Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Ленинградского университета

Бирман М. Ш., Соломяк М. З. **Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.** Учеб. пособие. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 264 с.

В учебном пособии изложен основной материал по спектральной теории операторов. Большое место отведено специальным разделам теории операторов, важным для приложений в математической и теоретической физике (теория возмущений, спектральная теория дифференциальных операторов, перестановочные соотношения квантовой механики).

Пособие рассчитано на студентов и аспирантов по специальностям: математическая физика, теоретическая физика, дифференциальные и интегральные уравнения.

Б $\dfrac{20204, 20203-122}{076(02)-80}$ БЗ—26—25—80

ИБ № 693

Михаил Шлемович Бирман, Михаил Захарович Соломяк

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Редактор Г. И. Чередниченко
Обложка художника В. В. Костырева
Художественный редактор В. Н. Васильев
Технический редактор С. Л. Шилова
Корректоры Е. К. Терентьева, Г. Н. Гуляева

Сдано в набор 12.02.78 Подписано в печать 01.10.80 Формат $60\times90^{1}/_{16}$.
Бумага тип. № 1. Уч.-изд. л. 15,42. Печ. л. 16,5. Тираж 2305 экз.
Гарнитура литературная. Печать высокая. Заказ № 323. Цена 80 коп.
Издательство ЛГУ им. А. А. Жданова. 199164. Ленинград, Университетская наб., 7/9.

Отпечатано в типографии Издательства ЛГУ. 199164, Ленинград, В-164, Университетская наб., 7/9 с матриц.
Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского производственно-технического объединения „Печатный двор" имени А. М. Горького „Союзполиграфпрома" при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
197136, Ленинград, П-136, Гатчинская, 26.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В течение ряда лет авторы читали на математико-механическом и физическом факультетах Ленинградского университета специальные курсы по спектральной теории операторов в гильбертовом пространстве и по смежным вопросам анализа и математической физики, в частности по спектральной теории дифференциальных операторов. В результате возник замысел этой книги — в сравнительно небольшом учебнике изложить с необходимой полнотой основы абстрактной теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, с тем, чтобы курсы по более продвинутым разделам гильбертовой теории и ее приложений могли на такой учебник опираться.

Книга адресована студентам и аспирантам, специализирующимся по анализу, математической физике и теоретической физике. Этим мы руководствовались при отборе материала, и этим определяется характер изложения.

Несколько слов об особенностях построения книги. Имея в виду потребности приложений (в частности, запросы квантовой теории), мы расширили круг вопросов, которые традиционно относят к «первому концентру» гильбертовой теории. Основное внимание уделяется неограниченным операторам. Спектральная теория строится для конечных систем перестановочных самосопряженных операторов. Дается описание унитарных инвариантов таких систем. Изложение основано на понятии пространства со спектральной мерой. В этой связи рассматривается конструкция прямого интеграла гильбертовых пространств. В книгу включены небольшие главы о качественной теории возмущений спектра (гл. 9), о полуограниченных операторах и формах (гл. 10), о классах $\mathbf{S}_p$ компактных операторов (гл. 11). Помещен раздел (гл. 8), содержащий примеры спектрального анализа дифференциальных операторов в частных производных. При этом мы, конечно, не имели в виду подменять сочинения по спектральной теории дифференциальных уравнений.*)

*) Не претендуя на полноту перечня, укажем книги Ю. М. Березанского [2], И. М. Глазмана [4], К. Морена [12].

Особо следует сказать о гл. 12, посвященной перестановочным соотношениям квантовой механики. Этот материал, по-видимому, не излагался систематически в учебной математической литературе. Вместе с тем он не только важен сам по себе, но хорошо иллюстрирует как трудности работы с неограниченными операторами, так и пути преодоления этих трудностей. Наше изложение основывается на оригинальных работах Диксмье и Нельсона, хотя не во всем следует им.

В книге рассматриваются только сепарабельные гильбертовы пространства. Мы считаем это ограничение подходящим для «первого концентра». В несепарабельном случае теория унитарных инвариантов, как известно (см. [14]), существенно усложняется.

Все сказанное отличает предлагаемую книгу от известной книги Н. И. Ахиезера и И. М. Глазмана [1]. Другие изложения спектральной теории, имеющиеся на русском языке,*) ставят эту теорию в рамки одного из разделов общего курса функционального анализа. При этом спектральная теория разрабатывается по необходимости недостаточно подробно.

Мы предполагаем, что читатель знаком с элементарным курсом функционального анализа (метрические и банаховы пространства, непрерывные операторы; подробнее см. § 1 гл. 1). Это избавляет нас от дублирования в гильбертовых терминах элементарных понятий. Особую роль в изложении играет теория меры и интеграла. В гл. 1 мы приводим «конспект» нужных сведений на этот счет.

Считаем нужным отметить, что важный и интересный материал по более специальным вопросам спектральной теории самосопряженных операторов читатель найдет в книгах Т. Като [9], П. Лакса и Р. Филлипса [10], М. Рида и Б. Саймона [15].

При ссылках в книге применяется «трехступенчатая» нумерация формул и теорем и «двухступенчатая» нумерация параграфов; в пределах главы опускается первый номер, а в пределах параграфа — также и второй.

Мы глубоко благодарны Б. М. Макарову за многочисленные и безотказные консультации по теории меры. Мы искренне признательны нашим друзьям и ученикам, помогавшим при оформлении рукописи, в первую очередь В. В. Борзову, Е. Д. Глускину, Л. С. Коплиенко, П. Е. Хмельницкому, а также Н. С. Лебедевой.

---

*) В. И. Смирнов [20], Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь [16], К. Иосида [7], У. Рудин [17].

ОСНОВНЫЕ УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\stackrel{\text{def}}{=\!=}$ — равенство по определению

$\varnothing$ — пустое множество

$\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ — множество всех вещественных чисел

$\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$

$\mathbf{Z}$ — множество всех целых чисел

$\mathbf{Z}_+$ — множество всех неотрицательных целых чисел

$\mathbf{C}$ — множество всех комплексных чисел

$\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\bar{z}$ — вещественная, мнимая части, комплексно-сопряженное число для $z \in \mathbf{C}$

$\mathbf{T}$ — единичная окружность $|z| = 1$ в $\mathbf{C}$

$\dot{+}$ — знак прямой суммы линейных подмножеств линейного пространства

$\dim$ — линейная размерность линейного пространства

H — гильбертово пространство

$\vee M$ — замыкание линейной оболочки множества M в H

$\vee_\alpha F_\alpha \stackrel{\text{def}}{=\!=} \vee(\cup_\alpha F_\alpha)$

$\vee_\alpha \{u_\alpha\}$ — замыкание линейной оболочки элементов u_α

$\oplus$, $\ominus$ — знаки ортогональной суммы и разности

$M^\perp$ — ортогональное дополнение в H множества M

$\operatorname{Def} L = \dim L^\perp$ — дефект подпространства L

$D(T)$, $R(T)$ — область определения и область значений линейного оператора T

$N(T)$ — множество нулей (ядро) оператора T

$\mathbf{B} = \mathbf{B}(H)$ — множество всех линейных непрерывных операторов в H

$\mathbf{S}_\infty = \mathbf{S}_\infty(H)$ — множество всех линейных компактных (вполне непрерывных) операторов в H

$\mathbf{K} = \mathbf{K}(H)$ — множество всех линейных операторов конечного ранга в H

$I = I_H$ — тождественное отображение в H

$\bar{T}$ — замыкание оператора T

T^* — оператор, сопряженный к T

$G(T)$ — график оператора T

$\smile$ — знак перестановочности линейных операторов

$_T(\lambda) = \mathrm{Def}\, R(T-\lambda I)$ — дефектное число оператора T

$\rho(T)$, $\hat{\rho}(T)$ — резольвентное множество и поле регулярности замкнутого оператора T

$\sigma(T)$, $\hat{\sigma}(T)$ — спектр и ядро спектра замкнутого оператора T

$\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$, $\sigma_r(T)$ — точечный, непрерывный и остаточный спектры замкнутого оператора T

$\Gamma_\lambda(T) = (T-\lambda I)^{-1}$ — резольвента оператора T

$\sigma_e(A)$, $\sigma_d(A)$ — существенный и дискретный спектры самосопряженного оператора A

$n_+(A)$, $n_-(A)$ — индексы дефекта симметричного оператора A

$n_i(V)$, $n_e(V)$ — индексы дефекта изометрического оператора V

m_A, M_A — точные нижняя и верхняя границы симметричного оператора A

○, ● — начало и конец доказательства

ГЛАВА 1

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Эта глава имеет вводный характер. Не желая в гильбертовой теории дублировать сведения из других разделов функционального анализа, мы даем в § 1 краткий перечень тех вопросов теории метрических и нормированных пространств, которые нужны для чтения книги. С ними можно ознакомиться, например, по соответствующим главам книг [7, 8, 17, 20].

Параграфы 2—5 представляют собой конспект (без доказательств) необходимых сведений по теории меры и интеграла. Формально говоря, конспект позволяет не обращаться к руководствам по теории меры и интеграла. Изложенный в нем материал покрывается, например, книгами [3, 13, 22].

В § 6 коротко говорится о некоторых функциональных классах, главным образом — о пространствах Соболева W_l^2.

§ 1. Метрические пространства. Нормированные пространства

1. Ниже кратко перечисляются те разделы элементарного курса функционального анализа, знакомство с которыми предполагается при чтении этой книги.

Метрические пространства. Сходимость. Полнота. Пополнение метрического пространства. Принцип сжатых отображений. Сепарабельность. Компактные метрические пространства (компакты). Теорема Хаусдорфа об ε-сетях.

Линейные пространства. Линейная независимость. Линейная размерность. Фактор-пространства. Алгебры. Инволюция.*) Идеалы, фактор-алгебры.

Нормированные пространства. Сходимость рядов. Эквивалентные нормы. Полнота и теорема о пополнении. Банаховы пространства. Понятие банаховой алгебры. Пространство $C(K)$ непрерывных функций на компакте K.

*) В алгебре X над полем $\mathbf{C}$ инволюцией называется отображение $J: X \to X$, такое, что $J(\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha} J(x) + \bar{\beta} J(y)$, $J(xy) = J(y) J(x)$, $J(J(x)) = x$; $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$.

Линейные непрерывные функционалы и операторы. Норма оператора. Пространство $\mathbf{B}(X, Y)$ линейных непрерывных отображений банахова пространства X в банахово пространство Y. Банахова алгебра $\mathbf{B}(X) = \mathbf{B}(X, X)$. Компактные (вполне непрерывные) операторы.

Принцип равномерной ограниченности. Сильная сходимость операторов.

Сопряженное пространство. Рефлексивность. Теорема Рисса о представлении функционалов над пространством непрерывных функций (на отрезке, на окружности).

Слабая сходимость. Слабая полнота рефлексивного пространства. Теорема: ограниченная последовательность функционалов над сепарабельным банаховым пространством содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.

2. Знакомство с теорией линейных неограниченных операторов в банаховых пространствах, а также с теорией топологических пространств не предполагается (хотя самого термина «топология» мы не избегаем).

3. Остановимся на одном специальном вопросе теории банаховых пространств. Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и пусть $D \subset X$ — линейное множество. Предположим, что на D определена другая норма $|\cdot|$, которая превращает D в нормированное пространство, вообще говоря, не полное. Предположим также, что

$$\|x\| \leqslant c|x|, \quad c > 0, \quad \forall x \in D. \tag{1}$$

Применяя к D стандартную процедуру пополнения, зададимся вопросом, когда банахово пространство $\widetilde{D}$ — пополнение D — может быть реализовано как подмножество в X (иначе говоря, когда $\widetilde{D}$ топологически вкладывается в X).

Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная по норме $|\cdot|$ последовательность из D и $d \in \widetilde{D}$ — соответствующий элемент пополнения. Из (1) вытекает, что $\{x_n\}$ фундаментальна также по норме $\|\cdot\|$. Поскольку X — полное пространство, $\{x_n\}$ имеет предел $x \in X$. Легко видеть, что предел $x = x(d)$ зависит лишь от элемента d, но не от определяющей его последовательности $\{x_n\}$. Отображение $J: d \mapsto x(d)$ линейно и в силу (1) непрерывно. Если при этом элементы $x(d)$ различны для различных d, то можно отождествить d и $x(d)$, реализуя тем самым $\widetilde{D}$ как подмножество в X. В этом случае говорят, что нормы $\|\cdot\|$, $|\cdot|$ *топологически согласованы*. Топологическая согласованность означает, что оператор J имеет нулевое ядро. Иначе говоря, *для тополо-*

гической согласованности норм $\|\cdot\|$, $|\cdot|$ *при условии* (1) *необходимо и достаточно, чтобы при* $|x_n - x_m| \xrightarrow[m,\, n\to\infty]{} 0$, $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *выполнялось* $|x_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Если ядро отображения J не нулевое, то нормы $\|\cdot\|$, $|\cdot|$ называют топологически не согласованными. В этом случае нет естественного вложения пространства $\widetilde{D}$ в X.

§ 2. Алгебры и σ-алгебры множеств

Пусть Y — какое-либо множество. Символом 2^Y обозначается множество всех его подмножеств.

1. Множество $\mathfrak{A}^0 \subset 2^Y$ называется *алгеброй подмножеств* Y, если оно содержит Y, пустое множество $\varnothing$ и если при δ_1, $\delta_2 \in \mathfrak{A}^0$ также $\delta_1 \cup \delta_2 \in \mathfrak{A}^0$, $\delta_1 \setminus \delta_2 \in \mathfrak{A}^0$ (а тогда и $\delta_1 \cap \delta_2 \in \mathfrak{A}^0$).

2. Пусть $\mathfrak{M} \subset 2^Y$. Всегда существует наименьшая алгебра подмножеств Y, содержащая $\mathfrak{M}$, т. е. такая алгебра $\mathfrak{A}^0_{\mathfrak{M}} \subset 2^Y$, что $\mathfrak{A}^0_{\mathfrak{M}} \supset \mathfrak{M}$ и для любой алгебры $\mathfrak{A}^0 \subset 2^Y$, $\mathfrak{A}^0 \supset \mathfrak{M}$, выполнено $\mathfrak{A}^0 \supset \mathfrak{A}^0_{\mathfrak{M}}$. Элементы алгебры $\mathfrak{A}^0_{\mathfrak{M}}$ допускают конструктивное описание в терминах исходного множества $\mathfrak{M}$, именно любое множество $\Delta \in \mathfrak{A}^0_{\mathfrak{M}}$ имеет представление вида

$$\Delta = \bigcup\nolimits_{1<k<n} \bigcap\nolimits_{1<l<m} \delta_{kl}, \tag{1}$$

где для каждого из множеств δ_{kl} либо $\delta_{kl} \in \mathfrak{M}$, либо $Y \setminus \delta_{kl} \in \mathfrak{M}$

Об алгебре $\mathfrak{A}^0_m$ говорят, что она *порождена семейством* $\mathfrak{M}$.

3. Алгебра $\mathfrak{A} \subset 2^Y$ называется *σ-алгеброй подмножеств* Y если она замкнута относительно счетных объединений: из $\delta_k \in \mathfrak{A}$, $k = 1, 2, \ldots$, следует $\bigcup_k \delta_k \in \mathfrak{A}$. Всякая σ-алгебра замкнута также относительно счетных пересечений.

4. Для любого $\mathfrak{M} \subset 2^Y$ существует наименьшая σ-алгебра $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}} \subset 2^Y$, содержащая $\mathfrak{M}$. Об этой σ-алгебре говорят, что она *порождена семейством* $\mathfrak{M}$.

В отличие от алгебры $\mathfrak{A}^0_{\mathfrak{M}}$ σ-алгебра $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$, вообще говоря, не допускает конструктивного описания, аналогичного (1).

5. Пара $(Y, \mathfrak{A})$, где $\mathfrak{A}$ — фиксированная σ-алгебра подмножеств Y, называется *измеримым пространством*. Множества $\delta \in \mathfrak{A}$ называются *измеримыми* (точнее, $\mathfrak{A}$-*измеримыми*).

6. Пусть $(Y_1, \mathfrak{A}_1)$, $(Y_2, \mathfrak{A}_2)$ — измеримые пространства. Подмножества в $Y_1 \times Y_2$ вида $\Delta = \delta_1 \times \delta_2$, где $\delta_i \in \mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2$, называются *измеримыми прямоугольниками*. Множество всех измеримых прямоугольников порождает σ-алгебру, которая называется произведением σ-алгебр $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$.

7. Пусть Y — полное сепарабельное метрическое пространство и $\mathfrak{M}$ — множество всех замкнутых шаров в Y. Соответствующую σ-алгебру $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$ обозначим через $\mathfrak{A}^B(Y)$. Множества

$\delta \in \mathfrak{A}^B(Y)$ называются *борелевскими*. Все открытые (и, следовательно, все замкнутые) множества в Y — борелевские.

8. Пусть Y_1, Y_2 — полные сепарабельные метрические пространства и пусть в $Y = Y_1 \times Y_2$ введена какая-либо метрика, согласованная с топологией прямого произведения; например, для $y, \tilde{y} \in Y$ можно положить $\rho_Y(y, \tilde{y}) = \max(\rho_{Y_1}(y_1, \tilde{y}_1), \rho_{Y_2}(y_2, \tilde{y}_2))$. Пространство Y полно и сепарабельно. Произведение σ-алгебр $\mathfrak{A}^B(Y_1)$, $\mathfrak{A}^B(Y_2)$ совпадает с $\mathfrak{A}^B(Y_1 \times Y_2)$.

Сказанное в пп. 6, 8 распространяется на случай любого конечного числа «перемножаемых» пространств.

9. В m-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^m$ σ-алгебра $\mathfrak{A}^B(\mathbf{R}^m)$ порождается множеством всех конечных полуоткрытых прямоугольников $[a_1, b_1) \times \ldots \times [a_m, b_m)$. Достаточно и таких прямоугольников, у которых a_i, b_i $(i = 1, \ldots, m)$ рациональны.

В m-мерном комплексном евклидовом пространстве $\mathbf{C}^m$ σ-алгебра $\mathfrak{A}^{B}(\mathbf{C}^m)$ совпадает с $\mathfrak{A}^B(\mathbf{R}^{2m})$ при естественном отождествлении $\mathbf{C}^m$ с $\mathbf{R}^{2m}$.

§ 3. Счетно-аддитивные функции и меры

1. Пусть $\mathfrak{A}^0$ — алгебра подмножеств Y. Пусть отображение μ^0: $\mathfrak{A}^0 \to [0, \infty]$ удовлетворяет условию *аддитивности* (конечной аддитивности)

$$\mu^0(\delta_1 \cup \delta_2) = \mu^0(\delta_1) + \mu^0(\delta_2) \quad (\delta_1, \delta_2 \in \mathfrak{A}^0;\ \delta_1 \cap \delta_2 = \varnothing).$$

Тогда говорят, что μ^0 — (неотрицательная) *аддитивная функция на* $(Y, \mathfrak{A}^0)$.

Если μ^0 — аддитивная функция, то из $\delta, \delta' \in \mathfrak{A}^0$, $\delta \subset \delta'$, следует $\mu^0(\delta) \leqslant \mu^0(\delta')$. В частности, $\mu^0(\delta) \leqslant \mu^0(Y)$. Если μ^0 принимает хотя бы одно конечное значение, то $\mu^0(\varnothing) = 0$.

2. Неотрицательная аддитивная функция μ^0, определенная на $(Y, \mathfrak{A}^0)$, называется *счетно-аддитивной*, если для любой последовательности попарно не пересекающихся множеств $\delta_k \in \mathfrak{A}^0$, $k = 1, 2, \ldots$, такой, что $\bigcup_k \delta_k \in \mathfrak{A}^0$, выполняется

$$\mu^0(\bigcup_k \delta_k) = \sum_k \mu^0(\delta_k). \tag{1}$$

3. Счетно-аддитивная функция μ^0 называется *конечной*, если $\mu^0(Y) < \infty$, и *σ-конечной*, если Y есть объединение счетного числа подмножеств $\delta_k \in \mathfrak{A}^0$, $k = 1, 2, \ldots$, таких, что $\mu^0(\delta_k) < \infty$, $\forall k$. Если функция μ^0 σ-конечна, то заведомо $\mu^0(\varnothing) = 0$.

Всюду в дальнейшем рассматриваются только σ-конечные (в частности, конечные) счетно-аддитивные функции.

4. Последовательность множеств $\delta_k \subset Y$, $k = 1, 2, \ldots$, называется *расширяющейся*, если $\delta_1 \subset \delta_2 \subset \ldots$, и *вложенной*, если $\delta_1 \supset \delta_2 \supset \ldots$

Пусть μ^0 — счетно-аддитивная функция на $(Y, \mathfrak{A}^0)$ и пусть $\{\delta_k\}$, $k=1, 2, \ldots,$ — расширяющаяся последовательность множеств из $\mathfrak{A}^0$, такая, что $\delta = \bigcup_k \delta_k \in \mathfrak{A}^0$. Тогда $\mu^0(\delta) = \lim \mu^0(\delta_k)$.

Если $\{\delta_k\}$, $k=1, 2, \ldots,$ — вложенная последовательность множеств из $\mathfrak{A}^0$, такая, что $\mu^0(\delta_1) < \infty$, и $\delta = \bigcap_k \delta_k \in \mathfrak{A}^0$, то $\mu^0(\delta) = \lim \mu^0(\delta_k)$.

5. Пусть μ^0 — счетно-аддитивная функция на $(Y, \mathfrak{A}^0)$ и пусть $\{\delta_k\}$, $k=1, 2, \ldots,$ — вложенная последовательность множеств из $\mathfrak{A}^0$, такая, что $\mu^0(\delta_1) < \infty$ и $\bigcap_k \delta_k = \varnothing$. Тогда $\mu^0(\delta_k) \to 0$. Этот частный случай предыдущего свойства называется свойством *нормальности* счетно-аддитивной функции.

Обратно, если неотрицательная аддитивная функция μ^0 на $(Y, \mathfrak{A}^0)$ нормальна и $\mu^0(Y) < \infty$, то она счетно-аддитивна.

6. Неотрицательная счетно-аддитивная функция, заданная на σ-алгебре $\mathfrak{A} \subset 2^Y$, называется *мерой*. Тройка $(Y, \mathfrak{A}, \mu)$, где $(Y, \mathfrak{A})$ — измеримое пространство и μ — мера на $(Y, \mathfrak{A})$, называется *пространством с мерой.*

Иногда будем говорить (не вполне точно), что μ — мера на Y. Множества $\delta \in \mathfrak{A}$ (т. е. $\mathfrak{A}$-измеримые множества) будем называть также μ-*измеримыми.*

Если μ — мера, то в определении свойства счетной аддитивности (п. 2) априорное предположение $\bigcup_k \delta_k \in \mathfrak{A}$ не требуется: нужное включение выполнено в силу того, что $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра. Аналогично, в формулировках свойств п. 4 исчезает необходимость в предположении $\delta \in \mathfrak{A}$.

На меры переносится терминология из п. 3: конечные меры, σ-конечные меры. *Всюду в дальнейшем рассматриваются только σ-конечные (в частности конечные) меры.*

7. Мера μ называется *N-полной*,*) если любое подмножество множества меры нуль измеримо.

8. Через $\delta_1 \triangle \delta_2$ обозначается *симметрическая разность* множеств $\delta_1, \delta_2 \subset Y$:

$$\delta_1 \triangle \delta_2 = (\delta_1 \setminus \delta_2) \cup (\delta_2 \setminus \delta_1).$$

Если $\delta_1, \delta_2 \in \mathfrak{A}$ и $\mu(\delta_1 \triangle \delta_2) = 0$, то говорят, что δ_1, δ_2 совпадают с точностью до подмножеств меры нуль. В интересующих нас вопросах такие множества можно не различать.

9. Пусть $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{A}$ и пусть для любого $\delta \in \mathfrak{A}$, $\mu(\delta) < \infty$, по всякому $\varepsilon > 0$ найдется множество $\delta_\varepsilon \in \mathfrak{M}$, такое, что $\mu(\delta \triangle \delta_\varepsilon) < \varepsilon$. Тогда говорят, что $\mathfrak{M}$ — *база* для меры μ.

Если для меры μ существует *счетная база* $\mathfrak{M}$, то говорят, что *пространство с мерой* $(Y, \mathfrak{A}, \mu)$ *сепарабельно*. Вместе с $\mathfrak{M}$ алгебра $\mathfrak{A}^0_{\mathfrak{M}}$ (см. § 2, п. 2) — также счетная база для μ.

10. В пп. 10—16 обсуждается задача о распространении счетно-аддитивной функции до меры.

*) Обычный термин — полная мера — нам неудобен, так как вызывает опасность терминологических смешений.

Пусть $\mathfrak{A}^0 \subset \widetilde{\mathfrak{A}} \subset 2^Y$, причем $\mathfrak{A}^0$ — алгебра, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — σ-алгебра. Пусть μ^0 — счетно-аддитивная функция на $(Y, \mathfrak{A}^0)$, $\tilde{\mu}$ — мера на $(Y, \widetilde{\mathfrak{A}})$, причем $\tilde{\mu}(\delta) = \mu^0(\delta)$, $\forall \delta \in \mathfrak{A}^0$. Тогда мера $\tilde{\mu}$ называется *продолжением (распространением)* счетно-аддитивной функции μ^0.

11. Пусть $\mathfrak{A}^0 \subset 2^Y$ — алгебра и μ^0 — счетно-аддитивная функция на $(Y, \mathfrak{A}^0)$. Обозначим через $\mathfrak{A}^1$ множество тех $\delta \subset Y$, которые допускают счетное разложение*) на подмножества $\delta_k \in \mathfrak{A}^0$. Положим

$$\mu^1(\delta) = \sum_k \mu^0(\delta_k), \quad \forall \delta \in \mathfrak{A}^1. \tag{2}$$

Сумма в (2) не зависит от способа разложения.

Пусть Δ—произвольное подмножество в Y. Величина

$$\hat{\mu}(\Delta) = \inf\{\mu^1(\delta) : \delta \supset \Delta,\ \delta \in \mathfrak{A}^1\}$$

называется *внешней мерой* множества Δ. Рассмотрим те множества $\partial \subset Y$, для которых при любом $\Delta \subset Y$

$$\hat{\mu}(\Delta) = \hat{\mu}(\Delta \cap \partial) + \hat{\mu}(\Delta \setminus \partial) \quad (\forall \Delta \subset Y). \tag{3}$$

Совокупность всех таких множеств ∂ обозначим через $\mathfrak{A}(\mu^0)$.

Теорема 1. *$\mathfrak{A}(\mu^0)$ есть σ-алгебра, содержащая алгебру $\mathfrak{A}^0$. Сужение на $\mathfrak{A}(\mu^0)$ внешней меры $\hat{\mu}$ представляет собой N-полную меру μ, являющуюся продолжением μ^0.*

Описанный процесс распространения (а также сама полученная мера μ) называется *стандартным продолжением* (продолжением по Каратеодори) счетно-аддитивной функции μ^0 до меры.

Отметим, что $\mathfrak{A}^1 \subset \mathfrak{A}(\mu^0)$ и $\mu(\delta) = \mu^1(\delta)$, $\forall \delta \in \mathfrak{A}^1$.

12. Если $\mu^0(Y) < \infty$, то систему равенств (3) можно заменить одним условием:

$$\mu^0(Y) = \hat{\mu}(\partial) + \hat{\mu}(Y \setminus \partial).$$

13. Стандартное продолжение μ функции μ^0 обладает следующим свойством *минимальности*. Пусть N-полная мера $\tilde{\mu}$ является продолжением μ^0 на некоторую σ-алгебру $\widetilde{\mathfrak{A}}$. Тогда $\widetilde{\mathfrak{A}} \supset \mathfrak{A}(\mu^0)$ и $\tilde{\mu}$ совпадает с μ на $\mathfrak{A}(\mu^0)$.

Обозначим через $\mathfrak{A}^0_{min}$ σ-алгебру, порожденную (см. § 2, п. 4) алгеброй $\mathfrak{A}^0$. Любое (не обязательно N-полное) продолжение функции μ^0 до меры совпадает на $\mathfrak{A}^0_{min}$ с μ.

---

*) Разложением δ называется любое представление вида $\delta = \bigcup_k \delta_k$, в котором множества δ_k попарно не пересекаются.

14. Пусть μ — мера на измеримом пространстве $(Y, \mathfrak{A})$ и $\mathfrak{A}^0 \subset \mathfrak{A}$ — произвольная алгебра, такая, что $\mathfrak{A}^0_{\min} = \mathfrak{A}$. Тогда любая мера, являющаяся продолжением счетно-аддитивной функции $\mu^0 = \mu|_{\mathfrak{A}^0}$, совпадает на $\mathfrak{A}$ с μ.

Если $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{A}$ порождает $\mathfrak{A}$, то алгебра $\mathfrak{A}^0_{\mathfrak{M}}$ (см. § 2, п. 2) является для меры μ базой.

15. Пусть μ^0 — счетно-аддитивная функция на алгебре $\mathfrak{A}_0$ и мера μ — ее стандартное продолжение. Для любого $\delta \in \mathfrak{A}(\mu^0)$ найдется множество $\partial \in \mathfrak{A}^0_{\min}$, такое, что $\partial \supset \delta$ и $\mu(\partial \setminus \delta) = 0$.

16. Пусть исходная алгебра $\mathfrak{A}^0$ сама есть σ-алгебра (тем самым, μ^0 — уже мера). Тогда, в соответствии с п. 15, для любого $\delta \in \mathfrak{A}(\mu^0)$ найдется множество $\partial \in \mathfrak{A}^0$, такое, что $\partial \supset \delta$ и $\mu(\partial \setminus \delta) = 0$. Иными словами, стандартное продолжение меры сводится к такому увеличению запаса множеств меры нуль, при котором мера становится N-полной (т. е. к пополнению меры).

17. Пусть $(Y_i, \mathfrak{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, — пространства с мерой. На измеримых прямоугольниках $\delta_1 \times \delta_2$ (см. § 2, п. 6) определим функцию μ^0 равенством $\mu^0(\delta_1 \times \delta_2) = \mu_1(\delta_1)\mu_2(\delta_2)$. По аддитивности μ^0 распространяется на алгебру, порожденную измеримыми прямоугольниками. На этой алгебре функция μ^0 счетно-аддитивна. Ее стандартное продолжение называется *произведением мер* μ_1, μ_2 и обозначается $\mu_1 \times \mu_2$. Иногда под произведением мер понимается не сама мера $\mu_1 \times \mu_2$, а ее сужение на минимальную σ-алгебру, порожденную измеримыми прямоугольниками. Эта разница всегда ясна из контекста.

18. Пусть Y—полное сепарабельное метрическое пространство. Любая σ-конечная мера μ, заданная на σ-алгебре борелевских множеств $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^B(Y)$ (см. § 2, п. 7), называется *борелевской*.

В пп. 19—23 $(Y, \mathfrak{A}, \mu)$ — полное сепарабельное метрическое пространство с борелевской мерой.

19. Пусть мера μ конечна и пусть $\mathfrak{M}$ — множество всевозможных замкнутых шаров в Y, центры которых пробегают счетное плотное в Y множество, а радиусы рациональны. Тогда $\mathfrak{A}^0_{\mathfrak{M}}$ — счетная база для μ. Таким образом, *конечная борелевская мера имеет счетную базу*.

20. Для любой борелевской меры μ существует *носитель*— наименьшее замкнутое множество $F \subset Y$, такое, что $\mu(Y \setminus F) = 0$. Точка $y \in Y$ принадлежит носителю в том и только том случае, если мера любой ее окрестности положительна. Носитель меры μ обозначается символом $\operatorname{supp} \mu$.

21. Множество $M \subset Y$ называется σ-компактным, если его можно представить в виде счетного объедннения компактов. Для борелевской меры μ существует такое σ-компактное множество $M \subset Y$, что $\mu(Y \setminus M) = 0$.

22. Для любого $\delta \in \mathfrak{A}^B(Y)$ справедливо равенство

$$\mu(\delta) = \sup \{\mu(\partial) : \partial \subset \delta;\ \partial \text{ — компакт в } Y\}.$$

23. Пусть $\mathfrak{A}^0 \subset \mathfrak{A}^B(Y)$ — какая-либо алгебра и μ^0 — неотрицательная аддитивная функция на $(Y, \mathfrak{A}^0)$. Пусть для каждого $\delta \in \mathfrak{A}^0$

$$\mu^0(\delta) = \sup \{\mu^0(\partial) : \bar{\partial} \subset \delta,\ \partial \in \mathfrak{A}^0,\ \bar{\partial} \text{ — компакт в } Y\}.$$

Тогда функция μ^0 счетно-аддитивна на $(Y, \mathfrak{A}^0)$.

24. Следующая конструкция позволяет построить борелевскую меру на прямой $\mathbf{R}$ по заданной неубывающей, непрерывной слева функции $g(s)$, $s \in \mathbf{R}$. Для промежутков $\delta = [\alpha, \beta)$ положим

$$\mu^0(\delta) = g(\beta) - g(\alpha), \quad -\infty < \alpha \leqslant \beta < \infty. \tag{4}$$

Для $\delta = [\alpha, \infty)$, $\delta = (-\infty, \beta)$ функцию $\mu^0(\delta)$ определим посредством предельного перехода в (4). По аддитивности функция μ^0 распространяется на алгебру $\mathfrak{A}^0$, образованную всевозможными конечными объединениями этих промежутков. Такое распространение является аддитивной, а потому (см. п. 23) и счетно-аддитивной функцией на $\mathfrak{A}^0$. Следовательно, функция μ^0 однозначно распространяется до борелевской меры на $\mathbf{R}$.

§ 4. Измеримые функции

1. Пусть $(Y, \mathfrak{A})$ — измеримое пространство. Функция φ: $Y \to \mathbf{C}$ называется *измеримой* (*$\mathfrak{A}$-измеримой*), если измеримы прообразы всех борелевских множеств $\delta \subset \mathbf{C}$, т. е. если $\varphi^{-1}(\delta) \in \mathfrak{A}$ для любого $\delta \in \mathfrak{A}^B(\mathbf{C})$. Измеримость множеств $\varphi^{-1}(\delta)$ достаточно проверять, например, для кругов $\delta \subset \mathbf{C}$.

Относительно линейных операций над функциями и умножения функций множество всех $\mathfrak{A}$-измеримых функций образует алгебру. Предел сходящейся поточечно последовательности измеримых функций измерим.

2. Ниже $(Y, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой. В этом случае $\mathfrak{A}$-измеримые функции называют также μ-измеримыми.

Измеримые функции φ, ψ называются *μ-эквивалентными* ($\varphi \sim \psi$), если они совпадают μ-почти везде (μ-п. в.); последнее означает, что $\mu\{y \in Y : \varphi(y) \neq \psi(y)\} = 0$. В большинстве случаев μ-эквивалентные функции естественно отождествлять; это соответствует переходу от алгебры измеримых функций к ее фактор-алгебре по идеалу функций $\varphi \sim 0$. При этом можно исходить из измеримых функций, определенных не везде, а лишь μ-п. в. на Y.

Множество (алгебра) μ-измеримых функций на Y, определенных с точностью до μ-эквивалентности, обозначается через $S(Y, \mu)$.

Для вещественных измеримых функций иногда допускают несобственные значения $\pm\infty$. В этой связи говорят о *μ-п. в. ко-*

нечных функциях, если несобственные значения принимаются лишь на множестве меры нуль.

3. Пусть пространство с мерой $(Y, \mathfrak{A}, \mu)$ получено при стандартном продолжении счетно-аддитивной функции μ^0, заданной на какой-либо алгебре $\mathfrak{A}^0 \subset 2^Y$, и пусть $\mathfrak{A}^0_{\min}$ — σ-алгебра, порожденная алгеброй $\mathfrak{A}^0$. Для любой μ-измеримой функции φ найдется $\mathfrak{A}^0_{\min}$-измеримая функция φ_0, такая, что $\varphi \sim \varphi_0$ (это следует из § 3, п. 15). Поэтому в тех вопросах, где замена функции на эквивалентную не играет роли, можно ограничиться распространением μ^0 лишь на σ-алгебру $\mathfrak{A}^0_{\min}$.

4. Для вещественных μ-измеримых функций определяются величины $\mu\text{-}\sup \varphi$, $\mu\text{-}\inf \varphi$. Например,

$$\mu\text{-}\sup \varphi \overset{\text{def}}{=} \inf \{\alpha \in \mathbf{R} : \varphi(y) \leqslant \alpha, \ \mu\text{-п. в. } y \in Y\}.$$

Измеримая функция φ называется *μ-ограниченной*, если $\mu\text{-}\sup|\varphi| < \infty$. Относительно обычных операций над функциями и нормы

$$\|\varphi\|_{L_\infty} = \mu\text{-}\sup|\varphi| \tag{1}$$

множество (классов эквивалентных) μ-ограниченных функций образует банахову алгебру, которая обозначается через $L_\infty(Y, \mu)$. Алгебра $L_\infty(Y, \mu)$—коммутативная алгебра с инволюцией $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$ и единицей 1 $(1(y) = 1$, μ-п. в. $y \in Y)$.

5. Ограниченная $\mathfrak{A}$-измеримая функция называется *простой*, если она принимает лишь конечное множество значений. Пусть φ — простая функция; пусть c_j—ее значения, принимаемые на множествах δ_j, $j = 1, \ldots, n$, образующих разложение Y. Для φ справедливо представление

$$\varphi = \sum\nolimits_1^n c_j \chi_{\delta_j}, \tag{2}$$

где через χ_δ обозначена характеристическая функция множества δ.

Если $(Y, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой, то простыми будем называть также функции, μ-эквивалентные функциям (2). *Множество* $\Pi(Y, \mu)$ *всех простых функций является подалгеброй в $L_\infty(Y, \mu)$, плотной в $L_\infty(Y, \mu)$ относительно нормы* (1).

6. Пусть Y—полное сепарабельное метрическое пространство. Любая непрерывная функция на Y измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}^B(Y)$.

§ 5. Интегрирование

Здесь намечена схема построения интеграла, которую мы перенесем затем в теорию интегрирования по спектральной мере (гл. 5). Другие факты приведены лишь постольку, поскольку это удобно для ссылок.

На протяжении этого параграфа $(Y, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с σ-конечной (не обязательно N-полной) мерой. В обозначении $\int\varphi d\mu$ подразумевается интегрирование по Y. Эквивалентные функции отождествляются.

1. Пусть мера μ конечна и $\varphi\in\Pi(Y, \mu)$, т. е. φ имеет вид (4 2). Тогда по определению

$$\int\varphi d\mu=\sum\nolimits_1^n c_j\mu(\delta_j).$$

Определение корректно. Из него непосредственно вытекает оценка

$$\left|\int\varphi d\mu\right|\leqslant\|\varphi\|_{L_\infty}\mu(Y). \tag{1}$$

2. Пусть мера μ конечна. Оценка (1) позволяет по непрерывности распространить интеграл с класса $\Pi(Y, \mu)$ на весь класс $L_\infty(Y, \mu)$: для $\varphi\in L_\infty(Y, \mu)$ полагают

$$\int\varphi d\mu=\lim\int\varphi_k d\mu, \tag{2}$$

где $\{\varphi_k\}$ — произвольная последовательность функций из $\Pi(Y, \mu)$, сходящаяся в $L_\infty(Y, \mu)$ к φ. Предел в (2) не зависит от выбора последовательности $\{\varphi_k\}$. Оценка (1) переносится на любые $\varphi\in L_\infty(Y, \mu)$.

3. Везде в дальнейшем μ—произвольная σ-конечная мера. Обозначим через $S_+=S_+(Y, \mu)$ конус неотрицательных функций $\varphi\in S(Y, \mu)$. Для $\varphi\in S_+$ интеграл определяется формулой

$$\int\varphi d\mu=\lim\int_{Y_k}\varphi_k d\mu, \tag{3}$$

где $\{Y_k\}$ — произвольная расширяющаяся последовательность измеримых подмножеств Y, такая, что $\mu(Y_k)<\infty$ $(\forall k)$ и $\bigcup_k Y_k=Y$; $\{\varphi_k\}$ — произвольная последовательность функций из $L_\infty(Y, \mu)$, сходящаяся μ-п.в. на Y к φ и удовлетворяющая условию $0\leqslant\varphi_k(y)\leqslant\varphi(y)$ ($\forall k$; μ-п.в. $y\in Y$). Предел в (3) не зависит от выбора последовательностей $\{Y_k\}$, $\{\varphi_k\}$.

Бесконечное значение интеграла не исключается

4. Функция $\varphi\in S(Y, \mu)$ принадлежит пространству $L_1(Y, \mu)$, если

$$\|\varphi\|_{L_1}\overset{\text{def}}{=}\int|\varphi|\,d\mu<\infty. \tag{4}$$

Для $\varphi\in L_1(Y, \mu)$ интеграл определяется формулой (3), где $\{Y_k\}$ — такая же последовательность, как в п. 3, а $\{\varphi_k\}$ — произвольная последовательность функций из $L_\infty(Y, \mu)$, сходящаяся μ-п.в. на Y к φ и удовлетворяющая условию $0\leqslant|\varphi_k(y)|\leqslant|\varphi(y)|$ ($\forall k$, μ-п в. $y\in Y$). Для любой функции $\varphi\in L_1$ предел существует и не зависит от выбора $\{Y_k\}$, $\{\varphi_k\}$. Справедлива оценка

$$\left|\int\varphi d\mu\right|\leqslant\|\varphi\|_{L_1}.$$

5. Функция $\varphi \in S(Y, \mu)$ принадлежит пространству $L_p(Y, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, если

$$\|\varphi\|_{L_p} \stackrel{\text{def}}{=} \left[\int |\varphi|^p \, d\mu\right]^{1/p} < \infty. \tag{5}$$

Для $p = 1$ это совпадает с определением п. 4. Относительно линейных операций над функциями и нормы (5) классы L_p представляют собой банаховы пространства. Хотя элементами пространств L_p фактически являются классы μ-эквивалентных функций, в соответствии с традицией будем говорить об элементах L_p как о функциях.

6. Множество $\Pi(Y, \mu) \cap L_p(Y, \mu)$ плотно в $L_p(Y, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$. Иными словами, в L_p плотны линейные комбинации характеристических функций измеримых множеств конечной меры.

Если Y — полное сепарабельное метрическое пространство и мера μ конечная и борелевская, то в $L_p(Y, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, плотно множество $C(Y) \cap L_p(Y, \mu)$.

7. Теорема Лебега о предельном переходе. *Пусть* $\varphi_k \in L_1(Y, \mu)$, $k = 1, 2, \ldots$, $\varphi_k \to \varphi$ (μ-*п. в.*) *и существует функция* $\Phi \in L_1(Y, \mu)$, *такая, что* $|\varphi_k(y)| \leqslant |\Phi(y)|$ ($\forall k$; μ-*п. в.* $y \in Y$). *Тогда* $\varphi \in L_1(Y, \mu)$ *и* $\int \varphi_k d\mu \to \int \varphi d\mu$.

В частности, если мера μ конечна, условие теоремы выполнено при $\Phi = \text{const}$.

8. Теорема Фату. *Пусть* $\varphi_k \in S_+(Y, \mu)$, $k = 1, 2, \ldots$, $\varphi_k \to \varphi$ (μ-*п. в.*). *Тогда*

$$\int \varphi d\mu \leqslant \liminf \int \varphi_k d\mu.$$

9. Пусть $(Y, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой, Z — произвольное множество и пусть задано отображение $\pi: Y \to Z$, такое, что $\pi(Y) = Z$. Отображение π индуцирует на Z структуру пространства с мерой. Именно $\mathfrak{A}' = \{\partial \subset Z : \pi^{-1}(\partial) \in \mathfrak{A}\}$ — σ-алгебра подмножеств Z и $\mu'(\partial) = \mu[\pi^{-1}(\partial)]$ — мера на $(Z, \mathfrak{A}')$. Включения $\varphi \in S(Z, \mu')$ и*) $\varphi \circ \pi \in S(Y, \mu)$, а также $\varphi \in L_1(Z, \mu')$ и $\varphi \circ \pi \in L_1(Y, \mu)$ равносильны. Для функций φ из $S_+(Z, \mu')$ и из $L_1(Z, \mu')$ справедливо равенство

$$\int_Z \varphi d\mu' = \int_Y (\varphi \circ \pi) \, d\mu.$$

10. Пусть $\psi \in S_+(Y, \mu)$. Тогда функция множества

$$\tau(\delta) = \tau_\psi(\delta) = \int_\delta \psi d\mu, \quad \forall \delta \in \mathfrak{A}, \tag{6}$$

является мерой на $(Y, \mathfrak{A})$. Мера τ обладает тем свойством, что из $\mu(\delta) = 0$ вытекает $\tau(\delta) = 0$.

---

*) Как обычно, $(\varphi \circ \pi)(y) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi[\pi(y)]$.

11. Пусть $(Y, \mathfrak{A})$ — измеримое пространство, μ, τ — σ-конечные меры на $\mathfrak{A}$ и пусть $\tau(\delta)=0$ для любого множества $\delta \in \mathfrak{A}$, такого, что $\mu(\delta)=0$. Тогда говорят, что *мера* τ *абсолютно непрерывна относительно меры* μ (или что τ *подчинена* μ) и пишут $\tau \prec \mu$. Таким образом, любая мера τ_ψ, $\psi \in S_+(Y, \mu)$, подчинена μ.

Верно и обратное утверждение.

12. Теорема Радона — Никодима. *Пусть* τ, μ — σ*-конечные меры на* $(Y, \mathfrak{A})$ *и* $\tau \prec \mu$. *Тогда существует единственная (с точностью до* μ*-эквивалентности) функция* $\psi \in S_+(Y, \mu)$, *такая, что* τ *представляется формулой* (6).

Функцию ψ, о которой идет речь в теореме, называют *производной* (производной Радона — Никодима) *меры* τ *по мере* μ и обозначают $\psi = d\tau/d\mu$. Мера τ конечна в том и только том случае, если $d\tau/d\mu \in L_1(Y, \mu)$.

13. Множество $\{y \in Y : (d\tau/d\mu)(y) \neq 0\}$ называют *носителем меры* τ *по отношению к мере* μ. Носитель определен с точностью до подмножества μ-меры нуль. Введенное понятие не следует смешивать с понятием носителя (supp) борелевской меры, которое было определено в § 3, п. 20.

14. Если $\tau \prec \mu$ и $\mu \prec \tau$, то меры μ, τ называют *эквивалентными* и пишут $\mu \sim \tau$. Для эквивалентных мер совокупность множеств меры нуль одна и та же. Если $\tau \prec \mu$, то $\tau \sim \mu$ тогда и только тогда, когда μ-п.в. $d\tau/d\mu \neq 0$. При этом $(d\tau/d\mu) \times (d\mu/d\tau) = 1$ (μ-п.в.).

Отношение $\sim$ рефлексивно, симметрично и транзитивно. Соответствующие классы эквивалентных мер называются *типами*. Тип меры обозначается $[\mu]$. На типы переносится отношение подчиненности $\prec$: $[\tau] \prec [\mu]$ означает, что для каких-либо (а тогда и для любых) мер $\mu \in [\mu]$, $\tau \in [\tau]$ выполняется $\tau \prec \mu$.

15. Пусть $\tau \prec \mu$, или, что то же, для τ справедливо представление (6). Пусть $\varphi \in S_+(Y, \tau)$ либо $\varphi \in L_1(Y, \tau)$. Тогда имеет место равенство

$$\int \varphi d\tau = \int \varphi \psi d\mu, \quad \text{где } \psi = d\tau/d\mu. \tag{7}$$

Функция φ в (7) определена τ-п.в., но, вообще говоря, не μ-п.в. на Y. В таких случаях вне носителя меры τ подынтегральную функцию в правой части (7) доопределяют нулем; это согласуется с тем, что $\psi(y)=0$ μ-п.в. вне носителя τ (см. п. 13).

16. Пусть $(Y, \mathfrak{A})$ — измеримое пространство. Комплексной мерой на $(Y, \mathfrak{A})$ называется отображение $\tau : \mathfrak{A} \to \mathbf{C}$, удовлетворяющее условию счетной аддитивности:

$$\tau(\cup_k \delta_k) = \sum_k \tau(\delta_k); \ \delta_k \in \mathfrak{A}, \ k=1, 2, \ldots; \ \delta_k \cap \delta_l = \varnothing, \ k \neq l. \tag{8}$$

Ряд в (8) по необходимости сходится абсолютно.

Если $(Y, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой, то любая функция множества τ_ψ вида (6), где $\psi \in L_1(Y, \mu)$, является комплексной мерой.

17. На пары (μ, τ), где μ — вещественная σ-конечная мера и τ — комплексная мера на $(Y, \mathfrak{A})$, распространяются понятие подчиненности мер и теорема Радона — Никодима.

Пусть $\tau(\delta) = 0$ для любого множества $\delta \in \mathfrak{A}$, такого, что $\mu(\delta) = 0$. Тогда говорят, что τ подчинена μ $(\tau \prec \mu)$. Любая комплексная мера τ_ψ вида (6) подчинена μ.

Если $\tau \prec \mu$, то существует единственная (с точностью до μ-эквивалентности) функция $\psi \in L_1(Y, \mu)$, такая, что τ представляется формулой (6). Как и в вещественном случае, пишут $\psi = d\tau/d\mu$.

18. Комплексной мере τ сопоставляется ее *полная вариация*

$$|\tau|(\delta) = \sup \sum_k |\tau(\delta_k)|, \quad \delta \in \mathfrak{A}, \tag{9}$$

где точная граница берется по множеству всех разложений δ на подмножества $\delta_k \in \mathfrak{A}$. Функция множеств $|\tau|$ является конечной мерой на $\mathfrak{A}$.

Ясно, что $\tau \prec |\tau|$. Для соответствующей производной $\psi = d\tau/d|\tau|$ выполняется $|\psi(y)| = 1$ ($|\tau|$-п. в. на Y).

19. Интеграл по комплексной мере τ вводится (для $\varphi \in L_1(Y, |\tau|)$) формулой

$$\int \varphi d\tau = \int \varphi \frac{d\tau}{d|\tau|} d|\tau|. \tag{10}$$

Для интеграла (10) справедлива оценка

$$\left| \int \varphi d\tau \right| \leqslant \int |\varphi| d|\tau|. \tag{11}$$

20. Пусть μ_1, μ_2 — меры, τ — комплексная мера на измеримом пространстве $(Y, \mathfrak{A})$, причем

$$|\tau(\delta)|^2 \leqslant \mu_1(\delta)\mu_2(\delta), \quad \forall \delta \in \mathfrak{A}. \tag{12}$$

Пусть $\varphi_j \in L_2(Y, \mu_j)$, $j = 1, 2$. Тогда $\varphi_1\varphi_2 \in L_1(Y, |\tau|)$ и

$$\left| \int \varphi_1\varphi_2 d\tau \right|^2 \leqslant \int |\varphi_1|^2 d\mu_1 \int |\varphi_2|^2 d\mu_2. \tag{13}$$

Приведем доказательство неравенства (13). Для любого разложения $\delta = \cup_k \delta_k$, $\delta_k \in \mathfrak{A}$, с помощью неравенства Коши находим из (12)

$$\sum_j |\tau(\delta_j)| \leqslant \sum_j \mu_1^{1/2}(\delta_j)\mu_2^{1/2}(\delta_j) \leqslant \left[\sum_j \mu_1(\delta_j)\right]^{1/2} \left[\sum_j \mu_2(\delta_j)\right]^{1/2} = \mu_1^{1/2}(\delta)\mu_2^{1/2}(\delta).$$

Поэтому из (12) вытекает аналогичное неравенство для полной вариации

$$[|\tau|(\delta)]^2 \leqslant \mu_1(\delta)\mu_2(\delta), \quad \delta \in \mathfrak{A}.$$

Из оценки (11) теперь следует, что достаточно доказать неравенство вида (13) для интеграла по мере $|\tau|$, а из утверждения п 6 — что это неравенство достаточно проверить для $\varphi_1, \varphi_2 \in \Pi(Y, \mathfrak{A})$

Можно считать, что $\varphi_i = \sum_j c_{ij}\chi_{\delta_j}$, $i=1, 2$ (т е множества δ_j одни и те же для обеих функций) Тогда

$$\int |\varphi_1\varphi_2|\, d|\tau| = \sum_j |c_{1j}|\cdot|c_{2j}|\cdot|\tau|(\delta_j) \leqslant \sum_j |c_{1j}|\,|c_{2j}|\,\mu_1^{1/2}(\delta_j)\,\mu_2^{1/2}(\delta_j),$$

и требуемая оценка сводится к неравенству Коши

§ 6. Пространства функций

1. Через D_j, $j=1, \ldots, m$, обозначаются операторы дифференцирования по координатам точки $x=(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$: $D_j = -i\partial/\partial x_j$. Элементы*) $\alpha \in \mathbf{Z}_+^m$ называются мультииндексами. Если α — мультииндекс, то $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$, $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_m!$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_m^{\alpha_m}$.

2. Пусть $\Omega \subseteq \mathbf{R}^m$ — открытое множество. Совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций в Ω, имеющих компактный носитель, обозначается $C_0^\infty(\Omega)$. Класс $C_0^\infty(\Omega)$ плотен в $L_p(\Omega)$ при любом $p \in [1, \infty)$.

3. Обобщенные производные. Достаточно полное изложение можно найти, например, в [20]. Мы лишь напомним основное определение.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ — открытое множество и пусть функции u, v локально суммируемы**) в Ω. Предположим, что для фиксированного мультииндекса α

$$\int_\Omega u\overline{D^\alpha\varphi}\, dx = \int v\bar{\varphi}\, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Тогда говорят, что функция u имеет в Ω обобщенную производную $v = D^\alpha u$. Это определение согласуется с определением дифференцирования в смысле теории обобщенных функций. Обобщенная производная $D^\alpha u$ единственна (с точностью до эквивалентности относительно m-мерной лебеговой меры).

4. У эквивалентных функций обобщенные производные совпадают. Если говорят о локальных свойствах функции, имеющей обобщенные производные (непрерывность, классическая дифференцируемость и т. п.), то под этим понимают, что рассматриваемым свойством обладает функция, эквивалентная данной.

5. Если $m=1$ и $\Omega = (a, b)$ — интервал (возможно, бесконечный), то равносильное описание обобщенных производных можно дать в классических терминах. Именно обобщенная

---

*) Через $\mathbf{Z}_+$ обозначено множество всех целых неотрицательных чисел: $\mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

**) Т. е. суммируемы по любому компакту $K \subset \Omega$.

производная $v = D^l u$ существует тогда и только тогда, когда функция u имеет на (a, b) непрерывные производные до порядка $l-1$ включительно и функция $w = u^{(l-1)}$ абсолютно непрерывна на любом промежутке $[c, d] \subset (a, b)$. При этом $w' = i^l v$ п. в. на (a, b). К этому можно добавить, что если (a, b) — конечный интервал и $v = D^l u \in L_1(a, b)$, то $u \in C^{l-1}[a, b]$ и функция w абсолютно непрерывна на $[a, b]$.

Если на конечном интервале (a, b) функции u_1, u_2 имеют обобщенные производные Du_1, $Du_2 \in L_1(a, b)$, то сохраняет силу классическая формула интегрирования по частям.

6. Пусть $P(D)$ — дифференциальное выражение с постоянными коэффициентами (т. е полином по «переменным» $D_1 \ldots$ $\ldots, D_m$) и пусть $P^+(D)$ — формально-сопряженное выражение (комплексно-сопряженный полином). Если функции u, v локально суммируемы в открытом множестве $\Omega \subseteq \mathbf{R}^m$ и

$$\int_\Omega u\overline{P^+(D)\varphi}dx = \int_\Omega v\bar{\varphi}dx, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

то говорят, что в Ω $v = P(D)u$ *в обобщенном смысле*. При этом функция u не обязательно имеет все обобщенные производные, формально входящие в выражение $P(D)u$.

7. Классы Соболева W_2^l. Здесь мы также ограничимся немногими определениями и замечаниями. Подробнее см. [20].

Пусть $\Omega \subseteq \mathbf{R}^m$ — открытое множество. Класс $W_2^l(\Omega)$ состоит из всех функций $u \in L_2(\Omega)$, имеющих всевозможные обобщенные производные $D^\alpha u \in L_2(\Omega)$ при $|\alpha| = l$. Для $u \in W_2^l(\Omega)$ полагаем

$$\|u\|_l = \|u\|_{l,\Omega} = \left[\sum_{|\alpha|=l} \frac{l!}{\alpha!}\|D^\alpha u\|^2_{L_2(\Omega)}\right]^{1/2}. \tag{1}$$

Относительно естественной линейной структуры и нормы

$$\|u\|_{W_2^l(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{l,\Omega} + \|u\|^2_{L_2(\Omega)}\right)^{1/2} \tag{2}$$

класс $W_2^l(\Omega)$ представляет собой банахово пространство. Основное содержание теории классов Соболева составляют теоремы вложения и продолжения. Мы отметим лишь следующие факты.

8. Замыкание в $W_2^l(\Omega)$ класса $C_0^\infty(\Omega)$ обозначается через $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$. Отметим, что $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\mathbf{R}^m) = W_2^l(\mathbf{R}^m)$ (иными словами, множество $C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ плотно в $W_2^l(\mathbf{R}^m)$). Если Ω — ограниченное множество, функционал (1) на классе $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ представляет собой норму, эквивалентную основной норме (2).

9. При $2l > m$ для любого компакта $K \subset \Omega$ имеет место непрерывное и компактное вложение $W_2^l(\Omega) \subset C(K)$. Это означает, что оператор, сопоставляющий функции $u \in W_2^l(\Omega)$

ее сужение на K, непрерывен и компактен как оператор из $W_2^l(\Omega)$ в $C(K)$ (здесь следует иметь в виду сказанное в п. 4).

В пп. 10—13 Ω — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^1.

10. Функции $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ образуют в $W_2^l(\Omega)$ плотное множество (включение $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ означает, что функция u допускает бесконечно дифференцируемое продолжение на $\mathbf{R}^m$).

11. При $2l > m$ имеет место непрерывное и компактное вложение $W_2^l(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

12. Имеют место непрерывные и компактные вложения $W_2^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$, $W_2^1(\Omega) \subset L_2(\partial\Omega)$. Поясним второе из них. Оператор $u \mapsto u|_{\partial\Omega}$ корректно определен на плотном в $W_2^1(\Omega)$ множестве $C^\infty(\overline{\Omega})$. Он по непрерывности продолжается до оператора из $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\partial\Omega)$, и продолженный оператор компактен. Если $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то $u|_{\partial\Omega} = 0$ п.в.

13. Рассмотрим функционал

$$|u| = \left(\|u\|_{1,\Omega}^2 + \int_{\partial\Omega} |u|^2\, dS\right)^{1/2}, \quad u \in W_2^1(\Omega) \tag{3}$$

(это возможно в силу вложения в $L_2(\partial\Omega)$; см. п. 12). Функционал (3) определяет в $W_2^1(\Omega)$ норму, эквивалентную основной норме (2) (при $l = 1$). Класс $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ совпадает с множеством всех тех функций $u \in W_2^1(\Omega)$, для которых $|u| = \|u\|_{1,\Omega}$ (т. е. $u|_{\partial\Omega} = 0$).

14. Символом $S(\mathbf{R}^m)$ обозначается класс Шварца. Включение $u \in S(\mathbf{R}^m)$ означает, что функция u бесконечно дифференцируема в $\mathbf{R}^m$ и для любых $\alpha \in \mathbf{Z}_+^m$, $l \in \mathbf{Z}_+$ существует постоянная $C(\alpha, l)$, такая, что

$$(1 + |x|)^l \left|D^\alpha u(x)\right| \leqslant C(\alpha, l), \quad \forall x \in \mathbf{R}^m.$$

ГЛАВА 2

ГЕОМЕТРИЯ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Содержание этой главы достаточно полно отражено в ее названии. Еще раз напомним, что основные понятия метрической и банаховой теории предполагаются известными. Поэтому ниже речь идет только о геометрических вопросах, в которых проявляется гильбертова специфика. В равной мере это относится к изложению теории непрерывных операторов.

§ 1. Гильбертово пространство. Пространства L_2

1. Рассмотрим комплексное линейное пространство $\mathscr{L}$, в котором задано *скалярное произведение* $(\cdot,\cdot)$, т. е. комплексная функция на $\mathscr{L}\times\mathscr{L}$, обладающая свойствами

$$(f,\ g)=\overline{(g,\ f)}\quad (f,\ g\in\mathscr{L}),\tag{1}$$

$$(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2,\ g)=\alpha_1(f_1,\ g)+\alpha_2(f_2,\ g)\quad (\alpha_1,\ \alpha_2\in\mathbf{C}),\tag{2}$$

$$(f,\ f)>0\quad (f\neq 0).\tag{3}$$

Свойства (1)—(3) выражают соответственно *эрмитовость, линейность* (по первому аргументу) скалярного произведения и *строгую положительность* функции $(f,\ f)$. Из (1), (2) вытекает *антилинейность* (или *полулинейность**)) по второму аргументу:

$$(f,\ \beta_1 g_1+\beta_2 g_2)=\bar\beta_1(f,\ g_1)+\bar\beta_2(f,\ g_2)\quad (\beta_1,\ \beta_2\in\mathbf{C}).\tag{4}$$

В дополнение к (3) отметим, что из (2) следует $(f,\ 0)=0$ $\forall f\in\mathscr{L}$) и, в частности, $(0,\ 0)=0$. Вещественность (но не положительность) величины $(f,\ f)$ вытекает из (1).

Линейное пространство $\mathscr{L}$ с фиксированным скалярным произведением, удовлетворяющим условиям (1)—(3), *называется предгильбертовым пространством.*

В предгильбертовом пространстве вводится *норма*

$$\|f\|\overset{\text{def}}{=}(f,\ f)^{1/2}\quad (\forall f\in\mathscr{L}),\tag{5}$$

удовлетворяющая аксиомам нормированного пространства.

*) В связи с этим функции, удовлетворяющие условиям (2), (4), называют иногда *полуторалинейными* формами

Действительно, $\|0\|=0$ и в силу (3) $\|f\|>0$ при $f\neq 0$. Далее, в силу (2), (4) $(\lambda f, \lambda f)=|\lambda|^2(f, f)$, т. е. $\|\lambda f\|=|\lambda|\cdot\|f\|$. Остается проверить неравенство треугольника. Оно является следствием неравенства

$$|(f, g)|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|, \tag{6}$$

которое будет доказано ниже. Из (2), (4) находим

$$(f+g, f+g)=\|f\|^2+2\operatorname{Re}(f, g)+\|g\|^2, \tag{7}$$

что вместе с (6) дает $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$.

Докажем (6). Для любых $f, g\in\mathscr{L}$, $\alpha, \beta\in\mathbf{C}$ из (1)—(4) получаем, что

$$0\leqslant\|\alpha f-\beta g\|^2=|\alpha|^2(f, f)-\alpha\bar\beta(f, g)-\bar\alpha\beta\overline{(f, g)}+|\beta|^2(g, g). \tag{8}$$

Полагая здесь $\alpha=\overline{(f, g)}$, $\beta=(f, f)$, находим

$$(f, f)\,[(f, f)(g, g)-|(f, g)|^2]\geqslant 0.$$

При $f\neq 0$ это равносильно (6); при $f=0$ (6) также выполнено. Нетрудно убедиться, что равенство в (6) осуществляется только при линейно зависимых f, g.

Неравенство (6) сохраняет силу, если условие (3) заменить более слабым условием $(f, f)\geqslant 0$ $(\forall f\in\mathscr{L})$. Действительно, если для данного $f\in\mathscr{L}$ выполняется $(f, f)>0$, то пригодно прежнее рассуждение. Если же $(f, f)=0$, то из (8) при $\beta=1$ следует

$$(g, g)-2\operatorname{Re}\alpha\,(f, g)\geqslant 0 \quad (\forall\alpha\in\mathbf{C}).$$

Очевидно, что это возможно лишь при $(f, g)=0$. Тем самым (6) выполнено и в этом случае.

Введение в $\mathscr{L}$ нормы (5) позволяет применять к предгильбертову пространству понятия и факты теории нормированных пространств. В частности, обычным образом вводится сходимость: $f_n\to f$ означает, что $\|f_n-f\|\to 0$. Как и в любом нормированном пространстве, линейные операции и норма в $\mathscr{L}$ непрерывны. Из легко проверяемого тождества

$$4(f, g)=\|f+g\|^2-\|f-g\|^2+i\|f+ig\|^2-i\|f-ig\|^2 \tag{9}$$

следует также непрерывность скалярного произведения по совокупности аргументов: $(f_n, g_n)\to(f, g)$, коль скоро $f_n\to f$, $g_n\to g$.

2. Если предгильбертово пространство является полным относительно нормы (5), то его называют *гильбертовым пространством*. Для гильбертова пространства ниже, как правило, используется обозначение H. В этой книге мы ограничиваемся изучением *сепарабельных* гильбертовых пространств, и *всюду, где не оговорено противное, сепарабельность предполагается*. Конечномерный случай не исключается из рассмотрения.

Если предгильбертово пространство не полно, то его можно *пополнить* относительно нормы (5). В результате оно станет *банаховым* пространством, в котором, однако, по непрерывности вводится и гильбертова структура. Именно легко проверяется, что формула (9) позволяет распространить скалярное произведение на пополнение, причем свойства (1)—(3) сохраняются. Таким образом, *пополнение предгильбертова пространства всегда приводит к гильбертову пространству.*

Два гильбертовых (предгильбертовых) пространства H_1, H_2 называются *изометрически изоморфными,* если существует *изометрия,* т. е линейное отображение V пространства H_1 на H_2, такое, что

$$(f, g)_1 = (Vf, Vg)_2, \quad \forall f, g \in H_1. \tag{10}$$

Равенство (9) показывает, что (10) следует из формально более слабого условия $\|f\|_1 = \|Vf\|_2$.

Подпространством в H называется замкнутое линейное подмножество. Любое подпространство само является сепарабельным гильбертовым пространством относительно индуцированного скалярного произведения.

Если M — подмножество в H, то наименьшее подпространство, содержащее M, обозначается $\bigvee M$. Ясно, что $\bigvee M$ совпадает с замыканием линейной оболочки M. Если $\bigvee M = H$, то говорят, что множество M *полно в* H.

Лемма 1. *Пусть $\bigvee M = H$. Тогда множество линейных комбинаций элементов из M с рациональными комплексными коэффициентами плотно в H*

○ Достаточно установить возможность приближения любого элемента h из линейной оболочки M. Пусть $h = \sum_1^n \alpha_k g_k$, $g_k \in M$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$; пусть числа $\alpha_k^{(s)}$, $s = 1, 2, \ldots$, рациональны и $\alpha_k^{(s)} \to \alpha_k$ при $s \to \infty$. Тогда $\sum_1^n \alpha_k^{(s)} g_k \to h$ при $s \to \infty$ ●

Из леммы 1 вытекает, что *для сепарабельности H достаточно* (и необходимо) *существование в H полного счетного множества.*

Если $\mathcal{L}$ — *вещественное* линейное пространство с *вещественным* скалярным произведением, удовлетворяющим (1)—(3), то говорят о *вещественном предгильбертовом* (в случае полноты — *гильбертовом*) *пространстве* В этой книге вещественные пространства не затрагиваются.

3. Элементы $f, g \in H$ называют *ортогональными* и пишут $f \perp g$, если $(f, g) = 0$. Если $M \subset H$, *то* $f \perp M$ означает, что $(f, g) = 0$ для любого $g \in M$.

Лемма 2. *Если $f \perp M$, то $f \perp \bigvee M$. В частности, если $\bigvee M = H$ и $f \perp M$, то $f = 0$.*

○ Ясно, что $f \perp M_1$, где M_1 — линейная оболочка M. Если $g \in \bigvee M$, то найдутся элементы $g_n \in M_1$, $g_n \to g$. Так как

$(f, g_n)=0$, то в пределе $(f, g)=0$. Если $\bigvee M=H$, то здесь можно положить $g=f$, а тогда $f=0$ ●

Для попарно ортогональных элементов $f_1, \ldots, f_n$ справедливо равенство («теорема Пифагора»)

$$\left\|\sum\nolimits_1^n f_k\right\|^2=\sum\nolimits_1^n \|f_k\|^2, \tag{11}$$

которое для $n=2$ следует из (7), а затем распространяется по индукции. Равенство (11) переносится и на бесконечные последовательности.

Лемма 3. *Пусть элементы f_k, $k=1, 2, \ldots$, попарно ортогональны в H. Сходимость ряда $\sum_k f_k$ равносильна сходимости числового ряда $\sum_k \|f_k\|^2$, причем*

$$\left\|\sum\nolimits_k f_k\right\|^2=\sum\nolimits_k \|f_k\|^2. \tag{12}$$

○ Сходимость ряда $\sum_k f_k$ означает существование предела конечных сумм $g_n=\sum_1^n f_k$. Из (11) вытекает, что

$$\|g_{n+p}-g_n\|^2=\sum\nolimits_{n+1}^{n+p}\|f_k\|^2,$$

и последовательность g_n фундаментальна в том и только том случае, когда сходится ряд справа в (12). В силу полноты H элементы g_n сходятся. Равенство (12) получается из (11) при $n\to\infty$ ●

Отметим еще одно полезное соотношение — «тождество параллелограмма», вытекающее из (7):

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2(\|f\|^2+\|g\|^2), \quad \forall f, g\in H.$$

4. Примеры гильбертовых пространств будут приведены в § 9. Здесь мы ограничимся обсуждением наиболее важного для нас семейства гильбертовых пространств — пространств типа L_2. По поводу используемых здесь сведений из теории меры и теории функций см. § 1.3—1.5.

Пусть $(Y, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с σ-конечной мерой. Измеримая (относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}$) функция f, определенная μ-п. в. на Y, принадлежит классу*) $L_2(Y, \mu)$, если конечен интеграл

$$\|f^2\|\overset{\text{def}}{=}\int_Y |f|^2 d\mu. \tag{13}$$

Отождествим μ-эквивалентные функции и введем в L_2 естественную линейную структуру. Скалярное произведение определим формулой

$$(f, g)=\int_Y f\bar{g}d\mu. \tag{14}$$

Тогда $L_2(Y, \mu)$ превратится в гильбертово пространство. Норма (13) очевидно согласована со скалярным произведением (14).

*) Было бы точнее писать $L_2(Y, \mathfrak{A}, \mu)$.

В некоторых стандартных случаях мера μ в обозначениях пространства L_2 не указывается. Например, будем писать:

$L_2(Y)$, если Y — измеримое по Лебегу множество в $\mathbf{R}^m$, μ — m-мерная мера Лебега;

$L_2(\mathbf{S}^{m-1})$, если $\mathbf{S}^{m-1}$ — единичная сфера в $\mathbf{R}^m$, μ — мера Лебега на сфере;

$L_2(\mathbf{T}^m)$, если $\mathbf{T}^m = (\mathbf{S}^1)^m$ — m-мерный тор, μ — мера Лебега.

Отметим, что окружность $\mathbf{T} = \mathbf{S}^1$ часто удобно считать реализованной как подмножество комплексной плоскости: $\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$.

Известно (см. § 1.5, п. 6), что в пространстве $L_2(Y, \mu)$ плотное множество образуют линейные комбинации характеристических функций χ_δ множеств $\delta \in \mathfrak{A}$ конечной меры. Иными словами, множество функций

$$\{\chi_\delta : \delta \in \mathfrak{A},\ \mu(\delta) < \infty\} \tag{15}$$

полно в $L_2(Y, \mu)$.

Теорема 4. *Пространство $L_2(Y, \mu)$ сепарабельно тогда и только тогда, когда мера μ имеет счетную базу.**)

○ Если $\delta', \delta'' \in \mathfrak{A}$ — множества конечной меры, то

$$\|\chi_{\delta'} - \chi_{\delta''}\|^2 = \int_Y |\chi_{\delta'} - \chi_{\delta''}|^2\, d\mu = \mu(\delta' \Delta \delta''),$$

где $\delta' \triangle \delta''$ — симметрическая разность множеств δ', δ''. Поэтому функции χ_{δ_n}, где $\{\delta_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, — база для μ, образуют множество, плотное в множестве (15), а потому полное в $L_2(Y, \mu)$. Согласно лемме 1 $L_2(Y, \mu)$ сепарабельно.

Обратно, если L_2 сепарабельно, то сепарабельно и его подмножество (15) (как метрическое пространство с индуцированной метрикой). Любое плотное в нем счетное подмножество порождает базу для μ ●

В связи с теоремой 4 в дальнейшем будем рассматривать пространства $L_2(Y, \mu)$ в предположении, что мера μ имеет счетную базу. Это предположение не всегда будет явно оговариваться.

Если Y — сепарабельное метрическое пространство и конечная мера μ борелевская, т. е. $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^B(Y)$, то μ имеет (см. § 1.3, п. 19) счетную базу. Стало быть, в этом случае пространство $L_2(Y, \mu)$ сепарабельно. Плотное в нем множество образуют непрерывные квадратично-интегрируемые функции.

В пространстве $L_2(\mathbf{R}^m)$ плотен класс $C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$, и, тем более, класс S Шварца.

---

*) См § 1.3, п 9. Напомним, что наличие у μ счетной базы равносильно сепарабельности пространства с мерой $(Y, \mathfrak{A}, \mu)$.

5. Специальную роль в дальнейшем играет пространство l_2. Его элементы — комплексные последовательности $f=\{f_k\}$, $k=1, 2, \ldots$, для которых

$$\|f\|^2=\sum\nolimits_k' |f_k|^2<\infty.$$

В l_2 вводятся естественная линейная структура и скалярное произведение

$$(f, g)=\sum\nolimits_k f_k\bar{g}_k. \tag{16}$$

Легко понять, что $l_2=L_2(N, \mu)$, где N — натуральный ряд, $\mathfrak{A}$ — алгебра всех подмножеств $\delta\subset N$, а $\mu(\delta)$ есть мощность δ. Поэтому к l_2 относится все, сказанное в п. 4. В частности, l_2 полно и сепарабельно, что, впрочем, совсем просто устанавливается непосредственно. В l_2 плотно множество всех *финитных* последовательностей, т. е. последовательностей с конечным числом ненулевых составляющих.

В определении гильбертова пространства мы не исключаем конечномерного случая. В комплексном m-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{C}^m$ скалярное произведение вводится формулой (16) (с суммированием от 1 до m).

В дальнейшем мы помимо обозначений l_2 и $\mathbf{C}^m$ иногда будем употреблять единое обозначение l_2^m, $1\leqslant m\leqslant\infty$, полагая $l_2^m=\mathbf{C}^m$ при $m<\infty$ и $l_2^\infty=l_2$.

§ 2. Ортонормированные системы

Общеизвестна роль ортогональных разложений в анализе и математической физике. В теории этих разложений можно выделить общую часть, которая по сути дела относится к геометрии гильбертова пространства. Эту общую часть — теорию ортонормированных систем — мы здесь и излагаем. Вместе с тем в каждом конкретном случае остаются аналитические трудности, связанные в первую очередь с проверкой полноты изучаемой системы.

1. Множество $M\subset H$ называется *ортонормированной системой* (о. н. с.), если $\|u\|^2=1$, $\forall u\in M$, и любые два различных элемента из M ортогональны. *В сепарабельном пространстве H всякая о. н. с. не более чем счетна.* В самом деле, $\|u-v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2=2$ $(\forall u, v\in M, u\neq v)$, а потому любое плотное в H множество имеет мощность, не меньшую, чем мощность M. В силу сказанного в дальнейшем будем рассматривать лишь ортонормированные последовательности (возможно, конечные).

Пусть $M=\{u_k\}$ — о. н. с. Выясним, когда сходится ряд $\sum_k \alpha_k u_k$. Его члены попарно ортогональны, и из леммы 1.3

непосредственно вытекает, что *сходимость в H ряда* $\sum_k \alpha_k u_k$ *равносильна сходимости числового ряда* $\sum_k |\alpha_k|^2$. Положим

$$h_0 = \sum_k \alpha_k u_k. \tag{1}$$

Тогда в силу (1.12)

$$\|h_0\|^2 = \sum_k |\alpha_k|^2. \tag{2}$$

Коэффициенты α_k выражаются через h_0:

$$(h_0, u_k) = \sum_j \alpha_j (u_j, u_k) = \alpha_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Почленное умножение здесь возможно ввиду непрерывности скалярного произведения.

2. Изменим теперь постановку вопроса. Будем считать, что элемент $h \in H$ задан, и выясним, можно ли его разложить по заданной о. н. с. $\{u_k\}$. Если такое разложение возможно, то его коэффициенты в силу (3) должны совпадать с ***коэффициентами Фурье***

$$\alpha_k = \alpha_k(h) \stackrel{\text{def}}{=} (h, u_k), \tag{4}$$

а само разложение должно даваться *рядом Фурье*

$$\sum_k \alpha_k u_k, \quad \alpha_k = (h, u_k). \tag{5}$$

Проведем исследование ряда (5) (независимо от того, дает ли он на самом деле разложение элемента h). Прежде всего установим следующее экстремальное свойство конечных сумм ряда Фурье.

Теорема 1. *При заданном n наилучшее приближение элемента $h \in H$ суммами вида $\sum_1^n \beta_k u_k$ осуществляется частной суммой ряда* (5):

$$\left\| h - \sum_1^n \beta_k u_k \right\| \geqslant \left\| h - \sum_1^n \alpha_k(h) u_k \right\|, \quad \forall \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbf{C}. \tag{6}$$

Равенство в (6) *достигается только при* $\beta_k = \alpha_k(h)$, $k = 1, \ldots$ *…, n. Справедливо соотношение*

$$\left\| h - \sum_1^n \alpha_k u_k \right\|^2 = \|h\|^2 - \sum_1^n |\alpha_k|^2, \quad \alpha_k = \alpha_k(h). \tag{7}$$

○ Принимая во внимание (4), находим

$$\left\| h - \sum_1^n \beta_k u_k \right\|^2 = \|h\|^2 - 2\,\mathrm{Re} \sum_1^n \alpha_k \bar{\beta}_k + \sum_1^n |\beta_k|^2 = \\ = \|h\|^2 - \sum_1^n |\alpha_k|^2 + \sum_1^n |\beta_k - \alpha_k|^2.$$

Отсюда непосредственно вытекают оба соотношения (6) и (7) ●

Прямым следствием теоремы 1 является *теорема о сходимости ряда Фурье.**)

Теорема 2. *Пусть $\{u_k\}$ — о. н. с. в H. Для любого $h \in H$ выполнено неравенство*

$$\sum\nolimits_k |\alpha_k(h)|^2 = \sum\nolimits_k |(h,\ u_k)|^2 \leqslant \|h\|^2 \tag{8}$$

и ряд (5) сходится. Его сумма h_0 удовлетворяет соотношению

$$\|h - h_0\|^2 = \|h\|^2 - \sum\nolimits_k |\alpha_k(h)|^2 = \|h\|^2 - \|h_0\|^2. \tag{9}$$

○ Из (7) следует, что $\sum_1^n |\alpha_k|^2 \leqslant \|h\|^2$. В пределе получаем (8). В силу (8) $\{\alpha_k(h)\} \in l_2$ и, следовательно, ряд (5) сходится. Переходя к пределу в (7) и учитывая равенство (2), получаем (9) ●

Теорема 3. *Пусть $\{u_k\}$ — о. н. с. в H. Следующие утверждения равносильны: а) $h \in \bigvee_k \{u_k\}$; б) для h имеет место равенство («уравнение замкнутости»)*

$$\|h\|^2 = \sum\nolimits_k |\alpha_k(h)|^2 = \sum\nolimits_k |(h,\ u_k)|^2; \tag{10}$$

в) h разлагается в ряд Фурье по о. н. с. $\{u_k\}$:

$$h = \sum\nolimits_k \alpha_k(h)\, u_k = \sum\nolimits_k (h,\ u_k)\, u_k. \tag{11}$$

○ а) $\Rightarrow$ б). По заданному $\varepsilon > 0$ найдем конечную линейную комбинацию $f = \sum_1^n \beta_k u_k$, такую, что $\|h - f\| < \varepsilon$. Тогда в силу (6), (7) $\|h\|^2 - \sum_1^n |\alpha_k|^2 < \varepsilon^2$, т. е. выполнено (10). б) $\Rightarrow$ в) прямо следует из (9). в) $\Rightarrow$ а) вытекает из определения суммы ряда ●

Если для заданной о. н. с. $\{u_k\}$ уравнение замкнутости (10) выполнено при всех $h \in H$, то систему $\{u_k\}$ называют ***замкнутой.*** Отметим, что тогда наряду с (10) выполняется и соотношение

$$(h^1,\ h^2) = \sum\nolimits_k \alpha_k(h^1)\overline{\alpha_k(h^2)} = \sum\nolimits_k (h^1,\ u_k)(u_k,\ h^2), \quad \forall h^1,\ h^2 \in H. \tag{12}$$

Оно вытекает из (10) в силу (1.9).

Замкнутость системы непосредственно проверять неудобно. В связи с этим вводят понятие ортонормированной полной системы (о. н. п. с.). Именно о. н. с. $\{u_k\}$ называется ***полной,*** если из условий $\alpha_k(h) = 0$, $\forall k$, вытекает, что $h = 0$. Следующая важная теорема показывает, в частности, что последнее определение согласуется с общим понятием полного множества (см. § 1, п. 2).

---

*) Здесь и в дальнейшем мы не оговариваем упрощений в формулировках и в доказательствах, которые возникают в случае, если о. н. с. $\{u_k\}$ конечна.

Теорема 4. *Пусть $\{u_k\}$ — о. н. с. в H. Следующие утверждения равносильны: а) $\vee_k\{u_k\} = H$; б) система $\{u_k\}$ замкнута; в) каждый элемент $h \in H$ разлагается в ряд Фурье* (11) *по о. н. с. $\{u_k\}$; г) о. н. с. $\{u_k\}$* — полная.

○ Равносильность утверждений а), б), в) следует из теоремы 3. а)$\Rightarrow$г) вытекает из леммы 1.2.

г)$\Rightarrow$в). Пусть $h \in H$ и h_0 — сумма ряда (3). Тогда в соответствии с (3) $\alpha_k(h_0) = \alpha_k(h)$ и, следовательно, $(h - h_0, u_k) = 0$, $\forall k$. Поэтому $h = h_0$ ●

3. Полную ортонормированную в H систему $\{u_k\}$ иначе называют *ортонормированным базисом* пространства H. Из леммы 1.1 следует, что существование такого базиса влечет сепарабельность H. Справедливо и обратное утверждение. Для его доказательства будет применен так называемый *процесс ортогонализации*.

Теорема 5. *В сепарабельном гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис.*

○ Пусть $\{f_k\}$ — полная в H последовательность. Подвергнем ее «прореживанию», удаляя те элементы, которые выражаются линейно через предыдущие. Полученную последовательность (возможно, конечную) обозначим через $\{g_j\}$. Элементы g_j в любом конечном числе линейно-независимы. Линейная оболочка g_j содержит все f_k, а потому $\vee_j \{g_j\} = H$. Положим $u_1 = g_1\|g_1\|^{-1}$. Следующие элементы строятся индуктивно. Пусть построены ортонормированные элементы $u_1, \ldots, u_s$, такие, что при $k = 1, \ldots, s$ выполнено

$$\vee_1^k \{u_j\} = \vee_1^k \{g_j\}. \tag{13}$$

Если последовательность $\{g_j\}$ содержит лишь s элементов, то процесс обрывается. В противном случае полагаем

$$\tilde{u}_{s+1} = g_{s+1} - \sum\nolimits_1^s (g_{s+1}, u_k)\, u_k, \quad u_{s+1} = \tilde{u}_{s+1} \|\tilde{u}_{s+1}\|^{-1}.$$

Поскольку $g_1, \ldots, g_{s+1}$ линейно-независимы, то $\tilde{u}_{s+1} \neq 0$. Ясно, что g_{s+1} выражается линейно через $u_1, \ldots, u_{s+1}$, а u_{s+1} — через $g_1, \ldots, g_{s+1}$. Следовательно, (13) выполнено и при $k = s+1$. Наконец, $(u_{s+1}, u_k) = 0$, $k = 1, \ldots, s$.

Остается показать, что построенная (конечная или бесконечная) последовательность $\{u_j\}$ полна в H. Так как (13) выполнено при всех k, то $\vee_j\{u_j\} = \vee_j\{g_j\} = H$ ●

З а м е ч а н и е. Процесс ортогонализации можно применять к любой последовательности $\{f_k\}$. В результате получится о. н. с. $\{u_j\}$, полная в подпространстве $\vee_k\{f_k\}$.

4. Мощность всех о. н. п. с. в заданном гильбертовом пространстве H одна и та же. Она определяется его размерностью $\dim H$ как линейного пространства. Именно, если $m = \dim H < \infty$, то любая о. н. п. с. (как и любой другой базис в смысле теории линейных пространств) содержит m элементов. Если

$\dim H = \infty$, то в силу соглашения о сепарабельности любая о. н. п. с. счетна.

Теорема 6. *а) Гильбертовы пространства H_1, H_2 изометрически изоморфны тогда и только тогда, когда*

$$\dim H_1 = \dim H_2. \tag{14}$$

б) Пусть выполнено (14) *и пусть $\{u_k^s\}$ — о. н. п. с. в H_s, $s=1, 2$. Тогда существует единственная изометрия V пространства H_1 на H_2, такая, что*

$$Vu_k^1 = u_k^2 \quad (\forall k). \tag{15}$$

○ а) Изометрический изоморфизм пространств H_1 и H_2 включает их линейный изоморфизм, а потому влечет (14). Обратное содержится в утверждении б).

б) Считаем для определенности $\dim H_s = \infty$, $s=1, 2$. Пусть $M_s \subset H_s$ — линейная оболочка системы $\{u_k^s\}$, $s = 1, 2$. Определим отображение $V: M_1 \to M_2$ формулой

$$V\left(\sum_1^n \beta_k u_k^1\right) = \sum_1^n \beta_k u_k^2. \tag{16}$$

Оно линейно и в силу (1.11) изометрично. Ясно, что $VM_1 = M_2$ и выполнено (15). По непрерывности V распространяется до изометрии пространства H_1 на H_2.

Изометрия является линейным отображением. Поэтому из (15) следует (16). Тем самым V определяется условиями (15) однозначно ●

Рассмотрим случай, когда $H_2 = l_2^m$. О. н. п. с. $\{e_k\}$, где $e_k = \{0, \ldots, 0, 1; 0, \ldots\}$ (1 на k-м месте), называется *стандартным базисом в* l_2^m.

Теорема 7. *Гильбертово пространство H изометрически изоморфно пространству l_2^m, $m = \dim H$. Существует биоднозначное соответствие между изометриями V пространства H на l_2^m и ортонормированными базисами $\{u_k\}$ в H. Это соответствие дается равенствами $Vu_k = e_k$, $\forall k$, где $\{e_k\}$ — стандартный базис в l_2^m.*

○ Если V — изометрия H на l_2^m, то равенства $u_k = V^{-1}e_k$ определяют ортонормированный базис в H. Остальное прямо вытекает из теоремы 6 (при $H_2 = l_2^m$) ●

Во всем дальнейшем фактически будем считать изучаемое гильбертово пространство бесконечномерным. Однако, желая без оговорок пользоваться утверждениями типа «подпространство гильбертова пространства также есть гильбертово пространство», мы не будем формально исключать конечномерный случай. Что касается теоремы 7, то возможностью сведения H к «модели», т. е. к l_2^m, обычно не пользуются. Такое сведение, во-первых, неудобно в применениях и, во-вторых, затрудняет выявление инвариантного характера теории.

§ 3. Теорема о проекции. Ортогональные разложения и ортогональные суммы

В этом параграфе описываются геометрические конструкции, играющие важную роль в теории гильбертова пространства.

1. Прежде всего докажем *теорему о проекции.*

Теорема 1. *Пусть F — подпространство в H. Для всякого $h \in H$ существует единственное представление в виде*

$$h = f + g \quad (f \in F,\ g \perp F). \tag{1}$$

Элемент f в (1) *осуществляет наилучшее приближение h элементами из F:*

$$\|h - x\| \geqslant \|h - f\| = \|g\|, \ \forall x \in F. \tag{2}$$

Равенство в (2) *достигается только при $x = f$.*

○ Поскольку F само есть гильбертово пространство, в нем существует ортонормированный базис. Пусть $\{\varphi_k\}$ — такой базис. Для $h \in H$ положим

$$f = \sum\nolimits_k \alpha_k \varphi_k, \quad \alpha_k = (h, \varphi_k). \tag{3}$$

В силу теоремы 2.2 ряд (3) сходится. При этом $(f, \varphi_k) = \alpha_k$ (см. равенство (2.3)). Положим $g = h - f$. Тогда $(g, \varphi_k) = 0$ $(\forall k)$, а потому $g \perp F$ в соответствии с леммой 1.2. Разложение (1) построено. Из него следует, что

$$\|h\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2. \tag{4}$$

В силу (4) $h = 0$ влечет $f = g = 0$. Этим доказана единственность представления (1).

Если $x \in F$, то в разложении $h - x = (f - x) + g$ слагаемые ортогональны. Поэтому $\|h - x\|^2 = \|f - x\|^2 + \|g\|^2$. Отсюда следует неравенство (2), которое обращается в равенство лишь при $x = f$ ●

Заметим, что соотношения (2), (4) обобщают соотношения (2.6), (2.7), в которые они переходят при $F = \bigvee_1^n \{u_k\}$.

Рассмотрим множество

$$G = \{g \in H : g \perp F\} \stackrel{\text{def}}{=} F^{\perp}. \tag{5}$$

Ясно, что G — подпространство. Из единственности разложения (1) следует, что F и G равноправны в том смысле, что $G^{\perp} = F$. Подпространства F и $G = F^{\perp}$ называются *ортогональными дополнениями* друг для друга в пространстве H. Если F, G — ортогонально дополняющие друг друга подпространства, то пишут

$$F \oplus G = H; \tag{6}$$

употребляют также обозначение

$$G = F^{\perp} = H \ominus F. \tag{7}$$

Обозначение $M^{\perp}$ применяется и тогда, когда M — произвольное подмножество в H. Оно вводится формулой (5) с заменой F на M. Лемма 1.2 означает, что $M^{\perp} = (\bigvee M)^{\perp}$.

Отметим еще следующее соотношение двойственности, которое читатель легко проверит самостоятельно.

Лемма 2. *Пусть $\{F_\alpha\}$ — какое-либо семейство подпространств в H. Тогда*

$$(\bigvee_\alpha F_\alpha)^{\perp} = \bigcap_\alpha F_\alpha^{\perp}. \tag{8}$$

Отображение $P = P_F : h \mapsto f$, порожденное разложением (1), называется *оператором* (ортогонального) *проектирования,* или, короче, *проектором* на подпространство F. Из (3) следует, что P — линейный оператор. В силу (4) $\|Ph\| \leqslant \|h\|$. Так как $Ph = h$ при $h \in F$, то $\|P\| = 1$. Исключение составляет случай $F = \{0\}$, когда очевидно $P = 0$. Если $G = F^{\perp}$, то $P_G = I - P_F$.

2. В п. 1 было рассмотрено «ортогональное разложение» пространства H в сумму двух подпространств F и $G = F^{\perp}$. Такие разложения обобщаются на случай любого (конечного или счетного) числа подпространств.

Пусть H — гильбертово пространство и пусть $\{F_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — попарно ортогональные подпространства в H, причем

$$\bigvee_k F_k = H. \tag{9}$$

Обозначим через P_k проектор на F_k.

Лемма 3. *Пусть $\widetilde{F}_n = \bigvee_1^n F_k$ и $\widetilde{P}_n$ — проектор на $\widetilde{F}_n$. Тогда**) $\widetilde{P}_n = \sum_1^n P_k$.

○ Для $h \in H$ положим $f_k = P_k h$, $f = \sum_1^n f_k$ и $g = h - f$. Тогда $f \in \widetilde{F}_n$. Для любого $x \in F_l$, $l = 1, \ldots, n$, принимая во внимание попарную ортогональность подпространств F_k, находим

$$(g, x) = \left(h - \sum_1^n f_k, x\right) = (h - P_l h, x) = 0,$$

т. е. $g \perp F_l$. В силу (8) $g \in \widetilde{F}_n$. Из единственности проекции следует, что в разложении $h = f + g$ элемент f совпадает с $\widetilde{P}_n h$ ●

Теорема 4. *Пусть $\{F_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — попарно ортогональные подпространства в H и выполнено* (9). *Тогда каждый элемент $h \in H$ разлагается в ортогональный ряд*

$$h = \sum_k f_k, \quad f_k = P_k h \in F_k. \tag{10}$$

*) Систематическое изучение «алгебры проекторов» в H будет проведено в § 8.

При этом справедливы соотношения

$$\|h\|^2 = \sum_k \|f_k\|^2, \tag{11}$$

$$(h^1, h^2) = \sum_k (f_k^1, f_k^2) = \sum_k (P_k h^1, P_k h^2). \tag{12}$$

○ В силу (9) для $h \in H$ по любому $\varepsilon > 0$ найдется линейная комбинация $\sum_1^n x_k$, $x_k \in F_k$, такая, что $\left\|h - \sum_1^n x_k\right\| < \varepsilon$. Принимая во внимание лемму 3 и неравенство (2), находим

$$\left\|h - \sum_1^n f_k\right\| = \|h - \widetilde{P}_n h\| \leqslant \left\|h - \sum_1^n x_k\right\| < \varepsilon.$$

Это означает, что (10) выполнено. Из (10) в силу леммы 1.3 вытекает (11); из (11) и из (1.9) следует (12) ●

В условиях теоремы 4 говорят, что *пространство H разложено в ортогональную сумму подпространств F_k*, и пишут

$$H = \sum_k \oplus F_k. \tag{13}$$

Если число подпространств равно двум, то разложение (13) переходит в (6). Изучавшееся в § 2 разложение в ряд Фурье по о. н. п. с. $\{u_k\}$ есть частный случай разложения (13), когда все подпространства F_k одномерны: $F_k = \{\gamma u_k\}$, $\gamma \in \mathbb{C}$. В самом деле, в этом случае $P_k h = (h, u_k) u_k$. Таким образом, равенства (10), (11), (12) представляют собой обобщение формул (2.11), (2.10) и (2.12) соответственно.

3. В п. 2 гильбертово пространство было разложено в ортогональную сумму своих подпространств. Здесь мы рассмотрим «обратную» задачу, в которой первоначально задана некоторая последовательность гильбертовых пространств и из них определенным образом строится новое гильбертово пространство.

Пусть*) $\{G_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, — гильбертовы пространства, $\langle\cdot, \cdot\rangle_k$, $|\cdot|_k$ — скалярное произведение и норма в G_k (индекс k иногда опускаем). Рассмотрим пространство $\widetilde{H}$, элементы которого — последовательности $\tilde{h} = \{g_k\}$, $g_k \in G_k$ $(\forall k)$, такие, что

$$\|\tilde{h}\|^2 \overset{\text{def}}{=} \sum_k |g_k|_k^2 < \infty. \tag{14}$$

Линейные операции в $\widetilde{H}$ определяются «покоординатно». Если $\tilde{h}^s = \{g_k^s\} \in \widetilde{H}$, $s = 1, 2$, то из неравенства $|g_k^1 + g_k^2|^2 \leqslant 2(|g_k^1|^2 + |g_k^2|^2)$, $\forall k$, следует, что и $\tilde{h}^1 + \tilde{h}^2 \in \widetilde{H}$. Поэтому $\widetilde{H}$ — линейное пространство. Зададим в нем скалярное произведение формулой

$$(\tilde{h}^1, \tilde{h}^2) = \sum_k \langle g_k^1, g_k^2\rangle_k; \tag{15}$$

---

*) Рассматривается случай, когда число пространств G_k бесконечно. Если оно конечно, то последующие рассуждения существенно упрощаются.

ряд в правой части абсолютно сходится, поскольку

$$\sum_k |\langle g_k^1, g_k^2\rangle| \leqslant \sum_k |g_k^1|\cdot|g_k^2| \leqslant \|\widetilde{h}^1\|\cdot\|\widetilde{h}^2\|.$$

Свойства (1.1)—(1.3) скалярного произведения очевидно выполнены; норма (14) согласована с (15). Тем самым в $\widetilde{H}$ введена структура предгильбертова пространства. Это пространство называют *ортогональной суммой* пространств G_k и обозначают

$$\widetilde{H} = \sum_k \oplus G_k. \tag{16}$$

Совпадение обозначений (13) и (16) не приводит к недоразумениям, поскольку, как будет ясно из дальнейшего, различие между «ортогональными суммами» и «ортогональными разложениями» не очень существенно.

Для $k=1, 2, \ldots$ рассмотрим отображение $V_k: G_k \to \widetilde{H}$ (оператор естественного вложения), сопоставляющее элементу $g \in G_k$ элемент $\widetilde{h} = V_k g = \{0, \ldots, 0, g, 0, \ldots\} \in \widetilde{H}$ (g на k-м месте). Линейное отображение V_k осуществляет изометрический изоморфизм пространства G_k и (замкнутого) подпространства $F_k \overset{\text{def}}{=} V_k G_k \subset \widetilde{H}$.

Установим полноту пространства $\widetilde{H}$.

Теорема 5. *Ортогональная сумма* (16) *есть полное сепарабельное пространство.*

○ Пусть гильбертово пространство H есть пополнение $\widetilde{H}$. Тогда F_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — попарно ортогональные подпространства в H. Очевидно, что их линейная оболочка плотна в H. Следовательно, они осуществляют ортогональное разложение (13) пространства H.

Для всякого $h \in H$ рассмотрим разложение (10) и положим $g_k = V_k^{-1} f_k$, $k=1, 2, \ldots$ В силу (11) последовательность $\{g_k\}$ удовлетворяет условию (14). Поэтому $\widetilde{h} = \{g_k\} \in \widetilde{H}$. Таким образом, $h = \widetilde{h}$ и, стало быть, пространство $\widetilde{H} = H$ полное.

Пусть M_k, $k=1, 2, \ldots,$ — ортонормированный базис в F_k. Тогда счетное множество $M = \bigcup_k M_k$ — о. н. с. в $\widetilde{H}$. Поскольку $\vee M \supset F_k$ $(\forall k)$, то $\vee M = \widetilde{H}$ и, следовательно, $\widetilde{H}$ — сепарабельное пространство ●

Исходные пространства G_k и подпространства $F_k = V_k G_k \subset \widetilde{H}$ обычно отождествляют. Это отождествление и позволяет не различать разложение (13) и сумму (16).

Если при всех $k = 1, 2, \ldots$ пространство G_k совпадает с одним и тем же гильбертовым пространством G, то наряду с (16) употребляют обозначение $l_2^m(G)$, где m, $1 \leqslant m \leqslant \infty$, — число экземпляров пространства G. Очевидно $l_2^m(\mathbb{C}) = l_2^m$.

4. Рассмотрим «непрерывный аналог» пространств $l_2^m(G)$. Пусть $(Y, \mathfrak{A}, \mu)$ — сепарабельное пространство с σ-конечной мерой, G — сепарабельное гильбертово пространство, $\dim G \leqslant \leqslant \infty$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $|\cdot|$ — скалярное произведение и норма в G. Вектор-функцию $h: Y \to G$, определенную для μ-п. в. $y \in Y$, называют измеримой, если для любого «постоянного» элемента $g \in G$ скалярная функция $\langle h(y), g \rangle$ измерима. Если h^1, h^2 — измеримые вектор-функции, то $\langle h^1(y), h^2(y) \rangle$ — также измеримая функция. В самом деле, пусть $\{u_k\}$ — ортонормированный базис в G. В силу (2.12)

$$\langle h^1(y), h^2(y) \rangle = \sum\nolimits_k \langle h^1(y), u_k \rangle \langle u_k, h^2(y) \rangle, \qquad (17)$$

и функция (17) измерима как сумма μ-п. в. сходящегося ряда измеримых функций.

Обозначим через H множество измеримых вектор-функций h, удовлетворяющих условию

$$\|h\|^2 \overset{\text{def}}{=} \int_Y |h(y)|^2 d\mu(y) < \infty. \qquad (18)$$

Эквивалентные вектор-функции отождествляются. Ясно, что H — линейное пространство относительно естественной линейной структуры. Зададим в H скалярное произведение формулой

$$(h^1, h^2) = \int_Y \langle h^1(y), h^2(y) \rangle d\mu(y). \qquad (19)$$

Подынтегральная функция в (19) оценивается произведением $|h^1(y)| \cdot |h^2(y)|$ и потому суммируема в силу (18). Аксиомы скалярного произведения для интеграла (19) очевидно выполнены. Тем самым в H введена структура предгильбертова пространства, причем норма (18) согласована со скалярным произведением. Пространство H обозначают через

$$H = L_2(Y, \mu; G). \qquad (20)$$

Ясно, что $L_2(Y, \mu, \mathbf{C}) = L_2(Y, \mu)$.

