В. А. ИЛЬИН

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1991

octopus scanning by !

~~ББК 22~~.161.6
И46
УДК 517.98

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор *А. А. Дезин*
доктор физико-математических наук, профессор *Е. И. Моисеев*

Ильин В. А. Спектральная теория дифференциальных операторов. Самосопряженные дифференциальные операторы.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991.— 368 с.
ISBN 5-02-014662-5

Посвящена в основном проблемам сходимости и суммируемости спектральных разложений по фундаментальным функциям самосопряженных эллиптических операторов второго порядка. Для произвольных самосопряженных неотрицательных расширений таких операторов и их средних Рисса установлены условия равномерной сходимости. окончательные в каждом из классов функций Соболева — Лиувилля, Никольского, Бесова и Зигмунда — Гёльдера. Развит новый, не использующий традиционной техники Карлемана и аппарата тауберовых теорем метод оценки остаточного члена спектральной функции.

Установлены точные условия как равномерной равносходимости, так и равносходимости почти всюду двух произвольных спектральных разложений.

Для научных работников, аспирантов, студентов старших курсов — математиков и физиков, использующих спектральную теорию дифференциальных операторов.

Библиогр. 78 назв.

И $\frac{1602070000-102}{053(02)-91}$ 12-91

© «Наука». Физматлит, 1991

ISBN 5-02-014662-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящей монографии систематизированы принадлежащие ее автору наиболее важные результаты, относящиеся к спектральной теории самосопряженных эллиптических операторов.

При изложении этих результатов ставилась цель продемонстрировать эффективность различных разработанных автором методов, отправляющихся, как правило, от теорем о среднем значении для регулярных решений эллиптических уравнений со спектральным параметром.

Монография состоит из четырех глав и двух приложений.

Глава 1 посвящена систематическому изучению так называемых *фундаментальных систем функций* (ФСФ) оператора Лапласа (понятие, введенное автором в 1967—1968 гг.). Это понятие позволяет при изучении спектральных разложений отказаться от задания в какой-либо форме краевых условий и разработать технику, охватывающую все самосопряженные неотрицательные расширения оператора Лапласа (в том числе и самосопряженные расширения с выходом в более широкую область), спектр которых является чисто точечным (но с допущением для собственных значений бесконечной кратности и всюду плотного множества предельных точек — такая возможность, как мы покажем, реально может иметь место).

В § 1 гл. 1 мы устанавливаем точную по порядку оценку как сверху, так и снизу некоторого «агрегата» из суммы квадратов фундаментальных функций, входящих в произвольную ФСФ, и детально выясняем устройство спектра произвольной ФСФ. При этом обнаруживается, что для произвольного наперед заданного счетного множества неотрицательных вещественных чисел в области N ($N \geqslant 2$) измерений существует ФСФ оператора Лапласа, для которой указанное счетное множество является подмножеством собственных значений, причем собственные значения, остающиеся после удаления из множества всех собственных значений указанного наперед взятого счетного множества, распределены не гуще, чем собственные значения первой краевой задачи для оператора Лапласа.

Этот факт позволяет сделать ряд важных заключений о характере роста по λ главного члена в асимптотике числа $n(\lambda)$

собственных значений, не превосходящих λ, не укладывающихся в традиционные представления, вытекающие из работ Г. Вейля и Т. Карлемана.

В § 2 гл. 1 для произвольной ФСФ оператора Лапласа строятся так называемые *ядра дробного порядка*, являющиеся ядрами интегральных операторов, отвечающих произвольным вещественным положительным степеням того интегрального оператора, который порождается соответствующей функцией Грина для уравнения $-\Delta u + u = 0$.

Используя развитую нами технику, мы доказываем, что для любой внутренней точки x и любого вещественного $\alpha > 0$ ядро дробного порядка $T_\alpha(x, y)$ существует и представляется в виде

$$T_\alpha(x, y) = \overset{0}{T}_\alpha(x, y) + \chi_\alpha(x, y),$$

где $\overset{0}{T}_\alpha(x, y)$ — так называемое ядро Бесселя — Макдональда, выражающееся через цилиндрическую функцию Макдональда $K_\nu(r)$ в виде

$$\overset{0}{T}_\alpha(x, y) = 2^{1-\alpha} \cdot [(2\pi)^{N/2} \cdot \Gamma(\alpha)]^{-1} \cdot |x - y|^{\alpha - N/2} \cdot K_{\frac{N}{2}-\alpha}(|x - y|),$$

а $\chi_\alpha(x, y)$ — функция, обладающая в открытой области непрерывными частными производными по координатам точек x и y сколь угодно высокого порядка.

В § 3 гл. 1 с помощью разработанной нами техники мы оцениваем в метрике L_2 остаточный член спектральной функции, отвечающей произвольной ФСФ оператора Лапласа, и извлекаем из полученной оценки ряд следствий, которые, в частности, позволяют нам в § 4 для произвольной функции с компактным носителем установить окончательные в классах Соболева — Лиувилля L_p^α условия равномерной сходимости ряда Фурье по произвольной ФСФ оператора Лапласа.

Для произвольной N-мерной области и произвольной ФСФ оператора Лапласа эти окончательные в терминах классов L_p^α условия равномерной сходимости имеют вид трех неравенств:

$$\alpha \geqslant (N-1)/2, \qquad \alpha \cdot p > N, \qquad p \geqslant 1. \tag{*}$$

Вторым центральным результатом § 4 гл. 1 является доказательство для каждой индивидуальной ФСФ оператора Лапласа теоремы негативного типа об отсутствии у ряда Фурье по этой ФСФ свойства локализации для функции с компактным носителем из класса Соболева — Лиувилля L_p^α с любыми фиксированными $\alpha < (N-1)/2$, $p \geqslant 1$.

В § 4 гл. 1 доказано также, что для произвольной функции с компактным носителем окончательным в терминах классов Соболева — Лиувилля L_2^α условием, обеспечивающим локализацию ее ряда Фурье по произвольной ФСФ оператора Лапласа, является неравенство $\alpha \geqslant (N-1)/2$.

В § 5 гл. 1 мы указываем возможные обобщения развитой нами теории.

В гл. 2 изучаются произвольные самосопряженные неотрицательные расширения оператора Лапласа, спектр которых не обязательно является точечным.

Мы показываем, что привлечение известной теоремы Гординга — Браудера — Маутнера об упорядоченном спектральном представлении пространства L_2 относительно произвольного самосопряженного расширения эллиптического оператора позволяет перенести разработанную нами в гл. 1 технику на случай произвольного самосопряженного неотрицательного расширения оператора Лапласа с каким угодно (точечным, непрерывным или смешанным) спектром.

Кроме того, в гл. 2 мы показываем, что разработанный нами метод позволяет установить точные условия равномерной сходимости не только самих спектральных разложений, но и так называемых *средних Рисса* этих спектральных разложений. Переход к средним Рисса имеет то преимущество, что позволяет снизить требования гладкости на разлагаемую функцию, обеспечивающие равномерную сходимость.

Наконец, еще одной важной целью гл. 2 является установление условий равномерной сходимости спектральных разложений и их средних Рисса, окончательных не только в терминах классов Соболева — Лиувилля L_p^α, но и в терминах каждого из классов Никольского H_p^α, Бесова $B_{p,\theta}^\alpha$, и Зигмунда — Гёльдера C^α.

В § 2—5 гл. 2 устанавливаем, что для произвольной N-мерной области, любого s из полуинтервала $0 \leqslant s < (N-1)/2$ и любой функции, обладающей в рассматриваемой области компактным носителем, окончательным в терминах каждого из четырех классов

$$L_p^\alpha, \quad H_p^\alpha, \quad B_{p,\theta}^\alpha \quad (\text{при любом } \theta \geqslant 1) \quad \text{и} \quad C^\alpha$$

условием равномерной (на любом компакте) сходимости средних Рисса порядка s спектральных разложений является выполнение трех неравенств

$$\alpha \geqslant (N-1)/2 - s, \qquad \alpha \cdot p > N, \qquad p \geqslant 1$$

(для случая класса Зигмунда — Гёльдера C^α остается только первое из указанных неравенств), а окончательным в терминах каждого из четырех классов

$$L_2^\alpha,\ H_2^\alpha,\ B_{2,\theta}^\alpha \ (\text{при любом } \theta \geqslant 1),\ C^\alpha$$

условием, обеспечивающим свойство локализации средних Рисса порядка s спектральных разложений, является неравенство

$$\alpha \geqslant (N-1)/2 - s.$$

Принципиальную роль играет доказанная в § 4 гл. 2 теорема негативного типа, которая для каждого индивидуального самосопряженного неотрицательного расширения оператора Лапласа в произвольной N-мерной области и для любого s из полуинтервала $0 \leqslant s < (N-1)/2$ устанавливает отсутствие свойства локализации средних Рисса порядка s спектральных разложений функции с компактным носителем, принадлежащей классу Зигмунда — Гёльдера C^α с произвольным фиксированным $\alpha < < (N-1)/2 - s$ (а потому принадлежащей и каждому из классов L_p^α, H_p^αи $B_{p,\theta}^\alpha$ с произвольными фиксированными $\alpha < (N-1)/2 - - s$, $p \geqslant 1$, $\theta \geqslant 1$).

Отметим, что все полученные в § 2—5 гл. 2 результаты являются новыми (и также окончательными в каждом из четырех указанных классов) и для средних Рисса разложений в N-кратный интеграл и в N-кратный тригонометрический ряд Фурье (со сферическими суммами).

В § 6 и 7 гл. 2 мы показываем, что разработанная нами методика позволяет без использования традиционной техники Карлемана и аппарата тауберовых теорем оценить как в метрике L_2, так и в метрике L_∞ остаточный член средних Рисса любого неотрицательного порядка от спектральной функции, отвечающей произвольному самосопряженному неотрицательному расширению оператора Лапласа. Особо подчеркнем, что в отличие от всех других авторов, занимавшихся этой проблемой, мы получаем оценку остаточного члена средних Рисса спектральной функции, порядок малости которой при $s > (N-1)/2$ неограниченно растет с увеличением порядка s средних Рисса.

Глава 3 посвящена проблеме рисcовской равносуммируемости спектральных разложений, отвечающих двум произвольным самосопряженным неотрицательным расширениям оператора Лапласа. Эта проблема изучается в классической и в обобщенной трактовках.

Непосредственно из гл. 2 вытекает, что если обладающая в произвольной N-мерной области G компактным носителем функция $f(x)$ принадлежит в этой области одному из четырех классов L_2^α, H_2^α, $B_{2,\theta}^\alpha$ или C^α, то для любого s из полуинтервала $0 \leqslant \leqslant s < (N-1)/2$ условие $\alpha \geqslant (N-1)/2 - s$ обеспечивает классическую равносуммируемость средних Рисса порядка s, т. е. обеспечивает равномерное на любом компакте области G стремление к нулю разности средних Рисса порядка s спектральных разложений, отвечающих двум произвольным самосопряженным неотрицательным расширениям оператора Лапласа в области G (или в охватывающей ее области).

В § 1 гл. 3 доказано, что этот результат является окончательным, т. е. при любом фиксированном положительном α, удовлетворяющем условию $\alpha < (N-1)/2 - s$, для финитной в области G функции $f(x)$, принадлежащей классу Зигмунда — Гёльдера C^α (и тем более любому из классов L_2^α, H_2^α и $B_{2,\theta}^\alpha$), вообще говоря, не имеет места ни поточечная, ни тем более равномерная на любом компакте области G равносуммируемость средних Рисса порядка s двух спектральных разложений.

Этот результат, в частности, означает, что установленные в гл. 1 и 2 основные теоремы негативного типа принципиально невозможно получить на пути предварительного установления факта расходимости средних Рисса одного специального спектрального разложения (например, разложения в N-кратный интеграл Фурье) и последующего использования факта равносуммируемости средних Рисса двух спектральных разложений.

В конце § 1 гл. 3 установлена также точная по порядку равномерная на любом компакте рассматриваемой области оценка разности средних Рисса порядка $s \geqslant 0$ двух произвольных спектральных разложений произвольной функции из класса L_2.

В § 2 гл. 3 вопрос о риссовской равносуммируемости двух спектральных разложений произвольной функции из класса L_2 изучается *в обобщенном смысле*, т. е. в смысле сходимости к нулю разности средних Рисса двух указанных спектральных разложений почти всюду в рассматриваемой области.

Мы доказываем, что если функция $f(x)$ принадлежит в произвольной N-мерной области G только классу L_2, то средние Рисса любого положительного порядка s двух произвольных самосопряженных неотрицательных расширений оператора Лапласа в этой области не только равносуммируются в области G в обобщенном смысле, но и разность указанных средних Рисса порядка s размера λ имеет почти всюду в G порядок малости $o(\lambda^{-s/2})$, неограниченно растущий с увеличением порядка s рассматриваемых средних Рисса.

В § 2 гл. 3 доказано также, что если функция $f(x)$ принадлежит в рассматриваемой произвольной N-мерной области G классу L_2 и, кроме того, обращается в нуль в некоторой содержащейся в G области D, то средние Рисса порядка $s > 0$ размера λ любого самосопряженного неотрицательного расширения оператора Лапласа в области G почти всюду в области D имеют порядок $o(\lambda^{-s/2})$.

В гл. 4 развитая нами техника переносится на случай общего самосопряженного эллиптического оператора второго порядка L с гладкими коэффициентами.

Мы изучаем самосопряженные неотрицательные расширения этого оператора в пространстве L_2 со строго положительным весовым множителем $\rho_0(x)$. Наличие этого множителя позволяет включить в наше рассмотрение эллиптический оператор второго порядка на произвольном римановом многообразии, в частности оператор Бельтрами — Лапласа на замкнутом многообразии в произвольном (не обязательно симметрическом или гармоническом) римановом пространстве.

Отправным пунктом развиваемой нами методики является формула среднего значения для регулярного решения эллиптического уравнения второго порядка со спектральным параметром и с весовым множителем $\rho_0(x)$ в специальной форме, установленной Е. И. Моисеевым.

В § 1 гл. 4 приводятся формула среднего значения Е. И. Моисеева и необходимые нам результаты из теории упорядоченных спектральных представлений пространства L_2 с весом и из теории дробных степеней основного интегрального оператора. Центральным результатом § 1 гл. 4 является точная по порядку оценка интеграла от квадратов фундаментальных функций.

В § 2 гл. 4 для каждого индивидуального самосопряженного неотрицательного расширения эллиптического оператора второго порядка доказывается основная теорема негативного типа об отсутствии для любого s из полуинтервала

$$0 \leqslant s < (N-1)/2$$

свойства локализации у средних Рисса порядка s спектрального разложения финитной функции $f(x)$, принадлежащей классу Зигмунда — Гёльдера C^α с произвольным фиксированным α из интервала $0 < \alpha < (N-1)/2 - s$. Отсюда, как и в случае оператора Лапласа, вытекает отсутствие свойства локализации средних Рисса порядка s и для спектрального разложения финитной функции, принадлежащей любому из классов L_p^α, H_p^α и $B_{p,\theta}^\alpha$ при любых фиксированных α, p и θ, удовлетворяющих условиям

$$0 < \alpha < (N-1)/2 - s, \qquad p \geqslant 1, \qquad \theta \geqslant 1.$$

Для доказательства центральной теоремы негативного типа сначала оценивается снизу функция Лебега средних Рисса «малого» неотрицательного порядка s (это удается сделать, применяя аппарат, достаточно близкий к изложенному в гл. 2), а затем оцениваются в метрике L_1 средние Рисса от спектральной функции любого порядка $s < (N-1)/2$.

В § 3 гл. 4 доказывается основная позитивная теорема, все рассуждения которой ради упрощения проводятся для самих спектральных разложений.

Несомненно представляют самостоятельный интерес лемма об образах Фурье финитной функции из класса Никольского и оценка средних по геодезической сфере от функции из класса Никольского.

Основным итогом гл. 4 является доказательство того, что для произвольного самосопряженного неотрицательного расширения общего эллиптического оператора второго порядка и произвольной обладающей компактным носителем функции уже выписанные выше три неравенства (*) являются окончательными в каждом из классов L_p^α, H_p^α, $B_{p,\theta}^\alpha$ (при любом $\theta \geqslant 1$) и C^α условиями равномерной на любом компакте сходимости спектрального разложения, а условие $\alpha \geqslant (N-1)/2$ является окончательным в каждом из классов L_2^α, H_2^α, $B_{2,\theta}^\alpha$ (при любом $\theta \geqslant 1$) и C^α условием, обеспечивающим свойство локализации спектрального разложения.

Монография содержит два приложения, относящиеся к ситуации, когда у разлагаемой функции отсутствует компактный носитель.

В первом из этих приложений для произвольного нечетного N ($N > 1$) установлены окончательные в периодических классах Соболева — Лиувилля условия равномерной на всем замкнутом N-мерном кубе сходимости N-кратного тригонометрического ряда Фурье со сферическими частичными суммами.

В приложении 2 для функции, не обладающей компактным носителем, установлены окончательные в классах Соболева — Лиувилля условия равномерной на любом компакте сходимости разложений по собственным функциям соответственно первой, второй или третьей однородных краевых задач для эллиптического оператора второго порядка, рассматриваемого в произвольной ограниченной области любого нечетного числа N ($N > 1$) измерений.

Многие вошедшие в данную монографию результаты излагаются в ней не в таком виде, в каком они были первоначально получены ее автором, а с позиции его сегодняшних взглядов.

Некоторые вошедшие в монографию результаты публикуются впервые. Сюда, например, относятся: изложение метода оценки в метрике L_∞ остаточного члена средних Рисса любого неотрицательного порядка от спектральной функции, не использующего традиционной техники Карлемана и аппарата тауберовых теорем; вывод оценки интеграла от квадратов фундаментальных функций для общего эллиптического оператора второго порядка; установление точных в периодических классах Соболева — Лиувилля условий равномерной (на всем замкнутом N-мерном кубе) сходимости кратного тригонометрического ряда Фурье со сферическими частичными суммами (для нечетного $N > 1$); установление точных в классах Соболева — Лиувилля условий равномерной (на любом компакте) сходимости разложений по собственным функциям соответственно первой, второй или третьей краевых задач для эллиптического оператора второго порядка, рассматриваемого в ограниченной области нечетного числа $N > 1$ измерений.

В процессе работы над многими вошедшими в эту монографию результатами автор часто обсуждал свои замыслы и их воплощение с А. Н. Тихоновым, А. А. Самарским, С. М. Никольским, В. П. Масловым, А. В. Бицадзе, Л. Д. Кудрявцевым и со своими учениками и товарищами по работе Ш. А. Алимовым, Е. И. Моисеевым и И. А. Шишмаревым.

Автор выражает глубокую благодарность за эти очень полезные для него обсуждения.

Автор благодарит также А. А. Дезина, прочитавшего рукопись и сделавшего ряд ценных замечаний.

ОБОЗНАЧЕНИЯ, ПРИНЯТЫЕ В МОНОГРАФИИ

E^N — N-мерное евклидово пространство.

G — произвольная область в E^N.

Ω — произвольная N-мерная подобласть области G.

D — как правило, подобласть Ω или G.

$\mathcal{J}_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка ν.

$Y_\nu(x)$ — функция Неймана или цилиндрическая функция второго рода порядка ν.

$K_\nu(x)$ — функция Макдональда или цилиндрическая функция третьего рода порядка ν.

$\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера.

$\omega_N = 2(\sqrt{\pi})^N \cdot [\Gamma(N/2)]^{-1}$ — площадь поверхности единичной сферы в пространстве E^N.

$\rho(\lambda)$ или $\rho(t)$ — спектральная мера, порождаемая упорядоченным спектральным представлением пространства L_2 относительно изучаемого самосопряженного расширения эллиптического оператора.

$E_\lambda(x)$ или $\sigma_\lambda(x, f)$ — спектральное разложение функции $f(x)$ в точке x.

$E_\lambda^s f(x)$ или $\sigma_\lambda^s(x, f)$ — средние Рисса порядка s спектрального разложения функции $f(x)$ в точке x.

$\theta(x, y, \lambda)$ — спектральная функция рассматриваемой ФСФ или рассматриваемого самосопряженного расширения эллиптического оператора.

$\theta^s(x, y, \lambda)$ — средние Рисса порядка s спектральной функции.

$H_p^\alpha(G)$ — класс функций Никольского.

$L_p^\alpha(G)$ — класс функций Соболева — Лиувилля.

$B_{p,\theta}^\alpha(G)$ — класс функций Бесова.

$C^\alpha(G)$ — класс функций Зигмунда — Гёльдера.

$W_p^n(G)$ — класс функций Соболева целого порядка n.

ГЛАВА 1

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

В этой главе для простейшего эллиптического оператора — оператора Лапласа, рассматриваемого в произвольной (не обязательно ограниченной) N-мерной области, мы введем понятие *фундаментальной системы функций* (ФСФ), охватывающее системы собственных функций всех самосопряженных краевых задач для оператора Лапласа, для которых спектр является чисто точечным (с допущением для собственных значений бесконечной кратности и всюду плотного множества предельных точек — такая возможность, как мы увидим, реально может иметь место).

В § 1 мы выясняем основные свойства таких систем и отвечающего им множества собственных значений.

Мы убедимся в том, что для некоторого «агрегата», состоящего из суммы квадратов фундаментальных функций, справедлива точная по порядку оценка как сверху, так и снизу.

Кроме того, будет доказано, что в области N ($N \geqslant 2$) измерений множество всех собственных значений может содержать в качестве подмножества произвольное наперед заданное счетное множество неотрицательных вещественных чисел.

В § 2 для изучаемых систем строятся так называемые ядра дробного порядка, которые для конкретных краевых задач представляют собой ядра интегральных операторов, отвечающих любым положительным степеням интегрального оператора, порождаемого функцией Грина соответствующей краевой задачи.

В § 3, не используя метода Карлемана и техники тауберовых теорем, мы устанавливаем точную по порядку оценку в метрике L_2 остаточного члена спектральной функции, отвечающей произвольной ФСФ.

В § 4 для функций с компактным носителем устанавливаются точные в классах Соболева — Лиувилля условия равномерной сходимости и локализации спектральных разложений по произвольной ФСФ оператора Лапласа. Эти установленные автором настоящей монографии условия оказались новыми (и также точными) даже для кратных тригонометрических рядов Фурье со сферическими частичными суммами.

В § 5 мы указываем возможные обобщения развитой нами теории. Мы убеждаемся в том, что привлечение одного установленного А. М. Олевским условия позволяет освободить изучаемую ФСФ от требования ортонормированности в рассматриваемой или в какой-либо охватывающей ее области.

§ 1. Фундаментальные системы функций и их свойства

1. Понятие фундаментальной системы функций. Формула среднего значения. Многочисленные работы по спектральной теории эллиптических операторов, как правило, основываются на технике, для реализации которой требуется задание краевых условий (либо в явном виде, либо в форме задания области определения соответствующего оператора). С целью осуществить отказ от задания в какой-либо форме краевых условий и разработать технику, позволяющую изучать произвольное неотрицательное самосопряженное расширение оператора Лапласа, спектр которого является чисто точечным, мы введем понятие фундаментальной системы функций (ФСФ) оператора Лапласа (по существу, понятие полной ортонормированной системы, связанной только с формальным дифференциальным оператором — оператором Лапласа).

Пусть G — произвольная (не обязательно ограниченная) область в N-мерном евклидовом пространстве E^N.

Определение 1. *Полную ортонормированную в произвольной N-мерной области G систему $\{u_n(x)\}$ назовем фундаментальной системой функций* (ФСФ) *оператора Лапласа в этой области, если каждая функция $u_n(x)$ принадлежит в открытой области G классу $C^{(2)}$ и для некоторого неотрицательного числа λ_n удовлетворяет внутри G уравнению*

$$\Delta u_n + \lambda_n u_n = 0.$$

Понятие фундаментальной системы функций оператора Лапласа можно вводить и локально, т. е. не по отношению ко всей N-мерной области G, в которой эта система ортонормирована, а по отношению к произвольной N-мерной подобласти Ω области G.

Определение 2. *Полную ортонормированную в произвольной N-мерной области G систему $\{u_n(x)\}$ назовем фундаментальной системой функций* (ФСФ) *оператора Лапласа в подобласти Ω области G, если каждая функция $u_n(x)$ принадлежит в открытой области Ω классу $C^{(2)}$ и для некоторого неотрицательного числа λ_n удовлетворяет внутри Ω уравнению $\Delta u_n + \lambda_n u_n = 0$.*

Понятие ФСФ оператора Лапласа (даже во всей области G) включает в себя как частный случай системы собственных функций всех классических самосопряженных краевых задач для оператора Лапласа в произвольной области G (например, системы собственных функций первой, второй и третьей краевых задач в этой области), N-кратную тригонометрическую систему (в случае, когда область G представляет собой N-мерный прямоугольный параллелепипед, а краевые условия заключаются в равенстве на противоположных гранях этого параллелепипеда значений самих функций $u_n(x)$ и их нормальных производных) и вообще систему собственных функций любого неотрицательного самосопряженного расширения оператора Лапласа в области G*), спектр которого является чисто точечным.

Сразу же отметим, что как всякая ортонормированная система ФСФ оператора Лапласа (и во всей области G, и в произвольной подобласти Ω области G) *является не более чем счетной*, и ее элементы можно перенумеровать.

В дальнейшем мы договоримся называть отдельные элементы $u_n(x)$ изучаемой ФСФ *фундаментальными функциями*, а отвечающие им числовые значения λ_n *фундаментальными значениями* или *собственными значениями*. Совокупность всех фундаментальных значений будем называть *спектром* данной ФСФ.

Здесь и в п. 2 мы изучим свойства фундаментальных функций произвольной ФСФ, а в п. 3 — устройство ее спектра.

Так как понятие ФСФ оператора Лапласа в подобласти Ω области G является более общим, чем понятие ФСФ во всей области G, мы в дальнейшем будем формулировать свойства фундаментальных функций для ФСФ оператора Лапласа в произвольной подобласти Ω области G, имея в виду, что допускается совпадение Ω с G.

В дальнейшем мы договоримся обозначать символом

$$\int \underset{\omega}{\ldots} \int f(x + r\omega)\, d\omega \tag{1.1.1}$$

интеграл от функции f по всем углам на поверхности N-мерной сферы радиуса r с центром в точке x.

Основным характеристическим свойством элемента произвольной ФСФ является формула среднего значения.

Пусть $u_n(x)$ — элемент произвольной ФСФ оператора Лапласа в какой-угодно N-мерной подобласти Ω произвольной N-мерной области G, отвечающий фундаментальному значению $\lambda_n \neq 0$, x — любая точка подобласти Ω, r — любое положительное число такое, что N-мерный шар радиуса r с центром в точке x содержится в Ω. Тогда справедлива следующая формула:

$$\int \underset{\omega}{\ldots} \int u_n(x + r\omega)\, d\omega = (2\pi)^{N/2} \cdot u_n(x) \cdot \left(r\sqrt{\lambda_n}\right)^{(2-N)/2} \cdot \mathcal{J}_{(N-2)/2}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right), \tag{1.1.2}$$

называемая ф о р м у л о й с р е д н е г о з н а ч е н и я**).

Мы дадим совсем элементарный вывод этой формулы. Начнем с того, что заметим, что формулу (1.1.2) достаточно установить для таких значений r, для которых стоящая в этой формуле бесселева функция $\mathcal{J}_{(N-2)/2}(r\sqrt{\lambda_n})$ не обращается в нуль. (Тогда по

*) Определение произвольного неотрицательного самосопряженного расширения оператора Лапласа см. в гл. 2.

**) Символ $\mathcal{J}_\nu(t)$ обозначает функцию Бесселя первого рода порядка ν от аргумента t. При $\lambda_n = 0$ формула (1.1.2) переходит в известную формулу среднего значения для гармонической функции.

непрерывности эта формула будет верна и для значений r, для которых указанная бесселева функция не обращается в нуль.)

Пусть r — одно из значений, для которых указанная бесселева функция не обращается в нуль, а символ $Y_\nu(t)$ обозначает так называемую *функцию Неймана порядка* ν *от аргумента* t *). Применим вторую формулу Грина по N-мерному шару Ω_r^x радиуса r с центром в точке x к двум функциям: к фундаментальной функции $u_n(y)$ и к следующей функции:

$$\overset{n}{v}(y) =$$

$$= -\frac{\lambda_n^{\nu/2}}{2^{\nu+2}\cdot\pi^\nu}\left[\frac{Y_\nu\left(|x-y|\sqrt{\lambda_n}\right)}{|x-y|^\nu} - \frac{\mathcal{J}_\nu\left(|x-y|\sqrt{\lambda_n}\right)}{|x-y|^\nu}\cdot\frac{Y_\nu\left(r\sqrt{\lambda_n}\right)}{\mathcal{J}_\nu\left(r\sqrt{\lambda_n}\right)}\right].$$

(Здесь для краткости положено $\nu = (N-2)/2$, а символом $|x-y|$ обозначено N-мерное расстояние между точками x и y.)

В результате применения второй формулы Грина два объемных интеграла по шару Ω_r^x взаимно уничтожатся, один из интегралов по поверхности этого шара обратится в нуль, а второй из интегралов по поверхности указанного шара и «выброс» в точке x с учетом величины вронскиана от бесселевских функций

$$\left[\mathcal{J}_\nu\left(r\sqrt{\lambda_n}\right)\cdot\frac{dY_\nu\left(r\sqrt{\lambda_n}\right)}{dr} - Y_\nu\left(r\sqrt{\lambda_n}\right)\frac{d\mathcal{J}_\nu\left(r\sqrt{\lambda_n}\right)}{dr}\right] = -\frac{2}{\pi r}$$

дадут нам формулу (1.1.2).

Будем говорить, что функция f *принадлежит в области* Ω *к классу радиальных функций*, если эта функция зависит только от расстояния $r = |x-y|$ переменной точки y области Ω от фиксированной точки x этой области и если f отлична от нуля только внутри некоторого лежащего в области Ω шара.

В заключение этого пункта установим выражение для коэффициента Фурье произвольной функции f, принадлежащей в области Ω к классу радиальных функций, по произвольной ФСФ оператора Лапласа в подобласти Ω области G. Так как f отлична от нуля только в шаре радиуса R с центром в точке x, целиком лежащем в Ω, и зависит только от расстояния $r = |x-y|$, то, записывая искомый коэффициент Фурье f_n в сферической системе координат с центром в точке x, получим

$$f_n = \int\limits_0^R f(r)\left(\int\underset{\omega}{\cdots}\int u_n(x+r\omega)\,d\omega\right) r^{N-1}\,dr.$$

Сопоставляя последнее равенство с формулой среднего значения

*) Определение и свойства функции Неймана (или, как ее еще называют, цилиндрической функции второго рода) можно найти в книге Г. Бейтмена и А. Эрдейи [1, с. 12].

(1.1.2), получим следующее выражение для вычисляемого коэффициента Фурье:

$$f_n=(f, u_n)=(2\pi)^{\frac{N}{2}}\cdot u_n(x)\cdot \lambda_n^{\frac{2-N}{4}}\cdot\int_0^R f(r)\cdot r^{\frac{N}{2}}\cdot \mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right)dr. \qquad (1.1.3)$$

2. Точные оценки суммы квадратов фундаментальных функций и следствия из них. В отличие от обыкновенного дифференциального оператора для эллиптического оператора (в том числе для оператора Лапласа) в области N ($N\geqslant 2$) измерений даже для простейших краевых задач не существует асимптотического представления отдельных собственных функций для больших значений спектрального параметра λ_n *). Тем не менее для произвольной ФСФ оператора Лапласа в N-мерной подобласти Ω произвольной N-мерной области G удается установить точную по порядку оценку как сверху, так и снизу некоторого «агрегата» из суммы квадратов фундаментальных функций.

Теорема 1.1. *Если $\{u_n(x)\}$ — произвольная ФСФ оператора Лапласа в какой угодно N-мерной подобласти Ω произвольной N-мерной области G, то для любого $\mu\geqslant 0$ равномерно относительно x в каждой строго внутренней подобласти Ω' области Ω справедлива следующая оценка:*

$$\sum_{\mu\leqslant\sqrt{\lambda_n}\leqslant\mu+1} u_n^2(x)\leqslant C(\mu+1)^{N-1}. \qquad (1.1.4)$$

Доказательство. 1) Сначала докажем справедливость оценки (1.1.4) для случая, когда μ превосходит некоторое положительное число μ_0, выбор которого мы укажем. Фиксируем произвольную строго внутреннюю подобласть Ω' области Ω и обозначим через R положительное число, меньшее $\pi/2$ и меньшее расстояния Ω' от границы области Ω. Считая, что x — любая фиксированная точка области Ω', рассмотрим функцию аргумента $r=|x-y|$:

$$v(r)=\begin{cases}\mu^{\frac{N}{2}}\cdot(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\cdot r^{\frac{2-N}{2}}\mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}(\mu r) & \text{при } \frac{R}{2}<r<R,\\ 0 & \text{при остальных } r.\end{cases} \qquad (1.1.5)$$

Так как функция (1.1.5) принадлежит в области Ω к классу радиальных функций, то для ее коэффициента Фурье v_n по

*) Например, для оператора Лапласа в квадрате $[0\leqslant x_1\leqslant\pi]\times$ $\times[0\leqslant x_2\leqslant\pi]$ с однородным краевым условием первого рода на границе этого квадрата каждому собственному значению $\lambda_{mn}=m^2+n^2$ отвечают две собственные функции $u_{mn}(x_1, x_2)=\sin(mx_1)\cdot\sin(nx_2)$ и $u_{nm}(x_1, x_2)=$ $=\sin(nx_1)\sin(mx_2)$, которые в случае, когда целое m велико, а целое n мало, ведут себя с ростом собственного значения m^2+n^2 существенно поразному.

системе $\{u_n(y)\}$ справедливо соотношение вида (1.1.3):

$$v_n = (v, u_n) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \cdot u_n(x) \cdot \lambda_n^{\frac{2-N}{4}} \cdot \int_0^R v(r)\, r^{\frac{N}{2}} \cdot \mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right) dr =$$

$$= \mu^{\frac{N}{2}} \cdot \lambda_n^{\frac{2-N}{4}} \cdot u_n(x) \cdot \int_{R/2}^{R} \mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}(\mu r) \cdot \mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right) r\, dr. \quad (1.1.6)$$

С помощью формулы (1.1.6) мы докажем, что если положительное число μ_0 достаточно велико, то при $\mu \geqslant \mu_0$ для всех номеров n, для которых $\mu \leqslant \sqrt{\lambda_n} \leqslant \mu + 1$, найдется постоянная $\alpha > 0$ такая, что

$$|v_n| \geqslant \alpha \cdot |u_n(x)|. \quad (1.1.7)$$

Если неравенство (1.1.7) будет доказано, то, записывая для функции (1.1.5) по ортонормированной системе $\{u_n(y)\}$ неравенство Бесселя и оставляя в левой части этого неравенства слагаемые только по номерам n, удовлетворяющим условию $\mu \leqslant \sqrt{\lambda_n} \leqslant \mu + 1$, мы получим, что *)

$$\sum_{\mu \leqslant \sqrt{\lambda_n} \leqslant \mu+1} u_n^2(x) \leqslant \frac{1}{\alpha^2} \int_{\Omega} v^2(|x-y|)\, dy =$$

$$= \frac{\mu^N \cdot \omega_N}{(2\pi)^N \cdot \alpha^2} \cdot \int_{R/2}^{R} r \cdot \mathcal{J}^2_{\frac{N-2}{2}}(\mu r)\, dr = O(\mu^{N-1}),$$

что и завершает вывод оценки (1.1.4) для рассматриваемого случая.

Итак, для доказательства оценки (1.1.4) в рассматриваемом первом случае достаточно доказать, что при некотором $\mu_0 > 0$ найдется постоянная $\alpha > 0$ такая, что для всех номеров n, удовлетворяющих условию $\mu_0 \leqslant \mu \leqslant \sqrt{\lambda_n} \leqslant \mu + 1$, справедливо неравенство (1.1.7).

Заметим теперь, что если $\mu_0 > 0$ достаточно велико, то при $\mu_0 \leqslant \mu \leqslant \sqrt{\lambda_n} \leqslant \mu + 1$ справедливы оценки

$$\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_n}} = 1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right), \quad \left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^{\frac{N-2}{2}} =$$

$$= 1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right), \quad \frac{1}{\lambda_n^{1/4}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right]. \quad (1.1.8)$$

---

*) Здесь мы пользуемся справедливой для всех $x \geqslant 0$ и $\nu \geqslant -1/2$ оценкой $|\mathcal{J}_\nu(x)| \leqslant C(\nu) \cdot x^{-1/2}$, которая сразу же вытекает из представления $\mathcal{J}_\nu(x)$ в виде ряда при $|x| \leqslant 1$ и асимптотического представления при $|x| > 1$ (см. Г. Бейтмен и А. Эрдейи [1], с. 12 и 98). Через ω_N обозначена площадь поверхности N-мерной сферы единичного радиуса, равная $2(\sqrt{\pi})^N \times \left[\left(\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\right]^{-1}$, где $\Gamma(s)$ — Г-функция Эйлера.

Вторая оценка (1.1.8) и соотношение (1.1.6) позволяют утверждать, что для доказательства справедливости для всех номеров n, для которых $\mu_0 \leqslant \mu \leqslant \sqrt{\lambda_n} \leqslant \mu + 1$, неравенства (1.1.7) достаточно убедиться в существовании постоянной $\beta > 0$ такой, что для всех указанных номеров справедливо неравенство

$$\mu \int_{R/2}^{R} \mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}(\mu r) \cdot \mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}\left(r \sqrt{\lambda_n}\right) \cdot r\, dr > \beta. \qquad (1.1.9)$$

Воспользуемся для бесселевой функции $\mathcal{J}_\nu(x)$ известной асимптотической формулой, справедливой для значений аргумента x, превосходящих единицу *):

$$\mathcal{J}_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \qquad (1.1.10)$$

Фиксируем теперь положительное число μ_0 настолько большим, чтобы были справедливы оценки (1.1.8) и чтобы выполнялось неравенство $\mu_0 \geqslant 2/R$. Тогда аргументы обеих бесселевых функций, стоящих под знаком интеграла левой части (1.1.9), будут превосходить единицу, и, используя для указанных бесселевых функций асимптотическую формулу (1.1.10), мы получим для подынтегральной функции в (1.1.9) следующее асимптотическое представление **):

$$\mu \cdot \mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}(\mu r) \cdot \mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}\left(r \sqrt{\lambda_n}\right) \cdot r =$$

$$= \frac{\sqrt{\mu}}{\pi \cdot \lambda_n^{1/4}} \cdot \left\{\sin\left[r\left(\mu + \sqrt{\lambda_n}\right) - (N-1)\frac{\pi}{2}\right] + \right.$$

$$\left. + \cos\left[r\left(\mu - \sqrt{\lambda_n}\right)\right]\right\} + \frac{1}{r} O\left(\frac{1}{\mu}\right). \qquad (1.1.11)$$

Так как в силу третьего из соотношений (1.1.8) справедливо представление $\sqrt{\mu}/\lambda_n^{1/4} = 1 + O(1/\mu)$, то в силу равенства (1.1.11) для доказательства справедливости для рассматриваемых номеров неравенства (1.1.9) достаточно установить для этих номеров три оценки:

$$\frac{1}{\pi} \int_{R/2}^{R} \sin\left[r\left(\mu + \sqrt{\lambda_n}\right) - (N-1)\frac{\pi}{2}\right] dr = O\left(\frac{1}{\mu}\right), \qquad (1.1.12)$$

$$\int_{R/2}^{R} \frac{1}{r} \cdot O\left(\frac{1}{\mu}\right) dr = O\left(\frac{1}{\mu}\right), \qquad (1.1.13)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{R/2}^{R} \cos\left[r\left(\mu - \sqrt{\lambda_n}\right)\right] dr \geqslant \gamma > 0. \qquad (1.1.14)$$

---

*) См. например. Г. Бейтмен и А. Эрдейи [1. с. 98].

**) При этом мы пользуемся также третьим соотношением из (1.1.8).

Справедливость оценок (1.1.12) и (1.1.13) проверяется элементарным интегрированием. Для доказательства неравенства (1.1.14) заметим, что величина, стоящая в левой части этого неравенства, в точности равна

$$\frac{1}{\pi}\left\{R\cdot\frac{\sin\left[R\left(\mu-\sqrt{\lambda_n}\right)\right]}{R\left(\mu-\sqrt{\lambda_n}\right)}-\frac{R}{2}\cdot\frac{\sin\left[\frac{R}{2}\left(\mu-\sqrt{\lambda_n}\right)\right]}{\frac{R}{2}\left(\mu-\sqrt{\lambda_n}\right)}\right\}. \quad (1.1.15)$$

По условию $R<\pi/2$. Кроме того, для рассматриваемых номеров n справедливо неравенство $0\leqslant\sqrt{\lambda_n}-\mu\leqslant 1$. Поэтому аргументы обоих синусов в (1.1.15) по модулю не превосходят $\pi/2$. Но при $|\rho|\leqslant\pi/2$ справедливо неравенство *)

$$1\geqslant\frac{\sin\rho}{\rho}\geqslant\frac{2}{\pi}. \quad (1.1.16)$$

Неравенство (1.1.16) позволяет утверждать, что величина (1.1.15) во всяком случае не меньше числа

$$\frac{1}{\pi}\left\{R\,\frac{2}{\pi}-\frac{R}{2}\right\}=\frac{R\,(4-\pi)}{2\pi^2}=\gamma>0.$$

Тем самым неравенство (1.1.14) доказано. Доказательство оценки (1.1.4) для случая, когда μ превосходит фиксированное нами достаточно большое число $\mu_0>0$, завершено.

2) Для завершения доказательства теоремы 1.1 остается провести доказательство оценки (1.4) для случая, когда μ удовлетворяет неравенствам $0\leqslant\mu\leqslant\mu_0$.

Заметим, что в этом случае для доказательства оценки (1.1.4) достаточно установить следующую оценку:

$$\sum_{\sqrt{\lambda_n}\leqslant\mu_0} u_n^2(x)=O\left(\mu_0^N\right), \quad (1.1.17)$$

равномерную относительно x в каждой строго внутренней подобласти Ω' области Ω.

Фиксируя, как и выше, произвольную строго внутреннюю подобласть Ω' области Ω, произвольную точку x в Ω' и любое положительное число R, меньшее расстояния Ω' от границы Ω, рассмотрим функцию аргумента $r=|x-y|$

$$w(r)=\begin{cases}\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)\pi^{-N/2}R^{-N} & \text{при } r<R,\\ 0 & \text{при } r>R.\end{cases} \quad (1.1.18)$$

Вычисляя коэффициент Фурье w_n функции (1.1.18) по системе $\{u_n(y)\}$ с помощью равенства вида (1.1.3), получим, учи-

*) Достаточно заметить, что функция $(\sin\rho)/\rho$ убывает на сегменте $0\leqslant\rho\leqslant 1$, поскольку всюду на этом сегменте ее производная $\rho^{-2}\cos\rho\times(\rho-\operatorname{tg}\rho)$ неположительна, и учесть, что функция $(\sin\rho)/\rho$ равна 1 при $\rho=0$ и равна $2/\pi$ при $\rho=\pi/2$.

тывая, что $\int \rho^\nu \mathcal{J}_{\nu-1}(\rho)\,d\rho = \rho^\nu \mathcal{J}_\nu(\rho)$ *),

$$w_n = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \cdot u_n(x) \cdot \lambda_n^{\frac{2-N}{4}} \cdot \Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right) \cdot \pi^{-\frac{N}{2}} \cdot R^{-N} \cdot \int_0^R r^{\frac{N}{2}} \cdot \mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right) dr =$$

$$= \Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right) \cdot 2^{\frac{N}{2}} \cdot \frac{\mathcal{J}_{\frac{N}{2}}\left(R\sqrt{\lambda_n}\right)}{\left(R\sqrt{\lambda_n}\right)^{N/2}} \cdot u_n(x).$$

Таким образом, равенство Парсеваля для функции (1.1.18) по полной ортонормированной системе $\{u_n(y)\}$ имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(x) \cdot \left\{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right) \cdot 2^{\frac{N}{2}} \cdot \frac{\mathcal{J}_{\frac{N}{2}}\left(R\sqrt{\lambda_n}\right)}{\left(R\sqrt{\lambda_n}\right)^{N/2}}\right\}^2 =$$

$$= \omega_N \cdot \int_0^R \frac{\Gamma^2\left(\frac{N}{2}+1\right)}{\pi^N \cdot R^{2N}} \cdot r^{N-1}\,dr = \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)}{\pi^{N/2} \cdot R^N}. \quad (1.1.19)$$

Так как оценку (1.1.17) достаточно установить только для больших μ_0, то мы положим в (1.1.19) $R = 1/(2\mu_0)$. При этом для всех номеров n, для которых $\sqrt{\lambda_n} \leqslant \mu_0$, аргумент $R\sqrt{\lambda_n}$ бесселевой функции, стоящей в левой части (1.1.19), не превзойдет числа 1/2. При этом из представления бесселевой функции в виде степенного ряда сразу же вытекает, что для всех указанных номеров n величина, стоящая в левой части (1.1.19) в фигурных скобках, превзойдет некоторое положительное число α_0. Итак, при $R = 1/(2\mu_0)$ мы получим из (1.1.19)

$$\alpha_0^2 \cdot \sum_{\sqrt{\lambda_n} \leqslant \mu} u_n^2(x) \leqslant \frac{2^N \cdot \Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)}{\pi^{N/2}} \cdot \mu_0^N.$$

Вывод оценки (1.1.17) завершен. Теорема 1.1 доказана.

Замечание 1. Если на сегменте $[\mu^2, (\mu+1)^2]$ лежат точки сгущения фундаментальных значений $\{\lambda_n\}$, то в левой части (1.1.4) будет стоять сходящийся (в каждой строго внутренней подобласти Ω' области Ω) ряд. Такой случай, как мы увидим в п. 3, реально может иметь место.

Замечание 2. Теорему 1.1 можно переформулировать следующим образом: *если $\{u_n(x)\}$ — произвольная ФСФ оператора Лапласа в какой угодно N-мерной подобласти Ω произвольной N-мерной области G, то для любого $\mu \geqslant 1$ равномерно относительно x в каждой строго внутренней подобласти Ω' области Ω справедлива оценка*

$$\sum_{\left|\sqrt{\lambda_n}-\mu\right| \leqslant 1} u_n^2(x) = O\left(\mu^{N-1}\right). \quad (1.1.20)$$

*) См., например, Г. Бейтмен и А. Эрдейи [1, с. 20, формула (52)].

(Достаточно заметить, что суммирование в (1.1.20) идет по значениям n, для которых $\sqrt{\lambda_n}$ принадлежит сегменту $[\mu-1, \mu+1]$, а этот сегмент представляет собой сумму двух сегментов $[\mu-1, \mu]$ и $[\mu, \mu+1]$, для каждого из которых при $\mu \geqslant 1$ справедлива оценка (1.1.4).)

Извлечем из теоремы 1.1 несколько простых следствий.

Следствие 1. *Если $\{u_n(x)\}$ — произвольная ФСФ оператора Лапласа в какой угодно N-мерной подобласти Ω произвольной N-мерной области G, то для любого $\mu \geqslant 1$ и любого ρ из сегмента $1 \leqslant \rho \leqslant \mu$ равномерно относительно x в каждой строго внутренней подобласти Ω' области Ω справедлива оценка*

$$\sum_{|\sqrt{\lambda_n}-\mu| \leqslant \rho} u_n^2(x) = \rho \cdot O\left(\mu^{N-1}\right). \tag{1.1.21}$$

Для доказательства этого следствия достаточно представить сегмент $[\mu-\rho, \mu+\rho]$, в пределах которого изменяется $\sqrt{\lambda_n}$ в (1.1.21), в виде суммы не более чем*) $[2\rho]+1$ сегментов длины, не превышающей единицу, и для каждого из указанных сегментов записать оценку типа (1.1.4).

Следствие 2. *Если $\{u_n(x)\}$ — произвольная ФСФ оператора Лапласа в какой угодно N-мерной подобласти Ω произвольной N-мерной области G, то для любого $\delta > 0$ и для всех $\lambda \geqslant 1$ равномерно относительно x в каждой строго внутренней подобласти Ω' области Ω справедливы оценки*

$$\sum_{1 \leqslant \lambda_n \leqslant \lambda} u_n^2(x) \cdot \lambda_n^{\delta - N/2} = O\left(\lambda^{\delta}\right), \tag{1.1.22}$$

$$\sum_{\lambda_n \geqslant \lambda} u_n^2(x) \cdot \lambda_n^{-\delta - N/2} = O\left(\lambda^{-\delta}\right). \tag{1.1.23}$$

В частности, для любого $\delta > 0$ можно утверждать равномерную в Ω' ограниченность суммы ряда

$$\sum_{\lambda_n \geqslant 1} u_n^2(x) \cdot \lambda_n^{-\delta - N/2}. \tag{1.1.24}$$

Доказательство. Для доказательства оценки (1.1.22) обозначим символом $[\sqrt{\lambda}]$ целую часть числа $\sqrt{\lambda}$ и заметим, что левая часть (1.1.22) заведомо не превосходит суммы

$$\sum_{k=1}^{[\sqrt{\lambda}]} \left[\sum_{k \leqslant \sqrt{\lambda_n} \leqslant k+1} u_n^2(x) \cdot \lambda_n^{\delta - N/2} \right]. \tag{1.1.25}$$

Заметим далее, что при фиксированном k величина $\lambda_n^{\delta - N/2}$, стоящая под знаком внутренней (заключенной в квадратные скобки) суммы в (1.1.25), заведомо не превосходит числа $C_0 \cdot k^{2\delta - N}$, где $C_0 = 1$ при $\delta < N/2$ и $C_0 = 2^{2\delta - N}$ при $\delta > N/2$. Это следует из

*) Символ $[2\rho]$ обозначает целую часть числа 2ρ.

того, что при всех $k \leqslant \sqrt{\lambda_n} \leqslant k+1$

$$\lambda_n^{\delta-N/2} \leqslant \begin{cases} k^{2\delta-N} & \text{при} \quad \delta \leqslant N/2, \\ (k+1)^{2\delta-N} \leqslant (2k)^{2\delta-N} & \text{при} \quad \delta > N/2. \end{cases}$$

Таким образом, сумма (1.1.25), а стало быть, левая часть (1.1.22) мажорируется суммой

$$C_0 \cdot \sum_{k=1}^{[\sqrt{\lambda}]} k^{2\delta-N} \left[\sum_{k \leqslant \sqrt{\lambda_n} \leqslant k+1} u_n^2(x) \right]. \tag{1.1.26}$$

Привлекая для суммы, заключенной в (1.1.26) в квадратные скобки, оценку (1.1.4), получаем, что левая часть (1.1.22) мажорируется величиной

$$C_0 C \sum_{k=1}^{[\sqrt{\lambda}]} k^{2\delta-N}(k+1)^{N-1} \leqslant C_0 C \sum_{k=1}^{[\sqrt{\lambda}]} k^{2\delta-N}(2k)^{N-1} =$$

$$= C_0 C \cdot 2^{N-1} \sum_{k=1}^{[\sqrt{\lambda}]} k^{2\delta-1} = O([\sqrt{\lambda}]^{2\delta}) = O(\lambda^{\delta}).$$

Тем самым оценка (1.1.22) доказана.

Для доказательства оценки (1.1.23) мажорируем левую часть (1.1.23) суммой

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{\sqrt{\lambda}+k \leqslant \sqrt{\lambda_n} \leqslant \sqrt{\lambda}+k+1} u_n^2(x) \cdot \lambda_n^{-\delta - N/2} \right]. \tag{1.1.27}$$

Так как при всех $\sqrt{\lambda}+k \leqslant \sqrt{\lambda_n} \leqslant \sqrt{\lambda}+k+1$ справедливо неравенство $\lambda_n^{-\delta-\frac{N}{2}} \leqslant (\sqrt{\lambda}+k)^{-2\delta-N}$, то сумму (1.1.27) в свою очередь можно мажорировать суммой

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{\lambda}+k)^{-2\delta-N} \cdot \left[\sum_{\sqrt{\lambda}+k \leqslant \sqrt{\lambda_n} \leqslant \sqrt{\lambda}+k+1} u_n^2(x) \right]. \tag{1.1.28}$$

Привлекая для суммы, заключенной в (1.1.28) в квадратные скобки, оценку (1.1.4), мы получим, что левая часть (1.1.23) мажорируется величиной

$$C \sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{\lambda}+k)^{-2\delta-N} (\sqrt{\lambda}+k+1)^{N-1} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{\lambda}+k)^{-2\delta-N} [2(\sqrt{\lambda}+k)]^{N-1} = C \cdot 2^{N-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{\lambda}+k)^{-2\delta-1} \leqslant$$

$$\leqslant C \cdot 2^{N-1} \left\{ \lambda^{-\delta-1/2} + \int_0^{\infty} (\sqrt{\lambda}+x)^{-2\delta-1}\, dx \right\} \leqslant C \cdot 2^{N-1} \lambda^{-\delta} \left[1 + \frac{1}{2\delta} \right].$$

Тем самым вывод оценки (1.1.23) завершен.

Замечание 3. Тот факт, что в классе всех ФСФ оператора Лапласа оценка (1.1.4) является точной по порядку, элементарно усматривается из рассмотрения в качестве ФСФ системы собственных функций оператора Лапласа в N-мерном шаре радиуса R с однородным краевым условием первого или второго рода на границе этого шара. Легко проверить, что для указанной системы собственных функций не только сумма, стоящая в левой части (1.1.4), но и квадрат одной-единственной обладающей радиальной симметрией собственной функции имеет в центре шара порядок, указанный в правой части (1.1.4)*).

Мы установим сейчас более сильный результат, из которого будет следовать, что *оценка* (1.1.4) *является точной по порядку и для каждой индивидуальной ФСФ оператора Лапласа.*

Теорема 1.2. *Если* $\{u_n(x)\}$ — *произвольная ФСФ оператора Лапласа в какой угодно N-мерной подобласти Ω произвольной N-мерной области G, то существуют такие положительные числа T и α, что для каждого $\mu \geqslant 0$ равномерно относительно x в каждой строго внутренней подобласти Ω' области Ω справедлива следующая оценка снизу*:

$$\sum_{\mu \leqslant \sqrt{\lambda_n} \leqslant \mu+T} u_n^2(x) \geqslant \alpha \cdot (\mu+1)^{N-1}. \tag{1.1.29}$$

---

*) Обладающие сферической симметрией нормированные собственные функции N-мерного шара радиуса R имеет вид:

1) для случая первой краевой задачи $u(R) = 0$:

$$u_n(r) = \frac{\sqrt{2}}{R\sqrt{\omega_N}} \left[\mathcal{J}_{\frac{N-4}{2}}(\mu_n)\right]^{-1} \cdot \mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}\left(\frac{r}{R}\mu_n\right) \cdot r^{\frac{2-N}{2}}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где μ_n — нули функции Бесселя $\mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}(x)$;

2) для случая второй краевой задачи $u'(R) = 0$:

$$u_n(r) = \frac{\sqrt{2}}{R\sqrt{\omega_N}} \left[\mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}(\mu_n)\right]^{-1} \cdot \mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}\left(\frac{r}{R}\mu_n\right) \cdot r^{\frac{2-N}{2}}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где μ_n — нули функции Бесселя $\mathcal{J}_{N/2}(x)$.

Из асимптотики функции Бесселя для больших значений аргумента и из определения нулей следует, что для первой краевой задачи $\mathcal{J}_{\frac{N-4}{2}}(\mu_n) = (-1)^n \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\mu_n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_n}}\right)$, а для второй краевой задачи $\mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}(\mu_n) = (-1)^n \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\mu_n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_n}}\right)$. Поэтому и для той, и для другой краевой задачи значения в центре шара равны $u_n(0) = C_n \cdot \mu_n^{\frac{N-1}{2}}$,

где $\sqrt{\lambda_n} = \mu_n/R$, $\lim\limits_{n\to\infty} |C_n| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\omega_N}}(2R)^{-N/2} \cdot \left[\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\right]^{-1}$.

Замечание 4. Сопоставление оценок (1.1.4) и (1.1.29) показывает, что обе эти оценки являются точными по порядку.

Доказательство теоремы 1.2. Заметим, что достаточно доказать следующее предложение: *если $\{u_n(x)\}$ — произвольная ФСФ оператора Лапласа в какой угодно N-мерной подобласти Ω произвольной N-мерной области G, то существуют такие положительные числа M, $\mu_0 > 2M$ и α, что для каждого $\mu \geqslant \mu_0$ равномерно относительно x в каждой строго внутренней подобласти Ω' области Ω справедлива следующая оценка снизу*:

$$\sum_{|\sqrt{\lambda_n}-\mu|\leqslant M} u_n^2(x) \geqslant \alpha\cdot\mu^{N-1}. \tag{1.1.30}$$

В самом деле, если сформулированное предложение будет доказано, то, положив $T = 2\mu_0$ и без ограничения общности приняв $\mu_0 > 1$, мы получим, что все $\sqrt{\lambda_n}$, участвующие в сумме, стоящей в левой части (1.1.29), удовлетворяют условию $|\sqrt{\lambda_n} - (\mu + T/2)| \leqslant T/2$, в котором $\mu + T/2 \geqslant \mu_0$, $T/2 = \mu_0 > 2M > M$, а это (в силу сформулированного предложения) обеспечивает ограниченность снизу суммы, стоящей в (1.1.29), величиной $\alpha\cdot(\mu + T/2)^{N-1}$, которая (в силу того, что $T/2 = \mu_0 \geqslant 1$) заведомо превосходит величину $\alpha\cdot(\mu+1)^{N-1}$.

Итак, нам остается доказать сформулированное предложение, к чему мы и переходим.

Как и выше, фиксируем произвольную строго внутреннюю подобласть Ω' области Ω, произвольную точку x в Ω' и положительное число R, во всяком случае меньшее расстояния Ω' от границы области Ω. (Точный выбор этого числа будет указан ниже.) Пусть $v(r)$ — функция, определяемая соотношением (1.1.5), а v_n — коэффициент Фурье этой функции, определяемый соотношением (1.1.6). Если M — какое угодно положительное число, то равенство Парсеваля для функции (1.1.5) можно записать в виде

$$\int\limits_G v^2(|x-y|)\,dy = \frac{\mu^N\cdot\omega_N}{(2\pi)^N}\cdot\int\limits_{R/2}^{R} r\mathscr{J}^2_{\frac{N-2}{2}}(\mu r)\,dr = \\ = \sum_{|\sqrt{\lambda_n}-\mu|\leqslant M} v_n^2 + \sum_{|\sqrt{\lambda_n}-\mu|>M} v_n^2. \tag{1.1.31}$$

Из асимптотической формулы (1.1.10) вытекает, что

$$\mathscr{J}^2_{\frac{N-2}{2}}(\mu r) = \frac{2}{\pi\mu r}\cdot\cos^2\left(\mu r - \frac{\pi N}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\mu^2\cdot r^2}\right) \tag{1.1.32}$$

для всех r из сегмента $R/2 \leqslant r \leqslant R$ и для всех достаточно больших μ (для $\mu > 2/R$). Из (1.1.32) вытекает, что для всех

$\mu > 2/R$ справедливо равенство

$$\int\limits_G v^2(|x-y|)\,dy = \frac{2\omega_N}{\pi(2\pi)^N}\mu^{N-1}\left[\int\limits_{R/2}^{R}\cos^2\left(\mu r - \frac{\pi N}{4} + \frac{\pi}{4}\right)dr + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right]. \tag{1.1.33}$$

Так как в силу равенства

$$\cos^2\left(\mu r - \frac{\pi N}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(2\mu r - \frac{\pi N}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

справедлива оценка

$$\int\limits_{R/2}^{R}\cos^2\left(\mu r - \frac{\pi N}{4} + \frac{\pi}{4}\right)dr = \frac{R}{4} + O\left(\frac{1}{\mu}\right),$$

то из (1.1.33) мы получим, что

$$\int\limits_G v^2(|x-y|)\,dy = \frac{\omega_N}{(2\pi)^{N+1}}\cdot\mu^{N-1}\left[R + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right]. \tag{1.1.34}$$

Из (1.1.34) вытекает, что существует положительная постоянная β *) такая, что при любом фиксированном R и при всех достаточно больших μ справедливо неравенство

$$\int\limits_G v^2(|x-y|)\,dy > \beta\cdot R\cdot\mu^{N-1}. \tag{1.1.35}$$

Убедимся теперь в том, что при произвольном фиксированном числе $M > 0$ и при любом $\mu > 2M$ равномерно относительно x в каждой строго внутренней подобласти Ω' области Ω справедливо следующее неравенство:

$$\sum_{|\sqrt{\lambda_n}-\mu|\leqslant M} v_n^2 \leqslant \gamma\cdot R^2\cdot \sum_{|\sqrt{\lambda_n}-\mu|\leqslant M} u_n^2(x), \tag{1.1.36}$$

в котором γ обозначает некоторую положительную постоянную.

В самом деле, отправляясь от представления (1.1.6) для коэффициента Фурье v_n и используя для бесселевых функций оценку

$$|\mathcal{J}_\nu(x)| \leqslant C/\sqrt{x}, \tag{1.1.37}$$

справедливую для каждого $\nu \geqslant -1/2$ и для всех $x \geqslant 0$, мы придем к неравенству

$$v_n^2 \leqslant C^2\cdot\left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^{N-1}\cdot\frac{R^2}{4}\cdot u_n^2(x), \tag{1.1.38}$$

в котором C — постоянная из оценки (1.1.37).

---

*) Можно, например, взять $\beta = \dfrac{\omega_N}{2(2\pi)^{N+1}}$.

Остается учесть, что при $|\sqrt{\lambda_n} - \mu| \leqslant M$ и при условии $\mu \geqslant 2M$ справедливо неравенство $\mu/2 \leqslant \sqrt{\lambda_n}$, из которого вытекает, что $(\mu/\sqrt{\lambda_n})^{N-1} \leqslant 2^{N-1}$. Из последнего неравенства и из (1.1.38) вытекает справедливость неравенства (1.1.36) с постоянной $\gamma = C^2 \cdot 2^{N-3}$.

Из сопоставления равенства Парсеваля (1.1.31) с доказанными нами неравенствами (1.1.35) и (1.1.36) вытекает, что для доказательства оценки (1.1.30) *достаточно установить, что можно фиксировать $M > 0$ настолько большим, а $R > 0$ настолько малым, что при всех достаточно больших μ равномерно относительно x в Ω' будет справедливо неравенство*

$$\sum_{|\sqrt{\lambda_n}-\mu|>M} v_n^2 < \frac{\beta}{2} R \cdot \mu^{N-1} \tag{1.1.39}$$

с той же самой постоянной β, что и в неравенстве (1.1.35).

Для доказательства неравенства (1.1.39) разобьем сумму, стоящую в левой части (1.1.39), на следующие три суммы:

$$S_1 = \sum_{\sqrt{\lambda_n} \leqslant 1} v_n^2, \tag{1.1.40}$$

$$S_2 = \sum_{1<\sqrt{\lambda_n}<\frac{\mu}{2}} v_n^2 + \sum_{\sqrt{\lambda_n}>\frac{3}{2}\mu} v_n^2, \tag{1.1.41}$$

$$S_3 = \sum_{\frac{\mu}{2} \geqslant |\sqrt{\lambda_n}-\mu|>M} v_n^2. \tag{1.1.42}$$

Достаточно доказать, что можно фиксировать число $M > 0$ настолько большим, а число $R > 0$ настолько малым, что при всех достаточно больших μ каждая из сумм S_1, S_2 и S_3 при всех x из Ω' не будет превосходить числа $\frac{\beta}{6} R \cdot \mu^{N-1}$, где β — та же постоянная, что и в неравенстве (1.1.35).

Для оценки суммы (1.1.40) будем исходить из представления (1.1.6) для коэффициента Фурье v_n. Воспользовавшись в представлении (1.1.6) следующими широко известными оценками для бесселевых функций *):

$$\frac{\left|\mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}(r\sqrt{\lambda_n})\right|}{(r\sqrt{\lambda_n})^{\frac{N-2}{2}}} \leqslant C_1, \qquad \left|\mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}(\mu r)\right| \leqslant \frac{C_2}{\sqrt{\mu r}},$$

*) См., например, Г. Бейтмен и А. Эрдейи [1, с. 12 и 98].

мы получим, что для всех точек x подобласти Ω'

$$v_n^2 = C_1^2 \cdot C_2^2 \cdot \mu^{N-1} \cdot u_n^2(x) \cdot \left(\int\limits_{R/2}^{R} r^{\frac{N-1}{2}} \, dr \right)^2 \leqslant C_3 \cdot \mu^{N-1} \cdot R^{N+1} \cdot u_n^2(x), \tag{1.1.43}$$

где $C_3 = \dfrac{4\left(2^{\frac{N+1}{2}} - 1\right)^2}{(N+1)^2 \cdot 2^{N+1}} \cdot C_1^2 \cdot C_2^2$.

Привлекая оценку (1.1.17), взятую при $\mu_0 = 1$, и обозначая через C_4 постоянную, ограничивающую рост O-членов в оценке (1.1.17), мы получим с помощью этой оценки и неравенства (1.1.43)

$$S_1 = \sum_{\sqrt{\lambda_n} \leqslant 1} v_n^2 \leqslant C_3 \cdot C_4 \cdot \mu^{N-1} \cdot R^{N+1}. \tag{1.1.44}$$

Фиксируем теперь положительное число R настолько малым, чтобы было справедливо неравенство

$$R^N \leqslant \beta \cdot [6C_3 \cdot C_4]^{-1}, \tag{1.1.45}$$

где β — постоянная из неравенства (1.1.35).

Из сопоставления неравенств (1.1.44) и (1.1.45) получим

$$S_1 \leqslant \frac{\beta}{6} \cdot R \cdot \mu^{N-1}; \tag{1.1.46}$$

(1.1.46) и является требуемой оценкой для S_1. Всюду в дальнейших рассуждениях мы будем считать R фиксированным в соответствии с неравенством (1.1.45).

Для оценки сумм (1.1.41) и (1.1.42) привлечем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1.1. *Для любых положительных величин* $\sqrt{\lambda_n}$ *и* μ, *отличных друг от друга, для величины*

$$I_n^{\mu}(R) = \mu^{1/2} \cdot \lambda_n^{1/4} \cdot \int\limits_{R/2}^{R} r \cdot \mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}(\mu r) \cdot \mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right) dr \tag{1.1.47}$$

справедлива следующая оценка:

$$I_n^{\mu}(R) = O\left(\left| \sqrt{\lambda_n} - \mu \right|^{-1} \right), \tag{1.1.48}$$

в которой константа, ограничивающая рост O-членов, не зависит от R.

Чтобы не прерывать доказательства теоремы 1.2, отнесем доказательство леммы 1.1 в п. 4 (в конце настоящего параграфа).

Для оценки суммы (1.1.41) заметим, что для всех номеров n участвующих в этой сумме, справедливы неравенства

$$\left| \sqrt{\lambda_n} - \mu \right| > \frac{1}{2}\mu, \quad \left| \sqrt{\lambda_n} - \mu \right| > \frac{1}{3}\sqrt{\lambda_n}.$$

Из этих неравенств вытекает, что для всех номеров n, участвующих в сумме (1.1.41), справедлива оценка

$$|\sqrt{\lambda_n}-\mu|^{-1}=O\left(\lambda_n^{-3/8}\cdot\mu^{-1/4}\right).$$

Последняя оценка в соединении с (1.1.48) дает

$$I_n^\mu(R)=O\left(\lambda_n^{-3/8}\cdot\mu^{-1/4}\right). \tag{1.1.49}$$

Оценка (1.1.49) в соединении с выражением (1.1.6) для коэффициента Фурье приводит нас к соотношению

$$v_n=u_n(x)\left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^{(N-1)/2}\cdot I_n^\mu(R)=u_n(x)\cdot O\left(\mu^{N/2-3/4}\cdot\lambda_n^{-(N/4+1/8)}\right). \tag{1.1.50}$$

Из этого соотношения следует, что

$$S_2=\sum_{1\leqslant\sqrt{\lambda_n}<\mu/2}v_n^2+\sum_{\sqrt{\lambda_n}>\frac{3}{2}\mu}v_n^2\leqslant\mu^{N-3/2}\cdot C_5\cdot\sum_{\sqrt{\lambda_n}\geqslant 1}u_n^2(x)\cdot\lambda_n^{-N/2-1/4}, \tag{1.1.51}$$

где C_5 обозначает константу в оценке O-членов в соотношении (1.1.50).

Учитывая, что сумма ряда (1.1.24) при $\delta=1/4$ ограничена в каждой строго внутренней подобласти Ω' области Ω некоторой зависящей от Ω' постоянной C_6, мы получаем из (1.1.51), что

$$S_2\leqslant\mu^{N-1}\cdot C_5\cdot C_6\cdot\frac{1}{\sqrt{\mu}}. \tag{1.1.52}$$

Фиксируем теперь μ_0 настолько большим, чтобы было справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0}}\leqslant\frac{\beta\cdot R}{6C_5\cdot C_6}, \tag{1.1.53}$$

в котором β — та же постоянная, что и в неравенстве (1.1.35), а R — число, фиксированное выше в соответствии с неравенством (1.1.45).

Из (1.1.52) и (1.1.53) заключаем, что при всех $\mu\geqslant\mu_0$ и для всех точек x подобласти Ω'

$$S_2\leqslant\frac{\beta}{6}R\cdot\mu^{N-1}. \tag{1.1.54}$$

Итак, требуемая оценка для суммы (1.1.41) получена.

Для завершения доказательства теоремы 1.2 остается получить аналогичную оценку для суммы (1.1.42).

Достаточно доказать, что фигурирующее в этой сумме число M можно фиксировать настолько большим, что при фиксированном выше (в соответствии с неравенством (1.1.45)) числом $R>0$ и при всех μ сумма (1.1.42) для всех x из подобласти Ω' не превзойдет величины $\frac{\beta}{6}\cdot R\cdot\mu^{N-1}$.

Рассмотрим последовательность сегментов $[1, 2]$, $[2, 4]$, ..., $[2^{k-1}, 2^k]$, ... и обозначим через p *наименьший* из номеров k, для которых $2^k \geqslant \mu/2$. Покажем, что при фиксированном выше $R > 0$ и при всех μ можно фиксировать номер m настолько большим, что сумма (1.1.42) со значением $M = 2^{m-1}$ для всех x из подобласти Ω' не превзойдет величины $\frac{\beta}{6} \cdot R \cdot \mu^{N-1}$.

Заметим, что

$$S_3 = \sum_{M < |\sqrt{\lambda_n} - \mu| \leqslant \mu/2} v_n^2 \leqslant \sum_{k=m}^{p} \left[\sum_{2^{k-1} < |\sqrt{\lambda_n} - \mu| \leqslant 2^k} v_n^2 \right]. \quad (1.1.55)$$

Для оценки v_n^2 в правой части (1.1.55) воспользуемся для v_n выражением (1.1.50) и учтем, что для всех номеров n, участвующих в (1.1.55), справедливо соотношение $\mu/\sqrt{\lambda_n} \leqslant 2$. Из этого соотношения и из (1.1.50) мы получим, что

$$v_n^2 \leqslant u_n^2(x) \cdot 2^{N-1} \left[I_n^{\mu}(R) \right]^2. \quad (1.1.56)$$

Сопоставляя (1.1.56) с оценкой (1.1.48), получаем, что найдется постоянная C_7 такая, что

$$v_n^2 \leqslant C_7 \cdot u_n^2(x) \cdot \left| \sqrt{\lambda_n} - \mu \right|^{-2}. \quad (1.1.57)$$

Подставляя (1.1.57) в правую часть (1.1.55), приходим к оценке

$$S_3 \leqslant C_7 \cdot \sum_{k=m}^{p} \left[\sum_{2^{k-1} \leqslant |\sqrt{\lambda_n} - \mu| \leqslant 2^k} u_n^2(x) \cdot \left| \sqrt{\lambda_n} - \mu \right|^{-2} \right] \leqslant$$

$$\leqslant C_7 \cdot \sum_{k=m}^{p} \frac{1}{4^{k-1}} \left\{ \sum_{|\sqrt{\lambda_n} - \mu| \leqslant 2^k} u_n^2(x) \right\}. \quad (1.1.58)$$

(Мы вынесли из под знака внутренней, заключенной в квадратные скобки суммы наибольшее значение $|\sqrt{\lambda_n} - \mu|^{-2}$, равное $1/4^{k-1}$, и в оставшейся сумме заменили суммирование по значениям n, удовлетворяющим неравенствам $2^{k-1} \leqslant |\sqrt{\lambda_n} - \mu| \leqslant 2^k$, суммированием по значениям n, удовлетворяющим только одному неравенству $|\sqrt{\lambda_n} - \mu| \leqslant 2^k$.)

Теперь для оценки суммы, стоящей в (1.1.58) в фигурных скобках, воспользуемся оценкой (1.1.21) (см. следствие 1 из теоремы 1.1), взяв ее при $\rho = 2^k$. В результате получим, что для каждого номера k равномерно относительно x в подобласти Ω' каждая фигурная скобка в правой части (1.1.58) равна $2^k O(\mu^{N-1})$. Отсюда, обозначив через C_8 константу в только что написанном O-члене, мы получим, что

$$S_3 \leqslant 4C_7 \cdot C_8 \cdot \mu^{N-1} \cdot \sum_{k=m}^{p} \frac{1}{2^k} \leqslant 4C_7 \cdot C_8 \cdot \mu^{N-1} \cdot \frac{1}{2^{m-1}}. \quad (1.1.59)$$

Остается фиксировать номер m настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{M}=\frac{1}{2^{m-1}}\leqslant\frac{\beta\cdot R}{24C_7\cdot C_8}, \tag{1.1.60}$$

в котором $\beta>0$ и $R>0$ уже фиксированы в соответствии с неравенствами (1.1.35) и (1.1.45).

Из (1.1.59) и (1.1.60) заключаем, что сумма (1.1.42) со значением $M=2^{m-1}$, удовлетворяющим условию (1.1.60), для всех μ, для фиксированного выше $R>0$ и для всех x из подобласти Ω' удовлетворяет неравенству

$$S_3\leqslant\frac{\beta}{6}\cdot R\cdot\mu^{N-1}. \tag{1.1.61}$$

Из неравенств (1.1.46), (1.1.54) и (1.1.61) вытекает, что при фиксированных нами $M>0$ и $R>0$ и при всех $\mu\geqslant\mu_0$ равномерно относительно x в подобласти Ω' справедливо неравенство (1.1.39), что (в силу сказанного выше) завершает доказательство теоремы 1.2.

Теоремы 1.1 и 1.2 можно объединить в одно общее утверждение.

Теорема 1.3. *Если $\{u_n(x)\}$ — произвольная ФСФ оператора Лапласа в какой угодно N-мерной подобласти Ω произвольной N-мерной области G, то существуют такие положительные числа T, α и β, что для каждого $\mu\geqslant 0$ равномерно относительно x в каждой строго внутренней подобласти Ω' области Ω справедлива следующая двусторонняя оценка:*

$$\alpha(\mu+1)^{N-1}\leqslant\sum_{\mu\leqslant\sqrt{\lambda_n}\leqslant\mu+T}u_n^2(x)\leqslant\beta\cdot(\mu+1)^{N-1}. \tag{1.1.62}$$

3. Устройство спектра произвольной ФСФ. Работы многих известных математиков (первоначальные работы Вейля [1] и Карлемана [2], более поздние работы Агмона [1] и Мизохаты [1], сравнительно недавние работы Сили [1] и Иврия [1] и др.) были посвящены асимптотическому распределению собственных значений простейших краевых задач для эллиптических операторов. В настоящее время хорошо известно, как устроен спектр первой краевой задачи для оператора Лапласа в произвольной ограниченной N-мерной области G. Если для любого $\lambda>0$ обозначить через $n(\lambda)$ число собственных значений указанной задачи, не превосходящих λ, т. е. положить

$$n(\lambda)=\sum_{\lambda_n\leqslant\lambda}1,$$

то для $n(\lambda)$ при больших λ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$n(\lambda)=A\cdot\lambda^{N/2}+O(\lambda^{(N-1)/2}), \tag{1.1.63}$$

в которой постоянная A равна $(4\pi)^{-N/2}\cdot \operatorname{mes} G$, где $\operatorname{mes} G$ — мера области G.

Заметим, впрочем, что еще несколько лет назад в написанном виде формула (1.1.63) была установлена только для собственных значений первой краевой задачи в N-мерном прямоугольном параллелепипеде и в некоторых экзотических областях G (а для остальных областей остаточный член $O(\lambda^{(N-1)/2})$ был установлен только в более грубой форме $O(\lambda^{(N-1)/2}\cdot \ln \lambda))$, и лишь в упомянутой выше недавней работе Сили формула (1.1.63) была установлена для собственных значений первой краевой задачи в произвольной ограниченной N-мерной области G.

Из асимптотической формулы (1.1.63) тривиально вытекает, что для собственных значений первой краевой задачи в произвольной ограниченной N-мерной области G существуют такие положительные постоянные T, α и β, что для всех $\mu \geqslant 0$ справедлива двусторонняя оценка

$$\alpha\cdot(\mu+1)^{N-1} \leqslant \sum_{\mu\leqslant\sqrt{\lambda_n}\leqslant\mu+T} 1 \leqslant \beta\cdot(\mu+1)^{N-1}. \qquad (1.1.64)$$

Таким образом, собственные значения λ_n первой краевой задачи для оператора Лапласа распределены так, что при любом $\mu\geqslant 0$ на сегменте $[\mu,\ \mu+T]$ длины T лежит не менее чем $\alpha\cdot(\mu+1)^{N-1}$ и не более чем $\beta\cdot(\mu+1)^{N-1}$ корней $\sqrt{\lambda_n}$ из собственных значений λ_n.

Мы сейчас убедимся в том, что спектр произвольной ФСФ оператора Лапласа в какой угодно N-мерной подобласти Ω произвольной N-мерной области G *не является более редким*, чем спектр только что рассмотренной первой краевой задачи. Точнее, будет доказано следующее утверждение.

Теорема 1.4. *Если $\{\lambda_n\}$ — спектр произвольной ФСФ оператора Лапласа в какой угодно N-мерной подобласти Ω произвольной N-мерной области G, то существуют такие положительные числа T и α_0, что для каждого $\mu\geqslant 0$ справедлива следующая оценка снизу*:

$$\sum_{\mu\leqslant\sqrt{\lambda_n}\leqslant\mu+T} 1 \geqslant \alpha_0\cdot(\mu+1)^{N-1}. \qquad (1.1.65)$$

Доказательство. Фиксируем некоторую подобласть Ω' области Ω с конечной и отличной от нуля мерой $\operatorname{mes}\Omega'$. Используя тот факт, что нормы всех элементов $u_n(x)$ по области G равны единице, и привлекая оценку (1.1.29) (см. теорему 1.2), получаем

$$\sum_{\mu\leqslant\sqrt{\lambda_n}\leqslant\mu+T} 1 = \sum_{\mu\leqslant\sqrt{\lambda_n}\leqslant\mu+T} \int_G u_n^2(x)\,dx \geqslant \sum_{\mu\leqslant\sqrt{\lambda_n}\leqslant\mu+T} \int_{\Omega'} u_n^2(x)\,dx =$$

$$= \int_{\Omega'} \left[\sum_{\mu\leqslant\sqrt{\lambda_n}\leqslant\mu+T} u_n^2(x)\right] dx \geqslant \alpha\cdot(\mu+1)^{N-1}\cdot(\operatorname{mes}\Omega').$$

Полагая $\alpha_0=\alpha\cdot(\operatorname{mes}\Omega')$, придем к оценке (1.1.65).

Теорема 1.4 доказана.

Следствие 1. *Если символ $n(\lambda)$ обозначает число не превосходящих λ фундаментальных значений λ_n произвольной ФСФ оператора Лапласа в какой угодно N-мерной подобласти Ω произвольной N-мерной области G, то существует такая положительная постоянная α_1, что для всех достаточно больших $\lambda > 0$ справедлива следующая оценка снизу:*

$$n(\lambda) \geqslant \alpha_1 \cdot \lambda^{N/2}. \tag{1.1.66}$$

Следствие 2. *Если у фундаментальных значений произвольной ФСФ оператора Лапласа в какой угодно N-мерной подобласти Ω произвольной N-мерной области G отсутствуют конечные точки сгущения, то, занумеровав фундаментальные значения в порядке неубывания, можно утверждать справедливость оценки*

$$\sqrt{\lambda_{n+1}} - \sqrt{\lambda_n} = O(1).$$

Естественно возникает вопрос: существуют ли для произвольной ФСФ оператора Лапласа какие-либо оценки сверху для числа $n(\lambda)$ фундаментальных значений, не превосходящих λ, или для суммы, стоящей в левой части (1.1.65)? И вообще может ли ФСФ оператора Лапласа иметь конечные точки сгущения фундаментальных значений?

Займемся выяснением этих вопросов и убедимся в том, что спектр произвольной ФСФ оператора Лапласа (даже во всей области G) устроен гораздо сложнее, чем спектр тех конкретных краевых задач, которые являлись предметом изучения в упомянутых выше работах Вейля, Карлемана, Агмона, Мизохаты, Сили и Иврия.

Прежде всего докажем следующее предложение.

Теорема 1.5. *Пусть $\{\lambda_n^0\}$ — произвольная наперед взятая последовательность чисел, удовлетворяющих условию $0 \leqslant \lambda_n^0 < n$. Тогда существует ФСФ оператора Лапласа в квадрате $Q = [0 \leqslant x \leqslant \pi] \times [0 \leqslant y \leqslant \pi]$, для которой последовательность $\{\lambda\}_n^0$ является подпоследовательностью фундаментальных значений. Более того, если выбросить из множества всех фундаментальных значений первоначально заданную последовательность $\{\lambda_n^0\}$, то оставшиеся фундаментальные значения будут иметь тот же закон асимптотического распределения, что и собственные значения первой краевой задачи для квадрата Q.*

Доказательство. Рассмотрим для каждого номера $n = 1, 2, 3, \ldots$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ задачу на собственные значения для простейшего обыкновенного дифференциального оператора:

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < \pi, \\ X(0) = 0, \quad X'(\pi) - h_n X(\pi) = 0, \end{cases} \tag{1.1.67}$$

где $h_n = \sqrt{n^2-\lambda_n^0}\,\mathrm{cth}\left(\pi\sqrt{n^2-\lambda_n^0}\right)$. Хорошо известно, что для каждого номера n задача (1.1.67) с однородным краевым условием первого рода на левом конце $x=0$ и с однородным краевым условием третьего рода на правом конце $x=\pi$ имеет полную ортонормированную систему собственных функций *). Так как уравнению $X''+\mu X=0$ и краевому условию на левом конце $X(0)=0$ удовлетворяет функция

$$X(x)=\begin{cases}\mathrm{sh}\,(x\sqrt{-\mu}) & \text{при} \quad \mu<0,\\ x & \text{при} \quad \mu=0,\\ \sin\,(x\sqrt{\mu}) & \text{при} \quad \mu>0,\end{cases}$$

то из краевого условия на правом конце $X'(\pi)-h_nX(\pi)=0$ получаем уравнение для определения собственных значений задачи (1.1.67). При $\mu<0$ краевое условие $X'(\pi)-h_nX(\pi)=0$ приводит к уравнению $\sqrt{-\mu}\,\mathrm{ch}(\pi\sqrt{-\mu})=h_n\,\mathrm{sh}(\pi\sqrt{-\mu})$, которое приводится к следующему виду:

$$\sqrt{-\mu}\,\mathrm{cth}\,(\pi\sqrt{-\mu})=\sqrt{n^2-\lambda_n^0}\,\mathrm{cth}\left(\pi\sqrt{n^2-\lambda_n^0}\right).$$

Последнее уравнение в силу возрастания функции $x\,\mathrm{cth}(\pi x)$ на полупрямой $x\geqslant 0$ имеет единственный корень — отрицательное собственное значение $\mu_n^0=\lambda_n^0-n^2<0$.

Значение $\mu=0$ не является собственным значением задачи (1.1.67), ибо функция $X(x)=x$, удовлетворяющая при $\mu=0$ уравнению $X''+\mu X=0$ и краевому условию $X(0)=0$, заведомо не удовлетворяет второму краевому условию $X'(\pi)-h_nX(\pi)=0$, которое приводится к равенству $1=h_n\pi$. Последнее равенство не может иметь места, поскольку $h_n>1/\pi$ для всех номеров n **).

При $\mu>0$ краевое условие $X'(\pi)-h_n\cdot X(\pi)=0$ приводит к трансцендентному уравнению $\sqrt{\mu}\cdot\cos(\pi\sqrt{\mu})=h_n\sin(\pi\sqrt{\mu})$, которое можно переписать в виде $\sqrt{\mu}\,\mathrm{ctg}(\pi\sqrt{\mu})=h_n$. Последнее уравнение при любом фиксированном номере n имеет счетное множество положительных корней μ_n^k $(k=1, 2, \ldots)$, являющихся занумерованными в порядке возрастания положительными собственными значениями задачи (1.1.67). Это вытекает из того, что при любом $k=1, 2, \ldots$ функция $\mathrm{ctg}(\pi\sqrt{\mu})$ при изменении μ в пределах $k^2<\mu<(k+1)^2$ пробегает все значения от $-\infty$ до ∞. Итак, собственное значение μ_n^k с номером k заведомо удовлетво-

---

*) Это следует из теории интегральных уравнений и из симметрии функции Грина указанной задачи, которая построена, например, в книге В. И. Смирнова [1], с. 529.

**) Это вытекает из того, что h_n равно значению функции $x\,\mathrm{cth}\,(\pi x)$ в точке $x=\sqrt{n^2-\lambda_n^0}>0$. Так как функция $x\,\mathrm{cth}\,(\pi x)$ возрастает на полупрямой $x\geqslant 0$ и обращается в $1/\pi$ в точке $x=0$, то все ее значения при $x>0$ превосходят число $1/\pi$.

ряет неравенствам

$$k^2 \leqslant \mu_n^k \leqslant (k+1)^2. \tag{1.1.68}$$

Подводя итог, мы получаем, что для каждого $n = 1, 2, \ldots$ задача (1.1.67) имеет одно отрицательное собственное значение $\mu_n^0 = \lambda_n^0 - n^2$ и счетное множество положительных собственных значение μ_n^k $(k = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющих неравенствам (1.1.68). Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_n^0(x) = N_n^0 \operatorname{sh}\left(x\sqrt{-\mu_n^0}\right), \quad X_n^k(x) = N_n^k \sin\left(x\sqrt{\mu_n^k}\right), \tag{1.1.69}$$
$$(k = 1, 2, \ldots).$$

В выражениях для собственных функций (1.1.69) символы N_n^k обозначают нормирующие множители, выбранные так, чтобы норма каждой функции $X_n^k(x)$ была равна единице. Как уже отмечалось выше, система всех собственных функций (1.1.69) является (для каждого n) полной и ортонормированной.

Так как система $\left\{\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{-1} \sin(ny)\right\}$, $n = 1, 2, \ldots$, является, как хорошо известно, полной ортонормированной на отрезке $0 \leqslant y \leqslant \pi$ системой, то система

$$u_n^k(x, y) = X_n^k(x) \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{-1} \sin(ny), \quad n = 1, 2, \ldots; \ k = 0, 1, \ldots, \tag{1.1.70}$$

является полной и ортонормированной на квадрате $Q = [0 \leqslant x \leqslant \pi] \times [0 \leqslant y \leqslant \pi]$, причем каждая функция $u_n^k(x, y)$ для неотрицательного числа $\lambda_n^k = \mu_n^k + n^2$ является на квадрате Q решением уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u_n^k(x, y) + \lambda_n^k u_n^k(x, y) = 0.$$

Таким образом, система (1.1.70) является ФСФ оператора Лапласа в квадрате Q, причем фундаментальные значения $\{\lambda_n^k\}$ этой системы содержат в качестве подпоследовательности наперед заданную произвольную последовательность $\{\lambda_n^0\}$.

Если из всего множества фундаментальных значений $\{\lambda_n^k\}$ $n = 1, 2, \ldots; \ k = 0, 1, \ldots$ выбросить первоначально заданную последовательность $\{\lambda_n^0\}$, $n = 1, 2, \ldots$, то фундаментальные значения, оставшиеся после такого выбрасывания $\{\lambda_n^k\}$ при $n = 1, 2, \ldots;$ $k = 1, 2, \ldots$, в силу условия (1.1.68) будут удовлетворять неравенствам

$$n^2 + k^2 \leqslant \lambda_n^k \leqslant n^2 + (k+1)^2. \tag{1.1.71}$$

Так как собственные значения первой краевой задачи для оператора Лапласа в квадрате Q образуют множество

$$\widehat{\lambda}_n^k = n^2 + k^2, \qquad n = 1, 2, \ldots; \; k = 1, 2, \ldots,$$

то из неравенств (1.1.71) следует, что оставшиеся после выбрасывания первоначально заданной последовательности фундаментальные значения имеют тот же закон асимптотического распределения, что и собственные значения первой краевой задачи для оператора Лапласа в квадрате Q.

Теорема 1.5 полностью доказана.

Замечание 1. Укажем краевые условия, которым удовлетворяют на границе квадрата Q построенные нами собственные функции (1.1.70). Очевидно, что $u_n^k(x, 0) = u_n^k(x, \pi) = u_n^k(0, y) = 0$; $\frac{\partial u}{\partial y}(\pi, y) - H \cdot u(\pi, y) = 0$, где H — самосопряженный оператор, ставящий в соответствие функции $f(y)$ с рядом по системе $\left\{\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{-1} \sin(ny)\right\}$ вида $f(y) \sim \sum b_n \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{-1} \sin(ny)$ функцию $Hf(y)$ с рядом по той же системе вида $Hf(y) \sim \sum h_n \cdot b_n \times \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{-1} \sin(ny)$. Можно выразить оператор H в явном виде через интегральный оператор.

Сделаем еще три замечания, указывающие возможные обобщения теоремы 1.5.

Замечание 2. В теореме 1.5 можно отбросить условие $0 \leqslant \lambda_n^0 < n$. При отбрасывании этого условия метод, примененный нами при доказательстве теоремы 1.5, позволит построить полную ортонормированную систему функций оператора Лапласа в квадрате Q, но при этом окажутся положительными не все собственные значения $\lambda_n^k = \mu_n^k + n^2$, $n = 1, 2, \ldots$; $k = 1, 2, \ldots$

Замечание 3. При формулировке и доказательстве теоремы 1.5 вместо квадрата Q можно взять круг K. Взяв произвольную последовательность положительных чисел $\{\lambda_n^0\}$ и рассмотрев для каждого $n = 1, 2, \ldots$ вместо задачи (1.1.67) соответствующую задачу для уравнения Бесселя порядка n, мы построим ФСФ оператора Лапласа в круге K, для которой наперед заданная последовательность $\{\lambda_n^0\}$ служит подпоследовательностью фундаментальных значений.

Замечание 4. Аналогично по произвольной наперед взятой последовательности неотрицательных чисел $\{\lambda_n^0\}$ строится ФСФ оператора Лапласа в N-мерном цилиндре, равном произведению отрезка $[0 \leqslant x_1 \leqslant \pi]$ на $(N-1)$-мерную ограниченную область $\widehat{G}$, для которой последовательность $\{\lambda_n^0\}$ является подпоследовательностью фундаментальных значений. (Достаточно в рассуждениях теоремы 1.5 заменить n^2 и $(\sqrt{\pi/2})^{-1} \sin(ny)$ соответственно собственными значениями $\widehat{\lambda}_n$ и собственными функциями

$\widehat{v}_n(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})$ области $\widetilde{G}$.) При этом оставшиеся после выброса $\{\lambda_n^0\}$ фундаментальные значения будут распределены так же, как собственные значения первой краевой задачи для оператора Лапласа в N-мерном цилиндре.

Извлечем теперь из доказанной теоремы ряд далеко идущих следствий, проливающих свет на возможное устройство спектра произвольной ФСФ оператора Лапласа в ограниченной области N $(N \geqslant 2)$ измерений.

Следствие 1. *В ограниченной области N $(N \geqslant 2)$ измерений существует ФСФ оператора Лапласа, для фундаментальных значений которой реализуется любая из следующих четырех возможностей:*

1) *имеются фундаментальные значения бесконечной кратности;*

2) *фундаментальные значения имеют произвольные изолированные точки сгущения;*

3) *фундаментальные значения имеют точки сгущения, покрывающие всю полупрямую $\lambda \geqslant 0$;*

4) *фундаментальные значения имеют точки сгущения, покрывающие любое замкнутое подмножество полупрямой $\lambda \geqslant 0$.*

В самом деле, наперед взятую последовательность $\{\lambda_n^0\}$ можно выбрать такой, чтобы она имела:

1) элементы, повторяющиеся бесконечное число раз;

2) наперед заданные изолированные предельные точки;

3) предельные точки, покрывающие всю полупрямую $\lambda \geqslant 0$ *);

4) предельные точки, покрывающие наперед взятое замкнутое подмножество полупрямой $\lambda \geqslant 0$.

Следствие 2. *Какова бы ни была наперед взятая возрастающая и непрерывная на полупрямой $\lambda \geqslant 0$ функция $f(\lambda)$, растущая при $\lambda \to \infty$ быстрее, чем $\lambda^{N/2}$, для ограниченной области N $(N \geqslant 2)$ измерений существует ФСФ оператора Лапласа, множество фундаментальных значений которой не имеет конечных точек сгущения и таково, что $f(\lambda)$ является главным членом в асимптотике числа $n(\lambda)$ фундаментальных значений, не превосходящих λ, причем для $n(\lambda)$ справедливо представление*

$$n(\lambda) = f(\lambda) + O(\lambda^{N/2}). \tag{1.1.72}$$

Следствие 2 опровергает неоднократно высказывавшееся предположение о том, что главный член в асимптотике $n(\lambda)$ числа собственных значений, не превосходящих λ, должен иметь не более, чем степенной рост.

Для доказательства следствия 2 обозначим через $f^{-1}(t)$ функцию, обратную к $f(\lambda)$. Ясно, что $f^{-1}(t)$ также возрастает и непрерывна на полупрямой $t \geqslant 0$. Положим $\lambda_n^0 = f^{-1}(n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

*) Достаточно в качестве $\{\lambda_n^0\}$ взять последовательность всех рациональных положительных чисел.

Если мы обозначим через $[f(\lambda)]$ целую часть числа $f(\lambda)$, то очевидно *), что

$$\sum_{\lambda_n^0 \leqslant \lambda} 1 = [f(\lambda)] = f(\lambda) + O(1). \tag{1.1.73}$$

С другой стороны, если обозначить через $\{\lambda_n'\}$ те фундаментальные значения, которые остаются после удаления последовательности $\{\lambda_n^0\}$, то

$$\sum_{\lambda_n' \leqslant \lambda} 1 = O\left(\lambda^{N/2}\right). \tag{1.1.74}$$

Из (1.1.73) и (1.1.74) вытекает представление (1.1.72).

Подчеркнем, что несмотря на то, что спектр произвольной ФСФ оператора Лапласа, как мы показали, может иметь весьма сложный и неклассический характер, мы в последующих параграфах настоящей главы разработаем методику, которая позволит нам установить в определенном смысле окончательные условия равномерной сходимости и локализации рядов Фурье по произвольной ФСФ оператора Лапласа, являющиеся новыми (и также в определенном смысле окончательными) даже для изучавшихся многими авторами кратных тригонометрических рядов Фурье (со сферическими частичными суммами).

4. Доказательство леммы 1.1. Пользуясь рекуррентными соотношениями для бесселевых функций **)

$$\int r^{\nu} \mathcal{J}_{\nu-1}(\mu r)\, dr = \frac{1}{\mu} r^{\nu} \mathcal{J}_{\nu}(\mu r), \quad \frac{d}{dr}\left[\frac{\mathcal{J}_{\nu}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right)}{r^{\nu}}\right] = -\sqrt{\lambda_n}\, \frac{\mathcal{J}_{\nu+1}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right)}{r^{\nu}},$$

проинтегрируем интеграл (1.1.47) два раза по частям. Получим

$$I_n^{\mu} = (R) = \frac{\lambda_n^{1/4}}{\mu^{1/2}} \left[r \mathcal{J}_{N/2}(\mu r)\, \mathcal{J}_{N/2-1}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right)\right]\Big|_{r=R/2}^{r=R} +$$

$$+ \frac{\lambda_n^{3/4}}{\mu^{3/2}} \left[r \mathcal{J}_{N/2+1}(\mu r)\, \mathcal{J}_{N/2}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right)\right]\Big|_{r=R/2}^{r=R} +$$

$$+ \frac{\lambda_n^{5/4}}{\mu^{3/2}} \int_{R/2}^{R} r \mathcal{J}_{N/2+1}(\mu r)\, \mathcal{J}_{N/2+1}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right) dr. \tag{1.1.75}$$

---

*) В самом деле, если $\lambda_{n_0}^0$ — наибольшее из значений λ_n^0, удовлетворяющих условию $\lambda_n^0 \leqslant \lambda$, то из условия $\lambda_{n_0}^0 \leqslant \lambda < \lambda_{n_0+1}^0$ получим, что $n_0 = f\left(\lambda_{n_0}^0\right) \leqslant f(\lambda) < f\left(\lambda_{n_0+1}^0\right) = n_0 + 1$. Стало быть,

$$\sum_{\lambda_n^0 \leqslant \lambda} 1 = n_0 = [f(\lambda)] = f(\lambda) + O(1).$$

**) См., например, Г. Бейтмен и А. Эрдейи [1, с. 20, формулы (52) и (53)].

Далее воспользуемся под знаком интеграла, стоящего в правой части (1.1.75), рекуррентными соотношениями *)

$$\mathcal{J}_{N/2+1}(\mu r) = -\mathcal{J}_{N/2-1}(\mu r) + \frac{N}{\mu r}\mathcal{J}_{N/2}(\mu r),$$

$$\mathcal{J}_{N/2+1}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right) = -\mathcal{J}_{N/2-1}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right) + \frac{N}{r\sqrt{\lambda_n}}\mathcal{J}_{N/2}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right).$$

В результате соотношение (1.1.75) принимает следующий вид:

$$I_n^\mu(R)\cdot\left(1-\frac{\lambda_n}{\mu^2}\right) = \frac{\lambda_n^{1/4}}{\mu^{1/2}}\left[r\mathcal{J}_{N/2}(\mu r)\,\mathcal{J}_{N/2-1}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right)\right]\Big|_{r=R/2}^{r=R} +$$

$$+\frac{\lambda_n^{3/4}}{\mu^{3/2}}\left[r\mathcal{J}_{N/2+1}(\mu r)\,\mathcal{J}_{N/2}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right)\right]\Big|_{r=R/2}^{r=R} -$$

$$-N\frac{\lambda_n^{3/4}}{\mu^{3/2}}\int\limits_{R/2}^{R}\mathcal{J}_{N/2-1}(\mu r)\,\mathcal{J}_{N/2}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right)dr -$$

$$-N\frac{\lambda_n^{5/4}}{\mu^{3/2}}\cdot\int\limits_{R/2}^{R}\mathcal{J}_{N/2}(\mu r)\,\mathcal{J}_{N/2-1}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right)dr +$$

$$+N^2\frac{\lambda_n^{3/4}}{\mu^{5/2}}\int\limits_{R/2}^{R}\mathcal{J}_{N/2}(\mu r)\,\mathcal{J}_{N/2}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right)\frac{dr}{r}. \qquad (1.1.76)$$

В дальнейших рассуждениях будем считать, что $\sqrt{\lambda_n} < \mu$. Мажорируя модули бесселевых функций, стоящих под знаком самого последнего интеграла в правой части (1.1.76), единицами, а модули всех остальных бесселевых функций в правой части (1.1.76) с помощью оценки $|\mathcal{J}_\nu(x)| \leqslant C(\nu)x^{-1/2}$, мы получим из (1.1.76) оценку

$$I_n^\mu(R)\cdot\left(1-\frac{\lambda_n}{\mu^2}\right) = O\left(\frac{1}{\mu}\right), \qquad (1.1.77)$$

в которой оценка, ограничивающая рост O-членов, не зависит от R. Из (1.1.77), учитывая, что $\sqrt{\lambda_n} < \mu$, получаем оценку

$$I_n^\mu(R) = O\left(\left(\mu - \sqrt{\lambda_n}\right)^{-1}\right). \qquad (1.1.78)$$

Для случая $\sqrt{\lambda_n} > \mu$, поменяв во всех проведенных выше рассуждениях ролями μ и $\sqrt{\lambda_n}$, мы получим вместо (1.1.77) оценку

$$I_n^\mu(R)\cdot\left(1-\frac{\mu^2}{\lambda_n}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right),$$

*) См. Г. Бейтмен и А. Эрдейи [1, с. 20, формула (56)].

из которой с учетом того, что $\sqrt{\lambda_n} > \mu$, получим, что

$$I_n^{\mu}(R) = O\left(\left(\sqrt{\lambda_n} - \mu\right)^{-1}\right). \tag{1.1.79}$$

Из (1.1.78) и (1.1.79) вытекает справедливость оценки (1.1.48) для любых $\sqrt{\lambda_n} \neq \mu$. Лемма 1.1 доказана.

§ 2. Ядра дробного порядка

В этом параграфе мы изучаем разложение по произвольной ФСФ $\{u_n(y)\}$ оператора Лапласа в какой угодно N-мерной подобласти Ω произвольной N-мерной области G функций, принадлежащих в области Ω к классу радиальных и обладающих в одной фиксированной точке x открытой области Ω степенной особенностью типа $|x-y|^{2\alpha-N}$ при $\alpha > 0$, а точнее, изучаем разложение функций, обладающих в фиксированной точке x той же особенностью, которую имеет в этой точке так называемое *ядро Бесселя — Макдональда* *)

$$|x-y|^{\alpha-N/2} K_{N/2-\alpha}(|x-y|). \tag{1.2.1}$$

Мы уловим специфику в образовании коэффициента Фурье произвольной функции, принадлежащей в области Ω к классу радиальных, обладающей в фиксированной точке x особенностью указанного типа (1.2.1) и удовлетворяющей всюду, кроме этой точки, тем или иным условиям гладкости. Отправляясь от специального вида коэффициента Фурье этой функции, мы установим существование и получим явное представление так называемых *ядер дробного порядка*, т. е. таких функций $T_\alpha(x, y)$, которые для любого фиксированного вещественного числа $\alpha > 0$ и любой фиксированной точки x открытой области Ω имеют в качестве ряда Фурье по рассматриваемой ФСФ $\{u_n(y)\}$ билинейный ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\, u_n(y)\,(1+\lambda_n)^{-\alpha}.$$

Термин «ядро дробного порядка» употребляется на том основании, что функция $T_\alpha(x, y)$ для случая, когда Ω совпадает со всей областью G, служит ядром однородного интегрального уравнения

$$u_n(x) = (1+\lambda_n)^{\alpha} \int_G T_\alpha(x, y)\, u_n(y)\, dy.$$

С точки зрения теории линейных операторов в случае $\Omega \equiv G$ ядра дробного порядка $T_\alpha(x, y)$ являются ядрами тех интеграль-

---

*) Символ $K_\nu(r)$ обозначает так называемую функцию Макдональда порядка ν или, как ее еще называют, цилиндрическую функцию третьего рода порядка ν, экспоненциально убывающую при $r \to \infty$ (см., например, книгу Г. Бейтмена и А. Эрдейи [1, с. 13 и 17]).

ных операторов $\mathbf{A}^\alpha$, которые служат положительными вещественными степенями порядка α интегрального оператора

$$\mathbf{A}f = \int_G T_1(x, y) f(y)\, dy,$$

порождаемого соответствующей функцией Грина $T_1(x, y)$ для оператора Гельмгольца $\Delta u - u$ в области G.

Ядра дробного порядка, помимо того что они представляют самостоятельный интерес, служат, как мы увидим ниже (в § 3 и 4), одним из основных инструментов в разработанном нами методе изучения проблем равномерной сходимости и локализации рядов Фурье по произвольным ФСФ оператора Лапласа. Эти ядра весьма удобны также для установления теорем вложения так называемых классов Лиувилля, обобщающих на дробные показатели дифференцируемости введенные С. Л. Соболевым классы W_p^l дифференцируемых в обобщенном смысле функций N переменных.

1. Существование и представление ядер дробного порядка. Пусть $\{u_n(y)\}$ — произвольная ФСФ оператора Лапласа в какой угодно N-мерной подобласти Ω произвольной N-мерной области G. Фиксируем произвольную точку x открытой области Ω и поставим перед собой цель — для любого вещественного $\alpha > 0$ отыскать такую функцию $T_\alpha(x, y)$, n-й коэффициент Фурье которой в разложении по системе $\{u_n(y)\}$ имеет вид $u_n(x)(1 + \lambda_n)^{-\alpha}$. Эту функцию (в случае, если она существует) назовем *ядром порядка* α (для данной ФСФ) и обозначим символом $T_\alpha(x, y)$. При этом ядро $T_1(x, y)$ будет играть роль функции Грина для оператора $\Delta u - u$.

Теорема 1.6. *Для любого вещественного $\alpha > 0$ ядро $T_\alpha(x, y)$ существует и представляется в виде*

$$T_\alpha(x, y) = A_N^\alpha |x - y|^{\alpha - N/2} K_{N/2-\alpha}(|x - y|) + \chi_\alpha(x, y), \quad (1.2.2)$$

где A_N^α — постоянная, определяемая равенством

$$A_N^\alpha = 2^{1-\alpha}\left[(2\pi)^{N/2}\Gamma(\alpha)\right]^{-1}, \quad (1.2.3)$$

символ $K_\nu(r)$ обозначает функцию Макдональда порядка ν от аргумента r, а $\chi_\alpha(x, y)$ — функция, обладающая в открытой области Ω непрерывными частными производными по координатам точек x и y сколь угодно высокого порядка.

Доказательство. Фиксируем произвольную точку x открытой области Ω и положительное число R, меньшее половины расстояния x от границы Ω. Рассмотрим для любого фиксированного номера m две функции расстояния $r = |x - y|$ переменной точки y области G от фиксированной нами точки x:

$$v_\alpha(r) = \begin{cases} A_N^\alpha r^{\alpha - N/2} K_{N/2-\alpha}(r) & \text{при} \quad r \leqslant R, \\ 0 & \text{при} \quad r > R, \end{cases} \quad (1.2.4)$$

$$w_\alpha(r)=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{m} a_k r^{2k} & \text{при } r\leqslant R,\\ 0 & \text{при } r>R.\end{cases} \tag{1.2.5}$$

Здесь A_N^α — постоянная, определяемая равенством (1.2.3), $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ — постоянные, выбранные так, что при $r = R-0$ сама разность $v_\alpha(r)-w_\alpha(r)$ и все производные этой разности по r до порядка m включительно равны нулю. Убедимся в том, что последнее условие обеспечивает однозначный выбор постоянных $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Наряду с операцией обычного дифференцирования по переменной r введем в рассмотрение операцию так называемого *бесселевского дифференцирования* по переменной r, обозначаемого символом D и определяемого равенством

$$Df(r)=\frac{1}{r}f'(r).$$

Символом D^k будем обозначать результат k-кратного применения операции бесселевского дифференцирования D. Условия выбора коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ задаются равенствами *)

$$f(R)=0,\quad f'(R)=0,\quad f^{(2)}(R)=0,\ \ldots,\ f^{(m)}(R)=0 \tag{1.2.6}$$

для функции $f(r)=v_\alpha(r)-w_\alpha(r)$. Поскольку $R>0$, то очевидно, что равенства (1.2.6) эквивалентны равенствам

$$f(R)=0,\quad Df(R)=0,\quad D^2f(R)=0,\ \ldots,\ D^mf(R)=0. \tag{1.2.7}$$

Равенства (1.2.7) с учетом вида функций (1.2.5) и (1.2.4) приводят к следующей квадратной системе линейных уравнений для определения коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$:

$$\begin{cases} a_0+a_1R^2+a_2R^4+a_3R^6+\ldots+a_mR^{2m}=v_\alpha(R),\\ 2a_1+4a_2R^2+6a_3R^4+\ldots+2m\,a_mR^{2m-2}=Dv_\alpha(R),\\ 4\cdot 2a_2+6\cdot 4a_3R^2+\ldots+2m(2m-2)\,a_mR^{2m-4}=D^2v_\alpha(R),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ 2m(2m-2)\ldots 4\cdot 2a_m=D^mv_\alpha(R).\end{cases}$$

Так как определитель полученной системы равен $2^m\cdot 4^{m-1}\cdot 6^{m-2}\ldots(2m-2)^2 2m$ и отличен от нуля, то существует и притом единственное решение этой системы, определяемое формулами Крамера.

Так как конкретный вид коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ в дальнейшем нам не потребуется, то мы не будем выписывать значения этих коэффициентов.

---

*) Под производными в точке $r=R$ всюду в дальнейшем подразумеваются левые производные в этой точке.

В силу равенства (1.1.3) коэффициент Фурье $f_n = (f, u_n(y))$ функции $f(r) = v_\alpha(r) - w_\alpha(r)$ имеет вид

$$f_n = (2\pi)^{N/2} \lambda_n^{\frac{2-N}{4}} u_n(x) \int_0^R [v_\alpha(r) - w_\alpha(r)]\, r^{N/2} \mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}(r\sqrt{\lambda_n})\, dr. \quad (1.2.8)$$

Интеграл в правой части (1.2.8) подвергнем $(m+1)$-кратному интегрированию по частям, используя рекуррентное соотношение $\int r^\nu \mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{\lambda_n})dr = \lambda_n^{-1/2} r^\nu \mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda_n})$ и введенную выше операцию бесселевского дифференцирования D.

В результате получим

$$f_n = (2\pi)^{N/2} u_n(x) \times$$
$$\times \left\{ \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k+1} \lambda_n^{-\frac{N}{4} - \frac{k-1}{2}} \left[D^{k-1} f(r)\, r^{\frac{N}{2}+k-1} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+k-1}(r\sqrt{\lambda_n}) \right]\Bigg|_{r=0}^{r=R} + \right.$$
$$\left. + (-1)^{m+1} \lambda_n^{-\frac{N}{4}-\frac{m}{2}} \int_0^R D^{m+1}[v_\alpha(r) - w_\alpha(r)]\, r^{\frac{N}{2}+m+1} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+m}(r\sqrt{\lambda_n})\, dr \right\}. \quad (1.2.9)$$

Далее заметим, что в силу рекуррентного соотношения *)

$$\frac{d}{dr}\left[r^{-\nu} K_\nu(r)\right] = -r^\nu K_{\nu+1}(r)$$

имеет место соотношение

$$D^k[v_\alpha(r)] = 2^{1-\alpha}\left[(2\pi)^{N/2}\Gamma(\alpha)\right]^{-1} (-1)^k r^{-\left(\frac{N}{2}-\alpha+k\right)} K_{\frac{N}{2}-\alpha+k}(r). \quad (1.2.10)$$

Учтем также, что каждое применение операции D понижает степень полинома $w_\alpha(r)$ на две единицы и что

$$\begin{cases} D^m w_\alpha(r) = D^m w_\alpha(R) = D^m v_\alpha(R) = \\ \qquad = 2^{1-\alpha}\left[(2\pi)^{N/2}\Gamma(\alpha)\right]^{-1} (-1)^m R^{-\left(\frac{N}{2}-\alpha+m\right)} K_{\frac{N}{2}-\alpha+m}(R), \\ D^{m+1} w_\alpha(r) \equiv 0. \end{cases} \quad (1.2.11)$$

Заметим теперь, что все подстановки в соотношении (1.2.9) обращаются в нуль. В самом деле, подстановки при $r = R$ обращаются в нуль в силу соотношений (1.2.7), а подстановки при $r = 0$ обращаются в нуль в силу ограниченности всех бесселевых производных $D^{k-1} w_\alpha(r)$ при $k = 1, 2, \ldots, m+1$, в силу соотношения (1.2.10) и в силу поведения при $r \to 0$ цилиндрических функций

$$\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+k-1}(r\sqrt{\lambda_n}), \qquad K_{\frac{N}{2}-\alpha+k-1}(r).$$

---

*) См., например, Г. Бейтмен и А. Эрдейи [1, с. 91].

Обращение в нуль всех подстановок в (1.2.9), соотношение (1.2.10) и второе соотношение (1.2.11) дают нам право переписать соотношение (1.2.9) в следующем виде:

$$f_n = \lambda_n^{-\frac{N}{4}-\frac{m}{2}} \cdot 2^{1-\alpha}[\Gamma(\alpha)]^{-1} u_n(x) \int_0^R r^\alpha \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+m}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right) K_{\frac{N}{2}-\alpha+m+1}(r)\,dr. \tag{1.2.12}$$

Установим для коэффициента Фурье f_n и другое выражение, для чего сделаем преобразование $\int_0^R = \int_0^\infty - \int_R^\infty$ и воспользуемся известным значением интеграла *)

$$\lambda_n^{-\frac{N}{4}-\frac{m}{2}} 2^{1-\alpha}[\Gamma(\alpha)]^{-1} \int_0^\infty r^\alpha \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+m}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right) K_{\frac{N}{2}+m+1-\alpha}(r)\,dr = (1+\lambda_n)^{-\alpha}. \tag{1.2.13}$$

С помощью (1.2.12) и (1.2.13) мы получим следующее соотношение для коэффициента Фурье:

$$f_n = u_n(x)(1+\lambda_n)^{-\alpha} - \\ - u_n(x)\lambda_n^{-\frac{N}{4}-\frac{m}{2}} 2^{1-\alpha}[\Gamma(\alpha)]^{-1} \int_R^\infty r^\alpha \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+m}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right) K_{\frac{N}{2}+m+1-\alpha}(r)\,dr. \tag{1.2.14}$$

Итак, мы приходим к выводу, что коэффициент Фурье рассматриваемой нами функции f, имеющей в точке $y = x$ особенность типа $A_N^\alpha |x-y|^{\alpha-N/2} K_{N/2-\alpha}(|x-y|)$ и обладающей всюду, кроме этой точки, непрерывными частными производными до наперед заданного порядка m, представляется в виде

$$f_n = u_n(x)(1+\lambda_n)^{-\alpha} + \overset{m}{\gamma}_n u_n(x), \tag{1.2.15}$$

где для не зависящей от x и y величины $\overset{m}{\gamma}_n$ справедливо любое из следующих двух представлений:

$$\overset{m}{\gamma}_n = -\lambda_n^{-\frac{N}{4}-\frac{m}{2}} 2^{1-\alpha}[\Gamma(\alpha)]^{-1} \int_R^\infty r^\alpha \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+m}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right) K_{\frac{N}{2}+m+1-\alpha}(r)\,dr, \tag{1.2.16}$$

$$\overset{m}{\gamma}_n = -(1+\lambda_n)^{-\alpha} + \\ + \lambda_n^{-\frac{N}{4}-\frac{m}{2}} 2^{1-\alpha}[\Gamma(\alpha)]^{-1} \int_0^R r^\alpha \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+m}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right) K_{\frac{N}{2}+m+1-\alpha}(r)\,dr. \tag{1.2.17}$$

Заметим теперь, что функцию f, представляющую собой разность

---

*) См., например, Г. Бейтмен и А. Эрдейи [1, с. 62, формула (31)].

функций (1.2.4) и (1.2.5), всюду в области G можно представить в виде

$$f = A_N^\alpha |x-y|^{\alpha-\frac{N}{2}} K_{\frac{N}{2}-\alpha}(|x-y|) + \varphi_\alpha(|x-y|), \quad (1.2.18)$$

где функция $\varphi_\alpha(|x-y|)$ имеет вид

$$\varphi_\alpha(|x-y|) = \begin{cases} -w_\alpha(|x-y|) & \text{при } |x-y| \leqslant R, \\ -A_N^\alpha |x-y|^{\alpha-\frac{N}{2}} K_{\frac{N}{2}-\alpha}(|x-y|) & \text{при } |x-y| > R. \end{cases} \quad (1.2.19)$$

Из выбора у функции $w_\alpha(r)$ коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ и из представления (1.2.19) вытекает, что функция $\varphi_\alpha(|x-y|)$ обладает в области Ω непрерывными частными производными как по координатам точки x, так и по координатам точки y до порядка m включительно *).

Из соотношений (1.2.15) и (1.2.18) вытекает, что функция $T_\alpha(x, y)$, имеющая в качестве своего коэффициента Фурье по системе $\{u_n(y)\}$ величину $u_n(x)(1+\lambda_n)^{-\alpha}$, представляется в виде

$$T_\alpha(x, y) = A_N^\alpha |x-y|^{\alpha-N/2} K_{N/2-\alpha}(|x-y|) + \varphi_\alpha(|x-y|) - \Psi_\alpha(x, y), \quad (1.2.20)$$

где $\varphi_\alpha(|x-y|)$ — функция, определяемая соотношением (1.2.19), а $\Psi_\alpha(x, y)$ — функция, рядом Фурье которой по системе $\{u_n(y)\}$ служит билинейный ряд вида

$$\Psi_\alpha(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^m u_n(x) u_n(y). \quad (1.2.21)$$

Мы пишем в соотношении (1.2.21) знак равенства, ибо сейчас будет доказано, что не только сам ряд, стоящий в правой части (1.2.21), но и ряды, полученные его формальным почленным дифференцированием по координатам точек x и y до порядка, неограниченно возрастающего с ростом номера m, сходятся равномерно на любом компакте области Ω.

Этим и будет завершено доказательство теоремы 1.6, ибо фигурирующая в условии теоремы функция $\chi_\alpha(x, y)$ может быть взята в виде $\chi_\alpha(x, y) = \varphi_\alpha(|x-y|) - \Psi_\alpha(x, y)$, причем в силу сказанного выше обе функции $\varphi_\alpha(|x-y|)$ и $\Psi_\alpha(x, y)$ будут об-

---

*) **В самом деле,** функция $-w_\alpha(|x-y|)$ обладает при $|x-y| \leqslant R$ непрерывными частными производными по координатам точек x и y сколь угодно высокого порядка: функция $-A_N^\alpha |x-y|^{\alpha-N/2} K_{N/2-\alpha}(|x-y|)$ обладает при $|x-y| \geqslant R$ непрерывными производными по координатам точек x и y сколь угодно высокого порядка; в силу соотношений (1.2.6) частные производные до порядка m у функции $-w_\alpha(|x-y|)$ при $|x-y| = R-0$ совпадают с соответствующими частными производными функции

$$-A_N^\alpha |x-y|^{\alpha-N/2} K_{N/2-\alpha}(|x-y|) \text{ при } |x-y| = R+0.$$

ладать в открытой области Ω непрерывными частными производными по координатам точек x и y до порядка, неограниченно возрастающего с ростом m.

Прежде всего заметим, что из соотношения (1.2.16) и из оценок функций $\mathcal{J}_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ для значений аргумента, превосходящих число $R>0$, вытекает, что существует постоянная $C(R, \alpha, m, N)$ такая, что для всех $\lambda_n \geqslant 1$ *)

$$|\overset{m}{\gamma_n}| \leqslant C(R, \alpha, m, N)(1+\lambda_n)^{-N/4-m/2}. \tag{1.2.22}$$

Далее заметим, что из соотношения (1.2.17) и из оценок $|\mathcal{J}_\nu(x)| \leqslant C_1(\nu)x^\nu$ и $x^\nu K_\nu(x) \leqslant C_2(\nu)$ (для всех $x \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$) вытекает, что при $m > \alpha - N/2 - 1$ и при всех λ_n

$$|\overset{m}{\gamma_n}| \leqslant C_1(R, \alpha, m, N). \tag{1.2.23}$$

Как уже отмечалось выше, нам достаточно доказать, что для произвольных фиксированных неотрицательных целых p и q и для всех достаточно больших m ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overset{m}{\gamma_n} u_n^{(p)}(x)\, u_n^{(q)}(y), \tag{1.2.24}$$

в котором символ $u_n^{(p)}(x)$ обозначает любую частную производную функции $u_n(x)$ порядка p, а символ $u_n^{(q)}(y)$ обозначает любую частную производную функции $u_n(y)$ порядка q, сходится равномерно относительно x и y, принадлежащих произвольному компакту области Ω.

Для этого в силу неравенства Коши — Буняковского достаточно доказать, что для произвольного фиксированного $p \geqslant 0$ и для всех достаточно больших m ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\overset{m}{\gamma_n}| \left[u_n^{(p)}(x)\right]^2 \tag{1.2.25}$$

сходится равномерно относительно x на любом компакте области Ω и что для произвольного фиксированного $q \geqslant 0$ и для всех достаточно больших m ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\overset{m}{\gamma_n}| \left[u_n^{(q)}(y)\right]^2 \tag{1.2.26}$$

сходится равномерно относительно y на любом компакте области Ω.

Мы ограничимся доказательством равномерной сходимости ряда (1.2.25), ибо равномерная сходимость ряда (1.2.26) доказывается аналогично.

---

*) Если заранее фиксировать произвольный компакт K области Ω и взять в качестве x произвольную точку компакта K, а в качестве R число, меньшее половины расстояния компакта K от границы Ω, то постоянная C для всех точек x компакта K будет зависеть только от α, m и N.

Пусть μ_0 — некоторое фиксированное достаточно большое число, выбор которого будет уточнен ниже.

Положим

$$\overset{m\prime}{\gamma}_n = \begin{cases} \overset{m}{\gamma}_n & \text{при } \lambda_n \geqslant \mu_0, \\ 0 & \text{при } \lambda_n < \mu_0, \end{cases} \qquad \overset{m\prime\prime}{\gamma}_n = \begin{cases} 0 & \text{при } \lambda_n \geqslant \mu_0, \\ \overset{m}{\gamma}_n & \text{при } \lambda_n < \mu_0. \end{cases}$$

Тогда ряд (1.2.25) будет представлять сумму двух рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \overset{m\prime}{\gamma}_n \right| \left[u_n^{(p)}(x) \right]^2 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \overset{m\prime\prime}{\gamma}_n \right| \left[u_n^{(p)}(x) \right]^2, \tag{1.2.27}$$

и нам достаточно доказать, что каждый из рядов (1.2.27) при произвольном фиксированном $p \geqslant 0$ и при всех достаточно больших m сходится равномерно относительно x на любом компакте области Ω.

Сначала докажем, что первый из рядов (1.2.27) сходится при любом фиксированном $p \geqslant 0$ и при всех достаточно больших m равномерно относительно x на любом компакте области Ω. Для этого достаточно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 1.2. *При любом $\delta > 0$ и при достаточно большом $\mu_0 > 0$ ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[u_n^{(p)}(x) \right]^2 \beta_n^2, \tag{1.2.28}$$

в котором

$$\beta_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+\lambda_n)^{-N/4-p/2-\delta/4} & \text{при} \quad \lambda_n \geqslant \mu_0, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda_n < \mu_0, \end{cases} \tag{1.2.29}$$

сходится равномерно относительно x на произвольном компакте области Ω.

В самом деле, если лемма 1.2 будет доказана, то, учитывая определение $\overset{m\prime}{\gamma}_n$ и оценку (1.2.22), получаем, что при любом $m > N/2 + 2p$ первый из рядов (1.2.27) с точностью до постоянного множителя $\frac{1}{4} C(R, \alpha, m, N)$ будет мажорироваться равномерно (на фиксированном компакте) сходящимся рядом (1.2.28), у которого β_n определяется равенством (1.2.29) при $\delta = m - N/2 - 2p > 0$.

Отнеся доказательство леммы 1.2 в п. 2 обратимся к доказательству того, что второй из рядов (1.2.27) сходится при произвольном фиксированном нами $p \geqslant 0$ и при всех достаточно больших m равномерно относительно x на любом компакте области Ω. Для этого достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 1.3. *Для любого целого неотрицательного p ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[u_n^{(p)}(x) \right]^2 \delta_n^2, \tag{1.2.30}$$

в котором при фиксированном выше (в лемме 1.2) числе μ_0 число δ_n имеет вид

$$\delta_n = \begin{cases} 3/4 & \text{при} \quad \lambda_n < \mu_0, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda_n \geqslant \mu_0, \end{cases}$$

сходится равномерно относительно x на произвольном компакте области Ω.

В самом деле, если лемма 1.3 будет доказана, то из определения $\gamma_n^{m_{//}}$ и из оценки (1.2.23) мы получим, что второй из рядов (1.2.27) с точностью до постоянного множителя будет мажорироваться на любом фиксированном компакте области Ω равномерно сходящимся на этом компакте рядом (1.2.30).

Таким образом, для завершения доказательства теоремы 1.6 остается доказать сформулированные леммы 1.2 и 1.3.

2. Доказательство вспомогательных лемм.

Доказательство леммы 1.2. Фиксируем произвольное $\delta > 0$, произвольный компакт K области Ω и произвольное число $R > 0$, меньшее половины расстояния компакта K от границы области Ω, и, взяв в качестве x произвольную точку компакта K, рассмотрим функцию f, равную разности функций (1.2.4) и (1.2.5) с $\alpha = N/4 + p/2 + \delta/4$ и с номером m, превосходящим число $p + \delta$. В силу соотношений (1.2.15) и (1.2.22) мы получим для всех номеров n, для которых $\lambda_n \geqslant 1$,

$$f_n = u_n(x)\left\{(1+\lambda_n)^{-\left(\frac{N}{4}+\frac{p}{2}+\frac{\delta}{4}\right)} + O\left[(1+\lambda_n)^{-\left(\frac{N}{4}+\frac{m}{2}\right)}\right]\right\}, \quad (1.2.31)$$

причем величина O не зависит от x.

Заметим теперь, что по построению сама функция f и все ее частные производные по координатам точки x до порядка m включительно всюду, кроме точек $y = x$, непрерывны по совокупности точек x, y при $x \in K$, $y \in G$.

Заметим далее, что особенность, которой обладает функция f при $y = x$, такова, что при любом $\delta > 0$ любая частная производная $f^{(p)}$ порядка p допускает интегрируемый квадрат, т. е. для любого x из компакта K существует интеграл

$$\int_G \left[f^{(p)}\right]^2 dy. \quad (1.2.32)$$

При этих предположениях коэффициент Фурье $f_n^{(p)}$ любой частной производной $f^{(p)}$ по координатам точки x порядка p функции f получается дифференцированием коэффициента Фурье (1.2.31) функции f, т. е. имеет вид

$$f_n^{(p)} = u_n^{(p)}(x)\left\{(1+\lambda_n)^{-\left(\frac{N}{4}+\frac{p}{2}+\frac{\delta}{4}\right)} + O\left[(1+\lambda_n)^{-\left(\frac{N}{4}+\frac{m}{2}\right)}\right]\right\}. \quad (1.2.33)$$

Так как $\frac{N}{4}+\frac{m}{2} \geqslant \frac{N}{4}+\frac{p}{2}+\frac{\delta}{2} > \frac{N}{4}+\frac{p}{2}+\frac{\delta}{4}$, то можно фиксировать μ_0 настолько большим, что для всех $\lambda_n \geqslant \mu_0$ будет справедливо неравенство

$$\left|O\left[(1+\lambda_n)^{-\left(\frac{N}{4}+\frac{m}{2}\right)}\right]\right| \leqslant \frac{1}{2}(1+\lambda_n)^{-\left(\frac{N}{4}+\frac{p}{2}+\frac{\delta}{4}\right)}. \quad (1.2.34)$$

Из (1.2.33) и (1.2.34) получим, что для всех $\lambda_n \geqslant \mu_0$ имеет место неравенство

$$|f_n^{(p)}| \geqslant \frac{1}{2}|u_n^{(p)}(x)|(1+\lambda_n)^{-\left(\frac{N}{4}+\frac{p}{2}+\frac{\delta}{4}\right)}. \quad (1.2.35)$$

Заметим теперь, что из существования интеграла (1.2.32) и из полноты и ортонормированности системы $\{u_n(y)\}$ вытекает справедливость для любого x из компакта K равенства Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty}[f_n^{(p)}]^2 = \int_G [f^{(p)}]^2\,dy, \quad (1.2.36)$$

в силу которого ряд из неотрицательных членов, стоящий в левой части (1.2.36), сходится к сумме, стоящей в правой части (1.2.36), в каждой точке x компакта K. Более того, так как каждый член ряда $[f_n^{(p)}]^2$ и его сумма, стоящая в правой части (1.2.36), являются непрерывными функциями точки x на компакте K, то по теореме Дини ряд, стоящий в левой части (1.2.36), сходится равномерно по x на компакте K.

Остается заметить, что из определения (1.2.29) величин β_n и из неравенства (1.2.35) вытекает, что ряд (1.2.28) всюду на компакте K мажорируется рядом, стоящим в левой части (1.2.36).

Равномерная на компакте K сходимость ряда (1.2.28) доказана. Доказательство леммы 1.2 завершено.

Доказательство леммы 1.3. Фиксируем произвольное целое $p \geqslant 0$, произвольный компакт K области Ω и произвольное число $R > 0$, меньшее половины расстояния компакта K от границы области Ω, и, взяв в качестве x произвольную точку компакта K, рассмотрим следующую функцию расстояния $r = |x-y|$ переменной точки y от x:

$$f(r) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{N}{2}+p+2\right)}{(p+1)!\,\pi^{N/2}R^N}\left(1-\dfrac{r^2}{R^2}\right)^{p+1} & \text{при} \quad r \leqslant R, \\ 0 & \text{при} \quad r > R. \end{cases} \quad (1.2.37)$$

Убедимся в том, что коэффициент Фурье f_n функции (1.2.37) по системе $\{u_n(y)\}$ имеет вид

$$f_n = 2^{\frac{N}{2}+p+1}\Gamma\left(\frac{N}{2}+p+2\right)\left(R\sqrt{\lambda_n}\right)^{-\left(\frac{N}{2}+p+1\right)} \times$$
$$\times \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+p+1}\left(R\sqrt{\lambda_n}\right)u_n(x). \quad (1.2.38)$$

В самом деле, если воспользоваться для коэффициента Фурье f_n представлением (1.1.3) и подвергнуть интеграл в (1.1.3) $(p+1)$-кратному интегрированию по частям, основанному на рекуррентном соотношении $\int r^{\nu}\mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{\lambda_n})\,dr = \lambda_n^{-1/2}r^{\nu}\mathcal{J}_{\nu}(r\sqrt{\lambda_n})$ и на использовании понятия бесселевской производной $Df(r) = r^{-1}\frac{\partial f(r)}{\partial r}$, то мы получим для коэффициента Фурье f_n следующее представление:

$$f_n = (2\pi)^{N/2}u_n(x)\left\{\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k+1}\lambda_n^{-\frac{N}{4}-\frac{k-1}{2}}\times\right.$$
$$\times\left[r^{\frac{N}{2}+k-1}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+k-1}(r\sqrt{\lambda_n})\,D^{k-1}f(r)\right]\Bigg|_{r=0}^{r=R}+$$
$$\left.+(-1)^{p+1}\lambda_n^{-\frac{N}{4}-\frac{p}{2}}\int_0^R r^{\frac{N}{2}+p+1}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+p}(r\sqrt{\lambda_n})\,D^{p+1}f(r)\,dr\right\}. \quad (1.2.39)$$

Так как при любом $k \leqslant p+1$

$$D^k\left[\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^{p+1}\right] =$$
$$= (-1)^k\cdot 2^k R^{-2k}(p+1)\,p\,(p-1)\ldots(p-k+2)\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^{p+1-k}$$

и, в частности,

$$D^{p+1}\left[\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^{p+1}\right] = (-1)^{p+1}\cdot 2^{p+1}(p+1)!\,R^{-2p-2},$$

то все подстановки в (1.2.39) обращаются в нуль, и мы получим, что

$$f_n = 2^{\frac{N}{2}+p+1}u_n(x)\,\Gamma\left(\frac{N}{2}+p+2\right)\times$$
$$\times R^{-(N+2p+2)}\lambda_n^{-\left(\frac{N}{4}+\frac{p}{2}\right)}\int_0^R r^{\frac{N}{2}+p+1}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+p}(r\sqrt{\lambda_n})\,dr =$$
$$= 2^{\frac{N}{2}+p+1}\Gamma\left(\frac{N}{2}+p+2\right)(R\sqrt{\lambda_n})^{-\left(\frac{N}{2}+p+1\right)}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+p+1}(R\sqrt{\lambda_n})u_n(x).$$

Тем самым соотношение (1.2.38) обосновано.

Заметим теперь, что по построению сама функция (1.2.37) и все ее частные производные по координатам точки x до порядка p включительно непрерывны по совокупности точек x, y при $x \in K$, $y \in G$. При этих предположениях коэффициент Фурье $f_n^{(p)}$

любой частной производной $f^{(p)}$ по координатам точки x порядка p функции (1.2.37) получается соответствующим дифференцированием коэффициента Фурье (1.2.38), т. е. имеет вид

$$f_n^{(p)} = 2^{\frac{N}{2}+p+1}\Gamma\left(\frac{N}{2}+p+2\right)\left(R\sqrt{\lambda_n}\right)^{-\left(\frac{N}{2}+p+1\right)} \times$$

$$\times \mathscr{J}_{\frac{N}{2}+p+1}\left(R\sqrt{\lambda_n}\right) u_n^{(p)}(x). \quad (1.2.40)$$

Из представления функции Бесселя $\mathscr{J}_\nu(x)$ в виде степенного ряда и из свойства знакопеременного ряда с монотонно убывающими по модулю членами вытекает, что для всех x из сегмента $0 \leqslant x \leqslant 1$ и для всех $\nu \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$2^\nu \Gamma(\nu+1)\frac{\mathscr{J}_\nu(x)}{x^\nu} > 1 - \frac{1}{4(\nu+1)} \geqslant \frac{3}{4}. \quad (1.2.41)$$

Пусть $\mu_0 > 1$ — число, фиксированное в лемме 1.2. Взяв в качестве R число, меньшее $1/\mu_0$, мы получим, что для всех номеров n, для которых $\lambda_n \leqslant \mu_0$, аргумент $R\sqrt{\lambda_n}$ функции Бесселя в (1.2.40) принадлежит сегменту $[0, 1]$. Но тогда из сопоставления представления (1.2.40) с неравенством (1.2.41) мы получим, что для произвольного фиксированного нами $p \geqslant 0$ и для всех номеров n, для которых $\lambda_n < \mu_0$, справедливо неравенство

$$\left|f_n^{(p)}\right| \geqslant \frac{3}{4}\left|u_n^{(p)}(x)\right|. \quad (1.2.42)$$

Записывая для непрерывной при $x \in K$, $y \in G$ функции $f^{(p)}$ равенство Парсеваля по системе $\{u_n(y)\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[f_n^{(p)}\right]^2 = \int_G \left[f^{(p)}\right]^2 dy, \quad (1.2.43)$$

мы получим, что ряд из неотрицательных членов, стоящий в левой части (1.2.43), сходится в каждой точке x компакта K. Более того, в силу теоремы Дини сходимость этого ряда является равномерной по x на компакте K. Остается заметить, что в силу неравенства (1.2.42) и определения чисел δ_n, данного в формулировке леммы 1.3, ряд (1.2.30) для всех x из компакта K мажорируется рядом, стоящим в левой части (1.2.43).

Лемма 1.3 доказана.

З а м е ч а н и е. Из проведенных нами рассуждений вытекает, что для любого $\alpha > N/4$ интеграл

$$\int_G T_\alpha^2(x, y)\, dy \quad (1.2.44)$$

существует и является непрерывной функцией точки x для всех x из произвольного компакта подобласти Ω.

