Lecture Notes in Mathematics
A collection of informal reports and seminars
Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

313

SPECTRAL PROPERTIES OF HAMILTONIAN OPERATORS

Konrad Jörgens
Fakultät für Mathematik der Universität München
München/BRD

Joachim Weidmann
Fachbereich Mathematik der Universität Frankfurt
Frankfurt a.M./BRD

Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York 1973

К. ЙОРГЕНС
И. ВАЙДМАН

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ГАМИЛЬТОНОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

Перевод с английского
Г. М. Жислина

С дополнением
М. А. Антоица,
Г. М. Жислина,
И. А. Шерешевского

Издательство «Мир»
Москва 1976

УДК 517.43

Единственная в мировой литературе монография, посвященная строгому качественному исследованию гамильтоновых операторов. Написана на основе оригинальных работ авторов. Ими получено описание спектра для широкого класса операторов при весьма слабых ограничениях. Русское издание снабжено дополнением, отражающим современные результаты по многочастичным гамильтонианам.

Книга интересна математикам и физикам-теоретикам, занимающимся приложениями функционального анализа. Она доступна студентам старших курсов.

Редакция литературы по математическим наукам

$И \frac{20203-019}{041(0)-76}$ 19-76

К. Йоргенс, И. Вайдман

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА
ГАМИЛЬТОНОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

Редактор В. И. Авербух
Художник Е. К. Самойлов
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор И. М. Кренделева
Корректоры И. И. Алексеева, О. Ф. Туркова

Сдано в набор 30/X 1975 г. Подписано к печати 26/II 1976 г. Бумага $60\times90^1/_{16}=$ $=4{,}75$ бум. л., печ. л. 9,50. Уч.-изд. л. 8,56. Изд. № 1/8337. Цена 62 коп. Зак. 01051.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Московская
типография № 7 «Искра революции» Союзполиграфпрома при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Монография видных западногерманских математиков Конрада Йоргенса и Иоахима Вайдмана посвящена актуальной проблеме современной математической физики — строгому исследованию спектра операторов энергии квантовых систем, состоящих из N частиц. Задача изучения спектральных свойств многочастичных гамильтонианов возникла в квантовой механике и квантовой химии сразу же вслед за их рождением. Однако задача эта ввиду ее трудности в течение длительного времени оставалась не решенной даже для простейших из реальных систем, и в приложениях ограничивались рассмотрением разного рода модельных систем и соответствующих гамильтонианов. Только в 50-х годах появились первые работы, положившие начало строгому математическому изучению спектров операторов энергии N-частичных систем при $N > 2$. Сейчас количество публикаций по этой тематике исчисляется уже несколькими десятками и непрерывно растет.

Предлагаемая читателю книга подводит итог исследованиям, относящимся к одному из основных направлений в теории спектральных свойств гамильтонианов — определению структуры существенного спектра. Авторы устанавливают положение и структуру существенного спектра для очень широкого класса операторов, отвечающих относительному движению свободных систем и системам во внешних полях. Полученные результаты применимы, в частности, к операторам энергии по существу всех систем, представляющих интерес в приложениях, включая и системы с нелокальным взаимодействием между частицами.

Следует подчеркнуть, что существенный спектр изучается в пространствах функций, преобразующихся по произвольным неприводимым представлениям групп симметрии рассматриваемых систем (и операторов). Тем самым обеспечивается физическая осмысленность устанавливаемых утверждений (учитывается принцип Паули) и, кроме того, добывается более глубокая информация о структуре существенного спектра в $L_2(\mathbf{R}^{3N})$.

Полученные авторами результаты являются наиболее сильными и общими и, в частности, покрывают практически все известные результаты о положении существенного спектра.

Дискретный спектр в книге К. Йоргенса и И. Вайдмана не изучается. Поэтому, для того чтобы читатель мог составить полное представление о спектральных свойствах операторов энергии, а также в интересах возможных приложений, книга снабжена дополнением о дискретном спектре гамильтонианов, написанным М. А. Антонцом, И. А. Шерешевским и мною. В дополнении дан обзор работ по структуре дискретного спектра и найдены довольно общие достаточные условия конечности и бесконечности числа дискретных собственных значений операторов энергии N-частичных систем. Эти условия носят, на наш взгляд, сравнительно законченный характер.

Книга, лежащая перед читателем, написана четко, ясно и читается относительно легко. Она доступна уже студентам старших курсов математических и физических специальностей, знакомым с основами функционального анализа и теории представлений групп.

Несомненно, что монография К. Йоргенса и И. Вайдмана представит значительный интерес для специалистов по спектральной теории линейных дифференциальных операторов и для лиц, интересующихся применением методов функционального анализа и теории представлений групп к математическим задачам квантовой механики и квантовой химии.

Г. Жислин

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе мы изучаем гамильтоновы операторы квантовомеханических систем, состоящих из N произвольных частиц. Эти операторы определены в пространстве $L_2(\mathbf{R}^{3N})$, и обычно предполагается, что они имеют вид

(I) $$S=\sum_{k=1}^{N} S_k+\sum_{h<k} W_{hk},$$

где

$$S_k u(x)=\frac{1}{2\mu_k}\sum_{j=1}^{3}\left(i\frac{\partial}{\partial x_{kj}}+e_k b_j(x_k)\right)^2 u(x)+e_k v(x_k)\,u(x),$$

$$W_{hk}u(x)=w_{hk}(x_h-x_k)\,u(x);$$

$x_k=(x_{k1}, x_{k2}, x_{k3})$ — координаты k-й частицы в пространстве $\mathbf{R}^3$, $x=(x_1, \ldots, x_N)\in\mathbf{R}^{3N}$; μ_k — масса и e_k — заряд k-й частицы; $b=(b_1, b_2, b_3)$ — векторный потенциал магнитного поля, v — электрический потенциал и w_{hk} — потенциал взаимодействия h-й и k-й частиц.

Если функции b_j и v тождественно равны нулю, то замена переменных позволяет «отделить» движение центра масс и приводит к изучению так называемого «внутреннего гамильтониана», т. е. оператора, который действует только на «внутренние» (относительные) координаты системы; определения этих понятий даны в §§ 5 и 6. Нас будут интересовать оба гамильтониана — как полный (в случае если имеется нетривиальное внешнее поле), так и внутренний (в случае свободной системы).

В действительности мы будем изучать значительно более общий класс операторов вида

(II) $$S=T+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j_1<\ldots<j_n} V_{j_1\ldots j_n}+\sum_{n=2}^{N}\sum_{j_1<\ldots<j_n} W_{j_1\ldots j_n},$$

где

$$T=-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2\mu_k}\Delta_k$$

— оператор кинетической энергии всех частиц (Δ_k обозначает лапласиан по координатам $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, x_{k3})$) и для каждого набора n индексов $j_1, \ldots, j_n$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_n \leqslant N$, операторы $V_{j_1 \ldots j_n}$ и $W_{j_1 \ldots j_n}$ описывают взаимодействие частиц $j_1, \ldots, j_n$ соответственно с внешним полем и друг с другом. Условия, налагаемые на операторы $W_{j_1 \ldots j_n}$, таковы, что если все $V_{j_1 \ldots j_n}$ тождественно равны нулю, то можно отделить движение центра масс; в этом случае мы будем рассматривать внутренний гамильтониан.

Дадим сначала краткий очерк развития теории N-частичных гамильтонианов.

Первое строгое определение самосопряженной реализации гамильтониана (полного и внутреннего) для любой системы из конечного числа частиц, взаимодействие которых друг с другом описывается потенциалами (например, кулоновскими), было дано Като [16]. Более общие результаты в этом направлении были установлены Штуммелем [25] и Икэбэ и Като [10]; некоторые из этих результатов приведены в § 2. Относительно гамильтонианов систем в областях с границей см. Йоргенс [11].

Сразу как только гамильтонианы были определены, естественно возник вопрос об их спектральных свойствах. Вообще ожидалось, что эти операторы ограничены снизу и что их спектр состоит из всех точек некоторой полуоси $[\mu, \infty[$ ($\mu \leqslant 0$) и не более чем счетного множества собственных значений, меньших μ, предельной точкой которого может быть разве лишь μ; для всех относящихся сюда физических задач это, по-видимому, так. В таком случае полуось $[\mu, \infty[$ представляет собой существенный спектр (см. § 1).

В литературе изучались главным образом три вопроса:

(1) Определение существенного спектра гамильтонианов.

(2) Оценка числа дискретных собственных значений, т. е. собственных значений, не принадлежащих существенному спектру («число» означает здесь: нуль, конечное множество или бесконечное множество).

(3) Вопрос об отсутствии собственных значений в существенном спектре, особенно об отсутствии положительных собственных значений.

Для проблем (2) и (3) получены решения лишь для весьма частных случаев. Что касается проблемы (2), то Като [17], Жислин и Сигалов [37—42], Саймон [23] показали, что у многих интересных систем существует бесконечное множество дискретных собственных значений; см. также Утияма [26—30] [1]). Что касается проблемы (3), то Като [18], Вайдман [31, 32] и Альбеверио [1] установили отсутствие положительных собственных значений для некоторых конкретных ситуаций.

---

[1]) Подробный обзор результатов по задаче (2) дан в дополнении.— *Прим. перев.*

В отличие от проблем (2) и (3) проблема (1) решена для весьма общих систем. В данной работе мы будем заниматься только ею.

В 1960 г. Жислин [38] изучил гамильтонианы типа (1), где $b_j = 0$ и v, w_{hk} — потенциалы типа кулоновских, $v \leqslant 0$, $w_{hk} \geqslant 0$; таковы, например, гамильтонианы атомов с фиксированными (бесконечно тяжелыми) ядрами. Результат Жислина состоял в следующем: существенный спектр $\sigma_e(S)$ представляет собой луч $[\mu, \infty[$, где

$$\mu = \min\{\mu_j: j = 1, \ldots, N\},$$
$$\mu_j = \min\{\lambda \in \sigma(S^{(j)})\}$$

и $S^{(j)}$ — гамильтониан системы, полученной из исходной удалением j-й частицы. Доказательство этого утверждения было упрощено Йоргенсом в его не опубликованном в широкой печати отчете [12]; одновременно он обобщил данный результат на системы с $b_j \neq 0$, где v, w_{hk} и b_j стремятся к нулю на бесконечности лишь в некотором обобщенном смысле (см., например, наше следствие 3.14). В 1965 г. Жислин и Сигалов [41, 42] доказали аналогичное утверждение для ограничений гамильтониана на подпространства симметрии, соответствующие неприводимым представлениям группы симметрии системы (эта группа симметрии состоит из перестановок тождественных частиц и вращательно-отражательных симметрий). Все эти и некоторые другие результаты приведены в обзорной статье Сигалова [22].

Для произвольных N-частичных систем (без каких-либо ограничений на знаки взаимодействий) столь глубоко был изучен только внутренний гамильтониан. В 1959 г. Жислин [37] анонсировал результат для внутреннего гамильтониана системы N частиц с кулоновским взаимодействием [1]). В 1964—1965 годах в связи с задачами рассеяния ван Винтер [36] исследовал системы с потенциалами взаимодействия, убывающими быстрее, чем кулоновские. В 1966 г. Хунцикер [9] рассмотрел N-частичные системы с локально квадратично интегрируемыми потенциалами взаимодействия, стремящимися к нулю на бесконечности. Во всех этих случаях результат таков: существенный спектр внутреннего гамильтониана совпадает с лучом $[\mu, \infty[$, где

$$\mu = \min\{\mu(Z_1) + \mu(Z_2)\},$$

причем минимум берется по всем разбиениям исходной системы на две нетривиальные подсистемы Z_1 и Z_2 и $\mu(Z_i)$ есть точная нижняя граница (полного или внутреннего) гамильтониана системы Z_i. Доказательства ван Винтера и Хунцикера в существенном совпадают: в обоих используется некоторое функциональное уравнение, выведенное Вейнбергом [33] (см. также Хунцикер [8])

[1]) И взаимодействием типа кулоновского; полные доказательства соответствующих теорем были приведены в [45*] в 1960 г.— *Прим. перев.*

и ван Винтером [36]. Ван Винтер доказывает, что фигурирующий в этом уравнении оператор есть оператор Гильберта — Шмидта, а Хунцикер устанавливает лишь, что он компактен, но только это на самом деле и нужно. Указанная компактность является по существу следствием того факта, что взаимодействия компактны относительно лапласиана, взятого по соответствующим координатам (точное определение дано в § 6). Отмеченный факт был использован Комбом [4], который доказал аналогичный результат для произвольных n-частичных взаимодействий, относительно компактных в этом смысле. Результат ван Винтера был обобщен на системы с некоторыми спин-орбитальными взаимодействиями в работе Браскампа и ван Винтера [3].

Позже Жислин [39, 40] распространил свои результаты на случай ограничений внутреннего гамильтониана N-частичной системы на подпространства, соответствующие неприводимым представлениям группы симметрии (перестановки тождественных частиц и вращения с отражениями). Снова оказалось, что существенный спектр совпадает с некоторым лучом $[\mu, \infty[$, где μ задается как сумма точных нижних границ ограничений гамильтонианов подсистем на некоторые пространства симметрии. Точная формулировка довольно сложна, и мы отсылаем читателя к нашему общему утверждению в § 11 [1]).

Доказательство Жислина (как и доказательства его прежних результатов) основано на некотором разбиении координатного пространства $\mathbf{R}^{3(N-1)}$. Недавно Балслев [2] дал новое доказательство этих результатов, опирающееся на уравнение Вейнберга — ван Винтера: он распространил метод Хунцикера на задачи, в которых учитывается симметрия. Балслев заявляет во введении, что его доказательство остается справедливым и в более общей ситуации с произвольными относительно компактными взаимодействиями; с другой стороны, рассмотрение нелокальных взаимодействий он откладывает до более поздних публикаций [2]).

Сходные результаты в совершенно другой ситуации были получены Саймоном [24]. Он рассмотрел N-частичные системы с так называемыми потенциалами Роллника, допускающие такие локальные сингулярности, что гамильтонианы могут быть определены только с помощью квадратичных форм и расширений по Фридрихсу. Используя модифицированное уравнение Вейнберга — ван Винтера, Саймон устанавливает для этого случая аналогичные резуль-

---

[1]) Здесь необходимо отметить еще работу А. Г. Сигалова и И. М. Сигала [54*], где впервые осуществлено инвариантное относительно перестановок тождественных частиц отделение движения центра масс. Хотя эта работа и не содержала новых (по сравнению с [40]) результатов, она имела большое методологическое значение.—*Прим. перев.*

[2]) В статье Балслева [2] изучены произвольные (в том числе и нелокальные) относительно компактные *двухчастичные* взаимодействия.—*Прим. перев.*

таты (он учитывает некоторые симметрии). Наконец, упомянем обзорную статью Като [19], которая содержит почти все перечисленные выше результаты, и лекции Йоргенса [14].

Наша цель — дать описание существенного спектра внутреннего и полного гамильтонианов при весьма общих условиях; мы рассмотрим также ограничения этих операторов на подпространства симметрии. Из наших результатов вытекают все предыдущие результаты, кроме результатов Саймона, которые по существу не сравнимы с нашими.

Коротко о содержании работы. В § 1 приводится описание Г. Вейля существенного спектра самосопряженных операторов при помощи сингулярных последовательностей; мы распространяем соответствующие результаты на существенно самосопряженные дифференциальные операторы, что очень полезно для приложений к дифференциальным операторам. Эти обобщения уже были использованы (без доказательства) в [12].

В § 2 дается введение в теорию операторов Шрёдингера. Материал этого параграфа также взят из [12] и, вероятно, хорошо известен всем специалистам. Для полноты мы приводим все доказательства.

В § 3 изучаются симметричные возмущения V существенно самосопряженных операторов T в пространстве $L_2(\mathbf{R}^m)$. Здесь мы вводим для возмущений V важное понятие T-малости на бесконечности и устанавливаем несколько интересных свойств T-малых возмущений. Понятие T-малости служит основой для остальной части работы. Все относящиеся к нему результаты, по-видимому, являются новыми. В § 4 дан ряд примеров. Там устанавливается, что все рассматривавшиеся ранее возмущения лапласиана содержатся в нашем классе. А пример псевдодифференциального оператора из теоремы 4.13 показывает, что наш класс намного шире.

В § 5 вводятся операторы, действующие только на часть переменных. Этот параграф носит главным образом технический характер и подготавливает к общему определению N-частичного гамильтониана в § 6. В § 7 изучается группа симметрии N-частичного гамильтониана. В отличие от Жислина [39, 40] и Балслева [2] мы предполагаем, что группа симметрии содержит не полную группу вращений,— а только некоторую ее компактную подгруппу [1]). В этом параграфе приведены также применяемые в дальнейших параграфах результаты о структуре соответствующих подпространств симметрии.

В § 8 изучается спектр гамильтониана свободной системы в пространствах симметрии. При этом мы используем (и дока-

---

[1]) Случай, когда эта компактная подгруппа *конечна*, был впервые изучен в [50*] для молекул с бесконечно тяжелыми ядрами; для произвольных относительно компактных мультипликативных двухчастичных взаимодействий аналогичное исследование проведено в [49*].— *Прим. перев.*

зываем) некоторые общие результаты, представляющие интерес и сами по себе (например, теорема 8.11).

В § 9 устанавливается оценка положения существенного спектра для операторов вида $S = T + V$ ($T = -\Delta$). Это решающая часть в половине из наших основных результатов. В § 10 мы определяем существенный спектр ограничений на пространства симметрии N-частичных полных гамильтонианов для систем во внешнем поле. В § 11 сформулирован аналогичный результат для внутренних гамильтонианов; доказательство его дано в § 12.

В приложении указывается, как наши результаты можно обобщить на случай N-частичных систем со спином, т. е. на случай аналогичных операторов в пространствах $(L_2(\mathbf{R}^{3N}))^k$ или $(L_2(\mathbf{R}^{3(N-1)}))^k$ для некоторого $k \in \mathbf{N}$.

Аналогично Жислину и Сигалову [38—42] и Йоргенсу [12] мы применяем метод разбиения координатного пространства. Элегантное доказательство Хунцикера [9], использующее уравнение Вейнберга — ван Винтера, применено быть не может, так как наши взаимодействия не являются относительно компактными.

§ 1. СПЕКТР И СУЩЕСТВЕННЫЙ СПЕКТР САМОСОПРЯЖЕННЫХ И СУЩЕСТВЕННО САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

В этом параграфе мы определяем спектр существенно самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве как спектр его самосопряженного расширения $\bar{A}$ и характеризуем некоторые подмножества этого спектра, обращаясь непосредственно к оператору A, а не к $\bar{A}$. Этот подход обладает преимуществами при работе с дифференциальными операторами. Так как в литературе, кажется, нет доступного изложения данного вопроса, то мы приводим полные доказательства.

Для самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве H через $\mathrm{D}(A)$ и $\mathrm{R}(A)$ обозначаются соответственно *область определения* и *множество значений* оператора A. *Резольвентное множество* $\rho(A)$ — это множество всех чисел $\lambda \in \mathbf{C}$, таких, что оператор $\lambda - A$ имеет ограниченный обратный $(\lambda - A)^{-1}$ с областью определения H; эквивалентное определение: $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbf{C}: \mathrm{R}(\lambda - A) = H\}$. *Спектр* $\sigma(A) = \mathbf{C} \setminus \rho(A)$ является замкнутым подмножеством вещественной прямой $\mathbf{R}$. Каждая изолированная точка спектра $\sigma(A)$ есть собственное значение оператора A. *Дискретный спектр* оператора A определяется как множество $\sigma_d A$ всех изолированных собственных значений конечной кратности. Его дополнение $\sigma_e(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_d(A)$ называется *существенным спектром* [1]; он состоит из всех предельных точек множества $\sigma(A)$ и всех изолированных точек, которые являются собственными значениями бесконечной кратности. Таким образом, $\sigma_e(A)$ есть замкнутое подмножество множества $\mathbf{R}$, тогда как $\sigma_d(A)$ может быть незамкнутым.

Всюду далее в этом параграфе A — *существенно самосопряженный* оператор в гильбертовом пространстве H (т. е. A симметричен и его замыкание $\bar{A} = A^{**}$ есть самосопряженный оператор; в этом случае $\bar{A}$ — это единственное самосопряженное расширение оператора A). Обозначим через $E(\cdot)$ спектральное семейство оператора $\bar{A}$.

---

[1] Иногда существенный спектр называют предельным (см., например, [53*], стр. 391); мы сохраняем терминологию авторов книги.— *Прим. перев.*

1.1. Теорема. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\lambda \in \sigma(\bar{A})$;

(2) $E(\lambda + \varepsilon) - E(\lambda - \varepsilon) \neq 0$ *для всех* $\varepsilon > 0$;

(3) *существует такая последовательность* (u_n) *в* $\mathrm{D}(\bar{A})$, *что*

$$\lim\inf \| u_n \| > 0 \ \text{и} \ (\lambda - \bar{A}) u_n \to 0;$$

(3′) *существует такая последовательность* (u_n) *в* $\mathrm{D}(A)$, *что*

$$\lim\inf \| u_n \| > 0 \ \text{и} \ (\lambda - A) u_n \to 0.$$

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2): Пусть $\lambda \in \sigma(\bar{A})$ и $E(\lambda + \varepsilon) - E(\lambda - \varepsilon) = 0$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда оператор $\lambda - \bar{A}$ имеет ограниченный обратный, определенный на всех элементах $f \in H$ равенством

$$(\lambda - \bar{A})^{-1} f = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - t)^{-1} dE(t) f,$$

и, значит, $\lambda \in \rho(\bar{A})$, в противоречие с (1).

(2) $\Rightarrow$ (3): Выбираем функции $u_n \in \left(E\left(\lambda + \frac{1}{n}\right) - E\left(\lambda - \frac{1}{n}\right)\right) H$, $\| u_n \| = 1$; очевидно, $u_n \in D(\bar{A})$ и $\| (\lambda - \bar{A}) u_n \| \leqslant \frac{1}{n}$, поэтому $\lim\inf \| u_n \| = 1$ и $(\lambda - \bar{A}) u_n \to 0$.

(3) $\Rightarrow$ (3′): Пусть последовательность (u_n) выбрана согласно условию (3). Поскольку $\bar{A}$ является замыканием оператора A, то для каждого n существует функция $v_n \in \mathrm{D}(A)$, такая, что

$$\| u_n - v_n \| + \| \bar{A} u_n - A v_n \| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$\| v_n \| \geqslant \| u_n \| - \frac{1}{n} \ \text{и} \ \| (\lambda - A) v_n \| \leqslant \| (\lambda - \bar{A}) u_n \| + (1 + |\lambda|) \frac{1}{n};$$

поэтому $\lim\inf \| v_n \| > 0$ и $(\lambda - A) v_n \to 0$.

(3′) $\Rightarrow$ (1): Предположим, что выполнено (3′) и $\lambda \in \rho(\bar{A})$. Выберем последовательность (u_n) согласно (3′). Тогда, поскольку оператор $\lambda - \bar{A}$ имеет ограниченный обратный, соотношение $(\lambda - \bar{A}) u_n = (\lambda - A) u_n \to 0$ влечет за собой соотношение $u_n \to 0$, которое противоречит условию $\lim\inf \| u_n \| > 0$.

1.2. Теорема. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\lambda \in \sigma_e(\bar{A})$;

(2) $\dim (E(\lambda + \varepsilon) - E(\lambda - \varepsilon)) H = \infty$ *для всех* $\varepsilon > 0$;

(3) *существует такая последовательность* (u_n) *в* $\mathrm{D}(\bar{A})$, *что*

$$\langle u_n \mid u_m \rangle = \delta_{nm} \text{ и } (\lambda - \bar{A})\, u_n \to 0;$$

(3′) *то же, что и* (3), *но с* $\bar{A}$, *замененным на* A;

(4) *существует последовательность* (u_n) *в* $\mathrm{D}(\bar{A})$, *такая, что*

$$\liminf \| u_n \| > 0, \ u_n \rightharpoonup 0 \text{ и } (\lambda - A)\, u_n \to 0;$$

(4′) *то же, что и* (4), *но с* $\bar{A}$, *замененным на* A.

Доказательство. (1) ⇒ (2): Если $\mu \in \sigma_e(\bar{A})$, то или λ является (изолированным) собственным значением бесконечной кратности, или λ — предельная точка спектра $\sigma(\bar{A})$. В первом случае мы имеем $\dim(E(\lambda + 0) - E(\lambda - 0))\, H = \infty$, и, следовательно, $\dim(E(\lambda + \varepsilon) - E(\lambda - \varepsilon))\, H = \infty$ для всех $\varepsilon > 0$. Во втором случае выберем последовательность (λ_n) различных точек $\lambda_n \in \sigma(\bar{A})$, сходящуюся к λ, и затем положительные числа ε_n, для которых интервалы $[\lambda_n - \varepsilon_n, \lambda_n + \varepsilon_n]$ взаимно не пересекаются (так что $\varepsilon_n \to 0$). Для каждого $\varepsilon > 0$ найдется число $n(\varepsilon)$, такое, что $[\lambda_n - \varepsilon_n, \lambda_n + \varepsilon_n] \subset [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]$ для всех $n \geqslant n(\varepsilon)$, и поэтому

$$\dim(E(\lambda+\varepsilon)-E(\lambda-\varepsilon))\, H \geqslant \sum_{n=n(\varepsilon)}^{\infty} \dim(E(\lambda_n+\varepsilon_n) - E(\lambda_n-\varepsilon_n))\, H = \infty.$$

(2) ⇒ (3): Так как $\dim\left(E\left(\lambda+\frac{1}{n}\right)-E\left(\lambda-\frac{1}{n}\right)\right) H = \infty$ для всех n, то, используя индукцию, можно найти для каждого n элемент $u_n \in \left(E\left(\lambda+\frac{1}{n}\right)-E\left(\lambda-\frac{1}{n}\right)\right) H$, такой, что $\| u_n \| = 1$ и $\langle u_n \mid u_m \rangle = 0$ при $m < n$. Следовательно, $u_n \in \mathrm{D}(\bar{A})$, $\langle u_n \mid u_m \rangle = \delta_{nm}$ и $\| (\lambda - \bar{A})\, u_n \| \leqslant \frac{1}{n}$ для всех n и m; значит, $(\lambda - \bar{A})\, u_n \to 0$.

(3) ⇒ (4′): Пусть последовательность (u_n) удовлетворяет условию (3). Поскольку $\bar{A}$ — замыкание оператора A, то для каждого n существует такая функция $v_n \in \mathrm{D}(A)$, что

$$\| u_n - v_n \| + \| \bar{A} u_n - A v_n \| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Поэтому

$$\| v_n \| \geqslant 1 - \frac{1}{n} \text{ и } \| (\lambda - A)\, v_n \| \leqslant \| (\lambda - \bar{A})\, u_n \| + (1 + |\lambda|)\, \frac{1}{n},$$

откуда видно, что $\liminf \|v_n\| > 0$ и $(\lambda - A)\, v_n \to 0$. Наконец, $u_n \rightharpoonup 0$, ибо (u_n) — ортонормированная последовательность, и, значит, $v_n \rightharpoonup 0$, ибо $u_n - v_n \to 0$ по построению.

$(4') \Rightarrow (3')$: Пусть последовательность (u_n) удовлетворяет условию $(4')$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\|u_n\| \geqslant 2$ для всех n. По индукции извлечем из последовательности (u_n) подпоследовательность (u_{n_k}) следующим образом. Пусть $u_{n_1}, \ldots$ $\ldots, u_{n_k}$ уже выбраны; обозначим через D_k подпространство, натянутое на эти элементы, и через P_k — ортогональный проектор на D_k. Так как $u_n \rightharpoonup 0$ и оператор P_k компактен, то $P_k u_n \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, можно найти число $n_{k+1} > n_k$, такое, что

$$\| P_k u_{n_{k+1}} \| \sup \{1 + \| (\lambda - A) u \| \colon u \in D_k, \ \| u \| = 1\} \leqslant \frac{1}{k}.$$

Поэтому $\| P_k u_{n_{k+1}} \| < 1$ и элемент

$$v_{k+1} = \| u_{n_{k+1}} - P_k u_{n_{k+1}} \|^{-1} (u_{n_{k+1}} - P_k u_{n_{k+1}})$$

определен, имеет норму 1 и ортогонален к D_k. Значит, последовательность $\{v_k\}$ ортонормирована. По построению, $\|(\lambda - A) P_k u_{n_{k+1}} \| \leqslant 1/k$, откуда

$$\| (\lambda - A) v_{k+1} \| \leqslant \| u_{n_{k+1}} - P_k u_{n_{k+1}} \|^{-1} \| (\lambda - A) (u_{n_{k+1}} - P_k u_{n_{k+1}}) \| \leqslant$$
$$\leqslant \| (\lambda - A) u_{n_{k+1}} \| + \frac{1}{k} \text{ для всех } k.$$

Таким образом, $(\lambda - A) v_k \to 0$.

$(3') \Rightarrow (4)$: Каждая последовательность со свойствами, требуемыми в $(3')$, обладает свойствами, требуемыми в (4).

$(4) \Rightarrow (1)$: Пусть выполняется условие (4) и $\lambda \notin \sigma_e(\bar{A})$. Тогда либо $\lambda \in \rho(\bar{A})$, либо λ есть изолированное собственное значение конечной кратности; в любом случае существует такое $\varepsilon > 0$, что размерность $\dim (E(\lambda + \varepsilon) - E(\lambda - \varepsilon)) H$ конечна. Пусть последовательность (u_n) удовлетворяет условию (4). Поскольку $u_n \rightharpoonup 0$ и оператор $E(\lambda + \varepsilon) - E(\lambda - \varepsilon)$ компактен, то $(E(\lambda + \varepsilon) - E(\lambda - \varepsilon)) u_n \to 0$. Положим $v_n = u_n - (E(\lambda + \varepsilon) - E(\lambda - \varepsilon)) u_n$. Очевидно, $\liminf \|v_n\| > 0$ и

$$\| (\lambda - \bar{A}) u_n \|^2 \geqslant \int_{-\infty}^{\lambda - \varepsilon} + \int_{\lambda + \varepsilon}^{\infty} | \lambda - t |^2 d \| E(t) u_n \|^2 =$$
$$= \int_{-\infty}^{\lambda - \varepsilon} + \int_{\lambda + \varepsilon}^{\infty} | \lambda - t |^2 d \| E(t) v_n \|^2 \geqslant \varepsilon^2 \| v_n \|^2;$$

значит, $(\lambda - \bar{A}) u_n \not\to 0$, что противоречит условию (4).

Теоремы 1.1 и в особенности 1.2 характеризуют спектр и существенный спектр самосопряженного оператора $\bar{A}$ в терминах его существенно самосопряженного ограничения A. Для удобства мы будем писать $\sigma(A)$ и $\sigma_e(A)$ вместо $\sigma(\bar{A})$ и $\sigma_e(\bar{A})$ соответственно и будем при этом говорить о спектре и существенном спектре оператора A.

§ 2. ОПЕРАТОРЫ ШРЁДИНГЕРА

Рассмотрим формальный дифференциальный оператор второго порядка, определенный соотношением

$$Tu = \sum_{j=1}^{m} (i\partial_j + b_j)^2 u + qu$$

для всех $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ ($C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ — множество всех бесконечно дифференцируемых комплексных функций с компактным носителем в $\mathbf{R}^m$), где $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, а $b_1, \ldots, b_m$, q — вещественные измеримые функции на $\mathbf{R}^m$, такие, что $|b_j|^4$ и $|q|^2$ локально интегрируемы и $\sum_{j=1}^{m} \partial_j b_j = 0$ в смысле обобщенных функций $\left(\text{т. е. } \int \sum_{j=1}^{m} b_j \partial_j \varphi \, dx = 0\right.$ для всех $\left.\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)\right)$. Дифференцирование в выражении для Tu понимается в смысле обобщенных функций.

При этих условиях, очевидно, T есть линейный оператор в пространстве $L_2(\mathbf{R}^m)$ с областью определения $\mathrm{D}(T) = C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$, и для каждой функции $u \in \mathrm{D}(T)$ мы имеем

$$Tu = -\Delta + 2i \sum_{j=1}^{m} b_j \partial_j u + b^2 u + qu,$$

где $b^2 = \sum_{j=1}^{m} b_j^2$. Отсюда следует, что

$$\langle Tu \mid v\rangle - \langle u \mid Tv\rangle = -2i \int \sum_{j=1}^{m} b_j \partial_j (u^* v) \, dx = 0$$

для всех $u, v \in \mathrm{D}(T)$ $\left(u^*\right.$ — функция, комплексно сопряженная функции u, и скалярное произведение в $L_2(\mathbf{R}^m)$ определяется равенством $\left.\langle u \mid v\rangle = \int u^* v \, dx\right)$. Множество $\mathrm{D}(T)$ плотно в $L_2(\mathbf{R}^m)$, и, значит, оператор T симметричен.

Уравнение Шрёдингера конечной системы частиц в консервативном силовом поле имеет вид $i\partial_t u = Tu$, где T — некоторый оператор описанного выше типа; такие операторы называются поэтому *операторами Шрёдингера*.

Для приложений наиболее важно знать условия на коэффициенты оператора T, при которых он существенно самосопряжен. Такие условия были получены Икэбэ и Като [10]; они включают в себя ряд локальных ограничений, которые мы сейчас сформулируем, и некоторое глобальное условие.

Для $\alpha > 0$ и любой измеримой функции q на $\mathbf{R}^m$ положим

$$M_{q,\alpha}(x) = \left\{ \int\limits_{|x-y|\leqslant 1} |q(y)|^2 |x-y|^{4-m-\alpha} dy \right\}^{1/2}$$

и

$$N_q(x) = \left\{ \int\limits_{|x-y|\leqslant 1} |q(y)|^2 dy \right\}^{1/2},$$

где $x \in \mathbf{R}^m$. Пусть $Q_{\alpha,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^m)$ — класс всех измеримых функций q, таких, что величина $M_{q,\alpha}(x)$ конечна при всех $x \in \mathbf{R}^m$ и функция $M_{q,\alpha}$ ограничена на каждом компактном подмножестве пространства $\mathbf{R}^m$. Через $Q_\alpha(\mathbf{R}^m)$ обозначим множество всех функций $q \in Q_{\alpha,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^m)$, для которых функция $M_{q,\alpha}$ ограничена на всём $\mathbf{R}^m$. Если $q \in Q_{\alpha,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^m)$, то функция N_q непрерывна, а если $q \in Q_\alpha(\mathbf{R}^m)$, то N_q ограничена на $\mathbf{R}^m$.

2.1. Лемма. *Пусть $\alpha > 0$ и $q^2 \in Q_{\alpha,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^m)$. Тогда $q \in Q_{2+\beta,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^m)$ для любого $\beta \in \left]0, \frac{\alpha}{2}\right[$ и при всех $x \in \mathbf{R}^m$ справедливо неравенство*

$$[M_{q,\,2+\beta}(x)]^2 \leqslant C M_{q^2,\,\alpha}(x),$$

где $C > 0$ — константа, не зависящая от q и x.

Доказательство. Для $\beta \in \left]0, \frac{\alpha}{2}\right[$ имеем

$$\left\{ \int\limits_{|x-y|\leqslant 1} |q(y)|^2 |x-y|^{2-m-\beta} dy \right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|x-y|\leqslant 1} |x-y|^{\alpha-2\beta-m} dy \int\limits_{|x-y|\leqslant 1} |q(y)|^4 |x-y|^{4-m-\alpha} dy =$$

$$= \frac{\omega_m}{\alpha - 2\beta} \int\limits_{|x-y|\leqslant 1} |q(y)|^4 |x-y|^{4-m-\alpha} dy,$$

где ω_m — площадь единичной сферы в $\mathbf{R}^m$. Лемма доказана.

Всюду далее мы будем предполагать выполненными следующие локальные условия для коэффициентов оператора Шрёдингера.

2.2. Предположения. *Функции $b_1, \ldots, b_m$ и q вещественны; для некоторого $\alpha > 0$*

$$b^2 = \sum_{j=1}^m b_j^2 \in Q_{\alpha,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^m) \text{ и } q \in Q_{\alpha,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^m);$$

в смысле обобщенных функций выполняется соотношение

$$\sum_{j=1}^m \partial_j b_j = 0.$$

Заметим, что из этих предположений вытекает справедливость всех условий, упомянутых в начале параграфа; поэтому оператор T симметричен. Кроме того, в силу леммы 2.1 $b_j \in Q_{2+\beta,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^m)$ для $0 < \beta < \frac{\alpha}{2}$.

В дальнейших оценках мы используем обозначение

$$\| u \|_\Omega = \left\{ \int_\Omega | u(x) |^2 \, dx \right\}^{1/2},$$

где Ω — открытое множество в $\mathbf{R}^m$. Через Ω_ρ обозначается открытое множество, состоящее из всех точек, расстояние которых до Ω меньше, чем ρ.

2.3. Лемма. *Пусть* $\alpha > 0$ *и* $q \in Q_{\alpha,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^m)$. *Тогда существует константа* C *(зависящая от* m *и* α*), такая, что*

$$\| qu \|_\Omega \leqslant C\rho^{\alpha/2} \| M_{q,\,\alpha} \Delta u \|_{\Omega_\rho} + C\rho^{-m/2} \| N_q u \|_{\Omega_\rho}$$

для всех $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$, $\rho \in \,]0, 1]$ *и всех открытых множеств* $\Omega \subset \mathbf{R}^m$.

2.4. Лемма. *Пусть* $\beta > 0$ *и* $b_j \in Q_{2+\beta,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^m)$. *Тогда существует константа* C *(зависящая от* m *и* β*), такая, что*

$$\Big\| \sum_{j=1}^m b_j \partial_j u \Big\|_\Omega \leqslant C\rho^{\beta/2} \| M_{b,\,2+\beta} \Delta u \|_{\Omega_\rho} + C\rho^{-m/2-1} \| N_b u \|_{\Omega_\rho}$$

для всех $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$, $\rho \in \,]0, 1]$ *и всех открытых множеств* $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ *(здесь* $b = \{\sum_{j=1}^m b_j^2\}^{1/2}$*).*

Доказательство этих лемм опирается на тождество

$$(2.5) \quad u(x) = -\int k_\rho(|x-y|)\, \Delta u(y)\, dy + \int h_\rho(|x-y|)\, u(y)\, dy,$$

справедливое для всех $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ и всех $\rho > 0$. Здесь k_ρ и h_ρ (для фиксированного $\rho > 0$) — вещественные непрерывные на полупрямой $]0, \infty[$ функции, тождественно равные нулю на $[\rho, \infty[$, имеющие кусочно-непрерывные производные и удовлетворяющие (в случае $m \geqslant 3$) следующим неравенствам:

$$| k_\rho(r) | \leqslant Cr^{2-m}, \qquad | k_\rho'(r) | \leqslant Cr^{1-m},$$
$$| h_\rho(r) | \leqslant C\rho^{-m}, \qquad | h_\rho'(r) | \leqslant C\rho^{-m-1}$$

при $r \leqslant \rho$, где константа C не зависит от r и ρ. Такие функции были построены Штуммелем [25]. Мы докажем леммы 2.3 и 2.4 только для случая $m \geqslant 3$.

Доказательство леммы 2.3. Для $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ и $\rho \in]0, 1]$ из тождества (2.5) вытекает, что

$$|u(x)|^2 \leqslant \Big\{ C \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} |x-y|^{2-m} |\Delta u(y)|\, dy + $$
$$+ C\rho^{-m} \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} |u(y)|\, dy \Big\}^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2C^2 \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} |x-y|^{\alpha-m}\, dy \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} |x-y|^{4-m-\alpha} |\Delta u(y)|^2 dy +$$
$$+ 2C^2\rho^{-2m} \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} dy \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} |u(y)|^2\, dy \leqslant$$
$$\leqslant C_1\rho^\alpha \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} |x-y|^{4-m-\alpha} |\Delta u(y)|^2\, dy +$$
$$+ C_1\rho^{-m} \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} |u(y)|^2\, dy.$$

Умножим обе части полученного неравенства на $|q(x)|^2$, проинтегрируем по Ω и поменяем порядок интегрирования; получим

$$\|qu\|_\Omega^2 \leqslant C_1\rho^\alpha \int\limits_{\Omega_\rho} |\Delta u(y)|^2 \int\limits_{|x-y|\leqslant 1} |q(x)|^2 |x-y|^{4-m-\alpha}\, dx\, dy +$$
$$+ C_1\rho^{-m} \int\limits_{\Omega_\rho} |u(y)|^2 \int\limits_{|x-y|\leqslant 1} |q(x)|^2\, dx\, dy =$$
$$= C_1\rho^\alpha \| M_{q,\alpha} \Delta u\|_{\Omega_\rho}^2 + C_1\rho^{-m} \| N_q u\|_{\Omega_\rho}^2,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство леммы 2.4. Продифференцируем тождество (2.5):

$$\partial_j u(x) = -\int k_\rho'(|x-y|) \frac{x_j-y_j}{|x-y|} \Delta u(y)\, dy +$$
$$+ \int h_\rho'(|x-y|) \frac{x_j-y_j}{|x-y|} u(y)\, dy.$$

Производя оценки так же, как и в лемме 2.3, найдем, что

$$|\operatorname{grad} u(x)|^2 \leqslant m \Big\{ C \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} |x-y|^{1-m} |\Delta u(y)|\, dy +$$
$$+ C\rho^{-m-1} \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} |u(y)|\, dy \Big\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_2\rho^\beta \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} |x-y|^{2-m-\beta} |\Delta u(y)|^2\, dy + \\ + C_2\rho^{-m-2} \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} |u(y)|^2\, dy.$$

Поэтому

$$\Big\|\sum_{j=1}^{m} b_j\,\partial_j u\Big\|_\Omega^2 \leqslant \int\limits_\Omega |b(x)|^2 |\operatorname{grad} u(x)|^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C_2\rho^\beta \int\limits_{\Omega_\rho} |\Delta u(y)|^2 \int\limits_{|x-y|\leqslant 1} |b(x)|^2 |x-y|^{2-m-\beta}\, dx\, dy + \\ + C_2\rho^{-m-2} \int\limits_{\Omega_\rho} |u(y)|^2 \int\limits_{|x-y|\leqslant 1} |b(x)|^2\, dx\, dy = \\ = C_2\rho^\beta \| M_{b,\,2+\beta}\Delta u\|_{\Omega_\rho}^2 + C_2\rho^{-m-2} \| N_b u\|_{\Omega_\rho}^2,$$

что и требовалось доказать.

2.6. Лемма. *Пусть* $\beta > 0$ *и* $p \in Q_{2+\beta,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^m)$. *Тогда существует константа* C (*зависящая от* m *и* β), *такая, что*

$$\| pu \|_\Omega \leqslant C\rho^{\beta/2} \| M_{p,\,2+\beta} \operatorname{grad} u \|_{\Omega_\rho} + C\rho^{-m/2} \| N_p u \|_{\Omega_\rho}$$

для всех $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$, $\rho \in]0,\ 1]$ *и всех открытых множеств* $\Omega \subset \mathbf{R}^m$.

Доказательство. Интегрируя (2.5) по частям, получим

$$u(x) = -\int k_\rho'(|x-y|) \sum_{j=1}^{m} \frac{x_j - y_j}{|x-y|}\, \partial_j u(y)\, dy + \int h_\rho(|x-y|)\, u(y)\, dy,$$

откуда следует оценка

$$|u(x)|^2 \leqslant \Big\{ C \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} |x-y|^{1-m} |\operatorname{grad} u(y)|\, dy + \\ + C\rho^{-m} \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} |u(y)|\, dy \Big\}^2 \leqslant \\ \leqslant C_3\rho^\beta \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} |x-y|^{2-m-\beta} |\operatorname{grad} u(y)|^2\, dy + \\ + C_3\rho^{-m} \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} |u(y)|^2\, dy.$$

Умножая на $|p(x)|^2$ и интегрируя по Ω, придем к неравенству

$$\| pu \|_\Omega^2 \leqslant C_3\rho^\beta \| M_{p,\,2+\beta} \operatorname{grad} u \|_{\Omega_\rho}^2 + C_3\rho^{-m} \| N_p u \|_{\Omega_\rho}^2,$$

которое и требовалось доказать.

С помощью лемм 2.3 и 2.4 можно в одном важном частном случае доказать существенную самосопряженность оператора T.

Начнем с простейшего случая $b_j = q = 0$. Известно (см. Като [15], V.5.2), что оператор $T = -\Delta$ существенно самосопряжен. Оператор общего вида обозначим через S и запишем его в форме $S = T + A$, где $T = -\Delta$ и $A = 2i \sum_{j=1}^{m} b_j \partial_j + b^2 + q$. Оператор A называется *T-ограниченным*, если $\mathrm{D}(A) \supset \mathrm{D}(T)$ и $\|Au\| \leqslant \leqslant a\|u\| + b\|Tu\|$ для всех функций $u \in \mathrm{D}(T)$ с неотрицательными константами a, b, не зависящими от u. Определим *T-границу* оператора A как точную нижнюю грань множества чисел b, таких, что при некотором $a \geqslant 0$ выполняется написанное выше неравенство.

Хорошо известная теорема Реллиха (см. Като [15], V.4.1) утверждает, что если оператор T существенно самосопряжен, а оператор A симметричен и T-ограничен с T-границей, меньшей 1, то оператор $S = T + A$ существенно самосопряжен, его самосопряженное замыкание $\bar{S}$ равно $\bar{T} + \bar{A}$ и имеет область определения $\mathrm{D}(\bar{S}) = \mathrm{D}(\bar{T})$.

2.7. Теорема. *Пусть $b_1, \ldots, b_m$ и q удовлетворяют предположениям* 2.2 *и, кроме того, $b^2 \in Q_\alpha(\mathbf{R}^m)$ и $q \in Q_\alpha(\mathbf{R}^m)$ для некоторого $\alpha > 0$. Тогда оператор $A = 2i\sum_{j=1}^{m} b_j\partial_j + b^2 + q$ с областью определения $\mathrm{D}(A) = C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ является T-ограниченным ($T = -\Delta$) с T-границей нуль.*

Доказательство. Пусть $\beta \in \left]0, \frac{\alpha}{2}\right[$. Тогда, согласно лемме 2.1, функция $b \in Q_{2+\beta}(\mathbf{R}^m)$. Функции $M_{q,\alpha}$, $M_{b^2,\alpha}$ и $M_{b,2+\beta}$ ограничены. Поэтому в силу лемм 2.3 и 2.4 существует константа C_4 (не зависящая от ρ и u), такая, что для всех функций $u \in \mathrm{D}(T)$ и $\rho \in \left]0, 1\right]$ выполняются оценки

$$\|qu\| \leqslant C_4\rho^{\alpha/2}\|Tu\| + C_4\rho^{-m/2}\|N_q u\|,$$

$$\|b^2 u\| \leqslant C_4\rho^{\alpha/2}\|Tu\| + C_4\rho^{-m/2}\|N_{b^2} u\|,$$

$$\Big\|\sum_{j=1}^{m} b_j\,\partial_j u\Big\| \leqslant C_4\rho^{\beta/2}\|Tu\| + C_4\rho^{-m/2-1}\|N_b u\|$$

и, следовательно,

$$\|Au\| \leqslant 4C_4\rho^{\beta/2}\|Tu\| + 4C_4\rho^{-m/2-1}\|Nu\|, \tag{2.8}$$

где

$$N(x) = \Big\{\int\limits_{|x-y|\leqslant 1} [|q(y)|^2 + |b(y)|^2 + |b(y)|^4]\,dy\Big\}^{1/2}.$$

Функция N ограничена, скажем, $N(x) \leqslant C_5$ для всех $x \in \mathbf{R}^m$. По данному $\varepsilon > 0$ выберем такое $\rho_0 \in]0, 1]$, что $4C_4\rho_0^{\beta/2} \leqslant \varepsilon$, и положим $a(\varepsilon) = 4C_4C_5\rho_0^{-m/2-1}$. Тогда в силу (2.8) для всех $u \in \mathrm{D}(T)$ справедливо неравенство $\|Au\| \leqslant a(\varepsilon)\|u\| + \varepsilon\|Tu\|$, что и требовалось доказать.

2.9. Следствие. *Оператор Шрёдингера S с коэффициентами $b_1, \ldots, b_m$, q, удовлетворяющими предположениям теоремы* 2.7, *существенно самосопряжен, и его самосопряженное расширение $\overline{S}$ имеет область определения $\mathrm{D}(\overline{S}) = \mathrm{D}(\overline{T})$, где $T = -\Delta$.*

§ 3. ВОЗМУЩЕНИЯ, МАЛЫЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

В данном параграфе рассматриваются возмущения $S = T + V$ оператора Шрёдингера T. При этом всегда предполагается, что T — существенно самосопряженный оператор Шрёдингера с областью определения $C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$, а V — симметричный оператор с $\mathrm{D}(V) = \mathrm{D}(T)$. Мы не требуем, однако, чтобы оператор S также был оператором Шрёдингера в смысле определения, данного в § 2. Таким образом, допускаются нелокальные операторы V (т. е. операторы, для которых носитель функции Vu не всегда содержится в носителе функции u для $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$), такие, как интегральные или интегро-дифференциальные операторы. Некоторые примеры будут приведены в § 4. Наша главная цель состоит в том, чтобы установить связь между существенными спектрами $\sigma_e(T)$ и $\sigma_e(S)$ (в предположении, что S существенно самосопряжен) при некоторых условиях на V. Лучшее известное условие такого типа — это *T-компактность* оператора V.

Пусть T и V — операторы в H. Оператор V называется *T-компактным*, если $\mathrm{D}(V) \supset \mathrm{D}(T)$ и для каждой ограниченной последовательности (f_n) в $\mathrm{D}(T)$, для которой последовательность (Tf_n) также ограничена, последовательность (Vf_n) содержит сходящуюся подпоследовательность. Это определение можно сформулировать более просто, если использовать понятие *графика* $\mathrm{G}(T)$ оператора T. Пусть $H \otimes H$ обозначает гильбертово пространство всех упорядоченных пар (f, g) элементов из H со скалярным произведением $\langle (f, g) \mid (f', g') \rangle = \langle f \mid f' \rangle + \langle g \mid g' \rangle$. Тогда, по определению, $\mathrm{G}(T)$ — это подпространство пространства $H \otimes H$, состоящее из всех пар (f, Tf) с $f \in \mathrm{D}(T)$. Если $\mathrm{D}(T) \subset \mathrm{D}(V)$, то отображение $(f, Tf) \mapsto Vf$ есть линейный оператор L из $H \otimes H$ в H с областью определения $\mathrm{G}(T)$. Оператор V является T-ограниченным тогда и только тогда, когда оператор L ограничен, и T-компактным тогда и только тогда, когда L компактен. Следовательно, если оператор V является T-компактным, он также T-ограничен; справедливо, однако, много более сильное утверждение: если оператор V замыкаем (т. е. обладает замкнутым расширением) и T-компактен, то он T-ограничен с T-границей нуль (см. ниже следствие 3.4 или Гольдберг [5], следствие V.3.8). Нам понадобится также следующий факт: если оператор V T-ограничен, то для каждой последовательности $(f_n) \subset \mathrm{D}(T)$, для которой $f_n \rightharpoonup 0$ и $Tf_n \rightharpoonup 0$, выполняется соотношение $Vf_n \rightharpoonup 0$. Чтобы доказать это, заметим, что оператор L ограничен, а потому непрерывен и, следовательно, слабо непрерывен. Это означает, что для каждой последовательности (f_n, Tf_n) в $\mathrm{G}(T)$, слабо сходящейся к нулю, $Vf_n \rightharpoonup 0$; но (f_n, g_n) сходится слабо к нулю в $H \otimes H$ тогда и только тогда, когда $f_n \rightharpoonup 0$ и $g_n \rightharpoonup 0$ в H.

3.1. Лемма. *Пусть T и V — такие замыкаемые операторы в гильбертовом пространстве H, что $\mathrm{D}(T) \subset \mathrm{D}(V)$, и пусть $\overline{T}$ и $\overline{V}$ — их замыкания (т. е. наименьшие замкнутые расширения). Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *оператор V является T-компактным;*

(2) *для каждой последовательности (f_n) в $\mathrm{D}(T)$, такой, что $f_n \rightharpoonup 0$ и $Tf_n \rightharpoonup 0$, выполняется соотношение $Vf_n \to 0$;*

(3) $\mathrm{D}(\overline{T}) \subset \mathrm{D}(\overline{V})$, *и для каждой последовательности (f_n) в $\mathrm{D}(\overline{T})$, такой, что $f_n \rightharpoonup 0$ и $\overline{T}f_n \rightharpoonup 0$, выполняется соотношение $\overline{V}f_n \to 0$;*

(4) *оператор $\overline{V}$ является $\overline{T}$-компактным.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2): Пусть (f_n) — последовательность в $\mathrm{D}(T)$, такая, что $f_n \rightharpoonup 0$ и $Tf_n \rightharpoonup 0$. Тогда, как показано выше, $Vf_n \rightharpoonup 0$. Предположим, что Vf_n не сходится сильно к нулю. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ и некоторой последовательности (n_j) имеет место неравенство $\|Vf_{n_j}\| > \varepsilon$ для всех j. Поскольку последовательности (f_{n_j}) и (Tf_{n_j}) ограничены, то в силу (1) последовательность (Vf_{n_j}) содержит некоторую сходящуюся подпоследовательность (Vf_{m_j}), а поскольку $Vf_{m_j} \rightharpoonup 0$, то мы также имеем $Vf_{m_j} \to 0$, что противоречит неравенству $\|Vf_{m_j}\| > \varepsilon$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Из (2) следует, что для каждой последовательности (f_n) в $\mathrm{D}(T)$, такой, что $f_n \to 0$ и $Tf_n \to 0$, мы имеем $Vf_n \to 0$, т. е. оператор V является T-ограниченным. Поэтому для каждой последовательности (f_n) в $\mathrm{D}(T)$, такой, что (f_n) и (Tf_n) сходятся сильно, последовательность (Vf_n) также сходится сильно. Отсюда следует, что $\mathrm{D}(\overline{T}) \subset \mathrm{D}(\overline{V})$, и оператор $\overline{V}$ является $\overline{T}$-ограниченным. Пусть (f_n) — последовательность в $\mathrm{D}(\overline{T})$, такая, что $f_n \rightharpoonup 0$ и $\overline{T}f_n \rightharpoonup 0$. Тогда существует последовательность (g_n) в $\mathrm{D}(T)$, для которой $f_n - g_n \to 0$ и $\overline{T}(f_n - g_n) \to 0$. Следовательно, $\overline{V}(f_n - g_n) \to 0$, $g_n \rightharpoonup 0$ и $Tg_n \rightharpoonup 0$. В силу (2) мы также имеем $Vg_n \to 0$ и, значит, $\overline{V}f_n = \overline{V}(f_n - g_n) + Vg_n \to 0$.

(3) $\Rightarrow$ (4): Пусть (f_n) — такая ограниченная последовательность в $\mathrm{D}(\overline{T})$, что последовательность $(\overline{T}f_n)$ также ограничена.

Тогда существует слабо сходящаяся подпоследовательность (f_{n_j}), для которой $(\overline{T}f_{n_j})$ также слабо сходится; пусть $f_{n_j} \rightharpoonup f$ и $\overline{T}f_{n_j} \rightharpoonup g$. График $G(\overline{T})$ есть замкнутое подпространство в $H \otimes H$, поэтому $G(\overline{T})$ слабо замкнуто и, следовательно, $g = \overline{T}f$. Но соотношения $f_{n_j} - f \rightharpoonup 0$ и $\overline{T}(f_{n_j} - f) \rightharpoonup 0$ влекут за собой в силу (3) соотношение $\overline{V}(f_{n_j} - f) \to 0$, т. е. последовательность $(\overline{V}f_{n_j})$ сходится.

(4) $\Rightarrow$ (1): Это очевидно, так как $D(T) \subset D(\overline{V})$.

Ограничимся далее рассмотрением операторов в $L_2(\mathbf{R}^m)$.

3.2. Теорема. *Пусть T и V — такие замыкаемые операторы в $L_2(\mathbf{R}^m)$, что $D(T) \subset D(V)$.*

(1) *Если оператор V является T-компактным, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$, что $\| Vu \| \leqslant \varepsilon(\| u \| + \| Tu \|) + \| \varphi_\varepsilon u \|$ для всех $u \in D(T)$.*

(2) *Если для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ оператор $u \to \varphi u$ T-компактен и если справедливо заключение утверждения* (1), *то V является T-компактным.*

Доказательство. (1): Если это утверждение неверно, то существует такое $\varepsilon > 0$, что для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ найдется функция $u \in D(T)$, удовлетворяющая соотношениям $\| u \| + \| Tu \| = 1$ и $\| Vu \| > \varepsilon + \| \varphi u \|$. Для каждого n выберем $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ так, чтобы $\varphi_n(x) \geqslant n$ для $|x| \leqslant n$, и $u_n \in D(T)$ так, чтобы $\| u_n \| + \| Tu_n \| = 1$ и $\| Vu_n \| > \varepsilon + \| \varphi_n u_n \|$. Поскольку последовательность (Vu_n) ограничена, мы получим

$$n^2 \int\limits_{|x| \leqslant r} | u_n(x) |^2 dx \leqslant \| \varphi_n u_n \|^2 \leqslant \| Vu_n \|^2 \leqslant C$$

для всех $n \geqslant r$. Мы также имеем $\| u_n \| \leqslant 1$ и, следовательно, $u_n \rightharpoonup 0$. Предположим, что $D(T)$ плотно (в $L_2(\mathbf{R}^m)$). Тогда T^* существует, $D(T^*)$ плотно и $\langle v \mid Tu_n \rangle = \langle T^*v \mid u_n \rangle \to 0$ для каждой функции $v \in D(T^*)$. Поскольку последовательность (Tu_n) ограничена, отсюда следует, что $Tu_n \rightharpoonup 0$. Если $D(T)$ не плотно, то рассматриваем T как оператор из гильбертова пространства $\overline{D(T)}$ в $L_2(\mathbf{R}^m)$ и рассуждаем, как раньше. Таким образом, $Tu_n \rightharpoonup 0$ в любом случае, и, следовательно, в силу леммы 3.1 $Vu_n \to 0$, что противоречит неравенству $\| Vu_n \| > \varepsilon$.

(2): В силу леммы 3.1 нам достаточно доказать, что соотношения $u_n \rightharpoonup 0$, $Tu_n \rightharpoonup 0$ влекут за собой соотношение $Vu_n \to 0$. Мы можем предполагать, что $\| u_n \| + \| Tu_n \| \leqslant 1$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует функция $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$, такая, что $\| Vu_n \| \leqslant \varepsilon(\| u_n \| + \| Tu_n \|) + \| \varphi_\varepsilon u_n \|$ для всех n, и $\varphi_\varepsilon u_n \to 0$ в силу наших условий и леммы 3.1. Следовательно, $\limsup\limits_{n\to\infty} \| Vu_n \| \leqslant \varepsilon$ и, значит, $Vu_n \to 0$.