Теорема 6. *Пространство* (20) — *полное и сепарабельное.*

○ Обозначим $\dim G = m$, $1 \leqslant m \leqslant \infty$. Установим изометрический изоморфизм пространств H и $\widetilde{H} = l_2^m(L_2(Y, \mu))$. Поскольку $\widetilde{H}$ полно и сепарабельно (см. теорему 5), это же верно и для H. Проведем рассуждения, считая $m = \infty$.

Пусть $\{u_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — ортонормированный базис в G. Для $h \in H$ положим $f_k(y) = \langle h(y), u_k \rangle$. Ясно, что $f_k \in \in L_2(Y, \mu)$, $\forall k$. Из равенства

$$\sum\nolimits_k |f_k(y)|^2 = \sum\nolimits_k |\langle h(y), u_k \rangle|^2 = |h(y)|^2,$$

выполненного μ-п. в., следует, что

$$\|h\|_H^2 = \int_Y \sum\nolimits_k |f_k(y)|^2 d\mu(y) = \sum\nolimits_k \|f_k\|_{L_2(Y, \mu)}^2 \qquad (21)$$

Поэтому $f \overset{\text{def}}{=} \{f_k\}_1^\infty \in \widetilde{H}$. Отображение $V: H \to \widetilde{H}$, $Vh = f$, линейно и изометрично.

Если $f = \{f_k\}_1^\infty \in \widetilde{H}$, то вектор-функция $h = \sum_k f_k(y) u_k$ определена μ-п. в. на Y и измерима (сходимость ортогонального ряда μ-п. в. следует из конечности интеграла во втором члене равенства (21)). Очевидно $h \in H$ и $Vh = f$. Требуемый изометрический изоморфизм пространств H, $\widetilde{H}$ установлен ●

Если Y — натуральный ряд и $\mu(k) = 1$, $\forall k \in Y$, то пространство (20) сводится к $l_2(G)$. Если мера μ не дискретна, то нет естественной интерпретации пространства G как подпространства в $L_2(Y, \mu; G)$. В § 7.1 будет изложена более общая конструкция «прямого интеграла гильбертовых пространств», охватывающая как пространства (20), так и ортогональные суммы (16).

5. Полную ортонормированную систему в пространстве (20) можно построить, «перемножая» элементы ортонормированных базисов в пространствах $L_2(Y, \mu)$ и G.

Теорема 7. *Пусть $\{\omega_l\}$ — о. н. п. с. в $L_2(Y, \mu)$, $\{u_k\}$ — о. н. п. с. в G. Тогда вектор-функции $h_{kl}(y) = \omega_l(y) u_k$ образуют о. н. п. с. в $L_2(Y, \mu; G)$.*

○ Воспользуемся отождествлением $L_2(Y, \mu; G)$ с $l_2^m(L_2(Y, \mu))$, установленным при доказательстве теоремы 6. Элементы $\omega_l(y) u_k$, $l = 1, 2, \ldots$, образуют о. н. п. с. в «k-м экземпляре» пространства $L_2(Y, \mu)$, а потому объединение всех таких систем есть о. н. п. с. в $L_2(Y, \mu; G)$ ●

6. Рассмотрим случай, когда G само есть некоторое пространство L_2.

Теорема 8. *Пусть $G = L_2(X, \tau)$, $H = L_2(Y, \mu; G)$ и $H_1 = L_2(X \times Y, \tau \times \mu)$. Отображение*

$$V: w \mapsto h, \quad h(y) = w(\cdot, y), \quad \forall w \in H_1, \tag{22}$$

есть изометрия пространства H_1 на H.

○ Зафиксируем функцию $f_0 \in L_2(Y, \mu)$, такую, что $f_0(y) > 0$ при μ-п.в. $y \in Y$. Для любой $g \in G$ функция $g(x) f_0(y)$ принадлежит H_1 и, следовательно, функция $w(x, y) \overline{g(x)} f_0(y)$ $\tau \times \mu$-суммируема. В соответствии с теоремой Фубини функция

$$f_0(y) \langle h(y), g \rangle = \int_X w(x, y) \overline{g(x)} f_0(y) \, d\tau(x)$$

определена μ-п. в. на Y и измерима. Тем самым измерима и функция $\langle h(y), g \rangle$. Стало быть, вектор-функция $h(y)$ корректно определена соотношением (22) и измерима (в смысле п. 4). При этом, снова по теореме Фубини,

$$\|h\|_H^2 = \int_Y |h(y)|^2 \, d\mu(y) = \|w\|_{H_1}^2 \tag{23}$$

и потому выполнено (18).

Оператор (22) линеен и в силу (23) изометричен. Осталось показать, что $VH_1 = H$. Пусть функции $\omega_l(y)$, $l = 1, 2, \ldots$, образуют о. н. п. с. в $L_2(Y, \mu)$, функции $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, — о. н. п. с. в $G = L_2(X, \tau)$. Согласно теореме 7 вектор-функции $h_{kl}(y) = \omega_l(y) u_k(\cdot)$, $k, l = 1, 2, \ldots$, образуют о. н. п. с. в H. Функции $w_{kl}(x, y) = u_k(x)\omega_l(y)$ принадлежат H_1 и $Vw_{kl} = h_{kl}$. Следовательно, $VH_1 \supset \vee_{k, l} \{h_{kl}\} = H$ ●

Отображение (22) осуществляет «естественное отождествление» пространства $L_2(Y, \mu; G)$, где $G = L_2(X, \tau)$, и пространства $L_2(X \times Y, \tau \times \mu)$. Из теорем 7,8 следует, что если $\{u_k(x)\}$, $\{\omega_l(y)\}$ — о. н. п. с. в пространствах $L_2(X, \tau)$, $L_2(Y, \mu)$, то $\{u_k(x)\omega_l(y)\}$ — о. н. п. с. в $L_2(X \times Y, \tau \times \mu)$. Этот факт, впрочем, нетрудно установить и непосредственно.

§ 4. Линейные и билинейные функционалы. Слабая сходимость

1. Линейным непрерывным функционалом в H заведомо является выражение вида

$$l(x) = (x, h), \tag{1}$$

где $h \in H$ — фиксированный элемент. Непрерывность l следует из неравенства $|l(x)| \leqslant \|x\| \cdot \|h\|$, которое переходит в равенство при $x = h$. Поэтому

$$\|l\| = \|h\|. \tag{2}$$

Покажем, что линейных непрерывных функционалов, отличных от (1), не существует.

Теорема 1. *Всякий линейный непрерывный функционал в H представим единственным образом в виде* (1).

○ Если $l = 0$, то (1) выполнено при $h = 0$. Если $l \neq 0$, то рассмотрим $G = \{x \in H : l(x) = 0\}$. Очевидно, что G линейно и в силу непрерывности l замкнуто. При этом $G \neq H$. Пусть $f \in H \ominus G$, $\|f\| = 1$; тогда $l(f) \neq 0$. Для всякого $x \in H$ можно подобрать число α, так чтобы $x - \alpha f \in G$. В самом деле, $l(x - \alpha f) = 0$, если $\alpha = l(x)/l(f)$. Так как $(x - \alpha f, f) = 0$, то $\alpha = (x, f)$, т. е. $l(x) = l(f)(x, f)$. Это совпадает с (1) при $h = \overline{l(f)}\, f$. Единственность представления следует из (2): при $l = 0$ также и $h = 0$ ●

Наряду с линейными рассматривают *антилинейные* (или *полулинейные*) непрерывные функционалы. В определении антилинейного функционала l_a, в отличие от линейного, требуется $l_a(\alpha x) = \bar{\alpha} l_a(x)$. Ясно, что если l_a — антилинейный, то $l(x) = \overline{l_a(x)}$ представляет собой линейный функционал. Отсюда сразу следует, что *всякий антилинейный функционал представляется (единственным образом) в виде*

$$l_a(x) = (h, x) \quad (\|l_a\| = \|h\|), \tag{3}$$

где h — фиксированный элемент. Соответствие между l_a и $h \in H$ взаимно-однозначное, линейное *) и изометрическое. Таким образом, *сопряженное к H пространство H^** (которое в теории комплексных банаховых пространств определяется как пространство непрерывных антилинейных функционалов) при помощи (3) *каноническим образом отождествляется с H.*

2. Если $F \subset H$ — подпространство в H и λ — непрерывный линейный функционал на F, то по теореме 1 он представим в виде

$$\lambda(x) = (x, f), \quad f \in F, \quad \|\lambda\| = \|f\|. \tag{4}$$

Формула (4) автоматически распространяет λ на все $x \in H$, причем норма λ не увеличивается. Легко видеть, что все другие непрерывные распространения λ на H имеют вид $(x, f+g)$, $\forall g \perp F$. Эти распространения λ_g (при $g \neq 0$) связаны с увеличением нормы λ: $\|\lambda_g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.

3. Слабая сходимость в H вводится в соответствии с общими понятиями банаховой теории. Таким образом, $x = w\text{-}\lim x_n$ означает, что

$$(x_n, h) \to (x, h), \quad \forall h \in H. \tag{5}$$

Из (5) непосредственно следует, что слабый предел единствен и что из $x_n \to x$ следует $x_n \xrightarrow{w} x$.

Теорема 2. *а) Слабо сходящаяся последовательность ограничена по норме. б) Гильбертово пространство слабо полно. в) Единичный шар гильбертова пространства слабо компактен.*

Утверждения теоремы 2 прямо следуют из общих теорем банаховой теории, если учесть сепарабельность H и соотношение $H^* = H$. Поэтому доказательство здесь не приводится. Поясним лишь, что утверждение б) означает следующее: если для последовательности x_n при всех $h \in H$ существует конечный предел $\lim(x_n, h)$, то найдется элемент $x \in H$, такой, что $x_n \xrightarrow{w} x$.

Отметим следующие элементарные факты, связанные со слабой сходимостью.

Лемма 3. *Если $x_n \xrightarrow{w} x$, $y_n \to y$, то $(x_n, y_n) \to (x, y)$.*

○ Требуемое получается из теоремы 2, п. а), и оценки

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| \leqslant \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + |(x_n, y) - (x, y)| \quad ●$$

Лемма 4. *Для сходимости $x_n \to x$ необходимо и достаточно, чтобы $x_n \xrightarrow{w} x$, $\|x_n\| \to \|x\|$.*

○ Необходимость очевидна. Установим достаточность.

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(x_n, x) + \|x\|^2 \to$$
$$\to 2\|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(x, x) = 0 \quad ●$$

---

*) Для линейных функционалов соответствие между l и h антилинейное: $a_1 l_1 + a_2 l_2 \leftrightarrow \bar{a}_1 h_1 + \bar{a}_2 h_2$

Всякая ортонормированная последовательность $\{u_n\}$ слабо сходится к нулю. В самом деле, для любого $h \in H$ числа $\alpha_n(h) = (h, u_n)$ образуют последовательность из l_2, а потому $\alpha_n(h) \to 0$. Заметим, что в условиях леммы 3 нельзя заменить $y_n \to y$ на $y_n \xrightarrow{w} y$. Это ясно из рассмотрения примера $x_n = y_n = u_n$.

4. Наряду с линейными рассматривают непрерывные *билинейные**) функционалы. Функция $\Phi: H \times H \to \mathbf{C}$ называется непрерывным билинейным функционалом (формой), если она линейна по первому аргументу, антилинейна по второму и удовлетворяет условию ограниченности

$$\|\Phi\| \overset{\text{def}}{=} \sup_{\|x\|, \|y\| < 1} |\Phi(x, y)| < \infty. \tag{6}$$

Из (6) очевидно следует неравенство

$$|\Phi(x\ y)| \leqslant \|\Phi\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x, y \in H, \tag{7}$$

причем $\|\Phi\|$ можно также определить как наименьшую постоянную C в неравенстве $|\Phi(x, y)| \leqslant C\|x\| \cdot \|y\|$.

Непрерывным билинейным функционалом является каждое из двух выражений

$$\Phi(x, y) = (Tx, y), \quad \Phi(x, y) = (x, Sy), \tag{8}$$

где T, S — линейные непрерывные операторы в H.

Функционал $\Phi(x) \overset{\text{def}}{=} \Phi(x, x)$ называют *квадратичным функционалом (формой)*, отвечающим билинейному функционалу $\Phi(x, y)$. Непосредственно проверяется соотношение, обобщающее формулу (1.9):

$$4\Phi(x, y) = \Phi(x+y) - \Phi(x-y) + i\Phi(x+iy) - i\Phi(x-iy). \tag{9}$$

Функционал Φ называется *эрмитовым*, если

$$\Phi(y, x) = \overline{\Phi(x, y)}. \tag{10}$$

Теорема 5. *Билинейный непрерывный функционал является эрмитовым тогда и только тогда, когда соответствующий квадратичный функционал — вещественный.*

○ Из (10) следует, что $\Phi(x) = \overline{\Phi(x)}$. Обратно, если $\Phi(x)$ вещественно при всех x, то (10) следует из (9) ●

Для билинейных функционалов справедлива теорема о представлении, являющаяся развитием теоремы 1.

Теорема 6. *Всякий непрерывный билинейный функционал Φ допускает каждое из двух представлений* (8). *Эти представления единственны и*

$$\|\Phi\| = \|T\| = \|S\|. \tag{11}$$

*) По другой тирминологии — *полуторалинейные*.

○ Установим второе из представлений (8) (первое получается аналогично). Из (7) следует, что при фиксированном y линейный функционал $\Phi(\cdot, y)$ непрерывен. В силу теоремы 1 найдется (единственный) элемент h, для которого $\Phi(x, y) = (x, h)$, $\forall x \in H$. Рассмотрим отображение $S: y \mapsto h$. Оператор S линеен, поскольку

$$(\cdot, S(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) = \Phi(\cdot, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \bar{\alpha}_1 \Phi(\cdot, y_1) + \\ + \bar{\alpha}_2 \Phi(\cdot, y_2) = \bar{\alpha}_1 (\cdot, Sy_1) + \bar{\alpha}_2 (\cdot, Sy_2) = (\cdot, \alpha_1 Sy_1 + \alpha_2 Sy_2).$$

Сравнивая (2) с (7), видим, что $\|Sy\| = \|h\| \leqslant \|\Phi\| \cdot \|y\|$, т. е. $\|S\| \leqslant \|\Phi\|$. С другой стороны, из (8) и (1.6) следует

$$|\Phi(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|Sy\| \leqslant \|S\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|,$$

т. е. $\|\Phi\| \leqslant \|S\|$. Таким образом, выполнено (11). Оператор S в (8) определяется однозначно, поскольку для любого y представление $\Phi(\cdot, y) = (\cdot, h)$ единственно ●

Скалярное произведение (x, y) является простейшим примером непрерывной билинейной эрмитовой формы в H; для нее в (8) $S = T = I$, где I — тождественный оператор в H.

5. Теорема 6 означает, что любой из трех объектов Φ, T, S однозначно определяет два других. Пусть задан оператор T. Тогда Φ определяется первой, а S — второй из формул (8). Функционал $\Phi(x, y)$ называют *билинейной формой оператора* T, $\Phi(x)$ — его *квадратичной формой*, S — *сопряженным к* T *оператором*. Сопряженный оператор обозначают через T^*. В соответствии с (8) оператор T^* определяется равенством

$$(Tx, y) = (x, T^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{12}$$

Теорема 6 обеспечивает существование и единственность сопряженного оператора. Равенство (11) означает, что

$$\|T\| = \|T^*\|. \tag{13}$$

Из (12) непосредственно вытекают соотношения

$$T^{**} \overset{\text{def}}{=} (T^*)^* = T, \tag{14}$$

$$(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)^* = \bar{\alpha}_1 T_1^* + \bar{\alpha}_2 T_2^*, \tag{15}$$

$$(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*. \tag{16}$$

Существование сопряженного оператора влечет *слабую непрерывность* ограниченных операторов. Действительно, если $x_n \xrightarrow{w} x_0$, то $(Tx_n, h) = (x_n, T^*h) \to (x, T^*h) = (Tx, h)$ при любом $h \in H$. Это означает, что $Tx_n \xrightarrow{w} Tx_0$.

Отметим еще следующее утверждение.

Теорема 7. *Непрерывный линейный оператор однозначно определяется своей квадратичной формой.*

○ Надо показать, что $T_1 = T_2$, если $(T_1x, x) = (T_2x, x)$, $\forall x \in H$. Но тогда из (9) следует $(T_1x, y) = (T_2x, y)$, $\forall x, y \in H$, и $T_1 = T_2$ в силу единственности представления (8) ●

§ 5. Алгебра непрерывных операторов в H

1. Обозначим через $\mathbf{B}(H)$ совокупность всех линейных непрерывных операторов в H. Как известно, это множество есть банахово пространство относительно естественной линейной структуры и операторной нормы. В $\mathbf{B}(H)$ вводятся еще две операции — умножение $(T_1T_2)(x) = T_1(T_2x)$ и инволюция $T \mapsto T^*$. При этом очевидно

$$\|T_1T_2\| \leqslant \|T_1\| \cdot \|T_2\|. \tag{1}$$

Введение этих двух операций со свойствами (1) и (4.13)—(4.16) превращает $\mathbf{B}(H)$ в *банахову алгебру с инволюцией*. Тождественный оператор I является единицей алгебры $\mathbf{B}(H)$. Из (1) следует, что произведение непрерывно по паре сомножителей. Инволюция также непрерывна; это вытекает из (4.13), (4.15).

Сходимость по норме операторов называется *равномерной сходимостью*. Наряду с равномерным предельным переходом (u-lim) в $\mathbf{B}(H)$ рассматриваются еще два вида предельного перехода: *сильный* (s-lim) и *слабый* (w-lim).

Как и в общем случае банаховых пространств, $T_n \xrightarrow{s} T$ означает, что $T_nx \to Tx$, $\forall x \in H$. В применении к гильбертову пространству $T_n \xrightarrow{w} T$ означает, что $(T_nx, y) \to (Tx, y)$, $\forall x, y \in H$. Равномерный предел сильнее, нежели s-lim; последний сильнее, нежели w-lim. Если $T_n \xrightarrow{w} T$ (тем более, если $T_n \xrightarrow{s} T$), то последовательность норм $\|T_n\|$ ограничена. Относительно s- и w-сходимости пространство $\mathbf{B}(H)$ является полным.

Линейные операции в $\mathbf{B}(H)$ непрерывны относительно s-сходимости и w-сходимости. То же верно для произведения, если один из сомножителей — постоянный оператор. Сложнее обстоит дело (при $\dim H = \infty$) для инволюции, а также для произведения, когда оба сомножителя переменны.

Теорема 1. *Инволюция $T \mapsto T^*$ w-непрерывна.*

○ Если $w\text{-}\lim T_n = 0$, то $(T_n^*x, y) = (x, T_ny) \to 0$, т. е. $w\text{-}\lim T_n^* = 0$ ●

В то же время *инволюция не s-непрерывна*, что видно из следующего примера. Пусть

$$\{u_n\} \text{ — о. н. с.}, \ h \in H, \ \|h\| = 1, \ T_n = (\cdot, u_n)h, \ R_n = T_n^* = (\cdot, h)u_n. \tag{2}$$

Из $u_n \xrightarrow{w} 0$ сразу следует $T_n \xrightarrow{s} 0$. В то же время элементы $T_n^*h = u_n$ не имеют предела, так что $s\text{-}\lim T_n^*$ не существует

Теорема 2. *Если* $T = s\text{-}\lim T_n$, $R = s\text{-}\lim R_n$, *то* $TR = s\text{-}\lim T_n R_n$.

○ Поскольку $\sup\|T_n\| < \infty$, доказательство сводится к оценке

$$\|T_n R_n x - TRx\| \leqslant \|T_n\| \cdot \|R_n x - Rx\| + \|(T_n - T) Rx\| \quad ●$$

Теорема 3. *Если* $T = w\text{-}\lim T_n$, $R = s\text{-}\lim R_n$, *то* $TR = w\text{-}\lim T_n R_n$.

○ В силу теоремы 1 $T_n^* \xrightarrow{w} T^*$, т. е. $T_n^* y \xrightarrow{w} T^* y$, $\forall y \in H$. В то же время $R_n x \to Rx$, $\forall x \in H$. В соответствии с леммой 4.3

$$(T_n R_n x,\ y) = (R_n x,\ T_n^* y) \to (Rx,\ T^* y) = (TRx,\ y) \quad ●$$

Убедимся, что в условии теоремы 3 нельзя менять сомножители местами (и, тем более, нельзя ограничиться w-сходимостью для обоих сомножителей). Пусть операторы T_n, R_n определены в (2). Тогда $T_n \xrightarrow{s} 0$, $R_n \xrightarrow{w} 0$, но, как легко видеть, $T_n R_n = (\cdot,\ h)\, h$, а потому $w\text{-}\lim T_n R_n \neq 0$.

2. Умножение операторов некоммутативно. Если $T_1 T_2 = T_2 T_1$ (операторы T_1, T_2 *перестановочны*), будем писать $T_1 \smile T_2$. Если Γ — подмножество в $\mathbf{B}(H)$, то $T \smile \Gamma$ означает $T \smile S$, $\forall S \in \Gamma$. Ясно, что $I \smile \mathbf{B}(H)$. Установим, что с точностью до скалярного множителя это единственный оператор, перестановочный со всей алгеброй $\mathbf{B}(H)$.

Теорема 4. *Пусть* $T \in \mathbf{B}(H)$, $T \smile \mathbf{B}(H)$. *Тогда* $T = \gamma I$, $\gamma \in \mathbf{C}$.

○ Положим $Q_{f,g} = (\cdot,\ g) f$ $(f, g \in H;\ f, g \neq 0)$. По условию

$$(\cdot,\ g) Tf = TQ_{f,g} = Q_{f,g} T = (\cdot,\ T^* g) f. \tag{3}$$

Если $Tf = 0$ для какого-либо f, то в силу (3) $T^* g = 0$, $\forall g$, т. е. $T^* = 0$ и $T = 0$. Пусть теперь $Tf \neq 0$ $(\forall f)$. Вычислим билинейные формы «крайних членов» равенства (3):

$$(x,\ g)(Tf,\ y) = (x,\ T^* g)(f,\ y), \quad \forall x, y \in H. \tag{4}$$

Ввиду того, что по теореме 4.6 оператор однозначно определяется своей билинейной формой, равенство (4) возможно лишь при условии

$$Tf = \gamma f, \quad T^* g = \bar{\gamma} g, \tag{5}$$

где $\gamma = \gamma(f,\ g)$ — некоторое число. Первое из соотношений (5) показывает, что γ не зависит от g, второе — что γ не зависит от f, т. е. $T = \gamma I$ ●

Стоит отметить, что теорема 4 содержательна и при $\dim H < \infty$.

3. Всякий оператор $T \in \mathbf{B}(H)$ допускает *матричное представление*. Фиксируем в H о. н. п. с. $\{u_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, и сопоставим оператору T $(m \times m)$-матрицу, $m = \dim H$, $1 \leqslant m \leqslant \infty$:

$$t = \{t_{jk}\},\quad t_{jk} = (Tu_k,\ u_j) = (u_k,\ T^* u_j). \tag{6}$$

Рассмотрим разложения элементов $x \in H$ и Tx в ряд Фурье (2.11) по системе $\{u_k\}$:

$$x = \sum_k \alpha_k u_k, \quad Tx = \sum_k \beta_k u_k. \tag{7}$$

Тогда последовательность $\{\beta_j\}$ выражается через $\{\alpha_j\}$ по формулам

$$\beta_j = \sum_k t_{jk} \alpha_k, \quad \forall j. \tag{8}$$

В самом деле,

$$\beta_j = (Tx,\ u_j) = \left(\sum_k \alpha_k u_k,\ T^* u_j\right) = \sum_k \alpha_k (u_k,\ T^* u_j) = \sum_k t_{jk} \alpha_k.$$

Из проведенной выкладки следует сходимость рядов (8). Матрица (6) задает *матричное представление оператора T в базисе* $\{u_k\}$. При изменении базиса $\{u_k\}$ матрица t, вообще говоря, меняется. Исключение составляют «скалярные» операторы вида γI, матрица которых в любом базисе есть $\operatorname{diag}(\gamma, \gamma, \ldots)$.

Непрерывный оператор T однозначно определяется своими значениями на какой-либо о. н. п. с. $\{u_k\}$. В самом деле, по линейности T распространяется с базиса $\{u_k\}$ на его линейную оболочку, а затем по непрерывности — на все пространство H. Из сказанного следует, что *оператор $T \in \mathbf{B}(H)$ определяется своей матрицей* (6) *однозначно.*

Произведению операторов отвечает произведение матриц: если $T,\ R \in \mathbf{B}(H)$, $\{t_{jk}\}$, $\{r_{jk}\}$ — их матрицы, то матрица оператора $Q = TR$ есть

$$q = \{q_{jk}\},\ q_{jk} = \sum_s t_{js} r_{sk} \quad (\forall j,\ k). \tag{9}$$

При этом ряды (9) абсолютно сходятся. Действительно, на основании (2.12) имеем

$$q_{jk} = (TRu_k,\ u_j) = (Ru_k,\ T^* u_j) =$$
$$= \sum_s (Ru_k,\ u_s)(u_s,\ T^* u_j) = \sum_s t_{js} r_{sk}.$$

Сопряженному оператору T^* отвечает эрмитово сопряженная матрица $t^* = \{\overline{t_{kj}}\}$; это прямо вытекает из (6).

Матричное представление наиболее естественно в случае, когда $H = l_2^m$ и $u_k = e_k$ $(\forall k)$, где $\{e_k\}$ — стандартный базис в l_2^m. *В этом случае оператор T и его матрицу t принято отождествлять.* Следующая теорема показывает, что в общей ситуации матричное представление оператора соответствует «переходу» в пространство l_2^m с помощью изометрии, построенной в теореме 2.7.

Теорема 5. *Пусть H — гильбертово пространство,* $\dim H = m$ *и $\{u_k\}$ — о. н. п. с. в H. Биоднозначное соответствие $T \leftrightarrow t$, определенное в* (6), *представляет собой изометрический изоморфизм банаховых алгебр с инволюцией $\mathbf{B}(H)$ и $\mathbf{B}(l_2^m)$.*

○ Пусть V — изометрия, отображающая H на l_2^m, такая, что $Vu_k = e_k$ (см. теорему 2.7). Тогда равенство $t = VTV^{-1}$, $T \in \mathbf{B}(H)$, $t \in \mathbf{B}(l_2^m)$, устанавливает изометрический изоморфизм между алгебрами $\mathbf{B}(H)$ и $\mathbf{B}(l_2^m)$. Остается заметить, что оператор t в стандартном базисе изображается матрицей оператора T в базисе $\{u_k\}$. В самом деле,

$$(VTV^{-1}e_k,\ e_j) = (VTu_k,\ Vu_j) = (Tu_k,\ u_j) = t_{jk} \quad \bullet$$

Эффективного критерия непрерывности оператора T в терминах его матрицы нет. Приведем простое достаточное условие непрерывности.

Теорема 6. *Пусть матрица* $t = \{t_{jk}\}$ *такова, что*

$$a_1 = \sup_k \sum_j |t_{jk}| < \infty, \quad a_2 = \sup_j \sum_k |t_{jk}| < \infty. \tag{10}$$

Тогда в любом ортонормированном базисе $\{u_k\}$ *пространства* H *формулы* (7), (8) *определяют оператор* $T \in \mathbf{B}(H)$. *Справедлива оценка* $\|T\|^2 \leqslant a_1 a_2$.

○ В силу теоремы 5 можно считать, что $H = l_2^m$ и базис $\{u_k\}$ — стандартный. Оценим билинейную форму оператора T, используя неравенство Коши для двойных сумм. Тогда получим требуемое:

$$|(Tx,\ y)|^2 = \left|\sum_{jk} t_{jk}\alpha_k\bar{\beta}_j\right|^2 \leqslant \sum_{jk} |t_{jk}|\cdot|\alpha_k|^2 \sum_{jk} |t_{jk}|\cdot|\beta_j|^2 =$$
$$= \left(\sum_k |\alpha_k|^2 \sum_j |t_{jk}|\right)\left(\sum_j |\beta_j|^2 \sum_k |t_{jk}|\right) \leqslant a_1 a_2 \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \quad \bullet$$

4. Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства. Через $\mathbf{B}(H_1, H_2)$ обозначим банахово пространство линейных непрерывных отображений H_1 в H_2. Операторы $T \in \mathbf{B}(H_1, H_2)$ можно умножать справа на $R_1 \in \mathbf{B}(H_1)$ и слева на $R_2 \in \mathbf{B}(H_2)$. При этом $R_2TR_1 \in \mathbf{B}(H_1, H_2)$ и

$$\|R_2TR_1\| \leqslant \|R_2\| \cdot \|T\|\ \|R_1\|.$$

Как и в случае одного пространства, вводится понятие билинейного непрерывного функционала $\Phi: H_1 \times H_2 \to \mathbf{C}$. Его норма определяется соотношением (4.6), в котором теперь $\|x\| = \|x\|_1$, $\|y\| = \|y\|_2$. Понятие квадратичного функционала теряет смысл.

Если $T \in \mathbf{B}(H_1, H_2)$, $S \in \mathbf{B}(H_2, H_1)$, то билинейным непрерывным функционалом является каждое из выражений

$$\Phi(x,\ y) = (Tx,\ y)_2,\ \Phi(x,\ y) = (x,\ Sy)_1,\ x \in H_1,\ y \in H_2.$$

Относительно этих представлений сохраняют силу утверждения теоремы 4.6. Отсюда следует, что *сопряженный к* $T \in \mathbf{B}(H_1, H_2)$ *оператор* $T^* \in \mathbf{B}(H_2, H_1)$, определяемый условием

$$(Tx,\ y)_2 = (x,\ T^*y)_1, \quad \forall x \in H_1,\ \forall y \in H_2,$$

существует и единствен. При этом остаются в силе соотношения (4.13)—(4.15).

§ 6. Компактные операторы

1. В алгебре $\mathbf{B}(H)$ *компактные операторы* (операторы, переводящие единичный шар в компактное множество) *образуют подпространство.* Иначе говоря, линейные комбинации и u-пределы компактных операторов также компактны. Подпространство компактных операторов обозначим через $\mathbf{S}_\infty(H)$. Так как непрерывный оператор переводит компактное множество в компактное, то $T_1T_2 \in \mathbf{S}_\infty(H)$, если хотя бы один из сомножителей компактен, а другой непрерывен. Иначе говоря, $\mathbf{S}_\infty(H)$ — *двусторонний идеал алгебры* $\mathbf{B}(H)$.

Определение компактного оператора может быть выражено в иных терминах, часто более удобных.

Теорема 1. *Условие $T \in \mathbf{S}_\infty$ равносильно тому, что T переводит всякую слабо сходящуюся последовательность элементов в сильно сходящуюся.*

○ Необходимость. Пусть $T \in \mathbf{S}_\infty$. Если $x_n \xrightarrow{w} x_0$, то $\sup\|x_n\| < \infty$ и $Tx_n \xrightarrow{w} Tx_0$. Можно считать $x_0 = 0$. Если $Tx_n \not\to 0$, то найдется подпоследовательность x'_n, такая, что $\inf\|Tx'_n\| = a > 0$. Множество $\{Tx'_n\}$ компактно, а потому найдется подпоследовательность $\{x''_n\}$, такая, что существует $z = s\text{-}\lim Tx''_n$. В силу $Tx_n \xrightarrow{w} 0$ должно быть $z = 0$, что невозможно при $\|Tx''_n\| \geqslant a > 0$.

Достаточность. Нужно показать, что во всякой последовательности $\{x_n\}$, $\|x_n\| \leqslant 1$, существует подпоследовательность $\{x'_n\}$, такая, что $\{Tx'_n\}$ сильно сходится. В силу п. в) теоремы 4.2 можно выбрать w-сходящуюся подпоследовательность $\{x'_n\}$ Тогда $\{Tx'_n\}$ сходится сильно ●

Теорема 2. *Условия $T \in \mathbf{S}_\infty$ и $T^*T \in \mathbf{S}_\infty$ равносильны.*

○ Если $T \in \mathbf{S}_\infty$, то $T^* \in \mathbf{B}(H)$, а потому $T^*T \in \mathbf{S}_\infty$. Пусть $T^*T \in \mathbf{S}_\infty$ и пусть $x_n \xrightarrow{w} 0$. Тогда $T^*Tx_n \xrightarrow{s} 0$ и в соответствии с леммой 4.3 $\|Tx_n\|^2 = (T^*Tx_n, x_n) \to 0$, т. е. $Tx_n \to 0$ ●

Теорема 3. *Условия $T \in \mathbf{S}_\infty$ и $T^* \in \mathbf{S}_\infty$ равносильны.*

○ Из $T^* \in \mathbf{S}_\infty$ следует, что $T^*T \in \mathbf{S}_\infty$, а тогда и $T \in \mathbf{S}_\infty$. Остается поменять T, T^* ролями ●

Последняя теорема означает, что идеал $\mathbf{S}_\infty(H)$ *симметричен,* т. е. инвариантен относительно инволюции.

Если H_1, H_2 — гильбертовы пространства, то через $\mathbf{S}_\infty(H_1, H_2)$ обозначают совокупность компактиых операторов $T \in \mathbf{B}(H_1, H_2)$. Класс $\mathbf{S}_\infty(H_1, H_2)$ есть подпространство в $\mathbf{B}(H_1, H_2)$. Легко проверяется, что следующие условия эквивалентны: $T \in \mathbf{S}_\infty(H_1, H_2)$, $T^*T \in \mathbf{S}_\infty(H_1)$, $TT^* \in \mathbf{S}_\infty(H_2)$, $T^* \in \mathbf{S}_\infty(H_2, H_1)$.

2. Важный подкласс класса $\mathbf{S}_\infty(H)$ образуют *конечномерные* операторы, или операторы *конечного ранга.* Будем гово-

рить, что $T \in \mathbf{B}(H)$ *имеет ранг* r, и писать $T \in \mathbf{K}_r(H)$, если образ T имеет размерность r:

$$\operatorname{rang} T \stackrel{\text{def}}{=\!=} \dim TH = r < \infty.$$

Множество всех конечномерных операторов есть

$$\mathbf{K}(H) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \bigcup\nolimits_{r \geqslant 0} \mathbf{K}_r(H).$$

Ясно, что множество $\mathbf{K}(H)$ линейно, $\mathbf{K} \subset \mathbf{S}_\infty$ и $\mathbf{K}$ — двусторонний (не замкнутый) идеал в $\mathbf{B}(H)$.

Теорема 4. *Включения $T \in \mathbf{K}_r$ и $T^* \in \mathbf{K}_r$ равносильны.*

○ Пусть $T \in \mathbf{K}_r$ и пусть $u_1, \ldots, u_r$ — ортонормированный базис в подпространстве TH. Тогда для любого $x \in H$

$$Tx = \sum\nolimits_1^r (Tx, u_k) u_k = \sum\nolimits_1^r (x, T^* u_k) u_k.$$

Обозначая $v_k = T^* u_k$, получаем представление

$$T = \sum\nolimits_1^r (\cdot, v_k) u_k. \tag{2}$$

Из (2) следует, что

$$T^* = \sum\nolimits_1^r (\cdot, u_k) v_k, \tag{3}$$

а потому $\operatorname{rang} T^* \leqslant r = \operatorname{rang} T$. Меняя T и T^* ролями, получаем, что $\operatorname{rang} T \leqslant \operatorname{rang} T^*$ ●

Из теоремы 4 вытекает, в частности, что *идеал* $\mathbf{K}(H)$ *симметричен*. Отметим еще следующее. Если $\{u_k\}$, $\{v_k\}$, $k = 1, \ldots, r$, — две произвольные линейно-независимые системы в H, то формулой (2) задается некоторый оператор $T \in \mathbf{K}_r$. Таким образом, класс $\mathbf{K}_r$ совпадает с совокупностью операторов вида (2).

Принципиальное значение для характеристики компактных операторов имеет следующий факт.

Теорема 5. *Равномерное замыкание класса* $\mathbf{K}(H)$ *совпадает с* $\mathbf{S}_\infty(H)$.

○ Поскольку $\mathbf{S}_\infty$ — подпространство в $\mathbf{B}(H)$, замыкание $\mathbf{K}$ лежит в $\mathbf{S}_\infty$. Пусть $T \in \mathbf{S}_\infty$; T-образ единичного шара компактен. По $\varepsilon > 0$ построим для него конечную ε-сеть: $\{y_k\}$, $k = 1, \ldots, r$. Пусть P — оператор проектирования на $\bigvee_k y_k$. Тогда $\operatorname{rang} P \leqslant r$, а потому и $\operatorname{rang} PT \leqslant r$. Для любых x, $\|x\| \leqslant 1$, на основании теоремы 3.1 имеем

$$\| Tx - PTx \| \leqslant \min_k \| Tx - y_k \| \leqslant \varepsilon,$$

т. е. $\| T - Q \| \leqslant \varepsilon$, где $Q = PT \in \mathbf{K}$ ●

При $\dim H = \infty$ в теореме 5 нельзя заменить равномерное замыкание сильным. Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Сильное замыкание класса* $\mathbf{K}(H)$ *совпадает с* $\mathbf{B}(H)$.

○ Пусть $\{u_k\}$ — ортогональный базис H, P_n — оператор проектирования на $\bigvee_1^n u_k$. Сходимость для любого $h \in H$ ряда (2.10) к h означает, что $s\text{-}\lim P_n = I$. Но тогда для любого $T \in \mathbf{B}(H)$ имеем $s\text{-}\lim P_n T = T$. Остается заметить, что $\operatorname{rang} P_n T \leqslant \leqslant n < \infty$ ●

§ 7. Ограниченные самосопряженные операторы

Основное значение для дальнейшего имеет класс самосопряженных операторов. Именно для таких операторов (вообще говоря, неограниченных) будет построена (см. гл. 6, 7) спектральная теория. Здесь пойдет речь об ограниченных самосопряженных операторах.

1. Оператор $A \in \mathbf{B}(H)$ называется *самосопряженным*, если $A = A^*$. В соответствии с (4.12) это означает, что выполнено равенство

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad (\forall x, y \in H). \tag{1}$$

Соотношение (1) дает повод называть самосопряженные операторы также симметричными. (Следует иметь в виду, что для неограниченных операторов смысл этих двух терминов уже различен; см. § 4.1.)

Если оператор $T \in \mathbf{B}(H)$ задан матрицей t в базисе $\{u_k\}$: $t_{jk} = (Tu_k, u_j)$, то в силу (5.6) самосопряженность T равносильна *эрмитовости матрицы* $t: t_{jk} = \overline{t_{kj}}$.

Полезен следующий простой признак самосопряженности.

Теорема 1. *Самосопряженность оператора $A \in \mathbf{B}(H)$ равносильна вещественности его квадратичной формы.*

○ Равенство (1) означает, что билинейная форма оператора A эрмитова. Остается сослаться на теорему 4.5 ●

Норму самосопряженного оператора можно выразить через его квадратичную форму.

Теорема 2. *Пусть $A = A^* \in \mathbf{B}(H)$. Тогда*

$$\|A\| = \sup_{\|x\| < 1} |(Ax, x)|. \tag{2}$$

○ Временно обозначим правую часть в (2) через a. Из соображений однородности имеем

$$|(Ax, x)| \leqslant a\|x\|^2 \quad (\forall x \in H). \tag{3}$$

В соответствии с (4.6), (4.11) достаточно оценить билинейную форму оператора A при $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$. Воспользуемся равенством (4.9) и вещественностью квадратичной формы. Для $\operatorname{Re}(Ax, y)$ с учетом (3) получим

$$|4\operatorname{Re}(Ax, y)| \leqslant |(A(x+y), x+y)| + |(A(x-y), x-y)| \leqslant$$
$$\leqslant a(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2a(\|x\|^2 + \|y\|^2) \leqslant 4a.$$

Заменим здесь x на αx, выбирая число α, $|\alpha|=1$, так, чтобы было $|(Ax, y)|=\alpha(Ax, y)$. Тогда

$$|(Ax, y)|\leqslant a \quad (\|x\|\leqslant 1, \|y\|\leqslant 1),$$

т. е. $\|A\|\leqslant a$. Обратное неравенство очевидно ●

Величины m_A, M_A, определяемые равенствами

$$m_A=\inf_{\|x\|=1}(Ax, x), \ M_A=\sup_{\|x\|=1}(Ax, x), \tag{4}$$

называются *точной нижней* и *точной верхней границами* самосопряженного оператора A. Равенство (2) означает, что

$$\|A\|=\max(|m_A|, |M_A|). \tag{5}$$

2. Множество самосопряженных операторов *слабо замкнуто* в $\mathbf{B}(H)$. Действительно, при $A_n \xrightarrow{w} A$ вещественность квадратичной формы сохраняется. Далее, это множество *вещественно-линейно*: если $A_k=A_k^*$, $\alpha_k=\bar{\alpha}_k$, $k=1, 2$, то оператор $\alpha_1A_1+\alpha_2A_2$ самосопряжен.

Теорема 3. *Если* $A_k=A_k^*\in\mathbf{B}(H)$, $k=1, 2$, *то самосопряженность произведения* $A\doteq A_1A_2$ *равносильна перестановочности сомножителей.*

○ Так как $A^*=A_2^*A_1^*=A_2A_1$, то $A=A^*$ означает, что $A_1A_2=A_2A_1$ ●

Оператор $A\in\mathbf{B}(H)$ называют *положительным* и пишут $A>0$, если $(Ax, x)\geqslant 0$ и $A\neq 0$. Из теоремы 1 следует, что положительный оператор самосопряжен. Помимо положительности еще различают *строгую положительность* и *положительную определенность* оператора. Первая означает, что $(Ax, x)>0$ при $x\neq 0$, вторая — что $m_A>0$. При $\dim H<\infty$ эти два понятия совпадают.

Если $A\in\mathbf{B}(H)$ строго положителен, то выражение $\langle x, y\rangle=(Ax, y)$ обладает свойствами (1.1)—(1.3) скалярного произведения. Соответствующее неравенство (1.6) означает, что

$$|(Ax, y)|^2\leqslant(Ax, x)(Ay, y). \tag{6}$$

В соответствии со сказанным в § 1, п. 1, неравенство (6) остается в силе, если оператор $A>0$, но не строго положителен.

Лемма 4. *Если* $A\in\mathbf{B}(H)$, $A>0$, *то*

$$\|Ax\|^2\leqslant\|A\|(Ax, x). \tag{7}$$

○ Из (6) следует, что $|(Ax, y)|^2\leqslant\|A\|(Ax, x)\|y\|^2$. Полагая $y=Ax$, приходим к (7) ●

В множестве непрерывных самосопряженных операторов вводится частичное упорядочение: говорят, что B больше A, и пишут $B>A$, если $B-A>0$.

На монотонные последовательности операторов переносится известный в анализе признак существования предела.

Теорема 5. *Пусть $A_n = A_n^* \in \mathbf{B}(H)$, последовательность $\{A_n\}$ монотонна и ограничена. Тогда последовательность A_n сильно сходится.*,

○ Для определенности считаем, что A_n не возрастают (иначе заменили бы A_n на $-A_n$). Для любого $x \in H$ последовательность $(A_n x, x)$ не возрастает и в силу условия $\sup \|A_n\| < \infty$ ограничена, а потому имеет конечный предел. Тогда из (4.9) следует, что $(A_n x, y)$ имеет предел при $\forall x, y \in H$. Вследствие слабой полноты $\mathbf{B}(H)$ это означает существование слабого предела: $A_n \xrightarrow{w} A \in \mathbf{B}(H)$. Ясно, что при этом $A_n \geqslant A$. Обозначим $c = \sup_n \|A_n - A\|$ и применим (7) к оператору $A_n - A$. Тогда

$$\|A_n x - Ax\|^2 \leqslant c\,[(A_n x, x) - (Ax, x)] \to 0$$

для любого $x \in H$. Таким образом, $A = s\text{-}\lim A_n$ ●

3. Для всякого оператора $T \in \mathbf{B}(H)$ справедливо (единственное) представление в виде

$$T = A + iB \quad (A = A^*,\ B = B^*). \tag{8}$$

Из (8) следует, что $T^* = A - iB$, а потому

$$2A = T^* + T,\ \ 2B = i\,(T^* - T). \tag{9}$$

Операторы A, B в (9) называют *вещественной* и *мнимой компонентами* оператора T.

Если $T \in \mathbf{B}(H)$, то $T^*T \geqslant 0$, $TT^* \geqslant 0$. В самом деле,

$$(T^*Tx, x) = \|Tx\|^2 \geqslant 0,\ \ (TT^*x, x) = \|T^*x\|^2 \geqslant 0.$$

Самосопряженные операторы T^*T, TT^*, вообще говоря, различны. Оператор $T \in \mathbf{B}(H)$ называется *нормальным*, если $T \smile T^*$, т. е.

$$T^*T = TT^*. \tag{10}$$

Оператор T^* нормален вместе с T. Подставляя (8) в (10), убеждаемся, что *T нормален в том и только том случае, когда операторы* (9) *перестановочны:* $A \smile B$. Таким образом, задание нормального оператора равносильно заданию пары перестановочных самосопряженных операторов. С этим связано то обстоятельство, что на нормальные операторы распространяются основные результаты спектральной теории самосопряженных операторов.

§ 8. Операторы ортогонального проектирования

1. Проекционные операторы (проекторы) определены в § 3, п. 1. Здесь мы более подробно остановимся на свойствах проекторов и обсудим действия над ними.

Пусть F — подпространство в H, $P = P_F$ — проектор на F. Для любого $h \in H$ из разложения (3.1) получаем, что $(f, h) = (f, f)$, т. е. $(Ph, h) = \|Ph\|^2$. Отсюда следуют соотношения $0 \leqslant P \leqslant I$. Далее,

$$P = P^* = P^2, \tag{1}$$

поскольку $P = P^*$ вследствие $P \geqslant 0$ и $P^2 = P$ вследствие равенств $P^2 h = Pf = f = Ph$, $\forall h \in H$.

Покажем, что равенства (1) дают внутреннюю характеристику операторов проектирования.

Теорема 1. *Пусть $P \in \mathbf{B}(H)$. Для того чтобы оператор P был проектором, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (1). *При этом $P = P_F$, где $F = \{f \in H : Pf = f\}$.*

○ Доказательству подлежит лишь достаточность. Ясно что F — подпространство. Из (1) следует, что $(I - P)Ph = 0$ для любого $h \in H$, т. е. $Ph \in F$. Если $f \in F$, то $(f, (I-P)h) = ((I-P)f, h) = 0$. т. е. $h - Ph \in F^{\perp}$. Это и означает, что $Ph = P_F h$ ●

З а м е ч а н и е. Можно было бы не предполагать заранее непрерывность P, а вывести ее из (1). В самом деле, пусть P — линейный оператор, определенный всюду в H, и пусть $P = P^*$, т. е. $(Px, y) = (x, Py)$, $\forall x, y \in H$. Если при этом $P^2 = P$, то $(Ph, Ph) = (P^2 h, h) = (Ph, h) \leqslant \|Ph\| \cdot \|h\|$, а потому $\|Ph\| \leqslant \|h\|$.

2. Перейдем к исследованию алгебраических операций над проекторами. Мы опишем условия, при которых в результате этих операций вновь получаются проекторы.

Теорема 2. *Пусть H_1, H_2 — подпространства в H, $P_k = P_{H_k}$, $k = 1, 2$. Следующие условия равносильны: а) $P_1 + P_2$ — проектор; б) $H_1 \perp H_2$; в) $P_1 P_2 = 0$. В этих условиях $P_1 + P_2$ — проектор на $H_1 \oplus H_2$.*

○ а) $\Rightarrow$ б): пусть $x \in H_1$, $y = P_2 x$. Равенство $(P_1 + P_2)^2 x = (P_1 + P_2) x$ дает $P_1 y + y = 0$. Применяя оператор P_1, получаем $2P_1 y = 0$ и, следовательно, $y = -P_1 y = 0$, т. е. $x \perp H_2$.

б) $\Rightarrow$ в) очевидно.

в) $\Rightarrow$ а). Оба соотношения (1) для $P_1 + P_2$ очевидно выполнены.

Наконец, то, что $P_1 + P_2$ — проектор на $H_1 \oplus H_2$, фактически установлено в лемме 3.3 ●

Теорема 3. *Пусть H_1, H_2 — подпространства в H, $P_k = P_{H_k}$, $k = 1, 2$. Следующие условия равносильны: а) $P_1 - P_2$ — проектор; б) $P_1 \geqslant P_2$; в) $H_1 \supset H_2$. В этих условиях $P_1 - P_2$ — проектор на $H_1 \ominus H_2$.*

○ а) $\Rightarrow$ б) очевидно.

б) $\Rightarrow$ в). Если $x \in H_2$, то $x \in H_1$, поскольку

$$(x, x) = (P_2 x, x) \leqslant (P_1 x, x) = \|P_1 x\|^2.$$

в) $\Rightarrow$ а). Пусть $H_0 = H_1 \ominus H_2$, P_0 — проектор на H_0. По теореме 2 $P_1 = P_2 + P_0$, откуда $P_1 - P_2 = P_0$ ●

Теорема 4. *Пусть H_1, H_2 — подпространства в H, $H_0 = H_1 \cap H_2$, $P_k = P_{H_k}$, $k = 0, 1, 2$. Следующие условия равносильны: а) P_1P_2 — проектор; б) $P_1 \smile P_2$; в) подпространства $H^k \overset{\text{def}}{=} H_k \ominus H_0$, $k = 1, 2$, ортогональны. В этих условиях $P_1P_2 = P_0$.*

○ а) $\Rightarrow$ б): $P_1P_2 = (P_1P_2)^* = P_2P_1$.

б) $\Rightarrow$ в). Пусть $x \in H^1$, $y \in H^2$. Тогда

$$(x, y) = (P_1x, P_2y) = (x, P_1P_2y).$$

Так как $P_1P_2y = P_2P_1y \in H_1 \cap H_2 = H_0$, то $(x, y) = 0$.

в) $\Rightarrow$ а). Пусть P^1, P^2 — проекторы на H^1, H^2. Тогда по теореме 2 $P_1 = P_0 + P^1$, $P_2 = P_0 + P^2$, причем $P^1P_0 = P_0P^2 = P^1P_2 = 0$. Отсюда $P_1P_2 = P_0$ ●

Следствие 5. *Равенство $P_1P_2 = P_1$ (или, что то же самое, $P_2P_1 = P_1$) равносильно тому, что $P_1 \leqslant P_2$ $(H_1 \subset H_2)$.*

○ Условие $P_1P_2 = P_1$ в силу теоремы 4 означает, что $H_1 \cap H_2 = H_1$, т. е. $H_1 \subset H_2$. Это в свою очередь эквивалентно условию $P_1 \leqslant P_2$ (по теореме 3) ●

3. Перейдем к вопросу о сходимости последовательности проекторов.

Теорема 6. *Пусть $\{H_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — подпространства в H и $P_k = P_{H_k}$. Предположим, что последовательность $\{P_k\}$ монотонна. Тогда существует предел*

$$P = s\text{-}\lim P_k, \tag{2}$$

который является проектором на подпространство $\bigcap_k H_k$, если $\{P_k\}$ не возрастает, и на подпространство $\bigvee_k H_k$, если $\{P_k\}$ не убывает.

○ Пусть сначала $\{P_k\}$ не убывает. Тогда по теореме 3 $H_1 \subset H_2 \subset \ldots$ Положим $F = \bigvee_k H_k$. Рассмотрим плотное в H множество $M = \{x = x_0 + y\colon x_0 \perp F,\ y \in \bigcup_k H_k\}$. Если в разложении $x = x_0 + y$ элемента $x \in M$ будет $y \in H_n$, то $P_kx = y = P_Fx$ при $k \geqslant n$. Таким образом, $P_kx \to P_Fx$ для $x \in M$, а потому и для всех $x \in H$ (здесь учтено, что $\|P_k\| = 1$).

Если последовательность $\{P_k\}$ не возрастает, то последовательность $\{I - P_k\}$ проекторов на $H_k^\perp$ не убывает. По доказанному она имеет сильный предел P_0, равный проектору на подпространство $\bigvee_k H_k^\perp$. Согласно лемме 3.2 это подпространство совпадает с $G^\perp$, где $G = \bigcap_k H_k$. Следовательно, $s\text{-}\lim P_k = I - P_0 = P_G$ ●

Отметим, что в условиях теоремы 6 сам факт существования предела есть частный случай теоремы 7.5.

Часто бывает удобно пользоваться равносильной формулировкой теоремы 6.

Следствие 7. *Пусть* $\{H_k\}$, $k=1, 2, \ldots$, *попарно ортогональные подпространства в* H *и* $P_k=P_{H_k}$. *Тогда ряд* $\sum_k P_k$ *сильно сходится к проектору на подпространство* $\bigvee_k H_k$.

○ Достаточно применить теорему 6 к последовательности проекторов $P'_k=\sum_1^k P_j$ ●

Рассмотрим теперь любые (не обязательно монотонные) последовательности проекторов $\{P_k\}$. Если $s\text{-}\lim P_k=P$, то P — проектор, так как равенства (1) сохраняются при предельном переходе. Тем более это верно для u-пределов. Здесь следует заметить, что монотонная последовательность P_k может иметь u-предел, лишь если она стационарна: $P_k=P$ для больших k. В противном случае P_k-P (или $P-P_k$) — ненулевой проектор и $\|P_k-P\|=1$.

Слабый предел проекторов — не всегда проектор. Если же предположить, что $w\text{-}\lim P_k$ является проектором, то сходимость на самом деле — сильная.

Теорема 8. *Пусть* P, P_k, $k=1, 2, \ldots$, *— проекторы и* $P=w\text{-}\lim P_k$. *Тогда* $P=s\text{-}\lim P_k$.

○ При каждом $x\in H$ выполнено $P_kx\xrightarrow{w}Px$. Кроме того, $\|P_kx\|^2=(P_kx, x)\to(Px, x)=\|Px\|^2$. По лемме 4.4 $P_kx\to Px$. ●

4. Пусть $\{P_\alpha\}$ — произвольное семейство (не обязательно счетное) попарно перестановочных проекторов в H, $H_\alpha=P_\alpha H$. Положим $H_0=\bigcap_\alpha H_\alpha$, $P_0=P_{H_0}$. Проектор P_0 называют *точной нижней границей семейства* $\{P_\alpha\}$: $P_0=\inf_\alpha P_\alpha$. В теории спектральной меры (см. § 5.2) нам потребуется знание условий, при которых справедливо соотношение

$$(P_0x, x)=\inf_\alpha(P_\alpha x, x)\quad(\forall x\in H). \tag{3}$$

(Разумеется, (3) не всегда выполнено. Пример: e_1, e_2 — ортогональные нормированные векторы, $P_\alpha=(\cdot, e_\alpha)e_\alpha$, $\alpha=1, 2$.)

Будем говорить, что семейство $\{P_\alpha\}$ *замкнуто относительно умножения*, если для любых конечных наборов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ проектор $P_{\alpha_1}\ldots P_{\alpha_n}$ принадлежит этому семейству.

Теорема 9. *Пусть семейство попарно перестановочных проекторов* $\{P_\alpha\}$ *замкнуто относительно умножения. Тогда имеет место* (3).

○ Можно считать, что $P_0=0$ (т. е. $\bigcap_\alpha H_\alpha=\{0\}$). В самом деле, в противном случае следует перейти к семейству $\{P_\alpha-P_0\}$. Легко видеть, что это семейство замкнуто относительно умножения вместе с семейством $\{P_\alpha\}$.

Положим $G_\alpha=H_\alpha^\perp$. Тогда

$$\bigvee_\alpha G_\alpha=H. \tag{4}$$

Из условия на $\{P_\alpha\}$ по лемме 3.2 следует, что для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ подпространство $\bigvee_k G_{\alpha_k}$ совпадает с одним из G_α.

Поэтому линейная оболочка всех G_α совпадает с их объединением. В силу (4) она плотна в H. Стало быть, для $x \in H$ по всякому $\varepsilon > 0$ найдется α, такое, что $\|x - P_{G_\alpha} x\| < \varepsilon$. Так как $I - P_{G_\alpha} = P_\alpha$, то $(P_\alpha x, x) < \varepsilon^2$, т. е $\inf_\alpha (P_\alpha x, x) = 0$ ●

§ 9. Примеры гильбертовых пространств и ортогональных систем

1. Начнем с некоторых простых замечаний о пространствах l_2. В теореме 2.7 установлено, что каждая полная ортонормированная последовательность $\{u_n\}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве H определяет изометрию H на пространство l_2^m, $m = \dim H$. Однако элементы о. н. п. с. не всегда удобно нумеровать числами натурального ряда и в этой связи не всегда удобно ограничиваться «стандартными» пространствами l_2^m.

Пусть K — произвольное не более чем счетное множество*) и пусть мера $\mu(\delta)$, $\forall \delta \subset K$, равна мощности δ. Определим гильбертово пространство $l_2(K) \overset{\mathrm{def}}{=} L_2(K, \mu)$. Обозначим через $e_\varkappa$, $\varkappa \in K$, характеристическую функцию одноточечного множества $\{\varkappa\}$. О. н. п. с. $\{e_\varkappa\}$ называется *стандартным базисом* пространства $l_2(K)$.

Если в гильбертовом пространстве H выбрана о. н. п. с. $\mathfrak{u} = \{u_\varkappa\}$, занумерованная элементами $\varkappa \in K$, то отображение базисов $u_\varkappa \mapsto e_\varkappa$ однозначно продолжается до изометрии $V_\mathfrak{u}$ пространства H на $l_2(K)$.

Приведем несколько классических примеров ортонормированных систем.

1°. Пусть $H = L_2(\mathbf{T})$, $u_k(t) = (2\pi)^{-1/2} e^{ikt}$, $k \in \mathbf{Z}$. Полнота системы $\{u_k\}$ хорошо известна. Отображение $V_\mathfrak{u}$ устанавливает изометрический изоморфизм пространств $L_2(\mathbf{T})$ и $l_2(\mathbf{Z})$.

2°. Пусть $H = L_2(\mathbf{T}^m)$, $u_n(t) = (2\pi)^{-m/2} e^{int}$, $n \in \mathbf{Z}^m$ (здесь $nt = \sum_1^m n_j t_j$). Полнота о. н. с. $\{u_n\}$ вытекает из полноты системы примера 1° на основании сказанного в § 3, п. 6. Отображение $V_\mathfrak{u}$ устанавливает изометрический изоморфизм пространств $L_2(\mathbf{T}^m)$ и $l_2(\mathbf{Z}^m)$.

3°. Пусть $H = L_2(-1, 1)$. Множество всех полиномов плотно в H, а потому последовательность $\{t^k\}$, $k \in \mathbf{Z}_+$, полна. Ортогонализуя ее, получаем о. н. п. с. $\{u_k\}$, в которой функция u_k, $\forall k \in \mathbf{Z}_+$, есть полином степени k *(нормированный полином Лежандра)*. Для u_k известно явное выражение

$$u_k(t) = c_k \frac{d^k}{dt^k} [(t^2 - 1)^k], \quad c_k = \frac{\sqrt{k + 1/2}}{2^k k!}, \quad k \in \mathbf{Z}_+.$$

*) Особенно часто в качестве K встречается множество всех целых неотрицательных чисел $\mathbf{Z}_+$.

4°. Пусть $H=L_2(\mathbf{R})$. Функции v_k, $k\in\mathbf{Z}_+$, получаемые при ортогонализации в H последовательности $\{t^k e^{-t^2/2}\}$, $k\in\mathbf{Z}_+$, называются *нормированными функциями Эрмита*. Ясно, что функции v_k имеют вид $v_k(t)=H_k(t)\,e^{-t^2/2}$, где H_k — полиномы степени k (*полиномы Эрмита*). Для функций v_k можно указать удобные аналитические представления:

$$v_k(t)=c_k\left(t-\frac{d}{dt}\right)^k e^{-t^2/2},\quad c_k=(2^k k!)^{-1/2}\pi^{-1/4},\quad k\in\mathbf{Z}_+, \tag{1}$$

$$v_k(t)=(-1)^k c_k e^{t^2/2}\frac{d^k}{dt^k}e^{-t^2}. \tag{2}$$

Система $\{v_k\}$ полна в $L_2(\mathbf{R})$ (см. [18, 19]). В § 12.5, п 2, мы придем к выражению (1) для функций Эрмита и получим их ортогональность и полноту, основываясь на некоторых соображениях спектрального характера.

5°. Пусть $H=L_2(\mathbf{R}^m)$, $w_n=v_{n_1}(t_1)\ldots v_{n_m}(t_m)$, $n=(n_1,\ldots$ $\ldots, n_m)\in\mathbf{Z}_+^m$. Здесь v_k — функции Эрмита (см. пример 4°). С помощью мультииндексных обозначений функции w_n можно записать в виде, аналогичном (2):

$$w_n(t)=(-1)^n c_n e^{|t|^2/2}D^n(e^{-|t|^2}),\quad c_n=c_{n_1}\ldots c_{n_m},\quad n\in\mathbf{Z}_+^m.$$

Полнота системы $\{w_n\}$ вытекает из полноты системы функций Эрмита (ср. пример 2°).

2. Важные для приложений к теории дифференциальных уравнений примеры гильбертовых пространств представляют собой пространства W_2^l Соболева. Они были определены (как банаховы пространства) в § 1.6. В пространствах W_2^l и в их подпространствах $\overset{\circ}{W}{}_2^l$ были введены различные эквивалентные нормы Теперь мы увидим, что каждая из этих норм согласована с некоторой гильбертовой структурой.

Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^m$ и $(\cdot,\cdot)_0$ — скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$. Положим для $u, v\in W_2^l(\Omega)$

$$(u, v)_l=\sum\nolimits_{|\alpha|=l} l!/\alpha!\,(D^\alpha u,\ D^\alpha v)_0. \tag{3}$$

Тогда «основная» норма (1.6.2) пространства $W_2^l(\Omega)$ согласована со скалярным произведением $(u, v)_l+(u, v)_0$, а норма (1.6.1) пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ — со скалярным произведением $(u, v)_l$.

Иногда бывает полезно ввести в пространстве W_2^l скалярное произведение таким способом, при котором $\overset{\circ}{W}{}_2^l$ оказывается подпространством в W_2^l не только в топологическом смысле, но и в смысле гильбертовой структуры. Проиллюстрируем один из возможных способов, ограничиваясь случаем $l=1$.

Пусть $\Omega\subset\mathbf{R}^m$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^1. Положим

$$\langle u, v\rangle=(u, v)_1+\int_{\partial\Omega}u\bar{v}dS=\int_\Omega(\nabla u, \nabla v)\,dx+\int_{\partial\Omega}u\bar{v}dS. \qquad (4)$$

Тогда $\langle\cdot, \cdot\rangle$ — скалярное произведение в $W_2^1(\Omega)$, согласованное с нормой (1.6.3). Если $u, v\in C_0^\infty(\Omega)$, то в силу (4) $\langle u, v\rangle=(u, v)_1$. Это равенство по непрерывности распространяется на любые $u, v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Приведем пример о. н. с. $\{u_k\}$ в пространстве $W_2^1(-\pi, \pi)$. Этот пример интересен тем, что функции u_k ортогональны не только в W_2^1, но и в L_2; при этом система $\{u_k\}$ полна в L_2, но не полна в W_2^1.

«Основное» скалярное произведение в $W_2^1(-\pi, \pi)$ есть

$$(u, v)=\int_{-\pi}^{\pi}\left(u'\bar{v}'+u\bar{v}\right)dt. \qquad (5)$$

Система функций $\omega_k(t)=\exp(ikt)$, $k\in\mathbf{Z}$, ортогональна, но не нормирована относительно скалярного произведения (5). Нормируя ее, получаем о. н. с. $\{u_k\}$, $k\in\mathbf{Z}$, где $u_k=[2\pi(k^2+1)]^{-1/2}\omega_k$.

Найдем ортогональное дополнение в W_2^1 к подпространству $\widetilde{W}{}_2^1=\bigvee_k\{u_k\}$. Пусть $h\in W_2^1$, $(h, u_k)=0$ $(\forall k)$. Тогда

$$0=\int_{-\pi}^{\pi}[h(t)-ikh'(t)]\exp(-ikt)\,dt=$$

$$=(1+k^2)\int_{-\pi}^{\pi}h(t)\exp(-ikt)\,dt-ikh(t)\exp(-ikt)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

и, следовательно, коэффициенты Фурье (в смысле пространства L_2) функции h равны

$$c_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}h(t)e^{-ikt}dt=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{(-1)^k k}{1+k^2}[h(\pi)-h(-\pi)], \quad \forall k\in\mathbf{Z}. \qquad (6)$$

Из (6) видно, что $\dim\left(W_2^1\ominus\widetilde{W}{}_2^1\right)=1$. Функцией, порождающей подпространство $W_2^1\ominus\widetilde{W}{}_2^1$, является $h(t)=\operatorname{sh}t$. Для нее соотношения (6) выполнены. Впрочем, ортогональность $h(t)$ в W_2^1 ко всем функциям u_k прямо следует из того, что $h''=h$ и $h'(-\pi)=h'(\pi)$.

Полезно уяснить причину, по которой с самого начала нельзя было ожидать совпадения $\widetilde{W}{}_2^1$ с W_2^1. Функции f из линейной оболочки о. н. с. $\{u_k\}$ периодичны, т. е. для них $f(\pi)=f(-\pi)$. Поскольку вложение пространства $W_2^1(-\pi, \pi)$ в $C[-\pi, \pi]$ непрерывно, это соотношение переносится на любые $f\in\widetilde{W}{}_2^1$. С другой стороны, если функция $h\in W_2^1$ периодична и ортогональна в W_2^1 всем u_k, то в силу (6) $c_k=0$, $\forall k \in \mathbf{Z}$, а потому $h=0$. Таким образом, $\widetilde{W}_2^1$ совпадает с подпространством периодических функций из W_2^1.

3. В этом и следующем пунктах элементы рассматриваемых гильбертовых пространств суть аналитические функции. Эти пространства удобно ввести как подпространства в соответствующих пространствах L_2.

Пусть $\mathbf{D}$ — единичный круг комплексной плоскости $\mathbf{C}$, μ — двумерная мера Лебега, $L_2(\mathbf{D})=L_2(\mathbf{D}, \mu)$. Обозначим через $A^2=A^2(\mathbf{D})$ множество тех функций из $L_2(\mathbf{D})$, которые аналитичны в $\mathbf{D}$. Очевидно, что A^2 — линейное подмножество в $L_2(\mathbf{D})$.

Рассмотрим систему функций $\varphi_k \in A^2$:

$$\varphi_k(z)=\pi^{-1/2}(k+1)^{1/2}z^k, \quad k \in \mathbf{Z}_+. \tag{7}$$

Функции φ_k ортогональны и нормированы в $L_2(\mathbf{D})$: полагая $z=r\exp(it)$, находим

$$(\varphi_k, \varphi_l)=\pi^{-1}(k+1)^{1/2}(l+1)^{1/2}\times$$
$$\times\int_0^{2\pi}\exp[i(k-l)t]\,dt\int_0^1 r^{k+l+1}dr=\delta_k^l.$$

Пусть $f \in A^2$. Запишем ее разложение в ряд Тейлора в виде

$$f(z)=\sum_0^\infty \alpha_k\varphi_k(z). \tag{8}$$

В любом круге $|z|\leqslant\rho<1$ ряд (8) сходится равномерно, причем функции (7) L_2-ортогональны также и в этом круге. Учитывая это, из (8) находим

$$\int_{|z|<\rho}|f(z)|^2 d\mu(z)=\sum_0^\infty |\alpha_k|^2\rho^{2(k+1)}, \quad 0<\rho<1.$$

Предельный переход при $\rho\to 1$ приводит к равенству

$$\|f\|^2=\sum_0^\infty|\alpha_k|^2. \tag{9}$$

Обратно, если $\{\alpha_k\}\in l_2(\mathbf{Z}_+)$, то ряд (8) равномерно сходится в любом круге $|z|\leqslant\rho<1$, а потому его сумма f аналитична в $\mathbf{D}$ и тем самым принадлежит A^2

Мы установили, что A^2 совпадает с замыканием в $L_2(\mathbf{D})$ линейной оболочки функций (7). Таким образом, A^2 есть подпространство в $L_2(\mathbf{D})$ и потому само может рассматриваться как гильбертово пространство. Функции (7) образуют ортогональный базис в A^2.

Отметим, что пространство $A^2(\Omega)$ естественно вводится для любой ограниченной области $\Omega\subset\mathbf{C}$.

4. Рассмотрим теперь пространство $F^2=F^2(\mathbf{C})$ — множество целых функций, для которых конечен интеграл (по двумерной мере Лебега)

$$\|f\|^2=\int_{\mathbf{C}}|f(z)|^2\exp(-|z|^2)\,d\mu(z).$$

Определим на $\mathbf{C}$ меру $\hat{\mu}$ равенством $d\hat{\mu}(z)=\exp(-|z|^2)\,d\mu(z)$ и рассмотрим соответствующее пространство $L_2(\mathbf{C},\hat{\mu})$. Пространство F^2 естественно вкладывается в $L_2(\mathbf{C},\hat{\mu})$. Как и при рассмотрении пространства A^2, легко устанавливается, что F^2 замкнуто в $L_2(\mathbf{C},\hat{\mu})$ и что функции

$$\psi_k(z)=\pi^{-1/2}(k!)^{-1/2}z^k,\quad k\in\mathbf{Z}_+,\tag{10}$$

образуют ортонормированный базис в F^2.

Подобным же образом вводится пространство $F^2(\mathbf{C}^m)$ — множество целых функций $f(z)=f(z_1,\ldots,z_m)$, для которых конечен интеграл

$$\|f\|^2=\int_{\mathbf{C}^m}|f(z)|^2\exp(-|z|^2)\,d\mu(z).$$

Здесь $|z|^2=\sum_1^m|z_j|^2$ и μ — $(2m)$-мерная мера Лебега. Ортонормированный базис в $F^2(\mathbf{C}^m)$ образуют, например, функции

$$u_n(z)=\psi_{n_1}(z_1)\ldots\psi_{n_m}(z_m),\quad n=(n_1,\ldots,n_m)\in\mathbf{Z}_+^m,$$

где ψ_k — функции (10).

Список гильбертовых пространств аналитических функций, представляющих интерес для анализа, далеко не исчерпывается приведенными примерами. В частности, мы оставили в стороне пространство Харди H^2, по поводу теории которого см., например, [5].

5. Пусть $\Omega\subset\mathbf{R}^m$ — ограниченная область. В $L_2(\Omega)$ естественно выделяется подпространство $G_2(\Omega)$ гармонических функций (т. е. решений уравнения Лапласа). Замкнутость $G_2(\Omega)$ легко получается на основании теоремы о среднем для гармонических функций.

Рассмотрим подробнее случай $\Omega=K$, где K — единичный шар в $\mathbf{R}^m$. Пусть $G_{2,l}\subset G_2(K)$ — подпространство однородных гармонических полиномов степени l, $l\in\mathbf{Z}_+$ Известно (см., например, [19, 21]), что подпространства $G_{2,l}$ попарно ортогональны в $L_2(K)$ и что

$$G_2(K)=\sum_0^\infty\oplus G_{2,l}\tag{11}$$

Любую функцию $f\in G_{2,l}$ можно записать в виде $f(x)=r^lY(\omega)$, где $r=|x|$, $\omega=x/r$ и Y — сферическая *) функция порядка l, определенная на сфере $\mathbf{S}^{m-1}=\partial K$. Обозначим мно-

*) При $m>3$ часто употребляют термин «ультрасферическая».

жество сферических функций порядка l через Γ_l. Множества Γ_l, рассматриваемые как подпространства в $L_2(S^{m-1})$, ортогональны и

$$L_2(S^{m-1}) = \sum_0^\infty \oplus \Gamma_l. \tag{12}$$

Разложение (11) представляет собой следствие разложения (12). Обратно, (12) вытекает из (11) в силу теоремы существования решения задачи Дирихле. Укажем формулу для размерности подпространств $G_{2,l}$, Γ_l:

$$\dim \Gamma_l = \dim G_{2,l} = \frac{(2l+m-2)(l+m-3)!}{(m-2)!\,l!}. \tag{13}$$

В частности, при $m=3$ $\dim \Gamma_l = 2l+1$.

Разумеется, Γ_l и $G_{2,l}$ можно разложить на одномерные подпространства. Такие разложения, однако, уже не инвариантны в том смысле, что зависят от выбора системы координат в $\mathbf{R}^m$.

6. Приведем классический пример несепарабельного гильбертова пространства. Пусть $\mathscr{L}$ — множество всевозможных конечных сумм вида

$$f(t) = \sum_1^n c_k \exp(i\alpha_k t),$$

где α_k, $k=1, \ldots, n$, — произвольные вещественные числа (вообще говоря, разные для различных $f \in \mathscr{L}$). Относительно обычных линейных операций над функциями $\mathscr{L}$ — линейное пространство. Для $f, g \in \mathscr{L}$ положим

$$(f, g) = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\overline{g(t)}\,dt. \tag{14}$$

Пусть в (14) $g(t) = \sum_1^m d_s \exp(i\beta_s t)$. Простая выкладка показывает, что

$$(f, g) = \sum_{k,s} c_k \bar{d}_s \delta(\alpha_k - \beta_s), \tag{15}$$

где $\delta(\tau)=1$ при $\tau=0$, $\delta(\tau)=0$ при $\tau\neq 0$.

Из (15) следует, что функционал (14) обладает всеми свойствами скалярного произведения. Пополняя $\mathscr{L}$, получим гильбертово пространство, которое принято обозначать B^2. Оно не сепарабельно, поскольку содержит несчетное множество попарно ортогональных функций $u_\alpha(t) = \exp(i\alpha t)$, $\alpha \in \mathbf{R}$ (их ортогональность видна из (15)).

§ 10. Примеры непрерывных операторов и функционалов

1. Важный для приложений класс операторов в пространстве $L_2(Y, \mu)$ представляют собой *интегральные операторы* вида

$$(Tu)(x) = \int_Y t(x, y)\,u(y)\,d\mu(y). \tag{1}$$

Уточним определение и укажем достаточное условие непрерывности таких операторов. Предварительно выпишем выражение для билинейной формы оператора (1):

$$(Tu, v)=\int_{Y\times Y} t(x, y)\, u(y)\overline{v(x)}\, d\mu(x)\, d\mu(y). \tag{2}$$

Предположим, что ядро $t(x, y)$ удовлетворяет следующему условию: *для любых $u, v\in L_2(Y, \mu)$ подынтегральная функция в* (2) *суммируема (по мере $\mu\times\mu$) и билинейная форма* (2) *ограничена, т. е. для нее выполнена оценка вида* (4.6). В этом случае будем говорить, что определенный равенством (1) оператор T является *правильным* интегральным оператором.

Приведенное определение довольно ограничительно. Например, оператор Фурье (см. § 8.3) не является правильным интегральным оператором.

В соответствии с (4.12) оператор, сопряженный к интегральному оператору (1), есть

$$(T^*v)(x)=\int_Y \overline{t(y, x)}\, v(y)\, d\mu(y). \tag{3}$$

В частности, правильный интегральный оператор самосопряжен в том и только том случае, если ядро *эрмитово*, т. е. $\mu\times\mu$-п. в. на $Y\times Y$ выполнено равенство $\overline{t(y, x)}=t(x, y)$.

Теорема 1. *Пусть $H=L_2(Y, \mu)$ и пусть для ядра $t(x, y)$ интегрального оператора* (1)

$$\begin{aligned} a_1&=\sup_y \int_Y |t(x, y)|\, d\mu(x)<\infty,\\ a_2&=\sup_x \int_Y |t(x, y)|\, d\mu(y)<\infty. \end{aligned} \tag{4}$$

Тогда T — правильный интегральный оператор и

$$\|T\|\leqslant a_1^{1/2}a_2^{1/2}. \tag{5}$$

○ Оценим билинейную форму (2) с помощью неравенства Коши для интеграла по $Y\times Y$:

$$|(Tu, v)|^2\leqslant \int |t(x, y)|\cdot|u(y)|^2\, d\mu(x)\, d\mu(y)\times$$
$$\times\int |t(x, y)|\cdot|v(x)|^2\, d\mu(x)\, d\mu(y)\leqslant a_1a_2\|u\|^2\|v\|^2.$$

Неравенство (5) следует отсюда в силу (4.6), (4.11) ●

Теорема 1 содержит в себе как частный случай теорему 5.6 (об условиях непрерывности оператора, задаваемого матрицей).

Пусть $H=L_2(Y)$, где Y — ограниченное измеримое множество в $\mathbf{R}^m$, и $t(x, y)$ — «полярное ядро»:

$$t(x, y)=t_0(x, y)|x-y|^{-\alpha}, \quad \alpha<m, \tag{6}$$

где $t_0\in L_\infty(Y\times Y)$. Очевидно, что ядро (6) удовлетворяет условиям теоремы 1. Можно показать (см. [20]), что оператор (1) с ядром (6) компактен в $L_2(Y)$. При $2\alpha<m$ это вытекает из общих результатов об операторах Гильберта — Шмидта (см. § 11.3, п. 3).

Рассмотрим теперь интегральные операторы «типа свертки»: пусть $H=L_2(\mathbf{R}^m)$ и

$$(Tu)(x)=\int_{\mathbf{R}^m} r(x-y)\,u(y)\,dy. \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть $r\in L_1(\mathbf{R}^m)$. Тогда оператор* (7) *непрерывен в пространстве $L_2(\mathbf{R}^m)$ и*

$$\|T\|\leqslant\|r\|_{L_1}. \tag{8}$$

○ Оба условия (4) сливаются в условие $r\in L_1$ и оценка (5) переходит в оценку (8) ●

В дальнейшем (см. § 8.5, п. 3) оператор (7) будет изучен подробнее с помощью преобразования Фурье.

Отметим, что (ненулевой) оператор вида (7) в пространстве $L_2(\mathbf{R}^m)$ заведомо не компактен. В самом деле, пусть $u_0\in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$, $\|u_0\|=1$ и $v_0=Tu_0$, $v_0\neq 0$. При достаточно большом $a>0$ функции $u_n(x)=u_0(x-an)$, $n\in Z^m$, имеют непересекающиеся носители. Поэтому они образуют о. н. с. в $L_2(\mathbf{R}^m)$ и, следовательно, $u_n\xrightarrow{w}0$. При этом $(Tu_n)(x)=v_0(x-an)$ и $\|Tu_n\|=\|v_0\|>0$. В силу теоремы 6.1 оператор T не может быть компактным.

Приведем аналог теоремы 2 для операторов «свертки» на полуоси $\mathbf{R}_+=[0,+\infty)$.

Теорема 3. *Пусть $H=L_2(\mathbf{R}_+)$, $r\in L_1(\mathbf{R}_+)$ и*

$$(Tu)(x)=\int_0^x r(x-y)\,u(y)\,dy. \tag{9}$$

Тогда $T\in\mathbf{B}(H)$ и сохраняется оценка (8).

○ Как и в случае теоремы 2, условия (4) сливаются в одно:

$$\int_y^\infty |r(x-y)|\,dx=\|r\|_{L_1},\quad \forall x\in\mathbf{R}_+,$$

$$\sup_x\int_0^x |r(x-y)|\,dy=\sup_x\int_0^x |r(t)|\,dt=\|r\|_{L_1} \quad ●$$

При $r\not\equiv 0$ операторы (9) не компактны в $L_2(\mathbf{R}_+)$.

Другой важный класс операторов в $L_2(\mathbf{R}_+)$ представляют собой интегральные операторы с ядром, зависящим от суммы аргументов:

$$(Tu)(x)=\int_{\mathbf{R}_+} r(x+y)\,u(y)\,dy. \tag{10}$$

Если $r\in L_1(\mathbf{R}_+)$, то оператор (10) непрерывен в $L_2(\mathbf{R}_+)$ и для его нормы сохраняется оценка (8). Доказательство аналогично доказательству теоремы 3. В отличие от операторов вида (9), оператор (10) может оказаться компактным в $L_2(\mathbf{R}_+)$. Простейший признак компактности следует из теоремы 11.3.5 и имеет вид

$$\int_{\mathbf{R}_+} x\,|r(x)|^2\,dx < \infty.$$

Приведем пример непрерывного оператора вида (10) с ядром $r \overline{\in} L_1$:

$$(Tu)(x) = \int_{\mathbf{R}_+} (x+y)^{-1} u(y)\,dy. \tag{11}$$

Несколько видоизменяя прием, использованный при доказательстве теоремы 1, оценим билинейную форму оператора (11) (интегралы считаем распространенными по $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$):

$$(Tu,\ v) = \int (x+y)^{-1} u(y)\,\overline{v(x)}\,dx\,dy,$$

$$|(Tu,\ v)|^2 \leqslant \int \frac{|u(y)|^2}{x+y}\left(\frac{y}{x}\right)^{1/2} dx\,dy \int \frac{|v(x)|^2}{x+y}\left(\frac{x}{y}\right)^{1/2} dx\,dy. \tag{12}$$

Принимая во внимание равенство

$$\int_{\mathbf{R}_+} (x+y)^{-1} x^{-1/2} y^{1/2}\,dx = \pi, \quad \forall y \in \mathbf{R}_+,$$

находим, что $|(Tu,\ v)| \leqslant \pi \|u\| \cdot \|v\|$. Интересно, что полученная оценка — точная: можно показать, что $\|T\| = \pi$.

Покажем, что оператор T не компактен в $L_2(\mathbf{R}_+)$. Пусть u_0 — характеристическая функция промежутка $(1, 2)$ и $u_n(x) = 2^{n/2} u_0(2^n x)$, $n = 1, 2, \ldots$ Функции u_n образуют о. н. с. в $L_2(\mathbf{R}_+)$ и, следовательно, $u_n \xrightarrow{w} 0$. Положим $v_0 = Tu_0$. Тогда $(Tu_n)(x) = 2^{n/2} v_0(2^n x)$, откуда $\|Tu_n\| = \|v_0\| > 0$, $\forall n$.

Отметим, что не компактен также оператор вида (11) с интегрированием по $(0, a)$ в пространстве $L_2(0, a)$, $\forall a > 0$.

2. В § 9, п. 4, было определено пространство F^2. Оно является подпространством в $H = L_2(\mathbf{C}, \hat{\mu})$, где $d\hat{\mu}(z) = \exp(-|z|^2)\,d\mu(z)$ и μ — мера Лебега на плоскости. Здесь мы найдем явное представление для оператора P, проектирующего H на F^2. В соответствии с общей формулой (3.3)

$$(Pu)(z) = \sum_0^\infty \psi_k(z) \int_{\mathbf{C}} u(\zeta)\,\overline{\psi_k(\zeta)}\,d\hat{\mu}(\zeta), \tag{13}$$

где функции ψ_k определены в (9.10). Поскольку

$$\sum_0^\infty \overline{\psi_k(\zeta)}\,\psi_k(z) = \pi^{-1} \sum_0^\infty (k!)^{-1} \bar{\zeta}^k z^k = \pi^{-1} \exp(\bar{\zeta} z), \tag{14}$$

формальное вычисление приводит к равенству

$$(Pu)(z) = \pi^{-1} \int_{\mathbf{C}} \exp(\bar{\zeta} z)\,u(\zeta)\,d\hat{\mu}(\zeta). \tag{15}$$

Равенство (15) нуждается в оправдании. Прежде всего установим, что правая часть (15) определяет в H правильный интегральный оператор, для которого мы сохраним обозначение P.

Положим $\Phi(z, \zeta)=\exp\left[\bar{\zeta}z-\frac{1}{2}(|z|^2+|\zeta|^2)\right]$. Справедливо равенство

$$\int_{\mathbf{C}}|\Phi(z, \zeta)|\,d\mu(\zeta)=\int_{\mathbf{C}}|\Phi(\zeta, z)|\,d\mu(\zeta)=2\pi,\ \forall z\in\mathbf{C}. \quad (16)$$

Запишем билинейную форму оператора (15) в виде

$$(Pu, v)=\pi^{-1}\int\exp(\bar{\zeta}z-|z|^2-|\zeta|^2)\,u(\zeta)\,\overline{v(z)}\,d\mu(\zeta)\,d\mu(z)$$

(интегрирование ведется по $\mathbf{C}\times\mathbf{C}$). Следующая оценка во многом аналогична оценке (12). Используя (16), находим

$$\pi^2|(Pu, v)|^2\leqslant\int|\Phi(z, \zeta)|\cdot|u(\zeta)|^2\exp(-|\zeta|^2)\,d\mu(\zeta)\,d\mu(z)\times$$
$$\times\int|\Phi(z, \zeta)|\cdot|v(z)|^2\exp(-|z|^2)\,d\mu(z)\,d\mu(\zeta)=(2\pi)^2\|u\|^2\|v\|^2.$$

Таким образом, оператор (15) ограничен в H (отметим, что оценка для его нормы получилась завышенной).

Рассмотрим, далее, ядро интегрального оператора P—функцию

$$w(z, \zeta)=\pi^{-1}\exp(\bar{\zeta}z). \quad (17)$$

Ядро (17) эрмитово, а потому P самосопряжен. Функция w аналитична по z. Следовательно, при $u\in C_0^\infty$ функция $(Pu)(z)$ в (15) аналитична и, стало быть, $Pu\in F^2$. Поскольку множество C_0^∞ плотно в H, оператор (15) отображает H в F^2.

При всяком $\zeta\in\mathbf{C}$ имеет место включение $w(\cdot, \zeta)\in F^2$. Соотношение (15) можно записать в виде

$$(Pu)(z)=(u, w(\cdot, z)). \quad (18)$$

Равенство (14) истолковывается как разложение функции $w(\cdot, \zeta)$ в ряд Фурье по полной в F^2 о. н. с. $\{\psi_k\}$. Следовательно, $\psi_k(z)=(\psi_k, w(\cdot, z))=(P\psi_k)(z)$, т. е. $P\psi_k=\psi_k$.

Итак, оператор P, определяемый равенством (15), ограничен и самосопряжен в H, сохраняет элементы полной в подпространстве F^2 о. н. с. $\{\psi_k\}$ и $PH\subset F^2$. Это и означает, что P — оператор ортогонального проектирования на F^2.

Пусть теперь $H=L_2(\mathbf{C}^m, \hat{\mu}_m)$, где $d\hat{\mu}_m=\exp(-|z|^2)\,d\mu_m(z)$, $|z|^2=\sum_1^m|z_j|^2$ и μ_m — $(2m)$-мерная мера Лебега. Аналогично предыдущему можно показать, что оператор P, ортогонально проектирующий H на его подпространство $F^2(\mathbf{C}^m)$, есть правильный интегральный оператор

$$(Pu)(z)=\pi^{-m}\int_{\mathbf{C}^m}\exp(\bar{\zeta}z)\,u(\zeta)\,d\hat{\mu}_m(\zeta),$$

где $\bar{\zeta}z=\sum_1^m\bar{\zeta}_j z_j$.

3. Здесь мы приведем интегральное представление оператора, проектирующего пространство $L_2(\mathbf{D})$ на подпространство $A^2(\mathbf{D})$ (см. § 9, п. 3). В соответствии с (3.3)

$$(Pu)(z)=\sum_0^\infty\varphi_k(z)\int_{\mathbf{D}}u(\zeta)\overline{\varphi_k(\zeta)}\,d\mu(\zeta), \tag{19}$$

где функции φ_k определены в (9.7). Справедливо равенство

$$\sum_0^\infty\varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\zeta)}=\pi^{-1}\sum_0^\infty(k+1)z^k\bar{\zeta}^k=\pi^{-1}\left(1-z\bar{\zeta}\right)^{-2}. \tag{20}$$

Сопоставляя (19) и (20), приходим к формуле

$$(Pu)(z)=\pi^{-1}\int_{\mathbf{D}}\left(1-z\bar{\zeta}\right)^{-2}u(\zeta)\,d\mu(\zeta), \tag{21}$$

которая оправдывается вполне аналогично формуле (15). Доказательство предоставляется читателю.

4. Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^m$ с гладкой границей $\partial\Omega$ и $H=W_2^1(\Omega)$, причем скалярное произведение определено формулой (9.4). Опишем ортогональное дополнение в W_2^1 к его подпространству $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Соотношение $u\perp\overset{\circ}{W}{}_2^1$, или, что то же, $u\perp C_0^\infty(\Omega)$, означает

$$\int_\Omega\nabla u\overline{\nabla v}\,dx=0,\quad\forall v\in C_0^\infty(\Omega). \tag{22}$$

Интегрируя по частям, находим

$$\int_\Omega u\Delta\bar{v}\,dx=0,\quad\forall v\in C_0^\infty(\Omega). \tag{23}$$

Это означает, что в смысле теории обобщенных функций $\Delta u=0$. Но тогда, как известно, внутри области Ω функция u бесконечно дифференцируема и гармонична в классическом смысле.

Обратно, пусть $u\in W_2^1(\Omega)$ — гармоническая в Ω функция. Тогда из (23) следует (22). Обозначим через $G_2^1(\Omega)$ множество гармонических в Ω функций класса $W_2^1(\Omega)$. Мы видим, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Множество $G_2^1(\Omega)$ есть подпространство в $W_2^1(\Omega)$. Относительно скалярного произведения* (9.4) *имеет место ортогональное разложение*

$$W_2^1(\Omega)=\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\oplus G_2^1(\Omega). \tag{24}$$

Обозначим через P_G проектор в $W_2^1(\Omega)$ на подпространство $G_2^1(\Omega)$. Из теоремы 4 вытекает, что для $f\in W_2^1(\Omega)$ функция $u=P_Gf$ является решением задачи Дирихле:

$$\Delta u=0 \text{ в } \Omega;\ u|_{\partial\Omega}=f|_{\partial\Omega}; \tag{25}$$

граничное условие в (25) должно выполняться в том смысле, что $u-f\in \mathring{W}_2^1(\Omega)$.

Следствием разложения (24) также является известный вариационный принцип для решения задачи Дирихле. Именно в соответствии с теоремой 3.1

$$\|P_Gf\|^2\leqslant\|f-v\|^2=\int_{\partial\Omega}|f-v|^2dS+\int_\Omega|\nabla(f-v)|^2dx=$$
$$=\int_{\partial\Omega}|f|^2dS+\int_\Omega|\nabla(f-v)|^2dx,\quad \forall v\in\mathring{W}_2^1(\Omega). \tag{26}$$

Равенство в (26) достигается только при $v=f-P_Gf$. Положим в (26) $w=f-v$ и отбросим интеграл по поверхности, который не зависит от v. Мы видим, что *при заданном $f\in W_2^1(\Omega)$ решение $u\in G_2^1(\Omega)$ задачи* (25) *является единственной функцией, реализующей минимум интеграла Дирихле*

$$\int_\Omega|\nabla w|^2dx,\quad w\in W_2^1(\Omega),$$

при условии $f-w\in\mathring{W}_2^1(\Omega)$.

5. В заключение приведем несколько примеров линейных непрерывных функционалов в функциональных гильбертовых пространствах.

1°. Пусть $H=F^2$ и P — оператор (15). Для любой фиксированной точки $z\in\mathbf{C}$ функционал $l_z(u)=u(z)$ линеен и непрерывен в F^2. Для $u\in F^2$ имеем $Pu=u$. Вместе с (17), (18) это означает, что

$$l_z(u)=(u,\ w(\cdot,\ z))=\pi^{-1}\int_{\mathbf{C}}\exp(\bar\zeta z)u(\zeta)\,d\hat\mu(\zeta). \tag{27}$$

Формула (27) реализует общее представление (4.1). Из (4.2) следует также

$$\|l_z\|=\|w(\cdot,\ z)\|=\pi^{-1/2}\exp(|z|^2/2).$$

2°. Пусть $H=A^2(\mathbf{D})$, $l_z(u)=u(z)$, $|z|<1$. Аналогично предыдущему, из (21) получаем

$$l_z(u)=\pi^{-1}\int_{\mathbf{D}}(1-z\bar\zeta)^{-2}u(\zeta)\,d\mu(\zeta),\ \|l_z\|=\pi^{-1/2}(1-|z|^2)^{-1}.$$

3°. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^m$, $H=\mathring{W}_2^l(\Omega)$, скалярное произведение определено в (9.3). Будем считать $2l>m$. В силу теоремы вложения (см. § 1.6, п. 11) функционал

$l_x(u)=u(x)$, $x\in\Omega$, непрерывен в H. Поэтому существует функция $w_x\in \mathring{W}_2^l(\Omega)$, такая, что $u(x)=(u, w_x)$, $\forall u\in \mathring{W}_2^l$. Выясним смысл функции w_x. Если $u\in W_2^{2l}(\Omega)\cap \mathring{W}_2^l(\Omega)$, то, интегрируя по частям, имеем

$$u(x)=(u,\ w_x)=\int_\Omega \sum_{|\alpha|=l} \frac{l!}{\alpha!} D^\alpha u\overline{D^\alpha w_x}dy=$$
$$=(-1)^l\int_\Omega \Delta^l u\,(y)\,\overline{w_x\,(y)}\,dy.$$

Таким образом, функция $g(x,\ y)=\overline{w_x(y)}$ является ядром интегрального оператора, который по функции $h=(-1)^l\Delta^l u$ восстанавливает функцию u, удовлетворяющую на $\partial\Omega$ системе однородных граничных условий Дирихле. Это означает, что $g(x,\ y)$ есть функция Грина задачи Дирихле для полигармонического оператора.

ГЛАВА 3

ЛИНЕЙНЫЕ НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Основная часть книги посвящена изучению линейных неограниченных операторов. Материал этой главы является, по существу, введением в теорию общих линейных операторов в гильбертовом пространстве.

§ 1. Общие понятия. График оператора

Помимо общих определений и понятий, связанных с линейными операторами, в этом параграфе собраны нужные для дальнейшего сведения о линейных подмножествах в H. Хотя эти сведения имеют элементарно-геометрический характер, они для удобства чтения помещены не ранее, чем в них возникла нужда.

1. Пусть D — линейное подмножество гильбертова пространства H и $T: D \to H$ — *линейное* (т. е. аддитивное и однородное) отображение. Такие отображения называют *линейными операторами в* H. Множество D называется *областью определения* T и стандартно обозначается через $D(T)$. Множество (очевидно линейное) $R(T) = TD(T)$ называют *областью значений (образом)* T. Линейное множество $D(T)$ является предгильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$(x, y)_T = (x, y) + (Tx, Ty), \quad x, y \in D(T). \tag{1}$$

Соответствующую норму $\|\cdot\|_T$

$$\|x\|_T^2 \overset{\text{def}}{=} \|x\|^2 + \|Tx\|^2, \quad x \in D(T), \tag{2}$$

называют *T-нормой*. Иногда T-нормой называют негильбертову норму

$$|x|_T \overset{\text{def}}{=} \|x\| + \|Tx\|, \quad x \in D(T). \tag{3}$$

Нормы (2), (3) эквивалентны. Из определения (2) (или (3)) прямо следует, что *оператор T непрерывен* (как оператор в H) *в том и только том случае, если T-норма эквивалентна на $D(T)$ норме в H.* В соответствии с определением из § 2.5 $\mathbf{B}(H)$ есть алгебра всех непрерывных в H операторов с $D(T) = H$.

Случаи, в которых приходится рассматривать $D(T)$ не просто как подмножество в H, а как предгильбертово (или гильбертово) пространство со скалярным произведением (1), довольно многочисленны. В этих случаях мы будем, как правило, писать H_T вместо $D(T)$.

Множество нулей («ядро») оператора T будем обозначать через $N(T)$:

$$N(T)=\{x\in D(T): Tx=0\}.$$

Ясно, что $N(T)$ — линейное множество. Условие $N(T)=\{0\}$ необходимо и достаточно для обратимости T. Обратный оператор T^{-1} также линеен, причем $D(T^{-1})=R(T)$, $R(T^{-1})=D(T)$.

Теорема 1. *Пусть T — линейный оператор в H. Для того чтобы T имел ограниченный обратный, необходимо и достаточно выполнение неравенства*

$$\|Tx\|\geqslant c\|x\|,\ c>0,\ \forall x\in D(T). \tag{4}$$

При этом наибольшее возможное значение c в (4) есть $c=1/\|T^{-1}\|$.

○ Из (4) прямо следует, что $N(T)=\{0\}$, так что T^{-1} существует. Полагая в (4) $Tx=y$, находим, что

$$\|y\|\geqslant c\|T^{-1}y\|,\quad \forall y\in D(T^{-1})=R(T), \tag{5}$$

откуда $\|T^{-1}\|\leqslant c^{-1}$. Обратно, если оператор T^{-1} существует и ограничен, то выполнено (5) при $c=\|T^{-1}\|^{-1}$. Полагая $x=T^{-1}y$, приходим к (4) ●

Равенство $T_1=T_2$ означает по определению, что $D(T_1)=D(T_2)$ и $T_1x=T_2x$, $\forall x\in D(T_1)$. Если выполнено более слабое условие:

$$D(T_1)\subset D(T_2),\quad T_1x=T_2x,\quad \forall x\in D(T_1), \tag{6}$$

то говорят, что T_2 — *расширение* оператора T_1 (T_1 — *сужение* оператора T_2), и пишут $T_1\subset T_2$. Таким образом, $T_1=T_2$ означает, что $T_1\subset T_2$ и $T_1\supset T_2$. Если L — подмножество в H, $L\subset D(T)$, то через $T|_L$ обозначают сужение T на L.

Уже при определении суммы и произведения операторов возникает необходимость считаться с тем, что исходные операторы могут быть заданы не на всем пространстве H. Пусть T_1, T_2 — операторы в H. Тогда полагают

$$D(T_1+T_2)=D(T_1)\cap D(T_2),$$
$$D(T_1T_2)=\{x\in D(T_2): T_2x\in D(T_1)\}.$$

На этих линейных множествах сами операторы T_1+T_2, T_1T_2 определяются естественным образом.

Если $T_1T_2=T_2T_1$, то будем говорить, что операторы T_1, T_2 *перестановочны в точном смысле*. Обозначение $T_1\smile T_2$ для неограниченных операторов не обязательно связывается с этим равенством, а употребляется в следующем смысле. Пусть T_2 — линейный оператор в H, $T_1 \in \mathbf{B}(H)$. Будем говорить, что операторы T_1, T_2 перестановочны ($T_1 \smile T_2$ или $T_2 \smile T_1$), если $T_1 T_2 \subset T_2 T_1$. В соответствии с (6) это означает, что при $x \in D(T_2)$ будет $T_1 x \in D(T_2)$ и $T_1 T_2 x = T_2 T_1 x$. Таким образом, если ни один из операторов T_1, T_2 не принадлежит алгебре $\mathbf{B}(H)$, символ $T_1 \smile T_2$ пока не определен. Впрочем, в связи со спектральной теоремой (см. § 6.3, 6.6) определение перестановочности будет распространено на некоторые пары неограниченных операторов.

2. С каждым (не обязательно линейным) отображением Ω в пространстве H связывают его *график* $G(\Omega)$ — множество в $H \oplus H$, образованное всевозможными парами $\{x, \Omega(x)\}$, где x пробегает область определения Ω. Два отображения совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их графики.

Если T — линейный оператор, то $G(T)$ — линейное множество. Включения $T_1 \subset T_2$ и $G(T_1) \subset G(T_2)$ равносильны. Гильбертова структура в $H \oplus H$ индуцирует в $G(T)$ структуру предгильбертова пространства. Заметим, что при $x, y \in D(T)$

$$(\{x, Tx\}, \{y, Ty\}) = (x, y) + (Tx, Ty) = (x, y)_T.$$

Таким образом, *оператор* V: $x \mapsto \{x, Tx\}$, $x \in D(T)$, *есть изометрия предгильбертовых пространств* H_T *и* $G(T)$. В этой связи T-норму (2) (или (3)) часто называют *нормой графика* в $D(T)$.

Охарактеризуем те подмножества $M \subset H \oplus H$, которые являются графиками линейных операторов в H. Ниже π_1, π_2 — «естественные проекции»:

$$\pi_1\{f, g\} = f, \quad \pi_2\{f, g\} = g.$$

Теорема 2. *График* $M \overset{\text{def}}{=} G(T) \subset H \oplus H$ *линейного оператора* T *в* H *есть линейное множество, удовлетворяющее условию*

$$N(\pi_1|_M) = \{0\}. \tag{7}$$

Обратно, любое линейное множество $M \subset H \oplus H$, *удовлетворяющее условию* (7), *является графиком линейного отображения* T, *определяемого равенствами*

$$D(T) = \pi_1 M, \quad T = \pi_2 [\pi_1|_M]^{-1}.$$

○ Доказательство очевидно. Следует лишь заметить, что $\pi_1|_M$ имеет обратный в силу (7) ●

Определим в пространстве $H \oplus H$ операторы U, W:

$$U\{f, g\} = \{g, f\}; \tag{8}$$

$$W\{f, g\} = \{-g, f\}. \tag{9}$$

Оба оператора изометрически изоморфно отображают пространство $H\oplus H$ на себя. Они удовлетворяют соотношениям

$$U^2=-W^2=I,\quad UW=-WU. \tag{10}$$

Если T — оператор в H и существует обратный оператор T^{-1}, то очевидно

$$G(T^{-1})=UG(T). \tag{11}$$

В § 3 будет использовано следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть T — линейный оператор в H. Множество $[WG(T)]^\perp\subset H\oplus H$ есть график линейного оператора в том и только том случае, если $\overline{D(T)}=H$.*

○ В соответствии с (9) элемент $\{0, h\}$ ортогонален $WG(T)$ в пространстве $H\oplus H$ тогда и только тогда, когда $h\perp D(T)$ в пространстве H. Поэтому условие (7) для множества $M=[WG(T)]^\perp$ равносильно требованию $\overline{D(T)}=H$ ●

3. Здесь мы приведем элементарные сведения о линейных пространствах и отображениях, которые понадобятся в дальнейшем.

