

А. М. ИЛЬИН

СОГЛАСОВАНИЕ
АСИМПТОТИЧЕСКИХ
РАЗЛОЖЕНИЙ
РЕШЕНИЙ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1989

ББК 22.161.6
И46
УДК 517.955.8

Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.— 336 с.— ISBN 5-02-013939-4

Рассматриваются решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, зависящие от малого параметра. Асимптотическое разложение решений имеет, вообще говоря, различную структуру в различных областях (например, в области пограничного слоя, в окрестности разрыва предельного решения и т. п.). Основное место занимает метод согласования асимптотических разложений решения (или метод сращиваемых асимптотических разложений).

На различных примерах, ведущих свое происхождение от некоторых задач механики сплошной среды, проводится формальное построение полных асимптотических разложений решения и дается строгое обоснование правильности этих разложений.

Для специалистов в области математики, прикладной математики и механики. Доступна студентам старших курсов университетов.

Табл. 9. Ил. 36. Библиогр. 120 назв.

Рецензент

доктор физико-математических наук профессор *Н. Х. Розов*

Научное издание

ИЛЬИН Арлен Михайлович

**СОГЛАСОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ
РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ**

Заведующий редакцией *А. П. Баева*

Редактор *В. В. Абгарян*

Художественный редактор *Г. М. Коровина*

Технический редактор *В. Н. Кондакова*

Корректоры *Г. В. Подвольская, Н. Б. Румянцева*

ИБ № 11230

Сдано в набор 03.03.88. Подписано к печати 12.01.89. Формат 84×108/32. Бумага книжно-журнальная. Гарнитура обыкновенная новая. Печать высокая. Усл. печ. л. 17,64. Усл. кр.-отт. 17,64. Уч.-изд. л. 19,97. Тираж 3360 экз. Заказ № 80. Цена 4 р. 30 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Четвертая типография издательства «Наука»
630077 Новосибирск, 77, Станиславского, 25

И $\frac{1602070000-034}{053(02)-89}$ 17-89

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1989

ISBN 5-02-013939-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Схема глав	8
Введение	9
Глава I. Функции пограничного слоя экспоненциального типа	23
§ 1. Красные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений	24
§ 2. Уравнения с частными производными	31
Глава II. Обыкновенные дифференциальные уравнения	40
§ 1. Простейшая бисингулярная задача	40
§ 2. Процесс согласования асимптотических разложений	52
§ 3. Нелинейное уравнение. Промежуточный пограничный слой	64
Глава III. Сингулярные возмущения границы области в эллиптических краевых задачах	83
§ 1. Трехмерная задача в области с малой полостью	85
1. Уравнение Лапласа	85
2. Эллиптическое уравнение с переменными коэффициентами	91
§ 2. Задача об обтекании тонкого тела	102
§ 3. Двумерная краевая задача в области с малым отверстием	119
§ 4. Исследование асимптотики в случае, когда предельная задача не имеет решения	128
§ 5. Пример решения краевой задачи, имеющего сложную асимптотику	145
Глава IV. Эллиптическое уравнение с малым параметром при старших производных	148
§ 1. Случай совпадения характеристики предельного уравнения с частью границы	151
§ 2. Асимптотика решения в области с негладкой границей	178
§ 3. Случай внешнего касания особой характеристики с границей области	197
§ 4. Случай внутреннего касания особой характеристики с границей области	206
§ 5. Замечания	230

Глава V. Сингулярное возмущение гиперболической системы уравнений	237
§ 1. Построение внутреннего разложения	239
§ 2. Построение ф. а. р. во внешней области (под линиями разрыва)	243
§ 3. Построение ф. а. р. в окрестности особых характеристик	249
§ 4. Построение ф. а. р. во внешней области (над линиями разрыва)	254
§ 5. Обоснование асимптотического разложения	256
Глава VI. Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с малым параметром	258
§ 1. Внешнее разложение. Асимптотика решения вблизи линии разрыва	262
§ 2. Ударная волна, порожденная разрывом начальной функции	273
§ 3. Опрокидывание волны. Гладкость линии разрыва. Асимптотика коэффициентов внешнего разложения	277
§ 4. Асимптотика решения вблизи начала координат	282
§ 5. Построение асимптотики решения вблизи линии разрыва	300
§ 6. Построение равномерного асимптотического разложения	308
§ 7. Асимптотика волны горения	312
Примечания и литературные комментарии	323
Список литературы	327

ПРЕДИСЛОВИЕ

Асимптотические методы в анализе и в особенности в теории уравнений математической физики привлекают к себе все большее внимание широкого круга исследователей в различных областях естествознания. Свидетельством тому является относительное увеличение числа журнальных публикаций по этой тематике и значительный рост числа монографий за последние 15—20 лет. Во многих из этих монографий затронут и метод, указанный в названии данной книги, но изложение этого метода носит несколько фрагментарный характер и мало затрагивает вопросы обоснования асимптотики. Тем не менее за последние 5—10 лет сложился единый подход к одному классу задач с малым параметром, которые часто встречаются в самых различных областях и названы здесь бисингулярными. Определение этих задач дано ниже, во введении к книге.

Указанный подход является одним из вариантов согласования различных асимптотических разложений решений краевых задач. Он описан только в журнальной литературе, причем первые публикации методически, естественно, далеко не самые удачные. Поэтому цель книги — подвести некоторый итог проведенным исследованиям и ознакомить с методом специалистов в разных областях. Изложение построено по индуктивному принципу и состоит в последовательном изучении примеров. Как правило, последующие примеры сложнее предыдущих.

Довольно широкое распространение получила мысль о том, что асимптотическое исследование состоит из двух частей. Первая часть — это построение асимптотики. Для этого надо определить вид, в котором следует искать формальное асимптотическое разложение решения (или формальное асимптотическое решение; оно еще имеет

другие названия и сокращения: Ansatz, ФАР, фарк, ф. а. р.). Далее следует указать способ построения этого ф. а. р.

Вторая часть состоит в обосновании построенной асимптотики, т. е. в доказательстве того, что построенное ф. а. р. действительно является асимптотическим разложением решения поставленной задачи. При этом устанавливается оценка разности между истинным решением и частичными суммами ф. а. р.

Какая из частей самая трудная — это зависит от конкретной задачи. Иногда одна из частей является тривиальной, а другая требует больших усилий, иногда трудности распределены между ними более равномерно. Но несомненно, что первая часть — построение асимптотики — интересует специалистов разного профиля: механиков, физиков, инженеров и вообще всех, кому приходится встречаться с большими или малыми параметрами в задачах. А вторая часть интересна преимущественно узкому кругу математиков.

С учетом этого обстоятельства здесь сделана попытка удовлетворить обе категории потенциальных читателей. Построение асимптотики рассматриваемых задач, по возможности не отягощенное несущественными подробностями, дается в основном тексте. А все, что требуется лишь для обоснования асимптотики, напечатано мелким шрифтом. Так что тем, кто хочет ознакомиться только с методами построения асимптотических разложений решений бисингулярных задач, достаточно читать лишь основной текст. Вместе с тем в полном тексте, включающем и петит, содержится строгое математическое обоснование построенных асимптотик, которое ранее можно было найти только в периодической литературе. Эта попытка поймать в одной книге двух зайцев представляется мне оправданной. Удалась ли она или получит еще одно подтверждение известная пословица — об этом судить читателю. *Spero meliora.*

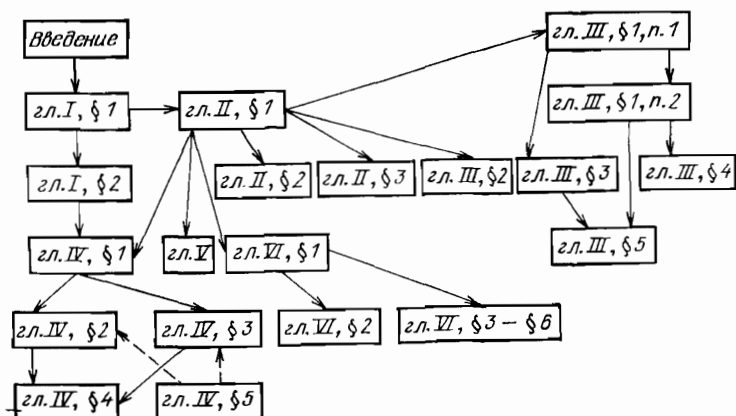
Многое из помещенного в книге было прочитано в спецкурсах в Башкирском государственном университете. Большая часть материала опирается лишь на знания студентов третьего курса университета, а первые две главы — даже на знания студентов второго курса университета и студентов технических вузов. Литературные ссылки в тексте сведены к минимуму и относятся преимущественно к обоснованию асимптотики. Все упомин-

нения об источниках и статьях, которые близки к рассматриваемой теме, вынесены в конец книги.

Все результаты, изложенные в книге, за исключением гл. I, которая носит вспомогательный, учебный характер, получены группой уральских математиков, работающих в Уфе и Свердловске. Пользуюсь случаем поблагодарить сотрудников и учеников, чьи исследования и обсуждения результатов в значительной степени способствовали появлению этой книги. Непосредственно при написании книги большую помощь в работе над гл. IV оказали Е. Ф. Леликова и Ю. З. Шайгарданов, а в работе над гл. V — Л. А. Калякин. Большую работу при оформлении рукописи провели Т. Н. Нестерова и О. Б. Соколова. Всем им я выражаю свою глубокую признательность.

СХЕМА ГЛАВ

Читать книгу можно выборочно. Для удобства этого выбора ниже указана связь между главами и параграфами.



ВВЕДЕНИЕ

Цель этой книги — описание одного из методов исследования решений краевых задач для уравнений математической физики, содержащих малый параметр. Такие задачи возникают в самых разнообразных областях естествознания и техники. Математическое исследование подобных задач имеет долгую историю, но несомненным является интенсивное развитие асимптотических методов именно в последние два-три десятилетия. Собственно говоря, математический анализ в значительной степени посвящен изучению асимптотики в широком смысле этого слова. Действительно, точное решение задач в виде суперпозиций элементарных функций, квадратур и т. п. возможно лишь в редких случаях. Поэтому мощным аппаратом исследования является рассмотрение задач, которые мало отличаются от задач, имеющих точное решение, или от задач, более простых, чем исходные. Таким образом, в задаче появляется малый параметр, и требуется найти зависимость решения от этого малого параметра. На истории вопроса мы не будем останавливаться. С ней можно познакомиться, например, по книгам [16], [49], [74]. А сейчас немного уточним предмет исследования.

Будет рассматриваться, как правило, дифференциальное уравнение $L(x, u, \varepsilon) = 0$, где x — точка какой-нибудь области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а $u(x, \varepsilon)$ — искомое решение выпясанного уравнения. Это решение, кроме того, удовлетворяет каким-либо краевым условиям. Будем считать, что при каждом $\varepsilon > 0$ существует единственное решение $u(x, \varepsilon)$ описанной задачи. Требуется выяснить поведение решения при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Такая постановка еще достаточно неопределенная. Поскольку не удастся выпясанть явное решение задачи, естественно попытаться найти функцию, которая приближенно удовлетворяет уравнению и краевым условиям. Пусть $U_n(x, \varepsilon)$ — последовательность функций, для ко-

торых выполнены неравенства $|L(x, U_n(x, \varepsilon), \varepsilon)| < M\varepsilon^n$ и аналогичные неравенства для граничных условий. Если $U_n(x, \varepsilon)$ — это частичные суммы ряда

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x), \quad (0.1)$$

то такой ряд называется *формальным асимптотическим решением* (ф. а. р.) дифференциального уравнения или ф. а. р. краевой задачи в зависимости от того, приближают ли функции $U_n(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k(x)$ только дифференциальное уравнение или, кроме того, еще и краевые условия. Можно ожидать, что такие функции $U_n(x, \varepsilon)$ хорошо приближают истинное решение $u(x, \varepsilon)$ при малых ε . Другими словами, можно ожидать, что ряд (0.1) является асимптотическим рядом решения $u(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Естественно считать, что читатель, интересующийся данной книгой, знаком с понятием асимптотического ряда. Однако для удобства чтения кратко приведем здесь основные определения в том виде, который будет использоваться всюду в книге.

Пусть функции $f(\varepsilon)$ и $\varphi(\varepsilon)$ определены в окрестности $\mathbb{U}$ точки 0 при $\varepsilon > 0$ и $\varphi(\varepsilon) > 0$. Тогда формулы

$$f(\varepsilon) = O(\varphi(\varepsilon)), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1)$$

и

$$f(\varepsilon) = o(\varphi(\varepsilon)), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2)$$

означают соответственно

$$|f(\varepsilon)| < M\varphi(\varepsilon) \quad \text{при } \varepsilon \in \mathbb{U} \quad (3)$$

и

$$f(\varepsilon)/\varphi(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon > 0, \quad (4)$$

где M — положительная постоянная.

Те же определения сохраняются, если функция f зависит еще от каких-либо переменных $z_1, z_2, \dots, z_N$. Соотношения (1)–(4) (с заменой $f(\varepsilon)$ на $f(\varepsilon, z)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_N)$) понимаются при каждом фиксированном z . Если к равенствам (1) и (2) добавляются слова «равномерно относительно $z \in \mathbb{A}$ », то это означает, что постоянная M в (3) не зависит от z и предельный переход в (4) равномерен относительно $z \in \mathbb{A}$.

Очевидным образом определения символов O и o переносятся на функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \rightarrow a$, если эти функции определены на множестве $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$, для которого точка a является предельной. В частности, a может быть и бесконечно удаленной точкой. Пусть, например, $\mathbb{U}$ — неограниченная область из $\mathbb{R}^m$, функции $f(\xi)$ и $\varphi(\xi)$ определены в $\mathbb{U}$, причем $\varphi(\xi) > 0$. Тогда соотношение $f(\xi) = o(\varphi(\xi))$, $\xi \rightarrow \infty$, $\xi \in \mathbb{U}$, означает, что $f(\xi)/\varphi(\xi) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, $\xi \in \mathbb{U}$. Иногда, если это не вызывает недоразумений, указание на множество $\mathbb{U}$ будет опускаться.

Перейдем теперь к асимптотическим рядам. Последовательность $\varphi_k(\varepsilon)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ будем называть *калибровочной последовательностью*, если функции $\varphi_k(\varepsilon)$ определены и положительны в окрестности $\mathbb{U}$ точки 0 при $\varepsilon > 0$ и при всех k выполнены соотношения

$$\varphi_{k+1}(\varepsilon)/\varphi_k(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

(Чаще употребляется термин «асимптотическая последовательность», но ввиду перегруженности слова «асимптотический» предпочтем более редкий, но удобный термин «калибровочная последовательность».)

Будем говорить, что функция $f(\varepsilon)$, определенная в $\mathbb{U}$ при $\varepsilon > 0$, *разлагается в асимптотический ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(\varepsilon) \quad (5)$$

(или ряд (5) является *асимптотическим разложением* функции $f(\varepsilon)$), если для любого натурального n

$$f(\varepsilon) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(\varepsilon) = o(\varphi_n(\varepsilon)), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (6)$$

Для обозначения асимптотического разложения используется обычная запись

$$f(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (7)$$

При этом всюду в книге сходимость ряда (7) не предполагается (если только это специально не оговаривается). Более того, в наиболее интересных случаях асимптотические ряды (7) расходятся при всех $\varepsilon > 0$. Соотношение (7) означает только выполнение равенств (6).

То же определение сохраняется и в случае, когда функция f зависит, кроме ε , еще от переменных $z_1, z_2, \dots, z_N$. В этом случае коэффициенты c_k в соотношениях (6), (7), естественно, зависят от $z = (z_1, z_2, \dots, z_N)$. Если при этом соотношения (6) выполнены равномерно относительно $z \in \mathfrak{A}$, то будем говорить, что функция

$f(\varepsilon, z)$ разлагается в асимптотический ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z) \varphi_k(\varepsilon)$ равномерно относительно $z \in \mathfrak{A}$. В частности, в соотношении (0.1) $\varphi_k(\varepsilon) = \varepsilon^k$, $z = x$, а множество $\mathfrak{A}$ — это или $\bar{\Omega}$, или какая-либо его часть.

Очевидным образом определение асимптотического ряда и калибровочных функций переносится на функции $f(x)$, $\varphi_k(x)$, определенные на множестве $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$, для которого a является предельной точкой:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad x \rightarrow a, \quad x \in \mathbb{U}.$$

В частности, точка a может быть и бесконечно удаленной.

Если $f(x) \in C^\infty$ в окрестности точки a , то ее ряд Тейлора является, очевидно, ее асимптотическим рядом при $x \rightarrow a$; калибровочная последовательность функций — это $(x - a)^k$. При этом сходимость ряда Тейлора не предполагается.

Если соотношения (6) выполняются не для всех n , а лишь для конечного числа значений n , то будем говорить, что для этих n справедливо асимптотическое представление $f(\varepsilon)$, понимая под этим равенства (6).

Легко показать, что асимптотическое разложение функции вида (5) (после того как фиксирована калибровочная последовательность $\varphi_k(\varepsilon)$!) единственно. Определение (6) можно заменить эквивалентными, но часто более удобными определениями. А именно: в правой части равенств (6) вместо $o(\varphi_n(\varepsilon))$ можно поставить $O(\varphi_{n+1}(\varepsilon))$, $O(\varphi_n(\varepsilon))$ или вообще $O(\varphi_{m_n}(\varepsilon))$, где m_n — какая-нибудь последовательность натуральных чисел такая, что $m_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Асимптотические ряды вида (5) можно почленно складывать, вычитать, перемножать и делить (если, разумеется, не все коэффициенты c_k в знаменателе равны нулю). Это означает, что если две функции разлагаются в ряды типа (5), то их сумма также разлагается в асимптотический ряд, равный формальной сумме рядов, и т. д. При сложении и вычитании функций калибровочная последовательность сохраняется, а при умножении и делении, вообще говоря, очевидным образом изменяется.

При простых дополнительных предположениях асимптотические ряды можно почленно интегрировать, но нельзя, вообще говоря, почленно дифференцировать. В реальных ситуациях, как правило, асимптотические ряды допускают почленное дифференцирование, но это каждый раз требуется специально доказывать.

Более подробно с асимптотическими рядами и их свойствами можно познакомиться по книгам [10], [25], [73], [81], [109].

Если ряд (0.1) является асимптотическим разложением равномерно относительно $x \in \Omega$, то мы имеем дело с простейшим и потому малоинтересным случаем. Такую зависимость от малого параметра естественно назвать регулярной. За остальными задачами, для которых асимптотическое представление (0.1) отсутствует или справедливо не всюду в $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, закрепилось, быть может, не вполне удачное название: *сингулярно возмущенные задачи*.

Часто высказывается мнение, что поиск всех членов ряда (0.1) является ненужной роскошью, а для прикладных задач достаточно найти лишь один, в крайнем случае два члена этого ряда. В таких рассуждениях есть, разумеется, доля истины. Но можно привести и контраргументы. Во-первых, и при численных расчетах бывают случаи, когда полезно знание не двух, а трех или даже большего числа членов ряда (подобные примеры имеются в § 2 гл. II и в § 3 гл. III). В такой ситуации

обычно уже все равно, находить ли три члена ряда или указать способ построения всех $u_k(x)$. Кроме того, нельзя не учитывать естественного желания математиков решить и чисто теоретическую задачу — найти решение с точностью до любой степени ε . И, наконец, следующее техническое, но немаловажное обстоятельство. Иногда после того, как получены один или два члена ряда, бывает очень трудно доказать, что построенные функции действительно приближают истинное решение. С другой стороны, такое доказательство легче провести, имея ф. а. р. вида (0.1). (С подобной ситуацией можно познакомиться в § 4 гл. III.) Всюду в этой книге строятся полные асимптотические разложения, т. е. приближения решения с точностью до любой степени ε .

Для сингулярно возмущенных задач возможны различные варианты поведения решений при $\varepsilon \rightarrow 0$. Мы будем рассматривать только такие задачи, для которых решения имеют асимптотическое разложение типа (0.1) всюду в $\bar{\Omega}$, за исключением малой окрестности некоторого множества меньшей размерности. Обозначим это особое множество посредством Γ . Очень часто множество Γ — это часть границы $\partial\Omega$, и его окрестность, естественно, называется тогда *пограничным слоем*. Но во многих интересных случаях Γ расположено внутри Ω и для его окрестности сохраняется то же название (впрочем, бывает и другое название — *внутренний слой*). Отметим еще, что в некоторых случаях малый параметр, и притом существенным образом, содержится в граничных условиях.

Ряд (0.1) называется *внешним асимптотическим разложением* или, короче, *внешним разложением*. Происхождение этого названия связано с задачами гидромеханики, где рассматривалось обтекание тела жидкостью с малой вязкостью. Итак, ряд (0.1) в рассматриваемых ниже задачах является равномерным асимптотическим разложением при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения $u(x, \varepsilon)$ всюду вне любой, достаточно малой, по фиксированной окрестности множества Γ . Каким образом можно пайти асимптотику решения в пограничном слое — в окрестности Γ — и зачем это нужно?

Сначала ответим на второй вопрос. Во-первых, коэффициенты ряда (0.1) $u_k(x)$ — это решения некоторых вспомогательных задач. Уравнения для них обычно легко получаются из первоначального уравнения $L(x, u, \varepsilon) = 0$

после разложения в ряд по степеням ε . Но сопутствующие краевые условия для $u_k(x)$ зачастую не так-то просто получить. А без этих условий невозможно определить $u_k(x)$. Как раз для этого надо знать поведение решения $u(x, \varepsilon)$ в пограничном слое. Во-вторых, часто наиболее интересные и пугающие сведения содержатся именно в поведении функции на границе. Так, например, обстоит дело при изучении обтекания тела жидкостью, при подсчете емкости тонкого конденсатора и т. д.

Теперь перейдем к первому вопросу — как искать асимптотику решения в пограничном слое? Идея, истоки которой трудно проследить, но, по-видимому, впервые наиболее четко высказанная в докладе Л. Прадтля на III математическом конгрессе (см. [119]), состоит в том, что в пограничном слое надо ввести новые, вообще говоря, «растянутые» координаты $\xi = \xi(x, \varepsilon)$ и искать асимптотическое разложение решения в виде

$$u(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i(\varepsilon) v_i(\xi), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (0.2)$$

Здесь $\mu_i(\varepsilon)$ — калибровочная последовательность, которую надо подобрать, функции $v_i(\xi)$ носят название *функций пограничного слоя* (или погранфункций). Обычно координаты $\xi(x, \varepsilon)$ — довольно простые функции. Если, например, множество Γ — это начало координат, то часто полагают $\xi = \varepsilon^{-\alpha} x$, где $\alpha > 0$. В других случаях такое же растяжение проводят для части координат, полагая, например, $\xi_1 = \varepsilon^{-\alpha} x_1$, $\xi_2 = x_2$. Встречаются и более сложные замены переменных. Ряд (0.2) называется *внутренним разложением*, а $\xi(x, \varepsilon)$ — *внутренними переменными*. Для функций $v_i(\xi)$ также выписываются дифференциальные уравнения, исходя из первоначального уравнения $L(x, u, \varepsilon) = 0$. При этом, хотя область определения функций $v_i(\xi)$ в переменных x мала (это узкий пограничный слой), но в «растянутых» переменных ξ эта область становится большой и тем большей, чем меньше ε . Поэтому целесообразно считать, что функции $v_i(\xi)$ определены в неограниченной области, не зависящей от ε .

Таким образом, очерчен круг задач, рассматриваемых ниже. Иногда их называют задачами типа погранслоя. Ими, конечно, не исчерпываются все сингулярно возмущенные задачи. Другой важный класс явлений описы-

вается быстроколеблющимися функциями, так что ряд вида (0.1) нигде не приближает решения. На этих проблемах мы не будем останавливаться, но отметим, что демонстрируемый здесь метод может оказаться полезным и для задач такого рода. Краткое замечание об этом помещено в конце книги.

Какие трудности возникают при исследовании задач типа пограничного слоя? Прежде всего нужно как-то определить особое множество Γ , около которого образуется погранслой. Далее надо подобрать внутренние переменные ξ и калибровочную последовательность $\mu_i(\varepsilon)$. Единых рецептов такого подбора не существует. Тем не менее, как это обычно бывает, разбор различных типичных примеров подсказывает, как надо действовать во вновь возникающих сходных ситуациях.

После выбора Γ , $\xi(x, \varepsilon)$ и $\mu_i(\varepsilon)$ уравнения для $u_k(x)$ и $v_i(\xi)$ обычно легко выписываются, но встает вопрос — как ставить задачи для этих уравнений? Граничные условия первоначальной задачи, как правило, не влекут за собой однозначно граничных условий вспомогательных задач для $u_k(x)$ и $v_i(\xi)$, а решения $u_k(x)$ и $v_i(\xi)$ часто определяются неоднозначно. Здесь мы подходим к центральному пункту исследования: каким образом выбирать $u_k(x)$ и $v_i(\xi)$, коль скоро они а priori из своих краевых задач определяются неоднозначно? Дело в том, что ряды (0.1) и (0.2) должны приближать одно и то же решение $u(x, \varepsilon)$, только в разных областях: ряд (0.2) в пограничном слое, а ряд (0.1) вне пограничного слоя. Оказывается, что есть довольно широкая (по сравнению с погранслоем) область, где эти ряды одновременно приближают решение и потому асимптотически совпадают. Тем самым ряды (0.1) и (0.2) согласованы. Это согласование и дает возможность определить функции $u_k(x)$ и $v_i(\xi)$ однозначно, а метод называется *методом согласования асимптотических разложений*. У этого метода и его вариантов существует довольно много названий. Английское название *matching method*, кажется, не имеет распространенных синонимов, а в русском языке указанная процедура называется еще сращиванием, сшивкой, склейкой, ... В книге излагаются решения ряда типичных задач преимущественно для уравнений с частными производными, в которых асимптотический анализ достигается применением метода согласования асимптотических разложений.

Описанный выше тип сингулярно возмущенных задач естественным образом делится на два класса. К первому следует отнести те задачи, для которых функции $u_k(x)$ — коэффициенты внешнего разложения (0.1) — являются гладкими в $\bar{\Omega}$. В задачах второго класса имеется еще одна сингулярность: коэффициенты $u_k(x)$ сами имеют особенности на множестве Γ , причем порядок особенности $u_k(x)$ растет вместе с номером k . Подобные задачи будем называть *бисингулярными*. Они и составляют основное содержание книги. Задачи первого класса, как правило, значительно проще. Их краткое описание дано в гл. I.

Конец введения мы посвятим одному, совсем элементарному, но полезному, на наш взгляд, примеру. Он связан с тем, что решения задач типа погранслоя — это функции, которые в разных подобластях своей области определения приближаются различными асимптотическими рядами. Рассматриваемый ниже пример формально не имеет никакого отношения к решению краевой задачи, но неплохо иллюстрирует, как одна и та же функция в разных областях разлагается в различные асимптотические ряды. Кроме того, на этом примере будет продемонстрировано важное для дальнейшего понятие составного асимптотического разложения.

Пусть

$$f(x, \varepsilon) = \frac{e^x}{x + \varepsilon}, \quad \bar{\Omega} = \{x: 0 \leq x \leq 1\}, \quad \varepsilon > 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (0.3)$$

При любом $x > 0$ эта функция разлагается в асимптотический (и даже сходящийся) ряд по степеням ε :

$$f(x, \varepsilon) = \frac{e^x}{x} \left(1 - \frac{\varepsilon}{x} + \frac{\varepsilon^2}{x^2} - \frac{\varepsilon^3}{x^3} + \dots \right). \quad (0.4)$$

Из равенства

$$g_n(x, \varepsilon) \stackrel{\text{опр.}}{=} \left| f(x, \varepsilon) - \frac{e^x}{x} \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{\varepsilon^j}{x^j} \right| = \frac{e^x}{x + \varepsilon} \frac{\varepsilon^{n+1}}{x^{n+1}} \quad (0.5)$$

видно, что при $x \geq \delta > 0$ асимптотика равномерна относительно x : $g_n(x, \varepsilon) \leq 3\delta^{-n-2}\varepsilon^{n+1}$. Но приближение становится плохим при малых x . Действительно, например, при $x \leq \varepsilon$ справедливо неравенство $g_n(x, \varepsilon) > (2\varepsilon)^{-1}$.

Значит, частичные суммы ряда (0.4) очень далеки от $f(x, \varepsilon)$ при $x \leq \varepsilon$.

При малых x естественно ввести новую переменную $\xi = \varepsilon^{-1}x$ и представить $f(x, \varepsilon)$ другим (тоже сходящимся) рядом

$$f(x, \varepsilon) = \frac{\exp(\varepsilon \xi)}{\varepsilon(1+\xi)} = \frac{1}{\varepsilon(1+\xi)} \left(1 + \varepsilon \xi + \varepsilon^2 \frac{\xi^2}{2} + \dots \right). \quad (0.6)$$

И здесь тоже легко получить оценку погрешности аппроксимации

$$\begin{aligned} h_k(x, \varepsilon) &= \left| f(x, \varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon(1+\xi)} \sum_{j=0}^k \frac{(\varepsilon \xi)^j}{j} \right| \leq \\ &\leq \frac{3}{\varepsilon(1+\xi)} \frac{(\varepsilon \xi)^{k+1}}{(k+1)!} = 3 \frac{\xi^{k+1}}{(1+\xi)(k+1)!} \varepsilon^k. \end{aligned} \quad (0.7)$$

Оценка (0.7) хороша при ограниченных или не слишком больших ξ , но она неудовлетворительна при $\xi \sim \varepsilon^{-1}$, т. е. при конечных значениях x . В этом примере ряд (0.4) является внешним разложением (0.1) для функции (0.3). Оно является равномерно асимптотическим всюду при $x \geq \delta \quad \forall \delta > 0$, но непригодно в окрестности точки $x=0$. Ряд (0.6) — это внутреннее разложение (0.2). Оно является равномерно асимптотическим в узком пограничном слое $\varepsilon \xi < \varepsilon^\alpha \quad \forall \alpha > 0$, но непригодно вне окрестности нуля.

Опишем более точно области, где ряды (0.4) и (0.6) хорошо приближают функцию $f(x, \varepsilon)$. Пусть α и β — два каких-нибудь числа такие, что $0 < \alpha < \beta < 1$. Легко заметить, что ряды (0.4) и (0.6) являются равномерно асимптотическими в областях $\Omega_\beta = \{x: \varepsilon^\beta \leq x \leq 1\}$ и $\omega_\alpha = \{x: 0 \leq x \leq \varepsilon^\alpha\}$ соответственно (рис. 1). Действительно, из (0.5) и (0.7) следует, что $g_n(x, \varepsilon) \leq 3\varepsilon^{(1-\beta)n-1}$ в Ω_β , а $h_k(x, \varepsilon) \leq 3\varepsilon^{\alpha(k+1)-1}$ в ω_α . Области ω_α и Ω_β перекрываются. *Ширина их пересечения $\{x: \varepsilon^\beta \leq x \leq \varepsilon^\alpha\}$ значительно больше, чем характерный размер пограничного слоя в этой задаче: $0 \leq x \leq M\varepsilon$. Таким образом, в совокупности ряды (0.4) и (0.6) дают равномерную асимптотику функции (0.3) всюду при $0 \leq x \leq 1$. Более того, в общей области $\omega_\alpha \cap \Omega_\beta$ частичные суммы обоих рядов близки к $f(x, \varepsilon)$ и, следовательно, близки между собой.*

Хотя при беглом взгляде на ряды (0.4) и (0.6) их близость незаметна, тем не менее в области $\omega_\alpha \cap \Omega_\beta$ она действительно имеет место. Благодаря этому возможно

выписать другое асимптотическое приближение функции $f(x, \varepsilon)$. То обстоятельство, что внешнее разложение (0.4) и внутреннее разложение (0.6) хороши лишь в каких-то областях с неоднозначно определенными границами, зачастую затрудняет их дальнейшее использование. По-

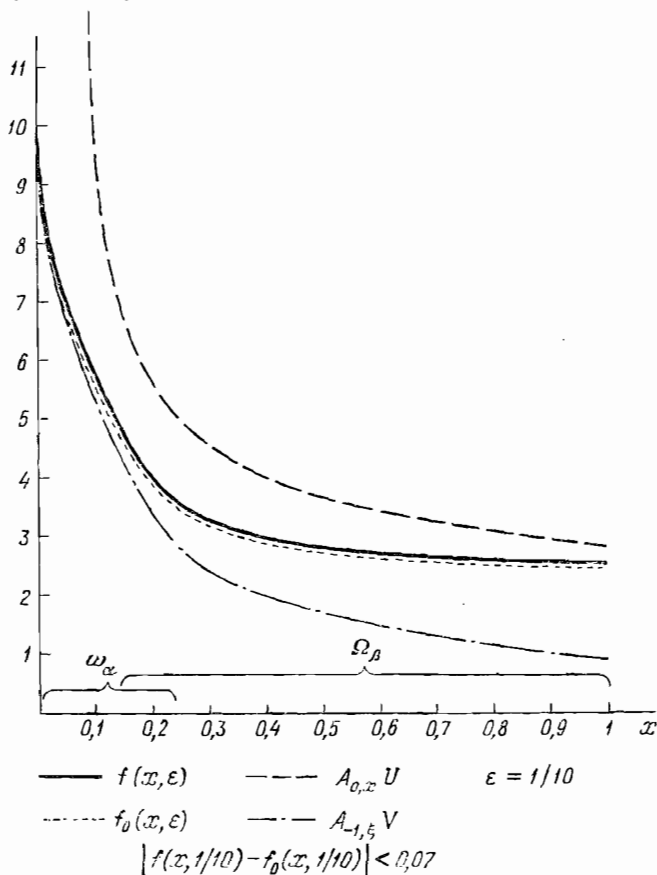


Рис. 1

лезно иметь какое-то достаточно простое выражение, которое приближает функцию равномерно всюду в $\bar{\Omega}$. Такое выражение называется *составным асимптотическим разложением* и строится для данного примера следующим образом. Ряды, стоящие в правых частях равенств (0.4) и (0.6), обозначим $U(x, \varepsilon)$ и $V(\xi, \varepsilon)$ соответствен-

по. Будем обозначать $A_{n,x}U$ сумму членов ряда U , содержащих степени ε с показателями не выше

n : $A_{n,x}U = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{e^x}{x^{j+1}} \varepsilon^j$. Аналогично определяется

$$A_{k,\xi}V = \sum_{j=0}^{k+1} \frac{\xi^j}{(1+\xi)^j j!} \varepsilon^{j-1}. \text{ Как выяснено выше, эти функции}$$

близки между собой в области $\omega_\alpha \cap \Omega_\beta$ (если считать $x = \varepsilon \xi$), т. е. при малых x и больших ξ . Поэтому естественно разложить каждый член в сумме $A_{n,x}U$ в ряд при $x \rightarrow 0$, а каждый член в сумме $A_{n,\xi}V$ в ряд при $\xi \rightarrow \infty$. После того как это сделано, заменим в первой сумме x на $\varepsilon \xi$ и выпишем сумму всех членов со степенями ε^s , где $s \leq m$. Обозначим ее $A_{m,\xi}(A_{n,x}U)$. В нашем примере

$$A_{m,\xi}(A_{n,x}U) = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ 0 \leq i \leq m+1}} (-1)^j \frac{\xi^{-j-1+i}}{i!} \varepsilon^{i-1}.$$

Аналогичную процедуру проведем с $A_{k,\xi}V$ при $\xi \rightarrow \infty$ и получим

$$A_{m,x}(A_{k,\xi}V) = \sum_{\substack{0 \leq j \leq k+1 \\ 0 \leq i \leq m}} (-1)^j \frac{j-i}{j!} \varepsilon^i.$$

Непосредственно видно, что при всех $m \geq 0$ и $n \geq 0$

$$A_{m,\xi}(A_{n,x}U) = A_{n,x}(A_{m,\xi}V). \quad (0.8)$$

Это и есть общая часть асимптотик (0.4) и (0.6). Равенство (0.8) — это алгебраическое описание согласованности внешнего и внутреннего разложений (0.4) и (0.6). Составное асимптотическое разложение равно

$$f_n(x, \varepsilon) = A_{n,x}U + A_{n,\xi}V - A_{n,\xi}(A_{n,x}U), \quad (0.9)$$

т. е. оно строится как сумма отрезков внешнего и внутреннего разложений минус их общая часть. Функция $f_n(x, \varepsilon)$ уже равномерно аппроксимирует $f(x, \varepsilon)$ всюду в $\bar{\Omega}$. Действительно, при $x \leq \varepsilon^\alpha$ функция $f(x, \varepsilon)$ близка к $A_{n,\xi}V$, а разность $A_{n,x}U - A_{n,\xi}(A_{n,x}U)$ также мала. С другой стороны, при $x \geq \varepsilon^\beta$ функция $f(x, \varepsilon)$ близка к $A_{n,x}U$, а разность $A_{n,\xi}V - A_{n,\xi}(A_{n,x}U) = A_{n,\xi}V - A_{n,x}(A_{n,\xi}V)$ мала. Ограничимся этим нестрогим анализом, но желающий без труда может доказать, что $|f_n(x, \varepsilon) - f(x, \varepsilon)| \leq M_n \varepsilon^{n+1}$ всюду при $0 \leq x \leq 1$. На

рис. 1 изображены графики $f(x, \varepsilon)$, $A_{0,x}U$ и $A_{-1,\xi}V$ при $\varepsilon = 1/10$.

Проведенный асимптотический анализ для функции (0.3) может показаться по меньшей мере неразумным. Отчасти это действительно так: явный вид функции (0.3) во многих отношениях проще, яснее и понятнее, чем асимптотические ряды (0.4), (0.6) и тем более громоздкое и устрашающее выражение (0.9). Однако надо иметь в виду, что при решении дифференциальных уравнений явное решение, как правило, отсутствует, а ряды типа (0.1), (0.2) часто могут быть построены. При этом надо добиваться, чтобы были выполнены условия согласования, аналогичные равенству (0.8). Тогда и равномерное приближение типа (0.9) является вполне удовлетворительным, и в определенном смысле проблему приближенного решения краевой задачи для дифференциального уравнения можно считать решенной. Примеры такого рода будут приведены в следующих главах, а сейчас отметим, что даже для элементарной функции (0.3) представление (0.9) может оказаться полезным, если требуется исследовать асимптотику результата применения к $f(x, \varepsilon)$ какого-нибудь нелокального оператора. Рас-

смотрим, например, $J(\varepsilon) = \int_0^1 f(x, \varepsilon) dx$. Как найти

асимптотику этого интеграла при $\varepsilon \rightarrow 0$? Прямое разложение $f(x, \varepsilon)$ в ряд по ε приводит к расходящимся интегралам и не дает ответа. Между тем с помощью представления (0.9) ответ получается легко. Действительно, так как $f(x, \varepsilon) - f_n(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$ равномерно на отрезке $[0, 1]$, то, следовательно, $J(\varepsilon) = J_n(\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1})$,

где $J_n(\varepsilon) = \int_0^1 f_n(x, \varepsilon) dx$. А асимптотика $J_n(\varepsilon)$ легко вы-

числяется. Пусть для примера $n = 1$. Тогда $J_1(\varepsilon) =$

$$= \int_0^1 \{e^x(x^{-1} - \varepsilon x^{-2}) + (1 + \xi)^{-1}(\varepsilon^{-1} + \xi + 2^{-1}\varepsilon\xi^2) - (\varepsilon_1^{-1} +$$

$$+ \varepsilon^{-1}x + \varepsilon^{-1}2^{-1}x^2)(\varepsilon x^{-1} - \varepsilon^2 x^{-2})\} dx = \int_0^1 [e^x - 1 - x -$$

$$- 2^{-1}x^2] x^{-1} dx - \varepsilon \int_0^1 \left[e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \right] x^{-2} dx +$$

$+ \int_0^{\varepsilon-1} (1 + \xi)^{-1} (1 + \varepsilon \xi + 2^{-1} \varepsilon^2 \xi^2) d\xi$. Последний интеграл вычисляется явно. Таким образом, $J(\varepsilon) = -\ln \varepsilon + a_0 + \varepsilon \ln \varepsilon - a_1 \varepsilon - 2^{-1} \varepsilon^2 \ln \varepsilon + O(\varepsilon^2)$, где $a_0 = \int_0^1 [e^x - 1 - x - 2^{-1} x^2] x^{-1} dx + 5/4$, $a_1 = \int_0^1 [e^x - 1 - x - 2^{-1} x^2] x^{-2} dx + 1/2$. Конечно, такой прием вычисления асимптотики интеграла от $f(x, \varepsilon)$ не является новым. Фактически он эквивалентен регуляризации расходящихся интегралов, возникающих при разложении $f(x, \varepsilon)$ в ряд по ε . Однако этот пример показывает пользу равномерного асимптотического разложения (0.9) даже в самых простых ситуациях.

Сделаем некоторые замечания об обозначениях, употребляемых в дальнейшем. Если не оговорено противное, то ряды понимаются как асимптотические либо при условии, что параметр (большой частью $\varepsilon > 0$) стремится к нулю, либо стремится к нулю или бесконечности независимая переменная.

Если ряд сходящийся, то это специально оговаривается. Также оговаривается, если ряд рассматривается как формальный объект с очевидными правилами сложения, умножения и т. д. Такие ряды называются далее формальными рядами.

Уточним определение операторов $A_{\alpha, x}$, которые были использованы в приведенном выше примере. Пусть

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(\varepsilon) u_k(x) \quad (0.10)$$

— формальный ряд, где $v_k(\varepsilon)$ — какая-нибудь калибровочная последовательность, обладающая следующим свойством: для любого натурального n найдется k_0 такое, что $v_{k_0}(\varepsilon) = o(\varepsilon^n)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (и, следовательно, $v_k(\varepsilon) = o(\varepsilon^n)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и всех $k \geq k_0$). Под функцией $A_{\alpha, x} U$ будем всюду понимать частичную сумму ряда (0.10), составленную из тех его членов, для которых $\varepsilon^\beta = o(v_k(\varepsilon))$ при всех $\beta > \alpha$. Смысл оператора $A_{\alpha, x}$ особенно прост в том часто встречающемся случае, когда калибровочная последовательность $v_k(\varepsilon)$ состоит из функций вида $\varepsilon^m \ln^i \varepsilon$, где m и i — целые и для каждого фикс-

сированного m существует лишь конечный набор чисел i (как положительных, так и отрицательных). Тогда для целого числа p величина $A_{p,x}U$ означает частичную сумму ряда (0.10), содержащую все члены, для которых показатель степени ε не превосходит p .

Индекс x в обозначении оператора $A_{\alpha,x}$ уточняет, что коэффициенты ряда (0.10) являются функциями переменной x . Важность этого индекса связана с тем, что обычно, кроме независимой переменной x , имеется другая переменная ξ , зависящая от x и ε . Поэтому оператор $A_{\alpha,\xi}$ означает, что сначала надо записать функцию, на которую действует оператор, в виде ряда с коэффициентами — функциями от ξ — и затем применить описанную процедуру. Пусть для примера $x = \varepsilon\xi$, а

$$\mathcal{F}(x, \varepsilon) = \frac{e^x}{x} + \varepsilon \frac{\cos x}{x^2} + \frac{\varepsilon^2}{x^3}. \text{ Тогда } A_{1,x}\mathcal{F} = \frac{e^x}{x} + \varepsilon \frac{\cos x}{x^2},$$

$$\text{а } A_{1,\xi}\mathcal{F} = A_{1,\xi} \left(\frac{e^{\varepsilon\xi}}{\varepsilon\xi} + \frac{\cos \varepsilon\xi}{\varepsilon\xi^2} + \frac{1}{\varepsilon\xi^3} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\xi^3} \right) + 1 + \varepsilon \left(\frac{\xi}{2} - \frac{1}{6} \right). \text{ Переменная } x \text{ может означать и точку многомерного пространства; определение оператора } A_{\alpha,x} \text{ при этом не меняется.}$$

Более просто выглядит оператор B_α , который постоянно используется далее и тоже означает взятие частичной суммы ряда. Он применяется к ряду вида $H =$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} h_h(x), \text{ где } x = (x_1, \dots, x_n) \text{ стремится к нулю или}$$

к бесконечности, а функции $h_h(x)$ мажорируются какой-нибудь калибровочной последовательностью. Если $x \rightarrow 0$, то $B_\alpha H$ означает частичную сумму всех членов ряда H таких, которые не являются $o(|x|^\alpha)$ при $x \rightarrow 0$. Аналогично определяется $B_\alpha H$ и в том случае, когда $|x| \rightarrow \infty$.

При нумерации формул используются двойные индексы: первый номер означает номер параграфа, второй — номер формулы. При ссылках внутри одной главы приводится только этот двойной номер формулы. При ссылке на формулу другой главы добавляется указание номера главы.

Знак ■ свидетельствует об окончании доказательства. Если доказательство очевидно, то этот знак ставится сразу после формулировки утверждения.

Глава I

ФУНКЦИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Эта глава носит вспомогательный характер. Здесь будут рассмотрены некоторые примеры, в которых $u_k(x)$ — коэффициенты внешнего разложения (0.1) — не имеют особенностей в $\bar{\Omega}$. В таком случае, как показывает опыт, функции пограничного слоя $v_i(\xi)$ — коэффициенты ряда (0.2) — ведут себя особенно просто: решение $u(x, \varepsilon)$ отличается от частичных сумм ряда (0.1) на величину, которая экспоненциально быстро стремится к нулю при удалении от множества Γ . Поэтому можно (и это удобнее) искать асимптотику решения в виде суммы ряда

(0.1) и ряда $\sum_{i=0}^{\infty} \mu_i(\varepsilon) z_i(\xi)$. Коэффициенты $z_i(\xi)$ экспоненциально быстро стремятся к нулю при $\xi \rightarrow \infty$. Если же в окрестности Γ искать асимптотику решения в виде (0.2), то очевидно, что $v_i(\xi) = z_i(\xi) + \tilde{v}_i(\xi)$, где $\tilde{v}_i(\xi)$ — это функции, которые получаются из ряда (0.1) переразложением коэффициентов $u_k(x)$ вблизи Γ в ряды Тейлора.

Задачи такого сорта, как правило, намного проще тех, которые составляют основное содержание этой книги. Их теория была хорошо разработана в основном около тридцати лет назад (примечания и литературные комментарии помещены в конце книги). Так что материал этой главы носит как бы вводный характер и призван сделать чтение основных задач из гл. II—VI независимым от другой (в основном — журнальной) литературы.

§ 1. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

Обыкновенные дифференциальные уравнения не являются основным объектом нашего исследования. К ним мы прибегаем лишь для того, чтобы на простых примерах лучше оттенить наиболее существенные черты асимптотического анализа, который будет применяться для уравнений с частными производными. Поэтому, чтобы не отвлекать внимание на менее существенные обстоятельства, в этом параграфе будет подробно проведен лишь формализм построения асимптотики. Ее обоснование совсем не будет затрагиваться. При желании с обоснованием асимптотики можно ознакомиться в статьях, указанных в литературных комментариях.

Пример 1. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\varepsilon^2 u'' - q(x)u = f(x) \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1, \quad (1.1)$$

$$u(0, \varepsilon) = R_0, \quad (1.2)$$

$$u(1, \varepsilon) = R_1, \quad (1.3)$$

где $q, f \in C^\infty[0, 1]$, $q(x) > \text{const} > 0$.

Внешнее разложение (0.1) здесь легко строится. Очевидно, что оно имеет вид

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} u_{2k}(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.4)$$

где U — это пока что формальный ряд. Подставим U в уравнение (1.1) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . Получим рекуррентную систему уравнений

$$-q(x)u_0(x) = f(x), \quad q(x)u_{2k}(x) = u_{2k-2}''(x) \quad \text{при } k \geq 1. \quad (1.5)$$

Отсюда однозначно определяются все $u_{2k}(x) \in C^\infty[0, 1]$.

Под формальным асимптотическим решением (ф. а. р.) уравнения при $\varepsilon \rightarrow 0$ будем понимать ряд, частичные суммы которого удовлетворяют уравнению с точностью до ε^m , где $m \rightarrow \infty$ вместе с номером частичной суммы. Точно так же понимается и ф. а. р. краевой задачи — при этом подразумевается приближенное удовлетворение и уравнению, и краевым условиям.

Из формул (1.5) следует, что ряд (1.4) является *ф. а. р. уравнения* (1.1) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Но он не является *ф. а. р.* всей краевой задачи, так как условия (1.2), (1.3) для него, вообще говоря, не выполнены даже формально. Хотя функции $u_{2k}(x)$ — коэффициенты ряда (1.4) — гладкие функции и особых хлопот не доставляют, но возникла, как говорят, *невязка в граничных условиях* (1.2), (1.3). Для ее ликвидации следует ввести новые, внутренние переменные в окрестностях точек $x = 0$ и $x = 1$. Эти точки и составляют особое множество Γ в данной задаче. Они совершенно равноправны, поэтому рассмотрим лишь окрестность точки $x = 0$. Если в качестве гипотезы принять утверждение, что ряд (1.4) близок к решению $u(x, \varepsilon)$ для внутренних точек отрезка $[0, 1]$, то, значит, решение $u(x, \varepsilon)$ резко изменяется от R_0 при $x = 0$ до $\approx u_0(0)$ в точках, близких к нулю. Следовательно, для того чтобы было удобно описывать это быстрое изменение функции, надо ввести внутреннюю «растянутую» координату ξ . Самая простая замена, соответствующая растяжению координаты, — это $x = \varepsilon^\alpha \xi$, где $\alpha > 0$. Как выбрать α ? Один из способов состоит в том, чтобы положить в уравнении (1.1) $q(x) \equiv \text{const} > 0$, выписать явное решение задачи и убедиться, что $\alpha = 1$. Видимо, тот же показатель надо брать и для переменного коэффициента $q(x)$.

Обсудим здесь другой способ выбора α , имеющий более широкое поле применения. Обозначим $u(\varepsilon^\alpha \xi, \varepsilon) \equiv v(\xi, \varepsilon)$ и сделаем замену переменной в уравнении (1.1):

$$\varepsilon^{2-2\alpha} \frac{d^2 v}{d\xi^2} - q(\varepsilon^\alpha \xi) v = f(\varepsilon^\alpha \xi). \quad (1.6)$$

Далее надо посмотреть, какие члены в этом уравнении являются главными при $\varepsilon \rightarrow 0$. Если $\alpha < 1$, то главные члены — это — $q(0)v(\xi, 0)$ и $f(0)$. Такое пренебрежение второй производной уже привело к внешнему разложению (1.4) и ничего нового дать не может. Если $\alpha > 1$, то главный член — это $\varepsilon^{2-2\alpha} d^2 v / d\xi^2$ и уравнение первого приближения — это $d^2 v / d\xi^2 = 0$. Его решения — линейные функции — также неспособны описать плавный переход от граничного условия $u(0, \varepsilon) = R_0$ к внешнему разложению (1.4). И для других задач внутренние координаты (или, другими словами, новые масштабы) выбираются таким образом, чтобы в уравнении оставались по крайней мере два главных члена. Но вопрос о том, какие это долж-

ны быть членами, для уравнений в частных производных не так прост и в общем случае не формализован. В следующих главах мы каждый раз будем сталкиваться с проблемой правильного выбора масштабов, и в каждом конкретном случае она получит свое решение. А здесь, в уравнении (1.6), очевидно, что надо положить $\alpha = 1$. При этом все члены уравнения (1.6) становятся равноправными. Далее можно представить $v(\xi, \varepsilon)$ в виде ряда по степеням ε , подставить этот ряд в уравнение (1.6) и искать коэффициенты ряда.

Однако, как отмечено выше, в этом случае (ввиду того, что $u_k(x)$ — гладкие функции) удобнее искать ф. а. р. задачи (1.1), (1.2) в виде суммы ряда (1.4) и ряда

$$Z = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k(\xi), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.7)$$

где $\xi = \varepsilon^{-1}x$. Так как ряд (1.4) — это ф. а. р. неоднородного уравнения (1.1), то ряд (1.7) должен быть ф. а. р. однородного уравнения, которое в переменной ξ имеет вид

$$\frac{d^2 Z}{d\xi^2} - q(\varepsilon\xi) Z = 0. \quad (1.8)$$

Функции $z_k(\xi)$ должны быть определены на отрезке $[0, \varepsilon^{-1}]$, но удобнее считать их определенными всюду на $[0, \infty)$. Условия на функции пограничного слоя $z_k(\xi)$ следующие. При фиксированном $x > 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ они не должны оказывать существенное влияние, следовательно,

$$z_k(\xi) \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty. \quad (1.9)$$

Главное же их предназначение в том, чтобы ликвидировать невязку в граничном условии (1.2). Сумма рядов (1.4) и (1.7) должна удовлетворять условию $u(0, \varepsilon) = R_0$. Отсюда следует, что

$$z_0(0) = R_0 - u_0(0), \quad z_{2k}(0) = -u_{2k}(0) \text{ при } k > 0, \quad (1.10)$$

$$z_{2k+1}(0) = 0 \text{ при } k \geq 0.$$

Дифференциальные уравнения для $z_k(\xi)$ получаются после подстановки ряда (1.7) в уравнение (1.8) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε . Предварительно надо разложить коэффициент $q(x)$ в ряд Тейлора $q(\varepsilon\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \varepsilon^k \xi^k$. Обозначим $q_0 = b^2$ и получим ре-

кurrentную систему уравнений для $z_k(\xi)$:

$$\begin{aligned} z_0'' - b^2 z_0 &= 0, \\ z_1'' - b^2 z_1 &= q_1 \xi z_0, \\ &\dots \dots \dots \\ z_k'' - b^2 z_k &= \sum_{j=1}^k q_j \xi^j z_{k-j}(\xi). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Легко определяются решения этой системы, удовлетворяющие условиям (1.9), (1.10):

$$\begin{aligned} z_0(\xi) &= [R_0 - u_0(0)] \exp(-b\xi), \\ z_1(\xi) &= q_1 [u_0(0) - R_0] (2b)^{-2} (b\xi^2 + \xi) \exp(-b\xi), \\ &\dots \dots \dots \\ z_k(\xi) &= P_{2k}(\xi) \exp(-b\xi). \end{aligned}$$

Здесь P_{2k} — многочлены степени $2k$, коэффициенты которых нетрудно явно вычислить. Итак, ряд (1.7) построен. Подставляя его частичные суммы $A_{n, \xi} Z$ в уравнение (1.8), убедимся, что они удовлетворяют ему с точностью до $O(\varepsilon^{n+1})$. Таким образом, сумма рядов (1.4) и (1.7) является ф. а. р. уравнения (1.1) и условия (1.2).

Для ликвидации невязки в точке $x = 1$ строится точно такой же ряд

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(\eta), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.12)$$

где $\eta = \varepsilon^{-1}(1-x)$. Функции $w_k(\eta)$ — это решения краевых задач при $0 \leq \eta < \infty$, полностью аналогичных задачам для $z_k(\xi)$. Сумма рядов (1.4), (1.7) и (1.12) является по построению ф. а. р. уравнения (1.1). Кроме того, сумма рядов (1.4) и (1.7) точно удовлетворяет условию (1.2), а сумма рядов (1.4) и (1.12) — условию (1.3). Таким образом, оставшиеся невязки в граничных условиях — это значения ряда (1.7) при $x = 1$ и ряда (1.12) при $x = 0$. Так как коэффициенты $z_k(\xi)$ и $w_k(\eta)$ экспоненциально стремятся к нулю на бесконечности, то эти невязки также имеют экспоненциально малую величину. Итак, построение асимптотики решения $u(x, \varepsilon)$ закончено: сумма рядов (1.4), (1.7) и (1.12) является ф. а. р. задачи (1.1) — (1.3). На рис. 2 показан примерный график решения $u(x, \varepsilon)$ и главных членов ф. а. р.

В заключение остановимся на вопросе, какой вид имеют функции $v_i(\xi)$, если искать ф. а. р. задачи (1.1) — (1.3) в окрестности точки $x=0$ в виде ряда (0.2). Ясно, что $\mu_i(\varepsilon) = \varepsilon^i$, а $v_i(\xi) = z_i(\xi) + \tilde{v}_i(\xi)$, где $z_i(\xi)$ — коэффициенты ряда (1.7), а $\tilde{v}_i(\xi)$ обязаны своим происхождением ряду (1.4): надо каждый член ряда (1.4) — функцию

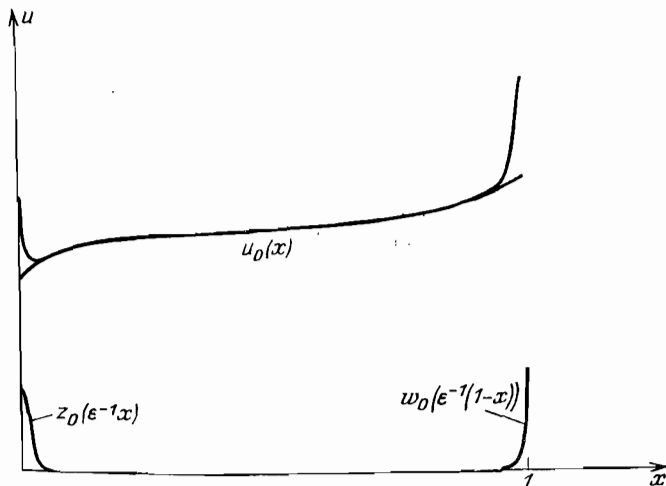


Рис. 2

$u_k(x) = u_k(\varepsilon\xi)$ — разложить в ряд Тейлора и собрать все коэффициенты при ε^i . Видно, что $\tilde{v}_i(\xi) = \sum_{j=0}^i \frac{1}{j!} \frac{\partial^j u_{i-j}}{\partial x^j}(0) \xi^j$.

Итак, во внутренней переменной ξ коэффициенты асимптотического разложения решения $u(x, \varepsilon)$ вблизи границы — это сумма полинома и функции, экспоненциально быстро стремящейся к нулю на бесконечности.

Пример 2. Рассмотрим немного более сложную краевую задачу

$$\varepsilon \frac{d^4 u}{dx^4} + a(x) \frac{du}{dx} = f(x) \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.13)$$

$$u(0, \varepsilon) = \frac{du}{dx}(0, \varepsilon) = 0, \quad (1.14)$$

$$u(1, \varepsilon) = \frac{du}{dx}(1, \varepsilon) = 0, \quad (1.15)$$

где $a, f \in C^\infty[0, 1]$, $a(x) \geq \text{const} > 0$. Здесь также будем

искать асимптотику решения $u(x, \varepsilon)$ в виде суммы внешнего разложения $U(x, \varepsilon)$ и внутренних разложений $Z(\xi, \varepsilon)$, $W(\eta, \varepsilon)$, которые описывают поведение решения вблизи левого и правого концов отрезка соответственно. При этом $\xi = \varepsilon^{-\alpha}x$, $\eta = \xi^{-\beta}(1-x)$, а $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ еще предстоит найти. Как и в предыдущем примере, Z должно быть ф. а. р. однородного уравнения, которое в переменной ξ имеет вид $\varepsilon^{1-4\alpha} \frac{d^4 Z}{d\xi^4} + \varepsilon^{-\alpha} a(\varepsilon^\alpha \xi) \frac{dZ}{d\xi} = 0$. По тем

же самым соображениям, что и в примере 1, надо выбрать α так, чтобы $1 - 4\alpha = -\alpha$, т. е. $\alpha = 1/3$. Аналогично выбирается $\beta = 1/3$.

Как будет видно из дальнейшего, связь между рядами U , Z и W здесь более сложная, чем в предыдущем примере. Если в примере 1 внешнее разложение U строилось независимо, то здесь внешнее и внутреннее разложения взаимно влияют друг на друга. Отсюда ясно, что они должны содержать одинаковые степени ε . Так как при разложении коэффициента $a(\varepsilon^{1/3}\xi)$ в ряд появятся степени $\varepsilon^{k/3}$, то такова правильная калибровочная последовательность для всех асимптотических разложений: U , Z и W .

Итак, полагаем $U(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/3} u_k(x)$, $Z(\xi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/3} z_k(\xi)$, $W(\eta, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/3} w_k(\eta)$, где $\xi = \varepsilon^{-1/3}x$, $\eta = \varepsilon^{-1/3}(1-x)$. Как и в примере 1, для функций $u_k(x)$ получается рекуррентная система уравнений

$$\begin{aligned} a(x) u'_0(x) &= f(x), \quad u'_1(x) = 0, \quad u'_2(x) = 0, \\ a(x) u'_k(x) &= -u_{k-3}^{(4)}(x), \quad k \geq 3. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Однако теперь решение этой системы не единственно: решение каждого из уравнений зависит от одной произвольной постоянной. Можно с помощью этих постоянных добиться того, чтобы удовлетворялось хотя бы одно из четырех граничных условий (1.14), (1.15). Но какое? Чтобы найти постоянные и тем самым однозначно определить $u_k(x)$, следует принять во внимание поведение решения $u(x, \varepsilon)$ в пограничных слоях у концов отрезка. Для этого надо проанализировать возникающие вспомогательные задачи для коэффициентов $z_k(\xi)$ и $w_k(\eta)$. В уравнении

$\frac{d^4 Z}{d\xi^4} + a(\varepsilon^{1/3}\xi) \frac{dZ}{d\xi} = 0$ разложим коэффициент $a(\varepsilon^{1/3}\xi)$ в ряд

$a(\varepsilon^{1/3}\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon^{k/3} \xi^k$ и подставим ряд Z . В результате получается система дифференциальных уравнений

$$\frac{d^4 z_0}{d\xi^4} + a(0) \frac{dz_0}{d\xi} = 0, \quad (1.17)$$

$$\frac{d^4 z_k}{d\xi^4} + a(0) \frac{dz_k}{d\xi} = - \sum_{j=1}^k a_j \xi^j \frac{dz_{k-j}}{d\xi}, \quad k \geq 1. \quad (1.18)$$

Аналогично,

$$\frac{d^4 w_0}{d\eta^4} - a(1) \frac{dw_0}{d\eta} = 0, \quad \frac{d^4 w_k}{d\eta^4} - a(1) \frac{dw_k}{d\eta} = \sum_{j=1}^k b_j \eta^j \frac{dw_{k-j}}{d\eta},$$

$$k \geq 1, \quad (1.19)$$

где b_j — коэффициенты разложения функции $a(1 - \varepsilon\eta)$ в ряд Тейлора. Считая, как и ранее, что $z_k(\xi)$ и $w_k(\eta)$ экспоненциально быстро стремятся к нулю на бесконечности, приходим к требованию, чтобы сумма рядов U и Z удовлетворяла краевым условиям (1.14), а сумма рядов U и W — условиям (1.15). Отсюда получаются граничные условия для u_k , z_k и w_k :

$$z_k(0) + u_k(0) = 0, \quad k \geq 0, \quad (1.20)$$

$$z'_0(0) = 0, \quad z'_k(0) + u'_{k-1}(0) = 0, \quad k \geq 1, \quad (1.21)$$

$$w_k(0) = -u_k(1), \quad k \geq 0, \quad w'_0(0) = 0, \quad (1.22)$$

$$w'_k(0) - u'_{k-1}(1) = 0, \quad k \geq 1.$$

Кроме того, требуется, чтобы

$$z_k(\xi) \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty, \\ w_k(\eta) \rightarrow 0 \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \quad (1.23)$$

Так как $a(0) > 0$, то уравнение $\frac{d^4 z}{d\xi^4} + a(0) \frac{dz}{d\xi} = 0$ имеет лишь одно линейно независимое решение, удовлетворяющее условию (1.23). Это решение $z(\xi) = C \exp(-[a(0)]^{1/3} \xi)$.

А уравнение $\frac{d^4 w}{d\eta^4} - a(1) \frac{dw}{d\eta} = 0$ имеет два линейно независимых решения, удовлетворяющие условию (1.23):

$w(\eta) = \exp(-\gamma\eta) \{C_1 \cos \gamma\sqrt{3}\eta + C_2 \sin \gamma\sqrt{3}\eta\}$, где $\gamma = 2^{-1}[a(1)]^{1/3}$. Таким образом, на правом конце ряд W может, вообще говоря, ликвидировать невязку в двух граничных условиях, а на левом конце это невозможно. Там функции пограничного слоя $z_k(\xi)$ могут способствовать лишь удовлетворению одного из краевых условий. А для выполнения другого краевого условия надо привлечь неопределенные пока произвольные постоянные в коэффициентах внешнего разложения.

Учитывая изложенные соображения, будем определять коэффициенты u_k , z_k и w_k следующим образом. Из условия $z_0'(0) = 0$, условия (1.23) и из уравнения (1.17) вытекает, что $z_0(\xi) \equiv 0$. Поэтому условие (1.20) при $k=0$ превращается в равенство $u_0(0) = 0$. Отсюда и из уравнения (1.16) однозначно определяется $u_0(x) =$

$$= \int_0^x f(t) [a(t)]^{-1} dt. \text{ Далее, условие (1.24) } z_1'(0) = -u_0'(0)$$

вместе с (1.23) и уравнением (1.18) при $k=1$ однозначно определяют $z_1(\xi) = f(0)[a(0)]^{-4/3} \exp\{-[a(0)]^{1/3}\xi\}$. Затем из условия (1.20) $u_1(0) = -z_1(0)$ и уравнения (1.16) вытекает, что $u_1(x) \equiv -z_1(0)$. Далее точно так же последовательно определяются $z_2(\xi)$, $u_2(x)$, $z_3(\xi)$ и т. д. После построения функций $u_k(x)$ из уравнений (1.19) и условий (1.22), (1.23) однозначно определяются функции $w_k(\eta)$. Видно, что они экспоненциально быстро стремятся к нулю при $\eta \rightarrow \infty$. Построение ф. а. р. задачи (1.13) — (1.15) закончено.

§ 2. Уравнения с частными производными

Рассмотрим сначала пример краевой задачи, где поведение решения по существу такое же, как в примере 1.

Пример 3. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с границей $S = \partial\Omega \in C^\infty$, а $u(x, \varepsilon)$ — решение краевой задачи

$$\mathcal{L}_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 \Delta u - q(x)u = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$u(x, \varepsilon) = 0 \text{ при } x \in S. \quad (2.2)$$

Здесь $q, f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $q(x) > 0$ в $\bar{\Omega}$.

Известно (см., например, [51], гл. III), что при всяком $\varepsilon > 0$ существует единственное решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (2.1), (2.2).

Из принципа максимума вытекает оценка решения, не зависящая от ε :

$$|u(x, \varepsilon)| \leq \max_{\Omega} |[q(x)]^{-1} f(x)|. \quad (2.3)$$

Требуется найти асимптотику решения $u(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Так же, как в примере 1, ищем внешнее разложение в виде

$$U(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} u_{2k}(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Коэффициенты $u_{2k}(x)$ находятся так же, как в примере 1, из соответствующей рекуррентной системы $u_0(x) = -f(x)[q(x)]^{-1}$, $u_k(x) = [q(x)]^{-1} \Delta u_{k-1}$, $k \geq 1$. Все $u_k(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$, но ряд U не удовлетворяет граничному условию.

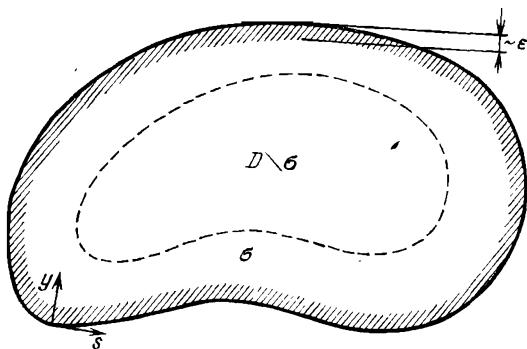


Рис. 3

Для того чтобы устранить невязку в граничном условии, надо построить погранслоистую функцию вдоль всей границы S . В силу гладкости S в ее окрестности можно ввести систему координат s, y , где s — координата на кривой S , а y — расстояние от точки $x \in \Omega$ до S (рис. 3). Те же соображения, что и в примерах 1 и 2, приводят к замене переменных $y = \varepsilon \zeta$ и к следующему виду внутреннего разложения:

$$Z(s, \zeta, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k(s, \zeta). \quad (2.4)$$

Ряд Z должен быть ф. а. р. однородного уравнения $\mathcal{L}Z = 0$, которое после замены переменных выглядит следую-

щим образом:

$$\mathcal{L}'_\varepsilon Z \equiv \frac{\partial^2 Z}{\partial \zeta^2} + \varepsilon L_1 \frac{\partial Z}{\partial \zeta} + \varepsilon^2 L_2 Z - q(x) Z = 0. \quad (2.5)$$

Здесь L_1 и L_2 — дифференциальные операторы первого и второго порядка, содержащие лишь дифференцирование по переменной s , с гладкими коэффициентами от s и y , т. е. от s и $\varepsilon \zeta$. Пусть $q(x)$ на границе равно $q_0(s)$. Разлагая коэффициенты в уравнении (2.5) в ряды Тейлора по переменной $\varepsilon \zeta$ и подставляя в это уравнение ряд (2.4), получаем рекуррентную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial \zeta^2} - q_0(s) z_0 = 0, \quad \frac{\partial^2 z_k}{\partial \zeta^2} - q_0(s) z_k = \mathcal{F}_k(s, \zeta), \quad k \geq 1. \quad (2.6)$$

Здесь правые части $\mathcal{F}_k(s, \zeta)$ линейно зависят от предыдущих z_i при $i < k$ и их производных, полиномиально зависят от ζ и гладко от s . Система (2.6) — это по сути дела та же система обыкновенных уравнений (1.11) из примера 1, только еще параметрически зависящая от s . Из граничного условия (2.2) вытекают требования на $z_k(s, 0)$:

$$z_{2k}(s, 0) = -u_{2k}(x)|_s, \quad z_{2k+1}(s, 0) = 0, \quad k \geq 0. \quad (2.7)$$

Так же, как и в примере 1, существуют функции z_k , удовлетворяющие уравнениям (2.6), условиям (2.7), определенные при $0 \leq \zeta < \infty$ и экспоненциально быстро стремящиеся к нулю при $\zeta \rightarrow \infty$. Отличие состоит лишь в том, что теперь z_k еще гладким образом зависят от переменной s . Внутреннее разложение (2.4) построено. Значения его коэффициентов существенны лишь при $0 \leq y \leq M\varepsilon$, т. е. в граничной полоске шириной порядка ε (на рис. 3 этот пограничный слой заштрихован). При $y = \varepsilon^\alpha$, где $\alpha < 1$, все члены ряда (2.4) экспоненциально малы, так как для каждого члена справедлива оценка

$$|z_k(s, \zeta)| \leq M_k \exp(-b\zeta), \quad (2.8)$$

где $q_0(s) > b^2$. Здесь и всюду далее посредством M будут обозначаться постоянные, не зависящие от ε и от аргументов оцениваемых функций. Эти постоянные, вообще говоря, зависят от номера асимптотического приближения и иногда будут снабжаться индексами, но большей частью индексы будут опускаться.

Таким образом, функции пограничного слоя достаточно рассматривать лишь в пограничной полосе. Однако для обоснования асимптотики удобно считать их определенными всюду в $\bar{\Omega}$, что можно сделать, умножая все $z_k(s, \varepsilon^{-1}y)$ на фиксированную гладкую функцию $\chi(x)$ (не зависящую от ε). Функция $\chi(x)$ равна единице вблизи S и нулю в $\Omega \setminus \sigma$, где σ — малая окрестность границы S (см. рис. 3). Такая «срезка» уместна и по той причине, что замена $x \leftrightarrow (s, y)$ диффеоморфна лишь в малой окрестности границы; там же имеет смысл и уравнение (2.5). Поэтому при обосновании асимптотики будем вместо ряда (2.4) рассматривать его произведение на функцию $\chi(x)$, что, в силу вышесказанного, асимптотически эквивалентно.

Итак, покажем, что $U(x, \varepsilon) + \chi(x)Z(s, \xi, \varepsilon)$ — это асимптотический ряд для решения задачи (2.1), (2.2), равномерный всюду в $\bar{\Omega}$. Как и выше, обозначим частичные суммы рядов

$$A_n U = \sum_{k=0}^n \varepsilon^{2k} u_{2k}(x), \quad A_n Z = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k z_k(s, \xi).$$

По построению ряд U — это ф. а. р. уравнения (2.1). Действительно, $\mathcal{L}_\varepsilon A_{2n} U - f(x) = \varepsilon^{2n+2} \Delta u_{2n} = O(\varepsilon^{2n+2})$. Аналогично, ряд Z является ф. а. р. уравнения (2.5): $\mathcal{L}_\varepsilon A_n Z = O(\varepsilon^{n+1} \exp(-b\xi))$. Так как для функций $z_k(s, \xi)$ справедливы неравенства (2.8), то, следовательно, всюду в $\bar{\Omega}$

$$|\mathcal{L}_\varepsilon [A_{2n}(U + \chi Z)] - f(x)| \leq M \varepsilon^{2n+1}.$$

Из условий (2.7) вытекает, что $(U(x, \varepsilon) + \chi(x) \times \times Z(s, \xi, \varepsilon))_s = 0$; применяя к краевой задаче для оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ принцип максимума (см., например, [51], гл. III), получаем из двух последних соотношений оценку

$$|A_{2n}(U(x, \varepsilon) + \chi(x)Z(s, \xi, \varepsilon)) - u(x, \varepsilon)| \leq M \varepsilon^{2n+1} \text{ в } \bar{\Omega}. \quad (2.9)$$

Пусть граничная полоска σ_1 такова, что $\chi(x) = 1$ в σ_1 ($\sigma_1 \subset \sigma$). Тогда из (2.8) и (2.9) следует, что

$$\begin{aligned} |A_{2n} U - u(x, \varepsilon)| &\leq M \varepsilon^{2n+1} \text{ в } \bar{\Omega} \setminus \sigma_1, \\ |A_{2n}(U + Z) - u(x, \varepsilon)| &\leq M \varepsilon^{2n+1} \text{ в } \sigma_1. \end{aligned}$$

Таким образом, построено и обосновано асимптотическое разложение решения $u(x, \varepsilon)$ с точностью до любой степени ε , равномерное в $\bar{\Omega}$. Вместо оператора Лапласа в уравнении (2.1) может стоять любой эллиптический оператор второго порядка с гладкими коэффициентами — от этого практически ничего не изменится. Размерность области Ω в этом примере также не играет никакой роли. Если размерность области $l > 2$, то единственное отличие состоит в том, что s — это координата гладкого многообразия размерности $l - 1$.

Некоторое усложнение описанной выше методики возникает в том случае, когда граница области негладкая. Проиллюстрируем такой тип задач одним примером.

Пример 4. Рассмотрим задачу (2.1), (2.2) в квадрате $\Omega = \{x_1, x_2: 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$, где $g(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и в примере 3. Решение этой задачи $u(x_1, x_2, \varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$ также существует, непрерывно в $\bar{\Omega}$, удовлетворяет оценке (2.3) и бесконечно дифференцируемо всюду в $\bar{\Omega}$, кроме, быть может, углов квадрата. Эти сведения можно почерпнуть, например, из книг [51], [70], но для понимания дальнейшего они не очень существенны: наша задача — найти равномерное асимптотическое разложение решения $u(x_1, x_2, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Естественно искать асимптотику решения внутри области в том же виде, как и в предыдущем примере:

$$U(x, \varepsilon) = \sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon^{2h} u_{2h}(x_1, x_2). \quad (2.10)$$

Функции $u_{2h}(x_1, x_2) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ и находятся точно так же, как в примере 3. Вблизи границы асимптотика строится в виде суммы ряда (2.10) с погранслоиным рядом. Около каждой стороны квадрата это будет свой ряд.

Рассмотрим, например, погранслоиный ряд около стороны $x_1 = 0$, $0 < x_2 < 1$ (рис. 4). Он, очевидно, имеет вид

$$Z_1(y_1, x_2, \varepsilon) = \sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h z_h^{(1)}(y_1, x_2), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.11)$$

где $y_1 = \varepsilon^{-1}x_1$. После подстановки этого ряда в однородное уравнение $\mathcal{L}_\varepsilon Z_1 = 0$, как и ранее, получаем

рекуррентную систему для $z_k^{(1)}(y_1, x_2)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z_0^{(1)}}{\partial y_1^2} - q_0(x_2) z_0^{(1)} &= 0, \\ \frac{\partial^2 z_1^{(1)}}{\partial y_1^2} - q_0(x_2) z_1^{(1)} &= y_1 q_1(x_2) z_0^{(1)}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial^2 z_k^{(1)}}{\partial y_1^2} - q_0(x_2) z_k^{(1)} = \sum_{j=1}^k y_1^j q_j(x_2) z_{k-j}^{(1)} - \frac{\partial^2 z_{k-2}}{\partial x^2}, \quad k \geq 2.$$

Здесь $q_j(x_2)$ — коэффициенты Тейлора функции $q(x_1, x_2)$:

$q(\varepsilon y_1, x_2) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y_1^j q_j(x_2)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Из граничного условия (2.2) на стороне $x_1 = 0$ для суммы $U + Z_1$ следует, что

$$u_k(0, x_2) + z_k^{(1)}(0, x_2) = 0, \quad k \geq 0. \quad (2.13)$$

Так как по условию $q(x_1, x_2) > 0$, то $q_0(x_2) > 0$ и, следовательно, существуют решения уравнений (2.12), удовлетворяющие соотношениям (2.13) и стремящиеся к нулю при $y_1 \rightarrow \infty$:

$$|z_k^{(1)}(y_1, x_2)| \leq M_k e^{-\beta y_1}, \quad \text{где } 0 < \beta < \min_{\bar{\Omega}} [q(x_1, x_2)]^{1/2}.$$

Очевидно, что $z_k^{(1)}(y_1, x_2)$, кроме того, гладко зависят от x_2 .

Около каждой из остальных сторон квадрата $\bar{\Omega}$ получаются точно такие же погранслойные ряды, как и Z_1 . По построению ряд U является ф. а. р. уравнения (2.1), а каждый из погранслойных рядов вида (2.1) является ф. а. р. того же однородного уравнения. Но теперь сумма U и погранслойных рядов уже не является ф. а. р. полной задачи (2.1), (2.2), так как она не удовлетворяет условию (2.2). Неприятности по-

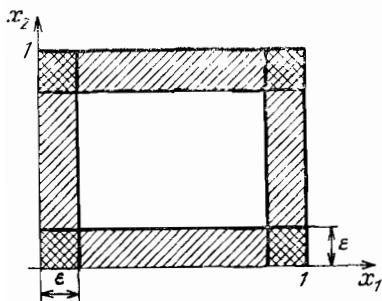


Рис. 4

явились около угловых точек. Действительно, сумма $U + Z_1$ равна нулю при $x_1 = 0$. Во внутренних точках этой границы значения всех остальных погранслойных рядов экспоненциально малы, и поэтому условие (2.2) асимптотически выполнено. Но вблизи концов отрезка, т. е.

около точек $(0, 0)$, $(0, 1)$, становятся существенными значения соседних погранслоиных функций.

Рассмотрим для примера окрестность начала координат. Около стороны $x_1 = 0$ погранслоиный ряд уже построен. Совершенно аналогично выглядит погранслоиный ряд

около стороны $x_2 = 0$: $Z_2(x_1, y_2, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k^{(2)}(x_1, y_2)$, где

$y_2 = \varepsilon^{-1} x_2$ и $z_k^{(2)}$ обладают точно такими же свойствами, что и $z_k^{(1)}$, только с заменой x_2 на x_1 и y_1 на y_2 . Выясним вид возникшей невязки в граничном условии вблизи начала координат. Значения остальных погранслоиных рядов Z_3 и Z_4 около начала координат экспоненциально малы, а ряд $U + Z_1 + Z_2$ равен $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k^{(2)}(0, y_2)$ при $x_1 = 0$ и равен

$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k^{(1)}(y_1, 0)$ при $x_2 = 0$. Это и есть вновь возникшая невязка в граничном условии. Отметим только, что она непрерывна в точке $(0, 0)$, так как $z_k^{(1)}(0, 0) = z_k^{(2)}(0, 0) = -u_k(0, 0)$. Естественно ожидать, что влияние такой невязки скажется лишь в ε -окрестности начала координат (дважды заштрихованная область на рис. 4). Поэтому следует ввести еще один погранслоиный ряд, который носит название *углового*. Его переменные — это $y_1 = \varepsilon^{-1} x_1$ и $y_2 = \varepsilon^{-1} x_2$. Обозначим такой ряд посредством

$W = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(y_1, y_2)$. Рекуррентные уравнения для w_k получаются описанным выше стандартным путем и имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y_2^2} - \gamma^2 w_0 &= 0, \\ \frac{\partial^2 w_k}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial y_2^2} - \gamma^2 w_k &= \sum_{j=1}^k P_j(y_1, y_2) w_{k-j}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где полиномы $P_j(y_1, y_2) = \sum_{i=0}^j \frac{1}{i!(j-i)!} \frac{\partial^j q}{\partial x_1^i \partial x_2^{j-i}} y_1^i y_2^{j-i}$, а $\gamma^2 = q(0, 0) > 0$. Граничные условия для w_k должны компенсировать возникшие ранее невязки:

$$\begin{aligned} w_k(y_1, 0) &= -z_k^{(1)}(y_1, 0), \quad 0 < y_1 < \infty, \\ w_k(0, y_2) &= -z_k^{(2)}(0, y_2), \quad 0 < y_2 < \infty. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Итак, задачи (2.14), (2.15) поставлены в квадранте $E = \{y_1, y_2: 0 < y_1 < \infty, 0 < y_2 < \infty\}$. Известно, что существуют решения этих задач, которые экспоненциально быстро стремятся к нулю при $y_1 + y_2 \rightarrow \infty$.

В этом можно убедиться разными способами, но для данного примера докажем такое утверждение с помощью явной функции Грина для уравнения (2.14) в квадранте E . Легко проверить, что функция $\frac{1}{2\pi} K_0(\gamma \sqrt{y_1^2 + y_2^2})$, где K_0 — функция Макдональда ([53], § 5.7; [96], гл. VII), является фундаментальным решением оператора $\Delta - \gamma^2$, а следовательно, $G(y_1, y_2, \eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2\pi} \times \{K_0(\gamma \sqrt{(y_1 - \eta_1)^2 + (y_2 - \eta_2)^2}) - K_0(\gamma \sqrt{(y_1 - \eta_1)^2 + (y_2 + \eta_2)^2}) - K_0(\gamma \sqrt{(y_1 + \eta_1)^2 + (y_2 - \eta_2)^2}) + K_0(\gamma \sqrt{(y_1 + \eta_1)^2 + (y_2 + \eta_2)^2})\}$ — это функция Грина первой краевой задачи для уравнения

$$\Delta w - \gamma^2 w = \varphi \text{ в } E. \quad (2.16)$$

Пусть функция $\varphi(y_1, y_2) \in C^\infty(\bar{E} \setminus (0, 0)) \cap C(\bar{E})$, функции $\psi_1(y_1)$ и $\psi_2(y_2)$ принадлежат $C^\infty(0, \infty) \cap C([0, \infty))$ и справедливы оценки $|\varphi(y_1, y_2)| < M \exp\{-\beta(y_1 + y_2)\}$, $|\psi_1(y_1)| < M \exp(-\beta y_1)$, $|\psi_2(y_2)| < M \exp(-\beta y_2)$. Пусть, кроме того, $\psi_1(0) = \psi_2(0)$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{функция} \quad w(y_1, y_2) &= \int_0^\infty \int_0^\infty G(y_1, y_2, \eta_1, \eta_2) \varphi(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 - \\ &- \int_0^\infty \frac{\partial G}{\partial y_2}(y_1, y_2, \eta_1, 0) \psi_1(\eta_1) d\eta_1 - \int_0^\infty \frac{\partial G}{\partial y_1}(y_1, y_2, 0, \eta_2) \psi_2(\eta_2) d\eta_2 \end{aligned}$$

непрерывна в $\bar{E}$, удовлетворяет уравнению (2.16) в $\bar{E} \setminus (0, 0)$ и граничным условиям $w(y_1, 0) = \psi_1(y_1)$, $w(0, y_2) = \psi_2(y_2)$. Из явного вида $w(y_1, y_2)$ и из свойств функции K_0 вытекает, что $w(y_1, y_2) \in C^\infty(\bar{E} \setminus (0, 0))$ и удовлетворяет неравенству

$$|w(y_1, y_2)| < M_1 \exp\{-\beta(y_1 + y_2)\}. \quad (2.17)$$

Последовательно применяя доказанное утверждение к уравнениям (2.14) и граничным условиям (2.15), заключаем по индукции, что решения этих уравнений непрерывны в E и удовлетворяют неравенствам (2.17). Существование искомых решений $w_k(y_1, y_2)$ доказано.

Обозначая построенный ряд W_1 , построим аналогичным образом ряды W_2, W_3, W_4 около остальных вершин квадрата $\bar{\Omega}$. В силу неравенств (2.17) все коэффициенты этих рядов экспоненциально убывают на расстоянии ε^α ($0 < \alpha < 1$) от соответствующей вершины. По построению каждый из рядов W_i — это ф. а. р. уравнения $\mathcal{L}_\varepsilon W = 0$.

Таким образом, ряд $U + \sum_{i=1}^4 Z_i + \sum_{i=1}^4 W_i$ является ф. а. р.

не только уравнения (2.1), но и всей краевой задачи (2.1), (2.2). Обоснование правильности этой асимптотики проводится так же, как в примере 3, и даже несколько проще, так как из-за специального вида области Ω здесь нет необходимости умножать функции пограничного слоя на срезающую функцию $\chi(x)$. Частичная сумма $Y_{2n}(x, \varepsilon) = A_{2n} \left(U + \sum_{i=1}^4 Z_i + \sum_{i=1}^4 W_i \right)$, где A_{2n} означает тот же оператор, что и в предыдущих примерах, удовлетворяет неравенствам $|\mathcal{L}_\varepsilon(Y_{2n}(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon))| < M\varepsilon^{2n+1}$, $|Y_{2n}(x, \varepsilon)|_{\partial\Omega} < M\varepsilon^{2n+1}$. Из принципа максимума и из этих неравенств следует оценка $|Y_{2n}(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)| < M_1\varepsilon^{2n+1}$ всюду в $\bar{\Omega}$.

На рис. 4 заштрихованы пограничные слои около сторон. Двойной штриховкой покрыты угловые пограничные слои. Следует отметить, что контурами пограничных слоев не являются вполне определенные линии. В данном и предыдущем примерах эти линии условно проходят на расстоянии ε от границы. Точный смысл такого утверждения состоит лишь в том, что на расстоянии $M\varepsilon$ от границы значения функций пограничного слоя не малы, а на расстоянии ε^α , где α — любое число такое, что $0 < \alpha < 1$, они экспоненциально малы.

Без каких-либо существенных изменений все построения и доказательства примера 4 распространяются на любые плоские области с кусочно гладкой границей. Оператор Лапласа можно при этом заменить на эллиптический оператор второго порядка. Нетрудно обобщить эти исследования и на многие области большей размерности (например, на параллелепипед). Колические точки границы потребуют некоторой модификации рассуждений. Но главное условие $q(x) > \text{const} > 0$ во всех этих случаях обеспечивает экспоненциальное стремление к нулю как погранслоевых функций около гладких частей границы, так и угловых погранслоевых функций. Положение резко меняется, если коэффициент $q(x)$ обращается в нуль в какой-нибудь точке границы или внутри области. Краткое замечание по этому поводу будет сделано в следующей главе, где подробно обсуждается аналогичная ситуация для обыкновенного дифференциального уравнения.

Глава II

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Эта глава тоже носит в некотором смысле вводный характер, но уже по отношению к методу согласования асимптотических разложений. Он будет продемонстрирован достаточно подробно на простейших примерах обыкновенных дифференциальных уравнений. Только попутно будет упомянуто об одной краевой задаче для уравнения в частных производных. Остальные, более сложные задачи для уравнений с частными производными описаны в следующих главах.

Начнем с примера, внешне похожего на пример 1.

§ 1. Простейшая бисингулярная задача

Пример 5. Рассмотрим краевую задачу

$$l_\varepsilon u \equiv \varepsilon^3 u'' - q(x)u = f(x), \quad \varepsilon > 0, \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1, \quad (1.1)$$

$$u(0, \varepsilon) = 0, \quad (1.2)$$

$$u(1, \varepsilon) = 0, \quad (1.3)$$

где $q, f \in C^\infty[0, 1]$ и $q(x) > 0$ при $x > 0$. Как видим, отличия от примера 1 небольшие: замена ε^2 на ε^3 не играет никакой роли и сделана лишь для удобства дальнейших записей, замена неоднородных граничных условий однородными тоже несущественна. Но главное изменение в том, что $q(x)$ теперь положительна не на всем отрезке $[0, 1]$, а лишь при $x > 0$. Предположим, что

$$q(0) = 0, \quad q'(0) = 1. \quad (1.4)$$

Условие положительности $q'(0)$ сильно сказывается на структуре асимптотики решения, по какому именно положительному числу равно $q'(0)$, несущественно: единица выбрана для упрощения записи.

Итак, ищем внешнее разложение, как и в примере 1, в виде

$$U(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{3k} u_{3k}(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.5)$$

Так же, как и ранее, получается рекуррентная система уравнений

$$-q(x)u_0(x) = f(x), \quad q(x)u_{3k}(x) = u_{3(k-1)}''(x), \quad k \geq 1. \quad (1.6)$$

Отсюда однозначно определяются все $u_{3k}(x) \in C^\infty(0, 1]$. Однако в нуле все эти функции, вообще говоря, имеют особенности. Введем обозначения q_k и f_k для коэффициентов рядов Тейлора функций $q(x)$ и $f(x)$: в силу (1.4)

$$q(x) = x + \sum_{k=2}^{\infty} q_k x^k, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k, \quad x \rightarrow 0, \quad (1.7)$$

и эти ряды можно почленно дифференцировать любое число раз. Из равенств (1.6), (1.7) вытекает, что $u_0(x) = -x^{-1} \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} q_k x^{k-1}\right)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k = x^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} c_{0,j} x^j$, $x \rightarrow 0$.

Этот ряд тоже можно почленно дифференцировать. Следовательно, из (1.6) для $k=1$ получаем $u_3(x) = x^{-4} \sum_{j=0}^{\infty} c_{1,j} x^j$, $x \rightarrow 0$. По индукции приходим к выводу, что

$$u_{3k}(x) = x^{-3k-1} \sum_{j=0}^{\infty} c_{k,j} x^j, \quad x \rightarrow 0. \quad (1.8)$$

Таким образом, задача (1.1)–(1.3) является бисингулярной — коэффициенты ее внешнего разложения имеют нарастающие особенности в нуле. Множество Γ в данной задаче — это точки $x=0$ и $x=1$, но в окрестности точки $x=1$ поведение решения точно такое же, как в примере 1. Экспоненциальные погранслойные функции в окрестности этой точки мы учтем позднее, а пока обратимся к точке $x=0$. В ее окрестности ряд (1.5) не только не приближает решение $u(x, \varepsilon)$, но даже теряет асимптотический характер. Действительно, например, при $x \sim \varepsilon^2$ функции $u_k(x)$, согласно (1.8), имеют порядок ε^{-6k-2} и, следовательно, отношение последующего члена ряда (1.5) к предыдущему имеет порядок ε^{-3} .

Чтобы правильно описать асимптотику решения $u(x, \varepsilon)$ в окрестности нуля, сделаем растяжение координаты $x = \varepsilon^\alpha \xi$ и обозначим $v(\xi, \varepsilon) \equiv u(\varepsilon^\alpha \xi, \varepsilon)$. Уравнение (1.1) после замены переменной имеет вид

$$\varepsilon^{3-2\alpha} \frac{d^2 v}{d\xi^2} - q(\varepsilon^\alpha \xi) v = f(\varepsilon^\alpha \xi).$$

В соответствии с соображениями, которые обсуждались в примере 1, надо добиться, чтобы оба члена в левой части выписанного уравнения при фиксированном $\xi > 0$ имели одинаковый порядок. Так как $q(\varepsilon^\alpha \xi) \sim \varepsilon^\alpha \xi$, то, следовательно, $3 - 2\alpha = \alpha \Rightarrow \alpha = 1$.

Итак, вблизи начала координат уравнение приобретает форму

$$\varepsilon \frac{d^2 v}{d\xi^2} - q(\varepsilon \xi) v = f(\varepsilon \xi), \quad (1.9)$$

а асимптотику решения $v(\xi, \varepsilon) \equiv u(\varepsilon \xi, \varepsilon)$ ищем в виде внутреннего разложения

$$V(\xi, \varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\xi), \quad (1.10)$$

где $\xi = \varepsilon^{-1}x$. Этот ряд начинается с члена $\varepsilon^{-1}v_{-1}(\xi)$, так как главный член внешнего разложения $u_0(x) \sim x^{-1} = \varepsilon^{-1}\xi^{-1}$, но, конечно, это лишь эвристические соображения. Полное оправдание такая запись получит только в конце, после строгого обоснования асимптотики. Далее надо подставить ряд (1.10) в уравнение (1.9), разложить функции $q(\varepsilon \xi)$ и $f(\varepsilon \xi)$ в ряды Тейлора и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε . Получается система уравнений

$$\begin{aligned} v''_{-1} - \xi v_{-1} &= f_0, \\ v''_k - \xi v_k &= f_{k+1} \xi^{k+1} + \sum_{j=2}^{k+2} q_j \xi^j v_{k-j+1}, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Равенство (1.2) порождает граничные условия

$$v_k(0) = 0, \quad k \geq -1. \quad (1.12)$$

Теорема 1.1. Система (1.11) имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям (1.12) в классе функций, растущих не быстрее какой-либо степени ξ ; каждая из функций $v_k(\xi)$ имеет на бесконечности сле-

дующую асимптотику:

$$v_k(\xi) = \xi^k \sum_{j=0}^{\infty} h_{k,j} \xi^{-3j}, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad k \geq -1. \quad (1.13)$$

Высказанные утверждения относительно $v_k(\xi)$ вполне естественны, так как коэффициенты рядов (1.13) легко вычисляются после формальной подстановки рядов в уравнения (1.11). Так, например, $h_{-1,0} = -f_0$, $h_{-1,1} = 2h_{-1,0}$, $h_{-1,2} = 20h_{-1,1}$, ..., $h_{0,0} = -f_1 + q_2 f_0$, $h_{0,1} = -2q_2 h_{-1,0}$ и т. д. Что касается решений однородного уравнения, то одно из них экспоненциально растет и поэтому не может быть использовано для решения задач (1.11), (1.12), а второе экспоненциально быстро стремится к нулю, и с его помощью можно удовлетворить краевым условиям (1.12). Ниже мы докажем теорему 1.1, однако это доказательство вполне может быть опущено теми, кто интересуется лишь главной, конструктивной стороной вопроса и готов приять эти утверждения на веру.

Уравнение Эйри $v'' - \xi v = 0$ имеет, как известно (см., например, [53], § 5.17), два линейно независимых решения:

$$Y_1(\xi) = \xi^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3} \xi^{3/2}\right) \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi^{-3k/2} \right\}, \quad \xi \rightarrow \infty.$$

$$Y_2(\xi) = \xi^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} \xi^{3/2}\right) \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \xi^{-3k/2} \right\}, \quad \xi \rightarrow \infty,$$

$$Y_2(\xi) > 0 \text{ при } \xi \geq 0.$$

Если $\varphi(\xi) \in C[0, \infty)$ и $|\varphi(\xi)| \leq M|\xi|^{-N}$, то из явной формулы

$$\bar{v}(\xi) = Y_2(\xi) \int_0^{\xi} Y_1(s) \varphi(s) ds + Y_1(\xi) \int_{\xi}^{\infty} Y_2(s) \varphi(s) ds \quad (1.14)$$

вытекает, что $\bar{v}(\xi)$ является решением уравнения $\bar{v}'' - \xi \bar{v} = -2\varphi(\xi)$, $\bar{v}(\xi) \in C^2[0, \infty)$ и

$$|\bar{v}(\xi)| \leq M_1 |\xi|^{-N}. \quad (1.15)$$

Лемма 1.1. Пусть функция $g(\xi) \in C^\infty[0, \infty)$ и разлагается в асимптотический ряд $g(\xi) = \xi^n \sum_{j=0}^{\infty} q_j \xi^{-3j}$, $\xi \rightarrow \infty$. Тогда при $0 \leq \xi < \infty$ существует решение уравнения

$$lv \equiv v'' - \xi v = g(\xi), \quad (1.16)$$

которое разлагается в асимптотический ряд

$$V(\xi) = \xi^{p-1} \sum_{j=0}^{\infty} v_j \xi^{-3j}, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (1.17)$$

При этом ряд (1.17) можно многократно почленно дифференцировать и он является ф. а. р. уравнения (1.16).

(Под ф. а. р. мы понимаем здесь то же, что и выше, но не по отношению к параметру ε , а относительно переменной ξ : это означает, что частичная сумма ряда (1.17) с достаточно большим номером N после подстановки в левую часть уравнения (1.16) отличается от правой части на $O(\xi^{-N_1})$, где $N_1 \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$.)

Доказательство. Прежде всего построим формально ряд (1.17). Для этого подставим его в уравнение (1.16), функцию $g(\xi)$ заменим ее асимптотическим рядом и получим простую рекуррентную алгебраическую систему для v_j , откуда они однозначно определяются: $v_0 = -g_0$, $v_1 = -g_1 + (p-1)(p-2)v_0$ и т. д. Затем возьмем частичную сумму $B_N V$, где N достаточно велико, и умножим ее на функцию $\chi(\xi) \in C^\infty[0, \infty)$, которая равна нулю при $\xi \leq 1$ и равна единице при $\xi \geq 2$. Обозначим $y_N(\xi) = \chi(\xi) B_N V$. По построению функция $F_N(\xi) = g - l y_N = O(\xi^{-N})$ при $\xi \rightarrow \infty$. Используя формулу (1.14), построим функцию $z_N(\xi)$ — решение уравнения $l z_N = F_N(\xi)$. Из неравенства (1.15) вытекает, что $z_N(\xi)$ быстро стремится к нулю при $\xi \rightarrow \infty$.

Положим $v_N(\xi) = y_N(\xi) + z_N(\xi) + c_N Y_2(\xi)$, где постоянная c_N выбрана так, чтобы $v_N(0) = 0$. По построению $l v_N = g(\xi)$, $v_N - B_N V = O(\xi^{-N})$, и осталось лишь доказать, что функция v_N не зависит от N . Действительно, разность $w_N(\xi) = v_N(\xi) - v_{N+1}(\xi)$ — это решение уравнения $l w_N = 0$, $w_N(0) = 0$, функция $w_N(\xi)$ растет при $\xi \rightarrow \infty$ не быстрее степени ξ и из явного вида решения однородного уравнения вытекает, что $w_N \equiv 0$. Утверждение относительно возможности дифференцирования ряда (1.17) вытекает непосредственно из уравнения (1.16). ■

Применяя лемму 1.1 последовательно к уравнениям (1.11), получим высказанные выше утверждения теоремы 1.1 о существовании решений $v_k(\xi)$ и их асимптотике при $\xi \rightarrow \infty$. ■

Итак, оба разложения — внешнее (1.5) и внутреннее (1.10) — построены. Осталось выяснить, являются ли они правильными асимптотиками решения $u(x, \varepsilon)$ задачи (1.1) — (1.3), и если являются, то в каких областях. Так как при $x \rightarrow 0$ функции $u_k(x) \sim x^{-3k-1}$, то ряд (1.5) имеет асимптотический характер (т. е. следующий член ряда по порядку меньше предыдущего) при $x > \varepsilon^\alpha$ для любого α такого, что $0 < \alpha < 1$. Аналогично, так как $v_k(\xi) \sim \xi^k$ при $\xi \rightarrow \infty$, то ряд (1.10) имеет асимптотический характер при $\varepsilon \xi < \varepsilon^\beta$, т. е. при $x < \varepsilon^\beta$ для любого положительного β . Заметим, что эти области $x > \varepsilon^\alpha$ и $x < \varepsilon^\beta$ при $\alpha > \beta$ перекрываются и что в них ряды явля-

ются ф. а. р. уравнения (1.1). Действительно,

$$\begin{aligned} l_{\varepsilon}(A_{3n,x}U) &= f(x) + \varepsilon^{3n+3}u_{3n}''(x) = f(x) + O(\varepsilon^{3n+3}x^{-3n-3}) = \\ &= f(x) + O(\varepsilon^{(3n+3)(1-\alpha)}) \quad \text{при } x > \varepsilon^{\alpha}, \quad (1.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{\varepsilon}(A_{n,\xi}V) &= \varepsilon \frac{d^2 A_{n,\xi}V}{d\xi^2} - q(\varepsilon\xi) A_{n,\xi}V = \\ &= \varepsilon \frac{d^2 A_{n,\xi}V}{d\xi^2} - \{A_{n+2,\xi}q(\varepsilon\xi)\} [A_{n,\xi}V] + O\left(\varepsilon^{n+3}\xi^{n+3}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon^n\xi^n\right)\right) = \\ &= A_{n,\xi}f(\varepsilon\xi) - \sum_{\substack{i \leq n, j \leq n+2 \\ i+j \geq n+1}} q_j \xi^j \varepsilon^j v_i(\xi) \varepsilon^i + \\ &\quad + O(\varepsilon^{n+2}\xi^{n+3} + \varepsilon^{2n+3}\xi^{2n+3}) = \\ &= f(x) + O(\varepsilon^{(n+1)\beta-1}), \quad \text{если } x < \varepsilon^{\beta}. \quad (1.19) \end{aligned}$$

При выводе последних равенств были использованы уравнения (1.11) и оценки функций $v_i(\xi)$, вытекающие из (1.13).

Ряд $V(\xi, \varepsilon)$ удовлетворяет условию (1.2), а ряд $U(x, \varepsilon)$, вообще говоря, не удовлетворяет условию (1.3). Для устранения невязки в граничном условии (1.3) надо к ряду $U(x, \varepsilon)$ добавить ряд (1.12) гл. I, в точности такой же, как в примере 1 (с заменой ε на $\varepsilon^{3/2}$). Итак, на всем отрезке $[0, 1]$ построено ф. а. р. задачи (1.1)–(1.3). Поэтому совершенно естественно ожидать, что справедлива

Теорема 1.2. Пусть α и β — какие-нибудь числа такие, что $0 < \beta < \alpha < 1$. Тогда построенный выше ряд (1.10) является равномерным асимптотическим разложением функции $u(x, \varepsilon)$ — решения задачи (1.1)–(1.3) на отрезке $[0, \varepsilon^{\beta}]$, а сумма рядов (1.5) и (1.12) гл. I (с заменой ε на $\varepsilon^{3/2}$) является равномерным асимптотическим разложением того же решения на отрезке $[\varepsilon^{\beta}, 1]$.

Для доказательства этой теоремы понадобится прежде всего установить равномерную оценку оператора, обратного к дифференциальному оператору (1.1) с условиями (1.2), (1.3).

Лемма 1.2. Пусть функция $w(x, \varepsilon) \in C^2[0, 1]$ и удовлетворяет уравнению $l_{\varepsilon}w \equiv \varepsilon^3 w'' - q(x)w = \varphi(x)$, где $q(x) \in C[0, 1]$, $q(x) > 0$ при $x > 0$. Тогда справедлива оценка

$$|w(x, \varepsilon)| \leq M \left(|w(0, \varepsilon)| + |w(1, \varepsilon)| + \varepsilon^{-3} \max_{x \in [0, 1]} |\varphi(x)| \right). \quad (1.20)$$

Доказательство. После замены $w = (2 - x^2)z$ для функции $z(x, \varepsilon)$ получается уравнение

$$\varepsilon^3 z'' - 2\varepsilon^3 x(2 - x^2)^{-1} z' - [q(x) + 2\varepsilon^3(2 - x^2)^{-1}]z = (2 - x^2)^{-1}\varphi(x).$$

Из принципа максимума следует, что

$$|z(x, \varepsilon)| \leq |z(0, \varepsilon)| + |z(1, \varepsilon)| + \varepsilon^{-3} \max_{x \in [0,1]} |\varphi(x)|,$$

откуда вытекает оценка (1.20). ■

Из леммы 1.2, в частности, следует, что для решения задачи (1.1) — (1.3) справедлива оценка $|u(x, \varepsilon)| < M\varepsilon^{-3}$. Но это грубая оценка. Хотя функции $u(x, \varepsilon)$ не являются равномерно ограниченными при $\varepsilon \rightarrow 0$, но из асимптотического разложения (1.10) вытекает, что $|u(x, \varepsilon)| \leq \varepsilon^{-1} \max_{\xi} |v_{-1}(\xi)| + M$. После того как теорема 1.2 будет доказана, станет ясно, что справедлива именно эта оценка и она является точной.

Далее надо убедиться в том, что внешнее разложение (1.5) и внутреннее разложение (1.10) согласованы между собой так, как это продемонстрировано во введении на примере элементарной функции. Надо доказать, что справедливо равенство

$$A_{m,\xi} A_{n,x} U = A_{n,x} A_{m,\xi} V \quad \forall m > 0, \quad n > 0, \quad (1.21)$$

которое является *центральной в методе согласования, примененном к любой бисингулярной задаче*. Здесь, как и во всех задачах, рассматриваемых ниже, левая и правая части равенства (1.21) — это линейная комбинация элементарных функций от x или от ξ с коэффициентами, зависящими от ε . В данном примере функции — это степени x или ξ , а коэффициенты — степени ε . После того, как левая и правая части записаны в одних и тех же переменных (x или ξ), проверка равенства (1.21) сводится к проверке равенства соответствующих коэффициентов. Например, в рассматриваемом здесь примере левая часть соотношения (1.21), в силу (1.5), (1.8), равна $\varepsilon^{-1} \sum_{3k \leq n} \xi^{-3k-1} \sum_{j \leq m+1} c_{k,j} \varepsilon^j \xi^j$, а правая часть, в силу (1.10), (1.13), равна $\sum_{k=-1}^m x^k \sum_{3j \leq n} h_{k,j} x^{-3j} \varepsilon^{3j}$. Отсюда видно, что равенство (1.21) эквивалентно серии равенств $h_{k,j} = c_{j,k+1}$ для $k \geq -1, j \geq 0$. Нетрудно убедиться в справедливости этих равенств, исходя из рекуррентных систем уравнений (1.6) и (1.11), но предпочтем несколько видоизмененное доказательство соотношения (1.21), которое пригодно и в более сложных случаях.

Доказательство фактически основано на том, что ряды U и V являются ф. а. р. одного и того же уравнения в разных, но перекрывающихся областях. Для простоты положим $n = 3N$. Из асимптотики (1.8) видно, что

$$A_{m,\xi} A_{3N,x} U = \sum_{l=-1}^m \varepsilon^l \xi^l B_{3N} V_l, \quad (1.22)$$

где V_l — это ряды

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_{j,l+1} \xi^{-3j}, \quad (1.23)$$

а значение оператора B_p , как всегда, означает частичную сумму ряда, содержащую члены ξ^{-s} при $s \leq p$. Подставляя $A_{3N,x} U$ в левую часть уравнения (1.1), получим равенство

$$l_{\varepsilon}(A_{3N,x} U) = f(x) + \varepsilon^{3N+3} u_{3N}''(x). \quad (1.24)$$

Применим к обеим частям этого равенства оператор $A_{m+1,\xi}$:

$$\begin{aligned} A_{m+1,\xi} \left(\varepsilon \frac{d^2}{d\xi^2} A_{3N,x} U - q(\varepsilon \xi) A_{3N,x} U \right) = \\ = A_{m+1,\xi} f(x) + A_{m+1,\xi} \left(\varepsilon^{3N+1} \frac{d^2 u}{d\xi^2}(\varepsilon \xi, \varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Перепишем это равенство, учитывая асимптотическое разложение (1.8) и соотношение (1.22):

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_{l=-1}^m \varepsilon^l \frac{d^2}{d\xi^2} (\xi^l B_{3N} V_l) - A_{m+1,\xi} \left\{ \left(\sum_{l=-1}^{\infty} \varepsilon^l \xi^l B_{3N} V_l \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \xi^j q_j \right) \right\} = \\ = A_{m+1,\xi} f(\varepsilon \xi) + A_{m+1,\xi} \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\xi^{-3N-1} \sum_{j=0}^{\infty} c_{3N,j} \varepsilon^j \xi^j \right). \end{aligned}$$

В этом соотношении уже нет бесконечных рядов: левая и правая части — это конечные суммы членов, каждый из которых — это произведение степени ξ на степень ε . Поэтому теперь уже не формально, как ранее, а на законном основании можно приравнять слева и справа все члены при одинаковых степенях ε . Легко заметить, что эта процедура по существу мало отличается от той, с помощью которой были выписаны уравнения (1.11). Действительно, уравнение (1.24) отличается

от уравнения (1.9) только слагаемым $\varepsilon^{3N+3} u_{3N}''(x)$ и соответствующими слагаемыми будут отличаться получающиеся уравнения для $\xi^i B_{3N} V_i$:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} (\xi^{-1} B_{3N} V_{-1}) - \xi (\xi^{-1} B_{3N} V_{-1}) = f_0 + O(\xi^{-3N-3}),$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} (B_{3N} V_0) - \xi (B_{3N} V_0) = f_1 \xi + q_2 \xi^2 (\xi^{-1} B_{3N} V_{-1}) + O(\xi^{-3N-2})$$

и т. д. Отсюда вытекает, что функции $\xi^h V_h$, где V_h — ряды (1.23), — это ф. а. р. уравнений (1.11) теперь уже

Т а б л и ц а 1

$V \backslash U$	$\varepsilon^{-1} v_1(\xi)$	$v_0(\xi)$	$\varepsilon v_1(\xi)$	$\varepsilon^2 v_2(\xi)$	$\varepsilon^3 v_3(\xi)$	...
$u_0(x)$	$\varepsilon^{-1} h_{-1,0} \xi^{-1}$ $c_{0,0} x^{-1}$	$h_{0,0}$ $c_{0,1}$	$\varepsilon h_{1,0} \xi$ $c_{0,2} x$	$\varepsilon^2 h_{2,0} \xi^2$ $c_{0,3} x^2$	$\varepsilon^3 h_{3,0} \xi^3$ $c_{0,4} x^3$	...
$\varepsilon^3 u_3(x)$	$\varepsilon^{-1} h_{-1,1} \xi^{-4}$ $\varepsilon^3 c_{1,0} x^{-4}$	$h_{0,1} \xi^{-3}$ $\varepsilon^3 c_{1,1} x^{-3}$	$\varepsilon h_{1,1} \xi^2$ $\varepsilon^3 c_{1,2} x^{-2}$	$\varepsilon^2 h_{2,1} \xi^{-1}$ $\varepsilon^3 c_{1,3} x^{-1}$	$\varepsilon^3 h_{3,1}$ $\varepsilon^3 c_{1,4}$	...
$\varepsilon^6 u_6(x)$	$\varepsilon^{-1} h_{1,2} \xi^{-7}$ $\varepsilon^6 c_{2,0} x^{-7}$	$h_{0,2} \xi^{-6}$ $\varepsilon^6 c_{2,1} x^{-6}$	$\varepsilon h_{1,2} \xi^{-5}$ $\varepsilon^6 c_{2,2} x^{-5}$	$\varepsilon^2 h_{2,2} \xi^{-4}$ $\varepsilon^6 c_{2,3} x^{-4}$	$\varepsilon^3 h_{3,2} \xi^{-3}$ $\varepsilon^6 c_{2,4} x^{-3}$	...
$\varepsilon^9 u_9(x)$	$\varepsilon^{-1} h_{-1,3} \xi^{-10}$ $\varepsilon^9 c_{3,0} x^{-10}$	$h_{0,3} \xi^{-9}$ $\varepsilon^9 c_{3,1} x^{-9}$	$\varepsilon h_{1,3} \xi^{-8}$ $\varepsilon^9 c_{3,2} x^{-8}$	$\varepsilon^2 h_{2,3} \xi^{-7}$ $\varepsilon^9 c_{3,3} x^{-7}$	$\varepsilon^3 h_{3,3} \xi^{-6}$ $\varepsilon^9 c_{3,4} x^{-6}$	...
...	...	...	...	...	...	...

при $\xi \rightarrow \infty$. А так как в каждом из уравнений (1.11) коэффициенты асимптотики при $\xi \rightarrow \infty$ находятся однозначно, то тем самым $v_h(\xi) = \xi^h V_h$, $\xi \rightarrow \infty$, и выполнены равенства (1.21).

Приведем еще один наглядный и полезный вид записи основного равенства (1.21), который неоднократно

будет применяться ниже. Выпишем составляющие левой и правой частей равенства (1.21) в виде таблицы 1.

В каждой строке таблицы стоит асимптотическое разложение при $x \rightarrow 0$ внешнего разложения (1.5) $\varepsilon^{3k} u_{3k}(x)$: в нижней части каждой клетки этой строки помещено, в соответствии с (1.8), $\varepsilon^{3k} c_{k,i} x^{i+3k-1}$. В каждом столбце таблицы стоит асимптотическое разложение при $\xi \rightarrow \infty$ члена внутреннего разложения (1.10) $\varepsilon^i v_i(\xi)$: в верхней части каждой клетки этого столбца, в соответствии с (1.13), помещено $\varepsilon^i h_{i,l} \xi^{l-3i}$. Согласование асимптотических разложений состоит как раз в том, что в верхней и нижней частях каждой клетки стоит одна и та же функция! Отсюда и вытекает равенство (1.21), а в нашем частном случае верно и обратное. В более сложных случаях (например, в § 3 гл. III, в § 2 гл. IV и далее) значения функций в разных частях клеток не совпадают — часть слагаемых после замены переменных переносится в соседние клетки. Это в основном связано с наличием логарифмических членов в асимптотике. Но всегда в расширяющейся системе прямоугольных кусков таблицы сумма членов в верхних частях клеток равна сумме членов в нижних частях клеток, что и означает равенство (1.21).

Доказательство теоремы 1.2. По построению $A_{m,\xi} A_{3N,x} U$ и в силу асимптотических разложений (1.8), (1.13) заключаем, что справедлива оценка

$$|A_{m,\xi} A_{3N,x} U - A_{3N,x} U| \leq M \sum_{k=0}^N \varepsilon^{3k} x^{m+1-3k-i} \leq M x^m (1 + \varepsilon^{3N} x^{-3N})$$

и аналогичная оценка для разности вторых производных этих функций. Точно так же справедливы оценки

$$|A_{3N,x} A_{m,\xi} V - A_{m,\xi} V| \leq M \sum_{i=-1}^m \varepsilon^i \xi^{-3N+i} \leq M \xi^{-3N} (\varepsilon^{-1} \xi^{-1} + (\varepsilon \xi)^m),$$

$$\left| \frac{d^2}{d\xi^2} (A_{3N,x} A_{m,\xi} V - A_{m,\xi} V) \right| \leq M \xi^{-3N-2} (\varepsilon^{-1} \xi^{-1} + \varepsilon^m \xi^m).$$

Далее построим составное асимптотическое разложение, почти такое же, как функция (0.9) во введении:

$$Y_N(x, \varepsilon) = A_{3N,x} U + A_{3N,\xi} V - A_{3N,\xi} A_{3N,x} U + A_{3N} W,$$

где W — это погранслоный ряд (1.12) гл. I у правого конца отрезка. Из только что полученных неравенств, из оценок (1.18), (1.19)

и из основного равенства (1.21) следует, что

$$|l_\varepsilon Y_N(x, \varepsilon) - f| < M\varepsilon^{(3N+3)(1-\gamma)-1} \quad \text{при } x \geq \varepsilon^\gamma,$$

$$|l_\varepsilon Y_N(x, \varepsilon) - f| < M\varepsilon^{(3N+1)\gamma-1} \quad \text{при } x \leq \varepsilon^\gamma.$$

Так как $Y_N(1, \varepsilon) = O(\varepsilon^{3N+1})$, $Y_N(0, \varepsilon) = O(e^{-\mu/\varepsilon})$, $\mu > 0$, то из сравнения $Y_N(x, \varepsilon)$ с $u(x, \varepsilon)$ и из леммы 1.2 заключаем, что

$$|Y_N(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)| < M\varepsilon^{(3N+1)\gamma_1-1}, \quad \gamma_1 > 0. \blacksquare$$

На рис. 5 для задачи (1.1) — (1.3) при $q(x) = \sin x$, $f(x) = -\cos x$, $\varepsilon = 1/20$ изображены графики следующих функций: $u_0(x) = \operatorname{ctg} x$, $A_{3,x}U = \operatorname{ctg} x + 2\varepsilon^3 \operatorname{ctg} x (\sin x)^{-3}$,

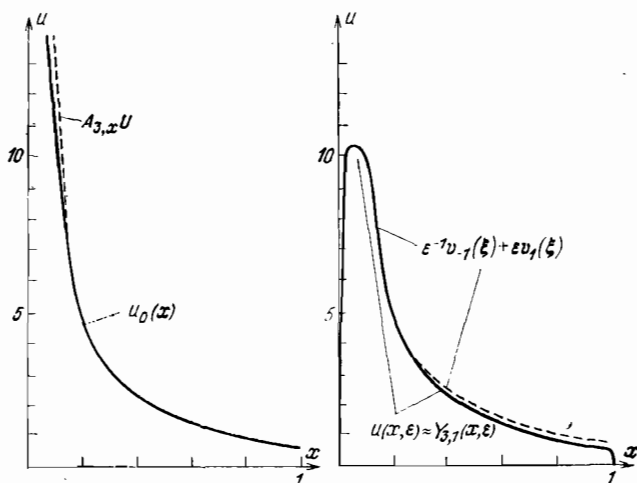


Рис. 5

$A_{1,\xi}V = \varepsilon^{-1}v_{-1}(\xi) + \varepsilon v_1(\xi)$, $Y_{3,1}(x, \varepsilon) = A_{3,x}U + A_{1,\xi}V - A_{3,x}A_{1,\xi}V + A_{3,\eta}W$. Легко выписать явные решения задач (1.11), (1.12):

$$v_{-1}(\xi) = \pi \left\{ \operatorname{Bi}(\xi) \int_{\xi}^{\infty} \operatorname{Ai}(t) dt + \right. \\ \left. + \operatorname{Ai}(\xi) \left[\int_0^{\xi} \operatorname{Bi}(t) dt - \sqrt{3} \int_0^{\infty} \operatorname{Ai}(t) dt \right] \right\},$$

$$v_1(\xi) = \pi \left\{ \operatorname{Bi}(\xi) \int_{\xi}^{\infty} \operatorname{Ai}(t) dt \left[\frac{t^3}{6} v_{-1}(t) - \frac{t^2}{2} \right] dt + \right.$$

$$+ \operatorname{Ai}(\xi) \int_0^{\xi} \operatorname{Bi}(t) \left[\frac{t^3}{6} v_{-1}(t) - \frac{t^2}{2} \right] dt - \\ - \operatorname{Ai}(\xi) \sqrt{3} \int_0^{\infty} \operatorname{Ai}(t) \left[\frac{t^3}{6} v_{-1}(t) - \frac{t^2}{2} \right] dt \Bigg\}.$$

Из теоремы 1.2 вытекает, что всюду на отрезке $[0, 1]$ справедлива оценка $|Y_{3,1}(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)| < M\varepsilon^3$. Интересно сравнить графики решений с примером из введения (см. рис. 1).