3.3. Определение. Пусть T и V — операторы в $L_2(\mathbf{R}^m)$. Оператор V называется *T-малым на бесконечности*, если он T-ограничен и если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число $r(\varepsilon) > 0$, что $\| Vu \| \leqslant \varepsilon (\| u \| + \| Tu \|)$ для всех $u \in \mathrm{D}(T)$ таких, что $u(x) = 0$ почти всюду в шаре $\{x: x \in \mathbf{R}^m, |x| \leqslant r(\varepsilon)\}$.

3.4. Лемма. *Если T и V — замыкаемые операторы в $L_2(\mathbf{R}^m)$ и оператор V является T-компактным, то он T-ограничен с T-границей, равной нулю, и T-мал на бесконечности.*

Доказательство. Применим утверждение (1) теоремы 3.2. Первое утверждение леммы следует из оценки $\| \varphi_\varepsilon u \| \leqslant C_\varepsilon \| u \|$; второе получается, если положить $r(\varepsilon) = \sup \{ |x|: x \in \operatorname{supp} \varphi_\varepsilon\}$.

Чтобы применить теорему 3.2 к операторам Шрёдингера, нам будут нужны некоторые леммы. Как и в § 2, мы всегда предполагаем, что область определения нашего оператора есть $C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ и что его коэффициенты удовлетворяют предположениям 2.2. Напомним также обозначение

$$\Omega_\rho = \{x \in \mathbf{R}^m: |x - y| < \rho \quad \text{для некоторого } y \in \Omega\}.$$

3.5. Лемма. *Пусть T — оператор Шрёдингера в $L_2(\mathbf{R}^m)$. Для каждой ограниченной открытой области $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ и каждого $\rho \in]0, 1]$ существует такая константа $C(\Omega, \rho)$, что*

$$\| \Delta u \|_\Omega \leqslant C(\Omega, \rho) \{\| u \|_{\Omega_\rho} + \| Tu \|_{\Omega_\rho}\}$$

при всех $u \in \mathrm{D}(T)$.

Доказательство. Возьмем $\beta \in]0, \frac{\alpha}{2}[$; тогда в силу леммы 2.1

$$b \in Q_{2+\beta, \mathrm{loc}}(\mathbf{R}^m) \quad \text{и} \quad p = |q|^{1/2} \in Q_{2+\beta, \mathrm{loc}}(\mathbf{R}^m).$$

Для данных ограниченного открытого множества $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ и числа $\rho \in]0, 1]$ множество Ω_ρ также ограничено, и поэтому все функции

$$M_{q, \alpha}, \ N_q, \ M_{b^2, \alpha}, \ N_{b^2}, \ M_{b, 2+\beta}, \ N_b, \ M_{p, 2+\beta}, \ N_p$$

ограничены в Ω_ρ; пусть C_0 — их общая верхняя граница.

Заменим в леммах 2.3, 2.4 и 2.6 Ω, u, ρ соответственно на Ψ, v, σ. Тогда для всех открытых множеств Ψ и чисел $\sigma \in]0, 1]$, таких, что $\Psi_\sigma \subset \Omega_\rho$, и для всех $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ мы имеем оценки

$$\| qv \|_\Psi + \| b^2 v \|_\Psi \leqslant C_1 (\sigma^{\alpha/2} \| \Delta v \|_{\Psi_\sigma} + \sigma^{-m/2} \| v \|_{\Psi_\sigma}),$$

$$\Big\| 2 \sum_{j=1}^m b_j \partial_j v \Big\|_\Psi \leqslant C_1 (\sigma^{\beta/2} \| \Delta v \|_{\Psi_\sigma} + \sigma^{-m/2-1} \| v \|_{\Psi_\sigma}),$$

$$(3.6) \quad \| bv \|_\Psi + \| pv \|_\Psi \leqslant C_1 (\sigma^{\beta/2} \| \operatorname{grad} v \|_{\Psi_\sigma} + \sigma^{-m/2} \| v \|_{\Psi_\sigma}),$$

где $C_1 = 2CC_0$, C — константа из лемм. Следовательно, C_1 зависит от Ω и ρ, но не от v, Ψ или σ. Складывая два первых неравенства, мы получим

$$\| Av \|_\Psi \leqslant 2C_1 (\sigma^{\beta/2} \| \Delta v \|_{\Psi_\sigma} + \sigma^{-m/2-1} \| v \|_{\Psi_\sigma}), \tag{3.7}$$

где

$$A = T + \Delta = 2i \sum_{j=1}^m b_j \partial_j + b^2 + q.$$

Пусть $\rho_0 = \rho/3$ и вещественная функция $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ с носителем в Ω_{ρ_0} такова, что $\varphi(x) = 1$ для всех $x \in \Omega$. Для $u \in \mathrm{D}(T)$ возьмем в (3.7) $v = \varphi u$, $\Psi = \Omega_{\rho_0}$ и $\sigma < \rho_0$. Так как носитель функций v, Δv, Av содержится в Ψ, то мы видим, что

$$\| Av \| \leqslant 2C_1 (\sigma^{\beta/2} \| \Delta v \| + \sigma^{-m/2-1} \| v \|).$$

Фиксируем теперь $\sigma_0 < \rho_0$ так, чтобы $2C_1\sigma_0^{\beta/2} \leqslant 1/2$. Тогда

$$\| \Delta v \| \leqslant \| Tv \| + \| Av \| \leqslant \| Tv \| + \frac{1}{2} \| \Delta v \| + C_2 \| v \|,$$

где $C_2 = 2C_1\sigma_0^{-m/2-1}$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} \| \Delta u \|_\Omega \leqslant \| \Delta v \| \leqslant 2 \| T(\varphi u) \| + 2C_2 \| \varphi u \| \leqslant \\ \leqslant 2 \| \varphi T u \| + 2C_2 \| \varphi u \| + 4 \| \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} u \| + \\ + 2 \| (\Delta\varphi) u \| + 4 \Big\| \Big(\sum_{j=1}^m b_j \partial_j \varphi \Big) u \Big\| \leqslant \\ \leqslant C_3 \{ \| Tu \|_{\Omega_\rho} + \| \operatorname{grad} u \|_{\Omega_{\rho_0}} + \| bu \|_{\Omega_{\rho_0}} + \| u \|_{\Omega_\rho} \} \end{aligned} \tag{3.8}$$

с некоторой новой константой C_3, зависящей от C_2 и верхних границ функции φ и ее производных, а следовательно, от Ω и ρ.

Выберем вещественную функцию $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ с носителем в $\Omega_{2\rho_0}$, такую, что $\psi(x) = 1$ при $x \in \Omega_{\rho_0}$, и положим $w = \psi u$. Тогда

$$\begin{aligned} \| \psi \operatorname{grad} u \|^2 = \int \psi^2 \sum_{j=1}^m | \partial_j u |^2 dx \leqslant \\ \leqslant 2 \int \psi^2 \Big\{ \sum_{j=1}^m | (i\partial_j + b_j) u |^2 + b^2 | u |^2 \Big\} dx = \\ = 2 \int u^* \sum_{j=1}^m (i\partial_j + b_j) [\psi^2 (i\partial_j + b_j) u] \, dx + 2 \| bw \|^2 = \\ = 2 \int \Big\{ \psi^2 u^* (Tu - qu) + 2\psi u^* i \sum_{j=1}^m (\partial_j \psi)(i\partial_j + b_j) u \Big\} dx + \end{aligned}$$

$$+2\|bw\|^2=2\langle w\,|\,\psi Tu\rangle-2\langle w\,|\,qw\rangle+$$
$$+4\left\langle u\,|\,i\sum_{j=1}^{m}(\partial_j\psi)(i\partial_j+b_j)\,w\right\rangle+4i\|u\operatorname{grad}\psi\|^2+$$
$$+2\|bw\|^2\leqslant\|w\|^2+\|\psi Tu\|^2+2\|pw\|^2+$$
$$+\frac{1}{32}\|\operatorname{grad}w\|^2+3\|bw\|^2+C_4\|u\|^2_{\Omega_{2\rho_0}},$$

где C_4 — верхняя граница для $136\ |\operatorname{grad}\psi|^2$. Из этой оценки видно, что

$$\|\operatorname{grad}w\|^2\leqslant2\|\psi\operatorname{grad}u\|^2+2\|u\operatorname{grad}\psi\|^2\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{16}\|\operatorname{grad}w\|^2+6\|bw\|^2+4\|pw\|^2+C_5\left(\|Tu\|^2_{\Omega_\rho}+\|u\|^2_{\Omega_\rho}\right),$$

или

$$\|\operatorname{grad}w\|+\|bw\|\leqslant\frac{1}{4}\|\operatorname{grad}w\|+4\|bw\|+ \tag{3.9}$$
$$+4\|pw\|+C_6\left(\|Tu\|_{\Omega_\rho}+\|u\|_{\Omega_\rho}\right).$$

Далее используем (3.6) с $\Psi=\Omega_{2\rho_0}$, $\sigma<\rho_0$ (так что $\Psi_\sigma\subset\Omega_{3\rho_0}=\Omega_\rho$) и функцией v, замененной на w; это дает

$$\|bw\|+\|pw\|\leqslant C_1\left(\sigma^{\beta/2}\|\operatorname{grad}w\|+\sigma^{-m/2}\|w\|\right).$$

Выберем σ_0 столь малое, что $4C_1\sigma_0^{\beta/2}<1/4$ (и $\sigma_0<\rho_0$); подставляя это неравенство в (3.9), получим

$$\|\operatorname{grad}w\|+\|bw\|\leqslant C_7\left(\|Tu\|_{\Omega_\rho}+\|u\|_{\Omega_\rho}\right),$$

где $C_7=2\left[C_6+4C_1\sigma_0^{-m/2}\right]$. Так как $w(x)=u(x)$ для всех $x\in\Omega_{\rho_0}$, мы имеем

$$\|\operatorname{grad}u\|_{\Omega_{\rho_0}}+\|bu\|_{\Omega_{\rho_0}}\leqslant C_7\left(\|Tu\|_{\Omega_\rho}+\|u\|_{\Omega_\rho}\right),$$

и искомый результат вытекает из (3.8).

3.10. Лемма. *Пусть T — оператор Шрёдингера в $L_2(\mathbf{R}^m)$; тогда для каждой функции $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ оператор $u\to\varphi u$ является T-компактным.*

Доказательство. Пусть (u_n) — произвольная ограниченная последовательность в $\mathrm{D}(T)$, для которой последовательность (Tu_n) также ограничена. Нам надо доказать, что для каждой функции $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ последовательность (φu_n) содержит сходящуюся подпоследовательность. Пусть $\Omega\subset\mathbf{R}^m$ — ограниченное открытое множество, содержащее носитель функции φ, и $\rho\in\,]0,1]$. Обозначим через v_n и Δv_n ограничения на область Ω_ρ

соответственно функций u_n и Δu_n и через w_n — ограничение функции u_n на Ω. В силу предположения и леммы 3.5 (примененной к Ω_ρ вместо Ω) последовательности (v_n) и (Δv_n) ограничены в $L_2(\Omega_\rho)$. Из тождества (2.5) вытекает, что $w_n = -K_\rho \Delta v_n + H_\rho v_n$, где K_ρ и H_ρ — компактные интегральные операторы из $L_2(\Omega_\rho)$ в $L_2(\Omega)$ (см. Йоргенс [13], теорема 4.2). Поэтому последовательность (w_n) в $L_2(\Omega)$ содержит некоторую сходящуюся подпоследовательность (w_{n_j}); отсюда следует, что последовательность (φu_{n_j}) сходится, что и требовалось доказать.

Комбинируя теорему 3.2 и лемму 3.10, получаем следующий результат.

3.11. Теорема. *Пусть T — оператор Шрёдингера в $L_2(\mathbf{R}^m)$, а V — замыкаемый оператор с $\mathrm{D}(V) \supset \mathrm{D}(T)$. Тогда для T-компактности оператора V необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовала такая функция $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$, что*

$$\| Vu \| \leqslant \varepsilon (\| u \| + \| Tu \|) + \| \varphi_\varepsilon u \|$$

при всех $u \in \mathrm{D}(T)$.

Дадим еще один критерий T-компактности, который иногда более удобен для приложений.

3.12. Теорема. *Пусть T — оператор Шрёдингера в $L_2(\mathbf{R}^m)$, а V — замыкаемый оператор с $\mathrm{D}(V) \supset \mathrm{D}(T)$. Тогда для T-компактности оператора V необходимо и достаточно, чтобы оператор V был T-мал на бесконечности и T-ограничен с T-границей нуль.*

Доказательство. Необходимость нами уже установлена (следствие 3.4). Докажем достаточность. По данному $\varepsilon > 0$ выберем $r > 0$ так, чтобы

$$\| Vu \| < \frac{\varepsilon}{4} (\| u \| + \| Tu \|)$$

для всех функций $u \in \mathrm{D}(T)$, обращающихся в нуль при $|x| \leqslant r$. Выберем еще число $a > 0$, для которого

$$\| Vu \| \leqslant a \| u \| + \frac{\varepsilon}{4} \| Tu \|$$

при всех $u \in \mathrm{D}(T)$. Пусть функция $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ такова, что $\varphi(x) = 1$ при $|x| \leqslant r$ и $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ при всех $x \in \mathbf{R}^m$. Функция $(1-\varphi)u$ равна нулю при $|x| \leqslant r$, и, следовательно,

$$\| Vu \| \leqslant \| V\varphi u \| + \| V(1-\varphi) u \| \leqslant \tag{3.13}$$

$$\leqslant a \| \varphi u \| + \frac{\varepsilon}{4} \| T\varphi u \| + \frac{\varepsilon}{4} (\| (1-\varphi) u \| + \| T(1-\varphi) u \|)$$

при всех $u \in \mathrm{D}(T)$. Далее,

$$T\varphi u-\varphi Tu=(1-\varphi)\,Tu-T\,(1-\varphi)\,u=$$
$$=2\operatorname{grad}\varphi\operatorname{grad}u+(\Delta\varphi)\,u+2i\Big(\sum_{j=1}^{m}b_j\,\partial_j\varphi\Big)\,u.$$

В силу лемм 2.3 и 2.4 норма полученного выражения оценивается величиной

$$\eta\,\|\Delta u\|_{\Omega_1}+C\,(\eta)\,\|u\|_{\Omega_1},$$

где Ω — носитель функции φ и число η можно взять сколь угодно малым. А эту величину, согласно лемме 3.5, можно в свою очередь оценить величиной

$$\eta C\,(\Omega_1,\,1)\,\|Tu\|_{\Omega_2}+(\eta C\,(\Omega_1,\,1)+C\,(\eta))\,\|u\|_{\Omega_2}.$$

Выберем η так, чтобы $\eta C\,(\Omega_1,\,1)\leqslant 1$. С учетом полученных оценок неравенство (3.13) дает

$$\|Vu\|\leqslant a\|\varphi u\|+\frac{\varepsilon}{4}(\|\varphi Tu\|+\|Tu\|_{\Omega_2})+$$
$$+\frac{\varepsilon}{4}(\|(1-\varphi)\,u\|+\|(1-\varphi)\,Tu\|+\|Tu\|_{\Omega_2})+C\,\|u\|_{\Omega_2}\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\,(\|u\|+\|Tu\|)+C'\,\|u\|_{\Omega_2}.$$

Наконец, если мы выберем функцию $\varphi_\varepsilon\in C_0^\infty\,(\mathbf{R}^m)$ так, чтобы $\varphi_\varepsilon\,(x)\geqslant C'$ при всех $x\in\Omega_2$, то, очевидно, $C'\,\|u\|_{\Omega_2}\leqslant\|\varphi_\varepsilon u\|$, и в силу теоремы 3.11 все доказано.

3.14. Следствие. *Пусть* $T=-\Delta$, $\mathrm{D}\,(T)=C_0^\infty\,(\mathbf{R}^m)$ *и*

$$A=2i\sum_{j=1}^{m}b_j\partial_j+b^2+q,\quad \mathrm{D}\,(A)=\mathrm{D}\,(T),$$

где $b_1,\ \ldots,\ b_m,\ q$ *вещественны,* $b^2\in Q_\alpha\,(\mathbf{R}^m)$, $q\in Q_\alpha\,(\mathbf{R}^m)$ *для некоторого* $\alpha>0$, $\sum_{j=1}^{m}\partial_j b_j=0$ *в смысле обобщенных функций и* $N_{b^2}\,(x)\to 0$, $N_q\,(x)\to 0$ *при* $|x|\to\infty$. *Тогда оператор* A *является* T*-компактным.*

Доказательство. Оператор A симметричен и, следовательно, замыкаем. В силу теоремы 2.7 он T-ограничен с T-границей нуль. Оценка (2.8) выполняется для всех $u\in\mathrm{D}\,(T)$ и $\rho\in\,]0,\,1]$; функция N в этой оценке, по условию, стремится к нулю при $|x|\to\infty$. Для данного $\varepsilon>0$ выберем сначала $\rho\in\,]0,\,1]$ так, чтобы $4C_4\rho^{\beta/2}\leqslant\varepsilon$, а затем $r\,(\varepsilon)>0$ так, чтобы $4C_4\rho^{-m/2-1}N\,(x)\leqslant\varepsilon$ при $|x|\geqslant r\,(\varepsilon)$. Для всех функций $u\in\mathrm{D}\,(T)$, обращающихся в нуль при $|x| \leqslant r(\varepsilon)$, выполняется неравенство $\|Au\| \leqslant \leqslant \varepsilon(\|u\| + \|Tu\|)$. Поэтому оператор A является T-малым на бесконечности, и, следовательно, он T-компактен по теореме 3.12.

Более общие критерии T-компактности дифференциального оператора A первого порядка, где T — оператор Шрёдингера, можно найти в работе К. Йоргенса [13].

Если оператор T существенно самосопряжен, а V симметричен и T-компактен, то V замыкаем и T — ограничен с T-границей нуль (следствие 3.4); поэтому по теореме Реллиха оператор $S = T + V$ существенно самосопряжен. Легко видеть, что оператор T является S-ограниченным и, следовательно, оператор V будет S-компактным. Комбинируя характеризацию 1.2(4′) существенного спектра с леммой 3.1, мы получаем хорошо известный результат о совпадении существенных спектров операторов T и S. Рассмотрим теперь более общий случай, когда оператор V T-мал на бесконечности, но не обязательно T-компактен.

3.15. Теорема. *Пусть T — существенно самосопряженный оператор Шрёдингера в $L_2(\mathbf{R}^m)$, а оператор V симметричен и T-мал на бесконечности. Если оператор $T + V$ существенно самосопряжен, то $\sigma_e(T) \subset \sigma_e(T + V)$; если, кроме того, оператор T ограничен снизу и $(T + V)$-ограничен, то*

$$\min\{\lambda\colon \lambda \in \sigma_e(T)\} = \min\{\lambda\colon \lambda \in \sigma_e(T + V)\}.$$

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma_e(T)$. Возьмем последовательность функций (u_n) в $\mathrm{D}(T)$, такую, что $\langle u_n \mid u_m \rangle = \delta_{nm}$ и $(\lambda - T)u_n \to \to 0$; это возможно в силу 1.2(3′). Для того чтобы установить справедливость первого утверждения теоремы, достаточно доказать, что $Vu_n \to 0$, ибо это соотношение влечет за собой соотношение $(\lambda - T - V)u_n \to 0$ и тогда $\lambda \in \sigma_e(T + V)$ в силу 1.2(3′). По условию теоремы существует такое $a > 0$, при котором

$$\|Vu\| \leqslant a(\|u\| + \|Tu\|) \tag{3.16}$$

для всех $u \in \mathrm{D}(T)$; далее, для данного $\varepsilon > 0$ существует такое число $r > 0$, что

$$\|Vu\| \leqslant \varepsilon(\|u\| + \|Tu\|) \tag{3.17}$$

для всех функций $u \in \mathrm{D}(T)$, обращающихся в нуль при $|x| \leqslant \leqslant r$. Выберем теперь функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ так же, как в доказательстве теоремы 3.12, и применим неравенства (3.16) и (3.17) соответственно к функциям φu и $(1 - \varphi)u$; воспользуемся еще оценкой

$$\|T\varphi u - \varphi Tu\| \leqslant C(\|u\|_{\Omega_2} + \|Tu\|_{\Omega_2}) \tag{3.18}$$

из того же доказательства. В результате получим, что

$$\| Vu \| \leqslant \varepsilon (\| u \| + \| Tu \|) + C' (\| u \|_{\Omega_2} + \| Tu \|_{\Omega_2})$$

для всех $u \in \mathrm{D}(T)$; здесь $C' = a + (a + \varepsilon) C$. Применим это неравенство к функции u_n. Поскольку $u_n \rightharpoonup 0$ и $Tu_n = \lambda u_n - (\lambda - T) u_n \rightharpoonup 0$, то $\| u_n \|_{\Omega_2} \to 0$ в силу лемм 3.10 и 3.1. Кроме того, выполняется соотношение

$$\| Tu_n \|_{\Omega_2} \leqslant | \lambda | \, \| u_n \|_{\Omega_2} + \| (\lambda - T) u_n \| \to 0.$$

Из приведенных выше оценок вытекает неравенство

$$\limsup \| Vu_n \| \leqslant \varepsilon \limsup (\| u_n \| + \| Tu_n \|).$$

Так как $u_n \rightharpoonup 0$ и $Tu_n \rightharpoonup 0$, то обе последовательности (u_n) и (Tu_n) ограничены и, значит, $Vu_n \to 0$.

Чтобы доказать второе утверждение теоремы, положим $\lambda_0 = \min \{\lambda: \lambda \in \sigma_e (T)\}$. Тогда $\min \{\lambda: \lambda \in \sigma_e (T + V)\} \leqslant \lambda_0$, ибо $\sigma_e (T) \subset \sigma_e (T + V)$. Следовательно, нам достаточно доказать неравенство $\lambda \geqslant \lambda_0$ для всех $\lambda \in \sigma_e (T + V)$. Для данного $\lambda \in \sigma_e (T + V)$ выберем последовательность (u_n) в $\mathrm{D}(T)$ так, чтобы $\langle u_n \mid u_m \rangle = \delta_{nm}$ и $(\lambda - T - V) u_n \to 0$; это возможно в силу 1.2(3′). Очевидно, $u_n \rightharpoonup 0$, $(T + V) u_n \rightharpoonup 0$, а так как оператор T является $(T + V)$-ограниченным, то и $Tu_n \rightharpoonup 0$. Для данного $\varepsilon > 0$ выберем $r > 0$ и функцию $\varphi \in C_0^\infty (\mathbf{R}^m)$ так же, как и в первой части доказательства. В силу леммы 3.10 $\varphi u_n \to 0$ и потому $| \langle Vu_n \mid \varphi u_n \rangle | \leqslant \| Vu_n \| \cdot \| \varphi u_n \| \to 0$, ибо последовательность (Vu_n) ограничена согласно (3.16). Так как оператор V симметричен и функция $(1 - \varphi) u_n$ равна нулю при $| x | \leqslant r$, мы имеем

$$\begin{aligned} | \langle Vu_n \mid (1 - \varphi) u_n \rangle | = \langle u_n \mid V (1 - \varphi) u_n \rangle | \leqslant \\ \leqslant \varepsilon \|u_n \| (\|(1 - \varphi) u_n \| + \| T (1 - \varphi) u_n \| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon \| u_n \| (1 + C) (\| u_n \| + \| Tu_n \|); \end{aligned}$$

здесь использована также оценка (3.18). Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \limsup | \langle Vu_n \mid u_n \rangle | \leqslant \\ \leqslant \limsup \{ | \langle Vu_n \mid \varphi u_n \rangle | + | \langle Vu_n \mid (1 - \varphi) u_n \rangle | \} \leqslant \\ \leqslant \varepsilon (1 + C) \limsup \| u_n \| (\| u_n \| | + \| Tu_n \|) \end{aligned}$$

и, значит, $\langle Vu_n \mid u_n \rangle \to 0$. Обозначим через $E(\cdot)$ спектральное семейство оператора $\overline{T}$ (самосопряженного расширения оператора T). В силу определения числа λ_0 и того факта, что оператор T ограничен снизу, для каждого $\eta > 0$ выполняется неравенство $\dim E (\lambda_0 - \eta) L_2 (\mathbf{R}^m) < \infty$. Поэтому из соотношения $u_n \rightharpoonup 0$

вытекает, что $E(\lambda_0 - \eta) u_n \to 0$ и, следовательно,

$$\lambda = \lim \langle (T + V) u_n \mid u_n \rangle = \lim \langle T u_n \mid u_n \rangle =$$
$$= \lim \langle T u_n \mid (I - E(\lambda_0 - \eta)) u_n \rangle \geqslant$$
$$\geqslant (\lambda_0 - \eta) \lim \|(I - E(\lambda_0 - \eta)) u_n\|^2 = \lambda_0 - \eta.$$

Таким образом, $\lambda \geqslant \lambda_0$, что и требовалось доказать.

3.19. Следствие. *Пусть T — существенно самосопряженный оператор Шрёдингера в $L_2(\mathbf{R}^m)$, а V — симметричный оператор, T-малый на бесконечности и такой, что оператор $T + V$ существенно самосопряжен и T является $(T + V)$-ограниченным.*

(1) *Если $T + V$ — оператор Шрёдингера, то $\sigma_e(T) = \sigma_e(T + V)$.*

(2) *Если оператор T ограничен снизу и $\sigma_e(T) = [\mu, \infty[$ для некоторого $\mu \in \mathbf{R}$, то $\sigma_e(T) = \sigma_e(T + V)$.*

Доказательство. (1): Пусть $S = T + V$. В силу теоремы 3.15 $\sigma_e(T) \subset \sigma_e(S)$. Так как оператор T является S-ограниченным, предположения теоремы 3.15 выполняются для операторов S и $-V$; поэтому $\sigma_e(S) \subset \sigma_e(S - V) = \sigma_e(T)$.

(2): В силу теоремы 3.15 мы имеем $[\mu, \infty[\subset \sigma_e(T + V)$ и $\min\{\lambda: \lambda \in \sigma_e(T + V)\} = \mu$; следовательно, $\sigma_e(T + V) = [\mu, \infty[$.

3.20. Замечание. Если оператор V симметричен и T-ограничен с T-границей, меньшей 1, то по теореме Реллиха оператор $T + V$ существенно самосопряжен и оператор T является $(T + V)$-ограниченным. Это ясно показывает, что в теореме 3.15 и следствии 3.19 оператор V не обязан быть T-компактным.

Оператор V в $L_2(\mathbf{R}^m)$ с $\mathrm{D}(V) = C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ называется *строго локальным*, если $\operatorname{supp}(Vu)$ содержится в $\operatorname{supp}(u)$ для каждой функции $u \in \mathrm{D}(V)$, или, что эквивалентно, если $\langle Vu \mid v \rangle = 0$ для всех функций $u, v \in \mathrm{D}(V)$ с $\operatorname{supp}(u) \cap \operatorname{supp}(v) = \varnothing$. Очевидно, что дифференциальные операторы строго локальны. В этом параграфе мы нигде (кроме первой части следствия 3.19) не требовали строгой локальности возмущающего оператора V. Однако, как показывает следующая теорема, из наших предположений вытекает некоторая «приближенная локальность».

3.21. Теорема. *Пусть T и V — операторы в $L_2(\mathbf{R}^m)$, и пусть V симметричен и T-мал на бесконечности. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\rho(\varepsilon) > 0$, что*

$$|\langle Vu \mid v \rangle| \leqslant \varepsilon (\|u\|^2 + \|Tu\|^2 + \|v\|^2 + \|Tv\|^2)$$

для всех функций $u, v \in \mathrm{D}(T)$, носители которых $\operatorname{supp}(u)$ и $\operatorname{supp}(v)$ отстоят один от другого на расстояние $d(\operatorname{supp}(u), \operatorname{supp}(v)) \geqslant \rho(\varepsilon)$.

Доказательство. Для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует такое $r(\varepsilon) > 0$, что $\| Vu \| \leqslant \varepsilon (\| u \| + \| Tu \|)$ для всех функций $u \in \mathrm{D}(T)$, таких, что $d(\{0\}, \operatorname{supp}(u)) \geqslant r(\varepsilon)$. Предположим, что $d(\operatorname{supp}(u), \operatorname{supp}(v)) \geqslant \rho(\varepsilon) = 2r(\varepsilon)$. Тогда либо $d(\{0\}, \operatorname{supp}(u)) \geqslant r(\varepsilon)$, либо $d(\{0\}, \operatorname{supp}(v)) \geqslant r(\varepsilon)$, а следовательно, либо

$$\| Vu \| \leqslant \varepsilon (\| u \| + \| Tu \|),$$

либо

$$\| Vv \| \leqslant \varepsilon (\| v \| + \| Tv \|).$$

В любом случае

$$| \langle Vu | v \rangle | = | \langle u | Vv \rangle | \leqslant \varepsilon (\| u \| + \| Tu \|)(\| v \| + \| Tv \|) \leqslant \\ \leqslant \varepsilon (\| u \|^2 + \| Tu \|^2 + \| v \|^2 + \| Tv \|^2).$$

§ 4. ПРИМЕРЫ

В качестве первого примера рассмотрим оператор $T = -\Delta$ и возмущающий оператор V, определенный для всех функций $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ равенством

$$Vu = \sum_{j,\,k=1}^{m} \partial_j a_{jk} \partial_k u,$$

где a_{jk} — непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию $a_{jk}(x) - a_{kj}(x)^*$ для всех $x \in \mathbf{R}^m$. Очевидно, оператор V симметричен. Если функции a_{jk} и их производные ограничены, то V является T-ограниченным. Чтобы убедиться в этом, запишем Vu в виде

$$Vu = \sum_{j,\,k=1}^{m} a_{jk} \partial_j \partial_k u + \sum_{j,\,k=1}^{m} (\partial_j a_{jk}) \partial_k u. \tag{4.1}$$

Функции $b_k = \sum_{j=1}^{m} \partial_j a_{jk}$ непрерывны и ограничены, поэтому $b_k \in \in Q_{2+\beta}(\mathbf{R}^m)$ для каждого $\beta \in]0, 2[$. В силу леммы 2.4 оператор

$$u \to \sum_{j=1}^{m} b_j \partial_j u$$

T-ограничен с T-границей нуль. Положим $a^2 = \sum_{j,\,k=1}^{m} | a_{jk} |^2$ и $\alpha = \max \{a(x) \colon x \in \mathbf{R}^m\}$. Тогда

$$\Big\| \sum_{j,\,k=1}^{m} a_{jk} \partial_j \partial_k u \Big\|^2 = \int \Big| \sum_{j,\,k=1}^{m} a_{jk} \partial_j \partial_k u \Big|^2 dx \leqslant \\ \leqslant \int a^2 \sum_{j,\,k=1}^{m} | \partial_j \partial_k u |^2 dx \leqslant \tag{4.2}$$

$$\leqslant \alpha^2 \sum_{j,\,k=1}^{m} \int |\partial_j \partial_k u|^2\, dx =$$
$$= \alpha^2 \sum_{j,\,k=1}^{m} \int (\partial_j^2 u)^* (\partial_k^2 u)\, dx =$$
$$= \alpha^2 \int |\Delta u|^2\, dx = \alpha^2 \| Tu \|^2.$$

Следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ существует константа $c(\varepsilon)$, такая, что $\| Vu \| \leqslant (\alpha + \varepsilon) \| Tu \| + c(\varepsilon) \| u \|$, т. е. оператор V является T-ограниченным с T-границей, не большей α. Наконец, предположим, что функции a_{jk} и их производные стремятся к нулю при $|x| \to \infty$; тогда оператор V будет T-малым на бесконечности. Для установления этого факта достаточно показать, что обе части оператора V в соотношении (4.1) T-малы на бесконечности. Для первой части T-малость на бесконечности следует из оценки (4.2), ибо там можно заменить α^2 на $\max \{a(x)^2 : |x| \geqslant r\}$, если $u(x) = 0$ при $|x| \leqslant r$; для второй части оператора V наше утверждение вытекает из леммы 2.4, так как $N_b(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Таким образом, нами доказана

4.3. Теорема. *Пусть* $a_{jk} \in C^1(\mathbf{R}^m)$, $a_{jk} = a_{kj}^*$,

$$a(x) = \Big\{ \sum_{j,\,k=1}^{m} |a_{jk}(x)|^2 \Big\}^{1/2} \to 0 \quad \text{и} \quad b_k(x) = \sum_{j=1}^{m} \partial_j a_{jk}(x) \to 0$$

при $|x| \to \infty$, $\alpha = \max \{a(x) : x \in \mathbf{R}^m\}$. *Тогда для* $T = -\Delta$ *оператор*

$$V = \sum_{j,\,k=1}^{m} \partial_j a_{jk} \partial_k \quad \text{с} \quad D(V) = C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$$

симметричен, T-ограничен с T-границей, не большей α, и T-мал на бесконечности.

4.4. Следствие. *Пусть в предположениях теоремы* 4.3 *число* α *меньше* 1. *Тогда оператор* $T + V$ *существенно самосопряжен и* $\sigma_e(T + V) = \sigma_e(T) = [0, \infty[$.

Это сразу вытекает из следствия 3.19 и замечания 3.20, так как оператор $T = -\Delta$ ограничен снизу (а именно, $T \geqslant 0$) и для него $\sigma_e(T) = [0, \infty[$ (оператор $\overline{T}$ унитарно эквивалентен максимальному оператору умножения на $|x|^2$ в $L_2(\mathbf{R}^m)$).

Оператор V не является T-компактным (за исключением случая $V = 0$). Чтобы убедиться в этом, возьмем единичный вектор $y \in \mathbf{R}^m$ и функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$, такие, что функция

$$g(x) = \sum_{j,\,k=1}^{m} a_{jk}(x)\, y_j y_k \varphi(x)$$

не равняется тождественно нулю, и затем выберем $\varepsilon > 0$, для которого $\varepsilon \| \varphi \| < \| g \|$. Определим последовательность (u_n) в $D(T)$ равенством

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2} \varphi(x) e^{ixyn}.$$

Тогда, очевидно, $u_n \to 0$ и, как показывают простые вычисления, $\| Tu_n \| \to \| \varphi \|$ и $\| Vu_n \| \to \| g \|$. Следовательно, не существует такой константы $a > 0$, что $\| Vu \| \leqslant a \| u \| + \varepsilon \| Tu \|$ для всех функций $u \in D(T)$, т. е. T-граница оператора V не равна нулю. Согласно следствию 3.4, оператор V не является T-компактным.

Рассмотрим теперь интегральный оператор

$$Ku(x) = \int K(x, y) u(y) \, dy. \tag{4.5}$$

4.6. Лемма. *Пусть $K(x, y) = K_1(x, y) K_2(x, y)$, где K_1 и K_2 — измеримые функции на $\mathbf{R}^{2m}$, такие, что*

$$\int |K_1(x, y)|^2 \, dy \leqslant C_1 \quad \textit{для почти всех } x \in \mathbf{R}^m,$$

$$\int |K_2(x, y)|^2 \, dx \leqslant C_2 \quad \textit{для почти всех } y \in \mathbf{R}^m.$$

Тогда формула (4.5) определяет ограниченный оператор K в пространстве $L_2(\mathbf{R}^m)$, такой, что $\| K \|^2 \leqslant C_1 C_2$. Если, кроме того, $\int |K_2(x, y)|^2 \, dx \to 0$ при $|y| \to \infty$, то оператор K мал на бесконечности, т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует число $r(\varepsilon) > 0$, такое, что $\| Ku \| \leqslant \varepsilon \| u \|$ для всех функций $u \in L_2(\mathbf{R}^m)$, обращающихся в нуль почти всюду в шаре $|x| \leqslant r(\varepsilon)$.

Доказательство. Первая часть леммы хорошо известна; мы приведем ее доказательство ради второй части. Для $u \in L_2(\mathbf{R}^m)$ имеем

$$|Ku(x)|^2 \leqslant \int |K_1(x, y)|^2 \, dy \int |K_2(x, y)|^2 |u(y)|^2 \, dy \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \int |K_2(x, y)|^2 |u(y)|^2 \, dy$$

и, следовательно,

$$\int |Ku(x)|^2 \, dx \leqslant C_1 \int |u(y)|^2 \left(\int |K_2(x, y)|^2 \, dx \right) dy.$$

Отсюда легко следует первое утверждение леммы. Для доказательства второго выберем по данному $\varepsilon > 0$ число $r(\varepsilon)$ так, чтобы $\int |K_2(x, y)|^2 \, dx \leqslant \varepsilon^2 / C_1$ при $|y| \geqslant r(\varepsilon)$. Тогда $\int |Ku(x)|^2 \, dx \leqslant \varepsilon^2 \int |u(y)|^2 \, dy$, что и требовалось доказать.

Комбинируя эту лемму и теорему 3.12, получаем

4.7. Следствие. *В предположениях леммы* 4.6 *оператор* K *является* T*-компактным для каждого оператора Шрёдингера* T *в* $L_2(\mathbf{R}^m)$.

Рассмотрим теперь интегро-дифференциальный оператор вида

$$(4.8)\qquad Vu=\sum_{j=1}^{m} K_j\partial_j u,\quad u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^m),$$

где K_j — интегральные операторы, такие же, как в лемме 4.6. Для $u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ при произвольном $\lambda>0$ выполняется неравенство

$$(4.9)\quad \|\partial_j u\|^2\leqslant\|\operatorname{grad} u\|^2=-\langle u\mid\Delta u\rangle\leqslant\lambda^2\|\Delta u\|^2+\frac{1}{4\lambda^2}\|u\|^2,$$

поэтому

$$\|Vu\|\leqslant\sum_{j=1}^{m}\|K_j\|\left(\lambda\|\Delta u\|+\frac{1}{2\lambda}\|u\|\right).$$

Отсюда следует T-ограниченность оператора V с нулевой T-границей для $T=-\Delta$. Из второго утверждения леммы 4.6 аналогично выводим, что оператор V является T-малым на бесконечности. Комбинируя этот результат с теоремой 3.12, получаем

4.10. Следствие. *Пусть* $K_1,\ldots,K_m$ — *интегральные операторы, удовлетворяющие всем предположениям леммы* 4.6, *и оператор* V, *определенный равенством* (4.8), *замыкаем (например, имметричен). Тогда* V *будет* T*-компактным для* $T=-\Delta$.

Дадим, наконец, пример, вообще говоря, нелокального симметричного оператора V, не являющегося T-компактным для $T=-\Delta$, но такого, что $\sigma_e(T+V)=\sigma_e(T)$. Пусть $a\in C^2(\mathbf{R}^m)$ — комплексная функция, которая вместе со своими производными первого и второго порядка стремится к нулю при $|x|\to\infty$. Обозначим через A оператор умножения на эту функцию в пространстве $L_2(\mathbf{R}^m)$. Пусть K — псевдодифференциальный оператор второго порядка, имеющий вид

$$Kf(x)=\operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty}(2\pi)^{-m/2}\int_{|y|\leqslant n}k(y)\,e^{ixy}\hat f(y)\,dy,$$

где $\hat f$ — фурье-преобразование функции f:

$$\hat f(y)=\operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty}(2\pi)^{-m/2}\int_{|y|\leqslant n}e^{-ixy}f(x)\,dx,$$

и k — вещественная измеримая функция на $\mathbf{R}^m$, удовлетворяющая условиям:

(4.11) $$|k(y)| \leqslant 1 + |y|^2 \text{ для всех } y \in \mathbf{R}^m,$$

(4.12) существует $z \in \mathbf{R}^m$ с $|z| = 1$, такое, что
$$\lim_{n\to\infty} n^{-2} k(y+nz) = c \neq 0 \quad \text{для всех } y \in \mathbf{R}^m.$$

Ввиду (4.11) оператор K определен на подпространстве $\mathrm{D}(K) = C_0^2(\mathbf{R}^m)$ всех функций $f \in C^2(\mathbf{R}^m)$ с компактным носителем, поскольку для таких f функция $(1 + |y|^2)\hat{f}(y)$ квадратично интегрируема.

4.13. Теорема. *Пусть A, K — операторы, определенные выше, $V = A^*KA$ и $T = -\Delta$. Тогда оператор V определен на* $\mathrm{D}(V) = C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$, *симметричен, T-ограничен с T-границей, не превосходящей α^2, где $\alpha = \max\{|a(x)|: x \in \mathbf{R}^m\}$, и T-мал на бесконечности. Оператор V не является T-компактным* (*за исключением случая* $V = 0$).

4.14. Следствие. *Пусть в предположениях теоремы* 4.13 α *меньше* 1. *Тогда оператор* $T + V$ *существенно самосопряжен и* $\sigma_e(T + V) = \sigma_e(T) = [0, \infty[$.

Доказывается это следствие так же, как и следствие 4.4.

Доказательство теоремы 4.13. Оператор A имеет областью определения $L_2(\mathbf{R}^m)$ и отображает $C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ в $C_0^2(\mathbf{R}^m) = \mathbf{D}(K)$; поэтому оператор V определен на $\mathbf{D}(V) = C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$. Для функций $f \in \mathrm{D}(K)$, очевидно, $(1 + |y|^2)\hat{f}(y) = (\widehat{f - \Delta f})(y)$; поэтому, используя (4.11), мы получаем, что
$$\|Kf\| = \|k\hat{f}\| \leqslant \|f - \Delta f\| \leqslant \|f\| + \|\Delta f\|,$$
и, значит, для функций $u \in \mathrm{D}(T)$ справедливо соотношение
$$\|Vu\| = \|a^*K(au)\| \leqslant \alpha\|K(au)\| \leqslant \alpha\|au\| + \alpha\|\Delta(au)\| \leqslant$$
$$\leqslant \alpha(\|au\| + \|a\Delta u\| + 2\|\operatorname{grad} a \operatorname{grad} u\| + \|u\Delta a\|).$$

По условию для всякого заданного $\varepsilon > 0$ существует такое число $r_\varepsilon > 0$, что $|a(x)| < \varepsilon/3\alpha$, $|\operatorname{grad} a(x)| < \varepsilon/3\alpha$ и $|\Delta a(x)| < \varepsilon/3\alpha$ при $|x| \geqslant r_\varepsilon$. Следовательно, если $u \in \mathrm{D}(T)$ и $u(x) = 0$ при $|x| \leqslant r_\varepsilon$, то
$$\|Vu\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}(2\|u\| + \|Tu\| + 2\|\operatorname{grad} u\|) \leqslant \varepsilon(\|u\| + \|Tu\|);$$
здесь использовано также неравенство (4.9) с $\lambda = 1$. Положим
$$\alpha_1 = \max\{|\operatorname{grad} a(x)|: x \in \mathbf{R}^m\},$$
$$\alpha_2 = \max\{|\Delta a(x)|: x \in \mathbf{R}^m\}.$$

Тогда, снова применяя (4.9), получаем, что для функций $u \in \mathrm{D}(T)$ выполняется неравенство

$$\| Vu \| \leqslant \alpha (\alpha \| u \| + \alpha \| Tu \| + 2\alpha_1 \| \operatorname{grad} u \| + \alpha_2 \| u \|) \leqslant \leqslant \alpha (\alpha + \alpha_2 + \alpha_1/\lambda) \| u \| + \alpha (\alpha + 2\alpha_1\lambda) \| Tu \|$$

при любом $\lambda > 0$. Следовательно, оператор V является T-ограниченным с T-границей, не большей α^2, и T-малым на бесконечности.

При $u \in \mathrm{D}(T)$ имеем

$$\langle u | Ku \rangle = (2\pi)^{-m/2} \int u(x)^* \int k(y) e^{ixy} \hat{u}(y)\, dy\, dx = = \int k(y) | \hat{u}(y) |^2 dy.$$

Это выражение вещественно, ибо функция k вещественна. Каждая функция $f \in \mathrm{D}(K)$ содержится в $\mathrm{D}(\overline{T}) = H_2^2(\mathbf{R}^m)$; поэтому существует последовательность (u_j) в $\mathrm{D}(T)$, такая, что справедливы соотношения $u_j \to f$ и $Tu_j \to \overline{T}f$. Поскольку оператор K является T-ограниченным, одновременно выполняется и соотношение $Ku_j \to Kf$, которое показывает, что величина $\langle f | Kf \rangle = \lim \langle u_j | Ku_j \rangle$ вещественна для всех $f \in \mathrm{D}(K)$, т. е. что оператор K симметричен. Следовательно, оператор $V = A^*KA$ также симметричен.

Докажем, наконец, что если $V \neq 0$, то T-граница оператора V отлична от нуля и, значит, согласно следствию 3.4, оператор V не является T-компактным. Соотношение $V \neq 0$ влечет за собой соотношение $a \neq 0$; поэтому существует функция $g \in \mathrm{D}(T)$ с $\| g \| = 1$, такая, что $\| \, | a |^2 g \| > 0$. Выберем какой-нибудь вектор $z \in \mathbf{R}^m$ с $| z | = 1$, удовлетворяющий условию (4.12), и положим

$$u_n(x) = n^{-2} g(x) e^{inxz}, \quad x \in \mathbf{R}^m, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Очевидно, $u_n \in \mathrm{D}(T)$, $u_n \to 0$, $\| Tu_n \| \to \| g \| = 1$ и

$$Vu_n(x) = (2\pi)^{-m/2} n^{-2} a(x)^* \int k(y) e^{ixy} (\widehat{ag})(y - nz)\, dy = = (2\pi)^{-m/2} n^{-2} e^{inxz} a(x)^* \int k(y + nz) e^{ixy} (\widehat{ag})(y)\, dy.$$

Для всех $y \in \mathbf{R}^m$ в силу (4.12) выполняется соотношение $n^{-2} k(y + nz) \to c$ при $n \to \infty$, а в силу (4.11) имеет место оценка

$$n^{-2} | k(y + nz) | \leqslant n^{-2} (1 + | y + nz |^2) \leqslant \leqslant n^{-2} (1 + 2 | y |^2 + 2n^2 | z |^2) \leqslant 3 + 2 | y |^2,$$

где $n = 1, 2, \ldots$. Так как функция $(3 + 2 | y |^2)(\widehat{ag})(y)$ квадратично интегрируема, то функции $n^{-2} k(y + nz)(\widehat{ag})(y)$ стремятся к $c\,\widehat{(ag)}\,(y)$ в среднем квадратичном и, значит, последовательность

$$(2\pi)^{-m/2}\, n^{-2} \int k\,(y+nz)\, e^{ixy}\, \widehat{(ag)}\,(y)\, dy$$

сходится в $L_2\,(\mathbf{R}^m)$ к функции cag. Отсюда вытекает, что $\|\,Vu_n\,\| \to |\,c\,|\,\|\,|\,a\,|^2\, g\,\| > 0$. Если бы оператор V имел нулевую T-границу, то для каждого $\varepsilon > 0$ существовало бы число $a_\varepsilon > 0$, такое, что

$$\|\,Vu\,\| \leqslant a_\varepsilon\, \|\,u\,\| + \varepsilon\, \|\,Tu\,\| \text{ для всех } u \in \mathrm{D}\,(T).$$

При $\varepsilon < |\,c\,|\,\|\,|\,a\,|^2\, g\,\|$ и $u = u_n$ мы имели бы

$$|\,c\,|\,\|\,|\,a\,|^2 g\,\| = \lim \|\,Vu_n\,\| \leqslant \lim\,(a_\varepsilon\,\|\,u_n\,\| + \varepsilon\,\|\,Tu_n\,\|) = \varepsilon$$

— противоречие. Доказательство закончено.

Оператор V из теоремы 4.13 является дифференциальным тогда и только тогда, когда k — многочлен. С другой стороны, оператор K, а следовательно и V, строго локален, тогда и только тогда, когда K, а следовательно и V, является дифференциальным оператором (см. Хелгасон [7], стр. 242). Таким образом, оператор V строго локален тогда и только тогда, когда k — многочлен.

Более общие примеры операторов, обладающих теми же свойствами, можно получить, взяв конечные или даже бесконечные суммы операторов указанного вида.

§ 5. ОПЕРАТОРЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ ТОЛЬКО НА ЧАСТЬ ПЕРЕМЕННЫХ

В этом параграфе приведены некоторые предварительные результаты, нужные для определения гамильтоновых операторов N-частичных систем, которое будет дано в § 6. Мы всегда рассматриваем операторы, действующие в гильбертовом пространстве $L_2\,(\mathbf{R}^{3N})$ и имеющие область определения $C_0^\infty\,(\mathbf{R}^{3N})$. Вектор $x \in \mathbf{R}^{3N}$ будем записывать так: $x = (x_1, \ldots, x_N)$, где $x_j \in \mathbf{R}^3$. Пусть $n \in \mathbf{N}$, $1 \leqslant n \leqslant N$, и $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_n \leqslant N$. Для краткости полагаем: $x_{(1)} = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})$; $x_{(2)}$ — вектор, составленный из переменных, не вошедших в $x_{(1)}$ (если $n < N$); $x = (x_{(1)}, x_{(2)})$; $u\,(x) = u\,(x_{(1)}, x_{(2)})$ для функций u, определенных на $\mathbf{R}^{3N}$. Отметим, что если $u \in C_0^\infty\,(\mathbf{R}^{3N})$, то для каждого $x_{(2)} \in \mathbf{R}^{3(N-n)}$ функция $u\,(\cdot, x_{(2)})$ принадлежит $C_0^\infty\,(\mathbf{R}^{3n})$.

5.1. Определение. Пусть B — некоторый оператор в $L_2\,(\mathbf{R}^{3N})$ с областью $\mathrm{D}\,(B) = C_0^\infty\,(\mathbf{R}^{3N})$. Будем говорить, что оператор B *действует только на переменные* $x_{(1)} = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})$, если в пространстве $L_2(\mathbf{R}^{3n})$ существует такой оператор A с областью определения $\mathrm{D}(A) = C_0^\infty(\mathbf{R}^{3n})$, что $(Bu)(x) = (Au(\cdot, x_{(2)}))(x_1)$ для всех $x \in \mathbf{R}^{3N}$ и всех $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$. Об операторе A говорят, что он *порождает* оператор B.

5.2. Теорема. *Для каждого оператора A в $L_2(\mathbf{R}^{3n})$ с $\mathrm{D}(A) = C_0^\infty(\mathbf{R}^{3n})$ и каждого набора n целых чисел j_i, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_n \leqslant N$, существует единственный оператор B в $L_2(\mathbf{R}^{3N})$ с $\mathrm{D}(B) = C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$, такой, что B действует только на переменные $x_{(1)} = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})$ и порождается оператором A. Оператор A симметричен тогда и только тогда, когда B симметричен, и существенно самосопряжен тогда и только тогда, когда B существенно самосопряжен.*

Доказательство. Определим оператор B равенством $(Bu)(x) = (Au(\cdot, x_{(2)}))(x_{(1)})$ для всех $x \in \mathbf{R}^{3N}$ и $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$. Он обладает требуемыми свойствами. Если C — другой оператор с этими же свойствами, то в силу определения 5.1 $(Cu)(x) = (Au(\cdot, x_{(2)}))(x_{(1)}) = (Bu)(x)$ для всех $x \in \mathbf{R}^{3N}$ и всех $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$ и, следовательно, $C = B$.

Пусть оператор A симметричен. Обозначим через $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_1$ и $\| \cdot \|_1$ соответственно скалярное произведение и норму в $L_2(\mathbf{R}^{3n})$. Имеем

$$\langle Bu \mid v \rangle = \int \langle Au(\cdot, x_{(2)}) \mid v(\cdot, x_{(2)}) \rangle_1 \, dx_{(2)} = \\ = \int \langle u(\cdot, x_{(2)}) \mid Av(\cdot, x_{(2)}) \rangle_1 \, dx_{(2)} = \langle u \mid Bv \rangle$$

для всех $u, v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$. Так как множество $C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$ плотно (в $L_2(\mathbf{R}^{3N})$), то оператор B симметричен. Если B симметричен, то написанное выше соотношение выполняется для всех $u, v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$. Положим в нем $u(x) = u_1(x_{(1)}) u_2(x_{(2)})$ и $v(x) = v_1(x_{(1)}) v_2(x_{(2)})$, где $u_1, v_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3n})$, $u_2, v_2 \in C_0^2(\mathbf{R}^{3(N-n)})$. Тогда при $\langle u_2 \mid v_2 \rangle_2 \neq 0$ получим, что $\langle Au_1 \mid v_1 \rangle_1 = \langle u_1 \mid Av_1 \rangle_1$ для всех $u_1, v_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3n})$. Поскольку $C_0^\infty(\mathbf{R}^{3n})$ плотно в $L_2(\mathbf{R}^{3n})$, оператор A симметричен.

Пусть оператор A существенно самосопряжен. Тогда множество $(A - zI)\,\mathrm{D}(A)$ плотно в $L_2(\mathbf{R}^{3n})$ для каждого невещественного z. Обозначим через $\mathrm{D}_0(B)$ подпространство $C_0^\infty(\mathbf{R}^{3n}) \otimes C_0^\infty(\mathbf{R}^{3(N-n)})$, состоящее из конечных сумм элементов $u = v \otimes w$, где $v \in \mathrm{D}(A)$ и $w \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3(N-n)})$, т. е. $u(x) = v(x_{(1)})\, w(x_{(2)})$ $(x = (x_{(1)}, x_{(2)}) \in \mathbf{R}^{3N})$. Для этих элементов мы имеем

$$(B - zI)(v \otimes w) = (A - zI)\, v \otimes w,$$

откуда

$$(B-zI)\,\mathrm{D}_0(B)=(A-zI)\,\mathrm{D}(A)\otimes C_0^\infty(\mathbf{R}^{3(N-n)}).$$

Для невещественного z подпространство $(A-zI)\,\mathrm{D}(A)$ плотно в $L_2(\mathbf{R}^{3n})$, поэтому $(B-zI)\,\mathrm{D}_0(B)$, а значит, и $(B-zI)\,\mathrm{D}(B)$ плотны в $L_2(\mathbf{R}^{3N})$, чем доказана существенная самосопряженность оператора B. Если оператор A не является существенно самосопряженным, то для каждого $z\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$ существует функция $f\in\in L_2(\mathbf{R}^{3n})$, $f\neq 0$, ортогональная к $(A-zI)\,\mathrm{D}(A)$. Поэтому для каждой функции $u\in\mathrm{D}(B)$ и каждого $x_{(2)}\in\mathbf{R}^{3(N-n)}$ выполняется соотношение $f\perp(B-zI)\,u(\cdot,x_{(2)})$ и, значит, $f\otimes g\perp(B-zI)\,\mathrm{D}(B)$ для каждой функции $g\in L_2(\mathbf{R}^{3(N-n)})$. Следовательно, оператор B не является существенно самосопряженным. Все доказано.

Единственный оператор B, существующий согласно теореме 5.2, мы будем обозначать через $A_{j_1,\ldots,j_n}$.

Пусть $\mu_1,\ldots,\mu_N$ — положительные числа. Для каждого набора n целых чисел j_i, $1\leqslant j_1<\ldots<j_n\leqslant N$, определим оператор $T^{j_1\ldots j_n}$ в $L_2(\mathbf{R}^{3n})$ формулой

$$T^{j_1\ldots j_n}u=-\sum_{i=1}^{n}(2\mu_{j_i})^{-1}\Delta_i u$$

для всех $u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3n})$, где Δ_i обозначает лапласиан по переменной $x_i\in\mathbf{R}^3$. Применим конструкцию теоремы 5.2 к оператору $A=T^{j_1\ldots j_n}$. Получим оператор $A_{j_1\ldots j_n}=T^{j_1\ldots j_n}_{j_1\ldots j_n}$, определяемый равенством

$$T^{j_1\ldots j_n}_{j_1\ldots j_n}u=-\sum_{i=1}^{n}(2\mu_{j_i})^{-1}\Delta_{j_i}u$$

для всех $u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$. В дальнейшем мы будем писать $T_{j_1\ldots j_n}$ вместо $T^{j_1\ldots j_n}_{j_1\ldots j_n}$ и T вместо $T_{1\ldots N}=T^{1\ldots N}_{1\ldots N}$.

5.3. Теорема. *Оператор $T_{j_1\ldots j_n}$ является T-ограниченным с T-границей, не большей 1; более точно:* $\|T_{j_1\ldots j_n}u\|\leqslant\|Tu\|$ *для всех* $u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$.

Доказательство. Пусть символ F обозначает преобразование Фурье в $L_2(\mathbf{R}^{3N})$. При $u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$, очевидно, $(F\Delta_j u)(x)=-|x_j|^2(Fu)(x)$ и поэтому

$$\|T_{j_1\ldots j_n}u\|^2=\int\Big\{\sum_{i=1}^{n}(2\mu_{j_i})^{-1}|x_{j_i}|^2|(Fu)(x)|\Big\}^2dx\leqslant$$

$$\leqslant\int\Big\{\sum_{j=1}^{N}(2\mu_j)^{-1}|x_j|^2|(Fu)(x)|\Big\}^2dx=\|Tu\|^2,$$

что и требовалось доказать.

5.4. Теорема. *Пусть оператор A в $L_2(\mathbf{R}^{3n})$ является $T^{j_1\ldots j_n}$-ограниченным с $T^{j_1\ldots j_n}$-границей, не превосходящей некоторого числа b. Тогда оператор $A_{j_1\ldots j_n}$ одновременно $T_{j_1\ldots j_n}$-ограничен и T-ограничен с $T_{j_1\ldots j_n}$- и T-границами, не превосходящими b.*

Доказательство. По условию для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $a_\varepsilon \geqslant 0$, что

$$\| Au \|_1 \leqslant a_\varepsilon \| u \|_1 + (b+\varepsilon) \| T^{j_1\ldots j_n} u \|_1$$

для всех $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3n})$. Поэтому для каждого $\delta > 0$ существует такое $c_\delta > 0$, что

$$\| Au \|_1^2 \leqslant c_\delta^2 \| u \|_1^2 + (b+\delta)^2 \| T^{j_1\ldots j_n} u \|_1^2$$

для всех $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3n})$. Следовательно,

$$\int |(A_{j_1\ldots j_n} u)(x_{(1)}, x_{(2)})|^2 \, dx_{(1)} = \| Au(\cdot, x_{(2)}) \|_1^2 \leqslant$$
$$\leqslant c_\delta^2 \| u(\cdot, x_{(2)}) \|_1^2 + (b+\delta)^2 \| T^{j_1\ldots j_n} u(\cdot, x_{(2)}) \|_1^2 =$$
$$= \int \{ c_\delta^2 | u(x_{(1)}, x_{(2)}) |^2 + (b+\delta)^2 | T_{j_1\ldots j_n} u(x_{(1)}, x_{(2)}) |^2 \} \, dx_{(1)}$$

для всех $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$ и всех $x_{(2)} \in \mathbf{R}^{3(N-n)}$. Интегрируя по $x_{(2)}$, получим

$$\| A_{j_1\ldots j_n} u \|^2 \leqslant c_\delta^2 \| u \|^2 + (b+\delta)^2 \| T_{j_1\ldots j_n} u \|^2,$$

откуда

$$\| A_{j_1\ldots j_n} u \| \leqslant c_\delta \| u \| + (b+\delta) \| T_{j_1\ldots j_n} u \|$$

для всех $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$. Таким образом, оператор $A_{j_1\ldots j_n}$ является $T_{j_1\ldots j_n}$-ограниченным с $T_{j_1\ldots j_n}$-границей, не превосходящей b.

