

А. Ф. НИКИФОРОВ, В. Б. УВАРОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений*



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1984

Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. Учебное пособие. Изд. 2-е, перераб. и доп.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.—344 с.

Классические ортогональные полиномы, сферические и гипергеометрические функции, а также функции Бесселя рассматриваются с единой точки зрения как частные решения возникающего во многих задачах математической физики и квантовой механики дифференциального уравнения определенного типа. Для решений этого уравнения с помощью обобщения формулы Родрига найдено интегральное представление, из которого получены все основные свойства специальных функций. Построена также теория классических ортогональных полиномов дискретной переменнй как на равномерных, так и неравномерных сетках, установлена их связь с коэффициентами Клебша — Гордана и коэффициентами Рака. Рассматриваются приложения к задачам математической физики, квантовой механики и вычислительной математики.

Книга предназначена для студентов и аспирантов, научных работников и инженеров-исследователей, а также для всех, имеющих дело с математическими расчетами. Она может быть использована при изучении теоретической и математической физики.

Рецензент

доктор физико-математических наук *М. И. Гравс*

Арнольд Федорович Никифоров, Василий Борисович Уваров

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Редактор *И. В. Викторенкова*

Техн. редактор *Л. В. Лихачева*

Корректоры *О. А. Бутусова, И. Я. Кристал*

ИБ № 12369

Сдано в набор 17.04.84. Подписано к печати 15.11.84. Формат 60×90^{1/16}. Бумага тип. № 3. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 21,5. Усл. кр.-отт. 21,5. Уч.-изд. л. 22,78. Тираж 10 500 экз. Заказ № 170. Цена 1 р. 10 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука», 630077 г. Новосибирск 77, Станиславского, 25

1702070000—184 53 — 84
Н 053 (02) — 84

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1978; с изменениями, 1984

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора первого издания .	6
Предисловие .	8
Глава I. Основы теории специальных функций .	11
§ 1. Дифференциальное уравнение для специальных функций .	11
§ 2. Полиномы гипергеометрического типа .	15
§ 3. Интегральное представление для функций гипергеометрического типа .	18
§ 4. Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования .	23
Глава II. Классические ортогональные полиномы .	29
§ 5. Основные свойства полиномов гипергеометрического типа .	29
1. Полиномы Якоби, Лагерра и Эрмита (29). 2. Некоторые следствия из формулы Родрига (32). 3. Производящие функции (33). 4. Свойство ортогональности (36).	
§ 6. Некоторые общие свойства ортогональных полиномов .	39
1. Разложение произвольного полинома по ортогональным полиномам (39). 2. Единственность системы ортогональных полиномов при заданном весе (40). 3. Рекуррентные соотношения (41). 4. Формула Дарбу — Кристоффеля (43). 5. Свойства нулей (44). 6. Свойства четности полиномов, вытекающие из четности весовой функции (45). 7. Связь двух систем ортогональных полиномов, для которых отношение весов является рациональной функцией (46).	
§ 7. Качественное поведение и асимптотические свойства полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита .	49
1. Качественное поведение (49). 2. Асимптотические свойства и некоторые оценки (51).	
§ 8. Разложение функций в ряды по классическим ортогональным полиномам .	57
1. Общие соображения (57). 2. Замкнутость системы ортогональных полиномов (59). 3. Теоремы разложения (61).	
§ 9. Задачи на собственные значения, приводящие к классическим ортогональным полиномам .	66
1. Постановка задачи (66). 2. Классические ортогональные полиномы как собственные функции некоторых задач на собственные значения (68). 3. Задачи квантовой механики, приводящие к классическим ортогональным полиномам (72).	
§ 10. Сферические функции .	75
1. Решение уравнения Лапласа в сферических координатах (75). 2. Свойства сферических функций (80). Связь однородных гармонических полиномов и сферических функций (82). 4. Обобщенные* сферические функции (84). 5. Теорема сложения (90).	
§ 11. Функции второго рода .	92
1. Интегральное представление (92). 2. Асимптотическое представление (94). 3. Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования (95). 4. Некоторые специальные функции, родственные функциям второго рода $Q_n(x)$: неполные бета- и гамма-функции, интегральная показательная функция, интеграл вероятности, интегральные синус и косинус (98).	
§ 12. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной .	101
1. Разностное уравнение гипергеометрического типа (101). 2. Разностные аналоги полиномов гипергеометрического типа и их производ-	

ших. Формула Родрига (103). 3. Свойство ортогональности (108).	
4. Полиномы Хана, Чебышева, Мейкспера, Кравчука и Шарлье (110).	
5. Вычисление основных характеристик (117). 6. Связь с полиномами Якоби, Лагерра и Эрмита (119). 7. Связь обобщенных сферических функций с полиномами Кравчука (124).	
§ 13. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной на неравномерных сетках	125
1. Разностное уравнение на неравномерной сетке (125). 2. Классификация сеток (127). 3. Основное свойство разностных уравнений гипергеометрического типа на неравномерных сетках (130). 4. Формула Родрига (135). 5. Свойство ортогональности (140). 6. Вычисление весовых функций (145). 7. Основные характеристики полиномов Рака и дуальных полиномов Хана (153). 8. Асимптотические свойства (154). 9. Построение некоторых классов неравномерных сеток с помощью формулы Дарбу — Кристоффеля (157).	
Глава III. Цилиндрические функции	160
§ 14. Дифференциальное уравнение Бесселя и его решение	160
1. Решение уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах (160). 2. Определение функций Бесселя первого рода и функций Ханкеля (161).	
§ 15. Основные свойства цилиндрических функций	165
1. Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования (165). 2. Аналитическое продолжение и асимптотические представления (168). 3. Функциональные соотношения (168). 4. Разложение в степенные ряды (169).	
§ 16. Интегральное представление Зоммерфельда	171
1. Интегральное представление Зоммерфельда для цилиндрических функций (171). 2. Интегральные представления Зоммерфельда для функций Ханкеля и функций Бесселя первого рода (173).	
§ 17. Специальные классы цилиндрических функций	175
1. Функции Бесселя второго рода (175). 2. Функции Бесселя полуцелого порядка. Полиномы Бесселя (176). 3. Функции Бесселя мнимого аргумента (179).	
§ 18. Теоремы сложения	182
1. Теорема сложения Графа (182). 2. Теорема сложения Гессенбауэра (183). 3. Разложение сферической и плоской волны по полиномам Лежандра (188).	
§ 19. Квазиклассическое приближение	189
1. Квазиклассическое приближение для решений уравнений второго порядка (189). 2. Асимптотические представления для классических ортогональных полиномов при больших значениях n (194). 3. Квазиклассическое приближение для уравнений с особенностью. Квазиклассика для центрально-симметричного поля (197). 4. Асимптотика цилиндрических функций при больших значениях порядка. Формулы Лангера (198). 5. Определение собственных значений энергии для уравнения Шредингера в квазиклассическом приближении. Формула Бора — Зоммерфельда (200).	
Глава IV. Гипергеометрические функции	204
§ 20. Уравнения гипергеометрического типа и их решения	204
1. Приведение к каноническому виду (204). 2. Преобразование уравнений гипергеометрического типа в уравнения того же типа (205). 3. Гипергеометрическая и вырожденная гипергеометрическая функции (207). 4. Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования для функций $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ и $F(\alpha, \gamma, z)$ (209). 5. Совокупность решений гипергеометрического и вырожденного гипергеометрического уравнения (212). 6. Решения уравнения Эрмита (214).	
§ 21. Основные свойства функций гипергеометрического типа	215
1. Разложения в степенные ряды (216). 2. Функциональные соотношения и асимптотические представления (217). 3. Особые случаи (224).	
§ 22. Представление различных функций через функции гипергеометрического типа	229
1. Некоторые элементарные функции (229). 2. Полиномы Якоби, Лагерра и Эрмита (229). 3. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной (231). 4. Функции второго рода (232). 5. Цилиндрические функции (234). 6. Эллиптические интегралы (235). 7. Функции Уиттера (235).	

§ 23. Определенные интегралы, содержащие функции гипергеометрического типа	236
Глава V. Решение некоторых задач математической физики, квантовой механики и вычислительной математики	
§ 24. Приведение уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям методом разделения переменных	240
1. Общая схема метода разделения переменных (240). 2. Применение криволинейных систем координат (241).	240
§ 25. Краевые задачи математической физики	244
1. Решение краевых задач методом разделения переменных (244). 2. Задача Штурма — Лиувилля. Основные свойства собственных значений и собственных функций (246). 3. Осцилляционные свойства решений задачи Штурма — Лиувилля (248). 4. Разложение функций по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля (255). 5. Краевые задачи для уравнения Бесселя (255). 6. Разложения Дини и Фурье — Бесселя. Интеграл Фурье — Бесселя (258).	244
§ 26. Решение некоторых основных задач квантовой механики	260
1. Решение уравнения Шредингера для центрально-симметричного поля (261). 2. Решение уравнения Шредингера для кулоновского поля (262). 3. Решение уравнений Клейна — Гордона и Дирака для кулоновского поля (268). 4. Коэффициенты Клебша — Гордана и их связь с полиномами Хана (281). 5. 6j-символы Вигнера и полиномы Рака (289).	260
§ 27. Применение специальных функций в некоторых задачах вычислительной математики	291
1. Квадратурные формулы типа Гаусса (291). 2. Применение классических ортогональных полиномов дискретной переменной для сжатия информации (298). 3. Применение модифицированных функций Бесселя в задачах лазерного зондирования (301).	291
Дополнение	305
А. Гамма-функция	305
Б. Аналитические свойства и асимптотические представления интеграла Лапласа	314
Основные формулы	321
Список литературы	340
Указатель основных обозначений	342
Предметный указатель	344

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРВОГО ИЗДАНИЯ

В связи с широким развитием численных методов и возрастанием роли вычислительного эксперимента в большой степени повысился интерес к специальным функциям. Это связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, при разработке математической модели физического явления для понимания основных закономерностей явления и выяснения относительной роли отдельных эффектов исходную задачу часто приходится упрощать для того, чтобы можно было получить решение в легко анализируемой аналитической форме. Во-вторых, при решении сложных задач на ЭВМ удобно использовать упрощенные задачи для выбора надежных и экономичных вычислительных алгоритмов. Очень редко при этом можно ограничиться задачами, приводящими к элементарным функциям. Кроме того, знание специальных функций необходимо для понимания многих важных вопросов теоретической и математической физики.

Наиболее употребительными специальными функциями являются так называемые *специальные функции математической физики*: классические ортогональные полиномы (полиномы Якоби, Лагерра и Эрмита), сферические, цилиндрические и гипергеометрические функции. Теории этих функций и их приложениям посвящен целый ряд фундаментальных исследований. К сожалению, в этих исследованиях используется довольно громоздкий математический аппарат и множество специальных приемов. Поэтому давно существует потребность в построении теории специальных функций, основанном на одной общей и достаточно простой идее.

Авторам предлагаемой книги удалось найти удобный для изучения способ изложения теории специальных функций, опирающийся на обобщение известной формулы Родрига для классических ортогональных полиномов. Такой подход позволяет получить в явном виде интегральные представления для всех специальных функций математической физики и вывести основные свойства этих функций. В частности, с помощью предложенного метода можно найти решения тех линейных дифференциальных уравнений второго порядка, которые обычно решаются методом Лапласа. Для построения теории специальных функций применяется минимальный математический аппарат: от читателя требуется владение лишь основными фактами теории обыкновенных дифференциальных уравнений и теории функ-

хий комплексного переменного. Это несомненное достоинство книги, так как известно, что большой объем необходимых математических знаний, в том числе и по специальным функциям, составляет основное препятствие при изучении теоретической и математической физики.

В процессе работы над книгой читатель приобретает навыки получения асимптотических формул, разложений в ряды, рекуррентных соотношений, различного рода оценок, расчетных формул и учится видеть внутренние логические связи между совершенно различными на первый взгляд специальными функциями.

В книге намечены связи с другими разделами математики и физики. Большое внимание уделено квантовомеханическим приложениям. Особый интерес для изучающих квантовую механику представляет изложение вопросов о нахождении дискретного спектра энергий и соответствующих волновых функций для задач, приводящих к использованию классических ортогональных полиномов. Эти вопросы авторам удалось изложить без традиционного использования обобщенных степенных рядов. Благодаря этому красиво и легко решаются такие важные задачи квантовой механики, как задача о гармоническом осцилляторе, движение частицы в центральном поле, уравнения Шредингера, Дирака и Клейна — Гордона для кулоновского потенциала. Заслуживает внимания также изложение метода Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна на основе метода Стеклова.

Для сферических и цилиндрических функций рассмотрены теоремы сложения, широко применяемые в теории атомных спектров, теории рассеяния, при расчетах ядерных реакторов. При изучении обобщенных сферических функций авторы вплотную подходят к теории представлений группы вращений и общей теории момента количества движения. В дальнейшем читатель может углубить свои знания по специальным функциям с помощью книг, в которых специальные функции исследуются методами теории групп. Для занимающихся теорией разностных методов представят интерес классические ортогональные полиномы дискретной переменной. С точки зрения приближенных вычислений поучительно применение квадратурных формул типа Гаусса для вычисления сумм и построения приближенных формул для специальных функций. Заметим, что многие существенные для приложений вопросы, излагаемые в книге, либо слабо освещаются, либо совсем не затрагиваются в учебной литературе.

Книга написана специалистами по математической физике и квантовой механике. Она возникла в процессе работы авторов над актуальной проблемой физики плазмы в Институте прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР.

В книге содержится очень большой материал, ясно и последовательно изложенный в малом объеме. Несомненно, что предлагаемая книга окажется полезной широкому кругу читателей.

Академик А. А. Самарский

ПРЕДИСЛОВИЕ

Решение многих задач теоретической и математической физики, связанных, например, с изучением процессов теплопроводности и взаимодействия излучения с веществом, распространения электромагнитных и звуковых волн, с разработкой теории ядерных реакторов и внутреннего строения звезд, приводит к использованию различных специальных функций.

Так как на практике специальные функции обычно возникают как решения некоторых дифференциальных уравнений, то с точки зрения математической физики естественным является такой подход, при котором все свойства специальных функций выводились бы непосредственно из дифференциальных уравнений, возникающих при математической постановке задачи. В соответствии с этим авторами был разработан метод, позволяющий изложить теорию специальных функций, исходя из дифференциального уравнения вида

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)} u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)} u = 0, \quad (1)$$

где $\sigma(z)$, $\tilde{\sigma}(z)$ — полиномы не выше второй степени, $\tilde{\tau}(z)$ — полином не выше первой степени. Уравнение (1) содержит как частные случаи дифференциальные уравнения, приводящие к специальным функциям в математической физике и квантовой механике.

Книга построена по следующему плану. В гл. I рассмотрен класс преобразований $u = \varphi(z)y$, в результате которых с помощью специального выбора функции $\varphi(z)$ уравнение (1) преобразуется в уравнение того же типа. Среди таких преобразований выбираются преобразования, переводящие уравнение (1) в уравнение более простого вида

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0, \quad (2)$$

где $\tau(z)$ — полином не выше первой степени, λ — постоянная.

Будем называть уравнение (2) *уравнением гипергеометрического типа*, а его решения — *функциями гипергеометрического типа*. Теория этих функций строится в следующей последовательности. Сначала доказывается, что производные функций гипергеометрического типа также являются функциями гипергеометрического типа. Это свойство позволяет построить семей-

ство частных решений уравнения (2), соответствующих определенным значениям λ , исходя из очевидного решения уравнения (2): $y(z) = \text{const}$ при $\lambda = 0$. Такие решения являются полиномами относительно переменной z . Естественное обобщение интегрального представления для этих полиномов дает возможность вывести интегральное представление для произвольных функций гипергеометрического типа, соответствующих любым значениям λ . С помощью этого интегрального представления и преобразований уравнения (2) в уравнения того же вида могут быть получены все основные свойства рассматриваемых функций: разложения в степенные ряды, асимптотические представления, рекуррентные и функциональные соотношения. Развита теория позволяет находить полную совокупность решений уравнения (1).

Таким образом, после изучения гл. I читатель получает достаточно полное представление о теории специальных функций.

Главы II—IV посвящены реализации намеченной программы для конкретных функций гипергеометрического типа — классических ортогональных полиномов, сферических, цилиндрических и гипергеометрических функций. Эти главы можно читать в произвольном порядке после изучения гл. I.

Теория классических ортогональных полиномов излагается в гл. II. Эти полиномы являются наиболее простыми специальными функциями. В то же время, опираясь на формулу Редрига для классических ортогональных полиномов, легко прийти к интегральным представлениям для других специальных функций математической физики, например для функций Бесселя (гл. III) и гипергеометрических функций (гл. IV).

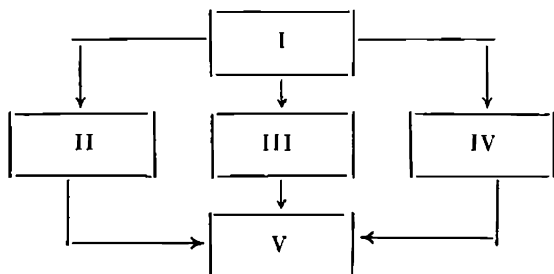
Логическая схема построения теории классических ортогональных полиномов естественным образом переносится на случай, когда дифференциальное уравнение заменяется разностным. При таком обобщении возникают классические ортогональные полиномы дискретной перемешной, теория которых рассмотрена в §§ 12, 13.

Глава V посвящена приложениям. Следует отметить, что в книге рассмотрены практически все основные задачи квантовой механики, допускающие решение в явной форме, и построение этих решений проведено единым методом. Для физиков может представить интерес рассматриваемая в книге удивительно простая связь широко используемых в квантовой механике коэффициентов Клебша — Гёрдана с ортогональными полиномами дискретной перемешной — полиномами Хана, а также связь коэффициентов Рака с классическими ортогональными полиномами дискретной перемешной на квадратичной сетке.

Так как знакомство со свойствами гамма-функции Эйлера является необходимой предпосылкой для изучения специальных функций, то в Дополнении, помещенном в конце книги, дается теория гамма-функции. Здесь же излагаются свойства интеграла Лапласа, которые используются при получении аналитического продолжения и асимптотических представлений для специаль-

ных функций. В конце книги приведены также Основные формулы.

Более подробную информацию о строении книги можно получить, используя оглавление и приведенную ниже схему зависимости глав:



Основной материал книги излагался в курсе лекций по методам математической физики, читавшемся в течение ряда лет на факультете теоретической и экспериментальной физики Московского инженерно-физического института, а также в спецкурсах на физическом, химическом факультетах и факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ.

Во втором издании удалось улучшить ряд доказательств, в частности, дать новое доказательство основной теоремы, на которую опирается все содержание книги. Некоторые параграфы написаны проще, с привлечением нового материала. Впервые в литературе дано изложение теории классических ортогональных полиномов дискретной переменной на равномерных и неравномерных сетках, рассмотрены их приложения в физике.

Авторы глубоко благодарны академику А. А. Самарскому, взявшему на себя труд по редактированию первого издания книги, за его постоянное внимание и большую помощь в работе над книгой. Авторы благодарны Т. Т. Цирулису, В. Я. Арсенипу, Б. Л. Рождественскому, сотрудникам кафедры теоретической и ядерной физики МИФИ, а также С. К. Суслову за полезные замечания по содержанию книги.

А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров

ГЛАВА I

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Дифференциальное уравнение для специальных функций

Многие важные задачи теоретической и математической физики приводят к дифференциальному уравнению

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)} u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)} u = 0, \quad (1)$$

где $\sigma(z)$, $\tilde{\sigma}(z)$ — полиномы не выше второй степени, $\tilde{\tau}(z)$ — полином не выше первой степени. Уравнения такого вида возникают, например, при решении уравнений Лапласа и Гельмгольца в различных криволинейных системах координат методом разделения переменных, при рассмотрении основных задач квантовой механики: движение частицы в сферически-симметричном поле, гармонический осциллятор, решение уравнений Шредингера, Дирака и Клейна — Гордона для кулоновского потенциала, движение частицы в однородном электрическом и магнитном поле. Кроме того, к уравнению (1) приводят также многие модельные задачи атомной, молекулярной и ядерной физики.

Частными решениями уравнений вида (1) являются следующие классы специальных функций — классические ортогональные полиномы (полиномы Якоби, Лагерра и Эрмита), сферические, цилиндрические и гипергеометрические функции. Эти функции часто называют *специальными функциями математической физики*.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что переменная z и коэффициенты полиномов $\sigma(z)$, $\tilde{\sigma}(z)$, $\tilde{\tau}(z)$ могут принимать любые вещественные или комплексные значения.

Попытаемся с помощью замены $u = \varphi(z)y$ привести уравнение (1) к более простому виду путем специального выбора функции $\varphi(z)$. Имеем

$$y'' + \left(2\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\tilde{\tau}}{\sigma}\right)y' + \left(\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{\varphi'}{\varphi} \frac{\tilde{\tau}}{\sigma} + \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma^2}\right)y = 0. \quad (2)$$

Для того чтобы уравнение (2) не было более сложным, чем исходное уравнение (1), естественно потребовать, чтобы коэффициент при y' имел вид $\tau(z)/\sigma(z)$, где $\tau(z)$ — некоторый полином не выше первой степени. Тогда для функции $\varphi(z)$ получим уравнение

$$\varphi'/\varphi = \pi(z)/\sigma(z), \quad (3)$$

где

$$\pi(z) = [\tau(z) - \tilde{\tau}(z)]/2 \quad (4)$$

есть полином не выше первой степени. Так как

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)' + \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)' + \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^2,$$

то уравнение (2) принимает вид

$$y'' + \frac{\tau(z)}{\sigma(z)} y' + \frac{\bar{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)} y = 0, \quad (5)$$

где

$$\tau(z) = \tilde{\tau}(z) + 2\pi(z), \quad (6)$$

$$\bar{\sigma}(z) = \tilde{\sigma}(z) + \pi^2(z) + \pi(z)[\tilde{\tau}(z) - \sigma'(z)] + \pi'(z)\sigma(z). \quad (7)$$

Функции $\tau(z)$ и $\bar{\sigma}(z)$ являются полиномами соответственно не выше первой и второй степени. Поэтому уравнение (5) является уравнением того же типа, что и уравнение (1). Таким образом, мы нашли класс преобразований, не меняющих тип уравнения, — это преобразования уравнения (1) с помощью замены $u = \varphi(z)y$, где функция $\varphi(z)$ удовлетворяет уравнению (3), в котором $\pi(z)$ — произвольный полином первой степени.

Воспользуемся произволом в выборе полинома $\pi(z)$ для того, чтобы среди всех возможных видов уравнения (5) выбрать наиболее простой и удобный для исследования свойств решений. Выберем коэффициенты полинома $\pi(z)$ из условия, чтобы входящий в (5) полином $\bar{\sigma}(z)$ делился без остатка на $\sigma(z)$, т. е.

$$\bar{\sigma}(z) = \lambda\sigma(z), \quad (8)$$

где λ — постоянная. Это возможно, так как, приравнявая коэффициенты при различных степенях z в обеих частях равенства (8), мы получаем три уравнения относительно трех неизвестных постоянных — постоянной λ и двух коэффициентов полинома $\pi(z)$. В результате уравнение (5) будет иметь вид

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0. \quad (9)$$

Будем называть уравнение (9) *уравнением гипергеометрического типа*, а его решения — *функциями гипергеометрического*

типа. В соответствии с этим уравнение (1) естественно назвать обобщенным уравнением гипергеометрического типа *).

Для определения полинома $\pi(z)$ и постоянной λ перепишем условие (8) в виде

$$\pi^2 + (\tilde{\tau} - \sigma')\pi + \tilde{\sigma} - k\sigma = 0,$$

где

$$k = \lambda - \pi'(z). \quad (10)$$

Если считать постоянной k известной, то в результате решения квадратного уравнения для $\pi(z)$ получим

$$\pi(z) = \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma}. \quad (11)$$

Так как $\pi(z)$ — полином, то подкоренное выражение должно представляться в виде квадрата некоторого полинома. Это возможно лишь в случае, когда дискриминант полинома второй степени, стоящего под корнем, равен нулю. Из этого условия получаем уравнение для постоянной k , вообще говоря, квадратное.

После определения k находим $\pi(z)$ по формуле (11), а затем $\varphi(z)$, $\tau(z)$, λ с помощью (3), (6), (10). Очевидно, что сведение уравнения (1) к уравнению (9) может быть осуществлено несколькими способами в соответствии с выбором различных значений постоянной k и выбором различных знаков в формуле (11) для $\pi(z)$.

Рассмотренное преобразование позволяет вместо изучения исходного уравнения (1) ограничиться изучением более простого уравнения (9).

Пример. Приведем к виду (9) уравнение Бесселя

$$z^2 u'' + zu' + (z^2 - \nu^2)u = 0$$

с помощью замены $u = \varphi(z)y$. Уравнение Бесселя является частным случаем уравнения (1) при $\sigma(z) = z$, $\tilde{\tau}(z) = 1$, $\tilde{\sigma}(z) = z^2 - \nu^2$. Подкоренное выражение в (11) в данном случае имеет вид $-z^2 + \nu^2 + kz$. Приравнивая дискриминант этого квадратного трехчлена нулю, приходим к следующему уравнению для постоянной k :

$$k^2 + 4\nu^2 = 0.$$

*) Если $\sigma(z)$ — полином второй степени, то уравнение (1) является частным случаем уравнения Римана с тремя различными особыми точками, когда одна из особых точек лежит на бесконечности. Уравнение Римана изучается в курсах по аналитической теории дифференциальных уравнений (см. [18, 19], а также книги: Голубев В. В. Лекции по аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М. — Л.: Гостехиздат, 1941; Айпс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Харьков, 1939).

Отсюда $k = \pm 2iv$ и, следовательно, по формуле (11)

$$\pi(z) = \pm \sqrt{-z^2 + v^2} \pm 2ivz = \pm (iz \pm v).$$

Таким образом, в данном случае существуют четыре возможных вида полинома $\pi(z)$. Рассмотрим, например, случай, когда $k = 2iv$, $\pi(z) = iz + v$. С помощью (3), (6), (10) находим

$$\varphi(z) = z^v e^{iz},$$

$$\tau(z) = 2iz + 2v + 1, \quad \lambda = k + \pi'(z) = i(2v + 1).$$

В результате уравнение (9) примет вид

$$zy'' + (2iz + 2v + 1)y' + i(2v + 1)y = 0.$$

Замечания. 1. Так как уравнение (1) не меняется при замене $\sigma(z)$, $\tilde{\tau}(z)$, $\tilde{\sigma}(z)$ на $c\sigma(z)$, $c\tilde{\tau}(z)$, $c^2\tilde{\sigma}(z)$ (c — произвольная постоянная), то коэффициент при старшей степени полинома $\sigma(z)$ можно считать равным заданному числу. Аналогичное замечание справедливо и для (9).

2. В дальнейшем можно ограничиться рассмотрением случаев, когда в уравнениях (1) и (9) полином $\sigma(z)$ не имеет кратных корней. Действительно, если $\sigma(z)$ имеет кратные корни, т. е. $\sigma(z) = (z - a)^2$, то (1) с помощью замены $z - a = 1/s$ преобразуется в уравнение

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{2 - \tilde{s}\tilde{\tau}(a + 1/s)}{s} \frac{du}{ds} + \frac{s^2 \tilde{\sigma}(a + 1/s)}{s^2} u = 0. \quad (12)$$

Выражения $s\tilde{\tau}(a + 1/s)$ и $s^2\tilde{\sigma}(a + 1/s)$ являются полиномами относительно переменной s соответственно не выше первой и второй степени. Поэтому (12) является уравнением вида (1), для которого полином $\sigma(s)$ равен s и, следовательно, не имеет кратных корней.

3. Уравнение (1) невозможно привести к виду (9), если $\sigma(z) = 1$, а $(\tilde{\tau}/2)^2 - \tilde{\sigma}$ — полином первой степени. В этом случае для приведения уравнения (1) к удобному для исследования виду можно выбрать в (3) полином $\pi(z)$ из условия равенства нулю функции $\tau(z)$. При этом $\tilde{\sigma}(z)$ будет полиномом первой степени и уравнение (5) примет вид

$$y'' + (az + b)y = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) линейной заменой $s = az + b$ сводится к частному случаю уравнения

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{1 - 2\alpha}{s} \frac{dy}{ds} + \left[(\beta \gamma s^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - v^2 \gamma^2}{s^2} \right] y = 0, \quad (14)$$

где α , β , γ , v — постоянные. Это уравнение будет рассмотрено в § 14 (см. уравнение Ломмеля). Решения уравнения (14) выражаются через цилиндрические функции.

4. К решению уравнений гипергеометрического типа можно свести решение системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} u_1' &= a_{11}(z) u_1 + a_{12}(z) u_2, \\ u_2' &= a_{21}(z) u_1 + a_{22}(z) u_2 \end{aligned} \quad (15)$$

в случае, когда коэффициенты $a_{ik}(z)$ имеют вид

$$a_{ik}(z) = \tau_{ik}(z)/\sigma(z), \quad (16)$$

где $\tau_{ik}(z)$ — полиномы не выше первой степени, $\sigma(z)$ — полином не выше второй степени. Если из (15) исключить $u_2(z)$, то приходим к уравнению для $u_1(z)$:

$$u_1'' - \left(a_{11} + a_{22} + \frac{a'_{12}}{a_{12}} \right) u_1' + \left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{11} \frac{a'_{12}}{a_{12}} - a'_{11} \right) u_1 = 0. \quad (17)$$

Поскольку

$$a'_{12}/a_{12} = -\sigma'/\sigma + \tau'_{12}/\tau_{12},$$

то (17) при $\tau'_{12} = 0$ будет уравнением гипергеометрического типа. Если $\tau'_{12} \neq 0$, то можно предварительно воспользоваться линейным преобразованием

$$v_1 = \alpha u_1 + \beta u_2, \quad v_2 = \gamma u_1 + \delta u_2,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — постоянные. В результате приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} v_1' &= \tilde{a}_{11}(z) v_1 + \tilde{a}_{21}(z) v_2, \\ v_2' &= \tilde{a}_{21}(z) v_1 + \tilde{a}_{22}(z) v_2, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\tilde{a}_{ik}(z)$ — линейные комбинации функций $a_{ik}(z)$ с постоянными коэффициентами, зависящими от $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Они имеют вид

$$\tilde{a}_{ik}(z) = \tilde{\tau}_{ik}(z)/\sigma(z),$$

где $\tilde{\tau}_{ik}(z)$ — полином не выше первой степени. Если выбрать коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ из условия $\tilde{\tau}'_{12} = 0$ (что всегда возможно), то для функции $v_1(z)$ после исключения $v_2(z)$ из системы (18) получим обобщенное уравнение гипергеометрического типа.

В том случае, когда $\sigma(z)$ — полином первой степени, от системы (15) можно перейти к обобщенному уравнению гипергеометрического типа другим способом, выбирая постоянные $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ так, чтобы коэффициент a_{12} не зависел от z , т. е. из условия $\tau_{12} = v\sigma(z)$ (v — постоянная).

§ 2. Полиномы гипергеометрического типа

Приступим к изучению свойств решений уравнения гипергеометрического типа

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0. \quad (1)$$

Покажем, что производные любого порядка от функций гипергеометрического типа также являются функциями гипергеометрического типа.

Для доказательства продифференцируем уравнение (1). В результате получим, что функция $v_1(z) = y'(z)$ удовлетворяет

уравнению

$$\sigma(z) v_1'' + \tau_1(z) v_1' + \mu_1 v_1 = 0, \quad (2)$$

где

$$\tau_1(z) = \tau(z) + \sigma'(z), \quad \mu_1 = \lambda + \tau'(z).$$

Так как $\tau_1(z)$ — полином не выше первой степени, а μ_1 не зависит от z , то (2) является уравнением гипергеометрического типа.

Справедливо и обратное утверждение: *любое решение уравнения (2) при $\lambda \neq 0$ является производной некоторого решения уравнения (1).*

Действительно, пусть $v_1(z)$ — решение уравнения (2). Если бы функция $v_1(z)$ являлась производной некоторого решения $y(z)$ уравнения (1), то эти функции были бы связаны следующим образом (см. (1)):

$$y(z) = -\frac{1}{\lambda} [\sigma(z) v_1' + \tau(z) v_1].$$

Покажем, что функция $y(z)$, полученная по этой формуле, удовлетворяет уравнению (1), а производная этой функции совпадает с $v_1(z)$. Имеем

$$\lambda y' = -[\sigma(z) v_1'' + \tau_1(z) v_1' + \tau'(z) v_1] = \lambda v_1,$$

т. е. действительно $y' = v_1(z)$. Подставляя $v_1 = y'$ в исходное выражение для $y(z)$, приходим к уравнению (1) для $y(z)$.

Подобным же образом для функции $v_n(z) = y^{(n)}(z)$ можно по индукции получить уравнение гипергеометрического типа

$$\sigma(z) v_n'' + \tau_n(z) v_n' + \mu_n v_n = 0, \quad (3)$$

где

$$\tau_n(z) = \tau(z) + n\sigma'(z), \quad \mu_n = \lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2} \sigma''.$$

При этом любое решение уравнения (3) при $\mu_k \neq 0$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) можно представить в виде $v_n(z) = y^{(n)}(z)$; где $y(z)$ — некоторое решение уравнения (1).

Рассмотренное свойство позволяет построить семейство частных решений уравнения (1), соответствующих определенным значениям λ . Действительно, уравнение (3) при $\mu_n = 0$ имеет частное решение $v_n(z) = \text{const}$. Так как $v_n(z) = y^{(n)}(z)$, то это означает, что при

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2} \sigma''$$

существует частное решение уравнения гипергеометрического типа $y(z) = y_n(z)$, являющееся полиномом степени n . Такие решения будем называть *полиномами гипергеометрического типа*. Полиномы $y_n(z)$ являются в известном смысле простейшими решениями уравнения (1)*.

*) Впрочем, существование полиномиального решения уравнения (1) вытекает из того факта, что оператор $\sigma(z) d^2/dz^2 + \tau(z) d/dz$ переводит любой полином степени n в полином той же степени.

Чтобы получить явное выражение для полинома $y_n(z)$, умножим уравнения (1), (3) на такие функции $\rho(z)$, $\rho_n(z)$, которые позволят записать эти уравнения в самосопряженном виде:

$$(\sigma \rho)' + \lambda \rho = 0, \quad (4)$$

$$(\sigma \rho_n)' + \mu_n \rho_n = 0. \quad (5)$$

Здесь функции $\rho(z)$, $\rho_n(z)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$(\sigma \rho)' = \tau \rho, \quad (6)$$

$$(\sigma \rho_n)' = \tau_n \rho_n. \quad (7)$$

Используя явное выражение для $\tau_n(z)$, нетрудно установить связь функций $\rho_n(z)$ и $\rho_0(z) = \rho(z)$. Имеем

$$(\sigma \rho_n)' / \rho_n = \tau + n \sigma' = (\sigma \rho)' / \rho + n \sigma',$$

откуда

$$\rho_n' / \rho_n = \rho' / \rho + n \sigma' / \sigma$$

и, следовательно,

$$\rho_n(z) = \sigma^n(z) \rho(z), \quad n = 0, 1, \dots \quad (8)$$

Перейдем теперь к получению явного выражения для полиномов гипергеометрического типа. Так как $\sigma \rho_m = \rho_{m+1}$, $v_m(z) = v_{m+1}(z)$, то (5) можно переписать в виде

$$\rho_m v_m = -\frac{1}{\mu_m} (\rho_{m+1} v_{m+1})'.$$

Отсюда при $m < n$ последовательно получаем

$$\begin{aligned} \rho_m v_m &= -\frac{1}{\mu_m} (\rho_{m+1} v_{m+1})' = \\ &= \left(-\frac{1}{\mu_m}\right) \left(-\frac{1}{\mu_{m+1}}\right) (\rho_{m+2} v_{m+2})' = \dots = \frac{A_m}{A_n} (\rho_n v_n)^{(n-m)}, \end{aligned}$$

где

$$A_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \mu_k, \quad A_0 = 1. \quad (9)$$

Если функция $y(z)$ является полиномом степени n , т. е. $y = y_n(z)$, то

$$v_n(z) = y_n^{(n)}(z) = \text{const},$$

и мы получаем следующее выражение для $y_n^{(m)}(z)$:

$$y_n^{(m)}(z) = \frac{A_{mn} B_n}{\rho_m(z)} [\rho_n(z)]^{(n-m)}, \quad (10)$$

где

$$A_{mn} = A_m(\lambda) |_{\lambda=\lambda_n}, \quad B_n = \frac{1}{A_{nn}} y_n^{(n)}(z). \quad (11)$$

Отсюда, в частности, при $m=0$ вытекает явное выражение для полиномов гипергеометрического типа:

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)} [\sigma^n(z) \rho(z)]^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (12)$$

Таким образом, полиномиальные решения уравнения (1) определяются формулой (12) однозначно с точностью до нормировочного множителя. Эти решения соответствуют значениям $\mu_n = 0$, т. е.

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2} \sigma'', \quad n = 0, 1, \dots \quad (13)$$

Будем называть соотношение (12) *формулой Родрига*, так как оно было выведено Б. О. Родригом в 1814 г. для частного случая полиномов гипергеометрического типа — полиномов Лежандра, для которых $\sigma(z) = 1 - z^2$, $\rho(z) = 1$.

§ 3. Интегральное представление для функций гипергеометрического типа

Найдем теперь с помощью обобщения формулы Родрига частные решения уравнения гипергеометрического типа (2.1)*) при произвольных значениях λ . Для этого предварительно запишем равенство (2.12) для полиномиальных решений уравнения (2.1) в другом виде, используя интегральную формулу Коши для производных аналитической функции:

$$y_n(z) = \frac{C_n}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^n(s) \rho(s)}{(s-z)^{n+1}} ds. \quad (1)$$

Здесь $C_n = B_n n! / (2\pi i)$, C — замкнутый контур, охватывающий точку $s=z$, а функция $\rho(z)$ является решением уравнения $(\sigma\rho)' = \tau\rho$.

Представление частного решения уравнения (2.1) при $\lambda = \lambda_n$ в виде (1) дает возможность предположить, что при произвольном значении λ частное решение этого уравнения можно искать в виде

$$y(z) = y_v(z) = \frac{C_v}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^v(s) \rho(s)}{(s-z)^{v+1}} ds, \quad (2)$$

где C_v — нормировочная постоянная, а величина v связана с постоянной λ соотношением, аналогичным (2.13):

$$\lambda = -v\tau' - \frac{v(v-1)}{2} \sigma''. \quad (3)$$

Покажем, что при определенном выборе контура C , который будем считать, вообще говоря, незамкнутым, это предположение оказывается справедливым.

*) При ссылках на формулу из другого параграфа в качестве первой цифры указывается его номер.

Теорема 1. Пусть функция $\rho(z)$ удовлетворяет уравнению

$$[\sigma(z)\rho(z)]' = \tau(z)\rho(z),$$

ν — корень уравнения

$$\lambda + \nu\tau' + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\sigma'' = 0,$$

и пусть

$$\rho_\nu(s) = \sigma^\nu(s)\rho(s), \quad u(z) = \int_C \frac{\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+1}} ds.$$

Тогда уравнение (2.1) имеет частные решения вида

$$y(z) \equiv y_\nu(z) = \frac{C_\nu}{\rho(z)} u(z) = \frac{C_\nu}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}} ds,$$

где C_ν — нормировочная постоянная, если:

1) при вычислении производных $u'(z)$, $u''(z)$ можно менять местами дифференцирование по z и интегрирование по s , т. е.

$$u'(z) = (\nu+1) \int_C \frac{\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+2}} ds,$$

$$u''(z) = (\nu+1)(\nu+2) \int_C \frac{\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+3}} ds;$$

2) контур C выбран так, что

$$\left. \frac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}} \right|_{s_1}^{s_2} = 0, \quad (4)$$

где s_1, s_2 — концы контура C .

Доказательство. Получим дифференциальное уравнение для функции $u(z)$. Имеем

$$[\sigma(s)\rho_\nu(s)]' = \tau_\nu(s)\rho_\nu(s),$$

где $\tau_\nu(s) = \tau(s) + \nu\sigma'(s)$ (ср. с (2.7)). Пронтегрируем обе части уравнения по контуру C , предварительно умножив его на $1/(s-z)^{\nu+2}$, и затем воспользуемся интегрированием по частям:

$$\left. \frac{\sigma(s)\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+2}} \right|_{s_1}^{s_2} + (\nu+2) \int_C \frac{\sigma(s)\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+3}} ds = \int_C \frac{\tau_\nu(s)\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+2}} ds.$$

По условию (4) подстановка равна нулю. Разложим полиномы $\sigma(s)$, $\tau_\nu(s)$ по степеням $s-z$:

$$\sigma(s) = \sigma(z) + \sigma'(z)(s-z) + \frac{1}{2}\sigma''(z)(s-z)^2,$$

$$\tau_\nu(s) = \tau_\nu(z) + \tau'_\nu(z)(s-z).$$

Принимая во внимание формулы для $u(z)$, $u'(z)$, $u''(z)$, приходим к уравнению

$$\frac{1}{v+1} \sigma(z) u'' + \frac{v+2}{v+1} \sigma'(z) u' + \frac{v+2}{2} \sigma'' u = \frac{1}{v+1} \tau_v(z) u' + \tau'_v u.$$

После подстановки явного выражения для $\tau_v(z)$ это уравнение можно записать в виде

$$\sigma(z) u'' + [2\sigma'(z) - \tau(z)] u' - (v+1) \left(\tau' + \frac{v-2}{2} \sigma'' \right) u = 0. \quad (5)$$

Получим теперь с помощью (5) уравнение для функции $y_v(z)$. Уравнение (5) — обобщенное уравнение гипергеометрического типа при

$$\tilde{\tau}(z) = 2\sigma'(z) - \tau(z), \quad \tilde{\sigma}(z) = -(v+1) \left(\tau' + \frac{v-2}{2} \sigma'' \right) \sigma(z).$$

Так как

$$u(z) = \frac{1}{C_v} \rho(z) y_v(z), \quad \frac{\rho'}{\rho} = \frac{\tau - \sigma'}{\sigma},$$

то можно воспользоваться преобразованием из § 1, полагая

$$\varphi(z) = \frac{1}{C_v} \rho(z), \quad \pi(z) = \tau(z) - \sigma'(z).$$

В результате для функции $y_v(z)$ получаем (см. (1.5)) уравнение

$$y_v'' + \frac{\tau(z)}{\sigma(z)} y_v' + \frac{\sigma(z)}{\sigma^2(z)} y_v = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(z) &= \tilde{\sigma}(z) + \pi^2(z) + \pi(z) [\tilde{\tau}(z) - \sigma'(z)] + \pi'(z) \sigma(z) = \\ &= \left[-v\tau' - \frac{v(v-1)}{2} \sigma'' \right] \sigma(z) = \lambda \sigma(z). \end{aligned}$$

Полученное уравнение, очевидно, совпадает с уравнением (2.1).

Доказанная теорема будет иметь фундаментальное значение для изучения конкретных специальных функций.

Заметим, что условию (4) теоремы можно удовлетворить в частности, если выбрать концы контура C таким образом, чтобы функция $\sigma^{v+1}(s)\rho(s)/(s-z)^{v+2}$ равнялась нулю на концах контура C , т. е.

$$\frac{\sigma^{v+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{v+2}} \Big|_{s=s_1, s_2} = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим некоторые возможные виды контуров C , для которых выполнено условие (6).

а) Пусть s_0 — корень уравнения $\sigma(s) = 0$. Если $\sigma^{v+1}(s)\rho(s)|_{s=s_0} = 0$, то в качестве одного из концов контура можно выбрать $z = s_0$.

б) Если $\operatorname{Re}(\nu + 2) < 0$, то в качестве одного из концов контура можно взять точку $s = z$.

в) В качестве конца контура можно выбрать также значение $s = \infty$, если

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\sigma^{\nu+1}(s) \rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}} = 0.$$

Таким способом можно построить несколько частных решений уравнения (2.1), соответствующих различным видам контура C и различным значениям ν . Кроме того, число частных решений можно увеличить, если воспользоваться преобразованием, рассмотренным в § 1. Действительно, (2.1) можно рассматривать как обобщенное уравнение гипергеометрического типа, для которого $\tilde{\sigma}(z) = \lambda\sigma(z)$, $\tilde{\tau}(z) = \tau(z)$. В результате преобразования исходное уравнение переходит в другие уравнения гипергеометрического типа. Построив для последних частные решения, получим с помощью обратного преобразования новые частные решения для исходного уравнения. Так как уравнение (2.1) имеет лишь два линейно независимых решения, то любое его решение должно являться линейной комбинацией двух линейно независимых решений. Таким способом можно получить, в частности, функциональные соотношения для функций гипергеометрического типа.

При построении решений уравнения (2.1) будем ограничиваться контурами простого вида — прямыми линиями или отрезками прямых линий, соединяющими точки s_1 и s_2 , для которых выполнено условие (6). Контуров такого вида можно выбрать, вообще говоря, лишь при некоторых ограничениях, наложенных на коэффициенты дифференциального уравнения гипергеометрического типа. Распространение результатов, полученных при таких ограничениях, на более общие случаи может быть произведено с помощью аналитического продолжения построенных решений.

Напомним определение аналитического продолжения, которое будет играть важную роль в дальнейших рассуждениях *). Пусть функция $f(z)$ задана на множестве E , принадлежащем области D . Если функция $F(z)$ является аналитической в области D и совпадает с $f(z)$ на множестве E , то функцию $F(z)$ называют *аналитическим продолжением* функции $f(z)$ на область D .

Принцип аналитического продолжения. Если множество E содержит хотя бы одну предельную точку, принадлежащую области D , то функция $f(z)$ имеет не больше одного аналитического продолжения на область D .

В частности, аналитическое продолжение будет единственным, если множество E является отрезком, лежащим в D .

Здесь и в дальнейшем под аналитической функцией будем подразумевать однозначную аналитическую функцию. В связи

*) Изложение этих вопросов можно найти в [8, 13, 15].

с этим, если при рассмотрении какой-либо функции возникает неоднозначность, будем проводить разрезы по некоторым линиям в комплексной плоскости, которые обеспечат выбор определенной ветви многозначной аналитической функции.

При вычислении выражений вида $(z^{\alpha} - a)^{\alpha}$ возводимая в степень комплексная величина берется с наименьшим по модулю значением аргумента, совместным с данным разрезом. Например, для выбора определенной ветви функции $(1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta}$, имеющей точки ветвления при $z = -1$ и $z = +1$, достаточно сделать разрез вдоль действительной оси при $z \geq -1$. В соответствии с этим разрезом функция $(1-z)^{\alpha}$ вычисляется при $|\arg(1-z)| < \pi$, а функция $(1+z)^{\beta}$ при $0 < \arg z < 2\pi$.

Так как в качестве решений уравнения (2.1) мы будем использовать интегральное представление (2), то для аналитического продолжения решений этого уравнения по независимой переменной и параметрам, входящим в уравнение, удобно опираться на следующую теорему об аналитичности интеграла, зависящего от параметра *).

Теорема 2. Пусть C — конечная кусочно гладкая кривая в плоскости комплексной переменной s , D — область в комплексной плоскости z . Если функция $f(z, s)$ непрерывна по совокупности переменных при $s \in C$, $z \in D$ и при любом $s \in C$ аналитична по z в области D , то функция

$$F(z) = \int_C f(z, s) ds$$

аналитична в области D и

$$F'(z) = \int_C f'_z(z, s) ds.$$

Утверждение теоремы остается в силе и для равномерно сходящихся несобственных интегралов $F(z)$. При исследовании интегральных представлений для различных специальных функций удобно использовать следующий простой признак равномерной сходимости интегралов: если при всех $s \in C$, $z \in D$ непрерывная функция $f(z, s)$ удовлетворяет неравенству $|f(z, s)| \leq \varphi(s)$ и интеграл $\int_C \varphi(s) |ds|$ сходится, то интеграл $\int_C f(z, s) ds$ равномерно сходится по z в области D .

Так как производные функций гипергеометрического типа $y = y(z)$ являются в свою очередь функциями того же типа, то в результате их аналитического продолжения получаем аналитическое продолжение функций $y'(z)$ и $y''(z)$ по переменной z и по параметрам, от которых зависят эти функции. Интегральное представление для функции $y(z)$ было построено из условия, что-

*) Доказательство этой теоремы можно найти в [8, 13, 15].

бы эта функция удовлетворяла уравнению (2.1) при некоторых ограничениях на переменную z и параметры, от которых зависит эта функция. По принципу аналитического продолжения функция $y(z)$ будет удовлетворять этому уравнению во всей области, в которой левая часть уравнения является аналитической функцией (правая часть, равная нулю, аналитична в любой области *).

В последующем изложении для изучения решений конкретных уравнений гипергеометрического типа будет использоваться интегральное представление (2), а полученные результаты будут распространены на более широкую область с помощью принципа аналитического продолжения.

§ 4. Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования

Рассмотрим общий метод получения различных соотношений для функций $y_\nu(z)$, заданных интегральным представлением (3.2). Предварительно установим связь между функциями вида

$$\varphi_{\nu\mu}(z) = \int_C \frac{\sigma^\nu(s) \rho(s)}{(s-z)^{\mu+1}} ds,$$

которые входят в определение функций $y_\nu(z)$ и их производных.

Л е м м а. *Между любыми тремя функциями $\varphi_{\nu_i\mu_i}(z)$ существуют линейные соотношения*

$$\sum_{i=1}^3 A_i(z) \varphi_{\nu_i\mu_i}(z) = 0$$

с полиномиальными коэффициентами $A_i(z)$, если разности $\nu_i - \nu_j$ и $\mu_i - \mu_j$ являются целыми числами и выполнено условие

$$\frac{\sigma^{\nu_0+1}(s) \rho(s)}{(s-z)^{\mu_0}} s^m \bigg|_{s_1}^{s_2} = 0, \quad m = 0, 1, \dots,$$

где s_1, s_2 — концы контура C , ν_0 — то из значений ν_i , которое имеет наименьшую вещественную часть, μ_0 — то из значений μ_i , которое имеет наибольшую вещественную часть.

Доказательство. Рассмотрим выражение $\sum_{i=1}^3 A_i \varphi_{\nu_i\mu_i}(z)$.

Покажем, что можно выбрать коэффициенты $A_i = A_i(z)$ таким образом, чтобы рассматриваемая комбинация была равна нулю.

*) Впрочем, если использовать аналитическую теорию дифференциальных уравнений (см., например, [18]), то область аналитичности решений уравнения (2.1) можно было бы определить, исходя непосредственно из вида дифференциального уравнения (особыми точками уравнения (2.1) являются корни уравнения $\sigma(z) = 0$ и бесконечно удаленная точка).

При любом фиксированном значении z имеем

$$\sum_i A_i \varphi_{v_i \mu_i}(z) = \int_C \frac{\sigma^{v_0}(s) \rho(s)}{(s-z)^{\mu_0+1}} P(s) ds,$$

где

$$P(s) = \sum_i A_i \sigma^{v_i - v_0}(s) (s-z)^{\mu_0 - \mu_i}.$$

Так как разности $v_i - v_0$, $\mu_0 - \mu_i$ — целые неотрицательные числа, то функция $P(s)$ будет полиномом относительно переменной s . Подберем коэффициенты A_i так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\sigma^{v_0}(s) \rho(s)}{(s-z)^{\mu_0+1}} P(s) = \frac{d}{ds} \left[\frac{\sigma^{v_0+1}(s) \rho(s)}{(s-z)^{\mu_0}} Q(s) \right], \quad (1)$$

где $Q(s)$ — полином (ниже будет показано, что такой выбор коэффициентов, как правило, возможен). В результате получим

$$\sum_i A_i \varphi_{v_i \mu_i}(z) = \frac{\sigma^{v_0+1}(s) \rho(s)}{(s-z)^{\mu_0}} Q(s) \Big|_{s_1}^{s_2}.$$

Так как на концах контура C выполняется условие

$$\frac{\sigma^{v_0+1}(s) \rho(s)}{(s-z)^{\mu_0}} s^m \Big|_{s_1}^{s_2} = 0, \quad m = 0, 1, \dots,$$

то подстановка обращается в нуль и при подобранных таким способом коэффициентах A_i будет иметь место линейное соотношение

$$\sum_i A_i \varphi_{v_i \mu_i}(z) = 0. \quad (2)$$

Покажем, что можно так подобрать коэффициенты полинома $Q(s)$ и коэффициенты A_i , чтобы равенство (1) действительно имело место. Для этого перепишем (1) в более удобном виде, используя для функции $\rho_v(s) = \sigma^v(s) \rho(s)$ дифференциальное уравнение $(\sigma \rho_v)' = \tau_v \rho_v$, где $\tau_v(s) = \tau(s) + v \sigma'(s)$. В результате получим

$$P(s) = Q(s) [(s-z) \tau_{v_0}(s) - \mu_0 \sigma(s)] + \sigma(s) (s-z) Q'(s). \quad (3)$$

Если сравнить левую и правую части этого равенства, то нетрудно убедиться в том, что степень полинома $Q(s)$ на две единицы меньше степени полинома $P(s)$.

Приравнявая коэффициенты при различных степенях s в левой и правой частях (3), получим систему однородных линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов полинома $Q(s)$ и коэффициентов A_i ($i = 1, 2, 3$), входящих в выражение для $P(s)$. Число уравнений на две единицы превышает число неизвестных коэффициентов полинома $Q(s)$. Поэтому число не-

известных величин будет на единицу больше числа уравнений и, следовательно, один из неизвестных нам коэффициентов можно выбрать равным некоторой постоянной. В том случае, когда $P(s)$ — полином не выше первой степени, рассмотренные соотношения останутся справедливыми, если положить $Q(s) = 0$. Так как в полученной системе уравнений коэффициенты при неизвестных являются полиномами от переменной z , то при таком выборе одного из коэффициентов остальные будут рациональными функциями переменной z . После умножения равенства (2) на общий знаменатель коэффициентов $A_i(z)$ приходим к линейному соотношению с полиномиальными коэффициентами. Лемма доказана.

При практическом осуществлении рассмотренного приема для понижения степени полинома $P(s)$ иногда удобно воспользоваться интегрированием по частям для некоторых функций $\Phi_{\nu, \mu_1}(z)$. Имеем

$$\begin{aligned}\Phi_{\nu\nu}(z) &= \int_C \frac{\sigma^\nu(s) \rho(s)}{(s-z)^{\mu+1}} ds = \\ &= -\frac{1}{\mu} \frac{\sigma^\nu(s) \rho(s)}{(s-z)^\mu} \Big|_{s_1}^{s_2} + \frac{1}{\mu} \int_C \frac{\tau_{\nu-1}(s) \sigma^{\nu-1}(s) \rho(s)}{(s-z)^\mu} ds,\end{aligned}$$

где $\tau_{\nu-1}(s) = \tau(s) + (\nu-1)\sigma'(s)$. Предполагая, как обычно, что подстановка равна нулю, получим

$$\Phi_{\nu\mu}(z) = \frac{1}{\mu} \int_C \frac{\tau_{\nu-1}(s) \sigma^{\nu-1}(s) \rho(s)}{(s-z)^\mu} ds. \quad (4)$$

Пример 1. Найдём связь функций $\Phi_{\nu, \nu-1}(z)$, $\Phi_{\nu\nu}(z)$ и $\Phi_{\nu, \nu+1}(z)$. В данном случае $\nu_0 = \nu$, $\mu_0 = \nu+1$, $P(s) = A_1(s-z)^2 + A_2(s-z) + A_3$, $Q(s) = q_0$ (q_0 — постоянная). Условие на концах контура

$$\frac{\sigma^{\nu_0+1}(s) \rho(s)}{(s-z)^{\mu_0}} Q(s) \Big|_{s_1}^{s_2} = 0,$$

возникшее в процессе доказательства леммы, в данном случае равносильно условию

$$\frac{\sigma^{\nu+1}(s) \rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}} \Big|_{s_1}^{s_2} = 0.$$

Равенство (3) имеет вид

$$A_1(s-z)^2 + A_2(s-z) + A_3 = q_0[(s-z)\tau_\nu(s) - (\nu+1)\sigma(s)].$$

Если положить $q_0 = 1$ и разложить правую часть этого равенства по степеням $s-z$, то после приравнивания коэффициентов

при различных степенях $s - z$ получим

$$\begin{aligned} A_1 &= \tau'_v - \frac{v+1}{2} \sigma'' = \tau' + \frac{v-1}{2} \sigma'', \\ A_2 &= \tau_v(z) - (v+1) \sigma'(z) = \tau(z) - \sigma'(z), \\ A_3 &= -(v+1) \sigma(z). \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом,

$$A_1(z) \varphi_{v, v-1}(z) + A_2(z) \varphi_{vv}(z) + A_3(z) \varphi_{v, v+1}(z) = 0, \quad (6)$$

где коэффициенты $A_i(z)$ определяются формулами (5).

Полученное соотношение удобно переписать в другом виде. Так как, согласно теореме 1 из § 3, частное решение уравнения гипергеометрического типа имеет вид

$$y_v(z) = \frac{C_v}{\rho(z)} \varphi_{vv}(z)$$

и, кроме того,

$$\varphi_{v, v+1}(z) = \frac{1}{v+1} \varphi'_{vv}(z), \quad [\sigma(z) \rho(z)]' = \tau(z) \rho(z),$$

то соотношение (6) дает удобное интегральное представление для производных функций гипергеометрического типа $y_v(z)$:

$$y'_v(z) = \frac{C_v^{(1)}}{\sigma(z) \rho(z)} \int_C \frac{\sigma^v(s) \rho(s)}{(s-z)^v} ds, \quad (7)$$

где

$$C_v^{(1)} = \left(\tau' + \frac{v-1}{2} \sigma'' \right) C_v.$$

Обобщение полученного в этом примере соотношения (7) позволяет вывести удобное интегральное представление для производных любого порядка функций гипергеометрического типа. Действительно, соотношение (7) можно интерпретировать следующим образом: интегральное представление для первой производной функции гипергеометрического типа

$$y_v(z) = \frac{C_v}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^v(s) \rho(s)}{(s-z)^{v+1}} ds = \frac{C_v}{\rho(z)} \varphi_{vv}(z) \quad (8)$$

можно получить из исходного интегрального представления заменой v на $v-1$, $\rho(z)$ на $\rho_1(z) = \sigma(z) \rho(z)$ и умножением на дополнительный множитель $\tau' + \frac{v-1}{2} \sigma''$. Отсюда ясно, что

$$y_v^{(k)}(z) = \frac{C_v^{(k)}}{\sigma^k(z) \rho(z)} \varphi_{v, v-k}(z), \quad (9)$$

где

$$C_v^{(k)} = \left(\tau'_{k-1} + \frac{v-k}{2} \sigma'' \right) C_v^{(k-1)} = \\ = \left(\tau' + \frac{v+k-2}{2} \sigma'' \right) C_v^{(k-1)} = \prod_{s=0}^{k-1} \left(\tau' + \frac{v+s-1}{2} \sigma'' \right) C_v.$$

Если воспользоваться интегральными представлениями (9) и доказанной выше леммой, то приходим к следующей теореме.

Теорема. *Между любыми тремя функциями $y_{v_i}^{(k_i)}(z)$ существует линейное соотношение вида*

$$\sum_{i=1}^3 A_i(z) y_{v_i}^{(k_i)}(z) = 0$$

с полиномиальными коэффициентами $A_i(z)$, если разности $v_i - v_j$ являются целыми числами и выполнено условие

$$\frac{\sigma^{v_0+1}(s) \rho(s)}{(s-z)^{\mu_0+1}} s^m \Big|_{s_1}^{s_2} = 0, \quad m = 0, 1, \dots$$

Здесь s_1, s_2 — концы контура C , v_0 — то из значений v_i , которое имеет наименьшую вещественную часть, μ_0 — то из значений v_i , которое имеет наибольшую вещественную часть.

Заметим, что уравнения, определяющие коэффициенты $A_i(z)$, линейны и однородны относительно неизвестных коэффициентов и не зависят от способа выбора контура C для функций $y_v(z)$. Поэтому две функции гипергеометрического типа $y_v(z)$, которые отличаются друг от друга лишь множителем, не зависящим от v , и выбором контура C , будут удовлетворять соотношениям рассматриваемого вида с одними и теми же коэффициентами.

Пример 2. Выведем формулу вида

$$A_1 y'_v(z) + A_2 y_{v+1}(z) + A_3 y_v(z) = 0, \quad (10)$$

связывающую функции $y'_v(z)$, $y_v(z)$ и $y_{v+1}(z)$ (в дальнейшем формулы, выражающие производные функций гипергеометрического типа через сами функции, будем называть *формулами дифференцирования*).

Для этого воспользуемся интегральными представлениями (7), (8) для $y'_v(z)$, $y_v(z)$, а также предварительно преобразуем выражение для $y_{v+1}(z)$ с помощью (4). Тогда левую часть (10) можно записать в виде

$$A_1 y'_v(z) + A_2 y_{v+1}(z) + A_3 y_v(z) = \frac{1}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^v(s) \rho(s)}{(s-z)^{v+1}} P(s) ds,$$

где

$$P(s) = \left[A_1 \frac{C_v \kappa_v}{\sigma(z)} (s-z) + A_2 \frac{C_{v+1} \tau_v(s)}{v+1} + A_3 C_v \right], \\ \kappa_v = \tau' + \frac{v-1}{2} \sigma''.$$

Так как $P(s)$ — полином первой степени относительно s , то $Q(s) = 0$ и, следовательно,

$$A_1 \frac{C_v \kappa_v}{\sigma(z)} (s - z) + A_2 \frac{C_{v+1} \tau_v(s)}{v+1} + A_3 C_v = 0.$$

Для определения коэффициентов A_1 , A_2 , A_3 из этого равенства удобно положить $A_1 = \sigma(z)$, разложить левую часть равенства по степеням $s - z$ и приравнять коэффициенты при различных степенях $s - z$. В результате получим

$$A_2 = - (v+1) \frac{\kappa_v}{\tau_v'} \frac{C_v}{C_{v+1}}, \quad A_3 = \kappa_v \frac{\tau_v(z)}{\tau_v'}.$$

Окончательно приходим к следующей формуле дифференцирования:

$$\sigma(z) y_v'(z) = \frac{\kappa_v}{\tau_v'} \left[(v+1) \frac{C_v}{C_{v+1}} y_{v+1}(z) - \tau_v(z) y_v(z) \right]. \quad (11)$$

Таким образом, в гл. I рассмотрен метод построения интегральных представлений для частных решений обобщенного уравнения гипергеометрического типа и указаны способы изучения различных свойств этих решений. На этом мы заканчиваем рассмотрение основ теории специальных функций и в следующей главе переходим к изучению классических ортогональных полиномов — одного из важнейших классов специальных функций математической физики.

ГЛАВА II

КЛАССИЧЕСКИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ

§ 5. Основные свойства полиномов гипергеометрического типа

1. Полиномы Якоби, Лагерра и Эрмита. В § 2 были введены полиномы гипергеометрического типа $y_n(z)$, являющиеся решениями уравнения

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0 \quad (1)$$

при $\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''$. Явные выражения для этих полиномов даются формулой Родрига

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)} [\sigma^n(z) \rho(z)]^{(n)}, \quad (2)$$

где B_n — нормировочная постоянная, а функция $\rho(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$[\sigma(z)\rho(z)]' = \tau(z)\rho(z). \quad (3)$$

Решая это уравнение, получим в зависимости от степени полинома $\sigma(z)$ следующие возможные виды функции $\rho(z)$ (с точностью до постоянного множителя):

$$\rho(z) = \begin{cases} (b-z)^\alpha (z-a)^\beta, & \sigma(z) = (b-z)(z-a), \\ (z-a)^\alpha e^{\beta z}, & \sigma(z) = z-a, \\ e^{\alpha z^2 + \beta z}, & \sigma(z) = 1, \end{cases}$$

где a, b, α, β — некоторые постоянные (вообще говоря, комплексные). Линейной заменой независимой переменной выражения для $\sigma(z)$ и $\rho(z)$ можно привести к следующим каноническим видам:

$$\rho(z) = \begin{cases} (1-z)^\alpha (1+z)^\beta, & \sigma(z) = 1-z^2, \\ z^\alpha e^{-z}, & \sigma(z) = z, \\ e^{-z^2}, & \sigma(z) = 1, \end{cases}$$

При такой замене уравнения (1) и (3) перейдут в уравнения того же вида, а соответствующие полиномы гипергеометрического типа $y_n(z)$ останутся полиномами относительно новой переменной и будут по-прежнему определяться формулой Родрига.

В зависимости от вида функции $\sigma(z)$ получим следующие системы полиномов:

1. Пусть $\sigma(z) = 1 - z^2$, $\rho(z) = (1 - z)^\alpha (1 + z)^\beta$. Тогда

$$\tau(z) = -(\alpha + \beta + 2)z + \beta - \alpha.$$

Соответствующие полиномы $y_n(z)$ при $B_n = (-1)^n / (2^n n!)$ называются *полиномами Якоби* и обозначаются $P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1 - z)^{-\alpha} (1 + z)^{-\beta} \frac{d^n}{dz^n} [(1 - z)^{n+\alpha} (1 + z)^{n+\beta}].$$

Важными частными случаями полиномов Якоби являются:

а) полиномы Лежандра $P_n(z) = P_n^{(0,0)}(z)$;

б) полиномы Чебышева 1-го и 2-го рода

$$T_n(z) = \cos n\varphi, \quad U_n(z) = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(z) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi},$$

где $\varphi = \arccos z$. Ниже (см. § 6, п. 2) будет показано, что

$$T_n(z) = \frac{n!}{(1/2)_n} P_n^{(-1/2, -1/2)}(z), \quad U_n(z) = \frac{(n+1)!}{(3/2)_n} P_n^{(1/2, 1/2)}(z);$$

в) полиномы Гегенбауэра, называемые иногда *ультрасферическими полиномами*,

$$C_n^\lambda(z) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda + 1/2)_n} P_n^{(\lambda-1/2, \lambda-1/2)}(z).$$

Мы использовали обозначение

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n - 1) = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)},$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция (см. Дополнение А).

2. Пусть $\sigma(z) = z$, $\rho(z) = z^\alpha e^{-z}$. Тогда

$$\tau(z) = -z + \alpha + 1.$$

Полиномы $y_n(z)$ при $B_n = 1/n!$ называются *полиномами Лагерра* и обозначаются $L_n^\alpha(z)$:

$$L_n^\alpha(z) = \frac{1}{n!} e^z z^{-\alpha} \frac{d^n}{dz^n} (z^{\alpha+n} e^{-z}).$$

3. Пусть $\sigma(z) = 1$, $\rho(z) = e^{-z^2}$. Тогда $\tau(z) = -2z$. Полиномы $y_n(z)$ при $B_n = (-1)^n$ называются *полиномами Эрмита* и

*) Выбор постоянных B_n сложился исторически и, вообще говоря, произволен. Он соответствует нормировке, принятой в [1].

обозначаются $H_n(z)$:

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z^2}).$$

Мы не рассмотрели случай, когда полином $\sigma(z)$ имеет кратные корни, т. е. $\sigma(z) = (z-a)^2$. Полиномы гипергеометрического типа, соответствующие $\sigma(z) = (z-a)^2$, можно выразить через полиномы Лагерра. Как было показано в § 1, при $\sigma(z) = (z-a)^2$ замена $s = 1/(z-a)$ переводит обобщенное уравнение гипергеометрического типа

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)} u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)} u = 0$$

в уравнение того же типа, для которого $\sigma(s) = s$. В частности, уравнение

$$\sigma(z) y'' + \tau(z) y' + \lambda_n y = 0, \quad \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2} \sigma',$$

для полиномов гипергеометрического типа при $\sigma(z) = (z-a)^2$ после замены $s = 1/(z-a)$ принимает вид

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{2 - s\tau(a + 1/s)}{s} \frac{dy}{ds} + \frac{\lambda_n}{s^2} y = 0.$$

Как показано в § 1, это уравнение заменой $y = \varphi(s)u$ можно привести к уравнению гипергеометрического типа с помощью надлежащего выбора функции $\varphi(s)$. Одним из возможных видов функции $\varphi(s)$ является $\varphi(s) = 1/s^n$. Так как

$$\tau(z) = \tau(a) + \tau'(z)(z-a),$$

то $\tau(a + 1/s) = \tau(a) + \tau'/s$, и в результате приходим к следующему уравнению для функции $u(s)$:

$$su'' - [s\tau(a) + \tau' + 2(n-1)]u' + n\tau(a)u = 0.$$

Так как $u(s) = s^n y$ и функция y является полиномом степени n относительно переменной $z = a + 1/s$, то функция $u(s)$ будет полиномом степени n относительно переменной s . Таким образом, функция $u(s)$ является полиномом гипергеометрического типа. Так как в данном случае функция $\rho(s)$, определяющая полиномы гипергеометрического типа по формуле Родрига, имеет вид

$$\rho(s) = s^{-\tau' - 2n + 1} e^{-\tau(a)s},$$

то полиномы $u(s) = u_n(s)$ совпадают при $\tau(a) \neq 0$ с точностью до нормировочного множителя с полиномами Лагерра $L_n^\alpha(t)$, где $\alpha = -\tau' - 2n + 1$, $t = \tau(a)s$. Поэтому полиномы $y_n(z)$ связаны с полиномами Лагерра следующим образом:

$$y_n(z) = C_n (z-a)^n L_n^{-\tau' - 2n + 1} \left(\frac{\tau(a)}{z-a} \right).$$

Формула остается справедливой и при $\tau(a) = 0$.

Среди полиномов гипергеометрического типа, соответствующих случаю $\sigma(z) = (z-a)^2$, наиболее известными являются полиномы Бесселя, для которых

$$\sigma(z) = z^2, \quad \tau(z) = 2(z+1), \quad \rho(z) = e^{-2/z},$$

и формула Родрига имеет вид

$$y_n(z) = 2^{-n} e^{2/z} \frac{d^n}{dz^n} (z^{2n} e^{-2/z}).$$

Полиномы Бесселя удовлетворяют условию нормировки $y_n(0) = 1$. Для полиномов Бесселя получаем следующую связь с полиномами Лагерра:

$$y_n(z) = \frac{(-1)^n n!}{2^n} z^n L_n^{-(2n+1)}\left(\frac{2}{z}\right).$$

2. Некоторые следствия из формулы Родрига. Ранее было показано, что производные любого порядка от полиномов гипергеометрического типа $y_n(z)$ также являются полиномами гипергеометрического типа (см. § 2). Формула Родрига для $y_n^{(m)}(z)$ имеет вид

$$y_n^{(m)}(z) = \frac{A_{mn} B_n}{\sigma^m(z) \rho(z)} \frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}} [\sigma^n(z) \rho(z)], \quad (4)$$

где

$$A_{mn} = (-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} \mu_{kn}, \quad A_{0n} = 1, \quad \mu_{kn} = \mu_k(\lambda) |_{\lambda=\lambda_n} = \lambda_n - \lambda_k.$$

Так как

$$\mu_{kn} = -(n-k) \left(\tau' + \frac{n+k-1}{2} \sigma' \right),$$

то

$$A_{mn} = \frac{n!}{(n-m)!} \prod_{k=0}^{m-1} \left(\tau' + \frac{n+k-1}{2} \sigma' \right). \quad (5)$$

Заметим, что формулу Родрига для $y_n^{(m)}(z)$ можно получить с точностью до нормировочного множителя из формулы Родрига для $y_n(z)$ заменой n на $n-m$, $\rho(z)$ на $\rho_m(z) = \sigma^m(z) \rho(z)$.

Рассмотрим некоторые следствия формулы (4).

1) Из формул Родрига для полиномов $y_n(z)$ и их производных $y_n'(z)$ вытекают следующие формулы дифференцирования для полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита:

$$\begin{aligned} \frac{dP_n^{(\alpha, \beta)}}{dz} &= \frac{1}{2} (n + \alpha + \beta + 1) P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(z), \\ \frac{dL_n^\alpha}{dz} &= -L_{n-1}^{\alpha+1}(z), \quad \frac{dH_n}{dz} = 2nH_{n-1}(z). \end{aligned} \quad (6)$$

2) С помощью формулы Родрига можно выразить производные $y_n'(z)$ через сами полиномы $y_n(z)$. Действительно, так как

$$y_{n+1}(z) = \frac{B_{n+1}}{\rho(z)} \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} [\sigma(z) \rho_n(z)] = \frac{B_{n+1}}{\rho(z)} \frac{d^n}{dz^n} [\tau_n(z) \rho_n(z)],$$

то с помощью формулы Лейбница для производных от произведения функций находим

$$\begin{aligned} y_{n+1}(z) &= \frac{B_{n+1}}{\rho(z)} \left\{ \tau_n(z) \frac{d^n}{dz^n} [\sigma^n(z) \rho(z)] + n \tau_n' \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [\sigma^n(z) \rho(z)] \right\} = \\ &= \frac{B_{n+1}}{B_n} \left[\tau_n(z) y_n(z) - \frac{n}{\lambda_n} \tau_n' \sigma(z) y_n'(z) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sigma(z) y'_n(z) = \frac{\lambda_n}{n \tau'_n} \left[\tau_n(z) y_n(z) - \frac{B_n}{B_{n+1}} y_{n+1}(z) \right], \quad (7)$$

что совпадает с формулой (4.11) при $v = n$.

3) С помощью формулы (4) при $m = n - 1$ легко вычислить коэффициенты a_n , b_n при старших степенях z в разложении

$$y_n(z) = a_n z^n + b_n z^{n-1} + \dots$$

Так как

$$y_n^{(n-1)}(z) = n! a_n z + (n-1)! b_n,$$

то

$$A_{n-1, n} B_n \tau_{n-1}(z) = n! a_n z + (n-1)! b_n.$$

Отсюда

$$a_n = \frac{A_{n-1, n} B_n}{n!} \tau'_{n-1} = B_n \prod_{k=0}^{n-1} \left(\tau' + \frac{n+k-1}{2} \sigma^n \right), \quad a_0 = B_0; \quad (8)$$

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{n \tau_{n-1}(0)}{\tau'_{n-1}}. \quad (9)$$

4) Численные значения полиномов Якоби, Лагерра при некоторых значениях z могут быть найдены с помощью формулы Родрига, если воспользоваться правилом Лейбница для вычисления производных от произведения функций:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = L_n^\alpha(0) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)}, \quad (10)$$

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(-1) = (-1)^n \frac{\Gamma(n + \beta + 1)}{n! \Gamma(\beta + 1)}. \quad (11)$$

Отсюда для полиномов Лежандра имеем

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n. \quad (12)$$

3. Производящие функции. Будем называть *производящей функцией* для системы полиномов гипергеометрического типа $\{y_n(z)\}$ такую функцию $\Phi(z, t)$, разложение которой в ряд по степеням t при достаточно малых t имеет вид

$$\Phi(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{y}_n(z) \frac{t^n}{n!}, \quad (13)$$

где $\bar{y}_n(z)$ — полином гипергеометрического типа, для которого постоянная B_n в формуле Родрига (2) равна единице, т. е.

$$\bar{y}_n(z) = \frac{1}{\rho(z)} \frac{d^n}{dz^n} [\sigma^n(z) \rho(z)]$$

(очевидно, что $y_n(z) = B_n \bar{y}_n(z)$). Согласно (3.1)

$$y_n(z) = \frac{1}{\rho(z)} \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{\sigma^n(s) \rho(s)}{(s-z)^{n+1}} ds, \quad (14)$$

где C — замкнутый контур, охватывающий точку $s = z$ (при этом предполагается, что функция $\rho(s)$ аналитична в области, ограниченной контуром C). Подставим в (13) выражение (14) для $\bar{y}_n(z)$ и поменяем местами суммирование и интегрирование:

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{2\pi i \rho(z)} \int_C \frac{\rho(s)}{s-z} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\sigma(s)t}{s-z} \right]^n \right\} ds.$$

Изменение порядка суммирования и интегрирования при достаточно малых t и фиксированном z может быть легко обосновано. Стоящая под интегралом геометрическая прогрессия суммируется, что дает

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{2\pi i \rho(z)} \int_C \frac{\rho(s) ds}{s-z-\sigma(s)t}.$$

Знаменатель подынтегрального выражения имеет, вообще говоря, два корня. Если $t \rightarrow 0$, то один из корней, который обозначим через $\xi(z, t)$, стремится к $s = z$. Тогда другой корень, если он существует, стремится к бесконечности при $t \rightarrow 0$. Поэтому при достаточно малых t можно считать, что внутри контура C лежит лишь один корень $s = \xi(z, t)$ знаменателя подынтегрального выражения, а подынтегральная функция имеет внутри контура C один полюс первого порядка с вычетом, равным

$$C_{-1} = \frac{\rho(s)}{1 - \sigma'(s)t} \Big|_{s=\xi(z,t)}.$$

В результате для функции $\Phi(z, t)$ получаем выражение

$$\Phi(z, t) = \frac{\rho(z)}{\rho(z)} \frac{1}{1 - \sigma'(z)t} \Big|_{s=\xi(z,t)}. \quad (15)$$

Формула (15) для функции $\Phi(z, t)$, входящей в разложение (13), была получена для достаточно малых значений $|t|$. По принципу аналитического продолжения разложение (13) остается справедливым в круге $|t| < R$, где R — расстояние от начала координат до ближайшей особой точки функции $\Phi(z, t)$ (при фиксированном значении z).

В виде примера получим производящую функцию для полиномов Лежандра. В этом случае

$$\xi(z, t) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4t(t+z)}}{2t}$$

и, следовательно, по формуле (15)

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{1 + 2st} \Big|_{s=\xi(z,t)} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4tz + 4t^2}}$$

Так как для полиномов Лежандра $B_n = (-1)^n / (2^n n!)$, то

$$\frac{1}{\sqrt{1+4tz+4t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) (-2t)^n.$$

Если заменить t на $-t/2$, то получим обычно используемое выражение для производящей функции:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^n. \quad (16)$$

Если $-1 \leq z \leq 1$, то разложение (16) сходится при $|t| < 1$, так как особые точки производящей функции, являющиеся корнями уравнения $1 - 2tz + t^2 = 0$, определяются формулой $t_{1,2} = e^{\pm i\varphi}$ ($\cos \varphi = z$) и лежат на окружности $|t| = 1$.

Выражение (16) часто применяется в теоретической физике в виде

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_{<}^n}{r_{>}^{n+1}} P_n(\cos \theta),$$

где $r_{<} = \min(r_1, r_2)$, $r_{>} = \max(r_1, r_2)$, θ — угол между радиус-векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Действительно,

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta} = \begin{cases} r_1 \sqrt{1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 2\frac{r_2}{r_1} \cos \theta}, & r_2 < r_1, \\ r_2 \sqrt{1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - 2\frac{r_1}{r_2} \cos \theta}, & r_1 < r_2. \end{cases}$$

Отсюда

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = r_{>} \sqrt{1 + \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^2 - 2\frac{r_{<}}{r_{>}} \cos \theta}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{r_{>} \sqrt{1 + \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^2 - 2\frac{r_{<}}{r_{>}} \cos \theta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_{<}^n}{r_{>}^{n+1}} P_n(\cos \theta).$$

Для полиномов Лагерра и Эрмита с помощью формул (13), (15) получим следующие разложения:

$$(1-t)^{-\alpha-1} \exp\left\{-\frac{zt}{1-t}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(z) t^n,$$

$$\exp\{2zt - t^2\} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(z) \frac{t^n}{n!}.$$

4. Свойство ортогональности. Если функцию $\rho(x)$ рассмотреть на вещественной оси $z = x$ и подчинить некоторым дополнительным условиям, то можно получить ряд специальных свойств полиномов гипергеометрического типа $y_n(x)$.

Т е о р е м а. Пусть функция $\rho(x)$ удовлетворяет на концах некоторого интервала (a, b) условию

$$\sigma(x) \rho(x) x^k \Big|_{x=a, b} = 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (17)$$

Тогда полиномы гипергеометрического типа $y_n(x)$, соответствующие различным значениям λ_n , будут ортогональны на интервале (a, b) с весом $\rho(x)$, т. е.

$$\int_a^b y_n(x) y_m(x) \rho(x) dx = 0, \quad \lambda_m \neq \lambda_n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим дифференциальные уравнения для полиномов $y_n(x)$, $y_m(x)$:

$$[\sigma(x) \rho(x) y_n']' + \lambda_n \rho(x) y_n = 0,$$

$$[\sigma(x) \rho(x) y_m']' + \lambda_m \rho(x) y_m = 0.$$

Умножим первое из них на $y_m(x)$, второе на $y_n(x)$. Вычтем из первого равенства второе и результат проинтегрируем в пределах от a до b . Так как

$$\begin{aligned} y_m(x) [\sigma(x) \rho(x) y_n'(x)]' - y_n(x) [\sigma(x) \rho(x) y_m'(x)]' = \\ = \frac{d}{dx} \{ \sigma(x) \rho(x) W[y_m(x), y_n(x)] \}, \end{aligned}$$

где $W(u, v) = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$ — вронскиан, то мы приходим к следующему равенству:

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b y_m(x) y_n(x) \rho(x) dx = \sigma(x) \rho(x) W[y_m(x), y_n(x)] \Big|_a^b.$$

Так как вронскиан $W[y_m(x), y_n(x)]$ является полиномом относительно перемещенной x , то правая часть полученного равенства равна нулю в силу условия (17). Поэтому при $\lambda_m \neq \lambda_n$ имеем

$$\int_a^b y_m(x) y_n(x) \rho(x) dx = 0, \quad (18)$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что условие $\lambda_m \neq \lambda_n$ в равенстве (18) можно заменить условием $m \neq n$, если $\tau' + \frac{n+m-1}{2} \sigma'' \neq 0$.

Для выполнения условий (17) при конечных значениях a, b достаточно потребовать, чтобы функция $\rho(x)$ удовлетворяла

следующим граничным условиям:

$$\sigma(x) \rho(x)|_{x=a} = 0, \quad \sigma(x) \rho(x)|_{x=b} = 0.$$

Если же, например, a — конечное число, $b = +\infty$, то условия (17) будут эквивалентны условиям

$$\sigma(x) \rho(x)|_{x=a} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma(x) \rho(x) x^k = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Аналогичным образом рассматриваются остальные возможные случаи.

Полиномы гипергеометрического типа $y_n(x)$, для которых функция $\rho(x)$ удовлетворяет условию (17), называются *классическими ортогональными полиномами*. Обычно эти полиномы рассматривают при дополнительных условиях $\rho(x) > 0$, $\sigma(x) > 0$ на интервале (a, b) . Перечисленным требованиям полиномы Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ удовлетворяют при $a = -1$, $b = 1$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$; полиномы Лагерра $L_n^\alpha(x)$ — при $a = 0$, $b = +\infty$, $\alpha > -1$; полиномы Эрмита $H_n(x)$ — при $a = -\infty$, $b = +\infty$. В рассмотренных случаях в равенстве (18) условие $\lambda_m \neq \lambda_n$ можно заменить эквивалентным условием $m \neq n$.

Из свойств производных полиномов гипергеометрического типа (см. п. 2) вытекает, что *производные классических ортогональных полиномов $y_n^{(k)}(x)$ являются классическими полиномами, ортогональными с весом $\rho_k(x) = \sigma^k(x)\rho(x)$ на интервале (a, b)* ;

$$\int_a^b y_n^{(k)}(x) y_m^{(k)}(x) \rho_k(x) dx = \delta_{mn} d_{kn}^2.$$

Квадраты норм d_{kn}^2 полиномов $y_n^{(k)}(x)$ легко выразить через квадрат нормы $d_{0n}^2 \equiv d_{0n}^2$ полинома $y_n(x)$. Для этого воспользуемся дифференциальным уравнением для $y_n^{(k)}(x)$:

$$\frac{d}{dx} [\rho_{k+1}(x) y_n^{(k+1)}(x)] + \mu_{kn} \rho_k(x) y_n^{(k)}(x) = 0. \quad (19)$$

Если уравнение (19) умножить на $y_n^{(k)}(x)$ и проинтегрировать на интервале (a, b) , то с помощью интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} \rho_{k+1}(x) y_n^{(k+1)}(x) y_n^{(k)}(x) \Big|_a^b - \int_a^b [y_n^{(k+1)}(x)]^2 \rho_{k+1}(x) dx + \\ + \mu_{kn} \int_a^b [y_n^{(k)}(x)]^2 \rho_k(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Подстановка в силу условия (17) равна нулю, поэтому

$$d_{k+1,n}^2 = \mu_{kn} d_{kn}^2.$$

Отсюда по индукции получаем

$$d_{mn}^2 = d_n^2 \prod_{k=0}^{m-1} \mu_{kn}. \quad (20)$$

Соотношение (20) при $m = n$ позволяет вычислить величину d_n^2 для полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита, так как

$$y_n^{(n)}(x) = n! a_n, \quad d_{nn}^2 = (n! a_n)^2 \int_a^b \sigma^n(x) \rho(x) dx. \quad (20a)$$

Интеграл $\int_a^b \sigma^n(x) \rho(x) dx$ можно выразить через гамма-функцию (см. Дополнение А, п. 5). В результате находим

$$d_n^2 = \begin{cases} \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{n! (2n+\alpha+\beta+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} & \text{для } P_n^{(\alpha, \beta)}(x), \\ \frac{1}{n!} \Gamma(n+\alpha+1) & \text{для } L_n^\alpha(x), \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & \text{для } H_n(x). \end{cases}$$

Основные характеристики полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1
Основные характеристики
классических ортогональных полиномов

$y_n(x)$	$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \quad (\alpha > -1, \beta > -1)$	$L_n^\alpha(x) \quad (\alpha > -1)$	$H_n(x)$
(a, b)	$(-1, 1)$	$(0, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
$\rho(x)$	$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$	$x^\alpha e^{-x}$	e^{-x^2}
$\sigma(x)$	$1-x^2$	x	1
$\tau(x)$	$\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x$	$1 + \alpha - x$	$-2x$
λ_n	$n(n + \alpha + \beta + 1)$	n	$2n$
B_n	$(-1)^n / (2^n n!)$	$1/n!$	$(-1)^n$
a_n	$\frac{\Gamma(2n + \alpha + \beta + 1)}{2^n n! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}$	$\frac{(-1)^n}{n!}$	2^n
b_n	$\frac{(\alpha - \beta) \Gamma(2n + \alpha + \beta)}{2^n (n-1)! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}$	$(-1)^{n-1} \frac{n + \alpha}{(n-1)!}$	0
d_n^2	$\frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{n! (2n + \alpha + \beta + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}$	$\frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}$	$2^n n! \sqrt{\pi}$

§ 6. Некоторые общие свойства ортогональных полиномов

Классические ортогональные полиномы обладают целым рядом свойств, которые вытекают непосредственно из свойства ортогональности этих полиномов. Такими свойствами обладают любые полиномы, ортогональные на интервале (a, b) с произвольным весом $\rho(x) > 0$.

