Е. М. Полищук

Софус Ли

1842—1899

Ответственный редактор
доктор физ.-мат. наук
Ю. Д. БУРАГО

ЛЕНИНГРАД
«НАУКА»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1983

УДК 92 Ли «18» 51

Софус Ли (1842—1899). Полищук Е. М. Л., «Наука», 1983. 214 с.

Книга посвящена жизни и творчеству великого норвежского математика второй половины XIX в. Софуса Ли — создателя теории непрерывных групп, играющей огромную роль в современной математике и теоретической физике. Подробно прослежен жизненный путь Ли от школьных лет до его драматического завершения. Широко использованы переписка Ли и воспоминания о нем его близких и коллег. Обстоятельно излагаются все основные направления творчества Ли: непрерывные группы с их приложениями, контактные преобразования, классические работы по дифференциальным уравнениям. Много места уделено малоизвестным геометрическим исследованиям Ли.

Рецензент

доктор физ.-мат. наук

Н. К. НИКОЛЬСКИЙ

П $\frac{1702010000\text{-}777}{042(02)\text{-}83}$ 129-83 — III

Введение

Софус Ли, норвежский математик второй половины XIX в., был автором многих выдающихся открытий в анализе и геометрии, но прославился прежде всего как создатель дисциплины «Непрерывных групп преобразований». Чтобы подчеркнуть ее важность, заметим, что внешний мир мы воспринимаем как мир непрерывных групп. Несмотря на свое молекулярное строение, предметы, нас окружающие, видятся нам непрерывными и более того — кусочно гладкими (плоскость стола, например). Мир наш пребывает в движении. Совокупность двух шагов можно заменить одним, суммарным шагом. Шагу вперед отвечает такой же шаг назад, а их последовательность дает нулевой шаг. Множество шагов, смещений, образует группу. И если она непрерывна, то наряду с любым шагом x допустим и шаг $x+h$, где $|h|$ произвольно мало (за исключением случая, когда мы идем по лестнице). Под словом «шаг» можно понимать и вектор на плоскости или в пространстве. Сказанное справедливо для вращений вокруг точки, оси и т. п.

Примеры непрерывных групп были известны и до Ли, но теории их не существовало. Особенность дисциплины, построенной Ли, помимо ее важности и красоты, состоит в том, что она была им далеко и тщательно разработана. Изложение ее заняло три объемистых тома и еще два тома составляли приложения. Но и они не смогли вместить всех результатов, полученных Ли в данной области. За пределами этих книг остались его работы по бесконечным группам и многое другое. В истории науки трудно найти подобный пример создания одним исследователем столь развитой дисциплины. Еще при жизни Ли после признания его работ другими математиками были получены многие очень важные результаты по теории непрерывных групп, но даже суммарный их вклад в эту область уступает сделанному Ли. Поэтому закрепившееся за ней в начале нашего века наименование — «Группы Ли» — ни у кого не вызывало возражений.

Примечательно, что творчество Ли оказалось связанным с двумя ведущими физическими теориями нашего века — теорией относительности и теорией элементарных частиц, хотя приписывать ему заслуги в их создании было бы неверно. Группа Лоренца, лежащая в основе теории относительности, — весьма частный случай группы Ли. Принцип ковариантности, которому Эйнштейн придавал исключительное значение (математическое выражение инвариантности физических законов относительно выбора системы координат), представляет собой перенесение на физическую почву положения Клейна, согласно которому каждая геометрия есть теория инвариантов той или иной группы. Схема Клейна получила у Ли далеко идущее и многостороннее развитие в построенной им теории дифференциальных инвариантов. Кроме того, Ли (в связи с «пространственной проблемой Римана—Гельмгольца») в своем творчестве существенно затронул также и геометрию римановых пространств, на базе которой Эйнштейн построил свою общую теорию относительности. Примечательно, что в 50-х годах нашего века проблема разыскания частных решений уравнений гравитации Эйнштейна, классификация этих решений потребовали методов, восходящих непосредственно к исследованиям Ли.

Уже на первом этапе развития квантовой механики теория непрерывных групп оказалась для нее очень важной. Это обусловлено инвариантностью основного ее уравнения — уравнения Шредингера — относительно группы вращений пространства. Столь же важную роль играет группа Лоренца на ее следующем, релятивистском этапе, связанном с именем Дирака. Здесь всюду, как и в последующей общей теории элементарных частиц, важнейшим инструментом теоретического исследования является теория представлений групп Ли того или иного типа, в основе которой лежит созданный Ли для других целей мощный инфинитезимальный метод.

Давид Гильберт в знаменитом докладе на Втором международном математическом конгрессе (Париж, 1900 г.), на котором он сформулировал «Проблемы Гильберта» (одна из них относилась к группам Ли), сказал, что группы Ли будут иметь большое значение для теоретической физики XX в. Это предсказание полностью оправдалось.

Как область математики теория групп Ли имеет теперь огромную литературу. В разных странах действуют семинары по группам Ли, в реферативных журналах существуют специальные рубрики «Группы Ли», не перестают выходить книги под этим названием.

Методы нового времени, конечно, наложили свой отпечаток на эту дисциплину, радикально преобразив ее по сравнению с прошлым: топология, функциональный анализ, меры на группах, современная алгебра . . . Ли совершенно не узнал бы теперь свою теорию. Но наука этим и отличается от искусства, например от музыки: произведениями Баха, Шопена, Рахманинова. . . мы продолжаем наслаждаться в их первозданном виде.

Работы Ли по теории групп заслонили другие его достижения. А между тем и они грандиозны. В публикациях Дарбу, Клейна, Картана (здесь названы только самые выдающиеся имена) встречаются многочисленные восторженные отзывы о работах Ли по теории комплексов, отображениям многообразий, поверхностям переноса, минимальным поверхностям. . . В книгах Гурса, Форсайта, Гюнтера, Каратеодори теория Ли уравнений в частных производных первого порядка излагается как вершина достижений в этой области, как итог ее развития с появления работ Лагранжа, Коши, Якоби. Метаморфоза, происшедшая с непрерывными группами с момента их создания, вообще говоря, мало коснулась других направлений исследований Ли. Примечательно, что и классическая теория групп Ли в последнее время переживает период возрождения, вызванный главным образом ролью групповых решений дифференциальных уравнений в физике сплошных сред. Полученные здесь новые важные результаты непосредственно восходят не к абстрактным построениям позднейшей теории лиевских групп, а к работам самого Ли и его учеников.

Феликс Клейн, ставивший Гаусса превыше всего, заметил как-то, что творчество его целиком проникнуто духом XVIII столетия. И Ли среди современников его ранга был, пожалуй, самым архаичным. Он следил за достижениями науки своего времени, мы встречаем у него упоминание даже столь от него далекого по духу творчества Георга Кантора, тем не менее бóльшую часть своих результатов Ли получил, пользуясь методами первой половины XIX в., опираясь на свой талант аналитика и поразительную геометрическую интуицию. Он пребывал в континууме, в идеализированном мире, где царят гладкость многообразий и функций, великолепно справляясь, впрочем, с дискретными построениями, когда к ним его приводила логика событий. Во всех направлениях своего творчества Ли, выражаясь фигурально, всегда оставался равен самому себе. Берясь за любую из избранных областей, он доводил совокупность полученных результатов до теории («Лиевская теория минимальных поверхностей»,. . .). Нельзя не отметить и монолитность его творчества. В литературных ссылках (а ему большей частью приходилось ссылаться на самого себя) Ли часто отмечал проходящие через его результаты связи между, казалось бы, очень далеко отстоящими друг от друга проблемами, его занимавшими. При всей самобытности своего творчества Ли никогда не был одиночкой в науке и не желал им быть. За исключением сравнительно короткого периода построения основ теории непрерывных групп, он сотрудничал с коллегами, а научное соперничество с наиболее выдающимися из них было для него одним из стимулов прогресса.

Что же известно о личности Ли?

Достойным преемником его гениального соотечественника — Нильса Абеля — назвал Ли знаменитый Гастон Дарбу. Но если Абелю посвящена большая литература — статьи, книги, то о Ли в двадцатом веке написано всего несколько небольших биографических заметок. Здесь налицо явный разрыв: с одной стороны, огромное влияние, оказанное ученым, поток информации, восходящей к его творчеству, и литературное забвение его личности — с другой. Это обстоятельство, в котором Ли далеко не одинок, имеет свои объяснения.

Внезапная кончина Абеля, в 1829 г. не достигшего и 27-летнего возраста, произвела ошеломляющее впечатление и вызвала к нему громадный интерес. «Это большая потеря для науки, — писал Гаусс Шумахеру в мае 1829 г. — Если где-нибудь существует биография этого в высшей степени замечательного человека и Вам попадется в руки ее экземпляр, дайте мне знать. Мне также хотелось бы иметь портрет Абеля, если только его где-нибудь можно достать».[1]

Оставшиеся после Абеля многочисленные письма родным и друзьям позволяют воссоздать его духовный облик, яркий и благородный. Из них мы узнаем историю его любви к Кристине Кемп, о его увлечениях за пределами математики, в частности театром, а из описания его путешествия за границу — впечатления о Германии, Франции, Италии, о людях, с которыми ему довелось там встретить-

---

[1] Оре О. Замечательный математик Нильс Хенрик Абель/ Пер. с англ. — М., 1961, с. 292.

ся. Таким образом, нимало не помышляя об этом, Абель стал первым и притом лучшим своим биографом.

Совсем иначе обстоит дело с Ли. Его переписка с родными и друзьями, способная пролить свет на его внутренний мир, до нас не дошла, а опубликованные выдержки из писем к коллегам носят сугубо профессиональный характер. Лишь крайне редко и скупо Ли сообщает в них что-либо о себе или о своих близких.

Не отличаются щедростью и опубликованные воспоминания о Ли. Ближайший его друг и ученик Фридрих Энгель в свое время говорил о желательности создания книги о Ли. Однако, сравнивая Ли чуть ли не с самим Ньютоном, проделав огромную работу по редактированию литературного наследия Ли, опубликовав подробные воспоминания и статьи о других математиках, сам Энгель скупо поделился с нами воспоминаниями о своем кумире. А между тем он провел с ним много месяцев в его доме, на прогулках, за работой. По нашему мнению, он не сделал этого по соображениям этического порядка, что вытекает из одной его фразы, с которой читатель ознакомится в конце книги.

Семидесятилетие, отделяющее кончину Ли от кончины Абеля, было ознаменовано таким множеством событий в математике, какого наука не знала и за более длительные промежутки времени. Оформляются геометрии — проективная в синтетической и аналитической трактовке, неэвклидовы, восходящие к Лобачевскому—Больяи и Риману с их интерпретациями на поверхностях постоянной кривизны и на основе проективной метрики, создаются теории конгруэнций и комплексов. В 90-х годах многотомный трактат Дарбу подводит итог столетнему развитию дифференциальной геометрии. Теория аналитических функций приобретает вид законченной дисциплины, многообразной как по методам (Коши, Риман, Вейерштрасс), так и по ее разделам (целые функции, мероморфные функции, эллиптические функции с их обобщениями, восходящими к Якоби-Вейерштрассу, аналитическая теория дифференциальных уравнений Пуанкаре). Формируются в самостоятельные дисциплины вариационное исчисление (Лежандр, Якоби, Вейерштрасс, Гамильтон), аналитическая и алгебраическая теории чисел. В целом заканчивается развитый Лагранжем—Коши—Якоби период классической теории дифференциальных уравнений первого порядка, отчетливо вырисовываются контуры теории уравнений математической физики. Трудами Пуанкаре закладываются основы качественной теории дифференциальных уравнений, а Ляпунова — теории устойчивости движения. На основе общего подхода к предельным теоремам теории вероятности возникает ее новый, послелапласовский период (Чебышев, Марков). Кантор создает теорию множеств, сыгравшую решающую роль в последующем оформлении оснований математики, логике, теории функций; Вольтерра — теорию интегральных уравнений и своей теорией функций линий предвосхищает создание функционального анализа. Мемуар Пуанкаре 1895 г. знаменует создание комбинаторной топологии. На последнее десятилетие века приходится первый, алгебраический период творчества Гильберта.

За этим далеко не полным перечнем стоит столь грандиозная картина, что, несмотря на все преклонение перед огромными достижениями науки века нынешнего, век минувший, пожалуй, с бо́льшим основанием можно назвать веком математики, по крайней мере континуальной. Почетное место занимают в нем группы Ли и другие его создания. Вместе с тем ясно, что в момент ухода Ли математический мир выглядел уже иначе, чем когда его покинул Абель. При всех своих заслугах Ли уже не представлял собой столь уникального явления. И в этом, возможно, вторая причина, почему бедна литература о нем в XX в.

Из публикаций Нетера, Клейна, Дарбу, Энгеля, Картана, Хегора мы все же знаем достаточно подробно основные вехи жизни Ли, знаем о его учителях, родных и друзьях. Мы знаем, какова была его внешность, характер, взгляды, увлечения. Кое-что, хотя и очень мало, Ли сам сказал о себе. Разумеется, известны историческая и национальная специфика среды, которая окружала Ли. Все это позволило составить его биографию, которая вместе с подробным рассказом о всех направлениях творчества Ли предлагается читателю. В процессе работы над ней возникло множество правдоподобных догадок, но автор весьма осторожен в гипотетических выводах.

В конце книги приводится библиография, состоящая из двух частей с самостоятельной нумерацией: I — собственные труды Ли; II — литература о нем и связанная с излагаемым материалом. В соответствии с этим ссылки в тексте, приводимые в квадратных скобках, содержат номер части, позиции, страницы, а при необходимости — номер тома, главы или параграфа.

Национальный фон

Подолгу живя за границей, Ли широко общался с иностранцами — преимущественно с немцами и французами, а также с итальянцами, англичанами, русскими, поляками, американцами. Но обладая обостренным чувством национального достоинства, что нередко среди представителей малых народов, Ли везде и всюду ощущал себя норвежцем, именно норвежцем, а не скандинавом.

Несмотря на этническую близость к шведам и датчанам, норвежцы во многом от них отличны, что, разумеется, имеет свои географические и исторические объяснения. По сравнению со Швецией и Данией пахотных земель в Норвегии мало, и хотя там издавна существовало шерстное животноводство, а горнодобывающая промышленность стоит на сравнительно высоком уровне, Норвегия прежде всего страна рыбаков и мореходов. Соотечественник и ровесник Ли Эдвард Григ, мелодии которого пленили весь мир, говорил шутя: «Ей же богу, моя музыка пахнет сайдой и треской».[1]

Узкой полосой вытянувшаяся вдоль одноименного моря, Норвегия с другой стороны граничит с более сильной Швецией, а на юге лишь проливом Скагеррак отделена от также более сильной Дании. Длившееся столетиями соперничество между этими странами всегда сказывалось на судьбах норвежцев. Так было в годы почти 300-летнего существования Датско-Норвежского королевства, так было после его распада в 1814 г. и образования Шведско-Норвежской унии. Определенный Кильским договором, ее статус не был для Норвегии вполне равноправным, хотя она и получила по нему известные права автономии (в частности, в том же 1814 г. в Христиании был основан университет, в котором учились многие видные представители норвежской культуры, в том числе Абель и Ли). В последующие десятилетия, особенно во второй половине XIX столетия, заметный прогресс экономики

---

[1] Григ Э. Избранные статьи и письма. — М., 1966, с. 196.

Норвегии в ее специфических чертах, равно как и другие ее достижения, способствовали взлету национального самосознания, стремлению к полной независимости в широких кругах норвежской интеллигенции. «Я хочу ограничиться только моей родиной, удивительной, полудикой, трудной и искалеченной страной, которую мы любим, и, может быть, особенно теперь, когда она похожа на подстреленную птицу. . .».[2]

По словам Энгеля, Ли в политических вопросах был радикальным норвежцем. Но нет никаких оснований считать его воинствующим сепаратистом, подобным Гамсуну, порвавшему со своим другом Бьёрнсоном только потому, что тот не отказался от присужденной ему Нобелевской премии (за что, кстати сказать, Гамсуна критиковал Григ). У Ли были многочисленные контакты со шведскими и датскими коллегами. Он, например, первым обратил внимание на важные математические работы шведа Бьорлинга, однако именно как норвежец не прижился в Лунде, где короткое время профессорствовал в 1870 г.

В 1880 г. известный шведский математик Миттаг-Лёффлер основывает журнал «Акта математика», быстро получивший международное признание и уже столетие являющийся одним из самых авторитетных математических изданий. Ли, неоднократно сетовавший на задержки с публикациями его результатов, не напечатал в «Акта» ни одной работы. Еще при жизни Ли там был опубликован мемуар его французского ученика Вессио, а также другие работы, посвященные лиевским теориям, но сам Ли так и не пожелал выступить на его страницах. За несколько лет до появления этого журнала Ли вместе со своим соотечественником Сарсом основывает в Христиании (так называлась столица Норвегии) журнал «Аркив фор математик», в котором публикует свои работы на родном языке (работы в «Акта» с самого начала печатались на немецком, французском и английском). Многие важные результаты Ли впервые были опубликованы в этом журнале, и его не останавливало даже то, что «Аркив» не имел подходящей читательской аудитории. Лишь значительно позднее они появились в немецких переводах. Впоследствии, в середине 80-х годов, когда Ли уже был известен в Европе и постоянно печатался в авторитетных

---

[2] Там же.

журналах, он продолжал публиковать работы в отечественном «Аркив фор математик».

В трудном для Ли 1894 г. он узнает об опубликованной в Дании в 1799 г. работе неизвестного математика XVIII в. Каспара Весселя. В ней было указано представление комплексных чисел векторами на плоскости с соответствующей геометризацией их алгебры, введены понятия, предвосхищающие кватернионы Гамильтона. Узнав, что Вессель норвежец, Ли организует на родине новую публикацию работы Весселя, написав в предисловии к ней следующее: «Было принято считать, что до Абеля, бессмертные работы которого известны. . ., норвежских математиков не существовало. Весьма примечательно, однако, что норвежец Вессель сделал важные открытия в математике, опередив при этом ряд известных ученых Англии, Франции и Германии. Каспар Вессель заслужил, чтобы у нас в Норвегии его имя было окружено таким же почетом, как и имя его брата — поэта Германа Весселя и его дяди, полководца Петера Весселя. . . Наш долг вырвать у забвения Каспара Весселя, имеющего право на определенное место среди математиков» [130, II, 689].

Надо сказать, что Норвегия не осталась в долгу перед столь ее любившим сыном Софусом Ли. На всех этапах его деятельности ему оказывалась соотечественниками, быть может, не всегда достаточная, но посильная помощь. Так было и после кончины Ли, когда встал вопрос о нелегком деле издания в Германии его научного наследия.

Не подлежит сомнению, что имя Софуса Ли должно стоять в одном ряду с именами таких всемирно известных норвежцев, как Нильс Абель, драматург Генрик Ибсен, композитор Эдвард Григ, романист Кнут Гамсун, полярные первооткрыватели Фритьоф Нансен и Руал Амундсен, живописец и график Эдвард Мунк.

Родительский дом. Учеба. Выбор пути

Мариус Софус Ли родился 17 декабря 1842 г. в семье лютеранского пастора Германа Ли и его жены Метте (урожденной Штабель) в небольшой деревне Эйд, расположенной на берегу Эйдельсфиорда (одного из разветвлений Нордфиорда), примерно в двухстах километрах к северу от Бергена и в ста километрах к югу от Андальсна. (Участок побережья между этими двумя городами был базой высадки немецко-фашистских войск в трагические дни оккупации Норвегии во время второй мировой войны, и Андальсн часто упоминался за ее пределами в сводках того времени).

Среди стран Северной Европы Норвегия оказалась последним оплотом католицизма. Протестантизм (точнее, как всюду на северо-западе Европы, — лютеранство) утвердился в ней повсеместно лишь к концу XVIII столетия. К этому времени восходит оформление основных источников национальной протестантской литературы. Одним из ведущих авторов лютеранского комментария библии и катехизиса на норвежском языке был отец Нильса Абеля — лютеранский пастор Серен Георг Абель. Комментарий, составленный им, был широко известен в стране, не говоря уже о кругах ее духовенства. Поэтому можно предполагать, что в раннем детстве оба великих норвежских математика воспитывались в духе одних и тех же религиозных и моральных принципов.

Как рассказывает Хегор [II, 14], пастор Герман Ли и его брат, корпусной врач Иорген Ли, были людьми незаурядными, слывшими большими оригиналами, и Софус унаследовал не только таланты, но и черты характера и обличье, весьма примечательное: богатырский рост и могучее телосложение, редкую выносливость и неутомимость в работе, целеустремленность, приветливость, прикрываемую внешней суровостью, непоколебимую прямоту, простодушие и грубоватые манеры. Как ни странно, все это у Софуса Ли сочеталось с повышенной обидчивостью и претенциозностью, которые с годами становились все более явственными, особенно в том, что касалось главного дела его жизни — математического творчества.

В 1851 г. Герман Ли получил приход в г. Мосс (Кристианс Фиорд, примерно в 45 километрах от Христиании), куда вскоре переезжает вся его многочисленная семья (Софус был шестым ребенком). Здесь Софус начал посещать общеобразовательную школу, а в пятнадцать лет становится учеником столичной частной латинской гимназии, где проучился два года. Расстояние, отделяющее Мосс от столицы, он обычно преодолевал пешком, уверяя, что такие переходы для него пустяк — «багатель». Вообще Софус, как его отец и дядя Иорген, был отменным ходоком. Он часто один отправлялся в путешествия, заходя в глухие места. Это пристрастие однажды едва не обернулось для него бедой. В отдаленной деревне, мимо которой он проследовал, было совершено убийство. Кто-то из местных жителей заприметил чужака и подозрение пало на него. Тотчас посланный вслед за ним верховой не сумел его догнать. По этому поводу, как рассказывает Хегор [II, 15], кто-то сложил песенку, которая начиналась словами

Otte mil om dagen
Ransel hang pa bagen
Er søm smørrebrød for ham

(ежедневно восемь миль[1] с ранцем за спиною — все равно, что проглотить бутерброд с икрою).

Как-то гостя у своей сестры в Трётстреме, юный Софус вознамерился научить плавать своего маленького племянника Карла Фойгта. Надев на него спасательный пояс и отплыв на лодке, он бросил мальчика в воду далеко от берега, но поднявшийся вдруг ветер далеко отнес лодку с незадачливым учителем. На берегу с ужасом наблюдали эту сцену, но Софусу огромным усилием удалось спасти ребенка. Однако еще долго после этого в Трётстреме именем высокого юноши с пробивавшейся рыжеватой бородкой пугали непослушных маленьких детей. Но вообще, как добавляет Хегор, сообщивший эти подробности, «все, кто проникал через эту зачастую непривычную натуру, рано или поздно начинали любить этого цельного, честного и хорошего человека» [II, 14]. Племянник Ли впоследствии стал известным геологом, профессором университета в Осло, одним из основателей теории рудообразования.

Но вернемся к Ли-гимназисту. Он одинаково хорошо успевал по всем предметам, не отдавая ни одному из них предпочтения. Именно гимназии Ли обязан своему первоначальному знакомству с немецким и французским языками, сыгравшими решающую роль в его научной деятельности. В зрелые годы немецкий стал для Ли чуть ли не вторым родным языком, и многие свои мемуары он сам писал на нем, хотя и не без ошибок; на немецком изданы и все его книги. С французами Ли общался, едва ступив на научное поприще, и, видимо, без особых затруднений. Как ученик латинской гимназии Ли имел нужные познания и в латыни, с которой, по-видимому, еще раньше позна-

---

[1] Скандинавская миля ~5 километров. Автор признателен доценту Б. С. Жарову (ЛГУ) за помощь в переводах с норвежского.

комил его отец. Неизвестно, как Софус воспринимал поэзию Овидия и Горация, но очень важные для него мемуары Якоби он несомненно читал без труда.[2] Из воспоминаний Грига известно, что в те времена в гимназиях Христиании преподавался и английский язык. И он, по-видимому, тоже не был чужд нашему математику. Еще в первой своей работе Ли цитирует книгу Гамильтона о кватернионах, а в зрелые годы — работы Кели, Сильвестра и других английских ученых (всех — в оригинале).

С 1859 г. Ли — студент университета в Христиании, где в течение шести с половиной лет постигает основы различных дисциплин, начиная от древней истории и кончая химией. Столь долгий срок обучения, насколько можно судить, был обусловлен многопредметностью, отсутствием четких граней между факультетами и спецификой учебных расписаний. Среди лекторов по точным наукам ведущее место в университете занимали тогда Оле Брох (общий курс математического анализа и его приложения), П. Силов (алгебра, теория чисел, специальные главы анализа), К. Бьёркнес (прикладная математика, теоретическая механика, астрономия). Функции, примерно соответствующие обязанностям декана факультета математики и механики, осуществляли Брох и Бьёркнес. Подпись второго из них стоит почти под всеми документами первых лет деятельности Ли после окончания университета, будь то рецензии на его работы, решения о предоставлении ему стипендии для поездки за границу, решения о присуждении ученой степени.

Карл Антон Бьёркнес (1825—1903) был выходцем из крестьян. В 19-летнем возрасте он становится студентом университета в Христиании, где специализируется сначала по геологии, а затем по математике. После нескольких лет успешной работы в этих двух областях он был удостоен государственной стипендии, давшей ему возможность отправиться в Гёттинген и Париж для изучения математических дисциплин. Здесь на него большое впечатление произвели лекции Дирихле по уравнениям математической физики, которые определили все дальнейшее направление его научных интересов, связанных почти исключительно с теоретической гидродинамикой. Тяга к ней у

---

[2] Великий Карл Якоби блестяще знал древние языки и предпочитал писать на латыни многие свои работы.

Бьёркнеса наметилась еще в студенческие годы при чтении некоторых глав «Писем к немецкой принцессе» Эйлера.

После возвращения на родину Бьёркнес быстро продвигается на университетском поприще, чему способствовало его личное обаяние, лекторский талант и симпатии студенческой аудитории. Но неожиданно для всех он в 1875 г. отказывается от профессуры и занимаемых им должностей, поселяется в своем загородном доме, построенном в стиле старинного замка, и целиком посвящает себя научной деятельности и воспитанию сына Вильгельма, который вскоре становится видным специалистом в той же области. Основные результаты Бьёркнеса-старшего относятся к динамике взаимодействия тел, движущихся в жидкости. С именем Вильгельма Бьёркнеса связаны работы по развитию теории вихрей Гельмгольца—Кельвина.

Петеру Людвигу Силову (1832—1918) выпала честь занять место в истории математики, хотя и довольно скромное. После окончания кафедральной школы в Христиании в 1850 г. он поступает в местный университет, где в 1853 г. удостаивается первой премии за лучшую студенческую работу по геометрии. В 1862—1863 гг. он посещает Париж, общается там с Эрмитом и другими крупными французскими математиками. Автор ряда публикаций по теории алгебраических функций и абелевых интегралов, Силов вместе с Ли проделал большую работу по редактированию и подготовке к изданию полного собрания сочинений Абеля, а в 1902 г. вместе с Хольстом опубликовал его переписку. Он был также известен как составитель ряда хороших учебников. Но не все это, а единственно заметка 1872 г. объемом в 8 страниц обеспечила ему место в истории науки. В ней установлены теоремы о существовании некоторых классов подгрупп конечной дискретной группы. Ранее единственной теоремой подобного рода была теорема Коши. Результат Силова представлял собой существенный шаг в этом направлении, и найденные им классы подгрупп получили наименование силовских. Этот ученый, бывший сыном кавалерийского капитана Томаса Силова, впоследствии ставшего министром, бóльшую часть своей жизни провел в провинциальном городе Фридрихсхолде в амплуа скромного преподавателя. В 1869 г. он сделал попытку пробиться на кафедру столичного университета, но был забаллотирован. В годы

Жан Понселе.

студенчества Ли Силов работал в университете временно, заменяя часто находившегося в отъезде Броха. Именно на лекциях Силова Ли познакомился с началами теории групп, которая его, однако, тогда не заинтересовала. Став всемирно известным ученым, Ли не забыл своего учителя и коллегу. Благодаря усилиям Ли Силову в 1899 г. была наконец предоставлена в университете одна из математических кафедр.

Мы не назвали других имен, но и по этим двум можно судить, что и отдаленный от европейских научных центров университет Христиании оказался для Ли в целом неплохой школой. Получив в 1865 г. диплом со званием, как тогда было принято, лиценциата наук, Софус Ли преподает математику и физику в одной из частных гимназий, ассистирует в университете, занимается астрономией, проводя долгие зимние часы у телескопа в столичной обсерватории, читает книги по аналитической механике и теории упругости французских авторов Пуансо, Дюамеля, Ляме, но все еще остается на перепутьи трех дорог — математика, астрономия, механика. Он явно тяготеет к точным наукам, но никакие конкретные задачи не занимают его воображения. В 1868 г. случайно (именно случайно!) и почти одновременно ему попадаются на глаза книга Понселе по проективной геометрии и книга Плюккера по геометрии прямых линий. И с этого момента выбор сделан — геометрия! Возникли идеи применения к «комплексам Плюккера» мнимых чисел и идей Понселе. Но пока это было только направление, только первые наметки и . . . поздний старт, если учесть укоренившееся мнение, что в математике, как и в музыке, таланты проявляются очень рано. Правда, Григ, говорил: «Мы, норвежцы, развиваемся медленнее других, к 20 годам никто из нас еще не знает, что он собой представляет».[3] Но вопреки высказыванию самого Эдварда Грига его собственные «Вариации на немецкую тему» — сочинение 14-летнего мальчика, а первое зрелое произведение создано Ибсеном в возрасте 19 лет. Вспомним еще раз Абеля. . . Но даже если их принять за исключение, то и для норвежца Ли поздно начинал, однако, раз ступив на творческую стезю, уже не останавливался.

Немного геометрии и анализа. Первый творческий опыт

Переходя к разбору научного наследия Ли, остановимся на математической символике, используемой в этой книге.

Обозначения. Координатное n-мерное пространство точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$ обозначается $\mathbf{R}^n$. В частности, $\mathbf{R}^3$ и $\mathbf{R}^2$ обозначают соответственно трехмерное пространство точек (x, y, z) и плоскость (x, y).

Для производных от функции двух переменных, $z=f(x, y)$, во всей книге используются обозначения Монжа:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t.$$

Векторы выделены полужирным шрифтом. По индексам, повторяющимся в каждом слагаемом, ведется суммирование: $\sum a_i b_i = a_i b_i = \boldsymbol{ab}$. Остальные обозначения поясняются непосредственно в тексте. Все функции предполага-

[3] Григ Э. Избранные статьи. . ., с. 43.

ются непрерывно дифференцируемыми столько раз, сколько требуется по ходу рассуждений. Преобразования

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n$$

предполагаются диффеоморфизмами, т. е. однозначно обратимыми и непрерывно дифференцируемыми в обе стороны: y по x и x по y. Различие между локальной и глобальной точками зрения не подчеркивается, но во многих местах по ходу изложения будет ясно, что рассуждения относятся ко всему пространству. Переменные, вообще говоря, предполагаются вещественными, но в некоторых главах будут встречаться мнимые линии и поверхности. Мы будем оставаться в пределах элементарных аналогий, и это не должно вызвать затруднений ($x^2+y^2=0$ — пара прямых $x+iy=0$, $x-iy=0$; $x^2+y^2+z^2+R^2=0$ — сфера мнимого радиуса iR и т. п.).

Дифференциальная геометрия. Некогда украшавшая программы математических факультетов, эта дисциплина теперь включена в общие курсы анализа. Резюмируем очень кратко необходимые нам сведения о ней.

Мы предполагаем, что понятие кривизны кривой, плоской и пространственной (они определяются одинаково), известно читателю. Зададим кривую векторным уравнением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\,(u)$, тогда $d\boldsymbol{r}/du=\boldsymbol{t}$ — вектор, направленный по касательной к ней. Если за параметр u примем длину дуги s, отсчитываемую от некоторой точки кривой, то $|\boldsymbol{t}|=1$ и $d\boldsymbol{t}/ds=k\boldsymbol{n}$, где k — кривизна кривой, а $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, перпендикулярный $\boldsymbol{n}$ и называемый вектором главной нормали. Плоскость, определенная векторами $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{n}$, называется соприкасающейся плоскостью кривой. Все эти построения относятся к фиксированной на кривой точке M. Если кривая плоская, то соприкасающаяся плоскость во всех ее точках одна — плоскость, в которой лежит кривая.

Поверхность S в пространстве можно задать векторным уравнением $\boldsymbol{r}=r\,(u, v)$, где пара чисел, u и v, определяет положение точки M на S. Линии $u=c_1$, $v=c_2$ образуют на S координатную сеть (при переменных c_1, c_2). Равенство $\varphi\,(u, v)=0$ выражает уравнение линии на S. При задании поверхности уравнением $z=f\,(x, y)$ роль u и v играют декартовы координаты x и y. Проведем через точку M поверхности всевозможные линии. Касательная к каждой из них в точке M имеет свое направление и все эти касательные лежат в одной плоскости P — касательной плоскости к S в точке M. Прямая N, проходящая через M перпендикулярно P, называется нормалью к S в точке M. Каждая плоскость П, проходящая через N, пересекает S по некоторой кривой γ, называемой нормальным сечением S в M. Пусть k — кривизна γ в точке M. Этой величине приписывают знак, определяемый углом между вектором n и направлением, выбранным на N. Если вращать П вокруг N, то k вообще меняется. Существуют два таких направления, что для одного из них k имеет максимальное значение k_1, а для другого — минимальное k_2. Они взаимно перпендикулярны и называются главными направлениями поверхности в данной точке. Направление, для которого $k=0$, называется асимптотическим. Все эти понятия относятся к заданной точке M. Выражения

$$K = k_1 k_2, \quad H = k_1 + k_2 \tag{1}$$

называются соответственно полной и средней кривизной поверхности в данной точке. Если S деформируется как гибкая нерастяжимая пленка, то длины линий на ней и углы между линиями не меняются. Как показал Гаусс, при этом в каждой точке не меняется и величина K.

Среди замечательных линий на поверхности особую роль играют три типа линий.

Асимптотические линии. В каждой их точке касательная направлена по асимптотическому направлению поверхности в данной точке. Для этих линий соприкасающаяся плоскость совпадает с касательной плоскостью к поверхности.

Линии кривизны. Для них касательная в каждой точке направлена по одному из главных направлений поверхности в данной точке. Оба эти типа линий характеризуются их дифференциальными уравнениями, которые для задания поверхности в виде $z=f(x, y)$ были получены Монжем. В обозначениях Монжа уравнения асимптотических линий —

$$rdx^2 + 2sdxdy + rdy^2 = 0, \tag{2}$$

что приводит к двум равенствам:

$$y' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y), \tag{3}$$

правые части которых — известные функции переменных x, y. Интегрируя уравнения (3), получим два семейства,

$\varphi_1(x, y)=C_1$, $\varphi_2(x, y)=C_2$, (сеть) асимптотических линий. Они вещественны на поверхностях отрицательной гауссовой кривизны K и мнимы, если $K>0$. Дифференциальные уравнения линий кривизны —

$$dp(dy+qdz)=dq(dx+pdz), \qquad (4)$$

что, поскольку $dp=rdx+tdy, \ldots$, как и в предыдущем случае, приводит к паре дифференциальных уравнений, $y'=F_1(x, y)$, $y'=F_2(x, y)$, откуда интегрированием получаем сеть линий кривизны $\psi_1(x, y)=C_1$, $\psi_2(x, y)=C_2$.

Геодезические линии — линии кратчайшего расстояния. Они задаются дифференциальными уравнениями второго порядка, а это приводит к тому, что через данную точку можно провести геодезическую линию в любом направлении и любые две точки поверхности соединить геодезической линией, единственной, если мы ограничимся малой частью поверхности. Предметом классической дифференциальной геометрии как раз и является изучение локальных свойств поверхностей и других геометрических объектов методами анализа.

Проективная геометрия. Учение о перспективе, возникшее еще в эпоху Ренессанса, привело в начале XIX в. к оформлению в трудах Понселе и его соотечественника Жергона проективной геометрии, отдельные важные теоремы которой были еще в XVII в. открыты Дезаргом и Паскалем. В последней четверти XIX в. проективная геометрия — уже стройная наука, тесно связанная с ее сестрами — дифференциальной и неэвклидовой геометрией. Она занимала большое место в ранних работах Ли, и мы коротко остановимся на основных ее понятиях.

Проективная плоскость. Пусть x и y — декартовы координаты точки M на плоскости P. Тройка чисел x_1, x_2, x_3, задаваемых равенствами $x=x_1/x_3$, $y=x_2/x_3$, называется однородными координатами этой точки. Они одновременно не равны нулю и определены с точностью до произвольного множителя. Однородные координаты точки записываются в виде $(x_1 : x_2 : x_3)$. В этих координатах уравнение любой прямой имеет однородный вид:

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0, \qquad (1)$$

в частности равенства $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ задают соответственно оси Y, X и несобственную (бесконечно удаленную) прямую. Любые две параллельные прямые

$x_2=kx_1+b_1$, $x_2=kx_1+b_2$ пересекаются в точке $(1:k:0)$, лежащей на несобственной прямой. Последняя является, таким образом, геометрическим местом несобственных точек плоскости. Прямая, дополненная несобственной точкой, и плоскость, дополненная несобственной прямой, называются соответственно проективной прямой и проективной плоскостью.

Уравнение линии второго порядка в однородных координатах имеет однородный вид:

$$a_{ij}x_ix_j=0, \quad i, j=1, 2, 3, \tag{2}$$

в частности уравнение окружности записывается в виде

$$x_1^2+x_2^2+a_0x_3^2+2a_1x_1x_3+2a_2x_2x_3=0,$$

откуда следует, что любая окружность проходит через две несобственные мнимые точки $(1:i:0)$, $(1:-i:0)$. Они называются циклическими точками плоскости. Прямая, проходящая через циклическую точку, называется изотропной. Через любую точку плоскости проходят две изотропные прямые, причем длина любого отрезка каждой из них равна нулю.

При фиксированном x и переменных u уравнение (1) задает совокупность прямых, проходящих через точку x (уравнение точки). Симметричный относительно x и u вид уравнения (1) позволяет сформулировать «принцип двойственности» (Понселе): любому предложению, в котором участвуют термины «точка» и «прямая», отвечает двойственное предложение, возникающее из него перестановкой этих терминов. При этом совокупности точек, лежащих на одной прямой, отвечает совокупность прямых, проходящих через одну точку.

Прямая q, определяемая равенством $a_{ij}\mathring{x}_ix_j=0$, называется полярой точки $\mathring{x}$ относительно линии (2). Соответственно точка $\mathring{x}$ называется полюсом Q. Если $\mathring{x}$ лежит на (2), то q — ее касательная в Q. Если Q движется по некоторой прямой l, то ее поляра q относительно (2) вращается вокруг точки L — полюса l относительно (2). Обратное предложение немедленно вытекает из принципа двойственности.

Равенства

$$x'=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_3x+b_3y+c_3}, \qquad y'=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{a_3x+b_3y+c_3}; \tag{3}$$

где

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0, \tag{4}$$

взаимно однозначно отображают проективную плоскость на себя. Говорят, что равенства (3) задают проективное преобразование. При этом прямая $a_3x+b_3y+c_3=0$ переходит в несобственную прямую. Преобразование (3) сохраняет порядок алгебраической кривой, в частности прямые переходят в прямые.

Двойным отношением четырех точек A_1, A_2, A_3, A_4, лежащих на одной прямой l, называется число

$$d=\frac{A_1A_3}{A_2A_3}:\frac{A_1A_4}{A_2A_4}. \tag{5}$$

Здесь A_1A_3 и т. д. — длины отрезков, взятые со знаками в зависимости от выбора направления на l. Доказывается, что (5) — инвариант проективного преобразования (3) (всевозможные перестановки A_i дают пять других значений для двойного отношения этих точек; все они выражаются через d в виде простых рациональных выражений: $1/d$, $1-1/d$ и т. п.).

Двойным отношением четырех прямых $l_1, \ldots, l_4$, проходящих через точку Q, называется число $\delta=(A_1, A_2, A_3, A_4)$, где A_i — точки пересечения l_i с прямой m, не проходящей через Q. Легко показать, что δ не зависит от m.

Если l_i заданы уравнениями $y=k_ix$, то, пересекая их прямой $x=1$, получим

$$(l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4)=\frac{k_1-k_3}{k_2-k_3}:\frac{k_1-k_4}{k_2-k_4}. \tag{6}$$

Исходя из этого в 1851 г. 17-летний Эдмон Лагерр сделал следующее прекрасное открытие. Пусть угол между l_1 и l_2 равен φ, а за l_3 и l_4 примем изотропные прямые: $y=ix$, $y=-ix$. Используя известное выражение для $\operatorname{tg}\varphi$, через k_1 и k_2, равенство (6) и формулу Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ после некоторых преобразований найдем

$$\varphi=\frac{i}{2}\ln(l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4). \tag{7}$$

Это был первый результат по «проективной метрике», отличающейся большой красотой. Позднее мы с ней познакомимся ближе, а имя Лагерра нам встретится и по другому поводу.

Величины y_i, задаваемые при произвольном $\lambda \neq 0$ равенствами

$$\lambda y_i = a_i x + b_i y + c_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{8}$$

где $\Delta \neq 0$ [см. (4)], называются проективными координатами точки на плоскости. Множитель λ показывает, что они определены с точностью до произвольного множителя. Равенства $y_i = 0$ задают координатный треугольник. Если y_i — однородные координаты, его стороны — оси X, Y и несобственная прямая. Очевидно, проективное преобразование плоскости в проективных координатах можно записать в виде $y'_i = a_{ij} y_j$, где $\| a_{ij} \|$ — неособенная матрица.

W-кривые Клейна и Ли. В совместной работе 1870 г. Клейн и Ли [I, 5] рассмотрели класс плоских кривых, имеющих в проективных координатах (8) уравнение

$$y_1^{\alpha} y_2^{\beta} y_3^{\gamma} = C = \mathrm{const}, \quad \alpha + \beta + \gamma = 0. \tag{9}$$

Они назвали их *W*-кривыми. Таковыми являются, например, кривые второго порядка $y_1 y_2 = C y_3^2$, причем координатный треугольник в данном случае состоит из касательных к кривой в двух ее точках A и B и прямой AB. Для окружности вершины координатного треугольника — ее центр и циклические точки плоскости.

Другой пример *W*-кривой — логарифмическая спираль (в полярных координатах $\rho = C e^{m\varphi}$). Для нее вершины координатного треугольника те же, что и для окружности, $\gamma = 1$, α и β комплексно сопряжены:

$$\alpha = \frac{1 + mi}{2}, \quad \beta = \frac{1 - mi}{2}.$$

Логарифмическая спираль обладает свойством воспроизводить себя при различных преобразованиях, например ее эволюта есть тоже логарифмическая спираль. Эту ее особенность Яков Бернулли выразил словами: «вновь возрожденная, я воскресаю» (iterum renata resurgo). В той же работе доказано еще такое свойство этой линии: поляры ее точек относительно равносторонней гиперболы (рис. 1) огибают линию, являющуюся этой же логарифмической спиралью.

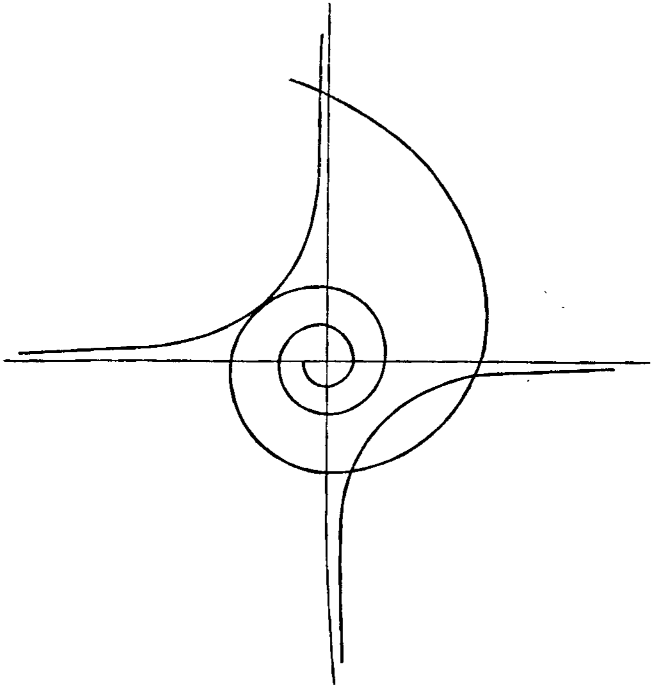


Рис. 1. *Гиперболическая спираль как W-кривая.*

Общее свойство W-кривых выражается следующей теоремой (Клейн и Ли). Пусть q — касательная к кривой в ее точке Q и A, B, C — точки ее пересечения со сторонами координатного треугольника. Двойное отношение $(ABCQ)$ постоянно для всех точек Q.

Проективное пространство. Будем считать, что плоскость и параллельная ей прямая имеют общую несобственную точку. Совокупность всех несобственных точек пространства R^3 (x, y, z) назовем его несобственной плоскостью P_∞. Пространство R^3, дополненное ею, назовем проективным пространством. Можно также сказать, что любые две параллельные между собой плоскости имеют общую несобственную прямую и все несобственные прямые заполняют плоскость P_∞.

В однородных координатах $x=\frac{x_1}{x_4}$, $y=\frac{x_2}{x_4}$, $z=\frac{x_3}{x_4}$ уравнение плоскости имеет однородный вид,

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0, \tag{10}$$

причем P_∞ задается уравнением $x_4=0$. Уравнение поверхности второго порядка записывается в виде $a_{ij}x_ix_j=0$, $i, j=1, \ldots, 4$. В частности

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+a_0x_4^2+2a_1x_1x_4+2a_2x_2x_4+2a_3x_3x_4=0$$

— уравнение сферы. Ее пересечение с плоскостью $x_4=0$ — линия C_∞:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0, \quad x_4=0. \tag{11}$$

Она называется шаровым кругом, или кругом Понселе. Так как (11) не зависит от параметров $a_0, \ldots$, любая сфера проходит через C_∞. Прямая, пересекающая C_∞, называется изотропной. Расстояние между двумя ее точками равно нулю. Через любую точку (x_0, y_0, z_0) проходит конус изотропных прямых:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=0.$$

Плоскость $Ax+By+Cz=D$, касающаяся сферы в точке, принадлежащей C_∞, называется изотропной. Для нее $A^2+B^2+C^2=0$.

Симметрия уравнения (10) относительно координат x и u позволяет сформулировать принцип двойственности в R^3: плоскость $\leftrightarrow$ точка, прямая $\leftrightarrow$ прямая (каждому предложению отвечает двойственное предложение, получающееся путем перестановки этих терминов, причем точкам плоскости соответствует множество плоскостей, проходящих через точку, связка плоскостей, а множеству точек на прямой — пучок плоскостей, т. е. совокупность плоскостей, проходящих через прямую — ось пучка). Проективное преобразование пространства (оно записывается аналогично проективному преобразованию плоскости) переводит точки в точки, прямые в прямые, плоскости в плоскости. Двойное отношение четырех точек, лежащих на одной прямой, является его инвариантом. Двойное отношение δ четырех плоскостей пучка определяется как двойное отношение четырех точек их пересечения с прямой l, не пересекающей ось пучка. Величина δ не зависит от выбора l. Поляритет в пространстве точка $\leftrightarrow$ плоскость относительно поверхности второго порядка определяется аналогично поляритету на плоскости.

Проективные координаты в пространстве определяются равенствами $\lambda y_i=a_ix+b_iy+c_iz+d_i$, $i=1, \ldots, 4$, в которых определитель четвертого порядка $\Delta=\Sigma(-1)abc$

[ср. (4)] не равен нулю. Равенства $y_i=0$ задают координатный тетраэдр. Если y_i — однородные координаты, $y_4=0$ — несобственная плоскость пространства.

Линейные операторы, скобки Пуассона, уравнения.

Выражение

$$X=a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i=1, \ldots, n \tag{1}$$

назовем линейным дифференциальным оператором. X переводит функцию f в некоторую функцию φ: $Xf=\varphi(x)$.

Оператор (1) обладает свойствами:

1) при $\lambda=\mathrm{const}$ $X(\lambda f)=\lambda Xf$ (однородность);
2) $X(f_1+f_2)=Xf_1+Xf_2$ (аддитивность);
3) если u — функция от f, то $Xu(f)=u'(f)Xf$; таким образом, если $Xf=0$, то и $Xu(f)=0$;
4) уравнение

$$Xf=a_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}=0 \tag{2}$$

имеет $n-1$ независимых решений $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ (тривиальные решения $f=\mathrm{const}$ мы не рассматриваем), всякое другое решение ω — их функция: $\omega=\theta(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$.

Интегралом системы обыкновенных дифференциальных уравнений,

$$\frac{dx_1}{a_1(x)}=\ldots=\frac{dx_n}{a_n(x)}, \tag{3}$$

называется всякая такая функция $u(x)$, что $du=\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i=0$, как следствие равенств (3).

Задачи решения уравнений (2) и (3) сводятся одна к другой: заменяя в (2) a_i, согласно (3), получим $df=0$ и, обратно, из (3), а также $df=0$, следует (2).

Пусть заданы операторы

$$X=a_i\frac{\partial}{\partial x_i} \text{ и } Y=b_i\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Их сумма $X+Y$, очевидно, также является линейным оператором $(a_i+b_i)\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Выражение

$$XY=XY-YX$$

называется скобкой Пуассона операторов X и Y.

Простой подсчет с учетом равенства $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}$ показывает, что

$$(X,\ Y) = c_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

где

$$c_i = a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$X_\alpha f = a_{\alpha i} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, r. \tag{4}$$

Если $r = n$ и $\det | a_{\alpha i} | \neq 0$, то из (4) следует, что $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, и, значит, система имеет только тривиальное решение $f = \mathrm{const}$.

Пусть $r < n$. Из равенства $(X_\alpha,\ X_\beta) f = X_\alpha (X_\beta f) - X_\beta (X_\alpha f)$ непосредственно видно, что решение уравнений (4) является также решением уравнений $(X_\alpha,\ X_\beta) f = 0$. Система (4) называется полной, если при любых α, β

$$(X_\alpha,\ X_\beta) f = \lambda^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma,$$

где λ — некоторые функции от x, в частности константы Всякая полная система r уравнений (4) имеет $n - r$ независимых решений.

Мы предполагаем, что читателю известны понятия «группа», «подгруппа», «изоморфизм групп». Все они, так же как и некоторые более специальные понятия, разъясняются в тексте применительно к группам Ли.

Комплексная плоскость и R-отображение. Творческим дебютом Ли явилась своеобразная попытка использовать в геометрии комплексные величины. В течение примерно трех месяцев он создает в 1869 г. большую работу «Представление мнимых величин планиметрии» (подзаголовок: Каждое предложение плоской геометрии — особый случай двойственного стереометрического предложения в теории конгруэнций) [I, 1, 2], которая поступает на рассмотрение Бьёркнеса. Не дожидаясь его заключения, Ли при содействии своего друга Эрнеста Мотсфельда публикует за свой счет часть этого исследования в виде брошюры на немецком языке. Тем временем Бьёркнес дает о работе положительный отзыв, после чего она в несколько измененной редакции по рекомендации Броха выходит в Берлине в Журнале Крелля. Это был первый успех молодого ученого. Работа состоит из четырех частей. Обе названные публикации составили ее первую часть. В полном виде она была опубликована на норвежском языке в Христиании в 1899 г. после кончины Ли, а вскоре издана там же на немецком языке Силовым.

Исходным пунктом построения является задание пар X, Z — комплексных чисел, $X=x+iy$, $Z=z+ip$. При этом точке M комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$ ставится в соответствие точка M с координатами (x, y, z) и говорится, что в M сосредоточен вес p.

Сначала Ли желает развернуть геометрию в $\mathbb{C}^2$ по аналогии с обычной двумерной геометрией. Соответствующие понятия в $\mathbb{C}^2$ обозначаются с помощью буквы J: J-точка (X, Z), J-кривая $F(X, Z)=0$ и т. п. Заменяя X и Z их выражениями и представив $F(X, Z)$ в виде $f_1(x, y, z \mid p)+$ $+if_2(x, y, z / p)$, записываем J-кривую в виде

$$f_1(x, y, z \mid p)=0, \quad f_2(x, y, z \mid p)=0,$$

откуда видно, что, поскольку все величины по условию меняются непрерывно, это — поверхность, на которой для каждого $p=\text{const}$ задается линия (у Ли — Streife — полоса). Линия, на которой $p=0$, называется нуль-полосой.

Главный замысел заключается в следующем. Оставаясь в рамках аналогов проективной геометрии в $\mathbb{C}^2$, Ли хочет на основании указанного отображения R,

$$\mathbb{C}^2 \to R(x, y, z \mid p)=R^3(x, y, z) \times (-\infty < p < \infty),$$

получить соответствующие теоремы в пространстве R^3. Оказалось, что действительно многие теоремы в R^3 вытекают из простых соотношений в $\mathbb{C}^2$. Вот одна из них. Пусть m и n — две пересекающиеся прямые в R^3, $P(m, n)$ — проходящая через них плоскость. Пусть S — невырождающаяся линейчатая поверхность второго порядка в R^3, $p_1, \ldots, p_4$ — четыре ее образующие, принадлежащие одному семейству, а m — образующая S из другого семейства. Тогда при переменном m двойное отношение четырех плоскостей $P(p_i, m)$ постоянно. Эта теорема получается как следствие того факта, что двойное отношение четырех J-точек, $Z_1, \ldots, Z_4$, не меняется при проективном преобразовании:

$$Z'=\frac{AZ+B}{CZ+D}.$$

Непосредственно возникают плюккеровы прямолинейные комплексы. Пусть задана J-прямая

$$X = BZ + A. \tag{1}$$

Ее R-образ — совокупность двух линейных уравнений относительно x, y, z. При фиксированном A и переменном $B = b_1 + ib_2$ здесь три параметра b_1, b_2, p. Иными словами, R-отображение пучка (1) прямых с центром в J-точке $(A, 0)$ дает комплекс прямых в пространстве. Исходя из этого и используя проективное преобразование T в пространстве $\mathbb{C}^2$,

$$X' = \frac{A_1X + B_1Z + C_1}{A_3X + B_3Z + C_3}, \quad Z' = \frac{A_2X + B_2Z + C_2}{A_3X + B_3Z + C_3}, \tag{2}$$

Ли переоткрыл ряд теорем о плюккеровых комплексах. Преобразование T и его обратное T^{-1} в вещественных переменных означают $R\ (x, y, z \mid p) \leftrightarrow R'\ (x', y', z' \mid p)$.