З а м е ч а н и е. Аналогично примеру 5 можно исследовать задачу (1.1) — (1.3) и в том случае, когда коэффициент $q(x)$ положительен всюду, кроме какой-нибудь внутренней точки x_0 , если в этой точке $q(x)$ имеет нуль конечного порядка (проще всего — нуль второго порядка). Экспоненциальный пограничный слой возникает тогда около обоих концов, а вблизи точки x_0 появляется внутреннее разложение. Его коэффициентами являются функции от внутренней переменной ξ , которая теперь изменяется от $-\infty$ до ∞ . Дифференциальный оператор во внутренней переменной — это $d^2/d\xi^2 - \xi^{2m}$, где $2m$ — порядок нуля $q(x)$ в точке x_0 .

Никаких существенных изменений по сравнению с примером 5 не возникает и при исследовании асимптотики решения такой, например, краевой задачи для уравнения с частными производными:

$$\varepsilon^4 \Delta u - q(x) u = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m, \\ u(x, \varepsilon) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega,$$

где Ω — ограниченная область, $\partial\Omega \in C^\infty$, $q(x) = |x|^2 h(x)$, $h \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $h(x) > 0$ в $\bar{\Omega}$. Внешнее разложение для этой задачи легко строится, как и во всех предыдущих примерах.

Если начало координат лежит внутри области Ω , то около границы Ω возникает экспоненциальный погранслой, точно такой же, как в примере 3, а около начала координат справедливо внутреннее разложение

$$W = \sum_{i=-2}^{\infty} \varepsilon^i w_i(\xi), \quad (1.25)$$

где $\xi = \varepsilon^{-1}x$. Его коэффициенты удовлетворяют системе уравнений

$$\Delta_\xi w_{-2} - h(0) w_{-2} = f(0),$$

$$\Delta_\xi w_i - h(0) w_i = Q_{i+2}(\xi) + \sum_{j=3}^{i+4} P_j(\xi) w_{i-j+2}, \quad i \geq -1, \quad (1.26)$$

где P_j и Q_j — это многочлены степени j , полученные из разложения функций $q(x)$ и $f(x)$ в ряды Тейлора. Можно доказать существование решений уравнений (1.26) во всем пространстве и выявить асимптотику $w_i(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$. Ряд (1.25) оказывается, так

же как в примере 5, согласованным с внешним разложением, и справедлива теорема, полностью аналогичная теореме 1.2.

Если начало координат $O \in \partial\Omega$, то уравнения (1.26) надо изучать в полупространстве, и возникает еще область перекрытия

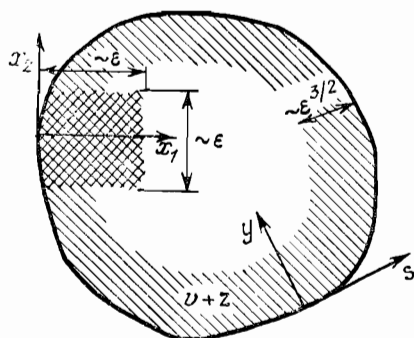


Рис. 6

внутреннего погранслоя около точки O с пограничным экспоненциальным погранслоем. Исследование лишь немного усложняется, но в целом асимптотика доказывается так же, как и в примере 5. На рис. 6 изображена область Ω , где $O \in \partial\Omega$. Заштрихован пограничный слой вдоль всей границы $\partial\Omega$. Коэффициенты разложения в этом погранслое имеют особенности в нуле. Соответствующий ряд типа (2.4) гл. I, так же как и внешнее разложение, утрачивает асимптотический характер

около точки O . Дважды заштрихована область внутреннего погранслоя, где справедливо асимптотическое разложение (1.25). Разумеется, по отношению к рис. 5 и всем дальнейшим рисункам такого рода справедливо замечание относительно условности изображенных границ погранслоев, сделанное в конце примера 4 относительно рис. 4.

В примере 5 и в похожих на него только что описанных краевых задачах для уравнений с частными производными по существу нет самого процесса согласования внешнего и внутреннего разложений. Их коэффициенты определяются однозначно и доказательство сводится, так сказать, к проверке согласованности асимптотических разложений. В следующем параграфе будет рассмотрен пример, в котором такой априорной однозначности нет, и требуется выбирать коэффициенты асимптотического разложения действительно путем согласования. Кроме того, в этом несложном примере последовательность калибровочных функций от ϵ оказывается не такой тривиальной, как ранее.

§ 2. Процесс согласования асимптотических разложений

Пример 6. Рассмотрим краевую задачу

$$l_\epsilon u = \epsilon^2 u'' - b(x)u' - q(x)u = f(x) \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1, \quad (2.1)$$

$$u(0, \epsilon) = 0, \quad (2.2)$$

$$u(1, \epsilon) = 0, \quad (2.3)$$

где $b(x) = xa(x)$, $a, q, f \in C^\infty[0, 1]$, $q(x) > 0$, $a(x) > 0$ при $0 \leq x \leq 1$, $a(0) = 1$, $q(0) = \mu > 0$.

Внешнее разложение, как и ранее, будем искать в виде

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} u_{2k}(x). \quad (2.4)$$

Уравнения для $u_{2k}(x)$ — это

$$\begin{aligned} b(x) u_0' + q(x) u_0 &= -f(x), \\ b(x) u_{2k}' + q(x) u_{2k} &= u_{2k-2}'', \quad k \geq 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Но теперь $u_{2k}(x)$, так же как в примере 2, не определяются однозначно из уравнений (2.5). Требовать от ряда U удовлетворения граничному условию (2.3) неразумно, так как в точке $x = 1$ легко ликвидировать невязку в граничном условии с помощью экспоненциального пограничного слоя (как в примерах 1 и 2). А на другом конце, в точке $x = 0$, не удастся удовлетворить граничному условию (2.2), так как решения уравнений (2.5) имеют, вообще говоря, особенности. Поэтому прежде всего исследуем асимптотику решений уравнений (2.5) в нуле и выясним степень неопределенности этих решений. Это легко сделать, исходя из явной формулы для решения уравнения $b(x)u' + q(x)u = F(x)$:

$$u(x) = E(x) \left\{ \int_1^x (b(\eta) E(\eta))^{-1} F(\eta) d\eta + C \right\}, \quad (2.6)$$

где $E(x) = \exp \int_x^1 [b(\theta)]^{-1} q(\theta) d\theta$, а C — произвольная постоянная. Вообще говоря, при гладкой функции $F(x)$ решение (2.6) имеет особенность в нуле — оно ведет себя как $x^{-\mu}$. Но оказывается, что если выбрать постоянную C специальным образом, то решение $u(x)$ будет гладкой функцией.

Всюду при рассмотрении этого примера посредством $s_i(x)$ будем обозначать функции из $C^\infty[0, 1]$ и их ряды Тейлора при $x \rightarrow 0$, опуская индексы там, где это не ведет к недоразумениям. Из явного вида решения однородного уравнения $E(x)$ следует, что $E(x) =$

$$= \exp \int_x^1 \left[\frac{\mu}{\theta} + s(\theta) \right] d\theta = x^{-\mu} s_1(x), \quad \text{а} \quad [E(x)]^{-1} = x^\mu s_2(x). \quad \text{Те-}$$

перь найдем асимптотику функции (2.6), считая, что $F(x) \in C^\infty[0, 1]$:

$$\int_1^x [b(\eta) E(\eta)]^{-1} F(\eta) d\eta = \int_1^x \eta^{\mu-1} s(\eta) d\eta = x^\mu s_3(x) + c_0.$$

(Последнее равенство можно проверить, например, интегрированием по частям — см. [90], § 9.) Отсюда видно, что если выбрать постоянную C в формуле (2.6) равной c_0 , то $u(x) \in C^\infty[0, 1]$.

Применяя доказанное утверждение последовательно к уравнениям (2.5) и каждый раз выбирая гладкое решение, построим $u_{2k}(x) \in C^\infty[0, 1]$ и тем самым ряд (2.4). Очевидно, что этот ряд является ф. а. р. уравнения (2.1), но он, вообще говоря, не удовлетворяет условиям (2.2), (2.3). Про окрестность точки $x=1$ уже говорилось, а в окрестности точки $x=0$ положение намного сложнее. Сделаем прежде всего замену переменного около этого конца отрезка: $x = \varepsilon^\alpha \xi$. Так как порядок второго члена в уравнении (2.1) после такой замены не меняется, то ясно, что надо выбрать $\alpha = 1$: тогда все три члена в левой части уравнения будут иметь один порядок.

Итак, после замены $x = \varepsilon \xi$ напишем внутреннее разложение в виде

$$V = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i v_i(\xi). \quad (2.7)$$

Можно было бы искать асимптотику решения всей задачи (2.1) — (2.3) в окрестности нуля в виде (2.7). Но так как гладкое ф. а. р. уравнения (2.1) в виде (2.4) уже найдено, то проще, как в примерах 1 и 2, искать решение в виде суммы рядов (2.1) и (2.4). Тогда V должно быть ф. а. р. однородного уравнения. На этом, однако, сходство с примерами 1 и 2 кончается. Оказывается, что функции $v_i(\xi)$ не стремятся к нулю экспоненциально быстро при $\xi \rightarrow \infty$. Более того, мы увидим, что (2.4) не является правильным асимптотическим разложением решения $u(x, \varepsilon)$ внутри отрезка. А если $\mu < 2$, то только $u_0(x)$ является главным членом асимптотики решения $u(x, \varepsilon)$ внутри отрезка $[0, 1]$. Уже следующий член асимптотики — это не $\varepsilon^2 u_2(x)$, а совсем другой. Истинная асимптотика решения внутри отрезка $[0, 1]$ — это сумма ряда (2.4) и другого ряда, коэффи-

циенты которого имеют нарастающие особенности при $x=0$. Так что, несмотря на гладкость функций $u_{2k}(x)$, задача (2.1) — (2.3) все-таки бисингулярна.

А теперь вернемся к ряду V. Однородное уравнение, которому этот ряд должен удовлетворять, выглядит так:

$$\frac{d^2 V}{d\xi^2} - \xi a(\xi) \frac{dV}{d\xi} - q(\xi) V = 0. \quad (2.8)$$

Разлагая коэффициенты в ряды Тейлора $\left(a(x) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j, q(x) = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} q_j x^j, x \rightarrow 0 \right)$, получим, как и ранее, систему дифференциальных уравнений

$$lv \equiv v_0'' - \xi v_0' - \mu v_0 = 0, \quad (2.9)$$

$$lv_i = \xi \sum_{j=1}^i a_j \xi^j v_{i-j}' + \sum_{j=1}^i q_j \xi^i v_{i-j}, \quad i \geq 1. \quad (2.10)$$

Граничное условие (2.2) порождает граничные условия для $v_k(\xi)$:

$$\begin{aligned} v_{2i}(0) &= -u_{2i}(0), \\ v_{2i+1}(0) &= 0, \quad i \geq 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Далее, всюду до конца исследования задачи (2.1) — (2.3) посредством $\sigma_j(\xi)$ будем обозначать асимптотические

ряды вида $\sum_{p=0}^{\infty} c_p \xi^{-p}$ при $\xi \rightarrow \infty$, которые допускают почленное дифференцирование любое число раз. Индексы у σ_j часто будут опускаться. Справедлива

Теорема 2.1. *Существует решение системы (2.9), (2.10), удовлетворяющее условиям (2.11), такое, что функции $v_i(\xi) \in C^\infty[0, \infty)$ и*

$$v_i(\xi) = \xi^{-\mu} \sum_{j=0}^i \sigma_j(\xi) \xi^{1-j} \ln^j \xi, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

Прежде всего выпишем решение уравнения $lv = \varphi$ и найдем его оценку. Известно, что однородное уравнение (2.9) имеет два линейно независимых решения, которые мы обозначим $Y(\xi)$ и

$Y_1(\xi)$. Для этих решений справедливы соотношения

$$Y(\xi) = \xi^{-\mu} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \xi^{-2j} \right), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad Y(\xi) > 0,$$

$$Y_1(\xi) = e^{\xi^2/2} \xi^{\mu-1} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{c}_j \xi^{-2j} \right), \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Легко получить подобную асимптотику из общих свойств решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (см., например, [102], гл. II, § 6), но еще проще выразить решения уравнения (2.9) через функции параболического цилиндра, для которых известны и интегральные представления, и асимптотики (см., например, [53], § 10.2). Непосредственно проверяется, что функция

$$v(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} [Y(\xi) Y_1(\theta) - Y_1(\xi) Y(\theta)] \exp(-\theta^2/2) \varphi(\theta) d\theta$$

является решением уравнения $lv = \varphi$, если $\varphi(\theta) \in C^\infty[0, 1]$ и $|\varphi(\theta)| < M|\xi|^{-N}$, $N > \mu$. Из этой формулы видно, что

$$|v(\xi)| < M|\xi|^{-N}. \quad (2.13)$$

Далее докажем лемму, вполне аналогичную лемме 1.1.

Лемма 2.1. Пусть функция $g(\xi) \in C^\infty[0, \infty)$ и $g(\xi) = \xi^{-\mu+p} \ln^i \xi$ при $\xi > 1$, где i и p — целые неотрицательные числа. Тогда при $0 \leq \xi < \infty$ существует решение уравнения $lv \equiv v'' - \xi v' - \mu v = g(\xi)$, которое разлагается в асимптотический ряд

$$V(\xi) = \xi^{-\mu+p} \sum_{j=0}^{i+1} \sigma_j(\xi) \ln^j \xi. \quad (2.14)$$

Этот ряд можно почленно дифференцировать.

Доказательство почти полностью совпадает с доказательством леммы 1.1: достаточно лишь построить ф. а. р. в виде (2.14). Затем надо опереться на оценку (2.13) для остатка и на положительность решения $Y(\xi)$ — единственного решения однородного уравнения, которое не является быстро растущим при $\xi \rightarrow \infty$. А формальное построение ряда (2.14) легко получить, если учесть очевидные соотношения

$$\begin{aligned} l(\xi^{-\mu+p} \ln^i \xi) &= \xi^{-\mu+p} [-p \ln^i \xi + c_1 \ln^{i-1} \xi + c_2 \xi^{-2} \ln^i \xi + \\ &\quad + c_3 \xi^{-2} \ln^{i-1} \xi + c_4 \xi^{-2} \ln^{i-2} \xi], \\ l(\xi^{-\mu} \ln^i \xi) &= \xi^{-\mu} [i \ln^{i-1} \xi + c_1 \xi^{-2} \ln^i \xi + c_2 \xi^{-2} \ln^{i-1} \xi + \\ &\quad + c_3 \xi^{-2} \ln^{i-2} \xi]. \blacksquare \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2.1. Очевидно, что $v_0(\xi) = -u_0(0)[Y(0)]^{-1}Y(\xi)$. Тогда уравнение для $v_1(\xi)$ имеет вид $lv_1 = \xi^{-\mu+1}\sigma(\xi)$. Затем надо применить лемму 2.1 к каждому из членов асимптотического ряда $\sigma(\xi)$ и тем самым построить ф. а. р. уравнения для v_1 . Применяя к остатку оценку (2.13), получим

$$\text{решение } \tilde{v}_1(\xi) = \xi^{-\mu+1} \sum_{j=0}^1 \sigma_j(\xi) \ln^j \xi. \quad \text{Добавляя к нему } cY(\xi)$$

с подходящей постоянной c , добьемся удовлетворения условия (2.11). Далее точно так же, по индукции, доказывается существование остальных $v_i(\xi)$ и их асимптотика (2.12). ■

З а м е ч а н и е. В действительности, если учитывать четность показателей степеней ξ в появляющихся рядах $\sigma(\xi)$, то можно заметить, что логарифмические члены входят с меньшими степенями, чем это утверждается в лемме 2.1 и теореме 2.1. На самом деле асимптотика функций $v_i(\xi)$ содержит члены $\ln^j \xi$ лишь при $2j < i$. Но чтобы не загромождать выкладки, мы записали асимптотику функций $v_i(\xi)$ в несколько огрубленном, но зато более простом виде.

Теперь можно приступать к построению той части внешнего разложения, которое должно быть согласовано с рядом V . Вид этого разложения вытекает из условия согласования: надо рассмотреть ряд V и формально переписать его во внешней переменной x . Получается

ряд $\sum_{m=0}^{\infty} v_m(\varepsilon) Z_m(x)$, где $v_m(\varepsilon)$ — калибровочная последовательность функций, а $Z_m(x)$ — формальные ряды при $x \rightarrow 0$. В нашем примере легко заметить, что $v_m(\varepsilon)$ — это произведения $\varepsilon^{u+k} \ln^l \varepsilon$, $l \leq k$, а внешнее разложение имеет вид

$$Z = \varepsilon^u \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{l=0}^k z_{k,l}(x) \ln^l \varepsilon. \quad (2.15)$$

Осталось теперь только найти функции $z_{k,l}(x)$. Уравнения для них получаются непосредственно из уравнения (2.1):

$$b(x) z'_{k,l}(x) + q(x) z_{k,l}(x) = z''_{k-2,l}(x), \quad (2.16)$$

где, в соответствии с (2.15), $l \leq k$ и функции, у которых хотя бы один индекс отрицателен, считаются тождественно равными нулю. Кроме того, из условия согласования известны асимптотические ряды для функций $z_{k,l}(x)$ при $x \rightarrow 0$. Действительно, из асимптотических рядов (2.12) следует, что для любых $n \geq 0$, $m \geq 0$ справедливы равенства

$$A_{m,x} A_{n,\xi} V = A_{n,\xi} A_{m,x} Z^*, \quad (2.17)$$

где Z^* — точно такой же ряд, как и ряд (2.15), только вместо $z_{k,l}(x)$ в нем стоят ряды

$$Z_{k,l} = x^{-k} \sum_{j=0}^{k-l} x^j s_j(x) \ln^j x, \quad x \rightarrow 0. \quad (2.18)$$

Таблица 2

$\tilde{Z}$	$\tilde{v}_0$	$\tilde{v}_1$	$\tilde{v}_2$	$\tilde{v}_3$	$\tilde{v}_4$	...
$\tilde{z}_{0,0}$	c_0	$\varepsilon c_{1,-1} \xi$	$\varepsilon^2 c_{2,-2} \xi^2$	$\varepsilon^3 c_{3,-3} \xi^3$	$\varepsilon^4 c_{4,-4} \xi^4$	...
	c_0	$c_{1,-1} x$	$c_{2,-2} x^2$	$c_{3,-3} x^3$	$c_{4,-4} x^4$	...
$\tilde{z}_{1,0}$		$\varepsilon c_{1,0}$	$\varepsilon^2 c_{2,-1} \xi$	$\varepsilon^3 c_{3,-2} \xi^2$	$\varepsilon^4 c_{4,-3} \xi^3$	...
		$\varepsilon c_{1,0}$	$\varepsilon c_{2,-1} x$	$\varepsilon c_{3,-2} x^2$	$\varepsilon c_{4,-3} x^3$	...
$\varepsilon^2 \ln \varepsilon \tilde{z}_{2,1}$			$\varepsilon^2 d_{2,0} \ln \xi$	$\varepsilon^3 d_{3,-1} \xi \ln \xi$	$\varepsilon^4 d_{4,-2} \xi^2 \ln \xi$	...
			$-\varepsilon^2 d_{2,0} \ln \varepsilon$	$-\varepsilon^3 \ln \varepsilon d_{3,-1} x$	$-\varepsilon^2 \ln \varepsilon d_{4,-2} x^2$	...
$\varepsilon^2 \tilde{z}_{2,0}$	$c_{0,2} \xi^{-2}$	$\varepsilon c_{1,1} \xi^{-1}$	$\varepsilon^2 c_{2,0}$	$\varepsilon^3 c_{3,-1} \xi$	$\varepsilon^4 c_{4,-2} \xi^2$	...
	$\varepsilon^2 c_{0,2} x^{-2}$	$\varepsilon^2 c_{1,1} x^{-1}$	$\varepsilon^2 (c_{2,0} + d_{2,0} \ln x)$	$\varepsilon^2 x (c_{3,-1} + d_{3,-1} \ln x)$	$\varepsilon^2 x^2 (c_{4,-2} + d_{4,-2} \ln x)$	...
$\varepsilon^3 \ln \varepsilon \tilde{z}_{3,1}$				$\varepsilon^3 d_{3,0} \ln \xi$	$\varepsilon^4 d_{4,-1} \xi \ln \xi$	...
				$-\varepsilon^3 \ln \varepsilon d_{3,0}$	$-\varepsilon^3 \ln \varepsilon d_{4,-1} x$	...

Продолжение табл. 2

$\tilde{Z}$	$\tilde{v}_0$	$\tilde{v}_1$	$\tilde{v}_2$	$\tilde{v}_3$	$\tilde{v}_4$	...
$\tilde{Z}_{3,0}$		$\varepsilon c_{1,2} \xi^{-2}$ $\varepsilon^3 c_{1,2} x^{-2}$	$\varepsilon^2 c_{2,1} \xi^{-1}$ $\varepsilon^3 c_{2,1} x^{-1}$	$\varepsilon^3 c_{3,0}$ $\varepsilon^3 (c_{3,0} + d_{3,0} \ln x)$	$\varepsilon^4 c_{4,-1} \xi$ $\varepsilon^3 x (c_{4,-1} + d_{4,-1} \ln x)$	...
$\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon Z_{4,2}$					$\varepsilon^4 e_{4,0} \ln^2 \xi$ $\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon \cdot e_{4,0}$	...
$\varepsilon^4 \ln \varepsilon Z_{4,1}$			$\varepsilon^2 d_{2,2} \xi^{-2} \ln \xi$ $-\varepsilon^4 \ln \varepsilon d_{2,2} x^{-2}$	$\varepsilon^3 d_{3,1} \xi^{-1} \ln \xi$ $-\varepsilon^4 \ln x x^{-1}$	$\varepsilon^4 d_{4,0} \ln \xi$ $-\varepsilon^4 \ln \varepsilon (d_{4,0} + 2e_{4,0} \ln x)$	...
$\varepsilon^4 \tilde{Z}_{4,0}$	$c_{0,4} \xi^{-4}$ $\varepsilon^4 c_{0,4} x^{-4}$	$\varepsilon c_{1,3} \xi^{-3}$ $\varepsilon^4 c_{1,3} x^{-3}$	$\varepsilon^2 c_{2,2} \xi^{-2}$ $\varepsilon^4 x^{-2} (c_{2,2} + d_{2,2} \ln x)$	$\varepsilon^3 c_{3,1} \xi^{-1}$ $\varepsilon^4 x^{-1} (c_{3,1} + d_{3,1} \ln x)$	$\varepsilon^4 c_{4,0}$ $\varepsilon^4 (c_{4,0} + d_{4,0} \ln x + e_{4,0} \ln^2 x)$	...
...	...	...	...	...	...	...

Для иллюстрации этих соотношений удобно воспользоваться таблицей 2, очень похожей на таблицу 1, но имеющей немного более сложный вид. В каждом столбце таблицы 2 стоит асимптотическое разложение функции $\varepsilon^i \tilde{v}_i(\xi) = \varepsilon^i \xi^\mu v_i(\xi)$ (множитель ξ^μ выделен только для удобства записи) при $\xi \rightarrow \infty$. Члены этой асимптотики стоят в верхней части каждой клетки. (В соответствии с замечанием к доказательству леммы 2.1 и теоремы 2.1 в таблице не выписаны те члены асимптотических рядов (2.12) функций $v_i(\xi)$, коэффициенты при которых в действительности равны нулю. Поэтому отсутствуют члены $\tilde{z}_{2,2}$, $\tilde{z}_{3,2}$, $\tilde{z}_{3,3}$ и т. д.) По горизонтали стоят асимптотические ряды $\tilde{z}_{h,l} = \varepsilon^{-\mu} x^\mu$. Члены этих рядов располагаются в нижней части клеток данной строки. Видно, что теперь не во всех клетках значения в верхней и нижней частях совпадают. При замене $\ln \xi = \ln x - \ln \varepsilon$ одна часть выражения переходит в ту же клетку, а другая часть — в соседние. Но коэффициенты рядов $Z_{h,l}$ строятся так, чтобы соотношения (2.17) были выполнены.

Фактически построение асимптотики решения задачи (2.1) — (2.3) закончено. Надо только построить еще функции экспоненциального пограничного слоя у правого конца отрезка. Этот ряд имеет такой же вид, как в примере 1. Только теперь он должен компенсировать певязки как от ряда (2.4), так и от ряда (2.15). Так что

$$W(\eta, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} w_k(\eta) + \varepsilon^\mu \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{l=0}^h w_{k,l}(\eta) \ln^l \varepsilon, \quad (2.19)$$

где $\eta = \varepsilon^{-1}(1-x)$. Построение функций $w_k(\eta)$ и $w_{k,l}(\eta)$ очевидно, и мы не будем на этом останавливаться. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 2.2. *Существуют функции $z_{h,l}(x) \in C^\infty(0, 1]$, $2l \leq k$, удовлетворяющие системе (2.16) и имеющие при $x \rightarrow 0$ асимптотические разложения $z_{h,l}$, определенные формулами (2.18). Таким образом, для рядов (2.7) и (2.15) выполнены условия согласования (2.17), где вместо Z^* стоит Z .*

Теорема 2.3. *Пусть α и β — какие-нибудь числа такие, что $0 < \beta < \alpha < 1$. Тогда сумма рядов (2.4) и (2.7) является равномерным асимптотическим разложением функции $u(x, \varepsilon)$ — решения задачи (2.1) — (2.3) на отрезке $[0, \varepsilon^\beta]$. Сумма рядов (2.4), (2.15) и (2.19)*

является равномерным асимптотическим разложением того же решения на отрезке $[\varepsilon^a, 1]$.

Для составного асимптотического разложения справедливы оценки

$$|A_{N,x}U + A_{N,x}Z + A_{N,\xi}V - A_{N,x}A_{N,\xi}V + A_{N,\eta}W - u(x, \varepsilon)| < M\varepsilon^{N_1}, \text{ где } N_1 \rightarrow \infty \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (2.20)$$

Здесь U, Z, V и W — это ряды (2.4), (2.15), (2.7) и (2.19) соответственно.

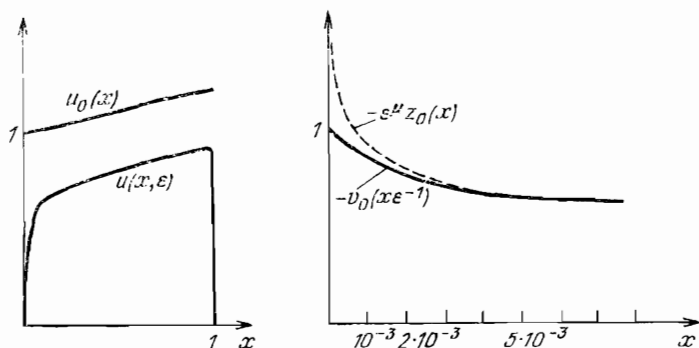


Рис. 7

На рис. 7 приведены график решения краевой задачи

$$l_\varepsilon u = \varepsilon^2 u'' - \operatorname{tg} x \cdot u' - \mu u = -\mu(1+x),$$

$$u(0, \varepsilon) = u(1, \varepsilon) = 0$$

при $\varepsilon = 10^{-3}$, $\mu = 1/5$, а также графики некоторых членов асимптотических приближений $u_0(x)$, $z_0(x)$ и $v_0(\xi)$.

Здесь $u_0(x) = 1 + x - (\sin x)^{-\mu} \int_0^x (\sin t)^\mu dt$, $z_0(x) = -2^{-\mu/2} C \times$

$\times (\sin x)^{-\mu}$, $v_0(\xi) = -CH_{-\mu}(\xi/\sqrt{2})$, $C = 2^\mu \frac{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}\right)}{\Gamma(1/2)}$, $H_\nu(y)$ — функция Эрмита ([53], § 10.2).

Видно, что второй член ряда (2.4) не играет заметной роли, тогда как первые члены рядов (2.7) и (2.15) весьма существенны. Интересно отметить, что коэффициент при старшем члене уравнения на шесть порядков (!) меньше остальных коэффициентов. Тем не менее, если рассматривать лишь ряд (2.4), то даже далеко

от границы, в точке $x = 1/2$, ошибка составит более 20 %. Только правильное согласование внешнего и внутреннего разложений дает удовлетворительный результат. Действительно, обозначим

$$Y_\mu(x, \varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon^\mu z_0(x) + v_0(\xi) + 2^{-\mu/2} C \xi^{-\mu}.$$

Тогда из теоремы 2.3 и из анализа структуры членов рядов (2.4), (2.7) и (2.15) вытекает, что при $x < 1 < \delta$ ($\delta > 0$) справедлива оценка

$$|Y_\mu(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)| < M \varepsilon^{\mu+2} |\ln \varepsilon|.$$

(Равномерная асимптотика вблизи конца $x = 1$ получается добавлением ряда (2.19) и не представляет какого-либо интереса.) Если рассмотреть оператор l_ε от $Y_\mu(x, \varepsilon)$ и оценить его величину при указанных выше значениях μ и ε , то даже грубая оценка приводит к неравенству $|Y_\mu(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)| < 10^{-5}$ при $0 \leq x \leq 0,99$. Таким образом, графики $u(x, \varepsilon)$ и $Y_\mu(x, \varepsilon)$ на рис. 7 практически неразличимы.

Доказательство теоремы 2.2. Прежде всего покажем, что ряды (2.18) являются ф. а. р. системы (2.16). Складывая почленно уравнения (2.9), (2.10), умноженные на ε^i , получаем равенство

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\xi^2} (A_{n,\xi} V) - \xi a(\xi) \frac{d}{d\xi} (A_{n,\xi} V) - q(\xi) A_{n,\xi} V = \\ & = \xi \sum_{i=0}^n \varepsilon^i v'_i(\xi) \left(\sum_{j=0}^{n-i} \varepsilon^j \xi^j a_j - a(x) \right) + \sum_{i=0}^n \varepsilon^i v_i(\xi) \left(\sum_{j=0}^{n-i} \varepsilon^j \xi^j q_j - q(x) \right), \end{aligned}$$

или, в переменной x ,

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} A_{n,\xi} V - x a(x) \frac{d}{dx} A_{n,\xi} V - q(x) A_{n,\xi} V = \\ & = x \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \frac{d}{dx} v_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \left[\sum_{j=0}^{n-i} a_j x^j - a(x) \right] + \sum_{i=0}^n \varepsilon^i v_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \left[\sum_{j=0}^{n-i} q_j x^j - q(x) \right]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Теперь применим к обеим частям этого равенства оператор $A_{m+\mu, x}$,

учитывая, что $A_{m+\mu, x} A_{n,\xi} V = \varepsilon^\mu \sum_{l=0}^m \varepsilon^l \sum_{j=0}^l B_{n-l-\mu} Z_{l,j} \ln^j \varepsilon$. После

этого в получившемся уравнении имеются лишь конечные суммы членов вида $\varepsilon^{\mu+l} \ln^j \varepsilon \phi_{l,j}(x)$. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon^{\mu+l} \ln^j \varepsilon$, получаем систему уравнений для $B_{n-l-\mu} Z_{l,j}$, которая мало отличается от системы (2.16). А именно,

существует лишь отличие в правых частях уравнений на функции, которые быстро стремятся к нулю при $x \rightarrow 0$:

$$b(x) (B_{n-\mu} Z_{0,0})'_x + q(x) B_{n-\mu} Z_{0,0} = O(x^{-\mu+n}), \quad x \rightarrow 0,$$

$$b(x) (B_{n-1-\mu} Z_{1,0})'_x + q(x) B_{n-1-\mu} Z_{1,0} = O(x^{-\mu+n-1}), \quad x \rightarrow 0,$$

$$b(x) (B_{n-2-\mu} Z_{2,0})'_x + q(x) B_{n-2-\mu} Z_{2,0} = (B_{n-\mu} Z_{0,0})''_x + O(x^{-\mu+n-2}), \quad x \rightarrow 0,$$

и т. д. Отсюда вытекает, что ряды $Z_{k,1}(x)$ — это ф. а. р. уравнений (2.16) при $x \rightarrow 0$.

Л е м м а 2.2. Пусть функция $F(x) \in C^\infty(0, 1]$ и разлагается в асимптотический ряд

$$F(x) = x^{-\mu-l} \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{j=0}^k a_{k,j} \ln^j x, \quad x \rightarrow 0;$$

этот ряд допускает многократное почленное дифференцирование, а ряд

$$Z(x) = x^{-\mu-l} \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{j=0}^k b_{k,j} \ln^j x, \quad x \rightarrow 0, \quad (2.22)$$

является ф. а. р. уравнения

$$L_1 Z \equiv b(x) Z' + q(x) Z = F(x) \quad (2.23)$$

при $x \rightarrow 0$. Тогда существует решение этого уравнения $z(x)$, которое разлагается в асимптотический ряд (2.22), допускающий почленное дифференцирование любое число раз.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим частичную сумму $z_N(x) = B_N Z$. По определению для нее справедливо равенство $L_1 B_N Z = F(x) + \varphi_N(x)$, где $\varphi_N(x) = O(x^{N_1})$, $x \rightarrow 0$ и $N_1 \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. В соответствии с формулой (2.6) построим функцию $y_N(x)$ —

$$\text{решение уравнения } L_1 y_N(x) = \varphi_N(x): y_N(x) = E(x) \int_0^x [b(\eta) \times \\ \times E(\eta)]^{-1} \varphi_N(\eta) d\eta, \text{ где } E(x) = \exp \int_x^1 [b(\theta)]^{-1} q(\theta) d\theta. \quad \text{Из оценки}$$

функции $\varphi_N(x)$ вытекает, что $|y_N(x)| < Mx^{N_1}$. Положим $w_N(x) = z_N(x) - y_N(x)$. По построению функция $w_N(x)$ удовлетворяет уравнению (2.23). Осталось лишь показать, что $w_N(x)$ не зависит от номера N . Действительно, $\delta_N(x) = w_{N+1}(x) - w_N(x)$ — это решение уравнения $L_1 \delta_N = 0$, для которого справедлива оценка $|\delta_N(x)| < Mx^{N_1}$. Следовательно, $\delta_N(x) = cE(x)$ и, в силу асимптотики $E(x)$, постоянная $c = 0$. Возможность почленного дифференцирования ряда (2.22) вытекает непосредственно из уравнения (2.23). ■

Применим лемму 2.4 последовательно к уравнениям (2.16) и, учитывая то, что $Z_{h,l}$ являются ф. а. р. этой системы, приходим к заключению теоремы 2.2. ■

Доказательство теоремы 2.3 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.2. Надо проверить, что

а) ряд (2.4) является ф. а. р. уравнения (2.1) равномерно на отрезке $[0, 1]$;

б) ряд (2.7) является ф. а. р. уравнения (2.8) при $x \ll 1$;

в) ряд (2.15) является ф. а. р. уравнения $l_e Z = 0$ при $x/\varepsilon \gg 1$;

г) ряд (2.19) является ф. а. р. уравнения $l_e W = 0$ на отрезке $[0, 1]$;

д) выполнены условия согласования рядов Z и V ;

е) ряд $U + V$ удовлетворяет граничному условию (2.2), а ряд $U + W$ — условию (2.3).

Утверждение а) вытекает из соотношения $l_e A_{2n,x} U = f(x) + \varepsilon^{2n+2} u_{2n}''$. Утверждение б) следует из (2.21): $|l_e A_{n,\varepsilon} V| \leq M x^n$, а утверждение в) — из (2.16), (2.18):

$$|l_e A_{n+\mu} Z| = \left| \varepsilon^{\mu+n+2} \sum_{l=0}^n \frac{d^2}{dx^2} z_{n,l} \right| \leq M \varepsilon^{\mu+n+2} [1 + x^{-\mu-n-2} |\ln^n x|].$$

Утверждение д) — это условие (2.17), на основании которого и строился ряд Z . Утверждения г) и е) очевидны — они проверяются точно так же, как в предыдущих примерах. Далее, доказательство оценки (2.20) почти не отличается от доказательства теоремы 1.2. При этом надо учесть, что $q(x) \geq q_0 > 0$, и поэтому для решения уравнения $l_e \psi = \varphi$ справедлива оценка

$$|\psi(x, \varepsilon)| \leq |\psi(0, \varepsilon)| + |\psi(1, \varepsilon)| + q_0^{-1} \max_{0 \leq x \leq 1} |\varphi(x)|. \quad \blacksquare$$

§ 3. Нелинейное уравнение. Промежуточный пограничный слой

Этот, последний параграф гл. II имеет ряд особенностей. По содержанию он стоит немного в стороне от основного материала. Только здесь рассматривается задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной — тема, которая хорошо освещена в многочисленной литературе и больше в данной книге нигде не затрагивается. Причин для такого отклонения по крайней мере две. Во-первых, это желание показать на относительно простом примере, что метод может быть успешно применен и в нелинейной задаче. Во-вторых — продемонстрировать интересное явление промежуточного пограничного слоя. Технически тем не менее этот параграф довольно сложен и при первом чтении может быть опущен — дальнейшие исследования в следующих главах на него не опираются.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения

$$\varepsilon \frac{du}{dx} = f(x, u) \quad (3.1)$$

с начальным условием

$$u(0, \varepsilon) = R_0, \quad (3.2)$$

где $x \in [0, d]$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, R_0 — положительная постоянная. Пусть $f(x, u)$ — бесконечно дифференцируемая функция для $x \in [0, d]$ и всех значений u и такая, что

$$f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0, 0) = -2, \quad (3.3)$$

$$f(x, 0) > 0 \text{ при } x > 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x, u) < \text{const} < 0 \text{ при } 0 \leq x \leq d, u \geq 0.$$

Смысл этих многочисленных условий довольно прост: из (3.3) вытекает, что вблизи начала координат $f(x, u) = x - u^2 + O(x^2 + |xu| + |u^3|)$, а условия (3.4) — это достаточные условия существования и единственности неотрицательной функции $u_0(x)$ такой, что $f(x, u_0(x)) \equiv 0$ и $\frac{\partial f}{\partial u}(x, u_0(x)) < 0$ при $x > 0$.

Естественно ожидать, что именно функция $u_0(x)$ является пределом решения задачи (3.1), (3.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$, если, конечно, такое решение $u(x, \varepsilon)$ существует. Доказательство существования решения $u(x, \varepsilon)$ будет дано позднее, вместе с выяснением его асимптотики, а пока что формально выпишем внешнее разложение решения $u(x, \varepsilon)$ в том же виде, как и в предыдущих параграфах:

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x). \quad (3.5)$$

Подставим этот ряд в уравнение (3.1), разложим функцию $f(x, U)$ в ряд Тейлора в точке $(x, u_0(x))$ и, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε ,

в результате получим рекуррентную систему уравнений

$$f(x, u_0(x)) = 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{du_0}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}(x, u_0(x)) u_1,$$

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}(x, u_0(x)) u_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x, u_0(x)) u_1^2, \quad (3.7)$$

.....

$$\begin{aligned} \frac{du_{k-1}}{dx} = & \frac{\partial f}{\partial u}(x, u_0(x)) u_k + \\ & + \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \frac{\partial^j f}{\partial u^j}(x, u_0(x)) \sum_{p_1+\dots+p_j=k} \prod_{l=1}^j u_{p_l}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Из условий (3.4) вытекает, как уже было отмечено выше, существование функции $u_0(x)$ — решения уравнения (3.6). Из этих же условий и из условий (3.3) следует, что $u_0(0) = 0$, $u_0(x) > 0$ при $x > 0$ и $\frac{\partial f}{\partial u}(x, u_0(x)) < 0$ при $x > 0$. Следовательно, $u_0(x) \in C^\infty(0, d]$, а из уравнений (3.7) последовательно определяются $u_k(x) \in C^\infty(0, d]$ при $k \geq 1$. Тем самым все коэффициенты внешнего разложения (3.5) определены.

Нетрудно показать, что для функции $u_0(x)$ при $x \rightarrow 0$ справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$u_0(x) = \sqrt{x} + \sum_{j=2}^{\infty} a_{j,0} x^{j/2}, \quad x \rightarrow 0, \quad (3.8)$$

и это соотношение допускает почленное дифференцирование любого порядка. Чтобы не прерывать построения асимптотики решения $u(x, \varepsilon)$, доказательство соотношения (3.8) перенесено на конец этого параграфа. А сейчас, исходя из (3.8), выясним асимптотическое поведение при $x \rightarrow 0$ всех остальных коэффициентов $u_k(x)$. Будем

посредством $s_j(x)$ обозначать ряды вида $\sum_{l=0}^{\infty} c_l x^{l/2}$, $x \rightarrow 0$,

сдвигая индексы у s_j там, где это не приводит к недоразумениям. Разлагая функцию $f(x, u)$ в ряд Тейлора в нуле и используя (3.3), (3.8), получаем соотношения

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x, u_0(x)) = -2\sqrt{x} + xs(x), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\frac{\partial^j f}{\partial u^j}(x, u_0(x)) = s_j(x), \quad x \rightarrow 0, \quad j \geq 2.$$

Из этих равенств и из уравнений (3.7) легко по индукции вывести, что

$$u_k(x) = x^{(1-3k)/2} s_k(x), \quad x \rightarrow 0, \quad (3.9)$$

и это равенство допускает многократное почленное дифференцирование.

Таким образом, коэффициенты $u_k(x)$ имеют нарастающие особенности при $x \rightarrow 0$, т. е. задача (3.1), (3.2) бисингулярна. В соответствии с общим принципом приступа к построению внутреннего разложения в окрестности точки $x=0$. Так как вблизи этой точки решение $u(x, \varepsilon) \approx R_0 > 0$, то естественна замена переменной $x = \varepsilon \xi$, после которой левая и правая части уравнения (3.1) имеют один и тот же порядок. Обозначим $u(\varepsilon \xi, \varepsilon) = v(\xi, \varepsilon)$ и выпишем уравнение для v :

$$\frac{dv}{d\xi} = f(\varepsilon \xi, v). \quad (3.10)$$

Внутреннее разложение имеет вид

$$V = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i v_i(\xi), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.11)$$

Система уравнений для $v_i(\xi)$ получается обычным способом после того, как функция $f(\varepsilon \xi, V)$ в уравнении (3.10) будет разложена в ряд по степеням ε :

$$\frac{dv_0}{d\xi} = f(0, v_0), \quad (3.12)$$

$$\frac{dv_1}{d\xi} = \frac{\partial f}{\partial u}(0, v_0) v_1 + \frac{\partial f}{\partial x}(0, v_0) \xi,$$

.....

$$\frac{dv_i}{d\xi} = \frac{\partial f}{\partial u}(0, v_0) v_i + \frac{1}{i!} \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(0, v_0) \xi^i + \quad (3.13)$$

$$= \sum_{\substack{2 \leq q+m \leq i \\ m \geq 1}} \frac{1}{q!m!} \frac{\partial^{q+m} f}{\partial x^q \partial u^m}(0, v_0) \xi^q \sum_{\substack{p_1 + \dots + p_m = i-q \\ = i-q}} \prod_{l=1}^m v_{p_l}, \quad i \geq 2.$$

Начальные данные также, очевидно, следуют из (3.2):

$$v_0(0) = R_0, \quad v_k(0) = 0 \quad \text{при } k > 0. \quad (3.14)$$

Решение уравнения (3.12) с начальным условием (3.14) записывается в квадратурах:

$$\xi = \int_{R_0}^{v_0} \frac{dv}{f(0, v)}. \quad (3.15)$$

Так как из условий (3.3), (3.4) вытекает, что $f(0, v) < 0$ при $0 < v \leq R_0$, то соотношение (3.15) определяет положительную, монотонно убывающую функцию $v_0(\xi)$ при $\xi \geq 0$. Из условия $\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = 0$ следует, что функция $v_0(\xi)$ определена при всех $\xi \geq 0$ и $v_0(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$.

Теперь предстоит выяснить асимптотику $v_0(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$. Оказывается, что

$$v_0 = \xi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \xi^{-j} \sum_{l=0}^j c_{j,l} (\ln \xi)^l, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad c_{0,0} = 1. \quad (3.16)$$

Докажем это асимптотическое разложение. Обозначим $\frac{\partial^3 f}{\partial u^3}(0, 0) = 6\gamma$. Тогда для любого натурального N

$$f(0, v) = -v^2 + \gamma v^3 + \sum_{k=4}^{N+4} c_k v^k + O(|v|^{N+5}), \quad v \rightarrow 0. \quad (3.17)$$

Следовательно, $\frac{1}{f(0, v)} = -\frac{1}{v^2} - \frac{\gamma}{v} + \sum_{k=0}^N \bar{c}_k v^k + O(|v|^{N+1})$, $v \rightarrow 0$.

Подставляя это выражение в (3.15), приходим к равенству

$$\xi = \frac{1}{v_0} + \gamma \ln v_0 + \sum_{k=0}^{N+1} d_k v_0^k + O(|v_0|^{N+2}), \quad v_0 \rightarrow 0, \quad (3.18)$$

откуда

$$v_0 = \frac{1}{\xi} \left(1 - \frac{\gamma \ln v_0}{\xi} - \sum_{k=0}^{N+1} d_k \frac{v_0^k}{\xi} + O\left(\left|\frac{v_0}{\xi}\right|^{N+2}\right) \right)^{-1}. \quad (3.19)$$

Теперь можно применить метод итерации: из (3.18) вытекает, что $v_0(\xi) = O(\xi^{-1})$ и $[v_0(\xi)]^{-1} = O(\xi)$. Следовательно, $\ln v_0 = O(\ln \xi)$. Поэтому из (3.19) заключаем, что $v_0(\xi) = \xi^{-1} + O(\xi^{-2} \ln \xi)$. Подставляя это значение $v_0(\xi)$ в правую часть (3.19), получаем, что

$$v_0(\xi) = \xi^{-1} - \gamma \xi^{-2} \ln \xi + d_0 \xi^{-2} + O(\xi^{-3} \ln^2 \xi).$$

Далее по индукции приходим к соотношению (3.16). Из явных формул видно, что при $\gamma \neq 0$ в асимптотическом разложении присутствует бесконечно много членов, содержащих степени $\ln \xi$.

Существование решений уравнений (3.13), удовлетворяющих условиям (3.14), очевидно. Для каждой из функций v_i это линейное уравнение при условии, что определены $v_j(\xi)$ при $j < i$. Таким образом, $v_i(\xi) \in C^\infty[0, \infty)$, решение записывается в квадратурах и из явного вида находится асимптотика функций $v_i(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$. Можно показать, что она имеет следующий вид:

$$v_i(\xi) = \xi^{3i-1} \sum_{j=0}^{\infty} \xi^{-j} \sum_{l=0}^j c_{i,l,j} (\ln \xi)^l, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (3.20)$$

Доказательство соотношения (3.20) в принципе несложно, но требует определенной аккуратности. Будем посредством $\sigma_i(\xi)$ обозначать асимптотические ряды вида $\sum_{j=0}^{\infty} \xi^{-1} \sum_{l=0}^j a_{j,l} (\ln \xi)^l$, $\xi \rightarrow \infty$.

(Индексы у σ_i иногда снова будем опускать.) Формула (3.16) означает, что $v_0(\xi) = \xi^{-1} \sigma(\xi)$, $\xi \rightarrow \infty$, причем главный член асимптотики — это ξ^{-1} , так что $[v_0(\xi)]^{-1} = \xi \sigma(\xi)$. Однако такое представление для $[v_0(\xi)]^{-1}$ слишком грубое. Если его использовать, то в асимптотическом представлении $v_i(\xi)$ появятся лишние, слишком большие степени $\ln \xi$. Поэтому уточним асимптотику $[v_0(\xi)]^{-1}$, используя равенство (3.18). Из (3.16) и (3.18) сразу следует, что

$$[v_0(\xi)]^{-1} = \xi + \gamma \ln \xi + \sigma(\xi), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (3.21)$$

Теперь рассмотрим уравнение (3.13) для $v_i(\xi)$ при $i > 0$. Оно имеет вид

$$\frac{dv_i}{d\xi} = \frac{\partial f}{\partial u}(0, v_0(\xi)) v_i + G_i(\xi),$$

где $G_i(\xi)$ — это известная функция из $C^\infty[0, \infty)$, коль скоро определены все $v_j(\xi)$ при $j < i$. Из уравнения (3.12) вытекает, что

функция $Z(\xi) = \frac{dv_0}{d\xi}$ является решением однородного уравнения $\frac{dZ}{d\xi} = \frac{\partial f}{\partial u}(0, v_0(\xi)) Z$. Следовательно, для решения уравнения (3.13), которое обращается в нуль при $\xi = 0$, имеется явная формула

$$v_i(\xi) = Z(\xi) \int_0^\xi [Z(\theta)]^{-1} G_i(\theta) d\theta. \quad (3.22)$$

Теперь осталось найти асимптотику функций $Z(\xi)$, $[Z(\theta)]^{-1}$, $G_i(\theta)$ и проинтегрировать получающиеся асимптотические ряды. Из уравнения (3.12) и из асимптотик (3.16), (3.17) следует, что

$$Z(\xi) = \frac{dv_0}{d\xi} = f(0, v_0(\xi)) = \xi^{-2} \sigma(\xi), \quad \xi \rightarrow \infty.$$

А для вычисления асимптотики $[Z(\xi)]^{-1}$ воспользуемся соотноше-

нием (3.21):

$$\begin{aligned}[Z(\xi)]^{-1} &= [f(0, v_0(\xi))]^{-1} = \\ &= -[v_0'(\xi)]^{-2} \left(1 - \gamma v_0(\xi) - \sum_{k=4}^{\infty} c_k v_0^{k-2}(\xi) \right)^{-1} = \\ &= -[\xi + \gamma \ln \xi + \sigma(\xi)]^2 [1 + \xi^{-1} \sigma(\xi)] = \\ &= -[\xi^2 + 2\gamma \xi \ln \xi + \xi \sigma(\xi)], \quad \xi \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Для первого из уравнений (3.13) правая часть $G_1(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, v_0(\xi)) \xi =$
 $= \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k' [v_0(\xi)]^k \right) \xi = \xi + \sigma(\xi), \quad \xi \rightarrow \infty.$ Следовательно,
 $[Z(0)]^{-1} G_1(0) = -\theta^3 - 2\gamma \theta^2 \ln \theta + \theta^2 \sigma(0), \quad \theta \rightarrow \infty.$

Интегрируя получившийся асимптотический ряд под знаком интеграла в (3.22), получаем

$$v_1(\xi) = Z(\xi) \left[-\frac{1}{4} \xi^4 - \frac{2}{3} \gamma \xi^3 \ln \xi + \xi^3 \sigma(\xi) + c \ln^4 \xi \right] = \xi^2 \sigma_1(\xi).$$

Тем самым соотношение (3.20) доказано для $i=1$. Далее, доказательство продолжается по индукции. При этом надо учесть, что главным членом в правой части уравнения (3.13) оказываются слагаемые $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0, v_0(\xi)) \sum_{j=1}^{i-1} v_j(\xi) v_{i-j}(\xi)$, так что под интегралом (3.22) главные члены — это выражения вида

$$\begin{aligned}[Z(\theta)]^{-1} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0, v_0(\theta)) v_j(\theta) v_{i-j}(\theta) = \\ = Z(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0, v_0(\theta)) \tilde{v}_j(\theta) \tilde{v}_{i-j}(\theta) = v_0''(\theta) \tilde{v}_j(\theta) \tilde{v}_{i-j}(\theta),\end{aligned}$$

где $v_i(\theta) = Z(\theta) \tilde{v}_i(\theta)$ и $\tilde{v}_i(\theta)$ — это выражение специального вида, наподобие того, которое получено выше для $\tilde{v}_1(\theta)$.

Итак, для решения $u(x, \varepsilon)$ задачи (3.1), (3.2) построены внешнее разложение (3.5), внутреннее разложение (3.11) и изучены асимптотики коэффициентов при $x \rightarrow 0$ и при $\xi \rightarrow \infty$ соответственно. Если следовать приведенным ранее рецептам, то осталось лишь проверить согласованность рядов U и V и сконструировать составное асимптотическое разложение. Увы, оказывается, ряды (3.5) и (3.11) между собой не согласованы. Это видно, например, из того, что в асимптотиках (3.20) присутствуют $(\ln \xi)'$, которые в переменной x переходят в

$(\ln x - \ln \varepsilon)^i$, а в асимптотиках (3.9) $\ln x$ отсутствует. Более того, главный член в выражении $\varepsilon^i v_i(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$ равен $\varepsilon^i \xi^{3i-1}$ и после переписывания в переменной x он превращается в $\varepsilon^{1-2i} x^{3i-1}$, т. е. появляются отрицательные и растущие по модулю показатели степеней ε . Не только отсутствует общая область, где оба ряда U и V являются асимптотическими, но, например, при $x = \varepsilon^{2/3}$ оба ряда теряют асимптотический характер и оба не могут быть поэтому асимптотическим разложением решения $u(x, \varepsilon)$.

Все это наводит на мысль о том, что *существует еще один масштаб и еще одно асимптотическое разложение решения $u(x, \varepsilon)$ в области, промежуточной между конечными значениями x и конечными значениями ξ* . Так оно и оказывается. Чтобы выяснить правильные масштабы нового асимптотического разложения, надо учесть, что уравнение (3.1) нелинейное и для него играет роль не только изменение масштаба независимой переменной, но и изменение масштаба неизвестной функции u . *Промежуточный пограничный слой*, очевидно, должен находиться около точки $x = 0$. Кроме того, решение $u_0(x)$ равно нулю в этой точке, а $v_0(\xi)$ также мало при больших ξ . Итак, можно считать, что решение в промежуточном слое мало. Поэтому запишем уравнение (3.1) приближенно, заменяя функцию $f(x, u)$ ее главными членами ряда Тейлора:

$$\varepsilon \frac{du}{dx} \approx x - u^2. \quad (3.23)$$

Теперь сделаем замену $u = \varepsilon^\alpha w$, $x = \varepsilon^\beta \eta$, после чего получаем равенство

$$\varepsilon^{1+\alpha-\beta} \frac{dw}{d\eta} \approx \varepsilon^\beta \eta - \varepsilon^{2\alpha} w^2.$$

Далее надо приравнять порядки членов в этом равенстве. Заметим, что внешнее разложение (3.5) соответствовало тому, что главными в уравнении (3.23) были два члена в правой части, а внутреннее разложение (3.11) означало уравнивание порядков членов $\varepsilon \frac{du}{dx}$ и u^2 .

Так что осталась одна возможность: главными членами должны быть $\varepsilon \frac{du}{dx}$ и x , т. е. $1 + \alpha - \beta = \beta$, а оставшийся член u^2 должен быть того же или меньшего порядка, т. е. $2\alpha \geq \beta \Rightarrow \alpha \geq 1/3$. Практика показывает, что в такой ситуации, когда есть произвол в выборе масштабов, надо

брать крайние значения параметров. В данном случае это будет $\beta = 2/3$, $\alpha = 1/3$, что соответствует равенству порядков всех трех членов в равенстве (3.23).

Итак, сделаем замену

$$x = \varepsilon^{2/3}\eta, \quad u(x, \varepsilon) \equiv \varepsilon^{1/3}w(\eta, \varepsilon). \quad (3.24)$$

Ряд для $w(\eta, \varepsilon)$ должен иметь более сложный вид, чем ряд по степеням $\varepsilon^{1/3}$. Если мы хотим выполнить условие согласования промежуточного разложения с внутренним разложением (3.11), то, учитывая асимптотики (3.20), надо включить в промежуточное разложение степени $\ln \varepsilon$. Как всегда, калибровочные функции асимптотического разложения в переменной η — это те функции от ε , которые содержатся в выражении $A_{m,\eta}A_{n,\varepsilon}V$, где V — ряд (3.11), а ξ и η связаны заменами (3.24) и $x = \varepsilon\xi$, т. е. $\eta = \varepsilon^{1/3}\xi$. Отсюда видно, что калибровочные функции — это $\varepsilon^{k/3}(\ln \varepsilon)^l$, где $k \geq 0$, $0 \leq l \leq k$, а само промежуточное разложение надо искать в виде

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/3} \sum_{l=0}^k w_{k,l}(\eta) (\ln \varepsilon)^l. \quad (3.25)$$

Уравнения для $w_{k,l}(\eta)$ получаются из уравнения для w :

$$\varepsilon^{2/3} \frac{dw}{d\eta} = f(\varepsilon^{2/3}\eta, \varepsilon^{1/3}w)$$

после разложения функции $f(x, u)$ в ряд Тейлора:

$$\frac{dw_{0,0}}{d\eta} - \eta + w_{0,0}^2 = 0, \quad (3.26)$$

$$\frac{dw_{1,1}}{d\eta} + 2w_{0,0}w_{1,1} = 0, \quad (3.27)$$

$$\frac{dw_{1,0}}{d\eta} + 2w_{0,0}w_{1,0} - \eta \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial u} w_{0,0} - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial u^3} w_{0,0}^3 = 0$$

и т. д.

Все уравнения для $w_{k,l}$ при $k > 1$ выглядят просто:

$$\frac{dw_{k,l}}{d\eta} + 2w_{0,0}w_{k,l} - F_{k,l}(\eta) = 0, \quad (3.28)$$

где функция $F_{k,l}(\eta)$ зависит от $w_{i,l}$ с меньшими номера-

ми и имеет довольно громоздкую форму

$$\begin{aligned}
 F_{k,l}(\eta) = & - \sum_{\substack{1 \leq j \leq k-1 \\ 0 \leq l \leq s}} w_{j,s} w_{k-j,l-s} + \\
 & + \sum_{q=3}^{\infty} \frac{1}{q!} \frac{\partial^q f}{\partial u^q}(0,0) \sum_{\substack{\Sigma i_j = k+2-q \\ \Sigma s_j = l}} \prod_{j=1}^q w_{i_j, s_j} + \\
 & + \sum_{\substack{p \geq 1, q \geq 0 \\ p+q \geq 2}} \frac{1}{p!q!} \frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial u^q}(0,0) \eta^p \sum_{\substack{\Sigma i_j = k+2-q-2p \\ \Sigma s_j = l}} \prod_{j=1}^q w_{i_j, s_j}.
 \end{aligned}$$

Все функции $w_{k,l}(\eta)$ надо рассматривать при $0 < \eta < \infty$ и подобрать их так, чтобы ряд (3.25) при $\eta \rightarrow 0$ был согласован с рядом (3.11) при $\xi \rightarrow \infty$, а при $\eta \rightarrow \infty$ он должен быть согласован с рядом (3.5) при $x \rightarrow 0$.

Начнем, как всегда, с первого уравнения (3.26). Оно сводится к уже встречавшемуся в § 1 уравнению Эйри (см., например, [53], § 5.17) после замены

$$w_{0,0}(\eta) = \frac{g'(\eta)}{g(\eta)}.$$

Если $g(\eta) \neq 0$, то уравнение (3.26) эквивалентно уравнению

$$\frac{d^2 g}{d\eta^2} - \eta g = 0. \quad (3.29)$$

Теперь предстоит выяснить, какому условию при $\eta \rightarrow 0$ должна удовлетворять функция $w_{0,0}(\eta)$. Главный член ряда (3.11) — это $v_0(\xi)$, а главный член асимптотики $v_0(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$ — это $\xi^{-1} = \varepsilon^{1/3} \eta^{-1}$. Следовательно, должно выполняться соотношение

$$w_{0,0}(\eta) \sim \eta^{-1} \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow 0.$$

Ясно, что для этого достаточно выбрать такое решение уравнения Эйри (3.29), чтобы $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$. Из уравнения (3.29) вытекает, что $g(\eta)$ — монотонно возрастающая функция, так что $g(\eta) > 0$ при $\eta > 0$. Кроме того, из уравнения (3.29) следует, что ряд Тейлора для функции $g(\eta)$ имеет следующий вид: $g(\eta) = \eta + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \eta^{3k+1}$, $\eta \rightarrow 0$. Тем самым функция построена. Для нее, очевидно,

справедливо асимптотическое разложение

$$w_{0,0}(\eta) = \eta^{-1} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} b_{0,0,j} \eta^{aj} \right), \quad \eta \rightarrow 0. \quad (3.30)$$

Остальные уравнения (3.26) — (3.28) — это линейные уравнения, решения которых определяются с точностью до слагаемого $C \exp \left(- \int 2w_{0,0}(\eta) d\eta \right) = C [g(\eta)]^{-2}$. Все эти постоянные находятся из условия согласования ряда (3.25) с рядом (3.11). Процедура этого согласования такая же, как в предыдущих параграфах. Каждый член ряда (3.11) надо заменить его асимптотикой (3.20) при $\xi \rightarrow \infty$, перейти к переменной η по формуле (3.24) и сгруппировать члены при одинаковых степенях ε и $\ln \varepsilon$. В результате этих формальных выкладок получится равенство

$$V = \varepsilon^{1/3} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/3} \sum_{l=0}^k W_{k,l}(\eta) (\ln \varepsilon)^l,$$

где $W_{k,l}(\eta)$ — это формальные ряды следующего вида:

$$W_{k,l}(\eta) = \eta^{-1-k} \sum_{j=0}^{\infty} \eta^{aj} \sum_{s=0}^l b_{k,l,j,s} (\ln \eta)^s. \quad (3.31)$$

Для того чтобы было легче проверить эти равенства, можно воспользоваться таблицей коэффициентов асимптотических разложений, вполне аналогичной таблице 2. Мы не будем ее здесь приводить. Справедлива

Теорема 3.1. *Существует решение системы (3.26) — (3.28) такое, что каждая из функций $w_{k,l}(\eta)$ при $\eta \rightarrow 0$ разлагается в асимптотический ряд $W_{k,l}(\eta)$, задаваемый формулой (3.31). Тем самым для рядов (3.25) и (3.11) справедливы условия согласования*

$$A_m, \eta A_n, \xi V = A_n, \xi A_m, \eta W.$$

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2.3, но из-за нелинейности уравнения (3.1) оно более громоздко. Предварительно докажем две леммы.

Лемма 3.1. *Пусть функция $w(\eta)$ является решением уравнения*

$$\frac{dw}{d\eta} = \eta - w^2 + \varphi(\eta), \quad (3.32)$$

где $\varphi(\eta) \in C^\infty(0, 1]$, $\varphi(\eta) = O(\eta^N)$ и $w(\eta) = \eta^{-1} + O(\eta^2)$ при $\eta \rightarrow +0$, $N > 0$. Тогда $w(\eta) - w_{0,0}(\eta) = O(\eta^{N+1})$ при $\eta \rightarrow +0$, где $w_{0,0}(\eta)$ — построенная выше функция.

Доказательство. Обозначим $z(\eta) = w(\eta) - w_{0,0}(\eta)$. Из уравнений (3.26) и (3.32) получаем равенство $\frac{dz}{d\eta} + z(w_{0,0} + w) = \varphi(\eta)$. По условию $w_{0,0}(\eta) + w(\eta) = 2\eta^{-1} + \varphi_1(\eta)$, где $\varphi_1(\eta) = O(\eta^2)$. Обозначим $\mu(\eta) = \exp \int_0^\eta \varphi_1(\theta) d\theta$ и умножим уравнение

для z на интегрирующий множитель $\eta^2 \mu(\eta)$. Тогда $\frac{d}{d\eta} (\eta^2 \mu(\eta) z) = \eta^2 \mu(\eta) \varphi(\eta)$, откуда $\eta^2 \mu(\eta) z(\eta) = \int_0^\eta \theta^2 \mu(\theta) \varphi(\theta) d\theta + c$. Так

как $z(\eta) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$, то постоянная $c = 0$. Отсюда вытекает заключение леммы. ■

Лемма 3.2. Пусть функция $\bar{w}(\eta)$ удовлетворяет уравнению $\frac{d\bar{w}}{d\eta} + 2y(\eta) \bar{w} = \bar{F}(\eta)$, где функции $y(\eta)$ и $\bar{F}(\eta)$ принадлежат $C^\infty(0, 1]$. Пусть, кроме того, $F(\eta) \in C^\infty(0, 1]$, $\bar{F}(\eta) - F(\eta) = O(\eta^N)$, $\bar{w}(\eta) = O(\eta^{-k})$, $y(\eta) - w_{0,0}(\eta) = O(\eta^N)$ при $\eta \rightarrow +0$, $N > k + 2 > 0$, где $w_{0,0}(\eta)$ — построенная выше функция. Тогда существует функция $w(\eta) \in C^\infty(0, 1]$ — решение уравнения

$$\frac{dw}{d\eta} + 2w_{0,0}(\eta) w = F(\eta)$$

— такая, что $w(\eta) - \bar{w}(\eta) = O(\eta^{N-k+1})$ при $\eta \rightarrow +0$.

Доказательство. Обозначим $z(\eta) = w(\eta) - \bar{w}(\eta)$ и выпишем уравнение для этой разности:

$$\frac{dz}{d\eta} + 2w_{0,0}(\eta) z + \varphi(\eta) \bar{w}(\eta) = \varphi_1(\eta),$$

где $\varphi(\eta) = 2w_{0,0}(\eta) - 2y(\eta) = O(\eta^N)$, $\varphi_1(\eta) = F(\eta) - \bar{F}(\eta) = O(\eta^N)$. Следовательно,

$$\frac{dz}{d\eta} + 2w_{0,0}(\eta) z = \psi(\eta) = O(\eta^{N-k}).$$

Умножая это уравнение на интегрирующий множитель $\exp \left(-2 \int_0^\eta w_{0,0}(\theta) d\theta \right)$ и интегрируя полученное равенство, приходим к соотношению

$$z(\eta) \exp \left(-2 \int_0^\eta w_{0,0}(\theta) d\theta \right) = \int_0^\eta \psi(\xi) \exp \left(-2 \int_0^\xi w_{0,0}(\theta) d\theta \right) d\xi + c.$$

Отсюда, полагая $c = 0$ и учитывая асимптотику (3.30) для $w_{0,0}$ приходим к заключению леммы. ■

Доказательство теоремы 3.1. Прежде всего покажем, что частичные суммы ряда (3.11) приближенно удовлетворяют уравнению (3.1), т. е. что ряд (3.11) — это ф. а. р. уравне-

ния (3.1) или, что то же самое, уравнения (3.10) при $x \ll \varepsilon^{2/3}$. Для этого обозначим частичную сумму $A_{n,\xi} V$ посредством $v_0(\xi) + z_n(\xi, \varepsilon)$ и подставим ее в уравнение (3.10). Получится равенство

$$\frac{d}{d\xi}(A_{n,\xi} V) - f(\varepsilon\xi, A_{n,\xi} V) = R_n(\xi, \varepsilon), \quad (3.33)$$

где предстоит оценить правую часть

$$R_n(\xi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \frac{dv_i}{d\xi} - f(\varepsilon\xi, v_0(\xi) + z_n(\xi, \varepsilon)).$$

Разложим функцию $f(\varepsilon\xi, v_0(\xi) + z_n(\xi, \varepsilon))$ в ряд Тейлора в точке $(0, v_0(\xi))$ с остаточным членом в интегральной форме и тем самым представим $R_n(\xi, \varepsilon)$ в виде суммы:

$$R_n(\xi, \varepsilon) = G_n(\xi, \varepsilon) + \rho_n(\xi, \varepsilon),$$

где

$$G_n(\xi, \varepsilon) =$$

$$= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \frac{dv_i}{d\xi} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \varepsilon^k \xi^k \sum_{j=0}^{n-k} \frac{1}{j!} [z_n(\xi, \varepsilon)]^j \frac{\partial^{k+j}}{\partial x^k \partial u^j} f(0, v_0(\xi)),$$

$$\begin{aligned} \rho_n(\xi, \varepsilon) = & -\frac{1}{n!} \varepsilon^{n+1} \xi^{n+1} \int_0^1 (1-\theta)^n \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}(\theta \varepsilon \xi, v_0(\xi) + z_n(\xi, \varepsilon)) d\theta - \\ & - \sum_{k=0}^n \frac{\varepsilon^k \xi^k}{k!} \frac{[z_n(\xi, \varepsilon)]^{n-k+1}}{(n-k)!} \int_0^1 (1-\theta)^{n-k} \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^k \partial u^{n-k+1}} f(0, v_0 + \\ & + \theta z_n(\xi, \varepsilon)) d\theta. \end{aligned}$$

В силу системы (3.12), (3.13) в выражении $G_n(\xi, \varepsilon)$ обратится в нуль все коэффициенты при ε^k для $k \leq n$. (Собственно говоря, именно так, приравняв коэффициенты при ε^k после разложения в ряд Тейлора функции $f(\varepsilon\xi, V)$, и получались уравнения (3.26)–(3.28). Просто в выражении $R_n(\xi, \varepsilon)$ вместо рядов стоят частичные суммы, а отброшенные члены начинаются с ε^{n+1} .) Поэтому $G_n(\xi, \varepsilon)$ — это линейная комбинация членов следующего вида:

$$(\varepsilon\xi)^i \prod_s \varepsilon^{j_s} v_{j_s}(\xi) \frac{\partial^p f}{\partial x^{p_1} \partial u^{p_2}}(0, v_0(\xi)), \quad (3.34)$$

причем $i + \sum_s j_s \geq n + 1$. Так как, в силу асимптотики (3.20),

для $v_j(\xi)$ справедлива оценка $|v_j(\xi)| \leq M(1 + \xi^{3j-1})$, а функция $v_0(\xi)$ ограничена, то отсюда вытекает оценка произведений (3.34) и всей суммы $G_n(\xi, \varepsilon)$: $|G_n(\xi, \varepsilon)| \leq M\varepsilon^{n+1}(1 + \xi^{3(n+1)-1})$. Если $\varepsilon\xi^3$ ограничено, то ограничена и величина $v_0(\xi) + \theta z_n(\xi, \varepsilon)$. Поэтому для $\rho_n(\xi, \varepsilon)$ справедлива та же оценка, что и для

$G_n(\xi, \varepsilon)$. Тем самым

$$|R_n(\xi, \varepsilon)| \leq M\varepsilon^{n+1}(1 + \xi^{3(n+1)-1}) \text{ при } \varepsilon\xi^3 < \text{const} \quad (3.35)$$

и, следовательно, из (3.33) вытекает, что ряд (3.14) — это ф. а. р. уравнения (3.10) при $x \ll \varepsilon^{2/3}$.

Теперь надо проверить, что построенные выше ряды $W_{k,l}(\eta)$ (формула (3.31)) являются ф. а. р. при $\eta \rightarrow 0$ уравнений (3.26) — (3.28). Из способа построения рядов $W_{k,l}(\eta)$ вытекает, что

$$A_{m,\eta} A_{n,\xi} V = \varepsilon^{1/3} \sum_{k=0}^{3m-1} \varepsilon^{k/3} \sum_{l=0}^k B_{3n-k-1} W_{k,l}(\eta) (\ln \varepsilon)^l,$$

где $B_j W$ означает, как и раньше, частичную сумму ряда вплоть до степени η^j (ср. аналогичную формулу в доказательстве теоремы 2.2). Применим оператор $A_{m,\eta}$ к обеим частям равенства (3.33). Очевидно, что

$$A_{m,\eta} \left(\frac{d}{d\xi} A_{n,\xi} V \right) = \varepsilon^{2/3} \sum_{k=0}^{3m-1} \varepsilon^{k/3} \sum_{l=0}^k (\ln \varepsilon)^l \frac{d}{d\eta} B_{3n-k-1} W_{k,l}(\eta).$$

Немного сложнее вычислить значения $A_{m,\eta}$ от $f(\varepsilon\xi, A_{n,\xi} V)$. Для этого надо разложить в асимптотический ряд при $\varepsilon \rightarrow 0$ и постоянном η функцию $f(\varepsilon\xi, A_{n,\xi} V) = f(\varepsilon^{2/3}\eta, A_{n,\xi} V)$, но ясно, что такая процедура совпадает с теми формальными действиями, которые привели к уравнениям (3.26) — (3.28). Таким образом,

$A_{m,\eta} \left(\frac{d}{d\xi} A_{n,\xi} V - f(\varepsilon\xi, A_{n,\xi} V) \right)$ — это линейная комбинация выражений $\varepsilon^{k/3} \ln^l \varepsilon$, где $k \leq 3m$, а коэффициентами при них являются левые части уравнений (3.26) — (3.28), где вместо $w_{k,l}(\eta)$ стоят $B_{3n-k-1} W_{k,l}$.

Теперь надо применить оператор $A_{m,\eta}$ к сумме $R_n(\xi, \varepsilon) = G_n(\xi, \varepsilon) + \rho_n(\xi, \varepsilon)$. Функция $G_n(\xi, \varepsilon)$ — это линейная комбинация выражений (3.34); в каждом из них надо сделать замену $\xi = \varepsilon^{-1/3}\eta$, разложить в ряд при $\varepsilon \rightarrow 0$ и сохранить только члены $\varepsilon^{k/3} \ln^l \varepsilon$ при $k \leq 3m$. Из асимптотик (3.20) следует, что

$$A_{m,\eta} G_n(\xi, \varepsilon) = \varepsilon^{1/3} \sum_{k=1}^{3m-1} \varepsilon^{k/3} \sum_{l=0}^k \Phi_{k,l}(\eta) (\ln \varepsilon)^l,$$

где $\Phi_{k,l}(\eta) = O(\eta^{3n-1-k})$. Нетрудно убедиться, что такой же вид имеет и $A_{m,\eta} \rho(\xi, \varepsilon)$. Приравнявая в получившемся равенстве коэффициенты при одинаковых степенях ε^k и $\ln^l \varepsilon$, получаем систему уравнений, которая отличается от системы (3.26) — (3.28) только тем, что в левой части вместо $w_{k,l}(\eta)$ стоят $B_{3n-k-1} W_{k,l}(\eta)$, а в правой части вместо нулей стоят $O(\eta^{3n-k-1})$. Последовательно применяя к полученным уравнениям леммы 3.1 и 3.2, приходим к заключению теоремы 3.1. ■

Итак, построены коэффициенты ряда (3.25) — функции $w_{k,l}(\eta)$ при всех $\eta \geq 0$. Осталось теперь проверить согласованность ряда (3.25) при $\eta \rightarrow \infty$ и ряда (3.5) при $x \rightarrow 0$. Для этого надо выяснить прежде всего поведение функций $w_{k,l}(\eta)$ при $\eta \rightarrow \infty$.

Теорема 3.2. Для построенных выше функций $w_{k,0}(\eta)$ — решения системы (3.26) — (3.28) — справедливы следующие асимптотические разложения:

$$w_{k,0}(\eta) = \eta^{(k+1)/2} \sum_{j=0}^{\infty} h_{k,j} \eta^{-3j/2}, \quad \eta \rightarrow \infty, \quad h_{0,0} = 1, \quad (3.36)$$

и эти ряды допускают многократное почленное дифференцирование.

При $l > 0, s \geq 0$ справедливы оценки

$$\left| \frac{d^s}{d\eta^s} w_{k,l}(\eta) \right| \leq M \exp(-\eta^{3/2}). \quad (3.37)$$

Доказательство. При $k=0$ асимптотика (3.36) вытекает из явного представления для функции $w_{0,0}(\eta) = g'(\eta)[g(\eta)]^{-1}$, где $g(\eta)$ — монотонно возрастающая функция Эйри. Известна ее асимптотика при $\eta \rightarrow \infty$ (она такая же, как асимптотика функции $Y_1(\xi)$ в примере 5 § 1):

$$g(\eta) = C \eta^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3} \eta^{3/2}\right) \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \eta^{-3j/2} \right\}, \quad \eta \rightarrow \infty,$$

откуда сразу следует асимптотика для функции $w_{0,0}(\eta)$.

Выражение для функции $w_{1,1}(\eta)$ выписывается в явном виде из первого уравнения (3.27):

$$\begin{aligned} w_{1,1}(\eta) &= C \exp\left\{-2 \int g'(\theta) [g(\theta)]^{-1} d\theta\right\} = C_1 [g(\eta)]^{-2} = \\ &= \eta^{1/2} O\left(\exp\left(-\frac{4}{3} \eta^{3/2}\right)\right), \quad \eta \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Каждая из функций $w_{k,l}(\eta)$ при $k \geq 1$ удовлетворяет уравнению (3.28), где $F_{k,l}(\eta)$ — это полином от η и $w_{i,j}$ при $i < k$. Если $l > 0$, то в каждом из слагаемых $F_{k,l}(\eta)$ присутствует хотя бы один сомножитель $w_{i,j}(\eta)$ при $j > 0$. Отсюда по индукции вытекает оценка (3.37). А для функций $w_{k,0}(\eta)$ опять-таки из явной формулы для решения уравнения (3.28) по индукции следует асимптотика (3.36). ■

Теорема 3.3. Ряды (3.5) и (3.25) согласованы: для любых натуральных m и n справедливы равенства

$$A_{n,x} A_{m,\eta} \epsilon^{1/3} W = A_{m,\eta} A_{n,x} U. \quad (3.38)$$

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 3.1. Сначала доказываются две леммы, по формулировке почти совпадающие с леммами 3.1

и 3.2. Отличие лишь в том, что вместо асимптотик при $\eta \rightarrow 0$ всюду рассматриваются асимптотики при $\eta \rightarrow \infty$. Кроме того, в лемме 3.2 слова «существует функция $w(\eta)$ » надо заменить словами «для любого решения $w(\eta)$ », так как решение однородного уравнения экспоненциально стремится к нулю на бесконечности.

Далее показывается, что частичные суммы ряда (3.5) приближенно удовлетворяют уравнению (3.1), а именно:

$$\varepsilon \frac{d}{dx} A_{n,x} U - f(x, A_{n,x} U) = O(\varepsilon^{n+1} x^{-(3n+1)/2}). \quad (3.39)$$

При этом одновременно выясняется, что формальные ряды для $w_{k,0}(\eta)$ при $\eta \rightarrow \infty$, полученные из сумм $A_{n,x} U$, являются ф. а. р. системы (3.26)–(3.28) при $l = 0$, если считать $w_{s,0} \equiv 0$ для $s < 0$. Отсюда и из упоминавшихся выше лемм следует условие согласования (3.38), так как при $l > 0$ функции $w_{k,l}(\eta)$ экспоненциально малы на бесконечности. Более детальное проведение данного доказательства явилось бы хорошим упражнением для читателя, интересующегося той частью книги, которая касается обоснования асимптотических разложений. ■

Для удобства обозрения выпишем теперь здесь, в одном месте, построенные выше ряды U , V и W , а также асимптотики их коэффициентов. При этом посредством $P_j(z)$ обозначены полиномы от z степени не выше, чем j ,

посредством $s(z)$ — асимптотические ряды $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $z \rightarrow 0$,

а посредством $\bar{s}(z)$ — асимптотические ряды $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k P_k(\ln z)$, $z \rightarrow 0$.

Итак,

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x), \quad u_k(x) = x^{(1-3k)/2} s_k(x), \quad x \rightarrow 0,$$

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\xi), \quad v_k(\xi) = \xi^{3k-1} \bar{s}_k(\xi), \quad \xi \rightarrow \infty,$$

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/3} \sum_{l=0}^k w_{k,l}(\eta) \ln^l \varepsilon,$$

$$w_{k,l}(\eta) = \eta^{-1-k} \sum_{j=0}^l s_{k,l,j}(\eta^3) (\ln \eta)^j, \quad \eta \rightarrow 0,$$

$$w_{k,l}(\eta) = \eta^{(k+1)/2} s_k(\eta^{-3/2}), \quad \eta \rightarrow \infty,$$

где $\eta = \varepsilon^{1/3} \xi = \varepsilon^{-2/3} x$.

Теорема 3.4. При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует функция $u(x, \varepsilon)$ — решение задачи (3.1),

(3.2). Ряды U , $\varepsilon^{1/3}W$ и V являются асимптотическими разложениями решения $u(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в тех областях, где эти ряды сохраняют асимптотический характер, т. е. при $x \gg \varepsilon^{2/3}$, при $\varepsilon \ll x \ll 1$ и при $x \ll \varepsilon^{2/3}$ соответственно.

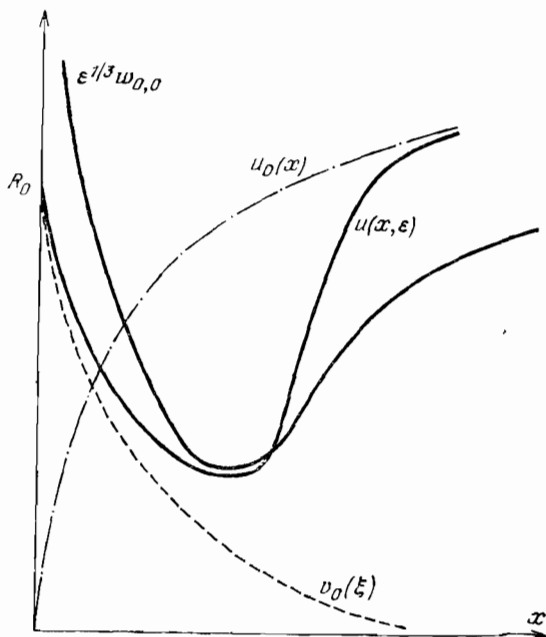


Рис. 8

На рис. 8 схематически показаны графики функций $u(x, \varepsilon)$, $u_0(x)$, $\varepsilon^{1/3}\omega_{0,0}(\eta)$ и $v_0(\xi)$.

Теорема 3.5. Справедлива оценка

$$|u(x, \varepsilon) - z_N(x, \varepsilon)| \leq M \varepsilon^{\gamma N} \quad \forall x \in [0, d], \quad (3.40)$$

где $u(x, \varepsilon)$ — решение задачи (3.1), (3.2), γ — некоторое положительное число, а

$$\begin{aligned} z_N(x, \varepsilon) = & A_{N,x}U + A_{N,\xi}V + A_{N,\eta}(\varepsilon^{1/3}W) - \\ & - A_{N,\eta}(A_{N,x}U) - A_{N,\eta}(A_{N,\xi}V). \end{aligned}$$

Справедливость теоремы 3.4 сразу вытекает из теоремы 3.5, если учесть доказанную выше согласованность рядов U , V , $\varepsilon^{1/3}W$ и асимптотику их коэффициентов.

Доказательство теоремы 3.5. Прежде всего следует убедиться в том, что составное асимптотическое разложение — функция $z_N(x, \varepsilon)$ — приближенно удовлетворяет уравнению (3.1) на отрезке $[0, d]$. Для этого надо рассмотреть функцию $z_N(x, \varepsilon)$ на различных участках отрезка: при $x \leq \varepsilon^{3/4}$, при $\varepsilon^{3/4} \leq x \leq \varepsilon^{1/2}$ и при $\varepsilon^{1/2} \leq x \leq 1$. На каждом из этих участков функция $z_N(x, \varepsilon)$ приближенно равна $A_{N, \xi} V$, $A_{N, \eta}(\varepsilon^{1/3} W)$ и $A_{N, x} \bar{U}$ соответственно, а сумма остальных слагаемых мала в силу условий согласования (теоремы 3.1 и 3.3). (Вместо показателей $3/4$ и $1/2$ можно было бы взять любые числа α и β , лишь бы $2/3 < \alpha < 5/6$, $0 < \beta < 2/3$.) С другой стороны, из самого способа построения рядов и из оценок их коэффициентов следует, что частичные суммы этих рядов приближенно удовлетворяют уравнению (3.1) (см. (3.33), (3.35), (3.38)), так что для достаточно больших N

$$\varepsilon \frac{dz_N}{dx} - f(x, z_N) = \varphi_N(x, \varepsilon), \quad \text{где} \quad |\varphi_N(x, \varepsilon)| < M \varepsilon^{\gamma_1 N}, \quad \gamma_1 > 0. \quad (3.41)$$

Точное значение γ_1 нетрудно установить, но оно для дальнейшего не играет никакой роли. Обозначим $y_N(x, \varepsilon) = z_N(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)$. Так как пока существование решения задачи (3.1), (3.2) на всем отрезке $[0, d]$ не доказано, то функция $y_N(x, \varepsilon)$ определена лишь для тех значений x , для которых решение $u(x, \varepsilon)$ существует. Из общей теоремы о существовании решения задачи Коши вытекает, что функция $u(x, \varepsilon)$ существует при $x \in [0, \lambda]$, где постоянная $\lambda > 0$ зависит, вообще говоря, от ε . При этом решение $u(x, \varepsilon)$ может быть продолжено на весь отрезок $[0, d]$, если оно равномерно ограничено. Будем рассматривать функцию $y_N(x, \varepsilon)$ на отрезке $[0, \lambda(\varepsilon)]$ и докажем, что $y_N(x, \varepsilon)$ ограничено (и даже мало). Отсюда сразу следует, что решение $u(x, \varepsilon)$ продолжимо на отрезок $[0, d]$. Вычитая почленно из уравнения (3.41) уравнение (3.1), получим равенство

$$\varepsilon \frac{dy_N}{dx} - y_N \frac{\partial f}{\partial u}(x, z_N - \theta y_N) = \varphi_N(x, \varepsilon), \quad 0 < \theta < 1.$$

Так как по построению $A_{N, \xi} V|_{\xi=0} = u(0, \varepsilon) = R_0$, то $y_N(0, \varepsilon) = O(\varepsilon^{1N})$. Интегрируя полученное уравнение для y_N и обозначая $\beta_N(x, \varepsilon) = \frac{\partial f}{\partial u}(x, z_N(x, \varepsilon) - \theta y_N(x, \varepsilon))$, приходим к формуле для y_N :

$$y_N(x, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int_0^x \varphi_N(\theta, \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_0^x \beta_N(\zeta, \varepsilon) d\zeta \right) d\theta + O(\varepsilon^{\gamma N}). \quad (3.42)$$

Заключение теоремы сразу вытекает из этой формулы и оценки для $\varphi_N(x, \varepsilon)$, если только $\beta_N(x, \varepsilon) \leq 0$.

Однако надо учесть, что функция $\beta_N(x, \varepsilon)$ в свою очередь зависит от функций $z_N(x, \varepsilon)$ и $y_N(x, \varepsilon)$ и проверка неотрицательности β_N требует некоторых усилий. Сначала надо оценить снизу функцию $z_N(x, \varepsilon)$. При $x \leq \varepsilon^{3/4}$ функция

$$A_{N, \xi} V \geq (\xi + M)^{-1} - M \sum_{k=1}^N \varepsilon^k (1 + \xi^{3k-1}) \geq M \varepsilon^{1/4}.$$

(Посредством M , как всегда, обозначаются положительные постоянные, не зависящие от x и ε , а ε считается достаточно малым.)

При $\varepsilon^{3/4} \leq x \leq \varepsilon^{1/2}$, т. е. при $\varepsilon^{1/2} \leq \eta \leq \varepsilon^{-1/6}$ функция

$$A_{N,\eta}(\varepsilon^{1/3}W) \geq$$

$$\geq \varepsilon^{1/3} \left\{ w_0(\eta) - M \sum_{k=1}^{3N-1} \varepsilon^{k/3} |\ln \varepsilon|^k (\eta^{-1-k} + \eta^{(k+1)/2}) \right\} \geq M \varepsilon^{1/3}.$$

Наконец, при $x \geq \varepsilon^{1/2}$ функция

$$A_{N,x} U \geq u_0(x) - M \sum_{k=1}^N \varepsilon^k x^{(i-3k)/2} \geq u_0(x) - M \varepsilon^{1/2}.$$

Значит, при $x \leq \varepsilon^{1/2}$ функция $z_N(x, \varepsilon) \geq M \varepsilon^{1/4}$, а при $x \geq \varepsilon^{1/2}$ функция $z_N(x, \varepsilon) \geq u_0(x) - M \varepsilon^{1/2}$. Из этих неравенств и из условий (3.3), (3.4) вытекает, что если $|z_N(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)| < M \varepsilon$, то при $0 < \theta < 1$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x, z_N(x, \varepsilon) - \theta(z_N(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon))) \leq 0.$$

Следовательно, для тех x_0 , для которых справедливо неравенство $|y_N(x, \varepsilon)| \leq M \varepsilon$ при $0 \leq x \leq x_0$, из (3.42) вытекает, что $|y_N(x, \varepsilon)| \leq M \varepsilon \gamma_1^{N-1}$. При достаточно большом N отсюда следует неравенство (3.40). ■

Так как оценка (3.40) справедлива для всех достаточно больших N , то из нее и из явной структуры рядов U , V и W вытекает, что в этом неравенстве N — любое натуральное число, и можно положить $\gamma = 1/4$.

В заключение — обещанная в начале параграфа лемма об асимптотике функции $u_0(x)$ при $x \rightarrow 0$.

Лемма 3.3. Пусть выполнены условия (3.3), (3.4). Тогда для функции $u_0(x)$ — неотрицательного решения уравнения $f(x, u_0(x)) = 0$ — справедлива асимптотика (3.6).

Доказательство. Сделаем замену неизвестной функции и независимой переменной: $u_0(x) = yw(y)$, $y = \sqrt{x}$. Тогда уравнение для $u_0(x)$ эквивалентно уравнению $y^{-2}f(y^2, yw(y)) = 0$. Обозначим левую часть этого равенства через $F(y, w(y))$. Из рассмотрения ряда Тейлора для $f(x, u)$ заключаем, что $F(y, w)$ — бесконечно дифференцируемая функция при $w \in \mathbb{R}^1$, $y \in [0, d^{1/2}]$. Кроме того, $F(0, 1) = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial w}(0, 1) = -2$. Отсюда по теореме о неявной функции следует, что функция $w(y) \in C^\infty[0, d^{1/2}]$. Переходя снова к переменным x , $u_0(x)$, приходим к заключению леммы. ■

Глава III

СИНГУЛЯРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ В ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ

Пусть Ω — ограниченная область из $\mathbb{R}^m$, в которой определен линейный эллиптический дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ с гладкими коэффициентами. Если граница $\partial\Omega$ — гладкая и гладко деформируется, то, вообще говоря, гладко изменяется и решение краевой задачи для оператора $\mathcal{L}$ в области Ω . Однако представляют интерес и другие изменения границы, которые называются *сингулярными*. Пусть, например, одна из компонент границы $\partial\Omega$ — это $(m-1)$ -мерная сфера радиуса ε . Как будет вести себя решение при $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. в процессе исчезновения этой части границы? Вместо сферы можно, конечно, рассмотреть другую поверхность малого диаметра. Или пусть, например, граница предельной области Ω_0 имеет особенности: углы, ребра, разрезы, конические точки и т. п., а область Ω_ε получается сглаживанием этих особенностей. Во всех этих случаях краевые задачи для эллиптических уравнений являются бисингулярными.

В этой главе будет рассмотрена лишь первая краевая задача для оператора второго порядка в области, которая получается из фиксированной области Ω выбрасыванием из нее «малой» подобласти.

Итак, Ω — это ограниченная область из $\mathbb{R}^m$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Посредством Ω_ε будем обозначать область $\Omega \setminus \omega_\varepsilon$, где ω_ε — это внутренняя подобласть, которая при $\varepsilon \rightarrow 0$ стягивается к какому-нибудь множеству σ нулевой меры (например, к точке, к гладкой линии и т. п.). Цель исследования — найти асимптотику при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения

$u(x, \varepsilon)$ задачи

$$\mathcal{L}u = f(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad (0.1)$$

$$u(x, \varepsilon) = \varphi(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega_\varepsilon. \quad (0.2)$$

Здесь $\mathcal{L}$ — линейный эллиптический оператор второго порядка, $f(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$, функцию $\varphi(x)$ будем считать гладкой всюду в $\bar{\Omega}$. Граница $\partial\Omega_\varepsilon$ состоит, очевидно, из двух частей: $\partial\Omega$ и $\partial\omega_\varepsilon$.

Естественно ожидать, что $u_0(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon)$ — это решение уравнения (0.1), которое удовлетворяет условию $u|_{x \in \partial\Omega} = \varphi(x)$. Сохраняется ли в пределе граничное условие (0.2) на σ или не сохраняется — это зависит от размерности k множества σ . Например, при $m = 2$ нельзя, как известно ([70], гл. IV), задавать граничное условие, если σ — это точка, и можно задавать, если σ — отрезок.

Таким образом, исходя из нестрогих разумных соображений, можно предположить, что функция $u_0(x)$ равна $\varphi(x)$ на σ тогда, когда соответствующая задача разрешима ($m - k = 1$). В противном случае ($m - k \geq 2$), видимо, $u_0(x)$ — это гладкая функция в Ω , значение которой на σ никак не связано с $\varphi(x)$. Такое утверждение действительно справедливо, если решение предельной задачи $\mathcal{L}u_0 = f(x)$ с указанными граничными условиями существует. Оставляя пока в стороне другую возможность — когда такого предельного решения $u_0(x)$ нет (это будет обсуждено в § 4), будем искать более точное приближение решения $u(x, \varepsilon)$. Если, помимо $u_0(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon)$,

мы попытаемся найти следующие члены асимптотического разложения функции $u(x, \varepsilon)$, то столкнемся с ситуацией, похожей на ту, которая обсуждалась в предыдущей главе. Следующие члены асимптотического разложения на любом компакте из $\bar{\Omega} \setminus \sigma$ — это функции $\varepsilon^k u_k(x)$. Функции $u_k(x)$ определены и являются гладкими всюду в $\bar{\Omega} \setminus \sigma$, но, вообще говоря, имеют особенности на σ . Порядки этих особенностей растут вместе с номером k , и, таким образом, мы имеем дело с бисингулярной задачей.

Равномерная асимптотика решения $u(x, \varepsilon)$ строится с помощью упомянутого внешнего разложения и внутреннего разложения, действующего в окрестности σ . При этом метод согласования асимптотических разложений работает в полную силу: сами по себе, исходя из своих краевых задач, коэффициенты и внутреннего, и внешнего

разложений однозначно не определяются. И только их взаимное согласование дает возможность полностью определить оба асимптотических разложения. В §§ 1—4 рассматриваются различные характерные примеры описанных выше задач. Краткие замечания об уравнениях высшего порядка и о других обобщениях помещены в конце книги.

§ 1. Трехмерная задача в области с малой полостью

1. Уравнение Лапласа. Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть область Ω содержит начало координат O . Цель этого пункта — изучение асимптотики решения первой краевой задачи для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в области, которая получена из Ω после удаления малой окрестности точки O (рис. 9). Точное описание этой окрестности следующее. Пусть ω — ограниченная область с гладкой границей, содержащая начало координат и такая, что дополнение к ω связно (например, шар единичного радиуса или тор). Посредством ω_ε обозначим область, полученную из ω сжатием с коэффициентом ε^{-1} , другими словами, $x \in \omega_\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon^{-1}x \in \omega$. Будем считать $\varepsilon > 0$ малым параметром и обозначим $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bar{\omega}_\varepsilon$, так что $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial\omega_\varepsilon$. Итак, $u(x, \varepsilon) \in C(\bar{\Omega}_\varepsilon)$ — это решение уравнения

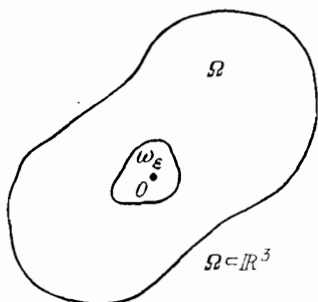


Рис. 9

$$\Delta u = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad (1.1)$$

которое удовлетворяет граничным условиям

$$u(x, \varepsilon) = \varphi(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega, \quad (1.2)$$

$$u(x, \varepsilon) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\omega_\varepsilon, \quad (1.3)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad \varphi(x) \in C^\infty(\partial\Omega).$$

Будем искать асимптотику решения $u(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ методом согласования внешнего и внутреннего разложений. Внешнее разложение естественно искать в виде

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x). \quad (1.4)$$

Подставляя этот ряд в уравнение (1.1) и условие (1.2), приходим к выводу, что $u_0(x)$ — решение предельной задачи (1.1), (1.2), определенное не только в Ω_ε , но и всюду в $\bar{\Omega}$, так что $u_0(x) \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Остальные $u_k(x)$ — это гармонические функции, равные нулю на $\partial\Omega$. Все функции такого сорта, гладкие всюду в Ω , тождественно равны нулю. Поэтому ясно, что функции $u_k(x)$ при $k > 0$ должны иметь особенности в начале координат O . Но каков вид этих особенностей? А priori это совершенно неясно. Выяснение поведения функций $u_k(x)$ в пуле, а следовательно и само определение функций $u_k(x)$, становится возможным только после согласования ряда (1.4) с внутренним разложением. Итак,

$$\Delta u_k(x) = 0 \text{ при } x \in \Omega \setminus O, \quad u_k(x) = 0 \text{ при } x \in \partial\Omega. \quad (1.5)$$

Вид внутренних переменных ясен: их надо выбирать так, чтобы в новых переменных граница $\partial\omega_\varepsilon$ не зависела от ε . Следовательно, $x = \varepsilon\xi$, а внутреннее разложение будем искать в виде

$$V = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i v_i(\xi). \quad (1.6)$$

Функции $v_i(\xi)$ будем считать определенными не только в области, получающейся из Ω_ε растяжением, а всюду в $\mathbb{R}^3 \setminus \omega$. Уравнение (1.1) и условие (1.3) переходят в уравнения

$$\Delta v_i = 0 \quad \text{при} \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \omega \quad (1.7)$$

и в условия

$$v_i(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad \xi \in \partial\omega. \quad (1.8)$$

Очевидно, что функции $v_i(\xi)$ также определены неоднозначно и встает вопрос, как их выбирать. Таким образом, в задаче (1.1) — (1.3) имеется произвол в выборе коэффициентов как внешнего, так и внутреннего разложений.

Прежде всего для определения функций $u_k(x)$ и $v_i(\xi)$ надо выяснить, каков общий вид решений задач (1.5) и (1.7), (1.8), какова степень неопределенности для этих решений. Из условий согласования рядов (1.4) и (1.6) следует, что особенности функций $u_k(x)$ в нуле и особенности функций $v_i(\xi)$ на бесконечности могут быть только

степенного типа. Более точно:

$$|u_k(x)| < M_k r^{-k}, \quad (1.9)$$

$$|v_i(\xi)| < M_i \rho^i. \quad (1.10)$$

(Здесь и всюду далее в этом параграфе используются обозначения $r = |x|$, $\rho = |\xi|$.) Если бы неравенство (1.9) не было выполнено для какого-нибудь k , то функция $\varepsilon^k u_k(x)$ после замены $x = \varepsilon \xi$ не была бы ограничена для ограниченных ξ и, следовательно, ряд (1.4) не был бы согласован с рядом (1.5). Те же соображения приводят к неравенствам (1.10). Гармонические функции, удовлетворяющие оценкам (1.9), (1.10), хорошо известны: справедливы следующие утверждения.

а) Пусть функция $u(x)$ гармонична в области $\Omega \setminus O$ и для нее справедлива оценка (1.9) при каком-нибудь $k > 0$. Тогда $u(x) = \tilde{u}(x) + y(x)$, где $\tilde{u}(x)$ — гармоническая функция, гладкая всюду в Ω , а $y(x)$ — линейная комбинация функций r^{-1} и ее производных до порядка $k-1$.

б) Пусть функция $v(\xi)$ гармонична в области $\mathbb{R}^3 \setminus \omega$ и для нее справедлива оценка (1.10) при каком-нибудь $i \geq 0$. Тогда $v(\xi) = \tilde{v}(\xi) + Y(\xi)$, где $\tilde{v}(\xi)$ — гармоническая функция в $\mathbb{R}^3 \setminus \omega$, $\tilde{v}(\xi) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$, а $Y(\xi)$ — гармонический полином (т. е. $\Delta Y = 0$) степени не выше i .

Утверждения а) и б) полезны для понимания структуры растущих гармонических функций, но непосредственно для наших целей они не понадобятся. Для построения асимптотики решения задачи (1.1) — (1.3) понадобятся в некотором смысле обратные утверждения. Прежде чем их формулировать, отметим, что r^{-1} — это гармоническая функция, а ее производная порядка l имеет вид $X_l(x) r^{-2l-1}$, где $X_l(x)$ — однородный гармонический полином степени l (т. е. такой, что $\Delta X_l = 0$, $X_l(\alpha x) = \alpha^l X_l(x)$ $\forall \alpha$). То, что X_l — это однородный полином, легко усмотреть из формул дифференцирования. А гармоничность этого полинома можно вывести, например, из преобразования инверсии: $x = \bar{x} |\bar{x}|^{-2}$. Так как $g(x) = X_l(x) r^{-2l-1}$ — это гармоническая функция, то известно (см., например, [96], гл. IV, § 1), что $|\bar{x}|^{-l} g(\bar{x} |\bar{x}|^{-2}) = |\bar{x}|^{-1} X_l(\bar{x} |\bar{x}|^{-2}) \cdot |\bar{x}|^{2l+1} = X_l(\bar{x})$ — тоже гармоническая функция. И обратно, для любого однородного гармонического полинома $X_l(x)$ степени l функция $X_l(x) r^{-2l-1}$ является гармонической.

Всюду в данном параграфе, не оговаривая этого в дальнейшем, посредством $X_l(x)$, $Y_l(x)$, $Z_l(x)$, $W_l(x)$ или

$X_{l,j}(x)$, $Y_{l,j}(x)$ и т. д. будут обозначаться однородные гармонические полиномы степени l .

В дальнейшем понадобятся следующие утверждения.

Лемма 1.1. Пусть $z(x)$ — какая-нибудь линейная комбинация функций вида $X_l(x)r^{-2l-1}$. Тогда существует функция $u(x) = \tilde{u}(x) + z(x)$ такая, что $\tilde{u}(x) \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $\Delta u(x) = 0$ при $x \in \Omega \setminus O$, $u(x) = 0$ при $x \in \partial\Omega$.

Лемма 1.2. Пусть функция $v(\xi)$ гармонична в окрестности бесконечности ($\xi \in \mathbb{R}^3$) и $v(\xi) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$. Тогда справедливо асимптотическое разложение

$$v(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} X_j(\xi) \rho^{-2j-1}. \quad (1.11)$$

Лемма 1.3. Пусть $Y(\xi)$ — какой-нибудь гармонический полином. Тогда существует функция $v(\xi) = \tilde{v}(\xi) + Y(\xi)$ такая, что $v(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\omega}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \omega)$, $\Delta v(\xi) = 0$ при $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \omega$, $v(\xi) = 0$ при $\xi \in \partial\omega$ и для функции $\tilde{v}(\xi)$ справедливо асимптотическое разложение (1.11).

Доказательство леммы 1.1 сводится к построению гармонической функции $\tilde{u}(x)$, так как $z(x)$ гармонична по предположению. Очевидно, что в качестве $\tilde{u}(x)$ надо взять решение краевой задачи $\Delta \tilde{u}(x) = 0$ при $x \in \Omega$, $\tilde{u}(x) = -z(x)$ при $x \in \partial\Omega$, $\tilde{u}(x) \in C(\bar{\Omega})$. Такое решение, как известно ([84], гл. III), существует. ■

Доказательство леммы 1.2. Асимптотическое разложение (1.11) можно получить, например, из представления $v(\xi)$ в виде поверхностного потенциала. Но проще опять-таки сделать преобразование инверсии. Функция $g(\xi) = |\xi|^{-1}v(\xi)|\xi|^{-2}$ является гладкой гармонической функцией в окрестности начала координат, где $\xi = \xi\rho^{-2}$. Разлагая эту функцию в ряд Тейлора, получим соотношение

$g(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} X_j(\xi)$. Переходя обратно к переменным ξ , приходим к (1.11). ■

Доказательство леммы 1.3. Достаточно построить гармоническую функцию $\tilde{v}(\xi)$ такую, что $\tilde{v}(\xi) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$, $\tilde{v}(\xi) = -Y(\xi)$ при $\xi \in \partial\omega$. Такая задача, как известно, разрешима (см. [96], [51]), и $\tilde{v}(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\omega}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \omega)$. ■

Теперь можно переходить к построению асимптотических разложений (1.4) и (1.6). Итак, $u_0(x)$ — это решение краевой задачи

$$\Delta u_0(x) = 0 \text{ при } x \in \Omega, \quad u_0(x) = \varphi(x) \text{ при } x \in \partial\Omega.$$

Разлагая функцию $u_0(x)$ в ряд Тейлора, приходим

к асимптотическому разложению

$$u_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} X_{j,0}(x), \quad x \rightarrow 0.$$

Функции $u_k(x)$ при $k > 0$ определим, в соответствии с леммой 1.1, как $\tilde{u}_k(x) + z_k(x)$, где $z_k(x) = \sum_{j=0}^{k-1} Z_{j,k}(x) r^{-2j-1}$. При этом $\Delta \tilde{u}_k = 0$ при $x \in \Omega$, $u_k(x) = 0$ при $x \in \partial\Omega$. Гармонические функции $\tilde{u}_k(x)$ также можно разложить в ряды Тейлора в нуле. В результате получим

$$u_k(x) = \sum_{j=0}^{k-1} Z_{j,k}(x) r^{-2j-1} + \sum_{j=0}^{\infty} X_{j,k}(x), \quad x \rightarrow 0. \quad (1.12)$$

Следует еще раз подчеркнуть, что $Z_{j,k}(x)$ — это пока что произвольно выбранные гармонические полиномы степени j , а гармонические полиномы $X_{j,k}(x)$ при фиксированном k однозначно определяются, если $Z_{j,k}(x)$ уже выбраны для всех j : $0 \leq j \leq k-1$.

Аналогично, согласно лемме 1.3, строим (пока неоднозначно) функции $v_i(\xi)$:

$$\Delta v_i(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \omega, \quad v_i(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad \xi \in \partial\omega,$$

$$v_i(\xi) = \sum_{j=0}^i Y_{j,i}(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty} W_{j,i}(\xi) \rho^{-2j-1}, \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (1.13)$$

Здесь опять-таки $Y_{j,i}(\xi)$ — произвольные гармонические полиномы степени j , а гармонические полиномы $W_{j,i}(\xi)$ однозначно по ним определяются.

Подставим теперь асимптотические разложения (1.12) и (1.13) в ряды (1.4), (1.6) и применим условие согласования

$$A_{N,\xi} A_{N,x} U = A_{N,x} A_{N,\xi} V,$$

учитывая замену переменных $x = \varepsilon \xi$.

Так как

$$A_{N,\xi} A_{N,x} U = \sum_{h=0}^N \varepsilon^h \left(\sum_{j=0}^{h-1} \varepsilon^{-j-1} Z_{j,h}(\xi) \rho^{-2j-1} + \sum_{j=0}^{N-h} \varepsilon^j X_{j,h}(\xi) \right),$$

$$A_{N,x} A_{N,\xi} V = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \left(\sum_{j=0}^i \varepsilon^{-j} Y_{j,i}(x) + \sum_{j=0}^{N-i-1} \varepsilon^{j+1} W_{j,i}(x) r^{-2j-1} \right),$$

то, следовательно, должны выполняться равенства

$$Y_{j,k}(\xi) = X_{j,k-j}(\xi) \quad \text{при } k \geq 0, \quad 0 \leq j \leq k, \quad (1.14)$$

$$Z_{j,k}(\xi) = W_{j,k-j-1}(\xi), \quad \text{при } k \geq 0, \quad 0 \leq j \leq k-1. \quad (1.15)$$

Отсюда последовательно находятся все полиномы. Так как $X_{j,0}(x)$ однозначно определены, то из (1.14) находятся все $Y_{j,j}(\xi)$. Затем по $Y_{0,0}$ из (1.13) определяются все $W_{j,0}(\xi)$, потом из (1.15) — $Z_{0,1}$ и т. д. За цепочкой определения функций $u_k(x)$ и $v_i(\xi)$ удобно следить по таблице 3 согласования рядов (1.4) и (1.6).

Т а б л и ц а 3

$\begin{array}{c} v \\ U \end{array}$	$v_0(\xi)$	$\varepsilon v_1(\xi)$	$\varepsilon^2 v_2(\xi)$	...
$u_0(x)$	$Y_{0,0}$	$\varepsilon Y_{1,1}(\xi)$	$\varepsilon^2 Y_{2,2}(\xi)$	...
	$X_{0,0}$	$X_{1,0}(x)$	$X_{2,0}(x)$	
$\varepsilon u_1(x)$	$W_{0,0} \rho^{-1}$	$\varepsilon Y_{0,1}$	$\varepsilon^2 Y_{1,2}(\xi)$	...
	$\varepsilon Z_{0,1} r^{-1}$	$\varepsilon X_{0,1}$	$\varepsilon X_{1,1}(x)$	
$\varepsilon^2 u_2(x)$	$W_{1,0}(\xi) \rho^{-3}$	$\varepsilon W_{0,1} \rho^{-1}$	$\varepsilon^2 Y_{0,2}$	...
	$\varepsilon^2 Z_{1,2}(x) r^{-3}$	$\varepsilon^2 Z_{0,2} r^{-1}$	$\varepsilon^2 X_{0,2}$	
...	...	...	...	...

Эта таблица устроена так же, как и предыдущие. В каждой строке, в нижних частях клеток, стоят члены асимптотического разложения функции $\varepsilon^k u_k(x)$ при $x \rightarrow 0$. В каждом столбце, в верхних частях клеток, стоят члены асимптотического разложения функции $\varepsilon^i v_i(\xi)$ при $\rho \rightarrow \infty$. При этом значения в верхних и нижних частях клеток должны совпадать, что эквивалентно равенствам (1.14), (1.15).

Итак, сначала определена вся первая строка. Отсюда (по $Y_{0,0}$) определяется весь первый столбец. Затем, по

$Z_{0,1}$, определяется вторая строка. По $Y_{1,1}$ и $Y_{0,0}$ определяется второй столбец и т. д. Построение функций $u_k(x)$ и $v_i(\xi)$, а следовательно, рядов U и V закончено.

Теорема 1.1. *Для всех натуральных N справедлива оценка*

$$|A_{N,x}U + A_{N,\xi}V - A_{N,x}A_{N,\xi}V - u(x, \varepsilon)| < M\varepsilon^{N+1} \quad (1.16)$$

всюду в $\bar{\Omega}_\varepsilon$, где $u(x, \varepsilon)$ — решение задачи (1.1) — (1.3), а U и V — построенные выше ряды (1.4), (1.6).

Доказательство. Обозначим $T_N(x, \varepsilon) = A_{N,x}U + A_{N,\xi}V - A_{N,x}A_{N,\xi}V - u(x, \varepsilon)$ и оценим значения $T_N(x, \varepsilon)$ на $\partial\Omega_\varepsilon$. По построению функция $A_{N,\xi}V$ равна нулю на $\partial\omega_\varepsilon$, а из асимптотических разложений (1.12) вытекает, что на $\partial\omega_\varepsilon$ (где $r < M\varepsilon$)

$$A_{N,x}U - A_{N,\xi}A_{N,x}U = O\left(\sum_{k=0}^N \varepsilon^k r^{N-k+1}\right) = O(\varepsilon^{N+1}). \quad (1.17)$$

Следовательно, $T_N(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1})$ на $\partial\omega_\varepsilon$. На $\partial\Omega$, наоборот, разность $A_{N,x}U - u(x, \varepsilon)$ по построению равна нулю, а

$$A_{N,\xi}V - A_{N,x}A_{N,\xi}V = O\left(\sum_{i=0}^N \varepsilon^i \rho^{-N+i-1}\right) = O(\varepsilon^{N+1}). \quad (1.18)$$

Таким образом, гармоническая функция $T_N(x, \varepsilon)$ на границе области Ω_ε по модулю не превосходит $M\varepsilon^{N+1}$. Из принципа максимума вытекает утверждение теоремы. ■

Следствие. *Ряд (1.4) является равномерным асимптотическим разложением решения $u(x, \varepsilon)$ задачи (1.1) — (1.3) при $x \in \bar{\Omega}$, $r \geq M\varepsilon^\gamma$, а ряд (1.6) является равномерным асимптотическим разложением того же решения при $r \leq M\varepsilon^\gamma$, где γ — любое число такое, что $0 < \gamma < 1$.*

Доказательство. Из соотношения (1.17) вытекает, что $A_{N,x}U - A_{N,\xi}A_{N,x}U = O(\varepsilon^{\gamma N})$ при $r \leq M\varepsilon^\gamma$, а из (1.18) следует, что $A_{N,\xi}V - A_{N,x}A_{N,\xi}V = O(\varepsilon^{(1-\gamma)N})$ при $r \geq M\varepsilon^\gamma$. Эти оценки вместе с оценкой (1.16) приводят к утверждениям, сформулированным в следствии. ■

2. Эллиптическое уравнение с переменными коэффициентами. В этом пункте фактически будет повторено исследование, проведенное выше, но уже для уравнения с переменными коэффициентами. Вся схема построения полностью сохраняется, но обрастает некоторыми техни-

ческими подробностями. Итак, области Ω , ω , ω_ε и $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \omega_\varepsilon$ те же, что и в предыдущем пункте. Рассматривается задача

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{i,j=1}^3 a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^3 a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x) u = f(x) \quad \text{при } x \in \Omega_\varepsilon, \quad (1.19)$$

$$u(x, \varepsilon) = 0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega, \quad (1.20)$$

$$u(x, \varepsilon) = 0 \quad \text{при } x \in \partial\omega_\varepsilon. \quad (1.21)$$

Здесь функции $a_{i,j}(x)$, $a_i(x)$, $a(x)$ и $f(x)$ принадлежат $C^\infty(\bar{\Omega})$, $a_{i,j}(x)$ — положительно определенная матрица. Коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ предполагаются такими, что для любой функции $u(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ и для всех $\varepsilon \geq 0$ справедливо неравенство

$$\max_{\bar{\Omega}_\varepsilon} |u(x)| \leq M \left(\max_{\bar{\Omega}_\varepsilon} |\mathcal{L}u| + \max_{\partial\Omega_\varepsilon} |u| \right), \quad (1.22)$$

где постоянная M не зависит от функции $u(x)$ и от ε , а под Ω_0 понимается Ω . Достаточным условием для выполнения оценки (1.22) является, например, неравенство $a(x) \leq 0$. Кроме того, будем предполагать, что $a_{i,j}(0) = \delta_i^j$, где δ_i^j — символ Кронекера. Последнее условие никак не ограничивает общности задачи, так как уравнение можно линейным преобразованием независимых переменных привести к каноническому виду в точке O .

Внешнее и внутреннее разложения ищем в том же виде, как и для оператора Лапласа:

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x), \quad (1.23)$$

$$V = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i v_i(\xi). \quad (1.24)$$

Функция $u_0(x)$ — это решение задачи

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u_0 &= f(x) \quad \text{при } x \in \Omega, \\ u_0(x) &= 0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1.25)$$

которое существует в силу условия (1.22) и принадлежит $C^\infty(\bar{\Omega})$ ([51], гл. III).