Перейдем к рассмотрению некоторых общих свойств полиномов $p_n(x)$, ортогональных на интервале (a, b) с весом $\rho(x)$. При этом будем предполагать, что коэффициент при старшей степени полинома $p_n(x)$ является вещественным и отличен от нуля (n — степень полинома).

1. Разложение произвольного полинома по ортогональным полиномам. Покажем, что произвольный полином n -й степени $q_n(x)$ можно представить в виде линейной комбинации ортогональных полиномов $p_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, n$), т. е.

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{kn} p_k(x). \quad (1)$$

При $n = 0$ это утверждение очевидно. Для произвольного $n > 0$ доказательство проведем по индукции. Пусть для любого полинома $q_{n-1}(x)$ справедливо разложение

$$q_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_{k, n-1} p_k(x). \quad (2)$$

Для полинома $q_n(x)$ подберем постоянную c_{nn} таким образом, чтобы коэффициент при старшей степени полинома $q_n(x) - c_{nn}p_n(x)$ был равен нулю, т. е. $q_n(x) - c_{nn}p_n(x) = q_{n-1}(x)$. Если использовать разложение (2), то для $q_n(x)$ получим разложение (1).

Коэффициенты c_{kn} в (1) легко определить с помощью свойства ортогональности

$$\int_a^b p_n(x) p_m(x) \rho(x) dx = 0, \quad m \neq n, \quad (3)$$

по формуле

$$c_{kn} = \frac{1}{d_n^2} \int_a^b q_n(x) p_k(x) \rho(x) dx, \quad (4)$$

где

$$d_n^2 = \int_a^b p_n^2(x) \rho(x) dx.$$

Докажем, что соотношение ортогональности (3) эквивалентно соотношению

$$\int_a^b p_n(x) x^m \rho(x) dx = 0, \quad m < n. \quad (5)$$

Действительно, если в интеграле (3) при $m < n$ воспользоваться разложением полинома $p_m(x)$ по степеням x , то из соотношения (5) получим (3). Аналогично, разлагая x^m по ортогональным полиномам $p_k(x)$, из (3) получим (5).

Из соотношения (5) вытекает, что полином $p_n(x)$ ортогонален произвольному полиному меньшей степени.

2. Единственность системы ортогональных полиномов при заданном весе. Можно показать, что задание интервала (a, b) и веса $\rho(x)$ определяет полином $p_n(x)$, удовлетворяющий соотношению ортогональности (5), однозначно с точностью до нормировочного множителя.

Предположим, что существуют два полинома $p_n(x)$ и $\tilde{p}_n(x)$, удовлетворяющие соотношению (5). Имеем

$$\tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{kn} p_k(x).$$

В силу соотношений (4), (5) $c_{kn} = 0$ при $k < n$, откуда и вытекает пропорциональность полиномов $p_n(x)$ и $\tilde{p}_n(x)$.

Для полиномов $p_n(x)$ справедливо следующее явное выражение в виде определителя:

$$p_n(x) = A_n \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & \dots & C_n \\ C_1 & C_2 & & C_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-1} & C_n & & C_{2n-1} \\ 1 & x & & x^n \end{vmatrix}, \quad (6)$$

где A_n — нормировочная постоянная, $C_k = \int_a^b x^k \rho(x) dx$ — момент весовой функции $\rho(x)$. В самом деле, легко проверить, что полиномы (6) удовлетворяют соотношению ортогональности (5)*).

Из явного вида полиномов $p_n(x)$, задаваемого формулой (6), ясно, что полином $p_n(x)$ является полиномом с вещественными коэффициентами.

Пример. Как известно, система функций $\{\cos n\varphi\}$ обладает свойством ортогональности:

$$\int_0^\pi \cos n\varphi \cos m\varphi d\varphi = 0, \quad m \neq n.$$

С помощью соотношения

$$\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi = 2 \cos \varphi \cos n\varphi,$$

используя метод математической индукции, легко показать, что

* Коэффициент при x^n в выражении (6) отличен от нуля при $A_n \neq 0$, так как он пропорционален определителю Грама для функций $1, x, \dots, x^{n-1}$ (см. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. — М.: Наука, 1971).

функция $\cos n\varphi$ является полиномом степени n относительно переменной $x = \cos \varphi$ с коэффициентом при старшей степени $a_n = 2^{n-1}$ ($a_0 = 1$). Этот полином называется *полиномом Чебышева первого рода* $T_n(x)$. Переходя в соотношении ортогональности для системы функций $\{\cos n\varphi\}$ к новой переменной интегрирования $x = \cos \varphi$, получим следующее соотношение ортогональности для полиномов $T_n(x)$:

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad m \neq n.$$

Отсюда видно, что полиномы $T_n(x) = \cos n\varphi$ при $x = \cos \varphi$ удовлетворяют тому же соотношению ортогональности, что и полиномы Якоби $P_n^{(-1/2, -1/2)}(x)$. Поэтому в силу свойства единственности ортогональных полиномов при заданном весе имеем

$$T_n(x) = C_n P_n^{(-1/2, -1/2)}(x).$$

Сравнение коэффициентов при x^n дает $C_n = \frac{n!}{(1/2)_n}$.

Если использовать формулу дифференцирования (5.6) для полиномов Якоби, то можно выразить полиномы Чебышева второго рода

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi} = \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1}$$

через полиномы $P_n^{(1/2, 1/2)}(x)$:

$$U_n(x) = \frac{(n+1)!}{(3/2)_n} P_n^{(1/2, 1/2)}(x).$$

3. Рекуррентные соотношения. Для произвольных ортогональных полиномов имеет место рекуррентная формула, связывающая три последовательных полинома $p_{n-1}(x)$, $p_n(x)$, $p_{n+1}(x)$:

$$xp_n(x) = \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_n(x) + \gamma_n p_{n-1}(x), \quad (7)$$

где α_n , β_n , γ_n — некоторые постоянные.

Для доказательства воспользуемся разложением

$$xp_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{kn} p_k(x). \quad (8)$$

Согласно (4)

$$c_{kn} = \frac{1}{d_n^2} \int_a^b p_k(x) x p_n(x) \rho(x) dx. \quad (9)$$

Так как функция $x p_k(x)$ — полином степени $k+1$, то в силу свойства ортогональности полинома $p_n(x)$ коэффициенты c_{kn}

равны нулю при $k+1 < n$. Поэтому (8) можно записать в виде

$$xp_n = \alpha_n p_{n+1} + \beta_n p_n + \gamma_n p_{n-1},$$

где $\alpha_n = c_{n+1, n}$, $\beta_n = c_{nn}$, $\gamma_n = c_{n-1, n}$, что и требовалось доказать.

Т а б л и ц а 2

Коэффициенты рекуррентных соотношений

$\nu_n(x)$	$P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$	$L_n^\alpha(x)$	$H_n(x)$
α_n	$\frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}$	$-(n+1)$	$\frac{1}{2}$
β_n	$\frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}$	$2n+\alpha+1$	0
γ_n	$\frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}$	$-(n+\alpha)$	n
$\tilde{\alpha}_n$	$-n$	0	0
$\tilde{\beta}_n$	$\frac{(\alpha-\beta)n}{2n+\alpha+\beta}$	n	0
$\tilde{\gamma}_n$	$\frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{2n+\alpha+\beta}$	$-(n+\alpha)$	$2n$

Коэффициенты α_n , β_n , γ_n можно выразить через квадрат нормы d_n^2 и коэффициенты a_n , b_n при старших степенях полинома

$$p_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots, \quad a_n \neq 0.$$

Из соотношения (9) видно, что $d_n^2 c_{kn} = d_n^2 c_{nk}$. Так как $\alpha_{n-1} = c_{n, n-1}$, $\gamma_n = c_{n-1, n}$, то, полагая $k = n-1$, получаем

$$\gamma_n = \alpha_{n-1} \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}. \quad (10)$$

С другой стороны, сравнивая коэффициенты при старших степенях в левой и правой частях равенства (8), имеем $a_n = \alpha_n a_{n+1}$, $b_n = \alpha_n b_{n+1} + \beta_n a_n$. Отсюда

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}, \quad \beta_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}, \quad \gamma_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}. \quad (11)$$

Таким образом, зная коэффициенты a_n , b_n и квадрат нормы d_n^2 произвольных ортогональных полиномов $p_n(x)$, можно последовательно определить эти полиномы.

Коэффициенты α_n , β_n , γ_n , вычисленные по формулам (11) для полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита, приведены в табл. 2. Кроме того, в табл. 2 приведены коэффициенты $\tilde{\alpha}_n$, $\tilde{\beta}_n$, $\tilde{\gamma}_n$, входящие

в формулу дифференцирования

$$\sigma(x) y'_n(x) = (\tilde{\alpha}_n x + \tilde{\beta}_n) y_n(x) + \tilde{\gamma}_n y_{n-1}(x).$$

Эта формула получается с помощью подстановки выражения для $y_{n+1}(x)$ из рекуррентного соотношения (7) в формулу дифференцирования (5.7).

Рассмотрим теперь рекуррентное соотношение вида (7)

$$zu_n(z) = \alpha_n u_{n+1}(z) + \beta_n u_n(z) + \gamma_n u_{n-1}(z) \quad (7a)$$

для произвольных комплексных значений z . Одним из решений этого соотношения являются полиномы $p_n(z)$, ортогональные на интервале (a, b) с весом $\rho(z)$. Другим решением при $z \notin [a, b]$ являются функции

$$q_n(z) = \int_a^b \frac{p_n(s) \rho(s)}{s-z} ds.$$

Для доказательства достаточно проинтегрировать на интервале (a, b) рекуррентное соотношение для полиномов $p_n(s)$, предварительно умножив его на $\rho(s)/(s-z)$, и воспользоваться равенством

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{s p_n(s) \rho(s)}{s-z} ds &= \int_a^b \left(1 + \frac{z}{s-z}\right) p_n(s) \rho(s) ds = \\ &= \int_a^b p_n(s) \rho(s) ds + z \int_a^b \frac{p_n(s) \rho(s)}{s-z} ds = z q_n(z), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

С функцией $q_n(z)$ тесно связана функция

$$r_n(z) = \int_a^b \frac{p_n(s) - p_n(z)}{s-z} \rho(s) ds.$$

Эта функция является, как нетрудно видеть, полиномом степени $n-1$. Ее называют *полиномом второго рода*. Так как при $z \notin [a, b]$

$$r_n(z) = \int_a^b \frac{p_n(s) \rho(s)}{s-z} ds - p_n(z) \int_a^b \frac{\rho(s) ds}{s-z} = q_n(z) - \frac{1}{a_0} p_n(z) q_0(z)$$

и, кроме того, функции $p_n(z)$ и $q_n(z)$ при $z \notin [a, b]$ удовлетворяют одному и тому же соотношению (7a), то этому же соотношению удовлетворяют и полиномы $r_n(z)$. В силу непрерывности полиномы $r_n(z)$ будут удовлетворять соотношению (7a) и при $z \in [a, b]$.

4. Формула Дарбу — Кристоффеля. Из рекуррентного соотношения (7) непосредственно вытекает *формула Дарбу —*

Кристоффеля

$$\sum_{k=0}^n \frac{p_k(x) p_k(y)}{d_k^2} = \frac{1}{d_n^2} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{p_{n+1}(x) p_n(y) - p_n(x) p_{n+1}(y)}{x - y}, \quad (12)$$

играющая важную роль в теории ортогональных полиномов. Для ее вывода воспользуемся (7) и (10):

$$x p_k(x) = \alpha_k p_{k+1}(x) + \beta_k p_k(x) + \alpha_{k-1} \frac{d_k^2}{d_{k-1}^2} p_{k-1}(x),$$

$$y p_k(y) = \alpha_k p_{k+1}(y) + \beta_k p_k(y) + \alpha_{k-1} \frac{d_k^2}{d_{k-1}^2} p_{k-1}(y).$$

Эти рекуррентные соотношения справедливы и при $k=0$, если положить $\alpha_{-1}/d_{-1}^2 = 0$, $p_{-1}(x) = 0$.

Умножим первое рекуррентное соотношение на $p_k(y)$, второе на $p_k(x)$. Разделим каждое соотношение на d_k^2 и почленно вычтем. Это дает

$$(x - y) \frac{p_k(x) p_k(y)}{d_k^2} = A_k(x, y) - A_{k-1}(x, y),$$

где

$$A_k(x, y) = \frac{\alpha_k}{d_k^2} [p_{k+1}(x) p_k(y) - p_k(x) p_{k+1}(y)].$$

Производя суммирование по k , получим

$$(x - y) \sum_{k=0}^n \frac{p_k(x) p_k(y)}{d_k^2} = A_n(x, y).$$

Эта формула, очевидно, эквивалентна (12), так как $\alpha_n = a_n/a_{n+1}$.

5. Свойства нулей. Докажем, что все нули x_i полинома $p_n(x)$ являются простыми и находятся на интервале (a, b) .

Пусть полином $p_n(x)$ при возрастании x меняет знак k раз на интервале (a, b) . Очевидно, что $0 \leq k \leq n$. Рассматриваемое свойство будет действительно иметь место, если доказать, что $k = n$. Положим

$$q_k(x) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \prod_{j=1}^k (x - x_j), & 0 < k \leq n. \end{cases}$$

Здесь x_j — точки, при переходе через которые полином $p_n(x)$ меняет знак. Произведение $p_n(x) q_k(x)$, очевидно, не меняет знака при $x \in (a, b)$. Поэтому

$$\int_a^b p_n(x) q_k(x) \rho(x) dx \neq 0.$$

Отсюда следует, что $k = n$, так как при $k < n$

$$\int_a^b p_n(x) q_k(x) \rho(x) dx = 0$$

в силу (5).

Можно доказать, что нули полиномов $p_n(x)$ и $p_{n+1}(x)$ перемежаются. Для доказательства рассмотрим частный случай формулы Дарбу — Кристоффеля, получающийся из (12) предельным переходом при $y \rightarrow x$:

$$\sum_{k=0}^n \frac{p_k^2(x)}{d_k^2} = \frac{1}{d_n^2} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} [p'_{n+1}(x) p_n(x) - p'_n(x) p_{n+1}(x)]. \quad (13)$$

Пусть x_j ($j = 1, 2, \dots, n+1$) — нули полинома $p_{n+1}(x)$. Согласно (13) знак произведения $p'_{n+1}(x) p_n(x)$ в нулях x_j полинома $p_{n+1}(x)$ не зависит от j . Однако при переходе от x_j к x_{j+1} первый сомножитель $p'_{n+1}(x)$ меняет знак. Значит, должен менять знак и второй сомножитель $p_n(x)$. Следовательно, $p_n(x)$ обращается в нуль по крайней мере один раз в некоторой точке интервала (x_j, x_{j+1}) . Так как мы имеем n интервалов (x_j, x_{j+1}) и каждый из них содержит хотя бы один из n нулей полинома $p_n(x)$, то очевидно, что между любыми двумя последовательными нулями полинома $p_{n+1}(x)$ содержится в точности один нуль полинома $p_n(x)$.

6. Свойства четности полиномов, вытекающие из четности весовой функции. Пусть $p_n(x)$ — полиномы, ортогональные на интервале $(-a, a)$ с весом $\rho(x)$, являющимся четной функцией. Тогда, заменяя в (3) x на $-x$, получим

$$\int_{-a}^a p_n(-x) p_m(-x) \rho(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

Так как вес $\rho(x)$ определяет ортогональные полиномы однозначно с точностью до нормировочного множителя, то $p_n(-x) = C_n p_n(x)$. Из сравнения коэффициентов при старших степенях находим $C_n = (-1)^n$. Отсюда, в частности, вытекают следующие свойства четности полиномов Эрмита и Лежандра:

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x), \quad P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

Последнее равенство является частным случаем равенства

$$P_n^{(\alpha\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x),$$

вытекающего из формулы Родрига для полиномов Якоби.

Мы показали, что полиномы $p_n(x)$, ортогональные на интервале $(-a, a)$ с весом $\rho(x)$, являющимся четной функцией, удовлетворяют соотношению

$$p_n(-x) = (-1)^n p_n(x).$$

Сравнивая коэффициенты при различных степенях x в этом равенстве, нетрудно убедиться в том, что при нечетном n полиномы $p_n(x)$ содержат только нечетные степени x , а при n четном — только четные, т. е.

$$p_{2n}(x) = s_n(x^2), \quad p_{2n+1}(x) = x t_n(x^2).$$

Здесь $s_n(x)$, $t_n(x)$ — некоторые полиномы от x степени n . Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a p_{2n}(x) p_{2m}(x) \rho(x) dx &= \int_{-a}^a s_n(x^2) s_m(x^2) \rho(x) dx = \\ &= 2 \int_0^a s_n(x^2) s_m(x^2) \rho(x) dx = \int_0^{a^2} s_n(\xi) s_m(\xi) \frac{\rho(\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}} d\xi. \end{aligned}$$

Поэтому полиномы $s_n(x) = p_{2n}(\sqrt{x})$ ортогональны на интервале $(0, a^2)$ с весом $\rho_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \rho(\sqrt{x})$. Совершенно аналогично,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a p_{2n+1}(x) p_{2m+1}(x) \rho(x) dx &= \int_{-a}^a x^2 t_n(x^2) t_m(x^2) \rho(x) dx = \\ &= \int_0^{a^2} t_n(\xi) t_m(\xi) \sqrt{\xi} \rho(\sqrt{\xi}) d\xi. \end{aligned}$$

Поэтому полиномы $t_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} p_{2n+1}(\sqrt{x})$ ортогональны на интервале $(0, a^2)$ с весом $\rho_2(x) = \sqrt{x} \rho(\sqrt{x})$. В частности,

$$H_{2n}(x) = C_n L_n^{-1/2}(x^2), \quad H_{2n+1}(x) = A_n x L_n^{1/2}(x^2).$$

Постоянные C_n , A_n можно найти, сравнивая в полученных соотношениях коэффициенты при старших степенях (см. табл. 1), откуда

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} n! L_n^{-1/2}(x^2), \quad (14)$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} n! x L_n^{1/2}(x^2). \quad (15)$$

Формулы (14), (15) позволяют найти значения полиномов Эрмита при $x=0$:

$$H_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{n!}, \quad H_{2n+1}(0) = 0.$$

7. Связь двух систем ортогональных полиномов, для которых отношение весов является рациональной функцией. Вычисление ортогональных полиномов $p_n(x)$ с помощью моментов C_k по формуле (6) является довольно громоздким при больших значениях n . Удобнее вычислять полиномы $p_n(x)$ с помощью рекуррентного соотношения (7), если коэффициенты рекуррентного соотношения заданы. Эти коэффициенты легко вычисляются лишь для узкого класса ортогональных полиномов. Поэтому большое

практическое значение могут иметь простые формулы, связывающие две системы полиномов, ортогональных относительно различных весов. Такие формулы можно получить, например, для случая, когда отношение весов является рациональной функцией *).

Пусть $\{p_n(x)\}$ и $\{\bar{p}_n(x)\}$ — системы полиномов, ортогональных на интервале (a, b) соответственно с весами $\rho(x)$ и $\bar{\rho}(x)$, причем $\bar{\rho}(x) = R(x)\rho(x)$, где $R(x)$ — рациональная функция:

$$R(x) = \prod_{j=1}^h (x - \alpha_j) / \prod_{j=1}^l (x - \beta_j).$$

Найдем связь полиномов $\bar{p}_n(x)$ и $p_n(x)$ сначала для случая $k=1$, $l=0$, т. е. $\bar{\rho}(x) = (x - \alpha_1)\rho(x)$. Разложим полином $\bar{p}_n(x)$ по полиномам $p_m(x)$:

$$\bar{p}_n(x) = \sum_{m=0}^n c_m p_m(x).$$

Здесь

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{d_m^2} \int_a^b \bar{p}_n(x) p_m(x) \rho(x) dx = \\ &= \frac{1}{d_m^2} \left[\int_a^b \bar{p}_n(x) \frac{p_m(x) - p_m(\alpha_1)}{x - \alpha_1} \bar{\rho}(x) dx + p_m(\alpha_1) \int_a^b \bar{p}_n(x) \rho(x) dx \right]. \end{aligned}$$

Так как функция $(p_m(x) - p_m(\alpha_1))/(x - \alpha_1)$ — полином степени $m-1 < n$, то в силу свойств ортогональности полиномов $\bar{p}_n(x)$ первый интеграл равен нулю. Отсюда

$$c_m = A_n \frac{p_m(\alpha_1)}{d_m^2},$$

где A_n — постоянная.

Следовательно,

$$\bar{p}_n(x) = A_n \sum_{m=0}^n \frac{p_m(\alpha_1) p_m(x)}{d_m^2}.$$

Если воспользоваться формулой Дарбу — Кристоффеля, то придем к следующему выражению:

$$\bar{p}_n(x) = D_n \frac{p_{n+1}(x) p_n(\alpha_1) - p_{n+1}(\alpha_1) p_n(x)}{x - \alpha_1}, \quad (16)$$

где D_n — постоянная.

*) См. Уваров В. Б. О связи системы полиномов, ортогональных относительно различных функций распределения. — ЖВМ и МФ, 1969, 9, № 6.

Рассмотрим теперь случай $k=0$, $l=1$, т. е. $\bar{\rho}(x) = \rho(x)/(x-\beta_1)$. Снова воспользуемся разложением полинома $\bar{p}_n(x)$ по полиномам $p_m(x)$:

$$\bar{p}_n(x) = \sum_{m=0}^n c_m p_m(x),$$

где

$$c_m = \frac{1}{d_m^2} \int_a^b \bar{p}_n(x) p_m(x) \rho(x) dx = \frac{1}{d_m^2} \int_a^b \bar{p}_n(x) (x - \beta_1) p_m(x) \bar{\rho}(x) dx.$$

Так как функция $(x - \beta_1)p_m(x)$ — полином степени $m+1$, то в силу свойств ортогональности полиномов $\bar{p}_n(x)$ коэффициенты c_m равны нулю при $m < n-1$, т. е.

$$\bar{p}_n(x) = c_{n-1} p_{n-1}(x) + c_n p_n(x).$$

Для определения коэффициентов c_{n-1} и c_n проинтегрируем это соотношение на интервале (a, b) с весом $\bar{\rho}(x) = \rho(x)/(x - \beta_1)$. При $n \geq 1$ интеграл от левой части соотношения равен нулю, т. е.

$$c_{n-1} q_{n-1}(\beta_1) + c_n q_n(\beta_1) = 0,$$

где

$$q_m(z) = \int_a^b \frac{p_m(x) \rho(x)}{x - z} dx.$$

Отсюда

$$c_n = D_n q_{n-1}(\beta_1), \quad c_{n-1} = -D_n q_n(\beta_1),$$

где D_n — постоянная.

Таким образом, при $\bar{\rho}(x) = \rho(x)/(x - \beta_1)$ имеем

$$\bar{p}_n(x) = D_n [p_n(x) q_{n-1}(\beta_1) - p_{n-1}(x) q_n(\beta_1)]. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда

$$\bar{\rho}(x) = \frac{\prod_{j=1}^h (x - \alpha_j)}{\prod_{j=1}^l (x - \beta_j)} \rho(x).$$

Если использовать формулы вида (16), (17), то по индукции, увеличивая k или l на единицу, можно получить, что

$$\bar{p}_n(x) = \frac{D_n}{\prod_{j=1}^h (x - \alpha_j)} \begin{vmatrix} q_{n-l}(\beta_1) & \dots & q_{n+h}(\beta_1) \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n-l}(\beta_l) & \dots & q_{n+h}(\beta_l) \\ p_{n-l}(\alpha_1) & \dots & p_{n+h}(\alpha_1) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n-l}(\alpha_h) & \dots & p_{n+h}(\alpha_h) \\ p_{n-l}(x) & \dots & p_{n+h}(x) \end{vmatrix},$$

где D_n — нормировочная постоянная. Напомним, что функции $q_m(z)$ и полиномы $p_m(z)$ удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению (см. п. 3).

§ 7. Качественное поведение и асимптотические свойства полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита

1. Качественное поведение. Для исследования качественного поведения решений дифференциального уравнения вида

$$[k(x)y']' + r(x)y = 0$$

на интервале, где $k(x) > 0$, $r(x) > 0$, удобно ввести вместо осциллирующей функции $y(x)$ функцию

$$v(x) = y^2(x) + a(x)[k(x)y'(x)]^2,$$

для которой множитель $a(x)$ подбирается таким образом, чтобы области монотонного поведения функции $v(x)$ были известны. Для этого вычислим производную $v'(x)$, используя дифференциальное уравнение для функции $y(x)$:

$$\begin{aligned} v'(x) &= 2yy' + a'(x)[k(x)y']^2 + 2a(x)k(x)y'[k(x)y']' = \\ &= a'(x)[k(x)y']^2 + 2yy'[1 - a(x)k(x)r(x)]. \end{aligned}$$

Если выбрать функцию $a(x)$ из условия $1 - a(x)k(x)r(x) = 0$, то

$$v'(x) = \left[\frac{1}{k(x)r(x)} \right]' [k(x)y']^2.$$

Так как $[k(x)y']^2 \geq 0$, то при таком выборе функции $a(x)$ области монотонного возрастания и убывания функции $v(x)$ будут совпадать с аналогичными областями для функции $1/(k(x)r(x))$. Отметим, что значения функций $v(x)$ и $y^2(x)$ равны друг другу в точках максимума функции $y^2(x)$. Это позволяет найти области, в которых последовательные максимумы функции $|y(x)|$ возрастают или убывают.

Применим приведенные выше соображения для выяснения качественного поведения классических ортогональных полиномов на интервале ортогональности (a, b) , где $\sigma(x) \geq 0$. Полиномы $y = y_n(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$[k(x)y']' + r(x)y = 0$$

при $k(x) = \sigma(x)\rho(x)$, $r(x) = \lambda\rho(x)$, $\lambda = \lambda_n$ ($n \neq 0$). Поэтому положим

$$v(x) = y^2(x) + \frac{\sigma(x)}{\lambda} [y'(x)]^2. \quad (1)$$

С помощью дифференциального уравнения для полинома $y(x)$ находим

$$v'(x) = \frac{\sigma'(x) - 2\tau(x)}{\lambda} [y'(x)]^2. \quad (2)$$

Из полученного выражения видно, что знак функции $v'(x)$ совпадает со знаком полинома первой степени $[\sigma'(x) - 2\tau(x)]/\lambda$. Значения функций $v(x)$ и $y^2(x)$ равны друг другу в точках, где $\sigma(x) = 0$, а также в точках максимума функции $y^2(x)$, в которых $y'(x) = 0$. Поэтому в области, где $v'(x) < 0$, последовательные

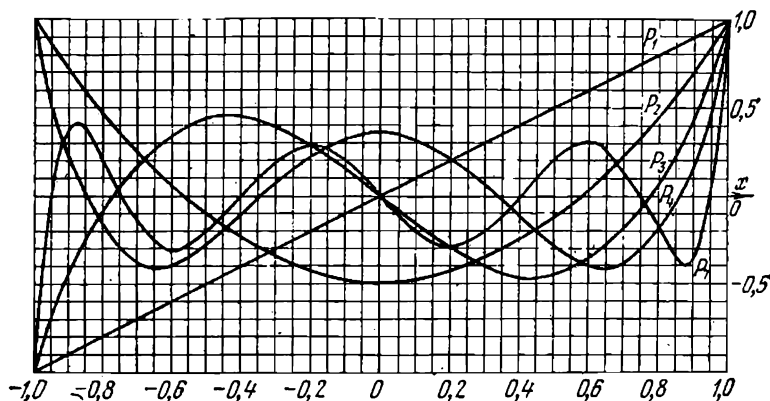


Рис. 1.

значения функции $|y(x)|$ в таких точках будут убывать, а в области, где $v'(x) > 0$, — возрастать.

Примеры. 1. Для полиномов Якоби $\sigma(x) = 0$ при $x = \pm 1$, $\sigma'(x) - 2\tau(x) = 2(\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 1)x)$. Пусть $\alpha + 1/2 > 0$, $\beta + 1/2 > 0$; тогда $\lambda_n \geq 1$. При $-1 < x < \tilde{x} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + 1}$ имеем

$$\sigma'(x) - 2\tau(x) < 0, \quad |P_n^{(\alpha, \beta)}(x)| < |P_n^{(\alpha, \beta)}(-1)|,$$

причем величины максимумов функции $|P_n^{(\alpha, \beta)}(x)|$ убывают с ростом x . Аналогично, при $\tilde{x} < x < 1$ величины последовательных максимумов функции $|P_n^{(\alpha, \beta)}(x)|$ будут возрастать.

Таким образом, при $\alpha + 1/2 > 0$, $\beta + 1/2 > 0$, $-1 < x < 1$ имеем

$$|P_n^{(\alpha, \beta)}(x)| < \max [|P_n^{(\alpha, \beta)}(-1)|, |P_n^{(\alpha, \beta)}(1)|].$$

В частности, для полиномов Лежандра $|P_n(x)| < 1$ при $-1 < x < 1$ (рис. 1).

2. Для полиномов Лагерра при $\alpha + 1/2 > 0$, $0 < x < \tilde{x} = \alpha + 1/2$ имеем $|L_n^\alpha(x)| < |L_n^\alpha(0)|$, причем величины последовательных максимумов $|L_n^\alpha(x)|$ убывают. Если же $x > \tilde{x}$, то величины последовательных максимумов функции $|L_n^\alpha(x)|$ возрастают (рис. 2 для $L_n^\alpha(x)$ при $\alpha = 0$).

3. Для полиномов Эрмита $\sigma'(x) - 2\tau(x) = 4x$. Поэтому величины последовательных максимумов $|H_n(x)|$ возрастают с ростом $|x|$.

2. Асимптотические свойства и некоторые оценки. Рассмотренные оценки передают качественное поведение полиномов $y = y_n(x)$ на интервале ортогональности. Получим теперь простые количественные оценки для полиномов Якоби и Лагерра, передающие более точно зависимость значений этих полиномов от n во внутренних точках интервала (a, b) при рассмотренных в п. 1 ограничениях на параметры. Соответствующие оценки для полиномов Эрмита можно получить, используя связь полиномов Эрмита с полиномами Лагерра (6.14) и (6.15)*.

Будем исходить из обобщенного уравнения гипергеометрического типа

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(x)}{\sigma(x)} u' + \frac{\tilde{\sigma}(x)}{\sigma^2(x)} u = 0, \quad (3)$$

которое с помощью преобразования $u = \varphi(x)y$ (см. § 1) переводится в уравнение для классических ортогональных полиномов

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0. \quad (4)$$

Напомним связь коэффициентов уравнений (3) и (4):

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}(x) &= \tau(x) - 2\pi(x), & \tilde{\sigma}(x) &= \lambda\sigma(x) - q(x), \\ q(x) &= \pi^2(x) + \pi(x)[\tilde{\tau}(x) - \sigma'(x)] + \pi'(x)\sigma(x). \end{aligned}$$

Здесь $\pi(x)$ — полином не выше первой степени, входящий в дифференциальное уравнение $\varphi'(x)/\varphi(x) = \pi(x)/\sigma(x)$, которое определяет функцию $\varphi(x)$. Уравнение (3) удобно переписать в виде

$$\sigma(x)u'' + \tilde{\tau}(x)u' + \left[\lambda - \frac{q(x)}{\sigma(x)}\right]u = 0. \quad (5)$$

Для оценки $u(x)$ рассмотрим функцию

$$w(x) = u^2(x) + \frac{\sigma(x)}{\lambda} [u'(x)]^2,$$

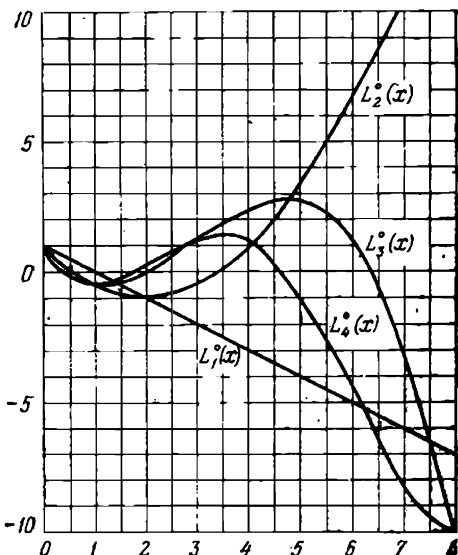


Рис. 2.

*) Оценки, которые будут получены в п. 2, легко, но менее строго, можно вывести с помощью квазиклассического приближения (см. § 19, п. 2).

аналогичную функции $v(x)$ (см. п. 1). Очевидно, что на интервале (a, b) для полиномов Якоби и Лагерра имеем

$$|u(x)| \leq \sqrt{w(x)}. \quad (6)$$

С помощью дифференциального уравнения (5) находим

$$w'(x) = \frac{\sigma'(x) - 2\tilde{\tau}(x)}{\lambda} [u'(x)]^2 + \frac{2q(x)}{\lambda\sigma(x)} u(x) u'(x).$$

Выражение для $w'(x)$ принимает простой вид, если полином $\pi(x)$ выбрать из условия $\sigma'(x) - 2\tilde{\tau}(x) = 0$, т. е. положить

$$\pi(x) = \frac{1}{4} [2\tau(x) - \sigma'(x)].$$

В этом случае

$$w'(x) = \frac{2q(x)}{\lambda\sigma(x)} u(x) u'(x). \quad (7)$$

Из очевидного неравенства $2ab \leq a^2 + b^2$ (a, b — произвольные числа) вытекает, что

$$2\sqrt{\frac{\sigma(x)}{\lambda}} uu' \leq u^2 + \frac{\sigma(x)}{\lambda} [u'(x)]^2 = w(x).$$

Поэтому, согласно (7),

$$w'(x) \leq \frac{|q(x)|}{\sqrt{\lambda}\sigma^{3/2}(x)} w(x).$$

Отсюда при $x \geq x_0$ имеем

$$w(x) = w(x_0) \exp \left\{ \int_{x_0}^x \frac{w'(s)}{w(s)} ds \right\} \leq w(x_0) \exp \left\{ \int_{x_0}^x \frac{|q(s)|}{\sqrt{\lambda}\sigma^{3/2}(s)} ds \right\} \quad (8)$$

и, следовательно, в силу (6)

$$|u(x)| \leq \sqrt{w(x_0)} \exp \left\{ \int_{x_0}^x \frac{|q(s)|}{2\sqrt{\lambda}\sigma^{3/2}(s)} ds \right\}. \quad (9)$$

Воспользуемся оценкой (9) для полиномов Якоби. В силу соотношения симметрии

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(x)$$

достаточно получить оценку для полиномов Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ при $-1 < x \leq 0$. Для таких значений x имеем

$$\sigma(x) = 1 - x^2 \geq 1 + x,$$

откуда

$$\frac{|q(x)|}{2\sqrt{\lambda}\sigma^{3/2}(x)} \leq \frac{A_1}{2\sqrt{\lambda}(1+x)^{3/2}},$$

где $A_1 = \max_{-1 < x < 0} |q(x)|$. Поэтому в силу (9) при $-1 < x_0 \leq x \leq 0$ получим

$$|u(x)| \leq \sqrt{w(x_0)} \exp \left\{ \frac{A_1}{\sqrt{\lambda(1+x_0)}} \right\}.$$

Как видно из полученной оценки, мы не можем положить $x_0 = -1$. Выберем значение x_0 из условия $\sqrt{\lambda(1+x_0)} = c$, где c — постоянная, не зависящая от n (так как $\lambda = \lambda_n$ зависит от n , то и величина x_0 также зависит от n). В этом случае

$$|u(x)| \leq A_2 \sqrt{w(x_0)}, \quad (10)$$

где A_2 — постоянная, не зависящая от n .

Для оценки величины $w(x_0)$ найдем связь функции $w(x)$ с полным Якоби $y(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Имеем $u(x) = \varphi(x)y(x)$, где $\varphi(x)$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\pi(x)}{\sigma(x)}, \quad \pi(x) = \frac{1}{4} [2\tau(x) - \sigma'(x)].$$

Так как

$$\frac{\pi(x)}{\sigma(x)} = \frac{1}{2} \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} - \frac{1}{4} \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} = \frac{1}{2} \frac{(\sigma\rho)'}{\sigma\rho} - \frac{1}{4} \frac{\sigma'}{\sigma},$$

то

$$\varphi(x) = [\sigma(x)\rho^2(x)]^{1/4}, \quad u(x) = [\sigma(x)\rho^2(x)]^{1/4}y(x).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} w(x) &= u^2(x) + \frac{\sigma(x)}{\lambda} [u'(x)]^2 = \\ &= \sqrt{\sigma(x)\rho^2(x)} \left[y^2(x) + \left(\frac{2\tau(x) - \sigma'(x)}{4\sqrt{\lambda\sigma(x)}} y + \sqrt{\frac{\sigma(x)}{\lambda}} y' \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

При оценке $w(x)$ мы будем опираться на очевидную оценку (см. (1))

$$\sqrt{\frac{\sigma(x)}{\lambda}} |y'(x)| \leq \sqrt{v(x)}$$

и на доказанные в п. 1 при $-1 < x < \tilde{x} = (\beta - \alpha)/(\alpha + \beta + 1)$ неравенства

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leq |y(-1)|, \quad v(x) \leq v(-1) = y^2(-1), \\ 0 &\leq 2\tau(x) - \sigma'(x) < 2\tau(-1) - \sigma'(-1). \end{aligned}$$

Так как $\sqrt{\lambda\sigma(x_0)} \geq \sqrt{\lambda(1+x_0)} = c$, то в силу этих оценок из формулы (11) при $x_0 < \tilde{x}$ имеем

$$w(x_0) \leq A_3 \sqrt{\sigma(x_0)\rho^2(x_0)} y^2(-1),$$

где

$$A_3 = 1 + \left(\frac{2\tau(-1) - \sigma'(-1)}{4c} + 1 \right)^2.$$

Условие $x_0 < x$ будет автоматически выполняться при $n \geq 1$, если положим $c < \sqrt{1 + \tilde{x}}$, так как $\lambda = \lambda_n \geq 1$ при $n \geq 1$. С помощью соотношения

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z) z^a} = 1, \quad |\arg z| \leq \pi - \delta$$

(см. Дополнение А, (26)), формулы (5.11) и равенства $\sqrt{\lambda(1+x_0)} = C$, определяющего величину x_0 , нетрудно убедиться в том, что величина $\sqrt{n}[\sigma(x_0)\rho^2(x_0)]^{1/4}|y(-1)|$ равномерно ограничена относительно n . Поэтому из оценки для $w(x_0)$ и формулы (10) вытекает при $\alpha + 1/2 > 0$, $\beta + 1/2 > 0$ следующая оценка для полиномов Якоби:

$$|u(x)| = (1-x)^{\alpha/2+1/4}(1+x)^{\beta/2+1/4}|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)| \leq A/\sqrt{n}, \quad (12)$$

где A — постоянная, не зависящая от n .

Неравенство (12) было выведено при $x \geq x_0$. Покажем, что оно останется справедливым и при $-1 \leq x < x_0$. Действительно, функция $\varphi(x) = [\sigma(x)\rho^2(x)]^{1/4}$ при $-1 \leq x < \tilde{x}$ монотонно возрастает в силу того, что

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\pi(x)}{\sigma(x)}, \quad \text{где } \pi(x) = 2\tau(x) - \sigma'(x) > 0, \quad \sigma(x) > 0.$$

Поэтому при $-1 \leq x < x_0$ имеем

$$[\sigma(x)\rho^2(x)]^{1/4}|y(x)| \leq [\sigma(x_0)\rho^2(x_0)]^{1/4}|y(-1)|.$$

Величина $\sqrt{n}[\sigma(x_0)\rho^2(x_0)]^{1/4}|y(-1)|$, как указывалось ранее, равномерно ограничена по n . Поэтому неравенство (12) справедливо при $-1 \leq x \leq 0$. С помощью соотношения

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x)$$

легко убедиться, что неравенство (12) останется справедливым и при $0 \leq x \leq 1$.

Так как для полиномов Якоби

$$d_n^3 = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{n! (2n+\alpha+\beta+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1)},$$

то с помощью соотношения

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z) z^a} = 1, \quad |\arg z| \leq \pi - \delta$$

можно получить, что величина nd_n^3 ограничена. Поэтому оценку (12) для полиномов Якоби можно переписать в виде

$$(1-x)^{\alpha/2+1/4}(1+x)^{\beta/2+1/4} \frac{|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|}{d_n} \leq c_1, \quad (13)$$

где c_1 — постоянная, не зависящая от n .

Тем же методом, что и для полиномов Якоби, с помощью неравенства (8), полагая $\sqrt{\lambda x_0} = c$, можно прийти к следующей оценке для полиномов Лагерра $L_n^\alpha(x)$ при $0 \leq x \leq 1$, $\alpha + 1/2 > 0$:

$$\sqrt{\frac{w(x)}{d_n^2}} \leq \frac{c_2}{n^{1/4}}, \quad (14)$$

$$x^{\alpha/2+1/4} e^{-x/2} \left| \frac{L_n^\alpha(x)}{d_n} \right| \leq \sqrt{\frac{w(x)}{d_n^2}} \leq \frac{c_2}{n^{1/4}}, \quad (15)$$

где c_2 — постоянная, не зависящая от n .

Оценка (9) для полиномов Лагерра груба при $x \rightarrow \infty$, так как правая часть в равенстве (8) экспоненциально растет при $x \rightarrow +\infty$, в то время как левая часть экспоненциально убывает. Улучшить оценку можно с помощью равенства (7) следующим образом. Так как

$$\sqrt{\frac{\sigma(x)}{\lambda}} |u'(x)| \leq \sqrt{w(x)},$$

то

$$w'(x) \leq \frac{2 |q(x)|}{\sqrt{\lambda} \sigma^{3/2}(x)} |u(x)| \sqrt{w(x)},$$

т. е.

$$\frac{d}{dx} \sqrt{w(x)} \leq \frac{|q(x) u(x)|}{\sqrt{\lambda} \sigma^{3/2}(x)} = \frac{|q(x)| \sqrt{\rho(x)} |y(x)|}{\sqrt{\lambda} \sigma^{5/4}(x)}. \quad (16)$$

Отсюда при $x > 1$ имеем

$$\sqrt{w(x)} \leq \sqrt{w(1)} + \int_1^x \frac{|q(s)| \sqrt{\rho(s)} |y(s)|}{\sqrt{\lambda} \sigma^{5/4}(s)} ds.$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\sqrt{w(x)} \leq \sqrt{w(1)} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\int_1^x \frac{q^2(s) ds}{\sigma^{5/2}(s)} \int_0^\infty y^2(s) \rho(s) ds},$$

откуда

$$\begin{aligned} [\sigma(x) \rho^2(x)]^{1/4} \frac{|y(x)|}{d_n} = \frac{|u(x)|}{d_n} &\leq \sqrt{\frac{w(x)}{d_n^2}} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{w(1)}{d_n^2}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\int_1^x \frac{q^2(s) ds}{\sigma^{5/2}(s)}}. \end{aligned} \quad (17)$$

В силу неравенства (14) имеем

$$\sqrt{\frac{w(1)}{d_n^2}} \leq \frac{c_2}{n^{1/4}}. \quad (18)$$

Так как $q(x)$ — полином второй степени, $\sigma(x) = x$, то найдется такая постоянная c_3 , не зависящая от n , что

$$\sqrt{\int_1^x \frac{q^2(s) ds}{\sigma^{5/2}(s)}} \leq c_3 x^{5/4}. \quad (19)$$

Подставляя в (17) оценки (18) и (19), при $x > 1$, $\alpha + 1/2 > 0$ получим

$$x^{\alpha/2+1/4} e^{-x/2} \frac{|L_n^\alpha(x)|}{d_n} \leq \frac{c_2}{n^{1/4}} + \frac{c_3 x^{5/4}}{n^{1/2}}. \quad (20)$$

Нетрудно проверить, что эта оценка справедлива при всех значениях $x \geq 0$ (см. (15)).

Интересно отметить, что неравенство (20) справедливо и при $\alpha + 1/2 = 0$, так как для полиномов Лагерра в этом случае

$$q(x) = \frac{x^2}{4} - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)x + \frac{1}{4}\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right) \Big|_{\alpha=-1/2} = \frac{x^2}{4}.$$

Поэтому в (16) точка $x=0$ не является особой, и при интегрировании (16) в качестве нижнего предела можно взять $x=0$, что сразу приводит к оценке (20).

Оценку для полиномов Эрмита можно получить из (20) при $\alpha = \pm 1/2$, используя формулы (6.14), (6.15):

$$e^{-x^2/2} \frac{|H_n(x)|}{d_n} \leq \frac{c_2}{n^{1/4}} + \frac{c_3 x^{5/2}}{n^{1/2}}. \quad (21)$$

Замечание. Если $x \in [x_1, x_2]$, где $a < x_1 < x_2 < b$, то из оценок (19)–(21) вытекают более простые оценки

$$\frac{|P_n^{(\alpha, \beta)}(x)|}{d_n} \leq c_1, \quad \alpha + \frac{1}{2} > 0, \quad \beta + \frac{1}{2} > 0, \quad (13a)$$

$$\frac{|L_n^\alpha(x)|}{d_n} \leq \frac{c_2}{n^{1/4}}, \quad \alpha + \frac{1}{2} > 0, \quad (20a)$$

$$\frac{|H_n(x)|}{d_n} \leq \frac{c_3}{n^{1/4}}, \quad (21a)$$

где постоянные c_1, c_2, c_3 , очевидно, могут зависеть от x_1, x_2 и параметров α, β .

Оценки (13a) и (20a) остаются справедливыми при любых вещественных значениях α, β . Докажем, например, справедливость неравенства (13a), или, что то же самое, неравенства

$$\sqrt{n} |P_n^{(\alpha, \beta)}(x)| \leq c, \quad (12a)$$

где c — постоянная.

Доказательство проведем методом математической индукции, предполагая справедливость неравенства (12a) для полиномов

$P_n^{(\alpha+1, \beta+1)}(x)$ и $P_n^{(\alpha+2, \beta+2)}(x)$. Из дифференциального уравнения для полиномов Якоби и формулы дифференцирования (5.6) имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{n} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= -\frac{\sqrt{n}}{\lambda_n} \left[\tau(x) \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + \sigma(x) \frac{d^2}{dx^2} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right] = \\ &= -\frac{\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x}{2\sqrt{n}} P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) - \\ &\quad - \frac{1-x^2}{4} \left(1 + \frac{\alpha + \beta + 2}{n} \right) \sqrt{n} P_{n-2}^{(\alpha+2, \beta+2)}(x). \end{aligned}$$

В силу справедливости (12а) для полиномов $P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x)$ и $P_{n-2}^{(\alpha+2, \beta+2)}(x)$ приходим к неравенству вида (12а) для полинома $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Аналогично доказывается справедливость неравенства (20а) при любых вещественных значениях параметра α .

§ 8. Разложение функций в ряды по классическим ортогональным полиномам

1. Общие соображения. Для приложений имеет большое значение вопрос о нахождении для функции $f(x)$ таких постоянных a_n , которые обеспечивают минимум *среднего квадратичного отклонения*

$$m_N = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{n=0}^N a_n y_n(x) \right]^2 \rho(x) dx,$$

где $y_n(x)$ — функции, ортогональные с весом $\rho(x) \geq 0$ на интервале (a, b) , а функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_a^b f^2(x) \rho(x) dx < \infty.$$

В силу ортогональности функций $y_n(x)$ имеем

$$\begin{aligned} m_N &= \int_a^b f^2(x) \rho(x) dx - 2 \sum_{n=0}^N a_n \int_a^b f(x) y_n(x) \rho(x) dx + \\ &\quad + \sum_{n=0}^N a_n^2 \int_a^b y_n^2(x) \rho(x) dx. \end{aligned}$$

Полагая

$$d_n^2 = \int_a^b y_n^2(x) \rho(x) dx, \quad c_n = \frac{1}{d_n^2} \int_a^b f(x) y_n(x) \rho(x) dx,$$

получим

$$m_N = \int_a^b f^2(x) \rho(x) dx + \sum_{n=0}^N (a_n - c_n)^2 d_n^2 - \sum_{n=0}^N c_n^2 d_n^2.$$

Отсюда видно, что минимум величины m_N достигается при $a_n = c_n$, т. е.

$$\Delta_N = \min m_N = \int_a^b f^2(x) \rho(x) dx - \sum_{n=0}^N c_n^2 d_n^2.$$

Так как постоянные c_n не зависят от N , то последовательность $\{\Delta_N\}$ является монотонно невозрастающей и ограниченной снизу ($\Delta_N \geq 0$). Поэтому существует неотрицательный предел $\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_N$

и, следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 d_n^2$ сходится, причем

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 d_n^2 \leq \int_a^b f^2(x) \rho(x) dx. \quad (1)$$

Это неравенство называется *неравенством Бесселя*.

Если $\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_N = 0$, то

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x), \quad (2)$$

где

$$c_n = \frac{1}{d_n^2} \int_a^b f(x) y_n(x) \rho(x) dx, \quad (3)$$

а ряд в правой части (2) сходится в среднем на интервале (a, b) с весом $\rho(x)$, т. е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b \left[f(x) - \sum_{n=0}^N c_n y_n(x) \right]^2 \rho(x) dx = 0. \quad (4)$$

В этом случае соотношение (1) имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 d_n^2 = \int_a^b f^2(x) \rho(x) dx.$$

Это равенство называется *равенством Парсеваля*. Ряд в правой части (2) называется *рядом Фурье разложения функции $f(x)$ по функциям $y_n(x)$* , а величины c_n — *коэффициентами Фурье* этого разложения.

Если соотношение (4) имеет место для произвольной функции $f(x)$ из какого-либо класса функций, удовлетворяющих условию квадратичной интегрируемости

$$\int_a^b f^2(x) \rho(x) dx < \infty, \quad (5)$$

то система функций $\{y_n(x)\}$ называется *полной* в этом классе

функций. Необходимым признаком полноты системы функций $\{y_n(x)\}$ является, как нетрудно проверить, свойство *замкнутости* этой системы, заключающееся в том, что из равенств

$$\int_a^b f(x) y_n(x) \rho(x) dx = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

вытекает равенство $f(x) \equiv 0$ при $x \in (a, b)$ для любых функций $f(x)$, удовлетворяющих условию (5). Таким образом, основой для рассмотрения вопроса о возможности разложения (2) функции $f(x)$ по ортогональной системе функций $\{y_n(x)\}$ является замкнутость этой системы.

2. Замкнутость системы ортогональных полиномов. Докажем, что система полиномов $\{p_n(x)\}$ будет замкнутой для непрерывных функций $f(x)$, если функция $\rho(x)$ непрерывна на интервале (a, b) и существует такая постоянная $c_0 > 0$, что

$$\int_a^b e^{c_0|x|} \rho(x) dx < \infty. \quad (7)$$

Для доказательства рассмотрим непрерывную на интервале (a, b) функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям (5), (6). Рассмотрим также функцию комплексной переменной

$$F(z) = \int_a^b e^{izx} f(x) \rho(x) dx \quad (8)$$

в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq c$ при $c < c_0/2$. Покажем, что в этой полосе функция $F(z)$ является аналитической. Для этого достаточно доказать равномерную сходимость интеграла (8). Так как в рассматриваемой полосе

$$|e^{izx} f(x) \rho(x)| \leq e^{|\operatorname{Im} z| x} |f(x)| \rho(x) \leq e^{c_0|x|/2} |f(x)| \rho(x),$$

то интеграл $F(z)$ будет сходиться равномерно в этой полосе, если мы покажем, что интеграл

$$\int_a^b e^{c_0|x|/2} |f(x)| \rho(x) dx$$

сходится. Сходимость последнего интеграла вытекает из неравенства Коши — Буняковского

$$\int_a^b e^{c_0|x|/2} |f(x)| \rho(x) dx \leq \sqrt{\int_a^b e^{c_0|x|} \rho(x) dx \int_a^b f^2(x) \rho(x) dx} < \infty.$$

По теореме об аналитичности интеграла, зависящего от параметра, функция $F(z)$ будет аналитична в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq c$ и, в частности, аналитична в круге $|z| \leq c$. Поэтому ее можно разложить

в ряд Тейлора:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{(k)}(0) \frac{z^k}{k!}, \quad |z| \leq c. \quad (9)$$

Пользуясь аналогичными оценками, нетрудно доказать равномерную сходимость в той же области интегралов, получающихся в результате дифференцирования подынтегрального выражения по z . Следовательно, при вычислении производных $F^{(k)}(0)$ можно производить дифференцирование под знаком интеграла, откуда

$$F^{(k)}(0) = \int_a^b (ix)^k f(x) \rho(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots$$

Раскладывая $(ix)^k$ по полиномам $p_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots, k$) и используя (6), получим

$$\begin{aligned} F^{(k)}(0) &= \int_a^b (ix)^k f(x) \rho(x) dx = \int_a^b \left[\sum_{n=0}^k c_{kn} p_n(x) \right] f(x) \rho(x) dx = \\ &= \sum_{n=0}^k c_{kn} \int_a^b f(x) p_n(x) \rho(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Так как $F^{(k)}(0) = 0$, то из разложения (9) вытекает, что в круге $|z| \leq c$ функция $F(z)$ равна нулю. По принципу аналитического продолжения $F(z) = 0$ при любых z , принадлежащих области аналитичности функции $F(z)$. В частности, $F(z) = 0$ при любых вещественных значениях z .

Очевидно, что формулу (8) для $F(z)$ можно записать также в виде

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} f(x) \rho(x) dx, \quad (10)$$

если положить $f(x)\rho(x) = 0$ при $x < a$ и $x > b$.

Выражение (10) для $F(z)$ при вещественных значениях z представляет собой коэффициент разложения функции $f(x)\rho(x)$ в интеграл Фурье. Согласно равенству Парсеваля для интеграла Фурье имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(x) \rho(x)]^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(z)|^2 dz = 0.$$

Отсюда в силу непрерывности функции $f(x)$ и положительности веса $\rho(x)$ при $x \in (a, b)$ получим $f(x) = 0$ на интервале (a, b) , т. е. система ортогональных полиномов $\{p_n(x)\}$ действительно является замкнутой на интервале (a, b) .

Используя явный вид функции $\rho(x)$ для классических ортогональных полиномов, легко показать, что перечисленные выше условия, наложенные на функцию $\rho(x)$, для классических ортогональных полиномов выполняются. Для полиномов Лагерра достаточно выбрать $c_0 < 1$, а для полиномов Якоби и Эрмита условие (7) будет выполнено при любом $c_0 > 0$. Поэтому система классических ортогональных полиномов является замкнутой на интервале (a, b) для непрерывных функций $f(x)$, удовлетворяющих условию (5).

3. Теоремы разложения. Опираясь на замкнутость системы классических ортогональных полиномов и оценки из § 7, легко найти простейшие условия, обеспечивающие справедливость разложения (2) произвольной функции $f(x)$. Докажем, что имеет место следующая теорема разложения.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $a < x < b$ и имеет кусочно непрерывную производную на этом интервале, а функция $\rho(x)$ является весом для классических ортогональных полиномов $y_n(x)$. Если интегралы

$$\int_a^b f^2(x) \rho(x) dx, \quad \int_a^b [f'(x)]^2 \sigma(x) \rho(x) dx$$

сходятся, то на интервале (a, b) справедливо разложение (2) функции $f(x)$ по полиномам $y_n(x)$, причем ряд (2) сходится равномерно по x на любом отрезке $[x_1, x_2] \subset (a, b)$.

Доказательство. Оценим предварительно коэффициенты Фурье c_n . Производные классических ортогональных полиномов, как было показано в § 5, являются классическими полиномами, ортогональными на интервале (a, b) с весом $\sigma(x)\rho(x)$. Поэтому, согласно неравенству Бесселя, для коэффициентов разложения $\tilde{c}_n$ функции $f'(x)$ по полиномам $y'_n(x)$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n^2 \tilde{d}_n^2 \leq \int_a^b [f'(x)]^2 \sigma(x) \rho(x) dx < \infty,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{c}_n &= \frac{1}{\tilde{d}_n^2} \int_a^b f'(x) y'_n(x) \sigma(x) \rho(x) dx, \\ \tilde{d}_n^2 &= \int_a^b [y'_n(x)]^2 \sigma(x) \rho(x) dx. \end{aligned} \tag{11}$$

Найдем связь коэффициентов $\tilde{c}_n$ и c_n . С помощью дифференциального уравнения

$$(\sigma y'_n)' + \lambda_n \rho y_n = 0$$

и интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned}
 & \int_{x_1}^{x_2} f'(x) y'_n(x) \sigma(x) \rho(x) dx = \\
 & = f(x) y'_n(x) \sigma(x) \rho(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} f(x) [\sigma(x) \rho(x) y'_n(x)]' dx = \\
 & = f(x) y'_n(x) \sigma(x) \rho(x) \Big|_{x_1}^{x_2} + \lambda_n \int_{x_1}^{x_2} f(x) y_n(x) \rho(x) dx, \\
 & a < x_1 < x_2 < b.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Интегралы в (12) имеют конечные пределы при $x_1 \rightarrow a$ или $x_2 \rightarrow b$ в силу условий теоремы и неравенства Коши — Буняковского. Поэтому существуют конечные пределы

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow a} f(x) y'_n(x) \sigma(x) \rho(x) &= A_n, \\
 \lim_{x \rightarrow b} f(x) y'_n(x) \sigma(x) \rho(x) &= B_n.
 \end{aligned}$$

Докажем, что $B_n = 0$. Предположим, что $B_n \neq 0$ при некотором значении n . Тогда при $x \rightarrow b$

$$f(x) \approx \frac{B_n}{y'_n(x) \sigma(x) \rho(x)}. \tag{13}$$

Из явного вида функции $\rho(x)$ и соотношения (13) вытекает, что при $B_n \neq 0$ функция $f(x)$ не удовлетворяет условию сходимости интеграла

$$\int_a^b f^2(x) \rho(x) dx.$$

Действительно, если, например, b — конечное число, то при $x \rightarrow b$ (см. § 5, п. 1)

$$\sigma(x) \sim b - x, \quad \rho(x) \sim (b - x)^\alpha, \quad \alpha > -1,$$

откуда

$$f(x) \sim \frac{1}{(b - x)^{\alpha+1}}, \quad f^2(x) \rho(x) \sim \frac{1}{(b - x)^{\alpha+2}}.$$

Отсюда видно, что при $\alpha > -1$ интеграл $\int_a^b f^2(x) \rho(x) dx$ расходится.

Аналогично производится исследование поведения функции $f^2(x) \rho(x)$ при $x \rightarrow b$, когда $b = +\infty$. Тем самым мы доказали, что $B_n = 0$ при любых значениях n . Исследование поведения функ-

ции $f^2(x)\rho(x)$ при $x \rightarrow a$, подобное проведенному выше, приводит к равенству $A_n = 0$. Поэтому, переходя в (12) к пределу при $x_1 \rightarrow a$ и $x_2 \rightarrow b$, получим

$$\int_a^b f'(x) y'_n(x) \sigma(x) \rho(x) dx = \lambda_n \int_a^b f(x) y_n(x) \rho(x) dx.$$

В частности, при $f(x) = y_n(x)$ имеем $\tilde{d}_n^2 = \lambda_n d_n^2$, откуда $\tilde{c}_n = c_n$.

Так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n^2 \tilde{d}_n^2$ сходится, то должен сходиться также ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 d_n^2 \lambda_n.$$

Докажем теперь, что интересующий нас ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x)$ сходится равномерно при $a < x_1 \leq x \leq x_2 < b$ для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$. Используя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N_1}^{N_2} c_n y_n(x) \right| &\leq \sum_{n=N_1}^{N_2} |c_n d_n \sqrt{\lambda_n}| \frac{|y_n(x)|}{\sqrt{\lambda_n} d_n} \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{n=N_1}^{N_2} c_n^2 d_n^2 \lambda_n} \sqrt{\sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{y_n^2(x)}{\lambda_n d_n^2}} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 d_n^2 \lambda_n} \sqrt{\sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{y_n^2(x)}{\lambda_n d_n^2}}. \end{aligned} \quad (14)$$

С помощью признака Коши равномерной сходимости рядов и оценки (14) легко убедиться в том, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x)$ будет равномерно сходиться при $a < x_1 \leq x \leq x_2 < b$, если в рассматриваемой области изменения переменной x равномерно сходится

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^2(x)}{\lambda_n d_n^2}.$$

Для оценки величины $y_n^2(x)/(\lambda_n d_n^2)$ удобно воспользоваться линейной заменой независимой переменной, с помощью которой вес $\rho(x)$ и сами полиномы $y_n(x)$ приводятся к каноническому виду (см. § 5). При такой замене у величины $y_n^2(x)/(\lambda_n d_n^2)$ может появиться лишь постоянный множитель, не зависящий

от n . Поэтому при исследовании сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^2(x)}{\lambda_n d_n^2}$ достаточно ограничиться случаями, когда $y_n(x)$ является полиномом Якоби, Лагерра или Эрмита. С помощью оценок, полученных в п. 2 § 7, докажем равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^2(x)}{\lambda_n d_n^2} \quad \text{при } a < x_1 \leq x \leq x_2 < b.$$

Проведем соответствующие оценки на примере полиномов Лагерра $y_n(x) = L_n^\alpha(x)$. В этом случае $a=0$, $b=\infty$, $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$. Согласно неравенству (7.20) при $x \in (0, \infty)$ имеем

$$\frac{1}{d_n} |L_n^\alpha(x)| \leq \frac{1}{n^{1/4}} (c_1 + c_2 x^{5/4}) x^{-\alpha/2 - 1/4} e^{x/2},$$

где c_1, c_2 — некоторые постоянные,

$$\frac{y_n^2(x)}{\lambda_n d_n^2} \leq \frac{1}{n^{3/2}} (c_1 + c_2 x^{5/4})^2 x^{-\alpha - 1/2} e^x. \quad (15)$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится, то из неравенства (15) непосред-

ственно вытекает равномерная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^2(x)}{\lambda_n d_n^2}$ для $y_n(x) = L_n^\alpha(x)$ в области $0 < x_1 \leq x \leq x_2 < \infty$. В остальных случаях доказательство проводится аналогично.

Таким образом, мы видим, что в силу оценок (14) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x)$ равномерно сходится при $a < x_1 \leq x \leq x_2 < b$ и является, следовательно, непрерывной функцией на интервале (a, b) в силу произвольности чисел x_1, x_2 . Докажем теперь, что этот ряд сходится к $f(x)$.

Рассмотрим функцию

$$\bar{f}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k y_k(x).$$

Найдем коэффициенты Фурье ее разложения в ряд по полиномам $y_n(x)$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b \bar{f}(x) y_n(x) \rho(x) dx &= \int_a^b y_n(x) \rho(x) \left[f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k y_k(x) \right] dx = \\ &= c_n d_n^2 - \sum_{k=0}^{N-1} c_k \int_a^b y_n(x) y_k(x) \rho(x) dx - I_N, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$I_N = \int_a^b y_n(x) \rho(x) \left[\sum_{k=N}^{\infty} c_k y_k(x) \right] dx.$$

Так как

$$\int_a^b y_n(x) y_k(x) \rho(x) dx = 0, \quad k \neq n,$$

то при $N > n$ получаем

$$\int_a^b \bar{f}(x) y_n(x) \rho(x) dx = -I_N. \quad (17)$$

Оценим величину I_N с помощью неравенства (14), полагая $N_1 = N$, $N_2 = \infty$:

$$|I_N| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 d_k^2 \lambda_k} \int_a^b |y_n(x)| \rho(x) \sqrt{\sum_{k=N}^{\infty} \frac{y_k^2(x)}{\lambda_k d_k^2}} dx.$$

Если воспользоваться оценками типа (15), то можно показать, что $I_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Переходя в (17) к пределу, получим

$$\int_a^b \bar{f}(x) y_n(x) \rho(x) dx = 0.$$

Так как это равенство справедливо при любом n и функция $\bar{f}(x)$ непрерывна при $a < x < b$, то в силу замкнутости системы классических ортогональных полиномов $\bar{f}(x) = 0$ при $a < x < b$, что и доказывает справедливость разложения

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x).$$

Замечание 1. Мы доказали теорему разложения для функций $f(x)$, удовлетворяющих некоторым не слишком ограничительным требованиям. Если усложнить способ доказательства, то можно доказать более общую теорему разложения. Для этого дифференциальное уравнение для классических ортогональных полиномов удобно предварительно привести к простейшему виду (см. § 19, п. 1):

$$u''(s) + [\lambda - q(s)]u(s) = 0, \quad 0 \leq s \leq s_0. \quad (18)$$

При этом собственные функции исходного дифференциального уравнения перейдут в собственные функции $u = u_n(s)$ уравнения (18). В результате теорему разложения по классическим ортогональным полиномам можно заменить следующей теоремой о разложении по функциям $u_n(s)$ *).

Теорема 2 (теорема равносходимости). Если для некоторой функции $f(s)$ интеграл $\int_0^{s_0} f^2(s) ds$ сходится, то разложение функции $f(s)$ по собственным функциям дифференциального уравнения (18) в интервале $0 < s < s_0$ сходится или расходится одновременно с разложением в тригонометрический ряд Фурье на этом интервале (если $s_0 = \infty$, то ряд Фурье следует заменить интегралом Фурье).

*) Изложение этого вопроса можно найти в книге: Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. — М.: Наука, 1970.

Замечание 2. Если при разложении функции $f(x)$ в ряд по классическим ортогональным полиномам $y_n(x)$ можно ограничиться сходимостью в среднем, то, как известно из курса математического анализа, такая сходимость для функций $f(x)$, удовлетворяющих условию (5), будет вытекать непосредственно из свойства замкнутости системы $\{y_n(x)\}$ при условии, что всюду под определенными интегралами подразумеваются интегралы Лебега.

§ 9. Задачи на собственные значения, приводящие к классическим ортогональным полиномам

1. Постановка задачи. Рассмотрим решение уравнений гипергеометрического типа

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0 \quad (1)$$

при различных значениях λ для случая, когда функция $\rho(x)$, являющаяся решением уравнения $(\sigma\rho)' = \tau\rho$, ограничена на некотором интервале (a, b) и удовлетворяет на этом интервале условиям, налагаемым на функцию $\rho(x)$ для классических ортогональных полиномов.

Как было показано ранее, простейшими решениями уравнения (1) являются классические ортогональные полиномы $y_n(x)$, которые соответствуют значениям

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'', \quad n = 0, 1, \dots$$

Оказывается, что классические ортогональные полиномы выделяются среди всей совокупности решений уравнения (1), соответствующих различным значениям λ , не только своей простотой, но также и тем, что они являются единственно возможными нетривиальными решениями уравнения (1), удовлетворяющими требованиям ограниченности и квадратичной интегрируемости функции $y(x)\sqrt{\rho(x)}$ на интервале (a, b) .

Это свойство классических ортогональных полиномов широко используется при решении задач квантовой механики, связанных с нахождением уровней энергии и волновых функций частицы, движущейся в стационарном силовом поле. Если внешние силы удерживают частицу в ограниченной области пространства, так что она не может уйти на бесконечность, то говорят о связанных состояниях частицы. Чтобы найти волновые функции $\psi(r)$, описывающие эти состояния, и соответствующие им уровни энергии E , решают *стационарное уравнение Шредингера*

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta\psi + U\psi = E\psi,$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, μ — масса частицы, $U = U(r)$ — потенциальная энергия, r — радиус-вектор.

При этом волновая функция $\psi(r)$ должна быть ограничена при любых конечных значениях $|r|$ и должна удовлетворять условию нормировки

$$\int_V |\psi(r)|^2 dV = 1. \quad (2)$$

Уравнение Шредингера для многих задач квантовой механики, которые можно решить аналитически с помощью метода разделения переменных, приводит к обобщенным уравнениям гипергеометрического типа (см. § 1)

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(x)}{\sigma(x)} u' + \frac{\tilde{\sigma}(x)}{\sigma^2(x)} u = 0, \quad a < x < b. \quad (3)$$

Энергия E входит в коэффициенты уравнения (3) как параметр. При этом предполагается, что $\sigma(x) > 0$ для $x \in (a, b)$, а на концах интервала (a, b) , если они не находятся на бесконечности, полином $\sigma(x)$ равен нулю. Так как уравнение (3) не имеет особенностей при любом $x \in (a, b)$, то функция $u(x)$ будет непрерывной дифференцируемой функцией на интервале (a, b) . Поэтому она может иметь особенности лишь при $x \rightarrow a$ и $x \rightarrow b$. Для формулировки дополнительных ограничений, налагаемых на функцию $u(x)$ на концах интервала (a, b) , запишем уравнение (3) в самосопряженном виде:

$$(\sigma \tilde{\rho} u')' + \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma} \tilde{\rho} u = 0. \quad (4)$$

Здесь функция $\tilde{\rho}(x) > 0$ является решением дифференциального уравнения

$$(\sigma \tilde{\rho})' = \tilde{\tau} \tilde{\rho}. \quad (5)$$

Требование ограниченности волновой функции $\psi(r)$ и условие нормировки (2) выполняются, если для уравнения (4) задача будет поставлена следующим образом: найти все значения энергии E , при которых на интервале (a, b) уравнение (4) имеет нетривиальные решения $u(x)$ такие, что функции $u(x) \sqrt{\tilde{\rho}(x)}$ ограничены и квадратично интегрируемы на интервале (a, b) , т. е. $|u(x) \sqrt{\tilde{\rho}(x)}| < c$ (c — некоторая постоянная) и

$$\int_a^b |u(x)|^2 \tilde{\rho}(x) dx < \infty$$

(если a, b конечны, то последнее условие может быть опущено).

Как было показано в § 1, уравнение (3) с помощью замены $u = \varphi(x)y$ может быть приведено к уравнению гипергеометрического типа

$$\frac{d}{dx} \left[\sigma \rho \frac{dy}{dx} \right] + \lambda \rho y = 0, \quad (6)$$

где функция $\rho(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(\sigma\rho)' = \tau\rho$, а функция $\tau(x)$ связана с функциями $\tilde{\tau}(x)$ и $\varphi(x)$ соотношением

$$\tau = \tilde{\tau} + 2 \frac{\varphi'}{\varphi} \sigma.$$

Из этого соотношения и уравнения (5) следует, что $\rho(x) = \tilde{\rho}(x)\varphi^2(x)$. Поэтому требования к функции $u(x) \sqrt{\tilde{\rho}(x)}$ переходят в перечисленные выше требования к функции $y(x) \sqrt{\rho(x)}$. Значения λ , при которых поставленная задача имеет нетривиальные решения, называются *собственными значениями*, а соответствующие функции $y(x, \lambda)$ *собственными функциями*.

Как было показано в § 1, уравнение (3) может быть приведено к (6) несколькими способами. Для большинства задач квантовой механики, допускающих аналитическое решение, среди возможных способов приведения уравнения (3) к (6) существует такой, при котором функция $\rho(x)$ является ограниченной на интервале (a, b) и удовлетворяет на этом интервале условиям, налагаемым на функцию $\rho(x)$ для классических ортогональных полиномов.

З а м е ч а н и е. Для выполнения условий, налагаемых на функцию $\rho(x)$ для классических ортогональных полиномов, необходимо, чтобы полином $\tau(x)$ обращался в нуль в некоторой точке интервала (a, b) и производная этого полинома при $\sigma(x) > 0$ была отрицательной, т. е. $\tau' < 0$.

Действительно, как видно из формулы Родрига, $y_1(x) = B_1 \tau(x)$, и поэтому полином $\tau(x)$ имеет корень на интервале (a, b) . Кроме того, по формуле (5.20)

$$d_{11}^2 = \lambda_1 d_1^2 = -\tau' d_1^2.$$

Так как $\rho(x) > 0$, $\sigma(x) > 0$ при $x \in (a, b)$, то

$$d_1^2 = \int_a^b y_1^2(x) \rho(x) dx > 0, \quad d_{11}^2 = \int_a^b [y_1'(x)]^2 \sigma(x) \rho(x) dx > 0.$$

Поэтому $\tau' < 0$.

Указанное замечание позволяет упростить выбор способа приведения уравнения (3) к (6), который сводится в результате к такому выбору постоянной k и знака перед корнем в (1.11) для $\pi(x)$, чтобы функция $\tau(x) = \tilde{\tau}(x) + 2\pi(x)$ удовлетворяла перечисленным требованиям.

2. Классические ортогональные полиномы как собственные функции некоторых задач на собственные значения. Рассмотрим задачу на собственные значения, сформулированную в п. 1.

Т е о р е м а. Пусть функция $y = y(x)$ — решение уравнения (1), а функция $\rho(x)$, являющаяся решением уравнения $(\sigma\rho)' = \tau\rho$, ограничена на некотором интервале (a, b) и удовлетворяет на этом интервале условиям, налагаемым на функцию $\rho(x)$ для

классических ортогональных полиномов. Тогда нетривиальные решения уравнения гипергеометрического типа, удовлетворяющие требованиям ограниченности и квадратичной интегрируемости функции $y(x)\sqrt{\rho(x)}$ на интервале (a, b) , существуют лишь при

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'', \quad n = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

и имеют вид

$$y(x, \lambda_n) = y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\sigma^n(x) \rho(x)], \quad (8)$$

т. е. являются классическими полиномами, ортогональными с весом $\rho(x)$ на интервале (a, b) (если a, b конечны, то условие квадратичной интегрируемости может быть опущено).

Доказательство. Непосредственно проверяется, что классические ортогональные полиномы $y_n(x)$ при $\lambda = \lambda_n$ являются нетривиальными решениями поставленной задачи.

Покажем, что других решений задача не имеет. Предположим противное, т. е. что при некотором значении λ существует нетривиальное решение $y = y(x, \lambda)$, не являющееся классическим ортогональным полиномом. Имеем

$$(\sigma y')' + \lambda \rho y = 0, \quad (\sigma y_n')' + \lambda_n \rho y_n = 0.$$

Умножим первое уравнение на $y_n(x)$, второе на $y(x, \lambda)$. После этого вычтем из первого равенства второе и проинтегрируем от x_1 до x_2 при $a < x_1 < x_2 < b$ (заметим, что на отрезке $[x_1, x_2]$ уравнения для $y(x, \lambda)$ и $y_n(x)$ не имеют особенностей). В результате получим

$$(\lambda - \lambda_n) \int_{x_1}^{x_2} y(x, \lambda) y_n(x) \rho(x) dx + \sigma(x) \rho(x) W(y_n, y) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0, \quad (9)$$

где

$$W(y_n, y) = y_n(x) y'(x, \lambda) - y_n'(x) y(x, \lambda)$$

есть вронскиан. При $\lambda \neq \lambda_n$ ($n = 0, 1, \dots$) из (9) вытекает, что

$$\lim_{x \rightarrow a} \sigma(x) \rho(x) W(y_n, y) = c_1, \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow b} \sigma(x) \rho(x) W(y_n, y) = c_2, \quad (11)$$

где c_1, c_2 — постоянные.

Для доказательства достаточно в (9) перейти к пределу при $x_1 \rightarrow a$ (или $x_2 \rightarrow b$) и воспользоваться сходимостью интеграла

$$\int_a^b y(x, \lambda) y_n(x) \rho(x) dx.$$

Сходимость этого интеграла вытекает из неравенства Коши — Буняковского

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} y(x, \lambda) y_n(x) \rho(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} y^2(x, \lambda) \rho(x) dx \int_{x_1}^{x_2} y_n^2(x) \rho(x) dx}$$

и сходимости интегралов

$$\int_a^b y^2(x, \lambda) \rho(x) dx, \quad \int_a^b y_n^2(x) \rho(x) dx.$$

Соотношения (10), (11) имеют место и при $\lambda = \lambda_n$, если положить $c_1 = c_2 = c$, так как из (9) видно, что при $\lambda = \lambda_n$

$$\sigma(x) \rho(x) W[y_n(x), y(x, \lambda)] = \text{const.}$$

Покажем, что постоянная c_2 в (11) должна равняться нулю. Воспользуемся очевидным равенством

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{y(x, \lambda)}{y_n(x)} \right] = \frac{W[y_n(x), y(x, \lambda)]}{y_n^2(x)},$$

откуда

$$y(x, \lambda) = y_n(x) \left[\frac{y(x_0, \lambda)}{y_n(x_0)} + \int_{x_0}^x \frac{W[y_n(s), y(s, \lambda)]}{y_n^2(s)} ds \right]. \quad (12)$$

Выберем точку $x_0 < b$ таким образом, чтобы она лежала правее всех нулей полинома $y_n(x)$. При исследовании поведения функции $y(x, \lambda)$, когда $x \rightarrow b$, воспользуемся явным видом функции $\rho(x)$ (см. § 5, п. 1). Возможны следующие три случая:

1) b — конечное число и при $x \rightarrow b$

$$\sigma(x) \sim b - x, \quad \rho(x) \sim (b - x)^\alpha, \quad \alpha \geq 0;$$

2) $b = +\infty$ и при $x \rightarrow +\infty$

$$\sigma(x) \sim x, \quad \rho(x) \sim x^\alpha e^{\beta x}, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta < 0;$$

3) $b = +\infty$ и при $x \rightarrow +\infty$

$$\sigma(x) = 1, \quad \rho(x) \sim e^{\alpha x^2 + \beta x}, \quad \alpha < 0.$$

Из предельного соотношения (11) при $c_2 \neq 0$ следует, что для подынтегрального выражения в (12) при $s \rightarrow b$ справедливо соотношение

$$\frac{W[y_n(s), y(s, \lambda)]}{y_n^2(s)} \sim \frac{c_2}{\sigma(s) \rho(s) y_n^2(s)}.$$

Поэтому при $x \rightarrow b$ в случае 1) имеем

$$\int_{x_0}^x \frac{W[y_n(s), y(s, \lambda)]}{y_n^2(s)} ds \sim \begin{cases} \frac{1}{(b-x)^\alpha}, & \alpha > 0, \\ \ln(b-x), & \alpha = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\sqrt{\rho(x)} y(x, \lambda) \sim \begin{cases} (b-x)^{-\alpha/2}, & \alpha > 0, \\ \ln(b-x), & \alpha = 0, \end{cases}$$

т. е. функция $\sqrt{\rho(x)} y(x, \lambda)$ не удовлетворяет условию ограниченности. Поэтому в первом случае следует положить $c_2 = 0$.

В случаях 2), 3) следует воспользоваться при $s \rightarrow +\infty$ асимптотическим поведением входящих в (12) функций:

$$y_n(s) \sim s^n;$$

$$\sigma(s) \rho(s) y_n^2(s) \sim \begin{cases} s^{\alpha+2n+1} e^{\beta s}, & \rho(s) = s^\alpha e^{\beta s}, \quad \beta < 0, \\ s^{2n} e^{\alpha s^2 + \beta s}, & \rho(s) = e^{\alpha s^2 + \beta s}, \quad \alpha < 0. \end{cases}$$

Если воспользоваться правилом Лопиталья, то при $x \rightarrow +\infty$, $c_2 \neq 0$ получим соответственно

$$\int_{x_0}^x \frac{W[y_n(s), y(s, \lambda)]}{y_n^2(s)} ds \sim \begin{cases} \frac{1}{x^{\alpha+2n+1} e^{\beta x}}, \\ \frac{1}{x^{2n+1} e^{\alpha x^2 + \beta x}}; \end{cases}$$

$$\sqrt{\rho(x)} y(x, \lambda) \sim \begin{cases} x^{-(\alpha/2+n+1)} e^{-\beta x/2}, \\ x^{-(n+1)} e^{-(\alpha x^2 + \beta x)/2}. \end{cases}$$

В обоих случаях функция $\sqrt{\rho(x)} y(x, \lambda)$ не удовлетворяет условию квадратичной интегрируемости на интервале (a, b) . Следовательно, и в этих случаях $c_2 = 0$. Исследования поведения функции $\sqrt{\rho(x)} y(x, \lambda)$ при $x \rightarrow a$, подобные проведенным выше, приводят к равенству $c_1 = 0$.

Таким образом, мы показали, что при любых значениях n

$$\lim_{x \rightarrow a} \sigma(x) \rho(x) W(y_n, y) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow b} \sigma(x) \rho(x) W(y_n, y) = 0.$$

Эти соотношения возможны лишь при $y(x, \lambda) = 0$. Действительно, если $\lambda \neq \lambda_n$ ($n = 0, 1, \dots$), то из (9) при $x_1 \rightarrow a$, $x_2 \rightarrow b$ получим

$$\int_a^b y(x, \lambda) y_n(x) \rho(x) dx = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

В силу замкнутости системы классических ортогональных полиномов это равенство возможно лишь при $y(x, \lambda) = 0$ для $x \in (a, b)$.

Если же $\lambda = \lambda_n$, то в силу (10) имеем $W[y_n(x), y(x, \lambda)] = 0$, т. е. решения $y_n(x)$ и $y(x, \lambda)$ оказываются линейно зависимыми, что противоречит исходному предположению. Теорема доказана.

3. Задачи квантовой механики, приводящие к классическим ортогональным полиномам. Проиллюстрируем применение доказанной теоремы для решения ряда задач квантовой механики, когда уравнение Шредингера может быть приведено к обобщенному уравнению гипергеометрического типа.

Пример 1. Рассмотрим задачу о нахождении собственных значений энергии E и собственных функций для *линейного гармонического осциллятора*, т. е. для частицы, движущейся в поле с потенциальной энергией $U = m\omega^2 x^2/2$ (m — масса частицы, x — отклонение от положения равновесия, ω — круговая частота). Эта задача играет важную роль в квантовой механике, квантовой электродинамике, при рассмотрении колебаний в кристаллах и молекулах.

Уравнение Шредингера для волновой функции $\psi(x)$ гармонического осциллятора имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \psi = E\psi, \quad -\infty < x < \infty.$$

Функция $\psi(x)$ должна быть ограниченной и удовлетворять условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x) dx = 1.$$

Для решения поставленной задачи вместо координаты x и энергии E удобно ввести безразмерные переменные ξ , ϵ :

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \xi = \alpha \xi, \quad E = \hbar\omega\epsilon.$$

Тогда получим уравнение

$$\psi'' + (2\epsilon - \xi^2)\psi = 0$$

(штрих означает дифференцирование по ξ). Это уравнение является обобщенным уравнением гипергеометрического типа, для которого $\sigma(\xi) = 1$, $\tau(\xi) = 0$, $\tilde{\sigma}(\xi) = 2\epsilon - \xi^2$.

Поставленная задача принадлежит к типу задач, рассмотренному в п. 1. Действительно, в данном случае $\tilde{\rho}(\xi) = 1$. Поэтому требование квадратичной интегрируемости функции $\sqrt{\tilde{\rho}(\xi)}\psi(\xi)$ вытекает из условия нормировки. При решении данной задачи воспользуемся рассмотренным выше методом. Приведем уравнение для функции $\psi(\xi)$ к уравнению гипергеометрического типа, полагая $\psi(\xi) = \varphi(\xi)y(\xi)$, где $\varphi(\xi)$ является решением уравнения

$$\varphi'/\varphi = \pi(\xi)/\sigma(\xi).$$

Для полинома $\pi(\xi)$ в данном случае получаем выражение

$$\pi(\xi) = \pm\sqrt{k - 2\epsilon + \xi^2}.$$

Постоянная k должна выбираться из условия, чтобы подкорен-

ное выражение имело кратный корень, т. е. $k = 2\varepsilon$. Из двух возможных видов полинома $\pi(\xi) = \pm \xi$ следует выбрать такой, для которого функция

$$\tau(\xi) = \tilde{\tau}(\xi) + 2\pi(\xi)$$

имеет отрицательную производную. Условия, налагаемые на функцию $\tau(\xi)$ будут выполнены, если выбрать $\tau(\xi) = -2\xi$, что соответствует

$$\pi(\xi) = -\xi, \quad \varphi(\xi) = e^{-\xi^2/2}, \quad \lambda = 2\varepsilon - 1, \quad \rho(\xi) = e^{-\xi^2}$$

Собственные значения энергии определяются из уравнения

$$\lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2} \sigma'' = 0;$$

что дает $\varepsilon = \varepsilon_n = n + 1/2$, т. е.

$$E = E_n = \hbar\omega(n + 1/2), \quad n = 0, 1,$$

Собственные функции $y_n(\xi)$ находим по формуле

$$y_n(\xi) = B_n e^{\xi^2/2} \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-\xi^2}).$$

С точностью до множителя они совпадают с полиномами Эрмита $H_n(\xi)$. Для волновой функции $\psi(x)$ получаем выражение

$$\psi_n(x) = C_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad x = \alpha\xi, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

Постоянную C_n можно найти из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(x) dx = 1.$$

Пример 2. Рассмотрим модельную задачу о нахождении собственных значений энергии E и собственных функций для одномерного уравнения Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + U(x) \psi = E\psi, \quad -\infty < x < \infty,$$

которое описывает движение частицы в поле

$$U(x) = -\frac{U_0}{\cosh^2 \alpha x}, \quad U_0 > 0$$

(потенциал Пешля — Теллера, см. Флюгге З. Задачи по квантовой механике, т. 1 — М.: Мир, 1974). Функция $\psi(x)$ должна быть ограниченной и удовлетворять условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x) dx = 1.$$

Так как $U(x) < 0$, то возможны лишь значения $E < 0$. Для упрощения вида уравнения воспользуемся заменой $s = \text{th } \alpha x$ *). В результате приходим к обобщенному уравнению гипергеометрического типа

$$\Phi'' + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \Phi' + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \Phi = 0, \quad \Phi(s) = \psi(x),$$

для которого $a = -1$, $b = 1$,

$$\sigma(s) = 1 - s^2, \quad \tilde{\tau}(s) = -2s, \quad \tilde{\sigma}(s) = -\beta^2 + \gamma^2(1 - s^2),$$

$$\beta^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2 \alpha^2}, \quad \gamma^2 = \frac{2mU_0}{\hbar^2 \alpha^2}, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0.$$

Поставленная задача принадлежит к рассмотренному типу задач. В данном случае $\tilde{\rho}(s) = 1$. Требование квадратичной интегрируемости функции $\sqrt{\tilde{\rho}(s)}\Phi(s)$ вытекает из условия нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x) dx = 1$. Действительно,

$$\int_{-1}^1 \Phi^2(s) ds = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi^2(x)}{\text{ch}^2 \alpha x} dx < \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x) dx = \alpha.$$

При решении задачи воспользуемся рассмотренным выше методом. Приведем уравнение для функции $\Phi(s)$ к уравнению гипергеометрического типа

$$\sigma(s)y'' + \tau(s)y' + \lambda y = 0,$$

полагая $\Phi(s) = \varphi(s)y(s)$, где $\varphi(s)$ является решением уравнения

$$\varphi'/\varphi = \pi(s)/\sigma(s).$$

Для полинома $\pi(s)$ в данном случае получаем выражение

$$\pi(s) = \pm \sqrt{\beta^2 - \gamma^2(1 - s^2) + k(1 - s^2)}.$$

Постоянная k должна выбираться из условия, чтобы подкоренное выражение имело кратный корень, т. е. возможны значения $k = \gamma^2$ или $k = \gamma^2 - \beta^2$. В первом случае $\pi(s) = \pm \beta$, во втором $\pi(s) = \pm \beta s$. Из четырех возможных видов полинома $\pi(s)$ следует выбрать такой, для которого функция $\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s)$

*) Во многих модельных задачах клаптовой механики, допускающих решение в аналитической форме, уравнение Шредингера приводится к уравнению с рациональными коэффициентами с помощью естественно возникающей замены независимой переменной, которая связана с видом $U(x)$. При этом должно быть соблюдено требование взаимно однозначного соответствия между старой и новой переменными. Так как в данном случае потенциал выражается простым образом через гиперболические функции, то в качестве новой независимой переменной естественно выбрать одну из переменных $\text{sh } \alpha x$, $\text{th } \alpha x$, $e^{\pm \alpha x}$. Мы остановились на замене $s = \text{th } \alpha x$.