§ 3. Оценка остаточного члена спектральной функции в метрике L_2 и следствия из нее

1. Оценка остаточного члена спектральной функции в метрике L_2. Пусть $\{u_n(x)\}$ — произвольная ФСФ оператора Лапласа в какой угодно N-мерной подобласти Ω произвольной N-мерной области G.

Фиксируем произвольное вещественное $\lambda > 0$ и рассмотрим для любой внутренней точки x области Ω и для любой точки y области G следующую сумму:

$$\theta(x, y, \lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} u_n(x) u_n(y). \tag{1.3.1}$$

Сумма (1.3.1) для фиксированного нами $\lambda > 0$ может содержать как конечное, так и бесконечное число слагаемых. Если фундаментальные числа $\{\lambda_n\}$ имеют предельные точки, лежащие на сегменте $[0, \lambda]$, то сумма (1.3.1) содержит бесконечное число слагаемых и превращается в ряд, который в силу неравенства Коши — Буняковского и оценки (1.1.17) сходится абсолютно для любых внутренних точек x и y области Ω.

Если $f(y)$ — произвольная суммируемая функция, имеющая в области Ω компактный носитель и продолженная нулем за пределы области Ω, то величину

$$\sigma_\lambda(x, f) = \int \theta(x, y, \lambda) f(y)\, dy = E_\lambda f(x) = \\ = \sum_{\lambda_n < \lambda} u_n(x) \int u_n(y) f(y)\, dy \tag{1.3.2}$$

естественно назвать *спектральным разложением* функции f по рассматриваемой ФСФ $\{u_n(x)\}$.

При этом саму функцию $\theta(x, y, \lambda)$, свертка которой с $f(y)$ дает спектральное разложение (1.3.2), естественно назвать *спектральной функцией*, отвечающей рассматриваемой ФСФ $\{u_n(x)\}$.

В настоящем пункте мы установим асимптотическую оценку при больших λ спектральной функции $\theta(x, y, \lambda)$.

Фиксируя произвольный компакт K области Ω, произвольную точку x компакта K и произвольное положительное число R, меньшее расстояния компакта K от границы Ω, рассматриваем следующую функцию расстояния $r = |x - y|$ переменной точки y от фиксированной точки x:

$$\overset{\lambda}{v}(r) = \begin{cases} \lambda^{N/4} (2\pi r)^{-N/2} \mathcal{J}_{N/2}(r\sqrt{\lambda}) & \text{при} \quad r \leqslant R, \\ 0 & \text{при} \quad r > R. \end{cases} \tag{1.3.3}$$

Мы докажем, что функция (1.3.3) является главным членом в асимптотической оценке спектральной функции $\theta(x, y, \lambda)$ для больших λ. Точнее, мы докажем следующее предложение.

Теорема 1.8. *Для спектральной функции $\theta(x, y, \lambda)$, отвечающей произвольной ФСФ оператора Лапласа $\{u_n(x)\}$ в какой* *угодно N-мерной подобласти Ω произвольной N-мерной области G, справедливо следующее представление*:

$$\theta(x, y, \lambda) = \overset{\lambda}{v}(|x-y|) + \widehat{\theta}(x, y, \lambda), \tag{1.3.4}$$

в котором $\overset{\lambda}{v}(r)$ — *функция* (1.3.3), *а* $\widehat{\theta}(x, y, \lambda)$ — *остаточный член, для которого для всех достаточно больших* $\lambda > 0$ *равномерно относительно x на произвольном компакте K области Ω справедлива точная по порядку оценка*

$$\|\widehat{\theta}(x, y, \lambda)\|_{L_2(G)} \leqslant CR^{-1}\lambda^{(N-1)/4} \tag{1.3.5}$$

(L_2-*норма в этой оценке берется по координатам точки* y).

З а м е ч а н и е. Из оценки (1.3.5) следует, что д л я л ю б о г о $\lambda \geqslant 0$ для остаточного члена $\widehat{\theta}(x, y, \lambda)$ справедлива оценка

$$\|\widehat{\theta}(x, y, \lambda)\|_{L_2(G)} \leqslant CR^{-1}(1+\lambda)^{(N-1)/4}, \tag{1.3.5$'$}$$

также равномерная относительно x на произвольном компакте K подобласти Ω.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируя произвольный компакт K области Ω, произвольную точку x компакта K и произвольное положительное число R, меньшее расстояния компакта K от границы области Ω, рассмотрим функцию (1.3.3), у которой $r = |x-y|$ обозначает расстояние переменной точки y от фиксированной нами точки x.

Согласно равенству (1.1.3) коэффициент Фурье $\overset{\lambda}{v}_n(x)$ этой функции в разложении ее по системе $\{u_n(y)\}$ равен

$$\overset{\lambda}{v}_n(x) = (2\pi)^{N/2} u_n(x) \lambda_n^{(2-N)/4} \int_0^R \overset{\lambda}{v}(r)\, r^{N/2} \mathcal{J}_{(N-2)/2}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right) dr =$$

$$= \lambda^{N/4}\lambda_n^{(2-N)/4} u_n(x) \int_0^R \mathcal{J}_{N/2}\left(r\sqrt{\lambda}\right) \mathcal{J}_{(N-2)/2}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right) dr. \tag{1.3.6}$$

Сделаем в последнем интеграле в (1.3.6) преобразование вида $\int_0^R = \int_0^\infty - \int_R^\infty$ и воспользуемся известным значением интеграла *)

$$\lambda^{N/4}\lambda_n^{(2-N)/4} \int_0^\infty \mathcal{J}_{N/2}\left(r\sqrt{\lambda}\right) \mathcal{J}_{(N-2)/2}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right) dr =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \lambda_n < \lambda, \\ 1/2 & \text{при} \quad \lambda_n = \lambda, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda_n > \lambda. \end{cases} \tag{1.3.7}$$

---

*) См., например, Г. Бейтмен и А. Эрдейи [1, с. 107, формула (34)].

Вводя обозначения

$$\delta_n(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \lambda_n < \lambda, \\ 1/2 & \text{при} \quad \lambda_n = \lambda, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda_n > \lambda, \end{cases}$$

$$\overset{\lambda}{I}_n(R) = \int\limits_0^\infty \mathcal{J}_{N/2}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{(N-2)/2}(r\sqrt{\lambda_n})\,dr, \tag{1.3.8}$$

получаем из (1.3.6) с помощью (1.3.7)

$$\overset{\lambda}{v}_n(x) = \delta_n(\lambda)\,u_n(x) - \lambda^{N/4}\lambda_n^{(2-N)/2}u_n(x)\,\overset{\lambda}{I}_n(R). \tag{1.3.9}$$

Умножим обе части (1.3.9) на фундаментальную функцию $u_n(y)$ и просуммируем получающееся при этом равенство по всем номерам n от 1 до ∞. При этом пока формально получим равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overset{\lambda}{v}_n(x)\,u_n(y) = \sum_{\lambda_n<\lambda} u_n(x)\,u_n(y) + \frac{1}{2}\sum_{\lambda_n=\lambda} u_n(x)\,u_n(y) -$$
$$- \lambda^{N/4}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(2-N)/4}\overset{\lambda}{I}_n(R)\,u_n(x)\,u_n(y). \tag{1.3.10}$$

Убедимся теперь в том, что при любом фиксированном $\lambda > 0$ и для любой фиксированной точки x компакта K все стоящие в равенстве (1.3.10) ряды сходятся по крайней мере в метрике $L_2(G)$ (по координатам точки y), так что равенство (1.3.10) во всяком случае можно понимать как равенство элементов пространства $L_2(G)$. Действительно, при любом фиксированном $\lambda > 0$ и для любой фиксированной точки x компакта K функция (1.3.3) как функция точки y принадлежит классу $L_2(G)$, а поэтому стоящий в левой части (1.3.10) ряд Фурье этой функции по полной ортонормированной системе $\{u_n(y)\}$ сходится к этой функции в метрике $L_2(G)$.

Что же касается первого и второго рядов в правой части (1.3.10), то в силу равенства Парсеваля для полной ортонормированной системы $\{u_n(y)\}$ эти ряды (при любых фиксированных $\lambda > 0$ и $x \in K$) сходятся в метрике $L_2(G)$ по y соответственно к

$$\left[\sum_{\lambda_n\leqslant\lambda} u_n^2(x)\right]^{1/2} = \left[\int\limits_G \theta^2(x, y, \lambda)\,dy\right]^{1/2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}\left[\sum_{\lambda_n=\lambda} u_n^2(x)\right]^{1/2}.$$

Отсюда вытекает, что и последний, третий ряд в правой части (1.3.10) сходится при любом фиксированном $\lambda > 0$ и для любой фиксированной точки x компакта K в метрике $L_2(G)$ по координатам точки y.

Итак, справедливость равенства (1.3.10) (при любом фиксированном $\lambda > 0$ и для любой фиксированной точки x компакта K), понимаемого как равенство элементов $L_2(G)$, нами установлена. В силу определения (1.3.1) спектральной функции и в силу сходимости ряда Фурье функции (1.3.3) к этой функции в метрике $L_2(G)$ мы можем переписать равенство (1.3.10) в виде

$$\theta(x, y, \lambda) = \overset{\lambda}{v}(|x-y|) + \widehat{\theta}(x, y, \lambda), \tag{1.3.11}$$

где $\overset{\lambda}{v}(r)$ — функция (1.3.3), а $\widehat{\theta}(x, y, \lambda)$ представляет собой сумму сходящегося в $L_2(G)$ по координатам точки y (при фиксированных $\lambda > 0$ и $x \in K$) ряда

$$\widehat{\theta}(x, y, \lambda) = -\frac{1}{2} \sum_{\lambda_n=\lambda} u_n(x) u_n(y) + \\ + \lambda^{N/4} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(2-N)/4} \overset{\lambda}{I}_n(R) u_n(x) u_n(y). \tag{1.3.12}$$

Для доказательства теоремы 1.8 нам остается убедиться в том, что для всех достаточно больших $\lambda > 0$ равномерно относительно x на произвольном фиксированном нами компакте K справедлива оценка

$$\|\widehat{\theta}(x, y, \lambda)\|_{L_2(G)} \leqslant C R^{-1} \lambda^{(N-1)/4}, \tag{1.3.13}$$

в которой L_2-норма берется в координатах точки y.

Для доказательства оценки (1.3.13) в силу соотношения (1.3.12) и равенства Парсеваля достаточно установить справедливость двух неравенств:

$$\Big\| \sum_{\lambda_n=\lambda} u_n(x) u_n(y) \Big\|^2_{L_2(G)} = \sum_{\lambda_n=\lambda} u_n^2(x) \leqslant C_1 \lambda^{(N-1)/2}, \tag{1.3.14}$$

$$\Big\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{N/4} \lambda_n^{(2-N)/4} \overset{\lambda}{I}_n(R) u_n(x) u_n(y) \Big\|^2_{L_2(G)} = \\ = \lambda^{N/2} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(2-N)/2} u_n^2(x) \Big[\overset{\lambda}{I}_n(R)\Big]^2 \leqslant C_2 R^{-2} \lambda^{(N-1)/2}, \tag{1.3.15}$$

равномерных относительно x на фиксированном компакте K.

Справедливость неравенства (1.3.14) непосредственно вытекает из теоремы 1.1, доказанной в п. 2 § 1, а точнее из оценки (1.1.4), взятой при $\mu = \sqrt{\lambda}$.

Для доказательства справедливости неравенства (1.3.15) достаточно установить следующие шесть оценок:

$$\lambda^{N/2} \sum_{\sqrt{\lambda_n} \leqslant 1} \lambda_n^{(2-N)/2} u_n^2(x) \Big[\overset{\lambda}{I}_n(R)\Big]^2 \leqslant C_3 R^{-2} \lambda^{(N-1)/2}, \tag{1.3.16}$$

$$\lambda^{N/2} \sum_{1 < \sqrt{\lambda_n} < \sqrt{\lambda}/2} \lambda_n^{(2-N)/2} u_n^2(x) \Big[\overset{\lambda}{I}_n(R)\Big]^2 \leqslant C_4 R^{-2} \lambda^{(N-1)/2}, \tag{1.3.17}$$

$$\lambda^{N/2} \sum_{\sqrt{\lambda}/2 \leqslant \sqrt{\lambda_n} \leqslant \sqrt{\lambda}-1} \lambda_n^{(2-N)/2} u_n^2(x) \Big[\overset{\lambda}{I}_n(R)\Big]^2 \leqslant C_5 R^{-2} \lambda^{(N-1)/2}, \tag{1.3.18}$$

$$\lambda^{N/2} \sum_{|\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda}|<1} \lambda_n^{(2-N)/2} u_n^2(x) \left[\overset{\lambda}{I}_n(R)\right]^2 \leqslant C_6 R^{-2} \lambda^{(N-1)/2}, \quad (1.3.19)$$

$$\lambda^{N/2} \sum_{\sqrt{\lambda}+1 \leqslant \sqrt{\lambda_n} \leqslant 3\sqrt{\lambda}/2} \lambda_n^{(2-N)/2} u_n^2(x) \left[\overset{\lambda}{I}_n(R)\right]^2 \leqslant C_7 R^{-2} \lambda^{(N-1)/2}, \quad (1.3.20)$$

$$\lambda^{N/2} \sum_{\sqrt{\lambda_n}>3\sqrt{\lambda}/2} \lambda_n^{(2-N)/2} u_n^2(x) \left[\overset{\lambda}{I}_n(R)\right]^2 \leqslant C_8 R^{-2} \lambda^{(N-1)/2}, \quad (1.3.21)$$

равномерных относительно x на произвольном компакте K.

Для установления этих оценок существенную роль играет следующая лемма, доказательство которой мы для удобства изложения отнесем в п. 2.

Лемма 1.4. *Для величины* $\overset{\lambda}{I}_n(R)$, *определяемой второй из формул* (1.3.8), *для всех* $\lambda \geqslant 1$, $\lambda_n \geqslant 1$ *справедливы следующие две оценки:*

а) *для номеров* n, *для которых* $|\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda}| \leqslant 1$,

$$\left|\overset{\lambda}{I}_n(R)\right| \leqslant C_9 \lambda^{-1/4} \lambda_n^{-1/4}; \quad (1.3.22)$$

б) *для номеров* n, *для которых* $|\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda}| \geqslant 1$,

$$\left|\overset{\lambda}{I}_n(R)\right| \leqslant C_{10} \lambda^{-1/4} \lambda_n^{-1/4} \left|\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda}\right|^{-1} R^{-1}, \quad (1.3.23)$$

причем постоянные C_9 *и* C_{10} *в этих оценках не зависят от* $\lambda \geqslant 1$, $\lambda_n \geqslant 1$ *и* $R \leqslant 1$.

Для той же величины $\overset{\lambda}{I}_n(R)$ *для всех* $N \geqslant 2$, $\lambda_n < 2$, $\lambda \geqslant 1$, $0 \leqslant R \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\left|\overset{\lambda}{I}_n(R)\right| \leqslant C_{11} \lambda_n^{(N-2)/4} \lambda^{-1/2} \quad (1.3.24)$$

с постоянной C_{11}, *не зависящей от* $\lambda_n \leqslant 2$, $\lambda \geqslant 1$, $R \leqslant 1$.

Опираясь на эту лемму, установим оценки (1.3.16)—(1.3.21).

Используя оценку (1.3.24), мы получим, что величина, стоящая в левой части (1.3.16), не превосходит

$$C_{11}^2 \lambda^{(N-2)/2} \sum_{\sqrt{\lambda_n} \leqslant 1} u_n^2(x). \quad (1.3.25)$$

В силу оценки (1.1.4), взятой при $\mu = 0$, равномерно относительно x на любом компакте K области Ω

$$\sum_{\sqrt{\lambda_n} \leqslant 1} u_n^2(x) \leqslant C. \quad (1.3.26)$$

Из (1.3.25), неравенств (1.3.26) и $\lambda^{(N-2)/2} \leqslant \lambda^{(N-1)/2}$ вытекает справедливость оценки (1.3.16).

Для установления оценки (1.3.17) заметим, что для фигурирующих в этой оценке номеров n можно следующим образом переписать оценку (1.3.23):

$$\left|\overset{\lambda}{I}_n(R)\right| \leqslant C_{12}\lambda^{-1/4}\lambda_n^{-3/4}R^{-1}. \tag{1.3.27}$$

Последнее неравенство позволяет мажорировать величину, стоящую в левой части (1.3.17), следующей суммой:

$$\lambda^{N/2}\sum_{1<\sqrt{\lambda_n}<\sqrt{\lambda}/2}\lambda_n^{(2-N)/2}u_n^2(x)\left[\overset{\lambda}{I}_n(R)\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_{12}^2\lambda^{(N-1)/2}R^{-2}\sum_{\sqrt{\lambda_n}\geqslant 1}u_n^2(x)\,\lambda_n^{-(N+1)/2}. \tag{1.3.28}$$

Теперь для установления оценки (1.3.17) остается воспользоваться следствием 2 из теоремы 1.1 (см. п. 2 § 1), в силу которого сумма ряда, стоящего в правой части (1.3.28) и совпадающего с рядом (1.1.24) при $\delta = 1/2 > 0$, ограничена на произвольном компакте K.

Для установления сразу двух оценок (1.3.18) и (1.3.20) заметим, что обе эти оценки являются следствиями следующей более общей оценки:

$$\lambda^{N/2}\sum_{1<\left|\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda}\right|<\sqrt{\lambda}/2}\lambda_n^{(2-N)/2}u_n^2(x)\left[\overset{\lambda}{I}_n(R)\right]^2 \leqslant C_{13}R^{-2}\lambda^{(N-1)/2}, \tag{1.3.29}$$

равномерной относительно x на произвольном компакте K.

Для доказательства справедливости оценки (1.3.29) обозначим через p наименьший из номеров, для которого $2^p \geqslant \sqrt{\lambda}/2$. Тогда сегмент $[1, \sqrt{\lambda}/2]$ покрывается системой сегментов $[2^{l-1}, 2^l]$, $l = 1, 2, \ldots, p$.

Пользуясь оценкой (1.3.23) и учитывая, что для всех номеров n, фигурирующих в сумме, стоящей в левой части (1.3.29), справедливо неравенство $\sqrt{\lambda_n}/\sqrt{\lambda} \leqslant 2$, мы можем следующим образом мажорировать величину, стоящую в левой части (1.3.29):

$$\lambda^{N/2}\sum_{1<\left|\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda}\right|<\sqrt{\lambda}/2}\lambda_n^{(2-N)/2}u_n^2(x)\left[\overset{\lambda}{I}_n(R)\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_{10}^2 2^{N-1}R^{-2}\sum_{1<\left|\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda}\right|<\sqrt{\lambda}/2}u_n^2(x)\left(\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda}\right)^{-2} \leqslant$$

$$\leqslant C_{14}R^{-2}\sum_{l=1}^{p}\left[\sum_{2^{l-1}\leqslant\left|\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda}\right|\leqslant 2^l}u_n^2(x)\left(\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda}\right)^{-2}\right] \leqslant$$

$$\leqslant C_{14}R^{-2}\sum_{l=1}^{p}4^{1-l}\left\{\sum_{2^{l-1}\leqslant\left|\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda}\right|\leqslant 2^l}u_n^2(x)\right\}. \tag{1.3.30}$$

Для завершения доказательства оценки (1.3.29) остается воспользоваться для заключенной в фигурные скобки в правой части (1.3.30) суммы оценкой (1.1.21) (см. следствие 1 из теоремы 1.1, п. 2 § 1). В силу указанной оценки (1.1.21), взятой при $\rho = 2^l$, $\mu = \sqrt{\lambda}$,

$$\sum_{2^{l-1} \leqslant \left|\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda}\right| \leqslant 2^l} u_n^2(x) \leqslant 2^l O\left(\lambda^{(N-1)/2}\right) \tag{1.3.31}$$

равномерно на произвольном компакте K.

Подставляя (1.3.31) в правую часть (1.3.30) и учитывая сходимость ряда $\sum\limits_{l=1}^{\infty} 2^{-l} = 1$, мы завершим доказательство оценки (1.3.29), а стало быть, и оценок (1.3.18) и (1.3.20).

Оценка (1.3.19) является тривиальным следствием неравенства (1.3.22), неравенства $\sqrt{\lambda}/\sqrt{\lambda_n} = O(1)$, справедливого для всех номеров n, фигурирующих в оценке (1.3.19), и соотношения (1.1.20), установленного в п. 2 § 1 и взятого при $\mu = \sqrt{\lambda}$.

Остается установить оценку (1.3.21). Для этого заметим, что для всех фигурирующих в этой оценке номеров n неравенство (1.3.23) можно переписать в виде (1.3.27). С помощью (1.3.27) левая часть (1.3.21) мажорируется суммой

$$\lambda^{N/2} \sum_{\sqrt{\lambda_n} > 3\sqrt{\lambda}/2} \lambda_n^{(2-N)/2} u_n^2(x) \left| \overset{\lambda}{I}_n(R) \right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant C_{12}^2 \lambda^{(N-1)/2} R^{-2} \sum_{\sqrt{\lambda_n} > 3\sqrt{\lambda}/2} u_n^2(x)\, \lambda_n^{-(N+1)/2}.$$

Теперь для установления оценки (1.3.21) остается воспользоваться ограниченностью на произвольном компакте суммы ряда (1.1.24) при $\delta = 1/2 > 0$ (см. п. 2 § 1, следствие 2 из теоремы 1.1). Тем самым при условии справедливости леммы 1.4 нами завершено доказательство теоремы 1.8.

2. Доказательство леммы 1.4. Сначала установим оценку (1.3.22) в предположениях $|\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda}| \leqslant 1$, $\sqrt{\lambda_n} \geqslant 1$, $\sqrt{\lambda} > 1$.

Пусть сначала размерность области N нечетна. Тогда, подвергая интеграл

$$\overset{\lambda}{I}_n(R) = \int_R^{\infty} \mathcal{J}_{N/2}\left(r\sqrt{\lambda}\right) \mathcal{J}_{(N-2)/2}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right) dr \tag{1.3.32}$$

$(N-1)/2$-кратному интегрированию по частям, основанному на применении рекуррентных соотношений *)

$$\int r^{-\nu} \mathcal{J}_{\nu+1}\left(r\sqrt{\lambda}\right) dr = -r^{-\nu}\left(\sqrt{\lambda}\right)^{-1} \mathcal{J}_{\nu}\left(r\sqrt{\lambda}\right),$$
$$\frac{d}{dr}\left[r^{\nu} \mathcal{J}_{\nu}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right)\right] = r^{\nu}\sqrt{\lambda_n}\, \mathcal{J}_{\nu-1}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right),$$

---

*) См., например, Г. Бейтмен и А. Эрдейи [1], с. 20, формулы (52) и (53) при $m = 1$.

мы придем к равенству

$$\overset{\lambda}{I}_n(R) = \sum_{l=1}^{(N-1)/2} (\sqrt{\lambda_n})^{l-1} (\sqrt{\lambda})^{-l} \mathcal{J}_{N/2-l}(R\sqrt{\lambda}) \mathcal{J}_{N/2-l}(R\sqrt{\lambda_n}) + \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda}}\right)^{(N-1)/2} \int_R^\infty \mathcal{J}_{1/2}(r\sqrt{\lambda}) \mathcal{J}_{-1/2}(r\sqrt{\lambda_n})\, dr. \quad (1.3.33)$$

Так как при $|\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda}| \leqslant 1$, $\sqrt{\lambda_n} \geqslant 1$, $\sqrt{\lambda} > 1$ справедливо неравенство $\sqrt{\lambda_n}/\sqrt{\lambda} < 2$ и оценка (1.3.22) эквивалентна оценке

$$\left|\overset{\lambda}{I}_n(R)\right| = O(\lambda^{-1/2}), \quad (1.3.34)$$

то для каждого слагаемого, стоящего под знаком суммы в правой части (1.3.33), доказываемая оценка (1.3.22) справедлива (достаточно мажорировать константой каждую из бесселевых функций $\mathcal{J}_{N/2-l}(R\sqrt{\lambda})$ и $\mathcal{J}_{N/2-l}(R\sqrt{\lambda_n})$).

Остается доказать, что и последнее слагаемое в правой части (1.3.33) имеет порядок $O(\lambda^{-1/4}\lambda_n^{-1/4})$, а это вытекает из того, что $(\sqrt{\lambda_n}/\sqrt{\lambda})^{(N-1)/2} \leqslant 2^{(N-1)/2}$ и интеграл в этом слагаемом равен

$$\int_0^\infty \mathcal{J}_{1/2}(r\sqrt{\lambda}) \mathcal{J}_{-1/2}(r\sqrt{\lambda_n})\, dr =$$

$$= 2\pi^{-1}(\lambda\lambda_n)^{-1/4} \int_R^\infty r^{-1} \sin(r\sqrt{\lambda}) \cos(r\sqrt{\lambda_n})\, dr =$$

$$= \pi^{-1}(\lambda\lambda_n)^{-1/4} \left\{ \int_R^\infty r^{-1} \sin\left[r(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda_n})\right] dr + \int_R^\infty r^{-1} \sin\left[r(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda_n})\right] dr \right\}, \quad (1.3.35)$$

причем стоящая в фигурных скобках величина представляет собой алгебраическую сумму двух значений интегрального синуса от положительных значений аргумента, а интегральный синус на положительной полуоси равномерно ограничен. Итак, для случая, когда размерность области N является нечетной, оценка (1.3.22) при $|\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda}| \leqslant 1$, $\sqrt{\lambda_n} \geqslant 1$, $\sqrt{\lambda} > 1$ установлена.

Установим теперь оценку (1.3.22) при $|\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda}| \leqslant 1$, $\sqrt{\lambda_n} \geqslant 1$, $\sqrt{\lambda} > 1$ для случая, когда размерность области N является четной. В этом случае, подвергая интеграл (1.3.32) $(N-2)/2$-кратному интегрированию по частям, мы получим вместо (1.3.33) следующее соотношение:

$$\overset{\lambda}{I}_n(R) = \sum_{l=1}^{(N-2)/2} (\sqrt{\lambda_n})^{l-1} (\sqrt{\lambda})^{-l} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}-l}(R\sqrt{\lambda}) \mathcal{J}_{\frac{N}{2}-l}(R\sqrt{\lambda_n}) + \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda}}\right)^{(N-2)/2} \int_R^\infty \mathcal{J}_1(r\sqrt{\lambda}) \mathcal{J}_0(r\sqrt{\lambda_n})\, dr. \quad (1.3.33')$$

Точно так же, как для нечетного N, доказывается, что каждое слагаемое под знаком суммы в правой части (1.3.33′) имеет порядок, стоящий в правой части (1.3.34). Так как $\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda}}\right)^{(N-2)/2} \leqslant$ $\leqslant 2^{(N-2)/2}$, то остается доказать, что такой же порядок имеет и интеграл

$$\int_R^\infty \mathcal{J}_1(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_0(r\sqrt{\lambda_n})\,dr. \tag{1.3.36}$$

Используя соотношение (1.3.7) при $N=2$ и первое обозначение (1.3.8), мы получим, что

$$\int_R^\infty \mathcal{J}_1(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_0(r\sqrt{\lambda_n})\,dr =$$

$$=\delta_n(\lambda)\,\lambda^{-1/2} - \int_0^R \mathcal{J}_1(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_0(r\sqrt{\lambda_n})\,dr. \tag{1.3.37}$$

Таким образом, для того, чтобы доказать, что интеграл (1.3.36) имеет порядок $O(\lambda^{-1/2})$, достаточно доказать, что такой порядок имеет интеграл в правой части (1.3.37).

Так как $\mathcal{J}_0'(x) = -\mathcal{J}_1(x)$, то по теореме Лагранжа найдется число θ из интервала $0<\theta<1$ такое, что

$$\mathcal{J}_0(r\sqrt{\lambda_n}) - \mathcal{J}_0(r\sqrt{\lambda}) = -r(\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_1[r\sqrt{\lambda}+r\theta(\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda})].$$

Из последнего соотношения с учетом того, что $|\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda}|\leqslant 1$, и с учетом соотношения $|\mathcal{J}_1(x)|\leqslant C_{15}x^{-1/2}$ получим, что

$$\mathcal{J}_0(r\sqrt{\lambda_n}) - \mathcal{J}_0(r\sqrt{\lambda})| \leqslant C_{15}\sqrt{r}[\sqrt{\lambda}+\theta(\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda})]^{-1/2}. \tag{1.3.38}$$

Так как

$$\sqrt{\lambda}+\theta(\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda}) \geqslant$$
$$\geqslant \begin{cases} \sqrt{\lambda} & \text{при} \quad \sqrt{\lambda_n}\geqslant\sqrt{\lambda}, \\ \sqrt{\lambda}(1-\theta)+\theta\sqrt{\lambda_n}\geqslant\sqrt{\lambda_n}\geqslant\sqrt{\lambda}/2 & \text{при} \quad \sqrt{\lambda_n}<\sqrt{\lambda}, \end{cases}$$

то из (1.3.38) вытекает следующая оценка:

$$|\mathcal{J}_0(r\sqrt{\lambda}) - \mathcal{J}_0(r\sqrt{\lambda_n})| \leqslant C_{15}\sqrt{2r}\lambda^{-1/4}. \tag{1.3.39}$$

Представим теперь интеграл, стоящий в правой части (1.3.37), в виде суммы двух интегралов:

$$\int_0^R \mathcal{J}_1(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_0(r\sqrt{\lambda_n})\,dr =$$

$$=\int_0^R \mathcal{J}_1(r\sqrt{\lambda})\,[\mathcal{J}_0(r\sqrt{\lambda_n}) - \mathcal{J}_0(r\sqrt{\lambda})]\,dr + \int_0^R \mathcal{J}_1(r\sqrt{\lambda})\mathcal{J}_0(r\sqrt{\lambda})\,dr. \tag{1.3.40}$$

Первый из интегралов в правой части (1.3.40) имеет требуемый порядок $O(\lambda^{-1/2})$ для всех $R \leqslant 1$ в силу неравенства (1.3.39) и указанной выше тривиальной оценки $|\mathcal{J}_1(r\sqrt{\lambda})| \leqslant C_{15}(r\sqrt{\lambda})^{-1/2}$. Второй из интегралов в правой части (1.3.40) равен

$$\int_0^R \mathcal{J}_1(r\sqrt{\lambda})\mathcal{J}_0(r\sqrt{\lambda})\,dr = -(\sqrt{\lambda})^{-1}\int_0^R \mathcal{J}_0(r\sqrt{\lambda})\,d[\mathcal{J}_0(r\sqrt{\lambda})] =$$

$$= (2\sqrt{\lambda})^{-1}[1 - \mathcal{J}_0^2(R\sqrt{\lambda})] \leqslant (2\sqrt{\lambda})^{-1}.$$

Вывод оценки (1.3.22) завершен.

Остается установить оценку (1.3.23) для всех $|\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda}| > 1$, $\sqrt{\lambda_n} \geqslant 1$, $\sqrt{\lambda} > 1$.

Сначала, предполагая, что $\sqrt{\lambda} < \sqrt{\lambda_n}$, подвергнем интеграл (1.3.32) двукратному интегрированию по частям, основанному на использовании рекуррентных соотношений *)

$$\int r^\nu \mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{\lambda_n})\,dr = (\sqrt{\lambda_n})^{-1} r^\nu \mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda_n}),$$

$$\frac{d}{dr}[r^{-\nu}\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})] = -\sqrt{\lambda}\cdot r^{\nu}\mathcal{J}_{\nu+1}(r\sqrt{\lambda}). \qquad (1.3.41)$$

Получим, что

$$\overset{\lambda}{I}_n(R) = -(\sqrt{\lambda_n})^{-1}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}}(R\sqrt{\lambda})\mathcal{J}_{\frac{N}{2}}(R\sqrt{\lambda_n}) -$$

$$-\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda_n}}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+1}(R\sqrt{\lambda})\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+1}(R\sqrt{\lambda_n}) + \frac{\lambda}{\lambda_n}\int_R^\infty \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+2}(r\sqrt{\lambda})\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+1}(r\sqrt{\lambda_n})\,dr. \qquad (1.3.42)$$

Под знаком последнего интеграла в правой части (1.3.42) воспользуемся соотношением

$$\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+2}(r\sqrt{\lambda})\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+1}(r\sqrt{\lambda_n}) = \mathcal{J}_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\lambda})\mathcal{J}_{\frac{N}{2}-1}(r\sqrt{\lambda_n}) +$$

$$+ (N+2)(r\sqrt{\lambda})^{-1}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+1}(r\sqrt{\lambda})\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+1}(r\sqrt{\lambda_n}) -$$

$$- N(r\sqrt{\lambda_n})^{-1}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\lambda})\mathcal{J}_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\lambda_n}),$$

тривиально вытекающим из рекуррентных формул **)

$$\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+2}(r\sqrt{\lambda}) = -\mathcal{J}_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\lambda}) + (N+2)(r\sqrt{\lambda})^{-1}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+1}(r\sqrt{\lambda}),$$

$$\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+1}(r\sqrt{\lambda_n}) = -\mathcal{J}_{\frac{N}{2}-1}(r\sqrt{\lambda_n}) + N(r\sqrt{\lambda_n})^{-1}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\lambda_n}).$$

---

*) См., например, Г. Бейтмен и А. Эрдейи [1], с. 20, формулы (52) и (53)].

**) См., например, Г. Бейтмен и А. Эрдейи [1, с. 20, формула (56)].

В результате получим

$$\overset{\lambda}{I}_n(R)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right) = -(\sqrt{\lambda_n})^{-1}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}}(R\sqrt{\lambda})\mathcal{J}_{\frac{N}{2}}(R\sqrt{\lambda_n}) -$$

$$-\sqrt{\lambda}(\sqrt{\lambda_n})^{-1}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+1}(R\sqrt{\lambda})\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+1}(R\sqrt{\lambda_n}) +$$

$$+(N+2)\sqrt{\lambda}(\sqrt{\lambda_n})^{-1}\int_R^\infty r^{-1}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+1}(r\sqrt{\lambda})\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+1}(r\sqrt{\lambda_n})\,dr -$$

$$-N\cdot\lambda(\lambda_n)^{-3/2}\int_R^\infty \mathcal{J}_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\lambda})\mathcal{J}_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\lambda_n})r^{-1}\,dr. \quad (1.3.43)$$

Мажорируя модули всех бесселевых функций, стоящих в правой части (1.3.43), с помощью оценки

$$|\mathcal{J}_\nu(x)| \leqslant C(\nu)x^{-1/2}, \quad (1.3.44)$$

справедливой при $\nu \geqslant -1/2$, $x \geqslant 0$, получим из (1.3.43) соотношение

$$\left|\overset{\lambda}{I}_n(R)\right|\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right) \leqslant C_{16}R^{-1}\lambda_n^{-3/4}\lambda^{-1/4},$$

из которого вытекает справедливость оценки (1.3.23) в случае $1 \leqslant \sqrt{\lambda} < \sqrt{\lambda_n}$.

Заметим, что поскольку при оценке правой части (1.3.43) мы использовали только неравенство (1.3.44), справедливое для любого $\nu \geqslant -1/2$, а при замене $N/2$ на $N/2-1$ порядки всех стоящих в правой части (1.3.43) бесселевых функций будут оставаться не меньше числа $-1/2$, то оценка (1.3.23) в случае $1 \leqslant \sqrt{\lambda} < \sqrt{\lambda_n}$ будет справедлива для интеграла (1.3.32) и при замене в этом интеграле числа $N/2$ числом $N/2-1$, т. е. при $1 \leqslant \sqrt{\lambda} < \sqrt{\lambda_n}$ будет справедлива оценка

$$\left|\int_0^R \mathcal{J}_{\frac{N}{2}-1}(r\sqrt{\lambda})\mathcal{J}_{\frac{N}{2}-2}(r\sqrt{\lambda_n})\,dr\right| = O\left(\lambda^{-1/4}\lambda_n^{-1/4}|\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda}|^{-1}R^{-1}\right). \quad (1.3.45)$$

Теперь нам остается доказать оценку (1.3.23) во втором случае, т. е. в случае $1 \leqslant \sqrt{\lambda_n} < \sqrt{\lambda}$.

Используя рекуррентное соотношение

$$\mathcal{J}_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\lambda}) = -\mathcal{J}_{\frac{N}{2}-2}(r\sqrt{\lambda}) + (N-2)(r\sqrt{\lambda})^{-1}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}-1}(r\sqrt{\lambda}),$$

придадим интегралу (1.3.32) следующий вид:

$$\overset{\lambda}{I}_n(R) = -\int_R^\infty \mathcal{J}_{\frac{N}{2}-1}(r\sqrt{\lambda_n})\mathcal{J}_{\frac{N}{2}-2}(r\sqrt{\lambda})\,dr +$$

$$+(N-2)(\sqrt{\lambda})^{-1}\int_R^\infty \mathcal{J}_{\frac{N}{2}-1}(r\sqrt{\lambda})\mathcal{J}_{\frac{N}{2}-1}(r\sqrt{\lambda_n})r^{-1}\,dr. \quad (1.3.46)$$

Так как $N/2-1 \geqslant -1/2$, то, воспользовавшись для $\mathcal{J}_{N/2-1}(x)$ оценкой вида (1.3.44), получим, что последний интеграл в правой части (1.3.46) имеет порядок $O\left(\lambda^{-3/4}\lambda_n^{-1/4}R^{-1}\right)$ и тем более порядок $O\left(\lambda^{-1/4}\lambda_n^{-1/4}\left|\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda}\right|^{-1}R^{-1}\right)$.

Остается доказать, что такой же порядок имеет и первый член в правой части (1.3.46). Но модуль указанного первого члена совпадает с модулем интеграла (1.3.45), в котором числа λ и λ_n обменены ролями. Таким образом, для модуля первого интеграла в правой части (1.3.46) в силу соотношения (1.3.45) справедлива при $1 \leqslant \sqrt{\lambda_n} < \sqrt{\lambda}$ требуемая оценка

$$\left|\int_R^\infty \mathcal{J}_{\frac{N}{2}-1}\left(r\sqrt{\lambda_n}\right)\mathcal{J}_{\frac{N}{2}-2}\left(r\sqrt{\lambda}\right)dr\right| = \\ = O\left(\lambda^{-1/4}\lambda_n^{-1/4}\left|\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda}\right|^{-1}R^{-1}\right).$$

Для завершения доказательства леммы остается для всех $N \geqslant 2$, $\lambda_n \leqslant 2$, $\lambda \geqslant 1$, $0 \leqslant R \leqslant 1$ установить оценку (1.3.24).

Пусть сначала $N \geqslant 3$ *нечетно*. Тогда справедливо соотношение (1.3.33). Каждое слагаемое, стоящее в правой части (1.3.33) под знаком суммы, имеет требуемый порядок $O\left(\lambda_n^{(N-2)/4}\lambda^{-1/2}\right)$ с оценкой O-членов, не зависящей от R при всех $0 \leqslant R \leqslant 1$, так как для любого $1 \leqslant l \leqslant (N-1)/2$

$$\left|\mathcal{J}_{\frac{N}{2}-l}\left(R\sqrt{\lambda}\right)\right| \leqslant C, \quad \left|\mathcal{J}_{\frac{N}{2}-l}\left(R\sqrt{\lambda_n}\right)\right| \leqslant C\left(R\sqrt{\lambda_n}\right)^{\frac{N}{2}-l}.$$

Последний член в правой части (1.3.33) также имеет требуемый порядок в силу равенства (1.3.35), ограниченности величины, стоящей в (1.3.35) в фигурных скобках, и поскольку $(N-1)/2 \geqslant 1$ при всех $N \geqslant 3$.

Пусть, наконец, $N \geqslant 2$ *четно*. Тогда справедливо соотношение (1.3.33′) и точно так же, как и для нечетного N, доказывается, что каждое слагаемое, стоящее в правой части (1.3.33′) под знаком суммы, имеет требуемый порядок.

Последний член в правой части (1.3.33′) также имеет требуемый порядок в силу соотношения (1.3.37), неравенства $(N-2)/2 \geqslant 0$ и поскольку в силу ограниченности функций $|\mathcal{J}_0(x)|$ и $|\mathcal{J}_1(x)|$ для всех неотрицательных значений аргумента x

$$\int_0^R \mathcal{J}_1\left(r\sqrt{\lambda}\right)\mathcal{J}_0\left(r\sqrt{\lambda_n}\right)dr = -\left(\sqrt{\lambda}\right)^{-1}\int_0^R \mathcal{J}_0\left(r\sqrt{\lambda_n}\right)\frac{d}{dr}\left[\mathcal{J}_0\left(r\sqrt{\lambda}\right)\right]dr = \\ = \left(\sqrt{\lambda}\right)^{-1}\left[\mathcal{J}_0\left(r\sqrt{\lambda}\right)\mathcal{J}_0\left(r\sqrt{\lambda_n}\right)\right]\Big|_{r=0}^{r=R} - \\ - \sqrt{\lambda_n}\left(\sqrt{\lambda}\right)^{-1}\int_0^R \mathcal{J}_0\left(r\sqrt{\lambda}\right)\mathcal{J}_1\left(r\sqrt{\lambda_n}\right)dr = O\left[\left(\sqrt{\lambda}\right)^{-1}\right].$$

Доказательство леммы 1.4 полностью завершено.

3. Следствия из теоремы об оценке спектральной функции в метрике L_2.

Следствие 1. Оценка сверху спектральной функции в метрике L_q при $q < 2N/(N+1)$. *При $N \geqslant 2$ для любого q из интервала $1 \leqslant q < 2N/(N+1)$, любого достаточно большого $\lambda > 0$ и любого достаточно малого $R > 0$ справедлива следующая оценка сверху спектральной функции $\theta(x, y, \lambda)$, равномерная относительно x на любом компакте K области Ω:*

$$\|\theta(x, y, \lambda)\|_{L_q(G)} \leqslant C(R)\,\lambda^{(N-1)/4}, \tag{1.3.47}$$

в которой норма в $L_q(G)$ берется по координатам точки y.

В самом деле, так как $q < 2$, то из оценки (1.3.5) вытекает оценка для остаточного члена

$$\|\widehat{\theta}(x, y, \lambda)\|_{L_q(G)} \leqslant C(R)\,\lambda^{(N-1)/4},$$

и нам остается убедиться, что для главного члена (1.3.3) справедлива оценка

$$\left\|\overset{\lambda}{v}(|x-y|)\right\|_{L_q(G)} \leqslant C(R)\,\lambda^{(N-1)/4}, \tag{1.3.48}$$

равномерная относительно x на любом компакте K области Ω. Фиксируем произвольный компакт K области Ω, произвольное число $R > 0$, меньшее расстояния компакта K от границы Ω, и произвольную точку x на компакте K и заметим, что в силу вида (1.3.3) функции $\overset{\lambda}{v}(|x-y|)$ *)

$$\left\|\overset{\lambda}{v}(|x-y|)\right\|_{L_q(G)} = \left[\int_G \left|\overset{\lambda}{v}(|x-y|)\right|^q dy\right]^{1/q} =$$

$$= \left[\omega_N \int_0^R \left|\overset{\lambda}{v}(r)\right|^q r^{N-1}\,dr\right]^{1/q} =$$

$$= \omega_N^{1/q}(2\pi)^{-N/2}\lambda^{N/4}\left[\int_0^R r^{-\frac{Nq}{2}}\left|\mathscr{J}_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\lambda})\right|^q r^{N-1}\,dr\right]^{1/q}. \tag{1.3.49}$$

Пользуясь оценкой $|\mathscr{J}_{N/2}(r\sqrt{\lambda})| \leqslant Cr^{-1/2}\lambda^{-1/4}$ и учитывая, что $N - 1 - Nq/2 - q/2 > -1$ при $q < 2N/(N+1)$, мы получим из (1.3.49) оценку (1.3.48). Тем самым вывод оценки (1.3.47) завершен.

Замечание. Из оценки (1.3.47) следует, что для любого $\lambda > 0$, при любых $N \geqslant 2$, $1 \leqslant q < 2N/(N+1)$ и для любого достаточно малого $R > 0$ для спектральной функции $\theta(x, y, \lambda)$ справедлива следующая оценка:

$$\|\theta(x, y, \lambda)\|_{L_q(G)} \leqslant C(R)(1+\lambda)^{(N-1)/4}, \tag{1.3.47}$$

---

*) Напомним, что $\omega_N = 2\pi^{N/2}[\Gamma(N/2)]^{-1}$.

также равномерная относительно x на произвольном компакте K подобласти Ω.

Следствие 2. Оценка снизу спектральной функции в метрике L_1. Будем обозначать символом Ω_R^x N-мерный шар радиуса R с центром в точке x.

Лемма 1.5. *Пусть K — произвольный компакт подобласти Ω, x_0 — произвольная точка компакта K. Тогда можно фиксировать положительное число R_0 настолько малым, что будут одновременно выполнены два требования:* 1) *N-мерный шар $\Omega_{R_0}^{x_0}$ будет содержаться в подобласти Ω,* 2) *для любого R_1 из полуинтервала $0 < R_1 \leqslant R_0$ и любого содержащегося в N-мерном шаре $\Omega_{R_1}^{x_0}$ множества E, мера $\operatorname{mes} E$ которого удовлетворяет условию*

$$\operatorname{mes} E > R_1^{1/4} \cdot \operatorname{mes} \Omega_{R_1}^{x_0}, \tag{1.3.50}$$

найдется постоянная $\beta > 0$ такая, что при всех достаточно больших $\lambda > 0$ справедлива следующая оценка снизу спектральной функции в метрике $L_1(E)$:

$$\int_E |\theta(x, y, \lambda)|\, dy \geqslant \beta \lambda^{(N-1)/4}. \tag{1.3.51}$$

Доказательство. Фиксируем произвольный компакт K подобласти Ω, произвольную точку x_0 компакта K и положительное число R, меньшее расстояния компакта K от границы Ω. Тогда, взяв с указанным числом R главный член спектральной функции (1.3.3), мы получим для остаточного члена спектральной функции оценку (1.3.5). Из этой оценки и из неравенства Коши — Буняковского вытекает, что если $0 < R_1 \leqslant R$, то для всякого множества E, лежащего в N-мерном шаре $\Omega_{R_1}^{x_0}$, справедливо неравенство

$$\int_E |\widehat{\theta}(x_0, y, \lambda)|\, dy \leqslant C R^{-1} \lambda^{(N-1)/4} \left\{\operatorname{mes} \Omega_{R_1}^{x_0}\right\}^{1/2}, \tag{1.3.52}$$

в котором C — постоянная из оценки (1.3.5).

Далее из явного вида (1.3.3) главного члена спектральной функции и из того, что при $r > 1/\sqrt{\lambda}$ для функции Бесселя справедливо представление *)

$$\mathcal{J}_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\lambda}) = \sqrt{\frac{2}{\pi r \sqrt{\lambda}}} \cos\left(r\sqrt{\lambda} - \frac{\pi(N+1)}{4}\right) + O\left(r^{-3/2}\lambda^{-3/4}\right),$$

а для $\left|\cos\left(r\sqrt{\lambda} - \frac{\pi(N+1)}{4}\right)\right|$ справедливо неравенство

$$\left|\cos\left(r\sqrt{\lambda} - \frac{\pi(N+1)}{4}\right)\right| \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(2r\sqrt{\lambda} - \frac{\pi(N+1)}{2}\right),$$

*) См., например, Г. Бейтмен и А. Эрдейи [1, с. 98, формула (3)].

вытекает, что существует постоянная $\alpha > 0$ такая, что для всех достаточно больших положительных λ и для того же лежащего в N-мерном шаре $\Omega_{R_1}^{x_0}$ множества E справедливо неравенство

$$\int_E \left|\overset{\lambda}{v}(|x_0 - y|)\right| dy =$$

$$= \lambda^{N/4}(2\pi)^{-N/2} \int_E |x_0 - y|^{-N/2} \left|\mathcal{J}_{\frac{N}{2}}\left(|x_0 - y|\sqrt{\lambda}\right)\right| dy \geqslant$$

$$\geqslant \alpha\lambda^{(N-1)/4} R_1^{-(N+1)/2} \operatorname{mes} E. \quad (1.3.53)$$

Фиксируем теперь положительное число R_0, меньшее R, настолько малым, чтобы было справедливо неравенство

$$\frac{\alpha}{2} R_0^{-1/4} \geqslant C R^{-1} \Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right) \pi^{-N/2}, \quad (1.3.54)$$

в котором C — постоянная из оценок (1.3.5) и (1.3.52), а α — постоянная из оценки (1.3.53).

Так как $|\theta(x_0, y, \lambda)| \geqslant \left|\overset{\lambda}{v}(|x_0 - y|) - |\widehat{\theta}(x_0, y, \lambda)|\right|$, то из неравенств (1.3.53) и (1.3.52) получим, что

$$\int_E |\theta(x_0, y, \lambda)| \, dy \geqslant \lambda^{(N-1)/4} \left\{\alpha R_1^{-(N+1)/2} \operatorname{mes} E - C R^{-1} \left(\operatorname{mes} \Omega_{R_1}^{x_0}\right)^{1/2}\right\}.$$

Сопоставляя последнее неравенство с оценками (1.3.50) и (1.3.54) и учитывая, что $\operatorname{mes} \Omega_{R_1}^{x_0} = \pi^{N/2} R_1^N \left[\Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right)\right]^{-1}$, мы придем к оценке

$$\int_E |\theta(x_0, y, \lambda)| \, dy \geqslant \lambda^{(N-1)/4} \frac{\alpha}{2} R_0^{-1/4} \left(\operatorname{mes} \Omega_{R_1}^{x_0}\right)^{1/2},$$

справедливой для любого R_1 из полуинтервала $0 < R_1 \leqslant R_0$ и завершающей доказательство леммы 1.5.

Следствие 3. Оценка сверху спектрального разложения ядра дробного порядка $T_{(N-1)/4}(x, y)$ в метрике L_q при $q < 2N/(N+1)$.

Лемма 1.6. *Для любых $N \geqslant 2$ и $q < 2N/(N+1)$ равномерно относительно x на любом компакте K подобласти Ω справедлива оценка*

$$\| E_\lambda T_{(N-1)/4}(x, y) \|_{L_q(G)} \leqslant C = \text{const}, \quad (1.3.55)$$

в которой действие оператора E_λ и норма $L_q(G)$ берутся в координатах точки y.

Доказательство. Сначала убедимся в том, что спектральное разложение $E_\lambda T_\alpha(x, y)$ ядра дробного порядка $T_\alpha(x, y)$

при любом $\alpha > 0$ определяется равенством

$$E_\lambda T_\alpha(x, y) = (1+\lambda)^{-\alpha}\theta(x, y, \lambda) + \alpha\int_0^\lambda (1+t)^{-1-\alpha}\theta(x, y, t)\,dt. \tag{1.3.56}$$

Обозначим символом $g(x, y, \lambda)$ величину, стоящую в правой части (1.3.56). Достаточно доказать, что

$$\int_G g(x, y, \lambda)\,u_n(y)\,dy = \begin{cases} u_n(x)(1+\lambda_n)^{-\alpha} & \text{при} \quad \lambda_n < \lambda, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda_n \geqslant \lambda, \end{cases}$$

но это равенство сразу же вытекает из соотношения

$$\int_G \theta(x, y, t)\,u_n(y)\,dy = \begin{cases} u_n(x) & \text{при} \quad \lambda_n < t, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda_n \geqslant t, \end{cases}$$

эквивалентного определению спектральной функции.

Для установления оценки (1.3.55) достаточно доказать, что эта оценка справедлива для каждого из двух слагаемых, стоящих в правой части (1.3.56) и взятых при $\alpha = (N-1)/4$.

Равномерная относительно x на любом компакте K подобласти Ω оценка

$$\|(1+\lambda)^{-(N-1)/4}\theta(x, y, \lambda)\|_{L_q(G)} = (1+\lambda)^{-(N-1)/4}\|\theta(x, y, \lambda)\|_{L_q(G)} \leqslant C$$

является непосредственным следствием установленной выше оценки (1.3.47).

Остается доказать, что равномерно относительно x на любом компакте K подобласти Ω справедлива оценка

$$\int_G \left| \frac{N-1}{4}\int_0^\lambda (1+t)^{-1-(N-1)/4}\theta(x, y, t)\,dt \right|^q dy \leqslant C. \tag{1.3.57}$$

В силу соотношения $\theta(x, y, t) = \overset{t}{v}(|x-y|) + \widehat{\theta}(x, y, t)$ (см. равенство (1.3.4)) достаточно установить справедливость двух равномерных относительно x на любом компакте K подобласти Ω оценок

$$\int_G \left| \frac{N-1}{4}\int_0^\lambda (1+t)^{-1-(N-1)/4}\overset{t}{v}(|x-y|)\,dt \right|^q dy \leqslant C, \tag{1.3.58}$$

$$\int_G \left| \frac{N-1}{4}\int_0^\lambda (1+t)^{-1-(N-1)/4}\widehat{\theta}(x, y, t)\,dt \right|^q dy \leqslant C. \tag{1.3.59}$$

Сначала установим справедливость оценки (1.3.58). Заметим, что в силу определения функции $\overset{t}{v}(|x-y|)$ интегрирование по области G сводится к интегрированию по N-мерному шару $|x-y| \leqslant R$. Поэтому интеграл в (1.3.58) можно разбить на сумму двух интегралов

$$J_1 = \int\limits_{|x-y| \leqslant (\sqrt{\lambda})^{-1}} \left| \frac{N-1}{4} \int\limits_0^{\lambda} (1+t)^{-1-(N-1)/4} \overset{t}{v}(|x-y|)\, dt \right| dy, \tag{1.3.60}$$

$$J_2 = \int\limits_{(\sqrt{\lambda})^{-1} \leqslant |x-y| \leqslant R} \left| \frac{N-1}{4} \int\limits_0^{\lambda} (1+t)^{-1-(N-1)/4} \overset{t}{v}(|x-y|)\, dt \right| dy. \tag{1.3.61}$$

Для доказательства оценки (1.3.58) достаточно доказать ограниченность каждого из интегралов (1.3.60) и (1.3.61).

В силу определения функции $\overset{t}{v}(|x-y|)$ интеграл (1.3.60) можно переписать в виде

$$J_1 = (2\pi)^{-\frac{Nq}{2}} \int\limits_{|x-y| \leqslant (\sqrt{\lambda})^{-1}} \left| \frac{N-1}{4} \int\limits_0^{\lambda} (1+t)^{-1-(N-1)/4} \times \right.$$

$$\left. \times\, t^{N/2} (|x-y|\sqrt{t})^{-N/2} \mathcal{J}_{N/2}(|(x-y|\sqrt{t})\, dt \right|^q dy. \tag{1.3.60'}$$

Так как при $|x-y| \leqslant (\sqrt{\lambda})^{-1}$ всюду под знаком интеграла по t справедливо неравенство $|x-y|\sqrt{t} \leqslant 1$, то

$$(|x-y|\sqrt{t})^{-N/2} |\mathcal{J}_{N/2}(|x-y|\sqrt{t})| \leqslant C(N).$$

Из этого неравенства и из справедливого для всех $t \geqslant 0$ соотношения

$$(1+t)^{-1-(N-1)/4} t^{N/2} \leqslant t^{-1+(N+1)/4}$$

вытекает следующее неравенство:

$$\left| \frac{N-1}{4} \int\limits_0^{\lambda} (1+t)^{-1-(N-1)/4} t^{N/2} (|x-y|\sqrt{t})^{-N/2} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}}(|x-y|\sqrt{t})\, dt \right|^q \leqslant$$

$$\leqslant C\lambda^{(N+1)q/4} \leqslant C\lambda^{N/2}.$$

Из последнего неравенства и из (1.3.60′) сразу же вытекает ограниченность интеграла (1.3.60).

Докажем теперь ограниченность интеграла (1.3.61).

Начнем с того, что заметим, что при $0 < |x-y| \leqslant R$ для любого даже комплексного α, удовлетворяющего условию $\operatorname{Re}\alpha >$

$>(N-3)/4$, справедливо соотношение *)

$$\alpha\int_0^\infty (1+t)^{-1-\alpha}\overset{t}{v}(|x-y|)\,dt =$$

$$= (2\pi|x-y|)^{-N/2}\alpha\int_0^\infty (1+t)^{-1-\alpha}t^{N/4}\mathcal{J}_{N/2}(|x-y|\sqrt{t})\,dt =$$

$$= 2^{1-\alpha}(2\pi)^{-N/2}[\Gamma(\alpha)]^{-1}|x-y|^{\alpha-N/2}K_{N/2-\alpha}(|x-y|) = v_\alpha(|x-y|), \quad (1.3.62)$$

в котором $v_\alpha(r)$ обозначает функцию, введенную в п. 1 § 2 и определяемую равенством (1.2.4).

Из этого соотношения, взятого при $\alpha=(N-1)/4$, и из ограниченности при любом $q<2N/(N+1)$ интеграла

$$\int\limits_{|x-y|\leqslant R}|v_{(N-1)/4}(|x-y|)|^q\,dy =$$

$$= \{2^{-1-(N-1)/4}(2\pi)^{-N/2}[\Gamma(N-1)/4]^{-1}\}^q \times \int\limits_{|x-y|\leqslant R}|x-y|^{-\frac{(N+1)q}{4}}\left|K_{\frac{N+1}{4}}(|x-y|)\right|^q dy$$

вытекает, что при любом $q<2N/(N+1)$ и для всех x из фиксированного нами произвольного компакта K подобласти Ω

$$J_2' = \int\limits_{(\sqrt{\lambda})^{-1}\leqslant|x-y|\leqslant R}\left|\frac{N-1}{4}\int_0^\infty(1+t)^{-1-(N-1)/4}\overset{t}{v}(|x-y|)\,dt\right|^q dy \leqslant C.$$

Поэтому для доказательства ограниченности интеграла (1.3.61) достаточно установить ограниченность при $q<2N/(N+1)$ интеграла

$$J_2'' = \int\limits_{(\sqrt{\lambda})^{-1}\leqslant|x-y|\leqslant R}\left|\frac{N-1}{4}\int_\lambda^\infty(1+t)^{-1-(N-1)/4}\overset{t}{v}(|x-y|)\,dt\right|^q dy =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{Nq}{2}}\int\limits_{(\sqrt{\lambda})^{-1}\leqslant|x-y|\leqslant R}|x-y|^{-\frac{(N+1)q}{2}}\left|\frac{N-1}{4}\sqrt{|x-y|}\times\int_\lambda^\infty(1+t)^{-1-(N-1)/4}t^{N/4}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}}(|x-y|\sqrt{t})\,dt\right|^q dy. \quad (1.3.63)$$

Так как при $q<2N/(N+1)$ справедливо неравенство $(N+1)q/2<N$, то для доказательства ограниченности интеграла (1.3.63) достаточно доказать ограниченность при всех $|x-y|\geqslant(\sqrt{\lambda})^{-1}$ внутреннего интеграла

$$\mathcal{K} = \sqrt{|x-y|}\int_\lambda^\infty(1+t)^{-1-(N-1)/4}t^{N/4}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}}(|x-y|\sqrt{t})\,dt. \quad (1.3.64)$$

*) См. Г. Бейтмен и А. Эрдейи [1, с. 110, формула (59)].

Представим интеграл (1.3.64) в виде

$$\mathscr{K} = \sqrt{|x-y|}\int_{\lambda}^{\infty}\varphi(t)\,\psi(t)\,dt,$$

где

$$\varphi(t) = (1+t)^{-1-(N-1)/4}t^{(N+2)/4}, \quad \psi(t) = t^{-1/2}\mathscr{J}_{N/2}(|x-y|\sqrt{t}),$$

и заметим, что при $t \geqslant N+2$ функция $\varphi(t)$ является убывающей и удовлетворяет условию $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t) = 0$.

Не ограничивая общности, мы можем считать, что $\lambda \geqslant N+2$. В таком случае функция $\varphi(t)$ является убывающей на полупрямой $\lambda \leqslant t < \infty$. При этих положениях для интеграла $\mathscr{K}$ будет справедлива теорема Боннэ о среднем значении *), согласно которой на полупрямой $[\lambda, \infty)$ найдется точка ξ такая, что

$$\mathscr{K} = \sqrt{|x-y|}\int_{\lambda}^{\infty}\varphi(t)\,\psi(t)\,dt = \sqrt{|x-y|}\,\varphi(\lambda)\int_{\lambda}^{\xi}\psi(t)\,dt.$$

Таким образом, интеграл (1.3.64) равен

$$\mathscr{K} = \sqrt{|x-y|}\,\lambda^{(N+2)/4}(1+\lambda)^{-(N+3)/4}\int_{\lambda}^{\xi}t^{-1/2}\mathscr{J}_{\frac{N}{2}}\left(|x-y|\sqrt{t}\right)dt.$$

Производя в последнем интеграле интегрирование по частям, основанное на использовании соотношения **)

$$\int\left(\sqrt{t}\right)^{N/2+1}\mathscr{J}_{N/2}\left(|x-y|\sqrt{t}\right)\frac{dt}{2\sqrt{t}} =$$
$$= |x-y|^{-1}\left(\sqrt{t}\right)^{N/2+1}\mathscr{J}_{N/2+1}\left(|x-y|\sqrt{t}\right),$$

получим, что оцениваемый интеграл (1.3.64) равен

$$\mathscr{K} = |x-y|^{-1/2}\lambda^{(N+2)/4}(1+\lambda)^{-(N+3)/4}\times$$
$$\times\left\{\left[2\mathscr{J}_{\frac{N}{2}+1}\left(|x-y|\sqrt{t}\right)\right]\Big|_{t=\lambda}^{t=\xi} + \frac{N+2}{2}\int_{\lambda}^{\xi}\mathscr{J}_{\frac{N}{2}+1}\left(|x-y|\sqrt{t}\right)\frac{dt}{t}\right\}.$$

Воспользовавшись в правой части последнего равенства оценкой $|\mathscr{J}_{N/2+1}(y)| \leqslant Cy^{-1/2}$, мы придем к неравенству

$$|\mathscr{K}| \leqslant C\left[|x-y|\sqrt{\lambda}\right]^{-1},$$

из которого в силу того, что $|x-y| \geqslant (\sqrt{\lambda})^{-1}$, вытекает ограниченность интеграла (1.3.64).

Теперь для завершения доказательства леммы 1.6 нам остается установить только оценку (1.3.59). Вместо этой оценки мы

---

*) См., например, В. А. Ильин, Э. Г. Позняк [1, с. 353—354].

**) См., Г. Бейтмен, А. Эрдейи [1, с. 20].

установим более сильную оценку

$$\int_G \left| \frac{N-1}{4} \int_0^{\lambda} (1+t)^{-1-(N-1)/4} \widehat{\theta}(x, y, t)\, dt \right|^2 dy \leqslant C, \qquad (1.3.65)$$

равномерную относительно x на произвольном компакте K подобласти Ω.

Не ограничивая общности, будем считать, что $\lambda > 1$. Для доказательства оценки (1.3.65) достаточно (в силу представления внутреннего интеграла в левой части (1.3.65) в виде суммы $\int_0^{\lambda} = \int_0^1 + \int_1^{\lambda}$ и в силу тривиального неравенства $(A+B)^2 \leqslant \leqslant 2A^2 + 2B^2$ установить справедливость двух равномерных относительно x на произвольном фиксированном нами компакте K оценок

$$\int_G \left| \int_0^1 (1+t)^{-1-(N-1)/4} \widehat{\theta}(x, y, t)\, dt \right| dy \leqslant C_1, \qquad (1.3.66)$$

$$\int_G \left| \int_1^{\lambda} (1+t)^{-1-(N-1)/4} \widehat{\theta}(x, y, t)\, dt \right|^2 dy \leqslant C_2. \qquad (1.3.67)$$

Для доказательства оценки (1.3.66) воспользуемся тем, что в силу соотношений (1.3.4) и (1.3.1)

$$\widehat{\theta}(x, y, t) = \sum_{\lambda_n < t} u_n(x)\, u_n(y) - \overset{t}{v}(|x-y|),$$

где $\overset{t}{v}(r)$ — функция, определяемая соотношением (1.3.3).

Последнее соотношение, тривиальное неравенство $(A+B)^2 \leqslant \leqslant 2A^2 + 2B^2$ и неравенство Коши — Буняковского позволяют следующим образом мажорировать левую часть (1.3.66):

$$\int_G \left| \int_0^1 (1+t)^{-1-(N-1)/4} \widehat{\theta}(x, y, t)\, dt \right|^2 dy \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_G \left| \int_0^1 (1+t)^{-1-(N-1)/4} \sum_{\lambda_n < t} u_n(x)\, u_n(y)\, dt \right|^2 dy +$$

$$+ 2 \int_G \left| \int_0^1 (1+t)^{-1-(N-1)/4} \overset{t}{v}(|x-y|)\, dt \right|^2 dy \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_0^1 (1+t)^{-2-(N-1)/2} dt \cdot \int_0^1 \left\{ \int_G \left[\sum_{\lambda_n < t} u_n(x)\, u_n(y) \right]^2 dy \right\} dt +$$

$$+ 2 \int_0^1 (1+t)^{-2-(N-1)/2} dt \cdot \int_0^1 \left\{ \int_G [\overset{t}{v}(|x-y|)]^2 dy \right\} dt. \qquad (1.3.68)$$

Из неравенства (1.3.68), из оценки $\int\limits_0^1 (1+t)^{-2-(N-1)/2} dt \leqslant 1$ и из двух справедливых для любого t из сегмента $0 \leqslant t \leqslant 1$ и для всех x из компакта K оценок *)

$$\int\limits_G \left[\sum_{\lambda_n < t} u_n(x) u_n(y)\right]^2 dy = \sum_{\lambda_n < t} u_n^2(x) = O(1),$$

$$\int\limits_G [\overset{t}{v}(|x-y|)]^2 dy = O(1)$$

вытекает справедливость равномерной относительно x на компакте K оценки (1.3.66).

Остается доказать справедливость оценки (1.3.67) (равномерной относительно x на произвольном фиксированном нами компакте K). Для доказательства этой оценки в силу представления (1.3.12) и тривиального неравенства $|A+B|^2 \leqslant 2A^2 + 2B^2$ достаточно установить справедливость двух оценок

$$\int\limits_G \left|\int\limits_1^\lambda (1+t)^{-1-(N-1)/4} \sum_{\lambda_n = t} u_n(x) u_n(y)\, dt\right|^2 dy \leqslant C_3, \quad (1.3.69)$$

$$\int\limits_G \left|\int\limits_1^\lambda (1+t)^{-1-(N-1)/4} t^{N/4} \left[\sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{(2-N)/4} \overset{t}{I}_n(R) u_n(x) u_n(y)\right] dt\right|^2 dy \leqslant C_4, \quad (1.3.70)$$

равномерных относительно x на компакте K.

Обозначая символом M_1 величину, стоящую в левой части (1.3.69), перепишем эту величину в виде

$$M_1 = \int\limits_G \left[\int\limits_1^\lambda (1+t)^{-1-(N-1)/4} \sum_{\lambda_n = t} u_n(x) u_n(y)\, dt\right] \times$$
$$\times \left[\int\limits_1^\lambda (1+\tau)^{-1-(N-1)/4} \sum_{\lambda_k = \tau} u_k(x) u_k(y)\, d\tau\right] dy.$$

Меняя порядок интегрирования относительно y, t и τ, придадим величине M_1 следующий вид:

$$M_1 = \int\limits_1^\lambda \int\limits_1^\lambda (1+t)^{-1-(N-1)/4} (1+\tau)^{-1-(N-1)/4} \times$$
$$\times \left[\sum_{\lambda_n = t} \sum_{\lambda_k = \tau} u_n(x) u_k(x) \int\limits_G u_n(y) u_k(y)\, dy\right] dt\, d\tau.$$

---

*) Первая из этих оценок справедлива в силу соотношения (1.1.4) из п. 2 § 1, взятого при $\mu = 0$, а вторая вытекает из вида (1.3.3) функции $\overset{t}{v}(|x-y|)$.

Теперь легко убедиться в том, что величина M_1 равна нулю. Действительно, выражение, стоящее в квадратных скобках, в силу ортонормированности системы $\{u_n(y)\}$ равно нулю при любом фиксированном t из сегмента $1 \leqslant t \leqslant \lambda$ и при любом τ из сегмента $1 \leqslant \tau \leqslant \lambda$, отличном от t.

Итак, $M_1 = 0$, и оценка (1.3.69) обоснована.

Для обоснования оценки (1.3.70) обозначим символом M_2 величину, стоящую в левой части (1.3.70). Проделывая с этой величиной те же преобразования, что и с величиной M_1, и используя ортонормированность системы $\{u_n(y)\}$, получим

$$M_2 = \int\limits_G \left\{ \int\limits_1^\lambda (1+t)^{-1-(N-1)/4} t^{N/4} \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{(2-N)/4} \overset{t}{I}_n(R)\, u_n(x)\, u_n(y)\, dt \right\} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_1^\lambda (1+\tau)^{-1-(N-1)/4} \tau^{N/4} \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^{(2-N)/4} \overset{\tau}{I}_k(R)\, u_k(x)\, u_k(y)\, d\tau \right\} dy =$$

$$= \int\limits_1^\lambda \int\limits_1^\lambda (1+t)^{-1-(N-1)/4} t^{N/4} (1+\tau)^{-1-(N-1)/4} \tau^{N/4} \times$$

$$\times \left[\sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \lambda_n^{(2-N)/4} \lambda_k^{(2-N)/4} \overset{t}{I}_n(R) \overset{\tau}{I}_k(R) u_n(x) u_k(x) \int\limits_G u_n(y) u_k(y)\, dy \right] dt\, d\tau =$$

$$= \int\limits_1^\lambda \int\limits_1^\lambda (1+t)^{-1-(N-1)/4} (1+\tau)^{-1-(N-1)/4} t^{N/4} \tau^{N/4} \times$$

$$\times \left[\sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{(2-N)/2} u_n^2(x) \overset{t}{I}_n(R) \overset{\tau}{I}_n(R) \right] dt\, d\tau =$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{(2-N)/2} u_n^2(x) \left[\int\limits_1^\lambda (1+t)^{-1-(N-1)/4} t^{N/4} \overset{t}{I}_n(R)\, dt \right]^2.$$

Теперь, разбивая сумму $\sum\limits_{n=1}^\infty$ на две суммы $\sum\limits_{\lambda_n \leqslant 2}$ и $\sum\limits_{\lambda_n > 2}$, сведем доказательство оценки (1.3.70) к обоснованию двух оценок

$$M_2' = \sum_{\lambda_n \leqslant 2} \lambda_n^{(2-N)/2} u_n^2(x) \left[\int\limits_1^\lambda (1+t)^{-1-(N-1)4} t^{N/4} \overset{t}{I}_n(R)\, dt \right]^2 \leqslant C_5, \tag{1.3.71}$$

$$M_2'' = \sum_{\lambda_n > 2} \lambda_n^{(2-N)/2} u_n^2(x) \left[\int\limits_1^\lambda (1+t)^{-1-(N-1)/4} t^{N/4} \overset{t}{I}_n(R)\, dt \right]^2 \leqslant C_6, \tag{1.3.72}$$

равномерных относительно x на произвольном фиксированном нами компакте K.

Оценка (1.3.71) является тривиальным следствием неравенства (1.3.24), оценки (1.1.17), взятой при $\mu_0=\sqrt{2}$, и ограниченности интеграла

$$\int_1^{\lambda}(1+t)^{-1-(N-1)/4}t^{(N-2)/4}dt\leqslant\int_1^{\lambda}(1+t)^{-5/4}dt\leqslant\text{const}.$$

Для доказательства неравенства (1.3.72) достаточно установить при $\lambda_n\geqslant 2$ оценку

$$\int_1^{\lambda}(1+t)^{-1-(N-1)/4}t^{N/4}\,|\overset{t}{I}_n(R)|\,dt\leqslant C_7\lambda_n^{-5/8}. \tag{1.3.73}$$

Действительно, если оценка (1.3.73) будет установлена, то из этой оценки и из следствия 2 из теоремы 1.1 (а точнее из сходимости ряда (1.1.24), равномерной на любом компакте) получим, что

$$M_2''\leqslant C_7^2\sum_{\lambda_n\geqslant 2}u_n^2(x)\,\lambda_n^{-N/2-1/4}\leqslant C_8.$$

Тем более достаточно доказать при $\lambda_n\geqslant 2$ оценку

$$\int_1^{\infty}t^{-1+1/4}\,|\overset{t}{I}_n(R)|\,dt\leqslant C_7\lambda_n^{-5/8}, \tag{1.3.74}$$

являющуюся следствием трех оценок:

$$\mathscr{K}_1=\int\limits_{1\leqslant\sqrt{t}\leqslant\sqrt{\lambda_n}-\lambda_n^{1/8}}t^{-3/4}|\overset{t}{I}_n(R)|\,dt=O\left(\lambda_n^{-5/8}\right), \tag{1.3.75¹}$$

$$\mathscr{K}_2=\int\limits_{|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda_n}|\leqslant\lambda_n^{1/8}}t^{-3/4}\,|\overset{t}{I}_n(R)|\,dt=O\left(\lambda_n^{-5/8}\right), \tag{1.3.75²}$$

$$\mathscr{K}_3=\int\limits_{\sqrt{t}\geqslant\sqrt{\lambda_n}+\lambda_n^{1/8}}t^{-3/4}\,|\overset{t}{I}_n(R)|\,dt=O\left(\lambda_n^{-5/8}\right). \tag{1.3.75³}$$

Оценивая $\mathscr{K}_2$ с помощью неравенства (1.3.22), получаем

$$\mathscr{K}_2=O\left(\lambda_n^{-1/4}\right)\int\limits_{|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda_n}|\leqslant\lambda_n^{1/8}}t^{-1}dt=O\left(\lambda_n^{-1/4}\right)\ln\frac{\sqrt{\lambda_n}+\lambda_n^{1/8}}{\sqrt{\lambda_n}-\lambda_n^{1/8}}=$$
$$=O\left(\lambda_n^{-1/4}\right)\ln\frac{1+\lambda_n^{-3/8}}{1-\lambda_n^{-3/8}}=O\left(\lambda_n^{-5/8}\right).$$

Оценивая $\mathscr{K}_3$ с помощью неравенства (1.3.23), тождества $(\sqrt{t})^{-1}(\sqrt{t}-\sqrt{\lambda_n})^{-1}=(\sqrt{\lambda_n})^{-1}[(\sqrt{t}-\sqrt{\lambda_n})^{-1}-(\sqrt{t})^{-1}]$ и соотношения $dt = 2\sqrt{t}d(\sqrt{t})$, получаем

$$\mathscr{K}_3 = O\left(\lambda_n^{-1/4}\right) \int\limits_{\sqrt{t} \geqslant \sqrt{\lambda_n}+\lambda_n^{1/8}} t^{-1}\left(\sqrt{t}-\sqrt{\lambda_n}\right)^{-1} dt =$$

$$= O\left(\lambda_n^{-1/4}\right) \int\limits_{\sqrt{t} \geqslant \sqrt{\lambda_n}+\lambda_n^{1/8}} (\sqrt{t})^{-1}\left(\sqrt{t}-\sqrt{\lambda_n}\right)^{-1} d(\sqrt{t}) =$$

$$= O\left(\lambda_n^{-3/4}\right) \int\limits_{\sqrt{t} \geqslant \sqrt{\lambda_n}+\lambda_n^{1/8}} \left[\left(\sqrt{t}-\sqrt{\lambda_n}\right)^{-1} - (\sqrt{t})^{-1}\right] d(\sqrt{t}) =$$

$$= O\left(\lambda_n^{-3/4}\right) \ln\left(1+\lambda_n^{3/8}\right) = O\left(\lambda_n^{-5/8}\right).$$

Наконец, оценивая $\mathscr{K}_1$ с помощью неравенства (1.3.23), тождества $(\sqrt{t})^{-1}(\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{t})^{-1} = (\sqrt{\lambda_n})^{-1}[(\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{t})^{-1}+(\sqrt{t})^{-1}]$ и соотношения $dt = 2\sqrt{t}d(\sqrt{t})$, получаем

$$\mathscr{K}_1 = O\left(\lambda_n^{-1/4}\right) \int\limits_{1 \leqslant \sqrt{t} \leqslant \sqrt{\lambda_n}-\lambda_n^{1/8}} t^{-1}\left(\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{t}\right)^{-1} dt =$$

$$= O\left(\lambda_n^{-1/4}\right) \int\limits_{1 \leqslant \sqrt{t} \leqslant \sqrt{\lambda_n}-\lambda_n^{1/8}} (\sqrt{t})^{-1}\left(\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{t}\right)^{-1} d(\sqrt{t}) =$$

$$= O\left(\lambda_n^{-3/4}\right) \int\limits_{1 \leqslant \sqrt{t} \leqslant \sqrt{\lambda_n}-\lambda_n^{1/8}} \left[\left(\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{t}\right)^{-1} + (\sqrt{t})^{-1}\right] d(\sqrt{t}) =$$

$$= O\left(\lambda_n^{-3/4}\right)\left[\ln\left(\lambda_n^{3/8}-1\right) + \ln\left(\sqrt{\lambda_n}-1\right)\right] = O\left(\lambda_n^{-5/8}\right).$$

Тем самым вывод оценок $(1.3.75^1)$—$(1.3.75^3)$ завершен, и лемма 1.6 полностью доказана.

Следствие 4. Оценка сверху спектрального разложения ядра $T_{(N-1)/4}(x, y)$ в метрике L_2 в области, не содержащей особой точки.

Лемма 1.7. *Если $N \geqslant 2$, D — произвольная подобласть Ω, то равномерно относительно x на каждом компакте K области D справедлива оценка*

$$\|E_\lambda T_{(N-1)/4}(x, y)\|_{L_2(G\setminus D)} \leqslant C = \text{const}, \qquad (1.3.76)$$

в которой действие оператора E_λ и норма $L_2(G\setminus D)$ берутся в координатах точки y.

Доказательство. Доказательство леммы 1.7 совершенно аналогично доказательству леммы 1.6. Нужно только вместо оценки (1.3.47) опираться на следующую равномерную относительно x на произвольном компакте K области D оценку:

$$\|\theta(x, y, \lambda)\|_{L_2(G\setminus D)} \leqslant C(R)\, \lambda^{(N-1)/4},$$

справедливость которой для всех достаточно больших $\lambda > 0$

вытекает из оценки (1.3.5) и из равенства для главного члена

$$\|\overset{\lambda}{v}(|x-y|)\|_{L_2(G \setminus D)} = 0,$$

которое сразу вытекает из выражения (1.3.3), если фиксировать R меньшим расстояния компакта K от границы области D. Все остальные рассуждения, использованные при доказательстве леммы 1.6, в рассматриваемом случае следует привести при $q = 2$.

Следствие 5. Неограниченность в метрике L_1 спектрального разложения ядра $T_\alpha(x, y)$ порядка $\alpha < (N-1)/4$.

Лемма 1.8. *Пусть $N \geqslant 2$, K — произвольный компакт области Ω, x_0 — произвольная точка компакта K, положительное число R_0 фиксировано так же, как в лемме 1.5, множество E имеет тот же смысл, что и в лемме 1.5. Тогда для любого $0 \leqslant \alpha < (N-1)/4$*

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}} \int_E |E_\lambda T_\alpha(x_0, y)|\, dy = \infty. \tag{1.3.77}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что с помощью соотношения

$$\int_G E_\lambda T_\alpha(x, y)\, u_n(y)\, dy = \begin{cases} u_n(x)(1+\lambda_n)^{-\alpha} & \text{при } \lambda_n < \lambda, \\ 0 & \text{при } \lambda_n \geqslant \lambda \end{cases}$$

тривиально проверяется равенство

$$\theta(x_0, y, \lambda) = (1+\lambda)^\alpha E_\lambda T_\alpha(x_0, y) - \alpha \int_0^\lambda (1+t)^{\alpha-1} E_t T_\alpha(x_0, y)\, dt. \tag{1.3.78}$$

Предположим, что соотношение (1.3.77) не справедливо, т. е. множество $\left\{\int_E |E_\lambda T_\alpha(x_0, y)|\, dy\right\}$ при некотором $0 \leqslant \alpha < (N-1)/4$ является ограниченным:

$$\int_E |E_\lambda T_\alpha(x_0, y)|\, dy \leqslant C \quad (\text{для всех } \lambda > 0).$$

Тогда из (1.3.78) получим неравенство

$$\int_E |\theta(x_0, y, \lambda)|\, dy \leqslant 2C(1+\lambda)^\alpha,$$

которое противоречит неравенству (1.3.51) и доказывает несостоятельность нашего предположения о несправедливости (1.3.77). Лемма 1.8 доказана.

Замечание к лемме 1.8. Из леммы 1.8 вытекает, что *при любых $p \geqslant 1$ и $0 \leqslant \alpha < (N-1)/4$ множество*

$$\|E_\lambda T_\alpha(x_0, y)\|_{L_p(G)}$$

не является ограниченным по $\lambda > 0$.

§ 4. Точные условия локализации и равномерной сходимости разложений по произвольной ФСФ в классах Соболева — Лиувилля

Всюду в настоящем параграфе мы будем рассматривать произвольную ФСФ оператора Лапласа в какой угодно N-мерной подобласти Ω произвольной N-мерной области G.

Мы будем предполагать знакомство читателя с известными классами С. Л. Соболева $W_p^n(G)$ и с обобщающими их на случай нецелого порядка дифференцируемости α классами функций Соболева — Лиувилля $L_p^\alpha(G)$. Краткие сведения об указанных классах можно найти в п. 3 § 1 гл. 2 настоящей монографии, а подробные сведения — в известной монографии С. М. Никольского *).

В п. 1 мы установим равномерную на любом компакте подобласти Ω сходимость ряда Фурье по рассматриваемой произвольной ФСФ для произвольной функции $f(x)$, обладающей в подобласти Ω компактным носителем и принадлежащей в ней классу Соболева — Лиувилля L_p^α, порядок дифференцируемости α и степень суммируемости p которого представляют собой произвольные два числа, удовлетворяющие трем неравенствам:

$$\alpha \geqslant (N-1)/2, \quad \alpha p > N, \quad p \geqslant 1. \tag{1.4.1}$$

В п. 2 мы установим свойство локализации ряда Фурье по рассматриваемой произвольной ФСФ для произвольной функции $f(x)$, обладающей в подобласти Ω компактным носителем и принадлежащей в ней классу Соболева — Лиувилля L_2^α при любом $\alpha \geqslant (N-1)/2$.

В п. 3 для произвольной ФСФ при произвольных фиксированных $\alpha < (N-1)/2$ и $p \geqslant 1$ мы установим существование функции $f(x)$, обладающей в подобласти Ω компактным носителем и принадлежащей в ней классу Соболева — Лиувилля L_p^α, для ряда Фурье которой не справедлив принцип локализации.

Сопоставление результатов пп. 1—3 и их анализ позволят нам в п. 4 прийти к заключению о том, что для каждой индивидуальной ФСФ оператора Лапласа условия (1.4.1) являются окончательными в классах Соболева — Лиувилля L_p^α условиями равномерной на любом компакте подобласти Ω сходимости ряда Фурье, обладающей в подобласти Ω компактным носителем функции $f(x)$, а условие $\alpha \geqslant (N-1)/2$ является окончательным в классах Соболева — Лиувилля L_2^α условием локализации ряда Фурье обладающей в подобласти Ω компактным носителем функции $f(x)$.

Наконец, в п. 5 настоящего параграфа получены тривиально вытекающие из развитой нами теории результаты относительно

*) См. С. М. Никольский [1, глава 9].

расходимости рядов Фурье по произвольной ФСФ оператора Лапласа в метрике L_p и на множестве положительной меры.

1. Условия равномерной сходимости рядов Фурье по произвольной ФСФ.

Теорема 1.9. *Пусть* $N \geqslant 2$, $\{u_n(x)\}$ — *произвольная ФСФ оператора Лапласа в какой угодно* N*-мерной подобласти* Ω *произвольной* N*-мерной области* G, $f(x)$ — *произвольная функция, имеющая в подобласти* Ω *компактный носитель, продолженная нулем за пределы подобласти* Ω *и принадлежащая классу Соболева — Лиувилля* $L_p^\alpha(\Omega)$ *с произвольными фиксированными* α *и* p, *удовлетворяющими трем неравенствам* (1.4.1). *Тогда ряд Фурье функции* $f(x)$ *по системе* $\{u_n(x)\}$ *сходится к этой функции равномерно на произвольном компакте подобласти* Ω.

Доказательство. Сначала убедимся в равномерной на любом компакте подобласти Ω сходимости ряда Фурье всякой функции $f(x)$, имеющей в Ω компактный носитель и принадлежащей к ней классу Соболева — Лиувилля L_2^{2m}, где m — целое число, превосходящее $N/4$.

Последовательным применением второй формулы Грина к фундаментальной функции $u_n(x)$ и к функциям $f(x)$, $\Delta f(x)$, ..., $\Delta^{m-1}f(x)$ убедимся в том, что коэффициенты Фурье функций $\Delta^m f(x)$ и $f(x)$ связаны соотношением

$$(\Delta^m f)_n = (-1)^m \lambda_n^m f_n. \tag{1.4.2}$$

Опираясь на соотношение (1.4.2) и записывая неравенства Бесселя для функций $f(x)$ и $\Delta^m f(x)$ в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \leqslant \|f\|^2_{L_2(\Omega)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \lambda_n^{2m} \leqslant \|\Delta^m f\|^2_{L_2(\Omega)},$$

получаем, что числовые ряды, стоящие в левых частях этих неравенств, сходятся. Поэтому сходится и числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \left(1 + \lambda_n^{2m}\right). \tag{1.4.3}$$

Так как для любого $\lambda_n \geqslant 0$ справедливо неравенство *)

$$(1 + \lambda_n)^{2m} \leqslant 2^{2m} \left(1 + \lambda_n^{2m}\right),$$

то из сходимости ряда (1.4.3) вытекает сходимость числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 (1 + \lambda_n)^{2m}. \tag{1.4.4}$$

---

*) Ибо $(1 + \lambda_n)^{2m} \leqslant 2^{2m} \leqslant 2^{2m}\left(1 + \lambda_n^{2m}\right)$ в случае, когда $\lambda_n \leqslant 1$, и $(1 + \lambda_n)^{2m} \leqslant (2\lambda_n)^{2m} \leqslant 2^{2m}(1 + \lambda_n)^{2m}$ в случае, когда $\lambda_n > 1$.

Так как $m > N/4$, то в силу замечания, сделанного в конце п. 2 § 2, интеграл *)

$$\int\limits_G T_m^2(x, y)\,dy \tag{1.4.5}$$

является непрерывной функцией точки x на произвольном компакте K подобласти Ω, а потому в силу равенства Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(x)(1+\lambda_n)^{-2m} = \int\limits_G T_m^2(x, y)\,dy, \tag{1.4.6}$$

непрерывности на произвольном компакте K подобласти Ω каждой фундаментальной функции $u_n(x)$ и функции (1.4.5) и в силу теоремы Дини ряд, стоящий в левой части (1.4.6), сходится равномерно по x на любом компакте K подобласти Ω.

Из сходимости числового ряда (1.4.4), из равномерной на любом компакте подобласти Ω сходимости ряда, стоящего в левой части (1.4.6), и из неравенства Коши — Буняковского заключаем, что и ряд Фурье рассматриваемой функции

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n(x) \tag{1.4.7}$$

сходится равномерно на любом компакте подобласти Ω.

Итак, для любой функции $f(x)$, имеющей в подобласти Ω компактный носитель и принадлежащей к ней классу Соболева — Лиувилля L_2^{2m} при целом m, удовлетворяющем условию $m > N/4$, ряд Фурье (1.4.7) сходится равномерно на любом компакте подобласти Ω.

Тем более это верно для функции с компактным в Ω носителем из класса $C^{(2m)}(\Omega)$ и для функции из класса $C_0^{\infty}(\Omega)$.

Нам остается заметить, что если ряд Фурье (1.4.7) сходится на любом компакте области Ω равномерно, то он сходится именно к функции $f(x)$, ибо он сходится к ней в метрике $L_2(G)$.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1.9.

В силу широко известной теоремы вложения классов Соболева — Лиувилля **) класс $L_p^{\alpha}(\Omega)$ с любыми α и p, удовлетворяющими трем условиям (1.4.1), содержится в классе $L_p^{(N-1)/2}(\Omega)$ при p, удовлетворяющем неравенству $p > 2N/(N-1)$.

Поэтому достаточно провести доказательство равномерной на любом компакте области Ω сходимости ряда Фурье функции $f(x)$, обладающей в Ω компактным носителем и принадлежащей классу

*) См. интеграл (1.2.44) из п. 2 § 2.
**) См. главу 9 монографии С. М. Никольского [1].

$L_p^{(N-1)/2}(\Omega)$ при $p > 2N/(N-1)$. Эту функцию $f(x)$ продолжим нулем в $E^N \backslash \Omega$.

По определению класса Соболева — Лиувилля *) для такой функции $f(x)$ найдется функция $h(x)$ из класса $L_p(E^N)$ такая, что справедливо представление

$$f(x) = \int\limits_{E^N} \overset{0}{T}_{(N-1)/4}(x, y)\, h(y)\, dy, \tag{1.4.8}$$

причем по определению

$$\|f\|_{L_p^{(N-1)/2}(E^N)} = \|f\|_{L_p^{(N-1)/2}(\Omega)} = \|h\|_{L_p(E^N)}. \tag{1.4.9}$$

Напомним, что в представлении (1.4.8) символ $\overset{0}{T}_{(N-1)/4}(x, y)$ обозначает так называемое *ядро Бесселя — Макдональда*, выражающееся через цилиндрическую функцию Макдональда $K_\nu(r)$ порядка ν по формуле

$$\overset{0}{T}_{(N-1)/4}(x, y) = 2^{1-(N-1)/4}\left[(2\pi)^{N/2}\Gamma\left(\frac{N-1}{4}\right)\right]^{-1} |x-y|^{-1/2} K_{1/2}(|x-y|).$$

Так как по условию функция $f(x)$ имеет в области Ω компактный носитель, то существует компакт K_1 области Ω, вне которого функция $f(x)$ равна нулю.

Убедимся в том, что функция $h(x)$ из представления (1.4.8) принадлежит классу C^∞ в $E^N \backslash K_1$. Обозначим, как и выше, через m целое число, удовлетворяющее условию $m > N/4$. Тогда из (1.4.8), учитывая свойство композиции ядер Бесселя — Макдональда, получим равенство

$$\int\limits_{E^N} \overset{0}{T}_{2m-\frac{N-1}{4}}(x, y)\, f(y)\, dy = \int\limits_{E^N} \overset{0}{T}_{2m}(x, y)\, h(y)\, dy. \tag{1.4.10}$$

Если в любой точке x, принадлежащей $E^N \backslash K_1$, применить к обеим частям равенства (1.4.10) оператор $(-\Delta + 1)^m$ и учесть, что в силу того, что $f(y) \equiv 0$ вне K_1, левая часть (1.4.10) принадлежит классу $C^\infty(E^N \backslash K_1)$, мы и получим, что $h(x) \in C^\infty(E^N \backslash K_1)$.

Обозначим теперь символами K_2, K_3, K_4 и K_5 еще четыре компакта области Ω такие, что для любого $l = 1, 2, 3, 4$ компакт K_l лежит строго внутри компакта K_{l+1}, и введем в рассмотрение две «срезающие» функции $\eta(x)$ и $\eta_1(x)$, обе принадлежащие классу $C_0^\infty(E^N)$ и такие, что $\eta(x) \equiv 1$ в компакте K_2, $\eta(x) \equiv 0$ вне компакта K_3, $\eta_1(x) \equiv 1$ в компакте K_4, $\eta_1(x) \equiv 0$ вне компакта K_5.

---

*) См. предыдущую сноску, а также в кратком виде п. 3 § 1 главы 2 настоящей монографии.

Тогда, учитывая, что $f(x)\equiv 0$ вне K_1, мы можем следующим образом переписать представление (1.4.8):

$$f(x)=\int\limits_{E^N}\overset{0}{T}_{\frac{N-1}{4}}(x,y)\,h(y)\,dy=\eta_1(x)\int\limits_{E^N}\overset{0}{T}_{\frac{N-1}{4}}(x,y)\,h(y)\,dy=$$
$$=\eta_1(x)\int\limits_{E^N}\overset{0}{T}_{\frac{N-1}{4}}(x,y)h(y)\eta(y)\,dy+\eta_1(x)\int\limits_{E^N}\overset{0}{T}_{\frac{N-1}{4}}(x,y)h(y)[1-\eta(y)]dy. \tag{1.4.11}$$

Так как по доказанному выше $h(y)\in C^\infty(E^N\setminus K_1)$, а $1-\eta(y)\equiv\equiv 0$ в компакте K_2, то последнее слагаемое в правой части (1.4.11) принадлежит классу $C_0^\infty(\Omega)$, а потому разложимо в равномерно на любом компакте области Ω сходящийся ряд Фурье по системе $\{u_n(x)\}$.

Таким образом, для доказательства теоремы 1.9 остается убедиться в том, что и первое слагаемое в правой части (1.4.11) разложимо в равномерно на любом компакте области Ω сходящийся ряд Фурье по системе $\{u_n(x)\}$.

Обозначим через $T_{\frac{N-1}{4}}(x,y)$ ядро дробного порядка, отвечающее рассматриваемой ФСФ $\{u_n(x)\}$, и фиксируем положительное число R меньшим расстояния компакта K_3 от границы компакта K_4 и расстояния компакта K_5 от границы области Ω. Тогда в силу результатов п. 1 § 2 для всех x из компакта K_5, всех y из области Ω и для любого четного номера $2m$ ядро $T_{\frac{N-1}{4}}(x,y)$ представляется в виде

$$T_{\frac{N-1}{4}}(x,y)=v_{\frac{N-1}{4}}(|x-y|)-w_{\frac{N-1}{4}}(|x-y|)-\Psi_{\frac{N-1}{4}}(x,y), \tag{1.4.12}$$

где

$$v_{\frac{N-1}{4}}(r)=\begin{cases}\overset{0}{T}_{\frac{N-1}{4}}(r) & \text{при}\quad r\leqslant R,\\ 0 & \text{при}\quad r>R;\end{cases} \tag{1.4.13}$$

$$w_{\frac{N-1}{4}}(r)=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{2m}a_kr^{2k} & \text{при}\quad r\leqslant R,\\ 0 & \text{при}\quad r>R;\end{cases} \tag{1.4.14}$$

$$\Psi_{\frac{N-1}{4}}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\overset{2m}{\gamma}_n u_n(x)\,u_n(y); \tag{1.4.15}$$

коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{2m}$ выбраны так, что функция $v_{\frac{N-1}{4}}(r)-w_{\frac{N-1}{4}}(r)$ непрерывна вместе с производными до порядка $2m$ для всех $r\geqslant 0$, а для чисел $\overset{2m}{\gamma}_n$ справедливы оценки

$$\left|\overset{2m}{\gamma}_n\right|\leqslant C(R,m,N)(1+\lambda_n)^{-N/2-m}. \tag{1.4.16}$$

Первое слагаемое в правой части (1.4.11) можно представить в виде суммы двух слагаемых *):

$$\eta_1(x)\int\limits_{E^N}\overset{0}{T}_{\frac{N-1}{4}}(x, y)\,h(y)\,\eta(y)\,dy =$$

$$=\eta_1(x)\int\limits_{K_3}\left\{\overset{0}{T}_{\frac{N-1}{4}}(x, y)-\left[v_{\frac{N-1}{4}}(|x-y|)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\,w_{\frac{N-1}{4}}(|x-y|)\right]\right\}h(y)\,\eta(y)\,dy\,+$$

$$+\,\eta_1(x)\int\limits_{K_3}\left[v_{\frac{N-1}{4}}(|x-y|)-w_{\frac{N-1}{4}}(|x-y|)\right]h(y)\,\eta(y)\,dy. \quad (1.4.17)$$

Из вида функций (1.4.13) и (1.4.14) вытекает, что ядро, стоящее в правой части (1.4.17) в фигурных скобках, при каждом y из компакта K_3 принадлежит по x классу $C^{2m}(\Omega)$, откуда следует, что первое слагаемое в правой части (1.4.17), принадлежащее классу $C^{(2m)}(\Omega)$ и имеющее в Ω компактный носитель, разложимо в равномерно на любом компакте области Ω сходящийся ряд Фурье по системе $\{u_m(x)\}$.

Что же касается второго слагаемого в правой части (1.4.17), то в силу того, что $\eta(y)$ отлично от нуля только на компакте K_3, $|x-y|\leqslant R$, R меньше расстояния компакта K_3 от границы компакта K_4, а функция $\eta_1(x)$ всюду в компакте K_4 тождественно равна единице, это второе слагаемое может быть переписано в виде

$$\int\limits_{K_3}\left[v_{\frac{N-1}{4}}(|x-y|)-w_{\frac{N-1}{4}}(|x-y|)\right]h(y)\,\eta(y)\,dy. \quad (1.4.18)$$

В силу представления (1.4.12) функция (1.4.18) в свою очередь может быть записана в виде суммы двух функций:

$$f_1(x)=\int\limits_{K_3}T_{\frac{N-1}{4}}(x, y)\,h(y)\,\eta(y)\,dy, \quad (1.4.19)$$

$$f_2(x)=\int\limits_{K_3}\Psi_{\frac{N-1}{4}}(x, y)\,h(y)\,\eta(y)\,dy. \quad (1.4.20)$$

Из соотношения (1.4.15) вытекает, что разложение в ряд Фурье фукции (1.4.20) имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^{2m}u_n(x)\int\limits_{K_3}h(y)\,\eta(y)\,u_n(y)\,dy. \quad (1.4.21)$$

Для установления равномерной на любом компакте области Ω сходимости ряда Фурье (1.4.21) достаточно применить к нему

*) Мы учитываем при этом также, что $\eta(y)\equiv 0$ вне компакта K_3.

неравенство Коши — Буняковского и учесть, что числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{K_3} h(y)\,\eta(y)\,u_n(y)\,dy\right]^2$$

сходится в силу того, что функция $h(y)\eta(y)$ во всяком случае принадлежит классу *) $L_2(G)$, а функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{2m}{\gamma_n}^2 u_n^2(x)$$

сходится равномерно на любом компакте области Ω в силу оценки (1.4.16) и лемм 1.2 и 1.3 из § 2.

Наконец, заметим, что для установления равномерной на любом компакте области Ω сходимости разложения по системе $\{u_n(x)\}$ функции (1.4.19) достаточно доказать, что равномерно по x на любом компакте области Ω для множества спектральных разложений $\{E_\lambda f_1(x)\}$ справедлива оценка

$$|E_\lambda f_1(x)| \leqslant C\,\|f\|_{L_p^{\frac{N-1}{2}}(\Omega)}. \tag{1.4.22}$$

Действительно, если оценка (1.4.22) будет доказана, то, фиксируя произвольное $\varepsilon > 0$ и по нему функцию $F(x)$ из класса $C_0^\infty(\Omega)$ такую, что

$$\|f(x) - F(x)\|_{L_p^{\frac{N-1}{2}}(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2C},$$

где C — постоянная из оценки (1.4.22), повторяя все проведенные выше для функции $f(x)$ рассуждения применительно к функции $f(x)-F(x)$ и учитывая равномерную на любом компакте области Ω сходимость ряда Фурье функции $F(x)$, получаем, что множество $\{E_\lambda f_1(x)\}$ сходится при $\lambda \to \infty$ равномерно по x на любом компакте области Ω.

Теперь остается заметить, что справедливость равномерной на любом компакте области Ω оценки (1.4.22) немедленно вытекает из неравенства Гёльдера, леммы 1.6, доказанной в п. 3 § 3, и из соотношения (1.4.9).

Теорема 1.9 полностью доказана.

2. Условия локализации рядов Фурье по произвольной ФСФ.

Теорема 1.10. *Пусть $N \geqslant 2$, $\{u_n(x)\}$ — произвольная ФСФ оператора Лапласа в какой угодно N-мерной подобласти Ω произвольной N-мерной области G, $f(x)$ — произвольная функция, имеющая в подобласти Ω компактный носитель, продолженная нулем за пределы Ω, обращающаяся в нуль в некоторой содержащейся в Ω области D и принадлежащая классу $L_2^\alpha(\Omega)$ при*

---

*) Ибо $h(y) \in L_p(G)$ при $p > \dfrac{2N}{N-1} > 2$.

произвольном $\alpha \geqslant (N-1)/2$. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к нулю равномерно на произвольном компакте области D.

Доказательство. Пусть K_1 — компакт, вне которого $f(x) \equiv 0$. Этот компакт не содержит точек области D. Поэтому, фиксируя произвольный компакт K области D и придерживаясь схемы доказательства теоремы 1.9, мы теперь можем фиксировать такие четыре компакта K_2, K_3, K_4 и K_5 области Ω, что все эти компакты не содержат точек компакта K и для любого $l = 1, 2, 3, 4$ компакт K_l лежит строго внутри компакта K_{l+1}.

Повторяя для случая $p = 2$ рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 1.9, мы установим, что рассматриваемая нами функция $f(x)$ представима в виде суммы трех функций: функции из класса $C_0^\infty(\Omega)$, функции $f_2(x)$, ряд Фурье (1.4.21) которой сходится равномерно на любом компакте области Ω, и функции $f_1(x)$, определяемой равенством (1.4.19).

Для завершения доказательства теоремы 1.10 достаточно доказать, что для спектрального разложения $E_\lambda f_1(x)$ функции $f_1(x)$ равномерно относительно x на фиксированном нами произвольном компакте K области D справедлива оценка

$$|E_\lambda f_1(x)| \leqslant C \|f\|_{L_2^{(N-1)/2}(\Omega)},$$

но справедливость этой оценки немедленно вытекает из неравенства Коши — Буняковского, оценки (1.3.76), установленной в лемме 1.7 в п. 3 § 3, и из взятого при $p = 2$ соотношения (1.4.9).

3. Условия отсутствия локализации рядов Фурье по произвольной ФСФ.

Теорема 1.11. *Пусть $N \geqslant 2$, $\{u_n(x)\}$ — произвольная ФСФ оператора Лапласа в какой угодно N-мерной подобласти Ω произвольной N-мерной области G, α — произвольное число, удовлетворяющее условию $0 < \alpha < (N-1)/2$, x_0 — произвольная фиксированная точка подобласти Ω. Тогда существует функция $f(x)$, удовлетворяющая следующим требованиям: 1) $f(x)$ имеет в области Ω компактный носитель и принадлежит классу Гёльдера $C^{(\alpha)}(\Omega)$; 2) $f(x)$ обращается в нуль в некоторой окрестности точки x_0, 3) $\varlimsup_{\lambda\to\infty} E_\lambda f(x_0) = \infty$.*

Доказательство. Пусть множество E имеет тот же смысл, что и в леммах 1.5 и 1.8, доказанных в п. 3 § 3, и число $R_0 > 0$ фиксировано так же, как в указанных леммах. Тогда из установленного в лемме 1.8 соотношения (1.3.77) и из известной теоремы резонансного типа*) вытекает существование такой ограниченной на не содержащем точки x_0 множестве E функции $h(y)$, для которой

$$\varlimsup_{\lambda\to\infty} \left| \int_E E_\lambda T_\alpha(x_0, y)\, h(y)\, dy \right| = \infty. \tag{1.4.23}$$

---

*) См., например, книгу С. Качмажа и Г. Штейнгауза [1, с. 31, утверждение 3].

Продолжим функцию $h(y)$ на всю область G, положив ее равной нулю в $G \backslash E$. Тогда в силу (1.4.23)

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}} \left| \int_G E_\lambda T_\alpha(x_0, y)\, h(y)\, dy \right| = \infty. \qquad (1.4.24)$$

Соотношение (1.4.24) устанавливает неограниченность в точке x_0 спектрального разложения функции

$$F(x) = \int_G T_\alpha(x, y)\, h(y)\, dy. \qquad (1.4.25)$$

Фиксируя произвольный, достаточно большой номер m и произвольное, достаточно малое положительное число R, мы в силу результатов п. 1 § 2 можем представить ядро $T_\alpha(x, y)$ для любой внутренней точки x области Ω в виде

$$T_\alpha(x, y) = [v_\alpha(|x-y|) - w_\alpha(|x-y|)] - \Psi_\alpha(x, y), \quad (1.4.26)$$

где

$$v_\alpha(r) = \begin{cases} \overset{0}{T}_\alpha(r) & \text{при} \quad r \leqslant R, \\ 0 & \text{при} \quad r > R, \end{cases}$$

$$w_\alpha(r) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{m} a_k r^{2k} & \text{при} \quad r \leqslant R; \\ 0 & \text{при} \quad r > R; \end{cases} \qquad (1.4.27)$$

$$\Psi_\alpha(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \overset{m}{\gamma}_n u_n(x)\, u_n(y),$$

коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_m$ выбраны так, что функция $v_\alpha(r) - w_\alpha(r)$ непрерывна вместе с производными до порядка m для всех $r \geqslant 0$, а для чисел $\overset{m}{\gamma}_n$ равномерно на любом компакте области Ω справедливы оценки

$$\left|\overset{m}{\gamma}_n\right| \leqslant C(R, m, N, \alpha)(1 + \lambda_n)^{-N/4 - m/2}. \qquad (1.4.28)$$

В силу представления (1.4.26) функцию (1.4.25) можно представить в виде суммы двух функций

$$F(x) = f(x) + g(x),$$

где

$$f(x) = \int_G [v_\alpha(|x-y|) - w_\alpha(|x-y|)]\, h(y)\, dy, \qquad (1.4.29)$$

$$g(x) = \int_G \Psi_\alpha(x, y)\, h(y)\, dy. \qquad (1.4.30)$$

В силу представления (1.4.27) и оценки (1.4.28) можно утверждать, что если номер m фиксирован достаточно большим, то спектральное разложение функции (1.4.30) сходится в любой внутренней точке области Ω, а потому сходится в точке x_0. Но тогда из представления (1.4.26) и из соотношения (1.4.24) вытекает, что спектральное разложение функции (1.4.29) расходится в точке x_0.

Остается заметить, что из ограниченности функции $h(y)$ и из широко известных свойств интегралов типа потенциала вытекает, что функция (1.4.29) принадлежит классу Гёльдера $C^{(\alpha-\delta)}$ при любом $\delta > 0$, а выбор достаточно малого $R > 0$ в представлении (1.4.26) гарантирует обращение функции (1.4.29) в нуль в окрестности точки x_0 и всюду вне некоторого компакта K, содержащего множество E и содержащегося в области Ω.

Теорема 1.11 доказана.

Замечание к теореме 1.11. Теорема 1.11 тем более останется справедивой, если в ее условии требование 1) на функцию $f(x)$ заменить следующим требованием: *$f(x)$ имеет в области Ω компактный носитель и принадлежит классу Соболева — Лиувилля $L_p^\alpha(\Omega)$ с произвольными фиксированными α и p, удовлетворяющими условиям $0 < \alpha < (N-1)/2$, $p \geqslant 1$.*

4. О точности установленных условий равномерной сходимости и локализации. Убедимся в том, что для произвольной ФСФ оператора Лапласа в какой угодно N-мерной подобласти Ω произвольной N-мерной области G три неравенства (1.4.1) являются окончательными в классах Соболева — Лиувилля $L_p^\alpha(\Omega)$ условиями равномерной (на любом компакте области Ω) сходимости ряда Фурье произвольной, обладающей в Ω компактным носителем функции $f(x)$.

Действительно, из сопоставления теорем 1.9 и 1.11 вытекает, что первое неравенство из (1.4.1), т. е. неравенство $\alpha \geqslant (N-1)/2$, является окончательным условием на порядок дифференцируемости α, ибо при любом фиксированном положительном $\alpha < (N-1)/2$ и при любом фиксированном $p \geqslant 1$ в силу замечания к теореме 1.11 для каждой индивидуальной ФСФ существует функция $f(x)$, принадлежащая классу Соболева — Лиувилля $L_p^\alpha(\Omega)$, обладающая в Ω компактным носителем и такая, что для ее ряда Фурье не справедлив даже принцип локализации.

Второе неравенство из (1.4.1), т. е. неравенство $\alpha p > N$, также является окончательным, ибо при $\alpha p = N$ существует функция из класса Соболева — Лиувилля $L_p^\alpha(\Omega)$, обладающая в области Ω компактным носителем и не являющаяся непрерывной на некотором компакте этой области (ряд Фурье такой функции не может сходиться равномерно на указанном компакте).

Наконец, третье неравенство из (1.4.1), т. е. $p \geqslant 1$ входит в определение класса Соболева — Лиувилля.

Совершенно аналогично из сопоставления теорем 1.10 и 1.11 вытекает, что неравенство $\alpha \geqslant (N-1)/2$ является окончательным в классах Соболева — Лиувилля $L_2^\alpha(\Omega)$ условием справедливости принципа локализации для ряда Фурье обладающей в Ω компактным носителем функции $f(x)$ по каждой индивидуальной ФСФ.

5. Условия расходимости рядов Фурье по произвольной ФСФ в метрике L_p и на множестве положительной меры.

Теорема 1.12. *Пусть $N \geqslant 2$, $\{u_n(x)\}$ — произвольная ФСФ оператора Лапласа в какой угодно N-мерной подобласти Ω произвольной N-мерной области G. Тогда для любого p из полуинтервала $1 \leqslant p < 2N/(N+1)$ существует функция из класса $L_p(\Omega)$, равная нулю вне области Ω, ряд Фурье которой 1) расходится в метрике L_1 (и тем более в метрике L_p), 2) расходится на множестве точек области Ω, имеющем положительную меру.*

Такой функцией является функция вида

$$f(y) = \begin{cases} T_\alpha(x_0, y) & \text{при} \quad \alpha < \dfrac{N-1}{4}, \ y \in E, \\ 0 & \text{при} \quad y \in G \setminus E, \end{cases} \tag{1.4.31}$$

где x_0 — произвольная фиксированная внутренняя точка области Ω, а множество E имеет тот же смысл, что и в леммах 1.5 и 1.8.

Доказательство. Факт расходимости ряда Фурье функции (1.4.31) в метрике L_1 сразу вытекает из доказанной в п. 3 § 3 леммы 1.8 (см. соотношение (1.3.77)). Чтобы доказать расходимость указанного ряда Фурье на множестве положительной меры, достаточно учесть, что в соотношении (1.3.77) множество E является произвольным измеримым множеством, удовлетворяющим лишь условию (1.3.50), и применить к ряду Фурье известную теорему Д. Ф. Егорова.

Тем самым теорема 1.12 доказана.

§ 5. О возможных обобщениях построенной теории

Можно рассматривать произвольную полную в произвольной N-мерной области Ω систему $\{u_n(x)\}$, относительно которой не известно, является ли она ортонормированной в самой области Ω или в какой-либо охватывающей ее области G, а известно лишь, что каждая функция $u_n(x)$ принадлежит в открытой области Ω классу $C^{(2)}$ и для некоторого неотрицательного числа λ_n удовлетворяет в Ω уравнению $\Delta u_n + \lambda_n u_n = 0$.

А. М. Олевским *) установлены необходимые и достаточные условия возможности продолжения функций $u_n(x)$ на область G, содержащую в качестве внутренней подобласти область Ω, при котором продолженная система функций $\{u_n(x)\}$ является в области G полной и ортонормированной (т. е. является ФСФ оператора Лапласа в подобласти Ω области G).

Эти необходимые и достаточные условия выражаются двумя требованиями на матрицу A с элементами

$$a_{mn} = \int_\Omega u_m(x)\, u_n(x)\, dx.$$

*) См. А. М. Олевский [1, 2].

Первое из этих требований — соотношение $A^2 = A$, а второе — ограниченность матрицы A в смысле Гильберта, т. е. справедливость для любого номера s и любых вещественных чисел ξ_1, ξ_2, ..., ξ_s неравенства

$$\sum_{m=1}^{s} \sum_{n=1}^{s} a_{mn}\xi_m\xi_n \leqslant \sum_{m=1}^{s} \xi_m^2.$$

ПРИМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ 1

Понятие фундаментальной системы функций оператора Лапласа как во всей области G, так и в произвольной подобласти Ω области G было введено в 1968 г. В. А. Ильиным [6].

Существование ФСФ оператора Лапласа с наперед заданным счетным подмножеством собственных значений впервые было установлено в работе В. А. Ильина и А. Ф. Филиппова [1]. Эта тематика получила развитие в работах М. М. Гехтмана [1] и М. Л. Горбачука [1].

Ядра дробного порядка впервые были изучены в работе В. А. Ильина [1].

Отправным пунктом для изучения проблем сходимости произвольных спектральных разложений послужила теория кратных тригонометрических рядов и интегралов Фурье со сферическими частичными суммами. В развитии этой теории важную роль сыграли работы С. Бохнера, Э. Ч. Титчмарша, К. Чандрасекарана, С. Минакшисундарама, Б. М. Левитана, Э. Стейна и других авторов.

С. Бохнер [2, с. 276] доказал, что для сходимости разложения в N-кратный интеграл Фурье финитной функции $f(x)$ достаточно потребовать, чтобы средние $f_r(x)$ этой функции по сфере радиуса r с центром в точке x имели при $r \geqslant 0$ суммируемую производную порядка $\left[\frac{N+1}{2}\right]$ *).

Б. М. Левитан [2] доказал, что если функция $f(x)$ и все ее производные до порядка $\left[\frac{N}{2}\right]$ непрерывны в замкнутом N-мерном кубе Q, причем как сама функция, так и все ее производные до порядка $\left[\frac{N}{2}\right] - 1$ допускают периодическое продолжение с сохранением непрерывности на все N-мерное пространство, то сферические частичные суммы N-кратного тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ сходятся к этой функции равномерно в кубе Q.

Б. М. Левитан замечает, что если вместо непрерывности производных порядка $\left[\frac{N}{2}\right]$ потребовать, чтобы все производные порядка $\left[\frac{N}{2}\right] - 1$ были абсолютно непрерывны по каждой из переменных для почти всех значений остальных переменных, а производные порядка $\left[\frac{N}{2}\right]$ были интегрируемы с квадратом по кубу Q и ограничены в окрестности рассматриваемой точки x_0, то можно утверждать сходимость сферических частичных сумм N-кратного тригонометрического ряда Фурье в этой точке x_0.

В работах Э. Ч. Титчмарша [1] и К. Чандрасекарана и С. Минакшисундарама [1] изучались ряды Фурье по собственным функциям первой краевой задачи для оператора Лапласа в N-мерной области G. В этих работах доказано, что если для функции $f(x)$ имеет место сходимость ряда

*) Квадратные скобки означают, что берется целая часть заключенного в них числа.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^2\lambda_n^{N/2}$, где f_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$, а λ_n — собственные значения, то для сходимости спектрального разложения $E_\lambda f(x)$ к $f(x)$ в данной фиксированной точке x необходимо и достаточно, чтобы среднее $\widehat{f}_r(x)$ функции $f(x)$ по шару радиуса r с центром в точке x стремилось к $f(x)$ при $r\to 0$.

Точные в классах С. Л. Соболева W_p^n целого порядка n условия сходимости разложений по собственным функциям оператора Лапласа были установлены В. А. Ильиным еще в 1958 г. [2].

В работе В. А. Ильина [6] были установлены точные в классах Соболева — Лиувилля L_p^α условия сходимости спектрального разложения по произвольной ФСФ оператора Лапласа. В этой же работе В. А. Ильина [6] для каждой индивидуальной ФСФ оператора Лапласа в произвольной подобласти Ω произвольной N-мерной области G была впервые доказана теорема негативного типа, устанавливающая точную границу требований на порядок дифференцируемости α $\left(\alpha\geqslant\frac{N-1}{2}\right)$, за пределами которой для ряда Фурье функции с компактным носителем уже не справедлив принцип локализации.

В главе 1 мы не останавливались на результатах, касающихся абсолютной сходимости разложений по собственным функциям. Этим вопросам посвящены работы О. А. Ладыженской [1], М. А. Красносельского и Е. И. Пустыльника [1], В. А. Ильина [3, 4] и И. Кенджаева [1, 2].

В наше изложение не вошли также результаты В. А. Ильина [5] о сходимости спектральных разложений для функций, обладающих в одной точке особенностью.

Отметим в заключение, что полученные в § 3 и 4 гл. 1 результаты были перенесены в работе В. А. Ильина и И. А. Шишмарева [1] на случай рядов Фурье по фундаментальным системам функций полигармонического оператора.

В работе М. Л. Гольдмана [1] теорема негативного типа перенесена на случай классов функций с более тонкой структурой модуля непрерывности, чем у классов Гёльдера.

ГЛАВА 2

СПЕКТРАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ, ОТВЕЧАЮЩИЕ ПРОИЗВОЛЬНОМУ САМОСОПРЯЖЕННОМУ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОМУ РАСШИРЕНИЮ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

В этой главе мы установим точные условия сходимости спектральных разложений, отвечающих произвольному самосопряженному неотрицательному расширению оператора Лапласа в какой угодно (не обязательно ограниченной) области G в пространстве E^N.

Точное определение самосопряженного неотрицательного расширения общего формально самосопряженного эллиптического оператора второго порядка (и, в частности, оператора Лапласа) в области будет дано в § 1. Изученные в гл. 1 разложения по ФСФ оператора Лапласа для случая, когда ФСФ берется во всей области G, будет соответствовать самосопряженному неотрицательному расширению оператора Лапласа с чисто точечным спектром.

Мы показываем, что привлечение известной теоремы Гординга — Браудера — Маутнера об упорядоченном спектральном представлении пространства $L_2(G)$ относительно произвольного самосопряженного расширения эллиптического оператора позволяет перенести разработанный нами в гл. 1 метод на случай произвольного самосопряженного неотрицательного расширения оператора Лапласа (с каким угодно точечным, непрерывным или смешанным спектром).

Второй целью настоящей главы является установление не только точных условий сходимости самих спектральных разложений, но и точных условий сходимости так называемых средних Рисса этих разложений, имея в виду что переход к средним Рисса позволяет снизить требования гладкости на разлагаемую функцию, обеспечивающие равномерную сходимость.

Наконец, еще одной целью данной главы является изучение точных условий равномерной сходимости спектральных разложений и их средних Рисса в различных классах дифференцируемых (в обобщенном смысле) функций N переменных.

В § 2—5 настоящей главы мы даем исчерпывающий ответ на вопрос об условиях равномерной сходимости изучаемых спектральных разложений и их средних Рисса в каждом из классов функций Зигмунда — Гёльдера, Соболева — Лиувилля, Никольского и Бесова.

Установленные нами в каждом из указанных четырех классов условия равномерной сходимости спектральных разложений и их средних Рисса оказались новыми (и также окончательными) даже для разложений в N-кратный интеграл Фурье и N-кратный тригонометрический ряд Фурье (со сферическими суммами).

Для убыстрения получения основных результатов мы несколько модифицируем схему метода, развитого в гл. 1, и приступаем к изучению спектральных разложений без предварительного установления асимптотической оценки спектральной функции.

Для демонстрации возможностей предлагаемого нами метода мы для произвольного самосопряженного неотрицательного оператора Лапласа оцениваем остаточный член спектральной функции как в метрике L_2 (в § 6), так и в метрике L_∞ (в § 7).

§ 1. Самосопряженные неотрицательные расширения эллиптических операторов. Упорядоченные спектральные представления пространства L_2. Классы дифференцируемых функций N переменных

В этом носящем вспомогательный характер параграфе собраны необходимые сведения из теории самосопряженных расширений эллиптических операторов и из теории классов дифференцируемых (в обобщенном смысле) функций N переменных. Эти сведения будут использоваться в данной и в следующей главах.

1. Самосопряженные неотрицательные расширения эллиптических операторов. Пусть G — произвольная N-мерная область, быть может, совпадающая со всем пространством E^N. Предположим, что в области G задан общий линейный формально самосопряженный эллиптический оператор второго порядка

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + c(x)\,u, \tag{2.1.1}$$

где для всех $x \in G$ и для всех вещественных чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 \text{ при } \alpha > 0,$$

причем коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $c(x)$ этого оператора для простоты можно считать бесконечно дифференцируемыми в G.

Обозначим символом $C_0^\infty(G)$ пространство функций, бесконечно дифференцируемых в области G и имеющих в G компактный носитель. Функции, имеющие в области G компактный носитель, будем кратко называть финитными в G. Таким образом, *финитной в G* будем называть функцию, определенную, вообще говоря, во всем пространстве E^N, но отличную от нуля лишь на некотором компакте K, содержащемся в G и отстоящем от границы ∂G области G на положительное расстояние.

Обозначим через A оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(G)$ с областью определения $D(A)$, совпадающей с пространством $C_0^\infty(G)$, по правилу $Au=Lu$, где $u(x)\in C_0^\infty(G)$, а Lu — эллиптический оператор (2.1.1).

С помощью формулы Грина тривиально проверяется, что если оператор Lu имеет вид (2.1.1), то определенный при помощи него оператор A является *симметрическим*, т. е. для любых $u(x)$ и $v(x)$ из класса $C_0^\infty(G)$ выполняется равенство

$$(Au, v)=(u, Av).$$

Оператор A называется *полуограниченным*, если существует вещественное число μ (называемое *нижней границей* этого оператора) такое, что $(Au, u)\geqslant \mu(u, u)$ для всех $u\in C_0^\infty(G)$.

В частности, оператор A называется неотрицательным, если $(Au, u)\geqslant 0$ для всех $u\in C_0^\infty(G)$.

Замечательная теорема К. О. Фридрихса [1] утверждает, что *для каждого симметрического полуограниченного оператора A существует по крайней мере одно самосопряженное расширение $\widehat{A}$ с той же самой нижней границей, т. е. для каждого симметрического полуограниченного оператора A существует по крайней мере один оператор $\widehat{A}$, обладающий следующими четырьмя свойствами*:

1) *$\widehat{A}$ — самосопряженный оператор*, т. е. $(\widehat{A}u, v)=(u, \widehat{A}v)$ *для любых u и v из области определения $D(\widehat{A})$ оператора $\widehat{A}$*;

2) $(\widehat{A}u, u)\geqslant \mu(u, u)$ *для всех u из области определения $D(\widehat{A})$ оператора $\widehat{A}$* (с тем же μ, что и для оператора A);

3) *область определения $D(A)$ оператора A содержится в области определения $D(\widehat{A})$ оператора $\widehat{A}$*;

4) *для всех u из области определения $D(A)$ оператора A справедливо равенство $\widehat{A}u=Au$.*

Пусть $\widehat{A}$ — произвольное самосопряженное полуограниченное расширение оператора A, определенного на функциях $u(x)\in C_0^\infty(G)$ по правилу $Au=Lu$, где Lu — формально самосопряженный эллиптический оператор второго порядка (2.1.1).

Тогда для $\widehat{A}$, как и для всякого самосопряженного оператора, справедлива известная теорема Дж. фон Неймана [1], согласно которой *этот оператор обладает так называемым разложением единицы, т. е. обладает семейством проекторов $\{E_\lambda\}$, так что*

$$\widehat{A}=\int_\mu^\infty \lambda\, dE_\lambda,$$

причем проекторы E_λ монотонно возрастают, непрерывны слева и сильно сходятся к единичному оператору, т. е. для любого u из $L_2(G)$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\| E_\lambda u-u\|_{L_2(G)}=0.$$

В рассматриваемом нами случае, когда оператор $\widehat{A}$ является самосопряженным полуограниченным расширением оператора A, порождаемого эллиптическим дифференциальным оператором (2.1.1), существенное уточнение теоремы Дж. фон Неймана дал Л. Гординг, который доказал, что каждый проектор E_λ является интегральным оператором с ядром типа Карлемана. Точнее, Л. Гординг [1] доказал следующее утверждение:

Для каждого λ *из числовой прямой* $E=(-\infty, \infty)$ *существует ядро типа Карлемана* $\theta(x, y, \lambda)$, *обладающее тем свойством, что для произвольной функции* $f(x)$ *из класса* $L_2(G)$ *и для почти всех точек* x *области* G

$$E_\lambda f(x) = \int_G \theta(x, y, \lambda) f(y)\, dy. \tag{2.1.2}$$

Ядро $\theta(x, y, \lambda)$ *является борелевской функцией на множестве* $G\times G\times E$ *и обладает эрмитовой симметрией* $\theta(x, y, \lambda)=\overline{\theta(y, x, \lambda)}$, *причем интеграл*

$$\int_G |\theta(x, y, \lambda)|^2\, dy$$

является непрерывной функцией x *в области* G *при любом* $\lambda\in E$. *Кроме того, ядро* $\theta(x, y, \lambda)$ *равно нулю при* $\lambda<\mu$ *и имеет ограниченную вариацию по* λ *на каждом сегменте* $\mu\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0$ *числовой прямой* E, *причем эта вариация равномерно ограничена по совокупности* x, y *на каждом компакте* K *области* $G\times G$.

Ядро $\theta(x, y, \lambda)$ интегрального оператора (2.1.2) называется *спектральной функцией* самосопряженного расширения $\widehat{A}$, а выражение (2.1.2) *спектральным разложением* функции $f(x)$, отвечающим самосопряженному расширению $\widehat{A}$.

Подчеркнем, что свойства спектральной функции, установленные в теореме Л. Гординга, позволяют определить спектральное разложение (2.1.2) для любой функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$, а также для любой финитной в области G функции из класса $L_1(G)$.

Введем наряду со спектральным разложением (2.1.2) функции *средние Рисса* этого спектрального разложения порядка $s\geqslant 0$ размера λ, определив их равенством

$$E^s_\lambda f(x) = \int_\mu^\lambda \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s dE_t f. \tag{2.1.3}$$

Оператор E^s_λ, так же как и E_λ, является интегральным оператором

$$E^s_\lambda f(x) = \int_G \theta^s(x, y, \lambda) f(y)\, dy, \tag{2.1.4}$$

ядро которого $\theta^s(x, y, \lambda)$ представляет собой, очевидно, среднее Рисса порядка s от спектральной функции $\theta(x, y, \lambda)$

$$\theta^s(x, y, \lambda) = \int\limits_{\mu}^{\lambda} \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s d_t\theta(x, y, t). \tag{2.1.5}$$

2. Упорядоченные спектральные представления пространства $L_2(G)$ (относительно расширения $\widehat{A}$). Пусть $\widehat{A}$ — произвольное самосопряженное полуограниченное (с нижней границей μ) расширение оператора, порождаемого эллиптическим дифференциальным оператором (2.1.1). Если спектр замыкания указанного расширения $\widehat{A}$ является чисто точечным, то существует полная ортонормированная система собственных функций $\{u_n(x)\}$, каждая из которых является регулярным в области G решением уравнения

$$Lu_n = \lambda_n u_n \tag{2.1.6}$$

для некоторого собственного числа $\lambda_n \geqslant \mu$.

В случае общего самосопряженного полуограниченного расширения $\widehat{A}$ эллиптического оператора (2.1.1) (с любым спектром) роль таких регулярных решений уравнения (2.1.6) играют так называемые *фундаментальные функции*, существование и основные свойства которых устанавливаются известной теоремой Гординга — Браудера — Маутнера *). Сформулируем в удобной для нас форме эту теорему:

Для каждого самосопряженного полуограниченного расширения $\widehat{A}$ эллиптического оператора (2.1.1) *в области G существует по крайней мере одно упорядоченное спектральное представление пространства $L_2(G)$ со спектральной мерой $\rho(\lambda)$, множествами кратности e_i, фундаментальными функциями $u_i(x, \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, \widehat{m})$ и кратностью $\widehat{m} \leqslant \infty$ такое, что выполнены следующие требования*:

1) *фундаментальные функции $u_i(x, \lambda)$ измеримы относительно произведения меры Лебега области G и спектральной меры* $\rho(\lambda)$, *обращаются в нуль на дополнениях множеств e_i и для каждого фиксированного $\lambda \geqslant \mu$ принадлежат классу $C^\infty(G)$ и удовлетворяют внутри G эллиптическому дифференциальному уравнению*

$$Lu_i(x, \lambda) = \lambda u_i(x, \lambda); \tag{2.1.7}$$

2) *для каждой функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ определен на множестве e_i как элемент пространства L_2 с мерой* $\rho(\lambda)$ *о б р а з* ***Ф у р ь е***

$$\widehat{f}_i(\lambda) = \int\limits_G f(y)\, u_i(y, \lambda)\, dy, \qquad i = 1, 2, \ldots, \widehat{m}, \tag{2.1.8}$$

причем спектральное разложение $E_\lambda f(x)$ каждой функции $f(x)$

---

*) См., например, монографию Ц. Данфорда и Дж. Т. Шварца [1, с. 875—876].

из класса $L_2(G)$ имеет вид

$$E_\lambda f(x) = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{\mu}^{\lambda} \widehat{f}_i(t)\, u_i(x, t)\, d\rho(t) \tag{2.1.9}$$

и сходится при $\lambda \to \infty$ к $f(x)$ в метрике $L_2(G)$;

3) *для любых двух функций $f(x)$ и $g(x)$ из класса $L_2(G)$ справедливо равенство Парсеваля*

$$\int_G f(x)\, g(x)\, dx = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{\mu}^{\infty} \widehat{f}_i(t)\, \widehat{g}_i(t)\, d\rho(t), \tag{2.1.10}$$

и, в частности, для любой $f(x)$ из класса $L_2(G)$

$$\int_G f^2(x)\, dx = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{\mu}^{\infty} \widehat{f}_i^2(t)\, d\rho(t). \tag{2.1.11}$$

Всюду в дальнейшем для упрощения изложения мы будем рассматривать вместо полуограниченного самосопряженного расширения $\widehat{A}$ эллиптического оператора (2.1.1) *неотрицательное* самосопряженное расширение $\widehat{A}$ этого оператора. Это означает, что во всех приведенных выше утверждениях следует положить $\mu = 0$. В частности, следует положить $\mu = 0$ в соотношениях (2.1.3), (2.1.5), (2.1.9) — (2.1.11) и считать, что в уравнении (2.1.6) все $\lambda_n \geqslant 0$, а в уравнении (2.1.7) все значения λ неотрицательны.

В таком виде материал данного и предыдущего пунктов будет использован в гл. 4, а в данной главе мы будем вместо общего формально самосопряженного эллиптического оператора (2.1.1) рассматривать простейший оператор такого вида $Lu = -\Delta u$, где $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа.

Таким образом, всюду в данной главе оператор $\widehat{A}$ будет представлять собой произвольное самосопряженное неотрицательное расширение оператора Лапласа $Lu = -\Delta u$. В соответствии с этим уравнения (2.1.6) и (2.1.7) перейдут соответственно в следующие уравнения:

$$\Delta u_n + \lambda_n u_n = 0, \tag{2.1.6$'$}$$

$$\Delta u_i(x, \lambda) + \lambda u_i(x, \lambda) = 0. \tag{2.1.7$'$}$$

3. Классы дифференцируемых функций N переменных. Приведем определения и сформулируем простейшие свойства основных классов дифференцируемых функций N переменных.

Всюду в дальнейшем под частными производными функции N переменных будут пониматься обобщенные частные производные в смысле С. Л. Соболева *).

---

*) К понятию обобщенной частной производной проще всего прийти следующим образом. Зададим в пространстве E^N открытое множество G и обозначим через G_1 ортогональную проекцию этого множества на гипер-

Обозначим символом $\bar{k}$ мультииндекс $\bar{k}=(k_1, k_2, \ldots, k_N)$, состоящий из N целых неотрицательных чисел k_j, и положим $|\bar{k}| = k_1 + k_2 + \ldots + k_N$.

Символом $\partial^{\bar{k}} f(x)$ будем обозначать обобщенную в смысле С. Л. Соболева частную производную вида

$$\partial^{\bar{k}} f(x) = \frac{\partial^{|\bar{k}|} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_N^{k_N}}. \tag{2.1.12}$$

Будем говорить, что определенная в области G функция $f(x)$ принадлежит *классу Соболева* $W_p^l(G)$, где l — целое неотрицательное число, а p удовлетворяет условию $1 \leqslant p < \infty$, если $f(x)$ имеет все обобщенные частные производные вида (2.1.12) при $|\bar{k}| = l$ и если является конечной величина

$$\|f\|_{L_p(G)} + \sum_{|\bar{k}|=l} \left\| \partial^{\bar{k}} f(x) \right\|_{L_p(G)}, \tag{2.1.13}$$

называемая *нормой* $f(x)$ в $W_p^l(G)$ и обозначаемая символом $\|f\|_{W_p^l(G)}$.

Для определения *класса Никольского* $H_p^\alpha(G)$ с произвольным вещественным положительным (не обязательно целым) показателем дифференцируемости α и с произвольной степенью суммируемости p из полупрямой $1 \leqslant p \leqslant \infty$ представим показатель дифференцируемости α в виде $\alpha = l + \varkappa$, где $l = \alpha - 1$ при целом α и $l = [\alpha]$ *) при нецелом α, $\varkappa = 1$ при целом α и $\varkappa = \alpha - [\alpha]$ при нецелом α, так что всегда $0 < \varkappa \leqslant 1$.

Договоримся, кроме того, для любой области $G \subseteq E^N$ и для любого положительного числа h обозначать символом G_h подмножество точек G, отстоящих от границы ∂G области G на расстояние, большее числа h.

Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит *классу Никольского* $H_p^\alpha(G)$, если $f(x)$ принадлежит классу $L_p(G)$, имеет

плоскость $x_1 = 0$. Предположим, что на G задана измеримая функция $f(\bar{x}) = f(x_1, \bar{y})$, где $\bar{y} = (x_2, x_3, \ldots, x_N)$. Если получающаяся из этой функции при фиксированном $\bar{y}$ определенная на открытом одномерном множестве функция одной переменной x_1 абсолютно непрерывна на любом принадлежащем указанному множеству замкнутом сегменте, то мы будем говорить, что функция $f(x_1, \bar{y})$ при указанном $\bar{y}$ локально абсолютно непрерывна по x_1. Будем говорить, что функция f имеет *обобщенную частную производную* вида $\partial f/\partial x_1$ на множестве G, если функция f измерима на G и если существует эквивалентная ей на G функция f_1, локально абсолютно непрерывная по x_1 для почти всех $\bar{y}$ из G_1. Указанная функция f_1 будет почти всюду на G иметь обычную производную $\partial f_1/\partial x_1$. Любую эквивалентную $\partial f_1/\partial x_1$ (в смысле N-мерной меры) функцию мы будем называть обобщенной частной производной f по x_1 на множестве G и обозначать символом $\partial f/\partial x_1$.

Аналогично вводятся обобщенные частные производные высших порядков.

*) $[\alpha]$ обозначает целую часть числа α.

все обобщенные частные производные вида (2.1.12) при $|\bar{k}| = l$ и если для каждой такой частной производной и для каждого вектора u справедливо соотношение

$$\left\| \partial^{\bar{k}} f(x+u) - 2\partial^{\bar{k}} f(x) + \partial^{\bar{k}} f(x-u) \right\|_{L_p(G_{|u|})} = o\left(|u|^{\varkappa}\right), \quad (2.1.14)$$

в котором норма $L_p(G_{|u|})$ берется по координатам точки x.

Если для стоящей в (2.1.14) под знаком модуля второй разности ввести обозначение

$$\partial^{\bar{k}} f(x+u) - 2\partial^{\bar{k}} f(x) + \partial^{\bar{k}} f(x-u) = \Delta_u^2 \partial^{\bar{k}} f(x),$$

то *норму* в классе Никольского, обозначаемую символом $\|f\|_{H_p^\alpha(G)}$, можно ввести равенством

$$\|f\|_{H_p^\alpha(G)} = \|f\|_{L_p(G)} + \sum_{|\bar{k}|=l} \sup_u \left\{ |u|^{-\varkappa} \left\| \Delta_u^2 \partial^{\bar{k}} f(x) \right\|_{L_p(G_{|u|})} \right\}. \quad (2.1.15)$$

Заметим, что класс Никольского $H_p^\alpha(G)$ может быть получен замыканием по норме (2.1.15) множества $C^\infty(G)$ бесконечно дифференцируемых в области G функций.