Пусть L — линейное пространство, $L_1, \ldots, L_n$ — линейные подмножества в нем. Линейную оболочку $\bigvee_1^n L_k$ называют также *линейной суммой* $L_1, \ldots, L_n$ и пользуются для нее обозначением $L_1+\ldots+L_n$. Если подпространства $L_1, \ldots, L_n$ линейно-независимы, то линейная сумма называется *прямой суммой* и обозначается через $L_1\dot{+}L_2\dot{+}\ldots\dot{+}L_n$. Из этого определения непосредственно следует, что

$$\dim(L_1\dot{+}\ldots\dot{+}L_n)=\dim L_1+\ldots+\dim L_n.$$

Отметим, что сумма L_1+L_2 прямая в том и только том случае, если $L_1\cap L_2=\{0\}$.

Пусть L_0 — подпространство в L. Через L/L_0 обозначается соответствующее фактор-пространство, т. е. множество классов $x+L_0$, $x\in L$, в котором естественно вводится линейная структура.

Если $L=L_0\dot{+}L_1$, то имеется естественный изоморфизм между пространствами L/L_0 и L_1. В самом деле, в каждом классе имеется в точности один элемент из L_1. Соответствием между классами и элементами из L_1 и определяется нужный изоморфизм. Из сказанного следует, что

$$\dim(L/L_0)=\dim L_1\quad(L=L_0\dot{+}L_1).$$

Пусть L_0 — линейное подмножество в L и T — линейный оператор в L, $D(T)\supset L_0$. Тогда $\dim TL_0\leqslant\dim L_0$. Если при этом $N(T|_{L_0})=\{0\}$, то $\dim TL_0=\dim L_0$.

4. Если исходное пространство — гильбертово, то возникают содержательные взаимоотношения между линейной и гильбертовой структурами.

Линейная сумма двух подпространств в H не обязательно замкнута. Приведем критерий замкнутости такой суммы. Начнем со следующей леммы.

Лемма 4. *Пусть F, K — подпространства в гильбертовом пространстве H. Тогда* *)

$$F+K=F\oplus P_G K \quad (G=F^\perp). \tag{12}$$

○ Слагаемые в правой части (12) ортогональны. Далее,

$$K=(P_F+P_G)K\subset F+P_G K \quad \text{и}$$

$$P_G K=(I-P_F)K\subset K+P_F K\subset K+F,$$

откуда следует (12) ●

Теорема 5. *В условиях леммы 4 сумма $F+K$ есть подпространство в том и только том случае, когда $P_G K$ — подпространство.*

○ Требуемое прямо следует из представления (12) ●

Следствие 6. *Если в условиях леммы 4 $\dim K<\infty$, то $F+K$ — подпространство.*

○ Так как $\dim P_G K<\infty$, то $P_G K$ — подпространство ●

Если L — линейное множество в H, то условимся называть его *дефектом* размерность ортогонального дополнения:

$$\mathrm{Def}\, L=\dim(H\ominus L)=\dim(H\ominus \overline{L}).$$

?

Следствие 7. *Пусть F — подпространство в H, $\mathrm{Def} F<\infty$, K — линейное множество, $F\subset K\subset H$. Тогда K — подпространство в H.*

○ Представляя K в виде $K=F+K$, получаем из (12), что $K=F\oplus P_G K$. Поскольку $\dim P_G K\leqslant \dim G=\mathrm{Def}\, F<\infty$, то остается ссслаться на теорему 5 ●

Приведем два полезных утверждения о сравнении размерностей подпространств в H.

Лемма 8. *Пусть F, K — подпространства в H и $\dim F>\dim K$. Тогда найдется элемент $f\in F$, $f\neq 0$, такой, что $f\perp K$.*

○ Пусть π — сужение на F проектора P_K. Любой элемент $f\in N(\pi)$ удовлетворяет условиям леммы. Остается показать, что $N(\pi)\neq\{0\}$. Действительно, в противном случае $\dim F=\dim\pi F\leqslant\dim K$, что противоречит условию ●

Лемма 9. *Пусть P_s — проектор в H на подпространство H_s, $s=1, 2$. Если $\|P_1-P_2\|<1$, то $\dim H_1=\dim H_2$.*

○ Предположим, например, что $\dim H_1>\dim H_2$. В силу леммы 8 найдется элемент $f\in H_1$, $f\neq 0$, такой, что $P_2 f=0$. Но тогда $\|f\|=\|P_1 f\|=\|P_1 f-P_2 f\|<\|f\|$, что невозможно ●

---

*) Ортогональная сумма незамкнутых ортогональных друг другу линейных множеств по определению совпадает с их линейной суммой.

§ 2. Замкнутые операторы. Операторы, допускающие замыкание

При изучении неограниченных операторов выделяют так называемые замкнутые операторы. Свойство замкнутости (точнее, замыкаемости) заменяет для неограниченных операторов свойство непрерывности. Сначала мы обсудим понятие замкнутого оператора, а затем рассмотрим возможность замыкания оператора, если он не замкнут.

1. Линейный оператор T в H называется *замкнутым,* если соответствующее пространство H_T является полным. Иначе говоря, замкнутость оператора T означает, что $D(T)$ — *гильбертово* пространство относительно скалярного произведения (1.1).

Теорема 1. *Замкнутость оператора T равносильна любому из следующих двух условий. а) График $G(T)$ есть замкнутое множество в $H \oplus H$. б) Для любой последовательности $x_n \in D(T)$, такой, что существуют пределы $x = \lim x_n$, $y = \lim Tx_n$, оказывается $x \in D(T)$ и $y = Tx$*

○ Отображение $x \mapsto \{x, Tx\}$ есть изометрия пространства H_T на $G(T)$ как на подмножество в $H \oplus H$. Поэтому полнота H_T равносильна замкнутости $G(T)$. Условие (б) явно описывает свойство полноты H_T «на языке последовательностей» ●

Теорема 2. *Для непрерывного оператора T замкнутость равносильна замкнутости $D(T)$ как подмножества H.*

○ Если T непрерывен, то на $D(T)$ норма $\|\cdot\|_T$ эквивалентна норме $\|\cdot\|$, а потому полнота $D(T)$ по T-норме равносильна замкнутости $D(T)$ в H ●

Из теоремы 2 следует, в частности, что любой оператор $T \in \mathbf{B}(H)$ замкнут.

Теорема 3. *Пусть оператор T замкнут и $S \in \mathbf{B}(H)$. Тогда оператор $T+S$ также замкнут.*

○ В условиях теоремы T-норма и $(T+S)$-норма эквивалентны на $D(T)$ ●

В § 4 результат теоремы 3 будет распространен на некоторый класс неограниченных операторов S (см. теорему 4.2). В общем случае из замкнутости операторов T, S замкнутость оператора $T+S$ не вытекает. Отметим еще, что при $\lambda \in \mathbf{C}$, $\lambda \neq 0$ операторы T, λT замкнуты одновременно.

Теорема 4. *Если оператор T имеет обратный, то T и T^{-1} замкнуты одновременно.*

○ Графики $G(T)$ и $G(T^{-1}) = UG(T)$ (см. (1.11)) замкнуты одновременно ●

Теорема 5. *Если оператор T замкнут, то $N(T)$ — подпространство в H.*

○ Пусть $x_n \in D(T)$, $Tx_n = 0$ и $x_n \to x$. В силу теоремы 1, п. б), $x \in D(T)$ и $Tx = 0$ ●

В ряде случаев замкнутость оператора удается устанавливать с помощью следующей теоремы.

Теорема 6. *Пусть T_0, T_1, T — линейные операторы в H, $T_0 \subset T_1 \subset T$, причем T_0, T замкнуты и*

$$\dim [D(T)/D(T_0)] < \infty. \tag{1}$$

Тогда оператор T_1 замкнут.

○ Замкнутость T_0 и включение $T_0 \subset T$ означают, что H_{T_0} — подпространство гильбертова пространства H_T, причем в силу (1) дефект H_{T_0} конечен. Согласно следствию 1.7 H_{T_1} — также подпространство в H_T, а потому H_{T_1} — полное ●

Принципиальное значение имеет следующий результат, доказательство которого нам удобно отложить до § 3, п. 3.

Теорема 7. *Если линейный оператор T замкнут и $D(T)$ — подпространство в H, то T непрерывен.*

Это утверждение объясняет, в частности, почему при изучении неограниченных операторов рассматриваются операторы с незамкнутой областью определения.

Теорема 8. *Пусть замкнутый оператор T имеет обратный и область значений $R(T)$ замкнута. Тогда оператор T^{-1} непрерывен.*

○ Оператор T^{-1} определен на подпространстве $D(T^{-1}) = R(T)$ и замкнут по теореме 4. В силу теоремы 7 он непрерывен ●

Следующее простое утверждение примыкает к теореме 8.

Теорема 9. *Пусть оператор T замкнут и выполнено условие*

$$\|Tx\| \geqslant c\|x\|, \ c > 0, \ \forall x \in D(T).$$

Тогда $R(T)$ — подпространство.

○ В силу теоремы 1.1 оператор T имеет ограниченный обратный. Оператор T^{-1} замкнут по теореме 4 и, следовательно, $R(T) = D(T^{-1})$ — подпространство (по теореме 2) ●

Замкнутость T влечет за собой формально более сильное свойство *слабой замкнутости T*, а именно: оператор T называют слабо замкнутым, если для $x_n \in D(T)$ из $x_n \xrightarrow{w} x$, $Tx_n \xrightarrow{w} y$ вытекает, что $x \in D(T)$ и $y = Tx$. Слабая замкнутость T очевидно совпадает со слабой замкнутостью его графика $G(T)$ как множества в $H \oplus H$. Поскольку всякое подпространство гильбертова пространства слабо замкнуто, слабая замкнутость T равносильна его замкнутости.

2. Пусть оператор T не замкнут. Это означает, что график $G(T)$ — незамкнутое множество в $H \oplus H$. Естественно перейти к рассмотрению множества $\overline{G(T)}$. Однако при этом возникают две существенно различные возможности.

Предположим сначала, что множество $\overline{G(T)}$ удовлетворяет условию (1.7), т. е. является графиком некоторого оператора. Этот оператор называют *замыканием* оператора T и обозначают через $\overline{T}$. Об операторе T в этом случае говорят, что он *допускает замыкание* (или *замыкаем*). Ясно, что любой непрерывный оператор замыкаем.

Если $T_1 \supset T$ и T_1 — замкнутый оператор, то очевидно $T_1 \supset \overline{T}$. Таким образом, $\overline{T}$ есть *минимальное замкнутое расширение оператора* T. Прямое определение $\overline{T}$ сводится к соотношению

$$G(\overline{T}) = \overline{G(T)}. \tag{2}$$

Полезна следующая переформулировка того, что $\overline{G(T)}$ — график, т. е. что оператор T — замыкаемый.

Оператор T допускает замыкание в том и только том случае, если для любой последовательности $\{x_n\}$ элементов из $D(T)$, для которой существуют пределы $\lim x_n = 0$ *и* $\lim Tx_n = y$, *оказывается* $y = 0$. При этом пополнение пространства H_T приводит к пространству $H_{\overline{T}}$.

Отметим еще, что для любого $x \in D(\overline{T})$ найдется последовательность $x_n \in D(T)$, такая, что $x_n \to x$, $Tx_n \to \overline{T}x$.

Пусть теперь $\overline{G(T)}$ не является графиком. Иначе говоря, существуют последовательности $x_n \in D(T)$, такие, что $x_n \to 0$, $Tx_n \to y \neq 0$. Это означает, что *топологии в H_T и в H не согласованы* (см. § 1.1, п. 3). При пополнении $D(T)$ по T-норме мы не можем произвести это пополнение за счет элементов пространства H (поскольку различным элементам пополнения пришлось бы сопоставить один и тот же элемент пространства H). В рассматриваемой ситуации говорят, что *оператор T не допускает замыкания.*

Пример. Пусть $H = L_2[0, 1]$, $D(T)$ — совокупность непрерывных на $[0, 1]$ функций, $(Tx)(t) = x(0)1(t)$, где 1 — функция, тождественно равная единице. Оператор T не допускает замыкания. Действительно, положим $x_n(t) = (1-t)^n$. Тогда $x_n \in D(T)$, $x_n \to 0$, но $Tx_n = 1$. Отметим, что в рассматриваемом примере скалярное произведение в $D(T)$ есть

$$(x, y)_T = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}\,dt + x(0)\overline{y(0)}. \tag{3}$$

3. Понятия замкнутого и замыкаемого операторов распространяются на операторы, действующие из H_1 в H_2, где H_1, H_2 — гильбертовы пространства. Определения остаются прежними. Так, оператор T замкнут, коль скоро $D(T)$ — полное пространство относительно T-нормы (1.2). Следует лишь иметь в виду, что теперь второй член правой части (1.2) подразумевает норму в H_2.

Понятие замкнутости содержательно лишь при $\dim H_1 = \infty$. В самом деле, любое линейное отображение конечномерного пространства в нормированное пространство непрерывно. При $\dim H_1 = \infty$, $\dim H_2 < \infty$ понятия замкнутости и замыкаемости сохраняют содержательность.

Пусть $\dim H_1=\infty$ и пусть V — изометрия пространства H_2 на H_1 (либо на подпространство в H_1, если $\dim H_2<\infty$). Если T — оператор из H_1 в H_2, то VT — оператор в пространстве H_1. При этом T-норма и VT-норма совпадают и, следовательно, операторы T и VT замкнуты (или замыкаемы, или непрерывны) одновременно. Тем самым вопросы, связанные с замкнутостью операторов, сводятся к случаю $H_1=H_2$. Поэтому все утверждения пп. 1, 2 естественно переносятся на случай операторов, действующих из H_1 в H_2. Выделим соответствующий вариант теоремы 7.

Теорема 10. *Если линейный оператор T, действующий из H_1 в H_2, замкнут и $D(T)$ замкнуто в H_1, то T непрерывен.*

§ 3. Сопряженный оператор

Понятие сопряженного оператора удобно исследовать, используя два подхода: «аналитический», основанный на прямом определении, и «геометрический», связанный с рассмотрением графиков операторов.

1. Пусть T — линейный оператор в H. Для $y\in H$ рассмотрим линейный на $D(T)$ функционал $l_y(x)=(Tx, y)$. При некоторых y этот функционал может оказаться непрерывным в H; тогда он по теореме 2.4.1 допускает представление $l_y(x)=(x, h)$, $h\in H$. Это представление единственно, коль скоро $\overline{D(T)}=H$.

Мы приходим к следующему определению. *Пусть T — линейный оператор в H, $\overline{D(T)}=H$. Элемент $y\in H$ принадлежит области определения $D(T^*)$ сопряженного с T оператора T^*, если существует элемент $h\in H$, такой, что*

$$(Tx, y)=(x, h), \quad \forall x\in D(T). \tag{1}$$

При этом $T^*x\overset{\mathrm{def}}{=\!=}h$.

Таким образом, должно выполняться соотношение

$$(Tx, y)=(x, T^*y), \quad \forall x\in D(T), \ \forall y\in D(T^*). \tag{2}$$

Напомним, что в случае $T\in\mathbf{B}(H)$ это равенство (см. **(2.4.12)**) выполнено для всех $x, y\in H$.

Если $\overline{D(T)}\neq H$, то элемент $h\in H$ не определяется равенством (1) однозначно. Поэтому для операторов с неплотной областью определения сопряженный оператор не вводится.

Множество $D(T^*)$ всегда не пусто, поскольку заведомо $0\in D(T^*)$. Можно привести примеры операторов, для которых $D(T^*)=\{0\}$. Ниже мы установим (см. теорему 7), что для замкнутых операторов T всегда $\overline{D(T^*)}=H$.

Геометрический подход к изучению сопряженного оператора основан на следующем соображении. Пусть $\mathcal{W}$ — оператор (1.9). Рассмотрим в $H\oplus H$ подпространство $[\mathcal{W}G(T)]^\perp$. Если

T плотно определен, то согласно лемме 1.3 это подпространство является графиком некоторого линейного оператора.

Теорема 1. *Пусть T — линейный, плотно определенный оператор в H. Тогда*

$$[WG(T)]^{\perp} = G(T^*). \tag{3}$$

○ В силу (1.9) условие $\{y, h\} \perp WG(T)$ равносильно соотношению (1) ●

2. Ниже T — плотно определенный оператор в H. Приводимые свойства сопряженного оператора прямо следуют либо из определения, либо из теоремы 1.

Теорема 2. *Оператор T^* линеен и замкнут.*

○ В силу (3) график $G(T^*)$ — замкнутое линейное множество. Остается принять во внимание теорему 1.2 и теорему 2.1, п. а) ●

Теорема 3. *Если оператор T допускает замыкание, то $(\overline{T})^* = T^*$.*

○ Сопоставляя (3) и (2.2), находим, что графики операторов $(\overline{T})^*$ и T^* совпадают ●

Теорема 4. *Если $S \in \mathbf{B}(H)$, то $(T+S)^* = T^* + S^*$.*

○ Пусть $y \in D(T^*)$. Тогда при $x \in D(T)$

$$(Tx + Sx, y) = (x, T^*y) + (x, S^*y) = (x, (T^* + S^*)y),$$

откуда $T^* + S^* \subset (T+S)^*$. Меняя ролями операторы T, $T+S$, получаем обратное включение ●

Аналогичный результат для более широкого класса «возмущений» будет получен в теореме 4.3. Отметим частный случай теоремы 4 — равенство

$$(T - \lambda I)^* = T^* - \bar{\lambda} I, \quad \lambda \in \mathbf{C}. \tag{4}$$

Отметим также очевидное равенство

$$(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*, \quad \lambda \in \mathbf{C}, \ \lambda \neq 0.$$

Теорема 5. *Подпространства $\overline{R(T)}$ и $N(T^*)$ ортогональны в H и*

$$H = \overline{R(T)} \oplus N(T^*). \tag{5}$$

○ Включение $y \in N(T^*)$ означает, что $(Tx, y) = 0$ для любого $x \in D(T)$. Это равносильно ортогональности $y \perp R(T)$ ●

Соотношение (5) часто используется в применении к оператору $T - \lambda I$. В соответствии с (4)

$$H = \overline{R(T - \lambda I)} \oplus N(T^* - \bar{\lambda} I). \tag{6}$$

Теорема 6. *Пусть $\overline{D(T)} = \overline{R(T)} = H$ и пусть оператор T имеет обратный. Тогда сопряженный оператор T^* также имеет обратный и*

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*. \tag{7}$$

○ В силу (5) $N(T^*)=\{0\}$, а потому оператор T^* имеет обратный. Существование оператора $(T^{-1})^*$ следует из того, что $\overline{D(T^{-1})}=\overline{R(T)}=H$. Рассмотрим графики операторов $(T^*)^{-1}$, $(T^{-1})^*$. Пусть U — изометрия (1.8) в пространстве $H\oplus H$. В соответствии с (3) и (1.11)

$$G\left((T^*)^{-1}\right)=U\left([WG(T)]^{\perp}\right).$$

Операция ортогонального дополнения перестановочна с изометрией. Принимая во внимание (1.10), получаем

$$G\left((T^*)^{-1}\right)=[UWG(T)]^{\perp}=[-WUG(T)]^{\perp}=$$
$$=[WUG(T)]^{\perp}=G\left((T^{-1})^*\right) \; ●$$

Обсудим теперь вопрос о существовании второго сопряженного оператора $T^{**}\overset{\text{def}}{=\!=}(T^*)^*$.

Теорема 7. *Пусть T — линейный, плотно определенный оператор в H. Для того чтобы сопряженный оператор T^* также был плотно определен, необходимо и достаточно, чтобы T допускал замыкание. При этом условии оператор T^{**} существует и*

$$T^{**}=\overline{T}. \tag{8}$$

○ Рассмотрим график оператора T^*. Так как $-W^2$ совпадает с тождественным оператором в $H\oplus H$ (см. (1.10)), то

$$WG(T^*)=W[WG(T)]^{\perp}=[W^2G(T)]^{\perp}=[G(T)]^{\perp}.$$

Стало быть, $[WG(T^*)]^{\perp}=\overline{G(T)}$. Множество $\overline{G(T)}$ является графиком в том и только том случае, если T допускает замыкание. При этом выполнено (2.2), а потому

$$[WG(T^*)]^{\perp}=G(\overline{T}). \tag{9}$$

С другой стороны, согласно лемме 1.3 левая часть (9) является графиком тогда и только тогда, когда $\overline{D(T^*)}=H$. Таким образом, последнее равенство эквивалентно существованию замыкания у T.

Если $\overline{D(T^*)}=H$, то существует оператор T^{**}. Равенство (8) получается из (9) применением к оператору T^* теоремы 1 ●

Если T замкнут, то $G(T)$ — подпространство. Поэтому для замкнутого плотно определенного оператора T соотношение (3) можно записать в виде

$$WG(T)\oplus G(T^*)=H\oplus H. \tag{10}$$

Впоследствии нам будет полезна расшифровка этого емкого равенства.

Теорема 8. *Пусть T — замкнутый оператор в H, $\overline{D(T)}=H$. Для любых $f, g \in H$ существует единственная пара элементов $x \in D(T)$, $y \in D(T^*)$, такая, что*

$$f=-Tx+y, \quad g=x+T^*y. \tag{11}$$

Имеет место равенство

$$\|f\|^2+\|g\|^2=\|x\|^2+\|Tx\|^2+\|y\|^2+\|T^*y\|^2. \tag{12}$$

○ Соотношение (10) означает, что любой элемент $\{f, g\} \in H \oplus H$ допускает однозначное представление в виде

$$\{f, g\}=W\{x, Tx\}+\{y, T^*y\}=\{-Tx, x\}+\{y, T^*y\}, \tag{13}$$

причем слагаемые в (13) ортогональны в $H \oplus H$. Соотношение (13) равносильно паре равенств (11), причем (12) следует из ортогональности слагаемых в (13) ●

3. Доказательство теоремы 2.7. Предположим сначала, что $D(T)=H$. Тогда существует сопряженный оператор T^*, причем в силу теоремы 7 $\overline{D(T^*)}=H$. Покажем, что T^* непрерывен. Рассмотрим семейство линейных функционалов

$$l_y(x)=(Tx, y)=(x, T^*y), \quad y \in D(T^*), \ \|y\| \leqslant 1.$$

На каждом элементе $x \in H$ семейство функционалов l_y ограничено: $|l_y(x)| \leqslant \|Tx\| \cdot \|y\| \leqslant \|Tx\|$. В силу принципа равномерной ограниченности найдется постоянная C, такая, что $\|l_y\| \leqslant C$, $\forall y \in D(T^*)$, $\|y\| \leqslant 1$. Поскольку $\|l_y\|=\|T^*y\|$ (см. (2.4.2)), это означает, что оператор T^* непрерывен и $\|T^*\| \leqslant C$. Так как T^* — замкнутый оператор (теорема 2), то в силу теоремы 2.2 $D(T^*)=H$, т. е. $T^* \in \mathbf{B}(H)$, а поэтому и $T^{**} \in \mathbf{B}(H)$. Вместе с (8) это показывает, что $T \in \mathbf{B}(H)$.

Пусть теперь $D(T) \neq H$. Обозначим через P проектор на $D(T)$ и рассмотрим определенный всюду в H оператор TP. Пусть $x_n \in H$, $x_n \to x$ и $TPx_n \to y$. Тогда $Px_n \to Px$ и $y=TPx$ в силу замкнутости оператора T. Тем самым оператор TP также замкнут и по доказанному непрерывен. Следовательно, непрерывен и оператор T, совпадающий с TP на $D(T)$ ●

§ 4. Подчиненность операторов

1. Пусть T, S — линейные операторы в H, причем

$$D(T) \subset D(S) \tag{1}$$

и при некоторых $a, b \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\|Sx\|^2 \leqslant a^2\|Tx\|^2+b^2\|x\|^2, \quad \forall x \in D(T). \tag{2}$$

В этом случае говорят, что *S подчинен T* (или *T-ограничен*). При фиксированном T множество всех T-ограниченных операторов обозначим через $\mathbf{B}_T$. Ясно, что $\mathbf{B}_T$ — линейное множество и $\mathbf{B}(H)\subset\mathbf{B}_T$. Если $T\in\mathbf{B}(H)$, то и $\mathbf{B}_T=\mathbf{B}(H)$, так что понятие T-ограниченности в этом случае несодержательно.

Если $S\in\mathbf{B}_T$, то при любом $q>0$ оператор qS подчинен оператору qT, причем в соответствующем неравенстве (2) постоянная a сохраняется, а b заменяется на qb. Поскольку в большинстве вопросов допустима одновременная замена T на qT и S на qS, значение $b>0$ в (2) несущественно (случай $b=0$ составляет исключение).

Обозначим через $a_T(S)$ точную нижнюю границу значений a для пар a, b, допускаемых неравенством (2). При $S\in\mathbf{B}(H)$ заведомо $a_T(S)=0$. Не следует, однако, думать, что из $a_T(S)=0$ вытекает ограниченность S.

Наряду с (2) употребляют и другую форму условия подчиненности: при некоторых a_1, $b_1\geqslant 0$ должно быть

$$\|Sx\|\leqslant a_1\|Tx\|+b_1\|x\|,\quad \forall x\in D(T). \tag{3}$$

Обе формы условия подчиненности равносильны: из (2) вытекает (3) при $a_1=a$, $b_1=b$. Обратно, пусть выполнено (3). Тогда для $x\in D(T)$

$$\begin{aligned}\|Sx\|^2 &\leqslant a_1^2\|Tx\|^2+2a_1b_1\|Tx\|\cdot\|x\|+b_1^2\|x\|^2\leqslant\\ &\leqslant(a_1^2+a_1b_1\varepsilon)\|Tx\|^2+(b_1^2+a_1b_1\varepsilon^{-1})\|x\|^2,\quad \forall\varepsilon>0.\end{aligned}$$

Таким образом, из (3) следует (2) при любом $a>a_1$ и подходящем $b=b(a)$. Отсюда видно, что точная нижняя граница допустимых значений a_1 в (3) совпадает с $a_T(S)$.

Пусть выполнено (1). Обозначим через S_T сужение оператора S на множество $D(T)$. Мы будем рассматривать S_T как оператор из H_T в H. Ясно, что $S\in\mathbf{B}_T$ означает непрерывность оператора S_T. Если H_T — полное пространство (т. е. если T — замкнутый оператор), то в соответствии с теоремой 2.7 оператор S_T непрерывен, коль скоро он замкнут. Покажем, что S_T замкнут, если S допускает замыкание как оператор в H. Пусть x, $x_n\in D(T)$, $n=1, 2, \ldots$, $y\in H$, $\|x_n-x\|_T\to 0$, $\|Sx_n-y\|\to 0$. Первое из этих условий включает сходимость $x_n\to x$ в H. Поскольку S допускает замыкание в H, отсюда следует $y=\bar{S}x$. Ввиду того, что $x\in D(T)\subset D(S)$, находим $y=Sx$. Это и означает замкнутость S_T. Нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть оператор T замкнут в H, S допускает замыкание в H и выполнено* (1). *Тогда $S\in\mathbf{B}_T$.*

В связи с теоремой 1 стоит отметить, что замыкаемость оператора не является необходимым условием его T-ограниченности. Пример: $H=L_2[0, 1]$, $D(T_0)=W_2^1(0, 1)$, $(T_0x)(t)=dx/dt$, T — оператор из примера § 2, п. 2. Оператор T не допускает замыкания, хотя он T_0-ограничен.

2. Говорят, что оператор $S\in\mathbf{B}_T$ *сильно подчинен* оператору T, если $a_T(S)<1$. При сильной подчиненности многие важные свойства операторов T и $T+S$ оказываются одинаковыми.

Определим в $H \oplus H$ линейный оператор Q следующим образом. Пусть $\{f, g\} \in H \oplus H$. Опираясь на теорему 3.8, найдем элементы $x \in D(T)$, $y \in D(T^*)$, такие, что выполнено (3.11), и положим

$$Q\{f, g\} = \{-Sx, S^*y\}.$$

Из (6), (7) и (3.12) находим, что

$$\|Q\{f, g\}\|^2_{H \oplus H} = \|Sx\|^2 + \|S^*y\|^2 \leqslant a^2 (\|f\|^2 + \|g\|^2) = \\ = a^2 \|\{f, g\}\|^2_{H \oplus H},$$

т. е. $\|Q\| \leqslant a < 1$. Поэтому

$$R(I + Q) = H \oplus H. \tag{8}$$

Поскольку в силу (3.11)

$$(I + Q)\{f, g\} = \{-Tx + y, x + T^*y\} + \{-Sx, S^*y\} = \\ = W\{x, Tx + Sx\} + \{y, T^*y + S^*y\} \in WG(T + S) \oplus G(T^* + S^*),$$

(8) совпадает с требуемым равенством (5) ●

§ 5. Инвариантные подпространства ограниченных операторов

1. Пусть пространство H разложено в ортогональную сумму двух подпространств:

$$H = H_1 \oplus H_2. \tag{1}$$

В соответствии с этим разложением будем записывать элементы $x \in H$ в виде столбцов $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, отождествляя $x_1 \in H_1$ с $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $x_2 \in H_2$ с $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$. С разложением (1) связано представление любого оператора $T \in \mathbf{B}(H)$ в виде «операторной матрицы»

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $T_{ij} \in \mathbf{B}(H_j, H_i)$, $i, j = 1, 2$. Именно положим $T_{ij} = P_i T|_{H_j}$, где P_i — проектор на H_i. Тогда $P_i Tx = P_i (Tx_1 + Tx_2) = T_{i1}x_1 + T_{i2}x_2$, т. е.

$$Tx = \begin{pmatrix} T_{11}x_1 + T_{12}x_2 \\ T_{21}x_1 + T_{22}x_2 \end{pmatrix},$$

что соответствует обычному правилу умножения матрицы на столбец.

Легко видеть, что сопряженный оператор T^* задается «эрмитово-сопряженной» матрицей

$$T^* = \begin{pmatrix} T_{11}^* & T_{21}^* \\ T_{12}^* & T_{22}^* \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Матричное представление можно ввести и для ограниченных операторов T, определенных на подпространстве $D(T) \subset H$. Положим, снова имея в виду разложение (1),

$$D_i = H_i \cap D(T), \quad T_{ij} = P_i T|_{D_j} \quad (i, j = 1, 2).$$

Представление оператора T матрицей (2) теперь имеет место лишь при дополнительном условии

$$D_1 \oplus D_2 = D(T), \tag{4}$$

или, что то же самое, при условиях

$$P_1 D(T) = D_1, \quad P_2 D(T) = D_2. \tag{5}$$

Отметим, что каждое из равенств (5) влечет другое. Условия (4), (5) автоматически выполнены, если $D(T) = H$. Они удовлетворяются также, если $H_1 \subset D(T)$ (либо $H_2 \subset D(T)$).

Аналогичное матричное представление для неограниченных операторов малосодержательно, так как свойства оператора T, вообще говоря, плохо описываются в терминах его „матричных элементов" T_{ij}.

Пример. Пусть $H = L_2[0, 1] \oplus L_2[0, 1]$,

$$D(T) = \{u \in H : u_j \in C^1[0, 1],\ j = 1, 2\},$$

$$T\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d/dt & a\,d/dt \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1' + a u_2' \\ 0 \end{pmatrix},$$

где a — положительная непрерывная функция на $[0, 1]$, не дифференцируемая ни в одной точке. Тогда каждый из операторов T_{ij}, $i, j = 1, 2$, допускает замыкание в $L_2[0, 1]$. В то же время оператор T не допускает замыкания. Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить, что область определения сопряженного оператора есть $\{0\} \oplus L_2[0, 1]$ и, стало быть, не плотна в H.

Один из методов изучения линейных операторов заключается в отыскании таких разложений (1) пространства H, при которых матричное представление заданного оператора принимает по возможности простой (треугольный или диагональный) вид. Это связано соответственно с понятиями *инвариантных* и *приводящих* подпространств. Здесь мы рассмотрим первое из них.

2. Пусть T — ограниченный линейный оператор в H с замкнутой областью определения $D(T)$. Подпространство $H_1 \subset H$ называется *инвариантным* относительно T (*T-инвариантным*), если

1) подпространства $D_1 = H_1 \cap D(T)$, $D_2 = H_1^\perp \cap D(T)$ удовлетворяют условию (4);

2) $$TD_1 \subset H_1. \tag{6}$$

Для операторов T с $D_1 = H_1$ (в частности, с $D(T) = H$) условие 1) выполняется автоматически, а условие 2) принимает вид

$$TH_1 \subset H_1. \tag{7}$$

Можно дать равносильное определение T-инвариантных подпространств в терминах проекторов. Ниже через P_T обозначен проектор на $D(T)$ Подпространство $H_1 \subset H$ называется T-инвариантным, если

1′) $$P_1 \smile P_T;$$

2′) $$P_1 T P_1 = T P_1. \tag{8}$$

Проверим равносильность обоих определений.

○ Обозначим через $\widetilde{P}_1$ проектор на D_1. В соответствии с теоремой 2.8.4 условие 1′) эквивалентно равенству $P_1 P_T = \widetilde{P}_1$, которое, в свою очередь, равносильно первому из равенств (5). Таким образом, условия 1) и 1′) равносильны.

Из (8) очевидно вытекает (6) Обратно, пусть $x \in D(TP_1) = D_1 \oplus H_2$. Тогда $P_1 x \in D_1$ и в силу (6) $TP_1 x \in H_1$. Следовательно, $P_1 T P_1 x = T P_1 x$ ●

В представлении (2) T-инвариантность подпространства H_1 означает, что $T_{21} = 0$, т. е. матрица оператора T — верхняя треугольная. Оператор T_{11} называется при этом *частью оператора T в инвариантном подпространстве H_1*. Аналогично, T-инвариантность подпространства H_2 равносильна тому, что матрица (2) — нижняя треугольная ($T_{12} = 0$). Вследствие формулы (3) из сказанного вытекает теорема.

Теорема 1. *Для оператора $T \in \mathbf{B}(H)$ подпространство $H_1 \subset H$ инвариантно в том и только том случае, если подпространство $H_1^{\perp}$ является T^*-инвариантным.*

Простейший пример инвариантных подпространств дают собственные подпространства оператора T:

$$H_\lambda(T) = \{x \in D(T) : Tx = \lambda x\}.$$

Так как $H_\lambda(T) \subset D(T)$, то проверять надо лишь условие (7), которое очевидно выполнено. Более общий пример связан с «корневыми подпространствами» оператора. Именно положим $H_\lambda^{(0)}(T) = H_\lambda(T)$ и

$$H_\lambda^{(k)}(T) = \{x \in D(T) : Tx - \lambda x \in H_\lambda^{(k-1)}(T)\},\ k = 1, 2, \ldots$$

Подпространства $H_\lambda^{(k)}(T)$ образуют неубывающую цепочку T-инвариантных подпространств.

Если $\dim H < \infty$, то всякий оператор $T \in \mathbf{B}(H)$ имеет собственные подпространства. Если $\dim H = \infty$, то оператор T может вообще не иметь собственных подпространств, но тем не менее иметь нетривиальные инвариантные подпространства. В этом случае они заведомо должны быть бесконечномерными.

Пример. Пусть $H=l_2$ и V — изометрический «оператор сдвига», который на стандартном базисе $\{e_k\}$ задается формулами $Ve_k=e_{k+1}$, $k=1, 2, \ldots$ Нетрудно видеть, что V не имеет собственных чисел. Одно из его инвариантных подпространств есть $\{x\in l_2 : x\perp e_1\}$.

Задача описания всех инвариантных подпространств оператора очень трудна и решена полностью лишь для отдельных классов операторов (в частности, для самосопряженных). До сих пор не выяснено, всякий ли оператор $T\in \mathrm{B}(H)$ имеет хотя бы одно инвариантное подпространство. Однако *у всякого компактного T существуют нетривиальные инвариантные подпространства* (теорема Дж Неймана).

§ 6. Приводящие подпространства

Если в разложении (5.1) пространства H оба подпространства H_1, H_2 T-инвариантны, то матрица (5.2) — диагональная. Матричное представление в этом случае остается содержательным и для неограниченных T.

1. Ниже сохранены основные обозначения предыдущего параграфа, лишь вместо T_{11}, T_{22} теперь будем писать T_1, T_2. Однако теперь $D_i=H_i\cap D(T)$, $i=1, 2,$ — вообще говоря, незамкнутые линейные подмножества в H_i.

Пусть T — линейный оператор в H, H_1 — подпространство в H и $H_2=H_1^{\perp}$. Говорят, что H_1 *приводит* T, если

$$P_1D(T)=D_1,\ P_2D(T)=D_2; \tag{1}$$

$$TD_1\subset H_1,\ TD_2\subset H_2. \tag{2}$$

Из определения следует, что подпространство H_1 и его ортогональное дополнение H_2 приводят оператор T одновременно. Отметим, что каждое из равенств (1) влечет за собой другое, в то время как включения (2) независимы.

Весьма просто выглядит условие приводимости в терминах проекторов.

Теорема 1. *Для того чтобы подпространство H_1 приводило оператор T, необходимо и достаточно, чтобы было*

$$T\smile P_1. \tag{3}$$

○ Если H_1 приводит T, то при $x\in D(T)$ в силу (1) также и P_1x, $P_2x\in D(T)$. Стало быть, $Tx=TP_1x+TP_2x$, причем $TP_ix\in H_i$, $i=1, 2$. Отсюда $P_1Tx=TP_1x$.

Обратно, пусть выполнено (3). Тогда по определению перестановочности $P_1D(T)\subset D(T)$. Так как одновременно $P_1D(T)\subset \subset H_1$, то $P_1D(T)=D_1$, т. е. (1) выполнено. Далее, при $x\in D_i$, $i=1, 2$,

$$Tx=TP_ix=P_iTx\in H_i\ \bullet$$

Если подпространство H_1 приводит оператор T, то область определения T есть

$$D(T) = D_1 \oplus D_2 = D(T_1) \oplus D(T_2); \tag{4}$$

T действует на элемент $x \in D(T)$ по правилу

$$Tx = T_1 P_1 x + T_2 P_2 x$$

и, следовательно, область значений T есть

$$R(T) = R(T_1) \oplus R(T_2). \tag{5}$$

В этой ситуации оператор T называют *ортогональной суммой операторов* T_1, T_2 (относительно пары приводящих подпространств $H_1, H_2 = H_1^{\perp}$) и пишут

$$T = T_1 \oplus T_2. \tag{6}$$

Смысл формулы (6) состоит в том, что изучение оператора T сводится к изучению его *частей* T_1, T_2.

2. Теорема 2. *Пусть подпространства H_1, $H_2 = H_1^{\perp}$ приводят оператор T. Замкнутость T равносильна замкнутости его частей T_1, T_2 в разложении* (6).

○ В силу (2) множества D_1, D_2 T-ортогональны (т. е. ортогональны в смысле скалярного произведения (1.1)). Поэтому наряду с (4) имеем T-ортогональное разложение

$$D(T) = D(T_1) \overset{T}{\oplus} D(T_2).$$

Полнота $D(T)$ по T-норме очевидно равносильна T-полноте обоих слагаемых $D(T_1)$, $D(T_2)$ ●

Из (4) вытекает, что оператор T плотно определен в H в том и только том случае, если его части T_1, T_2 плотно определены в соответствующих подпространствах. Поэтому оператор T^* и операторы T_1^*, T_2^* существуют одновременно.

Теорема 3. *Пусть $\overline{D(T)} = H$, подпространство H_1 приводит T и пусть T_1 — часть T в H_1. Тогда H_1 приводит также сопряженный оператор T^*. Часть T^* в H_1 совпадает с T_1^* и, следовательно,*

$$(T_1 \oplus T_2)^* = T_1^* \oplus T_2^*. \tag{7}$$

○ Для ограниченных операторов утверждение теоремы прямо следует из (5.3). Рассмотрим общий случай.

Пусть P_1 — проектор на H_1. Для $x \in D(T)$, $y \in D(T^*)$

$$(Tx, P_1 y) = (P_1 Tx, y) = (TP_1 x, y) = (x, P_1 T^* y). \tag{8}$$

Следовательно, $P_1 y \in D(T^*)$ и $T^* P_1 y = P_1 T^* y$, т. е. $T^* \smile P_1$.

Обозначим через $(T^*)_1$ часть T^* в H_1. Применяя (8) к $x \in D(T) \cap H_1 = D(T_1)$, $y \in D(T^*) \cap H_1 = D((T^*)_1)$, видим, что

$$(T^*)_1 \subseteq T_1^*. \tag{9}$$

Пусть теперь $y_1 \in D(T_1^*)$. Для любого $x \in D(T)$ положим $x_1 = P_1 x$; имеем

$$(Tx, y_1) = (P_1 Tx, y_1) = (TP_1 x, y_1) = (T_1 x_1, y_1) = \\ = (x_1, T_1^* y_1) = (x, T_1^* y_1),$$

откуда $y_1 \in D(T^*) \cap H_1 = D((T^*)_1)$. Таким образом, в (9) фактически равенство, а не включение ●

Теорема 3 в известной мере допускает обращение. Особенно просто обстоит дело для операторов $T \in \mathbf{B}(H)$. Действительно, из теоремы 5.1 прямо вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $T \in \mathbf{B}(H)$ и подпространство H_1 T-инвариантно и T^*-инвариантно. Тогда H_1 приводит T и T^*.*

Пусть $T = T_1 \oplus T_2$, $S = S_1 \oplus S_2$ относительно одного и того же разложения пространства H. Легко видеть, что тогда

$$T + S = (T_1 + S_1) \oplus (T_2 + S_2), \tag{10}$$

$$TS = T_1 S_1 \oplus T_2 S_2. \tag{11}$$

Так как оператор I приводится любым подпространством, то из (10) следует, что при всяком $\lambda \in \mathbf{C}$

$$T - \lambda I = (T_1 - \lambda I_1) \oplus (T_2 - \lambda I_2) \tag{12}$$

(здесь $I_k = I|_{H_k}$, $k = 1, 2$). Отметим еще равенство

$$T^{-1} = T_1^{-1} \oplus T_2^{-1}, \tag{13}$$

причем обратимость T эквивалентна одновременной обратимости обеих его частей T_1, T_2.

3. Понятие ортогональной суммы операторов очевидным образом распространяется на случай любого конечного числа операторов. Рассмотрим несколько более сложную ситуацию, когда число слагаемых бесконечно. В этом случае оператор T однозначно восстанавливается по своим частям в приводящих подпространствах лишь при дополнительном условии его замкнутости.

Теорема 5. *Пусть T — замкнутый оператор в H и пусть в разложении $H = \sum_1^\infty \oplus H_k$ каждое подпространство приводит T. Пусть T_k — часть оператора T в подпространстве H_k, P_k — проектор на H_k $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогда*

$$D(T) = \left\{x \in H : P_k x \in D(T_k),\ \forall k;\ \sum\nolimits_k \|T_k P_k x\|^2 < \infty\right\} \tag{14}$$

и для $x \in D(T)$

$$Tx = \sum\nolimits_k T_k P_k x. \tag{15}$$

○ Если $x \in D(T)$, то $P_k x \in D(T_k)$, $\forall k$, и

$$Tx = \sum\nolimits_k P_k Tx = \sum\nolimits_k TP_k x = \sum\nolimits_k T_k P_k x,$$

причем полученный ряд — ортогональный, так что

$$\sum_k \| T_k P_k x \|^2 = \| Tx \|^2 < \infty.$$

Обратно, пусть x принадлежит множеству, описываемому правой частью (14). Положим $x_n = \sum_1^n P_k x$, тогда $x_n \to x$ и $Tx_n = \sum_1^n T_k P_k x \to \sum_1^\infty T_k P_k x$. Поскольку T замкнут, то в силу теоремы 2.1, п. б), $x \in D(T)$ и выполнено (15) ●

В условиях теоремы 5 пишут $T = \sum_1^\infty \oplus T_k$.

§ 7. Дефектное число, спектр и резольвента замкнутого оператора

1. Пусть T — замкнутый оператор в H. Размерность ортогонального дополнения к его области значений называется *дефектом* и обозначается

$$d_T = \operatorname{Def} R(T) = \dim \left(H \ominus \overline{R(T)}\right). \tag{1}$$

Если $D(T)$ плотно в H, то d_T можно охарактеризовать в терминах сопряженного оператора T^*, а именно в соответствии с (3.5)

$$d_T = \dim N(T^*). \tag{2}$$

Предположим теперь, что T имеет ограниченный обратный. Иначе говоря, предположим, что выполнено неравенство

$$\| Tx \| \geqslant c \| x \|, \quad \forall x \in D(T) \quad (c > 0). \tag{3}$$

По теореме 2 9 $R(T)$ — подпространство, и критерием разрешимости уравнения $Tx = h$ является ортогональность h к $H \ominus R(T)$. Число d_T тогда указывает количество «условий ортогональности», гарантирующих разрешимость уравнения $Tx = h$.

Дефект d_T обнаруживает устойчивость относительно не слишком больших возмущений оператора T.

Теорема 1. *Пусть T — замкнутый оператор, выполнено* (3), *$D(W) \supset D(T)$ и*

$$\| Wx \| \leqslant a \| Tx \|, \ a < 1, \ \forall x \in D(T). \tag{4}$$

Тогда оператор $T + W$ замкнут на $D(T)$, для него выполнено неравенство (3) *с заменой c на $c_1 = (1 - a)c$ и*

$$d_{T+W} = d_T. \tag{5}$$

○ Замкнутость $T + W$ установлена в теореме 4.2. Из (3), (4) находим, что

$$\begin{aligned} \| (T + W) x \| &\geqslant \| Tx \| - \| Wx \| \geqslant \\ &\geqslant (1 - a) \| Tx \| \geqslant (1 - a) c \| x \|. \end{aligned} \tag{6}$$

Следовательно, $R(T+W)$ — подпространство. Предположим, что $d_{T+W} < d_T$. Тогда в соответствии с леммой 1.8 найдется элемент $f \in H \ominus R(T)$, $f \neq 0$, такой, что $f \perp H \ominus R(T+W)$. Последнее условие означает, что $f \in R(T+W)$, т. е. $f = (T+W)y$, $y \in D(T)$. Так как $f \perp R(T)$, то $(f, Ty) = 0$, а потому

$$(Ty, Ty) = -(Wy, Ty). \qquad (7)$$

Если предположить, что $d_{T+W} > d_T$, то аналогично найдется элемент $f = Ty$, $f \neq 0$, такой, что $f \perp R(T+W)$. Таким образом, и в этом случае мы приходим к (7). Из (7) следует, что $\|Ty\|^2 \leqslant \|Wy\| \cdot \|Ty\| \leqslant a\|Ty\|^2$. Но это невозможно при $a < 1$, и тем самым (5) выполнено ●

Условие (4) означает, что оператор W сильно подчинен T (см. § 4, п. 2), причем в оценке вида (4.2) $b=0$. Равенство (5) может нарушиться, если (4) заменить условием (4.2) при произвольном $b>0$.

Приведем следствие теоремы 1, относящееся к ограниченным возмущениям.

Следствие 2. *Пусть $W \in \mathbf{B}(H)$ и $\|W\| < c$, где c — постоянная из* (3). *Тогда для $T+W$ выполнены утверждения теоремы* 1.

○ Так как $\|Wx\| \leqslant \|W\| \cdot \|x\| \leqslant \|W\| c^{-1} \|Tx\|$, то (4) выполнено при $a = \|W\| c^{-1} < 1$. При этом $c_1 = c - \|W\|$ ●

2. Для исследования свойств оператора T (например, при изучении уравнения $Tx=h$) удобно включить T в семейство операторов $T-\lambda I$, зависящее от комплексного *спектрального параметра* λ. Дефект оператора $T-\lambda I$ будем обозначать через $d_T(\lambda)$ и называть *дефектным числом оператора T в точке* λ. Таким образом, по определению

$$d_T(\lambda) = d_{T-\lambda I}.$$

Если оператор $T-\lambda I$ имеет на множестве $R(T-\lambda I)$ непрерывный обратный, то точку λ называют *точкой регулярного типа для оператора T*. Множество всех точек регулярного типа оператора T называют его *полем регулярности*. Мы будем обозначать это множество через $\hat{\rho}(T)$.

На множестве $\hat{\rho}(T)$ определена целочисленная функция $d_T(\lambda)$; изучим ее поведение. Предварительно заметим, что включение $\lambda_0 \in \hat{\rho}(T)$ равносильно существованию постоянной $c_0>0$, такой, что выполнено неравенство вида (3):

$$\|(T-\lambda_0)x\| \geqslant c_0 \|x\|, \qquad \forall x \in D(T). \qquad (8)$$

Лемма 3. *Пусть оператор T замкнут и выполнено* (8). *Тогда круг $|\lambda-\lambda_0| < c_0$ принадлежит множеству $\hat{\rho}(T)$ и в этом круге функция $d_T(\lambda)$ постоянна.*

○ Запишем $T-\lambda I$ в виде $(T-\lambda_0 I)+(\lambda_0-\lambda)I$ и будем считать

тать $(\lambda_0-\lambda)I$ возмущением оператора $\tilde{T}-\lambda_0 I$. Норма возмущения есть $|\lambda-\lambda_0|$. Поэтому из следствия 2 получаем, что при $|\lambda-\lambda_0|<c$ будет $\lambda\in\hat{\rho}(T)$ и $d_T(\lambda)=d_T(\lambda_0)$ ●

Теорема 4. *Множество $\hat{\rho}(T)$ открыто и в каждой его связной компоненте дефектное число $d_T(\lambda)$ постоянно.*

○ Поле регулярности $\hat{\rho}(T)$ открыто в силу леммы 3. Всякое открытое множество на плоскости распадается на не более чем счетное множество непересекающихся связных открытых множеств (компонент). Если две точки принадлежат одной компоненте, то их можно соединить ломаной. Каждую точку этой ломаной можно принять за центр открытого круга, в котором $d_T(\lambda)$ постоянно (по лемме 3). Из этого покрытия ломаной кругами можно выбрать конечное подпокрытие. Отсюда видно, что $d_T(\lambda)$ не меняется вдоль ломаной ●

Если для $\lambda\in\hat{\rho}(T)$ окажется $d_T(\lambda)=0$, то точку λ называют *регулярной точкой* оператора T. Для такой точки $(T-\lambda I)^{-1}\in\in\mathbf{B}(H)$. Совокупность регулярных точек оператора образует его *резольвентное множество,* обозначаемое через $\rho(T)$. *Множество $\rho(T)$ открыто.* Действительно, оно состоит из тех компонент поля регулярности *) $\hat{\rho}(T)$, в которых $d_T(\lambda)=0$.

Дополнение к резольвентному множеству $\rho(T)$ называется *спектром оператора T* и обозначается через $\sigma(T)$; дополнение к полю регулярности $\hat{\rho}(T)$ называется *ядром спектра* и обозначается через $\hat{\sigma}(T)$:

$$\sigma(T)=\mathbf{C}\setminus\rho(T),\quad \hat{\sigma}(T)=\mathbf{C}\setminus\hat{\rho}(T).$$

Множества $\sigma(T)$, $\hat{\sigma}(T)$ замкнуты (поскольку $\rho(T)$, $\hat{\rho}(T)$ открыты). Ясно, что $\hat{\sigma}(T)\subset\sigma(T)$. Можно указать примеры операторов, реализующих следующие «крайние» возможности:

а) $\hat{\sigma}(T)=\mathbf{C}$; б) $\sigma(T)=\mathbf{C}$; $\hat{\sigma}(T)=\varnothing$; в) $\sigma(T)=\varnothing$.

Соответствующие примеры будут приведены в § 4.7, 4.8. В п. 6 настоящего параграфа мы покажем, что для операторов $T\in\mathbf{B}(H)$ ни одна из этих возможностей не осуществляется.

3. В спектре оператора T принято выделять следующие подмножества:

$$\sigma_p(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:N(T-\lambda I)\neq\{0\}\},\tag{9}$$

$$\sigma_c(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:R(T-\lambda I)\neq\overline{R(T-\lambda I)}\}.\tag{10}$$

Множество $\sigma_p(T)$ называется *точечным спектром* оператора T. Точки $\lambda\in\sigma_p(T)$ — это собственные значения оператора T, мно-

---

*) Здесь видна некоторая непоследовательность терминологии (к сожалению, традиционная). Поле регулярности состоит из всех точек регулярного типа — не обязательно регулярных

жества $N(T-\lambda I)$ — соответствующие собственные подпространства. Множество $\sigma_c(T)$ называется *непрерывным спектром* оператора T. Отметим, что пересечение $\sigma_p(T)\cap\sigma_c(T)$ может быть не пусто. Ясно, что $\sigma_p(T)\subset\hat\sigma(T)$, $\sigma_c(T)\subset\hat\sigma(T)$. Множество $\sigma_r(T)=\hat\sigma(T)\setminus\sigma(T)$ иногда называют *остаточным спектром* оператора T. При $\lambda\in\sigma_r(T)$ оператор $(T-\lambda I)^{-1}$ существует и непрерывен, но определен не на всем H.

Теорема 5. *Для любого замкнутого оператора T имеет место соотношение*

$$\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)=\hat\sigma(T). \tag{11}$$

○ Достаточно установить включение $\supset$. Пусть $\lambda\overline{\in}\sigma_p\cup\sigma_c$. Тогда $R(T-\lambda I)$ — подпространство и на нем существует обратный оператор $(T-\lambda I)^{-1}$. Он замкнут вместе с $T-\lambda I$ и в силу теоремы 2.2 ограничен. Тем самым $\lambda\in\hat\rho(T)$, что и доказывает включение $\supset$ в (11) ●

4. Обсудим, что может произойти со спектром при расширении оператора. Пусть T, $\widetilde T$ — замкнутые операторы и $T\subset\widetilde T$. Тогда $\hat\sigma(T)\subset\hat\sigma(\widetilde T)$, т. е. *ядро спектра не уменьшается при расширении оператора*. В самом деле, если $\lambda\in\hat\sigma(T)$, то оператор $(T-\lambda I)^{-1}$ либо не существует, либо существует, но не ограничен. В обоих случаях расширение не может «исправить» точку λ. Ясно, что $\sigma_p(T)\subset\sigma_p(\widetilde T)$. Что касается непрерывного спектра, то он при расширениях оператора может как расширяться, так и сужаться. Можно показать, однако, что включение $\lambda\in\sigma_c(T)\setminus\sigma_c(\widetilde T)$ возможно лишь при условии, что для $\widetilde T$ число λ является собственным значением бесконечной кратности.

Можно показать. что если $\lambda\in\sigma_r(T)$, то всегда найдется расширение $\widetilde T\supset T$, для которого $\lambda\in\rho(\widetilde T)$. Если же $\lambda\in\rho(T)$ и $\widetilde T$ — нетривиальное расширение T (т. е. $\widetilde T\supset T$, $\widetilde T\neq T$), то заведомо $\lambda\in\sigma_p(\widetilde T)$. Действительно, так как $R(T-\lambda I)=H$, то для любого $\tilde x\in D(\widetilde T)\setminus D(T)$ найдется элемент $x\in D(T)$, такой, что $(T-\lambda)x=(\widetilde T-\lambda)\tilde x$. При этом очевидно $\tilde x-x\in N(\widetilde T-\lambda I)$.

5. Операторнозначная функция $\Gamma_\lambda=\Gamma_\lambda(T)=(T-\lambda I)^{-1}$ переменной λ, определенная на множестве $\rho(T)$, называется *резольвентой* оператора T. Значения резольвенты суть элементы алгебры $\mathbf B(H)$. Соотношение (8) означает, что $\|\Gamma_{\lambda_0}(T)\|\leqslant c_0^{-1}$.

Пусть λ, λ_0 — регулярные точки оператора T. Тогда очевидно

$$\Gamma_\lambda(T-\lambda I)\Gamma_{\lambda_0}=\Gamma_{\lambda_0},\quad \Gamma_\lambda(T-\lambda_0 I)\Gamma_{\lambda_0}=\Gamma_\lambda.$$

Вычитая из второго равенства первое, получаем важное соотношение, называемое *тождеством Гильберта для резольвенты:*

$$\Gamma_\lambda - \Gamma_{\lambda_0} = (\lambda - \lambda_0)\,\Gamma_\lambda \Gamma_{\lambda_0}. \tag{12}$$

Тождество (12) играет основную роль при изучении свойств резольвенты. Из него следует, в частности, что $\Gamma_\lambda \Gamma_{\lambda_0} = \Gamma_{\lambda_0}\Gamma_\lambda$, т. е. значения резольвенты при различных λ перестановочны. Равенство (12) можно рассматривать как уравнение для Γ_λ при заданном Γ_{λ_0}. Если $|\lambda - \lambda_0| < c_0$, то это уравнение заведомо разрешимо. Действительно, тогда $\|(\lambda - \lambda_0)\,\Gamma_{\lambda_0}\| \leqslant |\lambda - \lambda_0|\, c_0^{-1} < 1$. Следовательно, оператор $I - (\lambda - \lambda_0)\,\Gamma_{\lambda_0}$ обратим, причем

$$(I - (\lambda - \lambda_0)\,\Gamma_{\lambda_0})^{-1} = \sum\nolimits_0^\infty (\lambda - \lambda_0)^k \Gamma_{\lambda_0}^k,$$

и ряд справа сходится при $|\lambda - \lambda_0| < c_0$ по норме операторов. Записывая (12) в виде $\Gamma_\lambda (I - (\lambda - \lambda_0)\,\Gamma_{\lambda_0}) = \Gamma_{\lambda_0}$, получаем, что $\Gamma_\lambda = \Gamma_{\lambda_0} (I - (\lambda - \lambda_0)\,\Gamma_{\lambda_0})^{-1}$ и, следовательно,

$$\Gamma_\lambda = \sum\nolimits_0^\infty (\lambda - \lambda_0)^k \Gamma_{\lambda_0}^{k+1} \qquad (|\lambda - \lambda_0| < c_0). \tag{13}$$

Оператор-функция, определенная на открытом множестве $\Omega \subset \mathbf{C}$, называется *аналитической* в Ω, если в окрестности любой точки $\lambda \in \Omega$ она представима *u*-сходящимся степенным рядом вида $\sum_0^\infty (\lambda - \lambda_0)^k T_k$, $T_k \in \mathbf{B}(H)$. Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 6. *Резольвента* $\Gamma_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ *аналитически зависит от* λ *на множестве* $\rho(T)$. *В окрестности каждой точки* $\lambda_0 \in \rho(T)$ *резольвента представима степенным рядом* (13), *сходящимся по норме в круге* $|\lambda - \lambda_0| < c_0$, *где* c_0 — *постоянная из* (8).

Отметим, что для любых $x, y \in H$ скалярная функция $(\Gamma_\lambda x, y)$ аналитична на $\rho(T)$.

6. Здесь мы приведем некоторые простейшие результаты, касающиеся расположения спектра операторов $T \in \mathbf{B}(H)$. Нам потребуется следующая элементарная лемма.

Лемма 7. *Пусть* $\{c_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, — *последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющая условию*

$$c_{k+l} \leqslant c_k c_l, \qquad k, l = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Тогда существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{c_k} = \inf_k \sqrt[k]{c_k}. \tag{15}$$

○ Обозначим через α правую часть (15). Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем число s, такое, что $c_s \leqslant (\alpha + \varepsilon)^s$. Пусть $k > s$, $k = ns + l$, $0 \leqslant l < s$. Из (14) получаем, что $c_k \leqslant c_s^n c_l \leqslant (\alpha + \varepsilon)^{ns} c_l$. Отсюда следует оценка $\limsup \sqrt[k]{c_k} \leqslant \alpha + \varepsilon$, и, стало быть,

$\limsup \sqrt[k]{c_k} \leqslant \alpha$. Учитывая, что заведомо $\liminf \sqrt[k]{c_k} \geqslant \sigma$, получаем (15) ●

Следствие 8. *Для любого оператора $T \in \mathbf{B}(H)$ существует предел*

$$r(T) = \lim_{k \to \infty} \| T^k \|^{1/k}.$$

○ В силу (2.5.1) последовательность $c_k = \|T^k\|$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет условию (14) ●

Теорема 9. *Пусть $T \in \mathbf{B}(H)$, $\lambda \in \mathbf{C}$ и $|\lambda| > r(T)$. Тогда λ — регулярная точка оператора T.*

○ При $|\lambda| > r(T)$ ряд $\tilde{\Gamma}_\lambda = -\sum_0^\infty \lambda^{-(k+1)} T^k$ u-сходится. Почленно умножая сумму ряда на $T - \lambda I$, находим, что $\tilde{\Gamma}_\lambda (T - \lambda I) = (T - \lambda I) \tilde{\Gamma}_\lambda = I$. Следовательно, $\tilde{\Gamma}_\lambda = \Gamma_\lambda(T)$ и тем самым $\lambda \in \rho(T)$ ●

Отметим еще оценку, вытекающую из найденного разложения резольвенты:

$$\|\Gamma_\lambda(T)\| \leqslant |\lambda|^{-1} \sum_0^\infty |\lambda|^{-k} \|T^k\|;$$

из нее следует, что $\|\Gamma_\lambda(T)\| = O(\lambda^{-1})$ при $|\lambda| \to \infty$.

Теорема 10. *Спектр любого оператора $T \in \mathbf{B}(H)$ не пуст.*

○ Предположим, что $T \in \mathbf{B}(H)$ и $\rho(T) = \mathbf{C}$. Тогда для любых $x, y \in H$ функция $(\Gamma_\lambda(T)x, y)$ аналитична во всей плоскости и стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$. По теореме Лиувилля $(\Gamma_\lambda(T)x, y) = 0$. Следовательно, и $\Gamma_\lambda(T) = 0$, $\forall \lambda \in \mathbf{C}$. Однако это противоречит тому, что $\Gamma_\lambda(T)$ — обратимый оператор ●

Можно показать, что любой оператор $T \in \mathbf{B}(H)$ имеет хотя бы одну точку спектра на окружности $|\lambda| = r(T)$.

ГЛАВА 4

СИММЕТРИЧНЫЕ И ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ

Перейдем теперь к исследованию специальных классов линейных операторов, имеющих основное значение для дальнейшего. Будем рассматривать симметричные (в частности, самосопряженные) и изометрические (в частности, унитарные) операторы. Имея в виду цели спектральной теории, мы рассмотрим также класс нормальных операторов, включающий в себя как самосопряженные, так и унитарные операторы.

§ 1. Симметричные и самосопряженные операторы. Индексы дефекта

1. Для ограниченных операторов понятия симметричного и самосопряженного операторов совпадают (см. § 2.7). При перенесении на неограниченные операторы эти понятия «расщепляются». Естественное обобщение соотношения симметричности (2.7.1) приводит к следующему определению. Оператор A называется *симметричным*, если $\overline{D(A)}=H$ и выполнено соотношение

$$(Ax,\ y)=(x,\ Ay),\quad \forall x,\ y\in D(A). \tag{1}$$

Как и для $A\in \mathbf{B}(H)$, соотношение (1) влечет за собой вещественность квадратичной формы $(Ax,\ x)$. Обратно, если для плотно определенного A форма $(Ax,\ x)$ вещественна при всех $x\in D(A)$, то (1) выполнено. Это вытекает по-прежнему из равенства (2.4.9), связывающего значения билинейной формы $\Phi(x,\ y)=(Ax,\ y)$, $x,\ y\in D(A)$, и квадратичной формы $\Phi(x)=(Ax,\ x)$.

Определение (1) равносильно включению $A\subset A^*$ (но не обязательно $A=A^*$). Поскольку A^* замкнут, симметричный оператор A заведомо допускает замыкание $\overline{A}$; при этом $\overline{A}^*=A^*$. Если $\widetilde{A}$ — симметричное расширение A, то $\widetilde{A}^*\subset A^*$, и мы получаем цепочку расширений

$$A\subset \widetilde{A}\subset \widetilde{A}^*\subset A^*. \tag{2}$$

Из (2) следует, что *симметричное расширение* $\tilde{A}\supset A$ *обязательно является сужением сопряженного оператора* A^*. Если симметричный оператор не имеет симметричных расширений, он называется *максимальным*.

Оператор называется *самосопряженным*, если он совпадает со своим сопряженным: $A=A^*$. Ясно, что самосопряженный оператор симметричен. Обратное, вообще говоря, неверно. Таким образом, понятие симметричного оператора оказывается более широким по сравнению с понятием самосопряженного оператора. При $A=A^*$ все члены цепочки (2) совпадают. Это означает, что самосопряженный оператор максимален. Существуют, однако, максимальные операторы, не являющиеся самосопряженными.

Важный для применений вопрос об описании и изучении всех возможных симметрнчных (в особенности — самосопряженных) расширений составляет предмет теории расширений. Об этих вопросах подробнее пойдет речь в § 4.

Если оператор $\bar{A}$ самосопряжен, но $A\neq\bar{A}$, то говорят, что A *в существенном самосопряжен*. Этот несколько громоздкий термин выражает то обстоятельство, что расшнрение оператора до самосопряженного достигается простейшей процедурой расширения — замыканнем.

Оператор A^* симметричен только в случае, когда A — в существенном самосопряженный. Действительно, если A^* симметричен, то $A^*\subset A^{**}=\bar{A}\subset\bar{A}^*=A^*$, что дает $A^*=\bar{A}$.

2. Перейдем к исследованию поля регулярности $\hat{\rho}(A)$ симметричного оператора. При этом *будем считать A замкнутым*, что фактически не уменьшает общности.

Теорема 1. *Верхняя полуплоскость* $\operatorname{Im}\lambda>0$ *и нижняя полуплоскость* $\operatorname{Im}\lambda<0$ *принадлежат полю регулярности* $\hat{\rho}(A)$ *замкнутого симметричного оператора* A.

○ Положим $\lambda=\alpha+i\beta$ и заметим, что в тождестве

$$\|(A-\lambda)x\|^2=\|(A-\alpha)x\|^2+\beta^2\|x\|^2+2\operatorname{Re}((A-\alpha)x,\ i\beta x)$$

последний член правой части исчезает в силу вещественности квадратичной формы симметричного оператора $A-\alpha I$. Таким образом,

$$\|(A-\lambda)x\|^2=\|(A-\alpha)x\|^2+\beta^2\|x\|^2 \qquad (\lambda=\alpha+i\beta). \tag{3}$$

Из (3) следует, что $\|(A-\lambda)x\|\geqslant|\operatorname{Im}\lambda|\cdot\|x\|$ ●

Из теоремы 1 вытекают простые, но важные выводы.

Следствие 2. *В каждой из полуплоскостей* $\operatorname{Im}\lambda>0$, $\operatorname{Im}\lambda<0$ *дефектное число* $d_A(\lambda)$ *постоянно.*

Достаточно сопоставить теорему 1 и теорему 3.7.4. Значения $d_A(\lambda)$ при $\operatorname{Im}\lambda<0$ и $\operatorname{Im}\lambda>0$ обозначаются соответственно через $n_-=n_-(A)$ и $n_+=n_+(A)$. Числа $n_\pm$ называются *индексами дефекта* оператора A. В соответствии с формулой (3.7.2) индексы дефекта можно выразить в терминах сопряженного оператора:

$$\dim N(A^*-\lambda I)=\begin{cases} n_-(A), & \operatorname{Im}\lambda>0, \\ n_+(A), & \operatorname{Im}\lambda<0. \end{cases} \tag{4}$$

Если A не замкнут, то по определению полагают $n_\pm(A)= n_\pm(\bar{A})$.

Следствие 3. *Ядро спектра $\hat{\sigma}(A)$ замкнутого симметричного оператора A вещественно.*

Следует иметь в виду, что любое замкнутое множество вещественной оси (в том числе само $\mathbf{R}$ и пустое множество $\varnothing$) может представлять собой ядро спектра некоторого симметричного оператора.

Следствие 4. *Если у симметричного оператора A имеется хотя бы одна вещественная точка λ_0 регулярного типа, то $n_+(A)=n_-(A)=d_A(\lambda_0)$.*

○ Достаточно принять во внимание, что в некотором круге с центром λ_0 число $d_A(\lambda)$ постоянно ●

Разумеется, равенство $n_+(A)=n_-(A)$ может осуществляться и тогда, когда $\hat{\sigma}(A)=\mathbf{R}$.

Отметим еще следующий элементарный факт. Пусть оператор A симметричен, λ_1, $\lambda_2\in\sigma_p(A)$, $\lambda_1\neq\lambda_2$. Тогда соответствующие собственные подпространства ортогональны. Действительно, в силу следствия 3 числа λ_1, λ_2 вещественны. Если $Ax_s=\lambda_s x_s$, $s=1, 2$, то

$$\lambda_1(x_1, x_2)=(Ax_1, x_2)=(x_1, Ax_2)=\lambda_2(x_1, x_2),$$

откуда $(x_1, x_2)=0$.

3. В приложениях часто встречаются так называемые полуограниченные операторы. Для определенности будем говорить об операторах, *полуограниченных снизу*. Эти операторы выделяются условием

$$(Ax, x)\geqslant m(x, x), \quad x\in D(A), \tag{5}$$

где m — вещественное число. Наибольшую возможную постоянную $m=m_A$ в (5) называют *точной нижней границей* оператора A. Величина m_A определяется из соотношения $m_A=\inf\limits_{0\neq x\in D(A)}(Ax, x)/(x, x)$. Если $m_A=0$ и $A\neq 0$, оператор A называется *положительным*; если $m_A>0$, — *положительно определенным*. Условие (5) предполагает, что квадратичная форма A вещественна. Поэтому плотно определенный полуограниченный оператор симметричен.

Следствие 5. *Если A полуограничен снизу, то полуось $(-\infty, m_A)$ входит в $\hat{\rho}(A)$ и, следовательно, $n_+(A)=n_-(A)$.*

○ При $\lambda < m_A$ имеем

$$\|(A-\lambda)x\|\cdot\|x\| \geqslant ((A-\lambda)x,\ x) = ((A-m_A)x,\ x) - \\ -(\lambda - m_A)(x,\ x) \geqslant (m_A-\lambda)\|x\|^2,$$

откуда $\|(A-\lambda)x\| \geqslant c\|x\|$ при $c = m_A - \lambda$. Остается использовать следствие 4 ●

4. Остановимся теперь на случае, когда оператор A самосопряжен.

Теорема 6. *Если $A = A^*$, то $\hat{\rho}(A) = \rho(A)$ и, следовательно, $\hat{\sigma}(A) = \sigma(A) \subset \mathbf{R}$.*

○ Если $A = A^*$, то для $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ $N(A^* - \lambda I) = N(A - \lambda I) = \{0\}$ и в силу (4) $n_{\pm}(A) = 0$. Таким образом, все невещественные точки регулярны. Если $\operatorname{Im}\lambda = 0$ и $\lambda \in \hat{\rho}(A)$, то опять-таки $d_A(\lambda) = \dim N(A^* - \lambda I) = \dim N(A - \lambda I) = 0$ и $\lambda \in \rho(A)$ ●

Резольвента самосопряженного оператора аналитически зависит от λ в полуплоскостях $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и $\operatorname{Im}\lambda < 0$. Легко проверить, что при этом $(\Gamma_\lambda(A))^* = \Gamma_{\bar{\lambda}}(A)$. Если $\sigma(A) \neq \mathbf{R}$, то резольвента аналитически продолжается из одной полуплоскости в другую через составляющие интервалы множества $\mathbf{R} \setminus \sigma(A)$.

В терминах индексов дефекта легко указать критерий самосопряженности симметричного оператора A.

Теорема 7. *Для того чтобы замкнутый симметричный оператор A был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы $n_+(A) = n_-(A) = 0$.*

○ Необходимость установлена при доказательстве теоремы 6. Пусть $n_{\pm}(A) = 0$; тогда $R(A - iI) = R(A + iI) = H$. В силу (2) достаточно проверить, что $D(A^*) \subset D(A)$. Пусть $y \in D(A^*)$ и $h = (A^* + i)y$. Найдется элемент $y_0 \in D(A)$, такой, что $(A + i)y_0 = h$. Для любого $x \in D(A)$ имеем $((A - i)x,\ y) = (x,\ (A^* + i)y) = (x,\ (A + i)y_0) = ((A - i)x,\ y_0)$. Поскольку $(A - i)x$ при $x \in D(A)$ пробегает все H, из последнего соотношения получаем, что $y = y_0 \in D(A)$ ●

Следствие 8. *Симметричный оператор, имеющий вещественную регулярную точку, самосопряжен.*

Действительно, из следствия 4 получаем, что $n_{\pm}(A) = 0$.

5. Вернемся теперь к случаю симметричных операторов и покажем, что индексы дефекта обладают устойчивостью относительно сильно подчиненных (см. § 3.4, п. 2) возмущений

Теорема 9. *Пусть A, W — симметричные операторы, причем A замкнут и W сильно подчинен A. Тогда симметричный оператор $B = A + W$ замкнут на $D(A)$ и $n_{\pm}(B) = n_{\pm}(A)$. В частности, B самосопряжен вместе с A.*

○ Замкнутость B следует из теоремы 3.4.2. Далее, заметим, что условие сильной подчиненности (3.4.2) в силу (3) можно записать (при $\gamma = b/a$) в виде

$$\|Wx\| \leq a\|(A \pm i\gamma)x\|, \quad \forall x \in D(A), \ a < 1.$$

Применяя теорему 3.7.1 к операторам $A \pm i\gamma I$, W, получаем равенства $d_A(\pm i\gamma) = d_B(\pm i\gamma)$, которые и означают, что $n_{\pm}(A) = n_{\pm}(B)$ ●

Условиям теоремы 9 заведомо удовлетворяют симметричные возмущения $W \in \mathbf{B}(H)$, поскольку для них $a_A(W) = 0$.

Результат теоремы 9 о самосопряженности следует также из теоремы 3.4.3.

§ 2. Изометрические и унитарные операторы

1. Наряду с симметричными операторами другой важный класс, заслуживающий специального изучения, образуют изометрические операторы. Свойства изометрических операторов во многом параллельны свойствам симметричных операторов, хотя есть и существенные отличия. Изометрические операторы тесно связаны с понятием изометрического изоморфизма гильбертовых пространств (см. § 2.1, п. 2).

Пусть D, R — подпространства в гильбертовом пространстве H. Пусть V — линейный оператор, $D(V) = D$, $R(V) = R$ и для любого $x \in D(V)$ выполнено равенство $\|Vx\| = \|x\|$. Тогда оператор V называют *изометрическим*. Отображение $V: D \to R$ устанавливает изометрический изоморфизм гильбертовых пространств D и R, а потому обязательно $\dim D(V) = \dim R(V)$. Отметим, что $\|V\| = 1$. Далее, V обратим и V^{-1} — также изометрический оператор, для которого $D(V^{-1}) = R$, $R(V^{-1}) = D$. Из (2.1.9) следует, что

$$(Vx_1, Vx_2) = (x_1, x_2) \quad (x_1, x_2 \in D).$$

Проверим, что все точки $z \in \mathbf{C}$, $|z| \neq 1$, принадлежат полю регулярности изометрического оператора. Действительно, для $|z| \neq 1$ имеем

$$\|(V - z)f\| \geq |\|Vf\| - |z| \cdot \|f\|| = |1 - |z|| \cdot \|f\|.$$

Мы видим, что при $|z| \neq 1$ точка z является точкой регулярного типа для V. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Ядро спектра изометрического оператора лежит на единичной окружности* $\mathbf{T}$ *плоскости* $\mathbf{C}$.

Поле регулярности изометрического оператора имеет две связные компоненты: внутренность $|z| < 1$ и внешность $|z| > 1$ окружности $\mathbf{T}$. Если на $\mathbf{T}$ есть точка регулярного типа, то обе компоненты сливаются в одну связную компоненту. Обозначим через I_D сужение тождественного оператора I на подпространство D. Дефектное число

$$d_V(z) = \operatorname{Def} R(V - zI) = \operatorname{Def} R(V - zI_D)$$

постоянно при $|z| < 1$ и $|z| > 1$. Соответствующие значения $d_V(z)$ обозначим через $n_i = n_i(V)$ и $n_e = n_e(V)$ и будем называть *индексами дефекта* изометрического оператора.

Теорема 2. *Для изометрического оператора V справедливы соотношения*

$$n_i(V) = \operatorname{Def} R, \quad n_e(V) = \operatorname{Def} D. \qquad (1)$$

○ Первое соотношение (1) очевидно: $\operatorname{Def} R(V) = d_V(0) = n_i$. Докажем второе из равенств (1). Отметим прежде всего, что $\operatorname{Def} D = \operatorname{Def} R(I_D) = d_{I_D}(0)$. Далее, при $|z| > 1$ оператор V можно рассматривать как возмущение оператора zI_D. Применяя к оператору $zI_D - V$ теорему 3.7.1, получаем

$$\operatorname{Def} D = d_{I_D}(0) = d_{zI_D - V}(0) = \operatorname{Def} R(V - zI) = n_e(V) \quad ●$$

Из (1) непосредственно следуют соотношения

$$n_i(V^{-1}) = n_e(V), \quad n_e(V^{-1}) = n_i(V).$$

Если $z_1 \neq z_2$ — собственные значения изометрического оператора, то соответствующие собственные подпространства ортогональны. Это следует из равенств

$$(x_1, x_2) = (Vx_1, Vx_2) = z_1\bar{z}_2(x_1, x_2) = z_1 z_2^{-1}(x_1, x_2).$$

Мы видим, что для спектра изометрических операторов единичная окружность играет примерно такую же роль, какую для симметричных операторов играет вещественная ось. В классе изометрических операторов выделим теперь унитарные операторы, которые по своим спектральным свойствам близки к самосопряженным.

2. Изометрический оператор V называется *унитарным*, если $D(V) = R(V) = H$. Ясно, что V и V^{-1} унитарны одновременно. Из (1) следует, что унитарность V равносильна соотношениям

$$n_i(V) = n_e(V) = 0. \qquad (2)$$

Если V_1, V_2 унитарны, то оператор $V = V_1 V_2$ также унитарен. Таким образом, *унитарные операторы образуют группу относительно умножения*. Отметим еще соотношение $V^{-1} = V^*$; действительно, для $x, y \in H$

$$(Vx, y) = (Vx, VV^{-1}y) = (x, V^{-1}y).$$

Линейный оператор V унитарен тогда и только тогда, когда выполнены соотношения

$$V^*V = VV^* = I. \qquad (3)$$

Необходимость (3) уже отмечалась. С другой стороны, из (3) сразу следует, что $D(V)=R(V)=H$ и V изометричен:

$$\|Vx\|^2=(V^*Vx,\ x)=\|x\|^2.$$

Для унитарного оператора все точки регулярного типа регулярны. Действительно, для $|z|\neq 1$ это следует из (2). Если $|z_0|=1$ и $z_0\in\widehat{\rho}(V)$, то для достаточно близких к z_0 точек z, $|z|\neq 1$, имеем $d_V(z)=d_V(z_0)$, и снова из (2) следует $d_V(z_0)=0$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Для унитарного оператора V ядро спектра совпадает со спектром: $\hat{\sigma}(V)=\sigma(V)$. Спектр $\sigma(V)$ представляет собой замкнутое множество на единичной окружности $|z|=1$.*

Заметим, что спектр $\sigma(V)$ может заполнять всю окружность $|z|=1$. Он не может быть пустым в силу теоремы 3.7.10.

Важным примером унитарного оператора является преобразование Фурье в $L_2(\mathbf{R}^m)$. Теории этого преобразования и его применениям посвящены § 8.3, 8.5, 8.6.

3. Вернемся к обсуждению изометрических операторов и выясним, что́ для них является аналогом соотношений (3). При этом удобно распространить V на все H, полагая его нулем на $H\ominus D$. Расширенный оператор уже не изометричен. Его называют *частично-изометрическим* и говорят, что D — его *область изометричности*.

Теорема 4. *Пусть V — частично-изометрический оператор с областью изометричности D и областью значений R. Тогда V^* — также частично-изометрический оператор с областью изометричности R и областью значений D. При этом*

$$V^*V=P_D,\quad VV^*=P_R, \tag{4}$$

где P_D, P_R — проекторы на D и R соответственно.

○ Прежде всего отметим, что $N(V^*)=H\ominus R(V)=H\ominus R$. Пусть теперь $y\in R$; тогда $y=Vx$, где $x\in D$ и $\|x\|=\|y\|$. Для любого $f\in H$ имеем: $(f,\ V^*y)=(Vf,\ y)=(VP_Df,\ Vx)=(P_Df,\ x)=(f,\ x)$. Таким образом, $V^*y=x$ и V^* изометричен на R. Далее, $(V^*Vf,\ f)=\|VP_Df\|^2=\|P_Df\|^2=(P_Df,\ f)$, что приводит к первому равенству (4). Второе соотношение (4) получается переменой ролей операторов V и V^* ●

Легко видеть, что линейный оператор V, для которого выполнены соотношения (4), является частично-изометрическим с областью изометричности D и областью значений R.

Если $D=H$, но $R\neq H$, то изометрический оператор V называют *полуунитарным*. В этом случае V^* — частично-изометрический. Для полуунитарного оператора $n_e(V)=0$, $n_i(V)\neq 0$; ядро спекра $\hat{\sigma}(V)$ совпадает с окружностью $|z|=1$ (иначе было бы $n_e=n_i$). Пример полуунитарного оператора дает оператор сдвига в l_2, введенный в § 3.5, п. 2.

4. Пусть теперь H_1, H_2 — два гильбертовых пространства и V — линейный оператор, $VH_1 = H_2$ и $\|Vx\|_2 = \|x\|_1$ для всех $x \in H_1$. Хотя теперь H_1, H_2 не являются подпространствами одного пространства, по-прежнему говорят, что V — изометрический оператор (отображение). В этом случае говорят также (терминологически несколько непоследовательно), что V *унитарно отображает H_1 на H_2*. Поскольку оператор V устанавливает изометрический изоморфизм между H_1 и H_2, то он должен устанавливать содержательные связи между операторами, действующими в H_1 и в H_2. Именно пусть T_1, T_2 — операторы в H_1 и H_2 соответственно. Пусть $VD(T_1) = D(T_2)$ и $VT_1x = T_2Vx$ для $x \in D(T)$. Тогда говорят, что T_1 и T_2 *унитарно эквивалентны* и пишут $T_1 = V^{-1}T_2V$, $T_2 = VT_1V^{-1}$. В этом случае говорят также, что *отображение V переводит оператор T_1 в оператор T_2*. Свойства и характеристики оператора, не меняющиеся при замене оператора на унитарно эквивалентный, называются его *унитарными инвариантами*. Поскольку преобразование $y = Vx$ есть, по сути дела, «преобразование координат», то переход от T_1 к $T_2 = VT_1V^{-1}$ можно трактовать как запись T_1 «в новых координатах». Этим объясняется то обстоятельство, что в приложениях чаще всего интересуются унитарными инвариантами. Например, в квантовой механике любой физически осмысленный вопрос допускает формулировку в унитарно инвариантных терминах.

Если $H_1 = H_2 = H$, то оператор V унитарен. В этом случае унитарная эквивалентность T_1 и T_2 очевидно означает, что $T_1 = V^*T_2V$.

§ 3. Преобразование Кэли

1. Мы уже отмечали аналогии в свойствах симметричных и изометрических операторов. В основе этих аналогий лежит операторное дробно-линейное преобразование, переводящее симметричные операторы в изометрические. Для спектрального анализа симметричных операторов определяющую роль играет разбиение комплексной плоскости на три подмножества: вещественную ось, нижнюю и верхнюю полуплоскости. Для изометрических операторов подобную роль играют единичная окружность, ее внешность и внутренность. Фиксируем какое-либо λ, $\operatorname{Im}\lambda > 0$, и рассмотрим преобразование $\zeta = (z - \lambda)(z - \bar{\lambda})^{-1}$. Функция ζ конформно отображает полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на единичный круг $|\zeta| < 1$; при этом вещественная ось переходит в единичную окружность. Можно ожидать, что соответствующее операторное дробно-линейное отображение

$$V = (A - \lambda I)(A - \bar{\lambda} I)^{-1} \tag{1}$$

переведет замкнутый симметричный оператор A в изометрический оператор V. Это преобразование мы рассмотрим подробнее. Прежде всего придадим (1) «параметрическую» форму. Именно, каждому $f \in D(A)$ сопоставим два элемента

$$h = (A - \bar{\lambda}) f, \qquad Vh = (A - \lambda) f. \tag{2}$$

Поскольку оператор $A - \bar{\lambda} I$ обратим при $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, каждому $h = (A - \bar{\lambda}) f$ отвечает единственный элемент Vh. Таким образом, формулы (2) корректно определяют линейный оператор V, для которого

$$D(V) = R(A - \bar{\lambda} I), \qquad R(V) = R(A - \lambda I). \tag{3}$$

Множества $D(V)$, $R(V)$ замкнуты вследствие замкнутости оператора A. Проверим, что V изометричен. Полагая $\lambda = \alpha + i\beta$, в соответствии с (1.3) получаем

$$\|Vh\|^2 = \|(A - \lambda) f\|^2 = \|(A - \alpha) f\|^2 + \beta^2 \|f\|^2,$$
$$\|h\|^2 = \|(A - \bar{\lambda}) f\|^2 = \|(A - \alpha) f\|^2 + \beta^2 \|f\|^2,$$

откуда $\|Vh\| = \|h\|$ для любого $h \in D(V)$. Оператор V называют *преобразованием Кэли* оператора A. По оператору V симметричный оператор A восстанавливается единственным образом. Действительно, разрешая формулы (2) относительно f и Af, имеем

$$(\bar{\lambda} - \lambda) f = (V - I) h, \qquad (\bar{\lambda} - \lambda) Af = (\bar{\lambda} V - \lambda I) h, \tag{4}$$

или в явной форме

$$A = (\bar{\lambda} V - \lambda I)(V - I)^{-1}. \tag{5}$$

2. Не всякий изометрический оператор является преобразованием Кэли какого-либо симметричного оператора. В самом деле, первая из формул (4) показывает, что $D(A) = R(V - I)$, а потому необходимо должно быть

$$\overline{R(V - I)} = H. \tag{6}$$

Покажем, что при выполнении условия (6) изометрический оператор является преобразованием Кэли некоторого замкнутого симметричного оператора. Отметим прежде всего, что

$$1 \,\overline{\in}\, \sigma_p(V), \tag{7}$$

т. е. что из $(V - I)x = 0$ следует $x = 0$. Действительно, для любого $h \in D(V)$ выполняется $((V - I)h, x) = (Vh, x) - (h, x) = (Vh, Vx) - (h, x) = 0$, а потому в силу (6) $x = 0$. Таким образом, формулы (4) позволяют однозначно определить элемент Af по $f \in D(A) = R(V - I)$, причем оператор A плотно определен. Из (4) следует, что квадратичная форма вещественна:

$$4\beta^2 (Af, f) = \bar{\lambda} \|Vh\|^2 + \lambda \|h\|^2 - \bar{\lambda}(Vh, h) - \lambda(h, Vh) =$$
$$= 2\alpha \|h\|^2 - 2\operatorname{Re}(Vh, \lambda h),$$

а потому A симметричен. Формулы (4) влекут за собой формулы (2). Замкнутость A вытекает из замкнутости множества $R(A-\bar{\lambda}I)=D(V)$.

Итогом проведенных рассмотрений является следующая теорема.

Теорема 1. *Преобразование Кэли* (1) *биоднозначно отображает множество замкнутых симметричных операторов на множество изометрических операторов, удовлетворяющих условию* (6).

Между индексами дефекта операторов A и V существует простая связь. Именно из (3) и (2.1) сразу получаем

$$n_-(A)=n_e(V), \qquad n_+(A)=n_i(V). \tag{8}$$

Отсюда и из теоремы 1.7 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Симметричный оператор A самосопряжен тогда и только тогда, когда его преобразование Кэли есть унитарный оператор.*

Преобразование Кэли позволяет в ряде вопросов сводить изучение симметричных операторов к изучению операторов изометрических. Это оказывается полезным в спектральной теории (см. § 6.3) и особенно в теории расширений симметричных операторов (этой теории посвящен § 4). Заметим, что преобразование (1) фактически представляет собой семейство преобразований, зависящее от параметра λ, $\operatorname{Im}\lambda>0$. Для большинства применений достаточно как-либо фиксировать λ; чаще всего полагают $\lambda=i$.

3. Если H разложено в ортогональную сумму подпространств, приводящих изометрический или симметричный оператор, то соответственно разлагаются и их индексы дефекта. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Пусть $H=H_1\oplus H_2$ и пусть V_s — изометрический оператор в H_s, $s=1,2$. Тогда $V=V_1\oplus V_2$ — изометрический оператор в H, причем $D(V)=D(V_1)\oplus D(V_2)$, $R(V)=R(V_1)\oplus R(V_2)$. Отсюда видно, что

$$n_i(V)=n_i(V_1)+n_i(V_2), \qquad n_e(V)=n_e(V_1)+n_e(V_2). \tag{9}$$

Далее, пусть A_s — замкнутый симметричный оператор в H_s, V_s — его преобразование Кэли, $s=1,2$. Тогда $A=A_1\oplus A_2$ — замкнутый симметричный оператор в H. Из результатов § 3.6 (см. формулы (3.6.12), (3.6.13)) вытекает, что оператор $V=V_1\oplus V_2$ является преобразованием Кэли для A. Сопоставляя (8) и (9), находим

$$n_\pm(A)=n_\pm(A_1)+n_\pm(A_2). \tag{10}$$

§ 4. Расширения симметричных операторов. Формулы Неймана

1. Преобразование Кэли позволяет свести задачу описания симметричных расширений замкнутого симметричного оператора к аналогичной задаче для изометрического оператора. В самом деле, если A, $\tilde{A}$ симметричны, $\tilde{A} \supset A$, то *преобразование Кэли $\tilde{V}$ оператора $\tilde{A}$ является изометрическим расширением преобразования Кэли V оператора A.* Обратно, *если оператор $\tilde{V} \supset V$ изометричен, то для него автоматически выполнено условие* (3.6), *а потому он является преобразованием Кэли симметричного оператора $\tilde{A} \supset A$.* Таким образом, любое симметричное расширение $\tilde{A} \supset A$ можно получить за счет подходящего изометрического расширения $\tilde{V} \supset V$ и применения обратного преобразования Кэли.

Для изометрических операторов вопрос о расширениях решается элементарно. Пусть D_0, R_0 — какие-либо подпространства, $D_0 \subset H \ominus D(V)$, $R_0 \subset H \ominus R(V)$,

$$\dim D_0 = \dim R_0 = n_0, \qquad (1)$$

и пусть V_0 — какой-нибудь изометрический оператор, $D(V_0) = D_0$, $R(V_0) = R_0$. На множестве $D(\tilde{V}) = D(V) \oplus D_0$ рассмотрим оператор $\tilde{V} = V \oplus V_0$. Ясно. что $\tilde{V} \supset V$, $\tilde{V}$ изометричен и $R(\tilde{V}) = R(V) \oplus R_0$. Ясно также, что *описанная конструкция исчерпывает все изометрические расширения оператора V.* Содержательным ограничением в этой схеме является условие (1). Из него, в частности, следует, что у V отсутствуют изометрические расширения в том и только том случае, когда хотя бы одно из чисел

$$n_e(V) = \dim(H \ominus D(V)), \qquad n_i(V) = \dim(H \ominus R(V))$$

равно нулю. Из (1) следует также, что

$$n_e(V) = n_e(\tilde{V}) + n_0, \qquad n_i(V) = n_i(\tilde{V}) + n_0.$$

В терминах симметричных операторов эти соотношения в силу (3.8) могут быть записаны следующим образом:

$$n_-(A) = n_-(\tilde{A}) + n_0, \qquad n_+(A) = n_+(\tilde{A}) + n_0. \qquad (2)$$

Среди симметричных расширений $\tilde{A} \supset A$ оператора A есть операторы с любыми индексами $n_-(\tilde{A})$, $n_+(\tilde{A})$, для которых выполнено необходимое соотношение *)

$$n_-(A) - n_-(\tilde{A}) = n_+(A) - n_+(\tilde{A}). \qquad (3)$$

Из (3) сразу же вытекают следующие важные утверждения.

1) *Замкнутый симметричный оператор максимален тогда и только тогда, когда* $\min(n_-(A), n_+(A)) = 0$.

2) *Всякий симметричный (не максимальный) оператор имеет максимальные симметричные расширения.*

3) *Наличие у симметричного (не максимального) оператора самосопряженных расширений равносильно соотношению* $n_-(A) = n_+(A) \neq 0$.

---

*) Символу $\infty - \infty$ при этом следует придавать «неопределенное» значение Условие (3) тогда перестает быть ограничением.

4) *Все симметричные расширения симметричного оператора A с индексами $n_-(A)=n_+(A)=1$ являются самосопряженными.*

5) *Симметричный оператор A с индексами $n_-(A)=n_+(A)=\infty$ имеет симметричные расширения с любой наперед заданной парой индексов $n_-(\tilde{A})$, $n_+(\tilde{A})$*

2. Пользуясь преобразованием Кэли, нетрудно дать полное (параметрическое) описание всех симметричных расширений заданного симметричного оператора A. Эту задачу решают *формулы Неймана.* Поскольку любое симметричное расширение $\tilde{A}$ оператора A содержится в A^*, важно описать сопряженный оператор.

Теорема 1. *Пусть A — замкнутый симметричный оператор. Область определения сопряженного оператора представима в виде прямой суммы*

$$D(A^*)=D(A)\dot{+}N(A^*-\lambda I)\dot{+}N(A^*-\bar{\lambda}I), \qquad \operatorname{Im}\lambda\neq 0. \quad (4)$$

○ Каждое слагаемое в правой части (4) содержится в $D(A^*)$. Пусть $y\in D(A^*)$. В соответствии с разложением

$$H=R(A-\lambda I)\oplus N(A^*-\bar{\lambda}I) \quad (5)$$

представим элемент $(A^*-\lambda)y$ в виде

$$(A^*-\lambda)y=(A-\lambda)x+(\bar{\lambda}-\lambda)\bar{u}, \quad x\in D(A), \ \bar{u}\in N(A^*-\bar{\lambda}I). \quad (6)$$

Равенство (6) можно записать в виде $(A^*-\lambda)(y-x-\bar{u})=0$, откуда $y-x-\bar{u}=u\in N(A^*-\lambda I)$. Остается проверить, что сумма (4) — прямая. Пусть оказалось (обозначения прежние), что $x+u+\bar{u}=0$. Применяя оператор $A^*-\lambda I$, получаем, что $(A-\lambda)x+(\bar{\lambda}-\lambda)\bar{u}=0$, и в силу (5) $\bar{u}=0$, $(A-\lambda)x=0$. Но тогда $x=0$, а потому и $u=0$ ●

Коль скоро разложение (4) построено, оператор A^* описан полностью. Действительно, на слагаемых суммы (4) A^* совпадает соответственно с A, λI, $\bar{\lambda}I$.

Из (4) следует, что $\dim(D(A^*)/D(A))=\dim[N(A-\lambda I)\dot{+}N(A^*-\bar{\lambda}I)]=\dim N(A-\lambda I)+\dim N(A^*-\bar{\lambda}I)$. Вместе с (1.4) это приводит к соотношению

$$\dim(D(A^*)/D(A))=n_-(A)+n_+(A), \quad (7)$$

которое согласуется с независимостью индексов дефекта от λ. Более того, в случае равных индексов из (7) снова получается независимость $n_\pm(A)$ от λ.

Перейдем к описанию симметричных расширений. Примем для определенности, что $\operatorname{Im}\lambda>0$. Пусть D_0, R_0, V_0 — те же, что и в п. 1. В соответствии с (3.3)

$$D_0\subset H\ominus D(V)=H\ominus R(A-\bar{\lambda}I)=N(A^*-\lambda I)$$

и аналогично $R_0\subset N(A^*-\bar{\lambda}I)$. Кроме того, выполнено (1). В остальном D_0, R_0 произвольны. Будем исходить из соотношения $D(A)=$

$=R(V-I)$, которое применим к операторам $\tilde{A}$, $\tilde{V}$. Тогда получим

$$D(\tilde{A})=(\tilde{V}-I)\,D(\tilde{V})=(\tilde{V}-I)(D(V)\oplus D_0)=$$
$$=(V-I)D(V)\dotplus(V_0-I)D_0=D(A)\dotplus(V_0-I)D_0.$$

Этим доказана следующая теорема

Теорема 2. *Пусть $D_0\subset N(A^*-\lambda I)$, $R_0\subset N(A^*-\bar{\lambda} I)$ — какие-либо подпространства, и пусть выполнено* (1) *Пусть V_0 — произвольное изометрическое отображение D_0 на R_0. Тогда формулой*

$$D(\tilde{A})=D(A)\dotplus(V_0-I)\,D_0 \tag{8}$$

задается область определения некоторого замкнутого симметричного расширения $\tilde{A}$ оператора A, и для любого такого расширения имеет место разложение (8).

Поясним, что сумма (8) — прямая, поскольку является частью суммы (4). Действие оператора $\tilde{A}$ на $D(\tilde{A})$ определяется включением $\tilde{A}\subset A^*$. Таким образом, формула (8) описывает все симметричные расширения, причем D_0, R_0, V_0 являются «параметрами» этого описания. Формулы (4), (8) называются *формулами Неймана.*

Из (8) вытекает, что для числа n_0, определенного в (1) (см. также (2)), справедлива формула

$$\dim(D(\tilde{A})/D(A))=n_0. \tag{9}$$

В случае конечных индексов дефе́кта бывает полезна следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть A — замкнутый симметричный оператор и $n_-(A)+n_+(A)<\infty$. Тогда любое его симметричное расширение $\tilde{A}$ замкнуто.*

○ В соответствии с (1.2) $A\subset\tilde{A}\subset A^*$. Остается сослаться на (7) и на теорему 3.2.6 ●

§ 5. Оператор T^*T. Нормальные операторы

1. Теорема 1. *Пусть T — замкнутый, плотно определенный оператор в H. Тогда T^*T — неотрицательный самосопряженный оператор в H. Его область определения $D(T^*T)$ плотна в гильбертовом пространстве*) H_T.*

○ Воспользуемся теоремой 3.3.8 при $f=0$. Мы находим, что для любого $g\in H$ имеется единственная пара элементов $x\in D(T)$, $y\in D(T^*)$, такая, что

$$y=Tx,\qquad g=x+T^*y. \tag{1}$$

Первое из этих равенств означает, что $Tx\in D(T^*)$, т. е. $x\in D(T^*T)$, второе показывает, что

$$g=(I+T^*T)\,x. \tag{2}$$

---

*) Напомним (см. § 3 1), что через H_T обозначается множество $D(T)$, рассматриваемое как гильбертово пространство относительно скалярного произведения (3.1.1).

Из (3.3.12) (при $f=0$) следует, что $\|x\|\leqslant\|g\|$; в частности, $x=0$, если $g=0$. Таким образом, равенство (2) определяет оператор $S=(I+T^*T)^{-1}$, причем $S\in\mathbf{B}(H)$, $\|S\|\leqslant 1$. Квадратичная форма

$$(Sg,\ g)=(x,\ x+T^*Tx)=\|x\|^2+\|Tx\|^2$$

вещественна и в соответствии с теоремой 2.7.1 оператор S самосопряжен. Вместе с ним самосопряжен оператор $I+T^*T=S^{-1}$, а тогда и T^*T. Его неотрицательность следует из равенства

$$(T^*Tx,\ x)=\|Tx\|^2,\qquad \forall x\in D(T^*T).$$

Остается установить плотность в H_T множества $D(T^*T)$. Пусть $h\in H_T$, $(x,\ h)_T=0$ для любого $x\in D(T^*T)$ Это означает, что

$$(x,\ h)+(Tx,\ Th)=(x+T^*Tx,\ h)=0,\qquad \forall x\in D(T^*T).$$

Таким образом, элемент h ортогонален множеству $R(I+T^*T)=H$, т. е. $h=0$ ●

Меняя ролями операторы T и T^*, получаем, что оператор TT^* также неотрицательный и самосопряженный, и множество $D(TT^*)$ плотно в пространстве H_{T^*}.

2. Важное место в спектральной теории занимают *нормальные* операторы. Замкнутый плотно определенный оператор T называется нормальным, если операторы T^*T, TT^* совпадают:

$$T^*T=TT^*. \tag{3}$$

Иначе говоря, операторы T и T^* перестановочны в точном смысле слова (см. § 3.1) Приведенное определение содержит в себе данное в § 2.7 определение ограниченных нормальных операторов.

Очевидно, что самосопряженные и унитарные операторы нормальны.