При этом возникает вопрос, на каких многообразиях S, S' нуль-пóлосы переходят друг в друга: $R\ (x', y', z' \mid 0) \leftrightarrow R\ (x, y, z \mid 0)$. Переходя в (2) к вещественным величинам $A = a_1 + ia_2, \ldots X = x + iy, \ldots$, после элементарных преобразований получим S, S' — гиперболоиды вращения с осями, параллельными осям z и z'. При этом горизонтальным сечениям одного из них отвечают прямолинейные образующие другого. Наклонным плоским сечениям одного гиперболоида отвечают на другом линии третьего порядка. В 60-х годах прошлого века линии 3- и 4-го порядков на гиперболоидах рассматривались многими геометрами [II, 32]. Ли пришел к этим кривым путем различных R-отображений.

Отправляясь от J-уравнения линии второго порядка, $AX^2 + 2BXZ + \ldots + F = 0$, используя теорию поляр, принцип двойственности и т. п., Ли получает ряд теорем проективного характера в R^3, в частности открытые Шалем пространственные аналоги теорем Паскаля и Брианшона.

Оценивая эту работу, Энгель и Хегор [I, 130, т. I, с. 536] отмечают, что Ли не удалось полностью реализовать свой замысел: многие из указанных им теорем были известны ранее, а некоторые выглядят слишком громоздко, чтобы можно было сделать о них определенное заключение. Доказательства почти всех теорем, которых в работе довольно много, лишь намечены. Через 60 лет после ее появления Энгель и Хегор в связи с подготовкой полного собрания сочинений Ли задались целью тщательно проанализировать этот первый его труд. Предваряя свой комментарий к этой работе, занимающий сто страниц петитом, они писали: «Мы восстановили доказательства именно так, как, по нашему мнению, Ли себе их представлял» [I, 130, т. I, с. 560]. Существенную помощь в этом оказал им молодой математик из Гиссена Л. Монвиль. В его диссертации, написанной под руководством Энгеля, ряд вопросов данной работы Ли был рассмотрен с точки зрения теории аналитических функций комплексного переменного [там же]. Здесь интересно отметить, что среди преобразований вида (2) можно выделить такие, которые сохраняют в R^4 псевдоэвклидову метрику:

$$x'^2+y'^2+z'^2-p'^2=x^2+y^2+z^2-p^2.$$

Если при этом трактовать p как время t, мы получим для пар X, Z — «спиноров» — комплексную запись преобразований Лоренца. Спинорная алгебра впервые возникла в работах Картана в начале века, а затем через 25 лет была независимо развита Г. Вейлем и Ван-дер-Варденом в связи с задачами квантовой механики. В своей работе, о которой говорилось в этой главе, Ли только коснулся спиноров, но они тут же затерялись у него среди множества других понятий и задач.

Первая работа несомненно помогла Ли обрести уверенность в своих силах, но, судя по его последующим высказываниям и результатам, его планы уже тогда простирались значительно дальше, а значит, необходима поездка туда, где создается «большая наука» — в Париж. Он хочет посетить и Германию, где, в отличие от того, что было в дни пребывания там Абеля, сейчас работает много крупных математиков. Надо бы хорошо подготовиться к поездке, продумать и оформить некоторые другие имеющиеся результаты, но время не ждет: ему уже скоро 27 лет — а это возраст многих великих свершений в математике, и значит, нужно торопиться.

Часть необходимой для поездки суммы (400 шведских крон) Ли, как сыну пастора, удалось выхлопотать через Кирхендепартамент. Но этого недостаточно.

Коллегии Академикум университета Христиании.

Обращаюсь с просьбой о предоставлении мне ста крон для редактирования моих математических работ. Я прошу также о назначении мне стипендии для заграничной поездки. . . Если вопрос будет решен положительно, я смогу отправиться в дорогу еще весной этого года.

Поездка в Германию и Францию мне совершенно необходима, так как я не имею другой возможности продолжать исследования, счастливо сложившиеся для меня в последние месяцы.

Христиания, 26 марта 1869 года.

Софус Ли
реал-кандидат
(лиценциат)

[I, 130, т. I, с. 535]

Все сложилось благополучно, но весну и лето Ли еще проводит дома и лишь в начале октября поднимается по трапу корабля, отплывающего в Гамбург. Оттуда он без задержки едет в Берлин.

По маршруту Абеля: Берлин—Париж—Рим

Как уже было сказано, решающую роль в выборе Софусом Ли творческого направления сыграло знакомство с трудами Плюккера. Ли даже называл его своим учителем, хотя никогда не видел (Плюккер скончался в 1868 г., за год до прибытия Ли в Германию).

Плюккер являл собой редкий пример сочетания чистого математика и физика-экспериментатора, причем обе сферы его деятельности не касались друг друга. Он родился в 1801 г. в Аахене в семье рейнского купца, окончил гимназию в Дюссельдорфе, а затем слушал лекции по математике в университетах Гёттингена, Берлина, Парижа. В возрасте 25 лет он создает ряд серьезных геометрических работ, которые начинают публиковаться в первых же номерах незадолго перед этим основанного математического Журнала Крелля. Достижения молодого Плюккера были связаны главным образом с проективной геометрией и теорией алгебраических кривых высших порядков. Им, в частности, была установлена классификация линий четвертого порядка (дополненная затем Гессе). В 1846 г. Плюккер целиком переключается на физику, обнаружив незаурядные способности экспериментатора. Он занимается магнитными явлениями в газах, кристаллофизикой; совершает поездку в Англию, где знакомится с Фарадеем, с которым затем ведет интенсивную переписку. В круг

Юлиус Плюккер.

его интересов входила также и оптика, и, по утверждению Клейна, он был даже близок к открытию спектрального анализа, независимо от него основанного и разработанного его соотечественниками Бунзеном и Кирхгоффом.

В 1864 г. Плюккер возвращается к математике и публикует первую часть своего большого труда «Новая геометрия, основанная на рассмотрении прямой линии как пространственного элемента». Именно эта книга произвела столь большое впечатление на Ли. Вторую ее часть Плюккер не успел отредактировать. Работа по подготовке ее к изданию легла на плечи совсем еще юного тогда Феликса Клейна, который в 1866—1868 гг. был ассистентом Плюккера по кафедре физики Боннского университета. После кончины своего руководителя Клейн переезжает в Берлин, где и состоялась его первая встреча с прибывшим туда Ли.

Ли был старше Клейна на семь лет — разница в том их возрасте ощутимая. Это не помешало им быстро сблизиться и, как видно из их переписки, почти сразу перейти на дружеское «ты». Несмотря на свою молодость (всего

Феликс Клейн.

20 лет!), Клейн был уже автором ряда важных работ, причем некоторые из них относились именно к плюккеровой теории прямолинейных комплексов,[1] которая особенно интересовала Ли. Несомненно, что и Ли сумел увлечь Клейна своими идеями.

31 октября 1869 г. Клейн писал из Берлина своей матери: «Я познакомился здесь с несколькими молодыми математиками и среди них с норвежцем Ли, который мне особенно симпатичен. . . Мы поселились по соседству. Я уже раньше слыхал о нем, как об авторе одной интересной работы, опубликованной в Христиании. Наши научные интересы во многом совпадают, но нас объединяет и другое — наше отрицательное отношение к форме и существу того, как здесь поставлены математические дисциплины» [1, 130, с. 636].

Что же побудило молодых математиков единодушно занять такую позицию? У Клейна находим и ответ. Но

---

[1] Этой теории была посвящена и диссертация Клейна: Zur Theorie der Liniencomplexe der ersten und zwieten Grades. — Math. Ann., 1870, 2, S. 198—226.

чтобы оценить его объективно, нужно знать, чем дышал математический мир Берлина того времени. А его атмосфера была овеяна личностью Вейерштрасса, который был тогда не только самым крупным математиком в Германии, но когда уже не было Гаусса, Коши и Якоби и после безвременной кончины Римана (1866 г.), его вообще трудно было с кем-либо сравнить.

По свидетельству Клейна, «Вейерштрасс пользовался тогда непререкаемым авторитетом. Все его теории принимались его слушателями как совершенно непреложные нормы мышления. . . в ходе изложения он ссылался только на самого себя [II, 32, с. 327]. . . Интеллектуальное влияние Вейерштрасса скорее подавляло учеников, чем толкало их на путь самостоятельного творчества» [там же, с. 341]. Такая ситуация могла, конечно, вызвать вполне оправданное чувство протеста у молодых, жаждущих своих путей в науке. Именно из противоречия, как пишет здесь же Клейн, он, по примеру Ли, не посещал лекции Вейерштрасса, о чем позднее не раз жалел.

Нет нужды еще раз повторять, чем наука обязана Карлу Вейерштрассу. Он был одинаково велик в комплексных аналитических функциях и в вещественном анализе, в вариационном исчислении и тех проблемах аналитической механики, которые его интересовали. Человек критического и тонкого ума, он сыграл огромную роль в постановке многих принципиальных вопросов математики. Достаточно назвать его знаменитый пример всюду непрерывной функции, не имеющей производной ни в одной точке, или его контроверсу риманового «Принципа Дирихле». Он сказал свое слово в алгебре (создание теории элементарных делителей) и в дифференциальной геометрии, оставив такие результаты, как «формулы Вейерштрасса» в теории минимальных поверхностей, теоремы об алгебраических минимальных поверхностях (эти работы в 70—80-х годах были продолжены в исследованиях Дарбу, Ли и Шварца).

Известно, что из школы Вейерштрасса вышел ряд крупных ученых (Г. Шварц, Миттаг-Леффлер, Г. Фробениус, С. Ковалевская . . .), да и сам Клейн во многом принадлежал этой школе. Ли тоже не избежал влияния Вейерштрасса, и это влияние было многогранным. Изучение работ Вейерштрасса по теории эллиптических функций помогло Ли при редактировании работ Абеля, результаты которого он затем использовал в теории поверхностей переноса. Работы Ли по общим и алгебраическим минимальным поверхностям связаны с открытиями Вейерштрасса в этой области. В примечании к одному из своих мемуаров Ли сообщает о полезных для него беседах с Вейерштрассом на эти темы. Но все это было позднее, а пока, встретившись с Клейном в Берлине осенью 1869 г., Ли опирается на все те же идеи Понселе, Шаля, Плюккера. Но очень скоро к этим именам нужно будет добавить имя человека другой эпохи — Гаспара Монжа, ученого, первым после Эйлера внесшего решающий вклад в развитие дифференциальной геометрии. Привлечение математического анализа к геометрическим проблемам, которые вырисовывались перед Ли, сыграло в его дальнейшем творчестве решающую роль, а содружество с Клейном быстро принесло ощутимые результаты.

Друзья пробыли вместе до февраля 1870 г., затем Клейн уехал к себе в Дюссельдорф, а Ли предпочел Берлину Гёттинген с тишиной его улиц, старинным университетом и прекрасной научной библиотекой. По-видимому, именно здесь, опираясь на одну идею Монжа, Ли сделал очень важный шаг: установил, что прямолинейным плюккеровым комплексам должны отвечать определенные дифференциальные уравнения, соответственно вызвавшие к жизни интегральные поверхности этих уравнений с кривыми, на них лежащими, — характеристиками. Эти кривые Ли назвал кривыми соответствующих комплексов. Преобразования дифференциальных уравнений комплексов друг в друга приводили к соответствию между самими комплексами, и одновременно начали вырисовываться своеобразные связи с дифференциальной геометрией. Но все это пока еще было в тумане, требовалась дальнейшая напряженная работа.

Вопросы, которые в то время продумывал Клейн, были близки кругу этих идей. Молодые коллеги не прерывали контактов. Предварительно списавшись, летом 1870 г. они вновь встретились, на этот раз в Париже, где опять поселились рядом. Пребывание в столице Франции с самого начала удачно сложилось для обоих. Здесь их благосклонно принял 77-летний Мишель Шаль, академик, классик проективной геометрии, особенно много сделавший для развития ее аналитического направления. Вскоре он согласился представить в Доклады Академии очень важную для Ли заметку «О геометрических преобразованиях», основной результат которой был получен Ли уже в Париже, а также совместную работу Клейна и Ли

«О некоторых семействах кривых и поверхностей» (о ней мы говорили выше). Клейн и Ли непосредственно познакомились и с другими французскими математиками, среди которых прежде всего нужно назвать два имени: Камилл Жордан и Гастон Дарбу. Для Ли эти знакомства оказались столь важными, столь и счастливыми. Жордан был на четыре года старше Ли, а Дарбу — его ровесником. Вклад, который внес в математику каждый из этих французов, очень велик.

Жордан был необычайно разносторонним ученым. Ему принадлежит понятие функции ограниченной вариации, тонкие примеры гладких неспрямляемых кривых, знаменитая топологическая теорема о разделении «жордановой кривой» плоскости на две области, важная для операционного исчисления теорема о контурных интегралах от аналитической функции.

В описываемый период пребывания Клейна и Ли в Париже там вышел фундаментальный труд Жордана «Теория подстановок».[2] Это сочинение, давно уже ставшее лишь достоянием истории, тогда сыграло неоценимую роль. Здесь впервые было дано систематическое и наиболее полное для того времени изложение теории конечных дискретных групп (возникших первоначально как группы подстановок) с их приложениями к алгебраическим уравнениям, включающими изложение результатов Лагранжа и Абеля. Здесь же было дано и первое развернутое и четкое изложение теории Галуа, для чего Жордану пришлось ввести и обосновать ряд новых понятий.

Уже с первых совместных рассмотрений для Клейна и Ли стала очевидной фундаментальная роль понятия группы в их исследованиях. Поэтому можно себе представить, как их заинтересовал трактат Жордана. Они много часов провели за штудированием этой большой и трудно читаемой книги. В своих прекрасных геометрических теориях 70-х годов (о них мы скажем ниже) и даже позднее, через 10 лет, когда Клейн занялся проблемами теории аналитических (точнее, автоморфных) функций, он оперировал сравнительно элементарными понятиями теории групп. У Ли — совсем иначе. Забегая вперед, отметим, что для целей, которые он позднее себе поставил, нужна была развитая теория групп. Именно она и содер-

---

[2] J o r d a n C a m i l l e. Traité des substitutions et des équations algebriques. — Paris, 1870.

Гастон Дарбу.

жалась у Жордана. Его трактат сыграл роль импульса в достижении одной из главных целей творчества Ли — построения групп преобразований и создания на их основе аналога теории Галуа для дифференциальных уравнений. Но путь к этому был не прям: он вел через углубленное изучение этих уравнений и распространение на них понятия инварианта. «Ариадновой нитью» для Ли тут была его геометрическая интуиция, и как счастливо сложилось, что именно в том же 1870 г. Ли встретил уже сформировавшегося к тому времени как ученого Дарбу, контакты с которым имели для Ли с самого начала не меньшее значение, нежели содружество с Клейном (хотя совместных публикаций у Дарбу и Ли не было).

Гастон Дарбу — фигура настолько значительная и роль его в жизни Ли столь велика, что необходимо хотя бы кратко на нем остановиться.

«Он родился в 1842 г. в Ниме, на юге Франции. 18-ти лет прибыл в Париж, и в течение 57 лет ему было суждено играть выдающуюся роль в интеллектуальной жизни этого города. Уже будучи студентом Эколь Политекник и Эколь Нормаль, Дарбу обратил на себя внимание своим поразительным математическим дарованием. Скоро он достиг славы и занял высшие академические должности. В 1880 г. он был назначен преемником Шаля по кафедре геометрии в университете Сорбонны, а 4 года спустя — избран членом Института (Академия наук Франции, — *Е. П.*). Благодаря выдающимся математическим талантам, Дарбу стал основателем обширной французской математической школы. . .». Так писал о Дарбу крупный немецкий геометр В. Бляшке [II, 19]. Но к этому нужно добавить, что математические открытия Дарбу столь же важны, сколь блестящи и многообразны. Любой студент, знакомясь с понятием интеграла, встречает «верхние и нижние суммы Дарбу», а студент-математик узнаёт о его тонком примере функции, принимающей вместе с двумя значениями и любое промежуточное между ними, но не являющейся непрерывной. С именем Дарбу связано множество замечательных теорем в дифференциальной геометрии (и других геометриях), где он, в частности, разработал кинематический метод («метод подвижного репера»). Велики заслуги Дарбу в теории уравнений с частными производными, где его интересовали главным образом не методы разыскания решений, а вопросы геометрии характеристик, сингулярные решения (Гурса в [II, 61] цитирует фундаментальный мемуар Дарбу на эту тему) и другие проблемы общего характера. Трактат Дарбу по теории поверхностей [II, 59] содержит многочисленные его результаты, казалось бы, выходящие за пределы геометрии (подход к обратной задаче вариационного исчисления, обобщение метода Римана решения гиперболических уравнений, . . .).

Контакты с Дарбу для Ли оказались едва ли не более результативными, нежели связи с немецким другом.

Но вернемся опять в ту парижскую квартиру, где летом 1870 г. в комнатах по соседству живут Клейн и Ли. Они уже не только хорошо понимают друг друга, но и являются авторами нескольких общих работ, одну из которых представил к печати Шаль вместе с очень важной для Ли его заметкой «О геометрических преобразованиях». В ней, хотя и в крайне сжатой форме, содержалось открытие, вызвавшее восторженные высказывания многих крупнейших геометров. Позднее мы подробно расскажем о существе дела, приведя все необходимые для читателя определения, а сейчас опишем обстоятельства, которые сопутствовали рождению этого результата.

Из воспоминаний Клейна [I, 130, с. 666]: «Как-то июльским утром я встал очень рано и собирался отправиться на прогулку, когда Ли, который находился еще в постели, позвал меня, чтобы сообщить о сделанном им ночью открытии прямолинейно сферического отображения, при котором асимптотические линии одной поверхности переходят в линии кривизны другой. Я считал, однако, что этот результат относится специально к так называемым поверхностям Куммера, асимптотические линии которых суть алгебраические кривые 16-го порядка. . . Перед самым обедом, когда я посетил Музей искусств и ремесел, я продолжал размышлять на эту тему, и, вернувшись домой к 4 часам дня, я имел определенные соображения на этот счет. Ли я дома не застал, он куда-то ушел. Я оставил ему записку».

Обстановка во Франции, когда наши молодые исследователи проводили там в 1870 г. свои поиски, была далеко не спокойной. Франция императора Наполеона III (Луи Бонапарта) переживала трудные дни. Как в экономическом, так и в военном отношении она была заметно слабее Пруссии, которую «железный канцлер» Бисмарк готовил к войне с уставшей от периодически постигавших ее катаклизмов и внутренних разногласий западной соседкой. Последующий ход развернувшихся в ближайшие месяцы событий хорошо известен: война, сокрушительное поражение французской армии на подступах к Седану, объединение Германии под эгидой Пруссии, возникновение на этой базе юнкерского милитаристского государства.

Угроза войны и вызванная ею сильная вспышка антинемецких настроений во Франции вынудили Клейна вернуться на родину, в Дюссельдорф (там он был призван в армию, но почти сразу демобилизован из-за серьезного желудочного заболевания). Ли остался во Франции. Он намеревался осуществить смелое предприятие: пересечь (в значительной мере пешком) Францию от Парижа на юг до итальянской границы, затем, перевалив через Альпы, попасть в Италию, побывать в Риме, дойти до Адриатики, а оттуда морем, сушей и снова морем — домой.

Готовясь к этому путешествию, Ли пока продолжал усиленно заниматься, но предпочел перебраться в Фонтенбло — пригород Парижа, столь же известный, как и

Версаль. В наши дни туда с Лионского вокзала можно добраться за 40—50 минут. . .

Место расположения одной из старейших временных резиденций французских королей, Фонтенбло в разные века — во времена Филиппа Августа, Генриха IV, Людовика XIV — украшался и застривался: возводились замки, крепости, сооружались каналы, пруды для разведения зеркальных карпов, а большой лес был излюбленным местом охоты коронованных особ. Фонтенбло отмечен печатью и исторических событий. Здесь содержался папа Пий VII, плененный Наполеоном и лишенный им своих владений за отказ присоединиться к континентальной блокаде; здесь же состоялась и унизительная для папы встреча с «покорителем Европы»; и, по иронии судьбы, здесь же в апреле 1814 г. Наполеон подписал акт своего отречения, а в июне 1815 г. патетически простился с генералитетом своей поверженной армии. . .

Даже во время прогулок не переставая думать о волновавших его проблемах, Ли выбирал уединенные места, где ничто не отвлекало. И однажды случилось то, о чем через тридцать лет нам поведал Дарбу в статье памяти Ли [II, 5, с. 526]: «. . .В 1870 году ему пришлось испытать неприятность, и я принимал участие в том, чтобы его от нее избавить. Застигнутый в Париже объявлением войны, он удалился в Фонтенбло. Непрестанно занятый идеями, зарождавшимися в его голове, он каждый день ходил в лес, останавливаясь в самых удаленных уголках тропинок, чтобы писать свои формулы и рисовать геометрические фигуры карандашом. Этого было достаточно в ту эпоху, чтобы возбудить подозрение. Арестованный и подвергнутый заключению, впрочем, в мягких условиях, он при допросах ссылался на Шаля, Бертрана и других академиков.

Я отправился в Фонтенбло и без труда убедил императорского прокурора, что все заметки, которые были отобраны у Ли и где фигурировали комплексы, ортогональные системы, имена геометров и т. п., никоим образом не относились к национальной обороне Франции. Ли был отпущен. Его благосклонный и возвышенный ум не сохранил мстительного чувства к нашей стране. Не только он охотно посещал ее в последующие годы, но и радушно принимал французских студентов. . .».

Здесь все, конечно, верно, но нужно отметить благородную скромность Дарбу: пересказывая те же события, Картан [II, 15] заметил, что для Дарбу вызволить его норвежского коллегу было не так-то просто, о чем свидетельствует и срок заключения: Ли пробыл в крепости Фонтенбло 4 недели. Воспоминания об этих днях для него не были тягостными. Так, в 1877 г. в одном из писем своему коллеге и другу А. Майеру он вспоминал: «Вынужденный досуг во время моего пленения в Фонтенбло, где ко мне хорошо относились, предоставил мне полную возможность сосредоточиться над моими задачами и явно их продвинуть» [I, 130, т. 3].

Оказавшись на свободе, Ли без задержки отправился в свое смелое путешествие, которое прошло, как и было задумано и без каких-либо инцидентов. В Италии он посетил Рим, а также Турин, подаривший миру великого Лагранжа. Оттуда он послал письмо Клейну. Обратный путь лежал через Швейцарию и Германию, где Ли на несколько дней остановился у Клейна в Дюссельдорфе. Оттуда они отправили Куммеру их совместную работу и письмо, в котором просили представить ее к печати.

В ответном письме от 26 ноября 1870 г. Куммер писал: «. . .Ваше совместное исследование о поверхностях с 16 узловыми точками меня очень интересует, и я готов представить его в Monatsbericht (ежемесячник) нашей академии. . .» [I, 130, т. 1, с. 667]. Куммер указывает далее, что существующий порядок требует обоснования приведенных в работе формулировок и просит прислать их доказательства.

Когда пришел ответ Куммера, Ли уже был в пути. Наконец после 14-месячного отсутствия, уже в декабре, он мог услышать родную речь, увидеть близких и друзей и заключить их в свои объятия. В своем путешествии Ли повторил маршрут единственной заграничной поездки Нильса Абеля.

Домой Ли вернулся не только обогащенный массой новых впечатлений, но и с большим научным багажом. Он представил Академколлегии свой отчет и работу «Об одном классе геометрческих преобразований», указав, что просит рассмотреть ее на предмет соискания ученой степени. Работа была передана «цензорам» (рецензентам) С. Бьёркнесу, С. Гулдбергу и Е. Мюнцеру, которые в своем отзыве отметили, что предлагаемое исследование содержит совершенно новый подход к геометрическим преобразованиям, позволяющий, в частности, получить линии кривизны так называемой куммеровской поверхности. Указывая, что работа, несмотря на обозримый характер ее содержания в целом, читается нелегко, цензоры сочли ее вполне достойной соискательства на ученую степень. Но от претендента требовалось еще показать свою общую математическую эрудицию, для чего ему предлагалось в течение 15 дней выступить с тремя докладами; с двумя — на заданную цензорами тему, а третьим — на диссертационную. «Пробные лекции» Ли состоялись в мае 1871 г.: 19 мая — «Об интегрировании некоторых классов уравнений в частных производных», 26 мая — «О разложении функций в цепные дроби», 31 мая — «О геометрии линий».

На основании положительного заключения рецензентов об исследовании, выполненном Ли, ему 12 июня 1871 г. была присуждена ученая степень доктора философии. Добавим, что тема диссертационной работы была первоначально изложена Ли на немецком языке, но по существовавшему тогда в Христиании положению принимались лишь представленные на латыни или норвежском языке, и Ли пришлось написать и норвежский текст.

Штатной должности для Ли в Христиании тогда, однако, не нашлось, и он воспользовался появившейся возможностью получить профессуру в университете г. Лунда (Швеция), где и начал читать лекции осенью 1871 г. По свидетельству Энгеля, Ли как норвежец чувствовал себя в Лунде неуютно, и весной 1872 г. покинул этот город. К тому времени выходят три его геометрические работы: две из них [I, 6, 7] были посвящены многомерной дифференциальной геометрии, третья [I, 8] содержала изложение результатов, полученных Ли ранее совместно с Клейном в Гёттингене. Хотя эти работы еще не содержали ничего особо выдающегося, надо отдать должное проницательности коллег-соотечественников Ли: они поняли, что в его лице Норвегия обрела новый математический талант. Уже в июле 1872 г. Ли пришло известие, что для него в университете Христиании открыта кафедра. Там, не особенно загруженный преподавательской деятельностью, он получает возможность полностью сосредоточиться на научной работе. Результаты не замедлили явиться. С этого времени начинается период великолепных математических открытий Софуса Ли.

Геометрия прямолинейных комплексов и сфер

Мемуар Ли «О комплексах, в частности прямолинейных и сферических, с приложениями к дифференциальным уравнениям» [I, 17], где, по словам Дарбу, Ли развил многочисленные следствия своего открытия, сделанного в Париже, во многом явился программным для всего дальнейшего его творчества. Здесь было дано своеобразное построение дифференциальной геометрии комплексов (у Плюккера и других авторов она развивалась в алгебраическом направлении), исследованы их пфаффовы и монжевы уравнения, установлены связи комплексов с уравнениями в частных производных и их характеристиками. Через этот круг идей уже просматриваются теории Ли поверхностей переноса, контактных преобразований, а также отдаленные истоки его общей теории групп. Мы будем возвращаться к этому мемуару в различных главах нашей книги, а сейчас познакомимся с геометрией комплексов и связанными с ней понятиями.

Комплексы линий в пространстве. Следуя Плюккеру, будем называть комплексом линий в R^3 множество линий, зависящее от трех параметров. Комплекс можно задать двумя уравнениями

$$\varphi_i(x,\ y,\ z,\ a,\ b,\ c)=0,\quad i=1,\ 2, \tag{1}$$

в которых x, y, z — координаты, a, b, c — параметры. Если, в частности, φ_i линейны относительно координат, мы имеем комплекс прямых линий.

Дифференцируя (1),

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}dz=0, \tag{2}$$

и исключая из четырех уравнений (1) и (2) величины a, b, c, получим равенство вида

$$u(x,\ y,\ z;\ dx,\ dy,\ dz)=0, \tag{3}$$

которое назовем d-уравнением комплекса (1). Здесь u можно считать однородной функцией дифференциалов dx, dy, dz. Если u зависит от них линейно, то (3) — уравнение Пфаффа, в остальных случаях — уравнение Монжа, Считая, что x, y, z — функции параметра t и обозначая производные по t точкой, получим

$$u(x,\ y,\ z;\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})=0. \tag{4}$$

Всякое решение $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ уравнения (4) назовем траекторией комплекса. Множество этих траекторий, вообще говоря, шире множества кривых, образующих комплекс (см. ниже).

Прямолинейные комплексы. Будем задавать уравнения прямых в виде

$$x=mz+\mu,\quad y=nz+\nu. \tag{5}$$

Поскольку здесь имеется четыре параметра, присоединяя к (5) зависимость

$$f(m,\ n,\ \mu,\ \nu)=0, \tag{6}$$

получим комплекс прямых. Присоединяя к (5) две зависимости $f_1=0$, $f_2=0$ между теми же величинами, получим конгруэнцию прямых (совокупность прямых, зависящую от двух параметров). Равенство (5) совместно с тремя зависимостями $f_k=0$, $k=1, 2, 3$, задает множество прямых, зависящее от одного параметра, — линейчатую поверхность.

Основную роль в теории комплексов играют три их типа: тетраэдральный, изотропный, нуль-система. Найдем уравнения, характеризующие эти комплексы, и отображения этих комплексов друг на друга.

Тетраэдральный комплекс. Пусть в R^3 задан некоторый тетраэдр T. Комплекс называется тетраэдральным, если для любой его прямой g двойное отношение $\delta=(ABCD)$ четырех точек A, B, C, D ее пересечения с гранями T — постоянная величина λ (рис. 2). Пусть грани T — координатные плоскости $z=0$, $y=0$, $x=0$ и несобственная плоскость пространства. Тогда $(ABCD)=(ABC)=AC/BC$. Обозначая через z_1, z_2, z_3 апликаты точек пересечения g с координатными плоскостями, получим

$$\delta=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}. \tag{7}$$

Учитывая равенства (5) и (7), имеем

$$\frac{m\nu}{\mu n}=\lambda. \tag{8}$$

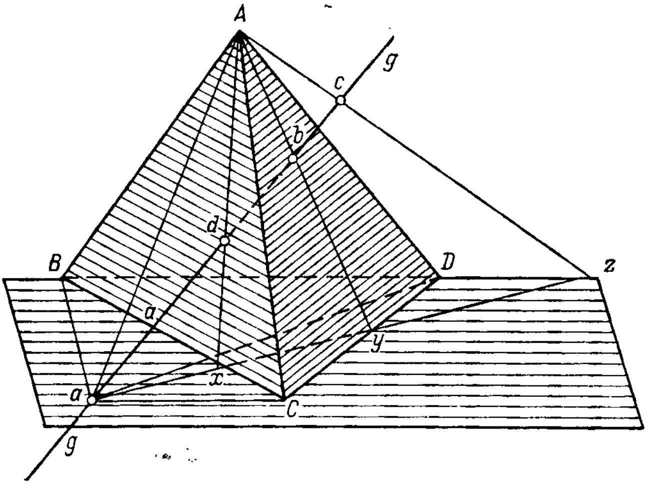


Рис. 2. *Тетраэдральный комплекс.*

Итак, при задании прямых уравнениями (5) и указанном выборе тетраэдра T данный комплекс определяется условием (8). Найдем его d-уравнения. Дифференцируя (5), получим $dx = m dz$, $dy = n dz$. Отсюда в силу (5), (8) приходим к равенству

$$dy\,(z dx - x dz) + \lambda dx\,(y dz - z dy) = 0,$$

которому можно придать симметричную форму:

$$(b-c)\,x dy dz + (c-a)\,y dz dx + (a-b)\,z dy dx = 0, \tag{9}$$

где

$$-\frac{1}{b-c} = \frac{\lambda}{c-a} = \frac{1-\lambda}{a-b}.$$

Соотношение (9) является уравнением Монжа данного комплекса. Перепишем его так:

$$(b-c)\,d\ln y\,d\ln z + (c-a)\,d\ln z\,d\ln x + (a-b)\,d\ln x\,d\ln y = 0. \tag{10}$$

Решения этого уравнения — траектории комплекса — Ли записывает в виде

$$\ln x = \int \frac{F(t)dt}{a+t}, \quad \ln y = \int \frac{F(t)\,dt}{b+t}, \quad \ln z = \int \frac{F(t)\,dt}{c+t},$$

где F — произвольная функция. Выбирая различным образом F, получим различные типы траекторий. В частности, при $F\equiv 1$ имеем прямые комплекса. Преобразование $\bar{x}=\lambda_1 x$, $\bar{y}=\lambda_2 y$, $\bar{z}=\lambda_3 z$ переводит в себя выбранный тетраэдр T и отвечающий ему комплекс с его траекториями. Обозначим на минуту $x=x_1, y=x_2, z=x_3$. Отсюда $\ln\bar{x}_i=\ln x_i+\ln\lambda_i$, $i=1,\ 2,\ 3$. Пусть $x_i(t)$ — траектории комплекса, а λ_i зависят от некоторого другого параметра τ. Тогда, обозначая $\ln\bar{x}_i=\xi_i$, $\ln x_i=\varphi_i$, $\ln\lambda_i=\psi_i$, получим

$$\xi_i=\varphi_i(t)+\psi_i(\tau).$$

Мы пришли к уравнению «поверхности переноса». Этот класс поверхностей был исследован Ли в ряде последующих работ. Он оказался глубоко связанным с такими фундаментальными разделами математики XIX в., как минимальные поверхности и абелевы интегралы. С поверхностями переноса мы познакомимся в одной из последующих глав, а сейчас вернемся к равенству (10), которое подходящим проективным преобразованием переменных $U=\ln x$, $V=\ln y$, $W=\ln z$ приводится к виду

$$dX^2+dY^2+dZ^2=0, \tag{11}$$

исходному для других важных построений.

Изотропный комплекс. Пусть

$$(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2+(Z-Z_0)^2=0$$

— уравнение изотропного конуса с вершиной в точке $M_0(X_0, Y_0, Z_0)$. Каждый такой конус проходит через круг Понселе (рис. 3), и совокупность этих конусов зависит от трех параметров-координат точки M_0. Таким образом, множество изотропных прямых пространства образует комплекс — изотропный комплекс. Равенство (11) — его монжево уравнение. Траектории изотропного комплекса,

$$\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2=0,$$

— это линии нулевой длины. Их касательные — изотропные прямые.

Рассмотрим преобразование пространства,

$$\bar{X}=\theta_1(X,\ Y,\ Z),\quad \bar{Y}=\theta_2(X,\ Y,\ Z),\quad \bar{Z}=\theta_3(X,\ Y,\ Z), \tag{12}$$

при котором имеет место

$$d\bar{X}^2+d\bar{Y}^2+d\bar{Z}^2=\rho(X,Y,Z)(dX^2+dY^2+dZ^2). \tag{13}$$

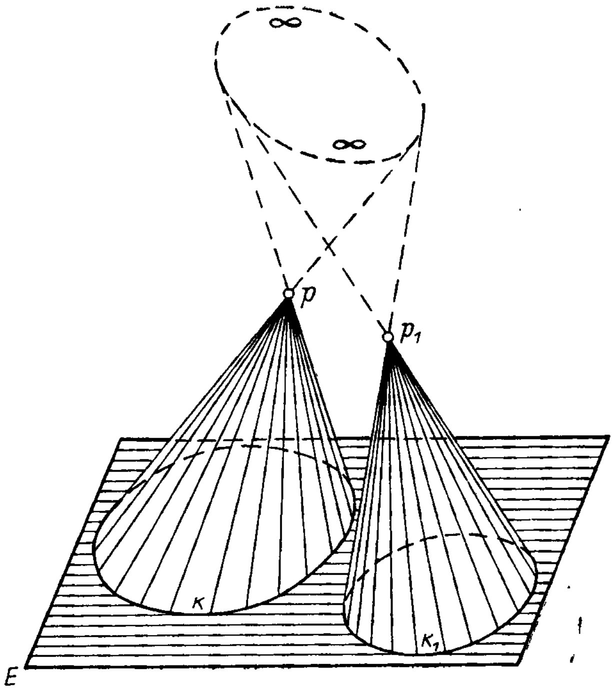


Рис. 3. *Изотропный комплекс, круг Понселе и конформное отображение.*

Из уравнения (13) следует, что любые две линии γ_1, γ_2, проходящие через точку X, Y, Z, при условии $\rho(X, Y, Z) \neq 0$ переходят в две линии $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2$, образующие между собой в точке $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ тот же угол, что и угол между γ_1, γ_2. В силу этого преобразование (12) называется конформным. Как показывает (13), при конформном преобразовании уравнение Монжа (11) снова переходит в уравнение Монжа $d\bar{X}^2 + d\bar{Y}^2 + d\bar{Z}^2 = 0$. Это условие является и достаточным для конформности преобразования. При этом изотропный комплекс прямых переходит в подобный же комплекс. Последнее условие является также и достаточным условием конформности отображения.

В 1850 г. Лиувилль опубликовал теорему, согласно которой любое конформное преобразование пространства помимо движений (вращений и параллельных переносов) может быть представлено в виде сочетания дилатаций (преобразований подобия) и инверсий относительно сфер. Эта теорема очень важна для теории потенциала, ибо при конформном отображении гармонические функции, т. е. функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

переходят в гармонические функции. Примерно через 15 лет после Лиувилля она была независимо доказана Томпсоном (лорд Кельвин), получившим на ее основе решение внешней задачи Дирихле из одноименной внутренней задачи. Было также замечено, что теорема Лиувилля справедлива в n-мерных пространствах, $n \geqslant 3$. Строгое ее доказательство в R^n при слабых ограничениях на функции, задающие отображение, содержится в книге С. П. Новикова с соавторами [II, 25, с. 133]. Рассмотрение конформного отображения на основе привлечения изотропных линий восходит к Клейну и Ли [II, 33, с. 197].

Третий комплекс, который мы рассмотрим, называется нуль-системой, или линейным комплексом. Именно связь нуль-системы с изотропным комплексом, найденная Ли, привела его к открытию, которое в свое время вызвало сенсацию.

Нуль-система. Прямолинейный комплекс называется нуль-системой (Мебиус, 1836 г.), если все его прямые, проходящие через одну и ту же точку, лежат в одной плоскости (рис. 4). К нуль-системе приводит рассмотрение равенства

$$xy'-yx'+k(z-z')=0, \tag{14}$$

представляющего собой при фиксированных x', y', z' уравнение плоскости $P_{M'}$, проходящей через точку M' с этими координатами. Легко видеть, что всякая прямая l [см. (5)],

$$x=mz+\mu, \quad y=nz+\nu,$$

проходящая через M', для которой

$$m\nu-\mu n+k=0, \tag{15}$$

лежит в плоскости $P_{M'}$. Таким образом, равенство (15) — уравнение нуль-системы, а (14) называется ее производящим соотношением. Константа k называется параметром нуль-системы. Если $k=0$, комплекс называется вырожден-

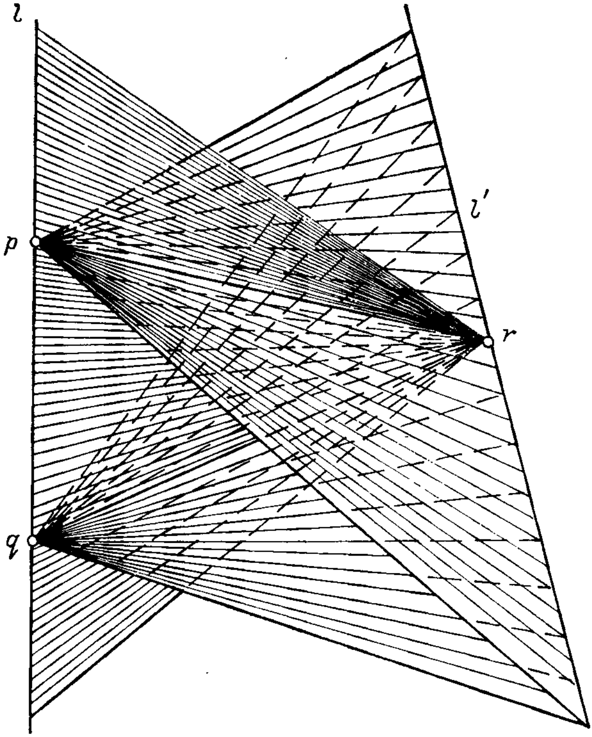


Рис. 4. *Нуль-система.*

ным. Он состоит из всех прямых, пересекающих фиксированную прямую (в данном случае — ось Z). Предположим, что $k \neq 0$. Преобразование $z \to z/k$ позволяет записать (15) в виде

$$m\nu - \mu n + 1 = 0, \tag{16}$$

а в дальнейшем считаем $k=1$. Если точка M' описывает прямую (5), плоскость $P_{M'}$ вращается вокруг прямой l' (5'):

$$x = m'z + \mu', \quad y = n'z + \nu',$$

где

$$m' = -\frac{m}{\eta}, \quad \mu' = -\frac{\mu}{\eta}, \quad n' = -\frac{n}{\eta}, \quad \nu' = -\frac{\nu}{\eta},$$

$$\eta = m\nu - \mu n.$$

Здесь можно поменять местами l и l', и, таким образом, нуль-система устанавливает 1—1-соответствие между прямыми пространства.

Говорят, что l и l' — взаимные поляры относительно нуль-системы.[1] Каждая прямая этого комплекса полярна самой себе. Пересекающимся прямым l_1 и l_2 отвечают полярные им прямые l_1' и l_2', также между собой пересекающиеся. Точке N и проходящей через нее плоскости P_N соответствует точка N' и плоскость $P_{N'}$, через нее проходящая. Поверхности S, рассматриваемой как огибающая ее касательных плоскостей P, отвечает полярная ей поверхность S' — огибающая плоскостей P', полярных плоскостям P (это свойство взаимное: S и S' можно поменять местами).

Запишем d-уравнение нуль-системы. Из равенств $dx=mdz$, $dy=ndz$, а также (5) и (6), имеем

$$xdy-ydx+dz=0. \tag{17}$$

Это — пфаффово уравнение. Для траектории отсюда получается

$$x\dot{y}-y\dot{x}+\dot{z}=0.$$

В названном мемуаре Ли [I, 17] доказан ряд свойств траекторий трех названных типов комплексов и установлены связи теории комплексов с уравнениями в частных производных первого и второго порядков. Там же содержатся интересные теоремы о применениях комплексов в дифференциальной геометрии. Вот одна из них. Пусть S — линейчатая поверхность, образующие которой — прямые нуль-системы. Тогда ее асимптотические линии могут быть найдены с помощью операции дифференцирования (вообще говоря, задача нахождения асимптотических линий требует интегрирования дифференциальных уравнений).

Отображение Ли. Будем рассматривать x, y, z и X, Y, Z как координаты точек двух пространств — R^3 и $\mathfrak{R}^3$. Пусть при этом заданы равенства

$$\varphi_i(x,\ y,\ z;\ X, Y, Z)=0,\ i=1,\ 2. \tag{18}$$

---

[1] Нуль-система играет важную роль в теории винтов Мебиуса—Болла—Клиффорда. Ее последующее развитие связано с именами Р. Штуди, А. С. Котельникова и других ученых (см.: Диментберг Ф. М. Теория винтов и ее приложения. — М., 1978).

Если в них считать x, y, z параметрами, имеем комплекс линий в $\mathfrak{R}^3$. Если же параметрами будем считать X, Y, Z, то получим комплекс линий в пространстве R^3. Таким образом, равенства (18) задают соответствие между комплексами в $\mathfrak{R}^3$ и R^3, отображают один из них на другой. Отображением Ли называется следующий вид равенств (18):

$$\begin{aligned} X + iY + xZ + z = 0, \\ x(X - iY) - Z - y = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

В конце данной главы мы покажем, как можно получить эти равенства, а сейчас приведем основные свойства отображения (19). Поскольку равенства (19) линейны относительно обеих групп переменных, отображение Ли задает соответствие между комплексами прямых. Дифференцируя (19) при постоянных x, y, z и исключая последние из полученных равенств и равенств (19), имеем (11):

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0.$$

Дифференцирование (19) при постоянных X, Y, Z и исключение их из полученных равенств и (19) дает

$$dx(xdy - ydx + dz) = 0,$$

или, отбрасывая не представляющий интереса случай $dx=0$ ($x=\text{const}$), получаем (17):

$$xdy - ydx + dz = 0.$$

Итак, (19) приводит к соответствию между d-уравнением изотропного комплекса (11) и d-уравнением нуль-системы (17). Этим самым установлено и соответствие между траекториями этих комплексов, а также между касательными к ним, т. е. между нуль-системой и изотропным комплексом.

Дальнейшие свойства отображения (19) таковы.

1. Пусть точка x, y, z описывает прямую (5). Исключая x, y, z из (5), (19), получим в пространстве $\mathfrak{R}^3$ сферу

$$\left(X - \frac{m+n}{2m}\right)^2 + \left(Y + i\,\frac{m-n}{2m}\right)^2 + \left(Z - \frac{\eta - 1}{2m}\right)^2 = \left(\frac{\eta + 1}{2m}\right)^2,$$

на которую отображается эта прямая. Прямые нуль-системы, ($\eta = -1$), отображаются на сферы нулевого радиуса — точки пространства $\mathfrak{R}^3$.

2. Пусть имеются две прямые

$$x = m_1 z + \mu_1, \ y = n_1 z + \nu_1; \quad x = m_2 z + \mu_2, \ y = n_2 z + \nu_2.$$

Условие их пересечения —

$$(m_1 - m_2)(\nu_1 - \nu_2) = (n_1 - n_2)(\mu_1 - \mu_2).$$

Условие касания двух сфер с центрами в a_i, b_i, c_i радиусов R_i, $i=1, 2$,—

$$(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2 = (R_1 - R_2)^2.$$

Исходя из этого можно проверить, что (19) переводит пересекающиеся прямые в сферы, касающиеся между собой. Отсюда можно сделать один интересный вывод.

3. Пусть S — невырождающаяся поверхность второго порядка — эллипсоид или один из двух гиперболоидов. Известно, что эти поверхности несут на себе по два семейства[2] прямых (вещественных или мнимых) — их прямолинейных образующих. Через каждую точку поверхности S проходит по одной прямой каждого семейства. Любые две прямые одного и того же семейства лежат в разных плоскостях — скрещиваются. Будем рассматривать S как совокупность ее прямолинейных образующих. Преобразование (19) переводит их в сферы, причем каждой пересекающейся паре прямых отвечают две касательные сферы. Совокупность всех сфер, на которые отображаются образующиеся S, состоит из двух семейств, каждое из которых огибает одну и ту же поверхность в пространстве $\mathfrak{R}^3$ — «циклиду Дюпена».

4. В книге Ли—Шефферса [I, 129], где подробно изложена вся эта теория, теорема, о которой сейчас пойдет речь, расценивается как результат особой важности. Предварительно заметим следующее.

Отображение (18) позволяет произвольной поверхности S в R^3 поставить в соответствие некоторую поверхность Σ в пространстве $\mathfrak{R}^3$. Действительно, зададим S, считая, что x, y, z — какие-либо функции двух параметров u и v. Тогда равенства (19) примут вид

$$\psi_i(X, \ Y, \ Z; \ u, \ v) = 0, \tag{20}$$

---

[2] Здесь под словом «семейство» подразумевается множество, зависящее от одного параметра.

где ψ_i — некоторые функции указанных аргументов. Исключая из (20), например, v, получим

$$\beta(X,\ Y,\ Z,\ u)=0,$$

что можно рассматривать как семейство поверхностей в $\mathfrak{R}^3$, зависящее от u. Пусть огибающая этого семейства — поверхность Σ. Этим самым поверхности S ставится в соответствие Σ.

Предположим, что обе названные поверхности S и Σ могут быть заданы уравнениями, соответственно,

$$z=f(x,y) \text{ и } Z=F(X,Y).$$

Величины $p=\frac{\partial f}{\partial x}$, $q=\frac{\partial f}{\partial y}$; $P=\frac{\partial F}{\partial X}$, $Q=\frac{\partial F}{\partial Y}$ определяют в каждой точке обеих поверхностей направление касательной плоскости. Назовем элементом в пространстве (R^3 и $\mathfrak{R}^3$) совокупность величин $(x, y, z; p, q)$. Соответствие между поверхностями S и Σ можно распространить на отвечающие им элементы:

$$(x,\ y,\ z;\ p,\ q)\to(X,\ Y,\ Z;\ P,\ Q).$$

Оказывается, и в этом заключается теорема Ли, специфика равенств (19) такова, что дифференциальное уравнение асимптотических линий на поверхности S,

$$dp\,dx+dq\,dy=0,$$

переходит в дифференциальное уравнение линий кривизны на поверхности Σ:

$$(dX+P\,dZ)\,dQ-(dY+Q\,dZ)\,dP=0.$$

Таким образом, сеть асимптотических линий на S переводится преобразованием (19) в сеть линий кривизны на Σ. «Этот результат, — пишет Клейн [II, 33, с. 114], — следует рассматривать как одно из самых значительных достижений геометрии за последнее время». Оценка Э. Картана [II, 15, с. 254] еще более восторженна: «. . . уже одного этого открытия было бы достаточно, чтобы обессмертить имя Ли». Отдавая должное этой красивой и интересной теореме, нельзя не отметить преувеличенности этих высказываний обоих знаменитых математиков.

5. Покажем теперь, как можно получить преобразование (19). Рассмотрим зависящее от параметра s семейство изотропных плоскостей

$$AX+BY+CZ+D=0, \qquad (21)$$
$$A^2+B^2+C^2=0$$

при следующем наборе функций A, B, C:

$$A=1-s^2, \quad B=i(1+s^2), \quad C=2s.$$

Поступим так, как если бы мы искали огибающую этого семейства. Для этого нужно к (21) присоединить равенство, полученное дифференцированием его по s. Это дает

$$(1-s^2)X+i(1+s^2)Y+2sZ+D(s)=0, \qquad (22)$$
$$-2sX+2isY+2Z+D'(s)=0. \qquad (23)$$

Умножая (22) на 2, (23) на s и вычитая затем из первого равенства второе, получим

$$X+iY+sZ+D-\frac{sD'}{2}=0,$$
$$s(X-iY)-Z-D'=0.$$

Откуда, обозначая $D-\frac{sD'}{2}=z$, $D'=y$, $s=x$, приходим к преобразованию Ли (19).

Сказанное об отображении Ли (19) нуждается в одном уточнении. Мы видели (см. с. 52), что при задании нуль-системы каждой поверхности отвечает сопряженная (полярная) ей поверхность относительно этого комплекса. Отображение (19) 2—1-значно. Это следует понимать так, что поверхность S в R^3 распадается на две взаимно полярные поверхности ω_1 и ω_2, причем каждая из них отображается, согласно (19), на поверхность Σ. Соответственно отображаются и двумерные касательные элементы названных поверхностей (рис. 5).

Теория прямолинейных комплексов (в «плюккеровых координатах») излагается у Клейна [II, 33, § 19—22), где также приводятся некоторые геометрические результаты Ли, на которых мы здесь не останавливаемся, в частности элементы его геометрии сфер. Там же обсуждается и теорема Ли о прямолинейно-сферическом отображении, но изложение ее у Клейна носит довольно расплывчатый характер. Мы предпочли указать в п. 4 путь к ее аналитическому доказательству.

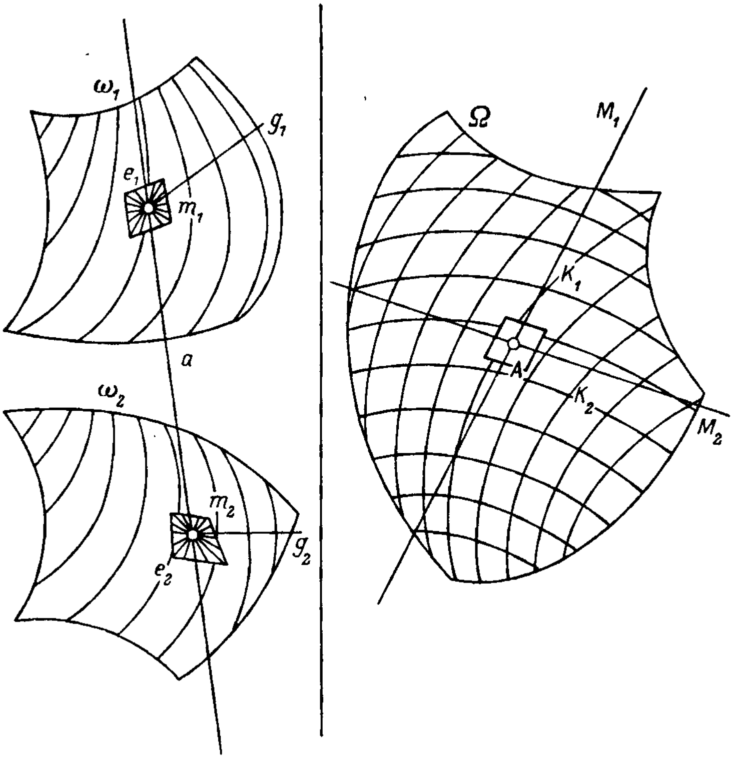


Рис. 5. *Отображение Ли.*

Слева — сопряженные поверхности относительно нуль-системы ω_1 и ω_2 с лежащими на них траекториями, *справа* — их образ при отображении.