имеет отрицательную производную и корень на интервале $(-1, 1)$. Этим условиям удовлетворяет

$$\tau(s) = -2(1 + \beta)s,$$

что соответствует

$$\begin{aligned}\pi(s) &= -\beta s, & \varphi(s) &= (1 - s^2)^{\beta/2}, \\ \lambda &= \gamma^2 - \beta^2 - \beta, & \rho(s) &= (1 - s^2)^\beta.\end{aligned}$$

Собственные значения энергии определяются из уравнения

$$\lambda + n\tau' + \frac{1}{2}n(n+1)\sigma'' = 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

которое приводит к равенству

$$\gamma^2 - \beta^2 - \beta = 2n(1 + \beta) + n(n - 1).$$

Отсюда получаем собственные значения энергии

$$E_n = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} \beta_n^2, \quad \beta_n = -n - \frac{1}{2} + \sqrt{\gamma^2 + \frac{1}{4}}, \quad \beta_n > 0.$$

Условие $\beta_n > 0$ может быть выполнено лишь при

$$n < \sqrt{\gamma^2 + 1/4} - 1/2,$$

т. е. возможно лишь конечное число собственных значений энергии.

Собственные функции $y_n(s)$ в данном случае имеют вид $y_n(s) = P_n^{(\beta, \beta)}(s)$ при $\beta = \beta_n$. Для волновых функций $\psi_n(x)$ получаем выражения

$$\psi_n(x) = C_n (1 - s^2)^{\beta/2} P_n^{(\beta, \beta)}(s), \quad \beta = \beta_n, \quad s = \operatorname{th} \alpha x.$$

Здесь C_n — нормировочная постоянная, которая определяется из условия нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(x) dx = 1$.

Другие примеры решения квантовомеханических задач указанным способом будут рассмотрены в § 26.

§ 10. Сферические функции

1. Решение уравнения Лапласа в сферических координатах. Важным классом специальных функций, тесно связанных с классическими ортогональными полиномами, являются сферические функции. Они возникают, например, при решении уравнения Лапласа в сферических координатах. Так как непрерывные решения уравнения Лапласа называют *гармоническими функциями*, то сферические функции называют также *сферическими гармониками*.

Найдем ограниченные решения уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в сферических координатах r, θ, φ . Как известно, в этом случае

$$\Delta u = \Delta_r u + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} u,$$

где

$$\Delta_r u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

$$\Delta_{\theta, \varphi} u = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Будем искать частные решения методом разделения переменных, полагая $u = R(r)Y(\theta, \varphi)$. Подставляя это выражение в уравнение Лапласа, получим

$$\frac{r^2 \Delta_r R(r)}{R(r)} = - \frac{\Delta_{\theta, \varphi} Y(\theta, \varphi)}{Y(\theta, \varphi)}.$$

Так как левая часть равенства не зависит от переменных θ, φ , а правая часть не зависит от r , то

$$\frac{r^2 \Delta_r R}{R} = - \frac{\Delta_{\theta, \varphi} Y(\theta, \varphi)}{Y(\theta, \varphi)} = \mu,$$

где μ — некоторая постоянная. Для определения функций $R(r)$, $Y(\theta, \varphi)$ имеем уравнения

$$(r^2 R')' = \mu R, \quad (1)$$

$$\Delta_{\theta, \varphi} Y + \mu Y = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) будем решать также методом разделения переменных, полагая $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$. Это дает

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \mu \sin^2 \theta = - \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \nu,$$

где ν — постоянная. Таким образом, для функций $\Phi(\varphi)$ и $\Theta(\theta)$ мы получили уравнения

$$\Phi'' + \nu \Phi = 0, \quad (3)$$

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + (\mu \sin^2 \theta - \nu) \Theta = 0. \quad (4)$$

Из требования однозначности функции $\Phi(\varphi)$ вытекает условие периодичности $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. При этом условии решение уравнения (3) возможно лишь в случае, когда $\nu = m^2$, где m — целое число. Мы получаем следующие два линейно независимых решения уравнения (3):

$$\Phi_m(\varphi) = C_m e^{im\varphi}, \quad \Phi_{-m}(\varphi) = C_{-m} e^{-im\varphi},$$

где C_m — нормировочная постоянная.

Функции $\Phi_m(\varphi) = C_m e^{im\varphi}$ ($m = 0, \pm 1, \dots$) удовлетворяют условиям ортогональности

$$\int_0^{2\pi} \Phi_m^*(\varphi) \Phi_{m'}(\varphi) d\varphi = A_m \delta_{mm'},$$

где

$$A_m = 2\pi |C_m|^2, \quad \delta_{mm'} = \begin{cases} 1, & m' = m, \\ 0, & m' \neq m. \end{cases}$$

Удобно выбрать $A_m = 1$, что дает $C_m = 1/\sqrt{2\pi}$, т. е.

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \dots$$

Перейдем к решению уравнения (4) при $\nu = m^2$. Если положить $\cos \theta = x$, то получим обобщенное уравнение гипергеометрического типа (см. § 1)

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right] + \left(\mu - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \Theta = 0, \quad (5)$$

для которого $\sigma(x) = 1-x^2$, $\tilde{\tau}(x) = -2x$, $\tilde{\sigma}(x) = \mu(1-x^2) - m^2$.

Задача об определении ограниченного решения уравнения (5) на интервале $(-1, 1)$ принадлежит к типу задач на собственные значения, рассмотренных в § 9, так как в данном случае $\sigma(x)|_{x=\pm 1} = 0$, $\rho(x) = 1$. Поэтому при решении данной задачи мы воспользуемся методом, рассмотренным в § 9.

Приведем уравнение (5) к уравнению гипергеометрического типа, полагая $\Theta(x) = \varphi(x)y(x)$, где $\varphi(x)$ — решение дифференциального уравнения $\varphi'/\varphi = \pi(x)/\sigma(x)$ ($\pi(x)$ — полином не выше первой степени). Для полинома $\pi(x)$ в данном случае получаем выражение

$$\pi(x) = \pm \sqrt{k(1-x^2) + m^2 - \mu(1-x^2)}.$$

Постоянная k должна выбираться так, чтобы подкоренное выражение имело кратный корень. В результате получаем следующие возможные виды полинома $\pi(x)$:

$$\pi(x) = \begin{cases} \pm m, & k = \mu, \\ \pm mx, & k = \mu - m^2. \end{cases}$$

Из всех видов $\pi(x)$ следует выбрать такой, для которого функция

$$\tau(x) = \tilde{\tau}(x) + 2\pi(x)$$

имеет отрицательную производную и корень на интервале $(-1, 1)$. При $m \geq 0$ этим условиям удовлетворяет функция

$$\tau(x) = -2(m+1)x,$$

что соответствует

$$\pi(x) = -mx, \quad \varphi(x) = (1-x^2)^{m,2},$$

$$\lambda = \mu - m(m+1), \quad \rho(x) = (1-x^2)^m.$$

Собственные значения μ определяются из уравнения

$$\lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2} \sigma'' = 0,$$

что дает $\mu = \mu_n = l(l+1)$, где $l = n + m$ ($n = 0, 1, \dots$). Функции $y_n(x)$ в данном случае имеют вид

$$y_n(x) = \frac{B_{nm}}{(1-x^2)^m} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^{n+m}]$$

и совпадают с точностью до множителя с полиномами Якоби $P_n^{(m,m)}(x)$. Так как $n = l - m$, где l — целое число, удовлетворяющее условию $l \geq m$, то при $m \geq 0$ имеем

$$\Theta(x) \equiv \Theta_{lm}(x) = C_{lm} (1-x^2)^{m/2} P_{l-m}^{(m,m)}(x), \quad (6)$$

где C_{lm} — нормировочная постоянная. Функции $\Theta_{lm}(x)$, очевидно, удовлетворяют условиям ортогональности, вытекающим из свойств ортогональности полиномов Якоби:

$$\int_{-1}^1 \Theta_{lm}(x) \Theta_{l'm}(x) dx = A_{lm} \delta_{ll'},$$

где

$$A_{lm} = C_{lm}^2 \int_{-1}^1 [P_{l-m}^{(m,m)}(x)]^2 (1-x^2)^m dx.$$

Удобно выбрать *) $A_{lm} = 1$, что дает

$$C_{lm} = \frac{1}{2^{m|l|}} \sqrt{\frac{2l+1}{2} (l-m)! (l+m)!}.$$

Приведем несколько различных видов записи для функции $\Theta_{lm}(x)$ при $m \geq 0$, вытекающих из свойств полиномов Якоби. Из формулы дифференцирования (5.6) для полиномов Якоби следует, что

$$P_{l-m}^{(m,m)}(x) = \frac{2^{m|l|}}{(l+m)!} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x),$$

где $P_l(x) = P_l^{(0,0)}(x)$ — полином Лежандра.

*) Выбор знака у постоянной C_{lm} не однозначен. Мы следуем нормировке, принятой в [2].

Таким образом, при $m \geq 0$

$$\Theta_{lm}(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(x),$$

где

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}.$$

Функции $P_l^m(x)$ называются *присоединенными функциями Лежандра 1-го рода*.

Явное выражение для функций $\Theta_{lm}(x)$ можно получить, если воспользоваться формулами Родрига для $P_l(x)$ и $P_{l-m}^{(m,m)}(x)$:

$$\Theta_{lm}(x) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (1-x^2)^l, \quad (7)$$

$$\Theta_{lm}(x) = \frac{(-1)^{l-m}}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} (1-x^2)^{-m/2} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (1-x^2)^l. \quad (8)$$

Доопределим функции $\Theta_{lm}(x)$ при $m < 0$ с помощью этих соотношений; тогда получим

$$\Theta_{l,-m}(x) = (-1)^m \Theta_{lm}(x). \quad (9)$$

Отсюда видно, что функции $\Theta_{lm}(x)$ при $m < 0$ будут по-прежнему являться решениями уравнения (5). Таким образом, уравнение (2) при $\mu = l(l+1)$ имеет ограниченные однозначные решения

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \Theta_{lm}(\cos \theta), \quad -l \leq m \leq l. \quad (10)$$

Функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ называются *сферическими функциями порядка l* .

Приведем явные выражения сферических функций для некоторых наиболее простых случаев:

$$Y_{l0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta), \quad (11)$$

$$Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta,$$

$$Y_{1,\pm 1}(\theta, \varphi) = \pm \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cos \theta e^{\pm i\varphi}. \quad (12)$$

Легко проверить, что функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ удовлетворяют следующим соотношениям ортогональности:

$$\int_{\Omega} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (13)$$

Здесь интегрирование производится по телесному углу

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Из (9), (10) видно, что

$$Y_{lm}^*(\theta, \varphi) = \Theta_{lm}(\cos \theta) \Phi_{-m}(\varphi) = (-1)^m Y_{l, -m}(\theta, \varphi). \quad (14)$$

Таким образом, мы получили в явном виде функции $Y(\theta, \varphi)$, определяющие зависимость от углов ограниченного решения $u = R(r)Y(\theta, \varphi)$ уравнения Лапласа.

Для определения функции $R(r)$ получаем из (1) уравнение Эйлера

$$r^2 R'' + 2rR' - l(l+1)R = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$R(r) = c_1 r^l + c_2 r^{-l-1},$$

где c_1, c_2 — постоянные. Следовательно, частными решениями уравнения Лапласа являются функции $r^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$ и $\frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi)$, первые из которых применяются при решении внутренних, а вторые — при решении внешних краевых задач для шаровой области. Эти функции называются *шаровыми функциями*.

З а м е ч а н и е. Другой подход к изучению сферических функций, основанный на использовании представлений группы вращений, рассмотрен, например, в [6]. Этот подход находит применение при изучении теории момента количества движения в квантовой механике.

2. Свойства сферических функций. Рассмотрим основные свойства функций $Y_{lm}(\theta, \varphi)$.

1) Из рекуррентного соотношения для полиномов Якоби и связи функций $\Theta_{lm}(x)$ с полиномами Якоби $P_{l-m}^{(m, m)}(x)$ при $m \geq 0$ легко выводится рекуррентное соотношение для функций $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ по индексу l :

$$\cos \theta \cdot Y_{lm} = \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{4(l+1)^2 - 1}} Y_{l+1, m} + \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{4l^2 - 1}} Y_{l-1, m}.$$

Полученная формула сохраняет свой вид при $m < 0$, в чем нетрудно убедиться с помощью (14).

2) Дифференцируя соотношение (7), получим формулу дифференцирования

$$\frac{d\Theta_{lm}}{dx} = -\frac{mx}{1-x^2} \Theta_{lm} + \sqrt{\frac{l(l+1) - m(m+1)}{1-x^2}} \Theta_{l, m+1}.$$

Заменяя здесь m на $-m$ и используя (9), можно получить другую формулу дифференцирования

$$\frac{d\Theta_{lm}}{dx} = \frac{mx}{1-x^2} \Theta_{lm} - \sqrt{\frac{l(l-1) - m(m-1)}{1-x^2}} \Theta_{l, m-1}.$$

В формулах дифференцирования следует полагать $\Theta_{lm}(x) = 0$ при $m = \pm(l+1)$.

Приравнивая два выражения для $d\Theta_{lm}/dx$, приходим к рекуррентному соотношению для функций $\Theta_{lm}(x)$ по индексу m :

$$\frac{2mx}{\sqrt{1-x^2}} \Theta_{lm} = \sqrt{l(l+1)-m(m+1)} \Theta_{l,m+1} - \sqrt{l(l+1)-m(m-1)} \Theta_{l,m-1}.$$

Если использовать (10), можно получить формулы дифференцирования для сферических функций. Так как

$$\frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} = -\sin \theta \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{d\Theta_{lm}(x)}{dx} \Big|_{x=\cos \theta},$$

то формулы дифференцирования для $\Theta_{lm}(x)$ можно переписать в виде

$$e^{\pm i\varphi} \left(\mp \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} + m \operatorname{ctg} \theta \cdot Y_{lm} \right) = \sqrt{l(l+1)-m(m \pm 1)} Y_{l,m \pm 1}. \quad (15)$$

В (15) следует полагать $Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0$ при $m = \pm(l+1)$.

Из явного вида сферических функций вытекает также формула дифференцирования по углу φ :

$$\frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} = im Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (16)$$

3) Выведем интегральное представление для функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Для этого в (7) представим функцию $\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(1-x^2)^l$ с помощью интегральной формулы Коши

$$\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(1-x^2)^l = \frac{(l+m)!}{2\pi i} \int_C \frac{(1-s^2)^l}{(s-x)^{l+m+1}} ds,$$

где C — контур, охватывающий точку $s = x$. В качестве контура C удобно выбрать окружность с центром в точке $s = x$ радиуса $\sqrt{1-x^2}$. Тогда, полагая $s = x + \sqrt{1-x^2}e^{i\alpha}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(1-x^2)^l &= \\ &= \frac{(-2)^l (l+m)!}{2\pi} (1-x^2)^{-m/2} \int_0^{2\pi} e^{-im\alpha} (x + i\sqrt{1-x^2} \sin \alpha)^l d\alpha. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в (7) и используя (10), получим интегральное представление для $Y_{lm}(\theta, \varphi)$:

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\theta, \varphi) &= B_{lm} \int_0^{2\pi} e^{-im(\alpha-\varphi)} (\cos \theta + i \sin \theta \sin \alpha)^l d\alpha = \\ &= B_{lm} \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} e^{-im\alpha} [\cos \theta + i \sin \theta \sin(\alpha + \varphi)]^l d\alpha, \end{aligned}$$

где

$$B_{lm} = \frac{1}{4\pi l!} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi}} (l-m)! (l+m)!.$$

Так как интеграл от периодической функции по отрезку, длина которого равна периоду, не зависит от положения этого отрезка, то

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = B_{lm} \int_0^{2\pi} e^{-im\alpha} [\cos \theta + i \sin \theta \sin(\alpha + \varphi)]^l d\alpha. \quad (17)$$

3. Связь однородных гармонических полиномов и сферических функций. Решая уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ в сферических координатах, мы нашли ограниченные при $r \rightarrow 0$ частные решения этого уравнения

$$u_{lm}(r, \theta, \varphi) = r^l Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

С помощью интегрального представления (17) функции $u_{lm}(r, \theta, \varphi)$ можно записать в декартовых координатах

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Имеем

$$\begin{aligned} u_{lm}(r, \theta, \varphi) &= B_{lm} \int_0^{2\pi} e^{-im\alpha} [r \cos \theta + i r \sin \theta \sin(\alpha + \varphi)]^l d\alpha = \\ &= B_{lm} \int_0^{2\pi} e^{-im\alpha} (z + ix \sin \alpha + iy \cos \alpha)^l d\alpha. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что функция $u_{lm}(r, \theta, \varphi)$ является однородным полиномом степени l относительно переменных x, y, z .

Напомним, что *однородным полиномом степени l* называется выражение вида

$$u_l(x, y, z) = \sum_{l_1, l_2, l_3} c_{l_1 l_2 l_3} x^{l_1} y^{l_2} z^{l_3},$$

где суммирование производится по неотрицательным индексам l_1, l_2, l_3 , сумма которых равна l . Однородным полиномом является, например, выражение $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Подсчитаем число линейно независимых однородных полиномов степени l . Для этого достаточно перебрать все возможные комбинации значений l_1 и l_2 , так как при фиксированном l однозначно определяется $l_3 = l - l_1 - l_2$. При заданном l_1 значение l_2 меняется от $l_2 = 0$ до $l_2 = l - l_1$, т. е. принимает $l - l_1 + 1$ значений. Поэтому общее число линейно независимых однородных

полиномов степени l равно

$$N_1 = \sum_{l_1=0}^l (l - l_1 + 1) = \frac{(l+1)(l+2)}{2}.$$

Однородный полином, удовлетворяющий уравнению Лапласа, называется *однородным гармоническим полиномом*. Выражение $r^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$ является примером однородного гармонического полинома.

Из однородных полиномов r^2 и $r^{l-2n} Y_{l-2n, m}(\theta, \varphi)$ можно составить однородные полиномы степени l

$$u_{lmn}(x, y, z) = (r^2)^n r^{l-2n} Y_{l-2n, m}(\theta, \varphi) = r^l Y_{l-2n, m}(\theta, \varphi).$$

Здесь индексы m, n принимают целые значения, удовлетворяющие неравенствам

$$0 \leq 2n \leq l, \quad -(l-2n) \leq m \leq l-2n.$$

В силу линейной независимости сферических функций $Y_{l-2n, m}(\theta, \varphi)$, вытекающей из их ортогональности, однородные полиномы $u_{lmn}(x, y, z)$ будут линейно независимы. При фиксированном значении $l-2n$ число возможных значений m равно $2(l-2n)+1$. Поэтому полное число рассматриваемых однородных полиномов будет равно

$$\sum_n [2(l-2n)+1] = \frac{(l+1)(l+2)}{2}.$$

Так как число построенных нами однородных полиномов равно полному числу линейно независимых однородных полиномов степени l , то произвольный однородный полином степени l можно представить в виде линейной комбинации однородных полиномов $r^l Y_{l-2n, m}(\theta, \varphi)$, т. е.

$$u_l(x, y, z) = r^l \sum_{m, n} c_{mn} Y_{l-2n, m}(\theta, \varphi). \quad (18)$$

Мы получили разложение произвольного однородного полинома по сферическим функциям. С помощью разложения (18) нетрудно показать, что *произвольный однородный гармонический полином степени l является линейной комбинацией однородных гармонических полиномов $r^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$* .

Действительно, пусть $u_l(x, y, z)$ — однородный гармонический полином, т. е. $\Delta u_l = 0$. Тогда, применяя оператор Лапласа $\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi}$ к разложению (18), получим

$$\begin{aligned} \Delta u_l &= r^{l-2} \sum_{m, n} [l(l+1) - (l-2n)(l-2n+1)] c_{mn} Y_{l-2n, m}(\theta, \varphi) = \\ &= r^{l-2} \sum_{m, n} 2n(2l-2n+1) c_{mn} Y_{l-2n, m}(\theta, \varphi) = 0. \end{aligned}$$

В силу линейной независимости сферических функций $Y_{l-2n, m}(\theta, \varphi)$

получаем равенство

$$2n(2l - 2n + 1)c_{mn} = 0,$$

т. е. $c_{mn} = 0$ при $n > 0$, что и требовалось доказать.

4. **Обобщенные сферические функции.** При вращении системы координат однородный полином переходит в однородный полином той же степени. С другой стороны, при таком вращении оператор Лапласа сохраняет свой вид, т. е. $\Delta_{xyz} = \Delta_{x'y'z'}$. Поэтому любые однородные гармонические полиномы при вращении системы координат переходят в однородные гармонические полиномы той же степени. Отсюда

$$u_{lm}(x, y, z) = \sum_{m'} D_{mm'}^l u_{lm'}(x', y', z'),$$

где $u_{lm}(x, y, z) = r^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Следовательно,

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m'=-l}^l D_{mm'}^l Y_{lm'}(\theta', \varphi'). \quad (19)$$

Таким образом, линейные комбинации функций $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ при фиксированном l образуют $(2l + 1)$ -мерное пространство функций, инвариантное относительно вращений.

Коэффициенты $D_{mm'}^l$, очевидно, будут зависеть от параметров, определяющих поворот системы координат. Произвольный поворот координатной системы относительно начала координат полностью определяется заданием трех вещественных параметров. Действительно, любой поворот можно охарактеризовать однозначно указанием направления оси поворота (два параметра) и величиной угла поворота (один параметр). Наиболее часто в качестве параметров, характеризующих поворот, употребляются *углы Эйлера* α, β, γ , которые позволяют описать произвольный поворот с помощью трех последовательных поворотов вокруг координатных осей: а) поворот вокруг оси z на угол α ; б) поворот вокруг нового направления оси y на угол β ; в) поворот вокруг нового направления оси z на угол γ *). Таким образом,

$$D_{mm'}^l = D_{mm'}^l(\alpha, \beta, \gamma).$$

В дальнейшем матрицу с элементами $D_{mm'}^l(\alpha, \beta, \gamma)$ мы будем обозначать $D(\alpha, \beta, \gamma)$ и называть *матрицей конечных вращений*.

Произвольный поворот однозначно определяется углами Эйлера, если они меняются в следующих пределах: $0 \leq \alpha < 2\pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $0 \leq \gamma < 2\pi$. Если же углы Эйлера не находятся в этих пределах, то следует иметь в виду, что поворот с углами

*) Иногда при введении углов Эйлера поворот на угол β совершают не вокруг нового направления оси y , а вокруг нового направления оси x . Углы Эйлера α', β', γ' , введенные таким способом, связаны с углами Эйлера α, β, γ соотношениями $\alpha' = \alpha + \pi/2$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma - \pi/2$.

$(\alpha + 2\pi n_1, \beta + 2\pi n_2, \gamma + 2\pi n_3)$ совпадает с поворотом (α, β, γ) , если n_1, n_2, n_3 — целые числа. Поэтому

$$D(\alpha + 2\pi n_1, \beta + 2\pi n_2, \gamma + 2\pi n_3) = D(\alpha, \beta, \gamma).$$

Кроме того, заметим, что поворот (α, β, γ) эквивалентен повороту $(\pi + \alpha, -\beta, \pi + \gamma)$.

Обратный поворот будет характеризоваться углами

$$\alpha_1 = -\gamma, \quad \beta_1 = -\beta, \quad \gamma_1 = -\alpha,$$

что эквивалентно повороту

$$(\pi + \alpha_1, -\beta_1, \pi + \gamma_1) = (\pi - \gamma, \beta, \pi - \alpha).$$

Поэтому матрица обратного поворота совпадает с матрицей поворота $(\pi - \gamma, \beta, \pi - \alpha)$, т. е.

$$D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = D(\pi - \gamma, \beta, \pi - \alpha).$$

Функции $D_{mm'}^l(\alpha, \beta, \gamma)$ носят название *обобщенных сферических функций*, так как для ряда частных случаев они совпадают с обычными сферическими функциями. Их называют также *D-функциями Вигнера*. Обобщенные сферические функции широко используются в квантовой механике *).

Выведем ряд основных свойств обобщенных сферических функций и получим для них явное выражение через параметры α, β, γ . Так как при вращении системы координат элемент телесного угла не меняется, т. е. $d\Omega = d\Omega'$, то из условий ортогональности

$$\begin{aligned} \int Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm_1}^*(\theta, \varphi) d\Omega &= \delta_{mm_1}, \\ \int Y_{lm'}(\theta', \varphi') Y_{lm'_1}^*(\theta', \varphi') d\Omega' &= \delta_{m'm'_1} \end{aligned}$$

вытекает соотношение

$$\sum_{m'} D_{mm'}^l(\alpha, \beta, \gamma) [D_{m_1 m'}^l(\alpha, \beta, \gamma)]^* = \delta_{mm_1},$$

т. е. матрица $D^+(\alpha, \beta, \gamma)$, являющаяся транспонированной и комплексно сопряженной к матрице $D(\alpha, \beta, \gamma)$, совпадает с $D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma)$. Это означает, что матрица $D(\alpha, \beta, \gamma)$ унитарна. В связи с этим из (19) получаем

$$Y_{lm'}(\theta', \varphi') = \sum_m [D_{mm'}^l(\alpha, \beta, \gamma)]^* Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (20)$$

При использовании равенств $D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = D(\pi - \gamma, \beta, \pi - \alpha)$,

*) См., например, Давыдов А. С. Квантовая механика.— М.: Наука, 1973; Ахнзедер А. Н., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика.— М.: Наука, 1981.

$D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = D^+(\alpha, \beta, \gamma)$, получим следующее соотношение:

$$D_{mm'}^l(\pi - \gamma, \beta, \pi - \alpha) = [D_{m'm}^l(\alpha, \beta, \gamma)]^* \quad (21)$$

Другое простейшее свойство обобщенных сферических функций легко получается из свойства (14) сферических функций $Y_{lm}(\theta, \varphi)$:

$$D_{mm'}^l(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^{m-m'} [D_{-m, -m'}^l(\alpha, \beta, \gamma)]^*. \quad (22)$$

Перейдем к получению явных выражений для обобщенных сферических функций $D_{mm'}^l(\alpha, \beta, \gamma)$. Пусть совершаются последовательно два поворота, определяемые параметрами $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ и $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, эквивалентные одному повороту с параметрами α, β, γ , причем в результате первого поворота сферические координаты (θ, φ) некоторого фиксированного вектора переходят в сферические координаты (θ_1, φ_1) , а в результате второго поворота координаты (θ_1, φ_1) переходят в (θ', φ') . Тогда

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m_1} D_{mm_1}^l(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) Y_{lm_1}(\theta_1, \varphi_1),$$

$$Y_{lm_1}(\theta_1, \varphi_1) = \sum_{m'} D_{m_1 m'}^l(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) Y_{lm'}(\theta', \varphi').$$

С другой стороны,

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m'} D_{mm'}^l(\alpha, \beta, \gamma) Y_{lm'}(\theta', \varphi').$$

Из сопоставления этих разложений в силу линейной независимости сферических функций находим

$$D_{mm'}^l(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{m_1} D_{mm_1}^l(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) D_{m_1 m'}^l(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2),$$

т. е.

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = D(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) D(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2),$$

так что при последовательном выполнении двух вращений их матрицы перемножаются в обратном порядке. Аналогичное соотношение имеет место при выполнении нескольких последовательных поворотов системы координат. Из этого рассуждения и определения углов Эйлера вытекает, что для нахождения вида обобщенных сферических функций $D_{mm'}^l(\alpha, \beta, \gamma)$ надо найти их выражения лишь для случаев, когда повороты совершаются вокруг оси z и оси y . Обозначим через $C_{mm'}^l(\alpha)$ и $d_{mm'}^l(\beta)$ обобщенные сферические функции, соответствующие повороту на угол α вокруг оси z и на угол β вокруг оси y . Тогда имеем

$$D_{mm'}^l(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{m_1 m_2} C_{mm_1}^l(\alpha) d_{m_1 m_2}^l(\beta) C_{m_2 m'}^l(\gamma).$$

Получим явные выражения для функций $C_{mm'}^l(\alpha)$. При вращении на угол α вокруг оси z сферические координаты (θ, φ)

некоторого фиксированного вектора переходят в координаты $\theta' = \theta$, $\varphi' = \varphi - \alpha$. Поэтому

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta', \varphi' + \alpha) = e^{im\alpha} Y_{lm}(\theta', \varphi').$$

С другой стороны,

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m'} C_{mm'}^l(\alpha) Y_{lm'}(\theta', \varphi').$$

Отсюда

$$C_{mm'}^l(\alpha) = e^{im\alpha} \delta_{mm'}$$

и, следовательно,

$$D_{mm'}^l(\alpha, \beta, \gamma) = e^{i(m\alpha + m'\gamma)} d_{mm'}^l(\beta). \quad (23)$$

Найдем теперь функции $d_{mm'}^l(\beta)$, соответствующие вращению системы координат на угол β вокруг оси y . В этом случае

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m'} d_{mm'}^l(\beta) Y_{lm'}(\theta', \varphi'). \quad (24)$$

Новые координаты (x', y', z') связаны со старыми (x, y, z) соотношениями

$$x = x' \cos \beta + z' \sin \beta, \quad y = y', \quad z = z' \cos \beta - x' \sin \beta.$$

Переходя к сферическим координатам, находим связь (θ, φ) с (θ', φ') :

$$\begin{aligned} \sin \theta \cos \varphi &= \sin \theta' \cos \varphi' \cos \beta + \cos \theta' \sin \beta, \\ \sin \theta \sin \varphi &= \sin \theta' \sin \varphi', \\ \cos \theta &= \cos \theta' \cos \beta - \sin \theta' \cos \varphi' \sin \beta. \end{aligned} \quad (25)$$

Для определения $d_{mm'}^l(\beta)$ найдем дифференциальные соотношения между этими функциями. Так как в правой части (24) наиболее просто произвести дифференцирование по β и φ' , то будем рассматривать это соотношение при фиксированном значении θ' , считая переменные θ и φ функциями переменных β и φ' . Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \beta} &= \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi'} &= \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi'} + \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi'}. \end{aligned}$$

Производные $\partial \theta / \partial \beta$, $\partial \theta / \partial \varphi'$, $\partial \varphi / \partial \beta$, $\partial \varphi / \partial \varphi'$ вычислим с помощью соотношений (25). Дифференцирование последнего из этих соотношений дает

$$\frac{\partial \theta}{\partial \beta} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \varphi'} = -\sin \beta \sin \varphi.$$

Производные $\partial \varphi / \partial \beta$, $\partial \varphi / \partial \varphi'$ легко определяются с помощью диф-

дифференцирования соответственно второго и первого из соотношений (25):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = -\operatorname{ctg} \theta \sin \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi'} = -\sin \beta \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi + \cos \beta.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \beta} &= \cos \varphi \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} - im \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi Y_{lm}(\theta, \varphi), \\ \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi'} &= -\sin \beta \left[\sin \varphi \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} + im \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi Y_{lm}(\theta, \varphi) \right] + \\ &\quad + im \cos \beta Y_{lm}(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

Для вычисления производной $\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)/\partial \theta$ воспользуемся формулами дифференцирования (15). Так как в (15) входят величины $e^{\pm i\varphi} \partial Y_{lm}/\partial \theta$, а в выражения $\partial Y_{lm}/\partial \beta$ и $\partial Y_{lm}/\partial \varphi'$ — величины $\cos \varphi \partial Y_{lm}/\partial \theta$, $\sin \varphi \partial Y_{lm}/\partial \theta$, то для того, чтобы воспользоваться формулами (15), предварительно составим соответствующие линейные комбинации из величин $\partial Y_{lm}/\partial \beta$ и $\partial Y_{lm}/\partial \varphi'$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \beta} \mp \frac{i}{\sin \beta} \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi'} &= e^{\pm i\varphi} \left[\frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \mp m \operatorname{ctg} \theta Y_{lm} \right] \pm \\ &\quad \pm m \operatorname{ctg} \beta Y_{lm} = \mp \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} Y_{l, m \pm 1}(\theta, \varphi) \pm \\ &\quad \pm m \operatorname{ctg} \beta Y_{lm}(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

Если воспользоваться разложением (24) для величин $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, $Y_{l, m \pm 1}(\theta, \varphi)$ и приравнять в левой и правой частях равенства коэффициенты при $Y_{lm}'(\theta', \varphi')$, то получим искомые дифференциальные соотношения для функции $d_{mm'}^l(\beta)$:

$$\frac{d}{d\beta} d_{mm'}^l \pm \frac{m' - m \cos \beta}{\sin \beta} d_{mm'}^l = \mp \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} d_{m \pm 1, m'}^l. \quad (26)$$

Здесь следует полагать $d_{\pm(l+1), m'}^l(\beta) = 0$. С помощью соотношений (26) и условия $d_{mm'}^l(0) = \delta_{mm'}$, вытекающего из (24) при $\beta = 0$, можно однозначно определить все функции $d_{mm'}^l(\beta)$, если рассматривать соотношение (26) как линейное дифференциальное уравнение относительно $d_{mm'}^l(\beta)$, считая функцию $d_{m \pm 1, m'}^l(\beta)$ заданной. После умножения (26) на интегрирующий множитель

$$\exp \left\{ \pm \int \frac{m' - m \cos \beta}{\sin \beta} d\beta \right\} = (1 - \cos \beta)^{\pm(m'-m)/2} (1 + \cos \beta)^{\mp(m'+m)/2}$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} [(1 - \cos \beta)^{\pm(m'-m)/2} (1 + \cos \beta)^{\mp(m'+m)/2} d_{mm'}^l(\beta)] &= \\ &= \mp \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} (1 - \cos \beta)^{\pm(m'-m)/2} \times \\ &\quad \times (1 + \cos \beta)^{\mp(m'+m)/2} d_{m \pm 1, m'}^l(\beta). \quad (27) \end{aligned}$$

Используя верхние знаки и полагая $m = l$, находим

$$(1 - \cos \beta)^{(m'-l)^2} (1 + \cos \beta)^{-(m'+l)^2} d_{lm'}^l(\beta) = \text{const.}$$

Отсюда

$$d_{lm'}^l(\beta) = C_{lm'} (1 - \cos \beta)^{(l-m')^2} (1 + \cos \beta)^{(l+m')^2},$$

где $C_{lm'}$ — нормировочная постоянная. Функции $d_{mm'}^l(\beta)$ при $m < l$ можно выразить рекуррентным образом через $d_{lm'}^l(\beta)$, взяв в (27) нижние знаки. Произведя замену переменных

$$x = \cos \beta, \quad v_{mm'}(x) = (1-x)^{(m-m')^2} (1+x)^{(m+m')^2} d_{mm'}^l(\beta),$$

получим

$$v_{m-1,m'} = - \frac{1}{\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}} \frac{dv_{mm'}}{dx},$$

откуда

$$v_{mm'} = (-1)^{l-m} \prod_{s=m+1}^l \frac{1}{\sqrt{l(l+1) - s(s-1)}} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} v_{lm'},$$

т. е.

$$d_{mm'}^l(\beta) = C_{lm'} \frac{(-1)^{l-m} (1-x)^{(m'-m)^2} (1+x)^{-(m'+m)/2}}{\prod_{s=m+1}^l \sqrt{l(l+1) - s(s-1)}} \times \\ \times \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} [(1-x)^{l-m'} (1+x)^{l+m'}]. \quad (28)$$

Для определения постоянной $C_{lm'}$ воспользуемся равенством $d_{m'm'}^l(0) = 1$. Произведя в (28) дифференцирование по формуле Лейбница, получим

$$d_{m'm'}^l(0) = C_{lm'} \frac{2^{-m'} 2^{l+m'} (l-m')!}{\prod_{s=m'+1}^l \sqrt{l(l+1) - s(s-1)}} = 1.$$

Это дает

$$C_{lm'} = \frac{\prod_{s=m'+1}^l \sqrt{l(l+1) - s(s-1)}}{2^l (l-m')!}.$$

Так как

$$\prod_{s=m+1}^l [l(l+1) - s(s-1)] = \prod_{s=m+1}^l (l+s)(l-s+1) = \frac{(2l)!(l-m)!}{(l+m)!},$$

то окончательно получаем

$$d_{mm'}^l(\beta) = \frac{(-1)^{l-m}}{2^l (l-m)!} \sqrt{\frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+m')!(l-m')!}} \times \\ \times (1-x)^{(m'-m)^2} (1+x)^{-(m'+m)^2} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} [(1-x)^{l-m'} (1+x)^{l+m'}]. \quad (29)$$

Отметим, что величины $d_{mm'}^l(\beta)$ вещественны. Их можно выразить через полиномы Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ при $x = \cos \beta$:

$$d_{mm'}^l(\beta) = \frac{1}{2^m} \sqrt{\frac{(l+m)! (l-m)!}{(l+m')! (l-m')!}} \times \\ \times (1-x)^{(m-m')/2} (1+x)^{(m+m')/2} P_{l-m}^{(m-m', m+m')}(x). \quad (29a)$$

Функции $d_{mm'}^l(\beta)$ можно записать в другом виде, если воспользоваться соотношениями симметрии, вытекающими из (21)–(23) и вещественности функций $d_{mm'}^l(\beta)$:

$$d_{mm'}^l = (-1)^{m-m'} d_{m'm}^l, \quad d_{mm'}^l = (-1)^{m-m'} d_{-m, -m'}^l. \quad (30)$$

С помощью соотношений (30) всегда можно добиться того, чтобы выполнялись неравенства

$$m - m' \geq 0, \quad m + m' \geq 0.$$

Рассмотрим частный случай формулы (29) при $m' = 0$. Сравнивая формулу (29) при $m' = 0$ и (8), имеем

$$d_{m0}^l(\beta) = \sqrt{\frac{2}{2l+1}} \Theta_{lm}(x),$$

откуда

$$D_{m0}^l(\alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\beta, \alpha), \quad (31)$$

$$D_{00}^l(\alpha, \beta, \gamma) = P_l(\cos \beta).$$

С помощью (21) можно получить другое аналогичное соотношение:

$$D_{0m}^l(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^m \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\beta, \gamma).$$

5. Теорема сложения. Выведем одно полезное соотношение для сферических функций, известное под названием теоремы сложения. Для этого положим в (20) $m' = 0$ и воспользуемся формулами (11), (31):

$$P_l(\cos \theta') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_m Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\beta, \alpha). \quad (32)$$

Соотношению (32) можно придать простой геометрический смысл. Для этого рассмотрим два произвольных вектора $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, направления которых характеризуются сферическими координатами $(\theta_1, \varphi_1), (\theta_2, \varphi_2)$. Пусть угол между этими векторами равен ω . Положим в (32) $\theta = \theta_1, \varphi = \varphi_1$ и совершим поворот (α, β, γ) таким образом, чтобы направление новой оси z совпало с направлением вектора $\mathbf{r}_2$. Очевидно, что углы α, β будут сферическими углами новой оси z в старой системе координат. Отсюда легко видеть, что $\alpha = \varphi_2, \beta = \theta_2$, а угол ω между векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ совпадает с θ' . В результате формула (32) примет вид

$$P_l(\cos \omega) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1) Y_{lm}^*(\theta_2, \varphi_2). \quad (33)$$

Соотношение (33) называется *теоремой сложения для сферических функций*. Оно имеет многочисленные приложения, напри-

мер в теории атомных спектров. Особенно часто формула (33) используется при разложении величины $1/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ в ряд по сферическим функциям $Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1)$, $Y_{lm}(\theta_2, \varphi_2)$. Так как (см. § 5)

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{r_{l+1}^{l'}} P_l(\cos \omega),$$

то по теореме сложения для сферических функций получим

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{l+1}^{l'}}{r_{l+1}^{l'}} Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1) Y_{lm}^*(\theta_2, \varphi_2), \quad (34)$$

где $r_{<} = \min(r_1, r_2)$, $r_{>} = \max(r_1, r_2)$.

Примеры. 1. Рассмотрим потенциал

$$u(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau', \quad (35)$$

создаваемый электрическим зарядом с плотностью $\rho(\mathbf{r})$, находящимся в некотором объеме V . Для вычисления потенциала $u(\mathbf{r})$ на больших расстояниях от объема V удобно получить его разложение по степеням $1/r$, выбирая начало координат внутри объема V . Используя разложение (34) при $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'$ и $r > r'$, выражение (35) можно представить в виде

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (36)$$

где

$$Q_{lm} = \frac{4\pi}{2l+1} \int_V r'^l \rho(\mathbf{r}') Y_{lm}(\theta', \varphi') d\tau'. \quad (37)$$

Формулу (36) обычно называют *разложением потенциала по мультиполям*.

Если объем V имеет форму шара $0 < r' < a$ и $\rho(\mathbf{r}') = \rho(r')$, то интеграл (37) легко вычисляется: $Q_{lm} = \sqrt{4\pi} Q \delta_{l0} \delta_{m0}$, где Q — суммарный заряд. В этом случае $u(r) = Q/r$, как и следовало ожидать.

2. Используем теорему сложения (33) при решении *первой внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в шаровой области*:

$$\Delta u = 0, \quad u(r, \theta, \varphi)|_{r=a} = f(\theta, \varphi).$$

Решение этой задачи будем искать методом разделения переменных в виде ряда по шаровым функциям $r^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$:

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} C_{lm} \left(\frac{r}{a}\right)^l Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (38)$$

Коэффициенты C_{lm} находятся из граничного условия на сфере $r = a$ и ортонормированности сферических функций $Y_{lm}(\theta, \varphi)$.

Поэтому

$$C_{lm} = \int f(\theta', \varphi') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') d\Omega'.$$

Решение (38) можно представить также в виде интеграла. Для этого подставим выражение для C_{lm} в (38), поменяем местами суммирование и интегрирование, а затем произведем суммирование по m с помощью теоремы сложения:

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \varphi) &= \int f(\theta', \varphi') \left[\sum_{l,m} \left(\frac{r}{a}\right)^l Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \right] d\Omega' = \\ &= \int f(\theta', \varphi') \left[\sum_l \frac{2l+1}{4\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\mu) \right] d\Omega'. \end{aligned}$$

Здесь μ — косинус угла между направлениями (θ, φ) и (θ', φ') :

$$\mu = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi').$$

Чтобы произвести суммирование по l , воспользуемся производящей функцией для полиномов Лежандра:

$$\sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(\mu) = \frac{1}{\sqrt{1-2t\mu+t^2}}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \sum_l (2l+1) t^l P_l(\mu) &= 2\sqrt{t} \sum_l \left(l + \frac{1}{2}\right) t^{l-1/2} P_l(\mu) = \\ &= 2\sqrt{t} \frac{d}{dt} \left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1-2t\mu+t^2}} \right) = \frac{1-t^2}{(1-2t\mu+t^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

то

$$\sum_l (2l+1) \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\mu) = \frac{1-(r/a)^2}{[1-2\mu r/a + (r/a)^2]^{3/2}}$$

и, следовательно, решение первой внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в шаровой области представляется в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int f(\theta', \varphi') \frac{1-(r/a)^2}{[1-2\mu r/a + (r/a)^2]^{3/2}} d\Omega'.$$

§ 11. Функции второго рода

1. Интегральное представление. Как было показано в § 3, дифференциальное уравнение для классических ортогональных полиномов имеет решения вида

$$y(z) = \frac{C_n}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^n(s) \rho(s)}{(s-z)^{n+1}} ds, \quad (1)$$

где контур C выбирается таким образом, чтобы удовлетворялось

условие

$$\frac{\sigma^{n+1}(s) \rho(s)}{(s-z)^{n+2}} \Big|_{s_1}^{s_2} = 0, \quad (2)$$

где s_1, s_2 — концы контура. Замкнутый контур, охватывающий точку $s = z$, дает при $C_n = \frac{B_n n!}{2\pi i}$ классические полиномы $y_n(z)$, ортогональные на интервале (a, b) . Другой возможный вид контура C при $z \notin [a, b]$ — отрезок прямой, соединяющий точки $s_1 = a$ и $s_2 = b$. Условие (2) в данном случае выполняется в силу условия (5.17). Соответствующее решение при $C_n = B_n n!$ называется *функцией второго рода* и обозначается $Q_n(z)$:

$$Q_n(z) = \frac{B_n n!}{\rho(z)} \int_a^b \frac{\sigma^n(s) \rho(s)}{(s-z)^{n+1}} ds. \quad (3)$$

Из явного вида функции $\rho(z)$ (см. § 5) нетрудно заметить, что эта функция может иметь точки ветвления при $z = a$ и $z = b$. В таких случаях для однозначности функции $Q_n(z)$ необходимо провести разрезы на плоскости комплексной переменной z , например разрез $(a, +\infty)$ от точки $z = a$ вдоль вещественной оси вправо. При этом можно считать, что $\rho(x + i0) = \rho(x)$ при $x \in (a, b)$.

Интегрируя в (3) по частям n раз, получим интегральное представление, связывающее $Q_n(z)$ с полиномами $y_n(z)$:

$$\begin{aligned} Q_n(z) &= \frac{B_n (n-1)!}{\rho(z)} \left\{ - \frac{\sigma^n(s) \rho(s)}{(s-z)^n} \Big|_a^b + \int_a^b \frac{\frac{d}{ds} [\sigma^n(s) \rho(s)]}{(s-z)^n} ds \right\} = \\ &= \dots = \frac{B_n}{\rho(z)} \int_a^b \frac{\frac{d^n}{ds^n} [\sigma^n(s) \rho(s)]}{s-z} ds. \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что подстановки равны нулю в силу условия (5.17), так как $[\sigma^n(z) \rho(z)]^{(n-m)} = \frac{1}{A_{mn} B_n} \sigma^m(z) \rho(z) y_n^{(m)}(z)$. С помощью формулы Родрига для полиномов $y_n(z)$ полученное равенство можно записать следующим образом:

$$Q_n(z) = \frac{1}{\rho(z)} \int_a^b \frac{y_n(s) \rho(s)}{s-z} ds. \quad (4)$$

Интегральное представление (4) иногда удобно переписать в виде

$$Q_n(z) = \frac{1}{\rho(z)} \left[\int_a^b \frac{y_n(s) - y_n(z)}{s-z} \rho(s) ds + y_n(z) \int_a^b \frac{\rho(s) ds}{s-z} \right].$$

Первый интеграл является полиномом второго рода $r_n(z)$ (см. п. 3

§ 6), второй интеграл может быть выражен через функцию $Q_0(z)$. В результате получим

$$Q_n(z) = \frac{1}{\rho(z)} r_n'(z) + \frac{y_n(z)}{y_0(z)} Q_0(z). \quad (5)$$

Таким образом, все особенности второго решения $Q_n(z)$ определяются поведением функций $Q_0(z)$ и $1/\rho(z)$.

2. Асимптотическое представление. С помощью (4) можно получить асимптотическое представление $Q_n(z)$ при больших $|z|$. Для этого воспользуемся равенством

$$\begin{aligned} \frac{1}{s-z} &= -\frac{1}{z} \frac{1}{1-s/z} = -\frac{1}{z} \left[\sum_{h=0}^p \left(\frac{s}{z}\right)^h + \frac{(s/z)^{p+1}}{1-s/z} \right] = \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{h=0}^p \left(\frac{s}{z}\right)^h + \frac{s^{p+1}}{(s-z)z^{p+1}}. \end{aligned}$$

Интегрируя это равенство с весом $y_n(s)\rho(s)$ в пределах от a до b , получим

$$\rho(z) Q_n(z) = - \sum_{h=n}^p \frac{1}{z^{h+1}} \int_a^b s^h y_n(s) \rho(s) ds + \frac{r_p(z)}{z^{p+1}}, \quad (6)$$

где

$$r_p'(z) = \int_a^b \frac{s^{p+1} y_n(s) \rho(s)}{s-z} ds.$$

При интегрировании мы воспользовались свойством ортогональности (6.5).

Если $z \rightarrow \infty$ и при этом кратчайшее расстояние от точки z до интервала (a, b) ограничено снизу, то величина $|r_p(z)|$ будет ограничена, и равенство (6) дает нам асимптотическое представление функции $Q_n(z)$. В частности, при $p=n$ из (6) имеем

$$Q_n(z) = -\frac{d_n^2}{a_n} \frac{1}{\rho(z) z^{n+1}} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right]. \quad (7)$$

Здесь и в дальнейшем мы будем использовать следующее обозначение: $f_1(z) = O[f_2(z)]$ при $z \rightarrow z_0$, если в некоторой окрестности точки $z = z_0$ функции $f_1(z)$, $f_2(z)$ удовлетворяют неравенству $|f_1(z)| \leq C|f_2(z)|$,

где C — постоянная.

Из асимптотического представления (7) видно, что функции второго рода $Q_n(z)$ и классические ортогональные полиномы $y_n(z)$ имеют различное асимптотическое поведение и поэтому являются линейно независимыми решениями дифференциального уравнения для классических ортогональных полиномов (за исключением случая $n=0$, $\alpha + \beta + 1 = 0$ для полиномов Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$).

3. Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования. Так как интегральное представление (3) для $Q_n(z)$ отличается от интегрального представления для $y_n(z)$ лишь постоянным множителем $1/(2\pi i)$ и выбором контура, то функции $Q_n(z)$ и $y_n(z)$ будут удовлетворять одним и тем же рекуррентным соотношениям и формулам дифференцирования (см. §§ 5, 6):

$$zQ_n(z) = \alpha_n Q_{n+1}(z) + \beta_n Q_n(z) + \gamma_n Q_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (8)$$

$$\sigma(z) Q'_n(z) = \frac{\lambda_n}{n\tau'_n} \left[\tau_n(z) Q_n(z) - \frac{B_n}{B_{n+1}} Q_{n+1}(z) \right]. \quad (9)$$

Для производной функции второго рода с помощью формулы (4.7) можно получить интегральное представление

$$Q'_n(z) = \frac{\kappa_n B_n n!}{\sigma(z) \rho(z)} \int_a^b \frac{\sigma^n(s) \rho(s)}{(s-z)^n} ds,$$

где $\kappa_n = \tau' + \frac{n-1}{2} \sigma''$. При $n=0$ это представление приводит к следующему дифференциальному уравнению для функции $Q_0(z)$:

$$\sigma(z) \rho(z) Q'_0(z) = C, \quad (10)$$

где

$$C = \kappa_0 B_0 \int_a^b \rho(s) ds = \frac{\kappa_0 d_0^2}{a_0}.$$

Мы воспользовались тем, что по формуле Родрига $y_0(z) = B_0 = a_0$.

Из уравнения (10) легко получить удобное интегральное представление для функции $Q_0(z)$:

$$Q_0(z) = Q_0(z_0) - C \int_{z_0}^z \frac{ds}{\sigma(s) \rho(s)}. \quad (11)$$

В качестве z_0 удобно выбрать такое значение z , для которого $Q_0(z_0) = 0$. Из асимптотического представления (7) видно, что для функций Лагерра второго рода $Q_0^\alpha(z)$ можно положить $z_0 = -\infty$, а для функций Эрмита второго рода положить $z_0 = \pm i\infty$. Для функций Якоби $Q_0^{(\alpha, \beta)}(z)$ можно взять $z_0 = \infty$ при $\alpha + \beta > -1$.

Из (11) вытекает, что при $z \rightarrow x$, где $x \in (a, b)$, существуют пределы $Q_0(x \pm i0)$, и, следовательно, в силу (5) существуют предельные значения $Q_n(x \pm i0)$. Так как, согласно (4), $\rho(z) Q_n(z) = \rho(\bar{z}) Q_n(\bar{z})$ (черта — знак комплексного сопряжения), то при $z = x$ в качестве второго решения уравнения для классических ортогональных полиномов удобно выбрать не $Q_n(x \pm i0)$, а вещественную комбинацию этих функций

$$\rho(x) Q_n(x) = \frac{1}{2} [\rho(x+i0) Q_n(x+i0) + \rho(x-i0) Q_n(x-i0)]$$

(напомним, что $\rho(x+i0) = \rho(x)$).

Можно показать, что при таком определении функции $Q_n(x)$ будут удовлетворять тем же соотношениям, которым удовлетворяют полиномы $y_n(x)$ при $x \in (a, b)$. Будет оставаться справедливым и интегральное представление (4), если понимать интеграл в смысле главного значения, так как интеграл в (4) является интегралом типа Коши (см., например, [9]).

4. Некоторые специальные функции, родственные функции второго рода $Q_0(z)$: неполные бета- и гамма-функции, интегральная показательная функция, интеграл вероятности, интегральные синус и косинус. Из формулы (11) вытекает, что функция $Q_0(z)$ для полиномов Якоби сводится к *неполной бета-функции* $B_z(p, q)$ заменой $t = 2/(1+s)$, для полиномов Лагерра — к *неполной гамма-функции* $\Gamma(a, z)$ заменой $t = -s$, для полиномов Эрмита — к *интегралу вероятности* $\Phi(z)$ заменой $t = \pm is$. Функции $B_z(p, q)$, $\Gamma(a, z)$, $\Phi(z)$ определяются следующим образом:

$$B_z(p, q) = \int_0^z t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt,$$

$$\Gamma(a, z) = \int_z^\infty e^{-t} t^{a-1} dt, \quad \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

Для однозначности функции $\Gamma(a, z)$ следует сделать разрез от точки $z=0$ до $z=-\infty$ вдоль вещественной оси. В соответствии с этим разрезом в формуле для $\Gamma(a, z)$ при вычислении t^{a-1} следует считать $|\arg t| < \pi$. Аналогично, в формуле для $B_z(p, q)$ следует считать $0 < \arg z < 2\pi$, $0 < \arg t < 2\pi$, $|\arg(1-t)| < \pi$.

В виде примера рассмотрим интегральное представление (11) для функций Лагерра и Эрмита второго рода.

1) Для *функции Лагерра второго рода*, полагая в (11) $z_0 = -\infty$, получим *)

$$Q_0(z) \equiv Q_0^\alpha(z) = \Gamma(\alpha + 1) \int_z^{-\infty} \frac{ds}{\sigma(s) \rho(s)} = \Gamma(\alpha + 1) \int_z^{-\infty} \frac{e^s}{s^{\alpha+1}} ds =$$

$$= \Gamma(\alpha + 1) e^{-i\pi\alpha} \Gamma(-\alpha, -z). \quad (12)$$

При целых значениях $\alpha = m$ ($m = 0, 1, \dots$) функцию $Q_0^\alpha(z)$ можно выразить через функции

$$E_m(z) = z^{m-1} \int_z^{+\infty} \frac{e^{-s}}{s^m} ds = \int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t^m} dt, \quad (13)$$

которые находят широкое применение в физике.

*) Для однозначности функций $Q_n(z)$ нами был сделан разрез от точки $z=0$ до $z=+\infty$ вдоль вещественной оси. В соответствии с этим разрезом, в формуле (12) при вычислении $s^{\alpha+1}$ следует считать $0 < \arg s < 2\pi$.

Функции $E_m(z)$ называют обычно *интегральными экспонентами*. Полагая в (12) $\alpha = m$, при $z > 0$ получим

$$Q_0^m(-z) = \frac{(-1)^{m!}}{z^m} E_{m+1}(z). \quad (14)$$

С помощью асимптотического представления (7) для $Q_0(z)$ из соотношения (14) легко найти асимптотическое представление для функции $E_m(z)$:

$$E_m(z) = \frac{e^{-z}}{z} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right]. \quad (15)$$

Дифференцируя (13), получаем формулы дифференцирования

$$E'_m(z) = \frac{m-1}{z} E_m(z) - \frac{e^{-z}}{z} = -E_{m-1}(z),$$

из которых вытекает следующее рекуррентное соотношение:

$$E_m(z) = \frac{1}{m-1} [e^{-z} - zE_{m-1}(z)]. \quad (16)$$

Исследуем теперь поведение функции $E_m(z)$ при $z \rightarrow 0$. Для этого в силу (16) достаточно исследовать поведение функции $E_1(z)$. При $z \rightarrow 0$ функция $E_1(z)$ имеет особенность. Для выделения ее проделаем следующие тождественные преобразования:

$$\begin{aligned} E_1(z) &= \int_z^\infty \frac{e^{-s}}{s} ds = \int_1^\infty \frac{e^{-s}}{s} ds + \int_z^1 \frac{e^{-s}-1}{s} ds + \int_z^1 \frac{ds}{s} = \\ &= C - \ln z - \int_0^z \frac{e^{-s}-1}{s} ds, \end{aligned}$$

где

$$C = \int_1^\infty \frac{e^{-s}}{s} ds + \int_0^1 \frac{e^{-s}-1}{s} ds.$$

Разлагая e^{-s} по степеням s и интегрируя почленно, получим разложение функции $E_1(z)$ по степеням z :

$$E_1(z) = C - \ln z + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^{h-1}}{h} \frac{z^h}{h!}. \quad (17)$$

Для вычисления постоянной C воспользуемся интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} C &= e^{-s} \ln s \Big|_1^\infty + \int_1^\infty e^{-s} \ln s ds + (e^{-s}-1) \ln s \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-s} \ln s ds = \\ &= \int_0^\infty e^{-s} \ln s ds = \Gamma'(1) = -\gamma, \end{aligned}$$

где γ — постоянная Эйлера (см., Дополнение А).

Наряду с $E_1(z)$ на практике часто употребляются родственная ей *интегральная показательная функция* $Ei(z)$, связанная соотношением

$$E_1(z) = -Ei(-z),$$

а также функции

$$Si(z) = \int_0^z \frac{\sin s}{s} ds, \quad Ci(s) = \int_{\infty}^z \frac{\cos s}{s} ds,$$

которые называют *интегральным синусом* и *интегральным косинусом*. При $z > 0$, используя лемму Жордана [9], имеем

$$\begin{aligned} E_1(iz) &= \int_{iz}^{\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds = \int_{iz}^{+i\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds = \int_z^{\infty} \frac{e^{-it}}{t} dt = \\ &= \int_z^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt - i \int_z^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = -\{Ci(z) + i\left[\frac{\pi}{2} - Si(z)\right]\}, \end{aligned}$$

так как

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, при $z > 0$

$$\begin{aligned} Ci(z) &= -\frac{1}{2} [E_1(iz) + E_1(-iz)], \\ Si(z) &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2i} [E_1(iz) - E_1(-iz)]. \end{aligned} \tag{18}$$

По принципу аналитического продолжения эти соотношения остаются справедливыми в более широкой области изменения z .

Из формул (15), (17), (18) легко получить *асимптотические представления и разложения по степеням z* для $Si(z)$, $Ci(z)$. Имеем, например,

$$\begin{aligned} Si(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}, \\ Ci(z) &= \gamma + \ln z - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^{2k}}{2k(2k)!}. \end{aligned}$$

Так как степенные ряды для $Si(z)$ и $Ci(z)$ сходятся во всей комплексной плоскости, то функция $Si(z)$ — аналитическая во всей комплексной плоскости, а $Ci(z)$ — аналитическая в плоскости с разрезом вдоль полуоси $(-\infty, 0]$.

2) Для функции Эрмита второго рода, полагая в (11) $z_0 = \pm i\infty$ (знак совпадает со знаком $\text{Im } z$), получим

$$Q_0(z) = 2\sqrt{\pi} \int_0^{\pm i\infty} e^{s^2} ds.$$

При $z > 0$ имеем

$$Q_0(iz) = 2\sqrt{\pi} \int_{iz}^{i\infty} e^{s^2} ds = 2\sqrt{\pi} i \int_z^{\infty} e^{-s^2} ds = \pi i [1 - \Phi(z)],$$

где

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2} ds. \quad (19)$$

Функцию $\Phi(z)$ называют *интегралом вероятности*.

С помощью асимптотического представления (7) для $Q_0(z)$ легко найти *асимптотическое представление* для интеграла вероятности:

$$\Phi(z) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-z^2}}{z} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right].$$

Разложение функции $\Phi(z)$ по степеням z можно получить, разлагая в (19) e^{-s^2} в ряд и интегрируя почленно:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{k! (2k+1)}.$$

С интегралом вероятности тесно связаны *интегралы Френеля*

$$S(z) = \int_0^z \sin \frac{\pi t^2}{2} dt, \quad C(z) = \int_0^z \cos \frac{\pi t^2}{2} dt.$$

Действительно, при $z > 0$ имеем

$$C(z) - iS(z) = \int_0^z e^{-i\frac{\pi t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2i}} \Phi\left(\sqrt{i\frac{\pi}{2}} z\right).$$

Полученная связь позволяет получить асимптотическое поведение и разложение в ряды интегралов Френеля.

Графики функций $E_1(x)$, $\text{Si}(x)$, $\text{Ci}(x)$, $\Phi(x)$, $S(x)$, $C(x)$ приведены на рис. 3—5.

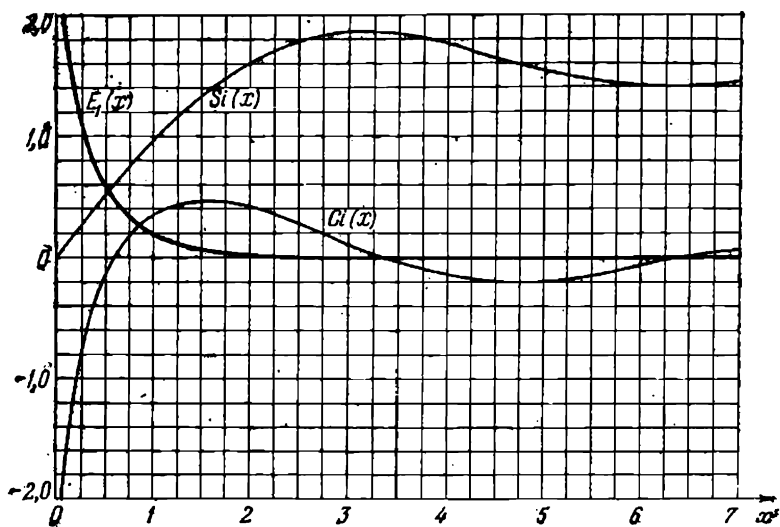


Рис. 3.

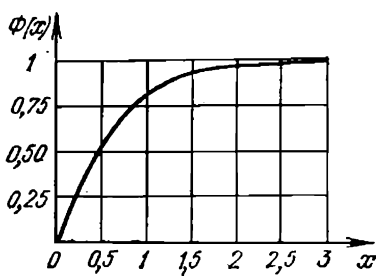


Рис. 4.

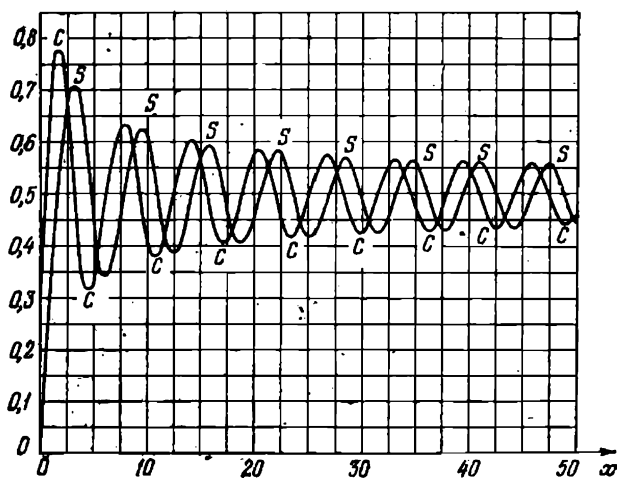


Рис. 5.

§ 12. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной

1. Разностное уравнение гипергеометрического типа. Развита ранее теория полиномиальных решений дифференциального уравнения гипергеометрического типа

$$\tilde{\sigma}(x)y'' + \tilde{\tau}(x)y' + \lambda y = 0 \quad (1)$$

($\tilde{\sigma}(x)$ и $\tilde{\tau}(x)$ — полиномы не выше второй и первой степени*), λ — постоянная) допускает естественное обобщение на случай, когда дифференциальное уравнение заменяется разностным. Рассмотрим наиболее простой случай, когда дифференциальное уравнение (1) заменяется разностным уравнением

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(x) \frac{1}{h} \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right] + \\ + \frac{\tilde{\tau}(x)}{2} \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right] + \lambda y(x) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

которое аппроксимирует уравнение (1) на сетке с постоянным шагом $\Delta x = h$ со вторым порядком точности относительно h **).

Линейной заменой независимой переменной x на hx , сохраняющей тип уравнения, всегда можно добиться того, чтобы в уравнении (2) шаг сетки был равен единице ($\Delta x = h = 1$). В этом случае

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(x) [y(x+1) - 2y(x) + y(x-1)] + \\ + \frac{\tilde{\tau}(x)}{2} \{ [y(x+1) - y(x)] + [y(x) - y(x-1)] \} + \lambda y(x) = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\tilde{\sigma}(x) \Delta \nabla y(x) + \frac{\tilde{\tau}(x)}{2} (\Delta + \nabla) y(x) + \lambda y(x) = 0, \quad (2a)$$

где $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, $\nabla f(x) = f(x) - f(x-1)$. Так как $\nabla f(x) = \Delta f(x) - \Delta \nabla f(x)$, то (2a) эквивалентно уравнению

$$\sigma(x) \Delta \nabla y(x) + \tau(x) \Delta y(x) + \lambda y(x) = 0, \quad (3)$$

где $\sigma(x) = \tilde{\sigma}(x) - \tilde{\tau}(x)/2$, $\tilde{\tau}(x) = \tau(x)$. Очевидно, что $\sigma(x)$ — полином не выше второй степени.

*) Для удобства дальнейшего изложения мы обозначили коэффициенты уравнения (1) через $\sigma(x)$ и $\tau(x)$ вместо $\tilde{\sigma}(x)$ и $\tilde{\tau}(x)$, как это было принято в гл. I.

**) Говорят, что разностный оператор L_h аппроксимирует в точке x дифференциальный оператор L с порядком точности m относительно шага h , если

$$L_h y(x) - L y(x) = O(h^m), \quad h \rightarrow 0.$$

Прежде чем переходить к изучению решений уравнения (3), рассмотрим ряд свойств операторов Δ и ∇ . Имеем

$$\Delta f(x) = \nabla f(x+1), \quad (4)$$

$$\Delta \nabla f(x) = \nabla \Delta f(x) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1), \quad (5)$$

$$\Delta[f(x)g(x)] = f(x)\Delta g(x) + g(x+1)\Delta f(x). \quad (6)$$

Из (6) вытекает следующая формула суммирования по частям:

$$\sum_i f(x_i) \Delta g(x_i) = f(x_i) g(x_i) \Big|_a^b - \sum_i g(x_{i+1}) \Delta f(x_i). \quad (7)$$

Здесь $x_{i+1} = x_i + 1$, суммирование производится по таким значениям i , для которых $a \leq x_i \leq b-1$. Заметим, что для произвольного полинома $q_m(x)$ степени m выражения $\Delta q_m(x)$ и $\nabla q_m(x)$ будут полиномами степени $m-1$, причем $\Delta^m q_m(x) = \nabla^m q_m(x) = q_m^{(m)}(x)$.

Установим ряд свойств решений уравнения (3), аналогичных свойствам решений уравнения (1). Докажем, что функция $v_1(x) = \Delta y(x)$ удовлетворяет разностному уравнению вида (3).

Для доказательства применим оператор Δ к обеим частям уравнения (3):

$$\Delta[\sigma(x)\nabla v_1(x)] + \Delta[\tau(x)v_1(x)] + \lambda v_1(x) = 0.$$

Используя (6), (4), это уравнение можно привести к виду

$$\sigma(x)\Delta \nabla v_1(x) + \tau_1(x)\Delta v_1(x) + \mu_1 v_1(x) = 0, \quad (8)$$

где $\tau_1(x) = \tau(x+1) + \Delta\sigma(x)$, $\mu_1 = \lambda + \Delta\tau(x)$. Так как $\tau_1(x)$ — полином не выше первой степени, а μ_1 не зависит от x , то (8) будет уравнением того же вида, что и (3).

Легко проверить и обратное утверждение: любое решение уравнения (8) при $\lambda \neq 0$ можно представить в виде $v_1(x) = \Delta y(x)$, где $y(x)$ — некоторое решение уравнения (3), которое выражается через $v_1(x)$ следующим образом:

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda} [\sigma(x)\nabla v_1 + \tau(x)v_1].$$

Подобным же образом для функции $v_n(x) = \Delta^n y(x)$ можно получить разностное уравнение гипергеометрического типа

$$\sigma(x)\Delta \nabla v_n(x) + \tau_n(x)\Delta v_n(x) + \mu_n v_n(x) = 0, \quad (9)$$

где

$$\tau_n(x) = \tau_{n-1}(x+1) + \Delta\sigma(x), \quad \tau_0(x) = \tau(x), \quad (10)$$

$$\mu_n = \mu_{n-1} + \Delta\tau_{n-1}(x), \quad \mu_0 = \lambda. \quad (11)$$

Справедливо и обратное утверждение: любое решение уравнения (9) при $\mu_k \neq 0$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) можно представить в виде $v_n(x) = \Delta^n y(x)$, где $y(x)$ — некоторое решение уравнения (3).

Если (10) переписать в виде

$$\tau_n(x) + \sigma(x) = \tau_{n-1}(x+1) + \sigma(x+1), \quad (10a)$$

то легко получить явное выражение для $\tau_n(x)$:

$$\tau_n(x) = \tau(x+n) + \sigma(x+n) - \sigma(x).$$

Чтобы найти явное выражение для μ_n , достаточно заметить, что величины $\Delta\tau_n(x)$ и $\Delta^2\sigma(x)$ не зависят от x . Поэтому

$$\Delta\tau_n = \Delta\tau_{n-1} + \Delta^2\sigma = \dots = \Delta\tau + n\Delta^2\sigma$$

и, следовательно, $\mu_n = \mu_{n-1} + \Delta\tau + (n-1)\Delta^2\sigma$. Отсюда

$$\begin{aligned}\mu_n &= \mu_0 + \sum_{k=1}^n (\mu_k - \mu_{k-1}) = \lambda + n\Delta\tau + \frac{n(n-1)}{2} \Delta^2\sigma = \\ &= \lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2} \sigma''.\end{aligned}\quad (12)$$

2. Разностные аналоги полиномов гипергеометрического типа и их производных. Формула Родрига. Рассмотренное в п. 1 свойство разностных производных $\Delta^n y(x)$ позволяет построить теорию классических ортогональных полиномов дискретной переменной, следуя логической схеме, принятой в гл. I. Очевидно, уравнение (9) при $\mu_n = 0$ имеет частное решение $v_n(x) = \text{const}$. Так как $v_n(x) = \Delta^n y(x)$, то это означает, что при

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2} \sigma''$$

может существовать частное решение уравнения $y = y_n(x)$, являющееся полиномом n -й степени, если $\mu_k \neq 0$ ($k=0, 1, \dots, n-1$).

Действительно, уравнение для функции $v_k(x)$

$$\sigma(x)\Delta\nabla v_k + \tau_k(x)\Delta v_k + \mu_k v_k = 0$$

можно переписать в виде

$$v_k(x) = -\frac{1}{\mu_k} [\sigma(x)\nabla v_{k+1}(x) + \tau_k(x)v_{k+1}(x)].$$

Отсюда видно, что если $v_{k+1}(x)$ — полином, то $v_k(x)$ — также полином при $\mu_k \neq 0$.

Чтобы получить явное выражение для полинома $y_n(x)$, запишем уравнения (3), (9) в самосопряженном виде:

$$\Delta(\sigma\rho\nabla y) + \lambda\rho y = 0, \quad (13)$$

$$\Delta(\sigma\rho_n\nabla v_n) + \mu_n\rho_n v_n = 0. \quad (14)$$

Здесь функции $\rho(x)$ и $\rho_n(x)$ удовлетворяют разностным уравнениям

$$\Delta(\sigma\rho) = \tau\rho, \quad (15)$$

$$\Delta(\sigma\rho_n) = \tau_n\rho_n. \quad (16)$$

Найдем связь функций $\rho_n(x)$ и $\rho(x)$, представив уравнение (16) в виде

$$\frac{\sigma(x+1)\rho_n(x+1)}{\rho_n(x)} = \tau_n(x) + \sigma(x).$$

Отсюда видно, что (10а) будет эквивалентно соотношению

$$\frac{\sigma(x+1)\rho_n(x+1)}{\rho_n(x)} = \frac{\sigma(x+2)\rho_{n-1}(x+2)}{\rho_{n-1}(x+1)},$$

т. е.

$$\frac{\rho_n(x+1)}{\sigma(x+2)\rho_{n-1}(x+2)} = \frac{\rho_n(x)}{\sigma(x+1)\rho_{n-1}(x+1)} = C_n(x),$$

где $C_n(x)$ — произвольная периодическая функция с периодом, равным единице. Нам достаточно найти любое решение уравнения (16), поэтому можно положить $C_n(x) = 1$. В результате получим

$$\rho_n(x) = \sigma(x+1)\rho_{n-1}(x+1).$$

Так как $\rho_0(x) = \rho(x)$, то

$$\rho_n(x) = \rho(x+n) \prod_{k=1}^n \sigma(x+k). \quad (17)$$

Используя связь функций $\rho_n(x)$ и $\rho_{n+1}(x)$, уравнение (14) можно записать в виде простого соотношения между функциями $v_n(x)$ и $v_{n+1}(x)$. Действительно,

$$\begin{aligned} \rho_n(x) v_n(x) &= -\frac{1}{\mu_n} \Delta [\sigma(x) \rho_n(x) \nabla v_n(x)] = \\ &= -\frac{1}{\mu_n} \nabla [\sigma(x+1) \rho_n(x+1) \Delta v_n(x)], \end{aligned}$$

или

$$\rho_n(x) v_n(x) = -\frac{1}{\mu_n} \nabla [\rho_{n+1}(x) v_{n+1}(x)].$$

Отсюда при $m < n$ последовательно получаем

$$\begin{aligned} \rho_m v_m &= -\frac{1}{\mu_m} \nabla (\rho_{m+1} v_{m+1}) = \\ &= \left(-\frac{1}{\mu_m}\right) \left(-\frac{1}{\mu_{m+1}}\right) \nabla^2 (\rho_{m+2} v_{m+2}) = \dots = \frac{A_m}{A_n} \nabla^{n-m} (\rho_n v_n), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$A_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \mu_k, \quad A_0 = 1. \quad (19)$$

Если $y = y_n(x)$, то $v_n(x) = \text{const}$, и мы приходим к следующему выражению для $v_{mn}(x) = \Delta^m y_n(x)$:

$$v_{mn}(x) = \frac{A_{mn} B_n}{\rho_m(x)} \nabla^{n-m} [\rho_n(x)], \quad (20)$$

где

$$A_{mn} = A_m(\lambda) |_{\lambda=\lambda_n} = \frac{n!}{(n-m)!} \prod_{k=0}^{m-1} \left(\tau' + \frac{n+k-1}{2} \sigma'' \right),$$

$$A_{0n} = 1, \quad m \leq n,$$

$$B_n = \frac{\Delta^n y_n(x)}{A_{nn}} = \frac{1}{A_{nn}} y_n^{(n)}(x). \quad (21)$$

Отсюда, в частности, при $m=0$ получаем явное выражение для полиномов $y_n(x)$:

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \nabla^n [\rho_n(x)]. \quad (22)$$

Таким образом, полиномиальные решения уравнения (3) определяются формулой (22) однозначно с точностью до нормировочного множителя B_n . Эти решения соответствуют значениям

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2} \sigma''.$$

Используя (4), (17), формулу (22) можно записать также в другом виде:

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \Delta^n [\rho_n(x-n)] = \frac{B_n}{\rho(x)} \Delta^n \left[\rho(x) \prod_{k=0}^{n-1} \sigma(x-k) \right]. \quad (22a)$$

Соотношение (20) является разностным аналогом формулы Родрига для классических ортогональных полиномов и их производных (см. (2.10)). Из формул Родрига для полиномов $y_n(x)$ и их разностных производных $\Delta y_n(x)$ вытекает связь функций $\Delta y_n(x)$ с самими полиномами. Для этого достаточно заметить, что при $m=1$ в (20) $A_{1n} = -\lambda_n$ и согласно (17) $[\rho_1(x)]_{n-1} = \rho_n(x)$. Действительно,

$$\rho_1(x) = \sigma(x+1)\rho(x+1),$$

$$[\rho_1(x)]_{n-1} =$$

$$= \rho_1(x+n-1) \prod_{k=1}^{n-1} \sigma(x+k) = \rho(x+n) \prod_{k=1}^n \sigma(x+k) = \rho_n(x).$$

Отсюда

$$\Delta y_n(x) = -\lambda_n \frac{B_n}{\rho_1(x)} \nabla^{n-1} [\rho_n(x)] =$$

$$= -\lambda_n \frac{B_n \bar{B}_{n-1}}{\bar{B}_{n-1} \rho_1(x)} \nabla^{n-1} \{[\rho_1(x)]_{n-1}\} = -\lambda_n \frac{B_n}{\bar{B}_{n-1}} \bar{y}_{n-1}(x). \quad (23)$$

Здесь $\bar{y}_n(x)$ — полином, получающийся при замене $\rho(x)$ на $\rho_1(x)$ в выражении для $y_n(x)$, $\bar{B}_n$ — нормировочная постоянная в формуле Родрига для $\bar{y}_n(x)$.

С помощью (20) при $m = n - 1$ можно вычислить коэффициенты a_n, b_n при старших степенях x в разложении

$$y_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots$$

Для этого предварительно найдем $n - 1$ -ю разность $\Delta^{n-1}(x^n)$, являющуюся полиномом первой степени. Имеем

$$\Delta^{n-1}(x^n) = \alpha_n(x + \beta_n),$$

где α_n, β_n — постоянные. Для определения коэффициентов α_n, β_n заметим, что

$$\Delta^n(x^n) = \Delta[\alpha_n(x + \beta_n)] = \alpha_n.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1}(x + \beta_{n+1}) &= \Delta^n(x^{n+1}) = \Delta^{n-1}(\Delta x^{n+1}) = \\ &= \Delta^{n-1}[(x+1)^{n+1} - x^{n+1}] = \Delta^{n-1}\left[(n+1)x^n + \frac{(n+1)n}{2}x^{n-1} + \dots\right] = \\ &= (n+1)\alpha_n(x + \beta_n) + \frac{(n+1)n}{2}\alpha_{n-1}. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при различных степенях x в левой и правой частях этого равенства, получим

$$\alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n, \quad \alpha_{n+1}\beta_{n+1} = (n+1)\alpha_n\beta_n + \frac{(n+1)n}{2}\alpha_{n-1}.$$

Так как $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 0$, то из первого равенства находим $\alpha_n = n!$, откуда $\beta_{n+1} = \beta_n + 1/2$, т. е. $\beta_n = (n-1)/2$. Таким образом,

$$\Delta^{n-1}(x^n) = n! \left(x + \frac{n-1}{2}\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta^{n-1}y_n(x) &= \Delta^{n-1}(a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots) = \\ &= a_n \alpha_n(x + \beta_n) + b_n \alpha_{n-1} = n! a_n \left(x + \frac{n-1}{2}\right) + (n-1)! b_n. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\nabla \rho_n(x) = \Delta \rho_n(x-1) = \Delta[\sigma(x) \rho_{n-1}(x)] = \tau_{n-1}(x) \rho_{n-1}(x).$$

Поэтому, полагая в (20) $m = n - 1$, получим

$$A_{n-1,n} B_n \tau_{n-1}(x) = n! a_n \left(x + \frac{n-1}{2}\right) + (n-1)! b_n,$$

откуда

$$a_n = \frac{A_{n-1,n} B_n}{n!} \tau'_{n-1} = B_n \prod_{k=0}^{n-1} \left(\tau' + \frac{n+k-1}{2} \sigma''\right), \quad a_0 = B_0, \quad (24)$$

$$\frac{b_n}{a_n} = n \frac{\tau_{n-1}(0)}{\tau'_{n-1}} - \frac{n(n-1)}{2} = n \frac{\tilde{\tau}(0) + (n-1)\tilde{\sigma}''(0)}{\tilde{\tau}' + (n-1)\tilde{\sigma}''}. \quad (25)$$

3. Свойство ортогональности. Выведем свойство ортогональности полиномиальных решений разностного уравнения (3). С этой

целью запишем уравнения для полиномов $y_n(x)$ и $y_m(x)$ в само-сопряженном виде:

$$\begin{aligned}\Delta [\sigma(x) \rho(x) \nabla y_n(x)] + \lambda_n \rho(x) y_n(x) &= 0, \\ \Delta [\sigma(x) \rho(x) \nabla y_m(x)] + \lambda_m \rho(x) y_m(x) &= 0.\end{aligned}$$

Умножим первое уравнение на y_m , второе на y_n и вычтем из первого уравнения второе. В результате получим

$$(\lambda_m - \lambda_n) \rho(x) y_m(x) y_n(x) = \Delta \{ \sigma(x) \rho(x) [y_m(x) \nabla y_n(x) - y_n(x) \nabla y_m(x)] \}.$$

Положим $x = x_i$, $x_{i+1} = x_i + 1$ и просуммируем по тем значениям индекса i , для которых $a \leq x_i \leq b-1$. Тогда придем к равенству

$$\begin{aligned}(\lambda_m - \lambda_n) \sum_{x_i=a}^{b-1} y_m(x_i) y_n(x_i) \rho(x_i) &= \\ &= \sigma(x) \rho(x) [y_m(x) \nabla y_n(x) - y_n(x) \nabla y_m(x)] \Big|_a^b.\end{aligned}$$

Здесь $y_m \nabla y_n - y_n \nabla y_m$ — полином относительно переменной x . Поэтому при выполнении граничных условий

$$\sigma(x) \rho(x) x^k \Big|_{x=a,b} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (26)$$

полиномиальные решения уравнения (3) будут ортогональны на отрезке $[a, b-1]$ с весом $\rho(x)$:

$$\sum_{x_i=a}^{b-1} y_m(x_i) y_n(x_i) \rho(x_i) = \delta_{mn} d_n^2. \quad (27)$$

Полиномы $y_n(x)$, для которых интервал (a, b) находится на вещественной оси, а функция $\rho(x)$ удовлетворяет уравнению (15) и граничному условию (26), будем называть *классическими ортогональными полиномами дискретной переменной*. Обычно их рассматривают при дополнительном условии $\rho(x_i) > 0$, если $a \leq x_i \leq b-1$.

Рассмотрим теперь свойство ортогональности разностных производных полиномов $y_n(x)$. Полиномы $\Delta y_n(x)$ удовлетворяют уравнению, которое получается из уравнения для $y_n(x)$ заменой $\rho(x)$ на $\rho_1(x) = \sigma(x+1)\rho(x+1) = [\tau(x) + \sigma(x)]\rho(x)$ и заменой λ на $\mu_1 = -\lambda + \tau'$. Функция $\rho_1(x)$, очевидно, удовлетворяет условию, аналогичному (26):

$$\sigma(x) \rho_1(x) x^k \Big|_{x=a,b-1} = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Поэтому для полиномов $\Delta y_n(x)$ справедливо свойство ортогональности

$$\sum_{x_i=a}^{b-2} \Delta y_m(x_i) \Delta y_n(x_i) \rho_1(x_i) = \delta_{mn} d_{1n}^2.$$

Аналогично, легко показать, что для полиномов $\Delta^k y_n(x)$ имеет место соотношение

$$\sum_{\kappa_i=a}^{b-k-1} \Delta^k y_m(x_i) \Delta^k y_n(x_i) \rho_k(x_i) = \delta_{mn} d_{kn}^2. \quad (28)$$

Если выбрать $\rho(a) > 0$, то при выполнении условий

$$\begin{aligned} \sigma(x_i) &> 0, \quad a+1 \leq x_i \leq b-1, \\ \sigma(x_i) + \tau(x_i) &> 0, \quad a \leq x_i \leq b-2, \end{aligned} \quad (29)$$

из уравнения (15), записанного в виде

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \frac{\sigma(x) + \tau(x)}{\sigma(x+1)},$$

и явного вида функций $\rho_k(x)$ будет следовать, что

$$\rho_k(x_i) > 0, \quad a \leq x \leq b-k-1, \quad k=0, 1, \dots$$

Рассмотрим теперь некоторые соображения о выборе величин a, b , для которых удовлетворяются граничные условия (26) и условия положительности веса $\rho(x_i)$ на отрезке ортогональности $[a, b-1]$. Если a — копейное число, то по условию $\rho(a) > 0$, т. е. a — корень полинома $\sigma(x)$. Так как линейная замена независимой переменной x на $x+a$ не меняет типа уравнения, то при $\sigma(x) \neq \text{const}$ всегда можно добиться того, чтобы $\sigma(0) = 0$, т. е. можно считать, что $a=0$. Если b — конечное число, то в силу (15)

$$\sigma(b)\rho(b) = [\sigma(b-1) + \tau(b-1)]\rho(b-1).$$

Так как $\rho(b-1) > 0$, то

$$\sigma(b-1) + \tau(b-1) = 0. \quad (30)$$

При $b = +\infty$ граничные условия (26) будут выполнены, если

$$\lim_{\kappa \rightarrow +\infty} x^k \rho(x) = 0, \quad k=0, 1, \dots$$

Аналогичное условие имеет место при $a = -\infty$.