В силу теоремы 5.3 оператор $T_{j_1\ldots j_n}$ в последнем неравенстве можно заменить на T; поэтому оператор $T_{j_1\ldots j_n}$ также T-ограничен с T-границей, не превосходящей b.

5.5. Теорема. *Пусть оператор A является $T^{j_1\ldots j_n}$-малым на бесконечности. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $r_\varepsilon > 0$, что*

$$\| A_{j_1\ldots j_n} u \| \leqslant \varepsilon (\| u \| + \| T_{j_1\ldots j_n} u \|)$$

для всех функций $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$, удовлетворяющих условию: $u(x) = 0$ при всех $x \in \mathbf{R}^{3N}$ с $\left(\sum_{i=1}^{n} | x_{j_i} |^2 \right)^{1/2} \leqslant r_\varepsilon$.

Доказательство. Согласно предположению теоремы и определению 3.3, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $r_\varepsilon > 0$, что

$$\| Aw \|_1 \leqslant 2^{-1/2}\varepsilon\,(\| w \|_1 + \| T^{j_1 \ldots j_n} w \|_1)$$

для всех функций $w \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3n})$, удовлетворяющих условию $w(x) = 0$ при $|x| \leqslant r_\varepsilon$. Следовательно, для таких функций w

$$\| Aw \|_1^2 \leqslant \varepsilon^2 (\| w \|_1^2 + \| T^{j_1 \ldots j_n} w \|_1^2).$$

Пусть $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$ и $u(x) = 0$ для всех $x \in \mathbf{R}^{3N}$ с $\left(\sum_{i=1}^{n} | x_{j_i} |^2\right)^{1/2} \leqslant r_\varepsilon$; положим $w = u(\cdot, x_{(2)})$ для фиксированного $x_{(2)} \in \mathbf{R}^{3(N-n)}$. Очевидно, $w \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3n})$ и $w(x_{(1)}) = 0$ при $|x_{(1)}| \leqslant r_\varepsilon$; поэтому

$$\| (A_{j_1 \ldots j_n})(\cdot, x_{(2)}) \|_1^2 = \| Aw \|_1^2 \leqslant \varepsilon^2 (\| w \|_1^2 + \| T^{j_1 \ldots j_n} w \|_1^2) =$$
$$= \varepsilon^2 (\| u(\cdot, x_{(2)}) \|_1^2 + \| (T_{j_1 \ldots j_n} u)(\cdot, x_{(2)}) \|_1^2).$$

Интегрируя по $x_{(2)}$, получим

$$\| A_{j_1 \ldots j_n} u \|^2 \leqslant \varepsilon^2 (\| u \|^2 + \| T_{j_1 \ldots j_n} u \|^2).$$

Теорема доказана.

5.6. Теорема. *Пусть оператор A симметричен и $T^{j_1 \ldots j_n}$-мал на бесконечности. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\rho_\varepsilon > 0$, что*

$$| \langle A_{j_1 \ldots j_n} u \mid v \rangle | \leqslant \varepsilon \{ \| u \|^2 + \| T_{j_1 \ldots j_n} u \|^2 + \| v \|^2 + \| T_{j_1 \ldots j_n} v \|^2 \}$$

для всех функций u, $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$, носители которых отстоят друг от друга на расстояние $d(\operatorname{supp}(u), \operatorname{supp}(v)) > \rho_\varepsilon$.

Доказательство. Согласно теореме 3.21, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\rho_\varepsilon > 0$, что

$$| \langle Au_1 \mid v_1 \rangle | \leqslant \varepsilon \{ \| u_1 \|_1^2 + \| T^{j_1 \ldots j_n} u_1 \|_1^2 + \| v_1 \|_1^2 + \| T^{j_1 \ldots j_n} v_1 \|_1^2 \}$$

для всех функций u_1, $v_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3n})$, удовлетворяющих условию $d(\operatorname{supp}(u_1), \operatorname{supp}(v_1)) \geqslant \rho_\varepsilon$. Возьмем функции u, $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$, для которых $d(\operatorname{supp}(u), \operatorname{supp}(v)) \geqslant \rho_\varepsilon$, и положим $u_1 = u(\cdot, x_{(2)})$, $v_1 = v(\cdot, x_{(2)})$ при фиксированном $x_{(2)} \in \mathbf{R}^{3(N-n)}$. Тогда u_1, $v_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3n})$ и $d(\operatorname{supp}(u_1), \operatorname{supp}(v_1)) \geqslant \rho_\varepsilon$, поэтому

$$| \langle (A_{j_1 \ldots j_n} u)(\cdot, x_{(2)}) \mid v(\cdot, x_{(2)}) \rangle_1 | = | \langle Au_1 \mid v_1 \rangle | \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \{ \| u_1 \|_1^2 + \| T^{j_1 \ldots j_n} u_1 \|_1^2 + \| v_1 \|_1^2 + \| T^{j_1 \ldots j_n} v_1 \|_1^2 \} =$$
$$= \varepsilon \{ \| u(\cdot, x_{(2)}) \|_1^2 + \| (T_{j_1 \ldots j_n} u)(\cdot, x_{(2)}) \|_1^2 +$$
$$+ \| v(\cdot, x_{(2)}) \|_1^2 + \| (T_{j_1 \ldots j_n} v)(\cdot, x_{(2)}) \|_1^2 \}.$$

Доказываемое утверждение получается теперь интегрированием по $x_{(2)}$.

§ 6. N-ЧАСТИЧНЫЕ ГАМИЛЬТОНИАНЫ

Гамильтонов оператор (или *гамильтониан*) N-частичной системы — это оператор вида

$$(6.0)\qquad S=T+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j_1<\ldots<j_n} V_{j_1\ldots j_n}+\sum_{n=2}^{N}\sum_{j_1<\ldots<j_n} W_{j_1\ldots j_n},$$

где T — оператор кинетической энергии частиц системы, и для любого набора n целых чисел j_i, $1\leqslant j_1<j_2<\ldots<j_n\leqslant N$, операторы $V_{j_1\ldots j_n}$ и $W_{j_1\ldots j_n}$ описывают взаимодействие подсистемы, состоящей из n частиц с номерами $j_1,\ldots,j_n$ соответственно с полем внешней силы и друг с другом. Мы рассмотрим здесь частный случай, когда все частицы имеют спин, равный нулю; обобщение на случай произвольного спина будет дано в приложении. Для нулевого спина S является оператором в пространстве $L_2(\mathbf{R}^{3N})$ с областью определения $\mathrm{D}(S)=C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$. Приступим к исследованию операторов T, $V_{j_1\ldots j_n}$ и $W_{j_1\ldots j_n}$.

Оператор T кинетической энергии N частиц уже был определен в § 5; положительное число μ_j есть масса j-й частицы, $j=1,\ldots,N$. Аналогично, определенный в § 5 оператор $T_{j_1\ldots j_n}$ — это оператор кинетической энергии подсистемы $j_1,\ldots,j_n$.

6.1. Теорема. *Операторы $T_{j_1\ldots j_n}$ и T существенно самосопряжены.*

Доказательство. В силу теоремы 5.2 достаточно показать, что оператор $T^{j_1\ldots j_n}$ в $L_2(\mathbf{R}^{3n})$ существенно самосопряжен. Определим в $L_2(\mathbf{R}^{3n})$ оператор U формулой

$$(Uf)(x)=\prod_{i=1}^{n}(2\mu_{j_i})^{-3/4}f\left((2\mu_{j_1})^{-1/2}x_1,\ldots,(2\mu_{j_n})^{-1/2}x_n\right)$$

для всех $x\in\mathbf{R}^{3n}$ и $f\in L_2(\mathbf{R}^{3n})$. Из этого определения видно, что оператор U унитарен, $UC_0^\infty(\mathbf{R}^{3n})=C_0^\infty(\mathbf{R}^{3n})$ и $UT^{j_1\ldots j_n}U^*=-\Delta$ (оператор Лапласа с областью определения $C_0^\infty(\mathbf{R}^{3n})$). Хорошо известно, что оператор $-\Delta$ в $L_2(\mathbf{R}^{3n})$, определенный на $C_0^\infty(\mathbf{R}^{3n})$, существенно самосопряжен (см., например, Като [15], V,5.2). Следовательно, оператор $T^{j_1\ldots j_n}$ унитарно эквивалентен существенно самосопряженному оператору и поэтому существенно самосопряжен.

Мы предполагаем, что для каждой подсистемы из n частиц $j_1,\ldots,j_n$ $(1\leqslant n\leqslant N)$ оператор $V_{j_1\ldots j_n}$ действует только на переменные $x_{j_1},\ldots,x_{j_n}$ и порождается некоторым симметричным оператором $V^{j_1\ldots j_n}$ в $L_2(\mathbf{R}^{3n})$, который $T^{j_1\ldots j_n}$-мал на бесконечности (заметим, что, согласно определению 3.3, это влечет за собой $T^{j_1\ldots j_n}$-ограниченность оператора $V^{j_1\ldots j_n}$).

Физическая мотивировка наших предположений относительно $V_{j_1 \ldots j_n}$ состоит в том, что оператор $V_{j_1 \ldots j_n}$ описывает взаимодействие подсистемы $j_1, \ldots, j_n$ с внешним силовым полем; в частности, $T^{j_1 \ldots j_n}$-малость на бесконечности приводит к малости взаимодействия, когда по крайней мере одна из частиц подсистемы удалена на большое расстояние от начала координат. Такие взаимодействия называются *n-частичными взаимодействиями с полем.* Из теорем § 5 вытекает следующее утверждение.

6.2. Следствие. a) *Оператор $V_{j_1 \ldots j_n}$ симметричен и $T_{j_1 \ldots j_n}$-ограничен с $T_{j_1 \ldots j_n}$-границей, не превосходящей $T^{j_1 \ldots j_n}$-границы оператора $V^{j_1 \ldots j_n}$.*

b) *Для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $r_\varepsilon > 0$, что*

$$\| V_{j_1 \ldots j_n} u \| \leqslant \varepsilon (\| u \| + \| T_{j_1 \ldots j_n} u \|)$$

для всех функций $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$, удовлетворяющих условию: $u(x) = 0$ при всех x с $\left(\sum_{i=1}^{n} | x_{j_i} |^2\right)^{1/2} \leqslant r_\varepsilon$.

c) *Для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\rho_\varepsilon > 0$, что*

$$| \langle V_{j_1 \ldots j_n} u \mid v \rangle | \leqslant \varepsilon \{ \| u \|^2 + \| T_{j_1 \ldots j_n} u \|^2 + \| v \|^2 + \| T_{j_1 \ldots j_n} v \|^2 \}$$

для всех функций $u, v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$ с $d(\operatorname{supp}(u), \operatorname{supp}(v)) \geqslant \rho_\varepsilon$.

Для определения операторов $W_{j_1 \ldots j_n}$ нам понадобится понятие *внутренних координат* подсистемы. Пусть $j_1, \ldots, j_n$ — фиксированная подсистема $(2 \leqslant n \leqslant N)$ и $j_{n+1}, \ldots, j_N$ (при $n < N$) — те из чисел $1, \ldots, N$, которые в нее не вошли. Пусть a: $\mathbf{R}^{3N} \to \mathbf{R}^{3N}$ — линейное отображение вида $ax = (y_1, \ldots, y_N)$, где

$$(6.3) \qquad \begin{aligned} y_i &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{j_k} \quad \text{при } i = 1, \ldots, n, \\ y_i &= x_{j_i} \quad \text{при } i = n+1, \ldots, N, \end{aligned}$$

а числа a_{ik} удовлетворяют условиям

$$(6.3') \qquad a_{nk} = \mu^{-1} \mu_{j_k} \ \text{при } k = 1, \ldots, n, \ \text{где } \mu = \sum_{k=1}^{n} \mu_{j_k},$$

$$(6.3'') \qquad \sum_{k=1}^{n} (2\mu_{j_k})^{-1} a_{ik} a_{jk} = (2\mu_i')^{-1} \delta_{ij} \ \text{при } i, j = 1, \ldots, n$$

с некоторыми положительными числами μ_i'. Из (6.3′) и (6.3″) следует, что $\mu_n' = \mu$, в то время как положительные числа $\mu_1', \ldots, \mu_{n-1}'$ могут быть выбраны произвольно; для удобства мы потребуем, чтобы $\mu_i' = {}^1/_2$ при $i = 1, \ldots, n-1$. Тогда μ — это *полная масса* подсистемы и $y_n = \mu^{-1} \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_{j_i} x_{j_i}$ — координата ее *центра масс*. Переменные $y_1, \ldots, y_{n-1}$ называются *внутренними координатами* подсистемы. Они инвариантны относительно трансляций системы как целого, т. е. если $x' = (x_1 + z, \ldots, x_N + z)$, то

$$ax' = (y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n + z, \ldots, y_N + z).$$

Чтобы убедиться в этом, возьмем в (6.3″) $i = 1, \ldots, n - 1$ и $j = n$. Тогда в силу (6.3′) получим, что $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} = 0$, откуда и следует инвариантность координат y_i относительно трансляций.

Из соотношения (6.3″) вытекает также, что преобразование a имеет определить $|a| \neq 0$ и потому обратимо. Определим в пространстве $L_2(\mathbf{R}^{3N})$ унитарный оператор U формулой

$$(Uf)(y) = |a|^{-1/2} f(a^{-1}y), \quad y \in \mathbf{R}^{3N}, \tag{6.4}$$

для $f \in L_2(\mathbf{R}^{3N})$. Тогда $UC_0^\infty(\mathbf{R}^{3N}) = C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$, и оператор $T' = UTU^*$ имеет областью определения $C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$ и может быть представлен в виде

$$T' = T'_{1\ldots n-1} + T'_n + T'_{n+1\ldots N},$$

где операторы

$$T'_{1\ldots n-1}, \; T'_n \text{ и } T'_{n+1\ldots N}$$

соответственно действуют на переменные

$$(y_1, \ldots, y_{n-1}), \; y_n \text{ и } (y_{n+1}, \ldots, y_N)$$

и порождаются операторами

$$-\sum_{i=1}^{n-1} \Delta_i, \quad -(2\mu)^{-1} \Delta_n \text{ и } -\sum_{i=n+1}^{N} (2\mu_{j_i})^{-1} \Delta_i.$$

Во внутренних координатах $T'_{1\ldots n-1}$ — это оператор кинетической энергии относительного движения частиц подсистемы $1, \ldots, n - 1$, а T'_n — оператор энергии трансляции рассматриваемой системы. Сумма $T'_{1\ldots n} = T'_{1\ldots n-1} + T'_n$ представляет собой полную кинетическую энергию подсистемы; фактически $T'_{1\ldots n} = UT_{j_1\ldots j_n}U^*$. Введем теперь операторы

$$\hat{T}_{j_1\ldots j_n} = U^* T'_{1\ldots n-1} U, \quad \tilde{T}_{j_1\ldots j_n} = U^* T'_n U, \tag{6.5}$$

которые мы назовем соответственно операторами *внутренней кинетической энергии* и *энергии трансляции* подсистемы $j_1, \ldots, j_n$. Эти операторы не зависят от выбора внутренних координат. Действительно, непосредственное вычисление, основанное на соотношениях (6.3), (6.3′) и (6.3″), показывает, что оператор

(6.5′)
$$\widetilde{T}_{j_1\ldots j_n} = -(2\mu)^{-1} \sum_{i,\,k=1}^{n} \operatorname{grad}_{j_i} \operatorname{grad}_{j_k}$$

не зависит от выбора преобразования (6.3) и, следовательно, оператор $\hat{T}_{j_1\ldots j_n} = T_{j_1\ldots j_n} - \widetilde{T}_{j_1\ldots j_n}$ также от него не зависит. В частном случае $n = N$ полагаем $\hat{T} = \hat{T}_{1\ldots N}$, $\widetilde{T} = \widetilde{T}_{1\ldots N}$.

6.6. Лемма. *Операторы $\hat{T}_{j_1\ldots j_n}$ и $\widetilde{T}_{j_1\ldots j_n}$ существенно самосопряжены, и для всех функций $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$ выполняется неравенство*

$$\|\hat{T}_{j_1\ldots j_n}u\| \leqslant \|T_{j_1\ldots j_n}u\|.$$

Если набор $j_1, \ldots, j_n$ является подсистемой системы $k_1, \ldots, k_m$ $(n < m \leqslant N)$, то для всех функций $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$ справедлива оценка

$$\|\hat{T}_{j_1\ldots j_n}u\| \leqslant \|\hat{T}_{k_1\ldots k_m}u\|.$$

Доказательство. По теореме 6.1 операторы $T'_{1\ldots n-1}$ и T'_n существенно самосопряжены; как и в теореме 5.3, мы получаем, что

$$\|T'_{1\ldots n-1}u\| \leqslant \|T'_{1\ldots n}u\| \text{ для всех } u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N}).$$

Отсюда в силу (6.5) вытекает первая часть леммы. Чтобы доказать вторую часть, выберем внутренние координаты $y_1, \ldots, y_{m-1}$ для подсистемы $k_1, \ldots, k_m$ так, чтобы $y_1, \ldots, y_{n-1}$ были внутренними координатами для подсистемы $j_1, \ldots, j_n$. В таких координатах операторы внутренней энергии $T'_{1\ldots n-1}$ и $T'_{1\ldots m-1}$ двух рассматриваемых подсистем порождаются соответственно операторами

$$-\sum_{i=1}^{n-1}\Delta_i \quad \text{и} \quad -\sum_{i=1}^{m-1}\Delta_i;$$

следовательно,

$$\|T'_{1\ldots n-1}u\| \leqslant \|T'_{1\ldots m-1}u\| \text{ для всех } u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$$

и поэтому, в силу унитарной эквивалентности,

$$\|\hat{T}_{j_1\ldots j_n}u\| \leqslant \|\hat{T}_{k_1\ldots k_m}u\| \text{ для всех } u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N}).$$

Для каждой подсистемы из n частиц $j_1, \ldots, j_n$ $(2 \leqslant n \leqslant N)$ определим теперь оператор $W_{j_1\ldots j_n}$, используя внутренние координаты и соответствующий унитарный оператор, заданный формулой (6.4). А именно, мы определяем $W_{j_1\ldots j_n}$ как такой оператор с областью определения $C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$, что оператор $W'_{1\ldots n-1} = UW_{j_1\ldots j_n}U^*$ действует только на внутренние координаты $y_1, \ldots, y_{n-1}$ и порождается некоторым симметричным оператором $W^{1\ldots n-1}$ в пространстве $L_2(\mathbf{R}^{3n-3})$, Δ-малым на бесконечности.

Это описание не зависит от выбора внутренних координат. Действительно, пусть $bx = (z_1, \ldots, z_N)$ — координаты, удовлетворяющие соотношениям (6.3), (6.3′) и (6.3″) с коэффициентами a_{ik}, замененными на какие-нибудь другие вещественные коэффициенты b_{ik}, и с $2\mu_i' = 1$ при $i = 1, \ldots, n-1$. Тогда преобразование $c = ba^{-1}$ задается равенствами

$$z_i = \sum_{k=1}^{n-1} c_{ik} y_k \text{ при } i = 1, \ldots, n-1,$$
$$z_i = y_i \qquad \text{при } i = n, \ldots, N,$$

где (c_{ik}) — ортогональная матрица порядка $n-1$. Если V — унитарный оператор, соответствующий преобразованию b согласно (6.4), то

$$(UV^*f)(y) = f(cy) \text{ для } y \in \mathbf{R}^{3N} \text{ и } f \in L_2(\mathbf{R}^{3N}).$$

Поэтому оператор $W'_{1\ldots n-1}$ действует только на внутренние координаты $y_1, \ldots, y_{n-1}$ тогда и только тогда, когда оператор $W''_{1\ldots n-1} = VW_{j_1\ldots j_n}V^*$ действует только на $z_1, \ldots, z_{n-1}$, и порождающий оператор $W'_{1\ldots n-1}$ Δ-мал на бесконечности в том и только в том случае, если этим свойством обладает порождающий оператор $W''_{1\ldots n-1}$; кроме того, Δ-границы этих двух операторов равны.

6.7. Следствие. a) *Оператор $W_{j_1\ldots j_n}$ симметричен и $\hat{T}_{j_1\ldots j_n}$-ограничен с $\hat{T}_{j_1\ldots j_n}$-границей, не превосходящей Δ-границы оператора $W^{1\ldots n-1}$.*

b) *Для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $r_\varepsilon > 0$, что*

$$\| W_{j_1\ldots j_n}u \| \leqslant \varepsilon (\| u \| + \| \hat{T}_{j_1\ldots j_n}u \|)$$

для всех функций $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$, удовлетворяющих условию: $u(x) = 0$ при всех x, для которых $\left(\sum_{i,k=1}^{n} | x_{j_i} - x_{j_k} |^2\right)^{1/2} \leqslant r_\varepsilon$.

c) *Для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\rho_\varepsilon > 0$, что*

$$| \langle W_{j_1\ldots j_n}u | v \rangle | \leqslant \varepsilon \{ \| u \|^2 + \| \hat{T}_{j_1\ldots j_n}u \|^2 + \| v \|^2 + \| \hat{T}_{j_1\ldots j_n}v \|^2 \}$$

для всех функций $u, v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$ с $d(\operatorname{supp}(u), \operatorname{supp}(v)) \geqslant \rho_\varepsilon$.

Доказательство. a) Оператор $W^{1\ldots n-1}$ симметричен, поэтому в силу теоремы 5.2 и оператор $W'_{1\ldots n-1}$ симметричен, а следовательно, симметричен оператор $W_{j_1\ldots j_n} = U^*W'_{1\ldots n-1}U$. Оператор $W^{1\ldots n-1}$ Δ-ограничен с Δ-границей, скажем γ, а оператор $-\Delta$ порождает $T'_{1\ldots n-1}$. Поэтому, согласно теореме 5.4, оператор $W'_{1\ldots n-1}$ будет $T'_{1\ldots n-1}$-ограниченным с $T'_{1\ldots n-1}$-границей, не большей γ, и ввиду (6.5) оператор $W_{j_1\ldots j_n}$ будет $\hat{T}_{j_1\ldots j_n}$-ограничен с $\hat{T}_{j_1\ldots j_n}$-границей, не превосходящей γ.

b) Оператор $W^{1 \ldots n-1}$ является Δ-малым на бесконечности. В силу теоремы 5.5 для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $r'_\varepsilon > 0$, что $\| W'_{1 \ldots n-1} u \| \leqslant \varepsilon (\| u \| + \| T'_{1 \ldots n-1} u \|)$ для всех функций $u \in C_0^\infty (\mathbf{R}^{3N})$, удовлетворяющих условию: $u(y) = 0$ при всех $y \in \mathbf{R}^{3N}$ с $(\sum_{i=1}^{n-1} | y_i |^2)^{1/2} \leqslant r'_\varepsilon$. Положим $u = Uv$, где $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$. В силу устанавливаемой ниже леммы 6.8 существует такое $r_\varepsilon > 0$, что если $v(x) = 0$ при $(\sum_{i,k=1}^{n} | x_{j_i} - x_{j_k} |^2)^{1/2} \leqslant r_\varepsilon$, то $u(y) = 0$ при $(\sum_{i=1}^{n-1} | y_i |^2)^{1/2} \leqslant r'_\varepsilon$. Поэтому доказываемое утверждение следует из (6.5) и из определения оператора $W_{j_1 \ldots j_n}$.

c) В силу теоремы 5.6 для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\rho'_\varepsilon > 0$, что

$$| \langle W'_{1 \ldots n-1} u \mid v \rangle | \leqslant \varepsilon \{ \| u \|^2 + \| T'_{1 \ldots n-1} u \|^2 + \| v \|^2 + \| T'_{1 \ldots n-1} v \|^2 \}$$

для всех $u, v \in C_0^\infty (\mathbf{R}^{3N})$ с $d(\mathrm{supp}(u), \mathrm{supp}(v)) \geqslant \rho'_\varepsilon$. Если $u = Uu_1$, $v = Uv_1$, то по определению оператора U существует такое $\rho_\varepsilon > 0$, что неравенство $d(\mathrm{supp}(u_1), \mathrm{supp}(v_1)) \geqslant \rho_\varepsilon$ влечет за собой неравенство $d(\mathrm{supp}(u), \mathrm{supp}(v)) \geqslant \rho'_\varepsilon$. Поэтому доказываемое утверждение следует из (6.5) и определения оператора $W_{j_1 \ldots j_n}$.

6.8. Лемма. *Пусть $y_1, \ldots, y_{n-1}$ — внутренние координаты для подсистемы $j_1, \ldots, j_n$. Существуют положительные константы c_1, c_2, такие, что*

$$c_1 \Big(\sum_{i,k=1}^{n} | x_{j_i} - x_{j_k} |^2 \Big)^{1/2} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n-1} | y_i |^2 \Big)^{1/2} \leqslant c_2 \Big(\sum_{i,k=1}^{n} | x_{j_i} - x_{j_k} |^2 \Big)^{1/2}.$$

Доказательство. Пусть координаты $y_1, \ldots, y_{n-1}$ определены соотношениями (6.3); как отмечалось выше, из (6.3′) и (6.3″) вытекает равенство $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 0$ при $i = 1, \ldots, n-1$. Поэтому $y_i = \sum_{k=1}^{n-1} a_{ik} (x_{j_k} - x_{j_n})$ при $i = 1, \ldots, n-1$, откуда следует справедливость второго из доказываемых неравенств. Далее, в силу того факта, что матрица $(a_{ik})_{i,k=1,\ldots,n}$ обратима (и в силу (6.3′), (6.3″)), обратима и подматрица $(a_{ik})_{i,k=1,\ldots,n-1}$; следовательно, $x_{j_k} - x_{j_n} = \sum_{i=1}^{n-1} b_{ki} y_i$ для $k = 1, \ldots, n-1$ с соответствующими коэффициентами b_{ki}. Поэтому все члены $| x_{j_i} - x_{j_k} |$ можно оценить некоторым кратным величины $(\sum_{i=1}^{n-1} | y_i |^2)^{1/2}$. Лемма доказана.

Физическая мотивировка наших предположений об операторе $W_{j_1 \ldots j_n}$ заключается в том, что этот оператор описывает взаимодействие между частицами данной подсистемы, которое мало, если хотя бы одно из относительных расстояний между частицами велико. Такие взаимодействия называются *n-частичными взаимодействиями*.

Для каждой подсистемы $k_1, \ldots, k_m$ $(2 \leqslant m \leqslant N)$ определим *гамильтониан* и *внутренний гамильтониан* соответственно равенствами

$$S_{k_1 \ldots k_m} = T_{k_1 \ldots k_m} + \sum_{(j_1 \ldots j_n) \subset (k_1 \ldots k_m)} (V_{j_1 \ldots j_n} + W_{j_1 \ldots j_n}), \tag{6.9}$$

$$\hat{S}_{k_1 \ldots k_m} = \hat{T}_{k_1 \ldots k_m} + \sum_{(j_1 \ldots j_n) \subset (k_1 \ldots k_m)} W_{j_1 \ldots j_n}, \tag{6.10}$$

где запись $(j_1 \ldots j_n) \subset (k_1 \ldots k_m)$ означает включение подсистемы $(j_1 \ldots j_n)$ в подсистему $(k_1 \ldots k_m)$. Для одночастичной системы ради простоты полагаем $W_j = 0$ и оператор S_j определяем равенством $S_j = T_j + V_j$, $j = 1, \ldots, N$. Операторы $\hat{S}_{k_1 \ldots k_m}$ являются *внутренними операторами* в следующем смысле.

6.11. Теорема. *Пусть $x \mapsto ax = y$ — такое преобразование координат, что $y_1, \ldots, y_{m-1}$ — внутренние координаты для подсистемы $k_1, \ldots, k_m$ $(2 \leqslant m \leqslant N)$, и U — соответствующий унитарный оператор, определенный формулой* (6.4). *Тогда оператор $U\hat{S}_{k_1 \ldots k_m} U^*$ действует только на внутренние координаты.*

Доказательство. Так как оператор $U\hat{T}_{k_1 \ldots k_m} U^*$ действует только на внутренние координаты, то достаточно установить данное свойство для оператора $UW_{j_1 \ldots j_n} U^*$ и для каждой подсистемы $j_1, \ldots, j_n$ системы $k_1, \ldots, k_m$. Очевидно, достаточно установить это для *одной* системы внутренних координат. Выберем координаты $z = a_1 x$ так, чтобы $z_1, \ldots, z_{n-1}$ являлись внутренними координатами для подсистемы $j_1, \ldots, j_n$, и пусть равенство $y = a_2 z$ определяет внутренние координаты $y_1, \ldots, y_{m-1}$ системы $k_1, \ldots, k_m$, такие, что $y_i = z_i$ при $i = 1, \ldots, n-1$. Если U_1 и U_2 — соответствующие унитарные операторы, то по определению $W_{j_1 \ldots j_n}$ оператор $U_1 W_{j_1 \ldots j_n} U_1^*$ действует только на $z_1, \ldots, z_{n-1}$ и, следовательно, оператор

$$UW_{j_1 \ldots j_n} U^* = U_2 U_1 W_{j_1 \ldots j_n} U_1^* U_2^*,$$

согласно определению оператора U_2, действует только на $y_1, \ldots$ $\ldots, y_{n-1}$, что и требовалось доказать.

В силу теоремы 6.1 и леммы 6.6 операторы $T_{k_1 \ldots k_m}$ и $\hat{T}_{k_1 \ldots k_m}$ существенно самосопряжены. В силу следствия 6.2, леммы 6.6

и следствия 6.7 операторы $V_{j_1 \ldots j_n}$ симметричны и $T_{k_1 \ldots k_m}$-ограничены, а операторы $W_{j_1 \ldots j_n}$ симметричны и $\hat{T}_{k_1 \ldots k_m}$-ограничены при $(j_1, \ldots, j_n) \subset (k_1, \ldots, k_m)$.

Сформулируем наше *заключительное предположение*:

(6.12) Операторы $S_{k_1 \ldots k_m}$ и $\hat{S}_{k_1 \ldots k_m}$ существенно самосопряжены и ограничены снизу, оператор $T_{k_1 \ldots k_m}$ является $S_{k_1 \ldots k_m}$-ограниченным, а оператор $\hat{T}_{k_1 \ldots k_m}$ — $\hat{S}_{k_1 \ldots k_m}$-ограниченным для каждой подсистемы $k_1, \ldots, k_m$ системы $1, \ldots, N$.

Приведем одно достаточное условие справедливости предположения (6.12). Пусть числа $a_{j_1 \ldots j_n}$ и $b_{j_1 \ldots j_n}$ обозначают соответственно $T_{j_1 \ldots j_n}$-границу оператора $V_{j_1 \ldots j_n}$ и $\hat{T}_{j_1 \ldots j_n}$-границу оператора $W_{j_1 \ldots j_n}$ ($b_j = 0$ для $j = 1, \ldots, N$); тогда если

$$\sum_{(j_1 \ldots j_n) \subset (1 \ldots N)} (a_{j_1 \ldots j_n} + b_{j_1 \ldots j_n}) < 1,$$

то наше заключительное предположение справедливо. В частности, указанное условие выполнено, если оператор $V_{j_1 \ldots j_n}$ является $T_{j_1 \ldots j_n}$-компактным, а оператор $W_{j_1 \ldots j_n}$ — $\hat{T}_{j_1 \ldots j_n}$-компактным для всех $j_1, \ldots, j_n$.

§ 7. СИММЕТРИИ ГАМИЛЬТОНИАНА

Пусть γ — произвольное ортогональное преобразование в $\mathbf{R}^3$ (т. е. вращение или вращение с отражением); определим унитарный оператор в $L_2(\mathbf{R}^{3N})$ равенством

$$(U(\gamma) f)(x) = f(\gamma^{-1}x_1, \gamma^{-1}x_2, \ldots, \gamma^{-1}x_N)$$

для $x \in \mathbf{R}^{3N}$ и $f \in L_2(\mathbf{R}^{3N})$. Очевидно, оператор $U(\gamma)$ отображает пространство $C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$ на себя. Будем говорить, что оператор A в $L_2(\mathbf{R}^{3N})$ с областью определения $C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$ *инвариантен относительно* γ, если

$$U(\gamma) A = A U(\gamma).$$

Из определения операторов $T_{j_1 \ldots j_n}$ и T следует, что они инвариантны относительно всех ортогональных преобразований γ; в силу (6.5′) то же справедливо для операторов $\tilde{T}_{j_1 \ldots j_n}$ и, значит, для операторов $\hat{T}_{j_1 \ldots j_n} = T_{j_1 \ldots j_n} - \tilde{T}_{j_1 \ldots j_n}$. Произвольное ортогональное преобразование γ назовем *вращательной симметрией* гамильтониана S, если операторы $S_{k_1 \ldots k_m}$ и $\hat{S}_{k_1 \ldots k_m}$ инвариантны относительно γ для каждой подсистемы $k_1, \ldots, k_m$; в частности, γ является вращательной симметрией оператора S, если все операторы $V_{j_1\ldots j_n}$ и $W_{j_1\ldots j_n}$ в (6.0) инвариантны относительно γ. Вращательные симметрии оператора S образуют, очевидно, подгруппу Γ трехмерной ортогональной группы $\mathcal{O}(3)$; мы будем называть Γ *группой вращательной симметрии* оператора S. Известно, что $\mathcal{O}(3)$ — компактная топологическая группа. Отображение $\gamma \mapsto U(\gamma)$ непрерывно в сильной операторной топологии. Операторы $S_{k_1\ldots k_m}$ и $\hat{S}_{k_1\ldots k_m}$ симметричны и потому замыкаемы; значит, подгруппа Γ замкнута. Следовательно, Γ — компактная группа, и отображение $\gamma \mapsto U(\gamma)$ является непрерывным представлением этой группы унитарными операторами в $L_2(\mathbf{R}^{3N})$.

Пусть n_j — положительные целые числа, такие, что $\sum_{j=1}^{m} n_j = N$. Тогда [1])

$$L_2(\mathbf{R}^{3N}) = \widehat{\bigotimes_{j=1}^{m}} L_2(\mathbf{R}^{3n_j}) \text{ и } U(\gamma) = \bigotimes_{j=1}^{m} U_j(\gamma),$$

где оператор $U_j(\gamma)$ определен равенством

$$(U_j(\gamma) f)(x) = f(\gamma^{-1}x_1, \ldots, \gamma^{-1}x_{n_j})$$

для $x \in \mathbf{R}^{3n_j}$ и $f \in L_2(\mathbf{R}^{3n_j})$.

К описанной ситуации применимы следующие леммы о представлениях компактных групп.

Пусть H_j, $j = 1, \ldots, m$,— гильбертовы пространства и $H = \widehat{\bigotimes_{j=1}^{m}} H_j$. Для произвольной компактной группы Γ обозначим через D_α $(\alpha \in A)$ ее непрерывные неприводимые унитарные (матричные) представления, а через U_j — некоторое ее непрерывное представление унитарными операторами в H_j, $j = 1, \ldots, m$. Тогда равенство

$$U(\gamma) = \bigotimes_{j=1}^{m} U_j(\gamma) \text{ для } \gamma \in \Gamma$$

определяет некоторое непрерывное представление U группы Γ унитарными операторами в H.

Пусть μ обозначает единственную инвариантную вероятностную меру на Γ, а d_α и χ_α — соответственно размерность и характер представления D_α (т. е. $D_\alpha(\gamma) = (D_{ij}^{(\alpha)}(\gamma))$ — это комплексная

---

[1]) Через $H_1 \hat{\otimes} H_2$ мы обозначаем пополнение пространства $H_1 \otimes H_2$. Для операторов A, B, C в пространствах $H_1 \hat{\otimes} H_2$, H_1 и H_2 соответственно равенство $A = B \otimes C$ означает, что если $f \in \mathrm{D}(B)$ и $g \in \mathrm{D}(C)$, то $f \otimes g \in \mathrm{D}(A)$ и $A(f \otimes g) = Bf \otimes Cg$.

квадратная матрица порядка d_α и $\chi_\alpha(\gamma) = \sum_{j=1}^{d_\alpha} D_{jj}^{(\alpha)}(\gamma)$ для любого $\gamma \in \Gamma$).

Операторы

$$P_{j,\alpha} = d_\alpha \int_\Gamma \chi_\alpha(\gamma)^* U_j(\gamma)\, d\mu(\gamma), \quad \alpha \in A, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$P_\alpha = d_\alpha \int_\Gamma \chi_\alpha(\gamma)^* U(\gamma)\, d\mu(\gamma), \quad \alpha \in A,$$

являются ортогональными проекторами соответственно в H_j и в H, удовлетворяющими соотношениям

(7.0) $$P_{j,\alpha} P_{j,\beta} = \delta_{\alpha\beta} P_{j,\alpha}, \quad P_\alpha P_\beta = \delta_{\alpha\beta} P_\alpha, \quad \alpha, \beta \in A, \quad j = 1, \ldots, m,$$

(7.0′) $$\sum_{\alpha \in A} P_{j,\alpha} = I_j, \quad \sum_{\alpha \in A} P_\alpha = I,$$

где I_j и I — единичные операторы соответственно в H_j и H. Нам понадобится также соотношение

(7.0″) $$d_\alpha \int_\Gamma D_{kh}^{(\alpha)}(\gamma)^* D_{ij}^{(\beta)}(\gamma)\, d\mu(\gamma) = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ki}\delta_{hj}.$$

(По поводу этих понятий и результатов см. М. А. Наймарк [21], II.6.)

Для всякого $\alpha \in A$ рассмотрим замкнутые подпространства $H_{j,\alpha} = P_{j,\alpha} H_j$ в H_j и $H_\alpha = P_\alpha H$ в H. Если $\alpha \neq \beta$, то $P_\alpha P_\beta = 0$ и, следовательно, пространства H_α и H_β ортогональны; аналогично при $\alpha \neq \beta$ ортогональны пространства $H_{j,\alpha}$ и $H_{j,\beta}$, $j = 1, \ldots, m$. В силу определения операторов $P_{j,\alpha}$ и P_α

$$P_{j,\alpha} U_j(\gamma) = U_j(\gamma) P_{j,\alpha} \quad \text{и} \quad P_\alpha U(\gamma) = U(\gamma) P_\alpha$$

для всех $\alpha \in A$, $j = 1, \ldots, m$, и всех $\gamma \in \Gamma$. Таким образом, ограничение $U_j(\gamma) \mid H_{j,\alpha}$ является унитарным оператором в пространстве $H_{j,\alpha}$, и аналогично $U(\gamma) \mid H_\alpha$ — унитарный оператор в пространстве H_α для всех $\gamma \in \Gamma$.

Произвольное замкнутое подпространство N пространства H_j (или H) назовем *D_α-порождающим*, если оператор $U_j(\gamma) \mid N$ (соотв. $U(\gamma) \mid N$) унитарен в N для всех $\gamma \in \Gamma$ и если существует ортонормированный базис в N, такой, что для каждого $\gamma \in \Gamma$ оператор $U_j(\gamma) \mid N$ (соотв. $U(\gamma) \mid N$) в этом базисе представляется матрицей $D_\alpha(\gamma)$. Следовательно, каждое D_α-порождающее подпространство конечномерно, и его размерность равна размерности d_α представления D_α.

7.1. Лемма. (1) *Каждое D_α-порождающее подпространство пространства H_j (или H) содержится в $H_{j,\alpha}$ (соотв. в H_α).*

(2) *Пространства $H_{j,\alpha}$ и H_α являются ортогональными суммами D_α-порождающих подпространств пространств H_j и H соответственно.*

Доказательство. Достаточно доказать утверждения, касающиеся пространства H.

(1) Пусть N обозначает некоторое D_α-порождающее подпространство пространства H и $\{u_1, \ldots, u_{d_\alpha}\}$ — ортонормированный базис в N, такой, что для каждого $\gamma \in \Gamma$ справедливо равенство

$$U(\gamma)\, u_j = \sum_{i=1}^{d_\alpha} D_{ij}^{(\alpha)}(\gamma)\, u_i, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Из определения операторов P_α и из тождества (7.0″) вытекает, что

$$P_\alpha u_j = d_\alpha \int_\Gamma \chi_\alpha(\gamma)^* \sum_{i=1}^{d_\alpha} D_{ij}^{(\alpha)}(\gamma)\, u_i\, d\mu(\gamma) =$$

$$= \sum_{k,\, i=1}^{l_\alpha} d_\alpha \int_\Gamma D_{kk}^{(\alpha)}(\gamma)^* D_{ij}^{(\alpha)}(\gamma)\, d\mu(\gamma)\, u_i = u_j.$$

Поэтому $u_j \in H_\alpha$, $j = 1, \ldots, m$, и, значит, $N \subset H_\alpha$.

(2) Для каждого $\gamma \in \Gamma$ оператор $U(\gamma) \mid H_\alpha$ унитарен в H_α; следовательно, отображение $\gamma \mapsto U(\gamma) \mid H_\alpha$ является непрерывным представлением группы Γ унитарными операторами в H_α. Каждое такое представление есть прямая сумма конечномерных неприводимых представлений (см. Морен [20], IV.3), т. е. пространство H_α разлагается в ортогональную сумму D_β-порождающих подпространств для $\beta \in B$, где B — некоторое подмножество множества A. В силу утверждения (1) леммы каждое D_β-порождающее подпространство пространства H содержится в H_β и H_β ортогонально к H_α при $\alpha \neq \beta$. Следовательно, $B = \{\alpha\}$, что и требовалось доказать.

Для $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in A$ положим

(7.2) $$D(\gamma) = \bigotimes_{j=1}^{m} D_{\alpha_j}(\gamma) \text{ для каждого } \gamma \in \Gamma.$$

Отображение $\gamma \mapsto D(\gamma)$ является непрерывным унитарным представлением группы Γ и, значит, унитарно эквивалентно прямой сумме неприводимых унитарных представлений, скажем

(7.2′) $$D \cong \bigoplus_{\alpha \in A(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} n_\alpha D_\alpha,$$

где $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ — некоторое конечное подмножество множества A и для каждого $\alpha \in A(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ положительное целое число n_α показывает, сколько раз представление D_α повторяется в прямой сумме. Мы часто будем писать $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \prec \alpha$ вместо $\alpha \in A(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$.

7.3. Лемма. *Пусть N_j — некоторое D_{α_j}-порождающее подпространство пространства H_j, $j = 1, \ldots, m$. Для каждого $\alpha \in A(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ существует n_α взаимно ортогональных D_α-порождающих подпространств $M_{\alpha i}$ пространства H, таких, что*

$$\bigotimes_{j=1}^{m} N_j = \bigoplus_{\alpha \in A(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} \bigoplus_{i=1}^{n_\alpha} M_{\alpha i}.$$

Доказательство. Пусть $N = \bigotimes_{j=1}^{m} N_j$. Согласно условию, оператор $U(\gamma) \mid N$ унитарен в N для каждого $\gamma \in \Gamma$, и существует такой ортонормированный базис в N, что для каждого $\gamma \in \Gamma$ оператор $U(\gamma) \mid N$ представляется в этом базисе матрицей $D(\gamma) = \bigotimes_{j=1}^{m} D_{\alpha_j}(\gamma)$. Согласно (7.2′), существует другой ортонормированный базис в N, разлагающий N на ортогональные подпространства $M_{\alpha i}$ $(i = 1, \ldots, n_\alpha;\ \alpha \in A(\alpha_1, \ldots, \alpha_m))$, являющиеся D_α-порождающими, что и требовалось доказать.

7.4. Лемма. *Для $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in A$ выполняется включение*

$$\widehat{\bigotimes_{j=1}^{m}} H_{j, \alpha_j} \subset \bigoplus_{\alpha \in A(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} H_\alpha.$$

Доказательство. Согласно лемме 7.1(2), пространство $\widehat{\bigotimes_{j=1}^{m}} H_{j,\alpha_j}$ разлагается в ортогональную сумму подпространств $\bigotimes_{j=1}^{m} N_j$, где N_j является D_{α_j}-порождающим подпространством, $j = 1, \ldots, m$. В силу лемм 7.3 и 7.1(1)

$$\bigotimes_{j=1}^{m} N_j \subset \bigoplus_{\alpha \in A(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} H_\alpha,$$

что и требовалось доказать.

7.5. Лемма. *Для каждого $\alpha_0 \in A$ выполняется включение*

$$H_{\alpha_0} \subset \bigoplus_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \prec \alpha_0} \Big(\widehat{\bigotimes_{j=1}^{m}} H_{j, \alpha_j} \Big).$$

Доказательство. Ввиду (7.3′)

$$\bigoplus_{\alpha\in A} H_{j,\alpha}=H_j \quad \text{и} \quad \bigoplus_{\alpha\in A} H_\alpha=H.$$

Поэтому

$$H=\bigoplus_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\in A}\Big(\widehat{\bigotimes_{j=1}^{m}} H_{j,\alpha_j}\Big)=$$

$$=\Big[\bigoplus_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\prec\alpha_0}\Big(\widehat{\bigotimes_{j=1}^{m}} H_{j,\alpha_j}\Big)\Big]\oplus\Big[\bigoplus_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\not\prec\alpha_0}\Big(\widehat{\bigotimes_{j=1}^{m}} H_{j,\alpha_j}\Big)\Big].$$

Согласно лемме 7.4, пространство $\widehat{\bigotimes_{j=1}^{m}} H_{j,\alpha_j}$ ортогонально к H_{α_0} если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\not\prec\alpha_0$; это доказывает лемму.

В следующей лемме речь идет о соотношении $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\prec$ $\prec\alpha$ (см. формулы (7.2) и (7.2′) при $m>1$).

7.6. Лемма. *Если* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_m)\prec\alpha_0$, *то существует по крайней мере одно такое* $\alpha_j\in A$, *что*

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_m)\prec\alpha_0 \text{ и } (\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2})\prec\alpha_j.$$

Доказательство. Обозначим через $D_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes D_{\alpha_m}$ представление группы Γ, определенное формулой (7.2). По условию, представление

$$D=D_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes D_{\alpha_{j-1}}\otimes D_{\alpha_{j_1}}\otimes D_{\alpha_{j_2}}\otimes D_{\alpha_{j+1}}\otimes\ldots\otimes D_{\alpha_m}$$

унитарно эквивалентно некоторой прямой сумме неприводимых представлений, в которую входит и D_{α_0}. В силу (7.2′) мы также имеем

$$D_{\alpha_{j_1}}\otimes D_{\alpha_{j_2}}\cong\bigoplus_{\beta\in A(\alpha_{j_1},\alpha_{j_2})} n_\beta D_\beta.$$

Поэтому D унитарно эквивалентно прямой сумме представлений

$$D_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes D_{\alpha_{j-1}}\otimes D_\beta\otimes D_{\alpha_{j+1}}\otimes\ldots\otimes D_{\alpha_m}, \quad \text{где} \quad (\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2})\prec\beta.$$

По крайней мере одно из этих представлений должно быть унитарно эквивалентно некоторой прямой сумме, содержащей D_{α_0}, т. е. существует $\beta\in A$ такое, что $(\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2})\prec\beta$ и

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \beta, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_m)\prec\alpha_0,$$

что и требовалось доказать.

Теперь нам следует обсудить другой тип симметрий гамильтониана, называемых *перестановочными симметриями*. Пусть π —

некоторая перестановка чисел 1, 2, . . ., N. Зададим в $L_2(\mathbf{R}^{3N})$ унитарный оператор $U(\pi)$ равенством

$$(U(\pi) f)(x) = f(x_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, x_{\pi^{-1}(N)})$$

для $x \in \mathbf{R}^{3N}$ и $f \in L_2(\mathbf{R}^{3N})$. Очевидно, $U(\pi)$ отображает $C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$ на себя. *Инвариантность* оператора относительно перестановки π определяется так же, как для вращений. Из определения оператора T следует, что он инвариантен относительно перестановки π тогда и только тогда, когда $\mu_{\pi(j)} = \mu_j$ для $j = 1, \ldots, N$, т. е. тогда и только тогда, когда π переставляет между собой частицы с равными массами. С другой стороны, если $\mu_{\pi(j)} = \mu_j$ для всех j, то операторы $T_{j_1 \ldots j_n}$ преобразуются согласно следующему закону:

$$U(\pi) T_{\pi(j_1 \ldots j_n)} = T_{j_1 \ldots j_n} U(\pi),$$

где $\pi(j_1 \ldots j_n)$ обозначает упорядоченный образ подмножества $\{j_1, \ldots, j_n\}$ при отображении π; если при этом π отображает $\{j_1, \ldots, j_n\}$ на себя, то оператор $T_{j_1 \ldots j_n}$ инвариантен относительно π. Для краткости будем говорить, что операторы $T_{j_1 \ldots j_n}$ *ковариантны относительно* π.

В силу (6.5′) операторы $\widetilde{T}_{j_1 \ldots j_n}$ и, следовательно, операторы $\widetilde{T}_{j_1 \ldots j_n}$ ковариантны относительно π (если $\mu_{\pi(j)} = \mu_j$ для всех j). Перестановку π назовем *перестановочной симметрией* гамильтониана S, если операторы $S_{k_1 \ldots k_m}$ и $\hat{S}_{k_1 \ldots k_m}$ ковариантны относительно π; в частности, π является перестановочной симметрией оператора S, если все операторы $T_{j_1 \ldots j_n}$, $\hat{T}_{j_1 \ldots j_n}$, $V_{j_1 \ldots j_n}$ и $W_{j_1 \ldots j_n}$ ковариантны относительно π. Перестановочные симметрии оператора S, очевидно, образуют некоторую подгруппу Π симметрической группы $\mathscr{S}_N$; назовем Π *группой перестановочной симметрии* оператора S.

Перестановка π, которая меняет местами два элемента набора $\{1, \ldots, N\}$, а остальные элементы не трогает, называется *транспозицией*. Если транспозиция, меняющая местами i и j, является перестановочной симметрией оператора S, то будем говорить, что частицы i и j *тождественны*. Предположим, что *группа* Π *порождена транспозициями тождественных частиц*. В таком случае рассматриваемую систему можно разбить на подсистемы, состоящие из тождественных частиц, и группа Π является прямым произведением симметрических групп $\mathscr{S}_{n_j}$ $(j = 1, \ldots, m)$ с $\sum\limits_{j=1}^{m} n_j = N$.

Пусть E_α $(\alpha \in A)$—неприводимые унитарные (матричные) представления группы Π и d_α и χ_α — соответственно размерность и характер представления E_α. Рассмотрим операторы

$$P(\Pi, E_\alpha) = \frac{d_\alpha}{h} \sum_{\pi \in \Pi} \chi_\alpha(\pi)^* U(\pi), \quad \alpha \in A, \tag{7.7}$$

где h—порядок группы Π. Как хорошо известно[1]), эти операторы являются ортогональными проекторами в $L_2(\mathbf{R}^{3N})$, удовлетворяющими соотношениям

$$P(\Pi, E_\alpha)\, P(\Pi, E_\beta) = \delta_{\alpha\beta} P(\Pi, E_\alpha), \quad \alpha, \beta \in A, \tag{7.7'}$$

$$\sum_{\alpha \in A} P(\Pi, E_\alpha) = I. \tag{7.7''}$$

Пусть Π_0 — некоторая подгруппа группы Π, F_β $(\beta \in B_0)$ — неприводимые унитарные представления группы Π_0 и $P(\Pi_0, F_\beta)$ — соответствующие ортогональные проекторы в $L_2(\mathbf{R}^{3N})$. Для каждого $\alpha \in A$ ограничение $E_\alpha \mid \Pi_0$ является унитарным представлением группы Π_0 и, следовательно, унитарно эквивалентно некоторой прямой сумме неприводимых представлений

$$E_\alpha \mid \Pi_0 \cong \bigoplus_{\beta \in B_0(\alpha)} n_\beta F_\beta, \tag{7.8}$$

где $B_0(\alpha)$ — надлежащее подмножество множества B_0 и для каждого $\beta \in B_0(\alpha)$ положительное целое число n_β указывает, сколько раз представление F_β встречается в сумме.

7.9. Лемма. *Для произвольной подгруппы* Π_0 *группы* Π *при каждом* $\alpha \in A$ *выполняется соотношение*

$$P(\Pi, E_\alpha) \leqq \sum_{\beta \in B_0(\alpha)} P(\Pi_0, F_\beta),$$

где $B_0(\alpha)$ — *множество, фигурирующее в формуле* (7.8).

Доказательство. Пусть $H = L_2(\mathbf{R}^{3N})$. В силу леммы 7.1 $P(\Pi, E_\alpha) H$ является ортогональной суммой E_α-порождающих подпространств пространства H. Согласно (7.8), каждое E_α-порождающее подпространство есть ортогональная сумма F_β-порождающих подпространств, которые, снова в силу леммы 7.1, содержатся в $P(\Pi_0, F_\beta) H$. Поэтому

$$P(\Pi, E_\alpha) H \subset \bigoplus_{\beta \in B_0(\alpha)} P(\Pi_0, F_\beta) H,$$

что эквивалентно соотношению

$$P(\Pi, E_\alpha) \leqq \sum_{\beta \in B_0(\alpha)} P(\Pi_0, F_\beta).$$

Пусть Π_1 — произвольная подгруппа группы Π_0, G_γ $(\gamma \in B_1)$ — ее неприводимое унитарное представление группы Π_1. Как и в (7.8), имеем

$$E_\alpha \mid \Pi_1 \cong \bigoplus_{\gamma \in B_1(\alpha)} n'_\gamma G_\gamma, \tag{7.10}$$

$$F_\beta \mid \Pi_1 \cong \bigoplus_{\gamma \in B_{10}(\beta)} n''_\gamma G_\gamma, \tag{7.11}$$

где $B_1(\alpha)$ и $B_{10}(\beta)$ — надлежащие подмножества множества B_1.

[1]) См., например, [35]. —*Прим. перев.*

7.12. Лемма. *Пусть множества* $B_0(\alpha)$, $B_1(\alpha)$, $B_{10}(\beta)$ *определены соответственно соотношениями* (7.8), (7.10) *и* (7.11). *Тогда для каждого* $\gamma \in B_1(\alpha)$ *существует по крайней мере одно* $\beta \in B_0(\alpha)$ *такое, что* $\gamma \in B_{10}(\beta)$.

Доказательство. В силу (7.8) и (7.11)

$$E_\alpha \mid \Pi_1 = (E_\alpha \mid \Pi_0) \mid \Pi_1 \cong \bigoplus_{\beta \in B_0(\alpha)} n_\beta \bigoplus_{\gamma \in B_{10}(\beta)} n''_\gamma G_\gamma.$$

Отсюда и из (7.10) сразу следует утверждение леммы.

Пусть $Z = (Z_1, \ldots, Z_k)$ — произвольное разбиение рассматриваемой системы (т. е. нашего множества $\{1, \ldots, N\}$) на k подсистем Z_j, и пусть $\Pi(Z)$ — подгруппа группы Π, состоящая из всех таких перестановок $\pi \in \Pi$, что $\pi(Z_j) = Z_j$ для $j = 1, \ldots, k$. Так как группа Π порождается транспозициями тождественных частиц, то группа $\Pi(Z)$ порождается транспозициями тождественных частиц, принадлежащих одному из множеств Z_j. Следовательно, $\Pi(Z) = \Pi(Z_1) \times \ldots \times \Pi(Z_k)$, где $\Pi(Z_j)$ — подгруппа, порожденная транспозициями тождественных частиц в Z_j. Очевидно, $L_2(\mathbf{R}^{3N}) = \widehat{\bigotimes_{j=1}^{k}} L_2(\mathbf{R}^{3m_j})$, где m_j — число частиц в Z_j. Тогда для перестановок $\pi = \pi_1 \times \ldots \times \pi_k \in \Pi(Z)$ выполняется равенство

$$U(\pi) = \bigotimes_{j=1}^{k} U_j(\pi_j),$$

где $U_j(\pi_j)$ — унитарный оператор в $L_2(\mathbf{R}^{3m_j})$, соответствующий $\pi_j \in \Pi(Z_j)$. Применим лемму 7.9 к группе $\Pi_0 = \Pi(Z)$. Поскольку каждое неприводимое представление F_β группы $\Pi(Z)$ есть тензорное произведение $\bigotimes_{j=1}^{k} F_{\beta_j}$ неприводимых представлений F_{β_j} группы $\Pi(Z_j)$, мы имеем

$$P(\Pi(Z), F_\beta) = \bigotimes_{j=1}^{k} P(\Pi(Z_j), F_{\beta_j}),$$

и поэтому в силу леммы 7.9

$$P(\Pi, E_\alpha) \leqslant \sum_{\beta \in B_0(\alpha)} \bigotimes_{j=1}^{k} P(\Pi(Z_j), F_{\beta_j}).$$

Условимся далее писать $(F_1, \ldots, F_k) \underset{Z}{\prec} E_\alpha$ вместо $F_\beta = \bigotimes_{j=1}^{k} F_j$, $\beta \in B_0(\alpha)$. Тогда последнее неравенство можно переписать в виде

$$P(\Pi, E_\alpha) \leqslant \sum_{(F_1, \ldots, F_k) \underset{Z}{\prec} E_\alpha} \bigotimes_{j=1}^{k} P(\Pi(Z_j), F_j).$$

Для подпространств

$$L_2(\mathbf{R}^{3N}, E_\alpha) = P(\Pi, E_\alpha)\, L_2(\mathbf{R}^{3N})$$

и

$$L_2(\mathbf{R}^{3m_j}, F_j) = P(\Pi(Z_j), F_j) L_2(\mathbf{R}^{3m_j})$$

выполняется эквивалентное соотношение

$$(7.13) \qquad L_2(\mathbf{R}^{3N}, E_\alpha) \subset \bigoplus_{(F_1, \ldots, F_k) \underset{Z}{\prec} E_\alpha} \widehat{\bigotimes_{j=1}^{k}} L_2(\mathbf{R}^{3m_j}, F_j).$$

§ 8. СПЕКТР ГАМИЛЬТОНИАНА СВОБОДНОЙ СИСТЕМЫ

Система частиц называется *свободной*, если отсутствует взаимодействие между частицами системы и внешним миром, т. е. если равны нулю все операторы $V_{j_1 \ldots j_n}$ в представлении (6.0) гамильтониана S. Из соотношений (6.9), (6.10) следует, что для любой свободной системы полный гамильтониан S и внутренний гамильтониан $\hat{S}$ связаны соотношением

$$(8.1) \qquad S = \hat{S} + \tilde{T}.$$

где $\tilde{T} = \tilde{T}_{1 \ldots N}$ — оператор трансляционной энергии системы Выберем координаты $y_1, \ldots, y_N$ так, чтобы $y_1, \ldots, y_{N-1}$ являлись внутренними координатами для всей системы, и пусть U — соответствующий унитарный оператор в $L_2(\mathbf{R}^{3N})$, определенный формулой (6.4). Тогда, согласно определению (6.5) оператора $\tilde{T}$-оператор $\tilde{T}' = U\tilde{T}U^*$ действует только на y_N и порождается оператором $B = -(2\mu)^{-1}\Delta$, где Δ — лапласиан в $L_2(\mathbf{R}^3)$ и $\mu = \sum_{j=1}^{N} \mu_j$ — полная масса данной системы. В силу теоремы 6.11 оператор $\hat{S}' = U\hat{S}U^*$ действует только на внутренние координаты и порождается некоторым оператором A в $L_2(\mathbf{R}^{3N-3})$. Учитывая равенство

$$L_2(\mathbf{R}^{3N}) = L_2(\mathbf{R}^{3N-3}) \,\widehat{\otimes}\, L_2(\mathbf{R}^3)$$

и полагая $S' = USU^*$, получаем

$$(8.2) \qquad S' = A \otimes I_2 + I_1 \otimes B,$$

где I_1 и I_2 — единичные операторы соответственно в $L_2(\mathbf{R}^{3N-3})$ и в $L_2(\mathbf{R}^3)$. Из (8.2) вытекает, что оператор S' имеет следующие симметрии:

(8.3) (i) Трансляции t_z: $(x_1, \ldots, x_N) \mapsto (x_1 + z, \ldots, x_N + z)$, $z \in \mathbf{R}^3$. Они образуют группу, изоморфную $\mathbf{R}^3$. Оператор S' инвариантен относительно t_z, так как t_z действует в y-координатах по формуле $(y_1, \ldots, y_N) \mapsto (y_1, \ldots \ldots, y_{N-1}, y_N + z)$, а операторы I_2 и B трансляционно инвариантны.