Геометрические истоки теории групп преобразований

Как по волшебству, возникают мемуары Ли по различным вопросам геометрии и дифференциальным уравнениям. Среди них и работы, прокладывающие новые пути. Ли решает снова посетить Германию и Францию, чувствуя теперь себя несравненно увереннев, чем в предыдущую заграничную поездку. С Клейном он проводит сентябрь 1872 г. в Гёттингене, а октябрь — в Эрлангене. Название этого города вошло в историю геометрии благодаря прочитанной там Клейном зимой 1872 г. лекции «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований», известной под названием «Эрлангенская программа». Изданная тогда же в виде брошюры, она была переведена на многие европейские языки,[1] а в 1893 г. в значительно дополненном виде опубликована в 43-м томе «Матем. Анналеп».

В «Эрлангенской программе» впервые был дан четкий ответ на вопрос, что такое геометрия. Во введении к этой работе Клейн отмечает, что «геометрия, единая по существу, при быстром своем развитии в последнее время разветвилась на ряд почти раздельных дисциплин, которые продолжают развиваться в значительной степени независимо друг от друга». Речь, таким образом, с самого начала шла об объединяющем начале разных геометрий. Продолжая, Клейн говорит: «Была еще и другая цель изложить методы и взгляды, развитые С. Ли и мною в наших новейших работах». Здесь имеются в виду непрерывные группы преобразований, значение которых для различных конкретных геометрических проблем Клейна и Ли к тому времени уже осмыслили достаточно четко.

Ответ Клейна на поставленный вопрос гласил: «Каждая геометрия есть теория той или иной группы преобразований». В частности, наша школьная, эвклидова геометрия есть теория инвариантов группы движений и группы подобия. Термин «движение» здесь можно понимать в его наглядном кинематическом смысле — как сочетание вращений и параллельных переносов. Метрические свойства пространства — длины отрезков, углы между линиями, площади фигур и т. п. — при этом не меняются. Остаются в силе и соотношения между этими понятиями (теорема Пифагора, . . .). Учение о подобии фигур, также знакомое нам по школьному курсу, имеет дело со свойствами, не меняющимися при преобразованиях подобия, также составляющих группу. Свое изложение Клейн сопровождает многочисленными содержательными примерами. Он часто при этом упоминает Ли, но центральная идея «Эрлангенской программы» принадлежит Клейну и только ему.

К началу 70-х годов относится также оформление Клейном его блестящих идей проективной метрики, точнее проективных интерпретаций геометрий Лобачевского (гиперболической), Римана (эллиптической), а также ряда других геометрий, причем эвклидова геометрия вписы-

[1] Русский перевод этой работы см. [II, 38, с. 399—434].

вается в эту интерпретацию как своеобразный частный случай. У Клейна в этой области были выдающиеся предшественники — Бельтрами и Келли [II, 38]. Мы говорили также о формуле Лагерра для проективного выражения угла между прямыми (с. 24). Главная заслуга в построении теории проективных метрик также принадлежит Клейну. В его работе 1871 г. «О так называемых неэвклидовых геометриях» [II, 38, с. 253—304] эта теория, хотя и незавершенная в ряде деталей, уже имеет стройный вид: гиперболическая и эллиптическая метрики, двойственность, вырождения, группы движений, связи с теорией поверхностей постоянной кривизны. Проективная метрика заслуживает того, чтобы на ней хотя бы кратко остановиться.

1. Пусть в обычной эвклидовой плоскости P задана окружность $x^2+y^2=1$. Назовем ее абсолютом, а точки, лежащие внутри ее, — точками плоскости Лобачевского — Л-точками. Хорды, соединяющие точки абсолюта, назовем Л-прямыми. Угол между двумя Л-прямыми, проходящими через некоторую Л-точку, понимаем как угол в обычном смысле. Расстояние $d=d\,(M_1,\ M_2)$ между двумя Л-точками зададим формулой

$$d=k\ln(M_1,\ M_2,\ P_1,\ P_2), \tag{1}$$

где P_1, P_2 — точка пересечения Л-прямой, проходящей через M_1, M_2, с абсолютом, а k — некоторая вещественная положительная константа. Определенная таким образом величина d вещественна, положительна, удовлетворяет условию $d\,(M_1,\ M_2)=d\,(M_2,\ M_1)$ и, если точка M_3 лежит между M_1 и M_2, $d\,(M_1,\ M_3)+d\,(M_3,\ M_2)=d\,(M_1,\ M_2)$. Когда одна из точек M_1 или M_2 стремится к абсолюту, $d\to\infty$. Две Л-прямые, пересекающиеся на абсолюте, рассматриваются, таким образом, как параллельные. Здесь выполняется аксиома о параллельности Лобачевского: через Л-точку, лежащую вне Л-прямой, проходят две Л-прямые, ей параллельные, образующие между собой угол, отличный от нуля,. . . Если одна из точек M_1 или M_2 лежит вне абсолюта, то d — мнимая величина.

Угол φ между двумя Л-прямыми m_1, m_2, пересекающимися в Л-точке M, определяется равенством

$$d=\frac{i}{2}\ln(m_1,\ m_2,\ p_1,\ p_2), \tag{2}$$

где p_1, p_2 — касательные, проведенные из M к абсолюту. Так как M лежит внутри его, эти касательные мнимы, но они — комплексно сопряженные прямые и d — величина вещественная (ср. формулу Лагерра, с. 24).

2. Зададим в проективной плоскости П мнимую кривую $x^2+y^2+1=0$, которую назовем абсолютом. Она не разделяет плоскость на две части, и мы назовем эллиптической плоскостью совокупность всех точек П. Э-прямыми назовем прямые в П. Расстояние d между двумя Э-точками M_1 и M_2 определим той же формулой (1), где P_1, P_2 — точки пересечения Э-прямой M_1, M_2 с абсолютом. При этом для того чтобы d было вещественным, k следует взять мнимым ($k=ik'$). Угол между двумя Э-прямыми определим той же формулой (2), где все обозначения имеют тот же смысл, что и выше.

В геометрии Лобачевского длина любой прямой бесконечна, в эллиптической геометрии она равна $\pi k'$. Проективные интерпретации позволяют получить все соотношения обеих геометрий. Пусть П — проективная плоскость. Зададим на ней в проективных координатах кривую второго порядка

$$\sum_1^3 a_{ij}x_ix_j=0, \tag{3}$$

которую назовем абсолютом. Если (3) — вещественная невырождающаяся линия, при тех же определениях, что и в п. 1, и тех же формулах внутри (3) имеем геометрию Лобачевского. Если (3) — мнимая кривая, получим эллиптическую геометрию (геометрию Римана). Можно также при тех же формулах и определениях и вещественном абсолюте рассматривать геометрию вне его. При этом геометрия расстояний в любой выпуклой области оказывается эллиптической, а геометрия углов — гиперболической (длина прямой имеет конечное значение, а угол между вумя прямыми может быть произвольным).

Случаи вырождения абсолюта приводят к различным своеобразным геометриям; геометрии Эвклида отвечает абсолют, вырождающийся в дважды взятую несобственную прямую с ее циклическими точками. Всего здесь возникает девять различных геометрий.

3. Проективная метрика в пространстве строится также. В основу кладется поверхность второго порядка — абсолют $\sum_1^4 a_{ij}x_ix_j=0$ (x_i — проективные координаты в пространстве). При вещественном невырождающемся абсо-

люте и аналогичных п. 1 определениях получаем внутри него геометрию Лобачевского. Мнимый абсолют, как и в п. 2, приводит к эллиптической геометрии во всем пространстве. Всего здесь, с учетом геометрий вне вещественного абсолюта и случаев его вырождения, возникает 27 различных геометрий, в том числе геометрия специальной теории относительности — геометрия группы Лоренца (псевдоэвклидова). Поскольку проективные преобразования оставляют неизменными двойные отношения, они оставляют без изменения и все метрические соотношения каждой из геометрий. Все эти геометрии в плоскости или в пространстве можно, согласно установке Клейна, считать теорией инвариантов группы проективных преобразований, оставляющей инвариантным ее абсолют.

В 80-х годах XIX в. Пуанкаре построил разновидность клейновой интерпретации геометрии Лобачевского на плоскости, которая сыграла важную роль в его теории автоморфных функций (см., например, [II, 46]). Приходится, однако, констатировать, что наш XX в. пока не был счастливым для проективной метрики. В замечательной современной учебной монографии Б. А. Дубровина, С. П. Новикова и А. Т. Фоменко [II, 25] она, например, вовсе не упоминается. Основанная М. Фреше и С. Банахом, теория метрических пространств, по существу, берет свое начало из крохотного родничка — теоремы Пифагора; спектральная теория линейных операторов (Д. Гильберт, Ф. Рисс, Т. Карлеман, И. фон Нейман, М. Крейн, . . .) возникла из очень старой задачи приведения квадратичной формы к сумме квадратов. Оба этих могучих течения не захватили проективной метрики. Ее значение все же неоспоримо. Но тут есть и другая сторона — эстетическая, а возможно, и психологическая. Эта теория способна произвести сильное, даже завораживающее впечатление. В 90-х годах минувшего века в одном из французских философских журналов был напечатан диалог,[2] состоящийся в Сорбонне между Дарбу и одним из его молодых коллег N.

N. Как Вы относитесь к тому, что наш трехмерный макрокосмос, физический мир, в котором мы существуем, — проекция четырехмерного пространства?

---

[2] Содержание приведенного фрагмента сообщил автору много лет тому назад проф. С. Д. Россинский.

Дарбу (улыбаясь). И «Он» находится «там»? Это уже старо.

N. Чем больше я думаю об этом, тем больше я прихожу к выводу, что проективное мероопределение — это нечто ниспосланное нам свыше, откровение, пришедшее через математику. Нигде мы не способны ощутить бесконечность так, как здесь. Она на ладони, перед нами, мы видим ее на абсолюте. А этот мир, лежащий за его пределами, мир, находящийся от нас на мнимом расстоянии. . . При мысли об этом у меня пробегает дрожь трепета и восхищения.

Дарбу. Пожалуй . . . Тут безбрежное море для всяких фантазий. Бывают фантазии реальные, такие дарит нам ежегодно месье Верн, бывают и мистические фантазии. Нет, нет, я не приписываю Вам мистицизма. Фантазировать, мечтать — это всегда хорошо.

N. Я пленен красотой того факта, что наша привычная геометрия возникает, когда абсолют вырождается особым образом.

Дарбу. Это очень интересно и это, конечно, нечто иное, чем предельные переходы $k \to \infty$ Лобачевского—Бойяи и Римана, приводящие нас к Эвклиду (достает хронометр и открывает его крышку). Простите, уже два часа дня и меня ждет экипаж.

Вернемся еще к «Эрлангенской программе» Клейна. Она охватывает не только названные выше многочисленные геометрии, но и геометрии иных пространственных элементов (сфер, прямых, . . .), геометрии бирациональных («кремоновых») преобразований и т. д. Переоценить значение шага, сделанного Клейном, невозможно, но его общая концепция геометрии немедленно ставит вопрос об общем определении группы преобразований. Это определение для непрерывных групп (в духе того времени) и было дано Ли.

Очень разных по своей природе, Ли и Клейна в течение долгих лет связывали творческая и личная дружба.

Судьба к Клейну благоволила. Первые же его труды сразу завоевали признание, а его имя быстро обрело популярность не только в Германии, но и за ее пределами, в том числе и в России. К слову сказать, по числу книг, переведенных на русский язык, среди иностранных математиков немного найдется равных ему. Разносторонне образованный, Клейн был блестящим организатором, превосходным лектором, обладал немалым писательским талантом. Круг его математических воззрений был очень широк, хотя талант не так универсален, как у младших его современников — Пуанкаре и Гильберга. Эрудиция, хорошие манеры, красивая внешность к тому же, о чем свидетельствуют многочисленные его портреты и фотографии, — все это очень привлекало в нем.

Ли же, интересы которого почти не выходили за пределы математики, мало занимало то, что волновало и увлекало его немецкого коллегу и друга. Не удивительно, что в их взаимоотношениях, как метко заметил И. Яглом, Клейн большей частью выступал как старший. Различие темпераментов и широты интересов полностью отразилось на характере их научного творчества. Богатство фантазии зачастую уводило Клейна от завершения своих математических замыслов. Так, например, скрупулезную работу по исследованию всех геометрий трехмерного пространства, возникающих при введении в нем проективной метрики, он предоставил своим последователям и ученикам. Ли, наоборот, старался всегда сам доводить до конца задуманное, что особенно ярко проявилось в его поисках всех типов групп преобразований на плоскости и в пространстве.

Знакомство с литературным наследием обоих ученых с особой убедительностью и наглядностью выявляет разницу их натур. У Ли, например, мы часто встречаем исторические отступления, выходящие и за пределы тех вопросов, которые его увлекали. Они интересны, содержательны, полезны. Их тон деловит, формулировки отличаются законченностью и объективностью. Но как это далеко от поистине литературного стиля Клейна. Его «Лекции по истории математики в XIX столетии» [II, 32] едва ли не высокохудожественное произведение. Эта книга, несмотря на определенную субъективность автора в выборе материала и его оценок роли ведущих ученых в охватываемой ею эпохе, сыграла выдающуюся роль в формировании математического развития и мышления многих представителей разных поколений математиков.

Мы знаем о в высшей степени напряженном периоде работы Клейна во время его соревнования с Пуанкаре в исследованиях по теории автоморфных функций, стоившем ему эмоционального срыва. Но без преувеличения можно сказать, что Ли в таком накале жил и работал всегда, соревнуясь ли с Майером в уравнениях с частными производными, со Шварцем и его сотрудниками — в теории минимальных поверхностей, с Дарбу — в различных проблемах дифференциальной геометрии, с Фробениусом — по проблеме Пфаффа, с молодыми коллегами, подключившимися к исследованиям в области его теории групп преобразований, и, наконец, борясь со своей единственной, но роковой болезнью.

Клейн с редкой чистосердечностью сказал о себе: «Моя собственная творческая деятельность в области теоретической математики закончилась в 1882 г. Все дальнейшее, поскольку оно не является разработкой прежних идей, относится только к лекциям». Следует заметить, однако, что уже сделав это признание, Клейн создал классическую работу об икосаэдре, а в XX в. — несколько больших трактатов по чистой и прикладной математике (с Зоммерфельдом, Фрике и другими более молодыми сотрудниками), занимался математическими проблемами теории относительности. Но, говоря о творчестве, Клейн, видимо, подразумевал творческий жар, горение — именно то, что всегда отличало Ли.

Не удивительно, что при таком различии натур между ними в конце концов наметился разлад. И хотя подлинные причины охлаждения отношений между Клейном и Ли неизвестны, но об этом говорит очень хорошо знавший их обоих Нетер [II, 13], не входя, однако, ни в какие подробности, и то же повторяет Фрейденталь [II, 18].

В конце 70-х годов Клейн переключился на исследования специальных классов аналитических функций. Его результаты по автоморфным функциям, считающиеся классическими, связаны с дискретными группами и апелируют к теории Галуа. В это время Ли все больше сближается с Майером, во многом родственным ему по духу. Однако с Клейном у Ли контакты никогда не прерывались. В одном из писем 1884 г. он благодарит Клейна за присланную «прекрасную книгу об икосаэдре», выражая приятное удивление, что тот счел нужным его упомянуть в предисловии к ней. Можно привести немало примеров проявления искреннего добросердечия Клейна к Ли уже и после наметившегося между ними разлада. Так, он вместе с Майером оказал Ли услугу, обернувшуюся поистине неоценимой, направив ему в Христианию в 1884 г. для сотрудничества молодого Фридриха Энгеля, сыгравшего исключительную роль в последние полтора десятилетия жизни Ли. Он же много способствовал быстрой публикации мемуаров Ли в немецких изданиях, особенно в ведущем журнале — «Матем. Анналеп», который с 1872 г. возглавил после безвременной кончины его главного редактора Клебша. Еще при жизни Ли Клейн много сделал для пропаганды его результатов и идей. Так, в одну из поездок в США, в 90-х годах, он прочитал цикл лекций, где изложил основные идеи лиевского мемуара [I, 17], а также других работ Ли по геометрической теории дифференциальных уравнений. Эти лекции легли в основу изданной через много лет книги Клейна «Высшая геометрия» [II, 33]. Там охвачен очень широкий круг вопросов и содержатся результаты многих авторов, но никому из них не уделено столько внимания, сколько Ли.

Разумеется, и Ли упоминал Клейна в своих трудах, например в книге по геометрии контактных преобразований [I, 129], но в целом нечасто и не всегда объективно. Так, в предисловии к третьему тому теории групп преобразований [I, 126] он пишет: «Меня иногда несправедливо называют учеником Клейна. Вернее было бы, однако, сказать обратное. Я высоко ценю талант Клейна, но там, где речь шла о наших общих рассмотрениях, он скорее выступал как популяризатор». Действительно, Клейн был популяризатором и притом блестящим. Достаточно напомнить о проделанной им грандиозной работе по изданию всеобъемлющей математической энциклопедии. Этого рода деятельности Ли сторонился, видя свое единственное назначение в постоянных и настойчивых поисках новых результатов. Но никак нельзя отрицать стимулирующего влиния Клейна (его личности и его результатов) на формирование творческого пути Ли. Клейн, разумеется, не мог не знать об этом высказывании, а возможно, были и другие подобные, но он был выше мелких обид. Во втором томе своих лекций по истории математики в XIX столетии он намеревался посвятить отдельные главы Ли и Пуанкаре. Этот замысел не был осуществлен: вышедшая книга была посвящена другим вопросам (геометрическим аспектам теории относительности), но и без этого Клейн очень много сделал для своего коллеги и друга молодости.

Уравнения с частными производными: от Якоби — к Майеру и Ли

В сентябре 1872 г. Ли познакомился в Дюссельдорфе с А. Майером — математиком, с которым отныне его будут связывать узы дружбы, а также длительное и тесное сотрудничество. В эпистолярном наследии Ли (той его части, которая касается переписки с коллегами) переписка с Майером занимает едва ли не самое большое место.[1] Именно Майер наряду с Клейном были первыми,

[1] Здесь и далее в этом разделе переписка Ли—Майер цит. по: [I, 130, т. 5, 583—614].

кому Ли поведал подробности своих результатов по группам преобразований.

Христиан Адольф Густав Майер был старше Софуса Ли на три года. Он родился в Больцано (Италия) в 1839 г. в богатой купеческой семье австрийского происхождения. С 1857 по 1865 г. он учился в Лейпциге, а затем в Кёнигсберге у Фрица Неймана. Майер занимался вариационным исчислением и уравнениями в частных производных и в этих областях показал себя достойным продолжателем классических работ Якоби.

Помимо геометрических вопросов, связанных с уравнениями в частных производных, Ли интересовали также и методы их решения. Именно здесь Майер был особенно силен. Как рассказывал Энгель, Клебш, получив от Ли его первую работу по уравнениям в частных производных, присланную для помещения в «Матем. Анналеи», поначалу усомнился в достоверности результатов. Однако достижение Майером аналогичных, но другим путем, сумело убедить его в обратном. Майер был чистым аналитиком и во многих случаях, там где Ли вела его геометрическая интуиция, шел к цели через дебри вычислений. Мы еще коснемся его результатов, а сейчас для пояснения дальнейшего остановимся на столь же знаменитом, сколь и важном уравнении Гамильтона—Якоби.

Одним из фундаментальных результатов теории уравнений в частных производных первого порядка (УЧППП) является возможность сведения их к системам обыкновенных дифференциальных уравнений — «характеристической системе заданного уравнения». Во многих случаях оказывается целесообразным обращение этого обстоятельства: сведение системы обыкновенных уравнений к УЧППП. Сказанное приобретает особую важность, когда речь идет о канонической системе уравнений динамики точек:

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}; \quad i=1, \ldots, n, \tag{1}$$

где x_i — координаты, p_i — импульсы, $H(t, x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n)$ — гамильтониан системы — ее полная энергия, t — время.

Гамильтону и Якоби принадлежит следующий фундаментальный результат: нахождение общего интеграла системы (1) равносильно нахождению полного (зависящего от $n+1$ произвольных постоянных) решения уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H\left(t, x_1, \ldots, x_n; \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)=0 \qquad (2)$$

с частными производными («уравнение Гамильтона—Якоби»).[2]

Пусть

$$V=V(t;\ x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n)+a_{n+1}$$

— полный интеграл уравнения (2). Тогда равенства

$$\frac{\partial V}{\partial a_i}=b_i, \quad \frac{\partial V}{\partial x_i}=p_i$$

определяют (в неявной форме) x и p в качестве общего решения (1).

В ряде случаев уравнение (2) оказывается более удобным, чем система (I): например, когда решение $V(t, x, p)$ имеет смысл искать в виде $V=V_1(\alpha)V_2(\beta)$, где α означает одну группу аргументов, а β — другую.

Отправляясь от уравнения (2), Якоби решил ряд важных проблем механики, астрономии и геометрии: задачу двух тел в трехмерном пространстве, задачу притяжения к двум неподвижным центрам, нахождение геодезических линий на трехосном эллипсоиде (последняя проблема была решена этим методом впервые). Как писал Клейн: «Развивая эти исследования, Якоби нашел ряд замечательных и глубоких предложений. . . Это направление аналитической механики . . . ведет свое начало от Пуассона и, выйдя за пределы исследований Якоби, достигло своего расцвета в 70-х годах в работах Ли и Майера» [II, 32, с. 249].

Общих публикаций у Ли и Майера не было (в то время, в отличие от наших дней, это было довольно редким явлением), но интересно, что они однажды выступили в качестве партнеров-союзников в конкурсе, объявленном в 1872 г. Парижской Академией по поводу знаменитой проблемы трех тел.

---

[2] И обратно, (1) является характеристической системой уравнения (2). Прекрасное изложение этих вопросов имеется в кн.: Курант Р. Уравнения с частными производными. — М., 1964, гл. 2. См. также [II, 61, § 50], где, в частности, излагается подход Майера к уравнению (2).

В январе 1873 г. Ли писал Майеру, что по дороге из Германии домой осенью минувшего года, просматривая одну из работ того, пришел к выводу, что их результаты могут иметь существенное значение для этой проблемы, поскольку она сводится к уравнению, которое они оба подробно исследовали. Вслед за этим между ними произошел следующий обмен письмами.

Ли — Майеру (26 I 1873): «Немец Радау,[3] который, если я не ошибаюсь, длительное время работал в Париже, свел проблему трех тел к уравнению вида $F(x_1, \ldots, x_4; z, \partial z/\partial x_1, \ldots, \partial z/\partial x_4)=0$, что, с моей точки зрения, является важным шагом. . .». (Там же Ли показывает, как можно получить этот результат, — *Е. П.*).

Майер — Ли (1 II 1873): «Я благодарен Вам за это сообщение. Работу Радау в „Матем. Аннален“ я видел». (Майер далее приводит свой способ редукции проблемы к уравнению того же типа). Указывая, что последние результаты Ли могут дать существенное упрощение проблемы трех тел, Майер в том же письме затрагивает вопрос об их совместном участии в конкурсе. Он спрашивает Ли, не знает ли тот, каковы условия конкурса. Ответ Ли гласил (дата письма неизвестна): «Проблема сформулирована так: дать усовершенствование теории движения трех тел, притягивающихся друг к другу по естественному (ньютоновому, — *Е. П.*) закону, для чего указать новые интегралы этой, уже известной задачи или указать какие-либо иные аналитические пути для преодоления связанных с ней трудностей. Указано, что в конкурсе могут участвовать лишь работы, поступившие до июля 1872 г. Комиссия: Бертран, Серре, Лиувилль, Пюизе, Эрмит.

Нам следует поторопиться. Хотя мы уже опоздали претендовать на получение премии, мы достигнем цели, если обратим внимание Комиссии на наши работы.

Я прошу Вас вкратце резюмировать наши результаты, указав, что решение проблемы связано с . . . (Ли указывает сущность предлагаемого ими упрощения, подхода к решению проблемы, — *Е. П.*). Не лишним будет отметить, что наша работа по методам существенно отличается от предыдущих результатов на эту тему. Прошу Вас

---

[3] Он же Радо (Jean Charle Radau, р. 1835). Его работа, о которой идет речь: Uber gewisse Eigenschaften der Differential Gleichungen der Dinamik. — Math. Ann., 1870, 2, S. 167—181.

подписать резюме от имени нас обоих, приложить наши публикации и отослать все в Париж конкурсной комиссии».

Майер — Ли (24 V 1873): «Вчера я отослал в Париж, в Академию, наши материалы по конкурсной проблеме. Хотя все это было сделано в понятной спешке, я надеюсь, нас поймут правильно. . . В составленной мною пояснительной записке говорилось: „Мы знаем, что указанный Академией срок уже истек, и не претендуем на премию, но поскольку мы полагаем, что наши исследования по уравнениям в частных производных позволяют существенно продвинуть интегрирование поставленной задачи, мы обращаем ваше внимание на прилагаемые наши публикации. . .“»: (Майер разъясняет далее, что результаты обоих авторов различны и дополняют друг друга, — *Е. П.*).

Ли — Майеру (июнь 1873): «Ваше письмо в Париж представляется мне во всех отношениях хорошим. Кстати, курьезно, что тамошнее филоматическое общество оказало мне честь, избрав своим иностранным корреспондентом. В Париже я близко знаю лишь Жордана и Дарбу. . .».

В октябре 1874 г., опять находясь в Париже, Ли посылает Майеру письмо, где говорится: «Пюизе, которого я вчера встретил у Шаля, сообщил, что премия за проблему 3-х тел никому присуждена не была. Что касается нашей работы, то, сказал Пюизе, при ее представлении не были соблюдены условия конкурса и в ней нет прямой трактовки проблемы».

Официальное решение конкурсной комиссии по поводу работы Ли—Майера гласило: «Брошюры на немецком языке, составляющие п. 3 материала, представленного соискателями, содержат изложение замечательного метода решения УЧППП, но, не говоря уже о том, что содержание этих работ не соответствует постановке конкурсной проблемы, то обстоятельство, что фамилии соискателей с самого начала были известны, исключает возможность рассмотрения их как конкурсных».

Решение, безусловно, правильное, и замечание Ли в конце того же письма Майеру — «Что Вы скажите по поводу сообщения Пюизе? Оно ведь смехотворно!»— вызывает по меньшей мере недоумение. Ведь цель, которую себе поставили авторы, — обратить внимание на их работы — была достигнута, и здесь уместно отметить, что как раз в это время в Париже публиковались важные работы Дарбу по УЧППП (см. ссылки на них в [II, 64, гл. VIII]). Тем более несправедливо было порицать столь авторитетную комиссию Академии, в которой как-никак некогда состоял великий Лаплас — один из главных творцов небесной механики. Хотя мы не знаем других примеров подобной нетерпимости со стороны Ли в его молодые годы, несомненно уже тогда проявлялись особенности его характера, которые через двадцать с лишним лет стали неотъемлемым спутником тяжелого психического заболевания, обусловленного также и соматическими причинами, повлекшими за собой конец.

Общие методы в теории УЧППП.[4] Центральной проблемой теории УЧППП в XIX в. было исследование системы уравнений

$$F_1(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0, \ldots,$$
$$F_m(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0, \quad m < n, \tag{A}$$

где z — неизвестная функция переменных x; $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$.

До появления работ Ли и Майера наивысшим достижением считался тут «Второй метод Якоби». Познакомимся с его сущностью, но сначала одно замечание, весьма важное для дальнейшего. Пусть задана каноническая система уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dH}{dp_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{1}$$

и $F = F(t, x, p)$ — функция переменных t, x_i, p_i. Запишем скорость ее изменения:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{dF}{dp_i}\frac{dp_i}{dt}.$$

Учитывая (1), получим

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (F, H), \tag{2}$$

где обозначено

$$(F, H) = \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}. \tag{3}$$

---

[4] Исторический путь развития УЧППП см. в работе: Демидов С. С. Развитие исследований по уравнениям с частными производными первого порядка в XVIII—XIX вв. ИМИ, 1980, вып. XXV, с. 71—103.

Назовем (3) скобками Пуассона функций F и H. В дальнейшем будем использовать обозначение (3) и этот термин независимо от указанного способа возникновения выражения (3). Очевидно,

$$(F,\Phi)=-(\Phi,F).$$

Выражение (3) является снова функцией тех же переменных, и поэтому к нему снова можно применять указанную процедуру. Имеет место следующее «тождество Якоби»:

$$((F,\Phi),\Psi)+((\Phi,\Psi),F)+((\Psi,F),\Phi)=0.$$

Обратимся теперь к системе (А). Рассмотрим сначала случай, когда F_k не содержат z:

$$F_1(x,\ p)=0,\ \ldots,\quad F_m(x,\ p)=0. \tag{B}$$

Говорят, что система (В) находится в инволюции, если имеет место

$$(F_\alpha,\ F_\beta)=0,\quad \alpha,\ \beta=1,\ \ldots,m. \tag{4}$$

Якоби показал следующее.

1. Любую совместную систему уравнений (В) можно заменить эквивалентной системой такого же вида, находящейся в инволюции. Предположим, что это уже сделано, т. е. для (В) выполняется (4).

2. Систему (В) можно дополнить до новой системы (т. е. дополнить функциями $F_{m+1},\ \ldots,F_n$):

$$F_i=0,\quad i=1,\ldots,\ n,$$

так что полученная система инволюционна, функции $F_{m+1},\ \ldots,\ F_n$ находятся последовательно: каждая — из систем линейных уравнений.

3. Запишем теперь равенства

$$F_1=a_1,\ \ldots,\quad F_n=a_n$$

и решим их относительно p:

$$p_1=p_1(x_1,\ \ldots,\ x_n;\ a_1,\ \ldots,\ a_n),\ \ldots,$$
$$p_n=p_n(x_1,\ \ldots,x_n;a_1,\ \ldots,a_n).$$

4. Тогда выражение $\omega = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n$ — полный дифференциал и функция

$$\varphi(x, a) = \int \omega + a_{n+1}$$

— полный интеграл системы (B).

В этом и заключается «Второй метод Якоби». Он распространяется и на систему (A), но при этом скобки Пуассона (. . .) заменяются некоторыми более громоздкими выражениями («скобки Вейера») [. . .] [II, 61, с. 231].

Майеру принадлежит ряд существенных дальнейших результатов, связанных с исследованием системы (A). Особое внимание им было уделено максимальному сокращению числа процедур нахождения ее решения. Окончательный шаг был сделан Ли, доказавшим, что система (A) сводится к одному УЧППП с $n-m+1$ независимыми переменными. Гурса отмечает, что этот результат в принципе не допускает дальнейшего уточнения. Существеннее, однако, то, что Ли на основе его теории контактных преобразований построил общую теорию УЧППП, связавшую воедино метод полного интеграла Лагранжа, метод характеристик Коши, методы Якоби с их уточнениями, развитыми Майером, Ли и другими авторами. Не случайно в книгах разных авторов на эту тему [II, 6, 56, 62] теория Ли излагается как наивысшее достижение, итог всего развития УЧППП в XIX в.

Интересно, что первой книгой, которую задумал написать Ли, была именно книга по УЧППП (об этом он говорит в 70-х годах в нескольких письмах к Майеру). Замысел остался неосуществленным. Но более чем через полвека такая книга под названием «Лиевская теория УЧППП» все же появилась [II, 60]. Она была в высшей степени обстоятельно и добросовестно (хотя и довольно скучно) написана Энгелем при участии Фабера. В отличие от других книг на подобную тему эта от начала до конца последовательно выдержана в рамках теоретико-групповой точки зрения на идеи и методы УЧППП.

Группы функций. Теоремы Ли об уравнениях первого порядка в частных производных большей частью основаны на его теории групп функций, довольно прозрачной, в которой имеются свои технические подробности, но отсутствуют глубокие теоремы. Она не зависит от теории Ли групп преобразований, хотя имеет с ней очевидные точки соприкосновения.

Пусть имеется r функций $U_1, \ldots, U_r$, зависящих от $2n$ переменных $p_1, \ldots, p_n$; $x_1, \ldots, x_n$. Говорят, что они образуют группу, если при любых i, k имеет место

$$(U_i, U_k) = f_{ik}(U_1, \ldots, U_r), \quad i, k = 1, \ldots, r.$$

Число r называется порядком группы (очевидно, что $r \leqslant 2n$). Непосредственно с помощью дифференцирования доказывается:

1) если U_i образуют группу, то любая функция $f(U_1, \ldots, U_r)$ также принадлежит этой группе;

2) вместе с двумя функциями F и Φ, принадлежащими группе, ей же принадлежит и функция (F, Φ).

Основную роль в приложении теории групп к УЧППП играет у Ли следующая теорема. Если r разных функций $U_1, \ldots, U_r$ от $2n$ переменных p, x составляют группу порядка r, то система r линейных уравнений

$$(U_1, f) = 0, \ldots, \quad (U_r, f) = 0$$

полная. Этот вспомогательный результат позволил Ли доказать нижеследующее.

Пусть задана инволюционная система

$$f_1 = C_1, \ldots, \quad f_q = C_q \tag{5}$$

и пусть $f_1, \ldots, f_q, \ldots, f_r$ — r интегралов полной системы

$$(f_1, f) = 0, \ldots, \quad (f_q, f) = 0. \tag{6}$$

Если существуют функции $F_1, \ldots, F_r$, U, удовлетворяющие условию

$$dU + F_1 df_1 + \ldots + F_r df_r = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n,$$

то интегрирование системы (5) сводится к одной квадратуре.

На минуту остановимся и оглянемся назад. Система (5) — нелинейная, (6) — линейная. Таким образом, найден критерий, позволяющий сводить первую ко второй и, более того, решение системы (5) получается квадратурой. Эта теорема все же не стала последним словом в вопросе о «линеаризации» системы уравнений (5). Полное решение проблемы было дано много позднее Пфейфером. В сделанном им дополнении к украинскому переводу книги Гурса [5] Пфейфер говорит, что классификация уравнений первого порядка была установлена Ли еще в 1872 г. И далее продолжает: «На протяжении всей своей жизни Ли не нашел времени вернуться к намеченной им классификации, хотел уточнить ее в написанной перед смертью работе 1898 г., но не успел. В том же 1872 г. Ли объявил, что интегрирование любой полной системы уравнений с частными производными первого порядка за исключением случая . . . (следуют термины, на объяснении которых здесь нет возможности останавливаться, — *Е. П.*) эквивалентно решению линейной системы. По этому поводу Мансион заметил: „Ли утверждает, что владеет методом сведения любой нелинейной системы к линейной, но в его публикациях я не нашел убедительного доказательства этого заявления“.[6]

. . .Изучение неясных мест в исследованиях Ли, — продолжает Пфейфер, — привело меня к „Особому методу интегрирования нелинейных систем уравнений первого порядка“. Рецепт Ли был существенно изменен: было введено бо́льшее количество параметров».

«Особый метод Г. В. Пфейфера» и другие его результеты по УЧППП систематически изложены в указанном «Дополнении» и там же даны ссылки на некоторые другие публикации Пфейфера по УЧППП.

Георгий (Юрий) Васильевич Пфейфер был, вероятно, наиболее крупным продолжателем, можно сказать, завершителем разработки методов Якоби-Майера-Ли решения уравнений в частных производных первого порядка. Он родился в 1872 г. на Черниговщине. После окончания Университета Св. Владимира, как до революции назывался Киевский университет, преподавал в гимназии, а с 1899 г. и до конца своих дней (1946 г.) нерасторжимо был связан с воспитавшим его университетом и (позднее) с Академией наук УССР, действительным членом которой являлся с 1930 г. Творчество Пфейфера отличалось очень большой продуктивностью. Его работы печатались в журналах многих европейских стран. Они относились преимущественно к уравнениям в частных производных первого порядка в духе XIX в., которому он по своему мате-

---

[5] Гурса Е. Інтегрування рівнянь з частинними похідними першого порядку. — Київ, 1941, с. 361—416.

[6] Mansion P. Theorie der Partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. — Berlin, 1892, S. 23.

матическому мышлению и методам целиком принадлежал. Г. В. Пфейфер являл собой образец ученого, безраздельно преданного науке, в житейских вопросах наивного и простодушного, только в своей деятельности черпающего все радости жизни. Свои лекции, всегда сугубо деловые, он лишь изредка прерывал, чтобы рассказать нам, студентам, в обычной для него сдержанной манере что-либо о своих встречах с иностранными коллегами — с Гурса, Бьянки, Адамаром, Лебегом и другими знаменитостями. «Энгель говорил мне, как порой ему бывало трудно с Ли. Конечно, находиться рядом с такой звездой, как Ли. . .». Лишь через много лет я постиг смысл этих слов, которые сейчас в точности передаю читателю.

Элементферайн — характеристики и их геометрия

Распознать новое в основных фактах теории, имеющей чуть ли не столетнюю историю, ухватить то, мимо чего прошли великие предшественники, мог лишь по-настоящему одаренный человек. Мы покажем сейчас, как Ли по-своему осмыслил начала теории уравнений в частных производных первого порядка (УЧППП), а также их связи с дифференциальной геометрией.

Снова об уравнении первого порядка. Пятерка чисел $Q(x, y, z, p, q)$, как мы знаем, задает элемент в пространстве R^3, т. е. точку x, y, z и величины p, q, характеризующие направление какой-либо плоскости, проходящей через нее. Иными словами, мы имеем пятимерное пространство R^5 точек Q. Если все они заданы как функции какой-либо переменной u, то мы имеем линию в R^5, которую называют п о л о с о й.

Рассмотрим совокупность ∞^2 элементов (x, y, z, p, q). Мы скажем, что они образуют элементферайн Ev (находятся в соединенном положении), если для любых двух соседних в пространстве точек, (x, y, z, p, q) и $(x+dx, y+dy, z+dz, p, q)$, имеет место

$$dz - pdx - qdy = 0. \qquad (1)$$

Возможны три типа Ev.

1. Пусть имеется совокупность всех плоскостей, проходящих через ф и к с и р о в а н н у ю точку M_0 $(x_0,$

y_0, z_0). Из $dz_0-pdx_0-qdy_0=0$ следует, что эта совокупность ∞^2 элементов образует Ev.

2. Рассмотрим линию c в пространстве R^3 со всеми ее касательными и совокупностью всех плоскостей, проходящих через эти касательные. Мы имеем ∞ точек (линию) и в каждой точке ∞ плоскостей (пучок плоскостей с осью-касательной к линии в данной точке). Всего мы имеем ∞^2 элементов. Равенство (1) тут выполняется, ибо оно означает, что касательный к линии вектор лежит в плоскости, проходящей через касательную.

3. Рассмотрим поверхность S и в каждой ее точке M касательную к ней плоскость. Всего имеем ∞^2 точек поверхности и, значит, ∞^2 элементов. Условие (1) выполняется: оно выражает тот факт, что вектор $(p, q, -1)$ перпендикулярен S.

Пусть теперь задано уравнение первого порядка:

$$F(x, y, z, p, q)=0. \tag{2}$$

Функция $z=f(x, y)$, являющаяся его решением, геометрически изображается (интегральной) поверхностью в R^3. Посмотрим теперь на уравнение (2) иначе. Равенство (2) выделяет из всего R^5 совокупность R^4 тех элементов Q, которые лежат на гиперповерхности (2). Согласно Ли, проинтегрировать уравнение (2) — значит, выделить из названной совокупности R^4-элементов те, которые образуют элементферайн.

Нас сейчас ждут удивительные явления, и все станет понятнее. Рассмотрим частный случай уравнения (2), где — Σ поверхность

$$F(x, y, z)=0. \tag{3}$$

Это не дифференциальное уравнение в обычном смысле слова, ибо в нем нет производных. Но с точки зрения Ли, (3) можно рассматривать как дифференциальное уравнение. Пусть M_0 — произвольная точка на поверхности (3) и σ — связка плоскостей с центром в M_0. Это — Ev (тип 1). Координаты M_0 удовлетворяют уравнению (3). Следовательно, мы получили некоторое его решение. Конечно, каждой точке $M \in \Sigma$ отвечает свое решение, но ведь и всякое определенное решение дифференциального уравнения есть какое-то его частное решение.

Рассмотрим теперь произвольную линию c, лежащую на данной поверхности (3). Этим задан элементферайн (тип 2), удовлетворяющий уравнению (3), ибо линия c

лежит на (3). Ясно, что и поверхность (3) с ее касательными плоскостями (тип 3) — также решение уравнения (3) (по определению касательной плоскости и смыслу величин p, q).

В качестве немедленного приложения рассмотрим «обобщенное уравнение Клеро»:

$$z = px + qy + \varphi(p, q). \tag{4}$$

Преобразование Лежандра, $p=X$, $q=Y$, $Z=px+qy-z$, переводит его в «дифференциальное» уравнение вида

$$Z = \varphi(X, Y), \tag{5}$$

имеющее, как мы только что разъяснили, решения трех типов. При этом первому типу в пространстве x, y, z для уравнения (4) отвечает полный интеграл Лагранжа, второму типу — общий интеграл, третьему — особый интеграл.[1]

Вообще, уравнение (3), с точки зрения Ли, вполне равноправно с уравнением общего вида (2). Таким образом, как подчеркивали Клейн, Гурса и др., подход Ли является более общим: он позволяет с единой (элемент-ферайн) точки зрения обозревать все частные случаи, относящиеся к уравнениям в частных производных первого порядка. Глубокая причина этого, добавляет Клейн, состоит в том, что любое УЧППП переходит в любое другое УЧППП путем подходящего контактного преобразования.

Характеристики. Обратимся теперь опять к общему уравнению первого порядка (2):

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Лагранж показал, и в этом его великая заслуга, что оно приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (до Лагранжа это было известно лишь для случая, когда (2) линейно относительно p и q). Чтобы понять, по какому пути он шел, дадим сначала определение. Пусть заданы две функции $M(x, y)$, $N(x, y)$. Мы скажем, что они образуют интегрируемую комбинацию, если $M'_y = N'_x$. В этом случае выражение $\omega = Mdx + Ndy$ — полный дифференциал, и уравнение $\omega = 0$ решается с помощью квадратуры.

---

[1] О полном интеграле Лагранжа, общем интеграле и особом интеграле см., например, [II, 48, т. IV, ч. I].

Припишем к уравнению (2) еще одно уравнение такого же типа:

$$\Phi(x, y, z, p, q) = 0. \tag{6}$$

В обоих равенствах, (2) и (6), p, q — некоторые функции от x и y. Этим самым (2) и (6) выражают и z как (неявную) функцию от x и y. Итак, мы имеем две функции z — от x и y (несущественно, что эти функции нам сейчас неизвестны). Постараемся выбрать Φ таким, чтобы они образовывали интегрируемую комбинацию, т. е. чтобы z'_y и z'_x, определяемые уравнениями (2) и (6), совпадали между собой. Используя правило дифференцирования неявных функций, мы получим следующее равенство:

$$F_p \frac{\partial \Phi}{\partial x} + F_q \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (pF_p + qF_q)\frac{\partial \Phi}{\partial z} - (F_x + pF_z)\frac{\partial \Phi}{\partial p} - \tag{7}$$

$$- (F_y + qF_z)\frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0.$$

Это — линейное уравнение в частных производных первого порядка относительно искомой функции Φ. Но, как известно, подобные уравнения эквивалентны системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = \frac{dq}{-F_x - pF_z} = \frac{dq}{-F_y - qF_z}. \tag{8}$$

Легко видеть, что $F(x, y, z, p, q)$ — решение этой системы, ибо $dF = 0$ как следствие (8). Найдем из (2) q (или, если оно отсутствует, p) и подставим его в первые три уравнения системы (8). Интегрируя их, найдем x, y, z как функции p и трех (по количеству уравнений) произвольных постоянных C_1, C_2, C_3:

$$x = \varphi_1(p, C_1, C_2, C_3), \quad y = \varphi_2(p, C_1, C_2, C_3), \quad z = \varphi_3(p, C_1, C_2, C_3). \tag{9}$$

Мы получили **уравнения семейства линий-характеристик** в R^3, которые при исключении p можно представить в виде

$$x = \psi_1(z; C_1, C_2, C_3), \quad y = \psi_2(z; C_1, C_2, C_3). \tag{10}$$

По ним можно построить интегральную поверхность уравнения (2). Возьмем в R^3 произвольную линию γ, не явля-

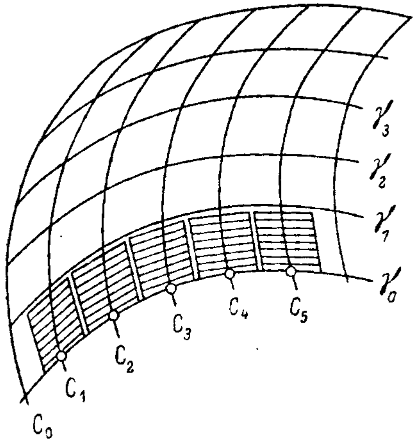


Рис. 6. *Характеристики дифференциального уравнения и построение интегральной поверхности.*

ющуюся характеристикой, на ней — точку π_0, через которую проведем характеристику c_0. Можно показать, что она однозначно определится из уравнений (10). Проведя такое построение для каждой точки линии γ, получим искомую интегральную поверхность, проходящую через заданную кривую γ (решение задачи Коши для уравнения (2) показывает рис. 6). Все аналитические подробности этого можно найти в любом учебнике, где излагаются начала УЧППП. Здесь же скажем лишь о том, чего там нет. Но сначала одно замечание. Если мы на построенной интегральной поверхности возьмем вместо γ другую линию γ_1, тоже не характеристику, и проведем для ее точек такое же построение, как и выше, то получим ту же самую интегральную поверхность уравнения (2). Этот процесс можно неограниченно повторять, и мы получим на интегральной поверхности два семейства (сеть) линий, одно из которых — семейство характеристик.

Дифференциальная геометрия характеристик. Вся классическая теория поверхностей строится на основе теории линий, лежащих на поверхностях. Центральную роль при этом играют следующие три класса линий: 1) асимптотические, 2) линии кривизны, 3) геодезические линии.

Через каждую точку поверхности проходят, вообще говоря, две асимптотические линии (асимптотическая сеть), по две линии кривизны (сеть линий кривизны). Геодезические — линии кратчайшего расстояния. Через две любые точки поверхности, точнее небольшой ее части, проходит единственная геодезическая линия (пример — небольшая часть сферической поверхности — дуги большого круга). Теперь нам должны быть понятны формулировки следующих задач теории УЧППП, впервые поставленных и решенных Ли:

1) при каких условиях относительно функции F характеристики на любой интегральной поверхности уравнения (2) являются асимптотическими линиями;

2) то же — для линий кривизны;

3) то же — для геодезических линий.

Нам неизвестны учебники, где бы рассматривались эти задачи, находящиеся на стыке двух дисциплин, а между тем интерес их очевиден. Ли получил их полное решение, а также решения и ряда других задач подобного типа. Этот круг проблем первоначально был им опубликован в неоднократно упоминавшемся мемуаре 1872 г. [I, 17] и подробно рассмотрен в последней главе книги [I, 129]. Все это было очень интересно увязано с общими концепциями геометрии контактных преобразований и теорией комплексов.

Обозначим

$$\frac{dF}{dx}=F_x+pF_z,\quad \frac{dF}{dy}=F_y+qF_z,\quad T=pF_p+qF_q.$$

Остановимся на асимптотических линиях. Их дифференциальные уравнения, если поверхность задана в виде $z=f(x, y)$,

$$rdx^2+2sdxdy+tdy^2=0,$$

что также можно записать в виде

$$dpdx+dqdy=0. \tag{11}$$

Если теперь та же поверхность интегральная для уравнения (2), то для характеристик имеет место уравнение (8). Сопоставляя (8) и (11), Ли получает следующее условие:

$$F_p\frac{dF}{dx}+F_q\frac{dF}{dy}=0.$$

Решение задачи второго типа Ли получает двумя путями: а) на основе задачи первого типа и прямолинейно-сферического отображения, переводящего асимптотические линии в линии кривизны; б) непосредственным сопоставлением уравнений (8) и уравнений линий кривизны на поверхности. Ответ дается равенством

$$(F_p + pF)\frac{dF}{dy} - (F_q + qT)\frac{dF}{dx} = 0.$$

Решение задачи третьего типа таково. Характеристики уравнения

$$pH_x + qH_y - H_z + (|\nabla H|^2 - 1)(p^2 + q^2 - 1) = 0$$

являются геодезическими линиями на любой его интегральной поверхности.

Изложенное в этой главе показывает, что Ли не только создавал обширные новые теории, но и выступал как новатор в вопросах, которые многократно рассматривали до него очень многие исследователи.

Непрерывные группы: начало теории

Итак, октябрь 1872 г. Ли провел в Германии, преимущественно в обществе Клейна и Майера. Из Эрлангена он поехал не в Париж, как предполагал первоначально, а вернулся домой, в Христианию, по причине романтического свойства — увлечения Анной Софией Бирх, двадцатилетней дочерью землемера Готфрида Иоргена Бирха, дальнего родственника Нильса Абеля. В декабре 1873 г. состоялась их помолвка, а весной 1874 г. в Конбергском соборе пастор соединил их судьбы. Этот счастливый брак принес двух дочерей и сына.

Зима 1873/74 г. была для Ли особенно плодотворной. Именно тогда им были получены первые и к тому же знаменательные результаты в теории групп преобразований. Летом 1874 г. он отправляется с женой в свадебное путешествие. Они посещают Германию, Швейцарию и Францию, часть пути проделав совместно с супругами Майер, а возвращаясь домой, остановились в Дюссельдорфе, где Ли поделился с Клейном и Майером исходными идеями зарождавшейся у него новой теории. В октябре того же года в Гёттингене появляется заметка Ли [I, 24], в которой впервые дается общее определение группы преобразований. Новая дисциплина — «Группы Ли» — рождалась быстро. Основные ее теоремы мы приведем позднее, а сейчас ограничимся элементарными понятиями, которые сразу введут нас в курс важных и интересных приложений.

Исходные предпосылки и цели. Будем рассматривать равенства

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

как преобразования точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$. Здесь $a = (a_1, \ldots, a_r)$ — параметры, и для каждого выбора их значений имеем определенное преобразование (1). Предполагается, что все величины и все функции f_i меняются непрерывно. Говорят, что равенства (1) задают ∞^r преобразований и сокращенно записываются в виде

$$x' = f(x, a), \text{ или } x' = T_a x.$$

Для того чтобы преобразования (1) образовывали группу, нужно чтобы последовательность двух преобразований типа (1) снова давала такое же преобразование:

$$x' = f(x, a), \quad x'' = f(x', b) = f(f(x, a), b) = f(x, c); \quad c = \varphi(a, b).$$

Здесь $\varphi(a, b) = \varphi(a_1, \ldots, a_r; b_1, \ldots, b_r)$ — фиксированные функции, характеризуемые группой.

В другой записи —

$$x' = T_a x, \quad x'' = T_b x' = T_b(T_a x) = T_c x,$$
$$T_c = T_b T_a, \quad c = \varphi(a, b).$$

К этому добавляется условие существования единицы (тождественное преобразование), т. е. такого a_0, что для всех x

$$T_{a_0} x = x,$$

и требование, чтобы для каждого преобразования T существовало обратное T_a^{-1}:

$$T_a T_a^{-1} = T_{a_0}.$$

Аналитически это означает, что при любых a уравнения (1) разрешимы относительно x и что x' выражаются через x с помощью функций того же типа.

Не будем пока задумываться над различием между локальной и глобальной точками зрения и для определенности предположим, что все рассуждения ведутся в некоторой окрестности единичного элемента T_{a_0} группы. В определение группы еще входит требование ассоциативности, $T_a(T_bT_c)=(T_aT_b)T_c$, но коммутативность вообще не имеет места, $T_aT_b\neq T_bT_a$. При выполнении условия $T_aT_b=T_bT_a$ для всех a. b группа называется коммутативной, или абелевой.

Предполагается, что число r параметров в (1) не может быть уменьшено (параметры независимы). Условие это выражается одной теоремой, насколько нам известно, впервые доказанной Ли и не относящейся непосредственно к группам.

При выполнении названных условий говорят, что равенства (1) задают r-параметрическую группу преобразований G_r^n. При $r=1, 2, 3$ имеем соответственно группу преобразований прямой, плоскости, трехмерного пространства.

Преобразования T_a без предположения о существовании единичного элемента T_{a_0} и обратного T_a^{-1}, но при выполнении остальных аксиом группы, образуют «полугруппу». Многие из результатов Ли верны для полугрупп, но теория, вообще говоря, относится к группам, и в дальнейшем мы будем иметь в виду именно их.

Непосредственно определяется понятие «подгруппа» преобразований: если в пространстве R^r параметров a задано подпространство R^ρ размерности $\rho<r$ и если для всех $a\in R^\rho$ равенства (1) определяют группу преобразований, мы имеем ρ-параметрическую подгруппу данной группы. Величины в (1) могут быть вещественными или комплексными, но если не оговорено особо, значит, речь идет о вещественной области.

Многочисленные примеры групп преобразований были известны и до Ли, но общее их определение впервые было дано им.

Приведем два важных примера: 1) группа преобразований расширенной комплексной плоскости в себя:

$$z'=\frac{az+b}{cz+d},\quad ad-bc\neq 0$$

(все величины комплексные, независимых параметров три);

2) группа преобразований в себя n-мерного пространства R^n:

$$x'=Ax,$$

A — неособенная $n \times n$-матрица, $\det A \neq 0$,

$$x'' = Bx' = BAx = Cx, \quad C = BA.$$

Исследования с самого начала развивались в разных направлениях: а) выявление специфики теории и возникающих частных случаев; б) распространение на непрерывные группы понятий и результатов теории конечных групп; в) нахождение конкретных групп; г) геометрические проблемы теории и ее связи с дифференциальными уравнениями.