Для вычисления квадрата нормы d_n^2 установим предварительно связь квадратов норм d_{kn}^2 и $d_{k+1,n}^2$, где

$$d_{kn}^2 = \sum_{\kappa_i=a}^{b-k-1} v_{kn}^2(x_i) \rho_k(x_i), \quad d_{0n}^2 = d_n^2, \quad v_{kn}(x) = \Delta^k y_n(x).$$

Для этого разностное уравнение

$$\Delta[\sigma(x)\rho_k(x)\nabla v_{kn}(x)] + \mu_{kn}\rho_k(x)v_{kn}(x) = 0,$$

где $\mu_{kn} = \mu_k(\lambda) |_{\lambda=\lambda_n} = \lambda_n - \lambda_k$, умножим на $v_{kn}(x)$ и просуммируем по тем значениям $x = x_i$, для которых $a \leq x_i \leq b-k-1$:

$$\sum_i v_{kn}(x_i) \Delta[\sigma(x_i)\rho_k(x_i)\nabla v_{kn}(x_i)] + \mu_{kn}d_{kn}^2 = 0.$$

Воспользовавшись формулой суммирования по частям (7) и

равенствами

$$\Delta v_{kn}(x) = v_{k+1, n}(x), \quad \sigma(x+1)\rho_k(x+1) = \rho_{k+1}(x),$$

получим

$$\sum_{x_i} v_{kn}(x_i) \Delta [\sigma(x_i) \rho_k(x_i) \nabla v_{kn}(x_i)] = \\ = \sigma(x) \rho_k(x) \nabla v_{kn}(x) v_{kn}(x) \Big|_a^{b-k} - d_{k+1, n}^2.$$

Так как подстановка в силу (26) равна нулю, то

$$d_{kn}^2 = \frac{1}{\mu_{kn}} d_{k+1, n}^2.$$

Отсюда последовательно находим

$$d_n^2 \equiv d_{0n}^2 = \frac{1}{\mu_{0n}} d_{1n}^2 = \frac{1}{\mu_{0n}} \frac{1}{\mu_{1n}} d_{2n}^2 = \dots \\ \dots = \frac{d_{nn}^2}{\prod_{k=0}^{n-1} \mu_{kn}} = \frac{v_{nn}^2(x)}{\prod_{k=0}^{n-1} \mu_{kn}} S_n = (-1)^n A_{nn} B_n^2 S_n, \quad (31)$$

где

$$S_n = \sum_{x_i=a}^{b-n-1} \rho_n(x_i). \quad (32)$$

При $n = b - a - 1$ (в случае, когда $b - a = N$ — конечное число) сумма S_n содержит лишь одно слагаемое и поэтому легко вычисляется:

$$S_{N-1} = \rho_{N-1}(a). \quad (33)$$

Чтобы вычислить S_n при $n < N - 1$, достаточно уметь вычислять отношение S_{n-1}/S_n . Для этого преобразуем (32), используя связь функций $\rho_n(x)$ и $\rho_{n-1}(x)$:

$$S_n = \sum_{x_i} \rho_n(x_i) = \sum_{x_i} \sigma(x_i + 1) \rho_{n-1}(x_i + 1) = \sum_{x_i} \sigma(x_i) \rho_{n-1}(x_i).$$

Разложим полином $\sigma(x)$ по степеням полинома первой степени $\tau_{n-1}(x)$:

$$\sigma(x) = A_n \tau_{n-1}^2(x) + B_n \tau_{n-1}(x) + C_n.$$

Тогда с помощью уравнения для $\rho_{n-1}(x)$ и суммирования по частям получим

$$S_n = \sum_{x_i} [A_n \tau_{n-1}(x_i) + B_n] \tau_{n-1}(x_i) \rho_{n-1}(x_i) + C_n S_{n-1} = \\ = \sum_{x_i} [A_n \tau_{n-1}(x_i) + B_n] \Delta [\sigma(x_i) \rho_{n-1}(x_i)] + C_n S_{n-1} = \\ = - \sum_{x_i} \sigma(x_i + 1) \rho_{n-1}(x_i + 1) \Delta [A_n \tau_{n-1}(x_i) + B_n] + C_n S_{n-1} = \\ = - A_n \tau_{n-1}' S_n + C_n S_{n-1}.$$

Отсюда

$$\frac{s_{n-1}}{s_n} = \frac{1 + A_n \tau'_{n-1}}{C_n} = \frac{1 + \sigma'' / (2\tau'_{n-1})}{\sigma(x_n^*)}, \quad (34)$$

где x_n^* — корень уравнения $\tau_{n-1}(x) = 0$. Мы воспользовались тем, что $\sigma(x_n^*) = C_n$, $\sigma'' = 2A_n(\tau'_{n-1})^2$. С помощью формул (31)–(34) окончательно получим

$$d_n^2 = (-1)^n A_{nn} B_{nN-1}^2 \rho_{N-1}(a) \prod_{k=n+1}^{N-1} \left[\frac{1 + \sigma'' / (2\tau'_{k-1})}{\sigma(x_k^*)} \right], \quad (31a)$$

где $N = b - a$, $\tau'_{k-1} = \tau' + (k-1)\sigma''$, x_k^* — корень уравнения $\tau_{k-1}(x) = 0$, т. е. уравнения

$$\tau(x) + (k-1)\sigma'(x) + (k-1)\tau' + (k-1)^2\sigma''/2 = 0.$$

4. Полиномы Хана, Чебышева, Мейкснера, Кравчука и Шарлье. Найдем явные выражения для веса $\rho(x)$, с которым ортогональны классические ортогональные полиномы дискретной переменной. Для этого разностное уравнение (15) перепишем в виде

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \frac{\sigma(x) + \tau(x)}{\sigma(x+1)}. \quad (35)$$

Нетрудно проверить, что решения уравнения $\rho(x+1)/\rho(x) = f(x)$, правую часть которого можно представить в виде произведения или частного двух функций, обладают следующим простым свойством.

Если функции $\rho_1(x)$ и $\rho_2(x)$ являются решениями уравнений

$$\rho_1(x+1)/\rho_1(x) = f_1(x), \quad \rho_2(x+1)/\rho_2(x) = f_2(x),$$

то решением уравнения

$$\rho(x+1)/\rho(x) = f(x)$$

при $f(x) = f_1(x)f_2(x)$ будет функция $\rho(x) = \rho_1(x)\rho_2(x)$, а при $f(x) = f_1(x)/f_2(x)$ — функция $\rho(x) = \rho_1(x)/\rho_2(x)$.

Так как правая часть уравнения (35) является рациональной функцией, то его решение можно выразить через решения следующих разностных уравнений:

$$\rho(x+1)/\rho(x) = \gamma + x, \quad (36)$$

$$\rho(x+1)/\rho(x) = \gamma - x, \quad (37)$$

$$\rho(x+1)/\rho(x) = \gamma, \quad (38)$$

где γ — постоянная. Так как

$$\gamma + x = \Gamma(\gamma + x + 1)/\Gamma(\gamma + x),$$

то частное решение уравнения (36) имеет вид $\rho(x) = \Gamma(\gamma + x)$. Точно так же, используя равенство

$$\gamma - x = \frac{\Gamma(\gamma - x + 1)}{\Gamma(\gamma - x)} = \frac{1}{\Gamma[(\gamma + 1) - (x + 1)]} \bigg/ \frac{1}{\Gamma(\gamma + 1 - x)},$$

находим частное решение уравнения (37) $\rho(x) = 1/\Gamma(\gamma + 1 - x)$.

Легко убедиться, что частным решением уравнения (38) является функция $\rho(x) = \gamma^*$.

Найдем решения уравнения (35), соответствующие различным степеням полинома $\sigma(x)$.

1) Пусть $\sigma(x) = x(\gamma_1 - x)$, $\sigma(x) + \tau(x) = (x + \gamma_2)(\gamma_3 - x)$. Здесь $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — постоянные. Условия (29) и (30) при $a = 0$, $b = N$ примут вид

$$\begin{aligned} \sigma(x_i) &> 0, & 1 \leq x_i \leq N-1, \\ \sigma(x_i) + \tau(x_i) &> 0, & 0 \leq x_i \leq N-2, \\ \sigma(N-1) + \tau(N-1) &= 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Они будут выполнены, если положить $\gamma_1 = N + \alpha$, $\gamma_2 = \beta + 1$ ($\alpha > -1$, $\beta > -1$), $\gamma_3 = N - 1$. Уравнение (35) в этом случае имеет вид

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \frac{(x + \beta + 1)(N - 1 - x)}{(x + 1)(N + \alpha - 1 - x)}. \quad (40)$$

Решением этого уравнения будет функция

$$\rho(x) = \frac{\Gamma(N + \alpha - x) \Gamma(x + \beta + 1)}{\Gamma(x + 1) \Gamma(N - x)}, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1. \quad (41)$$

Приведем некоторые соображения относительно выбора постоянных γ_1, γ_2 в виде $\gamma_1 = N + \alpha$, $\gamma_2 = \beta + 1$. Естественно ожидать, что полиномиальные решения $y_n(x)$ при линейной замене $x = N(1+s)/2$, переводящей интервал $(0, N)$ в интервал $(-1, 1)$, будут переходить при $N \rightarrow \infty$ (когда $\Delta s = h = 2/N \rightarrow 0$) в полиномы Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(s)$. При этом вес $\rho(x)$ будет переходить с точностью до постоянного множителя в вес для полиномов Якоби $(1-s)^\alpha(1+s)^\beta$. Решением уравнения (35) при

$$\sigma(x) = x(\gamma_1 - x), \quad \sigma(x) + \tau(x) = (x + \gamma_2)(N - 1 - x)$$

будет функция

$$\rho(x) = \frac{\Gamma(\gamma_1 - x) \Gamma(x + \gamma_2)}{\Gamma(x + 1) \Gamma(N - x)} = \frac{\Gamma[N(1-s)/2 + \gamma_1 - N] \Gamma[N(1+s)/2 + \gamma_2]}{\Gamma[N(1-s)/2] \Gamma[N(1+s)/2 + 1]}.$$

Так как

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z + a)}{\Gamma(z) z^a} = 1, \quad (42)$$

то при $N \rightarrow \infty$

$$\rho(x) \approx \left[\frac{N}{2} (1-s) \right]^{\gamma_1 - N} \left[\frac{N}{2} (1+s) \right]^{\gamma_2 - 1}.$$

Поэтому естественно положить $\gamma_1 - N = \alpha$, $\gamma_2 - 1 = \beta$.

Полиномы $y_n(x)$, получаемые по формуле Родрига (22) при $B_n = (-1)^n/n!$, когда вес $\rho(x)$ определяется формулой (41), называются *полиномами Хана* и обозначаются $h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N)$. В дальнейшем наряду с обозначением $h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N)$ мы будем использовать также обозначение $h_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, если N не меняется.

Важным частным случаем полиномов Хана являются *полиномы Чебышева дискретной переменной*

$$t_n(x) = h_n^{(0,0)}(x, N),$$

для которых $\rho(x) = 1$.

Полиномы Хана $h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N)$ и их разностные производные ортогональны на отрезке $[0, N-1]$ при $\alpha > -1$, $\beta > -1$.

Интересно отметить, что в последнее время была обнаружена простая связь полиномов Хана с широко используемыми в квантовой механике и теории представлений группы вращений коэффициентами Клебша — Гордана, которая стимулировала дальнейшее изучение свойств этих коэффициентов. Эта связь будет рассмотрена в § 26 п. 4.

2) Пусть $\sigma(x) = x(x + \gamma_1)$, $\sigma(x) + \tau(x) = (\gamma_2 - x)(\gamma_3 - x)$. Условия (39) будут выполнены, если $\gamma_1 > -1$, $\gamma_2 > N-2$, $\gamma_3 = N-1$. Решением уравнения (35) в этом случае будет функция

$$\rho(x) = \frac{1}{\Gamma(x+1) \Gamma(x+\mu+1) \Gamma(N+\nu-x) \Gamma(N-x)},$$

$$\mu > -1, \nu > -1. \quad (43)$$

Здесь $\mu = \gamma_1$, $\nu = \gamma_2 - N + 1$.

Полиномы $y_n(x)$, получаемые по формуле Родрига (22) при $B_n = 1/n!$, когда вес $\rho(x)$ определяется формулой (43), будем также называть *полиномами Хана* и обозначать $\tilde{h}_n^{(\mu, \nu)}(x, N)$.

Между полиномами $\tilde{h}_n^{(\mu, \nu)}(x)$ и $h_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ существует простая связь. Если формально положить $\mu = -N - \alpha$, $\nu = -N - \beta$, то выражения для $\sigma(x)$ и $\sigma(x) + \tau(x)$, соответствующие полиномам $\tilde{h}_n^{(\mu, \nu)}(x)$ и $h_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, будут отличаться лишь знаком. Поэтому полиномы $\tilde{h}_n^{(-N-\alpha, -N-\beta)}(x)$ и $h_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ будут удовлетворять одному и тому же разностному уравнению. Нетрудно убедиться, что при выбранной нормировке эти полиномы совпадают. Действительно, с помощью формулы дополнения для гамма-функции

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

можно получить, что выражения (41) и (43) для $\rho(x)$ при $\mu = -N - \alpha$, $\nu = -N - \beta$ отличаются лишь периодическим множителем

$$C(x) = \frac{\pi^2}{\sin \pi(N + \alpha - x) \sin \pi(\beta + 1 + x)},$$

который не влияет на явный вид полиномов, получаемых по формуле Родрига. Поэтому выражения для $\tilde{h}_n^{(-N-\alpha, -N-\beta)}(x)$ и $h_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ совпадут, если нормировочные постоянные B_n для этих полиномов будут отличаться множителем $(-1)^n$, так как соответствующие выражения для $\sigma(x)$ отличаются знаком.

Таким образом, полиномы $\tilde{h}_n^{(-N-\alpha, -N-\beta)}(x)$ осуществляют аналитическое продолжение полиномов $h_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ по параметрам α, β с области $\alpha > -1, \beta > -1$ на область $\alpha < 1-N, \beta < 1-N$.

Замечания. 1. В случае, когда $\sigma(x)$ — полином второй степени, решение уравнения (35) для $\rho(x)$ имеет степенное поведение при $x \rightarrow \pm\infty$, в чем можно убедиться, используя (42). Поэтому выбор $a = -\infty$ или $b = +\infty$ приводит к тому, что моменты весовой функции $\sum_i x_i^k \rho(x_i)$ ($k = 0, 1, \dots$) не будут существовать,

начиная с некоторого значения k , т. е. в этом случае возможна лишь конечная система ортогональных полиномов $\{y_n(x)\}$, хотя число точек x_i , по которым проводится суммирование в соотношении ортогональности, бесконечно.

2. Полиномы $\tilde{h}_n^{(\mu, \nu)}(x, N)$ и $h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N)$ можно выразить через рассмотренные в [1] полиномы $p_n(x, \beta, \gamma, \delta)$, для которых

$$B_n = \frac{1}{n!}, \quad \sigma(x) = x(\delta - 1 + x), \quad \rho(x) = \frac{(\beta)_x (\gamma)_x}{x! (\delta)_x},$$

где $(a)_x = \Gamma(a+x)/\Gamma(a)$. Так как функции $\sigma(x)$ для полиномов $\tilde{h}_n^{(\mu, \nu)}(x, N)$ и $p_n(x, \beta, \gamma, \delta)$ при $\mu = \delta - 1, \nu = \gamma - \beta, N = 1 - \gamma$ совпадают, а весовые функции $\rho(x)$ отличаются лишь постоянным множителем, то

$$\tilde{h}_n^{(\mu, \nu)}(x, N) = p_n(x, 1 - N - \nu, 1 - N, 1 + \mu).$$

С помощью ранее выведенного соотношения

$$h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N) = \tilde{h}_n^{(-N-\alpha, -N-\beta)}(x, N)$$

также получаем

$$h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N) = p_n(x, \beta + 1, 1 - N, 1 - N - \alpha).$$

3) Пусть $\sigma(x) = x$. Рассмотрим три возможных случая:

$$\sigma(x) + \tau(x) = \begin{cases} \mu(\gamma + x), \\ \mu(\gamma - x), \\ \mu. \end{cases}$$

Здесь μ, γ — постоянные. Уравнение (35) при этом будет иметь следующие решения:

$$\rho(x) = \begin{cases} C \frac{\mu^x \Gamma(\gamma + x)}{\Gamma(x + 1)}, \\ C \frac{\mu^x}{\Gamma(x + 1) \Gamma(\gamma + 1 - x)}, \\ C \frac{\mu^x}{\Gamma(x + 1)}. \end{cases}$$

В первом случае граничные условия (26) и условия положительности веса $\rho(x_i)$ будут удовлетворены, если положить

$$a = 0, \quad b = +\infty, \quad 0 \leq \mu < 1, \quad \gamma > 0.$$

Постоянную удобно выбрать в виде $C = 1/\Gamma(\gamma)$. В результате получим

$$\rho(x) = \frac{\mu^x (\gamma)_x}{\Gamma(x+1)}. \quad (44)$$

Соответствующие полиномы при $B_n = \mu^{-n}$ называются *полиномами Мейкснера* $m_n^{(\gamma, \mu)}(x)$.

Из аналогичных соображений во втором случае достаточно выбрать

$$\begin{aligned} a &= 0, \quad b = N + 1, \quad \gamma = N, \quad \mu = p/q, \\ p &> 0, \quad q > 0, \quad p + q = 1, \quad C = q^N N!. \end{aligned}$$

Для величины $\rho(x)$ получаем хорошо известное из теории вероятностей *биномиальное распределение*

$$\rho(x_i) = C_N^i p^i q^{N-i}, \quad C_N^i = \frac{N!}{i!(N-i)!}. \quad (45)$$

Соответствующие полиномы при $B_n = (-1)^n q^n / n!$ называются *полиномами Кравчука* $k_n^{(p)}(x, N)$.

В третьем случае, полагая $a = 0$, $b = +\infty$, $C = e^{-\mu}$, приходим к *распределению Пуассона*

$$\rho(x_i) = \frac{e^{-\mu} \mu^i}{i!}. \quad (46)$$

Соответствующие ортогональные полиномы дискретной переменной при $B_n = \mu^{-n}$ называются *полиномами Шарлье* $c_n^{(\mu)}(x)$.

4) Случай $\sigma(x) = 1$ интереса не представляет, так как он не приводит к новым видам ортогональных полиномов.

Из соотношения (23) вытекают следующие *формулы разностного дифференцирования* для полиномов Хана, Мейкснера, Кравчука и Шарлье:

$$\Delta h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N) = (\alpha + \beta + n + 1) h_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x, N-1), \quad (47)$$

$$\tilde{\Delta} \tilde{h}_n^{(\mu, \nu)}(x, N) = -(\mu + \nu + 2N - n - 1) \tilde{h}_{n-1}^{(\mu, \nu)}(x, N-1), \quad (48)$$

$$\Delta k_n^{(p)}(x, N) = k_{n-1}^{(p)}(x, N-1), \quad (49)$$

$$\Delta m_n^{(\gamma, \mu)}(x) = -\frac{n(1-\mu)}{\mu} m_{n-1}^{(\gamma+1, \mu)}(x), \quad (50)$$

$$\Delta c_n^{(\mu)}(x) = -\frac{n}{\mu} c_{n-1}^{(\mu)}(x). \quad (51)$$

Рассмотрим *свойства симметрии* ортогональных полиномов дискретной переменной, вытекающие из свойств симметрии веса $\rho(x)$. Для полиномов Хана $h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N)$ вес $\rho(x)$ удовлетворяет следующему соотношению симметрии:

$$\rho(x) = \rho(x, \alpha, \beta) = \rho(N-1-x, \beta, \alpha).$$

Поэтому соотношение ортогональности

$$\sum_{i=0}^{N-1} h_n^{(\alpha, \beta)}(x_i) h_m^{(\alpha, \beta)}(x_i) \rho(x_i, \alpha, \beta) = 0, \quad n \neq m,$$

после замены i на $N-1-i$ можно переписать в виде

$$\sum_{i=0}^{N-1} h_n^{(\alpha, \beta)}(N-1-x_i) h_m^{(\alpha, \beta)}(N-1-x_i) \rho(x_i, \beta, \alpha) = 0, \quad n \neq m.$$

Так как вес и интервал ортогональности определяют ортогональные полиномы однозначно с точностью до постоянного множителя, то

$$h_n^{(\alpha, \beta)}(N-1-x) = c_n h_n^{(\beta, \alpha)}(x),$$

где c_n — некоторая постоянная. Приравняв коэффициенты при x^n в обеих частях равенства с помощью (24), находим $c_n = (-1)^n$,

$$h_n^{(\alpha, \beta)}(N-1-x) = (-1)^n h_n^{(\beta, \alpha)}(x). \quad (52a)$$

Аналогично, для полиномов Кравчука

$$k_n^{(p)}(x) = (-1)^n k_n^{(q)}(N-x), \quad p+q=1. \quad (52b)$$

Соотношение (52a) остается справедливым при любых комплексных значениях x, α, β, N . Для доказательства достаточно воспользоваться разностным уравнением для полиномов Хана $y_n(x) = h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N)$:

$$x(N+\alpha-x)\Delta \nabla y_n(x) + [(\beta+1)(N-1) - (\alpha+\beta+2)x]\Delta y_n(x) + n(\alpha+\beta+n+1)y_n(x) = 0.$$

Нетрудно проверить, что при замене x на $N-1-x$, α на β , β на α это уравнение сохраняет свой вид. Так как при такой замене полином $y_n(x)$ остается полиномом той же степени, то в силу единственности полиномиальных решений для разностных уравнений гипергеометрического типа приходим к соотношению

$$h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N) = c_n h_n^{(\beta, \alpha)}(N-1-x, N),$$

где c_n — постоянная, которую можно найти, сравнивая коэффициенты при x^n . Полученное соотношение, очевидно, эквивалентно (52a). Подобным же образом можно получить (52b) при любых комплексных x, p, N , а также следующие соотношения:

$$h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N) = h_n^{(-N, \alpha+\beta+N)}(x-\alpha-N, -\alpha), \quad (52в)$$

$$m_n^{(\gamma, \mu)}(x) = \mu^{-n} m_n^{(\gamma, 1/\mu)}(-\gamma-x), \quad (52г)$$

$$k_n^{(p)}(x, N) = \frac{p^n}{n!} m_n^{(-N, -p/q)}(x) \quad (52д)$$

С помощью формулы Родрига легко вычислить значения полиномов Хана, Мейкснера, Кравчука и Шарлье на концах отрезка ортогональности. Получим, например, выражение для $h_n^{(\alpha, \beta)}(0)$. Воспользуемся формулой

$$\nabla^n f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k! (n-k)!} f(x-k),$$

которую можно доказать по индукции. Так как для полиномов Хана $h_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ функция $\rho_n(x)$ равна нулю при $x = -1, -2, \dots$, то $\nabla^n \rho_n(0) = \rho_n(0)$ и по формуле Родрига

$$h_n^{(\alpha, \beta)}(0) = (-1)^n \frac{(N-1)! \Gamma(n+\beta+1)}{n! (N-n-1)! \Gamma(\beta+1)}.$$

Аналогично, для полиномов Мейкснера, Кравчука и Шарлье получим

$$m_n^{(\gamma, \mu)}(0) = \frac{\Gamma(n+\gamma)}{\Gamma(\gamma)}, \quad k_n^{(p)}(0) = (-1)^n \frac{N!}{n! (N-n)!} p^n, \quad c_n^{(\mu)}(0) = 1.$$

С помощью соотношений симметрии легко найти выражения для $h_n^{(\alpha, \beta)}(N-1)$ и $k_n^{(p)}(N)$:

$$h_n^{(\alpha, \beta)}(N-1) = \frac{(N-1)! \Gamma(n+\alpha+1)}{n! (N-n-1)! \Gamma(\alpha+1)},$$

$$k_n^{(p)}(N) = \frac{N!}{n! (N-n)!} q^n.$$

В заключение заметим, что для любых полиномов $p_n(x)$, удовлетворяющих соотношениям ортогональности вида

$$\sum_{i=0}^{N-1} p_n(x_i) p_m(x_i) \rho_i = d_n^2 \delta_{mn},$$

можно получить также еще одно соотношение ортогональности.

Действительно, если мы рассмотрим матрицу C с элементами

$$C_{ni} = \frac{p_n(x_i) \sqrt{\rho_i}}{d_n},$$

то соотношение ортогональности для полиномов $p_n(x)$ будет эквивалентно свойству унитарности матрицы C :

$$\sum_{i=0}^{N-1} C_{ni} \bar{C}_{mi} = \delta_{mn}.$$

Поэтому для матрицы C имеют место также равенства

$$\sum_{n=0}^{N-1} C_{nk} C_{nl} = \delta_{kl},$$

которые эквивалентны так называемым дуальным соотношениям

ортогональности для полиномов $p_n(x)$:

$$\sum_{n=0}^{N-1} p_n(x_k) p_n(x_l) \bar{\rho}_n = \frac{1}{\rho_k} \delta_{kl},$$

где $\bar{\rho}_n = 1/d_n^2$.

Покажем, что для полиномов Хана дуальные соотношения ортогональности приводят к еще одной системе ортогональных полиномов. Для этого нам нужно выявить характер зависимости значений полиномов Хана $h_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ от n при $x=i$ ($i=0, 1, \dots$). Из разностного уравнения для полиномов Хана с помощью равенств

$$\sigma(0) = 0, \quad h_n^{(\alpha, \beta)}(0) = (-1)^n \frac{(N-1)! \Gamma(n+\beta+1)}{n! (N-n-1)! \Gamma(\beta+1)}$$

по индукции можно получить, что

$$h_n^{(\alpha, \beta)}(i) = (-1)^{n+i} \frac{i! (N-i-1)! \Gamma(n+\beta+1)}{n! (N-n-1)! \Gamma(i+\beta+1)} w_i^{(\alpha, \beta)}(t_n),$$

где $t_n = s_n(s_n+1)$, $s_n = (\alpha+\beta)/2 + n$, $w_i^{(\alpha, \beta)}(t)$ — полином степени i относительно переменной t , у которого коэффициент при старшей степени равен $1/i!$. Поэтому дуальное соотношение ортогональности для полиномов Хана $h_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ приводит к следующему соотношению ортогональности для полиномов $w_i^{(\alpha, \beta)}(t)$, которые естественно назвать *дуальными полиномами Хана*:

$$\sum_{n=0}^{N-1} w_k^{(\alpha, \beta)}(t_n) w_l^{(\alpha, \beta)}(t_n) \tilde{\rho}_n = D_k^2 \delta_{kl},$$

где

$$\tilde{\rho}_n = (\alpha + \beta + 2n + 1) \frac{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1)}{n! (N - n - 1)! \Gamma(\alpha + \beta + n + N + 1) \Gamma(\alpha + n + 1)},$$

$$D_k^2 = \frac{\Gamma(\beta + k + 1)}{k! (N - k - 1)! \Gamma(N + \alpha - k)}.$$

Таким образом, для полиномов Хана $h_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ дуальные соотношения ортогональности приводят к дуальным полиномам Хана, ортогональным на неравномерной сетке (см. § 13). Заметим, что рассмотрение дуальных соотношений ортогональности для полиномов Кравчука не приводит к новой системе ортогональных полиномов, т. е. полиномы Кравчука самодуальны.

5. Вычисление основных характеристик. Получим значения основных постоянных для полиномов Хана, Мейкснера, Кравчука и Шарлье. Вычислим сначала коэффициенты a_n , b_n при старших степенях в разложении

$$y_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots$$

Для этого достаточно воспользоваться формулами (24), (25).

Квадраты норм d_n^2 можно вычислить по формуле (31). Вычисление квадрата нормы по этой формуле сводится к вычислению суммы

$$S_n = \sum_{x_i=0}^{b-n-1} \rho_n(x_i).$$

Особенно просто величина S_n вычисляется для полиномов Мейкснера, Кравчука и Шарлье. Для этих полиномов

$$\rho_n(x) = \rho(x+n) \prod_{k=1}^n \sigma(x+k) = \rho(x+n) \frac{\Gamma(1+x+n)}{\Gamma(1+x)}.$$

Для полиномов Мейкснера

$$\sum_i \rho_n(x_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^{i+n} \Gamma(\gamma+i+n)}{i! \Gamma(\gamma)}.$$

Так как по формуле Тейлора при $|\mu| < 1$

$$(1-\mu)^{-(\gamma+n)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^i \Gamma(\gamma+i+n)}{i! \Gamma(\gamma+n)},$$

то для полиномов $m_n^{(\gamma, \mu)}(x)$ получаем

$$d_n^2 = \frac{n! (\gamma)_n}{\mu^n (1-\mu)^\gamma}. \quad (53a)$$

Для полиномов Кравчука

$$\begin{aligned} \sum_i \rho_n(x_i) &= \sum_{i=0}^{N-n} \frac{N! p^{i+n} q^{N-i-n}}{i! \Gamma(N+1-i-n)} = \\ &= \frac{N! p^n}{(N-n)!} \sum_{i=0}^{N-n} C_{N-n}^i p^i q^{N-n-i} = \frac{N! p^n}{(N-n)!}, \end{aligned}$$

откуда

$$d_n^2 = C_N^n (pq)^n. \quad (53б)$$

Для полиномов Шарлье

$$\sum_i \rho_n(x_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^{i+n}}{i!} = \mu^n,$$

откуда

$$d_n^2 = n! / \mu^n. \quad (53в)$$

Для полиномов Хана квадрат нормы вычислим по формуле (31a), так как в этом случае вычисление суммы S_n может быть

сведено к вычислению одного слагаемого. В результате получим

$$d_n^2 = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1) (\alpha + \beta + n + 1)_N}{(\alpha + \beta + 2n + 1) n! (N - n - 1)!} & \text{для } h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N), \\ \frac{(\mu + \nu + N - n)_N}{(\mu + \nu + 2N - 2n - 1) n! \Gamma(\mu + N - n) \Gamma(\nu + N - n) (N - n - 1)!} & \text{для } \tilde{h}_n^{(\mu, \nu)}(x). \end{cases} \quad (53г)$$

Так как свойство ортогональности (27) для классических ортогональных полиномов дискретной переменной получается из свойства ортогональности для произвольных ортогональных полиномов в результате замены определенного интеграла на сумму, то при соответствующем определении скалярного произведения $\langle y_n, y_m \rangle$ для полиномов Хана, Мейкснера, Кравчука и Шарлье сохраняются все общие свойства произвольных ортогональных полиномов. В частности, справедливо *рекуррентное соотношение*

$$xy_n(x) = \alpha_n y_{n+1}(x) + \beta_n y_n(x) + \gamma_n y_{n-1}(x), \quad (54)$$

коэффициенты в котором могут быть вычислены с помощью известных нам величин a_n, b_n, d_n^2 по следующим формулам:

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}, \quad \beta_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}, \quad \gamma_n = \frac{a_{n-1} d_n^2}{a_n d_{n-1}^2}.$$

Рассмотренные выше основные характеристики полиномов Хана, Чебышева, Мейкснера, Кравчука и Шарлье приведены в табл. 3а — 3в.

6. Связь с полиномами Якоби, Лагерра и Эрмита. Естественно ожидать, что при $h \rightarrow 0$ полиномиальные решения уравнения (2) при соответствующей нормировке будут переходить в полиномиальные решения уравнения (1), т. е. в полиномы Якоби, Лагерра и Эрмита. Справедливость этого утверждения проще всего доказать по индукции с помощью соответствующего предельного перехода в рекуррентных соотношениях (54) для рассматриваемых полиномов. В качестве примера выведем предельное соотношение, связывающее полиномы Хана и Якоби.

Прежде всего линейной заменой $x = N(1+s)/2$ переведем интервал ортогональности $(0, N)$ для полиномов Хана в интервал $(-1, 1)$. Тогда уравнение (3) для полиномов $h_n^{(\alpha, \beta)}(x) = u(s)$ примет вид

$$\begin{aligned} (1+s)(1-s+\alpha h) \frac{u(s+h) - 2u(s) + u(s-h)}{h^2} - \\ - [(\alpha + \beta + 2)s + \alpha - \beta + (\beta + 1)h] \frac{u(s+h) - u(s)}{h} + \\ + n(n + \alpha + \beta + 1)u(s) = 0, \end{aligned} \quad (55)$$

где $h = 2/N$.

Т а б л и ц а 3а

Основные характеристики полиномов Хана $h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N)$
и полиномов Чебышева $t_n(x)$

$\nu_n(x)$	$h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N)$	$t_n(x)$
(a, b)	$(0, N)$	$(0, N)$
$\rho(x)$	$\frac{\Gamma(N+\alpha-x)\Gamma(\beta+1+x)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)} \quad (\alpha > -1, \beta > -1)$	1
$\sigma(x)$	$x(N+\alpha-x)$	$x(N-x)$
$\tau(x)$	$(\beta+1)(N-1) - (\alpha+\beta+2)x$	$N-1-2x$
λ_n	$n(\alpha+\beta+n+1)$	$n(n+1)$
B_n	$(-1)^n/n!$	$(-1)^n/n!$
$\rho_n(x)$	$\frac{\Gamma(N+\alpha-x)\Gamma(n+\beta+1+x)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-n-x)}$	$\frac{\Gamma(N-x)\Gamma(n+1+x)}{\Gamma(N-n-x)\Gamma(x+1)}$
a_n	$\frac{1}{n!}(\alpha+\beta+n+1)_n$	$\frac{1}{n!}(n+1)_n$
b_n	$-\frac{1}{(n-1)!} \left[(\beta+1)(N-1) + \right.$ $\left. + \frac{n-1}{2}(\alpha-\beta+2N-2) \right] (\alpha+\beta+n+1)_{n-1}$	$-\frac{N-1}{(n-1)!}(n)_n$
d_n^2	$\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)(\alpha+\beta+n+1)N}{(\alpha+\beta+2n+1)n!(N-n-1)!}$	$\frac{(N+n)!}{(2n+1)(N-n-1)!}$
α_n	$\frac{(n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)}$	$\frac{n+1}{2(2n+1)}$
β_n	$\frac{\alpha-\beta+2N-2}{4} +$ $+\frac{(\beta^2-\alpha^2)(\alpha+\beta+2N)}{4(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)}$	$\frac{N-1}{2}$
γ_n	$\frac{(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha+\beta+N+n)(N-n)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+1)}$	$\frac{n(N^2-n^2)}{2(2n+1)}$

При $h \rightarrow 0$ уравнение (55) формально переходит в дифференциальное уравнение для полиномов Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(s)$. Поэтому следует ожидать, что имеет место предельное соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_n(N) h_n^{(\alpha, \beta)} \left[\frac{N}{2} (1+s) \right] = P_n^{(\alpha, \beta)}(s), \quad (56)$$

где $C_n(N)$ — некоторая нормировочная постоянная.

Т а б л и ц а 36

Основные характеристики полиномов Хана $\tilde{h}_n^{(\mu, \nu)}(x, N)$

$v_n(x)$	$\tilde{h}_n^{(\mu, \nu)}(x, N)$
(a, b)	$(0, N)$
$\rho(x)$	$\frac{1}{\Gamma(x+1) \Gamma(x+\mu+1) \Gamma(N+\nu-x) \Gamma(N-x)} \quad (\mu > -1, \nu > -1)$
$\sigma(x)$	$x(x+\mu)$
$\tau(x)$	$(N+\nu-1)(N-1) - (2N+\mu+\nu-2)x$
$\lambda(x)$	$n(2N+\mu+\nu-n-1)$
B_n	$1/n!$
$\rho_n(x)$	$\frac{1}{\Gamma(x+1) \Gamma(x+\mu+1) \Gamma(N+\nu-n-x) \Gamma(N-n-x)}$
a_n	$\frac{(-1)^n}{n!} (2N+\mu+\nu-2n)_n$
b_n	$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \left[(N+\nu-1)(N-1) - \frac{n-1}{2} (2N+\nu-\mu-2) \right] \times$ $\times (2N+\mu+\nu-2n+1)_{n-1}$
d_n^2	$\frac{(N+\mu+\nu-n)_N}{(2N+\mu+\nu-2n-1) n! \Gamma(N+\mu-n) \Gamma(N+\nu-n) (N-n-1)!}$
α_n	$-\frac{(n+1)(2N+\mu+\nu-n-1)}{(2N+\mu+\nu-2n-1)(2N+\mu+\nu-2n-2)}$
β_n	$\frac{2(N-1)+\nu-\mu}{4} + \frac{(\mu^2-\nu^2)(2N+\mu+\nu)}{4(2N+\mu+\nu-2n)(2N+\mu+\nu-2n-2)}$
γ_n	$-\frac{(N-n)(N-n+\mu)(N-n+\nu)(N-n+\mu+\nu)}{(2N+\mu+\nu-2n)(2N+\mu+\nu-2n-1)}$

Для доказательства справедливости (56) и выбора нормирующей постоянной $C_n(N)$ сравним рекуррентные соотношения

для $P_n^{(\alpha, \beta)}(s)$ и $v_n(s, N) = C_n(N) h_n^{(\alpha, \beta)}[N(1+s)/2]$:

$$\begin{aligned}
 sP_n^{(\alpha, \beta)}(s) = & \frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)} P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(s) + \\
 & + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)} P_n^{(\alpha, \beta)}(s) + \\
 & + \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)} P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(s),
 \end{aligned}$$

Основные характеристики полиномов Мейкснера $m_n^{(\gamma, \mu)}(x)$,
Кравчука $k_n^p(x)$ и Шарлье $c_n^{(\mu)}(x)$

$v_n(x)$	$m_n^{(\gamma, \mu)}(x)$	$k_n^p(x)$	$c_n^{(\mu)}(x)$
(a, b)	$(0, \infty)$	$(0, N+1)$	$(0, \infty)$
$\rho(x)$	$\frac{\mu^x \Gamma(\gamma+x)}{\Gamma(1+x) \Gamma(\gamma)}$ $(\gamma > 0, 0 < \mu < 1)$	$\frac{N! p^x q^{N-x}}{\Gamma(1+x) \Gamma(N+1-x)}$ $(p > 0, q > 0, p+q=1)$	$\frac{e^{-\mu} \mu^x}{\Gamma(1+x)}$ $(\mu > 0)$
$\sigma(x)$	x	x	x
$\tau(x)$	$\gamma\mu - x(1-\mu)$	$(Np - x)/q$	$\mu - x$
λ_n	$n(1-\mu)$	n/q	n
B_n	$1/\mu^n$	$(-1)^n q^n/n!$	$1/\mu^n$
$\rho_n(x)$	$\frac{\mu^{x+n} \Gamma(n+\gamma+x)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(x+1)}$	$\frac{N! p^{x+n} q^{N-n-x}}{\Gamma(x+1) \Gamma(N+1-n-x)}$	$\frac{e^{-\mu} \mu^{x+n}}{\Gamma(x+1)}$
a_n	$\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^n$	$\frac{1}{n!}$	$\frac{1}{(-\mu)^n}$
b_n	$n\left(\gamma + \frac{n-1}{2} \frac{\mu+1}{\mu}\right) \times$ $\times \left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^{n-1}$	$-\frac{Np + (n-1)\left(\frac{1}{2} - p\right)}{(n-1)!}$	$\frac{n\left(1 + \frac{n-1}{2\mu}\right)}{(-\mu)^{n-1}}$
d_n^2	$\frac{n! (\gamma) n}{\mu^n (1-\mu)^\gamma}$	$\frac{N!}{n! (N-n)!} (pq)^n$	$\frac{n!}{\mu^n}$
α_n	$\frac{\mu}{\mu-1}$	$n+1$	$-\mu$
β_n	$\frac{n+\mu(n+\gamma)}{1-\mu}$	$n+p(N-2n)$	$n+\mu$
γ_n	$\frac{n(n-1+\gamma)}{\mu-1}$	$pq(N-n+1)$	$-n$

$$\begin{aligned}
 sv_n = & \frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)C_n}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)NC_{n+1}} v_{n+1} + \\
 & + \frac{\beta^2 - \alpha^2 + (2/N)[n(n+\alpha+\beta+1)(\alpha-\beta-2) - (\beta+1)(\alpha+\beta)]}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)} v_n + \\
 & + \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \left(1 + \frac{n+\alpha+\beta}{N}\right) \frac{NC_n}{C_{n-1}} v_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Из сравнения рекуррентных соотношений видно, что (56) будет выполнено при любых n , если оно выполняется при $n=0$ и дополнительном условии $C_n/C_{n+1} = N$. Отсюда $C_n = N^{-n}$.

Таким образом, мы получили следующее предельное соотношение:

$$\frac{1}{N^n} h_n^{(\alpha, \beta)} \left[\frac{N}{2} (1+s) \right] = P_n^{(\alpha, \beta)}(s) + O\left(\frac{1}{N}\right), \quad (57)$$

В частности, для полиномов Чебышева дискретной переменной $t_n(x)$ соотношение (57) имеет вид

$$\frac{1}{N^n} t_n \left[\frac{N}{2} (1+s) \right] = P_n(s) + O\left(\frac{1}{N}\right), \quad (58)$$

где $P_n(s)$ — полином Лежандра.

Тем же методом для полиномов Хана $h_n^{(\alpha, \beta)}(x, N)$ можно получить более точное асимптотическое представление

$$\frac{1}{\tilde{N}^n} h_n^{(\alpha, \beta)} \left[\frac{\tilde{N}}{2} (1+s) - \frac{\beta+1}{2}, N \right] = P_n^{(\alpha, \beta)}(s) + O\left(\frac{1}{\tilde{N}^2}\right), \quad (57a)$$

где $\tilde{N} = N + (\alpha + \beta)/2$ ($N \rightarrow \infty$).

Совершенно аналогично, полагая в уравнении для полиномов Мейкснера $y(x) = u(s)$, $x = s/h$, $h = 1 - \mu$, приходим к разностному уравнению, которое при $h \rightarrow 0$ переходит в дифференциальное уравнение

$$su'' + (\gamma - s)u' + nu = 0.$$

Полиномиальные решения этого уравнения имеют вид $L_n^{\gamma-1}(s)$. Поэтому возможно предельное соотношение

$$\lim_{h \rightarrow 0} C_n m_n^{(\gamma, 1-h)} \left(\frac{s}{h} \right) = L_n^{\gamma-1}(s).$$

Сравнивая коэффициенты при старших степенях, находим $C_n = 1/n!$. При помощи рекуррентных соотношений для полиномов Мейкснера и Лагерра получаем

$$\frac{1}{n!} m_n^{(\alpha+1, 1-h)} \left(\frac{s}{h} \right) = L_n^\alpha(s) + O(h). \quad (59)$$

Рассмотрим теперь вывод предельного соотношения для полиномов Кравчука $k_n^{(p)}(x)$. При выводе этого соотношения удобно опираться на известную из теории вероятностей предельную теорему для биномиального распределения, согласно которой при $N \rightarrow \infty$

$$\rho(x_i) = C_N^i p^i q^{N-i} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi N p q}} \exp \left\{ -\frac{(i - Np)^2}{2N p q} \right\},$$

т. е. вес $\rho(x)$ при $x = x_i = i$ для полиномов Кравчука с точностью

до нормировочного множителя переходит в вес для полиномов Эрмита: $\rho(s) = e^{-s^2}$, $s = (x - Np)/\sqrt{2Npq}$.

В соответствии с этим в уравнении для полиномов Кравчука положим $x = Np + \sqrt{2Npq} s$, $y(x) = u(s)$, $h = 1/\sqrt{2Npq}$. Тогда уравнение для полиномов Кравчука примет вид

$$\left(1 + \sqrt{\frac{2q}{Np}} s\right) \frac{u(s+h) - 2u(s) + u(s-h)}{h^2} - 2s \frac{u(s+h) - u(s)}{h} + 2nu(s) = 0.$$

При $N \rightarrow \infty$ это уравнение формально переходит в дифференциальное уравнение

$$u'' - 2su' + 2nu = 0,$$

полиномиальными решениями которого являются полиномы Эрмита $H_n(s)$. Повторяя рассуждения, которые привели к предельным соотношениям (57)–(59), получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{Npq}\right)^{n/2} n! k_n^{(p)}(Np + \sqrt{2Npq}s) = H_n(s). \quad (60)$$

7. Связь обобщенных сферических функций с полиномами Кравчука. Покажем, что между обобщенными сферическими функциями и полиномами Кравчука существует связь, которая вытекает непосредственно из свойства унитарности обобщенных сферических функций. Для установления этой связи воспользуемся (10.20) и явным выражением обобщенных сферических функций через полиномы Якоби. Имеем

$$\sum_{m'=-l}^l d_{mm'}^l(\beta) d_{m_1 m'}^l(\beta) = \delta_{mm_1}, \quad (61)$$

где

$$d_{mm'}^l(\beta) = \frac{1}{2^m} \sqrt{\frac{(l+m)! (l-m)!}{(l+m')! (l-m')!}} \times \\ \times (1 - \cos \beta)^{(m-m')/2} (1 + \cos \beta)^{(m+m')/2} P_{l-m}^{(m-m', m+m')}(\cos \beta). \quad (62)$$

Для выявления вида зависимости функции $d_{mm'}^l(\beta)$ от m' при фиксированных значениях l, m, β воспользуемся формулой Роллига для полиномов Якоби (см. § 5). Применяя формулу Лейбница для вычисления производных от произведения функций, легко убедиться в том, что полином Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ при фиксированных n, x является полиномом относительно α, β , причем сумма наивысших степеней α и β равна n . В нашем случае α и β линейно зависят от m' . Поэтому

$$d_{mm'}^l(\beta) = \frac{1}{\sqrt{(l+m')! (l-m')!}} \left(\frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta}\right)^{(l-m')/2} q_{l-m}(l-m'), \quad (63)$$

где $q_n(x)$ — полином степени n относительно x . В результате

соотношение (61) можно записать в виде

$$\sum_{\alpha=0}^{2l} q_{l-m}(x) q_{l-m_1}(x) \omega(x) = \delta_{mm_1}, \quad (64)$$

где

$$\omega(x) = \frac{1}{x! (2l-x)!} \left(\frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta} \right)^x$$

Соотношение (64) означает, что полиномы $q_n(x)$ ортогональны на дискретном множестве точек $x=0, 1, \dots, 2l$ с весом $\omega(x)$. Нетрудно убедиться в том, что вес $\omega(x)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с весом $\rho(x)$, с которым ортогональны полиномы Кравчука $k_n^{(p)}(x, N)$ на том же множестве точек x при

$$\frac{p}{1-p} = \frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta}, \quad N = 2l.$$

Поэтому в силу свойства единственности системы ортогональных полиномов при заданном весе полином $q_n(x)$ с точностью до множителя, не зависящего от x , совпадает с полиномом Кравчука $k_n^{(p)}(x, N)$ при $p = \sin^2(\beta/2)$, $N = 2l$. Таким образом, из соотношения (63) получаем

$$d_{mm'}^l(\beta) = C \sqrt{\rho(x)} k_n^{(p)}(x, N), \quad (65)$$

где $x=l-m'$, $n=l-m$. Нормировочную постоянную $C = C(l, m, \beta)$ можно найти с точностью до знака из соотношения (61) при $m = m_1$:

$$C^2 d_n^2 = 1,$$

где d_n^2 — квадрат нормы для полиномов Кравчука. Для определения знака C достаточно найти знак при старшей степени m' в левой и правой частях соотношения (65), воспользовавшись (62) для $d_{mm'}^l(\beta)$, что дает $C > 0$.

Окончательно получаем следующую связь обобщенных сферических функций с полиномами Кравчука:

$$d_{mm'}^l(\beta) = \frac{1}{d_n} \sqrt{\rho(x)} k_n^{(p)}(x, N), \quad (66)$$

$$x = l = m', \quad n = l - m, \quad N = 2l, \quad p = \sin^2(\beta/2), \quad \rho(x) = C_{2l}^x p^x (1-p)^{2l-x}.$$

§ 13. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной на неравномерных сетках

1. Разностное уравнение на неравномерной сетке. В § 12 было рассмотрено обобщение теории полиномиальных решений уравнения гипергеометрического типа

$$\tilde{\sigma}(x)y'' + \tilde{\tau}(x)y' + \lambda y = 0 \quad (1)$$

на разностное уравнение

$$\tilde{\sigma}(x) \frac{1}{h} \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right] + \\ + \frac{\tilde{\tau}(x)}{2} \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right] + \lambda y(x) = 0, \quad (2)$$

которое аппроксимирует уравнение (1) на сетке с постоянным шагом $\Delta x = h$. Эта теория с помощью замены независимой переменной $x = x(s)$ допускает дальнейшее обобщение на случай, когда дифференциальное уравнение (1) заменяется разностным уравнением на некотором классе сеток с переменным шагом $\Delta x = x(s+h) - x(s)$:

$$\tilde{\sigma}[x(s)] \frac{1}{x(s+h/2) - x(s-h/2)} \left[\frac{y(s+h) - y(s)}{x(s+h) - x(s)} - \frac{y(s) - y(s-h)}{x(s) - x(s-h)} \right] + \\ + \frac{\tilde{\tau}[x(s)]}{2} \left[\frac{y(s+h) - y(s)}{x(s+h) - x(s)} + \frac{y(s) - y(s-h)}{x(s) - x(s-h)} \right] + \lambda y(s) = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) аппроксимирует (1) со вторым порядком точности относительного шага h , в чем нетрудно убедиться, разлагая функции $x(s \pm h)$, $x(s \pm h/2)$, $y(s \pm h)$ по степеням h с помощью формулы Тейлора.

Для построения теории полиномиальных решений уравнения (3) естественно потребовать, чтобы разностные операторы, соответствующие производным dy/dx и d^2y/dx^2 , переводили любой полином $y = y_n(x)$ при $x = x(s)$ в полиномы соответствующих степеней относительно $x(s)$. Это требование будет выполнено, если для любого полинома $y_n(x)$ степени n при $x = x(s)$ имеют место соотношения

$$\frac{y_n[x(s+h)] - y_n[x(s)]}{x(s+h) - x(s)} = p_{n-1} \left[x \left(s + \frac{h}{2} \right) \right], \quad (4)$$

$$\frac{y_n[x(s+h)] + y_n[x(s)]}{2} = q_n \left[x \left(s + \frac{h}{2} \right) \right], \quad (5)$$

где $p_{n-1}(x)$, $q_n(x)$ — некоторые полиномы соответствующих степеней.

Действительно, если функция $x(s)$ выбрана таким образом, что соотношения (4), (5) имеют место, то

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{y_n[x(s+h)] - y_n[x(s)]}{x(s+h) - x(s)} + \frac{y_n[x(s)] - y_n[x(s-h)]}{x(s) - x(s-h)} \right\} = \\ = \frac{1}{2} \left\{ p_{n-1} \left[x \left(s + \frac{h}{2} \right) \right] + p_{n-1} \left[x \left(s - \frac{h}{2} \right) \right] \right\} = Q_{n-1}[x(s)], \\ \frac{1}{x(s+h/2) - x(s-h/2)} \left\{ \frac{y_n[x(s+h)] - y_n[x(s)]}{x(s+h) - x(s)} - \right. \\ \left. - \frac{y_n[x(s)] - y_n[x(s-h)]}{x(s) - x(s-h)} \right\} = \\ = \frac{p_{n-1}[x(s+h/2)] - p_{n-1}[x(s-h/2)]}{x(s+h/2) - x(s-h/2)} = P_{n-2}[x(s)],$$

где $P_{n-2}(x)$, $Q_{n-1}(x)$ — полиномы соответствующих степеней. Так как $\sigma(x)$ и $\tau(x)$ — полиномы соответственно не выше второй и первой степени, то оператор, стоящий в левой части уравнения (3), в самом деле переводит любой полином $y = y_n(x)$ в некоторый полином той же степени относительно $x(s)$.

2. Классификация сеток. С помощью соотношений

$$\frac{x^n(s+h) - x^n(s)}{x(s+h) - x(s)} = \frac{x(s+h) + x(s)}{2} \cdot \frac{x^{n-1}(s+h) - x^{n-1}(s)}{x(s+h) - x(s)} + \frac{x^{n-1}(s+h) + x^{n-1}(s)}{2}, \quad (6)$$

$$\frac{x^n(s+h) + x^n(s)}{2} = \frac{x(s+h) + x(s)}{2} \cdot \frac{x^{n-1}(s+h) + x^{n-1}(s)}{2} + \frac{1}{4}[x(s+h) - x(s)]^2 \frac{x^{n-1}(s+h) - x^{n-1}(s)}{x(s+h) - x(s)} \quad (7)$$

по индукции легко доказать, что условия (4), (5) будут выполнены, если:

а) функция $x(s)$ удовлетворяет разностному уравнению вида

$$\frac{x(s+h) + x(s)}{2} = \alpha x\left(s + \frac{h}{2}\right) + \beta, \quad (8)$$

α, β — некоторые постоянные;

б) функция $[x(s+h) - x(s)]^2$ является полиномом не выше второй степени относительно $x(s+h/2)$.

Для исследования решений уравнения (3) и выбора функций $x(s)$, определяющих сетку, удобно воспользоваться заменой s на hs , в результате которой (3) переходит в уравнение того же вида с шагом $h=1$ по переменной s :

$$\tilde{\sigma}[x(s)] \frac{\Delta}{\Delta x(s-1/2)} \left[\frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} \right] + \frac{\tilde{\tau}[x(s)]}{2} \left[\frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} + \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} \right] + \lambda y(s) = 0, \quad (9)$$

где

$$\Delta f(s) = f(s+1) - f(s), \quad \nabla f(s) = f(s) - f(s-1),$$

$$\frac{\Delta}{\Delta x(s-1/2)} f(s) = \frac{\Delta f(s)}{\Delta x(s-1/2)}.$$

При этом в условиях а), б) следует положить $h=1$. В частности, уравнение (8) принимает вид

$$\frac{x(s+1) + x(s)}{2} = \alpha x\left(s + \frac{1}{2}\right) + \beta. \quad (8a)$$

Для дальнейших упрощений удобно воспользоваться тем, что уравнение (9) сохраняет свой вид при заменах $x(s)$ на $Ax(s) + B$, s на $s + C$. При $\alpha \neq 1$ заменой $x(s)$ на $x(s) + \beta/(1-\alpha)$ уравнение (8a) можно привести к виду

$$\frac{x(s+1) + x(s)}{2} = \alpha x\left(s + \frac{1}{2}\right). \quad (8b)$$

Общее решение этого уравнения при $\alpha \neq 1$ имеет вид

$$x(s) = C_1 q_1^{2s} + C_2 q_2^{2s},$$

где q_1, q_2 — корни уравнения

$$q^2 - 2\alpha q + 1 = 0, \quad (10)$$

C_1, C_2 — произвольные периодические функции с периодом, равным $1/2$. Покажем, что условие б) будет выполнено, если C_1, C_2 — постоянные. Имеем

$$\begin{aligned} [x(s+1) - x(s)]^2 &= [C_1 q_1^{2s} (q_1^2 - 1) + C_2 q_2^{2s} (q_2^2 - 1)]^2 = \\ &= (q_1 - q_2)^2 (C_1 q_1^{2s+1} - C_2 q_2^{2s+1})^2 = \\ &= 4(\alpha^2 - 1) [(C_1 q_1^{2s+1} + C_2 q_2^{2s+1})^2 - 4C_1 C_2] = \\ &= 4(\alpha^2 - 1) [x^2(s+1/2) - 4C_1 C_2], \end{aligned}$$

т. е. $[\Delta x(s)]^2$ действительно является полиномом второй степени относительно $x[s+1/2]$ (мы воспользовались тем, что $q_1 q_2 = 1$, $q_1 + q_2 = 2\alpha$).

С помощью замен $x(s)$ на $Ax(s) + B$, s на $s + C$, не меняющих вида уравнения (9), выражение для $x(s)$ при $\alpha \geq 0$ можно привести к следующим каноническим видам:

$$1) \quad 0 < \alpha < 1, \quad \alpha = \cos \gamma: \quad x(s) = \cos 2\gamma s; \quad (11)$$

$$2) \quad \alpha > 1, \quad \alpha = \operatorname{ch} \gamma: \quad x(s) = \begin{cases} e^{2\gamma s}, \\ e^{-2\gamma s}, \\ \operatorname{sh} 2\gamma s, \\ \operatorname{ch} 2\gamma s. \end{cases} \quad (12)$$

Заметим, что случай $\alpha \leq 0$ обычно не представляет практического интереса.

Рассмотрим теперь случай $\alpha = 1$. Уравнение (8а) при $\alpha = 1$ имеет решение вида

$$x(s) = as^2 + bs + c,$$

где $a = 4\beta$, b, c — произвольные периодические функции с периодом, равным $1/2$. Нетрудно проверить, что условие б) будет выполнено, если a, b, c — постоянные. С помощью таких же замен, как в случае $\alpha \geq 0$, можно выражение для $x(s)$ привести к следующим каноническим видам:

$$x(s) = \begin{cases} s, & \beta = 0, \\ s(s+1), & \beta = 1/4. \end{cases} \quad (13)$$

Случай $x(s) = s$, приводящий к полиномам Хана, Мейкснера, Кравчука и Шарлье, был рассмотрен в § 12.

Для функций $x(s)$ вида (11), (12) соотношения (6), (7) принимают вид

$$\frac{\Delta x^n(s)}{\Delta x(s)} = \alpha x \left(s + \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta x^{n-1}(s)}{\Delta x(s)} + \frac{x^{n-1}(s+1) + x^{n-1}(s)}{2}, \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} \frac{x^n(s+1) + x^n(s)}{2} = \alpha x \left(s + \frac{1}{2} \right) \frac{x^{n-1}(s+1) + x^{n-1}(s)}{2} + \\ + \left[(\alpha^2 - 1) x^2 \left(s + \frac{1}{2} \right) + C \right] \frac{\Delta x^{n-1}(s)}{\Delta x(s)}, \end{aligned} \quad (7a)$$

где C — постоянная. Из этих соотношений по индукции можно получить, что

$$\frac{\Delta x^n(s)}{\Delta x(s)} = A_n x^{n-1} \left(s + \frac{1}{2} \right) + B_n x^{n-2} \left(s + \frac{1}{2} \right) + \quad (14)$$

$$\frac{x^n(s+1) + x^n(s)}{2} = C_n x^n \left(s + \frac{1}{2} \right) + D_n x^{n-2} \left(s + \frac{1}{2} \right) + \dots, \quad (15)$$

где A_n, B_n, C_n, D_n — некоторые постоянные. Подставляя (14), (15) в (6a), (7a), приходим к уравнениям для A_n, C_n :

$$A_n = \alpha A_{n-1} + C_{n-1}, \quad C_n = (\alpha^2 - 1) A_{n-1} + \alpha C_{n-1}.$$

Это линейная однородная система разностных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, которая имеет частные решения вида $A_n = A q^n, C_n = C q^n$, где $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$ — собственный вектор матрицы системы $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha^2 - 1 & \alpha \end{pmatrix}$, q — собственное значение. Общее решение системы является линейной комбинацией этих частных решений. Так как $A_1 = 1, C_1 = \alpha$, то решение разностных уравнений для A_n, C_n имеет вид

$$A_n = \frac{q_1^n - q_2^n}{q_1 - q_2}, \quad C_n = \frac{q_1^n + q_2^n}{2},$$

где q_1, q_2 — собственные значения матрицы системы, т. е. корни уравнения (10).

В дальнейшем будут использоваться обозначения

$$\omega(s) = \frac{q_1^s - q_2^s}{q_1 - q_2}, \quad \psi(s) = \frac{1}{2} (q_1^s + q_2^s), \quad (16)$$

где q_1, q_2 — корни уравнения (10). В этих обозначениях

$$A_n = \omega(n), \quad C_n = \psi(n). \quad (17)$$

Аналогично, для функции $x(s) = s(s+1)$ получим

$$\frac{\Delta x^n(s)}{\Delta x(s)} = n x^{n-1} \left(s + \frac{1}{2} \right) + \frac{n(n-1)(2n-1)}{12} x^{n-2} \left(s + \frac{1}{2} \right) + \dots, \quad (18)$$

$$\frac{x^n(s+1) + x^n(s)}{2} = x^n \left(s + \frac{1}{2} \right) + \frac{n(2n-1)}{4} x^{n-1} \left(s + \frac{1}{2} \right) + \dots \quad (19)$$

Соотношения (14), (15) и (18), (19) в дальнейшем будут часто использоваться.

3. Основное свойство разностных уравнений гипергеометрического типа на неравномерных сетках. Покажем, что решения разностного уравнения (9) обладают простым свойством, аналогичным соответствующему свойству решений уравнения (1): функция $v_1(s) = \Delta y(s)/\Delta x(s)$ удовлетворяет уравнению вида (9) с заменой $x(s)$ на $x_1(s) = x(s + 1/2)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_1[x_1(s)] \frac{\Delta}{\Delta x_1(s - 1/2)} \left[\frac{\nabla v_1(s)}{\nabla x_1(s)} \right] + \\ + \frac{\tilde{\tau}_1[x_1(s)]}{2} \left[\frac{\Delta v_1(s)}{\Delta x_1(s)} + \frac{\nabla v_1(s)}{\nabla x_1(s)} \right] + \mu_1 v_1(s) = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\tilde{\sigma}_1(x_1)$ и $\tilde{\tau}_1(x_1)$ — некоторые полиномы относительно x_1 , соответственно не выше второй и первой степени.

Для доказательства перепишем (9) в виде

$$\sigma(s) \frac{\Delta}{\Delta x(s - 1/2)} \left[\frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} \right] + \tau(s) \frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} + \lambda y(s) = 0, \quad (21)$$

где

$$\sigma(s) = \tilde{\sigma}[x(s)] - \frac{1}{2} \tilde{\tau}[x(s)] \Delta x \left(s - \frac{1}{2} \right), \quad \tau(s) = \tilde{\tau}[x(s)]. \quad (22)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \Delta \left[\frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} \right] &= \nabla \left[\frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} \right] = \nabla v_1(s), \\ \Delta x \left(s - \frac{1}{2} \right) &= \nabla x \left(s + \frac{1}{2} \right) = \nabla x_1(s), \end{aligned}$$

то из (21) вытекает следующая связь между функциями $y(s)$ и $v_1(s)$:

$$\sigma(s) \frac{\nabla v_1(s)}{\nabla x_1(s)} + \tau(s) v_1(s) + \lambda y(s) = 0. \quad (23)$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор $\frac{\Delta}{\Delta x(s)}$, получим

$$\begin{aligned} \sigma(s) \frac{\Delta}{\Delta x(s)} \left[\frac{\nabla v_1(s)}{\nabla x_1(s)} \right] + \frac{\Delta \sigma(s)}{\Delta x(s)} \frac{\Delta v_1(s)}{\Delta x_1(s)} + \\ + \frac{\Delta \tau(s)}{\Delta x(s)} v_1(s) + \tau(s + 1) \frac{\Delta v_1(s)}{\Delta x(s)} + \lambda v_1(s) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sigma(s) \frac{\Delta}{\Delta x_1(s - 1/2)} \left[\frac{\nabla v_1(s)}{\nabla x_1(s)} \right] + \tau_1(s) \frac{\Delta v_1(s)}{\Delta x_1(s)} + \mu_1 v_1(s) = 0, \quad (24)$$

где

$$\mu_1 = \lambda + \frac{\Delta \tau(s)}{\Delta x(s)}, \quad \tau_1(s) = \frac{\Delta \sigma(s)}{\Delta x(s)} + \tau(s+1) \frac{\Delta x_1(s)}{\Delta x(s)}. \quad (25)$$

Так как $\tau(s)$ — полином не выше первой степени относительно $x(s)$, то μ_1 , очевидно, не зависит от s .

Перепишем (24) в виде, аналогичном (9):

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1(s) \frac{\Delta}{\Delta x_1(s-1/2)} \left[\frac{\nabla v_1(s)}{\nabla x_1(s)} \right] + \\ + \frac{\tau_1(s)}{2} \left[\frac{\Delta v_1(s)}{\Delta x_1(s)} + \frac{\nabla v_1(s)}{\nabla x_1(s)} \right] + \mu_1 v_1(s) = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\bar{\sigma}_1(s) = \sigma(s) + \frac{1}{2} \tau_1(s) \Delta x_1 \left(s - \frac{1}{2} \right).$$

Уравнение (26) будет иметь тот же вид, что и (9), если мы покажем, что

$$\tau_1(s) = \tilde{\tau}_1[x_1(s)], \quad \bar{\sigma}_1(s) = \tilde{\sigma}_1[x_1(s)],$$

где $\tilde{\tau}_1(x_1)$ и $\tilde{\sigma}_1(x_1)$ — полиномы соответственно не выше первой и второй степени. Преобразуем выражения для $\tau_1(s)$ и $\bar{\sigma}_1(s)$, выражая $\tau(s)$ и $\tau(s+1)$ через функции $[\tau(s) + \tau(s+1)]/2$ и $\Delta \tau(s)/\Delta x(s)$, являющиеся полиномами относительно $x_1(s)$:

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \frac{\tau(s+1) + \tau(s)}{2} - \frac{\Delta \tau(s)}{\Delta x(s)} \cdot \frac{\Delta x(s)}{2}, \\ \tau(s+1) &= \frac{\tau(s+1) + \tau(s)}{2} + \frac{\Delta \tau(s)}{\Delta x(s)} \cdot \frac{\Delta x(s)}{2}. \end{aligned}$$

Согласно (25), (22) имеем

$$\begin{aligned} \tau_1(s) &= \frac{\Delta}{\Delta x(s)} \left\{ \tilde{\sigma}[x(s)] - \frac{1}{2} \tau(s) \Delta x \left(s - \frac{1}{2} \right) \right\} + \tau(s+1) \frac{\Delta x(s+1/2)}{\Delta x(s)} = \\ &= \frac{\Delta \tilde{\sigma}[x(s)]}{\Delta x(s)} + \frac{1}{2 \Delta x(s)} \left[\tau(s+1) \Delta x \left(s + \frac{1}{2} \right) + \tau(s) \Delta x \left(s - \frac{1}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{\Delta \tilde{\sigma}[x(s)]}{\Delta x(s)} + \left[\frac{\tau(s+1) + \tau(s)}{2} \cdot \frac{\Delta x(s+1/2) + \Delta x(s-1/2)}{2 \Delta x(s)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta \tau(s)}{\Delta x(s)} \cdot \frac{\Delta x(s+1/2) - \Delta x(s-1/2)}{4} \right], \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1(s) &= \sigma(s) + \frac{1}{2} \tau_1(s) \Delta x(s) = \\ &= \frac{\sigma(s) + \sigma(s+1)}{2} + \frac{1}{2} \tau(s+1) \Delta x \left(s + \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{\tilde{\sigma}[x(s+1)] + \tilde{\sigma}[x(s)]}{2} + \frac{1}{4} \left[\tau(s+1) \Delta x \left(s + \frac{1}{2} \right) - \tau(s) \Delta x \left(s - \frac{1}{2} \right) \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{\tilde{\sigma}[x(s+1)] + \tilde{\sigma}[x(s)]}{2} + \left\{ \frac{\tau(s+1) + \tau(s)}{2} \cdot \frac{\Delta x(s+1/2) - \Delta x(s-1/2)}{4} + \right. \\ \left. + \frac{\Delta \tau(s)}{\Delta x(s)} \cdot \frac{\Delta x(s+1/2) + \Delta x(s-1/2)}{2\Delta x(s)} \cdot \frac{[\Delta x(s)]^2}{4} \right\}. \quad (28)$$

С другой стороны, согласно (8а)

$$\frac{x(s+1/2) + x(s-1/2)}{2} = \alpha x(s) + \beta.$$

Поэтому

$$\frac{\Delta x(s+1/2) + \Delta x(s-1/2)}{2\Delta x(s)} = \frac{\Delta [(x(s+1/2) + x(s-1/2))/2]}{\Delta x(s)} = \alpha, \quad (29)$$

$$\frac{\Delta x(s+1/2) - \Delta x(s-1/2)}{4} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x(s+3/2) + x(s+1/2)}{2} + \frac{x(s+1/2) + x(s-1/2)}{2} \right] - \\ - x\left(s + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} [\alpha x(s+1) + \beta + \alpha x(s) + \beta] - x\left(s + \frac{1}{2}\right) = \\ = \alpha [\alpha x_1(s) + \beta] + \beta - x_1(s) = (\alpha^2 - 1)x_1(s) + (\alpha + 1)\beta. \quad (30)$$

В результате приходим к следующим выражениям для функций $\tau_1(s)$ и $\bar{\sigma}_1(s)$:

$$\tau_1(s) = \frac{\tilde{\Delta \sigma}[x(s)]}{\Delta x(s)} + \alpha \frac{\tilde{\tau}[x(s+1)] + \tilde{\tau}[x(s)]}{2} + \\ + \frac{\Delta \tilde{\tau}[x(s)]}{\Delta x(s)} [(\alpha^2 - 1)x_1(s) + (\alpha + 1)\beta], \quad (31)$$

$$\bar{\sigma}_1(s) = \frac{\tilde{\sigma}[x(s+1)] + \tilde{\sigma}[x(s)]}{2} + \alpha \frac{\Delta \tilde{\tau}[x(s)]}{\Delta x(s)} \cdot \frac{[\Delta x(s)]^2}{4} + \\ + \frac{\tilde{\tau}[x(s+1)] + \tilde{\tau}[x(s)]}{2} [(\alpha^2 - 1)x_1(s) + (\alpha + 1)\beta]. \quad (32)$$

Из этих выражений видно, что функции $\tau_1(s)$ и $\bar{\sigma}_1(s)$ действительно будут полиномами относительно $x_1(s)$ соответственно не выше первой и второй степени.

Таким образом, при разном дифференцировании уравнение (9) сохраняет свой вид, т. е. если функция $y(s)$ удовлетворяет (9), то функция $\Delta y(s)/\Delta x(s)$ будет удовлетворять (20).

Справедливо и обратное утверждение: любое решение уравнения (20) при $\lambda \neq 0$ можно представить в виде $v_1(s) = \Delta y(s)/\Delta x(s)$, где $y(s)$ — некоторое решение уравнения (9).

При доказательстве удобно исходить не из (9), (20), а из эквивалентных им уравнений (21), (24). В соответствии с соотношением (23) рассмотрим функцию

$$y(s) = -\frac{1}{\lambda} \left[\sigma(s) \frac{\nabla v_1(s)}{\nabla x_1(s)} + \tau(s) v_1(s) \right]. \quad (33)$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор $\Delta/\Delta x(s)$,

с помощью (24) для $v_i(s)$ получим $\Delta y(s)/\Delta x(s) = v_i(s)$. Поэтому из (33) вытекает, что функция $y(s)$ действительно является решением уравнения (21), что и требовалось доказать.

Используя метод математической индукции, можно получить, что *функция*

$$v_k(s) = \frac{\Delta v_{k-1}(s)}{\Delta x_{k-1}(s)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $x_k(s) = x(s + k/2)$, $v_0(s) = y(s)$, удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_k[x_k(s)] \frac{\Delta}{\Delta x_k(s - 1/2)} \left[\frac{\nabla v_k(s)}{\nabla x_k(s)} \right] + \\ + \frac{\tilde{\tau}_k[x_k(s)]}{2} \left[\frac{\Delta v_k(s)}{\Delta x_k(s)} + \frac{\nabla v_k(s)}{\nabla x_k(s)} \right] + \mu_k v_k(s) = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

где $\tilde{\sigma}_k(x_k)$, $\tilde{\tau}_k(x_k)$ — некоторые полиномы относительно x_k соответственно не выше второй и первой степени.

Для полиномов $\tilde{\tau}_k[x_k(s)]$ и $\tilde{\sigma}_k[x_k(s)]$ имеют место соотношения, аналогичные (31), (32):

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{k+1}[x_{k+1}(s)] = \frac{\tilde{\Delta \tilde{\sigma}_k}[x_k(s)]}{\Delta x_k(s)} + \alpha \frac{\tilde{\tau}_k[x_k(s+1)] + \tau_k[x_k(s)]}{2} + \\ + \frac{\tilde{\Delta \tilde{\tau}_k}[x_k(s)]}{\Delta x_k(s)} [(\alpha^2 - 1)x_{k+1}(s) + (\alpha + 1)\beta], \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{k+1}[x_{k+1}(s)] = \frac{\tilde{\sigma}_k[x_k(s+1)] + \tilde{\sigma}_k[x_k(s)]}{2} + \\ + \alpha \frac{\tilde{\Delta \tilde{\tau}_k}[x_k(s)]}{\Delta x_k(s)} \frac{[\Delta x_k(s)]^2}{4} + \\ + \frac{\tilde{\tau}_k[x_k(s+1)] + \tau_k[x_k(s)]}{2} [(\alpha^2 - 1)x_{k+1}(s) + (\alpha + 1)\beta]. \end{aligned} \quad (36)$$

Уравнение (34) эквивалентно уравнению

$$\sigma(s) \frac{\Delta}{\Delta x_k(s - 1/2)} \left[\frac{\nabla v_k(s)}{\nabla x_k(s)} \right] + \tau_k(s) \frac{\Delta v_k(s)}{\Delta x_k(s)} + \mu_k v_k(s) = 0. \quad (37)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sigma(s) = \tilde{\sigma}_k[x_k(s)] - \frac{1}{2} \tilde{\tau}_k[x_k(s)] \Delta x_k \left(s - \frac{1}{2} \right), \\ \tau_k(s) = \tilde{\tau}_k[x_k(s)]; \end{aligned} \quad (38)$$

$$\tau_k(s) = \frac{\Delta \sigma(s)}{\Delta x_{k-1}(s)} + \tau_{k-1}(s+1) \frac{\Delta x_k(s)}{\Delta x_{k-1}(s)}, \quad \tau_0(s) = \tau(s), \quad (39)$$

$$\mu_k = \mu_{k-1} + \frac{\Delta \tau_{k-1}(s)}{\Delta x_{k-1}(s)}. \quad (40)$$

Справедливо и обратное утверждение: любое решение уравнения (37) при $\mu_{k-1} \neq 0$ можно представить в виде $v_k(s) = \Delta v_{k-1}(s)/\Delta x_{k-1}(s)$.

Если переписать (39) в виде

$$\sigma(s) + \tau_k(s)\Delta x_k(s - 1/2) = [\sigma(t) + \tau_{k-1}(t)\Delta x_{k-1}(t - 1/2)]|_{t=s+1}, \quad (41)$$

то по индукции можно получить следующее выражение для $\tau_m(s)$:

$$\tau_m(s) = \frac{1}{\Delta x(s + (m-1)/2)} \times \\ \times \left[\sigma(s+m) - \sigma(s) + \tau(s+m)\Delta x\left(s+m-\frac{1}{2}\right) \right]. \quad (42)$$

Выражение для μ_m можно получить непосредственно из (40):

$$\mu_m = \lambda + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Delta \tau_k(s)}{\Delta x_k(s)}. \quad (43)$$

Получим выражения для $\tau_k(s) = \tilde{\tau}_k[x_k(s)]$ и μ_m в случае функций $x(s)$ вида (11), (12) ($\alpha \neq 1$, $\beta = 0$). Пусть разложения полиномов $\tilde{\sigma}_k(x_k)$, $\tilde{\tau}_k(x_k)$ по степеням x_k имеют вид

$$\tilde{\sigma}_k(x_k) = \tilde{\sigma}_k(0) + \tilde{\sigma}'_k(0)x_k + \frac{\tilde{\sigma}''_k}{2}x_k^2, \quad \tilde{\tau}_k(x_k) = \tilde{\tau}_k(0) + \tilde{\tau}'_k x_k. \quad (44)$$

Так как $[\Delta x_k(s)]^2/4 = (\alpha^2 - 1)x_{k+1}^2(s) + c$, (c — постоянная) то, сравнивая в (35), (36) коэффициенты при одинаковых степенях $x_{k+1}(s)$, с помощью вытекающих из (14), (15), (17) равенств

$$\frac{x_k(s+1) + x_k(s)}{2} = \alpha x_{k+1}(s),$$

$$\frac{\Delta x_k^2(s)}{\Delta x_k(s)} = 2\alpha x_{k+1}(s),$$

$$\frac{x_k^2(s+1) + x_k^2(s)}{2} = (2\alpha^2 - 1)x_{k+1}^2(s) + c$$

получим

$$\tilde{\sigma}_{k+1} = (2\alpha^2 - 1)\tilde{\sigma}_k + 4\alpha(\alpha^2 - 1)\tilde{\tau}'_k, \quad (45)$$

$$\tilde{\tau}'_{k+1} = \alpha\tilde{\sigma}_k + (2\alpha^2 - 1)\tilde{\tau}'_k;$$

$$\tilde{\sigma}'_{k+1}(0) = \alpha\tilde{\sigma}'_k(0) + (\alpha^2 - 1)\tilde{\tau}_k(0), \quad (46)$$

$$\tilde{\tau}_{k+1}(0) = \tilde{\sigma}'_k(0) + \alpha\tilde{\tau}_k(0).$$

Эти системы уравнений являются линейными однородными системами разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Собственными значениями матрицы системы (45)

$$\begin{pmatrix} 2\alpha^2 - 1 & 4\alpha(\alpha^2 - 1) \\ \alpha & 2\alpha^2 - 1 \end{pmatrix}$$

будут q_1^2 и q_2^2 , где q_1 , q_2 — корни уравнения (10), а собственными

значениями матрицы системы (46) будут q_1 и q_2 . В соответствии с этим величины $\tilde{\sigma}_k''$ и $\tilde{\tau}_k'$ будут линейными комбинациями q_1^{2k} и q_2^{2k} , а величины $\tilde{\sigma}_k'(0)$ и $\tilde{\tau}_k(0)$ будут линейными комбинациями q_1^k и q_2^k . Так как

$$\tilde{\sigma}_0'' = \tilde{\sigma}'', \quad \tilde{\tau}_0' = \tilde{\tau}', \quad \tilde{\sigma}_0'(0) = \tilde{\sigma}'(0), \quad \tilde{\tau}_0(0) = \tilde{\tau}(0), \quad (47)$$

то решения систем (45), (46) с дополнительными условиями (47) имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_k'' &= \tilde{\sigma}'' \psi(2k) + 4(\alpha^2 - 1) \tilde{\tau}' \omega(2k), \\ \tilde{\tau}_k' &= \frac{1}{2} \tilde{\sigma}'' \omega(2k) + \tilde{\tau}' \psi(2k); \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_k'(0) &= \tilde{\sigma}'(0) \psi(k) + (\alpha^2 - 1) \tilde{\tau}(0) \omega(k), \\ \tilde{\tau}_k(0) &= \tilde{\sigma}'(0) \omega(k) + \tilde{\tau}(0) \psi(k) \end{aligned} \quad (49)$$

(мы воспользовались обозначениями (16)).

Подобным же образом для функции $x(s) = s(s+1)$ получим

$$\tilde{\sigma}_k'' = \tilde{\sigma}'', \quad \tilde{\tau}_k' = \tilde{\tau}' + k\tilde{\sigma}''; \quad (50)$$

$$\tilde{\sigma}_k'(0) = \tilde{\sigma}'(0) + \frac{3}{4} k^2 \tilde{\sigma}'' + \frac{3}{2} k \tilde{\tau}', \quad (51)$$

$$\tilde{\tau}_k(0) = \tilde{\tau}(0) + \frac{3}{4} k^2 \tilde{\tau}' + k \tilde{\sigma}'(0) + \frac{k^3}{4} \tilde{\sigma}''.$$

С помощью (43), (44), (48)–(51) приходим к следующим выражениям для постоянной μ_m : для $x(s)$ вида (11), (12)

$$\mu_m = \lambda + \omega(m) \left[\psi(m-1) \tilde{\tau}' + \omega(m-1) \frac{\tilde{\sigma}''}{2} \right], \quad (52)$$

для $x(s) = s(s+1)$

$$\mu_m = \lambda + m \tilde{\tau}' + \frac{m(m-1)}{2} \tilde{\sigma}'' \quad (53)$$

4. Формула Родрига. Рассмотренное свойство разностного уравнения (9) позволяет построить семейство частных решений этого уравнения, соответствующих определенным значениям λ . Действительно, уравнение для функции $v_n(s)$

$$\sigma(s) \frac{\Delta}{\Delta x_n(s-1/2)} \left[\frac{\nabla v_n(s)}{\nabla x_n(s)} \right] + \tau_n(s) \frac{\Delta v_n(s)}{\Delta x_n(s)} + \mu_n v_n(s) = 0$$

при $\mu_n = 0$ имеет частное решение $v_n(s) = c$.

Покажем, что при $k < n$ функции $v_k(s)$, связанные соотношениями $v_{k+1}(s) = \Delta v_k(s) / \Delta x_k(s)$, при дополнительном требовании $\mu_k \neq 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) будут полиномами степени $n-k$ относительно $x_k(s)$. Доказательство проведем по индукции, предполагая, что функция $v_{k+1}(s)$ является полиномом степени $n-k-1$

относительно $x_{k+1}(s)$. Из уравнения (34) имеем

$$v_k(s) = -\frac{1}{\mu_k} \left\{ \tilde{\sigma}_k[x_k(s)] \frac{\nabla v_{k+1}(s)}{\nabla x_{k+1}(s)} + \frac{\tilde{\tau}_k[x_k(s)]}{2} [v_{k+1}(s) + v_{k+1}(s-1)] \right\}.$$

Согласно (4), (5) функции $\nabla v_{k+1}(s)/\nabla x_{k+1}(s)$ и $[v_{k+1}(s) + v_{k+1}(s-1)]/2$ являются полиномами относительно $x_{k+2}(s-1)$ соответственно степени $n-k-2$ и $n-k-1$. Так как $x_{k+2}(s-1) = x_k(s)$, то функция $v_k(s)$ будет, очевидно, полиномом степени $n-k$ относительно $x_k(s)$. Последовательно применяя эти рассуждения для $k = n-1, n-2, \dots$, получим, что существует решение уравнения (9) $y(s) = v_0(s)$ в виде полинома степени n относительно $x(s)$ при таком значении $\lambda = \lambda_n$, для которого $\mu_n = 0$. Чтобы получить явное выражение для $y(s)$ в этом случае, запишем уравнения (21), (37) в самосопряженном виде:

$$\frac{\Delta}{\Delta x(s-1/2)} \left[\sigma(s) \rho(s) \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} \right] + \lambda \rho(s) y(s) = 0, \quad (54)$$

$$\frac{\Delta}{\Delta x_k(s-1/2)} \left[\sigma(s) \rho_k(s) \frac{\nabla v_k(s)}{\nabla x_k(s)} \right] + \mu_k \rho_k(s) v_k(s) = 0. \quad (55)$$

Здесь функции $\rho(s)$ и $\rho_k(s)$ удовлетворяют разностным уравнениям

$$\frac{\Delta}{\Delta x(s-1/2)} [\sigma(s) \rho(s)] = \tau(s) \rho(s), \quad (56)$$

$$\frac{\Delta}{\Delta x_k(s-1/2)} [\sigma(s) \rho_k(s)] = \tau_k(s) \rho_k(s). \quad (57)$$

Используя формулы (57), (39), получим связь функций $\rho_k(s)$ и $\rho(s)$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(s+1) \rho_k(s+1)}{\rho_k(s)} &= \sigma(s) + \tau_k(s) \Delta x_k \left(s - \frac{1}{2} \right) = \\ &= \sigma(s+1) + \tau_{k-1}(s+1) \Delta x_{k-1} \left(s + \frac{1}{2} \right) = \frac{\sigma(s+2) \rho_{k-1}(s+2)}{\rho_{k-1}(s+1)}, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\sigma(s+1) \rho_{k-1}(s+1)}{\rho_k(s)} = \frac{\sigma(s+2) \rho_{k-1}(s+2)}{\rho_k(s+1)} = C(s),$$

где $C(s)$ — произвольная периодическая функция с периодом, равным единице. Полагая $C(s) = 1$, находим

$$\rho_k(s) = \sigma(s+1) \rho_{k-1}(s+1). \quad (58)$$

Поэтому

$$\rho_k(s) = \rho(s+k) \prod_{i=1}^k \sigma(s+i). \quad (59)$$

С помощью (58) уравнение (55) можно записать в виде простого соотношения, связывающего функции $v_k(s)$ и $v_{k+1}(s)$:

$$\rho_k(s) v_k(s) = -\frac{1}{\mu_k} \cdot \frac{\nabla}{\nabla x_{k+1}(s)} [\rho_{k+1}(s) v_{k+1}(s)]. \quad (60)$$

Отсюда получаем

$$\rho_k(s) v_k(s) = \frac{A_k}{A_n} D_k^{(n)} [\rho_n(s) v_n(s)]. \quad (61)$$

Здесь

$$A_k = (-1)^k \prod_{i=0}^{k-1} \mu_i, \quad A_0 = 1,$$

$$D_k^{(n)} [f(s)] = \widehat{M}_{k+1} \widehat{M}_{k+2} \dots \widehat{M}_n [f(s)], \quad \widehat{M}_m [f(s)] = \frac{\nabla f(s)}{\nabla x_m(s)}.$$

Напомним, что по определению

$$v_k(s) = \frac{\Delta v_{k-1}(s)}{\Delta x_{k-1}(s)},$$

т. е.

$$v_k(s) = \Lambda^{(k)} [y(s)], \quad (62)$$

где

$$\Lambda^{(k)} [f(s)] = \widehat{L}_{k-1} \widehat{L}_{k-2} \dots \widehat{L}_0 [f(s)], \quad \widehat{L}_m [f(s)] = \frac{\Delta f(s)}{\Delta x_m(s)}.$$

Если $v_n(s) = C_n$ (C_n — постоянная), то, как было показано выше, функция $y(s)$ будет полиномом степени n относительно $x(s)$, т. е. $y = y_n(s) \equiv \tilde{y}_n[x(s)]$. В этом случае для функции

$$v_{kn}(s) = \Lambda^{(k)} [y_n(s)]$$

из (61) получаем следующее выражение:

$$v_{kn}(s) = \frac{A_{kn} B_n}{\rho_k(s)} D_k^{(n)} [\rho_n(s)], \quad (63)$$

где

$$A_{kn} = A_k(\lambda) |_{\lambda=\lambda_n} = (-1)^k \prod_{m=0}^{k-1} \mu_{mn},$$

$$\mu_{mn} = \lambda_n - \lambda_m, \quad B_n = \frac{C_n}{A_{nn}}$$

(B_n — нормировочная постоянная).

В частности, при $k=0$ из (63) получаем *аналог формулы Родрига* для полинома $\tilde{y}_n[x(s)] \equiv y_n(s)$:

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)} D^{(n)} [\rho_n(s)], \quad D^{(n)} \equiv D_0^{(n)}. \quad (64)$$

Легко убедиться в том, что произвол в выборе периодического

множителя для функции $\rho(s)$ не влияет на явный вид полиномов $\tilde{y}_n(x)$, получаемых по этой формуле.