Функции $u_k(x)$ при $k > 0$, очевидно, удовлетворяют следующим уравнениям и граничным условиям:

$$\mathcal{L}u_k = 0 \quad \text{при } x \in \Omega \setminus O, \quad (1.26)$$

$$u_k(x) = 0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega. \quad (1.27)$$

Для дальнейшего удобно ввести некоторые обозначения. Посредством $P_{i,k}(x, D)$, $Q_{i,k}(x, D)$, $R_{i,k}(x, D)$ (быть может, с дополнительными индексами) будут всюду далее обозначаться полиномы, однородные степени i относительно x и однородные степени k относительно символа дифференцирования $D = (D_1, D_2, \dots, D_m)$, $D_j = \partial/\partial x_j$; при этом для определенности оператор дифференцирования действует первым; $P_i(x) \equiv P_{i,0}(x, D)$. Удобно считать, $P_i(x)$, $P_{i,k}(x, D)$ и т. д. определенными для всех целых индексов, полагая эти полиномы равными нулю, если хотя бы один из индексов отрицателен. Напомним еще, что посредством $X_i(x)$, $Y_i(x)$, $Z_i(x)$, $W_i(x)$, снабженных, быть может, еще дополнительными индексами, обозначаются однородные гармонические полиномы.

Учитывая эти обозначения и разлагая коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ в ряды Тейлора, можно записать этот оператор в следующем виде:

$$\mathcal{L} = \Delta - \sum_{i=1}^{\infty} Q_{i,2}(x, D) - \sum_{i=0}^{\infty} Q_{i,1}(x, D) - \sum_{i=0}^{\infty} Q_i(x), \quad x \rightarrow 0. \quad (1.28)$$

Система рекуррентных уравнений для $v_i(\xi)$ получается обычным способом из уравнения (1.19) после замены $x = \varepsilon \xi$ с учетом записи (1.28):

$$\Delta v_0 = 0, \quad \Delta v_1 = Q_{1,2}(\xi, D_\xi) v_0 + Q_{0,1}(\xi, D_\xi) v_0, \quad (1.29)$$

$$\Delta v_i = \sum_{j=1}^i [Q_{j,2}(\xi, D_\xi) + Q_{j-1,1}(\xi, D_\xi) + Q_{j-2}(\xi)] v_{i-j}(\xi) + \\ + R_{i-2}(\xi),$$

где $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} R_j(x)$, $x \rightarrow 0$. Граничные условия для $v_i(\xi)$, очевидно, вытекают из (1.21):

$$v_i(\xi) = 0 \quad \text{при } \xi \in \partial\omega. \quad (1.30)$$

Начнем с исследования задач (1.26), (1.27). Надо будет построить, аналогично изложенному выше случаю

оператора Лапласа, решения однородного уравнения (1.26), имеющие степенные особенности при $x \rightarrow 0$. Собственно говоря, это и есть самое существенное отличие исследования задачи (1.19) — (1.21) от предыдущего пункта. Главный член асимптотики функции $u_k(x)$ при $x \rightarrow 0$ возьмем тот же, что и в случае оператора Лапласа, т. е. $X_{k-1}(x)r^{-2k+1}$. Но если там, согласно лемме 1.1, этот член отличался от $u_k(x)$ на функцию, гармоническую всюду в $\bar{\Omega}$, то теперь функция $u_k(x)$ будет при $x \rightarrow 0$ разлагаться в более сложный асимптотический ряд, включающий, вообще говоря, и другие сингулярные члены, помимо главного.

Теорема 1.2. Для любого натурального k и любого однородного гармонического полинома $Y_{k-1}(x)$ существует функция $\mathcal{E}(x) \in C^\infty(\bar{\Omega} \setminus O)$ такая, что

$$\mathcal{L}\mathcal{E}(x) = 0 \text{ при } x \in \Omega \setminus O, \quad \mathcal{E}(x) = 0 \text{ при } x \in \partial\Omega \quad (1.31)$$

и справедливо асимптотическое разложение

$$\mathcal{E}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} r^{-2k+1-2j} P_{k-1+3j}(x), \quad x \rightarrow 0, \quad (1.32)$$

где

$$P_{k-1}(x) = Y_{k-1}(x).$$

Прежде чем доказывать теорему 1.2, установим справедливость одного простого вспомогательного утверждения. Сначала вычислим оператор Лапласа от $r^\alpha Y_k(x)$, где α — какое-нибудь вещественное число, учитывая, что радиальная часть оператора Лапласа в $\mathbb{R}^3$ — это $r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$:

$$\begin{aligned} \Delta(r^\alpha Y_k(x)) &= Y_k(x) \Delta r^\alpha + 2 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (r^\alpha) \frac{\partial}{\partial x_j} (Y_k(x)) = \\ &= \alpha(\alpha+1) r^{\alpha-2} Y_k(x) + 2\alpha r^{\alpha-2} \sum_{j=1}^3 x_j \frac{\partial Y_k}{\partial x_j}(x). \end{aligned}$$

В силу однородности $Y_k(x)$ $\sum_{j=1}^3 x_j \frac{\partial Y_k}{\partial x_j}(x) = k Y_k(x)$. Итак,

$$\Delta(r^\alpha Y_k(x)) = \alpha(\alpha+1+2k) r^{\alpha-2} Y_k(x). \quad (1.33)$$

Лемма 1.4. Для любых $Z_k(x)$, $P_j(x)$ справедливо равенство

$$Z_k(x) P_j(x) = \sum_{s=0}^j r^{2s} Y_{k+j-2s}(x). \quad (1.34)$$

Доказательство. При $j=1$ соотношение (1.34) записывается в виде

$$Z_k(x) P_1(x) = Y_{k+1}(x) + r^2 Y_{k-1}(x). \quad (1.35)$$

Чтобы убедиться в справедливости этого представления, применим к обеим частям равенства оператор Лапласа и из (1.33) найдем гармонический полином $Y_{k-1}(x)$. Затем из (1.35) найдем $Y_{k+1}(x)$. В случае, если $P_j(x)$ — одночлен, равенство (1.34) доказывается методом индукции по j с помощью (1.35). Отсюда вытекает заключение леммы для любого j . ■

Доказательство теоремы 1.2. Введем обозначения для членов ряда (1.32):

$$\psi_j(x) = r^{-2k+1-2j} P_{k-1+3j}(x), \quad j \leq 0, \quad \psi_0(x) = r^{-2k+1} Y_{k-1}(x)$$

и подставим ряд $\mathcal{S}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(x)$ в уравнение (1.26), где оператор $\mathcal{L}$ записан в виде (1.28). Затем приравняем члены одинаковой степени однородности, учитывая, что степень однородности функции $\psi_j(x)$ равна $j-k$, а функции $Q_{i,s} \psi_j(x)$ равна $i+j-k-s$. Получится система, которая по вполне понятным причинам напоминает систему (1.29) для $v_i(\xi)$:

$$\Delta \psi_0 = 0, \quad (1.36)$$

$$\Delta \psi_j = \sum_{l=1}^j (Q_{l,2}(x, D) + Q_{l-1,1}(x, D) + Q_{l-2}(x)) \psi_{j-l}, \quad j \geq 1.$$

Первое из этих уравнений выполнено согласно выбору функции $\psi_0(x)$. Введем обозначение $\Phi(\alpha, k, x) = r^\alpha Y_k(x)$ и отметим, что согласно (1.33) уравнение $\Delta \psi = \Phi(\alpha-2, q, x)$ имеет решение $\psi = \Phi(\alpha, k, x)$, если

$$\alpha(\alpha+1+2q) \neq 0. \quad (1.37)$$

Далее вместе с разрешимостью системы (1.36) будем по индукции доказывать соотношения

$$\psi_j(x) = \sum_{s=0}^{2j-1} \Phi(-2k+1-2j+2s, \quad k-1+3j-2s, \quad x), \quad j \geq 1. \quad (1.38)$$

Если учесть, что

$$\begin{aligned} Q_{01}(x, D) \psi_0 &= \Phi(-2k-1, k, x), \\ Q_{02}(x, D) \psi_0 &= \Phi(-2k-3, k+1, x), \end{aligned} \quad (1.39)$$

то согласно лемме 1.4 уравнение для $\psi_1(x)$ имеет вид $\Delta \psi_1 = \Phi(-2k-3, k+2, x) + \Phi(-2k-1, k, x)$. Из формулы (1.33)

вытекает, что существует $\psi_1(x)$ вида (1.38), так как выполнено неравенство (1.37).

Из формул дифференцирования и леммы 1.4 вытекает, что

$$Q_{0,1}(x, D)\Phi(\alpha, q, x) = \Phi(\alpha - 2, q + 1, x) + \Phi(\alpha, q - 1, x),$$

а

$$Q_{0,2}(x, D)\Phi(\alpha, q, x) = \Phi(\alpha - 4, q + 2, x) + \Phi(\alpha - 2, q, x) + \\ + \Phi(\alpha, q - 2, x).$$

Однако, если $\Phi(\alpha, q, x)$ гармонична (т. е. $\alpha = 0$ или $\alpha + 1 + 2q = 0$), то так же, как и в (1.39), число слагаемых в сумме уменьшается. Это сказывается при вычислении $Q_{l,2}(x, D)\psi_{n-l}$, так как в выражении $Q_{0,1}(x, D)\psi_{n-l}$ слагаемое, содержащее гармонический полином наименьшей степени, имеет вид $\Phi(2n - 2l - 2k - 1, k - n + l, x)$. Итак, из предположения индукции (1.38) при $j < n$, формулы (1.36) и леммы 1.4 получаем уравнение для $\psi_n(x)$:

$$\Delta\psi_n = \sum_{s=0}^{2n-1} \Phi(-2k - 1 - n + 2s, k - 1 + 3n - 2s, x).$$

Поскольку для каждого слагаемого в правой части выполнено неравенство (1.37), то из формулы (1.33) вытекает существование решения $\psi_n(x)$ вида (1.38). ■

Итак, формально ряд (1.32), который мы обозначим $\mathcal{E}$, построен. Он является ф. а. р. уравнения $\mathcal{L}\mathcal{E} = 0$ при $x \rightarrow 0$. Доказательство существования решения задачи (1.31), разлагающегося в построенный асимптотический ряд (1.32), проводится стандартным образом (так, как это было сделано в леммах 1.1, 2.1 и теореме 2.1 гл. II). Возьмем частичную сумму $B_N\mathcal{E}$, где N достаточно велико. По построению ряда (1.32) $\mathcal{L}B_N\mathcal{E} = f_N(x)$, где $f_N(x) = O(r^{N_1})$, $x \rightarrow 0$, $f_N(x) \in C^{N_1}(\bar{\Omega})$, а $N_1 \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. Пусть $z_N(x)$ — это решение задачи $\mathcal{L}z_N = -f_N(x)$ при $x \in \bar{\Omega}$, $z_N(x) = -B_N\mathcal{E}$ при $x \in \partial\Omega$. Согласно предположению (1.22) такое решение $z_N(x)$ существует и $z_N(x) \in C^{N_1}(\bar{\Omega})$ ([51], гл. III). Функция $\mathcal{E}(x) = B_N\mathcal{E} + z_N(x)$ — это искомое решение задачи (1.31). Действительно, уравнение и граничное условие (1.31) удовлетворяются по построению $z_N(x)$. Остается лишь проверить, что при всех достаточно больших N сумма $B_N\mathcal{E} + z_N(x)$ не зависит от N . Это вытекает из (1.22) и из того, что разность двух таких сумм для разных N принадлежит $C^2(\bar{\Omega})$, удовлетворяет однородному уравнению и однородному граничному условию. ■

З а м е ч а н и е. Функция $\mathcal{E}(x)$, построенная в теореме 1.2, определена неоднозначно. Если $k > 1$, то точно такую же функцию можно построить для любого члена $Y_{k-2}(x)$ и затем прибавить ее к полученной ранее функции $\mathcal{E}(x)$. Точно так же можно добавлять и подобные сингулярные решения с главными членами $r^{-2k+5}Y_{k-3}(x)$, $r^{-2k+7}Y_{k-4}(x)$, ..., $r^{-1}Y_0$. В действительности этим и ограничивается произвол в построении реше-

ния $\mathcal{E}(x)$, однако этот факт в дальнейшем не понадобится. А отмеченная здесь свобода в выборе асимптотического разложения (1.32) для функции $\mathcal{E}(x)$ при $k > 1$ будет использована при построении функций $u_k(x)$ — коэффициентов ряда (1.23).

Нетрудно заметить, что при $k = 1$ построенная функция $\mathcal{E}(x)$ с точностью до множителя совпадает с функцией Грина $G(x, \bar{x})|_{\bar{x}=0}$ первой красной задачи для уравнения $\mathcal{L}\mathcal{E} = 0$. А остальные функции $\mathcal{E}(x)$ — это линейные комбинации функции $G(x, \bar{x})$ и ее производных по $\bar{x}$; при $\bar{x} = 0$.

Теперь можно приступить к одновременному построению функций $u_k(x)$ и $v_i(\xi)$ — решений системы (1.29), (1.30) — так, чтобы ряды (1.23) и (1.24) были согласованы. Будем следить за этим построением по таблице 4. Содержание ее точно такое же, как и в таблице 3, только в клетках стоят более сложные выражения. Поэтому повторять описание таблицы здесь не будем.

Построим, согласно теореме 1.2, все функции $u_k(x)$ при $k > 1$ так, что

$$u_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} r^{-2k+1+2j} P_{k-1+3j,h}(x), \quad x \rightarrow 0, \quad (1.40)$$

$$u_k(x) \in C^\infty(\bar{\Omega} \setminus O), \quad P_{k-1,h}(x) = Y_{k-1,h}(x).$$

Функцию $u_0(x)$ определим как решение задачи (1.25). Тем самым в таблице 4 заполнятся нижние части всех клеток. Однако важно отметить, что окончательно и однозначно определена лишь функция $u_0(x)$ и, следовательно, первая строка таблицы. Остальные $u_k(x)$ определены неоднозначно. Например, во второй строке постоянная $Y_{0,1}$ пока что выбрана совершенно произвольно, в третьей строке произвольно выбран гармонический полином $Y_{1,2}(x)$. Кроме того, в соответствии с замечанием к теореме 1.2 к функции $u_2(x)$ можно добавить сингулярное решение, главный член которого — это $\text{const} \cdot r^{-1}$. Следовательно, в третьей строке имеется еще один произвол: к полиному $P_{4,2}(x)$ можно добавить cr^4 с любой постоянной c . Точно так же в четвертой строке произволен гармонический полином $Y_{2,3}(x)$; полином $P_{5,3}(x)$ определяется с точностью до слагаемого $Y_1(x)r^4$, а полином $P_{8,3}(x)$ — с точностью до Y_0r^8 . Учитывая замечание к теореме 1.2, легко проследить за тем, какова степень неопределенности и для всех остальных $u_k(x)$.

Тем не менее фиксируем первоначально каким-либо образом функции $u_k(x)$ при $k > 0$. В каждой клетке таблицы 4 заполним теперь и верхнюю часть — там стоит такая же функция, что и в нижней части клетки, только в переменных $\xi = \varepsilon^{-1}x$. В результате в каждом столбце появятся ряды $\varepsilon^i V_i(\xi)$.

Таблица 4

$\begin{array}{c} V \\ U \end{array}$	$v_0(\xi)$	$\varepsilon v_1(\xi)$	$\varepsilon^2 v_2(\xi)$	$\varepsilon^3 v_3(\xi)$	...
$u_0(x)$	$P_{0,0}$	$\varepsilon P_{1,0}(\xi)$	$\varepsilon^2 P_{2,0}(\xi)$	$\varepsilon^3 P_{3,0}(\xi)$	...
	$P_{0,0}$	$P_{1,0}(x)$	$P_{2,0}(x)$	$P_{3,0}(x)$	
$\varepsilon u_1(x)$	$Y_{0,1} \rho^{-1}$	$\varepsilon \rho^{-3} P_{3,1}(\xi)$	$\varepsilon^2 \rho^{-5} P_{6,1}(\xi)$	$\varepsilon^3 \rho^{-7} P_{9,1}(\xi)$	...
	$\varepsilon Y_{0,1} r^{-1}$	$\varepsilon r^{-3} P_{3,1}(x)$	$\varepsilon r^{-5} P_{6,1}(x)$	$\varepsilon r^{-7} P_{9,1}(x)$	
$\varepsilon^2 u_2(x)$	$\rho^{-3} Y_{1,2}(\xi)$	$\varepsilon \rho^{-5} P_{4,2}(\xi)$	$\varepsilon^2 \rho^{-7} P_{7,2}(\xi)$	$\varepsilon^3 \rho^{-9} P_{10,2}(\xi)$	...
	$\varepsilon^2 r^{-3} Y_{1,2}(x)$	$\varepsilon^2 r^{-5} P_{4,2}(\xi)$	$\varepsilon^2 r^{-7} P_{7,2}(x)$	$\varepsilon^3 r^{-9} P_{10,2}(x)$	
$\varepsilon^3 u_3(x)$	$\rho^{-5} Y_{2,3}(\xi)$	$\varepsilon \rho^{-7} P_{5,3}(\xi)$	$\varepsilon^2 \rho^{-9} P_{8,3}(\xi)$	$\varepsilon^3 \rho^{-11} P_{11,3}(\xi)$	...
	$\varepsilon^3 r^{-5} Y_{2,3}(x)$	$\varepsilon^3 r^{-7} P_{5,3}(x)$	$\varepsilon^3 r^{-9} P_{8,3}(x)$	$\varepsilon^3 r^{-11} P_{11,3}(x)$	
...	...	...	...	...	...

Лемма 1.5. Пусть каким-либо образом выбраны функции $u_k(x)$ при $k > 0$ — решения задач (1.26), (1.27) указанного выше вида. Тогда образованные по ним ряды $V_i(\xi)$ являются ф. а. р. системы (1.29) при $\xi \rightarrow \infty$.

Доказательство. По построению справедливо равенство

$$\mathcal{L}A_{N,\varepsilon}U = f(x), \quad (1.41)$$

где U — ряд (1.23), $u_0(x)$ — решение задачи (1.25), а $u_k(x)$ — выбранные каким-либо образом решения задач (1.26), (1.27). К обеим частям равенства (1.41) применим оператор $A_{N,\varepsilon}$. В правой ча-

сти получится следующее: $A_{N,\xi} \tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i R_i(\xi)$. А в левой части надо сначала заменить $A_{N,x} U$ на $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i B_{N-i} V_i(\xi)$, а оператор $\mathcal{L}$ на $\varepsilon^{-2} \Delta_{\xi} - \varepsilon^{-2} \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i Q_{i,2}(\xi, D_{\xi}) - \varepsilon^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_{i,1}(\xi, D_{\xi}) - \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_i(\xi)$. Как и в предыдущих примерах, в равенстве $A_{N,\xi} \mathcal{L} A_{N,x} U = A_{N,\xi} f(x)$ имеется лишь конечное число слагаемых вида $\varepsilon^j P(\xi) \rho^{-j}$. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем для $B_{N-i} V_i(\xi)$ при $i < N-2$ точно такую же систему, как и система (1.29). ■

Лемма 1.6. Пусть функция $F(\xi) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3 \setminus \omega)$, а ряд

$$V = \sum_{i=0}^{\infty} h_i(\xi) \quad (1.42)$$

является ф. а. р. уравнения $\Delta V = F$ при $\rho \rightarrow \infty$. Пусть ряд (1.42) допускает многократное почленное дифференцирование, функции $h_i(\xi) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3 \setminus \omega)$ и таковы, что $\forall N \exists i_0: h_i(\xi) = O(\rho^{-N})$ при $i \geq i_0$. Тем же свойством обладают и любые производные от $h_i(\xi)$. Тогда существует функция $v(\xi) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3 \setminus \omega)$ такая, что

$$\begin{aligned} \Delta v(\xi) &= F(\xi) \quad \text{при} \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \omega, \\ v(\xi) &= 0 \quad \text{при} \quad \xi \in \partial\omega \end{aligned} \quad (1.43)$$

и

$$v(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty} X_j(\xi) \rho^{-2j-1}, \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (1.44)$$

Доказательство. Для достаточно больших N рассмотрим функцию $F_N(\xi) = F(\xi) - \Delta(B_N V)$. Будем считать функции $F_N(\xi)$ гладко продолженными на все $\mathbb{R}^3$ и рассмотрим объемный потенциал

$$z_N(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{F_N(\bar{\xi})}{|\xi - \bar{\xi}|} d\bar{\xi}, \quad (1.45)$$

который, как известно ([96], гл. IV, § 5), является решением уравнения $\Delta z_N(\xi) = F_N(\xi)$, $z_N(\xi) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$. Определим $w_N(\xi)$ как гармоническую в $\mathbb{R}^3 \setminus \omega$ функцию, которая стремится к нулю на бесконечности и равна $-B_N V - z_N(\xi)$ на $\partial\omega$. Положим $v(\xi) = B_N V + z_N(\xi) + w_N(\xi)$. По построению функция $v(\xi)$ является

решением задачи (1.43). Она не зависит от N , так как разность двух таких функций, построенных для N и для $N+1$, — это гармоническая функция, которая равна нулю на $\partial\omega$ и стремится к нулю на бесконечности. В силу леммы 1.2 функции $w_N(\xi)$ разлагается в ряд (1.11). Разлагая далее ядро $|\xi - \bar{\xi}|^{-1}$ в ряд при $\xi \rightarrow \infty$ и учитывая, что для достаточно больших N функции $F_N(\xi) = O(\rho^{-N_1})$, представим подынтегральную функцию в (1.45) в виде соответствующей частичной суммы и малого остаточного члена. После интегрирования получим некоторую частичную сумму, совпадающую по виду с частичной суммой ряда (1.11). Отсюда следует справедливость асимптотического разложения (1.44). ■

Теорема 1.3. *Существуют функции $u_k(x)$ — решения задач (1.26), (1.27), удовлетворяющие условию (1.40), и функции $v_k(\xi)$ — решения задач (1.29), (1.30) — такие, что для рядов (1.23), (1.24) выполнены условия согласования*

$$A_{N_1, \xi} A_{N_2, x} U = A_{N_2, x} A_{N_1, \xi} V \quad \forall N_1, N_2. \quad (1.46)$$

Доказательство. Функция $u_0(x)$ — это решение задачи (1.25), которое однозначно определено. Следовательно, определены все полиномы $P_{i,0}(x)$ в первой строке таблицы 4. По главному члену на бесконечности — постоянной $P_{0,0}$ — строим, согласно лемме 1.3, гармоническую функцию $v_0(\xi)$ и из ее асимптотического разложения (1.11) определим все функции в первом столбце таблицы 4. По главным членам $r^{-2k+1} Y_{k-1,k}(x)$ строим, согласно теореме 1.2, функции $u_k(x)$. При этом функция $u_1(x)$ уже определена однозначно, а для других $u_k(x)$ остается произвол, указанный в замечании к теореме 1.2.

Получившийся в верхней части второго столбца асимптотический ряд — это, согласно лемме 1.5, ф. а. р. уравнения (1.29) для функции $\varepsilon v_1(\xi)$. Следуя лемме 1.6, по этому ряду построим функцию $v_1(\xi)$ — решение задачи (1.29), (1.30) при $i=1$. При этом во втором столбце таблицы к уже имеющимся членам асимптотического ряда добавятся члены, порожденные второй суммой равенства (1.44). Как нетрудно проверить, к функции $r^{-2k-1} P_{k+2,k}(x)$ при $k \geq 2$ добавится гармоническая функция $r^{-2k+3} Y_{k-2}(x)$. Далее, согласно теореме 1.2 и замечанию к ней, исправим функции $u_k(x)$ при $k \geq 2$, добавляя к ним гармонические функции, имеющие получившиеся выше главные члены асимптотики. Тем самым однозначно определится функция $u_2(x)$.

Затем процесс продолжается в том же направлении: определяется $v_2(\xi)$, вносится соответствующее изменение в асимптотику $u_3(x)$ и однозначно определяется $u_3(x)$ и т. д. Очевидно, что процесс построения происходит таким образом, что условие согласования (1.46) выполняется автоматически. ■

Теорема 1.4. Для всех натуральных N справедлива оценка

$$|A_{N,x}U + A_{N,\xi}V - A_{N,x}A_{N,\xi}V - u(x, \varepsilon)| < M\varepsilon^{(N-1)/2} \quad (1.47)$$

всюду в $\bar{\Omega}_\varepsilon$, где $u(x, \varepsilon)$ — решение задачи (1.19) — (1.21), а U и V — построенные выше ряды (1.23), (1.24).

Доказательство почти полностью повторяет доказательство теоремы 1.1. Обозначим

$$T_N(x, \varepsilon) = A_{N,x}U + A_{N,\xi}V - A_{N,x}A_{N,\xi}V - u(x, \varepsilon).$$

По тем же причинам, что и в теореме 1.1, справедливы оценки (1.17), (1.18) и, следовательно,

$$T_N(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1}) \quad \text{на } \partial\Omega_\varepsilon. \quad (1.48)$$

Но теперь надо еще оценить и значение оператора $\mathcal{L}T_N(x, \varepsilon)$. По построению $\mathcal{L}(A_{N,x}U - u(x, \varepsilon)) = 0$. С другой стороны, при $r > \sqrt{\varepsilon}$ справедлива оценка $A_{N,\xi}V - A_{N,x}A_{N,\xi}V = O(\varepsilon^{(N+1)/2})$ (см. (1.18)). Производные первого и второго порядка от этой разности при $r > \sqrt{\varepsilon}$ равны $O(\varepsilon^{(N-1)/2})$. Следовательно, $\mathcal{L}T_N(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{(N-1)/2})$ при $r > \sqrt{\varepsilon}$.

При $r \leq \sqrt{\varepsilon}$ сначала оценим значение оператора $\mathcal{L}$ от $A_{N,\xi}V - u(x, \varepsilon)$. В силу (1.28) и системы (1.29)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A_{N,\xi}V - u(x, \varepsilon)) &= \\ &= \left\{ \varepsilon^{-2}\Delta_\xi - \varepsilon^{-2} \sum_{i=1}^N Q_{i,2}(\xi, D_\xi) \varepsilon^i - \varepsilon^{-1} \sum_{i=0}^{N-1} Q_{i,1}(\xi, D_\xi) \varepsilon^i - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^{N-2} \varepsilon^i Q_i(\xi) \right\} (A_{N,\xi}V) + O(r^{N-1} \|A_{N,\xi}V\|_{C^2}) - f(x) = \\ &= \varepsilon^{-2}\Delta_\xi v_0 + \varepsilon^{-1}(\Delta_\xi v_1 - Q_{1,2}(\xi, D_\xi) v_0 - Q_{0,1}(\xi, D_\xi) v_0) + \dots \\ &\quad \dots + \varepsilon^{N-2} \left(\Delta_\xi v_N - \sum_{j=1}^N [Q_{j,2}(\xi, D_\xi) + Q_{j-1,1}(\xi, D_\xi) + \right. \\ &\quad \left. + Q_{j-2,0}(\xi)] v_{N-j} \right) - \varepsilon^{N-1} \sum_{j=1}^N [Q_{j,2}(\xi, D_\xi) + Q_{j-1,1}(\xi, D_\xi) + \\ &\quad \left. + Q_{j-2,0}(\xi)] v_{N-j+1} - \dots - \varepsilon^{2N-2} [Q_{N,2}(\xi, D_\xi) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + Q_{N-1,1}(\xi, D_\xi) + Q_{N-2,0}(\xi)]v_N - \sum_{j=0}^{N-2} \varepsilon^j R_j(\xi) + O(r^{N-1}) + \\
& + O(r^{N-1} \|A_{N,\xi} V\|_{C^2}) = O(\varepsilon^{N-1} \rho^{N-1} + \varepsilon^N \rho^N + \dots \\
& \dots + \varepsilon^{2N-2} \rho^{N-2} + \varepsilon^{N-1} + r^{N-1}) + \\
& + O(r^{N-1} (1 + \varepsilon \rho + \dots + \varepsilon^N \rho^N)) = O(\varepsilon^{(N-1)/2}).
\end{aligned}$$

А разность $A_{N,x}U - A_{N,\xi}A_{N,x}U$ и ее производные первого и второго порядка также не превосходят $M\varepsilon^{(N-1)/2}$ при $r \leq \varepsilon^{1/2}$ (см. (1.17)). Итак, всюду в $\bar{\Omega}_\varepsilon$ справедлива оценка $\mathcal{L}T_N(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{(N-1)/2})$. Отсюда и из оценок (1.22), (1.48) вытекает (1.47). ■

Следствие. Ряд (1.23) является равномерным асимптотическим разложением решения $u(x, \varepsilon)$ задачи (1.19)–(1.21) при $x \in \bar{\Omega}$, $r \geq \sqrt{\varepsilon}$, а ряд (1.24) является равномерным асимптотическим разложением того же решения при $r \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Доказательство почти дословно повторяет доказательство следствия к теореме 1.1. ■

§ 2. Задача об обтекании тонкого тела

Здесь будет рассмотрена внешняя краевая задача для двумерного уравнения Лапласа вне малой окрестности отрезка. Точная постановка задачи следующая. Пусть σ — интервал $\{x_1, x_2: 0 \leq x_1 < 1, x_2 = 0\}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$,

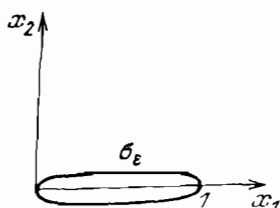


Рис. 10

σ — его замыкание, а σ_ε — окрестность интервала σ (рис. 10). Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, характеризующий ширину окрестности σ_ε , так что $\bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_\varepsilon = \sigma$. Точ-

ный вид σ_ε будет указан ниже. Всюду в этом параграфе будут употребляться обозначения $x = (x_1, x_2)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Посред-

ством $u(x, \varepsilon) = u(x_1, x_2, \varepsilon)$ будем обозначать функцию, которая удовлетворяет условиям $u(x, \varepsilon) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \sigma_\varepsilon)$,

$$\Delta u = 0 \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \sigma_\varepsilon, \quad (2.1)$$

$$u(x, \varepsilon) = 0 \quad \text{при } x \in \partial \sigma_\varepsilon, \quad (2.2)$$

$$u(x, \varepsilon) = x_2 + O(1) \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

Гидродинамическая интерпретация задачи (2.1) — (2.3) следующая. Рассматривается обтекание тела σ_ε плоским безвихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости. Пусть $u(x_1, x_2, \varepsilon)$ — это функция тока, так что компонентами скорости жидкости являются $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ и $-\frac{\partial u}{\partial x_1}$.

Тогда функция $u(x_1, x_2, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению (2.1) и постоянна на границе тела. Без ограничения общности можно считать выполненным условие (2.2). Для однозначного определения течения надо еще задать скорость набегающего потока на бесконечности. Течение с постоянной единичной скоростью, параллельной оси x_1 , соответствует решению $u(x) = x_2$, так что физически правильным условием на бесконечности является условие $u \sim x_2$ при $x_1 \rightarrow -\infty$. Однако мы заменяем его более сильным условием (2.3), которое дополнительно означает (ввиду отсутствия члена $\ln r$ в асимптотике), что тело не вызывает циркуляции.

Описанная здесь интерпретация полезна, но не является обязательной для понимания исследования. В дальнейшем будем всюду опираться на чисто математическую постановку задачи (2.1) — (2.3).

Будем искать асимптотику $u(x, \varepsilon)$ — решения задачи (2.1) — (2.3) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Предварительно уточним вид окрестности σ_ε . Пусть $\sigma_\varepsilon = \{x: 0 < x_1 < 1, \varepsilon g_-(x_1) < x_2 < \varepsilon g_+(x_1)\}$, где $g_\pm(x_1) \in C^\infty(0, 1)$. Иначе говоря, σ_ε получается из области σ_1 сжатием к оси x_1 с коэффициентом ε^{-1} . Вблизи концов отрезка $\bar{\sigma}$ также будем предполагать границу $\partial\sigma_\varepsilon$ гладкой. Это означает, что, например, около точки $(0, 0)$ уравнение границы $\partial\sigma_1$ имеет вид $x_1 = \psi(x_2)$, где $\psi(x_2) \in C^\infty$. Ясно, что

$$\psi(0) = \psi'(0) = 0, \quad \psi''(0) \geq 0,$$

и дополнительно предположим, что $\psi''(0) > 0$, т. е. что кривизна кривой $\partial\sigma_1$ в точке $(0, 0)$ отлична от нуля. Без ограничения общности будем считать, что $\psi''(0) = 2$. Нетрудно показать, что указанные предположения эквивалентны следующим условиям на $g_\pm(x_1)$:

$$g_\pm(x_1) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} g_j z^j \right)_{z=\pm\sqrt{x_1}}, \quad x_1 \rightarrow 0, \quad g_1 = 1. \quad (2.4)$$

Аналогичную асимптотику функций $g_\pm(x_1)$ будем предполагать около другого конца σ , т. е. при $x_1 \rightarrow 1 - 0$.

1. Внешнее разложение решения задачи (2.1) — (2.3) будем искать в виде

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x), \quad (2.5)$$

где

$$\Delta u_k = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\sigma}. \quad (2.6)$$

Условие (2.3) переходит в условие

$$u_0(x) = x_2 + O(1) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad (2.7)$$

$$u_k(x) = O(1) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad k > 0. \quad (2.8)$$

А граничные условия на σ для функций $u_k(x)$ получают-ся немного сложнее. Условие (2.2) можно переписать в следующем виде: $u(x_1, \varepsilon g_{\pm}(x_1), \varepsilon) = 0$. Подставляя сюда вместо u ряд (2.5) и разлагая функции по степеням ε , придем к соотношениям

$$u_0(x_1, \pm 0) = 0, \quad u_1(x_1, \pm 0) + g_{\pm}(x_1) \frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) = 0, \quad (2.9)$$

$$u_k(x_1, \pm 0) + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} [g_{\pm}(x_1)]^j \frac{\partial^j u_{k-j}}{\partial x_2^j}(x_1, \pm 0) = 0.$$

Из уравнения (2.6) и условий (2.7), (2.9) следует, что $u_0(x) = x_2$. Остальные $u_k(x)$ — это гармонические в $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\sigma}$ функции, удовлетворяющие условиям (2.9) на σ и, в силу (2.8), ограниченные на бесконечности. Решение таких задач не представляло бы серьезных трудностей, если бы граничные значения на $\bar{\sigma}$ для функций $u_k(x)$ были непрерывны. Но оказывается, что функции $u_k(x)$ имеют особенности на концах отрезка $\bar{\sigma}$. Порядок этих особенностей растет вместе с ростом k .

Начнем с изучения функции $u_1(x)$. Граничное условие (2.9) имеет для нее вид

$$u_1(x_1, \pm 0) = -g_{\pm}(x_1), \quad 0 < x_1 < 1. \quad (2.10)$$

Таким образом, $u_1(x)$ — это гармоническая в $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\sigma}$, ограниченная функция, которая удовлетворяет граничному условию (2.10). Решение такой задачи существует ([84], гл. III) и непрерывно всюду, если считать различными

разные берега разреза вдоль интервала σ . Плоскость $\mathbb{R}^2$ с разрезом вдоль σ будем обозначать $\bar{\Omega}$, один из концов интервала σ — точку $(0, 0)$ — будем обозначать O , а другой конец — точку $(1, 0)$ — обозначим O' (рис. 11).

Удобно также ввести естественные обозначения для классов функций. Классы $C(\bar{\Omega})$ ($C^N(\bar{\Omega})$) — это множества функций, определенных в $\bar{\Omega}$ и непрерывных (N раз непрерывно дифференцируемых) всюду, включая границу Ω . При этом точки на разных берегах разреза σ считаются различными граничными точками (т. е. $(x_1, +0) \neq (x_1, -0)$ при $0 < x_1 < 1$). Если при этом функции определены лишь при $r \leq \delta$, то такие множества будут обозначаться $C(\bar{\Omega}_\delta)$ ($C^N(\bar{\Omega}_\delta)$). Посредством $C^\infty(\bar{\Omega} \setminus S)$ обозначаются классы функций, бесконечно дифференцируемых всюду в $\bar{\Omega}$, кроме концов отрезка $\bar{\sigma}$, а посредством $C^\infty(\bar{\Omega}_\delta \setminus O)$ — такие же функции, определенные при $r \leq \delta$. При этом берега разреза по-прежнему считаются различными.

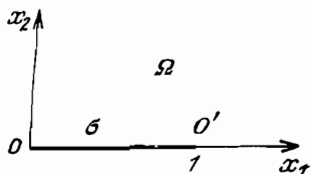


Рис. 11

Итак, $u_1(x) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\bar{\Omega} \setminus S)$, но вблизи концов $\bar{\sigma}$ функция $u_1(x)$ не является гладкой функцией. Из (2.4) и (2.10) следует, что

$$u_1(x_1, \pm 0) = - \left(\sum_{j=1}^{\infty} g_j z^j \right)_{z=\pm \sqrt{x_1}}, \quad x_1 \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

Исходя из этого граничного условия, можно определить асимптотическое разложение функции $u_1(x)$ при $r \rightarrow 0$. Однако, так как в дальнейшем появятся более общие граничные условия, найдем асимптотику при $r \rightarrow 0$ для гармонических функций, удовлетворяющих более широкому классу граничных условий.

Лемма 2.1. Пусть k — целое число, $h_+(x)$ и $h_-(x)$ — две функции, заданные при $0 < x_1 < \delta < 1$ и такие, что $h_{\pm}(x_1) \in C^\infty(0, \delta]$,

$$h_{\pm}(x_1) = \left(\sum_{j=-k}^{\infty} d_j z^j \right)_{z=\pm \sqrt{x_1}}, \quad x_1 \rightarrow 0. \quad (2.12)$$

Это равенство допускает многократное почленное диффе-

ренцирование. Тогда существует гармоническая в $\Omega_\delta \setminus O$ функция $u(x)$ такая, что $u(x_1, \pm 0) = h_\pm(x_1)$ при $x_1 \in (0, \delta]$, $u(x) \in C^\infty(\bar{\Omega}_\delta \setminus O)$,

$$u(x) = \sum_{j=-k}^{\infty} d_j r^{j/2} \cos \frac{j\theta}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j r^{j/2} \sin \frac{j\theta}{2}, \quad r \rightarrow 0, \quad (2.13)$$

где θ — полярный угол: $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Доказательство. Продолжим функции $h_\pm(x_1)$ гладко на отрезок $[\delta, \delta_1]$ так, чтобы они тождественно равнялись нулю в окрестности точки δ_1 , и обозначим $w_N(x) = \sum_{j=-k}^N d_j r^{j/2} \cos \frac{j\theta}{2}$, где N — достаточно большое число. Очевидно, что $w_N(x_1, \pm 0) = h_\pm(x_1) + O(x_1^{(N+1)/2})$, $x_1 \rightarrow 0$, и аналогичные оценки верны для производных этой разности. Далее построим функцию $v_N(x)$, которая гармонична в Ω_{δ_1} и удовлетворяет условиям

$$v_N(x_1, \pm 0) = h_\pm(x_1) - w_N(x_1, \pm 0), \quad 0 \leq x_1 < \delta_1, \\ v_N|_{r=\delta_1} = -w_N|_{r=\delta_1}. \quad (2.14)$$

Как известно ([51], гл. III), решение такой задачи в классе $C(\bar{\Omega}_{\delta_1}) \cap C^\infty(\Omega)$ существует. На краях разреза при $0 < x < \delta_1$ оно является гладким, и осталось только выяснить поведение функции $v_N(x_1, x_2)$ в точке O . Проще всего это сделать, отображая область Ω_δ на полукруг. Известно, что при отображении $\theta = 2\bar{\theta}$, $r = \bar{r}^2$ гармонические функции переходят в гармонические. Обозначим $\bar{v}_N(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \equiv v_N(x_1, x_2)$, где $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ — декартовы координаты после указанного отображения $\left(\bar{x}_1 = x_2 \frac{1}{\sqrt{2(r-x_1)}} \right)$, $\bar{x}_2 = \frac{\sqrt{r-x_1}}{\sqrt{2}} \right)$. Таким образом, $\bar{v}_N(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ — гармоническая

функция в верхнем полукруге $\bar{x}_2 \geq 0$, $\bar{r} \leq \sqrt{\delta}$, функция $\bar{v}_N(\bar{x}_1, 0) \in C^{N_1}(-\delta^{1/2}, \delta^{1/2})$, где $N_1 \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. Из явной формулы решения краевой задачи для уравнения Лапласа в полуплоскости ([50], гл. IV, § 2) вытекает, что $\bar{v}_N(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ — достаточно гладкая функция в окрестности начала координат, $\bar{v}_N(0, 0) = 0$. Следовательно, она представима в виде частичной суммы ряда Тейлора с остаточным членом. В силу гармоничности функции $\bar{v}_N(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ члены ее ряда Тейлора — это $\bar{r}^j \cos j\bar{\theta}$ и $\bar{r}^j \sin j\bar{\theta}$ при $j > 0$. После перехода к старым переменным получаем равенство

$$v_N(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{N_2} r^{j/2} \left(\tilde{d}_j \cos \frac{j\theta}{2} + \tilde{c}_j \sin \frac{j\theta}{2} \right) + O(r^{N_2/2}), \quad (2.15)$$

где N_2 достаточно велико и равенство допускает многократное дифференцирование.

Определим функцию $u_N(x) = v_N(x) + w_N(x)$. По построению и в силу (2.14) эта функция гармонична в Ω_{δ_1} , равна $h_{\pm}(x_1)$ при $0 < x \leq \delta_1$ и равна нулю при $r = \delta_1$. Так как при достаточно больших N разность $u_N(x) - u_{N+1}(x) \in C(\bar{\Omega}_{\delta_1})$, гармонична и равна нулю на границе $\bar{\Omega}_{\delta_1}$, то, следовательно, $u_N(x)$ не зависит от N . Из вида $w_N(x)$ и асимптотического разложения (2.15) вытекает (2.13). ■

Следствие. Пусть выполнены все условия леммы 2.1 и заданы постоянные $c_{-1}, c_{-2}, \dots, c_{-k}$, $k > 0$. Тогда существует функция $u(x)$, которая удовлетворяет тем же условиям, что и в лемме 2.1, только вместо асимптотического разложения (2.13) для нее справедливо асимптотическое разложение

$$u(x) = \sum_{j=-k}^{\infty} d_j r^{j/2} \cos \frac{j\theta}{2} + \sum_{j=-k}^{\infty} c_j r^{j/2} \sin \frac{j\theta}{2}, \quad r \rightarrow 0, \quad (2.16)$$

где $c_{-1}, \dots, c_{-k}$ — заданные постоянные.

Доказательство отличается от доказательства леммы только тем, что в качестве $w_N(x)$ надо взять функцию

$$\sum_{j=-k}^N d_j r^{j/2} \cos \frac{j\theta}{2} + \sum_{j=-k}^{-1} c_j r^{j/2} \sin \frac{j\theta}{2}. \quad \blacksquare$$

Теорема 2.1. Пусть k — целое число, функции $h_{\pm}(x_1) \in C^{\infty}(0, 1)$, для них справедливы асимптотические разложения (2.12) при $x_1 \rightarrow +0$ и аналогичные асимптотические разложения при $x_1 \rightarrow 1-0$. В случае $k > 0$ пусть заданы постоянные $c_{-1}, c_{-2}, \dots, c_{-k}, c'_{-1}, c'_{-2}, \dots, c'_{-k}$. Тогда существует функция $u(x) \in C^{\infty}(\bar{\Omega} \setminus S)$, гармоничная в Ω , ограниченная на бесконечности и удовлетворяющая граничным условиям

$$u(x_1, \pm 0) = h_{\pm}(x_1) \quad \text{при} \quad 0 < x_1 < 1. \quad (2.17)$$

При $r \rightarrow 0$ для функции $u(x)$ справедливо асимптотическое разложение (2.13) при $k \leq 0$ и асимптотическое разложение (2.16) при $k > 0$, а при $x \rightarrow O'$ — аналогичное асимптотическое разложение с заменой c_{-j} на c'_{-j} .

Доказательство. В соответствии с леммой 2.1 и ее следствием построим в $\Omega_{\delta} \setminus O$ функцию $\tilde{u}(x) \in C^{\infty}(\bar{\Omega}_{\delta} \setminus O)$, гармоническую в $\Omega_{\delta} \setminus O$, удовлетворяющую условию (2.17) и имеющую асимптотическое разложение (2.13) или (2.16) в зависимости от знака k . Аналогичную функцию $\tilde{u}(x)$ построим в окрестности точки

O' . Затем построим финитную функцию $\bar{u}(x) \in C^\infty(\bar{\Omega} \setminus S)$, которая в окрестности точки O совпадает с $\tilde{u}(x)$, а в окрестности точки O' — с $\tilde{u}(x)$.

Для окончания доказательства осталось построить функцию $v(x)$ такую, что

$$\Delta v(x) = -\Delta \bar{u}(x) \text{ в } \Omega, \\ v(x_1, \pm 0) = h_\pm(x_1) - \bar{u}(x_1, \pm 0) \quad \text{при} \quad 0 < x_1 < 1, \quad (2.18)$$

$v(x) \in C(\bar{\Omega})$, $v(x)$ ограничена на бесконечности. Как известно, такая задача разрешима, так как граничная функция в правой части равенства (2.18) непрерывна на отрезке σ и, более того, тождественно равна нулю в окрестности его концов. Один из способов доказательства — например, конформное отображение внешности отрезка σ на внешность круга и затем стандартное решение внешней краевой задачи ([84], § 32). Очевидно, что сумма $v(x) + \bar{u}(x)$ является искомой функцией $u(x)$. В окрестности концов отрезка σ функция $v(x)$ разлагается в ряд (2.13), где все $d_j = 0$, так что в асимптотическом разложении (2.16) суммы $v(x) + \bar{u}(x)$ по сравнению с тем же асимптотическим разложением функции $\bar{u}(x)$ (или, что то же самое, функции $\tilde{u}(x)$) изменятся лишь коэффициенты c_j при $j > 0$. ■

Итак, согласно теореме 2.1 и условию (2.11)

$$u_1(x_1, x_2) = - \sum_{j=1}^{\infty} g_j r^{j/2} \cos \frac{j\theta}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} c_{j,1} r^{j/2} \sin \frac{j\theta}{2}, \quad r \rightarrow 0. \quad (2.19)$$

Аналогичное асимптотическое разложение справедливо и около точки O' .

Граничное условие для функции $u_2(x)$ имеет следующий вид:

$$u_2(x_1, \pm 0) = -g_\pm(x_1) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{[g_\pm(x_1)]^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}(x_1, \pm 0). \quad (2.20)$$

Если учесть асимптотическое разложение (2.19) и то, что $u_0(x) = x_2$, то

$$u_2(x_1, \pm 0) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} g_j z^j \right)_{z=\pm\sqrt{x_1}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} c_{j,1} \frac{j}{2} z^{j-2} \right)_{z=\pm\sqrt{x_1}} = \\ = \left(\sum_{j=0}^{\infty} d_{j,2} z^j \right)_{z=\pm\sqrt{x_1}}, \quad x_1 \rightarrow 0.$$

В соответствии с теоремой 2.1 построим гармоническую и ограниченную в Ω функцию $u_2(x)$, которая удов-

летворяет условию (2.20). Функция $u_2(x) \in C^\infty(\bar{\Omega} \setminus S)$ и

$$u_2(x) = \sum_{j=0}^{\infty} d_{j,2} r^{j/2} \cos \frac{j\theta}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} c_{j,2} r^{j/2} \sin \frac{j\theta}{2}, \quad r \rightarrow 0.$$

Аналогичное асимптотическое разложение справедливо и в окрестности точки O' .

Граничная функция для решения $u_3(x)$ уже имеет особенности на концах отрезка σ . Действительно, согласно условию (2.9)

$$u_3(x_1, \pm 0) = -g_{\pm}(x_1) \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) - \frac{g_{\pm}^2(x_1)}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}(x_1, \pm 0) - \\ - \frac{g_{\pm}^3(x_1)}{3!} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x_2^3}(x_1, \pm 0) = \left(\sum_{j=-1}^{\infty} d_{j,3} z^j \right)_{z=\pm \sqrt{x_1}}, \quad x_1 \rightarrow 0.$$

Следовательно, функция $u_3(x)$ неограничена около точек O и O' ; при приближении к точке O она растет по крайней мере как $r^{-1/2}$. В классе таких функций, в соответствии с теоремой 2.1, существует решение $u_3(x)$, определенное с точностью до двух произвольных постоянных c_{-1} и c_{-1}' .

Теорема 2.2. *Существуют функции $u_k(x)$, которые удовлетворяют соотношениям (2.6), (2.8), (2.9) и при $k \geq 1$ имеют асимптотические разложения*

$$u_k(x) = \sum_{j=-k+2}^{\infty} d_{j,k} r^{j/2} \cos \frac{j\theta}{2} + \sum_{j=-k+2}^{\infty} c_{j,k} r^{j/2} \sin \frac{j\theta}{2}, \quad r \rightarrow 0, \quad (2.24)$$

и аналогичное асимптотическое разложение около точки O' . При определении каждой функции $u_k(x)$ для $k \geq 3$ имеются произвольные постоянные $c_{-1,k}$, $c_{-2,k}$, ..., $c_{-k+2,k}$, $c'_{-1,k}$, $c'_{-2,k}$, ..., $c'_{-k+2,k}$.

Доказательство легко провести по индукции, опираясь на теорему 2.1. При $k=3$ это утверждение уже проверено. Если утверждение верно для всех $p < k$, то при построении функции $u_k(x)$ остается лишь убедиться в том, что асимптотическое разложение граничной функции (2.9) начинается с члена $x_1^{(-k+2)/2}$. Действительно, главный член асимптотики в сомножителе $[g_{\pm}(x_1)]^j$ равен

$x_1^{j/2}$, а в сомножителе $\frac{\partial^j u_{k-j}}{\partial x_2^j}(x_1, \pm 0)$ главный член по

предположению индукции и в силу асимптотического разложения (2.21) равен $cx_1^{-k/2+1-j/2}$. Отсюда и из теоремы 2.1 следует существование искомой функции $u_k(x)$. ■

2. Итак, задача (2.1) — (2.3), как и предыдущие задачи, бисингулярна: коэффициенты $u_k(x)$ внешнего разложения (2.5) имеют нарастающие особенности около концов отрезка $\bar{\sigma}$. Ясно, что вблизи этих концов требуется использовать другое асимптотическое разложение. Будем рассматривать подробно только окрестность точки O . Вблизи этой точки уравнение границы $\partial\sigma_\varepsilon$ имеет вид $x_2 = \varepsilon g_\pm(x_1) = \varepsilon(\pm\sqrt{x_1} + O(x_1))$. Внутренние, растянутые переменные надо выбрать так, чтобы сохранилось уравнение Лапласа и уравнение границы в главном члене не зависело от параметра ε . Ясно, что внутренние переменные — это $\xi = \varepsilon^{-2}x_1$, $\eta = \varepsilon^{-2}x_2$. В переменных ξ, η уравнение Лапласа сохраняет свой вид, а уравнение границы $\partial\sigma_\varepsilon$ выглядит следующим образом:

$$\eta = \pm\sqrt{\xi} + \varepsilon\Phi_\pm(\xi, \varepsilon), \quad (2.22)$$

где

$$\Phi_\pm(\xi, \varepsilon) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} g_{j+2} \varepsilon^j z^{j+2} \right)_{z=\pm\sqrt{\xi}}, \quad \varepsilon \sqrt{\xi} \rightarrow 0. \quad (2.23)$$

Граничное условие (2.2) для функции $v(\xi, \eta, \varepsilon) \equiv u(x_1, x_2, \varepsilon)$ переходит в равенство

$$v(\xi, \pm\sqrt{\xi} + \varepsilon\Phi_\pm(\xi, \varepsilon), \varepsilon) = 0. \quad (2.24)$$

Внутреннее разложение будем искать в виде

$$V = \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i v_i(\xi, \eta). \quad (2.25)$$

(Ряд начинается с члена $i=2$, так как $u_0(0, 0) = 0$, $u_0(x) \in C^\infty$.) Из уравнения (2.1) следует, что

$$\Delta_{\xi, \eta} v_i = 0. \quad (2.26)$$

Подставляя ряд (2.25) в граничное условие (2.24), формально приходим к граничным условиям для $v_i(\xi, \eta)$:

$$v_i(\xi, \pm\sqrt{\xi}) = 0, \quad (2.27)$$

$$v_i(\xi, \pm\sqrt{\xi}) - \left(\sum_{l=2}^{i-1} \sum_{q=1}^{i-l} c_{q,l,i} \frac{\partial^q v_l(\xi, z)}{\partial \eta^q} z^{i-l+q} \right)_{z=\pm\sqrt{\xi}} = 0, \quad i \geq 3. \quad (2.28)$$

Здесь $c_{q,i,i}$ — некоторые постоянные, которые выражаются через g_j ; явный вид этих постоянных не играет никакой роли.

Приближенно заменяя границу (2.22) на параболу $\eta = \pm\sqrt{\xi}$, будем искать функции $v_i(\xi, \eta)$ при $\xi < \eta^2$. Так же, как и в других бисингулярных задачах, функции $v_i(\xi, \eta)$ растут на бесконечности. К тому же в данном случае решения задач (2.26) — (2.28) не единственны. Можно было бы найти общий вид решений этих задач в классе медленно растущих функций и установить степень неопределенности решений. Но удобнее при нахождении $v_i(\xi, \eta)$ опираться на уже построенные функции $u_k(x)$ и на условие согласования рядов U и V . Поэтому для дальнейшего достаточно установить асимптотику на бесконечности решения уравнения Пуассона с правой частью, быстро стремящейся к нулю. Посредством D будем обозначать область $\{\xi, \eta: \xi < \eta^2, \eta \in \mathbb{R}^1\}$.

Лемма 2.2. Пусть функция $F(\xi, \eta) \in C^\infty(\bar{D})$ и

$$F(\xi, \eta) = O((\xi^2 + \eta^2)^{-N}) \text{ при } \xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty, \quad N > 0, \quad (2.29)$$

а $v(\xi, \eta)$ — ограниченное решение следующей краевой задачи:

$$v(\xi, \eta) \in C^\infty(\bar{D}), \quad v(\eta^2, \eta) = 0, \quad (2.30)$$

$$\Delta_{\xi, \eta} v = F(\xi, \eta) \text{ при } (\xi, \eta) \in D. \quad (2.31)$$

Тогда равномерно в области $\bar{D}$

$$v(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{2N_1} \rho^{-j/2} \left(c_j \sin \frac{j\theta}{2} + d_j \cos \frac{j\theta}{2} \right) + O(\rho^{-N_1}),$$

$$\rho \rightarrow \infty, \quad (2.32)$$

где ρ, θ — полярные координаты: $\xi = \rho \cos \theta, \eta = \rho \sin \theta$, $N_1 \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, и равенство (2.32) можно почленно дифференцировать достаточно большое число раз.

Доказательство. Отобразим область D на полуплоскость $t > 0$ с помощью замены независимых переменных

$$\xi = s^2 - t^2 - t, \quad \eta = s + 2ts. \quad (2.33)$$

Уравнение (2.31) переходит при такой замене в уравнение

$$\Delta_{s,t} v = [4s^2 + (2t+1)^2] F(s^2 - t^2 - t, s + 2ts).$$

Обозначая правую часть этого уравнения через $f(s, t)$, а $v(s^2 - t^2 - t, s + 2ts)$ — через $w(s, t)$, заключаем, что задача (2.30),

(2.31) эквивалентна задаче

$$\Delta_s, t w = f(s, t) \quad \text{при} \quad t \geq 0, \quad w(s, 0) = 0. \quad (2.34)$$

При этом, в силу (2.29), $f(s, t) = O((s^2 + t^2)^{-N_2})$. Решение задачи (2.34) выписывается в явном виде

$$w(s, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\sigma, \tau) \ln \frac{(s-\sigma)^2 + (t-\tau)^2}{(s-\sigma)^2 + (t+\tau)^2} d\sigma d\tau. \quad (2.35)$$

Введем полярные координаты на плоскости s, t : $s = \lambda \cos \omega$, $t = \lambda \sin \omega$ и представим ядро в интеграле (2.35) в виде частичной суммы ряда Тейлора при $\lambda^{-1} \rightarrow 0$ плюс остаточный член:

$$\begin{aligned} \ln \frac{(s-\sigma)^2 + (t-\tau)^2}{(s-\sigma)^2 + (t+\tau)^2} &= \ln \left(1 - 2 \frac{\sigma \cos \omega}{\lambda} - 2 \frac{\tau \sin \omega}{\lambda} + \frac{\tau^2 + \sigma^2}{\lambda^2} \right) - \\ &- \ln \left(1 - 2 \frac{\sigma \cos \omega}{\lambda} + 2 \frac{\tau \sin \omega}{\lambda} + \frac{\tau^2 + \sigma^2}{\lambda^2} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{2N_3} \lambda^{-k} P_k(\sigma, \tau, \sin \omega, \cos \omega) + O \left(\left(\frac{\sigma^2 + \tau^2}{\lambda^2} \right)^{N_3} \right). \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (2.35), получим равенство

$$w(s, t) = v(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{N_4} \lambda^{-j} \Phi_j(\omega) + O(\lambda^{-N_4}). \quad (2.36)$$

Из соотношений (2.33), которые в полярных координатах имеют вид

$$\rho \cos \theta = \lambda^2 \cos 2\omega - \lambda \sin \omega, \quad \rho \sin \theta = \lambda \cos \omega + \lambda^2 \sin 2\omega,$$

вытекает, что $\rho^2 - \frac{1}{2} \rho \cos \theta + \frac{1}{16} = \left(\lambda^2 + \lambda \sin \omega + \frac{1}{4} \right)^2$. Отсюда

нетрудно заключить, что $\lambda = \rho^{1/2} + \sum_{j=0}^{\infty} A_j(\theta) \rho^{-j/2}$, $\omega = \frac{\theta}{2} +$

$+\sum_{j=1}^{\infty} B_j(\theta) \rho^{-j/2}$. Подставляя эти асимптотики в (2.36), приходим к равенству

$$v(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{2N_1} \rho^{-j/2} \Phi_j(\theta).$$

Это равенство, как и все, получавшиеся выше, можно многократно почленно дифференцировать. Из того обстоятельства, что $v(\xi, \eta)$ — «почти» гармоническая функция, вытекает тот вид $\Phi_j(\theta)$, который фигурирует в равенстве (2.32). ■

Лемма 2.3. Пусть ряд $\tilde{v} = \sum_{j=-k}^{\infty} \rho^{-j/2} \psi_j(\theta)$ является ф. а. р. краевой задачи

$$\Delta \tilde{v} = F(\xi, \eta) \text{ в области } D, \quad (2.36)$$

$$\tilde{v}(\eta^2, \eta) = \varphi(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}^1, \quad (2.37)$$

при $\rho \rightarrow \infty$, где $F(\xi, \eta) \in C^\infty(\bar{D})$, $\varphi(\eta) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\psi_j(\theta) \in C^\infty[0, 2\pi]$. Предположим также, что равенства (2.36), (2.37) допускают дифференцирование любого порядка в том смысле, что правые части этих равенств разлагаются в асимптотические ряды, полученные соответствующим почленным дифференцированием ряда $\tilde{v}$. Тогда существует функция $v(\xi, \eta) \in C^\infty(\bar{D})$, которая удовлетворяет соотношениям (2.36), (2.37) и такая, что

$$v(\xi, \eta) = \tilde{v} + \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{-j/2} \left(C_j \sin \frac{j\theta}{2} + D_j \cos \frac{j\theta}{2} \right), \quad \rho \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Пусть $\chi(\rho) \in C^\infty[0, \infty)$ — срезающая функция, равная нулю в окрестности нуля и единице при $\rho > 1$. Обозначим посредством $v_N(\xi, \eta)$ произведение $\chi(\rho) B_N \tilde{v}$, где $B_N \tilde{v}$, как всегда, означает частичную сумму ряда $\tilde{v}$. По условию теоремы $\Delta v_N = F(\xi, \eta) + f_N(\xi, \eta)$, $v_N(\eta^2, \eta) = \varphi(\eta) + h_N(\eta)$, где $f_N(\xi, \eta) = O(\rho^{-N_1})$, $h_N(\eta) = O(|\eta|^{-N_1})$, $N_1 \rightarrow \infty$, при $N \rightarrow \infty$. Соответствующие оценки справедливы и для производных функций f_N и h_N .

Пусть $w_N(\xi, \eta)$ — ограниченное решение краевой задачи $\Delta w_N = f_N$ при $(\xi, \eta) \in D$, $w_N(\eta^2, \eta) = h_N(\eta)$ при $\eta \in \mathbb{R}^1$. Такое решение $w_N(\xi, \eta) \in C^\infty(\bar{D})$ существует и, в силу леммы 2.2, имеет асимптотическое представление (2.32). Разность $v_N(\xi, \eta) - w_N(\xi, \eta)$ удовлетворяет уравнению (2.36) и граничному условию (2.37). В силу единственности ограниченного решения краевой задачи (2.36), (2.37) функция $v(\xi, \eta) = v_N(\xi, \eta) - w_N(\xi, \eta)$ не зависит от N при достаточно больших N и является искомой функцией. ■

3. При построении коэффициентов рядов (2.5) и (2.25) — функций $u_k(x)$ и $v_i(\xi, \eta)$ — воспользуемся таблицей 5 согласования этих рядов. Надо отметить, что кроме ряда (2.25) необходимо еще построить точно такой же ряд V' с коэффициентами $v'_i(\xi', \eta')$ у конца O' . И одновременно надо следить за выполнением согласования рядов U и V' .

Структура таблицы 5 такая же, как и структура предыдущих таблиц, и в пояснениях не нуждается. Построим, в соответствии с теоремой 2.2, функции $u_k(x)$ при $k \geq 1$. При этом функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ определены однозначно, а для $k \geq 3$ при определении каждой функции

Т а б л и ц а 5

$\begin{array}{c} V \\ U \end{array}$	$\varepsilon^2 v_2(\xi, \eta)$	$\varepsilon^3 v_3(\xi, \eta)$	$\varepsilon^4 v_4(\xi, \eta)$	...
$u_0(x)$	$\begin{array}{c} \varepsilon^2 \eta \\ \hline x_2 \end{array}$	0	0	...
$\varepsilon u_1(x)$	$\begin{array}{c} \varepsilon^2 \rho^{1/2} \Phi_{-1,2}(\theta) \\ \hline \varepsilon r^{1/2} \Phi_{-1,2}(\theta) \end{array}$	$\begin{array}{c} \varepsilon^3 \rho \Phi_{-2,3}(\theta) \\ \hline \varepsilon r \Phi_{-2,3}(\theta) \end{array}$	$\begin{array}{c} \varepsilon^4 \rho^{3/2} \Phi_{-3,4}(\theta) \\ \hline \varepsilon r^{3/2} \Phi_{-3,4}(\theta) \end{array}$	...
$\varepsilon^2 u_2(x)$	$\begin{array}{c} \varepsilon^2 \Phi_{0,2}(\theta) \\ \hline \varepsilon^2 \Phi_{0,2}(\theta) \end{array}$	$\begin{array}{c} \varepsilon^3 \rho^{1/2} \Phi_{-1,3}(\theta) \\ \hline \varepsilon^2 r^{1/2} \Phi_{-1,3}(\theta) \end{array}$	$\begin{array}{c} \varepsilon^4 \rho \Phi_{-2,4}(\theta) \\ \hline \varepsilon^2 r \Phi_{-2,4}(\theta) \end{array}$	...
$\varepsilon^3 u_3(x)$	$\begin{array}{c} \varepsilon^2 \rho^{-1/2} \Phi_{1,2}(\theta) \\ \hline \varepsilon^3 r^{-1/2} \Phi_{1,2}(\theta) \end{array}$	$\begin{array}{c} \varepsilon^3 \Phi_{0,3}(\theta) \\ \hline \varepsilon^3 \Phi_{0,3}(\theta) \end{array}$	$\begin{array}{c} \varepsilon^4 \rho^{1/2} \Phi_{-1,4}(\theta) \\ \hline \varepsilon^3 r^{1/2} \Phi_{-1,4}(\theta) \end{array}$	...
$\varepsilon^4 u_4(x)$	$\begin{array}{c} \varepsilon^2 \rho^{-1} \Phi_{2,2}(\theta) \\ \hline \varepsilon^4 r^{-1} \Phi_{2,2}(\theta) \end{array}$	$\begin{array}{c} \varepsilon^3 \rho^{-1/2} \Phi_{1,3}(\theta) \\ \hline \varepsilon^4 r^{-1/2} \Phi_{1,3}(\theta) \end{array}$	$\begin{array}{c} \varepsilon^4 \Phi_{0,4}(\theta) \\ \hline \varepsilon^4 \Phi_{0,4}(\theta) \end{array}$	...
...	...	...	...	...

имеется $2(k-2)$ произвольных постоянных $c_{-1,k}, c_{-2,k}, \dots, c_{-k+2,k}, c_{-1,k}, \dots, c_{-k+2,k}$. Фиксируем пока эти постоянные каким-нибудь образом и выпишем в нижних частях клеток каждой строки в таблице 5 асимптотическое разложение функции $\varepsilon^k u_k(x)$ при $r \rightarrow 0$. После перехода к внутренним переменным ξ, η (так что $r = \varepsilon^2 \rho$,

а полярный угол θ сохраняет свое значение) в столбцах таблицы 5 появятся ряды $\varepsilon^i V_i$.

Лемма 2.4. *Ряды V_i являются ф. а. р. краевой задачи (2.26) — (2.28).*

Доказательство. Проверка дифференциального уравнения в данном случае проводится совсем легко, так как само уравнение имеет очень простой вид. В каждой клетке по построению расположена гармоническая функция, так что любая частичная сумма ряда V_i точно удовлетворяет уравнению Лапласа. А для проверки граничных условий (2.27), (2.28) прежде всего заметим, что по построению

$$A_{N,\xi,\eta} A_{N,x} U = \sum_{j=2}^N \varepsilon^j (B_{(N-j)/2} V_j), \quad (2.38)$$

а

$$\begin{aligned} A_{N,x} U(x_1, \varepsilon g_{\pm}(x_1), \varepsilon) &= \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \sum_{j=0}^{N-k} \frac{\varepsilon^j [g_{\pm}(x_1)]^j}{j!} \frac{\partial^j u_k}{\partial x_2^j}(x_1, \pm 0) + \\ &+ \sum_{k=0}^N \varepsilon^{N+1} \frac{[g_{\pm}(x_1)]^{N+1-k}}{(N-k)!} \int_0^1 (1-\mu)^{N-k} \frac{\partial^{N+1-k} u_k}{\partial x_2^{N+1-k}}(x_1, \mu \varepsilon g_{\pm}(x_1)) d\mu. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Двойная сумма в правой части равна нулю вследствие условий (2.9). Учитывая это обстоятельство, а также (2.38) и (2.22), применим к обеим частям равенства (2.39) оператор $A_{N,\xi}$:

$$A_{N,\xi} \left(\sum_{j=2}^N \varepsilon^j \sum_{q=0}^{N-j} \frac{1}{q!} [\varepsilon \Phi_{\pm}(\xi, \varepsilon)]^q \frac{\partial^q}{\partial \eta^q} (B_{(N-j)/2} V_j)(\xi, \pm \sqrt{\xi}) \right) = A_{N,\xi} \Lambda, \quad (2.40)$$

где Λ равно последней сумме в соотношении (2.39). Согласно определению оператора $A_{N,\xi}$ в выражении для Λ следует заменить x_1 на $\varepsilon^2 \xi$ и после этого разложить Λ в асимптотический ряд при $\varepsilon \rightarrow 0$. Если учесть асимптотики (2.4) и (2.21), то получим, что

$$\Lambda = \sum_{j=2}^{\infty} \varepsilon^j \Lambda_j(\xi), \quad \text{где } \Lambda_j(\xi) = O(\xi^{-(N+1-j)/2}), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad \text{В левой}$$

части равенства (2.40) стоит многочлен по ε , причем коэффициенты при ε^j равны левым частям равенств (2.27), (2.28). Отсюда вытекает утверждение леммы. ■

Далее, опираясь на лемму 2.3, можно по асимптотическим рядам V_i построить функции $v_i(\xi, \eta)$ — решения задач (2.26) — (2.28). Если бы ряды V_i являлись асимптотическими рядами для функций $v_i(\xi, \eta)$ при $\rho \rightarrow \infty$, то по построению рядов V_i было бы выполнено условие согласования рядов (2.5) и (2.25). Но, как указано в лемме 2.3, асимптотический ряд для $v_i(\xi, \eta)$, вообще говоря,

отличается от ряда V_i на ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \rho^{-j/2} \left(c_{j,i} \sin \frac{j\theta}{2} + d_{j,i} \cos \frac{j\theta}{2} \right)$.

(Так как этот ряд удовлетворяет однородному граничному условию $V_i(\xi, \pm \sqrt{\xi}) = 0$, то $d_{1,i} = 0$.) Поэтому построение функций $v_i(\xi, \eta)$ надо проводить последовательно.

Сначала построим функцию $v_2(\xi, \eta)$ по ряду V_2 . В результате первый столбец в таблице 5 изменится, начиная с члена $\varepsilon^2 \rho^{-1/2} \Phi_{1,2}(\theta)$: функция $\Phi_{1,2}(\theta)$ изменится на $c_{1,2} \sin \frac{\theta}{2}$. Такое же изменение в асимптотике функции $u_3(x)$ произойдет и около точки O' . В результате, опираясь на теорему 2.2, окончательно построим функцию $u_3(x)$.

Так как изменение функции $u_3(x)$ влечет за собой изменения в граничных условиях для следующих функций, то все они, вообще говоря, изменятся. Но их главные члены асимптотики, стоящие в первом столбце таблицы, уже окончательно определены. Ряды V_i при $i \geq 3$ также изменятся, но, в силу леммы 2.4, они по-прежнему останутся ф.а.р. задачи (2.26) — (2.28). Далее, в соответствии с леммой 2.3 построим функцию $v_3(\xi, \eta)$ по ряду V_3 , стоящему во втором столбце. Теперь этот столбец изменится, начиная с члена $\varepsilon^3 \rho^{-1/2} \Phi_{1,3}(\theta)$. Это дает возможность окончательно определить $u_4(x)$ и т. д.

Таким образом, построены функции $u_k(x)$ — решения задач (2.6) — (2.9) и функции $v_i(\xi, \eta)$ — решения задач (2.26) — (2.28), так что для рядов (2.5) и (2.25) выполнено условие согласования

$$A_{N_1, \xi, \eta} A_{N_2, x} U = A_{N_2, x} A_{N_1, \xi, \eta} V \quad \forall N_1, N_2. \quad (2.41)$$

Аналогичный ряд V' построен около точки O' .

По существу построение асимптотических разложений решения задачи (2.1) — (2.3) закончено. Надо только отметить, что функции $u_k(x)$ определены в $\bar{\Omega} \setminus S$, т. е. в более широкой области, чем $\Omega \setminus \sigma_\varepsilon$, а функции $v_i(\xi, \eta)$ определены только в области D , т. е. при $\xi < \eta^2$. Однако даже в окрестности точки O требуется приблизить решение $u(x, \varepsilon)$ при $-\sqrt{\xi} + \varepsilon \Phi_-(\xi, \varepsilon) \leq \eta \leq \sqrt{\xi} + \varepsilon \Phi_+(\xi, \varepsilon)$, т. е., может быть, в более широкой области, чем D . Для простоты будем считать, что в некоторой фиксированной окрестности нуля $g_+(x_1) \leq \sqrt{x_1}$ и $g_-(x_1) \geq -\sqrt{x_1}$, так что функции $v_i(\xi, \eta)$ определены всюду в пересечении этой

окрестности с Ω_ε . Аналогичные условия будем предполагать выполненными у точки O' . (Если указанные условия не выполнены, то для построения асимптотики надо продолжить функции $v_i(\xi, \eta)$ вне области D . Существенных трудностей это не вносит, но влечет за собой появление технических деталей, на которых мы не будем останавливаться.)

Обозначим через $S(\delta)$ пересечение области Ω_ε с кругом радиуса δ и с центром в точке O , а через $S'(\delta)$ — пересечение области Ω с кругом того же радиуса и с центром в точке O' . (Множества $S(\delta)$, $S'(\delta)$ зависят, конечно, и от ε , но эту зависимость не будем включать в их обозначения.)

Пусть $\chi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\chi(x) \equiv 0$, вне $S(2\delta)$ и $\chi(x) \equiv 1$ внутри $S(\delta)$, где δ — фиксированное малое положительное число, а $\tilde{\chi}(x)$ — аналогичная срезающая функция в окрестности точки O' . Введем обозначение

$$T_N(x, \varepsilon) = A_{N,x}U + (A_{N,\xi,\eta}V - A_{N,\xi,\eta}A_{N,x}U)\chi(x) + \\ + (A_{N,\xi',\eta'}V' - A_{N,\xi',\eta'}A_{N,x}U)\tilde{\chi}(x) - u(x, \varepsilon),$$

где U — ряд (2.5), V — ряд (2.25), V' — аналогичный ряд, построенный около точки O' , а ξ' , η' — внутренние координаты около этой точки.

Теорема 2.3. *Для всех достаточно больших N всюду в $\bar{\Omega}_\varepsilon$ справедлива оценка $|T_N(x, \varepsilon)| \leq M\varepsilon^{N/4}$, где постоянная M не зависит от x и ε .*

Доказательство. Из соотношений (2.3), (2.7) и (2.8) следует, что

$$T_N(x, \varepsilon) = O(1) \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (2.42)$$

Далее докажем, что граничные значения $T_N(x, \varepsilon)$ на $\partial\sigma_\varepsilon$ малы. При $x \in \partial\sigma_\varepsilon \setminus \{S(\delta) \cup S'(\delta)\}$ функция $A_{N,x}U = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k u_k(x_1, \varepsilon g_\pm(x_1)) = O(\varepsilon^{N+1})$ в силу условий (2.9) и равномерной гладкости функций $g_\pm(x_1)$ на этом участке границы. Следовательно, при $x \in \partial\sigma_\varepsilon \setminus \{S(2\delta) \cup S'(2\delta)\}$

$$T_N(x, \varepsilon) = A_{N,x}U = O(\varepsilon^{N+1}). \quad (2.43)$$

При $x \in \partial\sigma_\varepsilon \cap S(\varepsilon^{3/2})$ в силу (2.24), (2.23), (2.27) и (2.28)

$$T_N(x, \varepsilon) = A_{N,x}U - A_{N,\xi,\eta}A_{N,x}U + A_{N,\xi,\eta}V = \\ = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \left[\sum_{j=0}^{N-i} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j v_i}{\partial \eta^j}(\xi, \pm \sqrt{\varepsilon}) [\varepsilon \Phi_\pm(\xi, \varepsilon)]^j + O([\varepsilon(1+\xi)]^{N-i+1}) \right] + \\ + O(\varepsilon^{3N/4}) = O(\varepsilon^{N/2}). \quad (2.44)$$

При $x \in \partial\sigma_\varepsilon \cap \{S(2\delta) \setminus S(\varepsilon^{3/2})\}$ в силу (2.4), (2.9), (2.24) и (2.44)

$$\begin{aligned} T_N(x, \varepsilon) &= A_{N,x}U + (A_{N,\xi,\eta}V - A_{N,x}A_{N,\xi,\eta}V)\chi(x) = \\ &= \sum_{k=0}^N \varepsilon^k u_k(x_1, \varepsilon g_\pm(x_1)) + \chi(x) \sum_{i=0}^N \varepsilon^i (v_i(\xi, \eta) - B_{(N-i)/2} v_i(\xi, \eta)) = \\ &= \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \left\{ \sum_{j=0}^{N-k} \frac{1}{j!} [\varepsilon g_\pm(x_1)]^j \frac{\partial^j u_k}{\partial x_2^j}(x_1, \pm 0) + \right. \\ &\quad \left. + O\left(x_1^{\frac{k-2}{2}-N+k-1}\right) (\varepsilon x_1^{1/2})^{N-k+1} \right\} + O\left(\sum_{i=0}^N \varepsilon^i \rho^{-\frac{N-1-i}{2}}\right) = \\ &= O\left(\sum_{k=0}^N \varepsilon^{N+1} x_1^{-\frac{N}{2}+k-\frac{3}{2}}\right) + O\left(\rho^{-\frac{N-1}{2}}\right) = \\ &= O\left(\sum_{k=0}^N \varepsilon^{N+1+\frac{3}{2}\left(-\frac{N}{2}+k-\frac{3}{2}\right)} + \varepsilon^{\frac{N-1}{4}}\right) = O\left(\varepsilon^{\frac{N}{4}-2}\right). \quad (2.45) \end{aligned}$$

Итак, из (2.43)–(2.45) и из априорных оценок около точки O' следует, что

$$T_N(x, \varepsilon)|_{\partial\sigma_\varepsilon} = O\left(\varepsilon^{\frac{N}{4}-2}\right). \quad (2.46)$$

Всюду, кроме множества $\Omega_\varepsilon \cap \{[S(2\delta) \setminus S(\delta)] \cup [S'(2\delta) \setminus S'(\delta)]\}$, функция $T_N(x, \varepsilon)$ является по построению гармонической функцией. Так что осталось лишь оценить оператор Лапласа на этом множестве. Пусть $x \in \Omega_\varepsilon \cap \{S(2\delta) \setminus S(\delta)\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta T_N(x, \varepsilon) &= (A_{N,\xi,\eta}V - A_{N,x}A_{N,\xi,\eta}V)\Delta\chi + \\ &\quad + 2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial\chi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{N,\xi,\eta}V - A_{N,x}A_{N,\xi,\eta}V). \end{aligned}$$

Так как производные от функции χ равны нулю вне кольца $\delta < r < 2\delta$, то

$$\Delta T_N(x, \varepsilon) = O\left(\sum_{i=0}^N \varepsilon^i \|v_i(\xi, \eta) - B_{(N-i)/2} v_i(\xi, \eta)\|_{C^1}\right) = O(\varepsilon^{N-1}).$$

Такая же оценка справедлива и в кольце $S'(2\delta) \setminus S(\delta)$. Из этой оценки, оценки (2.46) и из условия (2.42) вытекает утверждение теоремы. ■

Следствие. В области $\Omega_\varepsilon \setminus \{S(\varepsilon^\gamma) \cup S'(\varepsilon^\gamma)\}$ ряд (2.5) является равномерным асимптотическим разложением решения задачи (2.1)–(2.3). В области $\Omega_\varepsilon \cap S(\varepsilon^\gamma)$ ряд (2.25), а в области $\Omega_\varepsilon \cap S'(\varepsilon^\gamma)$ ряд V' являются равномерными асимптотическими разложениями той же задачи, где γ — любое число такое, что $0 < \gamma < 2$.

Доказательство. Достаточно проверить, что в области $\Omega_\varepsilon \cap \{S(2\delta) \setminus S(\varepsilon^r)\}$ равномерно мала разность $A_{N,\xi,\eta}V - A_{N,\xi,\eta}A_{N,x}U$, а в области $\Omega_\varepsilon \cap S(\varepsilon^r)$ равномерно мала разность $A_{N,x}U - A_{N,\xi,\eta}A_{N,x}U$. Действительно, в первой области

$$\begin{aligned} |A_{N,\xi,\eta}V - A_{N,\xi,\eta}A_{N,x}U| &\leq M \sum_{i=2}^N \varepsilon^i \left| v_i(\xi, \eta) - \frac{B_{N-i}}{2} v_i(\xi, \eta) \right| \leq \\ &\leq M \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \rho^{-\frac{N-1-i}{2}} \leq M \sum_{i=0}^N \varepsilon^{i + \frac{N-1-i}{2}(2-\gamma)} \leq M \varepsilon^{(N-1)\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)}. \end{aligned}$$

А во второй области

$$\begin{aligned} |A_{N,x}U - A_{N,\xi,\eta}A_{N,x}U| &\leq M \sum_{h=1}^N \varepsilon^h r^{\frac{N-h+1}{2}} \leq \\ &\leq M \sum_{h=1}^N \varepsilon^{h+\gamma\frac{N-h+1}{2}} \leq M \varepsilon^{\gamma\frac{N+1}{2}}. \blacksquare \end{aligned}$$

§ 3. Двумерная краевая задача в области с малым отверстием

В этом параграфе рассматривается краевая задача, по постановке в точности совпадающая с задачей, которая была изучена в п. 1 § 1. Единственное отличие состоит в том, что вместо трехмерных теперь рассматриваются двумерные области. Это несущественное на первый взгляд обстоятельство в действительности приводит к значительным и довольно интересным осложнениям.

Итак, повторим обозначения (рис. 12): ограниченная область $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$, $\partial\Omega \in C^\infty$, $O \in \omega \subset \Omega$, $x \in \omega_\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon^{-1}x \in \omega$, $\Omega_\varepsilon = \bar{\Omega} \setminus \bar{\omega}_\varepsilon$,

$$\Delta u = 0 \quad \text{при } x \in \Omega_\varepsilon, \quad (3.1)$$

$$u(x, \varepsilon) = \psi(x) \quad \text{при } x \in \partial\Omega, \quad (3.2)$$

$$u(x, \varepsilon) = 0 \quad \text{при } x \in \partial\omega_\varepsilon, \quad (3.3)$$

$$x = (x_1, x_2), \quad \psi(x) \in C^\infty(\partial\Omega), \quad r = |x|.$$

Предел решения $u(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ всюду в $\bar{\Omega} \setminus O$, как и раньше, равен $u_0(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ — решению задачи

$$\begin{aligned} \Delta u_0 &= 0 \quad \text{при } x \in \bar{\Omega}, \\ u_0(x) &= \psi(x) \quad \text{при } x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Однако на этом сходство с трехмерным случаем заканчи-

вается. Попытка найти асимптотическое разложение решения $u(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в виде ряда по степеням ε , т. е. в виде (1.4), не приводит к успеху. Действительно, рассмотрим, например, частный случай: Ω и ω — круги единичного радиуса с центром в начале координат, $\psi(x) \equiv 1$. Тогда $u(x, \varepsilon) = 1 + \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \ln r$. Поэтому ясно, что асимптотическое разложение решения $u(x, \varepsilon)$ надо искать в виде, более общем, чем (1.4).

Пусть ряд

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(\varepsilon) u_k(x) \quad (3.5)$$

является ф. а. р. задачи (3.1) — (3.3), где $v_k(\varepsilon)$ — какая-либо калибровочная последовательность и, естественно, $v_0(\varepsilon) \equiv 1$. Тогда

$$\Delta u_k = 0 \quad \text{при } x \in \bar{\Omega} \setminus O, \quad (3.6)$$

$$u_k(x) = 0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega, \quad k \geq 1. \quad (3.7)$$

Такие функции, не тождественно равные нулю, должны, очевидно, иметь особенности при $x \rightarrow 0$. Так же, как и в трехмерном случае, сингулярные члены асимптотики таких решений, имеющих рост не выше степенного при $x \rightarrow 0$, являются линейными комбинациями фундаментального решения уравнения Лапласа и его производных. Но в двумерном случае фундаментальное решение уравнения Лапласа есть $c \ln r$. Это и обуславливает коренное отличие двумерного случая в рассматриваемой задаче от случая всех других размерностей.

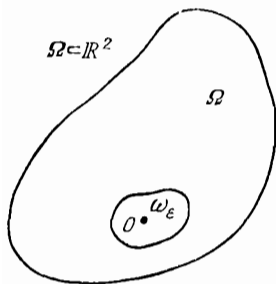


Рис. 12

Посредством $X_l(x)$, $Y_l(x)$, $Z_l(x)$, $W_l(x)$, $X_{l,j}(x)$ и т. д. будем продолжать обозначать однородные гармонические полиномы степени l . Так же, как и в трехмерном случае, легко проверить, что производная порядка l от $\ln r$ имеет вид $X_l(x)r^{-2l}$ и для любого $X_l(x)$ функция $X_l(x)r^{-2l}$ является гармонической.

Лемма 3.1. Пусть $z(x)$ — какая-либо линейная комбинация функций $\ln r$ и $X_l(x)r^{-2l}$ при $l \geq 1$. Тогда существует функция $u(x) = \tilde{u}(x) + z(x)$ такая, что $\tilde{u}(x) \in$

$$\in C^\infty(\bar{\Omega}),$$

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{при } x \in \Omega \setminus O, \\ u(x) &= 0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Доказательство полностью совпадает с доказательством леммы 1.1. ■

Внутреннее разложение будем искать в виде

$$V = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i(\varepsilon) v_i(\xi), \quad (3.9)$$

где $\mu_i(\varepsilon)$ — какая-нибудь калибровочная последовательность, а $\xi = \varepsilon^{-1}x$. Функции $v_i(\xi)$, как и в п. 1 § 1, являются решениями краевых задач

$$\Delta v_i = 0 \quad \text{при } \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \omega, \quad (3.10)$$

$$v_i(\xi) = 0 \quad \text{при } \xi \in \partial\omega. \quad (3.11)$$

Следующие две леммы и по формулировке, и по доказательству вполне аналогичны леммам 1.2 и 1.3. Надо только учесть, что в двумерном случае, в отличие от трехмерного, решение внешней задачи Дирихле единственно в классе ограниченных функций ([84], § 32). Всюду далее использовано обозначение $\rho = |\xi|$.

Лемма 3.2. Пусть функция $v(\xi)$ ограничена и гармонична в окрестности бесконечности. Тогда справедливо асимптотическое разложение

$$v(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} X_j(\xi) \rho^{-2j}, \quad \rho \rightarrow \infty. \quad \blacksquare$$

Лемма 3.3. Пусть δ — постоянная, а $H(\xi)$ — какой-нибудь гармонический полином. Тогда существует функция $v(\xi) = \tilde{v}(\xi) + H(\xi) + \delta \ln r$ такая, что $v(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \omega)$,

$$\Delta v = 0 \quad \text{при } \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \omega, \quad (3.12)$$

$$v(\xi) = 0 \quad \text{при } \xi \in \partial\omega, \quad (3.13)$$

$$\tilde{v}(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} X_j(\xi) \rho^{-2j}, \quad \rho \rightarrow \infty. \quad \blacksquare \quad (3.14)$$

Отличие этой леммы от леммы 1.3 не только в том, что в асимптотике функции $\tilde{v}(\xi)$ присутствует логарифмический член. Главное отличие состоит в том, что в асимптотике $v(\xi)$ член нулевого порядка, т. е. постоянная, изменяется по сравнению с тем же членом в асимп-

тотике $H(\xi)$, тогда как в трехмерном случае $v(\xi)$ и $H(\xi)$ имели одинаковый член нулевого порядка в асимптотике.

Среди функций, построенных в леммах 3.1, 3.3, особую роль играют те функции, которые имеют наименьший порядок особенностей в нуле и на бесконечности соответственно. Характер этих особенностей — $\ln r$ и $\ln \rho$. Обозначим такие функции $\Lambda(x)$ и $\Gamma(\xi)$.

Итак, $\Lambda(x) = \tilde{u}(x) + \ln r$, где $\tilde{u}(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ и $\Lambda(x)$ удовлетворяет равенствам (3.8). Такая функция существует в силу леммы 3.1, и, разлагая функцию $\tilde{u}(x)$ в ряд Тейлора, получаем асимптотическое разложение

$$\Lambda(x) = \ln r + P_0 + \sum_{j=1}^{\infty} X_j(x), \quad x \rightarrow 0. \quad (3.15)$$

Здесь все гармонические полиномы, в том числе и постоянная P_0 , зависят только от области Ω .

Функцию $\Gamma(\xi)$ построим в соответствии с леммой 3.3 так, чтобы она удовлетворяла соотношениям (3.12), (3.13) и в силу (3.14)

$$\Gamma(\xi) = \ln \rho + Q_0 + \sum_{j=1}^{\infty} Y_j(\xi) \rho^{-2j}, \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (3.16)$$

И здесь постоянная Q_0 зависит лишь от области ω .

Естественно взять в качестве главного сингулярного члена ряда (3.5), т. е. $u_1(x)$, функцию $a\Lambda(x)$, а в качестве главного члена ряда (3.9), т. е. $v_1(\xi)$, — функцию $b\Gamma(\xi)$. Предположим, что $v_1(\varepsilon)$ и $\mu_0(\varepsilon)$ стремятся к нулю медленнее, чем ε^α , а $v_2(\varepsilon)$ и $\mu_1(\varepsilon)$ — быстрее, чем ε^{α_1} , где $0 < \alpha < \alpha_1 < 1$, т. е. $\varepsilon^\alpha = o(v_1(\varepsilon))$, $\varepsilon^\alpha = o(\mu_0(\varepsilon))$. $v_2(\varepsilon) = o(\varepsilon^{\alpha_1})$, $\mu_1(\varepsilon) = o(\varepsilon^{\alpha_1})$. Применим к рядам (3.5) и (3.9) условие согласования

$$A_{\alpha, \xi} A_{\alpha, x} U = A_{\alpha, x} A_{\alpha, \xi} V. \quad (3.17)$$

Из асимптотических разложений (3.5), (3.8), (3.15) и (3.16) вытекает, что

$$\begin{aligned} A_{\alpha, \xi} A_{\alpha, x} U &= A_{\alpha, \xi} [u_0(x) + v_1(\varepsilon) a \Lambda(x)] = \\ &= u_0(0) + v_1(\varepsilon) a [\ln \rho + \ln \varepsilon + P_0], \end{aligned}$$

$$A_{\alpha, x} A_{\alpha, \xi} V = A_{\alpha, x} \mu_0(\varepsilon) v_0(\xi) = \mu_0(\varepsilon) b [\ln \rho + Q_0].$$

Отсюда и из (3.17) следует, что

$$\left. \begin{aligned} av_1(\varepsilon) &= b\mu_0(\varepsilon), \\ u_0(0) + av_1(\varepsilon) [\ln \varepsilon + P_0] &= b\mu_0(\varepsilon) Q_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow av_1(\varepsilon) = \\ = u_0(0) \left[\ln \frac{1}{\varepsilon} - P_0 + Q_0 \right]^{-1}.$$

Постоянные a и b можно выбирать произвольным образом. Естественно положить $a = b = u_0(0)$ так, чтобы $v_1(\varepsilon)$ и $\mu_0(\varepsilon)$ зависели только от областей Ω и ω и не зависели от граничной функции $\psi(x)$: $v_1(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)$, где

$$\lambda(\varepsilon) = \left[\ln \frac{1}{\varepsilon} - P_0 + Q_0 \right]^{-1}. \quad (3.18)$$

Итак, найдены первые два члена ряда (3.5) и первый член ряда (3.9). Наводящие соображения, подобные только что проведенным, можно применить и для того, чтобы найти следующие члены калибровочных последовательностей $v_k(\varepsilon)$ и $\mu_i(\varepsilon)$. Эти рассуждения довольно громоздки, но в принципе несложные и могут послужить полезным упражнением для читателя. Мы опустим эти рассуждения и сразу выпишем вид рядов (3.5) и (3.9):

$$U = u_0(x) + \lambda(\varepsilon) u_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{j=0}^{k+1} [\lambda(\varepsilon)]^j u_{k,j}(x), \quad (3.19)$$

$$V = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sum_{j=0}^{i+1} [\lambda(\varepsilon)]^j v_{i,j}(\xi). \quad (3.20)$$

Функции $u_{k,j}(x)$ и $v_{i,j}(\xi)$ будем строить в соответствии с леммами 3.1 и 3.3 так, чтобы они удовлетворяли соотношениям (3.6), (3.7) и (3.10), (3.11) соответственно и имели следующие асимптотические разложения:

$$u_{k,j}(x) = \sum_{l=1}^k X_{l,k,j}(x) r^{-2l} + \sum_{l=0}^{\infty} Z_{l,k,j}(x) + a_{k,j} \ln r, \quad x \rightarrow 0, \quad (3.21)$$

$$v_{i,j}(\xi) = \sum_{l=1}^i Y_{l,i,j}(\xi) + \sum_{l=0}^{\infty} W_{l,i,j}(\xi) \rho^{-2l} + a_{i,j} \ln \rho, \quad \rho \rightarrow \infty, \quad i \geq 1. \quad (3.22)$$

Первые члены в рядах (3.19), (3.20) уже построены так, что выполнено (3.17). Функция $u_0(x)$ — это решение

Таблица 6

$\begin{array}{c} V \\ U \end{array}$	$v_{0,0} \equiv 0$	$\lambda v_{0,1}$	$\varepsilon v_{1,0}$	$\varepsilon \lambda v_{1,1}$	$\varepsilon \lambda^2 v_{1,2}$
$u_{0,0}$	$\frac{X_{0,0}}{X_{0,0}}$		$\frac{\varepsilon Y_{1,1,0}}{X_{1,0}}$		
λu_1	$-a$	$\frac{\lambda(Y_0 + a \ln \rho)}{\lambda(X_0 + a \ln r)}$		$\frac{\varepsilon \lambda Y_1}{\lambda X_{1,1}}$	
$\varepsilon \lambda u_{1,1}$		$\frac{\lambda W_1 \rho^{-2}}{\varepsilon \lambda X_1 r^{-2}}$	$\frac{\varepsilon W_{0,1,0}}{\varepsilon \lambda X_1 r^{-2}}$	$\frac{\varepsilon \lambda(W_0 + a \ln \rho)}{\varepsilon \lambda(Z_0 + a \ln r)}$	
$\varepsilon \lambda^2 u_{1,2}$					$\frac{\varepsilon \lambda^2(W_0 + a \ln \rho)}{\varepsilon \lambda^2(Z_0 + a \ln r)}$
$\varepsilon^2 u_{2,0}$			$\frac{\varepsilon W_1 \rho^{-2}}{\varepsilon^2 X_1 r^{-2}}$		
$\varepsilon^2 \lambda u_{2,1}$		$\frac{\lambda W_2 \rho^{-4}}{\varepsilon^2 \lambda X_2 r^{-4}}$		$\frac{\varepsilon \lambda W_1 \rho^{-2}}{\varepsilon^2 \lambda X_1 r^{-2}}$	
$\varepsilon^2 \lambda^2 u_{2,2}$					
$\varepsilon^2 \lambda^3 u_{2,3}$					
$\varepsilon^3 u_{3,0}$			$\frac{\varepsilon W_2 \rho^{-4}}{\varepsilon^3 X_2 r^{-4}}$		

$\varepsilon^2 v_{2,0}$	$\varepsilon^2 \lambda v_{2,1}$	$\varepsilon^2 \lambda^2 v_{2,2}$	$\varepsilon^2 \lambda^3 v_{2,3}$	$\varepsilon^3 v_{3,0}$	$\varepsilon^3 \lambda v_{3,1}$	...
$\frac{\varepsilon^2 Y_2}{X_{2,0}}$				$\frac{\varepsilon^3 Y_3}{X_{3,0}}$		...
	$\frac{\varepsilon^2 \lambda Y_2}{\lambda X_{2,1}}$				$\frac{\varepsilon^3 \lambda Y_3}{\lambda X_{3,1}}$	...
	$\frac{\varepsilon^2 \lambda Y_1}{\varepsilon \lambda Z_1}$				$\frac{\varepsilon^3 \lambda Y_2}{\varepsilon \lambda Z_2}$	...
		$\frac{\varepsilon^2 \lambda^2 Y_1}{\varepsilon \lambda^2 Z_1}$				...
$\frac{\varepsilon^2 W_0}{\varepsilon^2 Z_0}$				$\frac{\varepsilon^3 W_1}{\varepsilon^2 Z_1}$		...
	$\frac{\varepsilon^2 \lambda (W_0 + a \ln \rho)}{\varepsilon^2 \lambda (Z_0 + a \ln r)}$				$\frac{\varepsilon^3 \lambda Y_1}{\varepsilon^2 \lambda Z_1}$	...
		$\frac{\varepsilon^2 \lambda^2 (W_0 + a \ln \rho)}{\varepsilon^2 \lambda^2 (Z_0 + a \ln r)}$				...
			$\frac{\varepsilon^2 \lambda^3 (W_0 + a \ln \rho)}{\varepsilon^2 \lambda^3 (Z_0 + a \ln r)}$			...
$\frac{\varepsilon^2 W_1 \rho^{-2}}{\varepsilon^3 X_1 r^{-2}}$				$\frac{\varepsilon^3 W_0}{\varepsilon^3 Z_0}$		...

задачи (3.4). Функции $u_{1,0}(x)$ и $v_{0,0}(\xi)$ надо положить тождественно равными нулю. Функции $u_1(x)$ и $v_{0,1}(\xi)$ построены выше. Надо только переобозначить функцию $v_0(\xi)$: в соответствии со структурой ряда (3.20) она теперь имеет индексы 0, 1. Итак, $u_1(x) = u_0(0)\Lambda(x)$, а $v_{0,1}(\xi) = u_0(0)\Gamma(\xi)$, где $\Lambda(x)$ и $\Gamma(\xi)$ определены выше и разлагаются в асимптотические ряды (3.15) и (3.16).

Теорема 3.1. Существуют функции $u_{k,j}(x)$ и $v_{i,j}(\xi)$, обладающие описанными выше свойствами и такие, что для рядов (3.19), (3.20) выполнено условие согласования

$$A_{N_1,\xi} A_{N_2,x} U = A_{N_2,x} A_{N_1,\xi} V. \quad (3.23)$$

Доказательство. Функции $u_{k,j}(x)$ и $v_{i,j}(\xi)$ будут определяться по индукции. При этом, как и ранее, удобно пользоваться таблицей 6. Смысл ее не пугдается в пояснении. Напомним только, что ввиду наличия логарифмических членов значения функций в нижних и верхних частях клеток часто не совпадают: после замены переменных некоторые слагаемые из-за появления множителя $[\lambda(\varepsilon)]^{-1}$ переходят в соседние клетки таблицы. Однако для больших клеток (ограниченных жирными линиями), где находятся все члены асимптотических разложений, содержащие фиксированную степень ε и всевозможные степени $\lambda(\varepsilon)$, все равно сохраняется прежнее правило: в силу условия согласования (3.23) сумма всех функций, стоящих в нижних частях малых клеток, равна такой же сумме в верхних частях этих клеток.

Прежде чем приступить к построению функций $u_{k,j}(x)$ и $v_{i,j}(\xi)$, сделаем еще несколько замечаний. Первый индекс у полиномов в таблице означает, как всегда, степень полинома, а остальные индексы повторяют индексы соответствующей функции u_k , $u_{k,j}$ или $v_{i,j}$. Но эти последние индексы во многих клетках по техническим причинам опущены.

Постоянную $Q_0 - P_0$ в формуле (3.18), которая зависит только от областей Ω и ω , обозначим посредством β . Из (3.18) следует, что

$$\ln \varepsilon = \beta - [\lambda(\varepsilon)]^{-1}, \quad \ln r = \ln \rho + \beta - [\lambda(\varepsilon)]^{-1}. \quad (3.24)$$

Напомним еще, что при построении $\lambda(\varepsilon)$ и функций $\Lambda(x)$, $\Gamma(\xi)$ (см. (3.15), (3.16)) эти функции согласо-

ны в членах нулевого порядка с точностью до слагаемого λ^{-1} :

$$\ln r + P_0 = \ln \rho + Q_0 - [\lambda(\varepsilon)]^{-1}. \quad (3.25)$$

Наконец, перепишем ряды (3.21), (3.22) в эквивалентном, но более удобном виде

$$u_{k,j}(x) = \sum_{l=1}^k X_{l,k,j}(x) r^{-2l} + \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{Z}_{l,k,j}(x) + a_{k,j} \Lambda(x), \quad x \rightarrow 0, \quad (3.26)$$

$$v_{i,j}(\xi) = \sum_{l=1}^i Y_{l,i,j}(\xi) + \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{W}_{l,i,j}(\xi) \rho^{-2l} + a_{i,j} \Gamma(\xi), \quad i \geq 1, \rho \rightarrow \infty, \quad (3.27)$$

где $\Lambda(x)$ и $\Gamma(\xi)$ — определенные выше функции (см. (3.15), (3.16)).

Построение начнем с функции $v_{1,0}(\xi)$. Полагая в формуле (3.27) $a_{1,0} = 0$, а $Y_{1,1,0} = X_{1,0}$ (чтобы были согласованы $u_0(x)$ и $\varepsilon v_{1,0}(\xi)$ (см. таблицу 6)), определим, в силу леммы 3.3, функцию $v_{1,0}(\xi)$. При этом однозначно определится постоянная $W_{0,1,0}$. Учитывая соотношение (3.24), положим поэтому $a_{1,1} = -W_{0,1,0}$ и после этого однозначно определим функции $u_{1,1}(x)$ и $v_{1,1}(\xi)$, полагая $Y_{1,1,1} = X_{1,1}$, а $X_{1,1,1} = W_{1,0,1}$. Опять-таки постоянные $W_{0,1,1}$ и $Z_{0,1,1}$ определятся при этом однозначно, и поэтому в клетках, стоящих на пересечении строки 1, 1 со столбцами 1, 0 и 1, 1, пока еще нет согласования: сумма функций, стоящих в верхних частях клеток, отличается от суммы функций, стоящих в нижних частях клеток, на $\varepsilon \lambda(\varepsilon) [W_{0,1,1} - Z_{0,1,1} - a_{1,1} \beta]$. Поэтому положим $a_{1,2} = Z_{0,1,1} + a_{1,1} \beta - W_{0,1,1}$, $v_{1,2}(\xi) = a_{1,2} \Gamma(\xi)$, $u_{1,2}(x) = a_{1,2} \Lambda(x)$. После такого построения, в силу (3.25), выполнено условие согласования (3.23) при $N_1 \leq 1$, $N_2 \leq 1$.

Далее, построение функций $u_{k,j}(x)$ и $v_{i,j}(\xi)$ продолжается по индукции. Пусть эти функции построены при $k \leq n$, $i \leq n$ так, что условие (3.23) выполнено для $N_1 \leq n$, $N_2 \leq n$. Тем самым определены все члены в асимптотике функций $u_{n+1,j}(x)$ при $j \leq n+1$, стоящие в первой сумме в (3.26), и такие же члены в асимптотике $v_{n+1,j}(\xi)$ в (3.27). В силу лемм 3.1 и 3.3 для определения функций $u_{n+1,j}(x)$ и $v_{n+1,j}(\xi)$ осталось задать постоянные $a_{n+1,j}$.

Полагая $a_{n+1,0} = 0$, строим $u_{n+1,0}(x)$ и $v_{n+1,0}(\xi)$. При их согласовании в клетке, стоящей на пересечении соответствующих строки и столбца, возникает невязка $\varepsilon^{n+1}(W_{0,n+1,0} - Z_{0,n+1,0})$. Для ее ликвидации полагаем $a_{n+1,1} = Z_{0,n+1,0} - W_{0,n+1,0}$ и тем самым согласно леммам 3.1 и 3.3 однозначно определяем $u_{n+1,1}(x)$ и $v_{n+1,1}(\xi)$. Возникающая невязка в членах нулевого порядка их асимптотик, равная $\varepsilon^{n+1}\lambda(\varepsilon)[W_{0,n+1,1} - Z_{0,n+1,1} - a_{n+1,1}\beta]$, ликвидируется с помощью $a_{n+1,2} = Z_{0,n+1,1} + a_{n+1,1}\beta - W_{0,n+1,1}$ и процесс продолжается вплоть до определения $u_{n+1,n+1}(x)$ и $v_{n+1,n+1}(\xi)$. Возникающая невязка в членах нулевого порядка асимптотик этих функций устраняется с помощью функций $u_{n+1,n+2}(x) = a_{n+1,n+2}\Lambda(x)$ и $v_{n+1,n+2}(\xi) = a_{n+1,n+2}\Gamma(\xi)$. А члены нулевого порядка в асимптотиках этих функций согласованы в силу (3.25).

Итак, построены все функции $u_{k,j}(x)$, $v_{i,j}(\xi)$ при $k \leq n+1$, $i \leq n+1$ так, что условие (3.23) выполнено для $N_1 \leq n+1$, $N_2 \leq n+1$. ■

Теорема 3.2. *Для всех натуральных N справедлива оценка*

$$|A_{N,x}U + A_{N,\xi}V - A_{N,x}A_{N,\xi}V - u(x, \varepsilon)| < M\varepsilon^{N+1}$$

всюду в $\bar{\Omega}_\varepsilon$, где $u(x, \varepsilon)$ — решение задачи (3.1) — (3.3), а U и V — ряды (3.19), (3.20).

Следствие. *Ряд (3.19) является равномерным асимптотическим разложением решения $u(x, \varepsilon)$ задачи (3.1) — (3.3) при $x \in \bar{\Omega}$, $r > M\varepsilon^\gamma$, а ряд (3.20) является равномерным асимптотическим разложением того же решения при $r \leq M\varepsilon^\gamma$, где γ — любое число такое, что $0 < \gamma < 1$.*

Доказательство теоремы 3.2 и следствия почти дословно повторяет доказательство теоремы 1.1 и следствия к ней. ■

§ 4. Исследование асимптотики в случае, когда предельная задача не имеет решения

Здесь будет продолжено изучение задачи (1.19) — (1.21) из п. 2 § 1, но в особой, в некотором смысле исключительной ситуации. Будем теперь считать, что предельная задача (1.25) не имеет решения. В частности, это означает, что нуль является собственным значением оператора $\mathcal{L}$ с краевыми условиями (1.20). Для того чтобы не загромождать изложение ненужными ос-

ложнениями, рассмотрим лишь трехмерный случай и простейшее уравнение с постоянными коэффициентами.

Итак, по-прежнему ω и Ω — ограниченные области, $0 \in \omega \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\partial\omega \in C^\infty$, $\partial\Omega \in C^\infty$, дополнение к ω связно, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $r = |x|$, $x \in \omega_\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon^{-1}x \in \omega$, $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bar{\omega}_\varepsilon$, $u(x, \varepsilon)$ — решение краевой задачи

$$\mathcal{L}u = \Delta u + a^2 u = f(x) \quad \text{при } x \in \Omega_\varepsilon, \quad (4.1)$$

$$u(x, \varepsilon) = 0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega, \quad (4.2)$$

$$u(x, \varepsilon) = 0 \quad \text{при } x \in \partial\omega_\varepsilon, \quad (4.3)$$

$$f(x) \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad a = \text{const}, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Предположим, что a^2 является однократным собственным значением оператора $-\Delta$ с граничным условием (4.2), т. е. существует единственная (с точностью до постоянного множителя) функция $h(x) \neq 0$ такая, что

$$\mathcal{L}h = 0 \quad \text{при } x \in \bar{\Omega}, \quad h(x) = 0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega. \quad (4.4)$$

Тогда, как известно, краевая задача

$$\mathcal{L}u_0 = \tilde{f}(x) \quad \text{при } x \in \bar{\Omega}, \quad u_0(x) = 0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega, \quad (4.5)$$

вообще говоря, не имеет решения и при построении асимптотики $u(x, \varepsilon)$ возникнут новые трудности по сравнению с построениями § 1. Для разрешимости задачи (4.5) необходимо и достаточно выполнение равенства ([50], гл. IV, § 10)

$$\int_{\bar{\Omega}} h(x) \tilde{f}(x) dx = 0. \quad (4.6)$$

Пусть для определенности это равенство не выполнено при $f(x) = \tilde{f}(x)$. Тем самым задача (4.5), которую естественно считать предельной для задачи (4.1) — (4.3), не имеет решения. С другой стороны, при каждом положительном $\varepsilon < \varepsilon_0$ задача (4.1) — (4.3) имеет единственное решение (при одном дополнительном условии (4.7) это будет показано ниже, в следствии к лемме 4.6). Поскольку предельная задача (4.5) не имеет решения, мы не вправе ожидать, что существует предел $u(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Однако это не снимает вопроса о выяснении асимптотики $u(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Эта асимптотика существенно зависит от того, равна ли нулю собственная функция $h(x)$ в начале координат или не равна. Ограничимся вторым, более простым случаем $h(0) \neq 0$. Тог-

да, не нарушая общности, будем считать, что

$$h(0) = 1. \quad (4.7)$$

Под функцией $h(x)$ всюду в этом параграфе будет пониматься определенная выше собственная функция, удовлетворяющая условиям (4.4), (4.7). Посредством $P_l(x)$, $Q_l(x)$, $R_l(x)$, $P_{l,j}(x)$ и т. д., как и ранее, обозначаются однородные полиномы степени l , а посредством $X_l(x)$, $Y_l(x)$, $Z_l(x)$, $W_l(x)$, $X_{l,j}(x)$ и т. д. — однородные гармонические полиномы степени l .

Приступим теперь к построению асимптотики $u(x, \varepsilon)$. Из упомянутых выше нестрогих соображений можно заключить, что эта функция неограничена при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому будем искать ее внешнее и внутреннее разложения в виде

$$U = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x) \quad (4.8)$$

и

$$V = \sum_{i=-1}^{\infty} \varepsilon^i v_i(\xi), \quad (4.9)$$

где $\xi = \varepsilon^{-1}x$. Для того чтобы ряды U и V являлись ф. а. р. уравнения (4.1), необходимо, чтобы

$$\mathcal{L}u_0 = f(x), \quad (4.10)$$

$$\mathcal{L}u_k = 0 \quad \text{при } k \neq 0, \quad x \in \bar{\Omega} \setminus O, \quad (4.11)$$

а

$$\begin{aligned} \Delta v_{-1} &= 0, \quad \Delta v_0 = 0, \quad \Delta v_1 + a^2 v_{-1} = 0, \\ \Delta v_i &= -a^2 v_{i-2} + R_{i-2}(\xi), \quad i \geq 2, \quad \text{при } \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \omega, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} R_j(x)$ при $x \rightarrow 0$.

Граничные условия тоже индуцируются условиями (4.2), (4.3) естественным образом:

$$u_k(x) = 0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega, \quad (4.13)$$

$$v_i(\xi) = 0 \quad \text{при } \xi \in \partial\omega. \quad (4.14)$$

Главный член ряда U — функцию $u_{-1}(x)$ — естественно положить равной $c_{-1}h(x)$, но пока совсем неясно, чему же равна постоянная c_{-1} . А задача (4.10), (4.13) уже не имеет решения, гладкого всюду в $\bar{\Omega}$. Так что решение этой задачи будем искать в классе функций,

имеющих особенности в точке O . Тем самым общая картина оказывается весьма похожей на ту, которая рассматривалась в § 1, но особенности у функций $u_k(x)$ начинаются теперь не с $k=1$, а с $k=0$. Что касается задач (4.12), (4.14), то они, по крайней мере внешне, не отличаются от аналогичных задач из § 1. Таким образом, прежде всего предстоит выяснить структуру решений уравнений (4.10), (4.11), имеющих особенности в нуле.

Лемма 4.1. Для любой функции $f(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ существует функция $u(x) \in C^\infty(\bar{\Omega} \setminus O)$ такая, что

$$\mathcal{L}u = f(x) \text{ в } \bar{\Omega} \setminus O, \quad u(x) = 0 \text{ на } \partial\Omega \text{ и}$$

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} X_{0,j} r^{-1+2j} + \sum_{j=0}^{\infty} P_j(x), \quad r \rightarrow 0, \quad (4.15)$$

где

$$X_{0,0} = (4\pi)^{-1} \int_{\Omega} f(x) h(x) dx. \quad (4.16)$$

Доказательство. Сначала построим ф. а. р. при $r \rightarrow 0$ уравнения $\Delta u + a^2 u = 0$ так, чтобы этот асимптотический ряд начинался с члена $X_{0,0} r^{-1}$, где постоянная $X_{0,0}$ определена по формуле (4.16). Обозначим это ф. а. р. посредством

$$\mathcal{E} = \sum_{j=0}^{\infty} X_{0,j} r^{-1+2j}. \quad (4.17)$$

Подставляя этот ряд в уравнение, получаем рекуррентную систему

$$\Delta(X_{0,j} r^{-1+2j}) = -a^2 X_{0,j-1} r^{-3+2j}, \quad j \geq 1.$$

Отсюда однозначно находятся все $X_{0,j}$, что легко проверить непосредственно, но можно воспользоваться и равенством (1.33). Обозначая $\mathcal{E}_N(x) = \chi(x) B_N \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — ряд (4.17), N — достаточно большое число, а $\chi(x) \in C^\infty(\Omega)$ — срезающая функция, равная единице в окрестности начала координат и равная нулю в окрестности $\partial\Omega$, заключаем, что

$$\mathcal{L}\mathcal{E}_N(x) = g_N(x) \in C^N(\bar{\Omega}), \quad \mathcal{E}_N(x) = 0 \text{ на } \partial\Omega. \quad (4.18)$$

Построим функцию $w_N(x) \in C^N(\bar{\Omega})$, равную нулю на $\partial\Omega$ и такую, что

$$\mathcal{L}w_N = f(x) - g_N(x) + b_N h(x), \quad (4.19)$$

где постоянная b_N подобрана так, чтобы правая часть этого уравнения $f(x) - g_N(x) + b_N h(x)$ удовлетворяла условию (4.6). Этого достаточно для разрешимости задачи (4.19).

Пусть x_0 — какая-нибудь точка из области $\Omega \setminus O$, где $h(x_0) \neq 0$. Обозначим $u_N(x) = w_N(x) + \mathcal{E}_N(x) + d_N h(x)$, где постоянная d_N

выбрана так, чтобы $u_N(x_0) = 0$. По построению $u_N(x) \in C^N(\Omega \setminus O)$, $u_N(x) = 0$ на $\partial\Omega$ и

$$\mathcal{L}u_N = f(x) + b_N h(x). \quad (4.20)$$

Кроме того, при $x \rightarrow 0$ функция $u_N(x)$ имеет асимптотическое представление в виде частичной суммы ряда (4.15). Постоянные $X_{0,j}$ построены выше, а полиномы $P_j(x)$, вообще говоря, зависят от N и обязаны своим происхождением разложению в ряды Тейлора функций $u_N(x)$ и $h(x)$.

Посредством S_δ будем обозначать шар радиуса δ с центром в начале координат, а посредством G_δ — область $\Omega \setminus S_\delta$. Умножим обе части уравнения (4.20) на $h(x)$ и проинтегрируем полученное равенство по области G_δ при малом δ . После интегрирования по частям получится равенство

$$\begin{aligned} \int_{G_\delta} [f(x)h(x) + b_N h^2(x)] dx &= \int_{G_\delta} h(x) (\Delta u_N + a^2 u_N) dx = \\ &= \int_{r=\delta} \sum_{j=1}^3 \left[u_N(x) \frac{\partial h}{\partial x_j}(x) - h(x) \frac{\partial u_N}{\partial x_j}(x) \right] \frac{x_j}{\delta} ds. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Заменяя в правой части этого равенства функцию $u_N(x)$ ее асимптотическим представлением при $x \rightarrow 0$, приходим к выводу, что этот интеграл равен $4\pi X_{0,0} + O(\delta)$. Переходя в равенстве (4.21) к пределу при $\delta \rightarrow 0$, получаем соотношение

$$\int_{\Omega} f(x)h(x) dx + b_N \int_{\Omega} h^2(x) dx = 4\pi X_{0,0}.$$

Отсюда и из условия (4.16) вытекает, что $b_N = 0$.

Таким образом, все функции $u_N(x)$ удовлетворяют уравнению $\mathcal{L}u_N = f(x)$ в $\Omega \setminus O$. Разность $u_N(x) - u_{N+1}(x)$ удовлетворяет однородному уравнению и ограничена. По теореме об устранимой особенности ([70], гл. IV) разность $u_N(x) - u_{N+1}(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Так как она равна нулю на $\partial\Omega$, то, следовательно, $u_N(x) - u_{N+1}(x) = \beta_N h(x)$. Так как по построению $u_N(x_0) = u_{N+1}(x_0) = 0$, то $u_N(x) \equiv u_{N+1}(x)$. Тем самым $u_N(x)$ не зависит от N и является искомой функцией $u(x)$. ■

Замечание. Пусть в лемме 4.1 условие $f(x) \in C^\infty(\Omega)$ заменено условием $f(x) \in C^N(\bar{\Omega})$, где N — достаточно большое натуральное число. Тогда справедливо и заключение леммы с небольшими изменениями: вместо соотношения $u(x) \in C^\infty(\bar{\Omega} \setminus O)$ справедливо лишь, что $u(x) \in C^{N_1}(\bar{\Omega} \setminus O)$, а ряд (4.15) заменяется соотношением

$$u(x) = \sum_{j=0}^{N_1} X_{0,j} r^{-1+2j} + \sum_{j=0}^{N_1} P_j(x) + O(r^{N_1}),$$

где N_1 неограниченно растет вместе с N . Доказательство фактически не отличается от доказательства леммы 4.1.

Лемма 4.2. Пусть m — натуральное число, а $Y_m(x)$ — некоторый заданный однородный гармонический полином. Тогда существует функция $\mathcal{E}(x) \in C^\infty(\bar{\Omega} \setminus O)$, которая равна нулю на $\partial\Omega$, удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}\mathcal{E} = 0$ в $\bar{\Omega} \setminus O$ и при $x \rightarrow 0$ разлагается в асимптотический ряд

$$\mathcal{E}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} X_{m,j}(x) r^{-1+2j-2m} + \sum_{j=0}^{\infty} X_{0,j} r^{-1+2j} + \sum_{j=0}^{\infty} P_j(x), \quad r \rightarrow 0, \quad (4.22)$$

где $X_{m,0}(x)$ равен заданному полиному $Y_m(x)$.

