ռեզիդուումներն են, ապա նրանք վիդուումներն են սյուրգ չեն: Նվ բանի սր $f(x)$ -ը չվերլուծվող է, ապա այն $g(x)$ -ի բազմանդամն է: $\square$

Հետևյալ հատկությունը հնարավորություն է տալիս կատարելու դաշտի սյուրգ հանրահաշիվական ընդլայնումները:

ՊՆԴՈՒՄ 60.13. *Նրե F դաշտի L ընդլայնման α աստիճան F -ի նկատմամբ հանրահաշիվական է, ապա*

$$F(\alpha) = \{g(\alpha) | g(x) \in F[x]\} :$$

Լեպոցայց. Պարզ է, որ

$$\{g(\alpha) | g(x) \in F[x]\} \subseteq F(\alpha) :$$

Յուրաքանչյուր, որ

$$F(\alpha) \subseteq \{g(\alpha) | g(x) \in F[x]\} :$$

Քանի սր $F(\alpha)$ -ն F -ի α -ն ստիճանի միմիմալ ընդլայնումն է, ինչպես նաև

$$\alpha \in \{g(\alpha) | g(x) \in F[x]\} \text{ և } F \subseteq \{g(\alpha) | g(x) \in F[x]\},$$

ապա բավական է ցույց տալ, որ $\{g(\alpha) | g(x) \in F[x]\}$ -ը դաշտ է:

Լկնիսյալ չէ միայն այն, սր 0 -ից աստիճանի $g(\alpha)$ աստիճան ունի

$$\{g(\alpha) | g(x) \in F[x]\}$$

բազմության մեջ հավաքույթ: Այսպես, $f(x)$ -ը a -ի միևնույն բազմությունում է: Քանի որ $g(a) \neq 0$, ապա $g(x)$ -ը և $f(x)$ -ը փոխարկելի են: Հետևաբար գոյություն ունեն F -ի վրա որոշված այնպիսի $u(x)$ և $v(x)$ բազմանդամներ, որ

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1 :$$

Այսպիսով, քանի որ $f(a) \neq 0$, կատարենք $g(a)v(a) = 1$: Այսինքն՝ $v(a)$ -ն $g(a)$ -ի հակադարձն է և սրահանում է $\{g(a)|g(x) \in F[x]\}$ բազմությունը: Ուրեմն՝ $\{g(a)|g(x) \in F[x]\}$ -ը դաշտ է: $\square$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 60.14. Դիցուք՝ a -ն F -ի նկատմամբ հանրահաշվական տարր է: Այսպես, որ այդ դեպքում $F(a) = F[a]$:

Փորձենք այժմ ավելի ստույգացնել $F(a)$ դաշտի նկարագրությունը:

ԴՆԴՈՒՄ 60.15. Դիցուք՝ a -ն F -ի նկատմամբ հանրահաշվական տարր է, և n -րդ աստիճանը F -ի նկատմամբ ու է: Այդ դեպքում $1, a, \dots, a^{n-1}$ տարրերը կազմում են $F(a)$ դաշտի բազիս F -ի նկատմամբ: Մասնավորապես,

$$F(a) = \{a_0 + a_1 a + \dots + a_{n-1} a^{n-1} | a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in F\} :$$

Պնդումից հետևում է, որ $F(a)$ դաշտի տարրերը ստանալով համար տեղափոխելու և վերցնել բոլոր այն $g(x)$ բազմանդամները, որոնց աստիճանը փոքր է F -ի նկատմամբ a -ի աստիճանից, և նրանցում x -ի փոխարեն տեղադրել a :

Լիարժույթ. Վերցնենք $\{g(a)|g(x) \in F[x]\}$ դաշտի որևէ $g(a)$ տարրը, նրան համապատասխան $g(x)$ բազմանդամը, այն մնացորդով բաժանենք a -ի $f(x)$ միևնույն բազմանդամի վրա և ստացված աղյուսի մեջ x -ի փոխարեն տեղադրենք a : Կատարենք $g(a) = r(a)$, որտեղ $r(x)$ բազմանդամը ստացվում է որպես $g(x)$ -ը $f(x)$ -ի վրա բաժանումից ստացված մնացորդ:

Այսպիսով՝ մենք ստացուցեցինք $1, a, \dots, a^{n-1}$ համակարգի լիարժեքությունը:

Այսպես, $1, a, \dots, a^{n-1}$ համակարգի գծային անկախությունը: Դիցուք՝ F -ի ինչ-որ $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ տարրերի համար

$$a_0 + a_1 a + \dots + a_{n-1} a^{n-1} = 0 :$$

Սա նշանակում է, որ a տարրը n -ից ցածր աստիճանի հավասարման արմատ է, որը հնարավոր չէ: Հետևապես՝

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0 :$$

Այսինքն՝ $1, a, \dots, a^{n-1}$ համակարգը գծորեն անկախ է: $\square$

ԴՆԴՈՒՄ 60.16. Դիցուք՝ a -ն F -ի նկատմամբ հանրահաշվական տարր է, և n -րդ միևնույն բազմանդամը F -ի նկատմամբ $f(x)$ -ն է: Այդ դեպքում $F[x]/(f(x))$ ֆակտոր-օղակը դաշտ է և իզոմորֆ է $F(a)$ դաշտին:

Լիարժույթ. Այսպես, կատարենք ինքնաբերական:

$\square$

Եթե a -ն F -ի նկատմամբ հանքանախառնակում ստորը $\mathbb{L}$, ապա $F(a)$ դաշտը հանքանախառնակում $\mathbb{L}$ $F[a]$ անբաժանելիության տիրույթի հետ: Հետևապես՝ նրա յուրաքանչյուր $g(a)/h(a)$ ստորը կարող է գրվել նաև $\varphi(a)$ տեսքով, որտեղ $g(x)$ -ը, $h(x)$ -ը և $\varphi(x)$ -ը F -ի վրա արված բազմանդամներ են, և $h(a)$ -ն զրո չէ: Այսպիսով $g(a)/h(a)$ ստորը $\varphi(a)$ տեսքով ներկայացնելու ընթացքը կաշվում է $g(a)/h(a)$ կոտորակի ուղիղում խաղաղանկարչականից: Գործնականում $g(a)/h(a)$ կոտորակը խոսքի խոսքի միջոցով ուղիղում համար $u(x)$ և $v(x)$ բազմանդամներ, որոնց համար

$$u(x)g(x) + v(x)h(x) = 1 :$$

Սա հնարավոր է, քանի որ կախվել է ենթադրել, որ $g(x)$ և $h(x)$ բազմանդամները վախճանաբանական սկզբնական են: Այնուհետև, ստացված հավասարության մեջ x -ի վախճանական անդամներ են:

60.3. Դաշտի վերջավոր ընդլայնումները: Այժմ ուսումնասիրենք դաշտի վերջավոր ընդլայնումները: Նկատենք, որ նախորդ կետի վերջին պնդումից, մասնավորապես, ստացվում է հետևյալ արդյունքը:

ԴՆԴԴԴ 60.17. F դաշտի $F(a)$ ստորը հանքանախառնակում ընդլայնումը վերջավոր ընդլայնում է, որի $[F(a) : F]$ տասնիվանքը հավասար է F դաշտի նկատմամբ a ստորի տասնիվանքին:

Արդյունք. Արդյունքումը կատարել ինքնուրույն: □

ԴՆԴԴԴ 60.18. Հայտնաբերել վերջավոր ընդլայնում հանքանախառնակում ընդլայնում է:

Արդյունք. Իսկապես, եթե L -ը F դաշտի վերջավոր ընդլայնումն է, որի տասնիվանքը F -ի նկատմամբ n է, ապա L -ի կոմպոնենտն a ստորի համար $1, a, \dots, a^n$ ստորերը $n + 1$ հատ են և, ուրեմն, գծորեն կախյալ են: Այսինքն՝ F -ի ինչ-որ $a_0, a_1, \dots, a_n$ ստորերի համար, որոնք ոչ բոլորն են միաժամանակ զրո, կունենանք հետևյալ հավասարությունը՝

$$a_0 + a_1 a + \dots + a_n a^n = 0 :$$

Այսինքն՝ a -ն F -ի վրա արված

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

աչ գրառված բազմանդամի արմատն է և հետևապես՝ F -ի նկատմամբ հանքանախառնակում է: □

ՎԱՐԺԱԹՅՈՒՆ 60.19. Հայց սպեր, որ եթե L -ը F դաշտի վերջավոր ընդլայնումն է, ապա L -ի յուրաքանչյուր ստորի կարգը F -ի նկատմամբ չի գերազանցում սովորական ընդլայնման տասնիվանքը:

ԴՆԴԴԴ 60.20. Հայտնաբերել վերջավոր ընդլայնում հանքանախառնակում ուղիղում ընդլայնում է:

Այսպիսով, Իսկապես, դիցուք՝ L -ը F դաշտի վերջավոր ընդլայնումն է, $a_1, \dots, a_n$ համակարգը՝ նրա բազիսը: Այդ դեպքում համակոմպի L , որ

$$L = F(a_1, \dots, a_n) :$$

Արտադրանակ, նախորդ պնդման համաձայն, $a_1, \dots, a_n$ ատրրերը հանրահաշվական են F -ի նկատմամբ: Այսինքն՝ L -ը F -ի հանրահաշվաբան առաջացած ընդլայնումն է: $\square$

ՊՆԴՈՒՄ 60.21. *Եթե L դաշտը F -ի վերջավոր ընդլայնումն է, իսկ K -ն՝ L -ի, ապա K -ն նաև F -ի վերջավոր ընդլայնումն է և*

$$|K : F| = |K : L| \cdot |L : F| :$$

Այսպիսով, Դիցուք՝ $u_1, \dots, u_n$ համակարգը K -ի բազիսն է L -ի նկատմամբ, իսկ $v_1, \dots, v_m$ համակարգը L -ի բազիսն է F -ի նկատմամբ: Յույց առնք, որ m ատրրերից կազմված

$$u_i \cdot v_j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$$

համակարգը K -ի բազիս է F -ի նկատմամբ:

Իսկապես, K -ի կամայական w ատրր ներկայացվում է որպես $u_1, \dots, u_n$ համակարգի գծային կոմբինացիա՝ L -ից վերցրած գործակիցներով: Այդ գծային կոմբինացիայի առնուրդներն դնենք (*): Նրա գործակիցները՝ որպես L -ի ատրրեր, կներկայացվեն որպես $v_1, \dots, v_m$ համակարգի գծային կոմբինացիաներ՝ F -ից վերցրած գործակիցներով: Բոլոր այդ գործակիցները համար առաջվա սրժերները առնադրելով (*) գծային կոմբինացիայի մեջ՝ կառուցենք w ատրրի ներկայացումը որպես $u_i \cdot v_j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ համակարգի գծային կոմբինացիան՝ F -ից վերցրած գործակիցներով: Իսկ դա նշանակում է, որ նշված համակարգը լրիվ է K -ի մեջ՝ որպես F -ի վրա սրված վեկտորական առարածություն:

Յույց առնք, որ այդ համակարգը նաև գծորեն անկախ է: Իսկապես, դիցուք՝

$$a_{11}u_1v_1 + a_{12}u_2v_1 + \dots + a_{1n}u_nv_1 +$$

$$+ a_{m1}u_1v_m + a_{m2}u_2v_m + \dots + a_{mn}u_nv_m = 0 :$$

Այսառնելից կառուցանք՝

$$(a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n)v_1 +$$

$$+ (a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \dots + a_{mn}u_n)v_m = 0 :$$

Քանի որ $v_1, \dots, v_m$ համակարգը գծորեն անկախ է, ապա այստեղից կառուցանք՝

$$a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n = 0,$$

$$a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \dots + a_{mn}u_n = 0 :$$

Ժամի որ $u_1, \dots, u_n$ համակարգն է զծաբեն ունկալա, ապա հոժոտադոթյուն-
նեթի սյա համակարգից կսաոնանթ՝

$$a_{11} + \dots + a_{1n} = \dots = a_{m1} + \dots + a_{mn} = 0 :$$

Այսպիսով՝ իսկապես նշված համակարգը զծաբեն ունկալա է: □

Ապոցոցված սնդոմը հեշտոթյամթ կարելի է ընդհանրացնել նաև մի քանի
հաջորդական ընդլայնումների համար:

ՊՆԴՈՒՄ 60.22. *Եթև ունենթ վերջավոր ընդլայնումների*

$$F \quad L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_m$$

շղրան, ապա L_m -թ F -ի վերջավոր ընդլայնումն է և

$$|L_m : F| = |L_1 : L_0| \cdot |L_2 : L_1| \cdots |L_m : L_{m-1}| :$$

Ապոցոցյց. Ապոցոցամթ կատարվում է ինդուկցիայով՝ ըսա m -ի: □

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 60.23. Ապոցոցեր նավարդ սնդոմը:

60.4. *Դաշտի բարադրյալ հանրահաղվական ընդլայնումը:* Տրված դաշ-
տը հոթարդարար մի բանի ունգամ ընդլայնելով՝ կսաոնանթ ընդլայնման ևս մի
կարելոթ սեևակ:

ՍԱՀՄԱՐՈՒՄ 60.24. F դաշտի L ընդլայնումը կաղվում է նրա *բարադրյալ հան-
րահաղվական ընդլայնում*, եթև զոթոթյուն ունի L -ի՝ իրար մեջ ընդգրկված ենթա-
դաշտերի

$$(87) \quad F = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_s = L$$

այնպիսի շղրա, որի յուրաքանչյուր անդամ իր նախորդի սյարգ հանրահաղվական
ընդլայնումն է:

ՊՆԴՈՒՄ 60.25. *Դաշտի բարադրյալ հանրահաղվական ընդլայնումը նրա վեր-
ջավոր ընդլայնումն է:*

Ապոցոցյց. Իսկապես, համաձայն 60.17 սնդման, վերջավոր է ընդլայնումների
(87) շղրայի յուրաքանչյուր

$$K_i \subseteq K_{i+1}$$

համավումթ, $i = 0, 1, \dots, m-1$: Համաձայն 60.22 սնդման՝ վերջավոր կլինի նաև
 F դաշտի L ընդլայնումը: □

ՊՆԴՈՒՄ 60.26. *Յարարանչյուր բարադրյալ հանրահաղվական ընդլայնում
հանրահաղվաթեն տոթոցոցած ընդլայնումն է:*

Ապոցոցյց. Եթև ունենթ F դաշտի $F(a_1) \cdots (a_n)$ բարադրյալ հանրահաղվա-
կան ընդլայնումը, ապա, համաձայն նավարդ սնդման, այն կլինի F դաշտի վերջա-
վար ընդլայնումը: Հեևաոսպես $a_1, \dots, a_n$ տարրերից յուրաքանչյուրը կլինի հան-
րահաղվական F դաշտի նկատմումթ: Ունենթ նաև՝

$$F(a_1) \cdots (a_n) = F(a_1, \dots, a_n) :$$



Վերջում բերենք հետևյալ հոսակայությունը:

ԴՆԴՈՒՄ 60.27. F դաշտի L վերջավոր ընդլայնման կոմպակտն a տարրի տատիվումը F -ի նկատմամբ $|L : F|$ -ի բաժանարար է:

Ապացույց. Իսկապես, բավական է դիտարկել ընդլայնումների

$$F \subseteq F(a) \subseteq L$$

շղթան և կիրառել 60.17 և 60.22 պնդումները:



61. ԹՎԱՅԻՆ ԴԱՇՏԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

61.1. *Թիմոթյան դաշտերի յադատյալ հանրահաշվական ընդլայնումները:* Այս ստորագրաժամ ընդլայնումների հոսակայությունները կոստումատիբերն միայն *թիմոթյան դաշտերի*, այսինքն՝ կոմպլեքս թվերի դաշտի լեռնադաշտերի համար: Նախ ապացուցենք հետևյալ կարևոր պնդումը:

ԴՆԴՈՒՄ 61.1. *Թիմոթյան դաշտի բազմադրյալ հանրահաշվական ընդլայնումը միու որսրգ հանրահաշվական ընդլայնում է:*

Ապացույց. Դիցուք՝

$$K = F(a_1) \cdots (a_n)$$

դաշար F դաշտի բազմադրյալ հանրահաշվական ընդլայնումն է: Մենք պետք է ապացուցենք, որ գոյություն ունի K դաշտի սեյնպիսի b տարր, որի համար $K = F(b)$:

Ակզրում դիտարկենք $n - 2$ դեպքը: Դիցուք՝ $K = F(a_1)(a_2)$, և $f_1(x)$ -ը a_1 տարրի, իսկ $f_2(x)$ -ը՝ a_2 տարրի միմիմալ բազմանդամներն են F դաշտի նկատմամբ: Ենթադրենք, թե

$$(88) \quad b_1 = a_1, b_2, \dots, b_r$$

տարրերը $f_1(x)$ բազմանդամի բոլոր սրմումներն են, իսկ

$$(89) \quad c_1 = a_2, c_2, \dots, c_l$$

տարրերը՝ $f_2(x)$ բազմանդամի բոլոր սրմումները:

Քանի որ $f_1(x)$ բազմանդամը չբերվող է, ապա (88) թվերի մեջ չկան կրկնվողներ: Նույն պատճառով կրկնվողներ չկան նաև (89) թվերի մեջ: Այժմ դիտարկենք հետևյալ կատարակները.

$$(90) \quad \frac{b_i - b_1}{c_1 - c_j}, \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 2, \dots, l:$$

Դիտարկվում այս կատարակների քանակը վերջավար է: Եվ քանի որ Q -ն ընկած է F -ի մեջ, ապա կարելի է գտնել F -ի այնպիսի c տարր, որը տարրեր է (90) կատարակներից յուրաքանչյուրից:

Նշանակենք՝

$$d = a_1 + ca_2 :$$

Եթե ինչ-որ i և j թվերի համար, որտեղ $j \neq 1$, նաև $d = b_i + cx_j$, ապա կստանանք, որ c -ն հավասար է (90) կոտարկներից մեկին: Այսպիսով՝

$$(91) \quad d \neq b_i + cx_j, \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 2, \dots, l :$$

Քանի որ $d \in K$, ապա d -ն հանրահաշվական է F -ի նկատմամբ: Պարզ է, որ

$$(92) \quad F(d) \subseteq K :$$

Դիտարկենք

$$g(x) = f_1(d - cx)$$

բազմանդամը: Պարզ է, որ $g(x) \in F(d)[x]$: Այնուհետև՝

$$g(a_2) = f_1(d - ca_2) = f_1(a_1 + ca_2 - ca_2) = f_1(a_1) = 0 :$$

Այսինքն՝ $g(x)$ և $f_2(x)$ բազմանդամներն ունեն a_2 ընդհանուր սրժառք: Եթե նաև $g(c_j) = 0$, ապա կունենանք $f_1(d - cx_j) = 0$: Այսինքն՝

$$d - cx_j = b_i,$$

այլ, համաձայն (91)-ի, հնարավոր չէ, եթե $j \neq 1$:

Այսպիսով՝ $g(x)$ և $f_2(x)$ բազմանդամների տանձամեծ ընդհանուր բաժանարարը $x - c_1$ երկանդամն է: Քանի որ $g(x), f_2(x) \in F(d)[x]$, ապա նաև $g(x)$ և $f_2(x)$ բազմանդամների տանձամեծ ընդհանուր բաժանարարը՝ $x - c_1$ երկանդամը կարտակոմի $F(d)[x]$ օղակին: Հետևապես՝ $c_1 \in F(d)$: Այստեղից հետևում է նաև՝

$$a_1 = d - cc_1 \in F(d) :$$

Իսկ այստեղից կստանանք՝

$$F(a_1, a_2) \subseteq F(d) :$$

Համեմատելով այս ընդգրկումը (92)-ի հետ, կստանանք՝

$$F(a_1)(a_2) = F(a_1, a_2) = F(d) :$$

Այսպիսով՝ $n - 2$ դեպքում տեղման պոլիոմեթրը տարացուցվեց: Այժմ սնցները կամույսկան n -ի դեպքին:

Իհիտար՝ $K = F(a_1) \cdots (a_n)$ դաշտը F թվային դաշտի բազադրյույ հանրահաշվական ընդլայնումն է: Ցույց տանք, որ զոլորյուն ունի F -ի նկատմամբ հանրահաշվական այնպիսի b թիվ, որ $K = F(b)$: Այս դաաադաբյան տարացուցումը կաաաաենք ինդուկցիայով՝ ըաա n -ի:

Ինդուկցիայի բազիսը. $n = 1$: Այդ դեպքում $K = F(a_1)$ և $b = a_1$:

Ինդուկցիան բայր. ենթադրենք, թե n -ից փոքր բոլոր բնական թվերի համար արվում պաաադաբյունը ճշմարիտ է: Ունենք՝

$$(93) \quad K = F(a_1) \cdots (a_{n-1})(a_n) :$$

Նշանակենք՝ $L = F(a_1) \cdots (a_{n-1})$:

Պարզ է, որ L -ը կլինի F -ի բաղադրյալ հանրահալիմուսն ընդլայնումը: Համաձայն ինդուկցիան ենթադրություն՝ գոյություն ունի F դաշտի նկատմամբ հանրահալիմուսն ունեցող b_1 տարր, որի համար

$$K_1 := F(b_1) :$$

Համեմատելով այս հավասարությունը (93)-ի հետ՝ կստանանք՝

$$K := F(b_1)(a_n) :$$

Այսինքն՝ խնդիրը հանգեց $n - 2$ դասքին, որն ապելն բննորոշվել է: $\square$

61.2. Հանրահալիմուսն թվերի դաշտը: Դիտարկենք կոմպլեքս թվերի $\mathbb{C}$ դաշտը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 61.2. Կոմպլեքս թիվը կապիում է *հանրահալիմուսն թիվ*, եթե այն ունեցիմուսն գործակիցներով ինչ-որ հավասարման սրմուսն է:

Համարնուկի է, որ հանրահալիմուսն թվերը այն և միայն այն կոմպլեքս թվերն են, որոնք հանրահալիմուսն են ունեցիմուսն թվերի դաշտի նկատմամբ:

Դիտարկենք օրինակներ և ժխտօրինակներ:

ա. Հանրահալիմուսն է յուրաքանչյուր ունեցիմուսն թիվը:

բ. Հանրահալիմուսն է ունեցիմուսն թվի յուրաքանչյուր n ուսանիմունի սրմուսնը:

գ. Քանի որ $\mathbb{Q}[x]$ բազմադրյալն հալվելի է, և յուրաքանչյուր բազմադրյալ ունի վերջավոր թիվ կոմպլեքս սրմուսններ, ապա հանրահալիմուսն թվերի բազմադրյալներն ունեցիմուսն հալվելի է: Հետևապես՝ գոյություն ունեն կոմպլեքսն ունեցիմուսն թվերը հանրահալիմուսն թվեր:

ՊԼԴՈՒՄ 61.3. Հանրահալիմուսն թվերի բազմադրյալն կոմպլեքս թվերի դաշտի ենթադրյալ է:

Ապոսույց. Դիցուք՝ հանրահալիմուսն թվերի բազմադրյալն A -ն է: Վերցնենք a, b հանրահալիմուսն թվեր, $b \neq 0$ և դիտարկենք $\mathbb{Q}(a, b)$ ընդլայնումը: Այն $\mathbb{Q}$ -ի հանրահալիմուսնն առաջացում ընդլայնում է: Ուրեմն՝ նրա յուրաքանչյուր տարր, այդ թվում նաև $a + b, ab, a/b$ տարրերը, սրահանում են $\mathbb{Q}(a, b)$ -ին, ուրեմն՝ նաև A -ին: Հետևապես՝ A -ն կոմպլեքս թվերի դաշտի ենթադրյալ է: $\square$

A -ն կապում է նաև հանրահալիմուսն թվերի դաշտ:

ՊԼԴՈՒՄ 61.4. Հանրահալիմուսն թվերի դաշտը հանրահալիմուսնն փակ է:

Ապոսույց. Վերցնենք հանրահալիմուսն թվերի A դաշտի վրա սրվում

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

բազմանդամը: Ենթադրենք, թե c կոմպլեքս թիվը նրա սրմուսն է: Յույց առնք, որ $c \in A$: Խոսապես, դիտարկենք դաշտերի հետեյալ շղթան.

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(a_0, a_1, \dots, a_n) \subseteq \mathbb{Q}(a_0, a_1, \dots, a_n)(c) :$$

Այս շղթայի երկրորդ և երրորդ անդամները իրենց նախադրյալների վերջավոր ընդլայնումներն են: Հետևապես, համաձայն 60.21 պնդման, $\mathbb{Q}(a_0, a_1, \dots, a_n)(c)$ -ն կլինի

$\mathbb{Q}$ -ի վերջավոր ընդլայնումը: Իսկ դրանից հետևում է, որ $\mathbb{Q}(a_0, a_1, \dots, a_n)(c)$ -ի յուրաքանչյուր տարր, այդ թվում՝ c -ն, համընկած է $\mathbb{Q}$ -ի նկատմամբ: Այսինքն՝ $c \in A$: Պնդումն ապացուցված է: $\square$

62. ԵՐՐՈՐԴ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ԱՐՄԱՏԱՆՇԱՆՆԵՐՈՎ

62.1. *Դաշաի քառակուսային ընդլայնումը:* Այժմ կդիտարկենք դաշաի այնպիսի ընդլայնումներ, որոնց և ընդլայնվող դաշաի փոխադարձությունը առավել հմտն է իրական և կոմպլեքս թվերի դաշտերի փոխադարձությունը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 62.1. F դաշաի K ընդլայնումը կազմում է նրա քառակուսային ընդլայնում, երև գոյություն ունի K դաշաի այնպիսի α տարր, որ

$$K = F(\alpha), \alpha \notin F \text{ և } \alpha^2 \in F:$$

Օրինակներ և միատրինակներ:

ա. Գոտույան ուղղիմուկ թվերի $\mathbb{Q}(i)$ դաշտը ուղղիմուկ թվերի $\mathbb{Q}$ դաշաի քառակուսային ընդլայնումն է:

բ. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ դաշտը ուղղիմուկ թվերի $\mathbb{Q}$ դաշաի քառակուսային ընդլայնումն է:

գ. Կոմպլեքս թվերի $\mathbb{C}$ դաշտը իրական թվերի $\mathbb{R}$ դաշաի քառակուսային ընդլայնումն է:

դ. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ դաշտը ուղղիմուկ թվերի $\mathbb{Q}$ դաշաի քառակուսային ընդլայնումը չէ:

Դիցուք՝ K դաշտը F դաշաի քառակուսային ընդլայնումն է α տարրի միջոցով: Այդ դեպքում 60.27 պնդումից հետևում է, որ α տարրի բնութագրիչ բազմությունը՝ F դաշաի նկատմամբ երկրորդ ստաիանի է: Մյևնույն ժամանակ 60.15 պնդումից հետևում է, որ $K = \{a + b\alpha \mid a, b \in F\}$: Կոմպլեքս թվերի օրինակով՝ ներմուծենք հետևյալ համակցությունը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 62.2. $a + b\alpha$ և $a - b\alpha$ տարրերը կազմում են իրար նկատմամբ համադրո:

Նշանակենք $z \in K$ թվի համադրոն $\bar{z}$ -ով:

ՊՆԴՈՒՄ 62.3. K դաշաի կամայական z_1 և z_2 տարրերի.

ա. գումարի համադրոն համասար է գումարելիների համադրոնների գումարին: Այսինքն՝

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$$

բ. ադադրյալի համադրոն համասար է ադադրյալների համադրոնների ադադրյալին: Այսինքն՝

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2:$$

Ապացույց. Դիցուք՝ $\alpha^2 = c \in F, a, b, c, d \in F$: Այդ դեպքում.

ա.

$$\overline{a + b\alpha + c + d\alpha} = \overline{(a + c) + (b + d)\alpha} = (a + c) - (b + d)\alpha =$$

$$= (a - b\alpha) + (c - d\alpha) = \overline{a + b\alpha} + \overline{c + d\alpha} :$$

բ.

$$\begin{aligned} \overline{(a + b\alpha) \cdot (c + d\alpha)} &= \overline{(ac + bdc) + (ad + bc)\alpha} = (ac + bdc) - (ad + bc)\alpha, \\ \overline{a + b\alpha} \cdot \overline{c + d\alpha} &= (a - b\alpha) \cdot (c - d\alpha) = \\ &= (ac + bdc) - (ad + bc)\alpha : \end{aligned}$$

Հետևապես՝

$$\overline{(a + b\alpha) \cdot (c + d\alpha)} = \overline{a + b\alpha} \cdot \overline{c + d\alpha} :$$

□

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 62.4. Ասացուցեք, որ K դաշտի կամուրջական z_1 և z_2 տարրերի տարրերությունը համարվում է հավասար 1 նրանց համադրումների տարրերությունը:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 62.5. Ինչի՞նչ է հավասար $F(\alpha)$ դաշտի $a + b\alpha$ ոչ զրոյական տարրի հակադրվածը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 62.6. K դաշտի F -ի նկատմամբ ախտամորֆիզմ է կոչվում K բազմություն այնպիսի

$$f : K \rightarrow K$$

որոշակապակերտում, որը K -ից K -ի վրա արված իզոմորֆիզմ է և նույնական է F -ի վրա՝ $f(a) = a$, եթե $a \in F$:

ՊԵՐՈՒՄ 62.7. K -ի f որոշակապակերտում, որը նրա յուրաքանչյուր տարրին տանջում է իր համարված, K դաշտի ախտամորֆիզմ է F -ի նկատմամբ:

Ասացույց. Ասացուցումը հետևում է 62.3 պնդմանը:

□

ՊԵՐՈՒՄ 62.8. Եթե K -ի $a + b\alpha$ տարրը ($a, b \in F$) F -ի վրա արված $f(x)$ բազմանդամի արմատն է, ապա նրան համարվում $a - b\alpha$ տարրը նույնպես $f(x)$ բազմանդամի արմատն է:

Ասացույց. Ասացուցումը կատարել ինքնուրույն:

□

62.2. Հավասարման լուծելիությունը քառակուսային արմատանշանով:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 62.9. Ռացիոնալ գործակիցներով $f(x) = 0$ հավասարումը կոչվում է *քառակուսային արմատանշաններով լուծելի*, եթե գոյություն ունի դաշտերի ընդլայնումների այնպիսի

$$(94) \quad F_0 = \mathbb{Q} \subseteq F_1 \subseteq \dots \subseteq F_{k-1} \subseteq F_k$$

շղթա, որի համար.

- ա. յուրաքանչյուր անդամ իր նախորդի քառակուսային ընդլայնումն է,
- բ. վերջին անդամը սխառմակում է $f(x)$ բազմանդամի բոլոր արմատները:

Օրինակներ և միտոբինակներ:

ա. Ռացիոնալ գործակիցներով երկրորդ աստիճանի յուրաքանչյուր հավասարած թուռականային ուրմատանշաններով լուծելի է:

բ. $x^3 - 1 = 0$ հավասարումը թուռականային ուրմատանշաններով լուծելի է:

գ. $x^3 - 2 = 0$ հավասարումը թուռականային ուրմատանշաններով լուծելի չէ:

Քուռականային ուրմատանշաններով լուծելի հավասարումներ կառուցելու լավ հնարավորություններ է ստվիս հեռակայ պնդումը:

ԴՆԴՈՒՄ 62.10. Եթե ուսցիոնալ գործակիցներով

$$f(x) = 0 \text{ և } g(x) = 0$$

հախատությունները թուռականային ուրմատանշաններով լուծելի են, տարա թուռականային ուրմատանշաններով լուծելի է նաև

$$f(x)g(x) = 0$$

հախատությունը:

Ապացույց. Ապացուցումը կատարեք ինքնուրույն: □

Հախալումնց կարեւոր են թուռականային ուրմատանշաններով լուծելի երրորդ աստիճանի հախատությունները: Դպրություն ունի նման հախատությունների հեռապրքիք ընտրալում:

ԴՆԴՈՒՄ 62.11. Ռացիոնալ գործակիցներով երրորդ աստիճանի հախատությունը թուռականային ուրմատանշաններով լուծելի է այն և միայն այն դեպքում, եթե այն ունի գննե մեկ ուսցիոնալ ուրմատ:

Ապացույց. Եթե ուսցիոնալ գործակիցներով

$$(95) \quad f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

հախատությունը ունի α ուսցիոնալ ուրմատը, ուստա սլարգ է, որ

$$f(x) = (x - \alpha)(x^2 + dx + e), d, e \in \mathbb{Q} :$$

Այստեղից՝ համաձայն 62.10 պնդումն, $(x - \alpha)(x^2 + dx + e)$ հախատությունը թուռականային ուրմատանշաններով լուծելի է:

Հախատուրք, դիցուք՝ (95) հախատությունը թուռականային ուրմատանշաններով լուծելի է: Կուտարենք ետկատող ենդողություն. (95) հախատությունը ուսցիոնալ ուրմատանք չունի: Համաձայն ուսկումնում՝ գոյություն ունի դաշտերի ընդլայնումների (94) շղրա, որի յուրաքանչյուր անդամը իր նախադրվա թուռականային ընդլայնումն է, իսկ նրա վերջին անդամը սլարտանակում է $f(x)$ թուգմանդամի թուրք՝ x_1, x_2, x_3 ուրմատները:

Դիցուք՝ j -ն ուտաջին համարն է, որի համար F_j -ն սլարտանակում է x_1, x_2, x_3 ուրմատներից գննե մեկը, օրինակ, x_1 -ը: Քունի որ F_j -ն F_{j-1} -ի թուռականային ընդլայնումն է, ուստա գոյություն կունենա ույնակաի α աուրք, որ

$$\alpha \in F_j - F_{j-1}, \alpha^2 \in F_{j-1} :$$

Քանի որ

$$F_j = \{a + b\alpha | a, b \in F_{j-1}\},$$

ապա գոյություն կունենան F_{j-1} դաշտի այնպիսի p և q տարրեր, որ

$$(96) \quad x_1 = p + q\alpha, q \neq 0 :$$

Համաձայն 62.8 պնդման՝ x_1 -ին համալրած $\overline{x_1} = p - q\alpha$ տարրը նույնպես (95) հավասարման լուծում է։ Դիցույ՝ այդ լուծումն է x_2 , այսինքն՝ $x_2 = p - q\alpha$ ։ Այստեղից, հաշվի առնելով նաև (96)-ը, կստանանք

$$(97) \quad x_1 + x_2 = 2p \in F_{j-1} :$$

Միևնույն ժամանակ, համաձայն Վիետի բերեմի,

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a \in F_{j-1} :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով նաև (97)-ը, կստանանք $x_3 \in F_{j-1}$ ։ Իսկ սա հակասում է այն ենթադրությանը, որ F_j -ն (94) շրջայի ստացին անդամն է, որը պարունակում է (95) հավասարման որևէ արմատ։ $\square$