(ii) Ортогональные преобразования $\gamma \in \mathcal{O}(3)$, действующие только на координату центра масс, т. е.

$$(y_1, \ldots, y_N) \mapsto (y_1, \ldots, y_{N-1}, \gamma y_N).$$

Снова оператор S' инвариантен относительно этих преобразований, поскольку инвариантны операторы I_2 и B.

(iii) *Внутренние вращения* $(y_1, \ldots, y_N) \mapsto (\gamma y_1, \ldots \ldots, \gamma y_{N-1}, y_N)$, где γ принадлежит группе Γ вращательной симметрии оператора S, определенной в § 7, т. е. подгруппе всех преобразований $\gamma \in \mathcal{O}(3)$, относительно которых все операторы $W_{j_1 \ldots j_n}$ инвариантны.

(iv) Перестановочные симметрии π оператора S. Очевидно, координата центра масс y_N инвариантна относительно произвольной перестановки (тождественных частиц); поэтому π действует только на внутренние координаты.

В этом параграфе мы не принимаем во внимание трансляции и рассматриваем группу $\Gamma \times \mathcal{O}(3) \times \Pi$, порожденную симметриями (iii), (ii) и (iv). Неприводимые представления этой группы имеют вид $R = D_1 \otimes D_2 \otimes E$, где D_1, D_2 и E — неприводимые представления групп Γ, $\mathcal{O}(3)$ и Π. Соответствующий представлению R проектор P_R в пространстве $L_2(\mathbf{R}^{3N})$ в y-координатах определяется равенством

$$P_R = P_{D_1} P_E \otimes P_{D_2}, \tag{8.4}$$

где P_{D_1}, P_E — проекторы в $L_2(\mathbf{R}^{3N-3})$, соответствующие D_1, E, и P_{D_2} — проектор в $L_2(\mathbf{R}^3)$, соответствующий D_2.

8.5. Теорема. *Проекторы P_{D_1} и P_E коммутируют. Подпространства*

$$L_2(\mathbf{R}^{3N-3}, D_1 E) = P_{D_1} P_E L_2(\mathbf{R}^{3N-3}),$$
$$L_2(\mathbf{R}^3, D_2) = P_{D_2} L_2(\mathbf{R}^3),$$
$$L_2(\mathbf{R}^{3N}, R) = P_R L_2(\mathbf{R}^{3N})$$

приводят соответственно операторы A, B, S'. Для приведенных операторов $A_{D_1 E}$, B_{D_2}, S'_R имеем

$$S'_R = A_{D_1 E} \otimes I_2 + I_1 \otimes B_{D_2}. \tag{8.6}$$

Доказательство. Оператор P_E является линейной комбинацией конечного числа унитарных операторов $U(\pi)$ ($\pi \in \Pi$), удовлетворяющих условию $U(\pi) A = AU(\pi)$. Поэтому для оператора P_E выполняется соотношение $P_E A \subset AP_E$, т. е. $P_E \mathrm{D}(A) \subset \mathrm{D}(A)$ и $P_E Au = AP_E u$ при $u \in \mathrm{D}(A)$; следовательно, подпространство $P_E L_2(\mathbf{R}^{3N-3})$ приводит оператор A. Покажем, что оператор P_{D_1} коммутирует с оператором P_E и пространство $P_{D_1} L_2(\mathbf{R}^{3N-3})$ приводит A. Утверждение очевидно, если Γ — конечная подгруппа группы $\mathcal{O}(3)$: в этом случае оператор P_{D_1} является конечной линейной комбинацией унитарных операторов $U(\gamma)$ $(\gamma \in \Gamma)$, удовлетворяющих соотношениям $U(\gamma) P_E = P_E U(\gamma)$ и $U(\gamma) A = AU(\gamma)$. Если группа Γ бесконечна, то

$$P_{D_1} = d \int_\Gamma \chi(\gamma)^* U(\gamma)\, d\mu(\gamma),$$

где d и χ — соответственно размерность и характер представления D_1, а μ — инвариантная вероятностная мера на Γ. Ясно, что оператор P_{D_1} коммутирует с P_E. Для каждой функции $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N-3})$ существует такое компактное подмножество K пространства $\mathbf{R}^{3N-3}$, что $\operatorname{supp}(U(\gamma) f) \subset K$ для всех $\gamma \in \mathcal{O}(3)$ и, значит, функция $P_{D_1} f$ имеет компактный носитель. Кроме того, $U(\gamma) f \in C_0^\infty(^1\mathbf{R}^{3N-3})$ и $\operatorname{grad}_j [U(\gamma) f] = U(\gamma) [\operatorname{grad}_j f \cdot \gamma^{-1}]$ для $j = 1, 2, \ldots, N-1$. Поэтому функция

$$P_{D_1} f = d \int_\Gamma \chi(\gamma)^* U(\gamma) f\, d\mu(\gamma)$$

бесконечно дифференцируема и ее производные можно вычислять, дифференцируя под знаком интеграла; следовательно, $P_{D_1} f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N-3}) = \mathrm{D}(A)$. Наконец, функция $P_{D_1} f$ есть предел в $L_2(\mathbf{R}^{3N-3})$ конечных линейных комбинаций элементов $U(\gamma) f$ $(\gamma \in \Gamma)$. Так как оператор A замыкаем, отсюда вытекает, что $P_{D_1} Af = AP_{D_1} f$, т. е. пространство $P_{D_1} L_2(\mathbf{R}^{3N-3})$ приводит A; значит, пространство $P_{D_1} P_E L_2(\mathbf{R}^{3N-3})$ также приводит оператор A. Утверждение, касающееся операторов P_{D_2} и B, доказывается в точности так же, как для операторов P_{D_1} и A. Оператор P_R, определенный равенством (8.4), очевидно, является проектором в $L_2(\mathbf{R}^{3N})$, удовлетворяющим ввиду (8.2) соотношению $P_R S' \subset S' P_R$. Поэтому пространство $P_R L_2(\mathbf{R}^{3N})$ приводит оператор S'. Наконец, (8.6) следует из (8.2) и (8.4).

8.7. Теорема. *Пусть представления D_1, D_2 и E таковы, что $P_R \neq 0$. Операторы S'_R, $A_{D_1 E}$ и B_{D_2} существенно самосопряжены. Спектр $\sigma(S'_R)$ оператора S' (т. е. самосопряженного замыкания $\overline{S}'_R$) совпадает с замыканием множества*

$$\{\lambda\colon \lambda = \lambda_1 + \lambda_2,\ \lambda_1 \in \sigma(A_{D_1 E}),\ \lambda_2 \in \sigma(B_{D_2})\}.$$

Доказательство. В силу предположения (6.12) и леммы 6.6 операторы S, $\hat{S}$ и $\tilde{T}$ существенно самосопряжены; поэтому то же справедливо для операторов S', $\hat{S}'$ и $\tilde{T}'$. Согласно теореме 5.2, операторы A и B (порождающие $\hat{S}'$ и $\tilde{T}'$ соответственно) также являются существенно самосопряженными. Поэтому приведенные операторы S'_R, A_{D_1E} и B_{D_2} существенно самосопряжены (напомним, что оператор P_R, а значит, и операторы $P_{D_1}P_E$, P_{D_2} не равны нулю). Утверждение, касающееся спектра оператора S'_R, вытекает из равенства (8.6) и одной теоремы о сепарабельных операторах (см. Морен [20], II.6, теор. 8).

Следующая теорема относится к спектру $\sigma(B_{D_2})$. Мы докажем ее в более общей формулировке, чем нам здесь нужно, поскольку это не потребует никакой дополнительной работы.

8.8. Теорема. *Рассмотрим оператор* $T = -\Delta$ *в* $L_2(\mathbf{R}^m)$, $\mathrm{D}(T) = C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$. *Пусть* Γ — *некоторая компактная подгруппа группы* $\mathcal{O}(m)$; D_α — *неприводимое представление группы* Γ, *такое, что соответствующий проектор* P_α *не равен тождественно нулю*; T_α — *приведенный оператор* T *(с областью определения* $P_\alpha C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$). *Тогда*

$$\sigma(T_\alpha) = [0, \infty[;$$

для любых $\lambda \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$ *и* $r > 0$ *существует такое* D_α*-порождающее подпространство* N *пространства* $\mathrm{D}(T)$, *что*

$u(x) = 0$ *при* $|x| \leqslant r$ и $\| Tu - \lambda u \| \leqslant \varepsilon \| u \|$ *для всех* $u \in N$.

Доказательство. Докажем сначала последнее утверждение. Пусть Ω обозначает единичную сферу в $\mathbf{R}^m$ и N_l — множество всех сферических гармоник порядка l на Ω; множество N_l представляет собой конечномерное подпространство пространства $L_2(\Omega)$ и

$$\bigoplus_{l=0}^{\infty} N_l = L_2(\Omega).$$

Обозначим размерность пространства N_l через d_l, и пусть Y_{lj}, $j = 1, \ldots, d_l$,— ортонормированный базис в N_l. Для каждого $\gamma \in \mathcal{O}(m)$ функция $\xi \mapsto Y_{lj}(\gamma^{-1}\xi)$ является сферической гармоникой порядка l; поэтому существует унитарная матрица $D^{(l)}(\gamma) = (D_{ij}^{(l)}(\gamma))$, такая, что

$$Y_{lj}(\gamma^{-1}\xi) = \sum_{i=1}^{d_l} D_{ij}^{(l)}(\gamma) Y_{li}(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad j = 1, \ldots, d_l.$$

Легко видеть, что отображение $\gamma \mapsto D^{(l)}(\gamma)$ есть унитарное представление группы Γ. Поскольку представление $D^{(l)}(\gamma)$ унитарно эквивалентно прямой сумме неприводимых представлений (группы Г), то подпространство N_l разлагается в ортогональную сумму D_β-порождающих подпространств пространства $L_2(\Omega)$ для некоторых неприводимых представлений D_β группы Г. Но $\bigotimes\limits_{l=0}^{\infty} N_l = L_2(\Omega)$ и $P_\alpha \neq 0$; следовательно, существует по крайней мере одно такое l, что N_l содержит некоторое D_α-порождающее подпространство $N(\alpha, l)$[1]. Для $f \in L_2(0, \infty)$, $\|f\| = 1$, обозначим через $N(\alpha, l, f)$ множество функций u на $\mathbf{R}^m$ вида

$$u(x) = |x|^{\frac{1-m}{2}} f(|x|)\, Y\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad x \in \mathbf{R}^m,$$

где $Y \in N(\alpha, l)$. Тогда $N(\alpha, l, f)$ будет D_α-порождающим подпространством пространства $L_2(\mathbf{R}^m)$. Если $f \in C_0^\infty(0, \infty)$, то $N(\alpha, l, f) \subset \mathrm{D}(T)$ и

$$Tu(x) = |x|^{\frac{1-m}{2}} L_l f(|x|)\, Y\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

где

$$L_l f(s) = -f''(s) + \left(l + \frac{m-1}{2}\right)\left(l + \frac{m-3}{2}\right) s^{-2} f(s).$$

Положим теперь

$$f_n(s) = n^{-1/2} e^{i\sqrt{\lambda}\, s} \varphi\left(\frac{s}{n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\lambda \geqslant 0$, $\varphi \in C_0^\infty(0, \infty)$ и $\|\varphi\| = 1$. Тогда

$$\|f_n\| = 1 \text{ и } \|L_l f_n - \lambda f_n\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

По заданным $\varepsilon > 0$ и $r > 0$ можно подобрать $n \in \mathbf{N}$ так, чтобы

$$f_n(s) = 0 \text{ при } s \leqslant r \text{ и } \|L_l f_n - \lambda f_n\| \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда видно, что $N = N(\alpha, l, f_n)$ является D_α-порождающим подпространством пространства $\mathrm{D}(T)$, таким, что $u(x) = 0$ при $|x| \leqslant r$ и $\|Tu - \lambda u\| \leqslant \varepsilon \|u\|$ для всех $u \in N$. В силу леммы 7.1 N содержится в $P_\alpha L_2(\mathbf{R}^m)$ и потому $N \subset \mathrm{D}(T_\alpha)$. Согласно теореме 1.1 (часть (3')), $\lambda \in \sigma(T_\alpha)$; это справедливо для каждого $\lambda \geqslant 0$, поэтому $[0, \infty[\subset \sigma(T_\alpha)$. С другой стороны, $\sigma(T) = [0, \infty[$ и, значит, $\sigma(T_\alpha) \subset [0, \infty[$; откуда $\sigma(T_\alpha) = [0, \infty[$.

---

[1]) Для случая, когда группа Г конечна и $m = 3$, аналогичное утверждение было ранее доказано в [50*].— *Прим. перев.*

8.8′. Следствие. *Пусть* $P_{\pm}$ — *ортогональные проекторы в* $L_2(\mathbf{R}^m)$, *определенные формулой*

$$(P_\omega f)(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{\omega}{2}f(-x),\quad \omega=\pm 1.$$

Если $P_\omega P_\alpha \neq 0$, *то подпространство* N *в теореме* 8.8 *может быть выбрано так, чтобы* $P_\omega N = N$.

Доказательство легко следует из того факта, что подпространство $N(\alpha, l, f)$, определенное в доказательстве теоремы 8.8, удовлетворяет условиям: $P_\omega N(\alpha, l, f) = N(\alpha, l, f)$ для $\omega = (-1)^l$ и $P_\omega N(\alpha, l, f) = \{0\}$ для $\omega \neq (-1)^l$.

Пусть D и E — неприводимые представления соответственно группы вращательной симметрии Γ и группы перестановочной симметрии Π оператора S. Обозначим через P_D и P_E соответствующие проекторы в $L_2(\mathbf{R}^{3N})$. Тогда пространство $L_2(\mathbf{R}^{3N}, DE) = P_D P_E L_2(\mathbf{R}^{3N})$ приводит оператор S. Мы хотим найти спектр приведенного оператора S_{DE}. Для неприводимых представлений $D_{\alpha_1}, D_{\alpha_2}, D_\alpha$ группы Γ в § 7 было определено отношение $(\alpha_1, \alpha_2) \prec \alpha$ (см. (7.2) и (7.2′)); мы будем теперь записывать его так: $(D_{\alpha_1}, D_{\alpha_2}) \prec D_\alpha$. Используя обозначения теоремы 8.7, введем число

$$\eta_{DE} = \inf\{\lambda\colon \lambda\in\sigma(A_{D_1E}),\ \text{существует } D_2 \text{ такое, что } (D_1, D_2)\prec D \text{ и } P_{D_1}P_EP_{D_2}\neq 0\}. \tag{8.9}$$

Нижняя грань здесь конечна, потому что $\sigma(A_{D_1E}) \subset \sigma(A) = \sigma(S)$, а оператор S ограничен снизу (см. (6.12)).

8.10. Теорема. *Пусть* S — *гамильтониан свободной системы, а* D *и* E — *такие неприводимые представления соответственно группы вращательной симметрии* Γ *и группы перестановочной симметрии* Π *оператора* S, *что соответствующий проектор* P_DP_E *не равен нулю. Тогда для приведенного оператора* S_{DE} *справедливо равенство*

$$\sigma(S_{DE}) = [\eta_{DE}, \infty[,$$

где число η_{DE} *дается соотношением* (8.9). *Для любых* $\lambda \geqslant \eta_{DE}$ *и* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\rho > 0$, *что для каждого* $r > 0$ *найдется* $D\otimes E$*-порождающее подпространство* N *пространства* $\mathrm{D}(S)$ *со следующим свойством: для всех функций* $u \in N$

$$\| Su - \lambda u \| \leqslant \varepsilon \| u \|$$

и

$$u(x)=0 \text{ при } \Big(\sum_{i,j=1}^{N}|x_i-x_j|^2\Big)^{1/2}\geqslant\rho \text{ и при } \mu^{-1}\Big|\sum_{j=1}^{N}\mu_jx_j\Big|\leqslant r.$$

Доказательство. а) Рассмотрим все возможные пары (D_1^i, D_2^i) неприводимых представлений группы Γ, такие, что $(D_1^i, D_2^i) \prec D$

и $P_{D_1^i} P_E P_{D_2^i} \neq 0$. Для $R_i = D_1^i \otimes D_2^i \otimes E$ воспользуемся представлением (8.4) соответствующего проектора P_{R_i} и определим приводящее подпространство $L_2(\mathbf{R}^{3N}, R_i) = P_{R_i} L_2(\mathbf{R}^{3N})$ для оператора S'. Применим теорему 8.7 к приведенным операторам S'_{R_i}. Поскольку, согласно теореме 8.8, $\sigma(B_{D_2^i}) = [0, \infty[$, то мы получим, что

$$\sigma(S'_{R_i}) = [\mu_{D_1^i E}, \infty[, \text{ где } \mu_{D_1^i E} = \min \sigma(A_{D_1^i E}) \geqslant \eta_{DE}.$$

Положим теперь $L_2(\mathbf{R}^{3N}, DE) = P_D P_E L_2(\mathbf{R}^{3N})$. В силу леммы 7.5

$$L_2(\mathbf{R}^{3N}, DE) \subset \bigoplus_i L_2(\mathbf{R}^{3N}, R_i)$$

и потому $\sigma(S_{DE}) \subset \bigcup_i \sigma(S'_{R_i}) \subset [\eta_{DE}, \infty[$.

b) Пусть $\lambda > \eta_{DE}$. Тогда, согласно (8.9), существует такая пара (D_1, D_2), что $(D_1, D_2) \prec D$, $P_{D_1} P_E P_{D_2} \neq 0$ и $\lambda \geqslant \mu_{D_1 E} = \min \sigma(A_{D_1 E})$. Обозначим через d_1, d_2 и d_3 соответственно размерности представлений D_1, D_2 и E. Пусть заданы числа $\varepsilon > 0$ и $r > 0$ и $\varepsilon' = \frac{1}{2} \varepsilon (d_1 d_2 d_3)^{-1/2}$. В силу теоремы 8.8 найдется D_2-порождающее подпространство N_2 пространства $\mathrm{D}(B) = C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$, такое, что все функции w из N_2 равняются нулю при $|x| \leqslant r$ и удовлетворяют неравенству

$$\|Bw - (\lambda - \mu_{D_1 E}) w\| \leqslant \varepsilon' \|w\|.$$

Далее, $\mu_{D_1 E} \in \sigma(A_{D_1 E})$. Поэтому, согласно теореме 8.11, доказываемой ниже, найдется $D_1 \otimes E$-порождающее подпространство N пространства $\mathrm{D}(A) = C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N-3})$, такое, что

$$\|Av - \mu_{D_1 E} v\| \leqslant \varepsilon' \|v\| \text{ для всех } v \in N_1.$$

В силу (8.2) для всех функций $u = v \otimes w$ с $v \in N_1$ и $w \in N_2$ выполняется неравенство $\|S'u - \lambda u\| \leqslant 2\varepsilon' \|u\|$. Выберем ортонормированные базисы $v_1, \ldots, v_p$ $(p = d_1 d_3)$ в пространстве N_1 и $w_1, \ldots, w_q$ $(q = d_2)$ в пространстве N_2. Каждая функция $u \in N_1 \otimes N_2$ имеет вид

$$u = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} c_{jk} v_j \otimes w_k,$$

и поэтому

$$\|S'u - \lambda u\| \leqslant 2\varepsilon' \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} |c_{jk}| \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon' (pq)^{1/2} \Big\{ \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} |c_{jk}|^2 \Big\}^{1/2} = \varepsilon \|u\|.$$

По построению, $u(y) = 0$ при $|y_N| \leqslant r$ для всех $u \in N_1 \otimes N_2$ и существует $\rho' > 0$ такое, что

$$u(y) = 0 \quad \text{при} \quad \Big(\sum_{j=1}^{N-1} |y_j|^2\Big)^{1/2} \geqslant \rho' \quad \text{для всех } u \in N_1 \otimes N_2.$$

По определению отношения $(D_1, D_2) \prec D$ и по лемме 7.3 пространство $N_1 \otimes N_2$ содержит некоторое $D \otimes E$-порождающее подпространство M. Переходя обратно к первоначальным координатам x, мы получим такое $D \otimes E$-порождающее подпространство N пространства $\mathrm{D}(S)$, что для всех $u \in N$ выполняются соотношения

$$\| Su - \lambda u \| \leqslant \varepsilon \| u \|,$$

$$u(x) = 0 \quad \text{при } \mu^{-1} \Big| \sum_{j=1}^{N} \mu_j x_j \Big| \leqslant r,$$

и в силу леммы 6.8

$$u(x) = 0 \quad \text{при} \quad \Big(\sum_{i,\, j=1}^{N} |x_i - x_j|^2 \Big)^{1/2} \geqslant \rho = \frac{\rho'}{c_1}.$$

Положим теперь $\lambda = \eta_{DE}$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\rho > 0$, что для каждого $r > 0$ найдется $D \otimes E$-порождающее подпространство N пространства $\mathrm{D}(S)$, обладающее следующим свойством: для всех функций $u \in N$

$$\Big\| Su - \Big(\lambda + \frac{\varepsilon}{2}\Big) u \Big\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \| u \|$$

и

$$u(x) = 0 \quad \text{при} \quad \Big(\sum_{i,\, j=1}^{N} |x_i - x_j|^2 \Big)^{1/2} \geqslant \rho \ \text{ и при } \mu^{-1} \Big| \sum_{j=1}^{N} \mu_j x_j \Big| \leqslant r.$$

Отсюда вытекает, что $\| Su - \lambda u \| \leqslant \varepsilon \| u \|$ для всех $u \in N$.

Наконец, из части (3′) теоремы 1.1 следует, что $\lambda \in \sigma(S_{DE})$, т. е. что $\sigma(S_{DE}) \supset [\eta_{DE}, \infty[$ и, значит, $\sigma(S_{DE}) = [\eta_{DE}, \infty[$.

В доказательстве теоремы 8.10 была использована следующая теорема. Поскольку она представляет и самостоятельный интерес, мы сформулируем и докажем ее в более общей форме, чем нам здесь нужно. При применении ее в доказательстве теоремы 8.10 надо заменить Γ на $\Gamma \times \Pi$ и D на $D_1 \otimes E$.

8.11. Теорема. *Пусть A — существенно самосопряженный оператор в $L_2(\mathbf{R}^m)$ с областью определения $\mathrm{D}(A) = C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$, а Γ — компактная группа преобразований пространства $\mathbf{R}^m$, такая, что соотношение $(U(\gamma) f)(x) = f(\gamma^{-1} x)$ определяет непрерывное представление $\gamma \mapsto U(\gamma)$ группы Γ унитарными оператора* *ми* $U(\gamma)$ *в* $L_2(\mathbf{R}^m)$, *удовлетворяющими условию* $U(\gamma)A = AU(\gamma)$ *для всех* $\gamma \in \Gamma$. *Тогда для каждого неприводимого унитарного (матричного) представления* D *группы* Γ *соответствующее подпространство* $P_D L_2(\mathbf{R}^m)$ *приводит оператор* A.

Для каждого $\lambda \in \sigma(A_D)$, *где* A_D — *приведенный оператор, и для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* D*-порождающее подпространство* N *пространства* $\mathrm{D}(A)$, *что*

$$\| Au - \lambda u \| \leqslant \varepsilon \| u \| \text{ для всех } u \in N.$$

Доказательство. а) Пусть d — размерность представления D: $\gamma \mapsto (D_{jk}(\gamma))$, где $j, k = 1, \ldots, d$, а μ — инвариантная вероятностная мера на Γ. Определим в пространстве $L_2(\mathbf{R}^m)$ непрерывные операторы P_{jk} равенствами

$$P_{jk} = d \int\limits_{\Gamma} D_{jk}(\gamma)^* U(\gamma)\, d\mu(\gamma), \quad j, k = 1, \ldots, d.$$

Из свойств матричных элементов $D_{jk}(\cdot)$ и операторов $U(\cdot)$ следует, что

$$U(\gamma) P_{jk} = \sum_{r=1}^{d} D_{rj}(\gamma) P_{rk} \tag{8.12}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$ и для $j, k = 1, \ldots, d$. Кроме того, используя (7.0″) с опущенными индексами α, β, можно убедиться в справедливости соотношений

$$P_{jk} P_{pq} = \delta_{kp} P_{jq}, \tag{8.13}$$

$$P_{jk}^* P_{pq} = \delta_{jp} P_{kq}, \tag{8.14}$$

$$P_{jk} P_{pq}^* = \delta_{kq} P_{jp} \tag{8.15}$$

для всех $j, k, p, q = 1, \ldots, d$. В силу (8.13) и (8.14)

$$P_{jj} P_{pp} = \delta_{jp} P_{jj} \text{ и } P_{jj}^* P_{jj} = P_{jj}.$$

Поэтому операторы P_{jj} являются ортогональными проекторами на взаимно ортогональные подпространства $P_{jj} L_2(\mathbf{R}^m)$. Сумма

$$P_D = \sum_{j=1}^{d} P_{jj} = d \int\limits_{\Gamma} \chi(\gamma)^* U(\gamma)\, d\mu(\gamma)$$

есть ортогональный проектор, соответствующий представлению D. Из (8.14) и (8.15) получаем соотношения

$$P_{jk}^* P_{jk} = P_{kk} \quad \text{и} \quad P_{jk} P_{jk}^* = P_{jj},$$

которые показывают, что P_{jk} — *частично изометрический* оператор с исходным множеством $P_{kk} L_2(\mathbf{R}^m)$ и финальным множеством $P_{jj} L_2(\mathbf{R}^m)$ (см. Като [15], V.2.2).

Пусть $f \in P_D L_2(\mathbf{R}^m)$ и $f \neq 0$; тогда существует такое число $q \in \{1, \ldots, d\}$, что $P_{qq} f \neq 0$. Положим $g = \| P_{qq} f \|^{-1} P_{qq} f$ и $u_j = P_{jq} g$ для $j = 1, \ldots, d$. По построению, $u_j \in P_{jj} L_2(\mathbf{R}^m)$ и $\| u_j \| = 1$; поэтому $\langle u_j \mid u_k \rangle = \delta_{jk}$, и в силу (8.12)

$$U(\gamma) u_j = \sum_{r=1}^{d} D_{rj}(\gamma) u_r \quad \text{для } \gamma \in \Gamma \quad \text{и} \quad j = 1, \ldots, d.$$

Это соотношение показывает, что функции $u_1, \ldots, u_d$ образуют ортонормированный базис некоторого D-порождающего подпространства пространства $L_2(\mathbf{R}^m)$.

b) Покажем теперь, что операторы P_{jk} обладают следующим свойством:

$$(8.16) \qquad P_{jk} A \subset A P_{jk}, \quad j, k = 1, \ldots, d.$$

Отсюда, в частности, будет следовать, что подпространство $P_{jj} L_2(\mathbf{R}^m)$ приводит оператор A, а значит, и подпространство $P_D L_2(\mathbf{R}^m)$ приводит A.

Сравнение с доказательством теоремы 8.5 показывает, что нам достаточно для каждой функции $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ установить компактность множества $K = \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{supp}(U(\gamma) f)$. Пусть $\mathfrak{B}$ — произвольное открытое покрытие множества K; по предположению, носитель $\operatorname{supp}(U(\gamma) f) = K_\gamma$ компактен, и, следовательно, для каждого $\gamma \in \Gamma$ существует конечное подпокрытие $\mathfrak{B}_\gamma$ покрытия $\mathfrak{B}$, такое, что $K_\gamma \subset \bigcup \{V\colon V \in \mathfrak{B}_\gamma\}$. Согласно определению операторов $U(\gamma)$, множество K_γ является образом носителя $\operatorname{supp}(f)$ при отображении γ; поэтому для каждого $\gamma \in \Gamma$ существует открытая окрестность Σ_γ, такая, что $K_\delta \subset \bigcup \{V\colon V \in \mathfrak{B}_\gamma\}$ для всех $\delta \in \Sigma_\gamma$. Множество $\{\Sigma_\gamma\colon \gamma \in \Gamma\}$, будучи открытым покрытием группы Γ, содержит некоторое конечное подпокрытие $\{\Sigma_{\gamma_1}, \ldots, \Sigma_{\gamma_n}\}$. Следовательно, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{B}_{\gamma_i}$ образует конечное открытое покрытие множества K, содержащееся в $\mathfrak{B}$; значит, множество K компактно.

c) Пусть заданы $\lambda \in \sigma(A_D)$ и $\varepsilon > 0$. В силу теоремы 1.1 существует функция $f \in \mathrm{D}(A_D) = P_D \mathrm{D}(A)$, такая, что

$$\| f \| = 1 \quad \text{и} \quad \| Af - \lambda f \| \leqslant d^{-1/2} \varepsilon.$$

Поскольку $f = P_D f = \sum\limits_{j=1}^{d} P_{jj} f$, то $1 = \sum\limits_{j=1}^{d} \| P_{jj} f \|^2$; поэтому найдется такое число $q \in \{1, \ldots, d\}$, что $\| P_{qq} f \|^2 \geqslant d^{-1}$. Положим $g = \| P_{qq} f \|^{-1} P_{qq} f$. Тогда $\| g \| = 1$ и в силу (8.16)

$$\| Ag - \lambda g \| = \| P_{qq}(Af - \lambda f) \| \, \| P_{qq} f \|^{-1} \leqslant d^{-1/2} \varepsilon d^{1/2} = \varepsilon.$$

По доказанному в части а) элементы $u_j = P_{jq} g$ образуют ортонормированный базис некоторого D-порождающего подпространства N пространства $L_2(\mathbf{R}^m)$. В силу (8.16) $N \subset D(A)$ и

$$\| Au_j - \lambda u_j \| = \| P_{j_q}(Ag - \lambda g) \| \leqslant \varepsilon \text{ для } j = 1, \ldots, d.$$

Таким образом, $\| Au - \lambda u \| \leqslant \varepsilon \| u \|$ для всех $u \in N$, что и требовалось доказать.

§ 9. НИЖНЯЯ ГРАНИЦА СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА

В этом параграфе мы приводим до некоторой степени техническую теорему о существенном спектре гамильтониана (теор. 9.4), которая, однако, является решающим этапом на пути к окончательным результатам § 10 и 11.

Пусть $\{p_{hklr'}\}$ — некоторое семейство бесконечно дифференцируемых вещественных функций на $\mathbf{R}^m$,

$$h \in \{1, \ldots, H\},\ k \in \{1, \ldots, k(h)\},$$
$$l \in \{1, \ldots, l(h, k)\},\ r' \in]0, \infty[,$$

причем производные первого и второго порядка функций $p_{hklr'}$ ограничены на $\mathbf{R}^m$ равномерно по всем значениям параметров h, k, l, r'. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^m$ открытые множества

$$\text{(9.0)} \qquad \Omega(h, k, r', r) = \{x \in \mathbf{R}^m\colon\ p_{hklr'}(x) > r,\quad l = 1, \ldots, l(h, k)\}$$

и предположим, что выполнены следующие условия:

(9.1) Существует такое $\alpha > 0$, что

(i) $d(\Omega(h, k, r', s), \Omega(h, k', r', t)) > \alpha^{-1}(s + t - r')$ для всех h, $k \neq k'$, $s > 0$, $t > 0$, $s + t > r' > 0$;

(ii) $d(\Omega(h, k, r', s), \complement\Omega(h, k, r', t)) > \alpha^{-1}(s - t)$ для всех h, k, $s > t > 0$ и $r' > 0$.

(9.2) $\complement(\bigcup\limits_{h,k} \Omega(h, k, r', r)) \subset K(r')$ для $0 < r < r'$, где $K(r')$ — некоторое компактное подмножество пространства $\mathbf{R}^m$, зависящее только от r'.

По определению, $\Omega(h, k, r', s) \subset \Omega(h, k, r', r)$ при $r \leqslant s$. Для $r \leqslant s$ введем множества

$$\Psi(h, k, r', r, s) = \Omega(h, k, r', r) \setminus \Omega(h, k, r', s).$$

9.3. Лемма. *Для данных $C > 0$, $\varepsilon \in]0, 1]$ и $\rho > 0$ существует число $r' > \rho + 2$, обладающее тем свойством, что для каждой неотрицательной борелевской меры B на $\mathbf{R}^m$, удовлетворяющей условию $B(\mathbf{R}^m) \leqslant C$, найдется такое r, что $r + \alpha\rho + 2 < r' \leqslant 2r$ и*

$$\sum_{h,k} B(\Psi(h, k, r', r, r + \alpha\rho + 2)) \leqslant \varepsilon^2.$$

Доказательство. Выберем такое натуральное число J, что $J \geqslant \varepsilon^{-2} CH$, и положим

$$r_j = \rho + (J + j)(\alpha\rho + 2) \text{ при } j = 0, 1, \ldots, J,$$
$$r' = r_J + \rho.$$

Тогда

$$r' > \rho + 2, \ r_j + \alpha\rho + 2 \leqslant r_J < r',$$
$$2r_j \geqslant 2r_0 = 2\rho + 2J(\alpha\rho + 2) = r' \text{ для } j = 0, 1, \ldots, J - 1.$$

Согласно определению множеств Ψ,

$$\Psi(h, k, r', r_j, r_{j+1}) \cap \Psi(h, k', r', r_i, r_{i+1}) = \varnothing$$

при $k = k'$, $j \neq i$. Это соотношение выполняется и при $k \neq k'$ для произвольных i, j, поскольку в силу (9.1(i))

$$\Omega(h, k, r', r_j) \cap \Omega(h, k', r', r_i) = \varnothing,$$

ибо $r_j + r_i \geqslant r'$ при $i, j = 0, \ldots, J - 1$. Отсюда вытекает, что

$$\sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=1}^{k(h)} B(\Psi(h, k, r', r_j, r_{j+1})) \leqslant B(\mathbf{R}^m) \leqslant C$$

и потому

$$\sum_{j=0}^{J-1} \sum_{h, k} B(\Psi(h, k, r', r_j, r_{j+1})) \leqslant CH.$$

Следовательно, существует такое $j_0 \in \{0, 1, \ldots, J-1\}$, что

$$\sum_{h, k} B(\Psi(h, k, r', r_{j_0}, r_{j_0+1})) \leqslant J^{-1} CH \leqslant \varepsilon^2;$$

тем самым лемма доказана, с $r = r_{j_0}$.

9.4. Теорема. *Пусть $S = T + V$ — существенно самосопряженный оператор в $L_2(\mathbf{R}^m)$ с областью определения $\mathrm{D}(S) = C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$, где $T = -\Delta$ и оператор V симметричен и как T, так и S-ограничен. Предположим, кроме того, что справедливы следующие условия:*

(i) *Для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\rho_\varepsilon > 0$, что*

$$|\langle Vu \mid v \rangle| \leqslant \varepsilon \{\|u\|^2 + \|Tu\|^2 + \|v\|^2 + \|Tv\|^2\}$$

для всех функций $u, v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$, удовлетворяющих соотношению $d(\operatorname{supp}(u), \operatorname{supp}(v)) \geqslant \rho_\varepsilon$.

(ii) *Для каждой пары h, k ($h \in \{1, \ldots, H\}, k \in \{1, \ldots, k(h)\}$) можно указать такой симметричный оператор V_{hk} с областью определения $\mathrm{D}(V_{hk}) \supset \mathrm{D}(S)$, что оператор $S_{hk} = S - V_{hk}$ существенно самосопряжен и для всякого $\varepsilon > 0$ существует $r_\varepsilon > 0$, такое, что $\|V_{hk} u\| \leqslant \varepsilon(\|u\| + \|Tu\|)$ при всех $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$,* *удовлетворяющих соотношению* $\operatorname{supp}(u) \subset \Omega(h, k, r', s)$ *с числами* s, r', *подчиняющимися условиям* $r_\varepsilon < r' \leqslant 2s$ и $s \leqslant r' - 1$.

Тогда $\sigma_e(S) \subset [\eta, \infty[$, *где* $\eta = \min\{\eta_{hk}: h = 1, \ldots, H; k = 1, \ldots, k(h)\}$, $\eta_{hk} = \min \sigma(S_{hk})$.

Доказательство. a) Пусть $\lambda \in \sigma_e(S)$. Тогда в силу теоремы 1.2(4′) существует такая последовательность (u_n) в $\mathrm{D}(S)$, что $\| u_n \| = 1$, $u_n \rightharpoonup 0$ и $Su_n - \lambda u_n \to 0$. Из этих свойств последовательности (u_n) следует справедливость соотношения $\langle u_n \mid Su_n \rangle \to \lambda$; таким образом, нам надо доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \langle u_n \mid Su_n \rangle \geqslant \eta$. Так как последовательности (u_n) и (Su_n) ограничены, а оператор $T = S - V$ по предположению S-ограничен, то последовательность (Tu_n) тоже ограничена. Поэтому существует такая константа C, что
$$\| u_n + Tu_n \|^2 = \int \{| u_n |^2 + 2 \mid \operatorname{grad} u_n |^2 + | Tu_n |^2\} \, dx \leqslant C$$
для всех n. Для каждой функции $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ определим неотрицательную борелевскую меру B_u на $\mathbf{R}^m$ формулой
$$B_u(\Omega) = \int\limits_\Omega \{| u |^2 + 2 \, | \operatorname{grad} u |^2 + | Tu |^2\} \, dx.$$

Ясно, что $B_{u_n}(\mathbf{R}^m) \leqslant C$ для всех n.

b) Определим теперь некоторое разложение функций u_n. Для удобства записи всюду в этой части доказательства мы опускаем индекс n. По данному $\varepsilon \in]0, 1]$ выберем числа ρ_ε и r_ε согласно предположениям (i) и (ii) и положим $\rho = \max\{\rho_\varepsilon, r_\varepsilon\}$. В соответствии с леммой 9.3 выберем число r' (не зависящее от u) и затем r, зависящее от $B = B_u$. Пусть функция $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R})$ удовлетворяет условиям: $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1$ для всех $t \in \mathbf{R}$, $\varphi(t) = 0$ при $t \leqslant -1$ и $\varphi(t) = 1$ при $t \geqslant 0$.

Положим

$$(9.5) \qquad \Phi_{hks}(x) = \prod_{l=1}^{l(h,\,k)} \varphi(p_{hklr'}(x) - r - s - 1)$$

для $x \in \mathbf{R}^m$, $s \geqslant 0$, $h = 1, \ldots, H$ и $k = 1, \ldots, k(h)$. Очевидно, что
$$\Phi_{hks} \in C^\infty(\mathbf{R}^m), \; 0 \leqslant \Phi_{hks}(x) \leqslant 1 \text{ для всех } x \in \mathbf{R}^m$$
и (в силу (9.0))

$$(9.6) \qquad \Phi_{hks}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in \complement\Omega(h, k, r', r+s), \\ 1 & \text{при } x \in \Omega(h, k, r', r+s+1). \end{cases}$$

Поэтому

$$(9.7) \qquad \operatorname{supp}(\Phi_{hks}) \subset \overline{\Omega(h, k, r', r+s)}$$

и вследствие (9.1) (i)

(9.8) $d(\operatorname{supp}(\Phi_{hks}),\ \operatorname{supp}(\Phi_{hjt})) \geqslant \alpha^{-1}(s+t)$ для $j \neq k$

(заметим, что $2r \geqslant r'$ по лемме 9.3). Определим функции v_h, $w_{hk} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$, положив $v_0 = u$ и

(9.9) $$v_h = v_{h-1} - \sum_{k=1}^{k(h)} w_{hk}, \quad w_{hk} = v_{h-1}\Phi_{hks_0}$$

для $h = 1, \ldots, H$, где $s_0 = \alpha\rho + 1$. При $x \in \Omega(h, k, r', r + \alpha\rho + 2)$ выполняется равенство $\Phi_{hjs_0}(x) = \delta_{jk}$ и, следовательно, $v_h(x) = v_{h-1}(x)[1 - \Phi_{hks_0}(x)] = 0$; поэтому

(9.9′) $$\operatorname{supp}(v_h) \subset \operatorname{supp}(v_{h-1}) \cap \complement\Big[\bigcup_{k=1}^{k(h)} \Omega(h, k, r', r+\alpha\rho+2)\Big]$$

и, значит, в силу (9.2)

(9.10) $$\operatorname{supp}(v_H) \subset \complement\Big(\bigcup_{h,k} \Omega(h, k, r', r+\alpha\rho+2)\Big) \subset K(r'),$$

где $K(r')$ — компактное множество (заметим, что $r + \alpha\rho + 2 < r'$ согласно лемме 9.3).

Нам понадобится ряд оценок. По предположению, существует некоторая граница γ_0 для производных первого и второго порядка функций $p_{hklr'}$, равномерная относительно всех h, k, l, r'; поэтому найдется положительное число γ, зависящее только от γ_0 и φ, такое, что

(9.11) $$|\operatorname{grad}\Phi_{hks}(x)| \leqslant \gamma, |\Delta\Phi_{hks}(x)| \leqslant \gamma, \quad x \in \mathbf{R}^m,$$

для всех h, k и s. Отсюда вытекает существование такого числа γ', зависящего только от γ и H, что для всех борелевских множеств $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ и всех h и k выполняются неравенства

(9.11′) $$B_{v_h}(\Omega) \leqslant \gamma' B_u(\Omega), \quad B_{w_{hk}}(\Omega) \leqslant \gamma' B_u(\Omega).$$

При $j \neq k$ функции w_{hj} и w_{hk} имеют непересекающиеся носители, следовательно, $\langle w_{hj} \mid w_{hk}\rangle = 0$ и

$$\|v_{h-1}\|^2 = \|v_h\|^2 + \sum_{k=1}^{k(h)} \|w_{hk}\|^2 + 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{k(h)} \langle v_h \mid w_{hk}\rangle.$$

Далее,

$$\begin{aligned}&\operatorname{supp}(v_h) \cap \operatorname{supp}(w_{hk}) \subset \\ &\subset \overline{\Omega(h, k, r', r+\alpha\rho+1)} \setminus \Omega(h, k, r', r+\alpha\rho+2) \subset \\ &\subset \overline{\Psi(h, k, r', r, r+\alpha\rho+2)}.\end{aligned}$$

Обозначим последнее множество через Ψ_{hk}; тогда в силу определения меры B_u

$$\left|2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{k(h)}\langle v_h\,|\,w_{hk}\rangle\right|\leqslant\sum_k\int_{\Psi_{hk}}\{|v_h|^2+|w_{hk}|^2\}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\sum_k[B_{v_h}(\Psi_{hk})+B_{w_{hk}}(\Psi_{hk})]\leqslant 2\gamma'\sum_k B_u(\Psi_{hk}).$$

Поэтому

$$(9.12)\qquad \left|\,\|u\|^2-\|v_H\|^2-\sum_{h,\,k}\|w_{hk}\|^2\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{h=1}^{H}\left|\,\|v_{h-1}\|^2-\|v_h\|^2-\sum_k\|w_{hk}\|^2\right|\leqslant 2\gamma'\sum_{h,\,k}B_u(\Psi_{hk})\leqslant 2\gamma'\varepsilon^2;$$

последнее неравенство взято из леммы 9.3. Из определения функции v_h вытекает тождество

$$(9.13)\qquad \langle v_{h-1}\,|\,Sv_{h-1}\rangle=\langle v_h\,|\,Sv_h\rangle+\sum_k\langle w_{hk}\,|\,Sw_{hk}\rangle+$$

$$+2\,\mathrm{Re}\sum_k\langle v_h\,|\,Sw_{hk}\rangle+2\,\mathrm{Re}\sum_{j<k}\langle w_{hj}\,|\,Sw_{hk}\rangle.$$

Чтобы оценить величину $\langle v_h\mid Sw_{hk}\rangle$, положим $S=T+V$; используя лемму 9.3, получаем

$$2\,|\langle v_h\,|\,Tw_{hk}\rangle|\leqslant\int_{\Psi_{hk}}\{|v_h|^2+|Tw_{hk}|^2\}\,dx\leqslant 2\gamma' B_u(\Psi_{hk})\leqslant 2\gamma'\varepsilon.$$

Представим функцию v_h в виде $v_h=v_h'+v_h''$, где $v_h'=v_h\Phi_{hk0}$ и $v_h''=v_h-v_h'$. В силу (9.6) выполняется соотношение

$$\mathrm{supp}\,(v_h'')\subset\complement\Omega\,(h,\ k,\ r',\ r+1),$$

и потому в силу (9.1) (ii) и (9.7)

$$d\,(\mathrm{supp}\,(v_h''),\ \mathrm{supp}\,(w_{hk}))\geqslant\rho\geqslant\rho_\varepsilon.$$

Согласно предположению (i) теоремы, справедливо неравенство

$$|\langle v_h''|\,Vw_{hk}\rangle|\leqslant\varepsilon\,\{\|v_h''\|^2+\|Tv_h''\|^2+\|w_{hk}\|^2+\|Tw_{hk}\|^2\}.$$

По построению и ввиду (9.11)

$$\|v_h''\|\leqslant\|v_h\|$$

и

$$\|Tv_h''\|\leqslant\|Tv_h\|+2\gamma\,\|\mathrm{grad}\,v_h\|+\gamma\,\|v_h\|;$$

следовательно,

$$\begin{aligned}|\langle v_h'' \,|\, V w_{hk}\rangle| &\leqslant \varepsilon\,\{(1+4\gamma^2)\,\|v_h\|^2 + 8\gamma^2\,\|\operatorname{grad} v_h\|^2 + \\ &\quad + 4\,\|Tv_h\|^2 + \|w_{hk}\|^2 + \|Tw_{hk}\|^2\} \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon\,\{(4+8\gamma^2)\,B_{v_h}(\mathbf{R}^m) + B_{w_{hk}}(\mathbf{R}^m)\} \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon\gamma'\,(5+8\gamma^2)\,B_u(\mathbf{R}^m) \leqslant \varepsilon\gamma'\,(5+8\gamma^2)\,C.\end{aligned}$$

Используя (9.9′), (9.7) и определение функции v_h', находим:

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(v_h') &\subset \overline{\Omega(h,k,r',r)} \setminus \Omega(h,k,r',r+\alpha\rho+2) \subset \\ &\subset \overline{\Psi(h,k,r',r,r+\alpha\rho+2)} = \Psi_{hk},\end{aligned}$$

откуда в силу леммы 9.3

$$\|v_h'\|^2 \leqslant B_{v_h}(\Psi_{hk}) \leqslant \gamma' B_u(\Psi_{hk}) \leqslant \gamma'\varepsilon^2.$$

Так как оператор V является T-ограниченным, то оценка

$$\|Vw_{hk}\|^2 \leqslant a\,\{\|w_{hk}\|^2 + \|Tw_{hk}\|^2\} \leqslant aB_{w_{hk}}(\mathbf{R}^m) \leqslant a\gamma' C$$

выполняется с константой a, зависящей только от T и V. Из доказанных неравенств следует, что

$$|\langle v_h' \,|\, Vw_{hk}\rangle| \leqslant \{\gamma'\varepsilon^2 a\gamma' C\}^{1/2} = C_1\varepsilon,$$

где C_1 — константа, не зависящая от ε и u. Остается оценить скалярное произведение $\langle w_{hj} \,|\, Sw_{hk}\rangle$ при $j \neq k$. Согласно соотношению (9.8), носители функций w_{hj} и w_{hk} отстоят друг от друга на расстояние, не меньшее $\alpha^{-1}(2\alpha\rho+2) > 2\rho > \rho_\varepsilon$; поэтому ввиду предположения (i) выполняется неравенство

$$\begin{aligned}|\langle w_{hj} \,|\, Sw_{hk}\rangle| &= |\langle w_{hj} \,|\, Vw_{hk}\rangle| \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon\,\{\|w_{hj}\|^2 + \|Tw_{hj}\|^2 + \|w_{hk}\|^2 + \|Tw_{hk}\|^2\} \leqslant \\ &\leqslant 2\varepsilon\gamma' B_u(\mathbf{R}^m) \leqslant 2\varepsilon\gamma' C.\end{aligned}$$

Подстановка всех этих оценок в (9.13) дает

$$\Big|\langle v_{h-1} \,|\, Sv_{h-1}\rangle - \langle v_h \,|\, Sv_h\rangle - \sum_k \langle w_{hk} \,|\, Sw_{hk}\rangle\Big| \leqslant C_2\varepsilon,$$

откуда, суммируя по h, получаем

$$\text{(9.14)} \qquad \Big|\langle u \,|\, Su\rangle - \langle v_H \,|\, Sv_H\rangle - \sum_{h,k} \langle w_{hk} \,|\, Sw_{hk}\rangle\Big| \leqslant C_3\varepsilon,$$

где C_2 и C_3 не зависят от ε и u.

c) Применим разложение, описанное в части b) доказательства, к каждому элементу последовательности (u_n). Обозначим компоненты функции u_n через $v_h^{(n)}$ и $w_{hk}^{(n)}$. По построению

$|v_H^{(n)}(x)| \leqslant |u_n(x)|$ при $x \in \mathbf{R}^m$, и в силу (9.10) носитель функции $v_H^{(n)}$ содержится в компактном множестве $K(r')$; следовательно,

$$\|v_H^{(n)}\|^2 \leqslant \int\limits_{K(r')} |u_n(x)|^2\,dx.$$

Так как $u_n \rightharpoonup 0$ и $Su_n \rightharpoonup 0$, то и $Tu_n \rightharpoonup 0$, ибо оператор T является S-ограниченным; поэтому в силу лемм 3.1 и 3.10 для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ выполняется соотношение $\varphi u_n \to 0$. Отсюда вытекает, что $v_H^{(n)} \to 0$ при $n \to \infty$. Ввиду (9.11′)

$$\|v_H^{(n)}\|^2 + \|Tv_H^{(n)}\|^2 \leqslant \gamma' B_u(\mathbf{R}^m) \leqslant \gamma' C,$$

и, значит, последовательность $(Sv_H^{(n)})$ ограничена и $\langle v_H^{(n)} \mid Sv_H^{(n)}\rangle \to 0$ при $n \to \infty$. Построение функции $w_{hk}^{(n)}$ и соотношение (9.7) показывают, что $\operatorname{supp}(w_{hk}^{(n)})$ содержится в $\overline{\Omega(h, k, r', r + \alpha\rho + 1)}$, где r зависит от n и удовлетворяет в силу леммы 9.3 неравенствам $r + \alpha\rho + 2 < r' \leqslant 2r$. Следовательно,

$$\operatorname{supp}(w_{hk}^{(n)}) \subset \overline{\Omega(h, k, r', r'/2 + \alpha\rho + 1)} \subset \Omega(h, k, r', r'/2)$$

для всех n, h и k. По лемме 9.3 $r' > \rho + 2$, и по построению $\rho \geqslant r_\varepsilon$. Отсюда видно, что число $s = r'/2$ удовлетворяет условиям $r_\varepsilon < r' = 2s$ и $s \leqslant r' - 1$. В силу предположения (ii) теоремы

$$|\langle w_{hk}^{(n)} \mid V_{hk} w_{hk}^{(n)}\rangle| \leqslant \varepsilon\, \|w_{hk}^{(n)}\| \{\|w_{hk}^{(n)}\| + \|Tw_{hk}^{(n)}\|\} \leqslant 2\varepsilon B_{w_{hk}^{(n)}}(\mathbf{R}^m) \leqslant 2\varepsilon\gamma' C.$$

По определению числа $\eta_{hk} = \min \sigma(S_{hk})$ имеем

$$\langle u \mid S_{hk} u\rangle \geqslant \eta_{hk} \|u\|^2 \text{ для всех } u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m),$$

откуда

$$\text{(9.15)}\qquad \langle w_{hk}^{(n)} \mid S w_{hk}^{(n)}\rangle = \langle w_{hk}^{(n)} \mid S_{hk} w_{hk}^{(n)}\rangle + \langle w_{hk}^{(n)} \mid V_{hk} w_{hk}^{(n)}\rangle \geqslant \geqslant \eta_{hk} \|w_{hk}^{(n)}\|^2 - 2\varepsilon\gamma' C.$$

Применяя (9.14) к u_n, получаем

$$\langle u_n \mid Su_n\rangle - \langle v_H^{(n)} \mid Sv_H^{(n)}\rangle \geqslant \sum_{h,k} \langle w_{hk} \mid S w_{hk}^{(n)}\rangle - C_3\varepsilon \geqslant \sum_{h,k} \eta_{hk} \|w_{hk}^{(n)}\|^2 - C_4\varepsilon \geqslant$$

$$\geqslant \eta \sum_{h,k} \|w_{hk}^{(n)}\|^2 - C_4\varepsilon \geqslant \eta\{1 - \|v_H^{(n)}\|^2\} - C_5\varepsilon;$$

последнее неравенство вытекает из оценки (9.12), примененной к u_n. Поскольку $\langle v_H^{(n)} \mid Sv_H^{(n)}\rangle \to 0$ и $\|v_H^{(n)}\| \to 0$ при $n \to \infty$, отсюда следует, что

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \langle u_n \mid Su_n\rangle \geqslant \eta - C_5\varepsilon$$

и, значит, $\lambda \geqslant \eta$. Теорема доказана.

§ 10. СУЩЕСТВЕННЫЙ СПЕКТР ГАМИЛЬТОНИАНА N-ЧАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ В ПОЛЕ ВНЕШНИХ СИЛ

Пусть S — гамильтониан N-частичной системы, находящейся под действием внешних сил, т. е. в выражении для S не все операторы $V_{j_1 \ldots j_n}$ равны нулю. Обозначим через Γ группу вращательной симметрии и через Π — группу перестановочной симметрии оператора S; эти группы были определены в § 7. Если D и E — неприводимые унитарные представления соответственно групп Γ и Π, то $D \otimes E$ — неприводимое унитарное представление группы $\Gamma \times \Pi$. Пусть P_{DE} — соответствующий представлению $D \otimes E$ проектор; предположим, что $P_{DE} \neq 0$, так что приводящее оператор S подпространство $P_{DE}L_2(\mathbf{R}^{3N})$ нетривиально. Наша цель — найти существенный спектр приведенного оператора $S(D, E) = S \mid P_{DE}C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$.

Пусть $Z = (Z_1, Z_2)$ — разбиение рассматриваемой системы (т. е. нашего множества $\{1, \ldots, N\}$) на два непересекающихся подмножества Z_1, Z_2, причем Z_1 непусто. Положим

$$
(10.1)\qquad \begin{cases} S_1(Z) = T_{k_1 \ldots k_m} + \sum\limits_{(j_1 \ldots j_n) \subset (k_1 \ldots k_n)} W_{j_1 \ldots j_n}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } Z_1 = \{k_1, \ldots, k_m\}, \\ S_2(Z) = S_{j_1 \ldots j_n}, \qquad \text{если } Z_2 = \{j_1, \ldots, j_n\}, \\ S_2(Z) = 0, \qquad\qquad \text{если } Z_2 \text{ пусто}, \\ S(Z) = S_1(Z) + S_2(Z_2). \end{cases}
$$

Ясно, что $S(Z)$ — это оператор, полученный из оператора S вычеркиванием всех членов $V_{j_1 \ldots j_n}$, для которых $\{j_1, \ldots, j_n\} \cap Z_1 \neq \varnothing$, и всех членов $W_{j_1 \ldots j_n}$, для которых $\{j_1, \ldots, j_n\} \cap Z_i \neq \varnothing$ одновременно для $i = 1$ и $i = 2$.

При $Z_j \neq \varnothing$ обозначим через $L_2(Z_j)$ пространство квадратично суммируемых функций переменных x_i для $i \in Z_j$, $j = 1, 2$. Оператор $S_j(Z)$ определен в $L_2(\mathbf{R}^{3N})$ и действует только на переменные из Z_j; поэтому существует единственный оператор $S_0(Z_j)$ в пространстве $L_2(Z_j)$, который порождает оператор $S_j(Z)$ в смысле определения 5.1; в силу теоремы 5.2 оператор $S_0(Z_j)$ существенно самосопряжен. Рассмотрим группу симметрии $\Gamma \times \Pi(Z_j)$ оператора $S_0(Z_j)$, где $\Pi(Z_j)$ — подгруппа группы Π, порожденная транспозициями тождественных частиц в Z_j. Пусть D_j и E_j — неприводимые представления групп Γ и $\Pi(Z_j)$ соответственно, P_{D_j} и P_{E_j} — соответствующие проекторы в $L_2(Z_j)$, и пусть $P_{D_j}P_{E_j} \neq 0$. Тогда пространство $P_{D_j}P_{E_j}L_2(Z_j)$ приводит оператор $S_0(Z_j)$; обозначим приведенный оператор через $S_0(Z_j, D_j, E_j)$.

Представляя пространство $L_2(\mathbf{R}^{3N})$ в виде $L_2(\mathbf{R}^{3N}) = L_2(Z_1)\hat{\otimes} L_2(Z_2)$, имеем

$$S(Z) = S_0(Z_1)\otimes I_2 + I_1 \otimes S_0(Z_2),$$

где I_j — единичный оператор в $L_2(Z_j)$. В предположении, что $P_{D_j}P_{E_j} \neq 0$ при $j = 1, 2$, подпространство

$$P_{D_1}P_{E_1}L_2(Z_1)\ \hat{\otimes}\ P_{D_2}P_{E_2}L_2(Z_2)$$

приводит оператор $S(Z)$ и приведенный оператор имеет вид

$$S(ZD_1, D_2, E_1, E_2) = S_0(Z_1, D_1, E_1)\otimes I_2 + I_1 \otimes \otimes S_0(Z_2, D_2, E_2), \tag{10.2}$$

где I_j — единичный оператор в $P_{D_j}P_{E_j}L_2(Z_j)$.