Операторы группы. Во всем дальнейшем исключительную роль играет введенное Ли понятие инфинитезимального оператора группы. Оно получается так. (В дальнейшем предполагается, что все функции аналитические, т. е. могут быть разложены в степенные ряды). Рассмотрим сначала однопараметрическую группу (параметр t)

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n; t), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

причем $f(x, 0) = x$.

Пусть $\varphi(x_1', \ldots, x_n') = \varphi(x')$ — произвольная функция от x'.

Разложим ее в ряд по степеням t:

$$\varphi(x') = \varphi(x) + t\varphi'(x) + \frac{t^2}{2}\varphi''(x) + \ldots \tag{3}$$

Обозначим

$$\left(\frac{\partial x_i'}{\partial t}\right)_0 = \xi_i(x)$$

и запишем оператор:

$$X = \sum_1^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{4}$$

Учитывая правило дифференцирования сложной функции, можем в первом приближении записать равенство (3) как

$$\varphi(x') = \varphi(x) + tX\varphi. \tag{5}$$

Равенство (5) называется инфинитезимальным преобразованием группы, а (4) — ее инфинитезимальным оператором (или просто оператором).

Повторно применяя оператор X, можем равенство (3) переписать в виде

$$\varphi(x') = \varphi(x) + tX\varphi + \frac{t^2}{2!}XX\varphi + \ldots, \tag{6}$$

или, короче,

$$\varphi(x') = e^{tX}\varphi(x).$$

В частности, при $\varphi(x) = x_i$

$$x'_i = e^{tX}x_i.$$

Говорят, что последняя формула восстанавливает группу по ее инфинитезимальному оператору X.

Функция $\varphi(x)$ называется инвариантом группы (1), если для всех ее преобразований имеет место $\varphi(x') = \varphi(x)$. Непосредственным следствием равенства (6) является следующий важный факт: для того чтобы $\varphi(x)$ было инвариантом группы (2), необходимо и достаточно, чтобы $X\varphi = 0$. Действительно, из $X\varphi = 0$ следует $X^n\varphi = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Но тогда $\varphi(x') = \varphi(x)$, т. е. φ — инвариант (достаточность). Если $\varphi(x) = \varphi(x')$, то при любом t все коэффициенты ряда (6) равны нулю. Следовательно, $X\varphi = 0$ (необходимость).

Для произвольной r-параметрической группы G_r^n с единичным элементом a_0, $T_{a_0}x = x$, вводим обозначение

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial a_\alpha}\right)_{a_0} = \xi_{i\alpha}(x), \quad \alpha = 1, \ldots, r,$$

и составляем операторы:

$$X_\alpha = \sum_1^n \xi_{i\alpha}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{7}$$

При любых λ_α линейная комбинация

$$X = \lambda_\alpha X_\alpha \tag{8}$$

— снова оператор того же типа, что и X_α. Иными словами, X_α образуют линейное пространство R^r. Кроме того, X_α можно «перемножать», составляя скобки Пуассона,

$$(X_\alpha, X_\beta) = X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha. \tag{9}$$

При этом мы снова приходим к оператору того же типа (вторые производные исчезают). Имеют место равенства

$$(X_\alpha, X_\beta) = -(X_\beta, X_\alpha); \tag{10}$$

$$(X_\alpha, (X_\beta, X_\gamma)) + (X_\beta, (X_\alpha, X_\gamma)) + (X_\gamma, (X_\alpha, X_\beta)) = 0, \tag{11}$$

второе из которых называется тождеством Якоби. Тем самым, как теперь принято говорить, операторы X_α образуют «алгебру Ли» (позднее мы уточним этот термин).

Аналогично равенству (6) для любой функции φ имеет место

$$\varphi(x') = e^X \varphi(x),$$

где X — некоторый оператор вида (8).

Как и выше, легко доказывается такое положение: для того чтобы функция φ была инвариантом группы (1), необходимо и достаточно, чтобы она была решением системы уравнений $X_\alpha\varphi=0$, $\alpha=1, \ldots, r$, где X_α — операторы этой группы.

Уже в первых работах Ли было установлено, что понятия, связанные с группами преобразований (изоморфизм, подгруппы, в частности нормальный делитель, инварианты, классификация, вопросы структуры, . . .), выражаются соответственным удобным образом в терминах «алгебры Ли», порождаемой данной группой. Так, абелева группа G_r^n характеризуется условием $(X_\alpha X_\beta)=0$, $\alpha, \beta=1, \ldots, r$. Все это сыграло решающую роль в построении всей теории.

Как уже говорилось, первоначально стимулом для ее построения явились геометрические соображения, но, обнаружив далеко идущие аналогии с дискретными группами, Ли уже на первом этапе исследований непрерывных групп поставил перед собой магистральную задачу: распространить на дифференциальные уравнения теоретико-групповой подход Лагранжа—Абеля—Галуа к алгебраическим уравнениям, причем, в частности, понятие «решить уравнение $f(x, y, y')=0$ (аналогично — уравнение высшего порядка, систему уравнений) в квадратурах $\int \ldots dx$ должно играть такую же роль, как решить в радикалах алгебраическое уравнение. (Мы еще вернемся в одной из следующих глав к вопросу о том, как Ли справился с этой проблемой). При этом возникло множество других задач, как геометрического, так и аналитического характера.

Рукописи Ли, в которых были намечены первоначальные варианты теории, не сохранились, как и письма Клейну 1873—1874 гг. на ту же тему, поэтому особую ценность приобретает переписка Ли с Майером, где содержится довольно подробная программа исследований и видно, с каким упорством работал Ли.

Из письма от 2 декабря 1873 г.: «Хочу оправдаться перед Вами, почему долго не писал. Дело в том, что все мои силы были посвящены исследованиям, которые меня целиком захватили. Эти идеи, о которых я Вам уже рассказывал, берут начало в беседах с Клейном и моих ранних работах. Они связаны с введением подстановок (групп, — *Е. П.*) в дифференциальные уравнения. . .».

Из письма от 3 февраля 1874 г.: «Я снова долго Вам не писал, так как столкнулся с серьезными трудностями в моей новой теории. . . Если я не ошибаюсь, эти результаты позволяют увидеть в новом свете не только дифференциальные уравнения, но также и всю теорию непрерывных многообразий. . . Как видите, я весьма агрессивен (sangwinisch), но именно так я могу охарактеризовать эти дерзкие замыслы. Вот почему я долго молчал. Клейну я, однако, за это время писал. Он очень интересуется моими группами преобразований». Ли просит Майера внимательно читать эти его письма: «Они содержат лишь наметки, но они очень важны для меня. . . В теории алгебраических уравнений работы Абеля и Галуа дают ответ на вопрос, разрешимо ли данное уравнение в радикалах, и если да, то при каких условиях. Пришло время, я уверен, поставить аналогичные вопросы для дифференциальных уравнений. Я надеюсь, что тут можно будет опереться на мою теорию контактных преобразований. Если не ошибаюсь, я на верном пути, хотя еще не могу строго сформулировать многое из того, над чем придется размышлять».

Из письма от 19 апреля 1874 г.: «Напряженная работа над группами преобразований оторвала меня от моих предыдущих изысканий. . . Надеюсь в будущем году снова приехать в Германию и Францию, частично по поводу редактирования трудов Абеля, что, конечно, потребует многих усилий и времени, частично для того, чтобы повидаться и поговорить с Вами, а также с Клейном по теории непрерывных групп. Ими я намерен заниматься в ближайшем будущем».

Письмо Ли Майеру, содержащее подробный набросок теории непрерывных групп, датировано 29 VI 1874 г. Это письмо заканчивается фразой: «Признателен Вам за присланную фотографию вашей супруги». Мы должны быть благодарны фрау Майер: она сохранила все письма Ли, адресованные ее мужу, и через много лет после его смерти передала их Энгелю и Хегору.

Вспоминая рассказанное его учителем, Энгель писал: «Зима 1873/74 г. была для него особенно знаменательной, так как в это время им были заложены основы теории непрерывных групп. Сравнительно легко он установил, что на прямой имеются лишь три типа групп. Значительно более трудной задачей оказалось определение всех групп на плоскости. В этих поисках он сначала продвинулся вперед, но на следующих этапах столкнулся с большими затруднениями. Ли говорил, что временами ему казалось, что силы исчерпаны и только уверенность, что он находится на верном пути, помогала идти дальше» [II, 4, с. 57].

Результат Ли относительно групп на прямой читается просто: оказалось, что все они изоморфны группе проективных преобразований,

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

либо одной из ее подгрупп:

$$\text{а) } x' = ax, \quad \text{б) } x' = x + b.$$

Проблема нахождения всех групп на плоскости

$$x' = f_1(x,\ y;\ a), \quad y' = f_2(x,\ y;\ a), \quad a \in R^r, \tag{12}$$

которая далась Ли с таким трудом, тесно связана с дифференциальными уравнениями.

Уравнения и группы. Пусть задана группа на плоскости

$$x_1 = f_1(x,\ y;\ a), \quad y_1 = f_2(x,\ y;\ a) \tag{13}$$

и имеется некоторое семейство линий

$$\varphi(x,\ y;\ c_1, \ldots, c_m) = 0. \tag{14}$$

Если каждое преобразование группы (13) переводит каждую кривую семейства (14) в некоторую (вообще говоря, другую) кривую того же семейства, то говорят, что оно инвариантно относительно этой группы. В этом случае группа называется импримитивной. Например, семейство окружностей $x^2+y^2=C$ инвариантно относительно группы вращений плоскости $x_1=x\cos\varphi-y\sin\varphi$, $y_1=x\sin\varphi+y\cos\varphi$. Оно же инвариантно относительно группы подобия $x_1=\lambda x$, $y_1=\lambda y$. Если для данной группы не существует никакого инвариантного семейства кривых, то она называется примитивной (оба термина принадлежат Ли). Можно показать, что группа всех преобразований вида $x_1=a_1x+b_1y+c_1$, $y_1=a_2x+b_2y+c_2$ (афинная группа) примитивна.

Рассмотрим семейство линий, зависящее от одного параметра,

$$\varphi(x, y)=C. \tag{15}$$

Дифференцируя это равенство,

$$\varphi'_x+\varphi'_y y'=0, \tag{16}$$

и исключая C из (15) и (16), получим дифференциальное уравнение

$$u(x, y, y')=0, \tag{17}$$

для которого (15) — общий интеграл. Если (15) инвариантно относительно группы, то можно сказать, что уравнение (17) также является ее инвариантом, поскольку оно вполне определено семейством (15).

Как обнаружил Ли, все уравнения, интегрируемые элементарными методами (с разделяющимися переменными, уравнения вида $y'=f(y/x)$, уравнение Бернулли $y'+Py=Qy^m$, в частности линейное ($m=1$), . . .), инвариантны относительно той или иной простой группы преобразований. Очень многое здесь переносится и на уравнения высших порядков. Пусть снова задана группа (13) и инвариантное относительно нее семейство линий (14). Дифференцируя (14) m раз и исключая из (14) и полученных уравнений параметры $C_1, \ldots, C_m$, получим уравнение m-го порядка, инвариантное относительно (13). Таким образом, ясно, что классификация групп связана с классификацией инвариантных относительно них уравнений.

Результат Ли (1874 г.) относительно в с е х групп на плоскости таков. Всего на плоскости существует пять классов групп преобразований (I—V): I — примитивные группы (их три); II — группы, оставляющие инвариантным одно семейство линий $\varphi(x, y)=C$ (их 15), III — группы, оставляющие инвариантными два семейства линий $\varphi_1=C_1$, $\varphi_2=C_2$ (их 9); IV — группы, оставляющие инвариантными ∞ семейств (их 10); V — группы, также оставляющие инвариантными ∞ семейств (одна группа).

Здесь всюду под словом «семейство» подразумевается множество кривых, зависящих от параметра C; но в случае IV речь идет о кривых, зависящих еще и от других параметров, а в случае V — о множестве кривых, зависящем от произвольных функций. Всего, таким образом, на плоскости имеется 38 групп. Эти группы имеют разнообразные порядки r, и каждая из них задана у Ли в виде совокупности ее инфинитезимальных операторов X_α, $\alpha=1, \ldots, r$.

Полное изложение этих результатов, помимо работ Ли [I, 126, 128], дано также в книге Чеботарева [II, 49, гл. IV]. Оно начинается словами: «Одним из первых и замечательнейших результатов Ли является его перечисление всех всевозможных групп на прямой и на плоскости, т. е. групп, представляемых в пространстве одного и двух измерений. . .». Еще раньше Ли нашел все группы проективных преобразований на плоскости.

Результаты Ли относительно всех групп трехмерного пространства R^3, в частности всех проективных групп в R^3, были получены значительно позднее, в работах конца 80-х годов. Изложение его теорем о перечислении всех групп в R^2 и R^3, включающее сводные таблицы их инфинитезимальных операторов и инвариантных многообразий, занимает более 300 страниц [I, 126].

Подойдем теперь ближе к связям групп с дифференциальными уравнениями. Нам достаточно в основном ограничиться однопараметрическими группами на плоскости

$$x_1=f_1(x, y, t), \quad y_1=f_2(x, y, t), \tag{18}$$

причем

$$f_1(x, y, 0)=x, \; f_2(x, y, 0)=0. \tag{19}$$

Тогда, как мы знаем (с. 84), этой группе отвечает оператор $X=\xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ и для любой функции $\varphi(x, y)$

$$T_t\varphi=\varphi(x_1, y_1)=e^{tX}\varphi(x, y).$$

Очень проста следующая теорема (Ли, 1874). Для того чтобы семейство $\varphi(x, y)=C$ было инвариантно относительно группы (18), необходимо и достаточно, чтобы для некоторой функции

$$X\varphi=\Theta(\varphi). \tag{20}$$

Действительно, из (20) следует

$$X^2\varphi=X\Theta(\varphi)=\Theta'(\varphi)X\varphi,$$

где $X^3\varphi$ — снова функция от φ и т. д. Откуда, фиксируя t (т. е. выбирая определенное преобразование группы), имеем

$$\varphi(x_1, y_1) = F(\varphi) = F(C) = C_1.$$

Таким образом, кривая $\varphi = C$ переходит в кривую $\varphi = C_1$, принадлежащую тому же семейству (не труднее доказывается и необходимость утверждения).

Если уравнение $y' = v(x, y)$ допускает группу (18), то мы скажем, что оно допускает оператор X этой группы. Запишем это уравнение в симметричной форме:

$$\omega = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{21}$$

Если левая часть (21) — полный дифференциал, $d\psi$, то $\psi = C$ — его общий интеграл, причем ψ находится путем квадратуры. Если (21) не есть полный дифференциал, то, как известно, существует такая функция μ, интегрирующий множитель, что $\mu\omega = d\psi$, и знание μ приводит к общему интегралу. Ли показал (1874 г.), что если уравнение (21) допускает группу (18), имеющую оператор X, то

$$\mu = \frac{1}{\xi M - \eta N}. \tag{22}$$

В ряде случаев удается по виду уравнения (например, из соображений симметрии) найти его группу и отвечающий ей оператор X, что в силу (22) сразу приводит к решению в квадратурах.[1]

Практическое значение сказанного обнаруживается при рассмотрении более общих ситуаций, но уже сейчас видно, что групповой подход Ли к дифференциальным уравнениям позволил осветить с новой точки зрения давно известные факты, что уже само по себе немаловажно.

Недостатком предыдущих соображений было то, что в определении инвариантности мы непосредственно аппелируем не к самому уравнению $y' = f(x, y)$, а к его интегралу $\varphi(x, y) = C$. Поэтому особое значение имеет введенное Ли понятие «продолжение группы», оказавшееся очень плодотворным как в анализе, так и в геометрии.

Продолжения групп и их инварианты. Пусть заданы преобразования

$$x_1 = f_1(x, y), \quad y_1 = f_2(x, y). \tag{a}$$

[1] Многочисленные примеры имеются в кн.: Айнс Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения. / Пер. с англ. — Харьков, 1939, гл. 4.

Отсюда

$$p_1=\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial x}+\dfrac{\partial f_2}{\partial y}y'}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x}+\dfrac{\partial f_1}{\partial y}y'}=\omega(x,\ y,\ p),\ p=\frac{dy}{dx}.$$

Правая часть здесь — функция переменных x, y, p. Поэтому заданные преобразования индуцируют преобразование

$$x_1=f_1(x,\ y),\ y_1=f_2(x,\ y),\ p_1=\omega(x,\ y,\ p),$$

которое называется продолжением исходного преобразования (a). Если теперь задана группа преобразований,

$$x_1=f_1(x,\ y,\ t),\ y_1=f_2(x,\ y,\ t),$$

то, продолжая ее указанным образом, получим преобразования трех перéменных,

$$x_1=f_1(x,\ y,\ t),\ y_1=f_2(x,\ y,\ t),\ p_1=\omega(x,\ y,\ p,\ t),\qquad(23)$$

которые, как нетрудно показать, также являются группой. Она называется первым продолжением группы (18).

Геометрический смысл этого продолжения ясен: при заданном (произвольно) y, как функции x, p определяет направление касательной к этой кривой. Поэтому переход от (18) к (23) означает переход от точечного преобразования к преобразованию элементов: точка + направление, исходящее из нее.

Инфинитезимальный оператор X' группы (23) записывается в виде

$$X'=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+\eta_1\frac{\partial}{\partial p}=X+\eta_1\frac{\partial}{\partial p},\qquad(24)$$

где ξ и η имеют тот же смысл, что и выше:

$$\xi=\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_0,\quad \eta=\left(\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)_0,$$

а

$$\eta_1=\eta-y'\frac{\partial\xi}{\partial x}.\qquad(24')$$

Напомним, что если G — группа преобразований трех переменных x, y, z с оператором $X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+\zeta\frac{\partial}{\partial z}$, то для функции $\varphi(x,\ y,\ z)$, инвариантной относительно этой группы, имеет место $X\varphi=0$.

Пусть теперь задана группа (18) с оператором X и соответственно имеются продолжение этой группы и продолжение X' оператора X. Функция $u(x, y, p)$ называется дифференциальным инвариантом группы (18), если она является инвариантом продолжения (23) этой группы, т. е. если

$$X'u(x, y, p) = 0, \quad p = y'. \tag{25}$$

Пусть задано уравнение

$$u(x, y, y') = 0. \tag{26}$$

Ясно, что оно переходит в себя и соответственно переходит в себя семейство его интегральных кривых, если левая часть (26) является инвариантом группы (23). Условие этого записывается в виде (25).

Оказывается, что любое уравнение (26) инвариантно относительно некоторой группы, т. е. при заданном u всегда можно найти X, а с ним и X' такими, чтобы выполнялось (25).

Совершенно аналогично вводится понятие второго и высших продолжений группы. Дифференцируя третье равенство (23), мы получим p_1' как функцию x, y, p, p'. Исходя из равенств (23) приходим к преобразованиям

$$x_1 = f_1(x, y, t), \; y_1 = f_2(x, y, t), \; p_1 = X'(x, y, p, t),$$
$$p_1' = X''(x, y, p, p', t), \tag{27}$$

которые, как можно показать, также представляют собой группу преобразований переменных x, y, p, p'. Она называется вторым продолжением группы (18). Отвечающий ей инфинитезимальный оператор X'' имеет вид

$$X'' = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial p} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial p'} = X' + \eta_2 \frac{\partial}{\partial p'},$$

где ξ, η, η_1 указаны выше, а $\eta_2 = \eta_1 - y'' \dfrac{\partial \xi}{\partial x}$.

Запишем теперь уравнение второго порядка:

$$u(x, y, y', y'') = 0. \tag{28}$$

Для его инвариантности относительно группы (18) необходимо и достаточно, чтобы вместе с (28) выполнялось и условие $X''u(x, y, y', y'') = 0$. В отличие от уравнения первого порядка это не всегда имеет место, поскольку последнее равенство должно выполняться тождественно относительно x, y, y', y''. Так, задавая уравнение $y''+xy+\operatorname{tg} y'=0$ и отправляясь от группы (18), производя указанные действия, получим $\xi=0$, $\eta=0$; последнее влечет за собой $X=0$, а это значит, что группа (18) состоит лишь из единичного (тождественного) преобразования. Тем не менее для ряда важных типов уравнений и ряда важных типов групп инвариантность имеет место. Здесь можно идти двумя путями: а) исходя из группы составить ее продолжения и искать их инварианты (дифференциальные инварианты групп); б) исходя из уравнения искать группу, относительно которой оно инвариантно. Например, если имеем группу вращений плоскости, то для нее

$$X=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y},$$

т. е. $\xi=-y$, $\eta=x$. Продолжая эту группу, дважды получим $\eta_1=1+y_1^2$, $\eta_2=3y'y''$. Уравнение, инвариантное относительно данной группы, имеет вид

$k^2=F(r^2,\ \operatorname{tg}\varphi)$ (F — произвольная функция), где

$$k=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}},\quad r=(x^2+y^2),\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{y-xy'}{x+yy'}.$$

Здесь r, φ, k имеют очевидный геометрический смысл: r — расстояние от точки $M(x, y)$ до начала; φ — угол между ее радиусом-вектором и касательной к кривой y в M; k — кривизна кривой в M. Весьма примечательно, что любое линейное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=0 \tag{29}$$

допускает группу. Она является n-кратным расширением группы с оператором $y\frac{\partial}{\partial y}$.

Вообще знание группы уравнения дает о нем ту или иную информацию: позволяет понизить его порядок (для уравнения (29) это, впрочем, приводит к известной со времен Лагранжа подстановке, сводящей (29) к уравнению n—1-го порядка), выяснить, можно ли решить его в квадратурах. . .

Известно, что уравнение второго порядка (28) допускает понижение порядка лишь в частных случаях (если (28) не содержит x или не содержит y'). Поэтому заслуживает внимания следующая теорема Ли (1874 г.) Пусть уравнение (28) имеет группу (18) с оператором $X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}$. Тогда замена переменных $u = \eta$, $v = \eta_1$ (η_1 указано выше) приводит его к виду

$$\frac{dv}{du} = \Phi(u, v)$$

(напомним, что знание группы уравнения первого порядка позволяет решить его в квадратурах, см. с. 91).

Продолжение r параметрической группы G_r определяется точно так же, как и для группы (18) с одним параметром. Ли установил ряд теорем о классах уравнений (28), инвариантных относительно групп G_2 и G_3, а результаты изложил в очень легко читаемой книге [I, 127], где содержатся также многочисленные геометрические приложения и приложения к линейным уравнениям в частных производных. Продолжения групп в пространстве приводят к новым важным результатам.

Пусть имеется группа G_r^3 в пространстве R^3,

$$x_1 = f_1(x, y, z; a),\ y_1 = f_2(x, y, z; a),\\ z_1 = f_3(x, y, z; a); \tag{30}$$

с операторами

$$X_\alpha = \xi_\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \eta_\alpha \frac{\partial}{\partial y} + \xi_\alpha \frac{\partial}{\partial z},\quad \alpha = 1, \ldots, r.$$

Находя из (30) $p_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x_1}$, $q_1 = \frac{\partial z_1}{\partial y_1}$, мы получим равенства

$$p_1 = p_1(x, y, z; p, q; a),\ q_1 = q_1(x, y, z; p, q; a),$$

которые в совокупности с (30) образуют (как можно показать) группу ${}^{(1)}G_r^3$ преобразования переменных x, y, z, p, q — продолжение группы G_r^3. Напомним, что мы всюду пользуемся обозначениями Монжа (см. с. 19). Можно далее получить группу ${}^{(2)}G_r^3$ преобразований переменных x, y, z, p, q, r, s, t — второе продолжение группы G_r^3. Для ${}^{(1)}G_r^3$ и ${}^{(2)}G_r^3$ можно записать операторы

$$X'_\alpha = X_\alpha + \varphi_\alpha \frac{\partial}{\partial p} + \psi_\alpha \frac{\partial}{\partial q},\quad \alpha = 1, \ldots, r$$

(φ, ψ — функции от x, y, z, p, q),

$$X''_\alpha = X'_\alpha + u_\alpha \frac{\partial}{\partial r} + v_\alpha \frac{\partial}{\partial s} + w_\alpha \frac{\partial}{\partial t}$$

(u_α, v_α, w_α — функции от x, y, z, p, q, r, s, t; $\varphi, \ldots w$ вычисляются по формулам, аналогичным тем, какие были приведены для групп на плоскости).

Решения системы дифференциальных уравнений в частных производных,

$$X''_\alpha f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \ \alpha = 1, \ldots, r,$$

задают дифференциальные инварианты второго порядка J_2 группы G_r^3. Этим путем применительно к группе G движений трехмерного пространства,

$$\mathbf{R}_1 = A\mathbf{R} + \mathbf{R}_0$$

($\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки (x, y, z), $\mathbf{R}_0$ — вектор сдвига, A — ортогональная матрица), была доказана следующая теорема. Инварианты J_2 группы G записываются в виде $u = u(K, H)$, где u — произвольная функция, а K и H — соответственно полная и средняя кривизны любой поверхности $z = f(x, y)$ в пространстве. Результат восходит к Ли [I, 111], но четкое доказательство принадлежит Бьянки [II, 53] (см. также [II, 49, с. 158—161]).

* * *

К середине 1875 г. непрерывные группы как самостоятельная новая дисциплина в первом приближении фактически были построены. Изложение этих результатов было дано Ли в сводной работе [I, 30], которой предшествовала публикация ряда заметок. Вместе с тем более углубленное развитие теории ставило перед Ли все более трудные вопросы. Они были связаны с общими принципами, с проблемами классификации групп в пространстве трех и более измерений и т. д. Ясно было также, что несмотря на очевидные успехи в применении к дифференциальным уравнениям, до аналогии с алгебраическими результатами Абеля—Галуа еще очень далеко.

Не следует забывать, что Ли разрабатывал свою теорию групп в полном одиночестве, лишь нескоро при его жизни к ней подключился ряд других исследователей, и он слишком далеко в нее углубился, чтобы можно было непосредственно с кем-либо посоветоваться, не мог он и оглянуться на чьи-либо параллельные результаты. Эмоциональный итог столь плодотворного для него трехлетия

Ли (по свидетельству Хегора) выразил словами: «Мне такое положение просто надоело».

Знаменательно, что этот человек, все глубже и глубже уходивший в круг занимавших его проблем, в разные периоды своего творчества умел легко переключаться с одной области на другую. Завершив первый этап поисков в теории групп, Ли обратился к совсем иной теме. Конечно, к группам он еще вернется, здесь произойдет еще много замечательных событий, но теперь на повестке дня было нечто иное — минимальные поверхности.

Минимальные поверхности

У Ли были серьезные основания обратиться к этой области геометрии, которой в то время занимались многие его крупные современники и где, таким образом, он после периода творческой изоляции оказался в самой гуще событий. Разумеется, это явилось для него серьезным испытанием, которое, скажем сразу, он блестяще выдержал. Мемуары Ли по минимальным поверхностям следует причислить к его лучшим достижениям. Это особенно относится к его результатам по алгебраическим минимальным поверхностям, очень отличающимся по методам от аналитических построений большинства других его работ.

В 1864 г. бельгийский физик Плато установил, что если погрузить в мыльный раствор замкнутый контур l (например, из проволоки), то после его извлечения оттуда образуется поверхность минимальной площади по сравнению с любой другой поверхностью, которую можно натянуть на этот контур («опыт Плато»). Дарбу охарактеризовал теорию минимальных поверхностей как «великую проблему, завещанную физикой геометрии». Трудно назвать другую область математики, которая привлекала бы столько великих умов. Минимальными поверхностями (в дальнейшем — МП) интересовался еще Эйлер. Вслед за ним к МП обращается Лагранж, а в XIX в. ими занимались Менье, Монж, Лежандр, Пуассон, Риман, Вейерштрасс, Бонне, Бельтрами, Ли, Дарбу, Рибокур, Шварц, Бьянки и многие другие, уже не столь известные геометры. Интересно, что исследования МП способствовали прогрессу других разделов математики. Например, формула Кристоффеля—Шварца конформного отображения многоугольника на полуплоскость, играющая важную роль в гидро- и аэродинамике, была найдена при решении задач Плато (провести минимальную поверхность через заданный контур) для случая, когда l — пространственный многоугольник.

Теория берет начало в мемуаре Лагранжа 1760 г., в котором тот рассматривает обобщение задачи Эйлера об экстремуме интеграла, распространив его на двойные интегралы. В качестве примера он рассмотрел интеграл

$$J = \iint\limits_D \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx dy, \qquad (1)$$

выражающий площадь поверхности S, заданной уравнением $z=f(x, y)$, проекция которой на плоскость X, Y — область D. Применительно к (I) необходимое условие экстремума, найденное Лагранжем, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0,$$

или

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0. \qquad (2)$$

Очевидное решение этого уравнения, $z=ax+by+c$, (S — плоскость) не представляет интереса, так как граница области D вообще предполагается пространственной кривой.

Поверхность $z=f(x, y)$, для которой имеет место (2), принято называть минимальной. В 1776 г. Менье в мемуаре «О кривизне поверхности», сыгравшем важную роль в истории дифференциальной геометрии, указал два важных класса МП: а) геликоиды, $y=x \operatorname{tg} z/c$, — поверхность, образованная прямой линией, которая вращается вокруг оси Z и одновременно движется параллельно ей (винтовая поверхность); б) катеноид — поверхность, образованная вращением цепной линии, $y=k \operatorname{ch} x/k$, вокруг ее «базы» — оси X.

Менье также заметил, что равенство (2) означает обращение в нуль средней кривизны H поверхности. В большинстве работ XIX в. минимальные поверхности определялись и изучались именно исходя из равенства $H=0$ без рассмотрения их экстремальных свойств. Мы здесь также будем иметь в виду именно это определение.

Исследователями XIX в. были найдены многочисленные свойства линий на МП, рассмотрены специальные классы МП, изучены проблемы их изгибания и т. д. Новая глава теории открылась после того, как Вейерштрасс обнаружил связь МП с аналитическими функциями комплексного переменного. Это позволило ему, в частности, получить важные результаты в теории алгебраических МП. Подключение Ли ко всей этой тематике было ознаменовано серией работ [I, 41, 45, 46, 57], где МП рассматривались как поверхности переноса. В этих исследованиях содержатся как новые результаты по проблемам, которыми уже занимались предшественники Ли, так и результаты, относящиеся к новым задачам.

Одной из наиболее важных и трудных задач, возникших в работах Вейерштрасса о МП, был вопрос о наименьшем классе и наименьшем порядке алгебраических МП. Эта проблема также интересовала Ли, и она явилась предметом его дискуссий с коллегами. Мы сейчас о них расскажем, но предварительно дадим некоторые пояснения относительно терминологии.

Поверхность S называется алгебраической, если она может быть задана уравнением

$$\varphi(x,\ y,\ z)=0, \tag{3}$$

где φ — полином от x, y, z. Для этого достаточно, чтобы S имело параметрическое представление, $x=x(u,\ v)$, $y=y(u,\ v)$, $z=z(u,\ v)$, в котором x, y, z — полиномы от u, v. Порядком ν алгебраической поверхности называется число точек ее пересечения с прямой l. Координаты этих точек могут быть комплексными или вещественными, и ν не зависит от выбора l.

Пусть S — произвольная гладкая поверхность и

$$uX+vY+wZ=1$$

— уравнение ее касательной плоскости П. Зависимость между u, v, w для всевозможных положений П называется тангенциальным уравнением поверхности S. Чтобы перейти от точечного уравнения (3) к ее тангенциальному уравнению,

$$\psi(u,\ v,\ w)=0, \tag{4}$$

вспомним, что u, v, w в точке касания x, y, z равны соответственно $\lambda\varphi_x$, $\lambda\varphi_y$, $\lambda\varphi_z$, где $\lambda^{-1}=x\varphi_x+y\varphi_y+z\varphi_z$. Это дает три уравнения для x, y, z. Выражая их отсюда через

u, v, w и внося в (3), получим (4). Если поверхность S алгебраическая, то и тангенциальное ее уравнение (4) также алгебраическое.

Согласно принципу двойственности (точка $\leftrightarrow$ плоскость, прямая $\leftrightarrow$ прямая), переход от (3) к (4), от точечного уравнения к тангенциальному, означает, что мы рассматриваем S не как совокупность точек, а как огибающую множества ее касательных плоскостей. Отсюда — и определение класса алгебраической поверхности.

Рассмотрим пучок плоскостей с осью l. Классом μ поверхности S называется количество тех плоскостей пучка, которые касаются S. Это определение не зависит от выбора l. Пусть, например, задана поверхность

$$A\sqrt{x}+B\sqrt{y}+C\sqrt{z}=D.$$

Это — алгебраическая (не минимальная) поверхность четвертого порядка, называемая поверхностью Штейнера, и ею занимались также Куммер, Клейн, Ли др. Ее тангенциальное уравнение —

$$\frac{A}{u}+\frac{B}{v}+\frac{C}{w}=D$$

(поверхность третьего класса). Дифференциальное уравнение (2) минимальной поверхности задает ее в точечных координатах $z=f(x, y)$ (мы имеем в виду любое частное решение уравнения (2) и отвечающую ему поверхность). Как показал Лежандр (1825 г.), от (2) можно перейти к дифференциальному уравнению, задающему минимальную поверхность в тангенциальных координатах. Если мы будем искать алгебраические МП в виде $z=f(x, y)$, где f — полином, то для поверхности высокого порядка в нашем распоряжении будет много параметров-коэффициентов полинома, и ими можно распорядиться так, чтобы выполнялось (2). Аналогично и для алгебраической поверхности высокого класса. Иными словами, мы можем сделать априорное заключение, что алгебраические МП высокого порядка и высокого класса существуют. Но каков возможный наименьший порядок алгебраической МП? Каков ее возможный наименьший класс? Здесь возникает дополнительная трудность: следует различать мнимые и вещественные алгебраические МП, ибо именно последние представляют наибольший интерес.

Письмо Хеннеберга. В сентябре 1877 г. Ли принял участие в юбилейном, 50-м съезде Немецкого общества естествоиспытателей и врачей, который состоялся в Мюнхене. 19 сентября он выступил там с докладом «О минимальных поверхностях, в частности алгебраических». Основные идеи этого доклада были им перед этим опубликованы в заметке «О синтетическом исследовании минимальных поверхностей» [I, 35]. Как полагал Ли, дальнейшее развитие этой работы позволит ему установить связь с некоторыми идеями Вейерштрасса и Шварца об алгебраических МП. Еще находясь в Мюнхене, Ли получил 25 сентября письмо из Фрейбурга от доцента Л. Хеннеберга [I, 130, т. 1, с. 781].

Уважаемый г. профессор, через профессора Кипперта, который просит меня передать Вам привет, я узнал, что вы опубликовали в Христиании работу об алгебраических минимальных поверхностях, с которой я, к сожалению, не знаком и в которой утверждается, что эти поверхности могут быть самое малое шестого класса. В связи с этим я хочу Вам сообщить, что в моей работе на эту тему, выполненной в Цюрихе весной этого года, показано, что существуют алгебраические МП 5-го класса. Точнее, мне удалось открыть алгебраические МП 17-го порядка и 5-го класса. Вы найдете их в двух моих работах, которые я при первой возможности Вам перешлю. Мое доказательство основано на невозможности существования алгебраической МП 3-го и 4-го классов и связано с найденной мною теоремой, согласно которой каждый цилиндр, касающийся алгебраической МП, имеет своим ортогональным сечением эволюту алгебраической кривой. Этот последний результат еще мною не опубликован. Он будет включен в большую работу, которую я готовлю к печати.

В ответном письме Хеннебергу (сентябрь 1877 г. Ли писал:

Глубокоуважаемый коллега, извините, что я ознакомился с Вашей работой [1] лишь непосредственно перед тем, как ответить на Ваше дружеское (freundlichen) письмо. Прежде всего поздравляю Вас с красивыми теоремами о МП с заданными геодезическими линиями. В своих дальнейших работах я приму во внимание эти Ваши результаты, которые, к сожалению, ранее мне были неизвестны.

В работе, которую я опубликовал в начале этого года, указан метод нахождения порядка и класса алгебраического МП, причем я не предполагал, что они непременно вещественны. При переходе к вещественным МП я допустил неточность, которая привела к неверному выводу о невозможности существования алгебраических

---

[1] Henneberg L. Bestimmung der niedrigsten Klassenzahl der algebraischen Minimalflächen. — Ann. Mat., ser. IX, 1878, Bd 2, S. 54—67.

МП класса меньшего, чем шесть. (Насколько я могу судить, это первая серьезная ошибка в моих публикациях. Я постараюсь ее нейтрализовать в одной из ближайших работ). В моих последующих работах по МП я отмечу Ваш приоритет и укажу, что вы первый указали существование алгебраических МП 5-го класса. Вместе с тем порядок МП, о котором Вы говорите, должен быть не 17, как у Вас, а 15. Я полагаю, что тут в Ваших рассуждениях имеется неточность.

Позвольте мне выразить надежду, что этим положено начало нашей дружеской переписке.

Здесь заслуживает упоминания гёттингенская диссертация ученика Шварца, К. Шиллинга,[2] где говорится, что, согласно устному сообщению Вейерштрасса, алгебраические МП были найдены также и им, причем он обнаружил, что они — односторонние.

Подчеркнем, что здесь имеются в виду вещественные поверхности. Для мнимых дело обстоит иначе. Так, в 1870 г. Гейзером (G. F. Geiser) была указана мнимая алгебраическая МП четвертого порядка,

$$(x-iy)^4+3(x^2+y^2+z^2)=0,$$

а в 1876 г. Ли нашел мнимую алгебраическую МП порядка три,

$$2(x-iy)^3+6i(x-iy)z+3(x+iy)=0.$$

Впоследствии эти поверхности подробно рассматривал Штуди (1911 г.).

Прошло 56 лет. Ли давно уже не было в живых. В период работы над примечаниями к I и II томам собрания сочинений Ли Энгелю стали известны некоторые дополнительные подробности, относящиеся к обсуждению проблемы порядка и класса алгебраических МП, которые в свое время так занимали Ли и его коллег. В январе 1932 г. в письме Энгелю Кипперт, упоминавшийся в цитированном нами выше письме Хеннеберга, рассказывал, что на Съезде естествоиспытателей и врачей в Мюнхене в 1877 г. он перед докладом Ли сообщил ему о результатах Хеннеберга. Последний тогда проводил каникулы в Цюрихе и часто встречался там с Киппертом, от которого узнал о результатах Ли по МП.

В январе того же года Хеннеберг писал Энгелю: «Во время моего пребывания в Цюрихе в 1878 г. я встретился

---

[2] Schilling C. Die Minimalflächen fünfter Klasse mit dem Stereoscopbilds eines Modelles derselben. — Leipzig, 1880.

там со Шварцем и сообщил ему о моих результатах по алгебраическим МП. Они оказались для него неожиданными. Шварц показал мне при этом письмо Вейерштрасса, в котором говорится, что им найдены алгебраические МП 5-го класса. Сверив мое уравнение с уравнением Вейерштрасса, Шварц сказал, что последний нашел другие поверхности». Хегор по этому поводу заметил [I, 130, т. 1, с. 789]: «Здесь Шварц, вероятно, ошибся, ибо, как показал Ли, все алгебраические МП 5-го класса подобны друг другу» (т. е. этот класс инвариантен относительно группы преобразований $x'=\lambda x$, $y'=\lambda y$, $z'=\lambda z$).

В конце апреля 1878 г. Ли начал писать письмо Клейну, которое отослал не сразу: «Вернувшись из Германии, я все вспоминал дружеские встречи с тобой и Майером. Но, вообще говоря, я остался недоволен этой поездкой. Меня часто нервировали приходившие из дома сообщения от жены и, кроме того, до сих пор осталось чувство досады из-за ошибки, допущенной мною в одной из работ по МП. Я сумею вновь обрести душевное равновесие, лишь когда получу должные новые результаты. Не добившись в последнее время успехов в теории МП, я продолжил занятия группами преобразований. Они поистине становятся главным делом моей жизни. Задачи, которые я тут себе поставил, мне представляются грандиозными. . .» [там же, с. 793].

После трехнедельного перерыва Ли продолжил это письмо: «Я снова вернулся к минимальным поверхностям и добился существенных успехов. Для всей этой теории, как я уверен, весьма существенно параллельное рассмотрение, основанное на синтетических и аналитических методах. Я намерен опубликовать эти результаты в виде трех заметок, последняя из которых примыкает к моей теории групп. . . Результаты Хеннеберга, ученика Шварца, меня весьма заинтересовали, но теперь я пошел значительно дальше. . .». И действительно, Ли снова удалось существенно продвинуться в изучении МП. Им было показано [I, 46, 47], что существуют алгебраические вещественные МП, класс которых выражается произвольным простым числом, и все эти поверхности двусторонние. Этот тип поверхностей инвариантен относительно некоторых групп линейных преобразований. По мнению Ли, многим исследователям, занимающимся проблемами МП, недостает геометрической интуиции: «Я с признательностью вспоминаю Плюккера, которому я особенно обязан развитием моего геометрического мышления» (из того же письма Клейну).

Между тем переписка с Хеннебергом продолжалась, хотя группы преобразований все больше поглощали внимание Ли. В одном из писем Хеннебергу он говорит: «Я рассматриваю занятия МП лишь как каникулы (recreationen) в моих исследованиях по теории групп, которым я придаю первостепенное значение».

К минимальным поверхностям Ли возвращался еще неоднократно. Он провел подробное исследование их с проективной и афинной точек зрения, а также как подкласса поверхностей переноса. Эти результаты содержались в новой серии его блестящих мемуаров по МП [I, 41, 45, 46]. Когда Ли правил корректуру второго из них, ему стал известен большой мемуар бельгийского геометра Альберта Рибокура,[3] премированный бельгийской Королевской Академией наук. В примечании в конце работы [I, 57] Ли высоко отзывается об исследованиях бельгийского коллеги. В свою очередь Рибокур самым восторженным образом отзывается о результатах Ли: «После того, как Королевская Академия Бельгии предложила вопрос, явившийся предметом моих исследований, геометр, заслуги которого исключительно велики, опубликовал последовательно большое количество прекрасных результатов о минимальных поверхностях: Софус Ли дал полное решение проблемы Монжа. . . Кроме того, он получил решение проблемы Бьёрлинга, относящееся к интересным частным случаям, рассмотрел важные классы МП. Работы Ли имеют первостепенное значение для моих исследований. Трудности, которые мне пришлось преодолеть, были бы в значительной мере обойдены, если бы я раньше познакомился с работами крупнейшего математика, каким является норвежец Ли» [I, 130, т. I, с. 829].

Ли — Клейну (17 декабря 1881 г.): «Рибокур прислал мне весьма интересную работу о минимальных поверхностях. Он, между прочим, горный инженер и говорит, что основная работа оставляет ему мало времени для занятий математикой» [там же].

Проблема Бьёрлинга, о которой говорит Рибокур, состоит в следующем. Требуется найти МП, проходящую через заданную (незамкнутую) кривую γ и имеющую в точках этой кривой заданные касательные плоскости. Ее решение при наиболее общих условиях (не предполагаю-

[3] Ribaucour A. Etudes des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle. — Mem. cour. Acad. sci., Brussel, 1881.

щих гладкости γ) было дано Шварцем. Проблема Бьёрлинга позволила установить ряд интересных свойств МП, например такое: если МП содержит прямую l (вещественную или мнимую, но только не изотропную), то поворот этой поверхности вокруг l на угол π переводит ее в саму себя.

Результаты. Подход Ли к теории минимальных поверхностей в его наиболее своеобразной части связан с рассмотрением их как поверхностей переноса. Последние встречались еще у Монжа, но Ли был первым, кто осуществил их систематическое и далеко идущее рассмотрение.

Говорят, что S — поверхность переноса, если при некотором выборе параметров u, v ее уравнение, $\mathbf{R}=\mathbf{r}(u, v)$, можно представить в виде

$$\mathbf{R}=\mathbf{r}_1(u)+\mathbf{r}_2(v). \qquad (5)$$

Фиксируя v, $v=C_1$, мы получим на S кривую $\mathbf{r}_1(u)+\mathbf{c}_1$, которая, если мы теперь будем менять v, перемещаясь как твердое тело, опишет S (аналогично, если поменяем местами u и v). На этом основании говорят, что линии $u=C_1$ и $v=C_2$ на поверхности являются образующими S, а сама она получается, если кривая $\mathbf{r}_1(u)$ перемещается без деформации вдоль кривой $\mathbf{r}_2(v)$ (или обратно) (рис. 7). Ясно также, что S можно получить как совокупность середин хорд, соединяющих точки кривых $2\mathbf{r}_1(u)$ и $2\mathbf{r}_2(v)$.

Особый интерес представляют поверхности переноса, у которых векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ совпадают:

$$\mathbf{R}=\mathbf{r}(u)+\mathbf{r}(v). \qquad (6)$$

Здесь возникает небольшой парадокс: при любых a, b точки (a, b) и (b, a) на S различны, но в пространстве (x, y, z) мы имеем лишь одну точку $\mathbf{M}=\mathbf{R}(a, b)=\mathbf{R}(b, a)$. Объяснение дает равенство

$$\mathbf{N}=\mathbf{r}'(a)\times\mathbf{r}'(b)=-\mathbf{r}'(b)\times\mathbf{r}'(a),$$

задающее вектор $\mathbf{N}$, параллельный нормали к S в точке $\mathbf{M}(a, b)$ ($\times$ — векторное произведение, штрих — как всегда, производная по параметру). Таким образом, выйдя иэ точки (a, b) и описав на поверхности замкнутый контур, мы вернемся в точку (b, a) с противоположным направлением нормали. Это (топологическое) свойство поверхностей хорошо известно на примере листа Мебиуса — простейшей модели односторонних поверхностей. Повторно

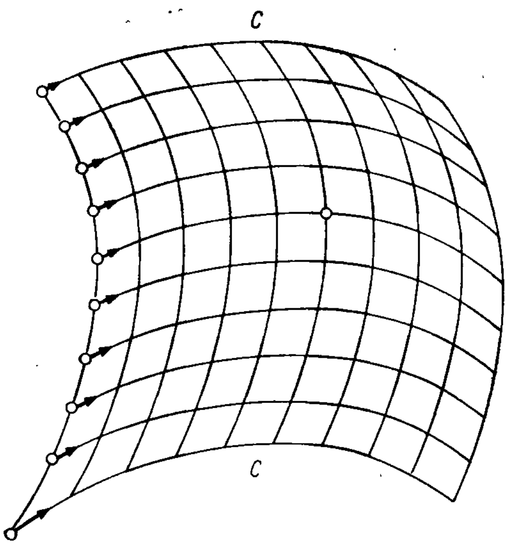


Рис. 7. *Поверхность переноса.*

описав замкнутый контур, мы вернемся в ту же точку (a, b) с тем же направлением нормали. На этом основании поверхности типа (6) Ли называл двойными.

Пусть S — произвольная поверхность, $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v)$ — ее уравнение и $ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$ — ее первая дифференциальная квадратическая форма,

$$E=\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)^2, \quad F=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \quad G=\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)^2.$$

Выберем u, v так, чтобы $E=G=0$ и, значит, $ds^2=d\alpha^2+$ $+d\beta^2$. Тем самым, как показывает простейший пример, $ds^2=d\alpha^2+dv^2$, $\alpha=u+iv$, $\beta=u-iv$, $ds^2=dudv$, мы переходим к комплексным параметрам (u, v). Если к тому же поверхность S минимальная (ее средняя кривизна H равна нулю), то, как показал Монж, в этой системе координат

$$\mathbf{R}=\mathbf{r}_1(u)+\mathbf{r}_2(v).$$

Так как при этом $|\mathbf{r}_1'(u)|^2=|\mathbf{r}_2'(v)|^2=0$, то минимальная поверхность есть поверхность переноса, у которой образующие векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ имеют нулевую длину. В координатной форме это записывается в виде

$$X=x_1(u)+x_2(v), \quad Y=y_1(u)+y_2(v), \quad Z=z_1(u)+z_2(v),$$
$$\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{z}_1^2=0, \quad \dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2+\dot{z}_2^2=0. \tag{7}$$

Написанные равенства (7) явились исходным пунктом очень важных результатов Вейерштрасса и его последователей. От них же отправлялся и Ли, но, как он подчеркивал, в отличие от их сугубо аналитических методов для его построений характерно использование и геометрических идей. Это сказалось уже в самом начале в том, как Ли получил «формулы Вейерштрасса».

Пусть имеется семейство изотропных плоскостей

$$A(u)\,x + B(u)\,y + C(u)\,z + D(u) = 0, \tag{8}$$

т. е. для всех u $A^2+B^2+C^2=0$, и, значит, любая плоскость семейства касается круга Понселе (см. с 27). Найдем огибающую П этого семейства. Она задается присоединением к (8) еще одного уравнения, получаемого дифференцированием (8) по u:

$$A'(u)\,x + B'(u)\,y + C'(u)\,z + D'(u) = 0. \tag{9}$$

П — линейчатая поверхность — совокупность прямых (8) и (9). Любая иэ этих прямых: а) пересекает круг Понселе (изотропна); б) лежит в плоскости (8). Найдем огибающую γ семейства прямых (8), (9) (ребро возврата семейства поверхностей (8)). Для этого нужно к (8), (9) присоединить еще уравнение

$$A''(u)\,x + B''(u)\,y + C''(u)\,z + D''(u) = 0. \tag{10}$$

Решая (8), (9), (10) относительно x, y, z, получим линию γ. По самому определению, ее касательные изотропны, и, следовательно, это изотропная кривая.

Положим теперь $A=1-u^2$, $B=i\,(1+u^2)$, $C=2u$, $D=f(u)$, f — произвольная аналитическая функция.

Как легко видеть, $A^2+B^2+C^2=0$, и для γ мы получим

$$\begin{aligned} x &= \frac{1-u^2}{2} f''(u) + uf'(u) - f(u), \\ y &= i\,\frac{1+u^2}{2} f''(u) + iuf'(u) + if(u), \\ z &= uf''(u) - f'(u). \end{aligned} \tag{11}$$

Зададим теперь другое семейство изотропных плоскостей:

$$A_1(v)\,x + B_1(v)\,y + C_1(v)\,z + D_1(v) = 0.$$

Повторяя те же действия и выбирая

$$A_1 = 1 - v^2,\ B_1 = -i(1+v^2),\ C_1 = 2v,\ D_1 = f_1(v),$$

получим изотропную кривую

$$\begin{aligned} x &= \frac{1-v^2}{2} f_1''(v) + v f_1'(v) - f_1(v), \\ y &= i\frac{1+v^2}{2} f_1''(v) - iv f_1'(v) + i f_1(v), \\ z &= v f_1''(v) - f_1'(v). \end{aligned} \tag{12}$$

Соотношения

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_1(u) + \mathbf{r}_2(v), \tag{13}$$

в которых $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ задаются согласно (11) и (12), называются формулами Вейерштрасса. Они были получены им из совершенно иных соображений.

Ясно, что если (11) и (12) — алгебраические функции (f_1 и f_2 — полиномы), то поверхность алгебраическая. Обратное тоже верно: любая алгебраическая МП может быть задана уравнениями вида (11), (12). Ясно также, что если $v=\bar{u}$ и $f=\bar{f}_1$ (черта над буквой означает переход к сопряженной комплексной величине), то поверхность (13) вещественная. Верно и обратное, любая вещественная МП может быть получена указанным образом.

Рассмотрим теперь алгебраическую минимальную поверхность S, заданную уравнением (13) вида (11), (12), и совокупность Π, касательных к линии $\mathbf{r}_1(u)$. Она задается равенствами (8), (9). Это алгебраическая поверхность. Обозначим через ρ_1 ее порядок. Эта величина называется классом линии $\mathbf{r}_1$. Пусть m_1 — число точек пересечения Π_1 с кругом Понселе («класс линии $\mathbf{r}_1$ относительно бесконечности»). Те же величины для линии $\mathbf{r}_2$ обозначим соответственно ρ_2, m_2. Тогда, согласно теореме Ли [I, 46], класс ν алгебраической поверхности выражается равенством

$$\nu = m_2(\rho_1 - m_1) + m_1(\rho_2 - m_2)$$

(можно показать, что всегда $\rho_1 \geqslant m_1$, $\rho_2 \geqslant m_2$).

Если поверхность S двойная, то

$$\nu = m(\rho - m).$$

Пусть n_1 и n_2 — соответственно порядки кривых r_1 и r_2. Пусть ω — число точек на бесконечности пересечения

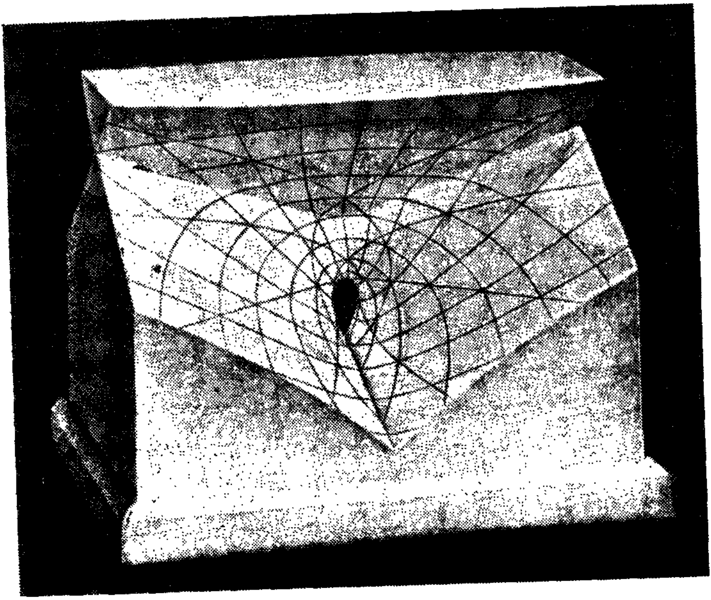


Рис. 8. *Минимальная поверхность Эннепера.*

между собой линий r_1 и r_2. Тогда порядок μ поверхности S выражается равенством

$$\mu = n_1 n_2 - \omega.$$

Если S — двойная поверхность, то

$$\mu = \frac{1}{2}(n_1 n_2 - \omega) \text{ [I, 46]}.$$

Эти результаты Ли Дарбу [II, 159, т. I, с. 426] иллюстрирует на примере минимальной поверхности Эннепера (1862 г.) (рис. 8), для которой

$$x = 3u - u^3, \quad y = \pm i(3u + u^3), \quad z = 3u^2.$$

Здесь $m_1 = m_2 = 1$, $\rho_1 = \rho_2 = 4$, $n_1 = n_2 = 3$, $\omega = 0$ и, соответственно, $v = 6$, $\mu = 9$.