62.3. Կիրառություններ։ Այստեղ մենք կդիտարկենք մի բանի սրտամուկան նշանակություն ունեցող կառուցման խնդիրներ, որանք կտրկինով և բանոճով անբաժնի են։ Մեզ անհրաժեշտ կլինի երկրաչափական հետևյալ փաստը։

ՊՆԴՈՒՄ 62.12. *Ռեցիսնոյ գործակիցներով հավասարման արմատները կտրկինով և բանոճով հնդրոտվոր է կառուցել այն և միայն այն դեպքում, երբ այն լուծելի է քառակուսային արմատանշաններով։*

Խորանորդի կրկնադրական խնդիրը։

Պատահյալում է կտրկինով և բանոճով կառուցել այն խորանորդի կողք, որի ծավալը կրկնակի անգամ մեծ է արված խորանորդի ծավալից։

Լուծումը։ Տրված խորանորդի կողի երկարությունը բնդունենք որպես միավոր։ Այդ դեպքում քրոնելի խորանորդի x կողը կլինի $\sqrt[3]{2}$ ։ Հետևապես կունենանք՝

$$x^3 - 2 = 0 :$$

Այս հավասարումը ռացիոնոյ արմատներ չունի։ Համաձայն 62.11 պնդման՝ այն անլուծելի է քառակուսային արմատանշաններով։ Հետևապես, համաձայն 62.12 պնդման, նրա x արմատը կտրկինով և բանոճով չի կառուցվում։

Մեկյան հոտաման խնդիր։

Տրված անկյունը կտրկինի և բանոճի միջացով բաժանել երեք հավասար մասերի։

Լուծումը։ Հասկանալի է, որ արված անկյունը կառուցելու խնդիրը համարժեք է նրա կոմիմոսը կառուցելու խնդրին։ Գիտենք, որ

$$\cos \varphi = -3\cos \frac{\varphi}{3} + 4\cos^3 \frac{\varphi}{3} :$$

Այստեղից, նշանակելով

$$x = \cos \frac{\varphi}{3}, \quad a = \cos \varphi,$$

կատանումը՝

$$(98) \quad 4x^3 - 3x - a = 0 :$$

Իհարկե, այս հավասարման ռացիոնալ տրմուսներ ունենալու խնդիրը պայմանավորված է նրա a գործակցով, որն, իր հերթին, կախված է φ անկյունից: Դիտարկենք սույն դեպքեր.

ա. $\varphi = \pi/2$: Այդ դեպքում $a = 0$ և (98) հավասարումը կվերածվի

$$4x^3 - 3x = 0$$

հավասարման, որն ունի ռացիոնալ տրմուս: Հեռանալեն՝ $\pi/2$ անկյունը կարկինի և քանոնի միջոցով բաժանվում է երեք հավասար մասերի:

բ. $\varphi = \pi/3$: Այդ դեպքում $a = 1/2$ և (98) հավասարումը կվերածվի

$$8x^3 - 6x - 1 = 0$$

հավասարման, որը կարելի է գրառել նույն

$$y^3 - 3y - 1 = 0$$

ուևրով, եթե կատարենք $y = 2x$ նշանակումը: Այն չափի ռացիոնալ տրմուսներ: Հեռանալեն՝ $\pi/3$ անկյունը կարկինի և քանոնի միջոցով երեք հավասար մասերի բաժանել ենուրափոր չէ:

Շրջանագիծը հինգ հափառար մասերի բաժանման խնդիրը:

Այդպիսի ենուրափոր է կարկինի և քանոնի միջոցով շրջանագիծը բաժանել հինգ հափառար մասերի:

Լամումը: Շրջանագծին ներգծում կամենավոր հնգանկյան գագաթները կառողմատական հարքարքան վրա պատկերվում են

$$z^5 - 1 = 0$$

հավասարման յաժաճներով: Դրանցից մեկը 1 քիվն է: Մյուսները բավարարում են հետևյալ հավասարմանը.

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0 :$$

Այստեղից, հավասարման երկու մասերը բաժանելով z^2 -ու վրա և նշանակելով

$$t = z + 1/z,$$

կատանումը ռացիոնալ գործակիցներով մի քառակուսային հավասարում, որը ուկն-հայտարեն յաժելի է քառակուսային սլանառանշաններով: Հեռանալեն՝ կարկինով և քանոնով ենուրափոր է շրջանագիծը բաժանել հինգ հափառար մասերի:

Շրջանագիծը յոթ հափառար մասերի բաժանման խնդիրը:

Այդպիսի ենուրափոր է կարկինի և քանոնի միջոցով շրջանագիծը բաժանել յոթ հափառար մասերի:

Լամումը: Շրջանագծին ներգծում կամենավոր յոթանկյան գագաթները կառաղի-մատական հարքարքան վրա պատկերվում են

$$z^7 - 1 = 0$$

հավասարման լուծումներով: Դրանցից մեկը 1 քիվն է: Այսուհետև բավարարում են հետևյալ հավասարումը.

$$1 + z + z^2 + \dots + z^6 = 0 :$$

Այստեղից, հավասարման երկու մասերը բաժանելով z^3 -ի վրա և նշանակելով

$$t := z + 1/z,$$

կառանանք՝

$$t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0 :$$

Այս հավասարումը ունի մեկ իրական և չորս արտասահման լուծում: Այս լուծումները հավասարումն ունի չորս լուծում: Հետևապես՝ այն բաժանվում է իրական և արտասահման լուծումների: Ուրեմն՝ մյուս լուծումները կարելի է և քանակի միջոցով ստանալ: Իսկ սա էլ նշանակում է, որ կանոնավոր յոթանկյունը կարելի է և բաժանել չորս կողմի:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ 62.13. Ապացուցեք, որ կանոնավոր յոթանկյունը չի կարելի կառուցել կարկինով և բաժանումով:

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ

63. ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ՊԱՏՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

63.1. Հանրահաշվի սյառնությունից: Հանրահաշվի սաղմովն է թվի, թվերի հետ կատարվող գործողությունների և թվային արտահայտությունների ու նրանց հատկությունների ընդհանրական ու միասնական դիսկրիմինացիոն հանրահաշվի սաղմովն է: Այս տեսակետից, հանրահաշվի նախնականները ձևավորվել են դեռևս հնագույն ժամանակներից: Բաբելոնում և Եգիպտոսում: Հին հույները, առանձնապես Դիոֆանտոսը, ընդհանրական ձևակերպումներ էին առկա ուսույթի և երկարող ստախճանի հաճախարածների լուծման հնարքներին: Հանրահաշվի սաղմովն է այս նախնական վաղը ավարտված և միջնուպարած արարական մարեմատիկաների կազմից: «Ալ-գերա» տեխնիկան էլ սպարական ծագում ունի: Այն վերցված է Գրեյ դարի մարեմատիկա Ալ-Խալիֆի «Ալ-Ջերա սպարարա» աշխատության տեխնիկայից:

Հանրահաշվի գործողություն հետագու ընթացքը կապված է եգիպտական մշակույթի հետ: Այստեղ նախ դրվել ժամանակակից հանրահաշվի հիմնարարը. մի քանի դարերի ընթացքում կատարվել հանրահաշվի լեզուն: Հանրահաշվի կազմավորման նախնական կամ նախնականական վաղում ընդհանրական հանրահաշվական հասկացություններն ու վառաերը շարադրվում էին սեփական լեզվի արախայտությունների ու նախնականությունների միջոցով: Հաճախ թվականին արագ հասկացություն տեղում առանում էր տեղի ծավալ: Հանրահաշվի գործողություն մեջ եգիպտական մշակույթի ուսույթի ծառայությունը հանրահաշվական սիմվոլիկայի սաղմովն էր: Առանց այդ սիմվոլիկայի տեխնիկա և արախերացնել հանրահաշվի և ռաջ մարեմատիկայի հետագու ուսույթնրացը: Եվ այս գործում հանրահաշվի նախնարարական և տեխնիկական հարաբերություններին ու տեխնիկաներին, որոնք իրենց տեխնիկական կարիքների համար վաղուց ի վեր գործածում էին + և - նշանները՝ դրանց այժմյան իմաստներով:

Դոմարմուն և հոմուն նշաններին հետևեցին ստախճանի, արմատի և վակագծերի նշանների ներածումները: Այս տեսակետից մեծագույն ծառայությունը արախկանում է Գրեյմի մարեմատիկա Վիետին, որը 16-րդ դարի վերջերին ներածեց ստախճանի նշանակումները: Հետաքրքիր է, որ Վիետն անհայտների համար գործածում էր թվականական այբուբենի մեծատառ ծայնավորները, իսկ հատաառանների

համար՝ բաղաձայնելի: 17-րդ դարում Ֆրանսիացի փիլիսոփա և մաթեմատիկոս Դեկարտը ներածեց ներկայումս զորածիփող ճշանակումները: Լինիմ հայտնագործարյունների ճշանակությամբ հասկանալու համար բաժնական 1 ճշել, որ դրանցից ամենիցապես հեռու կատարվեց մաթեմատիկայի մեծագույն հայտնագործարյուններից մեկը՝ տնգլիացի Նյուտոնի և գերմանացի Լայբնիցի կողմից դրվեց մաթեմատիկական տնալիցի հիմքը: ստեղծվեց տնվեքս փորրերի տնուլիգը:

Վեկարալի կողմից անալիտիկ երկրաչափություն ստեղծման շնորհիվ հունրա-
 հաշվում և թվաբանության մեջ կատարվեց ևս մի կտրեոր թաղ. քնդունվեցին նաև
 բազմաանություն թվերը: Միենույն ժամանակ անալիտիկ երկրաչափություն ստեղծումը
 հունրառաշխարհում մեթոդի մեծուպույն նվաճումն էր: Բունն այն է, որ իյն հույների
 մաս հունրառաշխարհում և թվաբանական խնդիրները ստորադասվում էին և հուն-
 վեցվում երկրաչափական խնդիրները: Եվերի որասաղաղալը, օրինակ, դասվում էր
 ժըպես ռադոնկյուն մուկերև և այլն: Անալիտիկ երկրաչափություն մեջ պուսակե-
 լը որմասասալես փոխվում էր. երկրաչափություն պուսակերներ և նրանց փոխա-
 րաբերալթյունները համգում էին հունրառաշխարհում հասկապալթյունների ու պրանց
 հասկալթյունները: Հունրառաշխարհ ստանում էր վճառըշ և իմանալալը դեր ներմաթե-
 մալիկական փոխադարերալթյուններում:

Ջուտ մուրեմատիվություն ուղղումը քննելի անտոնկյունից հոնքումուշվի գուրգացման այս փուլում հարկ է տալիքն հերքին ճշել խաղաղի մարեմատիկաների ներդրումը: Այստեղ նուի անկումեշա է տառնձնացնել Ֆիլոսոֆիան Լեոնորդո Պիզանյան, 13-րդ դարի և ժամանակի խոշորագույն մարեմատիկոսին: Այնուհետև՝ Կուրտանյին, 16-րդ դար, որը ավել 3-րդ ստաիճումի հափստարումների լոծման բանաձևը: Նրա աշակերտ Ֆերյուրին ստացավ 4-րդ ստաիճումի հափստարումների լոծման բանաձևը: Այս շրջանի հոնքումուշվի բազմադաղույթյան մուսին շատ լավ սլաակերացում է ստաիլո ժամանակի խոշորագույն մարեմատիկոս Էյլերի «Հոնքումուշվի ներածություն» գատուցիլը: Այս նրա բաժինները, ոմբոդք քվեր, սափաական և ստանդարդիան կտորակներ, տրմումներ, լոգարիթմներ, 1-4-րդ ստաիճումի հոնքումուշվոկան հափստարումներ, սլոգրեսիումներ, միացություններ, Նյուտոնի ըինոմը, դիաֆանայան հափստարումներ:

Համբուսիզվի գործազման հաջորդ ժամանակաշրջանը՝ մինչև 19-րդ դարի կեսերը, համբուսիզված կենտրոնականը եղել է հովատարածների յոթման ինդիքը: Մասշտաբ հիմնական հայտնագործությունն էլ կոչվում է համբուսիզվի հիմնական բերքն. այն կատարեց այդ ժամանակաշրջանի մեծագույն մտերմափկոս, գերմանացի Գուտտեր 18-րդ դարի վերջում:

Համբուսուչիի հեռագու գարգացման առանկյանից, սակայն, մվելի կարևոր էր հովստարտմների հեա կապված մյուս՝ տրմաստնշաններով լուծման խնդիրը: Նորվեգացի Աբելը սարուցուցեց, որ 4-ից բարձր առախմանի հովստարտմները կալող են տրմաստնշաններով լուծվել: Հաննուսել Յրմանիացի Գալուան գտավ հովստարտմները տրմաստնշաններով լուծելու վկարերկայ կրաշայի մի հայտանիշ, որը կլմր ծառայեց նրա տնմանով կոչվող ահտարյան սահեղծման համար: Նրանց

կողմից ստացված ուրույնքները ոչ միայն եզրափակեցին այս ուղղությամբ կատարված երկուստե և ու բազմաթիվ մաթեմատիկոսների կողմից կատարվող մասմանասիրությունները, այլև նախանշեցին հանրահաշիվի հետագու զարգացման ճանապարհը: Հանրահաշիվի բնդիսով մոպեցով իր հիմնական խնդրի իրականացմանը՝ հանրահաշիվական գործողությունների ուսումնասիրությունը:

Հանրահաշիվի հիմնական խնդրի ձևովարման ու արմատավարման սեսանկյունից սկզբունքային նշանակություն ունեն հասարեք ասարկաների և նրանց հետ կատարվող գործողությունների կիրառությունները: Այս տեսակետից մեծ նշանակություն ունեցան Գաուսի կողմից բուռնակոտային ձևերի և նրանց կոմպոզիցիայի (բազմապատկման), Ռուֆինիի կողմից անդրողությունների և նրանց բազմապատկման գործողությունների ներմծումը: Հանրահաշիվի զարգացման այս փուլը եզրափակվեց Բուլի կողմից՝ արմատականային հանրահաշիվի, Գաուսմանի կողմից՝ արասրին հանրահաշիվների, Համիլտնի կողմից՝ քվատերնիոնների հանրահաշիվի, Էեկիի կողմից՝ մասարիցների հանրահաշիվի սանգծումով:

19-րդ դարի վերջը և 20-րդ դարի սկիզբը դարձան ժամանակակից հանրահաշիվի սանգծման և արմատավարման ժամանակաշրջան: Այստեղ կենարանական դեր խաղացին Հիլբերտի, Արթինի, Է. Նյոթերի աշխատությունները: Ժամանակաշրջանը եզրափակվեց Վան դե Վադերնի «Ժամանակակից հանրահաշիվ» փաստենդ գրքով, որով ժամանակակից հանրահաշիվ են սովորեց 20-րդ դարի՝ առանց բացատրյան բոլոր հանրահաշիվականները:

63.2. Ժամանակակից հանրահաշիվը: Ժամանակակից հանրահաշիվի ուսումնասիրությունն ասարկան ունիվերսալ հանրահաշիվն է. բազմությունը՝ նրա վրա արված գործողությունների համակարի հետ միասին: Ընդ որում, ունիվերսալ հանրահաշիվների բազմապատկումը ասացված է ոչ միայն բազմությունների ու գործողությունների վափովման միջոցով, այլև այն հասկոթյունների շնարիվ, որոնցով զծաված կարող են լինել այդ գործողությունները:

Կարևորագույն ունիվերսալ հանրահաշիվի *խումբ* է. մեկ՝ զուգորդելի և հակադարձելի երկտեղ հանրահաշիվական գործողությամբ ունիվերսալ հանրահաշիվը: Խլմարի գուպապարը ձևավորվել է հիմնականում հոփասարումները արմատանշաններով լուծելու խնդրին նվիրված ուսումնասիրություններում: Առաջին և հիմնական աշխատանքը այստեղ Լուդուրմի «Հոփասարումների հոյնրահաշիվական լուծման մասին մենագրությունն» է, որ լույս տեսավ 1771-ին: Այստեղ, ըստ Լուրյան, սուկա են ներախրի և հարսիկից դուսի հասկոցարյունները: Հաջորդ կարևոր քայլերը կատարվել են Արեել՝ 1824-ին, և Գալուան՝ 1830-խաիճումի հոփասարումների լուծման բուսմակը:

Ըստ Լուրյան, Գալուան է ներմծել նարմալ բաժանարարի գոդովարը, ցույց է տվել նշանակալի լուծի պարզ լինելը չարսից մեծ թվերի համար: Կարևոր նշանակություն է ունեցել նաև Ժորյունի արուկսուար անդրողությունների մասին (1870-ին):