Таким образом, полиномиальные решения уравнения (9) $y = -\tilde{y}_n[x(s)]$ определяются формулой (64) однозначно с точностью до нормировочного множителя B_n . Эти решения соответствуют значениям $\lambda = \lambda_n$, для которых $\mu_n = 0$. Для $x(s)$ вида (11), (12) в соответствии с (52), (16) имеем

$$\lambda_n = -\omega(n) \left[\psi(n-1) \tilde{\tau}' + \omega(n-1) \frac{\tilde{\sigma}''}{2} \right]. \quad (65)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \mu_{mn} &= \lambda_n - \lambda_m = -\omega(n-m) \left[\psi(n+m-1) \tilde{\tau}' + \omega(n+m-1) \frac{\tilde{\sigma}''}{2} \right], \\ A_{kn} &= \prod_{m=0}^{k-1} \omega(n-m) \prod_{m=0}^{k-1} \left[\psi(n+m-1) \tilde{\tau}' + \omega(n+m-1) \frac{\tilde{\sigma}''}{2} \right]. \end{aligned} \quad (65a)$$

Для $x(s) = s(s+1)$

$$\lambda_n = -n\tilde{\tau}' - \frac{n(n-1)}{2} \tilde{\sigma}''; \quad (66)$$

$$\mu_{mn} = -(n-m) \left(\tilde{\tau}' + \frac{n+m-1}{2} \tilde{\sigma}'' \right), \quad (66a)$$

$$A_{kn} = \frac{n!}{(n-k)!} \prod_{m=0}^{k-1} \left(\tilde{\tau}' + \frac{n+m-1}{2} \tilde{\sigma}'' \right).$$

Рассмотрим некоторые следствия из формулы Родрига (63).

1) Так как выражение $\hat{M}_m[f(s)] = \nabla f(s) / \nabla x_m(s)$ при замене s на $s-1/2$ переходит в $\hat{M}_{m-1}[f(s-1/2)]$, то

$$v_{1n}(s - \frac{1}{2}) = \frac{A_{1n} B_n}{\rho_1(s-1/2)} D^{(n-1)} \left[\rho_n \left(s - \frac{1}{2} \right) \right].$$

Если положить $\bar{\rho}(s) = \rho_1(s-1/2)$, $\bar{\sigma}(s) = \sigma(s-1/2)$, то с помощью (59) получим

$$\begin{aligned} \rho_n \left(s - \frac{1}{2} \right) &= \rho \left(s + n - \frac{1}{2} \right) \prod_{i=1}^n \sigma \left(s - \frac{1}{2} + i \right) = \\ &= \rho_1 \left(s + n - \frac{3}{2} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \sigma \left(s - \frac{1}{2} + i \right) = \bar{\rho}(s + n - 1) \prod_{i=1}^{n-1} \bar{\sigma}(s + i), \end{aligned}$$

т. е. $\rho_n(s-1/2) = \bar{\rho}_{n-1}(s)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y_n(t)}{\Delta x(t)} \Big|_{t=s-1/2} &= \frac{\bar{B}_{n-1}}{\bar{\rho}(s)} D^{(n-1)} [\bar{\rho}_{n-1}(s)], \\ \bar{B}_{n-1} &= A_{1n} B_n = -\lambda_n B_n. \end{aligned} \quad (67)$$

Таким образом, функция $\Delta y_n(s-1/2)/\Delta x(s-1/2)$, являющаяся полиномом $n-1$ -й степени относительно $x(s)$, определяется фор-

мулой Родрига, в которой следует заменить $\rho(s)$ на $\bar{\rho}(s) = \rho_1(s - 1/2)$, $\sigma(s)$ на $\bar{\sigma}(s) = \sigma(s - 1/2)$. При этом роль нормировочной постоянной играет величина $\bar{B}_{n-1}$. Соотношение (67) аналогично формулам дифференцирования (12.23).

2) С помощью (63) при $k = n - 1$ можно вычислить коэффициенты a_n , b_n при старших степенях $x = x(s)$ в разложении

$$\tilde{y}_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots$$

Согласно (62) имеем

$$v_{n-1, n}(s) = a_n \Lambda^{(n-1)}[x^n(s)] + b_n \Lambda^{(n-1)}[x^{n-1}(s)].$$

С другой стороны, согласно (63), (57), (58)

$$\begin{aligned} v_{n-1, n}(s) &= \frac{A_{n-1, n} B_n}{\rho_{n-1}(s)} \cdot \frac{\nabla \rho_n(s)}{\nabla x_n(s)} = \frac{A_{n-1, n} B_n}{\rho_{n-1}(s)} \cdot \frac{\nabla [\sigma(s + 1) \rho_{n-1}(s + 1)]}{\nabla x_n(s)} = \\ &= \frac{A_{n-1, n} B_n}{\rho_{n-1}(s)} \cdot \frac{\Delta [\sigma(s) \rho_{n-1}(s)]}{\Delta x_{n-1}(s - 1/2)} = A_{n-1, n} B_n \tilde{\tau}_{n-1}[x_{n-1}(s)]. \end{aligned}$$

Поэтому величины a_n , b_n можно найти, сравнивая коэффициенты при различных степенях $x_{n-1}(s)$ в равенстве

$$a_n \Lambda^{(n-1)}[x^n(s)] + b_n \Lambda^{(n-1)}[x^{n-1}(s)] = A_{n-1, n} B_n \tilde{\tau}_{n-1}[x_{n-1}(s)]. \quad (68)$$

Оператор $\Lambda^{(k)}$ переводит любую полином степени n относительно $x(s)$ в полином степени $n - k$ относительно $x_k(s)$. Следовательно,

$$\Lambda^{(k)}[x^n(s)] = \alpha_{kn} x_k^{n-k}(s) + \beta_{kn} x_k^{n-k-1}(s) + \quad (69)$$

где α_{kn} , β_{kn} — постоянные. Отсюда с помощью (68) получим

$$\begin{aligned} a_n [\alpha_{n-1, n} x_{n-1}(s) + \beta_{n-1, n}] + b_n \alpha_{n-1, n-1} = \\ = A_{n-1, n} B_n [\tilde{\tau}'_{n-1} x_{n-1}(s) + \tilde{\tau}_{n-1}(0)], \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} a_n &= A_{n-1, n} B_n \frac{\tilde{\tau}'_{n-1}}{\alpha_{n-1, n}}, \\ \frac{b_n}{a_n} &= \frac{\alpha_{n-1, n} \tilde{\tau}_{n-1}(0)}{\alpha_{n-1, n-1} \tilde{\tau}'_{n-1}} - \frac{\beta_{n-1, n}}{\alpha_{n-1, n-1}}. \end{aligned} \quad (70)$$

Для $x(s)$ вида (11), (12), согласно (14), (16), (17),

$$\alpha_{kn} = \prod_{m=0}^{k-1} \omega(n - m), \quad \beta_{kn} = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} a_n &= B_n \prod_{m=0}^{n-1} \left[\psi(n + m - 1) \tilde{\tau}' + \omega(n + m - 1) \frac{\tilde{\sigma}''}{2} \right], \\ \frac{b_n}{a_n} &= \omega(n) \frac{\tilde{\tau}_{n-1}(0)}{\tilde{\tau}'_{n-1}}, \end{aligned} \quad (71)$$

где величины $\tilde{\tau}'_{n-1}$, $\tilde{\tau}_{n-1}(0)$ определяются по формулам (48), (49).

При $x(s) = s(s+1)$ для вычисления постоянных α_{kn} , β_{kn} воспользуемся формулой (18) и равенством

$$\Lambda^{(k+1)} [x^n(s)] = \frac{\Delta}{\Delta x_k(s)} \{ \Lambda^k [x^n(s)] \},$$

которое приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1,n} x_{k+1}^{n-k-1}(s) + \beta_{k+1,n} x_{k+1}^{n-k-2}(s) = \\ = \alpha_{kn} \left[(n-k) x_{k+1}^{n-k-1}(s) + \frac{(n-k)(n-k-1)(2n-2k-1)}{12} x_{k+1}^{n-k-2}(s) \right] + \\ + \beta_{kn} (n-k-1) x_{k+1}^{n-k-2}(s). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x_{k+1}(s)$, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1,n} &= (n-k) \alpha_{kn}, \\ \beta_{k+1,n} &= (n-k-1) \beta_{kn} + \frac{(n-k)(n-k-1)(2n-2k-1)}{12} \alpha_{kn}, \\ \alpha_{1n} &= n, \quad \beta_{1n} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{12}. \end{aligned}$$

Из первого уравнения получаем

$$\alpha_{kn} = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (72)$$

После подстановки найденного выражения для α_{kn} во второе уравнение приходим к линейному неоднородному разностному уравнению первого порядка для β_{kn} , которое может быть решено методом вариации постоянных. В результате получаем

$$\beta_{kn} = \frac{k(2n-k)n!}{12(n-k-1)!}. \quad (73)$$

Окончательно, при $x(s) = s(s+1)$ с помощью (70), (72), (73) приходим к следующим выражениям для a_n , b_n :

$$\begin{aligned} a_n &= B_n \prod_{m=0}^{n-1} \left(\tilde{\tau}' + \frac{n+m-1}{2} \tilde{\sigma}' \right), \\ \frac{b_n}{a_n} &= n \frac{\tilde{\tau}_{n-1}(0)}{\tilde{\tau}'_{n-1}} - \frac{n(n^2-1)}{12}. \end{aligned} \quad (74)$$

5. Свойство ортогональности. Докажем свойство ортогональности для рассмотренных выше полиномиальных решений уравнения (9). Для этого запишем уравнения для $y_m(s)$ и $y_n(s)$ в самосопряженном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\Delta x(s-1/2)} \left[\sigma(s) \rho(s) \frac{\nabla y_m(s)}{\nabla x(s)} \right] + \lambda_m \rho(s) y_m(s) = 0, \\ \frac{\Delta}{\Delta x(s-1/2)} \left[\sigma(s) \rho(s) \frac{\nabla y_n(s)}{\nabla x(s)} \right] + \lambda_n \rho(s) y_n(s) = 0. \end{aligned}$$

Умножая первое уравнение на $y_n(s)$, второе на $y_m(s)$ и вычитая

из первого уравнения второе, получим

$$\begin{aligned}
 (\lambda_m - \lambda_n) y_m(s) y_n(s) \rho(s) \Delta x \left(s - \frac{1}{2} \right) = \\
 = y_m(s) \Delta \left[\sigma(s) \rho(s) \frac{\nabla y_n(s)}{\nabla x(s)} \right] - y_n(s) \Delta \left[\sigma(s) \rho(s) \frac{\nabla y_m(s)}{\nabla x(s)} \right].
 \end{aligned}$$

Правую часть полученного соотношения преобразуем с помощью тождества

$$\begin{aligned}
 \Delta \left\{ \sigma(s) \rho(s) \left[y_m(s) \frac{\nabla y_n(s)}{\nabla x(s)} - y_n(s) \frac{\nabla y_m(s)}{\nabla x(s)} \right] \right\} = \\
 = y_m(s) \Delta \left[\sigma(s) \rho(s) \frac{\nabla y_n(s)}{\nabla x(s)} \right] - y_n(s) \Delta \left[\sigma(s) \rho(s) \frac{\nabla y_m(s)}{\nabla x(s)} \right].
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 (\lambda_m - \lambda_n) y_m(s) y_n(s) \rho(s) \Delta x \left(s - \frac{1}{2} \right) = \\
 = \Delta \left\{ \sigma(s) \rho(s) \left[y_m(s) \frac{\nabla y_n(s)}{\nabla x(s)} - y_n(s) \frac{\nabla y_m(s)}{\nabla x(s)} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Положим здесь $s = s_i$, $s_{i+1} = s_i + 1$ и просуммируем по тем значениям индекса i , для которых $a \leq s_i \leq b-1$:

$$\begin{aligned}
 (\lambda_m - \lambda_n) \sum_{s_i=a}^{b-1} y_m(s_i) y_n(s_i) \rho(s_i) \Delta x \left(s_i - \frac{1}{2} \right) = \\
 = \sigma(s) \rho(s) \left[y_m(s) \frac{\nabla y_n(s)}{\nabla x(s)} - y_n(s) \frac{\nabla y_m(s)}{\nabla x(s)} \right] \Big|_a^b.
 \end{aligned}$$

Так как $y_m(s)$, $y_n(s)$ — полиномы относительно $x(s)$, $\nabla y_m(s)/\nabla x(s)$, $\nabla y_n(s)/\nabla x(s)$ — полиномы относительно $x(s-1/2)$, то $y_m(s) \frac{\nabla y_n(s)}{\nabla x(s)} - y_n(s) \frac{\nabla y_m(s)}{\nabla x(s)}$ — линейная комбинация произведений вида $x^k(s)x^l(s-1/2)$ ($k, l = 0, 1, \dots$). Поэтому при выполнении граничных условий

$$\sigma(s)\rho(s)x^k(s)x^l(s-1/2)|_{s=a, b} = 0, \quad k, l = 0, 1, \quad (75)$$

подстановка в правой части будет равна нулю, и при $m \neq n$ получим

$$\sum_{s_i=a}^{b-1} y_m(s_i) y_n(s_i) \rho(s_i) \Delta x \left(s_i - \frac{1}{2} \right) = 0. \quad (76)$$

Проводя аналогичные рассуждения для уравнения (55) при $k=1$, легко показать, что для функций $v_{1n}(s)$ имеет место следующее соотношение ортогональности:

$$\sum_{s_i=a_1}^{b_1-1} v_{1m}(s_i) v_{1n}(s_i) \rho_1(s_i) \Delta x_1 \left(s_i - \frac{1}{2} \right) = 0$$

при $m \neq n$, если выполнены граничные условия

$$\sigma(s) \rho_1(s) x_1^k(s) x_1^l(s-1/2) \big|_{s=a_1, b_1} = 0, \quad k, l = 0, 1, \dots \quad (75a)$$

Покажем, что, как и в простейшем случае $x(s) = s$, можно положить $a_1 = a$, $b_1 = b - 1$.

Функция $\sigma(s) x_1^k(s) x_1^l(s-1/2)$ в силу (22) является полиномом относительно $x(s-1/2)$, $x(s)$ и $x(s+1/2)$. Так как $\rho_1(s) = \sigma(s+1)\rho(s+1)$, а $x(s-1/2)$ и $x(s)$ можно с помощью (8a) представить в виде линейной комбинации функций $x(s+1/2)$ и $x(s+1)$, то $\sigma(s) \rho_1(s) x_1^k(s) x_1^l(s-1/2)$ можно представить в виде комбинации функций вида $\sigma(s+1)\rho(s+1)x^k(s+1)x^l(s+1/2)$. Поэтому в силу (75)

$$\sigma(s) \rho_1(s) x_1^k(s) x_1^l(s-1/2) \big|_{s=b-1} = 0.$$

Тем же способом с помощью равенства

$$\sigma(s)\rho_1(s) = \sigma(s)\rho(s)[\sigma(s) + \tau(s)\Delta x(s-1/2)]$$

можно убедиться в выполнении условия

$$\sigma(s)\rho_1(s)x_1^k(s)x_1^l(s-1/2) \big|_{s=a} = 0.$$

По индукции аналогичным образом можно доказать, что при выполнении условия (75) для полиномов $v_{kn}(s)$ имеют место следующие соотношения ортогональности:

$$\sum_{s_i=a}^{b-k-1} v_{km}(s_i) v_{kn}(s_i) \rho_k(s_i) \Delta x_k \left(s_i - \frac{1}{2} \right) = \delta_{mn} d_{kn}^2. \quad (77)$$

Для того чтобы квадраты норм d_{kn}^2 были положительными, будем в дальнейшем считать, что $\rho_k(s_i) \Delta x_k(s_i - 1/2) > 0$ при $a \leq s_i \leq b - k - 1$.

Для вычисления квадрата нормы $d_{kn}^2 \equiv d_{0n}^2$ установим предварительно связь величин d_{kn}^2 и $d_{k+1,n}^2$. Умножая обе части уравнения (55) при $s = s_i$, $\lambda = \lambda_n$ на $\rho_k(s_i) v_{kn}(s_i) \Delta x_k(s_i - 1/2)$ и применяя формулу суммирования по частям, получим

$$\begin{aligned} \mu_{kn} d_{kn}^2 &= - \sum_i v_{kn}(s_i) \Delta \left[\sigma(s_i) \rho_k(s_i) \frac{\nabla v_{kn}(s_i)}{\nabla x_k(s_i)} \right] = \\ &= - v_{kn}(s_i) \sigma(s_i) \rho_k(s_i) \frac{\nabla v_{kn}(s_i)}{\nabla x_k(s_i)} \bigg|_a^{b-k} + \\ &+ \sum_i \sigma(s_{i+1}) \rho_k(s_{i+1}) \left[\frac{\Delta v_{kn}(s_i)}{\Delta x_k(s_i)} \right]^2 \Delta x_k(s_i) = \\ &= \sum_i v_{k+1,n}^2(s_i) \rho_{k+1}(s_i) \Delta x_{k+1} \left(s_i - \frac{1}{2} \right) = d_{k+1,n}^2. \end{aligned}$$

Отсюда последовательно находим

$$d_n^2 \equiv d_{0n}^2 = \frac{1}{\mu_{0n}} d_{1n}^2 = \frac{1}{\mu_{0n}\mu_{1n}} d_{2n}^2 = \dots = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} \mu_{kn}} d_{nn}^2 =$$

$$= \frac{v_{nn}^2(x)}{\prod_{k=0}^{n-1} \mu_{kn}} S_n = (-1)^n A_{nn} B_n^2 S_n, \quad (78)$$

где

$$S_n = \sum_{s_i=a}^{b-n-1} \rho_n(s_i) \Delta x_n \left(s_i - \frac{1}{2} \right). \quad (79)$$

В случае конечных значений a , b имеем $b-a=N$, где N — натуральное число. При $n=N-1$ сумма S_n содержит лишь одно слагаемое и поэтому легко вычисляется:

$$S_{n-1} = \rho_{n-1}(a) \Delta x_{n-1}(a-1/2). \quad (79a)$$

Чтобы вычислить S_n при $n < N-1$, достаточно уметь вычислять отношение S_{n-1}/S_n . Для этого преобразуем выражение для S_n , используя связь функций $\rho_n(s)$ и $\rho_{n-1}(s)$:

$$\rho_n(s) = \sigma(s+1) \rho_{n-1}(s+1) = \rho_{n-1}(s) [\sigma(s) + \tau_{n-1}(s) \Delta x_{n-1}(s-1/2)].$$

Отсюда, с одной стороны,

$$S_n = \sum_i \sigma(s_i+1) \rho_{n-1}(s_i+1) \Delta x_n \left(s_i - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \sum_i \sigma(s_i) \rho_{n-1}(s_i) \Delta x_n \left(s_i - \frac{3}{2} \right).$$

С другой стороны,

$$S_n = \sum_i \rho_{n-1}(s_i) \left[\sigma(s_i) + \tau_{n-1}(s_i) \Delta x_{n-1} \left(s_i - \frac{1}{2} \right) \right] \Delta x_n \left(s_i - \frac{1}{2} \right).$$

Возьмем полусумму этих выражений. С учетом (22) получим

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_i \rho_{n-1}(s_i) \Delta x_{n-1} \left(s_i - \frac{1}{2} \right) \left\{ \tilde{\sigma}_{n-1}[x_{n-1}(s_i)] \times \right.$$

$$\times \frac{\Delta x_n(s_i-1/2) + \Delta x_n(s_i-3/2)}{\Delta x_{n-1}(s_i-1/2)} +$$

$$\left. + \tilde{\tau}_{n-1}[x_{n-1}(s_i)] \frac{\Delta x_n(s_i-1/2) - \Delta x_n(s_i-3/2)}{2} \right\}.$$

Если воспользоваться соотношениями (29), (30), то

$$S_n = \sum_i \rho_{n-1}(s_i) \Delta x_{n-1} \left(s_i - \frac{1}{2} \right) Q_n[x_{n-1}(s_i)],$$

где

$$Q[x_{n-1}(s)] = \alpha \tilde{\sigma}_{n-1}[x_{n-1}(s)] + \\ + \tilde{\tau}_{n-1}[x_{n-1}(s)][(\alpha^2 - 1)x_{n-1}(s) + (\alpha + 1)\beta] \quad (80)$$

есть полином не выше второй степени относительно $x_{n-1}(s)$. Разложим $Q_n(x_{n-1})$ по степеням полинома первой степени $\tilde{\tau}_{n-1}(x_{n-1})$:

$$Q_n(x_{n-1}) = A_n \tilde{\tau}_{n-1}^2(x_{n-1}) + B_n \tilde{\tau}_{n-1}(x_{n-1}) + C_n. \quad (81)$$

Тогда $S_n = S_n^{(1)} + C_n S_{n-1}$, где

$$S_n^{(1)} = \sum_i \{A_n \tilde{\tau}_{n-1}[x_{n-1}(s_i)] + B_n\} \tilde{\tau}_{n-1}[x_{n-1}(s_i)] \times \\ \times \rho_{n-1}(s_i) \Delta x_{n-1}\left(s_i - \frac{1}{2}\right) = \sum_i \{A_n \tilde{\tau}_{n-1}[x_{n-1}(s_i)] + B_n\} \times \\ \times \Delta[\sigma(s_i) \rho_{n-1}(s_i)].$$

Воспользовавшись суммированием по частям, получим

$$S_n^{(1)} = \{A_n \tilde{\tau}_{n-1}[x_{n-1}(s_i)] + B_n\} \sigma(s_i) \rho_{n-1}(s_i) \Big|_a^{b-n} - \\ - A_n \sum_i \sigma(s_i + 1) \rho_{n-1}(s_i + 1) \Delta \tilde{\tau}_{n-1}[x_{n-1}(s_i)].$$

Так как подстановка равна нулю и

$$\frac{\Delta \tilde{\tau}_{n-1}[x_{n-1}(s)]}{\Delta x_{n-1}(s)} = \tilde{\tau}'_{n-1} = \text{const},$$

то

$$S_n^{(1)} = -A_n \tilde{\tau}'_{n-1} \sum_i \rho_n(s_i) \Delta x_n\left(s_i - \frac{1}{2}\right) = -A_n \tilde{\tau}'_{n-1} S_n.$$

Таким образом, $S_n = -A_n \tilde{\tau}'_{n-1} S_n + C_n S_{n-1}$, откуда

$$\frac{S_{n-1}}{S_n} = \frac{1 + A_n \tilde{\tau}'_{n-1}}{C_n}. \quad (82)$$

Для вычисления постоянной A_n достаточно сравнить коэффициенты при $x_{n-1}^2(s)$ в равенствах (80) и (81):

$$A_n = \frac{1}{2(\tilde{\tau}'_{n-1})^2} [\alpha \tilde{\sigma}''_{n-1} + 2(\alpha^2 - 1) \tilde{\tau}'_{n-1}].$$

Для вычисления C_n достаточно положить в (80), (81) $x_{n-1} = x_{n-1}^*$, где x_{n-1}^* — корень уравнения $\tilde{\tau}_{n-1}(x_{n-1}) = 0$. Отсюда получим $C_n = \alpha \tilde{\sigma}_{n-1}(x_{n-1}^*)$. Так как

$$\tilde{\sigma}_{n-1}[x_{n-1}(s)] = \sigma(s) + \frac{1}{2} \tilde{\tau}_{n-1}[x_{n-1}(s)] \Delta x_{n-1}\left(s - \frac{1}{2}\right),$$

то $\tilde{\sigma}_{n-1}[x_{n-1}(s_n^*)] = \sigma(s_n^*)$, т. е. $C_n = \alpha \sigma(s_n^*)$, где $x_{n-1}(s_n^*) = x_{n-1}^*$.

Замечание. В случае конечных значений a, b граничные условия (75) в силу ограниченности величин $x(s)$ и $x(s-1/2)$ можно записать в более простом виде:

$$\sigma(a)\rho(a) = 0, \quad \sigma(b)\rho(b) = 0.$$

Если считать, что $\rho(s_i) \neq 0$ при $a \leq s_i \leq b-1$, то граничное условие при $s=a$ будет выполнено, если

$$\sigma(a) = 0. \quad (83)$$

С другой стороны, в силу равенства

$$\sigma(s+1)\rho(s+1) = \rho(s)[\sigma(s) + \tau(s)\Delta x(s-1/2)]$$

граничное условие при $\sigma(b)\rho(b) = 0$ будет выполнено, если

$$[\sigma(s) + \tau(s)\Delta x(s-1/2)]|_{s=b-1} = 0. \quad (84)$$

6. Вычисление весовых функций. Получим явные выражения для весовых функций $\rho(s)$ в точках сетки $s_i = a + i$ ($i = 0, 1, \dots, N-1$). При этом ограничимся важными для приложений случаями, когда $\rho_k(s_i)\Delta x_k(s_i-1/2) > 0$ при $a \leq s_i \leq b-k-1$, полиномы $\tilde{\sigma}(x)$, $\tilde{\tau}(x)$ имеют вещественные коэффициенты, а величины a, b имеют конечные значения. Для определения значений $\rho(s_i)$ перепишем уравнение (56) в виде

$$\frac{\rho(s+1)}{\rho(s)} = \frac{\sigma(s) + \tau(s)\Delta x(s-1/2)}{\sigma(s+1)}. \quad (85)$$

В дальнейшем будем считать, что величины $\Delta x_k(s_i-1/2)$ сохраняют знак при $a \leq s_i \leq b-k-1$ ($k = 0, 1, \dots$). Поэтому для выполнения условия $\rho_k(s_i)\Delta x_k(s_i-1/2) > 0$ достаточно потребовать сохранения знака величин $\rho_k(s_i)$. Это требование в силу (85), (59) будет выполнено, если

$$\begin{aligned} \sigma(s_i+1) > 0, \quad \sigma(s_i) + \tau(s_i)\Delta x(s_i-1/2) > 0, \\ a \leq s_i \leq b-2. \end{aligned} \quad (85a)$$

1°. Получим сначала решение уравнения (85) для функции $x(s) = \cos 2\gamma s$. Так как $x(s) = x(-s)$, и, следовательно, $\Delta x(s-1/2) = -\Delta x(t-1/2)|_{t=-s}$, то в силу (22) имеем

$$\sigma(s) + \tau(s)\Delta x(s-1/2) = \sigma(-s), \quad (86)$$

откуда

$$\frac{\rho(s+1)}{\rho(s)} = \frac{\sigma(-s)}{\sigma(s+1)}. \quad (87)$$

Так как $x(s) = \cos 2\gamma s = (q^{2s} + q^{-2s})/2$ при $q = e^{i\gamma}$, то, согласно (22)

$$\sigma(s) = Aq^{4s} + Bq^{2s} + C + Dq^{-2s} + Eq^{-4s}, \quad (88)$$

где A, B, C, D, E — некоторые постоянные. Поскольку полиномы $\tilde{\sigma}(x)$ и $\tilde{\tau}(x)$ имеют вещественные коэффициенты, то $C = C^*$, $D = B^*$, $E = A^*$ (* — знак комплексного сопряжения). Разложим

выражение (88) для $\sigma(s)$ на простейшие множители при $A \neq 0$. Если через $q^{2\delta_j}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) обозначить корни уравнения

$$Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + B^*z + A^* = 0, \quad (89)$$

то получим

$$\sigma(s) = Aq^{-4s} \prod_{j=1}^4 (q^{2s} - q^{2\delta_j}).$$

Так как

$$q^{2s} - q^{2\delta_j} = q^{s+\delta_j} (q^{s-\delta_j} - q^{-(s-\delta_j)}),$$

то

$$\sigma(s) = F \prod_{j=1}^4 \omega(s - \delta_j), \quad (90)$$

где F — некоторая постоянная, $\omega(s)$ определяется формулой (16) при $q_1 = q = e^{i\tau}$, $q_2 = e^{-i\tau}$. Поэтому в силу равенства $\omega(-s) = -\omega(s)$ уравнение (87) можно переписать в виде

$$\frac{\rho(s+1)}{\rho(s)} = \frac{\prod_{j=1}^4 \omega(s + \delta_j)}{\prod_{j=1}^4 \omega(s + 1 - \delta_j)}. \quad (91)$$

Решение этого уравнения в точках $s_i = a + i$, удовлетворяющее условию нормировки $|\rho(a)| = 1$, имеет вид

$$\rho(s_i) = \frac{\prod_{j=1}^4 \Omega(i, a + \delta_j)}{\prod_{j=1}^4 \Omega(i, a + 1 - \delta_j)} \rho(a), \quad (92)$$

где

$$\rho(a) = \begin{cases} +1, & \Delta x(s_i - 1/2) > 0, \\ -1, & \Delta x(s_i - 1/2) < 0; \end{cases}$$

$$\Omega(i, t) = \prod_{k=0}^{i-1} \omega(k + t), \quad \Omega(0, t) = 1.$$

Рассмотрим возможные значения δ_j , являющиеся корнями уравнения $\sigma(\delta) = 0$, т. е. уравнения (89) при $z = e^{2i\tau\delta}$. В соответствии с (83), (84), (86) можно положить $\delta_1 = a$, $\delta_2 = 1 - b$. Так как уравнение (89) наряду с корнем $z = z_j$ имеет корень $z = 1/z_j^*$ (что нетрудно проверить), то значения δ_j ($j = 3, 4$) можно выбрать либо вещественными, либо комплексно сопряженными. Таким образом, возможны два случая:

- 1) $\delta_3 = c$, $\delta_4 = d$, где c, d — вещественные числа;
- 2) $\delta_3 = c + id$, $\delta_4 = c - id$, где c, d — вещественные числа.

В первом случае

$$\sigma(s) = \omega(s-a)\omega(s+b-1)\omega(s-c)\omega(d-s) \quad (93)$$

(мы выбрали в (90) нормировочную постоянную $F=1$),

$$\rho(s_i) = \frac{\Omega(i, 2a) \Omega(i, a+1-b) \Omega(i, a+c) \Omega(i, a+d)}{\Omega(i, 1) \Omega(i, a+b) \Omega(i, a+1-c) \Omega(i, a+1-d)} \rho(a), \quad (94)$$

где

$$\omega(s) = \frac{\sin \gamma s}{\sin \gamma}, \quad \Omega(i, t) = \prod_{k=0}^{i-1} \omega(k+t),$$

$$\rho(a) = \begin{cases} 1, & \Delta x(s_i - 1/2) > 0, \\ -1, & \Delta x(s_i - 1/2) < 0. \end{cases}$$

Соответствующие полиномы $\tilde{y}_n[x(s)]$ при $B_n = (-1)^n/n!$ в (64) будем обозначать $u_n^{(c,d)}(x)$, где $x = \cos 2\gamma s$. Ограничения на возможные значения параметров a, b, c, d можно получить из условий (85a) с учетом (86).

Во втором случае

$$\sigma(s) = \omega(s-a)\omega(s+b-1) \frac{\sin^2 \gamma (s-c) + \sin^2 \gamma d}{\sin^2 \gamma}, \quad (95)$$

$$\rho(s_i) = \frac{\Omega(i, 2a) \Omega(i, a+1-b) \chi(i, a+c, d)}{\Omega(i, 1) \Omega(i, a+b) \chi(i, a+1-c, d)}, \quad (96)$$

где

$$\chi(i, \mu, \nu) = \prod_{k=0}^{i-1} \left[\frac{\sin^2 \gamma (k+\mu) + \sin^2 \gamma \nu}{\sin^2 \gamma} \right].$$

Соответствующие полиномы при $B_n = (-1)^n/n!$ в (64) будем обозначать через $v_n^{(c,d)}(x)$, где $x = \cos 2\gamma s$.

Функции $\tilde{\sigma}[x(s)]$ и $\tilde{\tau}[x(s)] = \tau(s)$ с помощью (22), (86) можно в обоих случаях выразить явным образом через $\sigma(s)$:

$$\tilde{\sigma}[x(s)] = [\sigma(s) + \sigma(-s)]/2, \quad (97)$$

$$\tilde{\tau}[x(s)] = \frac{\sigma(-s) - \sigma(s)}{\Delta x(s-1/2)}. \quad (98)$$

Нетрудно проверить, что при подстановке выражения (90) для $\sigma(s)$ в (97) и (98) мы действительно получаем полиномы соответствующих степеней от $x(s) = \cos 2\gamma s$. Так как

$$x_k(s) = x(s+k/2) = x(-s-k/2) = x_k(-s-k),$$

то из (38) вытекают формулы, аналогичные (97), (98):

$$\tilde{\sigma}_k[x_k(s)] = [\sigma(s) + \sigma(-s-k)]/2, \quad (97a)$$

$$\tilde{\tau}_k[x_k(s)] = \frac{\sigma(-s-k) - \sigma(s)}{\Delta x_k(s-1/2)}. \quad (98a)$$

З а м е ч а н и е 1. Если в разложении (88) $A = 0$, то с помощью проведенных ранее рассуждений получим

$$\sigma(x) = F \prod_{j=1}^2 \omega(s - \delta_j), \quad (99)$$

где δ_j — корни уравнения $\sigma(\delta) = 0$. Как и ранее, следует положить $\delta_1 = a$, $\delta_2 = 1 - b$. При этом

$$\rho(s_i) = \frac{\Omega(i, 2a) \Omega(i, a + 1 - b)}{\Omega(i, 1) \Omega(i, a + b)}. \quad (100)$$

2°. Преобразуем теперь к более простому виду уравнение (85) для весовой функции $\rho(s)$ при $x(s) = \text{ch } 2\gamma s$ и $x(s) = \text{sh } 2\gamma s$, используя свойства симметрии функции $x(s)$. При $x(s) = \text{ch } 2\gamma s$ имеем

$$x(s) = x(-s), \quad \Delta x(s - 1/2) = -\Delta x(t - 1/2)|_{t=-s}. \quad (101)$$

и, согласно (22),

$$\sigma(s) + \tau(s)\Delta x(s - 1/2) = \sigma(-s). \quad (102)$$

Поэтому уравнение для $\rho(s)$ принимает вид

$$\frac{\rho(s+1)}{\rho(s)} = \frac{\sigma(-s)}{\sigma(s+1)}. \quad (103)$$

Полиномы $\tilde{\sigma}[x(s)]$ и $\tilde{\tau}[x(s)]$ можно, согласно (22), (102), выразить через $\sigma(s)$ следующим образом:

$$\tilde{\sigma}[x(s)] = [\sigma(s) + \sigma(-s)]/2, \quad (104)$$

$$\tilde{\tau}[x(s)] = \frac{\sigma(-s) - \sigma(s)}{\Delta x(s - 1/2)}. \quad (105)$$

Выражения для $\tilde{\sigma}_k[x_k(s)]$ и $\tilde{\tau}_k[x_k(s)]$ при $x(s) = \text{ch } 2\gamma s$, очевидно, совпадают с (97а) и (98а).

С помощью таких же рассуждений при $x(s) = \text{sh } 2\gamma s$ получим

$$x(s) = x(-s + i\pi/(2\gamma)),$$

$$\Delta x(s - 1/2) = -\Delta x(t - 1/2)|_{t=-s+i\pi/(2\gamma)},$$

$$\sigma(s) + \tau(s)\Delta x(s - 1/2) = \sigma(-s + i\pi/(2\gamma)), \quad (106)$$

$$\tilde{\sigma}[x_k(s)] = [\sigma(s) + \sigma(-s - k + i\pi/(2\gamma))]/2, \quad (107)$$

$$\tilde{\tau}_k[x_k(s)] = \frac{\sigma(-s - k + i\pi/(2\gamma)) - \sigma(s)}{\Delta x_k(s - 1/2)}, \quad (108)$$

$$\frac{\rho(s+1)}{\rho(s)} = \frac{\sigma(-s + i\pi/(2\gamma))}{\sigma(s+1)}. \quad (109)$$

При $x(s) = \text{ch } 2\gamma s$ и $x(s) = \text{sh } 2\gamma s$ функция $\sigma(s)$ имеет вид

$$\sigma(s) = Aq^{4s} + Bq^{2s} + C + Dq^{-2s} + Eq^{-4s} = q^{-4s}(Aq^{8s} + Bq^{4s} + Cq^{2s} + Dq^{2s} + E), \quad (110)$$

где $q = e^{\gamma}$, A, B, C, D, E — вещественные постоянные. Поэтому

разложение $\sigma(s)$ на простейшие множители при $A \neq 0$ можно представить в виде

$$\sigma(s) = Aq^{-4s} \prod_{j=1}^4 (q^{2s} - z_j), \quad (111)$$

где z_j — корень уравнения

$$Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E = 0. \quad (112)$$

Так как $q^{2s} - z_j = q^s(q^s - z_j q^{-s})$, то, согласно (111),

$$\sigma(s) = A \prod_{j=1}^4 (e^{\gamma s} - z_j e^{-\gamma s}). \quad (113)$$

В результате при $x(s) = \operatorname{ch} 2\gamma s$ уравнение (103) для $\rho(s)$ примет вид

$$\frac{\rho(s+1)}{\rho(s)} = \frac{\prod_{j=1}^4 \omega_1(s, z_j)}{\prod_{j=1}^4 \omega_2(s, z_j)}, \quad (114)$$

где

$$\omega_1(s, z) = ze^{\gamma s} - e^{-\gamma s}, \quad (115)$$

$$\omega_2(s, z) = e^{\gamma(s+1)} - ze^{-\gamma(s+1)}. \quad (116)$$

Аналогичным способом при $x(s) = \operatorname{sh} 2\gamma s$ приходим к уравнению вида (114) для $\rho(s)$, в котором

$$\omega_1(s, z) = ze^{\gamma s} + e^{-\gamma s}, \quad (117)$$

$$\omega_2(s, z) = e^{\gamma(s+1)} - ze^{-\gamma(s+1)}. \quad (118)$$

Решение уравнения (114) при $s = s_i = a + i$ ($a \geq 0$) имеет вид

$$\rho(s_i) = \frac{\prod_{j=1}^4 \Omega_1(i, z_j)}{\prod_{j=1}^4 \Omega_2(i, z_j)}, \quad (119)$$

где

$$\Omega_1(i, z) = \prod_{k=0}^{i-1} \omega_1(a + i, z), \quad \Omega_1(0, z) = 1, \quad (120)$$

$$\Omega_2(i, z) = \prod_{k=0}^{i-1} \omega_2(a + i, z), \quad \Omega_2(0, z) = 1. \quad (121)$$

Рассмотрим возможные значения z_j . Так как, согласно (83), (84), (102), при $x(s) = \operatorname{ch} 2\gamma s$

$$\sigma(a) = 0, \quad \sigma(1-b) = 0,$$

то в этом случае можно положить $z_1 = e^{2\gamma a}$, $z_2 = e^{2\gamma(1-b)}$. Аналогич-

но, с помощью (106) при $x(s) = \text{sh } 2\gamma s$ получим

$$\sigma(a) = 0, \quad \sigma(1 - b + i\pi/(2\gamma)) = 0,$$

т. е. можно положить $z_1 = e^{2\gamma a}$, $z_2 = -e^{2\gamma(1-b)}$. Так как корни уравнения (112) либо вещественны, либо встречаются комплексно сопряженными парами, то для значений z_3, z_4 при $x(s) = \text{ch } 2\gamma s$ и $x(s) = \text{sh } 2\gamma s$ возможны два случая:

- 1) $z_3 = c, z_4 = d$, где c, d — вещественные числа;
- 2) $z_3 = c + id, z_4 = c - id$, где c, d — вещественные числа.

Полиномы $\tilde{y}_n[x(s)]$ для $x(s) = \text{ch } 2\gamma s$ и $x(s) = \text{sh } 2\gamma s$ при $B_n = -(-1)^n/n!$ в формуле Родрига будем в первом случае обозначать $u_n^{(c,d)}(x)$, а во втором случае $v_n^{(c,d)}(x)$.

З а м е ч а н и е 2. Случаи, когда в разложении (113) $A = 0$ или $A = 0, B = 0$ рассматриваются аналогично.

3°. Рассмотрим теперь возможные виды функции $\rho(s)$ при $x(s) = e^{2\gamma s}$ и $x(s) = e^{-2\gamma s}$. В этих случаях функции $\sigma(x) + \tau(s)\Delta x(s - 1/2)$ и $\sigma(s)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sigma(s) + \tau(s)\Delta x(s - 1/2) &= Ax^2(s) + Bx(s) + C, \\ \sigma(s) &= A_1x^2(s) + B_1x(s) + C_1, \end{aligned}$$

где A, B, C, A_1, B_1, C_1 — вещественные числа.

Если обозначить через x_1, x_2 корни уравнения

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

а через x_3, x_4 — корни уравнения

$$A_1x^2 + B_1x + C_1 = 0,$$

то получим разложения

$$\begin{aligned} \sigma(s) + \tau(s)\Delta x(s - 1/2) &= A[x(s) - x_1][x(s) - x_2], \\ \sigma(s) &= A_1[x(s) - x_3][x(s) - x_4]. \end{aligned}$$

Уравнение (85) для $\rho(s)$ принимает вид

$$\frac{\rho(s+1)}{\rho(s)} = \kappa \frac{[x(s+1) - x_1][x(s+1) - x_2]}{[x(s+1) - x_3][x(s+1) - x_4]}, \quad \kappa = \frac{A}{A_1}.$$

Решение этого уравнения в точках $s = s_i$ можно записать в виде

$$\rho(s_i) = \kappa^i \prod_{k=0}^{i-1} \frac{[x(a+k) - x_1][x(a+k) - x_2]}{[x(a+k+1) - x_3][x(a+k+1) - x_4]}, \quad \rho(a) = 1. \quad (122)$$

Так как $\sigma(a) = 0$, $[\sigma(s) + \tau(s)\Delta x(s - 1/2)]|_{s=a-1} = 0$, то можно положить $x_1 = x(a)$, $x_2 = x(b-1)$. Положим далее $x_3 = c$, $x_4 = d$, где c, d — вещественные числа. Соответствующие полиномы при $B_n = -(-1)^n/n!$ будем обозначать $u_n^{(c,d)}(x)$.

4°. Нам осталось рассмотреть случай, когда $x(s) = s(s+1)$. Возникающие при этом полиномы $\tilde{y}_n(x)$ могут быть выражены через широко используемые в атомной физике коэффициенты

Рака и Клебша -- Гордана. Поэтому этот случай будет исследован более подробно. Имеем

$$x(s) = x(-s-1), \quad \Delta x(s-1/2) = -\Delta x(t-1/2)|_{t=-s-1},$$

откуда, согласно (22),

$$\begin{aligned} \sigma(s) + \tau(s)\Delta x(s-1/2) &= \sigma(-s-1), \\ \tilde{\sigma}[x(s)] &= [\sigma(s) + \sigma(-s-1)]/2, \\ \tilde{\tau}[x(s)] &= \frac{\sigma(-s-1) - \sigma(s)}{\Delta x(s-1/2)}. \end{aligned} \quad (123)$$

Уравнение для $\rho(s)$ принимает вид

$$\frac{\rho(s+1)}{\rho(s)} = \frac{\sigma(-s-1)}{\sigma(s+1)}.$$

В рассматриваемом случае $\sigma(s)$ — полином четвертой степени относительно s и его разложение на простейшие множители имеет вид

$$\sigma(s) = A \prod_{j=1}^4 (s - s_j). \quad (124)$$

В результате приходим к следующему уравнению для $\rho(s)$:

$$\frac{\rho(s+1)}{\rho(s)} = \frac{\prod_{j=1}^4 (s + s_j)}{\prod_{j=1}^4 (s + 1 - s_j)}. \quad (125)$$

Так как, согласно (83), (84), (123), $\sigma(a) = 0$, $\sigma(-b) = 0$, то можно положить $s_1 = a$, $s_2 = -b$. Для значений s_3 , s_4 возможны два случая:

- 1) $s_3 = c$, $s_4 = d$, где c , d — вещественные числа;
- 2) $s_3 = c + id$, $s_4 = c - id$, где c , d — вещественные числа.

В первом случае

$$\sigma(s) = (s-a)(s+b)(s-c)(d-s) \quad (126)$$

(мы положим в (124) $A = -1$). В этом случае возможны следующие решения уравнения (125), для которых удовлетворяются условия положительности $\rho(s_i)$ и $\sigma(s_i)$:

$$\begin{aligned} \text{а) } \rho(s) &= \frac{\Gamma(s+a+1)\Gamma(s+c+1)\Gamma(s+d+1)\Gamma(d-s)}{\Gamma(s-a+1)\Gamma(s+b+1)\Gamma(b-s)\Gamma(s-c+1)}, \\ &-1/2 < a < b < 1+d, \quad |c| < 1+a; \end{aligned} \quad (127)$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \rho(s) &= \frac{\Gamma(s+a+1)}{\Gamma(s-a+1)\Gamma(s+b+1)\Gamma(b-s)} \times \\ &\times \frac{\Gamma(s+c+1)}{\Gamma(s-c+1)\Gamma(s-d+1)\Gamma(-d-s)}, \\ &-1/2 < a < b < 1-d, \quad |c| < 1+a. \end{aligned} \quad (128)$$

Полиномы $\tilde{y}_n(x)$ при $B_n = (-1)^n/n!$ и $B_n = 1/n!$, соответствующие

весовым функциям (127) и (128), обозначим через $u_n^{(c,d)}(x)$ и $\tilde{u}_n^{(c,d)}(x)$. Будем называть эти полиномы *полиномами Рака*.

Во втором случае имеем

$$\sigma(s) = (s-a)(s+b)[(s-c)^2 + d^2], \quad (129)$$

$$\frac{\rho(s+1)}{\rho(s)} = \frac{(s+1+a)(b-s-1)(s+1+c+id)(s+1+c-id)}{(s+1-a)(s+1+b)(s+1-c-id)(s+1-c+id)},$$

откуда

$$\rho(s) = \frac{\Gamma(s+1+a) |\Gamma(s+1+c+id)|^2}{\Gamma(s+1-a) \Gamma(s+1+b) \Gamma(b-s) |\Gamma(s+1-c+id)|^2}, \quad (130)$$

$$|a+b| < 1.$$

Соответствующие полиномы $\tilde{y}_n(x)$ при $B_n = (-1)^n/n!$ будем обозначать через $v_n^{(c,d)}(x)$.

При $x(s) = s(s+1)$ возможен также случай, когда функция $\sigma(s)$ является полиномом третьей степени. В этом случае

$$\sigma(s) = (s-a)(s+b)(s-c),$$

$$\frac{\rho(s+1)}{\rho(s)} = \frac{(s+1+a)(b-s-1)(s+1+c)}{(s+1-a)(s+1+b)(s+1-c)},$$

откуда

$$\rho(s) = \frac{\Gamma(s+a+1) \Gamma(s+c+1)}{\Gamma(s-a+1) \Gamma(s+b+1) \Gamma(b-s) \Gamma(s-c+1)}, \quad (131)$$

$$-1/2 < a < b, \quad |c| < 1+a.$$

Соответствующие ортогональные полиномы при $B_n = (-1)^n/n!$ обозначим через $w_n^{(c)}(x)$. Сравнивая соотношения ортогональности и коэффициенты при старших степенях полиномов $w_n^{(c)}(x) \equiv w_n^{(c)}(x, a, b)$ и дуальных полиномов Хана $w_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, можно убедиться в том, что они совпадают при $a = (\alpha + \beta)/2$, $b = a + N$, $c = (\beta - \alpha)/2$, т. е. полиномы Хана и полиномы $w_n^{(c)}(x)$ связаны соотношением

$$h_n^{(\alpha, \beta)}(i) =$$

$$= (-1)^{i+n} \frac{i! (N-i-1)! \Gamma(\beta+n+1)}{n! (N-n-1)! \Gamma(\beta+i+1)} w_i^{(\beta-\alpha)/2} \left(t_n, \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2} + N \right), \quad (131a)$$

$$t_n = s_n(s_n+1), \quad s_n = (\alpha + \beta)/2 + n.$$

Разностное уравнение (3) было введено как обобщение дифференциального уравнения (1) для классических ортогональных полиномов. Поэтому естественно ожидать, что полиномиальные решения уравнения (3) $y(s) = \tilde{y}_n[x(s)]$ и весовые функции $\rho(s)$ при $h \rightarrow 0$ будут переходить в пределе при соответствующей нормировке в полиномиальные решения уравнения (1) и соответствующие им весовые функции.

Рассмотрим указанный предельный переход на примере полиномов Рака. Переход к пределу при $h \rightarrow 0$ в уравнении (3) соответствует $N = b - a \rightarrow \infty$ для полиномов Рака. Нетрудно доказать, что вес $\rho(s) \equiv \rho^{(a, d)}(s)$ для полиномов Рака $u_n^{(c, d)}[x(s)]$ при $N \rightarrow \infty$ в пределе переходит в вес $(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ для полиномов Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$, где

$$t = 2 \frac{x(s) - x(a)}{x(b) - x(a)} - 1, \quad \alpha = d - b, \quad \beta = a + c.$$

Для доказательства достаточно воспользоваться соотношением

$$\frac{\Gamma(z + \gamma)}{\Gamma(z + \delta)} \rightarrow z^{\gamma - \delta}, \quad z \rightarrow \infty.$$

Действительно, при фиксированном значении $t \in (-1, 1)$ и $N \rightarrow \infty$ имеем

$$b = N + a \approx N,$$

$$1 + t = 2 \frac{(s + 1/2)^2 - (a + 1/2)^2}{(b + 1/2)^2 - (a + 1/2)^2} \approx \frac{2}{N^2} s^2, \quad 1 - t \approx \frac{2}{N^2} (b^2 - s^2),$$

$$\frac{\Gamma(s + a + 1) \Gamma(s + c + 1)}{\Gamma(s - a + 1) \Gamma(s - c + 1)} \approx s^{2(a+c)} = (s^2)^\beta = \left[\frac{N^2}{2} (1 + t) \right]^\beta,$$

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(s + d + 1) \Gamma(d - s)}{\Gamma(s + b + 1) \Gamma(b - s)} &\approx (s + b)^{d-b} (b - s)^{d-b} = \\ &= (b^2 - s^2)^\alpha = \left[\frac{N^2}{2} (1 - t) \right]^\alpha. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{N^2} \right)^{\alpha + \beta} \rho^{(\beta - a, b + a)}(s) = (1 - t)^\alpha (1 + t)^\beta. \quad (132)$$

Аналогичное предельное соотношение должно связывать полиномы Рака $u_n^{(c, d)}[x(s)]$ и полиномы Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} c_n(N) u_n^{(\beta - a, b + a)}[x(s)] = P_n^{(\alpha, \beta)}(t). \quad (133)$$

Постоянную $c_n(N)$ легко найти, сравнивая коэффициенты при старших степенях в левой и правой частях (133): $c_n(N) = N^{-2n}$. В соответствии с (133) полиномы Рака $u_n^{(c, d)}(x)$ будем в дальнейшем обозначать $u_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, полагая $\alpha = d - b$, $\beta = a + c$. Более подробно предельное соотношение вида (133) рассмотрено в п. 8.

7. Основные характеристики полиномов Рака и дуальных полиномов Хана. Получим основные характеристики для классических ортогональных полиномов дискретной переменной на неравномерных сетках на примере полиномов Рака $u_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ и дуальных полиномов Хана $w_n^{(c)}(x)$, считая функцию $\sigma(s)$ заданной. Для полиномов Рака

$$\sigma(s) = (s - a)(s + b)(s + a - \beta)(b + \alpha - s),$$

Согласно (123)

$$\tau(s) = \tilde{\tau}[x(s)] = \frac{\sigma(-s-1) - \sigma(s)}{\Delta x(s-1/2)} = (\alpha+1)(a-\beta)a + \\ + (\beta+1)(b+\alpha)b - (\alpha+1)(\beta+1) - (\alpha+\beta+2)s(s+1). \quad (134)$$

В соответствии с (134) и (44) имеем

$$\tilde{\tau}(0) = (\alpha+1)(a-\beta)a + (\beta+1)(b+\alpha)b - (\alpha+1)(\beta+1), \\ \tilde{\tau}' = -(\alpha+\beta+2).$$

Аналогично, сравнивая коэффициенты при старших степенях в формуле (123) для $\tilde{\sigma}[x(s)]$, найдем величины $\tilde{\sigma}(0)$, $\tilde{\sigma}'(0)$, $\tilde{\sigma}''$. С помощью найденных значений $\tilde{\tau}(0)$, $\tilde{\tau}'$, $\tilde{\sigma}'(0)$, $\tilde{\sigma}''$ можно вычислить по формулам (66), (66а), (74) постоянные A_n , A_{n+1} , a_n , b_n , если воспользоваться формулами (50), (51) для $\tilde{\tau}_{n-1}(0)$, $\tilde{\tau}_{n-1}$. Для определения квадрата нормы d_n^2 необходимо сначала найти значения $x_{n-1}^* = -\tilde{\tau}_{n-1}(0)/\tilde{\tau}_{n-1}'$, для которого $\tilde{\tau}_{n-1}(x_{n-1}^*) = 0$, а затем воспользоваться формулами (78), (79а), (82).

Подобным же образом вычисляются основные характеристики для дуальных полиномов Хана. Результаты вычислений основных характеристик полиномов Рака и дуальных полиномов Хана приведены в табл. 3г, 3д. В этих таблицах приведены также и коэффициенты рекуррентных соотношений

$$x\tilde{y}_n(x) = \alpha_n\tilde{y}_{n+1}(x) + \beta_n\tilde{y}_n(x) + \gamma_n\tilde{y}_{n-1}(x) \quad (135)$$

для этих полиномов.

В заключение рассмотрим разностные производные полиномов Рака и дуальных полиномов Хана. Используя (67), для полиномов Рака $u_n^{(\alpha,\beta)}(x) \equiv u_n^{(\alpha,\beta)}(x, a, b)$ и дуальных полиномов Хана $w_n^{(c)}(x) \equiv w_n^{(c)}(x, a, b)$ получаем

$$\frac{\Delta u_n^{(\alpha,\beta)}[x(s), a, b]}{\Delta x(s)} = \\ = (\alpha + \beta + n + 1) u_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)} \left[x \left(s + \frac{1}{2} \right), a + \frac{1}{2}, b - \frac{1}{2} \right], \\ \frac{\Delta w_n^{(c)}[x(s), a, b]}{\Delta x(s)} = w_{n-1}^{(c-1/2)} \left[x \left(s + \frac{1}{2} \right), a + \frac{1}{2}, b - \frac{1}{2} \right].$$

8. Асимптотические свойства. Оказывается, что между полиномами Рака $u_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ и Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ существует асимптотическая формула более высокого порядка точности, чем (133). Выберем зависимость между аргументами этих полиномов в виде

$$x = s(s+1) = -\frac{1}{4} + \left(a - \frac{\beta}{2}\right)^2 \frac{1-t}{2} + \left(b + \frac{\alpha}{2}\right)^2 \frac{1+t}{2} \quad (136)$$

и рассмотрим полиномы $p_n(t) = C_n u_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, где $C_n = \tilde{N}^{-2n}$,

Основные характеристики полиномов Рака $u_n^{(\alpha, \beta)}(x)$

$\tilde{v}_n(x)$	$u_n^{(\alpha, \beta)}[x(s)], \quad x(s) = s(s+1)$
(a, b)	(a, b)
$\rho(s)$	$\frac{\Gamma(a+s+1) \Gamma(s-a+\beta+1) \Gamma(b+\alpha-s) \Gamma(b+\alpha+s+1)}{\Gamma(a-\beta+s+1) \Gamma(s-a+1) \Gamma(b-s) \Gamma(b+s+1)}$ $(-1/2 < a \leq b-1, \alpha > -1, -1 < \beta < 2a+1)$
$\sigma(s)$	$(s-a)(s+b)(s+a-\beta)(b+\alpha-s)$
$\tau(s)$	$(\alpha+1)a(a-\beta) + (\beta+1)b(b+\alpha) -$ $-(\alpha+1)(\beta+1) - (\alpha+\beta+2)x(s)$
λ_n	$n(\alpha+\beta+n+1)$
B_n	$(-1)^n/n!$
$\rho_n(s)$	$\frac{\Gamma(a+s+n+1) \Gamma(s-a+\beta+n+1) \Gamma(b+\alpha-s) \Gamma(b+\alpha+s+n+1)}{\Gamma(a-\beta+s+1) \Gamma(s-a+1) \Gamma(b-s-n) \Gamma(b+s+1)}$
a_n	$(\alpha+\beta+n+1)_n/n!$
b_n	$-\frac{(\alpha+\beta+n+1)_{n-1}}{(n-1)!} \left[(\alpha+n)a^2 + (\beta+n)b^2 + \alpha\beta(b-a-n) + \right.$ $\left. + (\alpha b - \beta a)n - \frac{1}{3}(2n^2+1)(\alpha+\beta) - \frac{1}{3}n(n^2+2) \right]$
d_n^2	$\frac{\Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1) \Gamma(b-a+\alpha+\beta+n+1) \Gamma(a+b+\alpha+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1) (b-a-n-1)! \Gamma(a+b-\beta-n)}$
α_n	$\frac{(n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)}$
β_n	$\frac{1}{4} [a^2 + b^2 + (a-\beta)^2 + (b+\alpha)^2 - 2] -$ $-\frac{1}{8} (\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2) + \frac{(\beta^2 - \alpha^2) \left[\left(b + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(a - \frac{\beta}{2}\right)^2 \right]}{2(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)}$
γ_n	$\frac{(\alpha+n)(\beta+n)(b-a+\alpha+\beta+n)}{(\alpha+\beta+2n)} \times$ $\times \frac{(b-a-n)(a+b+\alpha+n)(a+b-\beta-n)}{(\alpha+\beta+2n+1)}$

$\tilde{N}^2 = (b+\alpha/2)^2 - (a-\beta/2)^2$. Покажем, что при $b-a = N \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$p_n(t) = P_n^{(\alpha, \beta)}(t) + O(1/N^2). \quad (137)$$

Т а б л и ц а 3 д

Основные характеристики дуальных полиномов Хана $w_n^{(c)}(x)$

$\tilde{w}_n(x)$	$w_n^{(c)}[x(s)], \alpha(s) = s(s+1)$
(a, b)	(a, b)
$\rho(s)$	$\frac{\Gamma(a+s+1) \Gamma(c+s+1)}{\Gamma(s-a+1) \Gamma(b-s) \Gamma(b+s+1) \Gamma(s-c+1)}$ $(-1/2 < a \leq b-1, c < a+1)$
$\sigma(s)$	$(s-a)(s+b)(s-c)$
$\tau(s)$	$ab - ac + bc - a + b - c - 1 - x(s)$
λ_n	n
B_n	$(-1)^n/n!$
$\rho_n(s)$	$\frac{\Gamma(a+s+n+1) \Gamma(c+s+n+1)}{\Gamma(s-a+1) \Gamma(b-s-n) \Gamma(b+s+1) \Gamma(s-c+1)}$
a_n	$1/n!$
b_n	$-\frac{1}{(n-1)!} \left[ab - ac + bc - \frac{1}{3} + (b-a-c)n - \frac{2}{3}n^2 \right]$
d_n^2	$\frac{\Gamma(a+c+n+1)}{n! (b-a-n-1)! \Gamma(b-c-n)}$
α_n	$n+1$
β_n	$ab - ac + bc + (b-a-c-1)(2n+1) - 2n^2$
γ_n	$(a+c+n)(b-a-n)(b-c-n)$

Воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} [a^2 + b^2 + (a-\beta)^2 + (b+\alpha)^2 - 2] - \frac{1}{8} (\alpha + \beta) (\alpha + \beta + 2) = \\ & = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left[\left(a - \frac{\beta}{2} \right)^2 + \left(b + \frac{\alpha}{2} \right)^2 \right] - \frac{1}{4} (\alpha + 1) (\beta + 1). \quad (138) \end{aligned}$$

Тогда рекуррентные соотношения для полиномов $P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$ и $p_n(t)$ можно переписать в виде (см. табл. 2)

$$tP_n^{(\alpha, \beta)}(t) = \alpha_n P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(t) + \beta_n P_n^{(\alpha, \beta)}(t) + \gamma_n P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(t), \quad (139)$$

$$\begin{aligned} t p_n &= \alpha_n p_{n+1} + \left[\beta_n - \frac{(\alpha+1)(\beta+1) + 2n(\alpha+\beta+n+1)}{2\tilde{N}^2} \right] p_n + \\ &+ \gamma_n \left[1 - \frac{(n+(\alpha+\beta)/2)^2}{(b+a+(\alpha-\beta)/2)^2} \right] \left[1 - \frac{(n+(\alpha+\beta)/2)^2}{(b-a+(\alpha+\beta)/2)^2} \right] p_{n-1}. \quad (140) \end{aligned}$$

При $b - a = N \rightarrow \infty$ коэффициенты соотношения (140) отличаются от коэффициентов соотношения (139) на величины порядка $O(\tilde{N}^{-2})$. Так как

$$p_0(t) = P_0^{(\alpha, \beta)}(t), \quad p_1(t) = P_1^{(\alpha, \beta)}(t) + O(\tilde{N}^{-2}),$$

то по индукции получаем искомую асимптотическую формулу (137), т. е.

$$u_n^{(\alpha, \beta)}(x, a, b) = \tilde{N}^{2n} [P_n^{(\alpha, \beta)}(t) + O(\tilde{N}^{-2})], \quad b - a = N \rightarrow \infty, \quad (141)$$

где

$$x = -\frac{1}{4} + \left(a - \frac{\beta}{2}\right)^2 \frac{1-t}{2} + \left(b + \frac{\alpha}{2}\right)^2 \frac{1+t}{2},$$

$$\tilde{N}^2 = \left(b + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(a - \frac{\beta}{2}\right)^2.$$

При тех же условиях с помощью асимптотического представления

$$\frac{\Gamma(s+a+1)}{\Gamma(s-a)} = s^{2a+1} [1 + O(s^{-2})], \quad s \rightarrow \infty,$$

для веса $\rho(s)$ и квадрата нормы d_n^2 полиномов $u_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ находим

$$\rho(s) = (\tilde{N}^2/2)^{\alpha+\beta} (1-t)^\alpha (1+t)^\alpha [1 + O(\tilde{N}^{-2})],$$

$$d_n^2 = (\tilde{N}^2)^{\alpha+\beta+2n+1} \frac{\Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1) n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)} [1 + O(\tilde{N}^{-2})].$$

Аналогичным образом для дуальных полиномов Хана при $b \rightarrow \infty$ можно получить асимптотическую формулу

$$\frac{(-1)^n}{b^n} w_n^{(\alpha-a)}(x) = L_n^\alpha(t) + O\left(\frac{1}{b}\right), \quad (142)$$

где $x = a(\alpha - a) + (b - 1)t$.

9. Построение некоторых классов неравномерных сеток с помощью формулы Дарбу — Кристоффеля. Мы рассмотрели классы сеток, для которых удается построить достаточно простую теорию ортогональных полиномов дискретной переменной с помощью обобщения теории классических ортогональных полиномов. Рассмотрим теперь еще один способ построения сеток для ортогональных полиномов дискретной переменной на основе формулы Дарбу — Кристоффеля. Пусть $\{p_n(x)\}$ — произвольная система ортогональных полиномов, для которой свойство ортогональности определяется либо с помощью интеграла от произведения полиномов с некоторым весом $\rho(x)$, либо с помощью соответствующей суммы. Для таких полиномов ранее была получена

формула Дарбу — Кристоффеля

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{p_n(x) p_n(y)}{d_n^2} = \frac{a_{N-1}}{a_N} \cdot \frac{1}{d_{N-1}^2} \cdot \frac{p_N(x) p_{N-1}(y) - p_{N-1}(x) p_N(y)}{x - y}. \quad (143)$$

Здесь d_n^2 — квадрат нормы, a_n — коэффициент при старшей степени полинома $p_n(x)$.

Покажем, что с помощью этой формулы легко указать сетку $\{x_i\}$ и найти вес $\bar{\rho}(x_i)$, с которым полиномы $p_n(x)$ будут ортогональны:

$$\sum_{i=0}^{N-1} p_m(x_i) p_n(x_i) \bar{\rho}(x_i) = d_n^2 \delta_{mn}. \quad (144)$$

Действительно, пусть x_i — корни полинома $p_N(x)$, т. е. $p_N(x_i) = 0$. Тогда, полагая в (143) $x = x_i$, $y = x_i$, получим

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{p_n(x_i) p_n(x_i)}{d_n^2} = D_i^2 \delta_{ij}, \quad (145)$$

где

$$D_i^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{p_n^2(x_i)}{d_n^2} = \frac{a_{N-1}}{a_N d_{N-1}^2} p'_N(x_i) p_{N-1}(x_i).$$

Соотношение (145) удобно переписать в виде

$$\sum_{n=0}^{N-1} c_{ni} c_{nj} = \delta_{ij}, \quad (146)$$

где $c_{ni} = p_n(x_i)/(d_n D_i)$. Из (146) вытекает, что матрица C с элементами c_{ni} ($n, i = 0, 1, \dots, N-1$) является унитарной, и поэтому для матрицы C справедливо также другое соотношение ортогональности:

$$\sum_{i=0}^{N-1} c_{mi} c_{ni} = \delta_{mn}, \quad m, n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (147)$$

Соотношение (147), очевидно, эквивалентно соотношению ортогональности (144) для полиномов $p_n(x)$ при $\bar{\rho}(x_i) = 1/D_i^2$.

Мы рассмотрели способ построения соотношения ортогональности вида (144) для полиномов $p_n(x)$ в случае, когда сетка $\{x_i\}$ определяется с помощью уравнения $p_N(x_i) = 0$. Все рассуждения сохраняют силу, если сетка $\{x_i\}$ определяется с помощью более общего уравнения $\alpha p_N(x_i) + \beta p_{N-1}(x_i) = 0$, где α, β — не равные одновременно нулю вещественные коэффициенты.

В качестве примера рассмотрим соотношение ортогональности вида (144) для полиномов Чебышева первого рода $T_n(x) =$

$= \cos (n \arccos x)$. В этом случае

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad d_n^2 = \begin{cases} \pi, & n = 0, \\ \pi/2, & n \neq 0, \end{cases}$$

$$T_N(x_i) = 0, \quad x_i = \cos \frac{\pi}{N} \left(i + \frac{1}{2} \right), \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

откуда

$$D_i^2 = \frac{4}{\pi} T'_N(x_i) T_{N-1}(x_i) = \frac{4N}{\pi}.$$

Поэтому (144) можно записать в виде

$$\sum_{i=0}^{N-1} T_m[x(s_i)] T_n[x(s_i)] \frac{\pi}{4N} = d_n^2 \delta_{mn}, \quad (148)$$

где $x(s) = \cos \pi s/N$, $s_i = i + 1/2$ ($i = 0, 1, \dots, N-1$).

Сетка $\{x_i = \cos \pi s_i/N\}$ является частным случаем сетки (11) при $\gamma = \pi/(2N)$. Поэтому естественно ожидать, что полиномы Чебышева $T_n(x)$ совпадают с точностью до нормировочного множителя с полиномами $u_n^{(c,d)}[x(s)]$ при $x(s) = \cos 2\gamma s$, $\gamma = \pi/(2N)$, $a = 1/2$, $b = N + 1/2$ и некоторых значениях c, d . Из сопоставления равенств (148) и (76) видно, что это будет иметь место, если

$$\rho(s_i) \Delta x(s_i - 1/2) = \text{const}, \quad (149)$$

где $\rho(s)$ определяется формулой (94).

Проверим, что условие (149) выполняется при $a = 1/2$, $b = N + 1/2$, $c = 0$, $d = N$. Действительно, согласно (94), имеем

$$\rho(s_i) = - \frac{\Omega(i, 1-N) \Omega(i, 1/2) \Omega(i, 1/2 + N)}{\Omega(i, 1+N) \Omega(i, 3/2) \Omega(i, 3/2 - N)},$$

где

$$\Omega(i, t) = \prod_{k=0}^{t-1} \frac{\sin \pi (k+t)/(2N)}{\sin \pi/(2N)}.$$

Так как

$$\frac{\Omega(i, t)}{\Omega(i, t+1)} = \frac{\sin \pi t/(2N)}{\sin \pi (t+1)/(2N)},$$

$$\frac{\Omega(i, t-N)}{\Omega(i, t+N)} = (-1)^t,$$

$$\frac{\Omega(i, 1/2 + N)}{\Omega(i, 3/2 - N)} = \frac{\Omega(i, 3/2 + N) \Omega(i, 1/2 + N)}{\Omega(i, 3/2 - N) \Omega(i, 3/2 + N)} = (-1)^t \frac{\cos \pi/(4N)}{\cos \pi s_i/(2N)},$$

$$\Delta x(s_i - 1/2) = -2 \sin \pi/(2N) \sin \pi s_i/N,$$

то получаем

$$\rho(s_i) \Delta x(s_i - 1/2) = 2 \sin^2 \pi/(2N) \neq \text{const}.$$

Таким образом,

$$T_n(x) = A_n u_n^{(0,N)}(x) \quad (150)$$

при $x = x(s) = \cos 2\gamma s$, $\gamma = \pi/(2N)$, $a = 1/2$, $b = N + 1/2$. Постоянную A_n можно найти, если приравнять коэффициенты при старших степенях в (150).

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 14. Дифференциальное уравнение Бесселя и его решение

1. Решение уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах. Цилиндрические функции широко используются в математической физике. Характерными задачами, приводящими к цилиндрическим функциям, являются задачи, связанные с решением уравнения Гельмгольца

$$\Delta v + \lambda v = 0$$

в цилиндрических координатах. Рассмотрим наиболее простой случай, когда функция v не зависит от расстояний вдоль оси цилиндра. Тогда $v = v(r, \varphi)$ и

$$\Delta v + \lambda v = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0. \quad (1)$$

Для однозначности функции v мы должны потребовать, чтобы она удовлетворяла условию периодичности $v(r, \varphi + 2\pi) = v(r, \varphi)$. Разложим эту функцию в ряд Фурье:

$$v(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(r) e^{in\varphi},$$

где

$$v_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (2)$$

Для функции $v_n(r)$ легко получить дифференциальное уравнение, если проинтегрировать на интервале $(-\pi, \pi)$ с весом $e^{-in\varphi}$ уравнение (1) и упростить член, содержащий $\partial^2 v / \partial \varphi^2$, с помощью двукратного интегрирования по частям. В силу периодичности функции $v(r, \varphi)$ по переменной φ подстановки обращаются в нуль, и мы приходим к следующему дифференциальному уравнению для функции $u(z) = v_n(r)$ при $z = \sqrt{\lambda} r$:

$$z^2 u'' + zu' + (z^2 - n^2)u = 0.$$

В дальнейшем мы будем изучать уравнение несколько более общего вида

$$z^2 u'' + zu' + (z^2 - \nu^2)u = 0, \quad (3)$$

где z — комплексная переменная, ν — параметр, который может принимать любые вещественные или комплексные значения. Решения уравнения (3) называются *цилиндрическими функциями порядка ν* или *функциями Бесселя*, а уравнение (3) называется *уравнением Бесселя*.

Из уравнения Бесселя при помощи замены переменных можно получить ряд других дифференциальных уравнений, в частности широко используемое в приложениях *уравнение Ломмеля*

$$\nu'' + \frac{1-2\alpha}{\xi} \nu' + \left[(\beta \gamma \xi^{\nu-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2 \gamma^2}{\xi^2} \right] \nu = 0, \quad (4)$$

решение которого имеет вид

$$\nu(\xi) = \xi^\alpha u_\nu(\beta \xi^\gamma).$$

Здесь $u_\nu(z)$ — цилиндрическая функция порядка ν ; α, β, γ — постоянные.

2. Определение функций Бесселя первого рода и функций Ханкеля. Уравнение Бесселя (3) является частным случаем обобщенного уравнения гипергеометрического типа (1.1), когда $\sigma(z) = z$, $\tilde{\tau}(z) = 1$, $\tilde{\sigma}(z) = z^2 - \nu^2$. При приведении уравнения (3) к уравнению гипергеометрического типа в соответствии с выбором различных знаков в формуле (1.11) для $\pi(z)$ и выбором различных значений k возможны, как было показано в § 1 (см. пример), следующие виды функции $\varphi(z)$: $\varphi(z) = z^{\pm \nu} e^{\pm iz}$. Рассмотрим, например, $\varphi(z) = z^\nu e^{iz}$. Полагая $u(z) = \varphi(z)y(z)$, приходим к уравнению гипергеометрического типа (2.1), для которого

$$\sigma(z) = z, \quad \tau(z) = 2iz + 2\nu + 1, \quad \lambda = i(2\nu + 1).$$

По теореме 1 из § 3 получаем частное решение этого уравнения в виде

$$y(z) = \frac{C_\mu}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^\mu(s) \rho(s)}{(s-z)^{\mu+1}} ds.$$

Здесь C_μ — нормировочная постоянная, $\rho(z)$ — решение дифференциального уравнения

$$[\sigma(z)\rho(z)]' = \tau(z)\rho(z),$$

μ — корень уравнения

$$\lambda + \mu\tau' + \frac{1}{2}\mu(\mu-1)\sigma'' = 0$$

(мы воспользовались формулами (3.2), (3.3), в которых во избежание путаницы ν заменили на μ , так как обозначение ν уже было использовано в исходном уравнении Бесселя).

Контур C выбирается из условия

$$\frac{\sigma^{\mu+1}(s) \rho(s)}{(s-z)^{\mu+2}} \Big|_{s=s_1, s_2} = 0.$$

В рассматриваемом случае

$$\mu = -\nu - 1/2, \quad \rho(z) = z^{2\nu} e^{2iz}.$$

Поэтому частное решение уравнения Бесселя можно записать в виде

$$u_\nu(z) = \varphi(z) y(z) = a_\nu z^{-\nu} e^{-iz} \int_C [s(z-s)]^{\nu-1/2} e^{2is} ds, \quad (5)$$

где a_ν — нормировочная постоянная, а контур C выбирается из условия

$$s^{\nu+1/2} (z-s)^{\nu-3/2} e^{2is} \Big|_{s=s_1, s_2} = 0.$$

Пусть $z > 0$, $\operatorname{Re} \nu > 3/2$. Тогда в качестве концов контура можно выбрать точки $s_1 = 0$, $s_2 = z$. Кроме того, контур C может уходить в бесконечность таким образом, что $\operatorname{Im} s \rightarrow +\infty$. В качестве C выберем контуры C_0 , C_1 , C_2 вида, указанного на рис. 6. В результате приходим к следующим решениям уравнения Бесселя:

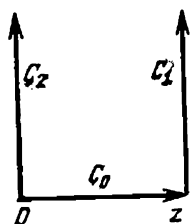


Рис. 6.

$$u_\nu^{(0)}(z) = a_\nu z^{-\nu} e^{-iz} \int_{C_0} [s(z-s)]^{\nu-1/2} e^{2is} ds, \quad (6)$$

$$u_\nu^{(1)}(z) = a_\nu^{(1)} z^{-\nu} e^{-iz} \int_{C_1} [s(z-s)]^{\nu-1/2} e^{2is} ds, \quad (7)$$

$$u_\nu^{(2)}(z) = a_\nu^{(2)} z^{-\nu} e^{-iz} \int_{C_2} [s(z-s)]^{\nu-1/2} e^{2is} ds. \quad (8)$$

Для однозначного выбора ветви функции $[s(z-s)]^{\nu-1/2}$ будем считать $|\arg s(z-s)| < \pi$. Параметрическое представление контуров C_0 , C_1 , C_2 удобно взять в виде

$$s = z(1+t)/2, \quad -1 \leq t \leq 1,$$

$$s = z(1+it/2), \quad 0 \leq t < \infty,$$

$$s = izt/2, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Тогда формулы (6)–(8) примут вид

$$\begin{aligned} u_\nu^{(0)}(z) &= \frac{a_\nu}{2^{2\nu}} z^\nu \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} e^{izt} dt = \\ &= \frac{a_\nu}{2^{2\nu}} z^\nu \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} \cos zt dt, \end{aligned} \quad (9)$$

$$u_{\nu}^{(1)}(z) = -\frac{a_{\nu}^{(1)}}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \exp\left\{i\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \times \\ \times \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{\nu-1/2} \left(1 + \frac{it}{2}\right)^{\nu-1/2} dt, \quad (10)$$

$$u_{\nu}^{(2)}(z) = \frac{a_{\nu}^{(2)}}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \exp\left\{-i\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \times \\ \times \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{\nu-1/2} \left(1 - \frac{it}{2}\right)^{\nu-1/2} dt. \quad (11)$$

В соответствии с условием $|\arg s(z-s)| < \pi$ в формулах (10), (11) значение $\arg(1 \pm it/2)$ берется наименьшим по модулю.

Если выбрать нормировочные постоянные вещественными, причем $a_{\nu}^{(2)} = -a_{\nu}^{(1)}$, то из (10) и (11) видно, что при вещественных z и ν функции $u_{\nu}^{(1)}(z)$ и $u_{\nu}^{(2)}(z)$ будут комплексно сопряженными. Удобно ввести функцию, принимающую вещественные значения при вещественных z, ν :

$$u_{\nu}(z) = [u_{\nu}^{(1)}(z) + u_{\nu}^{(2)}(z)]/2. \quad (12)$$

Докажем, что эта функция будет совпадать с $u_{\nu}^{(0)}(z)$, если положить

$$a_{\nu}^{(2)} = -a_{\nu}^{(1)} = 2a_{\nu}. \quad (13)$$

Для доказательства достаточно применить теорему Коши к контуру C , являющемуся объединением контуров C_0, C_1, C_2 (см. рис. 6). Если замкнуть этот контур на бесконечности, то, согласно теореме Коши,

$$\int_C [s(z-s)]^{\nu-1/2} e^{2is} ds = - \int_{C_2} [s(z-s)]^{\nu-1/2} e^{2is} ds + \\ + \int_{C_0} [s(z-s)]^{\nu-1/2} e^{2is} ds + \int_{C_1} [s(z-s)]^{\nu-1/2} e^{2is} ds = 0$$

(интеграл по бесконечно удаленной части контура обращается в нуль). Полученное соотношение с учетом (13) и (6)–(8) приводит к равенству

$$u_{\nu}^{(0)}(z) = [u_{\nu}^{(1)}(z) + u_{\nu}^{(2)}(z)]/2. \quad (14)$$

Функцию $u_{\nu}^{(0)}(z)$ при определенном выборе постоянной a_{ν} называют *функцией Бесселя первого рода* и обозначают $J_{\nu}(z)$, а функции $u_{\nu}^{(1)}(z), u_{\nu}^{(2)}(z)$ при нормировке (13) называют соответственно *функциями Ханкеля первого и второго рода* и обозначают $H_{\nu}^{(1)}(z), H_{\nu}^{(2)}(z)$. Эти функции связаны между собой, согласно (14), следующим образом:

$$J_{\nu}(z) = [H_{\nu}^{(1)}(z) + H_{\nu}^{(2)}(z)]/2. \quad (15)$$

Интегральные представления (9) — (11) удобны для изучения различных свойств цилиндрических функций: интегральное представление для $J_\nu(z)$ позволяет, например, легко получить разложение этой функции в ряд по степеням z , а интегральные представления для функций Ханкеля удобны для получения асимптотического поведения этих функций при $z \rightarrow \infty$.

Чтобы получить разложение функции $J_\nu(z)$ в степенной ряд, подставим в (9) разложение $\cos zt$ в ряд по степеням zt и переставим порядок суммирования и интегрирования. В результате получим

$$J_\nu(z) = \frac{a_\nu}{2^{2\nu}} z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} t^{2k} dt.$$

Упростим выражение для коэффициентов ряда:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} t^{2k} dt &= 2 \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} t^{2k} dt = \\ &= \int_0^1 (1-t)^{\nu-1/2} t^{k-1/2} dt = \frac{\Gamma(\nu+1/2) \Gamma(k+1/2)}{\Gamma(\nu+k+1)} = \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1/2) \sqrt{\pi} (2k)!}{2^{2k} k! \Gamma(\nu+k+1)}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались четностью подынтегрального выражения, связью бета- и гамма-функций, а также формулой удвоения для гамма-функции (см. Дополнение А). Таким образом,

$$J_\nu(z) = \frac{a_\nu}{2^\nu} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}.$$

Чтобы ряд для $J_\nu(z)$ имел более простой вид, нормировочную постоянную a_ν выберем из условия

$$\frac{a_\nu}{2^\nu} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) = 1. \quad (16)$$

В результате получим

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}. \quad (17)$$

Используя выражение (16) для a_ν , перепишем (9) — (11) в виде

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1/2)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} \cos zt dt, \quad (18)$$

$$H_v^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{z^v \exp\{i(z - \pi v/2 - \pi/4)\}}{\Gamma(v + 1/2)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{v-1/2} \left(1 + \frac{it}{2}\right)^{v-1/2} dt, \quad (19)$$

$$H_v^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{z^v \exp\{-i(z - \pi v/2 - \pi/4)\}}{\Gamma(v + 1/2)} \times \\ \times \int_0^\infty e^{-zt} t^{v-1/2} \left(1 - \frac{it}{2}\right)^{v-1/2} dt. \quad (20)$$

Полученные интегральные представления для цилиндрических функций называют *представлениями Пуассона*.

Наряду с интегральными представлениями (19), (20) для функций Ханкеля используются также интегральные представления, получающиеся из (19), (20) заменой t на t/z :

$$H_v^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{\exp\{i(z - \pi v/2 - \pi/4)\}}{\Gamma(v + 1/2)} \int_0^\infty e^{-t} t^{v-1/2} \left(1 + \frac{it}{2z}\right)^{v-1/2} dt, \quad (19a)$$

$$H_v^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{\exp\{-i(z - \pi v/2 - \pi/4)\}}{\Gamma(v + 1/2)} \int_0^\infty e^{-t} t^{v-1/2} \left(1 - \frac{it}{2z}\right)^{v-1/2} dt. \quad (20a)$$

§ 15. Основные свойства цилиндрических функций

1. Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования. Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования для цилиндрических функций можно вывести методом, изложенным в § 4, если воспользоваться исходным интегральным представлением (14.5) для этих функций.

В качестве примера получим соотношение вида

$$A_1(z) u'_v(z) + A_2(z) u_v(z) + A_3(z) u_{v-1}(z) = 0, \quad (f)$$

в котором коэффициенты $A_i(z)$ являются рациональными функциями z . Имеем

$$A_1(z) u'_v(z) + A_2(z) u_v(z) + A_3(z) u_{v-1}(z) = \\ = e^{-iz} z^{-v-1} \int_0^1 P(s) [s(z-s)]^{v-3/2} e^{2is} ds,$$

где

$$P(s) = A_1 a_v [(-v - iz)s(z-s) + (v - 1/2)zs] + \\ + A_2 a_v zs(z-s) + A_3 z^2 a_{v-1},$$

Чтобы выполнялось (1), коэффициенты $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z)$ должны выбираться из условия

$$P(s)[s(z-s)]^{v-3/2}e^{2is} = \frac{d}{ds} \{Q(s)[s(z-s)]^{v-1/2}e^{2is}\},$$

где $Q(s)$ — полином. Как показано в § 4, один из коэффициентов полинома $Q(s)$ можно выбрать произвольно. В нашем случае полином $Q(s)$ имеет нулевую степень и можно положить $Q(s) = a_v$. Подставляя выражения для $P(s)$ и $Q(s)$, приходим к равенству $A_1(-v-iz)s(z-s) + (v-1/2)zs + A_2zs(z-s) + A_3z^2a_{v-1}/a_v = 2is(z-s) + (v-1/2)(z-2s)$.

Если воспользоваться выражениями для нормировочных постоянных a_v , соответствующих функциям $J_v(z)$ и $H_v^{(1,2)}(z)$, то получим $a_{v-1}/a_v = (v-1/2)/2$. Равенство для определения коэффициентов A_i справедливо при любых значениях s . Поэтому коэффициенты A_i можно найти, полагая в нем переменную s равной некоторым частным значениям. Полагая, например, $s=0$, получим $A_2 = 2/z$. Значение $s=z$ дает $A_1 = -2/z$. Приравнявая коэффициенты при старшей степени s , находим $A_3 = -2v/z^2$. Подразумевая под $u_v(z)$ одну из функций, $J_v(z)$ или $H_v^{(1,2)}(z)$, окончательно получим следующее соотношение:

$$\frac{v}{z} u_v(z) + u'_v(z) = u_{v-1}(z). \quad (2)$$

Тем же методом можно было бы получить рекуррентное соотношение, связывающее функции $u_v(z)$, $u_{v-1}(z)$, $u_{v-2}(z)$. Однако такое соотношение легче вывести, дифференцируя (2) и исключая в полученном равенстве функции $u''_v(z)$, $u'_v(z)$, $u'_{v-1}(z)$ с помощью уравнения Бесселя и соотношения (2). В результате получим

$$u_v(z) - \frac{2(v-1)}{z} u_{v-1}(z) + u_{v-2}(z) = 0. \quad (3)$$

Равенства (2), (3) можно заменить эквивалентными им соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \frac{d}{dz} [z^v u_v(z)] &= z^{v-1} u_{v-1}(z), \\ -\frac{1}{z} \frac{d}{dz} [z^{-v} u_v(z)] &= z^{-(v+1)} u_{v+1}(z). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n [z^v u_v(z)] &= z^{v-n} u_{v-n}(z), \\ \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n [z^{-v} u_v(z)] &= z^{-(v+n)} u_{v+n}(z). \end{aligned} \quad (4)$$

2. Аналитическое продолжение и асимптотические представления. Функции $J_v(z)$, $H_v^{(1)}(z)$, $H_v^{(2)}(z)$ были введены нами для вещественных значений $z > 0$ и $\text{Re } v > 3/2$. Пусть теперь комп-

лексная переменная z принадлежит плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$, т. е. $|\arg z| < \pi$. Это ограничение необходимо для однозначности функции z^ν , когда ν — нецелое число. С помощью интегральных представлений (14.18)–(14.20) можно получить аналитическое продолжение функций $J_\nu(z)$, $H_\nu^{(1,2)}(z)$ на более широкую область изменения переменных z , ν .

Интеграл для $J_\nu(z)$ сходится равномерно по z и ν , когда $\operatorname{Re} \nu \geq -1/2 + \delta$, $|z| \leq R$ (δ , R — произвольные положительные числа) в силу оценки

$$|(1-t^2)^{\nu-1/2} \cos zt| \leq e^R(1-t^2)^{\delta-1}$$

и сходимости интеграла $\int_{-1}^1 (1-t^2)^{\delta-1} dt$. Поэтому по теореме 2 из § 3 функция $J_\nu(z)$ будет аналитической функцией каждой из переменных z , ν при $|\arg z| < \pi$, $\operatorname{Re} \nu > -1/2$.