В случае $p = \infty$ класс Никольского $H_p^\alpha(G)$ принято называть *классом Зигмунда — Гёльдера* и обозначать символом $C^\alpha(G)$. При нецелых α этот класс совпадает с обычным классом Гёльдера, норма в котором вводится не с помощью вторых, а с помощью первых разностей, но при целом α класс Зигмунда — Гёльдера является более широким, чем обычный класс Гёльдера (так как при целом α функция из класса Зигмунда — Гёльдера может не иметь ни классической, ни обобщенной производной порядка α).

Для определения *класса Бесова* $B_{p,\theta}^\alpha(G)$, который кроме вещественного порядка дифференцируемости $\alpha > 0$ и степени суммируемости p, изменяющейся в пределах $1 \leqslant p \leqslant \infty$, зависит еще от одного параметра θ, изменяющегося в пределах $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, представим (как и в случае класса Никольского) порядок дифференцируемости α в виде суммы $\alpha = l + \varkappa$, где

$$l = \begin{cases} \alpha - 1 & \text{в случае целого } \alpha, \\ [\alpha] & \text{в случае нецелого } \alpha; \end{cases}$$

$$\varkappa = \begin{cases} 1 & \text{в случае целого } \alpha, \\ \alpha - [\alpha] & \text{в случае нецелого } \alpha. \end{cases}$$

Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит *классу Бесова* $B_{p,\theta}^\alpha(G)$, если $f(x)$ принадлежит классу $L_p(G)$, имеет все обобщенные частные производные вида (2.1.12) при $|\bar{k}| = l$ и если является конечной величина

$$\|f\|_{L_p(G)} + \sum_{|\bar{k}|=l} \left[\int_0^\infty \left(|u|^{-\varkappa} \left\| \Delta_u^2 \partial^{\bar{k}} f(x) \right\|_{L_p(G_{|u|})} \right)^\theta \frac{du}{|u|^N} \right]^{1/\theta},$$

называемая *нормой* в пространстве $B^{\alpha}_{p,\theta}(G)$ и обозначаемая символом $\|f\|_{B^{\alpha}_{p,\theta}(G)}$.

Естественно считать, что при $\theta=\infty$ класс Бесова $B^{\alpha}_{p,\theta}(G)$ переходит в класс Никольского $H^{\alpha}_{p}(G)$.

Можно также убедиться в том, что при целом α и при $\theta=p$ класс Бесова $B^{\alpha}_{p,\theta}(G)$ переходит в класс Соболева $W^{\alpha}_{p}(G)$, определенный нами выше. Поэтому классы Бесова $B^{\alpha}_{p,p}(G)$ являются одним из возможных продолжений соболевских классов с целыми порядками дифференцируемости на произвольные вещественные положительные порядки дифференцируемости.

Однако более естественным продолжением соболевских классов на произвольные положительные вещественные порядки дифференцируемости являются так называемые классы Соболева — Лиувилля, к определению которых мы и переходим.

Так как в дальнейшем нам придется иметь дело с функциями, финитными в области G (т. е. определенными во всем пространстве E^N, но отличными от нуля только на некотором компакте K, содержащемся в G и отстоящем от границы ∂G области G на положительное расстояние), то мы можем ограничиться определением класса Соболева — Лиувилля во всем пространстве E^N.

Для определения класса Соболева — Лиувилля $L^{\alpha}_{p}(E^N)$ используем введенную в п. § 2 гл. 1 главную часть ядра дробного порядка $T_{\alpha/2}(x, y)$, которая имеет вид

$$\overset{0}{T}_{\alpha/2}(x, y)=2^{1-\alpha/2}\left[(2\pi)^{N/2}\Gamma(\alpha/2)\right]^{-1}|x-y|^{\alpha-N/2}K_{N/2-\alpha}(|x-y|) \tag{2.1.16}$$

и называется *ядром Бесселя — Макдональда*.

Будем говорить, что функция $f(x)$, определенная во всем пространстве E^N, принадлежит при $\alpha>0$, $p\geqslant 1$ классу Соболева — Лиувилля $L^{\alpha}_{p}(E^N)$, если существует такая функция $h(x)$ из класса $L_p(G)$, что справедливо равенство

$$f(x)=\int_{E^N}\overset{0}{T}_{\alpha/2}(x, y)\,h(y)\,dy.$$

При $\alpha=0$ полагают $L^{\alpha}_{p}(E^N)$ совпадающим с $L_p(E^N)$.

Норму в классе $L^{\alpha}_{p}(E^N)$ по определению считают равной

$$\|f\|_{L^{\alpha}_{p}(E^N)}=\|h\|_{L_p(E^N)}. \tag{2.1.17}$$

При целых α класс $L^{\alpha}_{p}(E^N)$ совпадает с введенным выше классом Соболева $W^{\alpha}_{p}(E^N)$.

Таким образом, класс Соболева — Лиувилля является естественным продолжением первоначально введенного Соболевым для целых α класса W^{α}_{p} на вещественные положительные значения порядка дифференцируемости α. Мы будем сохранять для класса Соболева — Лиувилля с целым порядком дифференцируемости α первоначально введенное С. Л. Соболевым обозначение W_p^α.

Подробные характеристики всех введенных выше классов можно найти в монографии С. М. Никольского [1]. Мы же отметим только некоторые используемые в дальнейшем свойства этих классов.

Договоримся обозначать символом $A \to B$ тот факт, что класс A вкладывается в класс B, причем оператор, осуществляющий вложение, является непрерывным.

Тогда можно утверждать, что $C^\alpha \to H_p^\alpha$ при любом $p \geqslant 1$ *).

Далее при любом $\alpha > 0$ и $p \geqslant 1$ и при любом $\theta \geqslant 1$

$$L_p^\alpha \to H_p^\alpha, \qquad B_{p,\theta}^\alpha \to H_p^\alpha. \tag{2.1.18}$$

Поэтому можно утверждать, что из четырех классов H_p^α, L_p^α, $B_{p,\theta}^\alpha$ и C^α при любых фиксированных $\alpha > 0$, $p \geqslant 1$ и при любом $\theta \geqslant 1$ самым широким является класс Никольского H_p^α.

Для любого $\varepsilon > 0$, для любых фиксированных $\alpha > 0$ и $p \geqslant 1$ и для любого $\theta \geqslant 1$ справедливы вложения

$$H_p^{\alpha+\varepsilon} \to L_p^\alpha, \qquad H_p^{\alpha+\varepsilon} \to B_{p,\theta}^\alpha. \tag{2.1.19}$$

Заметим, что при определении класса Никольского H_p^α и его нормы вместо вторых разностей $\Delta_u^2 f(x)$ можно брать четвертые разности $\Delta_u^4 f(x)$, имеющие вид

$$\Delta_u^4 f(x) = f(x+2u) - 4f(x+u) + 6f(x) - 4f(x-u) + f(x-2u).$$

Определенная с помощью четвертых разностей норма

$$\|f\|_{H_p^\alpha(G)} = \|f\|_{L_p(G)} + \sum_{|\bar{k}|=l} \sup_u \left\{ |u|^{-\varkappa} \left\| \Delta_u^4 \partial^{\bar{k}} f \right\|_{L_p(G_{2|u|})} \right\} \tag{2.1.15$'$}$$

является эквивалентной норме (2.1.15).

Заметим далее, что функции $f(x)$ из класса Никольского $H_p^\alpha(G)$ могут быть представлены в виде суммы ряда по целым функциям экспоненциального типа **)

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m(x), \tag{2.1.20}$$

каждый член $Q_m(x)$ которого является целой функцией экспоненциального типа 2^m с нормой в $L_p(G)$, удовлетворяющей неравенству

$$\|Q_m(x)\|_{L_p(G)} \leqslant C \cdot 2^{-m\alpha} \|f\|_{H_p^\alpha(G)} \tag{2.1.21}$$

---

*) Всюду в дальнейшем можно считать, что все классы берутся по всему E^N, а все функции являются финитными в области $G \subseteq E^N$.

**) По поводу целых функций экспоненциального типа см., например, главу 3 монографии С. М. Никольского [1].

(константа C в этом неравенстве не зависит ни от номера члена ряда m, ни от функции $f(x)$).

Из представления (2.1.20), из неравенства (2.1.21) и из известного неравенства Бернштейна для $Q_m(x)$

$$\left\| \partial^{\bar{k}} Q_m(x) \right\|_{L_p(G)} \leqslant 2^{m|\bar{k}|} \| Q_m(x) \|_{L_p(G)} \tag{2.1.22}$$

вытекает следующее используемое нами ниже утверждение:

если D — произвольная область в E^N, символ S_r^x обозначает N-мерную сферу радиуса r с центром в точке $x \in D_{3R}$ при любом фиксированном $R > 0$, то для любых p и α, удовлетворяющих условиям $p \geqslant 1$, $p\alpha > 1$, равномерно относительно r на сегменте $R \leqslant r \leqslant 2R$ справедливо неравенство

$$\| f \|_{L_p\left(S_r^x\right)} \leqslant C_R \| f \|_{H_p^\alpha(D)}, \tag{2.1.23}$$

в котором постоянная C_R не зависит ни от точки $x \in D_{3R}$, ни от функции $f(x) \in H_p^\alpha(D)$.

Для функций из класса H_p^α С. М. Никольским установлена замкнутая система теорем вложения.

Мы приведем нужную нам теорему вложения, обобщающую установленную С. Л. Соболевым теорему вложения для классов W_p^α с целыми α.

Если p и p' — любые два числа, удовлетворяющие неравенствам $1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty$, то при $\alpha > N[p^{-1} - (p')^{-1}]$ справедливо вложение

$$H_p^\alpha \to H_{p'}^{\alpha - N[p^{-1} - (p')^{-1}]}, \tag{2.1.24}$$

так что при $\alpha' = \alpha - N[p^{-1} - (p')^{-1}]$ для любой функции $f \in H_p^\alpha$

$$\| f \|_{H_{p'}^{\alpha'}} \leqslant C \| f \|_{H_p^\alpha}. \tag{2.1.25}$$

В частности, при $p' = \infty$ мы получим, что при $\alpha p > N$

$$H_p^\alpha \to C^{\alpha - N/p} \text{ и тем более } L_p^\alpha \to C^{\alpha - N/p}. \tag{2.1.26}$$

Все указанные теоремы вложения справедливы, когда все фигурирующие в них классы определены во всем пространстве E^N. Если же классы, стоящие в левых частях теорем (2.1.24), (2.1.25) и (2.1.26), определены в произвольной области G пространства E^N, то без каких-либо требований на область G сформулированные теоремы вложения останутся верны, если классы, стоящие в правых частях (2.1.24), (2.1.25) и (2.1.26), взять по подмножеству G_R области G с любым фиксированным $R > 0$.

§ 2. Формулировка и анализ основных результатов

1. Формулировка основных теорем и следствий из них. Пусть G — произвольная область в пространстве E^N, $\widehat{A}$ — произвольное самосопряженное неотрицательное расширение оператора Лапласа $Lu = -\Delta u$ в области G, $\{E_\lambda\}$ — семейство проекторов этого расширения, а $\theta(x, y, \lambda)$ — ядро E_λ, т. е. спектральная функция расширения $\widehat{A}$.

Для произвольной функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ будем изучать ее спектральное разложение

$$E_\lambda f(x) = S_\lambda(x, f) = \int\limits_G \theta(x, y, \lambda) f(y)\, dy \tag{2.2.1}$$

и средние Рисса этого спектрального разложения порядка $s \geqslant 0$

$$E_\lambda^s f(x) = \sigma_\lambda^s(x, f) = \int\limits_0^\lambda \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s dS_t(x, f). \tag{2.2.2}$$

Отметим сразу же, что при $s = 0$ средние Рисса (2.2.2) переходят в спектральное разложение (2.2.1), изучение которого тем самым включается в изучение средних Рисса порядка $s \geqslant 0$.

В данной главе ограничимся изучением средних Рисса (2.2.2) порядка s, удовлетворяющего неравенствам $0 \leqslant s < (N-1)/2$.

Начнем с выяснения условий, не обеспечивающих не только равномерной сходимости, но и локализации средних Рисса спектральных разложений указанного порядка s.

Теорема 2.1. (Об условиях, не обеспечивающих локализации средних Рисса в классах Зигмунда — Гёльдера.) *Пусть $N \geqslant 2$, $0 \leqslant s < (N-1)/2$, G — произвольная область в пространстве E^N, $\widehat{A}$ — произвольное самосопряженное неотрицательное расширение оператора Лапласа $Lu = -\Delta u$ в области G, x_0 — любая фиксированная внутренняя точка области G, α — любое фиксированное вещественное число, удовлетворяющее неравенствам $0 < \alpha < (N-1)/2 - s$. Тогда существует функция $f(x)$, удовлетворяющая следующим требованиям: 1) $f(x)$ финитна в области G и обращается в нуль в некоторой окрестности D точки x_0; 2) $f(x)$ принадлежит классу Зигмунда — Гёльдера C^α с порядком дифференцируемости α (как в области G, так и во всем E^N); 3) средние Рисса (2.2.2) порядка s спектрального разложения функции $f(x)$ не имеют предела при $\lambda \to \infty$ в точке x_0.*

Теорема 2.2. (Об условиях, не обеспечивающих локализации средних Рисса в классах Соболева — Лиувилля, Никольского и Бесова.) *Пусть $N \geqslant 2$, $0 \leqslant s < (N-1)/2$, G — произвольная область в пространстве E^N, $\widehat{A}$ — произвольное самосопряженное неотрицательное расширение оператора Лапласа $Lu = -\Delta u$ в области G, x_0 — любая фиксированная внутренняя точка области G, α — любое фиксированное вещественное число, удовлетворяющее неравенствам $0 < \alpha < (N-1)/2 - s$. Тогда существует функция $f(x)$, удовлетворяющая следующим требованиям: 1) $f(x)$ финитна в области G и обращается в нуль в некоторой окрестности D точки x_0; 2) $f(x)$ принадлежит (как области G, так и во всем пространстве E^N) каждому из классов Соболева — Лиувилля L_p^α, Никольского H_p^α*

и Бесова $B^{\alpha}_{p,\theta}$ *с порядком дифференцируемости* α, *с любой степенью суммируемости* $p \geqslant 1$ *и (в случае класса Бесова) с любым* $\theta \geqslant 1$; 3) *средние Рисса* (2.2.2) *порядка* s *спектрального разложения функции* $f(x)$ *не имеют предела при* $\lambda \to \infty$ *в точке* x_0.

Доказательству теоремы 2.1 будут посвящены §§ 3 и 4. Здесь же мы убедимся, что теорема 2.2 является простым следствием теоремы 2.1.

В самом деле, для любого s из полусегмента $0 \leqslant s < (N-1)/2$ фиксируем произвольное α, удовлетворяющее условию $0 < \alpha < (N-1)/2 - s$. Так как $\alpha < (N-1)/2 - s$, то разность $((N-1)/2 - s) - \alpha$ является положительным числом, которое мы обозначим через 2ε, так что $\alpha + 2\varepsilon = (N-1)/2 - s$. Но тогда число $\alpha' = \alpha + \varepsilon$ будет удовлетворять неравенствам $0 < \alpha < \alpha + \varepsilon < (N-1)/2 - s$, и в силу теоремы 2.1 найдется функция $f(x)$ из класса Зигмунда — Гёльдера $C^{\alpha+\varepsilon}$ (в области G и во всем E^N), финитная в области G, обращающаяся в нуль в некоторой окрестности D точки x_0 и такая, что средние Рисса (2.2.2) порядка s ее спектрального разложения не имеют предела при $\lambda \to \infty$ в точке x_0.

Остается заметить, что класс Зигмунда — Гёльдера $C^{\alpha+\varepsilon}$ при любом $p \geqslant 1$ содержится в классе Никольского $H_p^{\alpha+\varepsilon}$, а потому содержится как в классе H_p^{α}, так и в силу теорем вложения (2.1.18′) в каждом из классов L_p^{α} и $B^{\alpha}_{p,\theta}$ при любом $p \geqslant 1$ и при любом $\theta \geqslant 1$.

Теоремы 2.1 и 2.2 показывают, что если порядок дифференцируемости α в каждом из классов C^{α}, L_p^{α}, H_p^{α} и $B^{\alpha}_{p,\theta}$ меньше числа $(N-1)/2 - s$, то, каковы бы ни были степень суммируемости $p \geqslant 1$ и число $\theta \geqslant 1$, ни для одного самосопряженного неотрицательного расширения оператора Лапласа нельзя ожидать не только равномерной сходимости, но и локализации средних Рисса порядка s спектрального разложения финитной в области функции, принадлежащей любому из указанных четырех классов.

Совершенно естественно возникает вопрос об изучении равномерной сходимости и локализации средних Рисса порядка s спектрального разложения для финитных в области G функций, принадлежащих одному из указанных четырех классов C^{α}, L_p^{α}, H_p^{α} или $B^{\alpha}_{p,\theta}$ с порядком дифференцируемости α, удовлетворяющим условию $\alpha \geqslant (N-1)/2 - s$.

В определенном смысле исчерпывающий ответ на этот вопрос дают следующие три теоремы.

Теорема 2.3. (Об условиях, обеспечивающих локализацию, и об условиях, обеспечивающих равномерную сходимость средних Рисса в классах Никольского.) *Пусть* $N \geqslant 2$, $0 \leqslant s < (N-1)/2$, G — *произвольная область в пространстве* E^N, $\widehat{A}$ — *произвольное самосопряженное неотрицательное расширение оператора Лапласа* $Lu = -\Delta u$ *в области* G, $f(x)$ — *произвольная функция, удовлетворя-*

ющая следующим требованиям: 1) $f(x)$ *обращается в нуль вне множества* G_{h_0} *) *при некотором* $h_0 > 0$; 2) *во всей области* G *функция* $f(x)$ *принадлежит классу Никольского* H_2^α *при* $\alpha \geqslant (N-1)/2 - s$; 3) *в некоторой содержащейся в* G *области* D (*которая, в частности, может совпадать с* G) *функция* $f(x)$ *принадлежит классу Никольского* H_p^α *при некоторых* α *и* p, *удовлетворяющих условиям*

$$\alpha \geqslant (N-1)/2 - s, \quad p\alpha > N, \quad p \geqslant 1. \tag{2.2.3}$$

Тогда для каждого $h > 0$ *средние Рисса* (2.2.2) *порядка* s *спектрального разложения функции* $f(x)$ *сходятся к* $f(x)$ *при* $\lambda \to \infty$ *равномерно на множестве* D_h.

Сопоставляя теорему 2.3 с теоремой 2.2, мы придем к следующим выводам.

I. Окончательным условием локализации средних Рисса порядка $s\left(0 \leqslant s < \frac{N-1}{2}\right)$ спектрального разложения финитной в области G функции из класса Никольского $H_2^\alpha(G)$ является требование $\alpha \geqslant \frac{N-1}{2} - s$ (при $\alpha \geqslant \frac{N-1}{2} - s$, согласно теореме 2.3 будет иметь место локализация указанных средних Рисса; при $\alpha < \frac{N-1}{2} - s$, согласно теореме 2.2, локализация указанных средних Рисса не будет иметь места).

II. Окончательным условием равномерной сходимости средних Рисса порядка $s\left(0 \leqslant s < \frac{N-1}{2}\right)$ спектрального разложения финитной в области G функции из класса Никольского $H_p^\alpha(G)$ является выполнение трех неравенств из (2.2.3).

Действительно, при невыполнении первого неравенства из (2.2.3), т. е. при $\alpha < \frac{N-1}{2} - s$ и при любом $p \geqslant 1$ для финитной в области G функции $f(x)$ из класса Никольского $H_p^\alpha(G)$ в силу теоремы 2.2 не будет иметь места не только равномерная сходимость, но и локализация средних Рисса порядка s.

Второе неравенство из (2.2.3), т. е. неравенство $p\alpha > N$, также является окончательным, ибо при $p \cdot \alpha = N$ и при любом $p \geqslant 1$ в классе Никольского существует неограниченная функция (точнее, функция с особенностью в одной внутренней точке), для которой средние Рисса заведомо не могут сходиться равномерно в области, содержащей эту точку.

Естественность третьего неравенства из (2.2.3), т. е. $p \geqslant 1$, не подлежит обсуждению.

Теорема 2.4. (Об условиях, обеспечивающих локализацию, и об условиях, обеспечивающих рав-

*) Напомним, что для любого $h > 0$ символ D_h обозначает подмножество точек произвольной области D, отстоящих от границы ∂D области D на расстояние, большее числа h.

номерную сходимость средних Рисса в классах Соболева — Лиувилля и в классах Бесова.) *Пусть* $N \geqslant 2$, $0 \leqslant s < (N-1)/2$, G — *произвольная область в пространстве* E^N, $\widehat{A}$ — *произвольное самосопряженное неотрицательное расширение оператора Лапласа* $Lu = -\Delta u$ *в области* G, $f(x)$ — *произвольная функция, удовлетворяющая следующим требованиям*: 1) $f(x)$ *обращается в нуль вне множества* G_{h_0} *при некотором* $h_0 > 0$; 2) *во всей области* G *функция* $f(x)$ *принадлежит классу Соболева — Лиувилля* L_2^α [*соответственно классу Бесова* $B_{2,\theta}^\alpha$] *при* $\alpha \geqslant (N-1)/2 - s$ [*и при любом* $\theta \geqslant 1$]; 3) *в некоторой содержащейся в* G *области* D (*которая, в частности, может совпадать с* G) *функция* $f(x)$ *принадлежит классу Соболева — Лиувилля* L_p^α [*соответственно классу Бесова* $B_{p,\theta}^\alpha$] *при некоторых* α *и* p, *удовлетворяющих трем неравенствам из* (2.2.3) [*и в случае класса Бесова при любом* $\theta \geqslant 1$]. *Тогда для каждого* $h > 0$ *средние Рисса* (2.2.2) *порядка* s *спектрального разложения функции* $f(x)$ *сходятся к* $f(x)$ *при* $\lambda \to \infty$ *равномерно на множестве* D_h.

Сопоставление теоремы 2.4 с теоремой 2.2 позволяет сделать те же два вывода, что и для класса Никольского. Условие $\alpha \geqslant (N-1)/2 - s$ является окончательным условием локализации средних Рисса порядка s $(0 \leqslant s < (N-1)/2)$ спектрального разложения финитной в области G функции из класса Соболева — Лиувилля $L_2^\alpha(G)$ и из класса Бесова $B_{2,\theta}^\alpha(G)$ (при любом $\theta \geqslant 1$). Три неравенства из (2.2.3) являются окончательным условием равномерной сходимости средних Рисса порядка s $(0 \leqslant s < (N-1)/2)$ спектрального разложения финитной в области G функции из класса Соболева — Лиувилля $L_p^\alpha(G)$ и из класса Бесова $B_{p,\theta}^\alpha(G)$ (при любом $\theta \geqslant 1$).

Теорема 2.5. (Об условиях, обеспечивающих локализацию и равномерную сходимость средних Рисса в классах Зигмунда — Гёльдера.) *Пусть* $N \geqslant 2$, $0 \leqslant s < (N-1)/2$, G — *произвольная область в пространстве* E^N, $\widehat{A}$ — *произвольное самосопряженное неотрицательное расширение оператора* $Lu = -\Delta u$ *в области* G, $f(x)$ — *произвольная функция, удовлетворяющая следующим двум требованиям*: 1) $f(x)$ *обращается в нуль вне множества* G_{h_0} *при некотором* $h_0 > 0$; 2) $f(x)$ *принадлежит классу Зигмунда — Гёльдера* $C^\alpha(G)$ *при некотором* $\alpha \geqslant (N-1)/2 - s$. *Тогда для каждого* $h > 0$ *средние Рисса* (2.2.2) *порядка* s *спектрального разложения функции* $f(x)$ *сходятся к* $f(x)$ *при* $\lambda \to \infty$ *равномерно на множестве* G_h.

Сопоставление теоремы 2.5 с теоремой 2.1 позволяет сделать вывод о том, что требование $\alpha \geqslant (N-1)/2 - s$ является окончательным условием как локализации, так и равномерной сходимости средних Рисса порядка s $(0 \leqslant s < (N-1)/2)$ спектрального разложения финитной в области G функции $f(x)$ из класса Зигмунда — Гёльдера $C^\alpha(G)$ (при $\alpha < (N-1)/2 - s$, согласно теореме 2.1, локализация и тем более равномерная сходимость указанных средних Рисса не будет иметь места, при $\alpha \geqslant (N-1)/2-s$ согласно теореме 2.5, будет иметь место равномерная сходимость (и тем более локализация) указанных средних Рисса).

Таким образом, классы Зигмунда — Гёльдера не улавливают «зазора» между окончательными условиями локализации и окончательными условиями равномерной сходимости: при $\alpha < (N-1)/2-s$ нет ни локализации, ни тем более равномерной сходимости, при $\alpha \geqslant (N-1)/2-s$ есть и равномерная сходимость, и тем более локализация средних Рисса порядка s.

Доказательству теоремы 2.3 будет посвящен § 5. Здесь же мы отметим, что теоремы 2.4 и 2.5 являются простыми следствиями теоремы 2.3, ибо при любых фиксированных $\alpha > 0$ и $p \geqslant 1$ и при любом $\theta \geqslant 1$ в силу вложений (2.1.18) (см. п. 3 § 1) каждый из классов $L_p^\alpha(G)$ и $B_{p,\theta}^\alpha(G)$ содержится в $H_p^\alpha(G)$ и, кроме того, класс Зигмунда — Гёльдера $C^\alpha(G)$ содержится в классе Никольского $H_p^\alpha(G)$ при любом $p \geqslant 1$.

2. Краткий анализ результатов. Обозначим символом $\Lambda_p^\alpha(G)$ любой из трех классов Никольского $H_p^\alpha(G)$, Соболева — Лиувилля $L_p^\alpha(G)$ или Бесова $B_{p,\theta}^\alpha(G)$ с произвольным $\theta \geqslant 1$.

Основные результаты данной главы следующие:

1) установление окончательного условия локализации средних Рисса порядка s $(0 \leqslant s < (N-1)/2)$ спектрального разложения финитной в области G функции из класса $\Lambda_2^\alpha(G)$, выражающего неравенством $\alpha \geqslant (N-1)/2-s$;

2) установление окончательного условия равномерной сходимости средних Рисса порядка s $(0 \leqslant s < (N-1)/2)$ спектрального разложения финитной в области G функции из класса $\Lambda_p^\alpha(G)$, выражающегося тремя неравенствами:

$$\alpha \geqslant \frac{N-1}{2} - s, \qquad p \cdot \alpha > N, \qquad p \geqslant 1; \tag{2.2.3}$$

3) установление окончательного условия как локализации, так и равномерной сходимости средних Рисса порядка s $(0 \leqslant s < (N-1)/2)$ спектрального разложения финитной в области G функции из класса Зигмунда — Гёльдера $C^\alpha(G)$, выражающегося неравенством $\alpha \geqslant (N-1)/2-s$.

Все устанавливаемые результаты являются окончательными не только в классе всех самосопряженных неотрицательных расширений оператора Лапласа, но и для каждого индивидуального самосопряженного неотрицательного расширения этого оператора *) (и, в частности, для разложения в N-кратный интеграл Фурье, отвечающего самосопряженному неотрицательному расширению оператора Лапласа во всем пространстве E^N).

План дальнейшего изложения таков: в § 3 мы установим некоторые дополнительные, необходимые нам свойства фундамен-

---

*) Это следует из теоремы 2.1.

тальных функций произвольного упорядоченного спектрального представления пространства L_2, в § 4 дадим доказательство теоремы 2.1, а § 5 — доказательство теоремы 2.3.

§ 3. Некоторые свойства фундаментальных функций произвольного упорядоченного спектрального представления пространства L_2

Будем рассматривать произвольное самосопряженное неотрицательное расширение $\widehat{A}$ оператора Лапласа $Lu = -\Delta u$ в произвольной N-мерной области G и какое угодно упорядоченное спектральное представление пространства $L_2(G)$ относительно расширения $\widehat{A}$ со спектральной мерой $\rho(\lambda)$, множествами кратности e_i, фундаментальными функциями $u_i(x, \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots \ldots, \widehat{m})$ и кратностью $\widehat{m} \leqslant \infty$.

В этом параграфе мы установим некоторые необходимые нам в дальнейшем свойства фундаментальных функций $u_i(x, \lambda)$, вполне аналогичные свойствам элементов $u_n(x)$ произвольной ФСФ оператора Лапласа, установленным в § 1 и 2 гл. 1.

1. Формула среднего значения. Выражение для образа Фурье функции из класса радиальных функций. Пусть x — любая точка открытой области G, r — любое положительное число такое, что N-мерный шар радиуса r с центром в точке x содержится в области G. Тогда для каждой фундаментальной функции $u_i(x, \lambda)$, отвечающей значению λ, справедлива следующая формула среднего значения *):

$$\int_{\omega}\cdots\int u_i(x+r\omega, \lambda)\, d\omega = (2\pi)^{N/2} u_i(x, \lambda) \left(r\sqrt{\lambda}\right)^{(2-N)/2} \mathcal{J}_{(N-2)/2}\left(r\sqrt{\lambda}\right). \tag{2.3.1}$$

Вывод формулы (2.3.1), основанный только на том, что фундаментальная функция $u_i(x, \lambda)$ является регулярным в области G решением уравнения $\Delta u_i + \lambda u_i = 0$, дословно повторяет вывод формулы среднего значения, изложенный в п. 1 § 1 гл. 1.

Пусть f — произвольная функция, принадлежащая в области G к классу радиальных функций, т. е. функция, зависящая только от расстояния $r = |x - y|$ переменной точки y области G от фиксированной точки x этой области и отличная от нуля только внутри некоторого лежащего в области G N-мерного шара радиуса R. Тогда для образа Фурье $\widehat{f}_i(\lambda)$ этой функции, определяе-

---

*) Символ $\int_{\omega}\cdots\int u_i(x+r\omega, \lambda)\,d\omega$, как и в главе 1, обозначает интеграл от функции u_i по всем углам на поверхности N-мерной сферы радиуса r с центром в точке x.

мого соотношением (2.1.8), справедливо следующее равенство:

$$\widehat{f}_i(\lambda) = (2\pi)^{N/2} u_i(x, \lambda)\, \lambda^{(2-N)/4} \int_0^R f(r)\, r^{N/2} \mathcal{J}_{(N-2)/2}\left(r\sqrt{\lambda}\right) dr, \qquad (2.3.2)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, \widehat{m}).$$

Для получения равенства (2.3.2) достаточно заметить, что в силу указанного соотношения (2.1.8) образ Фурье $\widehat{f}_i(\lambda)$ равен

$$\widehat{f}_i(\lambda) = \int_G f(|x-y|)\, u_i(y, \lambda)\, dy =$$

$$= \int_0^R f(r)\, r^{N-1} \left(\int \cdots \int_\omega u_i(x + r\omega, \lambda)\, d\omega \right) dr \qquad (i = 1, 2, \ldots, \widehat{m})$$

и воспользоваться формулой среднего значения (2.3.1).

2. Оценка интеграла от квадрата фундаментальных функций.

Лемма 2.1. *Для любого $\mu \geqslant 0$ равномерно относительно x в каждой строго внутренней подобласти G' области G справедлива следующая оценка*:

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{\mu \leqslant \sqrt{\lambda} \leqslant \mu+1} u_i^2(x, \lambda)\, d\rho(\lambda) = O\left[(\mu+1)^{N-1}\right]. \qquad (2.3.3)$$

Вывод оценки (2.3.3) полностью аналогичен выводу оценки (1.1.4) и мы ограничимся краткими указаниями.

Как и при выводе оценки (1.1.4), достаточно доказать два утверждения: 1) справедливость оценки (2.3.3) при $\mu \geqslant \mu_0$, где μ_0 — некоторое фиксированное достаточно большое число; 2) справедливость при $\mu_0 \geqslant 1$ равномерной относительно x в G' оценки

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{\sqrt{\lambda} \leqslant \mu_0} u_i^2(x, \lambda)\, d\rho(\lambda) = O\left(\mu_0^N\right). \qquad (2.3.4)$$

1) Пусть сначала $\mu \geqslant \mu_0$, где μ_0 — достаточно большое фиксированное число. Фиксируем произвольную строго внутреннюю подобласть G' области G и обозначаем через R положительное число, меньшее расстояния G' от границы области G. Считая, что x — любая фиксированная точка подобласти G', рассмотрим ту же самую функцию $v(r)$, определяемую равенством (1.1.5), что и в п. 2 § 1 гл. 1, полагая что у этой функции $r = |x-y|$ является расстоянием переменной точки y от фиксированной точки x.

С помощью соотношения (2.3.2) мы получим, что образ Фурье $\widehat{v}_i(x, \lambda)$ этой функции равен

$$\widehat{v}_i(x, \lambda) = \mu^{N/2} \lambda^{(2-N)/4} u_i(x, \lambda) \int_{R/2}^R \mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}(r\mu)\, \mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}\left(r\sqrt{\lambda}\right) r\, dr \qquad (2.3.5)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, \widehat{m}).$$

С помощью соотношения (2.3.5) точно так же, как в п. 2 § 1 гл. 2, доказывается, что если число μ_0 достаточно велико, то при $\mu \geqslant \mu_0$ для всех λ, для которых $\mu \leqslant \sqrt{\lambda} \leqslant (\mu+1)$, найдется постоянная α такая, что

$$|\widehat{v}_i(x, \lambda)| \geqslant \alpha |u_i(x, \lambda)| \quad (\text{для всех } i = 1, 2, \ldots, \widehat{m}).$$

Записывая теперь для функции $v(|x-y|) = f(y)$ равенство Парсеваля (2.1.11) (см. п. 2 § 1)

$$\int_G v^2\, dy = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\infty \widehat{v}_i^2(x, \lambda)\, d\rho(\lambda),$$

мы получим с помощью последнего неравенства, учитывая также, что $\mu \geqslant \mu_0 > 1$, оценку

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\mu \leqslant \sqrt{\lambda} \leqslant \mu+1} u_i^2(x, \lambda)\, d\rho(\lambda) \leqslant \alpha^{-2} \int_G v^2(|x-y|)\, dy =$$

$$= \mu^N \omega_N (2\pi)^{-N} \alpha^{-2} \int_{R/2}^{R} r \mathcal{J}^2_{\frac{N-2}{2}}(r\mu)\, dr = O\left[(\mu+1)^{N-1}\right].$$

Тем самым при $\mu \geqslant \mu_0$ оценка (2.3.3) установлена.

2) Убедимся теперь в том, что при $\mu_0 \geqslant 1$ справедлива равномерная относительно x в подобласти G' оценка (2.3.4). Для этого, фиксируя произвольную, строго внутреннюю подобласть G' области G, произвольное положительное число R, меньшее расстояния подобласти G' от границы области G, и произвольную точку x в G', рассмотрим ту же самую функцию $w(r)$, определяемую равенством (1.1.18), что и в п. 2 § 1 гл. 1, полагая, что у этой функции $r = |x-y|$ является расстоянием переменной точки y от фиксированной точки x. С помощью соотношения (2.3.2) мы получим, что образ Фурье $\widehat{w}_i(x, \lambda)$ этой функции равен

$$\widehat{w}_i(x, \lambda) = 2^{N/2}\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right) \frac{\mathcal{J}_{N/2}(R\sqrt{\lambda})}{(R\sqrt{\lambda})^{N/2}} u_i(x, \lambda) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \widehat{m}).$$

Записывая для функции $f(y) = w(|x-y|)$ равенство Парсеваля (2.1.11) (см. п. 2 § 1), получаем

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\infty \left\{2^{N/2}\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right) \frac{\mathcal{J}_{N/2}(R\sqrt{\lambda})}{(R\sqrt{\lambda})^{N/2}}\right\}^2 u_i^2(x, \lambda)\, d\rho(\lambda) =$$

$$= \omega_N \cdot \Gamma^2\left(\frac{N}{2}+1\right) \pi^{-N} R^{-2N} \int_0^R r^{N-1}\, dr = \Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right) \pi^{-N} R^{-N}. \quad (2.3.6)$$

В п. 2 § 1 гл. 1 доказано, что при $R_0 = (2\mu_0)^{-1}$ и при всех $\sqrt{\lambda} \leqslant \mu_0$ величина, стоящая в (2.3.6) в фигурных скобках, превзойдет некоторое положительное число α_0. В таком случае из (2.3.6) следует неравенство

$$\alpha_0^2 \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\sqrt{\lambda} \leqslant \mu_0} u_i^2(x, \lambda)\, d\rho(\lambda) = O\left(\mu_0^N\right),$$

которое эквивалентно оценке (2.3.4).

Тем самым вывод оценки (2.3.3) при любом $\mu \geqslant 0$ завершен.

Извлечем из леммы 2.1 два простых следствия.

Следствие 1. *Для любого $\mu \geqslant 1$ и для любого ρ_0 из сегмента $1 \leqslant \rho_0 \leqslant \mu$ равномерно относительно x в каждой строго внутренней подобласти G' области G справедлива оценка*

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{|\sqrt{t}-\mu| \leqslant \rho_0} u_i^2(x, t)\, d\rho(t) = \rho_0 O\left(\mu^{N-1}\right). \tag{2.3.7}$$

Для доказательства этого следствия достаточно, пользуясь аддитивностью интеграла, разбить сегмент $[\mu - \rho_0, \mu + \rho_0]$, в пределах которого изменяется $\sqrt{\lambda}$, на сумму не имеющих общих внутренних точек сегментов длины, не превышающей единицу (общее число таких сегментов будет не больше $[2\rho_0] + 1$, где $[2\rho_0]$ — целая часть числа $2\rho_0$). Применяя к каждому из этих сегментов оценку (2.3.3), мы придем к оценке (2.3.7).

Следствие 2. *Для любого $\delta > 0$ и для всех $\lambda \geqslant 1$ равномерно относительно x в каждой строго внутренней подобласти G' области G справедливы оценки*

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_1^{\lambda} u_i^2(x, t)\, t^{\delta - N/2}\, d\rho(t) = O\left(\lambda^{\delta}\right), \tag{2.3.8}$$

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{\lambda}^{\infty} u_i^2(x, t)\, t^{-\delta - N/2}\, d\rho(t) = O\left(\lambda^{-\delta}\right). \tag{2.3.9}$$

В частности, для любого $\delta > 0$ можно утверждать равномерную по x в G' ограниченность величины

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_1^{\infty} u_i^2(x, t)\, t^{-\delta - N/2}\, d\rho(t). \tag{2.3.10}$$

Для доказательства оценки (2.3.8) заметим, что величина, стоящая в левой части (2.3.8), не превосходит

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_1^{([\sqrt{\lambda}]+1)^2} u_i^2(x, t)\, t^{\delta - N/2}\, d\rho(t) = \\ = \sum_{k=1}^{[\sqrt{\lambda}]} \left\{ \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{k \leqslant \sqrt{t} \leqslant k+1} u_i^2(x, t)\, t^{\delta - N/2}\, d\rho(t) \right\}, \tag{2.3.11}$$

где символ $[\sqrt{\lambda}]$ обозначает целую часть числа $\sqrt{\lambda}$.

Так как для всех t, удовлетворяющих условию $k \leqslant \sqrt{t} \leqslant k+1$, справедливо неравенство $t^{\delta-\frac{N}{2}} \leqslant C_0 k^{2\delta-N}$, где $C_0 = \max\{1, 2^{2\delta-N}\}$ (см. п. 2 § 1 гл. 1), то правая часть (2.3.11) мажорируется величиной

$$C_0 \sum_{k=1}^{[\sqrt{\lambda}]} k^{2\delta-N} \left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{k \leqslant \sqrt{t} \leqslant k+1} u_i^2(x, t)\, d\rho(t) \right].$$

Привлекая для величины, заключенной в квадратные скобки, оценку (2.3.3), мы получим, что правая часть (2.3.11) мажорируется суммой

$$CC_0 \sum_{k=1}^{[\sqrt{\lambda}]} k^{2\delta-N} (k+1)^{N-1} = O\left([\sqrt{\lambda}]^{2\delta}\right) = O\left(\lambda^{\delta}\right),$$

что и завершает вывод оценки (2.3.8).

Для вывода оценки (2.3.9) представим левую часть (2.3.9) в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\sqrt{\lambda}+k \leqslant \sqrt{t} \leqslant \sqrt{\lambda}+k+1} u_i^2(x, t)\, t^{-\delta-N/2}\, d\rho(t) \right\}. \qquad (2.3.12)$$

Так как при $\sqrt{\lambda}+k \leqslant \sqrt{t} \leqslant \sqrt{\lambda}+k+1$ справедливо неравенство $t^{-\delta-N/2} \leqslant (\lambda+k)^{-2\delta-N}$, то величина (2.3.12) не превосходит суммы

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{\lambda}+k)^{-2\delta-N} \left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\sqrt{\lambda}+k \leqslant \sqrt{t} \leqslant \sqrt{\lambda}+k+1} u_i^2(x, t)\, d\rho(t) \right],$$

которая в силу оценки (2.3.3) не больше

$$C \sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{\lambda}+k)^{-2\delta-N} (\sqrt{\lambda}+k+1)^{N-1}. \qquad (2.3.13)$$

В п. 2 § 1 гл. 1 при доказательстве следствия 2 из теоремы 1.1 установлено, что сумма (2.3.13) есть $O(\lambda^{-\delta})$. Доказательство следствия 2 завершено.

3. Ядра дробного порядка. Снова рассмотрим произвольное самосопряженное неотрицательное расширение $\widehat{A}$ оператора Лапласа $Lu = -\Delta u$ в произвольной N-мерной области G и относительно него произвольное упорядоченное спектральное представление $L_2(G)$ со спектральной мерой $\rho(\lambda)$, множествами кратности e_i, фундаментальными функциями $u_i(y, \lambda)$ и кратностью $\widehat{m} \leqslant \infty$.

Фиксируя произвольное $h > 0$ и произвольную точку x множества G_h *), назовем *ядром* вещественного положительного по-

*) Напомним, что символ G_h обозначает подмножество G, все точки которого отстоят от границы G на расстояние, большее числа $h > 0$.

рядка α такую функцию $T_\alpha(x, y)$, образ Фурье которой относительно фундаментальной функции $u_i(y, \lambda)$ имеет вид

$$u_i(x, \lambda)(1+\lambda)^\alpha.$$

Лемма 2.2. *Для любого вещественного $\alpha > 0$ ядро $T_\alpha(x, y)$ существует и представляется в виде*

$$T_\alpha(x, y) = A_N^\alpha |x-y|^{\alpha-N/2} K_{N/2-\alpha}(|x-y|) + \chi_\alpha(x, y), \quad (2.3.14)$$

где A_N^α — постоянная, определяемая равенством

$$A_N^\alpha = 2^{1-\alpha}[(2\pi)^{N/2}\Gamma(\alpha)]^{-1},$$

символ $K_\nu(r)$ обозначает функцию Макдональда порядка ν от аргумента r, а $\chi_\alpha(x, y)$ — функция, обладающая в открытой области G непрерывными частными производными по координатам точек x и y сколь угодно высокого порядка.

Доказательство леммы 2.2 полностью аналогично доказательству теоремы 1.6 из п. 1 § 2 гл. 1. Поэтому мы ограничимся краткими указаниями.

Фиксируя произвольное $h > 0$, произвольную точку x множества G_h и произвольный номер m, рассмотрим те же взятые при $R = h$ функции $v_\alpha(r)$ и $w_\alpha(r)$ расстояния $r = |x-y|$ переменной точки y от фиксированной точки x, которые введены соотношениями (1.2.4) и (1.2.5) в п. 1 § 2 гл. 1:

$$\begin{gathered} v_\alpha(r) = \begin{cases} A_N^\alpha r^{\alpha-\frac{N}{2}} K_{\frac{N}{2}-\alpha}(r) & \text{при} \quad r \leqslant h, \\ 0 & \text{при} \quad r > h; \end{cases} \\ w_\alpha(r) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{m} a_k r^{2k} & \text{при} \quad r \leqslant h, \\ 0 & \text{при} \quad r > h. \end{cases} \end{gathered} \quad (2.3.15)$$

Полагая $f(r) = v_\alpha(r) - w_\alpha(r)$ и пользуясь соотношением (2.3.2), получим для образа Фурье $\widehat{f_i}(x, \lambda)$ функции $f(|x-y|)$ следующее выражение:

$$\widehat{f_i}(x, \lambda) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \lambda^{\frac{2-N}{4}} u_i(x, \lambda) \int\limits_0^h [v_\alpha(r) - w_\alpha(r)]\, r^{\frac{N}{2}} \mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}(r\sqrt{\lambda})\, dr,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, \widehat{m}).$$

Подвергая интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, $(m+1)$-кратному интегрированию по частям и проводя дословно преобразования, использованные в п. 1 § 2 гл. 1 при доказательстве теоремы 1.6, получим для образа Фурье $\widehat{f_i}(x, \lambda)$

следующее выражение:

$$\widehat{f}_i(x, \lambda) =$$

$$= \lambda^{-N/4-m/2} 2^{1-\alpha} [\Gamma(\alpha)]^{-1} u_i(x, \lambda) \int_0^h r^\alpha \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+m}(r\sqrt{\lambda}) K_{\frac{N}{2}-\alpha+m+1}(r) dr, \tag{2.3.16}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, \widehat{m}).$$

Пользуясь известным значением интеграла

$$\lambda^{-N/4-m/2} \cdot 2^{1-\alpha} [\Gamma(\alpha)]^{-1} \int_0^\infty r^\alpha \mathcal{J}_{N/2+m}(r\sqrt{\lambda}) K_{N/2+m+1-\alpha}(r) dr = $$
$$= (1+\lambda)^{-\alpha}.$$

придем к другому выражению для образа Фурье:

$$\widehat{f}_i(x, \lambda) = u_i(x, \lambda)(1+\lambda)^{-\alpha} -$$

$$- u_i(x, \lambda) \lambda^{-N/4-m/2} \cdot 2^{1-\alpha} [\Gamma(\alpha)]^{-1} \int_h^\infty r^\alpha \mathcal{J}_{N/2+m}(r\sqrt{\lambda}) K_{N/2+m+1-\alpha}(r) dr,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, \widehat{m}). \tag{2.3.17}$$

Выражения (2.3.16) и (2.3.17) можно записать в виде

$$\widehat{f}_i(x, \lambda) = u_i(x, \lambda)(1+\lambda)^{-\alpha} + \overset{m}{\gamma}(\lambda) u_i(x, \lambda), \quad (i = 1, 2, \ldots, \widehat{m}), \tag{2.3.18}$$

где через $\overset{m}{\gamma}(\lambda)$ обозначена не зависящая от x, y и номера i величина, определяемая любой из следующих двух формул:

$$\overset{m}{\gamma}(\lambda) = \lambda^{-N/4-m/2} \cdot 2^{1-\alpha} [\Gamma(\alpha)]^{-1} \int_h^\infty r^\alpha \mathcal{J}_{N/2+m}(r\sqrt{\lambda}) K_{N/2+m+1-\alpha}(r) dr,$$

$$\overset{m}{\gamma}(\lambda) = -(1+\lambda)^{-\alpha} +$$
$$+ \lambda^{-N/4-m/2} \cdot 2^{1-\alpha} [\Gamma(\alpha)]^{-1} \int_0^h r^\alpha \mathcal{J}_{N/2+m}(r\sqrt{\lambda}) K_{\frac{N}{2}+m+1-\alpha}(r) dr.$$

Из этих двух формул так же, как и в п. 1 § 2 гл. 1, извлекаются следующие две оценки для величины $\overset{m}{\gamma}(\lambda)$:

а) для всех $\lambda \geqslant 1$

$$\left|\overset{m}{\gamma}(\lambda)\right| \leqslant C(h, \alpha, m, N)(1+\lambda)^{-N/4-m/2}; \tag{2.3.19}$$

б) для всех $\lambda \geqslant 0$

$$\left|\overset{m}{\gamma}(\lambda)\right| \leqslant C_1(h, \alpha, m, N). \tag{2.3.20}$$

Если, как и в п. 1 § 2 гл. 1, ввести в рассмотрение функцию $\varphi_\alpha(|x-y|)$, равную

$$\varphi_\alpha(|x-y|)=\begin{cases}-w_\alpha(|x-y|) & \text{при } |x-y|\leqslant h,\\ -A_N^\alpha|x-y|^{\alpha-N/2}K_{N/2-\alpha}(|x-y|) & \text{при } |x-y|>h,\end{cases}\tag{2.3.21}$$

то функцию $f=v_\alpha-w_\alpha$ всюду в области G можно представить в виде

$$f=A_N^\alpha|x-y|^{\alpha-N/2}K_{N/2-\alpha}(|x-y|)+\varphi_\alpha(|x-y|),\tag{2.3.22}$$

где по построению функция $\varphi_\alpha(|x-y|)$ обладает при $x\in G_h$, $y\in G$ непрерывными частными производными как по координатам точки x, так и по координатам точки y до порядка m включительно.

Из соотношения (2.3.18) и из равенства (2.3.22) вытекает, что функция $T_\alpha(x, y)$, имеющая в качестве образа Фурье величину $u_i(x, \lambda)(1+\lambda)^{-\alpha}$, представляется в виде

$$T_\alpha(x, y)=A_N^\alpha|x-y|^{\alpha-N/2}K_{N/2-\alpha}(|x-y|)+\\ +\varphi_\alpha(|x-y|)-\Psi_\alpha(|x-y|),\tag{2.3.23}$$

где $\varphi_\alpha(|x-y|)$ — функция вида (2.3.21), имеющая при $x\in G_h$, $y\in G$ непрерывные частные производные как по координатам x, так и по координатам y до порядка m включительно, m — произвольный фиксированный нами номер, а $\Psi_\alpha(|x-y|)$ функция, спектральное разложение которой имеет вид

$$\Psi_\alpha(|x-y|)=\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^\infty \gamma^m(\lambda)\,u_i(x, \lambda)\,u_i(y, \lambda)\,d\rho(\lambda).\tag{2.3.24}$$

Мы пишем в (2.3.24) знак равенства, ибо докажем, что не только сам интеграл, стоящий в правой части (2.3.24), но и интегралы, полученные его формальным дифференцированием (под знаком интеграла) по координатам точек x и y до порядка, неограниченно возрастающего с ростом номера m, сходятся равномерно при $x\in G_h$, $y\in G$.

Этим и будет завершено доказательство леммы 2.2, ибо фигурирующая в представлении (2.3.14) функция $\chi_\alpha(x, y)$ может быть взята в виде разности двух функций $\varphi_\alpha(|x-y|)-\Psi_\alpha(|x-y|)$, каждая из которых имеет при $x\in G_h$, $y\in G_h$ непрерывные частные производные по координатам x и y до порядка, неограниченно возрастающего с ростом номера m.

Итак, нам остается доказать, что при произвольных фиксированных номерах p и q и для всех достаточно больших m интеграл

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^\infty \gamma^m(\lambda)\,u_i^{(p)}(x, \lambda)\,u_i^{(q)}(y, \lambda)\,d\rho(\lambda),\tag{2.3.25}$$

в котором символ $u_i^{(p)}(x, \lambda)$ обозначает любую частную производную фундаментальной функции $u_i(x, \lambda)$ по координатам точки x порядка p, а символ $u_i^{(q)}(y, \lambda)$ обозначает любую частную производную фундаментальной функции $u_i(y, \lambda)$ по координатам точки y порядка q, сходится равномерно по совокупности (x, y) на множестве $(G_h \times G_h)$.

В силу неравенства Коши — Буняковского для этого достаточно доказать два утверждения:

1) для произвольного фиксированного номера p и для всех достаточно больших m интеграл

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\infty \left| \overset{m}{\gamma}(\lambda) \right| \left| u_i^{(p)}(x, \lambda) \right|^2 d\rho(\lambda) \tag{2.3.26}$$

сходится равномерно относительно x на множестве G_h;

2) для произвольного фиксированного номера q и для всех достаточно больших m интеграл

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\infty \left| \overset{m}{\gamma}(\lambda) \right| \left| u_i^{(q)}(y, \lambda) \right|^2 d\rho(\lambda)$$

сходится равномерно относительно y на множестве G_h.

Мы ограничимся доказательством утверждения 1), ибо утверждение 2) доказывается аналогично.

Пусть μ_0 — некоторое фиксированное достаточно большое число. Положим по аналогии с п. 1 § 2 гл. 1

$$\overset{m}{\gamma}{}'(\lambda) = \begin{cases} \overset{m}{\gamma}(\lambda) & \text{при} \quad \lambda \geqslant \mu_0, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda < \mu_0; \end{cases}$$

$$\overset{m}{\gamma}{}''(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \lambda \geqslant \mu_0, \\ \overset{m}{\gamma}(\lambda) & \text{при} \quad \lambda < \mu_0. \end{cases}$$

Тогда для доказательства утверждения 1) нам достаточно доказать, что каждый из двух интегралов

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\infty \left| \overset{m}{\gamma}{}'(\lambda) \right| \left| u_i^{(p)}(x, \lambda) \right|^2 d\rho(\lambda),$$

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\infty \left| \overset{m}{\gamma}{}''(\lambda) \right| \left| u_i^{(p)}(x, \lambda) \right|^2 d\rho(\lambda) \tag{2.3.27}$$

сходится при фиксированном номере p и при всех достаточно больших m равномерно относительно x на G_h.

Это последнее доказывается в полной аналогии с п. 1 § 2 гл. 2 при помощи двух вспомогательных утверждений:

I) *для любого* $\delta > 0$ *при достаточно большом* $\mu_0 > 0$ *интеграл*

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\infty |u_i^{(k)}(x, \lambda)|^2 \beta^2(\lambda)\, d\rho(\lambda), \tag{2.3.28}$$

в котором

$$\beta(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+\lambda)^{-N/4-p/2-\delta/4} & \text{при} \quad \lambda \geqslant \mu_0, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda < \mu_0, \end{cases} \tag{2.3.29}$$

сходится равномерно относительно x *в* G_h:

II) *для любого фиксированного номера* p *интеграл*

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\infty |u_i^{(p)}(x, \lambda)|^2 \delta^2(\lambda)\, d\rho(\lambda), \tag{2.3.30}$$

в котором при фиксированном в утверждении I *числе* $\mu_0 > 0$ *величина* $\delta(\lambda)$ *имеет вид*

$$\delta(\lambda) = \begin{cases} 3/4 & \text{при} \quad \lambda \leqslant \mu_0, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda > \mu_0, \end{cases}$$

сходится равномерно относительно x *в* G_h.

Доказательство утверждений I и II совершенно идентично доказательству лемм 1.2 и 1.3 из п. 2 § 2 гл. 1; нужно лишь вместо коэффициентов Фурье рассмотренных в этих леммах функций $f(r)$ взять образы Фурье этих функций, вместо равенств Парсеваля в форме (1.2.36) и (1.2.43) взять равенство Парсеваля в форме

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\infty |\widehat{f}^{(p)}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) = \int_G [f^{(p)}]^2\, dy,$$

где символ $\widehat{f^{(p)}}(\lambda)$ обозначает образ Фурье функции $f^{(p)}$, и, наконец, вместо признака Дини равномерной сходимости функционального ряда использовать признак Дини равномерной по параметру сходимости несобственного интеграла.

Ограничившись этими указаниями, закончим тем, что для доказательства равномерной по $x \in G_h$ сходимости первого из интегралов (2.3.27) достаточно заметить, что в силу оценки (2.3.19) этот интеграл при $m > N/2 + 2p$ с точностью до постоянного множителя*) $\frac{1}{4} C(h, \alpha, m, N)$ будет равномерно на G_h мажорироваться интегралом (2.3.28), у которого $\beta(\lambda)$ определяется равенством (2.3.29) при $\delta = m - N/2 - 2p > 0$.

Аналогично для доказательства равномерной по $x \in G_h$ сходимости второго из интегралов (2.3.27) достаточно заметить, что в силу оценки (2.3.20) этот интеграл с точностью до постоянного множителя будет равномерно на G_h мажорироваться интегралом (2.3.30).

---

*) Здесь $C(h, \alpha, m, N)$ — постоянная из оценки (2.3.19).

Тем самым доказательство леммы 2.2 можно считать завершенным.

Замечание. Из равенства $f(r)=v_\alpha(r)-w_\alpha(r)$ и из представления для образа Фурье (2.3.18) вытекает, что для любого $h>0$ ядро $T_\alpha(x, y)$ при $x\in G_h$, $y\in G$ может быть представлено в виде

$$T_\alpha(x, y)=[v_\alpha(|x-y|)-w_\alpha(|x-y|)]-\Psi_\alpha(x, y), \quad (2.3.31)$$

где $v_\alpha(r)$ и $w_\alpha(r)$ — функции, определяемые соотношениями (2.3.15), а $\Psi_\alpha(x, y)$ — функция, спектральное разложение которой имеет вид (2.3.24).

В этом представлении разность $[v_\alpha(|x-y|)-w_\alpha(|x-y|)]$ представляет собой «сглаженное» ядро Бесселя — Макдональда (равное разности обычного ядра Бесселя — Макдональда и многочлена в шаре $|x-y|\leqslant h$, равное нулю вне шара $|x-y|\leqslant h$ и обладающее всюду при $(x, y)\in G\times G$, кроме точек $x=y$, непрерывными частными производными до наперед фиксированного порядка m).

Функция же $\Psi_\alpha(x, y)$ такова, что для любой функции $g(y)$ из класса $L_2(G)$ функция $F(x)$, определяемая равенством

$$F(x)=\int_G \Psi_\alpha(x, y)\, g(y)\, dy, \quad (2.3.32)$$

имеет в G_h непрерывные частные производные до порядка, неограниченно растущего с ростом номера m. (Это вытекает из представления (2.3.24), из равенства Парсеваля (2.1.10), из п. 2 § 3 и из равномерной по x в G_h сходимости интеграла (2.3.26).)

Кроме того, при достаточно большом номере m из неравенства Коши — Буняковского и из равномерной в G_h сходимости интеграла (2.3.26) вытекает, что средние Рисса *любого неотрицательного порядка* s спектрального разложения функции (2.3.32)

$$E_\lambda^s F(x)=\sum_{i=1}^{\widetilde{m}}\int_0^\lambda u_i(x, \lambda)\, \overset{m}{\gamma}(t)\, \widehat{g}_i(t)\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho(t), \quad (2.3.33)$$

где $\widehat{g}_i(\lambda)$ — образ Фурье функции $g(y)$, сходятся равномерно по x в G_h.

§ 4. Доказательство негативной теоремы 2.1

Весь настоящий параграф посвящен доказательству основной теоремы негативного типа — теоремы 2.1, сформированной в п. 1 § 2. При этом будет установлен ряд результатов, имеющих самостоятельный интерес.

1. Оценка снизу функций Лебега средних Рисса.

Лемма 2.3. *Пусть G — произвольная область в пространстве E^N, $\widehat{A}$ — произвольное самосопряженное неотрицательное расши-*

рение оператора Лапласа $Lu = -\Delta u$ в области G, относительно которого взято произвольное упорядоченное спектральное представление пространства $L_2(G)$ со спектральной мерой $\rho(\lambda)$, множествами кратности e_i, фундаментальными функциями $u_i(x, \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, \widehat{m})$ и кратностью $\widehat{m} \leqslant \infty$. Пусть далее x_0 — любая фиксированная внутренняя точка области G, символ $r = |x_0 - y|$ обозначает расстояние между точкой x_0 и переменной точкой y, E — кольцевой слой вида $E = \{R^4/4 \leqslant |x_0 - y| \leqslant R^4\}$, целиком содержащийся в области G. Тогда для любого $s \geqslant 0$ положительное число R можно фиксировать настолько малым, что для некоторого $\alpha_0 > 0$ и для всех достаточно больших λ будет справедливо неравенство

$$\int\limits_E \left| \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_0^{\lambda} u_i(x_0, t)\, u_i(y, t) \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho(t) \right| dy \geqslant \alpha_0 \lambda^{\frac{N-1}{4} - \frac{s}{2}}. \quad (2.4.1)$$

Прежде чем доказывать лемму 2.3, выясним смысл неравенства (2.4.1). Возвращаясь к пп. 1 и 2 § 1, заметим, что при подстановке образа Фурье (2.1.8) в спектральное разложение (2.1.9), взятое при $\mu = 0$, мы получим, что

$$E_\lambda f(x) = \int\limits_G \left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_0^{\lambda} u_i(x, t)\, u_i(y, t)\, d\rho(t) \right] f(y)\, dy, \quad (2.4.2)$$

откуда в силу теоремы Гординга (точнее, в силу соотношения (2.1.2)) величина, стоящая в (2.4.2) в квадратных скобках, т. е. величина

$$\theta(x, y, \lambda) = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_0^{\lambda} u_i(x, t)\, u_i(y, t)\, d\rho(t), \quad (2.4.3)$$

является спектральной функции расширения $\widehat{A}$.

Но тогда в силу соотношения (2.1.5), взятого при $\mu = 0$, величина

$$\theta^s(x, y, \lambda) = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_0^{\lambda} u_i(x, t)\, u_i(y, t) \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho(t) \quad (2.4.4)$$

является средним Рисса спектральной функции расширения $\widehat{A}$ порядка $s \geqslant 0$.

Таким образом, неравенство (2.4.1) может быть переписано в виде

$$\int\limits_E |\theta^s(x_0, y, \lambda)|\, dy \geqslant \alpha_0 \lambda^{\frac{N-1}{4} - \frac{s}{2}}. \quad (2.4.1')$$

Напомним, что в теории функций*) обычно вводят в рассмотрение функции вида

$$L_\lambda(x) = \int\limits_G |\theta(x, y, \lambda)|\, dy,$$

которые принято называть *функциями Лебега* рассматриваемого разложения. В соответствии с этим функции вида

$$L_\lambda^{(s)}(x) = \int\limits_G |\theta^s(x, y, \lambda)|\, dy$$

естественно назвать *функциями Лебега средних Рисса* порядка s рассматриваемого спектрального разложения.

Так как

$$\int\limits_G |\theta^s(x_0, y, \lambda)|\, dy \geqslant \int\limits_E |\theta^s(x_0, y, \lambda)|\, dy,$$

то неравенство (2.4.1′), а стало быть, и неравенство (2.4.1) устанавливает оценку снизу функций Лебега средних Рисса порядка $s \geqslant 0$ изучаемого спектрального разложения.

Доказательство леммы 2.3. Фиксируя произвольную точку x_0 внутри G и считая, что положительное число R во всяком случае меньше расстояния x_0 от границы G, рассмотрим при любом $\lambda > 0$ следующую функцию расстояния $r = |x_0 - y|$ переменной точки y от фиксированной нами точки x_0:

$$\overset{\lambda}{v}(r) = \begin{cases} \Gamma(s+1)\cdot 2^s (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \lambda^{\frac{N}{4} - \frac{s}{2}} r^{-\left(\frac{N}{2}+s\right)} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}\left(r\sqrt{\lambda}\right) & \text{при } r \leqslant R, \\ 0 & \text{при } r > R. \end{cases} \tag{2.4.5}$$

В силу соотношения (2.3.1) из п. 1 § 3 этой гл. образ Фурье $\widehat{v_i^\lambda}(x_0, t)$ функции (2.4.5) относительно фундаментальной функции $u_i(y, t)$ имеет вид

$$\widehat{v_i^\lambda}(x_0, t) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} t^{\frac{2-N}{4}} u_i(x_0, t) \int\limits_0^R \overset{\lambda}{v}(r)\, r^{\frac{N}{2}} \mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}\left(r\sqrt{t}\right) dr, \tag{2.4.6}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, \widehat{m}).$$

Подставим в (2.4.6) на место $\overset{\lambda}{v}(r)$ конкретное значение (2.4.5) этой функции и после этого преобразуем интеграл $\int\limits_0^R$ с помощью соотношения $\int\limits_0^R = \int\limits_0^\infty - \int\limits_R^\infty$.

---

*) См., например, § 5 и 9 книги С. Качмажа и Г. Штейнгауза [1] и гл. 3 книги Г. Алексича [1].

Воспользуемся при этом известным значением интеграла*)

$$\Gamma(s+1)\cdot 2^s\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}t^{\frac{2-N}{4}}\int\limits_0^\infty \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{\frac{N}{2}-1}(r\sqrt{t})\,r^{-s}\,dr = \delta_t^\lambda\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s,$$

в котором

$$\delta_t^\lambda = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t<\lambda, \\ 0 & \text{при} \quad t\geqslant\lambda, \end{cases} \tag{2.4.7}$$

причем при $s=0$, $t=\lambda$ следует считать, что $\delta_t^\lambda = 1/2$, $(1-t/\lambda)^s=1$.

В результате получим для образа Фурье $\widehat{v}_i^\lambda(x_0, t)$ следующее выражение:

$$\widehat{v}_i^\lambda(x_0, t) = \delta_t^\lambda u_i(x_0, t)\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s - \Gamma(s+1)\cdot 2^s\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}t^{\frac{2-N}{4}}u_i(x_0, t)\,I_t^\lambda(R), \tag{2.4.8}$$

$$(i=1, 2, \ldots, \widehat{m}),$$

в котором через $I_t^\lambda(R)$ обозначен следующий интеграл:

$$I_t^\lambda(R) = \int\limits_R^\infty \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{\frac{N}{2}-1}(r\sqrt{t})\,r^{-s}\,dr, \tag{2.4.9}$$

причем при $s=0$, $t=\lambda$ из правой части (2.4.9) следует вычесть число $1/2\sqrt{\lambda}$.

В дальнейших рассуждениях важную роль будут играть следующие две оценки для величины (2.4.9):

а) при любых $s\geqslant 0$, $t\geqslant 1$, $\lambda\geqslant 1$ и $|\sqrt{\lambda}-\sqrt{t}|\leqslant 1$

$$|I_t^\lambda(R)| \leqslant C_1R^{-s}\lambda^{-\frac{1}{4}}t^{-\frac{1}{4}}; \tag{2.4.10}$$

б) при любых $s\geqslant 0$, $t\geqslant 1$, $\lambda\geqslant 1$ и $|\sqrt{\lambda}-\sqrt{t}|\geqslant 1$

$$|I_t^\lambda(R)| \leqslant C_2R^{-1-s}\lambda^{-1/4}t^{-1/4}|\sqrt{\lambda}-\sqrt{t}|^{-1} \tag{2.4.11}$$

(постоянные C_1 и C_2 не зависят от λ, t и R).

Чтобы не прерывать доказательство леммы 2.3, отнесем доказательство оценок (2.4.10) и (2.4.11) в отдельный пункт после завершения доказательства леммы 2.3.

Считая, что оценки (2.4.10) и (2.4.11) доказаны, умножим обе части (2.4.8) на фундаментальную функцию $u_i(y, t)$ и полученное при этом равенство просуммируем по всем номерам i от 1 до $\widehat{m}$ и проинтегрируем по спектральной мере $\rho(t)$ в пределах по t от нуля до Λ, где $\Lambda(\lambda)$ — достаточно большое число,

*) См., например, Г. Бейтмен и А. Эрдейи [1, с. 107, формула 34)]

выбор которого мы уточним ниже. В результате получим*)

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^{\Lambda}\widehat{v}_t^{\lambda}(x_0,t)\,u_i(y,t)\,d\rho(t)=\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^{\lambda}u_i(x_0,t)\,u_i(y,t)\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho(t)-$$
$$-\Gamma(s+1)\cdot 2^s\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^{\Lambda}u_i(x_0,t)\,u_i(y,t)\,t^{\frac{2-N}{4}}\,I_t^{\lambda}(R)\,d\rho(t). \quad (2.4.12)$$

Из (2.4.12) и из неравенства $|A-B|\geqslant|A|-|B|$ вытекает следующее неравенство:

$$\left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^{\lambda}u_i(x_0,t)\,u_i(y,t)\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho(t)\right|\geqslant\left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^{\Lambda}\widehat{v}_t^{\lambda}(x_0,t)\,u_i(y,t)\,d\rho(t)\right|-$$
$$-\Gamma(s+1)\cdot 2^s\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\left|\int_0^{\Lambda}u_i(x_0,t)\,u_i(y,t)\,t^{\frac{2-N}{4}}I_t^{\lambda}(R)\,d\rho(t)\right|,$$

интегрирование которого в координатах точки y по кольцевому слою $E=\{R^4/4\leqslant|x_0-y|\leqslant R^4\}$ дает

$$\int_E\left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^{\lambda}u_i(x_0,t)\,u_i(y,t)\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho(t)\right|dy\geqslant$$
$$\geqslant\int_E\left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^{\Lambda}\widehat{v}_i^{\lambda}(x_0,t)\,u_i(y,t)\,d\rho(t)\right|dy-$$
$$-\Gamma(s+1)\cdot 2^s\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}\int_E\left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^{\Lambda}u_i(x_0,t)\,u_i(y,t)\,t^{\frac{2-N}{4}}\,I_t^{\lambda}(R)\,d\rho(t)\right|dy.$$
$$(2.4.13)$$

Так как при любом фиксированном $\lambda>0$ функция $\overset{\lambda}{v}(|x_0-y|)$ принадлежит классу $L_2(G)$, то в силу теоремы Гординга — Браудера — Маутнера (см. п. 2 § 1 этой гл.) при любом фиксированном λ

$$\lim_{\Lambda\to\infty}\int_E\left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^{\Lambda}\widehat{v}_t^{\lambda}(x_0,t)\,u_i(y,t)\,d\rho(t)\right|dy=\int_E\left|\overset{\lambda}{v}(|x_0-y|)\right|dy. \quad (2.4.14)$$

Докажем теперь, что *существует положительная постоянная* β, *зависящая только от* s *и от* N *и такая, что для любого* $R>0$

---

*) Мы учитываем при этом равенство (2.4.7) и пользуемся тем, что при любых фиксированных λ и Λ все три интеграла в (2.4.12) сходятся абсолютно. Чтобы убедиться в этом, достаточно к каждому из этих интегралов применить неравенство Коши — Буняковского и воспользоваться равенством Парсеваля (2.1.11) из п. 2 § 1 для принадлежащей классу $L_2(G)$ функции $\overset{\lambda}{v}(|x_0-y|)$, оценкой (2.3.7) из п. 2 § 3, взятой при $\mu=\sqrt{\lambda}$, и оценками (2.4.10) и (2.4.11).

и для всех λ, превосходящих некоторое положительное число $\lambda_0(R)$, справедливо неравенство

$$\int_E \left|\overset{\lambda}{v}(|x_0-y|)\right| dy \geqslant 3\beta R^{2N-2-4s}\lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}}. \qquad (2.4.15)$$

В самом деле, в силу определения функции (2.4.5) и вида кольцевого слоя E получим *)

$$\int_E \left|\overset{\lambda}{v}(|x_0-y|)\right| dy =$$

$$= \Gamma(s+1)\cdot 2^s (2\pi)^{-\frac{N}{2}}\omega_N \lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}} \int_{R^4/4}^{R^4} \left|\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}\left(r\sqrt{\lambda}\right)\right| r^{\frac{N}{2}-s-1} dr. \qquad (2.4.16)$$

В правой части (2.4.16) воспользуемся асимптотической формулой для бесселевой функции

$$\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}\left(r\sqrt{\lambda}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi r\sqrt{\lambda}}}\cos\left[r\sqrt{\lambda}-\frac{\pi}{2}\left(\frac{N}{2}+s\right)-\frac{\pi}{4}\right] + O\left(r^{-\frac{3}{2}}\lambda^{-\frac{3}{4}}\right)$$

и тривиальным неравенством

$$\left|\cos\left[r\sqrt{\lambda}-\frac{\pi}{2}\left(\frac{N}{2}+s\right)-\frac{\pi}{4}\right]\right| \geqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left[2r\sqrt{\lambda}-\pi\left(\frac{N}{2}+s\right)-\frac{\pi}{2}\right].$$

Мы получим при этом, что

$$\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}} \int_{R^4/4}^{R^4} \left|\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}\left(r\sqrt{\lambda}\right)\right| r^{\frac{N}{2}-s-1} dr \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}} \int_{R^4/4}^{R^4} r^{\frac{N-1}{2}-s-1} dr + \right.$$

$$\left. + \lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}} \int_{R^4/4}^{R^4} r^{\frac{N-1}{2}-s-1} \cos\left[2r\sqrt{\lambda}-\pi\left(\frac{N}{2}+s\right)-\frac{\pi}{2}\right] dr\right\} -$$

$$- \lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \int_{R^4/4}^{R^4} \left|O\left(r^{\frac{N-1}{2}-s-2}\right)\right| dr. \qquad (2.4.17)$$

---

*) Через ω_N обозначена площадь поверхности N-мерной сферы единичного радиуса, равная $2\pi^{N/2}\left[\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\right]^{-1}$.

Заметим теперь, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}}\int\limits_{R^4/4}^{R^4} r^{\frac{N-1}{2}-s-1}\,dr =$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{(1-2^{2s-N+1})}{\left(\dfrac{N-1}{2}-s\right)}R^{2N-2-4s}\lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}} & \text{при}\quad s\neq\dfrac{N-1}{2},\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\ln 4 & \text{при}\quad s=\dfrac{N-1}{2},\end{cases}\qquad (2.4.18)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}}\int\limits_{R^4/4}^{R^4} r^{\frac{N-1}{2}-s-1}\cos\left[2r\sqrt{\lambda}-\pi\left(\frac{N}{2}+s\right)-\frac{\pi}{2}\right]dr =$$

$$= R^{2N-2-4s}\lambda^{\frac{N-1}{4}-s/2}O\left(\frac{R^4+1}{\sqrt{\lambda}}\right),\qquad (2.4.19)$$

$$\lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\int\limits_{R^4/4}^{R^4}\left|O\left(r^{\frac{N-1}{2}-s-2}\right)\right|dr = R^{2N-2-4s}\lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}}O\left(\frac{R^4}{\sqrt{\lambda}}\right).\ (2.4.20)$$

Из соотношений (2.4.17)—(2.4.20) и из равенства (2.4.16) мы получим, что справедливо (при всех $R>0$ и всех $\lambda\geqslant\lambda_0(R)$) неравенство (2.4.15) с постоянной β, имеющей вид

$$\beta=\begin{cases}\Gamma(s+1)\cdot 2^s(2\pi)^{-\frac{N+1}{2}}\dfrac{\omega_N}{6}\left(1-2^{2s-N+1}\right)\left(\dfrac{N-1}{2}-s\right)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при}\quad s\neq\dfrac{N-1}{2},\\[2ex] \Gamma(s+1)\cdot 2^s(2\pi)^{-\frac{N+1}{2}}\dfrac{\omega_N}{6}\ln 4 \qquad\qquad \text{при}\quad s=\dfrac{N-1}{2}.\end{cases}$$

Соотношение (2.4.14) и неравенство (2.4.15) позволяют нам для каждого достаточно большого $\lambda>0$ фиксировать число $\Lambda=\Lambda(\lambda)$ столь большим, что будет справедливо неравенство

$$\int\limits_E\left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_0^\Lambda \widehat{v}_t^\lambda(x_0,t)\,u_i(y,t)\,d\rho(t)\right|dy\geqslant 2\beta R^{2N-2-4s}\lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}}.\quad (2.4.21)$$

(β — та же самая постоянная, что и в (2.4.15)).

Из неравенств (2.4.13) и (2.4.21) вытекает, что *для установления искомого неравенства* (2.4.1) *достаточно доказать, что положительное число* $R>0$ *можно фиксировать столь малым, что при всех достаточно больших* $\lambda>0$ *и при любых* Λ *будет справедливо неравенство*

$$\Gamma(s+1)\cdot 2^s\lambda^{1/4}\int\limits_E\left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_0^\Lambda u_i(x_0,t)\,u_i(y,t)\,t^{\frac{2-N}{4}}I_t^\lambda(R)\,d\rho(t)\right|dy\leqslant$$

$$\leqslant\beta R^{2N-2-4s}\qquad (2.4.22)$$

с той же самой постоянной β, *что и в* **(2.4.15)**.

Для доказательства неравенства (2.4.22) разобьем интеграл, стоящий в (2.4.22), на сумму четырех интегралов. Таким путем мы сведем доказательство справедливости неравенства (2.4.22) к доказательству справедливости (при достаточно малом $R>0$, при достаточно большом $\lambda>0$ и при любом Λ) следующих четырех неравенств:

$$S_1 = \Gamma(s+1)\cdot 2^s\lambda^{1/4}\int_E \left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_{0\leqslant\sqrt{t}\leqslant 1}\left[u_i(x_0,t)\,u_i(y,t)\,t^{\frac{2-N}{4}}I_t^{\lambda}(R)\right]d\rho(t)\right|dy\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\beta}{4}R^{2N-2-4s},\quad (2.4.23)$$

$$S_2 = \Gamma(s+1)\cdot 2^s\lambda^{1/4}\int_E \left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_{\substack{1\leqslant\sqrt{t}\leqslant\sqrt{\lambda}/2\\ \frac{3}{2}\sqrt{\lambda}\leqslant\sqrt{t}\leqslant\sqrt{\Lambda}}}[\ldots]\,d\rho(t)\right|dy\leqslant\frac{\beta}{4}R^{2N-2-4s},$$

(2.4.24)

$$S_3 = \Gamma(s+1)\cdot 2^s\lambda^{1/4}\int_E \left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_{|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant 1}[\ldots]\,d\rho(t)\right|dy\leqslant\frac{\beta}{4}R^{2N-2-4s},$$

(2.4.25)

$$S_4 = \Gamma(s+1)\cdot 2^s\lambda^{1/4}\int_E \left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_{1\leqslant|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant\sqrt{\lambda}/2}[\ldots]\,d\rho(t)\right|dy\leqslant\frac{\beta}{4}R^{2N-2-4s}$$

(2.4.26)

(β — та же постоянная, что и в (2.4.15); квадратные скобки в (2.4.24) — (2.4.26) обозначают ту же величину, что и в (2.4.23)).

Перейдем к доказательству неравенств (2.4.23) — (2.4.26).

Применяя к интегралам по кольцевому слою E, стоящим в левых частях (2.4.23) — (2.4.26), неравенство Коши — Буняковского и замечая, что $\int_E dy = O\left(R^{4N}\right)$, получим (используя также равенство Парсеваля (2.1.11) из п. 2 § 1) следующие оценки для величин, стоящих в левых частях (2.4.23) — (2.4.26):

$$S_1 = O\left(R^{2N}\right)\sqrt{\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_{0\leqslant\sqrt{t}\leqslant 1}\left\{u_i^2(x_0,t)\,\lambda^{1/2}t^{\frac{2-N}{2}}\left[I_t^{\lambda}(R)\right]^2\right\}d\rho(t)},$$

(2.4.27)

$$S_2 = O\left(R^{2N}\right)\sqrt{\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_{\substack{1\leqslant\sqrt{t}\leqslant\sqrt{\lambda}/2\\ \frac{3}{2}\sqrt{\lambda}\leqslant\sqrt{t}\leqslant\sqrt{\Lambda}}}\{\ldots\}\,d\rho(t)},\qquad (2.4.28)$$

$$S_3 = O\left(R^{2N}\right) \sqrt{\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}| \leqslant 1} \{\ldots\}\, d\rho(t)}, \tag{2.4.29}$$

$$S_4 = O\left(R^{2N}\right) \sqrt{\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{1 \leqslant |\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}| \leqslant \sqrt{\lambda}/2} \{\ldots\}\, d\rho(t)} \tag{2.4.30}$$

(фигурные скобки в (2.4.28) — (2.4.30) обозначают ту же величину, что и в (2.4.27)).

Неравенства (2.4.23) — (2.4.26) будут установлены, если мы докажем, что каждая из величин S_1, S_2, S_3 и S_4 есть $o(R^{2N-2-4s})$ для всех $R > 0$, всех Λ и всех достаточно больших $\lambda > 0$ *).

Сначала докажем, что $S_1 = o(R^{2N-2-4s})$. Для этого отдельно рассмотрим два случая: 1) $s \leqslant \frac{N-1}{2}$; 2) $s > \frac{N-1}{2}$. В первом случае мы докажем, что $S_1 = O(R^{2N})$, а во втором случае докажем, что $S_1 = O\left(R^{2N+\frac{N-1}{2}-s}\right)$. Тем самым будет доказано, что в обоих случаях $S_1 = o(R^{2N-2-4s})$.

В случае $s \leqslant (N-1)/2$ из соотношения (2.4.8) заключаем, что **)

$$\sqrt{\lambda}\, u_i^2(x_0, t)\, t^{\frac{2-N}{2}} \left[I_t^{\lambda}(R)\right]^2 =$$

$$= \left[\Gamma(s+1)\, 2^s\right]^{-2} \lambda^{s-\frac{N-1}{2}} \left[\delta_t^{\lambda} u_i(x_0, t)\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s - \widehat{v}_i^{\lambda}(x_0, t)\right]^2, \tag{2.4.31}$$

а из соотношения (2.4.6) с учетом оценки $|\mathcal{J}_\nu(x)| \leqslant C(\nu)\,|x|^\nu$ получаем, что ***)

$$\left|\widehat{v}_i^{\lambda}(x_0, t)\right| \leqslant C_1\, |u_i(x_0, t)| \int\limits_0^R \left|\overset{\lambda}{v}(r)\right| r^{N-1}\, dr. \tag{2.4.32}$$

Сопоставляя (2.4.32) с оценкой

$$\left|\overset{\lambda}{v}(r)\right| \leqslant C_2 \lambda^{\frac{N-1}{4} - \frac{s}{2}} r^{-\left(\frac{N+1}{2}+s\right)},$$

вытекающей из (2.4.5) и из неравенства $|\mathcal{J}_\nu(x)| \leqslant C_1(\nu)\,|x|^{-1/2}$, мы получим, что

$$\left|\widehat{v}_i^{\lambda}(x_0, t)\right| \leqslant C_3\, |u_i(x_0, t)|\, \lambda^{\frac{N-1}{4} - \frac{s}{2}} R^{\frac{N-1}{2} - s}. \tag{2.4.33}$$

Из (2.4.31) и (2.4.33) и из того, что число R мы можем считать меньшим единицы, а число λ — большим единицы.

*) Тогда, каково бы ни было $\beta > 0$, неравенства (2.4.23) — (2.4.26) заведомо будут справедливы при достаточно малом $R > 0$.

**) Напоминаем, что при $s = 0$, $t = \lambda$ следует считать, что $\delta_t^{\lambda} = 1/2$, $(1 - t/\lambda)^s = 1$.

***) В дальнейшем символом C_j $(j = 1, 2, \ldots)$ мы обозначаем постоянные, зависящие только от N и s.

получим неравенство

$$\sqrt{\lambda} u_i^2(x_0, t)\, t^{\frac{2-N}{2}} \left[I_t^\lambda(R)\right]^2 \leqslant C_4 u_i^2(x_0, t). \tag{2.4.34}$$

Наконец, из (2.4.34) и (2.4.27) заключаем, что для рассматриваемого случая $s \leqslant (N-1)/2$ в силу оценки (2.3.3), из п. 1 § 3, взятой при $\mu = 0$,

$$S_1 = O\left(R^{2N}\right) \sqrt{\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{0 \leqslant \sqrt{t} \leqslant 1} u_i^2(x_0, t)\, d\rho(t)} = O\left(R^{2N}\right).$$

Рассмотрим теперь второй случай $s > (N-1)/2$. В этом случае на основании (2.4.9) получим

$$\lambda^{\frac{1}{2}} t^{\frac{2-N}{2}} \left[I_t^\lambda(R)\right]^2 =$$
$$= \lambda^{\frac{1}{2}} \left\{ \int\limits_0^R \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}\left(r\sqrt{\lambda}\right) \mathcal{J}_{\frac{N}{2}-1}\left(r\sqrt{t}\right) \left(r\sqrt{t}\right)^{1-\frac{N}{2}} r^{\frac{N}{2}-s-1}\, dr \right\}.$$

Из последнего соотношения и из оценок для бесселевых функций

$$\left|\mathcal{J}_{\frac{N}{2}-1}\left(r\sqrt{t}\right)\right| \leqslant C_5 \left(r\sqrt{t}\right)^{\frac{N}{2}-1}, \quad \left|\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}\left(r\sqrt{\lambda}\right)\right| \leqslant C_6 r^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{4}}$$

получаем неравенство

$$\lambda^{1/2} t^{\frac{2-N}{2}} \left[I_t^\lambda(R)\right]^2 \leqslant C_7 R^{N-1-2s}, \tag{2.4.35}$$

подстановка которого в (2.4.27) после использования оценки (2.3.3) из п. 1 § 3, взятой при $\mu = 0$, окончательно дает

$$S_1 = O\left(R^{2N+\frac{N-1}{2}-s}\right) \sqrt{\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{0 \leqslant \sqrt{t} \leqslant 1} u_i^2(x_0, t)\, d\rho(t)} = O\left(R^{2N+\frac{N-1}{2}-s}\right).$$

Итак, доказано, что в обоих случаях $S_1 = o(R^{2N-2-4s})$. Переходим к доказательству оценки $S_2 = o(R^{2N-2-4s})$.

Так как в интеграле (2.4.28) либо $1 \leqslant \sqrt{t} \leqslant \sqrt{\lambda}/2$, либо $\frac{3}{2}\sqrt{\lambda} \leqslant \sqrt{t} \leqslant \sqrt{\lambda}$, то для $I_t^\lambda(R)$ можно использовать оценку (2.4.11), которую в этом случае можно переписать в виде

$$\left|I_t^\lambda(R)\right| \leqslant C_8 t^{-3/4} \lambda^{-1/4} R^{-1-s}. \tag{2.4.36}$$

Из (2.4.36) и (2.4.28) заключаем, что

$$S_2 = O\left(R^{2N-1-s}\right) \sqrt{\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\sqrt{t} \geqslant 1} u_i^2(x_0, t)\, t^{-\frac{N-1}{2}}\, d\rho(t)}, \tag{2.4.37}$$

а из (2.4.37) и из ограниченности интеграла (2.3.10) при любом

$\delta > 0$ (см. п. 2 § 3 этой гл.) окончательно получим, что $S_2 = o(R^{2N-2-4s})$.

Убедимся теперь, что $S_3 = o(R^{2N-2-4s})$. Подставляя в (2.4.29) оценку (2.4.10) для величины $I_t^\lambda(R)$ и пользуясь оценкой (2.3.7) из п. 2 § 3, взятой при $\rho_0 = 1$, получим

$$S_3 = O\left(R^{2N-s}\right)\sqrt{\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant 1} u_i^2(x_0, t)\, t^{\frac{1-N}{2}}\, d\rho(t)} =$$

$$= O\left(R^{2N-s}\right)\sqrt{\lambda^{\frac{1-N}{2}} \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant 1} u_i^2(x_0, t)\, d\rho(t)} =$$

$$= O\left(R^{2N-s}\right) = o\left(R^{2N-2-4s}\right).$$

Остается доказать, что $S_4 = o(R^{2N-2-4s})$.

Обозначим через p наименьший из номеров, для которого $2^p \geqslant \sqrt{\lambda}/2$. Тогда сегмент $[1, \sqrt{\lambda}/2]$ покрывается системой сегментов $[2^{l-1}, 2^l]$, $l = 1, 2, \ldots, p$.

Пользуясь оценкой (2.4.11), мы можем следующим образом мажорировать величину, стоящую в (2.4.30) под знаком корня:

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{1\leqslant|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant\sqrt{\lambda}/2} u_i^2(x_0, t)\, \lambda^{\frac{1}{2}} t^{\frac{2-N}{2}} \left[I_t^\lambda(R)\right]^2 d\rho(t) \leqslant$$

$$\leqslant C_9 \lambda^{\frac{1-N}{2}} R^{-2-2s} \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{1\leqslant|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant\sqrt{\lambda}/2} u_i^2(x_0, t)\left(\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}\right)^{-2} d\rho(t) \leqslant$$

$$\leqslant C_9 \lambda^{\frac{1-N}{2}} R^{-2-2s} \sum_{l=1}^{p}\left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{2^{l-1}\leqslant|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant 2^l} u_i^2(x_0, t)\left(\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}\right)^{-2} d\rho(t)\right] \leqslant$$

$$\leqslant C_9 \lambda^{\frac{1-N}{2}} R^{-2-2s} \sum_{l=1}^{p} \frac{1}{4^{l-1}}\left\{\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{2^{l-1}\leqslant|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant 2^l} u_i^2(x_0, t)\, d\rho(t)\right\}. \quad (2.4.38)$$

Применяя для величины, заключенной в (2.4.38) в фигурные скобки, неравенство (2.3.8) из п. 2 § 3, взятое при $\rho_0 = 2^l$, $\mu = \sqrt{\lambda}$, получим, что

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{1\leqslant|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant\sqrt{\lambda}/2} u_i^2(x_0, t)\, \lambda^{1/2} t^{\frac{2-N}{2}} \left[I_t^\lambda(R)\right]^2 d\rho(t) \leqslant$$

$$\leqslant C_{10} R^{-2-2s} \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \leqslant C_{11} R^{-2-2s}. \quad (2.4.39)$$

Вставляя (2.4.39) в (2.4.30), окончательно получим

$$S_4 = O(R^{2N-1-s}) = o(R^{2N-2-4s}).$$

Доказательство леммы 2.3 завершено.

Нам осталось только оправдать использованные нами оценки (2.4.10) и (2.4.11) для величины (2.4.9).

2. Доказательство вспомогательных оценок. Мы установим оценки вида (2.4.10) и (2.4.11) не только для интеграла (2.4.9), а для интеграла более общего вида

$$\overset{\nu}{I}{}_t^\lambda(R)=\int\limits_R^\infty \mathscr{J}_{\nu+s}\,(r\sqrt{\lambda})\,\mathscr{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t})\,r^{-s}\,dr, \tag{2.4.9$'$}$$

рассматриваемого при любых $\nu\geqslant 1/2$, $s\geqslant 0$, $\lambda\geqslant 1$, $t\geqslant 1$. (Интеграл (2.4.9) получается из (2.4.9′) при $\nu=N/2$.)

Установим для интеграла (2.4.9′) *при любых* $\nu\geqslant 1/2$, $s\geqslant 0$, $\lambda\geqslant 1$, $t\geqslant 1$, $|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant 1$ *оценку*

$$\left|\overset{\nu}{I}{}_t^\lambda(R)\right|\leqslant C_1R^{-s}\lambda^{-1/4}t^{-1/4} \tag{2.4.10$'$}$$

и при любых вещественных ν *и любых* $s>-1$, $\lambda\geqslant 1$, $t\geqslant 1$, $|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\geqslant 1$ *оценку*

$$\left|\overset{\nu}{I}{}_t^\lambda(R)\right|\leqslant C_2R^{-1-s}\lambda^{-1/4}t^{-1/4}\left|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}\right|^{-1} \tag{2.4.11$'$}$$

(*с постоянными* C_1 *и* C_2, *не зависящими от* $\lambda\geqslant 1$, $t\geqslant 1$, $0<R\leqslant 1$).

Начнем с установления оценки (2.4.10′). При $s>0$ эта оценка тривиально вытекает из соотношений $|\mathscr{J}_{\nu+s}(r\sqrt{\lambda})|\leqslant$ $\leqslant C_3(r\sqrt{\lambda})^{-1/2}$, $|\mathscr{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t})|\leqslant C_4(r\sqrt{t})^{-1/2}$, $\int\limits_R^\infty r^{-s-1}\,dr=s^{-1}R^{-s}$.

Для установления оценки (2.4.10′) при $s=0$ воспользуемся известным значением интеграла *)

$$\int\limits_0^\infty \mathscr{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})\,\mathscr{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t})\,dr=\begin{cases}\dfrac{(\sqrt{t})^{\nu-1}}{(\sqrt{\lambda})^\nu}\leqslant t^{-\frac14}\lambda^{-\frac14} & \text{при } t<\lambda,\\ (2\sqrt{\lambda})^{-1}=2^{-1}t^{-\frac14}\lambda^{-\frac14} & \text{при } t=\lambda,\\ 0 & \text{при } t>\lambda,\end{cases}$$

в силу которого достаточно при $t\geqslant 1$, $\lambda\geqslant 1$, $|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant 1$, $\nu\geqslant$ $\geqslant 1/2$ установить оценку

$$\int\limits_0^R \mathscr{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})\,\mathscr{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t})\,dr\leqslant C_5\lambda^{-1/4}t^{-1/4}. \tag{2.4.40}$$

Для установления оценки (2.4.40) в силу тождества

$$\mathscr{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t})=[\mathscr{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t})-\mathscr{J}_{\nu-1}(r\sqrt{\lambda})]+\mathscr{J}_{\nu-1}(r\sqrt{\lambda})$$

---

*) См., например, Г. Бейтмен и А. Эрдейи [1, с. 107, формула (34)].

достаточно установить две оценки:

$$\int_0^R |\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})||\mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t})-\mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{\lambda})|\,dr\leqslant C_6\lambda^{-1/4}t^{-1/4}, \tag{2.4.41}$$

$$\left|\int_0^R \mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{\lambda})\,dr\right|\leqslant C_7\lambda^{-1/4}t^{-1/4}. \tag{2.4.42}$$

Для установления оценки (2.4.41) заметим, что в силу теоремы Лагранжа о конечных приращениях найдется число θ из интервала $0<\theta<1$ такое, что

$$|\mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t})-\mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{\lambda})|=r|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}||\mathcal{J}'_{\nu-1}(\xi)|,$$

где $\xi=r[\sqrt{t}+\theta(\sqrt{\lambda}-\sqrt{t})]$. Поскольку *) $\sqrt{t}\geqslant\sqrt{\lambda}/2$, то $\xi=$ $=r[(1-\theta)\sqrt{t}+\theta\sqrt{\lambda}]\geqslant r\sqrt{\lambda}/2$, и поэтому из рекуррентного соотношения

$$\mathcal{J}'_{\nu-1}(\xi)=\frac{\nu-1}{\xi}\mathcal{J}_{\nu-1}(\xi)-\mathcal{J}_\nu(\xi)$$

и из оценок $|\mathcal{J}_{\nu-1}(\xi)|\leqslant C_8\xi^{-1/2}$, $|\mathcal{J}_\nu(\xi)|\leqslant C_9\xi^{-1/2}$ вытекает, что

$$|\mathcal{J}'_{\nu-1}(\xi)|\leqslant\frac{C_8(\nu-1)}{\xi^{3/2}}+\frac{C_9}{\xi^{1/2}}\leqslant C_{10}\left[\frac{(\nu-1)}{(r\sqrt{\lambda})^{3/2}}+\frac{1}{(r\sqrt{\lambda})^{1/2}}\right].$$

Отсюда и из того, что $|\sqrt{\lambda}-\sqrt{t}|\leqslant 1$, следует, что

$$|\mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t})-\mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{\lambda})|\leqslant C_{10}\left[\frac{(\nu-1)}{\sqrt{r}\,\lambda^{3/4}}+\frac{\sqrt{r}}{\lambda^{1/4}}\right].$$

Таким образом, левая часть (2.4.41) мажорируется суммой интегралов

$$C_{10}(\nu-1)\frac{1}{\lambda^{3/4}}\int_0^R\frac{1}{\sqrt{r}}|\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})|\,dr+C_{10}\frac{1}{\lambda^{1/4}}\int_0^R\sqrt{r}|\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})|\,dr,$$

и для установления неравенства (2.4.41) остается в первом из этих интегралов воспользоваться оценкой $|\mathcal{J}_\nu(x)|\leqslant C_{11}$, а во втором — оценкой $|\mathcal{J}_\nu(x)|\leqslant C_9x^{-1/2}$ и учесть, что $1/\sqrt{\lambda}\leqslant C_{12}(\lambda t)^{-1/4}$.

Для установления неравенства (2.4.42), пользуясь рекуррентным соотношением **)

$$\mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{\lambda})=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{d}{dr}[\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})]+\frac{\nu}{r\sqrt{\lambda}}\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda}),$$

---

*) Действительно из неравенств $\sqrt{t}\geqslant 1$, $|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant 1$ вытекает, что $\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{t}}=\dfrac{\sqrt{\lambda}-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}+1\leqslant 2$, а это эквивалентно неравенству $\sqrt{t}\geqslant\sqrt{\lambda}/2$.

**) См., например, Г. Бейтмен, А. Эрдейи [1, с. 20, формула (54)].

представим левую часть (2.4.42) в виде суммы

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^R \mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})\,d[\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})] + \frac{\nu}{\sqrt{\lambda}}\int_0^R \mathcal{J}_\nu^2(r\sqrt{\lambda})\frac{dr}{r}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\mathcal{J}_\nu^2(R\sqrt{\lambda}) + \frac{\nu}{\sqrt{\lambda}}\int_0^\infty \mathcal{J}_\nu^2(r\sqrt{\lambda})\frac{dr}{r}.$$

Теперь для установления справедливости оценки (2.4.42) остается воспользоваться соотношениями *)

$$|\mathcal{J}_\nu(R\sqrt{\lambda})| \leqslant C_{11}, \quad \int_0^\infty \mathcal{J}_\nu^2(r\sqrt{\lambda})\frac{dr}{r} = \frac{1}{2\nu}.$$

Тем самым вывод оценки (2.4.10′) полностью завершен.

Перейдем теперь к установлению оценки (2.4.11′). Эту оценку мы установим для произвольного вещественного ν и для любых $s > -1$, $\lambda \geqslant 1$, $t \geqslant 1$, $|\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}| \geqslant 1$. Рассмотрим отдельно два случая: 1) $\sqrt{\lambda} + 1 < \sqrt{t}$; 2) $1 \leqslant \sqrt{t} \leqslant \sqrt{\lambda} - 1$.

1) В первом случае подвергнем интеграл (2.4.9) двукратному интегрированию по частям, основанному на применении рекуррентных соотношений

$$\int r^\nu \mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t})\,dr = (\sqrt{t})^{-1} r^\nu \mathcal{J}_\nu(r\sqrt{t}),$$

$$\frac{d}{dr}[r^{-\nu}\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})] = -\sqrt{\lambda}\, r^\nu \mathcal{J}_{\nu+1}(r\sqrt{\lambda}).$$

В результате получим

$$\overset{\nu}{I}{}_t^\lambda(R) = (\sqrt{t})^{-1}[\mathcal{J}_{\nu+s}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{t})\,r^{-s}]\Big|_{r=R}^{r=\infty} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\lambda}}{t}[\mathcal{J}_{\nu+s+1}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{\nu+1}(r\sqrt{t})\,t^{-s}]\Big|_{r=R}^{r=\infty} +$$

$$+ \frac{\lambda}{t}\int_R^\infty \mathcal{J}_{\nu+s+2}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{\nu+1}(r\sqrt{t})\,r^{-s}dr.$$

Под знаком последнего интеграла воспользуемся соотношением

$$\mathcal{J}_{\nu+s+2}(r\sqrt{\lambda})\mathcal{J}_{\nu+1}(r\sqrt{t}) = \mathcal{J}_{\nu+s}(r\sqrt{\lambda})\mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t}) -$$

$$-(2\nu + 2 + 2s)(r\sqrt{\lambda})^{-1}\mathcal{J}_{\nu+s+1}(r\sqrt{\lambda})\mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t}) +$$

$$+ 2\nu(r\sqrt{t})^{-1}\mathcal{J}_{\nu+2+s}(r\sqrt{\lambda})\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{t}).$$

*) См. Г. Бейтмен, А. Эрдейи [1, с. 107, формула (32)].

тривиально вытекающим из рекуррентных формул *)

$$\mathcal{J}_{\nu+2+s}(r\sqrt{\lambda}) = -\mathcal{J}_{\nu+s}(r\sqrt{\lambda}) + (2\nu+2+2s)(r\sqrt{\lambda})^{-1}\mathcal{J}_{\nu+s+1}(r\sqrt{\lambda}),$$
$$\mathcal{J}_{\nu+1}(r\sqrt{t}) = -\mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t}) + 2\nu(r\sqrt{t})^{-1}\mathcal{J}_{\nu}(r\sqrt{t}).$$

В результате получим

$$\overset{\nu}{I}{}_t^{\lambda}(R)\left(1-\frac{\lambda}{t}\right) = \\ = (\sqrt{t})^{-1}\mathcal{J}_{\nu+s}(R\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{\nu}(R\sqrt{t})\,R^{-s} - \\ - \frac{\sqrt{\lambda}}{t}\mathcal{J}_{\nu+s+1}(R\sqrt{\lambda})\mathcal{J}_{\nu+1}(R\sqrt{t})\,R^{-s} - \\ -(2\nu+2+s)\frac{\sqrt{\lambda}}{t}\int_R^{\infty} r^{-1-s}\mathcal{J}_{\nu+s+1}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t})\,dr + \\ + 2\nu\frac{\lambda}{t^{3/2}}\int_R^{\infty} r^{-1-s}\mathcal{J}_{\nu+2+s}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{\nu}(r\sqrt{t})\,dt. \quad (2.4.43)$$

Мажорируя модули всех бесселевых функций, стоящих в правой части (2.4.43), с помощью оценки $|\mathcal{J}_{\nu}(x)| \leqslant C(\nu)x^{-1/2}$, справедливой для всех вещественных ν при $x \geqslant R > 0$ **), получим с учетом неравенства $s > -1$ из (2.4.43) соотношение

$$|\overset{\nu}{I}{}_t^{\lambda}(R)|\left(1-\frac{\lambda}{t}\right) \leqslant C_{12}R^{-1-s}\lambda^{-1/4}t^{-3/4},$$

из которого вытекает справедливость оценки (2.4.11′) при $\sqrt{\lambda}+1 < \sqrt{t}$.

2) Рассмотрим теперь второй случай $1 \leqslant \sqrt{t} \leqslant \sqrt{\lambda}-1$. В этом случае мы будем производить двукратное интегрирование (2.4.9′) по частям в другую сторону, т. е. будем исходить из рекуррентных соотношений

$$\int r^{1-\nu}\mathcal{J}_{\nu}(r\sqrt{\lambda})\,dr = -(\sqrt{\lambda})^{-1}r^{1-\nu}\mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{\lambda}),$$
$$\frac{d}{dr}\left[r^{\nu}\mathcal{J}_{\nu}(r\sqrt{t})\right] = \sqrt{t}\,r^{\nu}\mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t}).$$

В результате получим

$$\overset{\nu}{I}{}_t^{\lambda}(R) = -(\sqrt{\lambda})^{-1}\left[\mathcal{J}_{\nu+s-1}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t})\,r^{-s}\right]\Big|_{r=R}^{r=\infty} - \\ - \frac{\sqrt{t}}{\lambda}\left[\mathcal{J}_{\nu+s-2}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{\nu-2}(r\sqrt{t})\,r^{-s}\right]\Big|_{r=R}^{r=\infty} + \\ + \frac{t}{\lambda}\int_R^{\infty}\mathcal{J}_{\nu+s-2}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{\nu-3}(r\sqrt{t})\,r^{-s}dr.$$

*) См., например, Г. Бейтмен, А. Эрдейи, [1, с. 20, формула (56)].
**) См. Г. Бейтмен, А. Эрдейи [1, с. 98, формула (3)].

Под знаком последнего интеграла воспользуемся соотношением

$$\mathscr{J}_{\nu+s-2}(r\sqrt{\lambda})\mathscr{J}_{\nu-3}(r\sqrt{t}) = \mathscr{J}_{\nu+s}(r\sqrt{\lambda})\mathscr{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t}) + \\ +(2\nu+2s-2)(r\sqrt{\lambda})^{-1}\mathscr{J}_{\nu+s-1}(r\sqrt{\lambda})\mathscr{J}_{\nu-3}(r\sqrt{t}) - \\ -(2\nu-4)(r\sqrt{t})^{-1}\mathscr{J}_{\nu+s}(r\sqrt{\lambda})\mathscr{J}_{\nu-2}(r\sqrt{t}),$$

тривиально вытекающим из рекуррентных формул

$$\mathscr{J}_{\nu+s-2}(r\sqrt{\lambda}) = -\mathscr{J}_{\nu+s}(r\sqrt{\lambda}) + (2\nu+2s-2)(r\sqrt{\lambda})^{-1}\mathscr{J}_{\nu+s-1}(r\sqrt{\lambda}),$$

$$\mathscr{J}_{\nu-3}(r\sqrt{t}) = -\mathscr{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t}) + (2\nu-4)(r\sqrt{t})^{-1}\mathscr{J}_{\nu-2}(r\sqrt{t}).$$

В результате получим

$$\overset{\nu}{I}{}_t^{\lambda}(R)\left(1-\frac{t}{\lambda}\right) = \\ = (\sqrt{\lambda})^{-1}\mathscr{J}_{\nu+s-1}(R\sqrt{\lambda})\mathscr{J}_{\nu-1}(R\sqrt{t})R^{-s} + \\ + \frac{\sqrt{t}}{\lambda}\mathscr{J}_{\nu+s-2}(R\sqrt{\lambda})\mathscr{J}_{\nu-2}(R\sqrt{t})R^{-s} + \\ + (2\nu+2s-2)\frac{t}{\lambda^{3/2}}\cdot\int_R^\infty \mathscr{J}_{\nu+s-1}(r\sqrt{\lambda})\mathscr{J}_{\nu-3}(r\sqrt{t})r^{-1-s}dr - \\ -(2\nu-4)\frac{\sqrt{t}}{\lambda}\int_R^\infty \mathscr{J}_{\nu+s}(r\sqrt{\lambda})\mathscr{J}_{\nu-2}(r\sqrt{t})r^{-1-s}dr. \quad (2.4.44)$$

В правой части (2.4.44) воспользуемся для всех бесселевых функций оценкой вида $|\mathscr{J}_\nu(x)| \leqslant C(R, \nu)|x|^{-1/2}$, которая справедлива при $x \geqslant R > 0$ с постоянной $C(R, \nu)$ для всех вещественных (не обязательно положительных) значений ν *). Мы получим при этом из (2.4.44) с учетом $s > -1$ соотношение

$$|\overset{\nu}{I}{}_t^{\lambda}(R)|\left(1-\frac{t}{\lambda}\right) \leqslant C_{13}R^{-1-s}\lambda^{-\frac{3}{4}}t^{-\frac{1}{4}},$$

из которого вытекает справедливость оценки (2.4.11′) при $1 \leqslant \sqrt{t} \leqslant \sqrt{\lambda} - 1$.

Тем самым доказательство вспомогательных оценок (2.4.10′) и (2.4.11′) полностью завершено.

3. Лемма о связи средних Рисса интегралов $\int_0^\lambda (t+1)^\beta U(t)d\rho(t)$ и $\int_0^\lambda U(t)\,d\rho(t)$.

Лемма 2.4. *Пусть $s > 0$, $\beta > 0$, $s = r + \varkappa$, где r — целое, а $\varkappa$ удовлетворяет неравенствам $0 < \varkappa \leqslant 1$, $\rho(t)$ — некоторая мера,*

---

*) См., например, Г. Бейтмен и А. Эрдейи [1, с. 98, формула (3)].

$U(t)$ — произвольная функция, такая, что $\int_0^\lambda |U(t)|\,d\rho(t) < \infty$ *для любого* $\lambda > 0$, *символы* $S_\lambda, \sigma_\lambda^s, \overline{S}_\lambda$ *и* $\overline{\sigma}_\lambda^s$ *имеют следующий* ***смысл:***

$$\left\{\begin{aligned} &S_\lambda = \int_0^\lambda U(t)\,d\rho(t), && \sigma_\lambda^s = \int_0^\lambda \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s U(t)\,d\rho(t), \\ &\overline{S}_\lambda = \int_0^\lambda (1+t)^\beta U(t)\,d\rho(t), && \overline{\sigma}_\lambda^s = \int_0^\lambda \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s (1+t)^\beta U(t)\,d\rho(t). \end{aligned}\right. \tag{2.4.45}$$

Тогда справедливо равенство

$$\overline{\sigma}_\lambda^s = (1+\lambda)^\beta \sigma_\lambda^s + \\ + (-1)^{r+1}\lambda^{-s} \int_0^\lambda \frac{d^{r+2}}{dt^{r+2}} \left\{(\lambda - t)^s \left[(1+t)^\beta - (1+\lambda)^\beta\right]\right\} \frac{t^{r+1}}{(r+1)!}\,\sigma_t^{r+1}\,dt. \tag{2.4.46}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\overline{S}_\lambda = -\beta \int_0^\lambda (1+t)^{\beta-1} S_t\,dt + (1+\lambda)^\beta S_\lambda. \tag{2.4.47}$$

Кроме того, по определению

$$\overline{\sigma}_\lambda^s = s\lambda^{-s} \int_0^\lambda (\lambda - t)^{s-1} \overline{S}_t\,dt. \tag{2.4.48}$$

Вставляя (2.4.47) в (2.4.48), получим

$$\overline{\sigma}_\lambda^s = -\beta s \lambda^{-s} \int_0^\lambda (\lambda - t)^{s-1} \left[\int_0^t (1+\tau)^{\beta-1} S_\tau\,d\tau\right] dt + \\ + s\lambda^{-s} \int_0^\lambda (\lambda - t)^{s-1} (1+t)^\beta S_t\,dt.$$

Меняя в первом из интегралов в правой части последнего равенства порядок интегрирования относительно t и τ, получим

$$\overline{\sigma}_\lambda^s = -\beta s \lambda^{-s} \int_0^\lambda S_\tau (1+\tau)^{\beta-1} \left[\int_\tau^\lambda (\lambda - t)^{s-1}\,dt\right] d\tau + \\ + s\lambda^{-s} \int_0^\lambda (\lambda - t)^{s-1} (1+t)^\beta S_t\,dt.$$

Или окончательно

$$\bar{\sigma}_\lambda^s = -\beta\lambda^{-s}\int\limits_0^\lambda (\lambda - t)^s (1 + t)^{\beta-1} S_t dt +$$

$$+ s\lambda^{-s}\int\limits_0^\lambda (\lambda - 1)^{s-1} (t + t)^\beta S_t dt. \quad (2.4.49)$$

Разбивая последний интеграл в (2.4.49) на сумму двух интегралов:

$$s\lambda^{-s}\int\limits_0^\lambda (\lambda - t)^{s-1} (1 + t)^\beta S_t dt =$$

$$= s\lambda^{-s}(1 + \lambda)^\beta \int\limits_0^\lambda (\lambda - t)^{s-1} S_t dt + s\lambda^{-s}\int\limits_0^\lambda (\lambda - t)^{s-1}\left[(1+t)^\beta - (1+\lambda)^\beta\right] S_t dt$$

и замечая при этом, что

$$s\lambda^{-s}\int\limits_0^\lambda (\lambda - t)^{s-1} S_t dt = \sigma_\lambda^s, \quad (2.4.50)$$

придадим формуле (2.4.49) следующий вид:

$$\bar{\sigma}_\lambda^s = \lambda^{-s}\int\limits_0^\lambda \frac{d}{dt}\left\{(\lambda - t)^s\left[(1 + t)^\beta - (1 + \lambda)^\beta\right]\right\} S_t dt + (1 + \lambda)^\beta \sigma_\lambda^s. \quad (2.4.51)$$

В дальнейшем будем обозначать символом IS_t операцию интегрирования $IS_t = \int\limits_0^t S_\tau d\tau$, а символом I^k — результат k-кратного последовательного применения операции I.

Посредством $(k-1)$-кратного интегрирования по частям равенства

$$\sigma_t^k = kt^{-k}\int\limits_0^t (t - \tau)^{k-1} S_\tau d\tau$$

мы убедимся в справедливости для любого целого положительного k следующей формулы:

$$I^k S_t = \frac{t^k}{k!}\sigma_t^k. \quad (2.4.52)$$

Напомним, что по условию леммы $s = r + \varkappa$, где r — целое число, $0 < \varkappa \leqslant 1$. Опираясь на равенство (2.4.52), проведем $(r+1)$-кратное интегрирование по частям интеграла в (2.4.51).

В результате получим

$$\bar{\sigma}_\lambda^s = (1+\lambda)^\beta \sigma_\lambda^s +$$

$$+ \lambda^{-s} \sum_{k=1}^{r+1} (-1)^{k+1} \left\{ \frac{d^k}{dt^k} \left[(\lambda - t)^s \left[(1+t)^\beta - (1+\lambda)^\beta \right] \right] \frac{t^k}{k!} \sigma_t^k \right\} \Bigg|_{t=0+0}^{t=\lambda-0} +$$

$$+ (-1)^{r+1} \lambda^{-s} \int_0^\lambda \frac{d^{r+2}}{dt^{r+2}} \left\{ (\lambda - t)^s \left[(1+t)^\beta - (1+\lambda)^\beta \right] \right\} \frac{t^{r+1}}{(r+1)!} \sigma_t^{r+1}\, dt. \tag{2.4.53}$$

Для завершения доказательства леммы остается убедиться в обращении в нуль всех верхних и всех нижних подстановок в правой части (2.4.53).

Сначала убедимся в обращении в нуль всех верхних подстановок. Для этого достаточно доказать, что для любого $k = 1, 2, \ldots, r+1$

$$\lim_{t \to \lambda - 0} \frac{d^k}{dt^k} \left\{ (\lambda - t)^s \left[(1+t)^\beta - (1+\lambda)^\beta \right] \right\} = 0. \tag{2.4.54}$$

Производную порядка k от произведения двух функций, стоящих в (2.4.54) в фигурных скобках, распишем по формуле Лейбница в виде суммы $(k+1)$ слагаемых.

Поскольку $s = r + \varkappa$, где $0 < \varkappa \leqslant 1$, то $s > r$, а поэтому производная $\frac{d^l}{dt^l} \left[(\lambda - t)^s \right]$ любого порядка $l \leqslant r$ обращается в нуль при $t = \lambda$. Так как сама функция $\left[(1+t)^\beta - (1+\lambda)^\beta \right]$ и производная от нее по t любого порядка ограничены в окрестности точки $t = \lambda$, то при $k \leqslant r$ в силу формулы Лейбница, каждое слагаемое которой будет содержать производную $\frac{d^l}{dt^l} \left[(\lambda - t)^s \right]$ порядка $l \leqslant r$, соотношение (2.4.54) обосновано.

Остается обосновать соотношение (2.4.54) при $k = r+1$.

В силу той же формулы Лейбница достаточно установить только, что

$$\lim_{t \to \lambda - 0} \left\{ \left[(1+t)^\beta - (1+\lambda)^\beta \right] \frac{d^{r+1}}{dt^{r+1}} \left[(\lambda - t)^s \right] \right\} = 0. \tag{2.4.55}$$

При $s = r+1$, когда $\varkappa = 1$, соотношение (2.4.55) очевидно.

При $s = r + \varkappa$, когда $0 < \varkappa < 1$, левая часть (2.4.55) переходит в

$$(-1)^{r+1} s(s-1)(s-2) \ldots (s-r) \lim_{t \to \lambda - 0} \frac{(1+t)^\beta - (1+\lambda)^\beta}{(\lambda - t)^{1-\varkappa}}, \tag{2.4.56}$$

и равенство нулю предела (2.4.56) сразу вытекает из правила Лопиталя *).

*) См., например, с. 261—264 книги В. А. Ильина и Э. Г. Позняка [1].

Равенство нулю всех нижних подстановок в правой части (2.4.53) обеспечивается наличием множителя t^k (при $k \geqslant 1$) и ограниченностью в окрестности $t=0$ производной $\frac{d^k}{dt^k}\{(\lambda-t)^s[(1+t)^\beta-(1+\lambda)^\beta]\}$ любого порядка k.

Итак, все подстановки в правой части (2.4.53) обращаются в нуль, и доказательство леммы 2.4 завершено.

Следствие из леммы 2.4. *При выполнении условий леммы 2.4 справедливо неравенство*

$$|\overline{\sigma}_\lambda^s| \leqslant (1+\lambda)^\beta |\sigma_\lambda^s| + \\ + \lambda^{-s}\int_0^\lambda \left|\frac{d^{r+2}}{dt^{r+2}}\{(\lambda-t)^s[(1+t)^\beta-(1+\lambda)^\beta]\}\right| \frac{t^{r+1}}{(r+1)!}|\sigma_t^{r+1}|\,dt. \tag{2.4.57}$$

4. Лемма о неограниченности в L_1 средних Рисса порядка $s \geqslant 0$ спектральных разложений ядер порядка $\alpha < (N-1)/4 - s/2$.

Лемма 2.5. *Пусть $N \geqslant 2$, G — произвольная область в пространстве E^N, $\widehat{A}$ — произвольное самосопряженное неотрицательное расширение оператора Лапласа $Lu = -\Delta u$ в области G, относительно которого взято произвольное упорядоченное спектральное представление пространства $L_2(G)$ со спектральной мерой $\rho(\lambda)$, множествами кратности e_i, фундаментальными функциями $u_i(x, \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, \widehat{m})$ и кратностью $\widehat{m} \leqslant \infty$. Пусть далее x_0 — любая фиксированная внутренняя точка области G, символ $r = |x_0 - y|$ обозначает расстояние между точкой x_0 и переменной точкой y, E — кольцевой слой вида $E = \{R^4/4 \leqslant |x_0 - y| \leqslant R^4$, целиком содержащийся в области G. Тогда для любого s из полусегмента $0 \leqslant s < (N-1)/2$ положительное R можно фиксировать столь малым, что при любом δ из интервала $0 < \delta < (N-1)/4 - s/2$ величина*

$$\tau_\lambda^s = \int_E \left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\lambda u_i(x_0, t)\, u_i(y, t)\,(1+t)^{-\left(\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}-\delta\right)}\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho(t)\right| dy \tag{2.4.58}$$

является неограниченной на полупрямой $\lambda \geqslant 0$.

Прежде чем доказывать лемму 2.5, выясним смысл величины (2.4.58). В силу определения ядра дробного порядка $T_{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}-\delta}(x_0, y)$ (см. п. 3 § 3 этой гл.) величина

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\lambda u_i(x_0, t)(1+t)^{-\left(\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}-\delta\right)} u_i(y, t)\, d\rho(t)$$

является спектральным разложением $E_\lambda T_{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}-\delta}(x_0, y)$ указанного ядра дробного порядка, а поэтому величина

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\lambda u_i(x_0, t)\, u_i(y, t)\,(1+t)^{-\left(\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}-\delta\right)}\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho(t)$$

является средним Рисса $E_\lambda^s T_{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}-\delta}(x_0, y)$ порядка s спектрального разложения указанного ядра дробного порядка.

В таком случае величина (2.4.58) может быть переписана в виде

$$\tau_\lambda^s = \int_E \left| E_\lambda^s T_{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}-\delta}(x_0, y)\right| dy. \qquad (2.4.58')$$

Если обозначать порядок $\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}-\delta$ ядра через α и учесть, что в силу того, что δ является произвольным числом из интервала $0<\delta<\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}$, число α является произвольным числом из интервала $0<\alpha<\frac{N-1}{2}-\frac{s}{2}$, то неограниченность на полупрямой $\lambda \geqslant 0$ величины (2.4.58′) означает *неограниченность в метрике* $L_1(E)$ (*и тем более в метрике* $L_1(G)$) *средних Рисса порядка* s $\left(0 \leqslant s < \frac{N-1}{2}\right)$ *спектрального разложения ядра* $T_\alpha(x_0, y)$ *произвольного положительного порядка* α, *меньшего* $\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}$.

Доказательство леммы 2.5. Сначала убедимся в том, что лемму 2.5 достаточно доказать для любого строго положительного s, меньшего $(N-1)/2$ (отсюда будет следовать справедливость леммы 2.5 и для $s=0$).

Для этого докажем следующее вспомогательное утверждение: *если для любого* s *из интервала* $0<s<(N-1)/2$ *и для любого* δ *из интервала* $0<\delta<\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}$ *величина* (2.4.58) *является неограниченной на полупрямой* $\lambda \geqslant 0$, *то для любого* δ' *из интервала* $0<\delta'<(N-1)/4$ *величина*

$$T_\lambda = \int_E \left| \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\lambda u_i(x_0, t)\, u_i(y, t)\,(1+t)^{-\left(\frac{N-1}{4}-\delta'\right)} d\rho(t)\right| dy \qquad (2.4.59)$$

также является неограниченной на полупрямой $\lambda \geqslant 0$.

Докажем сформулированное утверждение от противного.

Предположим, что величина (2.4.58) является неограниченной на полупрямой $\lambda \geqslant 0$ для любого s из интервала $0<s<(N-1)/2$ и для любого δ из интервала $0<\delta<(N-1)/4-s/2$, а величина (2.4.59) является ограниченной на полупрямой $\lambda \geqslant 0$ для некоторого δ' из интервала $0<\delta'<(N-1)/4$.

Рассмотрим величину (2.4.58) при $s = \delta'$, $\delta = \frac{\delta'}{2}$ (при этом выполнены условия принадлежности s к интервалу $\left(0, \frac{N-1}{2}\right)$, а δ к интервалу $\left(0, \frac{N-1}{4} - \frac{s}{2}\right)$ и множитель $(1+t)^{-\left(\frac{N-1}{4} - \frac{s}{2} - \delta\right)}$ переходит в $(1+t)^{-\left(\frac{N-1}{4} - \delta'\right)}$). На основании соотношения (2.4.50) из предыдущего пункта мы получим, что величина (2.4.58), взятая при $s = \delta'$, $\delta = \delta'/2$, связана с величиной (2.4.59) неравенством

$$\tau_\lambda^s \leqslant s\lambda^{-s} \int_0^\lambda (\lambda - t)^{s-1}\, T_t\, dt. \tag{2.4.60}$$

Из (2.4.60) и из предположенной нами ограниченности величины (2.4.59), взятой для указанного δ', на полупрямой $\lambda \geqslant 0$ немедленно вытекает ограниченность на полупрямой $\lambda \geqslant 0$ и величины (2.4.58), взятой при $s = \delta'$, $\delta = \delta'/2$, а это противоречит сделанному нами предположению и завершает доказательство вспомогательного утверждения.

Перейдем непосредственно к доказательству леммы 2.5 для любого строго положительного s, меньшего $\frac{N-1}{2}$. Проведем и это доказательство от противного.

Предположим, что для некоторого s из интервала $0 < s < (N-1)/2$ и для некоторого δ из интервала $0 < \delta < (N-1)/4 - \frac{s}{2}$ величина (2.4.58) является ограниченной на полупрямой $\lambda \geqslant 0$. Воспользуемся неравенством (2.4.57), вытекающим из леммы 2.4, доказанной в предыдущем пункте, положив в условиях леммы 2.4 число β равным

$$\beta = \frac{N-1}{4} - \frac{s}{2} - \delta > 0,$$

а функцию $U(t)$ имеющей вид

$$U(t) = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} u_i(x_0, t)\, u_i(y, t)\, (1+t)^{-\beta}.$$

В таком случае в неравенстве (2.4.57) величины σ_λ^s и $\bar{\sigma}_\lambda^s$ будут иметь вид

$$\sigma_\lambda^s = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\lambda u_i(x_0, t)\, u_i(y, t)\, (1+t)^{-\beta} \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho(t),$$

$$\bar{\sigma}_\lambda^s = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\lambda u_i(x_0, t)\, u_i(y, t) \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho(t).$$

Проинтегрируем обе части неравенства (2.4.57) с такими значениями σ_λ^s и $\overline{\sigma}_\lambda^s$ в координатах точки y по кольцевому слою E, выбранному так, как указано в формулировках лемм 2.5 и 2.3, и учтем, что (в силу предположенной нами ограниченности величины (2.4.58)) найдется постоянная $M>0$ такая, что для всех $\lambda \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\tau_\lambda^s = \int_E |\sigma_\lambda^s|\, dy \leqslant M. \tag{2.4.61}$$

Пусть, как и в лемме 2.4, $s=r+\varkappa$, где r — целое, $0<\varkappa\leqslant 1$. Докажем, что для всех $\lambda\geqslant 0$ справедливо также и неравенство

$$\tau_\lambda^{r+1} = \int_E |\sigma_\lambda^{r+1}|\, dy \leqslant M. \tag{2.4.62}$$

Действительно, если s является целым, то $\varkappa=1$ и $s= r+1$. Поэтому в этом случае неравенство (2.4.62) просто совпадает с неравенством (2.4.61).

Если же s не является целым, то $0<\varkappa<1$ и число $s'=r+1$ удовлетворяет условию $s'>s$.

Но для любых s и s' таких, что $s'>s>0$, справедливо следующее соотношение, связывающее средние Рисса порядка s' со средними Рисса порядка s *):

$$\sigma_\lambda^{s'} = \lambda^{-s'}\Gamma(s'+1)\,[\Gamma(s'-s)\,\Gamma(s+1)]^{-1}\int_0^\lambda (\lambda-t)^{s'-s-1}\, t^s \sigma_t^s\, dt. \tag{2.4.63}$$

Из соотношения (2.4.63) и из неравенства (2.4.61) вытекает справедливость неравенства (2.4.62) (при $s'=r+1>s$).

Вновь обратимся к неравенству (2.4.57) с указанными значениями σ_λ^s и $\overline{\sigma}_\lambda^s$, проинтегрированному по кольцевому слою E. Это неравенство с учетом (2.4.61) и (2.4.62) может быть записано в виде

$$\int_E \left| \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\lambda u_i(x_0, t)\, u_i(y, t) \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho(t) \right| dy \leqslant$$
$$\leqslant M\left\{(1+\lambda)^\beta + \frac{\lambda^{-s}}{(r+1)!}\int_0^\lambda t^{r+1}\left|\frac{d^{r+2}}{dt^{r+2}}\left[(\lambda-t)^s\left[(1+t)^\beta-(1+\lambda)^\beta\right]\right]\right| dt\right\}. \tag{2.4.64}$$

Легко убедиться в том, что величина, стоящая в правой части (2.4.64) в фигурных скобках, имеет порядок $O[(\lambda+1)^\beta]$, т. е. при достаточно больших λ имеет порядок $O(\lambda^\beta)$. Для этого

*) Справедливость этого соотношения устанавливается элементарно.

достаточно убедиться в том, что при достаточно больших λ

$$\int_0^\lambda t^{r+1}\left|\frac{d^{r+2}}{dt^{r+2}}\left[(\lambda-t)^s\left[(1+t)^\beta-(1+\lambda)^\beta\right]\right]\right|dt=O\left(\lambda^{\beta+s}\right). \qquad (2.4.65)$$

Для доказательства соотношения (2.4.65) достаточно расписать производную, стоящую под знаком модуля в (2.4.65), по формуле Лейбница и убедиться в том, что модуль каждого слагаемого в формуле Лейбница после умножения на t^{r+1} и интегрирования по t в пределах от 0 до λ дает $O(\lambda^{\beta+s})$.

Сопоставляя неравенство (2.4.64) с соотношением (2.4.65), мы получим, что для всех достаточно больших λ

$$\int_E\left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^\lambda u_i(x_0,t)\,u_i(y,t)\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho(t)\right|dy=O\left(\lambda^\beta\right), \qquad (2.4.66)$$

где $\beta=(N-1)/4-s/2-\delta$ при некотором s из интервала $0<s<(N-1)/2$ и при некотором δ из интервала $0<\delta<(N-1)/4-s/2$.

Так как при больших λ величина, стоящая в правой части (2.4.66), равна $\lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}}O\left(\lambda^{-\delta}\right)=o\left(\lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}}\right)$, то соотношение (2.4.66) противоречит неравенству (2.4.1), доказанному в лемме 2.3 п. 1.

Полученное противоречие завершает доказательство леммы 2.5.

5. Непосредственное доказательство теоремы 2.1. Доказательство теоремы 2.1 основано на использовании леммы 2.5, представления ядер дробного порядка (установленного нами в п. 3 § 3) и на привлечении известных теорем резонансного типа *).

В силу леммы 2.5 величина (2.4.58′) является неограниченной на полупрямой $\lambda\geqslant 0$ (при любом фиксированном s из полусегмента $0\leqslant s<\frac{N-1}{2}$ и при любом фиксированном δ из интервала $0<\delta<\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}$). Иными словами, величина $E_\lambda^s T_{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}-\delta}(x_0,y)$ при указанных фиксированных s и δ является неограниченной на полупрямой $\lambda\geqslant 0$ в метрике $L_1(E)$ по y.

Из этого факта и из теоремы резонансного типа **) вытекает, что существует такая непрерывная в кольцевом слое E

---

*) См., например, § 5 главы 1 книги С. Качмажа и Г. Штейнгауза [1].

**) См., например, книгу С. Качмажа и Г. Штейнгауза [1, с. 31, утверждение 3°].

функция $g(y)$, что величина

$$\sigma_\lambda^s(x_0) = \int\limits_E E_\lambda^s T_{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}-\delta}(x_0, y)\, g(y)\, dy \tag{2.4.67}$$

также является неограниченной на полупрямой $\lambda \geqslant 0$.

Используя для ядра $T_{\frac{N-1}{2}-\frac{s}{2}-\delta}(x, y)$ представление (2.3.31), установленное в замечании в конце п. 3 § 3, мы получим, что для достаточно малого $h > 0$, выбор которого мы подчиним и условию $h < R^4/4$, и для произвольного фиксированного номера m величина (2.4.67) может быть представлена в виде разности двух величин:

$$\sigma_\lambda^s(x_0) = \int\limits_E E_\lambda^s [v_{\beta/2}(|x_0 - y|) - w_{\beta/2}(|x_0 - y|)]\, g(y)\, dy -$$

$$- \int\limits_E E_\lambda^s \Psi_{\beta/2}(x_0, y)\, g(y)\, dy = E_\lambda^s f(x_0) - E_\lambda^s F(x_0), \tag{2.4.68}$$

где $\beta = (N-1)/2 - s - 2\delta$, а функции $f(x)$ и $F(x)$ имеют вид

$$f(x) = \int\limits_E [v_{\beta/2}(|x - y|) - w_{\beta/2}(|x - y|)]\, g(y)\, dy, \tag{2.4.69}$$

$$F(x) = \int\limits_E \Psi_{\beta/2}(x, y)\, g(y)\, dy. \tag{2.4.70}$$

Если функцию $g(y)$ продолжить нулем за пределы кольцевого слоя E, т. е. если ввести функцию

$$\bar{g}(y) = \begin{cases} g(y) & \text{при} \quad y \in E, \\ 0 & \text{при} \quad y \in E^N \setminus E, \end{cases}$$

то функции (2.4.69) и (2.4.70) можно переписать в виде

$$f(x) = \int\limits_{E^N} [v_{\beta/2}(|x - y|) - w_{\beta/2}(|x - y|)]\, \bar{g}(y)\, dy, \tag{2.4.69$'$}$$

$$F(x) = \int\limits_G \Psi_{\beta/2}(x, y)\, \bar{g}(y)\, dy. \tag{2.4.70$'$}$$

Так как функция $\bar{g}(y)$ во всяком случае принадлежит классу $L_2(G)$, то при достаточно большом номере m в соответствии с замечанием в конце п. 3 § 3 средние Рисса любого неотрицательного порядка s функции (2.4.70′) сходятся равномерно по x в G_h и, в частности, сходятся (и потому являются ограниченными по λ) в фиксированной нами точке x_0.

Но тогда из неограниченности на полупрямой $\lambda \geqslant 0$ величины (2.4.67) и из равенства (2.4.68) вытекает, что средние Рисса $E_\lambda^s f(x)$ порядка s от функции $f(x)$, определяемой соотношением (2.4.69′) при достаточно большом номере m, являются неограниченными в точке x_0.

Остается доказать, что при достаточно малом $h > 0$ построенная функция $f(x)$ удовлетворяет и остальным требованиям теоремы 2.1, а именно: 1) является финитной в области G; 2) обращается в нуль в некоторой окрестности D точки x_0; 3) принадлежит в области G классу Зигмунда — Гёльдера C^α с произвольным положительным показателем дифференцируемости α, удовлетворяющим условию $\alpha < \beta = (N-1)/2 - s - 2\delta$ *).

Финитность в области G функции $f(x)$, определяемой соотношением (2.4.69), при достаточно малом $h > 0$ вытекает из того, что кольцевой слой E целиком лежит внутри G, а функция $[v_{\beta/2}(|x-y|) - w_{\beta/2}(|x-y|)]$ отлична от нуля только при $|x-y| < h$.

Обращение $f(x)$ в нуль в некоторой окрестности точки x_0 вытекает из того, что $h < R^4/4$, слой E лежит вне шара $|x_0 - y| \leqslant \geqslant R^4/4$, а функция $[v_{\beta/2}(|x-y|) - w_{\beta/2}(|x-y|)]$ отлична от нуля только при $|x-y| < h$.

Остается доказать, что $f(x) \in C^\alpha(E^N)$ с любым α, меньшим числа $\beta = (N-1)/2 - s - 2\delta$.

В силу соотношения (2.3.22) из п. 3 § 3 интеграл (2.4.69′) может быть записан в виде $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, где

$$f_1(x) = \int\limits_{E^N} \overset{0}{T}_{\beta/2}(x, y)\, \bar{g}(y)\, dy, \quad f_2(x) = \int\limits_{E^N} \varphi_{\beta/2}(x, y)\, \bar{g}(y)\, dy,$$

$\overset{0}{T}_{\beta/2}(x, y)$ — обычное ядро Бесселя — Макдональда, определяемое соотношением (2.1.16) из п. 3 § 1, а $\varphi_{\beta/2}(x, y)$ — функция вида (2.3.21), введенная в п. 3 § 3. В силу свойств $\varphi_{\beta/2}(x, y)$ функция $f_2(x)$ принадлежит классу C^α с показателем α, неограниченно растущим с ростом номера m.

Функция $f_1(x)$ в силу того, что $\bar{g}(y) \in L_p(E^N)$ с как угодно большим p, по определению принадлежит классу L_p^β с как угодно большим p. На основании теоремы вложения (2.1.26) (см. конец п. 3 § 1) функция $f_1(x)$ принадлежит классу $C^{\beta - N/p}$ и в силу того, что p можно взять как угодно большим, принадлежит классу C^α при любом $\alpha < \beta$.

Теорема 2.1 полностью доказана.

§ 5. Доказательство позитивной теоремы 2.3

При доказательстве основной теоремы позитивного типа — теоремы 2.3 мы фактически установим факт равномерной (на любом подмножестве G_h) равносходимости риссовских средних

*) Так как в качестве δ мы фиксировали произвольное число из интервала $0 < \delta < \frac{N-1}{4} - \frac{s}{2}$, то $\beta = \frac{N-1}{2} - s - 2\delta$ является произвольным числом из интервала $0 < \beta < \frac{N-1}{2} - s$, а потому и $\alpha < \beta$ является произвольным числом из интервала $0 < \alpha < \frac{N-1}{2} - s$.

спектральных разложений, отвечающих различным самосопряженным неотрицательным расширениям оператора Лапласа.

План проведения доказательства теоремы 2.3 следующий: в п. 1 мы докажем две имеющие самостоятельный интерес леммы об образах Фурье финитной функции из класса Никольского H_2^α, в п. 2 докажем три леммы о свойствах как самих функций из класса Никольского, так и их средних по сфере и по шару; наконец, п. 3 будет посвящен непосредственному доказательству теоремы 2.3.

1. Леммы об образах Фурье финитной функции из класса Никольского. Для произвольной области D пространства E^N договоримся обозначать символом $\overset{0}{H}{}_p^\alpha(D)$ множество функций, определенных во всем пространстве E^N, принадлежащих классу $H_p^\alpha(E^N)$ и равных нулю вне области D.