Доказательство. Построим ф. а. р. уравнения $\mathcal{L}\mathcal{E} = 0$ в виде

$$\mathcal{E} = \sum_{j=0}^{\infty} X_{m,j}(x) r^{-1+2j-2m}, \quad \text{где } X_{m,0}(x) = Y_m(x).$$

Подставляя этот ряд в уравнение, получаем рекуррентную систему

$$\Delta(X_{m,j}(x) r^{-1+2j-2m}) = -a^2 X_{m,j-1}(x) r^{-3+2j-2m}, \quad j \geq 1,$$

откуда, согласно формуле (1.33), находятся все $X_{m,j}(x)$. Так же, как и при доказательстве леммы 4.1, построим функцию $\mathcal{E}_N(x) = \chi(x) \bar{B}_N \mathcal{E}$, которая удовлетворяет соотношению (4.18).

Согласно замечанию к лемме 4.1 построим функцию $w_N(x) \in C^{N_1}(\bar{\Omega} \setminus O)$, которая равна нулю на $\partial\Omega$, удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}w_N = -g_N(x)$ в $\bar{\Omega} \setminus O$ и при $x \rightarrow 0$ допускает асимптотическое представление

$$w_N(x) = \sum_{j=0}^{N_1} X_{0,j,N} r^{-1+2j} + \sum_{j=0}^{N_1} P_{j,N}(x) + O(r^{N_1}),$$

где $X_{0,0,N} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\bar{\Omega}} g_N(x) h(x) dx$. Пусть $h(x_0) \neq 0$. Обозначим

$u_N(x) = w_N(x) + \mathcal{E}_N(x) + d_N h(x)$, где постоянная d_N выбирается так, чтобы $u_N(x_0) = 0$. По построению функция $u_N(x)$ равна нулю на $\partial\Omega$ и удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}u_N = 0$ в $\bar{\Omega} \setminus O$. Функция $z_N(x) = u_N(x) - u_{N+1}(x)$ тоже удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}z_N = 0$ в $\bar{\Omega} \setminus O$ и имеет асимптотическое представление

$$z_N(x) = \sum_{j=0}^{N_1} (X_{0,j,N} - X_{0,j,N+1}) r^{-1+2j} + \sum_{j=0}^{N_1} (P_{j,N}(x) - P_{j,N+1}(x)) + O(r^{N_1}).$$

Умножим обе части уравнения для $z_N(x)$ на $h(x)$ и проинтегри-

руем получившееся равенство по области G_δ . Поступая так же, как и при доказательстве леммы 4.1 (см. (4.21)), после перехода к пределу при $\delta \rightarrow 0$ получим равенство $X_{0,0,N} = X_{0,0,N+1}$. Следовательно, $z_N(x)$ — ограниченное решение однородного уравнения, $z_N(x) = 0$ на $\partial\Omega$ и поэтому $z_N(x) = c_1 h(x)$. Из равенства $z_N(x_0) = 0$ вытекает, что $z_N(x) \equiv 0$. Таким образом, $u_N(x)$ не зависит от N и является искомой функцией $\mathcal{E}(x)$ (см. (4.22)). ■

Заключив обсуждение предварительных результатов, необходимых для построения коэффициентов внешнего разложения, перейдем к изучению краевых задач (4.12), (4.14). В дальнейших построениях важную роль будет играть гармоническая функция, определенная в $\mathbb{R}^3 \setminus \omega$, которая равна единице на $\partial\omega$ и стремится к нулю на бесконечности. Обозначим ее через $\tilde{\Gamma}(\xi)$. Такая функция существует ([96], гл. IV, § 5) и, согласно лемме 1.2, имеет следующее асимптотическое разложение на бесконечности:

$$\tilde{\Gamma}(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} Z_j(\xi) \rho^{-1-2j}, \quad \rho = |\xi| \rightarrow \infty. \quad (4.23)$$

Коэффициент Z_0 называется емкостью поверхности $\partial\omega$ ([50], с. 305). Покажем, что $Z_0 > 0$. Действительно, для области $S_\delta \setminus \omega$, где δ достаточно велико, в силу (4.23),

$$\text{получаем равенство } 0 = \int_{\partial(S_\delta \setminus \omega)} \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial n} ds = \int_{\partial\omega} \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial n} ds + \int_{\partial S_\delta} \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial n} ds = \\ = \int_{\partial\omega} \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial n} ds - 4\pi Z_0 + O(\delta^{-1}), \text{ где } \frac{\partial}{\partial n} \text{ означает производ-}$$

ную по внешней нормали к $S_\delta \setminus \omega$. Так как на $\partial\omega$ функция $\tilde{\Gamma}(\xi)$ достигает максимального значения, то $\left. \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial n} \right|_{\partial\omega} > 0$ ([84], § 28) и, следовательно, $Z_0 > 0$. Обозначим $\Gamma(\xi) = Z_0^{-1} [\tilde{\Gamma}(\xi) - 1]$. Таким образом,

$$\Delta \Gamma(\xi) = 0 \text{ в } \mathbb{R}^3 \setminus \omega, \quad \Gamma(\xi) = 0 \text{ на } \partial\omega$$

и

$$\Gamma(\xi) = \rho^{-1} - Z_0^{-1} + \sum_{j=1}^{\infty} W_j(\xi) \rho^{-1-2j}, \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (4.24)$$

В § 1 была доказана лемма 1.3, смысл которой состоял в следующем: по заданным главным членам асимптотики гармонической функции на бесконечности можно построить эту функцию $v(\xi)$ так, чтобы она равнялась

нулю на $\partial\omega$. Под главными членами понимались все члены, не стремящиеся к нулю, т. е., попросту говоря, гармонический полином. В этом параграфе понадобится другой вариант построения гармонической функции по ее асимптотике на бесконечности. Действительно, при построении внешнего разложения мы будем руководствоваться леммами 4.1 и 4.2, из которых видно, что, в отличие от § 1, коэффициент при r^{-1} не может быть выбран произвольно (см. формулу (4.16)). Но зато нулевой член асимптотики в точке O (т. е. постоянную) можно менять, прибавляя к решению $u(x)$ функцию $c_1 h(x)$. Соответствующее изменение необходимо сделать и в лемме 1.3: надо иметь возможность произвольно задавать член cr^{-1} . Но в качестве платы за этот произвол приходится смириться с тем, что нулевой член асимптотики на бесконечности, т. е. постоянная, уже не в нашей власти — она однозначно определяется по остальным членам асимптотики на бесконечности. Точная формулировка дается следующей леммой.

Лемма 4.3. Пусть заданы гармонический полином $Y(\xi)$ и постоянная Y_0 . Тогда существует функция $w(\xi) = \tilde{v}(\xi) + Y(\xi)$ такая, что $\Delta w(\xi) = 0$ при $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \omega$, $w(\xi) = 0$ при $\xi \in \partial\omega$ и

$$\tilde{v}(\xi) = X_0 + Y_0 \rho^{-1} + \sum_{j=1}^{\infty} Y_j(\xi) \rho^{-2j-1}, \quad \rho \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Построим функцию $\tilde{v}(\xi)$, согласно лемме 1.3, так, что для функции $v(\xi) = \tilde{v}(\xi) + Y(\xi)$ справедливы соотношения

$$\Delta v(\xi) = 0 \text{ при } \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \omega, \quad v(\xi) = 0 \text{ при } \xi \in \partial\omega,$$

$$v(\xi) = Y(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty} X_j(\xi) \rho^{-2j-1}, \quad \rho \rightarrow \infty.$$

Теперь осталось положить $w(\xi) = v(\xi) + (Y_0 - X_0)\Gamma(\xi)$, где $\Gamma(\xi)$ — построенная выше функция, удовлетворяющая соотношениям (4.24). ■

Точно таким же образом следует видоизменить лемму 1.6.

Лемма 4.4. Пусть выполнены условия леммы 1.6. Тогда существует функция $w(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \omega)$ такая, что

$$\Delta w(\xi) = F(\xi) \text{ при } \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \omega, \quad w(\xi) = 0 \text{ при } \xi \in \partial\omega$$

и

$$w(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j(\xi) + Y_0 + \sum_{j=1}^{\infty} Y_j(\xi) \rho^{-2j-1}, \quad \rho \rightarrow \infty.$$

Доказательство. К функции $v(\xi)$, построенной в лемме 1.6 и имеющей асимптотическое разложение (1.44), следует добавить функцию $-X_0\Gamma(\xi)$, где $\Gamma(\xi)$ та же функция, что и выше. ■

Теперь можно приступить к построению рядов U и V . Как и ранее, для наглядности будем использовать таблицу 7. Ее структура такая же, как и у предыдущих таблиц.

В отличие от § 1, построение ряда U начнем не с главного члена $u_{-1}(x)$, а со следующего члена $u_0(x)$. Согласно лемме 4.1 построим решение задачи (4.10), (4.13), которое при $r \rightarrow 0$ имеет асимптотическое разложение (4.15). Эта функция определена неоднозначно — к ней можно прибавить $c_1 h(x)$, но пока что фиксируем какое-нибудь решение $\tilde{u}_0(x)$. Эту и подобные функции в дальнейшем будем называть заготовками соответствующих решений $u_k(x)$. Разлагая заготовку $\tilde{u}_0(x)$ в асимптотический ряд при $x \rightarrow 0$, определим функции, стоящие в нижних частях клеток строки $u_0(x)$. Переписывая их во внутренних переменных, получим функции в верхних частях этих клеток, в частности, $\varepsilon^{-1}X_{0,0}\rho^{-1}$. Исходя из условий согласования, положим $v_{-1}(\xi) = X_{0,0}\Gamma(\xi)$, где $\Gamma(\xi)$ — функция, удовлетворяющая условиям (4.24). Таким образом, теперь определены все функции в первом столбце таблицы. При этом из (4.16) и (4.24) следует, что

$$R_0 = -\frac{1}{4\pi Z_0} \int_{\Omega} f(x) h(x) dx. \quad (4.25)$$

Следовательно, надо положить $u_{-1}(x) = R_0 h(x)$. Итак, функции $v_{-1}(\xi)$ и $u_{-1}(x)$ окончательно определены.

Далее, по главным членам асимптотических разложений — функциям $X_{k,0}(x)r^{-1-2k}$ при $k \geq 1$, стоящим в клетках первого столбца, в соответствии с леммой 4.2 строятся функции $\tilde{u}_k(x)$ — заготовки решений $u_k(x)$. Теперь заполнены, хотя и не окончательно, все нижние части клеток таблицы 7. Перепишем их во внутренних переменных в верхних частях таблицы. В дальнейшем будем проводить эту операцию без особых оговорок:

Таблица 7

$\frac{v}{u}$	$\varepsilon^{-1}v_{-1}(\xi)$	$v_0(\xi)$	$\varepsilon v_1(\xi)$	$\varepsilon^2 v_2(\xi)$	$\varepsilon^3 v_3(\xi)$	...
$\varepsilon^{-1}u_{-1}(x)$	$\varepsilon^{-1}R_0$	$P_{1,-1}(\xi)$	$\varepsilon P_{2,-1}(\xi)$	$\varepsilon^2 P_{3,-1}(\xi)$	$\varepsilon^3 P_{4,-1}(\xi)$	...
	$\varepsilon^{-1}P_{0,-1}$	$\varepsilon^{-1}P_{1,-1}(x)$	$\varepsilon^{-1}P_{2,-1}(x)$	$\varepsilon^{-1}P_{3,-1}(x)$	$\varepsilon^{-1}P_{4,-1}(x)$	...
$u_0(x)$	$\varepsilon^{-1}X_{0,0}\rho^{-1}$	$Q_{0,0}$	$\varepsilon(X_{0,1}\rho + Q_{1,0}(\xi))$	$\varepsilon^2 Q_{2,0}(\xi)$	$\varepsilon^3(X_{0,2}\rho^3 + Q_{3,0}(\xi))$	...
	$X_{0,0}r^{-1}$	$Q_{0,0}$	$X_{0,1}r + Q_{1,0}(x)$	$Q_{2,0}(x)$	$X_{0,2}r^3 + Q_{3,0}(x)$	...
$\varepsilon u_1(x)$	$\varepsilon^{-1}X_{1,0}(\xi)\rho^{-3}$	$X_{0,0,1}\rho^{-1}$	$\varepsilon(X_{1,1}(\xi)\rho^{-1} + Q_{0,1})$	$\varepsilon^2(Q_{1,1}(\xi) + X_{0,1,1}\rho)$	$\varepsilon^3(X_{1,2}(\xi)\rho + Q_{2,1}(\xi))$	...
	$\varepsilon X_{1,0}(x)r^{-3}$	$\varepsilon X_{0,0,1}r^{-1}$	$\varepsilon(X_{1,1}(x)r^{-1} + Q_{0,1})$	$\varepsilon(Q_{1,1}(x) + X_{0,1,1}r)$	$\varepsilon(X_{1,2}(x)r + Q_{2,1}(x))$	...

Продолжение табл. 7

$\frac{V}{U}$	$\varepsilon^{-1}v_{-1}(\xi)$	$v_0(\xi)$	$\varepsilon v_1(\xi)$	$\varepsilon^2 v_2(\xi)$	$\varepsilon^3 v_3(\xi)$	...
$\varepsilon^2 u_2(x)$	$\varepsilon^{-1} X_{2,0}(\xi) \rho^{-5}$	$X_{1,0}(\xi) \rho^{-3}$	$\varepsilon(X_{2,1}(\xi) \rho^{-3} + X_{0,0,2} \rho^{-1})$	$\varepsilon^2 Q_{0,2}$	$\varepsilon^3(X_{2,2}(\xi) \rho^{-1} + X_{0,1,2} \rho^{-3} + Q_{1,2}(\xi))$	...
	$\varepsilon^2 X_{2,0}(x) r^{-5}$	$\varepsilon^2 X_{1,0}(x) r^{-3}$	$\varepsilon^2(X_{2,1}(x) r^{-3} + X_{0,0,2} r^{-1})$	$\varepsilon^2 Q_{0,2}$	$\varepsilon^2(X_{2,2}(x) r^{-1} + X_{0,1,2} r + Q_{1,2}(x))$	...
$\varepsilon^3 u_3(x)$	$\varepsilon^{-1} X_{3,0}(\xi) \rho^{-7}$	$X_{2,0}(\xi) \rho^{-5}$	$\varepsilon(X_{3,1}(\xi) \rho^{-5} + X_{1,1}(\xi) \rho^{-3})$	$\varepsilon^2(X_{0,0,3} \rho^{-1} + X_{2,1} \rho^{-3})$	$\varepsilon^3(X_{3,2}(\xi) \rho^{-3} + Q_{0,3})$	...
	$\varepsilon^3 X_{3,0}(x) r^{-7}$	$\varepsilon^3 X_{2,0}(x) r^{-5}$	$\varepsilon^3(X_{3,1}(x) r^{-5} + X_{1,1}(x) r^{-3})$	$\varepsilon^3(X_{0,0,3} r^{-1} + X_{2,1} r^{-3})$	$\varepsilon^3(X_{3,2}(x) r^{-3} + Q_{0,3})$	...

$$u_{-1}(x) = -\frac{h(x)}{4\pi Z_0} \int_{\Omega} f(x) h(x) dx$$

в любой момент построения будем считать, что в верхней и нижней частях любой клетки стоит одна и та же функция, только записанная в разных переменных.

Итак, все клетки таблицы 7 временно заполнены. Так как функции $\tilde{y}_k(x)$ удовлетворяют системе (4.10), (4.11), то, согласно лемме 1.5, ряды $V_i(\xi)$, стоящие в столбцах, — это ф. а. р. системы (4.12). В соответствии с леммой 4.4 построим по ряду $V_0(\xi)$ функцию $v_0(\xi)$ — решение задачи (4.12), (4.14). При этом во втором столбце не изменится член $X_{0,0,1}\rho^{-1}$, а изменится, вообще говоря, постоянная $Q_{0,0}$ и, начиная с четвертой строки, появятся члены $X_{j,0}(\xi)\rho^{-2j-1}$, $j \geq 1$. После этого функция $v_0(\xi)$ определена окончательно. Для окончательного определения функции $u_0(x)$ добавим к функции $\tilde{y}_0(x)$ слагаемое $c_1 h(x)$ так, чтобы были согласованы постоянные $Q_{0,0}$.

Функции $\tilde{y}_k(x)$ при $k \geq 2$ изменим на $X_{j,0}(\xi)\rho^{-1-2j}$ в соответствии с леммой 4.2, добавляя слагаемые, компенсирующие изменения этих функций. Далее так же, в соответствии с леммами 1.5 и 4.4, окончательно строим функцию $v_1(\xi)$, после чего в таблице изменится постоянная $Q_{0,1}$ и добавятся члены $X_{j,1}(\xi)\rho^{-2j-1}$, $j \geq 1$, в соответствующих клетках. Окончательно определим $u_1(x)$, добавляя к $\tilde{y}_1(x)$ слагаемое $c_1 h(x)$, и изменим функции $u_k(x)$ при $k \geq 3$. Дальше этот процесс, очевидно, может быть неограниченно продолжен.

Итак, построены функции $u_k(x)$ и $v_i(\xi)$ — решения задач (4.10), (4.11), (4.13) и (4.12), (4.14) соответственно, так что для рядов (4.8) и (4.9) выполнено условие согласования

$$A_{N_1,\xi} A_{N_2,x} U = A_{N_2,x} A_{N_1,\xi} V \quad \forall N_1, N_2.$$

Теорема 4.1. Для всех натуральных N справедлива оценка

$$|A_{N,x} U + A_{N,\xi} V - A_{N,x} A_{N,\xi} V - u(x, \varepsilon)| \leq M \varepsilon^{N_1} \quad (4.26)$$

всюду в Ω_ε , где $u(x, \varepsilon)$ — решение задачи (4.1) — (4.3), U и V — построенные выше ряды (4.8) и (4.9), а $N_1 \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$.

Доказательство. Оценка малости $\mathcal{L}T_N(x, \varepsilon)$ и значений $T_N(x, \varepsilon)$ на $\partial\Omega_\varepsilon$, где $T_N(x, \varepsilon)$ — выражение, стоящее под знаком модуля в левой части неравенства (4.26), полностью совпадает с такой же оценкой в теоре-

ме 1.4. Таким образом,

$$\max_{x \in \bar{\Omega}_\varepsilon} |\mathcal{L}T_N(x, \varepsilon)| + \max_{x \in \partial\Omega} |T_N(x, \varepsilon)| < M\varepsilon^{(N-1)/2}. \quad (4.27)$$

Но дальнейшее доказательство усложняется, так как в рассматриваемом случае заведомо не выполнена оценка нормы обратного оператора (1.22). Поэтому из оценки (4.27) не вытекает такая же оценка для $T_N(x, \varepsilon)$. Однако равномерная оценка обратного оператора не является обязательной для обоснования асимптотики. Достаточно доказать, что норма обратного оператора не превосходит $M\varepsilon^{-q}$, где q — какое-нибудь фиксированное положительное число. Ниже будет доказана оценка $\|u(x, \varepsilon)\|_{C(\bar{\Omega}_\varepsilon)} \leq M\varepsilon^{-1} \|f(x)\|_{C^n(\bar{\Omega})}$, где n — фиксированное число, а $u(x, \varepsilon)$ — любое решение задачи (4.1) — (4.3) (лемма 4.6). Если проследить за доказательством теоремы 1.4, то нетрудно проверить, что можно получить оценку $\mathcal{L}T_N(x, \varepsilon)$ и $T_N(x, \varepsilon)|_{\partial\Omega}$ в более сильной норме. В неравенстве (4.27) вместо $\|\mathcal{L}T_N(x, \varepsilon)\|_{C(\bar{\Omega})} + \|T_N(x, \varepsilon)\|_{C(\partial\Omega)}$ можно поставить $\|\mathcal{L}T_N(x, \varepsilon)\|_{C^m(\bar{\Omega}_\varepsilon)} + \|T_N(x, \varepsilon)\|_{C^m(\partial\Omega)}$, где m — любое наперед заданное число, а оценка, быть может, лишь немного ухудшится: в правой части вместо $M\varepsilon^{(N-1)/2}$ будет стоять $M\varepsilon^{N_2}$, где $N_2 \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. Тогда функцию $T_N(x, \varepsilon)|_{\partial\Omega_\varepsilon}$ можно продолжить гладко всюду в $\bar{\Omega}$ функцией $S_N(x, \varepsilon)$ так, чтобы $\|S_N(x, \varepsilon)\|_{C^m(\bar{\Omega}_\varepsilon)} \leq M\varepsilon^{N_3}$, где $N_3 \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. Применяя лемму 4.5 к разности $T_N(x, \varepsilon) - S_N(x, \varepsilon)$, получаем оценку (4.26). ■

Лемма 4.5. *Существует постоянная $d > 0$, зависящая лишь от a^2 , такая, что для любой функции $u(x, \varepsilon) \in C^2(\bar{S}_d \setminus \omega_\varepsilon)$, удовлетворяющей условию (4.3), при всех достаточно малых ε справедлива оценка*

$$|u(x, \varepsilon)| \leq M \left(\max_{x \in S_d \setminus \omega_\varepsilon} |\mathcal{L}u(x, \varepsilon)| + \max_{|x|=d} |u(x, \varepsilon)| \right), \quad (4.28)$$

где постоянная M не зависит от ε .

Доказательство. Сделаем замену $u(x, \varepsilon) = (4d^2 - r^2) \times \times v(x, \varepsilon)$ и заметим, что $\mathcal{L}(4d^2 - r^2) = -6 + a^2(4d^2 - r^2) < -5$ при достаточно малых d и $r \leq d$. Из принципа максимума для $v(x, \varepsilon)$ вытекает (4.28). ■

Оценка (4.28) — это фактически оценка (1.22) из § 1, так что в области $S_d \setminus \omega_\varepsilon$ справедливо асимптотическое разложение решения уравнения (4.1), которое было рассмотрено в п. 2 § 1. Правда, теперь вместо нулевого условия на границе $|x| = d$ задана

функция. Однако, если эта функция равномерно гладкая относительно ε , то, продолжая ее внутрь $S_d \setminus \omega_\varepsilon$, мы сведем задачу к задаче (1.19)–(1.21). Так как функция $v_0(\xi)$ в асимптотическом разложении (1.24) удовлетворяет однородному уравнению (1.29), то она слабо зависит от граничной функции при $|x| = d$. Функция $v_0(\xi)$, как это видно из доказательства теоремы 1.3, является гармонической функцией, которая равна нулю на $\partial\omega$ и стремится к $u_0(0)$ при $\xi \rightarrow \infty$. Из теоремы 1.4 вытекает, что при $x \in S_{M\varepsilon} \setminus \omega_\varepsilon$, где M — достаточно большое, но фиксированное число, справедливы соотношения

$$u(x, \varepsilon) = v_0(\xi) + O(\varepsilon), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\omega_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \left. \frac{\partial v_0}{\partial n} \right|_{\partial\omega_\varepsilon} + O(1), \quad (4.29)$$

где оценка $O(\cdot)$ равномерна относительно значений $u(x, \varepsilon)|_{|x|=d}$, если эти значения равномерно ограничены вместе с некоторым конечным числом их производных. Теперь можно переходить и к доказательству оценки $u(x, \varepsilon)$ в области $\bar{\Omega}_\varepsilon$.

Лемма 4.6. Пусть $u(x, \varepsilon)$ — решение задачи (4.1)–(4.3). Тогда при всех достаточно малых ε справедлива оценка

$$|u(x, \varepsilon)| \leq M\varepsilon^{-1} \|f(x)\|_{C^n(\bar{\Omega})}, \quad (4.30)$$

где n — некоторое, не зависящее от ε число.

Доказательство. Допустим, что оценка (4.30) несправедлива. Тогда существует последовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0$ и $f_k(x)$ таких, что

$$\varepsilon_k^{-1} \|f_k\|_{C^n(\bar{\Omega})} \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0, \quad (4.31)$$

а для соответствующих решений $u_k(x, \varepsilon_k)$ справедливо равенство

$$\max_{\bar{\Omega}_{\varepsilon_k}} |u_k(x, \varepsilon_k)| = 1. \quad (4.32)$$

Здесь n — некоторое достаточно большое число, выбор которого будет ясен из дальнейшего.

Учитывая справедливость внутренних априорных оценок для решения уравнения (4.1) и оценок производных в областях, прилегающих к $\partial\Omega$ ([51], гл. III), выберем подпоследовательность $u_k(x, \varepsilon_k)$, которая сходится в $C^n(\mathcal{K})$ для любого компакта $\mathcal{K} \subset \subset \bar{\Omega} \setminus O$. Предельная функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}u = 0$ в $\bar{\Omega} \setminus O$, равна нулю на $\partial\Omega$ и ограничена. По теореме об устранимой особенности ([70], гл. IV) функция $u(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ и, следовательно, $u(x) = c_1 h(x)$. Можно считать, что последовательность $u_k(x, \varepsilon_k)$ совпадает с выбранной выше подпоследовательностью. Итак, $u_k(x, \varepsilon_k) \rightarrow c_1 h(x)$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно на любом компакте $\mathcal{K} \subset \subset \bar{\Omega} \setminus O$ вместе с производными до порядка n . Из леммы 4.5 и условия (4.32) следует, что $c_1 \neq 0$. Без ограничения общности будем считать $c_1 > 0$. Применим к функциям $u_k(x, \varepsilon_k)$ и $h(x)$ формулу Грина, опуская номер k у ε_k в обозначении

областей:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} f_k(x) h(x) dx = \int_{\Omega_\varepsilon} h(x) \mathcal{L}u_k(x, \varepsilon_k) dx = \int_{\partial\omega_\varepsilon} h(x) \frac{\partial u_k}{\partial n} ds.$$

Следовательно, в силу (4.31)

$$\varepsilon_k^{-1} \int_{\partial\omega_\varepsilon} h(x) \frac{\partial u_k}{\partial n} ds \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (4.33)$$

С другой стороны, в силу (4.29) этот интеграл равен

$$\varepsilon_k^{-1} \int_{\partial\omega_\varepsilon} (1 + O(\varepsilon_k)) \left(\frac{1}{\varepsilon_k} \frac{\partial v_{0,k}}{\partial n} + O(1) \right) ds = \int_{\partial\omega} \frac{\partial v_{0,k}}{\partial n} ds + O(\varepsilon_k). \quad (4.34)$$

Так как по предположению $u_k(x, \varepsilon_k) \rightarrow c_1 h(x)$ при $|x| = d$ и $k \rightarrow \infty$, то $u_{0,k}(0, \varepsilon_k) = c_{1,k} \rightarrow c_1$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, $v_{0,k}(\xi)$ — это гармонические функции, равные нулю на $\partial\omega$ и стремящиеся к $c_{1,k}$ на бесконечности, равномерно сходятся к $v_0(\xi)$. Эта гармоническая функция также равна нулю на $\partial\omega$ и стремится к $c_1 > 0$ на бесконечности. Из (4.33) и (4.34) следует, что $\int_{\partial\omega} \frac{\partial v_0}{\partial n}(\xi) ds = 0$. Так как в действительности для указанной функции $v_0(\xi)$ ее производная $\frac{\partial v_0}{\partial n}(\xi) \Big|_{\partial\omega} < 0$ ([84], § 28), то полученное противоречие доказывает лемму. ■

Следствие из леммы 4.6. Из оценки (4.30) вытекает, что решение задачи (4.1) — (4.3) единственно и, следовательно ([70], гл. IV), эта задача имеет решение при всех достаточно малых ε .

Следствие из теоремы 4.1. Ряд (4.8) является равномерным асимптотическим разложением решения $u(x, \varepsilon)$ задачи (4.1) — (4.3) при $x \in \Omega$, $r > \varepsilon^\gamma$, а ряд (4.9) является равномерным асимптотическим разложением того же решения при $r < \varepsilon^\gamma$, где γ — любое число такое, что $0 < \gamma < 1$.

Доказательство почти дословно повторяет доказательство следствия из теоремы 1.1. ■

Из теоремы 4.1 и вида рядов (4.8), (4.9) следует, что всюду в $\bar{\Omega}_\varepsilon$ справедлива оценка

$$\left| u(x, \varepsilon) - \frac{R_0}{\varepsilon} (h(x) - 1 - C(\omega) \Gamma(\xi)) - u_0(x) - v_0(\xi) + \right. \\ \left. + R_0 \left(\sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial h}{\partial x_i}(0) - \frac{C(\omega)}{r} \right) + Q_{0,0} \right| < M\varepsilon, \quad (4.35)$$

где постоянная M не зависит от x и ε , $\Gamma(\xi)$ — функция, удовлетворяющая условиям (4.24). Согласно (4.25)

$$R_0 = -\frac{1}{4\pi C(\omega)} \int_{\Omega} f(x) h(x) dx, \quad (4.36)$$

$C(\omega)$ — емкость поверхности $\partial\omega$, а функции $u_0(x)$, $v_0(\xi)$ и постоянная $Q_{0,0}$ построены выше (см. таблицу 7). Выпишем еще главный член асимптотического разложения решения $u(x, \varepsilon)$. В соответствии с (4.35)

$$u(x, \varepsilon) \sim R_0 h(x) \varepsilon^{-1}, \quad (4.37)$$

где R_0 определено формулой (4.36), в любой точке $x \in \bar{\Omega} \setminus O$. Интересно проследить за главным членом (4.37) в следующей ситуации. Пусть область Ω и правая часть $f(x)$ фиксированы. Фиксируем также собственную функцию $h^*(x)$ и форму области ω . А точку O , около которой вырезается малая область ω_ε , будем перемещать по области Ω . Тогда $h(x) = [h^*(0)]^{-1} h^*(x)$ (предполагается, что $h^*(0) \neq 0$) и главный член асимптотического разложения равен $-\frac{h^*(x)}{4\pi C(\omega_\varepsilon)} \int_{\Omega} f(x) h^*(x) [h^*(0)]^{-2} dx$, где $C(\omega_\varepsilon) =$

$= \varepsilon C(\omega)$ — это емкость поверхности $\partial\omega_\varepsilon$. Первый сомножитель не зависит от точки O , а второй сомножитель стремится к бесконечности при стремлении точки O к границе. Надо только помнить, что если точка O близка к границе $\partial\Omega$, то все-таки сначала она фиксируется, а уже затем $\varepsilon \rightarrow 0$. Рассмотрение двойной асимптотики, когда $O \rightarrow \partial\Omega$ и $\varepsilon \rightarrow 0$, требует нового исследования, которое тоже может быть проведено в рамках метода согласования асимптотических разложений, но здесь мы не будем на этом останавливаться.

В заключение рассмотрим один конкретный пример. Пусть Ω и ω — шары единичного радиуса и расстояние от центра O' шара Ω до начала координат O равно b ($0 \leq b < 1$). Пусть координаты точки O' — это $(0, 0, -b)$, $f(x) \equiv -1$ и $a^2 = \pi^2$ — первому собственному значению оператора $-\Delta$ с нулевыми граничными условиями. В этом случае можно явно выписать первые члены внешнего и внутреннего разложений.

Собственную функцию $(r_1)^{-1} \sin \pi r_1$, где $r_1 = |x - O'|$, обозначим посредством $h^*(x)$. Тогда $h(x) = h^*(x) [h^*(0)]^{-1}$. Будем последовательно проводить вычисления в том порядке, который был описан выше при построении рядов

U и V . Итак, $\tilde{u}_0(x)$ — это решение уравнения $\mathcal{L}\tilde{u}_0 = -1$, которое при $x \rightarrow 0$ имеет в качестве главного члена асимптотического разложения функцию $r^{-1}X_{0,0}$, где $X_{0,0} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} h(x) dx = -[\pi h^*(0)]^{-1} = -b(\pi \sin \pi b)^{-1}$.

Удобно представить $\tilde{u}_0(x)$ в виде суммы $u_0^*(x) + w(x)$, где

$$w(x) = X_{0,0} r^{-1} \cos \pi r - \pi^{-2}. \quad (4.38)$$

Так как $w(x)$ имеет в точке O главный член асимптотики $r^{-1}X_{0,0}$ и удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}w = -1$, то $u_0^*(x)$ — это непрерывное в Ω решение уравнения $\Delta u_0^* + \pi^2 u_0^* = 0$, которое на границе $\partial\Omega$ равно $-w(x)$. Такое решение существует в силу леммы 4.1 и определено с точностью до $ch(x)$. Его можно получить методом разделения переменных. Не приводя подробных вычислений, выпишем ответ:

$$u_0^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{r_1}} \frac{J_{n+1/2}(\pi r_1)}{J_{n+1/2}(\pi)} P_n(\cos \theta), \quad (4.39)$$

где $c_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{b}{\pi \sin \pi b} \int_{-1}^1 \cos \pi b t P_n\left(b \frac{1-t^2}{2} - t\right) dt$. Здесь

$r_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + b)^2}$ — расстояние от точки x до центра шара Ω , θ — полярный угол, так что $\cos \theta = (x_3 + b) r_1^{-1}$, $P_n(y)$ — полиномы Лежандра, а $J_\nu(y)$ — функции Бесселя. Ряд (4.39) сходится, причем для внутренних точек шара весьма быстро.

Так как ω — это единичный шар, то $\Gamma(\xi) = \rho^{-1} - 1$. Следовательно, $v_{-1}(\xi) = X_{0,0}(\rho^{-1} - 1)$, $R_0 = -X_{0,0}$, а $u_{-1}(x) = R_0 h(x) = \frac{1}{\pi} \frac{b^2}{\sin^2 \pi b} \frac{\sin \pi r_1}{r_1}$. Функция $\tilde{u}_1(x) \equiv 0$, полином $P_{1,-1}(x)$ — это $x_3 \frac{\partial u_{-1}(0)}{\partial x_3}$ (см. таблицу 7). Следовательно, $P_{1,-1}(x) = \alpha x_3$, где

$$\alpha = \frac{\sin \pi b - \pi b \cos \pi b}{\pi \sin^2 \pi b}. \quad (4.40)$$

Функция $v_0(\xi) = \alpha \xi_3 (1 - \rho^{-3})$, следовательно, $Q_{0,0} = 0$ и $u_0(x) = \tilde{u}_0(x) - (u_0^*(0) - \pi^{-2}) h(x)$. Итак, функции $u_{-1}(x)$, $u_0(x)$, $v_{-1}(\xi)$ и $v_0(\xi)$ построены. Выпишем окончательно

ную оценку: всюду в Ω_ε

$$\left| u(x, \varepsilon) - \frac{b^2 \sin \pi r_1}{\varepsilon \pi r_1 \sin^2 \pi b} - \tilde{u}_0(x) + (u_0^*(0) - \pi^{-2}) \frac{b \sin \pi r_1}{r_1 \sin \pi b} + \alpha \varepsilon_3 \rho^{-3} \right| < M\varepsilon,$$

где постоянная M не зависит от x и ε , $r_1 = [x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + b)^2]^{1/2}$, $\tilde{u}_0(x) = u_0^*(x) + w(x)$, функции $u_0^*(x)$ и

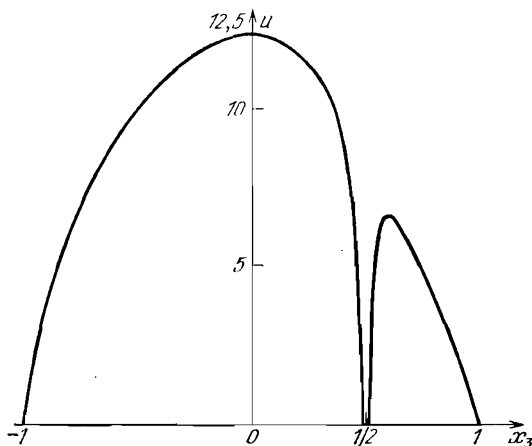


Рис. 13

$w(x)$ определены формулами (4.38), (4.39), а α — формулой (4.40).

На рис. 13 изображен график функции $u(0, 0, x_3, \varepsilon)$ при $b = 0,5$; $\varepsilon = 0,02$.

§ 5. Пример решения краевой задачи, имеющего сложную асимптотику

В предыдущих параграфах для некоторых типичных задач с сингулярными возмущениями границы области была построена равномерная асимптотика решений. Описанный выше метод согласования асимптотических разложений приводит к успеху в очень широком диапазоне подобных задач: можно рассматривать эллиптические уравнения высокого порядка, сглаженные углы и конические точки на границе, тонкие переемы и т. п. Но все-таки метод не является универсальным. Встречаются

задачи и весьма простые по постановке, где он неприменим.

Прежде всего отметим, что необходимой предпосылкой применения метода является наличие внешнего разложения. Под этим понимается существование калибровочной последовательности $v_k(\varepsilon)$, зависящей, быть может, от области Ω и коэффициентов уравнения, но не зависящей от правой части уравнения и граничных функций, такой, что в каждой внутренней точке области $\Omega \setminus \delta$ решение разлагается в асимптотический ряд типа (3.5). Оказывается, что такой последовательности $v_k(\varepsilon)$, которая позволила бы дать асимптотическое приближение решения хотя бы с точностью $O(\varepsilon)$, не существует в случае эллиптического уравнения второго порядка в трехмерной области Ω и отрезка $\sigma \subset \bar{\Omega}$, если ширина окрестности σ_ε имеет порядок ε . Анализу

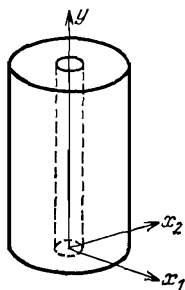


Рис. 14

этого примера и посвящен данный параграф.

Пусть Ω — это цилиндр $\{x_1, x_2, y: x_1^2 + x_2^2 < 1, 0 < y < \pi\}$, а Ω_ε — тот же цилиндр с вырезанной трубкой: $\Omega_\varepsilon = \{x_1, x_2, y: \varepsilon^2 < x_1^2 + x_2^2 < 1, 0 < y < \pi\}$ (рис. 14). Введем обозначения: $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, а σ — отрезок $\{x, y: r = 0, 0 \leq y \leq 1\}$. Краевая задача для $u(x_1, x_2, y, \varepsilon) \in C(\bar{\Omega}_\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{при } (x_1, x_2, y) \in \Omega_\varepsilon, \\ u &= 0 & \text{при } y = 0, \text{ при } y = \pi \text{ и при } r = \varepsilon, \\ u &= f(y) & \text{при } r = 1. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Пусть для простоты функция $f(y)$ состоит из конечного числа гармоник: $f(y) = \sum_{m=1}^n c_m \sin my$. Тогда решение задачи (5.1) имеет следующий вид:

$$u(x_1, x_2, y, \varepsilon) = \sum_{m=1}^n c_m \frac{I_0(mr) K_0(m\varepsilon) - I_0(m\varepsilon) K_0(mr)}{I_0(m) K_0(m\varepsilon) - I_0(m\varepsilon) K_0(m)} \sin my, \quad (5.2)$$

где $I_0(z)$ — функция Бесселя мнимого аргумента, $K_0(z)$ — функция Макдональда. Так как $I_0(m\varepsilon) = 1 + O(\varepsilon^2)$, $K_0(m\varepsilon) = \ln \frac{2}{m\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|)$, где γ — постоянная Эй-

лера ([53], § 5.7), то из (5.2) вытекает, что $u(x_1, x_2, y, \varepsilon) = \sum_{m=1}^n c_m [I_0(m)]^{-1} [I_0(mr) + \varphi_m(r) (|\ln \varepsilon| + h_m)^{-1}] \sin my + O(\varepsilon^2)$. Здесь $\varphi_m(r) = I_0(mr) K_0(m) [I_0(m)]^{-1} - K_0(mr)$, $h_m = \ln \frac{2}{m} - \gamma - K_0(m) [I_0(m)]^{-1}$. Отсюда видно, что для любой фиксированной точки из $\Omega \setminus \sigma$ не существует подходящей калибровочной последовательности $v_k(\varepsilon)$, которая давала бы приближение $O(\varepsilon)$. Более точно, для любой фиксированной точки из $\Omega \setminus \sigma$ и любой последовательности $v_k(\varepsilon) \rightarrow 0$ такой, что $v_{k+1}(\varepsilon) [v_k(\varepsilon)]^{-1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ и $v_k(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ при $k > N$, найдется такая граничная функция $f(y)$, что решение задачи (5.1) не разлагается в этой точке в асимптотический ряд по $v_k(\varepsilon)$.

Действительно, допустим противное. Тогда

$$\left| u(x_1, x_2, y, \varepsilon) - \sum_{k=0}^N d_k v_k(\varepsilon) \right| < M\varepsilon, \quad (5.3)$$

где постоянные d_k зависят от решения u . Возьмем $N+2$ целых чисел m таких, что $\sin my \neq 0$ и все h_m различны. Выберем $N+2$ различных граничных функций $f_j(y)$: каждая функция $f_j(y)$ состоит из одной гармоник $c_{mj} \sin my$, так что соответствующее решение равно $I_0(m_j r) + \varphi_{m_j}(r) [|\ln \varepsilon| + h_{m_j}]^{-1}$. Напомним, что y и r фиксированы, так что $I_0(m_j r)$, $\varphi_{m_j}(r)$ и h_{m_j} — это фиксированные числа, которые обозначим a_j , b_j и g_j соответственно. При этом все $b_j \neq 0$. Для каждого из полученных решений будут свои коэффициенты d_k , так что $a_j + b_j (|\ln \varepsilon| + g_j)^{-1} = \sum_{k=0}^N d_{k,j} v_k(\varepsilon) + O(\varepsilon)$, $j=0, 1, \dots, N+1$. Найдутся такие λ_j , не все равные нулю и такие, что $\sum_{j=0}^{N+1} \lambda_j d_{k,j} = 0$ для $k=0, 1, \dots, N$. Итак,

$$\sum_{j=0}^{N+1} \lambda_j (a_j + b_j (|\ln \varepsilon| + g_j)^{-1}) = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Следовательно, $\sum_{j=0}^{N+1} \lambda_j (a_j + b_j (|\ln \varepsilon| + g_j)^{-1}) \equiv 0$. Так как

все $b_j \neq 0$ и все g_j различны, то все $\lambda_j = 0$. Полученное противоречие доказывает невозможность (5.3).

Глава IV

ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

В этой главе будут рассматриваться краевые задачи для уравнения

$$\varepsilon \mathcal{M}u + lu = f \quad (0.1)$$

в ограниченной области Ω . Здесь $\mathcal{M}$ — эллиптический оператор, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а l — дифференциальный оператор первого порядка. Изучение асимптотики решений таких задач при $\varepsilon \rightarrow 0$ будет проводиться методом согласования асимптотических разложений. Такой подход дает возможность получить асимптотику решений с точностью до любой степени ε и равномерную в $\bar{\Omega}$ для широкого класса задач: оператор $\mathcal{M}$ может иметь высокий порядок, размерность области Ω также может быть произвольной. Весьма разнообразным может быть и вид граничных условий. Однако для простоты всюду ниже рассматриваются только плоские области Ω , оператор второго порядка $\mathcal{M}$ и первая краевая задача. Краткие замечания о других случаях имеются в конце книги.

Итак, пусть Ω — ограниченная область из $\mathbb{R}^2$ с кусочно гладкой границей, уравнение имеет вид (0.1), где

$$\mathcal{M} = a_{1,1}(x, y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2a_{1,2}(x, y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_{2,2}(x, y) \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (0.2)$$

$$l = a_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + a_2(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad a_1^2(x, y) + a_2^2(x, y) > 0.$$

Будем считать, что поле характеристик предельного уравнения $lu = f$ диффеоморфно полю параллельных прямых. Тогда после соответствующей замены независимых переменных оператор l совпадает с оператором $\partial/\partial y$. По-

этому достаточно ограничиться рассмотрением краевой задачи

$$\varepsilon \mathcal{M}u - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (0.3)$$

$$u(x, y) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (0.4)$$

где $\mathcal{M}$ — это оператор (0.2). Характеристики предельного уравнения — это прямые, параллельные оси y , а само предельное уравнение — это по существу обыкновенное дифференциальное уравнение $\frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y)$ вдоль каждого из отрезков, параллельных оси y и лежащих в $\bar{\Omega}$ (рис. 15).

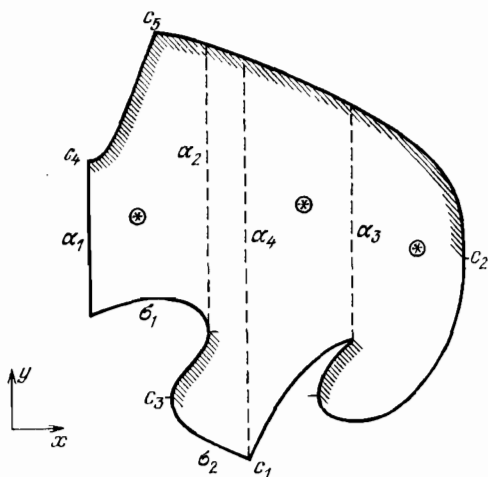


Рис. 15

Если бы оператор $\mathcal{M}$ равнялся оператору $\partial^2/\partial y^2$, то задача (0.3), (0.4) на каждом таком отрезке совпадала бы с задачей для обыкновенного дифференциального уравнения, подобной задачам, рассмотренным в § 1 гл. I (примеры 1 и 2). Переменная x являлась бы просто параметром. При этом граничное условие $u=0$ для предельной задачи сохранялось бы на нижних концах отрезков, а вблизи верхних концов отрезков появился бы экспоненциальный пограничный слой (заштрихованная область на рис. 15). Оказывается, что и для эллиптического оператора $\mathcal{M}$ картина в целом будет такой же. Легко

можно построить внешнее асимптотическое разложение всюду в Ω . Его коэффициенты $u_k(x, y)$ — гладкие функции, например, в той части области, которая на рис. 15 обозначена знаком $\otimes$. Так же легко там строятся и экспоненциально стремящиеся к нулю функции пограничного слоя. Но, вообще говоря, у коэффициентов $u_k(x, y)$ имеются различные особенности в Ω . На рис. 15 показаны типичные случаи возникновения таких особенностей. Отрезок α_1 совпадает с частью границы $\partial\Omega$, и легко видеть, что невязка в граничном условии на отрезке α_1 не может быть устранена с помощью решения обыкновенного дифференциального уравнения. На отрезках α_2 и α_3 все коэффициенты $u_k(x, y)$, вообще говоря, разрывны. Действительно, слева от отрезка α_2 $u_0(x, y)$ — это решение уравнения $\frac{\partial u_0}{\partial y} = f(x, y)$, равное нулю на σ_1 , а справа — решение того же уравнения, равное нулю на σ_2 . Такое же явление наблюдается и для отрезка α_3 . Если в точке c_1 граница негладкая, то вблизи отрезка α_4 внешнее асимптотическое разложение также не приближает решение $u(x, y, \varepsilon)$ с точностью до произвольной степени ε . Оказывается, что $u_k(x, y)$ имеют нарастающие особенности и в точке c_2 — там, где касательная к границе параллельна оси y . Отрезки типа $\alpha_1 - \alpha_4$ будем называть *особыми характеристиками задачи* (0.3), (0.4).

Таким образом, задача (0.3), (0.4) в общем случае является бисингулярной. Равномерное асимптотическое приближение решения в $\bar{\Omega}$ с точностью до произвольной степени ε можно получить, введя в рассмотрение подходящие внутренние разложения и применяя метод согласования асимптотических разложений. Ниже будут изучены типичные случаи бисингулярных задач (0.3), (0.4).

Исследование асимптотики в окрестности границы α_1 на примере одной задачи подобного вида проведено в § 1. Поведение решения в окрестности особых характеристик α_3 и α_4 изучено в § 2. Асимптотика решения в окрестности точек типа c_2 и c_3 исследована в § 3, а в окрестности особой характеристики α_2 — в § 4.

Заметим еще, что угловые точки могут находиться и на верхней части границы $\partial\Omega$ (точки c_4 и c_5). Асимптотика в окрестности такой точки, лежащей на особой границе (точка c_4), изучена в § 1. А в окрестности точки типа c_5 асимптотика решения еще проще — там надо добавить к внешнему разложению угловой пограничный

слой, по сути дела такой же, как и в примере 4 § 2 гл. I. Краткое замечание об этом будет сделано в § 5. Там же будут доказаны и некоторые вспомогательные леммы, которые используются для обоснования ф. а. р.

§ 1. Случай совпадения характеристики предельного уравнения с частью границы

1. Рассмотрим краевую задачу

$$\mathcal{L}_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - a(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$u(x, y) = 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (1.2)$$

где Ω — квадрат $\{x, y: 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, функции $a(x, y)$ и $f(x, y)$ бесконечно дифференцируемы в $\bar{\Omega}$, $a(x, y) > 0$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Эта задача — частный случай задачи (0.3), (0.4): для простоты в качестве оператора $\mathcal{M}$ взят оператор Лапласа, но все-таки, чтобы сохранить при исследовании этапы, связанные с переменностью коэффициентов, рассматривается переменный коэффициент при первой производной. Для удобства дальнейших обозначений параметр ε заменен в уравнении (1.1) на ε^2 . Особыми характеристиками предельного уравнения в задаче (1.1), (1.2) являются отрезки $\{x, y: x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$ и $\{x, y: x = 1, 0 \leq y \leq 1\}$, совпадающие со сторонами квадрата.

Внешнее разложение решения задачи (1.1), (1.2) имеет вид

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} u_{2k}(x, y), \quad (1.3)$$

где

$$a(x, y) \frac{\partial u_0}{\partial y} = -f(x, y), \quad a(x, y) \frac{\partial u_{2k}}{\partial y} = \Delta u_{2k-2}, \quad k \geq 1, \quad (1.4)$$

$$u_k(x, 0) = 0.$$

Граничное условие (1.4) выбрано по соображениям, упомянутым выше (см., например, пример 2 § 1 гл. I). Они состоят в том, что невязки, возникающие у внешнего разложения в граничных условиях, могут быть компенсированы погранслойными функциями экспоненциального типа при $y = 1$ и не могут быть компенсированы подоб-

ным образом при $y = 0$. Поэтому ряд U должен удовлетворять граничным условиям (1.2) при $y = 0$, что и приводит к последним равенствам (1.4).

Вблизи верхней стороны квадрата Ω к внешнему разложению U следует добавить ряд

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} s_{2k}(x, \tau), \quad (1.5)$$

где $\tau = \varepsilon^{-2}(1 - y)$. Подставим этот ряд в однородное уравнение $\mathcal{L}_\varepsilon S = 0$, разложим коэффициент $a(x, y) = a(x, 1 - \varepsilon^2 \tau)$ в ряд Тейлора $\left(a(x, 1 - \varepsilon^2 \tau) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x) \varepsilon^{2j} \tau^j \right)$ и получим рекуррентную систему для $s_{2k}(x, \tau)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 s_0}{\partial \tau^2} + b_0(x) \frac{\partial s_0}{\partial \tau} &= 0, \\ \frac{\partial^2 s_{2k}}{\partial \tau^2} + b_0(x) \frac{\partial s_{2k}}{\partial \tau} &= \\ &= - \frac{\partial^2 s_{2k-2}}{\partial x^2} - \sum_{j=1}^k b_j(x) \tau^j \frac{\partial s_{2k-2j}}{\partial \tau}, \quad k \geq 1. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для того чтобы сумма рядов $U + S$ удовлетворяла условию (1.2) при $y = 1$, должны быть выполнены равенства

$$s_{2k}(x, 0) = -u_{2k}(x, 1). \quad (1.7)$$

Очевидно, что существуют функции $s_{2k}(x, \tau) \in C^\infty([0, 1] \times [0, \infty))$, которые являются решением системы (1.6) с условиями (1.7) и быстро стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$.

Легко проверить, что ряд $U + S$ является ф. а. р. уравнения (1.1):

$$|\mathcal{L}_\varepsilon(A_{2n, x, y}U + A_{2n, x, \tau}S) - f(x, y)| \leq M\varepsilon^{2n+2} \text{ в } \bar{\Omega} \quad (1.8)$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned} (A_{2n, x, y}U + A_{2n, x, \tau}S)_{y=1} &= 0, \\ (A_{2n, x, y}U + A_{2n, x, \tau}S)_{y=0} &= O(e^{-\gamma/\varepsilon}), \quad \gamma > 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Таким образом, пока что никаких особенностей в коэффициентах асимптотических разложений не наблюдается и может создаться впечатление, что задача (1.1),

(1.2) относится к сравнительно простому типу задач, рассмотренных в гл. I. Однако это заключение преждевременно. Еще предстоит каким-то образом ликвидировать невязки в граничном условии (1.2) на сторонах $x=0$ и $x=1$. Так как эти стороны совершенно равноправны, то ограничимся лишь рассмотрением стороны $x=0$.

2. Вблизи стороны $x=0$ к внешнему разложению (1.3) надо добавить другой ряд, коэффициенты которого зависят от новых, растянутых переменных. Точнее, переменная y , конечно, не меняется, а вместо x вводится новая переменная $\xi = x\varepsilon^{-\alpha}$. При этом постоянную α надо выбрать так, чтобы по крайней мере два члена в однородном уравнении (1.1) имели одинаковый, и притом старший, порядок. Пусть $u(x, y, \varepsilon) \equiv v(\xi, y, \varepsilon)$. Тогда однородное уравнение (1.1) в новых переменных имеет вид

$$\varepsilon^{2-2\alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - a(\varepsilon^\alpha \xi, y) \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Так как $a(x, y) \geq \text{const} > 0$, то, очевидно, надо положить $\alpha = 1$.

Итак, во внутренних переменных $\xi = \varepsilon^{-1}x$, y уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - a(\varepsilon \xi, y) \frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \leq \xi < \infty, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

а внутреннее разложение:

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\xi, y). \quad (1.10)$$

Кроме того, сумма рядов U и V должна удовлетворять граничным условиям (1.2) при $y=0$ и при $x=\xi=0$. Учитывая это и разлагая в ряд функцию $a(\varepsilon \xi, y)$, получаем рекуррентную систему краевых задач для коэффициентов $v_k(\xi, y)$:

$$Lv_0 = 0, \quad (1.11)$$

$$Lv_k = -\frac{\partial^2 v_{k-2}}{\partial y^2} + \sum_{j=1}^k a_j(y) \xi^j \frac{\partial v_{k-j}}{\partial y}, \quad k \geq 1, \quad (1.12)$$

$$v_k(\xi, 0) = 0, \quad (1.13)$$

$$v_{2l}(0, y) = -u_{2l}(0, y), \quad v_{2l+1}(0, y) = 0. \quad (1.14)$$

Здесь $L = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - a_0(y) \frac{\partial}{\partial y}$, $a_k(y)$ — это коэффициенты ряда

Тейлора функции $a(x, y)$: $a(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(y) x^j$, $x \rightarrow 0$.

По условию $a_0(y) = a(0, y) > \text{const} > 0$, и поэтому (1.11) — (1.14) — это обычные задачи для параболических уравнений в полуполосе $\{\xi, y: 0 \leq \xi < \infty, 0 \leq y \leq 1\}$. Вследствие условия (1.13) решения $v_k(\xi, y)$ экспоненциально быстро стремятся к нулю при $\xi \rightarrow \infty$. (В этом легко убедиться, например, следующим образом. После замены переменной

y оператор L переходит в оператор $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial}{\partial y_1}$. Так что

для решения уравнения $Lv = f$ в любой полуполосе $\xi \geq \geq \text{const}$, $0 \leq y_1 \leq Y$ имеется явная формула (см., например, [96], гл. III, § 3 или ниже (1.15), (1.16)), из которой и следует быстрое стремление решения v к нулю при $\xi \rightarrow +\infty$, если тем же свойством обладает правая часть f .) Таким образом, коэффициенты ряда (1.10) не имеют особенностей при $\xi \rightarrow \infty$, что естественно, так как коэффициенты внешнего разложения (1.3) не имеют в свою очередь никаких особенностей при $x \rightarrow 0$. (На ряд S можно пока не обращать внимания, так как для всех значений y , кроме малой окрестности точки $y = 1$, его коэффициенты экспоненциально малы.)

Тем не менее трудности, характерные для бисингулярных задач, все-таки возникают в коэффициентах ряда V , но не на бесконечности, а в точке $(0, 0)$. Так как, вообще говоря, $\frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = -[a(0, 0)]^{-1} f(0, 0) \neq 0$, то в силу (1.14) и $\frac{\partial v}{\partial y}(0, y)|_{y=0} \neq 0$. С другой стороны, из урав-

нения (1.11) и условия (1.13) следует, что $\frac{\partial v}{\partial y}(\xi, 0) = [a_0(0)]^{-1} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(\xi, 0) \equiv 0$ при $\xi > 0$. Из-за этой несогласо-

ванности граничных условий $\left(\frac{\partial v}{\partial y}(0, +0) \neq \frac{\partial v}{\partial y}(+0, 0) \right)$

функция $v_0(\xi, y)$, хотя и является непрерывной всюду, но не является гладкой в точке $(0, 0)$. Можно показать, что с увеличением номера k будет происходить ухудшение гладкости у функций $v_k(\xi, y)$ в точке $(0, 0)$. Нестрогое, но по существу правильное объяснение этого явле-

ния состоит в том, что в уравнениях (1.12) в правой части находится оператор $\partial^2/\partial y^2$ от предыдущей функции, а обращение оператора L соответствует всего лишь однократному интегрированию относительно y . Только в том случае, когда выполнено бесконечно много специальных равенств в граничных условиях для каждой из функций $v_k(\xi, y)$ в точке $(0, 0)$, все функции $v_k(\xi, y)$ будут гладкими в замкнутой полосе $\{\xi, y: 0 \leq \xi < \infty, 0 \leq y \leq 1\}$ (для этого, например, достаточно, чтобы функция $f(x, y)$ и все ее производные в точке $(0, 0)$ равнялись нулю). В противном случае, начиная с некоторого номера k , у функций $v_k(\xi, y)$ возникнут особенности в точке $(0, 0)$ и порядок этих особенностей будет увеличиваться вместе с номером k . Таким образом, в целом задача (1.1), (1.2) является бисингулярной.

Посмотрим, как ведут себя функции $v_k(\xi, y)$ в случае, когда $\frac{\partial u_0}{\partial y}(0, 0) = 0$. После замены $y_1 = \int_0^y [a_0(\theta)]^{-1} d\theta$ уравнение (1.11)

переходит в уравнение $\frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi^2} - \frac{\partial v_0}{\partial y_1} = 0$. Обозначим $u_0(0, y) = -\psi(y_1)$, $v_0(\xi, y) = \bar{v}_0(\xi, y_1)$ и выпишем явную формулу для решения задачи (1.14), (1.13), (1.14):

$$\begin{aligned} \bar{v}_0(\xi, y_1) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi/2\sqrt{y_1}}^{\infty} e^{-\theta^2} \psi\left(y_1 - \frac{\xi^2}{4\theta^2}\right) d\theta = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\xi}{(y_1 - \theta)^{3/2}} e^{-\frac{\xi^2}{4(y_1 - \theta)}} \psi(\theta) d\theta. \quad (1.15) \end{aligned}$$

Для гладкой ограниченной функции $F(\xi, y_1)$ легко также написать явную формулу решения задачи $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\partial v}{\partial y_1} = F(\xi, y_1)$, $v(0, y_1) = 0$, $v(\xi, 0) = 0$:

$$\begin{aligned} v(\xi, y_1) &= \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{y_1} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{y_1 - \theta}} \left[\exp\left(-\frac{(\xi - \xi')^2}{4(y_1 - \theta)}\right) - \exp\left(-\frac{(\xi + \xi')^2}{4(y_1 - \theta)}\right) \right] \times \\ &\quad \times F(\xi', \theta) d\xi' d\theta. \quad (1.16) \end{aligned}$$

Из этих формул следует, что функции $\bar{v}_0(\xi, y_1)$ и $v(\xi, y)$ являют-

ся достаточно гладкими в полосе $\{\xi, y_1: 0 \leq \xi < \infty, 0 \leq y_1 \leq Y\}$, если функции $\psi(y_1)$ и $F(\xi, y_1)$ обращаются в нуль в начале координат вместе со своими производными достаточно высокого порядка. В противном случае эти функции в начале координат имеют особенности.

Для примера положим $a(x, y) \equiv 1$, $f(x, y) \equiv 1$. Тогда $u_0(x, y) \equiv -y$, $u_{2k}(x, y) \equiv 0$ при $k > 0$. Согласно формуле (1.15)

$$v_0(\xi, y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi/(2\sqrt{y})}^{\infty} \left(y - \frac{\xi^2}{4\theta^2} \right) e^{-\theta^2} d\theta, \quad v_1(\xi, y) \equiv 0.$$

Функция $v_2(\xi, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial v_2}{\partial y} = -\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = -\frac{\xi}{2\sqrt{\pi} y^{3/2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4y}\right)$$

и нулевыми граничными условиями. Правая часть этого уравнения имеет особенность в начале координат — на параболах $y = \text{const} \cdot \xi^2$ она имеет порядок y^{-1} . Легко проверить, что единственное ограниченное решение этой задачи: $v_2(\xi, y) =$

$= \frac{\xi}{2\sqrt{\pi y}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4y}\right)$. Правая часть уравнения для $v_4(\xi, y)$ —

функция $\frac{\xi}{2\sqrt{\pi y}} \left(-\frac{3}{4y^2} + \frac{3\xi^2}{4y^3} - \frac{\xi^4}{16y^4} \right) \exp\left(-\frac{\xi^2}{4y}\right)$ — на тех

же параболах имеет особенность типа y^{-2} . Если ее подставить в интеграл (1.16), то нетрудно заметить, что получившийся интеграл расходится. Таким образом, нельзя получить $v_4(\xi, y)$ непосредственно из формулы (1.16). Можно, правда, найти реше-

ние автомодельного типа: $v_4(\xi, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \left(-\frac{\xi^3}{8y^2} + \frac{\xi^5}{32y^3} \right) \times$
 $\times \exp\left(-\frac{\xi^2}{4y}\right)$, но это решение не единственно. К нему, например,

можно прибавить функцию $c\xi y^{-3/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4y}\right)$ с любой постоянной c . Любое решение $v_4(\xi, y)$ имеет особенность не меньше, чем y^{-1} на параболах $y = \text{const} \cdot \xi^2$. Далее, порядок особенности у функций $v_k(\xi, y)$ будет увеличиваться.

Такая же картина будет и в общем случае. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно разложить граничные функции и коэффициенты $a_i(y)$ в ряды Тейлора, для остатков воспользоваться формулами (1.15) и (1.16), а для получившихся полиномов выписать автомодельные решения, подобные тем, которые были получены выше.

Так же, как и в гл. III, мы встречаемся здесь с двумя трудностями. Во-первых, как построить решение параболического уравнения (1.12) с очень сильной сингулярностью в правой части? Ведь обычная свертка с функ-

цией Грина типа (1.16) здесь не подходит — интеграл расходится. Но это лишь техническое препятствие — его не очень трудно преодолеть тем или иным способом, фактически регуляризуя расходящиеся интегралы.

Вторая трудность более существенна. Поскольку решения уравнений (1.12) при больших k имеют сильные особенности, то в классе таких функций решение задач (1.12) — (1.14) не единственно. Действительно, пусть

$$\Gamma(\xi, y_1) = \frac{1}{\sqrt{y_1}} \exp\left(\frac{-\xi^2}{4y_1}\right), \quad y_1 = \int_0^y [a_0(\theta)]^{-1} d\theta. \quad \text{Тогда лю-}$$

бые функции вида $\frac{\partial^{2j+1}}{\partial \xi^{2j+1}} \Gamma(\xi, y_1)$ — это решения уравнения (1.11), равные нулю при $\xi = 0$ и при $y = 0$. Любую линейную комбинацию этих функций можно прибавить к решению задач (1.12) — (1.14), и вопрос о том, каковы же правильные решения, остается открытым, если исходить только из задач (1.12) — (1.14). Ответ на этот вопрос дает согласование асимптотического разложения (1.10) с новым внутренним разложением.

3. В окрестности пачала координат надо ввести новые переменные $\xi = \varepsilon^{-2}x$, $\eta = \varepsilon^{-2}y$ и искать внутреннее разложение

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} w_{2k}(\xi, \eta). \quad (1.17)$$

Выбор масштабов производится естественным образом — так, чтобы в однородном уравнении все три члена имели одинаковый порядок. Ряд (1.17) начинается с члена ε^2 , так как и решения $u(x, y, \varepsilon)$ и $u_0(x, y)$ равны нулю в начале координат. Требование к ряду (1.17) следующее: он в сумме с рядом (1.3) должен быть ф. а. р. задачи (1.1), (1.2) вблизи пачала координат. Так как ряд (1.3) является ф. а. р. уравнения (1.1) и равен нулю при $y = 0$, то ряд (1.17) должен быть ф. а. р. однородного уравнения, которое в переменных ξ, η имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - a(\varepsilon^2 \xi, \varepsilon^2 \eta) \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0. \quad (1.18)$$

Ряд (1.17) должен равняться нулю при $\eta = 0$ и, кроме того,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} w_{2k}(0, \eta) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} u_{2k}(0, \varepsilon^2 \eta) = 0.$$

Будем для простоты считать, что $a(0, 0) = 1$. Из последних двух равенств (имеющих, конечно, асимптотический характер) получаем рекуррентную систему краевых задач

$$L_1 w_2 = 0, \quad (1.19)$$

$$L_1 w_{2k} = \sum_{j=1}^{k-1} P_j(\xi, \eta) \frac{\partial w_{2k-2j}}{\partial \eta}, \quad k > 1, \quad 0 < \xi, \eta < \infty, \quad (1.20)$$

$$w_{2k}(\xi, 0) = 0, \quad w_{2k}(0, \eta) = - \sum_{j=1}^k \frac{\eta^j}{j!} \frac{\partial^j u_{2k-2j}}{\partial y^j}(0, 0). \quad (1.21)$$

Здесь $L_1 = \Delta_{\xi, \eta} - \partial/\partial \eta$, $P_j(\xi, \eta)$ — это однородные полиномы степени j , которые получаются из разложения коэффициента $a(x, y)$ в ряд Тейлора

$$a(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(x, y), \quad x \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0.$$

Следует отметить промежуточное положение ряда (1.10): разложение V является внутренним по отношению к U и внешним по отношению к разложению W .

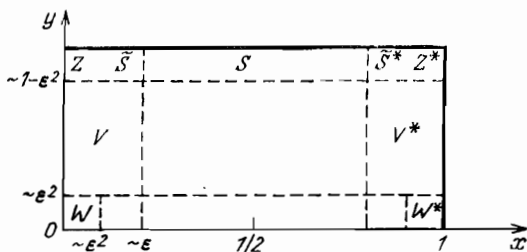


Рис. 16

Похожая ситуация наблюдалась в § 3 гл. II. Но есть и различия. Если там оба взаимодействия промежуточного разложения со своими соседями были бисингулярными, то здесь коэффициенты ряда U — гладкие функции, а коэффициенты ряда V экспоненциально быстро стремятся к нулю при $\xi \rightarrow \infty$. То есть взаимодействие между ними такое же, как в примерах гл. I. А согласование разложений V и W такое же, как и в остальных бисингулярных задачах. Кроме того, в § 3 гл. II от промежуточного разложения не требовалось ничего, кроме удовлетворения уравнению и согласования с соседями. А здесь разложение V обязано еще удовлетворять граничному условию

при $\xi = 0$. На рис. 16 показаны характерные размеры областей, где справедливы асимптотические разложения V и W .

Перейдем к исследованию задач (1.19) — (1.21). Решения $w_k(\xi, \eta)$, вообще говоря, растут на бесконечности, но, в отличие от соответствующих задач гл. III, здесь решения выписываются в явном виде посредством сходящихся интегралов. Легко проверить, что функция $-(2\pi)^{-1} K_0 \left(\frac{\sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2}}{2} \right) \exp \left(\frac{\eta - \eta_1}{2} \right)$, где K_0 — функция Макдональда, является решением уравнения $L_1 w = \delta(\xi - \xi_1, \eta - \eta_1)$ (см., например, [53], с. 140; [96], гл. VII, § 2, с. 498). Следовательно, функция

$$G(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1) = (2\pi)^{-1} \left\{ -K_0 \left(\frac{\sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2}}{2} \right) + \right. \\ \left. + K_0 \left(\frac{\sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta + \eta_1)^2}}{2} \right) + K_0 \left(\frac{\sqrt{(\xi + \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2}}{2} \right) - \right. \\ \left. - K_0 \left(\frac{\sqrt{(\xi + \xi_1)^2 + (\eta + \eta_1)^2}}{2} \right) \right\} \exp \left(\frac{\eta - \eta_1}{2} \right) \quad (1.22)$$

является функцией Грина краевой задачи для того же уравнения с граничными условиями $w(\xi, 0) = 0$, $w(0, \eta) = 0$, а функция

$$w(\xi, \eta) = \int_0^\infty \int_0^\infty G(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1) F(\xi_1, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1 - \\ - \int_0^\infty \frac{\partial G}{\partial \xi_1}(\xi, \eta, 0, \eta_1) \psi(\eta_1) d\eta_1 \quad (1.23)$$

удовлетворяет уравнению

$$L_1 w = F(\xi, \eta) \text{ при } 0 < \xi < \infty, \quad 0 < \eta < \infty \quad (1.24)$$

и граничным условиям $w(0, \eta) = \psi(\eta)$, $w(\xi, 0) = 0$.

Относительно функций $F(\xi, \eta)$ и $\psi(\eta)$ будем предполагать выполненным ряд условий, при которых формула (1.23) имеет смысл и которые выполняются для задач (1.19) — (1.21). Введем обозначения $\omega = \{\xi, \eta: 0 \leq \xi < \infty, 0 \leq \eta < \infty\}$, $\omega' = \omega \setminus \{0, 0\}$ и будем считать, что $F(\xi, \eta) \in C(\omega) \cap C^\infty(\omega')$, $\psi(\eta) \in C^\infty[0, \infty)$, $\psi(0) = 0$ и функции $F(\xi, \eta)$, $\psi(\eta)$ медленного роста, т. е. они и их производ-

ные растут на бесконечности не быстрее какой-либо степени $\xi^2 + \eta^2$. При этих предположениях из формулы (1.23) нетрудно заключить, что $w(\xi, \eta) \in C^1(\omega) \cap C^\infty(\omega')$ и является функцией медленного роста.

Теорема 1.1. *Существуют функции медленного роста $w_{2k}(\xi, \eta) \in C^1(\omega) \cap C^\infty(\omega')$, которые удовлетворяют уравнениям и граничным условиям (1.19)–(1.21). Функции $w_{2k}(\xi, \eta)$ и все их производные по модулю не превосходят величины $M \exp(-\gamma \xi)$ при $\xi \geq A\eta + 1$ для любого $A > 0$. Здесь $\gamma > 0$ зависит от A , а постоянная M , кроме того, от номера k и порядка производной.*

Доказательство вытекает непосредственно из формулы (1.23) и предыдущих замечаний относительно этой формулы. Для функции $w_2(\xi, \eta)$ утверждение справедливо. Далее по индукции проверяется, что правые части уравнений (1.20) — это функции медленного роста из класса $C(\omega) \cap C^\infty(\omega')$, которые экспоненциально быстро стремятся к нулю при $\xi \geq A\eta + 1$, $\xi \rightarrow \infty$. Из формулы (1.23) следует, что тем же свойством обладают и решения $w_{2k}(\xi, \eta)$ и, кроме того, $w_{2k}(\xi, \eta) \in C^1(\omega)$. ■

4. Далее, согласно общей схеме следует выяснить асимптотическое поведение решений $w_{2k}(\xi, \eta)$ на бесконечности и затем, исходя из условий согласования ряда (1.17) с рядом (1.10) построить ряд V .

Теорема 1.2. *Функции $w_{2k}(\xi, \eta)$ — решения задач (1.19)–(1.21) — при $\xi < \eta$ разлагаются в асимптотические ряды*

$$w_{2k}(\xi, \eta) = \eta^k \sum_{j=0}^{\infty} \eta^{-j/2} \Phi_{k,j}(\theta), \quad \eta \rightarrow \infty, \quad (1.25)$$

где $\theta = 2^{-1}\xi\eta^{-1/2}$, функции $\Phi_{k,j}(\theta) \in C^\infty[0, \infty)$ и экспоненциально быстро стремятся к нулю на бесконечности. Ряды (1.25) допускают многократное почленное дифференцирование.

Казалось бы, путь установления соотношений (1.25) очевиден — для функций $w_{2k}(\xi, \eta)$ есть явная формула (1.23), и из нее надо получить асимптотическое представление этих функций при $\eta \rightarrow \infty$. К сожалению, это не удастся сделать, так что в таком плане представление (1.23) оказывается бесполезным. В то же время оно оказывается полезным в случае, когда правая часть $F(\xi, \eta)$ и граничная функция $\psi(\eta)$ достаточно быстро стремятся к нулю при $\eta \rightarrow \infty$. При таких предположениях можно получить асимптотическое представление вида (1.25).

Поэтому задача исследования асимптотики коэффициентов $w_{2k}(\xi, \eta)$ естественным образом разбивается на два этапа. Первый из них — используя явную формулу (1.23), получить асимптотическое представление решения $w(\xi, \eta)$ в случае, когда начальные данные и правая часть задачи (1.24) быстро стремятся к нулю при $\eta \rightarrow \infty$. Второй этап — свести краевые задачи (1.19) — (1.21) для коэффициентов $w_{2k}(\xi, \eta)$ к задачам (1.24) с быстроубывающими данными, т. е. построить некоторые асимптотические ряды, частичные суммы которых с достаточно высокой степенью точности при $\eta \rightarrow \infty$ удовлетворяют уравнениям и условиям (1.19) — (1.21). Другими словами, надо построить ф. а. р. задач (1.19) — (1.21). Этот прием является общим для исследования асимптотик коэффициентов внутреннего разложения во многих задачах. Первый этап обычно проводится относительно просто, если имеется интегральное представление решения краевой задачи, в то время как второй этап в каждом конкретном случае требует определенной изобретательности и часто, в том числе и в этом параграфе, является основным.

Перейдем к реализации намеченного плана, причем в первую очередь займемся построением ф. а. р. задач (1.19) — (1.21). Фактически нам предстоит построить общую часть асимптотик функций $w_{2k}(\xi, \eta)$ при $\eta \rightarrow \infty$ и функций $v_i(\xi, y)$ при $\xi \rightarrow 0, y \rightarrow 0$. Действительно, в соответствии с условиями согласования должны быть выполнены равенства

$$A_{m, \xi, y}(A_{n, \xi, \eta} W) = A_{n, \xi, \eta}(A_{m, \xi, y} V), \quad (1.26)$$

где W и V — это ряды (1.17) и (1.10). В левой части этих равенств стоят отрезки асимптотических рядов для $w_{2k}(\xi, \eta)$ на бесконечности, а в правой части — отрезки асимптотических рядов для $v_i(\xi, y)$ в начале координат. При больших значениях η главной частью оператора $L_1 = \Delta_{\xi, \eta} - \partial/\partial\eta$ является оператор $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial}{\partial \eta}$. Этот же оператор с точностью до множителя ε^2 является главной частью оператора $L = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - a_0(y) \frac{\partial}{\partial y}$ в окрестности начала координат. Поэтому в следующем пункте сформулируем несколько вспомогательных предложений и докажем ряд лемм, касающихся сингулярных решений уравнения теплопроводности.

5. Введем обозначение $L_0 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial}{\partial \eta}$. Для любого целого n определим функцию $W_n(\xi, \eta)$ следующим образом. При $n \geq 0$ функция $W_n(\xi, \eta)$ — это решение краевой задачи

$$L_0 W_n = 0 \text{ в } \omega', \quad W_n(0, \eta) = \eta^{n/2}, \quad (1.27)$$

$$W_n(\xi, 0) = 0, \quad (1.28)$$

ограниченное для $n=0$, непрерывное в ω для $n > 0$ и медленно растущее на бесконечности.

При $n = -(2k+1)$, $k \geq 0$ полагаем $W_n(\xi, \eta) = \frac{\partial^{k+1}}{\partial \eta^{k+1}} W_1(\xi, \eta)$, а при $n = -2k$, $k > 0$ полагаем

$$W_n(\xi, \eta) = \frac{\partial^k}{\partial \eta^k} W_0(\xi, \eta), \text{ так что}$$

$$W_{-(2k+1)}(0, \eta) = \alpha_k \eta^{-(2k+1)/2} \text{ при } k \geq 0, \eta > 0, \alpha_k \neq 0,$$

$$W_{-2k}(0, \eta) = 0 \text{ при } k > 0, \eta > 0.$$

Очевидно, что при всех n функции $W_n(\xi, \eta)$ удовлетворяют уравнению (1.27) и условию (1.28).

Нетрудно убедиться, что для любого n функция $W_n(\xi, \eta) = \eta^{n/2} U_n(\theta)$, где $\theta = 2^{-1} \xi \eta^{-1/2}$, а функция $U_n(\theta) \in C^\infty[0, \infty)$ и экспоненциально стремится к нулю при $\theta \rightarrow \infty$. Для $n \geq 0$ это легко вытекает из явной формулы

$$\begin{aligned} W_n(\xi, \eta) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \frac{\xi}{(\eta - \tau)^{3/2}} \left[\exp\left(-\frac{\xi^2}{4(\eta - \tau)}\right) \right] \tau^{n/2} d\tau = \\ &= \eta^{n/2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\sigma^2} \left(1 - \frac{\theta^2}{\sigma^2}\right)^{n/2} d\sigma, \end{aligned}$$

а при отрицательных n это следует из определения функций $W_n(\xi, \eta)$ и из очевидного соотношения $\frac{\partial}{\partial \eta} (\eta^{n/2} \psi(2^{-1} \xi \eta^{-1/2})) = \eta^{n/2-1} \left[\frac{n}{2} \psi(\theta) - \frac{\theta}{2} \psi'(\theta) \right]$. (Здесь и всюду далее до конца параграфа посредством θ обозначается $2^{-1} \xi \eta^{-1/2}$.) Если дополнить это соотношение равенством $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\eta^{n/2} \psi(\theta)) = \eta^{n/2-1} \psi''(\theta)/4$, то легко видеть, что для функций $W_n(\xi, \eta)$ уравнение $L_0 W_n = 0$

эквивалентно уравнению

$$l_n U \equiv U'' + 2\theta U' - 2nU = 0 \quad (1.29)$$

для функции $U_n(\theta)$. (В частности, при $n = -k < 0$ функция $U_n(\theta)$ пропорциональна функции $H_{k-1}(\theta) \times \exp(-\theta^2)$, где $H_{k-1}(\theta)$ — полином Чебышева — Эрмита ([96], с. 704).) Отметим еще, что $U_n(\theta)$ — это единственное с точностью до множителя решение уравнения (1.29), которое экспоненциально быстро стремится к нулю на бесконечности, так как второе, линейно независимое с $U_n(\theta)$ решение ведет себя на бесконечности как θ^n ([102], § 6).

Построенные функции $W_n(\xi, \eta)$ являются, как будет ниже показано, членами асимптотического ряда на бесконечности для решения однородного уравнения $L_1 w = 0$. Но так как система (1.20) содержит неоднородные уравнения, то предстоит выяснить, как ведут себя на бесконечности решения уравнения $L_1 w = f$, где правая часть $f(\xi, \eta)$ образована из решений предыдущих уравнений, в частности из $W_n(\xi, \eta)$. Для этого удобно ввести вспомогательные классы функций.

Класс $\mathfrak{A}$ функций $u(\xi, \eta)$ образован следующим образом:

1) в него входят функции $W_n(\xi, \eta)$ при всех целых $n \geq 0$;

2) вместе с любой функцией $u \in \mathfrak{A}$ этому классу принадлежат также функции ξu и ηu ;

3) вместе с любой функцией $u \in \mathfrak{A}$ этому классу принадлежит функция медленного роста $v(\xi, \eta)$, которая является непрерывным в ω решением уравнения $L_0 v = u$ и удовлетворяет условиям

$$v(\xi, 0) = 0 \text{ при } \xi \geq 0, \quad v(0, \eta) = 0 \text{ при } \eta \geq 0. \quad (1.30)$$

Функции, которые могут быть получены указанными выше операциями, образуют класс $\mathfrak{A}$. Нетрудно заметить, что функции этого класса ограничены в начале координат.

Класс $\mathfrak{B}$ определим как множество линейных комбинаций функций вида $\frac{\partial^j u}{\partial \eta^j}(\xi, \eta)$, где $j \geq 0$, а $u(\xi, \eta) \in \mathfrak{A}$.

Функции этого класса, очевидно, равны нулю вместе со всеми производными при $\eta = 0$, $\xi > 0$, но могут иметь сильные особенности в начале координат. Класс $\mathfrak{B}$ содержит функции $W_n(\xi, \eta)$ при всех целых n . Он инвариан-

тен относительно умножения на ξ и на η , т. е. вместе с функцией $v(\xi, \eta)$ он содержит и функции $\xi v(\xi, \eta)$, $\eta v(\xi, \eta)$. Это следует из очевидных соотношений

$$\xi \frac{\partial^j u}{\partial \eta^j} = \frac{\partial^j}{\partial \eta^j} (\xi u), \quad \eta \frac{\partial^j u}{\partial \eta^j} = \frac{\partial^j}{\partial \eta^j} (\eta u) - j \frac{\partial^{j-1} u}{\partial \eta^{j-1}}.$$

Нетрудно проследить, что любая функция из класса $\mathfrak{B}$ является суммой функций вида $\eta^{r/2} \Phi(\theta)$, где r — целое число, а $\Phi(\theta)$ экспоненциально быстро стремится к нулю на бесконечности. Про слагаемое такого вида будем говорить, что оно имеет порядок $r/2$ относительно η . Подмножество всех функций из $\mathfrak{B}$, имеющих фиксированный порядок $m/2$ (m — целое число), обозначим через $\mathfrak{B}_m$.

Лемма 1.1. *Для любого целого r и любой функции $v(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_r$ существует функция $u(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_{r+2}$, которая удовлетворяет уравнению $L_0 u = v$ в области ω' , а на границе этой области — условиям (1.30).*

Доказательство легко вытекает из определения классов $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_r$. Действительно, по условию леммы функция $v(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_r \subset \mathfrak{B}$ и, следовательно, $v(\xi, \eta) = \frac{\partial^j w}{\partial \eta^j}(\xi, \eta)$, где $w \in \mathfrak{A}$, $j \geq 0$. По свойству класса $\mathfrak{A}$ существует функция $\tilde{w}(\xi, \eta) \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющая условиям (1.30) и такая, что $L_0 \tilde{w} = w(\xi, \eta)$. Функция $u = \frac{\partial^j \tilde{w}}{\partial \eta^j}(\xi, \eta)$, принадлежащая по построению классу $\mathfrak{B}$, удовлетворяет уравнению $L_0 u = v$ и условиям (1.30). Нетрудно проверить, что эта функция имеет порядок $1 + r/2$ относительно η ■.

Лемма 1.2 (о существовании ф. а. р.). *Пусть $\psi(\eta)$ — многочлен степени n , а функция $F(\xi, \eta)$ при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$ разлагается в асимптотический ряд вида*

$$F(\xi, \eta) = \sum_{j=-2n+2}^{\infty} f_j(\xi, \eta), \quad (1.31)$$

где $f_j(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_{-j}$. Тогда при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$ существует ф. а. р. задачи

$$L_1 v \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) v = F(\xi, \eta), \quad \xi > 0, \quad \eta > 0, \quad (1.32)$$

$$v(0, \eta) = \psi(\eta), \quad \eta > 0, \quad v(\xi, 0) = 0, \quad \xi > 0,$$

имеющее вид

$$v(\xi, \eta) = \sum_{j=-2n}^{\infty} v_j(\xi, \eta), \quad (1.33)$$

где $v_j(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_{-j}$.

Доказательство. Если функция $v(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_{-j}$, то $L_0 v \in \mathfrak{B}_{-j-2}$, а $\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \in \mathfrak{B}_{-j-4}$. Поэтому в результате применения оператора L_1 к члену ряда (1.33) получим соотношение $L_1 v_j = w_{j+2} + u_{j+4}$, где обозначено $w_{j+2} = L_0 v_j \in \mathfrak{B}_{-j-2}$, $u_{j+4} = \frac{\partial^2 v_j}{\partial \eta^2} \in \mathfrak{B}_{-j-4}$. Подставляя предполагаемое ф. а. р. (1.33) в уравнение (1.32), получим формальное равенство

$$\sum_{j=-2n}^{\infty} w_{j+2} + \sum_{j=-2n}^{\infty} u_{j+4} = \sum_{j=-2n+2}^{\infty} f_j.$$

Приравнивая слагаемые одного порядка, получаем равенства $w_{-2n+2} = f_{-2n+2}$, $w_{-2n+3} = f_{-2n+3}$, $w_{-2n+4} + u_{-2n+4} = f_{-2n+4}$, ..., $w_{-2n+k} + u_{-2n+k} = f_{-2n+k}$, ..., или, что то же самое,

$$L_0 v_{-2n} = f_{-2n+2}, \quad L_0 v_{-2n+1} = f_{-2n+3},$$

$$L_0 v_{-2n+k} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} v_{-2n+k-2} = f_{-2n+k-2}, \quad k > 1.$$

Будем последовательно применять к получившимся уравнениям относительно $v_{-2n+k}(\xi, \eta)$ лемму 1.1, добавляя для четных $2n - k \geq 0$ функции $\beta_k W_{2n-k}(\xi, \eta)$ так, чтобы удовлетворить условию (1.32) при $\xi = 0$. Построенный таким образом ряд (1.33) является, в силу свойств функций из класса $\mathfrak{B}$, искомым ф. а. р. ■

Теперь уже справедливость теоремы 1.2 не должна вызывать сомнений. Члены рядов (1.25) — это, очевидно, построенные выше функции из класса $\mathfrak{B}$, а доказательство сводится к последовательному применению леммы 1.2 к каждому из уравнений (1.19), (1.20). Однако строгое обоснование потребует еще некоторых усилий для исследования краевой задачи (1.24) с $\psi \equiv 0$ и функцией $F(\xi, \eta)$, быстро стремящейся к нулю на бесконечности.

Лемма 1.3. Пусть функция $v(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_r$, где r — целое число, функция $u(\xi, \eta)$ имеет вид $\eta^{r/2+1} \Phi(\theta)$ и удовлетворяет уравнению $L_0 u = v$ в ω' , а $\Phi(\theta) \in C^\infty[0, \infty)$ экспоненциально быстро стремится к нулю при $\theta \rightarrow \infty$. Тогда $u(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_{r+2}$.

Доказательство. Согласно лемме 1.1 построим функцию $\tilde{u}(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_{r+2}$ — решение уравнения $L_0 \tilde{u} = v$, удовлетворяющее условию (1.30). Функция $u_1(\xi, \eta) = u(\xi, \eta) - \tilde{u}(\xi, \eta)$ удовлетворяет уравнению $L_0 u_1 = 0$ в области ω' и равна $\eta^{r/2+1} U(\theta)$. Функция $U(\theta)$ удовлетворяет уравнению (1.29) при $n = r + 2$ и экспоненциально быстро стремится к нулю на бесконечности. Следовательно, $\eta^{(r+2)/2} U(\theta) = \beta W_{r+2}(\xi, \eta)$. ■

Посредством D^k будем обозначать любой из операторов дифференцирования по ξ и η порядка k .

Лемма 1.4. Пусть функции $\psi(\eta) \in C^\infty[0, \infty)$ и $F(\xi, \eta) \in C^\infty(\omega)$ удовлетворяют неравенствам

$$|D^k \psi(\eta)| \leq M_k \eta^{-N} \quad \text{при } \eta \geq 0, \quad (1.34)$$

$$|D^k F(\xi, \eta)| \leq M_k \eta^{-N} \quad \text{в } \omega,$$

$$|D^k F(\xi, \eta)| \leq M_k \exp(-\gamma \xi) \quad \text{при } \eta \leq A\xi, \quad (1.35)$$

где $k \geq 0$ — любое целое, N — достаточно большое фиксированное число, $A > 0$ произвольно и постоянные γ и M_k зависят от A . Тогда функция (1.23) — решение краевой задачи (1.24) — удовлетворяет неравенствам

$$|D^k w(\xi, \eta)| \leq \bar{M}_k \exp(-\gamma_1 \xi) \quad \text{при } \eta \leq A_1 \xi, \quad \xi^2 + \eta^2 > 1, \quad \gamma_1 > 0, \quad (1.36)$$

где $k \geq 0$ — любое целое, а соотношение между A_1 , γ_1 и $\bar{M}_k$ то же, что и выше между A , γ и M_k . Функция (1.23) допускает следующее асимптотическое представление:

$$D^k w(\xi, \eta) = D^k \left\{ \sum_{j=0}^{N_1} \eta^{-1/2-j/2} \Phi_j(\theta) \right\} + O(\eta^{-N_1}). \quad (1.37)$$

Здесь $k \geq 0$ — любое целое, N_1 — достаточно большое число, зависящее от N и такое, что $N_1 \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, $\theta = 2^{-1} \xi \eta^{-1/2}$, а $\Phi_j(\theta) \in C^\infty[0, \infty)$ и экспоненциально быстро стремятся к нулю на бесконечности.

Доказательство. Функция $w(\xi, \eta)$, определенная равенством (1.23), — это сумма двух интегралов, где в первом из них $G(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1)$ является суммой четырех функций (1.22), а во вто-

ром $\frac{\partial G}{\partial \xi_1}(\xi, \eta, 0, \eta_1)$ является суммой двух функций. Таким обра-

зом, интеграл (1.23) естественно представить в виде суммы шести интегралов и для каждого из них доказать соотношения (1.36), (1.37). Все эти интегралы однотипны, и мы ограничимся лишь рассмотрим одним из них:

$$\tilde{w}(\xi, \eta) = \int_0^\infty \int_0^\infty K_0 \left(\sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2} / 2 \right) e^{-\frac{\eta - \eta_1}{2}} F(\xi_1, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1. \quad (1.38)$$

Остальные интегралы исследуются так же или немного проще. Так как плотность $F(\xi_1, \eta_1)$ быстро стремится к нулю на бесконечности, то, грубо говоря, функция $\tilde{w}(\xi, \eta)$ ведет себя на бес-

конечности так же, как ядро $K_0 \left(\sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2/2} \right) e^{\frac{\eta - \eta_1}{2}}$ при фиксированных ξ_1, η_1 . Поэтому прежде всего надо выяснить асимптотику этого ядра. Известно ([53], с. 157), что при $r \rightarrow \infty$ справедлива асимптотика

$$K_0(r/2) = r^{-1/2} e^{-r/2} \sum_{j=0}^{\infty} c_j r^{-j}. \quad (1.39)$$

Обозначая $r = \sqrt{t^2 + \tau^2}$, рассмотрим интересующую нас функцию $K_0(r/2) e^{\tau/2}$. Для любого $A > 0$ при $t > A\tau$, $r > 1$ из (1.39) следует, что

$$\begin{aligned} K_0(r/2) e^{\tau/2} &\leq M \exp \frac{\tau - r}{2} = M \exp \left(-\frac{t^2}{2(r + \tau)} \right) \leq \\ &\leq M \exp \left(-\frac{t^2}{2 \left(\frac{t}{A} + \frac{t \sqrt{1 + A^2}}{A} \right)} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|K_0(r/2) e^{\tau/2}| < M e^{-\gamma_2 t} \quad (1.40)$$

и аналогичные оценки справедливы для производных от левой части этого неравенства.

При фиксированном t и при $\tau \rightarrow \infty$ ядро $K_0(r/2) e^{\tau/2}$ стремится к нулю медленно, и надо найти его асимптотическое разложение. Главное при этом — преобразовать показатель экспоненты в асимптотическом разложении функции $K_0(r/2) e^{\tau/2}$ с учетом (1.39):

$$-\frac{r}{2} + \frac{\tau}{2} = -\frac{t^2}{2(r + \tau)} = -\frac{t^2}{4\tau} + \frac{t^4}{4\tau(\tau + r)^2}. \quad \text{Итак,}$$

$$K_0(r/2) e^{\tau/2} = e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \left[\sum_{j=0}^{\infty} c_j r^{-\frac{1}{2}-j} \right] \exp \frac{t^4}{4\tau(\tau + r)^2}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.41)$$

Из этого разложения и из оценки (1.40) уже нетрудно получить оценки (1.36) и асимптотическое разложение (1.37) для функции $\tilde{w}(\xi, \eta)$.

При выводе оценки (1.36) достаточно в интеграле (1.38) разбить область интегрирования на область, где $\xi_1^2 + \eta_1^2 \leq 1$, а оставшуюся часть квадранта ω разделить на множество, где $\eta_1 \leq \leq 2A_1\xi$, и множество, где $\eta_1 > 2A_1\xi$. Если учесть оценки (1.35),

$$(1.40), \text{ а также то обстоятельство, что ядро } K_0(r/2) \exp \frac{\eta - \eta_1}{2} \text{ —}$$

локально интегрируемая функция, то получится оценка (1.36) при $k = 0$. Для получения первых производных от $\tilde{w}(\xi, \eta)$ достаточно продифференцировать (1.38) под знаком интеграла. Далее можно, интегрируя по частям, «перебросить» производные с ядра на плотность $F(\xi_1, \eta_1)$ и затем снова продифференцировать один раз

под знаком интеграла. Продолжая этот процесс, можно получить выражения для $D^k \tilde{w}(\xi, \eta)$ в виде интегралов того же вида, что и (1.38), и подобных ему интегралов по полуосям $\xi_1 = 0$, $\eta_1 \geq 0$ и $\eta_1 = 0$, $\xi_1 \geq 0$. Таким образом, устанавливаются оценки (1.36) для всех k .

При выводе асимптотического разложения (1.37) достаточно, в силу оценок (1.36), рассмотреть лишь $\xi = o(\eta)$. При этом также надо разбить область интегрирования в (1.38) на несколько частей. Интегралы по области $\eta_1 \geq \eta^\beta$, где $0 < \beta < 1/2$, а также по области $\eta_1 \leq \eta^\beta$, $\xi_1 \geq \eta^\beta$ малы в силу свойств (1.34), (1.35) функции $F(\xi, \eta)$. А в оставшемся интеграле надо использовать асимптотическое разложение (1.41), где $t = \xi - \xi_1$, $\tau = \eta - \eta_1$, учитывая, что $0 \leq \xi_1 \leq \eta^\beta$, $0 \leq \eta_1 \leq \eta^\beta$. Переходя от переменных ξ, η к переменным $\theta = 2^{-1} \xi \eta^{-1/2}$, η , получим равенства

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2} = \\ &= \eta (1 - \eta_1 \eta^{-1}) \{1 + (1 - \eta_1 \eta^{-1})^{-2} (2\theta \eta^{-1/2} - \xi_1 \eta^{-1})^2\}^{1/2}, \\ -\frac{t^2}{4\tau} &= -\frac{(\xi - \xi_1)^2}{4(\eta - \eta_1)} = \\ &= -\theta^2 + (1 - \eta_1 \eta^{-1})^{-1} \{-\theta^2 \eta_1 \eta^{-1} + \theta \xi_1 \eta^{-1/2} - \xi_1^2 \eta^{-1}\}, \\ \frac{t^4}{4\tau(r + \tau)^2} &= \frac{(\xi - \xi_1)^4}{4(\eta - \eta_1)(r + \eta - \eta_1)^2} = \\ &= \frac{(2\theta - \xi_1 \eta^{-1/2})^4}{4\eta(1 - \eta_1 \eta^{-1})^3} \left\{1 + \frac{r}{\eta} \left(1 - \frac{\eta_1}{\eta}\right)^{-1}\right\}^{-2}. \end{aligned}$$

Таким образом, каждый член ряда (1.41) равен

$$\eta^{-j/2} e^{-\theta^2} \varphi_j \left(\frac{\theta^2}{\sqrt{\eta}}, \frac{\eta_1}{\sqrt{\eta}}, \frac{\xi_1 \theta}{\sqrt{\eta}}, \frac{\xi_1}{\sqrt{\eta}}, \frac{1}{\sqrt{\eta}} \right),$$

где φ_j — гладкие функции в начале координат. Разлагая эти функции в ряды Тейлора с остаточными членами и интегрируя выражение (1.38) по оставшейся области $\{\xi_1, \eta_1: 0 \leq \xi_1 \leq \eta^\beta, 0 \leq \eta_1 \leq \eta^\beta\}$, приходим к асимптотическому разложению (1.37) при $k = 0$. При остальных k асимптотики (1.37) получаются после дифференцирования интеграла (1.38) так, как это указано выше, и применения предыдущей процедуры к получившимся интегралам. ■

Доказательство теоремы 1.2 легко вытекает из лемм 1.2—1.4. Построим, согласно лемме 1.2, асимптотический ряд вида (1.33) для функции $w_2(\xi, \eta)$ — решения задачи (1.19), (1.21). Члены этого ряда имеют сильные особенности в начале координат. Поэтому рассмотрим функцию $w_{2,N}(\xi, \eta) = \chi(\xi, \eta) \tilde{w}_{2,N}(\xi, \eta)$, где $\tilde{w}_{2,N}(\xi, \eta)$ — частичная сумма указанного ряда, а $\chi(\xi, \eta) \in C^\infty(\omega)$ — срезающая функция, которая равна нулю в окрестно-

сти начала координат и единице вне некоторого компакта. По построению $L_1 w_{2,N} = F_{2,N}(\xi, \eta)$, где функция $F_{2,N}(\xi, \eta)$ удовлетворяет условиям леммы 1.4, а функция $w_{2,N}(0, \eta) = w_2(0, \eta)$ финитна. Построим функцию $w_{2,N}^*(\xi, \eta)$ — решение задачи (1.24) с $F(\xi, \eta) = F_{2,N}(\xi, \eta)$, $\varphi(\eta) = w_{2,N}(0, \eta) - w_2(0, \eta)$ и применим к ней лемму 1.4:

$$w_{2,N}^*(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^{N_1} \eta^{-1/2-j/2} \Phi_j(\theta) + o(\eta^{-N_1}).$$

Разность $w_{2,N}(\xi, \eta) - w_{2,N}^*(\xi, \eta)$ удовлетворяет тому же уравнению и тем же граничным условиям, что и функция $w_2(\xi, \eta)$. Следовательно, $w_2(\xi, \eta) = w_{2,N}(\xi, \eta) - w_{2,N}^*(\xi, \eta)$. Так как N_1 произвольно велико, то для функции $w_2(\xi, \eta)$ утверждение теоремы 1.2 доказано: она разлагается в ряд (1.25) или, что то же самое, в ряд (1.33):

$$w_2(\xi, \eta) = \sum_{j=-2}^{\infty} v_{2,j}(\xi, \eta), \quad \eta \rightarrow \infty,$$

где $v_{2,j}(\xi, \eta) = \eta^{-j/2} \Phi_{2,j}(\theta)$. Вследствие уравнения $L_1 w_2 = 0$ функции $v_{2,j}(\xi, \eta)$ удовлетворяют системе рекуррентных уравнений

$$L_0 v_{2,-2} = 0, \quad L_0 v_{2,-1} = 0, \quad L_0 v_{2,j} = -\frac{\partial^2 v_{2,j-2}}{\partial \eta^2}, \quad j > -1.$$

Согласно лемме 1.3 все функции $v_{2,j} \in \mathfrak{D}_{-j}$.

Далее доказательство продолжается по индукции. Если равенства (1.25) справедливы для всех w_{2i} при $i < n$, то в уравнении (1.20) правая часть $F_n(\xi, \eta)$ также разлагается в ряд (1.31). Далее строятся, согласно лемме 1.2, ф. а. р. задачи (1.20), (1.21) и функция $w_{n,N}(\xi, \eta)$ — произведение его частичной суммы на срезающую функцию $\chi(\xi, \eta)$. Следующий этап — построение функции $w_{n,N}^*$ — решения задачи (1.24) с $F(\xi, \eta) = L w_{n,N} - F_{n,N}(\xi, \eta)$, $\psi(\eta) = w_{n,N}(0, \eta) - w_{2n}(0, \eta)$. Затем к функции $w_{n,N}^*$ применяется лемма 1.4, а к функции $w_{2n}(\xi, \eta) = w_{n,N}(\xi, \eta) - w_{n,N}^*(\xi, \eta)$ — лемма 1.3. Тем самым соотношение (1.25) доказано для $w_{2n}(\xi, \eta)$. ■

Прежде, чем приступить к построению ряда V , проверим, что полученный ряд W (см. (1.17)) является ф. а. р. задачи, поставленной в начале п. 3 этого параграфа. А именно, надо проверить, что $A_{2N,\xi,\eta} W$ приближенно удовлетворяет (1.18), условию $A_{2N,\xi,\eta} W|_{\xi=0} + A_{2N,x,\eta} W|_{x=0} = 0$ и равенству нулю при $\eta = 0$. Последнее равенство выполнено точно в силу первого из условий (1.21). Второе равенство в (1.21) приводит к со-

ОТНОШЕНИЯМ.

$$\begin{aligned}
A_{2N,\xi,\eta} W|_{\xi=0} + A_{2N,x,y} U|_{x=0} &= \\
&= \sum_{k=0}^N \varepsilon^{2k} u_{2k}(0, \eta) + \sum_{k=0}^N \varepsilon^{2k} u_{2k}(0, \varepsilon^2 \eta) = \\
&= \sum_{k=0}^N \varepsilon^{2k} \left[u_{2k}(0, \varepsilon^2 \eta) - \sum_{j=0}^{N-k} \frac{\varepsilon^{2j} \eta^j}{j!} \frac{\partial^j u_{2k}(0, 0)}{\partial y^j} \right] = \\
&= O(\varepsilon^{2N+2}(\eta+1)^{N+1}). \quad (1.42)
\end{aligned}$$

Из уравнений (1.19), (1.20) следует, что

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\varepsilon(A_{2N,\xi,\eta} W) &= \\
&= \varepsilon^{-2} \left(\Delta_{\xi,\eta}(A_{2N,\xi,\eta} W) - a(\varepsilon^2 \xi, \varepsilon^2 \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} A_{2N,\xi,\eta} W \right) = \\
&= \varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^N \left[-a(\varepsilon^2 \xi, \varepsilon^2 \eta) + \sum_{j=0}^{N-k} P_j(\varepsilon^2 \xi, \varepsilon^2 \eta) \right] \varepsilon^{2k} \frac{\partial w_{2k}}{\partial \eta}. \quad (1.43)
\end{aligned}$$

Это равенство еще будет использовано ниже, а пока что из него легко следует, что W является ф. а. р. однородного уравнения при не очень больших значениях η . Действительно, из асимптотического разложения (1.25) следует, в частности, что $\left| \frac{\partial w_{2k}}{\partial \eta} \right| \leq M(1+\eta)^{k-1} \exp\left(-\delta \frac{\xi}{\sqrt{\eta}}\right)$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}_\varepsilon A_{2N,\xi,\eta} W| &\leq \\
&\leq \varepsilon^{-2} M \sum_{k=0}^N \varepsilon^{2(N-k)+2} (1 + \xi^{N-k+1} + \eta^{N-k+1}) \varepsilon^{2k} (1 + \eta)^{k-1} \times \\
&\quad \times \exp(-\delta \theta) \leq M \varepsilon^{2N} (1 + \eta^N) \exp(-\delta \theta). \quad (1.44)
\end{aligned}$$

6. Асимптотика (1.25) функций $w_{2k}(\xi, \eta)$ и условия согласования (1.26) дают теперь возможность окончательно определить функции $v_k(\xi, y)$ — решения системы (1.11) — (1.14). Для наглядности воспользуемся таблицей согласования, отметив, что при замене $y = \varepsilon^2 \eta$, $\xi = \varepsilon \xi$ переменная θ сохраняет свое значение: $\theta = \frac{\xi}{2\sqrt{\eta}} = \frac{\xi}{2\sqrt{y}}$.

В данной задаче таблица 8 имеет весьма простой характер ввиду отсутствия логарифмических членов. Повидимому, нет нужды объяснять ее содержание — она

Т а б л и ц а 8

$\begin{matrix} W \\ V \end{matrix}$	$w_0(\xi, \eta)$	$\varepsilon^2 w_2(\xi, \eta)$	$\varepsilon^4 w_4(\xi, \eta)$	...
$v_0(y, \zeta)$	$\Phi_{0,0}(\theta)$	$\varepsilon^2 \eta \Phi_{2,0}(\theta)$	$\varepsilon^4 \eta^2 \Phi_{4,0}(\theta)$	...
(V_0)	$\Phi_{0,0}(\theta)$	$y \Phi_{2,0}(\theta)$	$y^2 \Phi_{4,0}(\theta)$	...
$\varepsilon v_1(y, \zeta)$	$\eta^{-1/2} \Phi_{0,1}(\theta)$	$\varepsilon^2 \eta^{1/2} \Phi_{2,1}(\theta)$	$\varepsilon^4 \eta^{3/2} \Phi_{4,1}(\theta)$	...
(εV_1)	$\varepsilon y^{-1/2} \Phi_{0,1}(\theta)$	$\varepsilon y^{1/2} \Phi_{2,1}(\theta)$	$\varepsilon y^{3/2} \Phi_{4,1}(\theta)$	...
$\varepsilon^2 v_2(y, \zeta)$	$\eta^{-1} \Phi_{0,2}(\theta)$	$\varepsilon^2 \Phi_{2,2}(\theta)$	$\varepsilon^4 \eta \Phi_{4,2}(\theta)$	...
$(\varepsilon^2 V_2)$	$\varepsilon^2 y^{-1} \Phi_{0,2}(\theta)$	$\varepsilon^2 \Phi_{2,2}(\theta)$	$\varepsilon^2 y \Phi_{4,2}(\theta)$	...
...	...	...	...	...

совершенно аналогична предыдущим таблицам. Отметим только, что по горизонтальным строчкам, в нижних половинках клеток, пока еще стоят не асимптотические ряды для функций $\varepsilon^i v_i(\zeta, y)$, а формальные ряды $\varepsilon^i V_i(\zeta, y)$, где

$$V_i(\zeta, y) = y^{-i/2} \sum_{j=0}^{\infty} y^j \Phi_{j,i}(\theta), \quad y \rightarrow 0. \quad (1.45)$$

Теорема 1.3. *Существуют функции $v_i(\zeta, y)$ — решение системы (1.11) — (1.14), которые имеют асимптотическое разложение (1.45). Следовательно, для построенных таким образом рядов (1.10) и (1.17) справедливо условие согласования (1.26).*

Доказательство. Прежде всего, как и в предыдущих примерах, надо убедиться в том, что ряды (1.45) — это ф. а. р. системы (1.11) — (1.14). Для этого воспользуемся равенством (1.43). Обозначим правую часть этого соотношения посредством

$F_N(\xi, \eta, \varepsilon)$ и к равенству

$$\varepsilon^{-2} \left[\Delta_{\xi, \eta} (A_{2N, \xi, \eta} W) - a(\varepsilon^2 \xi, \varepsilon^2 \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} A_{2N, \xi, \eta} W \right] = F_N(\xi, \eta, \varepsilon)$$

применим оператор $A_{N, y, \zeta}$. В левой части равенства надо воспользоваться асимптотическими разложениями (1.25) и перейти к переменным y, ζ . В результате получим равенство

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \Delta_{x, y} \left(\sum_{j=0}^{N-2} B_{N-j/2} V_j(\zeta, y) \varepsilon^j \right) - \\ & - \sum_{j=0}^N \varepsilon^j \sum_{s=0}^j \zeta^{j-s} a_{j-s}(y) \frac{\partial}{\partial y} B_{N-s/2} V_s(\zeta, y) = A_{N, y, \zeta} F_N(\xi, \eta, \varepsilon). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Для вычисления $A_{N, y, \zeta} F_N$ надо также заменить функции $w_{2k}(\xi, \eta)$ их асимптотическими рядами (1.25) так, что

$$\begin{aligned} F_N(\xi, \eta, \varepsilon) &= \varepsilon^{-2} \sum_{h=1}^N \left[-a(\varepsilon \zeta, y) + \sum_{j=0}^{N-h} P_j(\varepsilon \zeta, y) \right] \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\varepsilon^{2h} \eta^h \sum_{j=0}^{\infty} \eta^{-j/2} \Phi_{h,j}(\theta) \right] = \\ &= -\varepsilon^{-2} \sum_{h=1}^N \left\{ \sum_{j=0}^{N-h} (\varepsilon \zeta)^j \left[a_j^\varepsilon(y) - \sum_{s=0}^{N-h-j} \frac{y^s}{s!} \frac{d^s a_j(0)}{dy^s} \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{j=N-h+1}^{\infty} (\varepsilon \zeta)^j a_j(y) \right\} \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left[y^h \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y^{-j/2} \Phi_{h,j}(\theta) \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, $A_{N, \zeta, y} F_N(\xi, \eta, \varepsilon) = \sum_{p=0}^N \varepsilon^p \varphi_{p,N}(\zeta, y)$, где

$$\begin{aligned} \varphi_{p,N}(\zeta, y) &= - \sum_{l=0}^p \sum_{k=1}^{N-l} \zeta^l \left(a_l(y) - \right. \\ & - \sum_{s=0}^{N-h-l} \frac{y^s}{s!} \frac{d^s a_l(0)}{dy^s} \left. \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(y^{h-\frac{p-l}{2}} \Phi_{h,p-l} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{y}} \right) \right) - \\ & - \sum_{l=0}^p \sum_{k=N-l+1}^N \zeta^l a_l(y) \frac{\partial}{\partial y} \left(y^{h-\frac{p-l}{2}} \Phi_{h,p-l} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{y}} \right) \right). \end{aligned}$$

Из явного вида $\varphi_{p,N}(\zeta, y)$ и из свойств функций $\Phi_{h,j}(\theta)$ следу-

ст, что

$$\varphi_{p,N}(\zeta, y) = O\left(y^{N-p/2} \exp\left(-\gamma \frac{\zeta}{\sqrt{y}}\right)\right), \quad \gamma > 0.$$

Таким образом, из (1.46) вытекает, что частичные суммы $B_{N-j/2}V_j(\zeta, y)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, которая отличается от системы (1.11), (1.12) лишь правыми частями, быстро стремящимися к нулю при $y \rightarrow 0$:

$$L(B_NV_0) = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}(B_NV_0) - a_0(y) \frac{\partial}{\partial y}(B_NV_0) = \varphi_{0,N}(\zeta, y),$$

$$L(B_{N-1/2}V_1) = \zeta a_1(y) \frac{\partial}{\partial y}(B_NV_0) + \varphi_{1,N}(\zeta, y) \text{ и т. д.}$$

Кроме того, по построению функции $B_{N-j/2}V_j$ удовлетворяют условию (1.13), а на другой части границы $B_{N-j/2}V_j(0, y) = v_j(0, y) + O(y^{N-j/2})$. Иными словами, ряды $V_j(\zeta, y)$ являются ф. а. р. системы (1.11)–(1.14).

Теперь построение решений $v_i(\zeta, y)$ легко провести, применяя к невязкам явные формулы (1.15) и (1.16). Действительно, определим, например, функцию $v_0(\zeta, y)$ как сумму B_NV_0 и решения $\tilde{v}_N(\zeta, y)$ задачи $L\tilde{v}_N = -\varphi_{0,N}(\zeta, y)$, $\tilde{v}_N(\zeta, 0) = 0$, $\tilde{v}_N(0, y) = v_0(0, y) - B_NV_0(0, y)$. Функцию $\tilde{v}_N(\zeta, y)$ построим по формулам (1.15), (1.16). Ясно, что $B_NV_0(\zeta, y) + \tilde{v}_N(\zeta, y)$ удовлетворяет уравнению (1.11) и условиям (1.13), (1.14). Ясно также, что эта сумма не зависит от N и является искомой функцией $v_0(\zeta, y)$.

Далее, применяя последовательно тот же прием к уравнению (1.12), по индукции приходим к заключению теоремы. ■

Теорема 1.4. *Составное асимптотическое разложение*

$$T_N(x, y, \varepsilon) = A_{2N, \zeta, y}V + A_{2N, \zeta, \eta}W - A_{2N, \zeta, y}(A_{2N, \zeta, \eta}W), \quad (1.47)$$

где V и W — это ряды (1.10) и (1.17), приближенно удовлетворяет однородному уравнению $\mathcal{L}_\varepsilon T_N = 0$ в квадрате Ω и граничным условиям $T_N(x, 0, \varepsilon) = 0$, $T_N(0, y, \varepsilon) = -U|_{x=0}$, где U — ряд (1.3). Более точно, существуют постоянные $\gamma > 0$, $\delta > 0$ такие, что

$$|\mathcal{L}_\varepsilon T_N| < M\varepsilon^{\gamma N} \exp(-\delta\theta) \text{ при } (x, y) \in \Omega, \quad (1.48)$$

$$T_N(x, 0, \varepsilon) = 0, \quad (1.49)$$

$$|T_N + A_{2N, x, y}U|_{x=0} < M\varepsilon^{\gamma N} \text{ при } 0 \leq y \leq 1. \quad (1.50)$$

Доказательство. Условие (1.49) выполнено согласно построению функций $v_k(\zeta, y)$ и $w_{2k}(\zeta, \eta)$ (см. (1.13) и (1.21)). В силу условий согласования рядов (1.10) и (1.17), если $y \leq \varepsilon$,

то

$$A_{2N, \zeta, y} V - A_{2N, \zeta, y} (A_{2N, \xi, \eta} W) = O((y^{N+1} + \varepsilon^{2N} y) e^{-\delta \theta}) = \\ = O(\varepsilon^{N+1} e^{-\delta \theta}), \quad (1.51)$$

а если $y \geq \varepsilon$, то

$$A_{2N, \xi, \eta} W - A_{2N, \zeta, y} (A_{2N, \xi, \eta} W) = O(\varepsilon^{2N+1} y^{-N-1/2} e^{-\delta \theta}) = \\ = O(\varepsilon^{N+1/2} e^{-\delta \theta}). \quad (1.52)$$

Аналогичные оценки справедливы и для производных от этих разностей. Из (1.51) и (1.42) следует неравенство (1.50) при $y \leq \varepsilon$, а из условия (1.14) и оценки (1.52) следует неравенство (1.50) при $y \geq \varepsilon$.

Точно так же проверяется и неравенство (1.48). При $y \leq \varepsilon$ уравнению приближенно удовлетворяет функция $A_{2N, \xi, \eta} W$, что вытекает из системы (1.19), (1.20) и из асимптотического разложения (1.25), а остальные слагаемые в сумме T_N приблизительно компенсируют друг друга. При $y \geq \varepsilon$ приближенно удовлетворяет уравнению функция $A_{2N, \zeta, y} V$ (согласно системе (1.11)–(1.14) и асимптотическому разложению (1.45)), а разность $A_{2N, \xi, \eta} W - A_{2N, \zeta, y} (A_{2N, \xi, \eta} W)$ мала. ■

Теперь асимптотика решения $u(x, y, \varepsilon)$ задачи (1.1), (1.2) почти построена. Около границы $x = 1$ строим ряд $V^*(\varepsilon^{-1}(1-x), y)$, полностью аналогичный ряду $V(\varepsilon^{-1}x, y)$, а около вершины $(1, 0)$ строим ряд $W^*(\varepsilon^{-2}(1-x), \varepsilon^{-2}y)$, полностью аналогичный ряду $W(\varepsilon^{-2}x, \varepsilon^{-2}y)$ (см. рис. 16, где отмечены области, в которых указанные ряды дают правильные асимптотики для $u(x, y, \varepsilon)$). Так как коэффициенты всех этих рядов экспоненциально быстро стремятся к нулю при $\xi \rightarrow \infty$, $\xi \rightarrow \infty$ и соответственно при $\xi^* = \varepsilon^{-1}(1-x) \rightarrow \infty$, $\xi^* = \varepsilon^{-2}(1-x) \rightarrow \infty$, то ряды, построенные у границы $x = 0$, не оказывают влияния на граничное условие при $x = 1$ и обратно.

Невязка в граничном условии при $y = 1$, возникающая от асимптотического разложения $U(x, y, \varepsilon)$, уже компенсирована рядом S (см. (1.5)). И осталось только компенсировать вновь возникшие невязки около двух вершин квадрата: $(0, 1)$ и $(1, 1)$. Достаточно рассмотреть только первую из них.

Дополнительные невязки в граничных условиях около точки $(0, 1)$ создают следующие ряды: ряд (1.5) при $x = 0$ и ряд (1.10) при $y = 1$. Невязку на границе $y = 1$, равную $-\sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h \nu_h(1, \zeta)$ (см. (1.10)), легко компенсировать так же, как и невязку от ряда (1.3) — с помощью

ряда

$$\tilde{S} = \sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h \tilde{s}_h(\zeta, \tau), \quad (1.53)$$

где $\zeta = \varepsilon^{-1}x$, $\tau = \varepsilon^{-2}(1 - y)$.