Приведенные результаты Ли получает первоначально синтетическими методами, почти без использования формул. Дальнейшие его построения основаны на применении сложного аппарата теории алгебраических функций и трансцендентных. Были получены нижние оценки порядков и классов алгебраических МП, исследованы особые, в частности конические, точки на них и многое другое.

Изложению этих результатов Ли Дарбу посвятил многие страницы первого тома своего трактата [II, 58], отсылая за дальнейшими подробностями к мемуару [I, 46].

На одном из семинаров в конце 60-х годов Вейерштрассом была поставлена следующая проблема: задавшись произвольной алгебраической поверхностью S, найти вписанные в нее алгебраические минимальные поверхности (линии касания, очевидно алгебраические). Этот вопрос оказался очень трудным, и, насколько нам известно, он не решен и по сей день. Однако Ли [I, 47] удалось найти его решение для очень важного частного случая, когда S — развертывающаяся поверхность [II, 59, т. 1, гл. 9]. Работы Ли по алгебраическим МП, безусловно, следует отнести к наивысшим достижениям XIX в. в этой области. Дальнейшее развитие общей теории МП в минувшем веке связано с применением методов теории аналитических функций, где первое место бесспорно занимает Герман Амадеус Шварц.

Его влияние сказывается и в теории МП наших дней, берущей начало в известных работах С. Н. Бернштейна (1926 г.) и продолженной в трудах Куранта, Радо, Дуглиса.[4] Но это уже существенно иная теория как по постановке основных проблем, так и по применяемым методам: комплексный анализ, дифференциальные неравенства, прямые методы вариационного исчисления. . .

Поверхности переноса

Работы Ли по поверхностям переноса (в дальнейшем также ПП) явились основополагающими. Они встречаются уже в его ранних работах, но главные его мемуары на эту тему относятся к 90-м годам [I, 115, 118]. Они, в частности, знаменательны тем, что стимулировали исследования ряда других выдающихся ученых.

Здесь естественно формулируются две основные проблемы. 1. При каких условиях произвольная заданная по-

---

[4] Курант Р. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности/ Пер. с нем. — М., 1953. Сегодняшняя теория минимальных поверхностей богата идеями и перспективами (см., например: Фоменко А. Т. Геометрия мыльных пленок. — Химия и жизнь, 1982, № 6, с. 14—24).

верхность является поверхностью переноса, т. е. когда на ней можно выбрать координаты так, чтобы

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_1(u) + \mathbf{r}_2(v). \tag{14}$$

Эта проблема оказалась очень трудной, и, как сообщает Бляшке, она была решена лишь в 1921 г. Радамейстером. Важен, однако, и следующий результат Ли: при задании поверхности уравнением $z=f(x, y)$ функция z для ПП удовлетворяет уравнению второго порядка вида

$$M(p, q)r + N(p, q)s + P(p, q)t = 0, \tag{15}$$

в частности, для минимальных поверхностей

$$M = 1 + p^2, \ N = -2pq, \ P = 1 + q^2.$$

Если (14) имеет место уже в координатах x, y, т. е. $z = f_1(x) + f_2(y)$, то (15) тривиально.

Ли провел глубокое изучение уравнения (15). Оно возникло у него в теории прямолинейных комплексов.

2. При каких условиях одна и та же поверхность S может быть порождена двумя парами векторов S:

$$\mathbf{r}_1(u) + \mathbf{r}_2(v) = \mathbf{r}_3(\alpha) + \mathbf{r}_4(\beta).$$

Здесь заслуживает внимания случай, когда $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_4$ (двойная поверхность) и, более того, когда S

$$\mathbf{r}(u) + \mathbf{r}(v) = \mathbf{r}(\alpha) + \mathbf{r}(\beta).$$

Именно этот последний случай оказался особенно интересным. Полученный Ли по этому поводу результат был подсказан ему одной теоремой Абеля, сочинения которого он, как мы уже говорили, редактировал совместно с Силовым.

Из истории физики известно, что иногда экспериментатор, думая об одном, неожиданно открывает другое. В математике такое тоже бывало. Читая Абеля, Ли, насколько можно судить, думал и о своих проблемах. И вот. . .

Пусть $F(x, y) = 0$ — уравнение алгебраической кривой l четвертого порядка. Запишем интегралы

$$\int_a^\xi \frac{x\,dx}{F'_y} = \Phi_1(\xi), \quad \int_b^\xi \frac{y\,dx}{F'_y} = \Phi_2(\xi), \quad \int_c^\xi \frac{dx}{F'} = \Phi_3(\xi). \tag{16}$$

Пусть $\mathbf{r}$ — вектор с координатами $\Phi_1(\xi)$, $\Phi_2(\xi)$, $\Phi_3(\xi)$; ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 — абсциссы точек пересечения l с произвольной прямой. Тогда, как показал Абель, при подходящем выборе чисел a, b, c

$$\mathbf{r}(\xi_1)+\mathbf{r}(\xi_2)+\mathbf{r}(\xi_3)+\mathbf{r}(\xi_4)=0.$$

Этим самым равенства

$$\mathbf{R}=\mathbf{r}(\xi_1)+\mathbf{r}(\xi_2)=-\mathbf{r}(\xi_3)-\mathbf{r}(\xi_4)$$

задают ПП, которая порождается лежащими на ней четырьмя семействами конгруэнтных кривых: $\xi_1=c_1$, $\xi_2=c_2$, $\xi_3=c_3$, $\xi_4=c_4$.

Ли рассмотрел все случаи вырождения линии $F(x, y)=0$ (в прямую и линию третьего порядка, в совокупность двух линий второго порядка, . . .) и нашел соответствующие типы поверхности S. Так, если $F=(x^2+y^2+1)^2$, получается минимальная поверхность, найденная в 1838 г. Шерком,

$$e^z=\frac{\sin x}{\sin y}$$

(рис. 9), а при $F=(x^2+y^2-1)^2$ — винтовая поверхность, $z=\operatorname{arctg} y/x$, которая также является минимальной.

Несомненно, Ли был очень доволен этими результатами, позволившими ему получить столь неожиданную связь с исследованиями его соотечественника. Все это имело дальнейшую очень интересную историю. Формулируя вторую проблему (мы привели ее выше), Дарбу [II, 59, ч. I, гл. 9] говорит: «Эта красивая и важная проблема была поставлена и решена Ли в мемуаре 1882 г. [I, 61]. Затем к ней обратился Пуанкаре, рассмотрев ее с разных точек зрения сначала в работе . . . 1895 г., затем в работе . . . 1901 г.». (Первая из этих работ была известна Ли, и он отмечал, что Пуанкаре, не будучи знаком с некоторыми из его результатов, независимо их переоткрыл). «Мы покажем, — продолжает Дарбу, — что можно получить новое решение этой проблемы, не опирающееся на теорему Абеля и отличающееся большей простотой». И действительно, Дарбу проводит очень прозрачное исследование тех же поверхностей переноса, не только не опираясь на теорему Абеля, но, наоборот, показывая, что она вытекает из его рассуждений (в основе, как и у Ли, лежит задание произвольной кривой четвертого порядка).

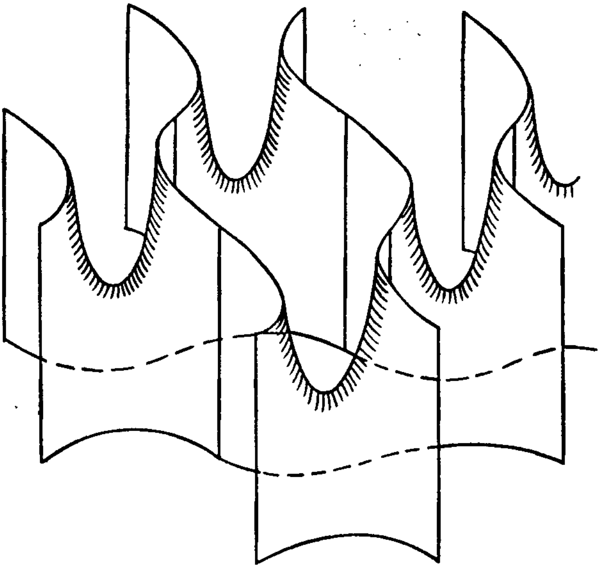


Рис. 9. *Минимальная поверхность Шерка.*

И все же теорема Абеля оказалась глубоко связанной с данной проблемой. Это стало очевидным особенно после того, как Ли предпринял исследование ее многомерных обобщений. Простейшая постановка задачи здесь такова. В четырехмерном пространстве $(x_1, \ldots, x_4)$ задана гиперповерхность $f(x_1, \ldots, x_4)=0$. Требуется выяснить возможность ее параметрического задания в виде

$$x_k = \sum_{i=1}^{3} A_{ki}(t_i), \quad k = 1, \ldots, 4. \tag{17}$$

Первый шаг к решению заключается в выборе вместо l кривой 5-го порядка и в таком же, как и выше, использовании интегралов Абеля (16). Дальнейшее углубленное исследование, даже для случая четырехмерного пространства, оказалось связанным с большими техническими трудностями, как это видно из мемуара Ли [I, 118]. Он не провел там рассмотрения всех возникающих частных случаев (вырождение кривой l). Это было сделано его сотрудником Шефферсом. В одном из примечаний к своему мемуару [I, 118] Ли чистосердечно признается, что исследование многообразий переноса, у которых A_k в параметрическом задании (17) — функции не одной, а нескольких переменных, превышает его возможности.

В 1901 г. Пуанкаре показал, что решение проблемы в такой постановке возможно, если привлечь эллиптические функции Якоби. Исследование, проведенное Пуанкаре, не было доведено до конца. Наиболее значительный результат (с использованием теории Галуа) был получен в 1927 г. Н. Г. Чеботаревым в статье, опубликованной в «Математическом сборнике». Эта статья воспроизведена в его прекрасной книге «Теория алгебраических функций» (М., 1948, гл. 9), где также содержатся ссылки на мемуары Ли и Пуанкаре. Можно также отметить большую статью Виртингера,[5] в которой многообразия переноса исследуются на основе применения дифференциальных уравнений. В ней содержится обстоятельная библиография, но замечательное исследование Н. Г. Чеботарева, по-видимому, Виртингеру осталось неизвестным.

Недостаток места лишает нас возможности остановиться еще на одном направлении геометрических исследований Ли — его работах по внутренней геометрии поверхности (геодезические линии, бесконечно малые изгибания). Они связаны с результатами итальянских геометров Бельтрами и Бианкии, как и многие работы Ли, отличаются теоретико-групповой направленностью и тщательной проработкой деталей [I, 57, 72, 73].

Контактные преобразования — теория, примеры, приложения

Теория контактных преобразований (в дальнейшем также КП) — одно из самых важных и совершенных созданий Ли. По идеям и методам она примыкает к его теории групп преобразований, но может рассматриваться и как самостоятельная дисциплина. Примеры контактных преобразований, и к тому же очень важные, задолго до Ли встречались в анализе и геометрии у Эйлера, Лагранжа, Монжа, Лежандра, Ампера, Понселе, а еще намного раньше — в теории волн у Гюйгенса. К идеям КП вплот-

[5] Wirtinger W. Lie's Translationsmannigfaltigkeiten und Abel'sche Integrale. — Monatsh. Math., 1938, Bd 14, 4H.

ную подошел в дифференциальных уравнениях и аналитической динамике Якоби.[1] Основанная им, исключительно важная для классической (а также для квантовой) механики, теория канонических преобразований теснейшим образом связана с контактными преобразованиями.

Обширная теория Ли (ей целиком посвящен второй том трактата [I, 126], не охватывающий, однако, геометрии КП) возникла у него из конкретных задач геометрии поверхностей и комплексов, а затем послужила основой его общих идей в уравнениях с частными производными. Здесь сходятся нити лиевского подхода к проблеме Пфаффа, его теории преобразования дифференциальных уравнений и геометрии их характеристик. Огромный отрыв современной абстрактной теории групп Ли от ее классики куда менее заметен в теории КП, которые и сегодня, через сто лет после их построения, выглядят свежо и актуально.

Контактные преобразования на плоскости. Напомним, что линейным элементом l на плоскости называется точка с фиксированным в ней направлением. Угловой коэффициент касательной к кривой γ на плоскости, проходящей через точку $M(x, y)$, равен y'. Поэтому линейный элемент в R^2 можно задать тремя числами x, y, y'. Точечное преобразование на плоскости записывается в виде

$$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y). \tag{1}$$

Отсюда легко перейти к преобразованию линейных элементов:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{Y'_x + Y'_y y'}{X'_x + X'_y y'} = P(x, y, y'). \tag{2}$$

Равенства (1) и (2) называются продолжениями преобразования (1). Из (1) и (2) непосредственно следует равенство $dy_1 - y'_1 dx_1 = dy - y' dx$. Обобщая сказанное, приходим

---

[1] Предыстория контактных преобразований (Якоби, Дюбуа—Реймон, Бур) и становление лиевского периода этой теории изложены в работе С. С. Демидова «К истории теории Ли уравнений в частных производных» (В кн.: Историко-математические исследования, 1978, XXIII, с. 87—117).

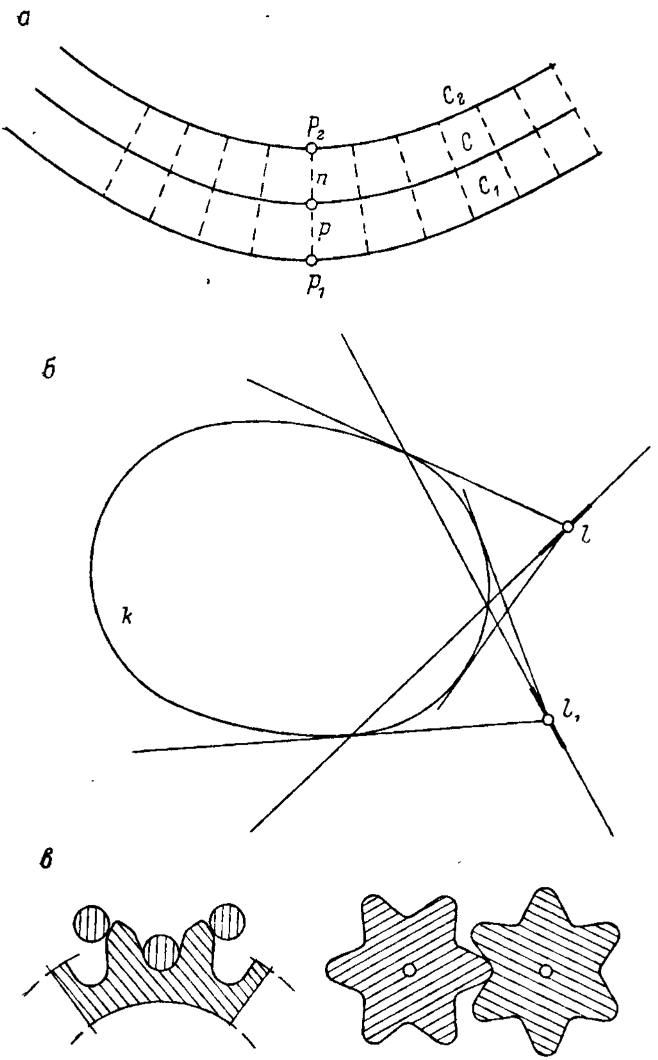


Рис. 10. *Контактные преобразования на плоскости.*
дилатации, *б* — поляритет, *в* — зубчатые механизмы, *г* — подэ

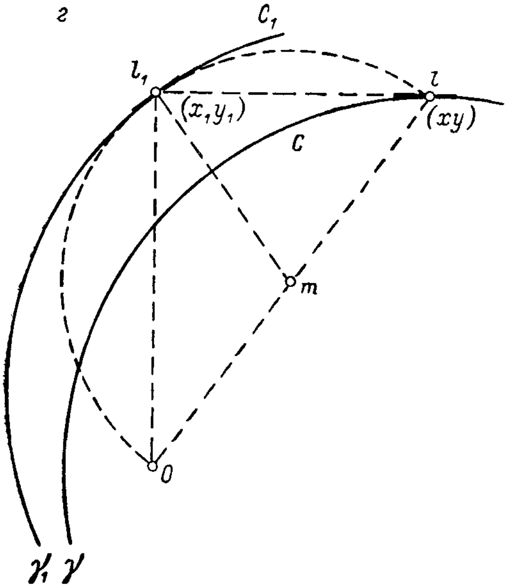


Рис. 10 (*продолжение*).

к определению КП на плоскости: преобразование $l \to l_1$,

$$x_1 = X(x,\ y,\ y'),\ y_1 = Y(x,\ y,\ y'),\ y_1' = P(x,\ y,\ y'), \tag{3}$$

называется контактным, если имеет место

$$dy_1 = y_1'dx_1 = \rho(x,\ y,\ y')(dy - y'dx). \tag{4}$$

При этом линии γ и $\tilde{\gamma}$, касающиеся в точке M, переходят в линии γ_1, $\tilde{\gamma}_1$, касающиеся в точке M_1 — образе точки M. По этой причине контактные преобразования называют также касательными преобразованиями.

Приведем несколько примеров КП на плоскости.

Дилатации. Отложим от каждой точки M линии γ по нормали в одну и другую сторону фиксированный отрезок n. Геометрическое место полученных точек M_1 (соответственно M_2), когда M пробегает γ — линия γ_1 (γ_2). Покажем, что каждое из отображений $\gamma \to \gamma_1$, $\gamma \to \gamma_2$ — контактное преобразование. Непосредственно имеем равенства $(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = n^2$, $(x_1 - x) + (y_1 - y)\,y' = 0$, $y = y_1'$, откуда следует преобразование элементов (рис. 10, *а*):

$$x_1 = x - \frac{ny'}{\sqrt{1 + y'^2}},\quad y_1 = y + \frac{n}{\sqrt{1 + y'^2}},\quad y_1' = y'. \tag{5}$$

Дифференцируя (5) и исключая y'', получим

$$dy_1 - y_1' dx_1 = dy - y' dx$$

— КП, для которого $\rho = 1$ (переход к γ_2 получается изменением знаков перед дробями (5)).

Поляры. Отображение элементов $l \to l_1$ вовсе не означает непременного одно-однозначного отображения точек $M \to M_1$, как это имеет место в (1) и (2). С таким положением мы сразу сталкиваемся при отображениях с помощью поляр. Пусть задана окружность

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{6}$$

Полярой точки M_1 относительно (6) называется, как известно, прямая d:

$$xx_1 + yy_1 = 1. \tag{7}$$

Перейдем от отображения $M_1 \to d$ к отображению элементов (рис. 10, *б*).

Из уравнения (7) имеем

$$y_1' = -\frac{x}{y}.$$

Поскольку уравнение (7) симметрично относительно $M \leftrightarrow M_1$, меняя местами M и M_1, получим

$$y' = -\frac{x_1}{y_1}.$$

Из последних трех уравнений найдем

$$x_1 = \frac{-y'}{y - xy'}, \quad y_1 = \frac{1}{y - xy'}, \quad y_1' = -\frac{x}{y},$$

откуда можно получить

$$dy_1 - y_1' dx_1 = \rho (dy - y' dx),$$

$$\rho = \frac{1}{y(xy' - y)}. \tag{8}$$

Если мы вместо окружности (7) возьмем параболу $x^2 + 2y = 0$, то уравнение поляры γ_1 точки M относительно нее будет иметь вид $xx_1+y+y_1=0$, и, как можно показать, это приводит к отображению

$$x_1=-y', \ y_1=xy'-y, \ y_1'=-x, \tag{9}$$

также контактному, с коэффициентом $\rho=-1$.

Полярные отображения T инволютивны: $T^2=J$, где J — тождественное преобразование. На рис. 10, *б*, показан поляритет $l \leftrightarrow l_1$ относительно эллипса.

Зубчатые механизмы.[2] Представим себе на плоскости два извне или изнутри касающихся друг друга диска, способных вращаться вокруг своих центров. Равномерное вращение одного в силу трения вызывает равномерное же вращение второго. Но, разумеется, таким путем нельзя передать сколько-нибудь значительный крутящий момент, так как при большом сопротивлении круги будут уже не катиться друг по другу, а скользить. Поэтому оба круга снабжаются по их краю зубчатыми ободами так, чтобы зубья одного попадали в пазы между зубьями другого. Общее правило при конструировании подобных зубчатых колес состоит в том, чтобы оба зубчатых обода при равномерном вращении обоих дисков в месте их встречи всегда друг друга касались. Зубья, которые касаются друг друга, при вращении дисков, вообще говоря, скользят друг по другу. Чтобы легче обозреть эти обстоятельства, мы предположим, что один из дисков прикреплен неподвижно к плоскости, в то время как второй катится вокруг первого, причем оба диска касаются друг друга снаружи (рис. 10, *в*). Очевидно, относительное движение обоих кругов будет в точности таким же, как и при наших прежних рассмотрениях. Известно, что при подобном движении точка плоскости катящегося круга будет описывать «эпициклоиду» и притом обыкновенную, вытянутую или запетленную в зависимости от того, лежит ли эта точка на границе катящегося круга, внутри его или вне его. Подобно тому, как мы здесь рассматриваем точку в ее последовательных положениях при движении, точно так же мы можем рассматривать произвольную, твердо связанную с катящимся кругом кривую (или какую-нибудь ее часть) в ее последовательных положениях. Мы видим, что при движении рассматриваемой кри-

---

[2] См. [II, 33, с. 296]. «На использование в зубчатых механизмах контактных преобразований первым обратил внимание Клейн» [II, 129, с. 66, сноска].

вой будет огибаться некоторая определенная другая кривая.

Мы утверждаем, что соответствие между обеими кривыми представляет собой контактное преобразование, именно преобразование, превращающее точки катящейся плоскости в упомянутые эпициклоиды. Чтобы доказать это утверждение, нам надо только показать, что из двух касающихся друг друга кривых при движении в качестве огибающего образа получаются опять-таки две касающиеся друг друга кривые. Но это непосредственно следует из того, что в момент, когда элемент прикосновения первой кривой касается огибающей первой кривой, он одновременно касается огибающей второй кривой, так как речь идет о том моменте, когда элемент прикосновения в силу мгновенного вращения передвигается сам по себе. Нормаль элемента проходит тогда через мгновенный центр вращения, т. е. через точку прикосновения обоих исходных кругов.

Разобравшись во всех этих обстоятельствах, мы можем (отвлекаясь от практической точки зрения, которую можно приблизительно выразить в том, что зубцы колес при движении не должны ударяться друг о друга) высказать следующее основное положение всей теории зубчатых колес: один зубчатый обод берут произвольно и строят другой зубчатый обод в качестве той кривой, которая соответствует первому зубчатому ободу в силу нашего контактного преобразования (рис. 10, *в*).

П о д э р ы. Пусть заданы линия γ и фиксированная точка O — полюс. Подэрой γ_1 линии γ относительно O называется геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из O на касательные к γ. Можно показать, что отображение $l \to l_1$ (рис. 10, *г*) — контактное преобразование. Из очевидных равенств

$$y - y_1 = y'(x - x_1), \quad x_1 + y_1 y' = 0$$

найдем x_1, y_1, а затем y_1' и ρ.

Контактные преобразования общего вида. Обратимся к КП общего вида (3). Исключим из этих трех уравнений две величины y' и y_1'. При этом возможны два случая: 1) две зависимости между оставшимися четырьмя величинами x, y, x_1, y_1:

$$\Omega_1(x, y, x_1, y_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, x_1, y_1) = 0; \qquad (10)$$

2) одна зависимость между ними:

$$\Omega(x, y, x_1, y_1)=0. \tag{11}$$

В первом случае, решая (10) относительно x_1, y_1, получим равенства вида (1), которые привели нас к (2), т. е. будем иметь КП-продолжение точечных преобразований. Во втором случае из (11) получим

$$\Omega'_x dx+\Omega'_y dy+\Omega'_{x_1}dx_1+\Omega'_{y_1}dy_1=0$$

и, сопоставляя с (4),

$$\frac{\Omega'_x}{y'}=\frac{\Omega'_y}{-\rho}=\frac{\Omega'_{x1}}{y'_1}=\frac{\Omega'_{y_1}}{-1},$$

откуда, учитывая также (11), имеем

$$\Omega=0,\ \Omega'_x+\Omega'_y y'=0,\ \Omega'_{x_1}+\Omega'_{y_1}y'_1=0. \tag{12}$$

Решая эти уравнения относительно x_1, y_1, y'_1, получим равенства вида (3), причем (4) также будет выполняться. Условие разрешимости (12) записывается в виде

$$\Delta=\begin{vmatrix} \Omega''_{xx} & \Omega''_{xy_1} & \Omega'_x \\ \Omega''_{yx_1} & \Omega''_{x_1y_1} & \Omega'_y \\ -\Omega'_x & -\Omega'_y & 0 \end{vmatrix}\neq 0 \tag{13}$$

Сказанное выражает следующую теорему (Ли, 1872 г.). Пусть (11) — произвольная функция, для которой $\Delta\neq0$. Равенства (12) определяют КП, не являющиеся продолжением точечного преобразования. Второй случай, $\Delta\neq0$, таким образом, является общим в отличие от (1), (2) ($\Delta=0$): мы можем из равенств (11), (12) получить самые разнообразные КП. Здесь очень важно следующее обстоятельство.

Из (11) мы видим, что, фиксируя M, получаем на плоскости кривую γ, $\Omega(M, M_1)=0$ (и обратно, меняя местами M и M_1). Предположим теперь, что M меняется как функция некоторого параметра t, т. е. описывает линию C, тогда мы получим семейство линий γ_t. Пусть Г — огибающая этого семейства. Этим самым мы получили соответствие между линиями C и Г. То, что точка M опишет огибающую, видно непосредственно. Пусть, например, M зависит от параметра x, т. е. в (11) $y=y(x)$. Чтобы найти огибающую, дифференцируем (11) по параметру x: $\Omega'_x+\Omega'_y y'=0$. К этому следует присоединить (11). Но оба эти равенства, которым удовлетворяют x, y, уже содержатся в (12) (первое и третье равенства системы (12) означают, что в этих рассуждениях мы можем поменять местами M и M_1). При этом мы имеем «чистое касание»: особые точки исключаются, ибо оба равенства $\Omega'_x = \Omega'_y = 0$ означали бы, что $\Delta = 0$. Заодно мы имеем и важную физическую интерпретацию. Пусть A_1, A_2 — источники волн, тогда их огибающая — фронт волны. Если мы за исходную линию примем Γ, расположив на ней источники, то картина повторится. Мы пришли к математическому выражению принципа Гюйгенса.

Совсем простым оказывается следующее, также важное замечание. У нас все КП обратимы (мы снова получаем при этом КП), тождественное преобразование $x_1 = x$, $y_1 = y$, $y'_1 = y'$ — также КП, произведение $T_1 T_2$ двух КП есть также КП. Иными словами, совокупность КП образует группу. Здесь следует различать два случая: 1) если в равенствах (3) мы будем менять вид функций X, Y, P, тогда будем иметь бесконечную группу; 2) если, сохраняя вид этих функций, введем в них параметры

$$x_1 = X(x,\ y,\ y',\ a_1, \ldots, a_r),\ y_1 = \ldots,\ z_1 \ldots,$$

получим r-параметрическую группу КП. Теория таких групп аналогична конечным группам Ли, но имеет некоторые свои особенности.

Скобки Пуассона и преобразование уравнений. Простое сопоставление равенств (3) и (4), определяющих КП, приводит к хорошо известной из механики операции «скобки Пуассона», через которые можно выразить основные факты данной теории. Эта же операция играет существенную роль в теории Ли преобразования дифференциальных уравнений, простейшие факты которой здесь сейчас будут указаны.

Воспользуемся обозначением $y' = p$. Внося из (3) в (4) значения дифференциалов функций X, Y, P и сопоставляя в обеих частях коэффициенты при dx, dy, dp, получим

$$\begin{gathered} Y'_x - X'_x P + p\rho = 0, \quad Y'_y - X'_y P - \rho = 0, \\ Y'_p - X'_p P = 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Эта однородная относительно 1, P, ρ система уравнений имеет ненулевое решение, если равен нулю ее определитель, что означает равенство

$$X'_p(Y'_x - pY'_y) - Y'_p(X'_x + pX'_y) = 0, \tag{15}$$

левая часть которого сокращенно обозначается $[XY]$. Выражение $[XY]$ называется скобками Пуассона двух функций X и Y. Это — линейная операция по каждой функции X и Y, и кроме того, очевидно $[XY] = -[YX]$.

Из (14) немедленно получаются значения P и ρ, но мы не станем их выписывать. Сказанное приводит Ли к следующему результату (1873 г.): при выполнении условия (15) однозначно определяются функции P и ρ такие, что преобразование (3) — контактное (здесь еще используется независимость X и Y).

Аналогичные рассуждения приводят Ли к теореме (1873 г.).

Пусть X и Y — независимые функции. Равенства

$$[XY] = 0$$

выражают необходимое и достаточное условие того, что (3), (4) — КП с коэффициентом $\rho \neq 0$.

Если имеет место (15), то говорят, что X и Y находятся в инволюции. Лагранж обнаружил следующие два важных ее свойства:

1) при выполнении (15) выражение dY/dX не зависит от y'' (это обстоятельство фактически использовалось в приведенных результатах Ли); 2) если задано произвольное уравнение второго порядка

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{16}$$

то равенство $\varphi(x, y, y') = C$ является первым интегралом уравнения (16), если $d\varphi = 0$, как следствие соотношения (16); для того чтобы $\varphi_1 = C_1$, $\varphi_2 = C_2$ задавали два первых интеграла одного и того же уравнения (16), необходимо и достаточно, чтобы $[\varphi_1, \varphi_2] = 0$.

Пусть задано уравнение (16) и КП (3), (4). Мы хотим преобразовать (16) с помощью равенств (3). Для этого нужно к ним добавить зависимость между вторыми производными, y''_1 и y''. Из (3) имеем

$$y''_1 = \frac{P'_x + P'_y y' + P'_{y'} y''}{X'_x + X'_y y' + X'_{y'} y''} = Q(x, y, y', y''). \tag{17}$$

Назовем T', заданное (3), (17), продолжением преобразования (3). Можно показать, что совокупность всех T' — также группа, продолжение группы всех контактных преобразований. Применяя к (16) какое-либо преобразование T', мы приведем его к некоторому новому уравнению $F_1(x_1, y_1, y_1', y_1'')=0$, для которого в свою очередь справедлива следующая теорема Ли (1873 г.). Пусть заданы два произвольных уравнения,

$$1)\ F(x, y, y', y'')=0, \quad 2)\ F_1(x_1, y_1, y_1', y_1'')=0,$$

тогда существует преобразование T', переводящее первое во второе. В частности, существует преобразование, которое переводит первое уравнение в $y_1''=0$ (как образно говорят, знание группы всех T' позволяет вычитать теорию уравнений (16) из одного уравнения $y_1''=0$).

Этот результат Ли показывает, что совокупность уравнений второго порядка не имеет инварианта относительно группы всех T' (но существуют классы подобных уравнений, инвариантные относительно ряда подгрупп этих групп).

К сказанному примыкает следующая задача, решенная Ли: найти общий вид всех T', переводящих заданное уравнение (16) в себя. Явная формула, полученная по этому поводу Ли, содержит две произвольные функции — каждая от двух переменных. В качестве приложения этих результатов Ли рассмотрел ряд задач теории сетей линий кривизны и асимптотических линий на поверхности.

Все изложенное выше можно рассматривать как введение в теорию контактных преобразований. Особенно важны КП в трехмерных пространствах. Дадим их независимое компактное изложение.

Контактные преобразования в пространстве. Пусть в R^3 задана поверхность $z=f(x, y)$. Уравнение ее касательной плоскости П в точке (x, y, z) записывается в виде

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y). \tag{18}$$

На этом основании говорят, что пятерка чисел (x, y, z, p, q) определяет пространственный элемент, или двумерный элемент (площадку) в точке $M(x, y, z)$. Этим самым мы помимо точечных преобразований,

$$x_1=X(x, y, z), \quad y_1=Y(x, y, z), \quad z_1=Z(x, y, z), \tag{19}$$

можем рассматривать и преобразование элементов,

$$x_1=X(x, y, z, p, q), \quad y_1=Y(x, y, z, p, q),$$
$$z_1=Z(x, y, z, p, q),$$
$$p_1=P(x, y, z, p, q) \quad q_1=Q(x, y, z, p, q). \tag{20}$$

Оно, вообще говоря, не обеспечивает касания соответствующих друг другу образов (поверхностей, . . .). Но это касание имеет место при дополнительном условии: из $dz=pdx+qdy$ следует $dz_1=p_1dx_1+q_1dy_1$, которое можно также записать в виде

$$dz_1-p_1dx_1-q_1dy_1=\rho(x,\ y,\ z,\ p,\ q)(dz-pdx-qdy). \quad (21)$$

Преобразование элементов (20) при выполнении условия (21) называется контактным преобразованием в R^3.

Исключая из пяти равенств (20) четыре переменные p, q, P, Q, получим зависимости между x, y, z; x_1, y_1, z_1. При этом возможны следующие случаи.

1. Имеем три зависимости: $\Omega_i(x, y, z, x_1, y_1, z_1)=0$, $i=1, 2, 3$. Решая эти уравнения относительно x_1, y_1, z_1, получим равенства вида (19), т. е. точечные преобразования. Этот случай с точки зрения контактных преобразований неинтересен (ср. с. 115).

2. Имеем одну зависимость:

$$\Omega(x,\ y,\ z,\ x_1,\ y_1,\ z_1)=0. \quad (22)$$

Оказывается, задание этой зависимости полностью определяет КП. Действительно, поскольку равенство (21) должно быть следствием равенства $d\Omega=0$, мы можем сопоставить коэффициенты при дифференциалах dx, dy, . . ., dq в обоих этих уравнениях. Это дает

$$1)\ \Omega'_x+\Omega'_z p=0,\quad 2)\ \Omega'_y+\Omega'_z q=0,\quad 3)\ \Omega'_{x_1}+\Omega'_{z_1}p_1=0,$$
$$4)\ \Omega'_{y_1}+\Omega'_{z_1}q_1=0,\quad 5)\ \rho\Omega'_{z_1}+\Omega'_z=0.$$

Из (22), первого и второго равенств найдем x_1, y_1, z_1, из третьего и четвертого — p_1, q_1, а из пятого — ρ.

Преобразование Лежандра. Пусть

$$\Omega=xx_1+yy_1-z-z_1=0.$$

Приходим к преобразованию

$$x_1=p,\ y_1=q,\ z_1=px+qy-z,\ p_1=x,\ q_1=y,$$

которое, как заметил Шаль, можно рассматривать как поляритет относительно параболоида $z=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$.

Равенство (22) показывает, что каждой фиксированной точке M отвечает в переменных M_1 поверхность S (и наоборот). Если M описывает в R^3 поверхность Σ, то точка M_1

описывает поверхность S, являющуюся огибающей семейства поверхностей, которая задается равенствами (22), первым и вторым из пяти указанных выше. Иными словами, между поверхностями S и Σ существует соответствие, которое можно толковать как математическое выражение принципа Гюйгенса.

3. Пусть исключение p, q, P_1, Q_1 из (20) дает две зависимости:

$$\Omega_i(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad (i = 1, 2). \tag{23}$$

Они полностью определяют преобразование (20), (21). Действительно, равенство (21) должно теперь быть следствием двух равенств $d\Omega_1 = d\Omega_2 = 0$. Сопоставление дифференциалов при $dx, \ldots, dq$ здесь приводит, как можно показать, к равенству

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Omega'_{1,x} + p\Omega'_{1,z} & \Omega'_{2,x} + p\Omega'_{2,z} \\ \Omega'_{1,y} + q\Omega'_{1,z} & \Omega'_{2,y} + q\Omega'_{2,z} \end{vmatrix} = 0. \tag{24}$$

Из (23), (24) найдем x_1, y_1, z_1, а зная их, из (21) найдем p_1, q_1.

Преобразование Ампера. Пусть

$$\Omega_1 = Y - y = 0, \quad \Omega_2 = Z - z + Xx = 0.$$

Поскольку $\Delta = X - p$, мы непосредственно получаем

$$X = p, \quad Y = y, \quad Z = z - px, \tag{25}$$

а затем

$$P = -x, \quad Q = -q. \tag{26}$$

Преобразование (25), (26) встречалось еще у Эйлера, а затем Ампер успешно применил его к некоторым важным типам уравнений в частных производных.

Преобразование Ли. Пусть

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= X + iY + z + xZ = 0, \\ \Omega_2 &= x(X - iY) + y - Z = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Это прямолинейно-сферическое отображение, обладающее рядом замечательных свойств, о котором мы уже не раз говорили. Равенства (27) позволяют записать отвечающее им контактное преобразование (чего мы здесь не будем делать).

Контактные преобразования в R^n. Их определение теперь не требует пояснений. Обозначим

$$x=(x_1, \ldots, x_n),\ p=(p_1, \ldots, p_n),\ \frac{\partial}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

$$dx=(dx_1, \ldots, dx_n),\ ab=a_ib_i$$

и рассмотрим преобразование элементов

$$x'=X(x,\ z,\ p),\ z'=Z(x,\ z,\ p),\ p'=P(x,\ z,\ p). \quad (28)$$

Оно называется контактным, если

$$dz'-p'dx'=\rho(x,\ z,\ p)(dz-pdx). \quad (29)$$

Ядром общей теории КП в R^n являются нижеследующие три теоремы, которые формулируются через угловые скобки $[\ldots]$. Обозначим

$$\frac{d}{dx_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial}{\partial z},$$

$$[F\Phi]=\frac{dF}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial p}-\frac{d\Phi}{dx}\frac{\partial F}{\partial p}.$$

1. Пусть преобразование (28) — контактное, тогда функции X, Z, P удовлетворяют равенствам

$$\begin{gathered}[X_iX_k]=[ZX_i]=[X_iP_k]=[P_iP_k]=0,\\ [X_iP_i]=-\rho,\quad [ZP_i]=-\rho P_i.\end{gathered} \quad (30)$$

Сформулировать эту теорему было нетрудно, ибо в R^2 она элементарна (см. с. 123), и было ясно, что теорема переносится на высшие размерности. Но доказательство оказалось технически сложным. Оно было получено Ли в теории задачи Пфаффа, затем вскоре Майером — основанное на теории характеристик уравнений в частных производных, а в 1882 г. — Дарбу, у которого оно носило более геометрический характер. Примерно через 20 лет Гурса опубликовал новое доказательство этой теоремы, в его книге [II, 61] занимающее семь страниц.

Значительно проще доказываются две обратные теоремы.

2. Пусть заданы функции X, Z, P тех же переменных x, z, p. Если выполняются условия (29), то имеет место (30).

3. Пусть задано $n+1$ функций X, Z, от переменных x, z, p каждая, и пусть выполняются условия

$$[X_iX_k]=0, \quad [ZX_i]=0.$$

Тогда можно однозначно определить P, так что будет иметь место (29),

Канонические преобразования в механике и их связь с контактными преобразованиями. Если функции F и Φ не зависят от z, $F=F(x, p)$, $\Phi=\Phi(x, p)$, то угловые скобки $[\ldots]$ обращаются в скобки Пуассона:

$$(F, \Phi)=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

КП-преобразования, в которых X и P не зависят от z, Ли называл x, p-преобразованиями. Этот случай особенно важен ввиду его связей с каноническими преобразованиями механики.

Пусть задана динамическая гамильтонова система с гамильтонианом H:

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{31}$$

Преобразование

$$q'=Q(q, p), \quad p'=P(q, p) \tag{32}$$

называется каноническим, если при этом система (31) переходит снова в гамильтонову систему:

$$\dot{q}'=\frac{\partial H'}{\partial p'}, \quad \dot{p}'=-\frac{\partial H'}{\partial q'}. \tag{33}$$

Канонические преобразования очень важны (также и для квантовой механики), ибо преобразованный гамильтониан может оказаться проще исходного, точнее система (33) может оказаться более удобной, нежели исходная. Заслуга введения канонических преобразований принадлежит Якоби, который, в частности, указал важные их применения в теории возмущений. Эти результаты Якоби существенно дополнил Бур (1856 г.).

Условие, при котором преобразование становится каноническим, выражается равенством

$$p'dq'=pdq+d\psi \tag{34}$$

(допускающим, кстати сказать, простое истолкование в теории термодинамических циклов). Нетрудно убедиться, что каноническое преобразование сводится к контактному преобразованию. Действительно, полагая

$$z' = a(z + \psi), \quad a = \text{const} \neq 0, \quad q' = \frac{x}{a}, \quad q = x$$

и учитывая (34), получим

$$dz' - p'dx' = adz + ad\psi - a(pdx + d\psi) = a(dz - pdx)$$

— КП с коэффициентом $a \neq 0$.

Можно показать, что и контактные преобразования в свою очередь сводятся к каноническим. Неудивительно поэтому, что некоторые преобразования, используемые в механике, являются, по существу, контактными, как, например, особенно важное преобразование Лежандра (мы говорили о нем выше), с помощью которого осуществляется переход от лагранжевой механики к гамильтоновой (см., например, [II, 21]).

Группа K, ее продолжение и преобразование уравнений. Мы уже говорили, что совокупность всех КП на плоскости образует группу. Точно так же обстоит дело и в R^n. Обозначим через K группу всех КП в пространстве R^3 и укажем ее применения. Здесь прежде всего следует назвать такую теорему Ли (1877).

Пусть заданы два произвольных уравнения первого порядка:

$$1)\ F(x,\ y,\ z,\ p,\ q) = 0,$$
$$2)\ F_1(x_1,\ y_1,\ z_1,\ p_1,\ q_1) = 0.$$

Тогда существует преобразование $T \in K$ такое, что первое переводит во второе. В частности, найдется преобразование T_0, переводящее первое в любое уравнение $\varphi(x_1, y_1, z_1) = 0$, не содержащее производных, например $Z_1 = 0$. Мы знаем (см. с. 76), как, следуя Ли, понимать подобные уравнения с точки зрения дифференциальных уравнений. Заметим еще, что приведенная теорема показывает отсутствие инварианта у совокупности всех уравнений первого порядка относительно группы K.

Обратимся теперь к уравнениям второго порядка, тем, которые связаны с особенно интересными и важными прикладными и геометрическими задачами. В теории преобразования этих уравнений Ли и другими математиками были получены многочисленные результаты. Ниже коснемся одного из них, допускающего прозрачное геометрическое толкование.

Прежде всего нам нужно продолжить группу K, распространив ее на вторые производные. Итак, пусть задано преобразование элементов в R^3:

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y(\ldots), \quad z_1 = Z(\ldots)$$
$$p_{(1)} = P(\ldots), \quad q_1 = Q(\ldots).$$

Далее мы можем записать

$$dp = r dx + s dy, \quad dq = s dx + t dy \quad dp_1 = r_1 dx_1 + s_1 dy_1,$$
$$dq_1 = s_1 dx_1 + t_1 dy_1, \tag{35}$$

где, как и всюду, используются обозначения Монжа:

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ \ldots$$

Учитывая равенства (35), можем к (20) присоединить преобразования элементов второго порядка:

$$r_1 = R(x, y, z, p, q, r, s, t), \quad s_1 = S(\ldots), \ t_1 = T(\ldots). \tag{36}$$

Применение сказанного к преобразованию Лежандра L (см. с. 125) приводит к следующим результатам.

	x	y	z	p	q
L':	$-p_1$	$-q_1$	$z_1 - p_1x_1 - q_1y_1$	x_1	y_1

	$z - px - qy$	r	s	t	$s^2 - rt$
L':	z_1	$t_1\delta_1$	$-s_1\delta_1$	$r_1\delta_1$	δ_1

Здесь

$$\delta_1 = (s_1^2 - r_1 t_1)^{-1}.$$

Продолженное преобразование Лежандра L' оказывается полезным в многочисленных конкретных задачах. Приведем две из них.

1. Пусть задано дифференциальное уравнение минимальной поверхности:

$$(1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs = 0. \tag{37}$$

Применяя к нему преобразование L', получим

$$(1+x_1^2)\,r_1+(1+y_1^2)\,t_1+2x_1y_1s_1=0. \qquad (38)$$

Переход от (37) к (38) выражает преобразование дифференциального уравнения минимальной поверхности от точечных координат к тангенциальным, когда она рассматривается как огибающая своего семейства касательных плоскостей. Уравнение (38) имеет то преимущество, что оно линейно.

2. В многочисленных геометрических (и не только геометрических) вопросах встречается уравнение Монжа—Ампера:

$$Ar+Bs+Ct+D\,(rt-s^2)+E=0, \qquad (39)$$

где $A, \ldots, E$ зависят от x, y, z, p, q. Из вышеприведенных в табличной форме данных следует, что, будучи преобразованным, уравнение (39) примет вид

$$A_1r_1+B_1s_1+C_1t_1+D_1\,(r_1t_1-s_1^2)+E_1=0,$$

где $A_1, \ldots, E_1$ зависят от x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, т. е. мы снова получаем уравнение того же типа.

Канонические уравнения математической физики, $r+t=\varphi\,(x,\ y)$ — эллиптическое, $t-r=\varphi\,(x,\ y)$ — гиперболическое и $p=t+\varphi\,(x,\ y)$ — параболическое, очень частные случаи уравнения Монжа—Ампера. В 90-х годах прошлого века Дарбу и Гурса подробно исследовали характеристики уравнения (39) и ряд других связанных с ним вопросов. Некоторые результаты в том же направлении получил и Ли. Но сейчас мы приведем другой результат, связанный с уравнением (39), основанный на продолжении группы K.

Группа K' и уравнение Монжа—Ампера. Продолжим группу K всех контактных преобразований, присоединив к ней совокупность всех преобразований элементов второго порядка, r, s, t, т. е. равенства (36). Можно показать, что совокупность полученных таким образом преобразований K' также образует группу (немного ниже это станет понятнее). Рассмотрим теперь произвольное уравнение второго порядка:

$$F\,(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t)=0. \qquad (40)$$

Преобразования из K' переводят его в уравнение

$$F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1) = 0$$

того же порядка.

В уже неоднократно цитированном мемуаре Ли 1872 г. [I, 17] содержится теорема: класс уравнений Монжа—Ампера инвариантен относительно группы K'. Это, конечно, очень широкое обобщение приведенного выше результата Ампера (см. с. 126). В неоконченной книге «Три главы из второго тома геометрии контактных преобразований» Ли указывает, что этот же результат в менее общей форме был получен Импенецким [I, 125, с. 25]. Работа Имшенецкого по уравнениям второго порядка вышла на русском языке в 1868 г. и стала известна Ли по ее французскому переводу.[3]

Мы имеем все основания называть этот результат теоремой Имшенецкого—Ли. Минуя громоздкие промежуточные вычисления, покажем, откуда он получается, а заодно поймем структуру группы K' и возможность обобщения указанной теоремы.

Обозначим

$$\begin{aligned} &r = \xi_1, \quad s = \xi_2, \quad t = \xi_3, \quad rt - s^2 = \xi_4, \\ &r_1 = \eta_1, \quad s_1 = \eta_2, \quad t_1 = \eta_3, \quad r_1 t_1 - s_1^2 = \eta_4. \end{aligned} \tag{41}$$

Тогда формулы преобразования вторых производных примут вид

$$\eta_i = \frac{A_i\xi_1 + B_i\xi_2 + C_i\xi_3 + D_i\xi_4 + E_i}{A\xi_1 + B\xi_2 + C\xi_3 + D\xi_4 + E}, \quad i = 1, \ldots, 4, \tag{42}$$

где все коэффициенты A_i, A зависят от x, y, z, p, q, а уравнение Монжа—Ампера —

$$U_1\xi_1 + U_2\xi_2 + U_3\xi_3 + U_4\xi_4 + U_5 = 0. \tag{43}$$

Равенства (42) можно понимать как дробно-линейное (т. е. проективное) преобразование в четырехмерном пространстве.

Иными словами, в основе теоремы Имшенецкого—Ли лежит тот факт, что при проективных преобразованиях

---

[3] Imchénetsky V. Étude sur les méthodes d'integration des equations aux derivees partielles du second ordre. Traduit de russe par J. Hoüel. Greiswald, 1872; Имшенецкий В. Г. Методы интегрирования уравнений с частными производными второго порядка. — Казань, 1868.

плоскость переходит в плоскость. Мы видим также, что расширение K' группы K представляет собой присоединение к K проективной группы в R^4. Добавим, что, как показывают обозначения (41), мы имеем здесь не все преобразования R^4, а те, которые переводят параболоид $\xi_4 = \xi_1 \xi_3 - \xi_2^2$ в себя. Мы получим одно из очевидных обобщений теоремы, если заменим плоскость (43), например, поверхностью второго порядка в R^4.

В отличие от уравнений первого порядка уравнения (40) вообще не сводятся к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. В связи с этим особую роль приобретает разыскание первых (=промежуточных) интегралов уравнения (40). Говорят, что равенство $\varphi(x, y, z, p, q)=C$ задает промежуточный интеграл уравнения (40), если $d\varphi=0$ как следствие (40). Исследование условий, при которых могут быть найдены первые интегралы уравнения (40), связано с преобразованиями этих уравнений, использованием скобок [. . .] (в частности скобок Пуассона) и другими методами. Ряд теорем о первых интегралах был получен Дарбу, Ли, а еще раньше — Имшенецким.

Василий Имшенецкий родился в Ижевске. В 1853 г. он закончил Казанский университет, где слушал лекции тогдашнего его профессора и ректора Н. И. Лобачевского. Уравнениями в частных производных Имшенецкий начал заниматься еще в Казани, а затем в Германии, где изучал работы Якоби и встречался с некоторыми из его учеников. В 1862 г. он едет в Париж и слушает там лекции Бертрана, Ляме, Серре по анализу, математической физике и дифференциальным уравнениям. По возвращении в Россию Имшенецкий профессорствовал в Харькове, а затем в Петербурге. Он удостоился избрания в Петербургскую Академию наук, был одним из основателей Петербургского математического общества и до самой своей кончины (1892 г.) его первым президентом.

Теорема Беклунда—Ли. В качестве обобщения, сказанного в начале этой главы, попытаемся определить контактное преобразование второго порядка, исходя из равенств вида

$$x_1 = X(x, y, y', y''), \tag{I}$$

$$y_1 = Y(\;.\;.\;.\;.\;.\;), \tag{II}$$

$$y_1' = P(\;.\;.\;.\;.\;.\;), \tag{III}$$

$$y_1'' = Q(\;.\;.\;.\;.\;.\;), \tag{IV}$$

которые должны сохранять инвариантными уравнения $dy - y'dx = 0$, $dy' - y''dx = 0$, или, что то же,

$$dy_1 - y_1'dx_1 = \alpha(dy - y'dx) + \beta(dy' - y''dx),$$
$$dy_1' - y_1''dx_1 = \gamma(dy - y'dx) + \delta(dy' - y''dx),$$

где α, β, γ, δ — функции от x, y, y', y'' и $\begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix} \neq 0$.

Оказывается, это возможно лишь при выполнении следующих условий: правые части равенств (I), (II), (III) не зависят от y'', а равенство (IV) получается дифференцированием (III). Таким образом, контактные преобразования второго порядка уже содержатся в определенном выше (с. 117) контактном преобразовании. Этот результат первоначально получил Беклунд, затем Ли показал, что он является следствием теории уравнения Пфаффа.[4]

Проблема Пфаффа, эмоции, инварианты

Сумма

$$\omega = A_i dx_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где A_i — функции от $x_1, \ldots, x_n$, называется дифференциальной формой первого порядка, или пфаффовым выражением, а равенство $\omega = 0$ — уравнением Пфаффа. Ли столкнулся с формами ω в своих ранних работах по теории комплексов. Напомним, что определение контактного преобразования

$$x' = X(x, y, z), \quad z' = Z(x, z, p), \quad p' = P(x, z, p) \tag{I}$$

включает требование

$$dz' - p_i'dx_i' = \rho(x, z, p)(dz - p_i dx_i), \tag{II}$$

представляющее собой соответствие между двумя пфаффовыми выражениями. Последние играли очень важную роль в творчестве Ли.

В начале минувшего века Пфафф (учитель Гаусса!) показал, что уравнение $\omega = 0$ в определенном смысле эквивалентно уравнению в частных производных первого порядка. Установившийся впоследствии термин «проблема Пфаффа» охватывает вопрос о классификации форм ω

---

[4] Bäcklund A. V. Üeber Flächentransformationen. — Math. Ann., 1876, IX, S. 297—320.

относительно всевозможных преобразований переменных x (точнее, относительно диффеоморфизмов) и связанную с этим теорию уравнения $\omega=0$, а также теорию систем уравнений $\omega_k=0$, $k=1, \ldots, m < n$; ω_k — формы вида (1).

В последней четверти минувшего века важные результаты по проблеме Пфаффа были почти одновременно получены Дарбу, Фробениусом, Вебером, Майером и Ли. Но еще раньше серьезный шаг в изучении той же проблемы сделал Грассман. Ли интересовался его работами и неоднократно их цитировал. Не случайно такой близкий Ли человек, как Энгель, написал подробную биографию Грассмана.