Лемма 2.6. *Пусть G — произвольная область в пространстве E^N, $\widehat{A}$ — произвольное самосопряженное неотрицательное расширение оператора Лапласа $Lu = -\Delta u$ в области G, относительно которого взято произвольное упорядоченное спектральное представление пространства $L_2(G)$ со спектральной мерой $\rho(\lambda)$, множествами кратности e_i, фундаментальными функциями $u_i(x, \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, \widehat{m})$ и кратностью $\widehat{m} \leqslant \infty$. Тогда для любых положительных чисел R и α, для любой функции $f(x)$ из класса*) $\overset{0}{H}{}_p^\alpha(G_R)$ и для любого положительного λ образ Фурье $\widehat{f}_i(\lambda)$ функции $f(x)$ удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{\lambda}^{4\lambda} \left| \widehat{f}_i(t) \right|^2 t^\alpha \, d\rho(t) \leqslant C_R \|f\|^2_{H_2^\alpha}. \tag{2.5.1}$$

Доказательство. Рассмотрим отдельно два возможных случая: 1) $0 < \alpha \leqslant 2$; 2) $\alpha > 2$.

1) Пусть сначала $0 < \alpha \leqslant 2$. Для произвольного r из интервала $0 < r < R/2$ рассмотрим среднее значение от функции $f(x)$ по шару радиуса r с центром в точке x, обозначив его символом**)

$$\varepsilon(x, r) = \varepsilon(x, r, f) = N\omega_N^{-1} r^{-N} \int_{|z| \leqslant r} f(x+z)\, dz. \tag{2.5.2}$$

Отметим, что так как функция $f(x)$ равна нулю вне G_R, то *при $r < R/2$ функция $\varepsilon(x, r, f)$ будет равна нулю для всех x, лежащих вне G_r.*

---

*) Напомним, что символ G_R обозначает подмножество точек произвольной области G, отстоящих от границы G на расстояние, большее числа $R > 0$.

**) Символ ω_N обозначает площадь поверхности N-мерной сферы единичного радиуса, равную $2\pi^{N/2}\left[\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\right]^{-1}$.

Подсчитаем образ Фурье $\widehat{\varepsilon_i}(\lambda, r, f)$ функции $\varepsilon(x, r, f)$.

Используя определение образа Фурье и соотношение (2.5.2), получим

$$\widehat{\varepsilon_i}(\lambda, r, f) = \int\limits_{G_r} \varepsilon(y, r, f)\, u_i(y, \lambda)\, dy =$$

$$= N\omega_N^{-1} r^{-N} \int\limits_{G_r} \left[\int\limits_{|z| \leqslant r} f(y+z)\, u_i(y, \lambda)\, dz \right] dy. \qquad (2.5.3)$$

Вводя в рассмотрение характеристическую функцию $\chi(z)$, равную единице при $|z| \leqslant r$ и равную нулю при $|z| > r$, мы можем следующим образом переписать выражение для образа Фурье (2.5.3):

$$\widehat{\varepsilon_i}(\lambda, r, f) = N\omega_N^{-1} r^{-N} \int\limits_{G_r} \left[\int\limits_{E^N} \chi(z)\, f(y+z)\, u_i(y, \lambda)\, dz \right] dy. \qquad (2.5.4)$$

Далее, положив $y + z = x$, получим, учитывая, что $f(x) = 0$ вне G,

$$\widehat{\varepsilon_i}(\lambda, r, f) = N\omega_N^{-1} r^{-N} \int\limits_{G} \left[\int\limits_{E^N} \chi(z)\, f(x)\, u_i(x - z, \lambda)\, dz \right] dx =$$

$$= N\omega_N^{-1} r^{-N} \int\limits_{G} f(x) \left\{ \int\limits_{|z| \leqslant r} u_i(x - z, \lambda)\, dz \right\} dx. \qquad (2.5.5)$$

Среднее значение по шару радиуса r с центром в точке x от фундаментальной функции $u_i(y, \lambda)$, стоящее в правой части (2.5.5) в фигурных скобках, легко вычисляется с помощью формулы среднего значения (2.3.1) из п. 1 § 3. Мы получим, что

$$\int\limits_{|z| \leqslant r} u_i(x - z, \lambda)\, dz = \int\limits_0^r \rho^{N-1} \left[\int \ldots \int\limits_{\omega} u_i(x + \omega\rho, \lambda)\, d\omega \right] d\rho =$$

$$= (2\pi)^{\frac{N}{2}} u_i(x, \lambda)\, \lambda^{\frac{2-N}{2}} \int\limits_0^r \rho^{\frac{N}{2}} \mathscr{J}_{\frac{N}{2}-1}(\rho\sqrt{\lambda})\, d\rho =$$

$$= (2\pi)^{\frac{N}{2}} u_i(x, \lambda)\, \lambda^{-\frac{N}{4}} r^{\frac{N}{2}} \mathscr{J}_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\lambda}). \qquad (2.5.6)$$

Вставляя (2.5.6) в (2.5.5), получим следующее представление для образа Фурье усреднения (2.5.2):

$$\widehat{\varepsilon_i}(\lambda, r, f) = N\omega_N^{-1} (2\pi)^{\frac{N}{2}} \frac{\mathscr{J}_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\lambda})}{(r\sqrt{\lambda})^{N/2}} \int\limits_G f(x)\, u_i(x, \lambda)\, dx. \qquad (2.5.7)$$

Учитывая, что $N\omega_N^{-1}(2\pi)^{N/2} = 2^{N/2}\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)$, обозначая символом $\widehat{f_i}(\lambda)$ образ Фурье самой функции $f(x)$ и вводя в рассмотрение функцию

$$\varphi(t) = 2^{\frac{N}{2}}\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)\frac{\mathscr{J}_{\frac{N}{2}}(t)}{t^{N/2}}, \tag{2.5.8}$$

мы окончательно получим следующее выражение для образа Фурье $\widehat{\varepsilon_i}(\lambda, r, f)$ усреднения (2.5.2) функции $f(x)$:

$$\widehat{\varepsilon_i}(\lambda, r, f) = \widehat{f_i}(\lambda)\varphi(r\sqrt{\lambda}). \tag{2.5.9}$$

Если мы теперь вместо усреднения (2.5.2) рассмотрим функцию, представляющую собой алгебраическую сумму трех слагаемых

$$\varepsilon(x, 2r, f) - 4\varepsilon(x, r, f) + 3f(x), \tag{2.5.10}$$

то, очевидно, при любом r из интервала $0 < r < R/4$ образ Фурье этой функции будет иметь вид

$$[\varphi(2r\sqrt{\lambda}) - 4\varphi(r\sqrt{\lambda}) + 3]\widehat{f_i}(\lambda). \tag{2.5.11}$$

Заметим, что удвоенная функция (2.5.10) представляет собой усреднение по шару радиуса r с центром в точке x четвертой разности $\Delta_z^4 f(x)$, имеющей вид

$$\Delta_z^4 f(x) = f(x+2z) - 4f(x+z) + 6f(x) - 4f(x-z) + f(x-2z).$$

Это проверяется элементарно с учетом того, что

$$\int\limits_{|z|\leqslant r} f(x+z)\,dz = \int\limits_{|z|\leqslant r} f(x-z)\,dz \text{ и } \int\limits_{|z|\leqslant r} f(x+2z)\,dz = \int\limits_{|z|\leqslant r} f(x-2z)dz.$$

Действительно,

$$N\omega_N^{-1}r^{-N}\int\limits_{|z|\leqslant r}\Delta_z^4 f(x)\,dz = N\omega_N^{-1}r^{-N}\int\limits_{|z|\leqslant r}[f(x+2z) + f(x-2z) -$$
$$-4f(x+z) - 4f(x-z) + 6f(x)]\,dz = 2[\varepsilon(x, 2r, f) - 4\varepsilon(x, r, f) + 3f(x)].$$

В таком случае образ Фурье усреднения по шару радиуса r с центром в точке x четвертой разности $\Delta_z^4 f(x)$ равен удвоенной величине (2.5.11), и, записывая для указанной четвертой разности равенство Парсеваля (2.1.11) из п. 2 § 1, мы получим соотношение

$$4\cdot\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_0^\infty|\varphi(2r\sqrt{\lambda}) - 4\varphi(r\sqrt{\lambda}) + 3|^2[\widehat{f_i}(\lambda)]^2\,d\rho(\lambda) =$$
$$= \int\limits_G\left|N\omega_N^{-1}r^{-N}\int\limits_{|z|\leqslant r}\Delta_z^4 f(x)\,dz\right|^2 dx. \tag{2.5.12}$$

Из определения класса Никольского и его нормы через четвертые разности (см. п. 3 § 1) вытекает справедливость для любого вектора z и для любого α из полусегмента $0<\alpha\leqslant 2$ следующего неравенства:

$$\|\Delta_z^4 f(x)\|_2 \leqslant |z|^\alpha \|f\|_{H_2^\alpha}. \tag{2.5.13}$$

Применяя к внутреннему интегралу, стоящему в правой части (2.5.12), неравенство Коши — Буняковского и пользуясь неравенством (2.5.13), мы получим, что

$$\int_G \left| N\omega_N^{-1} r^{-N} \int_{|z|\leqslant r} \Delta_z^4 f(x)\,dz \right|^2 dx \leqslant r^{2\alpha} \|f\|^2_{H_2^\alpha}. \tag{2.5.14}$$

Сопоставляя между собой неравенства (2.5.12) и (2.5.14), мы придем к следующему неравенству:

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\infty |\varphi(2r\sqrt{t}) - 4\varphi(r\sqrt{t}) + 3|^2 |\widehat{f}_i(t)|^2 d\rho(t) \leqslant \leqslant \frac{1}{4} r^{2\alpha} \|f\|^2_{H_2^\alpha}. \tag{2.5.15}$$

Используя представление бесселевой функции в виде ряда, получим, что для малых положительных значений t для функции $\varphi(t)$, определяемой соотношением (2.5.8), справедливо представление

$$|\varphi(2t) - 4\varphi(t) + 3|^2 = \frac{9}{(N+4)^2(N+2)^2} t^8 + O(t^{10}). \tag{2.5.16}$$

Из представления (2.5.16) вытекает, что можно фиксировать такие положительные числа a и δ, что для всех t из сегмента $a\leqslant t\leqslant 2a$ будет справедливо неравенство

$$|\varphi(2t) - 4\varphi(t) + 3|^2 \geqslant \delta. \tag{2.5.17}$$

Из (2.5.15) и (2.5.17) вытекает, что для любого r из интервала $0<r<R/4$ и для любого α из полусегмента $0<\alpha\leqslant 2$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{\frac{a}{r}\leqslant \sqrt{t}\leqslant \frac{2a}{r}} |\widehat{f}_i(t)|^2 d\rho(t) \leqslant C r^{2\alpha} \|f\|^2_{H_2^\alpha} \tag{2.5.18}$$

с постоянной C, не зависящей от r.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству неравенства (2.5.1).

Пусть a — фиксированное нами число, обеспечивающее справедливость на сегменте $a\leqslant t\leqslant 2a$ неравенства (2.5.17).

Достаточно доказать справедливость неравенства (2.5.1) отдельно в двух случаях: 1) при $\lambda\leqslant(4a/R)^2$; 2) при $\lambda>(4a/R)^2$.

В случае $\lambda\leqslant(4a/R)^2$ неравенство (2.5.1) является тривиальным следствием равенства Парсеваля (2.1.11) из п. 2 § 1, записанного для функции $f(x)$.

Действительно, пользуясь этим равенством, мы получим, что

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{\lambda}^{4\lambda} |\widehat{f}_i(t)|^2 t^{\alpha} d\rho(t) \leqslant (4\lambda)^{\alpha} \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{0}^{\infty} |\widehat{f}_i(t)|^2 d\rho(t) =$$

$$= (4\lambda)^{\alpha} \|f\|_{L_2}^2 \leqslant (4\lambda)^{\alpha} \|f\|_{H_2^{\alpha}}^2 \leqslant \left(\frac{64a^2}{R^2}\right)^{\alpha} \|f\|_{H_2^{\alpha}}^2.$$

Таким образом, для значений $\lambda \leqslant \left(\frac{4a}{R}\right)^2$ неравенство (2.5.1) будет справедливо с постоянной $C_R = \left(\frac{64a^2}{R^2}\right)^{\alpha}$.

Опираясь на соотношение (2.5.18), докажем справедливость неравенства (2.5.1) во втором случае, т. е. когда $\lambda > \left(\frac{4a}{R}\right)^2$. Запишем неравенство (2.5.18) для $r = a/\sqrt{\lambda}$, где λ — любое число, удовлетворяющее условию $\lambda > \left(\frac{4a}{R}\right)^2$. Заметим, что такое r заведомо будет удовлетворять условию $0 < r < R/4$, использованному при выводе неравенства (2.5.18).

Мы получим из (2.5.18), что

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{\lambda}^{4\lambda} |\widehat{f}_i(t)|^2 d\rho(t) \leqslant C a^{2\alpha} \lambda^{-\alpha} \|f\|_{H_2^{\alpha}}^2,$$

откуда в свою очередь следует, что

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{\lambda}^{4\lambda} |\widehat{f}_i(t)|^2 t^{\alpha} d\rho(t) \leqslant (4\lambda)^{\alpha} \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{\lambda}^{4\lambda} |\widehat{f}_i(t)|^2 d\rho(t) \leqslant C a^{2\alpha} \cdot 4^{\alpha} \|f\|_{H_2^{\alpha}}^2.$$

Таким образом, и в случае $\lambda > \left(\frac{4a}{R}\right)^2$ неравенство (2.5.1) будет справедливо с постоянной $C_R = C(4a^2)^{\alpha}$, где C — постоянная из неравенства (2.5.18).

Тем самым при $0 < \alpha \leqslant 2$ вывод неравенства (2.5.1) завершен.

2) Рассмотрим случай $\alpha > 2$. Определим целое положительное m из условия $2m < \alpha \leqslant 2m + 2$. Последовательное применение формулы Грина к фундаментальной функции $u_i(x, \lambda)$ и к одной из функций f, Δf, $\Delta^2 f$, ..., $\Delta^{m-1} f$ приведет нас к следующему соотношению между образами Фурье функций $f(x)$ и $\Delta^m f(x)$:

$$(\widehat{\Delta^m f})_i(\lambda) = (-1)^m \lambda^m \widehat{f}_i(\lambda). \tag{2.5.19}$$

Заметим теперь, что функция $\Delta^m f(x)$ принадлежит классу $H_2^{\alpha-2m}(G_R)$ с показателем дифференцируемости $(\alpha - 2m)$, удовлетворяющим условию $0 < \alpha - 2m \leqslant 2$. Поэтому в силу уже рассмотренного случая 1 справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{\lambda}^{4\lambda} |(\widehat{\Delta^m f})_i(\lambda)|^2 t^{\alpha-2m} d\rho(t) \leqslant C_R \|\Delta^m f\|_{H_2^{\alpha-2m}}^2 \leqslant C_R \cdot \|f\|_{H_2^{\alpha}}^2. \tag{2.5.20}$$

Из сопоставления неравенств (2.5.20) и (2.5.19) вытекает неравенство (2.5.1) для произвольного $\alpha > 2$.

Доказательство леммы 2.6 полностью завершено.

В этом пункте мы докажем еще одну лемму об образах Фурье, из которой фактически будет вытекать теорема о локализации средних Рисса порядка $s\left(0 \leqslant s < \frac{N-1}{2}\right)$ для функции из класса $H_2^{\frac{N-1}{2}-s}(G_R)$.

Для того чтобы сформулировать эту лемму, введем в рассмотрение интеграл

$$\overset{\nu_n}{I_t^\lambda}(R) = \int_R^\infty r^{-s} \mathcal{J}_{\nu_n+s}(r\sqrt{\lambda})\, \mathcal{J}_{\nu_n-1}(r\sqrt{t})\, dr, \tag{2.5.21}$$

считая, что число ν_n имеет вид $\nu_n = \frac{N}{2} - n$, а номер n пробегает любое из значений $n = 0, 1, \ldots, \left[\frac{N-1}{2}\right]$, где $\left[\frac{N-1}{2}\right]$ — целая часть числа $\frac{N-1}{2}$.

Так как для любого такого номера n число ν_n удовлетворяет неравенству $\nu_n = N/2 - n \geqslant 1/2$, то интеграл (2.5.21) принадлежит к классу интегралов вида (2.4.9′), изученных в п. 2 § 4, а потому для интеграла (2.5.21) при любых $s \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 1$ и $t \geqslant 1$ справедливы следующие две оценки*):

а) при $|\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}| \leqslant 1$

$$\left|\overset{\nu_n}{I_t^\lambda}(R)\right| \leqslant C_1 R^{-s} \lambda^{-1/4} t^{-1/4}; \tag{2.5.22}$$

б) при $|\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}| \geqslant 1$

$$\left|\overset{\nu_n}{I_t^\lambda}(R)\right| \leqslant C_2 R^{-1-s} \lambda^{-1/4} t^{-1/4} \left|\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}\right|^{-1} \tag{2.5.23}$$

(с постоянными C_1 и C_2, не зависящими от $\lambda \geqslant 1$, $t \geqslant 1$ и $0 < R \leqslant 1$).

Лемма 2.7. *Пусть G — произвольная область в пространстве E^N, $\widehat{A}$ — произвольное самосопряженное неотрицательное расширение оператора Лапласа $Lu = -\Delta u$ в области G, относительно которого взято произвольное упорядоченное спектральное представление пространства $L_2(G)$ со спектральной мерой $\rho(\lambda)$, множествами кратности e_i, фундаментальными функциями $u_i(x, \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, \widehat{m})$ и кратностью $\widehat{m} \leqslant \infty$. Пусть далее $\alpha \leqslant N/2$ и R — любые два положительных числа, причем $\alpha =$*

*) Эти оценки являются следствиями оценок (2.4.10′) и (2.4.11′), установленных в п. 2 § 4 главы 2.

$=l+\varkappa$, *где* l — *целое неотрицательное число, а* $\varkappa$ *удовлетворяет условию* $0<\varkappa\leqslant 1$. *Тогда для любого достаточно большого* $\lambda>0$ *и для любой функции* $f(x)$ *из класса* $\overset{0}{H}{}_2^{\alpha}(G_R)$ *справедлива следующая оценка*:

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^{\infty}\widehat{f}_i(t)\,u_i(x,t)\,t^{\frac{l}{2}-\frac{N-2}{4}}\lambda^{\frac{1}{4}}I_t^{\lambda}{}^{\nu_l}(R)\,d\rho(t)=O\left(\lambda^{-\frac{\varkappa}{2}}\right)\|f\|_{H_2^{\alpha}}, \tag{2.5.24}$$

равномерная относительно x *в каждой строго внутренней подобласти* G' *области* G.

Доказательство. Для сокращения записи введем в рассмотрение величины $a_i(t)=\widehat{f}_i(t)\,t^{\alpha/2}$.

Тогда в силу леммы 2.6 для любого $\lambda>0$ будет справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_{\lambda}^{4\lambda}|a_i(t)|^2d\rho(t)\leqslant A^2, \tag{2.5.25}$$

в котором постоянная A равна норме

$$A=\|f\|_{H_2^{\alpha}}.$$

Оценка (2.5.24) будет установлена, если мы докажем, что равномерно относительно x в каждой строго внутренней подобласти G' области G справедливо неравенство *)

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^{\infty}\left|a_i(t)\,u_i(x,t)\,I_t^{\lambda}{}^{\nu_l}(R)\right|\lambda^{\frac{1}{4}}t^{\frac{2-N}{4}-\frac{\varkappa}{2}}d\rho(t)\leqslant C\cdot\lambda^{-\frac{\varkappa}{2}}A. \tag{2.5.26}$$

Прежде чем приступить к доказательству неравенства (2.5.26), установим две вспомогательные оценки.

Сначала докажем, что для величин $a_i(t)$, удовлетворяющих неравенству (2.5.25), для любого $\varepsilon>0$ справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_{t\geqslant 1}|a_i(t)|^2t^{-\varepsilon}d\rho(t)\leqslant C(\varepsilon)\,A^2. \tag{2.5.27}$$

Представим величину, стоящую в левой части (2.5.27), в виде суммы

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_{t\geqslant 1}|a_i(t)|^2\,t^{-\varepsilon}d\rho(t)=\sum_{p=0}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_{4^p}^{4^{p+1}}|a_i(t)|^2t^{-\varepsilon}d\rho(t)\right].$$

Далее вынесем из-под знака интеграла, стоящего внутри квадратных скобок, максимальное значение $t^{-\varepsilon}$, равное $4^{-\varepsilon p}$, и ис-

*) Мы учитываем при этом, что $l/2-\alpha/2=-\varkappa/2$.

пользуем неравенство (2.5.25). При этом получим, что

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{t\geqslant 1} |a_i(t)|^2 t^{-\varepsilon} d\rho(t) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p=0}^{\infty} 4^{-\varepsilon p} \left\{ \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{4^p}^{4^{p+1}} |a_i(t)|^2 d\rho(t) \right\} \leqslant A^2 \sum_{p=0}^{\infty} 4^{-\varepsilon p} = A^2 \left(1 - 4^{-\varepsilon}\right)^{-1}.$$

Таким образом, неравенство (2.5.27) с постоянной $C(\varepsilon) = (1 - 4^{-\varepsilon})^{-1}$ доказано.

Убедимся теперь в том, что если величины $a_i(t)$ удовлетворяют неравенству (2.5.25), то для любого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{t\geqslant 1} |a_i(t) u_i(x, t)| t^{-\varepsilon - N/4} d\rho(t) \leqslant CA, \tag{2.5.28}$$

также равномерная относительно x в каждой строго внутренней подобласти G' области G.

Действительно, применяя к величине, стоящей в левой части (2.5.28), неравенство Коши — Буняковского сначала для интеграла, а затем для суммы и используя оценку (2.5.27) и равномерную в каждой строго внутренней подобласти G' области G оценку (2.3.9) из п. 2 § 3, взятую при $\lambda = 1$, $\delta = \varepsilon$, мы получим

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{t\geqslant 1} |a_i(t) u_i(x, t)| t^{-\varepsilon - N/4} d\rho(t) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \left(\int_{t\geqslant 1} |a_i(t)|^2 t^{-\varepsilon} d\rho(t) \right)^{1/2} \left(\int_{t\geqslant 1} |u_i(x, t)|^2 t^{-\varepsilon - N/2} d\rho(t) \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{t\geqslant 1} |a_i(t)|^2 t^{-\varepsilon} d\rho(t) \right]^{1/2} \left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{t\geqslant 1} |u_i(x, t)|^2 t^{-\varepsilon - N/2} d\rho(t) \right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \cdot A.$$

Итак, оценка (2.5.28) также установлена.

Приступим теперь непосредственно к выводу равномерного в каждой строго внутренней подобласти G' области G неравенства (2.5.26).

Достаточно доказать, что существуют постоянные C_3, C_4, C_5 и C_6 такие, что равномерно относительно x в каждой строго внутренней подобласти G' области G справедливы следующие четыре неравенства:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{\sqrt{t}\leqslant 1} |a_i(t) u_i(x, t) I_t^{\lambda}{}^{\nu_l}(R)| \lambda^{\frac{1}{4}} t^{\frac{2-N}{4} - \frac{\varkappa}{2}} d\rho(t) \leqslant C_3 \lambda^{-\frac{\varkappa}{2}} A, \tag{2.5.29}$$

$$S_2=\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_{1\leqslant\sqrt{t}\leqslant\frac{\sqrt{\lambda}}{2}}|a_i(t)\,u_i(x,\,t)\overset{\nu_l}{I_t^\lambda}(R)|\,\lambda^{\frac{1}{4}}t^{\frac{2-N}{4}-\frac{\varkappa}{2}}d\rho(t)\leqslant C_4\lambda^{-\frac{\varkappa}{2}}A, \tag{2.5.30}$$

$$S_3=\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_{|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant\frac{\sqrt{\lambda}}{2}}|a_i(t)\,u_i(x,\,t)\;\overset{\nu_l}{I_t^\lambda}(R)|\,\lambda^{\frac{1}{4}}t^{\frac{2-N}{4}-\frac{\varkappa}{2}}d\rho(t)\leqslant C_5\lambda^{-\frac{\varkappa}{2}}A, \tag{2.5.31}$$

$$S_4=\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_{\frac{3}{2}\sqrt{\lambda}\leqslant\sqrt{t}<\infty}|a_i(t)\,u_i(x,\,t)\overset{\nu_l}{I_t^\lambda}(R)|\,\lambda^{\frac{1}{4}}t^{\frac{2-N}{4}-\frac{\varkappa}{2}}d\rho(t)\leqslant C_6\lambda^{-\frac{\varkappa}{2}}A. \tag{2.5.32}$$

Начнем с установления оценки (2.5.29), для чего, используя соотношение $a_i(t)=\widehat{f}_i(t)\,t^{\alpha/2}$, перепишем левую часть (2.5.29) в виде

$$S_1=\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_{\sqrt{t}\leqslant 1}|\widehat{f}_i(t)\,u_i(x,\,t)|\,|\overset{\nu_l}{I_t^\lambda}(R)|\,\lambda^{\frac{1}{4}}t^{\frac{2-N}{4}+\frac{l}{2}}d\rho(t). \tag{2.5.33}$$

Убедимся с помощью соотношения (2.5.33), что для установления оценки (2.5.29) достаточно получить для $\overset{\nu_l}{I_t^\lambda}(R)$ при всех $t\leqslant 1$, $\lambda\geqslant 1$ следующую оценку:

$$|\overset{\nu_l}{I_t^\lambda}(R)|=O\left(t^{\frac{N-2}{4}-\frac{l}{2}}\lambda^{-\frac{3}{4}}\right). \tag{2.5.34}$$

Действительно, если оценка (2.5.34) будет получена, то из этой оценки и из (2.5.33) будет вытекать неравенство

$$S_1\leqslant C_7\cdot\lambda^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_{t\leqslant 1}|\widehat{f}_i(t)\,u_i(x,\,t)|\,d\rho(t). \tag{2.5.35}$$

Для получения из неравенства (2.5.35) оценки (2.5.29) достаточно учесть, что $\lambda^{-1/2}\leqslant\lambda^{-\varkappa/2}$, применить сначала к интегралу, а затем к сумме, стоящим в правой части (2.5.35), неравенство Коши — Буняковского и воспользоваться оценками

$$\left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_{t\leqslant 1}|\widehat{f}_i(t)|^2\,d\rho(t)\right]^{1/2}\leqslant\|f\|_{L_2(G)}\leqslant\|f\|_{H_2^\alpha}=A,$$

$$\left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_{t\leqslant 1}|u_i(x,\,t)|^2\,d\rho(t)\right]^{1/2}\leqslant C_8,$$

первая из которых вытекает из равенства Парсеваля (2.1.11) из п. 2 § 1, взятого при $\mu=0$, а вторая является частным случаем при $\mu_0=1$ оценки (2.3.4), установленной в п. 2 § 3.

Итак, для завершения доказательства неравенства (2.5.29) нам остается установить (при $0\leqslant t\leqslant 1$, $\lambda\geqslant 1$) оценку (2.5.34).

Подвергая интеграл (2.5.21) m-кратному интегрированию по частям, основанному на использовании уже неоднократно приводившихся рекуррентных формул

$$\int \frac{\mathcal{J}_{\nu+s}(r\sqrt{\lambda})}{r^{\nu+s-1}}\,dr=-\frac{\mathcal{J}_{\nu+s-1}(r\sqrt{\lambda})}{r^{\nu+s-1}\sqrt{\lambda}},$$

$$\frac{d}{dr}\left[r^{\nu-1}\mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t})\right]=r^{\nu-1}\sqrt{t}\cdot\mathcal{J}_{\nu-2}(r\sqrt{t}),$$

и беря в качестве m целое число, удовлетворяющее условию $m>\frac{N-1}{2}-l$ *), получим, что

$$\overset{\nu_l}{I_t^\lambda}(R)=\sum_{p=1}^{m}\frac{(\sqrt{t})^{p-1}}{(\sqrt{\lambda})^{p}}\mathcal{J}_{\nu_l+s-p}(R\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{\nu_l-p}(R\sqrt{t})\,R^{-\rho}+$$

$$+\left(\sqrt{\frac{t}{\lambda}}\right)^m\int_R^\infty \mathcal{J}_{\nu_l+s-m}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{\nu_l-m-1}(r\sqrt{t})\,r^{-\rho}dr. \tag{2.5.36}$$

Используя для бесселевых функций, стоящих в правой части (2.5.36), оценки

$$|\mathcal{J}_{\nu_l+s-p}(R\sqrt{\lambda})|=O\left(R^{-\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{1}{4}}\right),\quad |\mathcal{J}_{\nu_l-p}(R\sqrt{t})=O\left[(R\sqrt{t})^{\nu_l-p}\right],$$

$$|\mathcal{J}_{\nu_l+s-m}(r\sqrt{\lambda})|=O\left(r^{-\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{1}{4}}\right),\quad |\mathcal{J}_{\nu_l-m-1}(r\sqrt{t})|=O\left[(r\sqrt{t})^{\nu_l-m-1}\right]$$

и учитывая, что $\nu_l=N/2-l$ и что при $m>(N-1)/2-l$ и при любом $s\geqslant 0$

$$\int_R^\infty r^{-\frac{1}{2}+\nu_l-m-1-s}\,dr=\int_R^\infty r^{\left(\frac{N-1}{2}-l\right)-m-1-s}\,dr<\infty,$$

мы получим, что при всех $0<t<1$, $\lambda\geqslant 1$ справедлива оценка (2.5.34).

Тем самым вывод неравенства (2.5.29) завершен.

Для установления неравенства (2.5.30) воспользуемся оценкой (2.5.23), которую для рассматриваемых значений $1\leqslant\sqrt{t}\leqslant$ $\leqslant\sqrt{\lambda}/2$ можно переписать в виде

$$\left|\overset{\nu_l}{I_t^\lambda}(R)\right|=O\left(\lambda^{-\frac{3}{4}}t^{-\frac{1}{4}}\right). \tag{2.5.37}$$

---

*) Так как $l<\alpha\leqslant\frac{N}{2}$, то $l\leqslant\left[\frac{N-1}{2}\right]$, и, следовательно номер $m\geqslant$ $\geqslant 1$.

Пользуясь оценкой (2.5.37), можем мажорировать левую часть (2.5.30) следующей величиной:

$$S_2 \leqslant C_9 \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{1 \leqslant \sqrt{t} \leqslant \sqrt{\lambda}/2} |a_i(t) u_i(x, t)| \lambda^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1-N}{4}-\frac{\varkappa}{2}} d\rho(t). \quad (2.5.38)$$

Заметим теперь, что поскольку для рассматриваемых значений t справедливо неравенство $\lambda^{\frac{\varkappa-1}{2}} \leqslant 2^{\varkappa-1} t^{\frac{\varkappa-1}{2}}$, то

$$\lambda^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1-N}{4}-\frac{\varkappa}{2}} = \lambda^{-\frac{\varkappa}{2}} \lambda^{\frac{\varkappa-1}{2}} t^{\frac{1-N}{4}-\frac{\varkappa}{2}} \leqslant 2^{\varkappa-1} \lambda^{-\frac{\varkappa}{2}} t^{-\frac{1}{4}-\frac{N}{4}}. \quad (2.5.39)$$

Сопоставляя неравенства (2.5.38) и (2.5.39), получим, что

$$S_2 \leqslant C_{10} \lambda^{-\frac{\varkappa}{2}} \sum_{t=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{t \geqslant 1} |a_i(t) u_i(x, t)| t^{-\frac{1}{4}-\frac{N}{4}} d\rho(t),$$

и для установления неравенства (2.5.30) остается воспользоваться оценкой (2.5.28), взятой при $\varepsilon = 1/4$.

Неравенство (2.5.32) устанавливается аналогично неравенству (2.5.30). Воспользовавшись оценкой (2.5.23), которую для рассматриваемых значений $\frac{3}{2}\sqrt{\lambda} \leqslant \sqrt{t} < \infty$ можно переписать в виде

$$\left| \overset{\nu_l}{I_t^\lambda}(R) \right| = O\left(\lambda^{-1/4} t^{-3/4}\right),$$

мы можем следующим образом мажорировать левую часть (2.5.32):

$$S_4 \leqslant C_{11} \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\frac{3}{2}\sqrt{\lambda} \leqslant \sqrt{t} < \infty} |a_i(t) u_i(x, t)| t^{-\frac{1}{4}-\frac{N}{4}-\frac{\varkappa}{2}} d\rho(t). \quad (2.5.40)$$

Остается заметить, что для рассматриваемых значений t справедливо неравенство

$$t^{-\frac{\varkappa}{2}} \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{-\varkappa} \lambda^{-\frac{\varkappa}{2}},$$

которое в сопоставлении с (2.5.40) приводит к оценке

$$S_4 \leqslant C_{12} \lambda^{-\frac{\varkappa}{2}} \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{t \geqslant 1} |a_i(t) u_i(x, t)| t^{-\frac{1}{4}-\frac{N}{4}} d\rho(t). \quad (2.5.41)$$

Из (2.5.41) в силу оценки (2.5.28), взятой при $\varepsilon = 1/4$, вытекает неравенство (2.5.32).

Теперь нам остается доказать только неравенство (2.5.31).

Обозначив через p наименьший из номеров, для которых $2^p - 1 \geqslant \sqrt{\lambda}/2$, мы можем следующим образом переписать левую часть (2.5.31):

$$S_3 \leqslant \sum_{k=1}^{p} \left\{ \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{2^{k-1}-1 \leqslant |\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}| < 2^k - 1} |a_i(t) u_i(x, t) \overset{\nu_l}{I_t^{\lambda}}(R)| \lambda^{\frac{1}{4}} t^{\frac{2-N}{4} - \frac{\varkappa}{2}} d\rho(t) \right\}. \tag{2.5.42}$$

Сопоставляя между собой оценки (2.5.22) и (2.5.23), получим, что для любого фиксированного $R > 0$ и для всех $\lambda \geqslant 1$ и $t \geqslant 1$ справедлива оценка

$$|\overset{\nu_l}{I_t^{\lambda}}(R)| = O\left[\lambda^{-1/4} t^{-1/4} (1 + |\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}|)^{-1}\right]. \tag{2.5.43}$$

Из (2.5.42) и (2.5.43) вытекает, что

$$S_3 \leqslant C_{13} \sum_{k=1}^{p} \left\{ \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{2^{k-1}-1 \leqslant |\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}| \leqslant 2^k - 1} a_i(t) u_i(x, t) \left| \frac{t^{\frac{1-N}{2} - \frac{\varkappa}{2}}}{1 + |\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}|} \times \right. \right.$$
$$\left. \times d\rho(t) \right\}. \tag{2.5.44}$$

Обозначим символом A_k величину, стоящую в правой части (2.5.44) в фигурных скобках. Так как для рассматриваемых значений t, лежащих в сегменте $\frac{\sqrt{\lambda}}{2} \leqslant \sqrt{t} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{\lambda}$, справедливо неравенство $t^{\frac{1-N}{4} - \frac{\varkappa}{2}} \leqslant 4^{\frac{N-1}{4} + \frac{\varkappa}{2}} \lambda^{\frac{1-N}{4} - \frac{\varkappa}{2}}$, то для величины A_k справедлива оценка

$$A_k \leqslant 4^{\frac{N-1}{4} + \frac{\varkappa}{2}} \lambda^{\frac{1-N}{4} - \frac{\varkappa}{2}} \cdot 2^{-(k-1)} \left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}| \leqslant 2^k - 1} |a_i(t) u_i(x, t)| \, d\rho(t) \right]. \tag{2.5.45}$$

Применяя к выражению, стоящему в (2.5.45) в квадратных скобках, неравенство Коши — Буняковского сначала для интеграла, а затем для суммы, получим

$$\left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}| \leqslant 2^k - 1} |a_i(t) u_i(x, t)| \, d\rho(t) \right] \leqslant$$
$$\leqslant \left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\frac{\sqrt{\lambda}}{2} \leqslant \sqrt{t} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{\lambda}} |a_i(t)|^2 d\rho \right]^{1/2} \left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}| \leqslant 2^k} |u_i(x, t)|^2 d\rho(t) \right]^{1/2}. \tag{2.5.46}$$

В силу оценки (2.5.25) и оценки (2.3.7) из п. 2 § 3, взятой при $\mu=\sqrt{\lambda}$, $\rho_0=2^k$, получим следующие неравенства:

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\leqslant\sqrt{t}\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{\lambda}} |a_i(t)|^2 d\rho(t)=\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\frac{\lambda}{4}\leqslant t\leqslant 9\frac{\lambda}{4}} |a_i(t)|^2\, d\rho(t)\leqslant 3A^2, \quad (2.5.47)$$

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant 2^k} |u_i(x,t)|^2\, d\rho(t)\leqslant C_{14}\cdot 2^k\lambda^{\frac{N-1}{2}}. \qquad (2.5.48)$$

Из неравенств (2.5.44) — (2.5.48) окончательно получим

$$S_3\leqslant C_{13}\sum_{k=1}^{p} A_k\leqslant C_{15}\lambda^{\frac{1-N}{4}-\frac{\varkappa}{2}}\sum_{k=1}^{p} 2^{-(k-1)}A\cdot 2^{\frac{k}{2}}\lambda^{\frac{N-1}{4}}=$$

$$=2C_{15}\lambda^{-\frac{\varkappa}{2}}A\sum_{k=1}^{p}2^{-\frac{k}{2}}\leqslant C_{16}\lambda^{-\frac{\varkappa}{2}}A.$$

Тем самым вывод неравенства (2.5.31) завершен.

Лемма 2.7 полностью доказана.

2. Некоторые свойства производных по сферическому радиусу и производных от средних по сфере для функций из класса Никольского. Всюду в этом пункте мы будем рассматривать функции, принадлежащие в произвольной области D пространства E^N классу Никольского H_p^{α} с положительным показателем дифференцируемости α, который, как и выше, будем записывать в виде суммы $\alpha=l+\varkappa$, где l — целое неотрицательное число, а $\varkappa$ принадлежит полусегменту $0<\varkappa\leqslant 1$ *).

Фиксируя произвольные $r>0$ и $h>0$, введем в пространстве E^N сферические координаты $(x+r\omega)$ с центром в произвольной фиксированной точке x подмножества D_{r+2h} и обозначим символом $f^{(l)}(r,\omega)$ производную по радиусу r порядка l от функции $f(x)$ в направлении, определяемом углами ω.

Рассмотрим теперь для функции $f(r,\omega)$ и для производной $f^{(l)}(r,\omega)$ вторые разности по радиусу r в направлении, определяемом углами ω, обозначив их символами

$$\widetilde{\Delta}_h^2 f(r,\omega)=f(r+2h,\omega)-2f(r+h,\omega)+f(r,\omega), \qquad (2.5.49)$$

$$\widetilde{\Delta}_h^2 f^{(l)}(r,\omega)=f^{(l)}(r+2h,\omega)-2f^{(l)}(r+h,\omega)+f^{(l)}(r,\omega). \quad (2.5.50)$$

Установим оценку L_p-нормы второй разности (2.5.50) для функции $f(x)$ из класса Никольского $H_p^{\alpha}(D)$.

Лемма 2.8. *Если $\alpha>0$ представлено в виде $\alpha=l+\varkappa$, где l — целое неотрицательное число, $0<\varkappa\leqslant 1$, то для любой функции $f(x)$ из класса Никольского $H_p^{\alpha}(D)$, любого $p\geqslant 1$ и лю-*

*) При этом $l=[\alpha]$, где $[\alpha]$ — целая часть числа α, в случае, если α не является целым, и $l=\alpha-1$ в случае, если α является целым, а $\varkappa=\alpha-[\alpha]$.

бых $r>0$ и $h>0$ для второй разности (2.5.50) *справедлива следующая оценка:*

$$\|\widetilde{\Delta}_h^2 f^{(l)}(r,\omega)\|_{L_p(D_{r+2h})} \leqslant Ch^{\varkappa}\|f\|_{H_p^{\alpha}(D)}. \tag{2.5.51}$$

Используя введенное в п. 3 § 1 обозначение (2.1.12) для частной производной и обозначая для мультииндекса $\bar{k}$ с целочисленными координатами $\bar{k}=(k_1, k_2, \ldots, k_N)$ символом $x^{\bar{k}}$ произведение $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_N^{k_N}$, можем следующим образом записать частную производную по радиусу r порядка l от функции $f(x)$ в направлении, определяемом углами ω:

$$f^{(l)}(r,\omega) = \sum_{|\bar{k}|=l} \partial^{\bar{k}} f(x)\frac{x^{\bar{k}}}{r^l}. \tag{2.5.52}$$

Так как направление, определяемое углами ω, фиксировано, то величина $x^{\bar{k}}/r^l$ при $|\bar{k}|=l$, представляющая собой произведение направляющих косинусов, не зависит от r. Отсюда следует, что доказательство неравенства (2.5.51) достаточно провести для случая $0<\alpha\leqslant 1$, т. е. для случая $l=0$, $0<\varkappa\leqslant 1$.

Итак, перейдем к установлению неравенства

$$\|\widetilde{\Delta}_h^2 f(r,\omega)\|_{L_p(D_{r+2h})} \leqslant Ch^{\varkappa}\|f\|_{H_p^{\alpha}(D)} \tag{2.5.53}$$

для функции $f(x)$ из класса $H_p^{\alpha}(D)$ при $0<\alpha\leqslant 1$, $\varkappa=\alpha$.

Как было указано в п. 3 § 1 (см. соотношения (2.1.20) и (2.1.21)), произвольная функция $f(x)$ из класса Никольского $H_p^{\alpha}(D)$ может быть представлена в виде суммы ряда

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m(x), \tag{2.5.54}$$

m-й член которого $Q_m(x)$ является целой функцией экспоненциального типа 2^m с нормой в $L_p(D)$, удовлетворяющей неравенству *)

$$\|Q_m\|_{L_p(D)} \leqslant C\cdot 2^{-m\alpha}\|f\|_{H_p^{\alpha}(D)}. \tag{2.5.55}$$

Из представления (2.5.54) вытекает, что для установления неравенства (2.5.53) достаточно доказать неравенство

$$\sum_{m=0}^{\infty}\|\widetilde{\Delta}_h^2 Q_m(x)\|_{L_p(D_{r+2h})} \leqslant Ch^{\alpha}\|f\|_{H_p^{\alpha}(D)}. \tag{2.5.56}$$

---

*) Постоянная C в (2.5.55) не зависит ни от номера m, ни от функции $f(x)$.

Тривиально проверяется, что для любого $x \in D_{r+2h}$

$$\widetilde{\Delta}_h^2 Q_m(x) = Q_m(r+2h, \omega) - 2Q_m(r+h, \omega) + Q_m(r, \omega) =$$

$$= \int_0^h \left[\int_0^h \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial r^2}(r+t+s, \omega)\, dt \right] ds. \quad (2.5.57)$$

Из последнего соотношения следует, что

$$\| \widetilde{\Delta}_h^2 Q_m(x) \|_{L_p(D_{r+2h})}^p = \int_{D_{r+2h}} \left| \int_0^h \left[\int_0^h \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial r^2}(r+t+s)\, dt \right] ds \right|^p dx. \tag{2.5.58}$$

Применяя к двойному интегралу, стоящему в правой части (2.5.58) под знаком модуля, неравенство Гёльдера, будем иметь

$$\left| \int_0^h \left[\int_0^h \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial r^2}(r+t+s)\, dt \right] ds \right|^p \leqslant \left[\int_0^h \int_0^h \left| \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial r^2}(r+t+s) \right|^p dt\, ds \right] h^{2p-2}. \tag{2.5.59}$$

Сопоставляя соотношения (2.5.58) и (2.5.59) и меняя порядок интегрирования по x и по t, s, получим, что

$$\| \widetilde{\Delta}_h^2 Q_m(x) \|_{L_p(D_{r+2h})}^p \leqslant$$

$$\leqslant h^{2p-2} \int_0^h dt \int_0^h ds \int_{D_{r+2h}} \left| \frac{\partial^2 Q_m}{\partial r^2}(r+t+s) \right|^p r^{N-1}\, dr\, d\omega \leqslant$$

$$\leqslant h^{2p-2} \int_0^h dt \int_0^h ds \, \| Q_m^{(2)}(r, \omega) \|_{L_p(D_{r+2h})}^p \leqslant h^{2p} \| Q_m^{(2)}(r, \omega) \|_{L_p(D_{r+2h})}^p. \tag{2.5.60}$$

Далее воспользуемся для производной $Q_m^{(2)}(r, \omega)$ соотношением вида (2.5.52):

$$Q_m^{(2)}(r, \omega) = \sum_{|\bar{k}|=2} \partial^{\bar{k}} Q_m(x) \frac{x^{\bar{k}}}{r^2} \tag{2.5.61}$$

и привлечем для оценки L_p-нормы $\partial^{\bar{k}} Q_m(x)$ известное неравенство Бернштейна (см. неравенство (2.1.22) из п. 3 § 1)

$$\| \partial^{\bar{k}} Q_m(x) \|_{L_p(D)} \leqslant 2^{2m} \| Q_m(x) \|_{L_p(D)}. \tag{2.5.62}$$

Из (2.5.61) и (2.5.62) с учетом того, что $\left| \frac{x^{\bar{k}}}{r^2} \right| \leqslant 1$, вытекает, что

$$\| Q_m^{(2)}(r, \omega) \|_{L_p(D_{r+2h})} \leqslant \sum_{|\bar{k}|=2} \| \partial^{\bar{k}} Q_m(x) \|_{L_p(D)} \leqslant C \cdot 2^{2m} \| Q_m(x) \|_{L_p(D)}. \tag{2.5.63}$$

Наконец, сопоставляя между собой неравенства (2.5.60) и (2.5.63), мы придем к оценке

$$\|\widetilde{\Delta}_h^2 Q_m(x)\|_{L_p(D_{r+2h})} \leqslant Ch^2 \cdot 2^{2m} \|Q_m(x)\|_{L_p(D)}. \tag{2.5.64}$$

Возвратимся теперь к доказательству неравенства (2.5.56). Фиксируем для каждого $h > 0$ номер $n = n(h)$ из условия

$$2^n < h^{-1} \leqslant 2^{n+1} \tag{2.5.65}$$

и разобьем сумму, стоящую в левой части (2.5.56), на две суммы:

$$S_1 = \sum_{m=0}^{n} \|\widetilde{\Delta}_h^2 Q_m(x)\|_{L_p(D_{2h})}, \quad S_2 = \sum_{m=n+1}^{\infty} \|\widetilde{\Delta}_h^2 Q_m(x)\|_{L_p(D_{2h})}.$$

Достаточно доказать, что каждая из этих сумм равна $O(h^\alpha)\|f\|_{H_p^\alpha(D)}$.

Для оценки S_1 воспользуемся неравенствами (2.5.64) и (2.5.55) и учтем, что в силу (2.5.65) $2^{n(2-\alpha)} < h^{\alpha-2}$. Получим, что

$$S_1 \leqslant Ch^2 \sum_{m=0}^{n} 2^{2m} \|Q_m(x)\|_{L_p(D)} \leqslant Ch^2 \|f\|_{H_p^\alpha(D)} \sum_{m=0}^{n} 2^{m(2-\alpha)} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 h^2 \cdot 2^{n(2-\alpha)} \|f\|_{H_p^\alpha(D)} \leqslant C_1 h^\alpha \|f\|_{H_p^\alpha(D)}. \tag{2.5.66}$$

Для оценки S_2 прежде всего заметим, что из выражения (2.5.49) для второй разности вытекает, что

$$S_2 = \sum_{m=n+1}^{\infty} \|\widetilde{\Delta}_h^2 Q_m(x)\|_{L_p(D_{r+2h})} \leqslant 4 \sum_{m=n+1}^{\infty} \|Q_m(x)\|_{L_p(D)}.$$

Далее, пользуясь неравенством (2.5.55) и правым неравенством (2.5.65), получим

$$S_2 \leqslant 4C \|f\|_{H_p^\alpha(D)} \sum_{m=n+1}^{\infty} 2^{-m\alpha} \leqslant C_2 \|f\|_{H_p^\alpha(D)} \cdot 2^{-(n+1)\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant C_2 h^\alpha \|f\|_{H_p^\alpha(D)}. \tag{2.5.67}$$

Из неравенств (2.5.66) и (2.5.67) вытекает справедливость оценки (2.5.56).

Тем самым доказательство леммы 2.8 завершено.

Пусть, как и выше, функция $f(x)$ принадлежит классу Никольского $H_p^\alpha(D)$, где $\alpha = l + \varkappa$ при целом неотрицательном l и $0 < \varkappa \leqslant 1$, но теперь потребуем дополнительно, чтобы выполнялось условие $\alpha p > N$.

Тогда теорема вложения во всяком случае обеспечивает непрерывность функции на множестве D_R при любом $R > 0$, и мы можем для любой точки $x \in D_{2R}$ при любом $0 < r \leqslant R$ рассмотреть среднее значение функции $f(x)$ на поверхности сферы радиуса r с центром в точке x, обозначив его символом $\psi(r) = \psi_x(r)$, т. е. положив по определению

$$\psi(r) = \psi_x(r) = \omega_N^{-1} \int\limits_{\omega} \dots \int f(x + r\omega)\, d\omega, \tag{2.5.68}$$

где, как и выше, символ $\int\limits_{\omega} \dots \int f(x + r\omega)\, d\omega$ обозначает интеграл по всем углам на поверхности N-мерной сферы радиуса r с центром в точке x, а $\omega_N = 2(\sqrt{\pi})^N \left[\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\right]^{-1}$.

Докажем следующее утверждение.

Лемма 2.9. *Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу $H_p^\alpha(D)$ при положительном α, равном $l + \varkappa$, где l — целое неотрицательное число, $0 < \varkappa \leqslant 1$, и пусть, кроме того, $p \geqslant 1$, $\alpha p > N$. Тогда для любого положительного R, для любого x из множества D_{3R}, любого целого m, равного $0, 1, \dots, l$, каждая из функций *)*

$$\varphi_m(r) = r^{m+\varkappa-1} \psi^{(m)}(r) \tag{2.5.69}$$

суммируема на сегменте $0 \leqslant r \leqslant R$. Более того, для любого h из интервала $0 < h < R/3$ для второй разности каждой из функций (2.5.69) справедлива следующая оценка:

$$\int\limits_0^R |\varphi_m(r + 2h) - 2\varphi_m(r + h) + \varphi_m(r)|\, dr \leqslant C h^{\varkappa} \|f\|_{H_p^\alpha(D)}, \tag{2.5.70}$$

равномерная относительно x в D_{3R}.

Доказательство. Из условия $f(x) \in H_p^\alpha(D)$ при $\alpha \cdot p > N$ и из известной теоремы вложения **) вытекает, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $f(x)$ принадлежит классу Зигмунда — Гёльдера $C^\varepsilon(D_R)$; точнее, справедливо вложение класса Зигмунда — Гёльдера в класс Никольского

$$H_p^\alpha(D) \to C^\varepsilon(D_R) \text{ при } \varepsilon > 0. \tag{2.5.71}$$

Из этого же условия $f(x) \in H_p^\alpha(D)$ при $\alpha p > N$ и из теорем вложения (2.1.24) и (2.1.18) (см. п. 3 § 1) вытекает, что для каждого номера m из сегмента $1 \leqslant m \leqslant l$ найдется число $p_1 = p_1(m)$ такое, что справедливо вложение класса Соболева — Лиувилля в класс Никольского

$$H_p^\alpha(D) \to L_{p_1}^m(D_R) \quad \text{при} \quad p_1 m > N. \tag{2.5.72}$$

---

*) Символ $\psi^{(m)}(r)$ обозначает производную порядка m от среднего значения (2.5.68).

**) См. теорему вложения (2.1.26) из п. 3 § 1 этой главы, согласно которой при $p \cdot \alpha > N$ имеет место вложение $H_p^\alpha \to C^\varepsilon$ при $\varepsilon = \alpha - \frac{N}{p} > 0$.

Наконец, из того же условия $f(x) \in H_p^\alpha(D)$ при $\alpha p > N$ и из той же теоремы вложения (2.1.24) вытекает, что для каждого целого m из сегмента $0 \leqslant m \leqslant l$ найдется число $p_2 = p_2(m)$ такое, что справедливо вложение классов Никольского

$$H_p^\alpha(D) \to H_{p_2}^{m+\varkappa}(D_R) \quad \text{при} \quad p_2(m+\varkappa) > N. \tag{2.5.73}$$

Сначала докажем лемму для случая $m > 0$, т. е. для случая $m = 1, 2, \ldots, l$.

Прежде всего докажем для этого случая суммируемость на сегменте $[0, R]$ каждой из функций (2.5.69) и установим оценку L_1-нормы по r на сегменте $0 \leqslant r \leqslant R$ каждой из функций $\psi^{(m)}(r) r^{m-1}$ через $\|f\|_{H_p^\alpha(D)}$.

Пользуясь теоремой вложения (2.5.72) и определением нормы в классе Соболева — Лиувилля при целом порядке дифференцируемости (см. соотношение (2.1.13) из п. 3 § 1) и применяя неравенство Гёльдера с показателями p_1 и $q_1 = \dfrac{p_1}{p_1 - 1}$ *), получим для любого m

$$\int_0^R |\psi^{(m)}(r)| r^{m-1}\, dr \leqslant \sum_{|\bar{k}|=m} \int_{r \leqslant R} \left|\partial^{\bar{k}} f(y)\right| r^{m-1-(N-1)}\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\bar{k}|=m} \left\|\partial^{\bar{k}} f(y)\right\|_{L_{p_1}(D_R)} \left[\int_{r \leqslant R} r^{-(N-m)q_1}\, dy\right]^{1/q_1} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \cdot \|f\|_{L_{p_1}^m(D_R)} \leqslant C_2 \cdot \|f\|_{H_p^\alpha(D)}.$$

Итак, при $1 \leqslant m \leqslant l$ равномерно относительно $x \in D_{2R}$

$$\int_0^R |\psi^{(m)}(r)| r^{m-1}\, dr \leqslant C_2 \cdot \|f\|_{H_p^\alpha(D)}, \tag{2.5.74}$$

и, в частности, функция $r^{m-1}\psi^{(m)}(r)$ принадлежит классу $L_1[0, R]$. Поскольку $0 < \varkappa \leqslant 1$, то функция $\varphi_m(r)$, равная $r^\varkappa [r^{m-1}\psi^{(m)}(r)]$, тем более принадлежит классу $L_1[0, R]$.

Установим теперь при $1 \leqslant m \leqslant l$ для функции $\varphi_m(r)$ справедливость неравенства (2.5.70).

Разобьем интеграл, стоящий в левой части (2.5.70), на сумму двух интегралов:

$$\int_0^R |\varphi_m(r+2h) - 2\varphi_m(r+h) + \varphi_m(r)|\, dr = I_1 + I_2, \tag{2.5.75}$$

---

*) Мы учитываем, что поскольку $p_1 m > N$, т. е. $p_1 > \dfrac{N}{m}$, то $q_1 < \dfrac{N}{N-m}$.

где

$$I_1 = \int_0^h |\varphi_m(r+2h) - 2\varphi_m(r+h) + \varphi_m(r)|\, dr, \qquad (2.5.76)$$

$$I_2 = \int_h^R |\varphi_m(r+2h) - 2\varphi_m(r+h) + \varphi_m(r)|\, dr. \qquad (2.5.77)$$

Достаточно доказать, что оценка вида (2.5.70) справедлива равномерно относительно $x \in D_{3R}$ для каждого из интегралов (2.5.76) и (2.5.77).

Для того чтобы доказать оценку вида (2.5.70) для интеграла (2.5.76), учтем, что при $0 \leqslant r \leqslant h$ справедлива оценка

$$\int_0^h |\varphi_m(r+2h) - 2\varphi_m(r+h) + \varphi_m(r)|\, dr \leqslant 2\int_0^{3h} |\varphi_m(r)|\, dr,$$

и воспользуемся условием $h < R/3$ и неравенством (2.5.74). В результате получим для любого $x \in D_{3R}$

$$|I_1| \leqslant 2\int_0^{3h} |\varphi_m(r)|\, dr = 2\int_0^{3h} |\psi^{(m)}(r)|\, r^{m+\varkappa-1}\, dr \leqslant$$
$$\leqslant 2(3h)^{\varkappa}\int_0^R |\psi^{(m)}(r)|\, r^{m-1}\, dr \leqslant C_3 h^{\varkappa} \|f\|_{H_p^{\alpha}(D)}. \qquad (2.5.78)$$

Для получения аналогичной оценки для I_2 представим подинтегральную функцию в (2.5.77) в виде

$$|\varphi_m(r+2h) - 2\varphi_m(r+h) + \varphi_m(r)| =$$
$$= |(r+2h)^{m+\varkappa-1}[\psi^{(m)}(r+2h) - 2\psi^{(m)}(r+h) + \psi^{(m)}(r)] +$$
$$+ 2\psi^{(m)}(r+h)[(r+2h)^{m+\varkappa-1} - (r+h)^{m+\varkappa-1}] -$$
$$- \psi^{(m)}(r)[(r+2h)^{m+\varkappa-1} - r^{m+\varkappa-1}]|. \qquad (2.5.79)$$

Так как под знаком интеграла в (2.5.77) $0 \leqslant h \leqslant r$, то, используя для второй разности обозначение (2.5.49), мы извлечем из (2.5.79) следующее неравенство:

$$|\widetilde{\Delta}_h^2 \varphi_m(r)| \leqslant (r+2h)^{m+\varkappa-1} |\widetilde{\Delta}_h^2 \psi^{(m)}(r)| +$$
$$+ C_4 h^{\varkappa}\{|\psi^{(m)}(r)|\, r^{m-1} + |\psi^{(m)}(r+h)|\,(r+h)^{m-1}\}. \qquad (2.5.80)$$

Используя неравенство (2.5.80) под знаком интеграла (2.5.77), получим, что

$$|I_2| \leqslant \int_h^R (r+2h)^{m+\varkappa-1} |\widetilde{\Delta}_h^2 \psi^{(m)}(r)|\, dr +$$
$$+ C_4 h^{\varkappa}\int_h^R \{|\psi^{(m)}(r)|\, r^{m-1} + |\psi^{(m)}(r+h)|\,(r+h)^{m-1}\}\, dr. \qquad (2.5.81)$$

Из оценки (2.5.74) и из того, что $x \in D_{2R}$, а $r+h<3R/2$, сразу же вытекает, что второй интеграл в правой части (2.5.81) имеет равномерно относительно $x \in D_{3R}$ требуемый порядок $O(h^{\varkappa})\|f\|_{H_p^{\alpha}(D)}$.

Чтобы доказать, что такой же порядок имеет и первый интеграл в правой части (2.5.81), воспользуемся теоремой вложения (2.5.73) и оценкой (2.5.51), взятой при $\alpha = m+\varkappa$, $l=m$, $p=p_2$. Применяя неравенство Гёльдера с показателями p_2 и $q_2 = \dfrac{p_2}{p_2-1}$ *) и используя оценку (2.5.51), получим для любого $h<R/3$

$$\int\limits_h^R (r+2h)^{m+\varkappa-1}\left|\widetilde{\Delta}_h^2 \psi^{(m)}(r)\right| dr \leqslant 3^{m+\varkappa-1} \int\limits_{r\leqslant R} \left|\widetilde{\Delta}_h^2 f^{(m)}(r,\omega)\right| r^{m+\varkappa-N} dr \leqslant$$
$$\leqslant 3^{m+\varkappa-1}\left\|\widetilde{\Delta}_h^2 f^{(m)}(r,\omega)\right\|_{L_{p_2}(D_{2R})}\left[\int\limits_{r\leqslant R} r^{(m+\varkappa-N)q_2}\, dy\right]^{1/q_2} \leqslant$$
$$\leqslant C_5 h^{\varkappa}\|f\|_{H_{p_2}^{m+\varkappa}(D_{R/3})} \leqslant C_6 h^{\varkappa}\|f\|_{H_p^{\alpha}(D)}.$$

Итак, мы доказали, что оба интеграла в правой части (2.5.81) равномерно относительно $x \in D_{3R}$ имеют требуемый порядок $O(h^{\varkappa})\|f\|_{H_p^{\alpha}(D)}$, откуда следует, что

$$|I_2| \leqslant C_7 h^{\varkappa}\|f\|_{H_p^{\alpha}(D)}. \tag{2.5.82}$$

Сопоставление соотношения (2.5.75) с оценками (2.5.78) и (2.5.82) завершает доказательство оценки (2.5.70) для случая $1 \leqslant m \leqslant l$.

Остается провести доказательство леммы для случая $m=0$. В этом случае вместо функции $\psi(r)=\psi_x(r)$ мы рассмотрим функцию $\overline{\psi}(r)=\psi_x(r)-f(x)$, а вместо функции $\varphi_0(r)=r^{\varkappa-1}\psi(x)$ — функцию

$$\overline{\varphi}_0(r) = r^{\varkappa-1}\overline{\psi}(r) = \varphi_0(r) - f(x)\, r^{\varkappa-1}. \tag{2.5.83}$$

Прежде всего заметим, что так как $0<\varkappa\leqslant 1$, а величина $|f(x)|$ равномерно в D_R ограничена постоянной вида $C\|f\|_{H_p^{\alpha}(D)}$, то функция $f(x)r^{\varkappa-1}$ суммируема по r на сегменте $0\leqslant r\leqslant R$. Поэтому в силу соотношения (2.5.83) суммируемость $\varphi_0(r)$ на сегменте $0\leqslant r\leqslant R$ будет вытекать из суммируемости на этом сегменте функции $\overline{\varphi}_0(r)$.

Докажем суммируемость на сегменте $0\leqslant r\leqslant R$ не только функции $\overline{\varphi}_0(r)=r^{\varkappa-1}\overline{\psi}(r)$, но и функции $r^{-1}\overline{\psi}(r)$ и получим для

---

*) Мы учитываем, что поскольку $p_2(m+\varkappa)>N$, т. е. $p_2 > \dfrac{N}{m+\varkappa}$, то $q_2 < \dfrac{N}{N-m+\varkappa}$.

L_1-нормы этой последней функции по r на сегменте $0 \leqslant r \leqslant R$ оценку, являющуюся аналогом оценки (2.5.74).

Заметим, что в силу соотношения $\overline{\psi}(r) = \psi(r) - f(x)$

$$\int_0^R |\overline{\psi}(r)| r^{-1} dr = \int_0^R \left| \frac{1}{\omega_N} \int \ldots \int_\omega f(r, \omega)\, d\omega - f(x) \frac{1}{\omega_N} \int \ldots \int_\omega d\omega \right| r^{-1}\, dr \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\omega_N} \int_{r \leqslant R} |f(y) - f(x)|\, r^{-N}\, dy. \quad (2.5.84)$$

Из определения класса Зигмунда — Гёльдера и из теоремы вложения (2.5.71) вытекает, что интеграл, стоящий в правой части (2.5.84), для любого $x \in D_{2R}$ не превосходит величины

$$C_8 \| f \|_{C^\varepsilon(D_R)} \int_{r \leqslant R} r^{\varepsilon - N}\, dy \leqslant C_9 \| f \|_{H_p^\alpha(D)}. \quad (2.5.85)$$

Из неравенств (2.5.84) и (2.5.85) для любого $x \in D_{2R}$ вытекает оценка

$$\int_0^R |\overline{\psi}(r)|\, r^{-1}\, dr \leqslant C_9 \| f \|_{H_p^\alpha(D)}, \quad (2.5.86)$$

которая, в частности, устанавливает суммируемость на сегменте $0 \leqslant r \leqslant R$ функции $\overline{\psi}(r) r^{-1}$, а потому и функции $\overline{\varphi}_0(r) = \overline{\psi}(r) r^{\varkappa-1}$.

Остается доказать для функции $\varphi_0(r)$ оценку (2.5.70). Убедимся в том, что достаточно доказать оценку вида (2.5.70) для функции $\overline{\varphi}_0(r)$.

Действительно, поскольку

$$\widetilde{\Delta}_h^2 \varphi_0(r) = \widetilde{\Delta}_h^2 \overline{\varphi}_0(r) + f(x)\, \widetilde{\Delta}_h^2 (r^{\varkappa-1})$$

и $|f(x)| \leqslant C_{10} \| f \|_{H_p^\alpha(D)}$ при $x \in D_R$, то достаточно убедиться в том, что

$$\int_0^R |\widetilde{\Delta}_h^2 (r^{\varkappa-1})|\, dr \leqslant C_{11} h^\varkappa,$$

а это неравенство устанавливается элементарно.

Действительно, из того, что $\widetilde{\Delta}_h^2(r^{\varkappa-1}) = (r+2h)^{\varkappa-1} - 2(r+h)^{\varkappa-1} + r^{\varkappa-1}$, вытекает, что $\left|\widetilde{\Delta}_h^2 (r^{\varkappa-1})\right| = O\left(h^{\varkappa-1}\right)$ при $0 < r < 4h$ и $\left|\widetilde{\Delta}_h^2 (r^{\varkappa-1})\right| = O(h^2 r^{\varkappa-3})$ при $4h \leqslant r \leqslant R$, а отсюда

$$\int_0^R |\widetilde{\Delta}_h^2 (r^{\varkappa-1})|\, dr = O\left(h^{\varkappa-1}\right) \int_0^{4h} dr + O(h^2) \int_{4h}^R r^{\varkappa-3}\, dr = O\left(h^\varkappa\right).$$

Итак, достаточно получить оценку вида (2.5.70) при $m = 0$, но не для функции $\varphi_0(r)$, а для функции $\overline{\varphi}_0(r)$, а эта оценка устанавливается точно по той же схеме, по которой была установлена оценка (2.5.70) при $m \geqslant 1$, только вместо оценки (2.5.74) следует использовать оценку (2.5.86).

Доказательство леммы 2.9 завершено.

Для формулировки и доказательства еще одной леммы введем в рассмотрение следующие две функции:

$$V_\nu(t) = \sqrt{t}\mathcal{J}_\nu(t), \tag{2.5.87}$$

равную произведению $\sqrt{t}$ на функции Бесселя первого рода порядка $\nu \geqslant -1/2$, и функцию

$$F(r) = r^{N-1}\psi(r) = r^{N-1}\omega_N^{-1} \int\limits_{\omega} \cdots \int f(x + r\omega)\, d\omega, \tag{2.5.88}$$

равную произведению r^{N-1} на среднее значение (2.5.68) функции $f(x)$ на поверхности N-мерной сферы радиуса r с центром в точке x.

Обозначим символом $\mathcal{D}F(r)$ следующую операцию:

$$\mathcal{D}F(r) = \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r} F(r)\right],$$

а символом $\mathcal{D}^k F(r)$ — результат k-кратного последовательного применения операции $\mathcal{D}$, так что $\mathcal{D}^k F(r) = \mathcal{D}\,[\mathcal{D}^{k-1} F(r)]$.

Лемма 2.10. *Пусть $N \geqslant 2$, D — произвольная область в E^N, функция $f(x)$ принадлежит классу $H_p^\alpha(D)$ при положительном α, равном $l + \varkappa$, где l — целое неотрицательное число, $0 < \varkappa \leqslant 1$, и пусть, кроме того, $p \geqslant 1$, $\alpha p > N$. Тогда для всех достаточно больших $\lambda > 0$ и для любого положительного числа R равномерно относительно x на множестве D_{3R}* *) *справедливо неравенство*

$$\left|\lambda^{\varkappa/2} \int\limits_0^R V_\nu(r\sqrt{\lambda})\, r^{2l-N+\varkappa} \mathcal{D}^l F(r)\, dr\right| \leqslant C\, \|f\|_{H_p^\alpha(D)}. \tag{2.5.89}$$

Доказательство. Производя последовательное применение операции $\mathcal{D}$ к функции $F(r)$ вида (2.5.88), мы с помощью метода индукции без труда убедимся в существовании для любого номера l и для любого $N \geqslant 1$ постоянных A_{0l}, A_{1l}, A_{2l}, … …, A_{ll} таких, что для величины $\mathcal{D}^l F(r)$ справедливо представление

$$\mathcal{D}^l F(r) = r^{N-1-2l} \sum_{m=0}^{l} A_{ml} r^m \psi^{(m)}(r). \tag{2.5.90}$$

Из представления (2.5.90) и из определения (2.5.69) функций $\varphi_m(r)$ вытекает, что **)

$$r^{2l-N+\varkappa} \mathcal{D}^l F(r) = \sum_{m=0}^{l} A_{ml} \varphi_m(r). \tag{2.5.91}$$

---

*) Напомним, что символ D_{3R} обозначает подмножество точек области D, отстоящих от границы D на расстояние, большее числа $3R$.

**) Так как каждая из функций $\varphi_m(r)$, как доказано в лемме 2.9, суммируема на сегменте $0 \leqslant r \leqslant R$, то в силу представления (2.5.91) и функция $r^{2l-N+\varkappa}\mathcal{D}^l F(r)$ суммируема на этом сегменте.

Равенство (2.5.91) позволяет утверждать, что для доказательства неравенства (2.5.89) достаточно установить, что для каждого номера m из сегмента $0 \leqslant m \leqslant l$ справедлива оценка

$$\left| \int_0^R V_\nu(r\sqrt{\lambda})\varphi_m(r)\,dr \right| \leqslant C\lambda^{-\varkappa/2}\|f\|_{H_p^\alpha(D)}, \qquad (2.5.92)$$

равномерная относительно x на множестве D_{2R}.

Из представления бесселевой функции для значений аргумента, превосходящих единицу, и из того, что при $\nu \geqslant -1/2$ для всех $t > 0$ справедливо неравенство*) $|J_\nu(t)| \leqslant Ct^{-1/2}$, вытекает, что для функции (2.5.87) при всех $t > 0$ справедливо представление

$$V_\nu(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(t - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(t^{-1}\right). \qquad (2.5.93)$$

Из (2.5.93) немедленно получается соотношение

$$V_\nu(t) + V_\nu(t+\pi) = O(t^{-\varkappa}), \qquad (2.5.94)$$

справедливое для любого $\varkappa$ из полусегмента $0 < \varkappa \leqslant 1$, а из (2.5.94) в свою очередь вытекает равенство

$$V_\nu(t) = \frac{1}{4}[V_\nu(t+2\pi) - 2V_\nu(t+\pi) + V_\nu(t)] + \gamma_\nu(t), \quad (2.5.95)$$

в котором $\gamma_\nu(t)$ обозначает величину, подчиненную оценке $\gamma_\nu(t) = O(t^{-\varkappa})$ при всех $t > 0$ и при любом $\varkappa$ из полусегмента $0 < \varkappa \leqslant 1$.

Равенство (2.5.95) позволяет переписать интеграл, стоящий в левой части (2.5.92), в следующем виде:

$$\int_0^R V_\nu(r\sqrt{\lambda})\varphi_m(r)\,dr =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^R \left[V_\nu(r\sqrt{\lambda}+2\pi) - 2V_\nu(r\sqrt{\lambda}+\pi) + V_\nu(r\sqrt{\lambda})\right]\varphi_m(r)\,dr +$$

$$+ \int_0^R \gamma_\nu(r\sqrt{\lambda})\varphi_m(r)\,dr. \qquad (2.5.96)$$

Мы докажем, что каждый из интегралов, стоящих в правой части (2.5.96), имеет порядок $O\left(\lambda^{-\varkappa/2}\right)\|f\|_{H_p^\alpha(D)}$, чем и будет завершено доказательство леммы.

Начнем с оценки последнего интеграла в правой части (2.5.96). При $m > 0$, т. е. при $1 \leqslant m \leqslant l$, мы привлечем для оценки этого интеграла неравенство (2.5.74), с помощью которого

*) Это неравенство использовалось выше уже много раз.

получим, что равномерно относительно $x \in D_{2R}$

$$\left|\int_0^R \gamma_\nu(r\sqrt{\lambda})\,\varphi_m(r)\,dr\right| \leqslant C_1 \int_0^R (r\sqrt{\lambda})^{-\varkappa}\,|\psi_m(r)|\,r^{m+\varkappa-1}\,dr \leqslant$$

$$\leqslant C_1\lambda^{-\varkappa/2}\int_0^R |\psi_m(r)|\,r^{m-1}\,dr \leqslant C_2\lambda^{-\varkappa/2}\,\|f\|_{H_p^\alpha(D)}. \quad (2.5.97)$$

Если же $m=0$, то, используя функцию (2.5.83), мы представим последний интеграл в правой части (2.5.96) в виде

$$\int_0^R \gamma_\nu(r\sqrt{\lambda})\,\varphi_0(r)\,dr =$$

$$= \int_0^R \gamma_\nu(r\sqrt{\lambda})\,\overline{\varphi}_0(r)\,dr + f(x)\int_0^R \gamma_\nu(r\sqrt{\lambda})\,r^{\varkappa-1}\,dr. \quad (2.5.98)$$

Для первого интеграла в правой части (2.5.98) с помощью оценки (2.5.86) получим равномерное относительно $x \in D_{2R}$ неравенство

$$\left|\int_0^R \gamma_\nu(r\sqrt{\lambda})\,\overline{\varphi}_0(r)\,dr\right| \leqslant \lambda^{-\varkappa/2}\int_0^R r^{-1}\,|\overline{\psi}(r)|\,dr = O\left(\lambda^{-\varkappa/2}\right)\|f\|_{H_p^\alpha(D)}. \quad (2.5.99)$$

Для оценки второго интеграла в правой части (2.5.98) учтем, что в силу теоремы вложения $|f(x)| \leqslant C_3\|f\|_{H_p^\alpha(D)}$ (равномерно относительно $x \in D_R$), и заметим, что в силу оценки $|\mathcal{J}_\nu(t)| \leqslant \leqslant C_\nu t^{-1/2}$ функция $V_\nu(t)$, а поэтому в силу соотношения (2.5.95) и функция $\gamma_\nu(t)$ равномерно ограничены на полупрямой $t>0$. Опираясь на это и сделав замену переменной $t = r\sqrt{\lambda}$, получим

$$\left|\int_0^R \gamma_\nu(r\sqrt{\lambda})\,r^{\varkappa-1}\,dr\right| = \lambda^{-\varkappa/2}\left|\int_0^{R\sqrt{\lambda}} \gamma_\nu(t)t^{\varkappa-1}\,dt\right| \leqslant C_4\lambda^{-\varkappa/2}.$$

Таким образом, равномерно относительно x в D_R

$$\left|f(x)\int_0^R \gamma_\nu(r\sqrt{\lambda})\,r^{\varkappa-1}\,dr\right| \leqslant C_5\lambda^{-\varkappa/2}\,\|f\|_{H_p^\alpha(D)}. \quad (2.5.100)$$

Из соотношения (2.5.98) и из оценок (2.5.99) и (2.5.100) получим, что при $m=0$ равномерно относительно x в D_{2R}

$$\left|\int_0^R \gamma_\nu(r\sqrt{\lambda})\,\varphi_0(r)\,dr\right| \leqslant C_6\cdot\lambda^{-\varkappa/2}\,\|f\|_{H_p^\alpha(D)}. \quad (2.5.101)$$

Объединяя оценки (2.5.97) и (2.5.101), получим, что для любого $m = 0, 1, \ldots, l$ справедливо неравенство

$$\left| \int_0^R \gamma_\nu (r \sqrt{\lambda})\, \varphi_m(r)\, dr \right| \leqslant C_7 \lambda^{-\varkappa/2} \| f \|_{H_p^\alpha(D)}, \tag{2.5.102}$$

равномерное относительно x в D_{2R}.

Остается оценить первый интеграл в правой части (2.5.96). Для этого мы прежде всего преобразуем этот первый интеграл к удобному для оценок виду.

Элементарно проверяется, что

$$\int_0^R \left[V_\nu (r\sqrt{\lambda} + 2\pi) - 2V_\nu (r\sqrt{\lambda} + \pi) + V_\nu (r\sqrt{\lambda}) \right] \varphi_m(r)\, dr =$$

$$= \int_0^R V_\nu (r\sqrt{\lambda} + 2\pi) \left[\varphi_m\left(r + \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) - 2\varphi_m\left(r + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) + \varphi_m(r) \right] dr +$$

$$+ \int_0^R V_\nu (r\sqrt{\lambda})\, \varphi_m(r)\, dr - 2 \int_0^R V_\nu (r\sqrt{\lambda} + \pi)\, \varphi_m(r)\, dr +$$

$$- \int_0^R V_\nu (r\sqrt{\lambda} + 2\pi)\, \varphi_m\left(r + \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) dr +$$

$$+ 2 \int_0^R V_\nu (r\sqrt{\lambda} + 2\pi)\, \varphi_m\left(r + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) dr. \tag{2.5.103}$$

Производя в предпоследнем интеграле в правой части (2.5.103) замену переменной $\rho = r + 2\pi/\sqrt{\lambda}$, а в последнем интеграле в правой части (2.5.103) замену переменной $\rho = r + \pi/\sqrt{\lambda}$ и сопоставляя после этого четыре последних интеграла в правой части (2.5.103), придем к следующему равенству:

$$\int_0^R \left[V_\nu (r\sqrt{\lambda} + 2\pi) - 2V_\nu (r\sqrt{\lambda} + \pi) + V_\nu (r\sqrt{\lambda}) \right] \varphi_m(r)\, dr =$$

$$= \int_0^R V_\nu (r\sqrt{\lambda} + 2\pi) \left[\varphi_m\left(r + \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) - 2\varphi_m\left(r + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) + \varphi_m(r) \right] dr +$$

$$+ \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}} V_\nu (r\sqrt{\lambda})\, \varphi_m(r)\, dr - 2 \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}} V_\nu (r\sqrt{\lambda} + \pi)\, \varphi_m(r)\, dr -$$

$$- \int_R^{R + \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}} V_\nu (r\sqrt{\lambda})\, \varphi_m(r)\, dr + 2 \int_R^{R + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}} V_\nu (r\sqrt{\lambda} + \pi)\, \varphi_m(r)\, dr. \tag{2.5.104}$$

Этим равенством мы и будем пользоваться для оценки первого интеграла в правой части (2.5.96).

Для оценки первого интеграла в правой части (2.5.104) воспользуемся ограниченностью функции $V_\nu(t)$ для всех положительных значений аргумента и оценкой (2.5.70), установленной в лемме 2.9 и взятой при $h=\pi/\sqrt{\lambda}$. Мы получим, что равномерно относительно x в D_{3R} для всех $\lambda>\left(\frac{3\pi}{R}\right)^2$ справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_0^R V_\nu(r\sqrt{\lambda}+2\pi)\left[\varphi_m\left(r+\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-2\varphi_m\left(r+\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)+\varphi_m(r\sqrt{\lambda})\right]dr\right|\leqslant C_8\lambda^{-\varkappa/2}\|f\|_{H_p^\alpha(D)}. \quad (2.5.105)$$

Оценка второго и третьего интегралов в правой части (2.5.104) в силу уже отмеченной ограниченности функции $V_\nu(t)$ на полупрямой $t>0$ сводится к оценке интеграла

$$\int\limits_0^{2\pi/\sqrt{\lambda}} |\varphi_m(r)|\,dr. \quad (2.5.106)$$

В случае $1\leqslant m\leqslant l$ интеграл (2.5.106) элементарно оценивается с помощью неравенства (2.5.74):

$$\int\limits_0^{2\pi/\sqrt{\lambda}} |\varphi_m(r)|\,dr=\int\limits_0^{2\pi/\sqrt{\lambda}} r^\varkappa|\psi^{(m)}(r)|\,r^{m-1}\,dr\leqslant$$
$$\leqslant(2\pi)^\varkappa\lambda^{-\varkappa/2}\int\limits_0^{2\pi/\sqrt{\lambda}}|\psi^{(m)}(r)|\,r^{m-1}\,dr\leqslant C_9\lambda^{-\varkappa/2}\|f\|_{H_p^\alpha(D)} \quad (2.5.107)$$

(равномерно относительно x в D_{2R}).

В случае $m=0$ на основании равенства (2.5.83) получим

$$\int\limits_0^{2\pi/\sqrt{\lambda}} |\varphi_0(r)|\,dr\leqslant\int\limits_0^{2\pi/\sqrt{\lambda}}|\overline{\varphi}_0(r)|\,dr+|f(x)|\int\limits_0^{2\pi/\sqrt{\lambda}} r^{\varkappa-1}\,dr. \quad (2.5.108)$$

Так как в силу оценки (2.5.86) и на основании теоремы вложения равномерно относительно x в D_{2R}

$$\int\limits_0^{2\pi/\sqrt{\lambda}}|\overline{\varphi}_0(r)|\,dr=\int\limits_0^{2\pi/\sqrt{\lambda}} r^\varkappa r^{-1}|\overline{\psi}(r)|dr\leqslant C_{10}\lambda^{-\varkappa/2}\|f\|_{H_p^\alpha(D)},$$
$$|f(x)|\leqslant C_{11}\|f\|_{H_p^\alpha(D)}$$

и поскольку $\int\limits_0^{2\pi/\sqrt{\lambda}} r^{\varkappa-1}\,dr \leqslant C_{12}\cdot\lambda^{-\varkappa/2}$ (при любых $0<\varkappa\leqslant 1$), то из (2.5.108) вытекает неравенство

$$\int\limits_0^{2\pi/\sqrt{\lambda}} |\varphi_0(r)|\,dr \leqslant C_{13}\lambda^{-\varkappa/2}\|f\|_{H_p^\alpha(D)}. \tag{2.5.109}$$

Из неравенств (2.5.107) и (2.5.109) вытекает, что для любого $m=0,\ 1,\ \ldots,\ l$ равномерно относительно x в D_{2R} второй и третий интегралы в правой части (2.5.104) имеют порядок $O\left(\lambda^{-\varkappa/2}\right)\times\times\|f\|_{H_p^\alpha(D)}$.

Теперь нам остается доказать, что такой же порядок имеют два последних интеграла в правой части (2.5.104). Для этого в силу ограниченности $V_\nu(t)$ на полупрямой $t>0$ достаточно доказать, что равномерно относительно x в D_{3R} справедлива оценка

$$\int\limits_R^{R+2\pi/\sqrt{\lambda}} |\varphi_m(r)|\,dr \leqslant C_{14}\lambda^{-\varkappa/2}\|f\|_{H_p^\alpha(D)}. \tag{2.5.110}$$

Оценка (2.5.110) эквивалентна оценке

$$\int\limits_R^{R+h} |\varphi_m(r)|\,dr \leqslant C_{15}h^\varkappa\|f\|_{H_p^\alpha(D)}, \tag{2.5.111}$$

и для завершения доказательства леммы нам остается убедиться в справедливости при всех x из D_{3R} оценки (2.5.111).

Рассмотрим сначала случай $0<\varkappa<1$. В этом случае, как известно, установленное в лемме 2.9 неравенство (2.5.70) эквивалентно неравенству *)

$$\int\limits_0^R |\varphi_m(r+h)-\varphi_m(r)|\,dr \leqslant Ch^\varkappa\|f\|_{H_p^\alpha(D)}, \tag{2.5.112}$$

также справедливому равномерно относительно x из D_{3R}.

Из (2.5.112) следует, что равномерно относительно x в D_{3R}

$$\int\limits_0^R |\varphi_m(r+h)|\,dr - \int\limits_0^R |\varphi_m(r)|\,dr = O\left(h^\varkappa\right)\|f\|_{H_p^\alpha(D)}. \tag{2.5.113}$$

Сделав в первом интеграле в левой части (2.5.113) замену переменной $\rho=r+h$, мы преобразуем (2.5.113) к виду

$$\int\limits_h^{R+h} |\varphi_m(\rho)|\,d\rho - \int\limits_0^R |\varphi_m(r)|\,dr = O\left(h^\varkappa\right)\|f\|_{H_p^\alpha(D)},$$

---

*) См., например, книгу А. Зигмунда [1, т. 1, гл. 2, с. 77].

откуда следует, что равномерно относительно x в D_{3R}

$$\int\limits_{R}^{R+h} |\varphi_m(r)|\,dr = \int\limits_{0}^{h} |\varphi_m(r)|\,dr + O\left(h^{\varkappa}\right)\|f\|_{H_p^{\alpha}(D)}. \qquad (2.5.114)$$

Так как для любого $m=0, 1, \ldots, l$ равномерно относительно x в D_{3R} справедливо неравенство

$$\int\limits_{0}^{h} |\varphi_m(r)|\,dr = O\left(h^{\varkappa}\right)\|f\|_{H_p^{\alpha}(D)}, \qquad (2.5.115)$$

эквивалентное неравенствам (2.5.107) и (2.5.109), то для рассматриваемого случая $0<\varkappa<1$ из (2.5.114) и (2.5.115) вытекает справедливость равномерного относительно x в D_{3R} неравенства (2.5.111).

Остается доказать, что в случае $\varkappa=1$ справедлива оценка (2.5.111), равномерная относительно x на множестве D_{3R}.

Для этого достаточно доказать, что в случае $\varkappa=1$ функция $|\varphi_m(r)|$ равномерно на сегменте $R\leqslant r\leqslant 2R$ ограничена величиной

$$O\left(\|f\|_{H_p^{\alpha}(D)}\right). \qquad (2.5.116)$$

Это последнее вытекает из того, что в силу теоремы вложения (2.5.73) при любом $m=0, 1, \ldots, l$ функция $f^{(m)}(r, \omega)$ принадлежит классу $H^1_{p_2(m)}(D_R)$ при $p_2(m)(m+1)>N$, и потому на основании теоремы вложения (2.1.23) из п. 3 § 1 принадлежит классу $L_{p_2(m)}$ на N-мерной сфере S_r^x радиуса r с центром в точке $x\in D_{3R}$, причем L_{p_2}-норма функции $f^{(m)}(r, \omega)$ на указанной сфере равномерно относительно r на сегменте $R\leqslant r\leqslant 2R$ и равномерно относительно x в D_{3R} ограничена величиной (2.5.116).

Остается заметить, что так как

$$\varphi_m(r) = r^{m-1+\varkappa}\psi^{(m)}(r) = \omega_N^{-1} r^{m-N+\varkappa} \int\limits_{S_r^x} f^{(m)}(r, \omega)\,dS,$$

то ограниченность L_{p_2}-нормы функции $f^{(m)}(r, \omega)$ на сфере S_r^x, равномерная при $R\leqslant r\leqslant 2R$ и $x\in D_{3R}$, влечет за собой ограниченность функции $|\varphi_m(r)|$ величиной того же порядка (2.5.116), равномерную относительно r на сегменте $R\leqslant r\leqslant 2R$ и относительно x на множестве D_{3R}.

Лемма 2.10 полностью доказана.

3. Основная оценка риссовских средних спектрального разложения. В этом пункте будет доказано следующее вспомогательное утверждение, имеющее самостоятельный интерес.

Лемма 2.11. *Пусть* $N\geqslant 2$, $0\leqslant s<(N-1)/2$, G — *произвольная область в пространстве* E^N, $\widehat{A}$ — *произвольное самосопряженное неотрицательное расширение оператора Лапласа* $Lu=-\Delta u$ *в области* G, $f(x)$ — *произвольная функция, удовлетворяющая двум* *требованиям*: 1) *при некотором* $R>0$ *принадлежащая классу* *) $\overset{0}{H}{}_2^\alpha(G_R)$ *при* $\alpha \geqslant (N-1)/2-s$; 2) *в некоторой содержащейся в* G *области* D **) *принадлежащая классу* $H_p^\alpha(D)$ *при* $\alpha \geqslant (N-1)/2-s$, $p\alpha > N$, $p \geqslant 1$. *Тогда для любой точки* x *множества* D_{3R} *для средних Рисса порядка* s *спектрального разложения функции* $f(x)$ *справедлива следующая оценка*:

$$\left|\sigma_\lambda^s(x, f)\right| \leqslant C\left\{\|f\|_{H_2^\alpha(G)} + \|f\|_{H_p^\alpha(D)}\right\}, \tag{2.5.117}$$

равномерная относительно x *в* D_{3R}.

Доказательство. Сначала мы докажем справедливость оценки (2.5.117) для функции $f(x)$ из пространства $C_0^\infty(G)$ бесконечно дифференцируемых и финитных в области G функций.

Начнем с того, что заметим, что оценку (2.5.117) достаточно доказать только при $\alpha=(N-1)/2-s$, $p\alpha>N$, ибо тогда справедливость этой оценки при $\alpha \geqslant (N-1)/2-s$, $p\alpha > N$, $p\geqslant 1$ будет вытекать из теоремы вложения (2.1.24) (см. п. 3 § 1).

Итак, в дальнейшем мы будем считать, что

$$\alpha=(N-1)/2-s, \qquad p\alpha>N, \qquad p\geqslant 1.$$

Фиксируя произвольную точку x множества G_{3R} и обозначив через r расстояние $r=|x-y|$ фиксированной нами точки x от переменной точки y, рассмотрим функцию $\overset{\lambda}{v}(r)$, определяемую формулой (2.4.5) и введенную в п. 1 § 4.

Так как образ Фурье этой функции определяется соотношением (2.4.8) из п. 1 § 4, в котором $x_0=x$, то, записывая равенство Парсеваля (2.1.10) (см. п. 2 § 1) для этой функции и для функции $f(x)$ из пространства $C_0^\infty(G)$, получим, что

$$\begin{aligned}\sigma_\lambda^s(x, f) &= \\ &= 2^s\Gamma(s+1)(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\lambda^{\frac{N}{2}-\frac{s}{2}}\int\limits_{r\leqslant R} f(y)\,\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}\left(r\sqrt{\lambda}\right) r^{-\frac{N}{2}-s}\,dy + \\ &+ 2^s\Gamma(s+1)\,\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_0^\infty \widehat{f}_i(t)\,u_i(x,t)\,t^{\frac{2-N}{4}}\,\overset{\nu_0}{I}{}_t^\lambda(R)\,d\rho(t),\end{aligned} \tag{2.5.118}$$

где символ $\overset{\nu_n}{I}{}_t^\lambda(R)$ обозначает интеграл вида (2.5.21) из п. 1 § 5.

---

*) Напомним, что $\overset{0}{H}{}_2^\alpha(G_R)$ — множество функций, определенных во всем пространстве E^N, принадлежащих классу $H_2^\alpha(E^N)$ и равных нулю вне G_R.

**) Область D, в частности, может совпадать с областью G.

Используя функцию $F(r)$, введенную соотношением (2.5.88) в предыдущем пункте, мы можем следующим образом переписать равенство (2.5.118):

$$\sigma_\lambda^s(x, f) =$$
$$= 2^s\Gamma(s+1)(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\omega_N\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}\int_0^R \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}\left(r\sqrt{\lambda}\right)r^{-\frac{N}{2}-s}F(r)\,dr +$$
$$+ 2^s\Gamma(s+1)\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^\infty \widehat{f_i}(t)\,u_i(x, t)\,t^{\frac{2-N}{4}}\,I_t^{\lambda}{}^{v_0}(R)\,d\rho(t). \quad (2.5.119)$$

Первый интеграл в правой части (2.5.119) подвергнем l-кратному интегрированию по частям, основанному на использовании операции $\mathcal{D}F(r) = \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}F(r)\right]$ и ее повторений *), а также на использовании рекуррентного соотношения

$$\int r^{-\nu+1}\mathcal{J}_\nu\left(r\sqrt{\lambda}\right)dr = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}r^{-\nu+1}\mathcal{J}_{\nu-1}\left(r\sqrt{\lambda}\right).$$

В результате, считая, что $\mathcal{D}^0F(r) \equiv F(r)$, получим

$$2^s\Gamma(s+1)(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\omega_N\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}\int_0^R \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}\left(r\sqrt{\lambda}\right)r^{-\frac{N}{2}-s}F(r)\,dr =$$
$$= -2^s\Gamma(s+1)(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\omega_N\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}-\frac{n}{2}}\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{l}\left\{\left[\frac{1}{r}\mathcal{D}^{n-1}F(r)\right]r^{-\frac{N}{2}-s+n}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s-n}\left(r\sqrt{\lambda}\right)\right\}\Bigg|_{r=0}^{r=R} +$$
$$+ 2^s\Gamma(s+1)(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\omega_N\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}-\frac{l}{2}}\int_0^R \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s-l}\left(r\sqrt{\lambda}\right)r^{l-\frac{N}{2}-s}\mathcal{D}^lF(r)\,dr. \quad (2.5.120)$$

Теперь заметим, что все подстановки при $r=0$ в правой части (2.5.120) обращаются в нуль, так как в силу того, что $N/2+s-n>0$ при любом $n=1, 2, \ldots, l$, справедлива оценка $\rho^{-N/2+s+n}|\mathcal{J}_{N/2+s-n}(\rho)| \leqslant C$, а функции $\frac{1}{r}\mathcal{D}^{n-1}F(r)$ обращаются в нуль при $r=0$.

---

*) Так как $F(r) = r^{N-1}\psi(r)$, а среднее значение $\psi(r)$ и все его производные непрерывны на сегменте $0 \leqslant r \leqslant R$ и поскольку $2l < N-1$, то при всех $n \leqslant l$ функции $\frac{1}{r}\mathcal{D}^{n-1}F(r)$ непрерывны на сегменте $0 \leqslant r \leqslant R$ и обращаются в нуль при $r=0$. Напомним, что $\alpha = 1+\varkappa$, где $0 < \varkappa \leqslant 1$.

Таким образом, равенство (2.5.120) можно переписать в виде

$$2^s\Gamma(s+1)(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\omega_N\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}\int_0^R \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\,r^{-\frac{N}{2}-s}F(r)\,dr =$$

$$= -2^s\Gamma(s+1)(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\omega_N\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}-\frac{n}{2}}\sum_{n=1}^{l} R^{-\frac{N}{2}-s+n-1}\times$$

$$\times\mathcal{J}_{N/2+s-n}(R\sqrt{\lambda})\,\mathcal{D}^{n-1}F(r)+$$

$$+2^s\Gamma(s+1)(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\omega_N\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}-\frac{l}{2}}\int_0^R \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s-l}(r\sqrt{\lambda})\,r^{l-\frac{N}{2}-s}\mathcal{D}^lF(r)\,dr. \qquad (2.5.121)$$

Подвергая интеграл

$$\overset{\nu_0\lambda}{I_t}(R)=\int_R^\infty \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{\frac{N}{2}-1}(r\sqrt{t})\,r^{-s}\,dr,$$

стоящий в последнем члене в правой части (2.5.119), l-кратному интегрированию по частям, основанному на использовании рекуррентных соотношений

$$\int r^{-s-\nu+1}\mathcal{J}_{\nu+s}(r\sqrt{\lambda})\,dr=-\frac{r^{-s-\nu+1}}{\sqrt{\lambda}}\mathcal{J}_{\nu+s-1}(r\sqrt{\lambda}),$$

$$\frac{d}{dr}\left[r^{\nu-1}\mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t})\right]=\sqrt{t}\,r^{\nu-1}\mathcal{J}_{\nu-2}(r\sqrt{t}),$$

и учитывая обращение в нуль подстановок при $r=\infty$, получим

$$\overset{\nu_0\lambda}{I_t}(R)=\sum_{n=1}^{l} t^{\frac{n-1}{2}}\lambda^{-\frac{n}{2}}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s-n}(R\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{\frac{N}{2}-n}(R\sqrt{t})R^{-s}+\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\frac{l}{2}}\overset{\nu_l\lambda}{I_t}(R), \qquad (2.5.122)$$

где символ $\overset{\nu_l\lambda}{I_t}(R)$ обозначает интеграл (2.5.21), взятый при $n=l$, т. е. при $\nu_l=N/2-l$.

Вставляя (2.5.121) и (2.5.122) в правую часть (2.5.119), используя при $\nu=\nu_l+s$ введенное выше обозначение *)

$$V_\nu(r\sqrt{\lambda})=r^{1/2}\lambda^{1/4}\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})$$

и учитывая, что при $\alpha=(N-1)/2-s=l+\varkappa$ справедливы равенства $(N-1)/4-s/2-l/2=\varkappa/2$, $l-(N+1)/2-s=2l-N+\varkappa$ и $N/4-s/2-l/2=1/4+\varkappa/2$, получим для $\sigma_\lambda^s(x,f)$ следующее выражение:

$$\sigma_\lambda^s(x,f)=2^s\Gamma(s+1)(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\omega_N\lambda^{\frac{\varkappa}{2}}\int_0^R V_{\nu_l+s}(r\sqrt{\lambda})\,r^{2l-N+\varkappa}\mathcal{D}^lF(r)\,dr+$$

$$+2^s\Gamma(s+1)(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\lambda^{\frac{1}{4}+\frac{\varkappa}{2}}\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^\infty \widehat{f}_i(t)\,u_i(x,t)\,t^{\frac{l}{2}+\frac{2-N}{4}}\overset{\nu_l\lambda}{I_t}(R)\,d\rho(t)+$$

*) См. обозначение (2.5.87) из п. 2 § 5.

$$+ 2^s\Gamma(s+1)(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\omega_N\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}\sum_{n=1}^{l}\lambda^{-\frac{n}{2}}R^{-\frac{N}{2}-s+n-1}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s-n}(R\sqrt{\lambda})\times$$

$$\times\left\{-\mathcal{D}^{n-1}F(r)+\frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{\omega_N}R^{\frac{N}{2}-n+1}\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^\infty\widehat{f}_i(t)\,u_i(x,t)\,t^{\frac{n}{2}-\frac{N}{4}}\times\right.$$

$$\left.\times\mathcal{J}_{\frac{N}{2}-n}(R\sqrt{t})\,d\rho(t)\right\}. \quad (2.5.123)$$

Сейчас мы докажем, что для любого $n = 1, 2, \ldots, l$ выражение, стоящее в (2.5.123) в фигурных скобках, равно нулю. Фиксируя произвольное $R > 0$ и произвольную точку x множества G_R и обозначив символом $\rho = |x-y|$ расстояние произвольной точки y области G от фиксированной нами точки x, рассмотрим для любого r из полусегмента $0 < r \leqslant R$ функцию

$$v(|x-y|) = \begin{cases}\omega_N^{-1} & \text{при} \quad |x-y| \leqslant r,\\ 0 & \text{при} \quad |x-y| > r.\end{cases}$$

В силу соотношения (2.3.2) из п. 1 § 3 образ Фурье $\widehat{v_i}(x,\lambda)$ функции $v(|x-y|)$ имеет вид

$$\widehat{v_i}(x,\lambda) = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\omega_N^{-1}u_i(x,\lambda)\,\lambda^{\frac{2-N}{4}}\int_0^r\rho^{\frac{N}{2}}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}-1}(\rho\sqrt{\lambda})\,d\rho =$$

$$= (2\pi r)^{\frac{N}{2}}\omega_N^{-1}\lambda^{-\frac{N}{4}}u_i(x,\lambda)\,\mathcal{J}_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\lambda}), \qquad (i = 1, 2, \ldots, \widehat{m}).$$

Так как при любом x из G_R функция $v(|x-y|)$ принадлежит по y классу $L_2(G)$, то, записывая равенство Парсеваля (2.1.10) из п. 2 § 1 для двух функций $v(|x-y|)$ и $f(y)$, получим следующее справедливое для всех $x \in G_R$ и всех $r \leqslant R$ равенство

$$\omega_N^{-1}\int\limits_{|x-y|\leqslant r}f(y)\,dy = \sum_{i=1}^{\widehat{m}}(2\pi r)^{\frac{N}{2}}\omega_N^{-1}\int_0^\infty t^{-\frac{N}{4}}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\lambda})\,\widehat{f}_i(t)\,u_i(x,t)\,d\rho(t). \quad (2.5.124)$$

Так как в силу определения функции (2.5.88)

$$\frac{d}{dr}\left[\omega_N^{-1}\int\limits_{|x-y|\leqslant r}f(y)\,dy\right] =$$

$$= \frac{d}{dr}\left[\int_0^r\left(\rho^{N-1}\omega_N^{-1}\int\ldots\int_\omega f(x+\rho\omega)\,d\omega\right)d\rho\right] =$$

$$= \frac{d}{dr}\left[\int_0^r F(\rho)\,d\rho\right] = F(r),$$

то при формальном дифференцировании по r равенства (2.5.124) мы получим соотношение

$$F(r)=(2\pi)^{\frac{N}{2}}\omega_N^{-1}\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^\infty r^{\frac{N}{2}}t^{\frac{2-N}{4}}\mathscr{J}_{\frac{N}{2}-1}\left(r\sqrt{t}\right)\widehat{f}_i(t)\,u_i(x,t)\,d\rho(t), \quad (2.5.125)$$

а при формальном применении к обеим частям (2.5.125) по переменной r операции $\mathscr{D}^{n-1}$ получим соотношение

$$\mathscr{D}^{n-1}F(r)=(2\pi)^{\frac{N}{2}}\omega_N^{-1}\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^\infty r^{\frac{N}{2}-n+1}t^{\frac{n}{2}-\frac{N}{4}}\mathscr{J}_{\frac{N}{2}-n}\left(r\sqrt{t}\right)\widehat{f}_i(t)\,u_i(x,t)\,d\rho(t). \quad (2.5.126)$$

Если будет доказано, что формальное применение к равенству (2.5.124) по переменной r на сегменте $0\leqslant r\leqslant R$ операции $\frac{d}{dr}\mathscr{D}^{n-1}$ возможно при всех $n=1, 2, \ldots, l$, то, полагая в (2.5.126) $r=R$, получим, что выражения в фигурных скобках в правой части (2.5.123) равны нулю. Для оправдания возможности формального применения к равенству (2.5.124) на сегменте $0\leqslant r\leqslant R$ операции $\frac{d}{dr}\mathscr{D}^{n-1}$ достаточно доказать, что при любом $n=1, 2, \ldots, l$ интеграл в правой части (2.5.126) сходится равномерно по r на сегменте $0\leqslant r\leqslant R$.

Так как при любом $n=1, 2, \ldots, l$ для всех $t>0$ и для всех r из сегмента $0\leqslant r\leqslant R$ справедливо неравенство

$$r^{N/2-n+1}t^{n/2-N/4}\left|\mathscr{J}_{\frac{N}{2}-n}\left(r\sqrt{t}\right)\right|\leqslant Cr^{N-2n+1}\leqslant C\cdot R^{N-2n+1},$$

то при любом $n=1, 2, \ldots, l$ интеграл в правой части (2.5.126) при всех r из сегмента $0\leqslant r\leqslant R$ мажорируется интегралом

$$C_1\cdot\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^\infty\left|\widehat{f}_i(t)\right|\left|u_i(x,t)\right|d\rho(t), \quad (2.5.127)$$

и в силу признака Вейерштрасса достаточно доказать сходимость интеграла (2.5.127).

Этот последний интеграл мы представим в виде суммы двух интегралов I_1+I_2, где

$$I_1=C_1\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^1\left|\widehat{f}_i(t)\right|\left|u_i(x,t)\right|d\rho(t), \quad (2.5.128)$$

$$I_2=C_1\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_1^\infty\left|\widehat{f}_i(t)\right|\left|u_i(x,t)\right|d\rho(t). \quad (2.5.129)$$

Для того чтобы убедиться в сходимости интеграла (2.5.128), применим неравенство Коши — Буняковского сначала к интегралу, а затем к сумме и воспользуемся равенством Парсеваля

(2.1.9) из п. 2 § 1 для функции $f(x)$ и оценкой (2.3.4) из п. 1 § 3, взятой при $\mu_0 = 1$. Мы получим при этом, что для любой точки x из G_R

$$|I_1| \leqslant C_1 \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \left(\int_0^1 |\widehat{f}_i(t)|^2 \, d\rho(t) \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |u_i(x, t)|^2 \, d\rho(t) \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \left\{ \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^1 |\widehat{f}_i(t)|^2 \, d\rho(t) \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^1 |u_i(x, t)|^2 \, d\rho(t) \right\}^{1/2} \leqslant C_2 \|f\|_{L_2(G)}. \qquad (2.5.130)$$

Для обоснования сходимости интеграла (2.5.129) прежде всего заметим, что так как функция $f(x)$ принадлежит классу $C_0^\infty(G)$, то для любого номера m и функция $\Delta^m f(x)$ принадлежит классу $C_0^\infty(G)$. Поэтому последовательное применение формулы Грина к функции $u_i(x, \lambda)$ и к одной из функций $f(x)$, $\Delta f(x)$, $\Delta^2 f(f), \ldots, \Delta^{\left[\frac{N}{4}\right]+1} f(x)$ приводит к следующему соотношению между образами Фурье функций $f(x)$ и $\Delta^{\left[\frac{N}{4}\right]+1} f(x)$:

$$\left(\widehat{\Delta^{\left[\frac{N}{4}\right]+1} f}\right)_i(t) = (-1)^{\left[\frac{N}{4}\right]+1} t^{\left[\frac{N}{4}\right]+1} \widehat{f}_i(t). \qquad (2.5.131)$$

Соотношение (2.5.131) позволяет переписать (2.5.129) в виде

$$I_2 = C_1 \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_1^\infty \left| \left(\widehat{\Delta^{\left[\frac{N}{4}\right]+1} f}\right)_i(t) \right|^2 t^{-\left[\frac{N}{4}\right]-1} |u_i(x, t)| \, d\rho(t). \qquad (2.5.129')$$

Теперь, применяя в правой части (2.5.129′) неравенство Коши — Буняковского сначала для интеграла, а затем для суммы и используя равенство Парсеваля (2.1.9) из п. 2 § 1 для функции $\Delta^{\left[\frac{N}{4}\right]+1} f(x)$ и ограниченность в G_R интеграла (2.3.10) при любом $\delta > 0$ (см. п. 2 § 3), получим, что для любой точки x из G_R

$$|I_2| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \left\{ \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_1^\infty \left| \left(\widehat{\Delta^{\left[\frac{N}{4}\right]+1} f}\right)_i(t) \right|^2 d\rho(t) \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_1^\infty t^{-2\left(\left[\frac{N}{4}\right]+1\right)} |u_i(x, t)|^2 \, d\rho(t) \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \cdot \left\| \Delta^{\left[\frac{N}{4}\right]+1} f \right\|_{L_2(G)}. \qquad (2.5.132)$$

Оценки (2.5.130) и (2.5.132) завершают доказательство сходимости интеграла (2.5.127), а потому завершают доказательство равномерной по r на сегменте $0 \leqslant r \leqslant R$ сходимости каждого из интегралов (2.5.126). Тем самым доказано обращение в нуль каждой из фигурных скобок в правой части (2.5.123), и равенство (2.5.123) для произвольной функции $f(x)$ из класса $C_0^\infty(G)$ принимает вид

$$\sigma_\lambda^s(x, f) =$$

$$= 2^s\Gamma(s+1)(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\omega_N\lambda^{\frac{\varkappa}{2}}\int_0^R V_{\nu_l+s}(r\sqrt{\lambda})\, r^{2l-N+\varkappa}\mathscr{D}^l F(r)\,dr +$$

$$+ 2^s\Gamma(s+1)(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\lambda^{\frac{1}{4}+\frac{\varkappa}{2}}\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^\infty \widehat{f}_i(t)\,u_i(x,t)\,t^{\frac{l}{2}+\frac{2-N}{4}}I_t^{\nu_l,\lambda}(R)\,d\rho(t). \tag{2.5.133}$$

Для получения для произвольной функции $f(x)$ из класса $C_0^\infty(G)$ искомой оценки (2.5.117) остается заметить, что первый член в правой части (2.5.133) имеет порядок $O\left(\|f\|_{H_p^\alpha(D)}\right)$ в силу оценки (2.5.89), составляющей содержание леммы 2.10, а второй член в правой части (2.5.133) имеет порядок $O\left(\|f\|_{H_2^\alpha(G)}\right)$ в силу оценки (2.5.24), составляющей содержание леммы 2.7.

Тем самым для произвольной функции $f(x)$ из класса $C_0^\infty(G)$ оценка (2.5.117) доказана.

Остается доказать оценку (2.5.117) для произвольной функции $f(x)$ из класса $\overset{0}{H}{}_2^\alpha(G)\cap H_p^\alpha(D)$ при $\alpha = \frac{N-1}{2} - s$. $p\alpha > N$, $p \geqslant 1$. Воспользуемся тем, что множество функций из $C_0^\infty(G)$ является плотным в только что указанном классе.

Убедимся в том, что для произвольной функции $f(x)$ из класса

$$\overset{0}{H}{}_2^\alpha(C_R)\cap H_p^\alpha(D) \quad \text{при} \quad \alpha = \frac{N-1}{2} - s,\ p\alpha > N,\ p \geqslant 1 \tag{2.5.134}$$

при произвольно фиксированных $\varepsilon > 0$ и $\lambda > 0$ в каждой точке $x \in D_{3R}$ справедливо неравенство

$$|\sigma_\lambda^s(x, f)| \leqslant C\left\{\|f\|_{H_2^\alpha(G)} + \|f\|_{H_p^\alpha(D)}\right\} + \varepsilon. \tag{2.5.135}$$

Фиксируя произвольные $\varepsilon > 0$ и $\lambda > 0$, найдем функцию $g(x)$ из пространства $C_0^\infty(G)$ такую, что

$$\|f - g\|_{H_2^\alpha(G)} + \|f - g\|_{H_p^\alpha(D)} < \frac{\varepsilon}{2C}, \tag{2.5.136}$$

$$\|f - g\|_{L_2(G)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2C_5\lambda^{2N}}, \tag{2.5.137}$$

где C — постоянная из оценки (2.5.117) для функции из $C_0^\infty(G)$, а C_5 — постоянная из оценки (2.3.4), установленной в п. 2 § 3.

Из оценки (2.5.137) и из выражения для среднего Рисса порядка $s \geqslant 0$

$$\sigma_\lambda^s(x, f-g) = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\lambda \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s \left[\widehat{f}_i(t) - \widehat{g}_i(t)\right] u_i(x, t)\, d\rho(t)$$

в результате применения неравенства Коши — Буняковского сначала к интегралу, а затем к сумме и использования равенства Парсеваля (2.1.9) для функции $[f(x)-g(x)]$, неравенства $\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s \leqslant 1$ и оценки (2.3.4) из п. 2 § 3, взятой при $\mu_0 = \sqrt{\lambda}$, получим, что для любой точки $x \in D_{3R}$

$$\left|\sigma_\lambda^s(x, f-g)\right| \leqslant \varepsilon/2. \tag{2.5.138}$$

Так как для функции $g(x)$ из пространства $C_0^\infty(G)$ в силу доказанного выше для любой точки $x \in D_{3R}$ справедлива оценка

$$\left|\sigma_\lambda^s(x, g)\right| \leqslant C\left\{\|g\|_{H_2^\alpha(G)} + \|g\|_{H_p^\alpha(D)}\right\},$$

то из этой оценки, из оценок (2.5.138) и (2.5.136) и из неравенства треугольника вытекает неравенство (2.5.135).

Так как неравенство (2.5.135) установлено для произвольных $\varepsilon > 0$ и $\lambda > 0$, то доказательство оценки (2.5.117) для произвольной функции из класса (2.5.134) завершено.

Лемма 2.11 полностью доказана.

4. Непосредственное доказательство теоремы 2.3. Пусть $f(x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая всем условиям теоремы 2.3, т. е. принадлежащая при некотором $h_0 > 0$ классу

$$\overset{0}{H}{}_2^\alpha\left(G_{h_0}\right) \cap H_p^\alpha(D) \quad \text{при} \quad \alpha \geqslant \frac{N-1}{2} - s,\ p\alpha > N,\ p \geqslant 1.$$

Фиксируем произвольные $\varepsilon > 0$ и $h = 3R > 0$ и обозначим через $g(x)$ функцию из пространства $C_0^\infty(G)$, для которой *)

$$\|f-g\|_{H_2^\alpha(G)} + \|f-g\|_{H_p^\alpha(D)} < \frac{\varepsilon}{3C}, \tag{2.5.139}$$

$$\max_{x \in D_{3R}} |f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{2.5.140}$$

где C — постоянная из оценки (2.5.117).

---

*) Такая функция $g(x)$ найдется в силу плотности множества функций из $C_0^\infty(G)$ в классе $\overset{0}{H}{}_2^\alpha\left(G_{h_0}\right) \cap H_p^\alpha(D)$ при $\alpha \geqslant \frac{N-1}{2} - s$, $p\alpha > N$, $p \geqslant 1$ и в силу теоремы вложения (2.1.26) из п. 3 § 1, на основании которой

$$\max_{x \in D_{3R}} |f(x) - g(x)| \leqslant C_1 \|f-g\|_{H_p^\alpha(D)}.$$

Далее воспользуемся тем, что средние Рисса любого неотрицательного порядка s функции $g(x)$ из класса $C_0^\infty(G)$

$$\sigma_\lambda^s(x, g) = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\lambda \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s \widehat{g}_i(t)\, u_i(x, t)\, d\rho(t) \tag{2.5.141}$$

сходятся к $f(x)$ равномерно относительно x в G_h.

Для доказательства этого достаточно сначала мажорировать правую часть (2.5.141) величиной

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\lambda |\widehat{g}_i(t)|\,|u_i(x, t)|\, d\rho(t),$$

а затем применить рассуждения, приведенные в предыдущем пункте для доказательства сходимости интеграла (2.5.127).

Из равномерной в G_h сходимости средних Рисса (2.5.141) к $g(x)$ вытекает, что для фиксированного нами $\varepsilon > 0$ найдется $\Lambda(\varepsilon)$ такое, что при всех $x \in G_h$ и всех $\lambda \geqslant \Lambda(\varepsilon)$

$$|\sigma_\lambda^s(x, g) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.5.142}$$

Заметим, наконец, что из неравенства (2.5.139) и из оценки (2.5.117) вытекает, что для всех x из G_h

$$|\sigma_\lambda^s(x, f - g)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.5.143}$$

Из тождества

$$\sigma_\lambda^s(x, f) - f(x) \equiv \sigma_\lambda^s(x, f - g) + [\sigma_\lambda^s(x, g) - g(x)] + [g(x) - f(x)]$$

и из оценок (2.5.143), (2.5.142) и (2.5.140) вытекает, что при всех $x \in D_h = D_{3R}$ и для всех $\lambda \geqslant \Lambda(\varepsilon)$

$$|\sigma_\lambda^s(x, f) - f(x)| < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство теоремы 2.3.

Замечание. Для того чтобы извлечь из теоремы 2.3 условия локализации средних Рисса спектральных разложений порядка $s\left(0 \leqslant s < \frac{N-1}{2}\right)$, достаточно в условиях этой теоремы положить функцию $f(x)$ равной нулю в подобласти D (такая функция $f(x)$ удовлетворяет условию 3) теоремы 2.3, ибо принадлежит классу $H_p^\alpha(D)$ при любых $\alpha > 0$, $p \geqslant 1$).

§ 6. Оценка остаточного члена средних Рисса спектральной функции в метрике L_2

В гл. 1 для произвольной ФСФ оператора Лапласа нами был развит метод изучения спектральных разложений финитных в области G функций из класса Соболева — Лиувилля $L_p^\alpha(G)$, основанный на предварительной оценке сверху остаточного члена спектральной функции в метрике L_2. Этот метод без каких-либо затруднений переносится на случай произвольного самосопряженного неотрицательного расширения оператора Лапласа и также позволяет для финитных в области G функций из класса Соболева — Лиувилля $L_p^\alpha(G)$ установить условия равномерной сходимости как самих спектральных разложений, так и их средних Рисса порядка $s\left(0\leqslant s<\frac{N-1}{2}\right)$.

Мы ограничимся тем, что установим для произвольного самосопряженного неотрицательного расширения оператора Лапласа оценку сверху остаточного члена средних Рисса спектральной функции в метрике L_2.

Теорема 2.6. *Пусть G — произвольная область в пространстве E^N, $\widehat{A}$ — произвольное самосопряженное неотрицательное расширение оператора Лапласа $Lu=-\Delta u$ в области G. Тогда при любом $R>0$ и при любом достаточно большом $\lambda>0$ для средних Рисса $\theta^s(x, y, \lambda)$ любого неотрицательного порядка s от спектральной функции $\theta(x, y, \lambda)$ расширения $\widehat{A}$ равномерно относительно x в G_R справедлива следующая оценка:*

$$\left\|\theta^s(x,y,\lambda)-\overset{\lambda}{v}(|x-y|)\right\|_{L_2(G)}\leqslant C\lambda^{\frac{N-1}{s}-\frac{s}{2}}, \tag{2.6.1}$$

в которой $L_2(G)$ — норма берется по координатам точки y, символ $|x-y|$ обозначает расстояние между точками x и y, а символ $\overset{\lambda}{v}(r)$ *обозначает уже известную нам из п. 1 § 4 функцию* *)

$$\overset{\lambda}{v}(r)=\begin{cases}\Gamma(s+1)\cdot 2^s(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}r^{-\frac{N}{2}+s}\mathscr{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda}) & \textit{при}\quad r\leqslant R,\\ 0 & \textit{при}\quad r>R.\end{cases} \tag{2.6.2}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное упорядоченное спектральное представление пространства $L_2(G)$ относительно расширения $\widehat{A}$ со спектральной мерой $\rho(\lambda)$, множествами кратности e_i, фундаментальными функциями $u_i(x, \lambda)$ $(i=1, 2, \ldots$ $\ldots, \widehat{m})$ и кратностью $\widehat{m}\leqslant\infty$ и, фиксируя произвольное $R>0$ и произвольную точку x в G_R, вычислим образ Фурье $\widehat{v}_i^\lambda(x, t)$ функции $\overset{\lambda}{v}(|x-y|)$ относительно фундаментальной функции $u_i(y, \lambda)$. Используя рассуждения, проведенные в п. 1 § 4, мы получим, что искомый образ Фурье определяется соотношением **)

$$\widehat{v}_i^\lambda(x,t)=$$
$$=\delta_t^\lambda u_i(x,t)\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s-\Gamma(s+1)\cdot 2^s\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}t^{\frac{2-N}{4}}u_i(x,t)\,I_t^\lambda(R),$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ \widehat{m}), \tag{2.6.3}$$

---

*) См. соотношение (2.4.5) из п. 1 § 4 главы 2.

**) См. соотношения (2.4.6)—(2.4.9) из п. 1 § 4 гл. 2.

в котором

$$I_t^\lambda(R)=\int\limits_R^\infty \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{\frac{N}{2}-1}(r\sqrt{t})\,r^{-s}\,dr, \tag{2.6.4}$$

$$\delta_t^\lambda=\begin{cases}1 & \text{при} \quad t<\lambda,\\ 0 & \text{при} \quad t\geqslant\lambda,\end{cases} \tag{2.6.5}$$

причем при $s=0$, $t=\lambda$ следует считать, что $\delta_t^\lambda=1/2$, $(1-t/\lambda)^s=1$.

Умножим обе части (2.6.3) на фундаментальную функцию $u_i(y,\ t)$ и проинтегрируем полученное при этом равенство по спектральной мере $\rho(t)$ в пределах по t от 0 до ∞, а затем просуммируем его по всем номерам i от 1 до $\widehat{m}$.

Учитывая, что при любых фиксированных $x\in G_R$ и $\lambda>0$ функция $\overset{\lambda}{v}(|x-y|)$ принадлежит по y классу $L_2(G)$, и используя соотношение (2.6.5) и выражение (2.4.4) из п. 1 § 4 для средних Рисса спектральной функции, получим следующее равенство:

$$\overset{\lambda}{v}(|x-y|)-\theta^s(x,y,\lambda)=$$
$$=\Gamma(s+1)\cdot 2^s\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_0^\infty t^{\frac{2-N}{4}}u_i(x,t)\,u_i(y,t)\,I_t^\lambda(R)\,d\rho(t), \tag{2.6.6}$$

понимаемое при любых фиксированных $x\in G_R$ и $\lambda>0$ как равенство элементов пространства $L_2(G)$ по координатам точки y.

Из равенства (2.6.6) и из равенства Парсеваля (2.1.9) (см. п. 2 § 1) вытекает, что для доказательства искомой оценки (2.6.1) достаточно установить равномерную относительно x в G_R оценку

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_0^\infty t^{\frac{2-N}{2}}\left[u_i(x,t)\,I_t^\lambda(R)\right]^2 d\rho(t)\leqslant C\lambda^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.6.7}$$

для чего в свою очередь достаточно установить справедливость следующих шести равномерных относительно x в G_R оценок:

$$S_1=\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_{\sqrt{t}\leqslant 1}\left\{t^{\frac{2-N}{2}}\left[u_i(x,t)\,I_t^\lambda(R)\right]^2\right\}d\rho(t)\leqslant C_1\lambda^{-1/2}, \tag{2.6.8}$$

$$S_2=\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_{1\leqslant\sqrt{t}\leqslant\frac{\sqrt{\lambda}}{2}}\{\ldots\}\,d\rho(t)\leqslant C_2\lambda^{-1/2}, \tag{2.6.9}$$

$$S_3=\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_{\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\leqslant\sqrt{t}\leqslant\sqrt{\lambda}-1}\{\ldots\}\,d\rho(t)\leqslant C_3\lambda^{-1/2}, \tag{2.6.10}$$

$$S_4 = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant 1} \{\ldots\}\, d\rho(t) \leqslant C_4 \lambda^{-1/2}, \tag{2.6.11}$$

$$S_5 = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\sqrt{\lambda}+1\leqslant\sqrt{t}\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{\lambda}} \{\ldots\}\, d\rho(t) \leqslant C_5 \lambda^{-1/2}, \tag{2.6.12}$$

$$S_6 = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\sqrt{t}\geqslant\frac{3}{2}\sqrt{\lambda}} \{\ldots\}\, d\rho(t) \leqslant C_6 \lambda^{-1/2} \tag{2.6.13}$$

(фигурные скобки в (2.6.9) — (2.6.13) обозначают ту же величину, что и в (2.6.8)).

Для доказательства оценки (2.6.8) воспользуемся установленным в п. 1 § 4 для любых $\sqrt{t} \leqslant 1$, $\lambda \geqslant 1$ неравенством (2.4.34), записав это неравенство в виде

$$t^{\frac{2-N}{2}} \left[u_i(x, t)\, I_t^\lambda(R)\right]^2 \leqslant C_7 u_i^2(x, t)\, \lambda^{-1/2}.$$

Из последнего неравенства и из равномерной относительно x в любой строго внутренней подобласти G' области G оценки (2.3.3), установленной в п. 1 § 3 и взятой при $\mu = 0$, сразу же вытекает справедливость равномерной относительно x в G_R оценки (2.6.8).

Для доказательства оценок (2.6.9) — (2.6.13) мы воспользуемся следующими установленными в пп. 1 и 2 § 4 оценками для величины (2.6.4)*):

$$\left|I_t^\lambda(R)\right| \leqslant C_8 \lambda^{-1/4} t^{-1/4}, \tag{2.6.14}$$

$$\left|I_t^\lambda(R)\right| \leqslant C_9 \lambda^{-1/4} t^{-1/4} \left|\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}\right|^{-1}, \tag{2.6.15}$$

первая из которых справедлива при любых $s \geqslant 0$, $t \geqslant 1$, $\lambda \geqslant 1$, $|\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}| \leqslant 1$, а вторая — при любых $s \geqslant 0$, $t \geqslant 1$, $\lambda \geqslant 1$, $|\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}| \geqslant 1$.

Для установления оценки (2.6.9) заметим, что для фигурирующих в этой оценке значений t можно следующим образом переписать оценку (2.6.15):

$$\left|I_t^\lambda(R)\right| \leqslant C_{10} \lambda^{-1/4} t^{-3/4}. \tag{2.6.16}$$

Неравенство (2.6.16) позволяет следующим образом мажорировать величину, стоящую в левой части (2.6.9):

$$S_2 \leqslant C_{11} \lambda^{-1/2} \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{1\leqslant\sqrt{t}\leqslant\sqrt{\lambda}/2} u_i^2(x, t)\, t^{-\frac{1}{2}-\frac{N}{2}}\, d\rho(t).$$

*) См. оценки (2.4.10) и (2.4.11) из п. 1 § 4 главы 2.

Теперь для установления оценки (2.6.9) остается воспользоваться установленной в п. 2 § 3 равномерной по x в G_R ограниченностью интеграла (2.3.10) при любом $\delta > 0$ и, в частности, при $\delta = 1/2$.

Для установления сразу двух оценок (2.6.10) и (2.6.12) заметим, что обе эти оценки являются следствиями более общей оценки

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{1 \leqslant |\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}| \leqslant \sqrt{\lambda}/2} \left\{ t^{\frac{2-N}{2}} \left[u_i(x, t) I_t^\lambda(R) \right]^2 \right\} d\rho(t) \leqslant C_{12} \lambda^{-1/2}, \quad (2.6.17)$$

равномерной относительно x в G_R.

Для установления оценки (2.6.17) обозначим через p наименьший из номеров, для которого $2^p > \sqrt{\lambda}/2$. Тогда сегмент $[1, \sqrt{\lambda}/2]$ покрывается системой сегментов $[2^{l-1}, 2^l]$, $l = 1, 2, \ldots, p$.

Пользуясь оценкой (2.6.15) и учитывая, что под знаком интеграла в (2.6.17) $1/\sqrt{t} \leqslant 2/\sqrt{\lambda}$, мы можем следующим образом мажорировать величину, стоящую в левой части (2.6.17):

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{1 \leqslant |\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}| \leqslant \frac{\sqrt{\lambda}}{2}} \left\{ t^{\frac{2-N}{2}} \left[u_i(x, t) I_t^\lambda(R) \right]^2 \right\} d\rho(t) \leqslant$$

$$\leqslant C_9^2 \cdot 2^{N-1} \lambda^{-\frac{N}{2}} \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{1 \leqslant |\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}| \leqslant \sqrt{\lambda}/2} u_i^2(x, t) (\sqrt{t} - \sqrt{\lambda})^2 d\rho(t) \leqslant$$

$$\leqslant C_9^2 \cdot 2^{N-1} \lambda^{-\frac{N}{2}} \sum_{l=1}^{p} \left\{ \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{2^{l-1} \leqslant |\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}| \leqslant 2^l} u_i^2(x, t) (\sqrt{t} - \sqrt{\lambda})^2 d\rho(t) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant C_9^2 \cdot 2^{N-1} \lambda^{-\frac{N}{2}} \sum_{l=1}^{p} 4^{1-l} \left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}| \leqslant 2^l} u_i^2(x, t)\, d\rho(t) \right]. \quad (2.6.18)$$

Для оценки величины, стоящей в правой части (2.6.18) в квадратных скобках, воспользуемся оценкой (2.3.7), установленной в следствии 1 из леммы 2.1 в п. 2 § 3. Взяв указанную оценку (2.3.7) при $\mu = \sqrt{\lambda}$, $\rho_0 = 2^l$, мы получим из (2.6.18), что величина, стоящая в левой части (2.6.17), не превосходит

$$C_{13} \lambda^{-1/2} \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} = C_{13} \lambda^{-1/2}.$$

Тем самым вывод оценок (2.6.10) и (2.6.12) завершен.

Оценка (2.6.11) является тривиальным следствием неравенства (2.6.14), неравенства $1/\sqrt{t} \leqslant 2/\sqrt{\lambda}$, справедливого для всех $\lambda \geqslant 4$, $|\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}| \leqslant 1$, и оценки (2.3.4) из п. 2 § 3, взятой при $\mu = \sqrt{\lambda}$.

Остается установить только оценку (2.6.13). Заметив, что для значений $\sqrt{t} \geqslant \frac{3}{2}\sqrt{\lambda}$ оценку (2.6.15) можно переписать в виде (2.6.16), мы получим, что

$$S_6 \leqslant C_{10}^2 \lambda^{-1/2} \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\sqrt{t} \geqslant \frac{3}{2}\sqrt{\lambda}} u_i^2(x, t)\, t^{-\frac{1}{2}-\frac{N}{2}} d\rho(t). \qquad (2.6.19)$$

Для получения из неравенства (2.6.19) оценки (2.6.13) достаточно воспользоваться установленной в п. 2 § 3 равномерной относительно x в G_R ограниченностью интеграла (2.3.10) при любом $\delta > 0$ и, в частности, при $\delta = 1/2$.

Вывод всех оценок (2.6.8) — (2.6.13) закончен, и доказательство теоремы 2.6 завершено.

Замечание. Рассмотрим функцию

$$\theta_0^s(x, y, \lambda) = \Gamma(s+1)\cdot 2^s (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}} |x-y|^{-\frac{N}{2}-s} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}\left(|x-y|\sqrt{\lambda}\right), \qquad (2.6.20)$$

представляющую собой среднее Рисса порядка s размера λ спектральной функции

$$\theta_0(x, y, \lambda) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \lambda^{\frac{N}{4}} |x-y|^{-\frac{N}{2}} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}}\left(|x-y|\sqrt{\lambda}\right),$$

отвечающей единственному самосопряженному неотрицательному расширению оператора Лапласа $Lu = -\Delta u$ во всем пространстве E^N, совпадающему с разложением в N-кратный интеграл Фурье.

Заметим, что если функцию (2.6.2) взять при $r = |x-y|$, то в силу неравенства $|\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})| \leqslant C_\nu (r\sqrt{\lambda})^{-1/2}$ для всех $s > -1/2$ равномерно относительно x в G_R будет справедлива оценка

$$\left\| \overset{\lambda}{v}(|x-y|) - \theta_0^s(x, y, \lambda) \right\|_{L_2(G)} \leqslant C_{14} \lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}}, \qquad (2.6.21)$$

в которой $L_2(G)$-норма берется по координатам точки y.

Из неравенств (2.6.1) и (2.6.21) и из неравенства треугольника вытекает, что при любых $R > 0$ и $s \geqslant 0$ равномерно относительно x в G_R справедлива оценка

$$\left\| \theta^s(x, y, \lambda) - \theta_0^s(x, y, \lambda) \right\|_{L_2(G)} \leqslant C_{15} \lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}}, \qquad (2.6.22)$$

устанавливающая близость в метрике $L_2(G)$ средних Рисса порядка $s \geqslant 0$ спектральных функций произвольного самосопряженного неотрицательного расширения $\widehat{A}$ оператора Лапласа и разложения в N-кратный интеграл Фурье.

Подчеркнем, что, неограниченно увеличивая порядок s средних Рисса, получим в правой части (2.6.22) как угодно высокий порядок малости по степеням $\frac{1}{\lambda}$.

§ 7. Оценка остаточного члена средних Рисса спектральной функции в метрике L_∞

В предыдущих параграфах данной главы и в § 3 и 4 гл. 1 мы показали, что для получения точных условий равномерной сходимости, локализации и отсутствия локализации спектральных разложений и их средних Рисса не требуется оценки остаточного члена спектральной функции и ее средних Рисса в метрике L_∞.

Однако исторически дело сложилось так, что, начиная с известной работы Т. Карлемана [1], многие известные математики (В. Г. Авакумович [1], Б. М. Левитан [1], К. И. Бабенко [1], Л. Гординг [2], Л. Хёрмандер [1] и другие) занимались оценкой остаточного члена спектральной функции и ее средних Рисса именно в метрике L_∞. Все указанные математики использовали для получения оценки в L_∞ остаточного члена спектральной функции и ее средних Рисса различные модификации первоначального метода Карлемана, заключающегося в изучении ядра некоторой функции от оператора $\widehat{A}$ и в последующем применении тех или иных теорем тауберова типа.

В настоящем параграфе мы изложим новый простой метод получения оценки в метрике L_∞ остаточного члена спектральной функции и ее средних Рисса, находящийся в русле идей настоящей монографии и не использующий методики Карлемана и техники теорем тауберова типа.

1. Доказательство основной теоремы.

Теорема 2.7. *Пусть G — произвольная область в пространстве E^N, $\widehat{A}$ — произвольное самосопряженное неотрицательное расширение оператора Лапласа $Lu=-\Delta u$ в области G. Тогда при любом $R_0>0$ и при любом достаточно большом $\lambda>0$ для средних Рисса $\theta^s(x, y, \lambda)$ любого неотрицательного порядка s от спектральной функции $\theta(x, y, \lambda)$ расширения $\widehat{A}$ равномерно по совокупности (x, y) на множестве*) $G_{R_0}\times G_{R_0}$ справедлива оценка*

$$\left|\theta^s(x,y,\lambda)-\Gamma(s+1)\cdot 2^s(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}|x-y|^{-\frac{N}{2}-s}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(|x-y|\sqrt{\lambda})\right|\leqslant$$
$$\leqslant C\lambda^{\frac{N-1}{2}-\frac{s}{2}}. \qquad (2.7.1)$$

Доказательство. Фиксируя произвольное $R_0>0$ и произвольную точку x множества G_{R_0} и для любого R из сегмента $R_0/2\leqslant R\leqslant R_0$, рассмотрим функцию $\overset{\lambda}{v}(r, R)=\overset{\lambda}{v}(r)$ аргумента $r=|x-y|$, определяемую соотношением (2.6.2) из предыдущего

---

*) Напомним, что символ G_{R_0} обозначает подмножество точек области G, отстоящих от границы G на расстояние, большее числа $R_0>0$.

параграфа, т. е. функцию

$$\overset{\lambda}{v}(r, R) = \overset{\lambda}{v}(r) = \begin{cases} \Gamma(s+1)\cdot 2^s (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}} r^{-\frac{N}{2}-s} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda}) & \text{при } r \leqslant R, \\ 0 & \text{при } r > R. \end{cases} \tag{2.7.2}$$

Для любой функции $f(r)$ аргумента r обозначим символом $Df(r)$ бесселевскую производную, определяемую равенством $Df(r) = \frac{1}{r} f'(r)$, а символом $D^n f(r)$ бесселевскую производную порядка n.

Вычтем из функции (2.7.2) «сглаживающий» многочлен $\overset{\lambda}{w}(r, R) = \overset{\lambda}{w}(r)$ вида *)

$$\overset{\lambda}{w}(r, R) = \overset{\lambda}{w}(r) = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} a_m (r^2 - R^2)^m & \text{при } r = |x-y| \leqslant R, \\ 0 & \text{при } r = |x-y| > R, \end{cases} \tag{2.7.3}$$

коэффициенты a_m которого выбраны так, что при $r = R$ выполняются соотношения

$$\overset{\lambda}{w}(R) = \overset{\lambda}{v}(R),\ D\overset{\lambda}{w}(R) = D\overset{\lambda}{v}(R),\ \ldots,\ D^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} \overset{\lambda}{w}(R) = D^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} \overset{\lambda}{v}(R). \tag{2.7.4}$$

Соотношения (2.7.4) однозначно определяют коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{\left[\frac{N-1}{2}\right]}$ многочлена (2.7.3), ибо при всех r из сегмента $0 \leqslant r \leqslant R$ и для любого $k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{N-1}{2}\right]$

$$D^k\left[\overset{\lambda}{v}(r)\right] = \Gamma(s+1)\cdot 2^s (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}} (-1)^k \lambda^{\frac{k}{2}} r^{-\left(\frac{N}{2}+s+k\right)} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s+k}(r\sqrt{\lambda}), \tag{2.7.5}$$

$$D^k\left[\overset{\lambda}{w}(r)\right] = \sum_{m=k}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} a_m m(m-1)\ldots(m-k+1)(r^2-R^2)^{m-k}\cdot 2^k, \tag{2.7.6}$$

*) Символ $\left[\frac{N-1}{2}\right]$ здесь и далее обозначает целую часть числа $\frac{N-1}{2}$.