Положим

$$\eta(Z_j, D_j, E_j) = \min \sigma(S_0(Z_j, D_j, E_j)). \tag{10.3}$$

Тогда, поскольку оператор $S_0(Z_1)$ является гамильтонианом свободной системы, то, согласно теореме 8.10, $\sigma(S_0(Z_1, D_1, E_1)) = [\eta(Z_1, D_1, E_1), \infty[$ и, следовательно, спектром оператора (10.2) служит полупрямая

$$[\eta(Z_1, D_1, E_1) + \eta(Z_2, D_2, E_2), \infty[.$$

Напомним (см. § 7), что соотношение $(D_1, D_2) \prec D$ для неприводимых представлений группы Γ означает, что D есть неприводимая компонента представления $\gamma \mapsto D_1(\gamma)\otimes D_2(\gamma)$, а соотношение $(E_1, E_2) \prec E$ для неприводимых представлений E, E_1, E_2 соответственно групп Π, $\Pi(Z_1)$ и $\Pi(Z_2)$,— что $E_1\otimes E_2$ является неприводимой компонентой ограничения представления E на подгруппу $\Pi(Z) = \Pi(Z_1)\times\Pi(Z_2)$. Положим

$$\begin{cases} \eta(Z, D, E) = \inf\{\eta(Z_1, D_1, E_1) + \eta(Z_2, D_2, E_2)\colon (D_1, D_2) \prec D, \\ \qquad (E_1\, E_2) \underset{Z}{\prec} E,\ P_{D_j}P_{E_j} \neq 0 \quad \text{для } j = 1, 2\}, \\ \qquad\qquad \text{если } Z_2 \neq \varnothing, \\ \eta(Z, D, E) = \eta(Z_1, D, E), \qquad \text{если } Z_2 = \varnothing. \end{cases} \tag{10.4}$$

Теперь мы можем сформулировать главный результат этого параграфа.

10.5. Т е о р е м а. *Пусть D и E — такие неприводимые представления групп Γ и Π соответственно, что $P_DP_E \neq 0$. Тогда*

$$\sigma_e(S(D, E)) = [\eta(D, E), \infty[,$$

где $\eta(D, E) = \min\{\eta(Z, D, E)\colon Z = (Z_1, Z_2),\ Z_1 \neq \varnothing\}$.

З а м е ч а н и е. Для произвольных неприводимых представлений D и E групп Γ и Π соответственно, для которых $P_DP_E \neq 0$, выполняется неравенство $\eta(D, E) \leqslant 0$, т. е. $[0, \infty[\subset \sigma_e(S(D, E))$. Действительно, при $N = 1$ существует только одно допустимое разбиение ($Z_1 = \{1\}$, $Z_2 = \varnothing$) и группа Π тривиальна; следовательно, $S_0(Z_1) = -(2\mu_1)^{-1}\Delta$, и согласно теореме 8.8 $\eta(Z_1, D) = \eta(D) = 0$. Используя индукцию по числу частиц N и теорему 10.5, получаем высказанное утверждение.

Доказательство. 1. Чтобы установить включение $[\eta(D, E), \infty[\subset \sigma_e(S(D, E))$, достаточно показать, что $[\eta(Z, D, E), \infty[\subset \sigma(S(D, E))$ для всех $Z = (Z_1, Z_2)$ с $Z_1 \neq \varnothing$, ибо отсюда следует, что $[\eta(Z, D, E), \infty[\subset \sigma_e(S(D, E))$.

Обратимся сначала к случаю $Z_2 \neq \varnothing$. Здесь нам надо установить, что для всех D_1, D_2, E_1, E_2, таких, что $(D_1, D_2) \prec D$, $(E_1, E_2) \underset{Z}{\prec} E$ и $P_{D_j} P_{E_j} \neq 0$ при $j = 1, 2$, и для всех $\lambda \geqslant \eta(Z_1, D_1, E_1) + \eta(Z_2, D_2, E_2)$ выполнено соотношение $\lambda \in \sigma(S(D, E))$. Положим $\lambda_2 = \eta(Z_2, D_2, E_2)$; тогда, очевидно,

$$\lambda_1 = \lambda - \lambda_2 \geqslant \eta(Z_1, D_1, E_1).$$

Пусть $Z_1 = \{k_1, \ldots, k_m\}$ $(1 \leqslant m \leqslant N - 1)$. Согласно теореме 8.10, для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\rho > 0$ такое, что для всякого $r > 0$ найдется $D_1 \otimes E_1$-порождающее подпространство N пространства $C_0^\infty(Z_1)$, обладающее тем свойством, что для всех $u \in N$

$$\| S_0(Z_1) u - \lambda_1 u \| \leqslant \varepsilon \| u \|$$

и

$$u(x) = 0 \quad \text{при} \quad \Big(\sum_{i, j=1}^{m} |x_{k_i} - x_{k_j}|^2\Big)^{1/2} \geqslant \rho \ \text{ и при } |\tilde{x}| \leqslant r,$$

где

$$\tilde{x} = \Big(\sum_{j=1}^{m} \mu_{k_j}\Big)^{-1} \sum_{j=1}^{m} \mu_{k_j} x_{k_j}$$

— центр масс частиц $k_1, \ldots, k_m$. Если число $R = r - \rho$ положительно и точка $(x_{k_1}, \ldots, x_{k_m})$ принадлежит носителю функции $u \in N$, то

$$|x_{k_i}| \geqslant |\tilde{x}| - |\tilde{x} - x_{k_i}| \geqslant r - \max_j |x_{k_j} - x_{k_i}| \geqslant r - \rho = R$$

для $i = 1, \ldots, m$. Поэтому для любых данных $\varepsilon > 0$ и $R > 0$ существует такое $D_1 \otimes E_1$-порождающее подпространство N пространства $C_0^\infty(Z_1)$, что для всех функций $u \in N$ имеют место соотношения

$$\| S_0(Z_1) u - \lambda_1 u \| \leqslant \varepsilon \| u \|$$

и

$$u(x) = 0 \text{ при } \min \{|x_j|: j \in Z_1\} \leqslant R.$$

Так как $\lambda_2 \in \sigma(S_0(Z_2, D_2, E_2))$, то в силу теоремы 8.11 существует такое $D_2 \otimes E_2$-порождающее подпространство M пространства $C_0^\infty(Z_2)$, что

$$\| S_0(Z_2) v - \lambda_2 v \| \leqslant \varepsilon \| v \|$$

для всех $v \in M$. Обозначим через R' наименьшее число, удовлетворяющее условию: $\max \{|x_j|: j \in Z_2\} \leqslant R'$ при всех x из носителя функции v для всех $v \in M$. Тогда пространство $N \otimes M$ является таким $D_1 \otimes E_1 \otimes D_2 \otimes E_2$-порождающим подпространством пространства $C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$, что для всех $w \in N \otimes M$

$$\| S(Z) w - \lambda w \| \leqslant 2d^{1/2}\varepsilon \| w \|$$

(ср. с частью b) доказательства теоремы 8.10), где d — размерность пространства $N \otimes M$, и $w(x) = 0$ для всех x, для которых

$$\min \{|x_j|: j \in Z_1\} \leqslant R \text{ или } \max \{|x_j|: j \in Z_2\} \geqslant R'.$$

Отсюда следует, что $\| S(Z) w \| \leqslant C_1 \| w \|$ для всех $w \in N \otimes M$, где $C_1 = |\lambda| + 2d^{1/2}\varepsilon$.

В силу (6.12) оператор кинетической энергии T является $S(Z)$-ограниченным; поэтому существует такая константа $C_2 > 0$, что $\| Tw \| \leqslant C_2 \| w \|$ для всех $w \in N \otimes M$. По определению оператора $S(Z)$, оператор $S - S(Z)$ есть сумма таких операторов $V_{j_1 \ldots j_n}$, что $\{j_1, \ldots, j_n\} \cap Z_1 \neq \varnothing$, и таких операторов $W_{j_1 \ldots j_n}$, что набор $\{j_1, \ldots, j_n\}$ имеет непустое пересечение с каждым из множеств Z_1 и Z_2. Согласно следствиям (6.2b) и (6.7b), все эти операторы малы на $N \otimes M$, если R взято достаточно большим (в частности, нужно, чтобы выполнялось неравенство $R > R'$); более точно,

$$\| Sw - S(Z) w \| \leqslant \varepsilon \| w \| \text{ для всех } w \in N \otimes M,$$

если R достаточно велико. Отсюда видно, что для всех $w \in N \otimes M$ выполняется оценка

$$\| Sw - \lambda w \| \leqslant C_3 \| w \|,$$

где $C_3 = 1 + 2d^{1/2}$.

Построим теперь нетривиальное подпространство пространства $P_D P_E C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$, на котором оператор $S - \lambda I$ мал. Пространство $N \otimes M$ является суммой $D_1 \otimes D_2$-порождающих подпространств; в силу определения соотношения $(D_1, D_2) \prec D$ пространство $N \otimes M$ содержит некоторое нетривиальное D-порождающее подпространство. Поэтому пространство $L = P_D(N \otimes M)$ отлично от $\{0\}$ и содержится в $N \otimes M$. Проекторы P_D и P_E коммутируют.

Мы докажем сейчас существование такой константы $C_4 > 0$, что

$$\| P_E w \| \geqslant C_4 \| w \| \text{ при всех } w \in N \otimes M.$$

Отсюда будет следовать, что

$$K = P_E L = P_D P_E (N \otimes M) \neq \{0\}$$

— нетривиальное подпространство пространства $P_D P_E C_0^\infty (\mathbf{R}^{3N})$ и для всех $u = P_E w \in K$ $(w \in L)$ справедливо соотношение

$$\| (S - \lambda I) u \| = \| P_E (S - \lambda I) w \| \leqslant \| (S - \lambda I) w \| \leqslant$$
$$\leqslant C_3 \varepsilon \| w \| \leqslant \frac{C_3}{C_4} \varepsilon \| u \|,$$

из которого вытекает включение $\lambda \in \sigma (S (D, E))$.

Остается установить существование такой константы $C_4 > 0$, что

$$\| P_E w \| \geqslant C_4 \| w \| \text{ при всех } w \in N \otimes M.$$

Если $\pi \in \Pi \setminus (\Pi (Z_1) \times \Pi (Z_2))$, то $\pi^{-1} Z_1 \cap Z_2 \neq \varnothing$, и поэтому при $w \in N \otimes M$ функции $U(\pi) w$ и w имеют непересекающиеся носители (заметим, что

$$w(x) = 0 \text{ при } \min \{ |x_j| : j \in Z_1 \} \leqslant R \text{ и при } \max \{ |x_j| : j \in Z_2 \} \geqslant R'$$

и что $R > R'$); следовательно,

$$\langle w \mid U(\pi) w \rangle = 0.$$

В силу определения (7.7) оператора P_E выполняется равенство $\langle w \mid P_E w \rangle = \langle w \mid Q_E w \rangle$ с

$$Q_E = \frac{d(E)}{|\Pi|} \sum_{\pi \in \Pi(Z_1) \times \Pi(Z_2)} \chi_E (\pi)^* U(\pi),$$

где $d(E)$ и χ_E — соответственно размерность и характер представления E и $|\Pi|$ — порядок группы Π. Соотношение $(E_1, E_2) \underset{Z}{\prec} E$ означает, что представление $E \mid \Pi (Z_1) \times \Pi (Z_2)$ унитарно эквивалентно некоторой сумме $\bigoplus_{i=0}^{k} n_i E^{(i)}$, где $n_i > 0$ и неприводимые представления $E^{(i)}$ группы $\Pi (Z_1) \times \Pi (Z_2)$ таковы, что $E^{(0)} = E_1 \otimes E_2$. Для соответствующих характеров это дает

$$\chi_E (\pi) = \sum_{i=0}^{k} n_i \chi^{(i)} (\pi) \text{ для всех } \pi \in \Pi (Z_1) \times \Pi (Z_2).$$

Таким образом,

$$Q_E = \sum_{i=0}^{k} \nu_i P_i,$$

где $\nu_i > 0$ и P_i — проектор, отвечающий представлению $E^{(i)}$. По построению

$$P_0 w = w \text{ для всех } w \in N \otimes M,$$

и, значит,

$$P_i w = 0 \text{ при } i = 1, \ldots, k;$$

поэтому

$$\langle w \mid P_E w \rangle = \langle w \mid Q_E w \rangle = \nu_0 \langle w \mid w \rangle,$$

откуда

$$\| P_E w \| \geqslant \nu_0^{1/2} \| w \|.$$

Для завершения этой части доказательства остается рассмотреть случай $Z_2 = \varnothing$, $Z_1 = \{1, \ldots, N\}$. В этом случае нам надо доказать, что все $\lambda \geqslant \eta (Z_1, D, E)$ принадлежат спектру $\sigma (S (D, E))$. В силу теоремы 8.10 для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого $R > 0$ существует $D \otimes E$-порождающее подпространство N пространства $C_0^\infty (\mathbf{R}^{3N})$, такое, что для всех $u \in N$ выполняются соотношения

$$\| S_1 (Z) u - \lambda u \| \leqslant \varepsilon \| u \|$$

и

$$u (x) = 0 \text{ при } \min \{ | x_j | : j = 1, \ldots, N \} \leqslant R.$$

Далее,

$$S - S_1 (Z) = \sum_{(j_1 \ldots j_n) \subset (1 \ldots N)} V_{j_1 \ldots j_n},$$

и в силу следствия (6.2b)

$$\| Su - S_1 (Z) u \| \leqslant \varepsilon \| u \| \text{ для всех } u \in N,$$

если R достаточно велико. Поэтому

$$\| Su - \lambda u \| \leqslant 2\varepsilon \| u \| \text{ для всех } u \in N,$$

откуда и следует доказываемое включение $\lambda \in \sigma (S (D, E))$.

2. Цель второй части доказательства — показать, что $\sigma_e (S (D, E)) \subset [\eta (D, E), \infty[$. Это делается с помощью теоремы 9.4. Чтобы применить эту теорему, мы должны определить функции $p_{hklr'}$ в соотношении (9.0). Обозначим через $Z^{hk} = (Z_1^{hk}, Z_2^{hk})$ всевозможные разбиения $Z = (Z_1, Z_2)$ системы $\{1, \ldots, N\}$ с $Z_1 \neq \varnothing$, причем $h \in \{1, \ldots, N\}$ равно 1 плюс число элементов множества Z_2^{hk}, а индекс $k \in \{1, \ldots, k (h)\}$ служит для нумерации различных разбиений при фиксированном h. Для каждой пары (h, k) и каждого $r' > 0$ пусть $\{p_{hklr'}\}$, $l \in \{1, \ldots \ldots, l (h, k)\}$ — перечень следующих функций:

$$\text{(10.6)} \qquad \begin{cases} p (x_i) - (h-1) r', & i \in Z_1^{hk}, \\ p (x_i) - p (x_j), & i \in Z_1^{hk}, \quad j \in Z_2^{hk}, \\ hr' - p (x_j), & j \in Z_2^{hk}, \end{cases}$$

где $p(z) = (1 + |z|^2)^{1/2}$ для $z \in \mathbf{R}^3$. Определим множества $\Omega(h, k, r', r)$ соотношением (9.0). Тогда условия (9.1) и (9.2) будут выполнены — это вытекает из приводимой ниже леммы 10.8.

В силу следствий 6.2c) и 6.7c) предположение (i) теоремы 9.4 удовлетворяется. Для каждой пары (h, k) положим

$$V_{hk} = S - S(Z^{hk}),$$

где оператор $S(Z)$ определен формулой (10.1). Покажем, что тогда выполнено и предположение (ii) теоремы (9.4). По данному $\varepsilon > 0$ выберем число r_ε согласно 6.2b) и 6.7b) одновременно. Оператор V_{hk} является суммой всех операторов

$$V_{j_1 \dots j_n}, \text{ таких, что } \{j_1, \dots, j_n\} \cap Z_1^{hk} \neq \varnothing,$$

и всех операторов

$$W_{j_1 \dots j_n}, \text{ таких, что } \{j_1 \dots j_n\} \cap Z_i^{hk} \neq \varnothing \text{ для } i = 1 \text{ и } i = 2.$$

Мы используем далее следующие элементарные неравенства, справедливые для функции $p(z) = (1 + |z|^2)^{1/2}$:

$$\text{(10.7)} \qquad \begin{aligned} &\text{(i)} && p(x \pm y) \leqslant p(x) + |y| \leqslant p(x) + p(y), \\ &\text{(ii)} && |x - y| \geqslant p(x) - p(y), \\ &\text{(iii)} && p(x) \geqslant r \Rightarrow |x| \geqslant r - 1. \end{aligned}$$

Пусть $2r_\varepsilon + 2 < r' \leqslant 2s \leqslant 2r' - 2$ и $x \in \Omega(h, k, r', s)$. При $i \in Z_1^{hk}$ в силу (9.0) и (10.6) имеем $p(x_i) > (h - 1) r' + s \geqslant s > r_\varepsilon + 1$; поэтому в силу (10.7) (iii) выполняется неравенство $|x_i| > r_\varepsilon$. Из 6.2b) следует, что

$$\| V_{j_1 \dots j_n} u \| \leqslant \varepsilon (\| u \| + \| Tu \|)$$

при $\{j_1, \dots, j_n\} \cap Z_1^{hk} \neq \varnothing$ для всех функций $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$ таких, что $\operatorname{supp}(u) \subset \Omega(h, k, r', s)$. При $i \in Z_1^{hk}$, $j \in Z_2^{hk}$ в силу (9.0) и (10.6) $p(x_i) - p(x_j) > s > r_\varepsilon$, поэтому в силу (10.7) (iii) $|x_i - x_j| > r_\varepsilon$. Из 6.7b) вытекает, что для всех функций $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N})$ с $\operatorname{supp}(u) \subset \Omega(h, k, r', s)$ справедлива оценка

$$\| W_{j_1 \dots j_n} u \| \leqslant \varepsilon (\| u \| + \| Tu \|),$$

если $\{j_1, \dots, j_n\} \cap Z_1^{hk} \neq \varnothing$ и $\{j_1, \dots, j_n\} \cap Z_2^{hk} \neq \varnothing$. Так как число членов в выражении для V_{hk} меньше, чем 2^{N+1}, то

$$\| V_{hk} u \| \leqslant 2^{N+1} \varepsilon (\| u \| + \| Tu \|)$$

для всех функций $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, у которых $\operatorname{supp}(u) \subset \Omega(h, k, r', s)$; переопределив соответствующим образом ε и r_ε, мы получим, что условие (ii) теоремы 9.4 выполнено.

Если обе группы Г и П состоят лишь из нейтральных элементов, то не существует других представлений, кроме $D = 1$, $E = 1$; поэтому в этом случае $P_D P_E = I$ и наш результат вытекает из теоремы 9.4, ибо $S_{hk} = S(Z^{hk})$ для всех h и k.

В общем случае, однако, мы должны модифицировать теорему 9.4 следующим образом:

$$C_0^\infty(\mathrm{R}^{3N}) \text{ заменяется на } P_D P_E C_0^\infty(\mathrm{R}^{3N}) = \mathrm{D}(S(D, E)).$$

Согласно определению (10.6), все функции $p_{hklr'}$ инвариантны относительно Г, и, значит, то же справедливо для функций Φ_{hks}, определенных формулой (9.5). Перестановки $\pi \in \Pi$, очевидно, меняют местами функции $p_{hklr'}$; более точно, $p_{hklr'}(x) = p_{hk'l'r'}(\pi x)$, где $Z^{hk'} = \pi Z^{hk}$. Следовательно, $\Phi_{hks}(x) = \Phi_{hk's}(\pi x)$, и потому

$$\text{функция } \sum_{k=1}^{k(h)} \Phi_{hks} \text{ инвариантна относительно } \Pi.$$

Из сказанного вытекает, что если $u \in \mathrm{D}(S(D, E))$, то функции v_h, определенные первой из формул (9.9), также принадлежат $\mathrm{D}(S(D, E))$. В силу леммы 7.5 и соотношения (7.13) мы получаем

$$\mathrm{D}(S(D, E)) \subset \bigoplus_i \mathrm{D}(S(Z^{hk}, D_1^{(i)}, D_2^{(i)}, E_1^{(i)}, E_2^{(i)})) \quad \text{при } h > 1,$$

где сумма берется по всем $(D_1^{(i)}, D_2^{(i)}) \prec D$ и всем $(E_1^{(i)}, E_2^{(i)}) \underset{Z^{hk}}{\prec} E$. Для $\pi \in \Pi(Z_1^{hk}) \times \Pi(Z_2^{hk})$ мы имеем $\Phi_{hks}(x) = \Phi_{hks}(\pi x)$; поэтому функции w_{hk}, определенные второй из формул (9.9), лежат в

$$\bigoplus_i \mathrm{D}(S(Z^{hk}, D_1^{(i)}, D_2^{(i)}, E_1^{(i)}, E_2^{(i)})),$$

и, следовательно, неравенство (9.15) выполняется с η_{hk}, замененным на $\eta(Z^{hk}, D, E)$, определенное в теореме 10.5 (заметим, что $S_{hk} = S(Z^{hk})$). При $h = 1$ этот результат тривиален. Доказательство теоремы завершено.

В доказательстве была использована следующая лемма.

10.8. Лемма. *Пусть множества* $\Omega(h, k, r', r)$ *заданы формулой* (9.0) *с функциями* $p_{hklr'}$, *определенными формулой* (10.6). *Тогда имеют место утверждение* (9.1) *с* $\alpha = 2$ *и утверждение* (9.2) *с*

$$K(r') = \{x\colon x \in \mathrm{R}^{3N},\ |x_i| \leqslant Nr' \ \text{для}\ i = 1, \ldots, N\}.$$

Доказательство. 1. *Доказательство соотношения* (9.1) (i). Для $h = 1$ существует только одно разбиение Z^{11}; поэтому можно считать $h \geqslant 2$. Пусть $k \neq k'$, $s > 0$, $t > 0$, $r' > 0$ и $s + t - r' = \rho > 0$; тогда существует $i \in Z_1^{hk} \cap Z_2^{hk'}$. Для точек $x \in \Omega(h, k, r', s)$ и $y \in \Omega(h, k', r', t)$ выполняются оценки

$$p(x_i) - (h - 1) r' > s \text{ и } hr' - p(y_i) > t$$

и в силу (10.7) (ii)

$$|x-y| \geqslant |x_i-y_i| \geqslant p(x_i)-p(y_i) > \\ > (h-1)r' + s - hr' + t \geqslant \rho > \frac{1}{2}\rho,$$

что и требовалось доказать.

2. *Доказательство соотношения* (9.1) (ii). Пусть $s>0$, $t>0$, $r'>0$, $s-t=\rho>0$, $x \in \Omega(h, k, r', s)$ и $y \in \complement\Omega(h, k, r', t)$. Если $h=1$, то существует $i \in \{1, \ldots, N\}$ такое, что

$$p(y_i) \leqslant t, \text{ а } p(x_i) > s;$$

отсюда вытекает оценка

$$|x-y| \geqslant |x_i-y_i| \geqslant p(x_i)-p(y_i) > s-t=\rho > \frac{1}{2}\rho.$$

Если $h \geqslant 2$, то существуют $i \in Z_1^{hk}$ и $j \in Z_2^{hk}$ такие, что имеет место по крайней мере одно из следующих неравенств:

a) $p(y_i)-(h-1)r' \leqslant t$,

b) $p(y_i)-p(y_j) \leqslant t$,

c) $hr'-p(y_j) \leqslant t$.

В случае a) справедливо также неравенство $p(x_i)-(h-1)r' > s$ и потому

$$|x-y| \geqslant |x_i-y_i| \geqslant p(x_i)-p(y_i) > s-t=\rho > \frac{1}{2}\rho.$$

В случае b) выполняется также неравенство $p(x_i)-p(x_j) > s$ и потому

$$|x-y| \geqslant \max\{|x_i-y_i|, |y_j-x_j|\} \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{2}(p(x_i)-p(y_i)+p(y_j)-p(x_j)) > \frac{1}{2}(s-t) = \frac{1}{2}\rho.$$

В случае c) мы имеем также $hr'-p(x_j) > s$ и потому

$$|x-y| \geqslant |y_j-x_j| \geqslant p(y_j)-p(x_j) > s-t=\rho > \frac{1}{2}\rho.$$

Во всех случаях мы получаем требуемое неравенство $|x-y| > \frac{1}{2}\rho$.

3. *Доказательство соотношения* (9.2). Пусть $0<r<r'$ и $x \in \complement\left(\bigcup_{h,k}\Omega_{\blacktriangle}(h, k, r', r)\right)$, так что $x \in \complement\Omega(h, k, r', r)$ при всех h, k. Для $h=1$ существует $i \in \{1, \ldots, N\}$ такое, что $p(x_i) \leqslant r$; для $h \geqslant 2$ существуют $i \in Z_1^{hk}$ и $j \in Z_2^{hk}$, такие, что выполнено по край-

ней мере одно из следующих неравенств:

a) $p(x_i) - (h-1) r' \leqslant r$,

b) $p(x_i) - p(x_j) \leqslant r$,

c) $hr' - p(x_j) \leqslant r$.

В случае $h = 1$ найдем $j_1 \in \{1, \ldots, N\}$ такое, что $p(x_{j_1}) < r$. Далее применим индукцию по h. Пусть $2 \leqslant h \leqslant N$; предположим, что существует $h - 1$ различных целых чисел $j_i \in \{1, \ldots, N\}$, обладающих тем свойством, что

$$p(x_{j_i}) \leqslant (h-2) r' + r \text{ для } i = 1, \ldots, h-1.$$

Выберем Z^{hk} так, чтобы $Z_2^{hk} = \{j_1, \ldots, j_{h-1}\}$; тогда

$$hr' - p(x_{j_i}) \geqslant 2r' - r > r$$

и, значит, неравенство c) не имеет места для Z^{hk}. Поэтому существует $i \in Z_1^{hk}$, для которого либо $p(x_i) - (h-1) r' \leqslant r$, либо $p(x_i) - p(x_j) \leqslant r$ при каком-то $j \in Z_2^{hk}$; в первом случае

$$p(x_i) \leqslant (h-1) r' + r,$$

во втором

$$p(x_i) \leqslant p(x_j) + r \leqslant (h-2) r' + 2r < (h-1) r' + r.$$

Полагая $i = j_h$, завершаем индукцию. При $h = N$ мы получаем

$$|x_j| < p(x_j) < Nr' \text{ для } j = 1, \ldots, N,$$

что и требовалось доказать.

Для атомных систем с фиксированными ядрами имеет место следующий более простой результат.

10.9. Теорема. *Если в теореме* 10.5 *все операторы взаимодействия* $W_{j_1 \ldots j_n}$ *неотрицательны, то*

$$\sigma_e(S(D, E)) = [\, \eta_1(D, E), \infty [,$$

где

$$\eta_1(D, E) = \min\{\eta(Z, D, E) \colon Z = (Z_1, Z_2), |Z_1| = 1\}.$$

Доказательство. В этом случае для любого разбиения Z оператор $S_0(Z_1)$ неотрицателен, и из замечания к теореме 10.5 вытекает равенство $\eta(Z_1, D_1, E_1) = 0$. Следовательно,

$$\eta(D, E) = \inf\{\eta(Z_2, D_2, E_2) \colon Z = (Z_1, Z_2),\ Z_1 \neq \varnothing, \text{ существуют такие } D_1 \text{ и } E_1, \text{ что } (D_1, D_2) \prec D,\ (E_1, E_2) \underset{Z}{\prec} E,\ P_{E_j} P_{D_j} \neq \varnothing \text{ для } j = 1, 2\}, \tag{10.10}$$

и нам достаточно показать, что для каждого разбиения $Z = (Z_1, Z_2)$ с $Z_1 \neq \varnothing$ и для представлений D_i, E_i, для которых $(D_1, D_2) \prec D$, $(E_1, E_2) \underset{Z}{\prec} E$ и $P_{E_j} P_{D_j} \neq 0$, найдутся разбиение $\hat{Z} = (\hat{Z}_1, \hat{Z}_2)$ с $|\hat{Z}_1| = 1$ и представления $\hat{D}_i$ группы Г и $\hat{E}$ группы $\Pi(\hat{Z}_2)$, такие, что

$(\hat{D}_1, \hat{D}_2) \prec D$,

$\hat{E} \underset{\hat{Z}}{\prec} E$, т. е. $\hat{E}$ содержится в ограничении представления E на $\Pi(\hat{Z}_2)$,

$P_{\hat{D}_1} \neq 0$ в $L_2(\hat{Z}_1)$ и $P_{\hat{E}} P_{\hat{D}_2} \neq 0$ в $L_2(\hat{Z}_2)$,

$\eta(\hat{Z}_2, \hat{D}_2, \hat{E}) \leqslant \eta(Z_2, D_2, E_2)$.

Пусть $\hat{Z}$ — любое разбиение с $\hat{Z}_1 \subset Z_1$ и $|\hat{Z}_1| = 1$. В силу леммы 7.5 существуют представления $\hat{D}_1$ и D_3 группы Г, такие, что $(\hat{D}_1, D_3) \prec D_1$, $P_{\hat{D}_1} \neq 0$ в $L_2(\hat{Z}_1)$ и $P_{D_3} \neq 0$ в $L_2(Z_1 \setminus \hat{Z}_1)$. Тогда $(\hat{D}_1, D_3, D_2) \prec D$ и согласно леммам 7.5 и 7.6 найдется представление $\hat{D}_2$ группы Г, такое, что $P_{\hat{D}_2} \neq 0$ в $L_2(\hat{Z}_2)$, $(D_3, D_2) \prec \hat{D}_2$ и $(\hat{D}_1, \hat{D}_2) \prec D$. Кроме того, в силу леммы 7.12 существуют представления E_3 группы $\Pi(Z_1 \cap \hat{Z}_2)$ и $\hat{E}$ группы $\Pi(\hat{Z}_2)$, удовлетворяющие соотношениям

$$\hat{E} \underset{\hat{Z}}{\prec} E, \quad (E_3, E_2) \underset{(Z_1 \cap \hat{Z}_2,\, Z_2)}{\prec} \hat{E}.$$

Поэтому согласно лемме 10.11 (с N, замененным на $N-1$), доказываемой ниже, $P_{\hat{D}} P_{\hat{E}} \neq 0$, и из теоремы 10.5 и равенства (10.10) следует, что

$$\eta(\hat{Z}_2, \hat{D}_2, \hat{E}) = \min \sigma(S_0(\hat{Z}_2, \hat{D}_2, \hat{E})) \leqslant$$
$$\leqslant \min \sigma_e(S_0(\hat{Z}_2, \hat{D}_2, \hat{E})) \leqslant \eta(Z_2, D_2, E_2).$$

10.11. Лемма. *Пусть D и E — неприводимые унитарные представления групп* Г *и* Π *соответственно и* $P_D \neq 0$ в $L_2(\mathbf{R}^{3N})$. *Тогда*

$$P_E P_D \neq 0.$$

Доказательство. Так как $P_D \neq 0$, то по лемме 7.5 существуют представления $D_1, \ldots, D_N$, такие, что

$$P_{D_i} \neq 0 \text{ в } L_2(\mathbf{R}^3), \quad (D_1, \ldots, D_N) \prec D.$$

Выберем теперь взаимно ортогональные D_i-порождающие подпространства M_i пространства $L_2(\mathbf{R}^3)$ и положим

$$M = M_1 \otimes M_2 \otimes \ldots \otimes M_N \subset L_2(\mathbf{R}^{3N}).$$

Такой выбор возможен, ибо $M_i \perp M_j$, если $D_i \neq D_j$, а поскольку для каждого i существует бесконечно много взаимно ортогональных D_i-порождающих подпространств пространства $L_2(\mathbf{R}^3)$ (ср. с доказательством теоремы 8.8), то и в случае $D_i = D_j$ также можно выбрать $M_i \perp M_j$. Из определения отношения $(D_1, \ldots, D_N) \prec \prec D$ следует, что пространство M содержит некоторое D-порождающее подпространство M_0. Для каждой функции $f \in M_0$ и каждой пары $\pi_1, \pi_2 \in \Pi$, такой, что $\pi_1 \neq \pi_2$, имеем $U(\pi_1) f \perp U(\pi_2) f$ и, следовательно,

$$P_E f = \frac{d_E}{|\Pi|} \sum_{\pi \in \Pi} \chi_E(\pi)^* U(\pi) f \neq 0 \text{ для } f \in M_0,\ f \neq 0,$$

откуда и вытекает требуемое соотношение $P_E P_D \neq 0$.

§ 11. СУЩЕСТВЕННЫЙ СПЕКТР ВНУТРЕННЕГО ГАМИЛЬТОНИАНА СВОБОДНОЙ СИСТЕМЫ

Пусть S — гамильтониан свободной N-частичной системы, а $\hat{S}$ — ее внутренний гамильтониан, определенный формулой (6.10). В силу теоремы 8.10 спектром оператора S в любом нетривиальном подпространстве $P_D P_E L_2(\mathbf{R}^{3N})$ будет полупрямая $[\eta_{DE}, \infty[$. В этом параграфе мы будем изучать оператор $\hat{S}$. Согласно теореме 6.11, с помощью введения внутренних координат изучение оператора $\hat{S}$ можно свести к изучению некоторого оператора S_0 в $L_2(\mathbf{R}^{3N-3})$. Спектр оператора S_0 в общем случае отличен от полупрямой: в этом легче всего убедиться, рассмотрев случай $N = 2$, когда S_0 имеет вид

$$-\frac{1}{2\nu}\Delta + W_{12} \quad (\text{в } L_2(\mathbf{R}^3)),$$

где оператор W_{12} является Δ-малым на бесконечности. Однако, согласно теореме 10.5, для каждого неприводимого представления D группы симметрии Γ оператора S_0, такого, что $P_D \neq 0$, выполняется соотношение

$$\sigma_e(S_0, D) = [0, \infty[.$$

В данном случае группа симметрии Π состоит самое большее из двух элементов: единичного и, возможно, транспозиции наших двух частиц. Но эта транспозиция действует так же, как отражение внутренних координат, и может рассматриваться в качестве элемента Γ; поэтому нет необходимости принимать группу Π во внимание. В силу сказанного мы будем предполагать в дальнейшем, что $N > 2$, и покажем, что *существенный* спектр ограничения оператора S_0 на любое из его подпространств симметрии представляет собой полупрямую.

Пусть $Z = (Z_1, \ldots, Z_m)$ — произвольное разбиение множества $\{1, \ldots, N\}$ на m взаимно не пересекающихся непустых подмножеств, $2 \leqslant m \leqslant N$. Обозначим через $|Z_i|$ число элементов в Z_i; для удобства предположим, что $|Z_1| \geqslant |Z_2| \geqslant \ldots \ldots \geqslant |Z_m|$, и будем отождествлять с Z все разбиения Z', получающиеся из Z перенумерацией подмножеств Z_i. Пусть $\hat{S}(Z)$ — оператор, полученный из оператора $\hat{S}$ удалением всех членов $W_{j_1 \ldots j_m}$, отвечающих взаимодействиям между частицами, принадлежащими к различным подмножествам Z_i. Если отображение $x \longmapsto ax = y$ — такое линейное преобразование координат, что $y_1, \ldots, y_{N-1}$ являются внутренними координатами для всей системы, и если соответствующий унитарный оператор U определен равенством (6.4), то в силу теоремы 6.11 операторы $U\hat{S}U^*$ и $U\hat{S}(Z)\,U^*$ действуют только на внутренние координаты и порождаются — в смысле определения 5.1 — операторами S_0 и $S_0(Z)$, действующими в пространстве $L_2(\mathbf{R}^{3N-3})$. Мы можем игнорировать зависимость оператора S_0 от выбора внутренних координат, ибо операторы, отвечающие различным координатным системам, унитарно эквивалентны.

В случае $m = 2$, т. е. для разбиения $Z = (Z_1, Z_2)$ нам понадобится явное выражение оператора $S_0(Z)$. Пусть $n = |Z_1| \geqslant \geqslant |Z_2| = N - n$; выберем координаты $z_1, \ldots, z_N$ так, чтобы $z_2, \ldots, z_n$ и $z_{n+1}, \ldots, z_{N-1}$ были внутренними координатами, а z_1 и z_N — координатами центров масс соответственно систем Z_1 и Z_2 (если $n = N - 1$, то подсистема Z_2 не имеет внутренних координат; поскольку неравенство $N > 2$ влечет за собой неравенство $n > 1$, то подсистема Z_1 должна иметь внутренние координаты). Пусть ν_1 и ν_2 — полные массы подсистем Z_1 и Z_2 соответственно; очевидно, $\mu = \nu_1 + \nu_2$ есть полная масса всей системы.

Положим

$$\left\{\begin{aligned} y_1 &= z_1 - z_N, \\ y_j &= z_j \text{ для } j = 2, \ldots, N-1, \\ y_N &= \mu^{-1}(\nu_1 z_1 + \nu_2 z_N). \end{aligned}\right. \tag{11.0}$$

Тогда $y_1, \ldots, y_{N-1}$ будут внутренними координатами для всей системы. В этих координатах при $n < N - 1$ имеем

$$L_2(\mathbf{R}^{3N-3}) = L_2(Z_0)\ \widehat{\otimes}\ L_2(Z_1)\ \widehat{\otimes}\ L_2(Z_2), \tag{11.1}$$

$$S_0(Z) = T_0 \otimes I_1 \otimes I_2 + I_0 \otimes S_0(Z_1) \otimes I_2 + \\ + I_0 \otimes I_1 \otimes S_0(Z_2), \tag{11.2}$$

где пространства $L_2(Z_0) = L_2(\mathbf{R}^3)$, $L_2(Z_1) = L_2(\mathbf{R}^{3n-3})$, $L_2(Z_2) = L_2(\mathbf{R}^{3N-3n-3})$ определяются соответственно координатой y_1 и внутренними координатами подсистем Z_1 и Z_2; оператор $T_0 =$

$= -\frac{1}{2\nu}\Delta$ действует в пространстве $L_2(Z_0)$, $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2}$; операторы $S_0(Z_i)$ действуют в пространствах $L_2(Z_i)$ и являются порождающими для внутренних операторов $\hat{S}(Z_i)$ подсистем; I_j — единичный оператор в $L_2(Z_j)$, $j = 0, 1, 2$.

В случае $n = N - 1$ справедливы соотношения

$$L_2(\mathbf{R}^{3N-3}) = L_2(Z_0) \hat{\otimes} L_2(Z_1), \tag{11.1'}$$

$$S_0(Z) = T_0 \otimes I_1 + I_0 \otimes S_0(Z_1). \tag{11.2'}$$

Для группы вращательной симметрии Γ оператора $\hat{S}$ представление $\gamma \longmapsto U(\gamma)$ унитарными операторами в $L_2(\mathbf{R}^{3N-3})$ определяется, как обычно, с помощью внутренних координат равенством

$$(U(\gamma) f)(y) = f(\gamma^{-1}y_1, \ldots, \gamma^{-1}y_{N-1}).$$

Поэтому в частном случае (11.1) мы имеем

$$U(\gamma) = U_0(\gamma) \otimes U_1(\gamma) \otimes U_2(\gamma),$$

где унитарное представление $\gamma \longmapsto U_i(\gamma)$ в пространстве $L_2(Z_i)$, $i = 0, 1, 2$, задается аналогично представлению $\gamma \longmapsto U(\gamma)$ в $L_2(R^{3N-3})$. Для неприводимых представлений D_i группы Γ определим соответствующие проекторы P_{D_i} в $L_2(Z_i)$; если $P_{D_i} \neq 0$, то подпространство $P_{D_i}L_2(Z_i)$ приводит оператор T_0 при $i = 0$ и оператор $S_0(Z_i)$ при $i = 1, 2$.

Для группы перестановочной симметрии Π оператора $\hat{S}$ представление

$$\pi \longmapsto U(\pi) \text{ в } L_2(R^{3N})$$

было определено в § 7 с помощью исходных переменных равенством

$$(U(\pi) f)(x) = f(\pi^{-1}x),$$

где

$$\pi^{-1}x = (x_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, x_{\pi^{-1}(N)}).$$

Поэтому в терминах внутренних координат $y = ax$ в пространстве $L_2(\mathbf{R}^{3N-3})$ оператор $U(\pi)$ должен определяться равенством

$$(U(\pi)f)(ax) = f(a\pi^{-1}x) \tag{11.3}$$

для $x \in \mathbf{R}^{3N}$ и $f \in L_2(\mathbf{R}^{3N-3})$. Для каждого разбиения $Z = (Z_1, \ldots, Z_m)$ рассмотрим подгруппу $\Pi(Z)$, состоящую из всех перестановок $\pi \in \Pi$, для которых $\pi Z_i = Z_i$, $i = 1, \ldots, m$. Очевидно,

$$\Pi(Z) = \Pi(Z_1) \times \ldots \times \Pi(Z_m),$$

где $\Pi(Z_i)$ — подгруппа, порожденная транспозициями тождественных частиц в множестве Z_i.

Нам надо найти разложение представления $U(\pi)$, соответствующее произвольному разбиению $Z = (Z_1, Z_2)$. Для простоты положим $Z_1 = \{1, \ldots, n\}$, $Z_2 = \{n+1, \ldots, N\}$; тогда координаты, определенные формулой (11.0), задаются соотношением $y = ax$ с матрицей a вида

$$a = \begin{pmatrix} \frac{\mu_1}{\nu_1} \cdots \frac{\mu_n}{\nu_1} & -\frac{\mu_{n+1}}{\nu_2} \cdots -\frac{\mu_N}{\nu_2} \\ a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \\ \frac{\mu_1}{\mu} \cdots \frac{\mu_n}{\mu} & \frac{\mu_{n+1}}{\mu} \cdots \frac{\mu_N}{\mu} \end{pmatrix}, \tag{11.4}$$

где a_1 и a_2 суть соответственно $(n-1) \times n$ и $(N-n-1) \times \times (N-n)$-матрицы. Из (11.1) и (11.3) следует, что при $\pi_i \in \in \Pi(Z_i)$

$$U(\pi_1 \times \pi_2) = I_0 \otimes U_1(\pi_1) \otimes U_2(\pi_2), \tag{11.5}$$

где I_0 — единичный оператор в $L_2(Z_0)$ и $U_i(\pi_i)$ — оператор в $L_2(Z_i)$, определяемый формулой

$$(U_i(\pi_i)f)(a_i z) = f(a_i \pi_i^{-1} z) \tag{11.6}$$

для $z \in \mathrm{R}^{3n}$ или $z \in \mathrm{R}^{3N-3n}$ и для $f \in L_2(Z_i)$. В случае $n = N-1$ имеем $\Pi(Z_2) = \{1\}$ и справедливо разложение

$$U(\pi_1) = I_0 \otimes U_1(\pi_1), \tag{11.5'}$$

соответствующее (11.1′).

В силу определения группы Π выполняется равенство

$$U(\pi) S_0 = S_0 U(\pi) \text{ для всех } \pi \in \Pi;$$

аналогично, согласно определению оператора $S_0(Z)$ и группы $\Pi(Z)$,

$$U(\pi) S_0(Z) = S_0(Z) U(\pi) \text{ для всех } \pi \in \Pi(Z),$$

и ввиду (11.2) и (11.5) или (11.2′) и (11.5′)

$$U_i(\pi_i) S_0(Z_i) = S_0(Z_i) U_i(\pi_i) \text{ для всех } \pi_i \in \Pi(Z_i).$$

Для неприводимых представлений E группы Π и E_i группы $\Pi(Z_i)$ определяем соответствующие проекторы P_E в $L_2(\mathrm{R}^{3N-3})$ и P_{E_i} в $L_2(Z_i)$; если эти операторы ненулевые, то подпространства $P_E L_2(R^{3N-3})$ и $P_{E_i} L_2(Z_i)$ приводят соответственно операторы S_0 и $S_0(Z_i)$.

Рассмотрим теперь полную группу симметрии $\Gamma \times \Pi$. Для неприводимых представлений D и E групп Γ и Π соответственно, таких, что $P_D P_E \neq 0$, определим приведенный оператор $S_0(D, E)$

в подпространстве $P_D P_E L_2(\mathrm{R}^{3N-3})$. Аналогично для неприводимых представлений D_i группы Γ и E_i группы $\Pi(Z_i)$, таких, что $P_{D_i} P_{E_i} \neq 0$, определим приведенный оператор $S_0(Z_i, D_i, E_i)$ в подпространстве $P_{D_i} P_{E_i} L_2(Z_i)$. Если D_0 — другое представление группы Γ, для которого соответствующий проектор P_{D_0} в $L_2(Z_0)$ отличен от нуля, то подпространство

$$(11.6)\qquad P_{D_0} L_2(Z_0) \mathbin{\widehat{\otimes}} P_{D_1} P_{E_1} L_2(Z_1) \mathbin{\widehat{\otimes}} P_{D_2} P_{E_2} L_2(Z_2)$$

приводит оператор $S_0(Z)$ и приведенный оператор определяется соотношением

$$(11.7)\quad S_0(Z, D_0, D_1, D_2, E_1, E_2) = T_0(D_0) \otimes I_1 \otimes I_2 + \\ + I_0 \otimes S_0(Z_1, D_1, E_1) \otimes I_2 + I_0 \otimes I_1 \otimes S_0(Z_2, D_2, E_2),$$

где $T_0(D_0)$ — приведенный оператор T_0 в $P_{D_0} L_2(Z_0)$; аналогично если $|Z_2| = 1$, то приводящим подпространством будет

$$(11.6')\qquad P_{D_0} L_2(Z_0) \mathbin{\widehat{\otimes}} P_{D_1} P_{E_1} L_2(Z_1)$$

и приведенный оператор определяется соотношением

$$(11.7')\quad S_0(Z, D_0, D_1, E_1) = T_0(D_0) \otimes I_1 + I_0 \otimes S_0(Z_1, D_1, E_1).$$

Положим

$$(11.8)\qquad \eta(Z_i, D_i, E_i) = \min \sigma(S_0(Z_i, D_i, E_i)).$$

Тогда, поскольку в силу теоремы 8.8 $\sigma(T_0(D_0)) = [0, \infty[$, то спектрами операторов (11.7) и (11.7′) являются соответственно полупрямые

$$[\eta(Z_1, D_1, E_1) + \eta(Z_2, D_2, E_2), \infty[\text{ и } [\eta(Z_1, D_1, E_1), \infty[.$$

Остается обсудить тот частный случай, когда число $N = 2n$ четное, $|Z_1| = |Z_2| = n$ и подсистемы Z_1 и Z_2 *тождественны* в том смысле, что существует перестановка $\tau \in \Pi$, такая, что $\tau Z_1 = Z_2$ и $\tau Z_2 = Z_1$. Для простоты предположим, что $Z_1 = \{1, \ldots, n\}$ и

$$(11.9)\qquad \tau = \begin{pmatrix} 1, & \ldots, n, & n+1, \ldots, N \\ n+1, \ldots, N, & 1, & \ldots, n \end{pmatrix}.$$

В исследуемом случае оператор $S_0(Z)$ инвариантен относительно τ, и мы должны рассмотреть вместо группы $\Pi(Z)$ группу

$$\hat{\Pi}(Z) = \Pi(Z) \cup \tau\Pi(Z).$$

Воспользуемся далее координатами (11.4), где теперь предполагается, что $a_1 = a_2$, т. е. что внутренние координаты выбраны одинаково для обеих подсистем. Тогда отображение

$$J\colon L_2(Z_1) \to L_2(Z_2),$$

определенное равенством

(11.9′) $$(Jf)(y_2, \ldots, y_n) = f(y_{n+1}, \ldots, y_{N-1})$$

для $f \in L_2(Z_1)$, является изометрическим изоморфизмом пространства $L_2(Z_1)$ на пространство $L_2(Z_2)$, таким, что

(11.9″) $$S_0(Z_2) = JS_0(Z_1)J^{-1}.$$

При $\pi \in \Pi(Z)$ унитарный оператор $U(\pi)$ задается, как и раньше, равенством (11.5). Оператор $U(\tau)$ задается, как это следует из соотношений (11.3), (11.4) и (11.9), формулой

(11.10) $$U(\tau)f = U(\tau)f_0 \otimes J^{-1}f_2 \otimes Jf_1 \quad \text{для} \quad f = f_0 \otimes f_1 \otimes f_2,$$

где $U_0(\tau)$ — оператор в пространстве $L_2(Z_0)$, определяемый соотношением

(11.10′) $$(U_0(\tau)f_0)(z) = f_0(-z)$$

для $z \in \mathbf{R}^3$ и $f_0 \in L_2(Z_0)$.

Пусть $E_1^{(i)}$, $i = 1, \ldots, p$,— все неприводимые представления группы $\Pi(Z_1)$, и пусть d_i и $\chi^{(i)}$ — соответственно размерность и характер представления $E_1^{(i)}$. Отображение $\pi \to \tau\pi\tau = \pi'$ есть изоморфизм группы $\Pi(Z_2)$ на группу $\Pi(Z_1)$; поэтому равенство

$$E_2^{(i)}(\pi) = E_1^{(i)}(\pi') \quad \text{для всех} \quad \pi \in \Pi(Z_2)$$

определяет неприводимое представление $E_2^{(i)}$ группы $\Pi(Z_2)$ размерности d_i с характером $\chi^{(i)}(\pi')$, $i = 1, \ldots, p$, и все неприводимые представления группы $\Pi(Z_2)$ исчерпываются представлениями $E_2^{(i)}$. Следовательно, $E_1^{(i)} \otimes E_2^{(j)}$, $i, j = 1, \ldots, p$,— это все неприводимые представления группы $\Pi(Z)$.

11.11. Лемма [1]). *Группа* $\hat{\Pi}(Z)$ *имеет точно* $\frac{p(p-1)}{2} + 2p$ *неприводимых представлений* $E^{(ij)}$, $i < j$, *и* $E_{\pm}^{(i)}$, $i, j \in \{1, \ldots, p\}$. *Соответствующие проекторы в пространстве* $L_2(Z_0) \hat{\otimes} L_2(Z_1) \hat{\otimes} \hat{\otimes} L_2(Z_2)$ *задаются соотношениями*

$$P^{(ij)} = I_0 \otimes P_1^{(i)} \otimes P_2^{(j)} + I_0 \otimes P_1^{(j)} \otimes P_2^{(i)},$$

$$P_{\pm}^{(i)} = \frac{1}{2} I_0 \otimes P_1^{(i)} \otimes P_2^{(i)} \pm \frac{1}{2} U_0(\tau) \otimes Q^{(i)}(P_1^{(i)} \otimes P_2^{(i)}),$$

где $P_k^{(i)}$ *— проектор в* $L_2(Z_k)$, *отвечающий представлению* $E_k^{(i)}$, *а* $Q^{(i)}$ *— оператор в* $P_1^{(i)}L_2(Z_1) \hat{\otimes} P_2^{(i)}L_2(Z_2)$, *определенный следующим образом. Пусть* u_{jk}, $j = 1, \ldots, d_i$, $k = 1, 2, \ldots,$ —

---

[1]) Утверждения этой леммы вытекают из леммы 3.5 статьи [40].— *Прим. перев.*

ортонормированный базис в пространстве $L_2(Z_1)$, *такой, что*

$$U_1(\pi)\, u_{jk} = \sum_{r=1}^{d_i} E_1^{(i)}(\pi)_{rj}\, u_{rk}$$

для всех j, k и $\pi \in \Pi(Z_1)$. *Тогда*

$$Q^{(i)}(u_{jk} \otimes J u_{rs}) = u_{js} \otimes J u_{rk} \text{ для всех } j,\ k,\ r,\ s,$$

где J — *отображение, действующее согласно* (11.9′).

Доказательство. Определяем представление $E^{(ij)}$ — равенствами

$$E^{(ij)}(\pi_1 \times \pi_2) = \begin{pmatrix} E_1^{(i)}(\pi_1) \otimes E_2^{(j)}(\pi_2) & 0 \\ 0 & E_1^{(j)}(\pi_1) \otimes E_2^{(i)}(\pi_2) \end{pmatrix},$$

$$E^{(ij)}(\tau(\pi_1 \times \pi_2)) = \begin{pmatrix} 0 & E_1^{(j)}(\pi_1) \otimes E_2^{(i)}(\pi_2) \\ E_1^{(i)}(\pi_1) \otimes E_2^{(j)}(\pi_2) & 0 \end{pmatrix}.$$

$E^{(ij)}$ является неприводимым представлением группы $\hat{\Pi}(Z)$, имеющим размерность $2d_i d_j$, и эквивалентно представлению $E^{(ji)}$, причем при $i < j$ различные представления $E^{(ij)}$ не эквивалентны между собой (даже относительно группы $\Pi(Z)$). Далее определяем представления $E_\pm^{(i)}$:

$$E_\pm^{(i)}(\pi_1 \times \pi_2) = E_1^{(i)}(\pi_1) \otimes E_2^{(i)}(\pi_2),$$

$$E_\pm^{(i)}(\tau(\pi_1 \times \pi_2)) = \pm\Theta(E_1^{(i)}(\pi_1) \otimes E_2^{(i)}(\pi_2)),$$

где Θ — отображение, задаваемое соотношением

$$\Theta((A_{kl}) \otimes (B_{rs})) = (A_{rl} B_{ks}).$$

$E_\pm^{(i)}$ есть неприводимое представление размерности d_i^2 и различные представления $E_\pm^{(i)}$ не эквивалентны друг другу и представлениям $E^{(jk)}$. Так как

$$\sum_{i<j} (2d_i d_j)^2 + 2\sum_i d_i^4 = 2\Big(\sum_i d_i^2\Big)^2 = 2\,|\Pi(Z_1)|^2 = |\hat{\Pi}(Z)|,$$

где $|\hat{\Pi}(Z)|$ — порядок группы $\hat{\Pi}(Z)$, то не существует никаких других неприводимых представлений группы $\hat{\Pi}(Z)$ (кроме $E^{(ij)}$ и $E_\pm^{(i)}$). Характер представления $E^{(ij)}$ вычисляется по формулам

$$\chi^{(ij)}(\pi_1 \times \pi_2) = \chi^{(i)}(\pi_1)\,\chi^{(j)}(\pi_2') + \chi^{(j)}(\pi_1)\,\chi^{(i)}(\pi_2'),$$

$$\chi^{(ij)}(\tau(\pi_1 \times \pi_2)) = 0;$$

поэтому в силу (11.5) соответствующий представлению $E^{(ij)}$ проектор имеет вид

$$P^{(ij)}=\frac{2d_i d_j}{|\hat{\Pi}(Z)|}\sum_{\pi_1\times\pi_2\in\Pi(Z)}\chi^{(ij)}(\pi_1\times\pi_2)^* I_0\otimes U_1(\pi_1)\otimes U_2(\pi_2)=$$
$$=I_0\otimes P_1^{(i)}\otimes P_2^{(j)}+I_0\otimes P_1^{(j)}\otimes P_2^{(i)}.$$

Для представления $E_{\pm}^{(i)}$ мы получаем

$$\chi_{\pm}^{(i)}(\pi_1\times\pi_2)=\chi^{(i)}(\pi_1)\chi^{(i)}(\pi_2')$$

и, согласно определению отображения Θ,

$$\chi_{\pm}^{(i)}(\tau(\pi_1\times\pi_2))=\pm\chi^{(i)}(\pi_1\pi_2').$$

В силу (11.5) и (11.10) соответствующим представлению $E_{\pm}^{(i)}$ проектором будет

$$P_{\pm}^{(i)}=\frac{1}{2}I_0\otimes P_1^{(i)}\otimes P_2^{(i)}\pm\frac{1}{2}U_0(\tau)\otimes R_i,$$

где R_i — оператор в $L_2(Z_1)\,\widehat{\otimes}\,L_2(Z_2)$, задаваемый равенством

$$R_i f=\frac{2d_i^2}{|\hat{\Pi}(Z)|}\sum_{\pi_1\times\pi_2\in\Pi(Z)}\chi^{(i)}(\pi_1\pi_2')^* J^{-1}U_2(\pi_2)f_2\otimes JU_1(\pi_1)f_1$$

для $f=f_1\otimes f_2$. Так как

$$U_2(\pi_2)=JU_1(\pi_2')J^{-1}=JU_1(\pi_1^{-1})U_1(\pi_1\pi_2')J^{-1},$$

то, суммируя по $\pi_2\in\Pi(Z_2)$, мы находим

$$R_i f=\frac{d_i}{|\Pi(Z_1)|}\sum_{\pi_1\in\Pi(Z_1)}U_1(\pi_1^{-1})P_1^{(i)}J^{-1}f_2\otimes JU_1(\pi_1)f_1.$$

Пусть функции $u_1, \ldots, u_{d_j}$ образуют ортонормированный базис некоторого $E_1^{(j)}$-порождающего подпространства пространства $L_2(Z_1)$, так что

$$U_1(\pi_1)u_k=\sum_{r=1}^{d_j}E_1^{(j)}(\pi_1)_{rk}u_r$$

для всех k и $\pi_1\in\Pi(Z_1)$. Аналогично пусть

$$U_1(\pi_1)v_h=\sum_{s=1}^{d_m}E_1^{(m)}(\pi_1)_{sh}v_s.$$

Положим $f_1 = u_k$ и $f_2 = Jv_h$; тогда

$$P_1^{(i)} J^{-1} f_2 = P_1^{(i)} v_h = \delta_{im} v_h,$$

и поэтому в силу (7.0″)

$$R_i (u_k \otimes Jv_h) = \sum_{r=1}^{d_j} \sum_{s=1}^{d_m} \frac{d_i}{|\Pi(Z_1)|} \sum_{\pi_1 \in \Pi(Z_1)} E_1^{(m)}(\pi_1)_{hs}^{*} E_1^{(j)}(\pi_1)_{rk} \delta_{im} v_s \otimes \otimes Ju_r = \delta_{im}\delta_{jm} v_k \otimes Ju_h.$$

Отсюда вытекает, что оператор R_i обращается в нуль на элементах, ортогональных к $P^{(i)} L_2(Z_1) \hat{\otimes} P_2^{(i)} L_2(Z_2)$, и, значит, может быть записан в виде $R_i = Q^{(i)} (P_1^{(i)} \otimes P_2^{(i)})$, где, как следует из наших вычислений, $Q^{(i)} (u_{jk} \otimes Ju_{rs}) = u_{js} \otimes Ju_{rk}$ (это равенство полностью определяет оператор $Q^{(i)}$). Лемма доказана.

При обсуждении исключительного случая нам понадобится следующее понятие[1]). Собственное значение λ оператора $\overline{S_0(Z_1, D_1, E_1)}$ назовем *минимально вырожденным*, если соответствующее собственное подпространство представляет собой $D_1 \otimes \otimes E_1$-порождающее подпространство пространства $L_2(Z_1)$.