Интегралы

$$\int_0^\infty e^{-zt} t^{\nu-1/2} \left(1 \pm \frac{it}{2}\right)^{\nu-1/2} dt$$

для $H_\nu^{(1,2)}(z)$ являются интегралами Лапласа

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt,$$

для которых $f(t) = t^{\nu-1/2} (1 \pm it/2)^{\nu-1/2}$. Аналитическое продолжение и асимптотическое представление для интегралов Лапласа вида

$$F(z, p, q) = \int_0^\infty e^{-zt} t^p (1+at)^q dt$$

подробно рассмотрены в примере к теореме 1 из Дополнения Б. Так как в данном случае $p = q = \nu - 1/2$, $a = \pm i/2$, то в соответствии с результатами, полученными в этом примере, функции Ханкеля $H_\nu^{(1,2)}(z)$ будут аналитическими функциями каждой из переменных при $|\arg z| < \pi$, $z \neq 0$, $\operatorname{Re} \nu > -1/2$. Для этих функций справедливо следующее асимптотическое представление при $z \rightarrow \infty$, когда $\operatorname{Re} \nu > -1/2$, $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$:

$$H_\nu^{(1,2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left\{\pm i\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \times \\ \times \left[\sum_{k=0}^{n-1} C_k \left(\pm \frac{i}{z}\right)^k + O\left(\frac{1}{z^n}\right) \right]. \quad (5)$$

Здесь

$$C_k = \frac{\Gamma(\nu + 1/2 + k)}{2^k k! \Gamma(\nu + 1/2 - k)},$$

верхний знак относится к функции $H_\nu^{(1)}(z)$, нижний — к функции

$H_v^{(2)}(z)$. Если воспользоваться функциональным соотношением $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, то выражение для коэффициента C_k можно упростить. Имеем

$$\Gamma\left(v + \frac{1}{2} + k\right) = \left(v + \frac{1}{2}\right)\left(v + \frac{3}{2}\right) \cdots \left(v + k - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right),$$

$$\Gamma\left(v + \frac{1}{2} - k\right) = \frac{\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)}{(v - 1/2)(v - 3/2) \cdots (v - k + 1/2)}.$$

Поэтому

$$C_k = \prod_{l=1}^k \left[\frac{4v^2 - (2l-1)^2}{8l} \right], \quad C_0 = 1.$$

С помощью соотношения

$$J_v(z) = [H_v^{(1)}(z) + H_v^{(2)}(z)]/2$$

получим асимптотическое представление для функции $J_v(z)$:

$$J_v(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_k}{z^k} \cos \left[z - \frac{\pi}{2} \left(v - k + \frac{1}{2} \right) \right] + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{z^n}\right) \right\}. \quad (6)$$

Мы рассмотрели аналитическое продолжение цилиндрических функций на область $z \neq 0$, $|\arg z| < \pi$, $\operatorname{Re} v > -1/2$. Ограничение $\operatorname{Re} v > -1/2$ несущественно, так как при $\operatorname{Re} v \leq -1/2$ аналитическое продолжение цилиндрических функций можно получить с помощью рекуррентного соотношения (3), последовательно уменьшая значения v на единицу. В силу (2) производные цилиндрических функций $J_v(z)$ и $H_v^{(1,2)}(z)$ будут аналитичны по переменной z и параметру v в той же области, что и сами функции. В этой же области по принципу аналитического продолжения рассматриваемые цилиндрические функции будут удовлетворять уравнению Бесселя.

3. Функциональные соотношения. Уравнение Бесселя не меняется при замене v на $-v$. Поэтому, кроме функций $H_v^{(1)}(z)$, $H_v^{(2)}(z)$, его решениями будут также функции $H_{-v}^{(1)}(z)$, $H_{-v}^{(2)}(z)$. Для вывода формул, связывающих функции $H_v^{(1,2)}(z)$ и $H_{-v}^{(1,2)}(z)$, предположим временно, что $|\operatorname{Re} v| < 1/2$. Тогда для функций Ханкеля $H_{\pm v}^{(1,2)}(z)$ будут справедливы асимптотические представления (5). Из этих представлений видно, что функции $H_v^{(1)}(z)$ и $H_v^{(2)}(z)$ имеют различное асимптотическое поведение при $z \rightarrow \infty$ и поэтому являются линейно независимыми решениями уравнения Бесселя. Следовательно,

$$H_{-v}^{(1)}(z) = A_v H_v^{(1)}(z) + B_v H_v^{(2)}(z), \quad (7)$$

где A_v , B_v — некоторые постоянные. Сравнивая асимптотическое поведение при $z \rightarrow \infty$ левой и правой частей равенства (7), полу-

чим $A_\nu = e^{i\pi\nu}$, $B_\nu = 0$, т. е.

$$H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{i\pi\nu} H_\nu^{(1)}(z). \quad (8)$$

Аналогично выводится соотношение

$$H_\nu^{(2)}(z) = e^{-i\pi\nu} H_{-\nu}^{(2)}(z). \quad (9)$$

С помощью (8), (9) легко проверить, что асимптотические представления (5), а тем самым и (6), остаются справедливыми при любых значениях ν .

Найдем связь функций $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ с $J_{-\nu}(z)$. Так как

$$J_\nu(z) = [H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)]/2, \quad J_{-\nu}(z) = [H_{-\nu}^{(1)}(z) + H_{-\nu}^{(2)}(z)]/2, \quad (10)$$

то в силу (8), (9)

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{J_{-\nu}(z) - e^{-i\pi\nu} J_\nu(z)}{i \sin \pi\nu}, \quad H_\nu^{(2)}(z) = \frac{e^{i\pi\nu} J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{i \sin \pi\nu}. \quad (11)$$

4. Разложения в степенные ряды. Ранее мы получили разложение функции $J_\nu(z)$ в ряд по степеням z для вещественных значений $z > 0$ и $\operatorname{Re} \nu > 3/2$:

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}. \quad (12)$$

Для доказательства справедливости этого разложения при произвольных значениях ν , z исследуем область аналитичности ряда (12) с помощью теоремы Вейерштрасса.

Теорема. Пусть функции $f_k(z)$ являются аналитическими в области D и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ сходится равномерно к функции $f(z)$ в любой замкнутой подобласти $\bar{D}_1 \subset D$. Тогда в области D :

1) функция $f(z)$ является аналитической;

2) $f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(n)}(z)$;

3) ряд $\sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(n)}(z)$ сходится равномерно в любой замкнутой подобласти $\bar{D}_1 \subset D$.

Замечание. Функциональный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ будет сходиться равномерно в области D , если найдется такое m , что для всякого $z \in D$ при $k > m$ выполняется неравенство

$$|f_k(z)/f_{k-1}(z)| \leq q < 1,$$

где q не зависит от z и $|f_m(z)| \leq c$ при $z \in D$ ($c = \text{const}$). Этот признак равномерной сходимости ряда называется *признаком Даламбера*.

Покажем, что ряд (12) равномерно сходится по z, v в области $0 < \delta \leq |z| \leq R, |v| \leq N$, где R, N — произвольные большие фиксированные числа. Для доказательства достаточно воспользоваться следующей оценкой для отношения двух соседних членов ряда:

$$\left| \frac{u_k(z)}{u_{k-1}(z)} \right| = \frac{|z|^2}{4k|k+v|} \leq \frac{R^2}{4k(k-N)} \leq \frac{1}{4}$$

при $k \geq \max(R^2, N+1)$. Так как члены ряда представляют собой аналитические функции переменных z, v в рассматриваемой области $\delta \leq |z| \leq R, |\arg z| < \pi, |v| \leq N$, то ряд (12) будет аналитической функцией переменных z, v при произвольных значениях v и $|\arg z| < \pi$.

Таким образом, обе части равенства (12) будут аналитическими функциями каждой из переменных z, v при произвольных значениях v и $|\arg z| < \pi$. По принципу аналитического продолжения соотношение (12) будет справедливым во всей указанной области изменения переменных z, v .

Если $v \neq 0, 1, \dots$, то функции $J_v(z), J_{-v}(z)$ линейно независимы, так как при $z \rightarrow 0$ их поведение различно:

$$J_v(z) \approx \frac{(z/2)^v}{\Gamma(v+1)}, \quad J_{-v}(z) \approx \frac{(z/2)^{-v}}{\Gamma(-v+1)}.$$

Отсюда следует, что общее решение уравнения Бесселя при $v \neq n$ ($n=0, 1, \dots$) можно записать в виде

$$u(z) = c_1 J_v(z) + c_2 J_{-v}(z).$$

С помощью (11), (12) можно получить разложения в ряды по степеням z для функций $H_v^{(1,2)}(z)$. Получение этих разложений при $v \neq n$ не представляет труда. Поэтому рассмотрим случай $v = n$. Значения $v = n$ в правых частях (11) являются устранимыми особыми точками, так как левые части — аналитические функции параметра v и, следовательно, имеют предел при $v \rightarrow n$. Знаменатель в соотношениях (11) равен нулю при $v = n$, поэтому для существования конечного предела в (11) необходимо, чтобы и числитель равнялся нулю при $v = n$, т. е.

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z),$$

откуда следует, что при $v = n$ решения уравнения Бесселя $J_n(z), J_{-n}(z)$ будут линейно зависимы. Переходя к пределу при $v \rightarrow n$ и вычисляя пределы по правилу Лопиталя, получим

$$H_n^{(1,2)}(z) = J_n(z) \pm \frac{i}{\pi} [a_n(z) + (-1)^n a_{-n}(z)], \quad (13)$$

где $a_v(z) = \partial J_v(z) / \partial v$ (знак плюс соответствует $H_n^{(1)}(z)$).

Так как в рассмотренной области ряд для $J_v(z)$ является равномерно сходящимся рядом, составленным из аналитических функций переменной v , то по теореме Вейерштрасса для вычис-

ления $a_\nu(z)$ можно продифференцировать почленно ряд для $J_\nu(z)$; В результате получим

$$a_\nu(z) = J_\nu(z) \ln \frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \psi(k+\nu+1),$$

где $\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции (см. Дополнение А). Так как

$$\frac{\psi(z)}{\Gamma(z)} \rightarrow (-1)^{n+1} n!, \quad z \rightarrow -n$$

(см. (27) из Дополнения А), то

$$\begin{aligned} (-1)^n a_{-n}(z) &= (-1)^n J_{-n}(z) \ln \frac{z}{2} - \\ &- (-1)^n \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (z/2)^{-n+2k}}{k!} (-1)^{n-k} (n-k-1)! + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{-n+2k} \psi(k-n+1)}{k! \Gamma(k-n+1)} \right\} = J_n(z) \ln \frac{z}{2} - \\ &- \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k-n} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k! (n+k)!} \psi(k+1). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} H_n^{(1,2)}(z) &= J_n(z) \pm \frac{i}{\pi} \left\{ 2J_n(z) \ln \frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k-n} - \right. \\ &- \left. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k! (n+k)!} [\psi(n+k+1) + \psi(k+1)] \right\}. \quad (14) \end{aligned}$$

При $n=0$ первую сумму следует считать равной нулю. Значения $\psi(x)$ при целых x можно вычислять по формуле (16) из Дополнения А.

Как следует из (11), (14), функции $H_\nu^{(1,2)}(z)$ при $z=0$ имеют степенную особенность вида $z^{\pm\nu}$, если $\operatorname{Re} \nu \neq 0$, и логарифмическую особенность, если $\nu=0$.

§ 16. Интегральное представление Зоммерфельда

1. Интегральное представление Зоммерфельда для цилиндрических функций. При изучении свойств решений уравнения Бесселя для функций $J_\nu(z)$, $H_\nu^{(1,2)}(z)$ оказались удобными интегральные представления Пуассона.

Для цилиндрических функций можно получить также интегральное представление другого вида, удобное, например, для решения задач дифракции. Для вывода этого представления восполь-

зуемся следующими соображениями. В § 14 было показано, что

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi$$

при $z = \sqrt{\lambda} r$ является цилиндрической функцией порядка n , если функция v удовлетворяет уравнению $\Delta v + \lambda v = 0$. Простейшим решением уравнения $\Delta v + \lambda v = 0$ при $\lambda = k^2 > 0$ является плоская волна $v = e^{ikr}$, где k — волновой вектор. Если направить ось y по направлению волнового вектора k , то

$$v(r, \varphi) = \exp\{ikr \sin \varphi\}.$$

В результате приходим к следующему интегральному представлению для цилиндрической функции $u_n(z)$:

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\{iz \sin \varphi - in\varphi\} d\varphi. \quad (1)$$

Аналогичные интегральные представления можно получить для цилиндрических функций произвольного порядка ν . Для получения их естественно искать решение уравнения Бесселя при любых ν в виде контурного интеграла

$$u_\nu(z) = \int_C \exp\{iz \sin \varphi - i\nu\varphi\} d\varphi.$$

Покажем, что при определенном выборе контура C функция $u_\nu(z)$ будет удовлетворять уравнению Бесселя. Для доказательства, так же как и при выводе (1), будем исходить из того, что $v(r, \varphi) = \exp\{ikr \sin \varphi\}$ — решение уравнения Гельмгольца

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + k^2 v = 0. \quad (2)$$

Легко проверить, что (2) справедливо при любых комплексных значениях r, φ .

Получим уравнение для функции $v_\nu(r) = \int_C v(r, \varphi) e^{-i\nu\varphi} d\varphi$ с помощью (2), интегрируя обе части этого уравнения по контуру C с весом $e^{-i\nu\varphi}$ и упрощая член, содержащий $\partial^2 v / \partial \varphi^2$, с помощью двукратного интегрирования по частям. Если потребовать, чтобы возникающая при этом подстановка

$$e^{-i\nu\varphi} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + i\nu v \right) \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = i \exp\{ikr \sin \varphi - i\nu\varphi\} (kr \cos \varphi + \nu) \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

(φ_1, φ_2 — концы контура C) была равна нулю, то мы придем к уравнению Бесселя для $u_\nu(z) = v_\nu(r)$ при $z = kr$.

Таким образом, мы показали, что функция

$$u_\nu(z) = \int_C \exp\{iz \sin \varphi - i\nu\varphi\} d\varphi \quad (3)$$

действительно является решением уравнения Бесселя при выполнении условия

$$\exp\{iz \sin \varphi - i\nu\varphi\} (z \cos \varphi + \nu) \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = 0. \quad (4)$$

Так как $\cos \varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2$, то условие (4) будет, очевидно, выполнено, если при любом значении ν

$$\exp\{iz \sin \varphi - i\nu\varphi\} \Big|_{\varphi=\varphi_1, \varphi_2} = 0. \quad (5)$$

Представления вида (3) называются *представлениями Зоммерфельда*.

2. Интегральные представления Зоммерфельда для функций Ханкеля и функций Бесселя первого рода. В качестве контура C в интегральном представлении для $u_\nu(z)$ можно выбрать, например, контур, концы которого уходят в бесконечность таким образом, что

$$\operatorname{Re}(iz \sin \varphi - i\nu\varphi) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} |z| e^{i\theta} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) - i\nu\varphi \right] \rightarrow -\infty, \quad \varphi \rightarrow \infty, \quad (6)$$

где $\theta = \arg z$.

Рассмотрим контур C , изображенный на рис. 7 ($\varphi = \chi + i\psi$). Выясним, каким требованиям должны удовлетворять α , β , чтобы условия на концах контура были выполнены.

Пусть $\chi = \alpha$, $\psi \rightarrow +\infty$. В этом случае в (6) можно пренебречь величинами φ и $e^{i\varphi}$ по сравнению с $e^{-i\varphi}$. Условие на контур принимает вид

$$\operatorname{Re} e^{i(\theta - \varphi)} \rightarrow +\infty, \quad \psi \rightarrow +\infty.$$

Оно выполнено, если $\cos(\theta - \alpha) > 0$. Можно выбрать α из условия

$$\theta - \pi/2 < \alpha < \theta + \pi/2. \quad (7)$$

Пусть теперь $\chi = \beta$, $\psi \rightarrow -\infty$. В этом случае достаточно потребовать выполнения неравенства $\cos(\theta + \beta) < 0$, что возможно при $\beta = -\alpha \pm \pi$. Соответствующие контуры обозначим через C_+ , C_- .

Отметим следующий произвол в выборе контуров. Пусть контур C' определяется заданием α' , β' , удовлетворяющих условиям $\cos(\theta - \alpha') > 0$, $\cos(\theta + \beta') < 0$. Если воспользоваться теоремой Коши, то нетрудно показать, что контур C' можно заменить на любой другой

контур C'' , определяемый заданием чисел α'' , β'' , если для всех значений $\alpha \in [\alpha', \alpha'']$, $\beta \in [\beta', \beta'']$ выполняются неравенства $\cos(\theta - \alpha) > 0$, $\cos(\theta + \beta) < 0$. Из этих соображений ясно, в частности, что в представлении Зоммерфельда контур C можно заменить таким контуром, чтобы его сдвиг на величину, меньшую π , не менял значения интеграла Зоммерфельда.

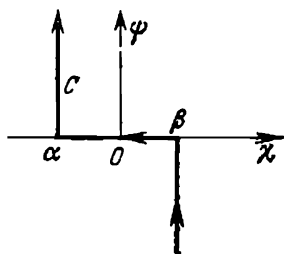


Рис. 7.

Так как $u_\nu(z)$ удовлетворяет уравнению Бесселя, то

$$u_\nu(z) = C_\nu H_\nu^{(1)}(z) + D_\nu H_\nu^{(2)}(z). \quad (8)$$

Найдем коэффициенты C_ν , D_ν , используя известное нам асимптотическое поведение функций $H_\nu^{(1,2)}(z)$. Рассмотрим сначала случай, когда в качестве C выбран контур C_+ . Пусть $|z| \rightarrow \infty$, $\arg z = \pi/2$. Тогда можно выбрать $\alpha = \beta = \pi/2$, т. е. в выражении для $u_\nu(z)$ положить $\varphi = \pi/2 + i\psi$, где $-\infty < \psi < \infty$, что дает

$$u_\nu(z) = ie^{-i\pi\nu/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|z| \operatorname{ch} \psi} e^{\nu\psi} d\psi = 2ie^{-i\pi\nu/2} \int_0^{\infty} e^{-|z| \operatorname{ch} \psi} \operatorname{ch} \nu\psi d\psi.$$

Для выяснения асимптотического поведения функции $u_\nu(z)$ при $z \rightarrow \infty$ можно воспользоваться леммой Ватсона (см. Дополнение Б), если предварительно произвести замену $\operatorname{ch} \psi = 1 + t$. Действительно, при такой замене мы получаем

$$u_\nu(z) = 2i \exp \left\{ -\frac{i\pi\nu}{2} - |z| \right\} \int_0^{\infty} e^{-|z|t} f(t) dt,$$

где

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t(2+t)}} \operatorname{ch} [\nu \ln(1+t + \sqrt{t(2+t)})].$$

Так как $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2t}} [1 + O(t)]$ при $t \rightarrow 0$, то по лемме Ватсона при $z \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} u_\nu(z) &= 2i \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{2|z|}} \exp \left\{ -i\frac{\pi\nu}{2} - |z| \right\} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right] = \\ &= i \sqrt{\frac{2\pi}{|z|}} \exp \left\{ -i\frac{\pi\nu}{2} - |z| \right\} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right]. \end{aligned}$$

Сравнение главных членов асимптотики левой и правой частей в (8) дает $D_\nu = 0$, $C_\nu = -\pi$. Таким образом,

$$H_\nu^{(1)}(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{C_+} \exp \{ iz \sin \varphi - i\nu\varphi \} d\varphi. \quad (9)$$

Аналогично, для контура C_- получим

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{C_-} \exp \{ iz \sin \varphi - i\nu\varphi \} d\varphi. \quad (10)$$

Отсюда

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2} [H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)] = \frac{1}{2\pi} \int_{C_1} \exp \{ iz \sin \varphi - i\nu\varphi \} d\varphi, \quad (11)$$

где контур C_1 изображен на рис. 8. При $\nu = n$ в силу периодич-

ности подынтегральной функции интегрирование по контуру C_1 сводится к интегрированию по интервалу $(-\alpha - \pi, -\alpha + \pi)$. Так как интеграл от периодической функции по отрезку, длина которого равна периоду, не зависит от положения этого отрезка, то

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\{iz \sin \varphi - in\varphi\} d\varphi, \quad (11a)$$

т. е. $J_n(z)$ — коэффициент разложения функции $e^{iz \sin \varphi}$ в ряд Фурье по функциям $e^{in\varphi}$. Поэтому

$$e^{iz \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\varphi}. \quad (12)$$

Пользуясь принципом аналитического продолжения, можно показать, что (12) справедливо при любых комплексных значениях φ .

Интегральное представление (11a) можно упростить, если воспользоваться формулой

$$\exp\{iz \sin \varphi - in\varphi\} = \cos(z \sin \varphi - n\varphi) + i \sin(z \sin \varphi - n\varphi)$$

и свойствами четности по переменной φ функций $\cos(z \sin \varphi - n\varphi)$ и $\sin(z \sin \varphi - n\varphi)$. В результате для функции $J_n(z)$ мы получаем интегральное представление *Сонина — Бесселя*:

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \sin \varphi - n\varphi) d\varphi.$$

§ 17. Специальные классы цилиндрических функций

1. Функции Бесселя второго рода. В прикладных расчетах часто приходится иметь дело с решениями уравнения Бесселя при вещественных значениях ν и положительных значениях z . Пользоваться при этом функциями Ханкеля не всегда удобно, так как они принимают комплексные значения. В рассматриваемом случае $H_{\nu}^{(2)}(z) = \overline{H_{\nu}^{(1)}(z)}$ (черта — знак комплексного сопряжения) и

$$J_{\nu}(z) = \frac{1}{2} [H_{\nu}^{(1)}(z) + H_{\nu}^{(2)}(z)] = \operatorname{Re} H_{\nu}^{(1)}(z).$$

В связи с этим естественно в качестве второго линейно независимого вещественного решения уравнения Бесселя рассматривать $\operatorname{Im} H_{\nu}^{(1)}(z)$, т. е. функцию

$$Y_{\nu}(z) = \frac{1}{2i} [H_{\nu}^{(1)}(z) - H_{\nu}^{(2)}(z)]. \quad (1)$$

Функция $Y_{\nu}(z)$ называется функцией Бесселя второго рода *).

*) Иногда ее называют *функцией Вебера*, а также *функцией Неймана* и обозначают $N_{\nu}(z)$. Заметим, что функции Ханкеля называют также *функциями Бесселя третьего рода*.

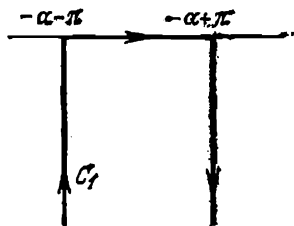


Рис. 8.

Функцию $Y_\nu(z)$, определяемую равенством (1), можно рассматривать при любых комплексных значениях ν , z . Она будет аналитической функцией ν во всей комплексной плоскости, включая $\nu = n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), и аналитической функцией z при $z \neq 0$, $|\arg z| < \pi$.

Приведем основные свойства функции $Y_\nu(z)$, вытекающие из соответствующих свойств функций Ханкеля.

а) Выражение $Y_\nu(z)$ через $J_\nu(z)$, $J_{-\nu}(z)$:

$$Y_\nu(z) = \frac{\cos \pi \nu J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi \nu}, \quad \nu \neq n.$$

б) Разложение $Y_\nu(z)$ в ряд при $\nu = n$:

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi} \left\{ 2J_n(z) \ln \frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k-n} - \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k! (n+k)!} [\psi(n+k+1) + \psi(k+1)] \right\}.$$

в) Асимптотическое поведение $Y_\nu(z)$ при $z \rightarrow \infty$:

$$Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\sin \left(z - \frac{\pi \nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O \left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{z} \right) \right].$$

г) Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования:

$$Y_{\nu-1}(z) + Y_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} Y_\nu(z),$$

$$Y_{\nu-1}(z) - Y_{\nu+1}(z) = 2Y'_\nu(z).$$

Графики функций Бесселя $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$ для некоторых целых значений ν при $x > 0$ приведены на рис. 9, 10.

2. Функции Бесселя полуцелого порядка. Полиномы Бесселя. Специальный класс цилиндрических функций образуют функции с индексом, равным половине нечетного числа *). Этот класс замечателен тем, что в рассматриваемом случае цилиндрические функции могут быть выражены через элементарные функции. Чтобы показать это, найдем предварительно выражения для функций $H_{1/2}^{(1,2)}(z)$, для чего воспользуемся формулами (14.19а), (14.20а):

$$H_{1/2}^{(1,2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{\pm i(z - \pi/2)},$$

откуда

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \quad Y_{1/2}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z.$$

*) К таким функциям приводит, например, решение уравнения Гельмгольца методом разделения переменных в сферических координатах.

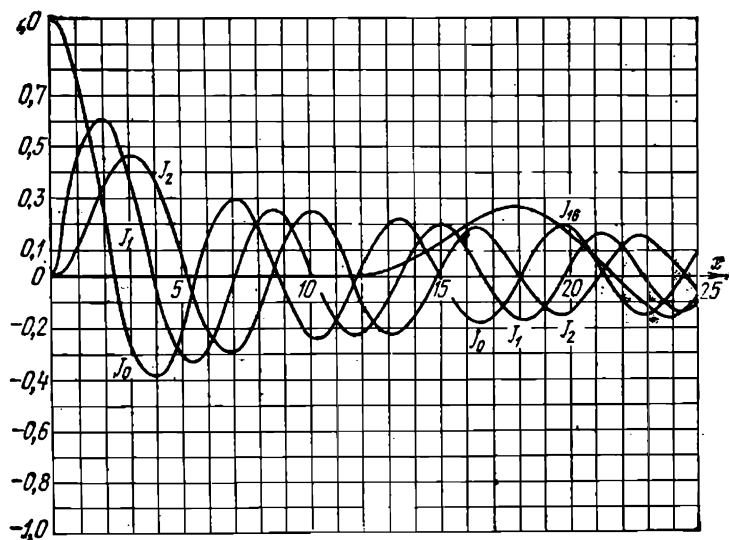


Рис. 9.

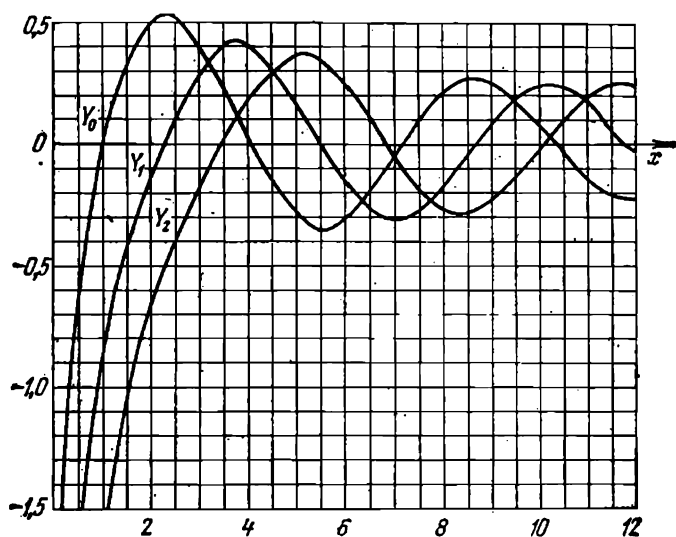


Рис. 10.

Далее, согласно функциональным соотношениям (15.8), (15.9),

$$H_{-1/2}^{(1)}(z) = e^{i\pi/2} H_{1/2}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{iz},$$

$$H_{-1/2}^{(2)}(z) = e^{-i\pi/2} H_{1/2}^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-iz}.$$

Отсюда

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z, \quad Y_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z.$$

Полагая в формулах (15.4) $\nu = -1/2$, получим

$$H_{n-1/2}^{(1,2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} z^n \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n e^{\pm iz}, \quad (2)$$

$$J_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} z^n \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \cos z, \quad (3)$$

$$Y_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} z^n \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \sin z. \quad (4)$$

Ж. Лиувиллем было доказано, что случай полупцелого индекса является единственным, когда цилиндрические функции приводятся к элементарным.

Из формулы (2) по индукции следует, что

$$H_{n+1/2}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{iz} p_n\left(\frac{1}{iz}\right),$$

где $p_n(s)$ — полином степени n относительно переменной s . Из асимптотического поведения функции $H_{n+1/2}^{(1)}(z)$ при $z \rightarrow \infty$ легко найти, что $p_n(0) = (-i)^{n+1}$. Покажем, что $p_n(s)$ является полиномом гипергеометрического типа и может быть выражен через полиномы Бесселя (см. § 5, п. 1):

$$y_n(z) = 2^{-n} e^{2/z} \frac{d^n}{dz^n} (z^{2n} e^{-2/z}).$$

Действительно, из дифференциального уравнения для функции Ханкеля $H_{n+1/2}^{(1)}(z)$ можно получить следующее дифференциальное уравнение для полиномов $p_n(s)$:

$$s^2 p_n''(s) + 2(s+1) p_n'(s) - n(n+1) p_n(s) = 0.$$

Так как это уравнение гипергеометрического типа, то $p_n(s)$ будет полиномом гипергеометрического типа. Записывая выражение для полинома $p_n(s)$ с помощью формулы Родрига, получим

$$p_n(s) = B_n e^{2/s} \frac{d^n}{ds^n} (s^{2n} e^{-2/s}).$$

Отсюда видно, что $p_n(s)$ с точностью до нормировочного множителя совпадает с полиномом Бесселя $y_n(s)$. Так как $p_n(0) = (-i)^{n+1}$, $y_n(0) = 1$, то окончательно получаем следующую связь функций Ханкеля $H_{n+1/2}^{(1)}(z)$ с полиномами Бесселя:

$$H_{n+1/2}^{(1)}(z) = (-i)^{n+1} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{iz} y_n\left(\frac{1}{iz}\right).$$

Аналогично,

$$H_{n+1/2}^{(2)}(z) = i^{n+1} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-iz} y_n\left(-\frac{1}{iz}\right).$$

3. Функции Бесселя мнимого аргумента. Уравнение Бесселя

$$z^2 u'' + zu' + (z^2 - \nu^2)u = 0$$

рассматривалось нами для комплексных значений z . Наиболее важным для практических применений является случай, когда значения z положительны. В ряде случаев представляет интерес также решение уравнения

$$z^2 u'' + zu' - (z^2 + \nu^2)u = 0 \quad (5)$$

при $z > 0$, которое получается из уравнения Бесселя заменой z на iz . В связи с этим специальные классы решений уравнения (5) носят название *функций Бесселя мнимого аргумента* или *модифицированных функций Бесселя*.

Линейно независимыми решениями уравнения (5), очевидно, являются функции $J_\nu(iz)$, $H_\nu^{(1)}(iz)$. Решение $J_\nu(iz)$ ограничено при $z \rightarrow 0$, если $\nu > 0$, а $H_\nu^{(1)}(z)$ при $z \rightarrow \infty$.

Обычно вместо функций $J_\nu(iz)$, $H_\nu^{(1)}(iz)$ используются функции

$$I_\nu(z) = e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(iz), \quad (6)$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} e^{i\pi(\nu+1)/2} H_\nu^{(1)}(iz). \quad (7)$$

Эти функции принимают вещественные значения при $z > 0$ и вещественных ν , что вытекает из соотношений

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}, \quad K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \pi \nu}.$$

Приведенные соотношения являются следствием разложения функции $J_\nu(z)$ в степенной ряд и функционального соотношения, связывающего функцию $H_\nu^{(1)}(iz)$ с функциями $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$. Функцию $K_\nu(z)$ называют *функцией Макдональда*.

Приведем основные свойства функций $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$, вытекающие из их связи с функциями $J_\nu(iz)$, $H_\nu^{(1)}(iz)$.

1. Интегральные представления Пуассона. Из представлений (14.18), (14.19а) вытекает, что

$$I_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1/2)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} \operatorname{ch} zt \, dt,$$

$$K_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1/2)} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1/2} \left(1 + \frac{t}{2z}\right)^{\nu-1/2} dt.$$

2. Разложения в ряды:

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(k+\nu+1)},$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \pi \nu}, \quad \nu \neq n_x$$

$$K_n(z) = (-1)^{n+1} I_n(z) \ln \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} + \\ + \frac{1}{2} (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+n}}{k! (k+n)!} [\psi(n+k+1) + \psi(k+1)] \quad (8)$$

(при $n=0$ первую из сумм следует полагать равной нулю).

Из разложения для $I_\nu(z)$ видно, что при $z > 0$, $\nu \geq 0$ функция $I_\nu(z)$ положительна и монотонно растет с ростом z (рис. 11).

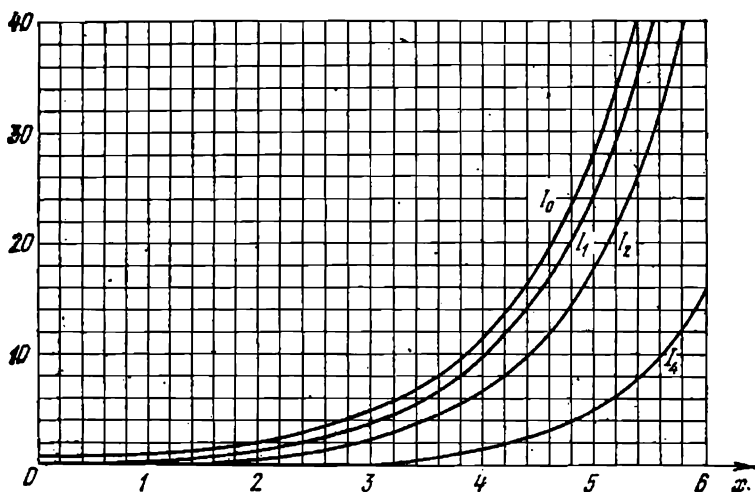


Рис. 11.

3. Связь функций $K_\nu(z)$ и $K_{-\nu}(z)$, $I_n(z)$ и $I_{-n}(z)$:

$$I_{-n}(z) = I_n(z), \quad K_{-\nu}(z) = K_\nu(z). \quad (9)$$

4. Асимптотическое поведение при $z \rightarrow +\infty$:

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right], \quad K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right].$$

5. Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования;

$$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} I_\nu(z),$$

$$I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) = 2I'_\nu(z),$$

$$K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z} K_\nu(z),$$

$$K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) = -2K'_\nu(z),$$

в частности,

$$I'_0(z) = I_1(z), \quad K'_0(z) = -K_1(z).$$

6. Выражение функций $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ полуцелого порядка через элементарные функции:

$$I_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} z^n \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \operatorname{ch} z, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$K_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} z^n \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n e^{-z}, \quad n = 0, 1, \dots$$

7. Интегральное представление Зоммерфельда для $K_\nu(z)$ при $z > 0$:

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-z \operatorname{ch} \psi + \nu \psi\} d\psi = \int_0^{\infty} \exp\{-z \operatorname{ch} \psi\} \operatorname{ch} \nu \psi d\psi. \quad (10)$$

Для вывода (10) мы положили в (16.9) $\alpha = \pi/2$, $\varphi = \pi/2 + t\psi$, где $-\infty < \psi < \infty$. Из представления (10) видно, что при $z > 0$ и вещественных ν функция Макдональда положительна и монотонно убывает с ростом z (рис. 12).

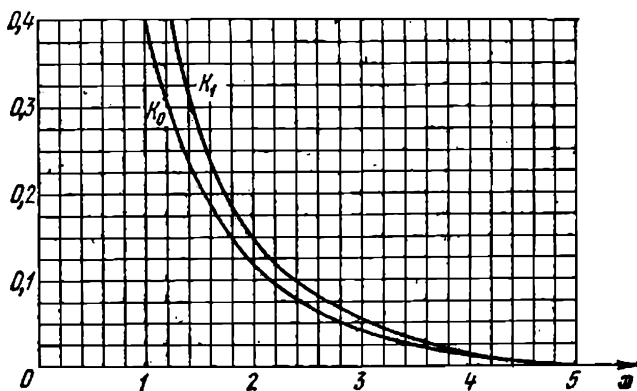


Рис. 12.

Если в (10) при $z > 0$ произвести замену $ze^{-\psi/2} = t$, то для $K_\nu(z)$ получим интересное для приложений видоизменение интегрального представления Зоммерфельда:

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2} \right)^\nu \int_0^{\infty} \exp\left\{-t - \frac{z^2}{4t}\right\} t^{-\nu-1} dt. \quad (11)$$

Замечание. Из свойств функций $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ вытекает, что общее решение уравнения (5) при $\nu \geq 0$, $z \geq 0$ имеет вид

$$u(z) = AI_\nu(z) + BK_\nu(z).$$

Если функция $u(z)$ ограничена при $z = 0$, то следует положить $B = 0$. Если функция $u(z)$ ограничена при $z \rightarrow +\infty$, то $A = 0$.

Мы рассмотрели специальные классы цилиндрических функций, которые наиболее часто используются при решении различных задач. Наряду с рассмотренными для некоторых интересных задач удобно ввести другие специальные классы функций, связанные с цилиндрическими функциями, в частности, вещественные и мнимые части цилиндрических функций $u_\nu(z)$ при $\text{Im } \nu = 0$, $\arg z = \pm\pi/4, \pm 3\pi/4$, функцию Эйри

$$\text{Ai}(z) = \begin{cases} \sqrt{\frac{|z|}{3\pi}} K_{1/3}\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2}\right), & z < 0, \\ \frac{1}{3}\sqrt{\pi z} \left[I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) + I_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \right], & z > 0. \end{cases}$$

Функция $\text{Ai}(z)$ является решением уравнения $u'' + zu = 0$.

§ 18. Теоремы сложения

Теоремами сложения в теории цилиндрических функций называются формулы вида

$$u_\nu(R) = F(r, \rho, \theta) \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r) g_n(\rho) h_n(\theta), \quad (1)$$

где r, ρ, R — длины сторон произвольного треугольника, θ — угол между сторонами r и ρ (рис. 13), а функция $F(r, \rho, \theta)$ является элементарной и имеет достаточно простой вид. Эти формулы дают разложение цилиндрической функции $u_\nu(R)$ порядка ν в ряд, члены которого представляют собой произведение некоторой не зависящей от индекса суммирования функции достаточно простого вида $F(r, \rho, \theta)$ на множители, каждый из которых зависит только от одной из переменных r, ρ, θ . Формулы рассматриваемого типа играют важную роль в математической физике и различных приложениях цилиндрических функций *).

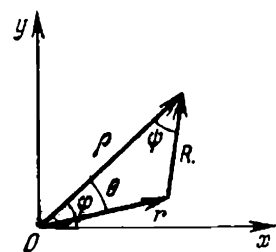


Рис. 13

1. Теорема сложения Графа. Пусть $u_\nu(z)$ обозначает одну из цилиндрических функций $J_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$. Для вывода простейшей теоремы сложения воспользуемся интегральным представлением

Зоммерфельда для функции $u_\nu(R)$:

$$u_\nu(R) = A \int_0^{\pi} \exp\{iR \sin \varphi - i\nu\varphi\} d\varphi, \quad (2)$$

где A — нормировочная постоянная, которая для рассматриваемых функций не зависит от ν .

*) См., например, Галанин А. Д. Введение в теорию ядерных реакторов на тепловых нейтронах. — М.: Энергоатомиздат, 1984.

Рассмотрим треугольник, изображенный на рис. 13. Проектируя векторное равенство $R = \rho - r$ на ось y , получим

$$R \sin(\varphi + \psi) = \rho \sin \varphi - r \sin(\varphi - \theta).$$

Очевидно, что полученное соотношение по принципу аналитического продолжения сохраняет силу и при комплексных значениях φ .

Контур C , как было показано в § 16, можно выбрать таким образом, чтобы его сдвиг на величину ψ , меньшую π , не менял значения интеграла. Заменяя в (2) φ на $\varphi + \psi$, получим

$$\begin{aligned} u_v(R) e^{iv\psi} &= A \int_C \exp \{iR \sin(\varphi + \psi) - iv\varphi\} d\varphi = \\ &= A \int_C \exp \{i\rho \sin \varphi + ir \sin(\theta - \varphi) - iv\varphi\} d\varphi. \end{aligned}$$

Так как, согласно (16.12),

$$e^{ir \sin(\theta - \varphi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r) e^{in(\theta - \varphi)},$$

то

$$\begin{aligned} u_v(R) e^{iv\psi} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} J_n(r) A \int_C \exp \{i\rho \sin \varphi - i(v + n)\varphi\} d\varphi = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r) u_{v+n}(\rho) e^{in\theta}. \end{aligned}$$

Возможность изменений порядка суммирования и интегрирования может быть обоснована при $r < \rho$. Таким образом, окончательно приходим к следующей формуле:

$$u_v(R) e^{iv\psi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r) u_{v+n}(\rho) e^{in\theta}.$$

Так как при замене R на kR , r на kr , ρ на $k\rho$ углы θ и ψ не меняются, то полученная формула может быть записана в виде

$$u_v(kR) e^{iv\psi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr) u_{v+n}(k\rho) e^{in\theta}. \quad (3)$$

Соотношение (3) называется *теоремой сложения Графа*.

2. Теорема сложения Гегенбауэра. Другая теорема сложения соответствует случаю, когда в (1) $F(r, \rho, \theta) = R^v$. Для ее вывода рассмотрим функцию

$$u_v(R)/R^v = v(R).$$

Для определенности будем предполагать, что $r < \rho$. В этом случае $R \neq 0$ и функция $v(R)$ будет ограниченной при $r \rightarrow 0$.

Функция v по переменной R удовлетворяет уравнению (см. (14.4))

$$Rv'' + (2v + 1)v' + Rv = 0. \quad (4)$$

Из этого уравнения легко получить уравнение в частных производных по переменным r и $\mu = \cos \theta$ при фиксированном значении ρ . Так как $R = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\mu}$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{dv}{dR} \cdot \frac{r - \rho\mu}{R}, \quad \frac{\partial v}{\partial \mu} = -\frac{dv}{dR} \cdot \frac{r\rho}{R}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} &= \frac{d^2 v}{dR^2} \left(\frac{r - \rho\mu}{R} \right)^2 + \frac{dv}{dR} \left[\frac{1}{R} - \frac{(r - \rho\mu)^2}{R^3} \right], \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \mu^2} &= \frac{d^2 v}{dR^2} \left(\frac{r\rho}{R} \right)^2 - \frac{dv}{dR} \cdot \frac{(r\rho)^2}{R^3}. \end{aligned}$$

Отсюда, исключая ρ , находим

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{dR} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \mu}.$$

Так как $R^2 = (r - \rho\mu)^2 + \rho^2(1 - \mu^2)$, то

$$\frac{d^2 v}{dR^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1 - \mu^2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \mu^2}.$$

Подставляя в (4) полученные выражения для dv/dR и d^2v/dR^2 , приходим к следующему уравнению в частных производных:

$$r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + (2v + 1)r \frac{\partial v}{\partial r} + r^2 v + (1 - \mu^2) \frac{\partial^2 v}{\partial \mu^2} - (2v + 1)\mu \frac{\partial v}{\partial \mu} = 0. \quad (5)$$

Теорема сложения в данном случае в соответствии с (1) должна иметь вид

$$v(R) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r) g_n(\rho) h_n(\mu), \quad \mu = \cos \theta. \quad (6)$$

Определим вид функций $f_n(r)$, $g_n(\rho)$, $h_n(\mu)$, исходя из требования, чтобы каждый член ряда (6) удовлетворял уравнению (5). В соответствии с этим будем искать частные ограниченные решения уравнения (5) методом разделения переменных, полагая

$$v = f(r)h(\mu). \quad (7)$$

Подставляя (7) в уравнение (5), получим

$$\frac{r^2 f'' + (2v + 1) r f' + r^2 f}{f} = \frac{-(1 - \mu^2) h'' + (2v + 1) \mu h'}{h} = \lambda, \quad (5a)$$

где λ — постоянная. Отсюда для функции $h(\mu)$ получаем уравнение гипергеометрического типа

$$(1 - \mu^2)h'' - (2v + 1)\mu h' + \lambda h = 0,$$

решениями которого при $\lambda = n(n + 2v)$ будут полиномы Якоби

$P_n^{(\nu-1/2, \nu-1/2)}(\mu)$. Поэтому естественно в (6) положить

$$h_n(\mu) = P_n^{(\nu-1/2, \nu-1/2)}(\mu).$$

Тогда формула (6) будет давать разложение функции $v(R)$ в ряд по полиномам Якоби:

$$v(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r, \rho) P_n^{(\nu-1/2, \nu-1/2)}(\mu). \quad (8)$$

Функция $v(R)$ удовлетворяет условиям теоремы разложения в ряд по полиномам Якоби $P_n^{(\nu-1/2, \nu-1/2)}(\mu)$ при $\nu > -1/2$ (см. § 8), причем в этом случае

$$\begin{aligned} a_n(r, \rho) &= \frac{1}{d_n^2} \int_{-1}^1 v(R) (1-\mu^2)^{\nu-1/2} P_n^{(\nu-1/2, \nu-1/2)}(\mu) d\mu = \\ &= \frac{1}{d_n^2} \int_{-1}^1 \frac{v_\nu(R)}{R^\nu} (1-\mu^2)^{\nu-1/2} P_n^{(\nu-1/2, \nu-1/2)}(\mu) d\mu, \end{aligned}$$

где d_n^2 — квадрат нормы полинома Якоби.

Остается показать, что коэффициент разложения $a_n(r, \rho)$ можно представить в виде

$$a_n(r, \rho) = f_n(r) g_n(\rho).$$

Для доказательства проинтегрируем на интервале $(-1, 1)$ с весом $(1-\mu^2)^{\nu-1/2} P_n^{(\nu-1/2, \nu-1/2)}(\mu)$ уравнение (5) и упростим члены, содержащие $\partial^2 v / \partial \mu^2$ и $\partial v / \partial \mu$ с помощью интегрирования по частям. Так как

$$\left[(1-\mu^2) \frac{\partial^2 v}{\partial \mu^2} - (2\nu+1) \mu \frac{\partial v}{\partial \mu} \right] (1-\mu^2)^{\nu-1/2} = \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1-\mu^2)^{\nu+1/2} \frac{\partial v}{\partial \mu} \right],$$

то получим

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left[(1-\mu^2) \frac{\partial^2 v}{\partial \mu^2} - (2\nu+1) \mu \frac{\partial v}{\partial \mu} \right] (1-\mu^2)^{\nu-1/2} P_n^{(\nu-1/2, \nu-1/2)}(\mu) d\mu &= \\ &= (1-\mu^2)^{\nu+1/2} \frac{\partial v}{\partial \mu} P_n^{(\nu-1/2, \nu-1/2)}(\mu) \Big|_{-1}^1 - \\ &- \int_{-1}^1 \frac{\partial v}{\partial \mu} (1-\mu^2)^{\nu+1/2} \frac{d}{d\mu} P_n^{(\nu-1/2, \nu-1/2)}(\mu) d\mu = \\ &= (1-\mu^2)^{\nu+1/2} \left[\frac{\partial v}{\partial \mu} P_n^{(\nu-1/2, \nu-1/2)}(\mu) - v \frac{d}{d\mu} P_n^{(\nu-1/2, \nu-1/2)}(\mu) \right] \Big|_{-1}^1 + \\ &+ \int_{-1}^1 v \frac{d}{d\mu} \left[(1-\mu^2)^{\nu+1/2} \frac{d}{d\mu} P_n^{(\nu-1/2, \nu-1/2)}(\mu) \right] d\mu. \end{aligned}$$

Так как $\nu+1/2 > 0$, то подстановки равны нулю. Кроме того, из

уравнения для полиномов Якоби следует, что

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2)^{v+1/2} \frac{d}{d\mu} P_n^{(v-1/2, v-1/2)}(\mu) \right] = \\ = -n(n+2v)(1 - \mu^2)^{v-1/2} P_n^{(v-1/2, v-1/2)}(\mu).$$

В результате мы приходим к дифференциальному уравнению для функции $a_n(r, \rho)$:

$$\frac{\partial^2 a_n}{\partial r^2} + \frac{2v+1}{r} \frac{\partial a_n}{\partial r} + \left[1 - \frac{n(n+2v)}{r^2} \right] a_n = 0,$$

которое, как и следовало ожидать, совпадает с (5а) при $\lambda = n(n+2v)$.

Полученное уравнение является частным случаем уравнения Ломмеля. Единственным ограниченным при $r \rightarrow 0$ решением этого уравнения с точностью до множителя, не зависящего от r , является функция $\frac{1}{r^v} J_{v+n}(r)$, т. е.

$$a_n(r, \rho) = \frac{1}{r^v} J_{v+n}(r) g_n(\rho).$$

Таким образом,

$$a_n(r, \rho) = \frac{1}{r^v} J_{v+n}(r) g_n(\rho) = \\ = \frac{1}{d_n^2} \int_{-1}^1 \frac{u_v(R)}{R^v} (1 - \mu^2)^{v-1/2} P_n^{(v-1/2, v-1/2)}(\mu) d\mu, \quad (9)$$

где d_n^2 — квадрат нормы полинома Якоби. Чтобы найти функцию $g_n(\rho)$, вычислим интеграл в правой части (9), используя формулу Родрига для полиномов Якоби

$$P_n^{(v-1/2, v-1/2)}(\mu) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \cdot \frac{1}{(1 - \mu^2)^{v-1/2}} \cdot \frac{d^n}{d\mu^n} [(1 - \mu^2)^{n+v-1/2}]$$

и производя интегрирование по частям n раз:

$$\int_{-1}^1 \frac{u_v(R)}{R^v} (1 - \mu^2)^{v-1/2} P_n^{(v-1/2, v-1/2)}(\mu) d\mu = \\ = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 (1 - \mu^2)^{n+v-1/2} \frac{\partial^n}{\partial \mu^n} \left[\frac{u_v(R)}{R^v} \right] d\mu.$$

Все подстановки при $\mu = \pm 1$ обращаются в нуль, так как они содержат множители $1 - \mu^2$ в положительных степенях.

С другой стороны, для произвольной функции $v(R)$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} v(R) = -\frac{rp}{R} \frac{dv}{dR},$$

откуда

$$\frac{\partial^n}{\partial \mu^n} \left(\frac{u_\nu(R)}{R^\nu} \right) = (r\rho)^n \left(-\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \right)^n \left(\frac{u_\nu(R)}{R^\nu} \right).$$

По формуле дифференцирования (15.4) имеем

$$\left(-\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \right)^n \left(\frac{u_\nu(R)}{R^\nu} \right) = \frac{u_{\nu+n}(R)}{R^{\nu+n}}.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{u_\nu(R)}{R^\nu} (1-\mu^2)^{\nu-1/2} P_n^{(\nu-1/2, \nu-1/2)}(\mu) d\mu &= \\ &= \frac{1}{2^n n!} (r\rho)^n \int_{-1}^1 \frac{u_{\nu+n}(R)}{R^{\nu+n}} (1-\mu^2)^{n+\nu-1/2} d\mu. \end{aligned}$$

Отсюда, согласно (9),

$$g_n(\rho) \frac{J_{\nu+n}(r)}{r^{\nu+n}} = \frac{\rho^n}{2^n n! d_n^2} \int_{-1}^1 \frac{u_{\nu+n}(R)}{R^{\nu+n}} (1-\mu^2)^{n+\nu-1/2} d\mu. \quad (10)$$

Пусть $r \rightarrow 0$. Тогда $R \rightarrow \rho$ и, следовательно,

$$\frac{g_n(\rho)}{2^{\nu+n} \Gamma(\nu+n+1)} = \frac{u_{\nu+n}(\rho)}{\rho^\nu} \cdot \frac{1}{2^n n! d_n^2} \int_{-1}^1 (1-\mu^2)^{n+\nu-1/2} d\mu.$$

Так как (см. § 5, табл. 1)

$$\begin{aligned} d_n^2 &= \frac{2^{2\nu-1} \Gamma^2(n+\nu+1/2)}{n! (n+\nu) \Gamma(n+2\nu)}, \\ \int_{-1}^1 (1-\mu^2)^{n+\nu-1/2} d\mu &= 2 \int_0^1 (1-\mu^2)^{n+\nu-1/2} d\mu = \\ &= \int_0^1 (1-t)^{n+\nu-1/2} t^{-1/2} dt = \frac{\Gamma(n+\nu+1/2) \Gamma(1/2)}{\Gamma(n+\nu+1)}, \end{aligned}$$

то окончательно находим

$$g_n(\rho) = \frac{\sqrt{\pi} (n+\nu) \Gamma(n+2\nu)}{2^{\nu-1} \Gamma(n+\nu+1/2)} \frac{u_{\nu+n}(\rho)}{\rho^\nu}.$$

В результате разложение (8) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{u_\nu(R)}{R^\nu} &= \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\nu) \Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+\nu+1/2)} \frac{J_{\nu+n}(r)}{r^\nu} \frac{u_{\nu+n}(\rho)}{\rho^\nu} P_n^{(\nu-1/2, \nu-1/2)}(\mu). \quad (11) \end{aligned}$$

Если вместо полиномов Якоби использовать полиномы Гегенбауэра

$$C_n^v(\mu) = \frac{(2v)_n}{(v+1/2)_n} P_n^{(v-1/2, v-1/2)}(\mu),$$

то разложение (11) примет более простой вид:

$$\frac{u_v(R)}{R^v} = 2^v \Gamma(v) \sum_{n=0}^{\infty} (v+n) \frac{J_{v+n}(r)}{r^v} \frac{u_{v+n}(\rho)}{\rho^v} C_n^v(\mu). \quad (12)$$

Напомним, что полученная формула была выведена для $v > -1/2$, $r < \rho$.

Очевидно, что формула (12) остается справедливой, если в ней произвести замену R на kR , r на kr , ρ на $k\rho$, т. е.

$$\frac{u_v(kR)}{(kR)^v} = 2^v \Gamma(v) \sum_{n=0}^{\infty} (v+n) \frac{J_{v+n}(kr)}{(kr)^v} \frac{u_{v+n}(k\rho)}{(k\rho)^v} C_n^v(\mu). \quad (13)$$

Соотношение (13) называется *теоремой сложения Гегенбауэра*.

Теоремы сложения Графа и Гегенбауэра были выведены при некоторых ограничениях, наложенных на параметры. Пользуясь принципом аналитического продолжения, формулы (3), (13) можно распространить на более широкую область значений параметров.

3. Разложение сферической и плоской волны по полиномам Лежандра. Рассмотрим некоторые следствия из теоремы сложения Гегенбауэра, которые широко применяются, например, в квантовомеханической теории рассеяния, при решении задач дифракции.

1) Полагая в (13) $v = 1/2$, $u_v(z) = H_v^{(1)}(z)$ и используя явное выражение для функции $H_{1/2}^{(1)}(z)$, получим

$$\frac{e^{ikR}}{R} = i\pi \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{H_{n+1/2}^{(1)}(k\rho)}{\sqrt{\rho}} P_n(\mu).$$

Мы воспользовались тем, что $C_n^{1/2}(\mu) = P_n(\mu)$, где $P_n(\mu)$ — полином Лежандра.

2) Представляет интерес предельная форма теоремы сложения, получающаяся из (13) при $u_v(z) = H_v^{(2)}(z)$ и $\rho \rightarrow \infty$. Имеем

$$R = \rho \sqrt{1 - \frac{2r\mu}{\rho} + \frac{r^2}{\rho^2}} = \rho - r\mu + O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(k\rho)^v} H_{v+n}^{(2)}(k\rho)}{\frac{1}{(kR)^v} H_v^{(2)}(kR)} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{v+1/2} i^n e^{-ik(\rho-R)} = i^n e^{-ikr\mu}.$$

Поэтому из (13) получим

$$e^{ikr\mu} = 2^{\nu} \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} i^n (\nu + n) \frac{J_{\nu+n}(kr)}{(kr)^{\nu}} C_n^{\nu}(\mu).$$

При $\nu = 1/2$ отсюда легко вывести разложение плоской волны e^{ikr} по полиномам Лежандра:

$$e^{ikr} = \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \left(n + \frac{1}{2}\right) J_{n+1/2}(kr) P_n(\mu), \quad (14)$$

где $\mathbf{k}$ — волновой вектор, $\mu = \cos \theta$, θ — угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}$.

§ 19. Квазиклассическое приближение

При рассмотрении соответствия между классической физикой, оформившейся к концу XIX в., и появившейся в начале XX в. квантовой механикой возникла задача о получении равномерной асимптотики при $\lambda \rightarrow +\infty$ решений дифференциального уравнения вида

$$[k(x)y']' + \lambda r(x)y = 0.$$

Полученное при таком исследовании приближенное представление решений уравнения в квантовой механике называют *квазиклассическим приближением*. Квазиклассическое приближение оказалось удобным при рассмотрении многих вопросов математической физики.

1. Квазиклассическое приближение для решений уравнений второго порядка. Выясним поведение решений уравнения

$$[k(x)y']' + \lambda r(x)y = 0 \quad (1)$$

при $\lambda \rightarrow +\infty$. Поведение решений этого уравнения существенно зависит от знака функций $k(x)$ и $r(x)$, в чем легко убедиться, полагая, например, $k(x) = \text{const}$, $r(x) = \text{const}$. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать уравнение (1) в области, где функции $k(x)$, $r(x)$ знакопостоянны. Рассмотрим сначала случай, когда на некотором интервале (a, b) функции $k(x)$, $r(x)$ имеют одинаковые знаки, например $k(x) > 0$, $r(x) > 0$, и пусть эти функции имеют непрерывные производные первого и второго порядка.

1°. Приведем уравнение (1) с помощью замены переменных

$$y(x) = \varphi(x)u(s), \quad s = s(x), \quad (2)$$

к более удобному для исследования виду. После этой замены уравнение (1) примет вид

$$u'' + f(s)u' + [\lambda g(s) - q(s)]u = 0, \quad (1a)$$

где

$$f(s) = \frac{2k(x)s'(x)\varphi'(x) + [k(x)s'(x)]'\varphi(x)}{k(x)\varphi(x)[s'(x)]^2},$$

$$g(s) = \frac{r(x)}{k(x)[s'(x)]^2}, \quad q(s) = -\frac{[k(x)\varphi'(x)]'}{k(x)\varphi(x)[s'(x)]^2}.$$

Для исследования поведения решений уравнения (1а) при больших значениях λ удобно выбрать функции $s(x)$, $\varphi(x)$ из условий $g(s) = 1$, $f(s) = 0$, т. е. из условий

$$[s'(x)]^2 = \frac{r(x)}{k(x)},$$

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = -\frac{1}{2} \frac{[k(x)s'(x)]'}{k(x)s'(x)} = -\frac{1}{4} \frac{[k(x)r(x)]'}{k(x)r(x)}. \quad (3)$$

В результате приходим к уравнению

$$u'' + [\lambda - q(s)]u = 0, \quad (4)$$

где

$$q(s) = -\frac{[k(x)\varphi'(x)]'}{r(x)\varphi(x)}.$$

Если использовать уравнение (3) для $\varphi(x)$, то выражение для $q(s)$ можно переписать в виде

$$q(s) = \frac{k}{4r} \left[\left(\frac{k'}{k} + \frac{r'}{r} \right)' + \left(\frac{3}{4} \frac{k'}{k} - \frac{1}{4} \frac{r'}{r} \right) \left(\frac{k'}{k} + \frac{r'}{r} \right) \right]. \quad (5)$$

В случае, когда функции $k(x)$, $r(x)$ имеют разные знаки на (a, b) , уравнение (1) заменой (2) приводится к виду, аналогичному (4):

$$u''(s) - [\lambda + q(s)]u(s) = 0. \quad (6)$$

Так как изучение поведения решений при $\lambda \rightarrow +\infty$ для уравнения (6) проводится теми же методами, что и для уравнения (4), то в дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда уравнение (1) заменой (2) можно привести к уравнению (4).

Из равенств (3) имеем

$$s(x) = \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{r(t)}{k(t)}} dt, \quad a < x_0 < b, \quad \varphi(x) = [k(x)r(x)]^{-1/4}.$$

Пусть $s(a) = c$ ($c < 0$), $s(b) = d$ ($d > 0$). Функция $s(x)$ непрерывна и монотонно возрастает на (a, b) . Поэтому существует обратная функция $x = x(s)$, которая также будет монотонно возрастающей непрерывной функцией на (c, d) . Функция $q(s)$ будет непрерывной функцией на (c, d) .

2°. Естественно ожидать, что при $\lambda \rightarrow +\infty$ решения уравнения (4) будут в пределе совпадать с решениями уравнения $u'' + \lambda u = 0$, т. е. при $\lambda \rightarrow +\infty$ будет выполняться приближенное

равенство

$$u(s) \approx A \cos \mu s + B \sin \mu s,$$

где $\mu = \sqrt{\lambda}$, A, B — постоянные.

Для доказательства этого утверждения воспользуемся методом, предложенным В. А. Стекловым *). Будем решать уравнение

$$u'' + \mu^2 u = q(s)u \quad (4a)$$

методом вариации постоянных, рассматривая правую часть как известную функцию. В результате получим

$$u(s) = \bar{u}(s) + R_\mu(s), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{u}(s) &= A \cos \mu s + B \sin \mu s, \\ R_\mu(s) &= \frac{1}{\mu} \int_0^s \sin \mu(s-s') q(s') u(s') ds'. \end{aligned}$$

Покажем, что при $c < c_1 \leq s \leq d_1 < d$ ($c_1 < 0$, $d_1 > 0$) величиной $R_\mu(s)$ в (7) при $\mu \rightarrow \infty$ можно пренебречь, т. е.

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} R_\mu(s) / \bar{M}(\mu) = 0, \quad (8)$$

где $\bar{M}(\mu) = \max_{c_1 \leq s \leq d_1} |\bar{u}(s)|$.

Из выражения для $R_\mu(s)$ видно, что

$$|R_\mu(s)| \leq \frac{1}{\mu} LM(\mu), \quad (9)$$

где

$$L = \int_{c_1}^{d_1} |q(s')| ds', \quad M(\mu) = \max_{c_1 \leq s \leq d_1} |u(s)|.$$

Оценим величину $M(\mu)$ при $\mu \rightarrow \infty$. Из (7), (9) имеем

$$|u(s)| \leq \bar{M}(\mu) + \frac{1}{\mu} LM(\mu),$$

откуда

$$M(\mu) \leq \bar{M}(\mu) + \frac{1}{\mu} LM(\mu).$$

Разрешая это неравенство относительно $M(\mu)$, с помощью оценки (9) при $\mu > L$ получим

$$\frac{R_\mu(s)}{\bar{M}(\mu)} \leq \frac{L}{\mu - L},$$

что и доказывает справедливость равенства (8).

*) См. Стеклов В. А. Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений. — Харьков: Изд-во ХГУ, 1956.

Возвращаясь к старым переменным, получим, что в случае, когда $k(x) > 0$, $r(x) > 0$ на (a, b) , решения уравнения (1) при $\lambda \rightarrow +\infty$ на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ можно представить в виде

$$y(x) \approx \frac{1}{\sqrt{k(x)p(x)}} [A \cos \xi(x) + B \sin \xi(x)], \quad (10)$$

где

$$p(x) = \sqrt{\lambda \frac{r(x)}{k(x)}}, \quad \xi(x) = \int_{x_0}^x p(t) dt.$$

Замена решения уравнения (1) приближенным решением (10) носит название *квазиклассического метода* решения уравнения (1).

В случае, когда $k(x) > 0$, $r(x) < 0$, аналогичным образом получим

$$y(x) \approx \frac{1}{\sqrt{k(x)p(x)}} [Ae^{\xi(x)} + Be^{-\xi(x)}], \quad (10a)$$

где

$$p(x) = \sqrt{\lambda \left| \frac{r(x)}{k(x)} \right|}, \quad \xi(x) = \int_{x_0}^x p(t) dt.$$

При замене точного решения приближенным для нас важно было лишь выполнение неравенства $|q(s)| \ll \mu$ в уравнении (4). Поэтому приближенными решениями (10), (10a) можно пользоваться не только в тех случаях, когда велико значение λ , но и при $\lambda \sim 1$, если $|q(s)| \ll 1$. Как видно из формулы (5), это имеет место, когда производные функций $k(x)$, $r(x)$ малы, т. е. при медленном, плавном изменении коэффициентов уравнения (1).

3°. Практический интерес представляет также получение приближенного решения уравнения (1) при $\lambda \rightarrow +\infty$, справедливого вплоть до концов интервала (a, b) . Рассмотрим, например, вопрос о приближенном представлении решения уравнения (1) при $a \leq x < b$. Если $k(a) > 0$, $r(a) > 0$, то все рассуждения, приводящие к (10), остаются в силе. Поэтому рассмотрим случай, когда хотя бы одна из функций $k(x)$ или $r(x)$ равна нулю при $x = a$.

Пусть, например,

$$k(x) = (x-a)^m k_1(x), \quad r(x) = (x-a)^l r_1(x),$$

где $k_1(a) > 0$, $r_1(a) > 0$ и функции $k_1(x)$, $r_1(x)$ имеют непрерывные вторые производные при $a \leq x < b$. Для того чтобы величина $s(a)$ была конечной, будем предполагать, что $(l-m)/2 > -1$. Перепишем выражения для $s(x)$, $q(s)$ при $x_0 = a$:

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{\frac{r_1(t)}{k_1(t)}} (t-a)^{(l-m)/2} dt, \quad (11)$$

$$q(s) = (x-a)^{m-l-2} \frac{k_1(x)}{4r_1(x)} \left\{ \frac{(l+m)(3m-l-4)}{4} + \right. \\ \left. + \frac{x-a}{2} \left[(3m+l) \frac{k_1'}{k_1} + (m-l) \frac{r_1'}{r_1} \right] + \right. \\ \left. + (x-a)^2 \left[\left(\frac{k_1'}{k_1} + \frac{r_1'}{r_1} \right)' + \left(\frac{3}{4} \frac{k_1'}{k_1} - \frac{1}{4} \frac{r_1'}{r_1} \right) \left(\frac{k_1'}{k_1} + \frac{r_1'}{r_1} \right) \right] \right\}. \quad (12)$$

Если $x \approx a$, то

$$s(x) \approx \sqrt{\frac{r_1(a)}{k_1(a)}} \frac{(x-a)^{(l-m+2)/2}}{(l-m+2)/2},$$

и, следовательно, выражение для $q(s)$ можно представить в виде

$$q(s) = \frac{v^2 - 1/4}{s^2} + s^{\gamma-2} f(s),$$

где

$$\gamma = \frac{2}{l-m+2} > 0, \quad v = \frac{|m-1|}{l-m+2},$$

а функция $f(s)$ непрерывна при $0 \leq s < s(b)$. Мы видим, что в данном случае функция $q(s)$ имеет особенность при $s=0$. Поэтому для применения метода Стеклова удобно выделить главную особенность функции $q(s)$, т. е. переписать уравнение (4) в виде

$$u'' + \left(\mu^2 - \frac{v^2 - 1/4}{s^2} \right) u = s^{\gamma-2} f(s) u, \quad \mu = \sqrt{\lambda}, \quad (13)$$

и решать это уравнение методом вариации постоянных, рассматривая правую часть уравнения (13) как известную функцию. Так как

$$u'' + \left(\mu^2 - \frac{v^2 - 1/4}{s^2} \right) u = 0$$

является уравнением Ломмеля (14.4) и имеет решение

$$u = Av_v(\mu s) + Bv_{-v}(\mu s),$$

где $v_v(z) = \sqrt{z} J_v(z)$, A, B — постоянные, то в результате получаем решение уравнения (13) в виде

$$u(s) = Av_v(\mu s) + Bv_{-v}(\mu s) + R_\mu(s), \quad (14)$$

где

$$R_\mu(s) = \int_{s_0}^s K_\mu(s, s') (s')^{\gamma-2} f(s') u(s') ds',$$

$$K_\mu(s, s') = \frac{\pi}{2\mu \sin \pi v} [v_v(\mu s) v_{-v}(\mu s') - v_v(\mu s') v_{-v}(\mu s)].$$

Можно показать, что величиной $R_\mu(s)$ в (14) можно пренебречь

при $\mu \rightarrow +\infty$. При оценке величины $R_\mu(s)$ удобно выбрать $s_0 > 0$ при $B \neq 0$ и $s_0 = 0$ при $B = 0$. Оценки величины $R_\mu(s)$ производятся по тому же плану, что и ранее, но технически они несколько сложнее, поскольку при оценке функций $v_{\pm\nu}(\mu s)$, которые в данном случае возникают вместо $\cos \mu s$ и $\sin \mu s$, приходится в отдельности рассматривать малые и большие значения величины μs :

$$|v_{\pm\nu}(\mu s)| \leq \begin{cases} C(\mu s)^{-\nu+1/2}, & \mu s \leq 1, \\ C, & \mu s > 1, \end{cases}$$

где C — постоянная.

Таким образом, возвращаясь к старым переменным, получим, что в случае, когда в уравнении (1) $k(x) = (x-a)^m k_1(x)$, $r(x) = (x-a)^l r_1(x)$, $l-m+2 > 0$, а функции $k_1(x)$, $r_1(x)$ принимают положительные значения и имеют непрерывные вторые производные при $a \leq x < b$, решения уравнения (1) при $\lambda \rightarrow +\infty$, $a \leq x \leq b_1 < b$ можно приближенно представить в виде

$$y(x) \approx \sqrt{\frac{\xi(x)}{k(x)p(x)}} \{AJ_\nu[\xi(x)] + BJ_{-\nu}[\xi(x)]\}, \quad (15)$$

$$p(x) = \sqrt{\lambda \frac{r(x)}{k(x)}}, \quad \xi(x) = \int_a^x p(t) dt, \quad \nu \neq 0, 1, \dots$$

При целых ν в (15) следует заменить $J_{-\nu}(\xi)$ на $Y_\nu(\xi)$. Заметим, что при $\xi(x) \gg 1$ замена функций Бесселя в (15) первым членом их асимптотического представления приводит к формуле, эквивалентной (10).

Если $k(x) > 0$, $r(x) < 0$, то (15) следует заменить на

$$y(x) \approx \sqrt{\frac{\xi(x)}{k(x)p(x)}} \{AI_\nu[\xi(x)] + BK_\nu[\xi(x)]\}, \quad (16)$$

$$p(x) = \sqrt{\lambda \left| \frac{r(x)}{k(x)} \right|}, \quad \xi(x) = \int_a^x p(t) dt.$$

Аналогичные формулы получаются для области $a < a_1 \leq x \leq b$, если функции $k(x)$, $r(x)$ имеют вид

$$k(x) = (b-x)^m k_1(x), \quad r(x) = (b-x)^l r_1(x), \\ k_1(x) > 0, \quad r_1(x) > 0.$$

Мы изложили метод асимптотического представления решений уравнения (1) при $\lambda \rightarrow +\infty$. Перейдем к получению такого представления для интересующих нас случаев.

2. Асимптотические представления для классических ортогональных полиномов при больших значениях n . Получим приближенное выражение для полиномов Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ при достаточно больших значениях n для $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $x \in [-1, 1]$. Функ-

ция $y(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при

$$k(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}, \quad r(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \\ \lambda = n(n + \alpha + \beta + 1).$$

В данном случае $m = \beta + 1$, $l = \beta$, $\nu = \beta$. Если $n \rightarrow \infty$, то $\lambda \rightarrow +\infty$. При $-1 \leq x \leq 1 - \delta$ имеем

$$y(x) \approx \frac{V\bar{\xi}}{(1-x)^{\alpha/2+1/4}(1+x)^{\beta/2+1/4}} [AJ_{\beta}(\xi) + BJ_{-\beta}(\xi)],$$

где

$$\xi = \xi(x) = \mu \int_{-1}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \mu \arccos(-x), \quad \mu = V\bar{\lambda}.$$

Так как существует предел

$$\lim_{x \rightarrow -1} y(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(-1) = (-1)^n \frac{\Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1)n!},$$

то

$$B = 0, \quad A = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1-x)^{\alpha/2+1/4}(1+x)^{\beta/2+1/4} y(x)}{V\bar{\xi} J_{\beta}(\xi)} = \\ = 2^{\alpha/2+1/4} P_n^{(\alpha, \beta)}(-1) 2^{\beta} \Gamma(\beta + 1) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{V(1+x)}{\xi} \right)^{\beta+1/2}$$

По правилу Лопиталя

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{V(1+x)}{\xi(x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{2 \sqrt{1+x} \xi'(x)} = \frac{1}{V2}.$$

Поэтому

$$A = (-1)^n \frac{2^{(\alpha+\beta)/2} \Gamma(n + \beta + 1)}{n! \mu^{\beta+1/2}}, \quad \mu = V n(n + \alpha + \beta + 1).$$

Полагая $x = -\cos \theta$, при $0 \leq \theta \leq \pi - \delta$ получим

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(-\cos \theta) \approx \frac{(-1)^n \Gamma(n + \beta + 1) V \bar{\theta/2}}{n! \mu^{\beta} (\cos(\theta/2))^{\alpha+1/2} (\sin(\theta/2))^{\beta+1/2}} J_{\beta}(\mu \theta). \quad (17)$$

Приближенное выражение для полиномов Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ в области $-1 < x \leq 1$ легко получить из (17), если воспользоваться соотношением

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(-x).$$

Если $x \in [-1 + \delta, 1 - \delta]$, то приближенное выражение для $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ можно упростить, если использовать асимптотическое представление функции $J_{\beta}(\mu \theta)$ при $\mu \theta \rightarrow +\infty$ и асимптотическое

представление функции $\Gamma(z)$ при $z \rightarrow \infty$ (см. Дополнение А);

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \approx \frac{\cos \{ [n + (\alpha + \beta + 1)/2] \theta - (2\alpha + 1) \pi/4 \}}{\sqrt{\pi n} (\sin(\theta/2))^{\alpha+1/2} (\cos(\theta/2))^{\beta+1/2}}, \quad (18)$$

$$0 < \delta \leq \theta \leq \pi - \delta.$$

Отсюда при $\alpha = \beta = 0$ получаем асимптотическое представление для полиномов Лежандра

$$P_n(\cos \theta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \frac{\cos((n + 1/2)\theta - \pi/4)}{\sqrt{\sin \theta}}.$$

Аналогичным образом можно получить приближенное выражение для полиномов Лагерра $L_n^\alpha(x)$ при $x > 0$ и достаточно больших n . В частности, при $0 < \delta \leq x \leq N < \infty$ имеем

$$L_n^\alpha(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{x/2} x^{-\alpha/2-1/4} n^{\alpha/2-1/4} \cos(2\sqrt{nx} - (2\alpha + 1)\frac{\pi}{4}). \quad (19)$$

Если $\alpha = \pm 1/2$, то представление (19) справедливо вплоть до $x = 0$, так как в этом случае $\nu = \pm 1/2$ и уравнение (13) не содержит особенности при $s = 0$.

Соответствующие формулы для полиномов Эрмита $H_n(x)$ могут быть получены из (19) с помощью формул (6.14), (6.15), выражающих полиномы Эрмита через полиномы Лагерра:

$$H_n(x) \approx \sqrt{2} \left(\frac{2n}{e}\right)^{n/2} e^{x^2/2} \cos\left(\sqrt{2n}x - \frac{\pi n}{2}\right), \quad |x| \leq N < \infty. \quad (20)$$

З а м е ч а н и я. 1. Оценки (7.13а), (7.20а), (7.21а), полученные в гл. II с помощью достаточно громоздких вычислений, легко вывести из оценок (18)–(20).

2. Асимптотическое представление (18) было выведено при $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$. Однако оно остается справедливым при любых вещественных значениях α , β . Проведем доказательство по индукции, предполагая, что формула (18) справедлива для полиномов $P_n^{(\alpha+1, \beta+1)}(\cos \theta)$, $P_n^{(\alpha+2, \beta+2)}(\cos \theta)$. Воспользуемся дифференциальным уравнением для полиномов Якоби и формулой дифференцирования (5.6). В результате получим

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = -\frac{1}{\lambda_n} \left[\tau(x) \frac{n + \alpha + \beta + 1}{2} P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) + \right. \\ \left. + \sigma(x) \frac{(n + \alpha + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 2)}{4} P_{n-2}^{(\alpha+2, \beta+2)}(x) \right],$$

где

$$\lambda_n = n(n + \alpha + \beta + 1), \quad \tau(x) = \beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x, \\ \sigma(x) = 1 - x^2$$

Отсюда

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) = - \left[\frac{\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2) \cos \theta}{2n} P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(\cos \theta) + \right. \\ \left. + \frac{\sin^2 \theta}{4} \left(1 + \frac{\alpha + \beta + 2}{n} \right) P_{n-2}^{(\alpha+2, \beta+2)}(\cos \theta) \right].$$

Подставляя в правую часть асимптотические представления для $P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(\cos \theta)$, $P_{n-2}^{(\alpha+2, \beta+2)}(\cos \theta)$, полученные по формуле (18), и сохраняя главные члены, получим

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) &\approx -\frac{\sin^2 \theta}{4} P_{n-2}^{(\alpha+2, \beta+2)}(\cos \theta) \approx \\ &\approx -\frac{\sin^2 \theta}{4} \cdot \frac{\cos \{[n-2+(\alpha+\beta+5)/2]\theta - (2\alpha+5)(\pi/4)\}}{\sqrt{\pi n} (\sin(\theta/2))^{\alpha+5/2} (\cos(\theta/2))^{\beta+5/2}} = \\ &= \frac{\cos \{[n+(\alpha+\beta+1)/2]\theta - (2\alpha+1)(\pi/4)\}}{\sqrt{\pi n} (\sin(\theta/2))^{\alpha+1/2} (\cos(\theta/2))^{\beta+1/2}}, \end{aligned}$$

что совпадает с (18). Аналогично обосновывается справедливость формулы (19) при любых вещественных значениях α .

3. Квазиклассическое приближение для уравнений с особенностью. Квазиклассика для центрально-симметричного поля. При рассмотрении движения частицы в центрально-симметричном поле представляет интерес получение квазиклассического приближения для уравнения вида

$$u'' + r(x)u = 0, \quad (21)$$

где функция $x^2 r(x)$ непрерывна вместе со своими производными первого и второго порядка при $0 \leq x \leq b$. Полученное ранее приближение оказывается неприменимым для уравнения (21) в окрестности точки $x=0$. Однако заменой переменных $x=e^z$, $u=e^{z/2}v(z)$ это уравнение приводится к виду

$$v''(z) + r_1(z)v = 0, \quad (22)$$

где

$$r_1(z) = -1/4 + x^2 r(x)|_{x=e^z}.$$

Функция $r_1(z)$ при $z \rightarrow -\infty$ (что соответствует $x \rightarrow 0$) мало отличается от постоянной, равной $-1/4 + \lim_{x \rightarrow 0} x^2 r(x)$. Кроме того,

$\lim_{z \rightarrow -\infty} r_1^{(k)}(z) = 0$ ($k=1, 2, \dots$). Поэтому при достаточно больших по модулю отрицательных значениях z функция $r_1(z)$ и ее производные будут медленно меняться и для уравнения (22) будет применимо квазиклассическое приближение. Если условие применимости квазиклассического приближения для (22) выполнено при всех требуемых значениях z , то, возвращаясь к старым переменным, получим приближенное решение уравнения (21) в прежнем виде, но с заменой функции $r(x)$ на $r(x) - 1/(4x^2)$.

Так, например, при решении в сферических координатах уравнения Шредингера

$$-\frac{1}{2} R'' + \left[U(r) + \frac{l(l+1)}{2r^2} \right] R = ER$$

для радиальной части волновой функции $R(r)$, где r — расстояние от начала координат, $U(r)$ — потенциальная энергия, E — полная энергия частицы, $l=0, 1, \dots$ — орбитальное квантовое

число, в квазиклассическом приближении получаем выражение

$$R(r) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\xi}{p}} [AJ_{1/3}(\xi) + BJ_{-1/3}(\xi)], & r \geq r_0, \\ \sqrt{\frac{\xi}{p}} [CI_{1/3}(\xi) + DK_{1/3}(\xi)], & r \leq r_0, \end{cases}$$

где

$$p = p(r) = \sqrt{2[E - U(r)] - \frac{(l + 1/2)^2}{r^2}},$$

$$\xi = \xi(r) = \left| \int_{r_0}^r p(r') dr' \right|,$$

r_0 — корень уравнения $p(r) = 0$ (мы предполагаем, что этот корень простой).

Так как функция $R(r)$ должна быть ограниченной при $r \rightarrow 0$, т. е. $\xi \rightarrow \infty$, следует положить $C = 0$. Из условия сопряжения при $r = r_0$ функций $R(r)$ и $R'(r)$ постоянные A, B можно выразить через постоянную D . Разлагая подкоренное выражение в формуле для $p(r)$ по степеням $r - r_0$, нетрудно убедиться в том, что функции $p(r)/\sqrt{|r - r_0|}$, $\xi(r)/|r - r_0|^{3/2}$ и их первые производные непрерывны при $r = r_0$. Поэтому из условий сопряжения функций $R(r)$ и $R'(r)$ в точке $r = r_0$ вытекают аналогичные условия сопряжения функции

$$\Phi(r) = \left(\frac{\xi}{2}\right)^{1/3} \sqrt{\frac{p}{\xi}} R(r)$$

и ее производной. Имеем

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{A(\xi/2)^{2/3}}{\Gamma(4/3)} + \frac{B}{\Gamma(2/3)} + O[(r - r_0)^3], & r \geq r_0, \\ \frac{D\pi}{2\sin(\pi/3)} \left[\frac{1}{\Gamma(2/3)} - \frac{(\xi/2)^{2/3}}{\Gamma(4/3)} \right] + O[(r - r_0)^3], & r \leq r_0. \end{cases}$$

Так как функция $\xi^{2/3}/|r - r_0|$ непрерывна при $r = r_0$, то сравнение коэффициентов при различных степенях $r - r_0$ дает

$$A = B = \frac{\pi}{\sqrt{3}} D.$$

4. Асимптотика цилиндрических функций при больших значениях порядка. Формулы Лангера. Изложенный выше метод можно использовать для нахождения асимптотики цилиндрических функций при больших значениях порядка ν . Для этого приведем уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

к виду (21)* заменой $u(x) = \sqrt{x} y(\nu x)$ (см. (14.4)). Функция $u(x)$

удовлетворяет уравнению

$$u'' + r(x)u = 0, \quad r(x) = v^2 - \frac{v^2 - 1/4}{x^2}.$$

В данном случае можно воспользоваться соображениями, развитыми в предыдущем пункте, и положить $x = e^z$, $u = e^{z/2}v(z)$. Тогда приходим к уравнению

$$v'' + r_1(z)v = 0, \quad r_1(z) = v^2(e^{2z} - 1). \quad (23)$$

Так как $v \rightarrow \infty$, то для уравнения (23) применимо квазиклассическое приближение. В старых переменных это приближение для функции $u(x)$ имеет вид

$$u(x) = \sqrt{\frac{\xi}{p}} \cdot \begin{cases} AI_{1/3}(\xi) + BK_{1/3}(\xi), & x \leq 1, \\ CH_{1/3}^{(1)}(\xi) + DH_{1/3}^{(2)}(\xi), & x \geq 1. \end{cases} \quad (24)$$

Здесь

$$p = p(x) = vs/x, \quad s = \sqrt{|1 - x^2|}, \\ \xi = \xi(x) = \left| \int_1^x p(t) dt \right| = \begin{cases} v(\operatorname{arth} s - s), & x \leq 1, \\ v(s - \operatorname{arctg} s), & x \geq 1. \end{cases}$$

Положим, например, $u(x) = \sqrt{x} H_v^{(1)}(vx)$. Для определения коэффициентов C, D сравним главные члены асимптотики при $x \rightarrow \infty$ в левой и правой частях (24). Так как при $x \rightarrow \infty$ и фиксированном v

$$s(x) = x + O(1/x), \quad \xi(x) = v(x - \pi/2) + O(1/x),$$

то

$$\begin{aligned} \sqrt{x} H_v^{(1)}(vx) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi v}} \exp \left\{ i \left(vx - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi v}} \left\{ C \exp \left\{ i \left(v \left(x - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} + \right. \\ &\quad \left. + D \exp \left\{ -i \left(v \left(x - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right\}, \end{aligned}$$

откуда

$$D = 0, \quad C = e^{i\pi/6}.$$

Коэффициенты A, B определяются из условий сопряжения функций $u(x)$ и $u'(x)$ при $x = 1$ рассмотренным выше способом. В результате получим

$$A = -2i, \quad B = \frac{2}{\pi} e^{-i\pi/3},$$

т. е. в квазиклассическом приближении при больших значениях v

$$H_v^{(1)}(vx) = \begin{cases} 2 \sqrt{\frac{\operatorname{arth} s}{s} - 1} \left[-i I_{1/3}(\xi) + \frac{e^{-i\pi/3}}{\pi} K_{1/3}(\xi) \right], & x \leq 1, \\ \sqrt{1 - \frac{\operatorname{arctg} s}{s}} e^{i\pi/6} H_{1/3}^{(1)}(\xi), & x \geq 1. \end{cases} \quad (25)$$

Приравнявая действительные части в формуле (25), получим квазиклассическое приближение для функции Бесселя $J_\nu(\nu x)$ при больших значениях ν :

$$J_\nu(\nu x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\operatorname{arth} s}{s}} - 1 K_{1/3}(\xi), & x \leq 1, \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{\operatorname{arctg} s}{s}} [J_{-1/3}(\xi) + J_{1/3}(\xi)], & x \geq 1. \end{cases} \quad (26)$$

Формулы (25), (26) называются *формулами Лангера*. Как показывают точные оценки, они дают равномерное приближение для цилиндрических функций с погрешностью $O(1/\nu^{1/3})^*$. Интересно отметить, что формула (26) дает правильное поведение функции $J_\nu(\nu x)$ при $x \rightarrow 0$, несмотря на то, что она была получена с помощью асимптотических представлений для цилиндрических функций при $x \rightarrow \infty$.

5. Определение собственных значений энергии для уравнения Шредингера в квазиклассическом приближении. Формула Бора — Зоммерфельда. Решения уравнения Шредингера

$$-\frac{1}{2} \psi''(x) + U(x) \psi(x) = E \psi(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (27)$$

описывающего движение частиц в поле с потенциальной энергией $U(x)$, могут быть найдены в явной форме лишь для некоторых частных видов $U(x)$ (E — полная энергия частицы; мы используем систему единиц, в которой масса частицы m и постоянная Планка $\hbar$ равны единице). Это возможно, например, когда (27) удастся свести к обобщенному уравнению гипергеометрического типа (см. теорему в § 9, п. 2). В связи с этим имеют большое значение методы приближенного решения уравнения (27).

Решим задачу о нахождении собственных значений энергии для уравнения Шредингера (27) в квазиклассическом приближении. Требуется найти такие значения энергии E , для которых $E - U(x) < 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$, а функция $\psi(x)$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1. \quad (28)$$

Пусть

$$E - U(x) \geq 0, \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

(эту область называют *областью классического движения*), и пусть

$$E - U(x) < 0, \quad x < x_1, \quad x > x_2,$$

где x_1, x_2 — простые корни уравнения $E = U(x)$ (точки x_1, x_2 называют в квантовой механике *точками поворота*).

*) Langer R. E. On the asymptotic solutions of ordinary differential equations with an application to the Bessel functions of large order.—Trans. Amer. Math. Soc., 1931, 33, p. 23—64.