Теорема 2. *Пусть T — нормальный оператор в H. Тогда*

$$D(T^*)=D(T); \tag{4}$$

$$\|T^*x\|=\|Tx\|,\quad \forall x\in D(T). \tag{5}$$

○ Положим $L=D(T^*T)=D(TT^*)$. Для $x\in L$ равенство (5) выполнено, поскольку в силу (3)

$$(Tx,\ Tx)=(T^*Tx,\ x)=(TT^*x,\ x)=(T^*x,\ T^*x).$$

В соответствии со сказанным в § 3.2, п.2, из теоремы 1 следует, что $D(T)$ можно получить, замыкая L по T-норме. То же верно для $D(T^*)$ и T^*-нормы. Отсюда следует (4), так как $\|x\|_T=\|x\|_{T^*}$ для $\forall x\in L$. При этом (5) распространяется с L на $D(T)$ по непрерывности ●

Теорема 3. *Пусть T — нормальный оператор в H. При любом $\lambda\in\mathbf{C}$*

$$N(T-\lambda I)=N(T^*-\bar\lambda I). \tag{6}$$

○ Если оператор T нормален, то нормален и $T-\lambda I$, $\forall\lambda\in\mathbf{C}$. Применяя к этому оператору равенство (5), получаем

$$\|Tx-\lambda x\|=\|T^*x-\bar{\lambda}x\|, \quad \forall x\in D(T)=D(T^*).$$

Отсюда (6) вытекает непосредственно ●

Теорема 3 означает, что число λ является собственным для нормального оператора T в том и только том случае, если число $\bar{\lambda}$ — собственное для оператора T^*, причем соответствующие собственные подпространства совпадают. Покажем, что *собственные подпространства нормального оператора T, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.* В самом деле, пусть $Tx_s=\lambda_s x_s$, $s=1, 2$; тогда в силу (6) $T^*x_s=\bar{\lambda}_s x_s$ и, следовательно,

$$\lambda_1(x_1, x_2)=(Tx_1, x_2)=(x_1, T^*x_2)=\lambda_2(x_1, x_2).$$

Так как $\lambda_1\neq\lambda_2$, то $(x_1, x_2)=0$.

Из (6) следует, что для нормального оператора $T-\lambda I$ общее соотношение (3.3.5) принимает вид

$$H=\overline{R(T-\lambda I)}\oplus N(T-\lambda I). \tag{7}$$

Теорема 4. *Если T — нормальный оператор, то его ядро спектра совпадает со спектром:* $\hat{\sigma}(T)=\sigma(T)$.

○ Пусть $\lambda\in\hat{\rho}(T)$. Тогда $R(T-\lambda I)$ — подпространство и $\lambda\overline{\in}\sigma_p(T)$, т. е. $N(T-\lambda I)=\{0\}$. Отсюда в силу (7) вытекает, что $R(T-\lambda I)=H$, и, стало быть, $\lambda\in\rho(T)$. Таким образом, $\hat{\rho}(T)=\rho(T)$, а тогда и $\hat{\sigma}(T)=\sigma(T)$ ●

Пусть T — нормальный оператор. На области определения (4) рассмотрим операторы $T+T^*$, $i(T^*-T)$. Эти операторы симметричны, но, вообще говоря, не самосопряжены. Впоследствии (см. § 6.6) будет установлено, что эти операторы в существенном самосопряжены и их замыкания перестановочны (в смысле определения § 6 3, п. 3).

Для произвольных плотно определенных замкнутых операторов рассмотрение операторов $T+T^*$, $i(T^*-T)$, вообще говоря, малосодержательно, поскольку множество $D(T)\cap D(T^*)$ может оказаться чересчур «бедным».

В заключение отметим, что всякое непустое замкнутое множество в $\mathbf{C}$ является спектром некоторого нормального оператора. По этому поводу см. § 7, п. 4.

§ 6. Классификация точек спектра

В предыдущих параграфах этой главы рассматривались симметричные (в том числе самосопряженные), изометрические (в том числе унитарные) и нормальные операторы. Здесь мы, применительно к этим классам, дополним сведения об инвариантных и приводящих подпространствах (см. § 3.5, 3.6), а также уточним классификацию точек спектра.

1. Если A — ограниченный самосопряженный оператор в H, то любое его инвариантное подпространство является приводящим. Это прямо вытекает из теоремы 3.6.4. Следующая теорема распространяет этот факт на неограниченные симметричные операторы.

Теорема 1. *Пусть A — замкнутый симметричный оператор в H, H_1 — подпространство в H, P_1 — проектор на H_1, и пусть выполнены условия*

$$P_1 D(A) = D(A) \cap H_1 \overset{\text{def}}{=} D_1; \quad AD_1 \subset H_1.$$

Тогда подпространство H_1 приводит A.

○ Соотношения (3.6.1) и первое из включений (3.6.2) имеют место по условию. Остается показать, что при $x \in D(A)$, $x \perp H_1$, выполнено $Ax \perp H_1$. Если $y \in D_1$, то $Ay \in H_1$ и, следовательно, $(Ax, y) = (x, Ay) = 0$. Таким образом, $Ax \perp D_1$, и так как $\bar{D}_1 = H_1$, то $Ax \perp H_1$ ●

Аналогичное утверждение для изометрических операторов нуждается в дополнительном предположении.

Теорема 2. *Пусть V — изометрический оператор в H, $H_1 \subset H$ — инвариантное подпространство для V и V_1 — часть V в H_1. Если область значений V_1 совпадает с H_1, то подпространство H_1 приводит V.*

○ Пусть $D = D(V)$ — область изометричности оператора V, P_1 — проектор на H_1, P_2 — проектор на $H_2 = H_1^{\perp}$. Если $x \in D$, $x_s = P_s x$, $s = 1, 2$, то в соответствии с (3.5.5) $x_1, x_2 \in D$. При этом по условию $Vx_1 \in H_1$ и требуется установить, что $Vx_2 \in H_2$. Поскольку $R(V_1) = H_1$, любой элемент $y \in H_1$ допускает представление $y = Vz$, $z \in D \cap H_1$. Поэтому $(Vx_2, y) = (Vx_2, Vz) = (x_2, z) = 0$, $\forall y \in H_1$, и $Vx_2 \in H_2$ ●

Мы видели, что в теореме 1 отсутствует аналог условня $R(V_1) = H_1$. В теореме 2 освободиться от этого условия нельзя, что подтверждается следующим примером. Пусть $H = l_2(\mathbf{Z})$ (см. § 2.9, п. 1), $\{e_k\}$, $k \in \mathbf{Z}$, — стандартный базис в H, V — унитарный «оператор сдвига», который на базисе $\{e_k\}$ задается соотношениями $Ve_k = e_{k+1}$, $\forall k \in \mathbf{Z}$. Тогда подпространства $H_s = \bigvee_{k \geqslant s} \{e_k\}$, $\forall s \in \mathbf{Z}$, V-инвариантны. Они, однако, не приводят V, поскольку не инвариантны относительно $V^* = V^{-1}$. Условия теоремы 2 в этом случае не выполнены, так как подпространство $VH_s = H_{s+1}$ имеет в H_s одномерное ортогональное дополнение.

Условия теорем 1, 2 выполнены, в частности, если подпространство H_1 — собственное. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Следствие 3. *Для симметричных и изометрических операторов каждое собственное подпространство является приводящим.*

На произвольные операторы последнее утверждение не распространяется Однако оно сохраняет силу для нормальных операторов.

Теорема 4. *Пусть T — нормальный оператор в H, H_1 — его собственное подпространство. Тогда H_1 приводит T.*

○ Пусть $Tx=\lambda x$, $\forall x\in H_1$. Тогда для $x\in H_1$ также $T^*x=\bar\lambda x$ по теореме 5.3. Поэтому при $x\in H_1$ и $y\in D(T)$, $y\perp H_1$ имеем $(Ty,\ x)=(y,\ T^*x)=(y,\ \bar\lambda x)=0$. Стало быть, $Ty\perp H_1$, и подпространство H_1 — приводящее ●

2. В § 3.7, п. 3, введены понятия точечного σ_p и непрерывного σ_c спектров замкнутого оператора T и показано, что $\hat\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)$. Более подробное исследование ядра спектра $\hat\sigma(T)$ можно провести *при дополнительном предположении, что каждое собственное подпространство $N(T-\lambda I)$ приводит T.* Выше мы видели, что это предположение заведомо выполнено для симметричных, изометрических, а также для нормальных операторов.

Итак, пусть собственное подпространство $N(T-\lambda I)$ приводит T. Обозначим через T_λ часть оператора T в (приводящем) подпространстве $H\ominus N(T-\lambda I)$. Очевидно $\lambda\bar\in\sigma_p(T_\lambda)$ и $R(T-\lambda I)=\{0\}\oplus R(T_\lambda-\lambda I)$. Отсюда вытекает, что если $\lambda\bar\in\sigma_c(T)$, то $\lambda\in\rho(T_\lambda)$; если же $\lambda\in\sigma_c(T)$, то $\lambda\in\sigma_c(T_\lambda)\setminus\sigma_p(T_\lambda)$. В каждом из случаев существует (соответственно ограниченный или неограниченный) обратный оператор $(T_\lambda-\lambda I)^{-1}$. Оператор $0\oplus(T_\lambda-\lambda I)^{-1}$ называют при этом *обобщенным обратным* для $T-\lambda I$.

Процедуру перехода от оператора T к оператору T_λ иногда называют *отщеплением собственного подпространства.*

3. Особенно простой вид принимает классификация точек спектра для нормальных (в том числе для самосопряженных и унитарных) операторов. Именно точки $\sigma(T)=\hat\sigma(T)$ можно охарактеризовать в терминах линейного множества $R(T-\lambda I)$.

Теорема 5. *Пусть T — нормальный оператор в H. Тогда*

$$\rho(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:R(T-\lambda I)=H\},\tag{1}$$

$$\sigma_p(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:\overline{R(T-\lambda I)}\neq H\},\tag{2}$$

$$\sigma_c(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:\overline{R(T-\lambda I)}\neq R(T-\lambda I)\}.\tag{3}$$

○ Воспользуемся равенством (5.7). Из него непосредственно вытекает (2), а также (1), если дополнительно принять во внимание, что замкнутый оператор $(T-\lambda I)^{-1}$, определенный на всем H, ограничен. Наконец, (3) совпадает с определением (3.7.10) непрерывного спектра ●

Следствием (5.7) является так называемая «спектральная альтернатива»: пусть T — нормальный оператор в H и $\lambda\in\mathbf{C}$. Тогда либо λ — собственное число для T, либо область значений $R(T-\lambda I)$ плотна в H.

В спектральной теории нормальных операторов используется также следующая терминология. Спектр $\sigma(T)$ называют *чисто непрерывным,* если $\sigma_p(T)=\varnothing$. Спектр $\sigma(T)$ называют *чисто точечным,* если ортогональная сумма всех собственных подпространств совпадает с H. В этом случае отнюдь не обязательно

$\sigma_c(T)=\varnothing$. Именно тогда $\sigma_c(T)$ совпадает с совокупностью предельных точек множества $\sigma_p(T)$.

Некоторые дальнейшие понятия, связанные с классификацией точек спектра самосопряженных операторов, обсуждаются в § 9.1.

§ 7. Оператор умножения на независимую переменную

1. Оператор умножения на независимую переменную позволяет проиллюстрировать понятия точечного σ_p и непрерывного σ_c спектров самосопряженного оператора. Заметим, что рассматриваемый здесь пример является в конечном счете универсальным: в § 7.5 будет показано, что любой самосопряженный оператор с точностью до унитарной эквивалентности сводится к не более чем счетной ортогональной сумме операторов умножения.

Пусть $H=L_2(\mathbf{R}, \mu)$, т. е. H есть пространство функций на прямой, квадратично-интегрируемых по σ-конечной борелевской мере μ. Рассмотрим в H оператор $A_\mu:(A_\mu u)(t)=tu(t)$. Область определения $D(A_\mu)$ состоит из всех тех μ-измеримых функций, для которых

$$\int(1+t^2)|u(t)|^2 d\mu(t)<\infty. \qquad (1)$$

Легко видеть, что A_μ *самосопряжен в* H. Действительно, он плотно определен и симметричен. Далее, из соотношения

$$(A_\mu u,\ v)=(u,\ v^*), \quad \forall u\in D(A_\mu),$$

следует, что $tv(t)=v^*(t)\in L_2(\mathbf{R}, \mu)$, а потому $v\in D(A_\mu)$. Таким образом, $A_\mu^*=A_\mu$.

Спектр оператора A_μ определяется мерой μ. Напомним (см. § 1.3, п. 20), что борелевской мере μ сопоставляется ее *носитель* $\operatorname{supp}\mu$, т. е. наименьшее замкнутое множество в $\mathbf{R}$, дополнение которого имеет μ-меру нуль. Включение $\lambda\in\operatorname{supp}\mu$ равносильно тому, что $\mu(\lambda-\delta,\ \lambda+\delta)\neq 0$ при всяком $\delta>0$.

1°. *Спектр* $\sigma(A_\mu)$ *совпадает с носителем* $\operatorname{supp}\mu$ *меры* μ. Другими словами, $\rho(A_\mu)=\mathbf{R}\setminus\operatorname{supp}\mu$.

○ Для $\lambda\in\mathbf{R}$ обозначим $\Delta_\varepsilon=(\lambda-\varepsilon,\ \lambda+\varepsilon)$ и предположим, что $\lambda\overline{\in}\operatorname{supp}\mu$, т. е. при некотором $\varepsilon>0$ $\mu(\Delta_\varepsilon)=0$. Тогда для $u\in D(A_\mu)$

$$\|A_\mu u-\lambda u\|^2=\int(t-\lambda)^2|u(t)|^2 d\mu(t)=$$
$$=\int_{\mathbf{R}\setminus\Delta_\varepsilon}(t-\lambda)^2|u(t)|^2 d\mu(t)\geqslant\varepsilon^2\int_{\mathbf{R}\setminus\Delta_\varepsilon}|u(t)|^2 d\mu(t)=$$
$$=\varepsilon^2\int|u(t)|^2 d\mu(t)=\varepsilon^2\|u\|^2,$$

а потому $\lambda\in\rho(A_\mu)$. Обратно, пусть $\lambda\in\operatorname{supp}\mu$, т. е. для любого $\varepsilon>0$ $\mu(\Delta_\varepsilon)>0$. Выберем последовательность $\varepsilon_n\to 0$ и положим $\Delta_n=\Delta_{\varepsilon_n}$, $u_n=\chi_{\Delta_n}$ (здесь χ_ω, как обычно, обозначает характеристическую функцию множества ω). Все элементы u_n очевидно ненулевые. Так как при этом

$$\| A_\mu u_n - \lambda u_n \|^2 = \int_{\Delta_n} (t-\lambda)^2 \, d\mu(t) \leqslant \varepsilon_n^2 \mu(\Delta_n) = \varepsilon_n^2 \| u_n \|^2,$$

то $\lambda \in \sigma(A_\mu)$ ●

2°. *Точечный спектр* $\sigma_p(A_\mu)$ *совпадает с множеством точек* $\lambda \in \mathbf{R}$, *таких, что* $\mu\{\lambda\} \neq 0$. *Каждая такая точка* λ *есть простое собственное значение.*

○ Если $Au = \lambda u$, то $(t-\lambda) u(t) = 0$. Последнее означает, что $u(t) = 0$ μ-п.в. на множестве $\mathbf{R} \setminus \{\lambda\}$. Таким образом, носителем собственной функции должно являться одноточечное множество $\{\lambda\}$. Если $\mu\{\lambda\} > 0$ (и только в этом случае), единственную (с точностью до множителя) ненулевую собственную функцию, отвечающую собственному числу λ, дает функция $u_\lambda = \chi_{\{\lambda\}} : u_\lambda(\lambda) = 1$, $u_\lambda(t) = 0$ при $t \neq \lambda$ ●

3°. *Непрерывный спектр* $\sigma_c(A_\mu)$ *совпадает с совокупностью неизолированных точек множества* $\operatorname{supp} \mu$.

○ Мы должны считаться с возможностью того, что рассматриваемая точка $\lambda \in \mathbf{R}$ есть собственное значение. Поэтому прежде всего охарактеризуем ортогональное дополнение F_λ к соответствующему собственному подпространству. Условие $(v, u_\lambda) = 0$ означает, что

$$0 = \int_{t=\lambda} v(t) \, d\mu(t) = v(\lambda) \mu\{\lambda\},$$

т. е. $v(\lambda) = 0$. Пусть теперь $\lambda_n \to \lambda$, $\Delta_n = (\lambda_n - \varepsilon_n, \lambda_n + \varepsilon_n)$, $\mu(\Delta_n) > 0$, $\varepsilon_n \to 0$ и $\lambda \,\overline{\in}\, \Delta_n$. Положим $v_n = \chi_{\Delta_n}$ и отметим, что $v_n(\lambda) = 0$, а потому $v_n \in F_\lambda$ (если $\lambda \,\overline{\in}\, \sigma_p(A_\mu)$, то отождествляем F_λ с H). Так как

$$\| (A_\mu - \lambda) v_n \|^2 = \int_{\Delta_n} (t-\lambda)^2 \, d\mu(t) \leqslant$$
$$\leqslant (|\lambda - \lambda_n| + \varepsilon_n)^2 \mu(\Delta_n) = (|\lambda - \lambda_n| + \varepsilon_n)^2 \|v_n\|^2,$$

то λ не является регулярной точкой для части A_μ в F_λ. Поэтому $\lambda \in \sigma_c(A_\mu)$.

Предположим теперь, что при некотором $\varepsilon > 0$ интервал $\Delta_\varepsilon = (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ не пересекается с множеством $\operatorname{supp} \mu \setminus \{\lambda\}$. Иначе говоря, $\mu(\Delta_\varepsilon) = \mu\{\lambda\}$. Тогда для $v \in D(A_\mu) \cap F_\lambda$ имеем (учитывая условие $v(\lambda) = 0$)

$$\| (A_\mu - \lambda) v \|^2 = \int_{|t-\lambda| \geqslant \varepsilon} (t-\lambda)^2 |v|^2 \, d\mu(t) \geqslant$$
$$\geqslant \varepsilon^2 \int_{|t-\lambda| \geqslant \varepsilon} |v|^2 \, d\mu(t) = \varepsilon^2 \| v \|^2.$$

Полученное неравенство означает, что $\lambda \,\overline{\in}\, \sigma_c(A_\mu)$ ●

Из 1°—3° видно, что одна и та же точка $\lambda \in \mathbf{R}$ может входить одновременно в $\sigma_p(A_\mu)$ и в $\sigma_c(A_\mu)$. Точки $\lambda \in \operatorname{supp} \mu$, для которых $\mu\{\lambda\} > 0$, называются «атомами» меры μ. Мы видели, что совокупность атомов совпадает с $\sigma_p(A_\mu)$. Меру μ называют «атомарной», если $\mu(\mathbf{R} \setminus \sigma_p) = 0$. Мера μ атомарна тогда и только тогда, когда спектр оператора A_μ — чисто точечный. В этом случае непрерывный спектр $\sigma_c(A_\mu)$ состоит из предельных точек множества атомов. Из сказанного ясно, что за счет выбора подходящей атомарной меры μ можно построить оператор A_μ, спектр которого $\sigma(A_\mu)$ совпадает с наперед заданным непустым замкнутым множеством $\sigma \subset \mathbf{R}$.

Спектр оператора A_μ — чисто непрерывный, если мера μ не имеет атомов. Такова, например, мера Лебега, для которой $\sigma(A_\mu) = \sigma_c(A_\mu) = \mathbf{R}$, $\sigma_p(A_\mu) = \varnothing$.

В случае, если мера μ конечна, ее носитель (а вместе с ним и спектр оператора A_μ) удобно характеризовать в терминах *функции распределения* $\tilde{\mu}(t) = \mu(-\infty, t)$, $\forall t \in \mathrm{R}$. Спектр $\sigma(A_\mu)$ есть множество точек роста функции $\tilde{\mu}$, точечный спектр $\sigma_p(A_\mu)$ есть множество ее точек разрыва, а непрерывный спектр $\sigma_c(A_\mu)$ — множество ее неизолированных точек роста. Все сказанное сохраняет силу и тогда, когда мера μ лишь *локально-конечна,* т. е. $\mu(-a, a) < \infty$, $\forall a > 0$. Следует лишь изменить определение функции $\tilde{\mu}$, полагая $\tilde{\mu}(t) = \mu[0, t)$ при $t > 0$, $\tilde{\mu}(0) = 0$ и $\tilde{\mu}(t) = -\mu[t, 0)$ при $t < 0$.

2. Пусть теперь $H = L_2(\mathbf{R}, \mu; G)$, где G — вспомогательное гильбертово пространство, $m = \dim G \leqslant \infty$ (см. § 2.3, п. 4). В H рассмотрим оператор $A = A_{\mu, G}$ умножения на независимую переменную, $A: u(t) \longmapsto tu(t)$. Как и в п. 1, область определения $D(A)$ выделяется условием (1), где теперь $|u(t)|$ означает норму в G элемента $u(t) \in G$. Представим $H = L_2(\mathrm{R}, \mu; G)$ в виде $l_2^m(L_2(\mathbf{R}, \mu))$ (иначе говоря — в виде ортогональной суммы m экземпляров пространства $L_2(\mathbf{R}, \mu)$), как это было сделано при доказательстве теоремы 2.3.6. Каждое из ортогональных слагаемых очевидно приводит оператор $A_{\mu, G}$ к оператору A_μ. Таким образом, *оператор $A_{\mu, G}$ унитарно эквивалентен ортогональной сумме m экземпляров оператора A_μ.* (При $m = 1$ получаем просто оператор A_μ.) Из сказанного ясно, что к описанию спектра оператора $A_{\mu, G}$ применимы утверждения 1° — 3°. Отличие лишь в том, что собственные значения оператора $A_{\mu, G}$ имеют кратность m.

Рассмотрим теперь в пространстве $L_2(\mathbf{R}^m)$, $m \geqslant 1$, оператор B умножения на функцию $|x|^2$: $(Bu)(x) = |x|^2 u(x)$. Область определения $D(B)$ описывается условием

$$\int (1 + |x|^4) |u(x)|^2 dx < \infty.$$

Легко видеть, что оператор B самосопряжен в $L_2(\mathrm{R}^m)$. Изучение свойств спектра оператора B просто сводится к рассмотрению подходящего оператора вида $A_{\mu, G}$. Действительно, положим $r = |x|$, $\theta = r^{-1}x \in \mathbf{S}^{m-1}$. Выражение для нормы в $L_2(\mathbf{R}^m)$ преобразуем к виду

$$\|u\|^2 = \int |u(x)|^2 dx = \int_0^\infty r^{m-1} dr \int_{S^{m-1}} |u(r\theta)|^2 d\theta =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{m/2-1} dt \int_{S^{m-1}} |u(\sqrt{t}\theta)|^2 d\theta.$$

Отсюда следует, что функции $u \in L_2(\mathbf{R}^m)$ можно рассматривать как элементы пространства $L_2(\mathbf{R}, \mu; G)$, где $G = L_2(\mathbf{S}^{m-1})$, а мера μ определяется формулой $2d\mu(t) = \chi_{[0, \infty)}(t) t^{m/2-1} dt$. При таком преобразовании пространства оператор B очевидно переходит в соответствующий оператор $A_{\mu, G}$. Таким образом, спектр B чисто непрерывен и заполняет полуось $\mathbf{R}_+$.

3. В пространстве $L_2(\mathbf{T}, \mu; G)$, где $\mathbf{T}$ — единичная окружность, μ — σ-конечная борелевская мера на подмножествах $\mathbf{T}$, рассмотрим оператор умножения $V = V_{\mu, G}$ на независимую переменную, $V: u(\zeta) \longmapsto \zeta u(\zeta)$, $\zeta \in \mathbf{T}$. Легко видеть, что V — унитарный оператор. Спектр V описывается в терминах меры μ вполне аналогично тому, как это было для оператора $A_{\mu, G}$. Именно спектр V совпадает с $\operatorname{supp} \mu$. Точечный спектр $\sigma_p(V)$ состоит из атомов меры μ; кратность собственных значений равна $m = \dim G$. Наконец, непрерывный спектр $\sigma_c(V)$ совпадает с множеством предельных (неизолированных) точек носителя меры μ.

4. Обобщая рассмотрения пп. 1—3, выясним структуру спектра оператора умножения на независимую переменную в пространстве $H = L_2(\mathbf{C}, \mu; G)$, где μ — σ-конечная борелевская мера на подмножествах комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Именно пусть $T = T_{\mu, G}$: $u(z) \longmapsto zu(z)$, $z \in \mathbf{C}$, причем область определения $D(T)$ состоит из всех μ-измеримых функций, для которых

$$\int (1 + |z|^2) |u(z)|^2 d\mu(z) < \infty. \tag{2}$$

Оператор T плотно определен и замкнут. Легко видеть, что сопряженный оператор T^* имеет ту же область определения и действует по формуле $T^*: u(z) \longmapsto \bar{z} u(z)$. Отсюда следует, что операторы T^*T и TT^* совпадают:

$$D(T^*T) = D(TT^*) =$$
$$= \left\{u \in H: \int |z|^4 |u(z)|^2 d\mu(z) < \infty\right\};$$
$$(T^*Tu)(z) = (TT^*u)(z) = |z|^2 u(z).$$

Таким образом, *оператор* $T_{\mu, G}$ *нормален*. Как и в пп. 1—3, $\sigma(T) = \operatorname{supp} \mu$. Точечный спектр $\sigma_p(T)$ состоит из атомов меры μ. Кратность каждого собственного числа равна $m = \dim G$. Непрерывный спектр совпадает с множеством неизолированных точек в $\operatorname{supp} \mu$.

Каково бы ни было непустое замкнутое множество $\sigma \subset \mathbf{C}$, всегда существует борелевская мера μ, такая, что $\operatorname{supp} \mu = \sigma$. Поэтому *любое замкнутое множество в* $\mathbf{C}$ *является спектром некоторого нормального оператора.*

В более общей обстановке операторы умножения будут изучены в § 7.2.

Основные понятия теории неограниченных операторов в гильбертовом пространстве удобно пояснить на примере простейшего дифференциального оператора — одномерного оператора дифференцирования. Поведение этого оператора оказывается существенно различным на конечном интервале, на полуоси и на всей оси. Мы последовательно рассмотрим все три случая.

1. Пусть $H = L_2(-1, 1)$. На множестве $D(A_0) = C_0^\infty(-1, 1)$ всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным в $(-1, 1)$ носителем рассмотрим оператор A_0, задаваемый формулой

$$(A_0 u)(t) = \frac{1}{i}\frac{du(t)}{dt}. \tag{1}$$

Оператор A_0 плотно определен. Интегрируя по частям, получаем

$$(A_0 u, v) = -\int_{-1}^{1} iu'(t)\overline{v(t)}\,dt = -\int_{-1}^{1} ui\overline{v'}\,dt = (u, A_0 v).$$

Таким образом, оператор A_0 симметричен. Он, однако, не замкнут; его замыкание обозначим через $A = \bar{A}_0$. Описание оператора A можно получить прямым путем. Вместо этого мы воспользуемся тем, что $A = \bar{A}_0 = A_0^{**}$. Опишем прежде всего сопряженный оператор A_0^*, который совпадает (теорема 3.3.3) с A^*.

Оператор $A_0^* = A^*$ задается формулой (1) *на области определения $D(A^*)$, состоящей из всех абсолютно непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций, производная которых принадлежит $L_2(-1, 1)$.*

○ Включение $v \in D(A^*)$ означает, что $v \in L_2$ и существует функция $v^* \in L_2$, такая, что для всех $u \in C_0^\infty$ выполнено соотношение

$$-\int_{-1}^{1} iu'\bar{v}\,dt = \int_{-1}^{1} u\overline{v^*}\,dt; \tag{2}$$

при этом $v^* = A^* v$. Соотношение (2) означает, что в смысле теории обобщенных производных (или, более общо, в смысле теории распределений) v имеет производную $dv/dt = iv^*$. Известно, однако (см. § 1.6, п. 5), что сказанное равносильно абсолютной непрерывности v, причем v^* совпадает с $-iv'$ почти везде ●

При переходе к сопряженному оператору мы, как и должно быть, получили расширение исходного оператора: $A^* = A_0^* \supset A_0$. Это расширение достигнуто за счет отказа от излишних требований дифференцируемости и от краевых условий. Опишем теперь оператор $A = A_0^{**}$. Так как $A \subset A^*$, то достаточно описать множество $D(A) = D(A_0^{**})$.

Множество $D(A)$ состоит из всех тех функций $u \in D(A^*)$, которые удовлетворяют краевым условиям

$$u(-1) = u(1) = 0. \tag{3}$$

○ Интегрируя по частям, получаем, что для любых $u, v \in D(A^*)$

$$(A^*v, u) = -\int_{-1}^{1} iv'\bar{u}\,dt = -iv\bar{u}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} v\overline{iu'}\,dt =$$
$$= -iv\bar{u}\Big|_{-1}^{1} + (v, A^*u). \qquad (4)$$

Если для u выполнено (3), то внеинтегральный член в (4) выпадает и $(A^*v, u) = (v, A^*u)$. Это означает, что $u \in D(A^{**}) = D(A)$. Обратно, если $u \in D(A^{**})$, то в (4) внеинтегральный член должен выпадать: $v(1)\overline{u(1)} - v(-1)\overline{u(-1)} = 0$. Полагая в последнем равенстве $v = \omega_\pm$, $2\omega_\pm(t) = 1 \pm t$, видим, что (3) должно быть выполнено ●

Мы видим, что замыкание оператора A_0 свелось как к ослаблению требований гладкости, так и к ослаблению краевых условий. Определим теперь дефектные числа оператора A. В соответствии с формулами (1.4)

$$n_\pm(A) = \dim N(A^* \pm iI).$$

Решая уравнения $-iv' \mp iv = 0$, $v \in D(A^*)$, находим, что

$$N(A^* - iI) = \{\alpha_1 e^{-t}\}, \qquad N(A^* + iI) = \{\alpha_2 e^{t}\}, \qquad (5)$$

где α_1, α_2 — произвольные постоянные. Таким образом,

$$n_-(A) = n_+(A) = 1. \qquad (6)$$

2. Из (6) следует (см. § 4), что A имеет симметричные расширения $\tilde{A} \supset A$, причем все они являются самосопряженными. Далее, из (6) и (4.7) вытекает, что

$$\dim D(A^*)/D(A) = 2. \qquad (7)$$

Впрочем, (7) следует и из того элементарного обстоятельства, что для любой функции $v \in D(A^*)$ функция $u(t) = v(t) - v(1)\omega_+(t) - v(-1)\omega_-(t)$ удовлетворяет условиям (3). Поскольку

$$D(A) \subset D(\tilde{A}) \subset D(A^*), \qquad (8)$$

из (7) непосредственно получается, что

$$\dim D(\tilde{A})/D(A) = 1, \qquad \dim D(A^*)/D(\tilde{A}) = 1. \qquad (9)$$

Все самосопряженные расширения оператора A нетрудно описать на основе второй формулы Неймана (4.8). Мы займемся, однако, более общей задачей описания *всех* (необязательно симметричных) *расширений* $\tilde{A} \supset A$, *являющихся сужением* A^*:

$$A \subset \tilde{A} \subset A^*. \qquad (10)$$

Очевидно, что каждое такое расширение $\tilde{A}$ определяется заданием некоторого линейного множества $\tilde{D} = D(\tilde{A})$, подчиненного условиям (8). При этом для $D(\tilde{A})$ заведомо выполнены и соотношения (9). Оператор $\tilde{A}$ определяется сужением A^* на $\tilde{D}$. *При* *этом автоматически $\tilde{A}$ оказывается замкнутым*, что следует из (7) по теореме 3.2.6.

Пусть $g \in D(A^*)$, $g \overline{\in} D(A)$. Тогда в силу (9) линейное множество

$$D(\tilde{A}) = D(A) \dot{+} \{\alpha g\}, \qquad \alpha \in \mathbf{C}, \tag{11}$$

удовлетворяет условиям (8). Обратно, всякое линейное множество $D(\tilde{A})$, подчиненное (8), может быть представлено в виде прямой суммы (11), где g — любая (фиксированная) функция, $g \in D(\tilde{A})$, $g \overline{\in} D(A)$. Множества $D(\tilde{A})$ удобно различать с помощью краевых условий. Пусть g — функция, участвующая в представлении (11). Она заведомо не удовлетворяет обоим граничным условиям (3) одновременно. Определим комплексное число θ из соотношения $g(1) = \theta g(-1)$ (если $g(-1) = 0$, то считаем $\theta = \infty$, или, что то же, $\theta^{-1} = 0$). Из (11) и (3) следует, что тогда любая функция $v \in D(\tilde{A})$ удовлетворяет краевому условию

$$v(1) = \theta v(-1). \tag{12}$$

С другой стороны, непосредственно ясно, что при каждом θ краевое условие (12) выделяет в $D(A^*)$ линейное множество $D(\tilde{A}) \supset \supset D(A)$, причем различным θ отвечают различные множества $D(\tilde{A})$. Соответствующий оператор $\tilde{A}$ обозначим через $\tilde{A}_\theta$. Таким образом, *все линейные операторы $\tilde{A}$, удовлетворяющие условиям* (10), *получаются сужением оператора A^* на одно из множеств $D(\tilde{A}_\theta)$, выделяемых в $D(A^*)$ краевым условием* (12). *Соответствующие операторы $\tilde{A}_\theta$ замкнуты.*

Отметим, что значения $\theta = 0$ и $\theta = \infty$ порождают «условия Коши» $v(1) = 0$ и $v(-1) = 0$ соответственно на правом и левом концах отрезка $[-1, 1]$.

Переходя в (10) к сопряженным операторам, получаем

$$A \subset \tilde{A}^* \subset A^*. \tag{13}$$

Из (13) видно, что оператор $\tilde{A}_\theta^*$ является одним из операторов $\tilde{A}_\theta$. Легко понять, что $\tilde{A}_\theta^* = \tilde{A}_{\theta_1}$, где $\theta_1 \bar{\theta} = 1$. Действительно, для $v \in \tilde{A}_\theta$ и $u \in \tilde{A}_{\theta_1}$ внеинтегральный член в (4) исчезает в силу краевых условий внда (12) н соотношения $\theta_1 \bar{\theta} = 1$. Но это и означает, что $\tilde{A}_\theta^* = \tilde{A}_{\theta_1}$. Отметим, что $\tilde{A}_0^* = \tilde{A}_\infty$, $\tilde{A}_\infty^* = \tilde{A}_0$.

Самосопряженные расширения оператора A исчерпываются операторами $\tilde{A}_\theta$ при $|\theta| = 1$. В самом деле, любое такое расширение очевидно должно иметь вид $\tilde{A}_\theta$. Для $\tilde{A}_\theta$ условие самосопряженности $\theta = \theta_1$ сводится к $\theta\bar{\theta} = 1$.

Граничные условия (12) при $|\theta| = 1$ обычно называют квазипериодическими; значение $\theta = 1$ соответствует периодическому случаю, $\theta = -1$ — антипериодическому.

3. Построим резольвенту $\Gamma_\lambda(\tilde{A}_\theta)$ оператора $\tilde{A}_\theta$. Одновременно найдем резольвентное множество и спектр $\tilde{A}_\theta$. Пусть $\lambda \in \rho(\tilde{A}_\theta)$ и

$h \in L_2$. Элемент $v = \Gamma_\lambda(\tilde{A}_\theta) h$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{i}\frac{dv}{dt} - \lambda v = h \tag{14}$$

и граничному условию (12). Записывая (14) в виде

$$\frac{d(e^{-i\lambda t} v)}{dt} = i e^{-i\lambda t} h \tag{15}$$

и интегрируя, получаем

$$e^{-i\lambda t} v(t) = e^{i\lambda} v(-1) + i \int_{-1}^{t} h(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau. \tag{16}$$

Сначала будем считать, что $\theta \neq \infty$. Полагая в (16) $t = 1$ и используя (12), находим $v(-1)$, после чего при

$$\theta \exp(-2i\lambda) \neq 1 \tag{17}$$

формула (16) приводит к равенству

$$v(t) = \frac{-i}{1 - \theta e^{-2i\lambda}} \int_{-1}^{1} h(\tau) e^{i\lambda(t-\tau)} d\tau + i \int_{-1}^{t} h(\tau) e^{i\lambda(t-\tau)} d\tau, \tag{18}$$

или в более симметричной форме

$$v(t) = \frac{i e^{i\lambda} \int_t^1 h(\tau) e^{i\lambda(t-\tau)} d\tau + i\theta e^{-i\lambda} \int_{-1}^{t} h(\tau) e^{i\lambda(t-\tau)} d\tau}{\theta e^{-i\lambda} - e^{i\lambda}}. \tag{19}$$

Формула (18) показывает, что *при условии* (17) *оператор* $A_\theta - \lambda I$ *имеет непрерывный* (и даже компактный *)) *обратный оператор, заданный на всем пространстве* $H = L_2(-1, 1)$. Этот обратный оператор и есть резольвента $\Gamma_\lambda(\tilde{A}_\theta) : h \mapsto v$.

Пусть теперь $\theta = \infty$, т. е. $v(-1) = 0$. Из (16) получаем

$$v(t) = i \int_{-1}^{t} e^{i\lambda(t-\tau)} h(\tau) d\tau \qquad (\theta = \infty). \tag{20}$$

При $\theta = 0$ из (19) следует, что при любом $\lambda \in \mathbf{C}$

$$v(t) = -i \int_t^1 e^{i\lambda(t-\tau)} h(\tau) d\tau \qquad (\theta = 0). \tag{21}$$

Формулы (20), (21) означают, что при $\theta = 0, \infty$ резольвента Γ_λ определена на всей плоскости. Это согласуется с тем, что задача Коши всегда разрешима. Операторы $\tilde{A}_0$, $\tilde{A}_\infty$ дают пример *операторов без спектра* (напомним, что согласно теореме 3.7.10 для оператора $T \in \mathbf{B}(H)$ спектр не может быть пустым).

Рассмотрим подробнее условие (17) при $\theta \neq 0$. Представим число θ в виде $\theta = e^{-2(\delta - i\gamma)}$, $\operatorname{Im}\delta = 0$, $-\pi \leqslant \gamma < \pi$. Тогда уравнение

$$\theta \exp(-2i\lambda) = 1 \tag{22}$$

имеет решения

$$\lambda_n(\theta) = \gamma + i\delta + n\pi, \qquad n \in \mathbf{Z}. \tag{23}$$

*) Оператор (18) принадлежит классу Гильберта — Шмидта (см. § 11.3, п. 3.).

Мы видим, что при $\theta \neq 0, \infty$ спектр оператора $\tilde{A}_\theta$ состоит из последовательности точек (23). В действительности эти точки суть собственные значения, причем простые. Именно, при $\lambda = \lambda_n(\theta)$, $\theta \neq 0, \infty$, однородное уравнение $(\tilde{A}_\theta - \lambda I)v = 0$ имеет нетривиальное решение $v_{n,\theta}(t) = \alpha \exp(i\lambda_n t)$.

При $|\theta| = 1$ всегда $\delta = 0$, а потому спектр (23) — вещественный, как оно и должно быть для самосопряженного случая. Собственные функции $v_{n,\theta}$ образуют полную ортогональную систему.

При $|\theta| \neq 1$ очевидно $\lambda_n(\theta_1) = \overline{\lambda_n(\theta)}$, где $\theta_1 = \bar{\theta}^{-1}$. Таким образом, спектры $\tilde{A}_\theta$ и $\tilde{A}_\theta^*$ комплексно-сопряжены Собственные функции $v_{n,\theta}$ образуют полную систему, которая уже не ортогональна в $L_2(-1, 1)$. Система $\{v_{n,\theta_1}\}$ при $\theta_1 = \bar{\theta}^{-1}$ биортогональна по отношению к системе $\{v_{n,\theta}\}$, т. е. $(v_{n,\theta}, v_{m,\theta_1}) = 0$ при $m \neq n$.

Покажем, что при $\lambda = \lambda_n(\theta)$ множество $R(\tilde{A}_\theta - \lambda I)$ замкнуто *). Поскольку

$$\overline{R(\tilde{A}_\theta - \lambda_n(\theta) I)} = H \ominus N(\tilde{A}_\theta^* - \overline{\lambda_n(\theta)} I) = \\ = H \ominus N(\tilde{A}_{\theta_1} - \lambda_n(\theta_1) I) \qquad (\theta_1\bar{\theta} = 1),$$

то достаточно проверить, что при $(h, v_{n,\theta_1}) = 0$ уравнение $(\tilde{A}_\theta - \lambda_n(\theta))v = h$ имеет решение. Полагая в (16) $\lambda = \lambda_n(\theta)$, $t = 1$, видим, что интеграл, содержащий h, обращается в нуль в силу $(h, v_{n,\theta_1}) = 0$. Граничное условие (12) выполнено в силу (22) автоматически, а значение $v(-1)$ оказывается произвольным. В соответствии с (16) решение дается формулой

$$v(t) = \alpha e^{i\lambda_n t} + i\int_{-1}^{t} h(\tau) e^{i\lambda_n (t-\tau)}\, d\tau, \qquad \forall \alpha \in \mathbf{C}.$$

Из сказанного следует, что $\sigma_c(\tilde{A}_\theta) = \varnothing$. Поэтому при $\theta \neq 0, \infty$ будет $\sigma(\tilde{A}_\theta) = \sigma_p(\tilde{A}_\theta) = \{\lambda_n(\theta)\}$, $n \in \mathbf{Z}$, где последовательность $\{\lambda_n(\theta)\}$ определена в (23). Отметим еще, что ядро спектра $\hat{\sigma}(A)$ оператора A пусто, но также пусто и его резольвентное множество $\rho(A)$ (иными словами, $\sigma(A) = \sigma_r(A) = \mathbf{C}$). Первое утверждение следует из существования у A расширений без спектра. Второе вытекает из того, что $n_-(A) = n_+(A) = 1$, а потому $d_A(\lambda) = 1$ и при $\operatorname{Im}\lambda = 0$.

4. Перейдем к рассмотрению оператора дифференцирования на положительной полуоси $\mathbf{R}_+$. Теперь $H = L_2(\mathbf{R}_+)$. Нам удобно начать со следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть $g \in L_2(\mathbf{R}_+)$, g — абсолютно непрерывная функция и ее производная $g' \in L_2(\mathbf{R}_+)$. Тогда $g(t) \to 0$ при $t \to \infty$.*

○ Интегрируя производную $d(|g(t)|^2)/dt$, имеем

$$|g(t)|^2 = |g(0)|^2 + \int_0^t [g'(\tau)\overline{g(\tau)} + g(\tau)\overline{g'(\tau)}]\, d\tau.$$

*) Нужное утверждение следует уже из того, что резольвента $\Gamma_\lambda(\tilde{A}_\theta)$ есть компактный оператор при $\lambda \neq \lambda_n(\theta)$. Мы, однако, не будем здесь пользоваться спектральной теорией компактных операторов.

В силу условий $g, g' \in L_2$ интеграл справа сходится при $t \to \infty$. Поэтому $|g(t)|^2$ имеет конечный предел при $t \to \infty$. Этот предел может быть только нулем, так как иначе $g \overline{\in} L_2$ ●

Определим симметричный оператор A_0 формулой (1) на $D(A_0) = C_0^\infty(\mathbf{R}_+)$ и обозначим $A = \bar{A}_0$. Как и в п. 1, убеждаемся, что *$D(A^*)$ состоит из всех тех абсолютно непрерывных функций $v \in L_2$, для которых $v' \in L_2$. При этом $(A^*v)(t) = -iv'(t)$*. Для любых функций $u, v \in D(A^*)$

$$(A^*v, u) = -i \int_0^\infty v'\bar{u}\, dt = iv(0)\overline{u(0)} - \int_0^\infty v\overline{iu'}\, dt =$$
$$= iv(0)\overline{u(0)} + (v, A^*u). \tag{24}$$

Здесь при интегрировании по частям учтено, что (см. лемму 1) $v(\infty) = u(\infty) = 0$. Опишем теперь $D(\bar{A}) = D(A^{**})$. Из (24) следует, что $u \in D(A^{**})$ тогда и только тогда, когда $v(0)\overline{u(0)} = 0$ для любой функции $v \in D(A^*)$. Это означает, что

$$u(0) = 0. \tag{25}$$

Таким образом, *оператор $A = \bar{A}_0$ есть сужение A^* на множество, выделяемое в $D(A^*)$ условием* (25).

Индексы дефекта оператора A суть

$$n_-(A) = 1, \quad n_+(A) = 0. \tag{26}$$

Действительно, в отличие от случая конечного промежутка мы должны в (5) положить $\alpha_2 = 0$, поскольку $\exp t \overline{\in} L_2(\mathbf{R}_+)$. Из (26) следует, что *оператор A — максимальный симметричный, но не самосопряженный*. Максимальность A можно пояснить, не обращаясь к индексам дефекта. С использованием (25) сразу получается, что

$$\dim D(A^*)/D(A) = 1,$$

а потому нет линейных множеств $D(\tilde{A})$, удовлетворяющих включениям (8).

Так как $n_-(A) \neq n_+(A)$, то ядро спектра $\hat{\sigma}(A)$ заполняет всю ось: $\hat{\sigma}(A) = \mathbf{R}$. Непосредственно проверяется, что $\sigma_p(A) = \varnothing$. Поэтому в силу (3.7.11) $\sigma_c(A) = \hat{\sigma}(A) = \mathbf{R}$. В соответствии с (26) резольвентное множество $\rho(A)$ совпадает с полуплоскостью $\operatorname{Im}\lambda > 0$, а остаточный спектр $\sigma_r(A)$ — с полуплоскостью $\operatorname{Im}\lambda < 0$. Построим резольвенту $\Gamma_\lambda(A)$. Если $h \in L_2$, то $\Gamma_\lambda(A)h = v$, где v — решение уравнения (14) при условиях $v \in L_2$, $v(0) = 0$. Интегрируя (15), находим, что

$$v(t) = i\int_0^t \exp(i\lambda(t-\tau))h(\tau)\, d\tau \qquad (\operatorname{Im}\lambda > 0). \tag{27}$$

Ядро интегрального оператора (27) зависит от разности. В соответствии с теоремой 2.10.3 оператор (27) непрерывен (но не компактен) в $L_2(\mathbf{R}_+)$. Таким образом, резольвента $\Gamma_\lambda(A)$ определяется формулой (27).

В случае полуоси множество $\rho(A^*)$ также не пусто: $\rho(A^*)= \{\lambda\in\mathbf{C}:\ \operatorname{Im}\lambda<0\}$. Действительно, равенство $n_+(A)=0$ означает, что $N(A^*-\lambda I)=\{0\}$ при $\operatorname{Im}\lambda<0$. Кроме того, $\overline{R(A^*-\lambda I)}= H\ominus N(A-\bar\lambda I)=H$. Наконец, $R(A^*-\lambda I)\supset R(A-\lambda I)$, причем последнее множество замкнуто и имеет дефект 1. Отсюда следует замкнутость $R(A^*-\lambda I)$, а значит, $R(A^*-\lambda I)=H$. Все вместе это и означает, что $\lambda\in\rho(A^*)$ при $\operatorname{Im}\lambda<0$.

Построим резольвенту $\Gamma_\lambda(A^*)$. Интегрируя (15) и учитывая условие $v(\infty)=0$, получаем

$$v(t)=-i\int_t^\infty \exp(i\lambda(t-\tau))\,h(\tau)\,d\tau \qquad (\operatorname{Im}\lambda<0). \tag{28}$$

Формула (28) и определяет собой резольвенту $\Gamma_\lambda(A^*)$. Что касается оператора $(A-\lambda I)^{-1}$, то он при $\operatorname{Im}\lambda<0$ определен лишь на множестве $H\ominus N(A^*-\bar\lambda I)=\{\alpha\exp i\bar\lambda t\}^\perp$. Соответствующее условие ортогональности имеет вид

$$\int_0^\infty h(\tau)\exp(-i\lambda\tau)\,d\tau=0 \qquad (\operatorname{Im}\lambda<0). \tag{29}$$

Уравнение $(A-\lambda I)v=h$ имеет решение (28), причем условие (29) означает, что выполнено краевое условие $v(0)=0$.

5. Рассмотрим теперь оператор дифференцирования на оси. Пусть $H=L_2(\mathbf{R})$, $D(A_0)=C_0^\infty(\mathbf{R})$, оператор A_0 определен формулой (1), $A=\bar A_0$. Оператор A_0 симметричен. *Сопряженный оператор A^* определен формулой* (1) *на тех* (*и только тех*) *абсолютно непрерывных функциях v, для которых v, $v'\in L_2$.* В силу леммы 1 для $v\in D(A^*)$ имеем $v(t)\to 0$ при $t\to\pm\infty$. С учетом этого обстоятельства интегрирование по частям дает:

$$(A^*u,\ v)=-\int_{\mathbf{R}} iu'\bar v\,dt=-\int_{\mathbf{R}} u\overline{iv'}\,dt=(u,\ A^*v),\quad \forall u,\ v\in D(A^*).$$

Таким образом, A^* симметричен. В соответствии со сказанным в § 1, п. 1, это означает, что $A=A^*$, т. е. *оператор A — самосопряженный* (*A_0 — в существенном самосопряженный*). Этот же факт можно вывести из равенств $n_-(A)=n_+(A)=0$. (Действительно, теперь $\exp(\pm t)\,\bar\in\, L_2$, а потому в (5) $\alpha_1=\alpha_2=0$.)

Покажем, что спектр A заполняет всю ось: $\sigma(A)=\mathbf{R}$. С этой целью сузим A на множество всех тех функций $u\in D(A)$, для которых $u(t)=0$ при $t<0$. Для таких функций выполнено условие (25), а рассматриваемое сужение приводит к оператору дифференцирования на полуоси (к оператору A из п. 4). Для последнего оператора ядро спектра есть $\mathbf{R}$. Так как ядро спектра не может сузиться при расширении оператора и $\sigma_p(A)=\varnothing$, то и в нашем случае $\hat\sigma(A)=\sigma(A)=\sigma_c(A)=\mathbf{R}$.

Выпишем резольвенту $\Gamma_\lambda(A)$, которая определена для $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$. Пусть $h\in L_2$ и $v=\Gamma_\lambda(A)h$. Легко видеть, что

$$v(t)=i\int_{-\infty}^t \exp(i\lambda(t-\tau))\,h(\tau)\,d\tau \qquad (\operatorname{Im}\lambda>0),$$

$$v(t)=-i\int_t^\infty \exp(i\lambda(t-\tau))\,h(\tau)\,d\tau \qquad (\operatorname{Im}\lambda<0).$$

Как и в п. 4, резольвента непрерывна, но не компактна.

ГЛАВА 5

СПЕКТРАЛЬНАЯ МЕРА. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Основные результаты теории самосопряженных операторов (а также более общего класса — нормальных операторов) излагаются в гл. 6. Эти результаты состоят в так называемом *спектральном разложении* оператора — представлении его в виде интеграла по «спектральной мере», значения которой — перестановочные друг с другом проекторы. Такое разложение, коль скоро оно найдено, полностью характеризует спектральные свойства оператора, позволяет описать его унитарные инварианты и построить его простую модель (см. гл. 7). Спектральное разложение дает также возможность построить исчисление функций от оператора. Все эти вопросы очень важны как в плане общей теории, так и для приложений.

Настоящая глава имеет подготовительный характер. В ней изучаются проекторнозначные (спектральные) меры (§ 1, 2) и интегралы по таким мерам (§ 3, 4). Предварительное изучение этого материала значительно облегчит читателю знакомство с основными фактами спектральной теории.

§ 1. Основные понятия

Теория спектральной меры базируется, с одной стороны, на общей теории скалярной меры (см. § 1.3) и, с другой стороны, на свойствах операторов ортогонального проектирования (см. § 2.8).

1. Пусть $(Y, \mathfrak{A})$ — измеримое пространство, H — гильбертово пространство и $\mathcal{P} = \mathcal{P}(H)$ — множество всех ортогональных проекторов в H. Пусть задано отображение E: $\mathfrak{A} \to \mathcal{P}$, удовлетворяющее следующим условиям.

1°. *Счетная аддитивность*: если $\{\delta_n\}$ — конечный или счетный набор попарно не пересекающихся подмножеств $\delta_n \in \mathfrak{A}$ и $\delta = \bigcup_n \delta_n$, то

$$E(\delta) = s\text{-}\sum_n E(\delta_n).$$

2°. *Полнота*: $E(Y) = I$.

Отображение E называют *спектральной мерой* в пространстве H, а четверку $(Y, \mathfrak{A}, H, E)$ — *пространством со спектральной мерой*. Выведем некоторые простейшие свойства спектральной меры. Они вытекают из условия 1° в его «конечном» варианте. Ниже все встречающиеся подмножества $\delta \subset Y$ предполагаются измеримыми (т. е. $\delta \in \mathfrak{A}$).

Теорема 1. *Пусть E — спектральная мера в H. Тогда*

$$E(\delta_1)E(\delta_2) = E(\delta_2)E(\delta_1) = E(\delta_1 \cap \delta_2). \tag{1}$$

В частности,

$$\text{если } \delta_1 \cap \delta_2 = \varnothing, \text{ то } E(\delta_1)E(\delta_2) = 0; \tag{2}$$

$$\text{если } \delta_1 \subset \delta_2, \quad \text{ то } E(\delta_1) \leqslant E(\delta_2). \tag{3}$$

○ Свойство (2) вытекает из условия 1° на основании теоремы 2.8.2. Если $\delta_0 = \delta_1 \cap \delta_2 \neq \varnothing$, то положим $\delta^i = \delta_i \setminus \delta_0$, $i = 1, 2$. Перемножая равенства $E(\delta_i) = E(\delta_0) + E(\delta^i)$ (порядок безразличен) и принимая во внимание (2), получаем (1). Свойство (3) вытекает из (1) на основании следствия 2.8.5 ●

Свойства (1)—(3) означают, что спектральная мера *коммутативна, ортогональна* и *монотонна.*

Наряду с проекторами $E(\delta)$ удобно рассматривать соответствующие им подпространства $H(\delta) = E(\delta)H$. Свойства (2), (3) означают, что

$$\text{если } \delta_1 \cap \delta_2 = \varnothing, \text{ то } H(\delta_1) \perp H(\delta_2); \tag{4}$$

$$\text{если } \delta_1 \subset \delta_2, \quad \text{ то } H(\delta_1) \subset H(\delta_2). \tag{5}$$

Условие 2° в определении спектральной меры малосущественно: если оно не выполнено, то согласно (5) $H(\delta) \subset H(Y)$ ($\forall \delta \in \mathfrak{A}$) и поэтому E можно рассматривать как спектральную меру в пространстве $H(Y)$.

2. Перейдем к обсуждению свойства *счетной* аддитивности спектральной меры. Пусть $\{\delta_n\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ — последовательность попарно не пересекающихся измеримых множеств. Из свойства конечной аддитивности вытекает (см. (4)), что подпространства $H(\delta_n)$ попарно ортогональны. По следствию 2.8.7 ряд $\sum_n E(\delta_n)$ s-сходится к проектору на $\sum_n \oplus H(\delta_n)$. Условие счетной аддитивности требует, чтобы этот проектор совпадал с $E(\bigcup_n \delta_n)$. Отметим простые следствия условия счетной аддитивности.

Теорема 2. *Пусть $\{\delta_n\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ — измеримые подмножества в Y, E — спектральная мера.*

1) *Если последовательность $\{\delta_n\}$ — расширяющаяся, то*

$$\text{s-lim}\, E(\delta_n) = E(\textstyle\bigcup_n \delta_n). \tag{6}$$

2) *Если последовательность $\{\delta_n\}$ — вложенная, то*

$$\text{s-lim}\, E(\delta_n) = E(\textstyle\bigcap_n \delta_n).$$

В частности, имеет место свойство нормальности:

$$\text{если } \delta_1 \supset \delta_2 \supset \ldots \text{ и } \textstyle\bigcap_n \delta_n = \varnothing, \text{ то } s\text{-lim}\, E(\delta_n) = 0. \tag{7}$$

○ 1) Положим $\delta = \bigcup_n \delta_n$, $\delta'_1 = \delta_1$, $\delta'_n = \delta_n \setminus \delta_{n-1}$ $(n > 1)$. Тогда множества δ'_n попарно не пересекаются, $\bigcup_n \delta'_n = \delta$ и по свойству 1° $E(\delta) = s\text{-}\sum_n E(\delta'_n) = s\text{-}\lim E(\delta_n)$.

2) Доказательство сводится к 1) с помощью перехода к расширяющейся последовательности $\{Y \setminus \delta_n\}$ ●

3. Каждая спектральная мера порождает семейство конечных скалярных мер, определенных на σ-алгебре $\mathfrak{A}$. Именно для любого $f \in H$ положим

$$\mu_f(\delta) = (E(\delta) f, f) = \| E(\delta) f \|^2. \tag{8}$$

Свойство счетной аддитивности меры μ_f есть следствие 1°. Из 2° вытекает, что

$$\mu_f(Y) = \| f \|^2 \qquad (\forall f \in H). \tag{9}$$

Наряду с мерами μ_f рассматривают также комплексные меры

$$\mu_{f,g}(\delta) = (E(\delta) f, g) \qquad (\forall f, g \in H). \tag{10}$$

Операции над ними сводятся к операциям над мерами $\mu_f = \mu_{f,f}$ на основании тождества (2.4.9), которое в этом случае принимает вид

$$4\mu_{f,g}(\delta) = \mu_{f+g}(\delta) + i\mu_{f+ig}(\delta) - \mu_{f-g}(\delta) - i\mu_{f-ig}(\delta). \tag{11}$$

Отметим также равенство

$$\mu_{g,f}(\delta) = \overline{\mu_{f,g}(\delta)} \tag{12}$$

и оценку

$$|\mu_{f,g}(\delta)|^2 \leqslant \mu_f(\delta)\, \mu_g(\delta). \tag{13}$$

Последняя следует из неравенства

$$|(E(\delta) f, g)| = |(E(\delta) f, E(\delta) g)| \leqslant \| E(\delta) f \| \cdot \| E(\delta) g \|.$$

Если множества $\delta_n \in \mathfrak{A}$, $n = 1, 2, \ldots$, попарно не пересекаются и $\delta = \bigcup_n \delta_n$, то согласно (13)

$$\sum_n |\mu_{f,g}(\delta_n)| \leqslant \sum_n \sqrt{\mu_f(\delta_n)} \sqrt{\mu_g(\delta_n)} \leqslant$$
$$\leqslant [\sum_n \mu_f(\delta_n)]^{1/2} [\sum_n \mu_g(\delta_n)]^{1/2} = \sqrt{\mu_f(\delta)} \sqrt{\mu_g(\delta)}.$$

Для положительной меры $|\mu_{f,g}|$ — вариации комплексной меры $\mu_{f,g}$ — это означает, что

$$|\mu_{f,g}|(\delta) \leqslant \sqrt{\mu_f(\delta)} \sqrt{\mu_g(\delta)} \quad (\forall f, g \in H, \forall \delta \in \mathfrak{A}). \tag{14}$$

В частности, при $\delta = Y$ в силу (9) находим

$$|\mu_{f,g}|(Y) \leqslant \| f \| \cdot \| g \|. \tag{15}$$

Как и в скалярном случае, множества $\delta \in \mathfrak{A}$, для которых $E(\delta) = 0$, называются *множествами E-меры нуль*. Обычным образом вводятся понятия «E-почти везде» (E-п.в.), «E-ограниченность», «E-sup». Так, если φ — вещественная измеримая *) функция на Y, то

$$E\text{-}\sup \varphi = \inf \{a \in \mathbf{R}:\ \varphi(y) \leqslant a\ \ E\text{-п.в.}\}.$$

Ясно, что $E(\delta)=0$ тогда и только тогда, когда $\mu_f(\delta)=0$ ($\forall f \in H$). Существуют элементы $g \in H$ (элементы максимального типа; см. ниже теорему 7.3.4), такие, что равенство $E(\delta)=0$ равносильно единственному условию $\mu_g(\delta)=0$.

§ 2. Продолжение спектральной меры. Произведение мер

При построении спектральной меры обычно приходится сначала рассматривать счетно-аддитивную проектор-функцию, заданную на некоторой алгебре $\mathfrak{A}^0$ (но не на σ-алгебре) подмножеств в Y. Естественно возникает задача о продолжении такой функции до меры, которая была бы определена во всяком случае на минимальной σ-алгебре, содержащей $\mathfrak{A}^0$. Кроме того, свойство счетной аддитивности не всегда поддается простой прямой проверке. Связанные с этим вопросы рассматриваются в настоящем параграфе.

1. Пусть $\mathfrak{A}^0$ — некоторая алгебра подмножеств $\delta \subset Y$ и E^0: $\mathfrak{A}^0 \to \mathscr{P}(H)$ — аддитивная **) функция: для любых $\delta_k \in \mathfrak{A}^0$, $k=1, \ldots, n$, таких, что $\delta_k \cap \delta_l = \varnothing$ при $k \neq l$, имеет место соотношение

$$E^0(\delta) = \textstyle\sum_k E^0(\delta_k), \qquad \delta = \bigcup_k \delta_k. \tag{1}$$

Пусть, кроме того, $E^0(Y)=I$. Для E^0 полностью сохраняется результат теоремы 1.1 (при ее доказательстве использовалась лишь аддитивность). Далее, для любого $f \in H$ вводится аддитивная на $\mathfrak{A}^0$ скалярная функция $\mu_f^0(\delta)=(E^0(\delta)f, f)$, $\delta \in \mathfrak{A}^0$. Аддитивная функция E^0 может оказаться счетно-аддитивной: для любого счетного набора попарно не пересекающихся множеств $\delta_k \in \mathfrak{A}^0$ выполнено (1), коль скоро $\delta = \bigcup_k \delta_k \in \mathfrak{A}^0$.

Приведем некоторые утверждения, облегчающие проверку счетной аддитивности.

Лемма 1. *Пусть E^0 — аддитивная проекторнозначная функция на алгебре $\mathfrak{A}^0$ подмножеств в Y. Если для каждого $f \in H$ функция μ_f^0 счетно-аддитивна на $\mathfrak{A}^0$, то E^0 — счетно-аддитивная функция.*

○ Пусть $\delta_k \in \mathfrak{A}^0$, $k=1, 2, \ldots$, попарно не пересекаются и $\delta = \bigcup_k \delta_k \in \mathfrak{A}^0$. По условию для любого $f \in H$

$$(E^0(\delta)f, f) = \mu_f^0(\delta) = \textstyle\sum_k \mu_f^0(\delta_k) = \sum_k (E^0(\delta)f, f).$$

С помощью (2.4.9) перейдем к билинейным формам. Тогда

$$(E^0(\delta)f, g) = \textstyle\sum_k (E^0(\delta_k)f, g) \qquad (\forall f, g \in H),$$

т. е. $E^0(\delta) = w\text{-}\sum_k E^0(\delta_k)$. По теореме 2.8.8 ряд сходится сильно ●

*) Измеримость, или E-измеримость, понимается как измеримость по отношению к σ-алгебре $\mathfrak{A}$ (см. § 1.4, пп. 1, 2).

**) Точнее говоря, конечно-аддитивная.

Лемма 2. *Пусть E^0 — аддитивная проекторнозначная функция на алгебре $\mathfrak{A}^0$, удовлетворяющая условию нормальности: если $\partial_n \in \mathfrak{A}^0$, $n=1, 2, \ldots$, и $\partial_1 \supset \partial_2 \supset \ldots$, $\bigcap_n \partial_n = \varnothing$, то $s\text{-}\lim E^0(\partial_n)=0$. Тогда E^0 — счетно-аддитивная функция на $\mathfrak{A}^0$.*

○ Пусть δ_k, δ — такие же, как и в доказательстве леммы 1. Положим $\partial_n = \bigcup_{k>n}\delta_k = \delta \setminus \bigcup_{k\leqslant n}\delta_k$. Тогда $\partial_n \in \mathfrak{A}^0$ и $\bigcap_n \partial_n = \varnothing$. Следовательно,

$$E^0(\partial_n) = E^0(\delta) - \sum_{k\leqslant n} E^0(\delta_k) \xrightarrow{s} 0,$$

что равносильно (1) ●

2. Пусть E^0—счетно-аддитивная проектор-функция на алгебре $\mathfrak{A}^0$ подмножеств в Y и $E^0(Y)=I$. Покажем, что функцию E^0 можно продолжить на некоторую σ-алгебру (продолжить до спектральной меры), причем используем для этой цели процесс, опирающийся на стандартный процесс продолжения *) скалярной меры.

Для любого $f\in H$ обозначим через μ_f меру, полученную стандартным продолжением счетно-аддитивной функции μ_f^0, через $\hat{\mu}_f$ — соответствующую внешнюю меру, определенную на всех подмножествах Y.

Функцию E^0 прежде всего распространим на совокупность $\mathfrak{A}^1$ всех счетных объединений множеств из $\mathfrak{A}^0$. Именно для $\omega \in \mathfrak{A}^1$ положим

$$E^1(\omega) = s\text{-}\sum_k E^0(\delta_k), \tag{2}$$

где $\omega = \bigcup_k \delta_k$, $\delta_k \in \mathfrak{A}^0$, — какое-либо разложение ω. Тогда

$$(E^1(\omega) f, f) = \sum_k \mu_f^0(\delta_k) = \mu_f(\omega), \qquad \forall f \in H,$$

и, следовательно, определение (2) не зависит от способа разложения ω (поскольку это верно для скалярных мер). Если $\omega', \omega'' \in \mathfrak{A}^1$ и $\omega' = \bigcup_k \delta_k'$, $\omega'' = \bigcup_k \delta_k''$ — их разложения, то $\omega' \cap \omega'' = \bigcup_{k,l}(\delta_k' \cap \delta_l'')$ — также разложение. Тогда

$$E^1(\omega'\cap\omega'') = s\text{-}\sum_{k,l} E^0(\delta_k'\cap\delta_l'') = s\text{-}\sum_{k,l} E^0(\delta_k') E^0(\delta_l'') = E^1(\omega') E^1(\omega'').$$

Это равенство распространяется на любое конечное число множеств из $\mathfrak{A}^1$.

Для произвольного множества $\delta \subset Y$ определим его внешнюю меру $\hat{E}(\delta)$. Именно положим **)

$$\hat{E}(\delta) = \inf\{E^1(\omega):\ \omega \supset \delta,\ \omega \in \mathfrak{A}^1\}. \tag{3}$$

Семейство проекторов $\{E^1(\omega)\}$ в правой части (3) замкнуто относительно умножения. Поэтому согласно теореме 2.8.9

$$(\hat{E}(\delta) f, f) = \hat{\mu}_f(\delta) \qquad (\forall \delta \subset Y,\ \forall f \in H). \tag{4}$$

---

*) Читателю рекомендуется систематически обращаться к материалу § 1.3, пп. 10—16.

**) Точная нижняя граница семейства проекторов определена в § 2.8, п. 4.

Рассмотрим те множества $\delta \subset Y$, для которых

$$\hat{E}(\delta)+\hat{E}(Y\setminus\delta)=I. \tag{5}$$

Совокупность всех таких множеств δ обозначим через $\mathfrak{A}(E^0)$. Для σ-алгебры $\mathfrak{A}(\mu_f)$ (см. § 1.3, п. 11) используем обозначение $\mathfrak{A}(f)$.

Теорема 3. *Множество $\mathfrak{A}(E^0)$ есть σ-алгебра, содержащая алгебру $\mathfrak{A}^0$. Справедливо равенство*

$$\mathfrak{A}(E^0)=\bigcap_{f\in H}\mathfrak{A}(f). \tag{6}$$

Сужение на $\mathfrak{A}(E^0)$ внешней меры $\hat{E}$ представляет собой спектральную меру E, являющуюся продолжением E^0.

○ Из (4), (5) следует, что для любых $\delta\in\mathfrak{A}(E^0)$, $f\in H$

$$\hat{\mu}_f(\delta)+\hat{\mu}_f(Y\setminus\delta)=\mu_f(Y)=\|f\|^2, \tag{7}$$

а потому (см. § 1.3, п. 12) $\delta\in\mathfrak{A}(f)$ и, стало быть, $\mathfrak{A}(E^0)\subset\mathfrak{A}(f)$. Обратно, если $\delta\in\mathfrak{A}(f)$ при всех $f\in H$, то из (4), (7) вытекает (5). Этим установлено (6). Из (6) следует, что $\mathfrak{A}(E^0)$ — σ-алгебра. Применяя лемму 1 к функции E, видим, что E счетно-аддитивна. Таким образом, E — спектральная мера ●

3. Построенную в теореме 3 спектральную меру E будем называть *стандартным продолжением* функции E^0 до меры. Наряду с E рассмотрим ее сужение на $\mathfrak{A}^0_{\min}$ — наименьшую σ-алгебру, содержащую $\mathfrak{A}^0$. Это сужение оказывается несущественным в том смысле, что сводится лишь к уменьшению запаса множеств E-меры нуль. Мера E на $\mathfrak{A}^0_{\min}$ определяется по E^0 однозначно. Точный смысл сказанного выясняет следующая теорема.

Теорема 4. 1) *Для любого $\delta\in\mathfrak{A}(E^0)$ найдется такое множество $\partial\in\mathfrak{A}^0_{\min}$, что $\partial\supset\delta$ и $E(\partial\setminus\delta)=0$.*

2) *Если $\tilde{E}$ — спектральная мера, определенная на σ-алгебре $\tilde{\mathfrak{A}}$, причем $\tilde{\mathfrak{A}}\supset\mathfrak{A}^0$ и $\tilde{E}=E^0$ на $\mathfrak{A}^0$, то $\tilde{E}=E$ на $\mathfrak{A}^0_{\min}$.*

○ 1) Пусть $\{e_n\}$ — счетное плотное множество в H. В силу утверждения § 1.3, п. 15, для любого n найдется $\partial_n\in\mathfrak{A}^0_{\min}$, такое, что $\partial_n\supset\delta$, $\mu_{e_n}(\partial_n\setminus\delta)=0$. Положим $\partial=\bigcap_n\partial_n$. Тогда $\partial\in\mathfrak{A}^0_{\min}$, $\partial\supset\delta$ и $\mu_{e_n}(\partial\setminus\delta)=0$, т. е. $(E(\partial\setminus\delta)e_n, e_n)=0$, $\forall n$. Это означает, что $E(\partial\setminus\delta)=0$. 2) Требуемое прямо следует из аналогичного свойства для скалярных мер μ_f ●

Можно показать, что стандартное продолжение E обладает следующим свойством *N-полноты* (ср. § 1.3, п. 7): если $\delta\in\mathfrak{A}(E^0)$, $E(\delta)=0$ и $\partial\subset\delta$, то $\partial\in\mathfrak{A}(E^0)$. При сужении E на $\mathfrak{A}^0_{\min}$ N-полнота может теряться. Среди всех N-полных продолжений функции E^0 стандартное продолжение минимально: если в условиях теоремы 4 мера $\tilde{E}$ N-полная, то $\tilde{\mathfrak{A}}\supset\mathfrak{A}(E^0)$ и $\tilde{E}=E$ на $\mathfrak{A}(E^0)$.

В дальнейшем нас, как правило, будут интересовать вопросы, в которых множествами E-меры нуль можно пренебрегать. Первая часть теоремы 4 означает, что тогда достаточно рассматривать меру E на σ-алгебре $\mathfrak{A}^0_{\min}$.

4. Если на Y введена метрика (или топология), согласованная со структурой измеримого пространства, то свойства спектральной меры можно исследовать более детально.

Пусть Y — полное сепарабельное метрическое пространство, $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}^B(Y)$ — σ-алгебра всех борелевских подмножеств в Y. Если $(Y, \mathfrak{A}, H, E)$ есть пространство со спектральной мерой, то меру E в этом случае будем называть *борелевской*. Для любого $f\in H$ скалярная мера μ_f оказывается при этом конечной борелевской мерой на Y. Для таких мер (см. § 1.3, п. 22) имеет место соотношение

$$\mu_f(\delta)=\sup\{\mu_f(\delta'): \delta'\subset\delta;\ \delta' \text{ — компакт в } Y\},\quad \forall\delta\in\mathfrak{A}^B(Y). \tag{8}$$

Любая аддитивная функция на $\mathfrak{A}^B(Y)$, удовлетворяющая условию вида (8), оказывается (см. § 1.3, п. 23) счетно-аддитивной. Установим, что подобное свойство справедливо и для борелевских спектральных мер; это облегчает проверку для них счетной аддитивности.

Теорема 5. *Пусть Y — полное сепарабельное метрическое пространство, $\mathfrak{A}^0\subset\mathfrak{A}^B(Y)$ — алгебра подмножеств в Y, $E^0:\mathfrak{A}^0\to\mathcal{P}(H)$ — аддитивная функция. Пусть для любых $\Delta\in\mathfrak{A}^0$, $f\in H$*

$$\mu_f^0(\Delta)=\sup\{\mu_f^0(\omega): \bar\omega\subset\Delta,\ \omega\in\mathfrak{A}^0,\ \bar\omega \text{ — компакт в } Y\}. \tag{9}$$

Тогда функция E^0 счетно-аддитивна.

○ Счетную аддитивность E^0, в соответствии с леммой 1, достаточно проверить на квадратичных формах μ_f^0. Для последних счетная аддитивность следует из (9) на основании § 1.3, п. 23 ●

Для борелевской спектральной меры E определяется (ср. § 1.3, п. 20) ее *носитель* $\operatorname{supp} E$ — наименьшее замкнутое множество в Y, дополнение которого имеет нулевую E-меру. Точно так же, как для скалярных мер, показывается, что носитель всегда существует и что точка $y\in Y$ принадлежит $\operatorname{supp} E$ тогда и только тогда, когда любая ее окрестность имеет ненулевую E-меру. Впрочем, эти факты прямо следуют из своих скалярных аналогов в силу существования мер максимального типа (см. § 7.3, п. 3).

5. Рассмотрим теперь произведение перестановочных спектральных мер, ограничиваясь случаем, когда перемножаемые меры — борелевские*).

Пусть Y_1, Y_2 — полные сепарабельные метрические пространства; E_1, E_2 — борелевские спектральные меры на Y_1, Y_2 в одном и том же гильбертовом пространстве H. Пусть меры E_1, E_2 перестановочны:

$$E_1(\delta)\smile E_2(\partial),\quad \forall\delta\in\mathfrak{A}^B(Y_1),\quad \forall\partial\in\mathfrak{A}^B(Y_2). \tag{10}$$

Пусть $Y=Y_1\times Y_2$, причем в Y введена какая-либо метрика, согласованная с топологией прямого произведения (см. § 1.2, п. 8).

*) Если $(Y_i, \mathfrak{A}_i, H, E_i)$, $i=1,2$, — произвольные пространства со спектральной мерой и $E_1\smile E_2$, то определяемая в (14) аддитивная функция E^0 может не быть счетно-аддитивной.

Теорема 6. *При сделанных предположениях в Y существует единственная борелевская спектральная мера E, такая, что*

$$E(\delta \times Y_2) = E_1(\delta), \qquad \forall \delta \in \mathfrak{A}^B(Y_1), \tag{11}$$

$$E(Y \times \partial) = E_2(\partial), \qquad \forall \partial \in \mathfrak{A}^B(Y_2). \tag{12}$$

(Мера E называется произведением спектральных мер E_1, E_2.)

○ Пусть $\mathfrak{A}_0^0$ — совокупность всех множеств $\Delta \subset Y$ вида

$$\Delta = \delta \times \partial, \qquad \delta \in \mathfrak{A}^B(Y_1), \qquad \partial \in \mathfrak{A}^B(Y_2). \tag{13}$$

Для $\Delta \in \mathfrak{A}_0^0$ положим

$$E^0(\Delta) = E^0(\delta \times \partial) = E_1(\delta) E_2(\partial). \tag{14}$$

В силу теоремы 2.8.4 из (10) следует, что $E^0(\Delta)$ — проектор. Ясно также, что $E^0(Y) = E_1(Y_1) E_2(Y_2) = I$. Нетрудно показать*), что функция E^0 аддитивна на $\mathfrak{A}_0^0$. Обозначим через $\mathfrak{A}^0$ совокупность всевозможных конечных объединений множеств из $\mathfrak{A}_0^0$. Ясно, что $\mathfrak{A}^0$ — алгебра ($\mathfrak{A}_0^0$ алгеброй не является). Заметим, что минимальная σ-алгебра, содержащая $\mathfrak{A}^0$, есть борелевская алгебра в Y: $\mathfrak{A}^0_{\min} = \mathfrak{A}^B(Y)$. Наша цель — распространить функцию E^0 на $\mathfrak{A}^B(Y)$. Распространение E^0 на $\mathfrak{A}^0$ производится по аддитивности, причем это распространение корректно, поскольку E^0 аддитивна на $\mathfrak{A}_0^0$. Проверим теперь, что для E^0 на $\mathfrak{A}^0$ выполнены условия теоремы 5.

Пусть $f \in H$. Соотношение (9) достаточно установить для множеств вида (13). Пусть $\mu_f^{(i)}(\cdot) = (E_i(\cdot) f, f)$, $i = 1, 2$. В соответствии с (8) по любому $\varepsilon > 0$ найдутся компакты $\delta' \subset \delta$, $\partial' \subset \partial$, такие, что

$$\mu_f^{(1)}(\delta \setminus \delta') < \varepsilon, \quad \mu_f^{(2)}(\partial \setminus \partial') < \varepsilon. \tag{15}$$

Множество $\Delta' = \delta' \times \partial'$ есть компакт в Y, $\Delta' \in \mathfrak{A}^0$, $\Delta' \subset \Delta$. Отсюда и из (15) находим:

$$\Delta \setminus \Delta' = [\delta \times (\partial \setminus \partial')] \cup [(\delta \setminus \delta') \times \partial'],$$

$$E^0(\Delta \setminus \Delta') = E_1(\delta) E_2(\partial \setminus \partial') + E_1(\delta \setminus \delta') E_2(\partial'),$$

$$\mu_f^0(\Delta \setminus \Delta') \leqslant \mu_f^{(2)}(\partial \setminus \partial') + \mu_f^{(1)}(\delta \setminus \delta') < 2\varepsilon.$$

Этим установлено (9), а потому функция E^0 счетно-аддитивна на $\mathfrak{A}^0$. В соответствии с теоремой 3 существует продолжение E^0 до спектральной меры E, определенной на σ-алгебре $\mathfrak{A}(E^0) \supset \mathfrak{A}^B(Y) = \mathfrak{A}^0_{min}$. Условия (11), (12) непосредственно содержатся в (14).

Перейдем к вопросу о единственности спектральной меры E. Так как $(\delta \times Y_2) \cap (Y_1 \times \partial) = \delta \times \partial$, то равенства (11), (12) в силу (1.1) однозначно определяют E на $\mathfrak{A}_0^0$, а потому и на $\mathfrak{A}^0$. В соответствии с теоремой 4 E однозначно определяется также на $\mathfrak{A}^0_{\min} = \mathfrak{A}^B(Y)$ ●

---

*) Элементарную проверку мы предоставляем читателю. Она вполне аналогична проверке аддитивности для произведения скалярных мер.

Результат теоремы 6 очевидным образом распространяется на случай любого конечного числа перемножаемых спектральных мер.

§ 3. Интеграл по спектральной мере. Случай ограниченных функций

1. Мы переходим к теории интеграла от скалярной функции по спектральной мере. Начнем со случая *простых* (конечнозначных) функций, затем перейдем к произвольным ограниченным измеримым функциям и, наконец, в § 4 — к неограниченным функциям.

Пусть $(Y, \mathfrak{A}, H, E)$ — пространство со спектральной мерой. Через $L_\infty(Y, E)$ обозначим множество всех E-измеримых, E-ограниченных комплексных функций на Y; функции, совпадающие E-п.в., как обычно, отождествляются. Относительно стандартных операций над функциями (сложение, умножение, комплексное сопряжение) и нормы

$$\|\varphi\|_\infty = E\text{-}\sup|\varphi(y)| \tag{1}$$

множество $L_\infty(Y, E)$ представляет собой коммутативную банахову алгебру с инволюцией и с единицей $\mathbf{1}$ ($\mathbf{1}(y) = 1$ E-п.в. на Y).

Через $\Pi = \Pi(Y, E)$ обозначим множество всех E-измеримых простых функций на Y. Напомним, что функция φ называется простой, если существует такое разложение пространства Y на измеримые непересекающиеся подмножества $\delta_1, \ldots, \delta_n$, что φ постоянна на каждом δ_k, $k = 1, \ldots, n$. Условимся в дальнейшем обозначать через χ_δ характеристическую функцию подмножества $\delta \subset Y$, тогда

$$\varphi = \sum\nolimits_{k \leqslant n} c_k \chi_{\delta_k}, \tag{2}$$

где c_k — значение функции φ на множестве δ_k. Множество $\Pi(Y, E)$ является подалгеброй алгебры $L_\infty(Y, E)$, плотной в ней по норме (1).

Интегралом от функции $\varphi \in \Pi(Y, E)$ *по спектральной мере* E *назовем оператор**)

$$J_\varphi = \int \varphi \, dE \overset{\text{def}}{=} \sum\nolimits_{k \leqslant n} c_k E(\delta_k), \tag{3}$$

где δ_k, c_k — те же, что в представлении (2). Определение (3) корректно, т. е. не зависит от способа записи функции φ в форме (2). Этот факт легко следует из свойства конечной аддитивности спектральной меры.

---

*) В этой главе интегрирование без указания области всюду подразумевает интегрирование по Y.

Основные свойства интеграла на классе П непосредственно вытекают из определения (3):

$$J_{\alpha\varphi+\beta\psi}=\alpha J_{\varphi}+\beta J_{\psi}; \tag{4}$$

$$J_{\varphi\psi}=J_{\varphi}J_{\psi}=J_{\psi}J_{\varphi}; \tag{5}$$

$$(J_{\varphi})^{*}=J_{\bar\varphi}; \tag{6}$$

$$J_{1}=I; \tag{7}$$

$$(J_{\varphi}f,\ g)=\int\varphi d\mu_{f,g}; \tag{8}$$

$$(J_{\varphi}f,\ f)=\int\varphi d\mu_{f}; \tag{9}$$

$$\|J_{\varphi}f\|^{2}=\int|\varphi|^{2}d\mu_{f}; \tag{10}$$

$$\|J_{\varphi}\|=E\text{-}\sup|\varphi|. \tag{11}$$

Установим справедливость свойств (5), (10), (11) (остальные можно считать очевидными).

Свойство (5) вследствие (4) достаточно проверить для функций $\varphi=\chi_{\delta_1}$, $\psi=\chi_{\delta_2}$. Тогда $\varphi\psi=\chi_{\delta_1\cap\delta_2}$ и

$$J_{\varphi\psi}=E(\delta_1\cap\delta_2)=E(\delta_1)E(\delta_2)=J_{\varphi}J_{\psi}.$$

Равенство (10) выводится из (6), (5) и (9):

$$\|J_{\varphi}f\|^{2}=(J_{\varphi}f,J_{\varphi}f)=(J_{\bar\varphi}J_{\varphi}f,\ f)=(J_{|\varphi|^2}f,\ f)=\int|\varphi|^{2}d\mu_{f}.$$

Наконец, в (11) оценка $\leqslant$ вытекает из (10). Далее, пусть для определенности $E\text{-}\sup|\varphi|=|c_1|$. Тогда $E(\delta_1)\neq 0$ и на любом элементе $f\in H(\delta_1)$ выполнено $\|J_{\varphi}f\|=|c_1|\cdot\|E(\delta_1)f\|=|c_1|\cdot\|f\|$. Отсюда следует (11).

2. Определение интеграла распространяется с простых функций на весь класс $L_\infty(Y,\ E)$ с помощью предельного перехода. Посредством формулы (3) мы задали отображение

$$\mathbf{J}=\mathbf{J}(E):\Pi(Y,\ E)\to\mathbf{B}(H);\ \ \mathbf{J}\varphi=J_{\varphi}.$$

Равенство (11) означает, что $\mathbf{J}$ — изометрическое (следовательно непрерывное) отображение нормированной алгебры $\Pi(Y,\ E)$ (с нормой (1)) в банахову алгебру $\mathbf{B}(H)$. Отображение $\mathbf{J}$ можно продолжить по непрерывности до изометрического отображения всей банаховой алгебры $L_\infty(Y,\ E)$ в $\mathbf{B}(H)$. Продолженное отображение условимся также обозначать через $\mathbf{J}$, а значение J_φ отображения $\mathbf{J}$ на функции $\varphi\in L_\infty(Y,\ E)$ будем называть *интегралом от* φ *по спектральной мере* E. Иначе говоря, *для* $\varphi\in L_\infty(Y,\ E)$

$$J_{\varphi}=\int\varphi dE\overset{\text{def}}{=}u\text{-}\lim J_{\varphi_n},$$

где $\{\varphi_n\}$ — *произвольная последовательность простых функций, равномерно сходящаяся к* φ *E-п.в. на* Y.

Так как линейные операции и норма в $\mathbf{B}(H)$, а также умножение операторов и инволюция $T\longmapsto T^{*}$ непрерывны относительно u-сходимости, то свойства (4) — (6) и (11) переносятся с множества П на все пространство $L_\infty(Y,\ E)$. Присоединяя к этим свойствам равенство (7), приходим к следующей теореме, представляющей собой центральный результат теории интеграла по спектральной мере.

Теорема 1. *Отображение* $\mathbf{J}: \varphi \longmapsto J_\varphi$ *есть изометрический изоморфизм банаховой алгебры* $L_\infty(Y, E)$ *с единицей* $\mathbf{1}$ *и инволюцией* $\varphi \longmapsto \bar{\varphi}$ *на некоторую коммутативную подалгебру алгебры* $\mathbf{B}(H)$ *с единицей* I *и с инволюцией* $T \longmapsto T^*$.

Приведем некоторые полезные следствия теоремы 1. 1) Любой оператор J_φ нормален. 2) Оператор J_φ самосопряжен в том и только том случае, если E-п.в. функция φ вещественна. 3) Оператор J_φ унитарен в том и только том случае, если E-п.в. $|\varphi(y)| = 1$. 4) Любое подпространство $H(\delta)$, $\delta \in \mathfrak{A}$, приводит все операторы J_φ (это следует из (5) при $\psi = \chi_\delta$ на основании теоремы 3.6.1).

Теорема 1 не охватывает свойств (8)—(10), которые, тем не менее, тоже распространяются на любые $\varphi \in L_\infty(Y, E)$. В самом деле, если $\varphi_n \in \Pi$ и $\varphi_n \to \varphi$ в $L_\infty(Y, E)$, то

$$(J_\varphi f, g) = \lim (J_{\varphi_n} f, g) = \lim \int \varphi_n d\mu_{f,g} = \int \varphi d\mu_{f,g}.$$

В частности, прн $g = f$ получаем (9). Равенство (10), как н для $\varphi \in \Pi$, выводится из (6), (5) и (9). Отметнм еще следующее утверждение.

Теорема 2. *Если функции* $\varphi_n \in L_\infty(Y, E)$ *ограничены в совокупности и* $\varphi_n \to \varphi$ *E-п. в., то* $s\text{-}\lim J_{\varphi_n} = J_\varphi$.

○ Для любого $f \in H$ нз (4) и (10) получаем

$$\| J_\varphi f - J_{\varphi_n} f \|^2 = \| J_{\varphi - \varphi_n} f \|^2 = \int |\varphi - \varphi_n|^2 d\mu_f.$$

Правая часть стремнтся к нулю при $n \to \infty$ в силу теоремы Лебега ●

3. В заключение приведем одно полезное предложение технического характера.

Лемма 3. *Пусть* $\varphi \in L_\infty(Y, E)$, $f \in H$ *и* $h = J_\varphi f$. *Тогда*

$$\mu_h(\delta) = \int_\delta |\varphi|^2 d\mu_f \quad (\forall \delta \in \mathfrak{A}) \tag{12}$$

и для любой E-измеримой функции $\Phi \geq 0$

$$\int \Phi d\mu_h = \int \Phi |\varphi|^2 d\mu_f. \tag{13}$$

○ Равенство (13) прямо следует из (12) (см. § 1.5, п. 15). Установим (12):

$$\mu_h(\delta) = \| E(\delta) J_\varphi f \|^2 = \| J_{\varphi\chi_\delta} f \|^2 = \int_\delta |\varphi|^2 d\mu_f \quad ●$$

§ 4. Интеграл по спектральной мере. Случай неограниченных функций

1. При переходе к интегралам от неограниченных функций будем исходнть из формулы (3.10).

Обозначим через $S(Y, E)$ пространство всех E-измеримых, E-п.в. конечных функций на Y; $S(Y, E)$ — алгебра с единицей

1 и инволюцией $\varphi \longmapsto \bar{\varphi}$, однако не нормированная. Каждой функции $\varphi \in S(Y, E)$ сопоставим множество $D_\varphi \subset H$:

$$D_\varphi = \left\{ f \in H : \int |\varphi|^2 d\mu_f < \infty \right\}. \tag{1}$$

Лемма 1. *Множество D_φ линейно и плотно в H.*

○ Из (1.8) находим, что

$$\mu_{f+g}(\delta) = \| E(\delta)(f+g) \|^2 \leqslant 2 \| E(\delta) f \|^2 + 2 \| E(\delta) g \|^2 = \\ = 2\mu_f(\delta) + 2\mu_g(\delta).$$

Отсюда следует линейность D_φ. Положим

$$\delta_n = \{ y \in Y : |\varphi(y)| \leqslant n \}. \tag{2}$$

Множество $\bigcup_n \delta_n$ имеет полную E-меру, а потому $E(\delta_n) \xrightarrow{s} I$ по теореме 1.2. Для любого $f \in H$ $f_n = E(\delta_n) f \to f$. Чтобы установить плотность D_φ, достаточно проверить, что $f_n \in D_\varphi$. Но по лемме 3.3

$$\int |\varphi|^2 d\mu_{f_n} = \int |\varphi|^2 \chi^2_{\delta_n} d\mu_f \leqslant n^2 \int d\mu_f = n^2 \| f \|^2 \quad ●$$

Последовательность функций $\{\varphi_n\}$ назовем *М-сходящейся* к $\varphi \in S(Y, E)$, если выполнены условия:

$$\varphi_n \in L_\infty(Y, E) \ (\forall n); \ \varphi_n(y) \to \varphi(y) \ (E\text{-п. в.});$$
$$\exists \ C > 0 : |\varphi_n(y)|^2 \leqslant C(|\varphi(y)|^2 + 1) \ (\forall n, \ E\text{-п. в.}).$$

В частности, M-сходится к φ последовательность *срезок* $\varphi_{[n]}$, определяемых равенством $\varphi_{[n]} = \chi_{\delta_n} \varphi$, где δ_n — множества (2).

Пусть $\{\varphi_n\}$ M-сходится к $\varphi \in S(Y, E)$. Для любого $f \in D_\varphi$ в силу (3.4), (3.10) оказывается

$$\| J_{\varphi_m} f - J_{\varphi_n} f \|^2 = \int |\varphi_n - \varphi_m|^2 d\mu_f \to 0 \ (m, \ n \to \infty),$$

а потому существует предел $h = \lim J_{\varphi_n} f$. Он не зависит от $\{\varphi_n\}$: если $\{\varphi'_n\}$ также M-сходится к φ, то

$$\| J_{\varphi'_n} f - J_{\varphi_n} f \|^2 = \int |\varphi'_n - \varphi_n|^2 d\mu_f \to 0.$$

Положим

$$J_\varphi f \overset{\text{def}}{=} \lim J_{\varphi_n} f \qquad (\forall f \in D_\varphi). \tag{3}$$

Отображение $f \longmapsto J_\varphi f$ очевидно линейно. *Оператор* J_φ *с областью определения* (1), *задаваемый равенством* (3), *где* $\{\varphi_n\}$ — *произвольная* M-*сходящаяся к* φ *последовательность, называется интегралом от* $\varphi \in S(Y, E)$ *по спектральной мере* E. Для J_φ используются также обозначения

$$J_\varphi = \int \varphi dE, \ J_\varphi f = \int \varphi dEf.$$

Из (3) предельным переходом получаем, что

$$\| J_\varphi f \|^2 = \lim \| J_{\varphi_n} f \|^2 = \lim \int |\varphi_n|^2 d\mu_f = \int |\varphi|^2 d\mu_f.$$

Таким образом, формула (3.10) переносится на неограниченные φ:

$$\|J_\varphi f\|^2=\int|\varphi|^2\,d\mu_f \qquad (\forall f\in D_\varphi). \tag{4}$$

Сохраняются также формулы (3.8), (3.9):

$$(J_\varphi f,\ g)=\int\varphi d\mu_{f,g} \qquad (\forall f\in D_\varphi,\ \forall g\in H), \tag{5}$$

$$(J_\varphi f,\ f)=\int\varphi d\mu_f \qquad (\forall f\in D_\varphi). \tag{6}$$

Достаточно доказать (5). Пусть $\{\varphi_n\}$ M-сходится к φ. Тогда в соответствии с (1.14) и неравенством (1.5.13)

$$\left|\int\varphi_n d\mu_{f,g}-\int\varphi d\mu_{f,g}\right|^2\leqslant\int|\varphi_n-\varphi|^2\,d\mu_f\int d\mu_g\to 0.$$

Теперь предельный переход в (3.8) приводит к равенству (5).

Пусть $\varphi\in S(Y,\ E)$, $\psi\in L_\infty(Y,\ E)$. Если $\{\varphi_n\}$ M-сходится к φ, то $\{\varphi_n+\psi\}$ очевидно M-сходится к $\varphi+\psi$. Переход к пределу в равенстве $J_{\varphi_n}f+J_\psi f=J_{\varphi_n+\psi}f$ показывает, что при сделанных предположениях

$$J_\varphi f+J_\psi f=J_{\varphi+\psi}f \qquad (\forall f\in D_\varphi). \tag{7}$$

Ниже этот результат будет существенно расширен (см. теорему 3).

В следующей лемме указаны условия на последовательность $\{\varphi_n\}$, обеспечивающие сходимость $J_{\varphi_n}f$ к $J_\varphi f$. Эти условия значительно шире, нежели M-сходимость. В частности, они зависят от элемента $f\in D_\varphi$. Кроме того, на случай неограниченных функций распространяются равенства (3.12), (3.13).

Лемма 2. *Пусть $\varphi\in S(Y,\ E)$, $f\in D_\varphi$ и $h=J_\varphi f$. Тогда*

а) если $\varphi_n\in S(Y,\ E)$, $f\in D_{\varphi_n}$ $(\forall n)$ и $\varphi_n\to\varphi$ в метрике пространства $L_2(Y,\ \mu_f)$, то $J_{\varphi_n}f\to h$;

б) для φ и f сохраняются утверждения леммы 3.3.

○ а) Пусть $\{\tilde\varphi_n\}$ M-сходится к φ. Тогда в соответствии с (7) и (4)

$$\|J_{\varphi_n}f-J_{\tilde\varphi_n}f\|^2=\|J_{\varphi_n-\tilde\varphi_n}f\|^2=\int|\varphi_n-\tilde\varphi_n|^2\,d\mu_f\to 0.$$

Так как $J_{\tilde\varphi_n}f\to J_\varphi f$, то и $J_{\varphi_n}f\to J_\varphi f$.

б) Достаточно установить равенство (3.12). Оно выполнено, так как

$$\mu_h(\delta)=\|E(\delta)h\|^2=\lim\|E(\delta)J_{\tilde\varphi_n}f\|^2=\lim\int_\delta|\tilde\varphi_n|^2\,d\mu_f=\int_\delta|\varphi|^2\,d\mu_f \quad ●$$

2. Займемся теперь перенесением на функции $\varphi\in S(Y,\ E)$ свойств интеграла (3.4) — (3.6). Прежде всего отметим, что $D_\varphi\subset D_\psi$, коль скоро*) $\varphi,\ \psi\in S(Y,\ E)$ и

$$|\psi(y)|\leqslant C(1+|\varphi(y)|) \qquad (E\text{-п.в.}). \tag{8}$$

---

*) Этот факт допускает обращение: если $D_\varphi\subset D_\psi$, то (8) выполнено с некоторой постоянной C.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi, \psi \in S(Y, E)$; $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$. *Тогда*

$$D(\alpha J_\varphi + \beta J_\psi) = D_\varphi \cap D_\psi, \tag{9}$$

$$\alpha J_\varphi + \beta J_\psi \subset J_{\alpha\varphi+\beta\psi}. \tag{10}$$

○ Равенство (9) имеет место по определению. Если $f \in D_\varphi \cap D_\psi$, то в силу (1) $\alpha\varphi + \beta\psi \in L_2(Y, \mu_f)$ вместе с φ, ψ. Пусть $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ M-сходятся соответственно к φ, ψ. Тогда $\alpha\varphi_n + \beta\psi_n \to \alpha\varphi + \beta\psi$ в метрике $L_2(Y, \mu_f)$. Из леммы 2, п.а), и из (3.4) получаем (10): $J_{\alpha\varphi+\beta\psi}f = \lim J_{\alpha\varphi_n+\beta\psi_n}f = \lim(\alpha J_{\varphi_n}f + \beta J_{\psi_n}f) = \alpha J_\varphi f + \beta J_\psi f$ ●

Теорема 4. *Пусть* $\varphi, \psi \in S(Y, E)$. *Тогда*

$$D(J_\varphi J_\psi) = D_{\varphi\psi} \cap D_\psi, \tag{11}$$

$$J_\varphi J_\psi \subset J_{\varphi\psi}. \tag{12}$$

○ Пусть $f \in D(J_\varphi J_\psi)$. Это означает, что $f \in D_\psi$ и $h = J_\psi f \in D_\varphi$. Последнее включение означает, что $f \in D_{\varphi\psi}$. Действительно, в силу леммы 2, п.б), $\int |\varphi\psi|^2 d\mu_f = \int |\varphi|^2 d\mu_h$. Этим доказано (11). Докажем (12). Пусть сначала φ ограничена и $\{\psi_n\}$ M-сходится к ψ. Тогда $\{\varphi\psi_n\}$ M-сходится к $\varphi\psi$, а потому при $f \in D_\psi$

$$J_\varphi J_\psi f = \lim J_\varphi(J_{\psi_n}f) = \lim J_{\varphi\psi_n}f = J_{\varphi\psi}f.$$

Пусть теперь $\varphi \in S(Y, E)$ и $\{\varphi_n\}$ M-сходится к φ. Заметим, что из $f \in D_\psi \cap D_{\varphi\psi}$ следует сходимость $\varphi_n\psi$ к $\varphi\psi$ в $L_2(Y, \mu_f)$. Но тогда в силу леммы 2, п.а),

$$J_\varphi J_\psi f = \lim J_{\varphi_n}(J_\psi f) = \lim J_{\varphi_n\psi}f = J_{\varphi\psi}f \quad ●$$

Замечание. Если в условиях теоремы 4

$$|\varphi| + |\psi| \leqslant C(1 + |\varphi\psi|), \tag{13}$$

то из (8) и (11) получаем, что $D(J_\varphi J_\psi) = D_{\varphi\psi} = D(J_\psi J_\varphi)$ и

$$J_\varphi J_\psi = J_\psi J_\varphi = J_{\varphi\psi}. \tag{14}$$

Аналогичным образом, если в условиях теоремы 3 $|\varphi| + |\psi| \leqslant C(1 + |\alpha\varphi + \beta\psi|)$, то включение (10) заменяется равенством.

Свойство (3.6) для неограниченных φ сохраняется:

Теорема 5. *Пусть* $\varphi \in S(Y, E)$. *Тогда* $D(J_\varphi^*) = D_\varphi$ *и*

$$J_\varphi^* = J_{\bar\varphi}. \tag{15}$$

○ Пусть $f, g \in D_\varphi (= D_{\bar\varphi})$. Из (5) и (1.12) находим

$$(f, J_{\bar\varphi}g) = \overline{(J_{\bar\varphi}g, f)} = \int \overline{\bar\varphi d\mu_{g,f}} = \int \varphi d\mu_{f,g} = (J_\varphi f, g),$$

т. е. $J_{\bar\varphi} \subset J_\varphi^*$. Обратно, пусть $g \in D(J_\varphi^*)$ и $h = J_\varphi^* g$. Тогда

$$(J_\varphi f, g) = (f, h) \quad (\forall f \in D_\varphi). \tag{16}$$

Положим, в частности, $f_n = J_{\bar\varphi_{[n]}} g$. Тогда $f_n \in D_\varphi$. Учитывая, что $\varphi\bar\varphi_{[n]} = |\varphi_{[n]}|^2$, находим из (12) и (16):

$$(f_n,\ h) = (J_\varphi J_{\bar\varphi_{[n]}} g,\ g) = (J_{|\varphi_{[n]}|^2} g,\ g) = \int |\varphi_{[n]}|^2 \, d\mu_g = \|f_n\|^2.$$

Следовательно, $\|f_n\| \leqslant \|h\|$, или, что то же самое,

$$\int |\varphi_{[n]}|^2 \, d\mu_g \leqslant \|h\|^2.$$

Но тогда и $\int |\varphi|^2 \, d\mu_g \leqslant \|h\|^2$, т.е. $g \in D_\varphi$ ●

Теорема 6. *Для любой функции* $\varphi \in S(Y,\ E)$ *оператор* J_φ *замкнут и нормален.*

○ Замкнутость вытекает из теоремы 3.3.2 (поскольку $J_\varphi = (J_{\bar\varphi})^*$), а нормальность — из (13), (14) (в силу неравенства $2|\varphi| \leqslant |\varphi|^2 + 1$) ●

Как и для ограниченных φ, оператор J_φ самосопряжен, если E-п.в. $\overline{\varphi(y)} = \varphi(y)$.