Герман Грассман был родом из старинного протестантского семейного клана, в традициях которого было увлечение наукой и искусством. Он пробовал свои силы в различных областях теоретического естествознания, включая физику, занимался алгеброй, анализом, геометрией. Из-за этого многие склонны были считать Грассмана дилетантом. Но его математические достижения серьезны: основание теории гиперкомплексных чисел одновременно с Гамильтоном (последний в своих кватернионах пошел дальше, но подход Грассмана был более общим), геометрия, в том числе дифференциальная, многомерных пространств («грассманово учение о протяженности»; именно здесь у него возникли формы ω). Грассман был близок Ли именно как аналитик с ярко выраженным геометрическим мышлением. В 90-х годах Шефферс обратил внимание Ли на связи непрерывных групп с алгебраическими идеями Грассмана.

Не видно, чтобы Ли в проблеме Пфаффа опирался на конкретные результаты Грассмана; они скорее оказали стимулирующее воздействие. Он взялся за эту тему главным образом под влиянием работ Фробениуса, на которые обратил его внимание Майер.

Зимой 1877 г. Майер сообщил Ли в одном из писем о работе Фробениуса по проблеме Пфаффа, которую он оценил очень высоко. В ответном письме (март 1877 г.) Ли пишет: «Я также собираюсь рассмотреть эту проблему и располагаю для этого всеми необходимыми средствами. Работа Фробениуса в самом деле так хороша? Я еще не имел возможности с ней ознакомиться. . . То обстоятельство, что Фробениус нас с вами не цитирует, примечательно. Я весьма рад, что исследование Фробениуса побудило и Вас заняться пфаффовой проблемой. . .» [I, 130, т. 3, 712].

Ли — Майеру (31 III 1877 г.): «Нынешней весной я ничего не напечатал, кроме статьи по проблеме Пфаффа. Она мне нравится, и я посылаю ее Вам» [там же, 713].

Ли был весьма обнадежен тем, как у него развиваются результаты по этой проблеме, он решил включить их в намечаемую тогда им книгу по уравнениям в частных производных.

Ли — Майеру (27 VII 1877 г.): «Из-за рождения дочери я в последнее время мало занимался, но не переставал думать о книге по уравнениям в частных производных. Надеюсь на вашу и Клейна помощь в ее редактировании» (следует примерное оглавление книги. — *Е. П.*) [там же, 690].

В том же 1877 г. Ли в одном из писем Майеру говорит, что из-за ушиба плеча он некоторое время не мог писать. Однако в остальном это нисколько не сказалось на его работе. «Более того, — продолжает Ли, — любопытно, что многие из моих лучших результатов я получил именно тогда, когда у меня или у моих близких что-либо было неладно. Весной 1872 г. я перенес травму глаза и тогда нашел мой метод интегрирования УЧППП. В январе 1873 г. умер мой отец, и я тогда же заложил основы моей теории непрерывных групп. Весной 1876 г., в те дни, когда произошла беда с близким родственником моей жены, я нашел новый метод интегрирования. В январе 1877 г. у меня случилась травма руки, так что я было совсем не мог работать, и в тот же вечер мне пришла в голову счастливая идея относительно минимальных поверхностей. Точно так же необычно и то, что основные идеи известной Вам моей работы о комплексах явились мне буквально во сне, когда я находился в Париже. Пребывая в крепости Фонтенбло в 1871 г. я нашел возможность развить их далее» [там же, 691].

Он тогда еще не знал, что этот перечень сможет продолжить работами, созданными при куда более трагических обстоятельствах: в 90-е годы многие из них будут написаны в психиатрической лечебнице Ганновера.

Об озарениях творческих натур в экстремальных ситуациях психологами было написано немало. Мы же ограничимся здесь словами Гете:

Meine Dichterung war sehr gering
So lang ich dem Guten entgegenging
Dagegen brannte sie lichterloh,
Wann ich vor drohendem Uebel floh

(Посредственной была моя поэзия, когда я устремлялся навстречу счастью, но она загоралась ярким огнем, когда я шел от беды).

А теперь — по существу проблемы Пфаффа.

Пусть (1) — снова форма ω. Если существует такая функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, что $\omega = d\varphi$ — полный дифференциал, то $\varphi = C$ — интегральная поверхность размерности $n-1$ уравнения $\omega = 0$. В общем случае интегральные поверхности этого уравнения имеют меньшую размерность. Их обычно ищут в виде

$$x_i = \psi_i(t_1, \ldots, t_\nu),\ i = 1, \ldots, n.$$

Каков наиболее общий вид функций ψ_i, при которых выполняется условие $\omega = 0$? Как найти эти функции (т. е. решение уравнения Пфаффа)? Такие же вопросы ставятся для системы уравнений $\omega_k = 0$.

Важную роль при этом играет вопрос о классификации форм ω. Соответствующий наиболее законченный результат принадлежит Фробениусу (1877 г.). Он заключается в следующем. Зададим снова форму (1) и обозначим

$$a_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} - \frac{\partial A_j}{\partial x_j}. \tag{2}$$

Запишем матрицу $\mathbf{A} = \| a_{ij} \|$ и еще матрицу

$$\mathbf{B} = \left\| \begin{array}{ccc|c} & & & A_1 \\ & \mathbf{A} & & \vdots \\ & & & A_n \\ \hline -A_1, & \ldots, & -A_n & 0 \end{array} \right\| \tag{3}$$

Пусть ранг $\mathbf{A}$ равен $2r$. Тогда ранг $\mathbf{B}$ равен $2r$ либо $2r+2$. Назовем характером формы ω среднее арифметическое χ этих величин. Имеем либо $\chi = 2r$, либо $\chi = 2r+1$. В первом случае ω подходящим преобразованием $x_i = u_i(z_1, \ldots, z_n)$ можно привести к виду

$$\Omega = z_{2r+1} dz_1 + \ldots + z_{2r} dz_r, \tag{4}$$

во втором — к виду

$$\tilde{\Omega} = \Omega + dz_0. \tag{5}$$

(При $\chi = 1$ $\tilde{\Omega}$ — полный дифференциал dz_0, при $\chi = 2$ это же имеет место для $\Omega = z_2 dz_1$). «Канонический вид» формы (4) позволяет сразу найти общее решение уравнения Пфаффа $\Omega=0$: $f(z_1, \ldots, z_p)=C$, где f — произвольная функция. (Записав равенства $z_{p+1}=\lambda f'_{z_1}, \ldots, z_{2p}=\lambda f'_{z_{2p}}, z_1=z_1, \ldots, z_p=z_p$, мы видим, что при любом λ равенство $\Omega=0$ выполняется). Размерность интегрального многообразия $n-p$. Случай (5) рассматривается точно так же.

Фробениус ввел оказавшееся очень полезным выражение $\omega(d, \delta)=a_{ij}dx_i dx_j$ — «билинейный ковариант». Здесь a_{ij} заданы в (2), а d и δ следует понимать как операторы: при любом задании x как функций двух переменных (u, v) d означает дифференцирование по одной из них $\left(\frac{\partial}{\partial u}du\right)$, а δ — по другой $\left(\frac{\partial}{\partial v}dv\right)$.

Ковариант Фробениуса сыграл очень важную роль в становлении современной теории полилинейных косых (иначе — внешних) дифференциальных форм, которая берет начало в работах Пуанкаре, а позднее в руках Э. Картана превратилась в мощный аппарат аналитических и геометрических исследований. Впечатление, которое произвели на Ли результаты Фробениуса, было настолько сильным, что в одном из писем Майеру он признается: «Мемуар Фробениуса по проблеме Пфаффа буквально лишил меня покоя» («Auf das Pfaffsche Problem habe ich die Lust verloren durch Frobenius Auftreten»). Тем не менее Ли продолжал придерживаться своих методов и отказался, в частности, от использования ковариантa Фробениуса $\omega(a, \delta)$. По мнению Фрейденталя [II, 18], Ли не применял его, поскольку не сам ввел это понятие. . .

О силе метода внешних форм говорит, в частности, такой пример. Пусть задано контактное преобразование с коэффициентом ρ (см. с. 134, уравнения I и II). Чему равен якобиан этого преобразования? Ответ, полученный Ли, гласит: ρ^n. Доказательство (оно воспроизводится у Каратеодори [II, 56, с. 109]) занимает почти полторы страницы. Тот же факт с помощью косых форм доказывается в несколько строк.

Мы видели, что в теории линейных форм ω исключительную роль играют матрицы A и B (см. равенства 2 и 3). Ли также пришел к этим матрицам, но они возникли у него иначе, нежели у других авторов.

1. Пусть задана форма (1). Будем искать оператор $X=\xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ так, чтобы

$$X\omega = d\theta, \ \ \theta = \theta(x_1, \ldots, x_n).$$

Простые преобразования приводят к равенству

$$a_{ki}\xi_i dx_k = d(\theta - A_k \xi_k) = dW,$$

где матрица a_{ki} — см. (2), $A_k = a_{ki}\xi_i$, а W при произвольном θ также произвольно. Предположение $\det\|\mathbf{A}\| \neq 0$ дает

$$\xi = \mathbf{A}^{-1} \operatorname{grad} W.$$

2. Условие

$$X\omega = 0$$

влечет за собой равенство

$$\xi = -\mathbf{A}^{-1} \operatorname{grad} H,$$

где H — произвольное решение уравнения

$$A_i \alpha_{ik} \frac{\partial H}{\partial x_k} + H = 0,$$

в котором α_{ik} — элементы матрицы $\mathbf{A}^{-1}$.

3. Требование

$$X\omega + \rho\omega = 0, \ \ \rho = \rho(x)$$

при добавлении условия

$$A_i \xi_i = 0$$

сводит нахождение ξ к рассмотрению матрицы Фробениуса **B** (см. с. 137, уравнение 3). Задачи 1—3 допускают простые геометрические толкования. Более подробное их рассмотрение позволяет сблизить точки зрения Фробениуса и Ли.

Мы вынуждены этим ограничиться. Результаты Ли по проблеме Пфаффа можно найти в четвертом томе его Собрания сочинений и в книге Энгеля-Фабера [II, 60].

Примерно одновременно с мемуаром Фробениуса, так взволновавшим Ли, появилась работа французского математика Альфана, которая также чувствительно задела Ли, причем по-иному, ибо в данном случае у него были претензии приоритетного характера, но, надо сказать, лишь частично обоснованные. Работа Альфана, которая здесь имеется в виду, была опубликована в 1878 г. В ней было дано построение теории дифференциальных инвариантов многообразий, в первую очередь плоских кривых (более сложные случаи были лишь намечены). Эти исследования, получив в свое время высокую оценку геометров, положили начало проективной и афинной дифференциальной геометрии кривых [II, 32]. Кроме того, Альфан со своим соотечественником Лагерром (очень одаренным и разносторонним математиком) получили ценные результаты по инвариантам дифференциальных уравнений. Оба они, в частности, исследовали инвариантные свойства линейного однородного уравнения n-го порядка относительно преобразований аргумента $\bar{x}=\xi(x)$ и функции $\bar{y}=yu(x)$. Эти преобразования ввиду произвольности выбора ξ и u приводят к бесконечным непрерывным группам.[1]

Вслед за этим Пикар провел содержательное исследование аналогий того же уравнения с теоремой Лагранжа—Абеля—Галуа алгебраических уравнений, причем его построения были тесно связаны с группами преобразований Ли. Это было в 1883 г., и молодой тогда Пикар явился первым исследователем, подключившимся к теории Ли. К тому времени Ли уже вернулся к своим группам и добился в них новых замечательных успехов: доказал теоремы, лежащие в основе всей теории («три основные теоремы Ли», как их впоследствии стали называть), установил важные свойства структуры групп. Он добился также новых успехов в исследовании групповых свойств уравнений и дифференциальных инвариантов.

Пусть задано уравнение Рикатти $y'+Py+Qy^2=R$. Как известно, двойное отношение любых четырех его интегралов, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, постоянно:

$$\frac{\omega_1-\omega_3}{\omega_2-\omega_3}:\frac{\omega_1-\omega_4}{\omega_2-\omega_4}=\mathrm{const}.$$

Это означает, что любой интеграл может быть получен из другого путем проективного преобразования прямой

$$\omega=\frac{A\omega_0+B}{C\omega_0+D}.$$

Ли дал широкое обобщение этого факта, рассмотрев систему двух дифференциальных уравнений с квадратич-

[1] Можно показать, что это наиболее общие точечные преобразования, сохраняющие вид линейного однородного дифференциального уравнения любого порядка («Теорема Ли—Штеккеля»; подробнее см. в кн.: Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1953, т. I, с. 79—89).

ными нелинейностями, которую он назвал системой Рикатти; показал, что ее интегралы инвариантны относительно группы проективных преобразований на плоскости [I, 128, с. 778]. В той же работе проведено интересное исследование инвариантных свойств мнимых пространственных кривых относительно группы движений.

Известно, что вещественная кривая в пространстве определена с точностью до движения заданием своей кривизны и кручения (инварианты 2- и 3-го порядков, соответственно). Это ясно также и из физических соображений. Для мнимых кривых это вообще не так. Пусть, например, задана изотропная кривая $(y(x), z(x))$, $1+y'^2+z'^2=0$. Каковы ее дифференциальные инварианты относительно группы движений? Ли полностью решил этот вопрос: оказалось, что инвариантов два и они имеют порядки 5 и 6 [I, 128, с. 690—693].

Со всем этим багажом, как пишет Нетер [II, 13], Ли в 1882 г. отправился через Лейпциг и Швейцарию в Париж, где 2 ноября выступил с докладом на заседании математической секции Академии наук. Доклад был в основном посвящен некоторым его работам по уравнениям в частных производных, но затронуты были также различные вопросы, связанные с дифференциальными инвариантами. В развернувшейся оживленной дискуссии Альфан (он, кстати сказать, председательствовал на этом заседании) защищал свой подход к теории дифференциальных инвариантов, отстаивая его независимость от общей теории Ли, хотя и не отрицая связи с ней. Возражая, Ли довольно безапелляционно подчеркивал значительно бо́льшую общность своих результатов и эффективность своих методов. В целом, однако, реакция французских коллег была весьма благожелательной, и, вообще, отношения у них с Ли всегда складывались для него наилучшим образом. Результаты Лагерра и Альфана он, однако, оценил не сразу, а позднее, после опубликования в 1883 г. новой работы Альфана, удостоенной Гран При Парижской Академии. Через десять лет в предисловии к III тому трактата по группам Ли отдал должное этим двум геометрам. К сожалению, их обоих тогда уже не было в живых.

Подарок судьбы

Сорокалетие Ли совпало с рождественскими праздниками. Он встретил Сочельник у себя дома, среди родных и приятелей. «Доброго тебе здоровья, Софус, за твои новые успехи», — сказал, поднимая бокал, его любимый друг Густав Шторм. У Ли были все основания считать себя счастливым. Здоровье его и домочадцев было хорошим, он был переполнен новыми идеями и замыслами, неуклонно приходило европейское признание его творчества. Правда, его профессорский оклад был не таким, каким хотелось бы, и он жаловался Клейну и Майеру, что заграничные поездки связаны для него с почти непосильными расходами. К тому же приходилось помогать коекому из родственников и выделять часть своих средств для субсидирования и распространения основанного им и Сарсом норвежского журнала «Аркив фор математик». Но в целом материальное положение Ли было вполне сносным, и его куда больше огорчало другое — полное отсутствие на родине коллег и сотрудников, способных принять участие в разработке его теорий и помочь в написании книг. У него давно зрели замыслы относительно книг по уравнениям в частных производных, по его геометрическим работам, но именно книги по непрерывным группам он считал для себя делом первостепенной важности. Однако приняться за такую огромную работу для Ли означало бы выйти из состояния творческого горения, в котором его постоянно поддерживали все новые и новые проблемы. В письмах Ли того времени часто сквозила жалоба на его научное одиночество в Христиании, на отсутствие учеников и ассистентов. И тут судьба преподнесла ему подарок: по рекомендации Клейна и Майера для работы у Ли к нему в сентябре 1884 г. приехал из Лейпцига 23-летний математик Энгель. В этом человеке сочеталось множество качеств, которые сделали его для Ли идеальным сотрудником: творческие способности и умение очень быстро и ясно усваивать преподносимые ему идеи. огромная работоспособность, граничащая с неутомимостью, прекрасная организованность и, наконец, покладистый характер, без претензий на собственное «я». Несмотря на молодость, Энгель уже тогда обладал обширными познаниями в разных областях анализа, хорошо владел пером. В книге о Ли он заслуживает самого большого места.

Фридрих Энгель был не только сотрудником Ли, но его самым горячим поклонником и близким другом. Каждая из тысяч страниц их совместных книг прошла через его руки, была им переписана и тщательно отредактирована. В предисловии к последнему тому трактата по непрерывным группам [I, 126] Ли назвал оказанную ему Энгелем помощь огромной и неоценимой, а его имя — в числе тех, кому посвятил свой труд. В годы тяжелой болезни Ли, от которой он так и не оправился (она началась через пять лет после их знакомства), Энгель был для своего руководителя самой большой отрадой, надеждой и опорой. Главная заслуга в организации посмертного издания сочинений Ли принадлежит Энгелю, а проделанная им при их редактировании работа вполне сродни подвижничеству. Здесь уже не то что каждая страница — каждая строка, каждый символ — все было подвергнуто самому внимательному рассмотрению и отражено в примечаниях, содержащих огромный дополнительный материал. И все это тем более знаменательно, что Энгель был за пределами математики человеком гораздо более широкого круга интересов, нежели его кумир.

Энгель родился в 1861 г. в Хемнице (близ Лугау) в интеллигентной семье. Родители его первоначально предполагали, что сын станет музыкантом, но он рано почувствовал сильное влечение к математике. После окончания гимназии он с 1879 г. слушает в Берлине лекции Шварца и Майера, а затем завершает свое математическое образование в Лейпциге, где на него обратил внимание Клейн. После ряда успешных выступлений Энгеля на семинарах Майера и Клейна оба они сочли его достойным чести быть откомандированным к Ли. Энгель пробыл в Христиании два года, по возвращении в Германию в 1886 г. получает доцентуру в университете Грейсфельда, а затем там же с 1894 г. становится профессором — преемником своего друга Эдуарда Штуди. С 1904 по 1913 г. он профессорствует в Киле, а все последующие годы до своей кончины (1941 г.) проживает в Гиссене, где после выхода на пенсию числится почетным профессором университета. Список научных трудов Энгеля насчитывает 92 наименования, среди которых большое место занимают работы, связанные с лиевскими теориями. Но встречаются также статьи по аналитической механике, теории функций и истории математики. Энгель был очень дружен с другими учениками Ли, особенно с Фр. Шуром и Штуди, памяти которых он посвятил большие статьи. Представляет также большой интерес его опубликованная переписка с Штуди.

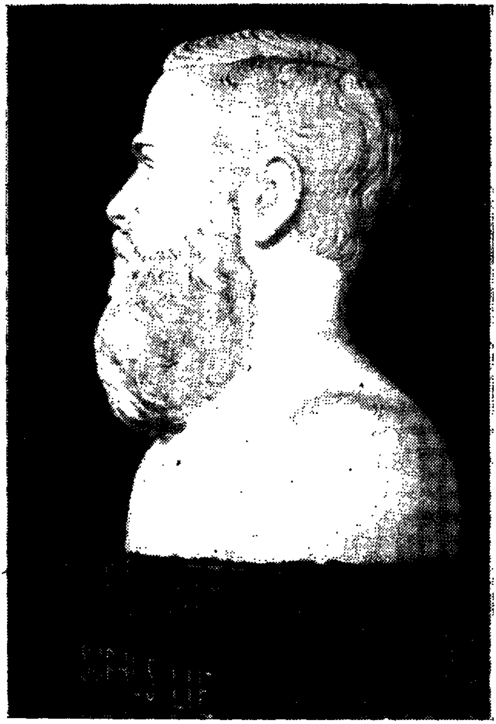
В конце 90-х годов Энгель совместно с Паулем Штекелем издал немецкий перевод трудов Лобачевского, снабдив его вступительной статьей и обстоятельными примечаниями. Он был также редактором и издателем трудов Грассмана. Энгель был бескорыстным и уживчивым человеком, вопросы приоритета его мало интересовали. Хотя на титульном листе трех книг Ли стоит также и его имя, он не вносил их в список своих трудов, исключив из этого списка даже свою большую монографию [II, 60]. «Он был одаренным человеком, умевшим глубоко проникать в существо исследуемого вопроса, неутомимым и добросовестным в работе, пользовался глубокой симпатией коллег и учеников. Он был одним из тех людей, которых смело можно отнести к лучшим представителям немецкой культуры».[1]

Огромная техническая работа, которую наряду с собственной научной приходилось выполнять Энгелю, была бы трудно выполнимой, если бы не постоянная помощь его спутника жизни, фрау Лины Энгель (урожденной Эббекен). Ли питал к этой женщине чувства дружеского расположения и признательности.

Человек разносторонних интересов и широко образованный, Энгель играл на органе и фортепиано, был глубоким знатоком музыки периода Барокко и классиков XVIII в. — Глюка, Гайдна и Моцарта. Он изъяснялся на основных западноевропейских языках, был знаком также и с русским. Во время своего первого пребывания в Норвегии (впоследствии он туда снова неоднократно приезжал) Энгель основательно освоил норвежский язык. Он помнил многие сказки Топелиуса, читал в подлиннике Бьёрнсона, Гамсуна и других норвежских писателей. Через семью Ли Энгель подружился со многими норвежцами и говорил, что считает эту страну своей второй родиной.

Верность своему учителю Энгель пронес через всю жизнь. Его большой последней работой была уже упоминавшаяся нами монография «Лиевская теория дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка» [II, 60], написанная при участии Фабера. Она хотя

[1] Gedenkband für Friedrich Engel. — Mitt. Math. Sem. Univ. Giessen, Heft XXXIV—XXXVI, Giessen, 1945, S. 1—82.



Мраморный бюст Софуса Ли работы Дире Ваа (1936 г.).

и содержит результаты других авторов, в основном посвящена результатам Ли, многие из которых до этого можно было найти лишь в журнальной литературе. Этим книга существенно отличается от других монографий на данную тему, даже от книги Гурса [II, 61], в которой идеям Ли уделено много места.

Летом 1936 г. в Осло состоялся Международный математический конгресс, на который съехалось большинство крупнейших математиков того времени. Участники Конгресса имели возможность ознакомиться с только что вышедшим очередным томом собрания сочинений Ли, инициативой создания и подготовкой обязанного Энгелю, вложившему в это предприятие огромный труд. На заключительном заседании в Актовом зале Университета Осло в присутствии одного из членов королевской фамилии и нескольких депутатов Стортинга в торжественной обстановке был открыт мраморный бюст Ли работы скульптора Дире Ваа (Dyre Vaa), а сын Ли, Герман, вручил группе французских математиков копию этого бюста для передачи в Эколь Нормаль, где она сейчас находится.

К тому времени теория групп Ли выглядела уже совсем иначе, нежели в конце минувшего века. Благодаря усилиям ряда математиков (некоторые из них присутствовали на Конгрессе) она была поднята на существенно новую ступень. Однако выступавшие на этом заседании отмечали основополагающее и непреходящее значение вклада Ли. К сожалению, никто в этот день не вспомнил об Энгеле, он даже не был приглашен на Конгресс. Старый ученый был очень обижен этим.

Энгель крайне болезненно воспринял нападение гитлеровского вермахта на Норвегию в мае 1940 г. и ненадолго пережил начало ее жестокой оккупации.

Таким был Фридрих Энгель. К нему очень подходят слова, сказанные М. Горьким о Вл. Стасове: «Вот человек, который сделал все, что мог, и все, что мог, сделал».

Но обратимся к свидетельствам самого Энгеля [II, 3, 4]. «Два года, которые я провел у Ли в Христиании (1884—1886), были лучшими годами моей жизни. . . Когда я приехал к нему, он был в расцвете физических и духовных сил. Гелиофотография 1883 г. (см. обложку книги, — *Е. П.*) верно передает его тогдашний облик. Ли был высокого роста и внешне являл собой характерный тип скандинава. Его богатырское телосложение говорило о незаурядной физической силе. Последнего он, однако, никогда не демонстрировал. За стеклами очков, которые он носил с детского возраста, смотрели проницательные серо-голубые глаза. Большая рыжевато-золотистая борода обрамляла его лицо. Его открытость и доброта сразу к нему располагали, он был ненавязчив, искренен и бесхитростен, он сразу казался таким, каким был в действительности. При всем том это была довольно сложная натура, и далеко не сразу с ним можно было сблизиться. Он не скрывал своего неведения в тех вопросах знания, в частности математики, которые не были ему знакомы.

Многие жители столицы Норвегии и ее провинций знали Ли как поразительного пешехода, что само по себе было весомо в стране, давшей миру таких первопроходцев, как, например, Нансен. Однако почти никто из лиевских соотечественников не ведал, какого математического гения имела Норвегия в его лице.

Большую часть дня я проводил с Ли. Мы работали у него дома, а во время прогулок он продолжал мне рассказывать его идеи, и мы обсуждали содержание и планы отдельных глав книги. Так в Христиании был написан первый том обширного труда [I, 126]».

(О несомненной одаренности Энгеля свидетельствует тот факт, что он, быстро входя в курс лиевских идей, сумел получить и важные самостоятельные результаты. В 1885 г. им в Христиании была написана большая работа, ставшая впоследствии его диссертацией. На оригинальные теоремы Энгеля в литературе имеется немало ссылок, — *Е. П.*).

«Ли, — продолжает Энгель, — был очень преданным супругом, нежным отцом и радушным хозяином. При всем его самоотверженном служении математике он умел, особенно когда находился с родными и ближайшими друзьями, и полностью от нее отключаться.

У него не было влечений к политической или организационной деятельности. Среди его соотечественников, тех, с которыми он особенно дружил, были представители разных партий (равно как и представители разных специальностей), но он не принадлежал ни к какой партии. Во времена внутринациональных кризисов он принимал близко к сердцу происходящее (Энгель не разъясняет, что здесь имеет в виду, — *Е. П.*) и в вопросах, связанных с независимостью Норвегии от Шведского королевства, стоял на радикальных позициях. Замечательный педагог, он, в отличие от Клейна, был тем не менее консервативен в отношении реформ школьного и университетского образования.

Ли любил культуру своего народа, особенно литературу, хорошо ее знал, гордился ею. Из писателей-соотечественников по складу ума и характеру творчества ему ближе других был Бьёрнсон. Он отдавал должное драматургии Ибсена, но не одобрял мистических тенденций некоторых его пьес. Из иностранных писателей он больше всего любил Вальтера Скотта, которого читал в немецких и норвежских переводах, — его поэтические баллады и исторические романы. Он, в частности, был пленен очаровательным образом крестьянской девушки Лизбет из романа Скотта „Эдинбургская темница". (Насколько можно судить, Ли часто зачитывался морскими повестями, о чем свидетельствует его интерес к романам Капитана Мариотта, ныне почти забытого, — *Е. П.*).

К числу друзей Ли принадлежал художник Эрик Веренкьолдс, неоднократно его рисовавший и создавший портрет Ли масляными красками, являющийся его наилучшим изображением.

Ничто не действовало на него так благотворно, как картины горячо любимой им родной природы. Ежегодные путешествия по просторам его страны на лошади, на лодке, и, конечно, пешком были для него неотъемлемой частью существования. Он некоторое время продолжал их и даже тогда, когда начавшаяся болезнь очень его преобразила».

Приведенные свидетельства Энгеля хочется дополнить суждениями Ли о математике, коллегах, собственным впечатлением о его характере.

Встречающиеся в его книгах и статьях исторические отступления порой далеко выходят за пределы рассматриваемых им вопросов. Ему нравилось упоминать античных математиков, ученых XVII и XVIII веков. Едва ли что-либо в истории культуры его интересовало так, как история математики. Мы находим, например, во введении к одной его работе по дифференциальным уравнениям [I, 130, т. 4, с. 320] такую сноску: «Вопрос о том, кто первый, Ньютон или Лейбниц, заметил, что операции дифференцирования и интегрирования обратны друг другу, имеет очень важное значение для их старого спора о приоритете основания анализа бесконечно малых. Если я верно понял устное разъяснение г-на Цейтена (J. Zeuten), ученого, так много сделавшего для истории математики, он намерен коснуться этого вопроса в одной из своих будущих работ».

Ли всегда радовался, когда удавалось отыскать чье-либо затерявшееся на дорогах истории имя. Так было с его соотечественником К. Весселем, а узнав от одного из коллег, что англичанин Кокль (J. Cockle, 1819—1895) еще в 1870 г. получил ряд важных результатов о дифференциальных инвариантах, он при первой же возможности отметил это в печати [I, 129].

Ли прекрасно владел аналитической механикой Лагранжа—Гамильтона—Якоби, механикой сплошных сред Гельмгольца—Бьёркнеса—Томпсона, геометрической оптикой, был в курсе работ Пуанкаре по новым методам небесной механики. Все это он старался осмыслить с позиций своих теорий, например в таких статьях, как «Инфинитезимальные контактные преобразования механики» [I, 87], «Инфинитезимальные контактные преобразования в оптике» [I, 114] (там бегло намечаются связи с теорией волн, подход к принципу Гюйгенса, явлениям отражения лучей и рефракции). В работе «О применении групп к дифференциальным уравнениям» [I, 109] центральное место занимает глава «Определение стационарного потока газа при постоянной температуре».

Не совсем понятно происхождение заметки [I, 104], явившейся реакцией Ли на выступление известного физика-химика В. Оствальда (печально известного своим противодействием молекулярно-кинетическим идеям Л. Больцмана). Оствальд отметил целесообразность распространения вариационного принципа механики на общую термодинамику. Высказывания Ли по этому поводу не содержат результата и исчерпываются следующими положениями: а) у Оствальда отсутствуют какие-либо исходные математические предпосылки; б) в то время как в механике (и в геометрической оптике) вариационный принцип приводит к дифференциальным уравнениям, применение той же идеи в иных физических ситуациях может привести также и к интегральным уравнениям; в) может оказаться полезным известный в механике метод Якоби канонического преобразования фазовых переменных, при котором достигается упрощение выражения энергии системы (ее гамильтониана).

Интересна с прикладной точки зрения работа Ли «Теория возмущений и контактные преобразования» [I, 34], результат которой он впоследствии интерпретировал в связи с интегральными инвариантами. В целом, однако, работ физического содержания у Ли сравнительно немного, и его следует воспринимать как чистого математика, исследования которого впоследствии приобрели прикладное значение (другой подобный пример — А. А. Марков в теории вероятностей).

С позиций своих интересов Ли следил и за работами современных ему крупнейших физико-теоретиков. Так, Максвелл его интересовал именно как геометр (геометрия сфер, циклиды Дюпена). Теорема Томпсона о конформном отображении пространства, найденная им в связи с одной задачей теории поля, цитируется у Ли применительно к комплексам изотропных прямых.

Определив еще в молодости свои пристрастия к тем или иным математикам, он оставался им верен всю жизнь. Так, от первых до последних своих работ он с одинаковым восторгом отзывался о Понселе и Плюккере, даже несколько преувеличивая общее значение этих действительно крупных геометров. Он обладал достаточной проницательностью, чтобы среди своих современников выделить Пуанкаре, отмечал универсальность его творчества, сравнивал его с Коши. Особенно часто по поводу и без поводов Ли упоминал Галуа. Определенно можно сказать, что Ли всю жизнь находился под гипнозом его романтической биографии с трагическим исходом. В статье памяти Галуа [I, 110] Ли видит в нем основателя теории групп, подчеркивает, как Галуа владел эллиптическими функциями, и, что в его устах означало высшую похвалу, заключает: «Если б жизнь Галуа ие оборвалась так рано, то он опередил бы меня в создании теории непрерывных групп преобразований». Примерно так же Ли неизменно восхищался Абелем, которого называл mein berühmt Landsmann (мой знаменитый соотечественник).

Среди публикаций Ли нет недостатка в добрых высказываниях о достижениях коллег самого различного ранга, но есть и суровая критика. Когда дело касалось математики, все остальное, будь то личная симпатия или уважение к авторитету, отступало на второй план. «Платон ты мне друг, но истина дороже» — такой афоризм вполне подстать его кредо. Примером может служить его критика в печати одной из работ Альфана.

В IX томе «Американского математического журнала» было опубликовано письмо Альфана классику теории инвариантов XIX в. Сильвестру. В этом письме Альфан рассматривает «группу преобразований» S_a,

$$x' = f(x, a), \quad x \in R^n, \quad a \in R^r,$$

n-мерного пространства с рациональными функциями f. Там же была перепечатана заметка Ли [I, 83], в которой говорится: «Альфан исходит из группового равенства $S_a S_b = S_c$ (мы несколько изменили обозначения, — *Е. П.*), не предполагая, что $c = \varphi(a, b)$, как это имеет место в моей первой работе (1874 г.) и в последующих публикациях. Элемент c задается Альфаном, по существу, произвольно (Альфан не фиксирует вид функций f, а значит, и функции φ остаются неопределенными, — *Е. П.*). Такой подход представляется мне неудовлетворительным». Ли показывает несостоятельность исходного определения Альфана, получаемых им следствий, противоречия с классической теорией инвариантов, ошибочность приведенных примеров.

И так на четырех страницах работа известного математика, члена Академии наук Франции, была полностью раскритикована.

В примечаниях Энгеля к собранию сочинений Ли сказано, что письмо Сильвестру не было включено в Собрание сочинений Альфана, который на критику Ли не ответил, ибо ответить было нечего [I, 130, т. VI, с. 853]. В гл. 24 трактата о непрерывных группах [I, 126, т. III], в обзоре новых работ по основаниям геометрии, Ли строго критикует некоторые результаты таких крупных ученых, как Киллинг, Линдеман и его друг Клейн. Ли, несомненно, верно оценивал свое значение и при этом умел быть самокритичным (см., например, главу «Минимальные поверхности»), но болезненное авторское самолюбие порождало порой высказывания, на наш взгляд, не достойные его таланта.

Как это не похоже на Дарбу, который по поводу одной теоремы о характеристиках дифференциальных уравнений писал Ли: «Эта теорема принадлежит Вам, и Вы вполне могли бы обойтись без упоминания моей персоны». Ли не мог понять, что и Клейн, так же, как и Дарбу, был выше подобных мелких притязаний самолюбия. Он писал Клейну в 1884 г. «Мне признаться, не по себе, что в последнее время я как-то сдержанно тебя цитирую. Я подметил, что если я кого-либо непременно цитирую, то у других создается впечатление, что это он все сделал, а не я. Не знаю, почему так повелось. . .» [I, 130, т. 6, с. 783].

Конечно, такого рода высказывания не увеличивают наши симпатии к Ли, но их нужно расценивать как следствие его характера вообще. Пытаясь добраться до его сути, автор пришел к выводу, что этот простой, непосредственный и добрый, но одновременно легко ранимый капризный человек, во многом был большим ребенком. Давно замечено, что детские черты характера часто сохраняются в очень талантливых (каким, несомненно, и был Ли) и даже в гениальных людях. Именно детские черты неоднократно подчеркивали, говоря о Моцарте. Гердер отмечал то же в Гёте, а Виланд, особенно хорошо знавший Гёте, говорил, что тот вплоть до старости оставался большим ребенком. Косвенно это же звучало во многих высказываниях Софьи Андреевны Толстой о ее муже.

Лейпцигское двенадцатилетие

В 1886 г. Клейн, руководивший кафедрой геометрии в университете Лейпцига, собираясь переезжать в Гёттинген, предлагает Ли занять его освобождавшуюся должность. Ли без колебаний принимает предложение: перспектива переезда в Лейпциг радовала его по целому ряду причин. Появлялась реальная возможность иметь подходящую студенческую аудиторию, квалифицированных сотрудников (как ни велика помощь Энгеля, но ее одной уже недостаточно). Издание лиевских книг намечалось в Германии, а Лейпциг всегда был центром немецкого книгопечатания. Устраивали и материальные условия, предложенные в Лейпциге, и намного упрощалась проблема общения с немецкими и французскими коллегами.

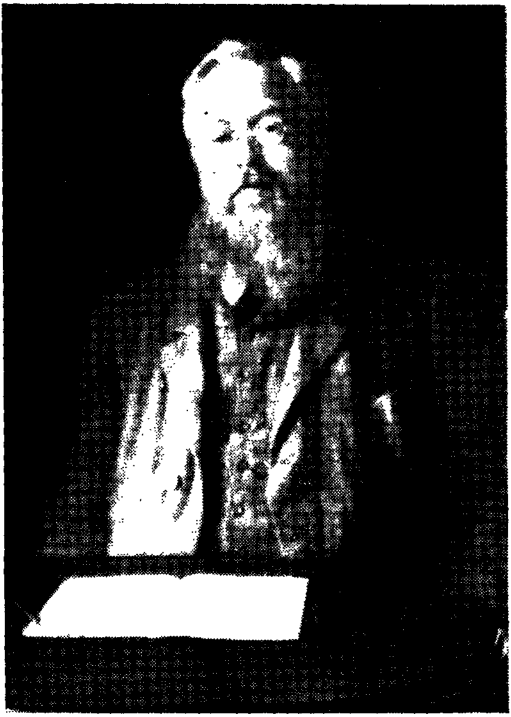
Начало 1887 г. застает Ли уже в Лейпциге, где он быстро обретает способных учеников — Шефферса, Штуди, Фр. Шура, к которым затем присоединяются Умлауф и Маурер. К концу 80-х годов каждый из них получил существенные результаты в теории непрерывных групп, а некоторые и в других областях, связанных с исследованиями Ли. Очень обрадовал Ли и приезд к нему из Парижа в 1888 г. по рекомендации Дарбу и директора Эколь Нормаль Ж. Таннри нескольких молодых французских математиков. Среди них был Вессио, который вскоре выполнил ряд важных исследований по групповым свойствам дифференциальных уравнений. Одновременно продолжалось интенсивное сотрудничество с Энгелем. В 1988 г. вышел из печати первый том трактата по непрерывным группам преобразований и быстро шла подготовка второго тома — «Контактные преобразования».

Никогда еще дела Ли не обстояли так блестяще, как на подходе к последнему десятилетию XIX в. Но неожиданно для окружающих в 1889 г. у него появились первые признаки серьезного психического расстройства. Он стал плохо спать, быстро выходил из себя и, чего раньше за ним не водилось, стремился к затворничеству. «После того, как это началось, — говорил Энгель, — он уже никогда не был таким, как прежде».

Вряд ли болезнь была вызвана переутомлением самоотверженной работой. Творчество всегда было для него источником огромного удовлетворения, и он был далеко еще не стар. Вернее предположить, что она была наследственной. Прогрессируя, болезнь еще долго не сказывалась на его работоспособности и творческой изобретательности. Когда читаешь работы Ли 90-х годов, его высказывания о математиках (например, упоминавшуюся статью о Галуа), трудно себе представить, что их автор — человек с пораженной психикой. И лишь тон оценок собственных достижений и отношение к ним других лиц дает это почувствовать. Его вторым домом становится психиатрическая больница в Ганновере, где он подолгу находится и, как и всюду, старается использовать для работы каждую минуту. В этой больнице им были написаны некоторые важные работы по бесконечным группам преобразований, поверхностям переноса и интегральным инвариантам. Там же он продолжал писать и свои книги. У Энгеля мы находим следующую запись [I, 130, т. 4, с. 592]: «Когда Ли в начале зимнего семестра 1889/90 г. пребывал в состоянии сильной депрессии, вынудившей его находиться в нервно-психиатрической больнице, он передал мне там две работы, которыми он весьма дорожил. Одна относилась к его обобщению метода Коши решения уравнений в частных производных, он хотел, чтобы она явилась заключительной главой т. II „Непрерывных групп", вторая касалась линейных уравнений. Первая выпадала из содержания тома, вторую я отредактировал для печати».

Постепенно лечение начинало давать положительные результаты, восстанавливался сон, улучшалось настроение. В начале 1891 г. Ли смог вернуться к чтению лекций. Тогда же, весной, он совершил поездку на родину, что еще больше подняло его дух. Здесь воспроизводится портрет Ли работы Эрика Веренскьольда (масло), начатый художником в это время в Христиании, но законченный уже после смерти Ли. Ни одно из изображений Ли не может сравниться с этой превосходной картиной. «Мы счастливы, — говорят Энгель и Хегор в предисловии ко второму тому сочинений Ли, — что можем здесь представить читателю этот портрет». Ли на минуту оторвался от своих занятий. Голова чуть откинута назад и в сторону. Взгляд, устремленный вперед, выражает непрерванную работу мысли. Он изображен не за бюро, на котором книги и рукописи, не на фоне книжных стеллажей. Перед ним только маленький столик, раскрытая тетрадь и карандаш — он все черпает из себя. . .

Просветления вновь сменялись депрессиями, а между тем внешние обстоятельства продолжали благоприят-



Софус Ли.

ствовать Ли. Он нашел в лице Шefферса второго сотрудника, почти столь же ценного, как и Энгель.

Георг Шefферс родился в 1866 г. в Аллендорфе (недалеко от Хольцмюндена), где его отец был профессором Академии искусств. Мальчик получил блестящее художественное воспитание, но плененный красотой доказательств геометрических теорем, решил посвятить себя математике. В 1884 г. он поступает в Лейпцигский университет, где становится одним из самых активных слушателей Ли. Через два года после окончания университета он получает степень доктора философии за работу по алгебраическим проблемам теории непрерывных групп, после чего до 1896 г. очень успешно работает у Ли в качестве ассистента, лектора, исследователя, соавтора по книгам. Он и в Дармштадте продолжает заниматься лиевской тематикой по геометрии и группам, но, переехав оттуда в Шарлоттенбург, где жил до конца своих дней (1945 г.), отходит от нее, переключившись на теоретическую геодезию и космографию. Шефферс написал несколько оригинальных и ценных книг по этим дисциплинам, а также по теории поверхностей.

Три больших тома, написанных Ли с участием Шефферса, имеют такую же ценность, как и трактат, созданный с Энгелем. Шефферс и Энгель удачно дополняли друг друга. Энгель был особенно силен в дифференциальных уравнениях, контактных преобразованиях, дифференциальных инвариантах; Шефферс — в алгебраических теориях (у него были работы по линейным алгебрам, гиперкомплексным системам алгебраической теории чисел) и, кроме того, он превосходно ориентировался в различных геометрических проблемах. Энгель писал ясно, подробно, но формально и педантично. Шефферс, наоборот, как педагог в изложении материала был поразительно изобретателен. Хотя во всех томах, написанных Ли с обоими его основными сотрудниками, чувствуется его направляющая рука как с точки зрения идей, так и с точки зрения плана и содержания, книги, написанные с Шефферсом очень отличны по стилю от трактата, созданного при участии Энгеля. В книгах Ли—Шефферса особенно много примеров, различных пояснений дедуктивного характера, исторических справок. На полях почти каждой страницы — набранные петитом заголовки или микрорезюме, помогающие ориентироваться в существе дела. Этой же цели служат многочисленные изобретательно придуманные рисунки. В 1891 г. вышла первая книга Ли—Шефферса [I, 127]. Она посвящена групповым свойствам дифференциальных уравнений. Вторая их книга [I, 128], объемом в 810 страниц, по замыслу Ли должна была представлять собой сокращенное и более доступное изложение сути трактата о непрерывных группах [I, 126]. Однако в ней имеется материал, не вошедший ни в один из его томов (например, алгебраические приложения). Для наглядной интерпретации структур конкретных групп Ли и Шефферс в этой книге придумали специальные диаграммы (одна из них воспроизводится в следующей главе). Особенно интересна третья книга Ли—Шефферса «Геометрия контактных преобразований» [I, 129], ставшая последней книгой Ли, вышедшей при его жизни. Она содержит подробное изложение геометрических теорий Ли 70-х годов, теорию характеристик дифференциальных уравнений, поданную в очень доступной форме, массу превосходных примеров, а также весь подсобный материал, необходимый для понимания текста (плюккеровы комплексы и т. п.). Хочется верить, что эта книга — один из шедевров математической литературы прошлого — еще будет переиздана. Предполагалось также выпустить второй том под тем же названием, но этот замысел не был осуществлен. Однако в 1904 г. Клейн и Энгель опубликовали в «Матем. Аннален» оставшуюся среди материалов Ли его рукопись «Три главы из второго тома „Геометрии контактных преобразований“» [I, 125]. Это — фактически самостоятельная книга, посвященная главным образом геометрическим проблемам уравнений в частных производных второго порядка (особенно уравнениям Монжа—Ампера).

В 1892 г. по приглашению Дарбу и его коллег Ли совершает свою самую длительную поездку в Париж, где в числе других начинающих математиков ему был представлен 23-летний Эли Картан, которому в XX в. суждено было стать крупнейшим продолжателем работ Ли во всех направлениях. Об этом пребывании Ли в Париже Картан через 50 лет вспоминал: «Софус Ли провел шесть месяцев в Париже, проявив большой интерес и доброжелательность к работам молодых французских математиков. Его часто можно было видеть в кафе „Ля сурс“ (Источник) на бульваре Сен Мишель; нередко бывало, что белое мраморное покрытие одного из его столов оказывалось заполненным формулами, которые мэтр писал, чтобы пояснить свои идеи. Равнодушие, даже игнорирование, с которым были приняты первые работы Ли, теперь сменилось чувством восхищения; многие известные академии, кроме, однако, Берлинской, пожелали числить его своим членом. Во время пребывания Ли в Париже наша Академия наук избрала его своим членом-корреспондентом» (7 июня 1892 г., — *Е. П.*) [II, 15, с. 255].

По возвращении из Парижа Ли узнал приятную новость: вышел третий, заключительный том «Теории групп преобразований» [II, 126]. Он состоит из больших разделов: классы групп на плоскости и в пространстве, общие вопросы теории (не вошедшие в т. I), основания геометрии («проблема Римана—Гельмгольца» в трактовке Ли), вопросы структуры групп. Последние 50 страниц этой книги (ее объем превышает 800 страниц) Ли посвятил обзору результатов его учеников и продолжателей. Он начинает с достижений немецких математиков: Энгель — понятие композиционного ряда для групп Ли и теорема Жордана—Гельдера; Маурер — дифференциальные уравнения группы; Шур — новые доказательства трех основных теорем Ли; Штуди, Шефферс — группы Ли и гиперкомплексные системы; Киллинг, Умлауф — алгебраические вопросы структуры групп Ли. Ли похвально отзывается о результатах своего польского ученика Журавского по дифференциальным инвариантам групп, указывая, что подробно их коснется в другой книге.

Для этих молодых ученых их работы явились, по существу, дебютом на научном поприще. Исключение составлял лишь Киллинг, принадлежащий к тому же поколению, что Ли и Клейн. Он занялся теорией групп Ли, имея уже немалый опыт научных исследований. Киллинг был весьма одаренным математиком и его работы сыграли особенно важную роль в развитии групп Ли в XX в. Ли, давая высокую оценку результатам Киллинга, предвидел это и, может, именно потому был к нему особенно взыскателен, неоднократно браня за небрежный стиль изложения, нечеткость доказательств. Одному из коллег, отправлявшемуся в Мюнцер, где проживал Киллинг, Ли в сердцах сказал: «Если увидите Киллинга, прикончите его» (об этой горькой шутке поведал Фрейденталь [II, 18], добавив: «Работа Киллинга в действительности была превосходна»).

На последних страницах заключительного тома по теории групп [I, 126] Ли говорит о достижениях французских математиков, Пикара, Вессио, Тресса, Таннебера, по групповым проблемам теории дифференциальных уравнений и дает им высокую оценку. К тому времени Пикар, уже зарекомендовавший себя выдающимися работами по аналитическим функциям и другим областям анализа, выдвинулся в число крупнейших математиков мира. Ли был польщен тем, что в круг интересов Пикара попала и его теория групп. В книге бегло упоминается и Картан, в лице которого Ли распознал восходящую звезду в области геометрии.

Ли симпатизировал очень многим французским математикам, в частности Гурса. Перу этого очень крупного и разностороннего ученого принадлежат две прекрасные книги по уравнениям в частных производных, первая из которых [II, 61] вышла в 1891 г. с предисловием Ли. В обеих книгах, особенно в первой, результатам Ли уделено большое место. Гурса явился также автором большой книги по проблеме Пфаффа, где, однако, преобладает точка зрения не Ли, а Фробениуса.

В 1895 г. Ли в последний раз побывал в Париже. «Он присутствовал тогда в качестве почетного гостя на праздновании столетия Эколь Нормаль и для книги, изданной по этому поводу, призванной отметить заслуги и славу этой школы, написал статью, исполненную глубокого преклонения перед работой Галуа» [II, 15, с. 256]. Тогда же Ли имел возможность выразить Картану свое восхищение его блестящей диссертацией о структуре непрерывных групп.[1] Эта богатая содержанием работа, в которой, в частности, были уточнены и систематизированы результаты Киллинга,[2] имела явно алгебраический уклон. Вместе с работами Киллинга она показала, что в обозримом будущем дальнейшее развитие теории Ли будет идти в направлении алгебраических проблем. Хотя последние в работах Ли играли большую роль, он, по моему убеждению, больше был склонен связывать свою теорию с аналитическими вопросами. После того как в 1884 г. научное одиночество Ли в теории групп закончилось, произошло то, чего, в сущности, и следовало ожидать: работы других ученых (Киллинга и Картана) показали, что творение Ли может развиваться и в не предвиденных им направлениях (мы коснемся этого в специальной главе). Думается, что при болезненно обострившемся эгоцентризме Ли мог скорее быть огорчен этим, нежели обрадован.

Группы преобразований — второй период

Известно, что построению многих математических теорий, да и самого анализа в целом, предшествует период накопления фактов. Так обстояло дело и с группами Ли, в основе которых лежат три теоремы, найденные Ли в конце 70-х годов. «Три основные теоремы Ли», как теперь их принято называть, отражают специфику групп Ли как особой аналитической дисциплины. Их характерной чертой является двусторонняя связь группы Ли и алгебры

---

[1] Cartan Elie. Sur la structure des groupes de transformations finis et continus, These. Paris, 1894.

[2] По поводу работ Киллинга (результаты и библиография) см., например, [II, 51].

Ли — алгебры ее инфинитезимальных операторов. Значение этого, с одной стороны, заключается в том, что важнейшие понятия групп Ли удобным образом формулируются в терминах ее алгебры. С другой стороны, доказательства теоремы о группах возникают на основе рассмотрения их алгебр. Последнее в равной мере относится как к чисто аналитическим вопросам (в связи с дифференциальными уравнениями), так и к проблемам структуры групп.

Ли неоднократно возвращался к трем основным теоремам. Они встречаются у него в первом томе трактата по непрерывным группам [I, 126] и в его третьем томе, где, в частности, обсуждаются дополнения к этим теоремам (Маурер, 1888 г.), а также новые их доказательства, предложенные Шуром. Отдавая должное результатам своих исследователей, Ли вместе с тем не мог воздержаться от ревнивых замечаний в их адрес.

Настоящая глава является естественным продолжением главы «Непрерывные группы — начало теории», но мы в основном будем опираться на данное там определение группы преобразований и ее инфинитезимальных операторов.

Основные теоремы. Пусть задана r-параметрическая группа G преобразований в R^n:

$$x' = f(x, a), \quad x, x' \in R^n, \quad a \in R^r, \tag{1}$$

или, в других обозначениях, $x' = T_a x$. Не уменьшая общности рассуждений, можем считать, что единичное преобразование отвечает нулевому a:

$$f(x, 0) = x.$$

Теорема I. Заданные (1) функции x'_i удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_\alpha} = V_\alpha^\beta(a)\, \xi_\beta^i(x'), \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, r; \; i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Здесь V_α^β — некоторая система функций («вспомогательные функции»), для которых $\det \| V_\alpha^\beta(a) \| \neq 0$ и выполняются начальные условия:

$$x'_i(0) = x_i. \tag{3}$$

И обратно, решения уравнений (2) при (3) определяют группу G единичным элементом $a = 0$.

Запишем векторы

$$\xi_\alpha = (\xi_\alpha^1(x), \ldots, \xi_\alpha^n(x))$$

и составим операторы

$$X_\alpha = \xi_\alpha^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{4}$$

Как и прежде, скобки Пуассона (X, Y) определяем равенствами

$$(X, Y) = XY - YX. \tag{5}$$

Теорема II. Во-первых, векторы ξ_α линейно независимы с постоянными коэффициентами (т. е. не существует констант λ_α таких, что $\lambda_\alpha \xi_\alpha = 0$).

Во-вторых,

$$(X_\alpha, X_\beta) = c_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma, \tag{6}$$

где c — постоянные величины, «структурные константы» группы.

Обратно, при выполнении этих двух условий равенства (6) определяют группу G_r^n, операторы которой X_α.

Для скобок (5) имеет место

$$(X, Y) = -(Y, X), \tag{7}$$

$$((X, Y), Z) + ((Y, Z), X) = ((Z, X), Y) = 0. \tag{8}$$

Оба утверждения теоремы II вместе с (7) и (8) означают, что всякой группе G_r^n отвечает ее алгебра Ли L_r, т. е. r-мерное пространство, в котором для любых $X, Y \in L_r$ определена операция умножения (X, Y), удовлетворяющая условиям (7), (8). Векторы X_α образуют базис этой алгебры, т. е. для любого $X \in L_r$ имеет место $X = \lambda_\alpha X_\alpha$, где λ_α — некоторые постоянные.

Линейным преобразованием $X_\alpha = A_{\alpha\beta} X_\beta$ можно перейти от базиса X_α к другому базису Y_α, причем $c_{\alpha\beta}^\gamma$ преобразуются при этом по некоторому (тензорному) закону.