11.12. Лемма. *Пусть D_1 и E_1 — такие неприводимые представления соответственно групп Γ и $\Pi(Z_1)$, что $P_{D_1} P_{E_1} L_2(Z_1) \neq \neq 0$. Тогда, если число $\eta(Z_1, D_1, E_1)$ не является изолированным минимально вырожденным собственным значением оператора $\overline{S_0(Z_1, D_1, E_1)}$ — и только в этом случае,— для каждого $\varepsilon > 0$ существуют два таких ортогональных $D_1 \otimes E_1$-порождающих подпространства N_j пространства $C_0^\infty(Z_1)$, что*

$$\| S_0(Z_1) u_j - \eta(Z_1, D_1, E_1) u_j \| \leqslant \varepsilon \| u_j \|$$

для всех $u_j \in N_j$, $j = 1, 2$.

Доказательство. Положим $A = S_0(Z_1, D_1, E_1)$, $H = = P_{D_1} P_{E_1} L_2(Z_1)$ и $\lambda_0 = \eta(Z_1, D_1, E_1)$; очевидно, $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Пусть $F(\cdot)$ — спектральное семейство оператора $\bar{A}$. Если λ_0 — изолированное минимально вырожденное собственное значение оператора $\bar{A}$, то для достаточно малых $\varepsilon > 0$ пространство $N = = [F(\lambda_0 + \varepsilon) - F(\lambda_0 - \varepsilon)] H$ представляет собой отвечающее числу λ_0 собственное подпространство, которое по предположению $D_1 \otimes E_1$-порождающе. Каждое такое подпространство имеет размерность d, равную размерности представления $D_1 \otimes E_1$. Если существуют два подпространства с указанными выше свойствами, то размерность пространства N должна быть самое меньшее $2d = = \dim N_1 \oplus N_2$, что приводит к противоречию.

[1]) Ранее введенное в тех же целях в [40], п. 2.6.— *Прим. перев.*

Пусть теперь λ_0 не является изолированным минимально вырожденным собственным значением; тогда или $\lambda_0 \in \sigma_e(A)$, или λ_0 — собственное значение оператора $\bar{A}$ кратности большей d. В силу теорем 1.1 и 1.2 для любого $\varepsilon' > 0$

$$\dim [F(\lambda_0 + \varepsilon') - F(\lambda_0 - \varepsilon')] H > d.$$

По теореме 8.11 существует такое $D_1 \otimes E_1$-порождающее подпространство N_1 пространства $\mathrm{D}(A)$, что

$$\| Au - \lambda_0 u \| \leqslant \varepsilon' \| u \| \text{ для каждой функции } u \in N_1.$$

Так как $\dim N_1 = d$, то найдется элемент $v \neq 0$ из подпространства $[F(\lambda_0 + \varepsilon') - F(\lambda_0 - \varepsilon')] H$, ортогональный к N_1; используя аппроксимацию, можно указать элемент $w \neq 0$ из $\mathrm{D}(A)$, ортогональный к N_1 и такой, что

$$\| Aw - \lambda_0 w \| \leqslant 2\varepsilon' \| w \|.$$

В силу части с) доказательства теоремы 8.11 существует такое $D_1 \otimes E_1$-порождающее подпространство N_2 пространства $\mathrm{D}(A)$, ортогональное к N_1, что

$$\| Au - \lambda_0 u \| \leqslant 2\varepsilon' d^{1/2} \| u \| \text{ для всех } u \in N_2.$$

Заменяя $2\varepsilon' d^{1/2}$ на ε, получаем требуемое.

Положим

$$\eta'(Z_1, D_1, E_1) = \inf \{\lambda \in \sigma(S_0(Z_1, D_1, E_1)) : \lambda > \eta(Z_1, D_1, E_1)\}. \tag{11.13}$$

Это число больше, чем $\eta(Z_1, D_1, E_1)$ тогда и только тогда, когда $\eta(Z_1, D_1, E_1)$ является изолированным собственным значением оператора $\overline{S_0(Z_1, D_1, E_1)}$.

Далее, для представлений $D \otimes E$ группы $\Gamma \times \Pi$, таких, что $P_D P_E L_2(R^{3N-3}) \neq 0$, и для разбиений $Z = (Z_1, Z_2)$ положим

$$\eta(Z, D, E) = \inf \{\eta(Z_1, D_1, E_1) + \eta(Z_2, D_2, E_2)\}, \tag{11.14}$$

где нижняя грань берется по всем представлениям, удовлетворяющим условиям: $P_{D_i} P_{E_i} \neq 0$; существует такое представление D_0, что $(D_0, D_1, D_2) \prec D$ и $P_{D_0} L_2(R^3) \neq 0$; $(E_1, E_2) \underset{Z}{\prec} E$,

за двумя, однако, исключениями:

1. Если $| Z_2 | = 1$, то

$$\eta(Z, D, E) = \inf \{\eta(Z_1, D_1, E_1)\}, \tag{11.14'}$$

где нижняя грань берется по всем представлениям, удовлетворяющим условиям: $P_{D_1} P_{E_1} \neq 0$; существует такое представление D_0, что $(D_0, D_1) \prec D$ и $P_{D_0} L_2 (R^3) \neq 0$; $E_1 \underset{Z}{\prec} E$ (т. е. ограничение представления E на $\Pi(Z_1)$ содержит представление E_1).

2. В том исключительном случае, когда $|Z_1| = |Z_2| = N/2$ и Z_1 и Z_2 тождественны, число $\eta(Z_1, D_1, E_1)$ надо заменить на $\eta'(Z_1, D_1, E_1)$, если выполнены следующие условия [1]):

(11.15) (i) $D_1 = D_2$, $E_1 = E_1^{(i)}$, $E_2 = E_2^{(i)}$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, p\}$ (в обозначениях леммы 11.11);

(ii) $\eta(Z_1, D_1, E_1)$ является изолированным минимально вырожденным собственным значением оператора $\overline{S_0(Z_1, D_1, E_1)}$;

(iii) для всех представлений D_0 группы Γ, таких, что $(D_0, D_1, D_2) \prec D$ и $P_{D_0} L_2 (R^3) \neq 0$, и для всех представлений $E_\omega^{(i)}$ группы $\hat{\Pi}(Z)$ $(\omega = \pm 1)$, таких, что представление $E \mid \hat{\Pi}(Z)$ содержит $E_\omega^{(i)}$, выполняется равенство $P_\omega P_{D_0} = 0$, где $(P_\omega f)(z) = \frac{1}{2} f(z) + \frac{\omega}{2} f(-z)$ для $z \in R^3$, $f \in L_2(R^3)$ и $\omega = \pm 1$.

11.16. Т е о р е м а. *Пусть $D \otimes E$ — такое неприводимое представление группы симметрии $\Gamma \times \Pi$, что $P_D P_E \neq 0$. Тогда приведенный внутренний гамильтониан $S_0(D, E)$ имеет существенный спектр*

$$\sigma_e(S_0(D, E)) = [\eta(D, E), \infty[,$$

где $\eta(D, E) = \min \{\eta(Z, D, E) \colon Z = (Z_1, Z_2)\}$.

З а м е ч а н и е. Для всякого неприводимого представления $D \otimes E$ группы $\Gamma \times \Pi$, для которого $P_D P_E \neq 0$, выполняется неравенство $\eta(D, E) \leqslant 0$, т. е. $[0, \infty[\subset \sigma_e(S_0(D, E))$. Это очевидно при $N = 2$ и легко получается по индукции для общего случая.

Доказательство теоремы 11.16 будет дано в § 12.

В заключение этого параграфа приведем пример, когда пренебречь исключительным случаем (11.15) нельзя [2]).

11.17. П р и м е р. Пусть $N = 4$. Предположим, что частицы 1 и 3 тождественны между собой, равно как и частицы 2 и 4, а частицы 1 и 2 не тождественны. Группа Π в этом случае состоит

---

[1]) Отметим, что если $\Gamma = \mathcal{O}(3)$, D — представление группы $\mathcal{O}(3)$ веса l и D_1 — представление группы $\mathcal{O}(3)$ веса l', то условие (11.15) (iii) не выполняется при $ll' > 0$; см. [40], п. 2.7.— *Прим. перев.*

[2]) Указанный исключительный случай может иметь место даже для таких сравнительно простых систем, как молекула водорода; см. [40], п. 2.14. —*Прим. перев.*

из четырех элементов:

$$\pi_0 = 1,\ \pi_1 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,2\,1\,4 \end{pmatrix},\quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,4\,3\,2 \end{pmatrix},\quad \pi_3 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,4\,1\,2 \end{pmatrix}.$$

Пусть гамильтониан имеет вид

$$S = T + W_{12} + W_{14} + W_{23} + W_{34},$$

где W_{ij} — сферически симметричные квадратично интегрируемые относительно внутренних координат $x_i - x_j$ потенциалы, описывающие взаимодействие между нетождественными частицами. Группа вращательной симметрии Г совпадает с $\mathcal{O}(3)$. Внутренние гамильтонианы $\hat{S}_{12}$, $\hat{S}_{14}$, $\hat{S}_{23}$ и $\hat{S}_{34}$ имеют один и тот же порождающий оператор; мы предположим, что у него есть одно отрицательное собственное значение λ_0 и нет никаких других. Известно, что это собственное значение простое и соответствующая ему собственная функция сферически симметрична. Операторы $\hat{S}_{13}$ и $\hat{S}_{24}$ пусть не имеют собственных значений.

Выберем представление E группы П следующим образом:

$$E(\pi_0) = 1,\ E(\pi_1) = -1,\ E(\pi_2) = -1,\ E(\pi_3) = 1.$$

Представление D группы Г будет фиксировано позже. Пусть Z — какое-нибудь разбиение с $|Z_2| = 1$, например $Z_1 = \{1, 2, 3\}$, $Z_2 = \{4\}$. Группа П (Z_1) состоит из π_0 и π_1; представление $E_1 = E \mid \Pi(Z_1)$ неприводимо и задается равенствами $E_1(\pi_0) = 1$, $E_1(\pi_1) = -1$. В координатах $z_1 = x_1 - x_2$, $z_2 = x_3 - x_2$ внутренний гамильтониан подсистемы Z_1 запишется в виде

$$S_0(Z_1) = -\frac{1}{2\nu}\Delta_1 - \frac{1}{2\nu}\Delta_2 - \frac{1}{\mu_2}\operatorname{grad}_1\operatorname{grad}_2 + \\ + W_{12}(|z_1|) + W_{23}(|z_2|),$$

где $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$. Если $\frac{1}{\mu_2}$ заменить нулем, то оператор $S_0(Z_1)$ имеет одно отрицательное собственное значение $2\lambda_0$ и никаких других; его существенным спектром служит полупрямая $[\lambda_0, \infty[$. Собственное значение $2\lambda_0$ просто, и соответствующая ему собственная функция симметрична относительно z_1 и z_2. Так как оператор P_{E_1} является проектором на подпространство антисимметричных собственных функций, то у приведенного оператора $S_0(Z_1, E_1)$ нижней точкой спектра будет $\eta(Z_1, E_1) = \lambda_0$. Поскольку оператор $-\Delta_1 - 2\operatorname{grad}_1\operatorname{grad}_2 - \Delta_2$ неотрицателен, то при возрастании величины $1/\mu_2$ операторы $S_0(Z_1)$ и $S_0(Z_1, E_1)$ также возрастают. Следовательно, $\eta(Z_1, D_1, E_1) \geqslant \lambda_0$ для любого представления D_1, и в силу (11.14′) для любого представления D выполняется неравенство $\eta(Z, D, E) \geqslant \lambda_0$. Аналогичный результат имеет место для *всякого* разбиения Z с $|Z_2| = 1$.

Пусть, далее, $|Z_2| = 2$; если $Z_1 = \{1, 3\}$, $Z_2 = \{2, 4\}$, то $\eta(Z, D, E) = 0$ для любого D. Если $Z_1 = \{1, 2\}$, $Z_2 = \{3, 4\}$, то подсистемы Z_1 и Z_2 тождественны; это и есть исключительный случай. Здесь $\Pi(Z) = \{\pi_0\}$ и $\hat{\Pi}(Z) = \{\pi_0, \pi_3\}$; поэтому существует лишь одна возможность: $E_1 = 1$ и $E_2 = 1$. При $D_1 \neq D_2$ по крайней мере для одного из операторов $S_0(Z_i, D_i, E_i)$ выполняется равенство $\eta(Z_i, D_i, E_i) = 0$ и, следовательно, $\eta(Z, D, E) \geqslant \lambda_0$. Поэтому нам достаточно рассмотреть лишь случай $D_1 = D_2 = 1$, когда

$$\eta(Z_i, D_i, E_i) = \lambda_0 \text{ для } i = 1, 2$$

и λ_0 является изолированным минимально вырожденным собственным значением, т. е. случай, когда справедливы условия (11.15) (i) и (11.15) (ii). Так как $E \mid \Pi(Z) = 1$, то в (11.15) (iii), очевидно, $\omega = 1$. Возьмем $D = 1$. Тогда единственно возможное значение для D_0 — это 1, оператор P_{D_0} проектирует на подпространство сферически симметричных функций в $L_2(R^3)$, и поэтому

$$P_\omega P_{D_0} = P_{D_0} \neq 0.$$

В этом случае условие (11.15) (iii) не выполняется, и мы получаем, что $\eta(Z, D, E) = 2\lambda_0$ и, значит, $\eta(D, E) = 2\lambda_0$ по теореме 11.16. Если, однако, D (а следовательно, и D_0) является представлением, соответствующим сферическим гармоникам первого порядка, то условие (11.15) будет выполнено; тогда $\eta(Z, D, E) = \lambda_0$ и в силу теоремы 11.16 $\eta(D, E) = \lambda_0$.

§ 12. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 11.16

Доказательство будет состоять из двух частей.

1. В первой части мы покажем, что

$$[\eta(D, E), \infty[\subset \sigma_e(S_0(D, E));$$

для этого достаточно доказать, что

$$[\eta(Z, D, E), \infty[\subset \sigma(S_0(D, E)) \text{ для каждого } Z = (Z_1, Z_2).$$

а) Начнем со случая, когда $|Z_2| > 1$ и разбиение Z не является исключительным. В силу определения (11.14) числа $\eta(Z, D, E)$ нам надо установить, что для всех представлений $(D_0, D_1, D_2) \prec \prec D$ и $(E_1, E_2) \underset{Z}{\prec} E$, таких, что $P_{D_i} P_{E_i} \neq 0$ и $P_{D_0} \neq 0$, любое число $\lambda \geqslant \eta(Z_1, D_1, E_1) + \eta(Z_2, D_2, E_2)$ принадлежит спектру $\sigma(S(D, E))$. Положим

$$\lambda_i = \eta(Z_i, D_i, E_i) \text{ для } i = 1, 2 \text{ и } \lambda_0 = \lambda - \lambda_1 - \lambda_2.$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$; согласно теореме 8.11, существуют $D_i \otimes E_i$-порождающие подпространства N_i пространства $C_0^\infty(Z_i)$, такие, что

$$\| S_0(Z_i) u_i - \lambda_i u_i \| \leqslant \varepsilon \| u_i \|$$

для всех $u_i \in N_i$, $i = 1, 2$. Так как $\lambda_0 \geqslant 0$, то мы можем применить теорему 8.8, согласно которой для любого $r > 0$ существуе такое D_0-порождающее подпространство N_0 пространства $C_0^\infty(R^3)$, что

$$\| T_0 u - \lambda_0 u \| \leqslant \varepsilon \| u \|$$

и $u(x) = 0$ при $|x| \leqslant r$ для всех функций $u \in N_0$. Положим $M = N_0 \otimes N_1 \otimes N_2$; ясно, что $M \subset C_0^\infty(R^{3N-3})$, и из соотношения (11.2) следует оценка

$$\| S_0(Z) u - \lambda u \| \leqslant c_1 \varepsilon \| u \| \text{ для всех } u \in M,$$

где константа c_1 зависит только от размерности подпространства M и, значит, только от размерностей подпространств $D_i \otimes E_i$ и D_0. Пусть $\rho > 0$ таково, что носитель любой функции $u_i \in N_i$ содержится в замкнутом шаре радиуса ρ с центром в точке 0, во внутренних координатах подсистемы Z_i, $i = 1, 2$. Возвращаясь к первоначальным координатам x_j и учитывая лемму 6.8, мы видим, что существует такое $r_0 > 0$, что

$$\sum_{j,\, k \in Z_i} | x_j - x_k |^2 \leqslant r_0^2 \text{ при } i = 1, 2$$

для каждой точки x, принадлежащей носителю любой функции $u \in M$. Согласно определению (11.4) координаты y_1, мы также имеем

$$|y_1| = \left| \frac{1}{\nu_1} \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j - \frac{1}{\nu_2} \sum_{k=n+1}^{N} \mu_k x_k \right| \geqslant r$$

для каждого $x \in \operatorname{supp}(u)$. Следовательно, при $s \in Z_1$, $t \in Z_2$ выполняется соотношение

$$| x_s - x_t | = \left| y_1 + \frac{1}{\nu_1} \sum_{j=1}^{n} \mu_j (x_s - x_j) - \frac{1}{\nu_2} \sum_{k=n+1}^{N} \mu_k (x_t - x_k) \right| \geqslant r - 2r_0.$$

Выбирая достаточно большое $r > 3r_0$, получаем в силу следствия (6.7b)

$$\| S_0 u - S_0(Z) u \| \leqslant \varepsilon (\| u \| + \| \hat{T}_0 u \|)$$

для всех $u \in M$, где $\hat{T}_0$ — порождающий оператор в $L_2(R^{3N-3})$ для оператора $\hat{T}$ внутренней кинетической энергии. Вследствие условия (6.12) оператор $\hat{T}_0$ является $S_0(Z)$-ограниченным; поэтому существует такая константа c_2, что

$$\| \hat{T_0} u \| \leqslant c_2 (\| u \| + \| S_0(Z) u \|) \leqslant c_2 (1 + |\lambda| + c_1 \varepsilon) \| u \| \leqslant c_3 \| u \|.$$

Таким образом,

$$\| S_0 u - \lambda u \| \leqslant \varepsilon (c_1 + 1 + c_3) \| u \| = \varepsilon c_3' \| u \|$$

для всех $u \in M$.

Построим теперь нетривиальное подпространство пространства $P_D P_E C_0^\infty(R^{3N-3})$, на котором оператор $S_0 - \lambda I$ мал. В силу леммы 7.3 соотношение $(D_0, D_1, D_2) \prec D$ влечет за собой соотношения $L = P_D M \neq \{0\}$ и $L \subset M$. Как и при доказательстве теоремы 10.5, мы докажем сейчас существование такой константы $c_4 > 0$, что $\| P_E w \| \geqslant c_4 \| w \|$ для всех функций $w \in M$; отсюда будет следовать, что $K = P_E L = P_D P_E M \neq \{0\}$ и

$$\| (S_0 - \lambda I) v \| = \| P_E (S_0 - \lambda I) w \| \leqslant \varepsilon c_3' \| w \| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon c_3' c_4^{-1} \| v \| \text{ для } v = P_E w \in P_E L.$$

Пусть $\pi \in \Pi \setminus \Pi(Z)$; поскольку разбиение Z не является исключительным, то $\pi Z_1 \cap Z_2 \neq \varnothing$, но $\pi Z_1 \neq Z_2$. Возьмем $j, k \in \in Z_1$ так, чтобы $j \neq k$, $j' = \pi^{-1}(j) \in Z_1$ и $k' = \pi^{-1}(k) \in Z_2$. Для точек x, принадлежащих носителям функций $w \in M$, имеем

$$| x_j - x_k | \leqslant r_0 \text{ и } | x_{j'} - x_{k'} | \geqslant r - 2r_0 > r_0.$$

В силу (11.3), однако, $| x_{j'} - x_{k'} | \leqslant r_0$ при $x \in \operatorname{supp}(U(\pi) w)$; поэтому функции w и $U(\pi) w$ обладают непересекающимися носителями и, значит, $\langle w \mid U(\pi) w \rangle = 0$. Из определения (7.7) вытекает, что $\langle w \mid P_E w \rangle = \langle w \mid Q_E w \rangle$, где

$$Q_E = \frac{d_E}{|\Pi|} \sum_{\pi \in \Pi(Z)} \chi_E(\pi)^* U(\pi).$$

Отсюда так же, как в теореме 10.5, выводим существование такого числа $\nu > 0$, что $\langle w \mid Q_E w \rangle = \nu \| w \|^2$ и, следовательно, $\| P_E w \| \geqslant \nu^{1/2} \| w \|$ для всех $w \in M$.

b) Пусть теперь Z — разбиение, отвечающее исключительному случаю. Попытаемся рассуждать точно так же, как в части а). Если $D_1 \neq D_2$ или если E_1 и E_2 не эквивалентны относительно группового изоморфизма $\pi \mapsto \tau\pi\tau$, то подпространство JN_1 ортогонально к подпространству N_2 для любых $D_i \otimes E_i$-порождающих подпространств N_i пространства $L_2(Z_i)$, $i = 1, 2$, где J — изометрический изоморфизм пространства $L_2(Z_1)$ на $L_2(Z_2)$, определяемый равенством (11.9′). Если $D_1 = D_2$ и представления E_1 и E_2 эквивалентны, но число $\eta(Z_1, D_1, E_1)$ не является изолированным минимально вырожденным собственным значением оператора $\overline{S_0(Z_1, D_1, E_1)}$, то, согласно лемме 11.12, можно выбрать N_1 и N_2 так, чтобы N_1 и $J^{-1}N_2$ были ортогональными $D_1 \otimes E_1$-порождающими подпространствами пространства $C_0^\infty(Z_1)$, такими, что

$$\| S_0(Z_1) u_j - \eta(Z_1, D_1, E_1) u_j \| \leqslant \varepsilon \| u_j \|$$

для всех $u_1 \in N_1$, $u_2 \in J^{-1}N_2$. Следовательно, N_2 является $D_2 \otimes \otimes E_2$-порождающим ортогональным к JN_1 подпространством, и в силу (11.9″) выполняется неравенство

$$\| S_0(Z_2) u - \eta(Z_2, D_2, E_2) u \| \leqslant \varepsilon \| u \| \text{ для всех } u \in N_2.$$

Остальная часть доказательства теперь проходит без затруднений; в частности, для всех функций $w \in M = N_0 \otimes N_1 \otimes N_2$ и всех перестановок $\pi \in \dot{\Pi} \setminus \Pi(Z)$ справедливо равенство $\langle w \mid U(\pi) w \rangle = 0$. При $\pi \in \dot{\Pi} \setminus \hat{\Pi}(Z)$ оно доказывается так же, как в части а); при $\pi \in \hat{\Pi} \setminus \Pi(Z) = \tau\Pi(Z)$ в силу (11.10)

$$U(\pi) w \in U_0(\tau) N_0 \otimes J^{-1}N_2 \otimes JN_1,$$

а это пространство ортогонально к пространству M.

Далее, предположим, что выполнены условия (11.15) (i) и (ii). Выберем подпространство N_1, как и раньше, и положим $N_2 = JN_1$. Снова доказательство проходит беспрепятственно до того места, где надо рассмотреть величину $\langle w \mid P_E w \rangle$ для $w \in M$. Так как $\langle w \mid U(\pi) w \rangle = 0$ при $\pi \in \Pi \setminus \hat{\Pi}(Z)$, то аналогично предыдущему получаем, что $\langle w \mid P_E w \rangle = \langle w \mid \hat{Q}_E w \rangle$, где

$$\hat{Q}_E = \frac{d_E}{|\Pi|} \sum_{\pi \in \hat{\Pi}(Z)} \chi_E(\pi)^* U(\pi).$$

Представление $E \mid \hat{\Pi}(Z)$ унитарно эквивалентно некоторой ортогональной сумме неприводимых представлений группы $\hat{\Pi}(Z)$; поэтому оператор $\hat{Q}_E$ представляет собой некоторую линейную комбинацию соответствующих проекторов. В силу леммы 11.11 отсюда вытекает, что

$$\hat{Q}_E = \sum_{j<k} a_{jk} P^{(jk)} + \sum_j b_j P_+^{(j)} + \sum_j c_j P_-^{(j)},$$

где коэффициенты неотрицательны и не все равны нулю. Согласно предположению (11.15) (i), для некоторого $i \in \{1, \ldots, p\}$ имеем $E_1 = E_1^{(i)}$, $E_2 = E_2^{(i)}$. Так как пространство N_1 является $D_1 \otimes \otimes E_1$-порождающим, то, в обозначениях леммы 11.11, $P_1^{(j)} N_1 = \delta_{ij} N_1$ и аналогично $P_2^{(j)} N_2 = \delta_{ij} N_2$ для $j = 1, \ldots, p$; следовательно, $P^{(jk)} M = \{0\}$ для всех $j < k$ и $P_\pm^{(j)} M = \{0\}$ при $j \neq i$. Поэтому

$$\hat{Q}_E w = b_i P_+^{(i)} w + c_i P_-^{(i)} w \text{ для } w \in M.$$

Если $b_i = c_i = 0$, то представление $E \mid \hat{\Pi}(Z)$ не содержит представлений $E_+^{(i)}$ и $E_-^{(i)}$; в этом случае выполнено условие (11.15) (iii). Предположим, что $b_i + c_i > 0$, и пусть $u_1, \ldots, u_{d_i}$ — такой ортонормированный базис в N_1, что

$$U_1(\pi) u_j = \sum_{r=1}^{d_i} E_1^{(i)}(\pi)_{rj} u_r \text{ при всех } j \text{ и } \pi \in \Pi(Z_1).$$

Тогда функции $Ju_1, \ldots, Ju_{d_i}$ образуют базис пространства $N_2 = JN_1$ и в силу леммы 11.11 справедливо соотношение

$$Q^{(i)}(u_j \otimes Ju_k) = u_j \otimes Ju_k.$$

Таким образом, оператор $Q^{(i)}$ приводится на пространстве $N_1 \otimes N_2$ к единичному оператору, и, следовательно, оператор $P_\pm^{(i)}$ приводится на пространстве M к оператору

$$\left(\frac{1}{2} I_0 \pm \frac{1}{2} U_0(\tau)\right) \otimes I_1 \otimes I_2 = P_\pm \otimes I_1 \otimes I_2,$$

т. е.

$$P_\pm^{(i)} M = P_\pm N_0 \otimes N_1 \otimes N_2.$$

Из приведенных рассуждений вытекает, что

$$\langle w \mid P_E w \rangle = \langle w \mid \hat{Q}_E w \rangle = b_i \| P_+^{(i)} w \|^2 + c_i \| P_-^{(i)} w \|^2$$

для всех $w \in M$.

Если $b_i > 0$ и $P_+ P_{D_0} \neq 0$, то, согласно следствию 8.8′, мы можем выбрать подпространство N_0 таким, что $P_+ N_0 = N_0$; поэтому для всех функций $w \in M$ выполняется неравенство $\langle w \mid P_E w \rangle \geqslant b_i \| w \|^2$. Аналогично если $c_i > 0$ и $P_- P_{D_0} \neq 0$, то можно выбрать подпространство N_0 так, чтобы $P_- N_0 = N_0$ и $\langle w \mid P_E w \rangle \geqslant c_i \| w \|^2$ для всех $w \in M$. В этих случаях доказательство проходит от начала до конца, как и ранее.

Остались не рассмотренными два варианта: (i) $c_i = 0$ (и, значит, $b_i > 0$) и $P_+ P_{D_0} = 0$; (ii) $b_i = 0$ (и, значит, $c_i > 0$) и $P_- P_{D_0} = 0$. В обоих вариантах требование (11.15) (iii) удовлетворяется.

Пусть, наконец, выполнены все условия (11.15). Нам надо доказать, что все $\lambda \geqslant \eta'(Z_1, D_1, E_1) + \eta(Z_2, D_2, E_2)$ принадлежат спектру $\sigma(S_0(D, E))$. Пусть $\lambda_1 = \eta(Z_1, D_1, E_1)$, $\lambda_2 = \eta'(Z_1, D_1, E_1)$ и $\lambda_0 = \lambda - \lambda_1 - \lambda_2$. В силу (11.13) и (11.15) (ii) $\lambda_2 > \lambda_1$; поэтому существуют такие ортогональные $D_1 \otimes E_1$-порождающие подпространства L_1, L_2 пространства $C_0^\infty(Z_1)$, что $\| S_0(Z_1) u_j - \lambda_j u_j \| \leqslant \varepsilon \| u_j \|$ для всех $u_j \in L_j$, $j = 1, 2$.

Положив $N_1 = L_1$ и $N_2 = JL_2$, продолжаем доказательство, как и ранее; это возможно, поскольку пространство JN_1 ортогонально к N_2.

c) В случае $|Z_2| = 1$ надо, согласно (11.14′), доказать, что $\lambda \in \sigma(S_0(D, E))$ для всех $\lambda \geqslant \eta(Z_1, D_1, E_1)$ и для всех представлений D_1, E_1, удовлетворяющих условиям, сформулированным в (11.14′). Здесь не встречается никаких трудностей, и мы опустим подробности.

2. Во второй части доказательства мы покажем, что $\sigma_e(S_0(D, E)) \subset [\eta(D, E), \infty[$. Мы сделаем это с помощью теоремы 9.4. Обратимся сначала к случаю, когда группы Γ и Π тривиальны.

a) Рассмотрим разбиение $Z = (Z_1, \ldots, Z_m)$ такое, что $|Z_1| \geqslant \ldots \geqslant |Z_m| \geqslant 1$, и соответствующий ему оператор $S_0(Z)$, определенный в § 11. Пусть $h = N - m + 1$, так что возможные значения h — это $1, 2, \ldots, N-1$. Будем отождествлять Z со всеми разбиениями Z', получающимися из Z изменением порядка подмножеств. Пусть Z^{hk}, $k = 1, \ldots, k(h)$,— все различные разбиения для фиксированного h. Для каждой пары (h, k) определим принадлежащие $L_2(\mathbf{R}^{3N-3})$ функции $p_{hklr'}$, $l = 1, \ldots$ $\ldots, l(h, k)$, $r' > 0$, следующим образом. Пусть $Z^{hk} = (Z_1, \ldots$ $\ldots, Z_m)$, где $m = N + 1 - h$; рассмотрим функции

$$(12.1) \qquad \begin{cases} p(x_i - x_j) - (2^{h-1} - 1)\, r', & i \in Z_r,\ j \in Z_s,\ r \neq s, \\ 2^{h-1} r' - p(x_i - x_j), & i, j \in Z_r, \end{cases}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbf{R}^{3N}$ и $p(z) = (1 + |z|^2)^{1/2}$; ограничим их на подпространство, выделяемое соотношением $\sum_{j=1}^{N} \mu_j x_j = 0$; сделаем преобразование к внутренним координатам $y \in \mathbf{R}^{3N-3}$, наконец, занумеруем полученные функции произвольным образом. Если множества $\Omega(h, k, r', r) \subset \mathbf{R}^{3N-3}$ определены формулой (9.0), то выполнены условия (9.1), (9.2); это будет доказано ниже (лемма 12.6). Поэтому можно применить теорему 9.4.

Заменим в этой теореме m на $3N-3$, S на S_0, T на $\hat{T}_0$ — порождающий оператор для оператора $\hat{T}$ (как было показано в § 6, в соответствующих внутренних координатах $\hat{T}_0 = -\Delta$). В силу следствия (6.7c) выполняется предположение (i) теоремы 9.4. Чтобы удовлетворялось условие (ii), надо надлежащим образом подобрать V_{hk}. Отметим, что для всех $x = ay$ с $y \in \Omega(h, k, r', s)$ и для всех i, j, принадлежащих к различным подмножествам разбиения Z^{hk}, в силу (12.1) и (9.0) справедливо неравенство $p(x_i - x_j) > s$. В силу следствия (6.7b) любой оператор $W_{j_1 \ldots j_n}$ удовлетворяет предположению об операторе V_{hk}, если набор

$\{j_1, \ldots, j_n\}$ пересекается не менее чем с двумя подмножествами разбиения Z^{hk}. Следовательно, можно взять $V_{hk} = S_0 - S_0(Z)$, где Z — любое разбиение на два таких подмножества Z_1, Z_2, что каждое подмножество из Z^{hk} содержится или в Z_1 или в Z_2. Тогда $S_{hk} = S_0(Z)$ и

$$\eta_{hk} = \min \sigma(S_{hk}) = \min \sigma(S_0(Z_1)) + \min \sigma(S_0(Z_2)) = \eta(Z_1) + \eta(Z_2)$$

при $|Z_2| > 1$ в силу (11.2),

$$\eta_{hk} = \eta(Z_1)$$

при $|Z_2| = 1$ в силу (11.2′). Поэтому, согласно теореме 9.4, $\sigma_e(S_0) \subset [\eta, \infty[$, где $\eta = \min\{\eta_{hk}: h, k\}$ совпадает в рассматриваемом здесь частном случае с числом $\eta(D, E)$.

b) Обратимся к общему случаю. Для этого нам нужно модифицировать теорему 9.4, как мы уже делали в доказательстве теоремы 10.5. Заменим $C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N-3})$ на

$$\mathrm{D}(S_0(D, E)) = P_D P_E C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N-3}),$$

предполагая, что $P_D P_E \neq 0$. В силу (12.1) все функции $p_{hklr'}$ инвариантны относительно преобразований группы Γ; поэтому то же справедливо для функций Φ_{hks}, определенных равенством (9.5). Для $\pi \in \Pi$ функции $p_{hklr'}$ в результате подстановки $x \mapsto \pi^{-1}x$ меняются местами таким образом, что h остается неизменным; поэтому если для любой функции f на $\mathbf{R}^{3N-3}$ мы определим $U(\pi) f$ формулой (11.3), то $U(\pi)\Phi_{hks} = \Phi_{hk's}$, где k' таково, что $Z^{hk'} = \pi Z^{hk}$. Следовательно,

$$\text{функции } \sum_{k=1}^{k(h)} \Phi_{hks} \text{ инвариантны относительно } \Gamma \text{ и } \Pi,$$

и, значит, если $u \in D(S_0(D, E))$, то функция v_h, определенная соотношением (9.9), также принадлежит $\mathrm{D}(S_0(D, E))$.

Рассмотрим теперь частный случай $h = N - 1$, когда $Z^{hk} = (Z_1, Z_2)$; предположим, что разбиение Z^{hk} не является исключительным. Согласно лемме 7.5 и соотношению (7.13),

$$\mathrm{D}(S_0(D, E)) \subset \bigoplus [\mathrm{D}(T_0, D_0) \widehat{\otimes} \mathrm{D}(S_0(Z_1, D_1, E_1)) \widehat{\otimes} \widehat{\otimes} \mathrm{D}(S_0(Z_2, D_2, E_2))],$$

где сумма берется по всем $(D_0, D_1, D_2) \prec D$ и всем $(E_1, E_2) \underset{Z^{hk}}{\prec} E$.

В силу (12.1) функции $p_{hklr'}$ в результате подстановки $x \mapsto \pi^{-1}x$ с $\pi \in \Pi(Z^{hk})$ меняются местами таким образом, что h и k остаются фиксированными; поэтому ввиду (9.5) функции Φ_{hks} инвариантны относительно группы $\Pi(Z^{hk})$. Из определения (9.9) функций w_{hk}

вытекает, что

$$w_{hk} \in \bigoplus [\mathrm{D}(T_0, D_0) \widehat{\otimes} \mathrm{D}(S_0(Z_1, D_1, E_1)) \widehat{\otimes} \mathrm{D}(S_0(Z_2, D_2, E_2))],$$

и, следовательно, в силу (11.14), неравенство (9.15) выполняется с η_{hk}, замененным на $\eta(Z^{hk}, D, E)$.

Предположим теперь, что $h = N-1$ и разбиение Z^{hk} — исключительное. Согласно леммам 7.5 и 7.9, имеем

$$\mathrm{D}(S_0(D, E)) \subset \bigoplus P_{\hat{E}} [P_{D_0} C_0^\infty(Z_0) \widehat{\otimes} P_{D_1} C_0^\infty(Z_1) \widehat{\otimes} P_{D_2} C_0^\infty(Z_2)],$$

где сумма берется по всем $(D_0, D_1, D_2) \prec D$ и всем неприводимым представлениям $\hat{E}$ группы $\hat{\Pi}(Z^{hk})$, содержащимся в $\mathrm{E} \mid \hat{\Pi} \mid (Z^{hk})$. Снова функция Φ_{hks} инвариантна относительно группы $\hat{\Pi}(Z^{hk})$ и, следовательно,

$$w_{hk} \in \bigoplus P_{\hat{E}} [P_{D_0} C_0^\infty(Z_0) \widehat{\otimes} P_{D_1} C_0^\infty(Z_1) \widehat{\otimes} P_{D_2} C_0^\infty(Z_2)].$$

Для всех компонент функции w_{hk}, соответствующих представлениям $D_1 \neq D_2$ или $\hat{E} = E^{(ij)}$ (см. лемму 11.11), получаем оценку (9.15) с η_{hk}, замененным на $\eta(Z_1, D_1, E_1^{(i)}) + \eta(Z_2, D_2, E_2^{(j)})$. Остается рассмотреть компоненты, отвечающие $D_1 = D_2$ и $\hat{E} = E_\omega^{(i)}$. Если $\eta(Z_1, D_1, E_1^{(i)})$ не является изолированным минимально вырожденным собственным значением оператора $S_0(Z_1, D_1, E_1^{(i)})$ или если $P_\omega P_{D0} \neq 0$, то, используя явную формулу для оператора $P_\omega^{(i)}$, данную в лемме 11.11, получаем ту же оценку, что и раньше.

Наконец, остается случай (11.15). Пусть N_1 — собственное подпространство оператора $\overline{S_0(Z_1, D_1, E_1^{(i)})}$, отвечающее собственному значению $\eta(Z_1, D_1, E_1^{(i)})$, и

$$H_1 = N_1^\perp \cap \mathrm{D}(\overline{S_0(Z_1, D_1, E_1^{(i)})}).$$

По определению (11.13) числа $\eta'(Z_1, D_1, E_1^{(i)})$, оно является точной нижней границей спектра ограничения оператора $\overline{S_0(Z_1, D_1, E_1^{(i)})}$ на пространство H_1. Следовательно,

$$P_{D_1} P_{E_1^{(i)}} C_0^\infty(Z_1) \subset N_1 \oplus H_1$$

и аналогично

$$P_{D_2} P_{E_2^{(i)}} C_0^\infty(Z_2) \subset JN_1 \oplus JH_1 = N_2 \oplus H_2.$$

Если w — компонента функции w_{hk}, соответствующая $E_\omega^{(i)}$, D_0, D_1, D_2, то по лемме 11.11

$$w \in P_\omega^{(i)} [P_{D_0} C_0^\infty(Z_0) \widehat{\otimes} (N_1 \oplus H_1) \widehat{\otimes} (N_2 \oplus H_2)],$$

и мы получаем четыре ортогональные компоненты. Первая компонента равна нулю, поскольку она содержится в подпространстве

$$P_\omega^{(i)}[P_{D_0}C_0^\infty(Z_0)\widehat{\otimes}N_1\widehat{\otimes}N_2]=P_\omega P_{D_0}C_0^\infty(Z_0)\widehat{\otimes}N_1\widehat{\otimes}N_2=\{0\}$$

в силу леммы 11.11 и условия (11.15) (iii). Поэтому остается оценить величину

$$\langle w\,|\,S_0(Z^{hk})\,w\rangle=\langle w\,|\,\overline{S_0(Z^{hk})}\,w\rangle$$

при

$$w\in P_\omega^{(i)}[P_{D_0}C_0^\infty(Z_0)\widehat{\otimes}\{(N_1\widehat{\otimes}H_2)\oplus(H_1\widehat{\otimes}N_2)\oplus(H_1\widehat{\otimes}H_2)\}].$$

В силу представления (11.2) имеем

$$\overline{S_0(Z^{hk})}=\overline{T}_0\otimes I_1\otimes I_2+I_0\otimes\overline{S_0(Z_1)}\otimes I_2+I_0\otimes I_1\otimes\overline{S_0(Z_2)}.$$

Отсюда следует, что для функции w будет выполняться оценка (9.15) с η_{hk}, замененным на $\eta'(Z_1, D_1, E_1^{(i)})+\eta(Z_2, D_2, E_2^{(i)})$. Собирая вместе найденные оценки, видим, что для функции w_{hk} справедливо неравенство (9.15) с η_{hk}, замененным на $\eta(Z^{hk}, D, E)$.

При $h<N-1$ положим $Z^{hk}=(Z_1, \ldots, Z_m)$, где $m=N+1-h>2$ и $|Z_1|\geqslant|Z_2|\geqslant\ldots\geqslant|Z_m|$. Введем для оператора $S(Z^{hk})$ внутренние координаты следующим образом. Обозначим через m' число подсистем Z_j с $|Z_j|>1$; крайний случай — это $m'=0$, когда $|Z_j|=1$ для всех j. Введем внутренние координаты для каждой из подсистем Z_j с $j\leqslant m'$ (если такие j существуют) и обозначим через $L_2(Z_j)$ соответствующие подпространства, а через $S_0(Z_j)$ — порождающий оператор для внутреннего гамильтониана подсистемы Z_j. Пусть $z_1, \ldots, z_m$ — координаты центров масс наших подсистем, а $\nu_1, \ldots, \nu_m$ — их массы. В этих координатах

$$\hat{S}(Z^{hk})=-\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2\nu_j}\Delta_j+\sum_{j=1}^{m'}\hat{S}(Z_j),$$

где Δ_j — лапласиан относительно z_j.

Выберем теперь внутренние координаты $y_1, \ldots, y_{m-1}$ для первого из двух слагаемых в правой части так, чтобы

$$-\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2\nu_j}\Delta_j=-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{2\varkappa_j}\Delta'_j+\widetilde{T},$$

где Δ'_j — лапласиан относительно y_j и $\widetilde{T}$ — оператор трансляционной энергии полной системы, определенный формулой (6.5′).

Этого можно добиться, положив $y'_1 = z_1$, $\varkappa'_1 = \nu_1$ и

$$(12.2)\quad \begin{cases} y_j = z_{j+1} - y'_j, & \varkappa_j = \left(\dfrac{1}{\varkappa'_j} + \dfrac{1}{\nu_{j+1}}\right)^{-1}, \\ y'_{j+1} = (\varkappa'_{j+1})^{-1}(\varkappa'_j y'_j + \nu_{j+1} z_{j+1}), & \varkappa'_{j+1} = \varkappa'_j + \nu_{j+1}, \end{cases}$$

$j = 1, \ldots, m-1$. Пусть $L_2(Z_0)$ обозначает пространство квадратично суммируемых функций переменных $y_1, \ldots, y_{m-1}$. Тогда

$$(12.3)\qquad L_2(\mathrm{R}^{3N-3}) = \widehat{\bigotimes_{j=0,\ \ldots,\ m'}} L_2(Z_j)$$

и

$$(12.4)\qquad S_0(Z^{hk}) = \sum_{j=0}^{m'} I_0 \otimes \ldots \otimes I_{j-1} \otimes S_0(Z_j) \otimes \ldots \otimes I_{m'},$$

где

$$(12.4')\qquad S_0(Z_0) = -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{2\varkappa_j} \Delta'_j$$

и I_j — единичный оператор в $L_2(Z_j)$.

Нам нужно найти нижнюю границу для квадратичной формы $\langle w_{hk} \mid S_0(Z^{hk})\, w_{hk}\rangle$. Функция Φ_{hks} инвариантна относительно преобразований группы $\Pi(Z^{hk}) = \Pi(Z_0) \times \ldots \times \Pi(Z_{m'})$; поэтому мы получаем в силу (9.9)

$$w_{hk} \in \bigoplus [\mathrm{D}(S_0(Z_0, D_0)) \hat{\otimes} \mathrm{D}(S_0(Z_1, D_1, E_1)) \hat{\otimes} \ldots$$
$$\ldots \hat{\otimes} \mathrm{D}(S_0(Z_{m'}, D_{m'}, E_{m'}))],$$

где сумма берется по всем $(D_0, \ldots, D_{m'}) \prec D$ и всем представлениям $(E_1, \ldots, E_{m'}) \underset{Z^{hk}}{\prec} E$. Так как оператор $S_0(Z_0)$ неотрицателен, то из равенства (12.4) следует справедливость оценки (9.15) с η_{hk}, замененным на

$$(12.5)\qquad \inf \sum_{j=1}^{m'} \eta(Z_j, D_j, E_j),$$

где нижняя грань берется по всем представлениям D_j, E_j, удовлетворяющим условиям: $P_{D_j} P_{E_j} \neq 0$; существует D_0, такое, что $P_{D0} \neq 0$ и $(D_0, \ldots, D_{m'}) \prec D$; $(E_1, \ldots, E_{m'}) \underset{Z^{hk}}{\prec} E$. Представим, далее, $L_2(Z_0)$ в виде

$$L_2(Z_0) = L_2(Z_{00}) \hat{\otimes} L_2(\widetilde{Z}_0),$$

где пространство $L_2(Z_{00})$ соответствует переменной y_1, введенной в (12.2). Тогда, по построению, пространство

$$L_2(\widetilde{Z}_1) = L_2(Z_{00}) \hat{\otimes} L_2(Z_1) \hat{\otimes} L_2(Z_2)$$

отвечает внутренним координатам для подсистемы $Z_1 \cup Z_2$, и

$$L_2(\widetilde{Z}_0) \hat{\otimes} L_2(\widetilde{Z}_1) \hat{\otimes} L_2(Z_3) \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} L_2(Z_{m'})$$

есть представление пространства $L_2(\mathbf{R}^{3N-3})$ для разбиения $\widetilde{Z} = (\widetilde{Z}_1, Z_3, \ldots, Z_m)$, аналогичное (12.3). Возьмем какой-нибудь один набор представлений $D_0, \ldots, D_{m'}$ и $E_1, \ldots, E_{m'}$, входящих в (12.5). Пусть представления D_{00} и $\widetilde{D}_0$ таковы, что $(D_{00}, \widetilde{D}_0) \prec D_0$ и $P_{D_{00}} \neq 0$, $P_{\widetilde{D}_0} \neq 0$; тогда

$$(D_{00}, \widetilde{D}_0, D_1, \ldots, D_{m'}) \prec D,$$

и, применяя дважды лемму 7.6, мы находим такое представление $\widetilde{D}_1$, для которого

$$(D_{00}, D_1, D_2) \prec \widetilde{D}_1 \quad \text{и} \quad (\widetilde{D}_0, \widetilde{D}_1, D_3, \ldots, D_{m'}) \prec D.$$

В силу леммы 7.4 представление $\widetilde{D}_1$ можно выбрать так, чтобы $P_{\widetilde{D}_1} \neq 0$. Аналогично в силу леммы 7.12 существует неприводимое представление $\widetilde{E}$ группы $\Pi(Z_1 \cup Z_2)$, такое, что

$$P_{\widetilde{E}} \neq 0, \quad (E_1, E_2) \underset{Z}{\prec} \widetilde{E}, \quad \text{где} \quad Z = (Z_1, Z_2),$$

и

$$(\widetilde{E}, E_3, \ldots, E_{m'}) \underset{\widetilde{Z}}{\prec} E.$$

Согласно части 1a) доказательства, если разбиение (Z_1, Z_2) системы $Z_1 \cup Z_2$ не является исключительным, то число $\eta(Z_1, D_1, E_1) + \eta(Z_2, D_2, E_2)$ принадлежит спектру оператора $S_0(Z_1 \cup Z_2, \widetilde{D}_1, \widetilde{E})$. Следовательно,

$$\eta(Z_1 \cup Z_2, \widetilde{D}_1, \widetilde{E}) \leqslant \eta(Z_1, D_1, E_1) + \eta(Z_2, D_2, E_2),$$

и поэтому нижняя грань в (12.5) может быть заменена аналогичной нижней гранью для разбиений множества $\{1, \ldots, N\}$ на $m-1$ подмножеств. Продолжая этот процесс, мы придем к нижней грани, полученной прежде для разбиений на две подсистемы.

Приведенные выше рассуждения теряют силу в исключительном случае, когда существует преобразование $\tau \in \Pi$, которое отображает Z_1 на Z_2 и наоборот, а Z_j при $j > 2$ переводит в себя. Но в этом случае достаточно заменить группу $\Pi(Z^{hk})$ на группу

$$\widetilde{\Pi}(Z^{hk}) = \hat{\Pi}(Z_1, Z_2) \times \Pi(Z_3) \times \ldots \times \Pi(Z_{m'}),$$

где

$$\hat{\Pi}(Z_1, Z_2) = (\Pi(Z_1) \times \Pi(Z_2)) \cup \tau(\Pi(Z_1) \times \Pi(Z_2)),$$

и применить часть 1b) доказательства. Мы опустим подробности. Важно заметить, однако, что исключительный случай может встретиться только на первом шаге редукции, так как $|Z_1 \cup Z_2| = |Z_1| + |Z_2| > |Z_3|$.

Собирая вместе все оценки, получим по теореме 9.4 нижнюю границу $\eta(D, E)$ для существенного спектра оператора $S_0(D, E)$. Таким образом, теорема доказана.

В ходе доказательства была использована следующая лемма.

12.6. Лемма. *Для функций* $p_{hklr'}$, *определенных формулой* (12.1), *и для областей* $\Omega(h, k, r', r)$, *определенных формулой* (9.0) *с этими функциями, выполняются утверждения* (9.1) *и* (9.2).

Доказательство. Докажем утверждения в x-координатах с $\alpha = 2$; преобразование к внутренним координатам даст тот же результат с другим значением α.

1. *Доказательство утверждения* (9.1) (i). Для $h = 1$ существует только одно разбиение, Z^{11}, так что можно считать $h \geqslant 2$. Пусть $k \neq k'$, $s > 0$, $t > 0$, $r' > 0$ и $s + t - r' > 0$. Тогда найдутся такие числа i, j, $i \neq j$, что i и j содержатся в одном подмножестве разбиения Z^{hk} и в различных подмножествах разбиения $Z^{hk'}$. Поэтому, согласно определению 12.1, для точек $x \in \Omega(h, k, r', s)$ и $y \in \Omega(h, k', r', t)$ выполняются соотношения

$$2^{h-1}r' - p(x_i - x_j) > s \quad \text{и} \quad p(y_i - y_j) - (2^{h-1} - 1)r' > t.$$

В силу (10.7) (ii)

$$|x - y| \geqslant \max\{|x_i - y_i|, |x_j - y_j|\} \geqslant \frac{1}{2}|x_i - x_j - y_i + y_j| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}p(y_i - y_j) - \frac{1}{2}p(x_i - x_j) > \frac{1}{2}(s + t - r'),$$

что и требовалось доказать.

2. *Доказательство утверждения* (9.1) (ii). Пусть $s > 0$, $t > 0$, $r' > 0$, $s - t > 0$, $x \in \Omega(h, k, r', s)$ и $y \in \complement\Omega(h, k, r', t)$. Тогда существует такая пара чисел i, j, $i \neq j$, что либо i, j принадлежат различным подмножествам разбиения Z^{hk} и

$$p(y_i - y_j) - (2^{h-1} - 1)r' \leqslant t,$$

либо i, j принадлежат одному подмножеству разбиения Z^{hk} и

$$2^{h-1}r' - p(y_i - y_j) \leqslant t.$$

В первом случае имеем $p(x_i - x_j) - (2^{h-1} - 1)r' > s$ и, следовательно,

$$|x - y| \geqslant \max\{|x_i - y_i|, |x_j - y_j|\} \geqslant \frac{1}{2}|x_i - y_i - x_j + y_j| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}p(x_i - x_j) - \frac{1}{2}p(y_i - y_j) > \frac{1}{2}(s - t).$$

Во втором случае выполняется неравенство $2^{h-1}r' - p(x_i - x_j) > s$, и поэтому по той же причине

$$|x-y| > \frac{1}{2}(s-t).$$

3. *Доказательство утверждения* (9.2). Пусть $0 < r < r'$ и $x \in \complement (\bigcup_{h,k} \Omega(h, k, r', r))$, так что $x \in \bigcup_{hk} \Omega(h, k, r', r)$ для всех h, k. При $h = 1$ существует только одно разбиение на N подмножеств, содержащих один элемент каждое. Поэтому включение $x \in \complement \Omega(1, 1, r', r)$ влечет за собой существование такой пары $j_1, j_2, j_1 \neq j_2$, что

$$p(x_{j_1} - x_{j_2}) \leqslant r.$$

Для $h = 2$ обозначим через Z^{2k} то разбиение, у которого пер вым подмножеством служит $Z_1 = \{j_1, j_2\}$. Очевидно, все другие подмножества содержат лишь по одному элементу. В силу этого обстоятельства соотношение $x \in \complement \Omega(2, k, r', r)$ влечет за собой или неравенство $2r' - p(x_{j_1} - x_{j_2}) \leqslant r$, или существование пары чисел i, j, принадлежащих различным подмножествам и удовлетворяющих неравенству $p(x_i - x_j) - r' \leqslant r$. Первый случай невозможен, ибо $2r' - p(x_{j_1} - x_{j_2}) \geqslant 2r' - r > r$. Во втором случае либо оба числа i и j отличаются от j_1, j_2 и тогда существует пара $j_3, j_4, j_3 \neq j_4$, такая, что

$$p(x_{j_3} - x_{j_4}) \leqslant r' + r,$$

либо одно из чисел i, j принадлежит подмножеству Z_1 и тогда найдется j_3, не содержащееся в Z_1, такое, что

$$p(x_{j_1} - x_{j_3}) \leqslant r' + r \quad \text{или} \quad p(x_{j_2} - x_{j_3}) \leqslant r' + r.$$

В любом случае мы получаем тройку чисел j_1, j_2, j_3, для которой

$$p(x_{j_i} - x_{j_k}) \leqslant r' + 2r \quad \text{при} \quad i, k = 1, 2, 3,$$

или две пары j_1, j_2 и j_3, j_4, такие, что

$$p(x_{j_1} - x_{j_2}) \leqslant r' + 2r \quad \text{и} \quad p(x_{j_3} - x_{j_4}) \leqslant r' + 2r.$$

Для $h = 3$ выбираем разбиение Z^{3k} в соответствии с только что полученным результатом: полагаем $Z_1 = \{j_1, j_2, j_3\}$ или $Z_1 = \{j_1, j_2\}$, $Z_2 = \{j_3, j_4\}$. Рассуждая, как и выше, находим либо четверку чисел j_1, j_2, j_3, j_4, либо тройку j_1, j_2, j_3 и пару j_4, j_5, либо три пары j_1, j_2, j_3, j_4 и j_5, j_6, такие, что

$$p(x_i - x_j) \leqslant 4r' + 3r$$

для i, j, принадлежащих одному из этих подмножеств.

Используя индукцию, для произвольного $h \in \{1, \ldots, N-1\}$ получаем либо некоторый набор из $h + 1$ чисел, либо некоторый набор из h чисел и пару чисел и так далее, обладающие тем свойством, что

$$p(x_i - x_j) \leqslant (2^h - h - 1)\, r' + hr$$

при i, j, принадлежащих одному из указанных подмножеств. Для $h = N - 1$ существует только одна возможность: в этом случае мы получаем набор N чисел, и, значит,

$$p(x_i - x_j) \leqslant (2^{N-1} - N)\, r' + (N-1)\, r < 2^{N-1} r' \quad \text{для } i,\ j = 1, \ldots, N.$$

Пусть, далее, точка x принадлежит подпространству в $\mathbf{R}^{3N}$, определенному соотношением $\sum_{j=1}^{N} \mu_j x_j = 0$. Ясно, что $x_i = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{N} \mu_j (x_i - x_j)$ для всякого i, и поэтому для всех i

$$|x_i| \leqslant \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{N} \mu_j |x_i - x_j| \leqslant \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{N} \mu_j p(x_i - x_j) \leqslant 2^{N-1} r',$$

откуда следует, что множество $\complement (\bigcup_{h,k} \Omega(h, k, r', r))$ содержится в некотором компактном множестве $K(r')$, зависящем только от r'. Этим доказательство леммы завершается.

Приложение

ОБОБЩЕНИЕ НА СЛУЧАЙ N-ЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ СО СПИНОМ

В этом приложении мы покажем, как наши результаты могут быть распространены на случай N-частичных систем со спином. Предположим, что j-я частица может находиться в m_j различных спиновых состояниях. Тогда пространством состояний для системы, состоящей только из j-й частицы, будет

$$L_2(\mathbf{R}^3 \times M_j) = L_2(\mathbf{R}^3) \otimes \mathbf{C}^{m_j},$$

где $M_j = \{1, \ldots, m_j\}$ — множество значений спиновой координаты j-й частицы, а пространством состояний всей системы будет

$$\hat{\bigotimes_{j=1}^{N}} L_2(\mathbf{R}^3 \times M_j) = L_2(\mathbf{R}^{3N} \times M) = L_2(\mathbf{R}^{3N}) \otimes \Big(\bigotimes_{j=1}^{N} \mathbf{C}^{m_j}\Big),$$

где $M = \prod_{j=1}^{N} M_j$.

Полный гамильтониан пусть имеет вид

$$S = K + V,$$

где

$$\mathrm{D}(S) = C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N} \times M) = C_0^\infty(\mathbf{R}^{3N}) \otimes \left(\bigotimes_{j=1}^{N} \mathbf{C}^{m_j}\right),$$

K — оператор в $L_2(\mathbf{R}^{3N} \times M)$, действующий только на $\mathbf{R}^{3N}$ (т. е. на пространственные координаты системы) и порождаемый оператором T кинетической энергии, как это было определено в § 6, а оператор V задается формулой

$$V = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j_1 < \ldots < j_n} V_{j_1 \ldots j_n} + \sum_{n=2}^{N} \sum_{j_1 < \ldots < j_n} W_{j_1 \ldots j_n};$$

физический смысл операторов $V_{j_1 \ldots j_n}$ и $W_{j_1 \ldots j_n}$ тот же, что и в § 6.

Оператор $V_{j_1 \ldots j_n}$ действует только на (пространственные и спиновые) координаты частиц $j_1, \ldots, j_n$ и порождается симметричным оператором $V^{j_1 \ldots j_n}$ в пространстве $L_2(\mathbf{R}^{3n} \times \prod_{i=1}^{n} M_{j_i})$; оператор $V^{j_1 \ldots j_n}$ является $K^{j_1 \ldots j_n}$-малым на бесконечности, где оператор $K^{j_1 \ldots j_n}$ действует только на $\mathbf{R}^{3n}$ и порождается оператором $T^{j_1 \ldots j_n}$ из § 6.

Чтобы сформулировать наши ограничения на оператор $W_{j_1 \ldots j_n}$, надо предварительно сказать кое-что о внутренних координатах. Пусть $\{j_1, \ldots, j_n\}$, где $n \geqslant 2$,— любая подсистема системы $\{1, \ldots, N\}$. Так же, как в § 6, определим координаты центра масс и внутренние пространственные координаты (не включающие в себя спиновые координаты). Кроме того, будем рассматривать и эти спиновые координаты подсистемы как внутренние координаты.