Операторные включения (10), (12) можно уточнить.

Теорема 7. *Пусть* $\varphi,\ \psi \in S(Y,\ E)$. *Тогда*

$$\overline{\alpha J_\varphi + \beta J_\psi} = J_{\alpha\varphi + \beta\psi}, \tag{17}$$

$$\overline{J_\varphi J_\psi} = \overline{J_\psi J_\varphi} = J_{\varphi\psi}. \tag{18}$$

○ Для определенности докажем второе из соотношений (18). Равенство (17) получается вполне аналогично. Теорема 6 вместе с (12) означает, что $J_{\varphi\psi}$ — замкнутое расширение $J_\psi J_\varphi$. Мы должны показать, что $D(J_\psi J_\varphi)$ плотно в смысле метрики графика в $D(J_{\varphi\psi}) = D_{\varphi\psi}$. Пусть $f \in D_{\varphi\psi}$ и $f_n = E(\delta_n) f$, где δ_n определены в (2). При доказательстве леммы 1 мы видели, что $f_n \in D_\varphi$ и $f_n \to f$. Далее, $J_\varphi f_n = J_\varphi J_{\chi_{\delta_n}} f = J_{\varphi_{[n]}} f$. Заметим, что $\psi\varphi_{[n]} \to \psi\varphi$ в $L_2(Y,\ \mu_f)$. Поэтому в силу леммы 2, п.а),

$$J_\psi J_\varphi f_n = J_\psi J_{\varphi_{[n]}} f = J_{\psi\varphi_{[n]}} f \to J_{\varphi\psi} f.$$

Мы убедились, что $f_n \in D(J_\psi J_\varphi)$, $f_n \to f$ и $J_\psi J_\varphi f_n \to J_{\varphi\psi} f$ ●

3. Рассмотрим вопрос о перестановочности с операторами J_φ.

Теорема 8. *а) Если оператор* $T \in \mathbf{B}(H)$ *перестановочен со спектральной мерой* E, *то он перестановочен с любым оператором* J_φ, $\varphi \in S(Y,\ E)$. *б) Подпространства* $H(\delta) = E(\delta) H$, $\delta \in \mathfrak{A}$, *приводят все операторы* J_φ.

○ а) Для любых $f,\ g \in H$, $\delta \in \mathfrak{A}$ имеем:

$$\mu_{Tf,g}(\delta) = (E(\delta) Tf,\ g) = (E(\delta) f,\ T^* g) = \mu_{f,T^*g}(\delta), \tag{19}$$

$$\mu_{Tf}(\delta) = \|E(\delta) Tf\|^2 = \|TE(\delta) f\|^2 \leqslant \|T\|^2 \mu_f(\delta). \tag{20}$$

Пусть теперь $\varphi \in S(Y,\ E)$ и $f \in D_\varphi$. Из (1) и (20) следует, что тогда и $Tf \in D_\varphi$. Согласно (19) и (5)

$$(J_\varphi Tf,\ g) = \int \varphi \, d\mu_{Tf,g} = \int \varphi \, d\mu_{f,T^*g} = (J_\varphi f,\ T^* g) = (TJ_\varphi f,\ g),$$

т. е. $T \smile J_\varphi$.

б) Требуемое вытекает из п. а) при $T = E(\delta)$ в силу теоремы 3.6.1 ●

Унитарная эквивалентность мер влечет унитарную эквивалентность соответствующих операторов J_φ:

Теорема 9. *Пусть E, E' — спектральные меры на $(Y, \mathfrak{A})$ в гильбертовых пространствах H, H'. Пусть V — унитарное отображение H на H', такое, что $VE(\delta) = E'(\delta)V$, $\forall\delta \in \mathfrak{A}$. Тогда $VJ_\varphi = J'_\varphi V$ при $\forall\varphi \in S(Y, E) = S(Y, E')$.*

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 8, п. а).

4. Обсудим «замену переменной» в интегралах J_φ. Точнее говоря, речь пойдет о преобразовании спектральной меры.

Пусть $(Y, \mathfrak{A}, H, E)$ — пространство со спектральной мерой, Z — некоторое множество, и пусть задано отображение π: $Y \to Z$, причем $\pi(Y) = Z$. Обозначим через $\mathfrak{A}'$ σ-алгебру подмножеств $\partial \subset Z$, таких, что $\pi^{-1}(\partial) \in \mathfrak{A}$. При $\partial \in \mathfrak{A}'$ положим $F(\partial) = E(\pi^{-1}(\partial))$. Тогда F — спектральная мера. Ниже используются обозначения вида μ_f^E, J_φ^F, смысл которых ясен. Из определения меры F вытекает, что

$$\mu_{f,g}^F(\partial) = \mu_{f,g}^E(\pi^{-1}(\partial)) \qquad (\partial \in \mathfrak{A}',\ f,\ g \in H). \tag{21}$$

Теорема 10. *Включения $\varphi \in S(Z, F)$ и $\varphi \circ \pi \in S(Y, E)$ равносильны*). При этом*

$$\int_Z \varphi\, dF = \int_Y (\varphi \circ \pi)\, dE. \tag{22}$$

○ Для любого множества $\Delta \in \mathfrak{A}^B(\mathbf{C})$ имеем

$$\pi^{-1}[\varphi^{-1}(\Delta)] = (\varphi \circ \pi)^{-1}(\Delta).$$

Стало быть, функция φ F-измерима в том и только том случае, если $\varphi \circ \pi$ E-измерима. Точно так же обстоит дело с п.в.-конечностью. Равенство

$$\int_Z |\varphi|^2\, d\mu_f^F = \int_Y |\varphi \circ \pi|^2\, d\mu_f^E$$

вытекает из (21) (при $g = f$) на основании формулы из § 1.5, п. 9. Оно показывает, что $D(J_\varphi^F) = D(J_{\varphi\circ\pi}^E)$. Равенство

$$\int_Z \varphi\, d\mu_{f,g}^F = \int_Y (\varphi \circ \pi)\, d\mu_{f,g}^E, \quad f \in D(J_\varphi^F),\ g \in H,$$

также следующее из (21), означает, что $(J_\varphi^F f, g) = (J_{\varphi\circ\pi}^E f, g)$. Этим установлено (22) ●

5. В заключение отметим, что если $(Y, \mathfrak{A}, H_k, E_k)$, $k = 1, 2$, — пространства со спектральной мерой и $H = H_1 \oplus H_2$, то

$$E(\delta) \overset{\text{def}}{=} E_1(\delta) \oplus E_2(\delta), \qquad \delta \in \mathfrak{A}, \tag{23}$$

есть спектральная мера в H. Интегралы J_φ^E по спектральной мере (23) очевидно допускают разложение

$$J_\varphi^E = \int \varphi\, dE = \int \varphi\, dE_1 \oplus \int \varphi\, dE_2 = J_\varphi^{E_1} \oplus J_\varphi^{E_2}. \tag{24}$$

---

*) Как обычно, $(\varphi \circ \pi)(y) \overset{\text{def}}{=} \varphi[\pi(y)]$.

ГЛАВА 6

СПЕКТРАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Для самосопряженных и унитарных операторов существуют представления в виде специальных интегралов по подходящей спектральной мере. Такие представления называют *спектральными разложениями*. Доказательство соответствующих *спектральных теорем* является основной целью этой главы.

§ 1. Формулировки спектральных теорем. Функции операторов

1. Пусть $Y=R$, E — спектральная мера в H, определенная на борелевских подмножествах в $\mathbf{R}$. В соответствии со сказанным в § 5.4 интеграл

$$A=\int_{\mathbf{R}} s\,dE(s) \tag{1}$$

представляет собой самосопряженный оператор в H с областью определения

$$D(A)=\left\{f\in H:\int s^2\,d\mu_f(s)<\infty\right\}. \tag{2}$$

Основным результатом спектральной теории является обращение этого факта: всякий самосопряженный оператор A в H допускает *спектральное разложение* вида (1). Точнее, справедлива следующая *спектральная теорема*.

Теорема 1. *Пусть A — самосопряженный оператор в H. Существует единственная спектральная мера $E=E_A$ в H, определенная на борелевских подмножествах в* $\mathbf{R}$, *такая, что выполнено* (1).

Подобное утверждение справедливо и для унитарных операторов, но теперь роль Y играет единичная окружность $\mathbf{T}$.

Теорема 2. *Пусть V — унитарный оператор в H. Существует единственная спектральная мера $F=F_V$, определенная на борелевских подмножествах в* $\mathbf{T}$, *такая, что*

$$V=\int_{\Gamma} z\,dF(z). \tag{3}$$

Доказательству теорем 1, 2 посвящены § 2, 3. Здесь мы рассмотрим предварительные вопросы, связанные с интегралами (1), (3). Для определенности будем говорить в основном об интегралах (1).

2. Разложение единицы. Спектральная мера на прямой тесно связана с проектор-функцией $E_s = E_s^A$, $s \in \mathbf{R}$:

$$E_s^A \overset{\text{def}}{=\!=} E_A(-\infty, s), \qquad s \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

Функция E_s (*разложение единицы*) удовлетворяет условиям:

$$E_s \leqslant E_t \quad \text{при} \quad s < t \qquad (\textit{монотонность}), \tag{5}$$

$$E_{-\infty} \overset{\text{def}}{=\!=} \operatorname*{s\text{-}lim}_{t \to -\infty} E_t = 0, \quad E_{+\infty} \overset{\text{def}}{=\!=} \operatorname*{s\text{-}lim}_{t \to \infty} E_t = I \qquad (\textit{полнота}), \tag{6}$$

$$\operatorname*{s\text{-}lim}_{t \to s-0} E_t = E_s \qquad (\textit{непрерывность слева}). \tag{7}$$

Справедливость (5) — (7) прямо следует из (5.1.3) и теоремы 5.1.2.

Каждому $f \in H$ можно сопоставить неубывающую функцию

$$\tilde{\mu}_f(s) = (E_s f, f). \tag{8}$$

Она непрерывна слева, $\tilde{\mu}_f(-\infty) = 0$, $\tilde{\mu}_f(+\infty) = \|f\|^2$. Функция $\tilde{\mu}_f$ связана с мерой (5.1.8) μ_f равенством

$$\mu_f[\alpha, \beta) = \tilde{\mu}_f(\beta) - \tilde{\mu}_f(\alpha), \qquad -\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant \infty. \tag{9}$$

Спектральная мера восстанавливается, если задана проектор-функция E_s, удовлетворяющая (5) — (7). Именно пусть $\mathfrak{A}^0$ — алгебра всевозможных конечных объединений промежутков $\delta = [\alpha, \beta)$, $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant \infty$. Функции μ_f вида (9) распространяются на $\mathfrak{A}^0$ по аддитивности; это распространение (см. § 1.3, п. 24) счетно-аддитивно. Функция $E^0(\delta) = E_\beta - E_\alpha$ поэтому также распространяется на $\mathfrak{A}^0$; в силу леммы 5.2.1 это распространение счетно-аддитивно. По теореме 5.2.3 E^0 продолжается до меры E на σ-алгебре $\mathfrak{A}(E)$ подмножеств в $\mathbf{R}$, заведомо содержащей все боролевские подмножества.

Отметим, что требования (5), (6) на E_s содержательны, в то время как (7) есть, по сути дела, условие нормировки *).

Точку $\lambda \in \mathbf{R}$ называют *точкой постоянства* функции E_s, если $E(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) = 0$ при некотором $\varepsilon > 0$. В противном случае λ — *точка роста* для E_s. Точки постоянства образуют открытое множество, точки роста — замкнутое. Множество точек роста функции E_s очевидно совпадает с носителем $\operatorname{supp} E$ соответствующей меры E (см. § 5.2, п. 4).

3. Спектр $\sigma(A)$ оператора A, определенного равенством (1), можно описать в терминах меры E_A (или, что то же, функции E_s^A). При этом обнаруживается довольно последовательная аналогия со случаем оператора умножения на независимую переменную, рассмотренным в § 4.7. (Причины такой аналогии вскрываются результатами § 7.5.)

Теорема 3. *Пусть* (1) — *спектральное разложение самосопряженного оператора* A. *Справедливы следующие утверждения.* 1. $\sigma(A) =$

---

*) Если вместо (4) принять $E_s = E(-\infty, s]$, то функция E_s окажется непрерывной справа.

$= \operatorname{supp} E_A$. 2. $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbf{R}\colon\ E_A\{\lambda\} \neq 0\}$; собственное подпространство для числа λ есть $H\{\lambda\} = E_A\{\lambda\}H$. 3. $\sigma_c(A)$ есть множество неизолированных точек в $\sigma(A)$.

○ 1. Из (1) и (5.4.4) следует, что

$$\|(A-\lambda)f\|^2 = \int (s-\lambda)^2\, d\mu_f(s), \qquad \forall f \in D(A). \tag{10}$$

Если $\lambda \bar{\in} \operatorname{supp} E_A$, то при некотором $\varepsilon_0 > 0$ будет $\mu_f(\lambda-\varepsilon_0, \lambda+\varepsilon_0) = 0$. Тогда из (10) следует $\|(A-\lambda)f\| \geqslant \varepsilon_0\|f\|$, а потому $\lambda \in \rho(A)$. Обратно, если $\lambda \in \operatorname{supp} E_A$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $f_\varepsilon \in E_A(\lambda-\varepsilon,\ \lambda+\varepsilon)H$, $f_\varepsilon \neq 0$. В (10) интегрирование сведется к интервалу $(\lambda-\varepsilon,\ \lambda+\varepsilon)$, а потому $\|(A-\lambda)f_\varepsilon\| < \varepsilon\|f_\varepsilon\|$ и $\lambda \in \sigma(A)$.

2. Из (10) следует, что $Af = \lambda f$ возможно при $f \neq 0$ в том и только том случае, когда $\mu_f\{\lambda\} \neq 0$, $\mu_f(\mathbf{R}\setminus\{\lambda\}) = 0$. Последнее означает, что $f = E_A\{\lambda\}f \in H\{\lambda\}$.

3. Положим $G_\lambda = H \ominus H\{\lambda\}$, A_λ — часть A в G_λ; если $\lambda \bar{\in} \sigma_p(A)$, то $G_\lambda = H$, $A_\lambda = A$. Пусть λ не изолирована в $\sigma(A)$. Тогда найдутся интервалы $\delta_n = (\lambda_n - \varepsilon_n,\ \lambda_n + \varepsilon_n)$, такие, что $\lambda \bar{\in} \delta_n$, $\lambda_n \to \lambda$, $\varepsilon_n \to 0$ и $E_A(\delta_n) \neq 0$. Пусть $f_n = E_A(\delta_n)f_n \neq 0$. Из (10) получаем, что $\|(A-\lambda)f_n\| \leqslant (|\lambda-\lambda_n| + \varepsilon_n)\|f_n\|$. Так как $f_n \in G_\lambda$, то $\lambda \in \sigma(A_\lambda)$. Это по определению означает, что $\lambda \in \sigma_c(A)$. Обратно, пусть λ — изолированная точка $\sigma(A)$. Для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ имеем $E_A(\lambda-\varepsilon_0,\ \lambda+\varepsilon_0)f = E_A\{\lambda\}f$. Если $f \in G_\lambda$, то $E_A\{\lambda\}f = 0$, а потому в силу 1 $\lambda \bar{\in} \sigma(A_\lambda)$. Последнее означает, что $\lambda \bar{\in} \sigma_c(A)$ ●

Замечания. 1) Из п. 1 теоремы 3 прямо следует, что интегрирование в (1), (2) можно вести лишь по спектру $\sigma(A)$. 2. Пусть $A = A^*$ полуограничен снизу, m_A — его точная нижняя граница. Положим $\lambda_0 = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$. Следствие 4.1.5 означает, что $m_A \leqslant \lambda_0$. С другой стороны, из (1) в соответствии с (5.4.6) получаем

$$(Af,\ f) = \int s\, d\mu_f(s) = \int_{s \geqslant \lambda_0} s\, d\mu_f(s) \geqslant \lambda_0 \|f\|^2,$$

т. е. $m_A \geqslant \lambda_0$. Таким образом,

$$m_A = \inf \lambda \qquad (\lambda \in \sigma(A)). \tag{11}$$

Аналогично верхняя грань полуограниченного сверху оператора $M_A = \sup\{\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$. 3) Если оператор $A = A^*$ ограничен, то $[m_A,\ M_A]$ есть наименьший промежуток, содержащий $\sigma(A)$. При этом

$$\|A\| = \max\{|m_A|,\ |M_A|\} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

4. Функции самосопряженного оператора. Рассмотрим введенные в § 5.3, 5.4 операторы вида J_φ, полагая $Y = \mathbf{R}$, $E = E_A$, $\varphi \in S(\mathbf{R},\ E)$. В связи с разложением (1) операторы J_φ в этом случае естественно интерпретируются как функции от оператора A. Именно

$$\varphi(A) \stackrel{\text{def}}{=} J_\varphi = \int \varphi(s)\, dE_A(s) \qquad (\varphi \in S(\mathbf{R},\ E)). \tag{12}$$

В соответствии со сказанным в § 5.3, 5.4 для функций оператора A справедливы следующие факты.

1°. Область определения $\varphi(A)$ плотна в H и задается формулой

$$D(\varphi(A))=\left\{f\in H: \int |\varphi(s)|^2 d\mu_f(s)<\infty\right\}. \tag{13}$$

2°. Ограниченность $\varphi(A)$ равносильна соотношению

$$\|\varphi(A)\|=E\text{-}\sup|\varphi(\lambda)|<\infty, \qquad \lambda\in\sigma(A). \tag{14}$$

3°. Оператор $\varphi(A)$ нормален и $[\varphi(A)]^*=\bar{\varphi}(A)$. Самосопряженность $\varphi(A)$ равносильна вещественности функции φ на $\sigma(A)$. Унитарность $\varphi(A)$ равносильна тому, что $|\varphi(\lambda)|=1$, $\lambda\in\sigma(A)$.

4°. Если $\varphi_1, \varphi_2\in S(\mathbf{R}, E)$ и $\varphi=\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2$, то $\varphi(A)\supset\alpha_1\varphi_1(A)+\alpha_2\varphi_2(A)$ и замыкание $\alpha_1\varphi_1(A)+\alpha_2\varphi_2(A)$ есть $\varphi(A)$.

5°. Если $\varphi_1, \varphi_2\in S(\mathbf{R}, E)$ и $\varphi=\varphi_1\varphi_2$, то

$$\varphi(A)=(\varphi_1\varphi_2)(A)\supset\varphi_1(A)\varphi_2(A), \tag{15}$$

$$D(\varphi_1(A)\varphi_2(A))=D(\varphi(A))\cap D(\varphi_2(A)) \tag{16}$$

и замыкание $\varphi_1(A)\varphi_2(A)$ есть $\varphi(A)$.

Существенно, что в тех случаях, когда функции от A могут быть определены непосредственно, такое определение согласовано с (12). Пусть, например, $\varphi_1(s)=s$, $\varphi_2(s)=s^{n-1}$, $n=1, 2, \ldots$, и пусть $\varphi=\varphi_1\varphi_2$. Поскольку $|s|^{n-1}\leqslant 1+|s|^n$, из (13) следует, что $D(\varphi_2(A))\supset D(\varphi(A))$. Поэтому (16) переходит в рассматриваемом случае в равенство $D(\varphi_1(A)\varphi_2(A))=D(\varphi(A))$. Вместе с (15) это означает, что

$$A^n f=A(A^{n-1}f), \quad f\in D(A^n)=\{g\in D(A^{n-1}): A^{n-1}g\in D(A)\}.$$

Мы пришли к прямому (индуктивному) определению натуральных степеней A. Основываясь на утверждениях 4°, 5°, легко убедиться, что прямое определение полиномов от A также согласовано с (12). Другой случай, когда прямое определение возможно, связан с обратным оператором. Пусть $z\in\mathbf{C}$, $z\,\overline{\in}\,\sigma_p(A)$ и пусть $\varphi_1(s)=(s-z)^{-1}$, $\varphi_2(s)=s-z$, $\varphi(s)=\varphi_1(s)\varphi_2(s)=1$. Из (16) в этом случае получаем, что $D(\varphi_1(A)\varphi_2(A))=D(\varphi_2(A))=D(A)$, а потому в силу (15)

$$\varphi_1(A)\varphi_2(A)f=\varphi_1(A)(A-zI)f=f, \qquad \forall f\in D(A). \tag{17}$$

Аналогично устанавливается, что $(A-zI)\varphi_1(A)g=g$ для всех $g\in D(\varphi_1(A))$. Вместе с (17) это показывает, что $\varphi_1(A)$ имеет смысл обратного к $A-zI$ оператора, который существует в силу условия $z\,\overline{\in}\,\sigma_p(A)$. Если при этом $z\in\sigma(A)$, то $(A-zI)^{-1}$ — неограниченный оператор. Если же $z\in\rho(A)$, то $(A-zI)^{-1}$ совпадает с резольвентой $\Gamma_z(A)$.

Легко понять, что прямое определение любой дробно-рациональной функции от A, которое возможно, если полюса дроби лежат вне $\sigma_p(A)$, согласовано с (12).

Заметим еще, что из (12) следует равенство

$$E_A(\delta)=\chi_\delta(A), \tag{18}$$

где χ_δ — характеристическая функция борелевского множества $\delta\subset\subset\mathbf{R}$. Равенство (18) не может служить для построения меры E_A по оператору A, поскольку оно само основано на разложениях (1) и (12). Однако любое доказательство теоремы 1 в конечном счете сводится к какому-либо способу «прямого» построения*) функции $\chi_\delta(A)$.

5. Сказанное в пп. 2—4 может быть с незначительными изменениями перенесено на унитарные операторы. Мы ограничимся лишь несколькими замечаниями.

С мерой F_V из (3) можно связать разложение единицы $F_t=F_t^V$, $t\in[0,\,2\pi)$, полагая $F_t=F_V(\delta_t)$, где $\delta_t=\{z=\exp(i\tau);\ 0\leqslant\tau<t\}$. Представление (3) принимает вид

$$V=\int_{[0,\,2\pi)}e^{it}\,dF_t. \tag{19}$$

Неубывающую функцию F_t можно доопределить для всех $t\in\mathbf{R}$, полагая $F_t=0$ при $t<0$, $F_t=I$ при $t\geqslant 2\pi$. При этом F_t оказывается непрерывной слева всюду, в том числе при $t=0$ и $t=2\pi$.

Характеристика точек спектра V в терминах F_t вполне аналогична случаю самосопряженного оператора. Следует лишь учесть преобразование $t\longmapsto z=\exp(it)$. Функции $\varphi\in S(\mathbf{T},\,F_V)$ порождают функции оператора V:

$$\varphi(V)=\int_{\mathbf{T}}\varphi(z)\,dF_V(z)=\int_{[0,\,2\pi)}\varphi(e^{it})\,dF_t. \tag{20}$$

Определение (20) согласовано с «прямым» определением $\varphi(V)$ в тех случаях, когда последнее возможно. В частности, это заведомо верно для «квазиполиномов»

$$p(V)=\sum\nolimits_{k=-n}^{n}c_kV^k \tag{21}$$

и для дробно-линейных функций от V, если соответствующий полюс не принадлежит $\sigma_p(V)$.

§ 2. Спектральная теорема для унитарных операторов

Теоремы 1.1, 1.2 сравнительно просто сводятся одна к другой. Мы начнем с доказательства теоремы 1.2, поскольку работа с ограниченными операторами несколько удобнее.

1. Доказательство теоремы 1.2 основано на анализе свойств операторов вида (1.21). Пусть p — соответствующий квазиполином:

$$p(z)=\sum\nolimits_{k=-n}^{n}c_kz^k,\qquad z\in\mathbf{C}. \tag{1}$$

---

*) Для ограниченных операторов наиболее последовательный путь состоит в приближении χ_δ полиномами. По этому поводу см. [16].

Для определенности считаем, что если в (1) $n>0$, то $|c_n|+|c_{-n}|>0$. Через p^+ будем обозначать функцию вида (1) с коэффициентами $\bar{c}_{-k}$. Ясно, что $p^+(z)=\overline{p(\bar{z}^{-1})}$ и потому

$$p^+(z)=\overline{p(z)}, \qquad z\in\mathbf{T}.$$

Множество всех функций вида (1), $n=0, 1, 2, \ldots$, обозначим через Ω. Мы будем опираться на следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть $p\in\Omega$ и $p(z)\geqslant 0$ при $z\in\mathbf{T}$. Тогда найдется функция $q\in\Omega$, такая, что $p=q^+q$.*

○ Из вещественности $p(z)$ при $z\in\mathbf{T}$ следует, что $\bar{c}_{-k}=c_k$ и $p^+=p$, т. е.

$$p(\bar{z}^{-1})=\overline{p(z)}, \qquad z\in\mathbf{C}. \tag{2}$$

Пусть w_j, $j=1, \ldots, 2n$, — корни полинома $z^n p(z)$. В силу (2) $\bar{w}_j^{-1}$ является корнем вместе с w_j, причем кратности их совпадают. Корни, лежащие на $\mathbf{T}$, имеют четную кратность. При надлежащей нумерации корней оказывается, что

$$z^n p(z)=c_n\prod\nolimits_{j=1}^{n}(z-w_j)\prod\nolimits_{j=1}^{n}(z-\bar{w}_j^{-1}), \qquad z\in\mathbf{C}.$$

Полагая $q(z)=\prod_1^n(z-w_j)$, получаем, что $p=Cq^+q$, где $C=(-1)^n c_n\prod_1^n\bar{w}_j^{-1}$. Из неотрицательности p на $\mathbf{T}$ следует, что $C>0$. Остается включить множитель $C^{1/2}$ в q ●

Для $p\in\Omega$ положим $M(p)=\max\{|p(z)|: z\in\mathbf{T}\}$. Множество Ω, снабженное нормой $M(\cdot)$, естественно вкладывается в банахово пространство $C(\mathbf{T})$. Это вложение плотно.

2. При фиксированном унитарном операторе V рассмотрим отображение $\mathfrak{j}$: $\Omega\to\mathbf{B}(H)$, полагая $\mathfrak{j}p=p(V)$. Отображение $\mathfrak{j}$ линейно и мультипликативно. Оно также инволютивно, т. е. $\mathfrak{j}p^+=(\mathfrak{j}p)^*$.

Лемма 2. *В условиях леммы* 1 $p(V)>0$.

○ Воспользуемся представлением $p=q^+q$. Тогда

$$p(V)=\mathfrak{j}p=\mathfrak{j}(q^+q)=\mathfrak{j}q^+\mathfrak{j}q=(\mathfrak{j}q)^*(\mathfrak{j}q)>0 \ ●$$

Лемма 3. *Для любого $p\in\Omega$*

$$\|p(V)\|\leqslant M(p). \tag{3}$$

○ Функция $p_1(z)=M^2(p)-p^+(z)p(z)$ принадлежит Ω и при $z\in\mathbf{T}$ неотрицательна. Стало быть,

$$p_1(V)=M^2(p)I-p^*(V)p(V)\geqslant 0,$$

что равносильно (3)●

3. Доказательство теоремы 1.2. Пусть V — унитарный оператор в H. Фиксируем элементы f, $g\in H$ и рассмотрим функционал

$$\Psi_{f,g}(p)=(p(V)f,\ g), \qquad p\in\Omega. \tag{4}$$

Функционал (4) — линейный функционал над Ω. Из (3) получаем оценку для его нормы: $\|\Psi_{f,g}\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$. По непрерывности функционал (4) распространяется на все пространство $C(\mathbf{T})$. Согласно теореме Рисса о представлении линейного функционала в C однозначно определяется комплексная борелевская мера $\mu_{f,g}$ на окружности $\mathbf{T}$, такая, что *)

$$(p(V)f, g) = \Psi_{f,g}(p) = \int p\, d\mu_{f,g} \qquad (\forall p \in \Omega). \tag{5}$$

При этом для любого подмножества $\delta \subset \mathbf{T}$

$$|\mu_{f,g}(\delta)| \leq |\mu_{f,g}|(\mathbf{T}) = \|\Psi_{f,g}\| \leq \|f\| \cdot \|g\|. \tag{6}$$

Из (5) при $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ получаем равенство

$$\int p\, d\mu_{f,g} = \alpha_1 \int p\, d\mu_{f_1,g} + \alpha_2 \int p\, d\mu_{f_2,g} = \int p\, d(\alpha_1\mu_{f_1,g} + \alpha_2\mu_{f_2,g}).$$

В силу биоднозначности соответствия между функционалами в $C(\mathbf{T})$ и мерами отсюда следует, что *функционал* $\mu_{f,g}(\delta)$ *линеен по* f. Точно так же устанавливается, что он *антилинеен по* g. Вследствие (6) он ограничен. По теореме 2.4.6 функционал $\mu_{f,g}(\delta)$ однозначно определяет оператор $F(\delta) \in \mathbf{B}(H)$, такой, что

$$\mu_{f,g}(\delta) = (F(\delta)f, g), \tag{7}$$

причем $\|F(\delta)\| \leq 1$. Обсудим свойства операторов $F(\delta)$. При $f = g$ условимся писать μ_f вместо $\mu_{f,g}$. Из равенств

$$\int p\, d\mu_f = (p(V)f, f) = \overline{(p^+(V)f, f)} = \overline{\int p^+\, d\mu_f} = \int p\, d\bar{\mu}_f$$

следует, что квадратичная форма $(F(\delta)f, f) = \mu_f(\delta)$ вещественна, а потому $F(\delta)$ *самосопряжен.*

Далее, пусть $p, q \in \Omega$; $f, g \in H$. Тогда

$$\int pq\, d\mu_{f,g} = (p(V)\, q(V) f, g) = \int p\, d\mu_{q(V)f,g}.$$

Следовательно, для любого $\delta \subset \mathbf{T}$

$$\int q\chi_\delta\, d\mu_{f,g} = \int_\delta q\, d\mu_{f,g} = \mu_{q(V)f,g}(\delta).$$

Используя для правой части представление (5), найдем

$$\mu_{q(V)f,g}(\delta) = (q(V)f, F(\delta)g) = \int q\, d\mu_{f,F(\delta)g}.$$

Поэтому для любого $\partial \subset \mathbf{T}$ имеем $\mu_{f,F(\delta)g}(\partial) = \mu_{f,g}(\delta \cap \partial)$, т. е. $(F(\delta)F(\partial)f, g) = (F(\partial \cap \delta)f, g)$. Принимая здесь $\partial = \delta$, получаем $F^2(\delta) = F(\delta)$. По теореме 2.8.1 отсюда следует, что $F(\delta)$ — *ортогональный проектор.* Полагая в (5) $p = 1$, находим, что

$$(F(\mathbf{T})f, g) = \int d\mu_{f,g} = (f, g),$$

т. е. $F(\mathbf{T}) = I$. Проекторы $F(\delta)$ определяют собой борелевскую *спектральную меру.* Действительно, осталось отметить счетную

*) Интеграл без указания области предполагает интегрирование по $\mathbf{T}$. Через δ, ∂ обозначаются борелевские подмножества $\mathbf{T}$.

аддитивность, которая в силу (7) следует из счетной аддитивности мер μ_f.

Покажем, что построенная спектральная мера F связана с оператором V равенством (1.3). В самом деле, если $p(z)=z$, то $\mathrm{j}p=V$, и равенство (5) в сочетании с (5.3.8) дает

$$(Vf, g)=\int z\, d\mu_{f,g}(z)=\left(\int z\, dF(z) f, g\right).$$

Это и означает, что (1.3) выполнено. Осталось доказать единственность представления (1.3) для V. Здесь достаточно заметить, что из (1.3) следует (см. § 1, п. 5) представление (5), (7) для $(p(V)f, g)$. Поэтому билинейная форма оператора $F(\delta)$ определяется оператором V однозначно. Теорема 1.2 полностью доказана.

4. Отметим, что наряду с (1.3) имеют место равенства

$$V^n=\int z^n\, dF_V(z), \quad \forall n\in \mathbf{Z}, \tag{8}$$

т. е. мера F_V осуществляет спектральное представление группы степеней унитарного оператора V. В терминах разложения единицы F_t^V можно записать (8) в виде

$$V^n=\int_{[0,2\pi)} e^{int} dF_t^V, \quad \forall n\in \mathbf{Z}. \tag{9}$$

5. В заключение отметим следующий простой факт.

Теорема 4. *Для того чтобы оператор $M\in \mathbf{B}(H)$ был перестановочен с унитарным оператором V, необходимо и достаточно, чтобы он был перестановочен со спектральной мерой F_V.*

○ Достаточность прямо следует из теоремы 5.4.8. Докажем необходимость. Если $M \smile V$, то $M \smile V^{-1}$, а потому $M \smile p(V)$, $p\in \Omega$. Отсюда и из (5) имеем

$$\int p\, d\mu_{Mf,g}=(p(V)Mf, g)=(p(V)f, M^*g)=\int p\, d\mu_{f,M^*g},$$

а потому для любого $\delta\subset \mathbf{T}$

$$(F(\delta)Mf, g)=\mu_{Mf,g}(\delta)=\mu_{f,M^*g}(\delta)=(F(\delta)f, M^*g)=(MF(\delta)f, g) \quad ●$$

Из теорем 4 и 5.4.8 очевидно следует, что при $M \smile V$ для любого оператора $\varphi(V)$ вида (1.20) $M \smile \varphi(V)$.

§ 3. Спектральная теорема для самосопряженных операторов

В этом параграфе доказывается теорема 1.1. С помощью преобразования Кэли она сводится к теореме 1.2.

1. Пусть A — самосопряженный оператор в H, V — его преобразование Кэли (4.3.1), соответствующее значению параметра $\lambda=i$:

$$V=(A-iI)(A+iI)^{-1}. \tag{1}$$

Оператор V унитарен. Оператор A восстанавливается по V с помощью равенства (см. (4.3.5))

$$A=-i(V+I)(V-I)^{-1}, \quad D(A)=R(V-I). \tag{2}$$

Пусть F_V — спектральная мера для V. Как отмечалось в § 4.3, п. 2, $1 \overline{\in} \sigma_p(V)$; это условие означает, что $F_V\{1\}=0$. Полюс дробно-линейной функции, соответствующей (2), не принадлежит $\sigma_p(V)$, а потому

$$A=\int_{\mathbf{T}} \psi\, dF_V, \quad \psi(z)=-i(z+1)(z-1)^{-1}. \tag{3}$$

Последнее равенство включает совпадение областей определения: $D(A)=D_\psi$. Если F_t^V — разложение единицы, отвечающее V, то (3) можно переписать в виде

$$A=-\int_{[0,2\pi)} \operatorname{ctg}(t/2)\, dF_t^V. \tag{4}$$

Пусть E_s — разложение единицы, определяемое формулой

$$E_s=F_t^V, \quad s=-\operatorname{ctg} t/2. \tag{5}$$

Условия (1.5)—(1.7) для E_s очевидно выполнены. Поясним лишь, что $\lim\limits_{s\to-\infty} E_s=\lim\limits_{t\to+0} F_t^V=F_0^V=0$ в силу того, что $1 \overline{\in} \sigma_p(V)$. Если в (4) формально сделать замену $s=-\operatorname{ctg}(t/2)$, то с учетом (5) получим требуемое интегральное представление для A. Эту выкладку нетрудно обосновать, переходя к билинейным формам. Такое обоснование, однако, уже проводилось в более общей обстановке в § 5.4, п. 4, и мы можем прямо сослаться на формулу (5.4.22). В самом деле, функция ψ из (3) биоднозначно отображает $\mathbf{T}\setminus\{1\}$ на $\mathbf{R}$. Каждому борелевскому множеству $\delta\subset\mathbf{R}$ сопоставим проектор

$$E(\delta)=F(\psi^{-1}(\delta)). \tag{6}$$

Спектральная мера E соответствует разложению единицы (5). Применяя к (3) формулу (5.4.22), получаем

$$A=\int_{\mathbf{R}} s\, dE(s). \tag{7}$$

Тем самым получено спектральное представление для A. Спектральная мера $E=E_A$, определенная в (6) по $F=F_V$, единственна. Действительно, из (7) и (1) следует, что

$$V=\int_{\mathbf{R}} \varphi(s)\, dE(s), \quad \varphi(s)=(s-i)(s+i)^{-1}. \tag{8}$$

Функция φ обращает отображение ψ. Поэтому от (8) можно перейти к (1.3), определяя F_V по E_A в соответствии с (6). Поскольку мера F_V единственна, то в силу (6) единственна и мера $E=E_A$. Теорема 1.1 доказана.

2. Обсудим подробнее интегральное представление резольвенты $\Gamma_z(A)$ самосопряженного оператора A. Это представление, уже упоминавшееся в § 1, имеет вид

$$\Gamma_z(A)=(A-zI)^{-1}=\int_{\sigma(A)} (s-z)^{-1}\, dE_A(s), \quad z \overline{\in} \sigma_p(A). \tag{9}$$

Для регулярных точек z формула (1.14) приводит к полезному равенству

$$\|\Gamma_z(A)\|=[\min\{|z-s|: s\in\sigma(A)\}]^{-1}, \quad z\in\rho(A).$$

Напомним, что при $z \in \rho(A)$ резольвента является аналитической функцией (см. теорему 3.7.6). Изолированные точки спектра оператора A суть изолированные особые точки резольвенты. Пусть λ — такая точка. Вытекающее из (9) равенство

$$\Gamma_z(A) = (\lambda - z)^{-1} E_A\{\lambda\} + \int_{\sigma(A)\setminus\{\lambda\}} (s-z)^{-1} dE_A(s) \tag{10}$$

дает разложение резольвенты в окрестности точки λ на главную и регулярную части. Из (10) видно, что для самосопряженного оператора каждая изолированная точка спектра есть простой полюс резольвенты. Аналогичный факт справедлив для унитарных и вообще для любых нормальных операторов.

В соответствии с (5.4.5)

$$(\Gamma_z(A)f, g) = \int_{\sigma(A)} (s-z)^{-1} d\mu_{f,g}(s).$$

Таким образом, вне спектра функция $(\Gamma_z(A)f, g)$ представлена интегралом Коши-Стилтьеса. Формула обращения Стилтьеса (см. [20]) позволяет теперь выразить разложение единицы оператора A через резольвенту. В результате получается следующее важное соотношение:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}[(E_\lambda^A f, g) + (E_{\lambda+0}^A f, g)] = \\ = \lim_{y\to+0} \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\lambda} [(\Gamma_{x+iy}(A)f, g) - (\Gamma_{x-iy}(A)f, g)]\, dx \quad (\forall \lambda \in \mathbf{R}).\end{gathered} \tag{11}$$

В частности, при $\lambda \,\overline{\in}\, \sigma_p(A)$ (11) дает представление для $(E_\lambda^A f, g)$.

3. **Теорема 2.** *Для того чтобы оператор $M \in \mathbf{B}(H)$ был перестановочен с самосопряженным оператором A, необходимо и достаточно, чтобы M был перестановочен со спектральной мерой E_A.*

○ Достаточность следует из теоремы 5.4.8. С другой стороны, из $M \smile A$ элементарно получается $M \smile \Gamma_z(A)$. В силу (1) $V = I - 2i\Gamma_{-i}(A)$, а потому $M \smile V$. По теореме 2.4 $M \smile F_V$. Соотношение (6) показывает, что тогда и $M \smile E_A$ ●

Из доказанного следует, что $M \smile A$ влечет за собой $M \smile \varphi(A)$ для любых операторов вида (1.12).

Теорема 2 дает основание распространить определение перестановочности $M \smile A$ с самосопряженным оператором A на случай, когда A — неограниченный: будем говорить, что $M \smile A$, если $M \smile E_A$. Теорема 2 означает, что для $M \in \mathbf{B}(H)$ это определение согласуется с основным.

Для случая, когда M также самосопряжен, из принятого определения вытекает, что *перестановочность самосопряженных операторов равносильна перестановочности их спектральных мер.*

§ 4. Спектральное разложение однопараметрической унитарной группы

1. В § 2, п. 4, отмечено, что из (1.3) вытекает спектральное представление (2.9) для группы целых степеней унитарного оператора. Это утверждение имеет континуальный аналог. Пусть для

$\forall x \in \mathbf{R}$ определен унитарный оператор $U(x)$, причем

$$U(x_1+x_2)=U(x_1)U(x_2), \quad \forall x_1,\ x_2 \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

$$\underset{x \to x_0}{s\text{-lim}}\, U(x)=U(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Из (1) следует, что операторы $U(x)$ попарно перестановочны, $U(0)=I$ и $U(-x)=U(x)$. Таким образом, $U(x)$ — однопараметрическая непрерывная коммутативная унитарная группа. Отметим, что в силу (1) условие (2) достаточно проверять в одной точке, например при $x_0=0$. Наконец, в (2) можно заменить s-lim на w-lim.

Если E — спектральная мера на борелевских множествах в $\mathbf{R}$, то

$$U(x)=\int_{\mathbf{R}} e^{ixs}\, dE(s), \quad x \in \mathbf{R}, \tag{3}$$

очевидно представляет собой унитарную группу. Из теоремы 5.3.2 следует, что группа (3) сильно непрерывна. Докажем, что представление (3) справедливо для всякой непрерывной унитарной группы.

Теорема 1. *Пусть $U(x)$ — однопараметрическая непрерывная унитарная группа. В H существует единственная спектральная мера E, определенная на борелевских множествах в* $\mathbf{R}$, *такая, что имеет место представление* (3).

Заметим, что (3) можно записать в виде $U(x)=\exp(iAx)$, где A — самосопряженный оператор, построенный по мере E в соответствии с (1.1). Оператор A называется *производящим* для группы $U(x)$. Он может быть построен прямо*) по группе $U(x)$ без обращения к мере E. Это дает путь к выводу представления (3) из теоремы 1.1. Мы, однако, докажем теорему 1 иначе, сводя ее с помощью предельного перехода к теореме 1.2.

2. Воспользуемся представлением (1.3) для унитарного оператора $U(x)$ (при фиксированном $x>0$). Пусть $F^{(x)}$ — соответствующая мера в (1.3). «Пересадим» ее на промежуток $\Delta(x)=[-\pi x^{-1}, \pi x^{-1})$ с помощью замены переменной $z \longmapsto s$, $z=\exp(ixs)$, $s \in \Delta(x)$. Полученную меру $E^{(x)}$ доопределим нулем на $\mathbf{R} \diagdown \Delta(x)$. Тогда

$$U(x)=\int e^{isx}\, dE^{(x)}(s)=\int_{\Delta(x)} e^{isx}\, dE^{(x)}(s), \tag{4}$$

причем мера $E^{(x)}$ с носителем на $\Delta(x)$ в представлении (4) единственна. При целом k из (4) следует

$$U(kx)=U^k(x)=\int_{\Delta(x)} e^{iksx}\, dE^{(x)}(s), \quad k=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \tag{5}$$

Сравнивая (5) при $k=2$ с (4) при $x \longmapsto 2x$, находим, что

$$E^{(2x)}(\delta)=E^{(x)}(\delta)+E^{(x)}(\delta'), \quad \delta \subset \Delta(2x), \tag{6}$$

где $\delta' \subset \Delta(x) \diagdown \Delta(2x)$ состоит из точек, сравнимых с точками $s \in \delta$ по модулю πx^{-1}.

---

*) Некоторые указания на этот счет см. в § 8.2, п. 2_1 в связи с абстрактным уравнением Шредингера.

Пусть теперь p — натуральное число, $x=2^{-p}$; обозначим $\Delta(x)=\Delta_p$, $E^{(x)}=E^p$. Из (6) следует, что

$$E^{p+1}(\delta)\leqslant E^p(\delta),\quad \delta\subset\Delta_p. \tag{7}$$

Поэтому для всякого ограниченного $\delta\subsetneq\mathbf{R}$ проекторы $E^p(\delta)$ не возрастают при $p\geqslant\bar p=\bar p(\delta)$. В соответствии с теоремой 2.8.6 существует предельный проектор

$$E(\delta)=s\text{-}\lim_{p\to\infty}E^p(\delta). \tag{8}$$

Убедимся, что такой предел существует для любых (не только ограниченных) борелевских множеств. Будем исходить из следующей леммы, доказательство которой отложим до п. 4.

Лемма 2. *Для $f\in H$ по всякому $\varepsilon>0$ найдутся числа $p_0=p_0(f,\varepsilon)$, $L=L(f,\varepsilon)$, такие, что*

$$\|E^p(\mathbf{R}\setminus[-L,L])f\|\leqslant\varepsilon\qquad(p\geqslant p_0). \tag{9}$$

Положим $\delta_L=\delta\cap[-L,L]$. Тогда для заданного $f\in H$

$$\|E^p(\delta)f-E^q(\delta)f\|\leqslant\|E^p(\delta_L)f-E^q(\delta_L)f\|+\\+\|E^p(\mathbf{R}\setminus\delta_L)f\|+\|E^q(\mathbf{R}\setminus\delta_L)f\|. \tag{10}$$

В силу (9) последние два слагаемых можно сделать малыми за счет выбора L, а затем при фиксированном L воспользоваться сильной сходимостью $E^p(\delta_L)$. Таким образом, предел (8) существует для любых борелевских $\delta\subset\mathbf{R}$.

Установим теперь, что *равенство* (8) *определяет спектральную меру*. Конечная аддитивность E очевидна. Нормальность *) функции E на последовательностях ограниченных множеств δ_n прямо следует из неравенства $E(\delta_n)\leqslant E^p(\delta_n)$, вытекающего из (7). На последовательности неограниченных множеств нормальность легко переносится с помощью (9). Свойство полноты $E(\mathbf{R})=I$ следует из (8), поскольку $E^p(\mathbf{R})=I$.

3. Пусть теперь элемент $f\in H$ удовлетворяет условию

$$E(\Delta)f=f,\qquad \Delta=(-N,N) \tag{11}$$

при некотором $N>0$. Если p таково, что $\Delta\subset\Delta_p$, то $E(\delta)\leqslant E^p(\delta)$ для $\delta\subset\Delta$, а следовательно,

$$E(\delta)=E^p(\delta)E(\delta),\qquad \delta\subset\Delta\subset\Delta_p. \tag{12}$$

Используя (12) для множеств δ и $\Delta\setminus\delta$, из (11) получаем

$$E^p(\delta)f=E^p(\delta)E(\delta)f+E^p(\delta)E(\Delta\setminus\delta)f=\\=E(\delta)f+E^p(\delta)E^p(\Delta\setminus\delta)E(\Delta\setminus\delta)f=E(\delta)f. \tag{13}$$

---

*) В соответствии с леммой 5.2.2 нормальность влечет за собой счетную аддитивность функции E.

Соотношение (13) вместе с (11) позволяет применить представление (5) при $x = 2^{-p}$, $2^p\pi > N$:

$$U(2^{-p}k) f = \int \exp(i2^{-p}ks)\, dE(s) f, \qquad k \in \mathbf{Z}. \tag{14}$$

Мы видим, что $U(x)$ определяется формулой (3) для всех двоично-рациональных $x \in \mathbf{R}$ на рассматриваемом элементе f. Сильная непрерывность группы $U(x)$ позволяет распространить это представление на все $x \in \mathbf{R}$. Поскольку элементы вида (11) плотны в H, мы получаем для $U(x)$ представление (3) с мерой E, определенной в (8). Убедимся в единственности представления (3). С этой целью заметим, что сравнение (3) с (4) приводит к соотношению

$$E^{(x)}(\delta) = \sum\nolimits_{k \in \mathbf{Z}} E\{s : s - 2k\pi x^{-1} \in \delta\}, \qquad \delta \subset \Delta(x). \tag{15}$$

Из (15) легко следует (8), во всяком случае для ограниченных $\delta \subset \mathbf{R}$. Этим установлена единственность меры E в (3).

4. Доказательство леммы 2. Для $f \in H$ в силу (2) по $\varepsilon > 0$ найдется номер $r > 0$, такой, что

$$\| U(x) f - f \|^2 \leqslant \varepsilon^2 \qquad (0 < x \leqslant 2^{-r}). \tag{16}$$

Положим $p_0 = r + 2$, $L = 2^r\pi$. Пусть $p \geqslant p_0$, $k = 1, \ldots, 2^{p-r}$. Неравенство (16) при $x = 2^{-p}k$ означает, что

$$2\int_{\Delta_p} (1 - \cos 2^{-p}ks)\, d\mu_f^p(s) \leqslant \varepsilon^2. \tag{17}$$

Просуммируем неравенства (17) по k от 1 до $l = 2^{p-r}$. Пользуясь известным выражением для суммы $\sum_1^l \cos k\alpha$, получаем

$$\int_{\Delta_p} \left[l + \frac{1}{2} - \frac{\sin(l + 1/2)\, 2^{-p}s}{2 \sin 2^{-(p+1)}s} \right] d\mu_f^p(s) \leqslant \frac{l\varepsilon^2}{2}. \tag{18}$$

Оценка (18) только усилится, если интегрировать по области $L < |s| \leqslant 2^p\pi$. При таких значениях s

$$|2l \sin 2^{-(p+1)}s| \geqslant 4\pi^{-1} l 2^{-(p+1)} L = 2.$$

Поэтому дальнейшее огрубление оценки (18) дает

$$\int_{|s| > L} d\mu_f^p(s) \leqslant \varepsilon^2,$$

что равносильно (9). Лемма 2 (а с ней и теорема 1) доказана.

5. Введенная в п. 1 унитарная группа $U(x)$ является *представлением аддитивной группы* $\mathbf{R}$. Формула (3) осуществляет разложение этого представления на неприводимые. Аналогичное разложение имеет место для унитарного представления любой локально-компактной абелевой группы. Соответствующая спектральная мера определена на борелевских подмножествах двойственного объекта — *группы характеров*. Полное изложение этих вопросов читатель найдет, например, в [11].

§ 5. Совместное спектральное разложение нескольких перестановочных самосопряженных операторов

1. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — попарно коммутирующие самосопряженные операторы, $E_1, \ldots, E_n$ — соответствующие им (в смысле теоремы 1.1) спектральные меры. В согласии со сказанным в п. 3.3, перестановочность операторов A_k означает попарную перестановочность мер E_k, $k=1, \ldots, n$. Теорема 5.2.6 дает возможность определить в $\mathbf{R}^n$ борелевскую спектральную меру E — произведение мер $E_1, \ldots, E_n$. В результате мы приходим к представлению всех операторов A_k в виде интегралов по одной и той же спектральной мере. Точнее, справедлива следующая теорема о спектральном разложении.

Теорема 1. *Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — попарно перестановочные самосопряженные операторы в H. Существует единственная спектральная мера E в H, определенная на борелевских подмножествах в $\mathbf{R}^n$, такая, что*

$$A_k = \int_{\mathbf{R}^n} s_k \, dE(s), \qquad k=1, \ldots, n. \tag{1}$$

2. Доказательству теоремы 1 предпошлем лемму.

Лемма 2. *Пусть Y_1, Y_2 — полные сепарабельные метрические пространства, $Y = Y_1 \times Y_2$; E_1, E_2 — перестановочные борелевские спектральные меры на Y_1, Y_2 в одном и том же гильбертовом пространстве H; E — произведение мер E_1, E_2. Пусть $\varphi \in S(Y_1, E_1)$. Тогда функция $\tilde{\varphi}(y_1, y_2) = \varphi(y_1)$ принадлежит классу $S(Y, E)$ и*

$$\int_Y \tilde{\varphi} \, dE = \int_{Y_1} \varphi \, dE_1. \tag{2}$$

○ Воспользуемся теоремой 5.4.10. Пусть π_1: $Y \to Y_1$ — естественная проекция: $\pi_1(y_1, y_2) = y_1$. Тогда $\pi_1^{-1}(\delta) = \delta \times Y_2$ для любого $\delta \subset Y_1$. В соответствии с (5.2.11) $E_1(\delta) = E(\pi_1^{-1}(\delta))$. Следовательно, E-измеримость $\tilde{\varphi}$ равносильна E_1-измеримости φ, и равенство (5.4.22) приводит к (2) ●

Доказательство теоремы 1. Для упрощения записи ограничимся случаем $n=2$. Пусть E_1, E_2 — спектральные меры операторов A_1, A_2, E — произведение мер E_1, E_2. Тогда E — борелевская мера на $\mathbf{R}^2$. В силу леммы 2

$$A_1 = \int_{\mathbf{R}} s_1 \, dE_1(s_1) = \int_{\mathbf{R}^2} s_1 \, dE(s).$$

Аналогичное равенство справедливо для A_2. Остается установить единственность меры E. Пусть E — мера в представлении (1) (при $n=2$). Для $\delta \subset \mathbf{R}$ определим борелевскую меру E' равенством

$$E'(\delta) = E(\delta \times \mathbf{R}). \tag{3}$$

Тогда по теореме 5.4.10 $A_1 = \int_{\mathbf{R}} s \, dE'(s)$; следовательно, $E' = E_1$ и (3) совпадает с (5.2.11). Точно так же из (1) вытекает равенство (5.2.12), и дело сводится к единственности меры E в теореме 5.2.6 ●

3. Рассмотрим носитель $\operatorname{supp} E$ спектральной меры E, фигурирующей в теореме 2. Напомним (см. § 5.2, п. 4), что точка $\lambda \in \in \mathbf{R}^n$ принадлежит носителю, если любой шар $|s-\lambda|<\varepsilon$, $\varepsilon>0$, имеет ненулевую E-меру. Теорема 1.3 дает повод к тому, чтобы называть $\operatorname{supp} E$ *совместным спектром* системы операторов $A_1, \ldots, A_n$. Совместный спектр обозначается через $\sigma(A_1, \ldots, A_n)$. Естественность понятия совместного спектра подтверждает следующий результат.

Теорема 3. *Точка $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ принадлежит $\sigma(A_1, \ldots, A_n)$ в том и только том случае, если по любому $\varepsilon>0$ найдется элемент $f \in \bigcap_1^n D(A_k)$, $f=f_\varepsilon \neq 0$, такой, что*

$$\|A_k f-\lambda_k f\|<\varepsilon\|f\|, \qquad k=1, \ldots, n. \tag{4}$$

○ Пусть $\lambda \in \sigma(A_1, \ldots, A_n)$. Выберем $\varepsilon>0$ и положим $\partial_\varepsilon = \{s \in \mathbf{R}^n : |s-\lambda|<\varepsilon\}$. Тогда $E(\partial_\varepsilon) \neq 0$ и для $f \in E(\partial_\varepsilon) H$, $f \neq 0$, мера μ_f сосредоточена на ∂_ε. Следовательно, $f \in D(A_k)$ и

$$\|A_k f-\lambda_k f\|^2=\int_{\partial_\varepsilon}|s_k-\lambda_k|^2 d\mu_f(s)<\varepsilon^2\|f\|^2, \quad k=1, \ldots, n.$$

Обратно, пусть $\lambda \overline{\in} \sigma(A_1, \ldots, A_n)$. Выберем $\varepsilon>0$ так, чтобы $E(\partial_{\varepsilon\sqrt{n}})=0$. Тогда для любого $f \in \bigcap_1^n D(A_k)$

$$\begin{gathered}\sum_1^n\|(A_k-\lambda_k) f\|^2=\sum_1^n \int_{\mathbf{R}^n}|s_k-\lambda_k|^2 d\mu_f(s)= \\ =\int_{\mathbf{R}^n \setminus \partial_{\varepsilon\sqrt{n}}}|s-\lambda|^2 d\mu_f(s) \geqslant n\varepsilon^2\|f\|^2,\end{gathered}$$

что исключает (4) ●

Отметим, что $\sigma(A_1, \ldots, A_n)$ содержится в прямом произведении спектров $\sigma(A_1) \times \ldots \times \sigma(A_n)$, но не обязательно с ним совпадает. Например, если $n=2$ и $A_1=A_2=A$, то совместный спектр есть «диагональ»: $\sigma(A_1, A_2)=\{\lambda \in \mathbf{R}^2 : \lambda_1=\lambda_2 \in \sigma(A)\}$.

Теорему 3 можно дополнить следующим утверждением, проверку которого мы предоставляем читателю.

Теорема 4. *Соотношение $E\{\lambda\} \neq 0$, $\lambda \in \mathbf{R}^n$, равносильно наличию общего собственного элемента: $A_k f=\lambda_k f$, $f \neq 0$, $k=1, \ldots, n$. При этом $E\{\lambda\} H$ совпадает с пересечением собственных подпространств $E_k\{\lambda_k\} H$ операторов A_k.*

Операторы вида $J_\varphi=\int \varphi dE$ естественно интерпретируются как функции $\varphi(A_1, \ldots, A_n)$ коммутирующих самосопряженных операторов $A_1, \ldots, A_n$. По поводу этого определения можно повторить бо́льшую часть сказанного в § 1, п. 4, о функциях одного оператора.

Следующее утверждение, обобщающее теорему 3.2, легко из нее выводится.

Теорема 5. *Для того чтобы оператор $M \in \mathbf{B}(H)$ был перестановочен с попарно коммутирующими самосопряженными операторами*

$A_1, \ldots, A_n$, *необходимо и достаточно, чтобы* M *был перестановочен со спектральной мерой* E, *определенной в теореме* 1.

○ По теореме 3.2 $M \smile E_{A_1}, \ldots, E_{A_n}$, а потому M перестановочен и с их произведением — мерой E ●

3. Отметим, что справедлив аналог теоремы 1 для попарно перестановочных унитарных операторов $V_1, \ldots, V_n$. Спектральная мера в этом случае задается на борелевских подмножествах n-мерного тора. Не представляет затруднений и система попарно перестановочных самосопряженных и унитарных операторов $A_1, \ldots$ $\ldots, A_n, V_1, \ldots, V_m$ (случай $n=m=1$ встретится в § 6). С другой стороны, теорема 1 допускает распространение на бесконечные последовательности попарно перестановочных самосопряженных операторов. Однако обсуждение этого вопроса выходит за рамки настоящей книги.

§ 6. Спектральное разложение нормального оператора

Спектральное разложение, аналогичное формулам (1.1), (1.3), имеет место для произвольного нормального оператора. Оно содержит в себе (1.1), (1.3) как частные случаи, из которых, впрочем, выводится. При выводе мы будем опираться на теорему 5.2.6 о произведении мер, а также на теорему 8.1.4 о полярном представлении нормального оператора. В этой связи при чтении настоящего параграфа следует ознакомиться с § 8. 1.

1. Теорема 1. *Пусть* T — *нормальный оператор в* H. *Существует единственная спектральная мера* $E=E_T$, *определенная на борелевских подмножествах в* $\mathbf{C}$, *такая, что*

$$T=\int_{\mathbf{C}} z\,dE_T(z). \tag{1}$$

○ Предположим сначала, что $N(T)=\{0\}$. В полярном представлении (8.1.4) оператора $T=V|T|$ операторы $K=|T|$ и V перестановочны. Кроме того, $N(T^*)=N(T)=\{0\}$, оператор V унитарен, $K=K^*>0$ и $0 \overline{\in} \sigma_p(K)$. Спектральная мера E_K оператора K сосредоточена на $\mathbf{R}_+$, причем $E_K\{0\}=0$. Спектральная мера F_V унитарного оператора V определена на борелевских подмножествах единичной окружности $\mathbf{T}$. Меры E_K, F_V перестановочны, что следует из $K \smile V$. Их произведение $\tilde{E}$ представляет собой борелевскую меру на $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{T}$.

Обозначим через π: $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{T} \to \mathbf{C}$ отображение, определяемое полярными координатами $z=r\zeta$ ($r \in \mathbf{R}_+$, $\zeta \in \mathbf{T}$). Отображенне π переводит (в смысле § 5.4, п. 4) меру $\tilde{E}$ в некоторую борелевскую спектральную меру E_T на $\mathbf{C}$. Заметим, что $E_T\{0\}=E_K\{0\}=0$.

В соответствии с (5.4.22) и леммой 5.2 находим

$$\int_{\mathbf{C}} |z|\,dE_T(z)=\int_{\mathbf{R}_+\times\mathbf{T}} r\,d\tilde{E}(r, \zeta)=K=|T|, \tag{2}$$

$$\int_{\mathbf{C}} |z|^{-1} z\,dE_T(z)=\int_{\mathbf{R}_+\times\mathbf{T}} \zeta\,d\tilde{E}(r, \zeta)=V. \tag{3}$$

Из этих представлений и из теоремы 5.4.4 получаем представление (1) для оператора $T=VK$. Одновременно устанавливается, что

$$D(T)=D(T^*)=D(|T|)=\left\{f\in H:\ \int |z|^2 d\mu_f(z)<\infty\right\}, \tag{4}$$

$$T^*=\int \bar{z}dE_T(z). \tag{5}$$

Если $N(T)\neq\{0\}$, то следует, как пояснено в § 8.1, п. 2, перейти к части T_0 оператора T в $H\ominus N(T)=\overline{R(T)}$. Тогда для T_0 справедливо представление вида (1) с мерой E_{T_0} в пространстве $\overline{R(T)}$. В пространстве $N(T)$ рассмотрим меру E^0, определенную равенствами $E^0(\mathbf{C}\setminus\{0\})=0$, $E^0\{0\}N(T)=N(T)$. Положим $E_T=E_{T_0}\oplus E^0$. Из (5.4.23), (5.4.24) следует, что E_T — спектральная мера в H и для T справедливо представление (1). Остаются в силе также соотношения (2), (4), (5).

Установим единственность меры E_T в представлении (1). Рассмотрим самосопряженные операторы

$$A=\int xdE_T(z),\ \ B=\int ydE_T(z)\qquad (z=x+iy). \tag{6}$$

В соответствии с (5.4.17) $2A=\overline{T+T^*}$, $2iB=\overline{T-T^*}$. В силу теоремы 5.4.8 самосопряженные операторы A, B перестановочны. Тогда из теоремы 5.1 следует, что мера в представлениях (6) единственна ●

2. Как и для самосопряженных и унитарных операторов, спектр $\sigma(T)$ полностью характеризуется в терминах спектральной меры E_T.

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения:* 1) $\sigma(T)=\operatorname{supp}E_T$; 2) *включение* $\lambda\in\sigma_p(T)$ *равносильно тому, что* $E_T\{\lambda\}\neq 0$; *при этом* $E_T\{\lambda\}H$ *— соответствующее собственное подпространство*; 3) *включение* $\lambda\in\sigma_c(T)$ *равносильно тому, что точка* λ *— неизолированная точка в* $\operatorname{supp}E_T$.

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 3.1 и может быть опущено.

Отметим еще, что спектр $\sigma(T)$ совпадает с совместным спектром $\sigma(A,B)$ операторов (6).

Теорема 3. *Пусть* T *— нормальный оператор и* $M\in\mathbf{B}(H)$. *Тогда пара соотношений* *) $M\smile T$, $M\smile T^*$ равносильна условию $M\smile E_T$.

○ Если $M\smile E_T$, то перестановочность M с операторами (1), (5) прямо следует из теоремы 5.4.8. Пусть $M\smile T$, $M\smile T^*$. Тогда для $x\in D(T)=D(T^*)$ будет $Mx\in D(A)$ и

$$MAx=AMx, \tag{7}$$

где $2A=\overline{T+T^*}$. Для любого $x\in D(A)$ найдутся $x_n\in D(T)$, такие, что $x_n\to x$, $Ax_n\to Ax$. Так как A замкнут, то предельный переход в равенстве $MAx_n=AMx_n$ показывает, что $Mx\in D(A)$

*) Можно показать (см. [17]), что для нормального оператора T из $M\smile T$ вытекает $M\smile T^*$. Поэтому одно из условий теоремы лишнее.

и выполнено (7), т. е. $M \smile A$. Аналогично $M \smile B$, где $2iB = \overline{T - T^*}$. Теперь перестановочность $M \smile E_T$ прямо следует из теоремы 5.5, примененной к операторам (6) ●

Интегралы вида

$$\int_{\mathbf{C}} \varphi(z)\, dE(z) \quad . \tag{8}$$

естественно интерпретируются как функции $\varphi(T)$. Разумеется, они же могут рассматриваться и как функции операторов (6).

Наконец, отметим, что для системы попарно перестановочных нормальных операторов $T_1, \ldots, T_n$ справедлив аналог теоремы 5.1. При этом $T_k \smile T_l$, как и в случае самосопряженных операторов, по определению означает перестановочность соответствующих спектральных мер.

3. Нормальными являются операторы вида $T = J_\varphi$, о которых шла речь в § 5.3, 5.4 (см. теорему 5.4.6). Найдем выражение для соответствующей спектральной меры E_T. Пусть $(Y, \mathfrak{A}, H, E)$ — пространство со спектральной мерой, $\varphi \in S(Y, E)$.

Теорема 4. *Для оператора $T = J_\varphi$ спектральная мера E_T определяется соотношением*

$$E_T(\delta) = E(\varphi^{-1}(\delta)) \qquad (\delta \in \mathfrak{A}^B(\mathbf{C})). \tag{9}$$

○ Воспользуемся теоремой 5.4.10. Именно пусть $Z = \varphi(Y) \subset \mathbf{C}$. На борелевских множествах $\delta \subset Z$ (9) определяет спектральную меру, причем в соответствии с (5.4.22)

$$\int_Z z\, dE_T(z) = \int_Y \varphi(y)\, dE(y) = J_\varphi = T.$$

Остается доопределить меру E_T нулем на $\mathbf{C} \setminus Z$ ●

Заметим, что $\operatorname{Im} \varphi = 0$ влечет $\operatorname{supp} E_T \subset \mathbf{R}$; если же $|\varphi| = 1$, то $\operatorname{supp} E_T \subset \mathbf{T}$. Это согласуется с теоремами 1.1, 1.2.

Сопоставление теорем 2 и 4 приводит к формулам

$$\sigma(J_\varphi) = \{\lambda \in \mathbf{C}\colon\ E(y \in Y : |\varphi(y) - \lambda| < \varepsilon) \neq 0,\ \forall \varepsilon > 0\}, \tag{10}$$

$$\sigma_p(J_\varphi) = \{\lambda \in \mathbf{C} : E(y \in Y : \varphi(y) = \lambda) \neq 0\}, \tag{11}$$

причем $E\{y \in Y : \varphi(y) = \lambda\} H$ — собственное подпространство;

$$\sigma_c(J_\varphi) = \{\lambda \in \mathbf{C} : E(y \in Y : 0 < |\varphi(y) - \lambda| < \varepsilon) \neq 0,\ \forall \varepsilon > 0\}. \tag{12}$$

Формула (10) в некоторых случаях упрощается. В частности, если Y — полное сепарабельное метрическое пространство, мера E — борелевская и функция φ непрерывна на $\operatorname{supp} E$, то (10) переходит в

$$\sigma(J_\varphi) = \overline{\varphi(\operatorname{supp} E)}. \tag{13}$$

Если при этом $Y = \mathbf{C}$ и $E = E_M$ — спектральная мера нормального оператора M, то $J_\varphi = \varphi(M)$ и

$$\sigma(J_\varphi) = \overline{\varphi(\sigma(M))}. \tag{14}$$

Формула (14) выражает собой *правило отображения спектров*. Отметим, что, поскольку непрерывный образ компакта есть компакт, знак замыкания в (14) заведомо не нужен для ограниченных M.

ГЛАВА 7

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ И УНИТАРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

В этой главе строится функциональная модель произвольной спектральной меры в гильбертовом пространстве. С ее помощью удается описать полную систему унитарных инвариантов спектральной меры. Роль универсальной модели играют операторы умножения в прямом интеграле гильбертовых пространств. Конструкции прямого интеграла и изучению операторов умножения в нем посвящены § 1,2. В § 3,4 любая спектральная мера сводится к модели. Наконец, в § 5 строятся функциональная модель и унитарные инварианты конечной системы перестановочных самосопряженных операторов (в частности — одного оператора). Требуемые результаты, благодаря спектральным представлениям гл. 6, непосредственно вытекают из соответствующих результатов для спектральной меры. Изложение ведется таким образом, что обобщение на случай нормальных операторов проходит автоматически.

§ 1. Прямой интеграл гильбертовых пространств

1. Пусть $(Y, \mathfrak{A}, \mu)$ — сепарабельное пространство с σ-конечной мерой и пусть μ-почти каждому $y \in Y$ сопоставлено сепарабельное гильбертово пространство $G(y)$. Скалярное произведение и норму в $G(y)$ будем обозначать через $\langle\cdot, \cdot\rangle_{G(y)}$, $|\cdot|_{G(y)}$; символ y, как правило, будем опускать. Функцию

$$\mathrm{N}(y) = \dim G(y) \tag{1}$$

назовем *функцией размерности*. Она предполагается μ-измеримой, т. е. измеримы все подмножества*)

$$Y_k = \{y \in Y : \mathrm{N}(y) = k\}, \qquad k \in [1, \infty]. \tag{2}$$

Рассмотрим всевозможные вектор-функции со значениями в $G(y)$, определенные μ-п. в. на Y. Первоочередная задача состоит в выделении класса измеримых вектор-функций. Если пространство с мерой $(Y, \mathfrak{A}, \mu)$ и система пространств $G(y)$ не наделены ника-

*) Ниже систематически используются следующие обозначения. Пусть m — натуральное число или символ ∞. Тогда при $m < \infty$ $[1, m\rangle = [1, m] = \{1, \ldots, m\}$; при $m = \infty$ $[1, m\rangle$ — натуральный ряд; $[1, \infty] = [1, \infty\rangle \cup \{\infty\}$.

кой дополнительной структурой, то предпочтительного способа определения измеримости нет. Наиболее последовательный путь состоит в аксиоматическом введении измеримой структуры.

Пусть задано некоторое конечное или счетное множество Ω_0 вектор-функций (*база измеримости*), удовлетворяющее следующим условиям:

$$\text{для } \mu\text{-п. в. } y \in Y \quad \bigvee\{g(y)\colon g \in \Omega_0\} = G(y); \tag{3}$$

$$\langle g_1(y),\ g_2(y)\rangle_{G(y)} - \mu\text{-измеримая функция } (\forall g_1,\ g_2 \in \Omega_0). \tag{4}$$

Коль скоро база измеримости Ω_0 задана, назовем вектор-функцию h измеримой (относительно Ω_0), если для любой $g \in \Omega_0$ скалярная функция $\langle h(y),\ g(y)\rangle_G$ μ-измерима. Множество всех таких вектор-функций h обозначим через $\hat{\Omega}_0$. Очевидно, что $\Omega = \hat{\Omega}_0$ — линейное пространство, $\Omega \supset \Omega_0$. Важное свойство Ω — *инвариантность относительно умножения на скалярные μ-измеримые функции.*

Особенно удобно задавать измеримость с помощью *ортогональной базы измеримости* (*о. б. и*): пусть

$$\mu\text{-sup}\,\{\mathrm{N}(y)\colon y \in Y\} = m, \qquad 1 \leqslant m \leqslant \infty, \tag{5}$$

и пусть $\Omega_0 = \{e_j\}$, $j \in [1,\ m\rangle$, где для μ-п. в. $y \in Y$ элементы $\{e_j(y)\}$, $j \in [1,\ \mathrm{N}(y)\rangle$, образуют ортонормированный базис*) в $G(y)$ и $e_j(y) = 0$ при $j > \mathrm{N}(y)$. Условия (3), (4) при этом очевидно выполнены. Покажем, что любую базу измеримости можно, не изменяя запаса Ω измеримых функций, заменить на о. б. и.

Лемма 1. *Пусть Ω_0 — база измеримости и $\Omega = \hat{\Omega}_0$. Тогда существует такая о. б. и. $\Omega_1 \subset \Omega$, что $\hat{\Omega}_1 = \Omega$.*

○ Пусть $\Omega_0 = \{g_k\}$, $k \in [1,\ n\rangle$. Из (3) следует, что $n \geqslant m$. При μ-п. в. $y \in Y$ подвергнем в пространстве $G(y)$ элементы $g_k(y)$ обычному процессу ортогонализации (см. § 2.2, п. 3). В силу (3) в $G(y)$ получится ортонормированный базис $\{e_j(y)\}$, $j \in [1,\ \mathrm{N}(y)\rangle$; при $j > \mathrm{N}(y)$ положим $e_j(y) = 0$. Элементы $e_j(y)$ выражаются через $g_k(y)$ по формулам

$$e_j(y) = \textstyle\sum_{k \in [1,\ n\rangle} \varphi_{jk}(y)\, g_k(y), \tag{6}$$

где для μ-п. в. $y \in Y$ сумма конечна. Скалярные функции φ_{jk} μ-измеримы. Это следует из (4) и из формул § 2.2. Пусть $\Omega_1 = \{e_j\}$, $j \in [1,\ m\rangle$. Условия (3), (4) для Ω_1 выполнены по построению. Из (6) очевидным образом вытекает, что $\Omega_1 \subset \Omega$ и $\Omega \subset \hat{\Omega}_1$. Обратно, если $h \in \hat{\Omega}_1$, то $h \in \Omega$. Действительно, для любой $g \in \Omega_0$ функция

$$\langle g(y),\ h(y)\rangle_G = \textstyle\sum_j \langle g(y),\ e_j(y)\rangle_G\, \langle e_j(y),\ h(y)\rangle_G \tag{7}$$

измерима, поскольку справа стоит сходящийся ряд измеримых функций ●

---

*) Отметим, что по построению $|e_1(y)|_{G(y)} = 1$ μ-п. в. на Y.

С л е д с т в и е 2. *Для любых* g, $h \in \Omega$ *функция* $\langle g(y), h(y)\rangle_G$ μ-*измерима.*

○ Согласно лемме 1 можно считать, что $\Omega = \hat{\Omega}_0$, где Ω_0 — о. б. и. Но тогда требуемое вытекает из разложения (7) ●

Семейство гильбертовых пространств $G(y)$ вместе с *измеримой структурой* Ω условимся называть *измеримым гильбертовым семейством* (*и. г. с.*) на пространстве с мерой $(Y, \mathfrak{A}, \mu)$ и обозначать через $(G(\cdot), \Omega)$.

2. Если $(G(\cdot), \Omega)$, $(G'(\cdot), \Omega')$ — и. г. с., то для оператор-функций t со значениями $t(y) \in \mathbf{B}(G(y), G'(y))$ (μ-п. в.) также определяется измеримость: функция t измерима, если μ-измеримы скалярные функции

$$\langle t(y)h(y), h'(y)\rangle_{G'}, \qquad \forall h \in \Omega, \ \forall h' \in \Omega'.$$

Легко понять, что достаточно проверять это условие на базах измеримости, т. е. для $h \in \Omega_0$, $h' \in \Omega'_0$. Ясно также, что вместе с $t(y)$ измерима сопряженная оператор-функция $t^*(y) \in \mathbf{B}(G'(y), G(y))$.

3. Пусть $(G(\cdot), \Omega)$ — и. г. с. на пространстве с мерой $(Y, \mathfrak{A}, \mu)$ и пусть $G'(y)$, $y \in Y$, — гильбертовы пространства, причем

$$\mathrm{N}'(y) \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \dim G'(y) = \dim G(y) = \mathrm{N}(y) \qquad (\mu\text{-п. в.}). \tag{8}$$

Пусть $w(y)$, $y \in Y$, — оператор-функция, значения которой для μ-п. в. $y \in Y$ суть унитарные отображения $G(y)$ на $G'(y)$. Любая такая оператор-функция позволяет «пересаживать» измеримую структуру из семейства $G(y)$ в семейство $G'(y)$. Для этого надо принять за базу измеримости множество $\Omega'_0 = \{w(y)g(y)\colon g \in \Omega_0\}$. При этом для $\Omega' = \hat{\Omega}'_0$ очевидно

$$\Omega' = \{w(y)h(y)\colon h \in \Omega\}. \tag{9}$$

Лемма 3. *Пусть* $(G(\cdot), \Omega)$, $(G'(\cdot), \Omega')$ — *и. г. с. на пространстве с мерой* $(Y, \mathfrak{A}, \mu)$ *и выполнено* (8). *Тогда* μ-*п. в. на* Y *существует измеримая оператор-функция* $w(y)$, *унитарно отображающая* $G(y)$ *на* $G'(y)$ *и такая, что выполнено* (9).

○ В силу леммы 1 можно считать, что Ω, Ω' заданы с помощью о. б. и. $\{e_j\}$, $\{e'_j\}$, $j \in [1, m\rangle$. Обозначим через $w(y)\colon G(y) \to G'(y)$ изометрический оператор, переводящий элемент $e_j(y)$ в $e'_j(y)$, $j \in [1, \mathrm{N}(y)\rangle$. Если $h \in \Omega$, то функции $\langle w(y)h(y), e'_j(y)\rangle_{G'} = \langle h(y), e_j(y)\rangle_G$ измеримы. Следовательно, $wh \in \Omega'$; одновременно установлена измеримость $w(y)$. Так же проверяется, что при $h' \in \Omega'$ функция $h(y) = w^{-1}(y)h'(y)$ принадлежит Ω ●

4. Перейдем к определению прямого интеграла гильбертовых пространств. Пусть $(G(\cdot), \Omega)$ — и. г. с. на сепарабельном пространстве с σ-конечной мерой $(Y, \mathfrak{A}, \mu)$. В множестве вектор-функций *)

---

*) Вектор-функции, совпадающие μ-п. в., отождествляются.

$h \in \Omega$, для которых

$$\|h\|^2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int |h(y)|_G^2 \, d\mu(y) < \infty,$$

введем скалярное произведение равенством

$$(h_1, h_2) = \int \langle h_1(y), h_2(y) \rangle_G \, d\mu(y). \tag{10}$$

Получающееся при этом пространство называется *прямым интегралом* (интегралом Неймана) гильбертовых пространств и обозначается

$$H = \int_Y \oplus_\Omega G(y) \, d\mu(y). \tag{11}$$

Легко видеть, что в H выполнены аксиомы предгильбертова пространства. Полнота H будет установлена позднее. Если мера μ дискретна, то пространство (11) сводится к ортогональной сумме гильбертовых пространств.

Пространства (11), отличающиеся лишь и. г. с. и имеющие одну и ту же функцию размерности, легко преобразуются друг в друга. Именно справедлива теорема, доказательство которой очевидно.

Теорема 4. *Пусть* $(G(\cdot), \Omega)$, $(G'(\cdot), \Omega')$ — *и. г. с. на* $(Y, \mathfrak{A}, \mu)$ *и выполнено* (8). *Пусть* $w(y)$ — *определенное для* μ-*п. в.* $y \in Y$ *измеримое унитарное отображение* $G(y)$ *на* $G'(y)$. *Тогда оператор*

$$W: h(y) \longmapsto w(y) h(y) \tag{12}$$

унитарно отображает пространство (11) *на пространство*

$$H' = \int_Y \oplus_{\Omega'} G'(y) \, d\mu(y).$$

Отметим, что существование функции $w(y)$, удовлетворяющей условиям теоремы, обеспечивается леммой 3.

Рассмотрим важный пример и. г. с. Используем обозначения (1), (2), (5). Пусть $G(y)$ для п. в. $y \in Y_k$ совпадают с одним и тем же гильбертовым пространством G_k, т. е. $G(y) = G_{\mathrm{N}(y)}$. Пусть $\{e_j^k\}$, $j \in [1, k\rangle$, — ортонормированный базис в G_k. Положим $e_j(y) = e_j^k$ при $j \in [1, \mathrm{N}(y)\rangle$, $e_j(y) = 0$ при $j > \mathrm{N}(y)$. Примем функции $\{e_j(y)\}$, $j \in [1, m\rangle$, в качестве о. б. и. Тогда включение $h \in \Omega$ равносильно тому, что для любого $k \in [1, m]$ сужение h на Y_k является измеримой вектор-функцией в смысле § 2.3, п.4. Иначе говоря, функции $\langle h(y), e_j^k \rangle_{G_k}$, $j \in [1, k\rangle$, μ-измеримы на Y_k. В рассматриваемом случае пространство (11) естественно отождествляется с ортогональной суммой

$$H = \Sigma_{k \in [1, m]} \oplus L_2(Y_k, \mu; G_k). \tag{13}$$

Достаточно отождествить $L_2(Y_k, \mu; G_k)$ с подпространством $H_k = \{h \in H: h(y) = 0 \text{ при п. в. } y \overline{\in} Y_k\}$. Пространство (13) — полное и сепарабельное. В самом деле, таковы пространства $L^2(Y_k, \mu; G_k)$ (см. § 2.3, п.4) и пространства вида $\Sigma_k \oplus H_k$ (см. § 2.3, п.3). Заметим, что при $\mathrm{N}(y) = 1$ (μ-п. в.) пространство (13) сводится к обычному пространству $L_2(Y, \mu)$.

В силу леммы 3 и теоремы 4 существует унитарное отображение вида (12) прямого интеграла (11) на пространство (13) с той же функцией размерности. Отсюда следуют полнота и сепарабельность пространства (11).

5. Рассмотрим еще один типичный пример и. г. с. на пространстве с мерой $(Y, \mathfrak{A}, \mu)$. Пусть G — сепарабельное гильбертово пространство, $G(y)$, $y \in Y$, — подпространства в G и $P(y)$ — проектор на $G(y)$. Предположим, что оператор-функция $P(y)$ слабо измерима в G. Пусть $\{\omega_k\}$ — ортонормированный базис в G. Семейство $G(y)$ и функции $g_k(y) = P(y)\omega_k$ удовлетворяют условиям (3), (4). Примем их в качестве базы измеримости. Тогда Ω естественно отождествляется с множеством измеримых вектор-функций h: $Y \to G$, таких, что $h(y) \in G(y)$ (μ-п. в.). Пространство (11) реализуется как подпространство в $L_2(Y, \mu; G)$, выделяемое этим включением.

Такая реализация интеграла (11) удобна, например, в следующем случае. Пусть Δ — измеримое множество в $\mathbb{R}^{m+n}$, $(Y, \mathfrak{A}, \mu)$ есть $\mathbb{R}^m$ с мерой Лебега, $G = L_2(\mathbb{R}^n)$, $G(y) = L_2(\Delta(y))$, где $\Delta(y) = \{z \in \mathbb{R}^n: (y, z) \in \Delta\}$. Изложенная конструкция приводит к естественной формуле

$$L_2(\Delta) = \int \oplus L_2(\Delta(y))\, dy.$$

Следующий результат будет использован в § 2.

Лемма 5. *Пусть $(G(\cdot), \Omega)$ — и. г. с. на пространстве с мерой $(Y, \mathfrak{A}, \mu)$, $\{e_j\}$, $j \in [1, m\rangle$, — о. б. и. для Ω, $f_0 \in L_2(Y, \mu)$ — фиксированная функция, такая, что $f_0 \neq 0$ μ-п. в. Тогда множество вектор-функций вида $h_{j,\delta}(y) = f_0(y)\chi_\delta(y)e_j(y)$ $(\forall \delta \in \mathfrak{A}, \forall j \in [1, m\rangle)$ полно в пространстве* (11).

○ Пусть вектор-функция $h \in H$ ортогональна всем $h_{j,\delta}$. В соответствии с (11) это означает, что

$$\int_\delta f_0(y) \langle h(y), e_j(y) \rangle_G d\mu(y) = 0 \qquad (\forall \delta \in \mathfrak{A}, \forall j).$$

Из условия на f_0 следует, что μ-п. в. $\langle h(y), e_j(y) \rangle_G = 0$ $(\forall j \in [1, N(y)\rangle)$, а тогда и $h(y) = 0$ ●

6. Основной объект, который обычно связывают с прямым интегралом (11), — семейство операторов умножения на скалярные функции. Каждой функции $\varphi \in S(Y, \mu)$ сопоставим оператор Q_φ в пространстве (11) (оператор умножения на φ), полагая

$$D(Q_\varphi) = \{g \in H : \int |\varphi(y)|^2 |g(y)|_G^2 d\mu(y) < \infty\}; \tag{14}$$

$$(Q_\varphi g)(y) = \varphi(y) g(y) \qquad (\forall g \in D(Q_\varphi)). \tag{15}$$

Если $(G(\cdot), \Omega)$, $(G'(\cdot), \Omega')$ — и. г. с., выполнено (8) и Q_φ, Q'_φ — операторы умножения на φ в соответствующих пространствах H, H' вида (11), то для любой изометрии вида (12) $Q'_\varphi W = WQ_\varphi$. С этой точки зрения выбор и. г. с. не имеет значения, и можно было бы ограничиться пространствами (13). Это, однако, не вполне удобно для применений. Впрочем, выбор измеримой структуры принято не оговаривать, а зависимость от Ω — не отражать в обозначениях. Поэтому вместо (11) будем писать

$$H \overset{\text{def}}{=} H_{\mu, N} = \int_Y \oplus G(y)\, d\mu(y). \tag{16}$$

§ 2. Операторы умножения и разложимые операторы

Изучим теперь операторы Q_φ, а также более общие операторы в прямом интеграле $H_{\mu, \mathrm{N}}$ — операторы умножения на оператор-функции со значениями в $\mathbf{B}(G(y))$. Такое изучение связано с построением некоторой спектральной меры в $H_{\mu, \mathrm{N}}$.

1. Пусть $H = H_{\mu, \mathrm{N}}$ — прямой интеграл (1.16). Сопоставим каждому множеству $\delta \in \mathfrak{A}$ оператор

$$\mathrm{X}(\delta) g = \chi_\delta g \quad (\forall g \in H), \tag{1}$$

где χ_δ — характеристическая функция множества δ. Очевидно, что $\mathrm{X}(\delta)$ — ортогональный проектор на подпространство, образованное вектор-функциями $g \in H$, равными нулю μ-п. в. на $Y \setminus \delta$. Отметим равенство

$$\mu_{g, h}(\delta) \overset{\mathrm{def}}{=} (\mathrm{X}(\delta) g, h) = \int_\delta \langle g(y), h(y) \rangle_G \, d\mu(y) \quad (\forall \delta \in \mathfrak{A}). \tag{2}$$

Из счетной аддитивности интеграла (2) по лемме 5.2.1 вытекает счетная аддитивность $\mathrm{X}(\delta)$. Ясно, что $\mathrm{X}(Y) = I$. Таким образом, *проекторы* $\mathrm{X}(\delta)$, $\delta \in \mathfrak{A}$, *определяют собой спектральную меру в* $H_{\mu, \mathrm{N}}$.

Равенства $\mathrm{X}(\delta) = 0$ и $\mu(\delta) = 0$ равносильны. Поэтому класс функций $S(Y, \mathrm{X})$ совпадает с $S(Y, \mu)$. Выясним, что представляют собой операторы вида $J_\varphi = \int \varphi \, d\mathrm{X}$.

Теорема 1. *Операторы* (1.15) *совпадают с интегралами* J_φ *по мере* $\mathrm{X}: Q_\varphi = \int \varphi \, d\mathrm{X}$.

○ Из (2) следует, что (1.14) совпадает с (5.4.1), а потому $D(Q_\varphi) = D(J_\varphi)$. Для любых $g \in D(Q_\varphi)$, $h \in H$, в силу (5.4.5)

$$(Q_\varphi g, h) = \int \varphi(y) \langle g(y), h(y) \rangle_G \, d\mu(y) = \int \varphi \, d\mu_{g, h} = (J_\varphi g, h) \quad \bullet$$

Теорема 1 хорошо иллюстрирует общие свойства операторов J_φ. Например, из определения Q_φ легко выводится, что непрерывность Q_φ равносильна условию $\varphi \in L_\infty(Y, \mu)$; при этом $\|Q_\varphi\| = \mu\text{-}\sup|\varphi|$. Ясно также, что $Q_\varphi^* = Q_{\bar\varphi}$ и т. п.

2. Сравним в двух прямых интегралах

$$H = \int_Y \oplus G(y) \, d\mu(y), \qquad H' = \int_Y \oplus G'(y) \, d\nu(y), \tag{3}$$

построенных на одном и том же измеримом пространстве $(Y, \mathfrak{A})$, соответствующие меры X, X' и операторы Q_φ, Q'_φ. Заметим, что если меры μ, ν эквивалентны *), то классы $S(Y, \mu)$, $S(Y, \nu)$ совпадают.

Теорема 2. *Пусть* μ, ν — *σ-конечные меры со счетной базой на измеримом пространстве* $(Y, \mathfrak{A})$ *и пусть* H, H' — *прямые интегралы* (3).

---

*) Об эквивалентности ($\mu \sim \nu$) и подчиненности ($\mu \prec \nu$) мер см. § 1.5, пп. 11—14.

а) Предположим, что

$$\mu \sim \nu, \quad \dim G'(y) = \dim G(y) \qquad (\mu\text{-п.в.}) \tag{4}$$

и $v(y)$ — измеримая оператор-функция, определенная μ-п. в. на Y и унитарно отображающая $G(y)$ на $G'(y)$. Тогда оператор

$$V: (Vh)(y) = p(y)\,v(y)\,h(y), \qquad p = \sqrt{d\mu/d\nu}, \quad . \tag{5}$$

унитарно отображает H на H' и переводит любой оператор Q_φ в H в оператор Q'_φ умножения на φ в H'. В частности,

$$V\mathrm{X}(\delta) = \mathrm{X}'(\delta)\,V \qquad (\forall \delta \in \mathfrak{A}). \tag{6}$$

б) Если V — изометрия H на H', удовлетворяющая условию (6), *то выполнено* (4) *и V имеет вид* (5).

○ а) Изометричность оператора (5), а также равенство (6) очевидны. Обратное к (5) отображение $h'(y) \longmapsto p^{-1}(y)\,v^{-1}(y)\,h'(y)$ определено для всех $h' \in H'$, и, следовательно, $VH = H'$. Равенство $VQ_\varphi = Q'_\varphi V$, $\varphi \in S(Y, \mu)$, вытекает из (6) на основании теоремы 5.4.9.

б) Фиксируем скалярную функцию $f_0 \in L_2(Y, \mu)$, $f_0(y) > 0$ μ-п.в. Пусть $\{e_j(y)\}$ — какая-либо о. б. и. в H, $\omega_j(y) = f_0(y)\,e_j(y)$; тогда $\omega_j \in H$. Положим $z_j = V\omega_j \in H'$. В силу (6)

$$(\mathrm{X}'(\delta)\,z_j, \ z_k)_{H'} = (V\mathrm{X}(\delta)\,\omega_j, \ V\omega_k)_{H'} = (\mathrm{X}(\delta)\,\omega_j, \ \omega_k)_H,$$

что можно записать в виде

$$\int_\delta \langle z_j(y), \ z_k(y)\rangle_{G'}\, d\nu(y) = \int_\delta \langle \omega_j(y), \ \omega_k(y)\rangle\, d\mu(y). \tag{7}$$

При $j = k = 1$ из (7) находим

$$\int_\delta |z_1(y)|^2_{G'}\, d\nu(y) = \int_\delta |f_0(y)|^2\, d\mu(y).$$

Так как μ-п.в. $f_0(y) > 0$, то $\nu(\delta) = 0$ влечет $\mu(\delta) = 0$, т. е. $\mu \prec \nu$. Поскольку меры μ, ν равноправны, то $\mu \sim \nu$. Полагая в (7) $d\mu = p^2\, d\nu$, получаем, что при μ-п.в. $y \in Y$

$$|z_j(y)|_{G'} = f_0(y)\,p(y), \qquad j \in [1, \ \mathrm{N}(y)\rangle, \tag{8}$$

$$\langle z_j(y), \ z_k(y)\rangle_{G'} = 0, \qquad j \neq k. \tag{9}$$

Так как число индексов j, k в соотношениях (7) не более чем счетно, то на некотором множестве $Y_0 \subset Y$ полной μ-меры все равенства (8), (9) выполняются одновременно. Из (8), (9) следует, что $\dim G'(y) \geqslant \dim G(y)$; с учетом равноправия H, H' это дает (4). На элементах ортогонального в $G(y)$ базиса $\{\omega_j(y)\}$ определим при $y \in Y_0$ оператор $v(y)$ равенствами

$$v(y)\,\omega_j(y) = p^{-1}(y)\,z_j(y), \qquad j \in [1, \ \mathrm{N}(y)\rangle. \tag{10}$$

Из (8), (9) прямо следует, что $v(y)$ распространяется до изометрического отображения $G(y)$ в $G'(y)$. Равенства (10) показывают (см. § 1, п. 2), что оператор-функция $v(y)$ измерима. Введем изометрический оператор $V_1: H \to H'$, полагая

$$(V_1 h)(y) = p(y) v(y) h(y) \qquad (h \in H, \ y \in Y_0).$$

Из (10) и (6) находим, что при $y \in Y_0$

$$(V_1 \mathrm{X}(\delta) \omega_j)(y) = p(y) v(y) \chi_\delta(y) \omega_j(y) = \chi_\delta(y) z_j(y) = \\ = (\mathrm{X}'(\delta) V \omega_j)(y) = (V \mathrm{X}(\delta) \omega_j)(y).$$

Поскольку множество элементов вида $\mathrm{X}(\delta)\omega_j$ полно в H (по лемме 1.5), получаем $V_1 = V$, т. е. справедливо (5). Остается заметить, что при п. в. $y \in Y$ должно быть $v(y) G(y) = G'(y)$. В противном случае представление (5) несовместимо с условием $VH = H'$ ●

Теорема 2 показывает, что спектральная мера X в существенном характеризуется типом меры μ и функцией размерности (1.1). При $\mu = \nu$, $G(y) = G'(y)$ (μ-п.в.) результат теоремы (п. а)) означает, что выбор измеримой структуры не влияет на свойства операторов Q_φ. Этим оправдано обозначение (1.16).

3. Рассмотрим теперь операторы, перестановочные со спектральной мерой (1).

Теорема 3. *Пусть H — прямой интеграл* (1.16).

а) *Пусть $t(y) \in \mathbf{B}(G(y))$ — измеримая оператор-функция, определенная для μ-п.в. $y \in Y$ и такая, что**) $\mu\text{-}\sup |t(y)|_{G(y)} < \infty$. *Тогда*

$$T: h(y) \longmapsto t(y) h(y) \tag{11}$$

— ограниченный оператор в H, перестановочный с любым оператором Q_φ, $\varphi \in S(Y, \mu)$. В частности, $T \smile \mathrm{X}(\delta)$ ($\forall \delta \in \mathfrak{A}$). Имеет место равенство

$$\|T\| = \mu\text{-}\sup |t(y)|_{G(y)}. \tag{12}$$

б) *Если $T \in \mathbf{B}(H)$ и $T \smile \mathrm{X}(\delta)$ ($\forall \delta \in \mathfrak{A}$), то T имеет вид, указанный в п. а).*

○ а) Ограниченность оператора (11) следует из неравенств

$$\|Th\|^2 \leqslant \int |t(y)|_G^2 |h(y)|_G^2 \, d\mu(y) \leqslant \mu\text{-}\sup |t(y)|_G^2 \|h\|^2,$$
$$\|T\| \leqslant \mu\text{-}\sup |t(y)|_G. \tag{13}$$

Неравенство, обратное к (13), будет получено при доказательстве п. б). Перестановочность $T \smile Q_\varphi$ очевидна.

б) Для любых $\delta \in \mathfrak{A}$, $h \in H$ имеем

$$\int_\delta |(Th)(y)|_G^2 \, d\mu(y) = \|\mathrm{X}(\delta) Th\|^2 = \|T \mathrm{X}(\delta) h\|^2 \leqslant \\ \leqslant \|T\|^2 \|\mathrm{X}(\delta) h\|^2 = \|T\|^2 \int_\delta |h(y)|_G^2 \, d\mu(y).$$

Отсюда следует, что μ-п.в. на Y

$$|(Th)(y)|_G \leqslant \|T\| \cdot |h(y)|_G. \tag{14}$$

---

*) $|t(y)|_{G(y)}$ — норма оператора $t(y)$ в пространстве $G(y)$.

Кроме того, при h_1, $h_2 \in H$ для μ-п.в. $y \in Y$

$$(T(h_1+h_2))(y) = (Th_1)(y) + (Th_2)(y). \qquad (15)$$

Пусть теперь f_0, e_j, ω_j — те же, что в доказательстве теоремы 2, и $K = \bigvee_{j \in [1, m)} \omega_j$. Элементы $h \in K$ суть вектор-функции $h(y) = \sum_j \alpha_j \omega_j(y)$, причем слагаемые попарно ортогональны в $G(y)$ (μ-п.в.). Поэтому

$$|h(y)|_G^2 = |f_0(y)|^2 \sum_{j \in [1, N(y))} |\alpha_j|^2, \quad \|h\|^2 = \|f_0\|^2 \sum_{j \in [1, m)} |\alpha_j|^2,$$

и, следовательно, в Y найдется множество полной μ-меры, такое, что

$$|h(y)|_G = |f_0(y)| \cdot \|f_0\|^{-1} \|h\| \qquad (\forall h \in K). \qquad (16)$$

Обозначим через K_0 плотное в K множество конечных сумм $\sum_j \alpha_j \omega_j$ с рациональными комплексными коэффициентами. Поскольку K_0 счетно, существует подмножество $Y_0 \subset Y$ полной μ-меры, на котором соотношения (14), (15) выполняются для всех $h \in K_0$.

Пусть $h \in K$, $h_n \in K_0$, $\|h_n - h\| \to 0$. Из (14)—(16) следует существование предела $(Th_n)(y)$ в пространстве $G(y)$, $y \in Y_0$, который не зависит от выбора последовательности $h_n \to h$. Предельная функция есть один из эквивалентных представителей $(Th)(y)$ элемента $Th \in H$. Соотношения (14), (15) при $y \in Y_0$ распространяются по непрерывности на любые $h \in K$.

Из определения о. б. и. $\{e_j(y)\}$ следует, что $\{h(y) : h \in K\} = G(y)$. При $y \in Y_0$ определим на $G(y)$ оператор $t(y)$:

$$t(y) h(y) = (Th)(y). \qquad (17)$$

Он линеен в силу (15) и непрерывен в силу (14):

$$|t(y)|_G \leqslant \|T\|, \qquad y \in Y_0. \qquad (18)$$

Измеримость $t(y)$ прямо следует из (17). Пусть $T_1 \in \mathbf{B}(H)$ — оператор, порожденный функцией $t(y)$ в смысле п. а). Равенство $T = T_1$ получается так же, как равенство $V = V_1$ при доказательстве теоремы 2. Сопоставляя (13), (18), приходим к (12) ●

Теорема 3 показывает, что операторов $T \in \mathbf{B}(H)$, перестановочных со спектральной мерой X, существенно «больше», чем операторов Q_φ. Исключением является лишь случай $N(y) \equiv 1$, так как тогда оператор (11) совпадает с Q_t. Тем самым установлен следующий результат.

Теорема 4. *Пусть* H — *прямой интеграл* (1.16) *и* $N(y) = 1$ (μ-*п.в.*). *Тогда оператор* $T \in \mathbf{B}(H)$, *перестановочный со спектральной мерой* X, *совпадает с некоторым оператором умножения* Q_φ, $\varphi \in L_\infty(Y, \mu)$.

4. Непрерывные операторы вида (11) в прямом интеграле H называют *разложимыми*. Они образуют подалгебру алгебры $\mathbf{B}(H)$

(некоммутативную, если $N(y) \not\equiv 1$). Отметим очевидные свойства отображения $T \longmapsto t(y)$, построенного в теореме 3, п. б): если $T_i \longmapsto t_i(y)$, $i=1, 2$, то $T_1+T_2 \longmapsto t_1(y)+t_2(y)$, $T_1T_2 \longmapsto t_1(y)\,t_2(y)$; если $T \longmapsto t(y)$, то $T^* \longmapsto t^*(y)$. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 5. *Разложимый оператор T самосопряжен (унитарен, нормален) в H тогда и только тогда, когда для μ-п.в. $y \in Y$ соответствующий оператор $t(y)$ самосопряжен (унитарен, нормален) в $G(y)$; T — проектор в H тогда и только тогда, когда μ-п.в. $t(y)$ — проектор в $G(y)$.*

Вместе с теоремой 3.6.1 это позволяет дать исчерпывающее описание подпространств в H, приводящих одновременно все операторы Q_φ, $\varphi \in S(Y, \mu)$: любое такое подпространство имеет вид PH, где $P: h(y) \longmapsto \pi(y)\,h(y)$ и $\pi(y)$ — измеримая проекторнозначная функция.

Алгебра разложимых операторов выдерживает слабый предельный переход.

Теорема 6. *Пусть H — прямой интеграл (1.16). Алгебра непрерывных разложимых (относительно H) операторов замкнута относительно слабой сходимости.*

○ Пусть $T_n \in \mathbf{B}(H)$, $T_n \smile \mathrm{X}(\delta)$ и $T = w\text{-}\lim T_n$. Переходя к пределу в равенстве

$$(T_n \mathrm{X}(\delta)\, g,\ h) = (T_n g,\ \mathrm{X}(\delta)\, h) \qquad (\delta \in \mathfrak{A};\ g,\ h \in H),$$

получаем, что $T \smile \mathrm{X}(\delta)$, и, следовательно, T разложи́м ●

Операторы Q_φ, $\varphi \in L_\infty(Y, \mu)$, сами разложи́мы, причем соответствующие оператор-функции $\varphi(y)\, I_{G(y)}$ — скалярные. Очевидно, что Q_φ перестановочны со всеми разложимыми операторами. Покажем, что это свойство их вполне характеризует.