Теорема III. Структурные константы группы G_r^n удовлетворяют условиям

$$c_{\alpha\beta}^\gamma = -c_{\beta\alpha}^\gamma, \tag{9}$$

$$c_{\alpha\beta}^\varepsilon c_{\varepsilon\gamma}^\tau + c_{\beta\gamma}^\varepsilon c_{\varepsilon\alpha}^\tau + c_{\gamma\alpha}^\varepsilon c_{\varepsilon\beta}^\tau = 0. \tag{10}$$

Обратно, любые r^3 констант $c^\gamma_{\alpha\beta}$, для которых имеет место (9), (10), определяют алгебру Ли с законом умножения (6), а следовательно (теорема II), и группу Ли.

Прямое утверждение непосредственно вытекает из (5), (7), (8). Обратная теорема значительно труднее. Она была доказана Ли с помощью остроумных вспомогательных построений.

Приведем некоторые понятия, аналогии, пояснения.

Изоморфизм и константы $c^\gamma_{\alpha\beta}$. Пусть T_a обозначает преобразование (1) группы G. Пусть задана еще одна r-параметрическая группа $\tilde{G}$. Обозначим ее преобразования T_A. Говорят, что G и $\tilde{G}$ изоморфны, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие $T_a \leftrightarrow T_A$, сохраняющее закон умножения, т. е. при $T_A \leftrightarrow T_a$, $T_B \leftrightarrow T_b$ имеет место $T_A T_B \leftrightarrow T_a T_b$.

Сравнительно легко доказывается следующее. Пусть G — группа с константами $c^\gamma_{\alpha\beta}$ и $\tilde{G}$ — изоморфная ей группа. Тогда в алгебре Ли этой группы можно выбрать базис, так что ее константы $\tilde{c}^\gamma_{\alpha\beta}$ совпадут с константами группы G: $\tilde{c}^\gamma_{\alpha\beta} = c^\gamma_{\alpha\beta}$

Параметрическая группа. Согласно определению группы (1), $T_a T_b = T_c$, где $c = \varphi(a, b)$, т. е. каждой паре (a, b) отвечает элемент c. При этом из того, что T_a образуют группу, следует, что операция φ также образует группу. Она называется параметрической группой g_r группы G_r.

Пусть, например, задана группа G_1: $x' = x + t$ переносов на оси X, $-\infty < x,\ t < \infty$. Множество всех чисел t образует группу по отношению к операции (алгебраического) сложения. Это — параметрическая группа группы G_1. Очевидно, обе эти группы изоморфны.

Вообще, любая группа G^n_r изоморфна своей параметрической группе, и это непосредственно видно из сопоставления $T_a \leftrightarrow a$, $T_a T_b \leftrightarrow ab$. Структурные свойства группы — это те, которые одновременно принадлежат всем изоморфным между собой группам, а также их алгебрам. Поэтому при изучении структуры группы преобразований G^n_r можно ограничиться ее параметрической группой g_r. Так мы и будем поступать ниже, если не оговорено, обозначая элементы этой группы a, b, ...

Подгруппа, подалгебра. Пусть L_r — алгебра Ли и L_s — ее подалгебра, т. е. s-мерное векторное пространство, само являющееся алгеброй Ли. Согласно теореме II, алгебре L_s отвечает некоторая группа Ли g_s. Она является подгруппой группы g_r.

Идеал и нормальный делитель. Подалгебра $L_s \in L_r$ называется идеалом в L_r, если для любых $X \in L_r$, $Y \in L_s$, $(XY) \in L_s$. Идеалу L_s отвечает подгруппа $g_s \subset g_r$, характеризуемая свойством: для любых $a \in g_r$, $b \in g_s$, $aba^{-1} \in g_s$. Она называется нормальным делителем группы g_r (или — ее инвариантной подгруппой). Группа называется простой, если она не имеет нормального делителя, отличного от нее самой или единицы.

В теории дискретных групп Жордан ввел очень важное для изучения их структуры понятие «фактор-группы» (дополнительной группы относительно ее нормального делителя). Жорданом, Гельдером и другими для фактор-групп были доказаны глубокие теоремы, которые Ли и Энгель распространили на группы преобразований. Мы не можем на этом останавливаться, но покажем, как фактор-группы возникают в теории Ли.

Пусть L_r — алгебра Ли с операторами $X_1, \ldots, X_r$; L_s — ее идеал, причем $X_1, \ldots, X_s$ составляют базис в L_s. Тогда все константы $c^{\gamma}_{\alpha\beta}$ с индексами $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, s$ равны нулю, и в (9), (10) остаются лишь c с индексами $s+1, \ldots, r$. Согласно теореме III (равенства (9), (10)), этим определена группа g_{r-s} порядка $r-s$. Она и называется фактор-группой группы g_r по группе g_s и обозначается g_r/g_s.

Разрешимые (интегрируемые) группы. Пусть снова задана группа g_r. Множество ее элементов вида $aba^{-1}b^{-1}$, где a, b — любые элементы из g_r, называется производной g' группы g; g' само является группой и, более того, нормальным делителем группы g.

Если g_r — простая группа, то либо $g' = g$, либо $g' = I$. Отправляясь от производной g', мы можем составить ее производную $(g')' = g''$ — вторую производную группы g. Этот процесс можно продолжать.

Группа g_r называется разрешимой, если существует последовательность ее производных групп, заканчивающаяся единицей:

$$g_r \supset g' \supset \ldots \supset I. \tag{11}$$

Очевидно, любая абелева (коммутативная) группа разрешима, поскольку для нее $g'=I$.[1] Это определение в теории Ли эквивалентно другому определению: группа g_r разрешима, если имеется последовательность ее подгрупп,

$$g_r \supset g_{r-1} \supset \ldots \supset g_1 \supset I, \tag{12}$$

такая, что каждая следующая группа — нормальный делитель предыдущей.

Порядки соседних групп в (11), убывая, не обязательно отличаются на единицу. Таким образом, переход от (11) к (12) означает, что цепочка (11) может быть уплотнена инвариантными подгруппами так, что это будет иметь место.

Если g' — производная группы g_r, то ей в L_r отвечает подалгебра L', состоящая из всех элементов, представимых в виде (X, Y). Для алгебры разрешимой группы имеют место включения

$$L_r \supset L' \supset L'' \supset \ldots \supset 0, \tag{13}$$

$$L_r \supset L_{r-1} \supset L_{r-2} \supset \ldots \supset 0, \tag{14}$$

где каждое следующее L является идеалом предыдущего.

Дифференциальные уравнения и группы. Цель этого пункта — проследить аналогию теории Ли с теорией Абеля—Галуа алгебраических уравнений, для чего нам потребуется понятие дифференциального уравнения, допускающего группу преобразований.

Пусть задано уравнение

$$Af = a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{15}$$

и пусть $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ — $n-1$ его независимых решений. Тогда любое другое решение φ будет некоторой функцией от этих ω.

Мы скажем, что (15) допускает оператор

$$X = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \tag{16}$$

если X переводит любое решение (15) в некоторое решение того же уравнения. Весьма просто доказывается важ-

[1] Альтернатива: группы, для которых $G'=G$. В современном курсе М. М. Постникова [II, 43] такие группы остроумно названы каиновыми. Ли назвал их совершенными, оговорив, что этот термин встречается в теории множеств у Кантора.

ная теорема Ли (1873 г.). Для того чтобы (15) допускало оператор X, необходимо и достаточно, чтобы

$$(X, A) = \lambda(x) A, \tag{17}$$

где λ — некоторая функция (зависящая, разумеется, от X). Наконец, мы скажем, что уравнение (15) допускает группу преобразований G_r^n, если оно допускает любой оператор $X = \lambda^\alpha X_\alpha$ $\alpha = 1, \ldots, r$ этой группы.

Одним из подлинных триумфов теории Ли является следующая замечательная теорема (для удобства ссылок на нее обозначим ее звездочкой — *).

Если уравнение (15) допускает разрешимую группу G_{n-1}^n, то оно решается в квадратурах.

Этой теореме необходимо предпослать ряд пояснений и замечаний. G_{n-1}^n — это подгруппа преобразований в R^n с операторами $X_1, \ldots, X_{n-1}$ вида (16), и единственное дополнительное условие, требуемое теоремой, состоит в том, что между ними и A не существует линейной зависимости.

Уравнение (15) эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{a_1} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n}. \tag{18}$$

С другой стороны, любое уравнение n-го порядка,

$$y^n - f\,(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) = 0, \tag{19}$$

можно записать в виде системы (18). Поэтому теорема (*) устанавливает условие интегрируемости в квадратурах также системы (18) и уравнения (19).

Поясним сказанное на простейших примерах. Начнем с уравнения первого порядка:

$$y' = f\,(x, y). \tag{20}$$

Мы говорили, что если (20) допускает оператор X, то оно решается в квадратурах. X порождает алгебру L_1, причем $L_1' = 0$, т. е. эта алгебра разрешима. Таким образом, применительно к (20) слова «допускает группу» и «допускает разрешимую группу» — одно и то же, и смысл теоремы (*) тут ясен.

Рассмотрим теперь уравнение второго порядка:

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{21}$$

Мы знаем, что если это уравнение допускает оператор X_1, то оно сводится к уравнению первого порядка $v' = f_1(v, x)$. В свою очередь, если это последнее уравнение допускает оператор X_2, оно решается в квадратурах. Сказанное можно свести к тому, что если уравнение (21) допускает алгебру (X_1, X_2), оно разрешимо в квадратурах. Легко показать, что любая алгебра L_2 разрешима, точнее в ней можно выбрать базис так, что $(X_1, X_2) = \lambda X_1$. Это означает, что X_1 составляет в L_2 идеал, и мы имеем цепочку $L_2 \supset L_1 \supset 0$. Таким образом, и здесь разрешимость в квадратурах означает, что уравнение допускает разрешимую группу.

Для уравнений третьего и высших порядков так дело обстоит не всегда.

Пусть задано уравнение

$$y''' = f(x, y, y' y''). \tag{22}$$

Рассмотрим применительно к нему алгебру $L_3(X_1, X_2, X_3)$. Ли показал [I, 127, гл. 25], что все алгебры L_3 сводятся к семи типам:

I. $(X_1, X_2) = X_1$; $(X_1, X_3) = 2X_2$; $(X_2, X_3) = X_3$

II. $(X_1, X_2) = 0$; $(X_1, X_3) = X_1$; $(X_2, X_3) = cX_2$, $c \neq 0$, $c \neq 1$

III. $(X_1, X_2) = 0$; $(X_1, X_3) = X_1$; $(X_2, X_3) = X_2$

IV. $(X_1, X_2) = 0$; $(X_1, X_3) = X_1$; $(X_2, X_3) = X_1 + X_2$

V. $(X_1, X_2) = 0$; $(X_1, X_3) = X_1$; $(X_2, X_3) = 0$

VI. $(X_1, X_2) = 0$; $(X_1, X_3) = 0$; $(X_2, X_3) = X_1$

VII. $(X_1, X_2) = 0$; $(X_1, X_3) = 0$; $(X_2, X_3) = 0$

Все они, за исключением первого, разрешимы (эта ситуация графически показана на диаграмме Ли—Шефферса, рис. 11).

Предположим, что уравнение (22) допускает группу G_3 (соответственно, алгебру L_3). Тогда для случаев II—VII оно решается в квадратурах. Таким образом, смысл теоремы (*) понятен и здесь (для случая I, как показал Ли, решение уравнения сводится к двум квадратурам и урав-

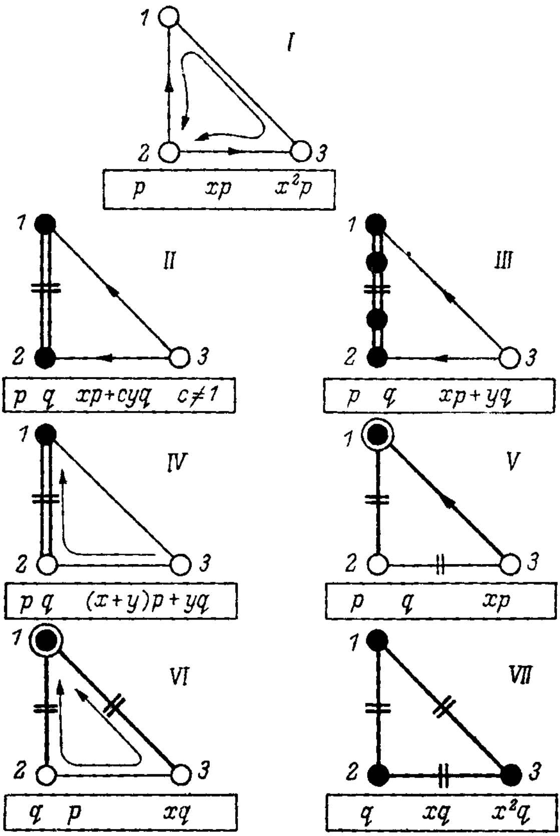


Рис. 11. *Структурная диаграмма алгебры Ли L_3 (Шефферс).*

нению Рикатти; последнее, как известно, не решается в квадратурах).

Уравнение (19) может решаться в квадратурах и тогда, когда допускаемая им группа неразрешима. Это имеет место в том случае, если порядок группы выше порядка уравнения. Ли показал, в частности, что любое уравнение второго порядка решается в квадратурах, если оно допускает группу G_3.

Отметим, что выражение «уравнение (19) допускает группу G» было выше (с. 93) определено иначе, но оба определения эквивалентны. Выше говорилось о продолжении группы G точечных преобразований $x_1=f_1$ $(x,$

$y, a), \bar{y}_1 = f_2(x, y, a)$ на плоскости в группу ${}^{(n)}G$ преобразований переменных $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$. «Уравнение (19) допускает группу G» означало, что левая часть (19) является инвариантом группы ${}^{(n)}G$. Оказывается, что группы G и ${}^{(n)}G$ изоморфны, и вопрос о разрешимости уравнения (19) определяется структурой группы G.

Перечислив все группы на плоскости, Ли дал полную картину условий разрешимости в радикалах уравнений (19).

Вернемся теперь к теореме (*) и покажем, как получается этот фундаментальный результат. Итак, мы имеем уравнение

$$A(f) = a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{15}$$

и цепочку идеалов $\quad L_{n-1} \supset L_{n-2} \supset \ldots \supset L_1 \supset 0. \qquad (23)$

Будем считать (это всегда возможно), что алгебре L_r, $r = 1, \ldots, n-1$, отвечает базис $X_1, \ldots, X_r$. Запишем систему уравнений:

$$A(f) = 0, \ X_1 f = 0, \ \ldots, \ X_{n-2} f = 0. \tag{24}$$

Скобка (U, V) любых операторов U и V этой системы — линейная комбинация всех ее операторов, т. е. это полная система. Пусть u — ее решение. Любое другое решение (24) — функция от u. Так как уравнение (15) допускает и оператор X_{n-1}, то $(X_{n-1}, A) = \lambda_{n-1} A$ и, кроме того, $(X_{n-1}, X_i) \subset L_i$, $i = 1, \ldots, n-2$, откуда следует, что $X_{n-1} u = \varphi(u)$ — также решение системы (24).

Пусть $u_1 = \int \frac{du}{\varphi(u)}$. Из свойства $X\Theta(u) = \Theta'(u) Xu$ любого оператора X следует $X_{n-1} u_1 = 1$.

Таким образом,

$$A u_1 = 0, \ X_1 u_1 = 0, \ \ldots, \ X_{n-2} u_1 = 0, \ X_{n-1} u_1 = 1.$$

Из этой системы линейных алгебраических относительно $\frac{\partial u_1}{\partial x_i}$ уравнений найдем $\frac{\partial u_1}{\partial x_i} = \psi_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, откуда сама функция u_1 по ее производным находится с помощью квадратуры.

Сделаем теперь в (15) замену переменных $\tilde{x}_1 = u_1$, $\tilde{x}_2 = x_2, \ldots, \tilde{x}_n = x_n$. Мы получим уравнение того же типа, но не содержащее производной по x_1 (эта переменная будет теперь содержаться в коэффициентах в качестве параметра). К полученному уравнению применимы те же рассуждения, что позволит найти в квадратурах его решение u_2. Повторяя снова те же рассуждения, получим $n-1$ решений (15) с помощью квадратур и алгебраических действий.

Насколько можно судить, Ли пришел к теореме (*) уже в начале 80-х годов (не случайно он разрешимые группы назвал интегрируемыми). Однако ни в одной из своих последующих многочисленных статей он не выделял эту теорему особо. Она, можно сказать, растворена у Ли в ряде других результатов об уравнениях, допускающих группы. Между тем теорема (*) звучит совершенно аналогично теореме о разрешимости алгебраического уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (25)$$

в радикалах.

Согласно теореме Гаусса (1801 г.), любое уравнение (25) имеет корень, вещественный или комплексный (отсюда, как показал Безу, вытекает, что оно имеет n корней). При $n \leqslant 4$ корни можно выразить через коэффициенты уравнения в виде явных формул, содержащих арифметические действия и радикалы $\sqrt[m]{\ }$. Из школьного курса мы знаем, что существуют уравнения сколь угодно высокой степени, для которых это также имеет место, например двучленные: $x^m=a$. Но, как показали почти одновременно Абель и Руффини, при $n \geqslant 5$ уравнения (25) в радикалах, вообще говоря, не решаются. Полный ответ на вопрос о разрешимости уравнения (25) в радикалах дает теория Галуа.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — корни уравнения (25). Между ними всегда существуют рациональные зависимости: $x_1+x_2+\ldots+x_n=-a_1/a_0$,

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0}, \ \ldots,$$

$$x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

Кроме этих соотношений, называемых формулами Виета, между $x_1, \ldots x_n$ могут существовать и иные, тоже рациональные зависимости.

Пусть R — поле рациональных чисел [2] и R $(a_0, \ldots,$

[2] См., например: Постников М. М. Основы теории Галуа. — М., 1960, гл. I; или курсы высшей алгебры.

$a_n)=K$ — его расширение — поле, полученное добавлением к R коэффициентов $a_0, \ldots, a_n$ (если $a_0, \ldots, a_n$ рациональны, то K, разумеется, совпадает с R). Пусть $\mathfrak{M}$ — совокупность всех рациональных соотношений между $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из K. Группой Галуа G уравнения (25) называется группа, состоящая из перестановок,

$$\begin{pmatrix} x_1, & \ldots, & x_n \\ x_{k_1}, & \ldots, & x_{k_n} \end{pmatrix}, \ k_1, \ \ldots, \ k_n=1, \ \ldots, \ n,$$

корней $x_1, \ldots, x_n$, сохраняющая $\mathfrak{M}$, т. е. переставляющая друг с другом соотношения из $\mathfrak{M}$ или оставляющая их без изменения. Согласно теореме Галуа, уравнение (25) разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда его группа G разрешима.

Термин «разрешимые группы» у Галуа и Ли имеет одинаковый смысл, но понятий «поле» и его «расширение», на которых основывается теория Галуа, у Ли не было. В этом смысле дальше пошел Пикар (1885 г.), рассмотревший применительно к линейным дифференциальным уравнениям поля рациональных функций и их расширения, которые он строил с помощью квадратур. Те же идеи для нелинейных уравнений применил Вессио (1906 г.). (Современное изложение этих результатов, основанное на позднейших работах Ритта (1932 г.) и Колчина (1948 г.), содержится в книге И. Капланского «Введение в дифференциальную алгебру» (М., 1959), которая не аппелирует к концепциям Ли).

Здесь уместно коснуться дальнейших связей и аналогий алгебраических и дифференциальных уравнений.

Уравнение пятого порядка (простейшее уравнение (25), не решаемое в квадратурах), как показал в конце XVII в. Чирнгаузен, приводится к однопараметрическому виду $y^5+ky+1=0$ путем последовательности арифметических действий и решений двучленных (т. е. тоже однопараметрических) уравнений

$$x^m=b_m, \quad m=2, \ 3, \ 4.$$

Преобразование Чирнгаузена приводит к алгебраической проблеме резольвент, которая в общих чертах сводится к следующему. Задано уравнение (25). Требуется свести его к последовательности однопараметрических уравнений или уравнений с возможно меньшим числом параметров. Проблемой резольвент в 80-х годах XIX в. занимался Клейн. Затем она явилась предметом важных исследований Гильберта. Наиболее общие результаты по проблеме резольвент получил в 30—40-х годах нашего столетия Н. Г. Чеботарев (при этом разными авторами уточнялась формулировка проблемы).[3] Существенную роль в этих исследованиях Чеботарева играл вопрос о вложении группы Галуа уравнения (25) в некоторую группу Ли (Николай Григорьевич говорил: «Оденем дискретную группу непрерывной»).

Насколько нам известно, общей теории резольвент для дифференциальных уравнений пока не существует, но по аналогии с алгеброй простейшая ее задача может быть сформулирована так: дано дифференциальное уравнение, требуется провести его редукцию к последовательности нескольких однопараметрических (параметр—функция) уравнений. Теория Ли позволяет в ряде случаев дать решение этой задачи. Ограничимся уравнением третьего порядка.

Пусть оно допускает группу G_3 (см. с 165). Тогда, если G_3 разрешима, уравнение решается в квадратурах, т. е. сводится к конечному числу однопараметрических уравнений $y'=\varphi(x)$ и действий, не выводящих нас за пределы элементарных операций. Если G_3 не разрешима, задача сводится еще к уравнению Рикатти:

$$y'+Py^2+Qy=R.$$

Последнее линейным преобразованием $y=a(x)z+b(x)$ легко приводится к однопараметрическому виду:

$$z'+z^2=k(x)$$

(параметр — k). Оператор $k \to z$ обращения этого уравнения («резольвента Рикатти») — простейшее обобщение квадратуры.

Можно подумать, что в наш век численных методов и ЭВМ вопрос о решении дифференциальных уравнений в квадратурах имеет лишь историческое значение. Такое мнение ошибочно. В современной теории управления (если

---

[3] Чеботарев Н. Г. Проблема резольвент. — В кн.: Юбилейный сборник Академии наук. М., 1947.

говорить, например, о непрерывных системах) важнейшую роль играют уравнения

$$f(t,\ y(t),\ \ldots,\ y^{(n)}(t);\ k_1(t),\ \ldots,\ k_s(t))=0 \tag{26}$$

с управляющими (функциональными) параметрами $k_1, \ldots, k_s$.

Равенство (26) задает (при соответствующих начальных или граничных условиях на y) оператор $(k_1, \ldots, k_s) \to y$, конкретное выражение которого через квадратуры или комбинации квадратур от k (либо через те или иные резольвенты) дает существенную информацию об y, позволяющую делать заключения об экстремумах y, динамике его изменения при варьировании k и т. д.

Линейные представления. Свое общее определение группы преобразований Ли построил на основе понятия «группа линейных преобразований», которое было ориентиром на всех этапах развития его теории. Это хорошо видно из совместного с Шефферсом его труда [I, 128], где все вопросы изложены сначала применительно к линейным группам, занимающим половину этой большой книги. В геометрических теориях второй половины XIX в. и в физических приложениях XX в., особенно в квантовой физике, линейные группы занимают доминирующее место. Связующим звеном между группами того или иного вида и линейными группами является теория представлений, которой в настоящее время посвящена огромная литература. Но если говорить о группах Ли, то все началось с одного простого факта, непосредственно вытекающего из понятия «лиевская алгебра».

Пусть заданы две какие-либо группы g и $\bar{g}$, соответственно с элементами $a, b, \ldots$ и $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$ Отображение $\bar{g}=\varphi(g)$ группы g в группу $\bar{g}$ называется гомоморфизмом, если из $\bar{a}=\varphi(a)$, $\bar{b}=\varphi(b)$ следует $\bar{a}\bar{b}=\varphi(ab)$ (в частности, если φ взаимно однозначно, мы имеем изоморфизм g и $\bar{g}$). Если $\bar{g}$ — группа линейных преобразований, гомоморфизм φ называется линейным представлением группы g.

Пусть g — группа Ли и L — ее алгебра Ли с операторами $X_1, \ldots$ При фиксированном X равенство

$$U=(X,\ Y) \tag{27}$$

выражает линейное преобразование $Y \to U$, ибо $(X, \lambda Y) = \lambda(X, Y)$ и $(X, Y_1+Y_2)=(X, Y_1)+(X, Y_2)$. Таким образом, каждому $X \in L$ отвечает линейное преобразование A_x. При этом

$$A_{x+y} = A_x + A_y.$$

Нетрудно также показать, что

$$A_{(x,\, y)} = A_x A_y - A_y A_x,$$

а тождество Якоби в L влечет за собой аналогичное соотношение между A_x, A_y, A_z. Алгебра L приводит, таким образом, к алгебре Ли $\mathscr{L}$ линейных преобразований A, которой в силу соответствия между группами и алгебрами Ли (см. с. 159) отвечает некоторая группа Ли $\mathfrak{G}$. Она является группой линейных преобразований и называется присоединенной группой группы G. Сказанное можно изобразить диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} g & \rightarrow & L \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{G} & \leftarrow & \mathscr{L} \end{array}$$

Из соответствия между L и $\mathscr{L}$ следует, что $g \rightarrow \mathfrak{G}$ — гомоморфизм. Итак, мы имеем линейное представление $\mathfrak{G} = \varphi(g)$ группы g. Но это, вообще говоря, не изоморфизм: центр [4] группы (он может состоять иэ бесконечного или конечного числа элементов) переходит в единственный элемент — единицу группы $\mathfrak{G}$.

Естественно спросить, существует ли для произвольной группы Ли изоморфное отображение на линейную группу преобразований?

Этот вопрос, мимо которого не мог пройти и Ли, вызывал оживленный интерес и в XX в. К середине 30-х годов, в первую очередь благодаря трудам таких корифеев, как Э. Картан, Г. Вейль и И. фон Нейман, теория представлений групп получила мощное развитие. Но названная проблема все еще оставалась открытой. Решение ее было дано в 1934 г. аспирантом Н. Г. Чеботарева, И. Д. Адо (р. 1910) в классической работе, первоначально представленной в качестве кандидатской диссертации. Ответ оказался положительным: для любой группы Ли изоморфное линейное представление существует [I, 49, с. 378—379].

---

[4] Центром группы называется множество ее элементов, перестановочных со всеми элементами этой группы.

Бесконечные группы. С начала 80-х годов Ли все больше привлекает перспектива построения теории бесконечных групп преобразований. Все его предыдущие работы относились к группам преобразований $x'^i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r)$, в которых фигурирует конечное число r параметров a («конечные группы»). Эти результаты, вообще говоря, не переносятся на случай, когда параметров счетное множество, $a=(a_1, a_2, \ldots)$. Уже в XIX в. было в принципе ясно, что задание последовательности $a_1, a_2, \ldots$ равносильно заданию некоторой функции $u(x)$, например, если $a_1, a_2, \ldots$ — коэффициенты ее разложения в ряд Фурье или Тейлора. Не вдаваясь в подробности, Ли полагал, что в бесконечных группах роль точки $(a_1, \ldots, a_r)$ в пространстве параметров должна играть функция переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Из писем Ли Майеру: «В последнее время мне как будто удалось получить важные результаты по теории групп. Раньше я ограничивался группами с конечным числом параметров. Сейчас меня интересуют бесконечные группы. Когда-то, в 1872, 73 годах, я уже сталкивался с ними. Так, группа всех контактных преобразований, очевидно, бесконечная. Вот еще простые примеры. Пусть имеется уравнение второго порядка

$$Ar + Bs + Ct + Dp + Eq + Fz = 0$$

с коэффициентами — функциями от x, y. Оно допускает бесконечную группу $z'=cz+f(x, y)$, $c=\text{const}$; c и f произвольны. Это же относится к уравнению $s=e^{cz}$» [I, 130, т. 6, VI, с. 777].

«В последнее время меня продолжают интересовать бесконечные группы. Я располагаю теперь рядом общих теорем о них. Особенно меня интересуют инварианты этих групп, аналогичные тем, которые были изучены мною для конечных групп примерно 10 лет тому назад. . .» [там же, с. 779].

«Существуют бесконечные группы, которые не оставляют инвариантными никаких уравнений. Очень трудно было их найти, но мне это удалось. . .» (там же, с. 781).

Из письма Клейну: «Хочу познакомить тебя с моей важной работой по бесконечным группам. Она знаменует существенный прогресс в моих исканиях. Прошел год после моего отъезда из Лейпцига. Прямо-тами ужасно, что здесь, в Христиании, никто не интересуется моими работами» [там же, с 787].

Ли построил обширную теорию бесконечных групп преобразований. Она в основном изложена в работах [I, 94, 106,107], включенных в шестой том его собрания сочинений. Трудности здесь начались уже с первых шагов. Неясно было уже само определение бесконечной группы. Ли пытался их определять и классифицировать, исходя из уравнений в частных производных (подобно простым примерам в приведенном выше письме Майеру).

Бесконечные группы имеют погруппы любой конечной размерности. Исходя из этого, Ли вводит понятие «инфинитезимальный оператор» бесконечной группы:

$$X=\xi_k\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Совокупность этих операторов образует алгебру Ли L группы G в том же смысле, что и для конечных групп. Эта алгебра бесконечномерна: ξ_k, отвечающие ее элементам (операторам x), зависят от произвольных функций. Последнее весьма затрудняет классификацию бесконечных групп преобразований и нахождение полной системы ее инвариантов. Эту трудность Ли удалось (в рамках его определения) обойти за счет возможности распространения на бесконечные группы понятий «транзитивность», «примитивность», «импримитивность» и «подобие». Вопросы классификации бесконечных групп были рассмотрены Ли в громадном мемуаре [I, 106].

Вообще, работы Ли по бесконечным группам известны значительно меньше, нежели его результаты по конечным группам преобразований, которым посвящены его книги с Энгелем и Шефферсом, многочисленные старые и новые книги других авторов.

Приведем теперь определение Ли. Множество вектор функций $F=(F_1,\ldots, F_n)$ задает бесконечную группу G преобразований

$$u_i=F_i(x_1, \ldots, x_n),\ i=1, \ldots, n, \tag{1}$$

в R^n, если F_i — решения некоторой системы дифференциальных уравнений

$$W_k\left(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_n; \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial x_n}; \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}, \ldots\right)= 0,\ k=1, 2, \ldots, \tag{2}$$

причем суперпозиция двух каких-либо ее решений F и Φ,

$$\Psi_i = \Phi_i(F_1(x), \ldots, F_n(x)),$$

также является решением этой системы.

Предполагается, что уравнения системы (2) независимы между собой в алгебраическом и дифференциальном смысле. Например, группа g преобразований (1) с якобианом j, равным единице. В общем случае (2) называется определяющей системой для группы G. Для g определяющее уравнение $j-1=0$.

В определении речь идет о полугруппе, но исходя из того, что к множеству преобразований можно подключить и единичное преобразование и все равенства (1) предполагаются диффеоморфизмами, Ли показывает, что этим самым определена и группа. Он подчеркивает локальность своих рассмотрений бесконечных групп: «Я ограничиваюсь преобразованиями в некоторой окрестности единицы».

Краеугольным камнем теории является построение инфинитезимальной техники бесконечных групп. Ли устанавливает, что коэффициенты ξ_k операторов X алгебры L удовлетворяют некоторой системе линейных уравнений в частных производных. Как и для конечных групп, инварианты получаются как решения уравнений $Xf=0$, где $X \in L$.

Подробнейшим образом изучены бесконечные группы на плоскости. Им посвящены три главы мемуара [I, 106]. Вот один из многочисленных указанных там результатов.

Существует шесть типов L — алгебр интранзитивных групп на плоскости:

$$1)\ \alpha(x)q;\ 2)\ \alpha(x)q,\ \beta(x)yq;\ 3)\ \alpha(x)q,\ \varphi_1(x)yq,\ \ldots,$$
$$\ldots,\ \varphi_m(x)yq;\ 4)\ \alpha(x)q,\ \beta(x)yq,\ \gamma(x)y^2q;\ 5)\ \xi(y)q;$$
$$6)\ \eta(x, y)q,$$

где $q=\partial/\partial y$ и для каждой группы α, β, γ, ξ, η — произвольные, а $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — фиксированные функции.

Преодолев значительные технические трудности, Ли сумел дать ответ и на важнейший вопрос: как восстановить группу G по ее алгебре L? Дело свелось к нахождению системы уравнений (2) по операторам X. Для этой цели Ли, так же как и для конечных групп (см. с. 95), продолжает операторы X на производные и находит дифференциальные инварианты W_1, $W_2, \ldots$. Определяющая система (2) получается приравниванием их нулю.

Результаты Ли по бесконечным группам продолжили его ученики А. Тресс (1894 г.), П. Медолаги (1898 г.), Е. Вессио (1904 г.) (см. указания на их работы в главах VII и VIII книги [II, 40]).

Блестящие дальнейшие исследования по бесконечным группам (структуры, геометрия,. . .) провел в ряде работ Картан. Они собраны во втором томе его сочинений [II, 57].

Из работ нового времени хочется отметить монографию Л. В. Овсянникова [II, 40], где дано оформление результатов Ли и его последователей в банаховых пространствах. Там же содержатся многочисленные оригинальные результаты автора по общей теории и приложениям к физическим проблемам (по этим вопросам см. также [II, 27]).

Эти и другие работы показывают, что группы Ли, конечные и бесконечные, находят новые многообразные области приложений. В самое последнее время они оказались полезными и в кибернетике.[5]

Основания геометрии

Мы много говорили о математической интуиции Ли, о его достижениях в различных областях геометрии. Здесь нам предстоит рассказать о работах Ли по основаниям геометрии, по ее аксиоматике. Они столь же обстоятельны, как и другие работы Ли, отличаются такой же тщательной проработкой деталей, но, хотя здесь снова встречаются группы, эти работы по своему характеру стоят в стороне от других работ Ли, раскрывают, как нам думается, новые стороны его дарования.

Работы Ли по аксиоматике геометрии были навеены статьей Гельмгольца «О фактах, лежащих в основании геометрии» (1868 г.), о которой Ли узнал от Клейна еще на заре их знакомства. То обстоятельство, что знаменитый немецкий физиолог, оптик, акустик, энергетик, один из творцов современной теоретической гидромеханики обратился к геометрии, уже само по себе знаменательно. Хотя Ли в основном и являлся чистым математиком, он интересовался прогрессом естествознания своего времени. Личность и творчество Гельмгольца не могли его не привлекать,

---

[5] Брокетт Р. У. Алгебры и группы Ли в теории управления. — В кн.: Математические методы в теории систем / Пер. с англ. — М., 1979, с. 174—220.

тем более что Гельмгольц был близок с университетским учителем Ли Бьёркнесом, поддерживал с ним переписку. Статья Гельмгольца привлекла Ли еще и тем, что в ней очевидным образом просматривались непрерывные группы, о чем автор не упоминал. Но Ли обратился к ней не скоро. В 1890 г. он публикует две большие работы под общим названием «Об основаниях геометрии» (им предшествовала маленькая заметка «Замечания о работе Гельмгольца» [I, 86]), в которых содержится анализ рассуждений Гельмгольца, их критика, постановка «Проблемы Римана-Гельмгольца» и ее решение. Весь этот материал в систематическом и дополненном виде составляет часть V третьего тома Трактата о непрерывных группах [I, 126], куда Ли включил и свои соображения по поводу знаменитой речи Римана «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (1854 г.), на которую ссылается и Гельмгольц, а также свою критику некоторых работ Клейна, Киллинга и Линдемана 80-х годов, в которых затрагиваются проблемы, связанные с геометрическими идеями Римана и Гельмгольца.

По этим вопросам мы хотим отослать к сборнику «Об основаниях геометрии» [II, 37], где содержится перевод речи Римана[1] (с примечаниями Г. Вейля), упомянутая маленькая заметка Ли (единственная его работа, переведенная на русский язык), статьи по основаниям геометрии Гельмгольца, Бельтрами, Клейна, Пуанкаре, Картана (все они, за исключением статьи Картана (1927 г.), воспроизводятся по дореволюционным переводам).

Особого упоминания заслуживает имеющаяся в этом сборнике, большая статья Клейна «Отзыв о сочинении Ли „Теория групп преобразований, т. III“». Она была написана в 1897 г. в связи с тем, что Казанское математическое общество учредило тогда премию им. Лобачевского, и работы Ли были некоторыми из его иностранных коллег представлены на ее соискание. В начале своего отзыва Клейн, отмечая, что присланный том Ли соответствует условиям конкурса, говорит, что он «так безусловно превосходит все другие сочинения, которые могут быть с ним сравниваемые, что сомнение относительно присуждения премии едва ли может возникнуть». Сделав такое заявление, Клейн в своей статье, словно забыв о поставленной перед ним задаче, очень бегло говорит о работах Ли, тут же

[1] Опубликована в 1868 г. Дедекиндом.

расстается с ними и со свойственным ему блеском дает общую картину тогдашнего состояния геометрических идей.

Исторически сложилось так, что работа Гельмгольца и исследования Ли обычно цитируются вместе: «как показали Гельмгольц и Ли» (см., например, все статьи в [II, 38], где они упоминаются), хотя они совершенно различны по объему содержания и математическому уровню. Несомненно, здесь сказался колоссальный авторитет великого немецкого ученого.

Идеи Гельмгольца. Свою статью Гельмгольц начинает словами: «Мои исследования о пространственных восприятиях в области зрения привели меня к исследованию о происхождении смысла наших общих воззрений о пространстве. . . В этих исследованиях я, в сущности, шел по тому же пути, что и Риман в своей недавно опубликованной диссертации» [II, 38, с. 366]. Статья Гельмгольца, несмотря на ее довольно элементарный математический характер (он использует лишь элементарную алгебру, линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и разложение функций в степенные ряды, ограничиваясь линейными членами) носит гораздо более законченный характер, нежели гениальный набросок Римана.

В основу своих построений Гельмгольц кладет понятие «свободная подвижность пространства», что продиктовано, с одной стороны, интуитивно физическими соображениями, с другой — тем, что он имел в виду три конкретные геометрии: а) эвклидову, б) Лобачевского, в) сферическую. Он не вдается ни в какие подробности об этих геометриях, лишь вскользь упоминая их в конце работы, но именно для них и только для них имеет место свободная подвижность, выражаемая в возможности наложения (конгруэнтности) фигур, обладающих одинаковыми свойствами (три известных из школьного курса признака равенства треугольников; для геометрий Лобачевского и сферической к этому прибавляется признак равенства их по трем углам).

Все три геометрии могут быть реализованы, если за прямые принять линии кратчайшего расстояния (геодезические линии) на поверхностях постоянной гауссовой кривизны K: для первой $K=0$ — эвклидова плоскость; для второй $K<0$ — псевдосфера; для третьей $K>0$ — сфера с отождествленными диаметрально противоположными точками, если мы требуем, чтобы «прямые» — дуги большого круга — пересекались только в одной точке (эллиптическая геометрия).

В каждом из этих случаев постоянство кривизны K обеспечивает свободную подвижность — возможность движения поверхности самой в себе.

Обратимся к аксиомам Гельмгольца. Ли резюмирует их так. «Все движения в пространстве R^3 задаются преобразованиями

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, x_3, a_1, \ldots, a_r), \ i = 1, 2, 3. \qquad (1)$$

При этом требуется:

I. f_i — аналитические функции своих аргументов.

II. Любые две точки x и y имеют по отношению к каждому движению (т. е. для каждого выбора параметров a) инвариант $d(x, y)$ — „расстояние" (в эвклидовом пространстве —

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}).$$

III. (Свободная подвижность). Любая точка может перейти в любую другую точку. Если закрепим точку $\overset{1}{x}$, то всякая другая точка $\overset{2}{x}$ может принимать положения, согласно уравнению

$$d\left(x, \overset{1}{x}\right) = d\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{x}\right).$$

Если закрепим две точки $\overset{1}{x}$ и $\overset{2}{x}$, то всякая третья точка $\overset{3}{x}$ может занимать положения, определяемые двумя уравнениями:

$$d\left(x, \overset{1}{x}\right) = d\left(\overset{3}{x}, \overset{1}{x}\right), \ d\left(x, \overset{2}{x}\right) = d\left(\overset{3}{x}, \overset{2}{x}\right).$$

Если, наконец, три точки фиксированы, то все точки пространства остаются неподвижными, за исключением тех случаев, когда третья точка $\overset{3}{x}$ занимает особое положение среди первых двух.

К этому Гельмгольц присоединяет еще „аксиому монодромии":

IV. Если твердое тело вращать вокруг оси, не меняя направления вращения, то оно пройдет мимо начального положения.

Гельмгольц утверждает, что IV не есть следствие аксиом I—III, но, кроме случая $n=2$ (n — размерность пространства, — *Е. П.*), он не дает доказательства этого» [II, 38, с. 384].
Дифференцируя равенства (1),

$$dx'_i = A_{ij}(x)\,dx_j, \tag{2}$$

Гельмгольц рассматривает вместо (1) преобразование $dx \to dx'$, т. е. линеаризует (1), переходя к касательному пространству, и на основании своих аксиом показывает, что при этом остается инвариантной и квадратичная относительно dx_i форма:

$$ds^2 = g_{ij}dx_i dx_j, \tag{3}$$

или, что то же, поверхность второго порядка относительно dx_i переходит сама в себя.

Ли заметил, что это может и не иметь места: например, если $A=\rho\,(x)\,U$, где U — ортогональная матрица, то в точке $\mathring{x}$, где $\rho\,(x)=0$, сфера $|\,dx\,|^2=C$ переходит в точку. Гельмгольц приходит к выводу, что его аксиомам соответствуют три геометрии (эвклидова, Лобачевского, сферическая), о которых говорил и Риман.

Сходство с концепциями Римана Гельмгольц усматривает и в том, что (3) выражает риманову метрику — квадрат расстояния от x до соседней точки $x+dx$.

Этой небольшой, но важной, хотя и скромной по методам работе знаменитого ученого Ли сопоставляет целый поток рассуждений, формул и теорем. Обратимся теперь к нему [I, 126, т. 3, ч. V].

Проблема Римана—Гельмгольца. Дадим сначала два определения. Напомним, что группа

$$x = f(x,\ a), \quad x,\ x' \in R^n,\ a \in R^r, \tag{4}$$

транзитивна, если для любых двух точек x и x' существует (хотя бы одно) преобразование группы, переводящее x в x'. Таким образом, для любых x, x' уравнение (4) должно быть разрешимо относительно a. Отсюда $n \leqslant r$.

Совокупность преобразований из G, оставляющих инвариантным некоторое подмножество $V \subset R^n$, в частности точку или прямую, является группой. Это, вообще говоря, подгруппа группы G. Она называется ее стационарной подгруппой G относительно V.

Изложение Ли начинается с исторического очерка и общих, не отличающихся оригинальностью соображений об аксиматике. Говоря о координатах точки, об арифметизации континуума, Ли отмечает, что она связана с теорией иррациональных чисел и ссылается при этом на работы Кантора. После большой чисто аналитической главы, носящей подготовительный характер, Ли переходит к очень подробному обсуждению работы Гельмгольца. Его заключение о ней: «Я пришел к выводу, что пути, прокладываемые автором, не могут быть последним словом в этой области. . . Дедукция Гельмгольца содержит пробел, который, впрочем, не влияет на окончательный результат, по крайней мере для трех измерений. Мне, однако, не удалось его заполнить теми простыми средствами, которыми пользовался Гельмгольц» [II, 37, с. 385].

Ли прежде всего замечает, что аксиомы Гельмгольца носят групповой характер, и он постулирует: движения в R^n представляют собой группу $G=G_r^n$. Далее он формулирует «Проблему Римана-Гельмгольца»: при каких условиях эта группа задает геометрию Эвклида и обе неэвклидовы геометрии.

Свои условия Ли формулирует в виде аксиом.

1. G транзитивна и имеет порядок $r=\frac{n(n+1)}{2}$ (для группы движений в R^3 — порядок 6). Требуется существование у f (см. (4)) производных по всем аргументам и существование непрерывных производных $\partial^2 f/\partial x \partial a$.
2. G должно иметь инвариант $d(x, y)$ от двух точек, но инварианты от большого числа точек выражаются через d (площадь треугольника выражается через длины его сторон. . .).
3. Существует инвариантная относительно G последовательность подпространств размерностей $0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$:

$$R^0 \subset R^1 \subset \ldots \subset R^{n-1}.$$

Для групп в R^3 — точка, прямая, через нее проходящая, и плоскость, содержащая эту прямую. Например, G группа переносов в R^3: $x'=x+a$, $y'=y+b$, $z'=z+c$. Перейдем к однородным координатам: $x=\frac{\xi_1}{\xi_4}$, $y=\frac{\xi_2}{\xi_4}$, $z=\frac{\xi_3}{\xi_4}$. Для G: R^0 — точка ($\xi_2=0$, $\xi_3=0$, $\xi_4=0$), R^1 — прямая ($\xi_3=0$, $\xi_4=0$), R^2 — плоскость ($\xi_4=0$).

Все понятия, фигурирующие в этих формулировках, Ли исследовал самым подробным образом. Его рассмотрения выходят далеко за пределы сформулированной проблемы. Так, еще в первом томе того же сочинения он устанавливает теоремы относительно транзитивных групп. Применительно к аксиоме 2 доказывается, что в R^3 существует 11 типов групп, удовлетворяющих этому условию. В связи с аксиомой 3 подробно исследованы стационарные подгруппы группы G.

Ли доказывает, что при выполнении аксиом 1, 2, 3 проблема Римана—Гельмгольца имеет такое решение: G группа одного из трех типов: 1 — группа эвклидовых движений; 2 — группы обоих неэвклидовых пространств, т. е. группа проективных преобразований, оставляющая инвариантным абсолют $x_1^2+\ldots+x_n^2=1$ (геометрия Лобачевского), 3 — группа проективных преобразований, при которой инвариантен абсолют $x_1^2+\ldots+x_n^2+1=0$ (эллиптическая геометрия). Или, что то же, в R^n существует инвариантная относительно G риманова метрика:

$$ds^2=\frac{\sum\limits_1^n dx_i^2}{\left(1+\frac{1}{4}K\sum\limits_1^n x_i^2\right)^2},$$

характеризующая, как показал Риман, пространства постоянной кривизны K.

Результат согласуется с выводами Гельмгольца, но Ли не пользуется его аксиомой монодромии. Он разъясняет, что она означает наличие у G однопараметрической периодической группы движений.

Касаясь римановой геометрии, Ли рассматривает еще группы, оставляющие инвариантным уравнение Монжа $g_{ij}dx_i dx_j=0$ (пространственно временной конус в теории относительности). Он имеет в виду также и случай, когда эта форма положительно определенная, и, следовательно, группа G действует в комплексном пространстве.

К разграничению комплексных и вещественных групп Ли пришел лишь в 90-х годах. Этому вопросу он посвятил целую главу [I, 126, т. 3, гл. 25]. Подчеркивая, что общая теория одинаково верна как в комплексных, так и в вещественных пространствах, Ли отмечает, что в конкретных вопросах, например в связи с инвариантными многообразиями, их приходится различать. Позднее Картан и другие показали, что в теории структуры групп это различие может быть очень существенным.

Содержащаяся там же «Критика некоторых новых исследований по основаниям геометрии» (гл. 24) направлена главным образом против Киллинга. Придираясь к частностям и редакционным неточностям, Ли в резкой форме критикует талантливого коллегу, проходя мимо того факта, что его «Учение о пространственных формах» знаменует очень важный шаг в развитии геометрии. Время восстановило справедливость: эти результаты Киллинга (так же как и его замечательные работы по непрерывным группам) получили полное признание. В 1901 г. он был за них удостоин премии Лобачевского, а впоследствии они стали достоянием курсов высшей геометрии (см., например, изложение идей Киллинга у Н. В. Ефимова [II, 26]).

Пятая проблема Гильберта. Листая сборник «Об основаниях геометрии» [II, 38], мы находим в нем большую статью Пуанкаре «О работах Гильберта», представляющую собой подробный и глубокий анализ цикла работ Гильберта по основаниям геометрии, опубликованных в 1899—1903 гг. Она была написана в связи с представлением их к премии Лобачевского. Причина, почему мы здесь упомянули эти «составившие эпоху» (Пуанкаре) работы Гильберта, следующая. В центре внимания Гельмгольца и Ли были аксиомы конгруэнтности и, соответственно, три названные выше геометрии. Но это лишь одна система аксиом в общей гильбертовой геометрической аксиоматике. Указанная Гильбертом логическая возможность других «негеометрий» помимо Лобачевского и сферической — неархимедовой, непаскалевой, недезарговой — произвела и производит громадное впечатление. Но Гильберт подчеркивал в геометрии и роль непрерывных групп [II, 38, с. 475]. При этом он не налагал на задающие их функции (4) условие дифференцируемости, они не заложены априорно в наших геометрических представлениях. Но без дифференцируемости нет теории Ли, нет его инфинитезимального метода. Исходя из этого, Гильберт на втором Международном математическом конгрессе (Париж, 1900 г.) сформулировал свою «Пятую проблему»: не содержится ли условие дифференцируемости в остальных условиях Ли, определяющих его непрерывные группы?

Гипотеза подтвердилась. Для различных важнейших классов групп решение проблемы было дано И. фон Нейманом (1933 г.) и Л. С. Понтрягиным (1934 г.) [II, 42, с. 287, 342]. Дальнейшие результаты были получены К. Шевалле (1941 г.) и А. И. Мальцевым (1946 г.). Полное решение «Пятой проблемы Гильберта» было дано в 1952 г. Э. Глиссоном и Д. Монтгомери.

Из работ последних лет: интегральные инварианты

К числу последних работ Ли относятся его исследования по интегральным инвариантам. Все эти результаты, равно как и последние его работы по бесконечным группам и их приложениям, содержатся в шестом томе собрания его сочинений. Во всех отношениях, в том числе и в смысле тщательного продумывания деталей, эти статьи и мемуары написаны на том же уровне, что и предыдущие публикации Ли. Вместе с тем здесь Ли уже даже и в печати не мог воздержаться от проявления своей претенциозности — того, что ранее было заметно лишь сравнительно узкому кругу его близких и коллег.

Уже после выхода шести его огромных книг, после того, как к его тематике подключились многие другие исследователи, после многочисленных похвальных, подчас восторженных высказываний Дарбу, Клейна, Пуанкаре, Пикара,. . .: «Эти мои общие исследования, к которым впоследствии добавились результаты моих последователей, еще не получили того признания, которого они заслуживают» [I, 130, т. VI, раб. XXIX, с. 703].

«*Наконец мне удалось разъяснить математическому миру* (. .der mathematischen Welt klar zu machen) (курсив мой, — *Е. П.*), что именно дифференциальные уравнения составляют ту область, в которой особенно сильно проявляется значение моей теории групп. . .» (никто и не спорил с Ли об этом).

«В цитированных выше работах 1874—1877 годов я дал действенное решение названной проблемы, и к этой важной теории позднейшие работы других математиков по существу предмета ничего важного не добавили» (вопреки тому, что Ли сам раньше говорил, например, в книге [I, 126, т. III]).

Задумывался ли он над тем, какое впечатление могут произвести подобные высказывания? По-видимому, нет, но, вероятно, был бы рад оправдаться словами, которые

Гете вложил в уста Тассо: «Abwesend schein ich nur, ich bin entzückt» — Я лишь кажусь помешанным, я охвачен вдохновением.

Интегральные инварианты Пуанкаре и Ли. Понятие «интегральный инвариант» (ИИ) было введено впервые Пуанкаре, который показал его важность в проблемах нелинейной динамики, особенно небесной механики.

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi_n}, \tag{1}$$

где ξ_i — функции от $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $x(t)$ — решение (1) в момент t при начальном условии $x(t_0) = x_0$. Если x_0 описывает в R^n область D_0, то, соответственно, $x(t)$ опишет в R^n область D_t. Говорят, что

$$I = \int \ldots \int f(x)\, dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_{D_t} f(x)\, dx^n$$

— интегральный инвариант системы (1), если для любого t имеет место

$$\int\limits_{D_t} f(x)\, dx^n = \int\limits_{D_0} f(x)\, dx^n$$

Для случая интеграла любой кратности (интеграла по поверхности, по кривой, . . .) ИИ определяется точно так же.

Как показал Пуанкаре, знание интегрального инварианта системы (1) может дать о ней ту или иную информацию, причем она может быть различной — касаться решений системы или ее вида. Пуанкаре исследовал наиболее важный случай, когда (1) — гамильтонова система уравнений динамики. В любом курсе аналитической механики можно найти теорему Пуанкаре об ИИ гамильтоновой системы, а также ее обобщение — теорему Пуанкаре—Картана.

Вскоре после Пуанкаре, еще при жизни Ли, дальнейшие результаты по ИИ были получены Гурвицем, Кенингсом и Картаном.

Теория ИИ, как это отметил Пуанкаре, а затем осуществил Картан, принимает изящный симметричный (и к тому же инвариантный) вид, если воспользоваться аппаратом косых дифференциальных форм. Например, условие инвариантности интеграла

$$\iint a_{ij} dx_i dx_j, \quad a_{ij} = -a_{ji}, \tag{2}$$

относительно системы (1) выражается равенствами

$$Xa_{ij} + \left\{a_{ki} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} + a_{jk} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right\} = 0, \tag{3}$$

где X — оператор $\xi_k \dfrac{\partial}{\partial x_k}$.

В таком виде эта теория изложена, например, в книге Гурса по проблеме Пфаффа (1922 г.) и в ряде других книг.

Работами своих современников по ИИ Ли очень заинтересовался, поскольку считал, что его теория групп является ключом ко всем разновидностям инвариантов в анализе (и не только в анализе). Этим определяется и претенциозное название его первой работы по ИИ [I, 119]: «Теория интегральных инвариантов — следствие («моей», как хотелось ему сказать, — *Е. П.*) теории дифференциальных инвариантов». Всего Ли посвятил ИИ три довольно большие работы (в совокупности они составляют сто страниц). Надо отдать ему должное, подход Ли к ИИ эффективен и носит весьма общий характер.