и потому из k-го равенства (2.7.4) мы получим, что

$$a_k = (-1)^k \Gamma(s+1)\cdot 2^s (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \frac{1}{2^k k!} \lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}+\frac{k}{2}} R^{-\left(\frac{N}{2}+s+k\right)} \mathscr{J}_{\frac{N}{2}+s+k}(R\sqrt{\lambda}),$$

$$\left(k = 0,\, 1,\, \ldots,\, \left[\frac{N-1}{2}\right]\right). \tag{2.7.7}$$

Рассмотрим функцию $f(r,\, R) = f(r)$, равную разности функций (2.7.2) и (2.7.3):

$$f(r,\, R) = f(r) = \overset{\lambda}{v}(r) - \overset{\lambda}{w}(r), \tag{2.7.8}$$

и заметим, что в силу условий (2.7.4) для этой функции справедливы соотношения

$$f(R) = 0, \quad Df(R) = 0,\, \ldots,\, D^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} f(R) = 0. \tag{2.7.9}$$

Для произвольной функции $F(R)$ аргумента R, определенной на сегменте $R_0/2 \leqslant R \leqslant R_0$, введем в рассмотрение ее усреднение на этом сегменте с весом R, обозначаемое символом $S_{R_0}[F(r)]$ и определяемое соотношением *)

$$S_{R_0}[F(R)] = \frac{3}{8R_0^2} \int\limits_{R_0/2}^{R_0} RF(R)\,dR. \tag{2.7.10}$$

Заметим, что введенная операция усреднения обладает следующим свойством: если для функции $F(R)$ равномерно относительно R на сегменте $R_0/2 \leqslant R \leqslant R_0$ справедлива оценка $|F(R)| \leqslant C_1$, то и для ее усреднения справедлива оценка $S_{R_0}[F(R)]| \leqslant C_1$.

Рассмотрим произвольное упорядоченное спектральное представление пространства $L_2(G)$ относительно расширения $\widehat{\Lambda}$ со спектральной мерой $\rho(t)$, множествами кратности e_i, фундаментальными функциями $u_i(x,\, t)$ $(i = 1,\, 2,\, \ldots,\, \widehat{m})$ и кратностью $\widehat{m} \leqslant \infty$ и обозначим символом $\widehat{f}_i(x,\, t,\, R)$ образ Фурье функции (2.7.8) относительно фундаментальной функции $u_i(y,\, t)$, а символом $\left(\widehat{S_{R_0}f}\right)_i(x,\, t)$ образ Фурье усреднения $S_{R_0}[f(r,\, R)]$. Тогда, очевидно, справедливо соотношение

$$\left(\widehat{S_{R_0}f}\right)_i(x,\, t) = S_{R_0}[\widehat{f}_i(x,\, t,\, R)]. \tag{2.7.11}$$

---

*) Коэффициент $\dfrac{3}{8R_0^2}$ перед интегралом в правой части (2.7.10) выбран так, что при $F(R) = C = \mathrm{const}$ и $S_{R_0}[F(R)] = C$.

Наша цель — вычислить образ Фурье $\left(\widehat{S_{R_0}f}\right)_i(x, t)$. Для этого в силу соотношения (2.7.11) достаточно вычислить образ Фурье функции (2.7.8).

В силу соотношения (2.3.2) из п. 1 § 3

$$\widehat{f}_i(x, t, R) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} u_i(x, t)\, t^{\frac{2-N}{4}} \int\limits_0^R f(r)\, r^{\frac{N}{2}} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}-1}(r\sqrt{t})\, dr. \quad (2.7.12)$$

Производя в правой части (2.7.12) $\left(\left[\frac{N-1}{2}\right]+1\right)$-кратное интегрирование по частям, основанное на использовании рекуррентного соотношения

$$\int r^{\mu} \mathcal{J}_{\mu-1}(r\sqrt{t})\, dr = (\sqrt{t})^{-1} r^{\mu} \mathcal{J}_{\mu}(r\sqrt{t})$$

и операции бесселевского дифференцирования D, получим

$$\widehat{f}_i(x, t, R) =$$

$$= (2\pi)^{\frac{N}{2}} u_i(x, t)\, t^{\frac{2-N}{4}} \left\{ \sum_{k=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} \left[(-1)^k D^k[f(r)]\, t^{-\frac{k+1}{2}} r^{\frac{N}{2}+k} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+k}(r\sqrt{t}) \right] \Bigg|_{r=0}^{r=R} + \right.$$

$$+ (-1)^{\left[\frac{N-1}{2}\right]+1} (\sqrt{t})^{-\left[\frac{N-1}{2}\right]-1} \times$$

$$\left. \times \int\limits_0^R D^{\left[\frac{N-1}{2}\right]+1}[f(r)]\, r^{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]+1} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+\left[\frac{N-1}{2}\right]}(r\sqrt{t})\, dr \right\}. \quad (2.7.13)$$

Заметим теперь, что все подстановки в правой части (2.7.13) обращаются в нуль. Действительно, обращение в нуль всех подстановок при $r = 0$ вытекает из того, что в силу соотношений (2.7.5) и (2.7.6) величины $D^k[f(r)]$ при всех $k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{N-1}{2}\right]$ ограничены в окрестности точки $r = 0$, а обращение в нуль всех подстановок при $r = R$ вытекает из соотношений (2.7.9).

Далее заметим, что из соотношений (2.7.5) и (2.7.6), взятых при $k = \left[\frac{N-1}{2}\right]$, вытекают равенства

$$D^{\left[\frac{N-1}{2}\right]+1}\left[\overset{\lambda}{v}(r)\right] =$$

$$= \Gamma(s+1)\cdot 2^s (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}} (-1)^{\left[\frac{N-1}{2}\right]+1} \sqrt{\lambda}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]+1} \times$$

$$\times r^{-\left(\frac{N}{2}+s+\left[\frac{N-1}{2}\right]+1\right)} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s+\left[\frac{N-1}{2}\right]+1}(r\sqrt{\lambda}),$$

$$D^{\left[\frac{N-1}{2}\right]+1}\left[\overset{\lambda}{w}(r)\right] \equiv 0,$$

из которых следует, что

$$D^{\left[\frac{N-1}{2}\right]+1} f(r) =$$

$$= \Gamma(s+1)\cdot 2^s (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}} (-1)^{\left[\frac{N-1}{2}\right]+1} (\sqrt{\lambda})^{\left[\frac{N-1}{2}\right]+1} \times$$

$$\times r^{-\left(\frac{N}{2}+s+\left[\frac{N-1}{2}\right]+1\right)} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s+\left[\frac{N-1}{2}\right]+1}(r\sqrt{\lambda}). \qquad (2.7.14)$$

Учитывая обращение в нуль всех подстановок в (2.7.13), используя соотношение (2.7.14) и обозначая через ν число

$$\nu = \frac{N}{2} + \left[\frac{N-1}{2}\right], \qquad (2.7.15)$$

придадим равенству (2.7.13) следующий вид:

$$\widehat{f}_i(x, t, R) = \Gamma(s+1)\cdot 2^s u_i(x, t) (\sqrt{\lambda})^{\nu+1-s} (\sqrt{t})^{-\nu} \times$$

$$\times \int_0^R r^{-s} \mathcal{J}_{\nu+1+s}(r\sqrt{\lambda}) \mathcal{J}_\nu(r\sqrt{t})\, dr. \qquad (2.7.16)$$

Произведем в правой части (2.7.16) преобразование вида $\int_0^R = \int_0^\infty - \int_R^\infty$ и учтем, что при любых $\nu > -1$, $s \geqslant 0$ справедливо соотношение *)

$$\Gamma(s+1)\cdot 2^s (\sqrt{\lambda})^{\nu+1-s} (\sqrt{t})^{-\nu} \int_0^\infty r^{-s} \mathcal{J}_{\nu+1+s}(r\sqrt{\lambda}) \mathcal{J}_\nu(r\sqrt{t})\, dr =$$

$$= \delta_t^\lambda \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s,$$

в котором

$$\delta_t^\lambda = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t < \lambda, \\ 0 & \text{при} \quad t \geqslant \lambda, \end{cases} \qquad (2.7.17)$$

причем при $s = 0$, $t = \lambda$ следует считать, что $\delta_t^\lambda = \frac{1}{2}$, $(1 - t/\lambda)^s = 1$.

Введем в рассмотрение величину **)

$$I_t^\lambda(R) = \overset{\nu+1}{I_t^\lambda}(R) = \int_R^\infty r^{-s} \mathcal{J}_{\nu+1+s}(r\sqrt{\lambda}) \mathcal{J}_\nu(r\sqrt{t})\, dr, \quad (2.7.18)$$

считая, что при $s = 0$, $t = \lambda$ из правой части (2.7.18) следует вычесть число $1/2\sqrt{\lambda}$.

---

*) См., например, Г. Бейтмен и А. Эрдейи [1, с. 107, формула 34)].

**) Это обозначение совпадает с обозначением (2.4.9′), введенным в п. 2 § 4 этой главы.

С помощью указанного выше преобразования интеграла в правой части (2.7.16) и обозначений (2.7.17) и (2.7.18) получим следующее выражение для образа Фурье:

$$\widehat{f}_i(x, t, R) = \delta_t^\lambda u_i(x, t)\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s -$$
$$- \Gamma(s+1)\cdot 2^s \sqrt{\lambda}^{\nu+1-s}(\sqrt{t})^{-\nu} \overset{\nu+1}{I_t^\lambda}(R)\, u_i(x, t). \qquad (2.7.19)$$

Из соотношений (2.7.19) и (2.7.11) вытекает, что образ Фурье усреднения $S_{R_0}[f(r, R)]$ имеет вид *)

$$(\widehat{S_{R_0}f})_i(x, t) = \delta_t^\lambda u_i(x, t)\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s -$$
$$- \Gamma(s+1)\cdot 2^s (\sqrt{\lambda})^{\nu+1-s}(\sqrt{t})^{-\nu} S_{R_0}\left[\overset{\nu+1}{I_t^\lambda}(R)\right] u_i(x, t). \quad (2.7.20)$$

Умножим обе части равенства (2.7.20) на фундаментальную функцию $u_i(y, t)$ и проинтегрируем полученное при этом равенство по спектральной мере $\rho(t)$ в пределах по t от 0 до ∞, а затем просуммируем его по всем номерам i от 1 до $\widehat{m}$.

Учитывая, что при любых фиксированных $x \in G_{R_0}$ и $\lambda > 0$ усреднение $S_{R_0}[f(|x-y|, R)]$ принадлежит по y классу $L_2(G)$, и используя соотношение (2.7.17) и выражение (2.4.4) из п. 1 § 4 для средних Рисса спектральной функции, получим следующее равенство:

$$\theta^s(x, y, \lambda) - S_{R_0}[f(|x-y|, R)] =$$
$$= \Gamma(s+1)\cdot 2^s(\sqrt{\lambda})^{\nu+1-s} \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\infty (\sqrt{t})^{-\nu} u_i(x, t)\, u_i(y, t) S_{R_0}\left[\overset{\nu+1}{I_t^\lambda}(R)\right] d\rho(t), \quad (2.7.21)$$

понимаемое при любых фиксированных $x \in G_{R_0}$ и $\lambda > 0$ во всяком случае как равенство элементов пространства $L_2(G)$ по координатам точки y.

Учтем теперь, что в силу равенства (2.7.8)

$$S_{R_0}[f(|x-y|, R)] = S_{R_0}\left[\overset{\lambda}{v}(|x-y|, R)\right] - S_{R_0}\left[\overset{\lambda}{w}(|x-y|, R)\right]. \quad (2.7.22)$$

Далее заметим, что из определения (2.7.2) функции $\overset{\lambda}{v}(r, R)$ и из оценки $|\mathcal{J}_{N/2+s}(r\sqrt{\lambda})| \leqslant C(r\sqrt{\lambda})^{-1/2}$ вытекает, что равномерно по совокупности x, y, R при $x \in G_{R_0}$, $y \in G$, $R \in [R_0/2, R_0]$

*) Мы учитываем, что усреднение S_{R_0} величины, не зависящей от R, равно самой этой величине.

справедлива оценка

$$\overset{\lambda}{v}(|x-y|, R)-\Gamma(s+1)\cdot 2^s(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}|x-y|^{-\frac{N}{2}-s}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(|x-y|\sqrt{\lambda})=$$
$$=O\left(\lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}}\right)=O\left(\lambda^{\frac{N-1}{2}-\frac{s}{2}}\right).$$

Поэтому равномерно по совокупности (x, y) при $x\in G_{R_0}$, $y\in G$ справедлива оценка

$$S_{R_0}[\overset{\lambda}{v}(|x-y|, R)]-$$
$$-\Gamma(s+1)\cdot 2^s(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}|x-y|^{-\frac{N}{2}-s}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(|x-y|\sqrt{\lambda})=$$
$$=O\left(\lambda^{\frac{N-1}{2}-\frac{s}{2}}\right). \quad (2.7.23)$$

Наконец, заметим, что из соотношения (2.7.3) и из вида (2.7.7) коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_{\left[\frac{N-1}{2}\right]}$ в силу неравенства $|\mathcal{J}_\mu(R\sqrt{\lambda})|\leqslant C(R\sqrt{\lambda})^{-1/2}$ вытекает следующая равномерная по совокупности x, y, R при $x\in G_{R_0}$, $y\in G$, $R\in\left[\frac{R_0}{2}, R_0\right]$ оценка:

$$\overset{\lambda}{w}(|x-y|, R)=O\left(\lambda^{\frac{N-1}{2}-\frac{s}{2}}\right),$$

из которой следует, что равномерно по совокупности x, y при $x\in G_{R_0}$, $y\in G$

$$S_{R_0}[\overset{\lambda}{w}(|x-y|, R)]=O\left(\lambda^{\frac{N-1}{2}-\frac{s}{2}}\right). \quad (2.7.24)$$

Из соотношений (2.7.22), (2.7.23) и (2.7.24) вытекает следующая оценка:

$$S_{R_0}[f(|x-y|, R)]-$$
$$-\Gamma(s+1)\cdot 2^s(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}|x-y|^{-\frac{N}{2}-s}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(|x-y|\sqrt{\lambda})=$$
$$=O\left(\lambda^{\frac{N-1}{2}-\frac{s}{2}}\right), \quad (2.7.25)$$

равномерная по совокупности x, y при $x\in G_{R_0}$, $y\in G$.

Из соотношений (2.7.21) и (2.7.25) вытекает, что для доказательства искомой оценки (2.7.1) достаточно установить, что равномерно по совокупноси x, y на множестве $G_{R_0}\times G_{R_0}$ справедлива оценка

$$(\sqrt{\lambda})^{\nu+1}\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^\infty(\sqrt{t})^{-\nu}\left|u_i(x,t)\,u_i(y,t)\,S_{R_0}\left[\overset{\nu+1}{I_t^\lambda}(R)\right]\right|d\rho(t)=$$

$$=O\left(\lambda^{\frac{N-1}{2}}\right).\quad(2.7.26)$$

Для этого в свою очередь достаточно доказать, что равномерно по совокупности x, y на множестве $G_{R_0}\times G_{R_0}$ справедливы следующие пять оценок:

$$(\sqrt{\lambda})^{\nu+1}\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_{\sqrt{t}\leqslant 1}(\sqrt{t})^{-\nu}\left\{\left|u_i(x,t)\,u_i(y,t)\,S_{R_0}\left[\overset{\nu+1}{I_t^\lambda}(R)\right]\right|\right\}d\rho(t)=$$

$$=O\left(\lambda^{\frac{N-1}{2}}\right),\quad(2.7.27)$$

$$(\sqrt{\lambda})^{\nu+1}\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_{1\leqslant\sqrt{t}\leqslant\sqrt{\lambda}/2}(\sqrt{t})^{-\nu}\{\ldots\}\,d\rho(t)=O\left(\lambda^{\frac{N-1}{2}}\right),\quad(2.7.28)$$

$$(\sqrt{\lambda})^{\nu+1}\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_{1\leqslant|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant\sqrt{\lambda}/2}(\sqrt{t})^{-\nu}\{\ldots\}\,d\rho(t)=O\left(\lambda^{\frac{N-1}{2}}\right),\quad(2.7.29)$$

$$(\sqrt{\lambda})^{\nu+1}\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_{|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant 1}(\sqrt{t})^{-\nu}\{\ldots\}\,d\rho(t)=O\left(\lambda^{\frac{N-1}{2}}\right),\quad(2.7.30)$$

$$(\sqrt{\lambda})^{\nu+1}\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_{\sqrt{t}\geqslant\frac{3}{2}\sqrt{\lambda}}(\sqrt{t})^{-\nu}\{\ldots\}\,d\rho(t)=O\left(\lambda^{\frac{N-1}{2}}\right)\quad(2.7.31)$$

(фигурные скобки в (2.7.28)—(2.7.31) обозначают ту же величину, что и (2.7.27)).

Будем опираться на следующую лемму.

Лемма 2.12. *Для усреднения* $S_{R_0}\left[\overset{\nu+1}{I_t^\lambda}(R)\right]$ *интеграла* (2.7.18) *при любых* $\nu\geqslant 1/2$, $s\geqslant 0$ *справедливы следующие три оценки:*

а) *при* $\lambda\geqslant 1$, $t\geqslant 1$, $|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant 1$ *оценка*

$$\left|S_{R_0}\left[\overset{\nu+1}{I_t^\lambda}(R)\right]\right|=O\left(\lambda^{-1/4}t^{-1/4}\right);\quad(2.7.32)$$

б) *при* $\lambda\geqslant 1$, $t\geqslant 1$, $|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\geqslant 1$ *оценка*

$$\left|S_{R_0}\left[\overset{\nu+1}{I_t^\lambda}(R)\right]\right|=O\left(\lambda^{-1/4}t^{-1/4}|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|^{-2}\right);\quad(2.7.33)$$

в) *при* $\lambda>1$, $0\leqslant t\leqslant 1$ *оценка*

$$\left|S_{R_0}\left[\overset{\nu+1}{I_t^\lambda}(R)\right]\right|=O\left(\lambda^{-\frac{3}{4}}t^{\nu/2}\right).\quad(2.7.34)$$

Отложив доказательство леммы до следующего пункта, завершим доказательство теоремы 2.7.

Для установления соотношения (2.7.27) достаточно привлечь для оценки левой части (2.7.27) соотношение (2.7.34), учесть, что в силу (2.7.15) справедливо неравенство $\nu - 1/2 \leqslant N - 1$, и воспользоваться при $\mu_0 = 1$ равномерной относительно $x \in G_{R_0}$, $y \in G_{R_0}$ оценкой

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\sqrt{t} \leqslant \mu_0} |u_i(x, t) u_i(y, t)| \, d\rho(t) = O\left(\mu_0^N\right), \tag{2.7.35}$$

тривиально вытекающей из установленной в п. 2 § 3 этой главы оценки (2.3.4) и из неравенства Коши — Буняковского, примененного сначала к интегралу в левой части (2.7.35), а затем к сумме.

Оценка (2.7.30) является простым следствием соотношения (2.7.32), неравенства $\left(\sqrt{\dfrac{\lambda}{t}}\right)^{\nu+1/2} \leqslant 2^{\nu+1/2}$, справедливого для всех $t \geqslant 1$, $\lambda \geqslant 1$, $|\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}| \leqslant 1$, и взятой при $\mu = \sqrt{\lambda}$, $\rho_0 = 1$ равномерной относительно $x \in G_{R_0}$, $y \in G_{R_0}$ оценки

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{|\sqrt{t} - \mu| \leqslant \rho_0} |u_i(x, t) u_i(y, t)| \, d\rho(t) = \rho_0 O\left(\mu^{N-1}\right), \tag{2.7.36}$$

вытекающей из установленной в п. 2 § 3 этой главы оценки (2.3.7) и из неравенства Коши — Буняковского, примененного сначала к интегралу в левой части (2.7.36), а затем к сумме.

Оценка (2.7.31) элементарно вытекает из соотношения (2.7.33), которое при $\sqrt{t} \geqslant \frac{3}{2}\sqrt{\lambda}$ может быть переписано в виде

$$\left| S_{R_0}\left[\overset{\nu+1}{I_t^\lambda}(R)\right] \right| = O\left(t^{-5/4} \lambda^{-1/4}\right),$$

из неравенства $(\sqrt{\lambda}/t)^{\nu+1/2} \leqslant (\sqrt{\lambda}/t)^{N-1/2}$ и из взятой при $\delta = 3/4$ равномерной относительно $x \in G_{R_0}$, $y \in G_{R_0}$ оценки

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\lambda}^{\infty} |u_i(x, t) u_i(y, t)| \, t^{-\delta - N/2} \, d\rho(t) = O\left(\lambda^{-\delta}\right), \tag{2.7.37}$$

которая получается из установленной в п. 2 § 3 этой главы оценки (2.3.9) посредством применения неравенства Коши — Буняковского сначала к интегралу в левой части (2.7.37), а затем к сумме.

Оценка (2.7.28) вытекает из соотношения (2.7.33), которое при $1 \leqslant \sqrt{t} \leqslant \sqrt{\lambda}/2$ может быть переписано в виде

$$\left| S_{R_0}\left[\overset{\nu+1}{I_t^\lambda}(R)\right] \right| = O\left(\lambda^{-3/4} t^{-3/4}\right),$$

из неравенства $(\sqrt{\lambda}/t)^{\nu-1/2} \leqslant (\sqrt{\lambda}/t)^{N-1}$ и из равномерной относительно $x \in G_{R_0}$, $y \in G_{R_0}$ ограниченности при $\delta = 1/2$ величины

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_1^\infty |u_i(x, t) u_i(y, t)| t^{-\delta - N/2} d\rho(t), \tag{2.7.38}$$

которая следует из установленной в п. 2 § 3 этой главы ограниченности величины (2.3.10) и из неравенства Коши — Буняковского, примененного сначала к интегралу в левой части (2.7.38), а затем к сумме.

Остается доказать только оценку (2.7.29).

Пользуясь неравенством *) $(\sqrt{\lambda}/t)^{\nu+1} \leqslant C = \text{const}$, оценками (2.7.33) и (2.7.35), обозначая через p наименьший из номеров, для которого $2^{p-1} \geqslant \sqrt{\lambda}$, и покрывая сегмент $[1, \sqrt{\lambda}/2]$ системой сегментов $[2^{l-1}, 2^l]$ $(l = 1, 2, \ldots, p)$, получим, что равномерно относительно $x \in G_{R_0}$, $y \in G_{R_0}$ левая часть (2.7.29) мажорируется величиной

$$(\sqrt{\lambda})^{\nu+1} \sum_{l=1}^{p} \left\{ \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{2^{l-1} \leqslant |\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}| \leqslant 2^l} (\sqrt{t})^{-\nu} \Big| u_i(x, t) u_i(y, t) \times \right.$$

$$\left. \times S_{R_0}\left[\overset{\nu+1}{I_t^\lambda}(R)\right] \Big| d\rho(t) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{l=1}^{p} \left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{2^{l-1} \leqslant |\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}| \leqslant 2^l} |\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}|^{-2} |u_i(x, t) u_i(y, t)| d\rho(t) \right] \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{l=1}^{p} 4^{1-l} \left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{|\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}| \leqslant 2^l} |u_i(x, t) u_i(y, t)| d\rho(t) \right] \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \lambda^{\frac{N-1}{2}} \sum_{l=1}^{p} 2^{-p} \leqslant C_1 \lambda^{\frac{N-1}{2}}.$$

Тем самым вывод оценки (2.7.29) завершен, и при условии справедливости леммы 2.12 теорема 2.7 доказана.

Нам остается только провести доказательство леммы 2.12.

2. Доказательство вспомогательной леммы 2.12. Прежде всего заметим, что справедливость при $\lambda \geqslant 1$, $t \geqslant 1$, $|\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}| \leqslant 1$ оценки (2.7.32) сразу же вытекает из того, что в силу п. 2 § 4 этой главы при любых $\nu \geqslant 1/2$, $s \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 1$, $t \geqslant 1$, $|\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}| \leqslant 1$ справедлива оценка **)

$$\left| \overset{\nu+1}{I_t^\lambda}(R) \right| \leqslant C_1 R^{-s} \lambda^{-1/4} t^{-1/4}$$

*) Это неравенство заведомо справедливо для значений $1 \leqslant |\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}| \leqslant \sqrt{\lambda}/2$.

**) См. неравенство (2.4.10′) из п. 2 § 4 главы 2.

с постоянной C_1, не зависящей не только от $\lambda \geqslant 1$, $t \geqslant 1$, но и от R при всех $0 < R \leqslant 1$.

Докажем теперь, что при $\nu \geqslant -1/2$, $s \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 1$, $t \geqslant 1$, $|\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}| \geqslant 1$ справедлива оценка (2.7.33). Достаточно при любом $\nu \geqslant 1/2$ доказать оценку

$$\left| S_{R_0}\left[\overset{\nu}{I}{}_t^{\lambda}(R)\right]\right| = O\left(\lambda^{-1/4} t^{-1/4} |\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}|^{-2}\right). \qquad (2.7.39)$$

Эту оценку мы докажем отдельно для случаев $\sqrt{\lambda} + 1 \leqslant \sqrt{t}$ и $1 \leqslant \sqrt{t} \leqslant \sqrt{\lambda} - 1$.

В случае $\sqrt{\lambda} + 1 \leqslant \sqrt{t}$ в п. 2 § 4 этой главы установлено равенство (2.4.43), которое можно переписать в виде

$$\overset{\nu}{I}{}_t^{\lambda}(R) = -\frac{\sqrt{t}}{(\sqrt{t} + \sqrt{\lambda})(\sqrt{t} - \sqrt{\lambda})} \mathcal{J}_{\nu+s}(R\sqrt{\lambda})\, \mathcal{J}_{\nu}(R\sqrt{t})\, R^{-s} -$$

$$- \frac{\sqrt{\lambda}}{(\sqrt{t} + \sqrt{\lambda})(\sqrt{t} - \sqrt{\lambda})} \mathcal{J}_{\nu+s+1}(R\sqrt{\lambda})\, \mathcal{J}_{\nu+1}(R\sqrt{t})\, R^{-s} -$$

$$- (2\nu + 2 + s) \frac{\sqrt{\lambda}}{(\sqrt{t} + \sqrt{\lambda})(\sqrt{t} - \sqrt{\lambda})} \int\limits_R^{\infty} r^{-1-s} \mathcal{J}_{\nu+s+1}(r\sqrt{\lambda}) \times$$

$$\times \mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t})\, dr + 2\nu \frac{\lambda}{\sqrt{t}(\sqrt{t} + \sqrt{\lambda})(\sqrt{t} - \sqrt{\lambda})} \int\limits_R^{\infty} r^{-1-s} \times$$

$$\times \mathcal{J}_{\nu+s+2}(r\sqrt{\lambda})\, \mathcal{J}_{\nu}(r\sqrt{t})\, dr. \qquad (2.7.40)$$

Перед каждым из двух интегралов в правой части (2.7.40) стоит множитель вида *) $O(|\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}|^{-1})$, причем каждый из указанных двух интегралов представляет собой интеграл вида $\overset{\nu}{I}{}_t^{\lambda}(R)$, для которого в п. 2 § 4 этой главы при любом вещественном ν и при любых $s > -1$, $\lambda \geqslant 1$, $t \geqslant 1$, $|\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}| \geqslant 1$ установлена оценка **)

$$\left|\overset{\nu}{I}{}_t^{\lambda}(R)\right| \leqslant C \cdot R^{-1-s} \lambda^{-1/4} t^{-1/4} |\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}|^{-1} \qquad (2.7.41)$$

с постоянной C, не зависящей от R при $0 < R \leqslant 1$.

Поэтому после применения операции усреднения S_{R_0} к каждому из двух последних членов в правой части (2.7.40) мы получим требуемый порядок

$$O(\lambda^{-1/4} t^{-1/4} |\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}|^{-2}). \qquad (2.7.42)$$

---

*) Мы учитываем, что $\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{t} + \sqrt{\lambda}} \leqslant 1$, $\dfrac{\lambda}{\sqrt{t}(\sqrt{t} + \sqrt{\lambda})} \leqslant 1$ (при $\sqrt{\lambda} \leqslant \sqrt{t}$).

**) См. оценку (2.4.11′) из п. 2 § 4 гл. 2.

Остается доказать, что применение операции усреднения к каждому из двух первых членов в правой части (2.7.40) также приводит к величине порядка (2.7.42).

Так как каждый из множителей $\frac{\sqrt{t}}{(\sqrt{t}+\sqrt{\lambda})(\sqrt{t}-\sqrt{\lambda})}$ и $\frac{\sqrt{\lambda}}{(\sqrt{t}+\sqrt{\lambda})(\sqrt{t}-\sqrt{\lambda})}$ имеет порядок $O(|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|^{-1})$, то достаточно доказать, что каждый из интегралов

$$\int_{R_0/2}^{R_0} R^{-(s-1)}\mathcal{J}_{\nu+s}(R\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{\nu}(R\sqrt{t})\,dR,$$

$$\int_{R_0/2}^{R_0} R^{-(s-1)}\mathcal{J}_{\nu+s+1}(R\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{\nu+1}(R\sqrt{t})\,dR \qquad (2.7.43)$$

имеет порядок

$$O(\lambda^{-1/4}t^{-1/4}|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|^{-1}). \qquad (2.7.44)$$

Каждый из двух интегралов (2.7.43) можно представить в виде разности

$$\int_{R_0/2}^{R_0} = \int_{R_0/2}^{\infty} - \int_{R_0}^{\infty}.$$

При $s>0$ мы получим при этом, что каждый из интегралов (2.7.43) будет равен разности двух интегралов типа $\overset{\nu}{I}{}_t^{\lambda}(R)$ при $s>-1$, и потому при $s>0$ каждый из двух интегралов (2.7.43) имеет требуемый порядок (2.7.44).

При $s=0$ каждый из интегралов (2.7.43) выражается в виде *)

$$\int_{R_0/2}^{R_0} R\mathcal{J}_{\nu}(R\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{\nu}(R\sqrt{t})\,dR=$$
$$=\frac{1}{t-\lambda}\Big[R\sqrt{t}\,\mathcal{J}_{\nu+1}(R\sqrt{t})\,\mathcal{J}_{\nu}(R\sqrt{\lambda})-$$
$$-R\sqrt{\lambda}\,\mathcal{J}_{\nu}(R\sqrt{t})\,\mathcal{J}_{\nu+1}(R\sqrt{\lambda})\Big]\Big|_{R=R_0/2}^{R=R_0},$$

$$\int_{R_0/2}^{R_0} R\mathcal{J}_{\nu+1}(R\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{\nu+1}(R\sqrt{t})\,dR=$$
$$=\frac{1}{t-\lambda}\Big[R\sqrt{t}\,\mathcal{J}_{\nu+2}(R\sqrt{t})\,\mathcal{J}_{\nu+1}(R\sqrt{\lambda})-$$
$$-R\sqrt{\lambda}\,\mathcal{J}_{\nu+1}(R\sqrt{t})\,\mathcal{J}_{\nu+2}(R\sqrt{\lambda})\Big]_{R=R_0/2}^{R=R_0}.$$

Из этих выражений сразу же вытекает, что и при $s=0$ каждый из интегралов (2.7.43) имеет требуемый порядок (2.7.44).

*) См. Г. Бейтмен и А. Эрдейи [1, с. 104, формула (9)].

Тем самым для первого случая $\sqrt{\lambda}+1 \leqslant \sqrt{t}$ доказательство оценки (2.7.33) завершено.

Доказательство оценки (2.7.33) для второго случая $1 \leqslant \sqrt{t} \leqslant \sqrt{\lambda}-1$, проводится совершенно аналогично, только вместо равенства (2.7.40) нужно исходить из следующего равенства:

$$\overset{\nu}{I}{}_t^{\lambda}(R) = \frac{\sqrt{\lambda}}{(\sqrt{\lambda}+\sqrt{t})(\sqrt{\lambda}-\sqrt{t})} \mathcal{J}_{\nu+s-1}(R\sqrt{\lambda}) \mathcal{J}_{\nu-1}(R\sqrt{t}) R^{-s} + \\ + \frac{\sqrt{t}}{(\sqrt{\lambda}+\sqrt{t})(\sqrt{\lambda}-\sqrt{t})} \mathcal{J}_{\nu+s-2}(R\sqrt{\lambda}) \mathcal{J}_{\nu-2}(R\sqrt{t}) R^{-s} + \\ + (2\nu+2s-2)\frac{t}{\sqrt{\lambda}(\sqrt{\lambda}+\sqrt{t})(\sqrt{\lambda}-\sqrt{t})}\int_R^{\infty} \mathcal{J}_{\nu+s-1}(r\sqrt{\lambda}) \times \\ \times \mathcal{J}_{\nu-s}(r\sqrt{t}) r^{-1-s}\,dr - (2\nu-4)\frac{\sqrt{t}}{(\sqrt{\lambda}+\sqrt{t})(\sqrt{\lambda}-\sqrt{t})} \times \\ \times \int_R^{\infty} \mathcal{J}_{\nu+s}(r\sqrt{\lambda}) \mathcal{J}_{\nu-2}(r\sqrt{t}) r^{-1-s}\,dr,$$

эквивалентного установленному в п. 2 § 4 этой главы равенству (2.4.44). Тем самым оценка (2.7.33) установлена.

Остается для любых $\nu \geqslant 1/2$, $s \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ установить оценку (2.7.34). Для этого достаточно доказать, что равномерно относительно R на сегменте $R_0/2 \leqslant R \leqslant R_0$ справедлива оценка

$$\left|\overset{\nu+1}{I}{}_t^{\lambda}(R)\right| = O\left(\lambda^{-3/4} t^{\nu/2}\right). \tag{2.7.45}$$

Подвергнем интеграл $\overset{\nu+1}{I}{}_t^{\lambda}(R)$, определяемый соотношением (2.7.18), $[\nu+1]$-кратному *) интегрированию по частям, основанному на использовании рекуррентных соотношений

$$\int r^{-\nu-s}\mathcal{J}_{\nu+s+1}(r\sqrt{\lambda})\,dr = \frac{-r^{-s-\nu}}{\sqrt{\lambda}}\mathcal{J}_{\nu+s}(r\sqrt{\lambda}),$$

$$\frac{d}{dr}\left[r^{\nu}\mathcal{J}_{\nu}(r\sqrt{t})\right] = \sqrt{t}\, r^{\nu}\mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t}).$$

В результате получим соотношение

$$\overset{\nu+1}{I}{}_t^{\lambda}(R) = -\sum_{n=1}^{[\nu+1]} t^{\frac{n-1}{2}} \lambda^{-\frac{n}{2}} \mathcal{J}_{\nu+s+1-n}(R\sqrt{\lambda}) \mathcal{J}_{\nu+1-n}(R\sqrt{t}) R^{-s} + \\ + \left(\sqrt{\frac{t}{\lambda}}\right)^{[\nu+1]} \int_R^{\infty} r^{-s}\mathcal{J}_{\nu+s+1-[\nu+1]}(r\sqrt{\lambda}) \mathcal{J}_{\nu-[\nu+1]}(r\sqrt{t})\,dr. \tag{2.7.46}$$

---

*) Символ $[\nu+1]$ обозначает целую часть числа $\nu+1$.

Каждое из безынтегральных слагаемых в правой части (2.7.46) оценивается с помощью неравенств $|\mathcal{J}_\mu(R\sqrt{\lambda})| \leqslant C_1(\mu)(R\sqrt{\lambda})^{-1/2}$, $|\mathcal{J}_\mu(R\sqrt{t})| \leqslant C_2(\mu)(R\sqrt{t})^{-1/2}$.

Из этих неравенств и из того, что $\lambda > 1$, мы получим, что каждое из безынтегральных слагаемых в правой части (2.7.46) имеет требуемый порядок

$$O(\lambda^{-3/4}t^{\nu/2}). \tag{2.7.47}$$

Остается доказать, что такой же порядок имеет и последний (содержащий интеграл) член в правой части (2.7.46).

Так как в силу соотношения (2.7.15)

$$[\nu+1] = \begin{cases} \nu+1 & \text{при четном } N, \\ \nu+1/2 & \text{при нечетном } N, \end{cases}$$

то последний член в правой части (2.7.46) равен

$$\begin{cases} \left(\sqrt{\dfrac{t}{\lambda}}\right)^{\nu+1} \displaystyle\int_R^\infty r^{-s}\mathcal{J}_s(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{-1}(r\sqrt{t})\,dr & \text{при четном } N, \\ \left(\sqrt{\dfrac{t}{\lambda}}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} \displaystyle\int_R^\infty r^{-s}\mathcal{J}_{\frac{1}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{-\frac{1}{2}}(r\sqrt{t})\,dr & \text{при нечетном } N. \end{cases} \tag{2.7.48}$$

Тот факт, что при нечетном N член (2.7.48) имеет требуемый порядок (2.7.47), тривиально вытекает из неравенства $\nu+1/2 \geqslant 1$ и из равномерной по R на сегменте $R_0/2 \leqslant R \leqslant R_0$ оценки *)

$$\int_R^\infty r^{-s}\mathcal{J}_{\frac{1}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{-\frac{1}{2}}(r\sqrt{t})\,dr = O(\lambda^{-1/4}t^{-1/4}). \tag{2.7.49}$$

Остается доказать, что и при четном N член (2.7.48) равномерно по R на сегменте $[R_0/2, R_0]$ имеет требуемый порядок (2.7.47).

Если $s > 0$, то это сразу вытекает из оценок

$$|\mathcal{J}_s(r\sqrt{\lambda})| \leqslant C_3(r\sqrt{\lambda})^{-1/2}, \quad \mathcal{J}_{-1}(r\sqrt{t}) \leqslant C_4(r\sqrt{t})^{-1/2}.$$

Если же $s=0$, то поскольку $t \leqslant 1$, $\lambda > 1$, имеет место равенство нулю интеграла **):

$$\int_0^\infty \mathcal{J}_0(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{-1}(r\sqrt{t})\,dr = -\int_0^\infty \mathcal{J}_0(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_1(r\sqrt{t})\,dr = 0,$$

---

*) При $s>0$ оценка (2.7.49) вытекает из неравенств $\left|\mathcal{J}_{1/2+s}(r\sqrt{\lambda})\right| < C_1(r\sqrt{\lambda})^{-1/2}$, $\left|\mathcal{J}_{-1/2}(r\sqrt{t})\right| \leqslant C_2(r\sqrt{t})^{-1/2}$, а при $s=0$ эта оценка была установлена в п. 2 § 3 гл. 1 при доказательстве леммы 1.4.

**) См., Г. Бейтмен и А. Эрдейи [1, с. 107, формула (34)].

из которого следует, что

$$\int_{R}^{\infty} \mathcal{J}_0(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{-1}(r\sqrt{t})\,dr = \int_{0}^{R} \mathcal{J}_0(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_1(r\sqrt{t})\,dr = O(1).$$

Из последнего соотношения и из неравенства $\nu + 1 \geqslant 2$ вытекает, что и при четном N член (2.7.48) имеет требуемый порядок (2.7.47).

Лемма 2.12 полностью доказана.

ПРИМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ 2

Изучение средних Рисса спектральных разложений началось с изучения средних Рисса кратных тригонометрических рядов и интегралов Фурье со сферическими частичными суммами.

Одной из первых работ явилась работа 1936 г. С. Бохнера [1], в которой для средних Рисса порядка s разложений произвольной функции $f(x)$ из класса L_2 в N-кратный тригонометрический ряд Фурье и в N-кратный интеграл Фурье (со сферическими частичными суммами) был установлен точный порядок средних Рисса $s = (N-1)/2$, обеспечивающий справедливость принципа локализации.

В той же работе С. Бохнера [1] было показано, что для произвольной функции $f(x)$ из класса L_1 принцип локализации средних Рисса порядка $s = (N-1)/2$ справедлив для разложения в N-кратный интеграл Фурье и не справедлив для разложения в N-кратный тригонометрический ряд Фурье.

В связи с отмеченными результатами порядок средних Рисса $s = (N-1)/2$ был назван С. Бохнером *критическим.*

Результат С. Бохнера, относящийся к N-кратному тригонометрическому ряду Фурье, был уточнен в 1958 г. в работе Э. Стейна [1], в которой доказано, что принцип локализации средних Рисса критического порядка $s = (N-1)/2$ справедлив для произвольной функции из класса $L\log^+ L$ и, следовательно, справедлив для произвольной функции из класса L_p при любом $p > 1$.

В опубликованной в 1955 г. работе Б. М. Левитана [2] доказано, что для справедливости принципа локализации средних Рисса целого порядка s $\left(s = 0, 1, \ldots, \left[\frac{N}{2}\right]\right)$ N-кратного тригонометрического ряда Фурье со сферическими частичными суммами достаточно периодичности и интегрируемости с квадратом по N-мерному кубу всех частных производных разлагаемой функции до порядка $\left[\frac{N}{2}\right] - s$. Сопоставление этого результата Б. М. Левитана с основной теоремой негативного типа, доказанной в § 4 гл. 2, показывает, что для нечетного числа N измерений указанный результат Б. М. Левитана является точным.

В той же работе Б. М. Левитана [2] установлено, что при дополнительном требовании о непрерывности или хотя бы ограниченности частных производных порядка $\left[\frac{N}{2}\right] - s$ будет иметь место равномерная сходимость средних Рисса порядка s N-кратного тригонометрического ряда Фурье. Сопоставление этого результата Б. М. Левитана с основной теоремой позитивного типа, доказанной в § 5 гл. 2, показывает, что для нечетного числа N измерений и для случая N-кратного тригонометрического ряда Фурье Б. М. Левитан весьма близко подошел к точным условиям равномерной сходимости (вместо ограниченности частных производных порядка $\left[\frac{N}{2}\right] - s$ в N-мерном кубе достаточно потребовать суммируемости указанных производных со степенью $p > \frac{2N}{N-1}\Big)$.

В опубликованной в 1954 г. работе Б. М. Левитана [1] указанный выше результат С. Бохнера [1] о справедливости для функции из класса L_2 принципа локализации средних Рисса критического порядка $s = (N-1)/2$ перенесен на случай разложений по собственным функциям основных краевых задач для оператора Лапласа в произвольной N-мерной области G. В этой же работе доказано, что при дополнительном требовании о непрерывности функции $f(x)$ в данной внутренней точке x области G средние Рисса критического порядка $s = (N-1)/2$ сходятся в этой точке к значению $f(x)$.

Точные условия равномерной сходимости и локализации средних Рисса любого порядка s, удовлетворяющего условию $0 \leqslant s < (N-1)/2$, для спектральных разложений, отвечающих произвольному самосопряженному неотрицательному расширению оператора Лапласа в произвольной N-мерной области G, установленные в § 4 и 5 гл. 2, были впервые опубликованы в 1971 г. в работе В. А. Ильина и Ш. А. Алимова [1].

Эти условия были перенесены в опубликованной в 1984 г. работе В. А. Ильина и Н. Ю. Капустина [1] на случай произвольных неполуограниченных самосопряженных расширений оператора Лапласа, а в опубликованной в 1986 г. работе З. В. Шопия [1] — на случай произвольных неполуограниченных самосопряженных расширений оператора Шрёдингера (с допущением у потенциала особенностей кулоновского типа в отдельных точках).

Изложенный в § 7 гл. 2 метод оценки остаточного члена средних Рисса любого неотрицательного порядка от спектральной функции не использует традиционной техники Карлемана и аппарата тауберовых теорем. Этот метод принадлежит В. А. Ильину и для $s = 0$ впервые был опубликован в 1977 г. (см. § 4 работы Ш. А. Алимова, В. А. Ильина и Е. М. Никишина [2]).

В. А. Ильину принадлежит и еще один метод оценки остаточного члена спектральной функции, также не использующий техники Карлемана и аппарата тауберовых теорем и опубликованный в 1987 г. в работе [15].

Модификация изложенного в § 6 гл. 2 метода оценки остаточного члена спектральной функции позволила оценить спектральную функцию для несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора (см. работы В. А. Ильина [13 и 14]).

В 1986 г. Я. Ш. Салимов в работах [1 и 2] с помощью другой модификации метода, изложенного в § 6 гл. 2, оценил остаточный член средних Рисса спектральной функции, отвечающей несамосопряженному расширению оператора Лапласа.

О РИССОВСКОЙ РАВНОСУММИРУЕМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В КЛАССИЧЕСКОМ И ОБОБЩЕННЫХ СМЫСЛАХ

Из приведенного в гл. 2 доказательства теоремы 2.3 сразу же вытекает, что принадлежность финитной в произвольной N-мерной области G функции $f(x)$ одному из четырех классов: $H_2^\alpha(G)$, $L_2^\alpha(G)$, $B_{2,\theta}^\alpha(G)$ или $C^\alpha(G)$ — с порядком дифференцируемости α, удовлетворяющим при произвольном s из полуинтервала $0 \leqslant s < (N-1)/2$ условию $\alpha \geqslant (N-1)/2 - s$, обеспечивает равномерное (на произвольном компакте K области G) стремление к нулю разности средних Рисса порядка s спектральных разложений этой функции, отвечающих двум совершенно произвольным самосопряженным неотрицательным расширениям оператора Лапласа (в области G или в охватывающей ее области).

Иными словами, принадлежность финитной в области G функции $f(x)$ одному из указанных четырех классов с α и s, удовлетворяющих условиям $\alpha \geqslant (N-1)/2 - s$, $0 \leqslant s < (N-1)/2$, обеспечивает *равномерную* (на произвольном компакте K области G) *равносуммируемость* средних Рисса порядка s спектральных разложений этой функции, отвечающих двум произвольным самосопряженным неотрицательным расширениям оператора Лапласа (в области G или в охватывающей ее области).

Равносуммируемость, понимаемую в смысле равномерной (на любом компакте) или хотя бы поточечной сходимости к нулю разности средних Рисса двух спектральных разложений, естественно назвать *равносуммируемостью в классическом смысле*.

Удобно продолжить финитную в области G функцию нулем за пределы области G на все пространство E^N и рассмотреть средние Рисса порядка s спектрального разложения так продолженной функции в N-кратный интеграл Фурье. Тогда, взяв в качестве одного из двух рассматриваемых спектральных разложений разложение в N-кратный интеграл Фурье, мы можем изучать вопрос о равносходимости средних Риссса порядка s двух разложений, одно из которых порождается произвольным самосопряженным неотрицательным расширением оператора Лапласа в области G, а другое — разложением продолженной нулем за пределы области G функции в N-кратный интеграл Фурье.

Естественно возникает вопрос: имеет ли место равносуммируемость в классическом смысле средних Рисса порядка s двух произвольных спектральных разложений для финитной в области G функции, принадлежащей одному из указанных четырех классов с положительным порядком дифференцируемости α, удовлетворяющим не условию $\alpha \geqslant (N-1)/2-s$, а противоположному условию $\alpha < (N-1)/2-s$.

В § 1 настоящей главы мы даем отрицательный ответ на этот вопрос; мы показываем, что при положительном α, удовлетворяющем условию $\alpha < (N-1)/2-s$, для финитной в области G функции $f(x)$, принадлежащей классу Зигмунда — Гёльдера $C^\alpha(G)$ *), вообще говоря, не имеет места ни поточечная, ни тем более равномерная на любом компакте равносуммируемость средних Рисса порядка s двух спектральных разложений: разложения по собственным функциям первой краевой задачи в области G и разложения этой же функции, продолженной нулем за пределы области G, в N-кратный интеграл Фурье.

Этот результат означает, что для финитной в области G и продолженной нулем за пределы области G функции $f(x)$, принадлежащей одному из классов $C^\alpha(G)$, $H_p^\alpha(G)$, $L_p^\alpha(G)$ или $B_{p,\theta}^\alpha(G)$ при $0 < \alpha < (N-1)/2-s$, при любом $p \geqslant 1$ и любом $\theta \geqslant 1$, факт расходимости средних Рисса порядка s разложения в N-кратный интеграл Фурье не несет, вообще говоря, никакой информации о расходимости средних Рисса порядка s спектрального разложения, отвечающего самосопряженному, неотрицательному расширению оператора Лапласа в области G.

Отсюда следует, что теоремы 2.1 и 2.2 принципиально невозможно получить на пути предварительного установления расходимости средних Рисса разложения в N-кратный интеграл Фурье и последующего установления факта рисcовской равносуммируемости.

Итак, при классической трактовке свойства риссовской равносуммируемости спектральных разложений окончательным условием равносуммируемости средних Рисса порядка s $(0 \leqslant s < (N-1)/2)$ для финитной в N-мерной области G функции $f(x)$, принадлежащей одному из классов $H_2^\alpha(G)$, $L_2^\alpha(G)$, $B_{2,\theta}^\alpha(G)$ или $C^\alpha(G)$, является условие $\alpha \geqslant (N-1)/2-s > 0$.

Иными словами, классическая трактовка свойства равносуммируемости средних Рисса порядка s неизбежно приводит к необходимости требовать от разлагаемой функции достаточной гладкости (порядка дифференцируемости α, удовлетворяющего условию $\alpha \geqslant (N-1)/2-s$).

К вопросу о риссовской равносуммируемости двух спектральных разложений непосредственно примыкает вопрос о полу-

---

*) И тем более для финитной в области G функции $f(x)$, принадлежащей одному из классов $H_p^\alpha(G)$, $L_p^\alpha(G)$ и $B_{p,\theta}^\alpha(G)$ при положительном $\alpha < N-1/2-s$, при произвольном $p \geqslant 1$ и (в случае класса Бесова) при любом $\theta \geqslant 1$.

чении точной по порядку равномерной (на любом компакте основной области G) оценки разности средних Рисса двух спектральных разложений одного и того же порядка s для произвольной функции $f(x)$ из некоторого класса.

В п. 4 § 1 мы даем исчерпывающее решение этого вопроса для произвольной функции из класса $L_2(G)$.

В § 2 мы отказываемся от классической трактовки свойства равносуммируемости средних Рисса порядка s. Будем говорить, что средние Рисса порядка s двух произвольных самосопряженных неотрицательных расширений оператора Лапласа *равносуммируются в области G в обобщенном смысле*, если разность между указанными средними Рисса стремится к нулю почти всюду в области G.

В § 2 мы доказываем, что если функция $f(x)$ принадлежит в произвольной N-мерной области G только классу $L_2(G)$, то средние Рисса любого положительного порядка s двух произвольных самосопряженных неотрицательных расширений оператора Лапласа в этой области не только равносуммируются в области G в обобщенном смысле, но и разность указанных средних Рисса порядка s размера λ имеет почти всюду в области G порядок малости $o(\lambda^{-s/2})$, неограниченно растущий с увеличением порядка s рассматриваемых средних Рисса.

В § 2 также устанавливается, что если функция $f(x)$ принадлежит в произвольной N-мерной области G классу $L_2(G)$ и, кроме того, обращается в нуль почти всюду в некоторой содержащейся в G области D, то средние Рисса любого положительного порядка s произвольного самосопряженного неотрицательного расширения оператора Лапласа в области G почти всюду в области G имеют порядок малости $o(\lambda^{-s/2})$, где λ — размер рассматриваемых средних Рисса.

Таким образом, порядок стремления средних Рисса к нулю почти всюду в D неограниченно возрастает с увеличением порядка s рассматриваемых средних Рисса.

§ 1. О риссовской равносуммируемости спектральных разложений в классическом смысле

Давно известно, что при $s \geqslant (N-1)/2$ теорема о равномерной на любом компакте произвольной N-мерной области G равносуммируемости средних Рисса порядка s двух любых самосопряженных неотрицательных расширений оператора Лапласа в области G справедлива для любой функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$*).

Поэтому мы можем ограничиться изучением вопроса о равномерной на любом компакте или хотя бы поточечной равносумми-

*) Этот результат впервые был получен в работе Б. М. Левитана [1].

руемости средних Рисса порядка s, удовлетворяющего условию $0 \leqslant s < (N-1)/2$.

Как уже отмечалось во введении к настоящей главе, из приведенного в гл. 2 доказательства теоремы 2.3 сразу же вытекает, что для любого s из полуинтервала $0 \leqslant s < (N-1)/2$ принадлежность финитной в произвольной N-мерной области G функции $f(x)$ одному из четырех классов Никольского $H_2^\alpha(G)$, Соболева — Лиувилля $L_2^\alpha(G)$, Бесова $B_{2,\theta}^\alpha(G)$ или Зигмунда — Гёльдера $C^\alpha(G)$ с порядком дифференцируемости α, удовлетворяющим условию $\alpha \geqslant (N-1)/2 - s$, обеспечивает равномерную (на любом компакте K области G) равносуммируемость средних Рисса порядка s двух любых самосопряженных неотрицательных расширений оператора Лапласа в области G (или в охватывающей ее области).

Естественно возникает вопрос: является ли требование на порядок дифференцируемости в каждом из четырех указанных классов $\alpha \geqslant (N-1)/2 - s$ окончательным для равномерной на любом компакте или хотя бы для поточечной равносуммируемости средних Рисса порядка s $(0 \leqslant s < (N-1)/2)$ двух произвольных самосопряженных неотрицательных расширений оператора Лапласа.

Доказываемая ниже теорема устанавливает, что для любого s из полуинтервала $0 \leqslant s < (N-1)/2$ и любого α, удовлетворяющего условию $0 < \alpha < (N-1)/2 - s$, принадлежность финитной в области G функции $f(x)$ к любому из классов $C^\alpha(G)$, $B_{\mathbf{p},\theta}^\alpha(G)$, $L_p^\alpha(G)$ и $H^\alpha(G)$ с порядком дифференцируемости α и с произвольной степенью суммируемости $p \geqslant 1$ не обеспечивает, вообще говоря, ни равномерной на любом компакте области G, ни даже поточечной в некоторой внутренней точке x_0 области G равносуммируемости средних Рисса порядка s (даже если дополнительно потребовать, чтобы функция $f(x)$ обращалась в нуль в некоторой окрестности точки x_0).

Теорема 3.1. *Пусть s — любое фиксированное число из полуинтервала $0 \leqslant s < (N-1)/2$, а область G представляет собой N-мерный шар достаточно малого радиуса R_0 с центром в точке x_0, и пусть для произвольной функции $f(x)$, определенной в шаре G и продолженной нулем за ее пределы, символ $E_\lambda^s(x, f)$ обозначает взятые в точке x средние Рисса порядка s, отвечающие разложению по собственным функциям оператора Лапласа в шаре G с однородным краевым условием первого рода на его границе, а символ $\overset{0}{E}{}_\lambda^s(x, f)$ обозначает взятые в точке x средние Рисса порядка s, отвечающие разложению в N-кратный интеграл Фурье. Тогда для любого α из интервала $0 < \alpha < (N-1)/2 - s$ существует функция $f(x)$, удовлетворяющая следующим требованиям:*

1) *$f(x)$ принадлежит классу Зигмунда — Гёльдера $C^\alpha(G)$;*

2) *$f(x)$ имеет расположенный внутри шара G компактный носитель и, кроме того, обращается в нуль в некоторой окрестности центра x_0 шара G;*

3) *разность $E_\lambda^s(x_0, f) - \overset{0}{E}{}_\lambda^s(x_0, f)$ средних Рисса порядка s разложений функции $f(x)$, взятых в точке x_0, неограничена при $\lambda \to \infty$.*

Замечание. Теорема 3.1 останется верна, если в ее условии требование принадлежности функции $f(x)$ к классу Зигмунда — Гёльдера $C^\alpha(G)$ при произвольном фиксированном α из интервала $0 < \alpha < (N-1)/2 - s$ заменить требованием принадлежности этой функции любому из классов Никольского $H_p^\alpha(G)$, Соболева — Лиувилля $L_p^\alpha(G)$ или Бесова $B_{p,\theta}^\alpha(G)$ с любым фиксированным α из интервала $0 < \alpha < (N-1)/2 - s$, с любым $p \geqslant 1$ и (в случае класса Бесова) с любым $0 \geqslant 1$.

В самом деле, достаточно для любого фиксированного α из интервала $0 < \alpha < (N-1)/2 - s$ фиксируя число α' такое, что $0 < \alpha < \alpha' < (N-1)/2 - s$, заметить, что принадлежность $f(x)$ классу $C^{\alpha'}$ обеспечивает принадлежность этой функции классу $H_p^{\alpha'}$ при любом $p \geqslant 1$, а потому обеспечивает принадлежность $f(x)$ как классу H_p^α, так и (в силу теорем вложения (2.1.18′) из п. 3 § 1 гл. 2) каждому из классов L_p^α и $B_{p,\theta}^\alpha$ при любом $p \geqslant 1$ и любом $\theta \geqslant 1$.

Доказательству теоремы 3.1 предпошлем доказательство леммы об оценке снизу разности средних Рисса спектральных функций и леммы о неограниченности разности средних Рисса ядер дробного порядка двух рассматриваемых разложений в метрике L_1.

1. Лемма об оценке в L_1 разности средних Рисса спектральных функций. Обозначим символом $\theta^s(x, y, \lambda)$ средние Рисса порядка s спектральной функции, отвечающие разложению по собственным функциям оператора Лапласа в шаре G с однородным краевым условием первого рода на границе этого шара, а символом $\theta_0^s(x, y, \lambda)$ — средние Рисса порядка s спектральной функции, отвечающей разложению в N-кратный интеграл Фурье.

Обозначим далее символом $r = |x_0 - y|$ расстояние переменной точки y от центра x_0 шара G, положим $R = R_0/2$, где R_0 — радиус шара G, и введем в рассмотрение кольцевой слой

$$E_R = \{R/4 \leqslant |x_0 - y| \leqslant R/2\}. \tag{3.1.1}$$

Нам придется иметь дело только с обладающими радиальной симметрией нормированными собственными функциями первой краевой задачи для шара G, ибо остальные собственные функции этой задачи обращаются в нуль в центре x_0 шара G и вследствие этого выключаются из рассмотрения.

Эти собственные функции мы будем обозначать символами $\{u_n(y)\}$, а отвечающие им собственные значения (занумерованные в порядке возрастания) — символами $\{\lambda_n\}$. Заметим, что

$$u_n(y) = \bar{u}_n(r) = \sqrt{\frac{2}{\omega_N}}\frac{1}{R_0\mathcal{J}_{\frac{N-1}{2}}(\mu_n)}\, r^{\frac{2-N}{2}}\mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}\left(\frac{r}{R}\mu_n\right), \quad (3.1.2)$$

$$\lambda_n = \mu_n^2/R_0^2, \qquad (3.1.3)$$

где $\omega_N = 2(\sqrt{\pi})^N[\Gamma(N/2)]^{-1}$, а μ_n — занумерованные в порядке возрастания нули бесселевой функции $\mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}(x)$.

Для больших нулей μ_n справедлива следующая асимптотическая формула*):

$$\mu_n = \pi\left(n + \frac{N-3}{4}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (3.1.4)$$

Лемма 3.1. *При достаточно малом радиусе $R_0 = 2R > 0$ шара G для любого строго положительного s существует постоянная $A > 0$ такая, что для всех достаточно больших номеров n справедливо неравенство*

$$\int\limits_{E_R} |\theta^s(x_0, y, \lambda_n) - \theta_0^s(x_0, y, \lambda_n)|\, dy \geqslant A\lambda_n^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}}. \qquad (3.1.5)$$

Доказательство. Рассмотрим взятые при $x = x_0$ средние Рисса порядка s спектральной функции, отвечающей разложению в N-кратный интеграл Фурье **):

$$\theta_0^s(x_0, y, \lambda) = \Gamma(s+1)\cdot 2^s(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}|x_0 - y|^{-\frac{N}{2}-s}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(|x_0-y|\sqrt{\lambda}). \qquad (3.1.6)$$

С помощью этих средних введем в рассмотрение ту же самую функцию $\overset{\lambda}{v}(|x_0 - y|)$, что и в п. 1 § 4 гл. 2 (см. соотношение (2.4.5)). Эту функцию можно записать в виде

$$\overset{\lambda}{v}(|x_0 - y|) = \begin{cases}\theta_0^s(x_0, y, \lambda) & \text{при } |x_0 - y| \leqslant R,\\ 0 & \text{при } |x_0 - y| > R.\end{cases} \qquad (3.1.7)$$

В п. 1 § 4 гл. 2 выписано спектральное разложение этой функции, отвечающее произвольному самосопряженному неотрицательному расширению оператора Лапласа ***). В частности, при разложении по собственным функциям $\{u_n(y)\}$ первой краевой задачи для оператора Лапласа в N-мерном шаре G

*) См., например, книгу Г. Н. Ватсона [1], с. 558.
**) См., например, § 6 главы 2, выражение (2.6.20).
***) Для образа Фурье функции $\overset{\lambda}{v}(|x_0 - y|)$ см. формулу (2.4.8).

спектральное разложение функции (3.1.7) имеет вид

$$\sum_{\lambda_k<\lambda} u_k(x_0)\,u_k(y)\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^s -$$

$$-\Gamma(s+1)\cdot 2^s\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{\frac{2-N}{4}}u_k(x_0)\,u_k(y)\,I_{\lambda_k}^{\lambda}(R), \quad (3.1.8)$$

где

$$I_{\lambda_k}^{\lambda}(R)=\int_R^{\infty}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{\frac{N}{2}-1}(r\sqrt{\lambda_k})\,r^{-s}\,dr. \qquad (3.1.9)$$

Так как для любого фиксированного λ функция (3.1.7) принадлежит по y классу $L_2(G)$, то ряд Фурье (3.1.8) во всяком случае сходится к функции (3.1.7) в метрике $L_2(G)$. Заметив теперь, что по определению

$$\theta^s(x_0, y, \lambda)=\sum_{\lambda_k<\lambda}u_k(x_0)\,u_k(y)\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^s,$$

мы приходим к заключению, что ряд

$$\Gamma(s+1)\cdot 2^s\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{\frac{2-N}{4}}u_k(x_0)\,u_k(y)\,I_{\lambda_k}^{\lambda}(R) \qquad (3.1.10)$$

при любом фиксированном λ сходится в метрике $L_2(G)$ к разности $\theta^s(x_0, y, \lambda)-\overset{\lambda}{v}(|x_0-y|)$. Поскольку при $|x_0-y|\leqslant R$ функция $\overset{\lambda}{v}(|x_0-y|)$ совпадает с $\theta_0^s(x_0, y, \lambda)$, то в шаре $|x_0-y|\leqslant R$ ряд (3.1.10) сходится в метрике L_2 по y к разности $[\theta^s(x_0, y, \lambda)-\theta_0^s(x_0, y, \lambda)]$. Тем более, указанный ряд (3.1.10) сходится (к той же самой разности $[\theta^s(x_0, y, \lambda)-\theta_0^s(x_0, y, \lambda)]$), в метрике L_1 как в шаре $|x_0-y|\leqslant R$, так и в принадлежащем этому шару кольцевом слое (3.1.1). Отсюда сразу же вытекает, что

$$\int_{E_R}\left|\theta^s(x_0, y, \lambda)-\theta_0^s(x_0, y, \lambda)\right|dy=$$

$$=\Gamma(s+1)\cdot 2^s\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}\int_{E_R}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{\frac{2-N}{4}}u_k(x_0)\,u_k(y)\,I_{\lambda_k}^{\lambda}(R)\right|dy. \quad (3.1.11)$$

Из соотношения (3.1.11) вытекает, что для доказательства неравенства (3.1.5) достаточно установить существование постоянной $B>0$ такой, что для всех достаточно малых $R_0>0$ и всех достаточно больших номеров n справедливо неравенство

$$\int_{E_R}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{\frac{2-N}{4}}u_k(x_0)\,u_k(y)\,I_{\lambda_k}^{\lambda_n}(R)\right|dy\geqslant B\lambda_n^{-1/4}. \qquad (3.1.12)$$

Для доказательства неравенства (3.1.12) заметим, что в силу того, что модуль разности двух величин не меньше разности модулей этих величин, справедливо неравенство

$$\int\limits_{E_R}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{\frac{2-N}{4}}u_k(x_0)\,u_k(y)\,I_{\lambda_k}^{\lambda_n}(R)\right|dy\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_{\dot E_R}\left|\sum_{|\sqrt{\lambda_k}-\sqrt{\lambda_n}|\leqslant R^{-2}}\lambda_k^{\frac{2-N}{4}}u_k(x_0)\,u_k(y)\,I_{\lambda_k}^{\lambda_n}(R)\right|dy-$$

$$-\int\limits_{E_R}\left|\sum_{|\sqrt{\lambda_k}-\sqrt{\lambda_n}|>R^{-2}}\lambda_k^{\frac{2-N}{4}}u_k(x_0)\,u_k(y)\,I_{\lambda_k}^{\lambda_n}(R)\right|dy,\quad(3.1.13)$$

Оценим первый из интегралов в правой части (3.1.13) снизу, а второй из интегралов в правой части (3.1.13) сверху.

Для доказательства неравенства (3.1.12) достаточно доказать, что для всех достаточных малых $R_0>0$ найдется номер $n_0(R_0)$ такой, что для всех превосходящих его номеров n справедливы неравенства *)

$$\int\limits_{\dot E_R}\left|\sum_{|\sqrt{\lambda_k}-\sqrt{\lambda_n}|\leqslant R^{-2}}\lambda_k^{\frac{2-N}{4}}u_k(x_0)\,u_k(y)\,I_{\lambda_k}^{\lambda_n}(R)\right|dy\geqslant C_1R^{\frac{N-1}{2}-s}\lambda_n^{-\frac{1}{4}},\quad(3.1.14)$$

$$\int\limits_{\dot E_R}\left|\sum_{|\sqrt{\lambda_k}-\sqrt{\lambda_n}|>R^{-2}}\lambda_k^{\frac{2-N}{4}}u_k(x_0)\,u_k(y)\,I_{\lambda_k}^{\lambda_n}(R)\right|dy\leqslant C_2R^{\frac{N}{2}-s}\lambda_n^{-\frac{1}{4}}\quad(3.1.15)$$

с некоторыми положительными постоянными C_1 и C_2.

Действительно, для получения неравенства (3.1.12) из соотношений (3.1.13), (3.1.14) и (3.1.15) достаточно фиксировать число $R=R_0/2$ достаточно малым.

Докажем сначала оценку сверху (3.1.15). Применяя к интегралу, стоящему в левой части (3.1.15), неравенство Коши — Буняковского и учитывая ортонормированность системы собственных функций $\{u_k(y)\}$ в шаре G, получим

$$\int\limits_{E_R}\left|\sum_{|\sqrt{\lambda_k}-\sqrt{\lambda_n}|>R^{-2}}\lambda_k^{\frac{2-N}{4}}u_k(x_0)\,u_k(y)\,I_{\lambda_k}^{\lambda_n}(R)\right|dy\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int\limits_{\dot E_R}dy\int\limits_G\left[\sum_{|\sqrt{\lambda_k}-\sqrt{\lambda_n}|\geqslant R^{-2}}\lambda_k^{\frac{2-N}{4}}u_k(x_0)\,u_k(y)\,I_{\lambda_k}^{\lambda_n}(R)\right]^2dy\right\}^{1/2}=$$

$$=O\left(R^{N/2}\right)\left\{\sum_{|\sqrt{\lambda_k}-\sqrt{\lambda_n}|\geqslant R^{-2}}\lambda_k^{\frac{2-N}{2}}u_k^2(x_0)\left[I_{\lambda_k}^{\lambda_n}(R)\right]^2\right\}^{1/2}.\quad(3.1.16)$$

---

*) В дальнейшем символами $C_l\,(l=1,\,2,\,\ldots)$ мы обозначаем положительные постоянные, зависящие от N и от s.

Далее воспользуемся непосредственно вытекающей из (3.1.2) и (3.1.3) оценкой

$$\lambda_k^{\frac{1-N}{4}}\,|u_k(x_0)| \leqslant C_3\cdot R_0^{-1/2} \tag{3.1.17}$$

и двумя оценками

$$\left|I_{\lambda_k}^{\lambda_n}(R)\right| \leqslant C_4 R^{-s}\lambda_n^{-1/4}\lambda_k^{-1/4},$$

$$\left|I_{\lambda_k}^{\lambda_n}(R)\right| \leqslant C_5 R^{-1-s}\lambda_n^{-1/4}\lambda_k^{-1/4}\,|\sqrt{\lambda_k}-\sqrt{\lambda_n}|^{-1}, \tag{3.1.18}$$

установленными в п. 2 § 4 гл. 2.

Из оценок (3.1.16)—(3.1.18), из соотношения (3.1.3) и из равенства $R_0 = 2R$ мы получим следующее неравенство *):

$$\int\limits_{E_R}\left|\sum_{|\sqrt{\lambda_k}-\sqrt{\lambda_n}|>R^{-2}} \lambda_k^{\frac{2-N}{4}} u_k(x_0)\,u_k(y)\,I_{\lambda_k}^{\lambda_n}(R)\right|dy \leqslant$$

$$\leqslant C_6 R^{\frac{N-1}{2}-s}\lambda_n^{-1/4}\left[\sum_{|\mu_k-\mu_n|\geqslant 2/R}|\mu_k-\mu_n|^{-2}\right]^{1/2}.$$

Для получения из последнего неравенства оценки сверху (3.1.15) нам остается заметить, что сумма, стоящая в этом последнем неравенстве в квадратных скобках, т. е.

$$\sum_{|\mu_k-\mu_n|\geqslant 2/R}|\mu_k-\mu_n|^{-2},$$

в силу асимптотической формулы (3.1.4) имеет порядок $O(R)$.

Теперь для доказательства леммы нам остается установить только оценку снизу (3.1.14).

Сделаем следующее, сильно упрощающее рассуждения замечание: поскольку по данному $R_0 = 2R > 0$ мы можем фиксировать номер $n_0(R_0)$ как угодно большим, а неравенство (3.1.14) нам следует доказать лишь для номеров n, превосходящих $n_0(R_0)$, то в дальнейших рассуждениях можем пренебрегать членами, содержащими множитель $1/n$ или $1/\mu_n$ (независимо от того, какой порядок роста по степеням $1/R = 2/R_0$ имеют эти члены).

Так как в силу (3.1.2), (3.1.3) и (3.1.4) при больших номерах n справедливы соотношения **)

$$\begin{cases} \lambda_n^{\frac{1-N}{4}} u_n(x_0) = \dfrac{C_7}{\sqrt{R}}(-1)^n + O\left(\dfrac{1}{n}\right), \\ u_n(y) = \bar{u}_n(r) = C_8 R^{-1/2}(-1)^n r^{\frac{1-N}{2}}\sin\left(n\pi\dfrac{r}{R_0}\right) + O\left(\dfrac{1}{n}\right), \end{cases} \tag{3.1.19}$$

---

*) Мы учитываем еще, что в силу (3.1.3) и равенства $R_0 = 2R$ неравенство $|\sqrt{\lambda_k}-\sqrt{\lambda_n}| \geqslant R^{-2}$ эквивалентно неравенству $|\mu_k-\mu_n| \geqslant 2/R$.

**) Напомним, что $r = |x_0 - y|$.

то в силу только что сделанного замечания для доказательства неравенства (3.1.14) достаточно при любом достаточно малом $R_0 = 2R > 0$ и при всех номерах n, превосходящих достаточно большое число $n_0(R_0)$, установить оценку

$$\int\limits_{E_R} \left| \sum_{|\mu_k-\mu_n|\leqslant 2/R} \lambda_k^{1/4} r^{\frac{1-N}{2}} \sin\left(k\pi \frac{r}{R_0}\right) I_{\lambda_k}^{\lambda_n}(R) \right| dy \geqslant$$

$$\geqslant C_9 R^{\frac{N+1}{2}-s} \lambda_n^{-1/4}, \quad (3.1.20)$$

в которой C_9 — некоторая положительная постоянная.

Из известной асимптотической формулы для бесселевой функции *)

$$\mathcal{J}_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\nu\right) + O\left(x^{-3/2}\right)$$

вытекает следующее представление для интеграла (3.1.9), справедливое при любом фиксированном R, при всех достаточно больших $n \geqslant n_0(R_0) = n_0(2R)$ и при $|\sqrt{\lambda_k} - \sqrt{\lambda_n}| < R^{-2}$:

$$\lambda_n^{\frac{1}{4}} \lambda_k^{\frac{1}{4}} I_{\lambda_k}^{\lambda_n}(R) = \frac{1}{\pi} \int\limits_R^\infty \rho^{-1-s} \sin\left[\rho\left(\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_k}\right) - \frac{\pi}{2}s\right] d\rho -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int\limits_R^\infty \rho^{-1-s} \sin\left[\rho\left(\sqrt{\lambda_n} + \sqrt{\lambda_k}\right) - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi s}{2}\right] d\rho + O\left(R^{-s}\mu_n^{-1}\right).$$

$$(3.1.21)$$

С помощью формулы среднего значения Бонне для определенного интеграла заключаем, что второй интеграл в правой части (3.1.21) также имеет порядок $O\left(R^{-s}\mu_n^{-1}\right)$. Но тогда соотношение (3.1.21) и сделанное выше замечание позволяют утверждать, что для доказательства оценки (3.1.20) достаточно установить неравенство

$$\int\limits_{E_R} \left| \sum_{|\mu_k-\mu_n|\leqslant 2/R} r^{\frac{1-N}{2}} \sin\left(k\pi \frac{r}{R_0}\right) \int\limits_R^\infty \rho^{-1-s} \sin\left[\rho\left(\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_k}\right) - \frac{\pi}{2}s\right] d\rho \right| dy \geqslant$$

$$\geqslant C_{10} R^{\frac{N+1}{2}-s}. \quad (3.1.22)$$

Это неравенство следует установить для любого достаточно малого $R_0 = 2R > 0$ и любого номера n, превосходящего достаточно большое число $n_0(R_0)$.

Для доказательства неравенства (3.1.22) прежде всего разобьем интеграл, стоящий в левой части (3.1.22), на сумму двух

*) См., например, Г. Бейтмен и А. Эрдейи, [1, с. 98, формула (3)].

интегралов:

$$\int_R^\infty \rho^{-1-s}\sin\left[\rho\left(\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_k}\right)-\frac{\pi s}{2}\right]d\rho =$$

$$= \int_R^{R+1} \rho^{-1-s}\sin\left[\rho\left(\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_k}\right)-\frac{\pi s}{2}\right]d\rho +$$

$$+ \int_{R+1}^\infty \rho^{-1-s}\sin\left[\rho\left(\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_k}\right)-\frac{\pi s}{2}\right]d\rho. \quad (3.1.23)$$

Для второго из интегралов в правой части (3.1.23), привлекая формулу среднего значения Бонне при $k \neq n$ и мажорируя модуль синуса единицей при $k = n$, получим оценку

$$\int_{R+1}^\infty \rho^{-1-s}\sin\left[\rho\left(\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_k}\right)-\frac{\pi s}{2}\right]d\rho =$$

$$= \begin{cases} O\left(R\,|\mu_k-\mu_n|^{-1}\right) & \text{при} \quad k \neq n, \\ O(1) & \text{при} \quad k = n. \end{cases} \quad (3.1.24)$$

Из оценки (3.1.24), из неравенства Коши — Буняковского и из ортонормированности системы функций $\left\{\sqrt{\frac{2}{R_0}}\sin\left(k\pi\frac{r}{R_0}\right)\right\}$ на сегменте $0 \leqslant r \leqslant R_0$ получим, что

$$\int_{E_R}\left|\sum_{|\mu_k-\mu_n|<2/R} r^{\frac{1-N}{2}}\sin\left(k\pi\frac{r}{R_0}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\int_{R+1}^\infty \rho^{-1-s}\sin\left[\rho\left(\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_k}\right)-\frac{\pi s}{2}\right]d\rho\right|dy \leqslant$$

$$\leqslant C_{11}\left\{\int_{E_R}dy\int_0^{R_0}\left[\sum_{|\mu_k-\mu_n|<2/R} r^{\frac{1-N}{2}}\sin\left(k\pi\frac{r}{R_0}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\int_{R+1}^\infty \rho^{-1-s}\sin\left[\rho\left(\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_k}\right)-\frac{\pi s}{2}\right]d\rho\right]^2 r^{N-1}\,dr\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_{12}R^{\frac{N+1}{2}}\left[\sum_{|\mu_k-\mu_n|<2/R}\left(\int_{R+1}^\infty \rho^{-1-s}\sin\left[\rho\left(\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_k}\right)-\frac{\pi s}{2}\right]d\rho\right)^2\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_{13}R^{\frac{N+1}{2}}\left[1+R^2\sum_{\substack{|\mu_k-\mu_n|<2/R \\ k\neq n}}|\mu_k-\mu_n|^{-2}\right]^{1/2} \leqslant C_{14}R^{\frac{N+1}{2}}. \quad (3.1.25)$$

Из полученной оценки (3.1.25) и из равенства (3.1.23) вытекает, что для установления требуемой оценки (3.1.22) достаточно доказать, что для любого достаточно малого $R_0 = 2R > 0$ и для всех номеров n, превосходящих достаточно большое число $n_0(R_0)$, с некоторой положительной постоянной C_{15} справедливо неравенство

$$\int_{E_R}\left|\sum_{|\mu_k-\mu_n|<2/R} r^{\frac{1-N}{2}}\sin\left(k\pi\frac{r}{R_0}\right)\int_R^{R+1}\rho^{-1-s}\sin\left[\rho\left(\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_k}\right)-\frac{\pi s}{2}\right]d\rho\right|dy \geqslant$$
$$\geqslant C_{15}R^{\frac{N+1}{2}-s}. \quad (3.1.26)$$

Из соотношений (3.1.3) и (3.1.4) и из сделанного выше замечания в свою очередь вытекает, что для установления неравенства (3.1.26) достаточно для любого достаточно малого $R_0 = 2R > > 0$ и для всех номеров n, превосходящих достаточно большое число $n_0(R_0)$, установить неравенство

$$\int_{R/4}^{R/2}\left|\sum_{|k-n|<\frac{2}{\pi R}} r^{\frac{N-1}{2}}\sin\left(k\pi\frac{r}{R_0}\right)\int_R^{R+1}\rho^{-1-s}\sin\left[(n-k)\pi\frac{\rho}{R_0}-\frac{\pi s}{2}\right]d\rho\right|dr \geqslant$$
$$\geqslant C_{16}R^{\frac{N+1}{2}-s}, \quad (3.1.27)$$

в котором C_{16} обозначает некоторую положительную постоянную.

Для оценки левой части (3.1.27) сделаем во внутреннем интеграле замену переменной $\rho = \tau + R$. При этом левая часть (3.1.27) преобразуется к виду

$$\int_{R/4}^{R/2}\left|\sum_{|k-n|<\frac{2}{\pi R}} r^{\frac{N-1}{2}}\sin\left(k\pi\frac{r}{R_0}\right)\int_0^1(\tau+R)^{-1-s}\sin\left[(n-k)\pi\frac{\tau+R}{R_0}-\frac{\pi s}{2}\right]d\tau\right|dr. \quad (3.1.28)$$

Не ограничивая общности, можем считать, что $R_0 = \frac{1}{2m_0}$, где m_0 — целое число, которое может быть фиксировано достаточно большим. Внутренний интеграл в (3.1.28) можно представить в виде*)

$$\int_0^1(\tau+R)^{-1-s}\sin\left[(n-k)\pi\frac{\tau+R}{R_0}-\frac{\pi s}{2}\right]d\tau =$$
$$= \sum_{p=0}^{m_0-1}\int_{2R_0p}^{2R_0(p+1)}(\tau+R)^{-1-s}\sin\left[(n-k)\pi\frac{\tau+R}{R_0}-\frac{\pi s}{2}\right]d\tau =$$

---

*) Мы учитываем, что $2m_0R_0 = 1$ и разбиваем сегмент $[0, 1]$ на сумму m_0 не имеющих общих внутренних точек сегментов $[2R_0p, 2R_0(p+1)]$, $p = 0, 1, \ldots, m_0 - 1$.

$$= \sum_{p=0}^{m_0-1} \int_0^{2R_0} (u + R + 2R_0 p)^{-1-s} \sin\left[(n-k)\pi \frac{u+R}{R_0} - \frac{\pi s}{2}\right] du =$$

$$= \int_0^{R_0} \left[\sum_{p=0}^{m_0-1} (u + R + 2R_0 p)^{-1-s}\right] \sin\left[(n-k)\pi \frac{u+R}{R_0} - \frac{\pi s}{2}\right] du.$$

Таким образом, выражение (3.1.28) переходит в

$$\int_{R/4}^{R/2} \left| \sum_{|k-n| \leqslant \frac{2}{\pi R}} r^{\frac{N-1}{2}} \sin\left(k\pi \frac{r}{R_0}\right) \int_0^{2R_0} \left[\sum_{p=0}^{m_0-1} (u + R + 2R_0 p)^{-1-s}\right] \times \right.$$

$$\left. \times \sin\left[(n-k)\pi \frac{u+R}{R_0} - \frac{\pi s}{2}\right] du \right| dr. \quad (3.1.28')$$

Обозначим целую часть числа $\frac{2}{\pi R}$ через m. Элементарная замена $n - k = l$, свойство четности функции $\cos x$ и свойство нечетности функции $\sin x$ приводят нас к следующему равенству:

$$\sum_{|k-n| \leqslant \frac{2}{\pi R}} \sin\left(k\pi \frac{r}{R_0}\right) \sin\left[(n-k)\pi \frac{u+R}{R_0} - \frac{\pi s}{2}\right] =$$

$$= -\sin\left(n\pi \frac{r}{R_0}\right) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\left[D_m\left(\pi \frac{u+R-r}{R_0}\right) + D_m\left(\pi \frac{u+R+r}{R_0}\right)\right] -$$

$$- \cos\left(n\pi \frac{r}{R_0}\right) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\left[D_m\left(\pi \frac{u+R-r}{R_0}\right) - D_m\left(\pi \frac{u+R+r}{R_0}\right)\right], \quad (3.1.29)$$

в котором символом $D_m(t)$ обозначено известное ядро Дирихле

$$D_m(t) = \sin\left[\left(m + \frac{1}{2}\right) t\right] \left\{2 \sin \frac{t}{2}\right\}^{-1}.$$

В силу (3.1.28′) и (3.1.29) левая часть (3.1.27) преобразуется к виду

$$\int_{R/4}^{R/2} \left| r^{\frac{N-1}{2}} \sin\left(n\pi \frac{r}{R_0}\right) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \left\{ \int_0^{2R_0} \left[\sum_{p=0}^{m_0-1} (u + R + 2R_0 p)^{-1-s}\right] \times \right.\right.$$

$$\left. \times \left[D_m\left(\pi \frac{u+R-r}{R_0}\right) + D_m\left(\pi \frac{u+R+r}{R_0}\right)\right] du \right\} +$$

$$+ r^{\frac{N-1}{2}} \cos\left(n\pi \frac{r}{R_0}\right) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \left\{ \int_0^{2R_0} \left[\sum_{p=0}^{m_0-1} (u + R + 2R_0 p)^{-1-s}\right] \times \right.$$

$$\left.\left. \times \left[D_m\left(\pi \frac{u+R-r}{R_0}\right) - D_m\left(\pi \frac{u+R+r}{R_0}\right)\right] du \right\} \right| dr. \quad (3.1.30)$$

Будем обозначать символом $S_m(x, F)$ частичную сумму тригонометрического ряда Фурье функции $F(u)$, взятую в точке x, т. е. положим

$$S_m(x, F) = \frac{1}{R_0} \int_0^{2R_0} D_m\left(\pi \frac{u-x}{R_0}\right) F(u)\, du.$$

Тогда, введя в рассмотрение функцию

$$F(u) = \sum_{p=0}^{m_0-1} (u + R + 2R_0 p)^{-1-s}, \tag{3.1.31}$$

мы можем следующим образом переписать выражение (3.1.30):

$$R_0 \int_{R/4}^{R/2} \left| r^{\frac{N-1}{2}} \sin\left(n\pi \frac{r}{R_0}\right) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \{S_m(2R_0 + r - R, F) + \right.$$
$$+ S_m(2R_0 - r - R, F)\} + r^{\frac{N-1}{2}} \cos\left(n\pi \frac{r}{R_0}\right) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \times$$
$$\left. \times \{S_m(2R_0 + r - R, F) - S_m(2R_0 - r - R, F)\} \right| dr. \tag{3.1.30'}$$

Неравенство (3.1.27) будет доказано, если мы установим, что при достаточно малом фиксированном $R_0 = 2R > 0$ (или, что то же самое, при достаточно большом фиксированном номере m_0) и при всех номерах n, превосходящих достаточно большое число $n_0(R_0)$, величина (3.1.30') при некоторой положительной постоянной C_{17} превзойдет число $C_{17} R^{\frac{N+1}{2} - s}$. Для этого в свою очередь достаточно доказать, что при достаточно большом фиксированном номере m_0 и при всех номерах n, превосходящих достаточно большое число $n_0(m_0)$, будут справедливы следующие три оценки:

$$\int_{R/4}^{R/2} r^{\frac{N-1}{2}} \left| \cos\left(n\pi \frac{r}{R_0} - \frac{\pi s}{2}\right) F(2R_0 + r - R) - \right.$$
$$\left. - \cos\left(n\pi \frac{r}{R_0} + \frac{\pi s}{2}\right) F(2R_0 - r - R) \right| dr \geqslant C_{18} R^{\frac{N-1}{2} - s}, \tag{3.1.32}$$

$$\int_{R/4}^{R/2} r^{\frac{N-1}{2}} \left| S_m(2R_0 + r - R, F) - F(2R_0 + r - R) \right| dr \leqslant C_{19} R^{\frac{N}{2} - s}, \tag{3.1.33}$$

$$\int_{R/4}^{R/2} r^{\frac{N-1}{2}} \left| S_m(2R_0 - r - R, F) - F(2R_0 - r - R) \right| dr \leqslant C_{20} r^{\frac{N}{2} - s} \tag{3.1.34}$$

с положительными постоянными C_{18}, C_{19} и C_{20}.

Сначала установим неравенства (3.1.33) и (3.1.34). Заметим, что для их установления в силу неравенства Коши — Буняковского достаточно доказать, что при достаточно малом $R_0 = 2R > 0$

$$\int\limits_0^{2R_0} [S_m(u, F) - F(u)]^2\, du \leqslant C_{21} R^{-2s}. \tag{3.1.35}$$

Левая часть (3.1.35) равна сумме

$$\sum_{k > \frac{2}{\pi r}} \left(a_k^2 + b_k^2\right), \tag{3.1.36}$$

где a_k и b_k — коэффициенты Фурье в разложении функции $F(u)$ по ортонормированной на сегменте $[0, 2R_0]$ системе

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{R_0}} \cos\left(k\pi \frac{u}{R_0}\right)\right\}, \quad \left\{\frac{1}{\sqrt{R_0}} \sin\left(k\pi \frac{u}{R_0}\right)\right\}.$$

Из вида (3.1.31) функции $F(u)$ и из того, что $s > 0$, посредством элементарного интегрирования по частям получим, что

$$a_k = O\left(R^{-\frac{1}{2}-s} k^{-1}\right), \quad b_k = O\left(R^{-\frac{1}{2}-s} k^{-1}\right). \tag{3.1.37}$$

Из оценок (3.1.37) и из равенства левой части (3.1.35) сумме (3.1.36) сразу же вытекает оценка (3.1.35). Тем самым вывод оценок (3.1.33) и (3.1.34) завершен.

Теперь нам остается доказать лишь оценку снизу (3.1.32). Прежде всего заметим, что величину, стоящую в левой части (3.1.32), можно переписать в виде

$$\int\limits_{R/4}^{R/2} r^{\frac{N-1}{2}} \left| \cos\left(n\pi \frac{r}{R_0}\right) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) [F(2R_0 + r - R) - F(2R_0 - r - R)] + \right.$$
$$\left. + \sin\left(n\pi \frac{r}{R_0}\right) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) [F(2R_0 + r - R) - F(2R_0 - r - R)] \right| dr. \tag{3.1.38}$$

Обозначим теперь символом $I(r, s)$ величину

$$I(r, s) = \left(\cos^2\left(\frac{\pi s}{2}\right) [F(2R_0 - r - R) - F(2R_0 + r - R)]^2 + \right.$$
$$\left. + \sin^2\left(\frac{\pi s}{2}\right) [F(2R_0 - r - R) - F(2R_0 + r - R)]^2 \right)^{1/2}, \tag{3.1.39}$$

а символом $\alpha(r, s)$ угол, определяемый равенствами

$$\begin{cases} \cos\alpha(r, s) = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) [F(2R_0 + r - R) - F(2R_0 - r - R)]}{I(r, s)}, \\[2ex] \sin\alpha(r, s) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) [F(2R_0 + r - R) - F(2R_0 - r - R)]}{I(r, s)}. \end{cases} \tag{3.1.40}$$

С помощью введенных обозначений выражение (3.1.38) можно переписать в виде

$$\int_{R/4}^{R/2} r^{\frac{N-1}{2}} I(r, s) \left| \cos\left[n\pi \frac{r}{R_0} - \alpha(r, s) \right] \right| dr. \qquad (3.1.38')$$

Теперь для оценки снизу величины (3.1.38′) заметим, что из выражения (3.1.31) для $F(u)$ сразу же вытекает существование постоянной $C_{22} > 0$ такой, что для всех r из сегмента $[R/4, R/2]$ справедливо неравенство

$$F(2R_0 - r - R) - F(2R_0 + r - R) \geqslant C_{22} R^{-1-s} \qquad (3.1.41)$$

и тем более неравенство

$$F(2R_0 - r - R) + F(2R_0 + r - R) \geqslant C_{22} R^{-1-s}. \qquad (3.1.42)$$

Из (3.1.39), (3.1.41) и (3.1.42) заключаем, что

$$I(r, s) \geqslant C_{22} R^{-1-s}. \qquad (3.1.43)$$

С помощью (3.1.43) получаем следующую оценку снизу величины (3.1.38′):

$$\int_{R/4}^{R/2} r^{\frac{N-1}{2}} I(r, s) \left| \cos\left[n\pi \frac{r}{R_0} - \alpha(r, s) \right] \right| dr \geqslant$$

$$\geqslant C_{22} R^{\frac{N-1}{2} - 1 - s} \int_{R/4}^{R/2} \left| \cos\left[n\pi \frac{r}{R_0} - \alpha(r, s) \right] \right| dr. \qquad (3.1.44)$$

Из равенства левой части (3.1.32) величине (3.1.38′) и из неравенства (3.1.44) вытекает, что для получения завершающей доказательство леммы оценки снизу (3.1.32) достаточно доказать, что при фиксированном как угодно малом $R_0 = 2R > 0$ для всех достаточно больших номеров n справедлива оценка снизу

$$\int_{R/4}^{R/2} \left| \cos\left[n\pi \frac{r}{R_0} - \alpha(r, s) \right] \right| dr \geqslant C_{24} R \qquad (3.1.45)$$

с положительной постоянной C_{24}.

Так как

$$\left| \cos\left[n\pi \frac{r}{R_0} - \alpha(r, s) \right] \right| \geqslant \cos^2\left[n\pi \frac{r}{R_0} - \alpha(r, s) \right] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left[2n\pi \frac{r}{R_0} - 2\alpha(r, s) \right],$$

то

$$\int_{R/4}^{R/2} \left| \cos\left[n\pi \frac{r}{R_0} - \alpha(r, s) \right] \right| dr \geqslant$$

$$\geqslant \frac{R}{8} + \frac{1}{2} \int_{R/4}^{R/2} \cos\left[2n\pi \frac{r}{R_0} - 2\alpha(r, s) \right] dr. \qquad (3.1.46)$$

Неравенство (3.1.46) можно переписать в виде

$$\int\limits_{R/4}^{R/2} \left|\cos\left[n\pi \frac{r}{R_0} - \alpha(r, s)\right]\right| dr \geqslant$$

$$\geqslant \frac{R}{8} + \frac{1}{2}\int\limits_{R/4}^{R/2} \cos[2\alpha(r, s)] \cos\left(2n\pi \frac{r}{R_0}\right) dr +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{R/4}^{R/2} \sin[2\alpha(r, s)] \sin\left(2n\pi \frac{r}{R_0}\right) dr. \quad (3.1.47)$$

Теперь достаточно заметить, что второй и третий члены в правой части (3.1.47) после умножения на $1/\sqrt{R_0}$ представляют собой коэффициенты Фурье с номерами $2n$ в разложении на сегменте $[0, 2R_0]$ по тригонометрической системе $\left\{\frac{1}{\sqrt{R_0}}\cos\left(n\pi\frac{r}{R_0}\right)\right\}$, $\left\{\frac{1}{\sqrt{R_0}}\sin\left(n\pi\frac{r}{R_0}\right)\right\}$ кусочно непрерывных на этом сегменте функций, соответственно равных

$$\varphi_1(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos[2\alpha(r, s)] & \text{при} \quad \frac{R}{4} \leqslant r \leqslant \frac{R}{2}, \\ 0 & \text{в остальных точках } [0, 2R_0], \end{cases}$$

$$\varphi_2(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin[2\alpha(r, s)] & \text{при} \quad \frac{R}{4} \leqslant r \leqslant \frac{R}{2}, \\ 0 & \text{в остальных точках } [0, 2R_0]. \end{cases}$$

Так как при любом сколь угодно малом фиксированном $R_0 = 2R > 0$ эти коэффициенты Фурье стремятся к нулю при $n \to \infty$, то для всех номеров n, превосходящих достаточно большое число $n_0(R_0)$, модуль второго и модуль третьего членов в правой части (3.1.47) не превосходит числа $R/24$.

В таком случае из соотношения (3.1.47) сразу же вытекает неравенство (3.1.45) с постоянной $C_{24} = 1/24$.

Тем самым доказательство леммы 3.1 полностью завершено.

2. Лемма о неограниченности в L_1 разности средних Рисса ядер дробного порядка. Рассмотрим те же, что и в лемме 3.1 два спектральных разложения, первое из которых отвечает разложению по собственным функциям первой краевой задачи для оператора Лапласа в N-мерном шаре G радиуса R_0 с центром в точке x_0, а второе — разложению первоначально продолженной нулем за пределы шара G функции в N-кратный интеграл Фурье.

Обозначим символами $T_\beta(x, y)$ и соответственно $\overset{0}{T}_\beta(x, y)$ ядра порядка $\beta > 0$, отвечающие этим двум спектральным разложениям*). Фиксируем у указанных ядер точку x, положив ее

*) Определение ядер любого положительного порядка β для произвольного спектрального разложения см. в п. 3 § 3 гл. 2.

равной центру x_0 шара G, и составим по переменной точке y средние Рисса порядка $s \geqslant 0$ двух изучаемых спектральных разложений от двух указанных ядер, обозначив их соответственно через $E_\lambda^s T_\beta(x_0, y)$ и $\overset{0}{E}{}_\lambda^s \overset{0}{T}_\beta(x_0, y)$.

Лемма 3.2. *Пусть E_R — тот же самый кольцевой слой, что и в лемме 3.1, s — любое число из полусегмента $0 \leqslant s < \frac{N-1}{2}$, а β — любое число, удовлетворяющее неравенствам $0 < \beta < \frac{N-1}{4} - \frac{s}{2}$. Тогда радиус $R_0 = 2R > 0$ шара G можно фиксировать столь малым, что функция аргумента λ*

$$\tau_\beta^s(\lambda) = \int_{E_R} \left| E_\lambda^s T_\beta(x_0, y) - \overset{0}{E}{}_\lambda^s \overset{0}{T}_\beta(x_0, y) \right| dy \qquad (3.1.48)$$

будет являться неограниченной на полупрямой $\lambda \geqslant 1$.

Доказательство. Схема доказательства этой леммы аналогична схеме доказательства леммы 2.5 из п. 4 § 4 гл. 2.

Сначала убедимся в том, что лемму 3.2 достаточно доказать для любого строго положительного s, меньшего $\frac{N-1}{2}$ (отсюда будет следовать ее справедливость и для $s = 0$). Для этого достаточно доказать следующее утверждение: *если при достаточно малом $R_0 = 2R > 0$ для любого s из интервала $0 < s < \frac{N-1}{2}$ и для любого δ из интервала $0 < \delta < \frac{N-1}{4} - \frac{s}{2}$ функция аргумента λ*

$$\tau^s_{\frac{N-1}{4} - \frac{s}{2} - \delta}(\lambda) = \int_{E_R} \left| E_\lambda^s T_{\frac{N-1}{4} - \frac{s}{2} - \delta}(x_0, y) - \overset{0}{E}{}_\lambda^s \overset{0}{T}_{\frac{N-1}{4} - \frac{s}{2} - \delta}(x_0, y) \right| dy \qquad (3.1.49)$$

является неограниченной на полупрямой $\lambda \geqslant 1$, то для любого δ' из интервала $0 < \delta' < \frac{N-1}{4}$ функция аргумента λ

$$\tau^0_{\frac{N-1}{4} - \delta'}(\lambda) = \int_{E_R} \left| E_\lambda T_{\frac{N-1}{4} - \delta'}(x_0, y) - \overset{0}{E}_\lambda \overset{0}{T}_{\frac{N-1}{4} - \delta'}(x_0, y) \right| dy \quad (3.1.50)$$

также является неограниченной на полупрямой $\lambda \geqslant 1$.

Сформулированное утверждение легко доказывается от противного. Предположим, что функция (3.1.49) является неограниченной на полупрямой $\lambda \geqslant 1$ для любого s из интервала $0 < s < (N-1)/2$ и любого δ из интервала $0 < \delta < (N-1)/4 - s/2$, а функция (3.1.50) является ограниченной на полупрямой $\lambda \geqslant 1$ для некоторого δ' из интервала $0 < \delta' < (N-1)/4$.

Рассмотрим функцию (3.1.49) при $s = \delta'$, $\delta = \delta'/2$ (при этом выполнены все условия принадлежности s к интервалу $\left(0, \frac{N-1}{2}\right)$ и δ к интервалу $\left(0, \frac{N-1}{4} - \frac{s}{2}\right)\Big)$. В силу сделанного нами предположения мы можем утверждать неограниченность на полупрямой $\lambda \geqslant 1$ функции

$$\tau^{\delta'}_{\frac{N-1}{4}-\delta'}(\lambda) = \int\limits_{E_R} \left| E^{\delta'}_{\lambda} T_{\frac{N-1}{4}-\delta'}(x_0, y) - \overset{0}{E}{}^{\delta'}_{\lambda} \overset{0}{T}_{\frac{N-1}{4}-\delta'}(x_0, y) \right| dy. \quad (3.1.51)$$

Пользуясь соотношением (2.4.48) из п. 3 § 4 гл. 2, получим равенство

$$E^{\delta'}_{\lambda} T_{\frac{N-1}{4}-\delta'}(x_0, y) - \overset{0}{E}{}^{\delta'}_{\lambda} \overset{0}{T}_{\frac{N-1}{4}-\delta'}(x_0, y) =$$
$$= \delta' \lambda^{-\delta'} \int\limits_0^{\lambda} (\lambda - t)^{\delta'-1} \left[E_t T_{\frac{N-1}{4}-\delta'}(x_0, y) - \overset{0}{E}_t \overset{0}{T}_{\frac{N-1}{4}-\delta'}(x_0, y) \right] dt. \quad (3.1.52)$$

Беря обе части (3.1.52) по модулю, замечая, что модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля подынтегральной функции, и производя интегрирование по кольцевому слою E_R, получим неравенство

$$\tau^{\delta'}_{\frac{N-1}{4}-\delta'}(\lambda) \leqslant \tau^{0}_{\frac{N-1}{4}-\delta'}(\lambda).$$

Последнее неравенство противоречит тому, что функция, стоящая в правой его части, в силу сделанного нами предположения является ограниченной на полупрямой $\lambda \geqslant 1$, тогда как функция, стоящая в левой его части и совпадающая с (3.1.51), является неограниченной на указанной полупрямой.

Итак, сформулированное утверждение доказано, и нам достаточно доказать лемму 3.2 только для любого строго положительного s, меньшего $(N-1)/2$.

Это доказательство мы также проведем от противного.

Предположим, что для некоторого s из интервала $0 < s < (N-1)/2$ и для некоторого δ из интервала $0 < \delta < (N-1)/4 - s/2$ функция (3.1.48) является ограниченной на полупрямой $\lambda \geqslant 1$.

Воспользуемся леммой 2.4, доказанной в п. 3 § 4 гл. 2. Рассмотрим совершенно произвольное самосопряженное неотрицательное расширение $\widehat{A}$ оператора Лапласа в произвольной N-мерной области G и относительно него произвольное упорядоченное спектральное представление пространства $L_2(G)$ со спектральной мерой $\rho(\lambda)$, множествами кратности e_i, фундаментальными функциями $u_i(x, \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, \widehat{m})$ и кратностью $\widehat{m} \leqslant \infty$. Полагая в условии леммы 2.4 из п. 3 § 4 гл. 2 меру $\rho(t)$ совпадающей со спектральной мерой, а функцию $U(t)$ равной

$$U(t) = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} u_i(x, t) u_i(y, t) (1+t)^{-\beta},$$

получим, что фигурирующие в этой лемме величины S_λ, σ_λ^s, $\overline{S}_\lambda$ и $\overline{\sigma}_\lambda^s$ будут иметь вид

$$S_\lambda = E_\lambda T_\beta(x, y), \qquad \sigma_\lambda^s = E_\lambda^s T_\beta(x, y),$$
$$\overline{S}_\lambda = \theta(x, y, \lambda), \qquad \overline{\sigma}_\lambda^s = \theta^s(x, y, \lambda),$$

где $\theta(x, y, \lambda)$ — спектральная функция, а $T_\beta(x, y)$ — ядро порядка $\beta > 0$, отвечающие рассматриваемому самосопряженному расширению $\widehat{A}$.

В таком случае устанавливаемое в лемме 2.4 соотношение (2.4.46) принимает вид*)

$$\theta^s(x, y, \lambda) = (1+\lambda)^\beta E_\lambda^s T_\beta(x, y) + (-1)^{r+1}\lambda^{-s} \times \\ \times \int_0^\lambda \frac{d^{r+2}}{dt^{r+2}}\{(\lambda - t)^s[(1+t)^\beta - (1+\lambda)^\beta]\}\frac{t^{r+1}}{(r+1)!}E_t^{r+1}T_\beta(x, y)\,dt. \tag{3.1.53}$$

Соотношением (3.1.53) мы и воспользуемся для получения противоречия с предположением об ограниченности на полупрямой $\lambda \geqslant 1$ функции (3.1.48) для некоторого s из интервала $0 < s < \frac{N-1}{2}$ и некоторого δ из интервала $0 < \delta < \frac{N-1}{4} - \frac{s}{2}$.

Записывая соотношение (3.1.53) при $x = x_0$ сначала для спектральной функции $\theta(x, y, \lambda)$ и ядра $T_\beta(x, y)$, отвечающих разложению по собственным функциям первой краевой задачи в N-мерном шаре G, а затем для спектральной функции $\theta_0(x, y, \lambda)$ и ядра $\overset{0}{T}_\beta(x, y)$, отвечающих разложению в N-кратный интеграл Фурье, и вычитая второе из записанных соотношений из первого, получим равенство

$$[\theta^s(x_0, y, \lambda) - \theta_0^s(x_0, y, \lambda)] = (1+\lambda)^\beta\left[E_\lambda^s T_\beta(x_0, y) - \overset{0}{E}{}_\lambda^s \overset{0}{T}_\beta(x_0, y)\right] + \\ + (-1)^{r+1}\lambda^{-s}\int_0^\lambda \frac{d^{r+2}}{dt^{r+2}}\{(\lambda - t)^s[(1+t)^\beta - (1+\lambda)^\beta]\} \times \\ \times \frac{t^{r+1}}{(r+1)!}\left[E_t^{r+1}T_\beta(x_0, y) - \overset{0}{E}{}_t^{r+1}\overset{0}{T}_\beta(x_0, y)\right]dt. \tag{3.1.54}$$

Взяв в соотношении (3.1.54) точку x_0 центром шара G, переходя в этом соотношении к модулям в правой и левой частях, замечая, что модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля подинтегральной функции, производя интегрирование по y по коль-

*) Напомним, что указанной лемме 2.4 $s = r + \varkappa$, где r — целое неотрицательное число, а $\varkappa$ удовлетворяет условию $0 < \varkappa \leqslant 1$.

цевому слою E_R и используя обозначение (3.1.48), получим неравенство

$$\int\limits_{E_R} \left| \theta^s(x_0, y, \lambda) - \theta_0^s(x_0, y, \lambda) \right| dy \leqslant (1+\lambda)^\beta \tau_\beta^s(\lambda) +$$

$$+ \lambda^{-s} \int\limits_0^\lambda \left| \frac{d^{r+2}}{dt^{r+2}} \{(\lambda - t)^s [(1+t)^\beta - (1+\lambda)^\beta]\} \right| \frac{t^{r+1}}{(r+1)!} \tau_\beta^{r+1}(t)\, dt. \quad (3.1.55)$$

По сделанному предположению существует постоянная $M > 0$ такая, что всюду на полупрямой $\lambda \geqslant 1$, а поэтому и всюду на полупрямой $\lambda \geqslant 0$

$$\tau_\beta^s(\lambda) \leqslant M. \quad (3.1.56)$$

Прежде всего убедимся в том, что из неравенства (3.1.56) вытекает следующее справедливое на всей полупрямой $\lambda \geqslant 0$ неравенство:

$$\tau_\beta^{r+1}(\lambda) \leqslant M. \quad (3.1.57)$$

Если s является целым, то $\varkappa = 1$, $r = s - 1$, так что $s = r + 1$, и неравенство (3.1.57) просто совпадает с (3.1.56).

Если s не является целым, то $0 < \varkappa \leqslant 1$ и $s < r + 1$. Но каковы бы ни были числа s и $s' = r + 1$, связанные условием $0 < s < s'$, для средних Рисса порядков s' и s справедлива формула (2.4.63), приведенная в п. 3 § 4 гл. 2. Непосредственно из этой формулы, записанной для средних Рисса двух рассматриваемых спектральных разложений, вытекает неравенство

$$\tau_\beta^{r+1}(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda^{-(r+1)} \Gamma(r+2) [\Gamma(r+1-s)\Gamma(s+1)]^{-1} \int\limits_0^\lambda (\lambda - t)^{r-s} t^s \tau_\beta^s(t)\, dt. \quad (3.1.58)$$

Из неравенств (3.1.58) и (3.1.56) вытекает неравенство (3.1.57).

Теперь, используя в правой части (3.1.55) неравенства (3.1.56) и (3.1.57) и принимая во внимание установленную в п. 4 § 4 гл. 2 оценку

$$\int\limits_0^\lambda \left| \frac{d^{r+2}}{dt^{r+2}} \{(\lambda - t)^s [(1+t)^\beta - (1+\lambda)^\beta]\} \right| \frac{t^{r+1}}{(r+1)!}\, dt = O[(1+\lambda)^{\beta+s}],$$

получим из (3.1.55) оценку

$$\int\limits_{E_R} \left| \theta^s(x_0, y, \lambda) - \theta_0^s(x_0, y, \lambda) \right| dy = O[(1+\lambda)^\beta],$$

которая в силу того, что $\beta < \frac{N-1}{4} - \frac{s}{2}$, противоречит неравенству (3.1.5), установленному в лемме 3.1 предыдущего пункта.

Полученное противоречие завершает доказательство леммы 3.2.

3. Непосредственное доказательство теоремы 3.1. Из неограниченности на полупрямой $\lambda \geqslant 1$ функции (3.1.48), установленной в лемме 3.2, и из известной теоремы резонансного типа *) вытекает, что существует такая непрерывная в кольцевом слое E_R функция $h(y)$, что функция аргумента λ

$$\int\limits_{E_R} \left[E_\lambda^s T_\beta(x_0, y) - \overset{0}{E}{}_\lambda^s \overset{0}{T}_\beta(x_0, y)\right] h(y)\, dy \tag{3.1.59}$$

также является неограниченной на полупрямой $\lambda \geqslant 1$.

Дальнейшие рассуждения идентичны тем, которые проведены в п. 5 § 4 гл. 2. Поэтому изложению этих рассуждений мы придадим фрагментарный характер.

Продолжим функцию $h(y)$ на все пространство E^N, положив ее равной нулю вне кольцевого слоя E_R, и введем в рассмотрение две функции

$$\begin{gathered} F(x) = \int\limits_{E^N} T_\beta(x, y)\, h(y)\, dy, \\ \overset{0}{F}(x) = \int\limits_{E^N} \overset{0}{T}_\beta(x, y)\, h(y)\, dy. \end{gathered} \tag{3.1.60}$$

Неограниченность на полупрямой $\lambda \geqslant 1$ функции (3.1.59) эквивалентна неограниченности на этой полупрямой разности

$$E_\lambda^s(x_0, F) - \overset{0}{E}{}_\lambda^s\left(x_0, \overset{0}{F}\right) \tag{3.1.61}$$

взятых в точке x_0 средних Рисса порядка s двух рассматриваемых спектральных разложений от функций $F(x)$ и $\overset{0}{F}(x)$ соответственно.

Как доказано в п. 3 § 3 гл. 2, ядра $T_\beta(x, y)$ и $\overset{0}{T}_\beta(x, y)$ двух рассматриваемых спектральных разложений для как угодно малого $h > 0$ и как угодно большого номера m могут быть представлены в виде **)

$$\begin{cases} T_\beta(x, y) = [v_\beta(x, y) - w_\beta(x, y)] - \Psi_\beta(x, y), \\ \overset{0}{T}_\beta(x, y) = [v_\beta(x, y) - w_\beta(x, y)] - \overset{0}{\Psi}_\beta(x, y), \end{cases} \tag{3.1.62}$$

где $[v_\beta(x, y) - w_\beta(x, y)]$ — отличное от нуля только в N-мерном шаре $|x - y| \leqslant h$ сглаженное ядро Бесселя — Макдональда, обладающее всюду непрерывными частными производными по всем переменным до порядка m включительно, а $\Psi_\beta(x, y)$ и $\overset{0}{\Psi}_\beta(x, y)$ таковы, что для любой функции $h(y)$ из $L_2(G)$, продолженной нулем на все пространство E^N, средние Рисса любого

---

*) См., например, книгу С. Качмажа и Г. Штейнгауза [1, с. 31, утверждение 3°].

**) См. представление (2.3.31) из п. 3 § 3 гл. 2.

неотрицательного порядка s

$$E_\lambda^s(x, g) \quad \text{и} \quad \overset{0}{E}{}_\lambda^s\left(x, \overset{0}{g}\right), \tag{3.1.63}$$

составленные от функций g и $\overset{0}{g}$, соответственно равных

$$g(x) = \int \Psi_\beta(x, y)\, h(y)\, dy, \quad \overset{0}{g}(x) = \int \overset{0}{\Psi}_\beta(x, y)\, h(y)\, dy, \tag{3.1.64}$$

при достаточно большом номере m сходятся при $\lambda \to \infty$ равномерно по x в G_h и, в частности, сходятся в центре x_0 шара G.

В соответствии с представлениями (3.1.62) и обозначениями (3.1.64) функции (3.1.60) могут быть представлены в виде

$$F(x) = f(x) - g(x), \quad \overset{0}{F}(x) = f(x) - \overset{0}{g}(x), \tag{3.1.65}$$

где

$$f(x) = \int [v_\beta(x, y) - w_\beta(x, y)]\, h(y)\, dy. \tag{3.1.66}$$

Так как в точке x_0 средние Рисса (3.1.63) сходятся, а потому и ограничены по λ на полупрямой $\lambda \geqslant 1$, то из неограниченности на этой полупрямой разности (3.1.61) вытекает неограниченность на ней разности взятых в точке x_0 средних Рисса

$$E_\lambda^s(x_0, f) - \overset{0}{E}{}_\lambda^s(x_0, f), \tag{3.1.67}$$

составленных для функции $f(x)$, определяемой соотношением (3.1.66).

Остается доказать, что при достаточно малом $h > 0$ эта функция $f(x)$ принадлежит в шаре G классу Зигмунда — Гёльдера C^α при произвольном α, меньшем β, и что эта функция обращается в нуль в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в шаре G компактный носитель.

Доказательство этих фактов можно заимствовать из п. 5 § 4 гл. 2.

Тем самым теорема 3.1 полностью доказана.

4. Точная по порядку равномерная оценка разности средних Рисса двух спектральных разложений. Развитые нами методы позволяют не только устанавливать факт равномерной равносходимости средних Рисса для функций из определенного класса, но и получать точные по порядку равномерные (на любом компакте основной области) оценки разности средних Рисса двух произвольных спектральных разложений для функций из того или иного класса.

В настоящем пункте мы установим точную по порядку равномерную (на любом компакте основной области G) оценку разности средних Рисса двух произвольных спектральных разложений для произвольной функции из класса $L_2(G)$.

Рассмотрим два совершенно произвольных самосопряженных неотрицательных расширения $\widehat{A}'$ и $\widehat{A}''$ оператора Лапласа $Lu = -\Delta u$ в произвольной N-мерной области G и отвечающие этим двум расширениям два произвольных упорядоченных спектральных представления пространства $L_2(G)$: первое — со спектральной мерой $\rho'(t)$, множествами кратности e_i', фундаментальными функциями $u_i'(x, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m')$ и кратностью $m' \leqslant \infty$; второе — со спектральной мерой $\rho''(t)$, множествами кратности e_i'', фундаментальными функциями $u_i''(x, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m'')$ и кратностью $m'' \leqslant \infty$.

Обозначим символами $\widehat{f}_i'(t)$ и соответственно $\widehat{f}_i''(t)$ образы Фурье произвольной функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ относительно фундаментальных функций $u_i'(x, t)$ и соответственно $u_i''(x, t)$ и составим для указанной произвольной функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ средние Рисса размера λ порядка s, отвечающие рассматриваемым двум расширениям. Они, как известно из гл. 2, имеют вид

$$\overset{s}{\sigma}{}_{\lambda}'(x, f) = \sum_{i=1}^{m'} \int_0^{\lambda} \widehat{f}_i'(t)\, u_i'(x, t) \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho'(t), \tag{3.1.68}$$

$$\overset{s}{\sigma}{}_{\lambda}''(x, f) = \sum_{i=1}^{m''} \int_0^{\lambda} \widehat{f}_i''(t)\, u_i''(x, t) \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho''(t). \tag{3.1.69}$$

Теорема 3.2. *Для двух произвольных самосопряженных неотрицательных расширений $\widehat{A}'$ и $\widehat{A}''$ оператора Лапласа в произвольной N-мерной области G и для произвольной функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ справедлива следующая оценка разности средних Рисса* (3.1.68) *и* (3.1.69) *любого неотрицательного порядка s:*

$$\left| \overset{s}{\sigma}{}_{\lambda}'(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}_{\lambda}''(x, f) \right| = \lambda^{\frac{N-1}{4} - \frac{s}{2}} \cdot o(1), \tag{3.1.70}$$

равномерная относительная x на любом компакте области G.

Замечание. Теорема 3.2 останется верна, если продолжить функцию $f(x)$ нулем за пределы области G и в качестве одного из двух рассматриваемых расширений взять любое самосопряженное неотрицательное расширение оператора Лапласа в области, охватывающей G (например, расширение во всем пространстве E^N, отвечающее разложению в N-кратный интеграл Фурье). Этот факт непосредственно вытекает из приводимого ниже доказательства теоремы 3.2.

Естественно возникает вопрос, можно ли уточнить характер бесконечно малой при $\lambda \to \infty$ функции $o(1)$ в оценке (3.1.70). Мы сейчас убедимся в том, что оценка (3.1.70) является окончательной в том смысле, что функция $o(1)$ может стремиться к нулю при $\lambda \to \infty$ как угодно медленно. Это вытекает из следующего утверждения.

Пусть теперь средние Рисса (3.1.68) отвечают разложению функции $f(x)$ по собственным функциям первой краевой задачи для оператора Лапласа в N-мерном шаре G радиуса $R_0 > 0$ с центром в точке x_0, а средние Рисса (3.1.69) отвечают разложению той же функции $f(x)$, продолженной нулем за пределы шара G, в N-кратный интеграл Фурье.

Теорема 3.3. *Если радиус $R_0 > 0$ N-мерного шара G фиксировать так же, как в лемме 3.1, то для любого $s \geqslant 0$ и любой наперед взятой убывающей на полупрямой $\lambda \geqslant 1$ и бесконечно малой при $\lambda \to \infty$ функции $\varphi(\lambda)$ существует функция $f(x)$, принадлежащая классу $L_\infty(G)$, имеющая в шаре G компактный носитель, равная нулю вне шара G и в малой окрестности центра x_0 шара G и такая, что функция аргумента λ*

$$\frac{\left|\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x_0, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x_0, f)\right|}{\lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}}\varphi(\lambda)} \tag{3.1.71}$$

не является ограниченной при $\lambda \to \infty$.

Теорема 3.3 показывает, что оценка (3.1.70) не может быть уточнена (даже при замене требования $f(x) \in L_2(G)$ требованием $f(x) \in L_\infty(G)$).

Доказательство теоремы 3.2. Фиксируем произвольный компакт K области G и произвольное положительное число R, меньшее расстояния компакта K от границы области G. Как показано в п. 3 § 5 гл. 2, для любой точки x компакта K и для любого самосопряженного неотрицательного расширения оператора Лапласа в области G средние Рисса любого порядка $s \geqslant 0$ произвольной функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ определяются равенством (2.5.118) из п. 3 § 5 гл. 2. Записывая указанное равенство (2.5.118) для двух рассматриваемых произвольных расширений $\widehat{A}'$ и $\widehat{A}''$, получим

$$\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f) = 2^s\Gamma(s+1)(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\lambda^{\frac{N}{2}-\frac{s}{2}} \times$$
$$\times \int\limits_{|x-y|\leqslant R} f(y)\,\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}\left(|x-y|\sqrt{\lambda}\right)|x-y|^{-\frac{N}{2}-s}\,dy +$$
$$+ 2^s\Gamma(s+1)\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}\sum_{i=1}^{m'}\int\limits_0^\infty \widehat{f}'_i(t)\,u'_i(x, t)\,t^{\frac{2-N}{4}}I_t^\lambda(R)\,d\rho'(t), \tag{3.1.72}$$

$$\overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x, f) = 2^s\Gamma(s+1)(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}} \times$$
$$\times \int\limits_{|x-y|\leqslant R} f(y)\,\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}\left(|x-y|\sqrt{\lambda}\right)|x-y|^{-\frac{N}{2}-s}\,dy +$$
$$+ 2^s\Gamma(s+1)\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}\sum_{i=1}^{m''}\int\limits_0^\infty \widehat{f}''_i(t)\,u''_i(x, t)\,t^{\frac{2-N}{4}}I_t^\lambda(R)\,d\rho''(t), \tag{3.1.73}$$

где, как и в п. 1 § 4 гл. 2,

$$I_t^\lambda(R) = \int\limits_R^\infty \mathcal{J}_{N/2+s}\left(r\sqrt{\lambda}\right)\mathcal{J}_{N/2-1}\left(r\sqrt{t}\right)r^{-s}\,dr.$$

Вычитая почленно (3.1.73) из (3.1.72), придем к соотношению

$$\overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda}(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\lambda}(x, f) =$$

$$= 2^s\Gamma(s+1)\,\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}\left[\sum_{i=1}^{m'}\int_0^{\infty}\widehat{f}'_i(t)\,u'_i(x, t)\,t^{\frac{2-N}{4}}I_t^{\lambda}(R)\,d\rho'(t) - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{m''}\int_0^{\infty}\widehat{f}''_i(t)\,u''_i(x, t)\,t^{\frac{2-N}{4}}I_t^{\lambda}(R)\,d\rho''(t)\right]. \quad (3.1.74)$$

Наша первая цель — установить равномерную относительно x на компакте K оценку

$$\left|\overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda}(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\lambda}(x, f)\right| = \lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}}\,O\left(\|f\|_{L_2(G)}\right). \quad (3.1.75)$$

Для установления этой оценки достаточно доказать, что величина, стоящая в (3.1.74) в квадратных скобках, равномерно относительно x на компакте K имеет порядок

$$\lambda^{-1/4}O\left(\|f\|_{L_2(G)}\right). \quad (3.1.76)$$

Тем более достаточно доказать, что такой порядок имеет каждая из двух сумм, стоящих внутри квадратных скобок (3.1.74). Мы ограничимся доказательством того, что такой порядок имеет первая из этих сумм (ибо для второй из них доказательство проводится аналогично).

Применяя неравенство Коши — Буняковского сначала для интеграла, а затем для суммы, получим, что

$$\left|\sum_{i=1}^{m'}\int_0^{\infty}\widehat{f}'_i(t)\,u'_i(x, t)\,t^{\frac{2-N}{4}}I_t^{\lambda}(R)\,d\rho'(t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{m'}\int_0^{\infty}|\widehat{f}'_i(t)|^2\,d\rho'(t)\right\}^{1/2}\left\{\sum_{i=1}^{m'}\int_0^{\infty}\left[u'_i(x, t)\,t^{\frac{2-N}{4}}I_t^{\lambda}(R)\right]^2 d\rho'(t)\right\}^{1/2}. \quad (3.1.77)$$

Из неравенства (3.1.77) и из равенства Парсеваля, записанного для принадлежащей классу $L_2(G)$ функции $f(x)$*), вытекает, что для доказательства того, что левая часть (3.1.77) имеет порядок (3.1.76), достаточно убедиться в справедливости равномерной относительно x на компакте K оценки

$$\left\{\lambda^{1/2}\sum_{i=1}^{m'}\int_0^{\infty}\left[u'_i(x, t)\,t^{\frac{2-N}{4}}I_t^{\lambda}(R)\right]^2 d\rho'(t)\right\}^{1/2} \leqslant C(R, s). \quad (3.1.78)$$

Но эта оценка фактически уже доказана нами в п. 1 § 4 гл. 2 при доказательстве леммы 2.3. В самом деле, при доказательстве указанной леммы мы установили, что каждая из четырех величин, стоящих под знаком корня в правых частях (2.4.27) —

*) См. (2.1.11) из п. 2 § 1 гл. 2.

(2.4.30), ограничена постоянной, зависящей только от R и от s. Тем самым вывод оценки (3.1.75) завершен.

Остается, опираясь на равномерную на компакте K оценку (3.1.75), установить справедливость равномерной на компакте K оценки (3.1.70).

Для произвольной функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется функция $f_1(x)$ из класса $C_0^\infty(G)$ такая, что

$$\|f(x) - f_1(x)\|_{L_2(G)} \leqslant \frac{\varepsilon}{3C_1}, \tag{3.1.79}$$

где C_1 обозначает постоянную, ограничивающую рост O-членов на компакте K в (3.1.75).

Так как

$$\left[\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x, f)\right] = \left[\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f - f_1) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x, f - f_1)\right] + \\ + \left[\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f_1) - f_1(x)\right] + \left[f_1(x) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x, f_1)\right]$$

то справедливо неравенство

$$\left|\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x, f)\right| \leqslant \left|\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f - f_1) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x, f - f_1)\right| + \\ + \left|\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f_1) - f_1(x)\right| + \left|\overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x, f_1) - f_1(x)\right|. \tag{3.1.80}$$

Из оценки (3.1.75), примененной к функции $[f(x) - f_1(x)]$, и из неравенства (3.1.79) вытекает, что

$$\left|\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f - f_1) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x, f - f_1)\right| < \frac{\varepsilon}{3}\lambda^{\frac{N-1}{4} - \frac{s}{2}} \tag{3.1.81}$$

(равномерно относительно x на компакте K).

Заметим теперь, что для принадлежащей классу $C_0^\infty(G)$ функции $f_1(x)$ каждая из разностей $\left[\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f_1) - f_1(x)\right]$ и $\left[\overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x, f_1) - f_1(x)\right]$ для любого $s \geqslant 0$ равномерно на компакте K имеет порядок $o\left(\lambda^{\frac{N-1}{4} - \frac{s}{2}}\right)$ *), откуда следует, что для фиксированного нами произвольного $\varepsilon > 0$ найдется положительное число $\Lambda(\varepsilon)$ такое, что при $\lambda \geqslant \Lambda(\varepsilon)$ равномерно на компакте K справедливы неравенства

$$\left|\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f_1) - f_1(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}\lambda^{\frac{N-1}{4} - \frac{s}{2}}, \\ \left|\overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x, f_1) - f_1(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}\lambda^{\frac{N-1}{4} - \frac{s}{2}}. \tag{3.1.82}$$

---

*) Это вытекает из того, что для функции $f_1(x)$ из класса $C_0^\infty(G)$ для любого номера m образы Фурье принадлежащей также классу $C_0^\infty(G)$ функции $\Delta^m f_1(x)$ и самой функции $f_1(x)$ связаны соотношением вида (2.5.19) из п. 1 § 5, гл. 2.

Из неравенств (3.1.80), (3.1.81) и (3.1.82) вытекает, что при $\lambda \geqslant \Lambda(\varepsilon)$ равномерно на компакте K справедливо неравенство

$$\left| \overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda}(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\lambda}(x, f) \right| < \varepsilon \lambda^{\frac{N-1}{4} - \frac{s}{2}},$$

завершающее доказательство теоремы 3.2.

Доказательство теоремы 3.3. Фиксируем $R_0 = 2\mathring{R} > 0$ так, чтобы было справедливо неравенство (3.1.5) из леммы 3.1 п. 1. Это неравенство в данной монографии доказано нами для $s > 0$. Случай $s = 0$ требует несколько иных и даже более простых рассуждений. Доказательство неравенства (3.1.5) для случая $s = 0$ содержится в одной из работ автора настоящей монографии [10]. В силу неравенства (3.1.5) для произвольной, наперед заданной убывающей на полупрямой $\lambda \geqslant 1$ и бесконечно малой при $\lambda \to \infty$ функции $\varphi(\lambda)$ функция аргумента λ

$$F(\lambda) = \left[\lambda^{\frac{N-1}{4} - \frac{s}{2}} \varphi(\lambda)\right]^{-1} \int\limits_{E_R} \left| \theta^s(x_0, y, \lambda) - \theta_0^s(x_0, y, \lambda) \right| dy$$

является неограниченной на полупрямой $\lambda \geqslant 1$.

Из неограниченности этой функции и из теоремы резонансного типа, уже упоминавшейся в п. 3, вытекает, что существует непрерывная в кольцевом слое E_R функция $f(y)$ такая, что функция аргумента λ

$$\left[\lambda^{\frac{N-1}{4} - \frac{s}{2}} \varphi(\lambda)\right]^{-1} \int\limits_{E_R} \left[\theta^s(x_0, y, \lambda) - \theta_0^s(x_0, y, \lambda)\right] f(y)\, dy \qquad (3.1.83)$$

также является неограниченной на полупрямой $\lambda \geqslant 1$. Продолжим функцию $f(y)$ за пределы кольцевого слоя E_R, положив ее равной нулю в $E^N - E_R$.

Тогда, используя введенные выше обозначения для средних Рисса двух рассматриваемых расширений оператора Лапласа, можем следующим образом переписать функцию (3.1.83):

$$\left[\lambda^{\frac{N-1}{4} - \frac{s}{2}} \varphi(\lambda)\right]^{-1} \left[\overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda}(x_0, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\lambda}(x_0, f)\right].$$

Тем самым доказательство теоремы 3.3 завершено.

Развитая в настоящем пункте методика позволяет оценить разность средних Рисса не только для функции из класса $L_2(G)$, но и для функций из других классов (например, для функции из класса Никольского $H_2^{\alpha}(G)$ с компактным носителем и с любым $\alpha > 0$).

§ 2. О риссовской равносуммируемости спектральных разложений в обобщенном смысле

В настоящем параграфе мы изучим средние Рисса любого положительного порядка s спектральных разложений, отвечающих двум произвольным самосопряженным неотрицательным расширениям оператора Лапласа в произвольной области G пространства E^N. Мы докажем, что разность средних Рисса порядка $s>0$ двух указанных спектральных разложений для произвольной функции из класса $L_2(G)$ не только стремится к нулю почти всюду в области G, но и имеет почти в каждой точке G порядок $o(\lambda^{-s/2})$, где λ — размер рассматриваемых средних Рисса.

1. Формулировка результатов. Рассмотрим два совершенно произвольных самосопряженных неотрицательных расширения $\widehat{A}'$ и $\widehat{A}''$ оператора Лапласа в области G и отвечающие этим двум расширениям два произвольных упорядоченных спектральных представления пространства $L_2(G)$*): первое — со спектральной мерой $\rho'(t)$, множествами кратности e_i', фундаментальными функциями $u_i'(x, t)$, $i=1, 2, \ldots, m'$, и кратностью $m'\leqslant\infty$; второе — со спектральной мерой $\rho''(t)$, множествами кратности e_i'', фундаментальными функциями $u_i''(x, t)$, $i=1, 2, \ldots, m''$, и кратностью $m''\leqslant\infty$.

Обозначим символами $\widehat{f}_i'(t)$ и соответственно $\widehat{f}_i''(t)$ образы Фурье произвольной функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ относительно фундаментальных функций $u_i'(x, t)$ и соответственно $u_i''(x, t)$ и составим для указанной произвольной функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ средние Рисса размера λ порядка $s>-1/2$, отвечающие рассматриваемым двум расширениям. Они по определению имеют вид

$$\overset{s}{\sigma}{}_\lambda'(x, f)=\sum_{i=1}^{m'}\int_0^\lambda \widehat{f}_i'(t)\, u_i'(x, t)\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho'(t), \tag{3.2.1}$$

$$\overset{s}{\sigma}{}_\lambda''(x, f)=\sum_{i=1}^{m''}\int_0^\lambda \widehat{f}_i''(t)\, u_i''(x, t)\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho''(t). \tag{3.2.2}$$

Теорема 3.4. *Для двух совершенно произвольных самосопряженных неотрицательных расширений $\widehat{A}'$ и $\widehat{A}''$ оператора Лапласа в произвольной N-мерной области G и произвольной функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ для разности средних Рисса* (3.2.1) *и* (3.2.2) *размера λ порядка $s>0$ для всех достаточно больших $\lambda>0$ почти всюду в области G справедлива оценка*

$$\left|\overset{s}{\sigma}{}_\lambda'(x, f)-\overset{s}{\sigma}{}_\lambda''(x, f)\right|=o\left(\lambda^{-s/2}\right). \tag{3.2.3}$$

*) Существование указанных упорядоченных спектральных представлений обеспечивается теоремой Гординга — Браудера — Маутнера (см. п. 2 § 1 главы 2).

Если же дополнительно потребовать, чтобы функция $f(x)$ не только принадлежала классу $L_2(G)$, но и обращалась в нуль почти всюду в некоторой содержащейся в G области D, то для каждого из средних Рисса (3.2.1) и (3.2.2) размера λ порядка $s>0$ для всех достаточно больших $\lambda>0$ почти всюду в D будут справедливы оценки

$$\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f) = o\left(\lambda^{-s/2}\right), \quad \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x, f) = o\left(\lambda^{-s/2}\right). \tag{3.2.3$'$}$$

2. Доказательство вспомогательных утверждений. Доказательству теоремы 3.4 предпошлем доказательства нескольких вспомогательных утверждений.

Как и в гл. 2, будем обозначать символом $C_0^\infty(G)$ множество функций, имеющих в области G компактный носитель и обладающих в этой области непрерывными частными производными как угодно высокого порядка, а символом G_R — подмножество точек области G, отстоящих от границы G на расстояние, большее числа $R>0$.

Фиксируем произвольное число $R>0$, произвольную точку x из множества G_R и обозначим через r произвольное число из сегмента $0\leqslant r\leqslant R$. Как и в § 5 гл. 2, рассмотрим для произвольной функции $f(x)$ из класса $C_0^\infty(G)$ среднее значение этой функции на поверхности N-мерной сферы радиуса r с центром в точке x, обозначив его символом $\Psi_x(r, f) = \Psi_x(r)$, т. е. положим

$$\Psi_x(r) = \omega_N^{-1} \int\limits_{\omega}\!\!\ldots\!\!\int f(x+r\omega)\, d\omega, \tag{3.2.4}$$

где символом $\int\limits_{\omega}\!\!\ldots\!\!\int f(x+r\omega)\, d\omega$, как и выше, обозначен интеграл от функции f по всем углам на поверхности N-мерной сферы радиуса r с центром в точке x, а символом ω_N обозначена площадь поверхности N-мерной сферы единичного радиуса, равная $2\pi^{N/2}\left[\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\right]^{-1}$.

Как и в § 5 гл. 2, с помощью среднего значения (3.2.4) введем в рассмотрение функцию

$$F(r) = F_x(r) = r^{N-1}\Psi_x(r) \tag{3.2.5}$$

и обозначим символом $\mathscr{D}F(r)$ операцию

$$\mathscr{D}F(r) = \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}F(r)\right], \tag{3.2.6}$$

а символом $\mathscr{D}^n F(r)$ — результат повторного n-кратного применения операции $\mathscr{D}$. Условимся формально считать, что $\mathscr{D}^0F(r)\equiv \equiv F(r)$.

Лемма 3.3. *Для произвольной функции $f(x)$ из класса $C_0^\infty(G)$, произвольного достаточно малого $R>0$, произвольной точки x множества G_R и произвольного номера n, удовлетворяю-*

щего условию $n \leqslant (N+1)/2$, каждое из разложений

$$(2\pi)^{\frac{N}{2}} R^{\frac{N}{2}-n+1} \omega_N^{-1} \sum_{i=1}^{m'} \int_0^\infty \widehat{f}'_i(t)\, u'_i(x, t)\, t^{\frac{n}{2}-\frac{N}{4}} \mathscr{J}_{\frac{N}{2}-n}\left(R\sqrt{t}\right) d\rho'(t), \tag{3.2.7}$$

$$(2\pi)^{\frac{N}{2}} R^{\frac{N}{2}-n+1} \omega_N^{-1} \sum_{i=1}^{m''} \int_0^\infty \widehat{f}''_i(t)\, u''_i(x, t)\, t^{\frac{n}{2}-\frac{N}{4}} \mathscr{J}_{\frac{N}{2}-n}\left(R\sqrt{t}\right) d\rho''(t) \tag{3.2.8}$$

сходится к значению $\mathscr{D}^{n-1}F_x(R)$, где символ $F_x(R)$ обозначает функцию (3.2.5), а символ $\mathscr{D}$ обозначает операцию (3.2.6).

Заметим, что утверждение леммы 3.3 уже доказано нами при проведении доказательства леммы 2.11 в п. 3 § 5 гл. 2 *).

Лемма 3.4. *Для любого $s > -1/2$, любого достаточно малого $R > 0$ и любой функции $f(x)$ из класса $C_0^\infty(G)$ для средних Рисса* (3.2.1) *и* (3.2.2) *любых двух самосопряженных неотрицательных расширений $\widehat{A}'$ и $\widehat{A}''$ оператора Лапласа в произвольной N-мерной области G справедлива оценка*

$$\int_{G_R} \int_0^\lambda \lambda^{s-\frac{1}{2}} \left| \overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x, f) \right|^2 dx\, d\lambda \leqslant C \, \| f \|_{L_2(G)} \tag{3.2.9}$$

с постоянной C, зависящей лишь от $R > 0$, $s > -1/2$ и размерности N.

Доказательство леммы 3.4. Прежде всего заметим, что достаточно рассмотреть случай произвольной области нечетного числа измерений N. Действительно, если для произвольной области нечетного числа измерений лемма 3.4 будет доказана, то для произвольной области G четного числа измерений N мы построим цилиндрическую область $\widetilde{G}$ нечетного числа $(N+1)$ измерений, равную произведению области G на отрезок $-\pi \leqslant x_{N+1} \leqslant \pi$, и рассмотрим на этом отрезке самосопряженное неотрицательное расширение A_0 оператора $-d^2/dx_{N+1}^2$, отвечающее разложению в тригонометрический ряд Фурье. Для двух произвольных самосопряженных неотрицательных расширений $\widehat{A}'$ и $\widehat{A}''$ оператора Лапласа $-\Delta_N$ в области G рассмотрим те два самосопряженных неотрицательных расширения $\widetilde{A}'$ и $\widetilde{A}''$ оператора Лапласа $-\Delta_{N+1}$ в цилиндрической области $\widetilde{G}$, которые получаются объединением расширения $\widehat{A}'$ или соответственно $\widehat{A}''$ с расширением A_0. Остается заметить, что для произвольной функции f, зависящей только от $x_1, x_2, \ldots, x_N$ и не зависящей от x_{N+1}, средние Рисса расширений $\widehat{A}'$ и $\widehat{A}''$ совпадают со средними Рисса расширений $\widetilde{A}'$ и $\widetilde{A}''$ соответственно.