Теорема 7. *Пусть H — интеграл (1.16) и пусть $M \in \mathbf{B}(H)$ перестановочен с любым разложимым оператором. Тогда найдется такая функция $\varphi \in L_\infty(Y, \mu)$, что $M = Q_\varphi$.*

○ Так как, в частности, $M \smile \mathrm{X}$, то оператор M разложи́м и, следовательно, имеет вид (11): $(Mh)(y) = m(y)\, h(y)$ μ-п.в. Перестановочность с любым разложимым оператором T означает, что μ-п.в. $m(y) \smile t(y)$. Поскольку здесь при фиксированном $y \in Y$ $t(y)$ — произвольный оператор из $\mathbf{B}(G(y))$, то в соответствии с теоремой 2.5.4 $m(y) = \varphi(y)\, I_{G(y)}$, где φ — скалярная функция ●

Дадим (без доказательства) описание спектральной меры E_T нормального разложимого оператора T. Из теоремы 6.6.3 следует, что $E_T \smile \mathrm{X}$, т. е. мера E_T также разложима. Пусть $t(y)$, $\varepsilon(y, \partial)$ — оператор-функции, соответствующие операторам T и $E_T(\partial)$ (∂ — борелевское множество в $\mathbf{C}$). По теореме 5 для μ-п. в. $y \in Y$ $t(y)$ — нормальный, $\varepsilon(y, \partial)$ — проекционный операторы в пространстве $G(y)$.

Теорема 8. *Пусть $\varepsilon'(y, \cdot)$ — спектральная мера оператора $t(y)$ в гильбертовом пространстве $G(y)$. Тогда для любого борелевского множества $\partial \subset \mathbf{C}$ оператор-функция $\varepsilon'(y, \partial)$ измерима и $\varepsilon(y, \partial) = \varepsilon'(y, \partial)$ μ-п.в.*

§ 3. Порождающие системы и спектральные типы

В этом параграфе подготавливается сведе́ние произвольной спектральной меры E в гильбертовом пространстве H к мере X в подходящем прямом интеграле $H_{\mu, \mathrm{N}}$.

1. Пусть $(Y, \mathfrak{A}, H, E)$ — пространство со спектральной мерой. Фиксируем элемент $g \in H$ и рассмотрим в H подмножество

$$H_g = H_g(E) = \{J_\psi g : \psi \in S(Y, E),\ g \in D_\psi\}. \tag{1}$$

Линейность H_g очевидна. В силу (5.4.4) включение $g \in D_\psi$ означает, что $\psi \in L_2(Y, \mu_g)$, причем

$$\| J_\psi g \|^2 = \int |\psi|^2 d\mu_g. \tag{2}$$

Рассмотрим отображение $V_g : \psi \longmapsto J_\psi g$. Из (2) следует, что μ_g-эквивалентным функциям ψ отвечает один и тот же элемент $J_\psi g$. С другой стороны, каждый элемент пространства $L_2(Y, \mu_g)$ имеет E-п. в. конечного «представителя». Поэтому V_g можно рассматривать как отображение $L_2(Y, \mu_g)$ на H_g. В силу (2) V_g — изометрия. Отсюда, в частности, следует, что H_g — *подпространство в* H.

Ниже P_g — проектор на H_g.

Теорема 1. *а)* $\bigvee_{\delta \in \mathfrak{A}} E(\delta) g = H_g$. *б) Если* $f \in H_g$, *то* $H_f \subset H_g$. *в) Соотношения* $f \perp H_g$ и $\mu_{f,g}(\delta) = 0$ $(\forall \delta \in \mathfrak{A})$ *равносильны. При этом* $H_f \perp H_g$. *г) Подпространство* H_g *приводит все операторы* J_φ, $\varphi \in S(Y, E)$.

○ а) Совокупность характеристических функций χ_δ, $\delta \in \mathfrak{A}$, полна в $L_2(Y, \mu_g)$. Поэтому совокупность элементов $E(\delta) g = V_g \chi_\delta$ полна в H_g. б) Если $f = J_\psi g$, то $E(\delta) f = J_{\psi\chi_\delta} g \in H_g$. Но тогда $H_f = \bigvee_\delta E(\delta) f \subset H_g$. в) Условие $f \perp H_g$ равносильно тому, что $f \perp E(\delta) g$, $\forall \delta \in \mathfrak{A}$. Последнее означает, что $\mu_{f,g}(\delta) = (E(\delta) f, g) = 0$. В этом случае для любых $\delta, \partial \in \mathfrak{A}$ $(E(\delta) f, E(\partial) g) = \mu_{f,g}(\delta \cap \partial) = 0$, а потому $H_f \perp H_g$. г) В силу п. б) $E(\delta) H_g \subset H_g$, а потому по теореме 3.6.4 H_g приводит $E(\delta)$, $\forall \delta \in \mathfrak{A}$. Но тогда $P_g \smile E(\delta)$ в силу теоремы 3.6.1 и $P_g \smile J_\varphi$ по теореме 5.4.8, п. а), а потому H_g приводит J_φ ●

Подпространства $H_1, H_2 \subset H$ будем называть *спектрально-ортогональными* (относительно E), если для любых $u \in H_1$, $v \in H_2$ и для любого $\delta \in \mathfrak{A}$ $\mu_{u, v}(\delta) = 0$. Из спектральной ортогональности, разумеется, вытекает (при $\delta = Y$), что $H_1 \perp H_2$. Для двух подпространств H_f, H_g, напротив, из обычной ортогональности следует спектральная, поскольку они приводят $E(\delta)$. Если $H_f \perp H_g$, то элементы f, g также будем называть *спектрально-ортогональными*.

Пусть элементы $\{f_j\}$, $j \in [1, n\rangle$, $1 \leqslant n \leqslant \infty$, попарно спектрально-ортогональны и $\sum_j \|f_j\|^2 < \infty$. Легко видеть, что тогда для любого $\delta \in \mathfrak{A}$

$$\mu_f(\delta) = \textstyle\sum_j \mu_{f_j}(\delta) \qquad (f = \textstyle\sum_j f_j). \tag{3}$$

2. Сопоставим меры μ_g, отвечающие различным $g \in H$. Будем исходить из понятия *типа* (класса эквивалентных мер). Напомним (см. § 1.5, п. 14), что отношение подчиненности мер индуцирует отношение подчиненности для типов. Для элемента $g \in H$ тип $[\mu_g]$ меры μ_g называют *типом элемента* g (относительно спектральной меры E) и обозначают $[g]$ или $[g]_E$. Таким образом, $[g] \overset{\text{def}}{=} [\mu_g]$.

Теорема 2. а) *Если* $f \in H_g$, *то* $[f] \prec [g]$. б) *Пусть* μ — *конечная мера на* $(Y, \mathfrak{A})$ *и* $[\mu] \prec [g]$. *Тогда найдется элемент* $f \in H_g$, *такой, что* $\mu_f = \mu$. в) *Если* $f \in H_g$ *и* $[f] = [g]$, *то* $H_f = H_g$.

○ а) Требуемое прямо вытекает из (1) и (5.3.12). б) Пусть $\psi = (d\mu/d\mu_g)^{1/2}$. Тогда $\psi \in L_2(\mu_g)$, поскольку $\int |\psi|^2 d\mu_g = \mu(Y) < \infty$. Элемент $f = J_\psi g$ — искомый. в) Пусть $f = J_\psi g$; (5.3.12) означает, что $d\mu_f/d\mu_g = |\psi|^2$. Так как $[f] = [g]$, то $\psi \neq 0$ μ_g-п. в. и $\varphi = \psi^{-1} \in L_2(\mu_f)$. Тогда $J_\varphi f = J_\varphi J_\psi g = g$, т. е. $g \in H_f$. Остается сослаться на теорему 1, п. б) ●

3. Предположим, что система попарно спектрально-ортогональных элементов $\{g_j\}$, $j \in [1, n\rangle$, $1 \leqslant n \leqslant \infty$, такова, что

$$H = \textstyle\sum_j \oplus H_{g_j}(E). \tag{4}$$

Тогда эта система называется *порождающей* относительно спектральной меры E.

Теорема 3. *Для всякого пространства со спектральной мерой* $(Y, \mathfrak{A}, H, E)$ *существуют порождающие системы.*

○ Пусть $\{h_k\}$ — плотная в H последовательность. Положим $g_1 = h_1$. Пусть спектрально-ортогональные элементы $g_1, \ldots, g_s$ уже построены; положим

$$H_s \overset{\text{def}}{=} \textstyle\sum_{j \leqslant s} \oplus H_{g_j}. \tag{5}$$

Если $H_s = H$, то построение закончено. В противном случае пусть g_{s+1} — проекция на $H \ominus H_s$ первого из элементов $h_k \overline{\in} H_s$. В силу теоремы 1, п. в), g_{s+1} спектрально-ортогонален к $g_1, \ldots, g_s$. Построенная последовательность $\{g_j\}$ может оказаться конечной или бесконечной. В любом случае сумма в (4) содержит каждый из элементов h_k, а потому равенство (4) выполнено ●

Убедимся, что среди типов $[g]_E$ есть *максимальный*, т. е. такой, что $[f]_E \prec [g]_E$, $\forall f \in H$. Этот тип называют *спектральным типом* (или просто типом) меры E и обозначают через $[E]$. Элементы $g \in H$, для которых $[g]_E = [E]$, называют *элементами максимального типа*. Для них условия $\mu_g(\delta) = 0$ и $E(\delta) = 0$ равносильны.

Теорема 4. *Для любой спектральной меры* E *в* H *существуют элементы максимального типа* *).

○ Элементы g_j в (4) можно нормировать так, что ряд $\sum_j g_j \overset{\text{def}}{=} g$ будет сходиться. Из (3) следует, что $[g_j] \prec [g]$, $\forall j$. Покажем, что g — элемент максимального типа. Пусть $f \in H$, f_j — его проекция на H_{g_j}. В силу теоремы 1, п. б), элементы f_j попарно спектрально-

---

*) Теорема 4 теряет силу для несепарабельного случая.

ортогональны. Из п. а) теоремы 2 видно, что $[f_j] \prec [g_j]$, $\forall j$. Если теперь $\mu_g(\delta)=0$, то $\mu_{f_j}(\delta)=0$, и в силу (3) $\mu_f(\delta)=0$, т. е. $[f] \prec [g]$ ●

Пусть $H' \subset H$ — подпространство, приводящее меру E, и пусть E' — часть E в H'. Ясно, что тогда $[E'] \prec [E]$.

4. Пусть μ — какая-либо мера на $(Y, \mathfrak{A})$, причем $[\mu]=[E]$. Для каждого $g \in H$ введем $\Upsilon(g)$ — множество, где $d\mu_g/d\mu > 0$. Это множество определяется с точностью до E-меры нуль. Поэтому *ниже все соотношения, содержащие множество* $\Upsilon(g)$, *понимаются с точностью до подмножеств E-меры нуль.* Множество $\Upsilon(g)$ зависит лишь от типа $[\mu]=[E]$, но не от самой меры μ: если $\nu \sim \mu$, то $d\mu_g/d\nu = p\,d\mu_g/d\mu$, где $p=d\mu/d\nu>0$ E-п.в. Это позволяет называть $\Upsilon(g)$ *носителем* μ_g *по отношению к типу* $[E]$. Из определения сразу вытекает, что следующие пары соотношений эквивалентны: $[f] \prec [g]$ и $\Upsilon(f) \subset \Upsilon(g)$; $[f]=[g]$ и $\Upsilon(f)=\Upsilon(g)$; $[g]_E=[E]$ и $\Upsilon(g)=Y$. Далее,

$$E(\Upsilon(g))\,g=g, \qquad \forall g \in H. \tag{6}$$

В самом деле,

$$\|g-E(\Upsilon(g))\,g\|^2=\|E(Y\setminus\Upsilon(g))\,g\|^2=\mu_g(Y\setminus\Upsilon(g))=0.$$

Лемма 5. *а) Если f, $g \in H$ спектрально-ортогональны, то $\Upsilon(f+g)=\Upsilon(f)\cup\Upsilon(g)$. б) Если $\Upsilon(f)\cap\Upsilon(g)=\varnothing$, то f, g спектрально-ортогональны. в) Если $[g]_E=[E]$, $\delta \in \mathfrak{A}$, и $f=E(\delta)g$, то $\Upsilon(f)=\delta$.*

○ а) Требуемое непосредственно следует из (3). б) В силу (6) $\mu_{f,g}(\delta)=(E(\delta)f,g)=(E(\delta)\,E(\Upsilon(f))\,f,\quad E(\Upsilon(g))\,g)=0, \quad \forall\delta \in \mathfrak{A}$. в) В соответствии с (5.3.12) $d\mu_f/d\mu_g=\chi_\delta$, откуда $\Upsilon(f)=\delta$ ●

Лемма 6. *Пусть μ — конечная мера на $(Y, \mathfrak{A})$, $[\mu]=[E]$ и пусть $g \in H$. Найдется элемент $f \in H_g(E)$, такой, что $H_f=H_g$ и μ_f есть сужение μ на $\Upsilon(g)$.*

○ Носитель меры $\mu_0(\delta)=\mu(\delta\cap\Upsilon(g))$ очевидно есть $\Upsilon(g)$, а потому $[\mu_0]=[g]$. В силу теоремы 2 найдется $f \in H_g$, такой, что $\mu_f=\mu_0$. Тогда $[f]=[g]$, а потому $H_f=H_g$ ●

5. Разложение (4), полученное при доказательстве теоремы 3, имеет случайный характер: не только элементы $\{g_j\}$, но и их число и типы не определяются однозначно спектральной мерой E. Опираясь на теорему 3, проведем теперь «перестройку» разложения (4) так, чтобы типы элементов g_j убывали. Тогда эта последовательность типов окажется (см. § 4) унитарным инвариантом спектральной меры.

Теорема 7. *Пусть $(Y, \mathfrak{A}, H, E)$ — пространство со спектральной мерой. Существует (порождающая) система $\{g_j\}$, $j \in [1, m\rangle$, $1 \leqslant m \leqslant \infty$, такая, что выполнено (4) и*

$$[E]=[g_1]\succ[g_2]\succ\ldots \tag{7}$$

○ Пусть $\{h_k\}$ — плотная в H последовательность. Если $[h_1]_E = [E]$, то полагаем $g_1=h_1$. В противном случае выбираем какой-либо элемент $f \in H$ максимального типа и полагаем $g_1 = h_1 + w_1$, где $w_1 = E(\delta_1) f_1$, $\delta_1 = Y \setminus \Upsilon(h_1)$. Используя лемму 5, находим, что $\Upsilon(w_1) = \delta_1$, а потому h_1, w_1 спектрально-ортогональны и $\Upsilon(g_1) = \Upsilon(h_1) \cup \Upsilon(w_1) = Y$. Следовательно, $[g_1]_E = [E]$. Кроме того, $h_1 = E(\Upsilon(h_1)) g_1 \in H_{g_1}$.

Дальнейшая индукция использует следующие обозначения. Пусть $g_1, \ldots, g_s$ — попарно спектрально-ортогональные элементы в H, H_s — подпространство (5), $H'_s = H_s^{\perp}$. В силу теоремы 1, п. в), H'_s приводит спектральную меру E. Пусть E'_s — часть E в H'_s. Так как $H'_0 \overset{\mathrm{def}}{=} H \supset H'_1 \supset \ldots \supset H'_s$, то

$$[E'_0] \overset{\mathrm{def}}{=} [E] \succ [E'_1] \succ \ldots \succ [E'_s]. \tag{8}$$

Предположим дополнительно, что построенные элементы $g_1, \ldots, g_s$ удовлетворяют условиям

$$[g_j]_E = [E'_{j-1}], \qquad h_j \in H_j, \quad j = 1, \ldots, s. \tag{9}$$

Если $H_s \neq H$, то пусть h'_{s+1} — проекция на H'_s первого из элементов $h_k \overline{\in} H_s$. Элемент g_{s+1} в H'_s строится по h'_{s+1} так же, как это было сделано при $s = 0$. При этом выполнены (8), (9) (при $s \longmapsto s+1$). Как и в теореме 3, убеждаемся в том, что описанная процедура приводит к (4). Соотношения (7) вытекают из (8), поскольку

$$[g_{j+1}]_E = [E'_j] \prec [E'_{j-1}] = [g_j], \qquad \forall j < m \quad \bullet$$

Если $m > 1$, то разложение (4) не единственно и при условии (7).

Из (7) следуют включения

$$Y = \Upsilon(g_1) \supset \Upsilon(g_2) \supset \ldots \tag{10}$$

Введем множества Y_k, $k \in [1, m]$:

$$Y_k = \Upsilon(g_k) \setminus \Upsilon(g_{k+1}) \quad (k < m), \qquad Y_m = \bigcap_{k \in [1, m)} \Upsilon(g_k). \tag{11}$$

Множества Y_k образуют дизъюнктное разложение Y. Определим E-п. в. на Y измеримую функцию (*функцию кратности* меры E) равенствами

$$\mathrm{N}_E(y) = k \qquad (y \in Y_k; \quad k \in [1, m]). \tag{12}$$

Ее задание позволяет восстановить (с точностью до E-меры нуль) все множества (11), а потому и множества (10). Тем самым тип $[E]$ и функция N_E однозначно определяют последовательность типов (7). В § 4 мы убедимся, что функция (12) зависит только от меры E, но не от разложения (4), подчиненного (7).

6. Проиллюстрируем введенные понятия на примере спектральной меры (2.1) в прямом интеграле $H_{\mu, \mathrm{N}}$. Пусть мера μ конечна

и $\{e_j(y)\}$, $j \in [1, m\rangle$, — о. б. и. в $H_{\mu,\mathrm{N}}$. Тогда элементы *) $\{e_j\}$ образуют порождающую систему, удовлетворяющую (7). В самом деле, из равенств

$$(\mathrm{X}(\delta) e_j, e_k) = \int_\delta \langle e_j(y), e_k(y)\rangle_G \, d\mu(y), \qquad \forall j, k \in [1, m\rangle, \quad \forall \delta \in \mathfrak{A}, \tag{13}$$

следует, что e_j попарно спектрально-ортогональны. Лемма 1.5 (при $f_0 \equiv 1$) означает, что система $\{e_j\}$ — порождающая. Далее, из определения о. б. и. и из (13) при $j = k$ находим, что $\Upsilon(e_k) = \bigcup_{l \geqslant k} Y_l$, т. е. выполнено (7) (при этом μ_{e_k} — сужение меры μ на $\Upsilon(e_k)$). Поскольку $\Upsilon(e_1) = Y$, то $[\mathrm{X}] = [\mu]$. Множества (11) совпадают с множествами (1.2), а потому $\mathrm{N}_{\mathrm{X}}(y) = \mathrm{N}(y)$ (μ-п. в.).

§ 4. Унитарные инварианты спектральной меры

Основная цель этого параграфа — построение функциональной модели и исследование унитарных инвариантов произвольной спектральной меры.

1. В формулировках следующих трех теорем (они доказываются в п. 2) использованы обозначения: $(Y, \mathfrak{A}, H, E)$ — пространство со спектральной мерой, $J_\varphi = \int \varphi \, dE$; μ — σ-конечная мера со счетной базой на $(Y, \mathfrak{A})$; $H_{\mu,\mathrm{N}}$ — прямой интеграл (1.16) на $(Y, \mathfrak{A})$, N — его функция размерности (1.1); X — спектральная мера (2.1), отвечающая интегралу $H_{\mu,\mathrm{N}}$, $Q_\varphi = \int \varphi \, d\mathrm{X}$.

Теорема 1. *Пусть типы мер E и μ совпадают и пусть функция размерности N совпадает с функцией кратности N_E, порожденной разложением* (3.4), *удовлетворяющим условию* (3.7):

$$[\mu] = [E], \quad \mathrm{N}(y) = \mathrm{N}_E(y) \qquad (\mu\text{-п. в.}). \tag{1}$$

Тогда существует унитарное отображение V пространства H на $H_{\mu,\mathrm{N}}$, которое любой оператор J_φ, $\varphi \in S(Y, E)$, переводит в оператор Q_φ. В частности,

$$VE(\delta) = \mathrm{X}(\delta) V. \tag{2}$$

Теорема 2. а) *Функция кратности N_E не зависит от разложения* (3.4), *подчиненного* (3.7), *а определяется только мерой E.* б) *Спектральный тип $[E]$ и функция кратности N_E — унитарные инварианты меры E.*

Теорема 3. *Спектральный тип $[E]$ и функция кратности N_E определяют спектральную меру E на пространстве $(Y, \mathfrak{A})$ с точностью до унитарной эквивалентности.*

---

*) Если мера μ лишь σ-конечна, то порождающей является система $\{\omega_j\}$, использованная при доказательстве теорем 2.1, 2.2.

Исходной является теорема 1, из которой остальное следует без труда. Теорема 1 доставляет универсальную функциональную модель для любой спектральной меры на измеримом пространстве. Теоремы 2,3 вместе означают, что *тип* $[E]$ *и функция кратности* N_E *образуют полную систему унитарных инвариантов меры* E. В этой связи отметим, что тип любой σ-конечной меры μ со счетной базой на $(Y, \mathfrak{A})$ и любая μ-измеримая функция N со значениями из $[1, \infty]$ являются спектральным типом и функцией кратности некоторой спектральной меры на $(Y, \mathfrak{A})$. Действительно, для меры X в $H = H_{\mu, \mathrm{N}}$ будет (см. § 3, п. 6) $[\mathrm{X}] = [\mu]$ и $\mathrm{N}_{\mathrm{X}} = \mathrm{N}$.

В соответствии с теоремой 1 все операторы J_φ одновременно преобразуются в операторы Q_φ в прямом интеграле $H_{\mu, \mathrm{N}}$. Последние изображаются умножением на скалярный оператор $\varphi(y) I_{G(y)}$. В любом ортогональном базисе пространства $G(y)$ такой оператор изображается диагональной матрицей. Поэтому результат теоремы 1 часто выражают следующим образом: *спектральная мера E порождает такое разложение H в прямой интеграл, в котором все операторы J_φ диагональны.*

2. Доказательство теоремы 1. Прежде всего заметим, что теорема 2.2, п. а), позволяет заменить меру μ любой эквивалентной мерой. Поэтому можно считать, что $\mu(Y) < \infty$. Далее, в соответствии с леммой 3.6 считаем, что для порождающих элементов g_j разложения (3.4) меры μ_{g_j} суть сужения меры μ на соответствующие множества $\Upsilon(g_j)$.

Пусть $\{e_j(y)\}$, $j = [1, m\rangle$, — о. б. и. в прямом интеграле $H_{\mu, \mathrm{N}}$. Так как мера μ конечна, то $e_j \in H_{\mu, \mathrm{N}}$. Из определения о. б. и. и функции кратности $\mathrm{N} = \mathrm{N}_E$ следует, что μ-п. в. $|e_j(y)|_G = 1$ на $\Upsilon(g_j)$ и $e_j(y) = 0$ вне $\Upsilon(g_j)$. Для $\psi \in H_{\mu, \mathrm{N}}$ положим $\psi_j(y) = \langle \psi(y), e_j(y) \rangle_{G(y)}$. Ясно, что $\psi_j \in S(Y, \mu) = S(Y, E)$. Элементу ψ сопоставим элемент $\tilde{V}\psi \in H$:

$$\tilde{V}\psi \overset{\text{def}}{=} \sum\nolimits_j J_{\psi_j} g_j. \tag{3}$$

Это определение корректно, поскольку $g_j \in D\left(J_{\psi_j}\right)$ и ортогональный ряд сходится, что следует из соотношений

$$\begin{aligned} \|\tilde{V}\psi\|^2 &= \sum\nolimits_j \|J_{\psi_j} g_j\|^2 = \sum\nolimits_j \int |\psi_j|^2 \, d\mu_{g_j} = \\ &= \sum\nolimits_j \int |\psi_j|^2 \, d\mu = \int |\psi|_G^2 \, d\mu = \|\psi\|^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Оператор $\tilde{V}$ очевидно линеен, и в силу (4) — изометричен.

Заметим теперь, что при умножении вектор-функции ψ на функцию χ_δ то же происходит с функциями ψ_j. В частности, если $\psi = \chi_\delta e_k$, то $\psi_j(y) = 0$ при $j \neq k$ и $\psi_k(y) = \chi_{\delta_k}(y)$, где $\delta_k = \delta \cap \Upsilon(g_k)$. Отсюда с учетом (3 6) находим

$$\tilde{V}(\chi_\delta e_k) = J_{\chi_{\delta_k}} g_k = E(\delta_k) g_k = E(\delta) E(\Upsilon(g_k)) g_k = E(\delta) g_k.$$

Из (3.4) в силу теоремы 3.1, п. а), следует, что совокупность $\{E(\delta)g_k : \delta \in \mathfrak{A},\ k \in [1, m\rangle\}$ полна в H. Тем самым образ $\tilde{V}$ плотен в H, а потому $\tilde{V}H_{\mu, \mathrm{N}} = H$.

Пусть теперь $\psi \in H_{\mu, \mathrm{N}}$. Тогда

$$\tilde{V}X(\delta)\psi = \tilde{V}(\chi_\delta\psi) = \sum\nolimits_j J_{\chi_\delta\psi_j}g_j = J_{\chi_\delta}\sum\nolimits_j J_{\psi_j}g_j = E(\delta)\tilde{V}\psi. \tag{5}$$

Положим $V = \tilde{V}^{-1}$. Равенство (5) очевидно равносильно (2). Остается заметить, что $VJ_\varphi = Q_\varphi V$ вследствие теоремы 5.4.9 ●

Доказательство теоремы 2. а) Пусть $\mathrm{N}' = \mathrm{N}'_E$, $\mathrm{N}'' = \mathrm{N}''_E$ — функции кратностей, соответствующие двум разложениям вида (3.4). В силу теоремы 1 мера E унитарно эквивалентна мерам X', X'' в $H_{\mu, \mathrm{N}'}$, $H_{\mu, \mathrm{N}''}$, а потому сами меры X', X'' унитарно эквивалентны. Но тогда из теоремы 2.2, п. б), следует, что $\mathrm{N}'_E = \mathrm{N}''_E$.

б) Пусть мера E в H и мера E_1 в H_1 унитарно эквивалентны и пусть мера X в $H_{\mu, \mathrm{N}}$—«модель» для меры E, даваемая теоремой 1. Тогда и мера E_1 приводится к той же модели, а потому $[E_1] = [\mu] = [E]$ и $\mathrm{N}_{E_1} = \mathrm{N} = \mathrm{N}_E$ ●

Доказательство теоремы 3. Пусть E, E_1 — спектральные меры в H, H_1 соответственно. Тогда для их моделей, даваемых теоремой 1, $[\mu] = [\mu_1]$, $\mathrm{N} = \mathrm{N}_1$. В силу теоремы 2.2, п. а), эти модели унитарно эквивалентны, а тогда то же верно для мер E, E_1 ●

3. Пусть $(Y, \mathfrak{A}, H, E)$ — пространство со спектральной мерой. Обозначим через $\mathbf{B}_E(H)$ алгебру всех операторов $T \in \mathbf{B}(H)$, перестановочных с E. Эта алгебра характеризуется следующей теоремой.

Теорема 4. *Пусть V, $H_{\mu, \mathrm{N}}$ — те же, что в теореме 1. Изометрия V устанавливает унитарную эквивалентность алгебры $\mathbf{B}_E(H)$ и алгебры непрерывных разложимых операторов в пространстве $H_{\mu, \mathrm{N}}$.*

○ В силу теоремы 1 условие $T \smile E$ равносильно условию $\hat{T} = VTV^{-1} \smile X$, где X — мера (2.1) в $H_{\mu, \mathrm{N}}$. Остается применить к $\hat{T}$ теорему 2.3 ●

Операторы, перестановочные с $\mathbf{B}_E(H)$, суть операторы J_φ. Ограничимся случаем непрерывных операторов.

Теорема 5. *Пусть E — спектральная мера в H и пусть $S \in \mathbf{B}(H)$, $S \smile T$, $\forall T \in \mathbf{B}_E(H)$. Тогда $S = J_\varphi$, где $\varphi \in L_\infty(Y, E)$.*

○ Подвергнем операторы T, E, S унитарному преобразованию посредством (одного и того же) унитарного оператора V, описанного в теореме 1. В силу теоремы 2.7 $\hat{S} = VSV^{-1} = Q_\varphi$, где $\varphi \in L_\infty(Y, E)$. Но тогда из теоремы 1 следует, что $S = J_\varphi$ ●

4. *Спектральная мера E на $(Y, \mathfrak{A})$ называется простой, если ее функция кратности $\mathrm{N}_E = 1$ E-п.в.* В этом случае разложение (3.4) при условии (3.7) сводится к одному члену. Более детально, *спектральная мера E на измеримом пространстве $(Y, \mathfrak{A})$ оказывается простой тогда и только тогда, когда существует (порождаю-*

щий) элемент $g \in H$, *такой, что* $H = H_g$. Заметим, что тогда $[g]_E = [E]$, т. е. g есть элемент максимального (относительно E) типа. Обратно, всякий элемент максимального типа — порождающий. Для этих и только этих элементов $\bigvee_{\delta \in \mathfrak{A}} E(\delta) g = H$.

При $N_E \equiv 1$ модельное (в смысле теоремы 1) пространство $H_{\mu, N}$ может быть сведено к обычному пространству $L_2(Y, \mu)$ (сумма (1.13) сводится к одному слагаемому с $\dim G_1 = 1$).

Все сказанное непосредственно вытекает из предыдущих построений и не требует дополнительного обоснования. Следующее утверждение также получается простым сопоставлением теоремы 1 с теоремой 2.4.

Теорема 6. *Пусть E — простая спектральная мера в H и $T \in \mathbf{B}(H)$ — оператор, перестановочный с E. Тогда $T = J_\varphi$, где φ — некоторая функция из $L_\infty(Y, E)$.*

5. Вернемся к общему случаю. Унитарный инвариант спектральной меры E

$$m = E\text{-}\sup N_E(y)$$

называют *общей кратностью* (или просто *кратностью*) меры E. Подпространства H_{g_j} в разложении (3.4), (3.7) приводят меру E, причем часть E в каждом H_{g_j} есть простая спектральная мера. Смысл числа m состоит в том, что оно дает минимальное число слагаемых в ортогональных разложениях меры E на простые спектральные меры.

В заключение отметим, что при $N_E \equiv m$ в качестве модельного пространства в теореме 1 можно взять пространство $L_2(Y, \mu, G)$, где $\dim G = m$ (G не зависит от y).

§ 5. Унитарные инварианты самосопряженных операторов

Сопоставление результатов § 4 об унитарных инвариантах спектральной меры и основных результатов гл. 6 прямо приводит к построению функциональной модели и к описанию полной системы унитарных инвариантов нормального (в частности, самосопряженного или унитарного) оператора. Аналогичные вопросы решаются и для конечных систем перестановочных операторов. Здесь излагаются эти результаты. При этом мы ограничиваемся самосопряженным случаем.

1. Пусть $\{A_k\}$, $k = 1, \ldots, n$, — система попарно перестановочных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве H, $\{A'_k\}$, $k = 1, \ldots, n$, — аналогичная система в пространстве H', и пусть E, E' — соответствующие им по теореме 6.5.1 совместные спектральные меры, заданные на борелевских подмножествах в $\mathbf{R}^n$. Если оператор V унитарно отображает H на H' и

$$VE(\delta) = E'(\delta) V \quad (\forall \delta \in \mathfrak{A}^B(\mathbf{R}^n)), \tag{1}$$

то вследствие теоремы 5.4.9 справедливы равенства

$$VA_k = A'_k V, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Обратно, пусть выполнено (2). Очевидно, что $F = VEV^{-1}$ — также спектральная мера в пространстве H'. Положим

$$B_k = \int_{\mathbb{R}^n} s_k dF(s), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Из $VE = FV$ по теореме 5.4.9 следует, что $VA_k = B_k V$, $k = 1, \ldots, n$. Отсюда и из (2) получаем $B_k = A'_k$, $k = 1, \ldots, n$, и в силу единственности спектральной меры $F = E'$. Таким образом, выполнено (1).

Мы установили, что *унитарная эквивалентность двух конечных систем попарно перестановочных самосопряженных операторов равносильна унитарной эквивалентности соответствующих совместных спектральных мер*. Сказанное, разумеется, распространяется на системы нормальных (в том числе унитарных) операторов. Утверждения этого типа в дальнейшем используются без специальных ссылок.

2. Начнем со случая одного самосопряженного оператора. Опишем его функциональную модель.

Теорема 1. *Пусть A — самосопряженный оператор в H, $E = E_A$ — его спектральная мера, μ — борелевская мера на $\mathbb{R}$, такая, что $[\mu] = [E_A]$. Тогда существует унитарное отображение пространства H на прямой интеграл*

$$H_{\mu, \mathrm{N}} = \int_{\mathbb{R}} \oplus G(s)\, d\mu(s), \quad \mathrm{N} = \mathrm{N}_E, \tag{3}$$

переводящее A в оператор умножения на s.

○ Спектральная мера E_A построена в теореме 6.1.1. Функциональная модель этой меры дается теоремой 4.1. В силу этой же теоремы оператор $A = \int s dE(s)$ переходит в прямом интеграле (3) в оператор умножения на s ●

Из теорем 4.2, 4.3 прямо вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть A — самосопряженный оператор в H, $E = E_A$ — его спектральная мера. Спектральный тип $[E_A]$ и функция кратности N_E являются унитарными инвариантами оператора A и определяют его с точностью до унитарной эквивалентности.*

Иными словами, *тип и функция кратности спектральной меры самосопряженного оператора образуют полную систему его унитарных инвариантов*. Тип $[E_A]$ по определению называют *спектральным типом оператора* A: $[A] \overset{\mathrm{def}}{=} [E_A]$; функцию кратности N_E называют *функцией кратности спектра оператора* A. Величина $m(A) = E\text{-}\sup \mathrm{N}_E(s)$ — *общая кратность* (или просто *кратность*) *спектра* A. Тип элемента $h \in H$ относительно меры E_A называют его спектральным типом относительно оператора A.

Отметим еще утверждение, являющееся частным случаем доказываемой ниже теоремы 8.

Теорема 3. *Пусть A — самосопряженный оператор в H и $T \in \mathbf{B}(H)$ — оператор, перестановочный со всеми операторами $S \in \mathbf{B}(H)$, такими, что $S \smile A$. Тогда $T = \varphi(A)$, где $\varphi \in L_\infty(\mathbf{R}, E_A)$.*

3. Пусть $A = A^*$, $E = E_A$, $\mathrm{N} = \mathrm{N}_E$. Если мера E — простая, то оператор A называют *оператором с простым спектром*. Иными словами, оператор $A = A^*$ имеет простой спектр, если $\mathrm{N}(s) = 1$ E-п.в. на $\mathbf{R}$, т. е. $m(A) = 1$. Прямой интеграл (3) в этом случае может быть сведен к $L_2(\mathbf{R}, \mu)$, где $[\mu] = [A]$. Таким образом, *самосопряженный оператор A с простым спектром унитарно эквивалентен оператору A_μ* (см. § 4.7) *умножения на независимую переменную в $L_2(\mathbf{R}, \mu)$, где $[\mu] = [A]$*. Спектральный тип $[A]$ определяет самосопряженный оператор A с простым спектром с точностью до унитарной эквивалентиости. В частности, два оператора умножения A_μ, A_ν унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mu \sim \nu$.

В соответствии со сказанным в § 4, п. 4, $m(A) = 1$ означает существование (порождающего) элемента $g \in H$, такого, что $H_g(E_A) = H$. Порождающие элементы (и только они) имеют максимальный тип относительно A: $[g] = [A]$. Порождающие элементы характеризуются условием $\bigvee_\delta E_A(\delta) g = H$ (достаточно считать, что δ пробегает множество ограниченных интервалов прямой $\mathbf{R}$).

Можно указать признак простоты спектра, в котором не требуется знание спектральной меры.

Теорема 4*). *Для того чтобы оператор $A = A^*$ имел простой спектр, необходимо и достаточно, чтобы существовал элемент $g \in \bigcap_1^\infty D(A^n)$, такой, что $\bigvee_0^\infty A^n g = H$.*

Теорема 5. *Пусть $A = A^*$ — оператор с простым спектром и $T \in \mathbf{B}(H)$, $T \smile A$. Тогда $T = \varphi(A)$, $\varphi \in L_\infty(\mathbf{R}, E_A)$.*

○ Достаточно сопоставить теорему 6.3.2 с теоремой 4.6 ●

4. Вернемся к случаю произвольного самосопряженного оператора A. Пусть разложение (3.4) построено по мере E_A и подчинено условию (3.7). Каждое подпространство H_{g_j} приводит A (см. теорему 3.1, п. в)). Часть A в H_{g_j} очевидно есть самосопряженный оператор с простым спектром (g_j — порождающий элемент). Отсюда следует, что *каждый самосопряженный оператор A унитарно эквивалентен ортогональной сумме операторов умножения на независимую переменную A_{μ_j} в $L_2(\mathbf{R}, \mu_j)$, $j = 1, \ldots, m$; здесь $m = m(A)$ — общая кратность спектра A.* Отметим, что число слагаемых в такой ортогональной сумме может превышать $m(A)$, если отка-

---

*) Доказательство этой теоремы является хорошим упражнением. Впрочем, его можно найти, например, в [1].

заться от условия (3.7); оно, однако, не может быть сделано меньше, чем $m(A)$.

5. В тексте настоящего пункта $\mathbf{a}=\{A_k\}$, $k=1, \ldots, n$, — система попарно перестановочных самосопряженных операторов в H, $E=E_{\mathbf{a}}$ — совместная спектральная мера системы $\mathbf{a}$.

Следующие две теоремы вполне аналогичны теоремам 1, 2, и мы ограничимся только формулировками.

Теорема 6. *Пусть μ — борелевская мера на $\mathbf{R}^n$, $[\mu]=[E_{\mathbf{a}}]$. Тогда существует унитарное отображение пространства H на прямой интеграл $H_{\mu, \mathrm{N}}$ по $\mathbf{R}^n$, $\mathrm{N}=\mathrm{N}_{F_{\mathbf{a}}}$, переводящее каждый оператор A_k в оператор умножения на координату s_k, $k=1, \ldots, n$*

Теорема 7. *Спектральный тип $[E_{\mathbf{a}}]$ и функция кратности N меры $E_{\mathbf{a}}$ являются унитарными инвариантами системы $\mathbf{a}$ и определяют ее с точностью до унитарной эквивалентности.*

Функцию кратности N меры $E_{\mathbf{a}}$ называют также функцией кратности совместного спектра системы $\mathbf{a}$.

Установим еще следующую теорему.

Теорема 8. *Если $T\in\mathbf{B}(H)$, $T\smile S$ для любого $S\smile A_k$, $k=1, \ldots, n$, то*

$$T=\varphi(A_1, \ldots, A_n), \quad \varphi\in L_\infty(\mathbf{R}^n, E_{\mathbf{a}}). \tag{4}$$

○ В силу теоремы 6.5.5 $S\smile E_{\mathbf{a}}$ Поэтому из теоремы 4 5 следует, что $T=J_\varphi$, $\varphi\in L_\infty$. Это равносильно (4) по определению ●

Если мера $E_{\mathbf{a}}$ — простая (т. е. $\mathrm{N}_{E_{\mathbf{a}}}=1$ $E_{\mathbf{a}}$-п в.), то система $\mathbf{a}=\{A_k\}$ называется *полной*. В этом случае модельное пространство $H_{\mu,\mathrm{N}}$ (см. теорему 6) может быть реализовано как $L_2(\mathbf{R}^n, \mu)$. Полнота системы $\mathbf{a}$ равносильна существованию такого (порождающего) элемента $g\in H$, что $H_g(E_{\mathbf{a}})=H$. Следующая теорема обобщает теорему 5.

Теорема 9. *Пусть система $\mathbf{a}=\{A_k\}$ — полная и пусть $T\in\mathbf{B}(H)$, $T\smile A_k$, $k=1, \ldots, n$. Тогда имеет место (4).*

○ Достаточно сопоставить теоремы 6.5.5 и 4.6 ●

Теорема 9 может быть обобщена на случай неограниченных T. Мы обсудим лишь самосопряженный случай.

Теорема 10. *Пусть $\mathbf{a}=\{A_k\}$ — полная система и $A=A^*$, $A\smile A_k$, $k=1, \ldots, n$. Тогда*

$$A=\psi(A_1, \ldots, A_n), \quad \psi\in S(\mathbf{R}^n, E_{\mathbf{a}}). \tag{5}$$

○ В условиях теоремы очевидно $T\smile A_k$, $k=1, \ldots, n$, где $T=(A-iI)^{-1}$. Тогда для T выполнено (4), и остается положить $\psi=(1+i\varphi)/\varphi$ ●

Понятие полной системы коммутирующих самосопряженных операторов в квантовой механике соответствует понятию полной системы одновременно измеримых физических величин (наблюдаемых). Теорема 10 означает, что физическая величина, измеримая одновременно с полной системой наблюдаемых, является вполне определенной функцией последних. Понятие полной системы может быть перенесено и на бесконечные семейства коммутирующих операторов, но мы не будем здесь касаться этого вопроса.

6. Сказанное в пп. 2—5 допускает естественное распространение на случай нормальных (в том числе унитарных) операторов. Такое распространение не требует каких-либо новых соображений. Читатель без труда восстановит соответствующий материал самостоятельно.

 Заказ 649

ГЛАВА 8

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Применениям спектральной теории, по сути дела, посвящена вся оставшаяся часть книги. В этой главе собраны, в основном, приложеиия к дифференциальным уравнениям. Исключение составляет § 1 о полярном разложении оператора.

§ 1. Полярное представление замкнутого оператора

Здесь мы получим так называемое *полярное представление* произвольного замкнутого плотно определенного оператора. Это представление можно рассматривать как аналог представления комплексного числа в показательной (полярной) форме. При выводе будем опираться на понятие функций самосопряжениого оператора. Для нормального оператора будет показано, что сомножители в полярном представлении перестановочны. Это обстоятельство было использовано в § 6.6 при выводе спектрального разложения (6.6.1).

1. Пусть T — замкнутый оператор в H, $\overline{D(T)}=H$. Оператор $G=T^*T$ самосопряжен и положителен (см. теорему 4.5.1). Пусть E_G — его спектральная мера. Оператор

$$K=\int_{[0,\infty)}\sqrt{s}\,dE_G(s)=\sqrt{G}=(T^*T)^{1/2}$$

также самосопряжен и положителен и $K^2=T^*T$. Его называют *модулем оператора* T и пишут $K=|T|$.

Лемма 1. *Справедливы равенства* $D(|T|)=D(T)$, $\overline{R(|T|)}=\overline{R(T^*)}$ *и*

$$\||T|f\|=\|Tf\|,\qquad f\in D(T)=D(|T|). \tag{1}$$

○ Согласно теореме 4.5.1 множество $L=D(T^*T)$ плотно в $D(T)$ относительно T-нормы (3.1.2). Так как $L=D(K^2)=$ $=D(T^*T)$, то это же верно для K-нормы. Для $f\in L$ T-норма и K-норма совпадают, поскольку

$$\|Tf\|^2=(T^*Tf,\ f)=(K^2f,\ f)=\|Kf\|^2.$$

Отсюда следует, что $D(K)=D(T)$ и выполнено (1). Кроме того, из (1) вытекает равенство

$$N(|T|)=N(T), \tag{2}$$

а потому

$$\overline{R(T^*)}=[N(T)]^{\perp}=[N(K)]^{\perp}=\overline{R(|T|)} \quad \bullet \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть оператор T замкнут, $\overline{D(T)}=H$. Существует частично-изометрический оператор V с областью изометричности $\overline{R(T^*)}$ и областью значений $\overline{R(T)}$, такой, что*

$$T=V|T|. \tag{4}$$

○ Для $x=Kf$, $f\in D(K)$, положим $Vx=Tf$. Этот оператор корректно определен в силу (2). Из (1) следует его изометричность. При этом $Tf=VKf$, что и дает (4). Остается изометрически продолжить V на $\overline{R(|T|)}$ и доопределить нулем на $N(K)=N(T)$ ●

Представление (4) называется *полярным*.

2. Предположим теперь, что оператор T — *нормальный*. Из равенства $T^*T=TT^*$ следуют соотношения

$$K=|T|=|T^*|, \qquad D(K)=D(T)=D(T^*). \tag{5}$$

Из (2) и (5) вытекает также, что

$$N(T^*)=N(T)=N(|T|). \tag{6}$$

Наконец, в силу (3) и (5)

$$\overline{R(T^*)}=\overline{R(T)}, \tag{7}$$

а потому V унитарен в $\overline{R(T)}$. Подпространство $N(T)$ приводит операторы T, T^* (см. теорему 4.6.4), а потому сужения T_0, T_0^* операторов T, T^* на $[N(T)]^{\perp}=\overline{R(T)}$ суть взаимно сопряженные нормальные операторы в $\overline{R(T)}$. Часть K_0 оператора K в $\overline{R(T)}=[N(K)]^{\perp}$ очевидно совпадает с $|T_0|=(T_0^*T_0)^{1/2}$. Поэтому при рассмотрении полярного представления (4) для нормального оператора будем, не уменьшая общности, считать $\overline{R(T)}=H$. Тогда оператор V унитарен.

Лемма 3. *При сделанных предположениях*

$$VD(T)=V^*D(T)=D(T). \tag{8}$$

○ Пусть f, $g\in D(T)$. Из (4) имеем:

$$(Kf,\ V^*g)=(VKf,\ g)=(Tf,\ g)=(f,\ T^*g), \tag{9}$$

$$(Tf,\ Vg)=(VKf,\ Vg)=(Kf,\ g)=(f,\ Kg). \tag{10}$$

Из (9) следует, что $V^*g\in D(K)=D(T)$, из (10) $Vg\in D(T^*)=D(T)$. С учетом унитарности V это дает (8) ●

Заметим теперь, что из (8) и (9) следует равенство $T^*=KV^*$. Отсюда и из (4) получаем: $VK^2=(VK)(KV^*)V=TT^*V=K^2V$, т. е. $V\smile K^2=G$. Но тогда в соответствии с теоремой 6.3.2 $V\smile K=G^{1/2}$. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть в условиях теоремы* 2 *оператор* T — *нормальный. Тогда в представлении* (4) *операторы* V *и* T *перестановочны. Сужение* V *на его область изометричности* (7) *есть унитарный в* $\overline{R(T)}$ *оператор.*

§ 2. Эволюционные дифференциальные уравнения в гильбертовом пространстве

В этом параграфе аппарат спектральной теории применяется для исследования абстрактных (т. е. содержащих вектор-функции со значениями в H) дифференциальных уравнений. Мы рассматриваем простейшие примеры такого рода — линейные уравнения первого и второго порядков, содержащие в качестве «постоянного коэффициента» самосопряженный оператор A. Эти примеры моделируют свойства некоторых важных уравнений математической физики. Формальное решение можно получить, обращаясь с A как с числом. Спектральная теория позволяет придать этой процедуре точный смысл.

1. Пусть $\Delta\subseteq\mathbf{R}$ — промежуток, H — гильбертово пространство и $u(t)$, $t\in\Delta$, — функция со значениями в H. Для таких функций естественно вводится понятие (сильной) производной как предела

$$du/dt=u'(t)\overset{\text{def}}{=}s\text{-}\lim\nolimits_{\tau\to 0}\tau^{-1}[u(t+\tau)-u(t)]. \tag{1}$$

Операция дифференцирования линейна. Если вектор-функции u, v дифференцируемы в точке t, то скалярная функция (u, v) также дифференцируема и

$$(u(t),\ v(t))'=(u'(t),\ v(t))+(u(t),\ v'(t)). \tag{2}$$

Предположим, что производная $u'(t)$ существует при всех $t\in\Delta$ и непрерывна (в сильном смысле) на Δ. Тогда функцию u называют сильно непрерывно дифференцируемой на Δ. Класс всех таких функций обозначим через $C^1(\Delta,\ H)$.

Вполне аналогично определяются производные высших порядков и классы $C^k(\Delta,\ H)$ при $k>1$.

2. Начнем с *уравнения Шредингера*

$$du/dt+iAu=0. \tag{3}$$

Здесь A — самосопряженный оператор в H. Функция $u\in C^1(\mathbf{R},\ H)$ называется (*сильным*) решением уравнения (3), если при всех $t\in\mathbf{R}$ $u(t)\in D(A)$ и удовлетворяет уравнению.

Теорема 1. *Для любого решения уравнения* (3) *справедлив «закон сохранения»*

$$\|u(t)\|=\|u(0)\|,\qquad \forall t\in\mathbf{R}. \tag{4}$$

○ Воспользуемся равенством (2). Принимая во внимание (3), находим

$$(\|u(t)\|^2)' = (-iAu,\ u) + (u,\ -iAu) = 0.$$

Отсюда следует (4) ●

Для уравнения (3) поставим *задачу Коши*: будем искать решение, удовлетворяющее *начальному условию*

$$u(0) = f. \tag{5}$$

Из теоремы 1 непосредственно вытекает *единственность* решения задачи Коши. Необходимым условием существования решения является включение $f \in D(A)$. Мы увидим, что это условие и достаточно.

Пусть $E = E_A$ — спектральная мера оператора A. Положим

$$U(t) = \exp(-iAt) = \int e^{-ist}\, dE(s). \tag{6}$$

Формула (6) определяет однопараметрическую непрерывную унитарную группу с производящим оператором $-A$ (см. § 6.4, п. 1).

Теорема 2. *При* $f \in D(A)$ *функция*

$$u(t) = U(t) f \tag{7}$$

является решением задачи Коши (3), (5).

○ Для $v \in H$ в соответствии с (5.1.8) положим $\mu_v(\cdot) = (E(\cdot)v, v)$. Так как $U(t) \smile E_A$, то для любого борелевского подмножества $\delta \subset \mathbf{R}$

$$\mu_{u(t)}(\delta) = (E(\delta)U(t)f,\ U(t)f) = (E(\delta)f, f) = \mu_f(\delta),\quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Поэтому $f \in D(A)$ влечет $u(t) \in D(A)$, $\forall t \in \mathbf{R}$. При этом функция $Au(t) = A\,U(t)f = U(t)\,Af$ непрерывна. Положим

$$w(t, h) = h^{-1}[u(t+h) - u(t)] + iAu(t) = h^{-1}[U(t+h) - U(t)]f + iA\,U(t)f = U(t)[h^{-1}(U(h) - I) + iA]f.$$

На основании (5.4.4) находим

$$\|w(t, h)\|^2 = \int |h^{-1}(e^{-ish} - 1) + is|^2 d\mu_f(s).$$

При $h \to 0$ подынтегральная функция стремится к нулю; при всех h она не превосходит $4s^2$, поскольку $|h^{-1}(e^{-ish} - 1)| = 2|h^{-1}||\sin(sh/2)| \leqslant |s|$. Так как $f \in D(A)$ означает, что $\int s^2\, d\mu_f(s) < \infty$, то $\|w(t, h)\| \to 0$ $(h \to 0)$. Тем самым установлено, что производная $u'(t)$ существует и удовлетворяет (3), а потому непрерывна. Условие (5) очевидно выполнено ●

Отметим, что из (3) и (7) следует равенство

$$s\text{-}\lim_{h \to 0} h^{-1}[U(h)f - f] = -iAf,\quad f \in D(A). \tag{8}$$

При этом одно лишь существование предела в левой части уже обеспечивает включение $f \in D(A)$ и, тем самым, выполнение равенства (8). В самом деле, если предел в (8) существует, то при малых h интегралы $\int h^{-2} |\exp(-ish) - 1|^2 d\mu_f(s)$ равномерно ограничены. При $h \to 0$ подынтегральная функция стремится к s^2. Поэтому $\int s^2 d\mu_f(s) < \infty$, т. е. $f \in D(A)$.

Таким образом, формула (8) позволяет восстановить оператор A по порождаемой им унитарной группе. Более того, эта формула может быть положена в основу вывода спектральной теоремы 6.4.1 для унитарной группы из теоремы 6.1.1. Именно можно доказать, что предел в (8) существует на плотном в H множестве элементов f и определяет самосопряженный оператор A. Далее, каждая из функций $U(t)f$, $\exp(-iAt)f$ дает при $f \in D(A)$ решение задачи (3), (5), которое единственно. Отсюда и из плотности $D(A)$ в H следует (6).

Формула (7) имеет смысл для любого $f \in H$. Функция $u(t)$, определяемая этой формулой, называется *слабым*, или *обобщенным*, решением задачи Коши (3), (5). Если же $f \in D(A^n)$, $n = 2, 3, \ldots$, то из (7) прямо следует, что при любом $k < n$ $A^k u \in C^{n-k}(\mathbf{R}, H)$, $u^{(k)}(t) \in D(A^{n-k})$ и функция $v_k = u^{(k)}(t)$ является решением задачи Коши при начальном условии $v_k(0) = (-iA)^k f$.

3. Рассмотрим теперь «параболическое уравнение»

$$du/dt + Au = 0. \tag{9}$$

Здесь A — самосопряженный положительный оператор. В соответствии со знаком оператора A уравнение (9) будем рассматривать лишь на полуоси $\mathbf{R}_+$. Функция $u \in C(\mathbf{R}_+, H)$ называется решением уравнения (9), если при $t > 0$ она непрерывно дифференцируема, $u(t) \in D(A)$ и удовлетворяет этому уравнению. При $t = 0$ никаких дополнительных условий на u (кроме непрерывности справа) не налагается.

Теорема 3. *Пусть u — решение уравнения* (9). *Тогда*

$$\|u(t)\| \leqslant \|u(0)\|, \quad \forall t \in \mathbf{R}_+. \tag{10}$$

○ Достаточно заметить, что из (2) и (9) следует

$$(\|u(t)\|^2)' = -(Au, u) - (u, Au) \leqslant 0 \quad \bullet$$

Будем искать решение уравнения (9), удовлетворяющее начальному условию (5) (задача Коши). Из теоремы 3 вытекает, что решение задачи Коши единственно.

Рассмотрим семейство операторов (полугруппу)

$$T(t) = e^{-At} = \int e^{-st} dE(s), \quad t \geqslant 0. \tag{11}$$

Очевидно $T(0) = I$. Так как $A \geqslant 0$, то в силу (6.1.11) интегрирование в (11) ведется по $\mathbf{R}_+$. Поэтому (см. (6.1.14)) $\|T(t)\| \leqslant 1$.

Из теоремы 5.3.2 вытекает, что оператор-функция $T(t)$ сильно непрерывна. Равенство $\exp(s(t_1+t_2)) = \exp(st_1)\exp(st_2)$ влечет *полугрупповое свойство*

$$T(t_1+t_2) = T(t_1)T(t_2), \quad t_1, t_2 \geqslant 0. \tag{12}$$

Далее, из неравенства $s^n e^{-st} \leqslant C_n t^{-n}$ ($s \geqslant 0$, $t > 0$; $C_n = n^n e^{-n}$) следует, что при любом $n \geqslant 0$ и при $t > 0$ оператор $A^n T(t) = = \int s^n e^{-st} dE(s)$ ограничен и $\| A^n T(t) \| \leqslant C_n t^{-n}$. Оператор-функция $A^n T(t)$ сильно непрерывна.

Теорема 4. *При любом* $f \in H$ *функция*

$$u(t) = T(t) f \tag{13}$$

является решением задачи Коши (9), (5).

○ Из свойств $T(t)$ вытекает непрерывность $u(t)$ при $t \geqslant 0$, выполнение равенства (5), включение $u(t) \in D(A)$ при $t > 0$, а также непрерывность $Au(t)$, $t > 0$. Положим

$$w(t, h) = h^{-1}[u(t+h) - u(t)] + Au(t) = \\ = [h^{-1}(T(h) - I) + A] T(t) f.$$

Тогда на основании (5.4.4)

$$\| w(t, h) \|^2 = \int_{\mathbb{R}_+} | h^{-1}(e^{-sh} - 1) + s |^2 e^{-2st} d\mu_f(s).$$

Подынтегральная функция стремится к нулю при $h \to 0$ и в окрестности точки $h = 0$ оценивается через $Cs^2 \exp(-2st)$. Поэтому $\| w(t, h) \| \to 0$ $(h \to 0)$, т. е. производная $u'(t)$ существует и удовлетворяет (9) ●

Из ограниченности при $t > 0$ операторов $A^n T(t)$ вытекает включение $u(t) \in D(A^n)$, $n = 1, 2, \ldots$

Если в (5) $f \in D(A^n)$, то из (9) следует, что при $k < n$

$$[A^{n-k} u(t)]^{(k)} = \frac{d^k}{dt^k} T(t) A^{n-k} f = (-1)^k T(t) A^n f.$$

Отсюда и из (10) получается равномерная по $t > 0$ оценка

$$\| [A^{n-k} u(t)]^{(k)} \| = \| A^{n-k} u^{(k)}(t) \| \leqslant \| A^n f \|.$$

Пусть снова f — любой элемент из H. Так как $u(t) = T(t - t_0) T(t_0) f$, $0 < t_0 < t$, и $T(t_0) f = u(t_0) \in D(A^l)$, $\forall l \in \mathbb{Z}_+$, то все функции $A^n u(t)$ бесконечно дифференцируемы и

$$\| [A^{n-k} u(t)]^{(k)} \| = \| A^{n-k} u^{(k)}(t) \| \leqslant \| A^n T(t_0) f \| \leqslant C_n t_0^{-n} \| f \|.$$

Полагая $t_0 \to t - 0$, получаем оценку

$$\| A^{n-k} u^{(k)}(t) \| \leqslant C_n t^{-n} \| f \|.$$

Все эти свойства «гладкости» при $t > 0$ соответствуют бесконечной дифференцируемости (по совокупности x, t) решений классического уравнения теплопроводности.

Пусть теперь в (9) оператор A полуограничен снизу ($A \geqslant \gamma I$). В случае $\gamma < 0$ подстановка $u(t) = v(t)\exp(-\gamma t)$ приводит к уравнению того же вида с оператором $A - \gamma I \geqslant 0$ вместо A. Если оператор A не полуограничен, то операторы (11) не ограничены и решение (13) существует лишь при весьма жестких условиях на f (т. е. задача некорректна). Некорректна также задача Коши для уравнения (9) при $A \geqslant 0$, $t < 0$.

4. Остановимся кратко на абстрактном «гиперболическом» уравнении

$$u''(t) + Au(t) = 0. \qquad (14)$$

Здесь предполагается, что $A = A^*$ строго положителен: $A > 0$ и $N(A) = \{0\}$. Решением (сильным) уравнения (14) называется функция $u \in C^2(\mathbf{R}, H)$ со значениями $u(t) \in D(A)$, $\forall t \in \mathbf{R}$.

Теорема 5. *Для всякого решения уравнения* (14) *справедлив «закон сохранения энергии»*

$$\| u'(t) \|^2 + \| A^{1/2} u(t) \|^2 = \| u'(0) \|^2 + \| A^{1/2} u(0) \|^2. \qquad (15)$$

○ Из (14) следует включение $Au \in C(\mathbf{R}, H)$. Тождество

$$(Au(t+\tau),\ u(t+\tau)) - (Au(t),\ u(t)) =$$
$$= (u(t+\tau) - u(t),\ Au(t+\tau)) + (Au(t),\ u(t+\tau) - u(t))$$

приводит к равенству $(Au, u)' = (u', Au) + (Au, u')$. Отсюда в силу (14) получаем, что $d/dt\,[\| u' \|^2 + (Au, u)] = 0$ ●

Для уравнения (14) поставим задачу Коши:

$$u(0) = f,\ u'(0) = g. \qquad (16)$$

Формальное решение задачи (14), (16) приводит к равенству

$$u(t) = (\cos A^{1/2} t) f + (A^{-1/2} \sin A^{1/2} t)\, g. \qquad (17)$$

Анализ формулы (17) может быть проведен по образцу рассуждений пп. 2, 3. Мы приведем только результат.

Теорема 6. *а) Для любых $f \in D(A^{1/2})$, $g \in H$ функция* (17) *принадлежит классу $C^1(\mathbf{R}, H)$ и удовлетворяет соотношениям* (15), (16).

б) Для любых $f \in D(A)$, $g \in D(A^{1/2})$ функция (17) *является сильным решением задачи Коши* (14), (16).

В условиях п. а) функция (17) называется *слабым решением* (или решением с конечной энергией) задачи Коши. Полученное в условиях п. б) сильное решение единственно; это следует из теоремы 5.

Уравнение (14) во многом подобно уравнению Шредингера (3). В частности, если $f \in D(A^r)$, $g \in D(A^{r-1/2})$, $2r = 1, 2, \ldots$, то при всех t в (17) $u^{(k)}(t)\in D(A^{r-k/2})$; улучшение свойств решения при $t\neq 0$ не происходит; этим уравнение (14) отличается от уравнения (9).

Уравнения (3), (14) тесно связаны между собой. Именно, если в (14) произведем формальную замену $u_t=v$, $A^{1/2}u=z$, то относительно пары $w=(v,z)$ в гильбертовом пространстве $H\oplus H$ получим уравнение $iw'=aw$, где a — самосопряженный оператор в $H\oplus H$, который в «блочной» записи имеет вид

$$a=\begin{pmatrix} 0 & -iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Если оператор A положительно определен, то указанная замена позволяет свести исследование задачи Коши (14), (16) к задаче Коши для уравнения Шредингера.

§ 3. Преобразование Фурье

Преобразование Фурье играет важную роль в спектральном анализе дифференциальных операторов (см. § 5, 6). Вместе с тем преобразование Фурье дает содержательный пример унитарного оператора в пространстве $L_2(\mathbb{R}^m)$, иллюстрирующий теорему 6.1.2.

1. На функциях класса S (см. § 1.6,п.14) определим оператор Φ формулой

$$v(\xi)=(\Phi u)(\xi)=(2\pi)^{-m/2}\int e^{-ix\xi}u(x)\,dx. \tag{1}$$

Здесь $x,\xi\in\mathbb{R}^m$, $x\xi=x_1\xi_1+\ldots+x_m\xi_m$; интеграл распространен по $\mathbb{R}^m$. Дифференцируя под знаком интеграла и интегрируя по частям, легко убедиться, что $v\in S$. Таким образом, $\Phi S\subset S$, и можно рассматривать Φ как оператор в $L_2(\mathbb{R}^m)$ с плотной областью определения $D(\Phi)=S$. Покажем теперь, что Φ изометричен. Начнем с одномерного случая $m=1$. Очевидно

$$\|v\|^2=\int|v(\xi)|^2d\xi=\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}v(\xi)\overline{v(\xi)}\,d\xi=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}d\xi\int e^{-ix\xi}u(x)\,dx\int e^{i\xi y}\overline{u(y)}\,dy.$$

Для функций класса S заведомо допустима перестановка порядков интегрирования и предельного перехода. Тогда

$$\|v\|^2=\int u(x)\left[\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\overline{u(y)}\,\frac{\sin N(x-y)}{x-y}\,dy\right]dx.$$

В курсах анализа показывается, что «ядро Дирихле» $[\pi(x-y)]^{-1}\times\times\sin N(x-y)$ аппроксимирует при $N\to\infty$ дельта-функцию. Иначе говоря, стоящий в квадратных скобках предел существует и равен $\overline{u(x)}$. Таким образом,

$$\|\Phi u\|^2=\int u(x)\overline{u(x)}\,dx=\|u\|^2, \tag{2}$$

что и означает изометричность Φ.

В $L_2(\mathbf{R}^m)$ равенство (2) устанавливается последовательным применением «одномерного» соотношения (2) по каждой координате. Подробности читатель легко восстановит сам.

Оператор Φ по непрерывности можно распространить на все $L_2(\mathbf{R}^m)$. При этом соотношение изометричности (2) сохранится. Следует, однако, иметь в виду, что определить функцию $v=\Phi u$ формулой (1) для любой функции $u\in L_2(\mathbf{R}^m)$ уже нельзя. Позднее мы обсудим этот вопрос подробнее. Наряду с Φ рассмотрим «двойственное» преобразование Φ_+, которое на классе S определим формулой

$$(\Phi_+w)(y)=(2\pi)^{-m/2}\int e^{i\xi y}w(\xi)\,d\xi. \tag{3}$$

Как и выше, $\Phi_+S\subset S$, $\|\Phi_+w\|=\|w\|$ и Φ_+ допускает изометрическое распространение на все $L_2(\mathbf{R}^m)$. Для любых u, $w\in S$ имеем

$$(\Phi u,\ w)=\int\left[(2\pi)^{-m/2}\int e^{-ix\xi}u(x)\,dx\right]\overline{w(\xi)}\,d\xi=$$
$$=\int u(x)\,\overline{\left[(2\pi)^{-m/2}\int e^{i\xi x}w(\xi)\,d\xi\right]}\,dx=(u,\ \Phi_+w),$$

и, следовательно, $\Phi^*=\Phi_+$. Поскольку $H\ominus R(\Phi)=N(\Phi_+)=\{0\}$, то Φ унитарен и

$$\Phi^*=\Phi^{-1}=\Phi_+. \tag{4}$$

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Каждый из двух операторов Φ, Φ_+, определенных первоначально формулами* (1), (3) *на классе S, допускает распространение по непрерывности до унитарного в $L_2(\mathbf{R}^m)$ оператора. При этом выполнены соотношения* (4).

Равенство $\Phi^*\Phi=I$ представляет собой операторную запись известной интегральной формулы Фурье

$$u(y)=(2\pi)^{-m}\int d\xi\int e^{-i(x-y)\xi}u(x)\,dx.$$

Другое следствие унитарности Φ мы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. *Оператор Фурье Φ взаимно-однозначно отображает класс S на себя.*

○ Мы уже видели, что $\Phi S\subset S$. Пусть $w\in S$; тогда $u=\Phi_+w\in S$ и $w=\Phi u$, а потому $\Phi S=S$ ●

Аналитические представления (1), (3) для операторов Φ, Φ_+ легко распространить с класса S на более широкий класс $L_2(\mathbf{R}^m)\cap L_1(\mathbf{R}^m)$. Для произвольной функции $u\in L_2(\mathbf{R}^m)$ формулу (1) следует понимать лишь в некотором обобщенном смысле. Пусть χ_N — характеристическая функция шара $\{x\in\mathbf{R}^m;\ |x|\leqslant N\}$ и пусть $u_N=u\chi_N$. Ясно, что при $N\to\infty$ функции u_N сходятся к u в $L_2(\mathbf{R}^m)$. Но тогда $\Phi u_N\xrightarrow{L_2}\Phi u$. Для u_N представление (1) справедливо и имеет вид

$$(\Phi u_N)(\xi)=(2\pi)^{-m/2}\int_{|x|\leqslant N}e^{-ix\xi}u(x)\,dx. \tag{5}$$

Поэтому равенство $\Phi u = \lim \Phi u_N$ позволяет трактовать выражение (1) для Φu как несобственный интеграл (предел «собственных» интегралов (5)), если предельный переход в определении несобственного интеграла понимать не поточечно (для почти всех ξ), а в смысле сходимости функций в $L_2(\mathbf{R}^m)$. Только при таком расширенном понимании интеграла можно распространить интегральное представление (1) для Φu на весь класс $L_2(\mathbf{R}^m)$.

2. Перейдем к спектральному анализу оператора Φ. Отметим прежде всего, что $\Phi^2 = J$, где $(Ju)(x) = u(-x)$ — оператор отражения. Далее, $\Phi^4 = J^2 = I$; отсюда и из общего правила (6.6.14) отображения спектров следует, что спектр $\sigma(\Phi)$ состоит не более чем из четырех точек $1,\ i,\ -1,\ -i$, которые могут быть его собственными значениями. В действительности каждая из этих точек является собственным значением бесконечной кратности.

При $m=1$ полную ортонормированную систему собственных функций оператора Φ образуют функции Эрмита (2.9.1). Именно

$$\Phi v_p = (-i)^p v_p, \qquad p \in \mathbf{Z}_+. \tag{6}$$

Доказательство этого равенства нам удобно отложить до § 6 (п. 7). Здесь мы отметим лишь, что при $p=0$ (6) сводится к известной формуле Пуассона

$$v_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int v_0(x) e^{-ix\xi}\, dx, \qquad v_0(x) = e^{-x^2/2}. \tag{7}$$

Таким образом, разложение по функциям Эрмита порождает спектральное разложение оператора Φ.

Легко видеть, что в многомерном случае полную систему собственных функций оператора Фурье Φ образуют функции

$$w_k(x) = v_{k_1}(x_1)\, v_{k_2}(x_2) \ldots v_{k_m}(x_m), \qquad k = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbf{Z}_+^m.$$

Соответствующие собственные значения суть $(-i)^{k_1+k_2+\ldots+k_m}$.

§ 4. Об операторах умножения в пространстве $L_2(\mathbf{R}^m, \mathbf{C}^k)$

В этом вспомогательном параграфе собраны сведения о спектральных свойствах операторов умножения в пространстве $H = L_2(\mathbf{R}^m, \mathbf{C}^k)$ — пространстве квадратично-суммируемых по $\mathbf{R}^m$ k-мерных вектор-функций. Бо́льшую часть этих сведений составляют прямые следствия общей теории операторов умножения в прямом интеграле (см. гл. 7). Здесь нужный материал (с некоторыми дополнениями) представлен в виде, наиболее удобном для применения к исследованию дифференциальных операторов в § 5, 6.

1. Пусть $H = L_2 = L_2(\mathbf{R}^m, \mathbf{C}^k)$. Напомним (см. § 7.1), что L_2 можно трактовать как прямой интеграл

$$H = \int_{\mathbf{R}^m} \oplus\, G(\xi)\, d\xi \quad (G(\xi) = \mathbf{C}^k, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^m) \tag{1}$$

с функцией размерности $\mathrm{N}(\xi)=\dim G(\xi)\equiv k$. Рассмотрим в H операторы Q_j умножения на координату: $(Q_j v)(\xi)=\xi_j v(\xi)$, $j=1, \ldots, m$. Каждый оператор Q_j самосопряжен на естественной области определения

$$D(Q_j)=\{v\in L_2: \int \xi_j^2 |v(\xi)|^2 d\xi<\infty\}.$$

Операторы Q_j попарно перестановочны в смысле определения из § 6.3, п. 3, т. е. перестановочны их спектральные меры. Совместная спектральная мера $E_Q(\Delta)$ семейства операторов $Q=(Q_1, \ldots, Q_m)$ сводится к умножению на χ_Δ — характеристическую функцию борелевского множества $\Delta\subset\mathbf{R}^m$:

$$(E_Q(\Delta)v)(\xi)=\chi_\Delta(\xi)v(\xi), \qquad \Delta\in\mathfrak{A}^B(\mathbf{R}^m). \tag{2}$$

Иначе говоря, E_Q совпадает с мерой (7.2.1) в прямом интеграле (1). Это позволяет (см. § 7.4, п. 1) определить все спектральные характеристики меры E_Q: ее носитель (или, что то же, совместный спектр $\sigma(Q)$ системы Q) совпадает с $\mathbf{R}^m$, спектральный тип $[E_Q]$ совпадает с типом лебеговой меры в $\mathbf{R}^m$, а функция спектральной кратности N_Q тождественно равна k:

$$\mathrm{N}_Q(\xi)=\mathrm{N}(\xi)=k, \qquad \forall\xi\in\mathbf{R}^m. \tag{3}$$

Если $k=1$ (*скалярный случай*), то мера E_Q — простая, и операторы Q образуют полную систему.

2. Пусть $a(\xi):\mathbf{C}^k\to\mathbf{C}^k$ — измеримая, п. в. конечная матрица-функция в $\mathbf{R}^m$. Операторы *)

$$Q_a: v(\xi)\longmapsto a(\xi)v(\xi), \tag{4}$$

$$D(Q_a)=\{v\in L_2: av\in L_2\}, \tag{5}$$

будем называть операторами умножения. Они очевидно перестановочны с операторами Q. Самосопряженность оператора Q_a равносильна тому, что при п. в. $\xi\in\mathbf{R}^m$ матрица $a(\xi)$ эрмитова. *В дальнейшем эрмитовость всегда предполагается.*

Если $k=1$, то Q_a есть функция операторов $Q_1, \ldots, Q_m$:

$$Q_a=a(Q)=a(Q_1, \ldots, Q_m). \tag{6}$$

При $k>1$ мы также будем использовать запись $Q_a=a(Q)$, понимая под этим, что Q_a есть *матричная* функция аргументов Q. В точности при этом имеется в виду, что оператор умножения на каждый элемент $a_{jl}(\xi)$ матрицы $a(\xi)$ есть функция $a_{jl}(Q)$ в обычном понимании.

Рассмотрим связь между спектральными характеристиками матрицы $a(\xi)$ (как оператора в $\mathbf{C}^k$) и оператора Q_a. Пусть $\alpha_j(\xi)$,

---

*) Напомним, что в соответствии с терминологией § 7.2, п. 4, ограниченный оператор вида (4) называется разложимым.

$\omega_j(\xi)$, $j=1, \ldots, k$, — собственные числа и ортонормированные собственные векторы матрицы $a(\xi)$. Для измеримой $a(\xi)$ функции $\alpha_j(\xi)$, $\omega_j(\xi)$ можно выбрать измеримыми. Тогда измеримы и оператор-функции

$$p_j(\xi) = \langle \cdot, \omega_j(\xi)\rangle \omega_j(\xi), \qquad a_j(\xi) = \alpha_j(\xi) p_j(\xi), \qquad j=1, \ldots, m.$$

Ясно, что $p_j(\xi)$ — проектор в $\mathbf{C}^k$ на одномерное подпространство, порожденное вектором $\omega_j(\xi)$, $a_j(\xi)$ — часть оператора $a(\xi)$ в этом подпространстве. Согласно теореме 7.2.5 операторы Q_{p_j}, $j=1, \ldots, k$, являются проекторами в H. Так как $p_j(\xi) p_l(\xi) = 0$ $(j \neq l)$ и $\sum_1^k p_j(\xi) = I_{\mathbf{C}^k}$, то проекторы Q_{p_j} попарно ортогональны и $\sum_1^k Q_{p_j} = I$. Поэтому подпространства $H_j = Q_{p_j} H$ образуют ортогональное разложение

$$H = \sum\nolimits_1^k \oplus H_j. \tag{7}$$

Пусть $v \in D(Q_a)$. Тогда

$$a(\xi)(Q_{p_j} v)(\xi) = a(\xi) p_j(\xi) v(\xi) = \alpha_j(\xi) p_j(\xi) v(\xi) =$$
$$= p_j(\xi) a(\xi) v(\xi) = (Q_{p_j} Q_a v)(\xi).$$

Отсюда следует, что $Q_{p_j} \smile Q_a$, т. е. подпространства H_j приводят Q_a. При $v \in H_j$ имеем $a(\xi) v(\xi) = \alpha_j(\xi) v(\xi)$, т. е. $Q_a|_{H_j} = Q_{a_j}$. Тем самым установлено ортогональное разложение $Q_a = \sum_1^k \oplus Q_{a_j}$ (относительно разложения (7) пространства H).

Рассмотрим, далее, взаимно обратные изометрии

$$V_j : H_j \to L_2(\mathbf{R}^m), \qquad (V_j v)(\xi) = \langle v(\xi), \omega_j(\xi)\rangle;$$
$$V_j^{-1} : L_2(\mathbf{R}^m) \to H_j, \qquad (V_j^{-1}\varphi)(\xi) = \varphi(\xi)\omega_j(\xi), \qquad j=1, \ldots, k.$$

Изометрия V_j переводит оператор Q_{a_j} в оператор умножения Q_{α_j} в пространстве $L_2(\mathbf{R}^m)$. Таким образом, справедливо разложение

$$Q_a = \sum\nolimits_1^m \oplus Q_{a_j} = \sum\nolimits_1^m \oplus V_j^{-1} Q_{\alpha_j} V_j, \tag{8}$$

сводящее оператор Q_a к ортогональной сумме «скалярных» операторов умножения в $L_2(\mathbf{R}^m)$.

Обозначим через $\varepsilon_a(\xi, \delta)$, $\delta \subset \mathbf{R}$, спектральную меру матрицы $a(\xi)$:

$$\varepsilon_a(\xi, \delta) = \sum\nolimits_j p_j(\xi), \qquad j\colon\ \alpha_j(\xi) \in \delta. \tag{9}$$

Теорема 1. *Спектральная мера E_a оператора Q_a определяется формулой*

$$(E_a(\delta) v)(\xi) = \varepsilon_a(\xi, \delta) v(\xi), \quad \text{п. в.} \quad \xi \in \mathbf{R}^m, \tag{10}$$

которая при $k=1$ переходит в формулу

$$(E_a(\delta) v)(\xi) = \chi_{a^{-1}(\delta)}(\xi) v(\xi), \quad \text{п. в.} \quad \xi \in \mathbf{R}^m. \tag{11}$$

Здесь $\alpha^{-1}(\delta)$ — *полный прообраз множества* δ *при отображении* α: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$.

○ Равенство (11) содержится в теореме 6.6.4. При $k>1$ из разложения (8) в соответствии с (5.4.23), (5.4.24) получаем

$$E_a(\delta)=\sum_1^m \oplus E_{a_j}(\delta)=\sum_1^m \oplus V_j^{-1}E_{\alpha_j}(\delta)V_j.$$

Для $E_{\alpha_j}(\delta)$ воспользуемся представлением (11). Тогда для любого $v=\sum_1^m Q_{p_j}v \in H$ имеем

$$(E_a(\delta)v)(\xi)=\sum_1^m (V_j^{-1}E_{\alpha_j}V_jQ_{p_j}v)(\xi)=$$
$$=\sum_1^m \chi_{\alpha_j^{-1}(\delta)}(\xi)\langle v(\xi),\ \omega_j(\xi)\rangle\,\omega_j(\xi),$$

что с учетом равенства (9) совпадает с (10) ●

Представление (10) формально содержится в теореме 7.2.8. Последняя, однако, применима лишь в случае ограниченных $a(\xi)$.

3. Сделаем некоторые замечания о спектре операторов Q_a. Прежде всего отметим, что если λ — собственное значение Q_a, то кратность его бесконечна. Действительно, тогда $a(\xi)v_\lambda(\xi)=\lambda v_\lambda(\xi)$, причем $v_\lambda(\xi)\neq 0$ для $\xi\in\delta$, $\operatorname{mes}\delta>0$. Но тогда при любом $\delta_0\subset\delta$, $\operatorname{mes}\delta_0>0$, элемент $\chi_{\delta_0}v_\lambda$ также является собственным.

Пусть теперь матрица $a(\xi)$ *непрерывна*. При $k=1$ из формулы (6.6.13) имеем

$$\sigma(Q_a)=\overline{a(\mathbf{R}^m)} \qquad (k=1). \tag{12}$$

При $k>1$ из (8) и (12) следует, что

$$\sigma(Q_a)=\bigcup_1^k \overline{\alpha_j(\mathbf{R}^m)}. \tag{13}$$

Если $k=1$ и $a(\xi)$ — ненулевой полином, то $\sigma_p(Q_a)=\varnothing$. Действительно, равенство $a(\xi)v_\lambda(\xi)=\lambda v_\lambda(\xi)$ означает, что п. в. $v_\lambda(\xi)=0$, поскольку $a(\xi)=\lambda$ возможно лишь на алгебраической поверхности; для последней m-мерная лебегова мера равна нулю. Можно показать (см. [2]), что в этом случае спектральный тип $[Q_a]$ совпадает с типом лебеговой меры на спектре (12).

При $k>1$ оператор $Q_a=a(Q)$, где $a(\xi)$ — полиномиальная матрица, может иметь собственные (бесконечнократные) значения.

Проиллюстрируем сказанное на примере. Пусть $m=k=3$. Рассмотрим оператор Q_r, где

$$r(\xi)=\begin{pmatrix} 0 & -i\xi_3 & i\xi_2 \\ i\xi_3 & 0 & -i\xi_1 \\ -i\xi_2 & i\xi_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Собственные числа матрицы (14) равны $\rho_0(\xi)=0$, $\rho_\pm(\xi)=\pm|\xi|$. Пусть $\omega_0(\xi)=\xi|\xi|^{-1}$, $\omega_\pm(\xi)$ — соответствующие нормированные собственные векторы. Явные выражения для $\omega_\pm$ нам не понадобятся.

Разложение (7) принимает вид $H=H_0\oplus H_+\oplus H_-$. Элемент $v\in H$ принадлежит H_ε (ε — один из символов 0, $+$, $-$) в том и только том случае, если $v(\xi)=\varphi(\xi)\,\omega_\varepsilon(\xi)$, где $\varphi\in L_2(\mathbf{R}^3)$. В подпространстве H_ε действие оператора Q_r сводится к умножению вектор-функции $v(\xi)$ на $\rho_\varepsilon(\xi)$. В частности, $H_0=N(Q_r)$, и разложение (8) принимает вид

$$Q_r=0\oplus Q_+\oplus Q_- \tag{15}$$

($Q_\pm$ — часть оператора Q_r в $H_\pm$).

4. Если матрица a локально-ограничена, то $C_0^\infty(\mathbf{R}^m)\subset D(Q_a)$. Сужение Q_a^0 оператора Q_a на C_0^∞ есть в существенном самосопряженный оператор. Действительно, при $z\in\mathbf{C}$, $\operatorname{Im} z\neq 0$, матрица $a(\xi)-zI_{\mathbf{C}^k}$ обратима. Поэтому если $h\in L_2(\mathbf{R}^m,\ \mathbf{C}^k)$ и $\int\langle(a-z)\,u,\ h\rangle\,d\xi=0$ при всех $u\in C_0^\infty$, то $h(\xi)=0$ п. в. Это означает, что индексы дефекта Q_a^0 равны нулю.

Если a имеет при $|\xi|\to\infty$ рост не выше степенного, то $S(\mathbf{R}^m)\subset D(Q_a)$. Сужение Q_a^S оператора Q_a на класс $S(\mathbf{R}^m)$ есть также в существенном самосопряженный оператор. Это следует из включений $Q_a^0\subset Q_a^S\subset Q_a$.

§ 5. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами

Преобразование Фурье позволяет провести спектральный анализ формально самосопряженных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в $L_2(\mathbf{R}^m)$. Здесь рассматриваются такие операторы, а также тесно связанные с ними интегральные операторы типа свертки. Следующий § 6 посвящен рассмотрению примеров.

1. Ниже $H=L_2=L_2(\mathbf{R}^m,\ \mathbf{C}^k)$, $1\leqslant k<\infty$. Напомним, что для оператора дифференцирования по x_j используется обозначение $D_j=-i\partial/\partial x_j$. Если α — мультииндекс, $\alpha=(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_m)$, то $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\ldots D_m^{\alpha_m}$.

Пусть $a(\xi)$ — полиномиальная по ξ, $\xi\in\mathbf{R}^m$, эрмитова $(k\times k)$-матрица. Через $a(\mathbf{D})$ обозначается дифференциальное выражение, получающееся при формальной подстановке в a аргументов $\mathbf{D}=(D_1,\ \ldots,\ D_m)$ вместо $\xi=(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_m)$. С $a(\mathbf{D})$ свяжем в L_2 оператор A: $u\longmapsto a(\mathbf{D})\,u$ с областью определения

$$\mathcal{D}(A)=\{u\in L_2\colon\ a(\mathbf{D})\,u\in L_2\}. \tag{1}$$

(Здесь $a(\mathbf{D})\,u$ понимается в смысле теории обобщенных функций.) Сужения A на множества $C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$, $S(\mathbf{R}^m)$ обозначим соответственно через A_0, A_S. Ясно, что $A_0\subset A_S\subset A$ и оператор A_0 симметричен. Из определения оператора A прямо следует равенство $A_0^*=A$.

Рассмотрим подробнее оператор A_S; интегрированием по частям устанавливается, что он симметричен. Пусть $u \in S$ и $v = \Phi u$. Тогда $v \in S$ и (см. § 3)

$$u(x) = (2\pi)^{-m/2} \int \exp(ix\xi)\, v(\xi)\, d\xi. \tag{2}$$

Формула (2) допускает дифференцирование:

$$D^\alpha u(x) = (2\pi)^{-m/2} \int \exp(ix\xi)\, \xi^\alpha v(\xi)\, d\xi. \tag{3}$$

Отсюда следует, что операция $a(\mathbf{D})$ при преобразовании Фурье переходит в умножение на $a(\xi)$. Поскольку при этом $\Phi\mathcal{D}(A_S) = \Phi S = S$, то

$$A_S = \Phi^* Q_a^S \Phi, \tag{4}$$

где Q_a^S — сужение оператора умножения Q_a (см. (4.4), (4.5)) на S. В § 4, п. 4, отмечалось, что оператор Q_a^S — в существенном самосопряженный. Отсюда и из (4) следует, что *оператор A_S — в существенном самосопряженный.*

Покажем теперь, что оператор A_0 также в существенном самосопряженный. Для этого достаточно убедиться, что замыкание $\bar{A}_0$ оператора A_0 содержит в себе оператор A_S. Иными словами, нужно показать, что класс $C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ плотен в $S(\mathbf{R}^m)$ по норме графика

$$\| u \|_A = \left[\int (| u |^2 + | a(\mathbf{D})\, u |^2)\, dx \right]^{1/2}.$$

Пусть $\zeta \in C_0^\infty$, $\zeta(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1$, $\zeta(x) = 0$ при $|x| \geqslant 2$ и пусть $\zeta_n(x) = \zeta(n^{-1}x)$. Для любой вектор-функции $u \in L_2$ очевидно $u_n = \zeta_n u \to u$ в L_2. Далее,

$$D^\alpha u_n = \zeta_n D^\alpha u + \sum\nolimits_{|\beta| < |\alpha|} \zeta_{n,\beta}(x)\, D^\beta u, \tag{5}$$

где $\zeta_{n,\beta}(x) = 0$ при $|x| \geqslant 2n$ и $|x| \leqslant n$ и справедливы равномерные оценки $|\zeta_{n,\beta}(x)| \leqslant cn^{|\beta| - |\alpha|}$. Из (5) для $u \in S$ сразу следует, что $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$, а потому и $a(\mathbf{D})\, u_n \to a(\mathbf{D})\, u$. Поскольку $u_n \in \mathcal{D}(A_0)$, включение $\bar{A}_0 \supset A_S$ получено. Теперь нетрудно установить следующую теорему.

Теорема 1. *Оператор A самосопряжен. Операторы A_0, A_S в существенном самосопряжены и $\bar{A}_0 = \bar{A}_S = A$. Имеет место представление*

$$A = \Phi^* Q_a \Phi. \tag{6}$$

○ Замыкания A_0 и A_S совпадают, поскольку $A_0 \subset A_S \subset \bar{A}_0$. Так как A_0 в существенном самосопряжен, то (см. § 4.1, п. 1) $\bar{A}_0$ самосопряжен и $\bar{A}_0 = A_0^* = A$. Из (4) следует, что $A_S \subset \Phi^* Q_a \Phi$, а значит, и $A = \bar{A}_S \subset \Phi^* Q_a \Phi$. Поскольку A и $\Phi^* Q_a \Phi$ самосопряжены, отсюда следует (6) ●

2. Самосопряженный в L_2 оператор, порожденный матрицей $a(\mathbf{D})$, реализован как оператор A с областью определения (1). Одновременно получено равенство (6). Это равенство открывает путь к определению оператора $a(\mathbf{D})$ и тогда, когда матрица $a(\xi)$ не полиномиальная. Именно с $a(\mathbf{D})$ в этом случае по определению связывается самосопряжений в L_2 оператор A, задаваемый правой частью (6). Матрицу $a(\xi)$ называют *символом оператора* $A=a(\mathbf{D})$.

Формула (6) сводит спектральный анализ дифференциального оператора A к анализу оператора умножения Q_a. В частности, спектральная мера оператора A дается равенством

$$E_A(\delta)=\Phi^* E_a(\delta)\Phi, \tag{7}$$

где E_a — спектральная мера оператора умножения Q_a. В сочетании с формулами (4.10), (4.11) равенство (7) достаточно удобно для вычислений (см. § 6). Поскольку спектральные свойства операторов $A=a(\mathbf{D})$ и Q_a совпадают, на оператор $a(\mathbf{D})$ переносится все сказанное о спектре Q_a в § 4, п. 3. В частности,

$$\sigma(A)=\sigma(Q_a), \tag{8}$$

и мы можем использовать формулы (4.12), (4.13) для вычисления спектра оператора $a(\mathbf{D})$ по его символу.

В матричном случае полезна формула (4.8), позволяющая свести оператор $a(\mathbf{D})$ к ортогональной сумме «скалярных» операторов $\alpha_j(\mathbf{D})$. Отметим, что даже в случае полиномиальной матрицы $a(\xi)$ символы $\alpha_j(\xi)$, вообще говоря, не полиномы (т. е. операторы $\alpha_j(\mathbf{D})$ не дифференциальные).

Оператору D_j, $j=1, \ldots, m$, в соотношении (6) соответствует оператор Q_j умножения на координату ξ_j. Поэтому операторы D_j образуют систему попарно перестановочных самосопряженных операторов. Их совместная спектральная мера иа $\mathbf{R}^m$ есть

$$E_{\mathbf{D}}(\Delta)=\Phi^* E_Q(\Delta)\Phi, \qquad \Delta\subset\mathfrak{A}^B(\mathbf{R}^m), \tag{9}$$

где E_Q — совместная спектральная мера операторов $Q_1, \ldots, Q_m$, определенная формулой (4.2). При $k=1$ мера $E_{\mathbf{D}}$ простая, т. е. система $\mathbf{D}$ полная. Поэтому равенство $A=a(\mathbf{D})$ при $k=1$ справедливо в смысле теории функций от операторов: оно получается из аналогичного равенства (4.6) при преобразовании Фурье.

При $k>1$ функция кратности $\mathrm{N}_{\mathbf{D}}$ меры $E_{\mathbf{D}}$ тождественно равна k: $\mathrm{N}_{\mathbf{D}}(x)=k$. Спектральный тип меры $E_{\mathbf{D}}$ совпадает с типом лебеговой меры на $\mathbf{R}^m$.

Отображение $u\longmapsto\Phi u$ можно истолковать и с точки зрения общей «спектральной модели», изложенной в гл. 7. Именно при этом отображении $L_2(\mathbf{R}^m, \mathbf{C}^k)$ отображается на прямой интеграл (4.1), в котором спектральная мера $E_{\mathbf{D}}(\Delta)$ переходит, как это и должно быть, в оператор $E_Q(\Delta)$ умножения на характеристическую функцию множества Δ. Любой оператор $A=a(\mathbf{D})$ в соответствии с (6) переходит в оператор умножения на символ $a(\xi)$.

3. Если матрица $a(\xi)$ не полиномиальная, то реализация оператора $A=a(\mathbf{D})$ без перехода к преобразованию Фурье (т. е. непосредственно в «x-представлении») приводит к интегральному оператору с разностным ядром (оператору свертки). Эти операторы уже не обладают типичным для дифференциальных операторов свойством локальности. Другое осложнение состоит в том, что ядро оказывается, вообще говоря, обобщенной функцией. Впрочем, можно выделить случаи, когда оператор $a(\mathbf{D})$ хорошо описывается в x-представлении.

Пусть в $L_2(\mathbf{R}^m, \mathbf{C}^k)$ действует интегральный оператор

$$(Tu)(x)=(2\pi)^{-m/2}\int t(x-y)\,u(y)\,dy, \tag{10}$$

где эрмитова матрица-функция $t\in L_1(\mathbf{R}^m)$. В соответствии с теоремой 2.10.2 оператор (10) непрерывен. Пусть a — преобразование Фурье функции t, понимаемое поточечно. Функция a непрерывна, ограничена и $a(\xi)\to 0$ при $|\xi|\to\infty$. Для $u\in S$ положим $u=\Phi^*v$. Тогда, поскольку $v=\Phi u\in S$, оказывается законным следующее преобразование:

$$(Tu)(x)=(2\pi)^{-m}\int t(x-y)\,dy\int \exp(iy\xi)\,v(\xi)\,d\xi=$$
$$=(2\pi)^{-m}\int v(\xi)\,d\xi\int t(z)\exp(i(x-z)\xi)\,dz=$$
$$=(2\pi)^{-m/2}\int \exp(ix\xi)\,a(\xi)\,v(\xi)\,d\xi.$$

Мы видим, что $Tu=\Phi^*(Q_av)=\Phi^*Q_a\Phi u$. Так как оба оператора T и $\Phi^*Q_a\Phi$ непрерывны и совпадают на S, то $T=\Phi^*Q_a\Phi$, т. е.

$$T=a(\mathbf{D})\qquad (a=\Phi t).$$

4. Пусть $h\in\mathbf{R}^m$, G_h — *оператор сдвига* в $L_2(\mathbf{R}^m)$:

$$(G_hu)(x)=u(x+h),\qquad h\in\mathbf{R}^m. \tag{11}$$

Операторы G_h очевидно унитарны и образуют сильно непрерывную группу (эта группа дает *представление* аддитивной группы $\mathbf{R}^m$). Операторы G_h перестановочны с операторами D_j, а потому должны быть функциями от $\mathbf{D}$. Покажем, что

$$G_h=\exp(ih\mathbf{D}). \tag{12}$$

Оба оператора в (12) непрерывны, поэтому достаточно установить их совпадение на функциях $u\in S$. Пусть $v=\Phi u$, тогда $u=\Phi^*v$ и

$$(\exp(ih\mathbf{D})\,u)(x)=(2\pi)^{-m/2}\int e^{ix\xi}e^{ih\xi}v(\xi)\,d\xi=u(x+h).$$

Из (12) получается спектральное разложение группы G_h:

$$G_h = \int_{\mathbf{R}^m} \exp(ih\xi)\, dE_{\mathbf{D}}(\xi),$$

где $E_{\mathbf{D}}$ — мера (9). Эта формула есть частный случай упоминавшейся в § 6.4, п. 5, теоремы о разложении унитарных представлений на неприводимые.

§ 6. Примеры дифференциальных операторов

Здесь рассматриваются примеры, иллюстрирующие материал § 5. Спектральные характеристики операторов вида $A = a(\mathbf{D})$ находятся по его символу $a(\xi)$ на основе сказанного в § 5, п. 2, и в § 4, п. 3. В конкретных случаях спектр $\sigma(A)$, спектральный тип $[A]$ и спектральная кратность N_A определяются для $a(\mathbf{D})$ довольно просто, и мы не всегда входим в детали по этому поводу. В п. 7 обсуждается оператор энергии линейного осциллятора. Хотя этот оператор не является оператором с постоянными коэффициентами, он тоже тесно связан с преобразованием Фурье.

1. Пусть $m = 1$, $k = 1$, $A = D$ — оператор дифференцирования, с которым мы уже встречались в § 4.8, п. 5. Этот оператор унитарно эквивалентен оператору умножения на независимую переменную в $L_2(\mathbf{R})$. Поэтому для $A = D$ $\sigma(A) = \mathbf{R}$, тип $[A]$ — лебегов, $\mathrm{N}_A(\lambda) \equiv 1$, т. е. спектр простой. Пусть $\delta = (\alpha, \beta)$, $-\infty < \alpha < \beta < \infty$. Из (5.7) получаем для $E_A(\delta)$ представление в виде интегрального оператора

$$(E_A(\delta) u)(x) = \int \frac{\exp i\beta(x-y) - \exp i\alpha(x-y)}{2\pi i(x-y)} u(y)\, dy \quad (A = D). \quad (1)$$

Наряду с A рассмотрим оператор $B = A^2 = D^2$. Вычисление разложения единицы E_λ^B для B сводится к равенству $E_\lambda^B = E_A(-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda})$, $\lambda \geqslant 0$; при этом

$$(E_\lambda^B u)(x) = \int \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-y)}{\pi(x-y)} u(y)\, dy \quad (B = D^2) \quad (2)$$

— интегральный оператор с ядром Дирихле. Общее соотношение $E_\lambda^B \xrightarrow{s} I$ при $\lambda \to \infty$ здесь соответствует перенесению известной теоремы Дирихле на произвольные функции $u \in L_2$ за счет перехода от поточечной сходимости к сходимости в смысле L_2. Для оператора B имеем: $\sigma(B) = \mathbf{R}_+$, тип $[B]$ — лебегов, $\mathrm{N}_B(\lambda) = 2$ на $\sigma(B)$.

2. Пусть $k = 1$, $m \geqslant 1$, $B = \mathbf{D}^2 = D_1^2 + \ldots + D_m^2 = -\Delta$ (оператор Лапласа). Формула (5.6) сводит B к умножению на $|\xi|^2$ в $\mathbf{R}^m$; последний оператор рассматривался в § 4.7, п. 2, и был сведен к оператору умножения на независимую переменную в пространстве $L_2(\mathbf{R}, \mu; G)$, где $G = L_2(\mathbf{S}^{m-1})$, а мера μ эквивалентна мере Лебега на полуоси $\mathbf{R}_+$. Поэтому $\sigma(B) = \mathbf{R}_+$, тип $[B]$ — лебегов Так как при $m > 1$ $\dim G = \infty$, то и $\mathrm{N}_B(\lambda) = \infty$. При $m = 1$

$\dim G = 2$, что приводит к указанному в п. 1 значению $\mathrm{N}_B(\lambda) = 2$.

Вычисляя обратное преобразование Фурье от характеристической функции шара $|\xi|^2 < \lambda$, получаем

$$(E_\lambda^B u)(x) = \frac{\lambda^{m/4}}{(2\pi)^{m/2}} \int \frac{J_{m/2}(\sqrt{\lambda}\,|x-y|)}{|x-y|^{m/2}}\, u(y)\, dy \qquad (B = -\Delta), \qquad (3)$$

где $J_{m/2}$ — функция Бесселя. При $m = 1$ формула (3) переходит в (2).

Спектральный анализ оператора $-\Delta$ (при $m > 1$) можно основывать и на разделении переменных в сферических координатах $r = |x|$, $\theta = xr^{-1}$. Обозначим через H_l, $l \in \mathbf{Z}_+$, множество функций в $\mathbf{R}^m$ вида $u(x) = \varphi(r) Y(\theta)$, где $Y \in \Gamma_l$ (т. е. Y — сферическая функция порядка l, см. § 2.9, п. 5) и $\int |\varphi(r)|^2 r^{m-1}\, dr < \infty$. Легко видеть, что H_l — подпространство в $L_2(\mathbf{R}^m)$, причем H_l попарно ортогональны и справедливо разложение

$$L_2(\mathbf{R}^m) = \sum\nolimits_0^\infty \oplus H_l.$$

Каждое подпространство H_l приводит оператор $B = -\Delta$. Спектр оператора B_l — части B в H_l — заполняет полуось $\mathbf{R}_+$. Тип $[B_l]$ — лебегов, а кратность совпадает с размерностью пространства Γ_l (см. (2.9.13)). При $m = 3$ эта кратность равна $2l + 1$.

3. При $k = 1$, $m = 3$ оператор $\mathbf{D}^2/2$ соответствует (при надлежащем выборе системы единиц) оператору энергии свободной нерелятивистской квантовой частицы. В релятивистском случае оператор энергии свободной бесспиновой частицы имеет вид $A = (\mathbf{D}^2 + I)^{1/2}$, причем само определение оператора A опирается на формулу (5.6). Оператор A, не будучи дифференциальным, утрачивает свойство локальности. Оператор A есть функция от $B = \mathbf{D}^2$. Поэтому разложение единицы E_λ^A получается из (3) посредством равенства $E_\lambda^A = E_\mu^B$, $\mu = (\lambda^2 - 1)^{1/2}$. Спектральные характеристики оператора A: $\sigma(A) = [1, \infty)$, тип $[A]$ — лебегов, $\mathrm{N}_A(\lambda) = \infty$ на $\sigma(A)$.

4. При $m = k = 3$ рассмотрим дифференциальную операцию $R = r(\mathbf{D}) = \mathrm{rot}$. Символ $r(\xi)$ дается выражением (4.14). В соответствии с (4.15) оператор R разлагается в ортогональную сумму

$$R = 0 \oplus R_+ \oplus R_-,$$

где $R_\pm = \Phi^* Q_\pm \Phi$. Отсюда следует, что, как и $Q_\pm$, оператор $R_\pm$ унитарно эквивалентен оператору умножения на $\pm|\xi|$ в пространстве $L_2(\mathbf{R}^3)$. Ядро R бесконечномерно и совпадает с $\Phi^* N(Q_r)$. Оператор $R^\perp = R_+ \oplus R_-$ — часть R в ортогональном дополнении к ядру — имеет следующие спектральные характеристики: $\sigma(R^\perp) = \mathbf{R}$, тип $[R^\perp]$ — лебегов, $\mathrm{N}_{R^\perp}(\lambda) \equiv \infty$.