Пусть унитарный оператор U, соответствующий подсистеме $\{j_1, \ldots, j_n\}$, определен, как и в § 6 (он действует только на пространственные координаты). Тогда $W_{j_1 \ldots j_n}$ представляет собой такой оператор в $L_2(\mathbf{R}^{3N} \times M)$, что оператор $UW_{j_1 \ldots j_n} U^*$ действует только на внутренние координаты подсистемы $\{j_1, \ldots, j_n\}$ и порождается некоторым симметричным оператором $W^{j_1 \ldots j_n}$ в пространстве $L_2(\mathbf{R}^{3(n-1)} \times \prod_{i=1}^{n} M_{j_i})$, который Δ-мал на бесконечности (здесь Δ — оператор в $L_2(\mathbf{R}^{3(n-1)} \times \prod_{i=1}^{n} M_{j_i})$, действующий только на переменные из $\mathbf{R}^{3(n-1)}$ и порождаемый оператором Δ в $L_2(\mathbf{R}^{3(n-1)})$).

Наконец, следует заменить условие (6.12) следующим образом:

Для любой подсистемы $\{j_1, \ldots, j_n\}$ полный и внутренний гамильтонианы $S_{j_1 \ldots j_n}$ и $\hat{S}_{j_1 \ldots j_n}$ ограничены снизу; оператор

$K_{j_1\dots j_n}$ является $S_{j_1\dots j_n}$-ограниченным, а $\hat{K}_{j_1\dots j_n}$ — $\hat{S}_{j_1\dots j_n}$-ограниченным, где $K_{j_1\dots j_n}$ и $\hat{K}_{j_1\dots j_n}$ — соответственно полный и внутренний гамильтонианы данной подсистемы.

Нам надо выяснить свойства симметрии этих систем и операторов. Перестановочная симметрия очевидна: для $\pi \in \Pi$ унитарный оператор $U(\pi)$ задается соответствующей перестановкой (пространственных и спиновых) координат частиц. Для любого неприводимого унитарного представления E группы Π проектор P_E определяется формально так же, как в § 7.

Чтобы изучить вращательно-отражательную симметрию, рассмотрим сначала систему, состоящую только из j-й частицы. В качестве группы симметрии следует взять группу $\hat{\Gamma}$, которая получается из 2-мерной унитарной группы присоединением одного абстрактного элемента ($\hat{\Gamma}$ — это накрывающая группа для $\mathcal{O}(3)$; если m_j нечетно, то можно использовать и саму группу $\mathcal{O}(3)$ вместо $\hat{\Gamma}$; см. [6], § 9-6, и [35], гл. 15). В общем случае группой симметрии (для вращательно-отражательной симметрии) будет некоторая компактная подгруппа Γ группы $\hat{\Gamma}$. Имеются групповые гомоморфизмы d и d_j:

$$d\colon \Gamma \to \mathcal{O}(3), \quad d_j\colon \Gamma \to \mathcal{U}(m_j),$$

где $\mathcal{U}(m)$ — это m-мерная унитарная группа. Положим

$$U^{(j)}(\gamma) \overset{\text{опр}}{=} U_{d(\gamma)} \otimes d_j(\gamma),$$

где

$$U_{d(\gamma)} f(x) \overset{\text{опр}}{=} f(d(\gamma)^{-1} x).$$

Эти соотношения определяют унитарное представление группы Γ в пространстве $L_2(\mathbf{R}^3) \otimes \mathbf{C}^{m_j}$. Аналогично соотношения

$$U(\gamma) \overset{\text{опр}}{=} \bigotimes_{j=1}^{N} U^{(j)}(\gamma)$$

и

$$U(\gamma) \overset{\text{опр}}{=} \bigotimes_{j=1}^{N-1} U_{d(\gamma)} \otimes \Big(\bigotimes_{j=1}^{N} d_j(\gamma)\Big)$$

задают унитарные представления группы Γ соответственно в пространствах $L_2(\mathbf{R}^{3N} \times M)$ и $L_2(\mathbf{R}^{3(N-1)} \times M)$. Проекторы P_D определяются с помощью интегрирования по группе Γ по отношению к инвариантной вероятностной мере на Γ.

Теперь все наши теоремы можно переформулировать для этой новой ситуации, и доказательства проходят точно таким же образом. Важно заметить, что оператор кинетической энергии движения центра масс любой системы и оператор кинетической энергии относительного движения двух систем являются, как и раньше, операторами в пространстве $L_2(\mathbf{R}^3)$. В формулировке теоремы 8.11 соотношение $\Gamma \subset \mathcal{O}(3)$ можно заменить соотношением $\Gamma \subset \hat{\Gamma}$; доказательство теоремы не нуждается в изменении. Теорема 9.4 верна в той же самой форме для операторов в $L_2(\mathbf{R}^m \times \mathbf{C}^k)$, если T заменить оператором, который действует только на $\mathbf{R}^m$ и порождается оператором $-\Delta$.

Дополнение [1])

О ДИСКРЕТНОМ СПЕКТРЕ N-ЧАСТИЧНЫХ ГАМИЛЬТОНИАНОВ

М. А. Антонец, Г. М. Жислин и И. А. Шерешевский

§ 1. ОБЗОР РАБОТ ПО СТРУКТУРЕ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ГАМИЛЬТОНИАНОВ

Как указывалось в авторском введении, одной из основных задач спектральной теории многочастичных гамильтонианов наряду с исследованием существенного спектра является задача о числе дискретных собственных значений.

С позиций чистой математики обе задачи, в общем, одинаково важны. Однако для приложений важнее изучение дискретного спектра, поскольку целый ряд имеющих принципиальное значение проблем ядерной физики, квантовой механики и квантовой химии упирается именно в строгий математический анализ дискретной части спектра многочастичных гамильтонианов.

Здесь можно выделить 3 группы вопросов.

1. *Устойчивость квантово-химических и ядерных систем.* Устойчивость квантовой системы связана с непустотой множества точек дискретного спектра ее гамильтониана. Поэтому исследование дискретной части спектра открывает принципиальную возможность предсказывать существование или несуществование сложных многочастичных систем.

2. *Сходимость приближенных методов отыскания энергетических уровней и стационарных состояний.* Необходимым условием обоснования приближенных методов является доказательство теорем существования для отыскиваемых величин. В данном случае — это теоремы о существовании дискретных собственных значений (уровней энергии) и отвечающих им собственных функций (волновых функций стационарных состояний).

3. *Определение числа связанных состояний с заданными значениями квантовых чисел.* Знание расположения и числа энергетических уровней и использование правил отбора, разрешающих или запрещающих переходы между ними, позволяет предсказывать и интерпретировать результаты спектроскопических измерений [22]. Кроме того, качественные исследования по структуре дискретного спектра и свойств волновых функций с заданными значениями квантовых чисел должны, по-видимому, лежать

[1]) В этом дополнении при ссылках на работы, добавленные при переводе, звездочка, указывающая на это (см. список литературы), опускается.— *Прим. ред.*

в основе систематики однотипных многочастичных систем, например атомов. Для атомов такая систематика осуществляется, как известно, таблицей Менделеева, однако с позиций квантовой механики эта таблица может быть интерпретирована только в рамках очень грубых модельных приближений.

Во всех приложениях интерес представляет не дискретный спектр вообще, а дискретные собственные значения, имеющие физический смысл, т. е. такие, для которых существуют физически реализуемые собственные функции. Понятие реализуемости связано с запретом Паули и математически выражается в том, что имеющие физический смысл собственные функции должны преобразовываться по некоторым неприводимым представлениям E группы перестановочной симметрии П [1]), причем тип представлений E определяется сортами частиц, составляющих рассматриваемую систему **N**. Так, для атома с ядром конечной массы и $N-1$ электронами группа П изоморфна симметрической группе и допустимые представления E отвечают схемам Юнга, определяемым разбиением числа $N-1$ на k двоек и $N-1-2k$ единиц [35].

Если мы хотим не только получить физически реализуемые состояния, но и приписать им определенный набор квантовых чисел, то наряду с выполнением требований симметрии группы П нужно, чтобы собственные функции преобразовывались по неприводимым представлениям и группы вращательной симметрии системы — полной группы вращений $\mathcal{O}(3)$ или некоторой ее компактной подгруппы Г. Таким образом естественно возникает задача исследования дискретного спектра операторов $S(D, E)$ и $S_0(D, E)$ (см. § 10К, 11К) [2]). Отметим, что указанный способ обнаружения физически реализуемого дискретного спектра операторов $S(D, E)$ и $S_0(D, E)$ нельзя заменить отысканием спектра $\sigma_d(S)$ и $\sigma_d(S_0)$ во всем пространстве L_2 и последующим проектированием найденных собственных подпространств U_λ на подпространства $P_D P_E L_2$ физически допустимых функций, ибо при $N > 3$ (даже для атомов) мы имеем $P_D P_E U_\lambda = 0$ для всех, кроме конечного числа, дискретных значений λ. Это вытекает из того, что для атомов физически реализуемый дискретный спектр, за исключением не более чем конечного числа точек, лежит в существенном спектре рассматриваемых операторов в L_2 [40—42]. Поэтому дискретный спектр, найденный без учета симметрии, вообще говоря, не имеет физического смысла, кроме, может быть, конечного числа точек.

Возвращаясь к исследованию существенного спектра, составляющему содержание данной книги, отметим, что это исследование одновременно является и первым и, пожалуй, наиболее трудным этапом на пути изучения дискретного спектра. Действительно,

---

[1]) Мы используем обозначения, введенные в тексте книги.

[2]) Ссылки на основной текст книги снабжены буквой К.

как видно из приводимого ниже обзора, все сколько-нибудь значительные результаты о конечности и бесконечности числа дискретных собственных значений основаны на знании положения существенного спектра.

Дискретный спектр представляет собой «менее грубую структуру», чем существенный. Его наличие, конечность или бесконечность определяются, как правило, более тонкими свойствами потенциалов, чем свойства, ответственные за локализацию и структуру существенного спектра. Кроме того, конечность или бесконечность дискретного спектра гамильтониана, вообще говоря, зависит от симметрии пространства, в котором он рассматривается [1]). Поэтому успехи в исследовании дискретного оператора, несмотря на большое число работ ему посвященных, значительно скромнее, чем успехи в исследовании существенного спектра. В то же время за последние годы получен ряд результатов о конечности и бесконечности дискретного спектра, имеющих относительно законченный характер. Именно они и составляют основное содержание данного дополнения.

Начнем с общего обзора работ по структуре дискретной части спектра.

1. *Системы с бесконечным дискретным спектром.* Во всех работах о бесконечности дискретного спектра (кроме [59]) доказательство проводится с помощью построения специальных семейств пробных функций, на которых квадратичная форма, соответствующая рассматриваемому оператору, меньше нижней грани его существенного спектра. Первые результаты были получены в 1951 г. Като [17], установившим бесконечность дискретного спектра с учетом вращательной симметрии для оператора энергии атома гелия и гелиоподобных положительных ионов с бесконечно тяжелыми ядрами и обнаружившим конечное число точек дискретного спектра в случае ядер конечной массы. Метод Като был основан на том факте (справедливом только для систем рассматриваемого типа), что граница существенного спектра не зависит от членов межэлектронного взаимодействия. Поэтому метод Като не допускал обобщения на N-частичные системы при $N > 3$. С его помощью удалось доказать только существование одного связанного состояния без учета симметрии для положительных ионов с N электронами и зарядом ядра Z, удовлетворяющим условию $8Z > 5N(N-1)$, в предположении бесконечности массы ядра (Путнам, [52], 1956 г.).

В 1957—1960 гг. Г. М. Жислиным и А. Г. Сигаловым был развит вариационный метод доказательства существования точек дискретного спектра для атомоподобных систем с ядрами конечной и бесконечной массы. В этом методе доказательство компакт-

[1]) Простейший пример такого оператора приведен в [43].

ности минимизирующих последовательностей основано на построении специальных семейств пробных функций, показывающих энергетическую невыгодность некомпактности. Г. М. Жислин [38] доказал бесконечность дискретного спектра для нейтральных атомов и их положительных ионов с ядрами любой массы и для молекул и их положительных ионов с ядрами бесконечной массы. В [38] также получено достаточное условие непустоты дискретного спектра для атомоподобных систем без учета симметрии.

Эти результаты были распространены Утиямой [26] на системы типа молекул с бесконечно тяжелыми ядрами при наличии статического магнитного поля, достаточно быстро убывающего на бесконечности, и в предположении асимптотически степенного характера взаимодействий ($r^{-\gamma}$, $\gamma \leqslant 2$) между частицами.

В 1964—1965 гг. Г. М. Жислин и А. Г. Сигалов обобщили методику, разработанную в [38], на задачи с учетом симметрии. Ими была доказана бесконечность дискретного спектра гамильтонианов атомов и положительных ионов с бесконечно тяжелыми ядрами в физически реализуемых пространствах перестановочной симметрии [41] и для любых типов вращательной симметрии при $\Gamma = \mathcal{O}(3)$ [42]. Результаты работы [41] были распространены в 1969 г. Г. М. Жислиным и Е. Л. Манделем на операторы энергии произвольных молекул и их положительных ионов с бесконечно тяжелыми ядрами для случая, когда учитывается перестановочная симметрия электронов и симметрия расположения ядер (т. е. когда Γ — конечная подгруппа группы $\mathcal{O}(3)$).

Несколько ранее Г. М. Жислин [40] доказал бесконечность дискретного спектра гамильтонианов атомов и их положительных ионов с ядрами конечной массы для любых типов перестановочной симметрии. В 1972 г. Э. Балслев [2] обобщил эти результаты на системы типа атома со степенными взаимодействиями между частицами.

Первые критерии бесконечности дискретного спектра многочастичных систем типа *молекул с ядрами конечной массы* были опубликованы Б. Саймоном [23] в 1970 г. Он рассмотрел системы с парным взаимодействием, имеющим асимптотически степенной характер, и установил для них некоторые достаточные условия бесконечности дискретного спектра. Эти условия впервые сводили вопрос о бесконечности дискретного спектра многочастичной системы к аналогичному вопросу для некоторой эффективной двухчастичной системы. Б. Саймон провел доказательства для систем без учета симметрии и для простейших случаев перестановочной симметрии (E—тождественное или антисимметричное представление), а также наметил путь обобщения результатов на случай произвольных типов перестановочной симметрии. Следует сказать, что в [23] был применен несколько отличный от использовавшихся в предыдущих работах способ построения семейств пробных функций.

Отметим, наконец, работу Д. Р. Яфаева [59], указавшего весьма тонкие условия бесконечности дискретного спектра трехчастичного гамильтониана в ситуации, когда парные гамильтонианы не имеют отрицательных собственных чисел. Результат Яфаева основан на исследовании некоторой системы интегральных уравнений, представляющих собой «симметризованный вариант» уравнений Л. Д. Фаддеева.

2. *Системы с конечным дискретным спектром.* Самые первые результаты о конечности дискретного спектра N-частичных гамильтонианов при $N > 2$ получил Утияма [27—29] в 1969 г. Он нашел достаточные условия конечности числа дискретных собственных значений операторов энергии в $L_2(\mathrm{R}^6)$ для системы двух одноименно заряженных частиц в поле неподвижного центра при наличии внешнего электромагнитного поля и без него. Метод Утиямы заключался в построении конечномерного подпространства, на ортогональном дополнении к которому исследуемый оператор ограничен снизу числом, являющимся нижней гранью существенного спектра. При этом весьма сильно использовалось то обстоятельство, что для рассматриваемых операторов граница существенного спектра не зависит от члена взаимодействия подвижных частиц между собой. В 1971 г. Г. М. Жислин [46] доказал конечность дискретного спектра операторов энергии в пространствах симметрии для отрицательных атомарных ионов с ядрами любой массы и молекул с бесконечно тяжелыми ядрами в предположении, что суммарный заряд рассматриваемых систем меньше —1. Далее, Д. Р. Яфаев [56, 57] получил условия конечности дискретного спектра *трехчастичного* гамильтониана S_0 без учета симметрии при условии, что $\eta(D, E) < 0$ (см. § 11К). Из результатов работы [56] вытекает конечность дискретного спектра для отрицательного иона водорода, а также для трехчастичных систем с короткодействием. Несколько позже Г. М. Жислин [47, 48] установил условия конечности дискретного спектра N-*частичных* гамильтонианов с учетом перестановочной и полной вращательной симметрий. Результаты работ [47, 48] применимы к системам, у которых операторы энергии всех определяющих [1]) распадений имеют непустой дискретный спектр, т. е. все определяющие распадения «устойчивы». Согласно [47, 48], для таких систем вопрос о конечности дискретного спектра многочастичной системы сводится к аналогичному вопросу для некоторой эффективной двухчастичной системы.

Далее, Д. Р. Яфаев [58] анонсировал некоторые условия конечности дискретного спектра N-частичных гамильтонианов без учета симметрии. Эти условия, так же как и в [47, 48], относятся

---

[1]) Разбиение $\boldsymbol{Z}$ назовем определяющим, если $\eta(\boldsymbol{Z}, D, E) = \eta(D, E)$ (см. (11.14К), (11.15К)).

к операторам систем, у которых все определяющие распадения устойчивы. Из утверждения работы [58] вытекает конечность дискретного спектра операторов энергии для всех систем с кулоновским или близким к кулоновскому взаимодействием между частицами, у которых в определяющем распадении одна из подсистем нейтральна; в частности — для отрицательных однократных ионов всех атомов (при игнорировании запрета Паули). Для систем с короткодействием условия конечности из [58], по-видимому, несколько более ограничительны, чем условия из [47, 48] [1]).

В 1973 г. авторы настоящего дополнения обобщили результаты статьи [47] на операторы в пространствах симметрии для систем типа молекул с ядрами произвольной массы [43]. В [43] не накладывается требование устойчивости определяющих распадений. Полученное там условие конечности, грубо говоря, состоит в том, что каждое определяющее распадение должно содержать или одноименно заряженные подсистемы, или некоторую подсистему из одноименно заряженных частиц.

Наконец, в упоминавшейся ранее работе Д. Р. Яфаева [59] анонсировано условие конечности дискретного спектра оператора энергии трехчастичной системы, у которой нет отрицательного существенного спектра [2]).

Метод работ Г. М. Жислина [46—48] и авторов [43] является развитием метода Утиямы и использует предложенное в [40] и [54] разбиение координатного пространства.

В статье Д. Р. Яфаева применяется уравнение Вейнберга — ван Винтера: показывается, что вследствие компактности входящих в это уравнение операторов предположение о бесконечности дискретного спектра приводит к противоречию.

В настоящем дополнении приводятся результаты авторов о конечности и бесконечности дискретного спектра N-частичных гамильтонианов в пространствах функций фиксированной симметрии. Эти результаты имеют, на наш взгляд, сравнительно законченный характер. Они позволяют свести вопрос о конечности или бесконечности дискретного спектра гамильтониана N-частичной системы к аналогичному вопросу для оператора энергии двухчастичной системы. Полученные критерии содержат как частные случаи результаты работ [23, 26—29, 38—42, 47, 48, 50], а также относящиеся к короткодействующим потенциалам результаты работ [56—58].

---

[1]) Сравнение результатов работ [47] и [58] затруднено, ибо в [47] ограничения на потенциалы формулируются в координатном представлении, а в [58] — в импульсном. *Замечание при корректуре.* Условия конечности дискретного спектра операторов, рассмотренных в [58], *в пространствах симметрии* получены С. А. Вугальтером и Г. М. Жислиным в [61] с помощью усовершенствованной методики [48]; одновременно в [61] ослаблены некоторые ограничения из [58].

[2]) Точная формулировка этого результата и его доказательство даны в [60].

При исследовании спектра гамильтонианов мы существенно используем предложенное в [54] бескоординатное описание внутреннего гамильтониана, которое, как нам представляется, удобнее описания его с помощью применяемых в книге внутренних координат.

§ 2. РАЗБИЕНИЕ ЕДИНИЦЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

В этом параграфе устанавливается ряд лемм геометрического характера и строится разбиение единицы, которое нам понадобится в § 4 при доказательстве основных результатов.

Следуя [54], введем в пространстве $\mathbf{R}^{3N}$ скалярное произведение

$$(x, y) = \sum_{i}^{1, N} \mu_i (x_i, y_i)_0,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $y = (y_1, \ldots, y_N)$, числа μ_i те же, что в § 5К, и $(\cdot, \cdot)_0$ — скалярное произведение в $\mathbf{R}^3$. Норму, отвечающую скалярному произведению $(\cdot, \cdot)$, обозначим через $|\cdot|$. Для каждой подсистемы $Z = (j_1, \ldots, j_n) \subseteq \mathcal{N} = (1, \ldots, N)$ определим ортогональный проектор $p(Z)$ в $\mathbf{R}^{3N}$ формулой $p(Z)x = y = (y_1, \ldots, y_N)$, где $y_i = x_i$, если $i \in Z$; $y_i = 0$, если $i \notin Z$.

Пусть
$$\mathbf{R}(Z) = p(Z)\mathbf{R}^{3N},$$
$$\mathbf{R}_0(Z) = \{x : x \in \mathbf{R}(Z), \ \sum_{j \in Z} \mu_j x_j = 0\},$$
$$\mathbf{R}_c(Z) = \mathbf{R}(Z) \ominus \mathbf{R}_0(Z).$$

Здесь и далее ортогональность понимается в смысле введенного скалярного произведения.

Проектор в $\mathbf{R}^{3N}$ на $\mathbf{R}_\varkappa(Z)$ обозначим через $p_\varkappa(Z)$, $\varkappa = 0$, c; очевидно, $p_0(Z) + p_c(Z) = p(Z)$. Из определения пространства $\mathbf{R}_c(Z)$ следует, что если $y = p_c(Z)x$, то при всех $i \in Z$

$$y_i = x_c(Z) \equiv \frac{1}{\mu(Z)} \sum_{j \in Z} \mu_j x_j, \text{ где } \mu(Z) = \sum_{j \in Z} \mu_j. \tag{2.1}$$

Таким образом, все ненулевые координаты вектора $p_c(Z)x$ равны координате центра масс системы Z.

Пусть $\mathcal{Z} = (Z_1, \ldots, Z_k)$ — произвольное разбиение системы $\mathcal{N}$. Число подсистем в $\mathcal{Z}$ будем обозначать через $|\mathcal{Z}|$. Разбиения, состоящие из одной подсистемы $\mathcal{N} = (1, \ldots, N)$ и из N подсистем $(1), \ldots, (N)$, обозначим соответственно через $\widehat{\mathcal{N}}$ и $\breve{\mathcal{N}}$. Положим

$$\mathbf{R}_0(\mathcal{Z}) = \bigoplus_{Z_i \subset \mathcal{Z}} \mathbf{R}_0(Z_i), \ \mathbf{R}_c(\mathcal{Z}) = \mathbf{R}_0(\mathcal{N}) \ominus \mathbf{R}_0(\mathcal{Z}).$$

Очевидно, $\mathbf{R}_0(\breve{\boldsymbol{N}})=0, \quad \breve{\mathbf{R}}_{\mathrm{c}}(\breve{\boldsymbol{N}})=\mathbf{R}_0(\boldsymbol{N})$.
Проектор в $\mathbf{R}^{3N}$ на $\mathbf{R}_\varkappa(\boldsymbol{Z})$ обозначим через $p_\varkappa(\boldsymbol{Z})$, $\varkappa=0$, c. Очевидно,

$$(2.2) \qquad p_0(\boldsymbol{Z})+p_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})=p_0(\boldsymbol{N}) \text{ и } p_0(\boldsymbol{Z})=\sum_i^{1,K} p_0(\boldsymbol{Z}_i).$$

Введем теперь некоторые дифференциальные операторы, связанные с построенными разложениями пространства $\mathbf{R}^{3N}$.

Эвклидова структура в $\mathbf{R}^{3N}$ определяет оператор grad, ставящий в соответствие каждой функции $u \in C^k(\mathbf{R}^{3N})$ векторное поле grad u класса C^{k-1} на $\mathbf{R}^{3N}$, и оператор div, переводящий векторное поле X класса C^k на $\mathbf{R}^{3N}$ в функцию $\operatorname{div} X \in C^{k-1}(\mathbf{R}^{3N})$. Пусть $\boldsymbol{R} \subset \mathbf{R}^{3N}$ — произвольное подпространство и $p_{\boldsymbol{R}}$ — ортогональный проектор в $\mathbf{R}^{3N}$ на $\boldsymbol{R}$. Для любого векторного поля X на $\mathbf{R}^{3N}$ положим

$$(p_{\boldsymbol{R}}X)(x)=p_{\boldsymbol{R}}(X(x)).$$

Определим операторы $\operatorname{grad}_{\boldsymbol{R}}$ и $\Delta_{\boldsymbol{R}}$ соотношениями

$$\operatorname{grad}_{\boldsymbol{R}} u=p_{\boldsymbol{R}} \operatorname{grad} u, \quad \Delta_{\boldsymbol{R}} u=\operatorname{div} \operatorname{grad}_{\boldsymbol{R}} u.$$

Эти операторы действуют только на переменные из $\boldsymbol{R}$ и порождаются (в смысле § 5К) операторами grad и Δ (оператор Лапласа) в $\boldsymbol{R}$. Пусть

$$\nabla_\varkappa(\boldsymbol{Z})=\operatorname{grad}_{\boldsymbol{R}}, \quad \Delta_\varkappa(\boldsymbol{Z})=\Delta_{\boldsymbol{R}} \quad \text{при} \quad \boldsymbol{R}=\mathbf{R}_\varkappa(\boldsymbol{Z}), \ \varkappa=0, \text{ c};$$

$$\nabla_0=\nabla_0(\widehat{\boldsymbol{N}}), \quad \Delta_0=\Delta_0(\widehat{\boldsymbol{N}}).$$

Операторы $\nabla_\varkappa(\boldsymbol{Z})$, $\Delta_\varkappa(\boldsymbol{Z})$ будут широко использоваться начиная с § 3. Установим некоторые свойства проекторов p_0 и p_{c}.

2.3. Лемма. *Пусть подсистема $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{N}$ и разбиение $\boldsymbol{Z}=(Z_1, \ldots, Z_k)$ произвольны. Тогда для любых $x, y \in \mathbf{R}^{3N}$ имеют место равенства*

$$\text{(i)} \qquad (p_0(Z)\,x, \quad p_0(Z)\,y)=\frac{1}{2\mu(Z)} \sum_{i,\,j \in Z} \mu_i\mu_j\,(x_i-x_j,\ y_i-y_j)_0,$$

$$\text{(ii)} \qquad (p_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})\,x,\ p_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})\,y)=\frac{1}{2\mu(\boldsymbol{N})} \sum_{Z',\,Z'' \in \boldsymbol{Z}} \mu(Z')\,\mu(Z'')\,(x_{\mathrm{c}}(Z')-x_{\mathrm{c}}(Z''),\ y_{\mathrm{c}}(Z')-y_{\mathrm{c}}(Z''))_0.$$

Доказательство. (i) В силу определения проекторов $p_0(Z)$ и равенства (2.1)

$$(p_0(Z)\,x,\ p_0(Z)\,y)=\sum_{i \in Z} \mu_i\,(x_i-x_{\mathrm{c}}(Z),\ y_i-y_{\mathrm{c}}(Z))_0=$$

$$=\sum_{i \in Z} \mu_i\,(x_i,\ y_i)_0-\mu(Z)\,(x_{\mathrm{c}}(Z),\ y_{\mathrm{c}}(Z))_0.$$

С другой стороны,

$$\sum_{i,\, j\in Z} \mu_i\mu_j (x_i - x_j,\ y_i - y_j)_0 = 2\mu(Z)\Big(\sum_{i\in Z}\mu_i (x_i,\ y_i)_0 - \\ - \mu(Z)(x_c(Z),\ y_c(Z))_0\Big).$$

Утверждение (i) доказано.

(ii) В силу (2.1), (2.2)

$$(p_c(\mathbf{Z})\, x)_i = (p_0(N)\, x)_i - (p_0(\mathbf{Z})\, x)_i = x_i - x_c(N) - (x_i - x_c(Z')) = \\ = x_c(Z') - x_c(N), \quad \text{если} \quad i\in Z'\in \mathbf{Z}.$$

Поэтому

$$(2.4)\quad (p_c(\mathbf{Z})\, x,\ \ p_c(\mathbf{Z})\, y) = \sum_{Z'\in\mathbf{Z}}\sum_{i\in Z'}\mu_i (x_c(Z') - x_c(N),\ y_c(Z') - \\ - y_c(N))_0 = \sum_{Z'\in\mathbf{Z}}\mu(Z')(x_c(Z'),\ y_c(Z'))_0 - \\ - \mu(N)(x_c(N),\ y_c(N))_0$$

и

$$\sum_{Z',\, Z''\in\mathbf{Z}}\mu(Z')\,\mu(Z'')(x_c(Z') - x_c(Z''),\ y_c(Z') - y_c(Z''))_0 = \\ = 2\mu(N)\Big(\sum_{Z'\in\mathbf{Z}}\mu(Z')(x_c(Z'),\, y_c(Z'))_0 - \mu(N)(x_c(N),\ y_c(N))_0\Big),$$

чем доказано (ii).

2.5. Следствие. *Пусть* $\mathbf{Z} = (Z_1,\ \ldots,\ Z_k)$ и $\widetilde{\mathbf{Z}} = (Z_1\cup Z_2,\ Z_3,\ \ldots$ $\ldots,\ Z_k)$. *Тогда для любых* $x,\ y\in \mathbf{R}^{3N}$ *выполняется равенство*

$$(p_c(\mathbf{Z})\, x,\ p_c(\mathbf{Z})\, y) - (p_c(\widetilde{\mathbf{Z}})\, x,\ p_c(\widetilde{\mathbf{Z}})\, y) = \\ = \mu(Z_1)\,\mu(Z_2)\,(\mu(Z_1) + \mu(Z_2))^{-1}(x_c(Z_1) - x_c(Z_2),\ y_c(Z_1) - y_c(Z_2))_0.$$

Справедливость этого равенства легко следует из (2.4), если учесть, что в силу (2.1)

$$x_c(Z_1\cup Z_2) = (\mu(Z_1) + \mu(Z_2))^{-1}(\mu(Z_1)\, x_c(Z_1) + \\ + \mu(Z_2)\, x_c(Z_2)).$$

Обозначим совокупность всех разбиений системы N через $\boldsymbol{A}$ и построим разбиение пространства $\boldsymbol{R}_0(N)$ на области, отвечающие $\mathbf{Z}\in\boldsymbol{A}$. Для любого числа $k>0$ положим

$$(2.6)\quad \begin{cases} K(\mathbf{Z};\ k) = \{x : x\in \boldsymbol{R}_0(N),\ |p_0(\mathbf{Z})\, x| < k\,|p_c(\mathbf{Z})\, x|\} \text{ при } \mathbf{Z}\neq \breve{N}, \\ K(\widehat{N};\ k) = \{x\colon\ x\in \boldsymbol{R}_0(N),\ \ |x| < k\}. \end{cases}$$

Для положительных функций $a=a(Z)$ и $b=b(Z)$, заданных на множестве A, таких, что $a(Z)<b(Z)$, определим области[1])

$$(2.7)\qquad M(Z;\ a,\ b)=K(Z;\ b(Z))\setminus\bigcup_{Z',\ |Z'|<|Z|}\overline{K(Z',\ a(Z'))}.$$

По построению,

$$\bigcup_{Z\in A}M(Z;\ a,\ b)=R_0(N).$$

Действительно, $R_0(N)=K(\widehat{N};\ b(\widehat{N}))\cup K(\breve{N};\ b(\breve{N}))$. Поэтому достаточно показать, что $\bigcup M(Z;\ a,b)\supset\bigcup_{Z\in A}K(Z;\ b(Z))$. Пусть $x\in\bigcup_{Z\in A}K(Z;\ b(Z))$. Тогда найдется такое разбиение Z_x, что $x\in K(Z_x;\ b(Z_x))$ и $x\notin K(Z;\ b(Z))$, если $|Z|<|Z_x|$. Так как $b(Z)>a(Z)$, то $\overline{K(Z;\ a(Z))}\subset K(Z;\ b(Z))$ и, следовательно, $x\in M(Z_x;\ a,\ b)$.

Всюду далее определяем функции a, b так, что $a(Z)=a(|Z|)$, $b(Z)=b(|Z|)$ и для всех Z', Z, $|Z'|=|Z|-1\geqslant 1$, справедливы неравенства

$$(2.8)\qquad \left(\frac{\mu}{\mu(N)}\right)^3\frac{a^2(Z')-b^2(Z)}{1+a^2(Z')}-b^2(Z)>d^2(Z)>b^2(Z)\,(1+b^2(Z)),$$

где

$$d^2(Z)=2^{-1}\mu^3(\mu(N))^{-3}a^2(Z')\,(1+a^2(Z'))^{-1},\quad \mu=\min_{i\in N}\mu_i.$$

Построение функций a, b, удовлетворяющих условиям (2.8), проведем индукцией по числу подсистем в разбиении. Выберем произвольно $b(\widehat{N})\equiv b(1)>0$, $a(\widehat{N})\equiv a(1)\in(0,\ b(1))$ и, считая, что значения $b(Z')$, $a(Z')$ уже заданы, определим $b(Z)=b(|Z|)$ для $|Z|=|Z'|+1$ согласно условию (2.8). Значение $a(Z)$ можно взять любым из интервала $(0,\ b(Z))$. Отметим, что при таком определении величины $a(1)$, $b(1)$ можно сделать сколь угодно большими, а величины $a(k)$, $b(k)$ при $k\geqslant 2$ — сколь угодно малыми.

2.9. Лемма. *Пусть* $Z=(Z_1,\ \ldots,\ Z_k)\in A$ *и подсистема* Z *не содержится ни в одном из множеств* Z_i. *Тогда*

(i) $\qquad |p_0(Z)\,x|>d(Z)\,|p_c(Z)\,x|$ *при* $x\in M(Z;\ a,\ b)$;

(ii) $\qquad K(Z_1;\ b(Z_1))\cap M(Z;\ a,\ b)=\varnothing$

для любого разбиения Z_1, $|Z_1|\geqslant|Z|$, *содержащего подсистему* Z.

Доказательство. (i) Пусть Z' — разбиение, полученное из Z объединением подсистем Z_i и Z_j. Если $x\in M(Z;\ a,\ b)$, то $x\in K(Z;\ b(Z))$ и $x\notin K(Z';\ a(Z'))$. Следовательно, в силу (2.6)

$$(1+a^2(Z'))\,|p_c(Z')\,x|^2\leqslant|x|^2<(1+b^2(Z))\,|p_c(Z)\,x|^2$$

[1]) Область $M(Z;\ a,\ b)$ отвечает распадению системы N в точности на подсистемы из Z.

и, значит,

$$(a^2(Z')-b^2(Z))\,|p_c(Z)x|^2<(1+a^2(Z'))\,(|p_c(Z)x|^2-|p_c(Z')x|^2).$$

Отсюда в силу следствия 2.5 получаем неравенство

$$\frac{a^2(Z')-b^2(Z)}{1+a^2(Z')}\,|p_c(Z)|^2<\frac{\mu(Z_i)\mu(Z_j)}{\mu(Z_i)+\mu(Z_j)}\,|x_c(Z_i)-x_c(Z_j)|_0^2.$$

По условию леммы найдутся подсистемы Z_k, Z_l в Z и индексы $s,\ t\in N$, такие, что $Z\cap Z_k\ni s$, $Z\cap Z_l\ni t$. А так как согласно (2.3) (i)

$$(2\mu(Z))^{-1}\sum_{i,\,j\in Z}\mu_i\mu_j\,|(p_c(Z)x)_i-(p_c(Z)x)_j|_0^2=|p_0(Z)\,p_c(Z)x|^2,$$

то выполняется оценка

$$\frac{\mu^2}{\mu(N)}\,|x_c(Z_k)-x_c(Z_l)|_0^2<|p_0(Z)\;p_c(Z)x|^2.$$

Далее, поскольку $p_0(Z)\,p_c(Z)=p_0(Z)\,p_0(N)-p_0(Z)\,p_0(Z)$, то для $x\in M\,(Z;\ a,\ b)$

$$|p_0(Z)\,p_c(Z)x|^2\leqslant 2\,|p_0(Z)x|^2+2\,|p_0(Z)\,p_0(Z)x|^2\leqslant$$
$$\leqslant 2\,|p_0(Z)x|^2+2\,|p_0(Z)x|^2<2\,|p_0(Z)x|^2+2b^2(Z)\,|p_c(Z)x|^2.$$

Последовательно используя полученные оценки и учитывая, что

$$\mu(Z_k)\,\mu(Z_l)\,(\mu(Z_k)+\mu(Z_l))^{-1}\leqslant\mu^2(N)\,(2\mu)^{-1},$$

заключаем, что

$$\left(\frac{\mu}{\mu(N)}\right)^3\frac{a^2(Z')-b^2(Z)}{1+a^2(Z')}\,|p_c(Z)x|^2\leqslant|p_0(Z)x|^2+b^2(Z)\,|p_c(Z)x|^2.$$

В силу (2.8) утверждение (i) доказано.

(ii) Пусть $x\in K\,(Z_1;\ b\,(Z_1))\cap M\,(Z;\ a,\ b)$. Тогда

$$|p_0(Z)x|^2\leqslant|p_0(Z_1)x|^2<b^2(Z_1)\,|p_c(Z_1)x|^2\leqslant$$
$$\leqslant b^2(Z_1)\,|x|^2<b^2(Z_1)\,(1+b^2(Z))\,|p_c(Z)x|^2.$$

Вследствие (2.8) $b(Z_1)<b(Z)$. Поэтому, согласно (i),

$$d^2(Z)\,|p_c(Z)x|^2<b^2(Z)\,(1+b^2(Z))\,|p_c(Z)x|^2,$$

что противоречит (2.8). Лемма доказана.

2.10. Следствие. *Если* $|Z_1|=|Z_2|$ и $Z_1\neq Z_2$, *то*

$$K\,(Z_1;\ b\,(Z_1))\cap M\,(Z_2;\ a,\ b)=\varnothing.$$

Это вытекает из утверждения (ii) леммы, поскольку хотя бы одна из подсистем разбиения Z_1 не содержится ни в какой подсистеме разбиения Z_2.

Переходим к основному для данного параграфа построению некоторого разбиения единицы класса C^2 на $R_0(N)$, подчиненного покрытию $\{M\,(Z;\ a,\ b)\colon Z\in A\}$, и выяснению свойств этого разбиения.

Пусть (g_1, f_1) — разбиение единицы класса C^2 на $\boldsymbol{R}^1$, подчиненное покрытию $((-\infty, 1), (0, +\infty))$ и такое, что функции $g(t) = \sqrt{g_1(t)}$, $f(t) = \sqrt{f_1(t)}$ вещественны и принадлежат $C^2(\boldsymbol{R}^1)$; определим $h(t) = (g'(t))^2 + (f'(t))^2$.

Положим при $x \in \boldsymbol{R}_0(\boldsymbol{N})$

$$(2.11)\qquad t_{\boldsymbol{Z}}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b(\boldsymbol{Z}) - a(\boldsymbol{Z})}\left(\dfrac{|p_0(\boldsymbol{Z})x|}{|p_c(\boldsymbol{Z})x|} - a(\boldsymbol{Z})\right) & \text{при } \boldsymbol{Z} \neq \widehat{\boldsymbol{N}}, \\ \dfrac{1}{b(\boldsymbol{Z}) - a(\boldsymbol{Z})}(|x| - a(\boldsymbol{Z})) & \text{при } \boldsymbol{Z} = \widehat{\boldsymbol{N}}, \end{cases}$$

$$(2.12)\qquad g_{\boldsymbol{Z}}(x) = g(t_{\boldsymbol{Z}}(x)), \quad f_{\boldsymbol{Z}}(x) = f(t_{\boldsymbol{Z}}(x)), \quad h_{\boldsymbol{Z}}(x) = h(t_{\boldsymbol{Z}}(x)).$$

Из определения функций f, g, h и $t_{\boldsymbol{Z}}$ вытекает, что $f_{\boldsymbol{Z}}, g_{\boldsymbol{Z}} \in C^2(\boldsymbol{R}_0(\boldsymbol{N}))$, $f_{\boldsymbol{Z}}^2 + g_{\boldsymbol{Z}}^2 = 1$ и $|\nabla_0 f_{\boldsymbol{Z}}|^2 + |\nabla_0 g_{\boldsymbol{Z}}|^2 = h_{\boldsymbol{Z}} q_{\boldsymbol{Z}}$, где

$$(2.13)\qquad q_{\boldsymbol{Z}}(x) = \begin{cases} (b(\boldsymbol{Z}) - a(\boldsymbol{Z}))^{-2}|x|^2|p_c(\boldsymbol{Z})x|^{-4} & \text{при } \boldsymbol{Z} \neq \widehat{\boldsymbol{N}}, \\ (b(\boldsymbol{Z}) - a(\boldsymbol{Z}))^{-2} & \text{при } \boldsymbol{Z} = \widehat{\boldsymbol{N}}. \end{cases}$$

Пусть, далее, $e_{\boldsymbol{Z}}(x) = g_{\boldsymbol{Z}}(x)\Phi_{|\boldsymbol{Z}|}(x)$, где

$$\Phi_{|\boldsymbol{Z}|}(x) = \prod_{\boldsymbol{Z}',\ |\boldsymbol{Z}'| < |\boldsymbol{Z}|} f_{\boldsymbol{Z}'}(x) \quad \text{при } |\boldsymbol{Z}| > 1 \text{ и } \Phi_1(x) \equiv 1.$$

В силу (2.7), (2.11), (2.12)

$$(2.14)\qquad \operatorname{supp}(e_{\boldsymbol{Z}}(x)) \subset M(\boldsymbol{Z};\ a,\ b).$$

2.15. Лемма. *Для всех $k \leqslant N$ имеют место равенства*

$$\sum_{|\boldsymbol{Z}| \leqslant k} e_{\boldsymbol{Z}}^2 + \Phi_{k+1}^2 = 1.$$

Доказательство проведем индукцией по k. При $k = 1$ утверждение тривиально, ибо $\Phi_2 = f_{\widehat{\boldsymbol{N}}}$ и $e_{\widehat{\boldsymbol{N}}} = g_{\widehat{\boldsymbol{N}}}$.

Пусть лемма справедлива для некоторого $k \geqslant 1$. Поскольку в силу (2.14) и следствия 2.10 $e_{\boldsymbol{Z}_1} e_{\boldsymbol{Z}_2} = 0$ при $|\boldsymbol{Z}_1| = |\boldsymbol{Z}_2|$, $\boldsymbol{Z}_1 \neq \boldsymbol{Z}_2$, то

$$\Phi_{k+2}^2 - \Phi_{k+1}^2 = \Phi_{k+1}^2\Big(\prod_{|\boldsymbol{Z}|=k+1} f_{\boldsymbol{Z}}^2 - 1\Big) = -\Phi_{k+1}^2 \sum_{\boldsymbol{Z},\ |\boldsymbol{Z}|=k+1} g_{\boldsymbol{Z}}^2 = -\sum_{\boldsymbol{Z},\ |\boldsymbol{Z}|=k+1} e_{\boldsymbol{Z}}^2.$$

Следовательно,

$$\sum_{\boldsymbol{Z},\ |\boldsymbol{Z}| \leqslant k+1} e_{\boldsymbol{Z}}^2 + \Phi_{k+2}^2 = \sum_{\boldsymbol{Z},\ |\boldsymbol{Z}| \leqslant k} e_{\boldsymbol{Z}}^2 + \Phi_{k+1}^2.$$

В силу предположения индукции лемма доказана.

2.16. Следствие. *Поскольку ввиду* (2.11), (2.12) $f_Y^*(x) \equiv 0$, *то, согласно лемме,*

(i) $\sum\limits_{Z \in A} e_Z^2 = 1$,

(ii) $\Phi_{k+1}^2 = \sum\limits_{Z \in A,\ |Z| > k} e_Z^2$.

Из соотношений (2.14) и (2.16) (i) вытекает, что *множество* $\{e_Z^2 : Z \in A\}$ *образует разбиение единицы, подчиненное покрытию* $\{M(Z; a, b) : Z \in A\}$.

2.17. Лемма. *Имеет место равенство*

$$\sum_{Z \in A} |\nabla_0 e_Z|^2 = \sum_{Z \in A} e_Z^2 \Big(h_Z q_Z + \sum_{Z',\ |Z'| < |Z|} h_{Z'} q_{Z'}\Big),$$

где функции h_Z и q_Z *определены равенствами* (2.12) *и* (2.13).

Доказательство. Непосредственным дифференцированием убеждаемся в справедливости соотношения

$$\theta e_Z = \Phi_{|Z|}^2 \theta g_Z + \sum_{|Z'| < |Z|} (e_Z^2 / f_{Z'}^2)\, \theta f_{Z'},$$

где $e_Z^2/f_{Z'}^2 \equiv g_Z^2 \cdot \prod\limits_{\substack{Z'',\ |Z''| < |Z| \\ Z'' \neq Z'}} f_{Z''}^2$ и для $u \in C^2$.

$$\theta u \equiv u \Delta_0 u - |\nabla_0 u|^2.$$

Далее, очевидно,

$$\sum_Z \sum_{Z',\ |Z'| < |Z|} (e_Z^2/f_{Z'}^2)\, \theta f_{Z'} = \sum_{Z'} \theta f_{Z'} \cdot \sum_{Z,\ |Z| > |Z'|} e_Z^2 / f_{Z'}^2.$$

Заметим, что $\omega_1 \equiv \operatorname{supp}(\theta f_{Z'}) \subset \operatorname{supp}(f_{Z'}) \cap \operatorname{supp}(q_{Z'})$. Поэтому при $x \in \omega_1$ в силу леммы 2.15 и следствия 2.16 выполняется равенство

$$\theta f_{Z'} \cdot \sum_{Z,\ |Z| > |Z'|} e_Z^2 / f_{Z'}^2 = \theta f_{Z'} \cdot \Big(1 - \sum_{Z,\ |Z| \leqslant |Z'|} e_Z^2\Big) f_{Z'}^{-2} = \theta f_{Z'} \cdot \prod_{\substack{Z,\ Z \neq Z' \\ |Z| \leqslant |Z'|}} j_Z^2.$$

Ясно, что при $x \notin \omega_1$ начальное и конечное выражения здесь также равны между собой (оба равны нулю).

Так как согласно 2.14 $\omega_2 \equiv \operatorname{supp}(\Phi_{|Z'|}\ \theta f_{Z'}) \subset \operatorname{supp}(e_{Z'}) \subset M(Z'; a, b)$, то при $x \in \omega_2$ ввиду следствия 2.10 $f_Z(x) = 1$, если $Z \neq Z'$ и $|Z| = |Z'|$. Учитывая это, в силу установленных выше соотношений получаем

$$\sum_{Z \in A} \theta e_Z = \sum_{Z \in A} (\theta g_Z + \theta f_Z)\, \Phi_{|Z|}^2.$$

Используя здесь тождества

$$\sum_{Z\in A}(e_Z\Delta_0 e_Z+|\nabla_0 e_Z|^2)=0,\ \ g_Z\Delta_0 g_Z+f_Z\Delta_0 f_Z+|\nabla_0 g_Z|^2+|\nabla_0 f_Z|^2=0,$$

вытекающие из равенств $\sum\limits_{Z\in A} e_Z^2=1,\ g_Z^2+f_Z^2=1$, находим

$$\sum_{Z\in A}|\nabla_0 e_Z|^2=\sum_{Z\in A}h_Z q_Z \Phi^2_{|Z|}.$$

Заменим $\Phi^2{}_{|Z|}$ согласно следствию 2.16 и изменим порядок суммирования. Получающееся при этом равенство и будет искомым, если еще учесть, что $e_Z h_{Z'}=0$ при $Z\neq Z'$, $|Z|=|Z'|$.

2.18. Лемма. *Для любого* $\varepsilon>0$ *существует число* $C(\varepsilon)>0$ *такое, что*

$$\sum_{Z\in A}|\nabla_0 e_Z|^2\leqslant C(\varepsilon)\Big(e_N^2+\sum_{Z,\,|Z|>2}|x|^{-2}e_Z^2\Big)+\varepsilon\sum_{Z,\,|Z|=2}|p_c(Z)\,x|^{-2}e_Z^2.$$

Доказательство. В силу (2.12) и (2.13) $h_Z q_Z<C|x|^{-2}$. Поэтому

$$\sum_{Z,\,|Z|>2}e_Z^2\Big(h_Z q_Z+\sum_{Z',\,|Z'|<|Z|}h_{Z'}q_{Z'}\Big)\leqslant C\sum_{Z,\,|Z|>2}e_Z^2|x|^{-2},$$

где C зависит от функций a и b.

Согласно определению функций f, g и h,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_t\,[h(t)\,g^{2n}(t)+h(t)\,f^{2n}(t)]=0.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число $n=n(\varepsilon,a,b)$, что

$$h_{\widehat N}q_{\widehat N}f^{2n}_{\widehat N}<\frac{\varepsilon}{2}|p_c(Z)\,x|^{-2},\ \ h_Z q_Z g_Z^{2n}<\frac{\varepsilon}{2}|p_c(Z)\,x|^{-2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sum_{Z,\,|Z|=2}e_Z^2(h_Z q_Z+h_{\widehat N}q_{\widehat N})={}&\sum_{Z,\,|Z|=2}e_Z^2 h_Z q_Z(j_Z^2+g_Z^2)^n+\\&+\sum_{Z,\,|Z|=2}e_Z^2 h_{\widehat N}q_N(f^2_{\widehat N}+g^2_{\widehat N})^n\leqslant\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\sum_{Z,\,|Z|=2}e_Z^2|p_c(Z)\,x|^{-2}+\\&+C(n)|x|^{-2}\sum_{Z,\,|Z|=2}e_Z^2 f_Z^2+\\&+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{Z,\,|Z|=2}e_Z^2|p_c(Z)\,x|^{-2}+C(n)\,g^2_{\widehat N}.\end{aligned}$$

Далее, в силу следствия 2.16

$$\sum_{Z,\,|Z|=2} e_Z^2 f_Z^2 \equiv \sum_{Z,\,|Z|=2} e_Z^2 \prod_{Z',\,|Z'|=2} f_{Z'}^2 = \Big(\sum_{Z,\,|Z|=2} g_Z^2\Big) \prod_{Z,\,|Z|\leqslant 2} f_Z^2 \leqslant$$
$$\leqslant \prod_{Z,\,|Z|\leqslant 2} f_Z^2 = \sum_{Z,\,|Z|>2} e_Z^2.$$

Собирая вместе найденные оценки и используя лемму 2.17, получаем наше утверждение.

§ 3. ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР ВНУТРЕННЕГО ГАМИЛЬТОНИАНА СВОБОДНОЙ СИСТЕМЫ

Формулируемые в этом параграфе утверждения относятся к оператору

$$\widetilde{S}_0 = \widetilde{T} + \sum_{Z \subset N} W_Z$$

с областью определения $D(\widetilde{S}_0) = C_0^\infty(R_0(N))$. Здесь $\widetilde{T} = -\frac{1}{2}\Delta_0$ (см. § 2), W_Z — оператор умножения на функцию

$$W_Z(x) \equiv W_Z(p_0(Z)\,x), \tag{3.1}$$

принадлежащую классу $Q_\alpha(R_0(Z))$ (см. § 2К) и удовлетворяющую условию

$$\lim_{|p_0(Z)\,x| \to \infty} N_{WZ}(p_0(Z)\,x) = 0. \tag{3.2}$$

В силу (3.2) и леммы 2.3К операторы W_Z являются $\Delta_0(Z)$-малыми на бесконечности. Очевидно, оператор $\widetilde{S}_0$ — это оператор S_0 (см. §§ 6К, 11К) с мультипликативными взаимодействиями $W_{j_1 \ldots j_n} = W_Z$ $(Z = (j_1, \ldots, j_n))$, записанный в инвариантном виде. Поэтому в дальнейшем оператор $\widetilde{S}_0$ обозначается просто через S_0. Мы будем изучать дискретный спектр оператора S_0 в пространствах $P_D P_E L_2(R_0(N))$; ограничение оператора S_0 на $P_D P_E L_2(R_0(N))$ есть $S_0(D, E)$.

Пусть $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_k)$. Положим

$$S_0(\boldsymbol{Z}) = -\frac{1}{2}\Delta_0(\boldsymbol{Z}) + W_{\boldsymbol{Z}},\quad T_c(\boldsymbol{Z}) = -\frac{1}{2}\Delta_c(\boldsymbol{Z}),$$

где

$$W_{\boldsymbol{Z}} = \sum_{Z_i \in \boldsymbol{Z}} \sum_{Z \subset Z_i} W_Z.$$

Очевидно,

$$S_0 = S_0(\boldsymbol{Z}) \otimes I_c + I_0 \otimes T_c(\boldsymbol{Z}) + A_{\boldsymbol{Z}}, \tag{3.3}$$

где $I_\varkappa$ — единичный оператор в пространстве $L_2(R_\varkappa(Z))$ и

$$A_Z = \sum_{\substack{Z,\, Z \not\subset Z_i \\ i=1, \ldots, k}} W_Z.$$

Определим группы $\Pi(Z)$, $\hat{\Pi}(Z)$ так же, как в §§ 7К, 11К[1]). Легко видеть, что $\Pi(Z)$ — инвариантная подгруппа группы $\hat{\Pi}(Z)$. Пусть $\hat{\Pi}_c(Z) = \hat{\Pi}(Z)/\Pi(Z)$. Произвольные неприводимые представления группы $\hat{\Pi}(Z)$ будем обозначать через $\hat{E}(Z)$, а неприводимые представления группы $\hat{\Pi}(Z)$, естественным образом порождаемые представлениями группы $\hat{\Pi}_c(Z)$,— через $\hat{E}_c(Z)$. Представления группы Γ в $L_2(R_\varkappa(Z))$ будем обозначать через $D_\varkappa(Z)$, $\varkappa = 0$, c.

3.4. Определение. Будем писать

$$(D_0(Z), \hat{E}_0(Z)) \prec (D, E),$$

если для некоторых неприводимых представлений $D_c(Z)$ и $\hat{E}_c(Z)$

(i) представление D содержится в тензорном произведении $D_0(Z) \otimes D_c(Z)$;

(ii) хотя бы одна неприводимая компонента тензорного произведения $\hat{E}_0(Z) \otimes \hat{E}_c(Z)$ содержится в представлении $E\,|_{\hat{\Pi}(Z)}$;

(iii) $$P_{D_c(Z)} P_{\hat{E}_c(Z)} L_2(R_0(Z)) \neq 0.$$

При выполнении условий (i)—(iii) мы также будем писать

$$(D_c(Z),\ \hat{E}_c(Z),\ D(Z),\ \hat{E}_0(Z)) < (D, E). \tag{3.4}$$

Из доказательства теоремы 11.16К следует, что

$$\eta(D, E) = \min_{Z,\, |Z| \geqslant 2} \eta(Z, D, E),$$

где

$$\eta(Z; D, E) = \inf_{(D_0(Z),\, \hat{E}_0(Z)) \prec (D, E)} \eta(Z; D_0(Z), \hat{E}_0(Z));$$

$$\eta(Z; D_0(Z), \hat{E}_0(Z)) = \inf S_0(Z; D_0(Z), \hat{E}_0(Z)).$$

Сформулируем теперь теоремы о конечности и бесконечности дискретного спектра оператора $S_0(D, E)$.

3.5. Теорема. *Пусть для данной пары представлений D, E существуют разбиение $Z = (Z_1, Z_2)$, представления $D_0(Z)$, $\hat{E}_0(Z)$, $D_c(Z)$, $\hat{E}_c(Z)$, удовлетворяющие* (3.4), *функция* $V_Z(p_c(Z)\,x)$

[1]) Группа $\hat{\Pi}(Z)$ определена в § 11К только для $Z = (Z_1, Z_2)$; в общем случае она определяется как группа, порожденная группой $\Pi(Z)$ и перестановками тождественных подсистем из Z.

и числа a_0, b_0, *такие, что*

(i) $$\eta(D, E) \in \sigma_{\mathrm{d}}(S_0(\boldsymbol{Z};\, D_0(\boldsymbol{Z}),\ \hat{E}_0(\boldsymbol{Z})));$$

(ii) $$A_{\boldsymbol{Z}}(x) \leqslant V_{\boldsymbol{Z}}(p_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})\, x) \text{ при } x \in K(\boldsymbol{Z};\, b_0) \diagdown K(\hat{N};\, a_0);$$

(iii) *функция* $V_{\boldsymbol{Z}}$ *инвариантна относительно преобразований группы* $\Gamma \times \grave{\Pi}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})$, $V_{\boldsymbol{Z}}(p_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})\, x) \in Q_\alpha(\boldsymbol{R}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z}))$ *и оператор умножения на* $V_{\boldsymbol{Z}}(p_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})\, x)$ *является* $\Delta_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})$*-малым на бесконечности;*

(iv) *число точек дискретного спектра гамильтониана*

$$S_\tau(\boldsymbol{Z}) = (1+\tau)\, T_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z}) + V_{\boldsymbol{Z}}(p_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})\, x)$$

бесконечно в пространстве $P_{\hat{E}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})} P_{D_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})} L_2(\boldsymbol{R}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z}))$ *для некоторого* $\tau > 0$.

Тогда множество $\sigma_{\mathrm{d}}(S_0(D, E))$ *бесконечно.*

3.6. Теорема. *Пусть для данной пары представлений* D, E *выполняются условия:*

(i) $$\eta(\boldsymbol{Z}', D, E) > \eta(D, E), \text{ если } |\boldsymbol{Z}'| > 2;$$

(ii) *для каждого разбиения* $\boldsymbol{Z}$, *для которого* $\eta(\boldsymbol{Z}, D, E) = \eta(D, E)$, *существует такая функция* $V_{\boldsymbol{Z}}(p_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})\, x)$, *что для некоторых чисел* a_0, b_0

$$A_{\boldsymbol{Z}}(x) \geqslant V_{\boldsymbol{Z}}(p_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})\, x), \quad x \in K(\boldsymbol{Z};\, b_0) \diagdown K(\hat{N};\, a_0);$$

(iii) *то же, что в* 3.5 (iii);

(iv) *число точек дискретного спектра гамильтониана*

$$S_{-\tau} = (1-\tau)\, T_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z}) + V_{\boldsymbol{Z}}(p_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})\, x)$$

для некоторого $\tau > 0$ *конечно в пространстве*

$$L(\boldsymbol{Z};\, D, E) = \sum_{\substack{(D_0(\boldsymbol{Z}),\, \hat{E}_0(\boldsymbol{Z})) \prec (D,\, E) \\ \eta(D,\, E) \in \sigma(S_0(\boldsymbol{Z});\, D_0(\boldsymbol{Z}):\, \hat{E}_0(\boldsymbol{Z}))}} \ \bigoplus_{\substack{D_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})\, \hat{E}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z}) \\ (D_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z}),\, \hat{E}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})\, D(\boldsymbol{Z})\, \hat{E}(\boldsymbol{Z}) \prec (D,\, E)}} P_{D_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})} P_{\hat{E}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})} L_2(\boldsymbol{R}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})).$$

Тогда множество $\sigma_{\mathrm{d}}(S_0(D, E))$ *конечно и число* $\eta(D, E)$ *не может быть собственным значением бесконечной кратности оператора* $S_0(D, E)$.