Итак, не ограничивая общности рассуждений, будем рассматривать два произвольных самосопряженных неотрицательных

*) Действительно, в п. 3 § 5 главы 2 установлено, что выражение, стоящее в равенстве (2.5.123) в фигурных скобках, равно нулю для каждого номера n, удовлетворяющего неравенству $n \leqslant (N+1)/2$.

расширения $\widehat{A}'$ и $\widehat{A}''$ оператора Лапласа в произвольной области G нечетного числа N измерений. Взяв два произвольных упорядоченных спектральных представления пространства $L_2(G)$ относительно расширений $\widehat{A}'$ и $\widehat{A}''$, сохраняя принятые в начале п. 1 обозначения, оценим разность средних Рисса (3.2.1) и (3.2.2), считая, что R — произвольное достаточно малое положительное число, а x — произвольная фиксированная точка множества G_R.

Ради определенности проведем дальнейшие рассуждения для расширения $\widehat{A}'$, ибо для расширения $\widehat{A}''$ они проводятся аналогично.

Вычисляя образ Фурье $\widehat{v}'_i(x, t)$ функции

$$\overset{\lambda}{v}(|x-y|)=\begin{cases} 2^s\cdot\Gamma(s+1)(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}|x-y|^{-\frac{N}{2}-s}\mathscr{J}_{\frac{N}{2}+s}\left(|x-y|\sqrt{\lambda}\right) & \text{при } |x-y|\leqslant R,\\ 0 & \text{при } |x-y|>R\end{cases}$$

относительно фундаментальной функции $u'_i(x, t)$ и используя формулу среднего значения (2.3.1) из п. 1 § 3 гл. 2, мы в силу равенства (2.3.2) из того же пункта придем к следующему соотношению:

$$\widehat{v}'_i(x, t)=$$
$$=2^s\Gamma(s+1)u'_i(x, t)\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}t^{\frac{2-N}{4}}\int_0^R\mathscr{J}_{\frac{N}{2}+s}\left(r\sqrt{\lambda}\right)\mathscr{J}_{\frac{N}{2}-1}\left(r\sqrt{t}\right)r^{-s}dr,$$
$$(i=1, 2, \ldots, m'). \tag{3.2.10}$$

Подвергая интеграл, стоящий в правой части (3.2.10), $(N-1)/2$-кратному интегрированию по частям, основанному на использовании рекуррентных соотношений

$$\int r^{-\nu}\mathscr{J}_{\nu+1}\left(r\sqrt{\lambda}\right)dr=-\left(\sqrt{\lambda}\right)^{-1}r^{-\nu}\mathscr{J}_\nu\left(r\sqrt{\lambda}\right),$$
$$\frac{d}{dr}\left[r^\nu\mathscr{J}_\nu\left(r\sqrt{t}\right)\right]=r^\nu\sqrt{t}\,\mathscr{J}_{\nu-1}\left(r\sqrt{t}\right),$$

и учитывая обращение в нуль всех подстановок при $r=0$, придем к соотношению

$$\widehat{v}'_i(x, t)=-2^s\Gamma(s+1)\times$$
$$\times u'_i(x, t)\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}\right)^{\frac{N}{2}-s-n}\left(\sqrt{t}\right)^{n-\frac{N}{2}}\mathscr{J}_{\frac{N}{2}+s-n}\left(R\sqrt{\lambda}\right)\mathscr{J}_{\frac{N}{2}-n}\left(R\sqrt{t}\right)R^{-s}+$$
$$+2^s\Gamma(s+1)u'_i(x, t)\left(\sqrt{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}-s}\left(\sqrt{t}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^R\mathscr{J}_{\frac{1}{2}+s}\left(r\sqrt{\lambda}\right)\mathscr{J}_{-\frac{1}{2}}\left(r\sqrt{t}\right)r^{-s}\,dr$$
$$(i=1, 2, \ldots, m'). \tag{3.2.11}$$

Умножая обе части (3.2.11) на образ Фурье $\widehat{f}_i'(t)$ произвольной функции $f(x)$ из класса $C_0^\infty(G)$, интегрируя полученное при этом равенство по спектральной мере $\rho'(t)$ в пределах по t от 0 до ∞ и затем суммируя его по всем номерам i от 1 до m', получим соотношение

$$\sum_{i=1}^{m'}\int_0^\infty \widehat{f}_i'(t)\,\widehat{v}_i'(t)\,d\rho'(t) =$$

$$= -2^s\Gamma(s+1)(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\omega_N \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}-\frac{n}{2}} R^{n-\frac{N}{2}-1-s}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s-n}(R\sqrt{\lambda})\times$$

$$\times\left\{(2\pi)^{\frac{N}{2}} R^{\frac{N}{2}-n+1}\omega_N^{-1}\sum_{i=1}^{m'}\int_0^\infty \widehat{f}_i'(t)\,u_i'(x,t)\sqrt{t}^{\,n-\frac{N}{2}}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}-n}(R\sqrt{t})\,d\rho'(t)\right\}+$$

$$+2^s\Gamma(s+1)\lambda^{-\frac{s}{2}}\sum_{i=1}^{m'}\int_0^\infty \widehat{f}_i'(t)\,u_i'(x,t)\times$$

$$\times\left[\lambda^{\frac{1}{4}}t^{\frac{1}{4}}\int_0^R \mathcal{J}_{\frac{1}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{-\frac{1}{2}}(r\sqrt{t})\,r^{-s}dr\right]d\rho'(t). \quad (3.2.12)$$

Заметим теперь, что так как обе функции $f(y)$ и $\overset{\lambda}{v}(|x-y|)$ во всяком случае принадлежат классу $L_2(G)$, то в силу равенства Парсеваля *)

$$\sum_{i=1}^{m'}\int_0^\infty \widehat{f}_i'(t)\,\widehat{v}_i'(x,t)\,d\rho'(t) = \int_G \overset{\lambda}{v}(|x-y|)\,f(y)\,dy. \quad (3.2.13)$$

Далее в силу леммы 3.3 выражение, стоящее в (3.2.12) в фигурных скобках, равно

$$\left\{(2\pi)^{\frac{N}{2}} R^{\frac{N}{2}-n+1}\omega_N^{-1}\sum_{i=1}^{m'}\int_0^\infty \widehat{f}_i'(t)\,u_i'(x,t)\left(\sqrt{t}\right)^{n-\frac{N}{2}}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}-n}(R\sqrt{t})\,d\rho'(t)\right\}=$$

$$= \mathcal{D}^{n-1}F_x(R). \quad (3.2.14)$$

Наконец, интеграл, стоящий в (3.1.12) в квадратных скобках, подвергнем преобразованию вида $\int_0^R = \int_0^\infty - \int_R^\infty$. Обозначая при этом символом $I_t^\lambda(R)$ величину

$$I_t^\lambda(R) = \begin{cases} \lambda^{1/4}t^{1/4}\int_R^\infty \mathcal{J}_{\frac{1}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{-\frac{1}{2}}(r\sqrt{t})\,r^{-s}dr & \text{при } t\neq\lambda, \\ \lambda^{1/4}t^{1/4}\int_0^R \mathcal{J}_{\frac{1}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{-\frac{1}{2}}(r\sqrt{t})\,r^{-s}dr & \text{при } t=\lambda \end{cases}$$

(3.2.15)

*) См. равенство (2.1.10) из п. 2 § 1 гл. 2.

и учитывая, что при $\lambda \neq t$ для любого $s > -1$ имеет место соотношение *)

$$2^s \Gamma(s+1) \lambda^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} t^{\frac{1}{4}} \int_0^\infty \mathcal{J}_{\frac{1}{2}+s}(r\sqrt{\lambda}) \mathcal{J}_{-\frac{1}{2}}(r\sqrt{t}) r^{-s} dr = \\ = \begin{cases} \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s & \text{при } t<\lambda, \\ 0 & \text{при } t>\lambda, \end{cases} \tag{3.2.16}$$

получим из сопоставления соотношений (3.2.12) — (3.2.16) с использованием обозначения (3.2.1) следующее равенство:

$$\int_G v(|x-y|) f(y)\,dy = \\ = -2^s\Gamma(s+1)(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \omega_N \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}-\frac{n}{2}} R^{n-\frac{N}{2}-1-s} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s-n}(R\sqrt{\lambda}) \times \\ \times \mathcal{D}^{n-1} F_x(R) + \overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f) - \\ -2^s\Gamma(s+1)\lambda^{-\frac{s}{2}} \sum_{i=1}^{m'} \int_0^\infty \widehat{f}'_i(t)\, u'_i(x, t)\, I_t^\lambda(R)\, d\rho'(t). \tag{3.2.17}$$

Совершенно аналогично для второго расширения $\widehat{A}''$ устанавливается равенство

$$\int_G v(|x-y|) f(y)\,dy = \\ = -2^s\Gamma(s+1)(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \omega_N \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}-\frac{n}{2}} R^{n-\frac{N}{2}-1-s} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s-n}(R\sqrt{\lambda}) \times \\ \times \mathcal{D}^{n-1} F_x(R) + \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x, f) - \\ -2^s\Gamma(s+1)\lambda^{-\frac{s}{2}} \sum_{i=1}^{m''} \int_0^\infty \widehat{f}''_i(t)\, u''_i(x, t)\, I_t^\lambda(R)\, d\rho''(t). \tag{3.2.18}$$

Вычитая из равенства (3.2.17) равенство (3.2.18), придем к следующему соотношению:

$$\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x, f) = \\ = 2^s\Gamma(s+1)\lambda^{-\frac{s}{2}} \left[\sum_{i=1}^{m'} \int_0^\infty \widehat{f}'_i(t)\, u'_i(x, t)\, I_t^\lambda(R)\, d\rho'(t) - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^{m''} \int_0^\infty \widehat{f}''_i(t)\, u''_i(x, t)\, I_t^\lambda(R)\, d\rho''(t) \right], \tag{3.2.19}$$

*) См., например, Г. Бейтмен, А. Эрдейи [1, с. 107, формула 34].

справедливому для любой точки x множества G_R. Из соотношения (3.2.19) в свою очередь вытекает, что

$$\int\limits_{G_R}\int\limits_0^\infty \lambda^{s-\frac{1}{2}}\left|\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f)-\overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x, f)\right|^2 dx\,d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2s+1}\Gamma^2(s+1)\int\limits_0^\infty\left\{\int\limits_G\left[\sum_{i=1}^{m'}\int\limits_0^\infty \widehat{f}'_i(t)\,u'_i(x, t)\,I_t^\lambda(R)\,d\rho'(t)\right]^2 dx\right\}\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}+$$

$$+2^{2s+1}\Gamma^2(s+1)\int\limits_0^\infty\left\{\int\limits_G\left[\sum_{i=1}^{m''}\int\limits_0^\infty \widehat{f}''_i(t)\,u''_i(x, t)\,I_t^\lambda(R)\,d\rho''(t)\right]^2 dx\right\}\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} \tag{3.2.20}$$

Используя для выражений в правой части (3.2.20), заключенных в фигурные скобки, равенство Парсеваля (см. равенство (2.1.11) из п. 2 § 1 гл. 2) и затем меняя порядок интегрирования относительно t и λ, получим

$$\int\limits_{G_R}\int\limits_0^\infty \lambda^{s-\frac{1}{2}}\left|\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f)-\overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x, f)\right|^2 dx\,d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2s+1}\Gamma^2(s+1)\int\limits_0^\infty\left\{\sum_{i=1}^{m'}\int\limits_0^\infty\left|\widehat{f}'_i(t)\,I_t^\lambda(R)\right|^2 d\rho'(t)\right\}\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}+$$

$$+2^{2s+1}\Gamma^2(s+1)\int\limits_0^\infty\left\{\sum_{i=1}^{m''}\int\limits_0^\infty\left|\widehat{f}''_i(t)\,I_t^\lambda(R)\right|^2 d\rho''(t)\right\}\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}\leqslant$$

$$\leqslant 2^{2s+2}\Gamma^2(s+1)\sum_{i=1}^{m'}\int\limits_0^\infty\left|\widehat{f}'_i(t)\right|^2\left\{\int\limits_0^\infty\left[I_t^\lambda(R)\right]^2 d\left(\sqrt{\lambda}\right)\right\}d\rho'(t)+$$

$$+2^{2s+2}\Gamma^2(s+1)\sum_{i=1}^{m''}\int\limits_0^\infty\left|\widehat{f}''_i(t)\right|^2\left\{\int\limits_0^\infty\left[I_t^\lambda(R)\right]^2 d\left(\sqrt{\lambda}\right)\right\}d\rho''(t). \tag{3.2.21}$$

Если будет установлена равномерная по t на полупрямой $0\leqslant t<\infty$ оценка

$$\int\limits_0^\infty\left[I_t^\lambda(R)\right]^2 d\left(\sqrt{\lambda}\right)\leqslant C_1, \tag{3.2.22}$$

то с помощью этой оценки и равенства Парсеваля мы получим, что правая часть (3.2.21) не превосходит величины

$$8\cdot 2^{2s}\Gamma^2(s+1)\,C_1\,\|f\|^2_{L_2(G)},$$

и доказательство леммы 3.4 будет завершено.

Таким образом, для завершения доказательства леммы 3.4 достаточно доказать следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.5. *Для величины* (3.2.15) *при любом* $s > -1/2$ *равномерно по* t *на полупрямой* $0 \leqslant t < \infty$ *справедлива оценка* (3.2.22).

Доказательство леммы 3.5 проведем в два шага.

1°. *Сначала докажем, что для величины* (3.2.15) *при фиксированных* $R > 0$ *и* $s > -1$ *и при любых неотрицательных* λ *и* t *справедливы следующие две оценки:*

а) *в случае* $|\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}| \geqslant 1$ *и любого* $s > -1$

$$|I_t^\lambda(R)| = O\left(|\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}|^{-1}\right); \tag{3.2.23}$$

б) *в случае* $0 < |\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}| < 1$

$$|I_t^\lambda(R)| = \begin{cases} O(1) & \text{при} \quad s \geqslant 0, \\ O\left(|\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}|^s\right) & \text{при} \quad -1 < s < 0. \end{cases} \tag{3.2.24}$$

Для полного доказательства сформулированного утверждения достаточно для некоторого фиксированного числа $C > 0$ установить: а) оценку (3.2.23) при условии, что хотя бы одно из чисел $\sqrt{t}$ и $\sqrt{\lambda}$ превосходит C; б) оценку (3.2.24) при условии, что оба числа $\sqrt{t}$ и $\sqrt{\lambda}$ отличны друг от друга и не превосходят C; в) оценку (3.2.24) при условии, что оба числа $\sqrt{t}$ и $\sqrt{\lambda}$ превосходят C *).

а) Сначала убедимся в справедливости оценки (3.2.23) при условии, что хотя бы одно из чисел $\sqrt{t}$ и $\sqrt{\lambda}$ превосходит некоторое фиксированное число $C > 0$ и при выполнении неравенства $|\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}| \geqslant 1$. Если $C \geqslant 2$, то оба числа $\sqrt{t}$ и $\sqrt{\lambda}$ превосходят число $C - 1 \geqslant 1$, а при этих предположениях в силу п. 2 § 4 гл. 2 справедлива оценка (2.4.10′), которая при $\nu = 1/2$ переходит в оценку (3.2.23).

б) Установим теперь справедливость оценки (3.2.24) при условии, что оба числа $\sqrt{t}$ и $\sqrt{\lambda}$ отличны друг от друга и не превосходят C.

Прежде всего заметим, что при $s > 0$ оценка (3.2.24) тривиально вытекает из справедливого для любого $\nu \geqslant -1/2$ и для всех $x \geqslant 0$ неравенства $|\mathcal{J}_\nu(x)| \leqslant C(\nu) x^{-1/2}$, уже много раз приводившегося выше. Действительно, из приведенного неравенства и из выражения (3.2.15) вытекает, что

$$|I_t^\lambda(R)| \leqslant C_1 \int\limits_R^\infty r^{-1-s} dr = C \frac{R^{-s}}{s} = O(1). \tag{3.2.25}$$

---

*) Это вытекает из того, что при $1/C \leqslant |\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}| \leqslant C$ оценки (3.2.23) и (3.2.24) эквивалентны друг другу.

Остается установить соотношение (3.2.24) для отличных друг от друга и не превосходящих C чисел $\sqrt{t}$ и $\sqrt{\lambda}$ в случае, когда $-1 < s \leqslant 0$.

В этом случае из соотношений (3.2.15) и (3.2.16) при $\sqrt{t} \neq \neq \sqrt{\lambda}$ заключаем, что

$$I_t^\lambda(R) + \lambda^{1/4}t^{1/4}\int_0^R \mathscr{J}_{\frac{1}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\,\mathscr{J}_{-\frac{1}{2}}(r\sqrt{t})\,r^{-s}dr =$$

$$= \begin{cases} \left[2^s\Gamma(s+1)\right]^{-1}\lambda^{s/2}\left(1-\dfrac{t}{\lambda}\right)^s & \text{при} \quad \sqrt{t} < \sqrt{\lambda}, \\ 0 & \text{при} \quad \sqrt{t} > \sqrt{\lambda}. \end{cases} \qquad (3.2.26)$$

Так как при $-1 < s \leqslant 0$ и $0 \leqslant \sqrt{t} < \sqrt{\lambda}$ справедливо неравенство

$$\lambda^{s/2}(1 - t/\lambda)^s \leqslant (\sqrt{\lambda} - \sqrt{t})^s,$$

то в силу равенства (3.2.26) для установления оценки (3.2.24) при $-1 < s \leqslant 0$ достаточно доказать, что при $\sqrt{t} \leqslant C$, $\sqrt{\lambda} \leqslant C$ справедлива оценка

$$\lambda^{1/4}t^{1/4}\int_0^R \mathscr{J}_{\frac{1}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\,\mathscr{J}_{-\frac{1}{2}}(r\sqrt{t})\,r^{-s}dr = O(1). \qquad (3.2.27)$$

Для установления последней оценки заметим, что так как неотрицательные аргументы обеих бесселевых функций, стоящих в (3.2.27) под знаком интеграла, не превосходят числа CR, то для модулей указанных бесселевых функций справедлива оценка $|\mathscr{J}_\nu(x)| \leqslant C(\nu)x^\nu$. С помощью этой оценки получим, что

$$\left|\lambda^{1/4}t^{1/4}\int_0^R \mathscr{J}_{\frac{1}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\mathscr{J}_{-\frac{1}{2}}(r\sqrt{t})r^{-s}dr\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\frac{1}{2}+s\right)C\left(-\frac{1}{2}\right)(\sqrt{\lambda})^{1+s}R = O(1).$$

Тем самым вывод оценки (3.2.24) для любых $\sqrt{t}$ и $\sqrt{\lambda}$, отличных друг от друга и не превосходящих C, полностью завершен.

в) Остается установить оценку (3.2.24) в случае, когда оба числа $\sqrt{t}$ и $\sqrt{\lambda}$ превосходят C и удовлетворяют условию $0 < < |\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}| < 1$.

Случай $s > 0$ рассмотрения не требует, ибо справедливость оценки (3.2.24) в этом случае вытекает из установленного выше соотношения (3.2.25).

Рассмотрим случай $-1 < s \leqslant 0$. Пользуясь точным выражением для $\mathscr{J}_{-1/2}(x)$ и асимптотической формулой при $x \geqslant 1$ для

$\mathcal{J}_{1/2+s}(x)$, получим, что интеграл (3.2.15) равен *)

$$I_t^\lambda(R)=\frac{2}{\pi}\int_R^\infty r^{-1-s}\sin\left(r\sqrt{\lambda}-\frac{\pi s}{2}\right)\cos\left(r\sqrt{t}\right)dr+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\int_R^\infty r^{-2-s}dr. \tag{3.2.28}$$

Так как $\sqrt{\lambda}\geqslant C$, $s>-1$, то второе слагаемое в правой части (3.2.28) равно $O(1)$ и тем более равно $O(|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|^s)$. Первое же слагаемое в правой части (3.2.28) может быть переписано в виде

$$\frac{2}{\pi}\int_R^\infty r^{-1-s}\sin\left(r\sqrt{\lambda}-\frac{\pi s}{2}\right)\cos\left(r\sqrt{t}\right)dr=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\int_R^\infty r^{-1-s}\sin\left(r\sqrt{\lambda}\right)\cos\left(r\sqrt{t}\right)dr-$$

$$-\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\int_R^\infty r^{-1-s}\cos\left(r\sqrt{\lambda}\right)\cos\left(r\sqrt{t}\right)dr=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\left\{\int_R^\infty r^{-1-s}\sin\left[\left(\sqrt{\lambda}-\sqrt{t}\right)r\right]dr+\right.$$

$$\left.+\int_R^\infty r^{-1-s}\sin\left[\left(\sqrt{\lambda}+\sqrt{t}\right)r\right]dr\right\}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\left\{\int_R^\infty r^{-1-s}\cos\left[\left(\sqrt{\lambda}-\sqrt{t}\right)r\right]dr+\right.$$

$$\left.+\int_R^\infty r^{-1-s}\cos\left[\left(\sqrt{\lambda}+\sqrt{t}\right)r\right]dr\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\left\{\left|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}\right|^s\operatorname{sgn}\left(\sqrt{\lambda}-\sqrt{t}\right)\int_{R|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|}^\infty \rho^{-1-s}\sin\rho\,d\rho+\right.$$

$$\left.+\left(\sqrt{\lambda}+\sqrt{t}\right)^s\int_{R(\sqrt{\lambda}+\sqrt{t})}^\infty \rho^{-1-s}\sin\rho\,d\rho\right\}-$$

---

*) Имеются в виду соотношение $\mathcal{J}_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$ и асимптотическая формула $\mathcal{J}_{1/2+s}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi s}{2}\right)+O\left(x^{-3/2}\right)$ (см., например, Г. Бейтмен, А. Эрдейи, [1, с. 98, формула (3)]).

$$-\frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\left\{|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|^s \int\limits_{R(\sqrt{\lambda}-\sqrt{t})}^{\infty} \rho^{-1-s}\cos\rho\, d\rho + \right.$$

$$\left. + (\sqrt{\lambda}+\sqrt{t})^s \int\limits_{R(\sqrt{\lambda}+\sqrt{t})}^{\infty} \rho^{-1-s}\cos\rho\, d\rho\right\}, \quad (3.2.29)$$

причем при $s=0$ члены в правой части (3.2.29), содержащие в качестве множителя $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$, равны нулю.

Так как $-1<s\leqslant 0$, то из соотношения (3.2.29) сразу же вытекает, что

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{R}^{\infty} r^{-1-s}\sin\left(r\sqrt{\lambda}-\frac{\pi s}{2}\right)\cos(r\sqrt{t})\,dr = O(|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|^s).$$

Тем самым и для этого случая оценка (3.2.24) нами доказана.

Доказательство оценок (3.2.23) и (3.2.24) полностью завершено.

2°. Докажем теперь основное утверждение леммы 3.5 о справедливости равномерной по t на полупрямой $0\leqslant t<\infty$ оценки (3.2.22) при любом фиксированном $s>-1/2$.

Разобьем интеграл, стоящий в левой части (3.2.22), на сумму двух интегралов:

$$\int\limits_{0}^{\infty} |I_t^\lambda(R)|^2 d(\sqrt{\lambda}) =$$

$$= \int\limits_{|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\geqslant 1} |I_t^\lambda(R)|^2 d(\sqrt{\lambda}) + \int\limits_{|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|<1} |I_t^\lambda(R)|^2 d(\sqrt{\lambda}). \quad (3.2.30)$$

Привлекая для оценки первого из интегралов в правой части (3.2.30) соотношение (3.2.23), а для оценки второго из интегралов в правой части (3.2.30) — соотношение (3.2.24), получим *)

$$\int\limits_{|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\geqslant 1} |I_t^\lambda(R)|^2 d(\sqrt{\lambda}) \leqslant C_1 \int\limits_{|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\geqslant 1} |\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|^{-2} d(\sqrt{\lambda}) \leqslant$$

$$\leqslant 2C_1\int\limits_{1}^{\infty}\tau^{-2}d\tau = C_2, \quad (3.2.31)$$

$$\int\limits_{|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|<1} |I_t^\lambda(R)|^2 d(\sqrt{\lambda}) \leqslant$$

*) В дальнейшем мы обозначаем символ C_1, C_2, ... постоянные, зависящие лишь от s и R.

$$\leqslant \begin{cases} C_3 \int\limits_{|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant 1} d(\sqrt{\lambda}) \leqslant 2C_3 & \text{при } s \geqslant 0, \\ C_4 \int\limits_{|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant 1} |\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|^{2s} d(\sqrt{\lambda}) \leqslant 2C_4 \int\limits_0^1 \tau^{2s} d\tau = C_5 & \text{при } -\frac{1}{2} < s < 0. \end{cases} \tag{3.2.32}$$

Из сопоставления соотношений (3.2.30) — (3.2.32) вытекает справедливость равномерной по t на полупрямой $0 \leqslant t < \infty$ оценки (3.2.22).

Лемма 3.5 полностью доказана.

Лемма 3.6. *Для любого* $s > -1/2$, *любого достаточно малого* $R > 0$ *и любой функции* $f(x)$, *принадлежащей только классу* $L_2(G)$, *для средних Рисса* (3.2.1) *и* (3.2.2) *любых двух самосопряженных неотрицательных расширений* $\widehat{A}'$ *и* A'' *оператора Лапласа в произвольной* N*-мерной области* G *остается справедливой оценка* (3.2.9) *с постоянной* C, *зависящей только от* $R > 0$, $s > -1/2$ *и размерности* N.

Доказательство. Достаточно доказать, что для произвольного $\Lambda \geqslant 1$ и произвольной функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{G_R} \int\limits_0^{\Lambda} \lambda^{s-1/2} \left| \overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda}(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\lambda}(x, f) \right|^2 dx\, d\lambda \leqslant C_2 \|f\|^2_{L_2(G)} \tag{3.2.33}$$

с постоянной C_2, не зависящей от Λ и от f.

Заметим, что для произвольного $s > -1/2$, произвольной функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ и произвольного $\Lambda \geqslant 1$ найдется функция $f_1(x)$ из класса $C_0^{\infty}(G)$ такая, что

$$\|f - f_1\|_{L_2(G)} \leqslant (\sqrt{\Lambda})^{-s-\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2(G)}. \tag{3.2.34}$$

Из равенства $f_1 = (f_1 - f) + f$, из неравенства треугольника, из соотношения (3.2.34) и из того, что $\Lambda \geqslant 1$, $s + \frac{1}{2} > 0$, вытекает, что

$$\|f_1\|_{L_2(G)} \leqslant \|f_1 - f\|_{L_2(G)} + \|f\|_{L_2(G)} \leqslant 2\|f\|_{L_2(G)}. \tag{3.2.35}$$

Пользуясь неравенством $(A+B)^2 \leqslant 2A^2 + 2B^2$, оценим интеграл

$$\int\limits_{G_R} \int\limits_0^{\Lambda} \lambda^{s-\frac{1}{2}} \left| \overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda}(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\lambda}(x, f) \right|^2 dx\, d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int\limits_{G_R} \int\limits_0^{\Lambda} \lambda^{s-\frac{1}{2}} \left| \overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda}(x, f_1) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\lambda}(x, f_1) \right|^2 dx\, d\lambda +$$

$$+ 2 \int\limits_{G_R} \int\limits_0^{\Lambda} \lambda^{s-\frac{1}{2}} \left| \overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda}(x, f - f_1) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\lambda}(x, f - f_1) \right| dx\, d\lambda. \tag{3.2.36}$$

Так как для функции $f_1(x)$, принадлежащей классу $C_0^\infty(G)$, в силу леммы 3.4 справедлива оценка (3.2.9), то из этой оценки, из неравенств (3.2.35) и (3.2.36) и из уже упомянутого выше неравенства $(A+B)^2 \leqslant 2A^2+2B^2$ мы получим, что *)

$$\int_G \int_0^\Lambda \lambda^{s-\frac{1}{2}} \left| \overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x, f) \right|^2 dx\, d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant 8C\|f\|^2_{L_2(G)} + 2\int_{G_R}\int_0^\Lambda \lambda^{s-\frac{1}{2}} \left| \overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f-f_1) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x, f-f_1) \right|^2 dx\, d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant 8C\|f\|^2_{L_2(G)} + 4\int_G\int_0^\Lambda \lambda^{s-\frac{1}{2}} \left| \overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f-f_1) \right|^2 dx\, d\lambda +$$

$$+ 4\int_G\int_0^\Lambda \lambda^{s-\frac{1}{2}} \left| \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x, f-f_1) \right|^2 dx\, d\lambda. \qquad (3.2.37)$$

Оба интеграла в правой части (3.2.37) оцениваются стереотипно, и мы ограничимся оценкой первого из них.

Пользуясь выражением (3.2.1) для среднего Рисса и равенством Парсеваля, мы получим, что

$$\int_G\int_0^\Lambda \lambda^{s-\frac{1}{2}} \left| \overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f-f_1) \right|^2 dx\, d\lambda =$$

$$= \int_0^\Lambda \lambda^{s-\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{i=1}^{m'} \int_0^\lambda [(\widehat{f-f_1})'_i(t)]^2 \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{2s} d\rho'(t) \right\} d\lambda \qquad (3.2.38)$$

(при условии сходимости разложения, стоящего в правой части (3.2.38)).

Меняя в правой части (3.2.38) порядок интегрирования относительно t и λ, получим, что правая часть (3.2.38) равна

$$\sum_{i=1}^{m'} \int_0^\Lambda [(\widehat{f-f_1})'_i(t)]^2 \left\{ \int_t^\Lambda \lambda^{-s-1/2}(\lambda-t)^{2s} d\lambda \right\} d\rho'(t). \qquad (3.2.39)$$

Для вычисления интеграла, стоящего в (3.2.39) в фигурных скобках, рассмотрим отдельно случаи: 1) $s \geqslant 0$; 2) $-1/2 < s < 0$.

В первом случае интеграл в фигурных скобках мажорируется величиной

$$\int_t^\Lambda \lambda^{-1/2}(\lambda-t)^s d\lambda \leqslant \int_t^\Lambda \lambda^{s-1/2} d\lambda \leqslant \int_0^\Lambda \lambda^{s-1/2} d\lambda = \frac{\Lambda^{s+1/2}}{s+1/2}.$$

*) Здесь C — постоянная из оценки (3.2.9).

В случае $-1/2 < s < 0$ с помощью замены $\mu = \lambda - t$ интеграл, стоящий в (3.2.39) в фигурных скобках, преобразуется к виду

$$\int_0^{\Lambda-t} (\mu + t)^{-s-1/2}\mu^{2s} d\mu \leqslant \int_0^{\Lambda-t} \mu^{-s-1/2}\mu^{2s} d\mu \leqslant \int_0^{\Lambda} \mu^{s-1/2} d\mu = \frac{\Lambda^{s+1/2}}{s+1/2}.$$

Таким образом, в обоих случаях интеграл, стоящий в (3.2.39) в фигурных скобках, не превосходит величины $\Lambda^{s+1/2}(s+1/2)^{-1}$. Поэтому из (3.2.38) и (3.2.39), из равенства Парсеваля и из неравенства (3.2.34) мы получим неравенство

$$\int_G \int_0^{\Lambda} \lambda^{s-1/2} \left| \overset{s}{\sigma}{}'_\lambda (x, f - f_1) \right|^2 dx\, d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\Lambda^{s+1/2}}{s+1/2} \| f - f_1 \|^2_{L_2(G)} \leqslant (s + 1/2)^{-1} \| f \|_{L_2(G)}.$$

Совершенно аналогично устанавливается неравенство

$$\int_G \int_0^{\Lambda} \lambda^{s-1/2} \left| \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda (x, f - f_1) \right|^2 dx\, d\lambda \leqslant \left(s + \frac{1}{2} \right)^{-1} \| f \|_{L_2(G)}.$$

Из двух последних неравенств и из (3.2.37) вытекает справедливость доказываемой оценки (3.2.33) с постоянной C_2, равной $8C + 8(s+1/2)^{-1}$.

Лемма 3.6 доказана.

Лемма 3.7. *Для любого $s > 0$ для произвольной N-мерной области G и произвольной функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ найдется числовая последовательность $\{\overline{\lambda}_n\}$ такая, что $(n-1)^2 \leqslant \overline{\lambda}_n \leqslant n^2$ для всех номеров n, начиная с некоторого, и для средних Рисса (3.2.1) и (3.2.2) двух произвольных самосопряженных неотрицательных расширений $\widehat{A}'$ и $\widehat{A}''$ оператора Лапласа в области G почти для всех точек области G справедлива оценка*

$$\left| \overset{s}{\sigma}{}'_{\overline{\lambda}_n} (x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\overline{\lambda}_n} (x, f) \right| = o\left(\overline{\lambda}_n^{-s/2} \right). \tag{3.2.40}$$

Доказательство. В силу леммы 3.6 для любой функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ и для произвольного достаточно малого $R > 0$ сходится «двойной» интеграл, стоящий в левой части (3.2.9). Представляя этот интеграл в виде суммы интегралов

$$\int_{G_R} \int_0^{\infty} \lambda^{s-1/2} \left| \overset{s}{\sigma}{}'_\lambda (x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda (x, f) \right|^2 dx\, d\lambda =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)^2}^{n^2} \lambda^s \left\{ \int_{G_R} \left[\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda (x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda (x, f) \right]^2 dx \right\} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}, \tag{3.2.41}$$

применим к каждому из интегралов, стоящему в правой части (3.2.41) под знаком суммы, формулу среднего значения. Условием применимости формулы среднего значения является непрерывность по λ на каждом из сегментов $[(n-1)^2, n^2]$ функции, стоящей в фигурных скобках в правой части (3.2.41).

Обозначив эту последнюю функцию через $\Phi(\lambda)$, заметим, что нам достаточно доказать, что для любого фиксированного $\lambda \geqslant 1$ разность $\Phi(\lambda+\Delta\lambda)-\Phi(\lambda)$ стремится к нулю при $\Delta\lambda \to 0$.

Заметим, что

$$|\Phi(\lambda+\Delta\lambda)-\Phi(\lambda)| = \left| \int\limits_{G_R} \left[\overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda+\Delta\lambda}(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\lambda+\Delta\lambda}(x, f)\right]^2 dx - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{G_R} \left[\overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda}(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\lambda}(x, f)\right]^2 dx \right|.$$

Так как в силу соотношения $(A-B)^2 \leqslant 2A^2+2B^2$ и равенства Парсеваля при любом $s \geqslant 0$

$$\left\{\int\limits_{G_R} \left[\overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda+\Delta\lambda}(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\lambda+\Delta\lambda}(x, f)\right]^2 dx\right\}^{1/2} + \left\{\int\limits_{G} \left[\overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda}(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\lambda}(x, f)\right]^2 dx\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}\left\{\int\limits_{G} \left[\overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda+\Delta\lambda}(x, f)\right]^2 dx\right\}^{1/2} + \sqrt{2}\left\{\int\limits_{G} \left[\overset{s}{\sigma}{}''_{\lambda+\Delta\lambda}(x, f)\right]^2 dx\right\}^{1/2} +$$

$$+ \sqrt{2}\left\{\int\limits_{G} \left[\overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda}(x, f)\right]^2 dx\right\}^{1/2} + \sqrt{2}\left\{\int\limits_{G} \left[\overset{s}{\sigma}{}''_{\lambda}(x, f)\right]^2 dx\right\}^{1/2} \leqslant 4\sqrt{2}\,\|f\|_{L_2(G)},$$

то справедливо неравенство

$$|\Phi(\lambda+\Delta\lambda)-\Phi(\lambda)| \leqslant 4\sqrt{2}\,\|f\| \left| \left\{\int\limits_{G_R} \left[\overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda+\Delta\lambda}(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\lambda+\Delta\lambda}(x, f)\right]^2 dx\right\}^{1/2} - \right.$$

$$\left. - \left\{\int\limits_{G_R} \left[\overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda}(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\lambda}(x, f)\right]^2 dx\right\}^{1/2} \right|.$$

Используя в правой части неравенство треугольника для нормы в $L_2(G_R)$, получаем, что

$$|\Phi(\lambda+\Delta\lambda)-\Phi(\lambda)| \leqslant$$

$$\leqslant 4\sqrt{2}\,\|f\| \left\{\int\limits_{G_R} \left[\overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda+\Delta\lambda}(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\lambda+\Delta\lambda}(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda}(x, f) + \overset{s}{\sigma}{}''_{\lambda}(x, f)\right]^2 dx\right\}^{1/2}$$

и тем более

$$|\Phi(\lambda+\Delta\lambda)-\Phi(\lambda)| \leqslant 8\|f\| \left\{\int\limits_{G} \left[\overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda+\Delta\lambda}(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda}(x, f)\right]^2 dx\right\}^{1/2} +$$

$$+ 8\|f\| \left\{\int\limits_{G} \left[\overset{s}{\sigma}{}''_{\lambda+\Delta\lambda}(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\lambda}(x, f)\right]^2 dx\right\}^{1/2}. \quad (3.2.42)$$

Достаточно доказать, что для любого фиксированного $\lambda \geqslant 1$ каждая из фигурных скобок в (3.2.42) стремится к нулю при $\Delta\lambda \to 0$. Проведем доказательство только для первой из фигурных скобок, ибо для второй оно проводится аналогично. Достаточно заметить, что в силу равенства Парсеваля

$$\int_G \left[\overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda+\Delta\lambda}(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda}(x, f)\right]^2 dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{m'} \int_0^{\lambda-2|\Delta\lambda|} |\widehat{f}'_i(t)|^2 \left[\left(1 - \frac{t}{\lambda+\Delta\lambda}\right)^s - \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s\right]^2 d\rho'(t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m'} \int_{\lambda-2|\Delta\lambda|}^{\lambda+\Delta\lambda} |\widehat{f}'_i(t)|^2 \left(1 - \frac{t}{\lambda+\Delta\lambda}\right)^{2s} d\rho'(t) -$$

$$- \sum_{i=1}^{m'} \int_{\lambda-2|\Delta\lambda|}^{\lambda} |\widehat{f}'_i(t)|^2 \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{2s} d\rho'(t),$$

и учесть, что для всех t из сегмента $[0, \lambda - 2|\Delta\lambda|]$

$$\left[\left(1 - \frac{t}{\lambda+\Delta\lambda}\right)^s - \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s\right] = O\left(\frac{|\Delta\lambda|^s}{\lambda^{s+1}}\right),$$

для всех t из сегмента $[\lambda - 2|\Delta\lambda|, \lambda + \Delta\lambda]$

$$\left(1 - \frac{t}{\lambda+\Delta\lambda}\right)^s = O\left(\frac{|\Delta\lambda|^s}{\lambda^s}\right),$$

и, наконец, для всех t из сегмента $[\lambda - 2|\Delta\lambda|, \lambda]$

$$\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s = O\left(\frac{|\Delta\lambda|^s}{\lambda^s}\right).$$

Тем самым доказательство непрерывности по λ на каждом сегменте $[(n-1)^2, n^2]$ при $n > 1$ функции, стоящей в (3.2.41) в фигурных скобках, завершено.

Применяя формулу среднего значения к каждому стоящему под знаком суммы интегралу в правой части (3.2.41), получаем, что найдется значение $\bar{\lambda}_n$, удовлетворяющее неравенствам $(n-1)^2 \leqslant \bar{\lambda}_n \leqslant n^2$ и такое, что

$$\int_{(n-1)^2}^{n^2} \left\{\int_{G_R} \lambda^{s/2} \left(\left[\overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda}(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\lambda}(x, f)\right)\right]^2 dx\right\} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} =$$

$$= \int_{G_R} \left[\lambda_n^{-s/2} \left(\overset{s}{\sigma}{}'_{\bar{\lambda}_n}(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\bar{\lambda}_n}(x, f)\right)\right]^2 dx \int_{(n-1)^2}^{n^2} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} =$$

$$= 2 \int_{G_R} \left\{\bar{\lambda}_n^{s/2} \left[\overset{s}{\sigma}{}'_{\bar{\lambda}_n}(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\bar{\lambda}_n}(x, f)\right]\right\}^2 dx. \quad (3.2.43)$$

Из (3.2.9), (3.2.41) и (3.2.43) заключаем, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} \int_{G_R} \left[\bar{\lambda}_n^{s/2} \left(\overset{s}{\sigma}'_{\bar{\lambda}_n}(x, f) - \overset{s}{\sigma}''_{\bar{\lambda}_n}(x, f)\right)\right]^2 dx < \infty.$$

Из последнего неравенства и из известной теоремы Б. Леви вытекает, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\bar{\lambda}_n^{s/2} \left(\overset{s}{\sigma}'_{\bar{\lambda}_n}(x, f) - \overset{s}{\sigma}''_{\bar{\lambda}_n}(x, f)\right)\right]^2 \qquad (3.2.44)$$

сходится почти всюду на множестве G_R, а потому в силу произвольности $R > 0$ и почти всюду в области G. Необходимым условием сходимости ряда (3.2.44) почти всюду в области G и является справедливость для почти всех точек x области G оценки (3.2.40).

Лемма 3.7 доказана.

3. Непосредственное доказательство теоремы 3.4. Сначала проведем доказательство первого утверждения теоремы о справедливости для $s > 0$, для всех достаточно больших λ и для почти всех точек x области G оценки (3.2.3).

Будем использовать известное представление средних Рисса порядка s через средние Рисса более низкого порядка δ *):

$$\lambda^s \overset{s}{\sigma}_\lambda(x, f) = C(s, \delta) \int_0^\lambda (\lambda - t)^{s-\delta-1} t^\delta \overset{\delta}{\sigma}_t(x, f)\, dt, \qquad (3.2.45)$$

в котором $C(s, \delta) = \Gamma(s+1)\,[\Gamma(s-\delta)\,\Gamma(\delta+1)]^{-1}$, $s > \delta > -1$.

Из представления (3.2.45), в частности, вытекает, что при $s > 1/2$ справедливо соотношение

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\lambda^s \overset{s}{\sigma}_\lambda(x, f)\right] = \lambda^{s-1} \overset{s-1}{\sigma}_\lambda(x, f). \qquad (3.2.46)$$

Пусть λ и $\bar{\lambda}$ — два произвольных значения переменной λ такие, что $\lambda \geqslant \bar{\lambda} \geqslant 1$ и

$$\lambda - \bar{\lambda} \leqslant C\sqrt{\bar{\lambda}}$$

для некоторой фиксированной постоянной $C \geqslant 1$.

В силу леммы 3.7 для доказательства справедливости для почти всех точек x множества G_R оценки (3.2.3) достаточно доказать, что для двух указанных произвольных значений λ и $\bar{\lambda}$

---

*) Это соотношение элементарно проверяется: достаточно подставить в правую часть его $t^\delta \sigma_t^\delta = \int_0^\delta (t-\tau)^\delta S_\tau d\tau$, изменить порядок интегрирования относительно t и τ и учесть, что

$$\lambda^s \overset{s}{\sigma}_\lambda = \int_0^\lambda (\lambda - \tau)^s S_\tau d\tau.$$

почти всюду в G_R справедлива оценка *)

$$\lambda^s\left[\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x,f)-\overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x,f)\right]-\bar\lambda^s\left[\overset{s}{\sigma}{}'_{\bar\lambda}(x,f)-\overset{s}{\sigma}{}''_{\bar\lambda}(x,f)\right]=o\left(\lambda^{s/2}\right). \quad (3.2.47)$$

Для установления оценки (3.2.47) рассмотрим отдельно два случая: а) $s>1/2$; б) $0<s\leqslant 1/2$.

В случае $s>1/2$ проинтегрируем разность соотношений (3.2.46), записанных сначала для расширения $\widehat{A}'$, а затем для расширения $\widehat{A}''$, по переменной λ в пределах от $\bar\lambda$ до λ, где $\lambda\geqslant\bar\lambda$, $\lambda-\bar\lambda\leqslant C\sqrt{\lambda}$. В результате получим

$$\lambda^s\left[\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x,f)-\overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x,f)\right]-\bar\lambda^s\left[\overset{s}{\sigma}{}'_{\bar\lambda}(x,f)-\overset{s}{\sigma}{}''_{\bar\lambda}(x,f)\right]=$$
$$=\int\limits_{\bar\lambda}^{\lambda}t^{s-1}\left[\overset{s-1}{\sigma}{}'_t(x,f)-\overset{s-1}{\sigma}{}''_t(x,t)\right]dt.$$

Переходя к модулям и применяя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$\left|\lambda^s\left[\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x,f)-\overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x,f)\right]-\bar\lambda^s\left[\overset{s}{\sigma}{}'_{\bar\lambda}(x,f)-\overset{s}{\sigma}{}''_{\bar\lambda}(x,f)\right]\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left\{\int\limits_{\bar\lambda}^{\lambda}t^{s-3/2}\left[\overset{s-1}{\sigma}{}'_t(x,f)-\overset{s-1}{\sigma}{}''_t(x,f)\right]^2dt\right\}^{1/2}\left\{\int\limits_{\bar\lambda}^{\lambda}t^{s-1/2}\,dt\right\}^{1/2}. \quad (3.2.48)$$

Теперь остается заметить, что в силу неравенства $\lambda-\bar\lambda\leqslant\leqslant C\sqrt{\lambda}$ справедлива оценка

$$\left\{\int\limits_{\bar\lambda}^{\lambda}t^{s-1/2}\,dt\right\}^{1/2}=O\left(\lambda^{s/2}\right), \quad (3.2.49)$$

а из предположения $s>1/2$ и из сходимости интеграла (3.2.9) для любого $s>-1/2$ вытекает, что почти всюду на G_R

$$\left\{\int\limits_{\bar\lambda}^{\lambda}t^{s-3/2}\left[\overset{s-1}{\sigma}{}'_t(x,f)-\overset{s-1}{\sigma}{}''_t(x,f)\right]^2dt\right\}^{1/2}=o(1). \quad (3.2.50)$$

Из соотношений (3.2.48) — (3.2.50) вытекает справедливость оценки (3.2.47) при $s>1/2$.

Для завершения вывода оценки (3.2.3) остается установить справедливость оценки (3.2.47) при $0<s<1/2$.

---

*) Действительно, если при двух произвольных указанных значениях λ и $\bar\lambda$ справедлива оценка (3.2.47), то поскольку для любого $\lambda\geqslant 2$ найдется номер $n\geqslant 2$ такой, что $n^2\leqslant\lambda\leqslant(n+1)^2$, а для указанного номера n найдется число $\bar\lambda_n$ такое, что $(n-1)^2\leqslant\bar\lambda_n\leqslant n^2$ и справедлива оценка (3.2.40), причем $\lambda\geqslant\bar\lambda_n\geqslant 1$ и $\lambda-\bar\lambda_n\leqslant C\sqrt{\lambda}$, то сопоставляя оценку (3.2.40) с оценкой (3.2.47), взятой при $\bar\lambda=\bar\lambda_n$, мы установим справедливость оценки (3.2.3).

Записывая соотношение (3.2.45) для расширений $\widehat{A}'$ и $\widehat{A}''$ и для значений λ и $\overline{\lambda}$ и полагая $\delta = s - 1/2$, получаем

$$\left[\lambda^s\left(\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x, f)\right)\right] - \left[\overline{\lambda}^s\left(\overset{s}{\sigma}{}'_{\overline{\lambda}}(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\overline{\lambda}}(x, f)\right)\right] =$$

$$= C\left(s, s - \frac{1}{2}\right)\left\{\int_0^\lambda (\lambda - t)^{-1/2} t^{s-1/2}\left[\overset{s-1/2}{\sigma}{}'_t(x, f) - \overset{s-1/2}{\sigma}{}''_t(x, f)\right]dt -\right.$$

$$\left. - \int_0^{\overline{\lambda}} (\overline{\lambda} - t)^{-1/2} t^{s-1/2}\left[\overset{s-1/2}{\sigma}{}'_t(x, f) - \overset{s-1/2}{\sigma}{}''_t(x, f)\right]dt\right\}. \quad (3.2.51)$$

Учитывая, что $0 \leqslant \lambda - \overline{\lambda} \leqslant C\sqrt{\lambda}$, можно следующим образом переписать равенство (3.2.51):

$$\left[\lambda^s\left(\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x, f)\right)\right] - \left[\overline{\lambda}^s\left(\overset{s}{\sigma}{}'_{\overline{\lambda}}(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\overline{\lambda}}(x, f)\right)\right] =$$

$$= C(s, s - 1/2)\,[I_1 + I_2 + I_3], \quad (3.2.52)$$

где

$$I_1 = \int_0^{\lambda - 2(\lambda - \overline{\lambda})} \left[(\lambda - t)^{-1/2} - (\overline{\lambda} - t)^{-1/2}\right] t^{s-1/2}\left[\overset{s-1/2}{\sigma}{}'_t(x, f) - \overset{s-1/2}{\sigma}{}''_t(x, f)\right]dt, \quad (3.2.53)$$

$$I_2 = \int_{\lambda - 2(\lambda - \overline{\lambda})}^{\lambda} (\lambda - t)^{-1/2} t^{s-1/2}\left[\overset{s-1/2}{\sigma}{}'_t(x, f) - \overset{s-1/2}{\sigma}{}''_t(x, f)\right]dt, \quad (3.2.54)$$

$$I_3 = \int_{\lambda - 2(\lambda - \overline{\lambda})}^{\overline{\lambda}} (\overline{\lambda} - t)^{-1/2} t^{s-1/2}\left[\overset{s-1/2}{\sigma}{}'_t(x, f) - \overset{s-1/2}{\sigma}{}''_t(x, f)\right]dt. \quad (3.2.55)$$

Достаточно доказать, что почти всюду на множестве G_R каждый из интегралов I_1, I_2 и I_3 равен $o(\lambda^{s/2})$.

С помощью неравенства Коши — Буняковского и тривиального неравенства

$$[(\lambda - t)^{-1/2} - (\overline{\lambda} - t)^{-1/2}]^2 \leqslant (\overline{\lambda} - t)^{-1} - (\lambda - t)^{-1},$$

справедливого для всех $0 \leqslant t \leqslant \overline{\lambda} \leqslant \lambda$, получим, что

$$|I_1| \leqslant \left\{\int_0^{\lambda - 2(\lambda - \overline{\lambda})} \left[(\overline{\lambda} - t)^{-1} - (\lambda - t)^{-1}\right]dt\right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{\int_0^\lambda t^{2s-1}\left[\overset{s-1/2}{\sigma}{}'_t(x, f) - \overset{s-1/2}{\sigma}{}''_t(x, f)\right]^2 dt\right\}^{1/2}. \quad (3.2.56)$$

Далее учтем, что в силу условия $0 \leqslant \lambda - \bar{\lambda} \leqslant C\sqrt{\lambda}$

$$\int_0^{\lambda-2(\lambda-\bar{\lambda})} [(\bar{\lambda}-t)^{-1}-(\lambda-t)^{-1}]\,dt = \left\{\ln\frac{\lambda-t}{\bar{\lambda}-t}\right\}\Bigg|_{t=0}^{t=\lambda-2(\lambda-\bar{\lambda})} =$$

$$= \ln 2 + \ln\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} = O(1). \quad (3.2.57)$$

Последний интеграл в правой части (3.2.56) разобьем на сумму двух интегралов:

$$\int_0^{\lambda} t^{2s-1}\left[\overset{s-1/2}{\sigma'_t}(x, f) - \overset{s-1/2}{\sigma''_t}(x, f)\right]^2 dt =$$

$$= \int_0^{\sqrt{\lambda}} t^{2s-1}\left[\overset{s-1/2}{\sigma'_t}(x, f) - \overset{s-1/2}{\sigma''_t}(x, f)\right]^2 dt +$$

$$+ \int_{\sqrt{\lambda}}^{\lambda} t^{2s-1}\left[\overset{s-1/2}{\sigma'_t}(x, f) - \overset{s-1/2}{\sigma''_t}(x, f)\right]^2 dt.$$

Из последнего равенства заключаем, что

$$\int_0^{\lambda} t^{2s-1}\left[\overset{s-1/2}{\sigma'_t}(x, f) - \overset{s-1/2}{\sigma''_t}(x, f)\right]^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant (\sqrt{\bar{\lambda}})^s \int_0^{\sqrt{\lambda}} t^{s-1}\left[\overset{s-1/2}{\sigma'_t}(x, f) - \overset{s-1/2}{\sigma''_t}(x, f)\right]^2 dt +$$

$$+ \lambda^s \int_{\sqrt{\lambda}}^{\lambda} t^{s-1}\left[\overset{s-1/2}{\sigma'_t}(x, f) - \overset{s-1/2}{\sigma''_t}(x, f)\right]^2 dt,$$

и поэтому в силу оценки (3.2.9) почти всюду на множестве G_R

$$\int_0^{\lambda} t^{2s-1}\left[\overset{s-1/2}{\sigma'_t}(x, f) - \overset{s-1/2}{\sigma''_t}(x, f)\right]^2 dt = o(\lambda^s). \quad (3.2.58)$$

Из соотношений (3.2.56) — (3.2.58) вытекает, что

$$I_1 = o(\lambda^{s/2})$$

для почти всех точек x множества G_R.

Остается доказать, что каждый из интегралов (3.2.54) и (3.2.55) равен $o(\lambda^{s/2})$ почти всюду на множестве G_R. Так как рассуждения для этих двух интегралов стереотипны, мы ограничимся рассмотрением только интеграла (3.2.54).

Учитывая, что $s > 0$, и заменяя в формуле (3.2.45), взятой для расширений $\widehat{A}'$ и $\widehat{A}''$, s на $s - 1/2$, а δ на $s/2 - 1/2$, получаем из (3.2.45)

$$t^{s-1/2}\left[\overset{s-1/2}{\sigma'_t}(x, f) - \overset{s-1/2}{\sigma''_t}(x, f)\right] =$$

$$= C\left(s-\frac{1}{2}, \frac{s}{2}-\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^t (t-u)^{s/2-1}\, u^{s/2-1/2}\left[\overset{s/2-1/2}{\sigma'_u}(x, f) - \overset{s/2-1/2}{\sigma''_u}(x, f)\right] du. \tag{3.2.59}$$

Воспользуемся теперь тем, что для так называемого интеграла дробного порядка

$$f_\alpha(t) = \int\limits_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u)\, du$$

при любых $0<\alpha<1/2$, $1/p = 1/2-\alpha$ и для любой функции $f(t)$ из класса $L_2[0, \lambda]$ справедлива оценка

$$\| f_\alpha \|_{L_p[0,\lambda]} \leqslant C_\alpha \| f \|_{L_2[0,\lambda]} \tag{3.2.60}$$

с постоянной C_α, зависящей только от α *).

Применяя оценку (3.2.60), взятую при $\alpha = s/2$ **), к интегралу дробного порядка, стоящему в правой части (3.2.59), получим неравенство

$$\left\| t^{s-1/2}\left[\overset{s-1/2}{\sigma'_t}(x, f) - \overset{s-1/2}{\sigma''_t}(x, f)\right]\right\|_{L_p[0,\lambda]} \leqslant$$

$$\leqslant C\left\{\int\limits_0^\lambda u^{s-1}\left[\overset{s/2-1/2}{\sigma'_u}(x, f) - \overset{s/2-1/2}{\sigma''_u}(x, f)\right]^2 du\right\}^{1/2}, \tag{3.2.61}$$

в котором $1/p = (1-s)/2$.

Если теперь применить к интегралу, стоящему в правой части (3.2.61), те же самые рассуждения, которые мы применили выше к последнему интегралу, стоящему в правой части (3.2.56), то получим из неравенства (3.2.61), что для почти всех точек x из множества G_R

$$\left\| t^{s-1/2}\left[\overset{s-1/2}{\sigma'_t}(x, f) - \overset{s-1/2}{\sigma''_t}(x, f)\right]\right\|_{L_p[0,\lambda]} = o\left(\lambda^{s/4}\right) \tag{3.2.62}$$

при $1/p = (1-s)/2$.

Теперь для оценки интеграла (3.2.54) достаточно применить к этому интегралу неравенство Гёльдера

$$|I_2| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int\limits_{\lambda-2(\lambda-\bar{\lambda})}^{\lambda} (\lambda-t)^{-q/2} dt\right\}^{1/q} \left\| t^{s-1/2}\left[\overset{s-1/2}{\sigma'_t}(x, f) - \overset{s-1/2}{\sigma''_t}(x, f)\right]\right\|_{L_p[0,\lambda]}$$

---

*) См., например, монографию Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуда и Г. Полиа [1, с. 348].

**) Так как $0 < s \leqslant 1/2$, то $\alpha \leqslant 1/4$, так что условие $\alpha < 1/2$ выполнено.

при $1/q=(1+s)/2$, $1/p=(1-s)/2$ и воспользоваться оценкой (3.2.62) и элементарной оценкой

$$\left\{\int\limits_{\lambda-2(\lambda-\bar{\lambda})}^{\lambda}(\lambda-t)^{-q/2}\,dt\right\}^{1/q}=\left\{\int\limits_{0}^{2(\lambda-\bar{\lambda})}u^{-1/(1+s)}\,du\right\}^{(1+s)/2}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int\limits_{0}^{2C\sqrt{\lambda}}u^{-1/(1+s)}\,du\right\}^{(1+s)/2}=O\left(\lambda^{s/4}\right).$$

Мы получим при этом, что $I_2=o(\lambda^{s/2})$ для почти всех точек x из множества G_R.

Поскольку для интеграла (3.2.55) рассуждения проводятся совершенно аналогично, то вывод оценки (3.2.3) для любого $s>0$ полностью завершен.

Нам остается провести доказательство второго утверждения теоремы 3.4 о том, что для произвольной функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$, обращающейся в нуль почти всюду в некоторой содержащейся в G области D, для $s>0$ и для всех достаточно больших $\lambda>0$ почти всюду в D будут справедливы оценки (3.2.3′).

Ради определенности, будем доказывать первую оценку (3.2.3′), т. е. рассматривать расширение $\widehat{A}'$.

Для произвольного $R>0$ фиксируем произвольную точку x множества D_R и относительно такой точки x повторим рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 3.3.

Мы придем при этом к соотношению (3.2.17), в котором теперь обратятся в нуль два члена: член, стоящий в левой части, и первый член, стоящий в правой части. Иными словами, мы получим, что для любой точки x из множества D_R

$$\overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda}(x,f)=2^s\Gamma(s+1)\,\lambda^{-s/2}\sum_{i=1}^{m'}\int\limits_{0}^{\infty}\widehat{f}'_i(t)\,u'_i(x,t)\,I_t^{\lambda}(R)\,d\rho'(t).$$

В таком случае, текстуально повторяя последующие рассуждения леммы 3.3, получаем, что для всех $s>-1/2$ справедлива оценка

$$\int\limits_{D_R}\int\limits_{0}^{\infty}\lambda^{s-1/2}\left[\overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda}(x,f)\right]^2dx\,d\lambda\leqslant C\,\|f\|_{L_2(G)}. \qquad (3.2.63)$$

Опираясь на оценку (3.2.63) и повторяя рассуждения, содержащиеся в доказательстве леммы 3.7, мы установим, что при $s>0$ для рассматриваемой нами функции найдется числовая последовательность $\{\bar{\lambda}_n\}$ такая, что для всех номеров n, начиная с некоторого номера, $(n-1)^2\leqslant\bar{\lambda}_n\leqslant n^2$ и для почти всех точек x области D справедлива оценка

$$\left|\overset{s}{\sigma}{}'_{\bar{\lambda}_n}(x,f)\right|=o\left(\bar{\lambda}_n^{-s/2}\right). \qquad (3.2.64)$$

Оценка (3.2.64) и текстуальное повторение рассуждений, проведенных при доказательстве первого утверждения теоремы 3.4, позволяют установить справедливость для почти всех точек x области D первой оценки (3.2.3′). Справедливость второй оценки (3.2.3′) отдельного доказательства не требует.

Теорема 3.4 полностью доказана.

ПРИМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ 3

Основные результаты § 1 гл. 3 в первоначальном виде были опубликованы в работах В. А. Ильина [10, 11 и 9].

Результаты § 2, относящиеся к обобщенной трактовке принципа локализации для средних Рисса спектральных разложений, были изложены в вышедших еще в 1970 г. статьях В. А. Ильина [7, 8].

Результаты § 2, относящиеся к обобщенной трактовке проблемы равносходимости средних Рисса, опубликованы в вышедшей в 1988 г. статье В. А. Ильина [16].

Относящиеся к обобщенному принципу локализации средних Рисса результаты были распространены в вышедших в 1971 г. работах Г. А. Ильюшиной [1, 2] на случай оператора Лапласа — Бельтрами, рассматриваемого на римановом гармоническом многообразии.

ГЛАВА 4

САМОСОПРЯЖЕННЫЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

В настоящей главе мы докажем, что установленные нами в гл. 2 для произвольного самосопряженного неотрицательного расширения оператора Лапласа теоремы о точных условиях равномерной сходимости и локализации спектральных разложений остаются справедливыми для произвольных самосопряженных неотрицательных расширений общего эллиптического оператора второго порядка L.

Применяемый в настоящей главе аппарат весьма близок к тому, который был изложен в гл. 2.

Например, при доказательстве теоремы негативного типа для средних Рисса «малого» неотрицательного порядка s техника по существу отличается от случая оператора Лапласа только тем, что вместо формулы среднего значения для регулярного решения уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ применяется формула среднего значения для регулярного решения эллиптического уравнения со спектральным параметром $-Lu + \lambda\rho_0(x)u = 0$ в специальной форме, установленной Е. И. Моисеевым. Это приводит к необходимости исследования входящего в выражение для средних Рисса дополнительного слагаемого (обращающегося в нуль в случае оператора Лапласа).

Наличие в уравнении со спектральным параметром строго положительного весового множителя $\rho_0(x)$ позволяет включить в наше рассмотрение эллиптический оператор на произвольном римановом многообразии. В частности, в схему нашего рассмотрения включается оператор Бельтрами — Лапласа на замкнутом многообразии в произвольном (не обязательно симметрическом или гармоническом) римановом пространстве.

Настоящая глава состоит из трех параграфов. В § 1 устанавливаются имеющие самостоятельный интерес вспомогательные предложения о фундаментальных функциях, порождаемых произвольным упорядоченным спектральным представлением пространства L_2 с весом $\rho_0(x)$ относительно произвольного самосопряженного неотрицательного расширения эллиптического оператора с указанным весом. В § 2 для каждого индивидуального самосопряженного неотрицательного расширения эллиптического оператора второго порядка L с указанным весом устанавливается теорема негативного типа; в § 3 доказывается основная теорема позитивного типа.

§ 1. Вспомогательные предложения о фундаментальных функциях

1. Упорядоченные спектральные представления пространства L_2 с весом. Пусть G — произвольная область в пространстве E^N, L — произвольный эллиптический, формально самосопряженный неотрицательный оператор второго порядка, заданный в области G и имеющий вид

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + c(x)u. \qquad (4.1.1)$$

Будем считать, что коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $c(x)$ оператора (4.1.1) определены и бесконечно дифференцируемы в области G, причем коэффициенты $a_{ij}(x)$ удовлетворяют в этой области условию равномерной эллиптичности, т. е. для всех точек x области G и для всех вещественных чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$:

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x),$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum \xi_i^2 \quad \text{при} \quad \alpha > 0,$$

а коэффициент $c(x)$ неотрицателен в этой области.

Пусть далее $\rho_0(x)$ — произвольная, ограниченная снизу положительной постоянной и бесконечно дифференцируемая в области G функция, которую мы будем называть *весом*.

Пусть, наконец, $\widehat{A}$ — произвольное самосопряженное неотрицательное расширение оператора (4.1.1) в области G с весом $\rho_0(x)$, которое вводится точно так же, как в п. 1 § 1 гл. 2, но с добавлением во все скалярные произведения весового множителя $\rho_0(x)$*).

Договоримся в дальнейшем пространство L_2, норма в котором вводится с добавлением весового множителя $\rho_0(x)$, обозначать символом $L_2(G, \rho_0(x))$.

В полной аналогии с изложенным в п. 2 § 1 гл. 2 вводится понятие упорядоченного спектрального представления пространства $L_2(G, \rho_0(x))$ относительно произвольного самосопряженного неотрицательного расширения $\widehat{A}$ оператора (4.1.1) с весом $\rho_0(x)$ и устанавливается теорема Гординга — Браудера — Маутнера. Наличие в рассматриваемом нами случае ограниченного снизу положительной постоянной бесконечно дифференцируемого весового множителя $\rho_0(x)$ не вносит никаких изменений в схему доказательства этой теоремы, изложенную, например, в известной монографии Дандорфа и Шварца [1, с. 875—876].

---

*) То есть на этот раз скалярное произведение определяется соотношением $(u, v) = \int_G u(x)\, v(x)\, \rho_0(x)\, dx$.

Ради удобства приведем в необходимой нам форме формулировку теоремы Гординга — Браудера — Маутнера.

Для каждого самосопряженного неотрицательного расширения $\widehat{A}$ *эллиптического оператора* (4.1.1) *в области* G *с весом* $\rho_0(x)$ *существует по крайней мере одно упорядоченное спектральное представление пространства* $L_2(G, \rho_0(x))$ *со спектральной мерой* $\rho(\lambda)$, *множествами кратности* e_i, *фундаментальными функциями* $u_i(x, \lambda)$ $(i=1, 2, \ldots, \widehat{m})$ *и кратностью* $\widehat{m} \leqslant \infty$ *такое, что выполнены следующие требования:*

1) *фундаментальные функции* $u_i(x, \lambda)$ *измеримы относительно произведения меры Лебега области* G *с весом* $\rho_0(x)$ *и спектральной меры* $\rho(\lambda)$, *обращаются в нуль на дополнениях множеств* e_i *и для каждого фиксированного* $\lambda \geqslant 0$ *принадлежат классу* $C^\infty(G)$ *и удовлетворяют внутри* G *эллиптическому дифференциальному уравнению*

$$Lu_i(x, \lambda) = \lambda\rho_0(x)u_i(x, \lambda); \tag{4.1.2}$$

2) *для каждой функции* $f(x)$ *из класса* $L_2(G, \rho_0(x))$ *определен на множестве* e_i *как элемент пространства* L_2 *по переменной* λ *с мерой* $\rho(\lambda)$ *образ Фурье*

$$\widehat{f}_i(\lambda) = \int\limits_G f(y)\,u_i(y, \lambda)\,\rho_0(y)\,dy \qquad (i = 1, 2, \ldots, \widehat{m}), \tag{4.1.3}$$

причем спектральное разложение $E_\lambda f(x)$ *каждой функции* $f(x)$ *из класса* $L_2(G, \rho_0(x))$ *имеет вид*

$$E_\lambda f(x) = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_0^\lambda \widehat{f}_i(\lambda)\,u_i(x, t)\,d\rho(t) \tag{4.1.4}$$

и сходится при $\lambda \to \infty$ *к* $f(x)$ *в метрике* $L_2(G, \rho_0(x))$;

3) *для любых двух функций* $f(x)$ *и* $g(x)$ *из класса* $L_2(G, \rho_0(x))$ *справедливо равенство Парсеваля*

$$\int\limits_G f(x)\,g(x)\,\rho_0(x)\,dx = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_0^\infty \widehat{f}_i(t)\,\widehat{g}_i(t)\,d\rho(t), \tag{4.1.5}$$

и, в частности, для любой функции $f(x)$ *из класса* $L_2(G, \rho_0(x))$

$$\int\limits_G f^2(x)\,\rho_0(x)\,dx = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_0^\infty \widehat{f}_i^{\,2}(t)\,d\rho(t). \tag{4.1.6}$$

2. Формула среднего значения Е. И. Моисеева. Всякая фундаментальная функция $u_i(x, \lambda)$ при любом фиксированном $\lambda \geqslant 0$ является в соответствии с теоремой Гординга — Браудера — Маутнера регулярным в области G решением уравнения (4.1.2) с эллиптическим оператором L, определяемым соотношением (4.1.1), и с бесконечно дифференцируемой и строго положительной весовой функцией $\rho_0(x)$.

В настоящем пункте мы приведем установленную в 1971 г. Е. И. Моисеевым [1] формулу среднего значения для любого регулярного решения $u_i(x, \lambda)$ указанного уравнения (4.1.2).

Итак, пусть функция $u(x, \lambda)$ является регулярным в области G решением уравнения

$$-Lu + \lambda\rho_0(x)u = 0$$

для некоторого фиксированного $\lambda \geqslant 0$ при условии, что Lu — равномерно эллиптический в области G оператор вида (4.1.1) с бесконечно дифференцируемыми в области G коэффициентами $a_{ij}(x)$ и $c(x)$, причем $c(x) \geqslant 0$ всюду в G, а весовая функция $\rho_0(x)$ ограничена снизу положительной постоянной и бесконечно дифференцируема в области G.

Фиксируем произвольную точку x открытой области G и вводим в некоторой достаточно малой окрестности этой точки, вообще говоря, неортогональную систему координат $r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ $\ldots, \varphi_{N-1}$, понимая под r геодезическое расстояние переменной точки y от фиксированной нами точки x, измеряемое вдоль лучей уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial r}{\partial r_i}\frac{\partial r}{\partial x_j} = \rho_0(x), \tag{4.1.7}$$

а под $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{N-1}$ — «угловые» координаты, изменяющиеся в пределах $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi, \ \ldots, \ 0 \leqslant \varphi_{N-2} \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi_{N-1} \leqslant 2\pi$.

Элемент объема во введенной системе координат записывается в виде

$$dy = J(x, r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{N-1})\, dr d\varphi_1 \ldots d\varphi_{N-1},$$

где через $J(x, r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{N-1})$ обозначен якобиан.

Для произвольной функции f, определенной в некоторой окрестности точки x, и для любого достаточно малого $r > 0$ обозначим интеграл

$$r^{1-N}\int_0^{\pi}\ldots\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{N-1})\, J(x, r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{N-1})\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{N-1}$$

кратким символом

$$\int_{\omega} f(x + r\omega)\, d\omega,$$

т. е. положим по определению

$$\int_{\omega} f(x + r\omega)\, d\omega =$$

$$= r^{1-N}\int_0^{\pi}\ldots\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{N-1})\, J(x, r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{N-1})\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{N-1}. \tag{4.1.8}$$

Из (4.1.8) сразу же следует, что при любом достаточно малом $R > 0$

$$\int_0^R r^{N-1}\left(\int_\omega f(x + r\omega)\, d\omega\right) dr = \int_{r_{xy} \leqslant R} f(y)\, dy, \qquad (4.1.9)$$

где r_{xy} — геодезическое расстояние между точками x и y, измеряемое вдоль лучей уравнения (4.1.7).

Основной результат Е. И. Моисеева заключается в доказательстве существования таких двух гладких функций $p(x, y)$ и $q(x, y)$, определенных для всех y из достаточно малой окрестности точки x и удовлетворяющих условиям $0 < a \leqslant p(x, y) \leqslant b < \infty$, $-\infty < a_1 \leqslant q(x, y) \leqslant b_1 < \infty$, которые для любого регулярного решения $u(x, \lambda)$ уравнения $-Lu + \lambda\rho_0(x)u = 0$ с произвольным $\lambda \geqslant 0$ и любого достаточно малого $r > 0$ обеспечивают справедливость равенства

$$\int_\omega u(x + r\omega, \lambda)\rho_0(x + r\omega)\, p(x, x + r\omega)\, d\omega =$$
$$= (2\pi)^{N/2} u(x, \lambda)\, \rho_0(x)\left(r\sqrt{\lambda}\right)^{-\nu} \mathcal{J}_\nu\left(r\sqrt{\lambda}\right) +$$
$$+ \rho_0(x)\, r^{-\nu}\int_0^r w_\nu\left(\tau\sqrt{\lambda}, r\sqrt{\lambda}\right)\tau^\nu\left(\int_\omega u(x + \tau\omega, \lambda)\, q(x, x + \tau\omega)\, dw\right) d\tau, \qquad (4.1.10)$$

в котором $\nu = (N-2)/2$, $w_\nu(a, b) = \mathcal{J}_\nu(a)\, Y_\nu(b) - \mathcal{J}_\nu(b)\, Y_\nu(a)$, где $\mathcal{J}_\nu(x)$ — функция Бесселя (первого рода), а $Y_\nu(x)$ — функция Неймана.

Равенство (4.1.10) мы будем называть *формулой среднего значения Е. И. Моисеева.*

В том частном случае, когда эллиптический оператор второго порядка L является оператором Лапласа ($L = -\Delta$), в формуле среднего значения Е. И. Моисеева (4.1.10) функция $q(x, y)$ обращается в тождественный нуль и последнее слагаемое в правой части (4.1.10) пропадает.

Легко убедиться в том, что фигурирующая в формуле среднего значения (4.1.10) функция $p(x, y)$ равномерно относительно x на каждом компакте области G удовлетворяет при $\omega_N = 2(\pi)^{N/2}[\Gamma(N/2)]^{-1}$ следующему соотношению:

$$\frac{1}{\omega_N}\int_\omega p(x + r\omega, x)\, d\omega = 1 + O(r),$$

справедливому для всех достаточно малых $r > 0$.

Действительно, так как производная функции $p(x, y)$ по каждому из переменных ограничена равномерно на любом компакте области $G \times G$, то достаточно доказать справедливость для всех достаточно малых $r > 0$ равномерного относительно x на каждом компакте области G соотношения

$$\frac{1}{\omega_N} \int\limits_{\omega} p(x, x + r\omega)\, d\omega = 1 + O(r).$$

Для этого в свою очередь достаточно, предварительно применив к интегралу в левой части (4.1.10) формулу среднего значения

$$\int\limits_{\omega} u(x + r\omega, \lambda)\, \rho_0(x + r\omega)\, p(x, x + r\omega)\, d\omega =$$
$$= u(x + r\omega^*, \lambda) \cdot \rho_0(x + r\omega^*) \int\limits_{\omega} p(x, x + r\omega)\, d\omega,$$

перейти затем в соотношении (4.1.10) к пределу при $r \to 0 + 0$.

Таким путем мы получим, что

$$\lim_{r \to 0+0} \frac{1}{\omega_N} \int\limits_{\omega} p(x, x + r\omega)\, d\omega = 1.$$

После этого соотношение $\frac{1}{\omega_N} \int\limits_{\omega} p(x, x + r\omega)\, d\omega = 1 + O(r)$ получается посредством применения формулы Лагранжа с учетом ограниченности (равномерной на любом компакте) производной $\frac{\partial}{\partial r} p(x, x + r\omega)$.

Формула среднего значения (4.1.10) позволяет получить специальное представление для образа Фурье (4.1.3) функции $F(x, y)$, равной произведению функции $p(x, y)$ на произвольную функцию f, зависящую только от геодезического расстояния $r = r_{xy}$ переменной точки y от фиксированной точки x и отличную от нуля только для достаточно малых r_{xy}.

Пусть x — произвольная фиксированная точка открытой области G, R — положительное число, достаточно малое и во всяком случае меньшее геодезического расстояния точки x от границы области G, $r = r_{xy}$ — геодезическое расстояние переменной точки y от фиксированной точки x, $f(r)$ — произвольная функция, обращающаяся в нуль при $r \geqslant R$; функция $F(x, y)$ имеет вид

$$F(x, y) = \begin{cases} p(x, y)\, f(r_{xy}) & \text{при} \quad r \leqslant R, \\ 0 & \text{при} \quad r > R. \end{cases} \tag{4.1.11}$$

Тогда образ Фурье $\widehat{F}_i(x, \lambda)$ функции (4.1.11), отвечающий произвольному упорядоченному спектральному представлению пространства $L_2(G, \rho_0(x))$ относительно самосопряженного неотрицательного расширения $\widehat{A}$ эллиптического оператора L с весом

$\rho_0(x)$, имеет вид

$$\widehat{F}_i(x, \lambda) = = (2\pi)^{N/2} \rho_0(x) u_i(x, \lambda) \lambda^{\frac{2-N}{4}} \int_0^R f(r) r^{\frac{N}{2}} \mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}(r\sqrt{\lambda})\, dr + \widetilde{F}_i(x, \lambda)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, \widehat{m}), \tag{4.1.12}$$

где «добавочный» член $\widetilde{F}_i(x, \lambda)$ определяется равенством

$$\widetilde{F}_i(x, \lambda) = =\rho_0(x) \int_0^R r^{\frac{N}{2}} f(r) \left[\int_0^r \tau^\nu w_\nu(\tau\sqrt{\lambda}, r\sqrt{\lambda}) \left(\int_\omega u_i(x+\tau\omega, \lambda) q(x, x+\tau\omega) d\omega \right) d\tau \right] dr$$

$$(i = 1, 2, \ldots, \widehat{m}). \tag{4.1.13}$$

Действительно, для получения для образа Фурье функции (4.1.11) представления (4.1.12), (4.1.13) достаточно заметить, что, согласно (4.1.3), образ Фурье $\widehat{F}_i(x, \lambda)$ равен

$$\widehat{F}_i(x, \lambda) = \int_G F(x, y) u_i(y, \lambda) \rho_0(y)\, dy =$$

$$= \int_0^R f(r) r^{N-1} \left(\int_\omega u_i(x + r\omega, \lambda) \rho_0(x + r\omega) p(x, x + r\omega)\, d\omega \right) dr$$

и воспользоваться формулой среднего значения Е. И. Моисеева (4.1.10).

Остается заметить, что для частного случая оператора Лапласа добавочный член (4.1.13) в соотношении (4.1.12) обращается в нуль.

3. Оценка интеграла от квадратов фундаментальных функций. Главной целью настоящего пункта является установление следующего предложения, обобщающего лемму 2.1 из п. 2 § 3 гл. 2.

Лемма 4.1. *Для любого вещественного* $\mu \geqslant 0$ *равномерно относительно* x *в каждой строго внутренней подобласти* G' *области* G *справедлива следующая оценка*:

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{\mu \leqslant \sqrt{\lambda} \leqslant \mu+1} u_i^2(x, \lambda)\, d\rho(\lambda) = O\left[(\mu + 1)^{N-1}\right]. \tag{4.1.14}$$

Доказательство. 1°. Начнем с установления «грубой» оценки

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{\mu \leqslant \sqrt{\lambda} \leqslant \mu+1} u_i^2(x, \lambda)\, d\rho(\lambda) = O\left[(\mu + 1)^{N+4}\right], \tag{4.1.15}$$

справедливой также для любого $\mu \geqslant 0$ и равномерной по x в каждой строго внутренней подобласти G' области G.

Вместо грубой оценки (4.1.15) мы установим более сильный результат, из которого эта оценка будет сразу же следовать: докажем, что для произвольной строго внутренней подобласти G' области G существует постоянная C такая, что для всех x из G'

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^{\infty} \frac{u_i^2(x, \lambda)}{(1+\lambda)^{N/2+2}} d\rho(\lambda) \leqslant C. \tag{4.1.16}$$

Пусть L — эллиптический оператор (4.1.1), а E — единичный оператор. Введем в рассмотрение эллиптический оператор

$$\widetilde{L} = \frac{1}{\rho_0(x)} L + E. \tag{4.1.17}$$

Обозначим символом $K_1(x, y)$ главное фундаментальное решение для оператора $\widetilde{L}$ *), а символом $K_s(x, y)$ — итерацию порядка s ядра $K_1(x, y)$.

Фиксируя произвольную строго внутреннюю подобласть G' области G и произвольную точку x подобласти G' и обозначая через R число, меньшее расстояния G' от границы G, введем в рассмотрение «срезающую» функцию $\eta(x, y)$, равную единице при $|x-y| \leqslant R/2$, равную нулю при $|x-y| \geqslant R$ и бесконечное число раз дифференцируемую во всем E^N.

Далее, считая, что $s=[N/4]+1$, где символ $[N/4]$ обозначает целую часть числа $N/4$, рассмотрим функцию $v(x, y) = K_s(x, y)\eta(x, y)$.

Так как $s=[N/4]+1$, то повторное ядро $K_s(x, y)$ имеет интегрируемую с квадратом особенность и потому для любой фиксированной точки x функция $[\rho_0(y)]^{-1}v(x, y)$ (как функция точки y) принадлежит классу $L_2(G, \rho_0(y))$ и для нее справедливо равенство Парсеваля **)

$$\int_G v^2(x, y)[\rho_0(y)]^{-1} dy = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^{\infty} \left| \int_G v(x, y) u_i(y, \lambda) dy \right|^2 d\rho(\lambda). \tag{4.1.18}$$

Заметим теперь, что каждая фундаментальная функция $u_i(y, \lambda)$ является регулярным решением уравнения $\widetilde{L}u_i(y, \lambda) = (\lambda+1)u_i(y, \lambda)$. Поэтому, последовательно применяя вторую формулу Грина к двум функциям, одна из которых равна $u_i(y, \lambda)$, а вторая — соответственно $v(x, y)$, $\widetilde{L}v(x, y)$, ..., $\widetilde{L}^{s-1}v(x, y)$, мы придем к соотношениям ***)

$$\int u_i(y, \lambda) \widetilde{L}v(x, y)\, dy = \int v(x, y) \widetilde{L}u_i(y, \lambda)\, dy =$$
$$= (\lambda+1) \int v(x, y) u_i(y, \lambda)\, dy.$$

---

*) По вопросу об определении и существовании главного фундаментального решения для произвольного эллиптического оператора второго порядка отсылаем читателя к монографии К. Миранды [1, с. 69].

**) См. равенство (4.1.6) из п. 1 данного параграфа.

***) Все интегралы можно считать взятыми по всему E^N, но фактически интегрирование будет вестись только по шару радиуса R с центром в точке x.

$$\int u_i(y,\lambda)\,\widetilde{L}^2 v(x,y)\,dy = \int \widetilde{L}u_i(y,\lambda)\,\widetilde{L}v(x,y)\,dy =$$
$$= (\lambda+1)\int u_i(y,\lambda)\cdot\widetilde{L}v(x,y)\,dy,$$

. . . .

$$\int u_i(y,\lambda)\,\widetilde{L}^{s-1} v(x,y)\,dy = \int \widetilde{L}u_i(y,\lambda)\,\widetilde{L}^{s-2}v(x,y)\,dy =$$
$$= (\lambda+1)\int u_i(y,\lambda)\,\widetilde{L}^{s-2}v(x,y)\,dy.$$

Из этих соотношений вытекает следующее равенство:

$$\int u_i(y,\lambda)\,\widetilde{L}^{s-1}v(x,y)\,dy = (\lambda+1)^s\int v(x,y)\,u_i(y,\lambda)\,dy. \quad (4.1.19)$$

Учтем теперь, что

$$\widetilde{L}^{s-1}v(x,y) = \begin{cases} \widetilde{L}^{s-1}K_s(x,y) = K_1(x,y) & \text{при} \quad |x-y|\leqslant R/2, \\ 0 & \text{при} \quad |x-y|\geqslant R, \\ \in C^\infty & \text{при} \quad |x-y| > R/2. \end{cases}$$

Еще раз применяя формулу Грина к регулярному решению $u_i(y,\lambda)$ и к функции, имеющей особенность фундаментального решения $\widetilde{L}^{s-1}v(x,y)$, мы получим соотношение

$$\int u_i(y,\lambda)\,\widetilde{L}^s v(x,y)\,dy = u_i(x,\lambda) + (\lambda+1)\int u_i(y,\lambda)\,\widetilde{L}^{s-1}v(x,y)\,dy. \quad (4.1.20)$$

Из соотношений (4.1.19) и (4.1.20) вытекает неравенство

$$\frac{|u_i(x,\lambda)|}{(\lambda+1)^s} \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int\limits_G v(x,y)\,u_i(y,\lambda)\,dy\right| + \frac{1}{(\lambda+1)^s}\left|\int\limits_G u_i(y,\lambda)\cdot\widetilde{L}^s v(x,y)\,dy\right|,$$

из которого в свою очередь следует, что

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_0^\infty \frac{|u_i(x,\lambda)|^2}{(\lambda+1)^{2s}}\,d\rho(\lambda) \leqslant$$
$$\leqslant 2\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_0^\infty \left|\int\limits_G v(x,y)\,u_i(y,\lambda)\,dy\right|^2 d\rho(\lambda) +$$
$$+ 2\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_0^\infty \frac{1}{(\lambda+1)^{2s}}\left|\int\limits_G u_i(y,\lambda)\,\widetilde{L}^s v(x,y)\,dy\right|^2 d\rho(\lambda). \quad (4.1.21)$$

Ограниченность первой суммы, стоящей в правой части (4.1.21), вытекает из равенства Парсеваля (4.1.18), а ограниченность второй суммы в правой части (4.1.21) вытекает из неравенства $(\lambda+1)^{-2s}\leqslant 1$, из равенства Парсеваля и из того, что функция $[\rho_0(y)]^{-1}\widetilde{L}^s v(x,y)$ обращается в нуль при $|x-y|\leqslant R/2$ и $|x-y|\geqslant R$ и принадлежит классу $L_2(G,\rho_0(y))$.

Итак, мы доказали, что для любого x из подобласти G' величина, стоящая в левой части (4.1.21), ограничена.

Так как $2s = 2[N/4] + 2 \leqslant N/2 + 2$, то из доказанного вытекает неравенство (4.1.16), а поэтому и грубая оценка (4.1.15).

Доказательство первой части леммы 4.1 завершено.

2°. Перейдем теперь непосредственно к доказательству точной оценки (4.1.14)*).

Фиксируя произвольную, строго внутреннюю подобласть G' основной области G, произвольную точку x подобласти G' и произвольное достаточно малое число $R > 0$, заведомо меньшее расстояния подобласти G' от границы области G, и обозначая символом $r = |x - y|$ геодезическое расстояние переменной точки y от фиксированной нами точки x, отсчитываемое вдоль лучей уравнения (4.1.7), вычисляем образ Фурье функции $p(x, y)w(r)$, где $p(x, y)$ — функция из формулы среднего значения Е. И. Моисеева (4.1.10), а $w(r)$ имеет вид

$$w(r) = \begin{cases} (2\pi)^{-N/2}\mu^{N/2}r^{-\nu}\mathcal{J}_\nu(\mu r)[\rho_0(x)]^{-1} \\ \text{при } r = |x - y| \in [R/2, R] \\ 0 \text{ для остальных } r = |x - y|, \end{cases} \tag{4.1.22}$$

где, как и выше, $\nu = (N - 2)/2$.

Заметим, что оценку (4.1.14) нам достаточно доказать только для значений μ, удовлетворяющих условию $\mu \geqslant \mu_0$, где μ_0 — достаточно большое фиксированное положительное число, ибо для значений $\mu \leqslant \mu_0$ оценка (4.1.14) вытекает из уже доказанной нами грубой оценки (4.1.15). Поэтому мы в дальнейшем будем считать, что в (4.1.22) число μ превосходит достаточно большое фиксированное число μ_0.

Согласно соотношениям (4.1.12) и (4.1.13), образ Фурье $\widehat{w}_i(x, \lambda)$ функции (4.1.22) относительно фундаментальной функции $u_i(y, \lambda)$ произвольного упорядоченного спектрального представления пространства $L_2(G, \rho_0(y))$, связанного с расширением $\widehat{A}$ оператора (4.1.1) с весом $\rho_0(y)$, имеет вид

$$\widehat{w}_i(x, \lambda) = \overline{w}_i(x, \lambda) + \widetilde{w}_i(x, \lambda), \tag{4.1.23}$$

где

$$\overline{w}_i(x, \lambda) = \mu^{N/2}\lambda^{-\nu/2}u_i(x, \lambda)\int\limits_{R/2}^{R} r\mathcal{J}_\nu(r\mu)\,\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})\,dr, \tag{4.1.24}$$

а добавочный член $\widetilde{w}_i(x, \lambda)$ равен

$$\widetilde{w}_i(x, \lambda) = \mu^{N/2}(2\pi)^{-N/2}\int\limits_{R/2}^{R} r\mathcal{J}_\nu(r\mu)\left[\int\limits_0^r \tau^\nu w_\nu(\tau\sqrt{\lambda}, r\sqrt{\lambda}) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\int\limits_\omega u_i(x + \tau\omega, \lambda)\, q(x, x + \tau\omega)\, d\omega\right) d\tau\right] dr. \tag{4.1.25}$$

---

*) То, что эта оценка является точной по порядку относительно μ, уже установлено для частного случая оператора Лапласа в гл. 1.

В п. 2 § 1 гл. 1 и в п. 2 § 3 гл. 2 мы доказали, что если положительное число μ_0 достаточно велико, то для всех λ, для которых $\mu_0 < \mu \leqslant \sqrt{\lambda} \leqslant \mu + 1$, найдется постоянная $\alpha > 0$ такая, что для величин (4.1.24) справедливо неравенство

$$|\overline{w}_i(x,\ \lambda)| \geqslant \alpha |u_i(x,\ \lambda)|. \tag{4.1.26}$$

Кроме того, точно так же, как в указанных пунктах, доказывается, что для функции (4.1.22) справедлива оценка

$$\int\limits_G |w(|x-y|)|^2 \rho_0(y)\, dy = O(\mu^{N-1}), \tag{4.1.27}$$

равномерная относительно x в подобласти G'.

Записывая для функции (4.1.22) равенство Парсеваля (4.1.6), оставляя в правой части его интеграл только по значениям λ, удовлетворяющим условию $\mu_0 < \mu \leqslant \sqrt{\lambda} \leqslant \mu + 1$, и используя представление (4.1.23), получим, что

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\mu \leqslant \sqrt{\lambda} \leqslant \mu+1} |\overline{w}_i(x,\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int\limits_G [w(|x-y|)]^2 \rho_0(y)\, dy + 2 \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\mu \leqslant \sqrt{\lambda} \leqslant \mu+1} |\widetilde{w}_i(x,\ \lambda)|^2 d\rho(\lambda). \tag{4.1.28}$$

Сопоставляя неравенство (4.1.28) с соотношениями (4.1.26) и (4.1.27), придем к оценке

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\mu \leqslant \sqrt{\lambda} \leqslant \mu+1} u_i^2(x,\lambda)\, d\rho(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant O(\mu^{N-1}) + \frac{2}{\alpha^2} \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\mu \leqslant \sqrt{\lambda} \leqslant \mu+1} |\widetilde{w}_i(x,\ \lambda)|^2 d\rho(\lambda). \tag{4.1.29}$$

С помощью неравенства (4.1.29) мы сейчас докажем, что *если для величины, стоящей в левой части* (4.1.29), *для некоторого* $s \geqslant N-1$ *справедлива равномерная относительно* x *в произвольной строго внутренней подобласти* G' *области* G *оценка*

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\mu \leqslant \sqrt{\lambda} \leqslant \mu+1} u_i^2(x,\ \lambda)\, d\rho(\lambda) = O(\mu^s), \tag{4.1.30}$$

то для этой же величины справедлива также равномерная относительно x *в произвольной строго внутренней подобласти* G'' *подобласти* G' *оценка*

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\mu \leqslant \sqrt{\lambda} \leqslant \mu+1} u_i^2(x,\ \lambda)\, d\rho(\lambda) = O(\mu^{\max(N-1,\, s-2)}). \tag{4.1.31}$$

Сразу же отметим, что если только что сформулированное утверждение будет доказано, то из него сразу же будет вытекать справедливость составляющей содержание леммы 4.1 оценки (4.1.14) (равномерной относительно x в произвольной строго внутренней подобласти G'). Действительно, в силу уже установленной нами грубой оценки (4.1.15) оценка (4.1.30) справедлива при $s = N + 4$. Но тогда справедлива оценка (4.1.31) при $s = N + 4$, т. е. оценка (4.1.30) справедлива при $s = N + 2$.

Это в силу (4.1.31) обеспечивает справедливость оценки (4.1.30) при $s = N$. Применяя еще раз сформулированное утверждение при $s = N$, получим из (4.1.30) искомую оценку (4.1.14).

Короче говоря, сформулированное утверждение позволяет в три шага получить из грубой оценки (4.1.15) точную оценку (4.1.14). Тот факт, что при каждом следующем шаге берется произвольная строго внутренняя подобласть не основной области G, а уже выбранной в предыдущем шаге произвольной строго внутренней подобласти, не снижает общности доказательства, ибо все выбираемые строго внутренние подобласти являются произвольными.

Итак, для завершения доказательства леммы 4.1 остается доказать сформулированное нами утверждение.

Для этого в силу неравенства (4.1.29) достаточно доказать, что если равномерно относительно x в каждой строго внутренней подобласти G' области G при некотором $s \geqslant N-1$ справедлива оценка (4.1.30), то равномерно относительно x в каждой строго внутренней подобласти G'' области G' справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\mu \leqslant \sqrt{\lambda} < \mu+1} |\widetilde{w}_i(x, \lambda)|^2 \, d\rho(\lambda) = O(\mu^{N-1}) + O(\mu^{s-2}). \quad (4.1.32)$$

Используя равенство (4.1.25), придадим величине, стоящей в левой части (4.1.32), следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\mu \leqslant \sqrt{\lambda} \leqslant \mu+1} |\widetilde{w}_i(x, \lambda)|^2 \, d\rho(\lambda) =$$

$$= \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^N \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\mu \leqslant \sqrt{\lambda} \leqslant \mu+1} \left\{ \int\limits_{R/2}^{R} r\mathcal{J}_\nu(r\mu) \left[\int\limits_0^r \tau^\nu v_\nu(\tau\sqrt{\lambda}, r\sqrt{\lambda}) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(\int\limits_\omega u_i(x + \tau\omega, \lambda)\, q(x, x + \tau\omega)\, d\omega \right) d\tau \right] dr \right\}^2 d\rho(\lambda). \quad (4.1.33)$$

Разбивая интеграл по переменной τ, стоящий в правой части (4.1.33) в квадратных скобках, на сумму двух интегралов:

$$\int\limits_0^r = \int\limits_0^{1/\mu} + \int\limits_{1/\mu}^{r},$$

мы придем к неравенству

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\mu \leqslant \sqrt{\lambda} \leqslant \mu+1} |\widetilde{w}_i(x, \lambda)|^2 d\rho(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^N \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\mu \leqslant \sqrt{\lambda} \leqslant \mu+1} \left\{ \int\limits_{R/2}^{R} r\mathcal{J}_\nu(r\mu) \left[\int\limits_0^{1/\mu} \tau^\nu w_\nu(\tau\sqrt{\lambda}, r\sqrt{\lambda}) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(\int\limits_\omega u_i(x+\tau\omega, \lambda)\, q(x, x+\tau\omega) d\omega \right) d\tau \right] dr \right\}^2 d\rho(\lambda) +$$

$$+ 2\left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^N \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\mu \leqslant \sqrt{\lambda} \leqslant \mu+1} \left\{ \int\limits_{R/2}^{R} r\mathcal{J}_\nu(r\mu) \left[\int\limits_{1/\mu}^{r} \tau^\nu w_\nu(\tau\sqrt{\lambda}, r\sqrt{\lambda}) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(\int\limits_\omega u_i(r+\tau\omega, \lambda)\, q(x, x+\tau\omega)\, d\omega \right) d\tau \right] dr \right\}^2 d\rho(\lambda). \quad (4.1.34)$$

Пусть G' — произвольная, строго внутренняя подобласть области G, а G'' — произвольная, строго внутренняя подобласть области G'. Фиксируем положительное число R меньшим расстояния области G'' от границы области G'.

Достаточно доказать, что если для некоторого $s \geqslant N-1$ равномерно относительно x в подобласти G' справедлива оценка (4.1.30), то равномерно относительно x в подобласти G'' первый член в правой части (4.1.34) имеет порядок $O(\mu^{s-2})$, а второй член в правой части (4.1.34) — порядок $O(\mu^{N-1})$.

Сначала оценим первый член в правой части (4.1.34), обозначая его для кратности символом $\mathcal{K}_1$.

Так как в силу неравенства Коши — Буняковского *)

$$\left\{ \int\limits_{R/2}^{R} r\mathcal{J}_\nu(r\mu) \left[\int\limits_0^{1/\mu} \tau^\nu w_\nu(\tau\sqrt{\lambda}, r\sqrt{\lambda}) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(\int\limits_\omega u_i(x+\tau\omega, \lambda)\, q(x, x+\tau\omega)\, d\omega \right) d\tau \right] dr \right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{R}{2} \int\limits_{R/2}^{R} r^2\mathcal{J}_\nu^2(r\mu) \left[\int\limits_0^{1/\mu} \tau^\nu w_\nu(\tau\sqrt{\lambda}, r\sqrt{\lambda}) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int\limits_\omega u_i(x+\tau\omega, \lambda)\, q(x, x+\tau\omega)\, d\omega \right) d\tau \right]^2 dr,$$

$$\left[\int\limits_0^{1/\mu} \tau^\nu w_\nu(\tau\sqrt{\lambda}, r\sqrt{\lambda}) \left(\int\limits_\omega u_i(x+\tau\omega, \lambda)\, q(x, x+\tau\omega)\, d\omega \right) d\tau \right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\mu} \int\limits_0^{1/\mu} \tau^{2\nu} w_\nu^2(\tau\sqrt{\lambda}, r\sqrt{\lambda}) \left(\int\limits_\omega u_i(x+\tau\omega, \lambda)\, q(x, x+\tau\omega)\, d\omega \right)^2 d\tau,$$

*) Мы учитываем также, что $|q(x, y)| \leqslant C < \infty$.

$$\left(\int_{\omega} u_i(x+\tau\omega,\lambda)\,q(x,x+\tau\omega)\,d\omega\right)^2 \leqslant C_1 \int_{\omega} u_i^2(x+\tau\omega,\lambda)\,d\omega,$$

то, принимая во внимание, что

$$w_\nu^2(\tau\sqrt{\lambda}, r\sqrt{\lambda}) \leqslant 2\mathcal{J}_\nu^2(\tau\sqrt{\lambda})\,Y_\nu^2(r\sqrt{\lambda}) + 2\mathcal{J}_\nu^2(r\sqrt{\lambda})\,Y_\nu^2(\tau\sqrt{\lambda}),$$

получим для указанного первого члена $\mathcal{K}_1$ следующую оценку *):

$$\mathcal{K}_1 \leqslant C_2\mu^{N-1}\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_{\mu\leqslant\sqrt{\lambda}\leqslant\mu+1}\left\{\int_{R/2}^{R} r^2\mathcal{J}_\nu^2(r\mu)\,\mathcal{J}_\nu^2(r\sqrt{\lambda})\times\right.$$

$$\left.\times\left[\int_0^{1/\mu}\tau^{2\nu}Y_\nu^2(\tau\sqrt{\lambda})\left(\int_{\omega} u_i^2(x+\tau\omega,\lambda)\,d\omega\right)d\tau\right]dr\right\}d\rho(\lambda)\;+$$

$$+\;C_2\mu^{N-1}\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_{\mu\leqslant\sqrt{\lambda}\leqslant\mu+1}\left\{\int_{R/2}^{R} r^2\mathcal{J}_\nu^2(r\mu)\,Y_\nu^2(r\sqrt{\lambda})\times\right.$$

$$\left.\times\left[\int_0^{1/\mu}\tau^{2\nu}\mathcal{J}_\nu(\tau\sqrt{\lambda})\left(\int_{\omega} u_i^2(x+\tau\omega,\lambda)\,d\omega\right)d\tau\right]dr\right\}d\rho(\lambda). \qquad (4.1.35)$$

Так как $\mu>\mu_0$, где μ_0 — достаточно большое положительное число, то при $\mu\leqslant\sqrt{\lambda}\leqslant\mu+1$ и при всех r из сегмента $R/2\leqslant r\leqslant\leqslant R$ справедливы оценки

$$\mathcal{J}_\nu^2(r\mu)\leqslant\frac{C_3}{r\mu},\quad \mathcal{J}_\nu^2(r\sqrt{\lambda})\leqslant\frac{C_4}{r\mu},\quad Y_\nu^2(r\sqrt{\lambda})\leqslant\frac{C_5}{r\mu}, \qquad (4.1.36)$$

а при всех τ из сегмента $0\leqslant\tau\leqslant 1/\mu$ справедливы оценки

$$\begin{cases}\mathcal{J}_\nu^2(\tau\sqrt{\lambda})\leqslant C_6(\tau\mu)^{2\nu},\\ Y_\nu^2(\tau\sqrt{\lambda})\leqslant\begin{cases}C_7(\tau\mu)^{-2\nu} & \text{при}\quad N\neq 2,\ \text{т. е. при}\ \nu\neq 0,\\ C_8(\tau\mu)^{-1/2} & \text{при}\quad N=2,\ \text{т. е. при}\ \nu=0.\end{cases}\end{cases} \qquad (4.1.37)$$

Привлекая для оценки правой части (4.1.35) оценки (4.1.36) и (4.1.37), получим, что

$$\mathcal{K}_1\leqslant C_9\mu^{N-3}\times$$

$$\times\int_0^{1/\mu}\left\{\int_{\omega}\left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_{\mu\leqslant\sqrt{\lambda}\leqslant\mu+1}u_i^2(x+\tau\omega,\lambda)\,d\rho(\lambda)\right]d\omega\right\}\tau^{-\frac{1}{2}}\mu^{-2\nu-\frac{1}{2}}\,d\tau\;+$$

$$+\;C_{10}\mu^{N-3}\int_0^{1/\mu}\left\{\int_{\omega}\left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_{\mu\leqslant\sqrt{\lambda}\leqslant\mu+1}u_i^2(x+\tau\omega,\lambda)\,d\rho(\lambda)\right]d\omega\right\}(\tau^2\mu)^{2\nu}\,d\tau. \qquad (4.1.38)$$

---

*) Символами C_1, C_2, ... мы обозначаем различные постоянные, зависящие лишь от N, $\sup\limits_{x\in G}|q(x,y)|$ и от фиксированных подобластей G' и G''.

Учитывая, что $2\nu = N-2$ и что для любой точки x из подобласти G'' значение $x+\tau\omega$ содержится в подобласти G', и привлекая для оценки выражений, стоящих в правой части (4.1.38) в квадратных скобках, оценку (4.1.30), получим, что для всех x из G'' правая часть (4.1.38) не превосходит величины $C_{11}\cdot\mu^{s-2}$.

Тем самым доказано, что первый член в правой части (4.1.34) равномерно относительно x из подобласти G'' имеет порядок $O(\mu^{s-2})$.

Теперь нам остается доказать, что второй член в правой части (4.1.34), который мы для краткости обозначим через $\mathscr{K}_2$, равномерно относительно x из подобласти G'' имеет порядок $O(\mu^{N-1})$.

В силу неравенства Коши — Буняковского указанный второй член $\mathscr{K}_2$ мажорируется следующей величиной:

$$\mathscr{K}_2 \leqslant R\left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^N \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\mu\leqslant\sqrt{\lambda}\leqslant\mu+1} \left\{\int\limits_{R/2}^{R} r^2\mathscr{J}_\nu^2(r\mu)\left[\int\limits_{1/\mu}^{r} \tau^\nu w_\nu(\tau\sqrt{\lambda}, r\sqrt{\lambda}) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(\int\limits_{\omega} u_i(x+\tau\omega, \lambda)\, q(x, x+\tau\omega)\, d\omega\right) d\tau\right]^2 dr\right\} d\rho(\lambda). \qquad (4.1.39)$$

Оценим отдельно квадрат величины, стоящей в правой части (4.1.39) в квадратных скобках.

Заметим, что в силу равенства

$$w_\nu(\tau\sqrt{\lambda}, r\sqrt{\lambda}) = \mathscr{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})\, Y_\nu(\tau\sqrt{\lambda}) - \mathscr{J}_\nu(\tau\sqrt{\lambda})\, Y_\nu(r\sqrt{\lambda})$$

справедлива оценка

$$\left[\int\limits_{1/\mu}^{r} \tau^\nu w_\nu(\tau\sqrt{\lambda}, r\sqrt{\lambda}) \left(\int\limits_{\omega} u_i(x+\tau\omega, \lambda)\, q(x, x+\tau\omega)\, d\omega\right) d\tau\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\mathscr{J}_\nu^2(r\sqrt{\lambda}) \left[\int\limits_{1/\mu}^{r} \tau^\nu Y_\nu(\tau\sqrt{\lambda}) \left(\int\limits_{\omega} u_i(x+\tau\omega, \lambda)\, q(x, x+\tau\omega) d\omega\right) d\tau\right]^2 +$$

$$+ 2Y_\nu^2(r\sqrt{\lambda}) \left[\int\limits_{1/\mu}^{r} \tau^\nu \mathscr{J}_\nu(\tau\sqrt{\lambda}) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int\limits_{\omega} u_i(x+\tau\omega, \lambda)\, q(x, x+\tau\omega)\, d\omega\right) d\tau\right]^2. \qquad (4.1.40)$$

Оба члена, стоящие в правой части (4.1.40), оцениваются стереотипно, и мы ограничимся оценкой первого из них.

Возьмем у этого первого члена по частям интеграл, стоящий в квадратных скобках, полагая

$$u(\tau) = \tau^{-1/4} Y_\nu(\tau\sqrt{\lambda}),$$

$$v(\tau) = \int\limits_{1/\mu}^{\tau} \rho^{\nu+1/4} \left(\int\limits_{\omega} u_i(x+\rho\omega, \lambda)\, q(x, x+\rho\omega)\, d\omega\right) d\rho.$$

При этом получим равенство

$$\int\limits_{1/\mu}^{r} \tau^{\nu} Y_{\nu}(\tau\sqrt{\lambda}) \left(\int\limits_{\omega} u_i(x+\tau\omega, \lambda)\, q(x, x+\tau\omega)\, d\omega\right) d\tau =$$

$$= r^{-\frac{1}{4}} Y_{\nu}(r\sqrt{\lambda}) \int\limits_{1/\mu}^{r} \rho^{\nu+\frac{1}{4}} \left(\int\limits_{\omega} u_i(x+\rho\omega, \lambda)\, q(x, x+\rho\omega)\, d\omega\right) d\rho -$$

$$- \int\limits_{1/\mu}^{r} \frac{d}{d\tau}\left[\tau^{-\frac{1}{4}} Y_{\nu}(\tau\sqrt{\lambda})\right] \int\limits_{1/\mu}^{\tau} \rho^{\nu+\frac{1}{4}} \left(\int\limits_{\omega} u_i(x+\rho\omega, \lambda) q(x, x+\rho\omega)\, d\omega\right) d\rho.$$

Из последнего равенства и из неравенства $(A+B)^2 \leqslant 2A^2 + 2B^2$ вытекает следующее неравенство:

$$\left[\int\limits_{1/\mu}^{r} \tau^{\nu} Y_{\nu}(\tau\sqrt{\lambda}) \left(\int\limits_{\omega} u_i(x+\tau\omega, \lambda)\, q(x, x+\tau\omega)\, d\omega\right) d\tau\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2r^{-\frac{1}{2}} Y_{\nu}^2(r\sqrt{\lambda}) \left[\int\limits_{1/\mu}^{r} \rho^{\nu+\frac{1}{4}} \left(\int\limits_{\omega} u_i(x+\rho\omega, \lambda)\, q(x, x+\rho\omega) d\omega\right) d\rho\right]^2 +$$

$$+ 2 \int\limits_{1/\mu}^{r} \tau^{\frac{3}{4}} \left\{\frac{d}{d\tau}\left[\tau^{-\frac{1}{4}} Y_{\nu}(\tau\sqrt{\lambda})\right]\right\}^2 d\tau \times$$

$$\times \int\limits_{1/\mu}^{r} \tau^{-\frac{3}{4}} \left[\int\limits_{1/\mu}^{\tau} \rho^{\nu+\frac{1}{4}} \left(\int\limits_{\omega} u_i(x+\rho\omega, \lambda)\, q(x, x+\rho\omega)\, d\omega\right) d\rho\right]^2 d\tau. \tag{4.1.41}$$

Заметим теперь, что в силу соотношения (4.1.9)

$$\int\limits_{1/\mu}^{\tau} \rho^{\nu+\frac{1}{4}} \left(\int\limits_{\omega} u_i(x+\rho\omega, \lambda)\, q(x, x+\rho\omega)\, d\omega\right) d\rho =$$

$$= \int\limits_{1/\mu \leqslant r_{xy} \leqslant \tau} \frac{u_i(y, \lambda)\, q(x, y)}{\rho_0(y)\, r_{xy}^{N/2-1/4}}\, \rho_0(y)\, dy, \tag{4.1.42}$$

где, как и выше, символ r_{xy} обозначает геодезическое расстояние между фиксированной точкой x и переменной точкой y.

Заметим далее, что в силу рекуррентного соотношения $(t^{\nu} Y_{\nu}(t))' = t^{\nu} Y_{\nu-1}(t)$ имеет место равенство

$$\frac{d}{d\tau}\left[\tau^{-1/4} Y_{\nu}(\tau\sqrt{\lambda})\right] = \frac{d}{d\tau}\left\{\tau^{-\frac{1}{4}-\nu}\left[\tau^{\nu} Y_{\nu}(\tau\sqrt{\lambda})\right]\right\} =$$

$$= \tau^{-\frac{1}{4}-\nu} \tau^{\nu} \sqrt{\lambda}\, Y_{\nu-1}(\tau\sqrt{\lambda}) - \left(\frac{1}{4}+\nu\right) \tau^{-\frac{5}{4}-\nu} \tau^{\nu} Y_{\nu}(\tau\sqrt{\lambda}) =$$

$$= \tau^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\lambda}\, Y_{\nu-1}(\tau\sqrt{\lambda}) - \left(\frac{1}{4}+\nu\right) \tau^{-\frac{5}{4}} Y_{\nu}(\tau\sqrt{\lambda}),$$

так что

$$\tau^{3/4}\left\{\frac{d}{d\tau}\left[\tau^{-1/4}Y_\nu\left(\tau\sqrt{\lambda}\right)\right]\right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\tau^{1/4}(\mu+1)^2 Y_{\nu-1}^2\left(\tau\sqrt{\lambda}\right) + 2\left(\frac{1}{4}+\nu\right)^2 \tau^{-7/4} Y_\nu^2\left(\tau\sqrt{\lambda}\right).$$

Из последнего неравенства и третьей оценки (4.1.36) получим, что

$$\tau^{3/4}\left\{\frac{d}{d\tau}\left[\tau^{-1/4}Y_\nu\left(\tau\sqrt{\lambda}\right)\right]\right\}^2 \leqslant C_{11}\left(\tau^{-3/4}\mu + \tau^{-11/4}\mu^{-1}\right),$$

так что

$$\int\limits_{1/\mu}^{r} \tau^{3/4}\left\{\frac{d}{d\tau}\left[\tau^{-1/4}Y_\nu\left(\tau\sqrt{\lambda}\right)\right]\right\}^2 d\tau \leqslant C_{12}\left(r^{1/4}\mu + \mu^{3/4}\right) \leqslant C_{13}\mu r^{1/4}. \tag{4.1.43}$$

Из соотношений (4.1.41) — (4.1.43) и из третьего соотношения (4.1.36) вытекает неравенство

$$\left[\int\limits_{1/\mu}^{r} \tau^\nu Y_\nu\left(\tau\sqrt{\lambda}\right)\left(\int\limits_{\omega} u_i(x+\tau\omega, \lambda)\, q(x, x+\tau\omega)\, d\omega\right) d\tau\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2r^{-3/2}\mu^{-1/2}\left[\int\limits_{\frac{1}{\mu}\leqslant r_{xy}\leqslant r} \frac{u_i(y, \lambda)\, q(x, y)}{\rho_0(y)\, r_{xy}^{N/2-1/4}}\, \rho_0(y)\, dy\right]^2 +$$

$$+ 2C_{13}\mu r^{1/4}\int\limits_{1/\mu}^{r} \tau^{-3/4}\left[\int\limits_{1/\mu\leqslant r_{xy}\leqslant\tau} \frac{u_i(y, \lambda)\, q(x, y)}{\rho_0(y)\, r_{xy}^{N/2-1/4}}\, \rho_0(y)\, dy\right]^2 d\tau. \tag{4.1.44}$$

Совершенно аналогично оценивается второй заключенный в квадратные скобки интеграл в правой части (4.1.40). Для квадрата этого интеграла имеет место оценка:

$$\left[\int\limits_{1/\mu}^{r} \tau^\nu \mathcal{J}_\nu\left(\tau\sqrt{\lambda}\right)\left(\int\limits_{\omega} u_i(x+\tau\omega, \lambda)\, q(x, x+\tau\omega)\, d\omega\right) d\tau\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2r^{-3/2}\mu^{-1/2}\left[\int\limits_{1/\mu\leqslant r_{xy}\leqslant r} \frac{u_i(y, \lambda)\, q(x, y)}{\rho_0(y)\, r_{xy}^{N/2-1/4}}\, \rho_0(y)\, dy\right]^2 +$$

$$+ 2C_{14}\mu r^{1/4}\int\limits_{1/\mu}^{r} \tau^{-3/4}\left[\int\limits_{1/\mu\leqslant r_{xy}\leqslant\tau} \frac{u_i(y, \lambda)\, q(x, y)}{\rho_0(y)\, r_{xy}^{N/2-1/4}}\, \rho_0(y)\, dy\right]^2 d\tau. \tag{4.1.45}$$

Используя в правой части (4.1.40) неравенства (4.1.44) и (4.1.45) и последние две оценки (4.1.36), придем к неравенству

$$\left[\int\limits_{1/\mu}^{r} \tau^{\nu} w_{\nu}\left(\tau \sqrt{\lambda}, r \sqrt{\lambda}\right)\left(\int\limits_{\omega} u_i(x+\tau\omega, \lambda)\, q(x, x+\tau\omega)\, d\omega\right) d\tau\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_{15} r^{-5/2} \mu^{-3/2} \left[\int\limits_{\frac{1}{\mu}\leqslant r_{xy}\leqslant r} \frac{u_i(y, \lambda)\, q(x, y)}{\rho_0(y)\, r_{xy}^{\frac{N}{2}-\frac{1}{4}}} \rho_0(y)\, dy\right]^2 +$$

$$+ C_{16} r^{-3/4} \int\limits_{1/\mu}^{r} \tau^{-3/4} \left[\int\limits_{\frac{1}{\mu}\leqslant r_{xy}\leqslant \tau} \frac{u_i(y, \lambda)\, q(x, y)}{\rho_0(y)\, r_{xy}^{\frac{N}{2}-\frac{1}{4}}} \rho_0(y)\, dy\right]^2 d\tau. \quad (4.1.46)$$

Подставляя неравенство (4.1.46) в (4.1.39) и используя первую оценку (4.1.36), получим, что

$$\mathcal{K}_2 \leqslant C_{17} \mu^{N-\frac{5}{2}} \int\limits_{R/2}^{R} r^{-\frac{3}{2}} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\mu\leqslant\sqrt{\lambda}\leqslant\mu+1} \left[\int\limits_{\frac{1}{\mu}\leqslant r_{xy}\leqslant r} \frac{u_i(y, \lambda)\, q(x, y)}{\rho_0(y)\, r_{xy}^{\frac{N}{2}-\frac{1}{4}}} \rho_0(y)\, dy\right]^2 d\rho(\lambda)\right\} dr +$$

$$+ C_{18} \mu^{N-1} \int\limits_{R/2}^{R} r^{\frac{1}{4}} \left\{\int\limits_{1/\mu}^{r} \tau^{-\frac{3}{4}} \left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\mu\leqslant\sqrt{\lambda}\leqslant\mu+1} \left(\int\limits_{\frac{1}{\mu}\leqslant r_{xy}\leqslant\tau} \frac{u_i(y, \lambda)\, q(x, y)}{\rho_0(y)\, r_{xy}^{\frac{N}{2}-\frac{1}{4}}} \times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \times \rho_0(y)\, dy\right)^2 d\rho(\lambda)\right] d\tau\right\} dr. \quad (4.1.47)$$

Так как для любой точки x подобласти G'' и для любого $\tau \leqslant r \leqslant R$ функция

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{q(x, y)}{\rho_0(y)\, r_{xy}^{N/2-1/4}} & \text{при } \dfrac{1}{\mu} \leqslant r_{xy} \leqslant \tau, \\ 0 & \text{для остальных значений } y \end{cases}$$

принадлежит классу $L_2(G, \rho_0(y))$ и ее норма в этом классе для всех x из G'' ограничена одной и той же постоянной C_{19}, то из равенства Парсеваля для этой функции

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{0}^{\infty} \left[\int\limits_{1/\mu\leqslant r_{xy}\leqslant\tau} \frac{u_i(y,\lambda)\, q(x, y)}{\rho_0(y)\, r_{xy}^{\frac{N}{2}-\frac{1}{4}}} \rho_0(y)\, dy\right]^2 d\rho(\lambda) = \int\limits_{G} f^2(y)\, \rho_0(y)\, dy \leqslant C_{19}$$

и из неравенства (4.1.47) вытекает оценка

$$\mathcal{K}_2 \leqslant C_{20} \mu^{N-\frac{5}{2}} \int\limits_{R/2}^{R} r^{-\frac{3}{2}} dr + C_{21} \mu^{N-1} \int\limits_{R/2}^{R} r^{\frac{1}{2}} dr \leqslant C_{22} \mu^{N-1},$$

равномерная относительно x в подобласти G''.

Тем самым доказано, что второй член в правой части (4.1.34) равномерно относительно x в подобласти G'' имеет порядок $O(\mu^{N-1})$.

Доказательство леммы 4.1 завершено.

Так же как и в случае оператора Лапласа, извлечем из леммы 4.1 два простых следствия.

Следствие 1. *Для любого $\mu \geqslant 1$ и для любого t из сегмента $1 \leqslant t \leqslant \mu$ равномерно относительно x в каждой строго внутренней подобласти G' области G справедлива оценка*

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{|\sqrt{\lambda}-\mu| \leqslant t} u_i^2(x, \lambda)\, d\rho(\lambda) = tO(\mu^{N-1}). \tag{4.1.48}$$

Следствие 2. *Для любого $\delta > 0$ и для всех $\lambda \geqslant 1$ равномерно относительно x в каждой строго внутренней подобласти G' области G справедливы оценки*

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{1}^{\lambda} u_i^2(x, t)\, t^{\delta - N/2}\, d\rho(t) = O(\lambda^{\delta}), \tag{4.1.49}$$

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\lambda}^{\infty} u_i^2(x, t)\, t^{-\delta - N/2}\, d\rho(t) = O(\lambda^{-\delta}). \tag{4.1.50}$$

В частности, для любого $\delta > 0$ можно утверждать равномерную по x в G' ограниченность величины

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{1}^{\infty} u_i^2(x, t)\, t^{-\delta - N/2}\, d\rho(t). \tag{4.1.51}$$

Для доказательства этих следствий нужно повторить совершенно не связанные с видом эллиптического оператора и опирающиеся лишь на оценку (4.1.14) рассуждения, изложенные в конце п. 2 § 3 гл. 2.

4. Дробные степени самосопряженных расширений эллиптических операторов. Пусть $\widehat{A}$ — произвольное самосопряженное неотрицательное расширение эллиптического оператора (4.1.1), которое мы, не ограничивая общности, будем считать строго положительным *), т. е. будем считать, что существует постоянная $\mu_0 > 0$ такая, что для всех $u(x)$ из $C_0^\infty(G)$ справедливо неравенство $(\widehat{A}u, u) \geqslant \mu_0(u, u)$.

Обозначим через $\{E_\lambda\}$ спектральное семейство расширения $\widehat{A}$ и рассмотрим для любого вещественного $\alpha > 0$ оператор $\widehat{A}^{-\alpha}$, определяемый равенством

$$\widehat{A}^{-\alpha} = \int\limits_{\mu_0}^{\infty} \lambda^{-\alpha}\, dE_\lambda. \tag{4.1.52}$$

---

*) Этого всегда можно достичь изменением коэффициента $c(x)$ оператора (4.1.1).

Из уже упомянутой в гл. 2 работы Л. Гординга вытекает, что оператор (4.1.52) является для случая, когда одна из точек x или y лежит внутри G, интегральным оператором с ядром $T_\alpha(x, y)$, которое естественно назвать *ядром дробного порядка* (а точнее *ядром порядка* α).

Однако для общего самосопряженного эллиптического оператора второго порядка с переменными коэффициентами не представляется возможным провести столь же детальное изучение структуры ядер дробного порядка, как это сделано нами в п. 3 § 3 гл. 2 для случая оператора Лапласа.

Поэтому мы ограничимся изложением результатов, необходимых для потребностей спектральной теории, а точнее для установления негативных и позитивных теорем о локализации и сходимости спектральных разложений.

Пусть n — любой номер, $\mathscr{D}(\widehat{A}^n)$ — область определения оператора $\widehat{A}^n$, а символ $\widetilde{\Delta}(\widehat{A})$ обозначает класс

$$\widetilde{\Delta}(\widehat{A}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{D}\left(\widehat{A}^n\right), \tag{4.1.53}$$

являющийся пересечением областей определения всех целых положительных степеней оператора $\widehat{A}$.

При изучении вопросов сходимости и локализации спектральных разложений можно пренебрегать функциями из класса (4.1.53), ибо спектральные разложения таких функций заведомо сходятся абсолютно и равномерно на любом компакте основной области G.

Иными словами, можно изучать спектральные разложения функций, принадлежащих тому или иному классу дифференцируемых функций с точностью до слагаемого, принадлежащего классу (4.1.53).

Для произвольной области Ω договоримся обозначать символом $\overset{0}{H}{}^\alpha(\Omega)$ класс функций, полученный замыканием по норме класса Никольского $H_p^\alpha(\Omega)$ множества функций из $C_0^\infty(\Omega)$.

Нам понадобятся следующие два утверждения.

Утверждение 1. *Если D — ограниченная область, замыкание которой содержится в рассматриваемой произвольной N-мерной области G, а Ω — область, замыкание которой содержится в открытой области D, то для любых вещественных $\alpha > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и для любой функции h, финитной в области Ω и принадлежащей классу $L_p(G)$, найдется функция f, финитная в D, принадлежащая классу Никольского $H_p^{2\alpha}(G)$ и такая, что $f - \widehat{A}^{-\alpha}h \in \widetilde{\Delta}(\widehat{A})$.*

Утверждение 2. *Пусть D, Ω и G имеют тот же смысл, что и в утверждении 1. Тогда для любых $\alpha > 0$, $s > 0$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$ оператор $\widehat{A}^{-\alpha}$ осуществляет изоморфизм классов Никольского H_p^s и $\overset{0}{H}{}_p^{s+2\alpha}$ по модулю $\widetilde{\Delta}(\widehat{A})$. Это означает, что:*

1) *для любой функции* h *из класса* $\overset{0}{H}{}^s_p(\Omega)$ *существует функция* f *из класса* $\overset{0}{H}{}^{s+2\alpha}_p(D)$ *такая, что* $f-\widehat{A}^{-\alpha}h\in\widetilde{\Delta}(\widehat{A})$;

2) *для любой функции* f *из класса* $\overset{0}{H}{}^{s+2\alpha}_p(\Omega)$ *существует функция* h *из класса* $H^s_p(D)$ *такая, что* $f-\widehat{A}^{-\alpha}h\in\widetilde{\Delta}(\widehat{A})$.

Оба сформулированных утверждения доказаны Ш. А. Алимовым [1], причем не только для эллиптического оператора второго порядка, но и для эллиптического оператора порядка $2m$.

§ 2. Теоремы негативного типа

В этом параграфе для произвольного самосопряженного неотрицательного расширения $\widehat{A}$ эллиптического оператора второго порядка (4.1.1) в произвольной N-мерной области G с весом $\rho_0(x)$ мы установим теоремы негативного типа, аналогичные теоремам 2.1 и 2.2, установленным в гл. 2 для случая оператора Лапласа.

Предположим, что коэффициенты оператора (4.1.1) и весовая функция $\rho_0(x)$ удовлетворяют требованиям, сформулированным в п. 1 § 1.

Нашей целью является установление следующих двух предложений.

Теорема 4.1. (Об условиях, не обеспечивающих локализации средних Рисса порядка s в классах Зигмунда — Гёльдера.) *Пусть* $N\geqslant 2$, $0\leqslant s<(N-1)/2$, G — *произвольная область в пространстве* E^N, $\widehat{A}$ — *произвольное самосопряженное неотрицательное расширение эллиптического оператора* (4.1.1) *в области* G *с весом* $\rho_0(x)$, x_0 — *любая фиксированная внутренняя точка области* G, α — *любое фиксированное вещественное число, удовлетворяющее неравенствам* $0<\alpha<(N-1)/2-s$. *Тогда существует функция* $f(x)$, *удовлетворяющая следующим требованиям*: 1) $f(x)$ *финитна в области* G *и обращается в нуль в некоторой окрестности* D *точки* x_0; 2) $f(x)$ *принадлежит классу Зигмунда — Гёльдера* $C^\alpha(G)$; 3) *средние Рисса* $\sigma^s_\lambda(x_0, f)$ *порядка* s *размера* λ *спектрального разложения функции* $f(x)$ *не имеют предела при* $\lambda\to\infty$ *в точке* x_0.

Теорема 4.2. (Об условиях, не обеспечивающих локализации средних Рисса порядка s в классах Соболева — Лиувилля, Никольского и Бесова.) *Пусть* $N\geqslant 2$, $0\leqslant s<(N-1)/2$, G — *произвольная область в пространстве* E^N, $\widehat{A}$ — *произвольное самосопряженное неотрицательное расширение эллиптического оператора* (4.1.1) *в области* G *с весом* $\rho_0(x)$, x_0 — *любая фиксированная внутренняя точка области* G, α — *любое фиксированное вещественное число, удовлетворяющее неравенствам* $0<\alpha<(N-1)/2-s$. *Тогда существует функция* $f(x)$, *удовлетворяющая следующим требованиям*:

1) $f(x)$ *финитна в области* G *и обращается в нуль в некоторой окрестности* D *точки* x_0; 2) $f(x)$ *принадлежит каждому из классов Соболева — Лиувилля* $L_p^\alpha(G)$, *Никольского* $H_p^\alpha(G)$ *и Бесова* $B_{p,\theta}^\alpha$ *с порядком дифференцируемости* α, *с любой степенью суммируемости* $p \geqslant 1$ *и (в случае класса Бесова) с любым* $\theta \geqslant 1$; 3) *средние Рисса* $\sigma_\lambda^s(x_0, f)$ *порядка* s *размера* λ *спектрального разложения функции* $f(x)$ *не имеют предела при* $\lambda \to \infty$ *в точке* x_0.

Точно так же, как в п. 1 § 2 гл. 2, элементарно устанавливается, что теорема 4.2 является простым следствием теоремы 4.1.

Поэтому мы остановимся только на доказательстве теоремы 4.1.

Настоящий параграф состоит из четырех пунктов, в первом из которых проводится доказательство центральной леммы об оценке снизу функции Лебега средних Рисса малого неотрицательного порядка; в п. 2 проводится доказательство основного неравенства, используемого при доказательстве леммы из п. 1; в п. 3 доказательство центральной леммы об оценке снизу функции Лебега распространяется на средние Рисса любого неотрицательного порядка; наконец, п. 4 посвящен непосредственному доказательству теоремы 4.1.

1. Доказательство центральной леммы для средних Рисса малого неотрицательного порядка.

Лемма 4.2. (Об оценке снизу функции Лебега средних Рисса порядка $0 \leqslant s < 1/2$.) *Пусть* G — *произвольная область в пространстве* E^N, $\widehat{A}$ — *произвольное самосопряженное неотрицательное расширение оператора* (4.1.1) *в области* G *с весом* $\rho_0(x)$, *относительно которого взято произвольное упорядоченное спектральное представление пространства* *) $L_2(G, \rho_0(x))$ *с мерой* $\rho(\lambda)$, *множествами кратности* e_i, *фундаментальными функциями* $u_i(x, \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, \widehat{m})$ *и кратностью* $\widehat{m} \leqslant \infty$, x_0 — *любая фиксированная точка открытой области* G, r_{x_0y} — *геодезическое расстояние между точкой* x_0 *и переменной точкой* y, *отсчитываемое вдоль выходящих из точки* x_0 *лучей уравнения* (4.1.7), E — *кольцевой слой вида* $E = \{R^4/4 \leqslant r_{x_0y} \leqslant R^4\}$, *целиком содержащийся в области* G. *Тогда для любого* s *из полуинтервала* $0 \leqslant s < 1/2$ *положительное число* R *можно фиксировать столь малым, что для некоторого* $\alpha_0 > 0$ *и для всех достаточно больших* $\lambda > 0$ *будет справедливо неравенство*

$$\int_E \left| \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\lambda u_i(x_0, t)\, u_i(y, t) \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho(t) \right| \rho_0(y)\, dy \geqslant \alpha_0 \lambda^{\frac{N-1}{4} - \frac{s}{2}}. \tag{4.2.1}$$

*) См. п. 1 § 1 этой главы.

З а м е ч а н и е. Если обозначить символом $\theta^s(x, y, \lambda)$ средние Рисса порядка s от спектральной функции расширения $\widehat{\Lambda}$, то оценку (4.2.1) можно переписать в виде

$$\int_E |\theta^s(x_0, y, \lambda)| \rho_0(y)\, dy \geqslant \alpha_0 \lambda^{\frac{N-1}{4} - \frac{s}{2}}. \qquad (4.2.1')$$

Из неравенства (4.2.1′) вытекает, что при замене кольцевого слоя E всей областью G тем более справедливо неравенство

$$\int_G |\theta^s(x_0, y, \lambda)| \rho_0(y)\, dy \geqslant \alpha_0 \lambda^{\frac{N-1}{4} - \frac{s}{2}},$$

которое представляет собой оценку снизу функции Лебега средних Рисса порядка s.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 4.2. Фиксируя произвольную точку x_0 открытой области G, вводя в окрестности точки x_0 семейство лучей уравнения (4.1.7) и считая, что положительное число R настолько мало, что геодезический шар радиуса R с центром в точке x_0 во всяком случае содержится в области G, рассмотрим функцию

$$V^\lambda(x_0, y) = p(x_0, y) \overset{\lambda}{v}(r_{x_0 y}),$$

где $r_{x_0 y}$ — геодезическое расстояние между точкой x_0 и переменной точкой y, $p(x, y)$ — функция из формулы среднего значения Е. И. Моисеева (4.1.10) (см. п. 2 § 1), а функция $\overset{\lambda}{v}(r_{x_0 y})$ с точностью до множителя $\rho_0(x_0)$ имеет такой же вид, как и в случае оператора Лапласа*):

$$\overset{\lambda}{v}(r_{x_0 y}) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(s+1) \cdot 2^s (2\pi)^{-N/2}}{\rho_0(x_0)} \lambda^{\frac{N}{4} - \frac{s}{2}} r_{x_0 y}^{-\left(\frac{N}{2} + s\right)} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}\left(r_{x_0 y} \sqrt{\lambda}\right) & \text{при } r_{x_0 y} \leqslant R, \\ 0 & \text{при } r_{x_0 y} > R. \end{cases} \qquad (4.2.2)$$

В силу соотношений (4.1.11) — (4.1.13) из п. 2 § 1 образ Фурье $\widehat{V}_i^\lambda(x_0, t)$ функции $V^\lambda(x_0, y)$ относительно фундаментальной функции $u_i(y, t)$ равен

$$\widehat{V}_i^\lambda(x_0, t) = (2\pi)^{N/2} \rho_0(x_0) u_i(x_0, t)\, t^{\frac{2-N}{4}} \int_0^R \overset{\lambda}{v}(r)\, r^{\frac{N}{2}} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}-1}\left(r\sqrt{t}\right) dr + \widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t)$$

$$\left(i = 1, 2, \ldots, \widehat{m}\right), \qquad (4.2.3)$$

---

*) См. функцию (2.4.5) из п. 1 § 4 главы 2.

где добавочный член $\widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t)$ имеет вид

$$\widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t) = \rho_0(x_0) \int\limits_0^R r^{\frac{N}{2}} \overset{\lambda}{v}(r) \left[\int\limits_0^r \tau^\nu w_\nu(\tau \sqrt{t}, r\sqrt{t}) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int\limits_\omega u_i(x_0 + \tau\omega, \lambda)\, q(x_0, x_0 + \tau\omega)\, d\omega \right) d\tau \right] dr, \qquad (4.2.4)$$

причем, как и выше, $\nu = (N-2)/2$, $w_\nu(a, b) = \mathcal{J}_\nu(a) Y_\nu(b) - - \mathcal{J}_\nu(b) Y_\nu(a)$.

Вставляя в правую часть (4.2.3) и (4.2.4) выражение (4.2.2) для функции $\overset{\lambda}{v}(r)$, мы придадим образу Фурье $\widehat{V}_i^\lambda(x_0, t)$ вид

$$\widehat{V}_i^\lambda(x_0, t) =$$

$$= \Gamma(s+1) \cdot 2^s \lambda^{\frac{N}{4} - \frac{s}{2}} t^{\frac{2-N}{4}} u_i(x_0, t) \int\limits_0^R \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\, \mathcal{J}_{\frac{N}{2}-1}(r\sqrt{t})\, r^{-s} dr +$$

$$+ \widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \widehat{m}), \quad (4.2.5)$$

где добавочный член $\widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t)$ равен

$$\widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t) = \Gamma(s+1) \cdot 2^s (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \lambda^{\frac{N}{4} - \frac{s}{2}} \int\limits_0^R r^{-s} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda}) \times$$

$$\times \left[\int\limits_0^r \tau^\nu w_\nu(\tau\sqrt{t}, r\sqrt{t}) \left(\int\limits_\omega u_i(x_0 + \tau\omega, \lambda)\, q(x_0, x_0 + \tau\omega)\, d\omega \right) d\tau \right] dr.$$

$$(4.2.6)$$

Правая часть (4.2.5) без добавочного члена $\widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t)$ имеет точно такой же вид, как и в случае оператора Лапласа (см. п. 1 § 4 гл. 2). Поэтому, совершая преобразование $\int\limits_0^R = \int\limits_0^\infty - \int\limits_R^\infty$, мы (как в п. 1 § 4 гл. 2) придадим образу Фурье $\widehat{V}_i^\lambda(x_0, t)$ следующий вид:

$$\widehat{V}_i^\lambda(x_0, t) = \delta_t^\lambda u_i(x_0, t) \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s -$$

$$- \Gamma(s+1) \cdot 2^s \lambda^{\frac{N}{4} - \frac{s}{2}} t^{\frac{2-N}{4}} u_i(x_0, t)\, I_t^\lambda(R) + \widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, \widehat{m}), \qquad (4.2.7)$$

где $\widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t)$ — добавочный член, определяемый соотношением (4.2.6), а величины δ_t^λ и $I_t^\lambda(R)$ имеют тот же смысл, что и в п. 1 § 4 гл. 2, т. е.

$$\delta_t^\lambda = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t < \lambda, \\ 0 & \text{при} \quad t \geqslant \lambda, \end{cases}$$

$$I_t^\lambda(R) = \int_R^\infty \mathscr{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\, \mathscr{J}_{\frac{N}{2}-1}(r\sqrt{t})\, r^{-s} dr, \qquad (4.2.8)$$

причем при $s=0$, $t=\lambda$ следует считать, что $\delta_t^\lambda = 1/2$, $\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s = 1$.