Нетрудно описать область определения оператора $R^{\perp}$. В терминах функции $v=\Phi u$ включение $u\in\mathscr{D}(R^{\perp})$ означает

$$v(\xi)\perp\xi,\ \text{п. в. }\xi\in\mathbf{R}^3;\qquad \int(1+|\xi|^2)|v(\xi)|^2d\xi<\infty.$$

Второе из этих условий показывает, что $u\in W_2^1(\mathbf{R}^3)$, а первое переходит в уравнение $\operatorname{div}u=0$. Таким образом, сужая R до $R^{\perp}$, мы накладываем на вектор-функции $u(x)$ условие соленоидальности (поперечности).

5. Пусть $m=3$, $k=6$. Рассмотрим оператор Максвелла $M=m(\mathbf{D})$, который в блочной записи имеет вид

$$M=\begin{pmatrix}0 & i\operatorname{rot}\\ -i\operatorname{rot} & 0\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Оператор (4) возникает при отделении времени в системе Максвелла. Векторы $u\in\mathbf{C}^6$ будем записывать в виде пары $(u_1,\ u_2)$, где $u_1,\ u_2\in\mathbf{C}^3$. Символ $m(\xi)$ оператора (4) имеет те же собственные значения, что и символ (4.14): $\mu_0(\xi)=0$, $\mu_{\pm}(\xi)=\pm|\xi|$. Эти собственные значения теперь двукратны. Объединяя в разложении (4.8) для оператора Q_m подпространства, соответствующие равным собственным значениям, и переходя затем к преобразованию Фурье, получаем разложение $M=0\oplus M_+\oplus M_-$. Отделение ядра, как и в п. 4, приводит к условиям поперечности $\operatorname{div}u_1=\operatorname{div}u_2=0$.

Физический смысл имеет лишь слагаемое M_+ (поскольку спектр символа истолковывается как частота колебаний, которая положительна). Оператор M_+ унитарно эквивалентен оператору умножения на $|\xi|$ в пространстве $L_2(\mathbf{R}^3,\ \mathbf{C}^2)$ и имеет следующие спектральные характеристики: $\sigma(M_+)=\mathbf{R}_+$, тип $[M_+]$ — лебегов, $\mathrm{N}_{M_+}(\lambda)=\infty$ на $\mathbf{R}_+$.

При переходе к оператору M_+ «векторная размерность задачи» понизилась с $k=6$ до $k=2$. Это соответствует тому, что задание одного из соленоидальных векторов u_1, u_2 (они имеют смысл электрической и магнитной напряженности поля) вполне определяет другой. Пусть $\omega_{\pm}(\xi)$ — собственные векторы символа $r(\xi)$, о которых шла речь в § 4, п. 3. Тогда $(\omega_+(\xi),\ -i\omega_+(\xi))$, $(\omega_-(\xi),\ i\omega_-(\xi))$ — ортогональные собственные векторы символа $m(\xi)$ при собственном значении $\mu_+(\xi)=|\xi|$. Одномерные подпространства, определяемые этими векторами при каждом ξ, порождают, в соответствии с (4.8), разложение M_+ в ортогональную сумму вида $M_+=M'_+\oplus M''_+$. Операторам M'_+, M''_+ отвечают волны с круговой поляризацией противоположных направлений.

6. Следующий пример связан с системой Дирака, описывающей свободный релятивистский электрон (позитрон). После отделения времени в этой системе приходим к оператору Дирака

$$A=\alpha_1D_1+\alpha_2D_2+\alpha_3D_3+\alpha_4I. \tag{5}$$

Здесь $m=3$, $k=4$, α_j — постоянные (4×4)-матрицы, $\alpha_j\alpha_l+\alpha_l\alpha_j=\delta_l^j$, $j,\ l=1,\ 2,\ 3,\ 4$. Конкретный выбор матриц α_j не играет роли: при их замене оператор A перейдет в унитарно эквивалентный оператор того же вида. У символа $a(\xi)$ два двукратных собственных значения $\alpha_{\pm}(\xi) = \pm(|\xi|^2+1)^{1/2}$. Спектр $\sigma(A) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, тип $[A]$ — лебегов, $N_A(\lambda) = \infty$ на $\sigma(A)$. Разложение $A = A_- \oplus A_+$, связанное с собственными значениями $\alpha_{\pm}(\xi)$, соответствует разделению на электронные и позитронные состояния. В отличие от предыдущего примера, здесь отрицательное собственное значение не отбрасывается; оно трактуется как значение энергии позитрона. Поучительно сравнение оператора (5) с примером п. 3. В обоих случаях операторы удовлетворяют соотношению $A^2 = \mathbf{D}^2 + I$. В п. 3 A есть «положительный корень» из $\mathbf{D}^2 + I$ в смысле функций от операторов; этот оператор нелокален. Оператор (5) не является функцией оператора $\mathbf{D}^2$. Он незнакоопределен, но локален; сохранение локальности потребовало повышения размерности ($k = 4$ вместо $k = 1$).

Собственные подпространства в $\mathbf{C}^4$, отвечающие $\alpha_-(\xi)$ и $\alpha_+(\xi)$, допускают разложения на одномерные подпространства. В результате возникнут разложения $A_{\pm} = A'_{\pm} \oplus A''_{\pm}$. Эти разложения можно выбрать таким образом, чтобы фиксировать какую-либо спиновую характеристику частицы (поляризацию, спиральность).

7. В качестве последнего примера рассмотрим в $L_2(\mathbf{R})$ оператор

$$C: u(x) \longmapsto (D^2 + x^2)\, u(x), \tag{6}$$

который первоначально определим на классе S. Введем дифференциальные выражения $c = x + iD$, $c_+ = x - iD$ и заметим, что

$$Cu = (c_+c + I)\, u = (cc_+ - I)\, u, \qquad u \in S, \tag{7}$$

$$(cc_+ - c_+c)\, u = 2u, \qquad u \in S. \tag{8}$$

Из (7) следует, что $(Cu, u) = \|cu\|^2 + \|u\|^2$, а потому оператор C положительно определен.

Теорема 1. *Оператор C_S, определенный выражением* (6) *на классе S, в существенном самосопряжен.*

○ Достаточно показать, что множество $R(C_S)$ плотно в L_2. Пусть $h \in L_2$, $h \perp R(C_S)$. Тогда заведомо

$$\int u''(x)\, \overline{h(x)}\, dx = \int x^2 u(x)\, \overline{h(x)}\, dx, \qquad \forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m),$$

т. е. h имеет вторую обобщенную производную и

$$h'' = x^2 h \tag{9}$$

(в смысле обобщенных функций). Отсюда следует (см. § 1.6, п. 5), что функции h, h' абсолютно непрерывны. В силу (9) h'' эквивалентна абсолютно непрерывной функции, а потому уравнение выполняется в классическом смысле. Можно считать, что h в (9) вещественно.

Комбинируя замены $h \longmapsto -h$, $x \longmapsto -x$, можно добиться, чтобы было $h(0) \geqslant 0$, $h'(0) \geqslant 0$. Тогда из (9) легко выводится, что (при $h \not\equiv 0$) функция h возрастает на $\mathbf{R}_+$. Это невозможно при $h \in L_2(\mathbf{R})$ ●

Оператор C в (6) реализуем теперь как оператор $C = \bar{C}_S$.

Теорема 2. *Спектр оператора C состоит из простых собственных значений $\lambda_p = 2p + 1$, $p \in \mathbf{Z}_+$. Соответствующие собственные функции суть функции Эрмита* (2.9.1).

○ Представление (2.9.1) для функций Эрмита показывает, что с точностью до множителя они совпадают с функциями u_p, где

$$u_0(x) = \exp(-x^2/2), \qquad u_p = (c_+)^p u_0, \qquad p \in \mathbf{Z}_+. \tag{10}$$

Очевидно $cu_0 = 0$. Тогда из (7) следует, что $Cu_0 = u_0$. Далее воспользуемся индукцией. Из (7) следует .

$$Cu_{p+1} = c_+ c c_+^{p+1} u_0 + u_{p+1} = c_+(C + I) c_+^p u_0 + u_{p+1} =$$
$$= (2p + 2) c_+ u_p + u_{p+1} = (2p + 3) u_{p+1}.$$

Остается сослаться на полноту системы функций Эрмита ●

В § 12.5, п.2, мы увидим, что спектральный анализ оператора C естественно вкладывается в общую теорию перестановочных соотношений вида (8). В рамках этой теории ортогональность и полнота системы функций Эрмита оказываются следствием спектральной теоремы.

Рассмотрим задачу Коши (2.3), (2.5) для уравнения Шредингера с оператором C. Из описания спектрального разложения оператора C следует, что решение $u(t) = \exp(-itC)\, u(0)$ периодично: $u(t + 2\pi) = u(t)$. Эта периодичность согласуется со смыслом оператора $C/2$ как оператора энергии линейного квантового осциллятора.

Оператор (6) переводится оператором Φ в себя. Таким образом, $C = \Phi^* C \Phi$, т. е. $C \smile \Phi$. Так как спектр C простой, то на основании теоремы 7.5.5 Φ есть функция от C. Из (3.6) прямо следует, что

$$\Phi = \exp\left(-\frac{i\pi}{4}(C - I)\right).$$

Нам остается привести доказательство формул (3.6). Будем исходить из перестановочного соотношения $\Phi c_+ u = -ic_+ \Phi u$, $u \in S$, которое проверяется непосредственно, а также из равенства $\Phi u_0 = u_0$ (см. (3.7)). Тогда для функций (10) по индукции имеем

$$\Phi u_{p+1} = \Phi c_+ u_p = -ic_+ \Phi u_p = (-i)^{p+1} c_+ u_p = (-i)^{p+1} u_{p+1},$$

что и требовалось.

ГЛАВА 9

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

§ 1. Существенный спектр. Компактные возмущения

1. В спектре σ самосопряженного оператора мы выделили точечный спектр σ_p и непрерывный спектр σ_c. В некоторых вопросах теории возмущений удобнее несколько иное разделение спектра на подмножества.

Пусть $\sigma_p^\infty(A)$ — множество бесконечнократных собственных значений оператора A. *Существенный спектр**) $\sigma_e(A)$ самосопряженного оператора A определяется как множество

$$\sigma_e(A) = \sigma_c(A) \cup \sigma_p^\infty(A).$$

Напомним (см. теорему 6.1.3), что всякая неизолированная точка спектра A входит в $\sigma_c(A)$. Отсюда сразу следует, что *множество $\sigma_e(A)$ замкнуто.* В каждом из составляющих интервалов открытого множества $\mathbf{R}\diagdown\sigma_e(A)$ спектр A может состоять лишь из изолированных собственных значений конечной кратности. Эти собственные значения могут накапливаться разве лишь к концам составляющих интервалов. Спектр в $\mathbf{R}\diagdown\sigma_e(A)$ называют *дискретным спектром* $\sigma_d(A)$ оператора A:

$$\sigma_d(A) = \sigma(A) \cap [\mathbf{R}\diagdown\sigma_e(A)] = \sigma(A)\diagdown\sigma_e(A).$$

Разложение $\sigma(A)$ на $\sigma_e(A)$ и $\sigma_d(A)$ дизъюнктно (в отличие от разложения на σ_c и σ_p). Ясно, что $\sigma_d \subset \sigma_p$, но не всегда $\sigma_d = \sigma_p$. Если $\sigma_e(A) = \varnothing$, то говорят, что *спектр A дискретен.* Если $\Delta \subset \mathbf{R}$ — интервал и $\sigma_e(A) \cap \Delta = \varnothing$, то говорят, что *спектр A в Δ дискретен*. Характеристику существенного спектра дает следующая лемма.

Лемма 1. *Точка $\lambda \in \mathbf{R}$ входит в $\sigma_e(A)$ в том и только том случае, когда для любого $\varepsilon > 0$*

$$\dim E_A(\Delta) H = \infty \qquad (\Delta = (\lambda - \varepsilon,\ \lambda + \varepsilon)). \tag{1}$$

○ Пусть (1) не выполнено: при некотором $\varepsilon_0 > 0$

$$\dim E_A(\Delta_0) H < \infty \qquad (\Delta_0 = (\lambda - \varepsilon_0,\ \lambda + \varepsilon_0)). \tag{2}$$

---

*) Употребительны и другие термины. предельный спектр, спектр сгущения.

Это равносильно тому (см. теорему 6.1.3), что λ — изолированное конечнократное собственное значение или регулярная точка оператора A ●

2. Приведем теперь критерий принадлежности к $\sigma_e(A)$, выраженный прямо в терминах оператора A (а не в терминах спектральной меры E_A).

Последовательность $u_n \in H$, $n = 1, 2, \ldots$, называется *сингулярной для самосопряженного оператора A в точке λ*, если выполнены следующие условия: а) $\inf\limits_n \|u_n\| > 0$; б) $u_n \xrightarrow{w} 0$; в) $u_n \in D(A)$; г) $(A-\lambda)u_n \to 0$.

Теорема 2. *Условие $\lambda \in \sigma_e(A)$ равносильно существованию сингулярной последовательности для оператора A в точке λ.*

○ Пусть $\lambda \in \sigma_e(A)$ и пусть $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$; положим $\Delta_n = (\lambda - \varepsilon_n, \lambda + \varepsilon_n)$. Для $\Delta = \Delta_n$ выполнено (1). Выберем ортонормированную последовательность $u_n \in E_A(\Delta_n)H$. Эта последовательность сингулярна: условия а) — в) очевидно выполнены, а г) следует из оценки

$$\|(A-\lambda)u_n\|^2 = \int_{|t-\lambda|<\varepsilon_n} (t-\lambda)^2 d(E_A(t)u_n, u_n) \leqslant \varepsilon_n^2 \|u_n\|^2 = \varepsilon_n^2.$$

Обратно, пусть последовательность $\{u_n\}$ сингулярна для A в точке λ. Если $\lambda \overline{\in} \sigma_e(A)$, то при некотором $\varepsilon_0 > 0$ выполнено (2). Положим

$$v_n = u_n - E_A\{\lambda\}u_n. \tag{3}$$

Тогда $(A-\lambda)v_n = (A-\lambda)u_n \to 0$ и $v_n \perp E_A\{\lambda\}H$. Поскольку точка λ регулярна для части A, действующей в $H \ominus E_A\{\lambda\}H$, то $\|(A-\lambda)v_n\| \geqslant c_0\|v_n\|$, $c_0 > 0$, а следовательно, $v_n \to 0$. Далее, конечномерный проектор $E_A\{\lambda\}$ компактен, а потому из $u_n \xrightarrow{w} 0$ вытекает $E_A\{\lambda\}u_n \to 0$. Теперь из (3) получаем $u_n \to 0$, что противоречит условию $\inf\|u_n\| > 0$ ●

Теорема 2 позволяет установить, что существенный спектр устойчив по отношению к компактным возмущениям.

Теорема 3. *Пусть $V = V^* \in \mathbf{S}_\infty$ и $A = A^*$. Тогда оператор $B = A + V$, $D(B) = D(A)$, самосопряжен и $\sigma_e(B) = \sigma_e(A)$.*

○ Самосопряженность B сразу следует из теоремы 3.3.4. Пусть $\lambda \in \sigma_e(A)$ и последовательность $\{u_n\}$ сингулярна для A в точке λ. Из $u_n \xrightarrow{w} 0$ и $V \in \mathbf{S}_\infty$ следует $Vu_n \to 0$, а потому

$$(B-\lambda)u_n = (A-\lambda)u_n + Vu_n \to 0.$$

Таким образом, $\{u_n\}$ сингулярна для B в точке λ и $\sigma_e(A) \subset \sigma_e(B)$. Из равенства $A = B + (-V)$ теперь получаем, что $\sigma_e(B) \subset \sigma_e(A)$ ●

3. Теоремы 2 и 3 носят названия критерия Вейля и теоремы Вейля. Теорема Вейля и ее обобщения имеют многочисленные применения к исследованию спектра дифференциальных операторов. Из возможных обобщений теоремы 3 мы приведем здесь одно, наиболее простое и полезное.

Теорема 4. *Пусть A, B — самосопряженные операторы. Предположим, что для некоторой точки*[*] $\zeta \in \rho(A) \cap \rho(B)$ *разность резольвент компактна*:

$$T \stackrel{\mathrm{def}}{=} (B-\zeta I)^{-1} - (A-\zeta I)^{-1} \in \mathbf{S}_\infty. \tag{4}$$

Тогда $\sigma_e(B) = \sigma_e(A)$.

○ Достаточно показать, что $\sigma_e(A) \subset \sigma_e(B)$. Пусть $\lambda \in \sigma_e(A)$ и $\{u_n\}$ — сингулярная последовательность для A в точке λ. Положим

$$\omega_n = (B-\zeta I)^{-1}(A-\zeta)\,u_n \tag{5}$$

и покажем, что $\{\omega_n\}$ сингулярна для B в точке λ. Очевидно $\omega_n \in D(B)$. Из (5) следует, что

$$\omega_n = T(A-\zeta)\,u_n + (A-\zeta I)^{-1}(A-\zeta)\,u_n = T(A-\zeta)\,u_n + u_n.$$

С учетом соотношений $(A-\lambda)\,u_n \to 0$, $Tu_n \to 0$ отсюда получаем

$$\omega_n - u_n = T(A-\lambda)\,u_n + (\lambda-\zeta)\,Tu_n \to 0. \tag{6}$$

Из (6) непосредственно вытекает, что $\omega_n \xrightarrow{w} 0$, $\inf\|\omega_n\| > 0$. Остается проверить для $\{\omega_n\}$ условие г). Из (5), (6) имеем

$$(B-\lambda)\,\omega_n = (B-\zeta)\,\omega_n + (\zeta-\lambda)\,\omega_n = (A-\zeta)\,u_n + (\zeta-\lambda)\,\omega_n =$$
$$= (A-\lambda)\,u_n + (\zeta-\lambda)(\omega_n - u_n) \to 0 \quad \bullet$$

Поясним, почему утверждение теоремы 4 содержит в себе утверждение теоремы 3. Будем исходить из следующей леммы, полезной в целом ряде вопросов.

Лемма 5. *Пусть операторы M_1, M_2 имеют общую регулярную точку*: $\zeta \in \rho(M_1) \cap \rho(M_2)$, *и пусть* $D(M_1) = D(M_2)$. *Положим* $V = M_2 - M_1$. *Тогда резольвенты удовлетворяют равенствам*

$$\Gamma_\zeta(M_2) - \Gamma_\zeta(M_1) = -\Gamma_\zeta(M_1)\,V\,\Gamma_\zeta(M_2), \tag{7}$$
$$\Gamma_\zeta(M_2) - \Gamma_\zeta(M_1) = -\Gamma_\zeta(M_2)\,V\,\Gamma_\zeta(M_1). \tag{8}$$

○ В применении к любому $h \in H$ правая часть (7) есть

$$-\Gamma_\zeta(M_1)\,[(M_2-\zeta I)-(M_1-\zeta I)]\,\Gamma_\zeta(M_2)\,h = -\Gamma_\zeta(M_1)\,h +$$
$$+\Gamma_\zeta(M_1)(M_1-\zeta I)\,\Gamma_\zeta(M_2)\,h = -\Gamma_\zeta(M_1)\,h + \Gamma_\zeta(M_2)\,h.$$

Соотношение (8) получается из (7) переменой ролей M_1 и M_2 ●

Если оператор V имеет компактное расширение, то из представления (7) (и из (8)) вытекает, что разность резольвент компактна. Это и показывает, что теорема 4 общée теоремы 3. Существенно, что в условиях теоремы 4 отнюдь не обязательно сов-

[*] Нетрудно проверить, что тогда условие (4) выполнено *для любой* точки $\zeta \in \rho(B) \cap \rho(A)$.

падение $D(B)$ с $D(A)$. Вместе с тем из леммы 5 легко получается, что при условии непрерывности A и B теоремы 3 и 4 равносильны. Точность теоремы 3 в этом случае иллюстрируется также следующей теоремой Неймана, которую мы лишь сформулируем *).

Теорема 6. *Пусть* $A=A^*\in\mathbf{B}(H)$, $B=B^*\in\mathbf{B}(H)$ *и* $\sigma_e(B)=\sigma_e(A)$. *Тогда существует такой унитарный оператор* U, *что* $B-U^*AU\in\mathbf{S}_\infty$.

4. В заключение остановимся на вопросе несколько иного характера.

Теорема 7. *Пусть* $A=A^*\in\mathbf{B}(H)$, $B=B^*\in\mathbf{B}(H)$ *и* $V=B-A\in\mathbf{S}_\infty$. *Пусть промежуток* $\Delta=[\alpha,\beta]$ *содержит* $\sigma(A)\cup\sigma(B)$ *и пусть функция* φ *непрерывна на* Δ. *Тогда*

$$\varphi(B)-\varphi(A)\in\mathbf{S}_\infty. \tag{9}$$

○ Отметим прежде всего, что

$$B^n-A^n=\sum\nolimits_{k=0}^{n-1}B^kVA^{n-1-k}\in\mathbf{S}_\infty. \tag{10}$$

(Тождество в (10) легко проверяется по индукции.) Из (10) сразу следует справедливость (9) для полиномов. В общем случае по $\varepsilon>0$ найдем такой полином φ_ε, что $\max\limits_{t\in\Delta}|\varphi(t)-\varphi_\varepsilon(t)|\leqslant\varepsilon$. Тогда в силу (6.1.14)

$$\|[\varphi(B)-\varphi(A)]-[\varphi_\varepsilon(B)-\varphi_\varepsilon(A)]\|\leqslant$$
$$\leqslant\|\varphi(B)-\varphi_\varepsilon(B)\|+\|\varphi(A)-\varphi_\varepsilon(A)\|\leqslant2\varepsilon.$$

Таким образом, к $\varphi(B)-\varphi(A)$ по норме сходятся компактные операторы. Остается сослаться на § 2.6, п. 1 ●

§ 2. Самосопряженные и нормальные компактные операторы

1. Охарактеризуем спектр операторов $V=V^*\in\mathbf{S}_\infty$ и выясним, какой вид принимает для них спектральная теорема.

Записывая оператор $V=V^*\in\mathbf{S}_\infty$ в виде $V=0+V$, применим теорему 1.3 при $A=0$, $B=V$. Так как $\sigma_e(0)=\{0\}$ (точка $\lambda=0$ есть собственное значение бесконечной кратности), то и $\sigma_e(V)=\{0\}$. Далее, поскольку V непрерывен, его спектр $\sigma(V)$ есть ограниченное подмножество вещественной прямой. Мы убедимся, что эти свойства спектра выделяют компактные операторы в множестве всех самосопряженных операторов.

Коль скоро $\sigma_e(V)=\{0\}$, спектр V в $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ состоит из изолированных собственных значений конечной кратности, сходящихся разве лишь к точке $\lambda=0$. Обозначим положительные (отрицательные) собственные значения V через λ_k^+ (через $-\lambda_k^-$) и занумеруем $\lambda_k^\pm$ в порядке убывания. Если последовательность λ_k^+ бес-

*) Доказательство теоремы 6 можно найти, например, в книге [1].

конечна, то $\lambda_k^+ \to +0$ и то же верно для λ_k^-. Соответствующие проекторы $E_V\{\pm\lambda_k^\pm\} = P_k^\pm$ конечномерны. Проектор $P_0 = E_V\{0\}$ может быть нулевым или конечномерным, или бесконечномерным. Однако если обе последовательности $\lambda_k^\pm$ конечны, то $\dim P_0 H = \infty$ (иначе было бы $\sigma_e(V) = \varnothing$); это случай, когда V конечномерный.

Соотношение $E_V(\mathbf{R}) = I$ записывается в виде

$$I = \sum_k P_k^- + P_0 + \sum_k P_k^+,$$

а спектральное разложение (6.1.1) оператора V принимает вид

$$V = -\sum_k \lambda_k^- P_k^- + \sum_k \lambda_k^+ P_k^+. \tag{1}$$

Введем в рассмотрение конечномерные операторы

$$V_n = -\sum_{\lambda_k^- > n^{-1}} \lambda_k^- P_k^- + \sum_{\lambda_k^+ > n^{-1}} \lambda_k^+ P_k^+ \tag{2}$$

и заметим, что для любого $h \in H$

$$\|(V - V_n)h\|^2 = \sum_{\lambda_k^- \leqslant n^{-1}} \|\lambda_k^- P_k^- h\|^2 + \sum_{\lambda_k^+ \leqslant n^{-1}} \|\lambda_k^+ P_k^+ h\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant n^{-2}\left(\sum_k \|P_k^- h\|^2 + \sum_k \|P_k^+ h\|^2\right) \leqslant n^{-2}\|h\|^2.$$

Отсюда следует, что

$$\|V - V_n\| \to 0, \tag{3}$$

а потому из $V_n \in \mathbf{K} \subset \mathbf{S}_\infty$ вытекает $V \in \mathbf{S}_\infty$.

Подведем итог сказанному в виде теоремы.

Теорема 1. *Для того чтобы самосопряженный оператор V был компактным, необходимо и достаточно, чтобы спектр $\sigma(V)$ был ограниченным множеством и $\sigma_e(V) = \{0\}$. Спектральное разложение оператора V сводится к разложению в ряд* (1).

2. Отметим одно полезное следствие из теоремы 1.7.

Теорема 2. *Пусть $V = V^* \in \mathbf{S}_\infty$, функция φ непрерывна на промежутке $[m_V, M_V]$ и $\varphi(0) = 0$. Тогда $\varphi(V) \in \mathbf{S}_\infty$.*

○ Достаточно применить теорему 1.7 при $A = 0$, $B = V$. Тогда $\varphi(A) = 0$ и $\varphi(V) = \varphi(B) \in \mathbf{S}_\infty$ ●

Теорема 2 столь же просто может быть выведена и из теоремы 1.

3. Из спектрального разложения (1) нетрудно вывести спектральное разложение для нормального оператора $T \in \mathbf{S}_\infty$, не обращаясь к общей теории нормальных операторов. Пусть $V = T^*T$ и $V = \sum_k s_k^2 P_k$ — спектральное разложение положительного компактного оператора V (теперь в (1) $\lambda_k^- = 0$; λ_k^+ мы обозначили через s_k^2; $P_k^+ = P_k$). Из $T \smile T^*$ следует, что каждое из подпространств $G_k = P_k H$ приводит T. Действительно, если $x \in G_k$, то $VTx = T^*TTx = TVx = Ts_k^2 x$ и $Tx \in G_k$; аналогично и $T^*x \in G_k$.

Пусть теперь T_k — часть T в G_k: $T=\sum_k \oplus T_k$. Если $x, y \in G_k$, то $(T_k x, T_k y)=(T^*Tx, y)=s_k^2(x, y)$, т. е. оператор $s_k^{-1}T_k$ — унитарный в G_k. Поскольку $\dim G_k<\infty$, то T_k имеет разложение $T_k=s_k\sum_l \sigma_{kl}P_{kl}$, где $|\sigma_{kl}|=1$, проекторы P_{kl} попарно ортогональны и конечномерны, сумма по l конечна. Нумеруя числа $s_k\sigma_{kl}$ в порядке невозрастания модуля и обозначая их через μ_n, а соответствующие им проекторы P_{kl} — через Q_n, получим спектральное разложение для T (и одновременно для T^*) в виде

$$T=\sum_n \mu_n Q_n, \quad T^*=\sum_n \bar{\mu}_n Q_n. \tag{4}$$

Мы доказали следующий результат.

Теорема 3. *Пусть $T\in \mathbf{S}_\infty$, $T \smile T^*$. Тогда для T и T^* справедливы представления* (4), *где проекторы Q_n попарно ортогональны и* $\operatorname{rang} Q_n<\infty$. *Последовательность чисел $\mu_n\in \mathbf{C}$ ограничена и, если она бесконечна,* $\mu_n\to 0$.

Теорема 3 обратима. Именно, если T задать формулой (4) с описанными в теореме свойствами μ_n, Q_n, то $T\in \mathbf{S}_\infty$ и T нормален. Действительно, тогда $T=V_1+iV_2$, где $V_1=V_1^*=$ $=\sum_n(\operatorname{Re}\mu_n)Q_n$, $V_2=V_2^*=\sum_n(\operatorname{Im}\mu_n)Q_n$, и в силу теоремы 1 $V_1, V_2\in \mathbf{S}_\infty$, а потому $T\in \mathbf{S}_\infty$. Свойство $T\smile T^*$ следует из (4) непосредственно.

4. Вернемся к самосопряженным компактным операторам. Запишем (1) в несколько ином виде. Пусть $\pm\lambda_r^{\pm}(V)$ — собственные значения оператора $V=V^*\in \mathbf{S}_\infty$, которые теперь занумерованы так: числа $\lambda_r^{\pm}(V)$ не возрастают и повторяются столько раз, какова кратность собственного значения. В каждом из подпространств $G_k^{\pm}=P_k^{\pm}H$ выберем какой-либо ортонормированный базис (базис из собственных элементов). Элементы этих базисов занумеруем так, чтобы было $V\omega_r^{\pm}=\pm\lambda_r^{\pm}(V)\omega_r^{\pm}$. Тогда (1) перепишется в виде суммы одномерных операторов:

$$V=-\sum_r \lambda_r^-(V)(\cdot,\ \omega_r^-)\omega_r^- + \sum_r \lambda_r^+(V)(\cdot,\ \omega_r^+)\omega_r^+. \tag{5}$$

Для величин $\lambda_n^{\pm}(V)$ справедлив следующий *минимаксимальный принцип*, который полезен во многих отношениях.

Теорема 4. *Пусть $V=V^*\in \mathbf{S}_\infty$ и пусть $\pm\lambda_n^{\pm}(V)$ — собственные значения V, занумерованные с учетом их кратностей. Если L — какое-либо подпространство в H, то*

$$\lambda_n^{\pm}(V)=\min_L \max_{x\in L\setminus\{0\}} \frac{\pm(Vx, x)}{(x, x)} \quad (\operatorname{Def} L\leqslant n-1). \tag{6}$$

○ Достаточно рассмотреть числа $\lambda_n^+(V)$, ибо $\lambda_n^-(V)=\lambda_n^+(-V)$. Обозначим $F_n=\bigvee_1^n\{\omega_r^+\}$. Пусть для некоторого L найдется $\varepsilon_0>0$, такое, что $(Vx, x)\leqslant(\lambda_n^+-\varepsilon_0)(x, x)$, $x\in L$. Если при этом $\operatorname{Def} L=$ $=\dim(H\ominus L)\leqslant n-1$, то существует $x\neq 0$, $x\in L\cap F_n$. Но тогда

$x=\sum_1^n \alpha_r \omega_r^+$ и

$$(Vx,\ x)=\sum_1^n \lambda_r^+ |\alpha_r|^2 \geqslant \lambda_n^+ \sum_1^n |\alpha_r|^2 = \lambda_n^+(x,\ x),$$

что противоречит предположению. Таким образом,

$$\lambda_n^+(V) \leqslant \max_{x\in L\setminus\{0\}} (Vx,\ x)/(x,\ x) \qquad (\mathrm{Def}\, L \leqslant n-1). \tag{7}$$

Остается заметить, что неравенство (7) переходит в равенство при $L=H\ominus F_{n-1}$ ●

§ 3. Конечномерные возмущения и расширения

1. В этом параграфе рассмотрим случай, когда $A=A^*$, $B=B^*$ и разность резольвент в некоторой точке $\zeta\in\rho(A)\cap\rho(B)$ конечномерна:

$$T=\Gamma_\zeta(B)-\Gamma_\zeta(A)\in \mathrm{K},\quad \operatorname{rang} T=\dim R(T)=r<\infty. \tag{1}$$

Нетрудно показать, что (1) выполняется одновременно для всех $\zeta\in\rho(A)\cap\rho(B)$. Напомним еще (см. теорему 2.6.4), что при условии (1)

$$\dim[H\ominus N(T)]=\dim R(T^*)=\dim R(T)=r. \tag{2}$$

Отметим два типичных случая, когда выполнено (1).

Лемма 1. *Если* $A=A^*$, $V=V^*$, $\operatorname{rang} V=r<\infty$ *и* $B=A+V$, *то* (1) *выполнено.*

○ Из (1.7) сразу следует, что $\operatorname{rang} T\leqslant \operatorname{rang} V=r$. Однако фактически $\operatorname{rang} T=r$, так как «крайние» множители в правой части (1.7) обратимы и не могут понизить ранг произведения ●

Лемма 2. *Пусть* A_0 — *замкнутый симметричный оператор с конечными равными индексами дефекта*: $n_-(A_0)=n_+(A_0)=n<\infty$. *Пусть* $A=A^*\supset A_0$, $B=B^*\supset A_0$. *Тогда для оператора* T, *определенного в* (1), $\operatorname{rang} T\leqslant n$.

○ В условиях леммы $\dim[H\ominus R(A_0-\zeta I)]=n$. Если $h\in R(A_0-\zeta I)$ и $x=\Gamma_\zeta(A)h$, то $h=(A-\zeta)x=(A_0-\zeta)x=(B-\zeta)x$, $x=\Gamma_\zeta(B)h$ и $Th=0$. Поэтому $\operatorname{rang} T\leqslant n$ ●

Лемма 1 соответствует случаю конечномерных возмущений, лемма 2 — случаю конечномерных расширений. Разумеется, (1) может выполняться и без того, чтобы удовлетворялись условия одной из этих лемм.

2. Начнем с исследования дискретного спектра. Пусть $\Delta=(\alpha,\ \beta)$ — ограниченный интервал, $2\gamma=\alpha+\beta$, $2\rho=\beta-\alpha$. Обозначим $\pi_A(\Delta)=\dim E_A(\Delta)H$.

Теорема 3. *Пусть для* $A=A^*$, $B=B^*$ *выполнено* (1). *Если спектр* A *в* Δ *дискретен, то таков же спектр* B *в* Δ, *причем*

$$\pi_A(\Delta)-r\leqslant \pi_B(\Delta)\leqslant \pi_A(\Delta)+r. \tag{3}$$

○ Достаточно доказать правое неравенство (3). Пусть $\pi_B(\Delta) > > \pi_A(\Delta) + r$. Тогда найдется $x \neq 0$, $x \in E_B(\Delta) H \cap N(T)$, $x \perp E_A(\Delta) H$. Положим $y = \Gamma_\zeta(B) x$ и заметим, что $y = \Gamma_\zeta(A) x + Tx = \Gamma_\zeta(A) x$, а потому $By = Ay$. Далее, $y = \Gamma_\zeta(B) E_B(\Delta) x = E_B(\Delta) \Gamma_\zeta(B) x \in \in E_B(\Delta) H$ и аналогично $y \in E_A(\mathbf{R} \setminus \Delta) H$. Отсюда следует, что

$$\|(B-\gamma) y\|^2 = \int_{|t-\gamma|<\rho} (t-\gamma)^2 \, d(E_B(t) y, y) < \rho^2 \|y\|^2, \tag{4}$$

$$\|(A-\gamma) y\|^2 = \int_{|t-\gamma|\geq\rho} (t-\gamma)^2 \, d(E_A(t) y, y) \geq \rho^2 \|y\|^2. \tag{5}$$

Неравенства (4), (5) противоречат тому, что $By = Ay$ ●

Сделаем одно замечание о случае $r = 1$. Предположим, что спектр A в Δ состоит из простых собственных значений. Тогда спектры A и B в Δ обладают следующим свойством. Пусть λ', λ'' — какие-либо два соседние собственные значения оператора A. Тогда *в интервале* $\delta = (\lambda', \lambda'')$ *не более одного* (*простого*), *а в промежутке* $[\lambda', \lambda'']$ — *не менее одного собственного значения оператора* B. Действительно, если $\pi_B(\delta) \geq 2$, то $\pi_A(\delta) \geq 1$, что противоречит условию $\pi_A(\delta) = 0$. Если же в $[\lambda', \lambda'']$ нет спектра B, то и для некоторого интервала $\tilde{\delta} \supset [\lambda', \lambda'']$ также $\pi_B(\tilde{\delta}) = 0$, что невозможно при $\pi_A(\tilde{\delta}) \geq 2$. Отметим, однако, что в описанной ситуации одно из чисел λ', λ'' может оказаться двукратным собственным значением B.

3. Перейдем к исследованию индивидуальных собственных значений, не исключая возможности их одновременной принадлежности непрерывному спектру. Для точки $\lambda \in \mathbf{R}$ будем пользоваться обозначениями $\pi_A(\lambda) = \dim N(A - \lambda I)$ (и аналогично для $\pi_B(\lambda)$) и $F_\lambda = N(A - \lambda I) \cap N(B - \lambda I)$.

Теорема 4. *Пусть для* $A = A^*$, $B = B^*$ *выполнено* (1). *Тогда*

$$\dim [N(A - \lambda I) \ominus F_\lambda] \leq r, \quad \dim [N(B - \lambda I) \ominus F_\lambda] \leq r, \tag{6}$$

$$\pi_A(\lambda) - r \leq \pi_B(\lambda) \leq \pi_A(\lambda) + r. \tag{7}$$

○ Пусть, например, $\dim [N(A - \lambda I) \ominus F_\lambda] > r$. В соответствии с (2) найдется элемент $x \neq 0$, $x \in N(A - \lambda I) \cap N(T)$, $x \perp F_\lambda$. Тогда из $Ax = \lambda x$ следует, что $(\lambda - \zeta)^{-1} x = \Gamma_\zeta(A) x = \Gamma_\zeta(B) x$ и $Bx = \lambda x$. Таким образом, $x \in F_\lambda$. Полученное противоречие доказывает (6). Далее, из (6) следует, что $\pi_B(\lambda) = \dim [N(B - \lambda I) \ominus \ominus F_\lambda] + \dim F_\lambda \leq r + \dim F_\lambda \leq r + \pi_A(\lambda)$. Левое неравенство (7) получается из правого заменой ролей A и B ●

Соотношения (6) означают, что собственные подпространства для A и B могут отличаться на подпространство размерности не выше r. Левое неравенство (7) содержательно лишь при $\pi_A(\lambda) > r$.

4. Из (7) следует, что $\sigma_p^\infty(B) = \sigma_p^\infty(A)$. Покажем, что сохраняется и непрерывный спектр.

Теорема 5. *В условиях теоремы* 4 $\sigma_c(B) = \sigma_c(A)$.

○ Будем исходить из того, что непрерывный спектр состоит из неизолированных точек спектра (см. теорему 6.1.3). Пусть

$\lambda \overline{\in} \sigma_c(A)$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$, такое, что для $\Delta_+ = (\lambda, \lambda+\varepsilon)$, $\Delta_- = (\lambda-\varepsilon, \lambda)$ выполнено $\pi_A(\Delta_\pm)=0$. Из (3) находим, что $\pi_B(\Delta_\pm) \leqslant \leqslant r < \infty$, а потому $\lambda \overline{\in} \sigma_c(B)$ ●

Отметим, что в условиях теоремы 1.4 сохраняется лишь $\sigma_e = \sigma_p^\infty \cup \sigma_c$. В то же время в условиях теорем 4, 5 сохраняются σ_p^∞ и σ_c порознь. Аналогичное усиление теоремы 1.4 невозможно, что следует, например, из теоремы 2.1.

5. Обратимся к конечномерным расширениям. Применение теорем 3—5 приводит к очевидным следствиям, которые мы не станем явно формулировать. Укажем, однако, полезные дополнения к этим следствиям.

Начнем с одного общего понятия. Интервал $\Delta = (\gamma-\rho, \gamma+\rho)$ называется *люком* симметричного оператора A_0, если выполнено неравенство

$$\|(A_0-\gamma)x\| \geqslant \rho\|x\|, \qquad x \in D(A_0). \tag{8}$$

Люк состоит из точек регулярного типа. Действительно, если $\lambda \in \Delta$, то $|\lambda-\gamma| < \rho$ и

$$\|(A_0-\lambda)x\| \geqslant \|(A_0-\gamma)x\| - |\lambda-\gamma| \cdot \|x\| \geqslant (\rho - |\lambda-\gamma|)\|x\|.$$

Ясно также, что всякая вещественная точка регулярного типа симметричного оператора содержится в некотором его люке. Если симметричный оператор имеет люк, то его индексы дефекта равны: $n_-(A_0) = n_+(A_0)$.

Теорема 6. *Пусть A_0 удовлетворяет условиям леммы 2 и Δ — люк для A_0. Если $A = A^* \supset A_0$, то $\pi_A(\Delta) \leqslant n$. В частности, для $\lambda \in \Delta$ $\pi_A(\lambda) \leqslant n$.*

○ В соответствии с (4.4.9)

$$\dim[D(A)/D(A_0)] = n. \tag{9}$$

Поэтому если $\pi_A(\Delta) > n$, то найдется $y \neq 0$, $y \in D(A_0) \cap E_A(\Delta)H$. Для $y \in E_A(\Delta)H$ выполнено (ср. с (4)) $\|(A-\gamma)y\| < \rho\|y\|$, что при $y \in D(A_0)$ противоречит (8) ●

Аналогичный результат справедлив для полуограниченных операторов

$$(A_0x, x) \geqslant m_{A_0}(x, x), \qquad x \in D(A_0).$$

Теорема 7. *Пусть A_0, A удовлетворяют условиям леммы 2 и пусть A_0 полуограничен снизу, m_{A_0} — его точная нижняя граница. Тогда A полуограничен снизу и на полуоси $(-\infty, m_{A_0})$ спектр A состоит не более чем из n (с учетом кратностей) собственных значений.*

○ Мы должны показать, что $\dim E_A(-\infty, m_{A_0})H \leqslant n$. В противном случае в силу (9) нашелся бы элемент $y \neq 0$, $y \in E_A(-\infty, m_{A_0})H \cap D(A_0)$. Для него выполнялось бы

$$(A_0y, y) = (Ay, y) = \int_{t<m_{A_0}} t\, d(E_A(t)y, y) < m_{A_0}(y, y),$$

что противоречит определению нижней границы m_{A_0} ●

Теорема 8. *Пусть A_0, A удовлетворяют условиям леммы 2 и пусть интервал $\Delta \subset \hat{\rho}(A_0)$. Тогда спектр A в Δ дискретен и его кратность не выше n.*

○ Любой промежуток $[\alpha', \beta'] \subset \Delta$ можно покрыть конечным числом люков оператора A_0. Затем к каждому люку следует применить теорему 6 ●

Остановимся подробнее на случае $n=1$. Зафиксируем вещественное $\lambda \in \hat{\rho}(A_0)$ и заметим, что

$$\dim N(A_0^* - \lambda I) = d_{A_0}(\lambda) = n = 1. \tag{10}$$

Если $A = A^* \supset A_0$ и $\lambda \in \sigma_d(A)$, то из $A \subset A_0^*$ и из (10) следует, что $N(A_0^* - \lambda I) \subset D(A)$. Вместе с (9) это означает, что

$$D(A) = D(A_0) \dotplus N(A_0^* - \lambda I). \tag{11}$$

Поскольку расширение A однозначно определяется множеством $D(A)$, из (11) следует, что расширение $A = A^* \supset A_0$ со свойством $\lambda \in \sigma_d(A)$ может быть только одно. Последнее замечание позволяет уточнить сказанное в конце п. 2 применительно к случаю $n=1$. Вместе с теоремой 8 это непосредственно приводит к следующему результату.

Теорема 9. *Пусть A_0, A, B удовлетворяют условиям леммы 2 при $n=1$ и пусть интервал $\Delta \subset \hat{\rho}(A_0)$. Тогда спектры операторов A и B в Δ — дискретные, простые и перемежающиеся*).*

§ 4. Непрерывные возмущения

На протяжении этого параграфа предполагается, что

$$A = A^*, \ V = V^* \in \mathbf{B}(H), \ B^* = B = A + V, \ D(B) = D(A).$$

1. Количественной характеристикой непрерывного возмущения V обычно служит его норма. Более точную информацию можно получить, если известен промежуток $[v_1, v_2] \supset \sigma(V)$. Наименьший такой промежуток есть $[m_V, M_V]$, но если точные границы не известны, можно использовать для них оценки $v_1 \leqslant m_V$, $v_2 \geqslant M_V$.

Если $\Delta = (\alpha, \beta)$ — конечный интервал, то будем обозначать

$$\pi_A(\alpha, \beta) = \pi_A(\Delta) = \dim E_A(\Delta) H.$$

Исходным является следующее утверждение.

Лемма 1. *Если $[v_1, v_2] \supset \sigma(V)$, то для любого конечного интервала* (α, β)

$$\pi_B(\alpha + v_1, \beta + v_2) \geqslant \pi_A(\alpha, \beta). \tag{1}$$

---

*) Перемежаемость означает, что спектры не пересекаются и между двумя соседними точками одного спектра лежит ровно одна точка другого.

○ Рассмотрим прежде всего ведущий частный случай, когда $-v_1=v_2=v$. Из $\sigma(V)\subset[-v, v]$ следует, что $\|V\|\leqslant v$. Пусть (1) не выполнено. Тогда найдется $x\neq 0$, $x\in E_A(\alpha, \beta)H$, $x\perp E_B(\alpha-v, \beta+v)H$. Оценки, аналогичные (3.4), (3.5), дают (при $2\gamma=\alpha+\beta$, $2\rho=\beta-\alpha$): $\|(A-\gamma)x\|<\rho\|x\|$, $\|(B-\gamma)x\|\geqslant$ $\geqslant(\rho+v)\|x\|$. Тогда $(\rho+v)\|x\|\leqslant\|(B-\gamma)x\|\leqslant\|(A-\gamma)x\|+\|Vx\|<$ $<(\rho+v)\|x\|$, и полученное противоречие доказывает требуемое.

В общем случае следует представить V в виде $V=\hat{V}+v_0I$, где $2v_0=v_1+v_2$, $\hat{V}=V-v_0I$. Тогда $\sigma(\hat{V})\subset[-\hat{v}, \hat{v}]$, где $2\hat{v}=$ $=v_2-v_1$. На основании уже разобранного случая получаем для $\hat{B}=A+\hat{V}$, что $\pi_{\hat{B}}(\alpha-\hat{v}, \beta+\hat{v})\geqslant\pi_A(\alpha, \beta)$. Затем остается произвести «сдвиг» в спектре на величину v_0, что соответствует добавлению оператора v_0I ●

Наглядная интерпретация (1) при $-v_1=v_2=\|V\|$ состоит в том, что спектр, находившийся в Δ, не может «исчезнуть» при возмущении, но может лишь «сдвинуться» не более чем на $\|V\|$ влево и вправо. Неравенство в (1) следует при этом понимать так, что в $(\alpha-\|V\|, \beta+\|V\|)$ может попасть спектр, «сдвинутый» возмущением не только из Δ. Другой важный частный случай неравенства (1) относится к знакоопределенным возмущениям. Например, при $V<0$ «сдвиг спектра» возможен лишь влево:

$$\pi_B(\alpha-\|V\|, \beta)\geqslant\pi_A(\alpha, \beta) \quad (V<0). \tag{2}$$

2. Мы применим теперь лемму 1 к возмущениям существенного и дискретного спектров.

Теорема 2. *Пусть в условиях леммы* 1 $\lambda_0\in\sigma_e(A)$. *Тогда*

$$[\lambda_0+v_1, \lambda_0+v_2]\cap\sigma_e(B)\neq\varnothing. \tag{3}$$

○ В силу леммы 1.1 $\pi_A(\lambda_0-\varepsilon, \lambda_0+\varepsilon)=\infty$ при любом $\varepsilon>0$. Тогда из (1) следует, что $\pi_B(\lambda_0+v_1-\varepsilon, \lambda_0+v_2+\varepsilon)=\infty$. Последнее невозможно, если спектр B в $[\lambda_0+v_1, \lambda_0+v_2]$ состоит из конечного числа конечнократных изолированных собственных значений. Поэтому либо внутри, либо на концах промежутка $[\lambda_0+v_1, \lambda_0+v_2]$ найдется хотя бы одна точка из $\sigma_e(V)$ ●

При $-v_1=v_2=\|V\|$ (3) означает, что точка $\lambda_0\in\sigma_e(V)$ «не исчезает, но сдвигается» не более чем на $\|V\|$. При $v_1=0$, $v_2=$ $=\|V\|$ этот сдвиг возможен лишь вправо.

Перейдем к рассмотрению дискретного спектра. В (1) неравенство можно заменить равенством, если интервал Δ отделен от остального спектра A достаточно большим расстоянием. Более точно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть в условиях леммы* 1

$$\pi_A(\alpha, \beta)=\pi_A(\alpha-2\hat{v}, \beta+2\hat{v})=r<\infty, \tag{4}$$

где $2\hat{v}=v_2-v_1$. *Тогда*

$$\pi_B(\alpha+v_1, \beta+v_2)=r. \tag{5}$$

○ Из (1) видно, что нужно лишь исключить возможность $\pi_B(\alpha+v_1, \beta+v_2)>r$. Пусть последнее неравенство выполнено. Заметим, что $\sigma(-V)\subset[-v_2, -v_1]$ и применим (1) к $A=B+(-V)$. Тогда $\pi_A(\alpha+v_1-v_2, \beta+v_2-v_1)>r$, что противоречит (4) ●

Отметим частные случаи в (5). Если $-v_1=v_2=\|V\|$, то (4) означает, что Δ отстоит от остального спектра A не менее чем на $2\|V\|$. Если же $v_1=0$, $v_2=\|V\|$, то достаточно расстояния $\|V\|$.

Выделим очевидное следствие из теоремы 3.

Следствие 4. *Пусть λ — изолированное собственное значение для A кратности $r<\infty$ и пусть d — расстояние от λ до остального спектра A. Если $d>v_2-v_1$, то спектр B в промежутке $\tilde{\delta}=[\lambda+v_1, \lambda+v_2]$ состоит из изолированных собственных значений, сумма кратностей которых равна r. В частности, если $-v_1=v_2=\|V\|$, то $d>2\|V\|$ и $\tilde{\delta}=[\lambda-\|V\|, \lambda+\|V\|]$; если $v_1=0$, $v_2=\|V\|$, то $d>\|V\|$ и $\tilde{\delta}=[\lambda, \lambda+\|V\|]$.*

3. Следствие 4 касается поведения изолированного собственного значения при возмущении. В этой связи удобно включить в возмущение параметр. Пусть $B_\varepsilon=A+\varepsilon V$, $\operatorname{Im}\varepsilon=0$, и пусть λ — простое ($r=1$) изолированное собственное значение A. Если $2\|V\|<d$, то для любого $\varepsilon\in[-1, +1]$ в $[\lambda-\|V\|, \lambda+\|V\|]$ имеется ровно одно простое собственное значение $\lambda(\varepsilon)$ оператора B_ε, причем $\lambda(\varepsilon)\to\lambda$ при $\varepsilon\to 0$. Если $V>0$, то $\lambda(\varepsilon)\geqslant\lambda$ при $\varepsilon>0$ и $\lambda(\varepsilon)\leqslant\lambda$ при $\varepsilon<0$. Из представления $B_{\varepsilon_2}=B_{\varepsilon_1}+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)V$ и следствия 4 вытекает, что $|\lambda(\varepsilon_2)-\lambda(\varepsilon_1)|<|\varepsilon_2-\varepsilon_1|\cdot\|V\|$ при $\varepsilon_1, \varepsilon_2\in[-1, +1]$. Фактически, однако, о гладкости функции $\lambda(\varepsilon)$ можно сказать существенно больше. Именно, $\lambda(\varepsilon)$ при $|\varepsilon|<1$ зависит от ε аналитически. Аналитически зависит от ε и проектор $E_{B_\varepsilon}\{\lambda(\varepsilon)\}$ на собственное подпространство. Изучение соответствующих разложений в ряды по ε (а такие разложения возможны и при $1<r<\infty$), составляет предмет *аналитической теории возмущений*. Ее изложение не входит в план настоящей книги*).

4. Иногда полезно комбинировать соображения о непрерывных и компактных возмущениях. В качестве примера докажем следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть $A=A^*$, $V=V^*\in\mathbf{S}_\infty$, $V>0$ и $B=A+V$. Пусть спектр A в $\Delta=(\alpha, \beta)$ дискретен и не накапливается (изнутри) к точке $\lambda=\beta$. Тогда таков же спектр B в Δ.*

○ Дискретность спектра B в Δ обеспечивается теоремой 1.3. При некотором α_1, $\alpha\leqslant\alpha_1<\beta$, интервал $(\alpha_1, \beta)\subset\rho(A)$. Пусть $V=V_n+\tilde{V}_n$, где V_n определен в (2.2), $\tilde{V}_n=V-V_n$. Оператор

---

*) С основами аналитической теории возмущений можно познакомиться, например, по книгам [9, 16].

V_n конечномерный; в силу (2.3) $\|\tilde{V}_n\| \to 0$. Из (2.2) видно также, что $V_n > 0$, $\tilde{V}_n > 0$ при $V > 0$. Выберем n так, чтобы было $\|\tilde{V}_n\| \leqslant \leqslant a < \beta - \alpha_1$, и положим $\tilde{B} = A + \tilde{V}_n$. Тогда $(\alpha_1 + a,\ \beta) \subset \rho(\tilde{B})$. Действительно, если $\pi_{\tilde{B}}(\alpha_1 + a,\ \beta) > 0$, то, применяя (2) к представлению $A = \tilde{B} + (-\tilde{V}_n)$, получаем $\pi_A(\alpha_1 + a - \|V_n\|,\ \beta) > 0$, что невозможно. Для оператора $B = \tilde{B} + V_n$ из теоремы 3.3 теперь следует, что $\pi_B(\alpha_1 + a,\ \beta) \leqslant \operatorname{rang} V_n < \infty$, а следовательно, при некотором α_2, $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 < \beta$, будет $(\alpha_2,\ \beta) \subset \rho(B)$ ●

ГЛАВА 10

ПОЛУОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ФОРМЫ

§ 1. Замкнутые положительно определенные формы

Мы уже видели (см. теорему 2.4 6), что задание непрерывного оператора равносильно заданию соответствующего билинейного функционала (формы). Более того, достаточно задать квадратичную форму оператора (теорема 2.4.7). Для самосопряженных операторов особенно удобно характеризовать их свойства в терминах соответствующих квадратичных форм. Напомним в этой связи, например, теорему 2.7.2. Для неограниченных операторов такой подход применим в полуограниченном случае. Соответствующая форма подчас описывается проще, нежели связанный с ней оператор. Более того, в приложениях часто именно форма оказывается первичным объектом, а соответствующий оператор уже вводится и изучается с ее помощью. Так бывает, например, в случаях, когда дифференциальное уравнение задачи получается из подходящего вариационного принципа. В абстрактной теорни также удобна точка зрения, при которой первичным понятием является билинейная полуограниченная форма (функционал). В этой главе мы будем изучать полуограниченные операторы именно таким методом. Основным здесь является положительно определенный случай, с которого мы и начинаем изложение.

1. Пусть $D[a]$ — плотное в H линейное множество и пусть $a[x, y]$ — билинейная форма, определенная для $x, y \in D[a]$, причем

$$a[x, x] \geqslant m(x, x). \tag{1}$$

Условие (1) выражает *полуограниченность снизу* формы a. Наибольшая возможная в (1) постоянная $m = m_a$ называется *точной нижней границей* формы a:

$$m_a = \inf_x \{a[x, x]/(x, x)\} \qquad (x \in D[a],\ x \neq 0). \tag{2}$$

В настоящем параграфе будем считать, что $m_a > 0$, т. е. *форма a — положительно определенная.* В этом случае форма a порождает на $D[a]$ «новое» скалярное произведение. Таким образом, $D[a]$ превращается в предгильбертово пространство со скалярным произведением $a[x, y]$ и *a-нормой* $|x|_a = (a[x, x])^{1/2}$, для которой выполнено неравенство

$$\|x\| \leqslant m_a^{-1/2} |x|_a. \tag{3}$$

Если $D[a]$ полно относительно a-нормы (т. е. $D[a]$ — гильбертово), *то форма a называется замкнутой.*

Пусть A — самосопряженный оператор в H. Будем говорить, что *форма a и оператор A отвечают друг другу*, если выполнены условия

$$D(A) \subset D[a], \tag{4}$$

$$(Ax, y) = a[x, y], \quad x \in D(A), \ y \in D[a]. \tag{5}$$

Из (5) вытекает положительная определенность A:

$$(Ax, x) \geqslant m_a(x, x), \qquad x \in D(A). \tag{6}$$

Неравенство (6) означает, что для точной нижней границы m_A оператора A выполнено $m_A \geqslant m_a$. Далее, $D(A)$ a-плотно в $D[a]$. Действительно, если $a[x, y_0] = 0$ для всех $x \in D(A)$, то из (5) следует, что $y_0 \perp R(A)$. Так как $A = A^*$ и $m_A > 0$, то $R(A) = H$ и $y_0 = 0$.

Предельным переходом в (6) с a-плотного в $D[a]$ множества $D(A)$ получаем, что в (1) допустимо $m = m_A$. Таким образом, $m_A = m_a$, а потому спектр A лежит на полуоси $[m_a, \infty)$, причем $m_a \in \sigma(A)$ (см. (6.1.11)).

2. Замкнутые положительно определенные формы и самосопряженные положительно определенные операторы находятся во взаимно-однозначном соответствии.

Теорема 1. *Каждому самосопряженному положительно определенному оператору A отвечает замкнутая форма a и притом только одна. Эта форма определяется соотношениями*

$$a[x, y] = (A^{1/2}x, A^{1/2}y), \quad x, y \in D[a] = D(A^{1/2}). \tag{7}$$

○ Пусть $A = A^*$ и $m_A > 0$. Рассмотрим оператор $A^{1/2} = \int \lambda^{1/2} dE_A(\lambda)$ и соответствующую форму (7). Легко понять, что замкнутость формы a есть прямое следствие замкнутости самосопряженного оператора $A^{1/2}$. Ясно также, что выполнены условия (4), (5).

Пусть теперь a_1 — замкнутая форма, для которой также выполнены (4), (5). Из (5) и (7) следует, что для $x, y \in D(A)$ $a[x, y] = a_1[x, y]$. Поскольку $D(A)$ a-плотно в $D[a]$ и a_1-плотно в $D[a_1]$, гильбертовы пространства $D[a]$ и $D[a_1]$ совпадают ●

Теорема 2. *Каждой замкнутой положительно определенной форме отвечает самосопряженный положительно определенный оператор и притом только один.*

○ Для $h \in H$ рассмотрим в $D[a]$ функционал $l_h(y) = (h, y)$. В силу (3) $|l_h(y)| \leqslant \|h\| \cdot \|y\| \leqslant m_a^{-1/2} \|h\| \cdot |y|_a$, т. е. l_h непрерывен в $D[a]$ и $|l_h|_a \leqslant m_a^{-1/2} \|h\|$. В силу теоремы Рисса (теорема 2.4.1) найдется единственный элемент $x \in D[a]$, такой, что $l_h(y) = a[x, y]$; при этом $|x|_a = |l_h|_a$. Элемент x линейно зависит от h. Полагая

$x=Bh$, получаем, что

$$a[Bh,\ y]=(h,\ y),\qquad y\in D[a],\tag{8}$$

причем B непрерывно отображает H в $D[a]$:

$$|Bh|_a=|x|_a=|l_h|_a\leqslant m_a^{-1/2}\|h\|.\tag{9}$$

Из (3) и (9) сразу же следует, что $B\in\mathbf{B}(H)$. Полагая в (8) $y=Bh$, видим, что $(h,\ Bh)=a[Bh,\ Bh]\geqslant 0$, т. е. $B>0$, а следовательно, $B=B^*$. Если в (8) $Bh=0$, то $(h,\ y)=0$ и, поскольку $D[a]$ плотно в H, $h=0$. Таким образом, B имеет обратный. Оператор $A=B^{-1}$ самосопряжен вместе с B. При этом $D(A)=R(B)\subset D[a]$, т. е. (4) выполнено. Полагая в (8) $h=Ax$, $x\in D(A)$, преобразуем (8) в (5). Таким образом, A отвечает форме a.

Пусть A_1 также отвечает форме a и пусть $y\in D(A_1)$. Тогда

$$(x,\ A_1y)=a[x,\ y]=(A^{1/2}x,\ A^{1/2}y),\qquad x\in D(A^{1/2})=D[a].$$

Написанное равенство означает, что $A^{1/2}y\in D((A^{1/2})^*)=D(A^{1/2})$ и $(A^{1/2})^*A^{1/2}y=A_1y$, т. е. $Ay=A_1y$ и $A_1\subset A$. Точно так же $A\subset A_1$, а потому $A_1=A$ ●

Замечание 3. Пусть оператор A_1 удовлетворяет условиям (4), (5), но не предполагается, что $A_1=A_1^*$. Тогда предыдущее рассуждение приводит к включению $A_1\subset A$, но равенство $A_1=A$ имеет место лишь при $A_1=A_1^*$.

3. Равенство (7) восстанавливает форму по оператору. При этом следует иметь в виду, что построение оператора $A^{1/2}$ требует, вообще говоря, знания спектральной меры E_A. С другой стороны, пусть $x\in D[a]$ удовлетворяет соотношению

$$a[x,\ y]=(h,\ y),\qquad y\in D[a].\tag{10}$$

В силу (8) это равносильно тому, что x есть решение уравнения $Ax=h$. Замена уравнения соотношением (10) удобна, поскольку A не входит в (10) явно. При этом достаточно проверять (10) для какого-либо a-плотного в $D[a]$ множества (например, для $y\in D(A)$). В приложениях к краевым задачам соотношения вида (10) обычно называют «интегральными тождествами» или «уравнениями в вариациях».

Равенство (10) тесно связано с вариационным принципом для решения уравнения $Ax=h$.

Теорема 4. *Пусть $A=A^*$ — положительно определенный оператор, a — отвечающая ему замкнутая форма и*

$$\Phi_A(x)=a[x,\ x]-2\operatorname{Re}(x,\ h),\qquad x\in D[a].\tag{11}$$

Тогда функционал (11) полуограничен снизу и его минимум реализуется на единственном элементе $x=x_0=A^{-1}h$. При этом

$$\Phi_{A,\min}=-a[x_0,\ x_0]=-(A^{-1}h,h).\tag{12}$$

○ Положим $h=Ax_0$ и запишем (11) в виде

$$\Phi_A(x)=a[x, x]-2\operatorname{Re}a[x, x_0]=|x-x_0|_a^2-|x_0|_a^2.$$

Из этого представления утверждения теоремы следуют непосредственно ●

Вариационный принцип может быть положен в основу приближенного решения уравнения $Ax=h$. Пусть $D_r\subset D[a]$, $r=\dim D_r<\infty$, $r=1, 2, \ldots$, и пусть $D_r\subset D_{r+1}$ и множество $\bigcup_r D_r$ плотно в $D[a]$ по a-норме. Если искать минимум функционала (11) при дополнительном условии $x\in D_r$, то оказывается, что минимизирующие элементы x_r сходятся к $x_0=A^{-1}h$ в $D[a]$. При выбранном в D_r базисе (не обязательно ортогональном) отыскание x_r сводится к решению линейной алгебраической системы порядка r. Описанный приближенный метод называется методом Ритца для функционала (11).

По поведению квадратичной формы можно судить о спектре A. Мы приведем здесь условие дискретности спектра A. Для этого введем «оператор вложения» I_a, сопоставляющий любому элементу $x\in D[a]$ его самого, но уже как элемент пространства H. Неравенство (3) означает, что оператор I_a непрерывен. Предположим теперь, что I_a компактен, т. е. единичный шар $|x|_a\leqslant 1$ пространства $D[a]$ компактен в H. Полагая $A^{1/2}x=h$, $x=A^{-1/2}h$, видим, что сказанное равносильно компактности оператора $A^{-1/2}$ в H. Операторы $A^{-1/2}$ и A^{-1} компактны одновременно. Наконец, компактность A^{-1} равносильна (см. теорему 9.2.1) дискретности спектра A. Тем самым установлена следующая теорема.

Теорема 5. *Дискретность спектра положительно определенного самосопряженного оператора A равносильна компактности соответствующего оператора вложения I_a пространства $D[a]$ в H.*

4. Пусть теперь форма a не замкнута, т. е. $D[a]$ не полно относительно a-нормы. Пополняя пространство $D[a]$ и распространяя форму a на пополнение $\tilde{D}\supset D[a]$ по непрерывности, можно попытаться «замкнуть» форму a. Препятствие к этому может состоять в топологической несогласованности (см. § 1.1, п. 3) норм в H и в $D[a]$. Несогласованность означает наличие последовательностей $x_n\in D[a]$, таких, что $|x_n-x_m|_a\to 0$ при $n, m\to\infty$, $\|x_n\|\to 0$, но $\lim|x_n|_a\neq 0$. Тем самым некоторые отличные от нуля элементы пополнения $\tilde{D}$ пространства $D[a]$ пришлось бы отождествить с нулем пространства H. Это интерпретируется как «выход из H» при пополнении; замыкание формы a в этом случае невозможно. Напротив, если нормы в H и в $D[a]$ согласованы, то замыкание формы a возможно. В соответствии с рассмотренным в § 3.2, п. 2, примером, в $H=L_2(0, 1)$ форма $a_0[x, y]=\int_0^1 x(t)\overline{y(t)}\,dt+x(0)\overline{y(0)}$, $D[a_0]=C[0, 1]$, не допускает замыкания. Напротив, форма $a_1[x, y]=\int_0^1 x'(t)\overline{y'(t)}\,dt+x(0)\overline{y(0)}$, $D[a_1]=C^1[0, 1]$, допускает замыкание.

В заключение установим следующую лемму.

Лемма 6. *Пусть a — положительно определенная форма и G — какое-либо a-плотное в $D[a]$ множество. Пусть из условий $|x_n - x_m|_a \to 0$, $\|x_n\| \to 0$ следует, что $a[x_n, y] \to 0$ для любого $y \in G$. Тогда форма a допускает замыкание.*

○ Последовательность x_n сходится в $\tilde{D}$ к некоторому элементу $\tilde{x} \in \tilde{D}$. Условие $a[x_n, y] \to 0$ означает, что $\tilde{x}$ ортогонален в $\tilde{D}$ плотному множеству G. Поэтому $\tilde{x} = 0$ и $|x_n|_a \to 0$ ●

§ 2. Полуограниченные формы

1. Рассмотрим теперь полуограниченную форму a, не предполагая, что $m_a > 0$. Положим

$$a_\alpha[x, y] = a[x, y] + \alpha(x, y) \qquad (\alpha > -m_a). \tag{1}$$

Положительно определенная форма a_α определяет на $D[a_\alpha] = D[a]$ скалярное произведение и соответствующую норму. При изменении α такая норма переходит в эквивалентную, что вытекает из неравенств

$$a_\alpha[x, x] \leqslant a_\beta[x, x] \leqslant (\beta + m_a)(\alpha + m_a)^{-1} a_\alpha[x, x] \qquad (\beta > \alpha).$$

Отсюда следует, что при $\alpha + m_a > 0$ все формы a_α одновременно замкнуты или не замкнуты. В зависимости от этого считают замкнутой (или незамкнутой) исходную форму a. Если форма a_α допускает замыкание $\tilde{a}_\alpha$, то замыкание $\tilde{a}$ формы a вводится формулой $\tilde{a} = \tilde{a}_\alpha - \alpha e$, где $e = (\cdot, \cdot)$ — единичная форма в H. Легко видеть, что $\tilde{a}$ не зависит от α. В полуограниченном случае условимся понимать под a-нормой норму, порожденную какой-либо из форм a_α, $\alpha + m_a > 0$.

Пусть форма a замкнута. По-прежнему будем говорить, что форма a и оператор $A = A^*$ отвечают друг другу, если выполнены условия (1.4), (1.5). Если A_α — самосопряженный оператор, отвечающий форме a_α, то оператор A, отвечающий форме a, можно задать формулой $A = A_\alpha - \alpha I$. Легко видеть, что A не зависит от $\alpha > -m_a$ и что соответствие между a и $A = A^*$ взаимно-однозначное. Как и прежде, $m_a = m_A$. Формула (1.7) теряет смысл (при $m_a < 0$), но имеет место выражение для a через спектральную меру E_A:

$$a[x, y] = \int_{[m_a, \infty)} t\, d(E_A(t)x, y), \qquad x, y \in D[a]. \tag{2}$$

Действительно, при $m_a > 0$ формула (2) прямо следует из (1.7), а в общем случае получается пересчетом по формуле (1). Из (2) видно, что соотношения (1.7) сохраняют силу и при $m_a = 0$.

2. Предположим теперь, что полуограниченная форма a замкнута и что спектр соответствующего оператора $A = A^*$ дискретен в некотором полуинтервале $[m_a, \gamma)$, $\gamma \leqslant \infty$. Пусть $\lambda_n = \lambda_n(A)$ —

собственные значения A, $\lambda_n \in [m_a, \gamma)$, занумерованные в порядке неубывания с учетом их кратностей. Если собственных значений бесконечно много, т. е. если $\dim E_A[m_a, \gamma)=\infty$, то $\lambda_n \to \gamma - 0$. Случай $\gamma=\infty$ означает, что весь спектр A дискретен.

Очевидно $\lambda_1 = m_a$. Поэтому соотношение (1.2) дает вариационное определение числа λ_1. Равенство

$$a[x, x] - m_a(x, x) = \int_{[m_a, \infty)} (t - m_a)\, d(E_A(t)x, x)$$

показывает, что *infimum* в (1.2) реализуется на элементах, для которых $E_A\{m_a\}x = x$, и только на них. Эти элементы в соответствии с теоремой 6.1.3 образуют собственное подпространство G_1 оператора A, отвечающее собственному числу $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{r_1}$, $r_1 = \dim G_1$. Рассмотрим далее часть A_1 оператора A, действующую в $H_1 = H \ominus G_1$. Оператор $A_1 = A_1^*$ полуограничен и $m_{A_1} = \lambda_{r_1+1}(A)$. Поэтому отношение $a[x, x]/(x, x)$, $x \in D[a]$, $x \neq 0$, при условии $x \perp G_1$ достигает минимума (равного λ_{r_1+1}) на собственном подпространстве G_2, отвечающем собственному числу $\lambda_{r_1+1} = \ldots = \lambda_{r_2}$. Этот процесс может быть продолжен. В результате мы приходим к вариационному принципу, позволяющему последовательно определять собственные числа $\lambda_n(A)$ и собственные подпространства оператора A.

Теорема 1. *Пусть оператор $A = A^*$ полуограничен снизу и спектр A в $[m_a, \gamma)$ дискретен, а $\lambda_n(A)$ — собственные числа A в $[m_a, \gamma)$. Пусть числа $\mu_n(a)$ последовательно определяются условиями*

$$\mu_n(a) = \inf_{\|x\|=1} a[x, x] \quad (x \in D[a],\ x \perp \bigvee\nolimits_1^{n-1} x_k), \tag{3}$$

а элемент x_n реализует infimum в (3). *Тогда $\mu_n(a) = \lambda_n(A)$ и $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ есть полная в $E_A[m_a, \gamma)H$ ортонормированная система собственных элементов оператора A.*

Стоит отметить, что условия ортогональности в (3) одновременно являются условиями a-ортогональности: $a[x, x_k] = (x, Ax_k) = \lambda_k(x, x_k) = 0$.

Минимальный принцип, выражаемый теоремой 1, часто используют для приближенного нахождения спектра. С общей точки зрения он имеет, однако, тот недостаток, что для характеристики λ_n и x_n требует знания предыдущих собственных значений и элементов. Этого недостатка лишен следующий *максиминимальный принцип* (который, впрочем, неудобен для построения приближенных способов вычисления спектра).

Теорема*) **2.** *Пусть оператор A удовлетворяет условиям теоремы* 1 *и пусть Φ — какое-либо линейное множество в $D[a]$. Тогда*

$$\lambda_n(A) = \max_{\Phi \subset D[a]} \inf_{x \in \Phi,\ \|x\|=1} a[x, x] \quad (\dim D[a]/\Phi \leqslant n-1). \tag{4}$$

---

*) Родственное утверждение составляет теорема 9.2.4.

○ Пусть для некоторого $\Phi \subset D[a]$ окажется, что для всех $x \in \Phi$, $\|x\|=1$, выполнено $a[x, x] \geqslant \lambda_n + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Если при этом $\dim D[a]/\Phi \leqslant n-1$, то очевидно найдется элемент $x \in \Phi \cap \bigvee_1^n x_k$, $\|x\|=1$. Для него $a[x, x] = \int_{[\lambda_1, \lambda_n]} \lambda d(E_A(\lambda)x, x) \leqslant \lambda_n(x, x) = \lambda_n$. Получившееся противоречие показывает, что правая часть в (4) не превосходит $\lambda_n(A)$. Но значение $\lambda_n(A)$ в силу теоремы 1 достигается в (4), если положить $\Phi = D(a) \cap (H \ominus \bigvee_1^{n-1} x_k)$ ●

Следующее полезное утверждение также имеет вариационный характер. В его формулировке отсутствует априорное предположение о наличии у A дискретного спектра.

Теорема 3. *Пусть $A=A^*$ полуограничен снизу. Пусть $F \subset D[a]$ — какое-либо линейное множество, такое, что для $\mu > m_a$*

$$a[x, x] < \mu(x, x) \quad (x \in F, \ x \neq 0). \tag{5}$$

Тогда

$$\dim E_A[m_a, \mu)H = \sup_F \dim F. \tag{6}$$

○ Отметим, что на подпространстве $H_\mu \overset{\text{def}}{=} E_A[m_a, \mu)H$ соотношение (5) выполнено: если $x \in H_\mu$, то

$$a[x, x] = \int_{[m_a, \mu)} t d(E_A(t)x, x) < \mu(x, x).$$

Таким образом, H_μ является одним из возможных множеств F и, следовательно, $\dim H_\mu \leqslant \sup \dim F$. Случай $\dim H_\mu = \infty$ этим исчерпан. Пусть $\dim H_\mu < \infty$ и пусть $F \subset D[a]$ — линейное множество, такое, что для всех $x \in F$ выполнено (5). Если $\dim F > \dim H_\mu$, то в F найдется элемент $x_0 \neq 0$, $x_0 \perp H_\mu$. Для него

$$a[x_0, x_0] = \int_{[\mu, \infty)} t d(E_A(t)x_0, x_0) \geqslant \mu(x_0, x_0),$$

что противоречит (5). Поэтому $\dim F \leqslant \dim H_\mu$ ●

3. Квадратичные формы позволили ввести частичное упорядочение для ограниченных самосопряженных операторов (см. § 2.7, п. 2). Соответствующее понятие можно распространить и на полуограниченный случай.

Пусть A, B — самосопряженные полуограниченные снизу операторы. Говорят, что A *больше* B (пишут $A > B$), если соответствующие квадратичные формы a и b удовлетворяют условиям

$$D[a] \subset D[b], \tag{7}$$

$$a[x, x] \geqslant b[x, x], \quad x \in D[a]. \tag{8}$$

Отметим, что в приведенном определении возможно, в частности, $D[a] = D[b]$. Другой крайний случай состоит в том, что в (8) при всех $x \in D[a]$ осуществляется равенство; при этом, конечно, $D[a] \neq D[b]$, если только $A \neq B$. Естественность условий (7), (8) подтверждается доказываемыми ниже утверждениями.

Теорема 4. *Пусть A, B — самосопряженные полуограниченные снизу операторы и $A > B$. Если спектр B левее точки γ, $\gamma \leqslant \infty$, дискретен, то спектр A левее γ также дискретен, причем $\lambda_n(A) \geqslant \lambda_n(B)$, $n = 1, 2, \ldots$*

○ Воспользуемся теоремой 3. Пусть на множестве $F \subset D[a]$ выполнено (5). Тогда в силу (7), (8) $F \subset D[b]$ и для $x \in F$ $b[x, x] < \mu(x, x)$. Из (6) теперь следует, что

$$\dim E_A(-\infty, \mu) H \leqslant \dim E_B(-\infty, \mu) H \quad (\mu < \gamma).$$

Последнее неравенство очевидно равносильно утверждению теоремы ●

Заметим, что неравенства $\lambda_n(A) \geqslant \lambda_n(B)$ непосредственно выводятся и из теоремы 2. Однако при этом надо заранее знать, что спектр A левее γ дискретен.

Следующая теорема позволяет сравнивать A^{-1} и B^{-1}.

Теорема 5. *Пусть операторы A, B — самосопряженные и положительно определенные и $A > B$. Тогда $A^{-1} < B^{-1}$.*

○ Будем исходить из теоремы 1.4. Пусть $h \in H$, $Ax_0 = h$, $By_0 = h$. Элементы x_0, y_0 реализуют минимум соответственно для функционала $\Phi_A(x)$, $x \in D[a]$, и $\Phi_B(y)$, $y \in D[b]$. Из (7), (8) непосредственно следует, что $\Phi_{B, \min} \leqslant \Phi_{A, \min}$. В соответствии с (1.12) это означает, что $-(B^{-1}h, h) \leqslant -(A^{-1}h, h)$, т. е. $A^{-1} < B^{-1}$ ●

§ 3. Метод Фридрихса расширения полуограниченного оператора до самосопряженного

Пусть A_0 — полуограниченный снизу симметричный оператор, m_{A_0} — его точная нижняя граница. Как было отмечено в следствии 4.1.5, индексы дефекта оператора A_0 одинаковы, и потому A_0 имеет самосопряженные расширения. Мы увидим, что среди этих расширений есть полуограниченные операторы. Более того, существует по крайней мере одно полуограниченное самосопряженное расширение, нижняя граница которого совпадает с m_{A_0}. Для построения такого расширения Фридрихсом предложен метод, основанный на связи между операторами и формами. Важность метода Фридрихса (как в общей теории, так и для приложений) определяется тем, что возникающее при этом расширение оказывается наибольшим в множестве всех полуограниченных самосопряженных расширений.

1. Начнем с положительно определенного случая. Рассмотрим билинейную форму a_0 оператора A_0:

$$a_0[x, y] = (A_0x, y), \quad x, y \in D[a_0] = D(A_0). \tag{1}$$

Отметим, что $m_{a_0} = m_{A_0} > 0$. Если $x_n \in D[a_0]$ и $\|x_n\| \to 0$, то для любого $y \in D[a_0]$ будет $a_0[x_n, y] = (x_n, A_0y) \to 0$. В силу леммы 1.6 отсюда следует, что форма a_0 допускает замыкание. Обозначим через a

замыкание формы a_0, через $D[a]$ — область ее определения, через A — самосопряженный оператор, отвечающий форме a в смысле § 1. Так как множество $D(A_0)$ a-плотно в $D[a]$, то $m_{a_0}=m_a$, а потому и $m_{A_0}=m_A$. Далее, предельный переход в (1) по a-норме приводит к соотношению

$$(A_0x, y)=a[x, y], \quad x\in D(A_0),\ y\in D[a]. \tag{2}$$

Мы видим, что для оператора A_0 и формы a выполнены условия (1.4), (1.5). В силу замечания 1.3 отсюда следует, что $A_0\subset A$.

Построенное описанным методом самосопряженное расширение $A\supset A_0$ называется *расширением по Фридрихсу* (или *жестким расширением*) оператора A_0.

Пусть теперь A_0 полуограничен снизу, но не обязательно $m_{A_0}>0$. Расширение по Фридрихсу для A_0 строится так. Пусть A_α — жесткое расширение оператора $A_0+\alpha I$, $\alpha+m_{A_0}>0$. Тогда $A\overset{\text{def}}{=}$ $=A_\alpha-\alpha I$. Легко видеть, что A не зависит от выбора $\alpha>-m_{A_0}$ и что $A^*=A\supset A_0$. Как и в положительно определенном случае, $m_{A_0}=m_A$ и

$$D(A)\subset D[a]. \tag{3}$$

2. Жесткое расширение полуограниченного оператора обладает важными экстремальными свойствами. Прежде всего покажем, что (3) является характеристическим свойством жесткого расширения.

Теорема 1. *Пусть A_0 — полуограниченный симметричный оператор, $D[a]$ — область определения замыкания его формы. Если $\tilde A=\tilde A^*$, $\tilde A\supset A_0$ и $D(\tilde A)\subset D[a]$, то $\tilde A$ совпадает с жестким расширением A оператора A_0.*

○ Для $x\in D(\tilde A)$, $y\in D(A_0)$ имеем $(\tilde Ax, y)=(x, A_0y)=$ $=a[x, y]$. Предельным переходом по a-норме распространяем равенство $(\tilde Ax, y)=a[x, y]$ на любые $y\in D[a]$. Для $\tilde A$, таким образом, выполнены условия (1.4), (1.5), а потому $\tilde A=A$ ●

Теорема 2. *Пусть $\tilde A$ — полуограниченное самосопряженное расширение A_0, $\tilde a$ — соответствующая форма. Тогда $D[\tilde a]\supset D[a]$ и*

$$a[x, y]=\tilde a[x, y], \quad x, y\in D[a]. \tag{4}$$

○ Для $x, y\in D(A_0)$ имеем

$$a[x, y]=(A_0x, y)=(\tilde Ax, y)=\tilde a[x, y],$$

т. е. на $D(A_0)$ формы a и $\tilde a$ совпадают. Следовательно, замыкания множества $D(A_0)$ по a-норме и по $\tilde a$-норме совпадают, и на этом замыкании выполнено равенство (4). Поскольку $D(A_0)$ плотно в $D[a]$, это замыкание совпадает с $D[a]$ ●

Следствие 3. *Среди всех самосопряженных полуограниченных расширений $\tilde A$ симметричного оператора A_0 жесткое расширение A является наибольшим: $A>\tilde A$.*

Действительно, из теоремы 2 прямо вытекает, что выполнены условия (2.7), (2.8), а потому $A>\tilde A$. Интересно отметить, что неравенство $A > \tilde{A}$ не исключает возможности $m_{\tilde{A}} = m_{A_0}$ при $\tilde{A} \neq A$.

Следствие 4. *Пусть в условиях теоремы 2 спектр $\tilde{A}$ в интервале $[m_{\tilde{A}}, \gamma)$ дискретен. Тогда спектр A левее γ также дискретен и $\lambda_n(A) \geq \lambda_n(\tilde{A})$, $n = 1, 2, \ldots$*

Требуемое сразу вытекает из $A > \tilde{A}$ и из теоремы 2.4.

Определенную информацию о множестве $D[\tilde{a}]$ дает следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть выполнены предположения теоремы 2. Для элемента $u \in D[\tilde{a}]$ условие*

$$\tilde{a}[x, u] = 0, \qquad \forall x \in D[a], \tag{5}$$

равносильно условию $u \in N(A_0^*)$.

○ Поскольку $D(A_0)$ a-плотно в $D[a]$, достаточно проверять (5) для $x \in D(A_0)$. Но тогда (5) принимает вид $(A_0 x, u) = 0$, что равносильно $u \in N(A_0^*)$ ●

Из доказанной теоремы прямо вытекает следствие.

Следствие 6. *Если $m_{\tilde{A}} > 0$, то $D[\tilde{a}] \cap N(A_0^*)$ есть $\tilde{a}$-ортогональное дополнение к подпространству $D[a]$ в гильбертовом пространстве $D[\tilde{a}]$.*

Теорема 7. *Пусть в условиях теоремы 2 индексы дефекта оператора A_0 конечны*): $n_-(A_0) = n_+(A_0) = n < \infty$. Тогда $n \geq r$, где*

$$r \stackrel{\text{def}}{=} \dim D[\tilde{a}]/D[a]. \tag{6}$$

○ Добавляя, если нужно, к оператору A_0 оператор αI, можно ограничиться случаем $m_{\tilde{A}} > 0$. Тогда в силу следствия 6 $r = \dim(D[\tilde{a}] \cap N(A_0^*)) \leq \dim N(A_0^*)$. Так как $0 \in \hat{\rho}(A_0)$, то $\dim N(A_0^*) = n$ ●

Теорема 7 представляет интерес в связи со следующим утверждением.

Теорема 8. *Пусть в условиях следствия 4 величина (6) конечна. Тогда $\lambda_n(A) \leq \lambda_{n+r}(\tilde{A})$, $n = 1, 2, \ldots$*

○ Воспользуемся теоремой 2.2. Если $\Phi \subset D[a]$ и $\dim D[a]/\Phi \leq n-1$, то очевидно $\dim D[\tilde{a}]/\Phi \leq n+r-1$. Согласно (4) формы $\tilde{a}$ и a на Φ совпадают. Поэтому из (2.4) прямо следует, что $\lambda_n(A) \leq \lambda_{n+r}(\tilde{A})$ ●

§ 4. Дробные степени операторов. Неравенство Гайнца

Частным случаем общего определения (6.1.12) является формула для дробных степеней положительного самосопряженного оператора A:

$$A^\theta = \int_{\mathbb{R}_+} s^\theta \, dE(s), \qquad E = E_A. \tag{1}$$

---

*) Напомним (см. теорему 9.3.7), что в этом случае все расширения $\tilde{A} = \tilde{A}^* \supset A_0$ полуограничены вместе с A_0.

Эта формула справедлива при $\theta \geqslant 0$, а если $N(A) = \{0\}$, то при всех $\theta \in \mathbf{R}$. Здесь мы, ограничиваясь случаем $\theta \in (0, 1)$, получаем другое интегральное представление для A^θ. Оно выражает A^θ через обратный оператор $(A+tI)^{-1}$, $t > 0$. Это представление часто оказывается удобнее, чем формула (1), поскольку резольвента — более простой объект, чем спектральная мера оператора.

1. Ниже используется элементарная формула

$$c_\theta \int_0^\infty \tau^{\theta-1}(1+\tau)^{-1}\,d\tau = 1, \qquad c_\theta = \pi^{-1}\sin(\pi\theta), \quad 0 < \theta < 1.$$

Из нее следует равенство

$$c_\theta \int_0^\infty t^{\theta-1}(s+t)^{-1}\,dt = s^{\theta-1}, \quad s > 0, \quad 0 < \theta < 1. \tag{2}$$

Пусть $A > 0$ — самосопряженный оператор в H, $E = E_A$ — его спектральная мера. Рассмотрим интеграл

$$c_\theta \int_0^\infty t^{\theta-1}(A(A+tI)^{-1}x,\ x)\,dt. \tag{3}$$

Подынтегральная функция определена и непрерывна при всех $t > 0$ для любого $x \in H$. Для нее справедливо представление

$$(A(A+tI)^{-1}x,\ x) = \int_{\mathbf{R}_+} s(s+t)^{-1}\,d(E(s)x,\ x).$$

Подставляя его в (3), меняя порядок интегрирования и затем используя (2), приходим к формуле

$$c_\theta \int_0^\infty t^{\theta-1}(A(A+tI)^{-1}x,\ x)\,dt = \int_{\mathbf{R}_+} s^\theta\,d(E(s)x,\ x) = \| A^{\theta/2}x \|^2. \tag{4}$$

Включение $x \in D(A^{\theta/2})$ необходимо и достаточно для конечности обоих интегралов в (4). В соответствии с (1.7) *) формула (4) дает выражение для квадратичной формы оператора A^θ. Нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $A = A^* > 0$ — оператор в H. При $0 < \theta < 1$ справедливо интегральное представление* (4) *квадратичной формы оператора A^θ.*

Равенство (4) можно записать символически в виде

$$A^\theta = c_\theta \int_0^\infty t^{\theta-1} A(A+tI)^{-1}\,dt. \tag{5}$$

Формула (5) допускает более прямое истолкование. Пусть $x \in D(A^\theta)$. Можно показать, что тогда элементы

$$y_{a,b} = \int_a^b t^{\theta-1}A(A+tI)^{-1}x\,dt, \qquad 0 < a < b < \infty,$$

сильно сходятся к элементу $A^\theta x$: $\lim\limits_{a\to 0,\ b\to\infty} y_{a,b} = A^\theta x$.

---

*) В § 2, п. 1, отмечалось, что формула (1.7) справедлива для любых операторов $A = A^* > 0$.

2. Интегральное представление (4) находит применение при выводе полезных неравенств для дробных степеней.

Теорема 2. *Пусть* $A=A^*$, $B=B^*$ *и* $0<B<A$. *Тогда при* $0<\theta<1$ *будет* $B^\theta<A^\theta$.

○ Применим теорему 2.5 к положительно определенным операторам $A+tI$, $B+tI$, $t>0$. Мы получим, что $(A+tI)^{-1}<(B+ +tI)^{-1}$, откуда

$$A(A+tI)^{-1}=I-t(A+tI)^{-1}>I-t(B+tI)^{-1}=B(B+tI)^{-1}.$$

Следовательно, для любого $x\in H$

$$(B(B+tI)^{-1}x,\ x)\leqslant(A(A+tI)^{-1}x,\ x),\qquad \forall t>0.$$

В силу (4) это приводит к включению $D(B^{\theta/2})\supset D(A^{\theta/2})$ и к неравенству $\|B^{\theta/2}x\|^2\leqslant\|A^{\theta/2}x\|^2$, $\forall x\in D(A^{\theta/2})$ ●

Из теоремы 2 непосредственно вытекает так называемое «неравенство Гайнца».

Теорема 3. *Пусть* $A=A^*>0$, $B=B^*>0$, $D(A)\subset D(B)$ *и* $\|Bx\|\leqslant\|Ax\|$, $\forall x\in D(A)$. *Тогда при любом* $\theta\in(0,\ 1)$ *будет* $D(A^\theta)\subset D(B^\theta)$ и $\|B^\theta x\|\leqslant\|A^\theta x\|$, $\forall x\in D(A^\theta)$.

○ Достаточно применить теорему 2 к операторам A^2, B^2 ●

Следует иметь в виду, что утверждения теорем 2, 3 перестают быть верными, если $\theta>1$. Из теоремы 2.5 вытекает, что при $N(A)=N(B)=\{0\}$ неравенства теорем 2, 3 «с переменой знака» выполняются для $\theta\in(-1,\ 0)$.

ГЛАВА 11

КЛАССЫ КОМПАКТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Каноническое представление и сингулярные числа компактных операторов

При изучении самосопряженных компактных операторов основное значение имеет их разложение в ортогональный ряд конечномерных слагаемых (9.2.1). Это разложение выражает спектральную теорему для таких операторов Для произвольных операторов класса $\mathbf{S}_\infty$ спектральный анализ заведомо не может быть исчерпывающим Например, простейший интегральный оператор типа Вольтерра $(Tu)(t)=\int_0^t u(\tau)\,d\tau$ в $L_2(0, 1)$ вообще не имеет собственных значений (для него $\sigma(T)=\sigma_c(T)=\{0\}$). Однако для операторов класса $\mathbf{S}_\infty$ возможно другое (не спектральное) разложение в ряд одномерных операторов, которое во многих вопросах заменяет спектральную теорему. Такое разложение называют *каноническим представлением*, или *рядом Шмидта* компактного оператора.

1. Будем исходить из полярного представления (8.1.4), справедливого для любого замкнутого плотно определенного оператора. Для непрерывных операторов вывод этого представления упрощается, и мы воспроизведем его здесь.

Пусть $T\in\mathbf{B}(H)$, $M=(T^*T)^{1/2}\overset{\mathrm{def}}{=}|T|$. Тогда $\|Tx\|=\|Mx\|$ и $N(T)=N(M)$. Отсюда следует, что $\overline{R(M)}=H\ominus N(M)=H\ominus N(T)=\overline{R(T^*)}$. Пусть $g=Mx$, $h=Tx$; рассмотрим линейный оператор W: $g\longmapsto h$. Это определение корректно, поскольку из $g=0$ следует $x\in N(T)$ и $h=0$. Из $\|Tx\|=\|Mx\|$ следует, что W по непрерывности распространяется до изометрического отображения $\overline{R(M)}=\overline{R(T^*)}$ на $\overline{R(T)}$. Полагая W равным нулю на $N(T)$, *превратим W в частично-изометрический оператор с областью изометричности $\overline{R(T^*)}$ и областью значений $\overline{R(T)}$*. При этом $Tx=h=Wg=WMx$, а потому справедливо *полярное представление*

$$T=WM,\qquad M=(T^*T)^{1/2}. \tag{1}$$

2. Пусть теперь $T\in\mathbf{S}_\infty$ (а тогда и $M\in\mathbf{S}_\infty$). Занумеруем положительные собственные числа $\lambda_k=\lambda_k(M)$ оператора M в порядке невозрастания с учетом кратностей. Спектральное разложение (9.2.1) для M запишем в виде $M=\sum_k\lambda_k(\cdot,\varphi_k)\varphi_k$, где $\{\varphi_k\}$ —

ортонормированная последовательность собственных элементов оператора M, полная в $\overline{R(T^*)}$. Числа

$$s_k(T) \stackrel{\text{def}}{=} [\lambda_k(T^*T)]^{1/2} = \lambda_k(|T|) \tag{2}$$

называются *сингулярными числами* *) (*s-числами*) *оператора* T. Система $\psi_k = W\varphi_k$ очевидно ортонормирована и полна в $\overline{R(T)}$. Подставляя разложение для M в (1), получаем представление T в виде суммы (конечной или бесконечной) операторов ранга 1:

$$T = \sum\nolimits_k s_k(\cdot, \varphi_k)\psi_k \qquad (s_k = s_k(T)). \tag{3}$$

Из (3) непосредственно следует, что

$$T^* = \sum\nolimits_k s_k(T)(\cdot, \psi_k)\varphi_k. \tag{4}$$

В свою очередь, из (3) и (4) с необходимостью следует, что

$$T^*T = \sum\nolimits_k s_k^2(T)(\cdot, \varphi_k)\varphi_k, \quad TT^* = \sum\nolimits_k s_k^2(T)(\cdot, \psi_k)\psi_k, \tag{5}$$

$$T\varphi_l = s_l(T)\psi_l, \qquad T^*\psi_l = s_l(T)\varphi_l, \tag{6}$$

$$T^*T\varphi_k = s_k^2(T)\varphi_k, \qquad TT^*\psi_k = s_k^2(T)\psi_k. \tag{7}$$

Разложение (3) называется *каноническим представлением* (*рядом Шмидта*) *для* T. Из (5)—(7) видно, что это представление в существенном единственно. Произвол лишь в выборе ортонормированных собственных элементов в (7), но при этом должны выполняться «условия согласования» (6). Мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Для всякого оператора* $T \in \mathbf{S}_\infty$ *справедливо каноническое представление* (3), *где* $\{\varphi_k\}$, $\{\psi_k\}$ — *две равномощные ортонормированные системы, числа* $s_k > 0$ *не возрастают и* $s_k \to 0$, *если* $k \to \infty$. *Представление* (4) *единственно в том смысле, что* $\{s_k\}$, $\{\varphi_k\}$, $\{\psi_k\}$ *необходимо удовлетворяют соотношениям* (6), (7). *Числа* s_k *определяются из* (2). *Системы* $\{\varphi_k\}$ *и* $\{\psi_k\}$ *полны в* $\overline{R(T^*)}$ *и в* $\overline{R(T)}$. *Каноническое представление для* T^* *дается рядом* (4).

Замечание. Попутно мы обнаружили, что для T^*T и для TT^* отличные от нуля собственные значения совпадают (вместе с кратностями): $0 \neq \lambda_k(T^*T) = \lambda_k(TT^*)$. Собственные элементы связаны соотношениями (6). Эти факты легко усмотреть непосредственно. Заметим, что размерности $N(T^*T)$ и $N(TT^*)$ могут не совпадать.

Теорему 1 естественно дополняет следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\{\varphi_k\}$, $\{\psi_k\}$ — *две равномощные ортонормированные системы в* H; $\{s_k\}$ — *какая-либо невозрастающая последова-*

---

*) Принятое определение означает, что $s_k(T) > 0$. Если $\operatorname{rang} T = r < \infty$, то иногда удобно «дописывать» сингулярную последовательность нулями: $s_k(T) = 0$ при $k > r$. Мы не будем в подобных случаях делать специальных оговорок.

тельность, $s_k>0$ и $s_k\to 0$, если $k\to\infty$. Тогда ряд (3) *определяет собой некоторый оператор $T\in\mathbf{S}_\infty$, для которого является каноническим представлением.*

○ Обозначим через T_n отрезок длиной n ряда (3). Тогда

$$\|(T_{n+q}-T_n)x\|^2=\sum_{n+1}^{n+q}s_k^2|(x,\ \varphi_k)|^2\leqslant s_{n+1}^2\sum_k|(x,\ \varphi_k)|^2\leqslant s_{n+1}^2\|x\|^2. \tag{8}$$

Последовательность $T_n\in\mathbf{K}$ сходится в себе по норме, а потому ряд (3) сходится по норме к некоторому оператору $T\in\mathbf{S}_\infty$. Поскольку из (3) вытекают (4)—(7), то ряд для T — канонический ●

Замечание. При $q\to\infty$ неравенство (8) приводит к оценке для нормы $T-T_n$. Поскольку в (8) при $x=\varphi_{n+1}$ достигается равенство, получаем, что

$$\|T-T_n\|=s_{n+1}(T). \tag{9}$$

3. Отметим некоторые элементарные свойства s-чисел. Ясно, что $s_k(T)=s_k(|T|)$. Из сопоставления (3) и (4) следует

$$s_k(T)=s_k(T^*). \tag{10}$$

Соотношение (9) при $n=0$ означает, что $s_1(T)=\|T\|$. Из определения (2) и из минимаксимального принципа (теорема 9.2.4) для спектра оператора T^*T имеем

$$s_{n+1}(T)=\min_L\max_{x\in L\setminus\{0\}}(\|Tx\|/\|x\|)\qquad(\operatorname{Def}L\leqslant n). \tag{11}$$

Если $R\in\mathbf{B}(H)$, то $\|RTx\|\leqslant\|R\|\cdot\|Tx\|$. Отсюда и из (11) получаем

$$s_k(RT)\leqslant\|R\|s_k(T),\quad s_k(TR)\leqslant\|R\|s_k(T), \tag{12}$$

причем второе соотношение получается из первого с помощью (10). Из (12) легко следует, что для унитарных U_1, U_2

$$s_k(U_1TU_2)=s_k(T).$$

Укажем еще одну экстремальную характеристику s-чисел:

$$s_{n+1}(T)=\min_K\|T-K\|\qquad(\operatorname{rang}K\leqslant n). \tag{13}$$

Действительно, в этом случае $\operatorname{Def}N(K)=\operatorname{rang}K^*=\operatorname{rang}K\leqslant n$, а потому из (11) получаем

$$s_{n+1}(T)\leqslant\max_{x\in N(K)}(\|Tx\|/\|x\|)=\max_{x\in N(K)}(\|(T-K)x\|/\|x\|)\leqslant\|T-K\|.$$

Равенство в (13) достигается при $K=T_n$ (см. (9)).

Пусть теперь $T_1,\ T_2\in\mathbf{S}_\infty$. Тогда в силу (13)

$$s_{m+n-1}(T_1+T_2)\leqslant s_m(T_1)+s_n(T_2). \tag{14}$$

В самом деле, если $T=T_1+T_2$ и $\operatorname{rang} K_1 \leqslant m-1$, $\operatorname{rang} K_2 \leqslant n-1$, то

$$s_{m+n-1}(T) \leqslant \|T-(K_1+K_2)\| \leqslant \|T_1-K_1\|+\|T_2-K_2\|,$$

причем K_1 и K_2 можно выбрать так, что правая часть превратится в $s_m(T_1)+s_n(T_2)$. Полагая в (14) $n=1$, находим, что $s_m(T) \leqslant \leqslant \|T_2\|+s_m(T_1)=\|T-T_1\|+s_m(T_1)$. Меняя T и T_1 ролями, приходим к неравенству

$$|s_m(T)-s_m(T_1)| \leqslant \|T-T_1\| \quad (T,\ T_1 \in \mathbf{S}_\infty). \tag{15}$$

Таким образом, s-числа непрерывно зависят от T.

Из спектрального разложения (9.2.4) для нормальных операторов легко получается, что в этом случае s-числа представляют собой упорядоченную по невозрастанию последовательность модулей собственных чисел (с учетом кратностей). Элементы φ_k, ψ_k совпадают с точностью до множителя, равного по модулю единице.

§ 2. Ядерные операторы. След оператора

1. Во многих отношениях важным подклассом класса $\mathbf{S}_\infty$ является класс $\mathbf{S}_1$ *ядерных операторов*. Оператор $T \in \mathbf{S}_\infty$ называется ядерным оператором, если

$$\|T\|_1 \overset{\text{def}}{=} \sum_k s_k(T) < \infty. \tag{1}$$

Ясно, что $\|T\|=s_1(T) \leqslant \|T\|_1$, причем равенство достигается на операторах ранга 1 (и только на них). Далее, $\|T\|_1=\||T|\|_1$; операторы T, T^* ядерны одновременно и в силу (1.10) $\|T\|_1=\|T^*\|_1$. Если $R_1, R_2 \in \mathbf{B}(H)$ и $T \in \mathbf{S}_1$, то в соответствии с (1.12) $R_1TR_2 \in \mathbf{S}_1$ и

$$\|R_1TR_2\|_1 \leqslant \|R_1\| \cdot \|R_2\| \cdot \|T\|_1. \tag{2}$$

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы указать критерий принадлежности классу S_1, не требующий знания s-чисел. Прежде всего докажем лемму.

Лемма 1. *Пусть $T \in \mathbf{B}(H)$ и пусть для какого-либо ортонормированного базиса $\{g_l\}$ выполнено условие*

$$\sum_l \|Tg_l\|^2 < \infty. \tag{3}$$

Тогда $T \in \mathbf{S}_\infty$.