Երկրաշավարյան մեջ լուծի գոդովարի ձևավորման և գուրգուցման վերաբերյալ Մերյուսի, Էեկիի (1854-ին) կատարված աշխատանքները 1872-ին եզրափակեց

Քլայնը, սրը գերմանական էլիտեզեն քսերպի համալսարանում կարդացած դասախառնարան՝ կրանզենյան ծրագրի մեջ ցույց տվեց խմբի կարևորագույն դերը երկրաչափության մեջ:

Խմբի գաղափարը ձևավորվել է մոտ րվերի տեսության մեջ՝ Էյլերի (1761-ին) և Գուսսի (1801-ին) աշխատություններում:

ԼՖկ գործադրությանը կարևոր ունիվերսալ հանրահաշիվներ են կիսախմբերը, քվազիխմբերը և յուպոնները, որոնցում համեմատելի գործադրությունները բավարարում են ավելի «քայլ» սլայմոնների, քան խմբային գործողությունն է: Ընդ սրում, ճշված հոսկոթյունները միայն գուտ հոնրահաշիվական մոդելավորումների տրոյունքում: Հսրկ է ճշել, որ այս ունիվերսալ հանրահաշիվների ուսումնասիրությանը սկսվել է շատ ավելի ուշ, քան խմբերի ուսումնասիրությունը: Ընդ որում, խմբերի տեսությունը ղեկավարող դեր է ունեցել նման ուսումնասիրությունների կառավարման համար:

Երկու գործողություններով կարևորագույն ունիվերսալ հանրահաշիվներն են օփոկները և դաշտերը:

Գուշտերի տեսություն ձևավորման սկսնքներում կոնգնած են եղել Ֆերման, Էյլերը, Լագրանժը, Լեժանդրը: Տեսություն ձևավորումը սկսվել է Գուսսի և Գալուսի կողմից:

Մինչև 19-րդ դարի կեսերը դիստրիվել են միայն քվային օրակները:

Վուսթին ոչ աեղավախելի օրակները դիստրիվել են դարի կեսերին Համիլտոնը՝ քվատերնիոնների հանրահաշիվը, և Գուսսամը՝ ալաուրին հանրահաշիվը: 19-րդ դարի յարամատոմականներին Դեդեկինդը դիստրիվում է գուգուրական օրակները և, գուգուսուարս, իրական րվերի դաշտի վրա աքված հանրահաշիվները: Վայերշտրասսի և Դեդեկինդի այս շրջանի ուսումնասիրությունները ամփափել է Ֆրեդերյուսը, որը 1878-ին ապացուցել է, որ իրական րվերի դաշտի վրա աքված վերջավոր յափադականություն բաժանումով գուգորդական, բայց ոչ աեղավախելի միակ հանրահաշիվի քվատերնիոնների մարմինն է: «Օդակ» աերմինը մացրել է Հիլբերթը:

20-րդ դարի սկզբներին Մայինի և Կուրաանի կողմից ուսումնասիրվեցին վերջավոր յափադականության իրական և կոմսյերս հանրահաշիվները: 20-ական քվալաններին դիստրիվեցին կամայական դաշտի վրա աքված հանրահաշիվները: Վեդերբուրնը ոսլացուցեց վերջավոր մարմինը դաշտ լինելու վերաբերյալ թեորեմը:

20-30-ական քվալաններին սկսեցին ուսումնասիրվել կամայական գուգորդական օրակները: Մյատեղ ճշանակալից էին Կրուլլի, Արթինի և Է. Նյոթերի ներդրումները: Օդակների վերաբերյալ այս գրքում ամփոփված նյութը ելմանկանում մշտվել է այդ ընթացքում:

Երկու գործողություններով կարևորագույն ունիվերսալ հանրահաշիվ է մաս կալարը: Կալարի դասական օքինտկը կամայական բուգմության քուլյանն է՝ բուգմությանների հոսման և միավորման գործողությունների հեա միտին: Մյատեղ իմանալոր դեր են ունեցել Բիթկիոֆի աշխատությունները, որոնք սմփոփվել են ճրա՝ կափարների տեսությանը նվիրված [12] դասական մեմագրության մեջ:

Անկ' երկուստեմի ե մի բանի' մեկ տեղանի գործողություններով ունիվերսալ հանրահաշիվ է կամայական դաշտի վրա տրված գծային ստորածությունը, որն ուսումնասիրվում է վեկտորական ստորածությունների ընդհանուր առևտայան մեջ:

Պատմականորեն գծային հանրահաշվի առաջին բաժինը գծային հավասարումների տեսությունն է: 1750-ին սպացուցվել է Կրամերի կոմանը: Հավասարումների համակարգի լուծման Գոսսի մեթոդը ձևակերպվել է 1849-ին: Տեսություն գործադանն է ունրոջացման տեսակետից կարևոր էր մատրիցի սոնգի գաղափարը, որը ներմոնեջ Ֆրանեոյուր 1877-ին, որին անմիջապես հետևեց Կրոնեկեր-Լուսայելիի բեռնեմի տալացայանը:

Ընդիվերսալ հանրահաշիվների ընդհանուր առևտայանը նվիրված առաջին ուսումնասիրությունները կատարվել են 20-րդ դարի 30-ական թվականներին Բիրկեհեյի կադմից:

64. ԱՆՅՅԱԼԻ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԳԵՏՆԵՐԸ

Դիոֆանտ (Diophantos): (Հավանաբար՝ 3 -րդ դար): Հին հունական մաթեմատիկոս: Պոնալանվել են նրա «Թվաբանություն» 13 հատորանի տրակտատի 6 հատորները, որտեղ տրվում են անորոշ հավասարումների լուծումներ: Անորոշ հավասարումները մաթեմատիկայում կոչվում են նրա անունով:

Ֆիբոնաչի (Fibonacci) Լեոնալդո Պիզայեցի: (Մառ. 1170-1228-ից հետո): Իտալացի մաթեմատիկոս: Դոմնապարհորդել է սրբեկյան երկրներում, ծանոթացել սրբեկյան մաթեմատիկական մոթին ե նարառել դեպի Եվրոպա դրանց անդափոխմանը: 1202-ին նրաապրակել է «Liber Abaci» տրակտատը, որում ներառվում են սպարական թվերը, Ֆիբոնաչի թվերը, մինչև երկրորդ տասիծունի հավասարումների լուծումը ե այլն:

Ֆերրո (Ferro) Դալ: (1465, Բոլոնիա, - 1526, Բոլոնիա): Իտալացի մաթեմատիկոս: 1496-ից Բոլոնիայի համալսարանի պրոֆեսոր: Նրա անվան հետ է կապված երրորդ տասիծունի հավասարումների լուծման բանաձևի հայտնաբերումը:

Տարտալյա (Tartaglia) Նիկոլո: (մառ. 1499, Բրեշտ - 13.12.1557, Վենետիկ): Իտալացի մաթեմատիկոս: Կալոնանի հետ միասին տվել է երրորդ տասիծունի հավասարումների լուծման ընդհանուր բանաձև: Ձրադվել է նուե մեխանիկայով, բալիստիկայով, գեոդեզիայով ե այլն:

Կարդանո (Cardano) Ջերոլամո: (24.9.1501, Պավիա, - 21.9.1576, Հրոմ): Իտալացի փիլիսոփա, բժիշկ ե մաթեմատիկոս: Առաջիններից մեկն է եղել, որ հնուրավոր է համարել հավասարման բուցասական տրմառի ե, ընդհանրապես, բուցասական թվի գոյությունը: Նրան է վերագրվում երրորդ տասիծունի հավասարման լուծման ընդհանուր բանաձևի հայտնաբերումը. այդ բանաձևերը կրում են նրա անունը:

Ֆերրարի (Ferrari) Լյուդովիկո: (2.2.1522, Բոլոնիա, - 1565, Բոլոնիա): Իտալացի մաթեմատիկոս, Կորդոնոյի ուշակերպը: Գտել է 4-րդ աստիճանի հավասարումների լուծման մեթոդ:

Բոմբելի (Bombelli) Բաֆայկ: (մոտ. 1530-1572): Իտալացի մաթեմատիկոս և ինժեներ: «Հանրահաշիվ» գրքում (1572) առաջին անգամ սովել է կոմպլեքս թվերի տեսության պարզագույն շարադրումը և խորամտորդ տախիճանի շերտվող բազմաճյուղի տրամաբանի բանաձևերի արտաձուլումը:

Վիկտ (Viete) Ֆրանսուա: (1540, Ֆանսեն-լե-Նոմա, - 13.12.1603, Փարիզ): Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս, կրթությամբ իրավաբան: 1591-ին ներմուծեց ստույյին նշանակումներ մաթեմատիկայում, ինչը տնտեսական ուղեցույցում ունեցավ մաթեմատիկայի զարգացման վրա: Դրա շնորհիվ էլ, որ նա առաջինը ստացավ 2-րդ և 3-րդ աստիճանի հավասարումների լուծման միասնական բանաձևեր:

Դեկարտ (Descartes) Դենի: (1.3.1596, Լաբ, Թուրեն, - 11.2.1650, Ստոկհոլմ): Ֆրանսիացի փիլիսոփա և մաթեմատիկոս: Մերում է ազնվական տաճար: Ստացել է ճիշդիստեպի կրթություն Ամստերդամում: Նա առաջ է բերում, ճանաչողական է: 1529 -ից ապրել է Նիդեռլանդներում, որտեղ կրթություն է ստացել ճիշդիստեպի կրթություն: 1549-ին շվեդիայի քաղաքում կրթություն է ստացել ճիշդիստեպի կրթություն: Դեկարտը առաջինն էր, որ ներմուծեց վեկտորական մեթոդը և ֆունկցիայի գոյությունը: Ստեղծել է իր առումով կոշիկում համակարգը: Նրա գոյությունը հսկայական ուղեցույցում են բաղել մաթեմատիկայի զարգացման վրա:

Ֆերմա (Fermat) Պյեռ: (17.8.1601, Բոմոն-դե-Լոման, - 12.1.1665, Կուսար): Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս: Կրթությամբ իրավաբան, 1631-ից ուշադրել է Թուրոյի խորհրդարանում որպես խորհրդակց: Աշխատանքների մեծ մասը կրթություն է ստացել հետո որպես կոշիկ: Թվերի տեսության հիմնադիրներից է: Հայտնի են Ֆերմայի մեծ և փոքր թեորեմները:

Նյուտոն (Newton) Իսահայ: (4.1.1643, Բուլստորթ, Գրանտեմայի մերձակայք, - 31.3.1727, Քենսինգթոն): Անգլիացի ֆիզիկոս և մաթեմատիկոս: Լոնդոնի քաղաքական տեսության անգամ (1672) և նավագետ (1703): 1661-ին ընդունվել է Քենսինգթոնի համալսարանի Փրինսիպի թեթյ՝ որպես ուղիղա ուսանող: Լեյքենցի հետ միասին՝ դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի հիմնադիր: Հանրահաշվում գրողներ է մտադրությունների խնդրով:

Լայբնից (Leibniz) Գորհրդի Վիլհելմ: (1.7.1646, Լայպցիգ, - 14.11. 1716, Համբուրգ): Գերմանացի փիլիսոփա, մաթեմատիկոս, ֆիզիկոս, գյուտարար, իրավաբան, պատմաբան, լեզվաբան: Ժամանակի մեծագույն մատուցներից մեկը: Ստեղծել է Լայպցիգի համալսարանում: 1700 -ին ստեղծել է Բեռլինի գիտական ընկերությունը (հետագայում տեղեկատվական) և դարձել է նրա պրեզիդենտը: Մեծագույն մտադրությունը մաթեմատիկայում՝ Նյուտոնի հետ միասին ստեղծել է դիֆերենցիալ

և ինտեգրալ հաշիվը: Հանրահաշվում ուշիտակ է որոշիչների տեսության ստեղծման ուղղությամբ:

Չիմհաուզեն (Tschirnhausen) Էռենֆրիդ ֆոն: (1651, Նորմանդիա, - 1708): Հոլանդացի մաթեմատիկոս, ֆիզիկոս, փիլիսոփա, ֆրանսիական ԳԱ անդամ:

Կրամեր (Cramer) Դարրիել: (31.7.1704, Ժնև, - 4.1.1752, Բուճոլ, Նիմի մերձակայք, Ֆրանսիա): Դժեցուրացի մաթեմատիկոս: 1750 թ. կրտսերական է զծային հաճախությունների համակարգերի լուծման կանոնը, իրական հիմքեր է դրել որոշիչների տեսության ստեղծման համար:

Էյլեր (Euler) Լեոնարդ: (4.4.1707, Բուզև, - 7.9.1783, Պետերբուրգ): Դժեցուրացի մաթեմատիկոս, բոլոր ժամանակների խաշոբագույն մաթեմատիկոսներից մեկը: 1720-ին քնդամակ է Բուզևի համալսարանը: 1727-ից տեղափոխվել է Պետերբուրգ: Հիմնադրել ուշիտաւոնքներ և կոտարել մաթեմատիկայի համարյա բոլոր բնագոյտոնեյում:

Դը Ալամբեր (D'Alambert) Ժան Լիւրոն: (16.11.1717, Փարիզ, - 29. 10.1783, Փարիզ): Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս և փիլիսոփա, Փարիզի (1754), Պետերբուրգի (1764) և ուլ տկայեմիւոների անդամ: Դ. Դիյրույի հետ մոսնոկցել է «Հանրագիտարոնի» ստեղծման ուշիտաւոնքներին: Հիմնական մաթեմատիկական ուշիտաւոնքները վերաբերում են դիֆերենցիալ հաճախարոնների տեսույանը: Տվել է հանրահաշվի հիմնական քեորեմի ուսուլին, րոյց ու յիւրեք տարացուցումը:

Բեզու (Bezout) Էրեն: (31.3.1730, Նեմուր, - 27.9.1783, Բուս-Լոժ, Ֆրանսերբոյի մերձակայք): Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս, Փարիզի (1758) տկոյեմիւոյի անդամ: Հիմնական ուշիտաւոնքները վերաբերում են հանրահաշվին:

Լագրանժ (Lagrange) Ժոզեֆ Լուի: (25.11.1736, Թուրին, - 10.4.1813, Փարիզ): Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս և մեխանիկ: Փարիզի ԳԱ անդամ (1772): Ծնվել է սնանկացած պաշտոնյայի քնատնիքում: Մաթեմատիկոն ուսումնասիրել է ինքնուրայն, 19 տարեկանում դարձել է Թուրինի համալսարանի պրոֆեսոր: 1759-ին ընտրվել է Բեռլինի տկոյեմիւոյի անդամ, 1766-87-ին եղել է մրա պրեզիդենաը: 1787-ից ուշիտաւոն է Փարիզում՝ մոլի Նալմուրական դպրոցում, ուսու Պոլիտեխնիկական: Լագրանժը կոտարել է ճշտոնկոյից ճերդյում հալիտարոնների լուծման, սիմետրիկ բոլմոնդոնների, սնքնդիտա կոտորակների սոսումնասիրոյան հարցերում:

Լապլաս (Laplace) Պիլո Սիմոն: (23.3.1749, Բոմոն-սոն-Օժ, Նորմանդիա, - 5.3.1827, Փարիզ): Ֆրանսիացի տաուլաֆիզիկոս, մաթեմատիկոս և ֆիզիկոս: Ֆրանսիայի ԳԱ անդամ (1785), Փարիզի ԳԱ անդամ (1816): Մաոնոկցել է Ֆրանսիայի կրտկոն համակարգի րարեկոլման ուշիտաւոնքներին, Նալմուրական և Պոլիտեխնիկական դպրոցների տեղծմանը: 1790-ին ճշտոնկոյել է չափերի և կշիւների սոլոտաի մոլաադան, դեկտոլորել է չափերի մոլ հոմոնկոյրգի ստեղծման ուշիտաւոնքները: Լապլասը որոշիչների տեսության ստեղծոյներից մեկն է:

Լորաշենկի Նիկոլայ Իսիմովիչ: (20.11.1792, Ն.Նովոգորոդ, - 12.2.1856, Կազան): Ռուս ժառանգաբան: Մալորև և Կազանի համալսարանում (1807-11): Նախն համալսարանի պրոֆեսոր (1822-ից): Ոչ Լվիվյան երկրաչափաբան հիմնադիրն է: Հանրամատչիվ գրողվել է հավատարման մոսկովյա ուսմանների խնդրով: Կյանքի վերջում կորցրել է: Մահացել է ստառց յայն ճանաչում անհետա:

Աբել (Abel) Նիլս Հենրիկ: (5.8.1802 - 6.4.1829): Նորվեգացի մաթեմատիկոս, 19-րդ դարի խառնուրդային մաթեմատիկոսներից մեկը: Մեմբեր է Մատիլիցների մեծուկայրում, հոգևորականի ընտանիքում, սովորել է Օսլոյում: 16 տարեկանից ցուցաբերում է մաթեմատիկական բացառիկ ընդունակություններ: Արտասովորաբար մեծ հեղինակություն է վայելել, սակայն հույսերն իրան կենդանության օրոք չի գնահատվել: Մոռացել է քառալստից՝ լինելով ծայրահեղ սոցիալական մեջ: 1908 թ. Օսլոյում կանգնեցվել է նրա հուշարձանը: Աբելի աշխատանքները մեծ ազդեցություն են թողել ոչ միայն մաթեմատիկայի զարգացման վրա: Ըստ էության նրա աշխատանքներով են սրբանազանվում եղել մաթեմատիկայի՝ Գաուսսի տեսության, հանրամիջվածների տեսության առաջացումը: 1824-26 թթ. Աբելը ազատցուցեց, որ 4 -ից բարձր ստախճանի հավասարումները արմատաճանով կարող են չլուծվել: Նա նշեց նաև 4-ից բարձր ստախճանի կոնկրետ հավասարումներ, որանք լուծվում են արմատաճաններով: Այդ հավասարումների հետ կապված՝ Գաուսսի խմբերը տեղափոխական են: Այս սյա պատճառով անգլոֆոնական խմբերը Աբելի պատվին կոչվում են արելյան:

Շտյուրմ (Sturm) Ժակ Եարլ Դյուսմուա: (29.9.1803, Ժեն, - 18.12.1855, Փարիզ): Դյուսմուայի մաթեմատիկոս և մեխանիկ, Փարիզի ակադեմիայի անդամ (1836 թ.), Պոլյանիինկական պարոցի պրոֆեսոր (1840 թվականից): Հայանագործել է իր անունը կրող բերերը, գրել է հետևյալ գրքերը՝ „Cours d' Analyse“, - 1857 - 59, „Cours de mecanique“, - 1861, 2 հատոր:

Յակոբի (Jacobi) Կարլ Դուստալ Յակոբ: (10.12.1804, Պատայում, - 18.2.1851, Բեռլին): Գերմանացի մաթեմատիկոս: Բեռլինի ԳԱ անդամ (1836 թ.), Պետերբուրգի ԳԱ պատվավոր անդամ (1833 թ.):

Դիրիխլե (Dirichlet) Պետեր Դուստալ Լեմին: (13.2.1805, Դյուրեն, - 5.5.1859, Գյոթինգեն): Գերմանացի մաթեմատիկոս: 1831-1855 թթ. Բեռլինի համալսարանի պրոֆեսոր, 1855-ից՝ Գյոթինգենի համալսարանի պրոֆեսոր: Հիմնական աշխատանքները վերաբերվում են թվերի տեսությանը և մաթ. անալիզին:

Համիլտոն (Hamilton) Ուիլյամ Բոուսոն: (4.8.1805, Դուբլին, - 2.9.1865, Դանսինկ, Դուբլինի մերձակայք): Իռլանդացի մաթեմատիկոս: Իռլանդիայի ԳԱ անդամ, 1827-ից Դուբլինի համալսարանի պրոֆեսոր և տաղանդավոր անդամ: 1833-35 թթ. հրատարակվում աշխատության մեջ Դուսմանի հետ միասնամունակ սովել է կոմպլեքս թվերի տեսության ճշգրիտ շարադրումը, ներմուծել է թվատերմինները, փոստորեն նախանշել է վեկտորական հուշվի տեղեմուն տղիններից մեկը:

Դրասսման (Grassmann) Դեյման: (15.4.1809, Ծառապին, - 26.9.1877, Ծառապին): Գերմանացի մաթեմատիկոս, ֆիզիկոս, բանասեր: Առաջին անգամ կատարել է բազմաչափ էվկլիդես տարածության կատարումը, վեկտորական և բենզորական հուշվի հիմնադրներից մեկն է:

Կոմմեր (Kummer) Էռնստ Էդուարդ: (29.1.1810, Ջարաու, - 14.5.1893, Բեռլին): Գերմանացի մաթեմատիկոս: 1856-1884 թթ. Բեռլինի համալսարանի պրոֆեսոր: 1842 թ. ստեղծեց հանրամատչական թվերի տեսությունը, որի մերոդները հսկայական ազդեցություն բողեցին հանրամատչի և թվերի տեսություն հետազոտող գործագրման վրա: Աշխատել է նաև մաթեմատիկայի այլ բնագավառներում:

Դալուս (Galois) Էվարիստ: (26.10.1811, Ռուբ-լու-Ֆեն, Փարիզի արվարձան - 30.5.1932, Փարիզ): Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս, որի հետազոտությունները բացառիկ մեծ ազդեցություն ունեցան հանրամատչի գործագրման վրա: Մոգվարել է Լաիլերան քաղաքի լիցեյում: 1830 թ. ընդունվել է Բուրժուազայն նորմալ դպրոցը, որից հետագային է մեկ տարի հետո թողարկված մտավճեկով: Ռուզավորի դեմ հրապարակային ելույթների համար երկու անգամ ձերբակալվել է: 21 տարեկանում զոհվել է մենամարտից: Նրա որոշ կենսագիրներ կարծում են, որ մենամարտի կողմակերպումը թողարկված դրուստառնություններ ունեն: Գալուսի մաթեմատիկական աշխատանքներում զբաղվել են լամբերի տեսությամբ հիմքերը, կառուցվել է գալուսի տեսությունը, որում հավասարման արժանների որոնման խնդիրը հանգում է նրա գալուսի լամբի հասկոթյոթունների բացահայտման:

Սիլվեստր (Sylvester) Ջեմս Բոդեթ: (3.9.1814, Լոնդոն, - 15.3.1897, Լոնդոն): Անգլիացի մաթեմատիկոս: 1837-ին տալարել է Քեմբրիջի համալսարանը: 1876-83-ին Մալիի Ռուզավորական ողգմական ոկողեմիայի պրոֆեսոր, 1876-83-ին Բուրիմորի Ջ.Հալկինսոի համալսարանի պրոֆեսոր, 1883-ից Օքսֆորդի համալսարանի պրոֆեսոր: Հիմնական աշխատանքները վերաբերում են հանրահաշվին, թվերի տեսությանը, հավանականությունների տեսությանը, մեխանիկային և մաթ. ֆիզիկային: 1878-ին կոմսոթել է առաջին տմերիկյան մաթեմատիկական ամսագիրը. «The American journal of mathematics» :

Բուկ (Boole) Ջորջ: (2.11.1815, Լինկոլն,- 8.12.1864, Բալլինանեմալլ Քորթի մերձակոթ, Խոլանդիա): Իռլանդացի մաթեմատիկոս, արտամարմն: Մաթեմատիկական կրթություն չի ունեցել, թայց 1849-ին դարձել է Քորթի համալսարանի մաթեմատիկայի պրոֆեսոր, որտեղ էլ աշխատել է տմրոջ կյանքում: Դրել է մաթեմատիկական արտամարմնության կիմքերը:

Չերիշե Պաֆնուտի Լիովիլ: (14.5.1821, Օկոտաովո, Կալուգայի մարզ - 26.11.1894, Պետերբուրգ): Ռուս մաթեմատիկոս, Պետերբուրգի ոկողեմիայի ոկողեմիկոս (1859), թագմարիվ այլ երիրների ոկողեմիոների ոկողեմիկոս: 1841-ին ապարտել է Մալկովայի համալսարանը: 1848-ին Պետերբուրգում սրաշապտնել է դոկտորական դիտարոտցիո («Բուրյառառնների տեսություն»): 1850-ից՝ Պետերբուրգի համալսարանի պրոֆեսոր: Հիմնական աշխատանքները վերաբերում են մաթարկումների տեսությանը, ինտեգրալ հաշվին, թվերի տեսությանը, հավանականոթյոթունների տեսությանը և մաթեմատիկային ու նրան հարակից այլ ոլորաներին:

Ջեյի (Cayley) Ալբրուք: (16.8.1821, Բիչմոնդ,- 26.1.1895, Քեմբրիջ): Անգլիացի մաթեմատիկոս: 1863-ից Քեմբրիջի համալսարանի պրոֆեսոր: Աշխատել է քառուկապիմ ձևերի համրոսիաշվի տեսություն, որոշվեների տեսություն ուղղություններով: Համրոսիաշվում նրա ամուսնով են կոչվում հայտնի բերեմը, գործողությունների տեղադրություններ:

Էրմիտ (Hermite) Շառլ: (24.12.1822, Դյուկ - 14.1.1901, Փարիզ): Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս, Փարիզի ակադեմիայի անդամ (1856-ից): 1848-ից ուշխուսել է Պոլիսեխնիկական դպրոցում, 1869-ից՝ Փարիզի համալսարանի պրոֆեսոր: Հիմնական ուշխուսումները վերաբերում են մաթ. անալիզին, համրոսիաշվին և թվերի տեսությանը: Այսպես է. Ե. թվի տրանսցենդենտությունը:

Կրոնեկեր (Kronecker) Լեոպոլդ: (7.12.1823, Լիզնից, - 29.12.1891, Բեռլին): Գերմանացի մաթեմատիկոս: 1861-ից՝ Բեռլինյան ԳԱ անդամ, 1883-ից՝ Բեռլինի համալսարանի պրոֆեսոր: Հիմնական ուշխուսումները վերաբերում են համրոսիաշվին և թվերի տեսությանը, որտեղ շարունակել է իր ռոտացի Կոմմենի ուշխուսումները քառուկապիմ ձևերի և խմբերի տեսության վերաբերյալ: Կրոնեկերը գտնում էր, որ մաթեմատիկայում համալսարի կարող են համարվել միայն այն փաստերը, սրանք հեմվում են տմբողջ թվերի վրա: Այս սկզբումներն շրջանակներում սրայթաթում Լր Վայելշարասի՝ ֆունկցիաների տեսություն և Կոմմենի՝ բազմությունների տեսություն դպրոցների պեմ:

Ռիման (Riemann) Գևորգ Դիլպրիխ Բերնհարդ: (17.9.1826, Բրեզենցե, Համովեր - 20.7.1866, Սեբաստա, Կապիա): Գերմանացի մաթեմատիկոս: 1846-ին ընդունվել է Դյալինգենի համալսարանը, սրտեղ ուշուկերակ է Կ.Գաուսին: 1847-49-ին Բեռլինի համալսարանում ուշուկերակ է Կ.Յակոբին և Պ. Գրիլիպին: 1851-ին պաշտպանել է դոկտորական դիսերտացիա: 1857-ից՝ Դյալինգենի համալսարանի պրոֆեսոր: Մտնացել է քառալսից: Ռիմանի ուշխուսումները մեծ ազդեցություն են ունեցել մաթեմատիկայի գորգացման վրա:

Դեդեկինդ (Dedekind) Ռիչարդ: (6.10.1831, Բրաունշվեյգ, - 12.2.1916, Բրաունշվեյգ): Գերմանացի մաթեմատիկոս, Բեռլինի Աակադեմիայի անդամ (1880): Աշուկերակ է Կ. Գաուսին և Լ.Գրիլիպին՝ Դյալինգենի համալսարանում: Հիմնական ուշխուսումները վերաբերում են համրոսիաշվական թվերի տեսությանը: Նրան է պատկանում, մասնավորապես, իդեալի գաղափարի ամհամումը: Լուսիններից մեկն է, որ կատարել է իրական թվերի տեսության հիմնավոր շարադրանքը:

Յորդան (Jordan) Լամիլ: (5.1.1838, Լիւն,- 21.1.1922, Փարիզ): Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս, «Journel de math. pures et appliquees» ամսագրի հրասարակիչ (1885-1921): Աշխատումները վերաբերում են համրոսիաշվին, ֆունկցիաների տեսությանը, ստայոլոլային, բյուրեղագիտությանը: Նա հայտնի է որակա խմբերի տեսություն և գաղափարի տեսության ուղղին սիստեմատիկ դասերացների հեղինակ (1870), գրել է նաև անալիզի եռուստար դասերաց (1882-87):

Լի (Lie) Սոֆյա: (17.12.1842, Նորֆոլկ, - 18.2.1899, Քրիստիանիա, Օսլո): Նորվեգացի մաթեմատիկոս: 1872-ից Քրիստիանիայի համալսարանի պրոֆեսոր, 1886-98-ին՝ Լայպցիգի համալսարանի պրոֆեսոր: Հիմնադրել է հանրահաշվի՝ իր անունով կոչվող Լիի խմբերի տեսությունը: Նրա ուշխառամբները մեծ ազդեցություն են բոլոր նաև երկրաչափության վերափոխումներում և ժամանակակից տեսքով ճիկայացման խնդրի վրա:

Նյոտեր (Noether) Մար: (1844, Էլբենգեն, - 1921): Գերմանացի մաթեմատիկոս: Էլբենգենի համալսարանի պրոֆեսոր (1883-ից): Հիմնական ուշխառամբները վերաբերում են հանրահաշվական երկրաչափությանը:

Կանտոր (Cantor) Գեորգ: (3.3.1845, Պետերբուրգ, - 6.11.1918, Հալե, Գերմանիա): Գերմանական մաթեմատիկոս: 1967-ին ավարտել է Բեռլինի համալսարանը: Հիմնադրել է թվաբանության տեսությունը (1873), այդ տեսություն հիմնական հասկացությունները և նրանց հատկությունները: Նրա գաղափարները թեև ունեցել են հակառակորդներ (Կրոնեկեր և ուրիշ), բայց հետագայում մեծ ազդեցություն են բաղել մաթեմատիկայի զարգացման վրա:

Կլայն (Klein) Ֆելիքս: (25.4.1849, Գյոտտեբյուրգ, - 22.6.1925, Գյոթլինգեն): Գերմանացի մաթեմատիկոս: Բեռլինի Գ-Լ թղթ.-տնայում (1913): 1865-ին ընդունվել է Բոննի համալսարան, 1868-ին՝ նույն համալսարանի փիլիսոփայության դոկտոր: Եղել է հետևյալ համալսարանների պրոֆեսոր. 1872-ից՝ Էլբենգենի, 1875-ից՝ Մյունխենի, 1880-ից՝ Լայպցիգի, 1886-ից՝ Գյոթլինգենի: Հիմնական ուշխառամբները վերաբերում են ոչ Լիկվիդում երկրաչափությանը, անբնդիս խմբերի տեսությանը, հանրահաշվական համաստրուկտուրաների տեսությունը, Էյլերի և Կոսիուսի խմբերի տեսություններին: Դամանակակից մաթեմատիկայի և, մասնավորապես, երկրաչափության վերաբերյալ իր հայացքները նու ցուցադրել է 1872-ին՝ Էլբենգենում կարդացած զեկուցման մեջ՝ Էլբենգենյան ծրագրում: Ակտիվորեն զբաղվել է մաթեմատիկական կրթության խնդիրներով:

Ֆրոբենիուս (Frobenius) Ֆրիդրիանդ: (26.10.1849, Բեռլին, - 3.8.1917, Շտադտենբուրգ): Գերմանացի մաթեմատիկոս: Բեռլինի տիպոգրաֆիայի անդամ: Ավարտել է Բեռլինի համալսարանը, 1874 -ից՝ նույն համալսարանի պրոֆեսոր: Աշխատանքները վերաբերում են՝ գծային հանրահաշվականին, մատրիցների տեսությանը, վերջավոր խմբերին և նրանց մատրիցային ներկայացումներին:

Բերնսայդ (Burnside) Ուիլյամ: (2.7.1852, Լոնդոն, - 21.8.1927, Ուեստ-Ուիլքեն): Անգլիացի մաթեմատիկոս: Լոնդոնի մաթեմատիկական ընկերության անդամ, Գրինվիչի Նավային քոլեջի պրոֆեսոր (1885-ից): Վերջավոր խմբերի վերաբերյալ նրա պարզեցումները մեծապես նպաստել են խմբերի տեսության զարգացմանը: Հեղինակ է վերջավոր խմբերի տեսության դասագրքի:

Շուր (Schur) Իսայի: (1875-1941): Գերմանական մաթեմատիկոս: Բեռլինի ԳԱ անդամ (1921-ից), Բոննի համալսարանի պրոֆեսոր (1913-1916), Բեռլինի համալսարանի պրոֆեսոր (1916-1935): Հիմնական ուշխառումները վերաբերում են ֆունկցիաների և խմբերի տեսություններին: Խմբերի մասնագետն է ներկայացումների հիմնադրմանը մեկն է, որտեղ նրա տնօրեն է կոչվում մի քանի կարևոր աշխատանքներ: Կարևոր ուսումնասիրություններ ունի նաև վերջավոր խմբերի, մասնավորապես տեսությունների և Գալուայի տեսության բնագավառում:

Նյոտեր (Noether) Էմմի: (23.3.1882, Էրլանգեն, - 14.4.1935, Բրյոն-Մոր, ԱՄՆ): 1922-33 թթ. ուշխառել է արտահատարյալ պրոֆեսոր Գյոթինգենի համալսարանում: Աշխատանքները հիմնականում վերաբերվել են հանրահաշվի օբյեկտների և դաշտերի տեսություններին: Համարվում է արտաբնական հանրահաշվի հիմնադիրը: Աշխատել է նաև ֆիզիկայի բնագավառում: 1928-29 թթ. դասախոսություններ է կարդացել Մոսկվայի համալսարանում և նպաստել հանրահաշվի սարգսկի կենտրոններից մեկի ստեղծմանը:

Բիրկհոֆ (Birkhoff) Ջորջ Դերվիլ: (21.3.1884, Օվերսայել, Միչիգան - 12.11.1944, Քեմբրիջ, Մասաչուսեթս): Ամերիկացի մաթեմատիկոս: Վաշինգտոնի ԱԱ անդամ: Հարվարդի համալսարանի պրոֆեսոր (1912-ից):

Վեյլ (Veyl) Հերման: (9.11.1885, Էյմսհորն, Շլեզվիգ-Հոլշտայն, - 8.12.1955, Ցյուրիխ): Գերմանական մաթեմատիկոս: Ցյուրիխի պոլիտեխնիկական ինստիտուտի պրոֆեսոր (1913-1930), Գյոթինգենի համալսարանի պրոֆեսոր (1930-1933), 1933-ից ուշխառել է Պրինստոնի Հետազոտությունների ինստիտուտում: Հիմնական ուշխառումները վերաբերում են ֆունկցիաների տեսությունը, անընդհատ խմբերին և նրանց ներկայացումներին, մասնավորապես տեսություններ:

Շմիդտ Օտտո Հոլմիլդ: (18.9.1891, Մագդեբուրգ, - 7.9.1956, Մոսկվա): Մոսկվայի համալսարանի մաթեմատիկոս, տասնաթիվիկոս և գեոմետրիկոս: ԽՍՀՄ ԳԱ անդամ (1935-ից), ՌԽԽՄՀ ԳԱ անդամ (1934-ից), ԽՍՀՄ հերոս (1937): Ավարտել է Կիևի համալսարանը (1913), ապա համալսարանի դոցենտ (1916), Մոսկվայի Անատոլի Ինստիտուտի պրոֆ. (1820-1923), Մոսկվայի երկրորդ համալսարանի պրոֆ. (1823-1926), Մոսկվայի համալսարանի պրոֆ. (1826-1956), քաղաքագույն հանրահաշվի ստեղծմանի վարիչ: Գիտական հետազոտությունները սկսել է Գ. Ա. Գրուսեի ղեկավարությամբ: Հանրահաշվական ուշխառումները վերաբերում են խմբերի տեսությունը: Մոսկվայի հանրահաշվական դպրոցի հիմնադիրն է: Տարագրել է նաև խմբերի տեսության դասագիրք (1914, 1933):

Չերտասկի Նիկոլայ Գրիգորի: (3.6.1894, Կոմենեյ-Պոլսկի, Խմենյեցկոյ մարզ, - 2.7.1947, Մոսկվա): Մոսկվայի համալսարանի մաթեմատիկոս, ԽՍՀՄ ԳԱ քաղաքագույն անդամ (1929-ից): Ավարտել է Կիևի համալսարանը (1916): Կոզանի համալսարանի պրոֆեսոր (1928-ից): Հիմնական ուշխառումները վերաբերում են ժամանակակից հանրահաշվին:

Նովիկով Պյոտր Մեդվեդովիչ: (15.8.1901, Մոսկվա - 9.1.1975, Մոսկվա): Սովետական մարեմատիկոս, ԽՍՀՄ ԳԱԼ անդամ՝ 1960, քոյա-անդամ՝ 1953: Ավարտել է Մոսկվայի համալսարանը (1925): 1934-ից աշխատել է ԽՍՀՄ ԳԱ Սանկտսկի տնիվ. ինստիտուտում, 1957-ից՝ աթամարանայան բուժնի վարիչ: Հիմնական աշխատանքները վերաբերում են բազմոչափային տեսությունը, մոդ. արամարանայանը և խմբերի տեսությունը: Իր աշակերտ Ս. Ալլանի հետ միասին լուծել է սարբերական խմբերի մասին Բեքմուտյի հայտնի ու դժվարագույն խնդիրը: Հեղինակ է մաթ. արամարանայանը նվիրված դասագրքի:

Վանդեր-Վարդեն (Van der Varden) Բարսեղ Լևոնյան: (2.2.1903, Լմասեր-դում - 12.1.1996, Զյուրիխ): Հոլանդացի մարեմատիկոս: Աշխատել է հետևյալ համալսարանների պրոֆեսոր՝ Գյոթինգենի՝ 1928-ից, Լայպցիգի՝ 1931-45, Լմասերդումի՝ 1948-ից, Զյուրիխի՝ 1951-ից: Հիմնական աշխատանքները վերաբերում են հանրահաշվին, հանրահաշվական երկրաչափությունը և մարեմատիկայի պատմությունը: Նրա «Բանաճանկից հանրահաշվի» գրքով (1930-31) ախարավում է ժամանակակից թնդիտնոր հանրահաշվի ստեղծման շրջանը:

Նյուման (Neumann) Ջոն Ֆանոչ Ֆոն: (28.12.1903, Բուդապեշտ - 8.2.1957, Վոշինգտոն): Ամերիկացի մարեմատիկոս, Ամերիկայի ԱԼԼ անդամ: Ավարտել է Բուդապեշտի համալսարանը (1926), 1933-ից աշխատել է Պրինստոնի հետազոտության հետազոտությունների ինստիտուտի պրոֆեսոր: Հիմնական աշխատանքները վերաբերվում են ֆունկցիոնոլ տնայիգին, դասական և բվանասային մեխանիկային: Զբաղվել է նաև մաթ. արամարանայանը, առայտգիտական խմբերով: Մեծ ներդրում ունի ԷՀՄ-երի ստեղծման գործում:

Ստրոշ Լեբաանդր Գևանդիեիչ: (14.11.1908, Ամոլենակ - 18.5.1971, Մոսկվա): Սովետական մարեմատիկոս: Ավարտել է Ամոլենակի համալսարանը: Մոսկվայի համալսարանի պրոֆեսոր (1936), բործրագույն հանրահաշվի տնրիտնի վարիչ: Նշանակալից հետազոտություններ է կատարել խմբերի, օղակների և կավարների տեսություններում: Խմբերի տեսություն ոտուչին ամրաչափված մնագրությունը հեղինակը: Նրա «Բարծրագույն հանրահաշվի դաղներացր» ստանյակ տարիներ հիմնական գրատայիր է եղել ԽՍՀՄ բոլոր համալսարաններում: Ունի թնդիտնոր հանրահաշվին նվիրված մնագրություն: Նրան կում նրա աշակերաներին են աշակերտել ԽՍՀՄ հանրահաշվադանների գգալի մաթ:

Մալգե Անաստի Իվանովիչ: (14.11.1909, Միշերսնոկ, Շուտուրսկի շրջան, Մոսկվայի մարզ. - 7.7.1967, Նովոսիբիրսկ): Սովետական մարեմատիկոս, ԽՍՀՄ ԳԱԼ ակադեմիկոս (1958, քոյա-անդամ՝ 1953): Ավարտել է (1931) Մոսկվայի համալսարանը, 1932-60-ին աշխատել է Իվանովյի մանկավարժական ինստիտուտում (1943-ից՝ պրոֆեսոր), 1942-60-ին՝ Սանկտսկի տնիվ. ինստիտուտում, 1960-67-ին՝ ԳԱ Սիբիրի բուժանմանքում: Հիմնական աշխատանքները վերաբերում են հանրահաշվին և մարեմատիկական արամարանայանը: Մի բունի մնագրությունների և դասագրքերի հեղինակ է:

Բարձրագույն հանրամատչիվ

- Մորոշ Ա. Գ. Բարձրագույն և հանրամատչիվ դասընթաց, Երևան, Լույս, 1965:
Մկիճկյան Յու. Մ. Բարձրագույն հանրամատչիվ, Երևան, ԵՊՀ հրատարակչություն, 1983:
Кострикин А. И. Введение в алгебру, Москва, Наука, 1977.
Куликов А. Я. Алгебра и теория чисел, Москва, Высшая школа, 1979.
Ляпин Е. С. Курс высшей алгебры, Москва, Учпедгиз, 1955.
Ляпин Е. С., Евсеев А. Е. Алгебра и теория чисел, Москва, Просвещение, 1978.
Окунев А. Я. Высшая алгебра, Москва, Просвещение, 1966.
Проскуряков И. В. Числа многочлены, Москва, Просвещение, 1965.
Сборник задач по алгебре / Под ред. А. И. Кострикина, Москва, Наука, 1987.
Фадеев Д. К. Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре, Москва, Наука, 1977.
Фадеев Д. К. Лекции по алгебре, Москва, Наука, 1984.
Heuser, H., Lehrbuch der Analysis I, Teubner 1991.
Jacobson, N., Basic Algebra I/II, Freeman 1974/1980.
Meyberg, K., Algebra 1 / 2, Hansar 1980/1976.
Stelzer, E. H. K., Mathematica, Addison-Wesley 1993.

Գծային հանրամատչիվ

- Դեբիանդ Ի. Մ. Գծային հանրամատչիվներ գծային հանրամատչիվից, Երևան, Լույս, 1976:
Аргин Э. Геометрическая алгебра, Москва, Наука, 1969.
Бурбаки Н. Алгебранные структуры: линейная полилинейная алгебра, Москва, Физматгиз, 1962.
Воеводин В. В. Линейная алгебра, Москва, Наука, 1974.
Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, Москва, Наука, 1967.
Дидонне Ж. Линейная алгебра и элементарная геометрия, Москва, 1972.
Мальцев А. И. Основы линейной алгебры, Москва, Наука, 1970.
Проскуряков М. М. Сборник задач по линейной алгебре, Москва, Наука, 1967.
Халмош П. Конечномерные векторные пространства, Москва, Мир, 1963.
Чеботарев Н. Г. Введение в теорию алгебр, Москва, Хостехиздат, 1949.
Axler, S., Linear Algebra done right, Springer 1995.
Golub, G. H., van Loan, C. F., Matrix computations, John Hopkins University Press 1993.
Halmos, P., Naive Mengenlehre, Vandenhoeck und Ruprecht 1976.

- Horn, R. A., Johnson, C. A., *Matrix Analysis*, Cambridge University Press 1985.
 Huppert, B., *Angewandte Lineare Algebra*, de Gruyter 1990.
 Koecher, M., *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, Springer 1992.
 Kowalsky, H. J., Michler, G., *Lineare Algebra*, de Gruyter 1995.
 Lorenz, F., *Lineare Algebra I/II*, BI-Wissenschafts-Verlag 1988.
 Scharlau, W., *Quadratic and Hermitian Forms*, Springer 1985.
 Schreier, G., Storch, U., *Lehrbuch der Algebra II*, Teubner 1988.
 Zieschang, H., *Lineare Algebra und Geometrie*, Teubner 1997.

Ընդհանուր հանրահաչիվ

- Барти Т., Биркгоф Г. Современная прикладная алгебра, Москва, Мир, 1976.
 Бахтурин Ю. А. Основные структуры современной алгебры, Москва, Наука, 1990.
 Биркгоф Г. Теория структур, Москва, ИЛ, 1952.
 Боревич Э. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел, Москва, Наука, 1964.
 Бурбаки Н. Алгебра, Москва, ИЛ, 1962, Москва, ИЛ, 1971.
 Ван-дер-Варден Б. А. Современная алгебра, ч. 1, ч. 2, Москва, Гостехиздат, 1947.
 Зарисский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра, ч. 1, 2, Москва, ИЛ, 1963.
 Калужнин Л. А. Введение в общую алгебру, Москва, Наука, 1973.
 Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп, т. 1, 2, Москва, Мир, 1972.
 Кон П. Универсальная алгебра, Москва, Мир, 1968.
 Курош А. Г. Лекции по общей алгебре, Москва, Наука, 1962.
 Курош А. Г. Общая алгебра, Москва, Наука, 1974.
 Ленг С. Алгебра, Москва, Мир, 1968.
 Малышев А. И. Алгебраические системы, Москва, Наука, 1970.
 Скорняков А. А. Элементы общей алгебры, Москва, Наука, 1983.
 Фрид Э. Элементарное введение в абстрактную алгебру, Москва, Мир, 1979.

Օղակների տեսություն

- Виноградов И. М. Основы теории чисел, Москва, Наука, 1972.
 Джекобсон Н. Теория колец, Москва, ИЛ, 1947.
 Джекобсон Н. Структура колец, Москва, ИЛ, 1961.
 Серр Ж.-П. Курс арифметики, Москва, Мир, 1972.
 Фейс К. Алгебра, кольца, модули и категории, т. 1, 2, Москва, Мир, 1979.
 Херстейн И. Некоммутативные кольца, Москва, Мир, 1972.

Խմբերի տեսություն

- Александров П. С. Введение в теорию групп, Москва, Учпедгиз, 1951.
 Баумгартнер Л. Теория групп, Москва, ОНТИ, 1934.
 Бурбаки Н. Группы и алгебры, Москва, ИЛ, 1972.
 Гроссман И., Магнус В. Группы и их графы, Москва, Мир, 1971.
 Калужнин А. А., Сузданский В. И. Преобразования и перестановки, Москва, Наука, 1985.
 Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп, Москва, Наука, Физматлит, 1972.
 Курош А. Г. Теория групп, Москва, Наука, 1967.
 Ляпин Е. С., Лесохин М. М. Упражнения по теории групп, Москва, Наука, 1967.
 Лобарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике, Москва, Мир, 1958.
 Плоткин Б. И. Группы автоморфизмов алгебраических систем, Москва, Наука, 1966.
 Серр Ж.-П. Линейные представления конечных групп, Москва, Мир, 1970.
 Сурушенко Д. А. Группы матриц, Москва, Наука, 1972.
 Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы, Москва, Мир, 1965.
 Холл М. Теория групп, Москва, ИЛ, 1962.
 Шмидт О. Ю. Абстрактная теория групп, Москва, ОНТИ, 1933.
 Robinson D. J. S., A Course in the Theory of Groups, Springer 1996.

Դասերի տեսություն

- Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля, т. 1,2, Москва, Мир, 1988.
 Постников М. М. Теория Галуа, Москва, Физматгиз, 1963.
 Чеботарев Н. Г. Основы теории Галуа, Москва, ОНТИ, ч. 1, 1934; ч. 2, 1937.

Բազմություններ և տոնջություններ

- Зыков А. А. Теория конечных графов, Москва, Наука, 1969.
 Коэн П. Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза, Москва, Мир, 1969.
 Столл Р. Р. Множества, логика, аксиоматические теории, Москва, Просвещение, 1968.
 Шрейдер Ю. А. Равенство, сходство, порядок, Москва, Наука, 1971.

ՏԵՐՄԻՆՆԵՐԻ ՑԱՆԿ

Ակտրիքի մ Գետուսի 207	-մխանդումի 387
-Էվիլիյի 352	-տարբի 417
Ածանցյալ 308, 310	Ավանդորդիկը գծային համարադրվի 160
-բազմանկյանի 371	-դաշտի 426
-խմբի 308	-խմբի 312
Անլուսակ երկտող 25	-ներքին 314
-ձեզի-Պարսպադասի 61	-վերադարձված տարածության 239
Անկամ ուղտ 362, 387	-օգտի 103
-ավագ 362, 387	Արգունհա կանգնալու թվի 108
-բարձրագույն 391	-ժամկցային 43
-համակարգի 201	Արդյունք 57
-մատրիցի 163	Արմա սեփական 242
Անկումնալի մատրիցի 174	-ժամկցային 43
Անհալ 201	Արմա 111
Անհավասարության համակարգ 151	-բազմանկյանի 364
-Մոշ-Մանյակալի 151	-բազմապատիկ 373
Անանց իրական 104	-բնութագրի 244
-կեղծ 104	-համակարգ 114
Անհալության անդրադարձի 28	-պարզ 373
-անկումնալի 23	-հ-ապատիկ 373
-անհավասարության 25	-ճ-թղ առաջնի 111
-բազմության լիա տրված 33	Արտադրյալ 17
-պատարի 24	-արտադրատիկությունների
-կրկնի 23	-դեկարտյան 20, 279, 280
-լիա 23	-համակարգի 267
-լիա 52	-լիա ճառի 59
-կարգի 52	-կրկնի 319
-կրկնային 50	-կանգնալու թվերի 99
-համակարգադարձի 29	-հաջորդականությունների 353
-համակարգադարձի 32	-մատրիցների 166
-համակարգի 30	-միայն 143
-համակարգային 23	-միայն ցրականորեն որոշված 150
-ոչ լիա կարգի 52	-միայն չվերադարձ 144
-վիտանցի 33	-միայն և մատրիցի 170
Ատիհան 416	-միայն և գծային արտադրատիկում 225
-անկարգության 81	-տեղադրությունների
-բազմանկյանի 387, 391	-ուղի 279, 280, 281
-բնութային 416	-ժամկցային 60
	Արտադրատիկում 43