Для $\tilde{s}_k(\zeta, \tau)$ получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, вполне аналогичная системе (1.6) для $s_{2k}(x, \tau)$. Разница состоит лишь в том, что коэффициент $a(x, y)$ надо разлагать в ряд не только по

y , но и по x . Обозначим $a(\varepsilon\zeta, 1 - \varepsilon^2\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j H_j(\zeta, \tau)$,

где $H_j(\zeta, \tau)$ — многочлены степени j , $H_0(\zeta, \tau) = a(0, 1) = \varkappa^2 > 0$. Тогда уравнения для $\tilde{s}_k(\zeta, \tau)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{s}_0}{\partial \tau^2} + \varkappa^2 \frac{\partial \tilde{s}_0}{\partial \tau} &= 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{s}_1}{\partial \tau^2} + \varkappa^2 \frac{\partial \tilde{s}_1}{\partial \tau} = -H_1(\zeta, \tau) \frac{\partial \tilde{s}_0}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial^2 \tilde{s}_k}{\partial \tau^2} + \varkappa^2 \frac{\partial \tilde{s}_k}{\partial \tau} &= -\sum_{j=1}^k H_j(\zeta, \tau) \frac{\partial \tilde{s}_{k-j}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \tilde{s}_{k-2}}{\partial \zeta^2}, \quad k \geq 2, \end{aligned} \quad (1.54)$$

а граничные условия: $\tilde{s}_k(\zeta, 0) = -v_k(1, \zeta)$, $\tilde{s}_k(\zeta, \tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$. Функции $\tilde{s}_k(\zeta, \tau)$, являющиеся решением этой задачи, очевидно, удовлетворяют оценке $|\tilde{s}_k(\zeta, \tau)| < M \exp(-\delta(\zeta + \tau))$, так как подобным свойством обладают $v_k(1, \zeta)$.

Таким образом, последнее, что осталось сделать, — это построить асимптотическое разложение Z , которое формально удовлетворяло бы однородному уравнению $\mathcal{L}_\varepsilon Z = 0$ и граничным условиям $Z|_{x=0} = -\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} s_{2k}(0, \tau) - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{s}_k(0, \tau)$, $Z|_{y=0} = 0$. Это точно такая же задача, которая была рассмотрена в § 2 гл. I (пример 4), — около вершины $(0, 1)$ образуется угловой пограничный слой (см. рис. 16). Внутренние переменные выбираются из соображений, которые были описаны выше в аналогичных задачах, — это $\xi = \varepsilon^{-2}x = \varepsilon^{-1}\zeta$ и $\tau = \varepsilon^{-2}(1 - y)$:

$$Z = \sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h z_h(\xi, \tau). \quad (1.55)$$

Уравнения и краевые условия для $z_k(\xi, \tau)$ получаются

обычным способом:

$$L_2 z_0 \equiv \Delta_{\xi, \tau} z_0 + \kappa \frac{\partial z_0}{\partial \tau} = 0,$$

$$L_2 z_k = - \sum_{j=1}^k Q_j(\xi, \tau) \frac{\partial z_{k-j}}{\partial \tau},$$

$$k \geq 1, \quad 0 < \sigma < \infty, \quad 0 < \tau < \infty, \quad (1.56)$$

$$z_{2k}(0, \tau) = -s_{2k}(0, \tau) - \tilde{s}_{2k}(0, \tau),$$

$$z_{2k+1}(0, \tau) = -\tilde{s}_{2k+1}(0, \tau).$$

Здесь $Q_j(\xi, \tau)$ — это полиномы степени j , получающиеся разложением функции $a(x, y)$ в ряд Тейлора

$$a(\varepsilon^2 \xi, 1 - \varepsilon^2 \tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j Q_j(\xi, \tau),$$

$$\kappa = Q_0(\xi, \tau) = a(0, 1) > 0.$$

Задачи (1.56) очень похожи на исследованные выше задачи (1.19) — (1.21). Разница лишь в знаке коэффициента у производной $\partial/\partial \tau$. Поэтому функция Грина $E(\xi, \tau, \xi_1, \tau_1)$ для оператора L_2 в квадрате $\{\xi, \tau: 0 < \xi < \infty, 0 < \tau < \infty\}$ также имеет вид, сходный с (1.22):

$$E(\xi, \tau, \xi_1, \tau_1) = (2\pi)^{-1} \left\{ -K_0 \left(\frac{\kappa \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\tau - \tau_1)^2}}{2} \right) + \right.$$

$$+ K_0 \left(\frac{\kappa \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\tau + \tau_1)^2}}{2} \right) + K_0 \left(\frac{\kappa \sqrt{(\xi + \xi_1)^2 + (\tau - \tau_1)^2}}{2} \right) -$$

$$\left. - K_0 \left(\frac{\kappa \sqrt{(\xi + \xi_1)^2 + (\tau + \tau_1)^2}}{2} \right) \right\} \exp \left(\kappa \frac{\tau_1 - \tau}{2} \right).$$

Решение задач $L_2 z = F(\xi, \tau)$ с граничными условиями $z(\xi, 0) = 0$, $z(0, \tau) = \psi(\tau)$ имеет вид

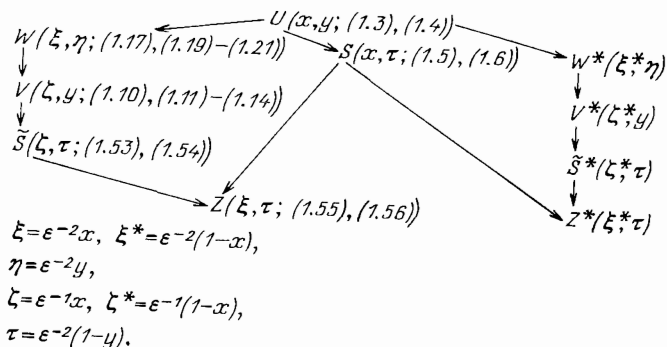
$$z(\xi, \tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} E(\xi, \tau, \xi_1, \tau_1) F(\xi_1, \tau_1) d\xi_1 d\tau_1 -$$

$$- \int_0^{\infty} \frac{\partial E}{\partial \xi_1}(\xi, \tau, 0, \tau_1) \psi(\tau_1) d\tau_1. \quad (1.57)$$

Относительно гладкости функций F и ψ выполнены те

же предположения, что и в задаче (1.24). Но теперь функция $\psi(\tau)$ экспоненциально быстро стремится к нулю на бесконечности, и из формулы (1.57) легко вывести, что решение $z(\xi, \tau)$ также обладает этим свойством, если $F(\xi, \tau) \equiv 0$. А если $|F(\xi, \tau)| < M \exp(-\delta(\xi + \tau))$, то такому же неравенству удовлетворяют функция z и ее производная $\partial z / \partial \tau$. Проверка этих свойств, исходя из явного вида (1.57), не представляет каких-либо трудностей, и мы не будем останавливаться на этом подробнее. Применяя указанные свойства решений последовательно к уравнениям (1.56), получим решения $z_k(\xi, \tau)$, которые экспоненциально быстро стремятся к нулю при $\xi + \tau \rightarrow \infty$.

Теперь асимптотика решения задачи (1.1), (1.2) полностью построена. Около вершины $(1, 1)$ строим ряды $\tilde{S}^*$ и Z^* , полностью аналогичные рядам $\tilde{S}$ и Z . Приведем схему построения различных рядов, осуществляющих асимптотическое представление решения $u(x, y, \varepsilon)$ в разных частях квадрата Ω . В скобках указаны независимые переменные и номера формул, где вводятся ряды и поставлены краевые задачи для их коэффициентов:



На рис. 16 показаны области, в которых справедливы те или иные асимптотические разложения. Как и в предыдущих задачах, границы областей показаны условно.

Теорема 1.5. Пусть $u(x, y, \varepsilon)$ — решение задачи (1.1), (1.2), а $Y_N(x, y, \varepsilon)$ — следующее выражение:

$$Y_N(x, y, \varepsilon) = A_{2N, x, y} U + T_N + T_N^* + A_{2N, x, \tau} S + \\ + A_{2N, \zeta, \tau} \tilde{S} + A_{2N, \zeta^*, \tau} \tilde{S}^* + A_{2N, \xi, \tau} Z + A_{2N, \xi^*, \tau} Z^*,$$

где T_N определено формулой (1.47), а T_N^* — аналогичное

составное асимптотическое разложение, образованное из рядов V^* и W^* . Тогда существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что для любого натурального N справедлива оценка

$$|Y_N(x, y, \varepsilon) - u(x, y, \varepsilon)| < M_N \varepsilon^{\gamma N}.$$

Доказательство сразу вытекает из теоремы 1.4, из оценок (1.8), (1.9) и аналогичных оценок для $\tilde{s}$ и z после применения к уравнению (1.1) принципа максимума. ■

Теорема 1.6. Пусть β — какое-нибудь число такое, что $0 < \beta < 2$. Тогда сумма рядов $U + V + S + \tilde{S} + Z$ является равномерным асимптотическим разложением решения $u(x, y, \varepsilon)$ в области $D_{1, \beta} = \{x, y: 0 \leq x \leq 1/2, 0 \leq y \leq 1\} \setminus \{x, y: 0 \leq x \leq \varepsilon^\beta, 0 \leq y \leq \varepsilon^\beta\}$, а ряд $U + W$ является равномерным асимптотическим разложением $u(x, y, \varepsilon)$ в области $D_{2, \beta} = \{x, y: 0 \leq x \leq \varepsilon^\beta, 0 \leq y \leq \varepsilon^\beta\}$. Аналогичные равномерные асимптотические разложения справедливы и при $x \geq 1/2$.

Доказательство. Рассмотрим выражение Y_N , определенное в теореме 1.5. При $x \leq 1/2$ слагаемые, отмеченные звездочкой, экспоненциально малы. Поэтому остается лишь доказать, что $T_N(x, y, \varepsilon)$ близко к $A_{2N, \xi, \eta} V$ в области $D_{1, \beta}$ и к $A_{2N, \xi, \eta} W$ в области $D_{2, \beta}$. А это сразу вытекает из вида T_N (см. (1.47)) и неравенств (1.51), (1.52).

Отметим еще, что так как ряды $S, \tilde{S}$ и Z экспоненциально малы вдали от верхней стороны квадрата, то в той части $D_{1, \beta}$, где $y \leq 1 - \delta$ ($\delta > 0$), равномерным асимптотическим разложением решения $u(x, y, \varepsilon)$ является ряд $U + V$. Точная оценка разности между $u(x, y, \varepsilon)$ и частичными суммами рядов легко может быть получена из произвольности N в теореме 1.5 и из оценок функций $v_i(\xi, y)$ и $w_{2k}(\xi, \eta)$. ■

§ 2. Асимптотика решения в области с негладкой границей

Здесь будет продолжено рассмотрение задачи (0.3), (0.4) для того случая, когда граница содержит угловые точки. В окрестности характеристик предельного уравнения, проходящих через эти точки (см. характеристики α_3 и α_4 на рис. 15), асимптотика решения $u(x, y, \varepsilon)$ имеет довольно сложную структуру и может быть исследована методом согласования асимптотических разложений. Почти без изменений, только с некоторыми упрощениями, такое же исследование можно провести и в окрестностях особых характеристик, проходящих через те точки границы, где разрывна граничная функция или

какие-нибудь ее производные. Ограничимся самым сложным из указанных случаев, изображенным на рис. 17. Остальные типичные случаи расположения особой характеристики, изображенные на рис. 18, исследуются аналогично, но немного проще. Это нетрудно проследить, анализируя дальнейшие построения.

Итак, рассмотрим модельное уравнение

$$\mathcal{L}_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - a(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} =$$

$$= f(x, y) \quad \text{при } (x, y) \in \Omega \quad (2.1)$$

и граничное условие

$$u(x, y, \varepsilon) = 0 \quad \text{при } (x, y) \in \partial\Omega, \quad (2.2)$$

где $a, f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $a(x, y) > 0$. Под $u(x, y, \varepsilon)$, как и ранее, понимается функция, удовлетворяющая соотношениям (2.1), (2.2) и непрерывная в $\bar{\Omega}$.

(Требование бесконечной дифференцируемости в $\bar{\Omega}$ здесь неуместно, так как в угловой точке O это, вообще говоря, заведомо не выполняется, но в окрестности всех гладких частей границы $\partial\Omega$ решение задачи (2.1), (2.2) принадлежит C^∞ .) Область Ω изображена на рис. 17. Более точное описание области состоит в следующем. Точка O является единственной точкой, где граница $\partial\Omega$ — негладкая. В малой окрестности точки O дополнение к области Ω — это множество точек, где $x \geq 0$, $-Ex \leq y \leq 0$, $E > 0$. При $|x| \leq \delta$, где $\delta > 0$ — некоторое фиксированное число, граница $\partial\Omega$ кроме сторон упомянутого угла состоит еще из двух гладких частей: $\sigma_1 = \{x, y: y = \varphi_1(x), |x| \leq \delta\}$ и $\sigma_2 = \{x, y: y = \varphi_2(x), |x| \leq \delta\}$, $\varphi_1(x) < -Ex \leq 0 < \varphi_2(x)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in C^\infty[-\delta, \delta]$.

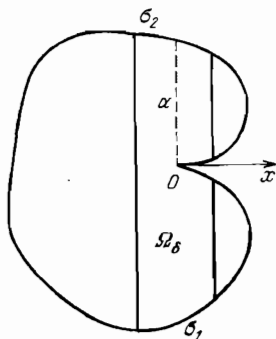


Рис. 17

Итак, все дальнейшее исследование будет проводиться лишь в области Ω_δ , которая ограничена прямыми $x = \pm\delta$, лучами $\{y=0, x>0\}$, $\{y=-Ex, x>0\}$ и кривыми σ_1, σ_2 (см. рис. 17). В этой области будет построено ф. а. р. уравнения (2.1) и краевого условия (2.2). Таким

образом, значения дифференциального оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ от разности между частичной суммой ф. а. р. и решения $u(x, y, \varepsilon)$ будут малы всюду в Ω_δ , а сама эта разность мала на границе $\partial\Omega_\delta$ всюду, кроме прямых $x = \pm\delta$. Если бы она была мала всюду на $\partial\Omega_\delta$, то из принципа максимума следовало бы обоснование построенного ф. а. р.

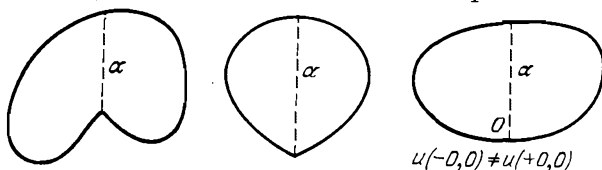


Рис. 18

Оказывается, что требование малости невязки на прямых $x = \pm\delta$ не обязательно. При малых ε справедлив как бы усиленный принцип максимума. Он состоит в том, что для достаточно гладкой в Ω_δ и непрерывной в $\bar{\Omega}_\delta$ функции v из малости $\mathcal{L}_\varepsilon v$ в Ω_δ , ограниченности v на прямых $x = \pm\delta$ и малости значений v на остальной части границы $\partial\Omega_\delta$ вытекает малость v в области Ω_{δ_1} , где $\delta_1 < \delta$. Точная формулировка и доказательство соответствующей леммы будут даны в конце главы (лемма 5.1). Эта лемма носит вспомогательный характер, относится только к обоснованию асимптотики и дает возможность как бы локализовать построение ф. а. р. в окрестностях особых характеристик. Она связывает построение ф. а. р. с обоснованием асимптотики не только в этом параграфе, но и в двух последующих. Имея это в виду, во всех этих параграфах будем ограничиваться лишь построением ф. а. р.

Посредством $p_j(\xi, \eta)$, $q_j(\xi)$ будут обозначаться полиномы степени не выше, чем j , а посредством $P_j(x, y)$, $Q_j(x, y)$ — однородные полиномы степени j .

1. Внешнее разложение решения $u(x, y, \varepsilon)$ строится, как обычно, в виде

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} u_{2k}(x, y). \quad (2.3)$$

Уравнения для $u_{2k}(x, y)$ тоже получаются обычным, многократно испытанным выше способом:

$$a(x, y) \frac{\partial u_0}{\partial y} = -f(x, y), \quad a(x, y) \frac{\partial u_k}{\partial y} = \Delta u_{2k-2}, \quad k \geq 1. \quad (2.4)$$

Неоднократно также обсуждалось, что правильное задание граничных условий для функций $u_h(x, y)$ эквивалентно удовлетворению условий (2.2) на нижнем конце каждого отрезка $x = \text{const}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} u_{2h}(x, \varphi_1(x)) &= 0 \quad \text{при} \quad |x| \leq \delta, \\ u_{2h}(x, 0) &= 0 \quad \text{при} \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Задачи (2.4), (2.5) имеют явные решения, полученные интегрированием по y либо от точки $y = \varphi_1(x)$, либо от точки $y = 0$. Таким образом, все функции $u_{2h}(x, y)$ определены всюду в Ω_δ . Очевидно, что они бесконечно дифференцируемы всюду в Ω_δ , кроме отрезка $\alpha = \{x, y: x = 0, 0 \leq y \leq \varphi_2(0)\}$. На отрезке α все функции $u_{2h}(x, y)$ имеют, вообще говоря, разрыв первого рода, так как слева от него эти функции получаются интегрированием уравнений (2.4) от точки $y = \varphi_1(x)$, а справа — от точки $x = 0$ (см. рис. 17). Однако и слева, и справа от α каждая из функций $u_{2h}(x, y)$ бесконечно дифференцируема в замкнутой области, включая α , если продолжить ее на α по непрерывности.

2. На границе $y = -Ex$ внешнее разложение не удовлетворяет условию (2.2), но эта невязка устраняется с помощью рассмотренного в гл. I экспоненциального пограничного слоя. Независимые переменные в этом слое — x и $\tau = \varepsilon^{-2}(-y - Ex)$. Ф. а. р. краевой задачи (2.1), (2.2) в области $y \leq -Ex, x > 0$ — это сумма ряда (2.3) и ряда

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} s_{2k}(x, \tau). \quad (2.6)$$

После подстановки ряда (2.6) в однородное уравнение (2.1), а суммы рядов $U + S$ в граничное условие (2.2) (при $y = -Ex$) получим рекуррентную систему краевых задач

$$(1 + E^2) \frac{\partial^2 s_{2k}}{\partial \tau^2} + a(x, -Ex) \frac{\partial s_{2k}}{\partial \tau} = g_k(x, \tau),$$

где

$$\begin{aligned} g_k(x, \tau) = & -2E \frac{\partial^2 s_{2(k-1)}}{\partial x \partial \tau} - \frac{\partial^2 s_{2(k-2)}}{\partial x^2} - \\ & - \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j}{j!} \frac{\partial^j a}{\partial y^j}(x, -Ex) \frac{\partial s_{2(k-1)}}{\partial \tau}, \\ s_{2k}(x, 0) = & -u_{2k}(x, -Ex). \end{aligned}$$

В качестве $s_{2k}(x, \tau)$ берутся решения этой системы, которые бесконечно дифференцируемы при $\tau \geq 0$ и экспоненциально стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Очевидно, что $|s_{2k}(x, \tau)| \leq M_k e^{-\gamma \tau}$, где $0 < \gamma < (1 + E^2)^{-1} \min_{\bar{\Omega}} a(x, y)$ и

такие же оценки справедливы для производных от функций $s_{2k}(x, \tau)$.

3. Перейдем к построению асимптотического разложения в окрестности особой характеристики $\alpha = \{x, y: x = 0, 0 \leq y \leq \varphi_2(0)\}$. Так же, как в п. 2 § 1, введем новые независимые переменные $\xi = \varepsilon^{-1}x$, y , чтобы уравнивать по порядку два главных члена в левой части (2.1): $\varepsilon^2 \partial^2 / \partial x^2$ и $\partial / \partial y$. Внутреннее разложение имеет вид

$$V = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i v_i(\xi, y). \quad (2.7)$$

Система рекуррентных уравнений для коэффициентов $v_i(\xi, y)$ похожа на систему (1.12). Отличие состоит в том, что если в § 1 асимптотикой решения $u(x, y, \varepsilon)$ в окрестности характеристики $x = 0$ является сумма рядов U и V , то здесь, ввиду разрывности коэффициентов $u_k(x, y)$, удобнее искать асимптотику решения в окрестности характеристики α в виде ряда V . Поэтому в уравнениях для $v_k(\xi, y)$ войдут члены ряда Тейлора правой части $f(x, y)$. Итак, уравнения имеют вид

$$Lv_0 = f(0, y),$$

$$Lv_i = -\frac{\partial^2 v_{i-2}}{\partial y^2} + \sum_{j=1}^i a_j(y) \xi^j \frac{\partial v_{i-j}}{\partial y} + \frac{\xi^i}{i!} \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(0, y), \quad i \geq 1, \quad (2.8)$$

$$v_{-1}(\xi, y) \equiv 0,$$

$$\text{где } a(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(y) x^j, \quad x \rightarrow 0, \quad L = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - a_0(y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Теперь надо решать уравнения (2.8) не только при $\xi \geq 0$, как это было в § 1, а при всех ξ , т. е. в полосе $\{\xi, y: -\infty < \xi < \infty, 0 \leq y \leq \varphi_2(0)\}$. При $\xi > 0$ начальные условия для $v_k(\xi, y)$, очевидно, порождаются условием (2.2):

$$v_k(\xi, 0) = 0 \quad \text{при } \xi > 0, \quad (2.9)$$

а при $\xi < 0$ начальные условия получаются из согласования ряда V с рядом U . Заменяем в ряде (2.3) x на $\varepsilon \xi$ и разложим каждую из функций $u_{2k}(\varepsilon \xi, 0)$ в ряд Тейлора.

Получим формальный ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i q_i(\xi)$, где многочлен

$q_i(\xi) = \sum_{j+2k=i} \xi^j \frac{1}{j!} \frac{\partial^j u_{2k}(0, 0)}{\partial x^j}$. Ясно, что именно эти многочлены надо взять в качестве начальных значений для функций $v_i(\xi, y)$:

$$v_i(\xi, 0) = q_i(\xi) \quad \text{при } \xi < 0. \quad (2.10)$$

Легко видеть, что начальные функции $v_i(\xi, 0)$, вообще говоря, разрывны в начале координат, так как начальные условия при $\xi < 0$ определяются (через коэффициенты внешнего разложения $u_{2k}(x, y)$) граничными условиями исходной задачи на границе σ_1 , а при $\xi > 0$ — граничными условиями на оси x . Поэтому функции $v_i(\xi, y)$ имеют особенности в начале координат, причем порядок этих особенностей растет с ростом номера i . Естественно, что эти функции не могут быть использованы для аппроксимации решения $u(x, y, \varepsilon)$ всюду в области Ω_ε .

Более того, как и в § 1, ни уравнения (2.8) и начальные условия (2.9), (2.10), ни заданный порядок роста функций $v_i(\xi, y)$ в начале координат не определяют эти функции однозначно. Ситуация точно такая же, как и в предыдущем параграфе, где аналогичные проблемы обсуждаются в п. 2. И так же, как в § 1, для того чтобы однозначно определить функции $v_i(\xi, y)$, вводится еще одно внутреннее разложение.

В окрестности начала координат внутреннее разложение решения $u(x, y, \varepsilon)$ имеет вид

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} w_{2k}(\xi, \eta), \quad (2.11)$$

где $\xi = \varepsilon^{-2}x$, $\eta = \varepsilon^{-2}y$. Для простоты будем считать, что $a(0, 0) = 1$. Уравнения для коэффициентов $w_{2k}(\xi, \eta)$ почти такие же, что и в § 1 (см. (1.19), (1.20)), только из-за неоднородности в их правых частях (так же, как и в уравнениях (2.8)) появятся дополнительные члены:

$$L_1 w_0 = 0, \quad (2.12)$$

$$L_1 w_{2k} = \sum_{j=1}^k P_j(\xi, \eta) \frac{\partial w_{2k-2j}}{\partial \eta} + Q_{k-1}(\xi, \eta), \quad k > 0. \quad (2.13)$$

Здесь $L_1 = \Delta_{\xi, \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta}$, $a(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(x, y)$, $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$,

$f(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i(x, y)$, $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$. Но область определения функций $w_{2k}(\xi, \eta)$ и граничные условия для них теперь другие. Под ω будем понимать всю плоскость ξ, η , кроме тех точек, где $-E\xi < \eta < 0$ (рис. 19), а $\omega' = \omega \setminus (0, 0)$.

Итак, решения уравнений (2.12), (2.13) должны быть построены в ω , а граничные условия для них вытекают из (2.2):

$$\begin{aligned} w_{2k}(\xi, 0) &= 0 \quad \text{при } \xi \geq 0, \\ w_{2k}(\xi, -E\xi) &= 0 \quad \text{при } \xi \geq 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Правые части уравнений (2.13) растут как полиномы, поэтому естественно искать решения $w_{2k}(\xi, \eta)$ в классе функций, растущих не быстрее какой-нибудь степени $|\xi| + |\eta|$. В этом классе решения задач (2.12) — (2.14) определяются не единственным образом. Для их однозначного определения надо воспользоваться согласованием рядов (2.3) и (2.11).

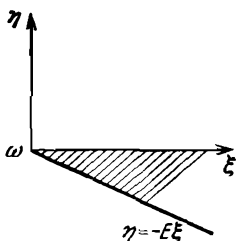


Рис. 19

Перейдем в ряде U от переменных x, y к переменным ξ, η и разложим каждую функцию $u_{2k}(\varepsilon^2 \xi, \varepsilon^2 \eta)$

в ряд Тейлора. Получим формальный ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{2i} p_i(\xi, \eta)$, где многочлен

$$p_i(\xi, \eta) = \sum_{j+l+k=i} \xi^j \eta^l \frac{1}{j! l!} \frac{\partial^{j+l} u_{2k}}{\partial x^j \partial y^l}(0, 0).$$

Естественно рассматривать такие решения задач (2.12) — (2.14), которые при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$, $\eta \leq 0$ близки к полиномам $p_k(\xi, \eta)$. Оказывается, что можно построить решения, экспоненциально близкие к таким полиномам не только при $\eta \rightarrow -\infty$, но и при $\xi \rightarrow -\infty$.

4. Перейдем к построению решений $w_{2k}(\xi, \eta)$. Будем строить их в виде

$$w_{2k}(\xi, \eta) = p_k(\xi, \eta) + z_{2k}(\xi, \eta). \quad (2.15)$$

Заметим, что многочлены $p_k(\xi, \eta)$ по построению удовлетворяют той же самой системе рекуррентных соотно-

шений (2.12), (2.13), что и искомые функции w_{2k} . Как и в конце п. 5 § 1, это легко доказать, исходя из того, что формальный ряд U является ф. а. р. уравнения (2.1). Поэтому для определения функций $z_{2k}(\xi, \eta)$ получаем однородную систему

$$\begin{aligned} L_1 z_0 &= 0, \quad (\xi, \eta) \in \omega', \\ L_1 z_{2k} &= \sum_{j=1}^k P_j(\xi, \eta) \frac{\partial z_{2k-2j}}{\partial \eta}, \quad k \geq 1, \quad (\xi, \eta) \in \omega'. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Из (2.14), (2.15) получаем граничные условия для функций $z_{2k}(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned} z_{2k}(\xi, 0) &= -p_k(\xi, 0) \quad \text{при } \xi \geq 0, \\ z_{2k}(\xi, -E\xi) &= -p_k(\xi, -E\xi) \quad \text{при } \xi \geq 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Решения задач (2.16), (2.17) будут фактически построены нами в классе функций, экспоненциально малых при $\eta \rightarrow -\infty$, $\xi \geq 0$, а также при $|\xi| + |\eta| \rightarrow \infty$, $\xi \leq 0$, $\eta \leq 0$, и растущих не быстрее некоторой степени $|\xi| + |\eta|$ при $|\xi| + |\eta| \rightarrow \infty$, $\eta > 0$. Однако удобнее при построении рассматривать некоторый более широкий класс функций, естественным образом связанный с оператором L_1 . Определим этот класс следующим способом. Пусть D — угол на плоскости ξ, η , $D = \{\rho, \varphi: \rho \geq 0, \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1\}$, ρ, φ — полярные координаты, $D' = D \setminus \{0, 0\}$. Будем говорить, что функция $u(\xi, \eta)$ принадлежит в области D классу $\mathfrak{U}(u(\xi, \eta) \in \mathfrak{U}(D))$, если она бесконечно дифференцируема в D' , ограничена в любой ограниченной подобласти D и, кроме того, удовлетворяет условию

$$\frac{u(\xi, \eta)}{I_0 \left(\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{2} \right) e^{\eta/2}} \xrightarrow{|\xi| + |\eta| \rightarrow \infty} 0, \quad (\xi, \eta) \in D \quad (2.18)$$

($I_0(\rho)$ — функция Бесселя мнимого аргумента). В качестве области D можно взять определенный выше угол ω , но в дальнейшем будут употребляться и некоторые другие значения φ_0 и φ_1 .

Теорема 2.1. *Существуют единственные решения $z_{2k}(\xi, \eta)$ задач (2.16), (2.17) такие, что $z_{2k}(\xi, \eta) \in \mathfrak{U}(\omega)$. При этом для некоторых положительных α_k, β_k*

$$|z_{2k}(\xi, \eta)| < M_k \exp(\alpha_k \xi + \beta_k \eta) \quad \text{при } (\xi, \eta) \in \omega, \quad (2.19)$$

$$\left| \frac{\partial^l z_{2k}(\xi, \eta)}{\partial \xi^{l_1} \partial \eta^{l_2}} \right| < M_{k,l} \exp(\alpha_k \xi + \beta_k \eta) \quad \text{при } (\xi, \eta) \in \omega, \quad (2.20)$$

$$|\xi| + |\eta| \geq 1.$$

Доказательству теоремы предположим несколько простых вспомогательных лемм.

Лемма 2.1. Если функция $u(\xi, \eta) \in \mathcal{U}(D)$, $L_1 u = 0$ при $(\xi, \eta) \in D'$, $u|_{\varphi=\varphi_0} = u|_{\varphi=\varphi_1} = 0$, то $u(\xi, \eta) \equiv 0$ в D .

Доказательство. Нетрудно проверить, что

$$L_1 \left(I_0 \left(\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{2} \right) \exp \frac{\eta}{2} \right) = 0.$$

Тогда утверждение леммы легко следует из принципа максимума и соотношения (2.18). ■

Лемма 2.2. Существуют постоянные $\beta > 0$ и $\mu > 0$ такие, что функция $\Phi(\xi, \eta) = \exp[(E\beta + \mu)\xi + \beta\eta] \in \mathcal{U}(\omega)$, $L_1 \Phi < 0$ для $(\xi, \eta) \in \omega'$.

Доказательство. Используя асимптотическое представление функции $I_0(\rho/2)e^{\eta/2}$ при $\rho \rightarrow \infty$ (см., например, [53], § 5.7), нетрудно заключить, что для выполнения условия (2.18) для функции $\Phi(\xi, \eta)$ достаточно, чтобы $(E\beta + \mu)\xi + \beta\eta < \sigma(\rho/2 + \eta/2)$, где $\sigma < 1$. Условие $L_1 \Phi < 0$ в свою очередь требует выполнения неравенства $(E\beta + \mu)^2 + \beta^2 - \beta < 0$. Для справедливости первого из этих неравенств достаточно выполнения соотношения $(E\beta + \mu)^2 + (\sigma/2 - \beta)^2 < \sigma^2/4$. Выберем сначала такое малое β , чтобы это соотношение и второе из вышевыписанных неравенств были выполнены при $\mu = 0$ и $\sigma = 1$. Затем выберем достаточно малое μ и σ , близкое к единице, чтобы эти неравенства остались справедливыми. ■

Лемма 2.3. Пусть $q_1(\xi)$, $q_2(\xi)$ — некоторые многочлены, а функция $F(\xi, \eta) \in C(\omega) \cap C^\infty(\omega')$. Пусть, кроме того, всюду в ω справедливо неравенство $|F(\xi, \eta)| \leq M\Phi(\xi, \eta)$, где $\Phi(\xi, \eta)$ — функция, определенная в предыдущей лемме. Тогда существует единственное решение уравнения $L_1 u = F(\xi, \eta)$, принадлежащее в области ω классу $\mathcal{U}$ и удовлетворяющее условиям

$$u(\xi, 0) = q_1(\xi), \quad u(\xi, -E\xi) = q_2(\xi) \quad \text{при } \xi > 0. \quad (2.21)$$

При этом всюду в ω

$$|u(\xi, \eta)| \leq M_1 \Phi(\xi, \eta), \quad (2.22)$$

а при $(\xi, \eta) \in \omega$ $\xi^2 + \eta^2 \geq 1$

$$\left| \frac{\partial^{l_1} u(\xi, \eta)}{\partial \xi^{l_1} \partial \eta^{l_2}} \right| \leq M_1 \Phi(\xi, \eta). \quad (2.23)$$

Доказательство. Фиксируем некоторое положительное R и рассмотрим область $\omega_R = \{\xi, \eta: (\xi, \eta) \in \omega, 0 < \rho < R\}$. Через $u_R(\xi, \eta)$ обозначим решение уравнения $L_1 u_R = F(\xi, \eta)$ в области ω_R , которое непрерывно всюду в ω_R , кроме угловых точек, на прямолинейных участках границы этой области удовлетворяет условиям (2.21), а на остальной части границы обращается в нуль. Такое решение существует; оно бесконечно дифференцируемо в области ω_R и ограничено. Воспользовавшись принципом максимума, нетрудно получить, что всюду в ω_R справедливо неравенство $|u_R(\xi, \eta)| \leq M_1 \Phi(\xi, \eta)$.

Из равномерной ограниченности функций $u_R(\xi, \eta)$ следует их компактность вместе со всеми производными в любом компакте, принадлежащем ω_R ([51], гл. III). Следовательно, можно выбрать

подпоследовательность функций $u_{R_i}(\xi, \eta)$, которая сходится в этом смысле к некоторой функции $u(\xi, \eta)$. Очевидно, что эта предельная функция бесконечно дифференцируема в области ω' , удовлетворяет в этой области уравнению $L_1 u = F$, на границе этой области условиям (2.21) и всюду в ω' для нее выполнено соотношение (2.22). Тогда из априорных оценок для производных легко получить, что для нее справедливы и соотношения (2.23). Очевидно также, что для этой предельной функции выполнено и условие (2.18), т. е. $u(\xi, \eta) \in \mathcal{U}(\omega)$.

Итак, существование решения $u(\xi, \eta)$, удовлетворяющего требованиям данной леммы, доказано. Единственность такого решения очевидным образом следует из леммы 2.1. ■

Вернемся теперь к доказательству теоремы 2.1. Оно сводится, как это легко видеть, к последовательному применению леммы 2.3 к уравнениям системы (2.16). Рассмотрим первое из этих уравнений: $L_1 z_0 = 0$. Согласно лемме 2.3 существует функция $z_0(\xi, \eta)$, удовлетворяющая этому уравнению, условиям (2.17) и такая, что $z_0(\xi, \eta) \in \mathcal{U}(\omega)$. Оценка (2.19), (2.20) для этой функции очевидным образом следуют из оценок (2.22), (2.23) леммы 2.3.

Перейдем к построению функции $z_2(\xi, \eta)$. Рассмотрим правую часть уравнения (2.16) $F(\xi, \eta) = P_1(\xi, \eta) \frac{\partial z_0}{\partial \eta}$. Нетрудно показать, что она удовлетворяет условиям леммы 2.3. Действительно, из оценки (2.23) для производной $\frac{\partial z_0}{\partial \eta}$ следует, что для функции $F(\xi, \eta)$ вне любой фиксированной окрестности начала координат выполнена оценка, аналогичная оценке (2.22). В начале координат производные функции $z_0(\xi, \eta)$, вообще говоря, имеют особенности. Но, используя асимптотическое представление для $\frac{\partial z_0}{\partial \eta}$ при $|\xi| + |\eta| \rightarrow 0$ (см., например, [48]), а также тот факт, что полином $P_1(\xi, \eta)$ однороден, нетрудно получить, что $|F(\xi, \eta)| = \left| P_1(\xi, \eta) \frac{\partial z_0}{\partial \eta} \right| \leq M$ и при $|\xi| + |\eta| \rightarrow 0$.

Следовательно, согласно леммам 2.1 и 2.3 существует единственное решение уравнения $L_1 z_2 = P_1(\xi, \eta) \frac{\partial z_0}{\partial \eta}$, удовлетворяющее условиям (2.17) и такое, что $z_2(\xi, \eta) \in \mathcal{U}(\omega)$. Функция $z_2(\xi, \eta)$ построена. Очевидно, что для нее выполнены оценки (2.22), (2.23).

При $k \geq 2$ построение функций $z_{2k}(\xi, \eta)$ проводится аналогично. ■

Проверим теперь, что внутреннее разложение W согласовано с разложением $U + S$. Рассмотрим ряд (2.6) при $x \rightarrow +0$, т. е. разложим каждую из функций $s_{2k}(x, \tau)$ в ряд Тейлора по переменной x . Получим формальный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} s_{2k}(x, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} \sum_{i=0}^{\infty} b_{i,k}(\tau) x^i, \quad (2.24)$$

причем из свойств функций $s_{2k}(x, \tau)$ следует, что для $b_{i,k}(\tau)$ выполнены соотношения

$$|b_{i,k}(\tau)| \leq M \exp(-\alpha_{i,k}\tau), \quad \alpha_{i,k} > 0, \quad (2.25)$$

и аналогичные соотношения выполнены для производных функций $b_{i,k}(\tau)$.

Заметив теперь, что $\tau = \varepsilon^{-2}(-y - Ex) = -\eta - E\xi$, и перейдя в формальном ряде (2.24) к переменным ξ, η , перепишем его в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} h_{2k}(\xi, \eta), \quad (2.26)$$

где $h_{2k}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^k b_{k-i,i}(-\eta - E\xi) \xi^{k-i}$.

По построению (в силу того, что формальный ряд S является ф. а. р. однородного уравнения (2.1)) коэффициенты $h_{2k}(\xi, \eta)$ ряда (2.26) удовлетворяют той же самой однородной системе уравнений (2.16), что и функции $z_{2k}(\xi, \eta)$. По тем же самым причинам (а именно, в силу того, что $S|_{\tau=0} = -U|_{y=-Ex}$ для функций $h_{2k}(\xi, \tau)$ оказываются выполненными условия (2.17) на границе $\eta = -E\xi$:

$$h_{2k}(\xi, -E\xi) = -p_k(\xi, -E\xi). \quad (2.27)$$

Теорема 2.2. *Функции $z_{2k}(\xi, \eta)$ в области $\{\xi, \eta: \xi \geq 1, \eta \leq -E\xi\}$ имеют следующее представление:*

$$z_{2k}(\xi, \eta) = h_{2k}(\xi, \eta) + \sigma_{2k}(\xi, \eta), \quad (2.28)$$

где функции $h_{2k}(\xi, \eta)$ определены выше, а функции $\sigma_{2k}(\xi, \eta)$ бесконечно дифференцируемы в этой области и

$$\left| \frac{\partial^l \sigma_{2k}(\xi, \eta)}{\partial \xi^{l_1} \partial \eta^{l_2}} \right| \leq M_l \exp(-\alpha_k \xi + \beta_k \eta), \quad \alpha_k > 0, \beta_k > 0. \quad (2.29)$$

Доказательство. В области $D_0 = \{\xi, \eta: \xi \geq 0, \eta \leq -E\xi\}$ представим функцию $z_{2k}(\xi, \eta)$ в виде (2.28). Как уже было отмечено выше, функции $h_{2k}(\xi, \eta)$ удовлетворяют в области D_0 той же самой системе уравнений, что и функции $z_{2k}(\xi, \eta)$, и для них выполнено условие (2.17). Кроме того, в силу оценки (2.25) для функций $h_{2k}(\xi, \eta)$ всюду в D_0 выполнено условие (2.18).

Следовательно, функции $\sigma_{2k}(\xi, \eta)$ в свою очередь являются единственными решениями задач

$$L_1 \sigma_{2k} = \sum_{j=1}^k P_j(\xi, \eta) \frac{\partial \sigma_{2k-2j}}{\partial \eta} \quad \text{при } \xi > 0, \eta < -E\xi, \quad (2.30)$$

$$\sigma_{2k}(\xi, -E\xi) = 0, \quad \sigma_{2k}(0, \eta) = z_{2k}(0, \eta) - h_{2k}(0, \eta) \quad \text{при } \eta < 0,$$

принадлежащими в этой области классу $\mathcal{U}$. Нетрудно проверить, что при этом

$$|\sigma_{2k}(0, \eta)| \leq M_k \exp(\beta_k \eta) \quad \text{при } \eta < 0, \text{ где } 0 < \beta < 1/2.$$

Рассмотрим задачу (2.30) при $k=0$. Поступая точно так же, как при доказательстве леммы 2.3, но используя в качестве барьера функцию $M \exp(-\alpha \xi + \gamma \eta)$, где $0 < \gamma < \beta_0$, $\alpha > 0$, $\alpha^2 < \gamma - \gamma^2$, построим функцию $\tilde{\sigma}_0(\xi, \eta)$, являющуюся решением этой задачи и такую, что $|\tilde{\sigma}_0(\xi, \eta)| \leq M \exp(-\alpha \xi + \gamma \eta)$ при $(\xi, \eta) \in D_0$ и

$$\left| \frac{\partial^l \tilde{\sigma}_0}{\partial \xi^{l_1} \partial \eta^{l_2}} \right| \leq M_l \exp(-\alpha \xi + \gamma \eta) \quad \text{при } (\xi, \eta) \in D_0, \xi^2 + \eta^2 \geq 1.$$

Очевидно, что построенная функция $\tilde{\sigma}_0(\xi, \eta) \in \mathcal{U}(D_0)$. Тогда в силу единственности (см. лемму 2.1) $\sigma_0(\xi, \eta) \equiv \tilde{\sigma}_0(\xi, \eta)$ всюду в D_0 . Для функции $z_0(\xi, \eta)$ утверждение теоремы доказано. Для остальных $z_{2k}(\xi, \eta)$ ($k \geq 1$) доказательство проводится аналогично. ■

5. Напомним, что мы до сих пор не построили ряд V в окрестности особой характеристики α . Согласно общей концепции для этого следует выяснить асимптотику коэффициентов построенного внутреннего разложения W при $\eta \rightarrow \infty$ и затем, используя условие согласования, окончательно определить функции $v_k(\xi, y)$.

В соответствии с формулой (2.15) необходимо установить асимптотику функций $z_{2k}(\xi, \eta)$ при $\eta \rightarrow \infty$. Рассмотрим значения $z_{2k}(\xi, \eta)$ при $\eta = 0$. Из оценки (2.19) вытекает, что $z_{2k}(\xi, 0)$ экспоненциально быстро стремятся к нулю при $\xi \rightarrow -\infty$. А из (2.17) следует, что $z_{2k}(\xi, 0) + p_k(\xi, 0) = 0$ при $\xi > 0$. Такие начальные условия и уравнения для $z_{2k}(\xi, \eta)$ влекут за собой (как будет показано ниже) следующее поведение этих функций в окрестности оси ξ : функции $z_{2k}(\xi, \eta)$ экспоненциально малы при $\xi + C\eta < 0$, $\xi \rightarrow -\infty$, $\eta > 0 \quad \forall C > 0$, а при $\xi - C\eta > 0$, $\xi \rightarrow \infty \quad \forall C > 0$ экспоненциально мала сумма $z_{2k}(\xi, \eta) + p_k(\xi, \eta)$.

Далее будет доказано, что функции $w_{2k}(\xi, \eta)$ и функции $z_{2k}(\xi, \eta)$ имеют при $\eta \rightarrow \infty$ асимптотические разложения того же вида, что и функции $w_{2k}(\xi, \eta)$ в § 1 (см. (1.25)):

$$z_{2k}(\xi, \eta) = \eta^k \sum_{j=0}^{\infty} \eta^{-j/2} \Phi_{k,j}(\theta), \quad \eta \rightarrow \infty, \quad (2.31)$$

где $\theta = 2^{-1} \xi \eta^{-1/2}$. Согласно сделанным замечаниям о поведении функций $z_{2k}(\xi, \eta)$ при $\xi \rightarrow \pm \infty$ естественно ожидать, что функции $\Phi_{k,j}(\theta)$ экспоненциально быстро стремятся к нулю при $\theta \rightarrow -\infty$, а при $\theta \rightarrow \infty$ ряд (2.31) асимп-

тотически должен быть равен $-p_k(\xi, \eta)$. Этот полином можно представить в следующем виде:

$$-p_k(\xi, \eta) = \eta^k \sum_{j=0}^{2k} \eta^{-j/2} q_{k,j}(\theta),$$

где $q_{k,j}$ — полиномы. Поэтому естественные условия на $\Phi_{k,j}(\theta)$ таковы:

$$\begin{aligned} \Phi_{k,j}(\theta) &= O(\exp(\nu_{k,j}\theta)), \quad \theta \rightarrow -\infty, \\ \Phi_{k,j}(\theta) &= q_{k,j}(\theta) + O(\exp(-\nu_{k,j}\theta)), \quad \theta \rightarrow \infty, \\ \nu_{k,j} &> 0, \quad q_{k,j}(\theta) \equiv 0 \quad \text{при } j > 2k. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Теорема 2.3. *Функции $z_{2k}(\xi, \eta)$ — решения задач (2.16), (2.17) — при $\eta \rightarrow \infty$ разлагаются в асимптотические ряды (2.31) равномерно относительно ξ , где $\theta = 2^{-1}\xi\eta^{-1/2}$, а функции $\Phi_{k,j}(\theta) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ и удовлетворяют условиям (2.32). Более того, для остаточных членов рядов (2.31) справедливы усиленные оценки*

$$|z_{2k}(\xi, \eta) - B_N z_{2k}| \leq \begin{cases} M\eta^{-N} & \text{при } |\xi| < \eta, \\ M \exp(-\alpha_k \xi) & \text{при } |\xi| \geq \eta \end{cases} \quad (2.33)$$

для $\alpha_k > 0$ и достаточно больших N . Аналогичные оценки справедливы и для производных от $z_{2k}(\xi, \eta)$.

Ситуация, возникающая при исследовании асимптотики решений $z_{2k}(\xi, \eta)$, принципиально не отличается от ситуации, подробно обсужденной в § 1 (пп. 4, 5, теорема 1.2, леммы 1.1–1.4). Поэтому доказательство теоремы 2.3 будет по возможности кратким. Основное внимание будет уделено лишь описанию различий между сходными утверждениями данного и предыдущего параграфов.

Функции $z_{2k}(\xi, \eta)$ в верхней полуплоскости $\eta \geq 0$ являются решениями задач

$$L_1 z_{2k} = \sum_{j=1}^k P_j(\xi, \eta) \frac{\partial z_{2k-2j}}{\partial \eta}, \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} z_{2k}(\xi, 0) &= -p_k(\xi, 0) \quad \text{при } \xi > 0, \\ z_{2k}(\xi, 0) &= \psi_k(\xi) \quad \text{при } \xi < 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

и принадлежат в этой полуплоскости классу $\mathcal{U}$. Из оценок (2.19) следует, что граничная функция $\psi_k(\xi)$ удовлетворяет оценке

$$|\psi_k(\xi)| \leq M_k \exp(\alpha_k \xi), \quad \alpha_k > 0,$$

и аналогичные оценки справедливы для производных этой функции. Можно выписать интегральное представление для функций

$z_{2k}(\xi, \eta)$, сходное с представлением (1.23). Оно имеет следующий вид:

$$z_{2k}(\xi, \eta) = \int_0^\infty \int_0^\infty G(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) F_k(\xi_1, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1 - \\ - \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial G}{\partial \eta_1}(\xi, \eta; \xi_1, 0) z_{2k}(\xi_1, 0) d\xi_1, \quad (2.36)$$

где $F_k(\xi, \eta)$ — правая часть уравнения (2.34), а

$$G(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) = (2\pi)^{-1} \left\{ -K_0 \left(\frac{\sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2}}{2} \right) + \right. \\ \left. + K_0 \left(\frac{\sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta + \eta_1)^2}}{2} \right) \right\} \exp \frac{\eta - \eta_1}{2}.$$

Как и в § 1, исследование асимптотики функций $z_{2k}(\xi, \eta)$ нужно разбить на два этапа. На первом этапе построим ф. а. р. задачи (2.34), (2.35) при $\eta \rightarrow \infty$, а на втором, воспользовавшись формулой (2.36), получим асимптотическое разложение для разности между $z_{2k}(\xi, \eta)$ и частичной суммой построенного ф. а. р.

При введении классов функций, в которых строятся формальные асимптотики, следует внести некоторые изменения. Определяющим по-прежнему является оператор $L_0 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial}{\partial \eta}$, а в качестве области определения функций вместо квадранта $\xi > 0, \eta > 0$ следует рассмотреть полуплоскость $\eta > 0$.

Итак, при целых $n \geq 0$ функция $W_n(\xi, \eta)$ — это решение краевой задачи

$$L_0 W_n = 0 \quad \text{при} \quad \eta > 0,$$

$$W_n(\xi, 0) = 0 \quad \text{при} \quad \xi < 0,$$

$$W_n(\xi, 0) = \xi^n \quad \text{при} \quad \xi > 0,$$

ограниченное для $n = 0$, непрерывное при $\eta \geq 0$ для $n > 0$ и медленно растущее на бесконечности. Легко написать и явную формулу для $W_n(\xi, \eta)$:

$$W_n(\xi, \eta) = \int_0^\infty G_0(\xi - \xi_1, \eta) \xi_1^n d\xi_1,$$

где $G_0(\xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\eta}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta}\right)$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности.

При $n = -k$, где $k > 0$ — целое, полагаем $W_n(\xi, \eta) = \frac{\partial^k W_0}{\partial \xi^k}$, так что $\frac{\partial^l W_n}{\partial \xi^{l_1} \partial \eta^{l_2}}(\xi, \eta) = \alpha_{n, l_1, l_2} W_{n-l_1-2l_2}(\xi, \eta)$ для любого целого n . В частности, $W_{-1}(\xi, \eta) = G_0(\xi, \eta)$. Очевидно, что $L_0 W_n = 0$ при $\eta > 0$ для всех целых n . Кроме того, $W_{-k}(\xi, 0) = 0$ при $k > 0$, $\xi \neq 0$.

Для любого целого n функция $W_n(\xi, \eta) = \eta^{n/2} U_n(\theta)$, где $\theta = 2^{-1} \xi \eta^{-1/2}$, а функция $U_n(\theta)$ является нетривиальным решением уравнения (1.29):

$$l_n U \equiv U'' + 2\theta U' - 2nU = 0.$$

Для всех целых n функции $U_n(\theta)$ экспоненциально быстро стремятся к нулю при $\theta \rightarrow -\infty$. А при $\theta \rightarrow \infty$ функции $U_n(\theta)$ ведут себя по-разному: для $n < 0$ они по-прежнему экспоненциально быстро стремятся к нулю, а для $n \geq 0$ они экспоненциально мало отличаются от полинома.

Все сформулированные здесь утверждения относительно $W_n(\xi, \eta)$ (кроме последнего) вытекают из явного вида $W_n(\xi, \eta)$ при $n \geq 0$ и проверяются так же, как в § 1. А последнее утверждение вытекает из леммы, сформулированной ниже.

Лемма 2.4. *При $n \geq 0$ для функций $W_n(\xi, \eta)$ справедливо следующее асимптотическое представление: при $0 \leq \eta \leq \xi$*

$$W_n(\xi, \eta) = X_n(\xi, \eta) + O(\exp(-\alpha\xi)), \quad \alpha > 0, \quad (2.37)$$

где многочлен $X_n(\xi, \eta) = \sum_{i,l} \alpha_{i,l} \xi^i \eta^l$, $i + 2l = n$.

Доказательство леммы фактически сводится к построению полинома $X_n(\xi, \eta)$, который удовлетворял бы уравнению $L_0 X_n = 0$ и условию $X_n(\xi, 0) = \xi^n$. Такой полином легко строится явно. Оценка (2.37) вытекает из принципа максимума, примененного к разности $W_n - X_n$ с помощью барьерной функции $M \exp(-\alpha\xi + \beta\eta)$. ■

Функциональные классы, соответствующие классам $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ из § 1, в данном случае проще. Класс $\mathfrak{A}$ не будет вводиться, а класс $\mathfrak{B}$ — это множество линейных комбинаций функций $\xi^k \eta^l W_n(\xi, \eta)$, где n — любое целое, а k и l — любые неотрицательные целые числа. Определение порядка функций $u(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_m$ остается прежним — функция имеет порядок $m/2$, если $u(\xi, \eta) = \eta^{m/2} \Phi(\theta)$. Из леммы 2.4 вытекают следующие свойства функции $\Phi(\theta)$

в данном представлении:

$$\begin{aligned}\Phi(\theta) &= O(\exp(v\theta)), \quad \theta \rightarrow -\infty, \\ \Phi(\theta) &= q(\theta) + O(\exp(-v\theta)), \quad \theta \rightarrow \infty,\end{aligned}\quad (2.38)$$

где $v > 0$, а $q(\theta)$ — полином степени не выше, чем m .

При построении ф. а. р. задач (2.34), (2.35) вместо леммы 1.1 следует воспользоваться следующей леммой.

Лемма 2.5. Для любого целого r и любой функции $v(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}$, существует функция $u(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_{r+2}$, которая удовлетворяет уравнению $L_0 u = v$ при $\eta > 0$ и условию $u(\xi, 0) = 0$ при $\xi \neq 0$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение леммы для функции $v(\xi, \eta) = \xi^k \eta^l W_n(\xi, \eta)$, где k, l и n — целые числа, $k \geq 0, l \geq 0, k + 2l + n = r$. Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned}L_0(\xi^k \eta^{l+1} W_n(\xi, \eta)) &= k(k-1) \xi^{k-2} \eta^{l+1} W_n(\xi, \eta) + \\ &+ 2k \xi^{k-1} \eta^{l+1} \frac{\partial W_n}{\partial \xi}(\xi, \eta) + \xi^k \eta^{l+1} L_0 W_n(\xi, \eta) - (l+1) \xi^k \eta^l W_n(\xi, \eta) = \\ &= k(k-1) \xi^{k-2} \eta^{l+1} W_n(\xi, \eta) + 2\alpha k \xi^{k-1} \eta^{l+1} W_{n-1}(\xi, \eta) - \\ &- (l+1) \xi^k \eta^l W_n(\xi, \eta).\end{aligned}$$

Поэтому, если выбрать $u_0(\xi, \eta) = -(l+1)^{-1} \xi^k \eta^{l+1} W_n(\xi, \eta) = -(l+1)^{-1} \eta v$, то

$$v - L_0 u_0 = \eta^{l+1} [a_{1,1} \xi^{k-1} W_{n-1}(\xi, \eta) + a_{2,1} \xi^{k-2} W_n(\xi, \eta)] \equiv v_1(\xi, \eta).$$

На следующем шаге положим $u_1 = -(l+2)^{-1} \eta v_1$. Тогда

$$\begin{aligned}v - L_0(u_0 + u_1) &= \\ &= \eta^{l+2} [a_{1,2} \xi^{k-2} W_{n-2}(\xi, \eta) + a_{2,2} \xi^{k-3} W_{n-1}(\xi, \eta) + \\ &+ a_{3,2} \xi^{k-4} W_n(\xi, \eta)] \equiv v_2(\xi, \eta).\end{aligned}$$

Далее положим $u_2 = -(l+3)^{-1} \eta v_2$ и т. д. Так как k — целое неотрицательное число, то на $(k+1)$ -м шаге этот процесс оборвется, и мы получим, что $L_0(u_0 + u_1 + \dots + u_k) = v$. Легко проследить, что все $u_i(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_{r+2}$.

Построение ф. а. р. задачи $L_0 v = F$, $v(\xi, 0) = 0$ при $\xi < 0$, $v(\xi, 0) = \psi(\xi)$ при $\xi > 0$, где $\psi(\xi)$ — многочлен, а функция $F(\xi, \eta)$ такая же, как в формуле (1.31), проводится почти дословно так же, как в лемме 1.2.

Леммы 1.3 и 1.4 видоизменяются для данной задачи совсем несущественно. В лемме 1.3 функция $\Phi(\theta)$ определена теперь не на полуоси $[0, \infty)$, а всюду на $\mathbb{R}^1$, и экспоненциально быстро стремится к нулю при $|\theta| \rightarrow \infty$. А в лемме 1.4 вместо формулы (1.23) надо исследовать теперь формулу (2.36).

Доказательство теоремы 2.3 мало отличается от доказательства теоремы 1.2. Разница состоит лишь в том, что в теореме 1.2 функции равны полиномам на положительной полуоси η , а в теореме 2.3 — на положительной полуоси ξ . Поэтому функции $z_{2k}(\xi, \eta)$, вообще говоря, не убывают экспоненциально быстро при $\xi \rightarrow \infty$, а асимптотически равны полиномам. Оценки (2.32) и (2.33) вытекают из соотношений (2.38) для функций класса $\mathfrak{B}_{m/2}$. ■

Внешний вид асимптотических разложений функций $w_{2k}(\xi, \eta) = p_k(\xi, \eta) + z_{2k}(\xi, \eta)$ (см. формулу (2.15)) такой же, как и у функций $z_{2k}(\xi, \eta)$. По этим асимптотическим разложениям так же, как и в § 1 (см. таблицу 8), строятся формальные ряды $V_i(\xi, \eta)$ (формула (1.45)).

Теорема 2.4. *Существуют функции $v_i(\xi, \eta)$ — решения системы (2.8) — (2.10), которые имеют асимптотические разложения (1.45). Следовательно, для построенных таким образом рядов (2.7) и (2.11) справедливо условие согласования (1.26).*

Доказательство не отличается от доказательства теоремы 1.3. ■

Составное асимптотическое разложение в рассматриваемой здесь задаче по существу такое же, как и в предыдущем параграфе (см. формулу (1.47) и теорему 1.5), но немного более громоздкое. Кроме погранслоного ряда (2.6) надо еще ввести такой же погранслоный ряд у границы σ_2 (см. рис. 17). Эти ряды почти в точности совпадают с рядами S и $\tilde{S}$ в § 1 и имеют следующий вид:

$$S^* = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} s_{2k}^*(x, \tau^*), \quad \text{где } \tau^* = \varepsilon^{-2} [\varphi_2(x) - y],$$

$$s_{2k}^*(x, 0) = -u_{2k}(x, \varphi_2(x)),$$

$$\tilde{S} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{s}_k(\xi, \tilde{\tau}), \quad \text{где } \xi = \varepsilon^{-1}x, \quad \tilde{\tau} = \varepsilon^{-2} [\varphi_2(0) - y].$$

Граничные значения для $\tilde{s}_k(\xi, 0)$ получаются из условия обращения в нуль суммы рядов $\tilde{S}$ и V на границе σ_2 . Уравнения для функций $s_{2k}^*(x, \tau^*)$ и $\tilde{s}_k(\xi, \tilde{\tau})$ получаются обычным способом. Эти функции экспоненциально быстро стремятся к нулю при τ^* и $\tilde{\tau}$, стремящихся к бесконечности.

Коэффициенты всех построенных рядов, кроме функций $s_{2k}(x, \tau)$, определены всюду в Ω_0 . Функции

$s_{2k}(x, -\varepsilon^{-2}(y + Ex))$ определены лишь при $x > 0, y < -Ex$. Продолжим их нулем на остальную часть Ω_δ , т. е. при $x < 0, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$ и при $x \geq 0, 0 \leq y \leq \varphi_2(x)$.

Следующее отличие от § 1 состоит в том, что функции $w_{2k}(\xi, \eta) = p_k(\xi, \eta) + z_{2k}(\xi, \eta)$ имеют разные асимптотические представления в разных частях области ω на бесконечности. В окрестности границы $\eta + E\xi = 0$ функции $z_{2k}(\xi, \eta)$, в силу (2.28), (2.29), близки к $h_{2k}(\xi, \eta)$, при $0 \leq \eta < \xi$ они близки к $-p_k(\xi, \eta)$, а в области $D = \{\xi, \eta: \eta + c_1\xi < -E\xi, \eta \in \mathbb{R}^1\}$, где c_1 — любая положительная постоянная, функции $z_{2k}(\xi, \tau)$ экспоненциально малы. При $\eta \rightarrow \infty$ функции $w_{2k}(\xi, \eta)$ разлагаются в асимптотические ряды (2.31) (эти ряды выписаны для $z_{2k}(\xi, \eta)$, но для $w_{2k}(\xi, \eta)$ они имеют точно такой же вид с другими функциями $\Phi_{k,j}(\theta)$).

Таким образом, в отличие от задач гл. III и от § 1 гл. IV, функции внутреннего разложения имеют различные асимптотические представления на бесконечности. Введем для них соответствующие обозначения

$$[w_{2k}(\xi, \eta)]_1 = p_k(\xi, \eta), \quad [w_{2k}(\xi, \eta)]_2 = h_{2k}(\xi, \eta),$$

$$[w_{2k}(\xi, \eta)]_3 = \eta^k \sum_{j=0}^{\infty} \eta^{-j/2} \Phi_{k,j}(\theta).$$

Аналогичные обозначения употребляются и для линейных комбинаций $w_{2k}(\xi, \eta)$, в частности, для $A_{N, \xi, \eta} W$. Из доказанных выше условий согласования вытекает, что для любых натуральных N_1 и N_2

$$A_{N_2, \xi, \eta} A_{N_1, x, y} U = A_{N_1, x, y} [A_{N_2, \xi, \eta} W]_1,$$

$$A_{N_2, \xi, \eta} A_{N_1, x, \tau} S = A_{N_1, x, \tau} [A_{N_2, \xi, \eta} W]_2,$$

$$A_{N_2, \xi, \eta} A_{N_1, \zeta, y} V = A_{N_1, \zeta, y} [A_{N_2, \xi, \eta} W]_3.$$

Теперь определим составное асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} Y_N(x, y, \varepsilon) = & A_{2N, x, y} U + A_{2N, x, \tau} S + A_{2N, x, \tau} S^* + A_{2N, \zeta, y} \tilde{S} + \\ & + A_{2N, \xi, \eta} W + A_{2N, \zeta, y} V - A_{2N, \xi, \eta} A_{2N, x, y} U - \\ & - A_{2N, x, y} A_{2N, \xi, \eta} V - A_{2N, \xi, \eta} A_{2N, x, \tau} S - A_{2N, \xi, \eta} A_{2N, \zeta, y} V. \end{aligned}$$

Теорема 2.5. *Существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что для любого натурального N в области Ω_δ справедливы*

оценки

$$|\mathcal{L}_\varepsilon Y_N(x, y, \varepsilon) - f(x, y)| < M\varepsilon^{1N},$$

$$|Y_N(x, y, \varepsilon)| < M\varepsilon^{1N} \quad \text{при} \quad (x, y) \in \partial D \cap \bar{D}_\delta,$$

$$|Y_N(x, y, \varepsilon)| < M \quad \text{при} \quad |x| = \delta.$$

Теорема 2.6. В области Ω_δ справедлива оценка

$$|Y_N(x, y, \varepsilon) - u(x, y, \varepsilon)| < M\varepsilon^{1N},$$

где $u(x, y, \varepsilon)$ — решение задачи (2.1), (2.2), а Y_N и γ те же, что и в предыдущей теореме.

Теорема 2.7. Пусть β — какое-нибудь число такое, что $0 < \beta < 1$. Тогда ряд W является равномерным асимптотическим разложением решения $u(x, y, \varepsilon)$ в области $\Omega_\delta \cap \{x, y: |x| < \varepsilon^\beta, |y| < \varepsilon^{2\beta}\}$, сумма рядов $V + S^* + \tilde{S}$ является таким же разложением в области $\{x, y: |x| < \varepsilon^\beta, \varepsilon^{2\beta} < y \leq \varphi_2(x)\}$, а сумма рядов $U + S + S^*$ — таким же разложением в оставшейся части Ω_δ .

Доказательство теоремы 2.5 по существу не отличается от доказательства теоремы 1.4. Из теоремы 2.5 и леммы 5.1 вытекает заключение теоремы 2.6,

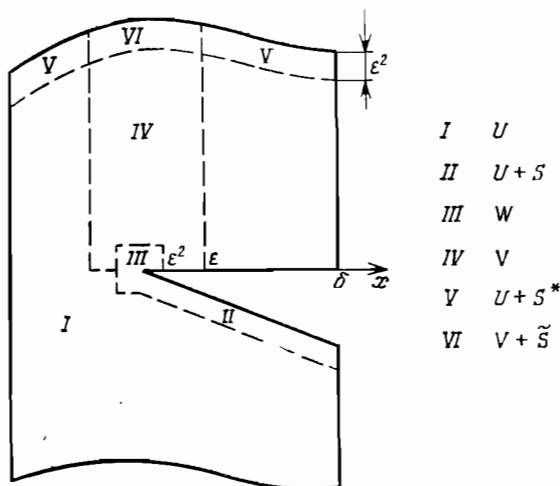


Рис. 20

а доказательство теоремы 2.7 фактически совпадает с доказательством теоремы 1.6. ■

На рис. 20 под различными номерами указаны подобласти области Ω_δ , в которых справедливы те или иные

асимптотические разложения (обозначения соответствующих рядов выписаны рядом с рисунком). Как и ранее, границы областей указаны условно.

§ 3. Случай внешнего касания особой характеристики с границей области

Здесь будет рассмотрена асимптотика решения задачи (0.3), (0.4) в окрестности точки c_2 (см. рис. 15). В этой точке граница $\partial\Omega$ касается характеристики предельного уравнения, но касание происходит извне, т. е. касательная характеристика в малой окрестности точки c_2 не имеет других общих точек с замкнутой областью $\bar{\Omega}$, кроме точки c_2 . Внутреннее касание характеристики с границей будет изучено в следующем параграфе, причем в обоих параграфах будет рассмотрен лишь случай общего положения. Это эквивалентно тому, что касание границы и характеристики имеет первый порядок.

Пусть точка касания—это начало координат O , уравнение имеет специальный вид

$$\mathcal{L}_\varepsilon u \equiv \varepsilon^3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y), \quad (3.1)$$

граничное условие:

$$u(x, y, \varepsilon) = 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (3.2)$$

а граница $\partial\Omega$ в окрестности точки O имеет вид $\{x, y: x = y^2\}$ (малый параметр при операторе Лапласа для удобства обозначен ε^3). Такие упрощения не являются существенными. Если внешнее касание границы и особой характеристики имеет первый порядок, то для эллиптического уравнения второго порядка (0.3) все построения и доказательства лишь второстепенными деталями отличаются от построений, проведенных ниже.

В соответствии с замечанием, указанным в начале § 2, здесь также ограничимся лишь построением ф. а. р. в области $\Omega_\delta = \{x, y: y^2 < x < \delta\}$, где $\delta > 0$ — какое-нибудь фиксированное число (рис. 21). После того как в этой области будет построено ф. а. р. задачи (3.1), (3.2), из леммы 5.1 можно заключить, что это ф. а. р. является

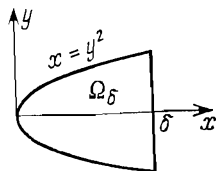


Рис. 21

асимптотическим разложением решения $u(x, y, \varepsilon)$ в области Ω_{δ_1} при $\delta_1 < \delta$.

1. Внешнее разложение ищем в обычном виде

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{3k} u_{3k}(x, y). \quad (3.3)$$

Уравнения и граничные условия для $u_{3k}(x, y)$ следующие:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial y} &= -f(x, y), \quad \frac{\partial u_{3k}}{\partial y} = \Delta_{x,y} u_{3k-3}, \quad k \geq 1, \\ u(x, -\sqrt{x}) &= 0, \quad 0 < x \leq \delta. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Происхождение соотношений (3.4) уже неоднократно обсуждалось в сходных ситуациях в гл. I, гл. II и предыдущих параграфах гл. IV, так что здесь не имеет смысла на этом останавливаться.

Решения задач (3.4) явно выписываются в квадратурах:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= \\ &= - \int_{-\sqrt{x}}^y f(x, y_1) dy_1, \quad u_{3k}(x, y) = \int_{-\sqrt{x}}^y \Delta_{x,y_1} u_{3k-3}(x, y_1) dy_1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Эти функции определены и бесконечно дифференцируемы в области $\bar{\Omega}_\delta \setminus 0$.

Невязка в граничном условии на верхней границе области $y = \sqrt{x}$ устраняется с помощью погранслоного ряда

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{3k} s_{3k}(x, \tau), \quad (3.6)$$

где $\tau = \varepsilon^{-3}(\sqrt{x} - y)$. Подставляя ряд (3.6) в однородное уравнение (3.1), получаем рекуррентную систему уравнений

$$\begin{aligned} L_1 s_0 &\equiv (1 + (4x)^{-1}) \frac{\partial^2 s_0}{\partial \tau^2} + \frac{\partial s_0}{\partial \tau} = 0, \\ L_1 s_3 &= -\frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\partial^2 s_0}{\partial x \partial \tau} + \frac{1}{4x^{3/2}} \frac{\partial s_0}{\partial \tau}, \\ L_1 s_{3k} &= -\frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\partial^2 s_{3k-3}}{\partial x \partial \tau} + \frac{1}{4x^{3/2}} \frac{\partial s_{3k-3}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 s_{3k-6}}{\partial x^2}, \quad k \geq 2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Граничные условия для функций $s_{3k}(x, \tau)$:

$$\begin{aligned} s_{3k}(x, 0) &= -u_{3k}(x, \sqrt{x}), \\ s_{3k}(x, \tau) &\rightarrow 0 \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Решения задач (3.7), (3.8) также легко выписываются в явном виде — это полиномы от τ степени $2k$, умноженные на $\exp(-(1+(4x)^{-1})\tau)$. При $x > 0$ функции $s_{3k}(x, \tau)$, так же как и $u_{3k}(x, y)$, гладко зависят от x , но при $x \rightarrow 0$ обе последовательности функций имеют нарастающие особенности. Таким образом, задача (3.1), (3.2) бисингулярна.

Прежде чем приступить к построению внутреннего разложения, полезно выяснить структуру особенностей уже полученных функций $u_{3k}(x, y)$ и $s_{3k}(x, \tau)$ при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$.

Лемма 3.1. *Функции $u_{3k}(x, y)$, определенные соотношениями (3.5), при $x \rightarrow 0$ разлагаются в асимптотические ряды*

$$u_{3k}(x, y) = x^{(1-3k)/2} \sum_{j=0}^{\infty} x^{j/2} \varphi_{j,k}(yx^{-1/2}), \quad (3.9)$$

где $\varphi_{j,k}(\theta) \in C^{\infty}[-1, 1]$ и ряды допускают многократное почленное дифференцирование.

Доказательство. Разлагая функцию $f(x, y_1)$ под интегралом (3.5) в ряд Тейлора по y_1 и интегрируя, получим для каждого члена ряда выражения $\psi(x)[y^k - (-x^{1/2})^k] = x^{k/2} \psi(x) \{(y/x^{1/2})^k - (-1)^k\}$, $k \geq 1$. После разложения функций $\psi(x)$ в ряды Тейлора по x и оценки остаточного члена получим асимптотику (3.9) для $k=0$. Так как производные от $u_0(x, y)$ — это либо интегралы такого же типа, либо просто гладкие функции, то и для этих производных справедливы аналогичные асимптотические разложения. Следовательно, ряд для $u_0(x, y)$ допускает почленное дифференцирование любого порядка. В частности, $\Delta_{x,y} u_0(x, y)$ разлагается в асимптотический ряд вида (3.9), где перед суммой стоит $x^{-3/2}$. После такой же процедуры, которая была проделана для $f(x, y)$, получим асимптотическое разложение (3.9) для $u_3(x, y)$. Далее, по индукции соотношение (3.9) легко проверяется для всех $k \geq 0$. ■

Лемма 3.2. *Для функций $s_{3k}(x, \tau)$ — решений задач (3.7), (3.8) — справедливы асимптотические*

разложения

$$s_{3k}(x, \tau) = \left[\exp\left(-\frac{4x}{1+4x} \tau\right) \right] x^{(1-3k)/2} \sum_{l=0}^{2k} (x\tau)^l \sum_{j=0}^{\infty} c_{k,l,j} x^{j/2}, \quad x \rightarrow 0. \quad (3.10)$$

Ряды допускают почленное дифференцирование любого порядка.

Доказательство вытекает из анализа явных решений системы (3.7), (3.8). Действительно, $s_0(x, \tau) = -u_0(x, \sqrt{x}) \exp\left(-\frac{4x}{1+4x} \tau\right)$. В силу предыдущей леммы равенство (3.10) выполнено, таким образом, при $k=0$. Далее, по индукции предположим, что (3.10) выполнено для $k \leq n$, и выпишем правую часть уравнения (3.7) при $k = n+1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_{3n}}{\partial \tau} &= \left[\exp\left(-\frac{4x}{1+4x} \tau\right) \right] x^{3/2-3n/2} \sum_{l=0}^{2n} (x\tau)^l \sigma_{n,l,1}(x), \\ \frac{\partial^2 s_{3n}}{\partial x \partial \tau} &= \left[\exp\left(-\frac{4x}{1+4x} \tau\right) \right] x^{1/2-3n/2} \sum_{l=0}^{2n+1} (x\tau)^l \sigma_{n,l,2}(x), \\ \frac{\partial^2 s_{3n-3}}{\partial x^2} &= \left[\exp\left(-\frac{4x}{1+4x} \tau\right) \right] x^{-3n/2} \sum_{l=0}^{2n} (x\tau)^l \sigma_{n,l,3}(x). \end{aligned}$$

Здесь под $\sigma(x)$ с разными индексами понимаются асимптотические ряды вида $\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^{j/2}$, $x \rightarrow 0$. В дальнейшем индексы у $\sigma(x)$ будем опускать. Итак,

$$L_1 s_{3(n+1)} = \left[\exp\left(-\frac{4x}{1+4x} \tau\right) \right] x^{-3n/2} \sum_{l=0}^{2n+1} (x\tau)^l \sigma(x). \quad (3.11)$$

Если учесть, что в силу (3.8), (3.9) $s_{3n+3}(x, 0) = -u_{3n+3}(x, \sqrt{x}) = x^{(-2-3n)/2} \sigma(x)$, то из явного вида решения уравнения (3.11) вытекает, что $s_{3n+3}(x, \tau)$ имеет вид (3.10). ■

2. Итак, асимптотика коэффициентов рядов (3.3), (3.6) выяснена. Она подсказывает вид внутренних переменных в окрестности точки O . Действительно, главные члены в коэффициентах рядов (3.3), (3.6) при $x \rightarrow 0$ имеют вид

$\varepsilon^{3k}x^{(1-3k)/2}$, и поэтому естественно считать $x = \varepsilon^2\xi$. А для того чтобы показатель экспоненты $4x\tau/(1+4x) \approx x(\sqrt{x-y})/\varepsilon$ в главном не зависел от ε , разумно положить $y = \varepsilon\eta$.

Можно подойти к выбору новых переменных и с другой точки зрения. Пусть

$$x = \varepsilon^\alpha \xi, \quad y = \varepsilon^\beta \eta, \quad \text{где } \alpha > 0, \beta > 0. \quad (3.12)$$

После такой замены переменных, как говорилось выше, в уравнении (3.1) должно быть по крайней мере два старших по порядку члена. Показатели степеней ε у членов уравнения (3.1) следующие: $3-2\alpha$, $3-2\beta$ и $-\beta$. Следовательно, возможны лишь такие варианты: 1) $\alpha = \beta$, $\beta \geq 3$; 2) $\beta = 2\alpha - 3$, $0 < \beta \leq 3$; 3) $\beta = 3$, $0 < \alpha < 3$. Кроме того, надо еще учесть, что после замены (3.12) парабола $x = y^2$ либо сохраняется (при $\alpha = 2\beta$), либо близка к прямой $\xi = 0$ (при $\alpha < 2\beta$), либо близка к разрезу $\eta = 0$, $\xi \geq 0$ (при $\alpha > 2\beta$). Ясно, что подходят лишь первые два случая. Соответствующие отрезки изображены на рис. 22. Все точки (α, β) , лежащие на этих отрезках, удовлетворяют указанным выше требованиям. Однако, как отмечалось ранее, практика показывает, что для правильной замены переменных надо брать крайние из возможных значений α и β . Здесь таких значений два: $\alpha = 2$, $\beta = 1$ и $\alpha = \beta = 3$. В первом случае старшими

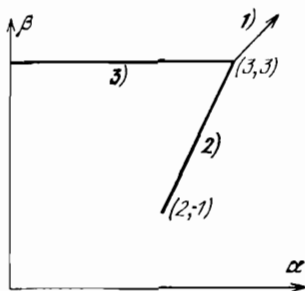


Рис. 22

в уравнении (3.1) будут члены $\varepsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$, а во втором случае все три члена в левой части уравнения имеют одинаковый порядок. Мы сделаем именно первую замену

$$x = \varepsilon^2\xi, \quad y = \varepsilon\eta. \quad (3.13)$$

Почему остается неиспользованной вторая возможность — неясно. Но оказывается, что коэффициенты внутреннего разложения

$$W = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i w_i(\xi, \eta), \quad (3.14)$$

т. е. функции $w_i(\xi, \eta)$, являются гладкими в точке $(0, 0)$. Так что если вводить еще одни внутренние переменные $\xi_1 = \varepsilon^{-3}x = \varepsilon^{-1}\xi$, $\eta_1 = \varepsilon^{-3}y = \varepsilon^{-2}\eta$, то новое «внутреннее разложение» представляет собой просто ряд, полученный из W разложением в ряды Тейлора функций $w_i(\varepsilon\xi_1, \varepsilon^2\eta_1)$. Ясно, что в таком дополнительном «внутреннем разложении» нет никакой необходимости.

Итак, рассмотрим внутреннее разложение (3.14), где переменные ξ и η определены формулами (3.13). Функции $w_i(\xi, \eta)$ будем искать внутри параболы $D = \{\xi, \eta: \xi > \eta^2, \eta \in \mathbb{R}^1\}$. (Ряд (3.14) начинается с члена $i=1$ в силу условия (3.2). Если бы оно было неоднородным, то ряд начинался бы с члена $i=0$.) Уравнения для $w_i(\xi, \eta)$ и граничные условия получаются обычным способом:

$$L_0 w_1 \equiv \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} - \frac{\partial w_1}{\partial \eta} = p_0(\xi, \eta), \quad L_0 w_2 = p_1(\xi, \eta), \quad (3.15)$$

$$L_0 w_i = -\frac{\partial^2 w_{i-2}}{\partial \eta^2} + p_{i-1}(\xi, \eta), \quad i \geq 3, \\ w_i(\eta^2, \eta) = 0 \quad \text{при } \eta \in \mathbb{R}^1, \quad (3.16)$$

где полиномы $p_i(\xi, \eta)$ — это коэффициенты разложения функции $f(x, y)$ в ряд Тейлора

$$f(\varepsilon^2\xi, \varepsilon\eta) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i p_i(\xi, \eta).$$

Очевидно, что функции $w_i(\xi, \eta)$ неограничены на бесконечности, и естественно искать их в классе функций, растущих не быстрее какой-нибудь степени ξ . Решение задач (3.15), (3.16) можно исследовать независимо от результатов, полученных в п. 1, но удобнее воспользоваться условием согласования и строить функции $w_i(\xi, \eta)$, опираясь на уже построенные ряды U и S .

В каждом из рядов (3.3), (3.6) сделаем замену (3.13).

При этом $yx^{-1/2} = \eta\xi^{-1/2}$, $x\tau = \xi(\sqrt{\xi} - \eta)$, а $\exp\left(-\frac{4x\tau}{1+4x}\right) =$

$$= \exp(-4x\tau) \exp\left(4x \frac{4x\tau}{1+4x}\right) = \exp(-4\xi(\sqrt{\xi} - \eta)) \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} [\xi^2(\sqrt{\xi} - \eta)]^l \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,l} \varepsilon^{2j} \xi^j. \quad \text{Заменим функции}$$

$u_{3k}(x, y)$ и $s_{3k}(x, \tau)$ их асимптотическими разложениями. После этих формальных преобразований сумма $U + S$

примет вид $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i H_i$, где ряды

$$H_i = \xi^{i/2} \sum_{j=0}^{\infty} \xi^{-3j/2} \left\{ \varphi_{i-1,j}(\eta \xi^{-1/2}) + \right. \\ \left. + \exp(-4\xi(V\bar{\xi} - \eta)) \sum_{l=0}^{2j+i} b_{i,j,l}[\xi(V\bar{\xi} - \eta)]^l \right\}. \quad (3.17)$$

Так как $U + S$ — это ф. а. р. задачи (3.1), (3.2) при $x > 0$, то так же, как и в п. 5 § 1, легко показать, что ряды H_i являются ф. а. р. задач (3.15), (3.16) при $\xi \rightarrow \infty$.

Теорема 3.1. *Существуют функции $w_i(\xi, \eta) \in C^\infty(\bar{D})$, которые являются решениями задач (3.15), (3.16) и имеют асимптотические разложения H_i при $\xi \rightarrow \infty$.*

Доказательство этой теоремы проводится тем же стандартным методом, который был применен выше при доказательстве теорем 1.1 и 2.1 гл. II, теоремы 1.2 и леммы 4.1 гл. III, теоремы 1.2 гл. IV. Схема доказательства состоит в следующем. Если ряд H является ф. а. р. уравнения $Lh = g$, то обозначим h_N сглаженную каким-нибудь разумным способом частичную сумму $B_N H$. Тогда h_N удовлетворяет уравнению $Lh_N = g_N$, где разность $g - g_N$ асимптотически мала. Далее надо построить решение h_N^* уравнения $Lh_N^* = g - g_N$ и показать, что оно тоже асимптотически мало. Сумма $h_N + h_N^*$ является искомым решением, надо только доказать, что эта сумма не зависит от N . При конкретной реализации схемы надо еще следить за тем, чтобы решения вспомогательных задач удовлетворяли (точно или приближенно) соответствующим краевым условиям.

Вернемся к задачам (3.15), (3.16) и докажем вспомогательные леммы.

Лемма 3.3. *Пусть функция $\psi(\xi, \eta) \in C^\infty(D)$ и удовлетворяет оценкам*

$$\left| \frac{\partial^{i+j} \psi}{\partial \xi^i \partial \eta^j}(\xi, \eta) \right| \leq M_{i,j} \xi^{-N+n_i+l_j} \quad \forall i, j \geq 0 \quad (3.18)$$

при каком-нибудь достаточно большом N , где n_i и l_j — какие-нибудь числа, не зависящие от N (не обязательно положительные). Тогда существует функция $h(\xi, \eta) \in C^\infty(\bar{D})$, которая равна нулю на ∂D (т. е. при $\xi = \eta^2$), удовлетворяет в D уравнению $L_0 h =$

$$= \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} - \frac{\partial h}{\partial \eta} = \psi(\xi, \eta) \quad \text{и} \quad \text{енкам}$$

$$\left| \frac{\partial^{i+j} h}{\partial \xi^i \partial \eta^j}(\xi, \eta) \right| \leq \bar{M}_{i,j} \xi^{-N+\bar{n}_i+\bar{l}_j} \quad \forall i, j \geq 0, \quad (3.19)$$

где $\bar{n}_i$ и $\bar{l}_j$ — тоже какие-нибудь числа, не зависящие от N .

Доказательство. Пусть $\chi(z) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\chi(z) \equiv 1$ при $z \leq 0$, $\chi(z) \equiv 0$ при $z \geq 1$. Обозначим $\psi_m(\xi, \eta) = \psi(\xi, \eta)\chi(\xi - m)$. Построим функцию $h_m(\xi, \eta)$ — решение задачи

$$L_0 h_m = \psi_m(\xi, \eta) \quad \text{при} \quad \eta^2 \leq \xi \leq m+3, \quad -\sqrt{m+2} \leq \eta \leq \sqrt{m+2},$$

$$h_m(\xi, -\sqrt{m+2}) = 0, \quad h_m(\eta^2, \eta) = 0, \quad h_m(m+3, \eta) = 0.$$

Очевидно, что решение этой задачи существует, бесконечно дифференцируемо и равно тождественно нулю при $-\sqrt{m+2} \leq \eta \leq -\sqrt{m+1}$ ([103], гл. IV). Центральным моментом доказательства является установление оценки функций $h_m(\xi, \eta)$, равномерной относительно m . Для этой цели рассмотрим вспомогательную функцию $\Phi(\xi, \eta) = (2\sqrt{\xi+d} - \eta)^{-2N+1}$, где постоянная $d > 0$ будет выбрана позднее. Так как $\xi \geq \eta^2$, то в области D справедливо неравенство

$$\Phi(\xi, \eta) > 0, \quad (3.20)$$

а

$$L_0 \Phi = (2N-1)(2\sqrt{\xi+d} - \eta)^{-2N-1} \left(\frac{2N}{\xi+d} + \frac{2\sqrt{\xi+d} - \eta}{2(\xi+d)^{3/2}} - \right. \\ \left. - (2\sqrt{\xi+d} - \eta) \right) < - (2N-1)(2\sqrt{\xi+d} - \eta)^{-2N} \left(1 - \frac{4N+1}{2d^{3/2}} \right).$$

Выберем d таким, чтобы $L_0 \Phi < -(2\sqrt{\xi+d} - \eta)^{-2N}$. Следовательно, $L_0 \Phi < -\mu \xi^{-N}$, $\mu > 0$. Из этого неравенства, неравенства (3.20), из оценки (3.18) при $i = j = 0$ и из принципа максимума вытекает оценка

$$|h_m(\xi, \eta)| \leq \mu_1(\xi + d)^{-N+1}, \quad (3.21)$$

где постоянные μ_1 и $d > 0$ не зависят от m . Таким образом, все функции $h_m(\xi, \eta)$ равномерно ограничены.

Из априорных оценок производных решений параболического уравнения ([103], гл. IV) следует, что на каждом компакте, принадлежащем $\bar{D}$, функции $h_m(\xi, \eta)$ компактны в C^2 . Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем искомое решение $h(\xi, \eta)$, для которого (в силу (3.21)) справедлива оценка (3.19) при $i = j = 0$. Остальные оценки (3.19) вытекают из априорных оценок производных решения параболического уравнения. Однако надо иметь в виду, что при оценке производных вблизи границы ∂D кусок границы следует распрямить. При этом в уравнении появятся переменные коэффициенты (вообще говоря, растущие). Так как в данном случае граница — это парабола, то максимальный рост коэффициентов (и их производных) может быть лишь степенным. Значит, при оценках производных могут появиться какие-то степени ξ , что и отражено в (3.19). ■

З а м е ч а н и е. Более аккуратное исследование позволило бы уточнить вид показателей $\bar{n}_i$ и $\bar{l}_j$, но это совершенно не нужно для построения функций $w_i(\xi, \eta)$. Кроме того, для самих $w_i(\xi, \eta)$ точные по порядку оценки их производных будут вытекать (после доказательства теоремы 3.1) из асимптотических разложений $w_i(\xi, \eta)$.

Лемма 3.4. Пусть функция $w(\xi, \eta) \in C^\infty(\bar{D})$, равна нулю на ∂D и удовлетворяет в $\bar{D}$ уравнению $L_0 w = 0$ и оценке $|w(\xi, \eta)| \leq M \xi^{-N}$, где N — некоторое положительное число. Тогда $w(\xi, \eta) = 0$.

Доказательство. Для любого $v > 0$ функции $v \pm w(\xi, \eta)$ положительны на границе области $\{\xi, \eta: \eta^2 < \xi < \lambda, |\eta| < \lambda^{1/2}\}$ для достаточно большого λ . Из принципа максимума вытекает, что $|w(\xi, \eta)| \leq v$. ■

Доказательство теоремы 3.1 проводится по указанной выше схеме. Сначала докажем существование решения $w_1(\xi, \eta)$. Обозначим $w_{1,N}(\xi, \eta)$ произведение $\chi(2 - \xi)B_N H_1$, где χ — это срезающая функция, определенная при доказательстве леммы 3.3, H_1 — ряд (3.17), а $B_N H_1$ — его частичная сумма. Пусть $L_0 w_{1,N} = g_N(\xi, \eta)$. Так как H_1 — ф. а. р. уравнения (3.15), то $p_0(\xi, \eta) - g_N(\xi, \eta) = O(\xi^{-N_1})$, где $N_1 \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. В соответствии с леммой 3.3 построим функцию $w_{1,N}^*(\xi, \eta)$ — решение задачи $L_0 w_{1,N}^* = p_0(\xi, \eta) - g_N(\xi, \eta)$, $w_{1,N}^*(\xi, \eta) = 0$ на ∂D . Функция $w_{1,N}(\xi, \eta) + w_{1,N}^*(\xi, \eta)$, в силу леммы 3.4, не зависит от N и является искомой функцией $w_1(\xi, \eta)$.

Точно так же доказывается существование функции $w_2(\xi, \eta)$. Доказательство существования остальных $w_i(\xi, \eta)$ — решений задач (3.15), (3.16) — проводится по индукции так же, как и доказательство существования $w_1(\xi, \eta)$. ■

3. Итак, построен ряд (3.14), который согласован с суммой рядов (3.3) и (3.6). Как видно из построения функций $w_i(\xi, \eta)$, условие согласования имеет здесь немного другую форму, чем в § 1. Каждая из функций $w_i(\xi, \eta)$ при $\xi \rightarrow \infty$ представима в виде суммы двух рядов, соответствующих двум суммам в формуле (3.17), так что первый ряд согласуется с рядом U , а второй — с рядом S . Обозначим эти ряды $[w_i(\xi, \eta)]_1$ и $[w_i(\xi, \eta)]_2$ и соответственно те же обозначения употребим для частичной суммы ряда W , т. е. линейной комбинации этих функций: $[A_{N,\xi,\eta} W]_1$ и $[A_{N,\xi,\eta} W]_2$. Итак, условие согласования имеет вид

$$\begin{aligned} A_{N_1,x,y} [A_{N_2,\xi,\eta} W]_1 + A_{N_1,x,\tau} [A_{N_2,\xi,\eta} W]_2 = \\ = A_{N_2,\xi,\eta} A_{N_1,x,y} U + A_{N_2,\xi,\eta} A_{N_1,x,\tau} S \quad \forall N_1, N_2. \end{aligned}$$

Как и ранее, введем обозначение для составного асимптотического разложения

$$\begin{aligned} T_N(x, y, \varepsilon) = A_{N,x,y} U + A_{N,x,\tau} S + A_{N,\xi,\eta} W - \\ - A_{N,\xi,\eta} A_{N,x,y} U - A_{N,\xi,\eta} A_{N,x,\tau} S. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Теорема 3.2. Для функции $T_N(x, y, \varepsilon)$ в области Ω_δ справедливы оценки

$$|\mathcal{L}_\varepsilon T_N(x, y, \varepsilon)| < M\varepsilon^{N_1}, \quad |T_N(\delta, y, \varepsilon)| < M, \quad T_N(x, y, \varepsilon) = 0$$

на $\partial\Omega$, где $N_1 \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, а постоянная M зависит только от N и δ .

Доказательство фактически не отличается от доказательства теоремы 1.4. ■

Теорема 3.3. Ряд (3.14) является равномерным асимптотическим разложением решения задачи (3.1), (3.2) в области $\{x, y: y^2 \leq x \leq \varepsilon^\gamma\}$, а сумма рядов (3.3) и (3.6) является равномерным асимптотическим разложением решения той же задачи в области $\Omega_\delta \cap \{x, y: x \geq \varepsilon^\gamma\}$, где γ — любое число такое, что $0 < \gamma < 2$.

Доказательство. Из теоремы 3.2 и леммы 5.1 вытекает, что $|T_N(x, y, \varepsilon) - u(x, y, \varepsilon)| < M\varepsilon^{N_2}$, где $T_N(x, y, \varepsilon)$ определено формулой (3.22), а $N_2 \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. Далее утверждение теоремы доказывается так же, как теорема 1.6. ■

§ 4. Случай внутреннего касания особой характеристики с границей области

В этом параграфе будет рассмотрена асимптотика решения задачи (0.3), (0.4) в окрестности особой характеристики α_2 (см. рис. 15). Так же, как и в предыдущем параграфе, рассмотрим модельное уравнение и границу, соответствующую случаю общего положения.

Итак, пусть уравнение имеет вид

$$\mathcal{L}_\varepsilon u = \varepsilon^3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - a(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y), \quad a(x, y) > 0, \quad (4.1)$$

$a, f \in C^\infty(\bar{D})$, $a(0, 0) = 1$, граница в окрестности точки O имеет вид $\{x, y: x = y^2\}$, граничное условие:

$$u(x, y, \varepsilon) = 0 \text{ при } (x, y) \in \partial\Omega. \quad (4.2)$$

Но теперь область Ω лежит слева от параболы $\{x, y: x = y^2\}$, так что ось y лежит внутри Ω в некоторой окрестности начала координат. Построение ф. а. р. опять будет проводиться в области $\Omega_\delta = \Omega \cap \{x, y: |x| \leq \delta\}$. Будем считать, что область Ω_δ ограничена двумя гладкими кривыми: $\sigma_1 = \{x, y: y = \varphi_1(x)\}$ и $\sigma_2 = \{x, y: y = \varphi_2(x)\}$,

прямыми $|x| = \delta$ и упоминавшейся выше параболой (рис. 23).

Расположение границы области и особой характеристики $\alpha = \{x, y: x = 0, 0 \leq y \leq \varphi_2(0)\}$ топологически эквивалентно такому же расположению, рассмотренному в § 2 (см. рис. 17). А локальное поведение решения в окрестности точки O имеет много общего с локальным поведением решения, изученного в § 3, — те же внутренние переменные, та же структура особенностей функций экспоненциального пограничного слоя и т.п. Поэтому и исследование задачи (4.1), (4.2) является своеобразным гибридом таких же исследований двух предыдущих параграфов. В связи с тем, что многие моменты при изучении решения задачи (4.1), (4.2) были рассмотрены выше, изложение в данном параграфе будет более сжатым.

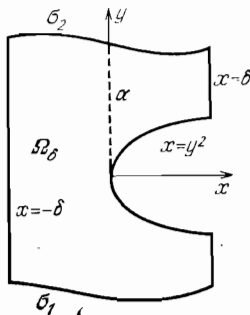


Рис. 23

1. Внешнее разложение решения имеет такой же вид, как и в § 3 (формула (3.3)). Но здесь, так же как и в § 2, коэффициенты внешнего разложения разрывны на особой характеристике (см. рис. 23). Поэтому удобно представить внешнее разложение в виде суммы двух рядов, первый из которых имеет гладкие коэффициенты всюду в $\bar{\Omega}_\delta$, а второй отличен от нуля лишь по правую сторону от особой характеристики α . Без ограничения общности будем считать, что функция $f(x, y)$ гладко продолжена на всю плоскость. Коэффициенты $u_{3k}(x, y)$ определим всюду в полосе $|x| \leq \delta$ как решения задач

$$a(x, y) \frac{\partial u_0}{\partial y} = -f(x, y), \quad \frac{\partial u_{3k}}{\partial y} = \frac{\Delta u_{3k-3}}{a(x, y)},$$

$$k \geq 1, \quad u_{3k}(x, \varphi_1(x)) = 0.$$

Очевидно, что $u_{3k}(x, y) \in C^\infty(\bar{\Omega}_\delta)$.

Внешнее разложение будем искать в виде $U + Z$, где

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{3k} u_{3k}(x, y), \quad (4.3)$$

$$Z = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{3k} z_{3k}(x, y), \quad (4.4)$$

$u_{3k}(x, y)$ — только что определенные функции, а функции $z_{3k}(x, y)$ отличны от нуля лишь справа от α , т. е. в области $\{x, y: 0 < x \leq \delta, \forall x \leq y \leq \varphi_2(x)\}$. Эти функции — решения задач

$$\frac{\partial z_0}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial z_{3k}}{\partial y} = \frac{\Delta z_{3k-3}}{a(x, y)}, \quad k \geq 1,$$

$$z_{3k}(x, \sqrt{x}) = -u_{3k}(x, \sqrt{x}). \quad (4.5)$$

Очевидно, что построенный таким образом ряд $U + Z$ является ф. а. р. уравнения (4.1) и граничного условия (4.2) на σ_1 и на дуге $\{x, y: 0 < x \leq \delta, y = \sqrt{x}\}$. Ясно, что $z_0(x, y) = -u_0(x, \sqrt{x})$.

Лемма 4.1. *Функции $z_{3k}(x, y)$, определенные соотношениями (4.5), при $y \geq \sqrt{x}$, $k \geq 1$, $x \rightarrow 0$ разлагаются в асимптотические ряды*

$$z_{3k}(x, y) = x^{1/2-2k} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k}(y) x^{j/2}, \quad a_{j,k}(y) \in C^{\infty}[0, \sigma_2(0)].$$

Ряды допускают почленное дифференцирование любого порядка.

Доказательство нетрудно провести по индукции аналогично доказательству леммы 3.1. ■

Для ликвидации невязки в граничном условии на дуге $\{x, y: 0 \leq x \leq \delta, y = -\sqrt{x}\}$ следует добавить ряд из погранслойных функций

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{3k} s_{3k}(x, \tau), \quad (4.6)$$

где

$$\tau = \varepsilon^{-3}(-y - \sqrt{x}). \quad (4.7)$$

Уравнения для $s_{3k}(x, \tau)$ почти такие же, как уравнения (3.7), а граничные условия следующие:

$$s_{3k}(x, 0) = -u_{3k}(x, -\sqrt{x}), \quad s_{3k}(x, \tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow \infty.$$

Лемма 4.2. *Для функций $s_{3k}(x, \tau)$ справедливы асимптотические разложения*

$$s_{3k}(x, \tau) = \left[\exp \left(- \frac{4xa(x, -\sqrt{x})\tau}{1+4x} \right) \right] x^{-3k/2} \sum_{l=0}^{2k} (x\tau)^l \sum_{j=0}^{\infty} c_{k,l,j} x^{j/2},$$

$x \rightarrow 0.$

Доказательство почти полностью совпадает с доказательством леммы 3.2. Разница лишь в том, что в лемме 3.2 главный член асимптотики — это $x^{(1-3k)/2}$, а здесь — $x^{-3k/2}$. Это происходит из-за различия в граничных условиях. В § 3 граничное значение для $s_0(x, \tau)$ равно нулю при $x = 0$, а в задаче, рассматриваемой в этом параграфе, вообще говоря, $s_0(0, 0) = -u_0(0, 0) \neq 0$. Кроме того, в показателе экспоненты появился несущественный множитель $a(x, -\sqrt{x})$ из-за того, что в этом параграфе коэффициент при $\partial u / \partial y$ переменный. ■

2. В окрестности точки O , как и в § 3, введем внутренние переменные

$$x = \varepsilon^2 \xi, \quad y = \varepsilon \eta \quad (4.8)$$

и будем искать асимптотику решения $u(x, y, \varepsilon)$ в виде суммы ряда U и внутреннего разложения

$$W = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i w_i(\xi, \eta). \quad (4.9)$$

Теперь под D , естественно, будем понимать внешность параболы, т. е. область $\{\xi, \eta: \xi < \eta^2, \eta \in \mathbb{R}^1\}$. А в остальном вид уравнений и граничных условий для $w_i(\xi, \eta)$ мало отличается от уравнений и граничных условий в § 3. Так как ряд W должен быть ф. а. р. однородного уравнения, то

$$L_0 w_0 = \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} - \frac{\partial w_0}{\partial \eta} = 0, \quad L_0 w_1 = 0, \quad (4.10)$$

$$L_0 w_i = -\frac{\partial^2 w_{i-2}}{\partial \eta^2} + \sum_{\substack{s < i \\ 2j+l+s=i}} \frac{1}{j!l!} \frac{\partial^{j+l} a}{\partial x^j \partial y^l}(0, 0) \frac{\partial w_s}{\partial \eta} \xi^j \eta^l, \quad i \geq 2.$$

Граничные условия для $w_i(\xi, \eta)$ вытекают из (4.2). Прозведя в ряде (4.3) замену (4.8), получим ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i q_i(\xi, \eta)$, где $q_i(\xi, \eta)$ — многочлены степени не выше, чем i . Следовательно,

$$w_i(\eta^2, \eta) = -q_i(\eta^2, \eta) \quad \text{при} \quad \eta \in \mathbb{R}^1. \quad (4.11)$$

Кроме того, функции $w_i(\xi, \eta)$ должны стремиться к нулю при $\eta \rightarrow -\infty$ и при $\xi \rightarrow -\infty$, а в окрестности параболы ∂D при $\xi \rightarrow \infty, \eta < 0$ ряд (4.9) должен быть согласован с рядом S .

Уравнения (4.10) параболического типа, поэтому достаточно доказать существование решений задач (4.10), (4.11) при $\eta < -\eta_0$, где η_0 — какое-нибудь число. А затем

при $\eta \geq -\eta_0$ решения легко продолжить, опираясь на известные теоремы о существовании решения краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Перейдем в ряде S к переменным ξ, η по формулам (4.7), (4.8), воспользовавшись леммой 4.2. Тогда получается формальный ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i H_i$, где ряды

$$H_i = \xi^{i/2} \exp(4\xi(\sqrt{\xi} + \eta)) \sum_{j=0}^{\infty} \xi^{-j/2} \sum_{l=0}^{2j+i} b_{i,j,l} [\xi(\sqrt{\xi} + \eta)]^l \quad (4.12)$$

(ср. формулу (3.17)). Эти ряды являются ф. а. р. задач (4.10), (4.11) при $\eta \leq -\sqrt{\xi}$, $\xi \rightarrow \infty$, и функции $w_i(\xi, \eta)$ должны иметь асимптотические разложения H_i в этой области. Члены рядов H_i экспоненциально малы на бесконечности всюду, кроме малой окрестности нижней ветви параболы, например, при $\eta < -\sqrt{\xi} - \xi^{-\beta}$, где $\beta < 1$.

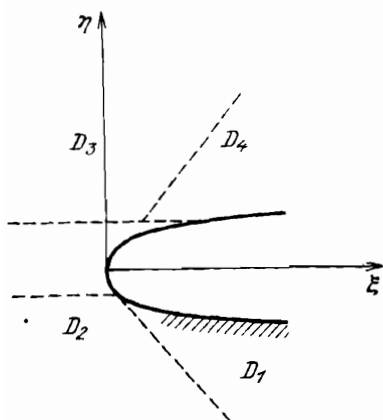


Рис. 24

На рис. 24 штриховкой условно показана область, где члены рядов H_i не являются экспоненциально малыми. Можно считать, что область, где функции $w_i(\xi, \eta)$ должны иметь асимптотики (4.12), значительно шире, чтобы граница этой области имела более простой вид. Также, как и в § 2, в качестве такой границы выберем прямую $\xi = -\eta$. Однако отметим, что в § 2 коэффициенты внутреннего разложения — это решения эллиптических

задач, а здесь они являются решениями неоднородных уравнений теплопроводности и в связи с этим строятся немного проще. Введем обозначения для подобластей области D . Пусть $D_1 = \{\xi, \eta: \eta \leq -1, -\eta \leq \xi < \eta^2\}$, $D_2 = \{\xi, \eta: \eta \leq -1, \xi < -\eta\}$ (см. рис. 24).

Теорема 4.1. *Существуют функции $w_i(\xi, \eta) \in C^\infty(\bar{D})$, которые являются решениями задач (4.10), (4.11), асимптотически равны H_i в D_1 , где H_i — ряды*

(4.12), и экспоненциально малы в D_2 . Более точно, для любого натурального N

$$|w_i(\xi, \eta) - \xi^{i/2} \exp(4\xi(V\bar{\xi} + \eta)) \times \\ \times \sum_{j=0}^{2N} \xi^{-j/2} \sum_{l=0}^{2j+i} b_{i,j,l} [\xi(V\bar{\xi} + \eta)]^l| \leq \\ \leq M \xi^{-N+i/2} \exp(\beta(\xi - \eta^2)) \text{ в } D_1, \quad (4.13) \\ |w_i(\xi, \eta)| < M \exp(\beta(\xi - \eta^2)) \text{ в } D_2,$$

где $\beta > 0$ — некоторое фиксированное число, а коэффициенты $b_{i,j,l}$ те же, что и в формуле (4.12). Аналогичные оценки справедливы и для любых производных от $w_i(\xi, \eta)$.

Для любого $\eta_1 > 0$ справедливы оценки

$$|w_i(\xi, \eta)| \leq M \exp(\beta\xi) \text{ при } \eta \leq \eta_1, \quad (4.14)$$

где постоянная M зависит лишь от i и η_1 , и аналогичные оценки справедливы для любых производных от $w_i(\xi, \eta)$.

Доказательство проводится по единой схеме, неоднократно примененной выше и описанной в п. 2 § 3.

Лемма 4.3. Пусть функция $\psi(\xi) \in C^\infty(\bar{D})$ и удовлетворяет следующим оценкам: при всех $i \geq 0, j \geq 0$

$$\left| \frac{\partial^{i+j} \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi^i \partial \eta^j} \right| \leq \begin{cases} M_{i,j} |\eta|^{-2N+n_i+l_j} \exp(\beta(\xi - \eta^2)) \text{ в } D_1, \\ M_{i,j} \exp(\beta(\xi - \eta^2)) \text{ в } D_2. \end{cases} \quad (4.15)$$

Тогда существует функция $h(\xi, \eta) \in C^\infty(\bar{D})$, которая равна нулю на ∂D , удовлетворяет в D уравнению $L_0 h \equiv \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} - \frac{\partial h}{\partial \eta} = \psi(\xi, \eta)$ и оценкам

$$\left| \frac{\partial^{i+j} h(\xi, \eta)}{\partial \xi^i \partial \eta^j} \right| \leq \begin{cases} \bar{M}_{i,j} |\eta|^{-2N+\bar{n}_i+\bar{l}_j} \exp(\beta_1(\xi - \eta^2)) \text{ в } D_1, \\ \bar{M}_{i,j} \exp(\beta_1(\xi - \eta^2)) \text{ в } D_2 \end{cases} \quad (4.16)$$

для любых $i \geq 0, j \geq 0$. Здесь $M_{i,j}, \bar{M}_{i,j}, n_i, l_j, \bar{n}_i, \bar{l}_j$ такие же, как и в лемме 3.3, β — какое-нибудь положительное число, а $\beta_1 > 0$ — любое число, меньшее, чем β .

Доказательство проводится тем же путем, что и доказательство леммы 3.3. Пусть функции $\psi_m(\xi, \eta) \in C^\infty(\bar{D})$, получены из функции $\psi(\xi, \eta)$ умножением на срезающие функции, так что $\psi_m(\xi, \eta) \equiv \psi(\xi, \eta)$ при $\eta > -m$, $\psi_m(\xi, \eta) \equiv 0$ при $\eta \leq -m-1$, а $h_m(\xi, \eta)$ — решения уравнений $L_0 h_m = \psi_m$ в $D \cap \{\xi, \eta: \eta \geq -m-2\}$, равные нулю на ∂D и при $\eta = -m-2$. Такие решения существуют ([103], гл. IV), и основное, что требуется, — найти их равномерную оценку.

Функции $\psi_m(\xi, \eta)$ удовлетворяют, очевидно, тем же оценкам (4.15), что и функции $\psi(\xi, \eta)$ (быть может, с другими постоянными $M_{i,j}$). Для оценки $h_m(\xi, \eta)$ можно воспользоваться вспомогательной функцией $\Phi(\xi, \eta) = \eta^{-2N} \exp(\gamma(\xi - \eta^2))$. Так как $L_0\Phi = \eta^{-2N}(2N\eta^{-1} + 2\gamma\eta + \gamma^2) \exp(\gamma(\xi - \eta^2)) < -\eta^{-2N} \times \exp(\gamma(\xi - \eta^2))$ при $\eta < -\eta_0$, где η_0 — достаточно большое фиксированное число, то функция $M\Phi(\xi, \eta)$ является мажорантой функций $\pm h_m(\xi, \eta)$ при любом $\gamma < \beta$, $\gamma > 0$.

Далее, так же как и в лемме 3.3, доказываются существование решения $h(\xi, \eta)$ и оценки (4.16) при $\eta < -\eta_0$. При $\eta \geq -\eta_0$ функция $h(\xi, \eta)$ продолжается как решение уравнения $L_0h = \psi$ с нулевым значением на ∂D и начальной функцией при $\eta = -\eta_0$. Так как эта функция $h(\xi, -\eta_0)$ экспоненциально быстро стремится к нулю вместе со своими производными, то тем же свойством обладает и решение $h(\xi, \eta)$ при $\eta_0 \leq \eta \leq \eta_1$ для любого фиксированного η_1 . Это легко проверяется с помощью принципа максимума и вспомогательной функции $\exp(\gamma\xi + \mu\eta)$, где $\mu > 0$. ■

Лемма 4.4. Пусть функция $v(\xi, \eta) \in C^\infty(\bar{D})$, равна нулю на ∂D , удовлетворяет уравнению $L_0v = 0$ в D , растет не быстрее, чем степень $|\xi|$ при $\xi \rightarrow -\infty$, и стремится к нулю при $\eta \rightarrow -\infty$ равномерно относительно ξ . Тогда $v(\xi, \eta) \equiv 0$.

Доказательство сразу следует из принципа максимума для уравнения теплопроводности. ■

Доказательство теоремы 4.1 проводится по общей схеме, указанной выше. Для доказательства существования функции $w_0(\xi, \eta)$ определим функцию $w_{0,N}(\xi, \eta)$, построенную по асимптотическому ряду H_0 . Для этого в формуле (4.12) вместо ряда достаточно взять его частичную сумму, умноженную на срезающую функцию, равную нулю при $\xi \leq -1$ и при $\xi \leq -\eta$. Далее, доказательство опирается на леммы 4.3, 4.4 и не отличается от доказательства теоремы 3.1. Так же, по индукции, доказываются существование остальных $w_i(\xi, \eta)$ при $\eta \leq -1$ и оценки (4.13). При $\eta \geq -1$ функции $w_i(\xi, \eta)$ продолжаются как решения краевых задач (4.10), (4.11). Из принципа максимума и с помощью вспомогательной функции $\exp(\gamma\xi + \mu\eta)$ и из априорных оценок для решений параболических уравнений вытекают оценки (4.14). ■

3. Итак, ряд (4.9) построен. На этом сходство с задачей, рассмотренной в § 3, заканчивается. Дальнейшее исследование близко к тому, которое проводилось в § 2 (ср. рис. 17 и рис. 23). Надо найти асимптотики решений $w_i(\xi, \eta)$ при $\eta \rightarrow \infty$ и, исходя из них и из условия согласования, построить ряд V — внутреннее разложение в окрестности особой характеристики α . Исследования асимптотики решений $w_i(\xi, \eta)$ в данном параграфе и в § 2 несколько отличаются между собой, так как здесь $w_i(\xi, \eta)$ — это решения неоднородных уравнений теплопроводности, а в § 2 функции $w_i(\xi, \eta)$ — решения эллиптических уравнений. Однако результат получается очень похожий. Это неудивительно, так как при $\eta \rightarrow \infty$ опера-

тор $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial}{\partial \eta}$ в определенном смысле асимптотически близок к оператору $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial}{\partial \eta}$. А различие в асимптотике при $\eta \rightarrow \infty$ обусловлено скорее не тем, что различны операторы, а тем, что функции $w_i(\xi, \eta)$ в данной задаче и в § 2 по-разному ведут себя при $\xi \rightarrow \infty$.

Будем в этом пункте изучать функции $w_i(\xi, \eta)$ — решения задач (4.10), (4.11) в области $D^+ = \{\xi, \eta: \eta \geq 2, -\infty < \xi < \eta^2\}$. Из теоремы 4.1 вытекает, что $w_i(\xi, \eta)$ экспоненциально малы вместе с производными при $\eta = 2, \xi \rightarrow -\infty$.

В отличие от § 2, в рассматриваемой здесь задаче нет явной формулы для решений $w_i(\xi, \eta)$, аналогичной формуле (2.36), т. е. формулы для решения неоднородного уравнения теплопроводности в области D^+ по правой части уравнения и по значениям решения на ∂D^+ . Однако, используя фундаментальное решение уравнения теплопроводности

$$G(\xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\eta}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\eta}\right), \quad (4.17)$$

легко выписать формулу Грина в области D^+ . Действительно, пусть функция $w(\xi, \eta) \in C^\infty(D^+)$ удовлетворяет уравнению

$$L_0 w \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial w}{\partial \eta} = -F(\xi, \eta) \quad (4.18)$$

и растет на бесконечности не быстрее некоторой степени $|\xi| + |\eta|$. Тогда, как обычно, умножая уравнение (4.18), записанное в переменных ξ_1, η_1 , на $G(\xi - \xi_1, \eta - \eta_1)$ и интегрируя по области $D^+ \cap \{\xi_1, \eta_1: 2 < \eta_1 < \eta\}$, приходим к формуле Грина

$$w(\xi, \eta) = I_1(\xi, \eta) + I_2(\xi, \eta) + I_3(\xi, \eta), \quad (4.19)$$

где

$$I_1(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\eta} G(\xi - \xi_1, \eta - 2) g(\xi_1) d\xi_1, \quad (4.20)$$

$$I_2(\xi, \eta) = \int_2^{\eta} \left\{ g_2(\eta_1) G(\xi - \eta_1^2, \eta - \eta_1) + g_3(\eta_1) \frac{\partial G}{\partial \xi}(\xi - \eta_1^2, \eta - \eta_1) + 2\eta_1 g_3(\eta_1) G(\xi - \eta_1^2, \eta - \eta_1) \right\} d\eta_1, \quad (4.21)$$

$$I_3(\xi, \eta) = \iint_{D^+} G(\xi - \xi_1, \eta - \eta_1) F(\xi_1, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1, \quad (4.22)$$

$$g_1(\xi) = w(\xi, 2), \quad g_2(\eta) = \frac{\partial w}{\partial \xi}(\eta^2, \eta), \quad g_3(\eta) = w(\eta^2, \eta). \quad (4.23)$$

Из этой формулы нетрудно получить асимптотику $w(\xi, \eta)$ при $\eta \rightarrow \infty$ в случае, когда правая часть $F(\xi, \eta)$, а также значения w и $\partial w / \partial \xi$ на ∂D^+ достаточно быстро стремятся к нулю на бесконечности. Поэтому исследование асимптотик $w_i(\xi, \eta)$ при $\eta \rightarrow \infty$ будет проведено по той же схеме, что и в §§ 1, 2: для фиксированного номера i сначала строится ф. а. р. задач (4.10), (4.11), а затем для невязки применяются формулы (4.19) — (4.23).

Начнем с изучения асимптотики интегралов (4.20) — (4.22) с плотностями, быстро стремящимися к нулю на бесконечности. Хотя в действительности асимптотика этих интегралов при $\eta \rightarrow \infty$ имеет единый вид, однако удобнее рассматривать эту асимптотику по отдельности в разных подобластях D^+ . Введем следующие обозначения: $D_3 = \{\xi, \eta: \xi \leq \eta, \eta \geq 2\}$, $D_4 = \{\xi, \eta: \eta \leq \xi \leq \eta^2, \eta \geq 2\}$ (см. рис. 24). Отметим еще, что в действительности при $\xi \rightarrow -\infty$ функции $w_i(\xi, \eta)$ экспоненциально быстро стремятся к нулю (хотя и неравномерно относительно η). Однако доказывать это довольно хлопотно, а для основной цели — построения и обоснования асимптотики решения $u(x, y, \varepsilon)$ — достаточно установить, что $w_i(\xi, \eta)$ при $\xi \rightarrow -\infty$ стремятся к нулю сверхстепенным образом (т. е. быстрее любой степени $|\xi|^{-1}$). Поэтому при исследовании интегралов $I_1(\xi, \eta)$, $I_2(\xi, \eta)$, $I_3(\xi, \eta)$ ограничимся степенными оценками.

Лемма 4.5. Пусть функция $g_1(\xi)$ удовлетворяет неравенству $|g_1(\xi)| < M(1 + \xi^2)^{-2N}$ при $\xi \leq 4$, где N — достаточно большое число. Тогда интеграл $I_1(\xi, \eta)$, определенный по формуле (4.20), допускает следующее асимптотическое представление:

$$\frac{\partial^{i+l}}{\partial \xi^i \partial \eta^l} I_1(\xi, \eta) = \frac{\partial^{i+l}}{\partial \xi^i \partial \eta^l} \sum_{j=0}^{N_1} c_{j,1} \frac{\partial^j}{\partial \xi^j} G(\xi, \eta) + \rho_{i,l,N,1} \quad (4.24)$$

в D^+ при $\eta \geq 3$, где $i + l \leq N_2$,

$$|\rho_{i,l,N,1}(\xi, \eta)| \leq M(\xi^2 + \eta^2)^{-N_3} \text{ в } D^+ \text{ при } \eta \geq 3, \quad (4.25)$$

а N_1, N_2, N_3 — некоторые числа, которые стремятся к бесконечности при $N \rightarrow \infty$.