○ Достаточно убедиться, что из $x_n \xrightarrow{w} 0$ следует $T^*x_n \to 0$. (Тогда в силу теоремы 2.6.1 $T^* \in \mathbf{S}_\infty$, а потому и $T \in \mathbf{S}_\infty$.) Отметим, что $\|x_n\| \leqslant c$. Разлагая T^*x_n по системе $\{g_l\}$, получаем

$$\|T^*x_n\|^2=\sum_l |(T^*x_n,\ g_l)|^2=\sum_l |(x_n,\ Tg_l)|^2.$$

Члены последнего ряда при $n \to \infty$ стремятся к нулю и мажорируются членами сходящегося ряда $c^2\|Tg_l\|^2$ ●

Теорема 2. *Пусть $T \in \mathbf{B}(H)$, $T > 0$. Если для какого-либо ортонормированного базиса $\{g_l\}$ сходится ряд $\sum_l (Tg_l, g_l)$,* то $T \in \mathbf{S}_1$. *В этом случае для любого ортонормированного базиса $\{h_l\}$*

$$\sum_l (Th_l, h_l) = \sum_k s_k(T) = \|T\|_1. \tag{4}$$

○ По условию $\sum_l \|T^{1/2} g_l\|^2 < \infty$, а потому в силу леммы 1 $T^{1/2} \in \mathbf{S}_\infty$ и $T \in \mathbf{S}_\infty$. Воспользуемся теперь представлением (1.3) и учтем, что при $T > 0$ $\varphi_k = \psi_k$. Тогда

$$\sum_l (Th_l, h_l) = \sum_l \sum_k s_k |(h_l, \varphi_k)|^2 = \sum_k s_k \|\varphi_k\|^2 = \sum_k s_k \quad \bullet$$

Сложнее обстоит дело для произвольных операторов класса $\mathbf{S}_1$, Вопрос решается следующими двумя теоремами.

Теорема 3. *Пусть $T \in \mathbf{S}_1$ и пусть $\{g_l\}$, $\{h_l\}$ — произвольные ортонормированные системы в H. Тогда*

$$\sum_l |(Tg_l, h_l)| \leqslant \|T\|_1, \tag{5}$$

причем равенство в (5) *достигается в соответствии с* (1.3) *при $g_l = \varphi_l$, $h_l = \psi_l$.*

○ Из представления (1.3) получаем

$$\sum_l |(Tg_l, h_l)| \leqslant \sum_{k,l} s_k |(g_l, \varphi_k)(\psi_k, h_l)| \leqslant \sum_k s_k [\sum_l |(g_l, \varphi_k)|^2]^{1/2} \times \\ \times [\sum_l |(\psi_k, h_l)|^2]^{1/2} = \sum_k s_k \|\varphi_k\| \cdot \|\psi_k\| = \sum_k s_k = \|T\|_1.$$

Равенство в (5) при $g_l = \varphi_l$, $h_l = \psi_l$ осуществляется в силу (1.6) ●

Теорема 4. *Если $T \in \mathbf{B}(H)$ и для любых ортонормированных систем $\{g_l\}$, $\{h_l\}$ ряд $\sum_l (Tg_l, h_l)$ сходится, то $T \in \mathbf{S}_1$.*

○ Воспользуемся полярным представлением (1.1). Пусть $\{g_l\}$ — какой-либо ортонормированный базис в $\overline{R(M)}$ и $h_l = Wg_l$. Поскольку W изометричен на $\overline{R(M)}$, система $\{h_l\}$ ортонормирована. Далее, ряд

$$\sum_l (Mg_l, g_l) = \sum_l (WMg_l, Wg_l) = \sum_l (Tg_l, h_l) < \infty \tag{6}$$

сходится по условию. Систему $\{g_l\}$ можно как-либо дополнить до базиса в H. Это не изменит суммы (6), поскольку $H \ominus \overline{R(M)} = N(M)$. Из теоремы 2 получаем $M \in \mathbf{S}_1$, а потому и $T \in \mathbf{S}_1$ ●

Практически удобно следующее достаточное условие ядерности.

Теорема 5. *Если $T \in \mathbf{B}(H)$ и для какого-либо ортонормированного базиса $\{g_l\}$ сходится ряд $\sum_l \|Tg_l\|$, то $T \in \mathbf{S}_1$.*

○ Равенство $\|Tx\| = \|Mx\|$ показывает, что можно ограничиться случаем $T > 0$. Но тогда

$$\sum_l (Tg_l, g_l) \leqslant \sum_l \|Tg_l\| < \infty,$$

и остается сослаться на теорему 2 ●

2. Следующая теорема должна «оправдать» обозначение (1).

Теорема 6. *Функционал* (1) *на классе* $\mathbf{S}_1$ *обладает свойствами нормы, относительно которой* $\mathbf{S}_1$ *является банаховым пространством.*

○ Пусть T_1, $T_2 \in \mathbf{S}_1$ и $T = T_1 + T_2$. Для любых ортонормированных систем $\{g_l\}$, $\{h_l\}$ имеем в силу (5)

$$\sum_l |(Tg_l, h_l)| \leqslant \sum_l |(T_1 g_l, h_l)| + \sum_l |(T_2 g_l, h_l)| \leqslant \|T_1\|_1 + \|T_2\|_1.$$

Из теоремы 4 теперь следует, что $T \in \mathbf{S}_1$, а из теоремы 3 — неравенство треугольника

$$\|T_1 + T_2\|_1 \leqslant \|T_1\|_1 + \|T_2\|_1. \tag{7}$$

Таким образом, $\mathbf{S}_1$ — линейное многообразие в $\mathbf{B}(H)$ и функционал (1) обладает свойствами нормы. Остается проверить полноту пространства $\mathbf{S}_1$. Пусть последовательность $\{T_l\}$ сходится в себе в $\mathbf{S}_1$. Тогда она сходится по норме операторов и ее предел $T \in \mathbf{S}_\infty$. При заданном $\varepsilon > 0$

$$\sum_k s_k (T_l - T_m) \leqslant \varepsilon \qquad (l,\ m \geqslant n_\varepsilon). \tag{8}$$

В силу (1.15) предельный переход в (8) при $l \to \infty$ дает

$$\sum_k s_k (T - T_m) \leqslant \varepsilon \qquad (m \geqslant n_\varepsilon). \tag{9}$$

Тем самым $T \in \mathbf{S}_1$ вместе с T_m и $\|T - T_m\|_1 \to 0$ при $m \to \infty$ ●

Отметим, что совокупность $\mathbf{K}$ операторов конечного ранга плотна в $\mathbf{S}_1$. Действительно, если T_n — отрезок длиной n ряда (1.3), то $s_k(T_n) = s_k(T)$ при $k \leqslant n$ и $s_k(T_n) = 0$ при $k > n$. Поэтому $\|T - T_n\|_1 = \sum_{k>n} s_k(T) \to 0$ при $n \to \infty$.

Из плотности $\mathbf{K}$ в $\mathbf{S}_1$ стандартным образом выводится, что *пространство* $\mathbf{S}_1$ *сепарабельно.*

3. В классе $\mathbf{S}_1$ можно ввести понятие, естественно обобщающее понятие матричного следа оператора в конечномерном пространстве. В основе лежит следующая теорема.

Теорема 7. *Если* $T \in \mathbf{S}_1$, *то ряд* $\sum_l (Tg_l, g_l)$ *абсолютно сходится для любого ортонормированного базиса* $\{g_l\}$, *а его сумма не зависит от выбора базиса* $\{g_l\}$.

○ Используем разложение (1.3). Тогда

$$\sum_l (Tg_l, g_l) = \sum_l \sum_k s_k (g_l, \varphi_k)(\psi_k, g_l) =$$
$$= \sum_k s_k \sum_l (\psi_k, g_l)(g_l, \varphi_k) = \sum_k s_k (\psi_k, \varphi_k) = \sum_k (T\varphi_k, \varphi_k).$$

Перестановка суммирования оправдывается абсолютной сходимостью двойного ряда, которая фактически была установлена при доказательстве теоремы 3. Остается заметить, что в полученное представление базис $\{g_l\}$ не входит ●

Теперь для оператора $T \in \mathbf{S}_1$ можно ввести величину

$$\operatorname{Tr} T \overset{\text{def}}{=} \sum_l (Tg_l, g_l), \tag{10}$$

называемую *следом оператора* T. Если сопоставить оператору T его матрицу относительно базиса $\{g_l\}$, то (10) есть сумма диагональных элементов этой матрицы. Теорема 7 означает, что эта сумма не зависит от выбора матричного представления.

Функционал (10) очевидно линеен. Из (5) следует, что $|\operatorname{Tr} T| \leqslant \|T\|_1$. Ясно также, что для $T > 0$ $\operatorname{Tr} T = \|T\|_1$. Таким образом, $\operatorname{Tr} T$ есть непрерывный функционал в банаховом пространстве $\mathbf{S}_1$ и его норма равна единице. Далее,

$$\operatorname{Tr} T^* = \sum_l (T^* g_l, g_l) = \sum_l \overline{(T g_l, g_l)} = \overline{\operatorname{Tr} T}.$$

След произведения не зависит от порядка сомножителей.

Теорема 8. *Пусть* $T \in \mathbf{S}_\infty$, $R \in \mathbf{B}(H)$, $TR \in \mathbf{S}_1$, $RT \in \mathbf{S}_1$. *Тогда*

$$\operatorname{Tr} TR = \operatorname{Tr} RT. \tag{11}$$

○ В качестве базиса возьмем систему $\{\psi_l\}$ из (1.3), дополненную каким-либо ортонормированным базисом в $N(T^*)$. Тогда

$$\operatorname{Tr} TR = \sum_l (TR\psi_l, \psi_l) = \sum_l (R\psi_l, T^*\psi_l) = \sum_l s_l(T)(R\psi_l, \varphi_l). \tag{12}$$

Здесь мы использовали (1.6). Аналогично по системе $\{\varphi_l\}$
$\operatorname{Tr} RT = \sum_l (RT\varphi_l, \varphi_l) = \sum_l s_l(T)(\psi_l, R^*\varphi_l) = \sum_l s_l(T)(R\psi_l, \varphi_l)$ ●

Следствие 9. *Функционал* (10) *есть унитарный инвариант*:

$$\operatorname{Tr} U^*TU = \operatorname{Tr} UU^*T = \operatorname{Tr} T, \text{ коль скоро } UU^* = I.$$

Глубоким и в какой-то мере неожиданным фактом является следующее равенство (теорема Лидского):

$$\operatorname{Tr} T = \sum_k \lambda_k(T) \quad (T \in \mathbf{S}_1). \tag{13}$$

Здесь $\lambda_k(T)$ — собственные значения T, и ряд справа абсолютно сходится. Равенство (13) означает, что матричный след оператора совпадает со спектральным следом. В конечномерном случае этот факт хорошо известен. Если $\dim H = \infty$, то сложность вопроса проявляется уже в том, что возможны ядерные операторы, вообще не имеющие собственных значений (вольтерровы операторы). Для таких операторов (13) понимается в том смысле, что $\operatorname{Tr} T = 0$. Доказательство теоремы Лидского читатель найдет в книге [6].

4. Найдем общий вид линейного непрерывного функционала в банаховых пространствах $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_\infty$. Начнем со следующей леммы.

Лемма 10. *Пусть* $T \in \mathbf{B}(H)$ *и пусть*

$$\sup_{Q \in \mathbf{K}} \frac{|\operatorname{Tr} QT|}{\|Q\|} \overset{\text{def}}{=} a < \infty. \tag{14}$$

Тогда $T \in \mathbf{S}_1$ *и* $\|T\|_1 = a$.

○ Воспользуемся представлением (1.1). Пусть $\{g_l\}$ — какой-либо ортонормированный базис в $\overline{R(M)}$ и пусть $Q = \sum_{l \leqslant r} (\cdot, Wg_l) g_l$. Тогда $QW = \sum_{l \leqslant r} (\cdot, g_l) g_l$ — проектор на подпространство $\bigvee_{l \leqslant r} g_l$. В соответствии с (12) получаем, что

$$\operatorname{Tr} QT = \operatorname{Tr} QWM = \sum_{l \leqslant r} (Mg_l, g_l) \leqslant a\|Q\|_1 = a.$$

Теперь из теоремы 2 следует, что $M \in \mathbf{S}_1$ и $\|M\|_1 \leqslant a$. Остается заметить, что $\|T\|_1 = \|M\|_1$ и $a \leqslant \|T\|_1$ в силу оценки

$$|\operatorname{Tr} QT| \leqslant \|QT\|_1 \leqslant \|Q\| \cdot \|T\|_1 \quad \bullet \tag{15}$$

Теорема 11. *а) Всякий линейный непрерывный функционал в* $\mathbf{S}_1$ *представим единственным образом в виде*

$$l(T) = \operatorname{Tr} QT, \tag{16}$$

где $Q \in \mathbf{B}(H)$. *При этом* $\|l\| = \|Q\|$.

б) Всякий линейный непрерывный функционал в $\mathbf{S}_\infty$ *представим единственным образом в виде* (16), *где* $Q \in \mathbf{S}_1$. *При этом* $\|l\| = \|Q\|_1$.

○ а) Для любых $f, g \in H$ положим $T_{f,g} = (\cdot, g) f$ и $\Omega(f, g) = l(T_{f,g})$. Билинейная форма Ω непрерывна: $|\Omega(f, g)| \leqslant \|l\| \cdot \|T_{f,g}\| = \|l\| \cdot \|f\| \cdot \|g\|$. Следовательно, $\Omega(f, g) = (Qf, g)$, где $Q \in \mathbf{B}(H)$ и $\|Q\| \leqslant \|l\|$. Поскольку $\operatorname{Tr} QT_{f,g} = (Qf, g)$, этим установлено представление (16) для $T = T_{f,g}$. По линейности (16) распространяется на плотное в $\mathbf{S}_1$ множество операторов $T \in \mathbf{K}$, а затем по непрерывности на любые $T \in \mathbf{S}_1$. Оценка (15) показывает, что $\|l\| = \|Q\|$. Представление единственно, поскольку оператор Q определяется своей билинейной формой однозначно.

б) Оператор Q вводится так же, как в п. а). При этом надо учесть, что $\|T_{f,g}\|_1 = \|T_{f,g}\| = \|f\| \cdot \|g\|$. После того как представление (16) получено для $T \in \mathbf{K}$, следует воспользоваться леммой 10 (поменяв ролями Q и T). Тогда $Q \in \mathbf{S}_1$ и $\|Q\|_1 \leqslant \|l\|$. Окончание доказательства такое же, как в п. а) ●

Разумеется, справедлив аналог теоремы 11 и для антилинейных функционалов над $\mathbf{S}_1$ и над $\mathbf{S}_\infty$. Единственное отличие в том, что (16) заменится представлением

$$l(T) = \operatorname{Tr} QT^*. \tag{17}$$

Из (17) следует, что *сопряженным к пространству* $\mathbf{S}_\infty$ *является* $\mathbf{S}_1$, *а сопряженным к* $\mathbf{S}_1$ *является* $\mathbf{B}(H)$. *При этом пространства* $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_\infty$, $\mathbf{B}(H)$ *нерефлексивны.*

§ 3. Операторы Гильберта — Шмидта

1. Другой важный класс вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве образуют так называемые *операторы Гильберта — Шмидта.* Этот класс (его обозначают через $\mathbf{S}_2$) можно выделить в $\mathbf{B}(H)$ условием сходимости ряда (2.3) для какого-либо ортонормированного базиса. Положение проясняет следующая теорема.

Теорема 1. *Если ряд* (2.3) *сходится для какого-либо ортонормированного базиса, то он сходится для любого другого такого базиса и его сумма*

$$\|T\|_2^2 \overset{\text{def}}{=} \sum_l \|Tg_l\|^2 \tag{1}$$

от выбора базиса не зависит. Имеет место вложение $\mathbf{S}_2 \subset \mathbf{S}_\infty$. Оператор $T \in \mathbf{S}_\infty$ входит в $\mathbf{S}_2$ тогда и только тогда, когда последовательность его s-чисел квадратично-суммируема. При этом

$$\|T\|_2^2 = \sum_k s_k^2(T). \tag{2}$$

○ Для ортонормированных базисов $\{g_l\}$, $\{h_m\}$ имеем

$$\sum_l \|Tg_l\|^2 = \sum_l \sum_m |(Tg_l, h_m)|^2 = \\ = \sum_m \sum_l |(g_l, T^*h_m)|^2 = \sum_m \|T^*h_m\|^2. \tag{3}$$

Равенство (3) показывает, что сумма (1) не зависит от выбора базиса $\{g_l\}$ (как, впрочем, и от базиса $\{h_m\}$). Вложение $\mathbf{S}_2 \subset \mathbf{S}_\infty$ обеспечивается леммой 2.1. Для $T \in \mathbf{S}_\infty$ рассмотрим ряд (1.3). Положим в (1) $g_l = \varphi_l$, дополнив эту последовательность каким-либо ортонормированным базисом в $N(T)$. Тогда из (1.6) получим

$$\sum_l \|Tg_l\|^2 = \sum_l s_l^2(T) \|\psi_l\|^2 = \sum_l s_l^2(T) \quad \bullet$$

Из (2) следуют вложения $\mathbf{S}_1 \subset \mathbf{S}_2 \subset \mathbf{S}_\infty$, сопровождаемые неравенствами $\|T\| \leqslant \|T\|_2 \leqslant \|T\|_1$. Ясно также, что $\|T\|_2 = \|T^*\|_2$ и для $T \in \mathbf{S}_2$, R_1, $R_2 \in \mathbf{B}(H)$

$$\|R_1TR_2\|_2 \leqslant \|R_1\| \cdot \|R_2\| \cdot \|T\|_2. \tag{4}$$

Пусть теперь $T = T_1 + T_2$ и T_1, $T_2 \in \mathbf{S}_2$. Покажем, что $T \in \mathbf{S}_2$:

$$\sum_l \|Tg_l\|^2 \leqslant \sum_l (\|T_1g_l\| + \|T_2g_l\|)^2 \leqslant \\ \leqslant \left[\left(\sum_l \|T_1g_l\|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_l \|T_2g_l\|^2\right)^{1/2}\right]^2 = (\|T_1\|_2 + \|T_2\|_2)^2.$$

Таким образом, $T \in \mathbf{S}_2$ и

$$\|T_1 + T_2\|_2 \leqslant \|T_1\|_2 + \|T_2\|_2. \tag{5}$$

Теорема 2. *Класс $\mathbf{S}_2$ представляет собой банахово пространство относительно нормы $\|\cdot\|_2$.*

○ Коль скоро (5) доказано, ясно, что $\mathbf{S}_2$ — линейное множество в $\mathbf{B}(H)$ и функционал $\|\cdot\|_2$ обладает свойствами нормы. Полнота пространства $\mathbf{S}_2$ доказывается по образцу доказательства полноты пространства $\mathbf{S}_1$ (ср. с выводом (2.9) из (2.8)) ●

Легко видеть, что $\mathbf{K}$ *плотно в* $\mathbf{S}_2$ и что $\mathbf{S}_2$ *сепарабельно*. Соответствующие рассуждения — те же, что и для класса $\mathbf{S}_1$.

2. Остановимся подробнее на взаимоотношении классов $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$.

Теорема 3. *Если T_1, $T_2 \in \mathbf{S}_2$, то $T = T_1T_2 \in \mathbf{S}_1$ и*

$$\|T\|_1 \leqslant \|T_1\|_2 \|T_2\|_2. \tag{6}$$

○ Для любых ортонормированных базисов $\{g_l\}$, $\{h_l\}$ имеем

$$\sum_l |(Tg_l,\ h_l)| = \sum_l |(T_1 g_l,\ T_2^* h_l)| \leqslant \sum_l \|T_1 g_l\| \cdot \|T_2^* h_l\| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_l \|T_1 g_l\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_l \|T_2^* h_l\|^2\right)^{1/2} = \|T_1\|_2 \|T_2\|_2.$$

Теперь $T \in \mathbf{S}_1$ в силу теоремы 2.4, а оценка (6) следует из теоремы 2.3 ●

Замечание. Если $T \in \mathbf{S}_1$, то всегда найдутся $T_1,\ T_2 \in \mathbf{S}_2$, такие, что $T = T_1 T_2$. Например, можно, основываясь на (1.1), положить $T_1 = WM^{1/2}$, $T_2 = M^{1/2}$. При этом надо учесть, что $M = |T| \in \mathbf{S}_1$ при $T \in \mathbf{S}_1$, а тогда $M^{1/2} \in \mathbf{S}_2$.

Класс $\mathbf{S}_2$ можно естественным образом превратить в гильбертово пространство. Для пары операторов $T_1,\ T_2 \in \mathbf{S}_2$ положим

$$\langle T_1,\ T_2\rangle \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Tr} T_1 T_2^* = \operatorname{Tr} T_2^* T_1. \tag{7}$$

Из свойств следа непосредственно вытекает, что (7) — билинейный функционал. При этом

$$\langle T,\ T\rangle = \operatorname{Tr} T^*T = \sum_k \lambda_k (T^*T) = \sum_k s_k^2(T) = \|T\|_2^2,$$

т. е. (7) есть скалярное произведение в $\mathbf{S}_2$, согласованное с нормой $\|\cdot\|_2$. Отсюда и из теоремы 2 следует, что *класс $\mathbf{S}_2$ есть (сепарабельное) гильбертово пространство относительно скалярного произведения* (7).

Отметим следующий простой, но полезный факт.

Теорема 4. *Пусть $\{g_k\}$, $\{h_l\}$ — какие-либо ортонормированные базисы в H. Тогда система одномерных операторов $T_{kl} = (\cdot,\ g_k) h_l$ образует ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_2(H)$.*

○ Очевидно $\|T_{kl}\|_2 = 1$. Для любого $T \in \mathbf{S}_2$

$$\langle T,\ T_{kl}\rangle = (Tg_k,\ h_l). \tag{8}$$

При $T = T_{mn}$ из (8) следует ортогональность системы $\{T_{kl}\}$ в $\mathbf{S}_2$. Соотношение (3) содержит в себе уравнение замкнутости для этой системы ●

Соотношение (3) можно интерпретировать также следующим образом. Пусть оператор $T \in \mathbf{B}(H)$ представлен матрицей в некотором базисе $\{g_k\}$. Тогда $T \in \mathbf{S}_2$ в том и только том случае, если элементы этой матрицы образуют квадратично-суммируемую последовательность чисел Действительно, элементы этой матрицы суть $(Tg_k,\ g_l)$, и требуемое прямо следует из (3). В п. 3 мы получим «непрерывный» аналог этого факта, относящийся к интегральным операторам.

3. Охарактеризуем класс $\mathbf{S}_2$ для гильбертова пространства $H_\mu = L_2(Y,\ \mu)$. Положим $Z = Y \times Y$, $\nu = \mu \times \mu$ и $H_\nu = L_2(Z,\ \nu)$. Функ-

ция $C(x, y)$ $(x, y \in Y)$ называется *ядром Гильберта — Шмидта в* H_μ, если она определена ν-п. в. на Z, ν-измерима и $\int_Z |C(x, y)|^2 \times d\mu(x)\, d\mu(y) < \infty$. Иначе говоря, ядра Гильберта — Шмидта — это функции из H_ν. Каждому такому ядру сопоставим интегральный оператор $\hat{C}$ в пространстве H_μ:

$$(\hat{C}u)(x) = \int_Y C(x, y)\, u(y)\, d\mu(y). \tag{9}$$

Интеграл (9) конечен для μ-п. в. $x \in Y$ в силу неравенства

$$|(\hat{C}u)(x)|^2 \leqslant \int_Y |C(x, y)|^2\, d\mu(y) \|u\|^2. \tag{10}$$

Интегрируя оценку (10), находим, что оператор $\hat{C}$ ограничен в H_μ. Приведем еще выражение для его билинейной формы:

$$(\hat{C}u, v) = \int_Z C(x, y)\, u(y)\, \overline{v(x)}\, d\mu(x)\, d\mu(y). \tag{11}$$

Покажем, что отображение J, сопоставляющее ядру $C \in H_\nu$ оператор $\hat{C}$, есть изометрия пространства H_ν на $\mathbf{S}_2(H_\mu)$. Пусть $\{u_k\}$ — какой-либо ортонормированный базис в H_μ. Функции $\{w_{kl}\}$, $w_{kl}(x, y) = \overline{u_k(y)}\, u_l(x)$, образуют ортонормированный базис в пространстве H_ν (см. § 2.3, п. 6), а операторы $\hat{w}_{kl} = (\cdot, u_k)\, u_l$ — в пространстве $\mathbf{S}_2(H_\mu)$ (см. теорему 4). Ясно, что $Jw_{kl} = \hat{w}_{kl}$. Из этого прямо вытекает, что J унитарно отображает H_ν на $\mathbf{S}_2(H_\mu)$. Мы доказали следующую теорему *).

Теорема 5. *Пусть $C \in H_\nu$. Тогда соответствующий интегральный оператор* (9) *принадлежит классу* $\mathbf{S}_2$ *и*

$$\|\hat{C}\|_2 = \|C\|_\nu = \left(\int_Z |C(x, y)|^2\, d\mu(x)\, d\mu(y)\right)^{1/2}.$$

Обратно, если $\hat{C} \in \mathbf{S}_2(H_\mu)$, то найдется единственное ядро Гильберта — Шмидта $C \in H_\nu$, такое, что $\hat{C}$ — оператор (9)

Теорема 5 допускает различные обобщения. Например, можно дать подобную характеристику класса $\mathbf{S}_2$ для пространства H, разложенного в прямой интеграл. Мы ограничимся случаем пространств $H_{\mu, F} = L_2(Y, \mu; F)$.

Обозначим $G = \mathbf{S}_2(F)$ и $H_{\nu, G} = L_2(Z, \nu; G)$. Оператор-функции $C \in H_{\nu, G}$ назовем *операторнозначными ядрами Гильберта — Шмидта в* $H_{\mu, F}$. Оператор $\hat{C} = JC$ формально по-прежнему опре-

---

*) Ниже $\|\cdot\|_\nu$ — норма в H_ν.

деляется равенством (9). Теперь, однако, $C(x, y)u(y)$ означает применение оператора $C(x, y)\in\mathbf{S}_2(F)$ к элементу $u(y)\in F$. Равенство (11) заменяется равенством

$$(\hat{C}u, v)=\int_Z (C(x, y)u(y), v(x))_F d\nu(x, y).$$

Теорема 6. *Пусть $C\in H_{\nu,G}$. Тогда интегральный оператор $\hat{C}=JC$ вида* (9) *принадлежит классу* $\mathbf{S}_2$ *и*

$$\|\hat{C}\|_2=\|C\|_{\nu,F}=\left(\int_Z\|C(x, y)\|^2_{\mathbf{S}_2(F)} d\mu(x)d\mu(y)\right)^{1/2}.$$

Обратно, если $\hat{C}\in\mathbf{S}_2(H_{\mu,F})$, то найдется единственное абстрактное ядро Гильберта — Шмидта $C\in H_{\nu,G}$, такое, что $\hat{C}=JC$.

○ Пусть функции $\{u_k\}$ и $\{w_{kl}\}$ — те же, что при доказательстве теоремы 5. Пусть $\{f_l\}$ — ортонормированный базис в F и $\{g_{ij}\}$, $g_{ij}=(\cdot, f_i)f_j$, — соответствующий базис в G. Рассмотрим операторы $\hat{B}_{ijkl}$ в пространстве $H_{\mu,F}$, действующие по формуле

$$(\hat{B}_{ijkl}u)(x)=\int_Y (u(y), f_i)_F\overline{u_k(y)}\,d\mu(y)\,u_l(x)f_j,$$

и операторнозначные функции $B_{ijkl}(x, y)=w_{kl}(x, y)g_{ij}$. Тогда в силу теоремы 2.3.7 $\{B_{ijkl}\}$ — базис в $H_{\nu,G}$, $\{\hat{B}_{ijkl}\}$ — базис в $\mathbf{S}_2(H_{\mu,F})$ и $\hat{B}_{ijkl}=JB_{ijkl}$. Остальное не отличается от доказательства теоремы 5 ●

§ 4. Классы $\mathbf{S}_p$

1. Пространства $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ естественно включаются в непрерывную «шкалу» пространств $\mathbf{S}_p$, $1\leqslant p<\infty$. Класс $\mathbf{S}_p$ выделяется в $\mathbf{S}_\infty$ условием

$$\|T\|_p\overset{\text{def}}{=}\left[\sum\nolimits_k s_k^p(T)\right]^{1/p}<\infty \qquad (1\leqslant p<\infty). \tag{1}$$

Пространство $\mathbf{S}_\infty$ является для этой шкалы «крайним» (но не частным) случаем. Сразу же отметим вложения $\mathbf{S}_1\subset\mathbf{S}_{p_1}\subset\mathbf{S}_{p_2}\subset\mathbf{S}_\infty$, $1<p_1<p_2<\infty$, сопровождаемые оценками

$$\|T\|\leqslant\|T\|_{p_2}\leqslant\|T\|_{p_1}\leqslant\|T\|_1. \tag{2}$$

Для одномерных операторов все величины (2) совпадают.

Если $T\in\mathbf{S}_p$, то $T^*\in\mathbf{S}_p$ и $\|T\|_p=\|T^*\|_p$. Обобщаются и оценки (2.2), (3.4): если $T\in\mathbf{S}_p$, R_1, $R_2\in\mathbf{B}(H)$, то $R_1TR_2\in\mathbf{S}_p$ и $\|R_1TR_2\|_p\leqslant\|R_1\|\cdot\|R_2\|\cdot\|T\|_p$. Все это непосредственно вытекает из (1.10), (1.12).

Классы $\mathbf{S}_p$ линейны: если T_1, $T_2\in\mathbf{S}_p$, то $T=T_1+T_2\in\mathbf{S}_p$. Действительно, $T\in\mathbf{S}_\infty$ и в силу (1.14)

$$s_{2n}(T)\leqslant s_{2n-1}(T)\leqslant s_n(T_1)+s_n(T_2),$$

откуда $T \in \mathbf{S}_p$. Сложнее доказывается для функционала (1) неравенство треугольника. Мы получим его в п. 2. При этом будем опираться на следующее свойство s-чисел, имеющее и самостоятельный интерес.

Теорема 1. *Пусть T, $Q \in \mathbf{S}_\infty$. Справедливы неравенства*

$$\sum\nolimits_{k \leqslant r} s_k(TQ) \leqslant \sum\nolimits_{k \leqslant r} s_k(T)\, s_k(Q), \qquad r = 1,\ 2,\ \ldots \tag{3}$$

Доказательству теоремы 1 посвящен п.4.

2. Аналогия между классами $\mathbf{S}_p$ и пространствами числовых последовательностей l_p проявляется, в частности, в следующем «неравенстве Гельдера».

Теорема 2. *Пусть $T \in \mathbf{S}_p$, $p > 1$, и $Q \in \mathbf{S}_q$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Тогда $TQ \in \mathbf{S}_1$ и имеет место оценка*

$$\| TQ \|_1 \leqslant \| T \|_p \| Q \|_q \qquad (p > 1,\ p^{-1} + q^{-1} = 1). \tag{4}$$

○ Достаточно применить неравенство Гельдера для сумм в правой части (3) и затем перейти к пределу при $r \to \infty$ ●

Из (4) и оценки $|\operatorname{Tr} T| \leqslant \| T \|_1$ следует, что

$$|\operatorname{Tr} QT| \leqslant \| T \|_p \| Q \|_q \qquad (p > 1,\ p^{-1} + q^{-1} = 1). \tag{5}$$

При заданном $T \in \mathbf{S}_p$ в (5) достигается равенство при надлежащем выборе Q. Именно запишем T в виде (1.1) и положим $Q^* = WM^{p-1}$. Легко видеть, что тогда $Q \in \mathbf{S}_q$ и в (5) осуществляется равенство. Таким образом,

$$\| T \|_p = \sup_{Q \in \mathbf{S}_q} \frac{|\operatorname{Tr} QT|}{\| Q \|_q} = \sup_{\| Q \|_q = 1} |\operatorname{Tr} QT| \qquad (p > 1). \tag{6}$$

Теперь мы в состоянии доказать неравенство треугольника. Если $T_1 \in \mathbf{S}_p$, $T_2 \in \mathbf{S}_p$, то (мы уже знаем, что $T_1 + T_2 \in \mathbf{S}_p$)

$$\| T_1 + T_2 \|_p \leqslant \| T_1 \|_p + \| T_2 \|_p. \tag{7}$$

Неравенство (7) немедленно следует из (6) и очевидного неравенства

$$|\operatorname{Tr}(T_1 + T_2) Q| \leqslant |\operatorname{Tr} T_1 Q| + |\operatorname{Tr} T_2 Q|.$$

По существу, мы установили, что функционал (1) на $\mathbf{S}_p$ обладает всеми свойствами нормы. Доказательство полноты пространства $\mathbf{S}_p$ повторяет рассуждение при $p = 1$ (см. теорему 2.6). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Класс $\mathbf{S}_p$, $1 \leqslant p < \infty$, представляет собой банахово пространство относительно нормы* (1).

Как и при $p = 1$, 2, устанавливается, что *класс* $\mathbf{K}$ *плотен в* $\mathbf{S}_p$ и что *пространство* $\mathbf{S}_p$ *сепарабельно*.

3. Установим общую форму линейного непрерывного функционала в $\mathbf{S}_p$ при $p > 1$. Основу составляет аналог леммы 2.10,

в котором соотношение вида (6) будет получено без апрнорного предположения $T \in \mathbf{S}_p$.

Лемма 4. *Пусть* $T \in \mathbf{B}(H)$ *и*

$$a \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{Q \in \mathbf{K}} \frac{|\mathrm{Tr} QT|}{\|Q\|_q} < \infty \qquad (q > 1). \tag{8}$$

Тогда $T \in \mathbf{S}_p$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ *и* $\|T\|_p = a$.

○ Представим T в виде (1.1). Пусть $\{g_k\}$ — ортонормированный базис в $\overline{R(M)}$ и $Q_r = \sum_{k \leqslant r} \sigma_k(\cdot, \; Wg_k) g_k$, $\sigma_k > 0$. Тогда $\mathrm{Tr} Q_r T = \mathrm{Tr} Q_r WM = \sum_{k \leqslant r} \sigma_k (Mg_k, \; g_k)$ и в силу (8)

$$\sum_{k \leqslant r} \sigma_k (Mg_k, \; g_k) \leqslant a \|Q_r\|_q = a \Big[\sum_{k \leqslant r} \sigma_k^q\Big]^{1/q}. \tag{9}$$

Покажем сначала, что $T \in \mathbf{S}_\infty$. В противном случае для оператора M найдется промежуток $[\alpha, \; \beta]$, $\alpha > 0$, такой, что $\dim E_M[\alpha, \; \beta] H = \infty$. Если $g_k \in E_M[\alpha, \; \beta] H$, то $\sum_{k \leqslant r} (Mg_k, \; g_k) \geqslant \alpha r$, что противоречит (9): при $\sigma_k = 1$ было бы $\alpha r \leqslant a r^{1/q}$ для сколь угодно больших r. Итак, $T \in \mathbf{S}_\infty$. Положим в (9) $g_k = \varphi_k$, где φ_k — собственные элементы для M. Тогда (9) дает

$$\sum_{k \leqslant r} \sigma_k s_k(T) \leqslant a \Big[\sum_{k \leqslant r} \sigma_k^q\Big]^{1/q}.$$

При $\sigma_k = s_k^{p-1}$ и $r \to \infty$ это означает, что $T \in \mathbf{S}_p$ и $\|T\|_p \leqslant a$. Неравенство $a \leqslant \|T\|_p$ следует из (5) ●

Теорема 5. *Всякий линейный непрерывный функционал в* $\mathbf{S}_p$, $1 < p < \infty$, *представим единственным образом в виде* (2.16), *где* $Q \in \mathbf{S}_q$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. *При этом* $\|l\| = \|Q\|_q$.

○ Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 2.11, п. б). Роль леммы 2.10 при этом переходит к лемме 4 ●

Антилинейные функционалы над $\mathbf{S}_p$ подобным же образом представляются в виде (2.17). Тем самым при $p > 1$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ *пространства* $\mathbf{S}_p$, $\mathbf{S}_q$ *являются взаимно сопряженными*. При этом из (2.17) следует, что *при* $p > 1$ *пространства* $\mathbf{S}_p$ *рефлексивны*.

4. Доказательству теоремы 1 предпошлем следующую лемму.

Лемма 6. *Пусть матрица* $V = \{v_{kl}\}$, $1 \leqslant k, \; l \leqslant r$, *такова, что*

$$\sum_{k \leqslant r} |v_{kl}| \leqslant 1 \qquad (\forall l); \quad \sum_{l \leqslant r} |v_{kl}| \leqslant 1 \qquad (\forall k). \tag{10}$$

Пусть $x = \{x_k\}$, $y = \{y_k\}$, $1 \leqslant k \leqslant r$, *причем* $x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_r \geqslant 0$, $y_1 \geqslant \ldots \geqslant y_r \geqslant 0$. *Тогда*

$$|(Vx, \; y)| \leqslant (x, \; y). \tag{11}$$

○ Положим $f_k = (1, \; \ldots, \; 1, \; 0, \; \ldots, \; 0)$ (k еднниц). Из (10) получаем

$$|(Vf_k, \; f_l)| = \Big|\sum_{i \leqslant k, \; j \leqslant l} v_{ij}\Big| \leqslant \min(k, \; l) = (f_k, \; f_l) \qquad (1 \leqslant k, \; l \leqslant r). \tag{12}$$

Условие на векторы x, y означает, что $x=\sum_{k\leqslant r}\alpha_k f_k$, $y=\sum_{k\leqslant r}\beta_k f_k$, где все α_k, β_k неотрицательны. Учитывая (12), находим

$$|(Vx,\ y)|=\left|\sum_{k,\,l\leqslant r}\alpha_k\beta_l(Vf_k,\ f_l)\right|\leqslant\sum_{k,\,l\leqslant r}\alpha_k\beta_l(f_k,\ f_l)=(x,\ y)\ \bullet$$

Доказательство теоремы 1. Пусть WM — полярное разложение для оператора TQ и P — проектор на линейную оболочку первых r собственных элементов оператора M. Тогда $M=W^*TQ$ и

$$\sum_{k\leqslant r}s_k(TQ)=\sum_{k\leqslant r}s_k(M)=\mathrm{Tr}MP=\mathrm{Tr}PW^*TQP=\mathrm{Tr}\tilde{T}\tilde{Q},\qquad(13)$$

где $\tilde{T}=PW^*T$, $\tilde{Q}=QP$ и $\mathrm{rang}\tilde{T}\leqslant r$, $\mathrm{rang}\tilde{Q}\leqslant r$. Пусть

$$\tilde{T}=\sum_{k\leqslant r}\tilde{s}_k(\cdot,\ \varphi_k)\psi_k,\quad \tilde{Q}=\sum_{k\leqslant r}\tilde{\sigma}_k(\cdot,\ \omega_k)\theta_k,$$

— их канонические разложения. Из (13) в соответствии с (2.12) получаем

$$\sum_{n\leqslant r}s_n(TQ)=\sum_{k\leqslant r}\tilde{s}_k(\tilde{Q}\psi_k,\ \varphi_k)=\sum_{k,\,l\leqslant r}\tilde{s}_k\tilde{\sigma}_l(\psi_k,\ \omega_l)(\theta_l,\ \varphi_k)\overset{\mathrm{def}}{=}(Vx,\ y),$$

где $V=\{v_{kl}\}$; $v_{kl}=(\psi_k,\ \omega_l)(\theta_l,\ \varphi_k)$; $x=\{\tilde{s}_k\{$, $y=\{\tilde{\sigma}_k\}$; $1\leqslant k,\ l\leqslant r$. Матрица V удовлетворяет условиям (10): для любых $l\leqslant r$

$$\sum_{k\leqslant r}|v_{kl}|\leqslant\left(\sum_k|(\psi_k,\ \omega_l)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_k|(\theta_l,\ \ \varphi_k)|^2\right)^{1/2}\leqslant\|\omega_l\|\|\theta_l\|=1$$

и аналогично для сумм по l. Теперь из (11) находим

$$\sum_{k\leqslant r}s_k(TQ)=(Vx,\ y)\leqslant(x,\ y)=\sum_{k\leqslant r}\tilde{s}_k\tilde{\sigma}_k,$$

и остается заметить, что в силу (1.12) $\tilde{s}_k\leqslant s_k(T)$, $\tilde{\sigma}_k\leqslant s_k(Q)$, $1\leqslant k\leqslant r$ $\bullet$

ГЛАВА 12

ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

§ 1. Постановка задачи. Вспомогательные сведения

1. В квантовой теории важное значение имеют так называемые *представления перестановочных соотношений*. Речь идет о нахождении (с точностью до унитарной эквивалентности) всех решений операторных уравнений специального вида, содержащих коммутаторы *). Коммутатором двух операторов T_1, T_2 в H называют выражение

$$[T_1, T_2] = T_1T_2 - T_2T_1.$$

Мы ограничиваемся случаем конечного числа *m степеней свободы*. Перестановочными соотношениями называют уравнения

$$[T_r, T_s^*] = \delta_r^s I, \quad r, s = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

$$[T_r, T_s] = 0, \quad [T_r^*, T_s^*] = 0, \quad r, s = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

а также уравнения с самосопряженными операторами

$$[A_r, B_s] = -i\delta_r^s I, \quad A_r^* = A_r, \quad B_r^* = B_r, \quad r, s = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

$$[A_r, A_s] = 0, \quad [B_r, B_s] = 0, \quad r, s = 1, \ldots, m. \tag{4}$$

Уравнения (1), (2) называют *бозевскими перестановочными соотношениями*. Операторы T_r^*, T_r имеют смысл *операторов рождения* и *уничтожения*. Уравнения (3), (4) — *канонические перестановочные соотношения* квантовой механики. Операторы A_r, B_r отвечают квантовым каноническим переменным.

Как мы увидим в дальнейшем, нетривиальные решення уравнений (1), (2) или (3), (4) нельзя построить с помощью непрерывных операторов. В случае неограниченных операторов требуются дополнительные указания об их областях определения и о точном смысле самих уравнений. Эти вопросы не столь просты и требуют довольно кропотливого предварительного исследования.

---

*) Или антикоммутаторы $\{T_1, T_2\} = T_1T_2 + T_2T_1$. Случай антикоммутаторов мы обсуждать не будем.

На формальном уровне задачи (1), (2) и (3), (4) легко сводятся друг к другу. Достаточно положить

$$\sqrt{2}T_r = B_r + iA_r, \quad \sqrt{2}T_r^* = B_r - iA_r, \quad r = 1, \ldots, m. \tag{5}$$

Нетрудно также указать операторы, являющиеся формальными решениями задач (1), (2) или (3), (4). Например, для системы (3), (4) такое решение дают в $H = L_2(\mathbf{R}^m)$ операторы дифференцирования и умножения на координаты:

$$(A_r u)(x) = -i\partial u/\partial x_r, \quad (B_r u)(x) = x_r u(x), \quad r = 1, \ldots, m. \tag{6}$$

Точная постановка задачи о перестановочных соотношениях допускает различные варианты, причем не все они эквивалентны *). Однако при достаточно естественном (и удовлетворительном с точки зрения квантовой механики) понимании уравнений (3), (4) оказывается, что операторы (6) являются их решениями. Основной математический вопрос состоит в доказательстве (при дополнительном условии неприводимости) единственности этого решения с точностью до унитарной эквивалентности. Определенных забот требует также точная реализация формул (5), связывающих решения задач (1), (2) и (3), (4). Заметим, что решения уравнений (1), (2) или (3), (4) принято называть *представлениями перестановочных соотношений*.

2. При анализе канонических соотношений (3), (4) будем исходить из понятия (C_0)-системы.

Условимся говорить, что симметричные операторы a_r, b_r, $r = 1, \ldots, m$, образуют (C_0)-*систему*, если:

1) все операторы a_r, b_r имеют одну и ту же область определения D, причем к элементам $x \in D$ применим каждый из операторов $a_r a_s$, $a_r b_s$, $b_s a_r$, $b_r b_s$, $r, s = 1, \ldots, m$;

2) имеют место соотношения ($\forall x \in D$; $r, s = 1, \ldots, m$)

$$\begin{gathered}(a_r b_s - b_r a_s)\,x = -i\delta_r^s x,\\ (a_r a_s - a_s a_r)\,x = (b_r b_s - b_s b_r)\,x = 0;\end{gathered} \tag{7}$$

3) симметричный оператор

$$Q = \sum\nolimits_1^m (a_s^2 + b_s^2), \quad D(Q) \overset{\text{def}}{=} D, \tag{8}$$

в существенном самосопряжен **).

В основу анализа бозевских перестановочных соотношений положим понятие (B_0)-системы.

Операторы t_r, t_r^+, $r = 1, \ldots, m$, с общей областью определения D будем называть (B_0)-*системой*, если они определяются

*) Указания на этот счет см. в [15, гл. VIII].

**) Смысл условия 3) обсуждается в § 2, п. 6.

равенствами

$$\sqrt{2}t_r = b_r + ia_r,\ \sqrt{2}t_r^+ = b_r - ia_r,\ r = 1, \ldots, m, \tag{9}$$

причем операторы a_r, b_r образуют (C_0)-систему.

Таким образом, (B_0)- и (C_0)-системы находятся во взаимно-однозначном соответствии по определеиию.

Отметим формулы, обратные к (9):

$$\sqrt{2}a_r = i(t_r^+ - t_r),\quad \sqrt{2}b_r = t_r^+ + t_r,\quad r = 1, \ldots, m, \tag{10}$$

а также соотношения, вытекающие из (7):

$$(t_r t_s^+ - t_s^+ t_r)x = \delta_r^s x,\quad x \in D;\quad r,\ s = 1, \ldots, m, \tag{11}$$

$$(t_r t_s - t_s t_r)x = (t_r^+ t_s^+ - t_s^+ t_r^+)x = 0,\quad x \in D;\quad r,\ s = 1, \ldots, m. \tag{12}$$

Из (9) и симметричности a_r, b_r следует, что

$$(t_r x,\ y) = (x,\ t_r^+ y),\quad \forall x,\ y \in D;\quad r = 1, \ldots, m, \tag{13}$$

а потому

$$t_r^+ \subset t_r^*,\quad t_r \subset (t_r^+)^*,\quad r = 1, \ldots, m. \tag{14}$$

Непосредственно проверяются следующие равенства ($x \in D$; $r = 1, \ldots, m$):

$$2\|t_r^+ x\|^2 = \|a_r x\|^2 + \|b_r x\|^2 + \|x\|^2, \tag{15}$$

$$2\|t_r x\|^2 = \|a_r x\|^2 + \|b_r x\|^2 - \|x\|^2, \tag{16}$$

$$\|t_r^+ x\|^2 = \|t_r x\|^2 + \|x\|^2, \tag{17}$$

$$Qx = 2\sum\nolimits_r t_r t_r^+ x - mx = 2\sum\nolimits_r t_r^+ t_r x + mx,\quad x \in D. \tag{18}$$

Лемма 1. *При x, $y \in D$, $r = 1, \ldots, m$ справедливы равенства*

$$(a_r y,\ Qx) - (Qy,\ a_r x) = 2i(b_r y,\ x), \tag{19}$$

$$(b_r y,\ Qx) - (Qy,\ b_r x) = -2i(a_r y,\ x), \tag{20}$$

$$(t_r^+ y,\ Qx) - (Qy,\ t_r x) = 2(y,\ t_r x). \tag{21}$$

○ Докажем (19). Подставим в левую часть сумму (8) и воспользуемся равенствами (7). При этом исчезают все члены, кроме содержащего b_r^2. Для него имеем

$$(a_r y,\ b_r^2 x) - (b_r^2 y,\ a_r x) = (b_r a_r y,\ b_r x) - (b_r y,\ b_r a_r x) =$$
$$= (a_r b_r y,\ b_r x) - (b_r y,\ a_r b_r x) + 2i(b_r y,\ x) = 2i(b_r y,\ x),$$

что и дает (19). Равенство (20) доказывается так же. Соотношение (21) прямо следует из (19) и (20) ●

3. Пусть операторы a_r, b_r, $r = 1, \ldots, m$, образуют (C_0)-систему. Положим $A_r = \overline{a_r}$, $B_r = \overline{b_r}$, т. е. перейдем к замыканиям операторов

(C_0)-системы. Операторы A_r, B_r, $r=1, \ldots, m$, будем называть (C)-системой (канонической системой). Мы увидим (см. теорему 2.1), что операторы (C)-системы самосопряжены. *По определению (C)-система является решением уравнений* (3), (4), *т. е. дает представление канонических перестановочных соотношений.*

Подобным же образом будем интерпретировать бозевские перестановочные соотношения. Из (14) следует, что операторы (B_0)-системы допускают замыкание. Положим $T_r = \bar{t}_r$, $T_r^+ = \overline{t_r^+}$, $r=1, \ldots, m$; ниже мы покажем (теорема 2.2), что $T_r^+ = T_r^*$. Систему операторов T_r, T_r^+, $r=1, \ldots, m$, будем называть (B)-системой (бозевской системой). *По определению примем, что решениями уравнений* (1), (2) *являются (B)-системы* (и только они). Будем называть (B)-систему и (C)-систему *соответствующими* друг другу, если породившие их (B_0)- и (C_0)-системы связаны соотношениями (9).

В § 3—5 приводится полное описание всех (B)- и (C)-систем. В § 2 исследуются свойства этих систем. При этом мы будем опираться на два утверждения технического характера, которые сейчас докажем.

4. **Лемма 2.** *Пусть оператор M в существенном самосопряжен и положительно определен. Пусть оператор S симметричен, $D(S)=D(M)$ и*

$$\|Sx\| \leqslant \alpha \|Mx\|, \quad \alpha > 0, \quad x \in D(M), \tag{22}$$

$$|(Sx, Mx) - (Mx, Sx)| \leqslant c(Mx, x), \quad c \geqslant 0, \quad x \in D(M). \tag{23}$$

Тогда S в существенном самосопряжен.

○ Достаточно показать, что оба множества $(S \pm i\gamma I) D(M)$ плотны в H при каком-либо $\gamma > 0$. Пусть $h \perp (S - i\gamma) x$, $\forall x \in D(M)$. Поскольку $R(\bar{M}) = H$, найдутся элементы $y_n \in D(M)$, такие, что $y_n \to y \in D(\bar{M})$, $My_n \to h$. Из (22) при этом получается, что $Sy_n \to \bar{S}y$. Так как $(Sy_n - i\gamma y_n, h) = 0$, то $\varepsilon_n \overset{\text{def}}{=} (Sy_n - i\gamma y_n, My_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\operatorname{Im}(Sy_n, My_n) = \gamma (y_n, My_n) + \operatorname{Im} \varepsilon_n \to \gamma (y, \bar{M}y). \tag{24}$$

С другой стороны, в силу (23)

$$|\operatorname{Im}(Sy_n, My_n)| \leqslant 2c(My_n, y_n) \to 2c(\bar{M}y, y). \tag{25}$$

При $\gamma > 2c$ соотношения (24) и (25) совместимы лишь при $y=0$. Но тогда $h=0$. Аналогично показывается, что $(S + i\gamma I) D(M)$ плотно в H ●

Заметим, что если в условиях леммы 2 $M = M^*$, то условие (22) можно не ставить. Оно выполнено автоматически в силу теоремы 3.4.1.

Пусть теперь σ, σ_+ — плотно определенные линейные операторы в H, такие, что

$$(\sigma x, y) = (x, \sigma_+ y), \qquad x \in D(\sigma), \; y \in D(\sigma_+). \tag{26}$$

Из (26) следует, что $\sigma_+ \subset \sigma^*$, $\sigma \subset \sigma_+^*$. Выясним, когда после замыкания эти включения переходят в равенства:

$$\bar{\sigma}_+ = \sigma^*, \quad \bar{\sigma} = \sigma_+^*. \tag{27}$$

С этой целью в пространстве $H \oplus H$ рассмотрим «блочный» оператор

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_+ \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \qquad D(\Sigma) = D(\sigma) \oplus D(\sigma_+).$$

Соотношение (26) очевидно равносильно тому, что оператор Σ симметричен. Непосредственно проверяется, что сопряженный оператор Σ^* имеет вид

$$\Sigma^* = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^* \\ \sigma_+^* & 0 \end{pmatrix}, \qquad D(\Sigma^*) = D(\sigma_+^*) \oplus D(\sigma^*).$$

Отсюда сразу следует, что *соотношения* (27) *равносильны соотношению* $\bar{\Sigma} = \Sigma^*$, *т. е. существенной самосопряженности оператора* Σ. Это замечание позволяет установить следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть оператор M в существенном самосопряжен и положительно определен. Пусть σ, σ_+ — линейные операторы, $D(\sigma) = D(\sigma_+) = D(M)$ и выполнено* (26). *Тогда соотношения* (27) *следуют из оценок*

$$\|\sigma x\|^2 + \|\sigma_+ x\|^2 \leqslant \alpha_1 \|Mx\|^2, \qquad \alpha_1 > 0,\ x \in D(M), \tag{28}$$

$$|(\sigma_+ y,\ Mx) - (My,\ \sigma x)| \leqslant$$
$$\leqslant c_1 [(Mx,\ x) + (My,\ y)], \qquad c_1 > 0,\ x,\ y \in D(M). \tag{29}$$

○ Применим лемму 2 к действующим в $H \oplus H$ операторам $M \oplus M$ и Σ, определенным на $D(M) \oplus D(M)$. Оценка (28) соответствует условию (22) для этих операторов, неравенство (29) обеспечивает оценку (23). Поэтому оператор Σ в существенном самосопряжен ●

§ 2. Свойства (B)-систем и (C)-систем

1. Начнем со следующих двух теорем.

Теорема 1. *Операторы* (C)-*системы — самосопряженные.*

○ Надлежит проверить, что операторы соответствующей (C_0)-системы — в существенном самосопряженные. Проверим условия леммы 1.2, полагая $M = Q$ и $S = a_r$ (или $S = b_r$). Из (1.18) следует, что $(Qx,\ x) \geqslant m(x,\ x) \geqslant (x,\ x)$, $x \in D$. Далее, для $x \in D$ имеем

$$\|a_r x\|^2 = (a_r^2 x,\ x) \leqslant (Qx,\ x) \leqslant \|Qx\|\ \|x\| \leqslant \|Qx\|^2, \tag{1}$$

что отвечает оценке (1.22). В соответствии с (1.19)

$$|(a_r x,\ Qx)-(Qx,\ a_r x)|^2=4\,|(b_r x,\ x)|^2\leqslant$$
$$\leqslant 4\|b_r x\|^2\|x\|^2\leqslant 4\,(Qx,\ x)\|x\|^2\leqslant 4\,(Qx,\ x)^2,$$

т. е. выполнено (1.23). Таким образом, оператор a_r — в существенном самосопряженный. Аналогично рассматривается оператор b_r. При этом вместо (1.19) используется (1.20) ●

Теорема 2. *Пусть операторы T_r, T_r^+, $r=1, \ldots, m$, образуют (B)-систему. Тогда*

$$T_r^+=T_r^*,\ T_r=(T_r^+)^*,\qquad r=1,\ \ldots,\ m. \tag{2}$$

○ Применим лемму 1.3 к операторам соответствующей (B_0)-системы, полагая $M=Q$; $\sigma=t_r$, $\sigma_+=t_r^+$. Неравенство (1.28) сразу следует из (1.15), (1.16), если воспользоваться оценкой (1) и подобной оценкой для b_r. Чтобы проверить (1.29), используем (1.21). Тогда для $x,\ y\in D$ (1.29) получается из оценки

$$|(y,\ t_r x)|^2\leqslant\|t_r x\|^2\|y\|^2=(t_r^+t_r x,\ x)\|y\|^2\leqslant\frac{1}{2}\,(Qx,\ x)\,(Qy,\ y).$$

В силу леммы 1.3 справедливы соотношения (1.27), которые в рассматриваемом случае совпадают с (2) ●

2. Теперь можно придать точный смысл соотношениям (1.5).

Теорема 3. *Для операторов (B)-системы и (C)-системы, соответствующих друг другу, имеют место соотношения* ($r=1, \ldots, m$)

$$D(T_r)=D(T_r^*)=D(A_r)\cap D(B_r), \tag{3}$$

$$\sqrt{2}T_r=B_r+iA_r,\quad \sqrt{2}\,T_r^*=B_r-iA_r, \tag{4}$$

$$\sqrt{2}\,A_r=i\,\overline{(T_r^*-T_r)},\quad \sqrt{2}\,B_r=\overline{T_r^*+T_r}. \tag{5}$$

○ Используем временные обозначения $B_r+iA_r=\sqrt{2}\,\theta_r$, $B_r-iA_r=\sqrt{2}\,\theta_r^+$. Согласно общему определению суммы операторов (см. § 3.1, п. 1) $D(\theta_r)=D(\theta_r^+)=D(A_r)\cap D(B_r)$. Из симметричности A_r, B_r следует, что $(\theta_r x,\ y)=(x,\ \theta_r^+ y)$, $\forall x,\ y\in D(A_r)\cap D(B_r)$. Поэтому $\theta_r^+\subset\theta_r^*$, $\theta_r\subset(\theta_r^+)^*$.

Пусть теперь $x\in D(T_r)$, $x_n\in D$, $x_n\to x$, $t_r x_n\to T_r x$. Из (1.16) следует, что последовательности $a_r x_n$, $b_r x_n$ сходятся, а потому $x\in D(A_r)\cap D(B_r)$ и $T_r x=B_r x+iA_r x=\theta_r x$. Мы видим, что $T_r\subset\theta_r$, а потому $\theta_r^*\subset T_r^*$. Точно так же показывается, что $T_r^*\subset\theta_r^+$. Таким образом, $T_r^*\subset\theta_r^+\subset\theta_r^*\subset T_r^*$ и, следовательно, $T_r^*=\theta_r^+$. Аналогично устанавливается, что $T_r=\theta_r$. Тем самым доказаны равенства (3), (4). Соотношения (5) прямо вытекают из того, что операторы A_r, B_r определены как замыкания операторов (1.10) ●

Теорема 3 показывает, что формулы (3), (4) определяют (B)-систему, если задана (C)-система. Напротив, если задана (B)-система, то формулы (5) определяют (C)-систему.

3. Для операторов (2), образующих (B)-систему, рассмотрим операторы

$$K_r = T_r^* T_r, \quad L_r = T_r T_r^*, \qquad r = 1, \ldots, m. \tag{6}$$

Эти операторы самосопряжены в силу теоремы 4.5.1.

Теорема 4. *В условиях теоремы* 2

$$L_r = K_r + I, \qquad r = 1, \ldots, m. \tag{7}$$

○ Прежде всего покажем, что

$$(T_r^* x, T_r^* y) = (T_r x, T_r y) + (x, y), \qquad x, y \in D(T_r) = D(T_r^*). \tag{8}$$

Для $x, y \in D$ равенство (8) прямо вытекает из (1.11) (при $s = r$). Пусть теперь $x \in D(T_r)$, $x_n \in D$, $x_n \to x$, $t_r x_n \to T_r x$. Из (1.17) следует, что тогда $t_r^+ x_n \to T_r^* x_n$. Это замечание позволяет распространить (8) предельным переходом на любые $x, y \in D(T_r)$.

Пусть теперь $y \in D(K_r)$. Равенство (8) запишем в виде

$$(T_r^* x, T_r^* y) = (x, K_r y + y), \qquad \forall x \in D(T_r^*).$$

Это означает, что $T_r^* y \in D(T_r^{**}) = D(T_r)$, т. е. $y \in D(L_r)$ и $T_r T_r^* y = (K_r + I) y$. Таким образом, $L_r \supset K_r + I$. Обратное включение получается так же ●

Равенства (7) означают, что для (B)-систем перестановочные соотношения (1.1) при $s = r$ выполняются в точном смысле, включающем в себя соотношения $D(T_r^* T_r) = D(T_r T_r^*)$.

4. Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 5. *Операторы (C)-системы удовлетворяют следующим соотношениям коммутации* *):

$$A_r \smile A_s, \quad B_r \smile B_s, \qquad r, s = 1, \ldots, m, \tag{9}$$

$$A_r \smile B_s, \qquad r, s = 1, \ldots, m; \quad r \neq s. \tag{10}$$

Все соотношения (9), (10) доказываются одинаково. Поэтому мы ограничимся первым из соотношений (9). Доказательство разобьем на ряд лемм, справедливость которых установим в условиях теоремы 5

Лемма 6. *Пусть* $\sigma = a_r + i a_s$, $\sigma_+ = a_r - i a_s$, $D(\sigma) = D(\sigma_+) = D$. *Тогда для операторов* σ, σ_+ выполнено (1.27).

○ Из симметричности операторов a_r, a_s следует (1.26). Применим лемму 1.3 при $M = Q$. Оценка (1.28) вытекает из равенств

$$\| \sigma x \|^2 = \| \sigma_+ x \|^2 = \| a_r x \|^2 + \| a_s x \|^2, \qquad x \in D, \tag{11}$$

---

*) Напомним (см § 6.3, п 3), что для $A = A^*$ и неограниченного оператора R соотношение $R \smile A$ по определению означает, что R перестановочен со спектральной мерой E_A Если при этом $R = R^*$, то $R \smile A$ равносильно перестановочности спектральных мер. $E_R \smile E_A$.

и из (1). Оценка (1 29) следует из (1 19) и неравенства

$$|(b_r y,\ x)|^2 \leqslant \|b_r y\|^2 \|x\|^2 \leqslant (Qy,\ y)(Qx,\ x).$$

Лемма 1.3 приводит к соотношениям (1.27) ●

Лемма 7. *Пусть выполнены условия леммы* 6 *и пусть* $C=\overline{\sigma}$, $C_+=\overline{\sigma}_+$. *Тогда* $C_+=C^*$ *и*

$$D(C)=D(C^*)=D(A_r)\cap D(A_s), \tag{12}$$

$$C=A_r+iA_s,\quad C^*=A_r-iA_s. \tag{13}$$

○ Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 3. Следует лишь вместо (1.15), (1.16) использовать (11) ●

Лемма 8. *В условиях леммы* 6 *оператор* $C=\overline{\sigma}$ *нормален*:

$$CC^*=C^*C. \tag{14}$$

○ Доказательство повторяет доказательство теоремы 4. Именно из равенства $\sigma\sigma_+x=\sigma_+\sigma x$, $x\in D$, предельным переходом получаем, что

$$(C^*x,\ C^*y)=(Cx,\ Cy),\qquad x,\ y\in D(C)=D(C^*). \tag{15}$$

(При выводе равенства (15) следует воспользоваться первым из равенств (11).) Из (15) равенство (14) получается непосредственно ●

Лемма 8 позволяет воспользоваться спектральной теорией (см. § 6.6, п. 1, в частности формулы (6.6.6)). Соотношения (12), (13) означают, что $A_r=\operatorname{Re}C$, $A_s=\operatorname{Im}C$; поэтому $A_r\smile A_s$. Доказательство теоремы 5 закончено.

5. Из теоремы 5 вытекают другие важные соотношения спектральной коммутации. Докажем сначала лемму.

Лемма 9. *Пусть* A_r, B_r — *пара операторов* (*C*)-*системы*, T_r, T_r^* — *соответствующие операторы* (4), $K_r=T_r^*T_r$. *Если* $Z\in\mathbf{B}(H)$, $Z\smile A_r$, $Z\smile B_r$, *то*

$$Z\smile T_r,\quad Z\smile T_r^*,\quad Z\smile K_r. \tag{16}$$

○ Пусть $x\in D(T_r)$. В силу (3) $x\in D(A_r)\cap D(B_r)$, а потому $Zx\in D(A_r)\cap D(B_r)$. Из (4) имеем $\sqrt{2}\,T_rZx=(B_r+iA_r)Zx=$ $=Z(B_r+iA_r)x=\sqrt{2}\,ZT_rx$. Аналогично устанавливается, что $Z\smile T_r^*$. Третье соотношение (16) получается последовательным применением двух первых ●

Всюду ниже E_r **обозначает спектральную меру оператора** $K_r=T_r^*T_r$.

Теорема 10. *Для операторов* (*B*)-*системы имеют место следующие соотношения*:

$$T_r\smile K_s,\ T_r^*\smile K_s,\qquad r,\ s=1,\ \ldots,\ m,\ r\neq s, \tag{17}$$

$$K_r\smile K_s,\qquad r,\ s=1,\ \ldots,\ m. \tag{18}$$

○ Пусть $r \neq s$. В соответствии с теоремой 5 $E_{A_r} \smile A_s$, $E_{A_r} \smile B_s$, а потому (см. лемму 9) $E_{A_r} \smile K_s$. Аналогично $E_{B_r} \smile K_s$, т. е. $E_s \smile A_r$, $E_s \smile B_r$. Но тогда в силу леммы 9

$$E_s \smile T_r, \quad E_s \smile T_r^*, \quad E_s \smile K_r, \tag{19}$$

что совпадает с (17), (18) ●

Совокупность теорем 4 и 10 допускает обращение.

Теорема 11. *Пусть T_r, $r=1, \ldots, m$, — замкнутые плотно определенные операторы, $T_r \neq T_s$ при $r \neq s$ Пусть соответствующие операторы* (6) *удовлетворяют соотношениям* (7), (17). *Тогда операторы T_r, T_r^*, $r=1, \ldots, m$, образуют* (B)-*систему с m степенями свободы.*

Доказательство теоремы 11 будет приведено в § 4. Эта теорема позволяет дать другое определение (B)-системы (а значит, и (C)-системы), эквивалентное исходному. В таксе определение не входит множество D, лежащее в основе понятия (B_0)- и (C_0)-системы. Отсюда следует, что выбор множества D не играет роли; важен лишь факт его существования. Этим, в конечном счете, устранен элемент произвола, содержавшийся в понятиях (B_0)- и (C_0)-системы. Можно было бы сразу исходить из определения (B)-системы, содержащегося в формулировке теоремы 11. Однако прежнее определение значительно удобнее при проверке в конкретных случаях.

6. Пусть E — совместная спектральная мера системы перестановочных операторов K_r. Иначе говоря, E — произведение спектральных мер $E_1, \ldots, E_m$. Рассмотрим оператор

$$K = \int_{\mathbb{R}_+^m} (\lambda_1 + \ldots + \lambda_m)\, dE(\lambda). \tag{20}$$

Это самосопряженный оператор с областью определения, выделяемой условием

$$\int_{\mathbb{R}_+^m} (\lambda_1 + \ldots + \lambda_m)^2\, d(E(\lambda)x, x) < \infty. \tag{21}$$

Из (20), (21) находим

$$K = \Sigma_1^m K_r, \quad D(K) = \bigcap\nolimits_1^m D(K_r). \tag{22}$$

В частности, $D(K) \supset D$. Далее, из (1.18) следует, что $2Kx = (Q-m)x$, $x \in D$. Так как оператор Q в существенном самосопряжен на D, то приходим к равенству

$$\tilde{Q} = 2K + mI. \tag{23}$$

Оно позволяет построить оператор K прямо по оператору Q, минуя операторы K_r. В квантовой теории оператор K имеет смысл *оператора числа частиц.* Необходимость корректного введения этого оператора привела к появлению условия 3) в определении (C_0)-

системы. Следует иметь в виду, что исключение этого условия влечет за собой появление «лишних» представлений перестановочн[illegible] не имеющих физического смысла.

§ 3. Представления бозевских соотношений. Случай $m=1$

(B)-систему при $m=1$ условимся называть (B)-*парой*.

1. Пусть T — плотно определенный замкнутый оператор. Обозначим $K=T^*T$, $L=TT^*$ и предположим, что

$$L=K+I. \tag{1}$$

Равенство (1) содержит в себе условие $D(K)=D(L)$. Согласно лемме 8.1.1 из (1) следует

$$D(T)=D(K^{1/2})=D(L^{1/2})=D(T^*). \tag{2}$$

Далее, из (8.1.2) и равенства $N(K)=N(K^{1/2})$ имеем

$$N(T)=N(K). \tag{3}$$

Оператор L положительно определен в силу (1). Поэтому $N(T^*)=$ $=N(L)=\{0\}$. Отметим еще равенства, очевидным образом следующие из (1), (2):

$$TKu=LTu, \qquad T^*Lu=KT^*u, \qquad u\in D(K^{3/2}). \tag{4}$$

2. Укажем пример операторов T, T^*, удовлетворяющих уравнению (1). Пусть G — вспомогательное гильбертово пространство, $n=\dim G\leqslant\infty$; пусть $|\cdot|$, $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ — норма и скалярное произведение в G. Положим $H=l_2(\mathbf{Z}_+;\ G)$. Элементы пространства H суть последовательности (ср. с § 2.3, п. 3)

$$h=\{g_p\}, \qquad g_p\in G, \qquad \forall p\in\mathbf{Z}_+, \tag{5}$$

такие, что $\|h\|^2=\sum_p|g_p|^2<\infty$. Рассмотрим в H операторы τ, τ^+ с общей областью определения

$$D(\tau)=D(\tau^+)=\{h=\{g_p\}\in H:\sum_p p\,|g_p|^2<\infty\}, \tag{6}$$

действующие по правилам

$$\tau\colon\ \{g_p\}\longmapsto\left\{\sqrt{p+1}\,g_{p+1}\right\}, \qquad p\in\mathbf{Z}_+, \tag{7}$$

$$\tau^+\colon\ \{g_p\}\longmapsto\left\{\sqrt{p}\,g_{p-1}\right\}, \qquad p\in\mathbf{Z}_+ \tag{8}$$

(здесь формально принято $g_{-1}=0$). В более «наглядной» записи

$$\tau h=\left\{g_1,\ \sqrt{2}\,g_2,\ \sqrt{3}\,g_3,\ \ldots\right\}, \qquad \tau^+h=\left\{0,\ g_0,\ \sqrt{2}\,g_1,\ \ldots\right\}.$$

Непосредственно проверяется, что $\tau^*=\tau^+$, $(\tau^+)^*=\tau$. Из (6) — (8) находим также, что операторы $\tau\tau^*$, $\tau^*\tau$ определены на общей области

$$D(\tau\tau^*)=D(\tau^*\tau)=\{h=\{g_p\}\in H:\ \sum_p p^2|g_p|^2<\infty\} \tag{9}$$

и выполнено (1) (при $T=\tau$). Таким образом, τ дает пример оператора T, удовлетворяющего условиям п. 1.

Основной целью настоящего параграфа является доказательство следующей теоремы

Теорема 1. *Пусть оператор T плотно определен, замкнут и пусть выполнено* (1). *Тогда существуют гильбертово пространство G, $\dim G=\dim N(T)$, и оператор V, унитарно отображающий H на $l_2(\mathbf{Z}_+, G)$, такие, что V переводит пару операторов T, T^* в пару τ, τ^+, определенную формулами* (6) — (8)

3. Доказательство теоремы 1 связано со спектральным анализом оператора $K=T^*T$ Мы увидим, что спектр K исчерпывается собственными значениями (одной и той же кратности) в точках $\lambda=0, 1, \ldots$ Рассмотрим подпространства

$$G_p=N(K-pI),\ p\in\mathbf{Z}_+,\ G_{-1}=\{0\} \tag{10}$$

Лемма 2. *В условиях теоремы* 1

$$G_{p+1}=T^*G_p,\ G_{p-1}=TG_p,\ p\in\mathbf{Z}_+. \tag{11}$$

Операторы

$$W_p=(p!)^{-1/2}T^p|_{G_p},\ W_p^+=(p!)^{-1/2}(T^*)^p|_{G_0} \tag{12}$$

определяют взаимно обратные унитарные отображения G_p на G_0 и G_0 на G_p.

○ Если $u\in G_p$, то $Ku=pu$, и из (1), (4) следует, что

$$KT^*u=(p+1)T^*u,\ KTu=(p-1)Tu.$$

Этим установлены включения $\supset$ в (11). Далее, равенства $T^*Tu=pu$, $u\in G_p$, и $TT^*v=pv$, $v\in G_{p-1}$, означают, что отображения $p^{-1/2}T: G_p\to G_{p-1}$ и $p^{-1/2}T^*: G_{p-1}\to G_p$ — взаимно обратны и унитарны. Отсюда вытекают равенства (11), а также нужные свойства операторов (12) ●

Из леммы 2 получаем

$$\dim G_p=\dim G_0,\ p\in\mathbf{Z}_+. \tag{13}$$

Лемма 3. *В условиях теоремы* 1 *спектр оператора $K=T^*T$ совпадает с $\mathbf{Z}_+$ и состоит из собственных значений одной и той же кратности $n=\dim G_0$.*

○ Пусть E — спектральная мера оператора K и $\Delta_p=(p,\ p+1)$. Предположим, что уже доказаны равенства

$$E(\Delta_j)=0,\ j=1, \ldots, p-1. \tag{14}$$

Пусть $x\in E(\Delta_p)H$, $x\neq 0$. Тогда $x\perp G_q$, $\forall q\in\mathbf{Z}_+$, и для любого $v\in G_q$ $(Tx,\ v)=(x,\ T^*v)=0$, поскольку (см. (11)) $T^*v\in G_{q+1}$.

Вместе с (14) это показывает, что $E[0,\ p]Tx=0$. Кроме того, $Tx\neq 0$, так как иначе было бы (см. (3)) $x\in G_0$ Теперь сопоставление оценок

$$(TKx,\ Tx)=(K^2x,\ x)=\int t^2\, d(E(t)x,\ x)<$$
$$<(p+1)\int t d(E(t)x,\ x)=(p+1)(Kx,\ x)=(p+1)\|Tx\|^2,$$
$$(TKx,\ Tx)=(LTx,\ Tx)=\int_{t>p}(t+1)\,d(E(t)Tx,\ Tx)>$$
$$>(p+1)\|Tx\|^2$$

приводит к противоречию. Следовательно, из (14) вытекает $E(\Delta_p)=0$. При $p=0$ условия (14) вырождаются, и этот случай дает базу для индукции.

Мы убедились, что $\sigma(K)\subset\mathbf{Z}_+$. Остальное следует из леммы 2. При этом заведомо $n\neq 0$, иначе в силу (13) было бы $\sigma(K)=\emptyset$, что невозможно ●

4. Доказательство теоремы 1. Из леммы 3 и общей спектральной теоремы 6 1.1 вытекает, что собственные подпространства G_p оператора K образуют ортогональное разложение

$$H=\Sigma_p\oplus G_p. \tag{15}$$

Элементы $f\in H$ разлагаются в ортогональные ряды

$$f=\Sigma_p E\{p\}f,\quad E\{p\}f\in G_p,\ p\in\mathbf{Z}_+. \tag{16}$$

Множество $D(T)=D(K^{1/2})$ выделяется условием

$$D(T)=\{f\in H:\Sigma_p p\,\|E\{p\}f\|^2<\infty\}. \tag{17}$$

Если $f\in D(T)$, то из (11) следует, что

$$E\{p\}Tf=TE\{p+1\}f,\quad p\in\mathbf{Z}_+. \tag{18}$$

Положим теперь $G=G_0=N(T)$ и определим отображение $V:H\to l_2(\mathbf{Z}_+;\ G)$ следующим образом:

$$V(\Sigma_p E\{p\}f)=\{W_p E\{p\}f\}_{p\in\mathbf{Z}_+}. \tag{19}$$

Из свойств операторов W_p (см. лемму 2) вытекает, что справа в (19) стоит последовательность элементов из $G=G_0$. Эта последовательность есть элемент пространства $l_2(\mathbf{Z}_+;\ G)$. Ясно, что отображение V пространства H на $l_2(\mathbf{Z}_+;\ G)$ унитарно. Из (6) и (17) следует, что $VD(T)=D(\tau)$. Далее, для $f\in D(T)$ из (12), (18) имеем

$$\begin{aligned}VTf&=V(\Sigma_p E\{p\}Tf)=\{W_pE\{p\}Tf\}_p=\\&=\{W_pTE\{p+1\}f\}_p=\{\sqrt{p+1}\,W_{p+1}E\{p+1\}f\}_p.\end{aligned} \tag{20}$$

Вместе с (7) это означает, что $VT=\tau V$. Соотношение $VT^*=\tau^*V=\tau^+V$ отсюда следует автоматически ●

5. *Операторы* τ, τ^+ *образуют* B-*пару*. Действительно, если сузить эти операторы, например, на область $D=D(\tau^*\tau)$ (см. (9)), то мы очевидно получим (B_0)-пару. Роль области D могла бы также играть совокупность финитных последовательностей (5). Замыкание таких сужений восстанавливает операторы τ, τ^+. Таким образом, операторы (7), (8) действительно дают (B)-пару.

В условиях теоремы 1 операторы T, T^* унитарно эквивалентны операторам τ, τ^+, а потому также образуют (B)-пару. Напротив, из теорем 2.2, 2.4 следует, что всякая (B)-пара подчинена условиям теоремы 1. Таким образом, результату теоремы 1 можно придать следующую окончательную форму.

Теорема 4. *Пусть операторы* T, T^+ *в* H *образуют* (B)-*пару. Тогда существует унитарное отображение* H *на* $l_2(\mathbf{Z}_+;\ G)$, *которое переводит* T, T^+ *в пару* τ, τ^+, *определенную формулами* (6)—(8). *При этом*

$$n \stackrel{\text{def}}{=} \dim G = \dim N(T). \tag{21}$$

Из теоремы 4, в частности, вытекает, что ограниченные операторы не могут образовывать (B)-пару.

6. При $n=1$ (B)-пара является *неприводимой*. Иначе говоря, в H не существует нетривиального подпространства $H_0 \neq H$, такого, что H_0 приводит T и T^*, и их части T_0, T_0^* в H_0 образуют (B)-пару. (Отметим, что в соответствии с теоремами 3.6.2, 3.6.3 операторы T_0, T_0^* замкнуты и $T_0^*=(T_0)^*$.) Действительно, при $n=1$ возможно либо $N(T_0)=N(T)$, либо $N(T_0)=\{0\}$. В первом случае в силу (11), (15) окажется $H_0=H$, во втором $H_0=\{0\}$.

Операторы τ, τ^+ при $n=1$ суть операторы в пространстве $l_2(\mathbf{Z}_+)$, т. е. в (5)—(8) элементы g_p — комплексные числа. Пусть $v_0 \in G_0$, $\|v_0\|=1$. Положим

$$v_p = W_p^+ v_0 = (p!)^{-1/2}(T^*)^p v_0, \qquad p \in \mathbf{Z}_+. \tag{22}$$

Из леммы 2 вытекает, что элемент v_p нормирован и порождает подпространство G_p. Из (15) следует, что система (22) образует ортонормированный базис в H. Оператор V, определенный в (19), в данном случае сводится к оператору, сопоставляющему элементу $f \in H$ последовательность $\{g_p\}$ его коэффициентов Фурье по системе (22).

Пусть теперь в (21) $1<n\leqslant\infty$. Тогда (B)-пара *приводима*. В этом проще всего убедиться, рассматривая «модель», т. е. операторы τ, τ^+. Разлагая G в ортогональную сумму одномерных подпространств $G=\sum_k \oplus G^{(k)}$, $k \in [1, n\rangle$, мы придем к разложению

$$l_2(\mathbf{Z}_+;\ G)=\sum\nolimits_k \oplus\, l_2(\mathbf{Z}_+;\ G^{(k)}). \tag{23}$$

Каждое слагаемое суммы (23) очевидно приводит операторы τ, τ^+. Действие их частей в $l_2(\mathbf{Z}_+;\ G^{(k)})$ по-прежнему определяется формулами вида (7), (8). Таким образом, (B)-пара разлагается в ортогональную сумму неприводимых (B)-пар. Теорема 4 позволяет перенести этот результат с модели на произвольную (B)-пару. В итоге мы приходим к следующим утверждениям.

Теорема 5. *Для того чтобы (B)-пара была неприводима, необходимо и достаточно, чтобы в* (21) *было* $n=1$. *Неприводимая (B)-пара единственна с точностью до унитарной эквивалентности Она может быть реализована в пространстве* $H=l_2(\mathbf{Z}_+)$ *операторами* $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\tau}^+$, *определенными в* (7), (8).

Теорема 6. *Всякая (B)-пара унитарно эквивалентна ортогональной сумме n экземпляров неприводимой (B)-пары. Значение* $n=\dim N(T)$, $n\in[1,\infty]$, *определяет (B)-пару с точностью до унитарной эквивалентности*

§ 4. Представления бозевских соотношений. Общий случай

Основная цель настоящего параграфа — обобщение теоремы 3.1 на случай m операторов, удовлетворяющих условиям теоремы 2.11. Как и при $m=1$, мы начнем с описания модели, к которой такие операторы приводятся.

1. Ниже $p=(p_1, \ldots, p_m)\in\mathbf{Z}_+^m$, $|p|=p_1+\ldots+p_m$, $p!=p_1!\ldots p_m!$. Через ω_s, $s=1, \ldots, m$, обозначим специальные мультииндексы с составляющими $(\omega_s)_r=\delta_r^s$, $r=1, \ldots, m$. Пусть G— вспомогательное гильбертово пространство, $H=l_2(\mathbf{Z}_+^m;\ G)$. Элементы $h\in H$ запишем в виде последовательностей (3.5), но теперь уже $p\in\mathbf{Z}_+^m$. Рассмотрим операторы τ_r, τ_r^+, $r=1, \ldots, m$, с областями определения

$$D(\tau_r)=D(\tau_r^+)=\left\{h\in H\colon\ \sum\nolimits_p p_r|g_p|^2<\infty\right\}, \tag{1}$$

действующие по правилу

$$\tau_r h=\left\{\sqrt{p_r+1}\,g_{p+\omega_r}\right\}_p, \qquad r=1, \ldots, m, \tag{2}$$

$$\tau_r^+ h=\left\{\sqrt{p_r}\,g_{p-\omega_r}\right\}_p, \qquad r=1, \ldots, m \tag{3}$$

(в (3) формально считаем $g_{p-\omega_r}=0$ при $p_r=0$). Без труда проверяется, что $\tau_r^*=\tau_r^+$, $(\tau_r^+)^*=\tau_r$ и для операторов

$$T_r=\tau_r, \quad T_r^*=\tau_r^*=\tau_r^+, \qquad r=1, \ldots, m, \tag{4}$$

выполнены соотношения (2.7), (2.17). Таким образом, операторы (4) удовлетворяют условиям теоремы 2.11.

Рассмотрим оператор $\varkappa=\sum_r\tau_r^+\tau_r$. Он действует по формуле $\varkappa h=\varkappa\{g_p\}=\{|p|g_p\}$ на области определения

$$D(\varkappa)=\left\{h\in H\colon\ \sum\nolimits_p p^2|g_p|^2<\infty\right\}. \tag{5}$$

Оператор $\varkappa$ очевидно самосопряжен. (Это следует также из того, что $\varkappa$ — оператор вида (2.22).) Легко видеть, что сужение операторов (4) на область определения (5) приводит к (B_0)-системе при $D=D(\varkappa)$. Замыкание суженных операторов возвращает к операторам (4). Таким образом, *операторы* (4) *образуют* (B)-*систему*. К такому же выводу мы пришли бы, сужая операторы (4) на множество всех финитных последовательностей из $l_2(\mathbf{Z}_+^m;\ G)$.

2. Следующая теорема является обобщением теоремы 3.1.

Теорема 1. *Пусть операторы T_r, $r=1, \ldots, m$, в H удовлетворяют условиям теоремы 2.11. Тогда существуют гильбертово пространство G и унитарное отображение V пространства H на $l_2(\mathbf{Z}_+^m;\ G)$, такие, что операторы T_r, T_r^* переводятся в операторы τ_r, τ_r^+, $r=1, \ldots, m$, определенные формулами* (1)—(3).

○ Начнем с описания свойств совместной спектральной меры E операторов K_r, $r=1, \ldots, m$. Мера E есть произведение спектральных мер $E_r=E_{K_r}$, $r=1, \ldots, m$. Спектральные свойства каждой из мер E_r даются леммой 3.3. Поэтому $\operatorname{supp} E\subset \mathbf{Z}_+^m$, т. е. совместный спектр операторов K_r — чисто точечный. Соответствующие совместные собственные подпространства (см. теорему 6.5.4) $E\{p\}H=\bigcap_r E_r\{p_r\}H$ можно записать в виде

$$G_p \stackrel{\text{def}}{=} E\{p\}H=E_1\{p_1\}\ldots E_m\{p_m\}H. \tag{6}$$

Отметим, в частности, что

$$G_0=E\{0\}H=N(K)=\bigcap_r N(K_r)=\bigcap_r N(T_r), \tag{7}$$

где K — оператор (2.22). Лемма 3.2 в применении к оператору T_r дает равенство

$$\left(p_r^{-1/2}T_r\right)E_r\{p_r\}H=E_r\{p_r-1\}H, \qquad p_r\in \mathbf{Z}_+, \tag{8}$$

причем отображение подпространства $E_r\{p_r\}H$ на $E_r\{p_r-1\}H$ оператором $p_r^{-1/2}T_r$ унитарно. Умножая (8) слева на $\Pi_{s\neq r}E_s\{p_s\}$ и используя (2.19), получаем

$$\left(p_r^{-1/2}T_r\right)E\{p\}H=E\{p-\omega_r\}H, \qquad p\in \mathbf{Z}_+^m. \tag{9}$$

При этом отображение оператором $p_r^{-1/2}T_r$ по-прежнему унитарно. Отсюда следует, что оператор

$$W_p=(p!)^{-1/2}\,T_1^{p_1}\ldots T_m^{p_m}\Big|_{G_p}, \qquad p\in \mathbf{Z}_+^m, \tag{10}$$

унитарно отображает G_p на G_0 (порядок сомножителей в правой части (10) безразличен). Мы видим, что

$$\dim G_p=\dim G_0, \qquad \forall p\in \mathbf{Z}_+^m, \tag{11}$$

а потому $\operatorname{supp} E=\mathbf{Z}_+^m$.

Окончание доказательства вполне аналогично доказательству теоремы 3.1. Имеют место разложения (3.15), (3.16) (с тем отличием, что теперь $p \in \mathbf{Z}_+^m$). При помощи операторов (10) по формуле (3.19) (при $p \in \mathbf{Z}_+^m$) определяется унитарное отображение V пространства H на $l_2(\mathbf{Z}_+^m;\ G_0)$. Формулы (3.17), (3.18) заменяются соотношениями

$$D(T_r) = \left\{ f \in H\colon \sum\nolimits_p p_r \| E\{p\} f \|^2 < \infty \right\}, \tag{12}$$

$$E\{p\} T_r f = T_r E\{p + \omega_r\} f, \qquad r = 1, \ldots, m. \tag{13}$$

Из (1) и (12) следует, что $VD(T_r) = D(\tau_r)$. Наконец, с помощью (13) по образцу (3.20) находим, что для $f \in D(T_r)$

$$VT_r f = \left\{ \sqrt{p_r + 1}\, W_{p+\omega_r} E\{p + \omega_r\} f \right\}_{p \in \mathbf{Z}_+^m}.$$

Вместе с (2) это означает, что $VT_r = \tau_r V$, а тогда и $VT_r^* = \tau_r^* V = \tau_r^+ V$, $r = 1, \ldots, m$ ●

Отметим, что унитарное отображение подпространства G_0 на G_p, обратное к отображению (10), дается оператором

$$W_p^+ = (p!)^{-1/2} (T_1^*)^{p_1} \ldots (T_m^*)^{p_m} |_{G_0}, \qquad p \in \mathbf{Z}_+^m.$$

3. Обсудим следствия, вытекающие из теоремы 1. Поскольку «модельные» операторы (2), (3) образуют (B)-систему, операторы T_r, T_r^*, $r = 1, \ldots, m$, в условиях теоремы 2.11 также образуют (B)-систему. Тем самым *утверждение теоремы* 2.11 *доказано*. С другой стороны, в силу теорем 2.2, 2.4, 2.10 операторы (B)-системы находятся в условиях теоремы 2 11. Поэтому *теорема* 1 *дает полное описание* (B)-*систем с* m *степенями свободы*.

Понятие *неприводимой* (B)-*системы* вводится так же, как и в случае $m = 1$. Следующие утверждения получаются вполне аналогично тому, как в § 3 были получены теоремы 3.5, 3.6.

Теорема 2. *Для того чтобы* (B)-*система с* m *степенями свободы была неприводима, необходимо и достаточно, чтобы размерность*

$$n = \dim N(K) \tag{14}$$

подпространства (7) *равнялась единице. Неприводимая* (B)-*система единственна с точностью до унитарной эквивалентности. Она реализуется в пространстве* $H = l_2(\mathbf{Z}_+^m)$ *операторами, определяемыми формулами* (1)—(3).

Теорема 3. *Всякая* (B)-*система с* m *степенями свободы с точностью до унитарной эквивалентности определяется значением* $n \in [1, \infty]$ *величины* (14). (B)-*система унитарно эквивалентна ортогональной сумме* n *экземпляров неприводимой* (B)-*системы*.

4. В заключение укажем еще одну удобную реализацию неприводимой (B)-системы. При $n = 1$ операторы (2), (3) действуют в $l_2(\mathbf{Z}_+^m)$; элементы g_p в (1)—(3) — комплексные числа. Обозначим через h_q, $q \in \mathbf{Z}_+^m$, «орты» в $l_2(\mathbf{Z}_+^m)$, т е. элементы, определяемые равенствами $h_q = \{\delta_p^q\}_p$. Элементы $\{h_p\}$ образуют ортонормированный базис в $l_2(\mathbf{Z}_+^m)$. Отобразим $l_2(\mathbf{Z}_+^m)$ на пространство целых функций $F^2(\mathbf{C}^m)$, введенное в § 2.9, п. 4. Это отображение V_0 зададим соответствием $V_0 h_p = u_p$, $p \in \mathbf{Z}_+^m$, где $u_p(z) = (\pi)^{-m/2}$ $(p!)^{m/2}$ z^p — ортонормированный базис в $F^2(\mathbf{C}^m)$ (см. § 2 9, п 4). Элементу $h = \{g_p\} \in l_2(\mathbf{Z}_+^m)$ при отображении V_0 соответствует целая функция $\varphi_h = V_0 h$:

$$\varphi_h(z) = (\pi)^{-m/2} \sum_{p \in \mathbf{Z}_+^m} (p!)^{-1/2} g_p z^p. \tag{15}$$

Сопоставляя (15) с формулами (2), (3), видим, что

$$\varphi_{\tau_r h}(z) = \frac{\partial \varphi_h(z)}{\partial z_r}, \quad \varphi_{\tau_r^+ h}(z) = z_r \varphi_h(z), \qquad r = 1, \ldots, m. \tag{16}$$

Обозначим через $\hat{\tau}_r$, $\hat{\tau}_r^+$ операторы в $F^2(\mathbf{C}^m)$, заданные на области определения

$$D(\hat{\tau}_r) = D(\hat{\tau}_r^+) = \{\varphi \in F^2(\mathbf{C}^m) : z_r \varphi(z) \in F^2(\mathbf{C}^m)\} \tag{17}$$

(т. е. на V_0-образе множества (1)) формулами

$$(\hat{\tau}_r \varphi)(z) = \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_r}, \quad (\hat{\tau}_r^+ \varphi)(z) = z_r \varphi(z), \qquad r = 1, \ldots, m. \tag{18}$$

Сравнение (18) с (16) показывает, что отображение V_0 переводит операторы τ_r, τ_r^+ в операторы $\hat{\tau}_r$, $\hat{\tau}_r^+$, а потому справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Операторы* $\hat{\tau}_r$, $\hat{\tau}_r^+$, $r = 1, \ldots, m$, *определенные формулами* (17), (18), *реализуют в* $F^2(\mathbf{C}^m)$ *неприводимое представление бозевских перестановочных соотношений с* m *степенями свободы.*

§ 5. О представлениях канонических соотношений

1. Теорема 2.3 сводит описание (C)-систем к описанию (B)-систем. Для (B)-систем в § 4 построена модель и установлены утверждения о единственности и неприводимости. Эти результаты автоматически переносятся иа (C)-системы.

(C)-система называется *неприводимой*, если пространство представления H не содержит нетривиального подпространства $H_0 \neq H$, которое приводило бы все операторы (C)-системы и в котором их части снова индуцировали бы (C)-систему. Ясно, что неприводимость (C)-системы равносильна неприводимости соответствующей (B)-системы. Следующее утверждение прямо вытекает из теорем 4.2, 4.3. В его формулировке учтено соотношение (2 23)

Теорема 1. *(C)-система с точностью до унитарной эквивалентности однозначно определяется величиной*

$$n = \dim N(\bar{Q} - mI), \tag{1}$$

где $\bar{Q}$ — замыкание оператора (1.8). *Неприводимость* $\sqrt{}(C)$*-системы равносильна тому, что в* (1) $n=1$. *Если в* (1) $1<n\leqslant\infty$, *то* (C)*-система унитарно эквивалентна ортогональной сумме* n *экземпляров неприводимой* (C)*-системы.*

Остается указать модель неприводимой (C)-системы. Ее можно построить с помощью операторов (4.2), (4 3) в $l_2(\mathbf{Z}_+^m)$ по формулам (2.5). Однако более удобна модель, даваемая в $L_2(\mathbf{R}^m)$ операторами (1 6). Связь между этими моделями осуществляется при помощи функций Эрмита.

2. Исследование модели начнем со случая (C)-пары (т. е. со случая $m=1$). Пусть $H=L_2(\mathbf{R})$. На классе $S(\mathbf{R})$ рассмотрим симметричные операторы a, b:

$$(au)(x)=-i\,du(x)/dx,\quad (bu)(x)=xu(x), \tag{2}$$

а также операторы $\sqrt{2}t=b+ia$, $\sqrt{2}t^+=b-ia$. На множестве $D=S(\mathbf{R})$ операторы (2) образуют (C_0)-пару. Действительно, условия определения § 1, п. 2, выполнены. В частности, условие 3) выполнено, так как оператор $Q=a^2+b^2=2tt^++I$ — оператор энергии линейного осциллятора — в существенном самосопряжен на классе $S(\mathbf{R})$ (по теореме 8.6.1). Операторы $A=\bar{a}$, $B=\bar{b}$ образуют (C)-пару. Покажем, что она *неприводима* В силу (3.3) $n=\dim N(\bar{Q}-I)=\dim N(K)=\dim N(T)$, где $T=\bar{t}$. Подпространство $N(T)$ определяется дифференциальным уравнением $v'(x)+xv(x)=0$. Его нормированное решение есть функция

$$v_0(x)=\pi^{-1/4}\exp(-x^2/2).$$

Таким образом, $n=1$, т. е. рассматриваемая (C)-пара неприводима.

Применим к рассматриваемому случаю формулы (3.22). Так как $v_0\in S(\mathbf{R})$, то $(T^*)^p v_0=(t^+)^p v_0$ и, в соответствии со сказанным в § 3, п. 6, функции вида (3.22)

$$v_p(x)=\pi^{-1/4}(p!)^{-1/2}2^{-p/2}\left(x-\frac{d}{dx}\right)^p e^{-x^2/2},\quad p\in\mathbf{Z}_+, \tag{3}$$

образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2(\mathbf{R})$. Функции (3) очевидно представляют собой полиномы степени p, умноженные на $\exp(-x^2/2)$. Это означает, что формула (3) дает оправдание представлению (2.9.1) для нормированных *функций Эрмита.* Одновременно доказаны *ортогональность и полнота в* $L_2(\mathbf{R})$ *функций Эрмита* Отметим, что результат теоремы 8.6.2 о спектре линейного осциллятора вкладывается в утверждение леммы 3 3 о спектре оператора K.

3. Покажем теперь, что *самосопряженные операторы* (1.6) *дают неприводимую* (C)*-систему* при любом $m\geqslant 1$. Пусть $H=L_2(\mathbf{R}^m)$, $D=S(\mathbf{R}^m)$ и на D заданы операторы a_r, b_r, $r=1,\ldots,m$, формулами

$$(a_r u)(x)=-i\frac{\partial u(x)}{\partial x_r},\quad (b_r u)(x)=x_r u(x),\quad r=1,\ldots,m. \tag{4}$$

Покажем, что операторы (4) образуют (C_0)-систему. В проверке нуждается лишь существенная самосопряженность оператора $Q=\sum_1^m(a_s^2+b_s^2)$ на множестве $S(\mathbf{R}^m)$. Пусть

$$v_p(x)=v_{p_1}(x_1)\ldots v_{p_m}(x_m),\qquad p\in\mathbf{Z}_+^m,$$

— «многомерные» функции Эрмита; они образуют (см. § 2.9, п. 1) ортонормированный базис в $L_2(\mathbf{R}^m)$. Так как $v_p\in S(\mathbf{R}^m)$, то оператор Q применим к функциям v_p. Легко видеть, что

$$Qv_p=(2|p|+m)v_p. \tag{5}$$

Из существования у симметричного оператора Q полной системы собственных элементов легко следует, что этот оператор в существенном самосопряжен. Таким сбразом, операторы (1.6), представляющие собой замыкания операторов (4) с области $D=S(\mathbf{R}^m)$, образуют (C)-систему. Эта (C)-система *неприводима*, так как из (5) вытекает $N(\bar{Q}-mI)=N(Q-mI)=\{\alpha v_0\}$, и следовательно, $n=1$.

4. Канонические перестановочные соотношения (1.3), (1.4) допускают трактовку, не связанную с понятием (C_0)-системы. Пусть A_r, B_r, $r=1,\ldots,m$, — самосопряженные операторы в H и пусть $U_r(x)=\exp(ixA_r)$, $V_r(x)=\exp(ixB_r)$, $x\in\mathbf{R}$, — соответствующие унитарные группы (см. § 6.4). Говорят, что операторы A_r, B_r, $r=1,\ldots,m$, дают *представление перестановочных соотношений* (1.3), (1.4) *в смысле Вейля*, если для любых x, $y\in\mathbf{R}$

$$U_r(x)\smile U_s(y),\quad V_r(x)\smile V_s(y),\quad r,\ s=1,\ \ldots,\ m, \tag{6}$$

$$U_r(x)\smile V_s(y),\quad r\neq s,\quad r,\ s=1,\ \ldots,\ m, \tag{7}$$

$$U_r(x)V_r(y)=e^{ixy}V_r(y)U_r(x),\quad r=1,\ \ldots,\ m. \tag{8}$$

Уравнения (6) — (8) удобны тем, что содержат лишь ограниченные операторы. Формально соотношение $[A_r,\ B_r]=-iI$ можно получить из (8), применяя операцию $\partial^2/\partial x\partial y$ и полагая $x=y=0$. Первые математически точные результаты о представлениях перестановочных соотношений были получены именно для уравнений (6) — (8): Дж. Нейман показал, что представлеиия канонических соотношений в форме Вейля сводятся к модельным операторам (1.6). Отсюда, разумеется, следует, что вейлевские представления канонических соотношений совпадают с (C)-системами.

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1966. 544 с.

Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, «Наукова думка», 1965. 798 с.

Вулих Б. З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. М., «Наука», 1973. 352 с.

Глазман И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М., Физматгиз, 1963. 340 с.

Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. М., ИЛ, 1963. 312 с.

Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., «Наука», 1965. 448 с.

Иосида К. Функциональный анализ. М., «Мир», 1967. 624 с.

Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., «Наука», 1977. 742 с.

Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., «Мир», 1972. 740 с.

Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния. М., «Мир», 1971. 312 с.

Люмис Л. Введение в абстрактный гармонический анализ. М., ИЛ, 1956. 252 с.

Морен К. Методы гильбертова пространства. М., «Мир», 1965. 570 с.

Невё Ж. Математические основы теории вероятностей. М., «Мир», 1969. 310 с.

Плеснер А. И. Спектральная теория линейных операторов. М., «Наука», 1965. 624 с.

Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. I. Функциональный анализ. М., «Мир», 1977. 358 с.; II. Гармонический анализ. Самосопряженность. М., «Мир», 1978. 395 с.

Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М., ИЛ, 1954. 500 с.

Рудин У. Функциональный анализ. М., «Мир», 1975. 444 с.

Сегё Г. Ортогональные многочлены. М., Физматгиз, 1962. 500 с.

Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. III, ч. 2. М., «Наука», 1974. 672 с.

Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. V. М., Физматгиз, 1959. 656 с.

Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., «Мир», 1973. 342 с.

Халмош П. Теория меры. М., ИЛ, 1958. 392 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК ОПЕЧАТОК

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
7	15-я сверху	W_l^2	W_2^l
41	1-я снизу	тирминологии	терминологии
53	13-я сверху	$P_1=P+P^1$	$P_1=P_0+P^1$
75	13-я сверху	H_T	$H_{\overline{T}}$
89	11-я сверху	$\Vert Ty^2$	$\Vert Ty\Vert^2$
90	1-я сверху	$\widetilde{T}-\lambda_0 I$	$T-\lambda_0 I$
95	13-я снизу	$\Vert (A\ \ a)\,x\Vert^2$	$\Vert (A-a)\,x\Vert^2$
99	16-я сверху	$d_{z/_D} - V(0)$	$d_{z/_D} - V\,(0)$
136	6-я, 2-я снизу	$T_{+}g$	T^*g
199	14-я сверху	$c_+cc_+^{p+1u_0}$	$c_+cc_+^{p+1}u_0$
241	11-я снизу	$a_rb_s-b_ra_s$	$a_rb_s-b_sa_r$

Зак. № 323