В простейшем случае идея Ли выглядит так. Мы скажем, что интеграл

$$I = \int_a^b f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx \tag{4}$$

инвариантен относительно r-параметрической группы преобразований на плоскости G_r^2, если для любого преобразования T этой группы имеет место $TI = I$.

Упрощая этот пример, рассмотрим интеграл

$$I = \int_a^b F(x, y, y')\, dx \tag{5}$$

(кстати сказать, — классический функционал вариационного исчисления) и однопараметрическую группу

$$x_1 = f_1(x, y, t), \quad y_1 = f_2(x, y, t). \tag{6}$$

Мы знаем (см. с. 85), что условие инвариантности функции u относительно группы G сводится к равенству $Xu=0$, где X — оператор этой группы. Это же имеет место и для (5), только здесь оператор действует на подынтегральное выражение.

Итак, пусть

$$X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}$$

— оператор группы (6). Так как под знаком интеграла стоит и производная y', нам нужно продолжить этот оператор:

$$X'=X+\eta_1\frac{\partial}{\partial y'}.$$

Можно показать, что условие инвариантности (5) сводится к равенству

$$0=\int_a^b X'(f\,dx)=\int_a^b X'f\,dx+\int_a^b f\,d(X'x)=$$
$$=\int_a^b (X'f+f(\xi'_x+\xi'_y\cdot y'))\,dx$$

(здесь учтено, что $X'x=\xi$), которое ввиду произвольности пределов интеграла a и b дает

$$X'f+\alpha f=0,\quad \alpha=\xi'_x+y'\xi'_y,$$

или

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}+\eta_1\frac{\partial f}{\partial y'}+\alpha f=0. \tag{8}$$

Таким образом, при заданной группе G, а значит при заданных ξ, η, η_1, любая функция $f(x, y, y')$, для которой (5) — инвариант, удовлетворяет линейному уравнению в частных производных вида (8). Метод решения подобных уравнений хорошо известен (см., например, [II, 22]).

Теперь нетрудно понять, что если задан интеграл (4) и группа G_r^2 с операторами $X_1, \ldots, X_r$, то условие инвариантности (4) относительно этой группы сводится к системе уравнений вида

$$X_1^{(n)}f+\alpha_1 f=0,\ \ldots,\quad X_r^{(n)}f+\alpha_r f=0,$$

в которой $X_\alpha^{(n)}$ — n-е продолжение оператора X_α, т. е. продолжение его на производные $y', \ldots, y^{(n)}$, а $\alpha_i(x, y, \ldots, y^{(n)})$ — функции, которые можно считать известными.

Таким образом, если $r < n+1$, задача разрешима, и вопрос сводится к системе УЧППП.[1]

Эта же идея проводится Ли и применительно к кратным интегралам, в частности к

$$I = \iint \varphi(x, y, z; p, q)\, dxdy. \tag{9}$$

Этот интеграл выдерживает группу (6), если

$$X'\varphi + \alpha\varphi = 0,$$

где

$$X' = X + \pi_1 \frac{\partial}{\partial p} + \pi_2 \frac{\partial}{\partial q}$$

— продолжение оператора $X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + r \frac{\partial}{\partial y}$, а α, π_1, π_2 — функции, которые можно считать известными.

Мы не нашли, однако, в этой работе Ли того, что вынесено в ее название. Его утверждение тем не менее справедливо: условие Пуанкаре инвариантности интеграла $\int \omega = I$, где ω — кососимметрическая форма любой кратности, выражается равенством $X\omega = 0$, в котором X — оператор группы.

Уравнения (1) определяют однопараметрическую группу в R^n, но, чтобы выразить условие инвариантности I относительно этой группы, приходится переходить к ее оператору X, что как раз и соответствует инфинитезимальному методу Ли.

Весьма обстоятельна вторая работа «Применение интегральных инвариантов к дифференциальным уравнениям» [I, 120]. Здесь ставится следующая общая проблема: как можно упростить задачу решения уравнения

$$Xf = \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

если известно, что имеется инвариант I оператора X.

Вопрос формулируется в общем виде — для интегралов любой кратности $\int \varphi dx^n$ в R^n, причем функция φ может зависеть от производных любого порядка. Применительно

---

[1] Некоторые дополнительные подробности, а также примеры, относящиеся к инвариантности интеграла (4), имеются в книге Н. Г. Чеботарева [II, 49, с. 161].

к случаю, приведенному на с. 188, и другим частным случаям формулируется ряд теорем. Они не сложны, но громоздки по написаниям. В некоторых из них показывается, что знание ИИ позволяет найти «последний множитель Якоби» (мультипликатор) уравнения.

Мультипликатором для (10) называется функция $M(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial (M\xi_i)}{\partial x_i} = 0.$$

В ряде вопросов механики системы точек и сплошных сред мультипликатор, как показал Якоби, играет существенную роль. Им же было показано, что если известны мультипликатор и $n-2$ независимых интегралов уравнения (10), то недостающий его $n-1$-ый интеграл (а значит, и любое решение) может быть найден с помощью квадратур.[2] Связь мультипликатора с ИИ была указана еще Пуанкаре. Ли установил серию теорем подобного рода [I, 123]. Одна из них такова.

Пусть $I = \iint \varphi(x, y, z; p, q)\, dxdy$ — инвариант оператора $\xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta\frac{\partial}{\partial z}$. Тогда функция $\alpha_x + \beta_y + \gamma_z$ — мультипликатор уравнения $X = 0$. Здесь α, β, γ определяются так. Запишем равенства $\xi p + \eta q - \zeta = 0$, $\varphi(x, y, z, p, q) = 0$ и найдем из них

$$p = P(x, y, z), \quad q = Q(x, y, z). \tag{11}$$

При этом

$$\alpha = \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right\}, \quad \beta = \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right\}, \quad \gamma = \left\{p\frac{\partial\varphi}{\partial p} + q\frac{\partial\varphi}{\partial q} - \varphi\right\},$$

где скобки $\{\}$ означают, что вместо p, q следует подставить их значения из (11).

Опубликованная посмертно (1904 г.) работа «Интегральные инварианты и дифференциальные уравнения» [I, 124] не окончена. Она представляет собой первую главу, по-видимому, задуманного большого исследования. Здесь изучаются ИИ системы операторов, образующих r-параметрическую группу G. Основное внимание

---

[2] Ли нашел изящное теоретико-групповое толкование этого результата [I, 127, с. 333—347].

уделено случаю $r=2$. Исследование очень обстоятельное. Рассматриваются различные предположения относительно группы G и интеграла J, которые подразделяются на 40 частных случаев. . .

Ли несомненно сказал свое слово в теории ИИ, хотя и в рамках своих прежних идей: в отличие от его предшественников он рассматривал инвариантность относительно r-параметрических групп, коснулся также бесконечных групп и групп контактных преобразований (заметим, что и в наши дни изложение ИИ, так же как их приложений, даже в книгах такого высокого уровня, как лекции Арнольда [II, 19], связывают лишь с однопараметрическими группами), радикально использовал понятие продолжения группы, провел кропотливое исследование приложений ИИ к системам линейных УЧППП.

Все построения Ли в статьях по ИИ «удручающе неинвариантны» (выражение В. И. Арнольда). Это скучно и грустно, но неизбежно при рассмотрении большого количества частных случаев. Ли нравилась такая работа, и он от нее не отказывался.

«Опустим занавес»

> Хельмер. Над именем сверху черный крест. Что за жуткая фантазия! Точно извещает о своей смерти.
>
> Нора. Так оно и есть.
>
> Хельмер. Что? Ты что-нибудь знаешь? Он говорил тебе что-нибудь?
>
> Нора. Раз мы получили это, значит он простился с нами.
>
> *Г. Ибсен. Кукольный дом. Действие* 3-е

По свидетельству Энгеля, число слушателей Ли в Лейпциге с начала и особенно с середины 90-х годов уменьшалось с каждым семестром. И это легко объяснимо. Периоды пребывания Ли в психиатрической больнице Ганновера становились все более продолжительными, и он подолгу отсутствовал в Университете. Его частые эмоциональные срывы и изменившийся внешний вид не очень располагали к общению с ним. Это сказалось на его отношениях с молодыми немецкими математиками, которые постепенно, один за другим стали от него отдаляться. Еще одна причина заключалась в том, что, как ни привлекательны были теории Ли, в математической жизни Германии того времени происходили другие, ничуть не менее важные события. Центрами притяжения начинающих ученых были Гёттинген, где некогда творили Гаусс, Дирихле и Риман и где теперь Клейн читал блестящие лекции по специальным разделам теории аналитических функций и их приложениям, Берлин, где Г. Шварц и его сотрудники разрабатывали фундаментальные проблемы математической физики, и по-прежнему Париж являлся постоянным местом паломничества молодых иностранных ученых. Не случайно Клейн, всячески поощрявший поездки молодежи во Францию, писал Гурвицу: «Я боюсь, что молодые французские таланты более яркие, чем наши, поэтому нам нужно овладеть всеми их результатами, чтобы затем их превзойти».[1]

Ли был огорчен отходом от него Роберта Штуди, которого, к слову сказать, хорошо его знавшие Гурвиц и Гильберт характеризовали как человека малосимпатичного. Но никто не отрицал творческой оригинальности Штуди. Он успешно занимался нетрадиционными областями геометрии, а впоследствии выступил как продолжатель тех работ Ли, которые не были подхвачены другими, опубликовав в 20-х годах большую серию статей по лиевской геометрии комплексов сфер и прямых (упоминание этих работ см. [II, 33, с. 259]). Перестал появляться на лекциях Ли и совсем еще тогда молодой Феликс Хаусдорф. Он внес вклад в теорию непрерывных групп, предложив доказательство «трех основных теорем теории групп Ли», основанное на символическом исчислении рядов по операторам (X, $У$) («ряд Хаусдорфа—Кэмпбелла»), но это, так же как и упомянутые публикации Штуди, было позднее, уже после кончины Ли. В XX в. имя Хаусдорфа получило широкую известность в математических кругах главным образом в связи с его работами по теории множеств и созданием параллельно с Фреше теории топологических пространств. Современное определение непрерывной группы является синтезом понятий «группа» и «топологи-

---

[1] Рид К. Гильберт (пер. с англ.). М., 1977, с. 33. В этой книге подробно рассказано о математической жизни Германии и Франции в 90-х годах XIX в.

ческое пространство». Таким образом, и здесь заслуги Хаусдорфа несомненны.

У Ли еще было много замыслов, и он умел переключаться с одной области на другую, но, с позиций особенно сегодняшнего дня, нельзя отрицать определенной ограниченности круга его идей и методов. Если говорить о непрерывных группах, то к концу XIX в. для дальнейшего развития теории требовались уже существенно иные подходы. И поиски их велись еще при жизни Ли. Мы уже говорили о диссертации Картана 1894 г., которой предшествовала работа Киллинга. Другим важным толчком к созданию современной теории групп Ли явился мемуар Пуанкаре 1895 г., в котором гениальный математик заложил основы комбинаторной топологии и сразу глубоко проник в ее сущность. Введенное им понятие накрывающего пространства оказалось необходимым для теории групп Ли в целом, принадлежащей уже XX веку. Сам Пуанкаре заинтересовался непрерывными группами еще при жизни их основателя, посвятил им несколько мемуаров и, кстати сказать, термин «группа Ли» ввел именно он.

В 1898 г. Казанское Математическое общество удостоило Ли премии им. Лобачевского за цикл работ по основаниям геометрии. Эта премия, которая одновременно рассматривалась и как награда Петербургской Академии наук, с момента ее учреждения ценилась высоко. Хронологически Ли был первым ее лауреатом, вторым и третьим Киллинг и Гильберт. По просьбе русских математиков отзыв о работах Ли по основаниям геометрии составил Клейн. В большой статье, где работам Ли дается самая высокая оценка, Клейн со свойственным ему мастерством изложил эволюцию геометрических воззрений от Эвклида до конца XIX в., коснувшись неэвклидовых геометрий, «Эрлангенской программы», разработанной им совместно с Ли, идей Римана, Гельмгольца, и рассказал о роли работ Ли в формировании общих групповых концепций геометрии (см. гл. XVII).

Несомненно, мировое признание, которого достиг Ли к середине 90-х годов, было достойно его заслуг. «Но уже ничто не могло вырвать его из депрессий, которые становились все более и более жестокими, — вспоминал Энгель. — Никакие акты признания уже не могли изменить охватившего его разочарования в людях вообще и в математиках в частности. Я не буду описывать всю тяжесть состояния, в котором он находился в последние годы жизни, и вытекавшее отсюда его поведение, становившееся трудным испытанием для близких. Для всех нас воспоминания об этом очень тягостны. Опустим на этом занавес» [II, 4, с. 57].

Друзья и родные Ли на его родине еще надеялись, что воздух Норвегии, ее природа, родная речь, близость семьи, которую он очень любил, — все это окажет на него благотворное воздействие. Все чаще начали приходить в Лейпциг письма с сообщениями о том, что в Христиании принимаются меры к возвращению Ли на родину. Благодаря стараниям ряда видных деятелей норвежской культуры, среди которых были литератор Бьёрнсон и ученый Э. Хольст, в 1896 г. в столичном университете для Ли была открыта кафедра теории непрерывных групп на особенно привилегированных условиях. Но, как писал Энгель, хотя Ли стремился в Христианию, для него не так-то просто было свернуть дела в Германии. Продолжали выходить его мемуары, он не переставал писать и боялся, что переезд оторвет его от работы.

Лишь в сентябре 1898 г. он вернулся в Норвегию. Коллеги Ли в Германии и Франции знали, что он безнадежно болен, что это прощание, конец. Дома он еще смог принять в своей квартире одного молодого американского математика, который приехал из Парижа, чтобы поговорить с ним о контактных преобразованиях, и еще нашел в себе силы, чтобы составить ходатайство о предоставлении его старому учителю Силову кафедры алгебры в Университете. Развязка близилась, и 18 февраля 1899 г. Ли умер от анемии мозга. Его дочерям, Ингрид и Дагни, было в это время, соответственно, 20 и 18 лет, сыну Герману — 14. Оставленные Ли сбережения оказались скромными. Его друзья и почитатели вынуждены были еще раз обратиться в Стортинг; на этот раз с просьбой о предоставлении материальной помощи его семье. Эта просьба не была оставлена без внимания. Анна София Ли—Бирх пережила своего мужа на 22 года.

Кончина Ли вызвала немедленный отклик в математической печати многих стран. Крупный немецкий алгебраист и аналитик Ф. Нетер писал в «Матем. Аннален»: «С уходом Ли математика лишилась одного из своих ведущих мыслителей». В некрологической заметке Дарбу памяти Ли говорится: «Начиная с 1870 г. Ли не перестает публиковать мемуары по самым трудным вопросам анализа. Начав с глубокого изучения работ Якоби, он создает свою великолепную теорию уравнений в частных производных. Существенными ее элементами являются контактные преобразования и инфинитезимальные операции. Введение их всецело принадлежит Ли. Им, в частности, были решены такие труднейшие задачи, как определение всех минимальных поверхностей, вписанных в данную алгебраическую поверхность. . . Такое обилие поразительных результатов рано привлекло к великому геометру внимание всех математиков и всех интересующихся ее успехами.

Нигде потеря его не будет чувствительнее, чем в нашей стране, где он имел столько друзей. . . Многие из наших диссертаций в Сорбонне были внушены его идеями и были ему посвящены.

Удивительные работы Ли обладали привилегией, очень редкой в наше время, вызывать общее преклонение и геометров, и аналитиков. Он открыл предложения, которые сохранят его имя от забвения; он создал также методы и теории, которые еще долго будут оказывать благотворное влияние на развитие науки.

Страна, в которой он родился и которая сумела оценить его, может с гордостью поставить его имя рядом с именем Абеля, которого достойным соревнователем он был и столетний юбилей которого он был бы так счастлив отметить» [II, 5, с. 529].

К этому добавим еще слова, сказанные много позднее великим преемником Ли и Дарбу — Э. Картаном: «Он войдет в историю науки как гениальный создатель теории непрерывных групп, и мы, французы, не забудем наших связей с Ли, связей, делающих для нас такой дорогой память о нем» [II, 15, с. 257], и завершим высказыванием Энгеля: «В лице Ли ушел не только один из самых выдающихся математиков нашего времени, но и всех времен. . . В таких областях, как геометрическая теория дифференциальных уравнений, теория групп с теорией инвариантов и ее приложениями к уравнениям и геометрии, в настоящее время никто с ним не может сравниться. Несомненно, его идеи еще очень долго будут стимулировать развитие науки во многих направлениях» [II, 3, с. XI].

В течение года в разных странах появилось более двух с половиной десятков статей и заметок, посвященных Ли. В Италии о нем писали Бельтрами, Кремона, Бьянки, Сегре; во Франции — Дарбу; в США — Хальстед; в Англии — Бернсайд; в Германии — Нетер, Энгель, Аренс, Фойт, Лориа; в Польше — ученик Ли, Казимир Жоравский; в Норвегии — Силов, Хольст.

В приведенную в настоящем издании библиографию все существующие о нем публикации не вошли, поскольку они в основном повторяют друг друга, но их содержание полностью исчерпано предыдущим изложением. Подробный анализ творчества Ли был дан лишь в статье Нетера [II, 13] (см. также [II, 10]). Некролог Дарбу тогда же был опубликован в США и издан в Казани в переводе Синцова с приложением лекций Клейна, лиевской геометрии сфер и списка работ Ли, составленного Синцовым.

В XX в. о самом Ли, если не считать трех заметок [II, 14—16], которые мы цитировали, больше не писали (см. также [II, 2]), но одна за другой стали появляться на разных языках книги, излагающие его теории, прежде всего непрерывных групп. На итальянском — книги Бьянки [II, 53], Паскаля [II, 66], Виванти (имеется французский перевод [II, 67]), на английском — Коэна [II, 58] и Кемпбелла [II, 55], Эйзенхарта [II, 51], на русском — Агуры [II, 18] и, кроме того, подробное изложение теории групп Ли содержится во втором томе «Оснований геометрии» В. Ф. Кагана [II, 29], на немецком — Г. Ковалевского [II, 64]. Эти книги в основном посвящены результатам Ли и его современников. Начиная с 30-х годов появляются работы, а затем и книги по группам Ли, охватывающие новейшие достижения в этой области. К этому нужно добавить главы по группам Ли в разных аспектах (алгебраическом, геометрическом, в связи с дифференциальными уравнениями), содержащиеся в многочисленных математических книгах и в книгах по теоретической физике.

Результаты Ли в других областях математики также разбросаны во многих книгах, но в целом представлены весьма не полно. Поэтому особое значение имело издание его собрания сочинений, о котором будет рассказано в следующей главе.

Издание собрания сочинений

> Выход этого тома наполняет меня особыми чувствами. Я снова вспоминаю, как 40 лет тому назад, в сентябре 1884 г., я приехал в Христианию, чтобы углубиться в изучение сочинений Ли и содействовать в издании его капитального труда по теории непрерывных групп. . .
>
> *Энгель.*
> *Из предисловия к т. V*

История реализации грандиозного замысла издания полного собрания сочинений Ли рассказана Энгелем в предисловии к третьему тому этого собрания. Предоставим ему слово. «Невозможно очертить в полном объеме все, что было задумано и создано Ли. . . Многие из своих идей и устремлений он безвозвратно унес с собой. Одной из целей настоящего издания является спасти то, что можно спасти из имеющегося лиевского наследия. Это относится и к многочисленным его наброскам, значительную часть которых он писал лишь для себя.

Вскоре после смерти Ли его близкие выразили желание, чтобы его оставшиеся рукописи увидели свет. Это было связано с очень значительными трудностями ввиду грандиозного объема его научного наследия. Было ясно, что публикация трудов Ли составит много томов и растянется не на один год.

Уже в 1900 г. была образована комиссия по изданию сочинений Ли в составе Силова, Хольста и Гулдберга. Для этого ими была в Стортинге запрошена сумма в 6000 крон, которую тогдашнее норвежское управление по просвещению не решилось выделить. Работа задержалась, но для меня с самого начала было ясно, что рано или поздно наш замысел будет осуществлен. Я составил список работ Ли, и он для дальнейшего оказался очень полезным.

В 1902 г. я отправился в Христианию на торжества по поводу 100-летия Абеля и в те дни обсуждал там вопрос об издании трудов Ли с его другом Густавом Штормом. К сожалению, вскоре после этого Шторм скончался, и это также задержало нашу работу.

Члены семьи Ли с самого начала согласились передать авторские права издательству Тойбнера, которое очень сочувственно отнеслось к делу издания сочинений Ли. Все они с самого начала не оставили меня в сомнении относительно того, что больше всего рассчитывают на меня как на ближайшего ученика Ли и его друга. Я гордился оказанным мне доверием и понимал лежащую на мне ответственность. Я не скрывал того, что считал себя самым подходящим человеком для осуществления данной миссии, хотя и понимал ограниченность моих возможностей».

Несмотря на все усилия, дело подвигалось медленно, и лишь в 1912 г. «Лейпцигское научное общество» приняло решение о содействии изданию трудов Ли и о назначении Энгеля главным их редактором. Чтобы обеспечить финансовую базу выпуска собрания сочинений Ли, Тойбнер решил объявить в разных странах подписку на него, а члены семьи Ли заявили о готовности внести для этой цели часть причитающегося им гонорара. Некоторую сумму сумело собрать также и Норвежское математическое общество. «Я, — продолжает Энгель, — составил план проспекта издания, ориентировочно разделил труды Ли на шесть томов и обратился в Физико-математическое отделение Лейпцигской Академии, рассчитывая получить примерно 3500 марок. Я обратился также в норвежские издательства с просьбой об оказании помощи в выполнении рисунков. Моя просьба дошла до Стортинга и была удовлетворена. Работа была поручена художнику Олафу Томессену. К июню 1913 г. большинство рисунков было готово.[1] Теперь уже и Тойбнер подгонял меня, требуя ускорить непосредственно зависящую от меня работу. Она начала быстро подвигаться, и даже разразившаяся в 1914 г. война вначале этому не препятствовала. В 1919 г. я закончил составление моих примечаний.

Однако к тому времени обстановка послевоенной инфляции была такова, что Тойбнера совершенно не устраивали условия, на которые он согласился первоначально. Мы оказались перед необходимостью изыскания дополнительных значительных средств для завершения выхода уже находившихся в печати томов и публикации следующих. Получить в Германии нужную сумму было невозможно, и к тому же немецкие деньги после Версаля были вовсе обесценены, а положение немецких уче-

---

[1] Не ясно, что здесь имеет в виду Энгель, ибо в собрании сочинений Ли (в отличие от книг, написанных им совместно с Шефферсом) нет рисунков, если не считать нескольких примитивных чертежей.

ных не позволяло надеяться на их реальную помощь. Проф. Стермер (Осло) и я обратились в Стортинг, и нашу просьбу поддержали ученые разных стран: Беклунд (Лунд), Бьянки (Пиза), Клейн (Гёттинген), Вессио (Париж), Штуди (Бонн). В подписанном ими всеми обращении указывалось, что издание трудов Ли дело международного значения. . .» [там же]. И на этот раз, как бывало и в прошлом, соотечественники Ли пришли на помощь: нужная сумма была ассигнована. Это позволило расплатиться за первые три тома и гарантировать выпуск всех остальных томов.

Можно было ожидать, что в работу по редактированию сочинений Ли включится его ученик и соавтор по трем томам — Шефферс. Но этого не произошло. В этой роли выступил геометр Хегор, который оказался для Энгеля очень ценным сотрудником и вместе с ним довел дело до конца.

Пауль Хегор родился в Копенгагене в 1871 г. Он был сыном датского философа и теолога Софуса Хегора, одного из видных последователей Серена Кьёркегора. Математическое образование П. Хегор получил в Копенгагене, где были выполнены его первые оригинальные работы. Наиболее известный результат Хегора относится к комбинаторной топологии («диаграмма Хегора»=трехмерный аналог римановой поверхности, на которой осуществляется униформизация многозначной аналитической функции). С 1917 г. до самой своей кончины (1948 г.) Хегор профессорствовал в Осло.

Редакционная работа, проделанная Хегором при издании сочинений Ли, была огромной, но она не сравнима с той, которая выпала на долю Энгеля, даже если не принимать в расчет сделанное Энгелем в научном и литературном плане для оформления и популяризации идей его учителя. Однако на титульных листах всех томов «Собрания» они фигурируют как равноправные соредакторы (один — от Лейпцигской Академии, другой — от Норвежского математического общества). Это еще раз говорит о скромности и благородстве Энгеля.

В собрании сочинений Ли впервые опубликованы на немецком его работы, ранее изданные лишь на норвежском языке. Кроме того, сгруппированы по темам и разделам тем работы, опубликованные в разных малодоступных журналах и в разное время; включены и не опубликованные ранее работы, например главы из невышедшего второго тома «Лекций по геометрии контактных преобразований». Все это сопровождается ценными замечаниями редакторов, многочисленными выдержками из переписки Ли с коллегами, литературными указаниями и т. п. Уже после кончины Энгеля вышел седьмой том сочинений Ли, составленный целиком по материалам оставшихся его рукописей.

Знакомство с Собранием сочинений Ли позволяет воочию убедиться, как велик его вклад и за пределами той области, которая принесла ему наибольшую известность. И все же трехтомный трактат по группам преобразований [I, 126] остается наиболее популярным сочинением Ли. Он переиздавался в 30-х годах в Лейпциге, а сравнительно недавно, в 1970 г., был переиздан фотоспособом в США. Этот трактат, несмотря на вышедшее с момента его первой публикации огромное количество других книг по группам Ли, в том числе и современных, совершенно на него не похожих, остается классикой — «Библией» теории непрерывных групп и их инвариантов.

После Ли

Мы знаем, что Ли в науке — это не одни лишь «группы Ли». Но здесь будем говорить только о них. Путь, который прошла эта дисциплина с момента публикаций ее основателя и его непосредственных последователей, столь велик, что все богатство их результатов воспринимается теперь лишь как раннее детство непрерывных групп.

Тем не менее в таких важных областях, как контактные преобразования с их приложениями и особенно групповые свойства дифференциальных уравнений, их наследие и сейчас весьма актуально (см., например, [II, 40]).

О некоторых важных результатах разных авторов по группам Ли здесь уже говорилось. Одним из первых и значительных достижений теории явилось нахождение Киллингом и Картаном всех комплексных простых групп Ли (четыре важных класса этих групп были открыты еще самим Ли), а затем Картаном — всех вещественных простых групп Ли. В серии глубоких работ [II, 30] Картан провел исследование геометрии простых групп, связав их с открытыми им замечательными симметрическими римановыми пространствами. Важнейшим обобщением простых групп являются впервые рассмотренные

Киллингом и Картаном полупростые группы. Так называются группы, не имеющие разрешимых нормальных делителей (напомним, что простые группы — это такие, которые не имеют никаких нормальных делителей, за исключением тривиальных, т. е. самой группы и ее единицы). Полупростой группой является, например, группа Лоренца специальной теории относительности. Благодаря замечательным работам Г. Вейля (1925 г.) и других исследователей теория полупростых групп достигла к настоящему времени высокой степени совершенства.

Картаном также были доказаны следующие две фундаментальные теоремы о структуре групп Ли.

Пусть G_r — r-параметрическая группа и c^k_{ij}; $i, j, k=1, \ldots, r$ — ее структурные константы. Составим матрицу $T=g_{ij}=c^\beta_{i\alpha}c^\alpha_{j\beta}$. Для того чтобы эта группа была полупростой, достаточно условие: ранг $T=r$.

Пусть L' — алгебра Ли, отвечающая производной группе G'_r. Необходимым и достаточным условием разрешимости группы G_r является равенство $g_{ij}x_ix_j=0$, где $(x_1, \ldots, x_r)$ — любой вектор из L'.

Оказалось, что всякая группа G_r слагается из разрешимой и полупростой групп. Этот факт выражается теоремой Э. Леви (1905 г.), точную формулировку которой мы опускаем (см., например, [II, 49, с. 378]).

Построенная Ли теория в своей общей части носит, по существу, локальный характер. Это обусловлено уже тем, что группа G_r восстанавливается по ее алгебре L_r не во всем пространстве, а лишь в некоторой окрестности единицы. Оформление «групп Ли» в целом стало возможным лишь после того, как в 20—30-х годах была построена теория топологических групп. Вслед за этим выкристаллизовалось и современное определение группы Ли как синтез понятий «группа», «топологическое пространство» и «многообразие». В 30-х годах было начато исследование исключительно важного класса «компактных групп Ли». Огромную роль сыграло здесь построение инвариантной меры и на ее основе интегрирования на группе. Это позволило, в частности, дать теоретико-групповую трактовку теории почти периодических функций Бора (И. фон Нейман).

Современная теория линейных представлений групп Ли, играющая большую роль в различных вопросах теоретической физики, с математической точки зрения поистине необъятна. Мы не станем называть блестящие имена, которым обязано своим созданием это монументальное сооружение. Наша книга подошла к концу.

Отмечалось, что подобно тому, как большие реки берут начало в маленьких, еле заметных ручейках, великие теории рождаются из отдельных, казалось бы, незначительных фактов. Верно и другое. Подобно рекам, развитые математические теории в конце концов сливаются в океане понятий, идей, теорем. Какими далекими в прошлом веке казались построения Ли от, скажем, рядов Фурье или теории вероятностей. Но теория представлений групп Ли опирается сейчас на гармонический анализ, а сегодняшняя теория случайных процессов существенно использует понятия, близкие тем, какие были у Ли — полугруппы и их инфинитезимальные операторы.

Размывание границ между теориями, конечно, один из факторов забвения их создателей. Встречая в журнале или книге термин «группа Ли», мы вряд ли думаем об ученом с этим именем. Эта книга — скромная дань его самоотверженной жизни.

Основные даты жизни и творчества Софуса Ли

1842 г., 17 декабря. В семье пастора Германа Ли и его жены Метте (урожд. Штабель) родился сын Софус.

1851 г. Семья Ли переезжает в г. Мосс, где Софус учится в общеобразовательной школе.

1857 г. Ученик частной гимназии в Христиании (ныне г. Осло).

1859 г. Студент университета в Христиании.

1865 г. Заканчивает университет с дипломом лиценциата наук. Занятия механикой и астрономией, первые шаги на педагогическом поприще.

1869 г. Знакомится с работами Понселе и Плюккера и решает посвятить себя математике. Первая работа — «О представлении мнимых величин в геометрии».

1869—1870 гг. Пребывание в Берлине. Знакомство с Клейном и начало их сотрудничества.

1870 г. Приезд в Париж и открытие прямолинейно-сферического отображения. Знакомство с Жорданом и Дарбу. Четырехнедельное заключение в крепости Фонтенбло. Путешествие по Франции и Италии и возвращение на родину через Швейцарию и Германию.

1871 г. Преподаватель Латинской гимназии (г. Ниссен), ассистент университета в Христиании. Диссертация на степень доктора философии «Об одном классе геометрических преобразований».

1872 г. Профессура в Лунде (Швеция), возвращение в Христианию. Начало разработки теории уравнений в частных производных и теории контактных преобразований.

1873 г. Первые работы по общей теории групп преобразований.

1874 г. Женитьба на Анне Софии Бирх. Свадебное путешествие в Германию и Францию. Знакомство с Майером и начало творческого содружества с ним.

1876—1881 гг. Работы по дифференциальной геометрии (минимальные поверхности, поверхности переноса, внутренняя геометрия поверхности). Основание вместе с Сарсом и Миллером журнала «Аркив фор математик ог натурвиденскаб». Редактирование (совместно с Силовым) трудов Абеля. Продолжение исследований по группам преобразований.

1882—1884 гг. Поездки в Германию, Швейцарию и Францию. Работы по проблеме Пфаффа, дифференциальным инвариантам и уравнениям в частных производных.

1884 г. Приезд в Осло Энгеля для помощи Ли в работе по написанию трактата «Непрерывные группы преобразований».

1886 г. Переезд Ли в Лейпциг для замещения оставленной Клейном кафедры в местном университете.

1886—1898 гг. Профессура в Лейпциге. Работы по основаниям геометрии, интегральным инвариантам, бесконечным группам преобразований и их приложениям. Первые признаки серьезного заболевания (1889). Выход 3-томного трактата «Непрерывные группы преобразований», созданного с Энгелем, и книг, написанных с Шефферсом. Подключение к тематике Ли других ученых. Новые поездки во Францию (1892, 1895 г.); избрание иностранным членом Академии наук Франции и другие научные почести. Прогрессирование болезни.

1898 г. Присуждение медали им. Лобачевского за работы по основаниям геометрии. Открытие в университете Христиании кафедры непрерывных групп преобразований и возвращение (сентябрь) на родину.

1899 г., 18 февраля. Смерть от анемии мозга.

Библиография

I[1]

Принятые сокращения

Archiv — Archiv for Mathematik og Naturvidenskab
Berichte Sächs. Ges. — Berichte üb. d. Verhandlungen d. Kg. Sächsischen Geselschaft d. Wissenschaften zu Leipzig, Math.-Phys.
Bull. Sc. math. — Bulletin des Sciences mathematiques.
Christ. Forh. — Forhandlinger i Videnskabs, Christiania.
C. R. — Comptes rendues de l'Academie des Sciences de Paris.
Crelle Journ. — Journal fur die reine und angewandte Mathematik (Gr. Crelle).
Gött. Nachr. — Nachrichten der Kg. Gesellschaft der Wissenschzften zu Göttingen.
Math. Ann. — Mathematische Annalen.

1869

1. Ueber eine Darstellung des Imaginären in der Geometrie. — Creele's Journ., 70, 346—353.
2. Representation des Imaginaren der Plangeometrie. — Christ. Forth., I, 16—38; II, 107—146.

1870

3. Ueber die Reciprocitätsverhaltnisse der Rey'schen Complexe. — Gött. Nachr., 2, 53—66.
4. Ueber die Haupttangenten curven der Kummer'schen Flache (F. Klein). — Berl. Monatsber., 12, 891—899.
5. Sur une certaine famille de courbes et de surfaces (F. Klein). — C. R., LXX, 1222—1226, 1275—1279.

1871

6. Ueber diejenige Theorie eines Raumes mit beliebig vielen Dimensionen die der Krumungstheorie des gewöhnlichen Raumes entspricht. — Gött. Nachr., 5, 191—209.
7. Zur Theorie eines Raumes von n dimensionen. — Ibid., II, 535—551.
8. Ueber dienigen ebenen Curven welche durch ein System von ver tauschbaren Transformationen in sich übergehen (F. Klein). — Math. Ann., 4, 50—84.

[1] В нумерации работ Ли следуем списку, составленному Д. М. Синцовым (Изв. Физ.-мат. об-ва, Казань, 1899, 9).

1872

12. Neue Integrationsmethode partieller Differentialgleichungen I Ordnung. — Christ. Forth., 6, 28—34.
16. Zur Theorie partieller Differentialgleichungen I Ordnung, insbesondere über eine Classification derselben. — Gött. Nachr., 7, 473—489.
17. Ueber Complexe, insbesondere Linien und Kugel—Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen I. Ordnung. — Math. Ann., 5, 145—256.

1873

18. Ueber partielle Differential Gleichunden I. Ordnung. — Christ. Forth., 7, 16—51.
19. Partielle Differentialgleichungen I. Ordnung in denen die unbekante Function explicite vorcomt. — Ibid., 52—85.
20. Zur analytischen Theorie der Berhürungstransformationen. — Ibid., 237—262.
22. Neue Integrations Methode eines Pfaffschen Problems. — Ibid., 320—343.

1874

23. Begründung einer Invarianten Theorie der Behrürungstransformationen. — Math. Ann., VIII, 215—303.
24. Ueber Gruppen von Transformationen. — Gött. Nachr., 9, 529—542.
25. Allgemeine Theorie partieller Differentialgleichungen I Ordnung. — Christ. Forth., 8, 198—226.
26. Zur Theorie des Integrabilitäts factors. — Ibid., 242—254.
27. Verallgemeinerung und neue Verwertung der Jacobischen Multiplicator—Theorie. — Ibid., 255—277.

1875

28. Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen I Ordnung. — Math. Ann., IX, 245—296.

1876

30. Theorie der Transformationsgruppen. — Archiv, I, 19—58; II, 152—202.
32. Resumé einer neuen Integrationsmethode. — Ibid., 325—365.

1877

33. Neue Integrationsmethode der Monge-Ampèrschen Gleichung. — Archiv, II, 1—9.
34. Die Störungstheorie und die Berhürungstransformationen. — Ibid., 10—38.
35. Synthetisch-analytische Untersuchungen uber Minimalflächen Ueber reele algebraische Minimalflächen. — Ibid., 295—337.
36. Theorie des Pfaff'schen Problems. — Ibid., 338—379.
37. Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen (Zweite Abhandlung). — Math. Ann., XI, 464—557.

1878

40. Theorie der Transformationsgruppen. — Archiv, II, III, 85—165; IV, 375—460.
41. Satze über Minimalflachen. — Archiv, III, I, 166—176, II, 224—233, III, 340—351.

1879

42. Theorie der Transformationsgruppen. — Archiv, IV, V, 232—261.
43. Theorie der Flachen constanter Krummung. — Ibid., I, 345—354; II, 355—366.
45. Weitere Untersuchungen uber Minimalflachen. — Archiv, IV, 477—506.
46. Beitrage zur Theorie der Minimalflachen. I. Proektivische Untersucbungen uber algebraische Minimalflächen. — Math. Ann., XIV, 331—416.
47. Metrische untersuchungen über algebraische Minimalflächen. — Ibid., XV, 465—506.

1880

48. Theorie der Transformationsgruppen I. — Math. Ann., XVI, 441—529.
51. Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung. — Archiv, V, III, 282—306; IV, 328—358; V, 518—541.

1881

56. Zur Integration durch bestimmte Integration von einer Classe linearer partieller Differentialgleichungen. — Archiv, VI, 328—368.
57. Zur Theorie der geodetischen Curven der Minimalflächen. — Ibid., 490—501.

1882

61. Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden. — Archiv, VII, 155—176.
62. Ueber Flächen die infinitesimale und lineare Transformation gestaten. — Ibid., 179—193.

1883

66. Ueber unendliche continuirliche Gruppen. — Christ. Forth., 12, 1—56.
67. Classification und Integration von gewönlichen Differential gleichungen die eine Gruppe von Transformation gestatten. — Archiv, VIII, I, 197—248; II, 249—288; III, 371—458.

1884

72. Bestimmund des Bogenelementes aller Flächen, deren geodätische Kriese eine infinitesimale Berhürungstransformation gestatten. — Archiv, IX, 40—61.
73. Ueber die allgemeinste geodätische Abbildung der geodätische Kreise einer Fläche. — Ibid., 62—68.

74. Untersuchungen über Transformationsgruppen I. — Ibid., 74—128.
75. Classification und Integration von gewönlichen Differentialgleichungen, die eine Gruppe von Transformationen gestatten. IV. — Ibid., 431—448.

1885

77. Ueber Differentialinvarianten. — Math. Ann., XXIV, 537—578.
79. Untersuchungen über Transformationsgruppen. II. — Archiv, X, 353—415.
80. Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen die eine continuirliche Gruppe gestatten. — Math. Ann., XXV, 71—151.

1886

81. Bemerkengen zu v. Helmgoltz'Arbeit über die Thatsachen die Geometrie zu Grunde liegen. — Berichte Sachs. Ges., XXXVIII, 337—342.

1888

83. Die Begriffe Gruppe und Invariante. — Amer. J. Math., XI, 182—186.
84. Classification und Integration von gewönlichen Differentialgleichungen die eine Gruppe von Transformation gestatten. — Math. Ann., XXXII, 213—281.

1889

87. Die infitesimale Berührungstransformationen der Mechanik. — Berichte Sächs. Ges., XLI, 145—156.
88. Reduction einer Transformationsgruppe auf ihre kanonische form. — Ibid., 277—289.
89. Ueber irreducible Berührungstransformationen. — Ibid., 320—327.

1890

90. Ueber die Grundlagen der Geometrie. — Berichte Sachs. Ges., XLII, I, 284—321; II, 355—418.
91. Neuer Beweis des zweiten Fundamentalsatzes in der Theorie der Transformationsgruppen. — Ibid., 453—477.
92. Bestimmung aller r-glidrigen transitiven Transformationsgruppen durch ausführbare Operationen. — Ibid., XLII, 478—490.

1891

93. Die linearen homogenen gewönlichen Differentialgleichungen. — Berichte Sachs. Ges., XLIII, 253—270.
94. Grundlagen für die Theorie der unendlichen Transformationsgruppen. — Leipzig. Ber., H. III, I, 316—352; II, 353—393.

1892

95. Sur une interpretation nouvelle du théoreme d'Abel. — C. R., CXIV, 277—280.
96. Sur une application de la théorie des groupes continues a la théorie des fonctions. — Ibid., 334—337.

97. Sur les fondaments de la geometrie. — Ibid., 461—463.
98. Bemerkungen zu neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie. — Berichte Sächs. Ges., XLIV, 106—114.
99. Neuere gruppentheoretische Untersuchungen. — Ibid., 297—305.
100. Untersuchungen über Translationsflachen. — Ibid., I, 447—472; II, 559—579.

1893

101. Ueber Differentialgleichungen die Fundamenatalintegrale besitzen. — Berichte Sächs. Ges., XLV, 341—348.
103. Sur les équations differentielle ordinaires qui possèdent les systèmes fondamentaux d'integrales. — C. R., CXVI, 1233—1235.

1894

104. Ostwald's Princip des ausgezeichneten Falles. — Berichte Sächs. Ges., XLVI, 135—137.

1895

106. Untersuchungen über unendlichen kontinuirliche Gruppen. — Abhandl. Sächs. Ges., XXI, Nr III, 43—150.
107. Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. — Berichte Sächs. Ges., II, 53—128.
108. Bestimmung aller Flächen die eine continuirliche Schaar von projectiven Transformationen gestatten. — Ibid., III, 209—260.
109. Verwertung des Gruppenbegriffs für Differentialgleichungen I. — Ibid., 261—322.
110. Influence de Galois sur le développement des Mathématiques. Le centenaire de l'École Normale. — Paris, Hachette, 481—489.

1896

114. Die infinitesimele Berührungstransformation der Optik. — Berichte Sächs. Ges., XLVIII, 131—133.
115. Die Theorie der Translationsflächen und das Abel'sche Theorem. — Ibid., 141—198.
116. Zur allgemeinen Transformationstheorie. I Ueber Differentialgleichungen die eine continuirliche Gruppe gestatten. — Berichte Sächs. Ges., XLVIII, 290—344.
117. Einige Bemerkungen über Pfaff'sche Ausdrucke und Gleichungen. — Ibid., 405—412.

1897

118. Das Abel'sche Theorem und die Translations Manigfaltigkeiten. — Berichte Sächs. Ges., XLIX, 181—248.
119. Die Theorie der Integralinvarianten ist ein Corollar der Theorie der Differentialinvarianten. — Ibid., 342—357.
120. Ueber Integralinvarianten ind ihre Verwertung für die Theorie der Differentialgleichungen. — Ibid., 369—410.
121. Liniengeometrie und Berührungstransformationen. — Ibid., 687—740.

1898

122. Zur Geometrie einer Monge'schen Gleichung. — Berichte Sächs. Ges., L, 1—2.
123. Ueber Berührungstransformationen und Differentialgleichnungen. — Ibid., 155—180.

1902

124. Über Integralinvarianten und Differentialgleichungen. — Videnskabesselskabets Skrifter Mathem., I, n I, 1—160.

1904

125. Drei Kapitel aus dem unfollenden II Bande der Geometrie der Berührungstransformationen. — Math. Ann., LIX, 195—313.

Книги Софуса Ли

126. L i e S., E n g e l F. Theorie der Transformationsgruppen. Leipzig, I, 1888; II, 1890; III, 1893; 2 Aufl., 1930; 3 Aufl., New York, 1970.
127. L i e S., S c h e f f e r s G. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. — Leipzig, 1891.
128. L i e S., S c h e f f e r s G. Vorlesungen über Transformationsgruppen. — Leipzig, 1893.
129. L i e S., S c h e f f e r s G. Geometrie der Berührungstransformationen. — Leipzig, 1896.
130. Lie, Sophus Gesammelte Abhandlungen. — Leipzig; Oslo.
    Bd 1. Geometrische Abhandlungen, 1934.
    Bd 2. Geometrische Abhandlungen, T. I, 1935; T. II, 1937.
    Bd 3. Abhandlungen zur Differentialgleichungen, 1922.
    Bd 4. Abhandlungen zur Differentialgleichungen, 1929.
    Bd 5. Abhandlungen zur Transformationsgruppen, 1924.
    Bd 6. Abhandlungen zur Transformationsgruppen, 1927.
    Bd 7. Funfunddreissig Abhandlungen aus dem Nachlass, 1960

II

1. Памяти Софуса Ли — Изв. Физ.-мат. об-ва, Казань, 9, 1899, с. 1—32 (Д а р б у Г. Некролог / пер. Д. М. Синцова; К л е й н Ф. Геометрия сфер и комплексов Ли: Три лекции / Пер. Д. М. Синцова; список работ Ли, составленный Д. М. Синцовым).
2. Я г л о м И. М. Клейн и Ли. — М., 1977. — 63 с.
3. E n g e l F. — Leipzig Sächs. Geselsch. d. Wissensch. Berichte (Math. Cl.), 1899, 51, XI—LXI.
4. E n g e l F. — Deutche Math. Verein, Jahresber., 1900, 8, I, 30—96.
5. D a r b o u x G. — C. R., 1899, 128, 525—529.
6. B u r n s i d e W. — London Mathem. Soc. Proceed., 1899, 30, 334—336.

7. Beltrami E., Cremona L., Bianchi L. — Rendiconti Acad. Naz. Lincei, 1899, 8 : 1, 360—366.
8. Halsted G. B. — Amer. mathem. Montly, 1899, 6, 97—99.
9. Segre C. — Torino, Accad. d. sc., Atti, 1899, 34, 363—366.
10. Zorawski K. — Wiadomosci mathem., 1899, 3, 85—119.
11. Voit C. — München, Acad. Wissensch. Sitzungber., 1900, 30, 339—345.
12. Sylov L. — Arch. Mathem. og Naturv, 1899, 21, 1—22.
13. Noëter M. — Mathem. Ann., 1900, 53, 1—41.
14. Heegaard P. — Norsk. Biografisk Leksikon, 1938, 8, Oslo, 353—357.
15. Cartan E. — Les grands courants de la pensée mathematique, 1948, 253—257.
16. Freudental H. — Dictionary of scientific Biograph., 1973, v. 8, 323—328.
17. Агура А. Д. Общая теория конечных непрерывных групп преобразований. — Одесса, 1913.
18. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М., 1978.
19. Бляшке В. Введение в дифференциальную геометрию. — М., 1957 (1950).
20. Боголюбов А. Н. Гаспар Монж. — М., 1978.
21. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. — М., 1966.
22. Гюнтер Н. М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. — М., 1934.
23. Дарбу Г. Принципы аналитической геометрии. — М., 1940.
24. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М., 1979.
25. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. — М., 1971.
26. Ибрагимов Н. Х. Группы Ли в некоторых вопросах математической физики. — Новосибирск, 1972.
27. Каган В. Ф. Основания геометрии. Исторический очерк учения об основаниях геометрии. — Одесса, 1907, т. II.
28. Каган В. Ф. Основания геометрии. Интерпретации геометрии Лобачевского и развитие ее идей. — М., 1956.
29. Картан Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства. — М., 1949 (1928—1936).
30. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. — М., 1936 (1925).
31. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX ст. — М., 1937.
32. Клейн Ф. Высшая геометрия. — М., 1939 (1926).
33. Курант Р. Уравнения с частными производными. — М., 1964 (1962).
34. Любарский Г. А. Теория групп и ее применение в физике. — М., 1957.

35. Колмогоров А. Н. и Юшкевич А. П. (редакторы). Математика XIX века. Ч. I. Геометрия / Б. Л. Лаптев и Б. А. Розенфельд. — М., 1981.
36. Норден А. П. Теория поверхностей. — М., 1956.
37. Норден А. П. (ред.). Об основаниях геометрии. Сборник классических работ. — М., 1956.
38. Овсянников Л. А. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. — Новосибирск, 1966.
39. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М., 1978.
40. Ожигова Е. П. Шарль Эрмит. — Л., 1982.
41. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. — М., 1954.
42. Постников М. М. Группы и алгебры Ли. — М., 1982.
43. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. — М., 1954.
44. Рашевский П. К. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. — М., 1947.
45. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. — М., 1966.
46. Розенфельд Б. А. История Неевклидовой геометрии. — М., 1976.
47. Смирнов В. И. Курс высшей математики. — М.; Л., т. 2; т. 3, ч. 1; т. 4, ч. 1.
48. Чеботарев Н. Г. Теория групп Ли. — М., 1940.
49. Щербаков Р. Н., Пичурин Л. Ф. От проективной геометрии к неевклидовой. — М., 1979.
50. Эйзенхарт Л. П. Непрерывные группы преобразований. — М., 1947 (1938).
51. Шевалле Клод. Теория групп Ли. — М., 1948 (1946).
52. Bianchi L. Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni. — Pisa, 1928.
53. Buhl A. Aperçus modernes sur la théorie des groupes continues. — Mem. Sc. math. fasc., 1928, 33.
54. Campbell J. E. Introductory Treatise on Lie Theory of Finite continouse Transormation Groups. — Oxford, 1903.
55. Caratheodory C. ‚Variationsrechnung und partielle Differential gleichnungen erster Ordnung. Bd 1, 2 Aufl. Leipzig, 1956.
56. Cartan E. J. Oeuvres completes. — Paris: Pt I, v. 1—3, 1952; Pt II, v. 1, 2, 1953.
57. Cohen A. An introduction to the Lie groups. — New York, 1931.
58. Darboux G. Léçons sur la Théorie generale des surfaçes, Paris, 1914, I—III.
59. Engel F., Faber K. Die Liesche Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Leipzig, Teubner, 1932.
60. Goursat E. Léçons aur l'intégration des équations au derivées partièlles du prémier ordre / 2 éd. Paris, 1921.
61. Forsyth. Theory of differential equations. Cambridge, 1906, v. V.
62. Klein F. Gesammelte Abhandlungen. — Leipzig, 1929, Bd I.

63. K o w a l e w s k i G. Einführung in die Theorie der kontinuirlichen Gruppen. — Leipzig, 1931.
64. K o w a l e w s k i G. Integrationsmethoden der Lieschen Theorie. — Leipzig, 1933.
65. P a s c a l E. I gruppi di trasformazioni (Parte generale della teoria). — Milano, 1933.
66. V i v a n t i G. Leçons élémentaires sur la théorie des groupes de transformations. Paris, 1904.

Оглавление

Ефим Михайлович Полищук

Софус Ли

1842—1899

Утверждено к печати
Редколлегией серии
«Научно-биографическая литература»

Редактор издательства Г. Л. Кирикова
Технический редактор М. Э. Карлайтис
Корректоры И. А. Корзинина
и О. В. Олендская

ИБ № 20627

Сдано в набор 9.03.83. Подписано к печати 15.12.83. М-49621. Формат $84 \times 108^1/_{32}$. Бумага типографская № 2. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 11.34. Усл. кр.-отт. 11.43. Уч.-изд. л. 11.1. Тираж 7800. Тип. зак. 208. Цена 60 к.

Издательство «Наука». Ленинградское отделение
199164, Ленинград, В-164, Менделеевская линия, 1

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая типография издательства «Наука»
199034, Ленинград, В-34, 9 линия, 12

КНИГИ ИЗДАТЕЛЬСТВА «НАУКА»
МОЖНО ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ЗАКАЗАТЬ
В МАГАЗИНАХ КОНТОРЫ «АКАДЕМКНИГА»

Для получения книг почтой
заказы просим направлять по адресу:

117192 Москва, В-192, Мичуринский пр., 12
Магазин «Книга — почтой»
Центральной конторы «Академкнига»;

197345 Ленинград, П-345, Петрозаводская ул., 7
Магазин «Книга — почтой»
Северо-Западной конторы «Академкнига»,

480091 **Алма-Ата**, ул. Фурманова, 91/97 («Книга — почтой»);
370005 **Баку**, ул. Джапаридзе, 13;
320093 **Днепропетровск**, пр. Гагарина, 24 («Книга — почтой»);
734001 **Душанбе**, пр. Ленина, 95 («Книга — почтой»);
375002 **Ереван**, ул. Туманяна, 31;
664033 **Иркутск**, ул. Лермонтова, 289;
252030 **Киев**, ул. Ленина, 42;
252030 **Киев**, ул. Пирогова, 2;
252142 **Киев**, пр. Вернадского, 79;
252030 **Киев**, ул. Пирогова, 4 («Книга — почтой»);
277012 **Кишинев**, пр. Ленина, 148 («Книга — почтой»);
343900 **Краматорск** Донецкой обл., ул. Марата, 1;
660049 **Красноярск**, пр. Мира, 84;
443002 **Куйбышев**, пр. Ленина, 2 («Книга — почтой»);
191104 **Ленинград**, Литейный пр., 57;
199164 **Ленинград**, Таможенный пер., 2;
199034 **Ленинград**, 9 линия, 16;
220012 **Минск**, Ленинский пр., 72 («Книга — почтой»);
103009 **Москва**, ул. Горького, 8;
117312 **Москва**, ул. Вавилова, 55/7;
630076 **Новосибирск**, Красный пр., 51;
630090 **Новосибирск**, Академгородок, Морской пр., 22 («Книга — почтой»);