Доказательство. Представим функцию $G(\xi - \xi_1, \eta)$ под интегралом $I_1(\xi, \eta)$ в виде

$$\sum_{j=0}^{2N} \frac{(-\xi_1)^j}{j!} \frac{\partial^j}{\partial \xi^j} G(\xi, \eta) - \frac{\xi_1^{2N+1}}{(2N+1)!} \frac{\partial^{2N+1}}{\partial \xi^{2N+1}} G(\xi - \gamma \xi_1, \eta),$$

где $0 < \gamma < 1$. Подставим это выражение в интеграл $I_1(\xi, \eta)$ и, интегрируя, получим первые члены ряда (4.24) при $i = l = 0$

плюс остаточный член. Таким образом, осталось лишь оценить этот остаточный член. Из явного вида функции G ясно, что он по модулю не превосходит величины

$$M \int_{-\infty}^4 (1 + \xi_1^2)^{-N+1} \eta^{-N-1} p \left(-\frac{(\xi - \gamma \xi_1)^2}{8\eta} \right) d\xi_1. \quad (4.26)$$

При $|\xi| \leq \eta$ очевидно, что этот интеграл не превосходит правой части неравенства (4.25). При $|\xi| \geq \eta$ разобьем интеграл (4.26) на два интеграла: по области, где $|\xi_1| < \frac{1}{2} |\xi|$, и по области, где $|\xi_1| \geq \frac{1}{2} |\xi| \geq \frac{1}{2} |\eta|$. Оценивая каждый из получившихся интегралов, приходим к неравенству (4.25).

Ясно, что производные от $I_1(\xi, \eta)$ при $\eta \geq 3$ имеют вид, сходный с $I_1(\xi, \eta)$, и, следовательно, разлагаются в ряд, подобный (4.24) при $i = l = 0$. Отсюда вытекает представление (4.24) и для остальных i и l . ■

Отметим, что члены асимптотического представления (4.24) имеют вид $\eta^k \Phi(\xi \eta^{-1/2})$, где функции $\Phi(\theta)$ экспоненциально быстро стремятся к нулю на бесконечности. Поэтому при $|\xi| < C\sqrt{\eta}$ члены ряда имеют степенную асимптотику, а при $|\xi| > \eta^{1/2+\mu}$ ($\mu > 0$) в асимптотическом представлении существенным является только остаточный член $\rho_{i, l, N, 1}$.

Лемма 4.6. Пусть функции $g_2(\eta)$ и $g_3(\eta)$ удовлетворяют оценкам $|g_k(\eta)| < M\eta^{-N}$, где N достаточно велико. Тогда для интеграла $I_2(\xi, \eta)$, определенного по формуле (4.21), справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\partial^{i+l}}{\partial \xi^i \partial \eta^l} I_2(\xi, \eta) = \frac{\partial^{i+l}}{\partial \xi^i \partial \eta^l} \sum_{j=0}^{N_1} c_{j,2} \frac{\partial^j G}{\partial \xi^j}(\xi, \eta) + \rho_{i, l, N, 2}(\xi, \eta) \quad (4.27)$$

в области D_3 , где $i + l \leq N_2$, а

$$|\rho_{i, l, N, 2}(\xi, \eta)| \leq M(\xi^2 + \eta^2)^{-N_3}. \quad (4.28)$$

Здесь N_1, N_2, N_3 — некоторые числа, которые стремятся к бесконечности при $N \rightarrow \infty$.

Доказательство асимптотики интеграла $I_2(\xi, \eta)$ сводится к доказательству асимптотики трех интегралов, на которые разбивается $I_2(\xi, \eta)$. Все они исследуются одинаково. Поэтому рассмотрим лишь интеграл

$$I_{2,1}(\xi, \eta) = \int_2^\eta g_2(\eta_1) G(\xi - \eta_1^2, \eta - \eta_1) d\eta_1.$$

Разлагая функцию $G(\xi - \eta_1^2, \eta - \eta_1)$ в ряд Тейлора по переменной η_1 и учитывая равенство $\frac{\partial G}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}$, получим равенство

$$G(\xi - \eta_1^2, \eta - \eta_1) = \sum_{j=0}^{2N} P_{2j}(\eta_1) \frac{\partial^j G}{\partial \xi^j}(\xi, \eta) + \Lambda_{N,2}(\xi, \eta, \eta_1), \quad (4.29)$$

где P_{2j} — многочлен степени не выше, чем $2j$. Остаточный член $\Lambda_{N,2}(\xi, \eta, \eta_1)$ — это сумма функций вида $P_m(\eta_1) \frac{\partial^n G}{\partial \xi^n}(\xi - \gamma^2 \eta_1^2, \eta - \gamma \eta_1)$, где $0 < \gamma < 1$, $m \leq 4N + 2$, $2N + 1 \leq n \leq 4N + 2$. Подставляя выражение (4.29) для $G(\xi - \eta_1^2, \eta - \eta_1)$ в интеграл $I_{2,1}(\xi, \eta)$, получим формулу (4.27) при $i = l = 0$, где

$$\rho_{0,0,N,2}(\xi, \eta) = - \sum_{j=0}^{2N} \frac{\partial^j G}{\partial \xi^j}(\xi, \eta) \int_{\eta}^{\infty} P_{2j}(\eta_1) g_2(\eta_1) d\eta_1 + \\ + \int_2^{\eta} g_2(\eta_1) \Lambda_{N,2}(\xi, \eta, \eta_1) d\eta_1.$$

Из условия на функцию $g_2(\eta)$ и из явного вида (4.17) функции $G(\xi, \eta)$ вытекает, что слагаемые, стоящие под знаком суммы, удовлетворяют оценке (4.28). А последнее слагаемое по модулю не превосходит величины

$$M \int_2^{\eta} \eta_1^{-4N+2} (\eta - \gamma \eta_1)^{-\frac{n+1}{2}} \exp\left(-\frac{(\xi - \gamma^2 \eta_1^2)^2}{8(\eta - \gamma \eta_1)}\right) d\eta_1.$$

Разобьем этот интеграл на два: интеграл от 2 до $1 + \eta/2$ и интеграл от $1 + \eta/2$ до η . Для первого интеграла оценка (4.28) очевидна. Так как при $z \geq 0$ справедливо неравенство $\exp\left(-\frac{z}{16}\right) < M_i (1+z)^{-i} \quad \forall i$, то второй интеграл не превосходит

$$M \int_{1+\eta/2}^{\eta} \eta_1^{-4N+2} [(\xi - \gamma^2 \eta_1^2)^2 + \eta - \gamma \eta_1]^{-\frac{n+1}{2}} \exp\left(-\frac{(\xi - \gamma^2 \eta_1^2)^2}{16(\eta - \gamma \eta_1)}\right) d\eta_1.$$

Множитель $[(\xi - \gamma^2 \eta_1^2)^2 + \eta - \gamma \eta_1]^{-\frac{n+1}{2}}$ равномерно ограничен в области D_3 . Это легко проверить, рассматривая отдельно случаи, когда $\gamma \eta_1$ близко к η , и случай, когда $\gamma \eta_1$ отделено от η . При этом надо учитывать, что $\gamma \eta_1 < \eta$, $\xi \leq \eta$ и $\eta \geq 2$. Теперь уже ясно, что интеграл от $1 + \eta/2$ до η также удовлетворяет оценке (4.28) при $|\xi| \leq \eta$. А при $\xi \leq -\eta$ множитель

$$[(\xi - \gamma^2 \eta_1^2)^2 + \eta - \gamma \eta_1]^{-\frac{n+1}{2}} \leq |\xi|^{-\frac{n+1}{2}}$$

и, следовательно, оценка (4.28) тоже выполняется.

Итак, соотношение (4.27) доказано при $i = l = 0$. Относительно производных функции $I_2(\xi, \eta)$ справедливо то же замечание, которое сделано в конце доказательства леммы 4.5. ■

Лемма 4.7. Пусть функция $F(\xi, \eta) \in C^\infty(D^+)$ и удовлетворяет оценкам

$$\left| \frac{\partial^{i+l} F}{\partial \xi^i \partial \eta^l}(\xi, \eta) \right| \leq M (\xi^2 + \eta^2)^{-1N} \quad \text{в } D^+, \quad (4.30)$$

где $i + l \leq N$, а N — достаточно большое число. Тогда для интеграла $I_3(\xi, \eta)$, определенного формулой (4.22), справедливы соотношения

$$\frac{\partial^{i+l} I_3}{\partial \xi^i \partial \eta^l}(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^{N_1} c_{j,3} \frac{\partial^j G}{\partial \xi^j}(\xi, \eta) + \rho_{i,l,N,3}(\xi, \eta), \quad (4.31)$$

где $i + l \leq N_2$,

$$|\rho_{i,l,N,3}(\xi, \eta)| \leq M (\xi^2 + \eta^2)^{-N_3} \text{ в } D_3, \quad (4.32)$$

а N_1, N_2 и N_3 — некоторые числа, стремящиеся к бесконечности при $N \rightarrow \infty$.

Доказательство. Разобьем интеграл $I_3(\xi, \eta)$ на два интеграла: $I_{3,1}(\xi, \eta)$ по области, где $2 \leq \eta_1 \leq 1 + \eta/2$, и $I_{3,2}(\xi, \eta)$ по области, где $1 + \eta/2 \leq \eta_1 \leq \eta$. В первом интеграле разложим функцию $G(\xi - \xi_1, \eta - \eta_1)$ в ряд Тейлора с остаточным членом, учитывая равенство $\frac{\partial G}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}$. Получим соотношение

$$G(\xi - \xi_1, \eta - \eta_1) = \sum_{j=0}^{2N} P_j(\xi_1, \eta_1) \frac{\partial^j G}{\partial \xi^j}(\xi, \eta) + \Lambda_{N,3}(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1),$$

где P_j — полиномы степени не выше, чем j . Здесь остаточный член

$\Lambda_{N,3}(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1)$ — это сумма функций вида $P_m(\xi_1, \eta_1) \frac{\partial^n G}{\partial \xi^n}(\xi - \gamma \xi_1, \eta - \gamma \eta_1)$, где $0 < \gamma < 1$, $m \leq 2N + 2$, $2N + 1 \leq n \leq 4N + 2$. Подставляя это выражение для $G(\xi - \xi_1, \eta - \eta_1)$ в интеграл $I_{3,1}(\xi, \eta)$, получим формулу (4.31) при $i = l = 0$, где

$$\rho_{0,0,N,3}(\xi, \eta) =$$

$$\begin{aligned} &= - \sum_{j=0}^{2N} \frac{\partial^j G}{\partial \xi^j}(\xi, \eta) \int_{1+\eta/2}^{\infty} \int_{-\infty}^{\eta_1^2} P_j(\xi_1, \eta_1) F(\xi_1, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1 + \\ &\quad + \int_2^{1+\eta/2} \int_{-\infty}^{\eta_1^2} F(\xi_1, \eta_1) \Lambda_{N,3}(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1. \end{aligned}$$

Из условий на функцию $F(\xi, \eta)$ и из явного вида функции $G(\xi, \eta)$ вытекает, что слагаемые, стоящие под знаком суммы, удовлетворяют оценкам (4.32). А последнее слагаемое не превосходит величины

$$M \int_2^{1+\eta/2} \int_{-\infty}^{\eta_1^2} (\xi_1^2 + \eta_1^2)^{-2N} \eta^{-N} \exp \left(-\beta \frac{(\xi - \gamma \xi_1)^2}{\eta} \right) d\xi_1 d\eta_1,$$

где $\beta > 0$. Рассматривая отдельно случаи $|\xi| \leq \eta$ и $\xi \leq -\eta < 0$, приходим к выводу, что этот интеграл также удовлетворяет оценке (4.32).

Теперь осталось оценить интеграл $I_{3,2}(\xi, \eta)$. По условию он не превосходит

$$M \int_{1+\eta/2-\infty}^{\eta} \int_{\eta_1^2}^{\eta_1^2} (\xi_1^2 + \eta_1^2)^{-4N} G(\xi - \xi_1, \eta - \eta_1) d\xi_1 d\eta_1.$$

Легко убедиться в том, что этот интеграл тоже не превосходит $M(\xi^2 + \eta^2)^{-N}$. Итак, соотношение (4.31) доказано при $i = l = 0$.

Функцию $I_3(\xi, \eta)$ нельзя, вообще говоря, дифференцировать по ξ и η под знаком интеграла большое число раз. Так как $\frac{\partial I_3}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 I_3}{\partial \xi^2} + cF(\xi, \eta)$, то достаточно исследовать лишь производные по ξ . После однократного дифференцирования $I_3(\xi, \eta)$ под знаком интеграла можно преобразовать получившийся интеграл путем интегрирования по частям. В результате окажется, что $\frac{\partial I_3}{\partial \xi}(\xi, \eta)$ — это сумма интегралов типа $I_3(\xi, \eta)$ и $I_2(\xi, \eta)$. Следовательно, для $\frac{\partial I_3}{\partial \xi}(\xi, \eta)$ справедливо асимптотическое представление (4.31). Далее, по индукции это представление доказывается и для остальных производных. ■

Лемма 4.8. Пусть функция $w(\xi, \eta) \in C^\infty(D^+)$, $L_0 w = F(\xi, \eta)$, для функции $F(\xi, \eta)$ справедливы оценки (4.30), а для граничной функции $g_3(\eta) = w(\eta^2, \eta)$ справедливы оценки

$$\left| \frac{d^i}{d\eta^i} g_3(\eta) \right| \leq M \eta^{-4N} \text{ при } i \leq N, \quad (4.33)$$

где N — достаточно большое число. Тогда в области $D_4 = D^+ \cap \{\xi, \eta: \xi \geq \eta \geq 2\}$ справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^{i+l} w}{\partial \xi^i \partial \eta^l}(\xi, \eta) \right| < M \eta^{-N_3} \quad (4.34)$$

при $i + l \leq N_2$, где N_2 и N_3 — некоторые числа, стремящиеся к бесконечности при $N \rightarrow \infty$.

Доказательство. Сначала докажем оценку (4.34) при $i = l = 0$. Рассмотрим вспомогательные функции $\Phi(\xi, \eta) = \bar{M} \eta^N \xi^{-2N} \pm w(\xi, \eta)$ в области $\{\xi, \eta: 4N/\eta < \xi < \eta^2, \eta \geq N\}$. Так как из принципа максимума вытекает, что решение $w(\xi, \eta)$ ограничено, то при достаточно большом $\bar{M}$ функции $\Phi(\xi, \eta)$ положительны на «параболической» границе этой области, т. е. при $\eta = N$, $4N^{3/2} < \xi < N^2$, при $\xi = 4N/\eta$, $\eta \geq N$ и при $\xi = \eta^2$, $\eta \geq N$. Так как $L_0 \Phi = \bar{M} \eta^{N-1} \xi^{-2N} (-N + 2N(2N+1)\eta \xi^{-2}) \pm$

$\pm F(\xi, \eta) < -\overline{M} \frac{N}{2} (\xi^2 + \eta^2)^{-N/2} + |F(\xi, \eta)|$, то из принципа максимума вытекает, что $\Phi(\xi, \eta) > 0$ в рассматриваемой области. Отсюда следует оценка (4.34) при $i = l = 0$. Остальные оценки вытекают из условий (4.33) и только что полученной оценки $w(\xi, \eta)$ и из априорных оценок производных решений параболических уравнений. ■

Теорема 4.2. Пусть функция $w(\xi, \eta) \in C^\infty(D^+)$, $L_0 w = F(\xi, \eta)$ и выполнены оценки

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{i+l} F}{\partial \xi^i \partial \eta^l}(\xi, \eta) \right| &\leq M (\xi^2 + \eta^2)^{-4N} \text{ в } D^+, \\ \left| \frac{\partial^i w}{\partial \xi^i}(\xi, 2) \right| &\leq M (1 + \xi^2)^{-4N} \text{ при } \xi \leq 4, \\ \left| \frac{d^i g_3}{d\eta^i}(\eta) \right| &\leq M \eta^{-4N} \text{ при } \eta \geq 2, \end{aligned} \quad (4.35)$$

где $g_3(\eta) = w(\eta^2, \eta)$, $i + l \leq N$, N — достаточно большое число. Тогда для функции $w(\xi, \eta)$ справедливы следующие асимптотические представления:

$$\frac{\partial^{i+l} w}{\partial \xi^i \partial \eta^l}(\xi, \eta) = \frac{\partial^{i+l}}{\partial \xi^i \partial \eta^l} \sum_{j=0}^{N_1} c_j \frac{\partial^j G}{\partial \xi^j}(\xi, \eta) + \rho_{i,l,N}(\xi, \eta) \quad (4.36)$$

в D^+ при $i + l \leq N_2$, где $G(\xi, \eta)$ — функция (4.17),

$$|\rho_{i,l,N}(\xi, \eta)| \leq M (\xi^2 + \eta^2)^{-N_3} \text{ в } D^+, \quad (4.37)$$

а N_1, N_2 и N_3 — некоторые числа, стремящиеся к бесконечности при $N \rightarrow \infty$.

Доказательство вытекает из формул (4.19)–(4.23) для решения уравнения $L_0 w = F$ и из лемм 4.5–4.8. Действительно, из априорных оценок производных решения параболического уравнения вытекает, что $w(\xi, \eta)$ быстро стремится к нулю при $\xi \rightarrow -\infty$, $2 \leq \eta \leq \eta_1$, а при $\eta \rightarrow \infty$ быстро стремится к нулю не только $g_3(\eta) = w(\eta^2, \eta)$, но и $g_2(\eta) = \frac{\partial w}{\partial \xi}(\eta^2, \eta)$. Тогда соотношение (4.36) следует из лемм 4.5–4.7 в области D_3 , а из леммы 4.8 — в области D_4 (в этой области (4.36) сводится просто к оценке (4.37)). ■

4. Функции $w_i(\xi, \eta)$ — решения задач (4.10), (4.11) — быстро стремятся к нулю при $\xi \rightarrow -\infty$ и фиксированном η , т. е. удовлетворяют одному из условий (4.35) теоремы 4.2. Однако при $\xi = \eta^2$ они не стремятся к нулю, а удовлетворяют условию (4.11). И правые части уравнений

для $w_i(\xi, \eta)$ равны нулю только при $i = 0$ и $i = 1$. А при $i \geq 2$ в правые части уравнений войдут производные от $w_i(\xi, \eta)$ с предыдущими номерами. Эти производные, как было выяснено в предыдущем пункте, не стремятся быстро к нулю на бесконечности, а лишь разлагаются в ряды типа (4.36). Значит, для того чтобы применять теорему 4.2 к функциям $w_i(\xi, \eta)$, надо предварительно построить ф.а.р. задач (4.10), (4.11) при $\eta \rightarrow \infty$. Такое построение и составляет основное содержание данного пункта.

Так же, как и в §§ 1, 2, ф.а.р. надо искать в классе функций вида $\eta^k \Phi(\theta)$, где $\theta = 2^{-1} \xi \eta^{-1/2}$. Однако множество функций здесь окажется шире, чем в классах, рассмотренных в § 2. Причина этого лежит в следующем. Класс функций надо выбрать таким образом, чтобы можно было удовлетворить условиям (4.11). Условие на параболе $\xi = \eta^2$ в первом приближении асимптотически для $\xi \rightarrow \infty$ совпадает с условием при $\eta = 0$, $\xi > 0$. Значит, функции должны, в частности, принимать значения $\eta^k = \xi^{k/2}$, а не только степени ξ с натуральными показателями, как в § 2. При дифференцировании, естественно, возникнут и отрицательные степени. А для того чтобы получить значение ξ^{-1} , надо задать значение $\ln \xi$ при $\xi > 0$ и затем продифференцировать полученное решение по ξ . Учитывая приведенные выше соображения, введем в этом параграфе другой класс $\mathfrak{B}$, более широкий, чем в § 2.

Посредством $W_{k/2}(\xi, \eta)$, где целое число $k \geq 0$, обозначим решение краевой задачи

$$L_0 W_{k/2} = 0 \text{ при } \eta > 0, \quad (4.38)$$

$$W_{k/2}(\xi, 0) = 0 \text{ при } \xi < 0, \quad (4.39)$$

$$W_{k/2}(\xi, 0) = \xi^{k/2} \text{ при } \xi > 0.$$

Если k — нечетное отрицательное число, равное $-(2n + 1)$, то положим

$$W_{k/2}(\xi, \eta) = \gamma_k \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} W_{1/2}(\xi, \eta), \quad (4.40)$$

где постоянные γ_k выбраны так, чтобы были выполнены равенства (4.39). А если k — отрицательное четное число, равное $-2n$, то положим

$$W_{k/2}(\xi, \eta) = \gamma_k \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} W^*(\xi, \eta), \quad (4.41)$$

где $W^*(\xi, \eta)$ — решение задачи

$$\begin{aligned} L_0 W^* &= 0 \text{ при } \eta > 0, \\ W^*(\xi, 0) &= 0 \text{ при } \xi < 0, \\ W^*(\xi, 0) &= \ln \xi \text{ при } \xi > 0. \end{aligned}$$

Постоянные γ_k также выбраны так, чтобы были выполнены равенства (4.39). Под решением задачи для $W^*(\xi, \eta)$ и решениями задач (4.38), (4.39) понимается интеграл

$$\int_0^\infty G(\xi - \xi_1, \eta) \varphi(\xi_1) d\xi_1, \quad (4.42)$$

где $G(\xi, \eta)$ — это фундаментальное решение (4.17), а $\varphi(\xi_1)$ — соответствующая начальная функция. Таким образом, при всех целых k справедливы соотношения (4.38), (4.39), хотя при $k < 1$ решения не могут быть записаны в виде интеграла (4.42), понимаемого в обычном смысле (интеграл расходится).

Из явного вида (4.42) и из формул (4.40), (4.41) для остальных k вытекает, что

$$W_{k/2}(\xi, \eta) = \eta^{k/4} (\Phi_k(\theta) + \Psi_k(\theta) \ln \eta), \quad (4.43)$$

где $\theta = 2^{-1} \xi \eta^{-1/2}$, а $\Psi_k(\theta)$ отлична от тождественного нуля лишь для четных отрицательных k . Также из (4.40) — (4.42) следует, что функции $\Phi_k(\theta)$ и $\Psi_k(\theta)$ экспоненциально быстро стремятся к нулю при $\theta \rightarrow -\infty$, а функция $\Psi_k(\theta)$ экспоненциально быстро стремится к нулю и при $\theta \rightarrow \infty$. Можно из явного вида функций $W_k(\xi, \eta)$ вывести их асимптотику (и тем самым асимптотику функций $\Phi_k(\theta)$) при $\theta \rightarrow \infty$, но удобнее сделать это по-другому. Мы выполним это чуть позднее, в лемме 4.9, а сейчас введем вспомогательные классы функций.

Линейную оболочку функций $P(\xi, \eta, D_\xi, D_\eta) W_{k/2}(\xi, \eta)$ для всевозможных целых k и полиномов P обозначим через $\mathfrak{B}$. Порядок функции $u(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}$ определяется так же, как в §§ 1, 2: если эта функция имеет вид

$$u(\xi, \eta) = \eta^{k/4} (\Phi(\theta) + \Psi(\theta) \ln \eta), \quad (4.44)$$

то ее порядок равен $k/4$. Множество элементов из $\mathfrak{B}$ порядка $k/4$ обозначается $\mathfrak{B}_{k/2}$. Ясно, что если $u(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_{k/2}$, то $\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_{k/2-1}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_{k/2-2}$, $\xi u \in \mathfrak{B}_{k/2+1}$, $\eta u \in \mathfrak{B}_{k/2+2}$. Следовательно, любая функция из $\mathfrak{B}$ — это конечная сум-

ма функций, каждая из которых принадлежит какому-нибудь $\mathfrak{B}_{k/2}$. Отметим еще, что так как $\frac{\partial W}{\partial \xi}^0(\xi, \eta) = G(\xi, \eta)$,

то $\frac{\partial^k G}{\partial \xi^k}(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_{-1-k}$.

Лемма 4.9. При $\xi > \eta > 1$, $\theta \rightarrow \infty$ для любой функции $u(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_{k/2}$ справедливо асимптотическое разложение

$$u(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^{k/2-2j} \eta^j. \quad (4.45)$$

Ряд допускает многократное почленное дифференцирование.

Лемма 4.10. Для любой функции $z(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_{k/2}$ существует функция $u(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_{k/2+2}$ такая, что

$$L_0 u = z \text{ при } \eta > 0, \quad u(\xi, 0) = 0 \text{ при } \xi \neq 0. \quad (4.46)$$

Лемма 4.11. Для любого целого k существует ф. а. р. задачи

$$L_0 u = 0 \text{ в } D^+, \quad (4.47)$$

$$u(\xi, 2) = 0 \text{ при } \xi \leq 4, \quad (4.48)$$

$$u(\xi, \sqrt{\xi}) = \xi^{k/2} \text{ при } \xi > 4$$

при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$, которое имеет вид

$$\sum_{j=0}^{\infty} v_j(\xi, \eta), \quad v_j(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_{k/2-3j/2}.$$

Лемма 4.12. Для любой функции $z(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_{k/2}$ существует ф. а. р. задачи

$$L_0 u = z(\xi, \eta) \text{ при } (\xi, \eta) \in D^+,$$

$$u(\xi, 2) = 0 \text{ при } \xi \leq 4, \quad u(\xi, \sqrt{\xi}) = 0 \text{ при } \xi \geq 4 \quad (4.49)$$

при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$, которое имеет вид

$$\sum_{j=0}^{\infty} v_j(\xi, \eta), \quad v_j(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_{k/2+2-3j/2}. \quad (4.50)$$

Доказательство леммы 4.9. Из определения класса $\mathfrak{B}$ ясно, что достаточно доказать асимптотику (4.45) для $u(\xi, \eta) = W_{k/2}$. Сначала построим ф. а. р. задачи (4.38), (4.39) при $\xi \geq 1$,

$0 \rightarrow \infty$. Это легко сделать, рассматривая формальный ряд $\sum_{j=0}^{\infty} v_j(\xi, \eta)$ и

полагая $v_0(\xi, \eta) = \xi^{k/2}$, $v_{j+1}(\xi, \eta) = \int_0^{\eta} \frac{\partial^2 v_j}{\partial \xi^2}(\xi, \eta_1) d\eta_1$.

В результате получится ряд (4.45). Далее, как обычно, рассмотрим функцию $z_N(\xi, \eta) = \chi(\xi)[W_{k/2} - B_N W]$, где $\chi(\xi)$ — срезающая функция, равная нулю при $\xi \leq 1/2$ и единице при $\xi \geq 1$. Из построения ясно, что $z_N(\xi, 0) = 0$, $L_0 z_N = 0$ при $\xi \leq 1/2$ и $L_0 z_N = O(\theta^{-N_1} \xi^{k/2})$ при $\xi \geq 1/2$. Из явного представления задачи Коши в виде свертки фундаментального решения $G(\xi, \eta)$ с правой частью $L_0 z_N$ легко установить, что $z_N(\xi, \eta) = O(\theta^{-N_2})$ при $\xi > \eta > 1$. ■

Доказательство леммы 4.10. Очевидно, что достаточно доказать лемму для случая $z(\xi, \eta) = \xi^p \eta^{l+w}(\xi, \eta)$, где p и l — целые неотрицательные числа, а функция $w(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_{k/2}$ и удовлетворяет уравнению $L_0 w = 0$. Доказательство проводится индукцией по числу p . Если $p = 0$, то в качестве решения уравнения (4.46) можно взять $u(\xi, \eta) = -(l+1)^{-1} \eta^{l+1} w(\xi, \eta)$. Если $p > 0$, то решение этого уравнения будем искать в виде $-(l+1)^{-1} \xi^p \eta^{l+1} \times \times w(\xi, \eta) + \tilde{u}(\xi, \eta)$. Для функции $\tilde{u}(\xi, \eta)$ получается уравнение

$$L_0 \tilde{u} = (l+1)^{-1} \eta^{l+1} \left(p(p-1) \xi^{p-2} w + 2p \xi^{p-1} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right).$$

Тем самым задача для $\tilde{u}$ свелась к уже решенным по предположению индукции. Из явного вида решения видно, что $u(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_{k/2+2}$. ■

Доказательство леммы 4.11. Ясно, что надо положить $v_0(\xi, \eta) = W_{k/2}(\xi, \eta)$. Тогда уравнение (4.47) выполнено точно, а условие (4.48) — асимптотически. В силу леммы 4.9

$$v_0(\xi, \sqrt{\xi}) = \xi^{k/2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \xi^{k/2-3j/2}, \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Таким образом, на параболе $\xi = \eta^2$ образовалась невязка, которая имеет меньший порядок при $\xi \rightarrow \infty$. Ликвидируя невязку $-a_1 \xi^{k/2-3/2}$, положим $v_1(\xi, \eta) = -a_1 W_{k/2-3/2}(\xi, \eta)$, и, далее, этот процесс продолжается по индукции. ■

Доказательство леммы 4.12. В качестве $v_0(\xi, \eta)$ — первого члена (4.50) — надо взять решение задачи (4.46). Тогда выполнены все соотношения (4.49), кроме последнего. Значения функции $v_0(\xi, \eta)$ при $\eta = \sqrt{\xi}$, $\xi \rightarrow \infty$ — это, в силу леммы 4.9, ряд (4.45), где k надо заменить на $k+4$, так как $v_0(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_{k/2+2}$. Итак, $v_0(\xi, \sqrt{\xi}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^{k/2+2-3j/2}$, $\xi \rightarrow \infty$. Возникшие невязки в граничном условии ликвидируются согласно лемме 4.11, после чего получается ряд (4.50). ■

Теорема 4.3. Для $w_i(\xi, \eta)$ — решений задач (4.10), (4.11) — в области D^+ при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические разложения

$$w_i(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{j,i}(\xi, \eta), \quad (4.51)$$

где $\psi_{j,i}(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_{2i-j/2}$. Этот ряд допускает многократное

почленное дифференцирование. Соотношение (4.51) понимается следующим образом: при каждом $i \geq 0$ для всех достаточно больших N в области D^+ справедлива оценка

$$\left| w_i(\xi, \eta) - \sum_{j=0}^N \psi_{j,i}(\xi, \eta) \right| < M(\xi^2 + \eta^2)^{-N_i}, \quad (4.52)$$

где $N_i \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. Аналогичные оценки справедливы и для производных от $w_i(\xi, \eta)$.

Доказательство проведем по индукции, опираясь на леммы 4.9—4.12 и теорему 4.2. Отметим еще, что из определения полиномов $q_i(\xi, \eta)$ вытекают равенства

$$q_i(\xi, \sqrt{\xi}) = a_i \xi^{i/2}. \quad (4.53)$$

Для задачи $L_0 w_0 = 0$, $w_0(\xi, \sqrt{\xi}) = -q_0$, исходя из леммы 4.11, построим ф. а. р., которое имеет вид (4.51). Разность между $w_0(\xi, \eta)$ и частичной суммой построенного ряда — это решение задачи, рассмотренной в теореме 4.2. Согласно этой теореме для такой разности и ее производных справедливы асимптотические разложения (4.36) с оценками остаточного члена типа (4.52). Члены асимптотического разложения (4.36) принадлежат $\mathfrak{B}_k$ при различных k , где k — натуральные числа. Следовательно, соотношение (4.51) доказано для $i=0$. Точно так же доказываются соотношения (4.51), (4.52) для $w_1(\xi, \eta)$. Начиная с $i=2$, функции $w_i(\xi, \eta)$ удовлетворяют неоднородным уравнениям.

Пусть соотношения (4.51), (4.52) доказаны для всех $i \leq n-1$. Из (4.10) следует, что функция $w_n(\xi, \eta)$ удовлетворяет в D^+ уравнению

$$L_0 w_n = - \frac{\partial^2 w_{n-2}}{\partial \eta^2} + \sum_{\substack{s \leq n \\ 2j+l+s=n}} \frac{1}{j!l!} \frac{\partial^{j+l} a}{\partial x^j \partial y^l}(0, 0) \frac{\partial w_s}{\partial \eta}(\xi, \eta) \xi^j \eta^l.$$

По предположению индукции каждое слагаемое в правой части этого уравнения при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$ разлагается в асимптотический ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_{n,j}^*(\xi, \eta)$, где $\psi_{n,j}^*(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_{m-j/2}$.

Для первого слагаемого $m = 2(n-2) - 4$, а для каждого члена суммы ряда $m = j + 2l + 2s - 2 = 2n - 3j - 2 \leq 2n - 2$. Таким образом, правая часть разлагается в асимпто-

тический ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_{n,j}(\xi, \eta)$, где $\psi_{n,j}(\xi, \eta) \in \mathfrak{B}_{2n-2-2j}$. Для каждого члена этого ряда построим, согласно лемме 4.12, ф. а. р. задачи $L_0 u = \psi_{n,j}$, $u(\xi, 2) = 0$, $u(\xi, \sqrt{\xi}) = 0$ в области D^+ . Каждое такое решение принадлежит $\mathfrak{B}_{2n-j/2}$. Тем самым построено ф. а. р. неоднородного уравнения с нулевыми граничными условиями. Добавляя к нему ф. а. р. однородного уравнения с условием $w_n(\xi, \sqrt{\xi}) = -q_n(\xi, \sqrt{\xi})$, построенное согласно лемме 4.11, получаем ф. а. р. полной задачи для $w_n(\xi, \eta)$. После этого, применяя теорему 4.2 так, как это было сделано для $w_0(\xi, \eta)$, приходим к соотношениям (4.51), (4.52) для $w_n(\xi, \eta)$. ■

Замечание. Если внимательно следить за индексами j в формуле (4.51), то можно заметить (см. (4.53) и леммы 4.11, 4.12), что ф. а. р. содержат лишь члены $\psi_{i,j}(\xi, \eta)$ при j , кратном трем. Но когда к этому ряду добавляется ряд (4.36), то появляются члены $\psi_{i,j}(\xi, \eta)$ при четных j . Других членов в ряде (4.51) нет. Более того, для $w_0(\xi, \eta)$ ряд состоит только из четных j . Все члены ф. а. р. с номерами $j \equiv 0 \pmod 3$ легко вычисляются явно по коэффициентам внешнего разложения (4.3), точнее, по их росткам в начале координат. А остальные члены рядов (4.51) (которые появляются, согласно теореме 4.2, из решений задач с данными, быстро стремящимися к нулю на бесконечности) находятся значительно сложнее. Явные формулы для этих членов содержат не только коэффициенты Тейлора функций u_{3k} и z_{3k} , но и некоторые абсолютные постоянные, получаемые из решений специальных задач. Здесь мы не будем останавливаться на вопросе получения явных формул для этих постоянных.

5. Асимптотика функций $w_i(\xi, \eta)$ на бесконечности полностью исследована. Она дает возможность построить асимптотическое разложение решения $u(x, y, \varepsilon)$ в окрестности особой характеристики α точно так же, как это было сделано в § 2. Отличие лишь в том, что из-за представления (4.43) после замены переменных появляются члены $\ln \varepsilon$. Кроме того, показатели степеней ε немного изменились просто оттого, что в § 2 коэффициент при операторе Лапласа обозначен ε^2 , а в этом параграфе — ε^3 . И, наконец, из-за того, что ряд (4.3) не имеет особенностей нигде в Ω_0 , удобнее искать внутреннее разложение решения $u(x, y, \varepsilon)$ в окрестности отрезка $\alpha = \{x, y: x=0, 0 \leq y \leq \varphi_2(0)\}$ в виде суммы ряда (4.3)

и ряда

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/4} v_k(\zeta, y) + \ln \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/4} v_{k,1}(\zeta, y), \quad (4.54)$$

где $\zeta = \varepsilon^{-3/2}x$. Таким образом, ряд V должен быть согласован с рядом (4.4) при $\zeta \rightarrow \infty$, с нулем при $\zeta \rightarrow -\infty$ и, самое главное, с рядом (4.9) при $y \rightarrow 0$. Уравнения и начальные условия для $v_k(\zeta, y)$ и $v_{k,1}(\zeta, y)$ получаются обычным способом:

$$\begin{aligned} L_3 v_0 &\equiv \frac{\partial^2 v_0}{\partial \zeta^2} - a(0, y) \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0, \\ L_3 v_k &= -\frac{\partial^2 v_{k-12}}{\partial y^2} + \sum_{j \geq 1} \frac{\zeta^j}{j!} \frac{\partial^j a}{\partial x^j}(0, y) \frac{\partial v_{k-6j}}{\partial y}, \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} v_k(\zeta, y) &\equiv 0 \quad \text{и} \quad v_{k,1}(\zeta, y) \equiv 0 \quad \text{при} \quad k < 0, \\ v_{k,1}(\zeta, 0) &= 0, \\ v_k(\zeta, 0) &= 0 \quad \text{при} \quad \zeta < 0, \end{aligned}$$

$$v_k(\zeta, 0) = - \sum_{6i+3j+12l=k} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} u_{3l}}{\partial x^i \partial y^j}(0, 0) \zeta^{i+j/2} \quad \text{при} \quad \zeta > 0.$$

Последнее соотношение получено из формального равенства

$$V = - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{3k} u_{3k}(x, y) \quad \text{при} \quad y = \sqrt{x}, \quad x = \varepsilon^{3/2} \zeta.$$

Из такого же равенства получено граничное условие (4.11) для $w_i(\xi, \eta)$, так что при $y=0$, $\zeta \rightarrow 0$ ряд (4.54) автоматически согласован с рядом (4.9) при $\xi = \eta^2 \rightarrow \infty$.

Функции $v_k(\zeta, y)$, $v_{k,1}(\zeta, y)$ строятся так же, как в §§ 1, 2. Перепишем ряд (4.9), заменяя функции $w_i(\xi, \eta)$ их асимптотическими разложениями (4.51), функции $\psi_{i,j}(\xi, \eta)$ в этом разложении — их представлениями (4.44) и, наконец, заменяя независимые переменные по формулам $\xi = \varepsilon^{-1/2} \zeta$, $\eta = \varepsilon^{-1} y$, $\theta = 2^{-1} \xi \eta^{-1/2} = 2^{-1} \zeta y^{-1/2}$:

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sum_{j=0}^{\infty} \eta^{i-j/4} (\Phi_{i,j}(\theta) + \Psi_{i,j}(\theta) \ln \eta) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/4} (V_k + V_{k,1} \ln \varepsilon). \end{aligned}$$

Здесь V_k и $V_{k,1}$ — формальные ряды:

$$V_k = y^{-k/4} \sum_{i=0}^{\infty} y^i (\Phi_{i,k}(\theta) + \Psi_{i,k}(\theta) \ln y), \quad (4.56)$$

$$V_{k,1} = -y^{-k/4} \sum_{i=0}^{\infty} y^i \Psi_{i,k}(\theta). \quad (4.57)$$

Теорема 4.4. *Существуют функции $v_k(\xi, y)$, $v_{k,1}(\xi, y)$ — решения задачи (4.55), которые имеют асимптотические разложения (4.56), (4.57) при $y \rightarrow 0$. Для построенных рядов (4.54) и (4.9) справедливо условие согласования.*

Доказательство теоремы фактически совпадает с доказательством теоремы 1.3. ■

Выпишем таблицу 9 согласования рядов (4.9) и (4.54). Она очень похожа на таблицу 8 и вряд ли нуждается в пояснениях. Отметим только, что согласно замечанию к теореме 4.3 многие из функций $v_k(\xi, \eta)$ и $v_{k,1}(\xi, \eta)$ тождественно равны нулю. Соответствующие строки в таблице, естественно, пропущены.

Асимптотика решения $u(x, y, \varepsilon)$ фактически построена. Вблизи границы σ_2 (см. рис. 23) надо добавить еще пограничные ряды, в точности совпадающие с рядами S^* и $\tilde{S}$ из § 2. Их построение и роль очевидны, поэтому даже дальнейшие формулировки будем давать для области, отделенной от верхней границы, а именно для $\Omega_{\delta, \mu}$, где $\Omega_{\delta, \mu} = \Omega_{\delta} \cap \{x, y: y < \mu\}$. Предполагается, что число $\min_{|x| < \delta} \varphi_2(x) - \mu > 0$ и достаточно мало.

Построенный ряд W согласован с рядом (4.6) вблизи нижней ветви параболы $x = y^2$ при $x \rightarrow 0$. Можно также доказать, что ряд W согласован с рядом (4.4) вблизи верхней ветви той же параболы при $x \rightarrow 0$, а ряд V согласован с рядом Z при $x \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow \infty$ и $y > \varepsilon^v$, $v < 1$. Но здесь мы поступим по-другому. Воспользуемся леммой 5.2, которая дает возможность оценивать решение уравнения (4.1) внутри узкой полосы $|x - x_0| < \rho$.

Теорема 4.5. *Пусть v — какое-нибудь число такое, что $0 < v < 3/2$, а число N достаточно велико. Пусть $u(x, y, \varepsilon)$ — решение задачи (4.1), (4.2), U, W и V — это построенные выше ряды (4.3), (4.9) и (4.54), а*

$$\begin{aligned} T_N(x, y, \varepsilon) = \\ = A_{N, x, y} U + A_{N, \xi, \eta} W + A_{N, \xi, y} V - A_{N, \xi, \eta} A_{N, \xi, y} V - u(x, y, \varepsilon). \end{aligned}$$

Таблица 9

$\begin{matrix} W \\ \backslash \\ V \end{matrix}$	$w_0(\xi, \eta)$	$\varepsilon w_1(\xi, \eta)$	$\varepsilon^2 w_2(\xi, \eta)$	...
$v_0(\zeta, y)$	$\Phi_{0,0}(\theta)$	$\varepsilon \eta \Phi_{1,0}(\theta)$	$\varepsilon^2 \eta^2 \Phi_{2,0}(\theta)$	...
	$\Phi_{0,0}(\theta)$	$y \Phi_{1,0}(\theta)$	$y^2 \Phi_{2,0}(\theta)$	
$\varepsilon^{1/2} v_2(\zeta, y)$	$\eta^{-1/2} \Phi_{0,2}(\theta)$	$\varepsilon \eta^{1/2} \Phi_{1,2}(\theta)$	$\varepsilon^2 \eta^{3/2} \Phi_{2,2}(\theta)$	...
	$\varepsilon^{1/2} y^{-1/2} \times \Phi_{0,2}(\theta)$	$\varepsilon^{1/2} y^{1/2} \Phi_{1,2}(\theta)$	$\varepsilon^{1/2} y^{3/2} \Phi_{2,2}(\theta)$	
$\varepsilon^{3/4} v_3(\zeta, y)$		$\varepsilon \eta^{1/4} \Phi_{1,3}(\theta)$	$\varepsilon^2 \eta^{5/4} \Phi_{2,3}(\theta)$	...
		$\varepsilon^{3/4} y^{1/4} \Phi_{1,3}(\theta)$	$\varepsilon^{3/4} y^{5/4} \Phi_{2,3}(\theta)$	
$\varepsilon v_4(\zeta, y)$	$\eta^{-1} \Phi_{0,4}(\theta)$	$\varepsilon \Phi_{1,4}(\theta)$	$\varepsilon^2 \eta \Phi_{2,4}(\theta)$	...
	$\varepsilon y^{-1} \Phi_{0,4}(\theta)$	$\varepsilon \Phi_{1,4}(\theta)$	$\varepsilon y \Phi_{2,4}(\theta)$	
$\varepsilon^{3/2} \ln \varepsilon v_6(\zeta, y)$		$-\varepsilon^{3/2} y^{-1/2} \ln \varepsilon \Psi_{1,6}(\theta)$	$-\varepsilon^{3/2} y^{1/2} \ln \varepsilon \Psi_{2,6}(\theta)$	...
$\varepsilon^{3/2} v_6(\zeta, y)$	$\eta^{-3/2} \Phi_{0,6}(\theta)$	$\varepsilon \eta^{-1/2} (\Phi_{1,6}(\theta) + \ln \eta \Psi_{1,6}(\theta))$	$\varepsilon^2 \eta^{1/2} (\Phi_{2,6}(\theta) + \ln \eta \Psi_{2,6}(\theta))$	...
	$\varepsilon^{3/2} y^{-3/2} \times \Phi_{0,6}(\theta)$	$\varepsilon^{3/2} y^{-1/2} (\Phi_{1,6}(\theta) + \ln y \Psi_{1,6}(\theta))$	$\varepsilon^{3/2} y^{1/2} (\Phi_{2,6}(\theta) + \ln y \Psi_{2,6}(\theta))$	
...	...	...	...	...

Тогда в области $\Omega_{\delta, \mu} \cap \{x, y: |x| < \varepsilon^v\}$ справедлива оценка

$$|T_N(x, y, \varepsilon)| < M \varepsilon^{N_1},$$

где $N_1 \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, а постоянная M зависит лишь от μ, v и N .

Доказательство. Так же, как и при доказательстве теоремы 1.4, нетрудно проверить, что $|T_N(x, y, \varepsilon)| < M\varepsilon^{N_2}$ на кривой σ_1 и на параболе $x = y^2$ при $|x| < 2\varepsilon^\nu$ (см. рис. 23). (Здесь и всюду далее N_i — это числа, которые стремятся к бесконечности при $N \rightarrow \infty$.) Всюду в области Ω_δ функции $T_N(x, y, \varepsilon)$ ограничены равномерно по ε : $|T_N(x, y, \varepsilon)| < M$. Теперь осталось применить лемму 5.2, полагая $\rho = 2\varepsilon^\nu$, $\gamma = \varepsilon^\nu$, $\tau = \mu + \gamma$ и выбирая постоянную λ так, чтобы $\nu < \lambda < 3/2$. (Напомним, что коэффициент при операторе второго порядка в лемме 5.2 обозначен ε , а в этом параграфе он обозначен ε^3 , поэтому условие $\lambda < 1/2$ заменяется условием $\lambda < 3/2$.) ■

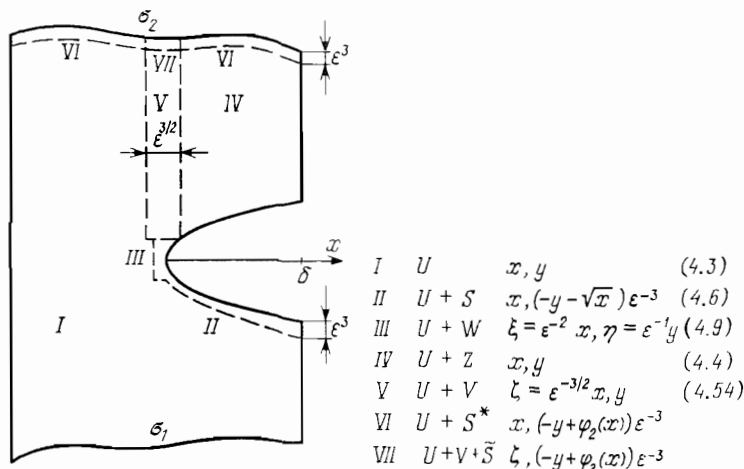


Рис. 25

Теорема 4.6. Пусть U, W, V и постоянные ν, μ и N такие же, как и в теореме 4.5, а Z и S — ряды (4.4) и (4.6). Тогда в области $\Omega_{\delta, \mu} \cap \{x, y: x < -\varepsilon^\nu\}$ справедлива оценка

$$|A_{N, x, y}U - u(x, y, \varepsilon)| < M\varepsilon^{N_1}.$$

В области $\Omega_{\delta, \mu} \cap \{x, y: x > \varepsilon^\nu, y \geq \sqrt{x}\}$ справедлива оценка

$$|A_{N, x, y}U + A_{N, x, y}Z - u(x, y, \varepsilon)| < M\varepsilon^{N_1},$$

а в области $\Omega_{\delta, \mu} \cap \{x, y: x > \varepsilon^\nu, y \leq -\sqrt{x}\}$ — оценка

$$|A_{N, x, y}U + A_{N, x, \tau}S - u(x, y, \varepsilon)| < M\varepsilon^{N_1}.$$

Доказательство вполне аналогично доказательству предыдущей теоремы. Для каждой из функций, стоящих под знаком модуля в левых частях неравенств, нетрудно проверить, что она мала на соответствующих частях границы $\partial\Omega$, малы значения оператора от этой функции, а на вертикальных частях границы соответствующей области и при $y = \mu$ функция ограничена. После

этого остается применить лемму 5.2. Постоянные можно выбрать следующим образом: $\rho = \frac{1}{2} \varepsilon^\nu$, $\gamma = \frac{1}{4} \varepsilon^\nu$, $\tau = \mu + \gamma$, $\nu < \lambda < 3/2$, а под Ω_ρ надо понимать теперь пересечение области Ω не с полосою $|x| < \rho$, а с полосой $|x - x_0| < \rho$, где (x_0, y) — это точка, в которой желательно получить оценку решения $u(x, y, \varepsilon)$. Ясно, что такое видоизменение области Ω_ρ никак не влияет на справедливость леммы 5.2. ■

На рис. 25 изображены различные подобласти Ω_α . Они отмечены цифрами и около рисунка указано, какие ряды представляют асимптотику решения в этих областях, каковы внутренние переменные и какими формулами эти ряды определены.

§ 5. Замечания

1. Сначала несколько слов об асимптотике решения задачи (0.3), (0.4) в угловых граничных точках типа точки c_5 на рис. 15. Для уравнения (2.1) — это точки, лежащие на верхней части границы, но, разумеется, их определение инвариантно относительно замены независимых переменных. Пусть в уравнении (0.1) оператор $\mathcal{M}$ локально отрицательно определенный (для эллиптического оператора второго порядка это означает, что матрица коэффициентов при вторых производных положительно определенная, но определение имеет смысл и для более общих операторов), а оператор первого порядка — это $b(x, y) \frac{d}{ds}$, где $\frac{d}{ds}$ — производная вдоль характеристики оператора l . Выберем направление s и тем самым направление характеристики так, чтобы коэффициент $b(x, y)$ был отрицательным (предполагается, что всюду $b(x, y) \neq 0$, в примерах §§ 1–4 направление s совпадает с направлением оси y , в §§ 1, 2, 4 коэффициент $b(x, y) = -a(x, y) < 0$, в § 3 $b(x, y) \equiv -1$).

Угловые точки границы в общем положении могут принадлежать одному из трех типов:

1) характеристика выходит из угловой точки в область Ω и тем самым является особой характеристикой;

2) характеристика, проходящая через угловую точку, ведет себя так же, как на рис. 17. Это означает, что одна часть характеристики, оставаясь в области Ω , входит в угловую точку, а ее продолжение тоже лежит в области Ω , являясь тем самым особой характеристикой;

3) характеристика входит из области Ω в угловую точку, а продолжение характеристики лежит вне Ω .

Первый и второй случаи были рассмотрены в § 2 (см. рис. 15, 17) и потребовали довольно сложного исследования. А в третьем случае все обстоит значительно проще. На сторонах угла имеется обычный экспоненциальный пограничный слой (ср. ряды S в формулах (1.5), (2.6) и (4.6)). Но из-за того, что граница в точке негладкая, погранслои, построенный на одной стороне угла, порождает невязку в граничном условии на другой стороне в точности так же, как это было в примере 4 § 2 гл. I (ср. рис. 4 и рис. 26).

Таким образом, остается лишь ликвидировать возникшую невязку в граничном условии.

Пусть для примера угловая точка расположена в начале координат, граница в ее окрестности состоит из двух дуг: $\sigma_- = \{x, y: y = \varphi_-(x), -\delta \leq x \leq 0\}$ и $\sigma_+ = \{x, y: y = \varphi_+(x), 0 \leq x \leq \delta\}$, где $\varphi_{\pm}(0) = 0$, $\varphi'_-(0) > \varphi'_+(0)$. Пусть уравнение имеет вид (2.1), а область Ω_δ расположена при $y < \varphi_{\pm}(x)$. Вблизи дуг

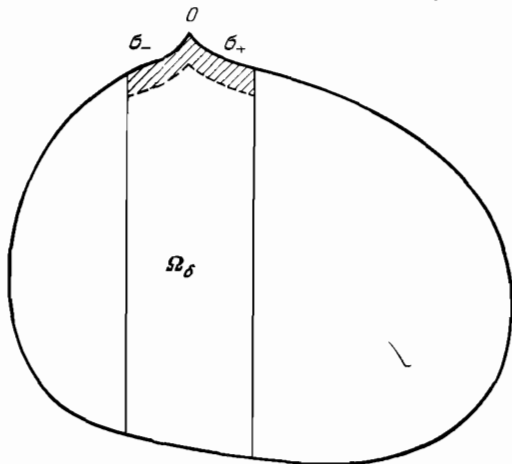


Рис. 26

$\sigma_{\pm}$ имеется пограничный слой, где уже построено (как в любом из предыдущих параграфов гл. IV) ф. а. р. $U + S_{\pm}$. Здесь U — внешнее разложение, а

$$S_{\pm} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} s_{2k}^{\pm}(x, \tau^{\pm}), \quad \tau^{\pm} = \varepsilon^{-2}(-y + \varphi_{\pm}(x)).$$

Функции $s_{2k}^{\pm}(x, \tau) \in C^{\infty}$ и экспоненциально быстро стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$.

Ряды $U + S_{\pm}$, каждый на своей дуге $\sigma_{\pm}$, формально удовлетворяют условию $u(x, y, \varepsilon)|_{\partial\Omega} = 0$. Далее будем для простоты считать дуги $\sigma_{\pm}$ отрезками прямых, что не ограничивает общности, так как к этому случаю можно свести уравнение заменой независимых переменных. Правда, при этом уравнение (2.1) изменит свой вид — вместо оператора Лапласа появится эллиптический оператор с переменными коэффициентами. Однако, как указывалось выше, переменность коэффициентов не вносит никаких заметных изменений в исследование.

Итак, пусть уравнение σ_- — это $y = \varphi_- \cdot x$, а уравнение σ_+ — это $y = \varphi_+ \cdot x$, где $\varphi_- > \varphi_+$. Будем считать, что коэффициенты ряда U определены всюду при $|x| \leq \delta$, а коэффициенты рядов $S_{\pm}$ определены всюду при $|x| \leq \delta$, $y \leq \varphi_{\pm} \cdot x$, так что $U + S_{\pm}$ формально обращаются в нуль при $y = \varphi_{\pm} \cdot x$. Тогда ряд $U + S_+ + S_-$

является ф. а. р. уравнения, а невязка в граничном условии, которую он порождает, равна

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} s_{2k}^{+}(x, \varepsilon^{-2}(\varphi_{+} - \varphi_{-})x) \quad \text{при} \quad -\delta \leq x \leq 0, \quad y = \varphi_{-} \cdot x, \quad (5.1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} s_{2k}^{-}(x, \varepsilon^{-2}(\varphi_{-} - \varphi_{+})x) \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq \delta, \quad y = \varphi_{+} \cdot x,$$

Таким образом, осталось лишь построить ф. а. р. уравнения, удовлетворяющее условиям (5.1). Это легко сделать так же, как в примере 4 § 2 гл. I, в § 1 и в § 3 гл. IV. После замены переменных $x = \varepsilon^2 \xi$, $y = \varepsilon^2 \eta$ для коэффициентов внутреннего разложения

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} w_{2k}(\xi, \eta)$$

получаются уравнения

$$\Delta w_{2k} - \frac{\partial}{\partial \eta} w_{2k} = F_k(\xi, \eta), \quad k \geq 0, \quad (5.2)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} w_{2k}(\xi, \varphi_{-} \cdot \xi) &= g_k^{-}(\xi) \quad \text{при} \quad -\infty < \xi \leq 0, \\ w_{2k}(\xi, \varphi_{+} \cdot \xi) &= g_k^{+}(\xi) \quad \text{при} \quad 0 \leq \xi < \infty. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь $F_k(\xi, \eta)$ зависят от функций $w_{2j}(\xi, \eta)$ с померами $j < k$ и от их производных, а $g_k^{\pm}(\xi)$ получаются разложением в ряды Тейлора функций $s_k^{\pm}(\varepsilon^2 \xi, \pm(\varphi_{+} - \varphi_{-})\xi)$ по первому аргументу. Следовательно, функции $g_k^{\pm}(\xi)$ экспоненциально быстро стремятся к нулю на бесконечности.

Функции $w_{2k}(\xi, \eta)$ требуется найти в области $\{\xi, \eta: \xi \in \mathbb{R}^1, \eta \leq \varphi_{+} \cdot \xi, \eta \leq \varphi_{-} \cdot \xi\}$. Можно показать, что задачи (5.2), (5.3) в этой области имеют решения, которые тоже экспоненциально быстро стремятся к нулю при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$. Доказательство по сути такое же, как в § 2 (см. леммы 2.1, 2.2). Итак, в случае угловых граничных точек третьего типа (таких, как точка c_5 на рис. 15) к предыдущим асимптотикам добавляется лишь угловой пограничный слой экспоненциального типа, влияние которого ограничивается лишь малой окрестностью угловой точки.

2. В этом пункте будут доказаны леммы о локализации асимптотических разложений для уравнения (0.3), которые неоднократно упоминались выше и были использованы в этой главе для обоснования асимптотики. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с кусочно гладкой границей,

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \varepsilon \mathcal{M} - a(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + b(x, y), \quad (5.4)$$

где $\mathcal{M}$ — эллиптический оператор второго порядка вида (0.2) с непрерывными коэффициентами, $a_{i,j}(x, y)$ — положительно определенная матрица, $a(x, y) \in C(\bar{\Omega})$, $b(x, y) \in C(\Omega)$, $a(x, y) > 0$ в $\bar{\Omega}$ и параметр $\varepsilon > 0$. Обозначим Ω_ρ область $\Omega \cap \{x, y: |x| < \rho\}$. Пусть, для определенности начало координат лежит в области Ω .

Лемма 5.1. *Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $\varepsilon < \varepsilon_0$ для любой функции $u(x, y) \in C^2(\bar{\Omega})$ справедлива оценка*

$$\max_{\Omega_\rho - \gamma} |u(x, y)| \leq M\beta_1 + M(\beta_1 + \beta_2) \exp(-\gamma\varepsilon^{-\lambda}), \quad (5.5)$$

где

$$\beta_1 = \max_{\partial\Omega \cap \Omega_\rho} |u(x, y)| + \max_{\bar{\Omega}_\rho} |\mathcal{L}_\varepsilon u(x, y)|, \quad \beta_2 = \max_{|x|=\rho} |u(x, y)|;$$

γ и λ — любые числа такие, что $0 < \lambda < 1/2$, $0 < \gamma < \rho$, а постоянная M зависит только от коэффициентов оператора $\mathcal{M}$, коэффициентов $a(x, y)$, $b(x, y)$ и от области Ω .

Доказательство. Сначала построим функцию $v(x, y)$ такую, что $v(x, y) > 1$ и $\mathcal{L}_\varepsilon v(x, y) < -1$ в $\bar{\Omega}$. В качестве $v(x, y)$ можно взять функцию $\mu_1 e^{\mu_2 y}$, где постоянные μ_1 и μ_2 зависят лишь от Ω и от указанных выше коэффициентов. Действительно,

$$\mathcal{L}_\varepsilon e^{\mu_2 y} = e^{\mu_2 y} [-a(x, y)\mu_2 + b(x, y) + O(\varepsilon(1 + \mu_2^2))] < -e^{-\mu_2 y}$$

при достаточно большом μ_2 и достаточно малых ε . Далее рассмотрим функции $\Phi_\pm(x, y) = (\beta_1 + \beta_2) \frac{\text{ch}(x\varepsilon^{-\lambda})}{\text{ch}(\rho\varepsilon^{-\lambda})} v(x, y) + \beta_1 v(x, y) \pm u(x, y)$. Очевидно, что $\Phi_\pm(x, y) \geq 0$ на границе области Ω_ρ , а в Ω_ρ

$$\mathcal{L}_\varepsilon \Phi_\pm(x, y) < \frac{\beta_1 + \beta_2}{\text{ch}(\rho\varepsilon^{-\lambda})} \text{ch}(x\varepsilon^{-\lambda}) [-1 + O(\varepsilon^{1-2\lambda})] - \beta_1 + |\mathcal{L}_\varepsilon u| < 0$$

при всех достаточно малых ε . Следовательно, из принципа максимума вытекает оценка (5.5). ■

Введем еще одно обозначение для подобласти Ω . Пусть $\Omega_{\rho, \tau} = \Omega_\rho \cap \{x, y: y < \tau\}$. Предполагается, что интервал $\{x, y: y = \tau, |x| < \rho\}$ принадлежит Ω_ρ .

Лемма 5.2. *Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $\varepsilon < \varepsilon_0$ для любых положительных чисел γ и λ , где $\lambda < 1/2$, а γ достаточно мало, и для любой функции $u(x, y) \in C^2(\bar{\Omega})$ справедлива оценка*

$$\max_{\Omega_{\rho-\gamma, \tau-\gamma}} |u(x, y)| \leq M\beta_1 + M(\beta_1 + \beta_2) \exp(-\gamma\varepsilon^{-\lambda}).$$

Здесь

$$\beta_1 = \max_{\partial\Omega \cap \Omega_{\rho-\gamma, \tau-\gamma}} |u(x, y)| + \max_{\bar{\Omega}_{\rho, \tau}} |\mathcal{L}_\varepsilon u|, \quad \beta_2 = \max_{|x|=\rho} |u(x, y)|,$$

а постоянная M такая же, как и в лемме 5.1.

Доказательство. Достаточно рассмотреть вспомогательные функции $(\beta_1 + \beta_2) \frac{\operatorname{ch}(x\varepsilon^{-\lambda})}{\operatorname{ch}(\rho\varepsilon^{-\lambda})} v(x, y) + \beta_{1v}(x, y) + (\beta_1 + \beta_2) \times \times \exp((y - \tau)\varepsilon^{-\lambda}) \pm u(x, y)$, где $v(x, y)$ — та же функция, что и в лемме 5.1, и применить к ним принцип максимума. ■

Все задачи, рассмотренные в этой главе, принадлежат довольно узкому классу дифференциальных уравнений — эллиптическим уравнениям второго порядка. Тем не менее методика построения асимптотики решений без серьезных изменений может быть применена и к эллиптическим уравнениям высокого порядка и к уравнениям других типов, содержащих малый параметр. Однако обоснование асимптотики опиралось на принцип максимума, имеющий лишь узкую область применения. Для других классов задач нужна иная методика получения оценок. В частности, широко применяются энергетические оценки. Для их иллюстрации приведем доказательство леммы, сходной с леммой 5.1 и также обеспечивающей принцип локализации асимптотики решения уравнения (0.3) около характеристики предельного уравнения.

Итак, рассмотрим оператор (5.4) в ограниченной области Ω . Коэффициенты оператора и граница $\partial\Omega$ предполагаются гладкими, $a(x, y) \geq a_0 > 0$. Обозначение области Ω_ρ то же, что и ранее. Введем дополнительные обозначения

$$\|u\|_{0,\delta}^2 = \int_{\Omega_\delta} \int u^2(x, y) dx dy,$$

$$\|u\|_{1,\delta}^2 = \int_{\Omega_\delta} \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u^2 \right] dx dy.$$

Лемма 5.3. Пусть v , ρ и δ — положительные числа такие, что $v < 1/2$, $\delta - \rho > \varepsilon^v$, а n — натуральное число. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$, зависящее лишь от v и n , такое, что для всех $\varepsilon < \varepsilon_0$ и любой функции $u(x, y) \in C^2(\bar{\Omega})$, равной нулю на $\partial\Omega$, справедлива оценка

$$\|u\|_{0,\rho}^2 + \varepsilon \|u\|_{1,\rho}^2 \leq \varepsilon^{(n+1)(1/2-v)} \|u\|_{1,\delta}^2 + M \|u\|_{0,\delta} \|\mathcal{L}_\varepsilon u\|_{0,\delta}. \quad (5.6)$$

Здесь постоянная M зависит лишь от области Ω , от коэффициентов и от показателей v и n .

Доказательство. Посредством M будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от ε , $u(x, y)$, ρ и δ . Обозначая $\mathcal{L}_\varepsilon u = f$, выишем уравнение, которому удовлетворяет функция $u(x, y)$:

$$\varepsilon \mathcal{M}u - a(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + b(x, y) u = f(x, y, \varepsilon). \quad (5.7)$$

Пусть $\chi(z) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ — срезающая функция такая, что $\chi'(z) \geq 0$, $\chi(z) = 0$ при $z \leq 0$, $\chi(z) = 1$ при $z \geq 1$. Тогда функция $\psi(x, \mu, \gamma) = \chi\left(\frac{x+\mu}{\mu-\gamma}\right) \chi\left(\frac{\mu-x}{\mu-\gamma}\right)$, где $0 < \gamma < \mu$, обращается в нуль при

$|x| \geq \mu$ и равна единице при $|x| \leq \gamma$. Очевидно, что $\left| \frac{d^i \psi}{dx^i} \right| \leq$

$\leq M(\mu - \gamma)^{-i}$. Умножим уравнение (5.7) на $\psi^2(x, \mu, \gamma) \exp(\lambda y) \times \times u(x, y)$, где $0 < \gamma < \mu \leq \delta$, а постоянную $\lambda > 0$ выберем позднее и проинтегрируем по области Ω_δ :

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{\Omega_\delta} \psi^2 e^{\lambda y} u \mathcal{M} u dx dy - \int_{\Omega_\delta} a(x, y) \psi^2 e^{\lambda y} u \frac{\partial u}{\partial y} dx dy + \\ + \int_{\Omega_\delta} b(x, y) \psi^2 e^{\lambda y} u^2 dx dy = \int_{\Omega_\delta} \psi^2 e^{\lambda y} u f dx dy. \quad (5.8) \end{aligned}$$

Преобразуем интегрированием по частям второй член в левой части этого равенства:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_\delta} a(x, y) \psi^2 e^{\lambda y} u \frac{\partial u}{\partial y} dx dy = \\ = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\delta} u^2 \psi^2 e^{\lambda y} \frac{\partial a}{\partial y} dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\delta} u^2 \psi^2 \lambda e^{\lambda y} a dx dy. \end{aligned}$$

Выберем постоянную λ так, чтобы $a(x, y) \lambda > \max_{\bar{\Omega}} \left| \frac{\partial a}{\partial y}(x, y) \right| + + \max_{\bar{\Omega}} |b(x, y)| + 2$, и фиксируем ее. Учитывая это неравенство, получаем из (5.8) следующее соотношение:

$$\varepsilon \int_{\Omega_\delta} \psi^2 e^{\lambda y} u \mathcal{M} u dx dy + \int_{\Omega_\delta} \psi^2 u^2 e^{\lambda y} dx dy \leq M \|\psi u\|_{0,\delta} \|f\|_{0,\delta}. \quad (5.9)$$

Интегрируя по частям первый интеграл в левой части (5.9), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \varepsilon (M^{-1} \|u\|_{1,\gamma}^2 - M \|\psi u\|_{0,\delta} \|u\|_{1,\mu} (\mu - \gamma)^{-1}) + \\ + \|\psi u\|_{0,\delta}^2 \leq M \|\psi u\|_{0,\delta} \|f\|_{0,\delta}, \end{aligned}$$

из которого легко следует оценка

$$\begin{aligned} \|\psi u\|_{0,\delta}^2 + 2\varepsilon \|u\|_{1,\gamma}^2 \leq \varepsilon^{3/2-\nu} \|u\|_{1,\mu}^2 + \\ + M (\varepsilon^{1/2+\nu} (\mu - \gamma)^{-2} \|\psi u\|_{0,\delta}^2 + \|\psi u\|_{0,\delta} \|f\|_{0,\delta}). \end{aligned}$$

Так как $\psi(x, \mu, \gamma) \equiv 1$ при $|x| \leq \gamma$, то

$$\begin{aligned} [1 - M \varepsilon^{1/2+\nu} (\mu - \gamma)^{-2}] \|u\|_{0,\gamma}^2 + 2\varepsilon \|u\|_{1,\gamma}^2 \leq \\ \leq \varepsilon^{3/2-\nu} \|u\|_{1,\mu}^2 + M \|u\|_{0,\delta} \|f\|_{0,\delta}. \end{aligned}$$

Выпишем эти неравенства для $\gamma = \gamma_i = \delta - (\delta - \rho)2^{-i}$, $\mu = \mu_i = = \gamma_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, умножим обе части каждого неравенства на $\varepsilon^{(1/2-\nu)i}$ и сложим их почленно. В результате получится

неравенство

$$\sum_{i=0}^n \varepsilon^{(1/2-\nu)i} (1 - M\varepsilon^{1/2} 2^{2i+2} (\delta - \rho)^{-2}) \|u\|_{0,\gamma_i}^2 + \\ + \varepsilon \|u\|_{1,\rho}^2 \leq \varepsilon^{\frac{n+3}{2} - n\nu - \nu} \|u\|_{1,\gamma_{n+1}}^2 + M \sum_{i=0}^n \varepsilon^{(1/2-\nu)i} \|u\|_{0,\delta} \|f\|_{0,\delta}. \quad (5.10)$$

Так как $\varepsilon^{1/2+\nu}(\delta - \rho)^{-2} < \varepsilon^{1/2-\nu}$, то можно выбрать ε_0 таким, чтобы $1 - M\varepsilon^{1/2+\nu} 2^{2(n+1)} (\delta - \rho)^{-2} > 1/2$. Следовательно, из (5.10) вытекает (5.6). ■

Из леммы 5.3 следует, что если $\|\mathcal{L}_\varepsilon u\|_{0,\delta} < M\varepsilon^N$, а $\|u\|_{1,\delta} < M$, то в меньшей области Ω_ρ справедлива оценка $\|u\|_{1,\rho} < M\varepsilon^N$. Для этого достаточно лишь выбрать подходящее значение n .

Глава V

СИНГУЛЯРНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

В предыдущих главах метод согласования асимптотических разложений применялся лишь к обыкновенным дифференциальным уравнениям и к эллиптическим уравнениям второго порядка. В действительности сфера применения метода значительно шире. В этой главе и в гл. VI метод будет продемонстрирован на двух, внешне мало похожих между собой задачах. Между тем оказывается, что и в таких ситуациях идеи, развитые выше, в сочетании с конкретным исследованием возникающих вспомогательных задач дают возможность построить равномерные асимптотические приближения искомых решений.

Здесь будет рассмотрена простейшая из подобных задач для системы гиперболических уравнений — система двух дифференциальных уравнений для функций $u^+(x, t)$ и $u^-(x, t)$:

$$[\partial_t \pm \partial_x] u^\pm + \varepsilon [a^\pm(u^+, u^-) \partial_x u^\pm + b^\pm(u^+, u^-) \partial_x u^\mp + c^\pm(u^+, u^-)] = 0 \quad (0.1)$$

с начальными условиями

$$u^\pm(x, t, \varepsilon)|_{t=0} = \varphi^\pm(x), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (0.2)$$

Ставится вопрос о построении асимптотики решения $u^\pm(x, t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Задача об асимптотическом разложении функций $u^\pm(x, t, \varepsilon)$ на конечных временах ($0 \leq t \leq M$) является тривиальной. Такое асимптотическое разложение дается прямым рядом теории возмущений:

$$u^\pm(x, t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n^\pm(x, t), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

и все функции $u_n^\pm(x, t)$ определяются из линейных уравнений $[\partial_t \pm \partial_x] u_n^\pm = f_n^\pm(x, t)$.

Сингулярный характер возмущения в задаче (0.1), (0.2) связан с большим промежутком времени: при $t \approx \varepsilon^{-1}$ прямое разложение оказывается непригодным. Так, в случае одного уравнения $u_t + u_x - \varepsilon u_x = 0$ прямое разложение точного решения $u = \varphi(x - t + \varepsilon t)$ имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n t^n \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}(x - t). \quad (0.3)$$

Очевидно, этот ряд является асимптотическим при $\varepsilon \rightarrow 0$ лишь для значений $t \ll \varepsilon^{-1}$. Подобная ситуация характерна для систем уравнений с гиперболической главной частью (при $\varepsilon = 0$): из-за сингулярных членов $\varepsilon^n t^n$ прямое разложение становится непригодным при $t \approx \varepsilon^{-1}$, хотя точное решение $u(x, t, \varepsilon)$ существует при $t \leq M\varepsilon^{-1}$.

Отметим, что наличие нелинейностей в возмущении не играет принципиальной роли в возникновении сингулярных членов. Нелинейности могут привести лишь к появлению верхней временной границы, за которой не существует точного решения исходной задачи (по крайней мере — гладкого). Наличие малого параметра ε при нелинейных членах гарантирует существование гладкого решения до времен $t \leq M\varepsilon^{-1}$.

Поэтому естественна постановка проблемы, которая решается в данной главе: построить равномерное асимптотическое разложение решения задачи (0.1), (0.2) на больших промежутках времени: $\{x \in \mathbb{R}^1, 0 \leq t \leq O(\varepsilon^{-1})\}$.

Если следовать используемой ранее терминологии, то (x, t) здесь — внутренние переменные. Запись задачи во внешних переменных $\xi = \varepsilon x$, $\tau = \varepsilon t$ практически не меняет вида дифференциального уравнения; зато в начальных функциях появляется зависимость от малого параметра ε : $\varphi(\xi/\varepsilon)$. Сингулярный характер возмущения здесь связан с зависимостью начальных функций от «погранслойной» быстрой переменной $x = \xi\varepsilon^{-1}$.

Вид асимптотики решения существенно зависит от поведения начальных функций на бесконечности. Здесь рассматриваются начальные данные с медленной стабилизацией на бесконечности. При таком условии задача является бисингулярной: так же, как и в предыдущих главах, коэффициенты внешнего разложения имеют нарастающие особенности в нуле. А коэффициенты внутреннего разложения, как это было показано в примере (0.3), имеют нарастающие особенности при $t \rightarrow \infty$.

Итак, предполагается, что для начальных функций справедливы следующие асимптотические разложения:

$$\varphi^{\pm}(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{j,1}^{\pm} x^{-j}, & x \rightarrow +\infty, \\ \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{j,2}^{\pm} x^{-j}, & x \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (0.4)$$

где $\varphi_{j,1}^{\pm}$, $\varphi_{j,2}^{\pm}$ — постоянные. Как и всюду выше, все исходные данные считаются бесконечно дифференцируемыми. В частности, коэффициенты уравнений $a^{\pm}$, $b^{\pm}$, $c^{\pm}(u^{+}, u^{-})$ разлагаются в асимптотические ряды Тейлора при $u^{+} \rightarrow u$, $u^{-} \rightarrow v$ с коэффициентами $a_{p,q}^{\pm}$, $b_{p,q}^{\pm}$, $c_{p,q}^{\pm}(u, v)$ — гладкими функциями от u и v .

§ 1. Построение внутреннего разложения

На первом этапе строится ф. а. р. в виде прямого ряда теории возмущений:

$$u^{\pm}(x, t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n^{\pm}(x, t). \quad (1.1)$$

Для коэффициентов $u_n^{\pm}$ получается рекуррентная система задач

$$(\partial_t \pm \partial_x) u_n^{\pm} = f_n^{\pm}(x, t), \quad (1.2)$$

$$u_n^{\pm}(x, 0) = \begin{cases} \varphi^{\pm}(x), & n = 0, \\ 0, & n \geq 1. \end{cases} \quad (1.3)$$

Правые части $f_n^{\pm}(x, t)$ представляют собой полилинейные формы от предыдущих приближений $u_k^{\pm}$, u_k^{-} ($0 \leq k \leq n-1$) и их производных с коэффициентами, гладко зависящими от u_0^{+} , $u_0^{-}(x, t)$:

$$f_0^{\pm} \equiv 0,$$

$$\begin{aligned} f_n^{\pm} = & \sum_{|k|+|l|+m=n-1} [a_{k,l}^{\pm}(u_0^{+}, u_0^{-}) \partial_x u_m^{\pm} + \\ & + b_{k,l}^{\pm}(u_0^{+}, u_0^{-}) \partial_x u_m^{\mp}] \prod_{i=1}^p u_{k_i}^{+} u_{l_i}^{-} + \\ & + \sum_{|k|+|l|=n-1} c_{k,l}^{\pm}(u_0^{+}, u_0^{-}) \prod_{i=1}^p u_{k_i}^{+} u_{l_i}^{-}, \quad n \geq 1, \quad (1.4) \\ & k = (k_1, \dots, k_p), \quad l = (l_1, \dots, l_p). \end{aligned}$$

Совершенно ясно, что функции $u_n^\pm(x, t)$, $\forall n \geq 0$ определяются однозначно из уравнений (1.2). Основная цель данного параграфа — выяснить структуру асимптотических разложений этих функций при $|x| + t \rightarrow \infty$.

Для первого приближения $u_0^\pm(x, t) = \varphi^\pm(x \mp t)$ асимптотика вытекает из соотношений (0.4). Очевидно, она будет различной в разных направлениях. Например,

$$u_0^+(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{j,1}^+(x-t)^{-j} \quad \text{при } x-t \rightarrow \infty,$$

$$u_0^-(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{j,2}^-(t+x)^{-j} \quad \text{при } t+x \rightarrow -\infty.$$

В следующих приближениях $u_n^\pm(x, t)$ асимптотика при $|x| + t \rightarrow \infty$ может включать растущие по x, t члены, и в каждой компоненте u_n^+ , u_n^- может появиться зависимость от обеих переменных $x+t$ и $x-t$. Переменные $t+x$ и $t-x$ будут, естественно, играть в дальнейшем важную роль. Всюду в дальнейшем без особых оговорок будем обозначать

$$s = t + x, \quad \sigma = t - x. \quad (1.5)$$

Посредством Ω будем обозначать полуплоскость $\{x, t: x \in \mathbb{R}^1, t > 0\}$ или, что то же самое, $\{s, \sigma: s \in \mathbb{R}^1, \sigma \in \mathbb{R}^1, s + \sigma > 0\}$ (рис. 27). Для описания асимптотики коэффициентов ряда (1.1) удобно ввести

определения соответствующих классов функций. Сначала определим класс функций одного переменного. Под $\mathfrak{B}$ будем понимать множество функций $\varphi(s) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ таких, что

$$\varphi(s) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h^\pm s^{-h}, \quad s \rightarrow \pm \infty, \quad (1.6)$$

и этот ряд допускает почленное дифференцирование любого порядка.

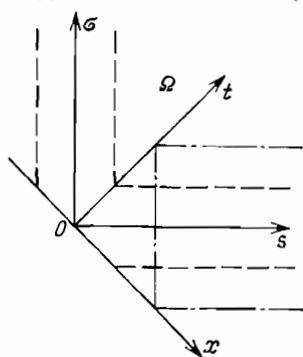


Рис. 27

Посредством $\mathfrak{A}_0$ обозначим класс функций $u(x, t) \in C^\infty(\bar{\Omega})$, обладающих следующими свойствами:

$$a) \quad u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^\pm(s) \sigma^{-k}, \quad \sigma \rightarrow \pm \infty, \quad (1.7)$$

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^\pm(\sigma) s^{-i}, \quad s \rightarrow \pm \infty; \quad (1.8)$$

б) асимптотическое разложение (1.7) равномерно относительно $s \in \mathbb{R}^1$, асимптотическое разложение (1.8) равномерно относительно $\sigma \in \mathbb{R}^1$;

в) $\varphi_k^\pm, \psi_i^\pm \in \mathfrak{B}$;

г) ряды (1.7) и (1.8) допускают почленное дифференцирование любого порядка.

Посредством $\mathfrak{A}_n$ ($n > 0$) будем обозначать класс функций $u(x, t) \in C^\infty(\bar{\Omega})$, обладающих следующими свойствами:

а) в каждой из областей $\{x, t: s > 1, \sigma > 1\}$, $\{x, t: \sigma > 1, s < -1, s + \sigma > 0\}$, $\{x, t: \sigma < -1, s > 1, \sigma + s > 0\}$ (см. рис. 27) эти функции являются полиномами степени n от переменных $\ln |s|$, $\ln |\sigma|$, s и σ с коэффициентами, которые принадлежат $\mathfrak{A}_0$;

б) в области $\{x, t: s > 2, |\sigma| < 2\}$ функция $u(x, t)$ — это полином степени n относительно $\ln s$ и s с коэффициентами из $\mathfrak{A}_0$, в области $\{x, t: \sigma > 2, |s| < 2\}$ функция $u(x, t)$ — это полином степени n относительно $\ln \sigma$ и σ с коэффициентами из $\mathfrak{A}_0$.

Лемма 1.1. Пусть функция $u(x, t) \in \mathfrak{A}_0$. Тогда формальный двойной ряд, полученный из (1.7) после разложения коэффициентов $\varphi_k^+(s)$ при $s \rightarrow \infty$, совпадает с таким же рядом, полученным из (1.8) после разложения $\psi_i^+(\sigma)$ при $\sigma \rightarrow \infty$. Аналогичное совпадение двойных рядов наблюдается и в других частях полуплоскости Ω .

Доказательство. Следует заменить асимптотические ряды (1.7) и (1.8) их частичными суммами с остаточными членами. То же самое надо сделать и с коэффициентами φ_k, ψ_i . После приравливания полученных таким образом двух различных выражений для функции $u(x, t)$ приходим к выводу о равенстве соответствующих коэффициентов асимптотических разложений. ■

Лемма 1.2. Для функции $u(x, t) \in \mathfrak{A}_n$ справедливо то же утверждение относительно совпадения двойных рядов, что и утверждение предыдущей леммы.

Доказательство вытекает из определения класса $\mathfrak{A}_n$ и из леммы 1.1. ■

Лемма 1.3. Если функции $u_k^\pm(x, t) \in \mathfrak{A}_k$ при $k \leq n-1$, то функции $f_n^\pm(x, t)$, определенные равенством (1.4), принадлежат классу $\mathfrak{A}_{n-1}$.

Доказательство вытекает из того факта, что гладкая функция $a(u^+, u^-)$ принадлежит $\mathfrak{A}_0$, если $u^\pm \in \mathfrak{A}_0$, и из явного вида функции $f_n^\pm$. ■

Теорема 1.1. Коэффициенты ряда (1.1) — функции $u_n^\pm(x, t) \in \mathfrak{A}_n$.

Доказательство проводится по индукции. Как было отмечено выше, при $n=0$ утверждение теоремы справедливо. Согласно лемме 1.3 правые части $f_n^\pm(x, t) \in \mathfrak{A}_{n-1}$. Решения задач (1.2), (1.3) при $n > 0$ получаются интегрированием вдоль соответствующей характеристики. Например,

$$u_n^-(x, t) = \int_{-s}^{\sigma} F(s, \sigma_1) d\sigma_1, \quad (1.9)$$

где $F(s, \sigma) = \frac{1}{2} f_n\left(\frac{s-\sigma}{2}, \frac{s+\sigma}{2}\right)$. Достаточно рассмотреть функцию u_n^- , так как u_n^+ исследуется совершенно аналогично. Очевидно, что $u_n^-(x, t) \in C^\infty(\bar{\Omega})$, и требуется лишь исследовать асимптотику этой функции на бесконечности. Ограничимся рассмотрением самого сложного случая $s \rightarrow \infty, \sigma \rightarrow \infty$, но для уменьшения громоздкости будем считать, что $F(s, \sigma) \in \mathfrak{A}_0$.

Разобьем интеграл (1.9) на две части: интеграл от $-s$ до 1 и интеграл от 1 до σ . Первый интеграл зависит лишь от s и принадлежит $\mathfrak{A}_1$. Это сразу вытекает из следующего представления:

$$\begin{aligned} \int_{-s}^1 F(s, \sigma_1) d\sigma_1 &= \int_{-s}^1 \sum_{i=0}^N \psi_i(\sigma_1) s^{-i} d\sigma_1 + O(s^{-N}) = \\ &= \sum_{i=0}^N s^{-i} \left\{ \int_{-1}^1 \psi_i(\sigma_1) d\sigma_1 + \int_{-s}^{-1} \left[\sum_{j=0}^N c_{i,j} \sigma_1^{-j} + O(\sigma_1^{-N-1}) \right] d\sigma_1 \right\} + \\ &\quad + O(s^{-N}). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Второй интеграл исследуется сначала при $\sigma \rightarrow \infty$. Положим

$$g_N(s, \sigma) = F(s, \sigma) - \sum_{k=0}^N \varphi_k^+(s) \sigma^{-k}.$$

По условию $g_N(s, \sigma) = O(\sigma^{-N-1})$, и поэтому

$$\int_1^{\sigma} F(s, \sigma_1) d\sigma_1 = \sum_{k=0}^N \varphi_k^+(s) \int_1^{\sigma} \sigma_1^{-k} d\sigma_1 + \int_1^{\sigma} g_N(s, \sigma_1) d\sigma_1 + O(\sigma^{-N}).$$

Сумма, стоящая в правой части этого равенства, очевидно, при-

надлежит $\mathfrak{A}_1$, и надо лишь исследовать $\int_1^\infty g_N(s, \sigma) d\sigma$. Преобразуем этот интеграл:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty g_N(s, \sigma) d\sigma &= \\ &= \int_1^s \left[\sum_{i=0}^m \psi_i^+(\sigma) s^{-i} + O(s^{-m-1}) - \sum_{k=0}^m \varphi_k^+(s) \sigma^{-k} \right] d\sigma + O(s^{-N}) = \\ &= \int_1^s \left\{ \sum_{i=0}^m \psi_i^+(\sigma) s^{-i} - \sum_{k=0}^m \sigma^{-k} \left(\sum_{i=0}^m c_{k,i} s^{-i} + O(s^{-m-1}) \right) \right\} d\sigma + O(s^{-N}). \end{aligned}$$

Обозначим $g_{i,m}(\sigma) = \psi_i^+(\sigma) - \sum_{k=0}^m c_{k,i} \sigma^{-k}$. Согласно лемме 1.2 $g_{i,m}(\sigma) = O(\sigma^{-m-1})$. Поэтому

$$\int_1^\infty g_N(s, \sigma) d\sigma = \sum_{i=0}^m s^{-i} \int_1^\infty g_{i,m}(\sigma) d\sigma + O(s^{-m} + s^{-N}).$$

Теперь осталось лишь рассмотреть $\int_1^\sigma F(s, \sigma_1) d\sigma_1$ при $s \rightarrow \infty$:

$$\int_1^\sigma F(s, \sigma_1) d\sigma_1 = \int_1^\sigma \sum_{k=0}^N \varphi_k^+(s) \sigma_1^{-k} d\sigma_1 + O(s^{-N}(\sigma + s)). \blacksquare$$

З а м е ч а н и е. В асимптотических разложениях функций $u_n^\pm(x, t)$ при $s \rightarrow \infty$, $\sigma \rightarrow -\infty$ и при $s \rightarrow -\infty$, $\sigma \rightarrow \infty$ (т. е. при $s < -1$, $s + \sigma > 0$ и при $\sigma < -1$, $s + \sigma > 0$; см. рис. 27) логарифмические члены присутствуют только в виде $[\ln|s/\sigma|]^p$.

Для подтверждения этого факта достаточно проанализировать вышеприведенное доказательство теоремы 1.1. Из явных формул для интегралов от частичных сумм асимптотических рядов следует, что логарифмические члены входят именно так, как указано выше. $\blacksquare$

§ 2. Построение ф.а.р. во внешней области (под линиями разрыва)

Так как ряд (1.1) теряет асимптотический характер при больших x и t порядка ε^{-1} , то вводятся медленные переменные

$$\xi = \varepsilon x, \quad \tau = \varepsilon t \quad (2.1)$$

и внешнее разложение решения ищется в виде

$$V^\pm = \sum_{n=0}^\infty \varepsilon^n v_n^\pm(\xi, \tau). \quad (2.2)$$

В медленных переменных уравнения (0.1) и начальные условия (0.2) для $v_n^\pm(\xi, \tau, \varepsilon) \equiv u_n^\pm(x, t, \varepsilon)$ приобретают вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} \pm \frac{\partial}{\partial \xi}\right) v^\pm + c^\pm(v^+, v^-) + \\ + \varepsilon \left[a^\pm(v^+, v^-) \frac{\partial v^\pm}{\partial \xi} + b^\pm(v^+, v^-) \frac{\partial v^\mp}{\partial \xi} \right] = 0, \quad (2.3)$$

$$v^\pm(\xi, 0, \varepsilon) = \varphi^\pm(\xi \varepsilon^{-1}), \quad \xi \in \mathbb{R}^1, \quad (2.4)$$

а для коэффициентов $v_n^\pm(\xi, \tau)$ получаются дифференциальные уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} \pm \frac{\partial}{\partial \xi}\right) v_0^\pm + c^\pm(v_0^+, v_0^-) = 0, \quad (2.5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} \pm \frac{\partial}{\partial \xi}\right) v_n^\pm + c_{1,0}^\pm(v_0^+, v_0^-) v_n^\pm + \\ + c_{0,1}^\pm(v_0^+, v_0^-) v_n^\pm = g_n^\pm(\xi, \tau), \quad n \geq 1. \quad (2.6)$$

Правые части $g_n^\pm$, как обычно, определяются через предыдущие приближения v_k^+ , v_k^- , $k \leq n-1$, и их производные по ξ и представляют собой полилинейные формы от $v_k^\pm$ с коэффициентами, зависящими от $v_0^\pm$:

$$g_n^\pm(\xi, \tau) = \\ = \sum_{|k|+|l|+m=n-1} \left[a_{k,l}^\pm(v_0^+, v_0^-) \frac{\partial v_m^\pm}{\partial \xi} + b_{k,l}^\pm(v_0^+, v_0^-) \frac{\partial v_m^\mp}{\partial \xi} \right] \times \\ \times \prod_{i=1}^p v_{k_i}^+ v_{l_i}^- + \sum_{2 \leq |k|+|l|=n} c_{k,l}^\pm(v_0^+, v_0^-) \prod_{i=1}^p v_{k_i}^+ v_{l_i}^-, \quad (2.7) \\ k = (k_1, \dots, k_p), \quad l = (l_1, \dots, l_p), \quad k_i \geq 1, \quad l_i \geq 1.$$

Начальные условия для $v_n^\pm$ получаются из (2.4) с использованием асимптотики (0.4) для $\varphi^\pm(\xi \varepsilon^{-1})$ при $|x| = |\xi| \varepsilon^{-1} \rightarrow \infty$:

$$v_0^\pm(\xi, 0) = \begin{cases} \varphi_{0,1}^\pm, & \xi > 0, \\ \varphi_{0,2}^\pm, & \xi < 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$v_n^\pm(\xi, 0) = \begin{cases} \xi^{-n} \varphi_{n,1}^\pm, & \xi > 0, \\ \xi^{-n} \varphi_{n,2}^\pm, & \xi < 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Здесь $\varphi_{n,1}^\pm$, $\varphi_{n,2}^\pm$ — различные постоянные.

Во внешней области, так же как и в предыдущем параграфе, удобно ввести характеристические переменные

$$\theta = \tau + \xi, \quad \zeta = \tau - \xi.$$

На исходном шаге $n=0$ задача (2.5), (2.8) для $v_0^\pm$ не вызывает затруднений. Она разрешима, по крайней мере в области $\{\xi, \tau: 0 \leq \tau \leq M\}$. Решения $v_0^\pm(\xi, \tau)$ могут иметь разрывы первого рода на лучах $\xi \pm \tau = 0$ (из-за разрыва начальных данных в точке $\xi = 0$ при $\varphi_{0,1}^\pm \neq \varphi_{0,2}^\pm$). Эти лучи — характеристики предельной системы — так же, как и в гл. IV, назовем *особыми характеристиками* (рис. 28).

На следующих шагах $n = 1, 2, \dots$ ситуация ухудшается из-за особенностей начальных функций (2.9) в точке $\xi = 0$ и из-за разрывов правых частей $g_n^\pm(\xi, \tau)$ на особых характеристиках. Поэтому задачи (2.6), (2.9) решаются пока под линиями разрыва в областях $\{\xi, \tau: \theta < 0, 0 \leq \tau \leq M\}$, $\{\xi, \tau: \zeta < 0, 0 \leq \tau \leq M\}$, заштрихованных на рис. 28. В этих областях все функции $v_n^\pm(\xi, \tau)$ определяются однозначно и являются гладкими. Однако на линиях $\theta = 0$ и $\zeta = 0$ эти функции имеют особенности. Основная цель данного параграфа — выяснить структуру асимптотики для $v_n^\pm(\xi, \tau)$ на этих линиях: при $\zeta \rightarrow -0$ и при $\theta \rightarrow -0$. Рассмотрим лишь одну область $\{\xi, \tau: \zeta < 0, 0 \leq \tau \leq M\}$. Ситуация в другой области аналогична.

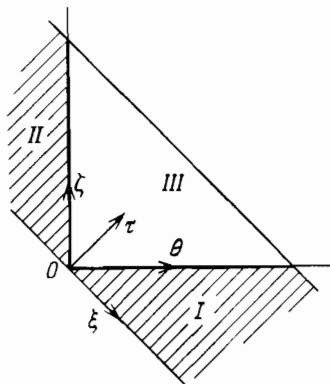


Рис. 28

Анализируя решения задач (2.4) — (2.9), можно непосредственно найти вид асимптотики функций $v_n^\pm$ при $\zeta \rightarrow 0$. Однако проще и удобнее воспользоваться тем же приемом, что и в гл. IV (см., например, теорему 1.3 гл. IV). А именно, асимптотику решений около начала координат ($\xi = 0, \tau = 0$) можно получить из согласования рядов (1.1) и (2.2). Затем, используя эту асимптотику в качестве своеобразных начальных данных, изучим функции $v_n^\pm$. Отличие состоит лишь в том, что в гл. IV

этот прием использовался для построения функций в промежуточном слое около особой характеристики, для выделения единственного решения. А здесь само существование функций $v_n^\pm$ не вызывает сомнений, и надо лишь найти вид их асимптотики вблизи особой характеристики. Такой же прием будет применен в следующем параграфе для построения ф. а. р. в промежуточном слое, в окрестности особой характеристики.

Прежде всего отметим, что ряды (1.1) являются ф. а. р. задачи (0.1), (0.2) при $|x| + t < \varepsilon^{\alpha-1}$, $0 < \alpha < 1$. Справедливость приведенного утверждения легко проверить так же, как это было продемонстрировано, например, в § 3 гл. II и неоднократно повторялось выше. Достаточно подставить частичные суммы $A_{N,x,t} U^\pm$ в уравнения и начальные условия (0.1), (0.2) и воспользоваться полученной в теореме 1.1 асимптотикой функций $u_n^\pm(x, t)$.

После замены (2.1) в сумме $A_{N,x,t} U^\pm$ и применения оператора $A_{N,\xi,\tau}$ получается равенство

$$A_{N,\xi,\tau} A_{N,x,t} U^\pm = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n B_N \tilde{V}_n^\pm(\xi, \tau), \quad (2.10)$$

где $B_N \tilde{V}_n^\pm$ — частичные суммы формальных рядов $\tilde{V}_n^\pm(\xi, \tau)$ при $\xi \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$. (В равенстве (2.10), в силу замечания из § 1, отсутствуют степени $\ln \varepsilon$.) Так как ряды (1.1) являются ф. а. р. задачи (0.1), (0.2), то ряды $\sum_{n=0}^\infty \varepsilon^n \tilde{V}_n^\pm(\xi, \tau)$ являются ф. а. р. той же задачи при $|\xi| + \tau < \varepsilon^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$), а ряды $\tilde{V}_n^\pm(\xi, \tau)$ являются ф. а. р. задачи (2.5) — (2.9) при $|\xi| + \tau \rightarrow 0$. Ясно, что для выполнения условия согласования рядов (1.1) и (2.2) необходимо, чтобы ряды $\tilde{V}_n^\pm$ являлись асимптотическими разложениями функций $v_n^\pm(\xi, \tau)$ — решений задачи (2.5) — (2.9). Из единственности решений этих задач вытекает, что

$$v_n^\pm(\xi, \tau) = \tilde{V}_n^\pm(\xi, \tau), \quad |\xi| + \tau \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

Уточним вид асимптотических рядов $\tilde{V}_n^\pm$, которые были определены выше равенством (2.10). Из теоремы 1.1 и из замечания к ней вытекает, что

$$\tilde{V}_n^\pm = \sum \xi^i \theta^j \ln^p |\xi/\theta| c_{n,i,j,p}. \quad (2.12)$$

Здесь суммирование ведется по всем i, j и p таким, что $0 \leq p \leq n$, $p - i - j \leq n$, $-i \leq n$, $-j \leq n$. Другими словами, ряды (2.12) — это многочлены степени n от ξ^{-1} , θ^{-1} , $\ln |\xi/\theta|$ с коэффициентами, которые являются асимптотическими рядами по неотрицательным степеням ξ и θ (уместно сравнить вид рядов (2.12) с асимптотическими рядами для функций из класса $\mathfrak{A}_n$).

Для изучения асимптотики решений $v_n^\pm(\xi, \tau)$ около особой характеристики $\xi = 0$ удобно ввести подходящие классы функций. Посредством $\mathfrak{B}$ обозначим множество функций $\varphi(\theta) \in C^\infty$ при $\theta \geq 0$. Посредством $\mathfrak{U}_n$ ($n \geq 0$) обозначим множество функций $\varphi(\theta) \in C^\infty$ при $\theta > 0$, которые являются полиномами степени n относительно θ^{-1} и $\ln \theta$ с коэффициентами из $\overline{\mathfrak{B}}$.

Посредством $\mathfrak{R}_n$ обозначим множество функций $v(\xi, \tau) \in C^\infty$ в области $I = \{\xi, \tau: \xi < 0, 0 \leq \tau \leq M\}$ (см. рис. 28), которые имеют асимптотические разложения

$$v(\xi, \tau) = \sum \xi^i \ln^p |\xi| \varphi_{i,p,k}(\theta), \quad \xi \rightarrow 0, \quad (2.13)$$

где $\varphi_{i,p,k}(\theta) \in \mathfrak{U}_k$, а суммирование ведется по всем i, p, k , для которых $0 \leq p \leq n$, $p + k - i \leq n$. Из этого определения следует, что для любой функции $v(\xi, \tau) \in \mathfrak{R}_n$ после разложения коэффициентов $\varphi_{i,p,k}(\theta)$ при $\theta \rightarrow 0$ получается двойной ряд вида (2.13).

Теорема 2.1. *Решения рекуррентных систем (2.5) — (2.9) — функции $v_n^\pm(\xi, \tau)$ — принадлежат классам $\mathfrak{R}_n$, т. е. имеют асимптотические разложения вида (2.13). После разложения коэффициентов $\varphi_{i,p,k}(\theta)$ в ряды при $\theta \rightarrow 0$ получающиеся двойные ряды для $v_n^\pm(\xi, \tau)$ совпадают с рядами (2.12).*

Доказательство состоит из двух частей. На первом этапе для последовательности задач (2.5) — (2.9) строится ф. а. р. при $\xi \rightarrow 0$ в виде рядов (2.12):

$$v_n^\pm(\xi, \tau) = \sum \xi^i \ln^p |\xi| v_{n,i,p}^\pm(\theta) \quad (2.14)$$

$$(v_{n,i,p}^\pm(\theta) \in \mathfrak{R}_k, \quad 0 \leq p \leq n, \quad p + k - i \leq n).$$

Коэффициенты $v_{n,i,p}^\pm$ в этом разложении определяются, вообще говоря, неоднозначно. На втором этапе доказывается, что существует единственный выбор функций $v_{n,i,p}^\pm$, при котором ряды (2.14) представляют асимптотические разложения решений $v_n^\pm(\xi, \tau)$.

Отыскание ф. а. р. задач (2.5) — (2.9) в виде рядов (2.14) приводит к рекуррентной системе задач для коэффициентов:

$$2v_{n,i,p}^{+'} + c_{1,0}(\theta) v_{n,i,p}^{+} + c_{0,1}(\theta) v_{n,i,p}^{-} = g_{n,i,p}^{+}(\theta), \quad (2.15)$$

$$2tv_{n,i,p}^{-} = g_{n,i,0}^{-}(\theta) \quad \forall i \neq 0, \quad (2.16)$$

$$2pv_{n,i,p}^{-} = g_{n,i,p}^{-}(\theta) \quad \forall p > 0, \quad \forall i.$$

Здесь

$$c_{1,0}(\theta) = c_{1,0}^{+}(v_0^{+}, v_0^{-})|_{\xi=0},$$

$$c_{0,1}(\theta) = c_{0,1}^{+}(v_0^{+}, v_0^{-})|_{\xi=0},$$

правые части $g_{n,i,p}^{\pm}(\theta)$ определяются через функции $v_{m,j,l}^{\pm}$ и их производные с предыдущих шагов: либо $m < n$, либо $m = n$ и $l < p$, либо $m = n$, $l = p$ и $j < i$.

Для искомых функций $v^{\pm}(\xi, \tau)$ известна асимптотика (2.11), (2.12). Сравнение этой асимптотики с искомыми рядами (2.14) немедленно дает асимптотическое разложение для коэффициентов $v_{n,i,p}^{\pm}(\theta)$ при $\theta \rightarrow +0$:

$$v_{n,i,p}^{\pm}(\theta) = \sum_{j,l} \theta^j \ln^l \theta v_{n,i,p,j,l}^{\pm}. \quad (2.17)$$

Эти ряды, очевидно, являются и ф. а. р. уравнений (2.15), (2.16) при $\theta \rightarrow +0$. На их основе легко восстанавливаются функции $v_{n,i,p}^{\pm}(\theta)$ как точные решения уравнений (2.15), (2.16) с асимптотиками (2.17). Для этого $v_{n,i,p}^{\pm}$ ищутся в виде суммы отрезков рядов (2.17) произвольной длины N и остатков $\tilde{v}_{n,i,p}^{\pm}(\theta)$. Легко усмотреть, что задачи для остатков, которые получаются из (2.15), (2.16), с начальными условиями $\tilde{v}_{n,i,p}^{\pm}(0) = 0$ и с заданием функций $\tilde{v}_{n,0,0}^{\pm}(\theta) = O(\theta^{N-n})$ имеют решения $\tilde{v}_{n,i,p}^{\pm}(\theta) = O(\theta^{N-n})$ $\forall n \leq N/2$.

Таким образом, находятся все функции $v_{n,i,p}^{\pm}(\theta)$ и тем самым решается задача о построении ф. а. р. (2.14).

Отметим, что на каждом шаге $n = 1, 2, \dots$ имеется произвол в ф. а. р. (2.14) из-за выбора $v_{n,0,0}^{-}(\theta)$. Дело в том, что в (2.16) нет уравнений для $v_{n,0,0}^{-}$, а ряда (2.17) недостаточно для построения $v_{n,0,0}^{-}(\theta)$ при $\forall \theta \in (0, M)$.

Однако при любом выборе гладких функций $v_{n,0,0}^{-}(\theta)$, удовлетворяющих (2.17), ряды (2.14) представляют ф. а. р. задачи (2.5) — (2.9). Это позволяет восстановить асимптотику точных решений $v_n^{\pm}(\xi, \tau)$ обычным способом. Функции $v_n^{\pm}$ строятся в виде суммы отрезков рядов (2.14) произвольной длины N и остатков $\tilde{v}_n^{\pm}(\xi, \tau)$. Для остатков $\tilde{v}_n^{\pm}$ получаются уравнения типа (2.5) с правыми частями $\tilde{g}_n^{\pm} = O(|\xi|^{N-n}) \quad \forall \theta \in [0, M]$ и с однородными начальными условиями ($n \leq N-1$). Решения таких задач являют-

ся $N - n$ раз дифференцируемыми вплоть до границы $\xi = -0$ и поэтому разлагаются по формуле Тейлора

$$\tilde{v}_n^{\pm}(\xi, \tau) = \sum_{j=0}^{N-n-1} \xi^j \tilde{v}_{n,j}^{\pm}(\theta) + O(\xi^{N-n}). \quad (2.18)$$

Коэффициенты $\tilde{v}_{n,j}^{\pm}(\theta)$ дифференцируемы до порядка $N - n - j$ вплоть до точки $0 = 0$ и поэтому также разлагаются по формуле Тейлора до порядка $N - n - j - 1$. Таким образом, асимптотика точных решений $v_n^{\pm}(\xi, \tau)$ задач (2.5) — (2.9) представляется в виде суммы отрезков рядов (2.14) и (2.18). Поскольку N — произвольное число, то полное асимптотическое разложение для $v_n^{\pm}(\xi, \tau)$ имеет структуру, указанную в (2.13). ■

§ 3. Построение ф. а. р. в окрестности особых характеристик

Ряд (2.2), построенный и исследованный в предыдущем параграфе, не является асимптотическим вблизи особых характеристик. Его коэффициенты $v_n^{\pm}(\xi, \tau)$ имеют нарастающие особенности при $\xi \rightarrow -0$ (и аналогично при $\theta \rightarrow -0$ в области II; см. рис. 28). Ряд (2.2) имеет асимптотический характер и является ф. а. р. задачи (0.1), (0.2) в области I лишь для $|\xi| > \varepsilon^{\alpha}$, $\theta > \varepsilon^{\alpha}$, $\forall \alpha: 0 < \alpha < 1$.

Рассмотрим ситуацию вблизи одной особой характеристики, например $\xi = 0$, и построим в ее окрестности ф. а. р. задачи. В такой окрестности естественные независимые переменные — это

$$\sigma = t - x = (\tau - \xi)\varepsilon^{-1} \quad \text{и} \quad \theta = \varepsilon(t + x) = \tau + \xi.$$

Исходные уравнения (0.1) для $w^{\pm}(\sigma, \theta, \varepsilon) \equiv u^{\pm}(x, t, \varepsilon)$ приобретают вид

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial w^{+}}{\partial \theta} + a^{+}(w^{+}, w^{-}) \left[-\frac{\partial}{\partial \sigma} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \theta} \right] w^{+} - \\ - b^{+}(w^{+}, w^{-}) \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \theta} \right] w^{-} + c^{+}(w^{+}, w^{-}) = 0, \\ 2 \frac{\partial w^{-}}{\partial \sigma} + \varepsilon \left\{ a^{-}(w^{+}, w^{-}) \left[-\frac{\partial}{\partial \sigma} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \theta} \right] w^{-} + \right. \\ \left. + b^{-}(w^{+}, w^{-}) \left[-\frac{\partial}{\partial \sigma} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \theta} \right] w^{+} + c^{-}(w^{+}, w^{-}) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Эти дифференциальные уравнения следует дополнить условиями согласования асимптотики для $w^{\pm}(\sigma, \theta, \varepsilon)$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ с построенными выше ф. а. р. (1.1) и (2.2). Из вида асимптотики функций $u_n^\pm(x, t)$ при $s \rightarrow \infty$ (теорема 1.1) и функций $v_n^\pm(\xi, \tau)$ при $\xi \rightarrow -0$ (теорема 2.1) вытекает, что выражения $A_{N,\sigma,\theta} A_{N,x,i} U^\pm$ и $A_{N,\sigma,\theta} A_{N,\xi,\tau} V^\pm$ — это сумма членов вида $\varepsilon^n \ln^n \varepsilon Z_{n,m}(\sigma, \theta)$, где $m \leq n$. Следовательно, ф. а. р. уравнений (3.1) естественно искать в виде

$$W^\pm = \sum_{0 \leq m \leq n}^\infty \varepsilon^n \ln^m \varepsilon w_{n,m}^\pm(\sigma, \theta) \quad (3.2)$$

так, чтобы были выполнены условия

$$A_{N,x,i} A_{N,\sigma,\theta} W^\pm = A_{N,\sigma,\theta} A_{N,x,i} U^\pm \quad \forall N, \quad (3.3)$$

$$A_{N,\xi,\tau} A_{N,\sigma,\theta} W^\pm = A_{N,\sigma,\theta} A_{N,\xi,\tau} V^\pm \quad \forall N. \quad (3.4)$$

Уравнения для $w_{n,m}^\pm(\sigma, \theta)$ получаются обычным способом из (3.1):

$$\frac{\partial w_{n,m}^-}{\partial \sigma} = h_{n,m}^-(\sigma, \theta) \quad \forall n, m \geq 0 \quad (h_{0,0} \equiv 0), \quad (3.5)$$

$$2 \frac{\partial w_0^+}{\partial \theta} - a(w_0^+, w_0^-) \frac{\partial w_0^+}{\partial \sigma} + c^+(w_0^+, w_0^-) - \\ - b^+(w_0^+, w_0^-) \frac{\partial w_0^-}{\partial \sigma} = 0 \quad (w_0^\pm \equiv w_{0,0}^\pm), \quad (3.6)$$

$$2 \frac{\partial w_{n,m}^+}{\partial \theta} - a_0^+(\sigma, \theta) \frac{\partial w_{n,m}^+}{\partial \sigma} + c_0^+(\sigma, \theta) w_{n,m}^+ = h_{n,m}^+(\sigma, \theta), \quad (3.7) \\ m + n \geq 1, \quad \sigma \in \mathbb{R}^1, \quad \theta > 0.$$

Здесь $a_0^+ = a_{1,0}^+(w_0^+, w_0^-)$, $c_0^+ = c_{1,0}^+(w_0^+, w_0^-) - b_{1,0}^+(w_0^+, w_0^-) \times \times \frac{\partial w_0^-}{\partial \sigma}$; правые части $h_{n,m}^\pm$ определяются через предыдущие приближения $w_{q,r}^\pm$ и их производные, функции $h_{n,m}^\pm$ зависят еще и от $w_{n,m}^-$.

Ряд (3.2), коэффициенты которого будут построены ниже, является ф. а. р. исходной задачи в области $\{\sigma, \theta: |\sigma| < \varepsilon^{1-\alpha}, \varepsilon^\alpha < \theta < M\}$ (область Ω_4 на рис. 29 и область, ограниченная пунктиром, на рис. 30). Однако удобнее, как это делается всюду в других главах, строить решения $w_{n,m}^\pm(\sigma, \theta)$ во всей полосе на плоскости σ, θ (см. рис. 30). При этом функции $w_{n,m}^\pm(\sigma, \theta)$ имеют заданные

асимптотики при $\theta \rightarrow 0$ и при $\sigma \rightarrow -\infty$. Вид этих асимптотик вытекает из условий согласования (3.3), (3.4).

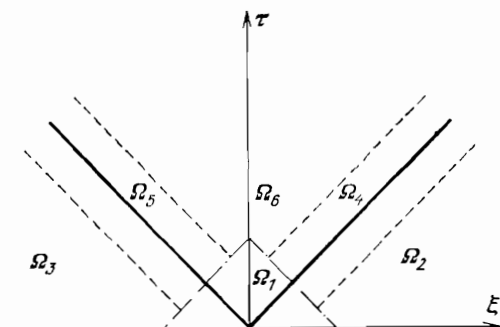


Рис. 29

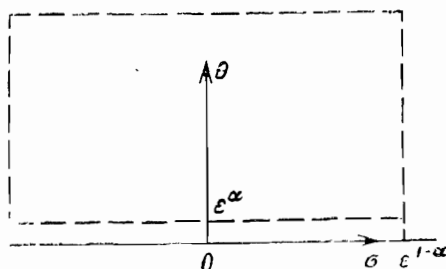


Рис. 30

Из теоремы 1.1 легко усмотреть вид каждого из слагаемых в правой части (3.3) и, следовательно, соотношения для $w_{n,m}^{\pm}(\sigma, \theta)$:

$$w_{n,m}^{\pm}(\sigma, \theta) = \sum_{\substack{0 \leq p \leq n-m \\ p-j \leq n-m}} r_{n,m,j,p}^{\pm}(\sigma) \theta^j \ln^p \theta, \quad \theta \rightarrow 0, \quad (3.8)$$

где коэффициенты $r_{n,m,j,p}^{\pm}(\sigma) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^1)$ разлагаются в асимптотические ряды при $\sigma \rightarrow -\infty$ по степеням σ^{-1} и $\ln |\sigma|$; ограничения на показатели этих степеней так же, как и при определении классов $\mathfrak{A}_n$ в § 1, удобно сформулировать в следующем виде: после подстановки асимптотических рядов для функций $r_{n,m,j,p}^{\pm}(\sigma)$ в (3.8) получаются полиномы степени $n-m$ относительно $\ln \theta$, $\ln |\sigma|$, θ^{-1} и σ с коэффициентами вида $\sum_{i \geq 0, q \geq 0} c_{i,q} \theta^i \sigma^{-q}$.

Точно так же из теоремы 2.1 и из условия (3.4) вытекает необходимость асимптотических разложений

$$w_{n,m}^{\pm}(\sigma, \theta) = \sum_{\substack{0 \leq p \leq n-m \\ p-j \leq n-m}} z_{n,m,p,j}^{\pm}(\theta) \sigma^{-j} \ln^p |\sigma|, \quad \sigma \rightarrow -\infty, \quad (3.9)$$

где коэффициенты $z_{n,m,p,j}^{\pm}(\theta) \in C^{\infty}(0, M)$ и разлагаются в асимптотические ряды при $\theta \rightarrow 0$ по степеням θ и $\ln \theta$. Двойные ряды, получающиеся из (3.9) после разложения коэффициентов при $\theta \rightarrow 0$, совпадают, в силу построения функций $v_n^{\pm}(\xi, \tau)$ в § 2, с двойными рядами, получающимися аналогичным способом из (3.8).

Теорема 3.1. *Существуют решения системы уравнений (3.5)–(3.7), которые удовлетворяют условиям (3.8), (3.9).*

Доказательство. Рассмотрим задачу на исходном шаге $n = m = 0$. Уравнение (3.5) — однородное. Поэтому решение w_0^- не зависит от σ и определяется через значения соответствующего приближения во внешней области I (см. рис. 28), взятого на линии разрыва: $w_0^-(\theta) \equiv v_0^-(\theta, \theta)$. Напомним, что $v_0^-(\xi, \tau)$ — гладкая функция на характеристике $\xi = \tau$. Поэтому $w_0^-(\theta) \in C^{\infty}$ при $\theta \geq 0$.

Поскольку w_0^- уже определена, то уравнение (3.6) — это одно квазилинейное уравнение первого порядка относительно w_0^+ . Начальная функция для него совпадает с исходной:

$$w_0^+(\sigma, \theta) = \varphi^+(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^1.$$

Решение уравнения (3.6) для $w_0^+(\sigma, \tau)$ при этом условии существует в некоторой полосе $\{\sigma, \theta: \sigma \in \mathbb{R}^1, 0 \leq \theta \leq M\}$ (немного подробнее о квазилинейном уравнении первого порядка написано в начале гл. VI). Легко проверить, что, в силу (0.4) для $\varphi^+(\sigma)$, функция $w_0^+(\sigma, \theta)$ имеет асимптотические разложения (3.8), (3.9) с $m = n = 0$.

На всех последующих шагах решаются линейные уравнения, (3.5), (3.7). Доказательство разрешимости задач для этих уравнений основано на том, что ряды (1.1) и (2.2) являются ф. а. р. при $\varepsilon \rightarrow 0$ для уравнений (3.1) в областях перекрытия. Это свойство означает, что при подстановке отрезков рядов (3.8), (3.9) произвольной длины N в уравнениях (3.5)–(3.7) получаются невязки $O(\theta^N(1 + |\sigma|)^{n+1})$, $\theta \rightarrow +0$, $\forall \sigma \in \mathbb{R}^1$, либо $O(|\sigma|^{-N}\theta^{-n-1})$, $|\sigma| \rightarrow \infty$, $\forall \theta \in (0, M)$. Однако этого недостаточно; требуется построить функции $w_{N,n,m}^{\pm}(\sigma, \theta)$, которые при подстановке в уравнения (3.5)–(3.7) дают невязки, малые как при $\theta \rightarrow +0$, так и при $\sigma \rightarrow +\infty$ одновременно. Для этой цели можно использовать составное асимптотическое разложение. Так что подходящий от-

резок ф. а. р. для уравнений (3.5)–(3.7) можно взять в виде

$$w_{N,n,m}^{\pm}(\sigma, \theta) = \sum_{j=-n}^N \theta^j \sum_{\substack{m+p \leq n \\ m+p \leq n+j}} r_{n,m,j,p}^{\pm}(\sigma) \ln^p \theta + \\ + \sum_{j=-n}^N \sigma^{-j} \sum_{\substack{m+p \leq n \\ m+p \leq n+j}} z_{n,m,j,p}^{\pm}(\theta) \ln^p |\sigma| - \Lambda_{N,n,m}^{\pm}(\sigma, \theta). \quad (3.10)$$

Здесь под $\Lambda_{N,n,m}^{\pm}(\sigma, \theta)$ понимается частичная сумма двойного ряда, полученная из (3.8) разложением коэффициентов $r_{n,m,j,p}^{\pm}(\sigma)$ при $\sigma \rightarrow -\infty$, которая совпадает с аналогичной суммой, полученной из ряда (3.9).

При подстановке функций из (3.10) в уравнения (3.5)–(3.7) при $\forall n \leq N-1$, $m \leq n$ получаются связи порядка $O(\theta^{N-n-2})$ при $\theta \leq |\sigma|^{-1}$ и порядка $O(\sigma^{-N+n+2})$ при $\theta \geq |\sigma|^{-1}$. Если теперь точные решения искать в виде $w_{n,m}^{\pm} = w_{N,n,m}^{\pm} + \tilde{w}_{N,n,m}^{\pm}$, то для остатков $\tilde{w}_{N,n,m}^{\pm}(\sigma, \theta)$ получаются рекуррентные уравнения типа (3.5)–(3.7) с малыми неоднородностями: $O(\theta^{N-n-2})$, $\theta \leq |\sigma|^{-1}$, $O(\sigma^{-N+n+2})$, $\theta > |\sigma|^{-1}$ и однородными краевыми условиями

$$\tilde{w}_{N,n,m}^+(\sigma, 0) = 0, \quad \tilde{w}_{N,n,m}^-(\sigma, \theta) \xrightarrow{\sigma \rightarrow -\infty} 0.$$

Используя малость правых частей при $0 \rightarrow 0$, $\sigma \rightarrow -\infty$ на каждом шаге, легко проследить по индукции, что решения для остатков будут малы:

$$\tilde{w}_{N,n,m}^{\pm}(\sigma, \theta) = \\ = \begin{cases} O(\theta^{N-n-2}), & \theta \rightarrow 0, \quad \theta \leq |\sigma|^{-1}, \\ O(|\sigma|^{-N+n-2}), & \sigma \rightarrow -\infty, \quad \theta \geq |\sigma|^{-1}, \quad n \leq N-2. \end{cases}$$

В силу произвольности N и структуры функций $w_{N,n,m}^{\pm}(\sigma, \theta)$ получается, что точные решения $w_{n,m}^{\pm}(\sigma, \theta)$ имеют разложения (3.8), (3.9).