При решении поставленной задачи будем предполагать, что интегралы $\int_{-\infty}^{x_1} p(x) dx, \int_{x_2}^{\infty} p(x) dx$ расходятся ($p(x) = \sqrt{2|E - U(x)|}$), а величина $\int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$ является достаточно большой. В квазиклассическом приближении при $-\infty < x \leq x_2$ имеем

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\xi}{p}} [A_1 J_{1/3}(\xi) + B_1 K_{1/3}(\xi)], & x \leq x_1, \\ \sqrt{\frac{\xi}{p}} [A_2 J_{-1/3}(\xi) + B_2 J_{1/3}(\xi)], & x_1 \leq x \leq x_2, \end{cases} \quad (29)$$

$$\xi = \left| \int_{x_1}^x p(s) ds \right|.$$

Чтобы сходилась интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx$, мы должны положить $A_1 = 0$. Постоянные A_2, B_2 можно выразить через B_1 с помощью условия сопряжения выражений для $\psi(x)$ и $\psi'(x)$ при $x = x_1$ (см. п. 3). Это дает $A_2 = B_2 = (\pi/\sqrt{3})B_1$. Таким образом, при $x_1 \leq x \leq x_2$

$$\psi(x) = A_2 \sqrt{\frac{\xi}{p}} [J_{-1/3}(\xi) + J_{1/3}(\xi)]. \quad (30)$$

Рассмотрим значения x , для которых величина $\xi(x)$ является достаточно большой. Для таких значений x можно воспользоваться асимптотическим представлением для $J_{\pm 1/3}(z)$:

$$J_{\pm 1/3}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z \mp \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right).$$

В результате получим

$$\psi(x) = \frac{c_1}{\sqrt{p(x)}} \cos\left(\int_{x_1}^x p(s) ds - \frac{\pi}{4}\right), \quad (31)$$

где c_1 — постоянная.

Проводя подобные же рассуждения, мы можем получить выражение для функции $\psi(x)$ при $x_1 < x \leq x_2$, исходя из поведения этой функции при $x > x_2$. Если рассмотреть значения x , для которых величина $\int_x^{x_2} p(s) ds$ достаточно велика, то в результате получим

$$\psi(x) = \frac{c_2}{\sqrt{p(x)}} \cos\left(\int_x^{x_2} p(s) ds - \frac{\pi}{4}\right), \quad (32)$$

где c_2 — постоянная.

Рассмотрим значения x , для которых как $\int_{x_1}^x p(s) ds$, так и

$\int_x^{x_2} p(s) ds$ велики. В этом случае для функции $\psi(x)$ мы имеем два выражения — (31) и (32). Эти выражения будут совпадать лишь в том случае, если выполнено условие

$$\int_{x_1}^x p(s) ds + \int_x^{x_2} p(s) ds = \int_{x_1}^{x_2} p(s) ds = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (33)$$

где $n = 0, 1, \dots$. Нетрудно видеть, что n является числом нулей функции $\psi(x)$ (эта функция может обращаться в нуль лишь при $x_1 < x < x_2$). При этом $c_2 = (-1)^n c_1$. Таким образом, в квазиклассическом приближении значения энергии дискретного спектра $E = E_n$ ($n = 0, 1, \dots$) должны выбираться из условия (33). Это условие в квантовой механике называют *условием Бора — Зоммерфельда*.

Можно получить условие Бора — Зоммерфельда и для частицы, движущейся в центрально-симметричном поле $U(r)$. Повторяя рассмотренные выше рассуждения и используя результаты п. 3, получим условие Бора — Зоммерфельда для определения значений энергии $E = E_n$ дискретного спектра в следующем виде:

$$\int_{r_1(E)}^{r_2(E)} p(r) dr = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (34)$$

$$p(r) = \sqrt{2 \left| E - U(r) - \frac{(l+1/2)^2}{2r^2} \right|}, \quad p(r)|_{r=r_1, r_2} = 0.$$

Примеры. 1. Найдём в квазиклассическом приближении уровни энергии частицы, движущейся в поле $U(x) = (\mu\omega^2/2)x^2$ (линейный гармонический осциллятор). В § 9 для этой задачи было получено точное решение. Если воспользоваться той же системой единиц, что и в § 9, то уравнение Шредингера (27) можно записать в виде

$$-\frac{1}{2} \psi'' + \frac{x^2}{2} \psi = \varepsilon \psi, \quad E = \hbar\omega\varepsilon.$$

В данном случае $p(x) = \sqrt{2\varepsilon - x^2}$, $x_1 = -\sqrt{2\varepsilon}$, $x_2 = \sqrt{2\varepsilon}$. Уровни энергии получаем из условия Бора — Зоммерфельда

$$\int_{-\sqrt{2\varepsilon}}^{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{2\varepsilon - x^2} dx = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (35)$$

Как известно,

$$\int \sqrt{\alpha x^2 + \beta} dx = \frac{x}{2} \sqrt{\alpha x^2 + \beta} + \frac{\beta}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}.$$

Поэтому

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2\varepsilon - x^2} dx = \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2\varepsilon - x^2}} = \varepsilon \arcsin \frac{x}{\sqrt{2\varepsilon}} \Big|_{x_1}^{x_2} = \pi \varepsilon.$$

Из условия (35) находим $\varepsilon = \varepsilon_n = n + 1/2$, что совпадает с точным решением даже в тех случаях, когда не выполняется ус-

ловие $\int_{x_1}^{x_2} p(x) dx \gg 1$.

2. Найдем в квазиклассическом приближении уровни энергии электрона в поле $U(r) = -Z/r$ (мы пользуемся атомными единицами). В данном случае в условии (34) следует положить $U(r) = -Z/r$. С помощью интегрирования по частям находим

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} p(r) dr &= r p(r) \Big|_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} \frac{r(-Z/r^2 + (l + 1/2)^2/r^3)}{\sqrt{2[E + Z/r - (l + 1/2)^2/r^2]}} dr = \\ &= Z \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{2[E r^2 + Z r - (l + 1/2)^2/2]}} + \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \frac{(l + 1/2)^2 dx}{\sqrt{2[E + Zx - (l + 1/2)^2 x^2/2]}} = \pi \left(\frac{Z}{\sqrt{-2E}} - l - \frac{1}{2} \right), \\ x &= \frac{1}{r}, \quad E < 0. \end{aligned}$$

Подставляя найденное выражение для интеграла в (34), получаем

$$E = E_{nl} = - \frac{Z^2}{2(n + l + 1)^2},$$

что совпадает с точным значением при любых значениях n, l .

ГЛАВА IV

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В главах II, III мы рассмотрели свойства классических ортогональных полиномов и функций Бесселя. Эти функции удовлетворяют дифференциальным уравнениям, которые являются частными случаями обобщенного уравнения гипергеометрического типа

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)} u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)} u = 0, \quad (1)$$

где $\sigma(z)$, $\tilde{\sigma}(z)$ — полиномы не выше второй степени, $\tilde{\tau}(z)$ — полином не выше первой степени. Используя результаты гл. I, можно изучить свойства решений произвольного обобщенного уравнения гипергеометрического типа.

С помощью замены переменных $u = \varphi(z)y$ путем специального выбора функции $\varphi(z)$ уравнения вида (1) сводятся к уравнениям гипергеометрического типа

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0, \quad (2)$$

где $\tau(z)$ — полином не выше первой степени, λ — некоторая постоянная (см. § 1). Для уравнения (2) в § 3 был указан способ построения частных решений. В настоящей главе получающиеся этим способом частные решения будут изучены более подробно.

§ 20. Уравнения гипергеометрического типа и их решения

1. Приведение к каноническому виду. Приведем уравнение (2) с помощью линейной замены независимой переменной к каноническому виду. При этом в зависимости от степени полинома $\sigma(z)$ возможны три случая.

1) Пусть $\sigma(z)$ — полином второй степени с различными корнями: $\sigma(z) = (z - a)(b - z)$, $a \neq b$ *). После замены $z = a + (b - a)s$

*) Если полином $\sigma(z)$ имеет кратные корни, то уравнение (2) может быть сведено к уравнению гипергеометрического типа, для которого $\sigma(z)$ является полиномом первой степени (см. § 1).

приходим к уравнению

$$s(1-s)y'' + \frac{1}{b-a}\tau[a+(b-a)s]y' + \lambda y = 0.$$

Очевидно, всегда можно так подобрать параметры α , β , γ , чтобы записать полученное уравнение в виде

$$s(1-s)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)s]y' - \alpha\beta y = 0.$$

Это уравнение называется *гипергеометрическим уравнением**).

2) Пусть $\sigma(z)$ — полином первой степени: $\sigma(z) = z - a$. Полагая $z = a + bs$, запишем уравнение (2) в виде

$$sy'' + \tau(a+bs)y' + \lambda by = 0.$$

Если $\tau'(z) = 0$, то это уравнение при любом значении b является уравнением Ломмеля (14.4), решения которого выражаются через цилиндрические функции. Если же $\tau'(z) \neq 0$, то при $b = -1/\tau'(z)$ имеем

$$\tau(a+bs) = \tau(a) + \tau'(a)bs = \tau(a) - s.$$

Введем обозначения $\gamma = \tau(a)$, $\alpha = -\lambda b$. Тогда уравнение примет вид

$$sy'' + (\gamma - s)y' - \alpha y = 0.$$

Это уравнение называется *вырожденным гипергеометрическим уравнением*.

3) Если функция $\sigma(z)$ не зависит от z , то можно считать $\sigma(z) = 1$. При $\tau'(z) = 0$ уравнение (2) будет линейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами. Если же $\tau'(z) \neq 0$, то с помощью замены $z = a + bs$ уравнение (2) можно записать в виде

$$y'' + b\tau(a+bs)y' + \lambda b^2y = 0.$$

Подбором постоянных a , b , v полученное уравнение может быть приведено к уравнению

$$y'' - 2sy' + 2vy = 0,$$

которое называется *уравнением Эрмита* (при $v = n$ оно совпадает с уравнением для полиномов Эрмита).

2. Преобразование уравнений гипергеометрического типа в уравнения того же типа. Уравнение (2) является частным случаем уравнения (1) при $\tau(z) = \tau(z)$, $\sigma(z) = \lambda\sigma(z)$. Поэтому его можно преобразовать в уравнение того же типа с помощью замены $u = \varphi(z)y$ (см. § 1), если функция $\varphi(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\varphi'/\varphi = \pi(z)/\sigma(z),$$

где

$$\pi(z) = \frac{\sigma' - \tau}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tau}{2}\right)^2 - \kappa\sigma}, \quad \kappa = \lambda - k.$$

*) Гипергеометрическое уравнение часто называют также *уравнением Гаусса*.

Постоянная κ выбирается из условия, чтобы дискриминант полинома второй степени, стоящего под корнем, был равен нулю.

Для гипергеометрического уравнения

$$z(1-z)u'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]u' - \alpha\beta u = 0 \quad (3)$$

имеем

$$\left(\frac{\sigma' - \tau}{2}\right)^2 - \kappa\sigma = \left[\frac{1 - \gamma + (\alpha + \beta - 1)z}{2}\right]^2 - \kappa z(1-z).$$

Приравняв пулю дискриминант этого квадратного трехчлена, получим следующие возможные значения κ :

$$\kappa_1 = (1 - \gamma)(\alpha + \beta - \gamma), \quad \kappa_2 = 0.$$

В случае, когда $\kappa = (1 - \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)$, возможны следующие виды полинома $\pi(z)$ и функции $\varphi(z)$:

а) $\pi(z) = (1 - \gamma)(1 - z)$, $\varphi(z) = z^{1-\gamma}$;

б) $\pi(z) = (\alpha + \beta - \gamma)z$, $\varphi(z) = (1 - z)^{\gamma-\alpha-\beta}$.

После замены $u = \varphi(z)y$ при $\varphi(z) = z^{1-\gamma}$ приходим к уравнению

$$z(1-z)y'' + [2 - \gamma - (\alpha + \beta - 2\gamma + 3)z]y' - (\alpha - \gamma + 1)(\beta - \gamma + 1)y = 0.$$

Это уравнение можно записать в каноническом виде:

$$z(1-z)y'' + [\gamma' - (\alpha' + \beta' + 1)z]y' - \alpha'\beta'y = 0, \quad (4)$$

если положить $\alpha' = \alpha - \gamma + 1$, $\beta' = \beta - \gamma + 1$, $\gamma' = 2 - \gamma$. Аналогичным образом после замены $u = \varphi(z)y$ при $\varphi(z) = (1 - z)^{\gamma-\alpha-\beta}$ приходим к уравнению (4) при $\alpha' = \gamma - \alpha$, $\beta' = \gamma - \beta$, $\gamma' = \gamma$.

Пусть $u(z) = f(\alpha, \beta, \gamma, z)$ есть частное решение уравнения (3). Функция $y(z) = u(z)/\varphi(z)$ удовлетворяет гипергеометрическому уравнению с параметрами α' , β' , γ' . Поэтому частным решением уравнения (3) будет также функция $u(z) = \varphi(z)f(\alpha', \beta', \gamma', z)$. В результате при $\kappa = (1 - \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)$ мы приходим к следующим частным решениям уравнения (3):

$$u_1(z) = f(\alpha, \beta, \gamma, z),$$

$$u_2(z) = z^{1-\gamma}f(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z), \quad (5)$$

$$u_3(z) = (1 - z)^{\gamma-\alpha-\beta}f(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, z).$$

Аналогичное преобразование, соответствующее $\kappa = 0$, не представляет интереса, так как оно является результатом последовательного применения двух рассмотренных выше преобразований.

Уравнение (3) не меняется при одновременной замене α на β и β на α . Поэтому оно имеет также решение

$$u_4(z) = f(\beta, \alpha, \gamma, z). \quad (5a)$$

Подобным же образом для вырожденного гипергеометрического уравнения

$$zu'' + (\gamma - z)u' - \alpha u = 0 \quad (6)$$

по частному решению $u_1(z) = f(\alpha, \gamma, z)$ можно построить решения

$$u_2(z) = z^{1-\gamma} f(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z), \quad u_3(z) = e^z f(\gamma - \alpha, \gamma, -z). \quad (7)$$

Для уравнения Эрмита

$$u'' - 2zu' + 2\lambda u = 0 \quad (8)$$

по частному решению $u_1(z) = f_v(z)$ можно построить решение

$$u_2(z) = e^{-z^2} f_{-v-1}(iz). \quad (9a)$$

Так как уравнение (8) не меняется при замене z на $-z$, то мы имеем также решения

$$u_3(z) = f_v(-z), \quad u_4(z) = e^{-z^2} f_{-v-1}(-iz). \quad (9b)$$

3. Гипергеометрическая и вырожденная гипергеометрическая функции. Перейдем к конкретному построению частных решений для уравнений (3), (6). Как было показано в § 3, уравнение гипергеометрического типа

$$\sigma(z)u'' + \tau(z)u' + \lambda u = 0$$

имеет частные решения вида

$$u(z) = \frac{C_v}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^v(s) \rho(s)}{(s-z)^{v+1}} ds. \quad (9)$$

Здесь $\rho(z)$ — решение дифференциального уравнения $(\sigma\rho)' = \tau\rho$, v — корень уравнения $\lambda + v\tau' + (1/2)v(v-1)\sigma'' = 0$, а контур C выбирается из условия

$$\left. \frac{\sigma^{v+1}(s) \rho(s)}{(s-z)^{v+2}} \right|_{s_1, s_2} = 0 \quad (10)$$

(s_1, s_2 — концы контура).

Чтобы упростить последующие рассуждения, построим частные решения уравнений (3), (6) при дополнительном предположении $z > 0$. Кроме того, при построении решений уравнения (3) будем предполагать, что $z < 1$.

Для уравнения (3)

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= z(1-z), \quad \rho(z) = z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma}, \\ v &= -\alpha \quad (\text{или } v = -\beta); \end{aligned}$$

для уравнения (6)

$$\sigma(z) = z, \quad \rho(z) = z^{\gamma-1} e^{-z}, \quad v = -\alpha.$$

Условие (10) для уравнения (3) принимает вид

$$s^{\gamma-\alpha} (1-s)^{\beta-\gamma+1} (s-z)^{\alpha-2} \Big|_{s_1, s_2} = 0.$$

Этому условию можно удовлетворить, если при определенных ограничениях, наложенных на параметры α, β, γ , в качестве концов контура C выбрать точки $s = 0, 1, z, \infty$. Для построения

частных решений, имеющих простое поведение в окрестности точек $z=0, 1, \infty$, в качестве контуров C удобно выбрать прямые линии, соединяющие точки $s=0, 1, \infty$ с точкой $s=z$. Параметрическое представление этих контуров удобно взять в виде

$$\begin{aligned} s &= zt, & \operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \alpha > 2, \\ s &= 1 - (1 - z)t, & \operatorname{Re} \gamma < \operatorname{Re} \beta + 1, \quad \operatorname{Re} \alpha > 2, \\ s &= z/t, & \operatorname{Re} \beta > 1, \quad \operatorname{Re} \alpha > 2, \end{aligned} \quad (11)$$

где $0 \leq t \leq 1$.

Аналогичным образом для решений уравнения (6) приходим к следующим видам контуров:

$$\begin{aligned} s &= zt, & \operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \alpha > 2, & \quad 0 \leq t \leq 1, \\ s &= z(1 + t), & \operatorname{Re} \alpha > 2, & \quad 0 \leq t < \infty. \end{aligned} \quad (12)$$

Использование контура $s=zt$ ($0 \leq t \leq 1$) для уравнений (3) и (6) дает следующие частные решения, получаемые по формуле (9):

$$u_1(z) = f(\alpha, \beta, \gamma, z) =$$

$$= C(\alpha, \beta, \gamma) (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} \int_0^1 t^{\gamma - \alpha - 1} (1 - t)^{\alpha - 1} (1 - zt)^{-\beta} dt,$$

$$u_1(z) = f(\alpha, \gamma, z) = C(\alpha, \gamma) e^z \int_0^1 t^{\gamma - \alpha - 1} (1 - t)^{\alpha - 1} e^{-zt} dt,$$

$$\operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \alpha > 2.$$

Нормировочные постоянные $C(\alpha, \beta, \gamma)$ и $C(\alpha, \gamma)$ удобно выбрать из условий

$$f(\alpha, \beta, \gamma, 0) = f(\alpha, \gamma, 0) = 1,$$

откуда

$$C(\alpha, \beta, \gamma) = C(\alpha, \gamma) = \frac{1}{B(\alpha, \gamma - \alpha)} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)}.$$

Здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция, $B(u, v)$ — бета-функция (см. Дополнение А).

Более простые интегральные представления для решений уравнений (3), (6) получаются, если вместо решений $f(\alpha, \beta, \gamma, z)$ и $f(\alpha, \gamma, z)$ использовать решения $(1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} f(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, z)$ и $e^z f(\gamma - \alpha, \gamma, -z)$. В результате при $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \alpha + 2$ приходим к следующим решениям уравнений (3), (6):

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 t^{\alpha - 1} (1 - t)^{\gamma - \alpha - 1} (1 - zt)^{-\beta} dt, \quad (13)$$

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 t^{\alpha - 1} (1 - t)^{\gamma - \alpha - 1} e^{zt} dt. \quad (14)$$

Функция $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ называется *гипергеометрической функцией*, а $F(\alpha, \gamma, z)$ — *вырожденной гипергеометрической функцией*.

Заметим, что

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 0) = F(\alpha, \gamma, 0) = 1.$$

Выясним, на какую максимальную область значений аргумента z и параметров можно аналитически продолжить функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ и $F(\alpha, \gamma, z)$ с помощью интегральных представлений (13), (14), опираясь на теорему об аналитичности интеграла, зависящего от параметра (см. теорему 2 из § 3).

Для определения области аналитичности необходимо найти область, в которой интеграл (13) будет равномерно сходиться относительно переменной z и соответствующих параметров.

Имеем

$$t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta} = t^{\delta-1}(1-t)^{\delta-1}\psi_{\delta}(t, z),$$

где $\psi_{\delta}(t, z) = t^{\alpha-\delta}(1-t)^{\gamma-\alpha-\delta}(1-zt)^{-\beta}$ ($\delta > 0$). Функция $\psi_{\delta}(t, z)$ непрерывна по совокупности переменных в замкнутой области $0 \leq t \leq 1$, $\delta \leq \operatorname{Re} \alpha \leq N$, $\delta \leq \operatorname{Re}(\gamma - \alpha) \leq N$, $|\beta| \leq N$, $|z| \leq N$, $|1-zt| \geq \delta$ при $t \in [0, 1]$. Поэтому она ограничена в рассматриваемой области, т. е. существует такая постоянная C , что $|\psi_{\delta}(t, z)| \leq C$.

Следовательно, в этой области

$$|t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta}| \leq Ct^{\delta-1}(1-t)^{\delta-1}.$$

Так как интеграл $\int_0^1 t^{\delta-1}(1-t)^{\delta-1} dt$ сходится, то интеграл (13), определяющий функцию $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, сходится в этой области равномерно и является поэтому аналитической функцией каждой из переменных в силу аналитичности функции $\Psi_{\delta}(t, z)$ относительно z и параметров α, β, γ .

Ввиду произвола в выборе постоянных δ и N функция $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ будет аналитической функцией каждой из переменных при $\operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \alpha > 0$, если в комплексной плоскости переменной z сделать разрез, соответствующий таким значениям z , для которых $1-zt=0$ при $t \in [0, 1]$. Это соответствует разрезу в плоскости переменной z вдоль вещественной оси при $z \geq 1$.

Аналогично можно доказать, что функция $F(\alpha, \gamma, z)$ будет аналитической функцией каждой из переменных при $\operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \alpha > 0$ и произвольных значениях z .

Для аналитического продолжения функций $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ и $F(\alpha, \gamma, z)$ на более широкую область изменения параметров удобно опираться на рекуррентные соотношения для этих функций.

4. Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования для функций $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $F(\alpha, \gamma, z)$. С помощью интегральных представлений (13), (14) получаем следующие формулы

дифференцирования:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} F(\alpha, \beta, \gamma, z) &= \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, z), \\ \frac{d}{dz} F(\alpha, \gamma, z) &= \frac{\alpha}{\gamma} F(\alpha + 1, \gamma + 1, z).\end{aligned}\quad (15)$$

Функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ и $F(\alpha, \gamma, z)$ удовлетворяют целому ряду различных рекуррентных соотношений. Например, используя формулы дифференцирования (15) и дифференциальные уравнения (3), (6), приходим к рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) &= (\alpha + 1)(\beta + 1)z(1 - z)\varphi(\alpha + 2, \beta + 2, \gamma + 2, z) + \\ &+ [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]\varphi(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, z),\end{aligned}\quad (16)$$

$$\varphi(\alpha, \gamma, z) = (\alpha + 1)z\varphi(\alpha + 2, \gamma + 2, z) + (\gamma - z)\varphi(\alpha + 1, \gamma + 1, z).\quad (17)$$

Здесь

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, z),\quad (18)$$

$$\varphi(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \gamma, z).\quad (19)$$

Рассмотрим общий метод получения рекуррентных соотношений для функций $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$. С помощью метода, изложенного в § 4, можно показать, что между любыми тремя функциями $F(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, z)$ ($i = 1, 2, 3$) в случае, когда разности $\alpha_i - \alpha_k$, $\beta_i - \beta_k$, $\gamma_i - \gamma_k$ — целые числа, существует линейное соотношение вида

$$\sum_{i=1}^3 C_i(z) F(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, z) = 0,$$

в котором коэффициенты $C_i(z)$ — полиномы.

Для доказательства рассмотрим $\sum_i C_i(z) F(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, z)$. Покажем, что коэффициенты $C_i = C_i(z)$ можно выбрать таким образом, чтобы рассматриваемая комбинация была равна нулю. При любом фиксированном значении z , используя интегральное представление (13), имеем

$$\sum_i C_i F(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, z) = \int_0^1 t^{\alpha_0-1} (1-t)^{\gamma_0-\alpha_0-1} (1-zt)^{-\beta_0} P(t) dt.$$

Здесь α_0 , $\gamma_0 - \alpha_0$, $-\beta_0$ суть те из значений α_i , $\gamma_i - \alpha_i$, $-\beta_i$, которые имеют наименьшую вещественную часть; $P(t)$ — некоторый полином. Коэффициенты $C_i = C_i(z)$ выберем из условия

$$\begin{aligned}t^{\alpha_0-1} (1-t)^{\gamma_0-\alpha_0-1} (1-zt)^{-\beta_0} P(t) &= \\ &= \frac{d}{dt} [t^{\alpha_0} (1-t)^{\gamma_0-\alpha_0} (1-zt)^{1-\beta_0} Q(t)],\end{aligned}\quad (20)$$

где $Q(t)$ — полином. В результате получим

$$\sum_i C_i F(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, z) = t^{\alpha_0} (1-t)^{\gamma_0-\beta_0} (1-zt)^{1-\beta_0} Q(t) \Big|_0^1.$$

Так как $\operatorname{Re}(\gamma_0 - \alpha_0) = \min \operatorname{Re}(\gamma_i - \alpha_i) > 0$, $\operatorname{Re} \alpha_0 = \min \operatorname{Re} \alpha_i > 0$, то подстановка обращается в нуль, и при подобранных таким способом коэффициентах $C_i = C_i(z)$ будет иметь место линейное соотношение

$$\sum_i C_i F(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, z) = 0.$$

Проводя те же рассуждения, что и в § 4, нетрудно убедиться в том, что коэффициенты $C_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$) с точностью до общего множителя являются полиномами.

Аналогичным образом выводятся рекуррентные соотношения для вырожденных гипергеометрических функций $F(\alpha, \gamma, z)$ с помощью (14):

$$\sum_i C_i F(\alpha_i, \gamma_i, z) = \int_0^1 t^{\alpha_0-1} (1-t)^{\gamma_0-\alpha_0-1} e^{zt} P(t) dt,$$

где $P(t)$ — некоторый полином. Коэффициенты $C_i = C_i(z)$ выберем из условия

$$t^{\alpha_0-1} (1-t)^{\gamma_0-\alpha_0-1} e^{zt} P(t) = \frac{d}{dt} [t^{\alpha_0} (1-t)^{\gamma_0-\alpha_0} e^{zt} Q(t)], \quad (21)$$

где $Q(t)$ — полином. В результате получим искомое соотношение, так как

$$\sum_i C_i F(\alpha_i, \gamma_i, z) = t^{\alpha_0} (1-t)^{\gamma_0-\alpha_0} e^{zt} Q(t) \Big|_0^1 = 0$$

при $\operatorname{Re} \gamma_i > \operatorname{Re} \alpha_i > 0$.

В виде примера выведем рекуррентное соотношение, связывающее функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ и $F(\alpha, \beta, \gamma \pm 1, z)$. В этом случае $\gamma_1 = \gamma - 1$, $\gamma_2 = \gamma$, $\gamma_3 = \gamma + 1$, $\alpha_0 = \alpha$, $\beta_0 = \beta$, $\gamma_0 - \alpha_0 = \gamma - \alpha - 1$. С точностью до множителя, не зависящего от t , полином $P(t)$ имеет вид

$$P(t) = C_1(\gamma - \alpha)(\gamma - \alpha - 1) + C_2(\gamma - 1)(\gamma - \alpha)(1-t) + \\ + C_2\gamma(\gamma - 1)(1-t)^2.$$

Степень полинома $Q(t)$ равна нулю. Поэтому можно положить $Q(t) = 1$. В результате (20) примет вид

$$t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-2} (1-zt)^{-\beta} P(t) = \frac{d}{dt} [t^{\alpha} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} (1-zt)^{-\beta+1}].$$

Отсюда

$$P(t) = \alpha(1-zt)(1-t) - (\gamma - \alpha - 1)t(1-zt) + z(\beta - 1)t(1-t).$$

Полагая $t = 1$, получим

$$C_1 = -\frac{1-z}{\gamma-\alpha}.$$

Приравнивая коэффициенты при t^2 и t , находим

$$C_2 = \frac{(\gamma - 1) + (\alpha + \beta - 2\gamma + 1)z}{(\gamma - 1)(\gamma - \alpha)}, \quad C_3 = \frac{(\gamma - \beta)z}{\gamma(\gamma - 1)}.$$

В результате приходим к соотношению

$$(1 - z)\varphi(\alpha, \beta, \gamma - 1, z) = \\ = [(\gamma - 1) + (\alpha + \beta - 2\gamma + 1)z]\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) + \\ + (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)z\varphi(\alpha, \beta, \gamma + 1, z), \quad (22)$$

где функция $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$ определяется формулой (18). Аналогично можно получить соотношение

$$\varphi(\alpha, \gamma - 1, z) = (\gamma - 1 + z)\varphi(\alpha, \gamma, z) - (\gamma - \alpha)z\varphi(\alpha, \gamma + 1, z), \quad (23)$$

где функция $\varphi(\alpha, \gamma, z)$ определяется формулой (19).

Рекуррентные соотношения (16), (17), (22), (23) дают возможность аналитически продолжить функции $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $\varphi(\alpha, \gamma, z)$ на произвольные значения параметров α, β, γ . Действительно, в соотношения (16), (17) входят функции $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$ и $\varphi(\alpha, \gamma, z)$, для которых разность $\gamma - \alpha$ сохраняется. Поэтому, последовательно уменьшая в (16), (17) значения α на единицу, можно аналитически продолжить функции $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$ и $\varphi(\alpha, \gamma, z)$ на произвольные значения α при условии $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha) > 0$. От этого условия можно избавиться, если аналитически продолжить эти функции с помощью соотношений (21), (22), последовательно уменьшая в них значения γ на единицу. В результате получаем, что функции $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $\varphi(\alpha, \gamma, z)$ будут аналитическими функциями при произвольных значениях параметров.

В силу формул дифференцирования (15) имеем

$$\frac{d}{dz} \varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \alpha\beta\varphi(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, z),$$

$$\frac{d}{dz} \varphi(\alpha, \gamma, z) = \alpha\varphi(\alpha + 1, \gamma + 1, z).$$

Из этих соотношений вытекает, что производные от функций $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $\varphi(\alpha, \gamma, z)$ будут аналитическими функциями переменной z и параметров в той же области, что и сами функции. В этой же области по принципу аналитического продолжения функции $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $\varphi(\alpha, \gamma, z)$ будут удовлетворять дифференциальным уравнениям (3) и (6) соответственно.

Метод получения рекуррентных соотношений для функций $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $F(\alpha, \gamma, z)$ был рассмотрен при некоторых ограничениях на параметры. С помощью принципа аналитического продолжения полученные рекуррентные соотношения можно продолжить на более широкую область изменения параметров.

5. Совокупность решений гипергеометрического и вырожденного гипергеометрического уравнения. Мы получили некоторые решения уравнений (3), (6) с помощью (9), используя контур $s = zt$ ($0 \leq t \leq 1$). Рассмотрим решения уравнений (3), (6), соответствующие другим выборам контура C .

Рассмотрение других контуров для гипергеометрического уравнения приводит к следующим парам линейно независимых решений:

$$\begin{aligned} 1) \text{ контур } s = 1 - (1 - z)t \quad (0 \leq t \leq 1); \\ u_1(z) = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - z), \\ u_2(z) = (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - z); \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ контур } s = z/t \quad (0 \leq t \leq 1): \\ u_1(z) = z^{-\alpha} F(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, 1/z), \\ u_2(z) = z^{-\beta} F(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, 1/z). \end{aligned} \quad (25)$$

Для вырожденного гипергеометрического уравнения контур $s = z(1 + t)$ ($0 \leq t \leq \infty$) приводит к решению

$$u_1(z) = G(\alpha, \gamma, z) = C(\alpha, \gamma) \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{\alpha-1} (1+t)^{\gamma-\alpha-1} dt.$$

Функция $G(\alpha, \gamma, z)$ называется *вырожденной гипергеометрической функцией второго рода*. Интеграл, определяющий функцию $G(\alpha, \gamma, z)$, является интегралом Лапласа, и поэтому по лемме Ватсона (см. Дополнение Б)

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{\alpha} G(\alpha, \gamma, z) = C(\alpha, \gamma) \Gamma(\alpha).$$

Удобно выбрать $C(\alpha, \gamma) = 1/\Gamma(\alpha)$, чтобы рассмотренный предел равнялся единице. Отсюда

$$\begin{aligned} G(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{\alpha-1} (1+t)^{\gamma-\alpha-1} dt, \\ \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad |\arg z| < \pi/2. \end{aligned} \quad (26)$$

По решению $u_1(z) = G(\alpha, \gamma, z)$, полагая в (7) $f(\alpha, \gamma, z) = G(\alpha, \gamma, z)$, можно построить второе линейно независимое решение

$$u_2(z) = e^z G(\gamma - \alpha, \gamma, -z).$$

Интеграл, определяющий функцию $G(\alpha, \gamma, z)$, является интегралом Лапласа, рассмотренным в примере к теореме 1 из Дополнения Б. В соответствии с результатами, полученными в этом примере, функция $G(\alpha, \gamma, z)$ будет аналитической функцией каждой из переменных при $|\arg z| < 3\pi/2$, $z \neq 0$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$. Для этой функции справедливо следующее асимптотическое представление при $z \rightarrow \infty$, когда $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $|\arg z| \leq 3\pi/2 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$):

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma - \alpha)}{\Gamma(\alpha) z^{\alpha}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha + k)}{k! \Gamma(\gamma - \alpha - k) z^k} + O\left(\frac{1}{z^n}\right) \right]. \quad (27)$$

Для однозначности функции $G(\alpha, \gamma, z)$ достаточно сделать

разрез вдоль вещественной оси при $z < 0$ и считать, что $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Асимптотическое представление (27) остается справедливым в указанной области. От ограничения $\operatorname{Re} \alpha > 0$ можно избавиться следующим образом. Из интегрального представления (26) вытекает следующая формула дифференцирования:

$$\frac{dG(\alpha, \gamma, z)}{dz} = -\alpha G(\alpha + 1, \gamma + 1, z). \quad (28)$$

Подставляя формулы дифференцирования в дифференциальное уравнение (6), для $G(\alpha, \gamma, z)$ приходим к следующему рекуррентному соотношению:

$$G(\alpha, \gamma, z) = (\alpha + 1)zG(\alpha + 2, \gamma + 2, z) - (\gamma - z)G(\alpha + 1, \gamma + 1, z). \quad (29)$$

Последовательно уменьшая в этом соотношении α на единицу, получим аналитическое продолжение функции $G(\alpha, \gamma, z)$ при произвольных значениях α . Можно проверить, что асимптотическое представление (27) при этом сохраняется. С помощью формул дифференцирования и принципа аналитического продолжения можно убедиться в том, что функция $G(\alpha, \gamma, z)$ является решением уравнения (6) при любых значениях параметров. Заменяя в интегральном представлении (26) t на $-t$, можно получить представление, аналогичное интегральному представлению (14) для $F(\alpha, \gamma, z)$:

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^0 (-t)^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} e^{zt} dt.$$

Полученное представление отличается от интегрального представления для $F(\alpha, \gamma, z)$ лишь множителем и пределами интегрирования. Повторяя рассуждения п. 4, легко убедиться в том, что функции $G(\alpha, \gamma, z)$, $e^{i\pi\alpha} \frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \gamma, z)$ будут удовлетворять одним и тем же рекуррентным соотношениям.

6. Решения уравнения Эрмита. Уравнение Эрмита (8) является частным случаем уравнения гипергеометрического типа при $\sigma(z) = 1$, $\tau(z) = -2z$. Найдём частное решение этого уравнения по формуле (9). В данном случае $\rho(z) = e^{-z^2}$, а условию (10) при $\operatorname{Re} \nu < -2$ удовлетворяет контур $s = z + t$ ($0 \leq t < \infty$). В результате приходим к следующему решению уравнения (8):

$$u(z) = H_\nu(z) = C_\nu \int_0^\infty \exp\{-t^2 - 2zt\} t^{-\nu-1} dt.$$

Функция $H_\nu(z)$ при $C_\nu = 1/\Gamma(-\nu)$ называется *функцией Эрмита* *).

*) Нормировочный коэффициент C_ν выбран таким образом, чтобы аналитическое продолжение функции $H_\nu(z)$ по параметру ν совпадало с полиномом Эрмита $H_n(z)$ при $\nu = n$ (см. § 22).

Для определения области аналитичности функции

$$H_{\nu}(z) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^{\infty} \exp\{-t^2 - 2zt\} t^{-\nu-1} dt \quad (30)$$

необходимо пайти область, в которой интеграл равномерно сходится по z и ν . Равномерная сходимость интеграла имеет место при $\operatorname{Re} z \geq -N$, $\delta - 1 \leq -\operatorname{Re} \nu - 1 \leq N$ ($N > 0$, $\delta > 0$) в силу оценки

$$|\exp\{-t^2 - 2zt\} t^{-\nu-1}| < \exp\{-t^2 + 2Nt\} (t^{\delta-1} + t^N)$$

и сходимости интеграла

$$\int_0^{\infty} \exp\{-t^2 + 2Nt\} (t^{\delta-1} + t^N) dt.$$

Ввиду произвольности постоянных N и δ функция $H_{\nu}(z)$ будет аналитической функцией каждой из переменных при $\operatorname{Re} \nu < 0$. От ограничения $\operatorname{Re} \nu < 0$ можно избавиться рассмотренным ранее способом. Из интегрального представления (30) можно получить следующую формулу дифференцирования:

$$\frac{dH_{\nu}(z)}{dz} = 2\nu H_{\nu-1}(z). \quad (31)$$

Подставляя формулу дифференцирования (31) в дифференциальное уравнение (8), для $H_{\nu}(z)$ получим рекуррентное соотношение

$$H_{\nu}(z) = 2zH_{\nu-1}(z) - (2\nu - z)H_{\nu-2}(z). \quad (32)$$

Увеличивая в (32) последовательно значения ν на единицу, получим аналитическое продолжение функции $H_{\nu}(z)$ при произвольных значениях ν .

С помощью формулы дифференцирования (31) и принципа аналитического продолжения можно убедиться в том, что функция $H_{\nu}(z)$ является решением уравнения (8) при любых значениях ν .

В заключение заметим, что с помощью (9) и (9a) при $f_{\nu}(z) = H_{\nu}(z)$ получим также следующие решения уравнения (8):

$$\begin{aligned} u_2(z) &= H_{\nu}(-z), & u_3(z) &= e^{-z^2} H_{-\nu-1}(iz), \\ u_4(z) &= e^{-z^2} H_{-\nu-1}(-iz). \end{aligned} \quad (33)$$

§ 21. Основные свойства функций гипергеометрического типа

Найденные выше интегральные представления для функций гипергеометрического типа дают возможность получить основные свойства этих функций: разложения в степенные ряды, функциональные соотношения, асимптотические представления. При изучении различных свойств функций гипергеометрического типа мы широко будем использовать результаты гл. I.

1. Разложения в степенные ряды. Разложения в ряды по степеням z функций $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $F(\alpha, \gamma, z)$ можно получить, если воспользоваться интегральными представлениями (20.13), (20.14) и разложениями в ряды функций $(1 - zt)^{-\beta}$, e^{zt} :

$$(1 - zt)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n (zt)^n}{n!}, \quad |zt| < 1, \quad (1)$$

$$e^{zt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zt)^n}{n!},$$

где $(\beta)_0 = 1$, $(\beta)_n = \beta(\beta + 1) \dots (\beta + n - 1) = \Gamma(\beta + n)/\Gamma(\beta)$.

Если $|z| < 1$, то ряд (1) равномерно сходится при $0 \leq t \leq 1$ и в интегральном представлении можно поменять местами порядок суммирования и интегрирования. При $\operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \alpha > 0$ имеем

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, z) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} z^n \int_0^1 t^{n+\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} dt = \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} (\beta)_n \frac{\Gamma(n + \alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)}{\Gamma(n + \gamma)} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} z^n. \end{aligned} \quad (2)$$

Аналогично, для $F(\alpha, \gamma, z)$ при любых значениях z получаем

$$F(\alpha, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n n!} z^n. \quad (3)$$

Ряд (3) для функции $F(\alpha, \gamma, z)$ отличается от ряда (2) для функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ лишь отсутствием множителя $(\beta)_n$ в каждом члене ряда. Ряд (2) называется *гипергеометрическим рядом*, а (3) — *вырожденным гипергеометрическим рядом*.

По признаку Даламбера (см. замечание к теореме Вейерштрасса в § 15) ряды (2), (3) сходятся равномерно по всем переменным в любой замкнутой области их изменения, не содержащей в себе целых отрицательных и нулевых значений γ , причем для ряда (2) следует потребовать дополнительного ограничения $|z| \leq q < 1$. Поэтому эти ряды по теореме Вейерштрасса (см. § 15, п. 4) являются аналитическими функциями каждой из переменных при $\gamma \neq -k$ ($k = 0, 1, \dots$) и при дополнительном ограничении $|z| < 1$ для ряда (2). По принципу аналитического продолжения разложения (2), (3) остаются справедливыми во всей указанной области изменения переменных.

Если $\alpha = -m$ ($m = 0, 1, \dots$), то гипергеометрический ряд (2) обрывается и функция $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ будет полиномом степени m относительно z . Этот полином будет иметь смысл и при $\gamma = -k$, если $m \leq k$, так как $(\gamma)_n = (-k)_n \neq 0$ при $n \leq m$. Так как $F(\alpha, \beta, \gamma, z) = F(\beta, \alpha, \gamma, z)$, то очевидно, что тот же факт имеет место и в случае, когда $\beta = -m$. Аналогичные соображения справедливы и для (3).

Разложения в ряды вырожденной гипергеометрической функции второго рода $G(\alpha, \gamma, z)$ и функции Эрмита $H_n(z)$ могут быть получены с помощью функциональных соотношений, выражающих эти функции через функции $F(\alpha, \gamma, z)$ (см. п. 2).

При решении некоторых задач используются обобщенные гипергеометрические функции ${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q; z)$, разложения в ряды которых является обобщением разложений (2), (3):

$${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \dots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n (\beta_2)_n \dots (\beta_q)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

Ряды для этих функций могут сходиться лишь при $p \leq q + 1$, причем при $p = q + 1$ ряды сходятся лишь при $|z| < 1$. В указанных обозначениях

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z),$$

$$F(\alpha, \gamma, z) = {}_1F_1(\alpha; \gamma; z).$$

2. Функциональные соотношения и асимптотические представления. Гипергеометрические функции удовлетворяют целому ряду функциональных соотношений, связывающих гипергеометрические функции от различных значений переменных. В § 20 для гипергеометрического уравнения было получено несколько пар линейно независимых решений, выражающихся через гипергеометрические функции от аргументов z , $1 - z$, $1/z$. Так как гипергеометрическое уравнение может иметь не больше двух линейно независимых решений, то любое из решений $u(z)$ может быть представлено в виде линейной комбинации произвольной пары из этих линейно независимых решений $u_1(z)$, $u_2(z)$:

$$u(z) = C_1 u_1(z) + C_2 u_2(z). \quad (4)$$

Отметим простое свойство коэффициентов C_1, C_2 : если в некоторой области изменения величин α, β, γ, z функции $u(z)$, $u_1(z)$, $u_2(z)$ и их производные по z являются аналитическими функциями каждой из переменных, то коэффициенты $C_1 = C_1(\alpha, \beta, \gamma)$, $C_2 = C_2(\alpha, \beta, \gamma)$ будут также аналитическими функциями каждой из переменных в этой области.

Это свойство вытекает из явного вида коэффициентов C_1, C_2 :

$$C_1 = \frac{W(u, u_2)}{W(u_1, u_2)}, \quad C_2 = \frac{W(u_1, u)}{W(u_1, u_2)}, \quad (5)$$

где $W(f, g) = f(z)g'(z) - f'(z)g(z)$ — вронскиан, который для линейно независимых решений не равен нулю. Поэтому для нахождения C_1, C_2 достаточно найти их выражения при некоторых дополнительных ограничениях на параметры, а затем воспользоваться принципом аналитического продолжения.

1°. Пусть $u(z) = F(\alpha, \beta, \gamma, z)$. Для определения коэффициентов C_1, C_2 в разложении (4) мы будем пользоваться значениями

функции $u(z)$ в опорных точках $z = 0, 1, \infty$. Из интегрального представления (20.13) при $\operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta < 0$ имеем

$$\lim_{z \rightarrow 1} F(\alpha, \beta, \gamma, z) =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)},$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{F(\alpha, \beta, \gamma, z)}{(-z)^{-\beta}} =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-\beta-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} dt = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma - \beta)},$$

где $|\arg(-z)| < \pi$. Кроме того, $F(\alpha, \beta, \gamma, 0) = 1$.

Получим сначала функциональные соотношения между гипергеометрическими функциями, зависящими от одной и той же переменной z . В силу различного поведения при $z \rightarrow 0$ решения $u_1(z) = F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ и $u_2(z) = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)$ уравнения (20.3) линейно независимы. Поэтому решения $u_3(z) = (1-z)^{1-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, z)$, $u_4(z) = F(\beta, \alpha, \gamma, z)$ являются линейными комбинациями решений $u_1(z)$ и $u_2(z)$. Если $\operatorname{Re} \gamma > 1$, то коэффициенты этих линейных комбинаций легко найти, опираясь на поведение решений $u_1(z)$, $u_2(z)$, $u_3(z)$, $u_4(z)$ при $z \rightarrow 0$. В результате при $\operatorname{Re} \gamma > 1$ получаем функциональные соотношения

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{1-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, z), \quad (6)$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = F(\beta, \alpha, \gamma, z). \quad (7)$$

Аналогично можно получить соотношения

$$F(\alpha, \gamma, z) = e^z F(\gamma - \alpha, \gamma, -z), \quad (8)$$

$$G(\alpha, \gamma, z) = z^{1-\gamma} G(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z). \quad (8a)$$

По принципу аналитического продолжения функциональные соотношения (6)–(8a) остаются справедливыми при любых значениях параметров, для которых функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $F(\alpha, \gamma, z)$, $G(\alpha, \gamma, z)$ аналитичны.

Получим теперь разложения функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ по гипергеометрическим функциям от переменных $1-z$, $1/z$:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = C_1(\alpha, \beta, \gamma) F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1-z) + \\ + C_2(\alpha, \beta, \gamma) (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1-z), \quad (9)$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = D_1(\alpha, \beta, \gamma) (-z)^{-\alpha} F(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, 1/z) + \\ + D_2(\alpha, \beta, \gamma) (-z)^{-\beta} F(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, 1/z). \quad (10)$$

Если $\operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \alpha > 0$ и $\operatorname{Re} \beta < 0$, то, переходя к пределу в (9) при $z \rightarrow 1$, а в (10) при $z \rightarrow \infty$, находим

$$C_1(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)}, \quad D_2(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma - \beta)}.$$

Для определения коэффициентов $C_2(\alpha, \beta, \gamma)$, $D_1(\alpha, \beta, \gamma)$ достаточно воспользоваться в (9) функциональным соотношением (6), а в (10) соотношением (7). Это дает

$$C_2(\alpha, \beta, \gamma) = C_1(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)},$$

$$D_1(\alpha, \beta, \gamma) = D_2(\beta, \alpha, \gamma) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\gamma - \alpha)}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, z) &= \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - z) + \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} \times \\ &\times F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - z), \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, z) &= \\ &= \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\gamma - \alpha)} (-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, \frac{1}{z}\right) + \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma - \beta)} (-z)^{-\beta} F\left(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, \frac{1}{z}\right), \\ &|\arg(-z)| < \pi. \quad (12) \end{aligned}$$

Эти соотношения по принципу аналитического продолжения справедливы при любых значениях α, β, γ .

С помощью разложений (11), (12) легко пайти поведение функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ при $z \rightarrow 1$ и $z \rightarrow \infty$, если использовать ряды для гипергеометрических функций от переменных $1 - z$, $1/z$. Комбинируя соотношения (11), (12) и (6), можно, очевидно, получить еще целый ряд других функциональных соотношений, дающих возможность выразить $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ через гипергеометрические функции переменных $1/(1 - z)$, $1 - 1/z$, $1/(1 - 1/z) = z/(z - 1)$ (см. Основные формулы).

2° Аналогичным образом можно получить функциональные соотношения для вырожденных гипергеометрических функций. Имеем

$$\begin{aligned} G(\alpha, \gamma, z) &= \\ &= C_1(\alpha, \gamma) F(\alpha, \gamma, z) + C_2(\alpha, \gamma) z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z). \quad (13) \end{aligned}$$

Для нахождения коэффициента $C_2(\alpha, \gamma)$ предположим временно, что $\operatorname{Re} \gamma - 1 > \operatorname{Re} \alpha > 0$, $z > 0$ и перейдем в равенствах (13) и (20.26) к пределу при $z \rightarrow 0$. Это дает

$$\begin{aligned} C_2(\alpha, \gamma) &= \lim_{z \rightarrow 0} z^{\gamma-1} G(\alpha, \gamma, z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^{\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{\alpha-1} (1+t)^{\gamma-\alpha-1} dt = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-s} s^{\alpha-1} (z+s)^{\gamma-\alpha-1} ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-s} s^{\gamma-2} ds = \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)}. \end{aligned}$$

Для определения коэффициента $C_1(\alpha, \gamma)$ достаточно воспользоваться соотношением

$$G(\alpha, \gamma, z) = z^{1-\gamma} G(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z).$$

Это дает

$$C_1(\alpha, \gamma) = C_2(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma) = \frac{\Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma(\alpha - \gamma - 1)}.$$

Таким образом,

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma(\alpha - \gamma + 1)} F(\alpha, \gamma, z) + \\ + \frac{\Gamma(\gamma - 1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z). \quad (14)$$

Это соотношение дает возможность получить разложение функции $G(\alpha, \gamma, z)$ в ряд по степеням z (см. (3)). С помощью равенств (14), (8) можно получить представление функции $F(\alpha, \gamma, z)$ в виде линейной комбинации функций $G(\alpha, \gamma, z)$ и $e^z G(\gamma - \alpha, \gamma, -z)$. Имеем

$$e^z G(\gamma - \alpha, \gamma, -z) = \frac{\Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma(1 - \alpha)} e^z F(\gamma - \alpha, \gamma, -z) + \\ + \frac{\Gamma(\gamma - 1)}{\Gamma(\gamma - \alpha)} (-z)^{1-\gamma} e^z F(1 - \alpha, 2 - \gamma, -z) = \\ = \frac{\Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma(1 - \alpha)} F(\alpha, \gamma, z) + \frac{\Gamma(\gamma - 1)}{\Gamma(\gamma - \alpha)} (-z)^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z), \quad (15)$$

где $0 < \arg(-z) \leq \pi$. Отсюда следует, что

$$(-z)^{1-\gamma} = z^{1-\gamma} e^{\mp i\pi(1-\gamma)} = -z^{1-\gamma} e^{\pm i\pi\gamma} \quad (16)$$

при условии, что $-\pi < \arg z \leq \pi$ (знак плюс соответствует $0 < \arg z \leq \pi$).

Исключая из (14) и (15) функцию $z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)$ и используя формулу дополнения для гамма-функции, приходим к функциональному соотношению

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha)} e^{\pm i\pi\alpha} G(\alpha, \gamma, z) + \\ + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^{\pm i\pi(\alpha - \gamma)} e^z G(\gamma - \alpha, \gamma, -z) \quad (17)$$

(знак плюс соответствует $0 < \arg z \leq \pi$, знак минус соответствует $-\pi < \arg z \leq 0$). Это соотношение дает возможность получить асимптотическое представление функции $F(\alpha, \gamma, z)$ при $z \rightarrow \infty$ (см. (20.27)):

$$F(\alpha, \gamma, z) = \Gamma(\gamma) (-z)^{-\alpha} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\alpha)_k}{k! \Gamma(\gamma - \alpha - k)} \frac{1}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^n}\right) \right] + \\ + \Gamma(\gamma) e^z z^{\alpha - \gamma} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\gamma - \alpha)_k}{k! \Gamma(\gamma - k)} \frac{1}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^n}\right) \right]. \quad (18)$$

Здесь при вычислении $(-z)^{-\alpha}$ и $z^{\alpha - \gamma}$ следует соответственно считать $-\pi < \arg(-z) \leq \pi$ и $-\pi < \arg z \leq \pi$.

3° Установим теперь соотношения, связывающие решения уравнения Эрмита $H_\nu(\pm z)$ и $e^{-z^2} H_{-\nu-1}(\pm iz)$. Для этого воспользуемся формулами (4), (5). Вронскианы, входящие в (5), удобно вычислять при $z=0$, опираясь на значения $H_\nu(0)$, $H'_\nu(0)$. Эти значения легко вычисляются при $\operatorname{Re} \nu < 0$ с помощью (20.30) и формулы удвоения для гамма-функции:

$$H_\nu(0) = \frac{2^\nu \sqrt{\pi}}{\Gamma((1-\nu)/2)}, \quad H'_\nu(0) = \frac{-2^{\nu+1} \sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu/2)}. \quad (19)$$

В результате приходим к следующим функциональным соотношениям для функции Эрмита:

$$H_\nu(z) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}} e^{z^2} [e^{i\pi\nu/2} H_{-\nu-1}(iz) + e^{-i\pi\nu/2} H_{-\nu-1}(-iz)],$$

$$H_\nu(z) = e^{i\pi\nu} H_\nu(-z) + \frac{2^{\nu+1} \sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)} \exp\left\{z^2 + i \frac{\pi(\nu+1)}{2}\right\} H_{-\nu-1}(-iz),$$

$$H_\nu(z) = e^{-i\pi\nu} H_\nu(-z) + \frac{2^{\nu+1} \sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)} \exp\left\{z^2 - i \frac{\pi(\nu+1)}{2}\right\} H_{-\nu-1}(iz).$$

По принципу аналитического продолжения эти формулы остаются справедливыми при любых значениях ν .

4°. Можно получить также другой класс функциональных соотношений, связанный с симметрией дифференциального уравнения относительно замены z на $-z$. Предположим, что уравнение гипергеометрического типа

$$\sigma(z)u'' + \tau(z)u' + \lambda u = 0 \quad (20)$$

сохраняет свой вид при замене z на $-z$, т. е.

$$\sigma(-z) = \sigma(z), \quad \tau(-z) = -\tau(z).$$

В этом случае

$$\sigma(z) = \sigma_1(z^2), \quad \tau(z) = \mu z,$$

где $\sigma_1(s)$ — полином не выше первой степени относительно s , μ — постоянная. После замены $s = z^2$, $u(z) = v(s)$ уравнение (20) примет вид

$$4s\sigma_1(s)v'' + 2[\sigma_1(s) + \mu s]v' + \lambda v = 0. \quad (21)$$

Это уравнение является по-прежнему уравнением гипергеометрического типа. Поэтому любое решение $u(z)$ уравнения (20) можно представить в виде линейной комбинации любых двух линейно независимых решений $v_1(s)$, $v_2(s)$ уравнения (21). В результате приходим к функциональным соотношениям, связывающим функции гипергеометрического типа от переменной z с функциями гипергеометрического типа от переменной $s = z^2$.

Рассмотрим несколько характерных примеров.

Примеры. 1. Пусть $u(z)$ удовлетворяет уравнению

$$(1-z^2)u'' - (\alpha + \beta + 1)zu' - \alpha\beta u = 0;$$

которое не меняется при замене z на $-z$. Если заменой

$t = (1+z)/2$ привести это уравнение к каноническому виду, то нетрудно убедиться, что решением уравнения будет функция

$$u_1(z) = F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha + \beta + 1}{2}, \frac{1+z}{2}\right).$$

С другой стороны, после замены $s = z^2$, $u(z) = v(s)$ приходим к уравнению

$$s(1-s)v'' + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha + \beta + 2}{2}s\right)v' - \frac{\alpha\beta}{4}v = 0,$$

решения которого можно выразить через гипергеометрические функции от переменных s , $1-s$, $1/s$ и т. д. Так как гипергеометрические функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ имеют простое поведение при $z \rightarrow 0$, то естественно $u_1(z)$ представить в виде линейной комбинации функций от переменной $1-s = 1-z^2$ и определить коэффициенты линейной комбинации, используя поведение функции $u_1(z)$ при $z \rightarrow -1$. В соответствии с (20.24) имеем

$$F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha + \beta + 1}{2}, \frac{1+z}{2}\right) = c_1 F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\alpha + \beta + 1}{2}, 1 - z^2\right) + \\ + c_2 (1 - z^2)^{(1-\alpha-\beta)/2} F\left(\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1-\beta}{2}, \frac{3-\alpha-\beta}{2}, 1 - z^2\right).$$

Если $\alpha + \beta > 1$, то из этого соотношения при $z \rightarrow -1$ получим $c_2 = 0$, $c_1 = 1$, т. е.

$$F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha + \beta + 1}{2}, \frac{1+z}{2}\right) = F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\alpha + \beta + 1}{2}, 1 - z^2\right),$$

что равносильно равенству

$$F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, t\right) = F\left(\alpha, \beta, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, 4t(1-t)\right).$$

По принципу аналитического продолжения это соотношение остается справедливым при любых значениях α, β .

2. Рассмотрим уравнение для функции Эрмита $u = H_\nu(z)$

$$u'' - 2zu' + 2\nu u = 0.$$

Это уравнение не меняется при замене z на $-z$. Полагая $s = z^2$, $u(z) = v(s)$, приходим к уравнению

$$sv'' + \left(\frac{1}{2} - s\right)v' + \frac{\nu}{2}v = 0,$$

решения которого можно выразить через вырожденные гипергеометрические функции:

$$v(s) = c_1 F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, s\right) + c_2 s^{1/2} F\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}, s\right).$$

Отсюда

$$H_\nu(z) = c_1 F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) + c_2 z F\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right).$$

Легко видеть, что

$$c_1 = H_\nu(0), \quad c_2 = H'_\nu(0).$$

Поэтому, используя (19), приходим к следующему соотношению:

$$H_\nu(z) = \frac{2^\nu \sqrt{\pi}}{\Gamma((1-\nu)/2)} F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) - \frac{2^{\nu+1} \sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu/2)} z F\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right). \quad (22)$$

С помощью этого соотношения и разложения (3) можно получить разложение в степенной ряд функции Эрмита $H_\nu(z)$.

Если $-\pi/2 < \arg z \leq \pi/2$, то (22) с помощью (14) можно переписать в виде

$$H_\nu(z) = 2^\nu G\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right). \quad (23)$$

Функциональные соотношения (22), (23) дают возможность получить асимптотическое представление для функции Эрмита с помощью рассмотренных выше асимптотических представлений для вырожденных гипергеометрических функций $F(\alpha, \gamma, z)$, $G(\alpha, \gamma, z)$. В частности, при $-\pi/2 < \arg z \leq \pi/2$

$$H_\nu(z) = (2z)^\nu [1 + O(1/z^2)]. \quad (24)$$

Все полученные функциональные соотношения могут терять смысл при некоторых значениях параметров, когда они содержат функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $F(\alpha, \gamma, z)$ при $\gamma = -n$ ($n=0, 1, \dots$). В этих случаях вместо функций $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $F(\alpha, \gamma, z)$ следует использовать функции

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, z),$$

$$\varphi(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \gamma, z)$$

и раскрывать неопределенности по правилу Лопиталя при $\gamma \rightarrow -n$ таким же образом, как это было проделано для цилиндрических функций $H_\nu^{(1,2)}(z)$ при $\nu = n$ (см. § 15, п. 4).

3. Рассмотрим в качестве особого случая функциональное соотношение (14) при $\gamma = n$ ($n=1, 2, \dots$). Перейдем в нем от $F(\alpha, \gamma, z)$ к $\varphi(\alpha, \gamma, z)$ и воспользуемся формулой дополнения для гамма-функции (см. Дополнение А)

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{\pi}{\sin \pi \gamma} \left[\frac{\varphi(\alpha, \gamma, z)}{\Gamma(\alpha - \gamma + 1)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\gamma} \varphi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z) \right]. \quad (25)$$

Значение $\gamma = n$ в правой части этого равенства является устранимой особой точкой. Перейдем в (25) к пределу при $\gamma \rightarrow n$.

Вычисляя пределы по правилу Лопиталля, получим

$$G(\alpha, n, z) = (-1)^n \left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\frac{\varphi(\alpha, \gamma, z)}{\Gamma(\alpha - \gamma + 1)} \right] - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \gamma} [z^{1-\gamma} \varphi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)] \right\} \Big|_{\gamma=n}.$$

Если воспользоваться разложением в ряд по степеням z для функции $\varphi(\alpha, \gamma, z)$, то отсюда можно вывести соответствующее разложение для $G(\alpha, n, z)$:

$$G(\alpha, n, z) =$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k z^k}{k! \Gamma(n+k) \Gamma(\alpha-n+1)} [\psi(\alpha-n+1) - \psi(n+k)] + \\ &+ (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha-n+1)_k z^{k-n+1}}{k! \Gamma(2-n+k) \Gamma(\alpha)} [\ln z + \psi(\alpha-n+1+k) - \\ &- \psi(\alpha-n+1) - \psi(2-n+k)], \quad (26) \end{aligned}$$

где $\psi(z)$ — логарифмическая производная функции $\Gamma(z)$ (см. Дополнение А). Если здесь в последней сумме $2-n+k = -s$ ($s=0, 1, \dots$), то следует иметь в виду соотношения

$$\frac{1}{\Gamma(-s)} = 0, \quad \frac{\psi(-s)}{\Gamma(-s)} = (-1)^{s+1} s!.$$

Поэтому последнюю сумму следует разбить на две части, в первой из которых содержатся слагаемые при $0 \leq k \leq n-2$, а во второй слагаемые при $k \geq n-1$. Удобно заменить индекс суммирования k в первой части суммы на $n-1-k$, а во второй на $n-1+k$. Окончательно получим

$$\begin{aligned} G(\alpha, n, z) &= \frac{(-1)^n}{(n-1)! \Gamma(\alpha-n+1)} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(\alpha-k)_k (n-k)_k} z^{-k} + \right. \\ &\left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k z^k}{k! (n)_k} [\ln z + \psi(\alpha+k) - \psi(n+k) - \psi(k+1)] \right\} \quad (27) \end{aligned}$$

(при $n=1$ первую сумму следует положить равной нулю).

3. Особые случаи. Рассмотрим вопрос о выборе линейно независимых решений гипергеометрического уравнения при любых значениях α, β, γ . Если $\gamma \neq n$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), то линейно независимыми решениями гипергеометрического уравнения являются функции

$$u_1(z) = F(\alpha, \beta, \gamma, z),$$

$$u_2(z) = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z).$$

Если же $\gamma = n$, то одна из этих функций теряет смысл и встает вопрос о выборе двух линейно независимых решений гипергеометрического уравнения.

Рассмотрим сначала этот вопрос для случая, когда $\gamma = n$ ($n = 1, 2, \dots$), а величины $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ не являются целыми числами. Используем в качестве двух линейно независимых решений функции $F(\alpha, \beta, n, z), F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - n + 1, 1 - z)$. Для доказательства линейной независимости этих функций рассмотрим их поведение в случае, когда $z \rightarrow 0$. Как известно, $F(\alpha, \beta, n, 0) = 1$. Для исследования поведения функции $F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - n + 1, 1 - z)$ при $z \rightarrow 0$ воспользуемся функциональным соотношением, получающимся из (11) заменой γ на $\alpha + \beta - \gamma + 1, z$ на $1 - z$:

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - z) = \\ = \Gamma(\alpha + \beta - \gamma + 1) \left[\frac{\Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma(\alpha - \gamma + 1) \Gamma(\beta - \gamma + 1)} F(\alpha, \beta, \gamma, z) + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(\gamma - 1)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z) \right]. \quad (28) \end{aligned}$$

В этом соотношении для раскрытия неопределенности при $\gamma = n$ удобно вместо гипергеометрических функций использовать функции

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, z).$$

С помощью формулы $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$ соотношение (28) можно записать в виде

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - z) = \\ = \Gamma(\alpha + \beta - \gamma + 1) \frac{\pi}{\sin \pi \gamma} \left[\frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)}{\Gamma(\alpha - \gamma + 1) \Gamma(\beta - \gamma + 1)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} z^{1-\gamma} \varphi(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z) \right]. \quad (29) \end{aligned}$$

Значение $\gamma = n$ в правой части является устранимой особой точкой. Перейдем к пределу в (29) при $\gamma \rightarrow n$, используя правило Лопиталя:

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - n + 1, 1 - z) = \\ = (-1)^n \Gamma(\alpha + \beta - n + 1) \left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)}{\Gamma(\alpha - \gamma + 1) \Gamma(\beta - \gamma + 1)} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[z^{1-\gamma} \varphi(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z) \right] \right\} \Big|_{\gamma=n} = \\ = (-1)^n \Gamma(\alpha + \beta - n + 1) \left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\frac{F(\alpha, \beta, \gamma, z)}{\Gamma(\alpha - \gamma + 1) \Gamma(\beta - \gamma + 1) \Gamma(\gamma)} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\frac{z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)}{\Gamma(2 - \gamma)} \right] \right\} \Big|_{\gamma=n}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - n + 1, 1 - z) = \\ = \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha + \beta - n + 1)}{\Gamma(\alpha - n + 1) \Gamma(\beta - n + 1) (n-1)!} \{ [\psi(\alpha - n + 1) + \\ + \psi(\beta - n + 1) - \psi(n)] F(\alpha, \beta, n, z) + \Phi(\alpha, \beta, n, z) \}, \quad (30)$$

где

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \\ = \frac{\partial}{\partial \gamma} F(\alpha, \beta, \gamma, z) - \frac{\Gamma(\alpha - \gamma + 1) \Gamma(\beta - \gamma + 1) \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\gamma)} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[z^{1-\gamma} \frac{F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)}{\Gamma(2 - \gamma)} \right]. \quad (31)$$

Получим разложение функции $\Phi(\alpha, \beta, n, z)$ по степеням z , используя соответствующие разложения для гипергеометрических функций. Имеем при $|z| < 1$

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k! (\gamma)_k} z^k [\psi(\gamma) - \psi(\gamma + k)] + \\ + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha - \gamma + 1 + k) \Gamma(\beta - \gamma + 1 + k)}{k! \Gamma(2 - \gamma + k)} z^{k+1-\gamma} \times \\ \times [\ln z + \psi(\alpha - \gamma + 1 + k) - \psi(\alpha - \gamma + 1) + \psi(\beta - \gamma + 1 + k) - \\ - \psi(\beta - \gamma + 1) - \psi(2 - \gamma + k)].$$

Проводя в этом соотношении при $\gamma = n$ те же преобразования, что и при переходе от (26) к (27), получим

$$\Phi(\alpha, \beta, n, z) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(n-k)_k (\alpha-k)_k (\beta-k)_k} z^{-k} + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k! (n)_k} z^k [\ln z + \psi(\alpha + k) - \psi(\alpha - n + 1) + \psi(\beta + k) - \\ - \psi(\beta - n + 1) + \psi(n) - \psi(n + k) - \psi(k + 1)]. \quad (32)$$

Это выражение будет справедливым и при $n=1$, если первую сумму в нем положить равной нулю.

Из (30), (32) видно, что функции $F(\alpha, \beta, n, z)$, $\Phi(\alpha, \beta, \alpha + \beta - n + 1, 1 - z)$ в случае, когда $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ не являются целыми числами, будут линейно независимыми, так как имеют разное поведение при $z \rightarrow 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае в качестве линейно независимых решений гипергеометрического уравнения можно выбрать функции $F(\alpha, \beta, n, z)$, $F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - n + 1, 1 - z)$. Вместо функции $F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - n + 1, 1 - z)$ в качестве второго линейно независимого решения удобно ис-

пользовать функцию $\Phi(\alpha, \beta, n, z)$, так как в этом случае ограничение на параметры α, β можно ослабить. Действительно, из (30) вытекает, что функция $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, z)$ будет решением гипергеометрического уравнения при $\gamma = n$, если $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ не являются целыми числами, так как она является линейной комбинацией двух решений этого уравнения: $F(\alpha, \beta, n, z)$ и $F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - n + 1, 1 - z)$. С другой стороны, функция $\Phi(\alpha, \beta, n, z)$ и ее производные по z будут аналитическими функциями каждой из переменных при $|\arg z| < \pi$, как это следует из (31), при любых значениях параметров, за исключением случая, когда множитель

$$\frac{\Gamma(\alpha - n + 1) \Gamma(\beta - n + 1)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} = \frac{1}{(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - n + 1)(\beta - 1)(\beta - 2) \dots (\beta - n + 1)}$$

обращается в бесконечность, что соответствует $\alpha = 1, 2, \dots, n - 1$ или $\beta = 1, 2, \dots, n - 1$. Поэтому при $\gamma = n$ ($n = 1, 2, \dots$) и

$$\frac{\Gamma(\alpha - n + 1) \Gamma(\beta - n + 1)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \neq \infty$$

линейно независимыми решениями гипергеометрического уравнения являются функции $F(\alpha, \beta, n, z)$, $\Phi(\alpha, \beta, n, z)$. Если же $\gamma = n$ ($n = 1, 2, \dots$) и

$$\frac{\Gamma(\alpha - n + 1) \Gamma(\beta - n + 1)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} = \infty,$$

то двумя линейно независимыми решениями гипергеометрического уравнения, так же как и при $\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, будут $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)$, так как функция $z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)$ имеет смысл при $\gamma = n$ и целых значениях $\alpha = 1, 2, \dots, n - 1$ или $\beta = 1, 2, \dots, n - 1$. Эта функция при таких значениях α, β, γ является полиномом в силу того, что величины $\alpha - \gamma + 1$ или $\beta - \gamma + 1$ будут принимать целые отрицательные значения, большие значения $2 - \gamma$ (см. п. 1).

Выражение (32) для $\Phi(\alpha, \beta, n, z)$ содержит неопределенность в случае, когда α или β принимают значения $0, -1, -2, \dots$. Если воспользоваться формулами дополнения для $\Gamma(z)$, $\psi(z)$ при $z \leq 0$, то при $\alpha = -m$ ($m = 0, 1, \dots$) эта неопределенность раскрывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & (\alpha)_k [\psi(\alpha + k) - \psi(\alpha - n + 1)]|_{\alpha = -m} = \\ & = \begin{cases} (-1)^m (k - m - 1)!, & k - m > 0, \\ (-1)^k \frac{m!}{(m - k)!} [\psi(m + 1 - k) - \psi(m + n)], & k - m \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогично раскрывается неопределенность в произведении $(\beta)_k [\psi(\beta + k) - \psi(\beta - n + 1)]$ при $\beta = 0, -1, -2, \dots$

Нам остается рассмотреть случай, когда в гипергеометрическом уравнении $\gamma = -n$ ($n = 0, 1, \dots$). Этот случай можно свести

к предыдущему, если вспомнить, что гипергеометрическое уравнение для функции $u(z)$ после замены $u = z^{1-\gamma}y$ приводится к гипергеометрическому уравнению для $y(z)$ с параметрами $\alpha' = \alpha - \gamma + 1$, $\beta' = \beta - \gamma + 1$, $\gamma' = 2 - \gamma$ (см. § 20, п. 2). Поэтому при $\gamma = -n$ линейно независимыми решениями гипергеометрического уравнения являются функции:

$$\begin{aligned} \text{а) } u_1(z) &= z^{n+1} F(\alpha + n + 1, \beta + n + 1, n + 2, z), \\ u_2(z) &= z^{n+1} \Phi(\alpha + n + 1, \beta + n + 1, n + 2, z), \end{aligned}$$

если

$$\frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1)} \neq \infty;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } u_1(z) &= F(\alpha, \beta, -n, z), \\ u_2(z) &= z^{n+1} F(\alpha + n + 1, \beta + n + 1, n + 2, z), \end{aligned}$$

если

$$\frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1)} = \infty.$$

Таким образом, с помощью рассмотренных рассуждений можно построить полную совокупность линейно независимых решений для гипергеометрического и вырожденного гипергеометрического уравнений при любых значениях параметров, входящих в эти уравнения.

Т а б л и ц а 4

Линейно независимые решения
гипергеометрического уравнения в особых случаях

γ	α, β	$u_1(z)$	$u_2(z)$
$\neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$	любые	$F(\alpha, \beta, \gamma, z)$	$z^{1-\gamma} F(\alpha', \beta', \gamma', z)$
$1 + m$ $(m = 0, 1 \dots)$	$(\alpha')_m (\beta')_m = 0$	$F(\alpha, \beta, \gamma, z)$	$z^{1-\gamma} F(\alpha', \beta', \gamma', z)$
	$(\alpha')_m (\beta')_m \neq 0$	$F(\alpha, \beta, \gamma, z)$	$\Phi(\alpha, \beta, \gamma, z)$
$1 - m$ $(m = 1, 2 \dots)$	$(\alpha)_m (\beta)_m = 0$	$F(\alpha, \beta, \gamma, z)$	$z^{1-\gamma} F(\alpha', \beta', \gamma', z)$
	$(\alpha)_m (\beta)_m \neq 0$	$z^{1-\gamma} \Phi(\alpha', \beta', \gamma', z)$	$z^{1-\gamma} F(\alpha', \beta', \gamma', z)$

В заключение приведем табл. 4 для двух линейно независимых решений $u_1(z)$, $u_2(z)$ гипергеометрического уравнения в зависимости от значений α, β, γ . Здесь $(\alpha)_k = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + k - 1)$, $(\alpha)_0 = 1$, $\alpha' = \alpha - \gamma + 1$, $\beta' = \beta - \gamma + 1$, $\gamma' = 2 - \gamma$.

§ 22. Представление различных функций через функции гипергеометрического типа

Многие специальные функции, возникающие при решении задач математической и теоретической физики, могут быть выражены через функции гипергеометрического типа — гипергеометрическую функцию $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$; вырожденные гипергеометрические функции $F(\alpha, \gamma, z)$, $G(\alpha, \gamma, z)$, функцию Эрмита $H_n(z)$. Такое представление дает возможность изучать свойства рассматриваемых функций, используя полученные ранее результаты для функций гипергеометрического типа — разложения в степенные ряды, асимптотические представления, рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования. Рассмотрим несколько характерных примеров.

1. Некоторые элементарные функции. Наиболее простой вид имеют функции $F(\alpha, 0, \gamma, z)$, $F(0, \gamma, z)$, $G(0, \gamma, z)$. Действительно, используя соответствующие степенные ряды и соотношение (21.14), получим

$$F(\alpha, 0, \gamma, z) = F(0, \gamma, z) = G(0, \gamma, z) = 1.$$

Применение функциональных соотношений (21.6), (21.8), (21.8a) дает

$$F(\alpha, \beta, \beta, z) = (1-z)^{-\alpha} F(\beta-\alpha, 0, \beta, z) = (1-z)^{-\alpha},$$

$$F(\alpha, \alpha, z) = e^z F(0, \alpha, -z) = e^z,$$

$$G(\alpha, \alpha+1, z) = z^{-\alpha} G(0, 1-\alpha, z) = z^{-\alpha}.$$

2. Полиномы Якоби, Лагерра и Эрмита. Как было показано в § 2, полиномиальные решения дифференциального уравнения гипергеометрического типа

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0 \quad (1)$$

определяются однозначно с точностью до нормировочного множителя. Поэтому для нахождения полиномов гипергеометрического типа достаточно найти те частные решения уравнения (1), которые являются полиномами. С другой стороны, решения уравнения (1) можно выразить через гипергеометрические, вырожденные гипергеометрические функции и функции Эрмита в зависимости от степени полинома $\sigma(z)$. Это дает возможность установить связь между полиномами Якоби, Лагерра, Эрмита и функциями $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $F(\alpha, \gamma, z)$, $G(\alpha, \gamma, z)$, $H_n(z)$.

1. Полиномы Якоби. Для полиномов Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$ дифференциальное уравнение (1) имеет вид

$$(1-z^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)z]y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0.$$

После замены $z = 1 - 2s$ оно сводится к гипергеометрическому уравнению

$$s(1-s)y'' + [\gamma_1 - (\alpha_1 + \beta_1 + 1)s]y' - \alpha_1\beta_1 y = 0,$$

в котором $\alpha_1 = -n$, $\beta_1 = n + \alpha + \beta + 1$, $\gamma_1 = \beta + 1$. Частным реше-

нием этого уравнения, являющимся полиномом, будет функция

$$y(z) = F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, s) = F\left(-n, n + \alpha + \beta + 1, \alpha + 1, \frac{1-z}{2}\right).$$

Поэтому

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = c_n F\left(-n, n + \alpha + \beta + 1, \alpha + 1, \frac{1-z}{2}\right).$$

Постоянную c_n легко найти, положив $z = 1$ (см. (5.10)). В результате получим

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)} F\left(-n, n + \alpha + \beta + 1, \alpha + 1, \frac{1-z}{2}\right). \quad (2)$$

С помощью соотношения (см. § 6, п. 6)

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = (-1)^n \hat{P}_n^{(\beta, \alpha)}(-z)$$

можно получить эквивалентную запись представления (2):

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{(-1)^n \Gamma(n + \beta + 1)}{n! \Gamma(\beta + 1)} F\left(-n, n + \alpha + \beta + 1, \beta + 1, \frac{1+z}{2}\right). \quad (3)$$

Полагая в (2), (3) $\alpha = \beta = 0$, получим следующие представления полиномов Лежандра через гипергеометрические функции:

$$P_n(z) = F\left(-n, n + 1, 1, \frac{1-z}{2}\right) = (-1)^n F\left(-n, n + 1, 1, \frac{1+z}{2}\right).$$

2. Полиномы Лагерра. Дифференциальное уравнение для полиномов Лагерра $L_n^\alpha(z)$

$$zy'' + (1 + \alpha - z)y' + ny = 0$$

имеет частное решение

$$y(z) = F(-n, 1 + \alpha, z),$$

являющееся полиномом. Поэтому

$$L_n^\alpha(z) = c_n F(-n, 1 + \alpha, z).$$

Постоянную c_n можно найти, полагая $z = 0$ (см. (5.10)). В результате получим

$$L_n^\alpha(z) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)} F(-n, 1 + \alpha, z).$$

С помощью соотношения (21.17) полиномы $L_n^\alpha(z)$ можно выразить также через вырожденную гипергеометрическую функцию второго рода $G(\alpha, \gamma, z)$:

$$L_n^\alpha(z) = \frac{(-1)^n}{n!} G(-n, 1 + \alpha, z).$$

3. Полиномы Эрмита. Дифференциальное уравнение для полиномов Эрмита

$$y'' - 2zy' + 2ny = 0$$

имеет в качестве частного решения функцию Эрмита $H_n(z)$, которая является полиномом степени n . Действительно, функцию-

нальное соотношение (21.22) дает

$$H_{2n}(z) = \frac{2^{2n} \sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2 - n)} F\left(-n, \frac{1}{2}, z^2\right),$$

$$H_{2n+1}(z) = -\frac{2^{2n+1} \sqrt{\pi}}{\Gamma(-1/2 - n)} z F\left(-n, \frac{3}{2}, z^2\right).$$

Сравнение коэффициентов при старшей степени у функций Эрмита $H_\nu(z)$ при $\nu = n$ и у полиномов Эрмита показывает, что $H_\nu(z)$ при $\nu = n$ совпадает с полиномом Эрмита.

3. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. Рассмотрим теперь связь классических ортогональных полиномов дискретной переменной с гипергеометрическими функциями. Эту связь можно установить, используя формулу Родрига (12.22):

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \nabla^n \rho_n(x).$$

Для произвольной функции $f(x)$ по индукции можно доказать, что

$$\nabla^n f(x) = \sum_{k=0}^{n-k} (-1)^k \frac{n!}{k! (n-k)!} f(x-k) = \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k}{k!} f(x-k).$$

Поэтому

$$y_n(x) = B_n \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k}{k!} \frac{\rho_n(x-k)}{\rho(x)}.$$

В частности, для полиномов Мейкснера $m_n^{(\nu, \mu)}(x)$ имеем

$$\rho_n(x) = \rho(x+n) \prod_{k=1}^n \sigma(x+k) = \mu^{x+n} \frac{\Gamma(\gamma+x+n)}{\Gamma(x+1) \Gamma(\gamma)}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\rho_n(x-k)}{\rho(x)} &= \mu^{n-k} \frac{\Gamma(\gamma+x+n-k) \Gamma(x+1)}{\Gamma(x-k+1) \Gamma(\gamma+x)} = \\ &= \mu^{n-k} \frac{\Gamma(\gamma+x+n) \Gamma(x+1) \Gamma(\gamma+x+n-k)}{\Gamma(\gamma+x) \Gamma(x+1-k) \Gamma(\gamma+x+n)} = \\ &= \mu^{n-k} (\gamma+x)_n \frac{x(x-1) \dots (x-k+1)}{(\gamma+x+n-1)(\gamma+x+n-2) \dots (\gamma+x+n-k)} = \\ &= \mu^{n-k} (\gamma+x)_n \frac{(-x)_k}{(-\gamma-x-n+1)_k}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$m_n^{(\nu, \mu)}(x) = (\gamma+x)_n F(-n, -x, -\gamma-x-n+1, 1/\mu).$$

Совершенно аналогично можно получить следующие соотношения для полиномов Кравчука $k_n^{(p)}(x)$ и Шарлье $c_n^{(\mu)}(x)$:

$$k_n^{(p)}(x) = (-N+x)_n \frac{p^n}{n!} F\left(-n, -x, N-n-x+1, -\frac{q}{p}\right),$$

$$c_n^{(\mu)}(x) = (-x)_n \mu^{-n} F(-n, x-n+1, \mu).$$

Полиномы Хана $h_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ подобным же образом можно выразить через обобщенные гипергеометрические функции (см. § 21, п. 1):

$$h_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(\beta + 1 + x)_n (-N + 1 + x)_n}{n!} \times \\ \times {}_3F_2(-n, -x, N + \alpha - x; N - x - n, -\beta - x - n; 1).$$

З а м е ч а н и е. Сравнивая формулы, выражающие полиномы Якоби и полиномы Мейкснера через гипергеометрические функции, можно установить связь между этими полиномами:

$$m_n^{(\gamma, \mu)}(x) = n! P_n^{(\gamma-1, -\gamma-n-x)}\left(\frac{2-\mu}{\mu}\right).$$

Подобным же образом получим связь полиномов Лагерра и Шарлье:

$$c_n^{(\mu)}(x) = \frac{n!}{(-\mu)^n} L_n^{x-n}(\mu).$$

4. Функции второго рода. Связь функций второго рода для классических ортогональных полиномов $Q_n(z)$ с функциями гипергеометрического типа проще всего получить, если исходить непосредственно из интегральных представлений для $Q_n(z)$ (см. § 11, п. 1).

1. Функции Якоби второго рода. Интегральное представление для функции Якоби второго рода $Q_n^{(\alpha, \beta)}(z)$ имеет вид

$$Q_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{(-1)^n}{2^n (1-z)^\alpha (1+z)^\beta} \int_{-1}^1 \frac{(1-s)^{n+\alpha} (1+s)^{n+\beta}}{(s-z)^{n+1}} ds. \quad (4)$$

Полагая $s = 2t - 1$, получим

$$Q_n^{(\alpha, \beta)}(z) = - \frac{2^{n+\alpha+\beta+1}}{(1-z)^\alpha (1+z)^{n+\beta+1}} \int_0^1 t^{n+\beta} (1-t)^{n+\alpha} \left(1 - \frac{2}{n+z} t\right)^{-n-1} dt.$$

Сравнивая полученную формулу с интегральным представлением (20.13) для гипергеометрической функции, приходим к следующему представлению для $Q_n^{(\alpha, \beta)}(z)$:

$$Q_n^{(\alpha, \beta)}(z) = - \frac{2^{n+\alpha+\beta+1}}{(1-z)^\alpha (1+z)^{n+\beta+1}} \frac{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)} \times \\ \times F\left(n+1, n+\beta+1, 2n+\alpha+\beta+2, \frac{2}{1+z}\right).$$

Совершенно аналогично, полагая в (4) $s = 1 - 2t$, получим

$$Q_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{(-1)^n 2^{n+\alpha+\beta+1}}{(1-z)^{n+\alpha+1} (1+z)^\beta} \frac{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)} \times \\ \times F\left(n+1, n+\alpha+1, 2n+\alpha+\beta+2, \frac{2}{1-z}\right).$$

2. Функции Лагерра второго рода. Интегральное представление для функции Лагерра второго рода $Q_n^\alpha(z)$ имеет вид

$$Q_n^\alpha(z) = \frac{1}{e^{-z} z^\alpha} \int_0^\infty \frac{e^{-s} s^{n+\alpha}}{(s-z)^{n+1}} ds.$$

Пусть $z < 0$. Полагая $s = -zt$, получим

$$Q_n^\alpha(z) = e^z z^{-\alpha} (-z)^\alpha \int_0^\infty e^{zt} t^{n+\alpha} (1+t)^{-n-1} dt.$$

Сравнивая это выражение с интегральным представлением (20.26) для вырожденной гипергеометрической функции второго рода, получим

$$Q_n^\alpha(s) = e^z z^{-\alpha} (-z)^\alpha \Gamma(n+\alpha+1) G(n+\alpha+1, \alpha+1, -z). \quad (5)$$

Так как в определении функции $Q_n^\alpha(z)$ встречается множитель z^α , то для однозначности $Q_n^\alpha(z)$ должен быть сделан разрез вдоль вещественной оси при $z > 0$, т. е. следует считать $0 < \arg z < 2\pi$. Поэтому при $z < 0$ следует положить $z^{-\alpha} = e^{-i\pi\alpha} (-z)^{-\alpha}$. В результате получим

$$Q_n^\alpha(z) = e^{-i\pi\alpha} \Gamma(n+\alpha+1) e^z G(n+\alpha+1, \alpha+1, -z).$$

Это соотношение выведено при $z < 0$, однако по принципу аналитического продолжения оно остается справедливым при любых значениях z .