Как и в п. 1 § 4 гл. 2, умножим обе части (4.2.7) на фундаментальную функцию $u_i(y, t)$ и полученное при этом равенство просуммируем по всем номерам i от 1 до $\widehat{m}$ и проинтегрируем по спектральной мере $\rho(t)$ в пределах по t от нуля до Λ, где $\Lambda = \Lambda(\lambda)$ — достаточно большое число, выбор которого уточняется ниже. В результате получим следующее равенство *):

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\Lambda \widehat{V}_i^\lambda(x_0, t)\, u_i(y, t)\, d\rho(t) = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\lambda u_i(x_0, t)\, u_i(y, t) \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho(t) -$$

$$- \Gamma(s+1)\cdot 2^s \lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}} \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\Lambda u_i(x_0, t)\, u_i(y, t)\, t^{\frac{2-N}{4}} I_t^\lambda(R)\, d\rho(t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\Lambda \widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t)\, u_i(y, t)\, d\rho(t). \qquad (4.2.9)$$

Из (4.2.9) вытекает следующее неравенство:

$$\left| \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\lambda u_i(x_0, t)\, u_i(y, t) \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho(t) \right| \geqslant \left| \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\Lambda \widehat{V}_i^\lambda(x_0, t)\, u_i(y, t)\, d\rho(t) \right| -$$

$$- \Gamma(s+1)\cdot 2^s \lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}} \left| \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\Lambda u_i(x_0, t)\, u_i(y, t)\, t^{\frac{2-N}{4}} I_t^\lambda(R)\, d\rho(t) \right| -$$

$$- \left| \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\Lambda \widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t)\, u_i(y, t)\, d\rho(t) \right|,$$

*) При этом мы учитываем первое соотношение (4.2.8) и принимаем во внимание, что точно так же, как в п. 1 § 4 гл. 2, устанавливается абсолютная сходимость интеграла, стоящего в левой части (4.2.9) и интегралов, стоящих под знаками первых двух сумм в правой части (4.2.9). Отсюда уже будет следовать абсолютная сходимость интеграла, стоящего под знаком третьей суммы в правой части (4.2.9).

интегрирование которого с весом $\rho_0(y)$ в координатах точки y по кольцевому слою $E=\left\{\frac{R^4}{4}\leqslant r_{x_0y}\leqslant R^4\right\}$ дает

$$\int\limits_E\left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_0^{\lambda}u_i(x_0, t)\,u_i(y, t)\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho(t)\right|\rho_0(y)\,dy\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_E\left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_0^{\Lambda}\widehat{V}_i^{\lambda}(x_0, t)\,u_i(y, t)\,d\rho(t)\right|\rho_0(y)\,dy-$$

$$-\Gamma(s+1)\cdot 2^s\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}\int\limits_E\left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_0^{\Lambda}u_i(x_0, t)\,u_i(y, t)\,t^{\frac{2-N}{4}}I_t^{\lambda}(R)\,d\rho(t)\right|\rho_0(y)\,dy-$$

$$-\int\limits_E\left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_0^{\Lambda}\widetilde{V}_i^{\lambda}(x_0, t)\,u_i(y, t)\,d\rho(t)\right|\rho_0(y)\,dy. \qquad (4.2.10)$$

Дословно повторяя рассуждения, проведенные в п. 1 § 4 гл. 2 при доказательстве леммы 2.3 и опирающиеся только на равенство Парсеваля, на оценки (4.1.48) — (4.1.50) и на оценки второй величины (4.2.8), установленные в п. 2 § 4 гл. 2, мы установим, что существует такая положительная постоянная β, зависящая лишь от N, s и от положительной точной нижней грани весовой функции $\rho_0(x)$, что для любого достаточно малого $R>0$, любого $\lambda>0$ и для всех достаточно больших $\Lambda(\lambda, R)$ будут справедливы неравенства *)

$$\int\limits_E\left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_0^{\Lambda}\widehat{V}_i^{\lambda}(x_0, t)\,u_i(y, t)\,d\rho(t)\right|\rho_0(y)\,dy\geqslant 2\beta R^{2N-2-4s}\lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}}, \quad (4.2.11)$$

$$\Gamma(s+1)\cdot 2^s\int\limits_E\left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_0^{\Lambda}u_i(x_0, t)\,u_i(y, t)\,t^{\frac{2-N}{4}}I_t^{\lambda}(R)\,d\rho(t)\right|\rho_0(y)\,dy\leqslant$$

$$\leqslant\beta R^{2N-2-4s}. \qquad (4.2.12)$$

Из неравенств (4.2.10) — (4.2.12) вытекает, что для доказательства леммы 4.2 достаточно установить, что для каждого достаточно малого $R>0$ и для любого $\lambda>0$ при всех достаточно больших $\Lambda(\lambda, R)$ будет справедливо неравенство

$$\int\limits_E\left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_0^{\Lambda}\widetilde{V}_i^{\lambda}(x_0, t)\,u_i(y, t)\,d\rho(t)\right|\rho_0(y)\,dy\leqslant\frac{\beta}{2}R^{2N-2-4s}\lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}}. \quad (4.2.13)$$

Переходим к доказательству неравенства (4.2.13). Обозначим через $\widetilde{V}^{\lambda}(x_0, y)$ функцию, образ Фурье которой в разложении по фундаментальным функциям $u_i(y, t)$ равен $\widetilde{V}_i^{\lambda}(x_0, t)$ $(i=1, 2, \ldots, \widehat{m})$.

*) Наличие в рассматриваемом нами случае весового множителя $\rho_0(y)$ не меняет схемы рассуждений, ибо этот множитель ограничен с двух сторон положительными постоянными.

Чтобы доказать, что эта функция как элемент пространства $L_2(G, \rho_0(y))$ существует, достаточно установить, что для каждого фиксированного $\lambda > 0$

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\infty |\widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t)|^2 d\rho(t) < \infty.$$

Мы докажем более сильное неравенство

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\infty |\widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t)|^2 d\rho(t) \leqslant C\lambda^{\frac{N-1}{2}-s}, \tag{4.2.14}$$

где C — постоянная, не зависящая ни от λ, ни от R.

Сначала мы убедимся, что неравенство (4.2.14) позволяет завершить доказательство леммы 4.2, а уж затем перейдем к доказательству этого неравенства.

Итак, предположим, что неравенство (4.2.14) уже доказано. Заметим, что по определению спектрального разложения левую часть (4.2.13) можно записать в виде

$$\int_E |E_\Lambda(y, \widetilde{V}^\lambda(x_0, y))| \rho_0(y)\, dy, \tag{4.2.15}$$

где $E_\Lambda(y, \widetilde{V}^\lambda(x_0, y))$ обозначает спектральное разложение функции $\widetilde{V}^\lambda(x_0, y)$, взятое в точке y (при этом точка x_0 предполагается фиксированной).

Так как функция $\widetilde{V}^\lambda(x_0, y)$ принадлежит классу $L_2(G, \rho_0(y))$, то величина (4.2.15) стремится к $\int_E |\widetilde{V}^\lambda(x_0, y)| \rho_0(y)\, dy$ при $\Lambda \to \infty$.

Поэтому для каждого $\lambda > 0$ и каждого $R > 0$ число Λ можно взять столь большим, что величина (4.2.15) будет отличаться от $\int_E |\widetilde{V}^\lambda(x_0, y)| \rho_0(y)\, dy$ по модулю менее, чем на $\frac{\beta}{4} R^{2N-2-4s} \times \lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}}$.

При таком выборе Λ для установления неравенства (4.2.13) достаточно доказать, что при достаточно малом $R > 0$

$$\int_E |\widetilde{V}^\lambda(x_0, y)| \rho_0(y)\, dy < \frac{\beta}{4} R^{2N-2-4s} \lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}}. \tag{4.2.16}$$

Для доказательства неравенства (4.2.16) применим к интегралу, стоящему в левой его части, неравенство Коши — Буняковского и воспользуемся равенством Парсеваля (4.1.6) для функции $\widetilde{V}^\lambda(x_0, y)$, неравенством (4.2.14) и очевидной оценкой $\int_E \rho_0(y)\, dy = O(R^{4N})$.

В результате получим

$$\int\limits_E |\widetilde{V}^\lambda(x_0, y)|\,\rho_0(y)\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int\limits_G |\widetilde{V}^\lambda(x_0, y)|^2\rho_0(y)\,dy\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int\limits_E \rho_0(y)\,dy\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant O\left(R^{2N}\right)\left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_0^\infty |\widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t)|^2 d\rho(t)\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= O\left(R^{2N}\lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}}\right) = \lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}} o\left(R^{2N-2-4s}\right).$$

Отсюда следует, что при любом достаточно малом $R > 0$

$$\int\limits_E |\widetilde{V}^\lambda(x_0, y)|\,\rho_0(y)\,dy < \frac{\beta}{4} R^{2N-2-4s}\lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}}.$$

Тем самым справедливость неравенства (4.2.16) (а поэтому и неравенства (4.2.13)) при условии справедливости неравенства (4.2.14) нами установлена.

Таким образом, для завершения доказательства леммы 4.2 нам достаточно установить неравенство (4.2.14).

2. Доказательство основного неравенства (4.2.14). В силу соотношения (4.2.6) для доказательства неравенства (4.2.14) достаточно установить существование не зависящей от R и λ постоянной A такой, что

$$I(R, \lambda) = \sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_0^\infty \left\{\int\limits_0^R r^{-s}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\left[\int\limits_0^r \tau^\nu w_\nu(\tau\sqrt{t}, r\sqrt{t})\,\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\int\limits_\omega u_i(x_0+\tau\omega, t)\,q(x_0, x_0+\tau\omega)\,d\omega\right)d\tau\right]dr\right\}^2 d\rho(t) \leqslant A/\sqrt{\lambda}. \tag{4.2.17}$$

Меняя в выражении, заключенном в (4.2.17) в фигурные скобки, порядок интегрирования относительно r и τ, получим

$$\int\limits_0^R r^{-s}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\left[\int\limits_0^r \tau^\nu w_\nu(\tau\sqrt{t}, r\sqrt{t})\,\times\right.$$

$$\left.\times\left(\int\limits_\omega u_i(x_0+\tau\omega, t)\,q(x_0, x_0+\tau\omega)\,d\omega\right)d\tau\right]dr =$$

$$= \int\limits_0^R \tau^\nu\left(\int\limits_\omega u_i(x_0+\tau\omega, t)\,q(x_0, x_0+\tau\omega)\,d\omega\right)\times$$

$$\times\left[\int\limits_\tau^R r^{-s}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\,w_\nu(\tau\sqrt{t}, r\sqrt{t})\,dr\right]d\tau. \tag{4.2.18}$$

Вставим (4.2.18) в (4.2.17) и после этого произведем по τ интегрирование по частям, полагая

$$u(\tau) = \tau^{-\delta} \int\limits_{\tau}^{R} r^{-s} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s} (r\sqrt{\lambda})\, w_\nu (\tau\sqrt{t}, r\sqrt{t})\, dr,$$

$$v(\tau) = \int\limits_{0}^{\tau} \tau_1^{\nu+\delta} \left(\int\limits_{\omega} u_i (x_0 + \tau_1\omega, t)\, q(x_0, x_0 + \tau_1\omega)\, d\omega \right) d\tau_1,$$

где $\delta = \frac{1}{6} - \frac{s}{3}$. Отметим, что поскольку по условию леммы 4.2 $0 \leqslant s < 1/2$, то δ принадлежит полуинтервалу $0 < \delta \leqslant 1/6$.

Учитывая, что обе подстановки $[u(\tau)\, v(\tau)]\,|_{\tau=0}^{\tau=R}$ обращаются в нуль и что в силу соотношения $w_\nu(\tau\sqrt{t}, r\sqrt{t}) = \mathcal{J}_\nu(\tau\sqrt{t})\, Y_\nu(r\sqrt{t}) - \mathcal{J}_\nu(r\sqrt{t})\, Y_\nu(\tau\sqrt{t})$ справедливо равенство $w_\nu(\tau\sqrt{t}, \tau\sqrt{t}) = 0$, а также принимая во внимание соотношение (4.1.9) из п. 2 § 1, получим, что левая часть (4.2.17) определяется равенством

$$I(R, \lambda) = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{0}^{\infty} \left\{ \int\limits_{0}^{R} \left[\int\limits_{r_{x_0 y} \leqslant \tau} \frac{u_i(y, t)\, q(x_0, y)}{\rho_0(y)\, r_{x_0 y}^{\frac{N}{2}-\delta}}\, dy \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[\int\limits_{\tau}^{R} r^{-s} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s} (r\sqrt{\lambda}) \frac{d}{d\tau} \left(\tau^{-\delta} w_\nu (\tau\sqrt{t}, r\sqrt{t})\right) dr \right] d\tau \right\}^2 d\rho(t). \quad (4.2.19)$$

Неравенство (4.2.14) будет доказано, что если мы установим для величины (4.2.19) оценку $I(R, \lambda) = O(\lambda^{-1/2})$.

Приступим к доказательству указанной оценки. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $R < 1$. Разобьем интеграл по переменной t от 0 до ∞ на сумму двух интегралов — от 0 до $1/R^2$ и от $1/R^2$ до ∞. Для второго из указанных двух интегралов разобьем внутренний интеграл по переменной τ от 0 до R на сумму двух интегралов — от 0 до $1/\sqrt{t}$ и от $1/\sqrt{t}$ до R. Для интеграла по переменной t, берущегося в пределах по t от 0 до $1/R^2$, разобьем интегрирование по переменной r в пределах от τ до R на сумму двух интегрирований в пределах от τ до $1/\sqrt{t}$ и от $1/\sqrt{t}$ до R.

Учитывая при этом тривиальное равенство

$$\frac{d}{d\tau} [\tau^{-\delta} w_\nu (\tau\sqrt{t}, r\sqrt{t})] =$$

$$= \mathcal{J}_\nu (r\sqrt{t}) \left[\sqrt{t}\, \tau^{-\delta} Y_{\nu+1} (\tau\sqrt{t}) - (\nu - \delta)\, \tau^{-\delta-1} Y_\nu (\tau\sqrt{t}) \right] -$$

$$- Y_\nu (r\sqrt{t}) \left[\sqrt{t}\, \tau^{-\delta} \mathcal{J}_{\nu+1} (\tau\sqrt{t}) - (\nu - \delta)\, \tau^{-\delta-1} \mathcal{J}_\nu (\tau\sqrt{t}) \right], \quad (4.2.20)$$

сведем доказательство оценки $I(R, \lambda) = O(\lambda^{-1/2})$ для величины (4.2.19) к установлению того, что каждая из следующих пяти величин:

$$I_1(R,\lambda)=\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_{1/R^2}^{\infty}\left\{\int\limits_{1/\sqrt{t}}^{R}\left[\int\limits_{r_{x_0y}\leqslant\tau}\frac{u_i(y,t)\,q(x_0,y)}{\rho_0(y)r_{x_0y}^{\frac{N}{2}-\delta}}\rho_0(y)\,dy\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\int\limits_{\tau}^{R}r^{-s}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\frac{d}{d\tau}\left(\tau^{-\delta}w_\nu(\tau\sqrt{t},r\sqrt{t})\right)dr\right]d\tau\right\}^2 d\rho(t),\quad(4.2.21)$$

$$I_2(R,\lambda)=\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_{1/R^2}^{\infty}\left\{\int\limits_{0}^{1/\sqrt{t}}\left[\int\limits_{r_{x_0y}\leqslant\tau}\frac{u_i(y,t)\,q(x_0,y)}{\rho_0(y)\,r_{x_0y}^{\frac{N}{2}-\delta}}\rho_0(y)\,dy\right]\times\right.$$

$$\times\left[\sqrt{t}\,\tau^{-\delta}Y_{\nu+1}(\tau\sqrt{t})-(\nu-\delta)\,\tau^{-\delta-1}Y_\nu(\tau\sqrt{t})\right]\times$$

$$\left.\times\left[\int\limits_{\tau}^{R}r^{-s}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{t})\,dr\right]d\tau\right\}^2 d\rho(t).\quad(4.2.22)$$

$$I_3(R,\lambda)=\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_{1/R^2}^{\infty}\left\{\int\limits_{0}^{1/\sqrt{t}}\left[\int\limits_{r_{x_0y}\leqslant\tau}\frac{u_i(y,t)\,q(x_0,y)}{\rho_0(y)\,r_{x_0y}^{\frac{N}{2}-\delta}}\rho_0(y)\,dy\right]\times\right.$$

$$\times\left[(\nu-\delta)\,\tau^{-\delta-1}\mathcal{J}_\nu(\tau\sqrt{t})-\sqrt{t}\,\tau^{-\delta}\mathcal{J}_{\nu+1}(\tau\sqrt{t})\right]\times$$

$$\left.\times\left[\int\limits_{\tau}^{1/\sqrt{t}}r^{-s}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\,Y_\nu(r\sqrt{t})\,dr\right]d\tau\right\}^2 d\rho(t),\quad(4.2.23)$$

$$I_4(R,\lambda)=\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_{1/R^2}^{\infty}\left\{\int\limits_{0}^{1/\sqrt{t}}\left[\int\limits_{r_{x_0y}\leqslant\tau}\frac{u_i(y,t)\,q(x_0,y)}{\rho_0(y)\,r_{x_0y}^{\frac{N}{2}-\delta}}\rho_0(y)\,dy\right]\times\right.$$

$$\times\left[(\nu-\delta)\,\tau^{-\delta-1}\mathcal{J}_\nu(\tau\sqrt{t})-\sqrt{t}\,\tau^{-\delta}\mathcal{J}_{\nu+1}(\tau\sqrt{t})\right]\times$$

$$\left.\times\left[\int\limits_{1/\sqrt{t}}^{R}r^{-s}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\,Y_\nu(r\sqrt{t})\,dr\right]d\tau\right\}^2 d\rho(t),\quad(4.2.24)$$

$$I_5(R,\lambda)=\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_{0}^{1/R^2}\left\{\int\limits_{0}^{R}\left[\int\limits_{r_{x_0y}\leqslant\tau}\frac{u_i(y,t)\,q(x_0,y)}{\rho_0(y)\,r_{x_0y}^{\frac{N}{2}-\delta}}\rho_0(y)\,dy\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\int\limits_{\tau}^{R}r^{-s}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\frac{d}{d\tau}\left(\tau^{-\delta}w_\nu(\tau\sqrt{t},r\sqrt{t})\right)dr\right]d\tau\right\}^2 d\rho(t)\quad(4.2.25)$$

имеет порядок $O(\lambda^{-1/2})$ с оценкой O-членов, не зависящей ни от λ, ни от R.

Начнем с установления оценки $I_1(R, \lambda)=O(\lambda^{-1/2})$. Из выражения (4.2.20) очевидно, что при $r \geqslant \tau \geqslant 1/\sqrt{t}$ справедлива оценка *)

$$\left|\frac{d}{d\tau}\left[\tau^{-\delta} u_\nu(\tau\sqrt{t}, r\sqrt{t})\right]\right| \leqslant C_1 r^{-1/2} \tau^{-\frac{1}{2}-\delta}. \tag{4.2.26}$$

Пользуясь этой оценкой и уже много раз фигурировавшим выше неравенством

$$\left|\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\right| \leqslant C_2 r^{-1/2} \lambda^{-1/4}, \tag{4.2.27}$$

получим, что **)

$$\left|\int_\tau^R r^{-s} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda}) \frac{d}{d\tau}\left[\tau^{-\delta} u_\nu(\tau\sqrt{t}, r\sqrt{t})\right] dr\right| \leqslant C_3 \lambda^{-\frac{1}{4}} \tau^{-\frac{1}{2}-s-2\delta}. \tag{4.2.28}$$

Применяя теперь к интегралу, заключенному в (4.2.21) в фигурные скобки, неравенство Коши — Буняковского и используя оценку (4.2.28), получим, что

$$|I_1(R, \lambda)| \leqslant C_4 \lambda^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{1/R^2}^{\infty} \left[\int_0^R \frac{d\tau}{\tau^{1-\delta}}\right] \times$$

$$\times \left[\int_0^R \left(\int_{r_{x_0 y} \leqslant \tau} \frac{u_i(y, t)\, q(x_0, y)}{\rho_0(y)\, r_{x_0 y}^{\frac{N}{2}-\delta}} \rho_0(y) dy\right)^2 \tau^{-2s-5\delta}\right] d\rho(t) \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \lambda^{-\frac{1}{2}} \int_0^R \tau^{-2s-5\delta} \left\{\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^{\infty} \left(\int_{r_{x_0 y} \leqslant \tau} \frac{u_i(y, t)\, q(x_0, y)}{\rho_0(y)\, r_{x_0 y}^{\frac{N}{2}-\delta}} \rho_0(y)\, dy\right)^2 d\rho(t)\right\} d\tau.$$

Выражение, стоящее в правой части последнего неравенства в фигурных скобках, в силу равенства Парсеваля (4.1.6) равно

$$\int_{r_{x_0 y} \leqslant \tau} \frac{q^2(x_0, y)}{\rho_0^2(y)\, r_{x_0 y}^{N-2\delta}} \rho_0(y)\, dy \leqslant C_6,$$

что в силу равенства $-2s-5\delta=-1+\delta$ приводит к оценке

$$|I_1(R, \lambda)| \leqslant C_7 \lambda^{-1/2} \int_0^R \tau^{-1+\delta} d\tau \leqslant C_8 \lambda^{-1/2}.$$

---

*) В дальнейшем символами C_i $(i=1, 2, \ldots)$ обозначаются постоянные, зависящие лишь от N и $0 \leqslant s < 1/2$.

**) В правой части (4.2.28) при $0 < s < 1/2$ можно взять показатель степени у τ равным $-\frac{1}{2}-s-\delta$. Мы берем этот показатель равным $-\frac{1}{2}-s-2\delta$, чтобы охватить и случай $s=0$.

Тем самым вывод оценки $I_1(R, \lambda)=O(\lambda^{-1/2})$ завершен.

Для установления оценки $I_2(R, \lambda)=O(\lambda^{-1/2})$ учтем, что поскольку $\tau\leqslant\frac{1}{\sqrt{t}}$, то

$$|\sqrt{t}\,\tau^{-\delta}Y_{\nu+1}(\tau\sqrt{t})-(\nu-\delta)\,\tau^{-\delta-1}Y_\nu(\tau\sqrt{t})|\leqslant$$
$$\leqslant C_9\,\tau^{-\delta-\nu-1}(\sqrt{t})^{-\nu}\leqslant C_9\tau^{-2\delta-\nu-1}(\sqrt{t})^{-\nu-\delta}. \quad (4.2.29)$$

Кроме того, в силу неравенства $|\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{t})|\leqslant C_{10}r^{-1/2}t^{-1/4}$ и оценки (4.2.27) мы придем к неравенству *)

$$\left|\int_\tau^R r^{-s}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{t})\,dr\right|\leqslant$$
$$\leqslant C_{11}\lambda^{-1/4}t^{-1/4}\int_\tau^R r^{-1-s-\delta}\,dr\leqslant C_{12}\lambda^{-1/4}(\sqrt{t})^{-1/2}\,\tau^{-s-\delta}. \quad (4.2.30)$$

Перемножая почленно неравенства (4.2.29) и (4.2.30), мы придем к оценке

$$|\sqrt{t}\,\tau^{-\delta}Y_{\nu+1}(\tau\sqrt{t})-$$
$$-(\nu-\delta)\,\tau^{-\delta-1}Y_\nu(\tau\sqrt{t})|\left|\int_\tau^R r^{-s}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{t})\,dr\right|\leqslant$$
$$\leqslant C_{12}\lambda^{-\frac{1}{4}}(\sqrt{t})^{-\frac{1}{2}-\nu-\delta}\,\tau^{-s-3\delta-\nu-1}. \quad (4.2.31)$$

Применяя теперь к интегралу, заключенному в (4.2.22) в фигурные скобки, неравенство Коши — Буняковского и используя оценку (4.2.31) и соотношение $-2s-6\delta=-1$, получим, что

$$|I_2(R, \lambda)|\leqslant C_{13}^2\lambda^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_{1/R^2}^{\infty}\left[\int_0^{1/\sqrt{t}}d\tau\right]\times$$
$$\times\left[\int_0^{1/\sqrt{t}}\left(\int_{r_{x_0y}\leqslant\tau}\frac{u_i(y, t)\,q(x_0, y)}{\rho_0(y)\,r_{x_0y}^{\frac{N}{2}-\delta}}\,\rho_0(y)\,dy\right)^2\tau^{-2s-6\delta-2\nu-2}\right]t^{-\nu-\frac{1}{2}-\delta}\,d\rho(t)\leqslant$$
$$\leqslant C_{13}^2\lambda^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_{1/R^2}^{\infty}t^{-\nu-1-\delta}\left\{\int_0^{1/\sqrt{t}}\left[\int_{r_{x_0y}\leqslant\tau}u_i^2(y, t)\,dy\right]\times\right.$$
$$\left.\times\left[\int_{r_{x_0y}\leqslant\tau}\frac{q^2(x_0, y)}{r_{x_0y}^{N-2\delta}}\,dy\right]\tau^{-3-2\nu}\,d\tau\right\}d\rho(t).$$

---

*) Здесь мы учитываем также, что $r\leqslant R<1$, и потому $r^{-1-s}\leqslant r^{-1-s-\delta}$.

Далее, учитывая, что $\nu+1=N/2$ и что

$$\int\limits_{r_{x_0 y}\leqslant\tau}\frac{q^2(x_0,y)}{r_{x_0 y}^{N-2\delta}}\,dy=O\left(\tau^{2\delta}\right),$$

придем к неравенству

$$|I_2(R,\lambda)|\leqslant$$
$$\leqslant C_{14}\lambda^{-1/2}\int\limits_0^R\left\{\int\limits_{r_{x_0 y}\leqslant\tau}\left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int\limits_{1/R^2}^{\infty}t^{-\frac{N}{2}-\delta}u_i^2(y,t)\,d\rho(t)\right]dy\right\}\tau^{-3+2\delta-2\nu}\,d\tau.$$

Остается учесть, что в силу оценки (4.1.50) из п. 3 § 1 величина, заключенная в последнем неравенстве в квадратные скобки, равномерно ограничена (для всех положительных $R<1$ и для любой фиксированной точки x_0) и что $\int\limits_{r_{x_0 y}\leqslant\tau}dy=O\left(\tau^{2\nu+2}\right)$.

Мы получим, что

$$|I_2(R,\lambda)|\leqslant C_{15}\lambda^{-1/2}\int\limits_0^R\tau^{-1+2\delta}\,d\tau\leqslant C_{16}\lambda^{-1/2}.$$

Тем самым вывод оценки $I_2(R,\lambda)=O(\lambda^{-1/2})$ завершен.

Для оценки $I_3(R,\lambda)$ учтем, что $\tau\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{t}}$. Используя оценки

$$\left|Y_\nu\left(r\sqrt{t}\right)\right|\leqslant C_{17}\left(r\sqrt{t}\right)^{-\nu-\delta-\frac{1}{2}},$$

$$\left|\mathcal{J}_\nu\left(\tau\sqrt{t}\right)\right|\leqslant C_{18}\left(\tau\sqrt{t}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

и привлекая неравенство (4.2.27), получим, что

$$\left|(\nu-\delta)\tau^{-\delta-1}\mathcal{J}_\nu(\tau\sqrt{t})-\sqrt{t}\,\tau^{-\delta}\mathcal{J}_{\nu+1}(\tau\sqrt{t})\right|\leqslant C_{19}\tau^{-1-\delta},\quad(4.2.32)$$

$$\left|\int\limits_\tau^{1/\sqrt{t}}r^{-s}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}\left(r\sqrt{\lambda}\right)Y_\nu\left(r\sqrt{t}\right)dr\right|\leqslant$$
$$\leqslant C_{20}\lambda^{-\frac{1}{4}}\left(\sqrt{t}\right)^{-\nu-\delta-\frac{1}{2}}\int\limits_\tau^{1/\sqrt{t}}r^{-s-\nu-1-\delta}\,dr\leqslant$$
$$\leqslant C_{21}\lambda^{-\frac{1}{4}}\left(\sqrt{t}\right)^{-\nu-\delta-\frac{1}{2}}\tau^{-s-\nu-\delta}\leqslant C_{21}\lambda^{-\frac{1}{4}}\left(\sqrt{t}\right)^{-\nu-\delta-\frac{1}{2}}\tau^{-s-\nu-2\delta}.\qquad(4.2.33)$$

Перемножая почленно неравенства (4.2.32) и (4.2.33), придем к оценке

$$\left|(\nu-\delta)\tau^{-\delta-1}\mathcal{J}_\nu(\tau\sqrt{t})-\right.$$
$$\left.-\sqrt{t}\,\tau^{-\delta}\mathcal{J}_{\nu+1}(\tau\sqrt{t})\right|\left|\int\limits_\tau^{1/\sqrt{t}} r^{-s}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\,Y_\nu(r\sqrt{t})\,dr\right|\leqslant$$
$$\leqslant C_{22}\lambda^{-1/4}(\sqrt{t})^{-\nu-\delta-1/2}\tau^{-s-\nu-1-3\delta}. \quad (4.2.34)$$

В правой части (4.2.34) стоит величина того же самого порядка, что и в правой части (4.2.31).

Поэтому для получения оценки $I_3(R,\ \lambda)=O(\lambda^{-1/2})$ следует, отправляясь от оценки (4.2.34), дословно повторить рассуждения, примененные выше для получения оценки $I_2(R,\ \lambda)=O(\lambda^{-1/2})$ и опирающиеся на оценку (4.2.31).

Вывод оценки $I_3(R,\ \lambda)=O(\lambda^{-1/2})$ завершен.

Установим далее оценку $I_4(R,\ \lambda)=O(\lambda^{-1/2})$. На этот раз $r>1/\sqrt{t}\geqslant\tau$ и, опираясь на неравенство (4.2.27) и оценку $|Y_\nu(r\sqrt{t})|\leqslant C_{23}(r\sqrt{t})^{-1/2}$, получим, что

$$\left|\int\limits_{1/\sqrt{t}}^{R} r^{-s}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\,Y_\nu(r\sqrt{t})\,dr\right|\leqslant$$
$$\leqslant C_{24}\lambda^{-1/4}(\sqrt{t})^{-1/2}\int\limits_{1/\sqrt{t}}^{R} r^{-s-1}\,dr\leqslant C_{24}\lambda^{-1/4}(\sqrt{t})^{-1/2}\int\limits_{1/\sqrt{t}}^{R} r^{-s-1-\delta}dr\leqslant$$
$$\leqslant C_{25}\lambda^{-1/4}(\sqrt{t})^{-1/2}(\sqrt{t})^{s+\delta}\leqslant C_{25}\lambda^{-1/4}(\sqrt{t})^{-1/2}\tau^{-s-\delta}.$$

Из последнего неравенства и из неравенства (4.2.32) с учетом того, что $1\leqslant\tau^{-\nu-\delta}(\sqrt{t})^{-\nu-\delta}$, получим, что

$$\left|(\nu-\delta)\tau^{-\delta-1}\mathcal{J}_\nu(\tau\sqrt{t})-\right.$$
$$\left.-\sqrt{t}\,\tau^{-\delta}\mathcal{J}_{\nu+1}(\tau\sqrt{t})\right|\left|\int\limits_{1/\sqrt{t}}^{R} r^{-s}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\,Y_\nu(r\sqrt{t})\,dr\right|\leqslant$$
$$\leqslant C_{26}\lambda^{-1/4}(\sqrt{t})^{-\nu-\frac{1}{2}-\delta}\tau^{-s-\nu-1-3\delta}. \quad (4.2.35)$$

Оценка (4.2.35) совершенно аналогична оценке (4.2.31). Поэтому оценка $I_4(R,\ \lambda)=O(\lambda^{-1/2})$ получается из (4.2.35) точно так же, как оценка $I_2(R,\ \lambda)=O(\lambda^{-1/2})$ получается из (4.2.31).

Таким образом, вывод оценки $I_4(R,\ \lambda)=O(\lambda^{-1/2})$ также завершен.

Для завершения вывода основной оценки (4.2.14) и доказательства леммы 4.2 нам остается установить оценку $I_5(R,\ \lambda)=O(\lambda^{-1/2})$, к чему мы и переходим.

На этот раз $\tau\leqslant r\leqslant R\leqslant 1/\sqrt{t}$. Используя при $N>2$ (т. е. при $\nu>0$) неравенства $|Y_\nu(\rho)|\leqslant C_{27}\rho^{-\nu}$, $|\mathcal{J}_\nu(\rho)|\leqslant C_{28}\rho^\nu$, справедливые для любого положительного $\rho \leqslant 1$, а при $N = 2$ (т. е. при $\nu = 0$) указанные два неравенства для $\mathcal{J}_{\nu+1}(\rho)$ и $Y_{\nu+1}(\rho)$ и, кроме того, оценки $Y_0(\rho) = \frac{2}{\pi}\ln\frac{\rho}{2} + O(1)$ и $\mathcal{J}_0(\rho) = 1 + O(\rho^2)$, придем к следующей оценке для величины (4.2.20):

а) при $N > 2$, (т. е. при $\nu > 0$)

$$\left|\frac{d}{d\tau}\left[\tau^{-\delta}w_\nu(\tau\sqrt{t}, r\sqrt{t})\right]\right| \leqslant C_{29}\left[r^\nu\tau^{-\delta-\nu-1} + r^{-\nu}\tau^{-\delta+\nu-1}\right];$$

б) при $N = 2$ (т. е. при $\nu = 0$)

$$\left|\frac{d}{d\tau}\left[\tau^{-\delta}w_\nu(\tau\sqrt{t}, r\sqrt{t})\right]\right| \leqslant C_{30}\left[r^\nu\tau^{-2\delta-\nu-1} + r^{-\nu}\tau^{-2\delta+\nu-1}\right]. \quad (4.2.36)$$

Отсюда видно, что оценка (4.2.36) справедлива при любом $N \geqslant 2$. Используя эту оценку и неравенство (4.2.27) и учитывая, что $r^{-\nu}\tau^\nu \leqslant 1$, получим, что

$$\left|\int_\tau^R r^{-s}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\frac{d}{d\tau}\left[\tau^{-\delta}w_\nu(\tau\sqrt{t}, r\sqrt{t})\right]dr\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_{31}\lambda^{-1/4}\int_\tau^R\left[r^\nu\tau^{-2\delta-\nu-1} + r^{-\nu}\tau^{-2\delta+\nu-1}\right]r^{-s-\frac{1}{2}}\,dr \leqslant$$

$$\leqslant C_{32}\lambda^{-1/4}\left[\tau^{-2\delta-\nu-1}R^{\nu-s+1/2} + \tau^{-2\delta-1}R^{-s+1/2}\right]. \quad (4.2.37)$$

Применяя теперь к интегралу, заключенному в (4.2.25) в фигурные скобки, неравенство Коши — Буняковского, получим, что

$$|I_5(R, \lambda)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^{1/R^2}\left\{\left[\int_0^R d\tau\right]\left[\int_0^R\left(\int_{r_{x_0y}\leqslant\tau}\frac{u_i^2(y, t)\,q^2(x_0, y)}{r_{x_0y}^{N-2\delta}}\,dy\right)\left(\int_{r_{x_0y}\leqslant\tau}dy\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\int_\tau^R r^{-s}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\frac{d}{d\tau}\left(\tau^{-\delta}w_\nu(\tau\sqrt{t}, r\sqrt{t}\right)dr\right)^2 d\tau\right]\right\}d\rho(t).$$

Далее, учитывая, что $\int\limits_{r_{x_0y}\leqslant\tau}dy = O(\tau^N) = O(\tau^{2\nu+2})$, и используя неравенство (4.2.37), получим, что

$$|I_5(R, \lambda)| \leqslant C_{33}\lambda^{-1/2}R\int_0^R\left\{\int_{r_{x_0y}\leqslant\tau}\left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^{1/R^2}u_i^2(y, t)\,d\rho(t)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\frac{q^2(x_0, y)}{r_{x_0y}^{N-2\delta}}\,dy\right\}\left(R^{2\nu-2s+1}\tau^{-4\delta} + R^{-2s+1}\tau^{2\nu-4\delta}\right)d\tau. \quad (4.2.38)$$

Заметим, наконец, что выражение, заключенное в (4.2.38) в квадратные скобки, в силу взятой при $t=\mu$ оценки (4.1.48) из п. 3 § 1 равно $O(R^{-N})$ (для всех $R<1$ и для любой фиксированной точки x_0).

Отсюда следует, что

$$|I_5(R,\lambda)| \leqslant C_{34}\lambda^{-1/2}R^{1-N}\int_0^R\left(\int_{r_{x_0y}\leqslant\tau}\frac{q^2(x_0,y)}{r_{x_0y}^{N-2\delta}}\,dy\right)\times$$
$$\times\left(R^{N-1-2s}\tau^{-4\delta}+R^{-2s+1}\tau^{N-2-4\delta}\right)d\tau. \quad (4.2.39)$$

Учитывая, наконец, что $R<1$ и что

$$\int_{r_{x_0y}\leqslant\tau}\frac{q^2(x_0,y)}{r_{x_0y}^{N-2\delta}}\,dy=O\left(\tau^{2\delta}\right),$$

окончательно получим из (4.2.39), что

$$|I_5(R,\lambda)| \leqslant C_{35}\lambda^{-1/2}R^{1-2s-2\delta}=C_{35}\lambda^{-1/2}R^{4\delta}\leqslant C_{35}\lambda^{-1/2}.$$

Вывод оценки $I_5(R,\lambda)=O(\lambda^{-1/2})$ завершен.

Тем самым основное неравенство (4.2.14) полностью доказано, т. е. завершено доказательство леммы 4.2.

Из приведенного нами доказательства неравенства (4.2.14) вытекает, что для всех x_0, принадлежащих произвольному фиксированному компакту области G, неравенство (4.2.14) справедливо с одной и той же постоянной C в правой его части.

3. О точности по порядку основной оценки центральной леммы. Естественно возникает вопрос, является ли основная оценка снизу (4.2.1) точной по порядку относительно λ. Положительный ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Лемма 4.3. *Пусть сохранены все обозначения и выполнены все условия леммы 4.2 и для любого s из интервала $0\leqslant s<1/2$ положительное число R фиксировано так же, как в этой лемме. Тогда найдется положительная постоянная α_1 такая, что для всех достаточно больших $\lambda>0$ будет справедлива оценка сверху*

$$\int_E\left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^\lambda u_i(x_0,t)\,u_i(y,t)\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho(t)\right|\rho_0(y)\,dy\leqslant$$
$$\leqslant\alpha_1\lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}}, \quad (4.2.40)$$

в правой части которой стоит λ в той же самой степени $\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}$, что и в правой части оценки (4.2.1).

Доказательство леммы 4.3. Из установленного в п. 1 при доказательстве леммы 4.2 равенства (4.2.9) вытекает следующее неравенство:

$$\left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^{\lambda} u_i(x_0, t)\, u_i(y, t)\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho(t)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^{\Lambda} \widehat{V}_i^{\lambda}(x_0, t)\, u_i(y, t)\, d\rho(t)\right| +$$
$$+\Gamma(s+1)\cdot 2^s \lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}\left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^{\Lambda} u_i(x_0, t)\, u_i(y, t)\, t^{\frac{2-N}{4}} I_t^{\lambda}(R)\, d\rho(t)\right| +$$
$$+\left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^{\Lambda} \widetilde{V}_i^{\lambda}(x_0, t)\, u_i(y, t)\, d\rho(t)\right|,$$

интегрирование которого с весом $\rho_0(y)$ в координатах точки y по кольцевому слою $E=\{R^4/4 \leqslant r_{x_0 y} \leqslant R^4\}$ дает

$$\int_E\left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^{\lambda} u_i(x_0, t)\, u_i(y, t)\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho(t)\right|\rho_0(y)\, dy \leqslant$$
$$\leqslant \int_E\left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^{\Lambda} \widehat{V}_i^{\lambda}(x_0, t)\, u_i(y, t)\, d\rho(t)\right|\rho_0(y)\, dy +$$
$$+\Gamma(s+1)\cdot 2^s \lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}}\int_E\left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^{\Lambda} u_i(x_0, t)\, u_i(y, t)\, t^{\frac{2-N}{4}} I_i^{\lambda}(R)\, d\rho(t)\right|\rho_0(y)\, dy +$$
$$+\int_E\left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^{\Lambda} \widetilde{V}_i^{\lambda}(x_0, t)\, u_i(y, t)\, d\rho(t)\right|\rho_0(y)\, dy. \quad (4.2.41)$$

Из неравенства (4.2.41) и из доказанных в двух предыдущих пунктах для всех достаточно больших Λ оценок сверху (4.2.12) и (4.2.13) вытекает, что для установления искомой оценки (4.2.40) достаточно установить справедливость для всех достаточно больших Λ оценки

$$\int_E\left|\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^{\Lambda} \widehat{V}_i^{\lambda}(x_0, t)\, u_i(y, t)\, d\rho(t)\right|\rho_0(y)\, dy = O\left(\lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}}\right). \quad (4.2.42)$$

Так как при любом фиксированном $\lambda > 0$ функция $V^{\lambda}(x_0, y)$ принадлежит классу $L_2(G, \rho_0(y))$, то в силу теоремы Гординга — Браудера — Маутнера (см. п. 1 § 1 гл. 4) спектральное разложение этой функции сходится к ней в метрике $L_2(G, \rho_0(y))$, а потому (в силу неравенства Коши — Буняковского) и в метрике $L_1(E, \rho_0(y))$.

Поэтому для установления справедливости для всех достаточно больших Λ оценки (4.2.42) достаточно установить оценку

$$\int_E |V^{\lambda}(x_0, y)|\, \rho_0(y)\, dy = O\left(\lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}}\right). \quad (4.2.43)$$

Так как $V^{\lambda}(x_0, y) = p(x_0, y)\overset{\lambda}{v}(r_{x_0y})$, где $p(x_0, y)$ — ограниченная с двух сторон функция из формулы среднего значения Е. И. Моисеева (см. п. 2 § 1 гл. 4), а $\overset{\lambda}{v}(r_{x_0y})$ — функция, определяемая соотношением (4.2.2) из п. 1 § 2 этой главы, то для установления оценки (4.2.43) достаточно воспользоваться уже много раз фигурировавшей выше оценкой для бесселевой функции

$$\left|\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+s}\left(r\sqrt{\lambda}\right)\right| = O\left(r^{-1/2}\lambda^{-1/4}\right).$$

Из этой оценки и из того, что для любого $N \geqslant 1$

$$\int\limits_{R^4/4 < r_{x_0y} \leqslant R^4} r_{x_0y}^{-\frac{N+1}{2}}\, dy \leqslant C = \mathrm{const},$$

и вытекает справедливость оценки (4.2.43).

Тем самым доказательство леммы 4.3 завершено.

4. Лемма о средних Рисса любого неотрицательного порядка.

Лемма 4.4. *Пусть сохранены все обозначения и выполнены все условия леммы 4.2. Тогда для любого $s \geqslant 0$ и любого $\delta > 0$ положительное число R можно фиксировать настолько малым, что величина*

$$\lambda^{-\frac{N-1}{4}+\frac{s}{2}+\delta} \int\limits_E \left| \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_0^{\lambda} u_i(x_0, t)\, u_i(y, t) \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho(t) \right| \rho_0(y)\, dy \quad (4.2.44)$$

будет являться неограниченной функцией λ на полупрямой $\lambda \geqslant 1$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что при $0 \leqslant s < 1/2$ и при любом $\delta > 0$ утверждение леммы 4.4 сразу же вытекает из леммы 4.2, так что при $0 \leqslant s < 1/2$ и при любом $\delta > 0$ лемма 4.4 доказана.

Таким образом, требуется доказать утверждение леммы 4.4 только при $s \geqslant 1/2$ и при любом $\delta > 0$.

Так как для любого s_0 из интервала $0 < s_0 < 1/2$ и любого $\delta > 0$ утверждение леммы 4.4 о неограниченности на полупрямой $\lambda \geqslant 1$ величины (4.2.44) справедливо, то по уже упоминавшейся выше теореме резонансного типа *) для любого такого s_0 и любого δ из интервала $0 < \delta < 1$ найдется функция $h(y)$ из класса $L_\infty(E)$ такая, что на полупрямой $\lambda \geqslant 1$ будет неограниченной и величина

$$\lambda^{-\frac{N-1}{4}+\frac{s_0}{2}+\delta} \int\limits_E \left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_0^{\lambda} u_i(x_0, t)\, u_i(y, t)\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{s_0} d\rho(t) \right] \rho_0(y)\, h(y)\, dy. \quad (4.2.45)$$

---

*) См., например, книгу С. Качмажа и Г. Штейнгауза [1, с. 31, утверждение 3].

Опираясь на неограниченность на полупрямой $\lambda \geqslant 1$ при некотором $s_0 > 0$ и при любом δ из интервала $0 < \delta < 1$ величины (4.2.45), а также на ограниченность на той же полупрямой при любой $h(y)$ из класса $L_\infty(E)$ величины

$$\lambda^{-\frac{N-1}{4}} \int\limits_E \left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_0^\lambda u_i(x_0, t)\, u_i(y, t)\, d\rho(t) \right] \rho_0(y)\, h(y)\, dy, \qquad (4.2.46)$$

вытекающей из взятой для случая $s = 0$ леммы 4.3, мы сейчас убедимся в том, что для любого $s > s_0$, любого δ из интервала $0 < \delta < 1$ и для некоторой функции $h(y)$ из класса $L_\infty(E)$ величина

$$\lambda^{-\frac{N-1}{4} + \frac{s}{2} + \delta} \int\limits_E \left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_0^\lambda u_i(x_0, t)\, u_i(y, t) \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho(t) \right] \rho_0(y)\, h(y)\, dy \qquad (4.2.47)$$

также является неограниченной на полупрямой $\lambda \geqslant 1$.

Этим самым доказательство леммы 4.4 будет полностью завершено, ибо из неограниченности на полупрямой $\lambda \geqslant 1$ величины (4.2.47) будет вытекать неограниченность на ней и величины (4.2.44) для любого $s > s_0$ и любого δ из интервала $0 < \delta < 1$ (а потому и для любого положительного δ).

Для сокращения записи введем обозначение

$$\sigma_\lambda^s(h) = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_0^\lambda u_i(x_0, t) \left[\int\limits_E u_i(y, t)\, \rho_0(y)\, h(y)\, dy \right] \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho(t). \quad (4.2.48)$$

С помощью обозначения (4.2.48) величины (4.2.45), (4.2.46) и (4.2.47) можно переписать в виде

$$\lambda^{-\frac{N-1}{4} + \frac{s_0}{2} + \delta} \sigma_\lambda^{s_0}(h), \qquad (4.2.45')$$

$$\lambda^{-\frac{N-1}{4}} \sigma_\lambda^0(h), \qquad (4.2.46')$$

$$\lambda^{-\frac{N-1}{4} + \frac{s}{2} + \delta} \sigma_\lambda^s(h). \qquad (4.2.47')$$

Тогда для завершения доказательства леммы 4.4 нам достаточно установить справедливость следующего утверждения:

если существует постоянная C такая, что для всех $h(y)$ из $L_\infty(E)$

$$\left| \lambda^{-\frac{N-1}{4}} \sigma_\lambda^0(h) \right| \leqslant C, \qquad (4.2.49)$$

и если для некоторого $s_0 > 0$ и любого δ из интервала $0 < \delta < 1$ существует функция $h(y)$ из класса $L_\infty(E)$ такая, что

$$\varlimsup_{\lambda \to +\infty} \left| \lambda^{-\frac{N-1}{4} + \frac{s_0}{2} + \delta} \sigma_\lambda^{s_0}(h) \right| = +\infty, \qquad (4.2.50)$$

то для любого $s > s_0$ и любого δ из интервала $0 < \delta < 1$ существует функция $h(y)$ из класса $L_\infty(E)$ такая, что

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}} \left| \lambda^{-\frac{N-1}{4}+\frac{s}{2}+\delta} \sigma_\lambda^s(h) \right| = +\infty. \tag{4.2.51}$$

Доказательство этого утверждения проведем от противного*).

Предположим, что для некоторого $s > s_0$, некоторого δ из интервала $0 < \delta < 1$ и для любой функции $h(y)$ из класса $L_\infty(E)$ существует постоянная C_1 такая, что

$$\left| \lambda^{-\frac{N-1}{4}+\frac{s}{2}+\delta} \sigma_\lambda^s(h) \right| \leqslant C_1. \tag{4.2.52}$$

Фиксируем положительное число ε так, чтобы оно удовлетворяло неравенствам

$$0 < \varepsilon < \frac{2\delta s_0}{s+2\delta}, \tag{4.2.53}$$

и введем в рассмотрение функцию комплексного аргумента z

$$\Phi(z) = \lambda^{-\frac{N-1}{4}+\left(\frac{s}{2}+\delta\right)z} \sigma_\lambda^{sz+\varepsilon}(h), \tag{4.2.54}$$

определенную в полосе $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$.

Убедимся в том, что для любой функции $h(y)$ из класса $L_\infty(E)$ функция (4.2.54) ограничена на границе полосы $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$, т. е. убедимся в том, что для любой $h(y)$ из $L_\infty(E)$ существуют постоянные C_2 и C_3 такие, что для всех вещественных η

$$|\Phi(0+i\eta)| \leqslant C_2, \tag{4.2.55}$$

$$|\Phi(1+i\eta)| \leqslant C_3. \tag{4.2.56}$$

Воспользуемся известным соотношением, устанавливающим связь между средними Рисса двух произвольных комплексных порядков α и β таких, что $\operatorname{Re}\beta > \operatorname{Re}\alpha \geqslant 0$:

$$\lambda^\beta \sigma_\lambda^\beta(h) =$$

$$= \Gamma(\beta+1)\left[\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\alpha+1)\right]^{-1} \int_0^\lambda (\lambda-t)^{\beta-\alpha-1} t^\alpha \sigma_t^\alpha(h)\,dt. \tag{4.2.57}$$

Для установления неравенства (4.2.55) воспользуемся определением (4.2.54) функции $\Phi(z)$, соотношением (4.2.57), взя-

---

*) Приводимое здесь доказательство принадлежит Ш. А. Алимову.

тым при $\beta=\varepsilon+is\eta$, $\alpha=0$, и неравенством (4.2.49). Мы получим, что

$$|\Phi(0+i\eta)|=\lambda^{-\frac{N-1}{4}}\left|\lambda^{i\left(\frac{s}{2}+\delta\right)\eta}\right||\sigma_\lambda^{\varepsilon+is\eta}(h)|\leqslant$$

$$\leqslant C_4\lambda^{-\frac{N-1}{4}-\varepsilon}|\lambda^{-is\eta}|\int_0^\lambda(\lambda-t)^{\varepsilon-1}|(\lambda-t)^{is\eta}||\sigma_t^0(h)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant C_5\lambda^{-\frac{N-1}{4}-\varepsilon}\int_0^\lambda(\lambda-t)^{\varepsilon-1}t^{\frac{N-1}{4}}\,dt\leqslant C_6,$$

поскольку

$$\int_0^\lambda(\lambda-t)^{\varepsilon-1}t^{\frac{N-1}{4}}\,dt=\lambda^{\varepsilon+\frac{N-1}{4}}\int_0^1(1-\tau)^{\varepsilon-1}\tau^{\frac{N-1}{4}}\,d\tau\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\lambda^{\varepsilon+\frac{N-1}{4}},$$

Итак, неравенство (4.2.55) доказано.

Для установления неравенства (4.2.56) воспользуемся определением (4.2.54) функции $\Phi(z)$, соотношением (4.2.57), взятым при $\beta=s+\varepsilon+is\eta$, $\alpha=s$, и справедливым по нашему предположению неравенством (4.2.52). Мы получим в этом случае, что

$$|\Phi(1+i\eta)|=\lambda^{-\frac{N-1}{4}+\frac{s}{2}+\delta}\left|\lambda^{i\eta\left(\frac{s}{2}+\delta\right)}\right||\sigma_\lambda^{s+\varepsilon+is\eta}(h)|\leqslant$$

$$\leqslant C_7\lambda^{-\frac{N-1}{4}+\frac{s}{2}+\delta}\lambda^{-s-\varepsilon}|\lambda^{-is\eta}|\int_0^\lambda(\lambda-t)^{(s+\varepsilon)-s-1}|(\lambda-t)^{is\eta}|t^s|\sigma_t^s(h)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant C_8\lambda^{-\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}+\delta-\varepsilon}\int_0^\lambda(\lambda-t)^{\varepsilon-1}t^{s+\frac{N-1}{4}-\frac{s}{2}-\delta}\,dt\leqslant C_9,$$

поскольку при $0<\delta<1$ справедливо неравенство $\frac{N-1}{4}+\frac{s}{2}-\delta>-1$, в силу которого

$$\int_0^\lambda(\lambda-t)^{\varepsilon-1}t^{\frac{N-1}{4}+\frac{s}{2}-\delta}\,dt=$$

$$=\lambda^{\frac{N-1}{4}+\frac{s}{2}-\delta+\varepsilon}\int_0^1(1-\tau)^{\varepsilon-1}\tau^{\frac{N-1}{4}+\frac{s}{2}-\delta}\,d\tau\leqslant C_{10}\lambda^{\frac{N-1}{4}+\frac{s}{2}-\delta+\varepsilon}$$

Итак, неравенство (4.2.56) также доказано.

Из неравенств (4.2.55) и (4.2.56) и из известной интерполяционной леммы Стейна*) вытекает, что для любого t из интервала $0<t<1$ существует постоянная C_{11} такая, что

$$|\Phi(t)|\leqslant C_{11}. \tag{4.2.58}$$

*) См., например, книгу А. Зигмунд [1, т. 2, с. 149].

Рассмотрим теперь число t, определяемое равенством

$$t = \frac{s_0 - \varepsilon}{s}. \tag{4.2.59}$$

Так как $s_0 < s$ и поскольку в силу правого неравенства (4.2.53) справедлива оценка $\varepsilon < s_0$, то число t, определяемое равенством (4.2.59), удовлетворяет неравенствам $0 < t < 1$.

Поэтому, полагая в (4.2.58) $t = (s_0 - \varepsilon)/s$ и учитывая, что в силу (4.2.59) $ts + \varepsilon = s_0$, получим, что

$$\left| \lambda^{-\frac{N-1}{4} + \left(\frac{s}{2} + \delta\right)\frac{s_0 - \varepsilon}{s}} \sigma_\lambda^{s_0}(h) \right| \leqslant C_{11}. \tag{4.2.60}$$

Теперь для того, чтобы убедиться в том, что неравенство (4.2.60) противоречит (4.2.50), мы должны показать, что число $\left(\frac{s}{2} + \delta\right) \frac{s_0 - \varepsilon}{s}$ допускает представление

$$\left(\frac{s}{2} + \delta\right) \frac{s_0 - \varepsilon}{s} = \frac{s_0}{2} + \delta_1, \tag{4.2.61}$$

в котором δ_1 — некоторое число из интервала $0 < \delta_1 < 1$.

Положим $\delta_1 = \left(\frac{s}{2} + \delta\right) \frac{s_0 - \varepsilon}{s} - \frac{s_0}{2}$.

В силу правого неравенства (4.2.53)

$$\delta_1 = \frac{(s + 2\delta)(s_0 - \varepsilon)}{2s} - \frac{s_0}{2} > \frac{(s + 2\delta)\left[s_0 - s_0 \frac{2\delta}{s + 2\delta}\right]}{2s} - \frac{s_0}{2} = 0,$$

так что $\delta_1 > 0$.

Далее, поскольку $0 < \delta < 1$, то

$$\delta_1 = \frac{s_0}{2} + \delta \frac{s_0 - \varepsilon}{s} - \left(\frac{s}{2} + \delta\right) \frac{\varepsilon}{s} - \frac{s_0}{2} < \delta \frac{s_0 - \varepsilon}{s} = \delta t < \delta < 1.$$

Итак, представление (4.2.61) обосновано.

В силу этого представления неравенство (4.2.60) противоречит соотношению (4.2.50).

Полученное противоречие завершает доказательство сформулированного нами утверждения и леммы 4.4.

5. Непосредственное доказательство теоремы 4.1. Опираясь на доказанную нами лемму 4.4 и повторяя рассуждения, проведенные нами в п. 4 § 4 гл. 2 и не использующие вида эллиптического оператора, придем к следующему утверждению, которое сформулируем при не ограничивающем общности рассуждений предположении о том, что рассматриваемое расширение $\widehat{A}$ эллиптического оператора (4.1.1) является строго положительным, т. е. при некотором $\mu_0 > 0$ для любой функции $u(x)$ из класса $C_0^\infty(G)$ удовлетворяет условию $(\widehat{A}u, u) \geqslant \mu_0(u, u)$.

Лемма 4.5. *Пусть выполнены все условия леммы 4.2. Тогда для любого s из полусегмента $0 \leqslant s < \frac{N-1}{2}$ и для любого δ из интервала $0 < \delta < \frac{N-1}{4} - \frac{s}{2}$ положительное число R можно фиксировать настолько малым, что величина*

$$\int\limits_E \left| \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\mu_0}^{\lambda} u_i(x_0, t)\, u_i(y, t)\, t^{-\left(\frac{N-1}{4} - \frac{s}{2} - \delta\right)} \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho(t) \right| \rho_0(y)\, dy \tag{4.2.62}$$

будет являться неограниченной на полупрямой $\lambda \geqslant \mu_0$.

Из неограниченности величины (4.2.62) и из уже упоминавшейся в предыдущем пункте теоремы резонансного типа вытекает, что существует функция $h(y)$ из класса $L_\infty(E)$ такая, что величина

$$\sigma_\lambda^s(x_0) = \int\limits_E h(y) \left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\mu_0}^{\lambda} u_i(x_0, t)\, u_i(y, t)\, t^{-\left(\frac{N-1}{4} - \frac{s}{2} - \delta\right)} \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s d\rho(t) \right] \rho_0(y)\, dy \tag{4.2.63}$$

также является неограниченной на полупрямой $\lambda \geqslant \mu_0$.

Положим

$$\bar{h}(y) = \begin{cases} h(y) & \text{при} \quad y \in E, \\ 0 & \text{при} \quad y \in G \setminus E \end{cases}$$

и рассмотрим при $\alpha_0 = \frac{N-1}{4} - \frac{s}{2} - \delta$ функцию

$$F(x) = \widehat{A}^{-\alpha_0} \bar{h}(y). \tag{4.2.64}$$

Неограниченность на полупрямой $\lambda \geqslant \mu_0$ величин (4.2.63) означает, что средние Рисса порядка s от функции (4.2.64) расходятся в точке x_0. Иными словами

$$\overline{\lim_{\lambda \to +\infty}}\, \sigma_\lambda^s(F, x_0) = +\infty. \tag{4.2.65}$$

В силу утверждения 1 из п. 4 § 1, взятого при $p = \infty$, найдется функция $f(x)$, принадлежащая классу Зигмунда — Гёльдера $C^{\frac{N-1}{2} - s - 2\delta}(G)$, финитная в слое $\widehat{E} = \{R^4/8 \leqslant r_{x_0 y} \leqslant 2R^4\}$ и такая, что разность $f(x) - F(x)$ принадлежит введенному в п. 3 § 1 классу $\widetilde{\Delta}(\widehat{A})$, представляющему собой пересечение областей определения всех целых положительных степеней оператора $\widehat{A}$.

Так как δ — произвольное положительное число, то каково бы ни было α из интервала $0 < \alpha < (N-1)/2 - s$, можно фиксировать $\delta > 0$ таким, что функция $f(x)$ будет принадлежать классу $C^\alpha(G)$.

Далее, поскольку функция $f(x)$ финитна в слое $\widehat{E} = \{R^4/8 \leqslant r_{x_0 y} \leqslant 2R^4\}$, то при достаточно малом R эта функция будет финитна в области G и будет обращаться в нуль в окрестности точки x_0.

Остается доказать, что средние Рисса порядка s от функции $f(x)$ расходятся в точке x_0, т. е. доказать, что

$$\varlimsup_{\lambda\to+\infty} \sigma_\lambda^s(x_0, f) = +\infty. \tag{4.2.66}$$

Так как $f(x) - F(x) \in \widetilde{\Delta}(\widehat{A})$, то спектральное разложение функции $g(x) = f(x) - F(x)$ и тем более его средние Рисса любого положительного порядка сходятся в точке x_0 *). Но тогда из (4.2.65) вытекает (4.2.66).

Доказательство теоремы 4.1 полностью завершено.

§ 3. Теоремы позитивного типа

В настоящем параграфе для произвольного самосопряженного неотрицательного расширения $\widehat{A}$ эллиптического оператора второго порядка (4.1.1) в произвольной N-мерной области G с весом $\rho_0(x)$ мы установим теоремы позитивного типа, аналогичные теоремам 2.3, 2.4 и 2.5, установленным в гл. 2 для случая оператора Лапласа.

При этом для упрощения рассуждений мы будем рассматривать случай самих спектральных разложений (а не их средних Рисса). Кроме того, при проведении доказательств, не ограничивая общности, мы будем считать, что рассматриваемое самосопряженное расширение является строго положительным, т. е. для некоторого $\mu_0 > 0$ и для всех $u(x)$ из класса $\overset{\circ}{C}{}^\infty_0(G)$ удовлетворяет условию $(\widehat{A}u, u) \geqslant \mu_0(u, u)$.

Предположим, что коэффициенты оператора (4.1.1) и весовая функция $\rho_0(x)$ удовлетворяют требованиям, сформулированным в п. 1 § 1.

Теорема 4.3. (Об условиях, обеспечивающих локализацию, и об условиях, обеспечивающих равномерную сходимость спектральных разложений в классах Никольского.) *Пусть $N \geqslant 2$, G — произвольная область в пространстве E^N, $\widehat{A}$ — произвольное самосопряженное неотрицательное расширение оператора* (4.1.1) *в облас-*

---

*) Это вытекает из того, что при любом m образ Фурье $\widehat{g}_i(t)$ функции $g(x) = f(x) - F(x)$ будет равен $(-1)^m(\widehat{L^m g})_i(t)t^{-m}$, а потому спектральное разложение функции $g(x)$ сходится равномерно на любом компакте области G в силу неравенства Коши — Буняковского, равенства Парсеваля для $L^m g(x)$ и в силу равномерной на любом компакте области G сходимости ряда (4.1.51) из п. 2 § 1 при любом $\delta > 0$.

ти G с весом $\rho_0(x)$, $f(x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая следующим требованиям:

1) $f(x)$ обращается в нуль вне множества G_{h_0}) при некотором $h_0 > 0$;*

2) во всей области G функция $f(x)$ принадлежит классу Никольского H_2^α при $\alpha \geqslant (N-1)/2$;

3) в некоторой содержащейся в G области D (которая, в частности, может совпадать с G) функция $f(x)$ принадлежит классу Никольского H_p^α при некоторых α и p, удовлетворяющих условиям

$$\alpha \geqslant \frac{N-1}{2}, \quad \alpha p > N, \quad p \geqslant 1. \tag{4.3.1}$$

Тогда спектральное разложение функции $f(x)$ сходится к этой функции при $\lambda \to \infty$ равномерно на любом компакте K области D.

Сопоставляя теорему 4.3 с теоремой 4.2, взятой для $s=0$, мы придем к следующим выводам:

I. Окончательным условием локализации спектрального разложения финитной в области G функции из класса Никольского $H_2^\alpha(G)$ является требование $\alpha \geqslant (N-1)/2$ (при $\alpha \geqslant (N-1)/2$, согласно теореме 4.3, будет иметь место локализация спектральных разложений; при $\alpha < (N-1)/2$, согласно теореме 4.2, локализации спектральных разложений не будет).

II. Окончательным условием равномерной сходимости спектральных разложений финитной в области G функции из класса Никольского $H_p^\alpha(G)$ является выполнение трех неравенств (4.3.1).

Действительно, окончательность первого неравенства (4.3.1) вытекает из сопоставления теоремы 4.3 с теоремой 4.2, а окончательность остальных двух неравенств (4.3.1) аргументируется точно так же, как в случае оператора Лапласа (см. п. 1 § 2 гл. 2).

Непосредственным следствием теоремы 4.3 являются следующие две теоремы.

Теорема 4.4. (Об условиях, обеспечивающих локализацию, и об условиях, обеспечивающих равномерную сходимость спектральных разложений в классах Соболева — Лиувилля и в классах Бесова.) *Пусть $N \geqslant 2$, G — произвольная область в пространстве E^N, $\widehat{A}$ — произвольное самосопряженное неотрицательное расширение оператора (4.1.1) в области G с весом $\rho_0(x)$, $f(x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая следующим требованиям:*

1) $f(x)$ обращается в нуль вне множества G_{h_0} при некотором $h_0 > 0$;

---

*) Напомним, что для любого $h > 0$ и любой области D символ D_h обозначает подмножество точек области D, отстоящих от границы ∂D области D на расстояние, большее числа h.

2) *во всей области G функция $f(x)$ принадлежит классу Соболева — Лиувилля L_2^α [соответственно классу Бесова $B_{2,\theta}^\alpha$] при $\alpha \geqslant (N-1)/2$ [и при любом $\theta \geqslant 1$];*

3) *в некоторой содержащейся в G области D (которая, в частности, может совпадать с G) функция принадлежит классу Соболева — Лиувилля L_p^α [соответственно классу Бесова $B_{p,\theta}^\alpha$] при некоторых α и p, удовлетворяющих трем неравенствам* (4.3.1) *[и в случае класса Бесова при любом $\theta \geqslant 1$].*

Тогда спектральное разложение функции $f(x)$ сходится к этой функции при $\lambda \to \infty$ равномерно на любом компакте K области D.

Сопоставление теоремы 4.4 с теоремой 4.2, взятой при $s=0$, позволяет сделать те же два вывода, что и для класса Никольского, а именно:

I. Условие $\alpha \geqslant (N-1)/2$ является окончательным условием локализации спектрального разложения финитной в области G функции из класса Соболева — Лиувилля $L_2^\alpha(G)$ и из класса Бесова $B_{2,\theta}^\alpha(G)$ (при любом $\theta \geqslant 1$);

II. Три неравенства (4.1.1) являются окончательными условиями равномерной сходимости спектрального разложения финитной в области G функции из класса Соболева — Лиувилля $L_p^\alpha(G)$ и из класса Бесова $B_{p,\theta}^\alpha$ (при любом $\theta \geqslant 1$).

Теорема 4.5. (Об условиях, обеспечивающих локализацию и равномерную сходимость спектральных разложений в классах Зигмунда — Гёльдера.) *Пусть $N \geqslant 2$, G — произвольная область в пространстве E^N, $\widehat{A}$ — произвольное самосопряженное неотрицательное расширение оператора* (4.1.1) *в области G с весом $\rho_0(x)$, $f(x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая следующим двум требованиям:*

1) *$f(x)$ обращается в нуль вне множества G_{h_0} при некотором $h_0 > 0$;*

2) *$f(x)$ принадлежит классу Зигмунда — Гёльдера $C^\alpha(G)$ при некотором $\alpha \geqslant (N-1)/2$.*

Тогда спектральное разложение функции $f(x)$ сходится к этой функции при $\lambda \to \infty$ равномерно на любом компакте K области G.

Сопоставление теоремы 4.5 с теоремой 4.1, взятой при $s=0$, как и для случая оператора Лапласа, позволяет сделать вывод о том, что требование $\alpha \geqslant (N-1)/2$ является окончательным условием как локализации, так и равномерной сходимости спектрального разложения финитной в области G функции из класса Зигмунда — Гёльдера $C^\alpha(G)$, причем классы Зигмунда — Гёльдера не улавливают «зазора» между окончательными условиями локализации и окончательными условиями равномерной сходимости.

Как уже сказано выше, теоремы 4.4 и 4.5 являются простыми следствиями теоремы 4.3, ибо при любых фиксированных $\alpha > 0$ и $p \geqslant 1$ и при любом $\theta \geqslant 1$ в силу вложений (2.1.18) (см. п. 3 § 1 гл. 2) каждый из классов $L_p^\alpha(G)$ и $B_{p,\theta}^\alpha(G)$ содержится в $H_p^\alpha(G)$ и, кроме того, класс $C^\alpha(G)$ содержится в классе $H_p^\alpha(G)$ при любом $p \geqslant 1$.

Основной целью настоящего параграфа является доказательство теоремы 4.3. В пунктах 1—4 дается доказательство той части этой теоремы, которая относится к локализации, а в пунктах 5—7 — доказательство утверждения о равномерной сходимости спектральных разложений.

1. Лемма об образах Фурье финитной функции из класса Никольского. Основной целью настоящего пункта является доказательство вспомогательного утверждения об образах Фурье финитной в основной области G функции из класса Никольского $H_2^\alpha(G)$, являющегося аналогом леммы 2.6 из п. 1 § 5 гл. 2.

Однако доказательству этого утверждения мы предпошлем обоснование одного важного вспомогательного соотношения.

Лемма 4.6. *Пусть функция $F(x, y)$ непрерывна и финитна в области $G \times G$ и интеграл*

$$\int\limits_{\omega} f(x + r\omega)\, d\omega$$

определяется равенством (4.1.8) из п. 2 § 1. Тогда для каждого достаточно малого $R > 0$ справедливо следующее соотношение:

$$\int\limits_G \left[\int\limits_{\omega} F(x, x + R\omega)\, d\omega\right] dx = \int\limits_G \left[\int\limits_{\omega} F(x + R\omega, x)\, d\omega\right] dx. \qquad (4.3.2)$$

Доказательство. Сообразуясь с равенством (4.1.9) из п. 2 § 1 и обозначая через r_{xy} геодезическое расстояние между x и y, можем записать левую часть (4.3.2) в следующем виде:

$$\int\limits_G \left[\int\limits_{\omega} F(x, x + R\omega)\, d\omega\right] dx =$$

$$= \frac{1}{R^{N-1}} \frac{d}{dR} \left\{\int\limits_G \left[\int\limits_0^R r^{N-1} \left(\int\limits_{\omega} F(x, x + r\omega)\, d\omega\right) dr\right] dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{R^{N-1}} \frac{d}{dR} \left\{\int\limits_G \left[\int\limits_{r_{xy} \leqslant R} F(x, y)\, dy\right] dx. \qquad (4.3.3)\right.$$

Если R не превосходит расстояния от того подмножества $G \times G$, на котором $F(x, y)$ отлична от нуля, до границы $G \times G$, то, продолжив $F(x, y)$ нулем за пределы $G \times G$, можем считать, что наружный интеграл по x в правой части (4.3.3) берется по всему пространству E^N.

Учитывая это и вводя в рассмотрение функцию $\eta_R(t)$ вида

$$\eta_R(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant R, \\ 0 & \text{при} \quad t > R, \end{cases}$$

мы можем следующим образом переписать величину, стоящую в правой части (4.3.3):

$$\frac{1}{R^{N-1}} \frac{d}{dR} \left\{ \int\limits_G \left[\int\limits_{r_{xy} \leqslant R} F(x, y)\, dy \right] dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{R^{N-1}} \frac{d}{dR} \left\{ \int\limits_{E^N} \left[\int\limits_{E^N} F(x, y)\, \eta_R(r_{xy})\, dy \right] dx \right\}. \quad (4.3.4)$$

Применяя в правой части (4.3.4) теорему Фубини и учитывая симметрию геодезического расстояния r_{xy}, получим, что

$$\frac{1}{R^{N-1}} \frac{d}{dR} \left\{ \int\limits_{E^N} \left[\int\limits_{E^N} F(x, y)\, \eta_R(r_{xy})\, dy \right] dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{R^{N-1}} \frac{d}{dR} \left\{ \int\limits_{E^N} \left[\int\limits_{E^N} F(x, y)\, \eta_R(r_{xy})\, dx \right] dy \right\} =$$

$$= \frac{1}{R^{N-1}} \frac{d}{dR} \left\{ \int\limits_{E^N} \left[\int\limits_{r_{yx} \leqslant R} F(x, y)\, dx \right] dy \right\}. \quad (4.3.5)$$

Теперь остается снова воспользоваться равенством (4.1.9) из п. 2 § 1 и равенством нулю $F(x, y)$ за пределами $G \times G$. Мы получим при этом, что правая часть (4.3.5) равна

$$\frac{1}{R^{N-1}} \frac{d}{dR} \left\{ \int\limits_{E^N} \left[\int\limits_{r_{yx} \leqslant R} F(x, y)\, dx \right] dy \right\} =$$

$$= \frac{1}{R^{N-1}} \frac{d}{dR} \left\{ \int\limits_G \left[\int\limits_0^R r^{N-1} \left(\int\limits_\omega F(y + r\omega, y)\, d\omega \right) dr \right] dy \right\} =$$

$$= \int\limits_G \left[\int\limits_\omega F(y + r\omega, y)\, d\omega \right] dy. \quad (4.3.6)$$

Сопоставление равенств (4.3.3) — (4.3.6) приводит к соотношению (4.3.2). Лемма 4.6 доказана.

Пусть, как и выше, символ E_λ обозначает оператор, ставящий в соответствие каждой функции $f(x)$ ее спектральное разложение $E_\lambda f$, а символ I обозначает единичный оператор. Кроме того, будем считать, что $N \geqslant 2$.

Лемма 4.7. (Об образах Фурье финитной функции из класса Никольского.) *Для произвольного $\alpha > 0$ и произвольной финитной в области G функции $f(x)$ из класса Никольского $H_2^\alpha(G)$ существует постоянная C такая, что справедливо неравенство*

$$\| (I - E_\lambda) f \|_{L_2(G)} \leqslant C \lambda^{-\alpha/2} \| f \|_{H_2^\alpha(G)}. \quad (4.3.7)$$

Доказательство. 1°. Сначала рассмотрим случай $0 < \alpha < 1$.

Заметим, что все рассуждения достаточно провести для функции $f(x)$ из класса $C_0^\infty(G)$ и для такой функции доказать оценку (4.3.7) с постоянной C, не зависящей от функции $f(x)$.

Для произвольного $h>0$, меньшего геодезического расстояния от носителя функции $f(x)$ до границы области G, рассмотрим функцию

$$\varepsilon(x, h, f) = \varepsilon(x, h) = \frac{1}{\omega_N}\int\limits_{\omega} f(x+h\omega)\, p(x+h\omega, x)\, d\omega, \quad (4.3.8)$$

где $p(x, y)$ — функция из формулы среднего значения Е. И. Моисеева (4.1.10) (см. п. 2 § 1), а ω_N — площадь поверхности евклидовой сферы в E^N единичного радиуса, т. е.

$$\omega_N = 2\pi^{N/2}\,[\Gamma(N/2)]^{-1}.$$

Вычислим образ Фурье $\widehat{\varepsilon}_i(\lambda, h)$ функции (4.3.8) относительно фундаментальной функции $u_i(x, \lambda)$.

Используя определение образа Фурье и соотношение (4.3.2), получим

$$\widehat{\varepsilon}_i(\lambda, h) = \int\limits_G \varepsilon(x, h)\, u_i(x, \lambda)\, \rho_0(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\omega_N}\int\limits_G u_i(x, \lambda)\, \rho_0(x)\left[\int\limits_{\omega} f(x+h\omega)\, p(x+h\omega, x)\, d\omega\right] dx =$$

$$= \frac{1}{\omega_N}\int\limits_G f(x)\left[\int\limits_{\omega} u_i(x+h\omega, \lambda)\, \rho_0(x+h\omega)\, p(x, x+h\omega)\, d\omega\right] dx. \quad (4.3.9)$$

Применяя к выражению, стоящему в правой части (4.3.9) в квадратных скобках, формулу среднего значения Е. И. Моисеева (4.1.10) (см. п. 2 § 1) и обозначая через ν число $\nu = (N-2)/2$, а через $\varphi(t)$ функцию

$$\varphi(t) = 2^\nu\Gamma(\nu+1)\, t^{-\nu}\mathscr{J}_\nu(t), \quad (4.3.10)$$

мы придем к следующему выражению для образа Фурье:

$$\widehat{\varepsilon}_i(\lambda, h) = \widehat{f}_i(\lambda)\,\varphi(h\sqrt{\lambda}) + P_i(\lambda, h), \quad (4.3.11)$$

где $\widehat{f}_i(\lambda) = \int\limits_G f(x)\, u_i(x, \lambda)\, \rho_0(x)\, dx$ — образ Фурье функции $f(x)$, а $P_i(\lambda, h)$ — величина, порождаемая добавочным членом формулы среднего значения (4.1.10) и имеющая вид *)

$$P_i(\lambda, h) = \frac{1}{\omega_N}\int\limits_G f(x)\,\rho_0(x)\left\{h^{-\nu}\int\limits_0^h t^\nu w_\nu(t\sqrt{\lambda}, h\sqrt{\lambda})\times\right.$$

$$\left.\times\left[\int\limits_{\omega} u_i(x+t\omega, \lambda)\, q(x, x+t\omega)\, d\omega\right] dt\right\} dx. \quad (4.3.12)$$

*) Функции $w_\nu(a, b)$ и $q(x, y)$ имеют тот же смысл, что и в формуле среднего значения (4.1.10).

Наша цель — доказать оценку

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^{\infty} [\varphi(h\sqrt{\lambda})-1]^2 |\widehat{f}_i(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \leqslant C_1 h^{2\alpha} \|f\|^2_{H_2^{\alpha}(G)}. \qquad (4.3.13)$$

Если оценка (4.3.13) будет установлена, то, поскольку из вида (4.3.10) функции $\varphi(t)$ вытекает существование постоянной $C_2>0$ такой, что для всех $t \geqslant 1$ справедливо неравенство $|\varphi(t)-1| \geqslant C_2$, из (4.3.13) будет вытекать неравенство

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{h\sqrt{t}>1} |\widehat{f}_i(t)|^2 d\rho(t) \leqslant C_3 h^{2\alpha} \|f\|^2_{H_2^{\alpha}(G)},$$

из которого при $h=1/\sqrt{\lambda}$ в силу равенства Парсеваля

$$\|(I-E_\lambda f)\|^2_{L_2(G)} = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{\lambda}^{\infty} |\widehat{f}_i(t)|^2 d\rho(t)$$

получается и доказываемая оценка (4.3.7).

Итак, для доказательства леммы в рассматриваемом случае $0<\alpha<1$ достаточно установить оценку (4.3.13).

Переходим к установлению этой оценки.

Из равенства (4.3.11) вытекает соотношение

$$[\varphi(h\sqrt{\lambda})-1]\widehat{f}_i(\lambda) = [\widehat{\varepsilon}_i(\lambda, h)-\widehat{f}_i(\lambda)] - P_i(\lambda, h),$$

из которого в свою очередь вытекает неравенство

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^{\infty} [\varphi(h\sqrt{\lambda})-1]^2 \widehat{f}_i^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^{\infty} [\widehat{\varepsilon}_i(\lambda, h)-\widehat{f}_i(\lambda)]^2 d\rho(\lambda) + 2\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^{\infty} P_i^2(\lambda, h)\, d\rho(\lambda). \qquad (4.3.14)$$

Из (4.3.14) следует, что для доказательства оценки (4.3.13) достаточно установить две оценки:

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^{\infty} [\widehat{\varepsilon}_i(\lambda, h)-\widehat{f}_i(\lambda)]^2 d\rho(\lambda) \leqslant C_4 h^{2\alpha} \|f\|^2_{H_2^{\alpha}(G)}, \qquad (4.3.15)$$

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^{\infty} P_i^2(\lambda, h)\, d\rho(\lambda) \leqslant C_5 h^{2\alpha} \|f\|^2_{H_2^{\alpha}(G)}. \qquad (4.3.16)$$

Для доказательства оценки (4.3.15) воспользуемся равенством Парсеваля

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^{\infty} [\widehat{\varepsilon}_i(\lambda, h)-\widehat{f}_i(\lambda)]^2 d\rho(\lambda) = \int_G \rho_0(x)[\varepsilon(x, h)-f(x)]^2 dx \quad (4.3.17)$$

и соотношением

$$\varepsilon(x, h) - f(x) = \frac{1}{\omega_N}\int_{\omega}[f(x+h\omega) - f(x)]\, p(x+h\omega, x)\, d\omega +$$
$$+ f(x)\left[\frac{1}{\omega_N}\int_{\omega} p(x+h\omega, x)\, d\omega - 1\right]. \quad (4.3.18)$$

Заметим, что в п. 2 § 1 установлено, что равномерно относительно x на произвольном компакте области G при всех достаточно малых $h > 0$ справедливо соотношение

$$\frac{1}{\omega_N}\int_{\omega} p(x+h\omega, x)\, d\omega = 1 + O(h). \quad (4.3.19)$$

Из соотношений (4.3.17), (4.3.18) и (4.3.19), из того, что $0 < \alpha < 1$, из определения нормы в пространстве H_2^α и из неравенства $(A+B)^2 \leqslant 2A^2 + 2B^2$ получим, что

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_0^\infty [\widehat{\varepsilon}_i(\lambda, h) - \widehat{f}_i(\lambda)]^2\, d\rho(\lambda) \leqslant$$
$$\leqslant C_6\int_G\left[\int_{\omega}|f(x+h\omega) - f(x)|^2\, d\omega\right]dx + C_7h^2\int_G|f(x)|^2\, dx \leqslant$$
$$\leqslant C_8h^{2\alpha}\|f\|^2_{H_2^\alpha(G)} + C_7h^2\|f\|^2_{L_2(G)} \leqslant C_9h^{2\alpha}\|f\|^2_{H_2^\alpha(G)}.$$

Таким образом, оценка (4.3.15) доказана.

Теперь для завершения доказательства леммы в случае $0 < \alpha < 1$ остается доказать оценку (4.3.16).

Для каждого t из полусегмента $0 < t \leqslant h$ введем вспомогательную функцию

$$Q(x, t) = \frac{1}{\rho_0(x)}\int_{\omega} f(x+t\omega)\, q(x+t\omega, x)\, \rho_0(x+t\omega)\, d\omega \quad (4.3.20)$$

и подсчитаем ее образ Фурье

$$\widehat{Q}_i(\lambda, t) = \int_G Q(x, t)\, u_i(x, \lambda)\, \rho_0(x)\, dx, \qquad i = 1, 2, \ldots, \widehat{m}.$$

Используя соотношение (4.3.2), получим, что

$$\widehat{Q}_i(\lambda, t) = \int_G f(x)\rho_0(x)\left[\int_{\omega} u_i(x+t\omega, \lambda)\, q(x, x+t\omega)\, d\omega\right]dx. \quad (4.3.21)$$

Сопоставляя соотношение (4.3.21) с (4.3.12) и учитывая, что $\nu = N/2 - 1$, придем к следующему соотношению:

$$P_i(\lambda, h) = \frac{1}{\omega_N}h^{1-\frac{N}{2}}\int_0^h w_{\frac{N-2}{2}}\left(t\sqrt{\lambda}, h\sqrt{\lambda}\right) t^{\frac{N}{2}-1}\widehat{Q}_i(\lambda, t)\, dt. \quad (4.3.22)$$

Применяя к интегралу, стоящему в правой части (4.3.22), неравенство Коши — Буняковского, получим

$$P_i^2(\lambda, h) \leqslant$$
$$\leqslant \omega_N^{-2} h^{2-N} \int_0^h w^2_{\frac{N-2}{2}}(t\sqrt{\lambda}, h\sqrt{\lambda})\, t^{N-2}\, dt \int_0^h \widehat{Q}_i^2(\lambda, t)\, dt. \quad (4.3.23)$$

Используя известные свойства цилиндрических функций *):

а) при $\nu > 0$ и при всех $\tau > 0$

$$\mathcal{J}_\nu^2(\tau) = O(1), \quad \mathcal{J}_\nu^2(\tau) = O(\tau^{2\nu}),$$
$$Y_\nu^2(\tau) = \begin{cases} O(\tau^{-2\nu}) & \text{при} \quad 0 < \tau < 1, \\ O(1) & \text{при} \quad \tau \geqslant 1; \end{cases}$$

б) при $\nu = 0$ и при всех $\tau > 0$

$$Y_0(\tau) = \frac{2}{\pi} \mathcal{J}_0(\tau) \ln\left(\frac{\tau}{2}\right) + O(1), \quad \mathcal{J}_0(\tau) = O(1),$$

придем к следующей справедливой для всех $0 < t < h$ и всех $\lambda > 0$ оценке:

$$w^2_{\frac{N-2}{2}}(t\sqrt{\lambda}, h\sqrt{\lambda}) = \begin{cases} O\left[\left(\frac{h}{t}\right)^{N-2}\right] & \text{при} \quad N \geqslant 3, \\ O\left[1 + \ln^2\left(\frac{h}{t}\right)\right] = O\left[\left(\frac{h}{t}\right)^{\delta}\right] & \text{при} \quad N = 2, \end{cases} \quad (4.3.24)$$

в правой части которой δ обозначает произвольное фиксированное число из интервала $0 < \delta < 1$.

Из оценки (4.3.24) вытекает, что при любом $N \geqslant 2$

$$h^{2-N} \int_0^h w^2_{\frac{N-2}{2}}(t\sqrt{\lambda}, h\sqrt{\lambda})\, t^{N-2}\, dt = O(h). \quad (4.3.25)$$

Подставляя оценку (4.3.25) в правую часть (4.3.23), получим, что найдется постоянная C_{10} такая, что

$$P_i^2(\lambda, h) \leqslant C_{10} h \int_0^h \widehat{Q}_i^2(\lambda, t)\, dt. \quad (4.3.26)$$

Из (4.3.26) в свою очередь следует, что

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\infty P_i^2(\lambda, h)\, d\rho(\lambda) \leqslant C_{10} h \int_0^h \left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\infty \widehat{Q}_i^2(\lambda, t)\, d\rho(\lambda)\right] dt. \quad (4.3.27)$$

Теперь для получения из неравенства (4.3.27) оценки (4.3.16) достаточно записать для функции (4.3.20) равенство Парсеваля

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\infty \widehat{Q}_i^2(\lambda, t)\, d\rho(\lambda) = \int_G \rho_0(x)\, Q^2(x, t)\, dx \quad (4.3.28)$$

*) См., например, Г. Бейтмен, А. Эрдейи [1, с. 16—17].

и учесть, что

$$\int\limits_G \rho_0(x)\, Q^2(x, t)\, dx \leqslant C_{11} \| f \|^2_{L_2(G)}. \tag{4.3.29}$$

Из сопоставления (4.3.27), (4.3.28) и (4.3.29) и из того, что $0 < \alpha < 1$, получим, что

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_0^\infty P_i^2(\lambda, h)\, d\rho(\lambda) \leqslant C_{12} h^2 \| f \|^2_{L_2(G)} \leqslant C_{12} h^2 \| f \|^2_{H_2^\alpha(G)} \leqslant C_{12} h^{2\alpha} \| f \|^2_{H_\alpha^2(G)}.$$

Тем самым оценка (4.3.16) доказана и для случая $0 < \alpha < 1$ доказательство леммы 4.7 завершено.

2°. Докажем теперь лемму 4.7 для случая $\alpha \geqslant 1$.

Введем по аналогии с п. 4 § 1 для любого вещественного $\tau > 0$ оператор

$$\widehat{A}^\tau f = \int\limits_0^\infty \lambda^\tau\, dE_\lambda f \tag{4.3.30}$$

и воспользуемся сформулированным в указанном пункте утверждением: если $0 < 2\tau < \alpha$, то для любой функции $f(x)$ из класса *) $\overset{0}{H}{}_2^\alpha(G)$ существуют функции $g(x)$ и $h(x)$ такие, что $\widehat{A}^\tau f = g + h$, причем функция $g(x)$ финитна в области G, принадлежит классу $H_2^{\alpha - 2\tau}(G)$ и удовлетворяет соотношению $\|g\|_{H_2^{\alpha-2\tau}(G)} \leqslant C \| f \|_{H_2^\alpha(G)}$, а функция $h(x)$ для любого номера n удовлетворяет соотношению $\| \widehat{A}^n h \|_{L_2(G)} \leqslant C_n \| f \|_{H_2^\alpha(G)}$.

Для произвольного $\alpha \geqslant 1$ фиксируем τ, удовлетворяющее условию $0 < \alpha - 2\tau < 1$. Тогда в силу рассмотренного выше случая 1° и в силу только что сформулированного утверждения справедливы оценки

$$\| (I - E_\lambda)\, g \|_{L_2(G)} \leqslant C \lambda^{-(\alpha/2 - \tau)} \| f \|_{H_2^\alpha(G)},$$

$$\| (I - E_\lambda)\, h \|_{L_2(G)} \leqslant C_n \lambda^{-n} \| f \|_{H_2^\alpha(G)}.$$

Из этих оценок заключаем, что

$$\| (I - E_\lambda) f \|_{L_2(G)} = \| \widehat{A}^{-\tau} (I - E_\lambda)\, \widehat{A}^\tau f \|_{L_2(G)} \leqslant$$
$$\leqslant \lambda^{-\tau} \| (I - E_\lambda)\, \widehat{A}^\tau f \|_{L_2(G)} \leqslant C \lambda^{-\alpha/2} \| f \|_{H_2^\alpha(G)}.$$

Тем самым лемма 4.7 полностью доказана.

---

*) Напомним, что символ $\overset{0}{H}{}_p^\alpha(G)$ обозначает класс функций, полученный замыканием по норме класса Никольского $H_p^\alpha(G)$ множества функций из $C_0^\infty(G)$.

2. Доказательство основной локальной асимптотической оценки.

Лемма 4.8. *Если функция $f(x)$ имеет в области G компактный носитель, принадлежит классу $H_2^\alpha(G)$ при некотором $\alpha \geqslant (N-1)/2$ и обращается в нуль в некоторой содержащейся в G области D, то при любом достаточно малом $\delta > 0$ для любого τ из интервала $\frac{N-1}{4} - \frac{\delta}{2} < \tau < \frac{N-1}{4}$ равномерно относительно x_0 на каждом компакте K области D справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$\widehat{A}^\tau E_\lambda f(x_0) = O\left(\lambda^\tau\right) \| f \|_{H_2^\alpha(G)}, \tag{4.3.31}$$

в которой символом $\widehat{A}^\tau$ обозначен оператор вида (4.3.30).

Доказательство. Фиксируем произвольный компакт K области D, произвольное число R, меньшее половины расстояния компакта K от границы D, и произвольную точку x_0 компакта K и рассмотрим взятую при $s=0$ функцию (4.2.2) из п. 1 предыдущего параграфа.

В п. 1 § 2 установлено, что образ Фурье этой функции, умноженной на $p(x_0, y)$, определяется соотношением (4.2.7), которое при $s=0$ имеет следующий вид:

$$\widehat{V}_i^\lambda(x_0, t) = u_i(x_0, t)\left[\delta_t^\lambda - \lambda^{N/4} t^{\frac{2-N}{4}} I_t^\lambda(R)\right] + \widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \widehat{m}), \tag{4.3.32}$$

где

$$\delta_t^\lambda = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t < \lambda, \\ 1/2 & \text{при} \quad t = \lambda, \\ 0 & \text{при} \quad t > \lambda, \end{cases} \tag{4.3.33}$$

$$I_t^\lambda(R) = \int\limits_R^\infty \mathcal{J}_{\frac{N}{2}}\left(r\sqrt{\lambda}\right) \mathcal{J}_{\frac{N}{2}-1}\left(r\sqrt{t}\right) dr, \tag{4.3.34}$$

а добавочный член $\widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t)$ равен

$$\widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \lambda^{\frac{N}{4}} \int\limits_0^R \mathcal{J}_{\frac{N}{2}}\left(r\sqrt{\lambda}\right)\left[\int\limits_0^r \tau^\nu w_\nu\left(\tau\sqrt{t}, r\sqrt{t}\right) \times \left(\int\limits_\omega u_i(x_0 + \tau\omega, \lambda)\, q(x_0, x_0 + \tau\omega)\, d\omega\right) d\tau\right] dr \tag{4.3.35}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, \widehat{m}).$$

Умножим обе части (4.3.32) на образ Фурье $\widehat{F}_i(\lambda)$ произвольной функции $F(x)$ из класса $L_2(G)$ и полученное при этом равенство просуммируем по всем i от 1 до $\widehat{m}$ и проинтегрируем по спектральной мере $\rho(t)$ в пределах по t от нуля до $+\infty$.

В результате, используя обобщенное равенство Парсеваля *), получим

$$E_\lambda F(x_0) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\widehat{m}} F_i(\lambda) u_i(x_0, \lambda)[\rho(\lambda+0)-\rho(\lambda-0)] +$$

$$+\int_G V^\lambda(x_0, x) F(x) \rho_0(x)\,dx + \lambda^{\frac{N}{4}} \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\infty t^{\frac{2-N}{4}} I_t^\lambda(R) \widehat{F}_i(t) u_i(x_0, t)\,d\rho(t) -$$

$$-\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\infty \widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t) \widehat{F}_i(t)\,d\rho(t). \qquad (4.3.36)$$

В этом равенстве символ $V^\lambda(x_0, y)$ обозначает умноженную на $p(x_0, y)$ функцию (4.2.2), взятую при $s=0$.

Предположим теперь, что функция $f(x)$ имеет в области G компактный носитель и принадлежит классу $H_2^\alpha(G)$ при $\alpha \geqslant (N-1)/2$. Фиксируем пока произвольное положительное число $\tau < (N-1)/4$ и положим $F = \widehat{A}^\tau f$, где $\widehat{A}^\tau f$ — оператор вида (4.3.30). Тогда равенство (4.3.36) принимает следующий вид:

$$\widehat{A}^\tau E_\lambda f(x_0) = \int_G V^\lambda(x_0, x) \widehat{A}^\tau f(x) \rho_0(x)\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\widehat{m}} u_i(x_0, \lambda) \widehat{f}_i(\lambda) \lambda^\tau [\rho(\lambda+0)-\rho(\lambda-0)] +$$

$$+\lambda^{\frac{N}{4}} \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\infty t^{\frac{2-N}{4}} I_t^\lambda(R) u_i(x_0, t) \widehat{f}_i(t) t^\tau\,d\rho(t) -$$

$$-\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^\infty \widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t) \widehat{f}_i(t) t^\tau\,d\rho(t). \qquad (4.3.37)$$

Достаточно доказать, что если τ при некотором достаточно малом $\delta > 0$ удовлетворяет условию $\frac{N-1}{4} - \frac{\delta}{2} < \tau < \frac{N-1}{4}$, то каждое из четырех слагаемых, стоящих в правой части (4.3.37), равномерно относительно x_0 на фиксированном компакте K имеет порядок

$$O(\lambda^\tau) \| f \|_{H_2^\alpha(G)}. \qquad (4.3.38)$$

Сначала убедимся в том, что такой порядок имеет первое слагаемое в правой части (4.3.37), т. е. интеграл

$$\int_G V^\lambda(x_0, x) \widehat{A}^\tau f(x) \rho_0(x)\,dx. \qquad (4.3.39)$$

*) См. равенство (4.1.5) из п. 1 § 1.

Обозначим через K' компакт области D такой, что K' содержит ранее фиксированный нами компакт K, причем расстояние от K до границы K' не меньше R *).

В силу утверждения, сформулированного в п. 4 § 1, функция $\widehat{A}^{\tau}f(x)$ представима в виде суммы двух слагаемых $g(x)+h(x)$, первое из которых обращается в нуль на компакте K' (для такой функции в силу того, что R меньше расстояния от K до границы K', величина (4.3.39) обращается в нуль для всех x_0 из K).

Что же касается функции $h(x)$, то для нее в силу утверждения из п. 3 § 1 заведомо справедлива равномерная относительно x_0 на компакте K оценка

$$\int\limits_G V^{\lambda}(x_0, x)\, h(x)\, \rho_0(x)\, dx = O\left(\lambda^{\tau}\right) \| f \|_{H_2^{\alpha}(G)}.$$

Тем самым доказано, что интеграл (4.3.39) имеет равномерно по x_0 на компакте K порядок (4.3.38).

Докажем теперь, что без предположения об обращении $f(x)$ в нуль в подобласти D области G *остальные три слагаемых в правой части* (4.3.37) *имеют порядок* (4.3.38) *равномерно относительно x_0 на любом компакте K всей области G* (а не только на любом компакте K подобласти D).

Для того чтобы доказать, что второе слагаемое в правой части (4.3.37):

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\widehat{m}} u_i(x_0, \lambda)\, \widehat{f}_i(\lambda)\, \lambda^{\tau}\left[\rho(\lambda+0)-\rho(\lambda-0)\right] \tag{4.3.40}$$

имеет равномерно относительно x_0 на любом компакте K области G порядок (4.3.38), достаточно доказать, что именно такой порядок на любом компакте K области G имеет величина

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\lambda-\Delta\lambda}^{\lambda+\Delta\lambda} u_i(x_0, t)\, \widehat{f}_i(t)\, t^{\tau} d\rho(t)$$

при всех достаточно малых положительных $\Delta\lambda$, а это сразу вытекает из неравенства Коши — Буняковского и из оценок

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\lambda-\Delta\lambda}^{\lambda+\Delta\lambda} \widehat{f}_i^{\,2}(t)\, d\rho(t) = O\left(\lambda^{-\alpha}\right) \| f \|^2_{H_2^{\alpha}(G)},$$

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\lambda-\Delta\lambda}^{\lambda+\Delta\lambda} u_i^2(x_0, t)\, d\rho(t) = O\left(\lambda^{\frac{N-1}{2}}\right),$$

первая из которых справедлива в силу леммы 4.7 при любом $0<\Delta\lambda<\lambda/2$, а вторая справедлива (равномерно относительно

*) Такой компакт K' существует, ибо число R фиксировано меньшим половины расстояния компакта K от границы D.

x_0 на любом компакте K области G) при любом $0 < \Delta\lambda < \sqrt{\lambda}$ в силу основной оценки (4.1.14), установленной в лемме 4.1 в п. 3 § 1.

Итак, величина (4.3.40) имеет порядок (4.3.38) равномерно относительно x_0 на любом компакте K основной области G.

Перейдем теперь к оценке третьего слагаемого в правой части (4.3.37). Имея в виду, что, как уже указывалось выше, мы (не ограничивая общности) можем считать рассматриваемое самосопряженное расширение $\widehat{A}$ строго положительным, т. е. удовлетворяющим для любой функции $u(x)$ из $C_0^\infty(G)$ и некоторого $\mu_0 > 0$ условию $(\widehat{A}u, u) \geqslant \mu_0(u, u)$, мы можем записать указанное третье слагаемое в виде

$$\lambda^{\frac{N}{4}} \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{\mu_0}^{\infty} t^{\frac{2-N}{4}} I_t^\lambda(R)\, u_i(x_0, t)\, \widehat{f}_i(t)\, t^\tau d\rho(t). \qquad (4.3.41)$$

Используя технику, развитую нами в гл. 1 и 2 для случая оператора Лапласа, разобьем величину (4.3.41) на сумму четырех слагаемых $\mathscr{K}_1 + \mathscr{K}_2 + \mathscr{K}_3 + \mathscr{K}_4$, где

$$\mathscr{K}_1 = \lambda^{\frac{N}{4}} \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\sqrt{\mu_0} \leqslant \sqrt{t} < \frac{\sqrt{\lambda}}{2}} t^{\frac{2-N}{4}} I_t^\lambda(R)\, u_i(x_0, t)\, \widehat{f}_i(t)\, t^\tau d\rho(t), \qquad (4.3.42)$$

$$\mathscr{K}_2 = \lambda^{\frac{N}{4}} \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{1 < |\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}| < \frac{\sqrt{\lambda}}{2}} t^{\frac{2-N}{4}} I_t^\lambda(R)\, u_i(x_0, t)\, \widehat{f}_i(t)\, t^\tau d\rho(t), \qquad (4.3.43)$$

$$\mathscr{K}_3 = \lambda^{\frac{N}{4}} \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{|\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}| \leqslant 1} t^{\frac{2-N}{4}} I_t^\lambda(R)\, u_i(x_0, t)\, \widehat{f}_i(t)\, t^\tau d\rho(t), \qquad (4.3.44)$$

$$\mathscr{K}_4 = \lambda^{\frac{N}{4}} \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\sqrt{t} \geqslant \frac{3}{2}\sqrt{\lambda}} t^{\frac{2-N}{4}} I_t^\lambda(R)\, u_i(x_0, t)\, \widehat{f}_i(t)\, t^\tau d\rho(t). \qquad (4.3.45)$$

Мы докажем, что каждая из величин (4.3.42)—(4.3.45) имеет порядок (4.3.38), опираясь на лемму 4.7 из п. 1, на оценки (4.1.14), (4.1.18), (4.1.49) и (4.1.50) из п. 3 § 1 настоящей главы и на справедливые для всех $\lambda \geqslant 1$, $t \geqslant \mu_0$ оценки

$$\begin{gathered} |I_t^\lambda(R)| = O\left(\lambda^{-1/4} t^{-1/4}\right), \\ |I_t^\lambda(R)| = O\left(\lambda^{-1/4} t^{-1/4} |\sqrt{t} - \sqrt{\lambda}|^{-1}\right), \end{gathered} \qquad (4.3.46)$$

установленные в п. 2 § 4 гл. 2 *).

---

*) См. оценки (2.4.10) и (2.4.11) из п. 1 § 4 гл. 2 и их доказательство в п. 2 § 4 гл. 2.

Для оценки величины (4.3.42) воспользуемся второй оценкой (4.3.46), которую при $\sqrt{\mu_0} \leqslant \sqrt{t} \leqslant \sqrt{\lambda}/2$ можно переписать в виде

$$|I_t^\lambda(R)| = O\left(\lambda^{-3/4} t^{-1/4}\right). \tag{4.3.47}$$

Кроме того, заметим, что из оценки (4.3.7) вытекает, что для произвольного достаточно малого фиксированного $\gamma > 0$ *)

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{\mu_0}^{\infty} \widehat{f}_i^2(t)\, t^{\alpha-\gamma} d\rho(t) \leqslant C \|f\|^2_{H_2^\alpha(G)}. \tag{4.3.48}$$

Применяя в (4.3.42) неравенство Коши — Буняковского сначала для интеграла, а затем для суммы, используя оценки (4.3.47) и (4.3.48), учитывая, что $\alpha \geqslant (N-1)/2$, и считая, что $\tau + \gamma/2 > N/4 - 1/2$, $\gamma \leqslant 1/2$, получим, используя также оценку (4.1.49) из п. 3 § 1,

$$|\mathscr{K}_1| \leqslant \lambda^{\frac{N-3}{4}} \left\{ \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\sqrt{\mu_0} \leqslant \sqrt{t} \leqslant \frac{\sqrt{\lambda}}{2}} \widehat{f}_i^2(t)\, t^{\alpha-\gamma} d\rho(t) \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\sqrt{\mu_0} \leqslant \sqrt{t} \leqslant \frac{\sqrt{\lambda}}{2}} t^{\frac{1-N}{2}+2\tau+\delta-\alpha} u_i^2(x_0, t)\, d\rho(t) \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C \lambda^{\frac{N-3}{4}} \|f\|_{H_2^\alpha(G)} \left\{ \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\sqrt{\mu_0} \leqslant \sqrt{t} \leqslant \frac{\sqrt{\lambda}}{2}} t^{1-N+2\tau+\delta} u_i^2(x_0, t)\, d\rho(t) \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \lambda^{\tau - 1/4 + \gamma/2} \|f\|_{H_2^\alpha(G)} \leqslant C_1 \lambda^{\tau} \|f\|_{H_2^\alpha(G)}.$$

Тем самым доказано, что величина (4.3.42) имеет порядок (4.3.38).

Для оценки величины (4.3.43) воспользуемся второй оценкой (4.3.46) и тем, что $\sqrt{\lambda}/2 \leqslant \sqrt{t} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{\lambda}$.

Снова применяя неравенство Коши — Буняковского сначала для интеграла, а затем для суммы и используя оценку (4.3.7)

---

*) Достаточно применить формулу интегрирования **по частям**

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{\mu_0}^{\infty} \widehat{f}_i^2(t)\, t^{\alpha-\gamma} d\rho(t) = \left[t^{\alpha-\gamma} \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_t^{\infty} \widehat{f}_i^2(\tau)\, d\rho(\tau) \right] \Bigg|_{t=\mu_0}^{t=\infty} -$$

$$-(\alpha-\gamma) \int_{\mu_0}^{\infty} t^{\alpha-\gamma-1} \left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_t^{\infty} \widehat{f}_i^2(\tau)\, d\rho(\tau) \right] dt$$

и воспользоваться оценкой (4.3.7) и равенством Парсеваля.

из п. 1 настоящего параграфа, получим

$$|\mathcal{K}_2| \leqslant C_2\lambda^\tau \left\{\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\sqrt{t}\geqslant\sqrt{\lambda}/2} \widehat{f}_i^2(t)\,d\rho(t)\right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{1\leqslant|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant\sqrt{\lambda}/2} |\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|^{-2} u_i^2(x_0, t)\,d\rho(t)\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_3\lambda^{\tau-\frac{\alpha}{2}} \|f\|_{H_2^\alpha(G)} \left\{\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{1\leqslant|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant\sqrt{\lambda}/2} |\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|^{-2} u_i(x_0, t)\,d\rho(t)\right\}^{1/2}. \tag{4.3.49}$$

Для оценки величины, стоящей в правой части (4.3.49) в фигурных скобках, обозначим через M целую часть числа $\sqrt{\lambda}/2$ и, опираясь на неравенство (4.1.14) из п. 3 § 1, мажорируем указанную величину суммой

$$\left\{\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{1\leqslant|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant\sqrt{\lambda}/2} |\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|^{-2} u_i^2(x_0, t)\,d\rho(t)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{M} \left\{\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{l\leqslant|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant l+1} |\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|^{-2} u_i^2(x_0, t)\,d\rho(t)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{M} l^{-2} \left[\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{l\leqslant|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant l+1} u_i^2(x_0, t)\,d\rho(t)\right] \leqslant$$

$$\leqslant C_4\lambda^{\frac{N-1}{2}} \sum_{l=1}^{\infty} l^{-2} \leqslant C_5\lambda^{\frac{N-1}{2}}. \tag{4.3.50}$$

Сопоставляя между собой оценки (4.3.49) и (4.3.50) и учитывая, что $\alpha \geqslant (N-1)/2$, получим для величины (4.3.43) искомый порядок (4.3.38).

Для оценки величины (4.3.44) также применим к ней неравенство Коши — Буняковского и воспользуемся первой оценкой (4.3.46), соотношением $t = O(\lambda)$, оценкой (4.3.7) из п. 1 настоящего параграфа и оценкой (4.1.14) из п. 3 § 1.

При этом, учитывая, что $\alpha \geqslant (N-1)/2$, получим

$$|\mathcal{K}_3| \leqslant$$

$$\leqslant C_6\lambda^\tau \left\{\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\sqrt{t}>\sqrt{\lambda}-1} \widehat{f}_i^2(t)\,d\rho(t)\right\}^{1/2} \left\{\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{|\sqrt{t}-\sqrt{\lambda}|\leqslant 1} u_i^2(x_0, t)\,d\rho(t)\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_7\lambda^{\frac{N-1}{4}-\frac{\alpha}{2}+\tau} \|f\|_{H_2^\alpha(G)} \leqslant C_7\lambda^\tau \|f\|_{H_2^\alpha(G)}.$$

Тем самым доказано, что величина (4.3.44) имеет порядок (4.3.38).

Теперь нам остается доказать, что и величина (4.3.45) имеет порядок (4.3.38).

Пользуясь тем, что при $\sqrt{t} \geqslant \frac{3}{2}\sqrt{\lambda}$ вторая оценка (4.3.46) может быть переписана в виде

$$|I_t^\lambda(R)| = O\left(\lambda^{-1/4} t^{-3/4}\right),$$

и снова привлекая оценку (4.3.7) из п. 1 настоящего параграфа и оценку (4.1.50) из п. 3 § 1, получим, применяя к (4.3.45) неравенство Коши — Буняковского и учитывая, что $\alpha \geqslant (N-1)/2$,

$$|\mathscr{K}_4| \leqslant C_8 \lambda^{\frac{N-1}{4} - \frac{\alpha}{2} + \tau} \|f\|_{H_2^\alpha(G)} \left\{ \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{\sqrt{t} \geqslant \frac{3}{2}\sqrt{\lambda}} t^{\frac{N+1}{2}} u_i(x_0, t)\, d\rho(t) \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_9 \lambda^{\frac{N-1}{4} - \frac{\alpha}{2} + \tau} \|f\|_{H_2^\alpha(G)} \leqslant C_9 \lambda^\tau \|f\|_{H_2^\alpha(G)}.$$

Тем самым окончательно доказано, что все четыре величины (4.3.42) — (4.3.45), а потому и величина (4.3.41) имеют порядок (4.3.38).

Теперь для полного доказательства леммы 4.8 нам остается доказать, что и последнее порождаемое остаточным членом в формуле среднего значения слагаемое в правой части (4.3.37) имеет порядок (4.3.38), т. е. доказать равномерную относительно x_0 на компакте K области G оценку

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_0^\infty \widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t)\, \widehat{f}_i(t) t^\tau d\rho(t) = O\left(\lambda^\tau\right) \|f\|_{H_2^\alpha(G)}. \tag{4.3.51}$$

Для получения этой оценки нам понадобятся следующие две равномерные относительно x_0 на произвольном компакте K области G оценки для величины $\widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t)$, определяемой соотношением (4.3.35):

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_0^\infty \left[\widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t)\right]^2 d\rho(t) \leqslant C_{10} \lambda^{\frac{N-1}{2}}, \tag{4.3.52}$$

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_0^{\lambda/2} \left[\widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t)\right]^2 d\rho(t) \leqslant C_{11} \lambda^{\frac{N-1}{2} - \delta} \tag{4.3.53}$$

(во второй из этих оценок δ обозначает достаточно малое положительное число).

Оценка (4.3.52) совпадает со взятой при $s = 0$ оценкой (4.2.14), доказанной в п. 2 § 2 настоящей главы, причем в конце указанного пункта отмечено, что эта оценка является равномерной относительно x_0 на каждом фиксированном компакте K области G.

Доказательство справедливости равномерной относительно x_0 на каждом компакте K области G оценки (4.3.53) мы выделим в отдельную лемму 4.9 и, ради удобства, проведем доказательство этой леммы в отдельном пункте после завершения доказательства леммы 4.8.

Здесь же, опираясь на оценки (4.3.52) и (4.3.53), мы завершим доказательство леммы 4.8, т. е. докажем равномерную относительно x_0 на произвольном компакте K области G оценку (4.3.51).

Разобьем интеграл, стоящий в левой части (4.3.51), на сумму двух интегралов $I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^{\lambda/4} \widetilde{V}_i^{\lambda}(x_0, t)\, \widehat{f}_i(t)\, t^{\tau} d\rho(t), \tag{4.3.54}$$

$$I_2 = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{\lambda/4}^{\infty} \widetilde{V}_i^{\lambda}(x_0, t)\, \widehat{f}_i(t)\, t^{\tau} d\rho(t), \tag{4.3.55}$$

и убедимся, что каждая из двух величин (4.3.54) и (4.3.55) равномерно относительно x_0 на произвольном компакте области G имеет порядок (4.3.38).

Обозначим через n_0 наименьшее целое число, удовлетворяющее условию $2^{n_0+1} \geqslant \lambda/4$, и заметим, что из выражения (4.3.54) вытекает неравенство

$$|I_1| \leqslant \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^1 \left| \widetilde{V}_i^{\lambda}(x_0, t)\, \widehat{f}_i(t)\, t^{\tau} \right| d\rho(t) + \\ + \sum_{l=0}^{n_0} \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{2^l}^{2^{l+1}} \left| \widetilde{V}_i^{\lambda}(x_0, t)\, \widehat{f}_i(t)\, t^{\tau} \right| d\rho(t). \tag{4.3.56}$$

При оценке интегралов, стоящих в правой части (4.3.56), мы будем использовать следующие два неравенства:

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^1 \widehat{f}_i^2(t)\, t^{2\tau} d\rho(t) \leqslant C_{12} \|f\|^2_{L_2(G)} \leqslant C_{12} \|f\|^2_{H_2^{\alpha}(G)},$$

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{2^l}^{2^{l+1}} \widehat{f}_i^2(t)\, t^{2\tau} d\rho(t) \leqslant 2^{(l+1)2\tau} \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{2^l}^{2^{l+1}} \widehat{f}_i^2(t)\, d\rho(t) = O\left(2^{l(2\tau-\alpha)}\right) \|f\|_{H_2^{\alpha}(G)}$$

Первое из этих двух неравенств вытекает из равенства Парсеваля для функции $f(x)$, а второе — из оценки (4.3.7), установленной в п. 1 настоящего параграфа.

Применяя в правой части (4.3.56) неравенство Коши — Буняковского сначала для интегралов, а затем для сумм по индексу i и используя оценку (4.3.53) и два только что приведенных неравенства, получим

$$|I_1| \leqslant \left\{ \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^1 [\widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t)]^2 d\rho(t) \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^1 \widehat{f}_i^2(t) t^{2\tau} d\rho(t) \right\}^{1/2} +$$

$$+ \sum_{l=0}^{n_0} \left\{ \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{2^l}^{2^{l+1}} [\widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t)]^2 d\rho(t) \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{2^l}^{2^{l+1}} \widehat{f}_i^2(t) t^{2\tau} d\rho(t) \right\}^{1/2} =$$

$$= O\left(\lambda^{\frac{N-1}{4} - \frac{\delta}{2}}\right) \|f\|_{H_2^\alpha(G)} \left[1 + \sum_{l=0}^{n_0} 2^{l\left(\tau - \frac{\alpha}{2}\right)} \right].$$

Из последнего неравенства, учитывая, что $\frac{N-1}{4} - \frac{\delta}{2} < \tau$ и $\tau < \frac{N-1}{4} \leqslant \frac{\alpha}{2}$, получим для I_1 равномерный по x_0 на произвольном компакте области G порядок (4.3.38).

Теперь остается убедиться только в том, что такой же порядок (4.3.38) имеет равномерно по x_0 на любом компакте области G и величина (4.3.55).

Представим величину (4.3.55) в виде суммы

$$I_2 = \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \sum_{l=-2}^{\infty} \int_{2^l\lambda}^{2^{l+1}\lambda} \widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t) \widehat{f}_i(t) t^\tau d\rho(t). \qquad (4.3.57)$$

Вынося из-под знака интеграла в (4.3.57) наибольшее значение величины t^τ и после этого применяя в правой части (4.3.57) неравенство Коши — Буняковского сначала для интеграла, а затем для суммы по двум индексам, получим

$$|I_2| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \sum_{l=-2}^{\infty} 2^{\tau(l+1)} \lambda^\tau \left\{ \int_{2^l\lambda}^{2^{l+1}\lambda} [\widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t)]^2 d\rho(t) \right\}^{1/2} \left\{ \int_{2^l\lambda}^{2^{l+1}\lambda} \widehat{f}_i^2(t) d\rho(t) \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant (2\lambda)^\tau \left\{ \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \sum_{l=-2}^{\infty} \int_{2^l\lambda}^{2^{l+1}\lambda} [\widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t)]^2 d\rho(t) \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \sum_{l=-2}^{\infty} 2^{2\tau l} \int_{2^l\lambda}^{2^{l+1}\lambda} \widehat{f}_i^2(t) d\rho(t) \right\}^{1/2}. \qquad (4.3.58)$$

Заметим, что в силу оценки (4.3.52) равномерно относительно x_0 на произвольном компакте области G справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \sum_{l=-2}^{\infty} \int_{2^l\lambda}^{2^{l+1}\lambda} [\widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t)]^2 d\rho(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_{\lambda/4}^{\infty} [\widetilde{V}_i^\lambda(x_0, t)]^2 d\rho(t) \leqslant C_{10} \lambda^{\frac{N-1}{2}}. \qquad (4.3.59)$$

Кроме того, в силу установленной в п. 1 настоящего параграфа оценки (4.3.7)

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{2^l\lambda}^{2^{l+1}\lambda} \widehat{f}_i^2(t)\,d\rho(t) \leqslant \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int\limits_{2^l\lambda}^{\infty} \widehat{f}_i^2(t)\,d\rho(t) = O[(2^l\lambda)^{-\alpha}]\,\|f\|_{H_2^\alpha(G)}.$$

Используя в правой части (4.3.58) последнюю оценку и оценку (4.3.59), окончательно получим, что

$$|I_2| \leqslant C_{13}\lambda^{\tau+(N-1)/4-\alpha/2}\left\{\sum_{l=-2}^{\infty} 2^{(2\tau-\alpha)l}\right\}^{1/2}\|f\|_{H_2^\alpha(G)}. \quad (4.3.60)$$

Остается принять во внимание, что $\alpha \geqslant (N-1)/2$ и $\tau < (N-1)/4$, так что $2\tau-\alpha<0$ и величина, стоящая в (4.3.60) в фигурных скобках, равна $O(1)$.

Из (4.3.60) получаем, что при любом $\tau<(N-1)/4$ равномерно относительно x_0 на произвольном компакте области G

$$|I_2| \leqslant C_{14}\lambda^{\tau}\|f\|_{H_2^\alpha(G)}.$$

Тем самым оценка (4.3.51) доказана, и при условии справедливости равномерной по x_0 на любом компакте области G оценки (4.3.53) доказательство леммы 4.8 завершено.

Прежде чем приступить к доказательству указанной оценки (4.3.53), сделаем следующее замечание.

Замечание. При доказательстве справедливости для каждого из трех последних членов в правой части (4.3.37) равномерной относительно x_0 на произвольном компакте всей области G оценки вида (4.3.38) мы использовали только неравенство (4.3.7) из п. 1.

Таким образом, если мы откажемся от требования о том, чтобы функция $f(x)$ имела в области G компактный носитель, а потребуем только, чтобы функция $f(x)$ принадлежала классу $H_2^\alpha(G)$ при $\alpha \geqslant (N-1)/2$ и чтобы для этой функции было справедливо неравенство (4.3.7), то для этой функции равномерно относительно x_0 на произвольном компакте области G будет справедливо соотношение

$$\widehat{A}^\tau E_\lambda f(x_0) = \int\limits_G V^\lambda(x_0, x)\widehat{A}^\tau f(x)\,\rho_0(x)\,dx + O(\lambda^\tau)\,\|f\|_{H_2^\alpha(G)}. \quad (4.3.61)$$

3. Доказательство оценки (4.3.53).

Лемма 4.9. *Для некоторого достаточно малого положительного числа δ равномерно относительно x_0 на произвольном фиксированном компакте области G справедлива оценка* (4.3.53).

Доказательство. Будем придерживаться развитой в п. 2 § 2 схемы, использованной для доказательства неравенства (4.2.14).

Согласно указанной схеме, достаточно доказать, что каждая из пяти величин

$$I_1(R,\lambda)=\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_{1/R^2}^{\lambda/2}\left\{\int_{1/\sqrt{t}}^{R}\left[\int_{r_{x_0y}\leqslant\tau}\frac{u_i(y,t)\,q(x_0,y)}{r_{x_0y}^{\frac{N}{2}-\delta}}\,dy\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\int_{\tau}^{R}\mathcal{J}_{N/2}(r\sqrt{\lambda})\,\frac{d}{d\tau}\left(\tau^{-\delta}w_\nu(\tau\sqrt{t},\,r\sqrt{t})\right)dr\right]d\tau\right\}^2 d\rho(t),\quad(4.3.62)$$

$$I_2(R,\lambda)=\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_{1/R^2}^{\lambda/2}\left\{\int_{0}^{1/\sqrt{t}}\left[\int_{r_{x_0y}\leqslant\tau}\frac{u_i(y,t)\,q(x_0,y)}{r_{x_0y}^{\frac{N}{2}-\delta}}\,dy\right]\times\right.$$

$$\times\left[\sqrt{t}\,\tau^{-\delta}Y_{\nu+1}(\tau\sqrt{t})-(\nu-\delta)\,\tau^{-\delta-1}Y_\nu(\tau\sqrt{t})\right]\times$$

$$\left.\times\left[\int_{\tau}^{R}\mathcal{J}_{N/2}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{t})\,dr\right]d\tau\right\}^2 d\rho(t),\quad(4.3.63)$$

$$I_3(R,\lambda)=\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_{1/R^2}^{\lambda/2}\left\{\int_{0}^{1/\sqrt{t}}\left[\int_{r_{x_0y}\leqslant\tau}\frac{u_i(y,t)\,q(x_0,y)}{r_{x_0y}^{\frac{N}{2}-\delta}}\,dy\right]\times\right.$$

$$\times\left[\sqrt{t}\,\tau^{-\delta}\mathcal{J}_{\nu+1}(\tau\sqrt{t})-(\nu-\delta)\,\tau^{-\delta-1}\mathcal{J}_\nu(\tau\sqrt{t})\right]\times$$

$$\left.\times\left[\int_{\tau}^{1\sqrt{t}}\mathcal{J}_{N/2}(r\sqrt{\lambda})\,Y_\nu(r\sqrt{t})\,dr\right]d\tau\right\}^2 d\rho(t).\quad(4.3.64)$$

$$I_4(R,\lambda)=\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_{1/R^2}^{\lambda/2}\left\{\int_{0}^{1/\sqrt{t}}\left[\int_{r_{x_0y}\leqslant\tau}\frac{u_i(y,t)\,q(x_0,y)}{r_{x_0y}^{\frac{N}{2}-\delta}}\,dy\right]\times\right.$$

$$\times\left[\sqrt{t}\,\tau^{-\delta}\mathcal{J}_{\nu+1}(\tau\sqrt{t})-(\nu-\delta)\,\tau^{-\delta-1}\mathcal{J}_\nu(\tau\sqrt{t})\right]\times$$

$$\left.\times\left[\int_{1\sqrt{t}}^{R}\mathcal{J}_{N/2}(r\sqrt{\lambda})\,Y_\nu(r\sqrt{t})\,dr\right]d\tau\right\}^2 d\rho(t),\quad(4.3.65)$$

$$I_5(R,\lambda)=\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\int_{0}^{1/R^2}\left\{\int_{0}^{R}\left[\int_{r_{x_0y}\leqslant\tau}\frac{u_i(y,t)\,q(x_0,y)}{r_{x_0y}^{\frac{N}{2}-\delta}}\,dy\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\int_{\tau}^{R}\mathcal{J}_{N/2}(r\sqrt{\lambda})\,\frac{d}{d\tau}\left(\tau^{-\delta}w_\nu(\tau\sqrt{t},\,r\sqrt{t})\right)dr\right]d\tau\right\}^2 d\rho(t)\quad(4.3.66)$$

при некотором $\delta > 0$ равномерно относительно x_0 на произвольном компакте области G имеет порядок $O(\lambda^{-\delta-1/2})$.

Для этого в силу изложенной в п. 2 § 2 схемы достаточно вместо установленных в указанном пункте оценок (4.2.28), (4.2.31), (4.2.34), (4.2.35) и (4.2.37) установить следующие пять оценок:

$$\left|\int_{\tau}^{R} \mathcal{J}_{N/2}(r\sqrt{\lambda})\,\frac{d}{d\tau}\left[\tau^{-\delta}w_\nu(\tau\sqrt{t},\, r\sqrt{t})\right]dr\right| = O\left(\lambda^{-1/4-\delta/2}\tau^{-1/2-\delta}\right), \tag{4.3.67}$$

$$\Bigl|\left[\sqrt{t}\,\tau^{-\delta}Y_{\nu+1}(\tau\sqrt{t}) - (\nu-\delta)\,\tau^{-\delta-1}Y_\nu(\tau\sqrt{t})\right]\times$$
$$\times\int_{\tau}^{R} \mathcal{J}_{N/2}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{t})\,dr\Bigr| = O\left(\lambda^{-1/4-\delta/2}\sqrt{t}^{\,-\nu-\delta-\frac{1}{2}}\tau^{-\nu-1-4\delta}\right), \tag{4.3.68}$$

$$\Bigl[\sqrt{t}\,\tau^{-\delta}\mathcal{J}_{\nu+1}(\tau\sqrt{t}) - (\nu-\delta)\,\tau^{-\delta-1}\mathcal{J}_\nu(\tau\sqrt{t})\Bigr]\times$$
$$\times\int_{\tau}^{1/\sqrt{t}} \mathcal{J}_{N/2}(r\sqrt{\lambda})\,Y_\nu(r\sqrt{t})\,dr\Bigr| = O\left(\lambda^{-1/4-\delta/2}\sqrt{t}^{\,-\nu-\delta-1/2}\tau^{-\nu-1-4\delta}\right), \tag{4.3.69}$$

$$\Bigl|\left[\sqrt{t}\,\tau^{-\delta}\mathcal{J}_{\nu+1}(\tau\sqrt{t}) - (\nu-\delta)\,\tau^{-\delta-1}\mathcal{J}_\nu(\tau\sqrt{t})\right]\times$$
$$\Bigl|\times\int_{1/\sqrt{t}}^{R} \mathcal{J}_{N/2}(r\sqrt{\lambda})\,Y_\nu(r\sqrt{t})\,dr\Bigr| = O\left(\lambda^{-1/4-\delta/2}\sqrt{t}^{\,-\nu-\delta-1/2}\tau^{-\nu-1-4\delta}\right) \tag{4.3.70}$$

$$\left|\int_{\tau}^{R} \mathcal{J}_{N/2}(r\sqrt{\lambda})\frac{d}{d\tau}\left[\tau^{-\delta}w_\nu(\tau\sqrt{t},\, r\sqrt{t})\right]dr\right| = O\left(\lambda^{-1/4-\delta}\tau^{-3\delta-\nu-1}R^{\nu+1/2}\right). \tag{4.3.71}$$

При этом предполагается, что в (4.3.67) $r \geqslant \tau \geqslant 1/\sqrt{t}$, в (4.3.68) $\tau \leqslant 1/\sqrt{t}$, в (4.3.69) $\tau \leqslant r \leqslant 1/\sqrt{t}$, в (4.3.70) $r \geqslant 1/\sqrt{t} \geqslant \tau$ и в (4.3.71) $\tau \leqslant r \leqslant R \leqslant 1/\sqrt{t}$.

Убедимся в справедливости оценок (4.3.67)—(4.3.71).

Для доказательства справедливости оценки (4.3.67) заметим, что

$$\frac{d}{d\tau}\left[\tau^{-\delta}w_\nu(\tau\sqrt{t},\, r\sqrt{t})\right] =$$
$$= \mathcal{J}_\nu(r\sqrt{t})\left[\sqrt{t}\,\tau^{-\delta}Y_{\nu+1}(\tau\sqrt{t}) - (\nu-\delta)\,\tau^{-\delta-1}Y_\nu(\tau\sqrt{t})\right] -$$
$$- Y_\nu(r\sqrt{t})\left[\sqrt{t}\,\tau^{-\delta}\mathcal{J}_{\nu+1}(\tau\sqrt{t}) - (\nu-\delta)\,\tau^{-\delta-1}\mathcal{J}_\nu(\tau\sqrt{t})\right], \tag{4.3.72}$$

и учтем, что при $\tau \geqslant 1/\sqrt{t}$ заведомо справедливы следующие две оценки *):

$$\begin{cases} \left| \sqrt{t}\, \tau^{-\delta} Y_{\nu+1}(\tau\sqrt{t}) - (\nu-\delta)\tau^{-\delta-1} Y_\nu(\tau\sqrt{t}) \right| = O\left(t^{1/4}\tau^{-\delta-1/2}\right), \\ \left| \sqrt{t}\, \tau^{-\delta} \mathcal{J}_{\nu+1}(\tau\sqrt{t}) - (\nu-\delta)\tau^{-\delta-1} \mathcal{J}_\nu(\tau\sqrt{t}) \right| = O\left(t^{1/4}\tau^{-\delta-1/2}\right). \end{cases} \tag{4.3.73}$$

С помощью соотношений (4.3.72) и (4.3.73) мы сведем доказательство справедливости оценки (4.3.67) к установлению при $r \geqslant \tau \geqslant 1/\sqrt{t},\ t \leqslant \lambda/2$ следующих двух оценок:

$$|I_t^\lambda(\tau, R)| = \left| \int_\tau^R \mathcal{J}_{N/2}(r\sqrt{\lambda})\, \mathcal{J}_\nu(r\sqrt{t})\, dr \right| = O\left(\lambda^{-1/4-\delta/2} t^{-1/4} \tau^{-\delta}\right), \tag{4.3.74}$$

$$|K_t^\lambda(\tau, R)| = \left| \int_\tau^R \mathcal{J}_{N/2}(r\sqrt{\lambda})\, Y_\nu(r\sqrt{t})\, dr \right| = O\left(\lambda^{-1/4-\delta/2} t^{-1/4} \tau^{-\delta}\right). \tag{4.3.75}$$

Оценки (4.3.74) и (4.3.75) устанавливаются стереотипно, и мы остановимся на выводе только первой из этих оценок.

Интегрируя (4.3.74) два раза по частям и используя рекуррентные соотношения для цилиндрических функций, получим точно так же, как в п. 2 § 4 гл. 2 **),

$$\begin{aligned} I_t^\lambda(\tau, R)\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right) = &-\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})\, \mathcal{J}_\nu(r\sqrt{t})\right]\Big|_{r=\tau}^{r=R} - \\ &- \frac{\sqrt{t}}{\lambda} \left[\mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{\lambda})\, \mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t})\right]\Big|_{r=\tau}^{r=R} + \\ &+ (N-2)\frac{t}{\lambda^{3/2}} \int_\tau^R \mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})\, \mathcal{J}_{\nu-2}(r\sqrt{t})\, \frac{dr}{r} - \\ &- (N-4)\frac{\sqrt{t}}{\lambda} \int_\tau^R \mathcal{J}_{N/2}(r\sqrt{\lambda})\, \mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t})\, \frac{dr}{r}. \end{aligned} \tag{4.3.76}$$

Так как в рассматриваемом случае $r\sqrt{t} \geqslant \tau\sqrt{t} \geqslant 1$, то все цилиндрические функции в правой части (4.3.76) можно мажорировать с помощью оценки $|\mathcal{J}_\nu(\rho)| = O(\rho^{-1/2})$.

Учитывая также, что $t \leqslant \lambda/2$ и $1 - t/\lambda \geqslant 1/2$, из (4.3.76) получаем, что

$$|I_s^\lambda(\tau, R)| = O\left(\lambda^{-3/4} t^{-1/4} \tau^{-1}\right). \tag{4.3.77}$$

*) Эти оценки вытекают из асимптотических оценок $\mathcal{J}_\nu(\rho) = O(\rho^{-1/2})$, $Y_\nu(\rho) = O(\rho^{-1/2})$, справедливых при всех $\rho \geqslant 1$. Конечно, оценки O-членов в (4.3.73) зависят от ν и от δ.

**) См. в указанном пункте вывод соотношения (2.4.44).

Теперь для получения оценки (4.3.74) остается в (4.3.77) принять во внимание, что в силу соотношения $\tau^{-1} \leqslant \sqrt{t} \leqslant \sqrt{\lambda/2}$ справедливо соотношение $\tau^{-1} = \tau^{-\delta}\tau^{-1+\delta} = O(\tau^{-\delta}\lambda^{1/2-\delta/2})$.

Тем самым вывод оценки (4.3.74) завершен. Поскольку оценка (4.3.75) выводится совершенно аналогично, то из соотношений (4.3.73), (4.3.74) и (4.3.75) вытекает оценка (4.3.67).

Перейдем теперь к выводу оценки (4.3.68). Учитывая, что $\tau \leqslant 1/\sqrt{t}$, и мажорируя функции Неймана с помощью оценки $|Y_\nu(\tau\sqrt{t})| \leqslant C(\tau\sqrt{t})^{-\nu-\delta}$ с некоторым $\delta > 0$, придем к соотношению

$$|\sqrt{t}\tau^{-\delta}Y_{\nu+1}(\tau\sqrt{t}) - (\nu - \delta)\tau^{-\delta-1}Y_\nu(\tau\sqrt{t})| = O(\tau^{-\nu-1-2\delta}\sqrt{t}^{-\nu-\delta}). \tag{4.3.78}$$

Из (4.3.78) вытекает, что для доказательства справедливости оценки (4.3.68) достаточно для $\tau \leqslant 1/\sqrt{t}$ и для всех достаточно больших λ *) установить оценку

$$|I_t^\lambda(\tau, R)| = \left|\int\limits_\tau^R \mathcal{J}_{N/2}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{t})\,dr\right| = O\left(\lambda^{-1/4-\delta/2}\sqrt{t}^{-1/2}\tau^{-2\delta}\right). \tag{4.3.79}$$

Для установления оценки (4.3.79) возьмем интеграл, стоящий в левой ее части, один раз по частям. При этом получим равенство

$$I_t^\lambda(\tau, R) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{t})\right]\Big|_{r=\tau}^{r=R} + \\ + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_\tau^R \mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t})\,dr. \tag{4.3.80}$$

Остается доказать, что величина, стоящая в правой части (4.3.80), имеет порядок, указанный в правой части (4.3.79). Мажорируя все бесселевы функции, стоящие в подстановках в правой части (4.3.80), единицей и учитывая, что в рассматриваемом случае

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \leqslant \lambda^{-1/4-\delta/2}t^{-1/4+\delta/2} \leqslant \lambda^{-1/4-\delta/2}t^{-1/4+\delta/2}(\tau\sqrt{t})^{-\delta} = \\ = \lambda^{-1/4-\delta/2}t^{-1/4}\tau^{-\delta} = O\left(\lambda^{-1/4-\delta/2}\sqrt{t}^{-1/2}\tau^{-2\delta}\right), \tag{4.3.81}$$

получим, что подстановки в (4.3.80) имеют порядок, указанный в правой части (4.3.79).

---

*) Можно считать, что $\sqrt{\lambda} \geqslant R$, так что $\tau \leqslant \sqrt{\lambda}$.

Для последнего члена в правой части (4.3.80) получим оценку

$$\left|\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\lambda}}\int_{\tau}^{R}\mathcal{J}_{\nu}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t})\,dr\right|\leqslant C_1\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\lambda}}\int_{\tau}^{R}(r\sqrt{\lambda})^{-1/2}(r\sqrt{t})^{-1/2}dr\leqslant$$

$$\leqslant C_2\frac{R^{\delta}}{\sqrt{\lambda}}\int_{\tau}^{R}\frac{dr}{r^{1+\delta}}\leqslant C_3\tau^{-\delta}\sqrt{\lambda}^{-1}=O\left(\lambda^{-1/4-\frac{\delta}{2}}\sqrt{t}^{-1/2}\,\tau^{-2\delta}\right). \quad (4.3.82)$$

Тем самым вывод оценки (4.3.68) завершен.

Перейдем к выводу оценки (4.3.69), учитывая, что на этот раз $\tau\leqslant r\leqslant 1/\sqrt{t}$. Очевидно, при этом

$$|\sqrt{t}\,\tau^{-\delta}\mathcal{J}_{\nu+1}(\tau\sqrt{t})-(\nu-\delta)\,\tau^{-\delta-1}\mathcal{J}_{\nu}(\tau\sqrt{t})|=O(\tau^{-\delta-1}). \quad (4.3.83)$$

Поэтому для установления оценки (4.3.69) достаточно доказать, что

$$\left|\int_{\tau}^{1/\sqrt{t}}\mathcal{J}_{N/2}(r\sqrt{\lambda})\,Y_{\nu}(r\sqrt{t})\,dr\right|=O\left(\lambda^{-1/4-\delta/2}\sqrt{t}^{-\nu-\delta-1/2}\,\tau^{-\nu-3\delta}\right). \quad (4.3.84)$$

Для установления оценки (4.3.84) воспользуемся следующей получающейся посредством интегрирования по частям формулой:

$$\int_{\tau}^{1/\sqrt{t}}\mathcal{J}_{N/2}(r\sqrt{\lambda})\,Y_{\nu}(r\sqrt{t})\,dr=-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\mathcal{J}_{\nu}(r\sqrt{\lambda})\,Y_{\nu}(r\sqrt{t})\right]\Big|_{r=\tau}^{r=1/\sqrt{t}}+$$

$$+\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\lambda}}\int_{\tau}^{1/\sqrt{t}}\mathcal{J}_{\nu}(r\sqrt{\lambda})\,Y_{\nu-1}(r\sqrt{t})\,dr. \quad (4.3.85)$$

Для оценки подстановки в правой части (4.3.85) мажорируем функцию Бесселя единицей, а функцию Неймана — величиной порядка ее аргумента, возведенного в степень $-\nu-2\delta$, где $\delta>0$. При этом получим

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\mathcal{J}_{\nu}(r\sqrt{\lambda})\,Y_{\nu}(r\sqrt{t})\right]\Big|_{r=\tau}^{r=1/\sqrt{t}}\right|=O\left(\lambda^{-1/2}(\tau\sqrt{t})^{-\nu-2\delta}\right)=$$

$$=O\left(\lambda^{-1/4-\delta/2}\sqrt{t}^{-\nu-\delta-1/2}\tau^{-\nu-2\delta}\right)=O\left(\lambda^{-1/4-\delta/2}\sqrt{t}^{-\nu-\delta-1/2}\tau^{-\nu-3\delta}\right). \quad (4.3.86)$$

Для оценки интеграла, стоящего в правой части (4.3.85), воспользуемся под знаком этого интеграла оценками

$$|\mathcal{J}_{\nu}(r\sqrt{\lambda})|=O(r^{-1/2}\lambda^{-1/4}),\qquad |Y_{\nu-1}(r\sqrt{t})|=O(r^{-\nu-1/2-\delta}\sqrt{t}^{-\nu-1/2-\delta}).$$

При этом получим

$$\left|\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_{\tau}^{1/\sqrt{t}}\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})Y_{\nu-1}(r\sqrt{t})dr\right|=O\left(\lambda^{-1/4}\sqrt{t}^{-\nu-1/2-\delta}\tau^{-\nu-\delta}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\delta/2}\right)=$$

$$=O\left(\lambda^{-1/4-\delta/2}\sqrt{t}^{-\nu-1/2-\delta}\tau^{-\nu-2\delta}\right)=O\left(\lambda^{-1/4-\frac{\delta}{2}}\sqrt{t}^{-\nu-1/2-\delta}\tau^{-\nu-3\delta}\right). \tag{4.3.87}$$

Соотношения (4.3.86) и (4.3.87) завершают вывод оценки (4.3.69).