Доказательства теорем 3.5 и 3.6 будут даны в § 4, а здесь мы выясним, для каких потенциалов W_Z выполняются условия этих теорем. Пусть $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2)$ — фиксированное разбиение.

Для справедливости неравенств 3.5 (ii), 3.6 (ii) с некоторой функцией $V_{\boldsymbol{Z}} = V_{\boldsymbol{Z}}(|p_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Z})\, x|)$, удовлетворяющей требованию 3.5 (iii), достаточно, чтобы для всех Z, $Z \cap Z_1 \neq \varnothing$, $Z \cap$

$\cap Z_2 \neq \varnothing$, выполнялось соотношение [1])

$$W_Z(p_0(Z)x) = W_Z(|p_0(Z)x|)$$

и существовали такие функции $v_Z(t)$ и число $r > 0$, что

$$\bigvee_r^{\infty} v_Z(t) < \infty, \quad \lim_{t\to\infty} v_Z(t) = 0,$$

$$W_Z(t) \leqslant v_Z(t) \qquad (W_Z(t) \geqslant v_Z(t)) \text{ при } t \geqslant r.$$

Это утверждение легко вытекает из неравенства

$$(\nu(\boldsymbol{Z}, Z) - b(\boldsymbol{Z}))\,|p_c(\boldsymbol{Z})x| \leqslant |p_0(\boldsymbol{Z})x| \leqslant (b(\boldsymbol{Z}) + \nu(\boldsymbol{Z}, Z))\,|p_c(\boldsymbol{Z})x|,$$

справедливого для всех $x \in K(\boldsymbol{Z}; b(\boldsymbol{Z}))$, и представимости функции с ограниченной вариацией в виде разности двух неубывающих функций; здесь

$$\nu(\boldsymbol{Z}; Z) = [\mu(Z_1 \cap Z)\,\mu(Z_2 \cap Z)\,\mu(Z)^{-1}\mu(\mathcal{N})\,\mu(Z_1)^{-1}\mu(Z_2)^{-1}]^{1/2}.$$

Для справедливости условий 3.5 (iv), 3.6 (iv) при некотором $\tau \in (0,1)$ достаточно, чтобы функция V_Z при каком-либо $r > 0$ имела вид

$$V_{\boldsymbol{Z}}(p_c(\boldsymbol{Z})x) = q(\boldsymbol{Z})\,|p_c(\boldsymbol{Z})x|^{-\gamma(\boldsymbol{Z})} \text{ для } |p_c(\boldsymbol{Z})x| > r,$$

где $0 < \gamma(\boldsymbol{Z}) \leqslant 2$, причем

(i) при $\gamma(\boldsymbol{Z}) < 2$ выполняется неравенство $q(\boldsymbol{Z}) < 0$ ($q(\boldsymbol{Z}) \geqslant 0$),

(ii) при $\gamma(\boldsymbol{Z}) = 2$ выполняется неравенство $8q(\boldsymbol{Z}) < -1$ ($8q(\boldsymbol{Z}) \geqslant -1$), если группа Γ тривиальна и подсистемы Z_1, Z_2 не тождественны,

(iii) при $\gamma(\boldsymbol{Z}) = 2$ выполняется неравенство $8q(\boldsymbol{Z}) < -9$ ($8q(\boldsymbol{Z}) \geqslant -9$), если группа Γ тривиальна и подсистемы Z_1, Z_2 тождественны.

Это утверждение вытекает из известных критериев конечности и бесконечности дискретного спектра операторов типа $S_{\pm\tau}$ в $L_2(\boldsymbol{R}^3)$ [44]. Обсудим теперь условие 3.6 (i).

3.7. *Пусть* $\boldsymbol{Z}$ — *любое разбиение, для которого* $\eta(\boldsymbol{Z}, D, E) = \eta(D, E)$. *Тогда из условия* 3.6 (i) *следует, что* $|\boldsymbol{Z}| = 2$ *и*

(i) *существует по крайней мере одна пара представлений* $(D_0(\boldsymbol{Z}), \hat{E}_0(\boldsymbol{Z})) < (D, E)$, *такая, что* $\eta(D, E) \in \sigma_d(S_0(\boldsymbol{Z}; D(\boldsymbol{Z}), E(\boldsymbol{Z}))$;

(ii) *если для некоторой пары представлений* $(D_0(\boldsymbol{Z}), \hat{E}_0(\boldsymbol{Z})) \prec \prec (D, E)$ *имеет место равенство* $\eta(D, E) = \eta(\boldsymbol{Z}; D_0(\boldsymbol{Z}), \hat{E}_0(\boldsymbol{Z}))$,

[1]) В случае парных взаимодействий это соотношение означает, что потенциалы должны зависеть от $|x_i - x_j|_0$, ибо при $Z = (i, j)$ в силу леммы 2.3

$$|x_i - x_j|_0 = \sqrt{(\mu_i + \mu_j)\,\mu_i^{-1}\mu_j^{-1}}\,|p_0(Z)x|.$$

то $\eta(D, E) \in \sigma_d(S_0(\boldsymbol{Z}; D_0(\boldsymbol{Z}), \hat{E}_0(\boldsymbol{Z}))$;

(iii) *если*

$$Q(\boldsymbol{Z}; D, E) = \{(D_0(\boldsymbol{Z}), \hat{E}_0(\boldsymbol{Z})) : (D_0(\boldsymbol{Z}), \hat{E}_0(\boldsymbol{Z})) < (D, E),$$
$$\eta(D, E) < \eta(\boldsymbol{Z}; D_0(\boldsymbol{Z}), \hat{E}_0(\boldsymbol{Z}))\},$$

то

$$\inf_{(D(\boldsymbol{Z}), \hat{E}(\boldsymbol{Z})) \in Q(\boldsymbol{Z}; D, E)} \eta(Z; D_0(\boldsymbol{Z}), \hat{E}_0(\boldsymbol{Z})) > \eta(D, E).$$

С другой стороны, каждое разбиение $\boldsymbol{Z}$, *для которого* $\eta(\boldsymbol{Z}, D, E) = \eta(D, E)$ *и справедливы требования* 3.7 (i) — (iii), *удовлетворяет условию* 3.6 (i).

Доказательства всех этих утверждений проводятся в общем аналогично. Покажем, например, что из 3.6 (i) следует 3.7 (iii).

Введем пространство

$$H(\boldsymbol{Z}; D, E) = \bigoplus_{(D_0(\boldsymbol{Z}, \hat{E}_0(\boldsymbol{Z})) \in Q(\boldsymbol{Z}; D, E)} P_{D_0(\boldsymbol{Z})} P_{\hat{E}_0(\boldsymbol{Z})} L_2(\boldsymbol{R}_0(\boldsymbol{Z}))$$

и обозначим ограничение оператора $S_0(\boldsymbol{Z})$ на H через $S_0(\boldsymbol{Z}; H)$. Для оператора $S_0(\boldsymbol{Z}; H)$ справедлива аналогичная теореме 11.16К теорема о положении существенного спектра: существенный спектр совпадает с лучом $[\tilde{\eta}(H), +\infty)$, где $\tilde{\eta}(H)$ — минимальная из нижних граней операторов $S_0(\boldsymbol{Z}'; H')$ для всевозможных измельчений $\boldsymbol{Z}'$ разбиения $\boldsymbol{Z}$,

$$H' = \bigoplus_{\substack{(D_0(\boldsymbol{Z}), \hat{E}_0(\boldsymbol{Z})) \in \\ \in Q(\boldsymbol{Z}; D, E)}} \bigoplus_{\substack{(D_0(\boldsymbol{Z}'), \hat{E}_0(\boldsymbol{Z}')) \prec \\ \prec (D_0(\boldsymbol{Z}), \hat{E}_0(\boldsymbol{Z}))}} P_{D(\boldsymbol{Z}')} P_{\hat{E}(\boldsymbol{Z}')} L_2(\boldsymbol{R}_0(\boldsymbol{Z}')).$$

Предположим, что

$$\inf_{(D_0(\boldsymbol{Z}), \hat{E}_0(\boldsymbol{Z})) \in Q(\boldsymbol{Z}; D, E)} \eta(\boldsymbol{Z}; D_0(\boldsymbol{Z}), \hat{E}_0(\boldsymbol{Z})) = \eta(D, E). \tag{3.8}$$

Тогда $\sigma_d(S_0(\boldsymbol{Z}; H)) = \varnothing$. Действительно, если $\sigma_d(S_0(\boldsymbol{Z}; H)) \neq \varnothing$, то из теоремы о структуре спектра оператора $S_0(\boldsymbol{Z}; H)$ вытекает соотношение $\eta(D, E) \in \sigma_d(S_0(\boldsymbol{Z}; H))$ и, следовательно, $\eta(D, E) \in \sigma_d(S_0(\boldsymbol{Z}; D_0(\boldsymbol{Z}), \hat{E}_0(\boldsymbol{Z}))$ для некоторой пары представлений $D_0(\boldsymbol{Z})$, $E_0(\boldsymbol{Z})$ из $Q(\boldsymbol{Z}; D, E)$, в противоречие с определением множества Q. Поэтому $\eta(D, E) = \tilde{\eta}(H)$. Отсюда в силу определения $\tilde{\eta}(H)$ вытекает, что для некоторого $\boldsymbol{Z}'$, $|\boldsymbol{Z}'| > 2$, верно равенство $\eta(\boldsymbol{Z}', D, E) = \eta(D, E)$, запрещенное условием 3.6 (i). Таким образом, предположение (3.8) неверно и тем самым 3.7 (iii) доказано.

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 3.5 и 3.6

Доказательство теоремы 3.5. Пусть $\Phi_B(\mathbf{R}^m)$ — множество всех финитных функций с носителями вне шара радиуса B в $\mathbf{R}^m$. В силу теоремы 13 ([44], стр. 31) и теоремы 11.16К, для того чтобы установить бесконечность множества $\sigma_d(S_0(D, E))$, достаточно для любого большого $B > 0$ построить такую функцию w из $D(S_0(D, E)) \cap \Phi_B(\boldsymbol{R}_0)$, что $\langle S_0 w \mid w\rangle < \eta(D, E)\,\|w\|^2$. Согласно условию 3.5 (i), в собственном подпространстве собственного значения $\eta(D, E)$ оператора $S_0(\boldsymbol{Z}, D_0(\boldsymbol{Z}), \hat{E}_0(\boldsymbol{Z}))$ существует ортонормированный базис $\{u_j(p_0(\boldsymbol{Z})\,x)\}$ неприводимого представления $D_0(\boldsymbol{Z}) \times \hat{E}_0(\boldsymbol{Z})$ группы $\Gamma \times \hat{\Pi}(\boldsymbol{Z})$.

В силу условия 3.5 (iv) и леммы 4.13, доказываемой на стр. 146—147, для оператора $S_{\tau_1}(\boldsymbol{Z})$, $\tau_1 < \tau$, и некоторого большого $B > 0$ существует такой (зависящий от B) базис $\{v_i(p_c(\boldsymbol{Z})\,x)\}$ неприводимого представления $D_c(\boldsymbol{Z}) \times \hat{E}_c(\boldsymbol{Z})$ группы $\Gamma \times \hat{\Pi}(\boldsymbol{Z})$, что

$$v_i(p_c(\boldsymbol{Z})\,x) \in D(S_{\tau_1}(\boldsymbol{Z})) \cap \Phi_B(R_c(\boldsymbol{Z}))$$

и

$$\langle S_{\tau_1}(\boldsymbol{Z})\,v_i \mid v_i\rangle < 0. \tag{4.1}$$

Поскольку представления $D_0(\boldsymbol{Z})$, $D_c(\boldsymbol{Z})$ и D удовлетворяют требованию 3.4 (i), то существуют такие коэффициенты c_{ij}, зависящие только от этих представлений, что

$$w_1 \equiv \sum c_{ij} v_i(p_c(\boldsymbol{Z})\,x)\, u_j(p_0(\boldsymbol{Z})\,x) \in P_D L_2(\boldsymbol{R}_0).$$

Определим функции a, b в (2.11), (2.12) так, чтобы выполнялись неравенства (2.8), $a(\widehat{\boldsymbol{N}}) = a_0$, $b(\boldsymbol{Z}) = b_0$, и положим $\widetilde{w} = g_{\boldsymbol{Z}} w_1$. Очевидно, $w \equiv P_E \widetilde{w} \in D(S_0(D, E)) \cap \Phi_B(\boldsymbol{R}_0)$. Мы покажем, что при достаточно большом B

$$\langle S_0 w \mid w\rangle < \eta(D, E)\,\|w\|^2.$$

Поскольку представления $\hat{E}_0(\boldsymbol{Z})$, $\hat{E}_c(\boldsymbol{Z})$ и E удовлетворяют требованию 3.4 (ii), то в силу леммы 7.9К

$$w \equiv P_E \widetilde{w} = d_0 \widetilde{w} + d_1 \sum_{\pi \in (\Pi \setminus \hat{\Pi}(\boldsymbol{Z}))} \chi_E^*(\pi)\, U(\pi)\, \widetilde{w}, \tag{4.2}$$

где числа d_0, d_1 положительны и зависят только от E, $\hat{E}_0(\boldsymbol{Z})$ $\hat{E}_c(\boldsymbol{Z})$. Очевидно, [1])

$$(U(\pi)\, g_Z)(x) = g_{\boldsymbol{Z}}(x_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, x_{\pi^{-1}(N)}) = g_{\pi \boldsymbol{Z}}(x)$$

и

$$\pi \boldsymbol{Z} \neq \boldsymbol{Z} \text{ при } \pi \in \Pi \setminus \hat{\Pi}(\boldsymbol{Z}).$$

[1]) Для $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_k)$, по определению, $\pi\boldsymbol{Z} = (\pi Z_1, \ldots, \pi Z_k)$, где $\pi Z = (\pi^{-1}(i_1), \ldots, \pi^{-1}(i_n))$ для любого $Z = (i_1, \ldots, i_n) \subset \boldsymbol{N}$.

Отсюда, используя следствие 2.10, получаем, что

$$\operatorname{supp}(\widetilde{w}) \cap \operatorname{supp}(U(\pi)\widetilde{w}) = \varnothing \text{ при } \pi \in \Pi \setminus \hat{\Pi}(\boldsymbol{Z}).$$

Поэтому в силу (4.2)

$$\|w\|^2 = \langle P_E\widetilde{w} \mid \widetilde{w}\rangle = d_0 \|\widetilde{w}\|^2, \tag{4.3}$$

$$\langle S_0 w \mid w\rangle = \langle S_0 P_E \widetilde{w} \mid P_E \widetilde{w}\rangle = \langle S_0 \widetilde{w} \mid P_E \widetilde{w}\rangle = d_0 \langle S_0 \widetilde{w} \mid \widetilde{w}\rangle. \tag{4.4}$$

Вследствие 3.3 имеем

$$\langle S_0 \widetilde{w} \mid \widetilde{w}\rangle = \langle S_0(\boldsymbol{Z})\widetilde{w} \mid \widetilde{w}\rangle + \langle T_c(\boldsymbol{Z})\widetilde{w} \mid \widetilde{w}\rangle + \langle A_{\boldsymbol{Z}}\widetilde{w} \mid \widetilde{w}\rangle. \tag{4.5}$$

Оценим, далее, слагаемые в правой части (4.5). Положим

$$\omega = \omega(a) = \boldsymbol{R}_0(\boldsymbol{Z}) \setminus K(\boldsymbol{Z}; a(\boldsymbol{Z})).$$

Поскольку

$$\Delta_0(\boldsymbol{Z})\widetilde{w} = w_1 \Delta_0(\boldsymbol{Z}) g_{\boldsymbol{Z}} + 2(\nabla_0(\boldsymbol{Z}) g_{\boldsymbol{Z}},\ \nabla_0(\boldsymbol{Z}) w_1) + g_{\boldsymbol{Z}} \Delta_0(\boldsymbol{Z}) w_1,$$

то

$$\begin{aligned} \langle S_0(\boldsymbol{Z})\widetilde{w} \mid \widetilde{w}\rangle = \eta(D, E)\|\widetilde{w}\|^2 + \langle w_1 \Delta_0(\boldsymbol{Z}) g_{\boldsymbol{Z}} + \\ + 2(\nabla_0(\boldsymbol{Z}) g_{\boldsymbol{Z}},\ \nabla_0(\boldsymbol{Z}) w_1) \mid \widetilde{w}\rangle \leqslant \\ \leqslant \eta(D, E)\|\widetilde{w}\|^2 + C(\||\nabla_0(\boldsymbol{Z}) w_1|\|_\omega^2 + \|w_1\|_\omega^2), \end{aligned} \tag{4.6}$$

ибо носители производных функции $g_{\boldsymbol{Z}}$ содержатся в ω. Аналогично имеем

$$\begin{aligned} \langle T_c(\boldsymbol{Z})\widetilde{w} \mid \widetilde{w}\rangle = \frac{1}{2}\|g_{\boldsymbol{Z}} |\nabla_c(\boldsymbol{Z}) w_1|\|^2 + \frac{1}{2}\langle w_1 | |\nabla_c(\boldsymbol{Z}) g_{\boldsymbol{Z}}| w_1\rangle + \\ + \operatorname{Re}\langle \widetilde{w} \mid (\nabla_c(\boldsymbol{Z}) g_{\boldsymbol{Z}},\ \nabla_c(\boldsymbol{Z}) w_1)\rangle \leqslant \\ \leqslant \langle T_c(\boldsymbol{Z}) w_1 \mid w_1\rangle + C(\|w_1\|_\omega^2 + \||\nabla_c(\boldsymbol{Z}) w_1|\|_\omega^2), \end{aligned}$$

ибо $|g_{\boldsymbol{Z}}| \leqslant 1$. Отсюда, в силу инвариантности оператора $T_c(\boldsymbol{Z})$ относительно преобразований группы $\Gamma \times \hat{\Pi}(\boldsymbol{Z})$, вытекает оценка

$$\begin{aligned} \langle T_c(\boldsymbol{Z})\widetilde{w} \mid \widetilde{w}\rangle \leqslant \sum_i \sum_j |c_{ij}|^2 \langle T_c(\boldsymbol{Z}) v_i \mid v_i\rangle + \\ + C(\|w_1\|_\omega^2 + \||\nabla_c(\boldsymbol{Z}) w_1|\|_\omega^2). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Наконец, согласно условию 3.5 (ii),

$$\begin{aligned} \langle A_{\boldsymbol{Z}}(x)\widetilde{w} \mid \widetilde{w}\rangle \leqslant \langle V_{\boldsymbol{Z}}(p_c(\boldsymbol{Z})x)\widetilde{w} \mid \widetilde{w}\rangle \leqslant \\ \leqslant \langle V_{\boldsymbol{Z}} w_1 \mid w_1\rangle + |\langle V_{\boldsymbol{Z}} f_{\boldsymbol{Z}} w_1 \mid f_{\boldsymbol{Z}} w_1\rangle|. \end{aligned}$$

В силу леммы 2.6К

$$\begin{aligned} |\langle V_{\boldsymbol{Z}} f_{\boldsymbol{Z}} w_1 \mid f_{\boldsymbol{Z}} w_1\rangle| \leqslant C(\||\nabla_c(\boldsymbol{Z}) f_{\boldsymbol{Z}} w_1|\|^2 + \|f_{\boldsymbol{Z}} w_1\|^2) \leqslant \\ \leqslant C(\|w_1\|_\omega^2 + \||\nabla_c(\boldsymbol{Z}) w_1|\|_\omega^2). \end{aligned}$$

Используя эту оценку и инвариантность функции V_Z относительно преобразований группы $\Gamma\times\hat{\Pi}(Z)$, получаем

$$(4.8)\quad \langle A_Z(x)\tilde{w}\,|\,\tilde{w}\rangle\leqslant\sum_i\sum_j|c_{ij}|^2\langle V_Z v_i\,|\,v_i\rangle+C\left(\|w_1\|_\omega^2+\||\nabla_c(Z)w_1|\|_\omega^2\right).$$

Оценим теперь норму w_1 и ее производных в области ω. Для этого нам понадобятся следующие неравенства:

$$(4.9)\qquad \||p_c(Z)x|^{-1}v_i\|_{R_c(Z)}\leqslant 2\||\nabla_c(Z)v_i|\|_{R_c(Z)},$$

$$(4.10)\qquad \||p_0(Z)x|u_j\|_{R_0(Z)}+\||p_0(Z)x||\nabla_0(Z)u_j|\|_{R_0(Z)}<+\infty.$$

Неравенство (4.9) следует из доказанного в [51] (стр. 378), неравенство (4.10) — из леммы 4.15, которую мы установим ниже.

Применяя неравенства (4.9) и (4.10), а также учитывая, что $v_i\in\Phi_B(R_c(Z))$ и $|p_0(Z)x|/a(Z)|p_c(Z)x|>1$ при $x\in\omega$, находим

$$(4.11)\quad \||\nabla_0(Z)w_1|\|_\omega^2\leqslant C\sum_{i,j}|c_{ij}|^2\||p_c(Z)x|^{-1}v_i|p_0(Z)x||\nabla_0(Z)u_j|\|_\omega^2\leqslant$$
$$\leqslant C\sum_{i,j}|c_{ij}|^2\||p_0(Z_0)x||\nabla_0(Z)u_j|\|_{\tilde{\omega}}^2\cdot\||p_c(Z)\,x|^{-1}v_i\|_{R_c(Z)}^2\leqslant\varepsilon(B)J,$$

где

$$\tilde{\omega}=\{x:x\in R_0(Z),\ |x|\geqslant a(Z)B\},$$

$$J=\frac{1}{2}\sum_{i,j}|c_{ij}|^2\||\nabla_c(Z)v_i|^2\|=\sum_{i,j}|c_{ij}|^2\langle T_c(Z)v_i\,|\,v_i\rangle$$

и

$\varepsilon(B)\to 0$ при $B\to\infty$.

Аналогично

$$(4.12)\qquad \|w_1\|_\omega^2+\||\nabla_c(Z)w_1|\|_\omega^2\leqslant\varepsilon(B)J.$$

Подставим оценки (4.6) — (4.8) в (4.5); в силу (4.11), (4.12) получим

$$\langle S_0\tilde{w}\,|\,\tilde{w}\rangle\leqslant\eta(D,E)\|\tilde{w}\|^2+\sum_{i,j}|c_{ij}|^2\langle(T_c(Z)+V_Z)v_i\,|\,v_i\rangle+\varepsilon(B)J.$$

Если B столь велико, что $\varepsilon(B)<\tau_1<\tau$, то вследствие (4.1)

$$\langle S_0\tilde{w}\,|\,\tilde{w}\rangle\leqslant\eta(D,E)\|\tilde{w}\|^2+\sum_{i,j}|c_{ij}|^2\langle S_{\tau_1}(Z)v_i\,|\,v_i\rangle<\eta(D,E)\|\tilde{w}\|^2.$$

Поэтому ввиду (4.3), (4.4)

$$\langle S_0w\,|\,w\rangle<\eta(D,E)\|w\|^2,$$

что и требовалось доказать.

В доказательстве теоремы были использованы следующие две леммы.

4.13. Лемма. *Пусть оператор $S_\tau(\boldsymbol{Z})$ удовлетворяет требованию 3.5 (iv). Тогда для любого достаточно большого $B>0$ и для $\tau_1<\tau$ можно указать такое $D_c(\boldsymbol{Z})\times\hat{E}_c(\boldsymbol{Z})$-порождающее пространство $U=U(B,\tau)\in \mathrm{D}(S_{\tau_1}(\boldsymbol{Z}))$, что*

(i) $\langle S_{\tau_1}u\,|\,u\rangle<0,\ u\in U,$

(ii) $U\subset\Phi_B(\boldsymbol{R}_c(\boldsymbol{Z}))$.

Доказательство. Для $u\in P_{D_c(\boldsymbol{Z})}P_{\hat{E}_c(\boldsymbol{Z})}\mathrm{D}(S_\tau(\boldsymbol{Z}))$ и $\tau_1<\tau$ имеет место непосредственно проверяемое представление

$$\langle S_\tau u\,|\,u\rangle=\langle S_{\tau_1}g_Bu\,|\,g_Bu\rangle+\langle S_{\tau_1}f_Bu\,|\,f_Bu\rangle+\delta\,\|\,|\nabla_c(\boldsymbol{Z})\,u|\,\|^2-$$
$$-\frac{1+\tau_1}{2}\left(\|\,u\,|\nabla_c(\boldsymbol{Z})\,g_B|\,\|^2+\|\,u\,|\nabla_c(\boldsymbol{Z})\,f_B|\,\|^2\right),$$

где

$$2\delta=\tau-\tau_1,\quad g_B=g\left(\frac{|p_c(\boldsymbol{Z})\,x|}{B}-1\right),\quad f_B=f\left(\frac{|p_c(\boldsymbol{Z})\,x|}{B}-1\right)$$

(см. § 2). Так же как в лемме 2.18, можно показать, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число $c(\varepsilon)>0$, что

$$|\nabla_c(\boldsymbol{Z})\,g_B|^2+|\nabla_c(\boldsymbol{Z})\,f_B|^2\leqslant\varepsilon f_B^2\,|p_c(\boldsymbol{Z})\,x|^{-2}+c(\varepsilon)\,g_B^2.$$

Выберем $\varepsilon<4\delta\tau_1^{-1}$. Тогда

$$\langle S_\tau u\,|\,u\rangle\geqslant\langle S_{\tau_1 g_B}u\,|\,g_Bu\rangle+\langle S_{\tau_1}f_Bu\,|\,f_Bu\rangle-c\,\|\,g_Bu\,\|^2.$$

В силу леммы 2.6К при достаточно малом ρ

$$\langle S_{\tau_1}g_Bu\,|\,g_Bu\rangle\geqslant-\frac{1}{3}\langle\Delta_c(\boldsymbol{Z})\,g_Bu\,|\,g_Bu\rangle-c\,\|\,g_Bu\,\|^2.$$

Поскольку в области $\{x\colon\ x\in\boldsymbol{R}_c(\boldsymbol{Z}),\ |\,p_c(\boldsymbol{Z})\,x\,|\leqslant B\}$ оператор $-\Delta_c(\boldsymbol{Z})$ с граничным условием Дирихле имеет чисто дискретный спектр, накопляющийся к $+\infty$, то можно указать такое конечномерное подпространство $H_B\subset L_2(\boldsymbol{R}_c(\boldsymbol{Z}))$, инвариантное для операторов $U(\gamma)\times U(\pi)$, $\gamma\in\Gamma$, $\pi\in\hat{\Pi}(\boldsymbol{Z})$, что

$$\langle-\Delta_c(\boldsymbol{Z})\,g_Bu\,|\,g_Bu\rangle>6c\,\|\,g_Bu\,\|^2\ \text{при}\ g_Bu\perp H_B.$$

Следовательно, при $u\perp g_B\,H_B$ выполняется неравенство

$$\langle S_\tau u\,|\,u\rangle\geqslant\langle S_{\tau_1}f_Bu\,|\,f_Bu\rangle. \qquad (4.14)$$

Построим $D_c(\boldsymbol{Z})\times\hat{E}_c(\boldsymbol{Z})$-порождающее подпространство $U_1\subset$ $\subset L_2(\boldsymbol{R}_c(\boldsymbol{Z}))$, такое, что $U_1\perp g_BH_B$ и

$$\langle S_\tau\,u\,|\,u\rangle<0\ \text{при}\ u\in U_1.$$

По условию леммы дискретный спектр оператора S_τ в $P_{D_c(\boldsymbol{Z})}P_{\hat{E}_c(\boldsymbol{Z})}L_2(R_c(\boldsymbol{Z}))$ бесконечен. Пусть собственные функции дискретного спектра $v_p^{(i)}$ занумерованы так, что для каждого p функции $\{v_p^{(i)}\}$ образуют базис $D_c(\boldsymbol{Z}) \times \hat{E}_c(\boldsymbol{Z})$-порождающего подпространства. Тогда конечные линейные комбинации $\widetilde{v}_i = \sum\limits_p c_p v_p^{(i)}$ при любых c_p, $\sum\limits_p |c_p|^2 = 1$, также образуют базис $D_c(\boldsymbol{Z}) \times \hat{E}_c(\boldsymbol{Z})$-порождающего подпространства. Выберем числа c_p так, чтобы $\widetilde{v}_1 \perp g_B H_B$. Тогда и $\widetilde{v}_i \perp g_B H_B$. Это следует из соотношений ортогональности для матричных элементов представления $D_c(\boldsymbol{Z}) \times \hat{E}_c(\boldsymbol{Z})$ и инвариантности пространства $g_B H_B$ относительно операторов $U(\gamma) \times U(\pi)$ при $\gamma \in \Gamma$, $\pi \in \hat{\Pi}(\boldsymbol{Z})$. Поэтому мы можем положить в (4.14) $u = \widetilde{v}_i$. Тогда $\langle S_{\tau_1} f_B \widetilde{v}_i \mid f_B \widetilde{v}_i \rangle < 0$. Пусть число B' столь велико, что для функций $v_i = g_{B'} f_B \widetilde{v}_i$ справедливо неравенство

$$\langle S_{\tau_1} v_i \mid v_i \rangle < 0.$$

Так как функции $g_{B'}$ и f_B инвариантны относительно преобразований группы $\Gamma \times \hat{\Pi}(\boldsymbol{Z})$, то функции v_i (так же как и $\widetilde{v}_i$) образуют ортогональный базис $D_c(\boldsymbol{Z}) \times \hat{E}_c(\boldsymbol{Z})$-порождающего подпространства. Поэтому $\langle v_i \mid v_j \rangle = \langle S_{\tau_1} v_i \mid v_j \rangle = 0$ при $i = j$. Следовательно, подпространство U, натянутое на функции v_i, удовлетворяет всем требованиям леммы 4.13.

4.15. Лемма. *Для любой собственной функции и оператора $S_0(\boldsymbol{Z}; D_0(\boldsymbol{Z}), \hat{E}_0(\boldsymbol{Z}))$, отвечающей произвольной точке λ дискретного спектра, имеет место неравенство*

$$\| \, |p_0(\boldsymbol{Z})\, x|\, u \| + \| \, |p_0(\boldsymbol{Z})\, x| \, |\nabla_0(\boldsymbol{Z})\, u| \, \| < \infty.$$

Доказательство. Докажем сначала, что если $\| \, |p_0(\boldsymbol{Z})\, x|\, u \| < \infty$, то и $\| \, |p_0(\boldsymbol{Z})\, x| \, |\nabla_0(\boldsymbol{Z})\, u| \, \| < \infty$. Пусть $S(x) = (1 + |p_0(\boldsymbol{Z})\, x|)^{1/2}$. Так как по условию

$$-\frac{1}{2} \Delta_0(\boldsymbol{Z})\, u = \lambda u - W_{\boldsymbol{Z}} u,$$

то при любом $B > 0$ для функции $g_B = g\left(\frac{|p_0(\boldsymbol{Z})\, x|}{B} - 1\right)$ выполняется равенство

$$-\frac{1}{2} \langle g_B s \Delta_0(\boldsymbol{Z})\, u \mid v \rangle = \lambda \| v \|^2 - \langle W_{\boldsymbol{Z}} v \mid v \rangle,$$

где $v = g_B s u$. В силу леммы 2.6К

$$| \langle W_{\boldsymbol{Z}} v | \rangle | \leqslant \varepsilon \| \, |\nabla_0(\boldsymbol{Z})\, v| \, \|^2 + c(\varepsilon) \| v \|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \| g_B s \, |\nabla_0(\boldsymbol{Z})| \, \|^2 + c(\varepsilon) \| s u \|^2.$$

Кроме того, очевидно,

$$-\frac{1}{2} \langle g_B s \Delta_0(\boldsymbol{Z})\, u \mid v \rangle = \frac{1}{2} \| g_B s \, |\nabla_0(\boldsymbol{Z})\, u| \, \|^2 + \langle (\nabla_0(\boldsymbol{Z})\, g_B s, \nabla_0(\boldsymbol{Z})\, (u) | v \rangle,$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{2}\| g_B s\,|\nabla_0(\boldsymbol{Z})\,u|\,\|^2 - c\,\| g_B s\,|\nabla_0(\boldsymbol{Z})\,u|\,\|\cdot\| su\| \leqslant$$
$$\leqslant -\frac{1}{2}\langle g_B s \Delta_0(\boldsymbol{Z})\,u\,|\,v\rangle.$$

Объединяя полученные оценки, видим, что

$$\| g_B s\,|\nabla_0(\boldsymbol{Z})\,u|\,\|^2 - c\,\| su\|\,\| g_B s\,|\nabla_0(\boldsymbol{Z})\,u|\,\| \leqslant$$
$$\leqslant c\,\| su\| + \varepsilon\,\| g_B s\,|\nabla_0(\boldsymbol{Z})\,u|\,\|^2.$$

Так как по предположению $\| su\|^2 = \| u\|^2 + \|\,|p_0(\boldsymbol{Z})\,x\,|\,u\|^2 < +\infty$, то из последнего неравенства вытекает, что

$$\| s\,|\nabla_0(\boldsymbol{Z})\,u\,|\,\| = \varlimsup_{B\to\infty} \| g_B\, s\,|\nabla_0(\boldsymbol{Z})\,u\,|\,\| < +\infty.$$

Докажем теперь неравенство $\|\,|p_0(\boldsymbol{Z})\,x\,|u\,\| < +\infty$. Пусть $\hat{s}$ — оператор умножения на функцию $s(x)$. Положим

$$D_1 = P_{D_0(\boldsymbol{Z})} P_{\hat{E}_0(\boldsymbol{Z})}(\mathrm{D}(\hat{s}) \cap \mathrm{D}(S_0(\boldsymbol{Z}))),$$
$$\| u\|_1 = \| \hat{s}u\| + \| S_0(\boldsymbol{Z})\,u\|.$$

Следуя методу работы [55], можно показать, что

(i) множество D_1 инвариантно относительно операторов $e^{-iS_0(\boldsymbol{Z})t}$, $t \in (-\infty, +\infty)$;

(ii) для $u \in D_1$ функция $e^{iS_0(\boldsymbol{Z})t}\,u$ непрерывно зависит от t в норме $\|\cdot\|_1$ и

$$\| e^{-iS_0(\boldsymbol{Z})t} u\|_1 \leqslant c\,(1 + |t|)\,\| u\|_1.$$

Поскольку, кроме того, D_1 плотно в $P_{D_0(\boldsymbol{Z})} P_{\hat{E}_0(\boldsymbol{Z})} L_2(\boldsymbol{R}_0(\boldsymbol{Z}))$, то из (i) и (ii) так же, как в [9] (теор. 4), получается требуемое неравенство.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.6. Нам достаточно указать конечномерное подпространство $H \subset P_D P_E L_2(\boldsymbol{R}_0)$, такое, что если $u \in P_D P_E \mathrm{D}(S_0)$ и $u \perp H$, то

$$\langle S_0(D, E)\,u\,|\,u\rangle > \eta(D, E)\,\| u\|^2.$$

В силу следствия 2.16

$$\langle S_0 u\,|\,u\rangle = \sum_{\boldsymbol{Z}\in A}\langle S_0 e_{\boldsymbol{Z}} u\,|\,e_{\boldsymbol{Z}} u\rangle - \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{Z}\in A}\langle\,|\nabla_0 e_{\boldsymbol{Z}}|^2 u\,|\,u\rangle.$$

Отсюда с помощью леммы 2.18 для любого $\varepsilon > 0$ устанавливаем оценку

$$(4.16)\qquad \langle S_0u\,|\,u\rangle \geqslant \langle S_0e_{\widehat{N}}u\,|\,e_{\widehat{N}}u\rangle - c(\varepsilon)\,\|\,e_{\widehat{N}}u\,\|^2 + \\ + \sum_{Z,\,|Z|=2} (\langle S_0e_Zu\,|\,e_Zu\rangle - \varepsilon\,\|\,|\,p_c(Z)\,x\,|^{-1}e_Zu\,\|^2) + \\ + \sum_{Z,\,|Z|>2} (\langle S_0e_Zu\,|\,e_Zu\rangle - c(\varepsilon)\,\|\,|\,x\,|^{-1}\,e_Zu\,\|^2).$$

Пусть $u \in P_DP_E\mathrm{D}(S_0)$. В силу условия 3.6 (i) и леммы 4.23, доказываемой на стр. 146, для достаточно малого $\varepsilon_1 > 0$ можно подобрать число a_0 так, чтобы при $a(\widehat{N}) > a_0$

$$\langle S_0e_Zu\,|\,e_Zu\rangle \geqslant (\eta(Z,\,D,\,E) - \varepsilon_1)\,\|\,e_Zu\,\|^2$$

и

$$2c(\varepsilon)\,a_0^{-2} < \min_{Z,\,|Z|>2}\{\eta(Z,\,D,\,E)\} - \eta(D,\,E) - \varepsilon_1.$$

Поскольку, кроме того, $|\,x\,| \geqslant a(\widehat{N})$, если $x \in \operatorname{supp}(e_Z)$, то для некоторого $\varepsilon_2 > 0$ выполняется неравенство

$$(4.17)\qquad \sum_{Z,\,|Z|>2} (\langle S_0e_Zu\,|\,e_Zu\rangle - c(\varepsilon)\,\|\,|\,x\,|^{-1}e_Zu\,\|^2) \geqslant \\ \geqslant (\eta(D,\,E) + \varepsilon_2) \sum_{Z,\,|Z|>2} \|\,e_Zu\,\|^2.$$

Точно так же получим, что если ε_2 достаточно мало, то

$$(4.18)\qquad \Sigma'\,(\langle S_0e_Zu\,|\,e_Zu\rangle - \varepsilon\,\|\,|\,p_c(Z)\,x\,|^{-1}\,e_Zu\,\|^2) \geqslant \\ \geqslant (\eta(D,\,E) + \varepsilon_2)\,\Sigma'\,\|\,e_Zu\,\|^2,$$

где сумма со штрихом берется по всем $Z \in A$, таким, что

$$|\,Z\,| = 2 \ \text{ и } \ \eta(Z,\,D,\,E) > \eta(D,\,E).$$

Оценим теперь величину $\langle S_0e_Zu\,|\,e_Zu\rangle - \varepsilon\,\|\,|\,p_c(Z)\,x\,|^{-1}e_Zu\,\|^2$ для тех разбиений Z, $|\,Z\,| = 2$, для которых $\eta(Z,\,D,\,E) = \eta(D,\,E)$. Аналогично соотношению (7.13К) имеем

$$P_DP_EL_2(\boldsymbol{R}_0) \subset \bigoplus_{G(Z,\,D,\,E)} P_{D_0}P_{\hat{E}_0}L_2(\boldsymbol{R}_0(Z)) \mathbin{\hat{\otimes}} P_{D_c}P_{\hat{E}_c}L_2(\boldsymbol{R}_c(Z)),$$

где $D_\varkappa = D_\varkappa(Z)$, $\hat{E}_\varkappa = \hat{E}_\varkappa(Z)$ и $G(Z,\,D,\,E)$ — множество четверок представлений $(D_0,\,\hat{E}_0,\,D_c,\,\hat{E}_c) \prec (D,\,E)$. Отсюда вытекает, что

$$u = \sum_{G(Z,\,D,\,E)} P_{D_0}P_{\hat{E}_0} \otimes P_{D_c}P_{\hat{E}_c}u.$$

Функция e_Z инвариантна относительно преобразований $U_\varkappa(\gamma)$, $U_\varkappa(\pi)$, где $\gamma \in \Gamma$, $\pi \in \hat{\Pi}(Z)$ и операторы $U_\varkappa$ действуют только на переменные из $R_\varkappa(Z)$, $\varkappa = 0$, с. Поэтому

$$e_Z u = \sum_{G(Z, D, E)} P_{D_0} P_{\hat{E}_0} \otimes P_{D_c} P_{\hat{E}_c} e_Z u. \tag{4.19}$$

Отметим, что все слагаемые в последней сумме взаимно ортогональны в R_0. Используя сначала полученное представление для функции $e_Z u$, а затем равенство (3.3) и условие 3.6 (ii), находим

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left(S_0 - \tfrac{\tau}{2} T_c - \varepsilon\, |p_c(Z)\, x|^{-2}\right) e_Z u \,|\, e_Z u \right\rangle = \\
&= \sum_{G(Z, D, E)} \left\langle \left(S_0 - \tfrac{\tau}{2} T_c - \varepsilon\, |p_c(Z)\, x|^{-2}\right) e_Z u \,|\, P_{D_0} P_{\hat{E}_0} \otimes P_{D_c} P_{\hat{E}_c} e_Z u \right\rangle = \\
&= \sum_{G(Z, D, E)} \Big\langle \left(S_0 - \tfrac{\tau}{2} T_c - \varepsilon\, |p_c(Z)\, x|^{-2}\right) \times \\
&\times P_{D_0} P_{\hat{E}_0} \otimes P_{D_c} P_{\hat{E}_c} e_Z u \,|\, P_{D_0} P_{\hat{E}_0} \otimes P_{D_c} P_{\hat{E}_c} e_Z u \Big\rangle \geqslant \\
&\geqslant \sum_{G(Z, D, E)} \Big\{ \eta(Z; D_0(Z), \hat{E}_0(Z)) \| P_{D_0} P_{\hat{E}_0} \otimes P_{D_c} P_{\hat{E}_c} e_Z u \|^2 + \\
&+ \Big\langle \left(S_{-\tau}(Z) + \tfrac{\tau}{2} T_c(Z) - \varepsilon\, |p_c(Z)\, x|^{-2}\right) \times \\
&\qquad \times P_{D_0} P_{\hat{E}_0} \otimes P_{D_c} P_{\hat{E}_c} e_Z u \,|\, P_{D_0} P_{\hat{E}_0} \otimes P_{D_c} P_{\hat{E}_c} e_Z u \Big\rangle \Big\}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Ввиду условия 3.7 (iii)

$$\inf_{(D_0(Z), \hat{E}_0(Z)) \in Q(Z; D, E)} \eta(Z, D_0(Z), \hat{E}_0(Z)) > \eta(D, E) + 2\varepsilon_2,$$

если ε_2 достаточно мало.

Пусть $G'(Z; D, E)$ — множество всех четверок $D_0(Z)$, $\hat{E}_0(Z)$, $D_c(Z)$, $\hat{E}_c(Z)$ из $G(Z; D, E)$, для которых $(D_0(Z), \hat{E}_0(Z)) \in Q(Z; D, E)$, и пусть $G''(Z; D, E) = G \setminus G'$. Отрицательный спектр оператора $S_{-\tau}(Z)$ в пространстве $L_2(R_c(Z))$ дискретен, а в подпространстве $L(Z; D, E)$ из $L_2(R_c(Z))$ по условию 3.6 (iv) — конечен. Следовательно, можно выбрать число $B > 0$ так, чтобы

$$\langle S_{-\tau}(Z)\, \tilde{v} \,|\, \tilde{v} \rangle \geqslant -\varepsilon_2 \| \tilde{v} \|^2 \text{ при всех } \tilde{v} \in \mathrm{D}(S_{-\tau}(Z)) \cap \Phi_B(R_c(Z))$$

и

$$\langle S_{-\tau}(Z)\, v \,|\, v \rangle \geqslant 0 \text{ при всех } v \in \mathrm{D}(S_{-\tau}(Z)) \cap L(Z; D, E) \cap \Phi_B(R_c(Z)).$$

Будем считать, что $a(\widehat{N}) > B$. Тогда

$$\langle S_{-\tau} P_{D_0} P_{\hat{E}_0} \otimes P_{D_c} P_{\hat{E}_c} e_Z u \mid P_{D_0} P_{\hat{E}_0} \otimes P_{D_c} P_{\hat{E}_c} e_Z u \rangle \geqslant$$
$$\geqslant -\varepsilon_2 \| P_{D_0} P_{\hat{E}_0} \otimes P_{D_c} P_{\hat{E}_c} e_Z u \|^2,$$

если $(D_0, \hat{E}_0, D_c, \hat{E}_c) \in G'(Z; D, E)$, и

$$\langle S_{-\tau} P_{D_0} P_{\hat{E}_0} \otimes P_{D_c} P_{\hat{E}_c} e_Z u \mid P_{D_0} P_{\hat{E}_0} \otimes P_{D_c} P_{\hat{E}_c} e_Z u \rangle \geqslant 0,$$

если $(D_0, \hat{E}_0, D_c, \hat{E}_c) \in G''(Z; D, E)$.

Подставляя найденные оценки в (4.20) и учитывая, что в силу (4.9) при малом ε оператор $\frac{\tau}{2} T_c(Z) - \varepsilon \mid p_c(Z)\, x \mid^{-2}$ неотрицателен, получим

$$(4.21)\qquad \langle (S_0 - \varepsilon \mid p_c(Z)\, x \mid^{-2})\, e_Z u \mid e_Z u \rangle \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{G'(Z;\, D,\, E)} \eta(D, E) \| P_{D_0} P_{\hat{E}_0} \otimes P_{D_c} P_{\hat{E}_c} e_Z u \|^2 +$$
$$+ \sum_{G''(Z;\, D,\, E)} \eta(D, E) \| P_{D_0} P_{\hat{E}_0} \otimes P_{D_c} P_{\hat{E}_c} e_Z u \|^2 + \frac{\tau}{2} \langle T_c e_Z u \mid e_Z u \rangle =$$
$$= \eta(D, E) \| e_Z u \|^2 + \frac{\tau}{2} \langle T_c e_Z u \mid e_Z u \rangle.$$

Нам осталось только оценить величину

$$\langle S_0 e_{\widehat{N}} u \mid e_{\widehat{N}} \rangle - c(\varepsilon) \| e_{\widehat{N}} u \|^2.$$

Используя лемму 2.6К точно так же, как в лемме 4.13, можно указать такое конечномерное пространство $\widetilde{H} \subset L_2(\boldsymbol{R}_0)$, что при $u \perp e_N \widetilde{H}$ выполняется неравенство

$$(4.22)\qquad \langle S_0 e_{\widehat{N}} u \mid e_{\widehat{N}} u \rangle - c(\varepsilon) \| e_{\widehat{N}} u \|^2 \geqslant \| e_{\widehat{N}} u \|^2 (\eta(D, E) + \varepsilon_2).$$

Подставляя оценки (4.17), (4.18), (4.21), (4.22) в (4.16), получим, что при $u \perp e_{\widehat{N}} \widetilde{H}$

$$\langle S_0 u \mid u \rangle \geqslant (\eta(D, E) + \varepsilon_2) \Big(\| e_{\widehat{N}} u \|^2 + \sum_{\substack{Z,\ |Z| \geqslant 2 \\ \eta(Z;\, D,\, E) > \eta(D,\, E)}} \| e_Z u \|^2 \Big) +$$
$$+ \sum_{\substack{Z,\ |Z| = 2 \\ \eta(Z;\, D,\, E) = \eta(D,\, E)}} \Big\{ \frac{\tau}{2} \langle T_c e_Z u | e_Z u \rangle + \eta(D, E) \| e_Z u \|^2 \Big\} \geqslant \eta(D, E) \| u \|^2 + J[u],$$

где $J[u] > 0$ при $\| u \| > 0$. Теорема доказана.

В доказательстве теоремы 3.6 была использована следующая лемма.

4.23. Лемма. *Пусть* $u \in P_D P_E \mathrm{D}(S_0)$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется число* $a_0 > 0$, *такое, что при* $a(\widehat{N}) > a_0$ *и* $|Z| \geqslant 2$ *выполняется неравенство*

$$\langle S_0 e_Z u \,|\, e_Z u\rangle \geqslant (\eta(Z;\, D,\, E) - \varepsilon)\, \| e_Z u \|^2.$$

Доказательство. В силу леммы 2.6К можно указать такое число $c_0 > 0$, что для любой функции $v \in \mathrm{D}(S_0)$ из неравенства $\langle T_0 v \,|\, v\rangle \geqslant c_0 \| v \|^2$ следует неравенство $\langle S_0 v \,|\, v\rangle > 0$. Поэтому можно считать, что

$$\langle T_0 e_Z u \,|\, e_Z u\rangle < c_0 \| e_Z u \|^2. \tag{4.24}$$

Вследствие (4.19) и (3.3)

$$\langle S_0 e_Z u \,|\, e_Z u\rangle \geqslant \eta(Z;\, D,\, E)\, \| e_Z u \|^2 + \langle T_c(Z)\, e_Z u \,|\, e_Z u\rangle + \langle A_Z e_Z u \,|\, e_Z u\rangle.$$

Очевидно, $\langle T_c(Z)\, e_Z u \,|\, e_Z u\rangle > 0$. Пусть W_Z — одно из слагаемых в операторе A_Z. По лемме 2.6К для любого $\varepsilon_1 > 0$

$$|\langle W_Z e_Z u \,|\, e_Z u\rangle| \leqslant \varepsilon_1 \langle T_0 e_Z u \,|\, e_Z u\rangle + c(\varepsilon_1)\, \| N_{|W_Z|^{1/2}}(p_0(z)\, x)\, e_Z u \|^2.$$

Для $x \in M(Z;\, a,\, b)$, согласно лемме 2.9,

$$|p_0(Z)\, x| > d(Z)\, |p_c(Z)\, x| \geqslant (1 + b^2(Z))^{-1/2} d(Z)\, a(\widehat{N}).$$

Выберем $a_0 > 0$ так, чтобы при $|p_0(Z)\, x| \geqslant (1 + b^2(Z))^{-1/2}\, d(Z)\, a_0$ выполнялась оценка

$$c(\varepsilon_1)\, N_{|W_Z|^{1/2}}(p_0(Z)\, x) < \varepsilon_2/2,$$

где $\varepsilon_2 = \varepsilon$ (число слагаемых в A_Z). Далее, выберем ε_1 так, чтобы $\varepsilon_1 c_0 < \varepsilon_2/2$. Из этих оценок и оценки (4.24) следует, что

$$|\langle A_Z e_Z u \,|\, e_Z u\rangle| < \varepsilon \| e_Z u \|^2.$$

Лемма доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ [1]

[1] *Albeverio S.*, On bound states in the continuum of N-body systems and the virial theorem, Ann. of Phys., **71** (1972), 167—277.
[2] *Balslev E.*, Spectral theory of Schrödinger operators of many-body systems with permutation and rotation symmetries, Ann. of Phys., **73** (1972), 49—108.
[3] *Brascamp H. J.*, *C. van Winter*, The N-body problem with spinorbit or Coulomb interactions, Comm. Math. Phys., **11** (1968/69), 19—55.
[4] *Combes J. M.*, Relatively compact interactions in many particle systems, Comm. Math. Phys., **12** (1969), 283—295.
[5] *Goldberg S.*, Unbounded linear operators, McGraw-Hill, 1966.
[6] *Хамермеш М.* (*Hamermesh M.*), Теория групп и ее применения к физическим проблемам, «Мир», М., 1966 (1962).
[7] *Helgason S.*, Differential operators on homogeneous spaces, Acta Math., **102** (1959), 239—299.
[8] *Hunziker W.*, Proof of a conjecture of S. Weinberg, Phys. Rev., **135** (1964), № 3 B, 800—803.
[9] —, On the spectra of Schrödinger multiparticle Hamiltonians, Helvetica Phys. Acta, **39** (1966), 451—462.
[10] *Ikebe T.*, *Kato T.*, Uniqueness of the self-adjoint extension of singular elliptic differential operators, Archive Rat. Mech. Anal., 9 (1962), 77—92.
[11] *Jörgens K.*, Wesentliche Selbstandjungiertheit singulärer elliptischer Differentialoperatoren zweiter Ordnung in $C_0^\infty(G)$, Math. Scand., **15** (1964), 5—17.
[12] —, Über das wesentliche Spectrum elliptischer Differential operatoren vom Schrödinger-Typ, Tech. Report, Univ. of Heidelberg, 1965.
[13] —, Zur Spektraltheorie der Schrödinger-Operatoren, Math. Zeitschr., **96** (1967), 355—372.
[14] —, Spectral theory of Schrödinger operators, Lecture Notes, University of Colorado, 1970.
[15] *Като Т.* (*Kato T.*), Теория возмущений линейных операторов, «Мир», М., 1972 (1966).
[16] —, Fundamental properties of Hamiltonian operators of Schrödinger type, Trans. Amer. Math. Soc., **70** (1951), 195—211.
[17] —, On the existence of solutions of the helium wave equation, Trans. Amer. Math. Soc., **70** (1951), 212—219.
[18] —, Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a variable coefficient, Comm. Pure Appl. Math., **12** (1959), 403—425.
[19] —, Some mathematical problems in quantum mechanics, Supplement of the Progr. of Theor. Phys., № 40, 1967.
[20] *Maurin K.*, General eigenfunction expansions and unitary representations of topological groups, Polish Scientific Publishers, 1968.

---

[1] Звездочкой помечены работы, добавленные переводчиком. Для переводных книг в скобках указан год выхода в свет оригинального издания

[21] *Наймарк М. А.*, Линейные представления группы Лоренца, Физматгиз, М., 1958.
[22] *Сигалов А. Г.*, Об основной математической задаче теории атомных спектров, УМН, **22** (1967), 1—20.
[23] *Simon B.*, On the infinitude or finiteness of the number of bound states of an N-body quantum system, Helv. Phys. Acta, **43** (1970), 607—630.
[24] —, Quantum mechanics for Hamiltonians defined as quadratic forms, Princeton University Press, 1971.
[25] *Stummel F.*, Singuläre elliptische Differentialoperatoren in Hilbertschen Räumen, Math. Ann., **132** (1956), 150—176.
[26] *Uchiyama J.*, On the discrete eigenvalues of the many-particle system, Publ. RIMS, Kyoto Univ., Ser A, **2** (1966), № 5, 117—132.
[27] —, Finiteness of the number of discrete eigenvalues of Schrödinger operator for a three particle system, Publ. RIMS, Kyoto Univ., Ser. A, **5** (1969), № 1, 51—63.
[28] —, Corrections to "Finiteness of the number of discrete eigenvalues of the Schrödinger operator for a three particle system", Publ. RIMS, Kyoto Univ., Ser. A, **6** (1970), № 1, 189—192.
[29] —, Finiteness of the number of discrete eigenvalues of the Schrödinger operator for a three particle system. II, Publ. RIMS, Kyoto Univ., Ser. A, **6** (1970), № 1, 193—200.
[30] —, On the existence of the discrete eigenvalue of the Schrödinger operator for the negative hydrogen ion, Publ. RIMS, Kyoto Univ., Ser. A, **6** (1970), № 1, 201—204.
[31] *Weidmann J.*, On the continuous spectrum of Schrödinger operators, Comm. Pure Appl. Math., **19** (1966), 107—110.
[32] —, The virial theorem and its application to the spectral theory of Schrödinger operators, Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), 452—456.
[33] *Weinberg S.*, Systematic solution of multiparticle scattering problems, Phys. Rev., **133** B (1964), 232—256.
[34] *Weyl H.*, Gruppentheorie und Quantenmechanik, S. Hirzel, 1928.
[35] *Вигнер Е.* (*Wigner E. P.*), Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров, ИЛ, М., 1961 (1959).
[36] *van Winter C.*, Theory of finite systems of particles. I. The Green function; II. Scattering theory, Math. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk., **2** (1964—65), № 8; № 10.
[37] *Жислин Г. М.*, Характеристика спектра оператора Шрёдингера для систем типа молекул, ДАН, **128** (1959), 231—234.
[38] —, Исследование спектра оператора Шрёдингера для системы многих частиц, Труды Моск. Мат. Общества, **9** (1960), 82—120.
[39] —, О спектре оператора энергии для систем типа молекул в пространствах функций, имеющих заданную симметрию, ДАН, **175** (1967), 521—524.
[40] —, Исследование спектра дифференциальных операторов квантовомеханических систем многих частиц в пространствах функций заданной симметрии, ИАН, сер. матем., **33** (1969), 590—649.
[41] —, *Сигалов А. Г.*, О спектре оператора энергии для атомов с неподвижными ядрами на подпространствах, отвечающих неприводимым представлениям группы перестановок, ИАН, сер. матем., **29** (1965), 835—860.
[42] —, —, О некоторых математических проблемах в теории атомных спектров, ИАН, сер. матем., **29** (1965), 1261—1272.
[43*] *Антонец М. А.*, *Жислин Г. М.*, *Шерешевский И. А.*, О дискретном спектре гамильтониана квантовой системы n частиц, ТМФ, **16**, (1973), 235—245.
[44*] *Глазман И. М.*, Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., 1963.

[45*] *Жислин Г. М.*, Исследование спектра оператора Шрёдингера, канд. дисс., МГУ, 1960.
[46*] —, О конечности дискретного спектра отрицательных атомарных и молекулярных ионов, ТФМ, **7** (1971), 332—341.
[47*] —, О конечности дискретного спектра операторов энергии квантовых систем многих частиц, ДАН СССР, **207**, (1972), 25—29.
[48*] —, Конечность дискретного спектра в квантовой проблеме n частиц, ТМФ, **21** (1974), 60—73.
[49*] —, Качественное исследование спектра оператора энергии квантовой системы многих частиц в пространствах функций заданной симметрии, докт. дисс., ЛГУ, 1972.
[50*] *Жислин Г. М.*, *Мандель Е. Л.*, О спектре оператора энергии электронов молекулы в пространствах функций заданной симметрии, ТМФ, **1** (1969), 295—302.
[51*] *Курант Р.*, *Гильберт Д.* (*Courant R.*, *Hilbert D.*), Методы математической физики, т. 1, Гостехиздат, М.— Л., 1951.
[52*] *Putnam C. R.*, Quart. Appl. Math., **14** (1956), № 1, 101.
[53*] *Рисс Ф.*, *Секефальви-Надь Б.* (*Riesz F.*, *Sz.-Nagy B.*), Лекции по по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954.
[54*] *Сигалов А. Г.*, *Сигал И. М.*, Инвариантное относительно перестановок тождественных частиц описание спектра оператора энергии квантовомеханических систем, ТМФ, **5** (1970), 73—94.
[55*] *Hunziker W.*, On the space-time behavior of Schrödinger wave functions, J. Math. Phys., **7** (1966), 300—304.
[56*] *Яфаев Д. Р.*, О дискретном спектре трехчастичного оператора Шрёдингера, ДАН, **206** (1972), 68—70.
[57*] —, Точечный спектр в квантовомеханической задаче трех частиц, Канд. дисс., ЛГУ, 1973.
[58*] —, Точечный спектр в квантовомеханической задаче многих частиц, Функц. анализ, **6** (1972), 103—104.
[59*] —, К теории дискретного спектра трехчастичного оператора Шрёдингера, Мат. сб., **94** (1974), 567—593.
[60*] —, О конечности дискретного спектра трёхчастичного оператора Шрёдингера, ТМФ, **25** (1975), 185—195.
[61*] *Вугальтер С. А.*, *Жислин Г. М.*, Условия конечности дискретного спектра многочастичных гамильтонианов в пространствах симметрии, препринт НИРФИ, Горький, 1976.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