Вопрос об асимптотике функций $w_{n,m}^{\pm}$ при $\sigma \rightarrow \infty$ можно решить, анализируя решения системы (3.5)–(3.7). Они имеют такую же асимптотику, как и (3.9) (но, разумеется, с другими коэффициентами $z_{n,m,j,p}^{\pm}(\theta)$). ■

Аналогичная ситуация наблюдается вблизи второй особой характеристики $\theta = 0$ (см. рис. 28). Здесь вводятся переменные $s = t + x = (\tau + \xi) \varepsilon^{-1}$ и $\xi = \tau - \xi = \varepsilon(t - x)$. Ф. а. р. уравнения (1.1) строится в виде ряда

$$Y^{\pm} = \sum_{0 \leq m \leq n} \varepsilon^n \ln^m \varepsilon \cdot y_{n,m}^{\pm}(s, \xi). \quad (3.11)$$

Для коэффициентов $y_{n,m}^{\pm}$ получаются задачи, сходные с (3.5) — (3.7), с той разницей, что индексы $+$ и $-$ меняются местами. Справедливы соотношения, аналогичные (3.3), (3.4), означающие, что ряд (3.11) согласован с рядом (1.1) и с внешним разложением в области II (см. рис. 28).

§ 4. Построение ф. а. р. во внешней области (над линиями разрыва)

Рассмотрим исходную задачу в области $\{\xi, \tau: \tau + \xi > 0, \tau - \xi > 0\}$ (область III на рис. 28, содержащая область Ω_6 на рис. 29). Здесь надо рассматривать переменные $\zeta = \tau - \xi$ и $\theta = \tau + \xi$. Уравнения для $v^{\pm}(\xi, \tau, \varepsilon) \equiv u^{\pm}(x, t, \varepsilon)$ те же, что и в § 2:

$$2 \frac{\partial v^{+}}{\partial \theta} + c^{+}(v^{+}, v^{-}) + \varepsilon \left\{ a^{+}(v^{+}, v^{-}) \left[\frac{\partial v^{+}}{\partial \theta} - \frac{\partial v^{+}}{\partial \zeta} \right] + b^{+}(v^{+}, v^{-}) \left[\frac{\partial v^{-}}{\partial \theta} - \frac{\partial v^{-}}{\partial \zeta} \right] \right\} = 0, \quad (4.1)$$

$$2 \frac{\partial v^{-}}{\partial \zeta} + c^{-}(v^{+}, v^{-}) + \varepsilon \left\{ a^{-}(v^{+}, v^{-}) \left[\frac{\partial v^{-}}{\partial \theta} - \frac{\partial v^{-}}{\partial \zeta} \right] + b^{-}(v^{+}, v^{-}) \left[\frac{\partial v^{+}}{\partial \theta} - \frac{\partial v^{+}}{\partial \zeta} \right] \right\} = 0.$$

Дополнительные условия на $v^{\pm}$ связаны с требованиями согласования асимптотик для $v^{\pm}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ с асимптотиками (3.2) и (3.11) вблизи особых характеристик.

Ф. а. р. в области III (рис. 28) ищется (так же, как и в § 2, но при других значениях ζ и θ) в виде

$$\bar{V}^{\pm} = \sum_{0 \leq m \leq n} v_{n,m}^{\pm}(\zeta, \theta) \varepsilon^n \ln^m \varepsilon, \quad \zeta > 0, \quad \theta > 0, \quad (4.2)$$

а условия согласования записываются стандартным образом:

$$\begin{aligned} A_{N,\sigma,\theta} A_{N,\xi,\theta} V^{\pm} &= A_{N,\xi,\theta} A_{N,\sigma,\theta} W^{\pm}, \\ A_{N,s,\xi} A_{N,\xi,\theta} \bar{V}^{\pm} &= A_{N,\xi,\theta} A_{N,s,\xi} Y^{\pm} \quad \forall N. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Наличие логарифмических членов в (4.2) обусловлено как раз тем, что такие члены имеются в правых частях равенств (4.3). Действительно, в асимптотике функций $w_{n,m}^{\pm}$ при $\sigma \rightarrow \infty$ присутствуют члены вида $\ln^p \sigma$, которые после замены $\sigma = \varepsilon^{-1} \zeta$ порождают $\ln^m \varepsilon$.

Подстановка ряда (4.2) в уравнения (4.1) приводит к рекуррентной системе уравнений для коэффициентов:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial v_0^+}{\partial \theta} + c^+ (v_0^+, v_0^-) &= 0, \\ 2 \frac{\partial v_0^-}{\partial \zeta} + c^- (v_0^+, v_0^-) &= 0, \quad v_0^\pm \equiv v_{0,0}^\pm, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial v_{n,m}^+}{\partial \theta} + c_{1,0}^+ (\zeta, \theta) v_{n,m}^+ + c_{0,1}^+ (\zeta, \theta) v_{n,m}^- &= g_{n,m}^+ (\zeta, \theta), \\ 2 \frac{\partial v_{n,m}^-}{\partial \zeta} + c_{1,0}^- (\zeta, \theta) v_{n,m}^+ + c_{0,1}^- (\zeta, \theta) v_{n,m}^- &= g_{n,m}^- (\zeta, \theta). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Правые части $g_{n,m}^\pm$ определяются аналогично § 2, $c_{1,0}^\pm, c_{0,1}^\pm$ определяются через $v_0^\pm, v_0^-$.

Условия (4.3) порождают заданные асимптотические разложения для функций $v_{n,m}^\pm(\zeta, \theta)$ при $\zeta \rightarrow +0$ и при $\theta \rightarrow +0$:

$$v_{n,m}^\pm(\zeta, \theta) = \sum_{\substack{0 \leq p \leq n-m \\ p-j \leq n-m}} \mu_{n,m,p,j}^\pm(\theta) \zeta^j \ln^p \zeta, \quad \zeta \rightarrow +0, \quad (4.6)$$

$$v_{n,m}^\pm(\zeta, \theta) = \sum_{\substack{0 \leq l \leq n-m \\ l-j \leq n-m}} v_{n,m,i,l}^\pm(\zeta) \theta^i \ln^l \theta, \quad \theta \rightarrow +0. \quad (4.7)$$

Здесь коэффициенты $\mu^\pm$ легко выражаются через функции $z_{n,m,p,j}^\pm(\theta)$ в формуле (3.9), а коэффициенты $v^\pm$ так же просто выражаются через асимптотики функций $y_{n,m}^\pm(s, \zeta)$ в формуле (3.11).

Теорема 4.1. *Рекуррентная система уравнений (4.4), (4.5) имеет решения, удовлетворяющие условиям (4.6), (4.7).*

Доказательство. На исходном шаге $n = m = 0$ из уравнений (2.5), (4.4) и условий согласования вытекает, что главные члены ф. а. р. (4.2) совпадают с полученными в § 2: $v_{0,0}^\pm(\zeta, \theta) = v_0^\pm\left(\frac{\theta - \zeta}{2}, \frac{\theta + \zeta}{2}\right)$. Эти функции — гладкие при $\zeta \geq 0, \theta \geq 0$ вплоть до особых характеристик.

На следующих шагах в функциях $v_{n,m}^\pm(\zeta, \theta)$ появляются особенности при $\zeta \rightarrow +0, \theta \rightarrow +0$. Дальнейшее доказательство сходно с приведенным в теореме 3.1 и основано на том, что ряды (4.6), (4.7) представляют собой ф. а. р. рекуррентной системы задач (4.4) — (4.7) при $\zeta \rightarrow 0$, либо при $\theta \rightarrow 0$, либо при $\zeta \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0$. Это свойство позволяет построить из отрезков рядов (4.6), (4.7) длины N функции $v_{N,n,m}^\pm$, которые при подстановке в уравнения (4.4), (4.5) дают невязки $O(\zeta^{N-n}), \zeta \rightarrow 0 (\zeta \leq \theta)$, либо $O(\theta^{N-n}) (\theta \leq \zeta)$,

$\theta \rightarrow 0$, либо $O((\xi + \theta)^{N-n})$, $\xi \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow 0$, $\xi \sim \theta$. Уравнения для остатков $\tilde{v}_{N,n,m}^{\pm} = v_{N,n,m}^{\pm} - v_{N,n,m}^{\pm}$ похожи на (4.4), (4.5) и дополняются однородными краевыми условиями. Они имеют решения, по порядку не превосходящие указанные невязки:

$$\tilde{v}_{n,m}^{\pm}(\xi, \theta) = \begin{cases} O(\xi^{N-n}), & \xi \leq \theta, \\ O(\theta^{N-n}), & \theta \leq \xi. \end{cases}$$

Тем самым, в силу произвольности числа N , получается, что построенные решения уравнений (4.4), (4.5) имеют асимптотики (4.6), (4.7). ■

§ 5. Обоснование асимптотического разложения

В предыдущих параграфах были построены ряды (1.1), (2.2), (3.2), (3.11), (4.2), которые представляют ф. а. р. задачи (0.1), (0.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ в подобластях

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{\tau + |\xi| \leq 4\varepsilon^\alpha\}, & \Omega_2 &= \{\xi - \tau \geq \varepsilon^\beta\}, \\ \Omega_3 &= \{\xi + \tau \leq -\varepsilon^\beta\}, & \Omega_4 &= \{|\xi - \tau| \leq 2\varepsilon^\gamma\}, \\ \Omega_5 &= \{|\xi + \tau| \leq 2\varepsilon^\gamma\}, & \Omega_6 &= \{\tau - \xi \geq \varepsilon^\delta, \tau + \xi \geq \varepsilon^\delta\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

в полосе $\Pi = \{\xi \in \mathbb{R}^1, 0 \leq \tau \leq M\}$ (см. рис. 29); здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in (0, 1)$ — произвольные числа. На пересечении этих областей соответствующие ряды асимптотически совпадают. Цель данного параграфа — доказать, что эти ряды представляют асимптотические разложения при $\varepsilon \rightarrow 0$ точного решения $u^\pm(x, t, \varepsilon)$ задачи (0.1), (0.2) в соответствующих областях.

Построение $u^\pm(x, t, \varepsilon)$ на основе ф. а. р. выполняется следующим образом. Положим в (5.1) $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1/2$ и введем разбиение единицы в полосе Π :

$$1 \equiv \sum_{j=1}^6 \chi_j(\xi, \tau, \varepsilon)$$

так, чтобы каждая функция $\chi_j(\xi, \tau, \varepsilon)$ совпадала с нулем вне одной (j -й) из подобластей (5.1), совпадала с единицей вне остальных и была гладкой по ξ, τ . Поскольку области перекрытия имеют ширину $O(\varepsilon^{1/2})$, то возможен выбор функций, обладающих

свойствами $\left| \frac{\partial \chi_j}{\partial \tau} \right| + \left| \frac{\partial \chi_j}{\partial \xi} \right| \leq M_1 \varepsilon^{-1/2} \quad \forall \xi, \tau, \varepsilon$. После этого легко

комбинируется ф. а. р. в полосе Π в виде суммы рядов, умноженных на соответствующие отрезки:

$$\begin{aligned} U_N^\pm(x, t, \varepsilon) &= \chi_1(\xi, \tau, \varepsilon) A_{N,x,t} U^\pm + \\ &+ [\chi_2(\xi, \tau, \varepsilon) + \chi_3(\xi, \tau, \varepsilon)] A_{N,\xi,\tau} V^\pm + \chi_4(\xi, \tau, \varepsilon) A_{N,\sigma,\theta} W^\pm + \\ &+ \chi_5(\xi, \tau, \varepsilon) A_{N,s,\xi} Y^\pm + \chi_6(\xi, \tau, \varepsilon) A_{N,\xi,\theta} V^\pm. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Отметим, что конкретный выбор чисел $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ не играет роли в формировании ф. а. р. (5.2), надо лишь, чтобы области (5.1) перекрывались.

Теорема 5.1. *Выражение (5.2) представляет собой асимптотическое представление при $\varepsilon \rightarrow 0$ точного решения $u^\pm(x, t, \varepsilon)$ задачи (0.1), (0.2) в полосе $\Pi = \{\xi \in \mathbb{R}^1, 0 \leq \tau \leq M\}$, так что ряды (1.1), (2.2), (3.2), (3.11), (4.2) являются асимптотическими разло-*

жениями для $u(x, t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно в соответствующих областях Ω_j .

Доказательство. Точное решение задачи (0.1), (0.2) ищется в виде суммы:

$$u^\pm(x, t, \varepsilon) = U_N^\pm(x, t, \varepsilon) + \varepsilon^{N-1} r^\pm(\xi, \tau, \varepsilon), \quad \xi = \varepsilon x, \tau = \varepsilon t. \quad (5.3)$$

Для функций $r^\pm(\xi, \tau, \varepsilon)$ получается нелинейная система уравнений

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \pm \frac{\partial}{\partial \xi} \right) r^\pm + c_{1,0}^\pm(\xi, \tau, \varepsilon) r^\pm + c_{0,1}^\pm(\xi, \tau, \varepsilon) r^\mp = \\ = \varepsilon \left\{ f^\pm(r^+, r^-, \xi, \tau, \varepsilon) \frac{\partial r^+}{\partial \xi} + g^\pm(r^+, r^-, \xi, \tau, \varepsilon) \frac{\partial r^-}{\partial \xi} + \right. \\ \left. + h^\pm(r^+, r^-, \xi, \tau, \varepsilon) \right\}, \quad (5.4) \end{aligned}$$

$$r^\pm(\xi, 0, \varepsilon) = \varphi^\pm(\xi, \varepsilon). \quad (5.5)$$

Из свойств ф. а. р. вытекает, что исходные данные в этой задаче являются функциями, гладкими по r^+, r^-, ξ, τ , равномерно ограниченными по ε , а их производные по ξ, τ оцениваются через $O(\varepsilon^{-1})$. Следует учесть, что перед нелинейными членами в (5.4) имеется малый множитель ε . Это обеспечивает разрешимость задачи (5.4), (5.5) в полосе конечной ширины $\{\xi \in \mathbb{R}^1, 0 \leq \tau \leq M\}$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$ ([91], гл. II). Решение $r^\pm(\xi, \tau, \varepsilon)$ ограничено равномерно по ε , а его производные по ξ, τ оцениваются через $O(\varepsilon^{-1})$. Тем самым доказано существование решения исходной задачи (0.1), (0.2) в форме (5.3). Это, в силу произвольности числа N , дает обоснование асимптотики для $u^\pm(x, t, \varepsilon)$ в виде (5.2) равномерно в полосе Π . С учетом свойств срезающих функций $\chi_j(\xi, \tau, \varepsilon)$ и согласования разных рядов в областях перекрытия получается, что каждый из рядов (1.1), (2.2), (3.2), (3.11), (4.2) является асимптотическим разложением точного решения $u^\pm(x, t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно в соответствующих областях Ω_j .

З а м е ч а н и е 5.1. Члены при $\varepsilon^p \ln \varepsilon$ в разложении $u^\pm(x, t, \varepsilon)$ имеются лишь в областях вблизи особых характеристик и над ними $\{\tau + \xi > 0, \tau - \xi > 0\}$, причем они появляются лишь в случае медленного убывания начальных функций: $\exists p \varphi^\pm(x) = O(|x|^{-p}), |x| \rightarrow \infty$ ($0 < p < \infty$). Если начальные данные быстро убывают ($\forall p < \infty$), то $\ln \varepsilon$ в рядах отсутствует [44]. Если $\varphi^\pm(x) = O(|x|^{-1})$, то появление главного члена с логарифмом $\varepsilon \ln \varepsilon$ зависит от структуры исходных уравнений (0.1). В общем случае всегда имеются члены с $\varepsilon \ln \varepsilon$ в слоях вблизи линий $\tau \pm \xi = 0$. Подобные члены в области $\{\tau + \xi > 0, \tau - \xi > 0\}$ могут появиться лишь в случае, когда не совпадают первые члены (коэффициенты при x^{-1}) в асимптотике $\varphi^\pm(x)$ на $+\infty$ и на $-\infty$, т. е. при $\varphi_{1,1}^+ \neq \varphi_{1,2}^+, \varphi_{1,1}^- \neq \varphi_{1,2}^-$ (см. (0.4)).

З а м е ч а н и е 5.2. Похожим способом решается задача в случае, когда начальные функции $\varphi^\pm(x)$ имеют более сложные асимптотики при $|x| \rightarrow \infty$, например, по дробным степеням x либо по степеням и логарифмам $|x|$. Естественно, что это приводит к усложнению структуры калибровочных функций: появляются дробные степени ε и дополнительные степени $\ln \varepsilon$.

Глава VI

ЗАДАЧИ КОШИ

ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Здесь будет рассматриваться следующая начальная задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = \varepsilon^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0.1)$$

$$u(x, t_0, \varepsilon) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \quad (0.2)$$

Всюду далее предполагается, что $\varphi(u) \in C^\infty$, $\varphi''(u) > 0$, $\psi(x)$ — ограниченная и кусочно гладкая функция. Если параметр $\varepsilon > 0$, то известно (см., например, [52], гл. V, § 8), что задача (0.1), (0.2) имеет решение $u(x, t, \varepsilon)$ при $t \geq t_0$. Это решение ограничено и бесконечно дифференцируемо всюду при $t \geq t_0$, за исключением точек разрыва начальной функции. Вопрос состоит в том, чтобы выяснить, как ведет себя решение $u(x, t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Естественно, что прежде всего надо попытаться решить предельную задачу, т. е. задачу (0.1), (0.2) при $\varepsilon = 0$. На первый взгляд ее решение очень простое. Действительно, запишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varphi'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (0.3)$$

Фиксируем какое-нибудь значение u^* и рассмотрим на плоскости (x, t) прямую $x - \varphi'(u^*) = \text{const}$. Производная от гладкой функции $u(x, t)$ по направлению этой

* Причина, по которой коэффициент обозначен не ε , а ε^4 , выяснится значительно позднее, в § 4. До этого времени естественнее было бы обозначить коэффициент посредством ε , и обозначение ε^4 введено исключительно для удобства ссылок из § 4 на предыдущие параграфы.

прямой с точностью до множителя равна

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(x(t), t)) &= \frac{d}{dt}(u(\varphi'(u^*)t + \text{const}, t)) = \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \varphi'(u^*) \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=\varphi'(u^*)t + \text{const}}. \end{aligned}$$

Таким образом, если функция $u(x, t)$ равна значению u^* на прямой $x = \varphi'(u^*) + \text{const}$, то $\frac{d}{dt}(u(x(t), t)) = 0$ и функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (0.3) на этой прямой. Отсюда ясно, как построить решение задачи (0.3), (0.2). Через каждую точку (y, t_0) на начальной прямой проведем на плоскости (x, t) прямую

$$x - y = \varphi'(\psi(y))(t - t_0) \quad (0.4)$$

и на этой прямой положим функцию $u(x, t)$ равной ее значению в начальный момент, т. е. $\psi(y)$.

Прямые (0.4) будем называть характеристиками уравнения (0.3) (хотя следует заметить, что чаще характеристиками называют линии $x = y + \varphi'(u^*)(t - t_0)$, $u = u^*$ в трехмерном пространстве (x, t, u) , а их проекции на плоскость (x, t) , т. е. прямые (0.4), называют лучами). Тогда можно просто сказать, что всякое гладкое решение уравнения (0.3) постоянно на своих характеристиках. Поэтому решение задачи (0.3), (0.2) — это функция, которая удовлетворяет начальному условию (0.2) и постоянна на характеристиках.

Простейшая интерпретация уравнения (0.3) следующая. Пусть u — это плотность вещества, зависящая только от одной координаты x , и это вещество движется вдоль оси x с локальной скоростью v . Если в процессе движения вещество не возникает и не исчезает, то изменение его количества на отрезке $[x_1, x_2]$ за интервал времени (t_1, t_2) порождается лишь потоком вещества через концы отрезка. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} u \, dx|_{t=t_2} - \int_{x_1}^{x_2} u \, dx|_{t=t_1} &= \int_{t_1}^{t_2} vu \, dt|_{x=x_1} - \int_{t_1}^{t_2} vu \, dt|_{x=x_2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vu) \right] dx \, dt = 0, \end{aligned}$$

если u и v — гладкие функции. В силу произвольности x_1, x_2, t_1, t_2 отсюда вытекает, что $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vu) = 0$. Такое уравнение носит название уравнения неразрывности и выполнено при указанных выше предположениях, например при движении газа или жидкости без источников и стоков. Уравнение (0.3) получается из уравнения неразрывности при дополнительном предположении о зависимости скорости v от плотности u : $v = v(u)$. Такое предположение разумно сделать в так называемой транспортной задаче (где u — это плотность автомашин на шоссе), в задаче о паводковых волнах (где u — это площадь поперечного сечения реки), в задаче о движении ледника и в некоторых других.

Для задачи (0.3), (0.2) все обстоит легко и просто в полосе $t_0 \leq t \leq T$, если характеристики не пересекаются и

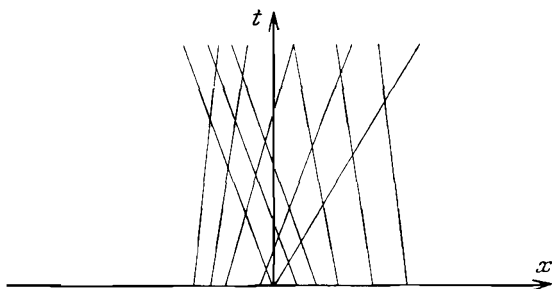


Рис. 31

покрывают всю полосу. Но если какие-нибудь характеристики пересекаются (как на рис. 31 или 32), то гладкого решения, очевидно, не существует. Отметим, что на рис. 31 начальная функция $\psi(x)$ разрывна, и потому гладкое решение не существует нигде при $t > t_0$. А на рис. 32 начальная функция $\psi(x)$ — гладкая, так что гладкое решение $u(x, t)$ существует для $t > t_0$ и близких к t_0 , но, начиная с некоторого момента t_1 , гладкость решения теряется, при приближении к точке O градиент функции $u(x, t)$ увеличивается и становится бесконечным в этой точке. Поэтому ситуация, изображенная на рис. 32, иногда называется *градиентной катастрофой*. (Точка O на рис. 32 называется еще *точкой опрокидывания волны*. О причине такого наименования, а также

более подробно об интерпретации уравнения (0.3) и о структуре его решений можно прочитать в [98], гл. 2.)

Раз не существует гладкого решения задачи (0.3), (0.2), то естественно попытаться построить кусочно гладкое решение этой задачи, которое удовлетворяло бы уравнению (0.3) вне линий разрыва. Однако, это не просто сделать, так как подобных решений очень много.

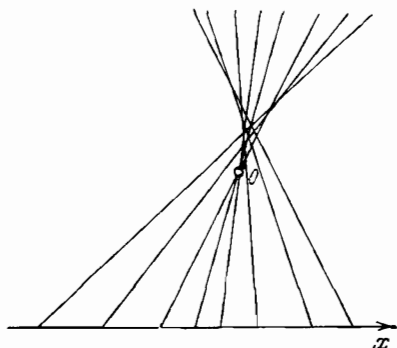


Рис. 32

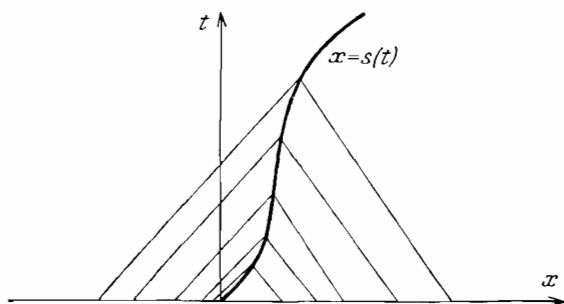


Рис. 33

Например, для случая, изображенного на рис. 31, можно построить кусочно гладкое решение с одной гладкой линией разрыва $l = \{x, t: x = s(t)\}$, изображенной на рис. 33. Линия разрыва выбрана так, чтобы через каждую точку слева и справа от кривой l проходила бы только одна характеристика, соединяющая эту точку с начальной прямой $t = t_0$. Ясно, что подобных кривых и, следовательно, кусочно гладких решений бесчисленное множество. Как выбрать среди них единственно правильное

и по какому принципу? Есть различные подходы к этой проблеме, но один из путей связан как раз с уравнением (0.1). Оказывается, что при указанных выше ограничениях на функции φ и ψ существует предел решения $u(x, t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Этот предел называется обобщенным решением $u_0(x, t)$ задачи (0.3), (0.2). Существование обобщенного решения $u_0(x, t)$ доказано даже при более общих предположениях в [82] (функция $\psi(x)$ ограничена и измерима, а уравнение имеет более общий вид, чем (0.3)), но дальнейшее исследование не будет опираться на теорему существования обобщенного решения.

Даже для кусочно гладкой начальной функции структура обобщенного решения может быть очень сложной. Естественно, что в таком случае еще более запутанной будет асимптотика решения задачи (0.1), (0.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому, чтобы получить сколько-нибудь обозримые и конструктивные результаты по асимптотике $u(x, t, \varepsilon)$, ограничимся теми случаями, когда структура предельной функции $u_0(x, t)$ — обобщенного решения задачи (0.3), (0.2) — достаточно проста.

Всюду в этой главе будем предполагать, что в полосе $\{x, t: t_0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^1\}$ обобщенное решение задачи (0.3), (0.2) — функция $u_0(x, t)$ является гладкой всюду, кроме одной гладкой линии разрыва $l = \{x, t: t_1 \leq t \leq T, x = s(t)\}$. Под обобщенным решением $u_0(x, t)$ будем пока понимать предел решения $u(x, t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В дальнейшем для рассматриваемого здесь частного случая будет дано другое, независимое определение обобщенного решения. А в §§ 2, 3 будут указаны условия на $\varphi(u)$ и $\psi(x)$, достаточные для того, чтобы обобщенное решение имело одну гладкую линию разрыва l .

§ 1. Внешнее разложение. Асимптотика решения вблизи линии разрыва

Здесь будет рассмотрен какой-нибудь внутренний фрагмент l^* линии разрыва l и будет построено ф. а. р. уравнения (0.1) в окрестности l^* . Попутно будет выяснено, каким свойством должна обладать функция $s(t)$, определяющая линию разрыва l . Окажется, что $s(t)$ не может быть совершенно произвольной гладкой функцией — она должна удовлетворять довольно жесткому условию. Хотя на этом этапе исследования произвол в построении $s(t)$ и коэффициентов асимптотического разло-

жения остается, но он не такой уж большой — функция $s(t)$ зависит от одной произвольной постоянной, и каждый член асимптотического разложения также зависит от одной произвольной постоянной. Эти постоянные будут определяться в следующих параграфах.

Итак, предположим, что $l^* = \{x, t: x = s(t), t_2 \leq t \leq t_3\}$ и при некотором фиксированном $\rho > 0$ в области $\Omega_\rho^- = \{x, t: s(t) - \rho < x < s(t), t_2 \leq t \leq t_3\}$ и в области $\Omega_\rho^+ = \{x, t: s(t) < x < s(t) + \rho, t_2 \leq t \leq t_3\}$ существует функция $u_0(x, t)$, которая удовлетворяет уравнению (0.3) вне l^* , имеет разрыв первого рода на l^* , так что $u_0(s(t) - 0, t) \neq u_0(s(t) + 0, t)$, и бесконечно дифференцируема в замыкании Ω_ρ^+ и Ω_ρ^- , если считать ее продолженной слева и справа на l^* по непрерывности. Будем считать, что через каждую точку $(x^*, t^*) \in \Omega_\rho^+ \cup \Omega_\rho^-$ проходит характеристика $\{x, t: x - x^* = (t - t^*)\varphi'(u_0(x^*, t^*))\}$, которая пересекается с начальной прямой в точке (y, t_0) .

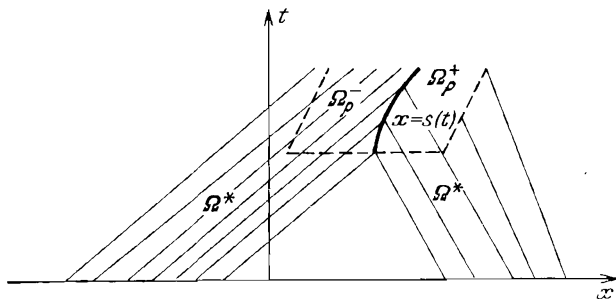


Рис. 34

Таким образом, $u_0(x^*, t^*) = \psi(y)$. Часть плоскости, которая покрывается такими характеристиками, обозначим Ω^* (рис. 34). Будем, наконец, предполагать, что всюду в Ω^* характеристики гладко зависят от параметра y . Точнее, предположим, что при каждом фиксированном t отображение $y \mapsto x$, которое задается уравнением характеристик из Ω^* ($x = y + \varphi'(\psi(y))(t - t_0)$), является диффеоморфизмом, т. е. $\partial x / \partial y > 0$. Всюду далее будем обозначать $g(y) = \varphi'(\psi(y))$,

$$\omega(y, t) = 1 + g'(y)(t - t_0) \quad (1.1)$$

и будем всегда считать, что x, y и t связаны соотношением

$$x = y + g(y)(t - t_0). \quad (1.2)$$

Итак, в предположении, что

$$1 + g'(y)(t - t_0) > 0 \quad \text{в} \quad \Omega^*, \quad (1.3)$$

построим в Ω^* внешнее разложение в виде

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{4k} u_{4k}(x, t). \quad (1.4)$$

Здесь $u_0(x, t)$ — функция, определенная выше ($u_0(x, t) = \psi(y)$), а при $k > 0$ функции $u_{4k}(x, t)$ надо определить из уравнения (0.1) и начального условия (0.2). После подстановки ряда (1.4) в (0.1) получаем рекуррентную систему уравнений

$$\frac{\partial u_4}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\Phi'(u_0) u_4) = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{4k}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\Phi'(u_0) u_{4k}) = \\ = \frac{\partial^2 u_{4k-4}}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \Phi^{(j)}(u_0) \sum_{\Sigma i_p=k} \prod_{p=1}^j u_{4i_p}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Из условия (0.2) вытекает, что $u_{4k}(x, t_0) = 0$ при $k > 0$. Так как в левой части уравнений (1.5) стоит, с точностью до множителя, производная вдоль характеристики (1.2), то естественно перейти в этих уравнениях (они иногда называются уравнениями переноса) к переменным y и t . После такой замены уравнения (1.5) принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\omega(y, t) u_{4k}^*(y, t)) = F_k(y, t),$$

где $\omega(y, t)$ определяется формулой (1.1),

$$\begin{aligned} u_{4k}^*(y, t) \equiv u_{4k}(x, t), \quad F_1(y, t) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\omega} \frac{\partial u_0^*}{\partial y} \right], \\ F_k(y, t) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\omega} \frac{\partial u_{4k-4}^*}{\partial y} \right] - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left[\sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \Phi^{(j)}(\psi(y)) \sum_{\Sigma i_p=k} \prod_{p=1}^j u_{4i_p}^* \right], \quad k \geq 2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Следовательно,

$$u_{4k}^*(y, t) = \frac{1}{\omega(y, t)} \int_{t_0}^t F_k(y, \theta) d\theta. \quad (1.7)$$

Отсюда видно, что все функции $u_{4k}(x, t)$ являются гладкими в $\bar{\Omega}^*$, за исключением линии l^* , где они и все их производные имеют разрывы первого рода. Из-за этих разрывов ряд (1.4) не является ф. а. р. уравнения (0.1) всюду в $\bar{\Omega}^*$. Ясно, что в окрестности l^* требуется вводить новые независимые переменные и искать новое асимптотическое разложение.

Естественно ввести переменные $\xi = \varepsilon^{-\alpha}(x - s(t))$, t , где $\alpha > 0$. Обозначая $u(x, t, \varepsilon) = v(\xi, t, \varepsilon)$, получим для v уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \varepsilon^{-\alpha} s'(t) \frac{\partial v}{\partial \xi} + \varepsilon^{-\alpha} \frac{\partial \varphi(v)}{\partial \xi} = \varepsilon^{4-2\alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}. \quad (1.8)$$

Ясно, что для описания решения в окрестности l^* должен существенно участвовать член, стоящий в правой части уравнения (1.8); он должен быть главным членом, но не единственным главным членом уравнения. Отсюда вытекает, что $-\alpha = 4 - 2\alpha$, т. е. $\alpha = 4$.

Итак, замена переменных имеет вид

$$\xi = \varepsilon^{-4}(x - s(t)), \quad (1.9)$$

а внутреннее разложение будем искать в виде

$$V = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{4i} v_{4i}(\xi, t). \quad (1.10)$$

Подставляя этот ряд в уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon^{-4} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + s'(t) \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi(v)}{\partial \xi} \right), \quad (1.11)$$

получаем рекуррентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi^2} + s'(t) \frac{\partial v_0}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi(v_0)}{\partial \xi} = 0, \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} L_1 v_{4i} &\equiv \frac{\partial^2 v_{4i}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \{ [s'(t) - \varphi'(v_0)] v_{4i} \} = \\ &= \frac{\partial v_{4i-4}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} G_i(v_0, v_4, \dots, v_{4i-4}), \quad i > 0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где

$$G_i(v_0, v_4, \dots, v_{4i-4}) = \sum_{q \geq 2} \frac{\varphi^{(q)}(v_0)}{q!} \sum_{\Sigma j_p =} \prod_{p=1}^q v_{4j_p}. \quad (1.14)$$

Здесь переменная t играет лишь роль параметра.

Ряд (1.10) при $\xi \rightarrow \infty$ должен быть согласован с рядом (1.4) при $x \rightarrow s(t) + 0$, а при $\xi \rightarrow -\infty$ ряд (1.10) должен быть согласован с рядом (1.4) при $x \rightarrow s(t) - 0$. Условием согласования, охватывающем все члены рядов (1.4) и (1.10), мы займемся позднее, а пока ограничимся лишь условиями на бесконечности для $v_0(\xi, t)$. Ясно, что должны быть выполнены соотношения

$$\begin{aligned} v_0(-\infty, t) &= u_0(s(t) - 0, t), \\ v_0(+\infty, t) &= u_0(s(t) + 0, t). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Интегрируя уравнение (1.12) по ξ , получим равенство

$$\frac{\partial v_0}{\partial \xi} = \varphi(v_0) - s'(t) v_0 - C(t). \quad (1.16)$$

Так как функция $v_0(\xi, t)$ должна иметь пределы при $\xi \rightarrow \pm\infty$, то из (1.16) вытекает, что должны существовать пределы $\partial v_0 / \partial \xi$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Следовательно, $\frac{\partial v_0}{\partial \xi}(\xi, t) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Итак, для того чтобы существовало решение задачи (1.12), (1.15), необходимо выполнение равенств

$$\begin{aligned} C(t) &= \varphi(u_0(s(t) - 0, t)) - s'(t) u_0(s(t) - 0, t) = \\ &= \varphi(u_0(s(t) + 0, t)) - s'(t) u_0(s(t) + 0, t), \end{aligned} \quad (1.17)$$

или, что то же самое,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\varphi(u_0(s(t) + 0, t)) - \varphi(u_0(s(t) - 0, t))}{u_0(s(t) + 0, t) - u_0(s(t) - 0, t)}. \quad (1.18)$$

Таким образом, мы теперь видим, что для предельного обобщенного решения $u_0(x, t)$ линия разрыва $l = \{x, t: x = s(t)\}$ не может быть произвольной гладкой функцией, если считать, что в окрестности l асимптотика решения возмущенной задачи (0.1), (0.2) описывается рядом (1.10). Равенство (1.18) носит название *условия Гюгонио*. Так как функция $\varphi(u)$ выпукла книзу и, в силу (1.17), правая часть равенства (1.16) равна нулю при $v_0 = u_0(s(t) - 0, t)$ и при $v_0 = u_0(s(t) + 0, t)$, то, сле-

довательно, эта правая часть отрицательна между указанными значениями v_0 . Значит, $\frac{\partial v_0}{\partial \xi} < 0$ для решения задачи (1.12), (1.15) и

$$u_0(s(t) - 0, t) > u_0(s(t) + 0, t). \quad (1.19)$$

Покажем, что условия (1.18), (1.19) не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы существовал ряд (1.10), который бы являлся ф. а. р. уравнения (0.1) в окрестности l^* и был согласован с рядом (1.4). Прежде всего построим решение задачи (1.12), (1.15). Определим $C(t)$ по формулам (1.17), которые непротиворечивы вследствие (1.18), и затем выпишем решение уравнения (1.16) в квадратурах:

$$\int_a^{v_0} [\varphi(z) - s'(t)z - C(t)]^{-1} dz = \xi + c_0(t). \quad (1.20)$$

Здесь a — какая-нибудь величина, лежащая между $v_0(-\infty, t)$ и $v_0(+\infty, t)$, а $c_0(t)$ — произвольная функция. Будем считать величину a постоянной, не зависящей от t . Из выпуклости функции $\varphi(u)$, равенств (1.17) и неравенства (1.19) вытекает, что функция $v_0(\xi, t)$, определяемая соотношением (1.20), — это гладкая функция от ξ при $\xi \in \mathbb{R}^1$, которая экспоненциально быстро стремится к своим пределам на $\pm\infty$. Обозначим посредством $\tilde{v}(\xi, t)$ функцию, определенную равенством (1.20) в случае, когда $c_0(t) \equiv 0$. Таким образом, при выполнении условия Гюгонио (1.18) и неравенства (1.19) существует решение задачи (1.12), (1.15), причем это решение определяется с точностью до сдвига аргумента:

$$v_0(\xi, t) = \tilde{v}(\xi + c_0(t), t). \quad (1.21)$$

Перейдем теперь к построению $v_{4i}(\xi, t)$ при $i \geq 1$. Для этого прежде всего выясним условия на бесконечности для $v_{4i}(\xi, t)$, исходя из условий согласования рядов (1.4) и (1.10). Так как $u_k(x, t)$ — гладкие функции всюду в $\bar{\Omega}_\rho^-$ и в $\bar{\Omega}_\rho^+$, если считать их продолженными по непрерывности на l^* , то при $x \rightarrow s(t) \pm 0$

$$A_{4m, \xi, t} A_{4n, x, t} U = \sum_{i=0}^m \varepsilon^{4i} P_i^\pm(\xi, t).$$

Здесь $P_i^\pm(\xi, t)$ — это многочлены относительно ξ с коэф-

эффициентами, гладко зависящими от t :

$$P_i^\pm(\zeta, t) = \sum_{j=0}^i \zeta^j \frac{1}{j!} \frac{\partial^j u_{i-j}}{\partial x^j}(s(t) \pm 0, t). \quad (1.22)$$

Из условия согласования

$$A_{4n, x, t} A_{4m, \zeta, t} V = A_{4m, \zeta, t} A_{4n, x, t} U$$

вытекает, что должны выполняться соотношения

$$v_{4i}(\zeta, t) - P_i^\pm(\zeta, t) \xrightarrow{\zeta \rightarrow \pm\infty} 0. \quad (1.23)$$

При этом стремление к пределу должно быть сверхстепенным, т. е. быстрее любой степени ζ . Из-за гладкости функций $u_{4k}(x, t)$ задача в окрестности линии l^* не носит характера бисингулярности. Фактически функции $v_{4i}(\zeta, t)$ — это функции пограничного слоя того же типа, который рассмотрен в гл. I; они представимы в виде суммы многочленов и функций, экспоненциально быстро стремящихся к нулю на бесконечности. Различие лишь в том, что функции v_{4i} служат теперь не для компенсации невязки в граничных условиях, а для «сглаживания» разрыва на линии l^* . Поэтому они определены при всех $\zeta \in \mathbb{R}^1$ и имеют разные асимптотические представления на $\pm\infty$. Но это различие несущественно.

Итак, предстоит исследовать краевые задачи (1.13), (1.23). Отметим, что полиномы $P_i^\pm(\zeta, t)$ удовлетворяют точно такой же рекуррентной системе, что и система (1.12), (1.14):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_i}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \{[s'(t) - \varphi'(P_0(t))]\} P_i &= \\ &= \frac{\partial P_{i-1}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \zeta} G_i(P_0, P_1, \dots, P_{i-1}), \quad i > 0, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где G_i — те же функции, что и в правых частях равенств (1.14). К системе (1.24) легко прийти, если учесть, что ряд является ф. а. р. уравнения (0.1); надо только в соответствующем равенстве для $A_{n, x, t} U$ перейти к переменным ζ, t . Введем еще обозначение

$$Z(\zeta, t) = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \zeta}(\zeta, t), \quad (1.25)$$

где $\tilde{v}(\zeta, t)$ — определенное выше решение уравнения (1.12). Дифференцируя это уравнение по ζ , приходим к

выводу, что $Z(\xi, t)$ является решением однородного уравнения $L_1 Z = 0$.

Из уравнений (1.13) и (1.24) при $i = 1$ получаем равенство

$$L_1 Q^\pm = f^\pm(\xi, t), \quad (1.26)$$

где

$$Q^\pm(\xi, t) = v_4(\xi, t) - P_1^\pm(\xi, t), \quad (1.27)$$

а

$$f^\pm(\xi, t) = \frac{\partial v_0}{\partial t} - \frac{\partial P_0^\pm}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \{ [\varphi'(v_0) - \varphi'(P_0^\pm(t))] P_1^\pm \}.$$

Будем искать решения уравнений (1.26) в следующем виде:

$$Q^\pm(\xi, t) = Z(\xi, t) \int_0^\xi [Z(\xi, t)]^{-1} \int_{\pm\infty}^\xi f^\pm(\eta, t) d\eta d\xi + K^\pm(t) Z(\xi, t), \quad (1.28)$$

где $Z(\xi, t)$ — это функция (1.25). Очевидно, что $Q^\pm(\xi, t)$ удовлетворяют уравнениям (1.26) и экспоненциально быстро стремятся к нулю при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Следовательно, функция $v_4(\xi, t)$, определенная в соответствии с (1.27) как $Q^+(\xi, t) + P_1^+(\xi, t)$ при $\xi > 0$ и как $Q^-(\xi, t) + P_1^-(\xi, t)$ при $\xi \leq 0$, — это решение уравнения (1.13) при $\xi \neq 0$, удовлетворяющее условиям (1.23). Итак, для того чтобы построенная функция $v_4(\xi, t)$ являлась искомым гладким решением всюду при $\xi \in \mathbb{R}^1$, достаточно, чтобы она была непрерывна вместе с первой производной при $\xi = 0$:

$$\begin{aligned} Q^+(0, t) - Q^-(0, t) &= P_1^-(0, t) - P_1^+(0, t), \\ \frac{\partial Q^+}{\partial \xi}(0, t) - \frac{\partial Q^-}{\partial \xi}(0, t) &= \frac{\partial P_1^-}{\partial \xi}(0, t) - \frac{\partial P_1^+}{\partial \xi}(0, t). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Легко проверить, что эти условия являются не только необходимыми, но и достаточными для разрешимости задачи (1.13), (1.23) при $i = 1$.

Если в равенства (1.29) подставить выражения (1.28) для $Q^\pm(t)$, то получатся соотношения

$$[K^+(t) - K^-(t)] Z(0, t) = P_1^-(0, t) - P_1^+(0, t),$$

$$\int_{+\infty}^0 f^+(\eta, t) d\eta - \int_{-\infty}^0 f^-(\eta, t) d\eta + [K^+(t) - K^-(t)] \frac{dZ}{d\zeta}(0, t) = \\ = \frac{\partial P_1^-}{\partial \zeta}(0, t) - \frac{\partial P_1^+}{\partial \zeta}(0, t).$$

Учитывая вид $f^\pm(\zeta, t)$ и уравнение $L_1 Z = 0$, получаем равенство

$$\int_{-\infty}^0 \left[\frac{dP_0^-(t)}{dt} - \frac{\partial v_0(\zeta, t)}{\partial t} \right] d\zeta + \int_0^{\infty} \left[\frac{dP_0^+(t)}{dt} - \frac{\partial v_0(\zeta, t)}{\partial t} \right] d\zeta + \\ + [\varphi'(v_0(0, t)) - \varphi'(P_0^+(t))] P_1^+(0, t) - \\ - [\varphi'(v_0(0, t)) - \varphi'(P_0^-(t))] P_1^-(0, t) - \\ - [P_1^-(0, t) - P_1^+(0, t)] [s'(t) - \varphi'(v_0(0, t))] = \\ = \frac{\partial P_1^-}{\partial \zeta}(0, t) - \frac{\partial P_1^+}{\partial \zeta}(0, t). \quad (1.30)$$

Если учесть, что $v_0(\zeta, t) = \tilde{v}(\zeta + c_0(t), t)$ (см. (1.21)), то из (1.30) вытекает следующее уравнение для $c_0(t)$:

$$\frac{d}{dt} \{c_0(t) [P_0^+(t) - P_0^-(t)]\} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^0 [P_0^-(t) - \tilde{v}(\zeta, t)] d\zeta + \\ + \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} [P_0^+(t) - \tilde{v}(\zeta, t)] d\zeta + \frac{\partial}{\partial \zeta} [P_1^+(\zeta, t) - P_1^-(\zeta, t)] - \\ - [\varphi'(P_0^+(t)) - s'(t)] P_1^+(0, t) + [\varphi'(P_0^-(t)) - \\ - s'(t)] P_1^-(0, t). \quad (1.31)$$

Итак, выяснилось, что функция $c_0(t)$ в формуле (1.21) не может быть произвольной — она должна удовлетворять уравнению (1.31). И функция $s(t)$, и функция $c_0(t)$ определяются, таким образом, с точностью до одной произвольной постоянной как решения уравнений первого порядка (1.18) и (1.31). При таких $s(t)$ и $c_0(t)$, как выяснено, существует решение задачи (1.13), (1.23) при $i = 1$. Функция $v_4(\zeta, t)$ определяется с точностью до слагаемого $c_1(t)Z(\zeta, t)$. Далее по индукции установим существование решений задач (1.13), (1.23) и при всех остальных i , но предварительно докажем одну вспомогательную лемму.

Обозначим $\mathfrak{M}^+$ множество гладких функций $v(\zeta, t)$, определенных при $\zeta \in \mathbb{R}^1$, $t_2 \leq t \leq t_3$ и таких, что при

некотором $\gamma > 0$ справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial^{i+j}}{\partial \xi^i \partial t^j} v(\xi, t) \right| \leq M_{i,j} \exp(-\gamma \xi) \quad \forall i, j.$$

Посредством $\mathfrak{M}^-$ обозначим аналогичное множество функций $v(\xi, t)$, для которых справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial^{i+j}}{\partial \xi^i \partial t^j} v(\xi, t) \right| \leq M_{i,j} \exp \gamma \xi \quad \forall i, j.$$

Лемма 1.1. Пусть функции $P^+(\xi, t)$, $P^-(\xi, t)$, $F(\xi, t)$ — гладкие при $\xi \in \mathbb{R}^1$, $t_2 \leq t \leq t_3$ и такие, что $F(\xi, t) - L_1 P^+(\xi, t) \in \mathfrak{M}^+$ и $F(\xi, t) - L_1 P^-(\xi, t) \in \mathfrak{M}^-$, где L_1 — оператор (1.13). Тогда для существования решения задачи

$$L_1 v = F(\xi, t),$$

$$v(\xi, t) - P^+(\xi, t) \in \mathfrak{M}^+, \quad v(\xi, t) - P^-(\xi, t) \in \mathfrak{M}^- \quad (1.32)$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (P^+ - P^-) + [s'(t) - \Phi'(v_0)] (P^+ - P^-) \right\}_{\xi=0} = \\ & = \int_{-\infty}^0 [F(\xi, t) - L_1 P^-(\xi, t)] d\xi + \int_0^{\infty} [F(\xi, t) - L_1 P^+(\xi, t)] d\xi. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Доказательство. Необходимость условия (1.33) легко получить, интегрируя почленно от нуля до бесконечности уравнение для $v(\xi, t) - P^+(\xi, t)$, от $-\infty$ до нуля уравнение для $v(\xi, t) - P^-(\xi, t)$ и почленно вычитая получившиеся равенства.

Достаточность условия (1.33) вытекает, например, из явной формулы для решения $v(\xi, t)$. Обозначим

$$F^-(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\xi} [F(\xi_1, t) - L_1 P^-(\xi_1, t)] d\xi_1,$$

$$F^+(\xi, t) = - \int_{\xi}^{\infty} [F(\xi_1, t) - L_1 P^+(\xi_1, t)] d\xi_1$$

и положим

$$v(\xi, t) =$$

$$= \begin{cases} P^-(\xi, t) + Z(\xi, t) \left\{ \int_0^{\xi} \frac{F^-(\xi_1, t)}{Z(\xi_1, t)} d\xi_1 + \frac{P^+(0, t)}{Z(0, t)} \right\} & \text{при } \xi < 0, \\ P^+(\xi, t) + Z(\xi, t) \left\{ \int_0^{\xi} \frac{F^+(\xi_1, t)}{Z(\xi_1, t)} d\xi_1 + \frac{P^-(0, t)}{Z(0, t)} \right\} & \text{при } \xi \geq 0. \end{cases}$$

(1.34)

По построению функция $v(\zeta, t)$ удовлетворяет уравнению и условиям (1.32) при $\zeta \neq 0$. При $\zeta = 0$ эта функция, очевидно, непрерывна. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что, ввиду выполнения условия (1.33) и уравнения $L_1 Z = 0$, производная $\partial v / \partial \zeta$ также непрерывна в нуле. ■

Теорема 1.1. *Существуют решения задач (1.13), (1.23) при $\zeta \in \mathbb{R}^1$, $t_2 \leq t \leq t_3$ такие, что $v_{4i}(\zeta, t) = P^\pm(\zeta, t) \in \mathfrak{M}^\pm$. Каждая из функций $v_{4i}(\zeta, t)$ при $i > 0$ и при условии, что уже определены все $v_{4j}(\zeta, t)$ для $j < i$, определяется с точностью до слагаемого $c_i[\kappa(t)]^{-1}Z(\zeta, t)$, где c_i — произвольная постоянная, $\kappa(t) = P_0^+(t) - P_0^-(t)$, а $Z(\zeta, t)$ определено формулой (1.25).*

Доказательство. Выше уже построена функция $v_0(\zeta, t) = \tilde{v}(\zeta + c_0(t), t)$ так, что задача (1.13), (1.23) при $i = 1$ имеет решение. Далее, доказательство будем вести по индукции. Предположим, что построены решения задач (1.13), (1.23) при $i < n$ так, что для $i = n$ эта задача имеет решение. Обозначим такое фиксированное решение посредством $v_{4n}^*(\zeta, t)$. Тогда любое решение записывается в виде $v_{4n}^*(\zeta, t) + c_n Z(\zeta, t)$. Выясним, какова должна быть функция $c_n(t)$, так, чтобы задача (1.13), (1.23) имела решение при $i = n + 1$. К функции $v_{4n+4}(\zeta, t)$ применим лемму 1.1, взяв в качестве $P^\pm(\zeta, t)$ полиномы $P_{n+1}^\pm(\zeta, t)$ из формулы (1.22). Из уравнений (1.13) и (1.24) при $i = n + 1$ и из предположения индукции следует, что выполнены условия леммы 1.1, где $F(\zeta, t) = \frac{\partial v_{4n}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \zeta} G_{n+1}(v_0, v_4, \dots, v_{4n})$, $P^\pm(\zeta, t) = P_{n+1}^\pm(\zeta, t)$. Согласно лемме 1.1 для разрешимости задачи (1.13), (1.23) при $i = n + 1$ необходимо и достаточно выполнение условия (1.33). Подставляя в это равенство функции $v_{4i}(\zeta, t)$ при $i < n$ и $v_{4n}(\zeta, t) = v_{4n}^*(\zeta, t) + c_n(t) Z(\zeta, t)$, видим, что функция $c_n(t)$ входит в получившееся равенство лишь в виде

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 \frac{\partial}{\partial t} (c_n(t) Z(\zeta, t)) d\zeta + \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} (c_n(t) Z(\zeta, t)) d\zeta = \\ & = \frac{d}{dt} \left[c_n(t) \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \zeta}(\zeta, t) d\zeta \right] = \frac{d}{dt} \{ c_n(t) [P_0^+(t) - P_0^-(t)] \}. \end{aligned}$$

Таким образом, условие (1.33) имеет вид $\frac{d}{dt} (c_n(t) \kappa(t)) = f_n(t)$, где $f_n(t)$ — известная гладкая функция. Отсюда вытекает, что решение $v_n(\zeta, t)$ определяется с точностью до слагаемого $c_n[\kappa(t)]^{-1}Z(\zeta, t)$ и при этом задача (1.13), (1.23) разрешима для $i = n + 1$. ■

§ 2. Ударная волна, порожденная разрывом начальной функции

Рассмотрим здесь задачу (0.1), (0.2) в том случае, когда функция $\psi(x)$ имеет одну точку разрыва первого рода x_0 , так что $\psi(x_0+0) < \psi(x_0-0)$. Без ограничения общности будем считать, что $x_0 = 0$ и $t_0 = 0$. Пусть картина характеристик на плоскости (x, t) такая же, как на рис. 33. Решение $u(x, t, \varepsilon)$ будем рассматривать в полосе $\Omega = \{x, t: x \in \mathbb{R}^1, 0 \leq t \leq T\}$. Число $T > 0$ выберем таким, чтобы в Ω существовало обобщенное решение $u_0(x, t)$ задачи (0.3), (0.2) с одной гладкой линией разрыва $l = \{x, t: x = s(t), 0 \leq t \leq T\}$. Очевидно, что такое значение T существует, если функция $\psi(x)$ ограничена вместе со своими производными достаточно высокого порядка при $x \neq 0$. Действительно, в силу гладкости $\psi(x)$ при $x \neq 0$ характеристики, проходящие через точки $(y, 0)$, $y > 0$, не пересекаются между собой при $0 \leq t \leq T$. То же самое относится и к характеристикам, проходящим через отрицательную полуось x . Значит, при $0 \leq t \leq T$, $\varphi'(\psi(+0))t \leq x < \infty$ определено гладкое решение $u^+(x, t)$ уравнения (0.3), удовлетворяющее условию (0.2) при $x > 0$. Аналогично, при $-\infty < x \leq \varphi'(\psi(-0))t$ определено гладкое решение $u^-(x, t)$. Внутри угла $\varphi'(\psi(+0))t \leq x \leq \varphi'(\psi(-0))t$ определена непрерывная функция $\frac{\varphi(u^+(x, t)) - \varphi(u^-(x, t))}{u^+(x, t) - u^-(x, t)}$, так что гладкая функция $s(t)$ определяется при $0 \leq t \leq T$ как решение уравнения (1.18) в некоторой окрестности нуля ($s(0) = 0$). При $x < s(t)$ функция $u_0(x, t)$ полагается равной $u^-(x, t)$, а при $x > s(t)$ — равной $u^+(x, t)$.

Построенная таким образом функция является обобщенным решением задачи (0.2), (0.3). Далее, в соответствии с исследованиями § 1 строится внешнее разложение (1.4), которое является ф. а. р. задачи (0.3), (0.2) всюду при $x \neq s(t)$. В окрестности линии l можно, как и в § 1, определить внутреннее асимптотическое разложение (1.10). Составное асимптотическое разложение

$$Y_{4N}(x, t, \varepsilon) = A_{4N, x, t} U + A_{4N, \zeta, t} V - A_{4N, x, t} A_{4N, \zeta, t} V$$

по построению является приближенным решением уравнения (0.1) всюду в $\bar{\Omega}$:

$$\left| \frac{\partial Y_{4N}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \varphi(Y_{4N}) - \varepsilon^4 \frac{\partial^2 Y_{4N}}{\partial x^2} \right| \leq M \varepsilon^{4N}. \quad (2.1)$$

Неравенство (2.1) непосредственно вытекает из свойств функций $u_{4k}(x, t)$ и $v_{4i}(\xi, t)$.

Окончательному построению асимптотики решения $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (0.1), (0.2) препятствуют два, тесно связанные между собой обстоятельства. Во-первых, коэффициенты $v_{4i}(\xi, t)$, как это было выяснено в § 1, определяются неоднозначно. Функция $v_0(\xi, t)$ определяется с точностью до сдвига первого аргумента на $c_0(t)$, где $c_0(t)$ — решение уравнения (1.31), а $v_{4i}(\xi, t)$ при $i > 0$ определены с точностью до слагаемого $c_i[\kappa(t)]^{-1}Z(\xi, t)$. Во-вторых, составное асимптотическое разложение $Y_{4N}(x, t, \varepsilon)$ не приближает начальную функцию $\psi(x)$ в окрестности нуля. При $x \gg \varepsilon^4$ приближение удовлетворительное, а при $x = O(\varepsilon^4)$ аппроксимация не может быть хорошей: функция $\psi(x)$ разрывна, а $Y_{4N}(x, 0, \varepsilon)$ непрерывна с точностью $O(\varepsilon^{4N})$. Поэтому в окрестности начала координат рассмотрим новое асимптотическое разложение. Интуитивно ясно, что после замены переменных все члены в уравнении (0.1) должны быть главными. Следовательно, растяжение по переменным x и t должно быть одинаковым. Удобно ввести переменные

$$\xi = \varepsilon^{-4}(x - s(t)), \quad \tau = \varepsilon^{-4}t. \quad (2.2)$$

Для функции $w(\xi, \tau, \varepsilon) \equiv u(x, t, \varepsilon)$ уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + s'(\varepsilon^4 \tau) \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi(w)}{\partial \xi} - \frac{\partial w}{\partial \tau} = 0.$$

Внутреннее асимптотическое разложение ищем в виде

$$W = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{4i} w_{4i}(\xi, \tau). \quad (2.3)$$

Обычным путем получают уравнения и начальные условия для функций $w_{4i}(\xi, \tau)$:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} + s'(0) \frac{\partial w_0}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi(w_0)}{\partial \xi} - \frac{\partial w_0}{\partial \tau} = 0, \quad (2.4)$$

$$L_2 w_{4i} \equiv \frac{\partial^2 w_{4i}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \{[s'(0) - \varphi'(w_0)] w_{4i}\} - \frac{\partial w_{4i}}{\partial \tau} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi} G_i(w_0, w_4, \dots, w_{4i-4}) - \sum_{j=1}^i \frac{\tau^j}{j!} \frac{d^{j+1} s}{dt^{j+1}}(0) \frac{\partial w_{4(i-j)}}{\partial \xi}, \quad i \geq 1, \quad (2.5)$$

где G_i — те же функции, что и в (1.14),

$$w_{4i}(\xi, 0) = \begin{cases} \frac{1}{i!} \frac{d^i \psi}{dx^i} (+0) \xi^i & \text{при } \xi > 0, \\ \frac{1}{i!} \frac{d^i \psi}{dx^i} (-0) \xi^i & \text{при } \xi < 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Асимптотика решений задач (2.4) — (2.6) при $\tau \rightarrow \infty$ исследуется довольно просто теми же методами, которые были применены в статье [40]. Справедлива

Теорема 2.1. *Существует решение $w_0(\xi, \tau)$ задачи (2.4), (2.6), ограниченное при $\tau \geq 0$ и бесконечно дифференцируемое при $|\xi| + \tau > 0$. Справедлива оценка*

$$|w_0(\xi, \tau) - \tilde{v}(\xi + h, 0)| < M \exp(-\gamma(|\xi| + \tau)), \quad (2.7)$$

где $\gamma > 0$, $\tilde{v}(\xi, t)$ — функция, определенная в § 1 (см. (1.21)), а постоянная h такова, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{v}(\xi + h, 0) - w_0(\xi, 0)] d\xi = 0.$$

Таким образом, ясно, что, исходя из условий согласования рядов (1.10) и (2.3), надо положить $c_0(0) = h$, после чего функция $c_0(t)$, а вместе с ней и функция $v_0(\xi, t)$ однозначно определяется из уравнения (1.31).

Теорема 2.2. *Существуют решения задач (2.5), (2.6) при $i > 0$, которые растут на бесконечности не быстрее степени $|\xi| + \tau$ и бесконечно дифференцируемы при $|\xi| + \tau > 0$.*

Для выяснения асимптотики решений $w_{4i}(\xi, \tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$ и тем самым для отыскания значений $c_i(0)$ (см. теорему 1.1) рассмотрим частичную сумму ряда (1.10) $A_{4N, \xi, \tau} V$. Считая функции $c_h(t)$ гладкими, получаем, что

$$A_{4N, \xi, \tau} A_{4N, \xi, \tau} V = \sum_{j=0}^N \varepsilon^{4j} R_j(\xi, \tau), \quad (2.8)$$

$$|A_{4N, \xi, \tau} V - A_{4N, \xi, \tau} A_{4N, \xi, \tau} V| < \\ < M \varepsilon^{4N+1} (1 + |\xi|^N) (1 + \tau^{N+1}), \quad (2.9)$$

где $R_j(\xi, \tau)$ — многочлены относительно τ . Легко видеть, что $R_j(\xi, \tau)$ удовлетворяют системе (2.4), (2.5) и $R_j(\xi, 0) = v_{4j}(\xi, 0)$. Так как $v_{4j}(\xi, t) = P_j^\pm(\xi, t) + O(\exp(-\gamma|\xi|))$, то

$$R_j(\xi, 0) = w_{4j}(\xi, 0) + O(\exp(-\gamma|\xi|)). \quad (2.10)$$

Теорема 2.3. *Существуют такие начальные данные $c_j(0)$, что для построенных по ним $c_j(t)$ и $v_{4j}(\xi, t)$ справедливы оценки*

$$\left| \frac{\partial^{l+m}}{\partial \xi^l \partial \tau^m} (w_{4j}(\xi, \tau) - R_j(\xi, \tau)) \right| < M \exp \{ -\gamma(|\xi| + \tau) \} \quad \forall l, m \quad (2.11)$$

при $|\tau| + |\xi| \geq 1$. Здесь $R_j(\xi, \tau)$ — функции, определенные равенством (2.8), а M и γ — положительные постоянные, зависящие от j, l и m .

Для гладких начальных данных существование решений параболических уравнений (2.4), (2.5) установлено, например, в статье [83]. Начальные данные (2.6) — негладкие в нуле, поэтому непосредственно применить теорему из [83] нельзя. Однако нетрудно выписать формальное асимптотическое разложение решения

в окрестности нуля в виде ряда $\sum_{l=0}^{\infty} \tau^{l/2} q_l(\xi \tau^{-1/2})$. Затем, умножив частичную сумму этого ряда на срезающую функцию и вычитая $w_i(\xi, \tau)$, придем к задаче, для которой существование решения при малых τ можно доказать, например, методом последовательных приближений. Таким же способом доказывается гладкость решения при $|\xi| + \tau > 0$. Оценка (2.7) доказывается так же, как и в [40] (теорема 1).

Таким же способом доказываются оценки (2.11). Для этого достаточно ввести функции $\int_{-\infty}^{\xi} [w_{4j}(\eta, \tau) - R_j(\eta, \tau)] d\eta$ и рассмотреть возникающие для них уравнения и начальные условия. ■

После того как все асимптотические ряды (1.4), (1.10) и (2.3) построены, легко, как обычно, образовать функцию, равномерно приближающую исходное решение $u(x, t, \varepsilon)$ всюду в полосе Ω . Действительно, рассмотрим $X_N(x, t, \varepsilon) = A_{4N, x, t} U + A_{4N, \xi, t} V - A_{4N, x, t} A_{4N, \xi, t} V + A_{4N, \xi, t} W - A_{4N, \xi, t} A_{4N, \xi, t} W$, где U, V и W — это ряды (1.4), (1.10) и (2.3), а ξ и τ определяются из (2.2). Из (2.1), (2.9) — (2.11) следует, что

$$\frac{\partial X_N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \varphi(X_N) - \varepsilon^4 \frac{\partial^2 X_N}{\partial x^2} = O(\varepsilon^{\alpha N}),$$

$$X_N(x, 0) = \psi(x) + O(\varepsilon^{\alpha N}),$$

где $\alpha > 0$. Далее, например, из принципа максимума вытекает, что $|X_N(x, t, \varepsilon) - u(x, t, \varepsilon)| < M \varepsilon^{\beta N}$, $\beta > 0$, всюду в $\bar{\Omega}$.

Уже упоминалось, что задача, рассмотренная в этом параграфе, по существу не является бисингулярной. Раз-

ность между различными асимптотическими разложениями имеет характер функций пограничного слоя, экспоненциально быстро стремящихся к нулю. Тем не менее идеология согласования оказалась полезной и в этом случае.

Задача становится по существу бисингулярной, когда линия разрыва (ударная волна) возникает не в начальный момент, а по прошествии некоторого времени. Этому, значительно более интересному и сложному случаю посвящены следующие параграфы данной главы.

§ 3. Опрокидывание волны. Гладкость линии разрыва. Асимптотика коэффициентов внешнего разложения

Здесь мы начнем изучение асимптотики решения задачи (0.1), (0.2) в случае, когда начальная функция $\psi(x)$ — гладкая, а картина характеристик для уравнения (0.3) имеет такой вид, как на рис. 32. Без ограничения общности будем считать, что $t_0 = -1$, а линия разрыва l возникает в точке $(0, 0)$: $l = \{x, t: x = s(t), 0 \leq t \leq T\}$. На линии l предполагается выполненным условие Гюгонио (1.18).

Пусть Ω — это полоса $\{x, t: -1 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^1\}$. Для дальнейшего удобно ввести множество Ω' , которое получается из $\Omega \setminus l$ присоединением краев разреза $(s(t) \pm 0, t)$ при $t > 0$. Под $C^\infty(\Omega')$ будем понимать множество функций, которые вместе со всеми производными непрерывны в $\Omega \setminus l$ и имеют пределы при $t \rightarrow t^* > 0$, $x \rightarrow s(t^*) \pm 0$. В начале координат эти функции могут, вообще говоря, иметь сильные особенности.

Предположим выполнение следующего условия:

а) $u_0(x, t) \in C^\infty(\Omega')$, $\omega(y, t) > 0$ в Ω' , где функция $\omega(y, t)$ определена формулой (1.1). Ниже будет приведено более конструктивное условие на функции φ и ψ , достаточное для выполнения условия а).

Без ограничения общности будем считать, что $y_0 = 0$, $\psi(0) = 0$, $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. Этих равенств легко добиться, произведя линейную замену независимых переменных, а также линейные замены функций u и $\varphi(u)$. Тем самым $g'(0) = -1$, где $g(y) = \varphi'(\psi(y))$. Кроме того, так как по условию а) линия разрыва единственная, то это значит, что функция $g'(y)$ достигает в нуле минимума. Значит, $g''(0) = 0$, $g'''(0) \geq 0$. Еще одно существенное предположение состоит в том, что $g'''(0) > 0$. Скорость

обращения в нуль функции $g''(y)$ оказывает существенное влияние на вид асимптотического разложения решения $u(x, t, \varepsilon)$. Рассмотрим случай общего положения, соответствующий неравенству $g'''(0) > 0$. Путем растяжения независимой переменной x в этом случае можно придать $g'''(0)$ любое положительное значение. Будем считать $g'''(0) = 6$.

Таким образом, предполагается, что

$$\text{б) } \varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \psi(0) = 0, g(0) = g''(0) = 0, g'(0) = -1, g'''(0) = 6, \text{ где } g(y) = \varphi'(\psi(y)).$$

Цель исследования — найти асимптотическое разложение решения уравнения (0.1) с условием

$$u(x, -1, \varepsilon) = \psi(x) \quad (3.1)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ в предположении, что выполнены условия а) и б).

Обозначим $y_+(t)$ и $y_-(t)$ значения параметра на характеристиках, проходящих через линию разрыва $l = \{x, t: x = s(t)\}$ справа и слева. Таким образом, при $t > 0$, в соответствии с (1.2), справедливы равенства $s(t) = y_{\pm}(t) + (1+t)g(y_{\pm}(t))$, $y_+(t) > 0$, $y_-(t) < 0$. (3.2)

Здесь будет исследована асимптотика функций $s(t)$, $y_{\pm}(t)$ при $t \rightarrow 0$.

Из условия б) вытекает, что

$$g(y) = -y + y^3 + \sum_{k=4}^{\infty} g_k y^k, \quad y \rightarrow 0,$$

$$\varphi(u) = b^2 u^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \varphi_k u^k, \quad u \rightarrow 0, \quad b > 0, \quad (3.3)$$

$$\psi(y) = -\frac{y}{2b^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \psi_k y^k, \quad y \rightarrow 0.$$

Теорема 3.1. При некотором $T > 0$ существуют функции $s(t)$ и $y_{\pm}(t)$, удовлетворяющие уравнениям (1.18), (3.2), и выполнены соотношения

$$s(t) = t^2 \sigma(t), \quad y_{\pm}(t) = \pm \sqrt{t} (1 + t \alpha(t)) + t \beta(t), \quad (3.4)$$

где функции $\sigma(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t) \in C^{\infty} [0, T]$.

Доказательство. После замены (3.4) получается система, эквивалентная первоначальной при $t > 0$. Ниже будем обозначать посредством Φ_i гладкие функции, опуская индексы там, где это не вызывает недоразумений.

Из соотношений (3.4) следует, что

$$\begin{aligned} y_{\pm}^3(t) &= \pm t^{3/2} (1 + 3t\alpha(t)) + 3t^2\beta(t) \pm 3t^{5/2}\beta^2(t) \pm \\ &\quad \pm t^{7/2}\Phi(t, \alpha(t), \beta(t)) + t^3\Phi(t, \alpha(t), \beta(t)), \\ y_{\pm}^4(t) &= t^2 \pm 4t^{5/2}\beta(t) \pm t^{7/2}\Phi(t, \alpha(t), \beta(t)) + t^3\Phi(t, \alpha(t), \beta(t)), \\ y_{\pm}^5(t) &= \pm t^{5/2} \pm t^{7/2}\Phi(t, \alpha(t), \beta(t)) + t^3\Phi(t, \alpha(t), \beta(t)). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнения (3.2) и используя равенства (3.3), (3.4), приходим к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} \sigma &= 2\beta + g_4 + t\Phi(t, \alpha, \beta), \\ 2\alpha + 3\beta^2 + 4g_4\beta + g_5 + 1 &= t\Phi(t, \alpha, \beta). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Далее надо подставить выражения (3.4) в уравнение (1.18), учитывая равенства (3.3) и формулу (3.1). В результате получится уравнение

$$(t^2\sigma)' = -t\beta + 2b^2\psi_2t + (2b^2)^{-2}\varphi_3t - t^2\Phi(t, \alpha, \beta). \quad (3.6)$$

Из уравнений (3.5) следует, что

$$\alpha = \Phi_1(t, \beta), \quad \sigma = 2\beta + g_4 + t\Phi_2(t, \beta).$$

Если подставить это выражение для $\sigma(t)$ в уравнение (3.6), то получится уравнение для $\beta(t)$:

$$(2t^2\beta)' = -t\beta + Ct + t^2\Phi_3(t, \beta),$$

где $C = 2\beta^2\psi_2 + (2b^2)^{-2}\varphi_3 - 2g_4$. Это уравнение удобно переписать в виде

$$2(t^{5/2}\beta)' = Ct^{3/2} + t^{5/2}\Phi_3(t, \beta). \quad (3.7)$$

Осталось лишь доказать, что уравнение (3.7) имеет единственное гладкое решение в окрестности нуля. Для этого достаточно записать интегральное уравнение, эквивалентное (3.7):

$$\beta(t) = \frac{C}{5} + \frac{t^{-5/2}}{2} \int_0^t \tau^{5/2} \Phi_3(\tau, \beta(\tau)) d\tau$$

и применить к этому уравнению стандартный метод последовательных приближений. ■

В заключение укажем достаточные условия для выполнения соотношений а). Покажем, что они вытекают из условий б) и из неравенств

$$\begin{aligned} g'(y) &< 0 \quad \text{при } y \in \mathbb{R}^1, \\ yg''(y) &> 0 \quad \text{при } y \neq 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Действительно, функция $s(t)$ выше построена, и достаточно показать, что вне линии l справедливо неравенство $\frac{\partial x}{\partial y} = \omega(y, t) > 0$. При малых положительных t из (3.8) следует, что существуют ровно два значения $z_{\pm}(t)$ такие, что $\omega(z_{\pm}(t), t) = 0$. Из (1.1) вы-

текает, что $z_{\pm}(t) = \pm \sqrt{\frac{t}{3}} + O(t)$. Обозначим $v_{\pm}(t) = x(z_{\pm}(t))$.

Согласно (1.2) справедливо соотношение $v_{\pm}(t) = \mp \frac{2}{3\sqrt{3}} t^{3/2} + O(t^2)$, а из (3.4) следует, что $y_{-}(t) < z_{-}(t) < 0$, $y_{+}(t) > z_{+}(t) > 0$ при малых $t > 0$. Таким образом, при этих t

$$v_{+}(t) < s(t) < v_{-}(t), \quad (3.9)$$

и равенство $\omega(y, t) = 0$ достигается лишь в тех точках, где функция $y(x, t)$ многозначна, а если рассматривать лишь те значения $y(x, t)$, которые соответствуют обобщенному решению $u_0(x, t)$, то для них $\omega(y, t) > 0$ при малых t . Осталось показать, что соотношение (3.9) сохраняется для всех t .

Допустим, например, что в какой-то момент функция $s(t)$ впервые станет равной $v_{-}(t)$. Тогда в этой точке $z_{-}(t) = y_{-}(t)$, $\frac{ds}{dt} \geq \frac{dv_{-}}{dt}$. Так как $v_{-}(t) = z_{-}(t) + g(z_{-}(t))(t+1)$, то $\frac{dv_{-}}{dt} = g(z_{-}(t))$.

Следовательно, в этой точке $\frac{ds}{dt} \geq \varphi'(y_{-}(t))$, что противоречит условию Гюгонио (1.18).

Итак, условия а) и б) можно заменить более конструктивными, но и более сильными условиями б) и (3.8).

Перейдем к изучению внешнего асимптотического разложения (1.4). Все коэффициенты этого ряда — функции $u_{4k}(x, t)$ уже построены в § 1. Действительно, в качестве фигурирующей там области Ω^* можно взять всю полосу Ω , за исключением треугольника $\{x, t: y_{-}(\delta) + g(y_{-}(\delta))(t+1) < x < y_{+}(\delta) + g(y_{+}(\delta))(t+1), -1 \leq t < \delta\}$, где $\delta > 0$ произвольно мало. Таким образом, все $u_{4k}(x, t) \in C^{\infty}(\Omega')$, и осталось лишь выяснить поведение этих функций вблизи начала координат. Это можно сделать, исходя из выведенных выше формул (1.6), (1.7) для $u_{4k}^*(y, t) \equiv u_{4k}(x, t)$. Так как при малых значениях y производная $\frac{\partial \omega}{\partial t} = g'(y) \neq 0$ в силу условия б), то в интеграле (1.7) можно перейти к независимой переменной ω :

$$u_{4k}^*(y, t) = \frac{1}{\omega(y, t) g'(y)} \int_1^{\omega} F_k(y, \theta(\omega_1)) d\omega_1. \quad (3.10)$$

При $k=1$ из представления (3.10) и формул (1.6) вытекает, что

$$u_4(x, t) = \frac{\omega(y, t) - 1}{\omega^2(y, t)} \frac{g''(y) \psi'(y)}{[g'(y)]^2} + \frac{\ln \omega(y, t)}{\omega(y, t)} \left[\frac{1}{\varphi''(\psi(y))} \right]'. \quad (3.11)$$

Отметим, что коэффициент при $\ln \omega$ в окрестности нуля может обратиться в нуль лишь в тех точках, где $\varphi'''(\psi(y)) = 0$. Поэтому этот коэффициент тождественно равен нулю лишь для уравнения Бюргерса ($\varphi(u) = \text{const} \cdot u^2$). В этом случае решение уравнения (0.1) записывается в квадратурах и предел решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ был исследован в [115], а в остальных случаях асимптотика функций u_{4k} в начале координат имеет довольно сложный характер. Для описания этих функций удобно ввести следующие обозначения:

$$\Psi_{k,p}(y, t) = \sum y^j [\omega(y, t)]^{-i} \Phi_{i,j}(y),$$

где сумма конечна, $1 \leq i \leq p$, $j \geq 0$, $2i - j \leq k$, а $\Phi_{i,j} \in C^\infty$; если в сумме $2 \leq i \leq p$, то такая сумма обозначается посредством $\Psi_{k,p}^*(y, t)$.

Из вида функций $\Psi_{k,p}$ равенства (1.1) и условия б) легко вывести следующие соотношения:

$$\Psi_{k,p} \cdot \Psi_{m,n} = \Psi_{k+m,p+n}^*, \quad \frac{\partial}{\partial y} \Psi_{k,p} = \Psi_{k+1,p+1}, \quad (3.12)$$

$$\int_{-1}^t \frac{[\ln \omega(y, \xi)]^m}{[\omega(y, \xi)]^k} d\xi = [\omega(y, t)]^{-k+1} \sum_{i=0}^m \Phi_i(y) [\ln \omega(y, t)]^i. \quad (3.13)$$

Теорема 3.2. При $k \geq 1$ и при достаточно малых y

$$u_{4k}(x, t) \equiv u_{4k}^*(y, t) = \sum_{m=0}^k \Psi_{4k-m-1, 3k-m-1}(y, t) [\ln \omega(y, t)]^m. \quad (3.14)$$

Доказательство. При $k = 1$ формула (3.14) следует из (3.11), так как $g''(0) = 0$. Далее, доказательство продолжается по индукции. Предполагая выполненным (3.14) при $k < n$, преобразуем функцию $F_n(y, t)$ по формуле (1.6), опираясь на (3.12) и равенство $\frac{\partial \omega}{\partial y}(0, t) = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\omega} \frac{\partial u_{4n-4}^*(y, t)}{\partial y} \right] = \sum_{m=0}^{n-1} \Psi_{4n-m-1, 3n-m-1}(y, t) [\ln \omega(y, t)]^m,$$

$$\prod_{\substack{p=1 \\ \Sigma i_p = n}}^q u_{4i_p}^* = \sum_{m=0}^q \Psi_{4q-m-2, 3q-m-2}^*(y, t) [\ln \omega(y, t)]^m.$$

Следовательно,

$$F_n(y, t) = \sum_{m=0}^n \Psi_{4n-m-1, 3n-m-1}^*(y, t) [\ln \omega(y, t)]^m.$$

Из этого равенства и из соотношений (1.7), (3.13) вытекает (3.14). ■

§ 4. Асимптотика решения вблизи начала координат

1. Построенное выше ф. а. р. (1.4), очевидно, становится недействительным вблизи начала координат, так как коэффициенты этого разложения $u_k(x, t)$ имеют сильные особенности при $x \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$. Поэтому правильное асимптотическое разложение в окрестности начала координат должно содержать функции от других, растянутых переменных. Так как уравнение (0.1) — нелинейное и $u(0, 0) = 0$, то возможно еще изменение масштаба самой функции u . Величины изменений масштабов можно определить из следующих соображений. Положим $x = \varepsilon^\alpha \xi$, $t = \varepsilon^\beta \tau$, а $u(x, t)$ пусть имеет порядок ε^γ . Для того чтобы в уравнении (0.1) все члены имели одинаковый порядок по ε (с учетом того, что $\varphi(u) \sim b^2 u^2$), нужно, чтобы $-\beta = \gamma - \alpha = 4 - 2\alpha$. Еще одно равенство получается из уравнения для характеристик (1.2) и из соотношения $u_0(x, t) = \psi(y)$. Так как $\psi'(0) \neq 0$, то, следовательно, $y \asymp \varepsilon^\gamma$. В уравнении (1.2) главные члены в силу условия б) из § 3 — это x , y^3 и yt . Следовательно, $\alpha = 3\gamma = \beta + \gamma$. Отсюда заключаем, что $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$.

Итак, исходя из упомянутых нестрогих соображений, сделаем замену независимых переменных

$$\xi = \varepsilon^{-3}x, \quad \tau = \varepsilon^{-2}t \quad (4.1)$$

и обозначим $u(\varepsilon^3\xi, \varepsilon^2\tau, \varepsilon) \equiv w(\xi, \tau, \varepsilon)$.

Уравнение для w имеет следующий вид:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \varphi(w)}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}. \quad (4.2)$$

В силу сказанного выше асимптотическое разложение для w должно начинаться с члена $\varepsilon w_1(\xi, \tau)$. Более детальный вид этого ряда вытекает из его согласования с рядом (1.4). Если сделать формальную замену (4.1) в членах ряда (1.4) и учесть формулы (3.14), то получится ряд, содержащий члены с коэффициентами $\varepsilon^k \ln^i \varepsilon$, $i \leq k-1$, $k \geq 1$. Следовательно, естественно в таком виде

искать и асимптотическое разложение для w :

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{j=0}^{k-1} w_{k,j}(\xi, \tau) \ln^j \varepsilon. \quad (4.3)$$

После подстановки этого ряда в уравнение (4.2) и разложения функции $\varphi(w)$ в ряд Тейлора получается рекуррентная система

$$\frac{\partial w_{1,0}}{\partial \tau} + 2b^2 w_{1,0} \frac{\partial w_{1,0}}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 w_{1,0}}{\partial \xi^2} = 0, \quad (4.4)$$

$$L_3 w_{k,j} \equiv \frac{\partial w_{k,j}}{\partial \tau} + 2b^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (w_{1,0} w_{k,j}) - \frac{\partial^2 w_{k,j}}{\partial \xi^2} = E_{k,j}, \quad k \geq 2, \quad (4.5)$$

где

$$E_{k,j} = - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[b^2 \sum_{\substack{2 \leq i \leq k-1 \\ 0 \leq m \leq j}} w_{i,m} w_{k+1-i,j-m} + \sum_{q=3}^{k+1} \frac{\varphi^{(q)}(0)}{q!} \sum_{\substack{\sum i_p = k+1 \\ \sum m_p = j}} \prod_{p=1}^q w_{i_p, m_p} \right], \quad (4.6)$$

$$2b^2 = \varphi''(0). \quad (4.7)$$

Изучение решений системы (4.4), (4.5) является центральной и наиболее трудоемкой частью задачи. Главное, что нужно для дальнейшего, — это асимптотика функций $w_{k,j}(\xi, \tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$. Она даст возможность в следующих параграфах однозначно определить коэффициенты асимптотического разложения в окрестности линии разрыва предельной функции $u_0(x, t)$, т. е. в окрестности линии $l = \{x, t: x = s(t), 0 < t \leq T\}$.

Исследование решений системы (4.4), (4.5) кажется на первый взгляд совсем простой задачей. Действительно, уравнение (4.4) — это уравнение Бюргера, которое, как известно, сводится к уравнению теплопроводности. Каждое из уравнений (4.5) также сводится к неоднородному уравнению теплопроводности. Однако значительная трудность состоит в том, что решения $w_{k,j}(\xi, \tau)$ определены на всей плоскости ξ, τ и имеют довольно сложную асимптотику на бесконечности (в частности, соответствующие им решения уравнения теплопроводности при фиксированном τ , вообще говоря, растут как $\exp(\mu^2 |\xi|^{4/3})$). Для того чтобы однозначно определить решения системы

(4.4), (4.5), надо наложить дополнительные условия на $w_{k,j}(\xi, \tau)$ при $\tau \rightarrow -\infty$. Эти условия естественным образом получаются из требования согласованности рядов (4.3) и (1.4). Процедура получения таких условий стандартна и сводится к следующему.

Цель согласования — добиться, чтобы в промежуточной области, где величина $|x| + |t|$ мала, а $|\xi| + |\tau|$ велика, ряды (1.4) и (4.3) асимптотически совпадали. Для этого каждый член ряда (1.4) рассматривается при $x \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$ и представляется в виде (3.14). Далее проводится замена переменных (4.1), в результате чего каждая функция $u_k(x, t)$ записывается в виде формального ряда по степеням ε и $\ln \varepsilon$ с коэффициентами, зависящими от ξ и τ . После подстановки этих выражений в ряд (1.4) получается ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \sum_{j=0}^{m-1} W_{m,j}(\xi, \tau) \ln^j \varepsilon. \quad (4.8)$$

Здесь $W_{m,j}$ — это сумма всех коэффициентов при $\varepsilon^m \ln^j \varepsilon$, присутствующих в разложении $\varepsilon^k u_k(x, t)$ для всевозможных k . Легко убедиться, что каждое выражение $W_{m,j}$ содержит бесконечное число слагаемых и является формальным асимптотическим рядом при $\tau < 0$, $|\xi| + |\tau| \rightarrow \infty$. Таким образом, уравнения (4.4), (4.5) должны быть дополнены условиями

$$w_{k,j}(\xi, \tau) = W_{k,j}, \quad \tau \rightarrow -\infty. \quad (4.9)$$

Равенство (4.9) означает, что решения $w_{k,j}(\xi, \tau)$ разлагаются в построенный выше асимптотический ряд при $\tau \rightarrow -\infty$ равномерно относительно ξ .

2. Теперь предстоит уточнить вид этих асимптотических рядов $W_{k,j}(\xi, \tau)$, т. е. уточнить, как именно записывается в виде ряда каждая из функций $u_k(x, t)$. По теореме 3.2 они представляются в виде рядов по y , t и $\ln \omega(y, t)$ при $t \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$. Переменная t заменяется на $\varepsilon \tau$, а «лагранжева переменная» y более сложно зависит от ξ и τ . Найдем эту зависимость из формулы (1.2). Если учесть формулу (3.3) для $g(y)$, произвести в формуле (1.2) замену (4.1) и представить y в виде ряда

$$y(\xi, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k y_k(\xi, \tau), \quad (4.10)$$

то получится рекуррентная система для y_k :

$$\xi = -\tau y_1 + y_1^3, \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \tau y_2 &= 3y_1^2 y_2 + g_4 y_1^4, \\ (\tau - 3y_1^2) y_k &= f_k(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, \tau). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Уравнение (4.11) определяет так называемую *функцию сборки Уитни*. Так как эта функция неоднозначна при $\tau > 0$ и некоторых ξ , то введем однозначную, но разрывную функцию $H(\xi, \tau)$. Под функцией $H(\xi, \tau)$ всюду

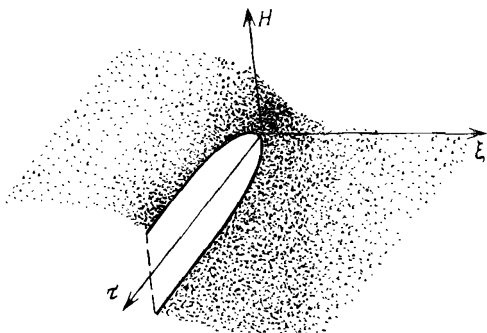


Рис. 35

ниже будем понимать функцию, непрерывную всюду в $\mathbb{R}^2$, кроме неотрицательной полуоси τ , и удовлетворяющую уравнению $H^3 - \tau H + \xi = 0$. Таким образом, всюду в указанной области функция $H \in C^\infty$, а при $\tau \geq 0$ функция $H(\pm 0, \tau) = \mp \sqrt[3]{\tau}$ (рис. 35). Из уравнения (4.11) вытекает, что $y_1(\xi, \tau) = -H(\xi, \tau)$, а уравнения (4.12) однозначно определяют функции $y_k(\xi, \tau)$. Всюду ниже будем использовать обозначение

$$R(\xi, \tau) = 3H^2(\xi, \tau) - \tau. \quad (4.13)$$

Функция $R(\xi, \tau) \in C^\infty$ всюду в $\mathbb{R}^2$, кроме полуоси $\{\xi, \tau: \xi = 0, \tau \geq 0\}$. Она непрерывна и положительна при $|\xi| + |\tau| > 0$. Из уравнений (4.12) и из явного вида функций $f_k(\xi, \tau)$ следует, что все $y_k(\xi, \tau)$ являются полиномами относительно τ , $[R(\xi, \tau)]^{-1}$, H и однородными функциями степени k относительно H , $|\tau|^{1/2}$ и $R^{1/2}$. Легко видеть, что асимптотическое разложение (4.10) справедливо при ограниченных ξ и τ . Более того,

ряд (4.10) сохраняет асимптотический характер и при $R(\xi, \tau) < \varepsilon^{-\nu}$ для любого $\nu < 1/2$.

Теперь после выяснения вида коэффициентов ряда (4.10) можно из формул (3.14) получить асимптотику функций $u_k(x, t)$ в переменных ξ, τ . Функции, однородные степени k относительно $H, |\tau|^{1/2}, R^{1/2}$ и являющиеся полиномами от H, τ и R^{-1} , будем впредь обозначать посредством $h_{k, \cdot}(\xi, \tau)$ или просто $h_{k, \cdot}$. Тогда из условия б) и равенств (4.7), (4.10) следует, что

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= \psi(y) = -(2b^2)^{-1}y + \sum_{l=2}^{\infty} c_l y^l = \\ &= \varepsilon (2b^2)^{-1} H(\xi, \tau) + \sum_{l=2}^{\infty} \varepsilon^l h_{l,0}(\xi, \tau). \end{aligned}$$

Из формулы (1.1) вытекает, что

$$\begin{aligned} \omega(y, t) &= \varepsilon^2 R(\xi, \tau) + \sum_{l=3}^{\infty} \varepsilon^l h_l(\xi, \tau), \\ \ln \omega(y, t) &= \frac{1}{2} \ln \varepsilon^4 R^2 + \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^l h_l(\xi, \tau). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в равенства (3.14), получаем

$$u_k(x, t) = \sum_{m=0}^k (\ln \varepsilon^4 R^2)^m \sum_{l=m+1-4k}^{\infty} \varepsilon^l h_{l,k,m}(\xi, \tau).$$

Выписанные здесь равенства дают возможность уточнить вид асимптотических рядов $W_{k,j}(\xi, \tau)$ в соотношениях (4.9):

$$w_{h,j}(\xi, \tau) = \sum_{p=j}^{k-1} (\ln R)^{p-j} \sum_{l=p}^{\infty} h_{k-4l,p,k,j}(\xi, \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty. \quad (4.14)$$

3. Отдельно выпишем асимптотический ряд $W_{1,0}(\xi, \tau)$, но предварительно для сокращения записи введем обозначение $\Gamma(\xi, \tau) = 2b^2 w_{1,0}(\xi, \tau)$. Тогда уравнение (4.4) будет выглядеть следующим образом:

$$\Gamma_{\tau} + \Gamma \Gamma_{\xi} - \Gamma_{\xi\xi} = 0, \quad (4.15)$$

а соотношение (4.9) при $k=1, j=0$ примет вид

$$\Gamma(\xi, \tau) = H(\xi, \tau) + \sum_{l=1}^{\infty} h_{1-4l,0}(\xi, \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty. \quad (4.16)$$

Опуская эвристические соображения, которые приводят к явному виду $\Gamma(\xi, \tau)$, сразу выпишем для него формулу

$$\Gamma(\xi, \tau) = -2 [\Lambda(\xi, \tau)]^{-1} \frac{\partial \Lambda(\xi, \tau)}{\partial \xi}, \quad (4.17)$$

где

$$\Lambda(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{8}(z^4 - 2z^2\tau + 4z\xi)\right) dz. \quad (4.18)$$

Функция $\Lambda(\xi, \tau)$ носит название функции Пирси. Непосредственно видно, что $\Lambda(\xi, \tau)$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности и, следовательно, функция $\Gamma(\xi, \tau)$ — это решение уравнения (4.15).

Для исследования асимптотики $\Gamma(\xi, \tau)$ надо прежде всего изучить асимпотику функции $\Lambda(\xi, \tau)$. При $|\xi| + |\tau| \rightarrow \infty$ стационарными точками в интеграле (4.18) являются решения уравнения

$$z^3 - z\tau + \xi = 0. \quad (4.19)$$

Для отрицательных τ , а также при $0 \leq \tau \leq 3|\xi|^{2/3}2^{-2/3}$ единственной точкой максимума подынтегральной функции является $H(\xi, \tau)$. При $\tau > 3|\xi|^{2/3}2^{-2/3}$ имеется еще один локальный максимум, который мы обозначим посредством $H_1(\xi, \tau)$. Наиболее удобно сделать в интеграле (4.18) замену

$$z = H(\xi, \tau) + \frac{2}{\sqrt{R}}\zeta, \quad (4.20)$$

где R определено формулой (4.13). После такой замены получаем

$$\begin{aligned} \Lambda(\xi, \tau) = & \frac{2}{\sqrt{R}} \exp\left(\frac{3}{8}H^4(\xi, \tau) - \frac{\tau}{4}H^2(\xi, \tau)\right) \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\zeta^2 - \frac{4H}{R^{3/2}}\zeta^3 - \frac{2}{R^2}\zeta^4\right) d\zeta. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что в области, где $H(\xi, \tau)$ — единственное решение уравнения (4.19), функция $\Lambda(\xi, \tau)$ при $R \rightarrow \infty$ разлагается в асимптотический ряд

$$\Lambda(\xi, \tau) = \frac{2}{\sqrt{R}} \exp\left(\frac{3}{8}H^4 - \frac{\tau}{4}H^2\right) \left\{ \sqrt{\pi} + \sum_{l=1}^{\infty} h_{-4l}(\xi, \tau) \right\}. \quad (4.21)$$

Далее можно продифференцировать равенство (4.18) по ξ и в получившемся интеграле тоже сделать замену (4.20). Тогда получится равенство

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \xi} = \frac{2}{\sqrt{R}} \exp\left(\frac{3}{8} H^4 - \frac{\tau}{4} H^2\right) \left\{ -\frac{\sqrt{\pi}}{2} H + \sum_{l=1}^{\infty} h_{1-4l}(\xi, \tau) \right\}. \quad (4.22)$$

Отсюда вытекает, что

$$\Gamma(\xi, \tau) = H(\xi, \tau) + \sum_{l=1}^{\infty} h_{1-4l}(\xi, \tau), \quad R \rightarrow \infty. \quad (4.23)$$

Для тех значений ξ, τ , при которых существует второй локальный максимум подынтегральной функции в (4.18), асимптотические разложения функций $\Lambda(\xi, \tau)$ и $\frac{\partial \Lambda(\xi, \tau)}{\partial \xi}$

являются суммами двух рядов: к правым частям в (4.21) и (4.22) надо прибавить еще такие же ряды, где вместо $H(\xi, \tau)$ стоит $H_1(\xi, \tau)$, а вместо $R(\xi, \tau)$ стоит $R_1(\xi, \tau) = 3H_1^2(\xi, \tau) - \tau$. Однако нетрудно подсчитать, что значение функции $3H^4(\xi, \tau) - 2\tau H^2(\xi, \tau)$ существенно больше значения функции $3H_1^4(\xi, \tau) - 2\tau H_1^2(\xi, \tau)$ всюду при больших R , за исключением узкой полосы вдоль положительной полуоси τ . Точнее, при $|\xi| \tau^{1/2} > R^v$, $v > 0$, дополнительные ряды, зависящие от H_1 в формулах (4.21), (4.22), экспоненциально меньше уже выписанных. Итак, формулы (4.21) — (4.23) справедливы при $\tau < 0$, а также при $|\xi| \tau^{1/2} > R^v$ для $v > 0$. В частности, главный член асимптотики $\Gamma(\xi, \tau)$ при $\tau \rightarrow -\infty$ совпадает с главным членом асимптотического разложения (4.16).

Теорема 4.1. *Функция $\Gamma(\xi, \tau)$, определенная формулами (4.17), (4.18), является решением задачи (4.15), (4.16).*

Теорема 4.2. *Существуют решения задач (4.5), (4.14) при $k \geq 2$, $0 \leq j \leq k-1$, бесконечно дифференцируемые при всех ξ и τ .*

Доказательство теоремы 4.1. Выше было показано, что $\Gamma(\xi, \tau)$ удовлетворяет уравнению (4.15) и главный член асимптотики $\Gamma(\xi, \tau)$ при $\tau \rightarrow -\infty$ совпадает с главным членом ряда (4.16). Следовательно, осталось проверить совпадение всех функций h_{1-4l} в формуле (4.23) с функциями $h_{1-4l, 0}$ в асимптотическом разложении (4.16). По-видимому, проще всего доказать это следующим образом.

Из явного вида $H(\xi, \tau)$ и $R(\xi, \tau)$ следует, что для любой функции $h_l(\xi, \tau)$ при $\tau < 0$ справедливо представление

$$h_l(\xi, \tau) = |\tau|^{1/2} Z_l(\theta),$$

где $\theta = \xi|\tau|^{-3/2}$, а $Z_l(\theta) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$. Итак, асимптотический ряд для функции $\Gamma(\xi, \tau)$ при $\tau \rightarrow -\infty$ имеет вид

$$\Gamma(\xi, \tau) = |\tau|^{1/2} \left(Z_0(\theta) + \sum_{j=1}^{\infty} \tau^{-2j} Z_j(\theta) \right), \quad (4.24)$$

где

$$Z_0^3 + Z_0 + \theta = 0, \quad (4.25)$$

и такой же вид с той же функцией $Z_0(\theta)$ имеет ряд (4.16). Из уравнения (4.15) вытекает рекуррентная система обыкновенных дифференциальных уравнений $Z_j(\theta)$:

$$-Z_0 + 3\theta Z_0' + 2Z_0 Z_0' = 0,$$

$$(4j-1)Z_j + 3\theta Z_j' + 2(Z_0 Z_j)' = f_j(Z_0, Z_1, \dots, Z_{j-1}), \quad j \geq 1.$$

Первое из этих уравнений выполняется в силу (4.25), а остальные уравнения имеют единственные гладкие решения. Это следует из того, что соответствующие однородные уравнения имеют решения $(Z_0(\theta))^{3-4j} (1 + 3Z_0^2(\theta))^{-1}$ с особенностями при $\theta = 0$. Таким образом, все коэффициенты $Z_j(\theta)$ в асимптотическом разложении (4.24) определяются единственным образом из уравнения (4.15). То обстоятельство, что ряд (4.16) формально удовлетворяет уравнению (4.15), следует из способа построения функций $h_{l-4l,0}(\xi, \tau)$. Поэтому функция $\Gamma(\xi, \tau)$, построенная по формулам (4.17), (4.18), является решением задачи (4.15), (4.16). Более того, как показано выше, из формул (4.21), (4.22) вытекает, что асимптотическое разложение (4.16) справедливо не только при $\tau \rightarrow -\infty$, но и при $R \rightarrow \infty$, всюду, за исключением полосы $\{\xi, \tau: \tau > 1, |\xi|\tau^{1/2} < R^v\} \forall v > 0$. ■

З а м е ч а н и е. Интересно отметить, что замена условия (4.16) условием $\Gamma(\xi, \tau) - H(\xi, \tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow -\infty$ приводит к неединственности решения. Существует континуум функций, удовлетворяющих этому условию и уравнению (4.15). Такие функции могут быть построены по формуле (4.17), где в качестве Λ можно вме-

сто функции (4.18) взять $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(z) \exp\left(-\frac{1}{8}(z^4 - 2z^2\tau + 4z\xi)\right) dz$

с гладкой положительной функцией $\rho(z)$.

4. В этом пункте будет доказана теорема 4.2. Но предварительно придется доказать ряд вспомогательных лемм. Линейные уравнения (4.5) заменой неизвестной функции сводятся к неоднородным уравнениям теплопроводности. Однако эти уравнения нелегко исследовать ввиду того, что искомые решения и правые части быстро растут как при $|\xi| \rightarrow \infty$, так и при $\tau \rightarrow -\infty$. Поэтому удобнее изучать уравнения для разностей между функциями $w_{k,j}$ и достаточно длинными частичными суммами их асимптотических рядов. Таким образом, центральной задачей этого пункта будет по-

строение и исследование решения уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\partial (\Gamma w)}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = F(\xi, \tau), \quad (4.26)$$

где правая часть F и решение w достаточно быстро стремятся к нулю при $\tau < \text{const}$, $R \rightarrow \infty$. Замена

$$w(\xi, \tau) = \frac{\partial}{\partial \xi} (v(\xi, \tau) [\Lambda(\xi, \tau)]^{-1}) \quad (4.27)$$

приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ [\Lambda(\xi, \tau)]^{-1} \left[\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right] \right\} = F(\xi, \tau), \quad (4.28)$$

и для дальнейшего понадобятся довольно точные оценки функции $\Lambda(\xi, \tau)$ и ее производных.

Лемма 4.1. *Существуют постоянные $M_l > 0$ ($l \geq 0$) такие, что при $|\xi| + |\tau| > 1$ для всех ξ, τ справедливы оценки*

$$M_0^{-1} < \sqrt{R}(\xi, \tau) \Lambda(\xi, \tau) \exp(-S(\xi, \tau)) < M_0, \quad (4.29)$$

$$\left| \frac{\partial^l \Lambda(\xi, \tau)}{\partial \xi^{l_1} \partial \tau^{l_2}} \right| \leq M_l [R(\xi, \tau)]^{l_2 + (l_1 + 1)/2} \exp(S(\xi, \tau)). \quad (4.30)$$

Здесь функция $R(\xi, \tau)$ определена формулой (4.13), функция $\Lambda(\xi, \tau)$ — формулой (4.18), $S(\xi, \tau) = \frac{3}{8} H^4(\xi, \tau) - \frac{\tau}{4} H^2(\xi, \tau)$, а функция $H(\xi, \tau)$ определена в начале п. 2.

Доказательство. После замены (4.20) имеем

$$\Lambda(\xi, \tau) = \frac{2}{\sqrt{R}} J(\xi, \tau) \exp(S(\xi, \tau)),$$

где

$$J(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\zeta^2 - \frac{4H}{R^{3/2}} \zeta^3 - \frac{2}{R^2} \zeta^4\right) d\zeta.$$

Отсюда сразу вытекает левая часть неравенства (4.29). При оценке сверху будем для определенности считать, что $\xi \leq 0$, $H(\xi, \tau) \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda(\xi, \tau) &\leq 2 \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{8}(z^4 - 2z^2\tau + 4z\xi)\right\} dz = \\ &= 4R^{-1/2} \exp S(\xi, \tau) \int_{-HR^{1/2/2}}^{\infty} \exp\left(-\zeta^2 - \frac{4H}{R^{3/2}} \zeta^3 - 2\frac{\zeta^4}{R^2}\right) d\zeta. \end{aligned}$$

Разбивая область интегрирования в последнем интеграле на две части: от $-2^{-1}\beta HR^{1/2}$ до $-2^{-1}\beta HR^{1/2}$ и от $-2^{-1}\beta HR^{1/2}$ до ∞ при до-

статочию малом $\beta > 0$ и оценивая отдельно оба интеграла, приходим к правому неравенству (4.29).

Для оценок производных надо продифференцировать равенство (4.18) под знаком интеграла и после этого провести замену (4.20). Получающийся при этом интеграл отличается от $J(\xi, \tau)$ лишь наличием множителя $c(H + 2\xi R^{-1/2})^{l_1 + 2l_2}$. Отсюда вытекают неравенства (4.30), если учесть легко проверяемое соотношение $R \geq 2H^2$. ■

Всюду ниже будем употреблять обозначение

$$G(\xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau}\right).$$

Лемма 4.2. Пусть для достаточно большого N функция $F(\xi, \tau) \in C^N$ при $\tau \leq -1$ и справедливы оценки

$$|D^k F(\xi, \tau)| \leq M(\tau^2 + \xi^2)^{-N} \quad \text{для } k \leq N.$$

Тогда функция

$$v(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi - y, \tau - \theta) \Lambda(y, \theta) F_1(y, \theta) dy d\theta, \quad (4.31)$$

где $F_1(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\xi} F(y, \tau) dy$, принадлежит C^m при $\tau \leq -1$. Функция $w(\xi, \tau)$, которая определяется формулой (4.27), удовлетворяет уравнению (4.28), и для нее справедливы оценки

$$|D^k w(\xi, \tau)| \leq M_1(\xi^2 + \tau^2)^{-m} \quad \text{для } k \leq m. \quad (4.32)$$

Здесь $m \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, а D^k означает производную порядка k .

Доказательство. Прежде всего надо убедиться в сходимости интеграла (4.31) и получить для него оценку. Из леммы 4.1 вытекает неравенство

$$|v(\xi, \tau)| \leq M \int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\tau - \theta}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_1(y, \theta)|}{\sqrt{R(y, \theta)}} \exp Q(\xi, y, \tau, \theta) dy d\theta, \quad (4.33)$$

где $Q(\xi, y, \tau, \theta) = 4^{-1}(\tau - \theta)^{-1}(\xi - y)^2 + S(y, \theta)$.

Так как $\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = -\frac{1}{2(\tau - \theta)} + \frac{1}{2R(y, \theta)} \leq -\left|\frac{t}{\theta}\right| \frac{1}{2(\tau - \theta)}$, то функция $Q(\xi, y, \tau, \theta)$ имеет единственную точку максимума по переменной y . Обозначим эту точку $Y(\xi, \tau, \theta)$. Таким образом,

$$Q(\xi, y, \tau, \theta) \leq Q(\xi, Y(\xi, \tau, \theta), \tau, \theta) - \frac{1}{4(\tau - \theta)} \left|\frac{\tau}{\theta}\right| (y - Y(\xi, \tau, \theta))^2. \quad (4.34)$$

Далее покажем, что

$$H(Y(\xi, \tau, \theta), 0) \equiv H(\xi, \theta). \quad (4.35)$$

Действительно, функция $Y(\xi, \tau, \theta)$ по определению удовлетворяет

уравнению $\frac{\partial Q}{\partial y}(\xi, Y, \tau, \theta)$, или, что то же самое, $Y(\xi, \tau, \theta) - \xi - (\tau - \theta)H(Y(\xi, \tau, \theta), \theta) = 0$. Отсюда, используя равенства $\frac{\partial H}{\partial y} = -R^{-1}$, $\frac{\partial H}{\partial \theta} = HR^{-1}$, легко вывести, что $\frac{\partial H(Y(\xi, \tau, \theta), \theta)}{\partial \theta} \equiv 0$.

Следовательно, равенство (4.35) справедливо, так как $Y(\xi, \tau, \tau) = \xi$. Отсюда вытекает, что максимальное значение функции Q по переменной y также не зависит от θ :

$$Q(\xi, Y(\xi, \tau, \theta), \tau, \theta) =$$

$$= -\frac{1}{4}(\tau - \theta)H^2(\xi, \tau) + \frac{3}{8}H^4(\xi, \tau) - \frac{\theta}{4}H^2(\xi, \tau) = S(\xi, \tau).$$

Из неравенств (4.33) и (4.34) следует оценка

$$\begin{aligned} v(\xi, \tau) \leq M e^{S(\xi, \tau)} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\tau - \theta}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_1(y, \theta)|}{\sqrt{R(y, \theta)}} \times \\ \times \exp\left(-\left|\frac{\tau}{\theta}\right| \frac{(y - Y(\xi, \tau, \theta))^2}{4(\tau - \theta)}\right) dy d\theta. \end{aligned} \quad (4.36)$$

По условию функция $F_1(y, \theta)$ удовлетворяет неравенствам

$$|D^k F_1(y, \theta)| \leq M(y^2 + \theta^2)^{-N+1} \quad \text{при } y \leq 0,$$

$$|D^k F_1(y, \theta)| \leq M\theta^{-2N+2} \quad \text{при } y \geq 0 \text{ для } k \leq N.$$

Рассматривая отдельно значения $|\xi| < |\tau|$ и $|\xi| \geq |\tau|$, нетрудно установить, исходя из (4.36), что при $\xi \leq 0$ $|v(\xi, \tau)| \leq M(\xi^2 + \tau^2)^{-m} \exp S(\xi, \tau)$, где $m \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$.

Так как

$$D_{\xi}^k v(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi - y, \tau - \theta) D_y^k [\Lambda(y, \theta) F_1(y, \theta)] dy d\theta,$$

то таким же образом с помощью неравенств (4.30) приходим к аналогичным оценкам для $D_{\xi}^k v(\xi, \tau)$. Из формулы (4.27) и оценок леммы 4.1 вытекает (4.32) для $\xi < 0$.

Для того чтобы проверить эти оценки при $\xi \geq 0$, представим

$$F_1(\xi, \tau) \text{ в виде } F_2(\xi, \tau) + \rho(\tau), \text{ где } F_2(\xi, \tau) = - \int_{\xi}^{\infty} F(y, \tau) dy, \text{ а}$$

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y, \tau) dy = O(\tau^{-2N+2}). \text{ Интеграл (4.31) разбивается}$$

при этом на два интеграла. Первый из них удовлетворяет тем же оценкам, что и $v(\xi, \tau)$, но при $\xi \geq 0$. А второй интеграл, как легко проверить, исходя из уравнения теплопроводности, равен

$$\Lambda(\xi, \tau) \int_{-\infty}^{\tau} \rho(\theta) d\theta. \text{ После подстановки в формулу (4.27) соответ-$$

ствующее слагаемое в $w(\xi, \tau)$ обращается в нуль и не оказывает

влияния на оценку $w(\xi, \tau)$ и ее производных. Тем самым доказана справедливость (4.32) как при $\xi \leq 0$, так и при $\xi \geq 0$. Справедливость равенства (4.28) очевидна. ■

Доказательство теоремы 4.2 будем проводить по индукции по индексу k . Пусть доказано существование $w_{l,i}(\xi, \tau)$ при всех $l < k$, $i \leq l-1$. Тогда, в силу формулы (4.6), правая часть уравнения (4.5) уже построена. Асимптотический ряд $W_{k,j}$, стоящий в правой части равенства (4.14), является ф. а. р. уравнения (4.5).

Пусть $X_N(\xi, \tau) = B_N W_{k,j}$ — частичная сумма ряда (4.14), содержащая индексы $l \leq N$. Тогда она удовлетворяет уравнению

$$L_3 X_N = \frac{\partial X_N}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\Gamma X_N) - \frac{\partial^2 X_N}{\partial \xi^2} = E_{k,j}(\xi, \tau) + Z_N(\xi, \tau),$$

где $|Z_N| \leq MR^{-N_1}$ при $\tau \leq -1$, $N_1 \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, и аналогичные оценки справедливы для производных от Z_N . (Индексы k и j у функций X_N , Z_N и у других функций до конца доказательства теоремы будут для краткости опускаться.) Так как частичная сумма X_N имеет особенности в начале координат и разрывы на положительной полуоси τ , то удобно умножить ее на срезающую функцию $\chi(\xi, \tau) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, которая равна нулю при $\xi^2 + \tau^2 \leq 1$ и при $|\xi| \leq 1$, $\tau \geq 0$ и равна единице вне объединения круга $\xi^2 + \tau^2 \leq 4$ и полуполосы $|\xi| \leq 2$, $\tau \geq 2$.

Тогда $L_3(\chi(\xi, \tau) X_N) = E_{k,j} + \tilde{Z}_N(\xi, \tau)$, где $\tilde{Z}_N \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ и удовлетворяет тем же оценкам, что и Z_N .

В соответствии с леммой 4.2 построим решение уравнения $L_3 W_N = \tilde{Z}_N(\xi, \tau)$ при $\tau \leq -1$ и затем продолжим его для всех $\tau \geq -1$ по формулам (4.27), (4.31). Функция $w_N = \chi(\xi, \tau) X_N - W_N$ удовлетворяет уравнению (4.5) и оценке $|w_N(\xi, \tau) - X_N(\xi, \tau)| \leq MR^{-m}$ при $\tau \leq -1$. Нетрудно заметить, что функция w_N не зависит от N при всех достаточно больших N . Действительно, разность $v_{N,N_1} = w_N - w_{N_1}$ удовлетворяет однородному уравнению $L_3 v_{N,N_1} = 0$, быстро убывает при $\tau \rightarrow -\infty$ и, следовательно, равна нулю по принципу максимума. (Замеча $w = \widehat{w} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}$ приводит

к линейному параболическому уравнению для $\widehat{w}$ с нулевым коэффициентом при функции $\widehat{w}$.) Построенная функция w удовлетворяет уравнению (4.5) и оценкам $|w - X_N| \leq M_N R^{-m}$ при $\tau \leq -1$ для любого N , где $m \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. ■

5. Этот, последний пункт § 4 посвящен исследованию асимптотики построенных выше решений $w_{k,j}(\xi, \tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Так же, как и в предыдущем пункте, удобно рассматривать разность между $w_{k,j}$ и частичными суммами рядов $W_{k,j}$. Тем самым предстоит изучить решение уравнения (4.26) при $\tau \geq -1$ с начальной функцией, быстро стремящейся к нулю при $|\xi| \rightarrow \infty$ и с быстро стремящейся к нулю правой частью $F(\xi, \tau)$. Однако по срав-

нению с п. 4 имеются две трудности. Во-первых, ряд (4.14) является разрывным при $\xi = 0$, $\tau \rightarrow \infty$ и правая часть F , построенная по его частичным суммам, будет мала лишь вне окрестности $|\xi|\tau^{1/2} < R^v$, $\tau \rightarrow \infty$. Во-вторых, даже из малости правой части $F(\xi, \tau)$ всюду при $\tau \geq -1$, $R \rightarrow \infty$ не вытекает малость решения в той же области. Решение имеет довольно сложную структуру при $|\xi|\tau^{1/2} < \text{const}$, $\tau \rightarrow \infty$. Непосредственно из явных формул установить точный вид асимптотики функций $w_{k,j}(\xi, \tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$ довольно трудно. Поэтому мы ограничимся лишь изучением решения $w(\xi, \tau)$ при $\xi = 0$, $\tau \rightarrow \infty$ в случае, когда $w(\xi, \tau)$ является решением уравнения (4.26) с правой частью, быстро стремящейся к нулю при $\tau \geq -1$, $R \rightarrow \infty$. Вид асимптотических рядов для $w_{k,j}(\xi, \tau)$, как попутное следствие, можно будет установить в конце всего исследования, в § 6.

Основным результатом данного пункта является

Теорема 4.3. Пусть $w(\xi, \tau)$ — ограниченное решение уравнения (4.26) при $\tau \geq -1$ и выполнены оценки

$$|D^k F(\xi, \tau)| \leq M(\xi^2 + \tau^2 + 1)^{-N},$$

$$|D^k w(\xi, -1)| \leq M(\xi^2 + 1)^{-N} \text{ при } k \leq N,$$

где N — достаточно большое число (D^k здесь и далее означает производную порядка k). Тогда при $\tau \rightarrow \infty$ функция $w(0, \tau)$ имеет следующее асимптотическое представление:

$$w(0, \tau) = C\tau^{1/2} \left(1 + \sum_{k=1}^m \gamma_k \tau^{-2k} \right) + O(\tau^{-2m-1}), \quad (4.37)$$

где $m \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, а γ_k — абсолютные постоянные.

Предварительно предстоит доказать ряд вспомогательных лемм. Итак, начнем изучение решения уравнения (4.26) при $\tau \geq -1$. Технически удобно рассмотреть отдельно времена $-1 \leq \tau \leq T_0$ и $\tau \geq T_0 > 0$.

Лемма 4.3. Пусть $w(\xi, \tau)$ — ограниченное решение уравнения (4.26) при $-1 \leq \tau \leq T_0$, а правая часть $F(\xi, \tau)$ и начальная функция $w(\xi, -1)$ удовлетворяют оценкам

$$|D^k w(\xi, -1)| + |D^k F(\xi, \tau)| \leq M(1 + \xi^2)^{-N} \text{ при } k \leq N,$$

где N — достаточно большое число. Тогда $w(\xi, \tau)$ удовлетворяет оценкам

$$|D^k w(\xi, \tau)| \leq M(1 + \xi^2)^{-m} \text{ при } k \leq m,$$

где $m \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$.

Доказательство. Оценку функции $w(\xi, \tau)$ можно получить из принципа максимума, используя барьеры $\exp[\alpha\tau(\xi^2 + A)]$

и $(1 + \xi^2)^{-N}$ при достаточно больших α и A . При этом надо учитывать оценки

$$|\Gamma(\xi, \tau)| \leq M(1 + |\xi|^{1/3}), \quad \left| \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}(\xi, \tau) \right| < M(1 + |\xi|^{2/3})^{-1}$$

для $-1 \leq \tau \leq \tau_0$, которые вытекают из асимптотического разложения (4.23).

Дифференцируя уравнение (4.26) по ξ , получаем аналогичную задачу для $\partial w / \partial \xi$, и те же барьеры дают оценку $\partial w / \partial \xi$. Далее таким же образом получаются оценки для высших производных по ξ . Производные, содержащие дифференцирование по τ , можно оценить непосредственно из уравнения (4.26), а также дифференцируя это уравнение нужное число раз по τ и ξ . ■

Для исследования решения уравнения (4.26) при $\tau \geq \tau_0 > 0$ снова применим замену (4.27) и явную формулу для решения уравнения (4.28).