Обратимся теперь к выводу оценки (4.3.70), учитывая, что на этот раз $r\geqslant 1/\sqrt{t}\geqslant\tau$. Так как и на этот раз остается справедливой оценка (4.3.83), то для установления оценки (4.3.70) достаточно доказать соотношение

$$\left|\int\limits_{1/\sqrt{t}}^{R}\mathcal{J}_{N/2}(r\sqrt{\lambda})\,Y_\nu(r\sqrt{t})\,dr\right|=O\left(\lambda^{-1/4-\frac{\delta}{2}}\sqrt{t}^{-\nu-1/2-\delta}\tau^{-\nu-3\delta}\right). \tag{4.3.88}$$

Для оценки интеграла в (4.3.88) будем исходить из формулы интегрирования по частям

$$\int\limits_{1/\sqrt{t}}^{R}\mathcal{J}_{N/2}(r\sqrt{\lambda})\,Y_\nu(r\sqrt{t})\,dr=-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})Y_\nu(r\sqrt{t})\right]\Big|_{r=1/\sqrt{t}}^{r=R}+$$

$$+\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_{1/\sqrt{t}}^{R}\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})\,Y_{\nu-1}(r\sqrt{t})\,dr. \tag{4.3.89}$$

Для оценки подстановки в правой части (4.3.89), учитывая, что $r\sqrt{t}\geqslant 1$, мажорируем каждую цилиндрическую функцию единицей с учетом, что величина $1/\sqrt{\lambda}$ в силу цепочки соотношений (4.3.81) имеет порядок, указанный в правой части (4.3.81), а стало быть, и порядок, указанный в правой части (4.3.88).

Для оценки интеграла в правой части (4.3.89) воспользуемся под знаком этого интеграла оценками

$$|\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})|=O(r^{-1/2}\lambda^{-1/4}),\qquad |Y_\nu(r\sqrt{t})|=O(r^{-1/2}t^{-1/4})$$

и применим к этому интегралу цепочку рассуждений (4.3.82). В результате получим, что этот интеграл с учетом стоящего перед ним множителя имеет порядок, указанный в правой части (4.3.82), а поэтому и порядок, указанный в правой части (4.3.88).

Тем самым вывод оценки (4.3.70) завершен.

Теперь для завершения доказательства леммы 4.9 нам остается установить только оценку (4.3.71), принимая во внимание, что на этот раз $\tau\leqslant r\leqslant R\leqslant 1/\sqrt{t}$, причем можно считать, что $t\geqslant 1$.

В силу соотношения (4.3.72) и в силу простых оценок *)

$$|\sqrt{t}\,\tau^{-\delta}Y_{\nu+1}(\tau\sqrt{t})-(\nu-\delta)\,\tau^{-\delta-1}Y_\nu(\tau\sqrt{t})|=O(\tau^{-\nu-1-2\delta}\sqrt{t}^{-\nu-\delta}),$$
$$|\sqrt{t}\,\tau^{-\delta}\mathcal{J}_{\nu+1}(\tau\sqrt{t})-(\nu-\delta)\,\tau^{-\delta-1}\mathcal{J}_\nu(\tau\sqrt{t})|=O(\tau^{\nu-1-\delta}\sqrt{t^\nu})$$

для доказательства справедливости оценки (4.3.71) достаточно установить два соотношения:

$$\left|\int\limits_\tau^R \mathcal{J}_{N/2}(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{t})\,dr\right|=O\left(\lambda^{-1/4-\frac{\delta}{2}}\tau^{-\delta}\sqrt{t}^{\nu+\delta}R^{\nu+1/2}\right), \quad (4.3.90)$$

$$\left|\int\limits_\tau^R \mathcal{J}_{N/2}(r\sqrt{\lambda})\,Y_\nu(r\sqrt{t})\,dr\right|=O\left(\lambda^{-1/4-\frac{\delta}{2}}\tau^{-2\nu-\delta}(\sqrt{t})^{-\nu}R^{\nu+1/2}\right). \quad (4.3.91)$$

Сначала установим оценку (4.3.90). Для этого будем исходить из соотношения (4.3.80), в котором отдельно оценим подстановку и интеграл в правой части.

При оценке подстановки мажорируем первую бесселеву функцию единицей, а вторую величиной порядка ее аргумента, возведенного в степень ν. При этом мы получим, что указанная подстановка имеет порядок $O(\lambda^{-1/2}R^\nu\sqrt{t^\nu})$, а поэтому с учетом того, что $t\geqslant 1$, и порядок, указанный в правой части (4.3.90).

Для оценки интеграла, стоящего в правой части (4.3.80), воспользуемся под знаком этого интеграла оценками

$$|\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})|\leqslant 1, \qquad |\mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t})|=O(r^{\nu-1}\sqrt{t}^{\nu-1}).$$

С помощью этих оценок мы получим, что

$$\left|\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_\tau^R \mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})\,\mathcal{J}_{\nu-1}(r\sqrt{t})\,dr\right|=\begin{cases} O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\sqrt{t}^\nu R^\nu\right) & \text{при} \quad \nu>0,\\ O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}(\tau R)^{-\delta}\right) & \text{при} \quad \nu=0.\end{cases}$$

В обоих случаях это дает порядок, указанный в правой части (4.3.90). Тем самым оценка (4.3.90) доказана.

Теперь остается установить только оценку (4.3.91).

Будем исходить из формулы интегрирования по частям

$$\int\limits_\tau^R \mathcal{J}_{N/2}(r\sqrt{\lambda})\,Y_\nu(r\sqrt{t})\,dr=-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})\,Y_\nu(r\sqrt{t})\right]\Big|_{r=\tau}^{r=R}+$$
$$+\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_\tau^R \mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})\,Y_{\nu-1}(r\sqrt{t})\,dr. \quad (4.3.92)$$

---

*) С целью охватить случай $\nu=0$ мы пользуемся оценкой

$$|Y_\nu(\tau\sqrt{t})|=O[(\tau\sqrt{t})^{-\nu-\delta}] \quad \text{при} \quad \delta>0.$$

При оценке подстановки в правой части (4.3.92) мажорируем функцию Бесселя единицей, а функцию Неймана — величиной порядка ее аргумента, возведенного в степень $-\nu-\delta$. При этом получим, что указанная подстановка имеет порядок $O(\lambda^{-1/2}\tau^{-\nu-\delta}\times \times \sqrt{t}^{-\nu-\delta})$, а поэтому с учетом того, что $t \geqslant 1$, $\left(\frac{R}{\tau}\right)^\nu \leqslant 1$, и порядок, указанный в правой части (4.3.91).

Для оценки интеграла, стоящего в правой части (4.3.92), воспользуемся под знаком этого интеграла оценками

$$|\mathcal{J}_\nu(r\sqrt{\lambda})| = O(r^{-1/2}\lambda^{-1/4}),$$
$$|Y_\nu(r\sqrt{t})| = O[(r\sqrt{t})^{-\nu-1/2-\delta}], \qquad \delta > 0.$$

С помощью этих оценок и неравенства $t^{1/4} \leqslant \lambda^{1/4}$ получим, что указанный интеграл имеет порядок $O(\lambda^{-1/2}\tau^{-\nu-\delta}\sqrt{t}^{-\nu-\delta})$, а поэтому и порядок, указанный в правой части (4.3.91).

Лемма 4.9 полностью доказана.

4. Непосредственное доказательство теоремы о локализации. Для доказательства теоремы о локализации спектрального разложения нам понадобится еще одна простенькая лемма.

Лемма 4.10. *Если равномерная относительно x_0 на произвольном компакте некоторой области D оценка*

$$\widehat{A}^\tau E_\lambda f(x_0) = O(\lambda^\tau) \| f \|_{H_p^\alpha(G)} \tag{4.3.93}$$

справедлива для некоторого $\tau_0 = \sigma > 0$, то эта равномерная на произвольном компакте области D оценка справедлива и для любого $\tau > 0$.

Доказательство. Пусть равномерная относительно x_0 на произвольном компакте некоторой области D оценка (4.3.93) справедлива при некотором $\tau_0 = \sigma > 0$. Фиксируем произвольное $\tau > 0$.

Интегрируя в равенстве

$$\widehat{A}^\tau E_\lambda f(x_0) = \int_0^\lambda t^\tau \, dE_t f(x_0) = \int_0^\lambda t^{\tau-\sigma} t^\sigma \, dE_t f(x_0)$$

по частям самый последний интеграл, мы получим соотношение

$$\widehat{A}^\tau E_\lambda f(x_0) = \lambda^{\tau-\sigma}\left[\widehat{A}^\sigma E_\lambda f(x_0)\right] + (\sigma-\tau)\int_0^\lambda t^{\tau-\sigma-1}\left[\widehat{A}^\sigma E_t f(x_0)\right] dt. \tag{4.3.94}$$

Используя для выражений, стоящих в правой части (4.3.94) в квадратных скобках, оценку (4.3.93), взятую при $\tau = \tau_0 = \sigma$, мы установим справедливость равномерной по x_0 на произвольном компакте области D оценки (4.3.93) при фиксированном нами произвольном $\tau > 0$.

Лемма 4.10 доказана.

Перейдем теперь к непосредственному доказательству теоремы о локализации спектральных разложений.

Пусть функция $f(x)$ имеет в области G компактный носитель, принадлежит классу $H_2^\alpha(G)$ и обращается в нуль в некоторой содержащейся в G области D.

Тогда в силу лемм 4.8 и 4.10 для любого $\tau>0$ равномерно относительно x_0 на произвольном компакте области D справедлива взятая при $p=2$ оценка (4.3.93).

С другой стороны, в силу известной теоремы, доказанной впервые в работах Л. Гординга [2] и Б. М. Левитана [3], средние Рисса $E_\lambda^s f(x_0)$ порядка $s \geqslant (N-1)/2$ любой функции $f(x)$, удовлетворяющей указанным нами условиям, сходятся к нулю равномерно относительно x_0 на произвольном компакте области D.

Обозначим через n наименьшее целое число, большее или равное $(N-1)/2$. Тогда, пользуясь представлением среднего Рисса порядка n через спектральное разложение $E_\lambda f(x_0)$ и формулой бинома Ньютона, можем записать следующую цепочку равенств:

$$E_\lambda^n f(x_0) = \int_0^\lambda \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^n dE_t f(x_0) =$$

$$= E_\lambda f(x_0) + \sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k \frac{1}{\lambda^k} \int_0^\lambda t^k\, dE_t f(x_0) =$$

$$= E_\lambda f(x_0) + \sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k \frac{\widehat{A}^k E_\lambda f(x_0)}{\lambda^k}. \qquad (4.3.95)$$

Из (4.3.95), используя при $p=2$ оценку (4.3.93), справедливую для любого $\tau>0$, получим, что найдется постоянная C_0 такая, что

$$|E^n f(x_0) - E_\lambda f(x_0)| \leqslant C_0 \|f\|_{H_2^\alpha(G)} \qquad (4.3.96)$$

равномерно относительно x_0 на произвольном компакте области D.

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$ и по нему функцию $f_1(x)$ из класса $C_0^\infty(G)$, обращающуюся в нуль в области D и такую, что

$$\|f - f_1\|_{H_2^\alpha(G)} < \frac{\varepsilon}{4C_0}, \qquad (4.3.97)$$

где C_0 — постоянная из оценки (4.3.96). Тогда, взяв в оценке (4.3.96) разность $f(x) - f_1(x)$ вместо $f(x)$ и используя (4.3.97), получим неравенство

$$\left|\left[E_\lambda^n f(x_0) - E_\lambda f(x_0)\right] - \left[E_\lambda^n f_1(x_0) - E_\lambda f_1(x_0)\right]\right| < \varepsilon/4, \qquad (4.3.98)$$

равномерное по x_0 на произвольном компакте области D.

Учтем теперь, что для функции $f_1(x)$ из класса $C_0^\infty(G)$, обращающейся в нуль в области D, найдется число $\Lambda_1>0$ такое, что при $\lambda \geqslant \Lambda_1$ равномерно относительно x_0 на произвольном компакте области D

$$|E_\lambda f_1(x_0)| < \varepsilon/4, \qquad |E_\lambda^n f_1(x_0)| < \varepsilon/4. \tag{4.3.99}$$

Далее учтем, что в силу указанной выше теоремы Гординга и Левитана найдется $\Lambda_2 > 0$ такое, что при $\lambda \geqslant \Lambda_2$ равномерно относительно x_0 на произвольном компакте области D

$$|E_\lambda^n f(x_0)| < \varepsilon/4. \tag{4.3.100}$$

Из сопоставления неравенств (4.3.98) — (4.3.100) вытекает, что при $\lambda \geqslant \Lambda$, где $\Lambda = \max\{\Lambda_1, \Lambda_2\}$ равномерно относительно x_0 на произвольном компакте области D, справедливо неравенство

$$|E_\lambda f(x_0)| < \varepsilon,$$

завершающее доказательство теоремы о локализации спектральных разложений.

5. **Оценка средних по геодезической сфере от функции из класса Никольского.** В этом пункте мы докажем вспомогательную теорему, которая понадобится нам для установления условий равномерной сходимости спектральных разложений.

Фиксируем произвольный компакт K произвольной подобласти D области G, произвольную точку x_0 компакта K и произвольное, достаточно малое число R, меньшее половины расстояния компакта K от границы D.

В малой окрестности каждой точки x_0 введем геодезические координаты так, как это сделано в п. 2 § 1 настоящей главы.

Лемма 4.11. *Пусть $N \geqslant 2$, функция $F(x)$ имеет в области D компактный носитель, продолжена нулем на $G \setminus D$ и принадлежит классу Никольского $H_p^\alpha(G)$, порядок дифференцируемости α и степень суммируемости p которого удовлетворяют условиям*

$$0 < \alpha < 1, \quad \alpha < \frac{N-1}{2}, \quad p > \frac{2N}{N-1}.$$

Тогда для функции геодезического расстояния $r = r_{x_0 y}$

$$\varphi(r) = r^{\frac{N-3}{2}} \int_\omega F(x_0 + r\omega)\, d\omega \tag{4.3.101}$$

при всех достаточно малых $h > 0$ справедлива следующая равномерная относительно x_0 на компакте K области D оценка:

$$\int_0^R |\varphi(r+h) - \varphi(r)|\, dr \leqslant Ch^\alpha \|F\|_{H_p^\alpha(D)}. \tag{4.3.102}$$

Доказательство. В силу соотношения (4.1.8) из п. 2 § 1 настоящей главы соотношение (4.3.101) можно переписать в виде

$$\varphi(r) = r^{-\frac{N+1}{2}} \int_\omega F(x_0, r, \omega)\, J(x_0, r, \omega)\, d\omega, \tag{4.3.103}$$

где символ $J(x_0, r, \omega)$ обозначает якобиан рассматриваемой системы координат.

Из соотношения (4.3.103) вытекает следующее представление для приращения функции $\varphi(r)$:

$$\varphi(r+h)-\varphi(r)=A(r, h)+B(r, h) \qquad (4.3.104)$$

где

$$A(r, h)=r^{-\frac{N+1}{2}}\int\limits_{\omega}[F(x_0, r+h, \omega)-F(x_0, r, \omega)]\,J(x_0, r, \omega)\,d\omega, \qquad (4.3.105)$$

$$B(r, h)=\int\limits_{\omega}F(x_0, r, \omega)\Big[(r+h)^{-\frac{N+1}{2}}J(x_0, r+h, \omega)-\\ -r^{-\frac{N+1}{2}}J(x_0, r, \omega)\Big]\,d\omega. \qquad (4.3.106)$$

Мы докажем, что интеграл от модуля каждой из величин (4.3.105) и (4.3.106) по переменной r, взятый в пределах от нуля до R, имеет порядок, указанный в правой части (4.3.102).

Для оценки интеграла от модуля величины (4.3.105) привлечем следующую справедливую для всех x_0 из подмножества D_{2h} *) оценку:

$$\|F(x_0, r+h, \omega)-F(x_0, r, \omega)\|_{L_p(D)}\leqslant C_1h^{\alpha}\|F\|_{H_p^{\alpha}(D)} \qquad (4.3.107)$$

(норма в этой оценке берется по координатам r, ω).

Доказательство этой оценки совершенно аналогично доказательству оценки (2.5.53) (см. доказательство леммы 2.8 из п. 2 § 5 гл. 2), и мы можем это доказательство опустить.

Из соотношения (4.3.105) вытекает, что

$$\int\limits_0^R|A(r, h)|\,dr\leqslant\int\limits_{r_{x_0x}\leqslant R}|F(x_0, r+h, \omega)-F(x_0, x, \omega)|\,r_{x_0x}^{-\frac{N+1}{2}}\,dx.$$

Применяя к интегралу в правой части последнего неравенства при $p>2N/(N-1)$, $q=p/(p-1)\leqslant 2N/(N+1)$ неравенство Гёльдера и используя оценку (4.3.107), получим, что

$$\int\limits_0^R|A(r, h)|\,dr\leqslant C_2\|F(x_0, r+h, \omega)-F(x_0, r, \omega)\|_{L_p(D)}\leqslant\\ \leqslant C_3h^{\alpha}\|F\|_{H_p^{\alpha}(D)}. \qquad (4.3.108)$$

Тем самым мы доказали, что интеграл от модуля величины (4.3.105) имеет требуемый порядок.

---

*) Напомним, что символ D_{2h} обозначает подмножество точек области D, удаленных от границы D на расстояние, большее числа $2h>0$.

Остается доказать, что этот же самый порядок имеет и интеграл от модуля величины (4.3.106).

Прежде всего убедимся, что для этого достаточно для указанного интеграла от модуля величины (4.3.106) установить справедливость для всех достаточно малых $h>0$ следующей равномерной относительно x_0 на компакте K области D оценки:

$$\int_0^R |B(r,h)|\,dr \leqslant C_4 h^\alpha \left[\int_{r_{x_0x}\leqslant R} |F(x)|\, r_{x_0x}^{-\frac{N+1}{2}-\alpha}\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{h\leqslant r_{x_0x}\leqslant R+h} \left|F\left(x_0, r_{x_0x}-h, \omega\right)\right| r_{x_0x}^{-\frac{N+1}{2}-\alpha}\,dx\right]. \quad (4.3.109)$$

Действительно, если оценка (4.3.109) будет установлена, то, выбирая $p_1>p$ из условия *)

$$\frac{N}{p}-\alpha<\frac{N}{p_1}<\frac{N-1}{2}-\alpha, \quad (4.3.110)$$

пользуясь при $\alpha_1=\alpha-N\left(p^{-1}-p_1^{-1}\right)>0$ теоремой вложения классов Никольского **) $H_p^\alpha\to H_{p_1}^{\alpha_1}$ и учитывая, что $H_{p_1}^{\alpha_1}\to L_{p_1}$, получим, что

$$\|F\|_{L_1(D)}\leqslant C_5\|F\|_{H_{p_1}^{\alpha_1}(D)}\leqslant C_6\|F\|_{H_p^\alpha(D)}. \quad (4.3.111)$$

Применяя теперь к каждому из интегралов в правой части (4.3.109) неравенство Гёльдера при выбранном p_1 и при $q_1=$ $=p_1/(p_1-1)$, учитывая, что в силу правого неравенства (4.3.110) $q_1\left(\frac{N+1}{2}+\alpha\right)>N$, и используя оценку (4.3.111), получим, что

$$\int_0^R |B(r,h)|\,dr\leqslant C_7h^\alpha\|F\|_{L_{p_1}(D)}\leqslant C_8h^\alpha\|F\|_{H_p^\alpha(D)}, \quad (4.3.112)$$

т. е. для интеграла от модуля величины (4.3.106) справедлива требуемая оценка.

Таким образом, для завершения доказательства леммы нам остается установить равномерную относительно x_0 на компакте K области D оценку (4.3.109).

Представим интеграл в левой части (4.3.109) в виде суммы двух интегралов:

$$\int_0^R |B(r,h)|\,dr=\int_0^{2h} |B(r,h)|\,dr+\int_{2h}^R |B(r,h)|\,dr. \quad (4.3.113)$$

---

*) Возможность выбора такого p_1 вытекает из условий

$$p>\frac{2N}{N+1}, \quad 0<\alpha<\frac{N-1}{2}.$$

**) См. теорему вложения (2.1.24) из п. 3 § 1 гл. 2. Тот факт, что $\alpha_1>0$, вытекает из левого неравенства (4.3.110).

Для первого из интегралов в правой части (4.3.113) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\int_0^{2h} |B(r, h)|\,dr \leqslant \int_0^{2h} dr \int_\omega |F(x_0, r, \omega)|\,(r+h)^{-\frac{N+1}{2}} J(x_0, r+h, \omega)\,d\omega +$$

$$+ \int_0^{2h} dr \int_\omega |F(x_0, r, \omega)|\, r^{-\frac{N+1}{2}} J(x_0, r, \omega)\,d\omega \leqslant$$

$$\leqslant 3^\alpha \int_0^{2h} dr \int_\omega |F(x_0, r, \omega)|\,(r+h)^{-\frac{N+1}{2}-\alpha} J(x_0, r+h, \omega)\,d\omega +$$

$$+ 2^\alpha \int_0^{2h} dr \int_\omega |F(x_0, r, \omega)|\, r^{-\frac{N+1}{2}-\alpha} J(x_0, r, \omega)\,d\omega \leqslant$$

$$\leqslant 3h^\alpha \int\limits_{h \leqslant r_{x_0x} \leqslant 3h} \left|F\left(x_0, r_{x_0x} - h, \omega\right)\right| r_{x_0x}^{-\frac{N+1}{2}-\alpha}\,dx +$$

$$+ 2h^\alpha \int\limits_{0 \leqslant r_{x_0x} \leqslant 2h} |F(x)|\, r_{x_0x}^{-\frac{N+1}{2}-\alpha}\,dx \leqslant C_9 h^\alpha \left[\int\limits_{r_{x_0x} \leqslant R} |F(x)|\, r_{x_0x}^{-\frac{N+1}{2}-\alpha}\,dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{h \leqslant r_{x_0x} < R+h} \left|F\left(x_0, r_{x_0x} - h, \omega\right)\right| r_{x_0x}^{-\frac{N+1}{2}-\alpha}\,dx \right].$$

Итак, для первого интеграла в правой части (4.3.113) оценка вида (4.3.109) получена.

Остается получить оценку вида (4.3.109) для второго интеграла в правой части (4.3.113).

Подставляя в этот интеграл значение $B(r, h)$, определяемое соотношением (4.3.106), мы придем к неравенству

$$\int_{2h}^{R} |B(r, h)|\,dr \leqslant \int_{2h}^{R} dr \int_\omega |F(x_0, r, \omega)| \times$$

$$\times \left|(r+h)^{-\frac{N+1}{2}} J(x_0, r+h, \omega) - r^{-\frac{N+1}{2}} J(x_0, r, \omega)\right| d\omega \leqslant$$

$$\leqslant \int_{2h}^{R} dr \int_\omega |F(x_0, r, \omega)|\, J(x_0, r+h, \omega) \left|(r+h)^{-\frac{N+1}{2}} - r^{-\frac{N+1}{2}}\right| d\omega +$$

$$+ \int_{2h}^{R} dr \int_\omega |F(x_0, r, \omega)|\, r^{-\frac{N+1}{2}}\, |J(x_0, r+h, \omega) - J(x_0, r, \omega)|\,d\omega. \tag{4.3.114}$$

Так как

$$\left|(r+h)^{-\frac{N+1}{2}}-r^{-\frac{N+1}{2}}\right|=(r+h)^{-\frac{N+1}{2}}\left|1-\left(\frac{r+h}{r}\right)^{\frac{N+1}{2}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant C_{10}(r+h)^{-\frac{N+1}{2}}\left(\frac{h}{r}\right)\leqslant C_{10}(r+h)^{-\frac{N+1}{2}}\left(\frac{h}{r}\right)^{\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant C_{10}(r+h)^{-\frac{N+1}{2}-\alpha}h^{\alpha},$$

то для первого интеграла в правой части (4.3.114) получим оценку

$$\int\limits_{2h}^{R}dr\int\limits_{\omega}|F(x_0,r,\omega)|\,J(x_0,r+h,\omega)\left|(r+h)^{-\frac{N+1}{2}}-r^{-\frac{N+1}{2}}\right|d\omega\leqslant$$

$$\leqslant C_{10}h^{\alpha}\int\limits_{3h\leqslant r_{x_0x}\leqslant R+h}\left|F\left(x_0,r_{x_0x}-h,\omega\right)\right|r_{x_0x}^{-\frac{N+1}{2}-\alpha}dx,$$

т. е. и для этого интеграла справедлива оценка вида (4.3.109).

Теперь нам остается получить оценку вида (4.3.109) для последнего интеграла в правой части (4.3.114).

Для этого мы прежде всего оценим разность

$$J(x_0,\ r+h,\ \omega)-J(x_0,\ r,\ \omega).$$

Воспользуемся известным представлением якобиана в римановых координатах *)

$$J(x_0,\ r,\ \omega)=\widetilde{J}(x_0,\ r,\ \omega)\widehat{J}(\omega), \tag{4.3.115}$$

где

$$\widehat{J}(\omega)=\sin^{N-2}\omega_1\sin^{N-3}\omega_2\ldots\sin\omega_{N-1},$$

а $\widetilde{J}(x_0,\ r,\ \omega)>0$ для всех $r>0$, причем существуют такие строго положительные постоянные a_1, a_2, b_1 и b_2, что для всех достаточно малых положительных r и для всех точек x_0 из компакта K справедливы неравенства

$$\begin{gathered}a_1r^{N-1}\leqslant\widetilde{J}(x_0,r,\omega)\leqslant a_2r^{N-1},\\ b_1r^{N-2}\leqslant\left|\frac{d\widetilde{J}}{dr}(x_0,r,\omega)\right|\leqslant b_2r^{N-2}.\end{gathered} \tag{4.3.116}$$

Применяя к разности $\widetilde{J}(x_0,\ r+h,\ \omega)-\widetilde{J}(x_0,\ r,\ \omega)$ теорему Лагранжа, получим, что найдется число θ из интервала $0<\theta<1$ такое, что

$$\widetilde{J}(x_0,r+h,\omega)-\widetilde{J}(x_0,r,\omega)=h\frac{\partial\widetilde{J}}{\partial r}(x_0,r+\theta h,\omega).$$

---

*) См., например, П. К. Рашевский [1, с. 560].

Из последнего равенства, учитывая, что $r \geqslant 2h$, и привлекая вторую оценку (4.3.116), получим неравенство

$$|\tilde{J}(x_0, r+h, \omega) - \tilde{J}(x_0, r, \omega)| \leqslant C_{11} h r^{N-2}. \qquad (4.3.117)$$

Из неравенства (4.3.117) и первой оценки (4.3.116) вытекает следующее неравенство:

$$\frac{|\tilde{J}(x_0, r+h, \omega) - \tilde{J}(x_0, r, \omega)|}{\tilde{J}(x_0, r, \omega)} \leqslant C_{12} \frac{h}{r},$$

которое в силу того, что $0 < \alpha < 1$ и $r \geqslant 2h$, можно переписать в виде

$$\frac{|\tilde{J}(x_0, r+h, \omega) - \tilde{J}(x_0, r, \omega)|}{\tilde{J}(x_0, r, \omega)} \leqslant C_{12} \left(\frac{h}{r}\right)^{\alpha}. \qquad (4.3.118)$$

Из неравенства (4.3.118) и из представления (4.3.115) в свою очередь вытекает неравенство

$$\frac{|J(x_0, r+h, \omega) - J(x_0, r, \omega)|}{J(x_0, r, \omega)} \leqslant C_{12} \left(\frac{h}{r}\right)^{\alpha}. \qquad (4.3.119)$$

С помощью неравенства (4.3.119) мы немедленно получаем для последнего интеграла в правой части (4.3.114) требуемую оценку вида (4.3.109). Действительно, в силу (4.3.119)

$$\int_{2h}^{R} dr \int_{\omega} |F(x_0, r, \omega)| \, r^{-\frac{N+1}{2}} |J(x_0, r+2h, \omega) - J(x_0, r, \omega)| \, d\omega \leqslant$$
$$\leqslant C_{12} h^{\alpha} \int\limits_{2h \leqslant r_{x_0 x} \leqslant R} |F(x)| \, r_{x_0 x}^{-\frac{N+1}{2} - \alpha} \, dx.$$

Тем самым доказательство леммы 4.11 полностью завершено.

6. Доказательство основной асимптотической оценки. В этом пункте мы установим основную асимптотическую формулу, из которой доказательство позитивной теоремы 4.3 может быть получено с помощью стандартной схемы, разработанной в п. 4 § 5 гл. 2.

Лемма 4.12. *Пусть $N \geqslant 2$, функция $f(x)$ удовлетворяет тем же трем требованиям, что и в теореме 4.3, а именно: 1) обращается в нуль вне множества G_{h_0} при некотором $h_0 > 0$; 2) во всей области G принадлежит классу Никольского H_2^{α} при $\alpha \geqslant (N-1)/2$; 3) в некоторой содержащейся в G области D принадлежит классу Никольского H_p^{α} при некоторых α и p, удовлетворяющих трем требованиям*

$$\alpha \geqslant \frac{N-1}{2}, \quad \alpha p > N, \quad p \geqslant 1. \qquad (4.3.120)$$

Тогда для любого $\tau > 0$ равномерно относительно x_0 на произвольном компакте K области D справедлива следующая асимпто-

тическая формула:

$$\widehat{A}^{\tau} E_{\lambda} f(x_0) = O(\lambda^{\tau}) \left[\|f\|_{H_2^{\alpha}(G)} + \|f\|_{H_p^{\alpha}(D)} \right]. \tag{4.3.121}$$

Доказательство. Сразу же заметим, что асимптотическую формулу (4.3.121) достаточно доказать при $\alpha = \frac{N-1}{2}$, $\alpha p > N$, т. е. при $p > \frac{2N}{N-1}$. Тогда в силу теоремы вложения классов Никольского (см. теорему (2.1.24) из п. 3 § 1 гл. 2) формула (4.3.121) будет справедлива для любых α и p, удовлетворяющих трем требованиям (4.3.120).

Далее заметим, что в силу леммы 4.10 из п. 4 настоящего параграфа достаточно доказать равномерную по x_0 на произвольном компакте K области D оценку (4.3.121) для какого-то одного значения $\tau_0 > 0$. Мы докажем эту оценку для значений τ, лежащих в интервале $\frac{N-1}{4} - \delta < \tau < \frac{N-1}{4}$, где δ — то же достаточно малое положительное число, что и в п. 2.

Фиксируем произвольный компакт K области D и по нему еще два компакта K' и K'' такие, что K' содержит строго внутри себя компакт K, а K'' содержит строго внутри себя компакт K'.

Фиксируем функцию $\eta(x)$ из класса $C_0^{\infty}(G)$, равную единице в компакте K' и равную нулю вне компакта K'', и представим функцию $f(x)$ в виде суммы двух функций $f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) = \eta(x) f(x)$, $f_2(x) = [1 - \eta(x)] f(x)$.

Учитывая, что существуют постоянные C_1 и C_2 такие, что

$$\|f_1\|_{H_p^{\alpha}(D)} \leqslant C_1 \|f\|_{H_p^{\alpha}(D)},$$
$$\|f_2\|_{H_2^{\alpha}(D)} \leqslant C_2 \|f\|_{H_2^{\alpha}(D)} \tag{4.3.122}$$

и что функция $f_2(x)$ имеет в G компактный носитель и обращается в нуль на компакте K', получим в силу леммы 4.8 из п. 2 оценку

$$\widehat{A}^{\tau} E_{\lambda} f_2(x_0) = O(\lambda^{\tau}) \|f_2\|_{H_2^{\alpha}(G)} = O(\lambda^{\tau}) \|f\|_{H_2^{\alpha}(G)}. \tag{4.3.123}$$

Для функции $f_1(x)$ в силу той же леммы 4.8 из п. 2 справедливо представление вида (4.3.37)

$$\widehat{A}^{\tau} E_{\lambda} f_1(x_0) = \int_G V^{\lambda}(x_0, x) \widehat{A}^{\tau} f_1(x) \rho_0(x)\, dx -$$
$$- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\widehat{m}} u_i(x_0, \lambda) \widehat{f}_i^{(1)}(\lambda) \lambda^{\tau} [\rho(\lambda + 0) - \rho(\lambda - 0)] +$$
$$+ \lambda^{\frac{N}{4}} \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^{\infty} t^{\frac{2-N}{4}} I_t^{\lambda}(R) u_i(x_0, t) \widehat{f}_i^{(1)}(t) t^{\tau} d\rho(t) -$$
$$- \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \int_0^{\infty} \widetilde{V}_i^{\lambda}(x_0, t) \widehat{f}_i^{(1)}(t) t^{\tau} d\rho(t) \tag{4.3.124}$$

(все обозначения взяты из п. 2; символ $\widehat{f}_i^{(1)}(i)$ обозначает образ Фурье функции $f_1(x)$).

Как доказано в лемме 4.8, при единственном предположении о том, что $f_1(x) \in H_2^{\alpha}(G)$ и имеет в G компактный носитель, каждая из трех последних величин в правой части (4.3.124) имеет порядок*)

$$O(\lambda^{\tau}) \| f_1 \|_{H_2^{\alpha}(G)} = O(\lambda^{\tau}) \| f \|_{H_2^{\alpha}(G)}.$$

Таким образом, соотношение (4.3.124) можно переписать в виде

$$\widehat{A}^{\tau} E_{\lambda} f_1(x_0) = \int_G V^{\lambda}(x_0, x) \widehat{A}^{\tau} f_1(x) \rho_0(x)\, dx + O(\lambda^{\tau}) \| f \|_{H_2^{\alpha}(G)} \quad (4.3.125)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$F(x) = \eta(x) p(x_0, x) \widehat{A}^{\tau} f_1(x), \quad (4.3.126)$$

где $p(x_0, x)$ функция из формулы среднего значения (4.1.10) (см. п. 2 § 1 настоящей главы), а $\eta(x)$ — та же функция, что и выше.

В силу утверждения 2 из п. 4 § 1 настоящей главы функция $F(x)$ принадлежит классу Никольского $H_p^{\alpha-2\tau}(D)$, причем справедливо соотношение

$$\| F \|_{H_p^{\alpha-2\tau}(D)} \leqslant C_3 \| f_1 \|_{H_p^{\alpha}(D)} \leqslant C_4 \| f \|_{H_p^{\alpha}(D)}. \quad (4.3.127)$$

Если число R при определении функции $V^{\lambda}(x_0, x)$ выбрано меньшим геодезического расстояния компакта K от границы компакта K', то с учетом равенства (4.3.126) соотношение (4.3.125) можно переписать в виде

$$\widehat{A}^{\tau} E_{\lambda} f_1(x_0) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{N/2} \int_{r_{x_0 x} \leqslant R} \left(r_{x_0 x} \sqrt{\lambda}\right)^{-N/2} \mathscr{J}_{\frac{N}{2}}\left(r_{x_0 x} \sqrt{\lambda}\right) F(x)\, dx + \\ + O(\lambda^{\tau}) \| f \|_{H_2^{\alpha}(G)}. \quad (4.3.128)$$

Введем теперь в рассмотрение определяемую соотношением (4.3.101) из п. 5 функцию $\varphi(r)$, предполагая, что в этом соотношении $F(x)$ — функция вида (4.3.126). Для такой функции $\varphi(r)$ все условия леммы 4.11 будут выполнены не для числа α, а для числа $\varkappa = \alpha - 2\tau$.

В силу леммы 4.11 для такой функции $\varphi(r)$ для всех достаточно малых $h > 0$ будет равномерно относительно x_0 на компакте K области D справедлива оценка

$$\int_0^R | \varphi(r + h) - \varphi(r) |\, dr \leqslant C h^{\varkappa} \| F \|_{H_p^{\varkappa}(D)}, \quad (4.3.129)$$

в которой $\varkappa = \alpha - 2\tau = (N-1)/2 - 2\tau$.

---

*) Мы используем при этом первую оценку (4.3.122).

В терминах этой функции $\varphi(r)$ соотношение (4.3.128) принимает вид

$$\tilde{A}^{\tau} E_{\lambda} f_1(x_0) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \lambda^{\frac{N-1}{4}} \int\limits_0^R (r\sqrt{\lambda})^{1/2} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\lambda})\, \varphi(r)\, dr + \\ + O(\lambda^{\tau}) \| f \|_{H_2^{\alpha}(G)}. \quad (4.3.130)$$

Из соотношений (4.3.123) и (4.3.130) и из того, что $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, вытекает, что для установления доказываемой оценки (4.3.121) остается доказать, что равномерно относительно x_0 на компакте K справедливо равенство

$$\int\limits_0^R (r\sqrt{\lambda})^{1/2} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\lambda})\, \varphi(r)\, dr = O\left(\lambda^{-\frac{\varkappa}{2}}\right) \| F \|_{H_p^{\varkappa}(D)} \quad (4.3.131)$$

в котором $\varkappa = \alpha - 2\tau$.

В п. 2 § 5 гл. 2 при доказательстве леммы 2.10 дается доказательство равенства *) (4.3.131), основанное только на том, что для функции $\varphi(r)$ справедливо соотношение (4.3.129) и еще три соотношения **):

$$\left| \int\limits_0^R r^{-\varkappa} \varphi(r)\, dr \right| \leqslant C_5 \| F \|_{H_p^{\varkappa}(D)}, \quad (4.3.132)$$

$$\int\limits_0^h |\varphi(r)|\, dr \leqslant C_6 h^{\varkappa} \| F \|_{H_p^{\varkappa}(D)}, \quad (4.3.133)$$

$$\int\limits_R^{R+h} |\varphi(r)|\, dr \leqslant C_7 h^{\varkappa} \| F \|_{H_p^{\varkappa}(D)}, \quad (4.3.134)$$

справедливые для всех достаточно малых $h > 0$ равномерно относительно x_0 на компакте K.

Таким образом, для завершения доказательства леммы нам остается убедиться в справедливости оценок (4.3.132) — (4.3.134).

Сначала убедимся в справедливости оценки (4.3.132). Так как по условию $F(x) \in H_p^{\varkappa}(D)$ при $p > \frac{2N}{N-1}$, то найдется достаточно малое $\delta > 0$ такое, что $F(x) \in H_p^{\varkappa}(D)$ при $p = \frac{2N}{N-1-2\delta}$.

Сопряженное к такому p число q будет равно

$$q = \frac{p}{p-1} = \frac{2N}{N+1+2\delta}. \quad (4.3.135)$$

По теореме вложения (2.1.24) из п. 3 § 1 гл. 2

$$H_p^{\varkappa} \to H_{p'}^{\varkappa - N(1/p - 1/p')},$$

---

*) Там оно фигурирует под номером (2.5.92).

**) В п. 2 § 5 гл. 2 это соотношения (2.5.102), (2.5.114) и (2.5.115).

где p' — любое число, для которого $\varkappa - N(1/p - 1/p') > 0$, или, что то же самое, для которого

$$\frac{1}{p'} > \frac{1}{p} - \frac{\varkappa}{N} = \frac{N-1-2\delta}{2N} - \frac{\varkappa}{N} = \frac{N-1-2\delta-2\varkappa}{2N}. \qquad (4.3.136)$$

Чтобы выполнялось (4.3.136), достаточно для выбранного выше $\delta > 0$ положить

$$\frac{1}{p'} = \frac{N-1-\delta-2\varkappa}{2N}. \qquad (4.3.137)$$

Тогда для сопряженного к p' числа q' получим

$$\frac{1}{q'} = 1 - \frac{1}{p'} = \frac{N+1+\delta+2\varkappa}{2N},$$

так что

$$q' = \frac{2N}{N+1+\delta+2\varkappa}. \qquad (4.3.138)$$

Имея в виду, что $\varphi(r)$ определяется соотношением (4.3.103) из п. 5, запишем левую часть (4.3.132) в виде

$$\left| \int_0^R r^{-\varkappa} \varphi(r)\, dr \right| = \left| \int_{r_{x_0 x} \leqslant R} r^{-\frac{N+1}{2} - \varkappa} F(x)\, dx \right|. \qquad (4.3.139)$$

Применяя к интегралу в правой части (4.3.139) неравенство Гёльдера при p' и q', определяемых соотношениями (4.3.137) и (4.3.138), учитывая, что $F(x) \in L_{p'}(D)$, причем

$$\| F \|_{L_{p'}(D)} = O\left(\| F \|_{H_p^{\varkappa}(D)} \right),$$

а также учитывая, что

$$\left(\frac{N+1}{2} + \varkappa \right) q' = \frac{\frac{N+1}{2} + \varkappa}{\frac{N+1}{2} + \varkappa + \frac{\delta}{2}} N < N,$$

получим оценку (4.3.132), равномерную по x_0 на компакте K.

Для получения из оценки (4.3.132) оценки (4.3.133) достаточно заметить, что

$$\int_0^h |\varphi(r)|\, dr = \int_0^h r^{\varkappa} \left[r^{-\varkappa} |\varphi(r)| \right] dr \leqslant$$

$$\leqslant h^{\varkappa} \int_0^R r^{-\varkappa} |\varphi(r)|\, dr = O\left(h^{\varkappa}\right) \| F \|_{H_p^{\varkappa}(D)}.$$

С помощью оценок (4.3.129) и (4.3.133) легко устанавливается оценка (4.3.134). Действительно,

$$\int_R^{R+h} |\varphi(r)|\, dr - \int_0^h |\varphi(r)|\, dr = \int_h^{R+h} |\varphi(r)|\, dr - \int_0^R |\varphi(r)|\, dr =$$

$$= \int_0^R |\varphi(r+h)|\, dr - \int_0^R |\varphi(r)|\, dr \leqslant \int_0^R |\varphi(r+h) - \varphi(r)|\, dr,$$

так что

$$\int\limits_R^{R+h} |\varphi(r)|\,dr \leqslant \int\limits_0^h |\varphi(r)|\,dr + \int\limits_0^R |\varphi(r+h) - \varphi(r)|\,dr.$$

Из последнего неравенства и из справедливости равномерных относительно x_0 на компакте K оценок (4.3.133) и (4.3.129) вытекает справедливость равномерной относительно x_0 на компакте K оценки (4.3.134).

Лемма 4.12 полностью доказана.

7. Непосредственное доказательство теоремы о равномерной сходимости. Пусть выполнены все условия теоремы 4.3. Обозначим через n наименьшее целое число, удовлетворяющее условию $n \geqslant (N-1)/2$. В п. 4 получено следующее соотношение для разности среднего Рисса порядка n спектрального разложения и самого спектрального разложения *):

$$E_\lambda^n f(x_0) - E_\lambda f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{\widehat{A}^k E_\lambda f(x_0)}{\lambda^k}. \qquad (4.3.140)$$

Используя в правой части (4.3.140) асимптотическую оценку (4.3.121), которая справедлива для любого $\tau > 0$ и является равномерной по x_0 на любом фиксированном компакте K области D, получим, что найдется постоянная C_0 такая, что равномерно относительно x_0 на компакте K

$$|E_\lambda^n f(x_0) - E_\lambda f(x_0)| \leqslant C_0 \left[\|f\|_{H_2^\alpha(G)} + \|f\|_{H_p^\alpha(D)}\right]. \qquad (4.3.141)$$

Фиксируем теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и по нему функцию $f_1(x)$ из класса $C_0^\infty(G)$ такую, что

$$\|f - f_1\|_{H_2^\alpha(G)} + \|f - f_1\|_{H_p^\alpha(D)} < \frac{\varepsilon}{4C_0}, \qquad (4.3.142)$$

где C_0 — постоянная из неравенства (4.3.141).

Взяв в (4.3.141) вместо $f(x)$ функцию $f(x) - f_1(x)$ и используя оценку (4.3.142), получим неравенство

$$\left|\left[E_\lambda^n f(x_0) - E_\lambda f(x_0)\right] - \left[E_\lambda^n f_1(x_0) - E_\lambda f_1(x_0)\right]\right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

или, что то же самое,

$$\left\{\left[E_\lambda^n f(x_0) - f(x_0)\right] - [E_\lambda f(x_0) - f(x_0)]\right\} -$$
$$- \left\{\left[E_\lambda^n f_1(x_0) - f_1(x_0)\right] - [E_\lambda f_1(x_0) - f_1(x_0)]\right\} \Big| < \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (4.3.143)$$

Учтем теперь, что для функции $f_1(x)$ из класса $C_0^\infty(G)$ найдется число $\Lambda_1 > 0$ такое, что при $\lambda \geqslant \Lambda_1$ равномерно относитель-

*) См. соотношение (4.3.95) из п. 4 настоящего параграфа.

по x_0 на любом компакте K области D справедливы неравенства

$$|E_\lambda^n f_1(x_0) - f_1(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |E_\lambda f_1(x_0) - f_1(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.3.144}$$

Далее учтем, что в силу процитированных в п. 4 теорем Гординга и Левитана найдется число $\Lambda_2 > 0$ такое, что при $\lambda \geqslant \Lambda_2$ равномерно относительно x_0 на любом компакте K области D *)

$$|E_\lambda^n f(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.3.145}$$

Если положить $\Lambda = \max\{\Lambda_1, \Lambda_2\}$, то из сопоставления неравенств (4.3.143)—(4.3.145) вытекает, что при $\lambda \geqslant \Lambda$ равномерно по x_0 на произвольном компакте K области D справедливо неравенство

$$|E_\lambda f(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

завершающее доказательство теоремы о равномерной сходимости спектральных разложений.

Тем самым теорема 4.3 полностью доказана.

ПРИМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ 4

В качестве важнейших вспомогательных средств использованы формула среднего значения, установленная в работе Е. И. Моисеева [1], и свойства дробных степеней основного интегрального оператора, установленные в работе Ш. А. Алимова [1].

Материал п. 3 § 1 публикуется впервые.

Текст § 2 представляет собой переработанное изложение результатов, впервые опубликованных в работе В. А. Ильина [12].

Основной публикацией по материалу § 3 является работа В. А. Ильина и Ш. А. Алимова [2]. Этой работе предшествовала работа В. А. Ильина и Е. И. Моисеева [1].

Менее общие, чем в § 3, условия сходимости спектральных разложений были установлены в работе Г. Бергендаля [1].

Результаты, установленные в § 3, обобщались в работе А. Г. Костюченко и Б. С. Митягина [1] на случай эллиптических операторов порядка $2m$ с постоянными коэффициентами и в работе Ш. А. Алимова [2] на случай общих эллиптических операторов порядка $2m$ с гладкими коэффициентами.

В работе Е. И. Моисеева [2] для случая собственных функций первой краевой задачи для эллиптического оператора второго порядка и функции, обладающей компактным носителем, установлены условия, обеспечивающие сходимость спектральных разложений, равномерную во всей замкнутой области.

---

*) Мы учитываем также, что по теореме вложения функция $f(x)$ из класса $H_p^\alpha(D)$ при $\alpha p > N$ является непрерывной на любом компакте области D.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ СО СФЕРИЧЕСКИМИ ЧАСТИЧНЫМИ СУММАМИ

Пусть область $G = T^N$ представляет собой N-мерный куб $-\pi \leqslant x_k \leqslant \pi$, $k = 1, 2, \ldots, N$.

Пусть далее $\bar{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_N)$ — вектор с целочисленными координатами $n_1, n_2, \ldots, n_N$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ — произвольный вектор, $|\bar{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_N^2}$, символ $(\bar{n}, \bar{x})$ обозначает скалярное произведение

$$(\bar{n}, \bar{x}) = n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_Nx_N.$$

Каждой функции $f(x)$ из класса $L_1(T^N)$ сопоставляется ее кратный тригонометрический ряд Фурье, имеющий вид

$$\sum f_{\bar{n}} e^{i(\bar{n},\bar{x})}, \tag{П.1.1}$$

в котором коэффициент Фурье $f_{\bar{n}}$ равен

$$f_{\bar{n}} = (2\pi)^{-N} \int\limits_{T^N} f(y)\, e^{-i(\bar{n},\bar{y})} dy. \tag{П.1.2}$$

Так как кратная тригонометрическая система представляет собой (с точностью до нормирующих множителей) частный случай изученной в гл. 1 ФСФ оператора Лапласа в кубе T^N и так как сходимость спектрального разложения по такой ФСФ отвечает сходимости при $\lambda \to \infty$ так называемых *сферических* частичных сумм кратного тригонометрического ряда Фурье

$$S_\lambda(x, f) = \sum_{|\bar{n}|<\lambda} f_{\bar{n}} e^{i(\bar{n},\bar{x})}, \tag{П.1.3}$$

то из результатов гл. 1 и 2 вытекает, что *если функция $f(x)$ обладает в N-мерном кубе T^N компактным носителем, то для любого $N > 1$ в каждом из классов Никольского $H_p^\alpha(T^N)$, Соболева — Лиувилля $L_p^\alpha(T^N)$, Бесова $B_{p,\theta}^\alpha(T^N)$ при любом $\theta \geqslant 1$ и Зигмунда — Гёльдера $C^\alpha(T^N)$ окончательными условиями равномерной на любом компакте куба T^N сходимости при $\lambda \to \infty$ сферических частичных сумм* (П.1.3) *являются три неравенства* *):

$$\alpha \geqslant (N-1)/2, \quad \alpha p > N, \quad p \geqslant 1. \tag{П.1.4}$$

*) Для классов Зигмунда — Гёльдера $C^\alpha(T^N)$ три неравенства (П.1.4.) вырождаются в одно неравенство $\alpha \geqslant (N-1)/2$.

Представляет интерес установление окончательных условий равномерной на всем замкнутом кубе T^N сходимости сферических частичных сумм (П.1.3) без предположения о том, что функция имеет компактный носитель в этом кубе.

Мы установим такие условия, ограничиваясь рассмотрением нечетного числа $N > 1$ измерений, в терминах периодических классов Соболева — Лиувилля.

Теорема П.1. *Если функция $f(x)$ нечетного числа $N > 1$ переменных принадлежит периодическому (с периодом 2π по каждой из переменных) классу Соболева — Лиувилля L_p^α с произвольными α и p, удовлетворяющими трем неравенствам* (П.1.4), *то сферические частичные суммы* (П.1.3) *кратного тригонометрического ряда Фурье этой функции сходятся при $\lambda \to \infty$ к этой функции равномерно на замкнутом кубе T^N.*

Сразу же заметим, что в силу теоремы вложения классов Соболева — Лиувилля доказательство теоремы П.1 достаточно провести при $\alpha = (N-1)/2$, $p > 2N/(N-1)$, т. е. для функции $f(x)$, принадлежащей периодическому классу Соболева — Лиувилля $L_p^{(N-1)/2}$ при $p > 2N/(N-1)$.

Заметим далее, что вместо N-мерного куба T^N можем рассмотреть при произвольных вещественных $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N$ другой N-мерный куб $T^N_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_N}$, определяемый соотношениями $-\pi + \delta_k \leqslant x_k \leqslant \pi + \delta_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$.

Поскольку кратная тригонометрическая система с точностью до одних и тех же нормирующих множителей образует ФСФ оператора Лапласа в любом таком кубе $T^N_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_N}$ и поскольку в силу периодичности функций $f(x)$ и $e^{-i(\bar{n},\bar{x})}$

$$f_{\bar{n}} = (2\pi)^{-N} \int\limits_{T^N} f(y)\, e^{-i(\bar{n},\bar{y})} dy = (2\pi)^{-N} \int\limits_{T^N_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_N}} f(y)\, e^{-i(\bar{n},\bar{y})}\, dy,$$

то для доказательства того, что сферические частичные суммы (П.1.3) сходятся при $\lambda \to \infty$ равномерно на всем замкнутом кубе T^N, достаточно доказать, что для функции из рассматриваемого класса Соболева — Лиувилля эти сферические частичные суммы сходятся при $\lambda \to \infty$ равномерно на любом компакте каждого N-мерного куба $T^N_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_N}$.

Для доказательства этого последнего в силу результатов гл. 4 (см. замечание в конце п. 2 § 3 гл. 4, а также пп. 6 и 7 этого параграфа) достаточно доказать, что для функции $f(x)$ из рассматриваемого класса Соболева — Лиувилля справедливо неравенство *)

$$\sum |f_{\bar{n}}|^2 |\bar{n}|^{N-1} \leqslant C \|f\|^2_{L_2^{(N-1)/2}(T^N)}. \qquad \text{(П.1.5)}$$

Обратимся к доказательству неравенства (П.1.5).

Заметим, что для любой функции $f(x)$ из периодического класса Соболева — Лиувилля L_2^1 и любого элемента $u_{\bar{n}}(x) = e^{i(\bar{n},\bar{x})}$ кратной триго-

*) Из справедливости этого неравенства будет вытекать справедливость неравенства (4.3.61) из п. 2 § 3 гл. 4 с заменой в правой его части нормы в классе Никольского на норму в классе Соболева — Лиувилля.

нометрической системы в силу первой формулы Грина и соотношения $\Delta u_{\bar n}(x)+|\bar n|^2 u_{\bar n}(x)=0$ справедливо равенство

$$\int\limits_{T^N}\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\frac{\partial u_{\bar n}(x)}{\partial x_k}\right]dx=|\bar n|^2\int\limits_{T^N} f(x)\,u_{\bar n}(x)\,dx. \qquad (\text{П.1.6})$$

В частности, при $f(x)=u_{\bar m}(x)$ из (П.1.6) получим

$$\int\limits_{T^N}\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial u_{\bar m}(x)}{\partial x_k}\frac{\partial u_{\bar n}(x)}{\partial x_k}\right]dx=\begin{cases}|\bar n|^2, & \text{когда векторы } \bar n \text{ и } \bar m \text{ совпадают,}\\ 0, & \text{когда векторы } \bar n \text{ и } \bar m \text{ не совпадают.}\end{cases} \qquad (\text{П.1.7})$$

Докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма П.1. *Если функция $\Phi(x)$ принадлежит периодическому классу Соболева — Лиувилля L_2^1 [соответственно L_2^2], то для ее коэффициентов Фурье по кратной тригонометрической системе $\Phi_{\bar n}$ справедливо неравенство*

$$\sum|\Phi_{\bar n}|^2|\bar n|^2\leqslant\int\limits_{T^N}\sum_{k=1}^{N}\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\right|^2dx \qquad (\text{П.1.8})$$

$$\left[\textit{соответственно}\ \sum|\Phi_{\bar n}|^2|\bar n|^4\leqslant\int\limits_{T^N}|\Delta\Phi|^2dx\right]. \qquad (\text{П.1.9})$$

Доказательство. В случае $\Phi\in L_2^1$ рассмотрим для любого $\lambda>0$ неотрицательную величину

$$I=\int\limits_{T^N}\left\{\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\Phi-\sum_{|\bar n|<\lambda}\Phi_{\bar n}u_{\bar n}(x)\right]\right\}^2dx\geqslant 0$$

и, пользуясь соотношениями (П.1.6) и (П.1.7), перепишем эту величину в виде

$$I=\int\limits_{T^N}\sum_{k=1}^{N}\left|\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_k}\right|^2dx-\sum_{|\bar n|<\lambda}\Phi_{\bar n}^2|\bar n|^2\geqslant 0.$$

В силу произвольности $\lambda>0$ из последнего неравенства вытекает неравенство (П.1.8).

В случае $\Phi\in L_2^2$ неравенство (П.1.9) получается из записанного для функции $\Delta\Phi$, принадлежащей L_2, неравенства Бесселя и из того, что в силу второй формулы Грина

$$(\Delta\Phi)_{\bar n}=\int\limits_{T^N}u_{\bar n}(x)\,\Delta\Phi\,dx=-\int\limits_{T^N}\Phi\Delta u_{\bar n}\,dx=-|\bar n|^2\int\limits_{T^N}\Phi u_{\bar n}\,dx=-|\bar n|^2\Phi_{\bar n}. \qquad (\text{П.1.10})$$

Лемма П.1 доказана.

Возвратимся теперь к доказательству неравенства (П.1.5).

Пусть функция $f(x)$ при нечетном $N>1$ принадлежит периодическому классу Соболева — Лиувилля $L_2^{(N-1)/2}$. Докажем, что в таком случае для коэффициента Фурье $f_{\bar n}$ функции $f(x)$ справедливо неравенство

$$\sum |f_{\bar n}|^2 |\bar n|^{N-1} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \int\limits_{T^N} \left| \Delta^{\frac{N-1}{4}} f \right|^2 dx & \text{при четном } (N-1)/2, \\ \int\limits_{T^N} \sum\limits_{k=1}^{N} \left| \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\Delta^{\frac{N-3}{4}} f \right) \right|^2 dx & \text{при нечетном } (N-1)/2. \end{cases} \tag{П.1.11}$$

В случае четного $(N-1)/2$, т. е. в случае $N = 5, 9, 13, \ldots$, неравенство (П.1.11) получается последовательным применением соотношения (П.1.10) к функциям f, Δf, ..., $\Delta^{(N-5)/4} f$ и использованием для функции $\Delta^{(N-1)/4} f$ неравенства Бесселя.

В случае нечетного $(N-1)/2$, т. е. в случае $N = 3, 7, 11, \ldots$, неравенство (П.1.11) при $N = 3$ совпадает с (П.1.8), а при $N = 7, 11, \ldots$ получается последовательным применением соотношения (П.1.10) к функциям f, Δf, ..., $\Delta^{(N-7)/4} f$ и использованием для функции $\Phi = \Delta^{(N-3)/4} f$ неравенства (П.1.8).

Тем самым неравенство (П.1.11) доказано.

Так как величины, стоящие в правой части (П.1.11), мажорируются величиной, стоящей в правой части (П.1.5), то неравенство (П.1.5) доказано, и доказательство теоремы П.1 завершено.

Замечание. То, что установленное в теореме П.1 условие равномерной сходимости является в терминах периодических классов Соболева — Лиувилля окончательным, сразу же вытекает из негативной теоремы 2.2, доказанной в гл. 2.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ПЕРВОЙ, ВТОРОЙ И ТРЕТЬЕЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Здесь мы рассмотрим произвольную ограниченную область G любого нечетного числа N $(N > 1)$ измерений и для произвольной не обладающей в этой области компактным носителем функции $f(x)$ установим окончательные в классах Соболева — Лиувилля $L_p^\alpha(G)$ условия, обеспечивающие равномерную на любом компакте области G сходимость разложений по собственным функциям первой, второй и третьей краевых задач для заданного в области G эллиптического оператора второго порядка

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + c(x)\, u(x). \tag{П.2.1}$$

Мы будем считать, что коэффициенты эллиптического оператора (П.2.1) удовлетворяют требованиям, сформулированным в начале гл. 4, и, кроме того, требованию $c(x) \geqslant 0$ в G и что граница ∂G области G является кусочно гладкой, а рассматриваемые собственные функции эллиптического оператора (П.2.1) удовлетворяют на границе ∂G либо краевому условию первого рода

$$u|_{\partial G} = 0, \tag{П.2.2}$$

либо краевому условию второго рода

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial G} = 0, \tag{П.2.3}$$

где ν — конормаль для оператора (П.2.1) к поверхности ∂G *), либо краевому условию третьего рода

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + h(s)\, u\right)\right|_{\partial G} = 0, \tag{П.2.4}$$

где $h(s)$ — заданная вдоль ∂G непрерывная и неотрицательная функция.

При этом удовлетворение указанным краевым условиям может пониматься в обобщенном смысле. Для краевого условия первого рода (П.2.2) это означает принадлежность функции $u(x)$ классу $\overset{0}{L}{}_2^1(G)$, получаемому замыканием множества $C_0^\infty(G)$ по норме пространства Соболева — Лиувилля $L_2^1(G)$, а удовлетворение краевому условию второго или третьего рода (П.2.4) понимается в обобщенном смысле, указанном, например, в известной монографии С. Л. Соболева **).

Теорема П.2. *Пусть G — ограниченная область любого нечетного числа N ($N > 1$) измерений, имеющая кусочно гладкую границу, $\{u_k(x)\}$ — система собственных функций эллиптического оператора* (П.2.1), *удовлетворяющих одному из трех краевых условий* (П.2.2) — (П.2.4), *а $f(x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая следующим двум требованиям:*

1°. *$f(x)$ принадлежит классу Соболева — Лиувилля $L_p^\alpha(G)$ с произвольными α и p, удовлетворяющими трем неравенствам:*

$$\alpha \geqslant (N-1)/2, \quad \alpha p > N, \quad p \geqslant 1; \tag{П.2.5}$$

2°. *Каждая из функций f, Lf, $L^2 f$, ..., $L^s f$, где L — эллиптический оператор* (П.2.1), *а целое число s равно* ***) $[(N-3)/4]$ *для случая первой краевой задачи и равно* ****) $[(N-5)/4]$ *для случаев второй и третьей краевых задач, удовлетворяет по крайней мере в обобщенном смысле соответствующему однородному краевому условию. Тогда спектральное разложение функции $f(x)$ по системе $\{u_k(x)\}$ сходится к этой функции равномерно на любом компакте K области G.*

Прежде чем доказывать теорему П.2, проанализируем вопрос об окончательности требований 1° и 2°, накладываемых в этой теореме на разлагаемую функцию.

Окончательность требования 1°, т. е. окончательность трех неравенств (П.2.5), уже установлена нами в гл. 4 для совершенно произвольного спектрального разложения.

---

*) См., например, монографию К. Миранды [1, с. 15].

**) См. С. Л. Соболев [1, с. 110—111].

***) Символ $[a]$ обозначает целую часть числа a.

****) При $N = 3$ для случаев второй и третьей краевых задач удовлетворение краевому условию вообще не требуется и требование 2° можно опустить.

Замечательным является факт, что и требование 2° является окончательным, ибо, как будет доказано ниже в теореме П.3, для собственных функций первой и второй краевых задач для оператора Лапласа $L = -\Delta$ в N-мерном шаре G существует функция $f(x)$ из класса $C^\infty(G)$ такая, что для нее все, кроме одной (причем любой!), из функций $f, -\Delta f, \ldots, (-\Delta)^s f$, указанных в требовании 2°, удовлетворяют соответствующему однородному краевому условию и спектральное разложение которой при любом порядке следования его членов не сходится в центре шара G (существует бесконечная подпоследовательность членов спектрального разложения, не стремящихся к нулю в центре шара G).

Таким образом, требование 2° является окончательным, даже если поставить вопрос о существовании хотя бы одного порядка следования членов спектрального разложения, обеспечивающего его сходимость во внутренних точках области.

Перейдем теперь к доказательству теоремы П.2 и к точной формулировке и доказательству теоремы П.3, устанавливающей окончательность требования 2° на функцию $f(x)$ в теореме П.2.

Доказательству теоремы П.2 предпошлем доказательство двух простых лемм.

Лемма П.2. *Пусть функция $\Phi(x)$ для случая второй и третьей краевых задач лишь принадлежит классу Соболева — Лиувилля $L_2^1(G)$, а для случая первой краевой задачи еще и удовлетворяет в обобщенном смысле краевому условию первого рода, т. е. принадлежит классу $\overset{0}{L}{}_2^1(G)$* *). *Тогда справедливы следующие неравенства:*

а) *для случая первой краевой задачи* **)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k^2 \lambda_k \leqslant \int_G \left[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + c(x) \Phi^2 \right] dx; \qquad (\text{П.2.6})$$

б) *для случая второй и третьей краевых задач*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k^2 \lambda_k \leqslant \int_G \left[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + c(x) \Phi^2 \right] dx + \int_{\partial G} h(s) \Phi^2(s)\, ds. \qquad (\text{П.2.7})$$

Доказательство леммы П.2. Заметим, что в случае первой краевой задачи для любой функции $\Phi(x)$ из класса $\overset{0}{L}{}_2^1(G)$ и любой собственной функции $u_k(x)$ справедливо тождество

$$\int_G \left[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + c(x) u_k \Phi \right] dx = \lambda_k \int_G \Phi u_k\, dx, \qquad (\text{П.2.8})$$

---

*) Напомним, что символ $\overset{0}{L}{}_2^1(G)$ обозначает замыкание множества $C_0^\infty(G)$ по норме пространства $L_2^1(G)$.

**) Здесь символ Φ_k обозначает коэффициент Фурье функции $\Phi(x)$ относительно собственной функции $u_k(x)$, а λ_k — отвечающее этой собственной функции собственное значение.

и, в частности, при $\Phi(x) = u_l(x)$

$$\int\limits_G \left[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} + c(x) u_k u_l \right] dx = \begin{cases} \lambda_k & \text{при } k = l, \\ 0 & \text{при } k \neq l. \end{cases} \quad (\text{П.2.9})$$

В случае второй и третьей краевых задач для любой функции $\Phi(x)$, принадлежащей только классу $L_2^1(G)$, и любой собственной функции $u_k(x)$ справедливо тождество

$$\int\limits_G \left[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + c(x) u_k \Phi \right] dx + \int\limits_{\partial G} h(s) u_k(s) \Phi(s)\, ds = \lambda_k \int\limits_G \Phi u_k\, dx, \quad (\text{П.2.10})$$

и, в частности, при $\Phi(x) = u_l(x)$

$$\int\limits_G \left[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} + c(x) u_k u_l \right] dx + \int\limits_{\partial G} h(s) u_k(s) u_l(s)\, ds = \begin{cases} \lambda_k & \text{при } k = l, \\ 0 & \text{при } k \neq l. \end{cases} \quad (\text{П.2.11})$$

Рассматривая для произвольного номера n в случае первой краевой задачи неотрицательную величину

$$I = \int\limits_G \left\{ \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Phi(x) - \sum_{k=1}^{n} \Phi_k u_k(x) \right] \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\Phi(x) - \sum_{l=1}^{n} \Phi_l u_l(x) \right] + c(x) \left[\Phi(x) - \sum_{k=1}^{n} \Phi_k u_k(x) \right]^2 \right\} dx \geqslant 0,$$

а в случае второй и третьей краевых задач — неотрицательную величину

$$I = \int\limits_G \left\{ \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Phi(x) - \sum_{k=1}^{n} \Phi_k u_k(x) \right] \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\Phi(x) - \sum_{l=1}^{n} \Phi_l u_l(x) \right] + c(x) \left[\Phi(x) - \sum_{k=1}^{n} \Phi_k u_k(x) \right]^2 \right\} dx + \int\limits_{\partial G} h(s) \left[\Phi(s) - \sum_{k=1}^{n} \Phi_k u_k(s) \right]^2 ds \geqslant 0$$

и пользуясь соотношениями (П.2.8)—(П.2.11), получим, что для случая первой краевой задачи

$$I = \int\limits_G \left[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + c(x) \Phi^2(x) \right] dx - \sum_{k=1}^{n} \Phi_k^2 \lambda_k \geqslant 0,$$

а для случаев второй и третьей краевых задач

$$I = \int\limits_G \left[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + c(x) \Phi^2(x) \right] dx + \int\limits_{\partial G} h(s) \Phi^2(s)\, ds - \sum_{k=1}^{n} \Phi_k^2 \lambda_k \geqslant 0.$$

В силу произвольности номера n лемма П.2 доказана.

Лемма П.3. *Пусть функция $\Phi(x)$ принадлежит классу Соболева — Лиувилля $L_2^2(G)$ и в обобщенном смысле удовлетворяет соответствующему однородному краевому условию одного из трех родов. Тогда коэффициент Фурье $(L\Phi)_k$ функции $L\Phi(x)$ и коэффициент Фурье Φ_k функции $\Phi(x)$ связаны соотношением*

$$(L\Phi)_k = \lambda_k \Phi_k. \tag{П.2.12}$$

Доказательство. Применяя вторую формулу Грина к функциям $\Phi(x)$ и $u_k(x)$, получим соотношение

$$\int_G u_k(x)\, L\Phi(x)\, dx = \int_G \Phi(x)\, Lu_k(x)\, dx = \lambda_k \int_G \Phi(x)\, u_k(x)\, dx,$$

эквивалентное равенству (П.2.12).

Приступим теперь к доказательству теоремы П.2.

В силу теоремы вложения классов Соболева — Лиувилля достаточно провести доказательство для функции $f(x)$, принадлежащей классу Соболева — Лиувилля $L_p^{(N-1)/2}(G)$ при $p > 2N/(N-1)$.

В силу замечания, сделанного в конце п. 2 § 3 гл. 4, и результатов пп. 6 и 7 этого параграфа достаточно доказать, что для функции $f(x)$, принадлежащей классу Соболева — Лиувилля $L_p^{(N-1)/2}(G)$ при $p > 2N/(N-1)$ и удовлетворяющей требованию 2° теоремы П.2, справедливо неравенство *)

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \lambda_k^{(N-1)/2} \leqslant C\, \| f \|^2_{L_2^{(N-1)/2}(G)}. \tag{П.2.13}$$

Для этого в свою очередь достаточно доказать, что для функции $f(x)$, удовлетворяющей указанным условиям, справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \lambda_k^{(N-1)/2} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \displaystyle\int_G [L^{(N-1)/4} f]^2\, dx \quad \text{для четного } (N-1)/2, \\ \displaystyle\int_G \left\{ \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\left(L^{(N-3)/4} f\right) \frac{\partial}{\partial x_j}\left(L^{(N-3)/4} f\right) + c(x)\left(L^{(N-3)/4} f\right)^2 \right\} dx \\ \text{для нечетного } (N-1)/2 \text{ и первой краевой задачи}, \\ \displaystyle\int_G \left\{ \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\left(L^{(N-3)/4} f\right) \frac{\partial}{\partial x_j}\left(L^{(N-3)/4} f\right) + c(x)\left(L^{(N-3)/4} f\right)^2 \right\} dx \; + \\ \displaystyle + \int_{\partial G} h(s)\left(L^{(N-3)/4} f\right)^2 ds \text{ для нечетного } (N-1)/2 \text{ и второй и} \\ \text{третьей краевых задач}, \end{cases} \tag{П.2.14}$$

ибо величины, стоящие в правой части (П.2.14), мажорируются величиной, стоящей в правой части (П.2.13).

---

*) Из справедливости этого неравенства будет вытекать справедливость неравенства (4.3.61) из п. 2 § 3 гл. 4 с заменой в правой его части нормы в классе $H_2^{(N-1)/2}(G)$ на норму в классе $L_2^{(N-1)/2}(G)$.

В случае четного $(N-1)/2$, т. е. в случае $N=5, 9, 13, \ldots$, неравенство (П.2.14) получается последовательным применением соотношения (П.2.12) к функциям f, Lf, ..., $L^{(N-5)/4}f$ и использованием для принадлежащей классу $L_2(G)$ функции $L^{(N-1)/4}f$ неравенства Бесселя.

В случае нечетного $(N-1)/2$, т. е. случае $N=3, 7, 11, \ldots$, неравенство (П.2.14) при $N=3$ совпадает с (П.2.6) (соответственно с (П.2.7)), а при $N=7, 11, 15, \ldots$ получается последовательным применением соотношения (П.2.12) к функциям f, Lf, ..., $L^{(N-7)/4}f$ и использованием для функции $\Phi = L^{(N-3)/4}f$ неравенства (П.2.6) (соответственно (П.2.7)).

Тем самым теорема П.2 доказана.

Теорема П.3. *Пусть область G представляет собой N-мерный шар радиуса R $(R>0)$ нечетного числа N $(N>1)$ измерений и в этом шаре рассматриваются собственные функции оператора Лапласа $L=-\Delta$ с однородным краевым условием либо первого, либо второго рода.*

Тогда существует функция $f(x)$, удовлетворяющая следующим трем условиям:

1) *$f(x)$ принадлежит в шаре G классу C^∞;*

2) *все фигурирующие в требовании 2° теоремы* П.2 *функции f, $(-\Delta)f$, ..., $(-\Delta)^s f$, кроме одной (причем любой!), удовлетворяют соответствующему однородному краевому условию;*

3) *существует бесконечная последовательность членов ряда Фурье функции $f(x)$, не стремящихся к нулю в центре x_0 шара R.*

Для такой функции $f(x)$ ее ряд Фурье не сходится в центре x_0 шара G ни при каком порядке следования его членов.

Доказательство теоремы П.3. Введем в N-мерном шаре G радиуса R $(R>0)$ сферические координаты, поместив начало сферической системы в центр x_0 шара G и обозначив через r сферический радиус. Будем предполагать, что разлагаемая функция f зависит только от сферического радиуса r. В таком случае разложение будет вестись *только по собственным функциям N-мерного шара, обладающим сферической симметрией*, ибо коэффициенты Фурье по всем остальным собственным функциям будут равны нулю.

Нормированные собственные функции N-мерного шара радиуса $R>0$, обладающие сферической симметрией, имеют следующий вид:

а) для случая первой краевой задачи $u(R)=0$

$$u_n(r)=\frac{1}{\sqrt{\omega_N}}\frac{\sqrt{2}}{R}\frac{1}{\mathcal{J}_{(N-4)/2}(\mu_n)}r^{\frac{2-N}{2}}\mathcal{J}_{(N-2)/2}\left(\frac{r}{R}\mu_n\right)\qquad (n=1, 2, \ldots),\tag{П.2.15}$$

где μ_n — занумерованные в порядке возрастания положительные нули функции Бесселя $\mathcal{J}_{(N-2)/2}(x)$, $\omega_N = 2(\pi)^{N/2}[\Gamma(N/2)]^{-1}$;

б) для случая второй краевой задачи $\frac{\partial u}{\partial r}(R)=0$

$$u_n(r)=\frac{1}{\sqrt{\omega_N}}\frac{\sqrt{2}}{R}\frac{1}{\mathcal{J}_{(N-2)/2}(\mu_n)}r^{\frac{2-N}{2}}\mathcal{J}_{(N-2)/2}\left(\frac{r}{R}\mu_n\right)\qquad (n=1, 2, \ldots).\tag{П.2.16}$$

где μ_n — занумерованные в порядке возрастания положительные нули функции Бесселя $\mathcal{J}_{N/2}(x)$.

Таким образом, коэффициент Фурье зависящей только от сферического радиуса функции $f(r)$ будет определяться формулой

$$f_n = \omega_N \int_0^R f(r)\, u_n(r)\, r^{N-1}\, dr = \frac{\sqrt{2\omega_N}}{R} \frac{1}{\mathcal{J}_{\frac{N-4}{2}}(\mu_n)} \int_0^R r^{\frac{N}{2}} f(r)\, \mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}\left(\frac{r}{R}\mu_n\right) dr \tag{П.2.17}$$

для случая первой краевой задачи и формулой

$$f_n = \frac{\sqrt{2\omega_N}}{R} \frac{1}{\mathcal{J}_{(N-2)/2}(\mu_n)} \int_0^R r^{\frac{N}{2}} f(r)\, \mathcal{J}_{(N-2)/2}\left(\frac{r}{R}\mu_n\right) dr \tag{П.2.18}$$

для случая второй краевой задачи.

Для дальнейшего нам понадобятся значения собственных функций (П.2.15) и (П.2.16) в центре шара, т. е. при $r = 0$.

Из асимптотики бесселевых функций и из определения их нулей заключаем, что для случая первой краевой задачи

$$\mathcal{J}_{(N-4)/2}(\mu_n) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\mu_n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_n}}\right), \tag{П.2.19}$$

а для случая второй краевой задачи

$$\mathcal{J}_{(N-2)/2}(\mu_n) = (-1)^{-n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\mu_n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_n}}\right). \tag{П.2.20}$$

Из асимптотики бесселевых функций и из определения нулей заклю-(П.2.20) заключаем, что для первой и для второй краевых задач собственная функция $u_n(r)$ имеет в центре шара значение

$$u_n(0) = C_n \mu_n^{(N-1)/2}, \tag{П.2.21}$$

причем

$$\lim_{n\to\infty} |C_n| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\omega_N}} (2R)^{-N/2} \left[\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\right]^{-1}.$$

Для дальнейшего важно, что *величины C_n не стремятся к нулю при* $n \to \infty$.

Перейдем теперь непосредственно к построению функции f, существование которой составляет содержание теоремы П.3.

Сначала рассмотрим случай первой краевой задачи.

Пусть k — любое фиксированное целое число, удовлетворяющее неравенствам $0 \leqslant k \leqslant \left[\frac{N-3}{2}\right]$.

Определим функцию $f(r)$ как решение уравнения $\Delta^k f = 1$ в шаре G, удовлетворяющее на границе этого шара условиям $f(R) = \Delta f(R) = \ldots$ $\ldots = \Delta^{k-1} f(R) = 0$.

Указанную функцию $f(r)$ можно искать в виде полинома

$$f(r) = a_0 + a_1 r^2 + a_2 r^4 + \ldots + a_k r^{2k},$$

коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_k$ которого легко вычисляются из условий $f(R) = \Delta f(R) = \ldots = \Delta^{k-1} f(R) = 0$, $\Delta^k f(R) = 1$.

Построенная функция принадлежит классу $C^\infty(G)$, причем для нее все входящие в требование 2° теоремы П.2 функции

$$f, \quad (-\Delta) f, \quad (-\Delta)^2 f, \ldots, (-\Delta)^{\left[\frac{(N-3)}{4}\right]} f,$$

за исключением функции $(-\Delta)^k f$, обращаются в нуль при $r = R$ *). Но $(-\Delta)^k f(R) = (-1)^k \neq 0$.

Оценим n-й член ряда Фурье функции $f(r)$ в центре шара G, т. е. при $r = 0$.

Последовательно применяя лемму П.3 к функциям f, $(-\Delta)f, \ldots$ $\ldots, (-\Delta)^{k-1} f$, получим, что коэффициенты Фурье функций $f(r)$ и $(-\Delta)^k f(r)$ связаны соотношением

$$f_n = \left((-\Delta)^k f\right)_n \left(\frac{R}{\mu_n}\right)^{2k}. \tag{П.2.22}$$

Но $(-\Delta)^k f(r) = (-1)^k$, так что коэффициент Фурье этой функции тривиально вычисляется с помощью соотношения (П.2.17) **):

$$\begin{aligned}
\left((-\Delta)^k f\right)_n &= \frac{\sqrt{2\omega_N}}{R} \frac{(-1)^k}{\mathcal{J}_{\frac{N-4}{2}}(\mu_n)} \int_0^R r^{\frac{N}{2}} \mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}\left(\frac{r}{R}\mu_n\right) dr = \\
&= \frac{\sqrt{2\omega_N}}{\mu_n} \frac{(-1)^k}{\mathcal{J}_{\frac{N-4}{2}}(\mu_n)} \left[r^{\frac{N}{2}} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}}\left(\frac{r}{R}\mu_n\right)\right]\Bigg|_{r=0}^{r=R} = \\
&= \frac{\sqrt{2\omega_N}}{\mu_n} R^{\frac{N}{2}} (-1)^k \frac{\mathcal{J}_{\frac{N}{2}}(\mu_n)}{\mathcal{J}_{\frac{N}{2}-2}(\mu_n)} = -(-1)^k \frac{\sqrt{2\omega_N}}{\mu_n} R^{\frac{N}{2}}.
\end{aligned} \tag{П.2.23}$$

Из соотношений (П.2.21), (П.2.22) и (П.2.23) получаем, что n-й член ряда Фурье в центре шара имеет вид

$$f_n \cdot u_n(0) = -\sqrt{2\omega_N} R^{\frac{N}{2}+2k} (-1)^k C_n \mu_n^{\frac{N-3}{2}-2k}. \tag{П.2.24}$$

---

*) Обращение в нуль при $r = R$ функций $(-\Delta)^l f(r)$ при $l > k$ вытекает из тождественного равенства этих функций нулю.

**) Ниже мы используем рекуррентные соотношения для бесселевых функций

$$\int r^\nu \mathcal{J}_{\nu-1}\left(\frac{r}{R}\mu_n\right) dr = \frac{R}{\mu_n} r^\nu \mathcal{J}_\nu\left(\frac{r}{R}\mu_n\right)$$

и

$$\mathcal{J}_{N/2}(\mu_n) + \mathcal{J}_{N/2-2}(\mu_n) = \frac{N-2}{\mu_n} \mathcal{J}_{N/2-1}(\mu_n) = 0.$$

Так как величины C_n не стремятся к нулю при $n \to \infty$ и $k \leqslant [(N-3)/4]$, то n-й член ряда Фурье в центре шара (П.2.24) не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Тем самым для первой краевой задачи доказательство теоремы П.3 завершено.

Рассмотрим теперь случай второй краевой задачи.

Пусть k — любое фиксированное число, удовлетворяющее неравенствам $0 \leqslant k \leqslant \left[\frac{N-5}{4}\right]$ *).

На этот раз мы определим функцию $f(r)$ как решение уравнения $\Delta^k f = r^2$ в шаре G, удовлетворяющее на границе этого шара условиям

$$\frac{d}{dr} f(R) = \frac{d}{dr} \Delta f(R) = \ldots = \frac{d}{dr} \Delta^{k-1} f(R) = 0.$$

Эту функцию можно искать в виде полинома

$$f(r) = a_1 r^2 + a_2 r^4 + \ldots + a_{k+1} r^{2k+2},$$

коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ которого легко вычисляются из условий

$$\frac{d}{dr} f(R) = \frac{d}{dr} \Delta f(R) = \ldots = \frac{d}{dr} \Delta^{k-1} f(R) = 0, \quad \frac{d}{dr} \Delta^k f(R) = 2R.$$

Построенная функция принадлежит классу $C^\infty(G)$, причем для нее все входящие в требование 2° теоремы П.2 функции

$$f, \quad (-\Delta) f, \quad (-\Delta)^2 f, \ldots, (-\Delta)^{\left[\frac{N-5}{4}\right]} f,$$

за исключением функции $(-\Delta)^k f$, удовлетворяют однородному краевому условию второго рода.

Но $\frac{d}{dr} (-\Delta)^k f(R) = (-1)^k 2R \neq 0$.

Оценим n-й член ряда Фурье функции $f(r)$ в центре шара, т. е. при $r = 0$.

Для вычисления коэффициента Фурье f_n снова воспользуемся соотношением (П.2.22) и заметим, что, поскольку $\Delta^k f(r) = r^2$, коэффициент Фурье $((-\Delta)^k f)_n$ легко вычисляется с помощью соотношения (П.2.18). Действительно,

$$((-\Delta)^k f)_n = \frac{\sqrt{2\omega_N}}{R} \frac{(-1)^k}{\mathcal{J}_{\frac{N-2}{2}}(\mu_n)} \int_0^R r^{\frac{N}{2}+2} \mathcal{J}_{\frac{N}{2}-1}\left(\frac{r}{R}\mu_n\right) dr. \tag{П.2.25}$$

Интеграл в правой части (П.2.25) берется по частям с помощью рекуррентного соотношения

$$\int \mathcal{J}_\nu\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) r^\nu \, dr = \frac{R}{\mu_n} r^\nu \mathcal{J}_\nu\left(\frac{\mu_n}{R} r\right).$$

---

*) Так как при $N = 3$ в случае краевого условия второго рода требование 2° в теореме П.2 отсутствует, то мы в дальнейшем считаем, что $N \geqslant 5$.

Мы получим, учитывая, что $\mathcal{J}_{\frac{N}{2}}(\mu_n)=0$, соотношение

$$\int_0^R r^{\frac{N}{2}+2}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}-1}\left(\frac{r}{R}\mu_n\right)dr=\left[r^2\frac{R}{\mu_n}r^{N/2}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}}\left(\frac{r}{R}\mu_n\right)\right]\Bigg|_{r=0}^{r=R}-$$

$$-2\frac{R}{\mu_n}\int_0^R r^{\frac{N}{2}+1}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}}\left(\frac{r}{R}\mu_n\right)dr=-2\frac{R^2}{\mu_n^2}\left[r^{\frac{N}{2}+1}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+1}\left(\frac{r}{R}\mu_n\right)\right]\Bigg|_{r=0}^{r=R}=$$

$$=-2\frac{R^2}{\mu_n}R^{\frac{N}{2}+1}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}+1}(\mu_n)=2\frac{R^{\frac{N}{2}+3}}{\mu_n^2}\mathcal{J}_{\frac{N}{2}-1}(\mu_n). \qquad (\text{П.2.26})$$

Из (П.2.25) и (П.2.26) получим, что

$$((-\Delta)^k f)_n=(-1)^k\sqrt{2\omega_N}\,\frac{2R^{\frac{N}{2}+2}}{\mu_n^2}. \qquad (\text{П.2.27})$$

Из соотношений (П.2.21), (П.2.22) и (П.2.27) окончательно получим для n-го члена ряда Фурье в центре шара следующее выражение:

$$f_n\cdot u_n(0)=\sqrt{2\omega_N}\cdot 2R^{\frac{N}{2}+2k+2}(-1)^k C_n\mu_n^{\frac{N-5}{2}-2k}.$$

Так как $k\leqslant\left[\dfrac{N-5}{4}\right]$ и величины C_n не стремятся к нулю при $n\to\infty$, то выписанный n-й член ряда Фурье не стремится к нулю при $n\to\infty$.

Тем самым рассмотрение второй краевой задачи также завершено. Теорема П.3 полностью доказана.

ПОСЛЕСЛОВИЕ

У прочитавшего настоящую монографию, по-видимому, естественно возникает вопрос о возможности такой модификации изложенных в ней идей и методов, которая позволила бы изучить проблемы спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов.

Оказывается, такая модификация возможна, и мы здесь кратко изложим основные результаты по спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов, полученные автором настоящей монографии при помощи развития некоторых ее идей и методов.

Начнем с того, что отметим специфические трудности, с которыми неминуемо встречается математик, приступающий к изучению спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов. В то время, как система собственных функций любого самосопряженного расширения формально самосопряженного дифференциального оператора с точечным спектром всегда образует базис (причем даже ортонормированный), по которому можно разложить произвольную функцию из класса L_2, в случае несамосопряженного дифференциального оператора система всех собственных функций не только не образует базиса, по которому можно разложить произвольную функцию из класса L_2, но и не является полной в L_2 *).

Поэтому в случае несамосопряженного дифференциального оператора для получения системы, обладающей свойством полноты (и тем более базисности), приходится дополнять систему всех собственных функций системой разумно выбранных присоединенных функций. Объединение системы всех собственных функций с системой всех присоединенных функций данного дифференциального оператора принято называть системой *корневых* функций данного оператора.

Большой заслугой М. В. Келдыша (см. [1]**)) является установление факта полноты в L_2 специально построенной системы корневых функций (названной М. В. Келдышем *канонической* системой) для широких классов краевых задач для несамосо-

---

*) То есть произвольную функцию из класса L_2 нельзя приблизить в метрике L_2 линейными комбинациями собственных функций.

**) Литература к послесловию приведена в конце списка литературы.

пряженных дифференциальных операторов (и для некоторых абстрактных несамосопряженных операторов).

Однако теория М. В. Келдыша не дала ответа на весьма актуальный (как с точки зрения математики, так и для приложений *)) вопрос о том, образует ли построенная им каноническая система корневых функций базис в L_2, по которому можно разложить произвольную функцию из класса L_2.

Ответ на этот вопрос был получен в работах [2—4] автора настоящей монографии (на базе развития идей главы 1 этой монографии).

Пусть L — заданный на интервале $G=(0, 1)$, вообще говоря, несамосопряженный обыкновенный дифференциальный оператор, порядок n которого мы для упрощения будем считать четным,

$$Lu = u^{(n)} + p_1(x) u^{(n-1)} + p_2(x) u^{(n-2)} + \ldots + p_n(x) u. \qquad (1)$$

В основе развиваемой спектральной теории, как и в главе 1 монографии, лежит отказ от задания в каком-либо виде краевых условий и рассмотрение обобщенных корневых функций оператора (1), являющихся только регулярными решениями соответствующего дифференциального уравнения с комплексным спектральным параметром.

Иными словами, в качестве системы обобщенных корневых функций оператора (1) мы рассматриваем произвольную систему комплекснозначных функций $\{u_k(x)\}$, каждая из которых принадлежит классу $C^{(n)}(G)$ и для некоторого комплексного числа λ_k удовлетворяет на интервале G дифференциальному уравнению

$$Lu_k + \lambda_k \cdot u_k = \theta_k \cdot u_{k-1}, \qquad (2)$$

в котором число θ_k равно либо нулю, либо единице (в последнем случае дополнительно требуется, чтобы $\lambda_k = \lambda_{k-1}$), причем $\theta_1 = 0$.

Такое рассмотрение включает в себя системы корневых функций всех краевых задач с точечным спектром, системы типа систем экспонент (не удовлетворяющие никаким краевым условиям), а также некоторые системы, получающиеся объединением подмножеств корневых функций двух различных краевых задач.

Обозначим символом μ_k тот специальный корень четной степени n из комплексного числа λ_k, который выбирается по следующему правилу: если при $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ число $[(-1)^{(n+2)/2} \cdot \lambda_k]$ равно $\rho \cdot e^{i\varphi}$, то

$$\mu_k = \rho^{1/n} \cdot e^{(i\varphi)/n}.$$

В работах [2—6] требуется, чтобы рассматриваемая система обобщенных корневых функций оператора (1) удовлетворяла при фиксированном $p \geqslant 1$ следующим двум условиям А:

1) являлась замкнутой и минимальной в $L_p(G)$,

---

*) Например, для отыскания условий устойчивости турбулентной плазмы, для расчета ядерных реакторов и других прикладных задач.

2) чтобы указанные выше числа μ_k удовлетворяли двум неравенствам *):

$$|\operatorname{Im} \mu_k| \leqslant C_1 \qquad \text{(для всех номеров } k\text{)}. \tag{3}$$

$$\sum_{\mu \leqslant |\mu_k| \leqslant \mu+1} 1 \leqslant C_2 \quad \text{(для всех вещественных } \mu \geqslant 0\text{)}. \tag{4}$$

Условие (4) позволяет считать все элементы $u_k(x)$ системы обобщенных корневых функций оператора (1) занумерованными в порядке неубывания величин $|\mu_k|$.

Первое из двух условий A позволяет утверждать, что существует и притом единственная система $\{v_k(x)\}$, биортогонально сопряженная к системе $\{u_k(x)\}$, т. е. такая система, что каждый ее элемент $v_k(x)$ принадлежит классу $L_q(G)$ при $q = p/(p-1)$ ($q = \infty$ при $p = 1$), и для любых номеров k и l справедливо соотношение

$$(u_k, v_l) = \int_G u_k(x) \cdot \overline{v_l(x)}\, dx = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad k = l, \\ 0 & \text{при} \quad k \neq l. \end{cases}$$

Для произвольной функции $f(x)$ из класса $L_p(G)$ с тем же фиксированным $p \geqslant 1$, что и в условиях A, составим частичную сумму порядка m спектрального разложения в биортогональный ряд по системе $\{u_k(x)\}$

$$\sigma_m(x, f) = \sum_{k=1}^{m} (f, v_k) \cdot u_k(x). \tag{5}$$

Будем говорить, что система обобщенных корневых функций $\{u_k(x)\}$ обладает свойством базисности в L_p, если для произвольной функции $f(x)$ из класса $L_p(G)$ и произвольного компакта K интервала G

$$\lim_{m\to\infty} \| f(x) - \sigma_m(x, f) \|_{L_p(K)} = 0.$$

Для выяснения вопроса о равносходимости спектрального разложения (5) с разложением той же функции $f(x)$ в обычный тригонометрический ряд Фурье составим модифицированную частичную сумму разложения $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье

$$S_\tau(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_G \frac{\sin[\tau(x-y)]}{x-y} f(y)\, dy$$

порядка $\tau = |\mu_m|$.

Будем говорить, что разложения функции $f(x)$ по системе $\{u_k(x)\}$ и в тригонометрический ряд равносходятся равно-

*) Впоследствии было установлено, что неравенство (3) необходимо для того, чтобы система $\{u_k(x)\}$ являлась базисом в $L_2(G)$, а неравенство (4) необходимо для того, чтобы система $\{u_k(x)\}$ являлась базисом Рисса в $L_2(G)$.

мерно на любом компакте интервала G, если разность *)

$$R_m(x, f) = \sigma_m(x, f) - \\ -\exp\left(-\frac{1}{n}\int_0^x p_1(\xi)\,d\xi\right)\cdot S_{|\mu_m|}\left(x, f(x)\cdot\exp\left(\frac{1}{n}\int_0^x p_1(\xi)d\xi\right)\right) \tag{6}$$

стремится к нулю при $m\to\infty$ равномерно относительно x на любом компакте интервала G.

Заметим, что если коэффициент $p_1(x)$ у оператора (1) тождественно равен нулю, то разность (6) переходит в

$$R_m(x, f) = \sigma_m(x, f) - S_{|\mu_m|}(x, f).$$

Центральными результатами работ [2—4] являются следующие две теоремы **).

Теорема 1. *Для того чтобы произвольная система $\{u_k(x)\}$ обобщенных корневых функций оператора* (1), *удовлетворяющая при фиксированном $p>1$ двум условиям A, обладала свойством базисности в L_p, необходимо и достаточно, чтобы для любого компакта K_0 интервала G существовала постоянная $C(K_0)$, обеспечивающая справедливость для всех номеров k неравенства*

$$\|u_k(x)\|_{L_p(K_0)}\cdot\|v_k(x)\|_{L_q(G)}\leqslant C(K_0), \tag{7}$$

в котором $q=p/(p-1)$.

Теорема 2. *Для того чтобы при фиксированном $p\geqslant 1$ разложения произвольной функции $f(x)$ из класса $L_p(G)$ по произвольной системе обобщенных корневых функций оператора* (1), *удовлетворяющей при том же $p\geqslant 1$ двум условиям A, и в тригонометрический ряд равносходились равномерно на любом компакте интервала G необходимо и достаточно, чтобы для любого компакта K_0 интервала G существовала постоянная $C(K_0)$, обеспечивающая справедливость для всех номеров k неравенства* (7), *в котором $q=p/(p-1)$ ($q=\infty$ при $p=1$).*

Сделаем несколько замечаний по поводу конструктивности условий и сферы применимости теорем 1 и 2.

Во-первых, заметим, что для конкретных краевых задач все условия теорем 1 и 2 легко проверяются. Действительно, замкнутость системы $\{u_k(x)\}$ устанавливается с помощью теоремы М. В. Келдыша [1], минимальность ее следует из того, что корневые функции сопряженной краевой задачи образуют биортогонально сопряженную систему, а выполнение неравенств (3), (4) и (7) проверяется с помощью первых членов широко известных

*) Здесь $p_1(x)$ — коэффициент при $u^{(n-1)}$ у оператора (1).

**) В этих теоремах предполагается, что коэффициенты $p_l(x)$ дифференциального оператора (1) принадлежат классам $C^{(n-l+1)}(G)$.

асимптотических разложений корневых функций и собственных значений конкретных краевых задач по степеням $1/\mu_k$.

Во-вторых, заметим, что частным случаем системы обобщенных корневых функций простейшего дифференциального оператора $Lu = u''$ или даже $Lu = u'$ является подвергавшаяся всестороннему изучению многими математиками *) система экспонент

$$\overset{0}{u}_k(x) = e^{i\lambda_k x},$$

$$\overset{l}{u}_k(x) = \frac{x^l \cdot e^{i\lambda_k x}}{l!} \quad (l = 1, 2, \ldots, m_k - 1).$$

Тем не менее, и для системы экспонент обе теоремы 1 и 2 являются новыми и содержат утверждения, не вытекающие из работ всех предыдущих авторов.

Далее заметим, что в работе [5] приведен расширяющий сферу приложений теорем 1 и 2 пример системы обобщенных корневых функций $\{u_k(x)\}$ простейшего дифференциального оператора $Lu = u''$, которая получается путем объединения подмножества корневых функций этого оператора, удовлетворяющих условиям периодичности, с подмножеством корневых функций этого же оператора, удовлетворяющих условию антипериодичности, и для которой тем не менее выполнены все условия теоремы 1 при л ю б о м $p > 1$ и теоремы 2 при л ю б о м $p \geqslant 1$.

Наконец, заметим, что теорема 2 о равномерной равносходимости спектрального разложения с тригонометрическим рядом наиболее сильной и наиболее трудной является при $p = 1$, т. е. в классе L_1. Особых усилий от автора потребовало доказательство необходимости, опубликованное в [4]. Проблемой равносходимости, начиная со знаменитой работы В. А. Стеклова [7], занимались многие известные математики (сам В. А. Стеклов, Я. Д. Тамаркин, Э. Ч. Титчмарш, А. Хаар, Б. М. Левитан, Я. Л. Геронимус и другие). Сформулированная выше теорема 2 не только содержит (в ряде случаев с усилением) результаты всех предшествующих авторов, но и впервые устанавливает точную границу, за пределами которой равносходимости уже нет.

Естественно возникает вопрос об условиях базисности (например, в L_2), построенной М. В. Келдышем в [1] канонической системы корневых функций. С помощью теоремы 1 легко устанавливается следующий несколько неожиданный результат.

Теорема 3. *Если система обобщенных корневых функций оператора* (1) *удовлетворяет при $p = 2$ тем же условиям, что и в теореме* 1, *и если общее число присоединенных функций в этой системе не является конечным, то всегда существует замкнутая и минимальная в $L_2(G)$ и каноническая в смысле М. В. Келды-*

---

*) Сюда относятся работы Н. Винера и Р. Пэли, С. Верблюнского, Н. Левинсона, В. Э. Кацнельсона, Б. Я. Левина, Б. С. Павлова, С. В. Хрущева, Н. К. Никольского, А. М. Седлецкого и других авторов.

ша система обобщенных корневых функций оператора (1), *которая не обладает свойством базисности в* L_2.

Теорема 3 показывает, что введенное М. В. Келдышем понятие канонической системы корневых функций приспособлено только для изучения полноты и не пригодно для изучения базисности системы корневых функций.

В связи с этим обстоятельством автором настоящей монографии в работах [6] и [8] было введено понятие приведенной системы корневых функций оператора (1), которая обладает свойством базисности всякий раз, когда это свойство имеется хотя бы при одном выборе корневых функций. Там же указан алгоритм построения приведенной системы корневых функций и доказано, что базисность ее будет иметь место при выполнении для нее неравенства вида (7) (при $p=2$).

Теорема 2 о равносходимости справедлива для оператора (1) лишь при достаточной гладкости коэффициентов этого оператора. В случае, когда в качестве оператора (1) взят классический оператор Шредингера $Lu=u''+q(x)u$, совсем недавно в [9] теорему 2 удалось доказать для произвольного комплекснозначного потенциала $q(x)$ из класса $L_1(G)$ (при этом корневые функции $u_k(x)$ предполагаются принадлежащими лишь классу $W_1^2(G)$, а удовлетворение соответствующему уравнению (2) предполагается лишь почти всюду на G). При этом оказалось, что в частном случае, когда потенциал $q(x)$ из класса $L_1(G)$ является вещественнозначным и когда рассматривается произвольное самосопряженное расширение оператора Шредингера с точечным спектром, утверждение теоремы 2 о равномерной равносходимости всегда справедливо при $p=1$, т. е. для произвольной функции из класса $L_1(G)$.

В совсем недавней работе [10] изучена проблема равносходимости для оператора Шредингера

$$LU=U''+Q(x)\cdot U \tag{8}$$

с матричным потенциалом $Q(x)$, представляющим собой неэрмитову матрицу размера $s\times s$, все комплекснозначные элементы $Q_{ij}(x)$ которой только суммируемы на основном интервале $G=(0,\ 1)$.

В этом случае в пространстве s-компонентных вектор-функций $f(x)=\{f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_s(x)\}$ для любого $p\geqslant 1$ удобно ввести в рассмотрение класс $L_p^s(G)$ с нормой

$$\|f\|_{L_p^s(G)}=\left[\int_G\sum_{j=1}^{s}|f_j(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \tag{9}$$

и определить скалярное произведение $\langle f, g\rangle$ двух s-компонентных вектор-функций $f(x)=\{f_1(x),\ldots,f_s(x)\}$ и $g(x)=g_1(x),\ldots,g_s\}(x)\}$, первая из которых принадлежит классу $L_p^s(G)$ при любом $p\geqslant 1$, а вторая классу $L_q^s(G)$ при $q=p/(p-1)$ ($q=\infty$ при

$p=1$) равенством

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_G \sum_{j=1}^{s} f_j(x)\,\overline{g_j(x)}\,dx. \tag{10}$$

В полной аналогии с изложенным выше в качестве системы обобщенных корневых вектор-функций оператора Шредингера (8) рассмотрим произвольную систему s-компонентных вектор-функций $\{U^k(x)\} = \{U_1^k(x), U_2^k(x), \ldots, U_s^k(x)\}$, у каждой из которых любая компонента $U_j^k(x)$ принадлежит классу $W_1^2(G)$ и каждая из которых для некоторого комплексного числа λ_k почти всюду на интервале G удовлетворяет уравнению

$$LU^k + \lambda_k \cdot U^k = \theta_k \cdot U^{k-1}, \tag{11}$$

в котором L — оператор Шредингера (8), а θ_k имеет тот же смысл, что и в уравнении (2).

В качестве двух условий А при фиксированном $p \geqslant 1$ возьмем те же два условия А, которые сформулированы в начале нашего послесловия, но только замкнутость и минимальность системы $\{U^k(x)\}$ на этот раз будем предполагать не в классе $L_p(G)$, а в классе $L_p^s(G)$.

Для произвольной s-компонентной вектор-функции $f(x) = \{f_1(x), \ldots, f_s(x)\}$, принадлежащей классу $L_p^s(G)$ при том же $p \geqslant 1$, что и в условиях А, составим векторную частичную сумму порядка m разложения по системе $\{U^k(x)\}$

$$\sigma^m(x, f) = \sum_{k=1}^{m} \langle f, V^k\rangle \cdot U^k(x), \tag{12}$$

где $\{V^k(x)\} = \{V_1^k(x), \ldots, V_s^k(x)\}$ — система, биортогонально сопряженная в смысле скалярного произведения (10) к системе $\{U^k(x)\}$.

Для каждого $j = 1, 2, \ldots, s$ рассмотрим j-ю компоненту векторной частичной суммы (12)

$$\sigma_j^m(x, f) = \sum_{k=1}^{m} \langle f, V^k\rangle \cdot U_j^k(x) \tag{13}$$

и сравним ее с модифицированной частичной суммой тригонометрического ряда соответствующей j-й компоненты $f_j(x)$ разлагаемой вектор-функции $f(x)$*)

$$S_{|\mu_m|}(x, f_j) = \frac{1}{\pi} \int\limits_G \frac{\sin[|\mu_m| \cdot (x-y)]}{x-y} f_j(y)\,dy \tag{14}$$

порядка $|\mu_m|$.

Основным результатом работы [10] является следующее утверждение.

---

*) Здесь μ_m — тот корень квадратный из λ_m, для которого $\operatorname{Re}\mu_m \geqslant 0$.

Теорема 4. *Пусть потенциал $Q(x)$ оператора Шредингера* (8) *представляет собой произвольную неэрмитову матрицу размера $s \times s$ с комплекснозначными и только суммируемыми на интервале G элементами и пусть $\{U^k(x)\}$ — произвольная система обобщенных корневых вектор-функций оператора* (8), *удовлетворяющая при фиксированном $p \geqslant 1$ указанным выше двум условиям А. Тогда для того, чтобы разность между каждой j-й компонентой* (13) *разложения произвольной вектор-функции $f(x)$ из класса $L_p^s(G)$ по системе $\{U^k(x)\}$ и разложением* (14) *в тригонометрический ряд соответствующей j-й компоненты $f_j(x)$ этой вектор-функции $f(x)$ стремилась к нулю при $m \to \infty$ равномерно на любом компакте интервала G необходимо и достаточно, чтобы для любого компакта K_0 интервала G существовала постоянная $C(K_0)$, обеспечивающая справедливость для всех номеров k неравенства*

$$\| U^k(x) \|_{L_p^s(K_0)} \cdot \| V^k(x) \|_{L_q^s(G)} \leqslant C(K_0), \tag{15}$$

в котором $q = p/(p-1)$ ($q = \infty$ при $p = 1$).

Устанавливаемое теоремой 4 свойство равносходимости естественно назвать покомпонентной равносходимостью с разложением в тригонометрический ряд соответствующей компоненты разлагаемой вектор-функции.

Следствием теоремы 4 является следующее замечательное утверждение.

Теорема 5. *Если потенциал $Q(x)$ оператора Шредингера* (8) *и система его обобщенных корневых вектор-функций $\{U^k(x)\}$ удовлетворяют при фиксированном $p \geqslant 1$ тем же условиям, что и в теореме 4, то при выполнении неравенства* (15) *для разложения произвольной вектор-функции $f(x)$ из класса $L_p^s(G)$ по системе $\{U^k(x)\}$ справедлив покомпонентный принцип локализации: сходимость или расходимость j-й компоненты* (13) *указанного разложения в данной точке x_0 интервала G зависит от поведения в малой окрестности этой точки x_0 только соответствующей j-й компоненты $f_j(x)$ разлагаемой вектор-функции $f(x)$ и совершенно не зависит от поведения остальных компонент разлагаемой вектор-функции* (и это несмотря на то, что коэффициенты $\langle f, V^k \rangle$ в разложении (13) зависят от всех компонент разлагаемой вектор-функции!).

Особо отметим, что для важного частного случая, когда матрица $Q(x)$ является симметричной и все ее элементы являются вещественнозначными суммируемыми на G функциями и когда рассматривается произвольное самосопряженное неотрицательное расширение оператора Шредингера (8) с точечным спектром, все условия теорем 4 и 5 выполнены при $p = 1$, т. е. в этом случае для любой вектор-функции $f(x)$ из класса $L_1^s(G)$ имеют место покомпонентная равносходимость с тригонометрическим рядом и покомпонентный принцип локализации.

Заметим в заключение, что условия теорем 4 и 5 являются конструктивными. и для конкретных краевых задач выполнение этих условий может быть проверено.

Перейдем теперь к краткому изложению цикла работ автора настоящей монографии [11—14], посвященного установлению условий, при выполнении которых система обобщенных корневых функций дифференциального оператора L образует на всем замкнутом основном интервале так называемый *базис Рисса* *).

При установлении условий базисности Рисса всюду в дальнейшем мы будем требовать, чтобы понимаемая в прежнем смысле система обобщенных корневых функций $\{u_k(x)\}$ дифференциального оператора L удовлетворяла дополнительному требованию: имела в качестве биортогонально сопряженной системы $\{v_k(x)\}$ систему понимаемых в прежнем смысле обобщенных корневых функций дифференциального оператора L^*, формально сопряженного к дифференциальному оператору L.

В работе [11] на интервале $G=(0, 1)$ рассмотрен дифференциальный оператор второго порядка

$$Lu = u'' + p_1(x)u' + p_2(x)u \tag{16}$$

при минимальных требованиях гладкости на его коэффициенты:

$$p_1(x) \in W_1^1(G), \quad p_2(x) \in L_1(G).$$

При этом обобщенные корневые функции $u_k(x)$ принадлежат только классу $W_1^2(G)$ и удовлетворяют соответствующему уравнению (2) только почти всюду на G.

Основной результат работы [11] утверждает, что *для того чтобы замкнутая в $L_2(G)$ система обобщенных корневых функций оператора* (16) $\{u_k(x)\}$, *для которой выполнено неравенство* (3), *являлась базисом Рисса в $L_2(G)$, необходимо и достаточно, чтобы были справедливы два неравенства*: *неравенство* (4) *и неравенство*

$$\|u_k(x)\|_{L_2(G)} \cdot \|v_k(x)\|_{L_2(G)} \leqslant C.$$

В работе [11] установлен также следующий принципиальный факт: *условие базисности Рисса или обычной базисности системы корневых функций нельзя выразить в традиционной форме задания типа краевых условий*. Так корневые функции оператора (16) на интервале $G=(0, 1)$ с одними и теми же краевыми условиями

$$u(0)=0, \quad u'(0)=u'(1)$$

при $p_1(x)\equiv 0$ и $p_2(x)\equiv 0$ и при правильном выборе присоеди-

---

*) Базис Рисса — это базис, эквивалентный ортонормированному, т. е. такой базис, который переводится в ортонормированный с помощью линейного ограниченного невырожденного преобразования. См. по поводу базиса Рисса монографию [15].

ненных функций образуют базис Рисса в $L_2(G)$, а при $p_1(x)=1$, $p_2(x)=0$ не обладают свойством базисности (в $L_2(G)$) ни при каком выборе корневых функций.

Этот пример показывает, что при одних и тех же краевых условиях наличие или отсутствие свойства базисности определяется значениями коэффициентов дифференциального оператора.

В работе [12] основной результат работы [11] перенесен на случай разрывного оператора (16), т. е. на случай, когда корневые функции $u_k(x)$ удовлетворяют соответствующему дифференциальному уравнению (2) не почти всюду на всем интервале $G=(0, 1)$, а только почти всюду на каждом частичном интервале (ξ_{l-1}, ξ_l), возникающем при разбиении интервала $G=(0, 1)$ точками

$$0=\xi_0<\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_s<\xi_{s+1}=1. \tag{17}$$

При этом в точках $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ допускаются совершенно произвольные условия сшивания корневых функций.

Основной результат работы [12] нацелен на установление условий базисности Рисса задач с так называемыми **нелокальными** краевыми условиями, например, с условиями вида

$$u(1)=\sum_{l=1}^{s}\alpha_l\cdot u(\xi_l) \quad \text{или} \quad u'(0)=\sum_{l=1}^{s}\beta_l u'(\xi_l).$$

Задачи, сопряженные к задачам с такими условиями, как раз и являются задачами с разрывным оператором.

В работе [13] изучены два вопроса: 1) вопрос об условиях базисности Рисса в $L_2^s(G)$ систем обобщенных корневых вектор-функций $\{U^k(x)\}$ оператора Шредингера (8) с матричным неэрмитовым потенциалом $Q(x)$ с комплекснозначными и только суммируемыми на интервале G элементами $Q_{ij}(x)$, 2) вопрос о связи между условием базисности системы обобщенных корневых вектор-функций, зависящего от параметра t оператора Шредингера (8) и проблемой отыскания системы интегралов движения у нелинейного эволюционного уравнения, допускающего известное представление П. Лакса (см. его работу [16])

$$L_t=[A, L]=AL-LA. \tag{18}$$

Решение первого из этих вопросов вполне аналогично изложенному выше основному результату работы [11]: *для того чтобы замкнутая в* $L_2^s(G)$ *система обобщенных корневых вектор-функций оператора Шредингера* (8) $\{U^k(x)\}$, *для которой выполнено неравенство* (3), *являлась базисом Рисса в* $L_2^s(G)$, *необходимо и достаточно, чтобы были выполнены два неравенства: неравенство* (4) *и неравенство*

$$\|U^k(x)\|_{L_2^s(G)}\cdot\|V^k(x)\|_{L_2^s(G)}\leqslant C.$$

Только что сформулированный результат перенесен в работе [14] на случай разрывного оператора Шредингера (8), т. е. на случай, когда корневые вектор-функции $U^k(x)$ удовлетворяют уравнению (11) не почти всюду на всем интервале $G=(0, 1)$, а только почти всюду на каждом интервале (ξ_{l-1}, ξ_l), возникающем при разбиении интервала $G=(0, 1)$ точками (17). При этом в точках $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ допускаются совершенно произвольные условия сшивания корневых вектор-функций.

Переходим к изложению второго вопроса, решенного в работе [13].

Прежде всего впервые была сформулирована изоспектральная задача для зависящего от параметра t несамосопряженного оператора Шредингера с матричным потенциалом (8), эквивалентная представлению Лакса (18).

Пусть рассматриваемая для зависящего от параметра t оператора Шредингера (8) задача имеет точечный спектр и является изоспектральной (т. е. ее спектр $\{\lambda_k\}$ не зависит от t). Обозначая обобщенные корневые вектор-функции этой задачи через $U^k(x, t)$, мы получим, что каждая вектор-функция $U^k(x, t)$ почти всюду на интервале G является решением уравнения (11)

$$LU^k + \lambda_k U^k = \theta_k \cdot U^{k-1}, \tag{11}$$

в котором числа θ_k имеют тот же смысл, что и в уравнении (2).

Доказано, что *если система обобщенных корневых вектор-функций* $\{U^k(x, t)\}$ *является замкнутой в* $L_2^s(G)$ *для любого* $t \geqslant 0$, *то уравнение Лакса* (18) *эквивалентно**) *системе двух уравнений, одним из которых является уравнение* (11), *а другое имеет вид*

$$U_t^k = AU^k - C_k U^k, \tag{19}$$

где C_k — *постоянные числа такие, что для всех номеров* k, *для которых* $\theta_k \neq 0$, *имеет место равенство*

$$C_k = C_{k-1}.$$

Предположим теперь, что в уравнении Лакса (18) в качестве оператора L взят уже рассмотренный оператор Шредингера (8), а в качестве A оператор вида

$$A = C\frac{\partial^3}{\partial x^3} + D\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}D,$$

где C и D — операторы, удовлетворяющие условиям

$$CQ = QC, \quad 3CQ = -4D.$$

Тогда, как легко видеть, уравнение Лакса (18) переходит в мат-

*) Эквивалентность уравнения Лакса (18) системе (11), (19) понимается в следующем смысле: каждая обобщенная корневая вектор-функция $U^k(x, t)$ удовлетворяет системе уравнений (11), (19) тогда и только тогда, когда для любой функции f из класса $D(L) \cap D([A, L])$ выполняется соотношение $L_t f = [A, L]f$.

ричное уравнение Кортевега — де Фриза

$$Q_t = \frac{1}{4} C Q_{xxx} - \frac{3}{4} \cdot C (Q^2)_x. \qquad (20)$$

В [13] установлен следующий результат.

Теорема 6. *Если система $\{U^k(x, t)\}$ обобщенных корневых вектор-функций, зависящего от t оператора Шредингера* (8) *образует базис в $L_2^s(G)$ при $t = 0$, то интегралами движения матричного уравнения Кортевега — де Фриза* (20) *являются выражения вида*

$$\int_G P_{r,l}(Q)\, dx,$$

где $P_{r\,l}(Q)$ — полиномы от Q и ее производных.

Приближаясь к завершению нашего послесловия, отметим, что принципиальную роль для получения практически всех указанных выше результатов сыграли впервые обнаруженные автором настоящей монографии специальные оценки, связывающие нормы обобщенных корневых функций или вектор-функций дифференциальных операторов.

Для обобщенных корневых функций обыкновенного дифференциального уравнения (1) порядка n, удовлетворяющих уравнению (2), эти установленные в [2] оценки имеют вид: *если K' и K'' — любые два компакта интервала G такие, что K' содержится строго внутри K'', то существует постоянная $C = C(K', K'')$ такая, что для всех номеров k*

$$\|\theta_k u_{k-1}\|_{L_2(K')} \leqslant C \cdot |\mu_k|^{n-1} \cdot \|u_k\|_{L_2(K'')}. \qquad (21)$$

Нетрудно убедиться в том, что показатель степени $n-1$ в оценке (21) является точным. Оценку (21) автор настоящей монографии предложил называть *оценкой антиаприорного типа*, ибо в отличие от априорных оценок, которые оценивают решение уравнения через его правую часть, неравенство (21) оценивает правую часть дифференциального уравнения (2) через его решение.

Для обобщенных корневых вектор-функций оператора Шредингера (8) с матричным потенциалом в [13] установлена даже более сильная оценка антиаприорного типа

$$\|\theta_k U^{k-1}\|_{L_2^s(G)} \leqslant C \cdot |\mu_k| \cdot \|U^k\|_{L_2^s(G)}. \qquad (22)$$

причем оказалось, что вместо $L_2^s(G)$-норм в (22) можно брать $L_p^s(G)$-нормы при любом $p \geqslant 1$.

В [17] оценка антиаприорного типа установлена для обобщенных корневых функций эллиптического оператора второго порядка в произвольной ограниченной N-мерной области G

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u. \qquad (23)$$

Для обобщенных корневых функций $u_k(x)$ оператора (23), являющихся решениями уравнения*)

$$Lu_k + \lambda_k u_k = \theta_k \cdot u_{k-1},$$

точная по порядку оценка антиаприорного типа имеет следующий вид: *для любых двух N-мерных компактов K' и K'' области G таких, что компакт K' содержится строго внутри компакта K'', существует постоянная $C = C(K', K'')$ такая, что для всех номеров k*

$$\|\theta_k \cdot u_{k-1}\|_{L_2(K')} \leqslant C \left|\sqrt{\lambda_k}\right| \cdot \|u_k\|_{L_2(K'')}. \tag{24}$$

Позже учениками автора настоящей монографии Н. Ю. Капустиным и А. С. Макиным оценки антиаприорного типа были установлены для обобщенных корневых функций параболического и даже гипоэллиптического оператора.

Отметим в заключение, что в работе автора настоящей монографии [18] с помощью оценки антиаприорного типа (24) установлены условия абсолютной и равномерной сходимости и сходимости в $L_2(G)$ разложений по обобщенным корневым функциям эллиптического оператора (23).

Все изложенные в этом послесловии результаты автор предполагает систематизировать во втором томе монографии.

---

*) θ_k имеет тот же смысл, что и в уравнении (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

В. Г. Авакумович (V. G. Avakumovič)

1. Über die Eigenfuctionen auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten // Math. Z.— 1956.— Bd 65.— S. 327—344.

С. Агмон (S. Agmon)

1. Asimptotic formulas with remainder estimates for eigenwalues of elliptic operators // Arch. Rat. Mech. Anal.— 1968.— V. 28.— P. 165—183.

Г. Алексич

1. Проблемы сходимости ортогональных рядов.— М.: ИЛ, 1963.

Ш. А. Алимов

1. Дробные степени эллиптических операторов и изоморфизм классов дифференцируемых функций // Дифференц. уравнения.— 1972.— Т. 8, № 9.— С. 1609—1629.
2. О спектральных разложениях функций из H_p^α // Мат. сб.— 1976.— Т. 101 (143), № 1.— С. 3—20.

Ш. А. Алимов, В. А. Ильин, Е. М. Никишин

1. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений, I // Успехи мат. наук.— 1976.— Т. 31, № 6.— С. 28—83.
2. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений, II // Успехи мат. наук.— 1977.— Т. 32, № 1.— С. 107—130.

К. И. Бабенко

1. Об асимптотическом поведении собственных функций дифференциальных операторов (доклад на 3-м Всесоюзном мат. съезде).— М., 1956.

Г. Бейтмен, А. Эрдейи

1. Высшие трансцендентные функции, II.— М.: Наука, 1974.

Г. Бергендаль (G. Bergendal)

1. Convergence and summability of eigenfunction expansions connected with elliptic differential operators // Comm. du Sém. math. de l'université de Lund.— 1959.— V. 15.— P. 1—63.

С. Бохнер (S. Bochner).

1. Summation of multiple Fourier series by spherical means // Trans. Amer. Math. Soc.— 1936.— V. 40.— P. 175—207.
2. Лекции об интегралах Фурье.— М.: Физматгиз, 1962.

Г. Н. Ватсон

1. Теория бесселевых функций, т. 1— М.: ИЛ. 1949.

Г. Вейль (H. Weyl)

1. Das asymptotische Verteilungsgezetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung) // Math. Ann.— 1912.— Bd. 71.— S. 441—479.

М. М. Гехтман

1. О самосопряженных расширениях симметрического оператора с абсолютно непрерывной компонентой спектра // Функц. анализ, теория функций и их приложения.— 1974.— Вып. 1.— Махачкала, С. 85—88.

М. Л. Гольдман

1. Об интегральных представлениях и рядах Фурье дифференцируемых

функций многих переменных (кандидатская диссертация), М., 1972. МИЭМ.
М. Л. Горбачук
1. Самосопряженные граничные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка с неограниченным операторным коэффициентом // Функц. анализ и его приложения.— 1971.— Т. 5, вып. 1.— С. 10—21.
Л. Гординг (L. Gårding)
1. Разложения по собственным функциям, связанные с эллиптическими операторами // 12 Congr. Math. Scand, Lund (1953), 44—55 (см. также «Математика», сборник переводов, 1957, 1 : 3, 107—116).
2. On the asymptotic properties of the spectral function belonging to a self-adjoint semi-bounded extension of an elliptic differential operator // Kungl. Fysiogr. Sällsk. Lund Förh.— 1954.— V. 24, № 21.— P. 1—18.
Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц
1. Линейные операторы, ч. 2 (Спектральная теория).— М.: Мир, 1966.
А. Зигмунд
1. Тригонометрические ряды, тома 1 и 2.— М.: Мир, 1965.
В. Я. Иврий
1. О втором члене спектральной асимптотики для оператора Лапласа — Бельтрами на многообразиях с краем // Функц. анализ и его приложения.— 1980.— Т. 14, вып. 2.— С. 25—30.
В. А. Ильин
1. Ядра дробного порядка // Мат. сб.—1957.— Т. 41 (83), № 4.— С. 459—480.
2. О сходимости разложений по собственным функциям оператора Лапласа // Успехи мат. наук.— 1958.— Т. 13, № 1.— С. 87—180.
3. О равномерной сходимости разложений по собственным функциям во всей замкнутой области // Мат. сб.— 1958.— Т. 45 (87), № 2.— С. 195—232.
4. Достаточные условия разложимости функции в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям // Мат. сб.— 1958.— Т. 46 (88), № 1.— С. 3—26.
5. О разложимости функций, обладающих особенностями, в условно сходящийся ряд по собственным функциям // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1958.— Т. 22, № 1.— С. 49—80.
6. Проблемы локализации и сходимости для рядов Фурье по фундаментальным системам функций оператора Лапласа // Успехи мат. наук.— 1968.— Т. 23, № 2.— С. 61—120.
7. Обобщенный принцип локализации для риссовских средних ряда Фурье по произвольной ФСФ оператора Лапласа // Дифференц. уравнения.— 1970.— Т. 6, № 7.— С. 1143—1158.
8. Обобщенный принцип локализации для риссовских средних, отвечающих произвольному самосопряженному неотрицательному расширения оператора Лапласа // Дифференц. уравнения.— 1970.— Т. 6, № 7.— С. 1159—1169.
9. Условия сходимости спектральных разложений, отвечающих самосопряженным расширениям эллиптических операторов, III // Дифференц. уравнения.— 1971.— Т. 7, № 6.— С. 1036—1041.
10. К вопросу о равносходимости разложений по собственным функциям и в N-кратный интеграл Фурье // Докл. АН СССР.— 1971.— Т. 198, № 4.— С. 15—18.
11. О риссовской равносуммируемости разложений по собственным функциям в N-кратный интеграл Фурье // Тр. Мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова.— 1972.— Т. 128.— С. 151—162.
12. Условия сходимости спектральных разложений, отвечающих самосопряженным расширениям эллиптических операторов, IV // 1973.— Т. 9, № 1.— С. 49—73.
13. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений, I и II //

Дифференц. уравнения.— 1980. — Т. 16, № 5.— С. 771—794; Т. 16, № 6.— С. 980—1009.

14. Необходимые и достаточные условия базисности в L_p и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений и разложений по системе экспонент // Доклады АН СССР. — 1983.— Т. 273, № 4.— С. 789—793.

15. Новый метод оценки спектральной функции эллиптического оператора // «Спектральная терия задач математической физики», сборник научных трудов МЭИ.— 1987.— Т. 141.— С. 5—16.

16. Оценка разности средних Рисса двух спектральных разложений для функции из класса L_2 // Дифференц. уравнения.— 1988.— Т. 24, № 5.— С. 852—863.

В. А. Ильин, Ш. А. Алимов

1. Условия сходимости спектральных разложений, отвечающих самосопряженным расширениям оператора Лапласа // Актуальные пробле- 1971.— Т. 7, № 4.— С. 670—710; Т. 7, № 5.— С. 851—882.

В. А. Ильин, Н. Ю. Капустин

1. О сходимости разложений, отвечающих неполуограниченным самосопряженным расширениям оператора Лапласа/Актуальные проблемы матем. физики и вычисл. математики.— М.: Наука, 1984.— С. 105—115.

В. А. Ильин, Е. И. Моисеев

1. О спектральных разложениях, отвечающих произвольному неотрицательному расширению общего самосопряженного эллиптического оператора второго порядка // Докл. АН СССР.— 1971.— Т. 191, № 4.— С. 770—772.

В. А. Ильин, Э. Г. Позняк

1. О характере спектра самосопряженного расширения оператора Лап-

В. А. Ильин, А. Ф. Филиппов

1. О характере спектра самосопряженного расширения оператора Лапласа в ограниченной области (фундаментальные системы функций с произвольной наперед заданной подпоследовательностью фундаментальных чисел) // Докл. АН СССР.— 1970.— Т. 191, № 2.— С. 267—269.

В. А. Ильин, И. А. Шишмарев

1. Ряды Фурье по фундаментальным системам функций полигармонического оператора // Докл. АН СССР.— 1969.— Т. 189, № 4.— С. 707—709.

Г. А. Ильюшина

1. Об обобщенном принципе локализации спектральных разложений, связанных с оператором Бельтрами // Дифференц. уравнения.— 1971.— Т. 7, № 10.— С. 1845—1853.

2. Об обобщенном принципе локализации спектральных разложений, связанных с оператором Бельтрами, заданным в произвольной N-мерной области // Дифференц. уравнения.— 1971.— Т. 7, № 11.— С. 2058—2065.

Т. Карлеман (T. Carleman)

1. Propriété asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes, C. R. Séme Congr. des Math. Scand. (Stockholm, 1934), Håkan Ohlsson, Lund, 1935, p. 35—44.

2. Über die Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen // Ber. Sächs. Akad. d. Wiss.— 1936.— Bd. 86.— S. 119—132.

С. Качмаж, Г. Штейнгауз

1. Теория ортогональных рядов.— М.: Физматгиз, 1958.

И. Кенджаев

1. К вопросу об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье // Докл. АН Тадж. ССР.— 1967.— Т. 10, № 12.— С. 12—17.

2. О равномерной и абсолютной сходимости разложений по собственным функциям // Докл. АН Тадж. ССР.— 1968.— Т. 11, № 1.— С. 10—15.

А. Г. Костюченко, Б. С. Митягин

1. О равномерной сходимости спектральных разложений // Функц. анализ и его приложения.— 1973.— Т. 7, вып. 2.— С. 32—42.

М. А. Красносельский, Е. И. Пустыльник
1. Использование дробных степеней при изучении рядов Фурье по собственным функциям дифференциальных операторов // Докл. АН СССР.— 1958.— Т. 122, № 6.— С. 978—981.

О. А. Ладыженская
1. О методе Фурье для волнового уравнения // Докл. АН СССР.— 1950.— Т. 75, № 6.— С. 765—768.

Б. М. Левитан
1. О разложении по собственным функциям оператора Лапласа // Мат. сб.— 1954.— Т. 35 (77), № 2.— С. 267—316.
2. О суммировании кратных рядов и интегралов Фурье // Докл. АН СССР.— 1955.— Т. 102, № 6.— С. 1073—1076.
3. О разложении по собственным функциям самосопряженного уравнения в частных производных // Тр. Моск. мат. об-ва.— 1956.— Т. 5.— С. 269—298.

С. Мизохата (S. Mizohata)
1. Sur le propriétés asymptotiques de values propres pur le opérateurs elliptiques // J. Math. Kyoto Univ.— 1965.— T. 4, № 3.— P. 399—428.

К. Миранда
1. Уравнения с частными производными эллиптического типа.— М.: ИЛ, 1957.

Е. И. Моисеев
1. Формула среднего для собственных функций эллиптического самосопряженного оператора // Дифференц. уравнения.— 1971.— Т. 7, № 8.— С. 1490—1502.
2. Равномерная сходимость в замкнутой области некоторых разложений // Докл. АН СССР.— 1977.— Т. 233, № 6.— С. 1042—1045.

Дж. фон Нейман (J. Neumann)
1. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren // Math. Ann.— 1925.— Bd. 102.— S. 49—131.

С. М. Никольский
1. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1969.

А. М. Олевский
1. О продолжении последовательности функций до полной ортонормированной системы // Мат. заметки.— 1969.— Т. 6, № 6.— С. 737—747.
2. Fourier Series with Respect to General Orthogonal Systems.— Berlin, 1975.

П. К. Рашевский
1. Риманова геометрия и тензорный анализ.— М.: Наука, 1967.

Я. Ш. Салимов
1. О средних Рисса спектральной функции несамосопряженного оператора Лапласа при наличии присоединенных функций порядка, превосходящего порядок средних Рисса // Доклады АН СССР.— 1986.— Т. 289, № 6.— С. 1311—1314.
2. О средних Рисса биортогональных разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженных расширений оператора Лапласа // Дифференц. уравнения.— 1986.— Т. 22, № 5.— С. 864—876.

Р. Т. Сили (R. T. Seeley).
1. A charp asymptotic remainder estimate for the eigenvalues of the Laplasian in a domain of R^3 // Adv. Math.— 1978.— V. 29.— P. 244—269.

В. И. Смирнов
1. Курс высшей математики, т. 4.— М.: Гостехиздат, 1957.

С. Л. Соболев
1. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.

Э. М. Стейн (E. M. Stein)
1. Localisation and summability of multiple Fourier series // Acta Math.— 1958.— V. 100, № 1—2.— P. 93—147.
Э. Ч. Титчмарш
1. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, том 2. — М.: ИЛ, 1961.
К. О. Фридрихс (K. O. Friedrichs)
1. Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren // Math. Annalen.— 1934.— V. 109.— P. 465—489, 685—713; 1935.— V. 110.— P. 777—779.
Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа
1. Неравенства.— М.: ИЛ, 1948.
Л. Хёрмандер (L. Hörmander)
1. The spectral function of an elliptic operator. // Acta Math.— 1968.— V. 121, № 3—4.— P. 193—218.
К. Чандрасекаран, С. Минакшисундарам (K. Chandrasekharan, S. Minakshisundaram)
1. Typical means.— Oxford, 1952.
З. В. Шония
1. Условия сходимости спектральных разложений, отвечающих неполуограниченным самосопряженным расширениям оператора Шрёдингера // Дифференц. уравнения.— 1986.— Т. 22, № 3.— С. 483—495.

Список литературы к послесловию

1. М. В. Келдыш. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных операторов // Успехи математич. наук.— 1971.— Т. 26, № 4.— С. 15—41.
2. В. А. Ильин. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений I, II // Дифференц. уравнения.— 1980.— Т. 16, № 5.— С. 771—794. Т. 16, № 6.— С. 980—1009.
3. В. А. Ильин. Необходимые и достаточные условия базисности в L_p и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений и разложений по системе экспонент // Доклады АН СССР.— 1983.— Т. 273, № 4.— С. 789—793.
4. В. А. Ильин. О необходимом условии равносходимости с тригонометрическим рядом спектрального разложения произвольной суммируемой функции // Дифференц. уравнения.— 1985.— Т. 21, № 3.— С. 371—379.
5. В. А. Ильин, Е. И. Моисеев. О системах, состоящих из подмножеств корневых функций двух различных краевых задач // Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова.— 1991.— Т. 201.
6. В. А. Ильин. О существовании приведенной системы собственных и присоединенных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова.— 1976.— Т. 142.— С. 148—155.
7. В. А. Стеклов. Sur les expressions asymptotiques de certains fonctions définies par des équations différéntielles linéaieres de deuxiéme ordre, et leurs applications au problème du developpement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant les dites fonctions // Харьков. Сообщ. матем. об-ва.— 1907—1909.— 10(2—6).— С. 97—199.
8. В. А. Ильин. О свойствах приведенной подсистемы собственных и присоединенных функций пучка М. В. Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов // Доклады АН СССР.— 1976.— Т. 130, № 1.— С. 30—33.
9. В. А. Ильин. Равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям одномерного оператора Шредингера с комплексным потенциалом из класса L_1 // Дифференц. уравнения.— 1991.— Т. 27, № 4.— С. 577—597.

10. В. А. Ильин. Покомпонентная равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по корневым вектор-функциям оператора Шредингера с матричным неэрмитовым потенциалом, все элементы которого только суммируемы // Дифференц. уравнения.— 1991.— Т. 27, № 11.— С. 1862—1879.
11. В. А. Ильин. О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка // Доклады АН СССР.— 1983.— Т. 273, № 5.— С. 789—793.
12. В. А. Ильин. Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка. // Дифференц. уравнения.— 1986.— Т. 22, № 12.— С. 2059—2071.
13. В. А. Ильин, К. В. Мальков, Е. И. Моисеев. Базисность систем корневых функций несамосопряженных операторов и интегрируемость ассоциированных представлением Лакса нелинейных эволюционных уравнений I, II // Дифференц. уравнения.— 1989.— Т. 25, № 11.— С. 1956—1970; Т. 25. № 12.— С. 2133—2143.
14. В. А. Ильин. О базисности Рисса систем корневых вектор-функций разрывного оператора Шредингера с матричным потенциалом // Доклады АН СССР.— 1990.— Т. 314, № 1.— С. 59—62.
15. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.— М., 1965.
16. P. Lax. Comm. Pure Appl. Math.— 1968.— V. 21.— P. 467. См. также: **П. Д. Лакс. Интегралы эволюционных уравнений и уединенные волны** // Сборник «Математика».— 1969.— Т. 13, № 5.
17. В. А. Ильин. О точных по порядку соотношениях между L_2-нормами собственных и присоединенных функций эллиптического оператора второго порядка // Дифференц. уравнения.— 1982.— Т. 18, № 1.— С. 30—37.
18. В. А. Ильин. Об абсолютной и равномерной сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного эллиптического оператора // Доклады АН СССР.— 1974.— Т. 274, № 1.— С. 19—22

ОГЛАВЛЕНИЕ

Научное издание

ИЛЬИН Владимир Александрович

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Самосопряженные дифференциальные операторы

Заведующий редакцией *А. П. Баева*
Редактор *В. В. Абгарян*
Младший редактор *В. А. Кузнецова*
Художественный редактор *Г. М. Коровина*
Технический редактор *С. Я. Шкляр*
Корректор *И. Я. Крищталь*

ИБ № 11374

Сдано в набор 14.11.90. Подписано к печати 17.10.91. Формат 60×90/16. Бумага тип. № 1. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 23. Усл. кр.-отт. 23. Уч.-изд. л. 25,24. Тираж 1000 экз. Заказ № 519. Цена 4 р. 80 к.

Издательско-производственное
и книготорговое объединение «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Четвертая типография издательства «Наука»
630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25