-բնական 50	Լնուրագրիչ օդակի 329
-գծային 213	Բուլիան 14
-նույնական 305	Գազար գլաֆի 24
Բազիս 127	Գործակիչ 384
-յուշտի նկատմամբ	-սովալ 362
-ինդակցիայի 55	-բազմանդամի 362, 384
-օրրոգոնալ 146	-կեղծ ճառի 100
-օրրոնործավորված 152	-հավասարոճների համակարգի 201
Բազմանդամ 384	-հմանադրության ??
-բնուրագրիչ 243	Գործուարչուն հանրահաշվական 57
-կախված 386	-աղյուսիլ 58
-մինիմալ 417	-արտադրյալային 58
-չբերվող 369	-բաշխական 70
-պրիմիտիվ 377	-գումարային 58
-սինտորիկ 391	-խմբային 71
-տարբերական սինտորիկ 392	-հակադարձելի 67
$-E_1, \dots, E_n$ փոփոխականներից 386	-միավորով 65
Բազմապատիկ 338	-մուլտիպլիկատիվ 58
-սամեամիտք բնդհանուր 342	-չեզոք տարրով 65
Բազմություն 9	-տեղավորելի 62
-գծորեն կարգավորված 54	Գրառում աղյուսիլ 54
-յիտվին կարգավորված 54	-գումարային 54
-կարգավորված 54	Գրաֆ 24
-մասնակի կարգավորված 54	-ամեհություն 24
-օրրոգոնալ 147	-կողմնորոշված 24
Բաժանարար 338	Գումար 16
-ամենամեծ բնդհանուր 342	-գծային արտադաստիերոմների 223
-կրայի 94	-հերաուարածուրյունների 140
-միավորի 324	-ըստ մոդուլի 58
-նորմալ 264	-խլեակների 319
-տարրի 338	-կոմպլեքս թվերի 99
-տրիվիալ 339	-հաջորդականությունների 353
Բաղադրիչ կարգավորված զույգի	-մատրիցների 166
-առաջին 20	-մնացքների դասերի 322
-երկրորդ 20	-սինտորիկ 59
Բաղդատում լատ խլեակի 320	-տարրերի 58
-ըստ մոդուլի 320	-ուղիղ 141, 142, 376
Բանաճե Կարդամույի 407	Դաշտ 96
-Կրամերի 206	-գրուսյան ծաղիոնալ թվերի 333
-Բուստրի 110	-թվային 422
-Ախտի 374	-իրական թվերի 96
Բիլեկցիա 47	-կոմպլեքս թվերի 102

- համըստիաշխարհի 424
- համըստիաշխարհի փակ 402
- ուսումնական 426
- վերլուծությունների 371
- բանասերների 332
- Դառ համըստիաշխարհի 37
- հարակից աշ 264
- հարակից ձևի 261
- մոտեցումների 321
- Դ-համըստիաշխարհի 37
- Կենտրոններ 415
- Կենտրոն 220
- Կիրառականություն 82
- Կիրառականություն 13
- Կիրառականություն սեփական 14
- Կիրառական 97
- Կիրառական 77
- միավոր 78
- ցիկլային 254
- ուսումնական 291
- օրգանական 251, 290
- Կիրառականություն 161
- Կիրառականություն 198
- Կիրառականություն 136
- գրական 137
- մեկուսացված Կիրառականություն 138
- Կիրառական 91
- մեկուսացված Կիրառականություն 383
- Կիրառականություն վերականգնող 150
- ցիկլի 283
- Ջուլի կիրառականություն 20
- Ընդհանուր թույլատրելի համըստիաշխարհի 421
- ուսումնական 415
- խմբի 311
- համըստիաշխարհի 416
- համըստիաշխարհի F -ի նկատմամբ 415
- համըստիաշխարհի առաջացած 415
- պարզ 356
- պարզ համըստիաշխարհի 416
- պարզ տրանսպոնցիոն 356
- վերջավոր 416
- տարրերով առաջացած 415
- քառակուսային 425
- 71-տարածական տրանսպոնցիոն 386
- Խառանգական 138
- Խնդիրներ Կենտրոն 364
- Կարտայի 286
- վերլուծական հիմնական 340
- Ժողովարհ-Կիրառական 295
- Լազարյանի 263
- խմբի Կենտրոնների 276
- Կարտ 298
- Կրոնիկեր-Կարտայի 203
- համըստիաշխարհի հիմնական 402
- մոտեցումով բաժանման վերաբերյալ 367
- Շտուրմի 411
- սիմետրիկ բազմանդամների հիմնական 392
- Կարտայի 97
- վերջավոր առաջին խմբի հիմնական 301
- Կարտայի 287
- օրգանների Կենտրոնների 328
- Խիստ զարգացած Կենտրոն 332
- Կարտայի 99
- համըստիաշխարհի 424
- նշանականությունների 410
- Կարտ 317
- Կարտայի 318
- մոտեցում 324
- պարզ 323
- Կենտրոնների զարգացած համըստիաշխարհի 159, 159
- Կարտայի տարածականությունների 152
- խմբի 73
- վերլուծական տարածականությունների 132
- օրգանների 89
- Կարտայի Կարտայի
- Կարտ 164
- Կարտայի 45
- Կենտրոնական անդամի մասին 399
- Կարտայի
- Կարտայի օրգանական 147
- համըստիաշխարհի 195
- Կարտայի համըստիաշխարհի 202
- Ֆունկցիոնական 211

- Խումբ 71
 -սրբեկան 84
 -ամբողջ թվերի գումարային 71
 -անվերջ 72
 -առանց պարման 296
 -սովորաբար ֆիզմների 241, 313
 -ինքնահամապատասխանների 71
 -կրական թվերի արտադրյալային 71
 -իրական թվերի գումարային 71
 -լրիվ գծային 178
 -լրիվ ճառագայթային 178
 -լուծելի 310
 -ծնված ենթաբազմությամբ 259
 -կոմպլեքս թվերի արտադրյալային 102
 -կոմպլեքս թվերի գումարային 102
 -հատուկ գծային 262
 -ճառագայթային 291
 -միաստիկական
 -մոնոմիալ 292
 -ներքին սովորաբար ֆիզմների 314
 -նիկատոնո 305
 -նշանափոխ 83
 -պարզ 265
 -պրոյեկտիվ հատուկ գծային 293
 -ռացիոնալ թվերի արտադրյալային 71
 -ռացիոնալ թվերի գումարային 71
 -սիմետրիաների լրիվ 80
 -վերջավոր 72
 -տեղադրությունների 287
 -տեղադրությունների լրիվ 80
 -ցիկլային 254
 -ունկտոր 291
 -Հլային 285
 -քվադրատիկային 258
 -քվատերնիոնների 305
 -օգտիկ գումարային 84
 -օրթոգոնալ 290
 Խմբեր իզոմորֆ 73
 Շնորհ խմբի 254
 Կանոն Կրամերի 206
 Կարգ գծային 53
 -խմբի անվերջ 72, 256
 -խմբի վերջավոր 72, 256
 -ճառագայթի 164
 -տարրի 256
 Կոմպոն խմբի 302, 305
 Կոպ գրաֆի 24
 Կոմբինացիոն գծային 125
 Կոմուտատոր 304
 Կոդիցիոնալ վեկտորի 131
 Կորիզ 50, 273, 327
 -արտադրատեղան 50
 -գծային արտադրատեղան 219
 -խմբերի հոմոմորֆիզմի 279
 -հակալարժ 67
 -հակալար 67
 -օգտակարի հոմոմորֆիզմի 327
 -օպերատորի 219
 Համալուծ 425
 -գծային տարածության 227
 -կոմպլեքս թվի 102
 -ճառագայթ 290
 -քվատերնիոնի 157
 Համապարզ անհամադրելի 203
 -գծային հավասարումների 201
 -գծային անկախ 125
 -գծային կախյալ 125
 -լրիվ 127
 -լուծումների ֆունկցիոնալ 211
 -համասեռ 208
 -համատեղելի 203
 -համարժեք 204
 -Հաուսդորֆ 408
 -սեղանած 207
 -օրթոգոնալ 145
 Համաբերություն 35, 35
 Հայտնի լեյբնիցիզմի 413
 Հոմոմորֆիզմի գծային 155
 -բաժանումով 156
 -քվատերնիոնների 157
 Հավասարության 35
 Հավասարում բնութագրիչ 243, 244
 -լուծելի բառարկության արմատանշաններով 426

- շրջանի բաժանման 116
- Հատում
- բազմությունների 17
- խլեպների 318
- Հատկության կրճատման 95
- Հարթության կոմպլեքս 104
- Հոմոմորֆիզմ բնական 271, 326
- խմբերի 271
- օղակների 325
- Հետախոյանության տարրական համակարգի 204
- տարրական մատրիցի 175
- օրրոգումալ 248
- Իհսա իբրական 100
- Կեղծ 100
- պարբերական 453
- Լատիս 163
- տնկառնողծային 174
- բնորոշողի 243
- գծային արտապատկերման 232
- հոսմակառնածն 289
- գլոյական 166
- ընդհանրած 203
- հիստոռնկառնածն 289
- հիստոր 168
- մոնոմիալ 292
- շրջած 191
- չվերլուծվող 183
- սեղանածն 176
- սկզբնալ 233
- տարրական 171
- տեղադրություն 292
- ունիտար 290
- բառակառնային 164
- օրրոգումալ 250, 290
- Լատիսցիներ նման 234
- Մարմին 96
- Մարտ Դատար 206
- Մյանկառ 384
- Մյանկառ 72
- Կեղծ 100
- նման 384
- Մյանկառ բազմությունների 16
- Մյանկառ 195
- մատրիցի 199
- Դրո կարգի 199
- Մոյոլ կոմպլեքս րվի 105
- Նախապատկեր 26
- Նախադրություն 216
- Նախ կոմպլեքս րվի 150
- քվատերնիոնի 157
- Մ-յակ 122
- Ռոշի մատրիցի 186
- Հանդերձնոյի 195
- Հատկականություն 129
- գծային հանրահաշվանների 156
- Պատկեր 26
- բազմության 43
- գծային արտապատկերման 220
- Պարբերական մաս լանի
- Պարբերականություն 377
- Պրոցես օրրոգումալացման 146
- բ-խումբ 307
- բ-տարր 296
- Իհսա գծային արտապատկերման 221
- հերարազմություն 129
- մատրիցի 178
- ույունային 174
- վերլուծների համակարգի 129
- տարային 173
- Իհսառնում 396
- Սկառ 24
- Սկզբում բազմականության ինտուիտիվ 10
- վերացարկման ինտուիտիվ 11
- Սյուն մատրիցի 163
- Սարկոտր գծային օպերատորի 247
- Սուրբեկցիա 44
- Հեկտր սեղանական 242
- օրրոգումալ 147
- Հեկտրներ օրրոգումալ 145, 145
- Հերադրում 47
- Հերադրում կանոնական 341
- որոշիչի հիմնական 187
- Հրադրում 44
- Տարադրում 45

Տարածության գծային 122	-մատրիցի 202
-էվկլիդեսյան 150	-նորմալ 384
-բազմաանկյուն 146	Տիրույթ արժեքների տանջության 26
-խրական 122	-սարժակների ֆունկցիայի-
-կոմպլեքս 122	-սանդղաձևային 96
-սկալյար տրամադրյալով 144	-որոշման տանջության 26
-վեկտորական 122	-որոշման ֆունկցիայի 43
Տարբերություն բազմաթիվների 18	Տարբեր մատրիցի 163
-սինտերիկ 59	Տրամադրվելիս 180
-ստորերի 87	Տրանս 38
Տարբեր անշարժ 283	Զիլլ 283
-բազմաանկյուն 9	Զիլլեր անկյուն 284
-բազմաանկյուն 340	Զույգի թվի 400
-բազմաանկյուն 59	Հալ ինդուկցիայի 55
-համադրանքի 67	Հվատերմիոն 157
-համադրանքական 416	Օդ 24
-մաթեմատիկ 54	Օդակ 84
-մեծագույն 54	-բազմաանկյունների 386
-միաբազմաանկյուն վեկտորական	-գառառյան 341
-միանկյուն 54	-գառառյան սանդղակների 332
-չեզոք 65	-գլխավոր ինդուկցիայի 343
-չեզոք խմբի 72	-գրություն 91
-ստոր 340	-գրությունական 93
-ստոր արտադրանքների 340	-էվկլիդեսյան 350
-տրանցլյունտ 356	-խմբի գրությունական 85
-վեկտորական 54	-միաբազմաանկյուն 94
Տարբեր տանջանքով 339	-տեղափոխական 94
-բազմաանկյուն բազմաանկյուն 320	Օդակների ինդուկցիա 89
-համադրանք 425	Օպերատոր գծային 227
-համադրանքի 53	-համադրանքի 239
-համադրանքական անկյուն 384	-ստոր անկյունով 247
-վեկտորական անկյուն ստոր 349	Ֆակտոր-բազմաանկյուն 39
Տեղափոխություն 81	Ֆակտոր-խմբի 269
-գույն 81	Ֆակտոր-օդակ 322
-լինեա 81	Ֆունկցիա 41
Տեղափոխություն 50	-բազմ 60
-գույն 82	-վեկտորական 44
-լինեա 82	Ֆունկցիոնալ տանջություն 41
-ցիկլային 283	.0
-միաբազմաանկյուն 82	
Տեղափոխություն 109	
-կոմպլեքս 362	

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐՈՒՇՈՒԹՅՈՒՆ	7

Գլուխ 1

ՆԵՐԿՏԵՂ ԼՈՐՆԱԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ	9
1. Բազմություններ	9
1.1. Բազմություն	9
1.2. Խնդրադրություն	13
1.3. Գործարարություններ բազմությունների հետ	15
2. Երկտեղ տառադրություններ	20
2.1. Բազմությունների զերոյության որոշողություն	20
2.2. Երկտեղ տառադրություն	22
2.3. Երկտեղ տառադրությունների սրտիկերում	24
2.4. Էտիկայի տիրույթներ	26
3. Էտիկայի տիրույթների հասկացություններ	28
3.1. Էթիկայի տիրույթների հասկացություններ	28
3.2. Համայնագիտություն և համայնագիտություն	30
3.3. Փոփոխություն	33
4. Համայնագիտություն	34
4.1. Համայնագիտություն և համայնագիտություն	34
4.2. Համայնագիտության գոտի	37
4.3. Տրամադրություն և համայնագիտություն	38
5. Ֆունկցիաներ և որոշողություններ	41
5.1. Ֆունկցիա	41
5.2. Ֆունկցիաների համայնություններ	43
5.3. Տեսություններ	48
5.4. Համայնագիտություն և որոշողություն	49
6. Նորմի տառադրություն	51
6.1. Նորմի տառադրություն	51
6.2. Նորմի համայնություններ	53
6.3. Մոդալիտիտիտի ինտերպրետի տիրույթ	55

Գլուխ 2

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՄԱՍԻՆ	57
7. Համայնագիտության գործողություններ	57
7.1. Երկտեղ համայնագիտության գործողություն	57
7.2. Երկտեղ բազմությունների միջև տարած գործողություններ	58
7.3. Գործողությունների լայն տարած	58
7.4. Բազմության բաղադրի միջև տարած գործողություններ	59
7.5. Ֆունկցիաների բազմությունների գործողություն	59
7.6. Հայտնիությունների տարածություն	61
8. Գործողությունների համայնություններ	62

8.1. Տեղադրվածություն	62
8.2. Զուգայնելություն	64
8.3. Չեզոք տարր	65
8.4. Համարարվածություն	67
8.5. Բաշխամասություն	70
9. Խմբեր	74
9.1. Խումբ	71
9.2. Խմբերի իզոմորֆիզմը	73
9.3. Ինքնախումբ	77
10. Տեղադրություններ և տեղադրությունների խմբեր	80
10.1. Տեղադրությունների լիկ խումբը	80
10.2. Տեղադրություններ	81
10.3. Նշանակալի խումբը	83
11. Օպերաներ	84
11.1. Օպերա	84
11.2. Օպերի տարրերի համարությունները	87
11.3. Օպերաների իզոմորֆիզմը	89
11.4. Ինքնօպերա	91
11.5. Օպերաների համարությունները	93
11.6. Ընթացություն տիրույթներ, մարմիններ, դաշտեր	96
Գլուխ 3 ՀԱՄԱՐԱՆԱԿԱՆ ԹԵՄԵՐ	99
12. Կոմպլեքս թվերի դաշտը	99
12.1. Կոմպլեքս թվեր: Գաղափարություններ կոմպլեքս թվերի հետ	99
12.2. Կոմպլեքս թվերի դաշտը	101
12.3. Կոմպլեքս թվի համադրում	102
13. Կոմպլեքս թվի համակոմպակտության տեսքը	104
13.1 Կոմպլեքս հարթությունը	104
13.2. Կոմպլեքս թվի մարտկ	105
13.3. Կոմպլեքս թվի համակոմպակտության տեսքը	108
14. Արժույթներ Կոմպլեքս թվերից	111
14.1. n -րդ ստորիճանի արժույթի բաժանումը	111
14.2. 1 -ի n -րդ ստորիճանի արժույթները	113
14.3. Շրջանի բաժանման համադրությունը	115
Գլուխ 4	
ՎԵՎՏՈՐԱԿԱՆ, ՏԱՐԱԿԱՆԱԿԱՆ ԵՎ ՄԱԿՐՈՎԵՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ	119
15. Վեկտորական տարածություններ	119
15.1. Վեկտորական տարածություն	119
15.2. Վեկտորական տարածություն օրինակներ	122
15.3. Գծային կոմպակտություն և սեմիկոմպակտություն	125
15.4. Բազիս և մասկ	127
15.5. Վեկտորի կոորդինատները	130