Лемма 4.4. Пусть $w(\xi, \tau)$ — ограниченное решение уравнения (4.26) при $\tau \geq \tau_0 > 0$, где

$$F(\xi, \tau) = \frac{\partial}{\partial \xi} F_1(\xi, \tau), \quad w(\xi, \tau_0) = \frac{\partial}{\partial \xi} w_1(\xi), \quad (4.38)$$

и выполнены оценки

$$|D^k F_1(\xi, \tau)| \leq M(\xi^2 + \tau^2)^{-N}, \\ |D^k w_1(\xi)| \leq M(1 + \xi^2)^{-N} \quad \text{при } k \leq N,$$

где N — достаточно большое число. Тогда $w(\xi, \tau)$ удовлетворяет оценкам

$$|D^k w(\xi, \tau)| \leq M(\xi^2 + \tau^2)^{-m} \quad \text{при } k \leq m, \quad (4.39)$$

где $m \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$.

Доказательство. После замены (4.27) из уравнения (4.28) получаем формулу для $v(\xi, \tau)$:

$$v(\xi, \tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi - y, \tau - \theta) \Lambda(y, \theta) F_1(y, \theta) dy d\theta + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi - y, \tau - \tau_0) \Lambda(y, \tau_0) w_1(y) dy = v_1(\xi, \tau) + v_2(\xi, \tau).$$

Оценки интегралов v_1 и v_2 проводятся аналогично тому, как это сделано в лемме 4.2. Для функции $v_1(\xi, \tau)$ справедлива оценка (4.33), где R , Q и S означают те же функции, что и ранее.

Рассмотрим для определенности $\xi \geq 0$. Тогда

$$|v_1(\xi, \tau)| \leq M \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\tau - \theta}} \int_0^{\infty} (\theta^2 + y^2)^{-N+1} \exp Q(\xi, y, \tau, \theta) dy d\theta.$$

При $\xi \geq 0$, $y \geq 0$ функция $Q(\xi, y, \tau, \theta)$ имеет единственный максимум по y при $y = Y(\xi, \tau, \theta)$. Для этого максимума справедли-

во соотношение (4.35) и, следовательно, $Q(\xi, Y(\xi, \tau, \theta), \tau, \theta) = S(\xi, \tau)$. Из легко проверяемого неравенства $|H(\xi, \tau)| \geq (\tau^{3/2} + \xi)^{1/3}$ вытекает, что достаточно рассмотреть лишь случай, при котором $Y = \xi - (\tau - \theta)H(y, \theta) > 2^{-1}(\tau^{3/2} + \xi)$. Тогда при $y < \frac{2}{3}Y(\xi, \tau, \theta)$ функция $\exp[Q(\xi, y, \tau, \theta) - S(\xi, \tau)]$ экспонен-

циально мала. А при $y \geq \frac{2}{3}Y(\xi, \tau, \theta)$ справедливо неравенство $Q_{yy} < -[2(\tau - \theta)]^{-1}$, и интеграл по этой области оценивается так же, как и в лемме 4.2. Аналогично проводится оценка интеграла $v_2(\xi, \tau)$ и производных функции $v(\xi, \tau)$. Из формулы (4.27) вытекает (4.39). ■

Доказательство теоремы 4.3. Предположим сначала, что $w(\xi, \tau_0) \equiv 0$, и представим правую часть в виде $F(\xi, \tau) = F_2(\xi, \tau) + F_3(\xi, \tau)$, где $F_3(\xi, \tau) = \rho(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} F(y, \tau) dy$, $\rho(\xi)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция, $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi) d\xi = 1$.

Тогда функция $F_2(\xi, \tau)$ удовлетворяет условиям леммы 4.4. Тем самым остается исследовать решение уравнения (4.26), у которого $F(\xi, \tau) = \lambda(\tau)\rho(\xi)$, $D^k\lambda(\tau) = O(\tau^{-N})$ и $w(\xi, \tau_0) = 0$. Решение $w(\xi, \tau)$ задается формулой (4.27), где

$$v(\xi, \tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \lambda(\theta) \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi - y, \tau - \theta) \Lambda(y, \theta) \rho_1(y) dy d\theta, \quad (4.40)$$

$\rho_1(y) = \int_{-\infty}^y \rho(z) dz$. Пусть $\text{supp } \rho \in [-a, a]$. Тогда

$$\begin{aligned} v(0, \tau) &= \int_{\tau_0}^{\tau} \lambda(\theta) \int_{-a}^a G(y, \tau - \theta) \Lambda(y, \theta) \rho_1(y) dy d\theta + \\ &+ \int_{\tau_0}^{\tau} \lambda(\theta) \int_a^{\infty} G(y, \tau - \theta) \Lambda(y, \theta) dy d\theta = v_1(\tau) + v_2(\tau). \end{aligned}$$

Интеграл $v_1(\tau)$ быстро стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Это доказывается точно так же, как в лемме 4.4.

Подставляя вместо $\Lambda(y, \theta)$ интеграл (4.18) и меняя порядок интегрирования в $v_2(\tau)$, получаем равенство

$$v_2(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \lambda(\theta) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^4}{8} + \frac{z^2\tau}{4}\right) \text{erfc}\left(\frac{a + z(\tau - \theta)}{2\sqrt{\tau - \theta}}\right) dz d\theta,$$

где $\operatorname{erfc} x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-t^2) dt$. Интеграл по θ следует разбить на

два интеграла: при $\theta > \tau/2$ и при $\theta \leq \tau/2$. Первый из этих интегралов — это $O(\tau^{-N+1} \exp(\tau^2/8))$. А второй интеграл равен

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_0}^{\tau/2} \lambda(\theta) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^4}{8} + \frac{z^2\tau}{4}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{a+z(\tau-\theta)}{2\sqrt{\tau-\theta}}\right) dz d\theta = \\ &= \int_{\tau_0}^{\infty} \lambda(\theta) d\theta \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{z^4}{8} + \frac{z^2\tau}{4}\right) dz + O\left(\tau^{-N-1} \exp\frac{\tau^2}{8}\right) = \\ &= \tau^{1/2} \int_{\tau_0}^{\infty} \lambda(\theta) d\theta \exp\left(\frac{\tau^2}{8}\right) \left[\sum_{k=0}^m c_k \tau^{-2k} + O(\tau^{-2m-2}) \right], \quad c_0 \neq 0. \end{aligned}$$

Производная $\frac{\partial v}{\partial \xi}(0, \tau)$ имеет такой же вид, как и интеграл $v(0, \tau)$. Отличие лишь в появляющемся множителе $-z/2$ под знаком интеграла. Следовательно, в асимптотике $\frac{\partial v}{\partial \xi}(0, \tau)$ по сравнению с асимптотикой $v(0, \tau)$ появляется дополнительный множитель $\sqrt{\tau}$.

Из явного вида $\Lambda(\xi, \tau)$ следует, что $\frac{\partial \Lambda}{\partial \xi}(0, \tau) = 0$, а

$$\Lambda(0, \tau) = \tau^{-1/2} \exp\left(\frac{\tau^2}{8}\right) \sum_{k=0}^{\infty} d_k \tau^{-2k}, \quad \tau \rightarrow \infty, \quad d_0 \neq 0.$$

Из этого асимптотического разложения, из доказанной асимптотики для $\frac{\partial v}{\partial \xi}(0, \tau)$ и из формулы (4.27) вытекает, что в случае однородных начальных условий для решения w справедливо представление (4.37). При этом γ_k — это коэффициенты асимптотического разложения функции $2[\Lambda(0, \tau)]^{-1} \int_0^{\infty} z \exp\left(-\frac{z^4}{8} + \frac{z^2\tau}{4}\right) dz$.

Теперь осталось рассмотреть однородное уравнение (4.26). И в этом случае, представляя начальную функцию в виде

$$w(\xi, \tau_0) = w_2(\xi) + w_3(\xi), \quad \text{где } w_3(\xi) = \rho(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} w(z, \tau_0) dz, \quad \text{можно свес-}$$

ти вопрос к исследованию интеграла, аналогичного (4.40). Таким образом, и для решения однородного уравнения справедливо асимптотическое разложение (4.37) с теми же коэффициентами γ_k , которые указаны выше. ■

Согласование между асимптотическим рядом (4.3), рядом (4.4) и рядом, который будет построен в следующем параграфе, приводит к тому, что в уравнениях вида (4.26) правая часть быстро стремится к нулю при $|\xi| + |\tau| \rightarrow \infty$. Теорема 4.3 показывает, что этого недостаточно для равномерного стремления к нулю решения при $\tau \rightarrow \infty$. Поэтому в дальнейшем будут дополнительно согласовываться значения решений при $\xi = 0$, $\tau \rightarrow \infty$. Оказывается, что быстрое стремление к нулю решения уравнения (4.26) при $\xi = 0$, $\tau \rightarrow \infty$ вместе с выполнением условий теоремы 4.3 обеспечивает быстрое стремление к нулю решения всюду при $|\xi| + |\tau| \rightarrow \infty$. Доказательству этого факта посвящена последняя теорема данного параграфа.

Теорема 4.4. Пусть выполнены условия теоремы 4.3 и, кроме того, $|D^k w(0, \tau)| \leq M\tau^{-2N}$, где k и N означают то же, что и в теореме 4.3. Тогда функция $w(\xi, \tau)$ удовлетворяет оценкам (4.39).

Доказательство. После замены $w = v \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}$ получается следующее уравнение для $v(\xi, \tau)$:

$$L_4 v = \frac{\partial v}{\partial \tau} + b(\xi, \tau) \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = \tilde{F}(\xi, \tau),$$

где $\tilde{F}(\xi, \tau) = F(\xi, \tau) \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}(\xi, \tau) \right]^{-1}$, а $b(\xi, \tau) = \Gamma(\xi, \tau) - 2\Gamma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \times$
 $\times [\Gamma_{\xi}(\xi, \tau)]^{-1} = -2 \{ \Lambda^2 \Lambda_{\xi\xi\xi} - 2\Lambda \Lambda_{\xi} \Lambda_{\xi\xi} + \Lambda_{\xi}^3 \} \Lambda^{-1} (\Lambda \Lambda_{\xi\xi} - \Lambda_{\xi}^2)^{-1}$.

Функция $\tilde{F}(\xi, \tau)$ удовлетворяет тем же условиям, что и $F(\xi, \tau)$. Это легко вытекает из асимптотики $\Gamma(\xi, \tau)$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, $\tau \rightarrow \infty$.

Явный вид (4.18) функции $\Lambda(\xi, \tau)$ дает возможность найти оценку и асимптотику коэффициента $b(\xi, \tau)$:

$$b(\xi, \tau) = \sqrt{\tau} \frac{\operatorname{sh} \eta - (2\tau)^{-2} \operatorname{sh} 3\eta + \beta_1(\tau, \eta)}{\operatorname{ch} \eta + (2\tau)^{-2} \operatorname{ch} 3\eta + \beta_2(\tau, \eta)}$$

при $|\xi| < \text{const}$, где $\eta = 2^{-1}\xi\sqrt{\tau}$, а $\beta_i(\tau, \eta) = O(\tau^{-2} \exp|\eta| + \tau^{-4} \exp|3\eta|)(1 + \eta^2)$, $b(\xi, \tau) < -\mu\sqrt{\tau}$ при $\xi > \text{const} > 0$, где $\mu > 0$.

В дальнейшем будем рассматривать только значения $\xi > 0$. Из асимптотики коэффициента $b(\xi, \tau)$ нетрудно получить следующее утверждение.

Для любого малого $v > 0$ и достаточно больших τ существует постоянная $\mu > 0$ такая, что

$$\begin{aligned} b(\xi, \tau) &> -\mu\tau^{-3/2} \quad \text{при} \quad \xi < 2\tau^{-1/2}(\ln 2\tau - v), \\ b(\xi, \tau) &< -\mu\tau^{1/2} \quad \text{при} \quad \xi > 2\tau^{-1/2}(\ln 2\tau + v). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Кроме того,

$$|b(\xi, \tau)| < M_1 \tau^{1/2} \quad (4.42)$$

для всех ξ при $\tau \geq \tau_0 > 0$.

Оценка решения $w(\xi, \tau)$ при $\xi \geq 0$, $\tau \geq \tau_0$ будет получена помощью барьерной функции $U(\xi, \tau)$. Достаточно потребовать, чтобы функция U удовлетворяла следующим условиям:

$$\begin{aligned} U(0, \tau) &> M_1 \tau^{-2N}, \quad \tau \geq \tau_1 > \tau_0, \\ U(\xi, \tau_1) &> M_1 (1 + \xi^2)^{-N}, \quad \xi \geq 0, \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} U(\xi, \tau) &< M_2 (\xi^2 + \tau^2)^{-m}, \quad \xi \geq 0, \quad \tau \geq \tau_1, \\ L_4 U &> M (\xi^2 + \tau^2)^{-N} \quad \text{при} \quad \xi \geq 0, \quad \tau \geq \tau_1. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Однако удобнее строить $U(\xi, \tau)$ не гладкой, а кусочно гладкой функцией с соответствующей модификацией условия (4.44). Обозначим $\xi_1 = 2\tau^{-1/2}(\ln 2\tau - v)$, $\xi_2 = 2\tau^{-1/2}(\ln 2\tau + v)$. Функция $U(\xi, \tau)$ будет непрерывной всюду при $\xi \geq 0$, $\tau \geq \tau_0$, гладкой всюду, кроме кривых $\xi = \xi_1(\tau)$, $\xi = \xi_2(\tau)$, а на этих кривых должны быть выполнены обычные условия на односторонние производные:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}(\xi_i(\tau) - 0, \tau) > \frac{\partial U}{\partial \xi}(\xi_i(\tau) + 0, \tau), \quad i = 1, 2. \quad (4.45)$$

Вне этих кривых должно выполняться неравенство (4.44).

Обозначим $\sigma(\tau) = [1 + \xi_1(\tau) - \xi_1^2(\tau)]^{-1}(\tau + \xi_2(\tau))^{-N}$ и положим

$$U(\xi, \tau) = \begin{cases} \sigma(\tau)(1 + \xi - \xi^2) & \text{при } \xi \leq \xi_1(\tau), \\ (\xi + \tau)^{-N} & \text{при } \xi \geq \xi_2(\tau), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} U(\xi, \tau) &= \tau^{-1/2-N} [4\tau^{-1/2}\xi \ln 2\tau - \xi^2 + 4\tau^{-1}(v^2 - \ln^2 2\tau)] + \\ &+ (\tau + \xi_2(\tau))^{-N} \quad \text{при} \quad \xi_1(\tau) \leq \xi \leq \xi_2(\tau). \end{aligned}$$

Функция U непрерывна на линиях $\xi = \xi_i(\tau)$. Для проверки этого свойства достаточно убедиться в том, что выражение в квадратных скобках обращается в нуль при $\xi = \xi_i(\tau)$. Так же легко непосредственно убедиться в выполнении неравенств (4.43). Остается проверить выполнение неравенств (4.44), (4.45).

При $\xi < \xi_1(\tau)$ в силу (4.41)

$$\begin{aligned} L_4 U &= \sigma'(\tau)(1 + \xi - \xi^2) + (1 - 2\xi)\sigma(\tau)b(\xi, \tau) + 2\sigma(\tau) > \\ &> \sigma(\tau)[2 - \mu\tau^{-3/2} - 2|\sigma'(\tau)|[\sigma(\tau)]^{-1}] > \sigma(\tau) \end{aligned}$$

для достаточно больших τ .

При $\xi > \xi_2(\tau)$ в силу (4.41)

$$\begin{aligned} L_4 U &= U\{-N(\xi + \tau)^{-1} - N(\xi + \tau)^{-1}b(\xi, \tau) - N(N+1)(\xi + \tau)^{-2}\} > \\ &> U(\xi + \tau)^{-1}N(\mu\tau^{1/2} - 1 - (N+1)(\xi + \tau)^{-1}) > (\xi + \tau)^{-N-1} \end{aligned}$$

для достаточно больших τ .

При $\xi_1(\tau) < \xi < \xi_2(\tau)$

$$\begin{aligned} L_4 U &= \tau^{-N-1/2}[(4\tau^{-1/2} \ln 2\tau - 2\xi)b(\xi, \tau) + 2 + O(\tau^{-2} \ln^2 \tau)] + \\ &+ O(\tau^{-N-1}). \end{aligned}$$

В рассматриваемой области $|\xi - 2\tau^{-1/2} \ln 2\tau| \leq 2\nu\tau^{-1/2}$. Из этого соотношения и из (4.42) следует неравенство

$$L_4 U > \tau^{-N-1/2} [2 - 4M_1\nu - M\tau^{-1}] - M\tau^{-N-1} > \tau^{-N-1}$$

для достаточно больших τ , если выбрать $\nu < (4M_1)^{-1}$.

Итак, (4.44) выполнено. Переходим к проверке (4.45):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi} (\xi_1(\tau) - 0, \tau) - \frac{\partial U}{\partial \xi} (\xi_1(\tau) + 0, \tau) = \\ = \sigma(\tau) (1 - 2\xi_1(\tau)) - \tau^{-N-1/2} (4\tau^{-1/2} \ln 2\tau - 2\xi_1(\tau)) > 0 \end{aligned}$$

при достаточно больших τ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi} (\xi_2(\tau) - 0, \tau) - \frac{\partial U}{\partial \xi} (\xi_2(\tau) + 0, \tau) = \tau^{-N-1/2} (4\tau^{-1/2} \ln 2\tau - \\ - 2\xi_2(\tau)) + N(\xi_2(\tau) + \tau)^{-N-1} = -4\nu\tau^{-N-1} + N(\tau + \xi_2(\tau))^{-N-1} > 0 \end{aligned}$$

при достаточно больших N и τ . Тем самым оценка функции $v(\xi, \tau)$ и, следовательно, функции $w(\xi, \tau)$ закончена. Утверждение теоремы относительно производных решения $w(\xi, \tau)$ вытекает из априорных оценок производных решения параболического уравнения. ■

§ 5. Построение асимптотики решения вблизи линии разрыва

Последняя область, в которой надлежит построить асимптотическое разложение решения $u(x, t, \varepsilon)$, — это окрестность линии $l = \{x, t: x = s(t), 0 \leq t \leq T\}$. Напомним, что ряд (1.4), как и в задаче § 2, не дает правильного асимптотического разложения вблизи l , так как его коэффициенты разрывны на l . Для правильного описания асимптотики вблизи l , как и в § 1 (1.9), введем новые координаты

$$\zeta = \varepsilon^{-4}(x - s(t)), t. \quad (5.1)$$

Вопрос о том, в каком виде надо искать асимптотическое разложение функции $v(\zeta, t, \varepsilon)$, не вполне очевиден. Ясно лишь, что при $\zeta \rightarrow \pm\infty$ этот ряд должен быть согласован с рядом (1.4) при $x \rightarrow s(t) \pm 0$. Поэтому в асимптотическом разложении функции $v(\zeta, t, \varepsilon) \equiv u(x, t, \varepsilon)$, как и в §§ 1, 2, должны присутствовать члены с множителями ε^{4k} , $k \geq 0$. Но асимптотическое разложение в окрестности l должно быть согласовано не только с рядом (1.4), но и с рядом (4.3), в окрестности начала координат (рис. 36). Поэтому естественно для асимптотики функции $v(\zeta, t, \varepsilon)$ использовать ту же

калибровочную последовательность, что и в выражении (4.3) для ряда W . Итак, положим

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{j=0}^k v_{k,j}(\zeta, t) \ln^j \varepsilon \quad (5.2)$$

и подставим в этот ряд в уравнение (1.11). В результате получится почти такая же система, как и (1.12) — (1.14). Точнее, для $v_{4k,0}(\zeta, t)$ система имеет тот же вид, что и

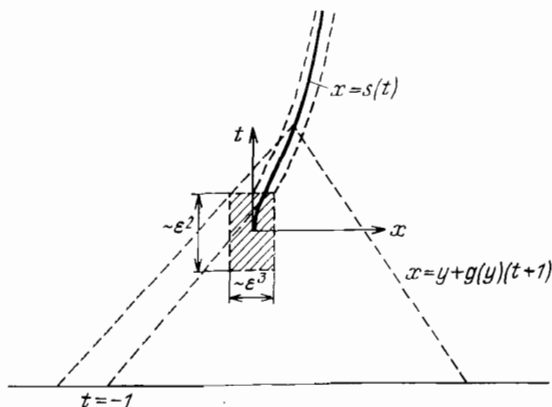


Рис. 36

(1.12) — (1.14), и в дальнейшем для этих функций будем использовать оба обозначения, считая $v_{4k,0}(\zeta, t) \equiv v_{4k}(\zeta, t)$. А для остальных функций $v_{k,j}(\zeta, t)$ система имеет почти такой же вид

$$L_1 v_{k,j} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \tilde{G}_{k,j}(v_0, v_{1,0}, v_{1,1}, \dots, v_{k-1,k-1}) + \frac{\partial v_{k-4,j}}{\partial t}, \quad (5.3)$$

где L_1 — оператор, определенный в (1.13), а

$$\tilde{G}_{k,j}(v_0, v_{1,0}, v_{1,1}, \dots, v_{k-1,k-1}) = \sum_{q \geq 2} \frac{\varphi^{(q)}(v_0)}{q!} \sum_{\substack{\Sigma i_p = k \\ \Sigma m_p = j}} \prod_{p=1}^q v_{i_p, m_p}. \quad (5.4)$$

Граничные условия на $\pm \infty$ для функций $v_{4k}(\zeta, t)$ задаются соотношениями (1.23), (1.22), а для всех остальных функций

$$v_{k,j}(\zeta, t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\zeta| \rightarrow \infty. \quad (5.5)$$

Существование решений задач (1.12)–(1.14) при всех $t > 0$ доказано в § 1 (теорема 1.1). Точно так же доказывается и существование решений задач (5.3)–(5.5) для остальных функций $v_{k,j}(\zeta, t)$. При этом для каждого $t > 0$ справедливы соотношения $v_{k,j}(\zeta, t) \in \mathfrak{M}^+ \cap \mathfrak{M}^-$, если $k \not\equiv 0 \pmod{4}$ или $j > 0$, где классы $\mathfrak{M}^\pm$ определены в § 1. Как было показано в § 1, все функции $v_{k,j}(\zeta, t)$ являются гладкими функциями при $t > 0$, так как для этих значений t выполнено условие (1.3). Но, в отличие от § 2, в рассматриваемой здесь задаче $\omega(y, t) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0, t \rightarrow 0$. В связи с этим и функции $v_{k,j}(\zeta, t)$ имеют особенности при $t \rightarrow 0$. Так что цель этого параграфа — выяснить асимптотику при $t \rightarrow 0$ решений $v_{k,j}(\zeta, t)$, по существу построенных ранее в § 1.

Для описания асимптотик функций $v_{k,j}(\zeta, t)$ удобно ввести подходящие классы функций. Всюду ниже будем обозначать $\eta = \zeta \sqrt{t}/2$ и определим сначала классы функций от одного переменного η .

Классом $\mathfrak{A}^+$ называется множество функций $v(\eta) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ таких, что для любой из этих функций справедливы неравенства

$$\left| \frac{d^k v}{d\eta^k}(\eta) \right| \leq M_k e^{-2\eta} (1 + |\eta|^\lambda), \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

где постоянные M_k и λ зависят, вообще говоря, от функций v . Аналогично определяется класс $\mathfrak{A}^-$ с заменой $e^{-2\eta}$ на $e^{2\eta}$.

Классом $\mathfrak{B}_\alpha$ называется множество функций $v(\zeta, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^1 \times (0, T])$, для которых при $t \rightarrow 0$ справедливо асимптотическое разложение

$$v(\zeta, t) = t^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} t^{j/2} \sum_{q=0}^j V_{j,q}(\eta) \ln^q t. \quad (5.6)$$

Коэффициенты $V_{j,q}(\eta)$ всюду ниже будут обозначаться посредством $\Pi_{j,q}v$.

Из формул (1.22), (3.4), (3.14) нетрудно вывести, что $P_m^\pm(\zeta, t) \in \mathfrak{B}_{1/2-2m}$, а $\Pi_{j,q}P_m$ — это полиномы степени не выше, чем m .

Классом $\mathfrak{B}_\alpha^+$ называется подмножество функций $v(\zeta, t) \in \mathfrak{B}_\alpha$ и таких, что выполнены условия:

а) $\Pi_{j,q}v \in \mathfrak{A}^+$ для всех j и q ;

б) для любого натурального N существуют постоянные $\lambda > 0$ и $M_{k,l} > 0$ такие, что

$$\left| \frac{\partial^{k+l}}{\partial \xi^k \partial t^l} [v(\xi, t) - B_{N/2+\alpha} v] \right| \leq M_{k,l} \exp(-2\eta) t^{\alpha+N/2+k/2-l} (1 + |\eta|^\lambda), \quad k, l=0, 1, 2, \dots, \quad (5.7)$$

где $B_{N/2+\alpha} v$ — это частичная сумма ряда (5.6), включающая все члены с $j \leq N$.

Аналогично определяется класс $\mathfrak{B}_\alpha^-$ с заменой $\mathfrak{A}^+$ на $\mathfrak{A}^-$ и $\exp(-2\eta)$ на $\exp(2\eta)$.

Так же, как в § 1, посредством $\tilde{v}(\xi, t)$ обозначим решение уравнения (1.16), которое дается формулой (1.20) при $c_0(t) \equiv 0$ и $a = 0$. Последнее равенство допустимо, так как для малых $t > 0$ справедливы соотношения

$$v_0(-\infty, t) = u_0(s(t) - 0, t) > 0,$$

$$v_0(+\infty, t) = u_0(s(t) + 0, t) < 0.$$

Постоянная $C(t)$ определяется равенствами (1.17). Таким образом, явная формула для $\tilde{v}(\xi, t)$ имеет следующий вид:

$$\tilde{v} = \int_0^\infty [\varphi(z) - s'(t)z - \varphi(P_0^+(t)) + s'(t)P_0^+(t)]^{-1} dz. \quad (5.8)$$

Теорема 5.1. Функция $\tilde{v}(\xi, t) \in \mathfrak{B}_{1/2}$,

$$\Pi_{0,0}\tilde{v} = -\frac{1}{2b^2} \operatorname{th} \eta, \quad \Pi_{j,q}\tilde{v} = 0 \text{ при } q > 0,$$

$$\tilde{v}(\xi, t) - P_0^\pm(t) \in \mathfrak{B}_{1/2}^\pm.$$

Доказательство может быть получено, например, из явной формулы (5.8). Из теоремы 4.1 и формулы (1.18) вытекает, что $s'(t) = t\Phi_1(t)$, $\varphi(P_0^+(t)) - s'(t)P_0^+(t) = \frac{t}{4b^2} + t^2\Phi_2(t)$, где, как и раньше, под Φ_i будем всюду понимать гладкие функции. Если в интеграле (5.8) сделать замену $z = (2b^2)^{-1}\theta\sqrt{t}$ и обозначить $\tilde{v} = (2b^2)^{-1}\sqrt{t}\psi$, $\eta = 2^{-1}\xi\sqrt{t}$, то получится равенство $\eta = \int_0^\psi [\theta^2 - 1 - \sqrt{t}\Phi(\theta, \sqrt{t})]^{-1} d\theta$. Из него сразу вытекает асимптотическое разложение (5.6) при $\alpha = 1/2$, равномерное по η на любом компакте. При этом $\Pi_{0,0}\tilde{v}(\eta) = -\frac{1}{2b^2} \operatorname{th} \eta$, $\Pi_{j,q}\tilde{v}(\eta) = 0$, если $q > 0$.

Для того чтобы получить асимптотику функций $\Pi_{k,0}\tilde{v}(\eta)$ при $\eta \rightarrow \pm \infty$ и оценку (5.7), надо поступить немного по-другому. Рассмотрим, например, значения $\xi > \text{const} \cdot t^{-1/2}$ и сделаем в интеграле (5.8) другую замену: $z = P_0^+(t)\theta$, $\tilde{v} = P_0^+(t)W$, $\eta = 2^{-1}\xi\sqrt{t}$. Тогда получится соотношение

$$\eta = - (1 + \sqrt{t} \Phi_3(\sqrt{t})) \int_0^W [\theta^2 - 1 + \sqrt{t}(1-\theta) \Phi_4(\sqrt{t}, \theta)]^{-1} d\theta,$$

из которого уже легко вывести оценки (5.7) при $\eta > \text{const}$. Аналогично получаются эти оценки и при $\eta < \text{const}$. ■

Теперь можно получить асимптотику функции $c_0(t)$, которая определяется как решение уравнения (1.31). Для этого надо выяснить асимптотику правой части этого уравнения при $t \rightarrow 0$. Из формул (1.22), (3.4) и (3.14) вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} P_1^\pm(\xi, t) &= \frac{\partial u_0}{\partial x}(s(t) \pm 0, t) = \frac{\Psi'(y_\pm(t))}{\omega(y_\pm(t), t)} = \\ &= \frac{-2^{-1}b^{-2} \pm \sqrt{t} \Phi_1(t) + t \Phi_2(t)}{2t \pm t \sqrt{t} \Phi_3(t) + t^2 \Phi_4(t)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1^\pm(0, t) &= u_1(s(t) \pm 0, t) = \\ &= [\omega(y_\pm(t), t)]^{-2} [\omega(y_\pm(t), t) \Phi_5(y_\pm(t)) + y_\pm(t) \Phi_6(y_\pm(t))] + \\ &\quad + [\omega(y_\pm(t), t)]^{-1} \Phi_7(y_\pm(t)) \ln [\omega(y_\pm(t), t)] = \\ &= \pm t^{-3/2} \Phi_8(t) + t^{-1} \Phi_9(t) + (\Phi_{10}(t) \pm \sqrt{t} \Phi_{11}(t)) t^{-1} \ln t. \end{aligned}$$

Поэтому те слагаемые правой части (1.31), которые не содержат интегралов, в сумме равны $t^{-1/2} [\Phi(t) + \Phi(t) \ln t]$.

Асимптотика интегралов в правой части (1.31) легко подсчитывается с помощью теоремы 5.1 и явного вида главного члена $\Pi_{0,0}\tilde{v}$. В результате оказывается, что уравнение (1.31) имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt} [c_0(t) \kappa(t)] = t^{-1/2} \Phi(t^{1/2}) + t^{-1/2} \Phi(t) \ln t, \quad (5.9)$$

где $\kappa(t) = P_0^+(t) - P_0^-(t) = \sqrt{t} \Phi(t)$. (Возможно, что первая из функций Φ в уравнении (5.9) является гладкой функцией от t , но для выяснения этого обстоятельства требуется более тщательное изучение вида функций $\Pi_{k,0}\tilde{v}$ в теореме 5.1. С другой стороны, эта деталь не оказывает существенного влияния на дальнейшее исследование.)

Таким образом, из уравнения (5.9) вытекает, что

$$c_0(t) = \Phi_1(\sqrt{t}) + \Phi_2(t) \ln t + c[\kappa(t)]^{-1}.$$

Интуитивно ясно и в дальнейшем подтвердится, что постоянная $c = 0$. Поэтому будем считать функцию $c_0(t)$ окончательно определенной:

$$c_0(t) = \Phi_1(\sqrt{t}) + \Phi(t) \ln t. \quad (5.10)$$

Тем самым окончательно определена и функция $v_0(\zeta, t) = \tilde{v}(\zeta + c_0(t), t)$.

Теорема 5.2. Функция $v_0(\zeta, t) \in \mathfrak{B}_{1/2}$,

$$\Pi_{0,0} v_0 = -\frac{ih\eta}{2b^2}, \quad v_0(\zeta, t) - P_0^\pm(t) \in \mathfrak{B}_{1/2}^\pm.$$

Доказательство состоит в применении теоремы 5.1 к функции $\tilde{v}(\zeta + c_0(t), t)$ и разложении в ряд Тейлора каждой из функций $\Pi_{j,0} \tilde{v}$ в точке $\eta = 2^{-1} \zeta \sqrt{t}$ с учетом вида (5.10). ■

Лемма 5.1. Пусть в уравнении

$$L_1 v = F(\zeta, t), \quad (5.11)$$

где L_1 — это оператор (1.12), правая часть $F(\zeta, t) \in \mathfrak{B}_\alpha^+ \cap \mathfrak{B}_\alpha^-$. Тогда для существования решения уравнения (5.11) при $t > 0$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$v(\zeta, t) \xrightarrow{|\zeta| \rightarrow \infty} 0, \quad (5.12)$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta, t) d\zeta = 0. \quad (5.13)$$

При выполнении этого условия существует решение $v^*(\zeta, t) \in \mathfrak{B}_{\alpha-1}^+ \cap \mathfrak{B}_{\alpha-1}^-$. Любое решение задачи (5.11), (5.12) равно

$v^*(\zeta, t) + c(t)Z(\zeta, t)$, где $Z(\zeta, t) = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \zeta}(\zeta, t)$ и $\tilde{v}(\zeta, t)$ определяется формулой (5.8).

Доказательство необходимости вытекает из интегрирования уравнения от $-\infty$ до $+\infty$, а достаточность следует из формулы для решения:

$$\begin{aligned} v(\zeta, t) &= Z(\zeta, t) \left\{ \int_0^\zeta F_1(\zeta_1, t) [Z(\zeta_1, t)]^{-1} d\zeta_1 + c(t) \right\} = \\ &= v^*(\zeta, t) + c(t) Z(\zeta, t), \end{aligned}$$

Здесь $F_1(\zeta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta_1, t) d\zeta_1 \in \mathfrak{B}_{\alpha-1/2}$ в силу (5.13), $Z(\zeta, t) \in$

$\mathfrak{B}_1^+ \cap \mathfrak{B}_1^-$ в силу теоремы 5.1. Из этой же теоремы следует, что

$$[Z(\zeta, t)]^{-1} = -\frac{2b^2 \text{ch}^2 \eta}{t} \sum_{j=0}^{\infty} t^{j/2} X_j(\eta), \text{ где функции } X_j(\eta) \text{ медлен-}$$

ного роста, $X_j(\eta) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, асимптотическое разложение равномерно относительно η и допускает почленное дифференцирование. После этого из явного вида $v^*(\zeta, t)$ вытекает, что $v^*(\zeta, t) \in \mathfrak{B}_{\alpha-1}^+ \cap \mathfrak{B}_{\alpha-1}^-$. ■

Лемма 5.2. Пусть функции $P^+(\zeta, t)$ и $P^-(\zeta, t)$ принадлежат классу $\mathfrak{B}_\alpha$, $F(\zeta, t) - L_1 P^\pm(\zeta, t) \in \mathfrak{B}_\alpha^\pm$, где L_1 — оператор (1.12). Тогда для существования решения задачи

$$L_1 v = F(\zeta, t), \quad v - P^\pm \in \mathfrak{B}_{\alpha-1}^\pm \quad (5.14)$$

необходимо и достаточно выполнение условия (1.33).

Доказательство. Необходимость и достаточность условия (5.14) для разрешимости уравнения $L_1 v = F(\zeta, t)$ были доказаны в лемме 1.1. Остается лишь проверить, что $v - P^\pm \in \mathfrak{B}_{\alpha-1}^\pm$. Это сразу вытекает из явной формулы (1.34). ■

Теорема 5.3. Для решений системы (1.12), (1.13), (5.3) с условиями (1.23), (5.5) справедливы следующие утверждения:

1) $v_{k,i}(\zeta, t) \in \mathfrak{B}_{n_k}$, где $n_k = 1/2 - [k/4]$;

2) если $i > 0$ или $k \neq 0 \pmod{4}$, то

$$v_{k,i}(\zeta, t) \in \mathfrak{B}_{n_k}^+ \cap \mathfrak{B}_{n_k}^-;$$

3) если $k = 4m$, где $m \geq 0$ — целое, то

$$v_{4m}(\zeta, t) - P_m^\pm(\zeta, t) \in \mathfrak{B}_{1/2-2m}^\pm;$$

4) каждая из функций $v_{k,i}(\zeta, t)$ при $k > 0$ и при условии, что уже определены все функции $v_{k_1,j}$ для $k_1 < k$, определяется однозначно с точностью до слагаемого $c_{k,i}[\kappa(t)]^{-1} Z(\zeta, t)$, где $\kappa(t) = P_0^+(t) - P_0^-(t)$.

Доказательство. При $k = 0$ утверждение теоремы вытекает из теоремы 5.2. При $k = 1$, $i = 0$ уравнение (5.3) — однородное. Поэтому $v_{1,0}(\zeta, t) = c_{1,0}(t)Z(\zeta, t)$, где $Z(\zeta, t) = \frac{\tilde{d}v}{d\zeta}(\zeta, t) \in \mathfrak{B}_1^+ \cap \mathfrak{B}_1^-$ в силу теоремы 5.1. Коэффициент $c_{1,0}(t)$ определяется

из уравнения (5.3) при $k = 5$. Действительно, из леммы 5.1 следует соотношение $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v_{1,0}}{\partial \xi}(\xi, t) d\xi = 0$. Отсюда вытекает, что $c_{1,0}(t) = c_{1,0}[\kappa(t)]^{-1}$, где $c_{1,0} = \text{const}$. Из вида $\kappa(t)$ (формула (1.22), теорема 3.1 и соотношение $u_0(x, t) = \psi(y)$) следует, что $v_{1,0}(\xi, t) \in \mathfrak{B}_{1/2}^+ \cap \mathfrak{B}_{1/2}^-$.

Точно так же утверждение теоремы последовательно доказывается для $v_{1,j}$, $v_{2,j}$ и $v_{3,j}$. При этом функции $v_{1,j}$, $v_{2,j}$ и $v_{3,j}$ построены так, что задачи (5.3), (5.5) при $k = 5$, $k = 6$ и $k = 7$ имеют решения. Для функции $v_{4k,0}(\xi, t) \equiv v_{4k}(\xi, t)$ задача (1.13), (1.23) также имеет решение вследствие уже проведенного выбора $c_0(t)$.

Далее, доказательство продолжается по индукции так же, как это было сделано при доказательстве теоремы 1.1. Несущественное отличие состоит в том, что здесь появились новые функции $v_{k,j}(\xi, t)$ при $j > 0$ и при $j = 0$, $k \not\equiv 0 \pmod{4}$. А существенное отличие состоит в том, что надо выяснить асимптотику получающихся решений при $t \rightarrow 0$, т. е. проверить условия 2), 3).

Итак, предположим, что утверждения теоремы справедливы при $k < 4n$, где n — натуральное число. Предположим также, что для $4n \leq k < 4(n+1)$ задачи (1.13), (1.23), (5.3), (5.5) разрешимы и при этом некоторые решения $v_{k,i}^*(\xi, t)$ этих задач удовлетворяют условиям 1)–3). Тогда покажем, что при $4n \leq k < 4(n+1)$ функции $v_{k,i}(\xi, t)$ определяются с точностью до слагаемого $c_{k,i}[\kappa(t)]^{-1}Z(\xi, t)$ так, что выполнены утверждения 1)–4) теоремы и что при этом разрешимы задачи (1.13), (1.23), (5.3), (5.5) для $4(n+1) \leq k \leq 4(n+2)$.

К функции $v_{4n+4}(\xi, t)$ применим лемму 5.3, взяв в качестве $P^\pm(\xi, t)$ полиномы $P_{n+1}^\pm(\xi, t)$ из формул (1.22). Функции $P_k^\pm(\xi, t)$ удовлетворяют рекуррентной системе (1.24). Поэтому

$$L_1 P_{n+1}^\pm = \frac{\partial}{\partial \xi} \{ [\Phi'(P_0^\pm) - \Phi'(v_0)] P_{n+1}^\pm \} + \frac{\partial P_n^\pm}{\partial t} + \\ + \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{q \geq 2} \frac{\varphi^{(q)}(P_0^\pm)}{q!} \sum_{\Sigma i_p = n+1} \prod_{p=1}^q P_{i_p}^\pm. \quad (5.15)$$

Из предположения индукции, формул (3.14), (1.22) и вида уравнений (1.13) заключаем, что условия леммы 5.2 выполнены

при $\alpha = -\frac{1}{2} - 2n$. Согласно этой лемме для разрешимости задач (1.13), (1.23) необходимо и достаточно выполнение условия (1.33),

где $P^\pm = P_{n+1}^\pm(\xi, t)$, а $F(\xi, t) = \frac{\partial}{\partial \xi} G(v_0, v_4, \dots, v_{4n}) + \frac{\partial v_{4n}}{\partial t}$ из формулы (1.14). Так как решение задачи (1.13), (1.23) при $k = 4n$ записывается в виде $v_{4n}^*(\xi, t) + c_{4n,0}(t)Z(\xi, t)$, то из предположения индукции и вида (5.15) для $L_1 P_{n+1}^\pm$ вытекает,

что условие (1.33) записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} c_{4n,0}(t) Z(\xi, t) d\xi = \frac{d}{dt} [c_{4n,0}(t) \kappa(t)] = f_n^*(t),$$

где для функции $f_n(t)$ справедливо асимптотическое разложение

$$f_n(t) = t^{-2n-1} \sum_{j=0}^{\infty} t^{j/2} \sum_{q=0}^j f_{n,j,q} \ln^q t, \quad t \rightarrow 0.$$

Тем самым функция $c_{4n,0}(t)$ определена с точностью до слагаемого $\text{const} \cdot [\kappa(t)]^{-1}$, построенная функция $v_{4n}(\xi, t)$ удовлетворяет условию 3) настоящей теоремы, а задача (1.13), (1.23) при $k = 4n + 4$, $i = 0$ разрешима, и ее решение $v_{4n+4}^*(\xi, t)$ удовлетворяет условиям 1), 3).

Аналогично проводится построение остальных $v_{4n,i}(\xi, t)$ при $i > 0$ и функций $v_{k,i}(\xi, t)$ при $4n < k < 4(n+1)$ и обеспечивается разрешимость соответствующих задач (5.3), (5.5) для $v_{4n+4,i}^*(\xi, t)$ при $i > 0$ и $v_{k,i}^*(\xi, t)$ при $4(n+1) < k < 4(n+2)$. Для этого достаточно воспользоваться предположением индукции и леммой 5.1. ■

§ 6. Построение равномерного асимптотического разложения

Фактически в предыдущих параграфах равномерное асимптотическое разложение решения $u(x, t, \varepsilon)$ уже почти построено. Вне линии l — это внешнее разложение (1.4), в окрестности начала координат это ряд (4.3) и, наконец, в окрестности кривой при $t > 0$ это ряд (5.2) (см. рис. 36). При этом по построению ряд (1.4) согласован как с рядом (4.3), так и с рядом (5.2). Осталось лишь два незавершенных дела. Во-первых, коэффициенты ряда (5.2) определены еще не окончательно — степень произвола в их определении указана в теореме 5.2. Во-вторых, не установлена согласованность рядов (4.3) и (5.2). Обе задачи тесно связаны между собой и будут решаться одновременно. Именно условие согласования рядов (5.2) и (4.3) и дает возможность однозначно определить все $v_{k,j}(\xi, t)$.

Начнем с того, что каждый член ряда (5.2) заменим его асимптотикой при $t \rightarrow 0$ и перейдем к внутренним переменным $\xi = \varepsilon^{-3}x$, $\tau = \varepsilon^{-2}t$. При этом надо учесть, что

$$\eta = \frac{\xi \sqrt{t}}{2} = \frac{x - s(t)}{\varepsilon^4} \sqrt{t} = \frac{\xi \sqrt{\tau}}{2} - \sum_{k=2}^{\infty} a_k \varepsilon^{2k-3} \tau^{k+1/2}.$$

Для каждой из функций $v_{k,j}(\xi, t)$ при $4m \leq k < 4(m+1)$ получится асимптотическое разложение

$$v_{k,j}(\xi, t) = \varepsilon^{1-4m} \tau^{1/2-2m} \sum_{\substack{i \geq l \geq 0 \\ j \geq 5i}} \varepsilon^i P_{j,m,l}(\tau^{1/2}) [\ln(\varepsilon^2 \tau)]^l V_{m,i,l}(z), \quad (6.1)$$

где $z = \xi \sqrt{\tau}/2$. Здесь $P_{j,m,l}$ — это полиномы степени не выше j . Следует специально выделить то слагаемое в выражении функции $v_{k,j}(\xi, t)$, которое пока определено неоднозначно. Согласно теоремам 5.1 и 5.3 это слагаемое равно

$$c_{k,j} [\kappa(t)]^{-1} Z(\xi, t) = c_{k,j} \varepsilon \tau^{1/2} \left(-\frac{1}{8b^2 \operatorname{ch}^2 z} + \sum_{i \geq 1, l \leq 5i} \varepsilon^i \bar{P}_l(\sqrt{\tau}) \bar{V}_i(z) \right), \quad (6.2)$$

где многочлены $\bar{P}_l$ и функции $\bar{V}_i$ однозначно определяются из асимптотики κ и Z . Таким образом, удобно представить асимпотику функции $v_{k,j}$ в виде суммы рядов (6.1) и (6.2), где все P_j и $V_{m,i,l}$ однозначно определены при условии, что фиксированы все $v_{q,s}$ при $q < k$. Если подставить указанные асимптотические разложения в ряд (5.2) и перегруппировать его члены, то получится соотношение

$$v(\xi, t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{j=0}^{k-1} U_{k,j}(\xi, \tau) \ln^j \varepsilon + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} \sum_{j=0}^k c_{k,j} \tau^{1/2} \left(-\frac{1}{8b^2 \operatorname{ch}^2 z} + \sum_{\substack{i \geq 1, \\ l \leq 5i}} \varepsilon^i \bar{P}_l(\sqrt{\tau}) \bar{V}_i(z) \right) \ln^j \varepsilon, \quad (6.3)$$

где $U_{k,j}$ — это асимптотические ряды при $\tau \rightarrow \infty$. Коэффициенты этих рядов легко выписать, исходя из (6.1). Объединяя обе суммы в (6.3), приходим к соотношению

$$v(\xi, t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{U}_{k,j}(\xi, \tau) \ln^j \varepsilon. \quad (6.4)$$

Асимптотические ряды $\tilde{U}_{k,j}$ зависят от постоянных $c_{k,j}$. Каждый член ряда имеет вид $\tau^{r/2} \ln^n \tau V(z)$, где r и n — целые, $n \geq 0$, а функция $V(z)$ на $\pm\infty$ асимптотически равна многочленам.

Теперь осталось показать, что возможен выбор постоянных $c_{k,j}$, при котором $\tilde{U}_{k,j}(\xi, \tau)$ являются асимптотическими разложениями при $\tau \rightarrow \infty$ построенных в § 4 функций $w_{k,j}(\xi, \tau)$. Прежде всего отметим, что $v(\xi, t, \varepsilon)$ — это по построению асимптотическое решение уравнения (0.1). Следовательно, при любом наборе $c_{k,j}$ ряды $\tilde{U}_{k,j}(\xi, \tau)$ являются ф. а. р. той же рекуррентной системы, что и функции $w_{k,j}(\xi, \tau)$, т. е. системы (4.4) — (4.6). Кроме того, ряд (4.3) и ряд (5.2) согласованы с рядом (1.4) при $|\xi| \rightarrow \infty$ и $|\xi| \rightarrow \infty$ соответственно. Поэтому $w_{k,j}(\xi, \tau)$ и $\tilde{U}_{k,j}(\xi, \tau)$ близки при $|\xi| \rightarrow \infty$. Точнее, при $\tau \geq 1$, $|\xi| \sqrt{\tau} > \tau^\alpha$, где $\alpha > 0$, разность между $w_{k,j}(\xi, \tau)$ и N -й частичной суммой ряда $\tilde{U}_{k,j}(\xi, \tau)$ имеет порядок $O((|\xi| + |\tau|)^{-N_1})$, где $N_1 \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$.

Особо следует выделить функции $w_{1,0}(\xi, \tau)$ и $\tilde{U}_{1,0}(\xi, \tau)$, так как они удовлетворяют нелинейному уравнению (4.4).

Лемма 6.1. Построенный выше ряд $\tilde{U}_{1,0}(\xi, \tau)$ является асимптотическим разложением для функции $w_{1,0}(\xi, \tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$, $|\xi| \tau^{1/2} < \tau^\alpha$.

Доказательство. Ряд $\tilde{U}_{1,0}(\xi, \tau)$ не зависит от коэффициентов $c_{k,j}$. Из теорем 5.2 и 5.3 вытекает, что

$$\tilde{U}_{1,0}(\xi, \tau) = \sqrt{\tau} \left(-\frac{\operatorname{th} z}{2b^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-2k} q_k(z) \right), \quad (6.5)$$

где $z = \xi \sqrt{\tau}/2$, а $|q_k(z)| \leq M_k(1 + |z|^k)$. Из явного вида $w_{1,0}(\xi, \tau) = \frac{1}{2b^2} \Gamma(\xi, \tau)$ (см. (4.17), (4.18), (4.23)) следует, что асимптотическое разложение этой функции имеет такой же вид. Здесь оправдывается выбор $c_0(t)$, сделанный перед теоремой 5.2 в формуле (5.10). Благодаря этому главный член асимптотического разложения для $w_{1,0}$ совпадает с первым членом ряда $\tilde{U}_{1,0}$. Остается показать, что и остальные члены $q_k(z)$ определяются однозначно. Подставляя ряд (6.5) в уравнение (4.4), получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{2} (q_k \operatorname{th} z)' + \frac{1}{4} q_k'' = \frac{z}{2} q_{k-1}' - \frac{2k-1}{2} q_{k-1} + b^2 \left(\sum_{j=1}^{k-1} q_j q_{k-j} \right)', \quad (6.6)$$

где $q_0(z) = -\frac{\operatorname{th} z}{2b^2}$. На бесконечности функции $q_k(z)$ экспоненциально быстро стремятся к заданным многочленам. Решение уравнения (6.6) при условии, что все предыдущие q_j известны, опреде-

ляется с точностью до слагаемого $c_k(\operatorname{ch} z)^{-2}$. Эта постоянная c_k находится из следующего уравнения для q_{k+1} и из условия совпадения $q_{k+1}(z)$ с заданными асимптотиками на $\pm \infty$. ■

Теорема 6.1. *Существуют постоянные $c_{k,j}$ такие, что ряды $\tilde{U}_{k,j}(\xi, \tau)$, определенные в формуле (6.4), являются асимптотическими разложениями функций $w_{k,j}(\xi, \tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$, $|\xi|\tau^{1/2} < \tau^\alpha$, $\alpha < 2$.*

Доказательство. Для $k=1, j=0$ справедливость асимптотики установлена в предыдущей лемме. Далее, доказательство проводится по индукции относительно k . Все остальные $w_{k,j}$ и $\tilde{U}_{k,j}$ удовлетворяют линейным уравнениям (4.5). Кроме того, как уже отмечалось выше, при $|\xi|\tau^{1/2} > \tau^\alpha$, $\alpha > 0$, функции $w_{k,j}$ и ряды $\tilde{U}_{k,j}$ асимптотически совпадают с рядом (4.14). Функции $w_{k,j}(\xi, \tau)$ определены при всех ξ и τ , а ряды $\tilde{U}_{k,j}(\xi, \tau)$ имеют асимптотический характер лишь при $\tau \rightarrow \infty$, $|\xi|\tau^{1/2} < \tau^\alpha$, $\alpha < 2$. Поэтому рассмотрим при $\tau \geq \tau_0$ функции $U_{k,j,N}^*$ — частичные суммы составных разложений, построенных обычным способом по рядам $\tilde{U}_{k,j}$ и (4.14). Разность $U_{k,j,N}^*(\xi, \tau) - w_{k,j}(\xi, \tau)$ удовлетворяет уравнению (4.26). По предположению индукции и по построению $U_{k,j,N}^*$ правая часть уравнения и начальная функция удовлетворяют условию теоремы 4.3. Следовательно, рассматриваемая разность при $\xi = 0$ имеет асимптотическое разложение (4.39). Выбирая постоянную $c_{k,j}$ так, чтобы коэффициент при $\tau^{1/2}$ обратился в нуль, заключаем из теоремы 4.3, что и остальные коэффициенты асимптотического разложения при $\xi = 0$ равны нулю вплоть до достаточно большого номера, зависящего от N . Далее, из теоремы 4.4 вытекает, что рассматриваемая разность при $\tau \geq \tau_0 > 1$ вместе с производными достаточно высокого порядка по модулю не превосходит $M(\xi^2 + \tau^2)^{-N/2}$. Последовательно выбирая таким образом постоянные $c_{k,j}$, приходим к заключению теоремы. ■

Построение асимптотического разложения решения $u(x, t, \varepsilon)$ закончено. Отметим, что попутно выяснен оставшийся открытым в § 4 вопрос об асимптотике решений $w_{k,j}(\xi, \tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$. Из теоремы 6.1 следует, что при $\tau > 0$, $|\xi|\tau^{1/2} > \tau^\beta$, $\beta > 0$, $R(\xi, \tau) \rightarrow \infty$ эти функции имеют асимптотическое разложение (4.14). При $|\xi|\tau^{1/2} < \tau^\alpha$, $\alpha < 2$, $\tau \rightarrow \infty$ для функций $w_{k,j}(\xi, \tau)$ справедливы асимптотические разложения $\tilde{U}_{k,j}(\xi, \tau)$ с постоянными $c_{k,j}$, выбранными так, как это указано в доказательстве теоремы 6.1.

Теорема 6.2. *Для решения $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (0.1), (0.2) справедливы следующие асимптотические разложения: в области $\{x, t: |x|^2 + |t|^3 < \varepsilon^{v_1}\}$ — ряд (4.3), в области $\{x, t: \varepsilon^{v_3} < t \leq T, |x - s(t)| < \varepsilon^{v_2}\}$ — ряд (5.2), в области $\{x, t: -1 \leq t \leq T, |t|^3 + x^2 > \varepsilon^{3-v_3}\} \cap \{x, t: 0 \leq t \leq T, |x - s(t)| > \varepsilon^{4-v_4}\}$ — ряд (1.4). Здесь v_i — произвольные положительные числа, а коэффициенты $u_k(x, t)$, $w_{k,j}(\xi, \tau)$ и $v_{k,j}(\xi, t)$ построены в теоремах 3.2, 4.2, 5.3 и 6.1. Смысл асимптотик (4.3), (5.2) и (1.4) состоит в том, что разность между $u(x, t, \varepsilon)$ и частичной суммой соответствующего асим-*

итогического разложения по модулю не превосходит $M_N \varepsilon^{\alpha N}$, где N — номер частичной суммы, а $\alpha > 0$ зависит от соответствующих v_i .

Доказательство. Если взять частичные суммы рядов, указанных в теореме, то из них нетрудно образовать составное разложение $T_N(x, t, \varepsilon)$. Условия согласования рядов (1.4), (4.3) и (5.2) приводит к тому, что функция T_N удовлетворяет уравнению (0.1) всюду в Ω с точностью до $O(\varepsilon^{N_1})$. По построению T_N удовлетворяет условию (0.2). Следовательно, $|T_N(x, t, \varepsilon) - u(x, t, \varepsilon)| < M\varepsilon^{N_1}$. Из явного представления рассматриваемых рядов и из асимптотик их коэффициентов следует, что $N_1 > \alpha N$. ■

Замечание 1. Все утверждения и доказательства с незначительными изменениями переносятся на уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varphi_0(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi_1(x, t, u) = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{где } \frac{\partial \varphi_0}{\partial u} > 0. \quad (6.7)$$

Замечание 2. Благодаря дивергентному виду уравнения (0.1) асимптотическое разложение (5.2) имеет для него более простой вид, а именно: $v_{k,j}(\xi, t) \equiv 0$ при $j > 0$, а также при $k \not\equiv 0 \pmod{4}$.

Для доказательства этого факта достаточно проинтегрировать обе части уравнения по области, граница которой охватывает начало координат. В получившихся интегралах по границе следует поставить ряды (1.4) и (5.2), после чего становится ясно, что ряд (5.2), так же как и ряд (1.4), содержит только целые степени ε . Для уравнения (6.7) асимптотическое разложение (5.2) имеет, по видимому, общий, более сложный вид.

Выпишем первое равномерное приближение решения $u(x, t, \varepsilon)$. Пусть $\chi(z) = 1$ при $z \geq 0$, $\chi(z) = 0$ при $z < 0$ и

$$\begin{aligned} \widehat{u}(x, t, \varepsilon) = & u_0(x, t) + v_0(\xi, t) + \varepsilon w_{1,0}(\xi, \tau) - \chi(\xi) u_0(s(t) + 0, t) - \\ & - (1 - \chi(\xi)) u_0(s(t) - 0, t) - \varepsilon H(\xi, \tau) - 2\sqrt{t} \chi(\xi) + \sqrt{t}. \end{aligned}$$

Здесь ξ , τ и ζ — это введенные выше внутренние переменные, $u_0(x, t)$, $v_0(\xi, t)$, $w_{1,0}(\xi, \tau)$ и $H(\xi, \tau)$ — это функции, определенные в §§ 1, 3, 4. Разность $\widehat{u}(x, t, \varepsilon) - u(x, t, \varepsilon)$ имеет порядок $O(\varepsilon^4)$ при $|x| + |t| > \text{const} > 0$ и имеет порядок $O(\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|)$ при $|\xi| + |\tau| < \text{const}$. В областях, промежуточных между этими областями, погрешность аппроксимации имеет порядок, промежуточный между $\varepsilon^2 \ln \varepsilon$ и ε^4 .

§ 7. Асимптотика волны горения

Этот параграф отличается от остальных прежде всего тем, что здесь указано лишь построение (да и то краткое) асимптотического разложения решения и не проводится обоснование асимптотики. Расположение этого параграфа в гл. VI может быть как-то оправдано тем, что физическая задача в первоначальной постановке описывается системой квазилинейных параболиче-

ских уравнений. Но после сильных упрощающих предположений задача сводится к исследованию обыкновенного дифференциального уравнения, так что с большим основанием ее можно было бы поместить в гл. II. Все эти особенности параграфа и само его появление обусловлены прежде всего техническими причинами, возникшими при корректуре книги. А теперь перейдем к описанию задачи.

Простейшая модель горения газа в одномерной среде сводится к системе уравнений

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Qw, \quad \frac{\partial a}{\partial t} = D \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - w, \quad (7.1)$$

где $T(x, t)$ — температура, $a(x, t)$ — концентрация горючей смеси. Здесь коэффициент теплоемкости c , коэффициент теплопроводности λ и тепловой эффект реакции Q постоянны. Скорость реакции w связана с концентрацией равенством $w = a^\beta k_0 \exp(-E/RT)$, где $k_0 = \text{const}$, R — газовая постоянная; порядок реакции β и энергия активации E тоже предполагаются постоянными. Следующее предположение состоит в том, что в конденсированной среде коэффициент диффузии D считается равным нулю и отыскивается решение типа волны, бегущей с постоянной скоростью κ :

$$T(x, t) = T(x - \kappa t), \quad a(x, t) = a(x - \kappa t). \quad (7.2)$$

При $x \rightarrow \infty$ (там, где реакция еще не началась) $T \rightarrow T_0$, $a \rightarrow 1$, а при $x \rightarrow -\infty$ предельные значения этих функций равны T_1 и нулю. Далее надо подставить функции (7.2) в уравнения (7.1) (при $D=0$) и проинтегрировать один раз первое уравнение. В результате получатся уравнения

$$\kappa T' = c\kappa(T_1 - T) - Q\kappa a, \quad \kappa a' = w, \quad (7.3)$$

откуда, в частности, следует, что $T_1 - T_0 = Qc^{-1}$. Если обозначить $z = (T_1 - T)(T_1 - T_0)^{-1}$ и взять z в качестве независимой переменной, то придем к одному дифференциальному уравнению

$$\frac{\kappa^2 c}{\lambda} \frac{da}{dz} = \frac{a^\beta k_0}{a - z} \exp\left(-\frac{E}{R(T_1 - zQc^{-1})}\right) \quad (7.4)$$

и граничным условиям: $a(0) = 0$, $a(1) = 1$.

Малым параметром в этой задаче является величина $\varepsilon = RcT_1^2(EQ)^{-1}$, которая характеризует относительную ширину зоны химической реакции (более подробные сведения о физической интерпретации задачи и библиографию можно найти в [121]).

Далее сделаем замену $z = \varepsilon \xi$ и введем обозначения двух безразмерных параметров

$$b = Q(cT_1)^{-1} < 1, \quad v = c\kappa^2(\lambda k_0 \varepsilon)^{-1} \exp(E/RT_1)$$

и новое обозначение неизвестной функции, включив в нее зависимость от ε : $a(z) \equiv u(\xi, \varepsilon)$. Уравнение (7.4) и граничные условия принимают вид

$$v \frac{du}{d\xi} = \frac{u^b}{u - \varepsilon \xi} \exp\left(-\frac{\xi}{1 - b\varepsilon \xi}\right), \quad (7.5)$$

$$u(0, \varepsilon) = 0, \quad u(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) = 1.$$

Кроме неизвестной функции $u(\xi, \varepsilon)$ здесь надо найти постоянную $v(\varepsilon)$, связанную с неизвестной скоростью κ волны вида (7.2).

Последний нюанс состоит в том, что задача (7.5) не имеет решения так же, как, разумеется, и задача (7.3) с указанными выше условиями на бесконечности. При температуре, близкой к T_0 ($z \approx 1$), решение в действительности не имеет вида (7.2). Тем не менее уравнения (7.3) и (7.5) правильно описывают физический процесс в основной зоне горения, и одна из возможных моделей состоит в изменении скорости реакции w при $T \sim T_0$ — правая часть уравнения (7.5) считается равной нулю при $z \geq z_0$ (т. е. при $\xi \geq z_0 \varepsilon^{-1}$), где $0 < z_0 < 1$.

Итак, окончательная математическая постановка следующая:

$$v \frac{du}{d\xi} = \frac{u^b}{u - \varepsilon \xi} \left[\exp\left(-\frac{\xi}{1 - b\varepsilon \xi}\right) \right] \chi\left(\xi - \frac{z_0}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0, \quad (7.6)$$

$$u(0, \varepsilon) = 0, \quad u(\infty, \varepsilon) = 1, \quad (7.7)$$

где $\chi(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $0 < z_0 < 1$; $\chi(t) \equiv 1$ при $t \leq -1$, $\chi(t) \equiv 0$ при $t \geq 0$. Неизвестны функция $u(\xi, \varepsilon)$ и параметр $v(\varepsilon)$, требуется найти их асимптотику при $\varepsilon \rightarrow 0$. Эта асимптотика, как оказывается, не зависит от z_0 и от вида функции $\chi(t)$.

Будем рассматривать лишь случай $1 < \beta < 2$ и выпишем предполагаемые асимптотические ряды для $v(\varepsilon)$ и $u(\xi, \varepsilon)$:

$$v(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \varepsilon^k, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (7.8)$$

$$u(\xi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(\xi), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (7.9)$$

Подставляя эти ряды в (7.6), получим рекуррентную систему уравнений

$$v_0 u_0' = u_0^{\beta-1} e^{-\xi}, \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} l u_1 &\equiv v_0 u_1' - (\beta - 1) u_0^{\beta-2} e^{-\xi} u_1 = \\ &= -v_1 u_0' + u_0^{\beta-2} e^{-\xi} (\xi - b u_0^2), \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$l u_k = -v_k u_0' - \sum_{i=1}^{k-1} v_i u_{k-i}' + u_0^{\beta-1} f_k(\xi, u_0, \dots, u_{k-1}), \quad k \geq 2. \quad (7.12)$$

Уравнение (7.10) решается в квадратурах. Из явного вида $u_0(\xi)$ вытекает, что для выполнения условий (7.7) необходимо и достаточно следующее: $u_0(\xi) = (1 - e^{-\xi})^{1/v_0}$, $v_0 = 2 - \beta$. Это значение v_0 и вид функции $u_0(\xi)$ мы окончательно фиксируем до конца параграфа. Тогда для остальных $u_k(\xi)$ при $k \geq 1$ должны быть выполнены равенства

$$u_k(0) = 0, \quad (7.13)$$

$$u_k(\infty) = 0. \quad (7.14)$$

Единственным решением уравнения (7.11), удовлетворяющим условию (7.14), является функция

$$\begin{aligned} u_1(\xi) &= v_1 v_0^{-2} e^{-\xi} u_0^{\beta-1}(\xi) - \\ &- v_0^{-1} u_0^{\beta-1}(\xi) \int_{\xi}^{\infty} [\theta(u_0(\theta))^{-1} - b \theta^2] e^{-\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Аналогичная формула получается и для любого $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} u_k(\xi) &= v_k v_0^{-2} e^{-\xi} u_0^{\beta-1}(\xi) - \\ &- v_0^{-1} u_0^{\beta-1}(\xi) \int_{\xi}^{\infty} \left[f_k(\theta) - u_0^{1-\beta}(\theta) \sum_{i=1}^{k-1} v_i u_{k-i}'(\theta) \right] d\theta. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Решение $u_1(\xi)$ при любом v_1 удовлетворяет условию (7.13) и, следовательно, из (7.15) не удастся определить v_1 . Еще бóльшие неприятности появляются при рассмотрении второго приближения. Если $\beta > 3/2$, то при любых v_1 и v_2 функция $u_2(\xi)$ имеет в нуле особенность типа $\xi^{(3-2\beta)/(2-\beta)}$. Следующие $u_k(\xi)$ также имеют в нуле парастающие особенности. При $4/3 < \beta < 3/2$ особенности у $u_k(\xi)$ появляются начиная с $u_3(\xi)$, при $5/4 < \beta < 4/3$ — начиная с $u_4(\xi)$ и т. д.

Таким образом, задача (7.6), (7.7) является бисингулярной. Будем искать другие масштабы и другое ф. а. р. вблизи точки $\xi = 0$. Естественно выбрать масштабы так, чтобы оба члена в знаменателе (7.6) — u и $\varepsilon \xi$ — имели одинаковый порядок. Следовательно,

$$\xi = \varepsilon^\alpha \eta, \quad u(\xi, \varepsilon) = \varepsilon^{1+\alpha} v(\eta, \varepsilon). \quad (7.17)$$

Приравнивая порядки обеих частей уравнения (7.6), получаем $1 = (\beta - 1)(1 + \alpha)$, т. е.

$$\alpha = (2 - \beta)(\beta - 1)^{-1}. \quad (7.18)$$

После замены (7.17), (7.18) уравнение (7.6) приобретает вид (учитывая, что множитель $\chi = 1$ в рассматриваемой области)

$$v \frac{dv}{d\eta} = \frac{v^\beta}{v - \eta} \exp\left(-\varepsilon^\alpha \frac{\eta}{1 - b\varepsilon^{1+\alpha}\eta}\right). \quad (7.19)$$

Первое из условий (7.7), естественно, сохраняется:

$$v(0, \varepsilon) = 0, \quad (7.20)$$

а при $\eta \rightarrow \infty$ ряд для v должен быть согласован с рядом (7.9). Из вида (7.19) ясно, что ф. а. р. v должно включать не только степени ε с целыми показателями, но и члены с коэффициентами вида $\varepsilon^{h+\alpha i}$. Такие же члены должны быть и в асимптотике $v(\varepsilon)$, а следовательно, и в ф. а. р. u .

Итак, вместо рядов (7.8), (7.9) нужен более сложный вид асимптотики с членами типа $\varepsilon^{h+\alpha i} u_{h,i}(\xi)$, $\varepsilon^{h+\alpha i} v_{h,i}(\eta)$. Кроме того, в асимптотике функций $u_{h,i}(\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$ могут, вообще говоря, появиться логарифмические члены. Из-за такого обстоятельства множители $\ln^j \varepsilon$ могут появиться, как это неоднократно встречалось в предыдущих главах, и в ф. а. р. u и v . Так что сразу запи-

шем окончательный вид рядов:

$$v = \sum_{\substack{k \geq 0, i \geq 0, \\ 0 \leq j \leq i+k-1}} v_{k,i,j} \varepsilon^{k+\alpha i} \ln^j \varepsilon_x \quad (7.21)$$

$$U = \sum_{\substack{k \geq 0, i \geq 0, \\ 0 \leq j \leq i+k-1}} \varepsilon^{k+\alpha i} \ln^j \varepsilon u_{k,i,j}(\xi)_x \quad (7.22)$$

$$V = \sum_{\substack{k \geq 0, i \geq 0, \\ 0 \leq j \leq i+k-1}} \varepsilon^{k+\alpha i} \ln^j \varepsilon v_{k,i,j}(\eta). \quad (7.23)$$

Для сокращения записи будем обозначать $v_{k,i,0}$ посредством $v_{k,i}$ и такие же обозначения будут использоваться для коэффициентов остальных рядов. Кроме того, $v_{k,0} = v_k$, $u_{k,0}(\xi) = u_k(\xi)$, где $u_k(\xi)$ — решения уравнений (7.11), (7.12), определяемые формулами (7.15), (7.16). Из уравнения (7.6) легко получить также уравнения для остальных $u_{k,i,j}(\xi)$. Ограничимся лишь выписыванием уравнений для $u_{k,i}(\xi)$:

$$lu_{k,i} = u_{0,i}^{\beta-1} f_{k,i}(\xi, u_0, u_1, \dots) - \sum_{\substack{0 \leq l \leq k, 0 \leq p \leq i, \\ l+p > 0}} v_{l,p} u'_{k-l,i-p}(\xi), \quad i > 0. \quad (7.24)$$

(Конкретный подсчет показывает, что для $i+k \leq 2$ коэффициенты при логарифмических членах в асимптотиках $u_{k,i}(\xi)$ и $v_{k,i}(\eta)$ равны нулю. Поэтому при $i+k \leq 2$ индекс $j=0$. Пока что не удалось ни доказать, ни опровергнуть наличие логарифмических слагаемых в следующих членах рядов (7.21) — (7.23).)

Из (7.23) и (7.19), (7.20) следуют уравнения для $v_{k,i,j}(\eta)$ и граничное условие. Опять-таки ограничимся лишь функциями $v_{k,i}(\eta)$:

$$v_0 v'_0 = v_0^\beta (v_0 - \eta)^{-1}, \quad v'_0 \equiv v_{0,0}, \quad (7.25)$$

$$l_1 v_{k,i} \equiv v_0 v'_{k,i} - [\beta v_0^{\beta-1} (v_0 - \eta)^{-1} - v_0^\beta (v_0 - \eta)^{-2}] v_{k,i} = \\ = \varphi_{k,i}(\eta, v_0, \dots) - \sum_{\substack{0 \leq l \leq k, 0 \leq p \leq i, \\ l+p > 0}} v_{l,p} v'_{k-l,i-p}(\eta), \quad i+k > 0, \quad (7.26)$$

$$v_{k,i,j}(0) = 0. \quad (7.27)$$

Теперь, как всегда, предстоит найти асимптотику функций $u_{k,i,j}(\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$, асимптотику функций $v_{k,i,j}(\eta)$ при $\eta \rightarrow \infty$ и выяснить, какова степень произво-

ла при определении этих функций. Отличие от предыдущих задач состоит в том, что при согласовании рядов (7.22), (7.23) дополнительно надо определять коэффициенты числового ряда (7.21). Более того, коэффициенты $v_{k,i,j}$ — это единственные произвольные числа, которые надо определять. Действительно, функции $u_{k,i,j}(\xi)$ однозначно определяются из своих уравнений и из условий стремления к нулю на бесконечности по формулам, фактически совпадающим с (7.16), если известны все $v_{l,p,s}$ при $l \leq k$, $p \leq i$, $s \leq j$. Ниже мы увидим, что настолько же однозначно из своих уравнений и условия (7.27) определяются $v_{k,i,j}(\eta)$. Введем еще обозначения

$$\gamma = \alpha^{-1} = (\beta - 1)(2 - \beta)^{-1}$$

и выпишем полезные соотношения между показателями:

$$v_0^{-1} = (2 - \beta)^{-1} = 1 + \gamma, \quad \beta(2 - \beta)^{-1} = 1 + 2\gamma, \\ (\beta - 1)(1 + \alpha) = 1, \quad (\beta - 1)(1 + \gamma) = \gamma.$$

Из явного вида $u_0(\xi)$ следует, что

$$u_0(\xi) = \xi^{1+\gamma} \left(1 - \frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{6} - \dots \right)^{\gamma+1} = \xi^{1+\gamma} \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} d_s \xi^s \right), \quad \xi \rightarrow 0.$$

А теперь перейдем к выяснению асимптотики $v_0(\eta)$. Уравнение (7.25) явно решается в квадратурах относительно функции v_0 . Учитывая условие (7.27), имеем

$$\eta = \alpha \exp(\alpha v_0^{1-\beta}) \int_{v_0^{1-\beta}}^{\infty} \zeta^{(1-\beta)^{-1}} \exp(-\alpha \zeta) d\zeta.$$

Отсюда легко получить асимптотику при $v_0 \rightarrow \infty$. Если обозначить $x = \alpha v_0^{1-\beta}$, то для нецелых α

$$\eta = \alpha^\alpha x^{-\alpha} \{ 1 - x(\alpha - 1)^{-1} - x^\alpha \Gamma(1 - \alpha) - \\ - x^{1+\alpha} \Gamma(1 - \alpha) + x^2(\alpha - 1)^{-1}(\alpha - 2)^{-1} + \dots \}, \quad x \rightarrow 0, \quad (7.28)$$

где $\Gamma(z)$ — функция Эйлера. Обращение этого равенства приводит к асимптотике

$$v_0(\eta) = \eta^{1+\gamma} \left(1 + \sum_{i+j>0} c_{i,j} \eta^{-i-\gamma j} \right), \quad \eta \rightarrow \infty, \quad (7.29)$$

где $C_{1,0} = \alpha^{\alpha-1}(1 + \alpha)\Gamma(1 - \alpha)$, $c_{0,1} = (\alpha + 1)(\alpha - 1)^{-1}$ и т. д.

Нетрудно выписать явные формулы и для остальных коэффициентов $c_{i,j}$.

Таким образом, мы видим, что в главном ряде (7.22) и (7.23) согласованы автоматически:

$$A_{1+\alpha,\eta}A_{0,\xi}U = A_{1+\alpha,\eta}u_0(\varepsilon^\alpha\xi) = \varepsilon^{1+\alpha}\eta^{1+\gamma},$$

$$A_{0,\xi}A_{1+\alpha,\eta}(\varepsilon^{1+\alpha}V) = A_{0,\xi}(\varepsilon^{1+\alpha}v_0(\eta)) = \xi^{1+\alpha} = \varepsilon^{1+\alpha}\eta^{1+\gamma}.$$

Дальнейшее согласование рядов (7.22), (7.23) удобно проводить с помощью табл. 10. Ее структура такая же, как и у предыдущих таблиц, и в пояснениях не пуждается. (Всюду до конца параграфа будем считать β , α и γ рациональными числами для того, чтобы в коэффициентах асимптотик не появлялись особенности (как это было в (7.28) при натуральных α). Замечание о рациональных β будет сделано в конце параграфа.)

Пока что определены первый столбец и первая строка таблицы ($v_0(\eta)$ и $u_0(\xi)$), откуда следует, что главный член асимптотики функции $u_1(\xi)$ должен равняться $c_{0,1}\xi$, а главный член асимптотики функции $u_{1,0}(\xi)$ равен $c_{1,0}\xi^\gamma$. Из уравнения (7.24), где $f_{0,1} \equiv 0$ и правая часть равна $-v_{0,1}u'_0$, вытекает, что

$$u_{0,1}(\xi) = v_{0,1}v_0^{-2}u_0^{\beta-1}(\xi)e^{-\xi}.$$

Следовательно, $v_{0,1} = v_0^2 c_{1,0}$.

Формула (7.16) при $k=1$, $f_1(\xi) = e^{-\xi}(\xi u_0^{-1}(\xi) - b\xi^2)$ дает возможность найти асимптотику $u_1(\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$. Второе слагаемое в этой формуле равно

$$(\alpha+1)(\alpha-1)^{-1}\xi + Cu_0^{\beta-1}(\xi) + O(\xi^2 + \xi^{1+\gamma}), \quad \xi \rightarrow 0.$$

Так как $u_0^{\beta-1}(\xi) \sim \xi^\gamma$ при $\xi \rightarrow 0$, то постоянную v_1 надо выбрать так, чтобы в разложении функции $u_1(\xi)$ отсутствовало слагаемое ξ^γ . Тем самым найдены v_1 , $v_{0,1}$ и полностью определены $u_1(\xi)$, $u_{0,1}(\xi)$. Их асимптотики выписаны во второй и третьей строках таблицы.

Теперь вернемся к функциям $v_{k,i}(\eta)$. При $i+k > 0$ они удовлетворяют линейным уравнениям (7.26). Решения этих уравнений, удовлетворяющие условиям (7.27), имеют вид

$$v_{k,i}(\eta) = v_0^{-1} \exp Z(\eta) \int_0^\eta \tilde{\varphi}_{k,i}(\tau) \exp(-Z(\tau)) d\tau, \quad (7.30)$$

Таблица 10

$\frac{\varepsilon^{1+\alpha}v}{U}$	$\varepsilon^{1+\alpha}v_0$	$\varepsilon^{2+\alpha}v_1$	$\varepsilon^{1+2\alpha}v_{0,1}$	$\varepsilon^{3+\alpha}v_2$	$\varepsilon^{2+2\alpha}v_{1,1}$	$\varepsilon^{1+3\alpha}v_{0,2}$	...
u_0	$\frac{\varepsilon^{1+\alpha}\eta^{1+\gamma}}{\xi^{1+\gamma}}$	—	$\frac{\varepsilon^{1+2\alpha}\eta^{2+\gamma}}{c_{\xi}^{2+\gamma}}$	—	—	$\frac{\varepsilon^{1+3\alpha}\eta^{3+\gamma}}{c_{\xi}^{3+\gamma}}$	...
u_1	$\frac{\varepsilon^{1+\alpha}c_{0,1}\eta}{\varepsilon c_{0,1}\xi}$	$\frac{\varepsilon^{2+\alpha}\eta^{1+\gamma}}{\varepsilon c_{\xi}^{1+\gamma}}$	$\frac{\varepsilon^{1+2\alpha}\eta^2}{\varepsilon c_{\xi}^2}$	—	$\frac{\varepsilon^{2+2\alpha}\eta^{2+\gamma}}{\varepsilon c_{\xi}^{2+\gamma}}$	$\frac{\varepsilon^{1+3\alpha}\eta^3}{\varepsilon c_{\xi}^3}$	...
$\varepsilon^\alpha u_{0,1}$	$\frac{\varepsilon^{1+\alpha}c_{1,0}\eta^\gamma}{\varepsilon^\alpha c_{1,0}\xi^\gamma}$	—	$\frac{\varepsilon^{1+2\alpha}\eta^{1+\gamma}}{\varepsilon^\alpha c_{\xi}^{1+\gamma}}$	—	—	$\frac{\varepsilon^{1+3\alpha}\eta^{2+\gamma}}{\varepsilon^\alpha c_{\xi}^{2+\gamma}}$	...
$\varepsilon^2 u_2$	$\frac{\varepsilon^{1+\alpha}c_{0,2}\eta^{1-\gamma}}{\varepsilon^2 c_{0,2}\xi^{1-\gamma}}$	$\frac{\varepsilon^{2+\alpha}\eta}{\varepsilon^2 c_{\xi}^{\xi}}$	$\frac{\varepsilon^{1+2\alpha}\eta^{2-\gamma}}{\varepsilon^2 c_{\xi}^{2-\gamma}}$	$\frac{\varepsilon^{3+\alpha}\eta^{1+\gamma}}{\varepsilon^2 c_{\xi}^{1+\gamma}}$	$\frac{\varepsilon^{2+2\alpha}\eta^2}{\varepsilon^2 c_{\xi}^2}$	$\frac{\varepsilon^{1+3\alpha}\eta^{3-\gamma}}{\varepsilon^2 c_{\xi}^{3-\gamma}}$	...
$\varepsilon^{1+\alpha}u_{1,1}$	$\frac{\varepsilon^{1+\alpha}c_{1,1}}{\varepsilon^{1+\alpha}c_{1,1}}$	$\frac{\varepsilon^{2+\alpha}\eta^\gamma}{\varepsilon^{1+\alpha}c_{\xi}^\gamma}$	$\frac{\varepsilon^{1+2\alpha}\eta}{\varepsilon^{1+\alpha}c_{\xi}^{\xi}}$	$\frac{\varepsilon^{3+\alpha}\eta^{2\gamma}}{\varepsilon^{1+\alpha}c_{\xi}^{2\gamma}}$	$\frac{\varepsilon^{2+2\alpha}\eta^{1+\gamma}}{\varepsilon^{1+\alpha}c_{\xi}^{1+\gamma}}$	$\frac{\varepsilon^{1+3\alpha}\eta^2}{\varepsilon^{1+\alpha}c_{\xi}^2}$	...
$\varepsilon^{2\alpha}u_{0,2}$	$\frac{\varepsilon^{1+\alpha}c_{2,0}\eta^{\gamma-1}}{\varepsilon^{2\alpha}c_{2,0}\xi^{\gamma-1}}$	—	$\frac{\varepsilon^{1+2\alpha}\eta^\gamma}{\varepsilon^{2\alpha}c_{\xi}^\gamma}$	—	—	$\frac{\varepsilon^{1+3\alpha}\eta^{\gamma+1}}{\varepsilon^{2\alpha}c_{\xi}^{\gamma+1}}$	...
...	...	...	...	...	...	...	...

где $\tilde{\varphi}_{h,i}$ — правая часть уравнения (7.26), а

$$Z(\eta) = \frac{1}{v_0} \int_{\frac{\eta}{v_0}}^{\eta} [v_0(\theta)]^{\beta-1} (v_0(\theta) - \theta)^{-2} [\beta(v_0(\theta) - \theta) - v_0(\theta)] d\theta. \quad (7.31)$$

Из явного вида $v_0(\theta)$ легко заключить, что $Z(\eta) \rightarrow \infty$ при $\eta \rightarrow 0$. Исследуя по индукции асимптотику $\varphi_{h,i}(\eta)$ при $\eta \rightarrow 0$, нетрудно доказать, что интеграл в (7.30) сходится, и следовательно, решение задачи (7.26), (7.27) единственно и задается этой формулой. То же справедливо и для функций $v_{h,i,j}(\eta)$ при $j > 0$. Больше не будем останавливаться на этом вопросе и приступим к изучению асимптотики $v_{h,i,j}(\eta)$ при $\eta \rightarrow \infty$.

Из (7.31) следует, что при подходящем выборе $\bar{\eta}$

$$\exp Z(\eta) = \eta^\gamma \left(1 + \sum_{i+k>0} b_{h,i} \eta^{-k-\gamma i} \right), \quad \eta \rightarrow \infty,$$

где $b_{0,1} = \gamma^{-1}(1-\gamma)^{-1}$, $b_{1,0} = (\beta-1)c_{1,0}$, а $c_{1,0}$ та же, что и в формуле (7.29).

Поскольку уже определены v_1 и $v_{1,0}$, то однозначно определены функции $v_1(\eta)$ и $v_{1,0}(\eta)$. Их асимптотики при $\eta \rightarrow \infty$ выписаны во втором и третьем столбцах табл. 10 (индексы у постоянных с опущены).

Теперь можно приступить к определению $u_2(\xi)$, $u_{1,1}(\xi)$, $u_{0,2}(\xi)$. Соответствующие постоянные v_2 , $v_{1,1}$, $v_{0,2}$ находятся исходя из заданных в таблице членов вида ξ^i (таков главный член асимптотики у первого слагаемого в формуле (7.16) с неизвестным пока коэффициентом v_2 и аналогичные члены для $u_{h,i}(\xi)$). Правда, функция $u_2(\xi)$ и все следующие $u_k(\xi)$ могут быть найдены сразу из того соображения, что коэффициент при ξ^i у них должен равняться нулю независимо от построения $v_{h,i,j}(\eta)$. И поэтому в асимптотике функций $u_k(\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$ отсутствуют логарифмические члены. А в асимптотике остальных функций $u_{k,i}(\xi)$ при $i > 0$ могут, вообще говоря, появиться слагаемые вида $\xi^\mu \ln^j \xi$. (В соответствии с ранее сделанным замечанием в табл. 10 такие члены отсутствуют.)

Следующий шаг состоит в определении функций $v_2(\eta)$, $v_{1,1}(\eta)$ и $v_{0,2}(\eta)$. Затем процесс продолжается по индукции. Если в асимптотике функции $u_{k,i}(\xi)$ при

$\xi \rightarrow 0$ окажется член вида $\xi^\gamma \ln \xi$ (из формулы (7.16) видно, что это главный логарифмический член), то после замены (7.17) он перейдет в член $\varepsilon \eta^\gamma (\ln \eta + \alpha \ln \varepsilon)$. Для компенсации второго слагаемого вводится член $\varepsilon^{k+i\alpha} \ln \varepsilon u_{k,i,1}(\xi)$. Далее показатели степеней $\ln \varepsilon$ могут увеличиваться подобно тому, как это было в задаче § 2 гл. II (см. табл. 2), и ряды U и V приобретают форму (7.22), (7.23). Не будем более подробно останавливаться на дальнейшем построении и на доказательстве того факта, что во всех клетках табл. 10, кроме тех, где стоит $c\xi^\gamma$, члены асимптотик автоматически совпадают. Такое доказательство можно провести аналогично тому, как это было сделано в § 1 и в § 2 гл. II. Итак, построено асимптотическое разложение решения задачи (7.6), (7.7) с точностью до любой степени ε , равномерное всюду при $\xi \geq 0$. Главным при этом является построение асимптотики $v(\varepsilon)$, а следовательно, скорости волны $\kappa(\varepsilon)$.

В заключение коснемся вопроса о рациональных значениях параметра β . Эта асимптотика для $\beta = \beta_0$ легко может быть получена предельным переходом при $\beta \rightarrow \beta_0$. Надо только позаботиться, чтобы в частичной сумме присутствовало нужное число членов. Так, например, при $\beta_0 = 3/2$ ($\alpha_0 = 1$) для получения асимптотики с точностью $o(\varepsilon^2)$ надо рассматривать члены порядка 1, ε , ε^α . В результате получится равенство

$$v(\varepsilon, \beta) = (2 - \beta) \{1 + \varepsilon [\alpha(\psi(1) - \psi(1 - \alpha^{-1})) - 2b] + \\ + \varepsilon^\alpha \alpha^\alpha \Gamma(1 - \alpha)\} + O(\varepsilon^2 + \varepsilon^{2\alpha}), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$. Переходя к пределу при $\beta \rightarrow 3/2$ ($\alpha \rightarrow 1$), получаем:

$$v\left(\varepsilon, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[1 + \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon(1 + \Gamma'(1) - 2b)\right] + O\left(\varepsilon^2 \ln \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

ПРИМЕЧАНИЯ

И ЛИТЕРАТУРНЫЕ КОММЕНТАРИИ

ГЛАВА I

Задачи для дифференциальных уравнений, которые сейчас называются сингулярно возмущенными, рассматривались давно, по крайней мере в прошлом веке. Ссылки на такие работы имеются, например, в [74]. Однако достаточно общая теория появилась сравнительно недавно. Задача Коши для систем дифференциальных уравнений была рассмотрена в [94], [95] (о дальнейшем развитии этого направления можно узнать из [17]—[19]).

Подробное исследование краевых задач того типа, который приведен в примерах 1—3, было выполнено в работах [20]—[22]. Задачи такого типа часто называют задачами типа погранслоя. Иногда это название распространяют и на те задачи, которые рассматриваются в этой книге и названы здесь бисингулярными. Ситуация, описанная в гл. I, названа в [20] регулярным вырождением. Устоявшаяся терминология отсутствует. Представляется удобным называть задачи, описанные в гл. I, задачами с экспоненциальным пограничным слоем (или каким-нибудь похожим термином, учитывающим, что коэффициенты внешнего разложения — гладкие функции, а функции пограничного слоя экспоненциально быстро стремятся к нулю на бесконечности). Метод, опубликованный в [20]—[22], часто называют методом Вишняка — Люстерника. Его развитие в последующие годы освещено в [97]. Задачи с угловым пограничным слоем экспоненциального типа, сходные с примером 4, рассмотрены в [11]—[14]. Совокупность задач с экспоненциальным пограничным слоем и бисингулярных задач естественно называть задачами типа погранслоя, выделяя их среди большого числа других вопросов в теории дифференциальных уравнений с малым параметром, не затронутых в этой книге.

Из развитых других ветвей асимптотического подхода к дифференциальным уравнениям с малым параметром отметим исследование уравнений с быстроколеблющимися коэффициентами и красивых задач в перфорированных областях (см., например, [7], [28]). Совсем не затронут здесь метод осреднения Крылова — Боголюбова — Митропольского [9].

Более близкими являются те освещенные здесь задачи для дифференциальных уравнений, где коэффициенты гладкие и изменяются медленно, а решения тем не менее быстро колеблются. Метод, который применяется для исследования этих задач, обычно называется методом ВКБ и сводится, грубо говоря, к раздельному

изучению «быстрой» фазы и «медленной» амплитуды колебаний. С методом можно познакомиться по книгам [104], [102], [64]—[66]. Уравнения, которые получаются для амплитуды, также часто оказываются бисингулярными, и к ним может быть применен изложенный выше метод согласования асимптотических разложений.

ГЛАВА II

Метод согласования асимптотических разложений под различными названиями, указанными во введении, возник в механике и позволил построить первые члены асимптотики, выяснить возникавшие парадоксы и т. п. Отметим лишь статьи [116]—[118], [86]. С историей вопроса можно ознакомиться по монографиям [16], [49], [74]. В разных ситуациях этот метод применялся для обыкновенных дифференциальных уравнений в [24], [85], [71]. В случае уравнений в частных производных строгое обоснование асимптотики решений бисингулярных задач — дело сравнительно недавнего прошлого ([1], [34], [35], [54], [59], [92], [101] и др.). Для упомянутых выше задач дифракции коротких волн строгое математическое исследование было проведено в [2]—[5] и др.

§ 1. Пример 5 является учебным и помещен для разъяснения методики, разработанной за последние 10—12 лет (см. [29], [30], [34], [35], [39], [42], [54], [55], [77]—[79], [105]—[107]). Эта методика весьма близка к той, которая изложена в [16], [113], по нашему взгляду, более удобна и последовательна. Другой, хотя и довольно близкий по существу подход развивается в работах [59]—[63].

Для эллиптического уравнения в частных производных задача, упомянутая в замечании к § 1, рассмотрена в [37].

§ 2. Задачи, близкие к примеру 6, рассмотрены в [26], [27].

§ 3. В этом параграфе излагается содержание дипломной работы Ф. М. Саттаровой, выполненной в Башкирском государственном университете в 1979 г.

ГЛАВА III

§ 1. Задача носит вспомогательный, методический характер. Построение асимптотики решений, имеющих особенности в точке, изложено в [30] в форме, удобной для целей рассматриваемой задачи. Значительно ранее, в несколько другой форме, асимптотика функции Грина была построена в [114]. В случае, когда особенность решения расположена вблизи границы, асимптотика функции Грина для эллиптического уравнения второго порядка исследована в [39].

§ 2. Излагается в несколько упрощенном варианте работа [29]. В этой статье задача рассмотрена для общего эллиптического уравнения второго порядка. Плоская задача об обтекании тонкого тела подробно рассматривалась в [16]. Внешние краевые задачи для узких тел изучались в [60], [62], [63], [89], [99]—[101].

§ 3. Изложение следует работе [30], где та же задача рассмотрена для уравнения с переменными коэффициентами. Метод может быть применен и для эллиптических уравнений высокого порядка и для других задач с сингулярными возмущениями в граничных условиях. Подобные задачи исследовались в [23], [59],

[61]. Для так называемых критических случаев так же, как и в задаче § 3, в качестве калибровочных функций появляются рациональные функции от $\ln \varepsilon$. Отметим, что появление подобных калибровочных функций характерно и для весьма общей ситуации (см. [15], гл. IX, § 3).

§ 4. Излагается в упрощенном варианте работа [32].

ГЛАВА IV

§ 1. Результаты этого параграфа получены в [35]. Но в статье [35] методика весьма несовершенна. Изложение в книге опирается на приемы, развитые в [55], и более естественно. Такой подход даст возможность получить асимптотику широкого класса задач. Изучение краевых задач, где характеристика предельного уравнения первого порядка совпадает с частью границы области, проводилось в [55] для трехмерной задачи, в [41], [42] для системы эллиптических уравнений. Отметим, что ранее асимптотика краевой задачи (1.1), (1.2) при постоянных коэффициентах была исследована в [110] путем анализа явных формул для решения.

§ 2. Изложение следует в основном статье [56]. Для исследования внутреннего разложения используются методы статьи [38]. В областях с пегладкой границей асимптотика решения эллиптического уравнения с малым параметром исследовалась в [120] (где отсутствует «внутренний» пограничный слой), в [57], [59], [72].

§ 3. Задача этого параграфа обсуждалась еще в [20], некоторые оценки были даны в [112], но полное решение получено в [54]. Аналогичное исследование для эллиптического уравнения высокого порядка проведено в [106].

§ 4. Асимптотика решения задачи, рассмотренной в этом параграфе, впервые получена в работе [34], где изложение и методы весьма несовершенны. Здесь используется методика, развитая в последующих работах ([55], [105] и др.). Для эллиптического уравнения высокого порядка асимптотика в подобной ситуации исследовалась в [107]. Явные формулы, о которых говорится в замечании к § 4, получены в [31].

§ 5. Оценки, помещенные в п. 2 этого параграфа, получены в [106].

Отметим еще, что метод согласования асимптотических разложений применяется не только для эллиптических уравнений, но и для широкого класса других краевых задач. Для псевдодифференциальных уравнений асимптотика решений исследовалась в [80], в частности, для сингулярных интегральных уравнений в [78], [79], для гиперболических уравнений в [76]. Два других примера помещены в последних главах данной книги.

ГЛАВА V

В том случае, когда начальные данные сверхстепенным образом стремятся к нулю на бесконечности, задача, немного более общая, чем (0.1), (0.2), была исследована в [43]. В этой статье применен метод осреднения [9] и таким путем получены лишь главные члены асимптотики. Ранее метод осреднения использовал-

ся при изучении асимптотики решений подобных задач для периодических начальных данных ([45], [47], [88], [108]).

Для решений, которые стабилизируются на бесконечности, более удобным оказался метод согласования асимптотических разложений в том виде, в каком он продемонстрирован в настоящей главе. Подробное изложение этих результатов для общих гиперболических систем приведено в [44], а для других задач — в [46]. Во всех этих работах предполагается сверхстепенное стремление начальных функций к пределам на бесконечности. Помещенное в гл. V исследование асимптотики в том случае, когда начальные функции стремятся к своим пределам на бесконечности степенным образом, принадлежит Л. А. Калякину и излагается здесь впервые.

ГЛАВА VI

Задача, поставленная в этой главе, неоднократно рассматривалась с различных точек зрения ([6], [36], [82], [87], [93], [8], [115] и др.). Асимптотика в окрестности линии разрыва предельного уравнения, а также так называемые солитоподобные решения изучались в последнее время для широкого круга задач ([67]—[69], [111] и др.). Это более трудные задачи, чем задача, изложенная в гл. VI, тем более что большей частью вместо малой диссипации рассматривается влияние малой дисперсии. Но исследование поведения решения в окрестности точки «градиентной катастрофы» в этих задачах также намного сложнее и пока не проведено.

§ 1. Результаты этого параграфа хорошо известны и носят вспомогательный характер.

§ 2. Задача, излагаемая в этом параграфе, опубликована в [36], [75].

§§ 3—6. Излагаются результаты статьи [33].

§ 7. Результаты этого параграфа получены совместно с С. И. Худяевым [122].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабенко К. И. Теория возмущений стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса. Препринт/ИПМ.— М., 1975.— 71 с.
2. Бабич В. М. О строгом оправдании коротковолнового приближения в трехмерном случае // Зап. науч. семинаров ЛОМИ, т. 34, Л., 1973, с. 23—51.
3. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.— М.: Наука, 1972.— 456 с.
4. Бабич В. М., Егоров С. А. Решение задачи о каустике с помощью методики локальных разложений // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. XII.— Л.: Наука, 1973.— С. 4—14.
5. Бабич В. М., Кирпичникова П. Я. Метод пограничного слоя в задачах дифракции.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1974.— 125 с.
6. Бахвалов Н. С. Об асимптотике при малых ε решения уравнения $u_t + (\varphi(u))_x = \varepsilon u_{xx}$, соответствующего волне разрыва // Журнал вычисл. мат. и мат. физики.— 1966.— Т. 6, № 3.— С. 521—526.
7. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи композиционных материалов.— М.: Наука, 1984.— 352 с.
8. Богаевский В. Н., Повзнер А. Я. Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений.— М.: Наука, 1987.— 254 с.
9. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.— 503 с.
10. Де Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе.— М.: ИЛ, 1961.— 247 с.
11. Бутузов В. Ф. Асимптотика решения уравнения $\mu^2 \Delta u - k^2(x, y)u = f(x, y)$ в прямоугольной области // Дифференц. уравнения.— 1973.— Т. 9, № 9.— С. 1654—1660.
12. Бутузов В. Ф. Об асимптотике решения сингулярно возмущенных уравнений эллиптического типа в прямоугольной области // Дифференц. уравнения.— 1975.— Т. 11, № 6.— С. 1030—1041.
13. Бутузов В. Ф. О построении пограничных функций в некоторых сингулярно возмущенных задачах эллиптического типа // Дифференц. уравнения.— 1977.— Т. 13, № 10.— С. 1829—1835.

14. Бутузов В. Ф. Угловой погранслои в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений // Мат. сб. — 1977. — Т. 104, № 3. — С. 460—485.
15. Вайнберг Б. Р. Асимптотические методы в уравнениях математической физики. — М.: Изд-во МГУ, 1982. — 294 с.
16. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкостей. — М.: Мир, 1967. — 340 с.
17. Васильева А. Б. О развитии теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных за период 1966—1976 гг. // Успехи мат. наук. — 1976. — Т. 31, вып. 6. — С. 102—122.
18. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973. — 272 с.
19. Васильева А. Б., Волосов В. М. О работах А. Н. Тихонова и его учеников по обыкновенным дифференциальным уравнениям, содержащим малый параметр // Успехи мат. наук. — 1967. — Т. 22, вып. 2. — С. 149—167.
20. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. — 1957. — Т. 12, вып. 5. — С. 3—122.
21. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. — 1960. — Т. 15, вып. 3. — С. 3—78.
22. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями // Успехи мат. наук. — 1960. — Т. 15, вып. 4. — С. 3—95.
23. Гадильшин Р. Р. Асимптотика собственного значения сингулярно возмущенной самосопряженной эллиптической задачи с малым параметром в граничных условиях // Дифференц. уравнения. — 1986. — Т. 22, № 4. — С. 640—652.
24. Дородницын А. А. Асимптотика решения уравнения Ван-дер-Поля // Прикл. мат. и мех. — 1947. — Т. 11, вып. 3. — С. 313—328.
25. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. — М.: Наука, 1979. — 320 с.
26. Емельянов К. В. Об асимптотике решения первой краевой задачи для уравнения $yu'' + xa(x)u' - b(x)u = f(x)$ // Применение метода согласования асимптотических разложений к краевым задачам для дифференциальных уравнений. Свердловск, УНЦ АН СССР, 1979. — С. 5—14.
27. Емельянов К. В. О решении первой краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром // Дифференциальные уравнения с малым параметром. Свердловск, УНЦ АН СССР, 1980. — С. 3—7.
28. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Хатъен Нгоан. Усреднение и G -сходимость дифференциальных операторов // Успехи мат. наук. — 1979. — Т. 34, вып. 5. — С. 65—133.

29. Ильин А. М. Красная задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. I. Двумерный случай // Мат. сб.— 1976.— Т. 99, № 4.— С. 514—537.
30. Ильин А. М. Красная задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. II. Область с малым отверстием // Мат. сб.— 1977.— Т. 103, № 2.— С. 265—284.
31. Ильин А. М. Об асимптотике решения краевой задачи на полупрямой для одного параболического уравнения // Применимость метода согласования асимптотических разложений к красным задачам для дифференциальных уравнений. Свердловск, УНЦ АН СССР, 1979.— С. 81—92.
32. Ильин А. М. Исследование асимптотики решения эллиптической краевой задачи в области с малым отверстием // Труды семинара им. И. Г. Петровского.— 1981.— Вып. 6.— С. 57—82.
33. Ильин А. М. Задача Коши для одного квазилинейного параболического уравнения с малым параметром // Докл. АН СССР.— 1985.— Т. 283, № 3.— С. 530—534.
34. Ильин А. М., Горьков Ю. П., Леликова Е. Ф. Асимптотика решений эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных в окрестности особой характеристики предельного уравнения // Труды семинара им. И. Г. Петровского.— 1975.— Вып. 1.— С. 75—133.
35. Ильин А. М., Леликова Е. Ф. Метод сращения асимптотических разложений для уравнений $\varepsilon \Delta u - a(x, y)u_y = f(x, y)$ в прямоугольнике // Мат. сб.— 1975.— Т. 96, № 4.— С. 568—583.
36. Ильин А. М., Нестерова Т. Н. Асимптотика решения задачи Коши для одного квазилинейного уравнения с малым параметром // Докл. АН СССР.— 1978.— Т. 240, № 1.— С. 11—13.
37. Ильин А. М., Насиров К. Х. Метод согласования асимптотических разложений для одной эллиптической краевой задачи с малым параметром // Дифференц. уравнения с малым параметром. Свердловск, УНЦ АН СССР, 1980.— С. 8—15.
38. Ильин А. М., Леликова Е. Ф. Асимптотика решений некоторых эллиптических уравнений в неограниченных областях // Мат. сб.— 1982.— Т. 119, № 3.— С. 307—324.
39. Ильин А. М., Сулейманов Б. И. Асимптотика функции Грина для эллиптического уравнения второго порядка вблизи границы области // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1983.— Т. 47, № 6.— С. 149—165.
40. Ильин А. М., Олейник О. А. Асимптотическое поведение решений задачи Коши для некоторых квазилинейных уравнений при большом значении времени // Мат. сб.— 1960.— Т. 51, № 2.— С. 191—216.
41. Калякин Л. А. Построение асимптотики решения одной задачи МГД с малым параметром. II. Прямолинейное течение в канале с прямоугольным выступом // Дифференц. уравнения.— 1979.— Т. 15, № 10.— С. 1873—1887.
42. Калякин Л. А. Асимптотика решения системы двух линейных уравнений МГД с сингулярным возмущением. I. Стандартная задача в эллиптическом слое // Дифференц. уравнения.— 1982.— Т. 18, № 10.— С. 1724—1738.

43. Калякин Л. А. Асимптотический распад на простые волны решения возмущенной гиперболической системы уравнений // Дифференц. уравнения с малым параметром. Свердловск, УНЦ АН СССР, 1984.— С. 36—49.
44. Калякин Л. А. Длинноволновая асимптотика решения гиперболической системы уравнений // Мат. сб.— 1984.— Т. 124, № 5.— С. 96—120.
45. Калякин Л. А. Длинноволновая асимптотика решения задачи Коши для системы уравнений с нелинейным возмущением // Докл. АН СССР.— 1985.— Т. 283, № 1.
46. Калякин Л. А. Длинноволновые асимптотики решений нелинейных систем уравнений с дисперсией // Докл. АН СССР.— 1986.— Т. 288, № 4.— С. 809—813.
47. Калякин Л. А. Асимптотическое интегрирование возмущенной гиперболической системы уравнений в классе условно-периодических функций // Тр. ММО.— 1986.— Т. 49.— С. 56—70.
48. Копдратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. об-ва.— 1967.— Т. 16.— С. 209—292.
49. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике.— М.: Мир, 1972.— 274 с.
50. Курант Р. Уравнения с частными производными.— М.: Мир, 1964.— 830 с.
51. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М.: Наука, 1973.— 576 с.
52. Ладыженская О. А., Солопников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М.: Наука, 1967.— 736 с.
53. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения.— М.— Л.: Физматгиз, 1963.— 358 с.
54. Леликова Е. Ф. Об асимптотике решения эллиптического уравнения второго порядка с малым параметром при старших производных // Дифференц. уравнения.— 1976.— Т. 12, № 10.— С. 1852—1865.
55. Леликова Е. Ф. Метод сращивания асимптотических разложений для уравнения $\varepsilon \Delta u - au_z = f$ в параллелепипеде // Дифференц. уравнения.— 1978.— Т. 14, № 9.— С. 1638—1648.
56. Леликова Е. Ф. Об асимптотике решения эллиптического уравнения с малым параметром в области с кусочно гладкой границей // Применение метода согласования асимптотических разложений к краевым задачам для дифференциальных уравнений. Свердловск, УНЦ АН СССР, 1979.— С. 40—57.
57. Леликова Е. Ф. Асимптотика решения эллиптического уравнения с малым параметром в области с конической точкой // Дифференц. уравнения.— 1983.— Т. 19, № 2.— С. 305—317.
58. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений.— М.: Наука, 1981.— 398 с.
59. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области.— Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1981.— 206 с.

60. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Задача Дирихле в областях с тонкими перемычками // Сиб. мат. журн.— 1984.— Т. 25, № 2.— С. 161—179.
61. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотические разложения собственных чисел красных задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1984.— Т. 48, № 2.— С. 347—371.
62. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Красные задачи в области с тонкими перемычками // Функцион. анализ и его прил.— 1982.— Т. 17, № 2.— С. 20—29.
63. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотика решения задачи Дирихле в области с вырезанной тонкой трубой // Мат. сб.— 1981.— Т. 116, вып. 2.— С. 187—247.
64. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы.— М.: Изд-во МГУ, 1965.— 549 с.
65. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях.— М.: Наука, 1977.— 384 с.
66. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики.— М.: Наука, 1976.— 296 с.
67. Маслов В. П., Омелянов Г. А. Асимптотические солитонобразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи мат. наук.— 1981.— Т. 36, вып. 3.— С. 63—126.
68. Маслов В. П., Омелянов Г. А., Цупин В. А. Асимптотика некоторых дифференциальных, псевдодифференциальных уравнений и динамических систем при малой дисперсии // Мат. сб.— 1983.— Т. 123, вып. 2.— С. 197—249.
69. Маслов В. П., Омелянов Г. А. Об условиях типа Гюгонио для бесконечно узких решений уравнения простых волн // Сиб. мат. журн.— 1983.— Т. 24, № 5.— С. 172—182.
70. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа.— М.: ИЛ, 1957.— 256 с.
71. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания.— М.: Наука, 1975.— 247 с.
72. Назаров С. А. Метод Вишика — Люстерника для эллиптических краевых задач в областях с коническими точками. I. Задача в конусе. II. Задача в ограниченной области // Сиб. мат. журн.— 1981.— Т. 22, № 4.— С. 142—163; Т. 25, № 5.— С. 132—152.
73. Найфэ А. Введение в методы возмущений.— М.: Мир, 1984.— 535 с.
74. Найфэ А. Х. Методы возмущений.— М.: Мир, 1976.— 455 с.
75. Нестерова Т. Н. Об асимптотике решения уравнения Бюргерса в окрестности слияния двух линий разрыва // Дифференц. уравнения с малым параметром. Свердловск, УНЦ АН СССР, 1980.— С. 66—86.
76. Нестерова Т. Н. Метод сращивания асимптотических разложений для решения гиперболического уравнения с малым параметром // Мат. сб.— 1983.— Т. 118, вып. 4.— С. 546—555.
77. Новокшенов В. Ю. Асимптотика решения одного эллиптического уравнения с разрывными граничными условиями // Дифференц. уравнения.— 1976.— Т. 12, № 10.— С. 1625—1637.

78. Новокшенов В. Ю. Асимптотика решения сингулярного интегрального уравнения с малым параметром // *Мат. сб.*— 1976.— Т. 100, № 3.— С. 455—475.
79. Новокшенов В. Ю. Сингулярное интегральное уравнение с малым параметром на конечном отрезке // *Мат. сб.*— 1978.— Т. 105, № 4.— С. 543—573.
80. Новокшенов В. Ю. Асимптотика по малому параметру решения эллиптического псевдодифференциального уравнения в полупространстве // *Дифференц. уравнения с малым параметром*. Свердловск, УНЦ АН СССР, 1980.— С. 87—110.
81. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции.— М.: Наука, 1978.— 375 с.
82. Олейник О. А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // *Успехи мат. наук.*— 1957.— Т. 12, вып. 3.— С. 3—73.
83. Олейник О. А., Вентцель Т. Д. Первая краевая задача и задача Коши для квазилинейных уравнений параболического типа // *Мат. сб.*— 1957.— Т. 41, № 1.— С. 105—128.
84. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях в частных производных.— М.: Физматгиз, 1961.
85. Понтрягин Л. С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // *Изв. АН СССР. Сер. мат.*— 1957.— Т. 21, № 5.— С. 605—626.
86. Праудмен И., Пирсон Дж. Разложения по малым числам Рейнольдса в задачах обтекания сферы и кругового цилиндра // *Механика.*— 1958.— Т. 2, № 48.— С. 3—28.
87. Пряжинский В. И., Сушко В. Г. Асимптотика по малому параметру некоторых решений задачи Коши для одного квазилинейного параболического уравнения // *Докл. АН СССР.*— 1979.— Т. 247, № 2.— С. 283—285.
88. Рабинович М. И., Розенблюм А. А. Об асимптотических методах решения нелинейных уравнений в частных производных // *ПММ.*— 1972.— Т. 36.— С. 330—343.
89. Рамазанов М. Д. Задача об обтекании тонкого крыла с острой задней кромкой невязкой несжимаемой жидкостью // *Математический анализ и смежные вопросы математики.*— Новосибирск: Наука, 1978.— С. 224—236.
90. Рякстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов.— Рига: Зинатне, 1974, т. I.— 390 с.
91. Рождественский Б. Л., Япепко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений.— М.: Наука, 1978.
92. Сойбельман Я. С. Асимптотика емкости конденсатора с пластинами произвольной формы // *Сиб. мат. журн.*— 1984.— Т. 25, № 6.— С. 167—181.
93. Сушко В. Г., Лапшин Е. А. Асимптотические разложения решений некоторых задач, связанных с нелинейной акустикой // *Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии.*— М.: Изд-во МГУ, 1983.— С. 118—151.
94. Тихонов А. Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // *Мат. сб.*— 1948.— Т. 22, вып. 2.— С. 193—204.
95. Тихонов А. Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры // *Мат. сб.*— 1950.— Т. 27, вып. 1.— С. 147—156.

96. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1966.— 724 с.
97. Треногин В. А. Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника — Вишика // Успехи мат. наук.— 1970.— Т. 25, вып. 4.— С. 123—156.
98. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.— 622 с.
99. Федорюк М. В. Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Гельмгольца во внешности тонкого цилиндра // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1981.— Т. 45, № 1.— С. 167—186.
100. Федорюк М. В. Асимптотика решения задачи рассеяния на цилиндре с большим возмущением // Тр. ММО.— 1985.— Т. 48.— С. 150—162.
101. Федорюк М. В. Задача Дирихле для оператора Лапласа во внешности тонкого тела вращения // Труды семинара С. Л. Соболева, Новосибирск.— 1980.— № 1.— С. 113—131.
102. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1983.— 351 с.
103. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа.— М.: Мир, 1968.— 427 с.
104. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ).— М.: Мир, 1965.— 283 с.
105. Шайгарданов Ю. З. Об асимптотике решения краевой задачи для одного параболического уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения.— 1979.— Т. 15, № 4.— С. 668—680.
106. Шайгарданов Ю. З. Асимптотика по малому параметру решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения порядка 2m, вырождающегося в уравнение первого порядка.— М.: ВИНТИ, 1981.— Деп. № 5011-81.— 35 с.
107. Шайгарданов Ю. З. Асимптотика по параметру решения эллиптического уравнения высокого порядка в окрестности линии разрыва предельного уравнения // Дифференц. уравнения.— 1985.— Т. 21, № 4.— С. 706—715.
108. Штарас А. Л. Асимптотическое интегрирование слабонелинейных уравнений с частными производными // Докл. АН СССР.— 1977.— Т. 237, № 3.— С. 525—528.
109. Эрдейи А. Асимптотические разложения.— М.: Физматгиз, 1962.— 127 с.
110. Cook L. P., Ludford G. S. S. The behavior as $\epsilon \rightarrow +0$ of solution to $\epsilon \nabla^2 w = \partial w / \partial y$ on the rectangle $0 \leq x \leq |y| \leq 1$ // SIAM J. Math. Anal.— 1973.— V. 4, N 1.— P. 161—184.
111. Dobrokhotov S. Yu., Maslov V. P. Multiphase asymptotics of nonlinear partial differential equations with a small parameter // Sov. Sci. Rev., New York, Harwood Acad. Publishers, OVP.— 1982.— V. 3.— P. 221—311.
112. Eckhaus W. Boundary layers in linear elliptic singular perturbation problems // SIAM Review.— 1972.— V. 14, N 2.— P. 226—270.
113. Fraenkel L. E. On the method of matched asymptotic expansions. Parts 1—3 // Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1969.— V. 65.— P. 209—231, 233—251, 263—284.

114. Hadamard J. Recherches sur les solutions fondamentales et l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles // Ann. Ecole Norm. Super.— 1904.— V. 21.— P. 531—556.
115. Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Math.— 1950.— V. 3, N 3.— P. 201—230.
116. Kaplun S. The role of coordinate systems in boundary — layer theory // Z. angew. Math. Phys.— 1954.— V. 5.— S. 111—135.
117. Kaplun S., Lagerstrom P. A. Asymptotic expansions of Navier-Stokes solutions for a small Reynolds numbers // J. Math. and Mech.— 1957.— V. 6.— P. 585—593.
118. Lagerstrom P. A., Cole J. D. Examples illustrating expansion procedures for the Navier — Stokes equations // J. Rat. Mech. Anal.— 1955.— V. 4.— P. 817—882.
119. Prandtl L. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung // Verhandlungen des dritten internationalen Mathematischer Kongresses, Heidelberg, 1904, Leipzig.— 1905.— S. 484—491.
120. Temme N. M. Analitical methods for a singular perturbation problem in a sector // SIAM J. Math. Anal.— 1974.— V. 5, № 6.— P. 876—887.
121. Худяев С. И. К асимптотической теории стационарной волны горения // Хим. физика.— 1987.— Т. 6, № 5.— С. 681—691.
122. Ильин А. М., Худяев С. И. Об асимптотике стационарной волны горения в конденсированной среде // Хим. физика.— 1988.— Т. 7, № 12.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Асимптотический ряд 11
Асимптотическое разложение функции 11
- Бисингулярная задача 16, 40, 41, 46, 47, 83, 110, 154
- Внешнее асимптотическое разложение (внешнее разложение) 13, 29, 32, 262
- Внутреннее асимптотическое разложение (внутреннее разложение) 14, 29, 32, 33, 201, 239
- Внутренние переменные 14, 29, 201, 265
- Внутренний слой 13
- Градиентная катастрофа 260
- Калибровочная последовательность 11, 29, 57, 72, 121
- Метод согласования асимптотических разложений 15, 46
- Невязка в граничных условиях 25, 27, 31, 32, 37, 174
- Особая характеристика 150, 245, 249
- Пограничный слой 13, 29, 33, 39, 149
- Промежуточный пограничный слой 64, 71, 158
- Равномерное асимптотическое разложение 11, 17, 35, 61, 84, 118, 196
- Сборка Уитни 285
- Сингулярно возмущенная задача 12
- Сингулярное возмущение границы 83
- Составное асимптотическое разложение 18, 61, 102, 173, 273
- Угловой пограничный слой 37, 175, 232
- Условие Гюгонно 266
- Формальное асимптотическое решение (ф. а. р.) 10, 24, 26, 27, 32, 34, 47
- Формальный ряд 21, 24, 57
- Функции пограничного слоя (погранслойные функции) 14, 29, 32, 34, 39
- Функция Грина 97, 159, 176
— Пирса 287

A. M. ILYIN

**MATCHING OF ASYMPTOTIC EXPANSIONS
OF SOLUTIONS OF BOUNDARY
VALUE PROBLEMS**

The author is a well-known specialist in the theory of partial differential equations and asymptotic methods of mathematical analysis. This book deals with a method of solving singularly perturbed boundary value problems for differential equations. For the first time a detailed and systematic presentation of the version of the matching method is given which was developed by the author and his colleagues. This version can be regarded as a continuation of the investigations by M. Van Dyke, L. E. Fraenkel and other authors.

The book is interesting for both mathematicians and specialists in applied problems. A broad class of problems is considered from a unified point of view and the procedure of constructing asymptotic expansions for various boundary value problems, primarily for partial differential equations, is discussed in details. A minimum background material in required for understanding this part of the book which is comprehensible to students, engineers, and specialists in applied problems.

The justification of the asymptotic expansions is given too. Earlier such proofs were published only in special literature. In this book the proofs are substantially simplified as compared to those published previously. This part of the book is intended for pure mathematicians.

The presentation consists in analyzing typical examples with increasing complexity. Provision is made for a selective study of the book. The corresponding scheme representing the interrelation between the sections is given in introduction. Thus the book extends the range of problems considered in the well-known books by M. Van Dyke, A. H. Nayfeh and J. Cole.