15.6. Վերադարձված տարածությունների խզանքի խզմը	132
16. Ենթատարածություն	136
16.1. Ենթատարածության տեղամասեր	136
16.2. Գծային բաժանում	138
16.3. Ենթատարածությունների գտնադրում և աշխատանք	140
17. Միջակայք արտադրության վերադարձված տարածություններ	143
17.1. Վերադարձված միջակայք արտադրություն	143
17.2. Վերադարձված օրգանական համակարգը և օրգանական բաժանում	145
17.3. Օրգանական կոմպոնենտ	147
17.4. Էվոլյուցիոն վերադարձված տարածություններ	149
17.5. Էվոլյուցիոն տարածությունների խզանքի խզմը	152

Գլուխ 5

ԳԵՆԵՏԻԿԱ, ՀԵՐԵԴԻԿԱ, ԵՆԴՐԱԿԱՆ ԵՎ ՄԵԼԻՏԻՑԻԱ	155
18. Գծային հանրահաշիվներ	155
18.1. Գծային հանրահաշիվ	155
18.2. Հիմնականների հանրահաշիվ	157
18.3. Գծային հանրահաշիվների խզանքի խզմը	159
18.4. Ենթահանրահաշիվ	161
18.4. Միջակայքի կոմպոնենտ	162
19. Մատրիցների հանրահաշիվ	163
19.1. Մատրիցներ	163
19.2. Մատրիցների գտնադրված խանգ	165
19.3. Մատրիցների օրգան	166
19.4. Մատրիցների վերադարձված տարածություններ	170
19.5. Մատրիցների գծային հանրահաշիվ	172
20. Մատրիցի տեսություն	173
20.1. Մատրիցի տեսություն և սյունային տեսություն	173
20.2. Տարրական ձևափոխություններ	175
20.3. Մատրիցի տեսություն	177
21. Հավանականության մատրիցներ	178
21.1. Հավանականության մատրիցներ	178
21.2. Տրանսֆորմացիաներ	180
21.3. Հիմնական մատրիցներ	183
21.4. Մատրիցների արտադրության տեսություն	184

Գլուխ 6

ՈՐԳԱՆԻԶՄԱՆ	185
22. Որգանքներ, նրանց կառուցվածքը և ֆունկցիաները	185
22.1. Որգանքի տեղամասեր	185
22.2. Որգանքի կառուցվածքը և ֆունկցիաները	187
23. Որգանքի կառուցվածքը և ֆունկցիաների հետ	192
23.1. Մատրիցների արտադրության տեսություն	192

23.2. Հանրադարձ մատրիցի որոշիչը	194
23.3. Մատրիցի շվերտմիայ լինելու հասցը նրա որոշիչի հետ	194
24. Միտոքներ և համընտացվական լրացումներ	195
24.1. Միտոք և համընտացվական լրացում	195
24.2. Որոշիչի վերածումը ըստ տայի կամ սյուն	197
24.3. Հանրադարձ մատրիցի հաշիվներ	197
24.4. Մատրիցի տանգի տրանստրանսումը որոշիչի միջոցով	198

Գլուխ 7

ԳԵՄԼԱՅԻՆ, ՀԱՆՎԱՄԱՐՈՒՄԻՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻՆԸ	201
25. Գծային հավասարումների համակարգեր	201
25.1. Գծային հավասարումների համակարգը	201
25.2. Գծային հավասարումների համակարգի համասեռացվածությունը	203
25.3. Համարժեք համակարգեր	204
25.4. Կրոմերի կանոն	205
25.5. Համակարգերի թռման Գոսսի մեթոդը	206
26. Համասեռ համակարգեր	208
26.1. Համասեռ համակարգի թռմանների տարածությունը	208
26.2. Համակարգի թռմանների թուղթություն	210
26.3. Լռածմանների տարածությունը բազիսը և չափադասականություն	211

Գլուխ 8

ԳԵՄԼԱՅԻՆ, ԱՐՏԱԿԱՆՈՒՄԻՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻՆԸ	213
27. Գծային տրանսպոսիկումներ	213
27.1. Գծային տրանսպոսիկումներ	213
27.2. Գծային տրանսպոսիկումների օրինակներ	215
27.3. Համընթանող գծային տրանսպոսիկումներ	217
27.4. Գծային տրանսպոսիկումներ կոդիքի և զեֆերտ	219
27.5. Գծային տրանսպոսիկումներ տրանսպոսիկումներ և տանգ	220
28. Գծային օպերատորների համընտացված	223
28.1. Գծային տրանսպոսիկումների գումարային խումբ	223
28.2. Գծային տրանսպոսիկումների վերադասական տարածություն	225
28.3. Գծային օպերատորների օրինակ	227
28.4. Գծային օպերատորների համընտացված	230
29. Գծային տրանսպոսիկումների մատրիցային ներկայացումներ	232
29.1. Գծային տրանսպոսիկումներ մատրից	232
29.2. Գծային օպերատորի մատրիցային տարբեր լրացումներ	233
29.3. Գծային տրանսպոսիկումների և նրա մատրիցի տանգեր	235
29.4. Գծային տրանսպոսիկումների և մատրիցների համընտացվածների խզումը	236
30. Հավասարակի օպերատորներ	239
30.1. Գծային տարածությունների տիպադասականներ	239
30.2. Վերադասական տարածություն տիպադասականների խումբ	241
31. Մոխական վերադասական և սեփական տրանսպոսիկում	242
31.1. Մոխական վերադասական և սեփական տրանսպոսիկում	242

31.2. Բնորոշիչ հատկատյությունը, բնորոշիչ տրամաբաններ	243
31.3. Պարզ տվելիքային գծային օպերատորներ	246
32. Էվկլիդեսյան տարածության օբյեկտնայ ձևախախտությունները	248
32.1. Օբյեկտնայ ձևախախտություններ	248
32.2. Օբյեկտնայ ձևախախտության մատրիցը	250
32.3. Օբյեկտնայ ձևախախտությունների և մատրիցների խմբերը	251

Գլուխ 9

ԽՄԲԵՐ	253
33. Զիկլային խմբեր	253
33.1. Զիկլային խումբ	253
33.2. Խմբի տարրի կարգը	256
33.3. Զիկլային խմբերի նկարագրությունը	257
33.4. Շնորհիվների բազմաթյունը	259
34. Նորմալ բաժանարար և ֆակտոր-խումբ	261
34.1. Հորակից դասեր	261
34.2. Նորմալ բաժանարար	264
34.3. Ենթախմբերի արտադրյալը	267
34.5. Գալուա-խումբը	268
35. Խմբերի համանորմալիզմը	271
35.1. Խմբերի համանորմալիզմը	271
35.2. Համանորմալիզմի կարգը	273
35.3. Համանորմալիզմների թվերներ	276
36. Խմբերի տվյալ արտադրյալը	278
36.1. Լքվա խմբերի տվյալ արտադրյալը	278
36.2. Մի քանի խմբերի տվյալ արտադրյալը	280
36.3. Խմբի վերլուծումը ենթախմբերի տվյալ արտադրյալի	281
37. Տեղադրությունների խումբը	282
37.1. Զիկլեր	282
37.2. Նորմալ բաժանարարները	285
37.3. Տեղադրությունների խմբեր	287
38. Մատրիցային խմբեր	289
38.1. Լքվա գծային խմբի ենթախմբերը	289
38.2. Մատրիցային խմբեր	291
38.3. Հոմոմորֆիզմային ֆունկցիաների և սրբախախտ հոմոմորֆիզմային խմբերը	293
39. Արեկյան խմբեր	295
39.1. Արեկյան խմբերը	295
39.2. Զիկլային խմբերի վերլուծությունները	297
39.3. Արեկյան p-խմբեր	298
39.4. Վերջավոր արեկյան խմբեր	301
40. Խմբերի հասկացությունները	302
40.1. Խմբի կենտրոնը	302
40.2. Նիկարոնոս խմբեր	304

40.3. Վերջումիս Դ-խմբեր	307
40.4. Խմբի տմուկայալը	308
40.5. Լուծելի խմբեր	310
41. Խմբերի տախտանդֆիզմները	312
41.1. Խմբի տախտանդֆիզմները, տախտանդֆիզմների խումբը	312
41.2. Խմբի եւ, րին տախտանդֆիզմների խումբը	313
41.3. Լիտտանդֆիզմների խմբի օրինակներ	315
Գլուխ 10	
ՕՂԼԼԵՆԵՐ	317
42. Խղեալ և ֆակտոր-օղակ	317
42.1. Օղակի խղեալը	317
42.2. Դարձուրդրաններ խղեալների եւտ	318
42.3. Մնուգրների դատ: Բարդատաններ լատ մուղալի	320
42.4. Օղակի ֆակտոր-օղակը	322
42.5. Օղակի սրտը և մարտիմալ խղեալները	323
43. Չղակների համոմոֆիզմը	325
43.1. Օղակների համոմոֆիզմը	325
43.2. Համոմոֆիզմի կարգը	327
43.3. Համոմոֆիզմների րևալներ	328
44. Օղակի նվազագույն եւրաօղակը և եւրազալը	329
44.1. Օղակի րևալալիքը	329
44.2. Միտիւրալ օղակի նվազագույն եւրաօղակը	330
44.3. Դալալի նվազագույն եւրաօղակը	331
45. Լմրալալալան տիւրալի րանալների դալալ	331
45.1. Լմրալալալան տիւրալի րանալների դալալ	331
45.2. Լանալների դալալի գալալները	333
45.3. Լանալների դալալի իզմոմֆիզմը	336
46. Դատալան օղակներ	338
46.1. Բաժանալալալալան սրալալալան հատալալալանները	338
46.2. Օղակի սրալը և րալալալալ սալալները	339
46.3. Դատալան օղակներ	340
46.4. Լեմնալալալ րնդալալալ րաժանալալալալ ու տեմնալալալ	342
րնդալալալ րալալալալալալալ գալալալան օղակներալ	342
47. Գլխալալ խղեալների օղակ	343
47.1. Գլխալալ խղեալների օղակը	343
47.2. Գլխալալ խղեալների օղակը գալալալան Լ	344
47.3. Լեմնալալալ րնդալալալ րաժանալալալ գլխալալ խղեալների օղակներալ	346
47.4. Լեմնալալալ րնդալալալ րալալալալալալ գլխալալ խղեալների օղակներալ	347
47.5. Փալալալալալալալ սրալը սալալները գլխալալ խղեալների օղակներալ	349
48. Էլիլալալան օղակներ	350
48.1. Էլիլալալան օղակը	350
48.2. Էլիլալալան օղակի հատալալալալները	351

48.3. Լնկնումներ ընդհանուր բաժանուրայրու Եվկլիդեսն օգտվելիս	352
Գլուխ 11	
ԲԱԶՄԱՆՈՒԿԱՆԻՐ	353
49. Բազմանդամների օգտվել	353
49.1. Հաջորդականությունների օգտվել	353
49.2. Օպտիկ սրտի տրանսպարենտ ընդլայնումը	356
49.3. Օպտիկ սրտի տրանսպարենտ ընդլայնման գոյությունը	358
49.4. Օպտիկ սրտի տրանսպարենտ ընդլայնումների խոսքի ֆիզիկա	359
49.5. Բազմանդամների օպտիկ ընդլայնման հատկությունը	360
50. Բազմանդամի սթանդարտները	362
50.1. Բազմանդամի կոստիսիտի տեսքը, ազդու և տիպի տարրերը	362
50.2. Բազմանդամի սթանդարտները	364
50.3. Բազմանդամի սթանդարտների բիլի	365
50.4. Բազմանդամները սրտի ֆունկցիաներ	366
51. Կաշտի վրա տրված բազմանդամներ	367
51.1. Բազմանդամների Եվկլիդեսն օգտվել	367
51.2. Լյանտի գոյությունը	369
51.3. Բազմանդամի վերադարձումների դաշտը	370
51.4. Բազմանդամի սթանդարտները	371
51.5. Բազմանդամի բազմանդամի տարածությունները	372
51.6. Բազմանդամի բազմանդամի տարածությունները	373
51.7. Կիտի բանաձևերը	374
51.8. Բազմանդամների վերադարձումն ապրումությունը և համարման շղթա	375
51.9. Բազմանդամի կոստիսիտների դաշտը	377
52. Բազմանդամների գոտային օգտվել	377
52.1. Դրիմիտի բազմանդամներ	377
52.2. Կոստի բանաձևերի դաշտի կոստ	379
52.3. Բազմանդամների գոտային օգտվել	380
Գլուխ 12	
ՈՒՆԻՎԵՐՍԱԼ ՓՈԳՈՒՍԿԱՆՈՒՄ ԲԱԶՄԱՆՈՒԿԱՆԻՐ	383
53. Մի բանի փոխարինումով բազմանդամների օգտվել	383
53.1. Օպտիկների ընդլայնումը	383
53.2. Օպտիկ համարման փոխարինումն սթանդարտները	384
53.3. Մի բանի փոխարինումով բազմանդամներ	386
53.4. Մի բանի փոխարինումով բազմանդամների օպտիկների խոսքի ֆիզիկա	387
53.4. Մի բանի փոխարինումով բազմանդամների օպտիկ հատկությունները	389
54. Սիմետրիկ բազմանդամներ	390
54.1. Բազմանդամների բազմանդամային կոստիսիտները	390
54.2. Սիմետրիկ բազմանդամներ	391
54.3. Սիմետրիկ բազմանդամների կոստիսիտի բաժանում	392
55. Բազմանդամների սեզոնականությունը: Անհատների սթանդարտները	394
55.1. Բազմանդամների սեզոնականությունը	394

55.2. Ըննությունների սրտատրամբ	397
Գլուխ 13	
ԿՈՄՊԼԵԿՏ, ԻՐԱՎԱՆ, ԲԱՑԻՈՂԱԼ ԴՈՐՆԱԿԻՑՆԵՐՈՒՄ ԲԱԶՄԱՆԱԿԱՆԵՐ	399
56. Կոմպլեքս լիցիի գաշտի հանրամարտիվական փակվածությունը	399
56.1. Կրթական գործադիրներով բաղանդանդների սրբերները	399
56.2. Կրթական գործադիրներով բաղանդանդի կոմպլեքս սրբանաի գրությունը	400
56.3. Կոմպլեքս գործադիրներով բաղանդանդներ	402
56.4. Կրթական լիցիի գաշտի փա սրբանա շքերհայ բաղանդանդները	403
57. Ցածր ստաիճանի հախատարանների լածանը	404
57.1. Կրթող ստաիճանի հախատարանների լածանը	404
57.2. Կրթող ստաիճանի հախատարանների լածանը	405
57.3. Չորրորդ ստաիճանի հախատարանների լածանը	407
58. Իրական սրմանների լիլը	408
58.1. Բաղանդանդների Շատրաի կոմպլեքսը	408
58.2. Հաղորդակցությունը նշանակաիորությունների լիլը	410
58.3. Շատրաի լիլները	411
59. Կաղիմուս գործադիրներով բաղանդանդներ	412
59.1. Ընթող գործադիրներով բաղանդանդի սոթող և ժողիմուս սրմանները	412
59.2. Կաղիմուս գործադիրներով չիլիործիող բաղանդանդներ	413
Գլուխ 14	
ԴԱՇԵՏԵՐԻ ԸՆԴԱԼԱՑՈՒՄՆԵՐԸ	415
60. Դաշտերի պարգաղայն լնդլայնումները	415
60.1. Դաշտի սրբողայն լնդլայնումները	415
60.2. Դաշտի սրբող կոմպլեքսիկիման լնդլայնումը	417
60.3. Դաշտի փրթուր լնդլայնումները	419
60.4. Դաշտի բաղողայող կոմպլեքսիկիման լնդլայնումը	421
61. Խլլային դաշտերի լնդլայնումները	422
61.1. Խլլային դաշտերի բաղողայող կոմպլեքսիկիման լնդլայնումները	422
61.2. Հանրակաղիկիման լիլիի դաշտը	424
62. Կրթող ստաիճանի հախատարանների լածանը սրմանանդանդներով	425
62.1. Դաշտի ջաղաղաղային լնդլայնումը	425
62.2. Հաղաղաղան լածկիաղաղանը ջաղաղաղային սրմանանդանդներով	426
62.3. Կիլաղաղայններ	428
Գլուխ 15	
ՀԱՐԱԿԱՆԱԿԱՆ	431
63. Հանրակաղի պատմությունից	431
63.1. Հանրակաղիի սրմանաղաղանից	431
63.2. Ժամանակաից կոմպլեքսիկիման	433
64. Ընդլայնի հանրակաղիկաղաղանները	435
Հանրակաղիի տերիիներների ցանկ	449
Բովանդակություն	454

Համլետ Սուրենի Միքայելյան
Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթաց
Հաստատված է ՀՀ Կրթության և գիտության նախարարության
կոլեգիայի կողմից որպես բուհական դասագիրք

Խմբագիր Վարուժան Աթաբեկյան

AMSLaTeX-ի amsbook համակարգի
հայերեն տարբերակը՝ Վահագն Համլետի Միքայելյանի

Չափսը՝ 60x90 1/16, Տպագրություն՝ օֆսեթ, Տպաքանակը՝ 500,
պատվեր՝ 13, գինը՝ պայմանագրային