3. Функции Эрмита второго рода. Интегральное представление для функции Эрмита второго рода $Q_n(z)$ имеет вид

$$Q_n(z) = (-1)^n n! e^{z^2} \int_{-\infty}^\infty e^{-\xi^2} (\xi - z)^{-n-1} d\xi.$$

Для представления $Q_n(z)$ через функцию Эрмита воспользуемся тем, что функция $Q_n(z)$ удовлетворяет тому же уравнению, что и полиномы Эрмита. Поэтому она может быть представлена в виде линейной комбинации двух линейно независимых решений уравнения для полиномов Эрмита:

$$Q_n(z) = A_n H_n(z) + B_n e^{z^2} H_{-n-1}(-iz), \quad (6)$$

или

$$Q_n(z) = C_n H_n(z) + D_n e^{z^2} H_{-n-1}(iz). \quad (7)$$

Для определения коэффициентов этих разложений воспользуемся асимптотическими представлениями функции $Q_n(z)$

и функций Эрмита при $z \rightarrow \infty$. Пусть $z = iy$, $y \rightarrow +\infty$. Тогда по формуле (11.7)

$$Q_n(z) = -\frac{e^{-y^2}}{(iy)^{n+1}} n! \sqrt{\pi} \left[1 + O\left(\frac{1}{y}\right) \right].$$

С другой стороны, в силу (21.24) имеем

$$H_n(z) = (2iy)^n [1 + O(1/y^2)], \\ H_{-n-1}(-iz) = (2y)^{-n-1} [1 + O(1/y^2)].$$

Отсюда $A_n = 0$, $B_n = 2^{n+1} n! \sqrt{\pi} \exp\{-i\pi(n-1)/2\}$. Окончательно получаем, что при $\text{Im } z > 0$

$$Q_n(z) = 2^{n+1} n! \sqrt{\pi} \exp\{z^2 - i\pi(n-1)/2\} H_{-n-1}(-iz).$$

Аналогично, из связи $Q_n(\bar{z}) = \bar{Q}_n(z)$ (черта — знак комплексного сопряжения) находим, что при $\text{Im } z < 0$

$$Q_n(z) = 2^{n+1} n! \sqrt{\pi} \exp\{z^2 + i\pi(n-1)/2\} H_{-n-1}(iz).$$

5. Цилиндрические функции. Связь цилиндрических функций с вырожденными гипергеометрическими функциями первого и второго рода легко установить также с помощью интегральных представлений для этих функций. Например, имеем (см. § 17, п. 3)

$$I_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} \text{ch } zt \, dt, \\ K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \frac{1}{\Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1/2} \left(1 + \frac{t}{2z}\right)^{\nu-1/2} dt.$$

Интегральное представление для функции $K_\nu(z)$ заменой t на zt можно связать с интегральным представлением для функции $G(\nu + 1/2, 2\nu + 1, 2z)$:

$$K_\nu(z) = \sqrt{\pi} (2z)^\nu e^{-z} G(\nu + 1/2, 2\nu + 1, 2z).$$

Чтобы установить связь $I_\nu(z)$ с вырожденной гипергеометрической функцией, заметим, что в подынтегральном выражении для $I_\nu(z)$ можно заменить $\text{ch } zt$ на e^{zt} , так как $e^{zt} = \text{ch } zt + \text{sh } zt$ и интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю. После замены t на $2t-1$ приходим к следующему интегральному представлению:

$$I_\nu(z) = \frac{(2z)^\nu e^{-z}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^1 e^{2zt} [t(1-t)]^{\nu-1/2} dt.$$

Отсюда

$$I_\nu(z) = \frac{(2z)^\nu e^{-z} \Gamma(\nu + 1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(2\nu + 1)} F\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2z\right).$$

По формуле удвоения для гамма-функции имеем

$$\sqrt{\pi} \Gamma(2\nu + 1) = 2^{2\nu} \Gamma(\nu + 1/2) \Gamma(\nu + 1).$$

Поэтому окончательно получаем

$$I_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} e^{-z} F\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2z\right).$$

6. Эллиптические интегралы. Эллиптическими интегралами первого и второго рода называются соответственно функции

$$K(z) = \int_0^{\pi/2} (1 - z^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi, \quad E(z) = \int_0^{\pi/2} (1 - z^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi.$$

Полагая $\sin^2 \varphi = t$, придем к следующим интегральным представлениям:

$$K(z) = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^{-1/2} (1-z^2 t)^{-1/2} dt,$$

$$E(z) = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^{-1/2} (1-z^2 t)^{1/2} dt.$$

Сравнивая эти представления с интегральными представлениями для гипергеометрической функции, получим

$$K(z) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z^2\right), \quad E(z) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, z^2\right).$$

Связь эллиптических интегралов с гипергеометрическими функциями дает возможность изучить свойства функций $K(z)$, $E(z)$ при комплексных значениях z .

7. Функции Уиттекера. Одним из частных случаев обобщенного уравнения гипергеометрического типа является уравнение Уиттекера

$$u'' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{1/4 - \mu^2}{z^2}\right) u = 0, \quad (8)$$

где k, μ — постоянные. Заменой $u = z^{\mu+1/2} e^{-z/2} y$ это уравнение сводится к уравнению

$$zy'' + (2\mu + 1 - z)y' + (k - \mu - 1/2)y = 0,$$

решениями которого являются функции

$$y_1(z) = F(1/2 - k + \mu, 2\mu + 1, z), \quad y_2(z) = G(1/2 - k + \mu, 2\mu + 1, z).$$

Таким образом, уравнение Уиттекера имеет частные решения

$$u_1(z) = M_{k\mu}(z) = z^{\mu+1/2} e^{-z/2} F\left(\frac{1}{2} - k + \mu, 2\mu + 1, z\right),$$

$$u_2(z) = W_{k\mu}(z) = z^{\mu+1/2} e^{-z/2} G\left(\frac{1}{2} - k + \mu, 2\mu + 1, z\right),$$

которые называются функциями Уиттекера.

Функции Уиттекера $M_{k\mu}(z)$ имеют простое поведение при $z \rightarrow 0$, а функции $W_{k\mu}(z)$ при $z \rightarrow \infty$.

Так как уравнение Уиттекера не меняется при замене μ на $-\mu$ или при одновременной замене k на $-k$ и z на $-z$, то его решениями являются также функции $M_{k, -\mu}(z)$ и $M_{-k, \pm\mu}(-z)$, $W_{k, -\mu}(z)$

и $W_{-k, \pm \mu}(-z)$. Между полученными решениями существует целый ряд функциональных соотношений, вытекающих из соответствующих функциональных соотношений для вырожденных гипергеометрических функций. Имеем, например,

$$M_{-k, \mu}(-z) = (-z)^{\mu+1/2} e^{z/2} F\left(\frac{1}{2} + k + \mu, 2\mu + 1, -z\right) = \\ = (-z)^{\mu+1/2} e^{-z/2} F\left(\frac{1}{2} - k + \mu, 2\mu + 1, z\right),$$

т. е. функции $M_{k\mu}(z)$, $M_{-k\mu}(-z)$ линейно зависимы. Из функционального соотношения (21.8a) следует, что

$$W_{k, -\mu}(z) = W_{k\mu}(z).$$

§ 23. Определенные интегралы, содержащие функции гипергеометрического типа

Возникающие в приложениях определенные интегралы, содержащие функции гипергеометрического типа, обычно вычисляются либо с помощью интегральных представлений для функций гипергеометрического типа, либо с помощью разложения этих функций в ряды. Мы ограничимся несколькими примерами.

1. Для вычисления интеграла

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} x^{\nu} F(\alpha, \gamma, kx) dx, \quad \operatorname{Re} \lambda > \operatorname{Re} k, \quad \operatorname{Re} \nu > -1,$$

удобно воспользоваться интегральным представлением (20.14), предполагая временно, что $\operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \alpha > 0$ и $\lambda > k > 0$:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} x^{\nu} F(\alpha, \gamma, kx) dx = \\ = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} dt \int_0^{\infty} e^{-\lambda x + kxt} x^{\nu} dx = \\ = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\lambda^{\nu+1}} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} \left(1 - \frac{k}{\lambda} t\right)^{-\nu-1} dt.$$

Интегральное представление (20.13) дает

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} x^{\nu} F(\alpha, \gamma, kx) dx = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\lambda^{\nu+1}} F\left(\alpha, \nu+1, \gamma, \frac{k}{\lambda}\right).$$

Полученную формулу можно распространить на произвольные значения α , γ , λ , k с помощью принципа аналитического продолжения.

2. Интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} J_{\nu}(bx) x^{\rho} dx$$

легко вычисляется, если использовать разложение функции

Бесселя $J_\nu(bx)$ в ряд. Имеем

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} J_\nu(bx) x^\rho dx &= \int_0^\infty e^{-a^2 x^2} \left[\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (bx/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \right] x^\rho dx = \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (b/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \int_0^\infty e^{-a^2 x^2} x^{\nu+\rho+2k} dx.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} x^{\nu+\rho+2k} dx &= \frac{1}{2a^{\nu+\rho+2k+1}} \int_0^\infty e^{-t} t^{(\nu+\rho-1)/2+k} dt = \\ &= \frac{\Gamma((\nu+\rho+1)/2+k)}{2a^{\nu+\rho+2k+1}}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} J_\nu(bx) x^\rho dx = \frac{1}{2a^{\rho+1}} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \left(\frac{b}{2a}\right)^{\nu+2k} \frac{\Gamma((\nu+\rho+1)/2+k)}{k! \Gamma(\nu+1+k)}.$$

Если воспользоваться разложением (21.3) для вырожденной гипергеометрической функции и функциональным соотношением (21.8), то интересующий нас интеграл можно выразить через вырожденные гипергеометрические функции:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} J_\nu(bx) x^\rho dx &= \\ &= \frac{\Gamma((\nu+\rho+1)/2)}{\Gamma(\nu+1)} \frac{(b/(2a))^\nu}{2a^{\rho+1}} F\left(\frac{\nu+\rho+1}{2}, \nu+1, -\frac{b^2}{4a^2}\right) = \\ &= \frac{\Gamma((\nu+\rho+1)/2)}{\Gamma(\nu+1)} \frac{(b/(2a))^\nu}{2a^{\rho+1}} e^{-b^2/(4a^2)} F\left(\frac{\nu+1-\rho}{2}, \nu+1, \frac{b^2}{4a^2}\right). \quad (1)\end{aligned}$$

3. Рассмотрим интеграл Сонина — Гегенбауэра:

$$\int_0^\infty \frac{K_\mu(a \sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{\mu/2}} J_\nu(bx) x^{\nu+1} dx, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad y > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1.$$

Для вычисления этого интеграла воспользуемся интегральным представлением Зоммерфельда для функции Макдональда и формулой (1) при $\rho = \nu + 1$. Имеем

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{K_\mu(a \sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{\mu/2}} J_\nu(bx) x^{\nu+1} dx &= \\ &= \frac{a^\mu}{2^{\mu+1}} \int_0^\infty J_\nu(bx) x^{\nu+1} dx \int_0^\infty \exp\left\{-t - \frac{a^2(x^2+y^2)}{4t}\right\} \frac{dt}{t^{\mu+1}} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^\mu}{2^{\mu+1}} \int_0^\infty \exp \left\{ -t - \frac{a^2 y^2}{4t} \right\} \frac{dt}{t^{\mu+1}} \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{a^2 x^2}{4t} \right\} J_\nu(bx) x^{\nu+1} dx = \\
&= 2^{\nu-\mu} a^{\mu-2\nu-2} b^\nu \int_0^\infty \exp \left\{ -t \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) - \frac{a^2 y^2}{4t} \right\} \frac{dt}{t^{\mu-\nu}} = \\
&= \frac{2^{\nu-\mu} b^\nu}{a^\mu} (a^2 + b^2)^{\mu-\nu-1} \int_0^\infty \exp \left\{ -u - \frac{y^2 (a^2 + b^2)}{4u} \right\} \frac{du}{u^{\mu-\nu}} = \\
&= \frac{b^\nu}{a^\mu} \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{y} \right)^{\mu-\nu-1} K_{\mu-\nu-1} (y \sqrt{a^2 + b^2}).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{K_\mu(a \sqrt{x^2 + y^2})}{(x^2 + y^2)^{\mu/2}} J_\nu(bx) x^{\nu+1} dx = \\
= \frac{b^\nu}{a^\mu} \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{y} \right)^{\mu-\nu-1} K_{\mu-\nu-1} (y \sqrt{a^2 + b^2}). \quad (2)
\end{aligned}$$

Приведем некоторые следствия из соотношения (2).

а) Пусть $\mu = 1/2$. Так как

$$K_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z},$$

то

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{e^{-a \sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} J_\nu(bx) x^{\nu+1} dx = \\
= \sqrt{\frac{2}{\pi b}} \left(\frac{by}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^{\nu+1/2} K_{\nu+1/2} (y \sqrt{a^2 + b^2}). \quad (3)
\end{aligned}$$

В частности, при $\nu = 0$ получим

$$\int_0^\infty \frac{e^{-a \sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} J_0(bx) x dx = \frac{e^{-y \sqrt{a^2 + b^2}}}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (4)$$

При $y \rightarrow 0$, $\nu + 1/2 > 0$ формула (3) дает

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_\nu(bx) x^\nu dx = \frac{1}{\sqrt{\pi(a^2 + b^2)}} \left(\frac{2b}{a^2 + b^2} \right)^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right). \quad (5)$$

При выводе (5) мы воспользовались тем, что при $\nu > 0$, $z \rightarrow 0$

$$K_\nu(z) \approx \frac{\pi}{2 \sin \pi \nu} \frac{(z/2)^{-\nu}}{\Gamma(-\nu+1)} = \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}$$

б) Пусть в (2) $\nu < 2\mu - 3/2$, $a \rightarrow 0$. Так как при этом

$$K_\mu(az) \approx \frac{\Gamma(\mu)}{2} \left(\frac{az}{2}\right)^{-\mu},$$

то

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(bx) x^{\nu+1}}{(x^2 + y^2)^\mu} dx = \left(\frac{b}{2y}\right)^{\mu-1} \frac{y^\nu}{\Gamma(\mu)} K_{\mu-\nu-1}(by). \quad (6)$$

Полагая здесь $\mu = 3/2$, $\nu = 0$, получим

$$\int_0^\infty \frac{J_0(bx) x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx = \frac{e^{-by}}{y}. \quad (7)$$

Соотношения (2)–(7) были выведены при некоторых ограничениях, наложенных на параметры. С помощью принципа аналитического продолжения полученные результаты легко распространяются на более широкую область значений параметров. В частности, (6) справедливо при

$$-1 < \operatorname{Re} \nu < 2 \operatorname{Re} \mu - 1/2.$$

Из (6) при $\mu = 1/2$, $\nu = 0$ находим

$$\int_0^\infty \frac{x J_0(bx)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx = \frac{e^{-by}}{b}.$$

ГЛАВА V

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Теория специальных функций является разделом математики, глубоко проникающим своими корнями в математический анализ, теорию функций комплексного переменного, теорию представлений групп, теоретическую и математическую физику. Благодаря этим связям специальные функции имеют широкую область применения. В настоящей главе рассмотрен ряд примеров использования специальных функций для решения некоторых важных задач математической физики, квантовой механики и вычислительной математики.

§ 24. Приведение уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям методом разделения переменных

1. Общая схема метода разделения переменных. Обобщенные уравнения гипергеометрического типа возникают, как правило, в результате решения уравнений математической физики и квантовой механики методом разделения переменных. Напомним основные черты метода разделения переменных. Этот метод применяется для отыскания частных решений уравнений вида

$$Lu = 0, \quad (1)$$

где оператор L представляется в виде

$$L = L_1 L_2 + M_1 M_2. \quad (2)$$

Операторы L_1 , M_1 действуют лишь на одну группу переменных, от которых зависит функция u , а L_2 , M_2 действуют на оставшиеся переменные. Под произведением операторов подразумевается результат их последовательного применения. При этом предполагается, что все операторы L_i , M_i ($i = 1, 2$) являются линейными, т. е.

$$\begin{aligned} L_i(c_1 u + c_2 v) &= c_1 L_i u + c_2 L_i v, \\ M_i(c_1 u + c_2 v) &= c_1 M_i u + c_2 M_i v, \end{aligned}$$

где c_1 , c_2 — постоянные.

Пример 1. Пусть $Lu = u_{xx} + u_{yy}$. В данном случае

$$L_1 = \partial^2/\partial x^2, \quad L_2 = E, \quad M_1 = E, \quad M_2 = \partial^2/\partial y^2,$$

где E — единичный оператор.

Для операторов вида (2) частное решение уравнения (1) можно искать в виде $u = u_1 u_2$, где функция u_1 зависит лишь от первой группы переменных, а u_2 от остальных переменных. В силу того, что

$$L_1 L_2(u_1 u_2) = L_1 u_1 \cdot L_2 u_2, \quad M_1 M_2(u_1 u_2) = M_1 u_1 \cdot M_2 u_2,$$

уравнение $Lu = 0$ можно переписать следующим образом:

$$\frac{L_1 u_1}{M_1 u_1} = - \frac{M_2 u_2}{L_2 u_2}.$$

Так как функция $L_1 u_1 / M_1 u_1$ не зависит от второй группы переменных, а $M_2 u_2 / L_2 u_2$ от первой группы переменных, то

$$\frac{L_1 u_1}{M_1 u_1} = - \frac{M_2 u_2}{L_2 u_2} = \lambda,$$

где λ — некоторая постоянная. В результате приходим к уравнениям, в каждое из которых входят функции, зависящие лишь от части исходных переменных:

$$L_1 u_1 = \lambda M_1 u_1, \quad M_2 u_2 = -\lambda L_2 u_2. \quad (3)$$

В силу линейности оператора L линейная комбинация решений, т. е.

$$u = \sum_i c_i u_{1i} u_{2i}$$

(c_i — постоянные), соответствующих различным возможным значениям $\lambda = \lambda_i$, является решением уравнения (1). При определенных условиях (связанных с полнотой набора частных решений) произвольное решение уравнения $Lu = 0$ можно представить в виде $u = \sum_i c_i u_{1i} u_{2i}$ (см. [17]).

Мы свели решение исходного уравнения к уравнениям с меньшим числом переменных. Особый интерес представляют случаи, когда исходное уравнение последовательным применением метода разделения переменных удается свести к совокупности обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Применение криволинейных систем координат. Мы рассмотрели общие черты метода разделения переменных для решения уравнений вида $Lu = 0$, где L — некоторый линейный оператор. В конкретных задачах, когда требуется найти решение уравнения $Lu = 0$, удовлетворяющее определенным граничным условиям, метод разделения переменных удобно применять в тех случаях, когда переменные можно разделить не только в урав-

нении, но и в граничных условиях. В связи с этим часто вместо декартовых координат используются другие независимые переменные, отражающие симметрию задачи. Криволинейную систему координат следует выбирать таким образом, чтобы:

1) граница области, в которой решается задача, состояла из координатных поверхностей;

2) после перехода к криволинейным координатам можно было бы разделить переменные в уравнении.

Пример 2. Рассмотрим решение уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ ($\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа) методом разделения переменных. Для этого уравнения известно 11 систем криволинейных координат, в которых переменные разделяются. При этом возникают, как правило, обобщенные уравнения гипергеометрического типа.

Рассмотрим в виде примера нахождение частных решений методом разделения переменных для уравнения Гельмгольца в параболических цилиндрических координатах и координатах параболоида вращения*). Параболические цилиндрические координаты ξ, η, ζ связаны с декартовыми координатами с помощью формул

$$x = \xi\eta, \quad y = (\xi^2 - \eta^2)/2, \quad z = \zeta;$$

координаты параболоида вращения ξ, η, φ — формулами

$$x = \xi\eta \cos \varphi, \quad y = \xi\eta \sin \varphi, \quad z = (\xi^2 - \eta^2)/2.$$

В первом случае уравнение Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ принимает вид

$$\frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + k^2 u = 0, \quad (4)$$

во втором случае —

$$\frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left[\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{(\xi\eta)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0. \quad (5)$$

Найдем частное решение уравнения (4) методом разделения переменных, полагая

$$u = U(\xi)V(\eta)W(\zeta). \quad (6)$$

Подставляя (6) в (4), получим

$$\frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left[\frac{U''(\xi)}{U(\xi)} + \frac{V''(\eta)}{V(\eta)} \right] = - \left[\frac{W''(\zeta)}{W(\zeta)} + k^2 \right].$$

Левая часть этого равенства не зависит от ζ , а правая от ξ, η .

*) В учебниках по квантовой механике координаты параболоида вращения часто называют *параболическими координатами*.

Отсюда

$$\frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left[\frac{U''(\xi)}{U(\xi)} + \frac{V''(\eta)}{V(\eta)} \right] = \lambda, \quad (7)$$

$$\frac{W''(\zeta)}{W(\zeta)} + k^2 = -\lambda, \quad (8)$$

где λ — постоянная.

Записывая уравнение (7) в виде

$$\frac{U''(\xi)}{U(\xi)} - \lambda \xi^2 = - \left[\frac{V''(\eta)}{V(\eta)} - \lambda \eta^2 \right],$$

из аналогичных соображений получим

$$\frac{U''(\xi)}{U(\xi)} - \lambda \xi^2 = \mu, \quad \frac{V''(\eta)}{V(\eta)} - \lambda \eta^2 = -\mu,$$

где μ — постоянная.

В результате приходим к следующим уравнениям для функций $U(\xi)$, $V(\eta)$, $W(\zeta)$:

$$U'' - (\lambda \xi^2 + \mu) U = 0, \quad (9)$$

$$V'' - (\lambda \eta^2 - \mu) V = 0, \quad (10)$$

$$W'' + (k^2 + \lambda) W = 0. \quad (11)$$

Аналогичным образом, если искать решение уравнения (5) в виде

$$u = U(\xi)V(\eta)W(\varphi),$$

то для функций $U(\xi)$, $V(\eta)$, $W(\varphi)$ получим уравнения

$$U'' + \frac{1}{\xi} U' + \left(k^2 \xi^2 - \frac{\lambda}{\xi^2} + \mu \right) U = 0, \quad (12)$$

$$V'' + \frac{1}{\eta} V' + \left(k^2 \eta^2 - \frac{\lambda}{\eta^2} - \mu \right) V = 0, \quad (13)$$

$$W'' + \lambda W = 0. \quad (14)$$

Решения уравнений (11), (14) выражаются через элементарные функции. Уравнения (10), (13) сводятся соответственно к уравнениям (9), (12) заменой μ на $-\mu$. Таким образом, нам остается найти решения уравнений (9), (12).

Уравнение (9) является обобщенным уравнением гипергеометрического типа. При рассмотрении (12) естественно предварительно сделать замену $\xi^2 = t$, которая позволяет привести (12) к обобщенному уравнению гипергеометрического типа

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dU}{dt} + \frac{1}{4t^2} (k^2 t^2 + \mu t - \lambda) U = 0. \quad (15)$$

Уравнения (9) и (15) сводятся соответственно к уравнениям Эрмита и вырожденному гипергеометрическому уравнению (см. § 20) методом, изложенным в § 1.

§ 25. Краевые задачи математической физики

При решении дифференциальных уравнений в частных производных методом разделения переменных, изложенным в § 24, задача сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения этих уравнений для многих интересных задач математической физики можно выразить через специальные функции. Чтобы получить таким способом решение уравнения в частных производных для конкретной задачи, необходимо на решения рассматриваемого уравнения наложить дополнительные условия, обеспечивающие единственность решения задачи. Эти условия приводят в свою очередь к некоторым дополнительным условиям, налагаемым на решения соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений, и мы приходим к постановке так называемых краевых задач. Исследование свойств решений произвольных краевых задач в применении к дифференциальным уравнениям для специальных функций позволяет получить некоторые интересные свойства специальных функций.

1. Решение краевых задач методом разделения переменных. Метод разделения переменных, рассмотренный в § 24, широко применяется для решения возникающих в математической физике дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\rho(x, y, z) \left[A(t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B(t) \frac{\partial u}{\partial t} \right] = Lu, \quad (1)$$

где

$$Lu = \operatorname{div} [k(x, y, z) \operatorname{grad} u] - q(x, y, z)u.$$

Если $A(t) = 1$, $B(t) = 0$, то (1) описывает процессы распространения колебаний, например, распространение электромагнитных и звуковых волн; при $A(t) = 0$, $B(t) = 1$ уравнение (1) описывает различные процессы переноса, в частности, процессы распространения тепла или диффузии частиц в среде; при $A(t) = 0$, $B(t) = 0$ уравнение (1) описывает соответствующие стационарные процессы.

Для уравнений в частных производных решение, вообще говоря, зависит от произвольных функций. Например, общее решение уравнения $\partial^2 u / \partial x \partial y = 0$ имеет вид $u(x, y) = f(x) + g(y)$, где f, g — произвольные дифференцируемые функции. Поэтому для однозначного выделения решения уравнения в частных производных, описывающего реальный физический процесс, необходимо задавать дополнительные условия. Наиболее характерными из таких условий являются начальные и граничные условия. Для уравнения (1) начальные условия состоят в задании функций $u(x, y, z, t)$, $\frac{\partial}{\partial t} u(x, y, z, t)$ при $t = 0$ (если $A(t) = 0$, то достаточно задать лишь функцию $u(x, y, z, t)|_{t=0}$). Простейшие гранич-

ные условия имеют вид

$$\left[\alpha(x, y, z) u + \beta(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial n} \right]_S = 0. \quad (2)$$

Здесь $\alpha(x, y, z)$, $\beta(x, y, z)$ — некоторые функции, S — поверхность, ограничивающая область, в которой решается (1), $\partial u / \partial n$ — производная по направлению внешней нормали к поверхности S . Задача, связанная с нахождением решения уравнения (1), удовлетворяющего заданным начальным и граничным условиям, называется *краевой задачей*.

Рассмотрим схему решения краевой задачи методом разделения переменных. Частное решение уравнения (1) с граничным условием (2) можно найти методом разделения переменных, если искать решение в виде

$$u(x, y, z, t) = T(t)v(x, y, z).$$

В результате приходим к следующим уравнениям:

$$A(t) T'' + B(t) T' + \lambda T = 0, \quad (3)$$

$$Lv + \lambda \rho v = 0, \quad (4)$$

где λ — постоянная. Уравнение (3) является обыкновенным дифференциальным уравнением и для характерных задач математической физики легко решается аналитически. Для решения уравнения (4) следует использовать граничное условие, вытекающее из (2):

$$\left[\alpha(x, y, z) v + \beta(x, y, z) \frac{\partial v}{\partial n} \right]_S = 0. \quad (5)$$

Таким образом, мы приходим к следующей задаче: найти нетривиальное решение уравнения (4) с граничным условием (5). Значение λ , для которого поставленная задача имеет нетривиальное решение (т. е. $v(x, y, z) \neq 0$), называется *собственным значением*, а соответствующая функция $v(x, y, z)$ — *собственной функцией*.

Для характерных задач математической физики собственные функции и собственные значения λ можно перенумеровать. Пусть $v_n(x, y, z)$ — собственная функция, отвечающая собственному значению $\lambda = \lambda_n$ ($n = 0, 1, \dots$). Решение уравнения (1) с граничным условием (2) и соответствующими начальными условиями будем искать в виде

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) v_n'(x, y, z),$$

где $T_n(t)$ — решение уравнения (3) при $\lambda = \lambda_n$. Для того чтобы удовлетворялись начальные условия, начальные значения функций $T_n(t)$, $T_n'(t)$ при $t = 0$ должны выбираться так, чтобы

удовлетворялись равенства

$$u(x, y, z, t)|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0) v_n(x, y, z),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, y, z, t)|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} T'_n(0) v_n(x, y, z).$$

Таким образом, для того чтобы решить краевую задачу, следует потребовать, чтобы произвольную функцию переменных x, y, z (в данном случае $u|_{t=0}, \partial u/\partial t|_{t=0}$) можно было разложить в ряд по собственным функциям $v_n(x, y, z)$, т. е. система собственных функций $v_n(x, y, z)$ должна обладать так называемым свойством полноты *).

Задача особенно упрощается, если краевую задачу (4)–(5) удастся методом разделения переменных свести к одномерным краевым задачам, т. е. к уравнениям вида

$$Ly + \lambda \rho y = 0, \quad (6)$$

где

$$Ly = \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{dy}{dx} \right] - q(x)y, \quad k(x) > 0, \quad \rho(x) > 0.$$

Уравнение (6) рассматривается на интервале (a, b) с граничными условиями вида

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \quad (7)$$

где α_i, β_i — заданные постоянные. Задача такого вида называется задачей Штурма — Лиувилля. Функции $k(x), k'(x), q(x), \rho(x)$ будем предполагать непрерывными при $x \in [a, b]$.

2. Задача Штурма — Лиувилля. Основные свойства собственных значений и собственных функций. Рассмотрим основные свойства решений задачи Штурма — Лиувилля. Простейшие из таких свойств можно получить с помощью тождества

$$\int_{x_1}^{x_2} (fLg - gLf) dx = k(x) W(f, g) \Big|_{x_1}^{x_2}, \quad (8)$$

где

$$W(f, g) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}$$

* Представление решения в виде $\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) v_n(x, y, z)$ удобно при решении не только уравнений вида (1), но также и более общих неоднородных уравнений

$$\rho(x, y, z) \left[A(t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B(t) \frac{\partial u}{\partial t} \right] = Lu + F(x, y, z, t)$$

(см., например, [5, 17]).

есть вронскиан. Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ — два решения задачи Штурма — Лиувилля, соответствующие собственным значениям λ_1 , λ_2 , причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Так как в силу (7)

$$\alpha_1 y_1'(a) + \beta_1 y_1'(a) = 0, \quad \alpha_1 y_2'(a) + \beta_1 y_2'(a) = 0,$$

то, рассматривая эти равенства как систему линейных однородных уравнений относительно постоянных α_1 , β_1 , находим, что эти уравнения могут иметь нетривиальные решения лишь в случае, когда $W(y_1, y_2)|_{x=a} = 0$. Аналогично доказывается, что $W(y_1, y_2)|_{x=b} = 0$. Поэтому из (8) при $x_1 = a$, $x_2 = b$, $f(x) = y_1(x)$, $g(x) = y_2(x)$ получаем, что

$$\int_a^b (y_1 L y_2 - y_2 L y_1) dx = 0.$$

В силу (6) и того, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$, это равенство можно переписать в виде

$$\int_a^b y_1(x) y_2(x) \rho(x) dx = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2. \quad (9)$$

Таким образом, собственные функции задачи Штурма — Лиувилля (6), (7), соответствующие различным собственным значениям, ортогональны на интервале (a, b) с весом $\rho(x)$.

С помощью этого свойства легко показать, что собственные значения задачи Штурма — Лиувилля вещественны, если коэффициенты уравнения (6) и постоянные α_i , β_i в условиях (7) являются вещественными. Действительно, предположим, что имеется собственная функция $y(x)$ задачи Штурма — Лиувилля, соответствующая комплексному собственному значению λ . Переходя в (6), (7) к комплексно сопряженным величинам, легко убедиться в том, что $y^*(x)$ является собственной функцией, отвечающей собственному значению λ^* . Если предположить, что $\lambda \neq \lambda^*$, то из равенства (9) получаем

$$\int_a^b |y(x)|^2 \rho(x) dx = 0,$$

что невозможно в силу того, что $\rho(x) > 0$, $y(x) \neq 0$.

В задачах, представляющих физический интерес, часто требуется определять собственные функции и собственные значения краевой задачи для случая, когда коэффициенты уравнения (6) имеют какую-либо особенность при $x \rightarrow a$ ($k(x) \rightarrow 0$ или $q(x) \rightarrow \infty$ и т. д.). Все рассмотренные выше свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма — Лиувилля сохраняются и в этом случае при довольно общих условиях, наложенных на поведение коэффициентов уравнения (6) при $x \rightarrow a$. В таких случаях вместо первого из граничных условий (7) часто используют требование ограниченности при $x \rightarrow a$ решения задачи Штурма — Лиувилля.

При решении задачи Штурма — Лиувилля для уравнений, не имеющих особенности, собственные функции определяются из однородных граничных условий вида (7) как при $x=a$, так и при $x=b$. При этом свойства ортогональности собственных функций и вещественности собственных значений основываются на свойстве самосопряженности оператора L для класса функций, имеющих непрерывную вторую производную на интервале (a, b) :

$$\int_a^b (fLg - gLf) dx = 0.$$

Согласно (8) имеем

$$\int_a^b (fLg - gLf) dx = k(x) W(f, g) \Big|_a^b.$$

Если функции f, g удовлетворяют однородным граничным условиям как при $x=a$, так и при $x=b$, то оператор L будет самосопряженным за счет того, что

$$W(f, g)|_{x=a, b} = (fg' - gf')|_{x=a, b} = 0.$$

Пусть теперь точка $x=a$ будет особой точкой уравнения. Тогда свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма — Лиувилля для уравнений без особенности, очевидно, сохраняются и для уравнений с особенностью, если из условия ограниченности при $x=a$ будет вытекать условие

$$k(x)(fg' - gf')|_{x=a} = 0.$$

Классификация собственных чисел и собственных функций задачи Штурма — Лиувилля может быть произведена на основе осцилляционных свойств решений этой задачи.

3. Осцилляционные свойства решений задачи Штурма — Лиувилля. Осцилляционные свойства решений уравнения

$$[k(x)y']' + g(x)y = 0 \quad (10)$$

при $k(x) > 0$ удобно изучать с помощью замены переменных

$$y = r(x) \sin \varphi(x), \quad ky' = r(x) \cos \varphi(x). \quad (11)$$

Получим уравнения для неизвестных функций $r(x), \varphi(x)$:

$$k(x)y' = k(x)(r' \sin \varphi + r\varphi' \cos \varphi) = r \cos \varphi,$$

$$g(x)y = -[k(x)y']' = -r' \cos \varphi + r\varphi' \sin \varphi = gr \sin \varphi.$$

Отсюда

$$r' \sin \varphi + r\varphi' \cos \varphi = \frac{r}{k} \cos \varphi,$$

$$-r' \cos \varphi + r\varphi' \sin \varphi = gr \sin \varphi.$$

Решая эту систему относительно φ', r' , приходим к следующим

дифференциальным уравнениям:

$$\varphi' = \frac{1}{k(x)} \cos^2 \varphi + g(x) \sin^2 \varphi, \quad r' = \frac{1}{2} r \left(\frac{1}{k} - g \right) \sin 2\varphi. \quad (12)$$

Из последнего уравнения находим

$$r(x) = r(x_0) \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \left[\frac{1}{k(t)} - g(t) \right] \sin 2\varphi(t) dt \right\},$$

откуда следует, что функция $r(x)$ знакопостоянна. Поэтому все изменения знаков функций $y(x)$ и $y'(x)$ связаны с изменением знаков функций $\sin \varphi(x)$ и $\cos \varphi(x)$, т. е. для изучения осцилляционных свойств решений уравнения (10) достаточно ограничиться изучением поведения решения первого из уравнений (12).

Теорема 1 (теорема сравнения). Пусть функции $\varphi(x)$, $\bar{\varphi}(x)$ — решения уравнений

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{1}{k(x)} \cos^2 \varphi + g(x) \sin^2 \varphi, \\ \bar{\varphi}' &= \frac{1}{\bar{k}(x)} \cos^2 \bar{\varphi} + \bar{g}(x) \sin^2 \bar{\varphi}, \end{aligned}$$

причем $\bar{\varphi}(x_0) = \varphi(x_0)$. Если $1/\bar{k}(x) \geq 1/k(x)$, $\bar{g}(x) \geq g(x)$, то

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(x) &\geq \varphi(x), & x > x_0, \\ \bar{\varphi}(x) &\leq \varphi(x), & x < x_0. \end{aligned}$$

Доказательство. Положим

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_v(x)} &= \frac{1}{k(x)} + v \left[\frac{1}{\bar{k}(x)} - \frac{1}{k(x)} \right], \\ g_v(x) &= g(x) + v [\bar{g}(x) - g(x)], \end{aligned}$$

где v — параметр, принимающий значения от 0 до 1. Рассмотрим уравнение

$$\varphi_v' = \frac{1}{k_v(x)} \cos^2 \varphi_v + g_v(x) \sin^2 \varphi_v \quad (13)$$

с начальным условием $\varphi_v(x_0) = \varphi(x_0)$. Так как $k_0(x) = k(x)$, $k_1(x) = \bar{k}(x)$, $g_0(x) = g(x)$, $g_1(x) = \bar{g}(x)$, то $\varphi_0(x) = \varphi(x)$, $\varphi_1(x) = \bar{\varphi}(x)$. Пусть $\psi_v(x) = \partial \varphi_v(x) / \partial v$. Из (13) имеем

$$\psi_v' = a_v(x) \psi_v + b_v(x), \quad \psi_v(x_0) = 0,$$

где

$$a_v = (g_v - 1/k_v) \sin 2\varphi_v, \quad b_v = (1/\bar{k} - 1/k) \cos^2 \varphi_v + (\bar{g} - g) \sin^2 \varphi_v.$$

Очевидно, что $b_v(x) \geq 0$. Решение линейного неоднородного

уравнения для $\psi_v(x)$ имеет вид

$$\psi_v(x) = \int_{x_0}^x b_v(t) \exp \left\{ \int_t^x a_v(s) ds \right\} dt.$$

Из этого выражения видно, что $\psi_v(x) \geq 0$ при $x > x_0$ и $\psi_v(x) \leq 0$ при $x < x_0$. Утверждение теоремы следует из очевидного равенства

$$\bar{\varphi}(x) - \varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_0(x) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi_v(x)}{\partial v} dv = \int_0^1 \psi_v(x) dv.$$

З а м е ч а н и е. Если в одном из условий теоремы имеем строгое неравенство на части интервала (x_0, x) , то в соответствующем утверждении также имеем строгое неравенство. Это вытекает из того, что $b_v(t) > 0$ на рассматриваемой части интервала (x_0, x) .

Отметим также следующее свойство функции $\varphi(x)$. Так как в точках, где $\varphi(x) = \pi n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), будет $\varphi'(x) > 0$, то в случае выполнения неравенства $\varphi(x_0) \geq \pi n$ при $x > x_0$ будет иметь место неравенство $\varphi(x) > \pi n$. В противном случае найдется такая точка $x_1 > x_0$, для которой $\varphi(x_1) = \pi n$, $\varphi'(x_1) \leq 0$, что невозможно. В частности, если $\varphi(x_0) \geq 0$, то $\varphi(x) > 0$ при $x > x_0$.

Число нулей функции $y(x)$ на интервале (a, b) в силу представления $y = r \sin \varphi$ равно числу точек на этом интервале, в которых $\varphi(x) = \pi n$. Из только что рассмотренного свойства вытекает, что число нулей функции $y(x)$ равно числу целых чисел, заключенных между $\varphi(a)/\pi$ и $\varphi(b)/\pi$.

Рассмотрим теперь осцилляционные свойства решений задачи Штурма — Лиувилля:

$$\begin{aligned} [k(x)y']' + g(x, \lambda)y &= 0, \quad g(x, \lambda) = \lambda \rho(x) - q(x), \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) &= 0, \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \\ k(x) > 0, \quad \rho(x) > 0, \quad x \in [a, b]. \end{aligned} \quad (14)$$

В результате замены $y = r \sin \varphi$, $ky' = r \cos \varphi$ приходим к следующему уравнению для $\varphi(x)$:

$$\varphi' = \frac{1}{k(x)} \cos^2 \varphi + g(x, \lambda) \sin^2 \varphi.$$

Граничные условия (14), используя (11), можно переписать в виде

$$\operatorname{ctg} \varphi(a) = -\frac{\alpha_1 k(a)}{\beta_1}, \quad \operatorname{ctg} \varphi(b) = -\frac{\alpha_2 k(b)}{\beta_2}.$$

Первое граничное условие будет выполнено, если положить

$$\varphi(a) = \operatorname{arccotg} \left(-\frac{\alpha_1 k(a)}{\beta_1} \right)$$

(при $\beta_1 = 0$ положим $\varphi(a) = 0$). Тогда $0 \leq \varphi(a) \leq \pi$ и, следовательно

но, $\varphi(b) > 0$. Второе граничное условие служит для определения собственных значений λ :

$$\varphi(b) \equiv \varphi(b, \lambda) = \operatorname{arccctg} \left(-\frac{\alpha_2 k(b)}{\beta_2} \right) + \pi n,$$

где n — целое неотрицательное число (при $\beta_2 = 0$ положим $\operatorname{arccctg}(-\alpha_2 k(b)/\beta_2) = \pi$).

Теорема 2 (осцилляционная теорема). *Задача Штурма — Лиувилля имеет бесконечное число собственных значений $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$. Собственные функции, соответствующие собственному значению $\lambda = \lambda_n$, имеют ровно n нулей в интервале (a, b) .*

Доказательство. Пусть $\lambda = \lambda_n$ есть корень уравнения

$$\varphi(b, \lambda) = \operatorname{arccctg} \left(-\frac{\alpha_2 k(b)}{\beta_2} \right) + \pi n, \quad (15)$$

где n — целое неотрицательное число. Так как $0 \leq \varphi(a) < \pi$, $\pi n < \varphi(b, \lambda_n) \leq \pi(n+1)$, то в интервале (a, b) между числами $\varphi(a)/\pi$ и $\varphi(b, \lambda_n)/\pi$ содержится ровно n целых чисел. Как было показано ранее, это означает, что функция $y(x) = r(x) \sin \varphi(x)$, соответствующая собственному значению $\lambda = \lambda_n$, имеет ровно n нулей в интервале (a, b) .

Докажем теперь, что уравнение (15) имеет в точности один корень при любом фиксированном значении $n = 0, 1, \dots$. Так как функция $g(x, \lambda) = \lambda \rho(x) - q(x)$ растет с ростом λ , $\varphi(a)$ не зависит от λ , то по теореме сравнения величина $\varphi(x) = \varphi(x, \lambda)$ при фиксированном значении $x > a$ является монотонно возрастающей функцией λ . Поэтому уравнение (15) при фиксированном значении n может иметь лишь один корень $\lambda = \lambda_n$, причем $\lambda_{n+1} > \lambda_n$. Следовательно, все собственные значения можно занумеровать по числу n , принимающему значения $n = 0, 1$.

Для того чтобы доказать, что уравнение (15) имеет корень при любом значении $n = 0, 1, \dots$, достаточно показать, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \varphi(b, \lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \varphi(b, \lambda) = +\infty. \quad (16)$$

Воспользуемся теоремой сравнения. Пусть в задаче Штурма — Лиувилля функции $k(x)$, $g(x, \lambda)$ заменены соответственно на постоянные $\bar{k}$, $\bar{g}(\lambda)$ и $\tilde{k}$, $\tilde{g}(\lambda)$, причем

$$\frac{1}{\bar{k}} \leq \frac{1}{k(x)} \leq \frac{1}{\tilde{k}}, \quad \bar{g}(\lambda) \leq g(x, \lambda) \leq \tilde{g}(\lambda).$$

Тогда для соответствующих функций $\varphi(x)$, $\bar{\varphi}(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$ получим уравнения

$$\varphi' = \frac{1}{k(x)} \cos^2 \varphi + g(x, \lambda) \sin^2 \varphi,$$

$$\bar{\varphi}' = \frac{1}{\bar{k}} \cos^2 \bar{\varphi} + \bar{g}(\lambda) \sin^2 \bar{\varphi}, \quad \tilde{\varphi}' = \frac{1}{\tilde{k}} \cos^2 \tilde{\varphi} + \tilde{g}(\lambda) \sin^2 \tilde{\varphi}.$$

Если в граничных условиях (14) постоянные α_1, β_1 заменить соответственно на $\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1$ и $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1$, которые выбираются из условия $\varphi(a) = \bar{\varphi}(a) = \tilde{\varphi}(a)^*$, то по теореме сравнения при $x > a$ будут иметь место неравенства

$$\bar{\varphi}(x, \lambda) \leq \varphi(x, \lambda) \leq \tilde{\varphi}(x, \lambda)$$

и, в частности,

$$\bar{\varphi}(b, \lambda) \leq \varphi(b, \lambda) \leq \tilde{\varphi}(b, \lambda).$$

Поэтому предельные соотношения (16) будут вытекать из аналогичных соотношений для $\bar{\varphi}(b, \lambda)$ и $\tilde{\varphi}(b, \lambda)$.

Для определения функций $\bar{\varphi}(x, \lambda)$, $\tilde{\varphi}(x, \lambda)$ решим уравнения для $\bar{y}(x, \lambda)$, $\tilde{y}(x, \lambda)$:

$$\bar{y}'' + \frac{\bar{g}(\lambda)}{\bar{k}} \bar{y} = 0, \quad (17)$$

$$\tilde{y}'' + \frac{\tilde{g}(\lambda)}{\tilde{k}} \tilde{y} = 0. \quad (18)$$

Так как $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} g(x, \lambda) = -\infty$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} g(x, \lambda) = +\infty$, то будем считать, что аналогичные соотношения выполнены и для функций $\bar{g}(\lambda)$, $\tilde{g}(\lambda)$. Покажем, что $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \bar{\varphi}(b, \lambda) = 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \tilde{\varphi}(b, \lambda) = 0$. Решение уравнения (17), удовлетворяющее условию $\bar{\alpha}_1 \bar{y}(a) + \bar{\beta}_1 \bar{y}'(a) = 0$, имеет вид

$$\bar{y}(x, \lambda) = \begin{cases} A \left[\frac{\bar{\alpha}_1}{\omega} \operatorname{sh} \omega(x-a) - \bar{\beta}_1 \operatorname{ch} \omega(x-a) \right], & \bar{g}(\lambda) < 0, \\ A \sin(\omega(x-a) + \varphi_0), & \bar{g}(\lambda) > 0, \end{cases}$$

где $\omega = \sqrt{|\bar{g}/\bar{k}|}$, $\bar{\alpha}_1 \sin \varphi_0 + \bar{\beta}_1 \omega \cos \varphi_0 = 0$.

Функция $\bar{y}(x, \lambda)$ при $x > a$ не имеет нулей, если $\bar{g}(\lambda) \rightarrow -\infty$, так как в этом случае

$$\bar{y}(x, \lambda) \approx \begin{cases} -A \bar{\beta}_1 \operatorname{ch} \omega(x-a), & \bar{\beta}_1 \neq 0, \\ A \frac{\bar{\alpha}_1}{\omega} \operatorname{sh} \omega(x-a), & \bar{\beta}_1 = 0. \end{cases}$$

Это означает, что $0 < \bar{\varphi}(x, \lambda) < \pi$ при $x > a$, если λ — любое достаточно большое по модулю отрицательное число. Кроме того,

*) Это условие будет выполнено, если

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} k(a) = \frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\beta}_1} \bar{k} = \frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\beta}_1} \tilde{k}.$$

как нетрудно видеть,

$$\operatorname{ctg} \bar{\varphi}(x, \lambda) = \bar{k} \frac{\bar{y}'(x, \lambda)}{\bar{y}(x, \lambda)} \rightarrow +\infty, \quad \lambda \rightarrow -\infty.$$

Это означает, что $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \bar{\varphi}(x, \lambda) = 0$.

Пусть теперь $\lambda \rightarrow +\infty$. Тогда из явного выражения для $\bar{y}(x, \lambda)$ видно, что эта функция может иметь произвольно большое число нулей на интервале (a, b) , т. е. $\bar{\varphi}(b, \lambda) \geq \pi n$ при любом $n > 0$ для достаточно большого положительного значения λ . Поэтому $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \bar{\varphi}(b, \lambda) = +\infty$.

Мы доказали предельные соотношения для функции $\bar{\varphi}(x, \lambda)$. Аналогично доказываются эти соотношения и для $\tilde{\varphi}(x, \lambda)$. Так как

$$\bar{\varphi}(x, \lambda) \leq \varphi(x, \lambda) \leq \tilde{\varphi}(x, \lambda),$$

то $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \varphi(b, \lambda) = 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \varphi(b, \lambda) = +\infty$. Теорема доказана.

Рассуждения, использованные при доказательстве теоремы, дают возможность просто оценить собственные значения λ . Пусть $\bar{\lambda}_n$ и $\tilde{\lambda}_n$ соответствуют функциям $\bar{k}(x)$, $\bar{g}(x, \lambda)$ и $\tilde{k}(x)$, $\tilde{g}(x, \lambda)$, причем

$$\frac{1}{\bar{k}(x)} \leq \frac{1}{k(x)} \leq \frac{1}{\tilde{k}(x)}, \quad \bar{g}(x, \lambda) \leq g(x, \lambda) \leq \tilde{g}(x, \lambda),$$

$$\frac{\alpha_1 k(a)}{\beta_1} = \frac{\bar{\alpha}_1 \bar{k}(a)}{\bar{\beta}_1} = \frac{\tilde{\alpha}_1 \tilde{k}(a)}{\tilde{\beta}_1}, \quad \frac{\alpha_2 k(b)}{\beta_2} = \frac{\bar{\alpha}_2 \bar{k}(b)}{\bar{\beta}_2} = \frac{\tilde{\alpha}_2 \tilde{k}(b)}{\tilde{\beta}_2},$$

где $\alpha_i, \beta_i, \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, \tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i$ — постоянные, входящие в граничные условия вида (14).

Так как $\bar{\varphi}(a) = \varphi(a) = \tilde{\varphi}(a)$, то по теореме сравнения $\bar{\varphi}(b, \lambda) \leq \varphi(b, \lambda) \leq \tilde{\varphi}(b, \lambda)$. Кроме того,

$$\varphi(b, \lambda_n) = \operatorname{arccotg} \left(-\frac{\alpha_2 k(b)}{\beta_2} \right) + \pi n,$$

$$\bar{\varphi}(b, \bar{\lambda}_n) = \operatorname{arccotg} \left(-\frac{\bar{\alpha}_2 \bar{k}(b)}{\bar{\beta}_2} \right) + \pi n,$$

$$\tilde{\varphi}(b, \tilde{\lambda}_n) = \operatorname{arccotg} \left(-\frac{\tilde{\alpha}_2 \tilde{k}(b)}{\tilde{\beta}_2} \right) + \pi n,$$

откуда $\varphi(b, \lambda_n) = \bar{\varphi}(b, \bar{\lambda}_n) = \tilde{\varphi}(b, \tilde{\lambda}_n)$. Поэтому в силу монотонного возрастания функций $\varphi(b, \lambda)$, $\bar{\varphi}(b, \lambda)$, $\tilde{\varphi}(b, \lambda)$ с ростом λ имеем $\tilde{\lambda}_n \leq \lambda_n \leq \bar{\lambda}_n$.

Рассмотрим также еще один удобный способ оценки спизу собственных значений в важном для приложений случае, когда

$\alpha_1\beta_1 \leq 0$, $\alpha_2\beta_2 \geq 0$. Для получения такой оценки умножим уравнение

$$[k(x)y']' + [\lambda\rho(x) - q(x)]y = 0$$

на $y(x)$ и проинтегрируем его по x от a до b . Имеем

$$\lambda = - \frac{\int_a^b y L y \, dx}{\int_a^b y^2 \rho \, dx} = \frac{\int_a^b q y^2 \, dx - \int_a^b y \frac{d}{dx} \left(k \frac{dy}{dx} \right) dx}{\int_a^b y^2 \rho \, dx}.$$

С другой стороны,

$$- \int_a^b y \frac{d}{dx} \left(k \frac{dy}{dx} \right) dx = - k y y' \Big|_a^b + \int_a^b k \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx.$$

Для оценки подстановки воспользуемся граничными условиями (14), умножив первое из них на $(\alpha_1 y' + \beta_1 y)|_{x=a}$, а второе на $(\alpha_2 y' + \beta_2 y)|_{x=b}$. В результате получим

$$y y' \Big|_{x=a} = - \frac{\alpha_1 \beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} (y^2 + y'^2) \Big|_{x=a} \geq 0,$$

$$y y' \Big|_{x=b} = - \frac{\alpha_2 \beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} (y^2 + y'^2) \Big|_{x=b} \leq 0.$$

Поэтому $-\int_a^b y \frac{d}{dx} \left(k \frac{dy}{dx} \right) dx \geq 0$, откуда следует, что

$$\lambda \geq \frac{\int_a^b q y^2 \, dx}{\int_a^b y^2 \rho \, dx}.$$

Так как $\rho(x) > 0$, то по теореме о среднем

$$\int_a^b q y^2 \, dx = \left(\frac{q}{\rho} \right) \Big|_{x=x^*} \int_a^b y^2 \rho \, dx, \quad x^* \in (a, b).$$

Таким образом,

$$\lambda \geq \min_{x \in (a, b)} \frac{q(x)}{\rho(x)}. \quad (19)$$

В случае, когда собственные функции $y(x) \neq \text{const}$, будет иметь место строгое неравенство, так как

$$\int_a^b k \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx > 0.$$

4. Разложение функций по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля. При решении краевых задач математической физики широко используются *разложения функций по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля*:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n(x), \quad (20)$$

где $y_n(x)$ — собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda = \lambda_n$. Коэффициенты a_n находятся из свойств ортогональности собственных функций:

$$a_n = \int_a^b f(x) y_n(x) \rho(x) dx \bigg/ \int_a^b y_n^2(x) \rho(x) dx. \quad (21)$$

В частном случае задачи Штурма — Лиувилля, когда $k(x) = 1$, $\rho(x) = 1$, $q(x) = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$, собственные функции $y_n(x)$ имеют вид

$$y_n(x) = A_n \sin \frac{\pi n}{l} (x - a), \quad \lambda = \sqrt{\frac{\pi n}{l}},$$

а при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$$y_n(x) = B_n \cos \frac{\pi n}{l} (x - a), \quad \lambda_n = \sqrt{\frac{\pi n}{l}}, \quad l = b - a.$$

В этих случаях разложение (20) является известным разложением в ряд Фурье соответственно по синусам или по косинусам.

В общем случае условия, при которых справедливо разложение (20), можно свести к условиям разложимости функции в ряд Фурье тем же способом, который был описан в § 8 для классических ортогональных полиномов (см. теорему равносходимости).

5. Краевые задачи для уравнения Бесселя. В качестве примера решения краевых задач математической физики методом разделения переменных рассмотрим решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

в бесконечном цилиндре $r < r_0$ с граничными условиями

$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial r} \right) \bigg|_{r=r_0} = 0 \quad (22)$$

и с какими-либо начальными условиями, не зависящими от расстояний вдоль оси цилиндра (α, β — постоянные).

Если использовать цилиндрические координаты, то естественно предположить, что $u = u(r, \varphi, t)$. Будем искать частное решение задачи методом разделения переменных, полагая

$$u = T(t)R(r)\Phi(\varphi).$$

Подставляя это выражение в уравнение теплопроводности

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},$$

получим

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T'}{T} = \frac{1}{rR} \cdot (rR')' + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda_x$$

где λ — постоянная, так как левая часть равенства не зависит от r , φ , а правая от t . Уравнение для функции $T(t)$ дает

$$T(t) = e^{-\lambda a^2 t}.$$

Далее, имеем

$$\frac{r}{R} (rR')' + \lambda r^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu_x$$

где μ — постоянная. Решая уравнение для $\Phi(\varphi)$, получим

$$\Phi(\varphi) = A \cos \sqrt{\mu} \varphi + B \sin \sqrt{\mu} \varphi.$$

Так как из физических соображений функция $u(r, \varphi, t)$ должна быть однозначной, то функция $\Phi(\varphi)$ должна удовлетворять условию периодичности

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi),$$

откуда $\mu = n^2$, где $n = 0, 1, \dots$. Поэтому функция $R(r)$ должна удовлетворять уравнению

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0, \quad (23)$$

которое является частным случаем уравнения Ломмеля (14.4). По физическому смыслу функция $u(r, \varphi, t)$ должна быть ограниченной при $r \leq r_0$ и, в частности, при $r \rightarrow 0$. Поэтому с точностью до множителя

$$R(r) = J_n(\sqrt{\lambda} r).$$

Согласно (22) функция $R(r)$ должна удовлетворять граничному условию

$$[\alpha R(r) + \beta R'(r)]|_{r=r_0} = 0, \quad (24)$$

откуда получаем уравнение для определения возможных значений постоянной λ :

$$\alpha J_n(z) + \gamma z J_n'(z) = 0, \quad (25)$$

где $z = \sqrt{\lambda} r_0$, $\gamma = \beta/r_0$.

Общее решение поставленной задачи представим в виде суперпозиции полученных частных решений:

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n,m=0}^{\infty} e^{-\lambda_{nm} a^2 t} (A_{nm} \cos n\varphi + B_{nm} \sin n\varphi) J_n(\sqrt{\lambda_{nm}} r)$$

(суммирование производится по всем различным собственным значениям λ). Постоянные A_{nm} , B_{nm} определяются из начальных условий с помощью свойств ортогональности собственных функций.

Естественным обобщением задачи (23), (24) является задача о нахождении собственных функций и собственных значений для уравнения

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(\lambda x - \frac{\nu^2}{x} \right) y = 0, \quad \nu \geq 0, \quad (26)$$

с граничным условием $[\alpha y(x) + \beta y'(x)]|_{x=1} = 0$ и условием ограниченности при $x \rightarrow 0$. Условию ограниченности в окрестности точки $x=0$ при заданных значениях λ и $\nu \geq 0$ удовлетворяет лишь одно из двух линейно независимых решений уравнения (26):

$$y_\lambda(x) = J_\nu(sx), \quad s = \sqrt{\lambda}.$$

Уравнение (26) имеет особенность при $x \rightarrow 0$. Поэтому для того, чтобы основные свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма — Лиувилля сохранялись и для этого уравнения, необходимо проверить, что при $x \rightarrow 0$ $k(x)W[y_{\lambda_1}(x), y_{\lambda_2}(x)] \rightarrow 0$. Используя разложение функции $J_\nu(sx)$ в степенной ряд, получим

$$\begin{aligned} k(x)W[y_{\lambda_1}(x), y_{\lambda_2}(x)] &= \\ &= x \left[J_\nu(s_1x) \frac{d}{dx} J_\nu(s_2x) - J_\nu(s_2x) \frac{d}{dx} J_\nu(s_1x) \right] = \\ &= x \left\{ \frac{1}{2^{2\nu} \Gamma^2(\nu+1)} [(s_1x)^\nu s_2 (s_2x)^{\nu-1} - (s_2x)^\nu s_1 (s_1x)^{\nu-1}] + \right. \\ &\quad \left. + O(x^{2\nu+1}) \right\} = O(x^{2\nu+2}) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Мы приходим к следующим утверждениям.

1. Собственными функциями рассматриваемой задачи являются функции

$$y_{\nu n}(x) = J_\nu(\sqrt{\lambda_{\nu n}} x), \quad n = 0, 1, \dots,$$

а собственные значения определяются из уравнения

$$\alpha J_\nu(z) + \gamma z J'_\nu(z) = 0, \quad (27)$$

где $z = \sqrt{\lambda} l$, $\gamma = \beta/l$.

Если $\alpha/\gamma + \nu < 0$, то уравнение (27) будет иметь один корень, соответствующий собственному значению $\lambda < 0$. Для такого значения λ во всех дальнейших выкладках следует заменить $\sqrt{\lambda}$ и $J_\nu(\sqrt{\lambda} x)$ соответственно на $i\sqrt{-\lambda}$ и $e^{i\nu\pi/2} J_\nu(\sqrt{-\lambda} x)$.

2. Собственные функции $J_\nu(\sqrt{\lambda_{\nu n}} x)$ ортогональны с весом $\rho(x) = x$ на интервале $(0, l)$, т. е.

$$\int_0^l J_\nu(\sqrt{\lambda_{\nu n}} x) J_\nu(\sqrt{\lambda_{\nu m}} x) x dx = 0, \quad m \neq n.$$

Для вычисления квадрата нормы собственных функций воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} \int_0^l y_\lambda(x) y_\mu(x) \rho(x) dx &= \frac{1}{\lambda - \mu} k(x) W[y_\lambda(x), y_\mu(x)] \Big|_0^l = \\ &= \frac{1}{\lambda - \mu} W[y_\lambda(x), y_\mu(x)] \Big|_{x=l} \quad (28) \end{aligned}$$

(аналогичное тождество использовалось при доказательстве ортогональности собственных функций задачи Штурма — Лиувилля).

Переходя в (28) к пределу при $\mu \rightarrow \lambda$ и используя правило Лопиталя раскрытия неопределенности, получим

$$\int_0^l y_\lambda^2(x) \rho(x) dx = k(x) W\left(\frac{\partial y_\lambda}{\partial \lambda}, y_\lambda\right) \Big|_{x=l},$$

откуда

$$N_{\nu n}^2 = \int_0^l x J_\nu^2(\sqrt{\lambda_{\nu n}} x) dx = \frac{x}{2\sqrt{\lambda}} W[x J'_\nu(\sqrt{\lambda} x), J_\nu(\sqrt{\lambda} x)] \Big|_{\lambda=\lambda_{\nu n}}^{x=l}$$

(производная берется по аргументу функции Бесселя). Вронскиан легко вычисляется, если выразить вторую производную через первую производную и саму функцию с помощью уравнения Бесселя. В результате получим

$$N_{\nu n}^2 = \frac{l^2}{2} \left\{ [J'_\nu(z)]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) J_\nu^2(z) \right\} \Big|_{z=\sqrt{\lambda_{\nu n}} l}. \quad (29)$$

Уравнение (26) имеет особенность при $x \rightarrow 0$. Однако можно показать, что осцилляционная теорема для поставленной задачи сохраняет силу, так что уравнение (27) имеет бесконечное число корней $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, причем собственные функции $y_\lambda(x)$, соответствующие собственному значению $\lambda = \lambda_{\nu n}$, имеют ровно n нулей в интервале $(0, l)$. По теореме сравнения собственные значения $\lambda = \lambda_{\nu n}$ растут с ростом ν .

6. Разложения Дини и Фурье — Бесселя. Интеграл Фурье — Бесселя *). Разложение

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\nu n} J_\nu(\sqrt{\lambda_{\nu n}} x), \quad (30)$$

*) Теория разложений Фурье — Бесселя и Дини дана в [3].

где

$$a_{\nu n} = \frac{1}{N_{\nu n}^2} \int_0^l x f(x) J_{\nu}(\sqrt{\lambda_{\nu n}} x) dx, \quad (31)$$

называется разложением Дини функций $f(x)$. Здесь $\lambda_{\nu n}$ — корень уравнения (27), а квадрат нормы вычисляется по формуле (29). Если уравнение (27) имеет вид $J_{\nu}(z) = 0$, что соответствует случаю $\gamma = 0$, то разложение (30) называется разложением Фурье — Бесселя. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Пусть функция $\forall x f(x)$ абсолютно интегрируема на отрезке $[0, l]$, и пусть $\nu \geq -1/2$. Тогда при $0 < x < l$ разложение (30) имеет место одновременно с соответствующим разложением в обычный ряд Фурье.

В задачах математической физики часто используется предельный вид разложения Фурье — Бесселя, получающийся из (30) при $l \rightarrow \infty$. Мы получим это разложение с помощью не очень строгих рассуждений. Согласно (29) — (31)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_0^l x f(x) J_{\nu}(k_n x) dx}{\frac{l^2}{2} [J'_{\nu}(k_n l)]^2} J_{\nu}(k_n x), \quad (32)$$

где значения k_n определяются из уравнения

$$J_{\nu}(k_n l) = 0. \quad (33)$$

Первые члены ряда (32) при $l \rightarrow \infty$ не дают вклада в силу наличия множителя l^2 в знаменателе. Поэтому для вывода можно воспользоваться асимптотическими значениями k_n при достаточно больших n . С помощью (33) получим

$$\cos\left(k_n l - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \approx 0,$$

откуда

$$k_n l \approx \pi n + \text{const.}$$

Вычисляя $J'_{\nu}(k_n l)$ по формуле дифференцирования, получим

$$[J'_{\nu}(k_n l)]^2 = [J_{\nu+1}(k_n l)]^2 \approx \frac{2}{\pi(k_n l)} \sin^2\left(k_n l - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \approx \frac{2}{\pi k_n l}$$

($\sin^2(k_n l - \pi\nu/2 - \pi/4) \approx 1$, так как $\cos(k_n l - \pi\nu/2 - \pi/4) \approx 0$). В силу того, что $\Delta k_n = k_{n+1} - k_n \approx \pi/l$, разложение (32) можно переписать в виде

$$f(x) \approx \sum_{k_n=0}^{\infty} k_n J_{\nu}(k_n x) \Delta k_n \int_0^l x f(x) J_{\nu}(k_n x) dx.$$

Так как $\Delta k_n \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$, то, заменяя суммирование по значениям k_n интегрированием, получим

$$f(x) = \int_0^{\infty} k F(k) J_{\nu}(kx) dk, \quad (34)$$

$$F(k) = \int_0^{\infty} x f(x) J_{\nu}(kx) dx. \quad (35)$$

Разложение (34) называется *интегралом Фурье — Бесселя*.

Теорема 4. Пусть функция $\forall x f(x)$ абсолютно интегрируема на интервале $(0, \infty)$, и пусть $\nu \geq -1/2$. Тогда при $x > 0$ разложение (34), (35) имеет место одновременно с соответствующим разложением в интеграл Фурье.

Заметим, что при $\nu = \pm 1/2$ разложения (30) и (34) сводятся к разложениям функции $\forall x f(x)$ по косинусам ($\nu = -1/2$) или по синусам ($\nu = 1/2$).

§ 26. Решение некоторых основных задач квантовой механики

В § 9 рассматривался общий метод решения квантовомеханических задач для состояний дискретного спектра энергий в случае, когда эти задачи методом разделения переменных сводятся к решению дифференциальных уравнений вида

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(x)}{\sigma(x)} u' + \frac{\tilde{\sigma}(x)}{\sigma^2(x)} u = 0, \quad (1)$$

где $\sigma(x)$, $\tilde{\sigma}(x)$ — полиномы не выше второй степени, $\tilde{\tau}(x)$ — полином не выше первой степени. В этом параграфе мы рассмотрим решение некоторых основных задач квантовой механики, которые можно решать методом, изложенным в § 9. Заметим, что к дифференциальным уравнениям вида (1) приводят такие важные задачи квантовой механики, как движение частицы в центрально-симметричном поле, гармонический осциллятор, решение уравнений Шредингера, Дирака и Клейна — Гордона для кулоновского потенциала, движение заряженной частицы в однородном электрическом и магнитном полях. Кроме того, к уравнению (1) приводят также многие модельные задачи атомной, молекулярной и ядерной физики, связанные с изучением процессов рассеяния, взаимодействия нейтронов с тяжелыми ядрами, анализом вращательно-колебательного спектра молекул (например решение уравнений Шредингера с потенциалами Морза, Кратцера, Вуда — Саксона, Пешля — Теллера *)).

При нахождении собственных значений энергии E и собственных функций для уравнений Шредингера, Дирака или Клей-

* См. Флюгге З. Задачи по квантовой механике. Т. I. — М.: Мир, 1974.

на — Гордона исходное уравнение приводится методом разделения переменных к уравнению (1) на некотором интервале (a, b) . Энергия E входит в коэффициенты уравнения (1) как параметр. На решения исходных уравнений для связанных состояний налагаются дополнительные требования. Они обычно эквивалентны требованиям, налагаемым на решения уравнения (1): функция $u(x)\sqrt{\rho(x)}$ должна быть ограниченной и квадратично интегрируемой на интервале (a, b) . Здесь $\tilde{\rho}(x)$ — решение уравнения $(\sigma\tilde{\rho})' = -\tau\tilde{\rho}$, функция $\tilde{\rho}(x)$ возникает при приведении уравнения (1) к самосопряженному виду:

$$(\sigma\tilde{\rho}u')' + \tilde{\rho}(x)\frac{\tilde{\sigma}(u)}{\sigma(x)}u = 0.$$

Как было показано в § 9, эту задачу можно решить следующим образом. Прежде всего, (1) заменой $u = \varphi(x)y$ следует привести к уравнению гипергеометрического типа

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0,$$

выбирая из возможных способов приведения такой, для которого функция $\tau(x) = \tilde{\tau}(x) + 2\pi(x)$ имеет отрицательную производную и корень на интервале (a, b) . При этом предполагается, что $\sigma(x) > 0$ при $x \in (a, b)$. Собственные значения энергий определяются из уравнения

$$\lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' = 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

а собственными функциями $y_n(x)$ будут полиномы n -й степени:

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\sigma^n(x) \rho(x)],$$

которые ортогональны на интервале (a, b) с весом $\rho(x)$, удовлетворяющим уравнению $(\sigma\rho)' = \tau\rho$ (B_n — нормировочная постоянная).

Рассмотрим несколько характерных задач квантовой механики, которые можно решить указанным методом.

1. Решение уравнения Шредингера для центрально-симметричного поля. Основной задачей квантовой механики атома является задача о движении электрона в центральном притягивающем поле. Это связано с тем, что описание движения атомных электронов, использующее приближение центрального поля, лежит в основе расчетов различных свойств атомных структур*). Такое описание позволяет понять особенности поведения атомов и найти их энергетические состояния, не решая чрезвычайно трудную квантовомеханическую задачу многих тел.

Чтобы найти волновую функцию $\psi(r)$ частицы, движущейся в некотором центрально-симметричном поле $U(r)$, требуется решить

*) См. Хартри Д. Расчеты атомных структур.— М.: ИЛ, 1960.

уравнение Шредингера

$$\Delta\psi + \frac{2M}{\hbar^2} [E - U(r)] \psi = 0, \quad (2)$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, M — масса частицы, $U(r)$ — потенциальная энергия.

Будем искать частные решения уравнения (2) методом разделения переменных в сферических координатах, полагая

$$\psi(r) = F(r)Y(\theta, \varphi).$$

Производя те же действия, что и при решении уравнения Лапласа (см. § 10), для функций $F(r)$, $Y(\theta, \varphi)$ получим уравнения

$$\Delta_{\theta\varphi}Y + \lambda Y = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dF}{dr} \right) + \left[\frac{2M}{\hbar^2} (E - U(r)) - \frac{\lambda}{r^2} \right] F(r) = 0. \quad (4)$$

Уравнение (3), как было показано выше, имеет решения, удовлетворяющие условиям ограниченности и однозначности для $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, лишь при $\lambda = l(l+1)$, причем в этом случае $Y(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta, \varphi)$ — сферическая функция.

Так как

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dF}{dr} \right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2}{dr^2} (rF),$$

то (4) заменой $R(r) = rF(r)$ сводится к уравнению

$$R'' + \left[\frac{2M}{\hbar^2} (E - U(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0. \quad (5)$$

Для состояний дискретного спектра волновая функция $\psi(r)$ должна удовлетворять условию нормировки

$$\int |\psi(r)|^2 r^2 dr d\Omega = 1.$$

Так как

$$\int |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega = 1,$$

то условие нормировки для функции $R(r)$ принимает вид

$$\int_0^\infty R^2(r) dr = 1. \quad (6)$$

При этом предполагается, что функция $F(r) = R(r)/r$ должна быть ограничена при $r \rightarrow 0$.

2. Решение уравнения Шредингера для кулоновского поля. Единственным атомом, для которого уравнение Шредингера может быть решено точно, является самый простой из всех атомов — атом водорода. Это, однако, не уменьшает, а увеличивает значение точного решения задачи для атома водорода, поскольку

аналитические решения, полученные в явном виде, часто могут быть полезны в качестве исходного пункта для проведения приближенных вычислений, относящихся к более сложным квантовомеханическим системам.

Для квантовомеханического описания атома водорода следует рассмотреть относительное движение электрона (масса m , заряд $-e$) и ядра (масса M , заряд e). Мы решим несколько более общую задачу, считая заряд ядра равным Ze . Эта задача представляет непосредственный физический интерес, так как с точностью до релятивистских эффектов вычисляемые при этом собственные значения энергии соответствуют наблюдаемым уровням энергии атома водорода ($Z=1$), однократно ионизованного атома гелия ($Z=2$) и т. д. Кроме того, модель водородоподобного атома может быть полезна, например, при изучении спектров щелочных элементов, а также рентгеновских спектров атомов с большим Z .

Рассматриваемая задача о движении электрона легко сводится к задаче о движении одного тела — частицы с приведенной массой [10]

$$\mu = \frac{mM}{m+M} \approx m$$

в кулоновском поле $U(r) = -Ze^2/r$, т. е. к решению уравнения Шредингера

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = 0.$$

Так как потенциальная энергия $U(r)$ отрицательна и обращается в нуль на бесконечности, то из физических соображений вытекает, что связанные состояния будут лишь при $E < 0$ (см. [10]).

Переходя к сферическим координатам, для радиальной функции $R(r)$ получаем уравнение

$$R'' + \left[\frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0. \quad (7)$$

В уравнении (7) удобно перейти к безразмерным переменным, используя атомную систему единиц, в которой в качестве единиц заряда, длины и энергии используются заряд электрона e ($e > 0$) и величины $a_0 = \hbar^2/(\mu e^2)$, $E_0 = e^2/a_0$. В результате (7) примет вид

$$R'' + \left[2 \left(E + \frac{Z}{r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0. \quad (8)$$

Требования ограниченности и квадратичной интегрируемости волновой функции $\psi(r)$ приводят к требованию ограниченности функции $R(r)/r$ при $r \rightarrow 0$ и к условию нормировки (6).

Уравнение (8) — обобщенное уравнение гипергеометрического типа, для которого $\sigma(r) = r$, $\tau(r) = 0$, $\tilde{\sigma}(r) = 2Er^2 + 2Zr - l(l+1)$.

Поставленная для уравнения (8) задача принадлежит к типу задач, рассмотренному в § 9. Действительно, в данном случае $\rho(r) = 1/r$. Поэтому требование квадратичной интегрируемости на интервале $(0, \infty)$ и ограниченности функции $\sqrt{\rho(r)}R(r)$ при $r \rightarrow 0$ вытекает из условия нормировки (6) и ограниченности функции $R(r)/r$ при $r \rightarrow 0$. Приведем (8) к уравнению гипергеометрического типа

$$\sigma(r)y'' + \tau(r)y' + \lambda y = 0,$$

полагая $R(r) = \varphi(r)y(r)$, где $\varphi(r)$ — решение уравнения $\varphi'/\varphi = -\pi(r)/\sigma(r)$.

Для полинома $\pi(r)$ в данном случае получаем выражение

$$\pi(r) = 1/2 \pm \sqrt{1/4 - 2Er^2 - 2Zr + l(l+1) + kr}.$$

Постоянная k должна выбираться из условия, чтобы подкоренное выражение имело кратные корни. В результате получаем следующие возможные виды полинома $\pi(r)$:

$$\pi(r) = \frac{1}{2} \pm \begin{cases} \sqrt{-2E}r + l + 1/2, & k = 2Z + (2l+1)\sqrt{-2E}, \\ \sqrt{-2E}r - l - 1/2, & k = 2Z - (2l+1)\sqrt{-2E}. \end{cases}$$

Из четырех возможных видов $\pi(r)$ следует выбрать такой, для которого функция $\tau(r) = \tilde{\tau}(r) + 2\pi(r)$ имеет отрицательную производную и корень на интервале $(0, +\infty)$. Этим условиям удовлетворяет функция

$$\tau(r) = 2(l+1 - \sqrt{-2E}r),$$

которой соответствуют

$$\begin{aligned} \pi(r) &= l+1 - \sqrt{-2E}r, & \varphi(r) &= r^{l+1} \exp\{-\sqrt{-2E}r\}, \\ \lambda &= 2[Z - (l+1)\sqrt{-2E}], & \rho(r) &= r^{2l+1} \exp\{-2\sqrt{-2E}r\}. \end{aligned}$$

Собственные значения энергии E определяются из уравнения

$$\lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2} \sigma'' = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Отсюда

$$E = -\frac{Z^2}{2(n+l+1)^2}. \quad (9)$$

Величина энергии E полностью определяется числом $n+l+1$, которое называют *главным квантовым числом*.

Собственные функции $y(r) = y_{nl}(r)$ в данном случае имеют вид

$$y_{nl}(r) = \frac{B_{nl}}{r^{2l+1} \exp\left\{-\frac{2Zr}{n+l+1}\right\}} \cdot \frac{d^n}{dr^n} \left[r^{n+2l+1} \exp\left\{-\frac{2Zr}{n+l+1}\right\} \right]$$

и совпадают с точностью до множителя с полиномами Лагерра $L_n^{2l+1}(x)$, где $x = 2Zr/(n+l+1)^*$. Для радиальной функции $R(r) = R_{nl}(r)$ окончательно получаем выражение

$$R_{nl}(r) = C_{nl} e^{-x/2} x^{l+1} L_n^{2l+1}(x). \quad (10)$$

Легко проверить, что функции $R_{nl}(r)$ удовлетворяют исходному требованию $\int_0^\infty R_{nl}^2(r) dr < \infty$. Постоянную C_{nl} найдем из условия нормировки (6):

$$\int_0^\infty R_{nl}^2(r) dr = 1,$$

или

$$\frac{n+l+1}{2Z} C_{nl}^2 \int_0^\infty e^{-x} x^{2l+2} [L_n^{2l+1}(x)]^2 dx = 1. \quad (11)$$

Входящий в это выражение интеграл можно вычислить, используя рекуррентное соотношение для полиномов Лагерра (см. § 6). Имеем

$$x L_n^{2l+1} = 2(n+l+1) L_n^{2l+1} - (n+1) L_{n+1}^{2l+1} - (n+2l+1) L_{n-1}^{2l+1}. \quad (12)$$

Отсюда на основании свойства ортогональности полиномов Лагерра получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x} x^{2l+2} [L_n^{2l+1}(x)]^2 dx &= \\ &= \int_0^\infty e^{-x} x^{2l+1} L_n^{2l+1}(x) [2(n+l+1) L_n^{2l+1}(x) + \dots] dx = \\ &= 2(n+l+1) \int_0^\infty e^{-x} x^{2l+1} [L_n^{2l+1}(x)]^2 dx = 2(n+l+1) d_n^2, \end{aligned}$$

где d_n^2 — квадрат нормы полинома $L_n^{2l+1}(x)$. Поэтому

$$C_{nl}^2 = \frac{Z}{(n+l+1)^2 d_n^2} = \frac{Zn!}{(n+l+1)^2 (n+2l+1)!}. \quad (13)$$

Наиболее простая радиальная функция соответствует $n=0$:

$$R_{0l}(r) = \frac{1}{l+1} \sqrt{\frac{Z}{(2l+1)!}} e^{-x/2} x^{l+1}.$$

*) Обычно в учебниках по квантовой механике число нулей радиальной функции $R(r)$ обозначают через n_r , а главное квантовое число через n . Если пользоваться этими обозначениями, то во всех рассматриваемых формулах следует заменить n на $n-l-1$.

Наиболее сложный вид радиальная функция имеет при $l=0$: у нее максимально возможное при заданной энергии число нулей. Однако зависимость волновой функции от углов θ , φ в этом случае будет наиболее простой: при $l=0$ волновая функция будет сферически-симметричной, так как $Y_{00}(\theta, \varphi) = 1/\sqrt{4\pi}$.

Примеры. 1. Зная радиальные функции $R_{nl}(r)$, можно вычислять различные характеристики водородоподобного атома, в частности, среднюю потенциальную энергию $\bar{U}_{nl}$ электрического взаимодействия электрона с ядром, среднее расстояние $\bar{r}_{nl}$ между электроном и ядром.

Используя (10), (13), получим

$$\begin{aligned}\bar{U}_{nl} &= - \int_0^{\infty} \frac{Z}{r} R_{nl}^2(r) dr = \\ &= Z C_{nl}^2 \int_0^{\infty} e^{-x} x^{2l+1} [L_n^{2l+1}(x)]^2 dx = - Z C_{nl}^2 d_n^2 = - \frac{Z}{(n+l+1)^2}.\end{aligned}$$

Таким образом, полная энергия электрона E (см. (9)) равна половине средней потенциальной энергии.

Далее,

$$\bar{r}_{nl} = \int_0^{\infty} r R_{nl}^2(r) dr = C_{nl}^2 \left(\frac{n+l+1}{2Z} \right)^2 \int_0^{\infty} e^{-x} x^{2l+1} [x L_n^{2l+1}(x)]^2 dx.$$

Для вычисления интеграла достаточно воспользоваться рекуррентным соотношением (12) и ортогональностью полиномов Лагерра:

$$\begin{aligned}\bar{r}_{nl} &= C_{nl}^2 \left(\frac{n+l+1}{2Z} \right)^2 [(n+1)^2 d_{n+1}^2 + 4(n+l+1)^2 d_n^2 + \\ &\quad + (2l+1)^2 d_{n-1}^2] = \\ &= C_{nl}^2 \left(\frac{n+l+1}{2Z} \right)^2 \frac{(2l+1)!}{n!} 2 [3(n+l+1)^2 - l(l+1)] = \\ &= \frac{1}{2Z} [3(n+l+1)^2 - l(l+1)].\end{aligned}$$

2. Найдем электростатический потенциал, создаваемый в фиксированной точке пространства водородоподобным атомом, используя водородоподобные волновые функции.

Пусть электрон, движущийся в кулоновском поле ядра с зарядом Ze , находится в стационарном состоянии, характеризуемом квантовыми числами n , l , m . Так как масса электрона мала по сравнению с массой ядра, то с достаточной степенью точности можно считать ядро неподвижным и находящимся в точке $r=0$. Найдем средний потенциал $V(r)$, который создается в точке r электроном и ядром.

Так как потенциал ядра в принятых единицах равен Z/r , то

$$V(r) = \frac{Z}{r} - \int \frac{|\psi_{nlm}(r')|^2}{|r-r'|} (r')^2 dr' d\Omega'.$$

При вычислении интеграла удобно воспользоваться производящей функцией для полиномов Лежандра и теоремой сложения для сферических функций (см. § 10, п. 5):

$$\frac{1}{|r-r'|} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{r_{<}^s}{r_{>}^{s+1}} \left[\frac{4\pi}{2s+1} \sum_{m'=-s}^s Y_{sm'}^*(\theta', \varphi') Y_{sm'}(\theta, \varphi) \right].$$

Так как

$$\psi_{nlm}(r') = \frac{1}{r'} R_{nl}(r') Y_{lm}(\theta', \varphi'),$$

то

$$\begin{aligned} \int \frac{|\psi_{nlm}(r')|^2}{|r-r'|} (r')^2 dr' d\Omega' = \\ = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2s+1} \sum_{m'} Y_{sm'}(\theta, \varphi) \int \frac{r_{<}^s}{r_{>}^{s+1}} R_{nl}^2(r') dr' \times \\ \times \int Y_{lm}(\theta', \varphi') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{s0}^*(\theta', \varphi') d\Omega'. \quad (14) \end{aligned}$$

Если использовать явный вид для сферических функций, то интегрирование по φ' приводит к тому, что в сумме по m' остается лишь одно слагаемое, соответствующее $m' = 0$. Окончательно получим

$$\begin{aligned} V(r) = \frac{Z}{r} - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2s+1} Y_{s0}(\theta, \varphi) \int \frac{r_{<}^s}{r_{>}^{s+1}} R_{nl}^2(r') dr' \times \\ \times \int Y_{lm}(\theta', \varphi') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{s0}^*(\theta', \varphi') d\Omega. \end{aligned}$$

Интеграл $\int \frac{r_{<}^s}{r_{>}^{s+1}} R_{nl}^2(r') dr'$ можно представить в виде

$$\int \frac{r_{<}^s}{r_{>}^{s+1}} R_{nl}^2(r') dr' = \frac{1}{r^{s+1}} \int_0^r (r')^s R_{nl}^2(r') dr' + r^s \int_r^{\infty} \frac{R_{nl}^2(r')}{(r')^{s+1}} dr'.$$

Интеграл от произведения трех сферических функций сводится к интегралу от произведения трех функций $\Theta_{lm}(\cos \theta)$:

$$\int Y_{lm}(\theta', \varphi') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{s0}^*(\theta', \varphi') d\Omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \Theta_{lm}^*(x) \Theta_{s0}(x) dx.$$

Последний интеграл может быть выражен через коэффициенты Клебша — Гордана или же через коэффициенты Вигнера, для

которых существуют таблицы *). В силу свойств ортогональности функций $\Theta_{lm}(x)$ он отличен от нуля лишь при $s = 0, 2, \dots, 2l$, т. е. сумма по s в (14) содержит конечное число слагаемых.

В случае, когда электрон находится в основном состоянии ($n = 0, l = 0$), все интегралы легко вычисляются. В результате получаем

$$V(r) = \frac{Z-1}{r} + \left(Z + \frac{1}{r}\right) e^{-2Zr}.$$

При малых r , как и следовало ожидать, $V(r) \approx Z/r$, а при $r \rightarrow \infty$ имеем $V(r) \approx (Z-1)/r$ (потенциал ядра, заэкранированного электроном).

3. Решение уравнений Клейна — Гордона и Дирака для кулоновского поля. Мы рассмотрели решение уравнения Шредингера для заряженной частицы, движущейся в кулоновском поле. Если энергия частицы сравнима с энергией покоя, равной Mc^2 (M — масса частицы, c — скорость света), то в этом случае уравнение Шредингера становится неприменимым и надо пользоваться релятивистскими обобщениями уравнения Шредингера, т. е. в зависимости от величины собственного момента количества движения частицы (спина) надо использовать либо уравнение Клейна — Гордона, либо уравнение Дирака **).

а) Рассмотрим сначала уравнение Клейна — Гордона, описывающее движение заряженной частицы с зарядом $-e$ ($e > 0$), с целочисленным спином и массой M в кулоновском поле с потенциальной энергией $U(r) = -Ze^2/r$. Эта задача возникает, например, при исследовании движения π -мезонов в поле атомных ядер. Если воспользоваться системой единиц, в которой масса частицы M , постоянная Планка $\hbar$ и скорость света c равны единице, то уравнение Клейна — Гордона будет иметь вид

$$\Delta\psi + \left[\left(E + \frac{\mu}{r}\right)^2 - 1\right]\psi = 0, \quad \mu = \frac{Ze^2}{\hbar c} \approx \frac{Z}{137}. \quad (15)$$

Для связанных состояний $0 < E < 1$.

Будем искать частные решения уравнения (15) методом разделения переменных в сферических координатах, полагая $\psi(r) = F(r)Y(\theta, \varphi)$. Производя те же действия, что и при решении уравнения Лапласа (см. § 10), для функций $F(r)$, $Y(\theta, \varphi)$ получим уравнения

$$\Delta_{\theta\varphi}Y + \lambda Y = 0, \quad (16)$$

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dF}{dr} \right) + \left[\left(E + \frac{\mu}{r} \right)^2 - 1 - \frac{\lambda}{r^2} \right] F(r) = 0. \quad (17)$$

*) См., например, Варшавович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента.— М.: Наука, 1975; Эдмондс А. Р. Угловые моменты в квантовой механике.— В кн.: Деформация атомных ядер. М.: ИЛ, 1958.

**) См. Давыдов А. С. Квантовая механика.— М.: Наука, 1976.

Уравнение (16), как было показано выше, имеет решения, удовлетворяющие условиям ограниченности и однозначности для $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, лишь при $\lambda = l(l+1)$, причем в этом случае $Y(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta, \varphi)$ — сферическая функция. Уравнение (17) заменой $R(r) = rF(r)$ сводится к уравнению

$$R'' + \left[\left(E + \frac{\mu}{r} \right)^2 - 1 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0. \quad (18)$$

Уравнение (18) является обобщенным уравнением гипергеометрического типа, для которого $\sigma(r) = r$, $\tau(r) = 0$, $\tilde{\sigma}(r) = (Er + \mu)^2 - r^2 - l(l+1)$. Функция $R(r)$ должна удовлетворять условию нормировки

$$\int_0^\infty R^2(r) dr = 1 \quad (19)$$

и должна быть ограниченной при $r \rightarrow 0$. Отметим, что при решении соответствующего уравнения Шредингера используется более сильное требование ограниченности функции $R(r)/r$ при $r \rightarrow 0$.

Уравнение (18) имеет особенность при $r \rightarrow 0$. Выясним поведение функции $R(r)$ при $r \sim 0$. Так как при $r \rightarrow 0$

$$\left(E + \frac{\mu}{r} \right)^2 - 1 - \frac{l(l+1)}{r^2} \approx \frac{\mu^2 - l(l+1)}{r^2},$$

то в окрестности точки $r = 0$ поведение $R(r)$ будет приближенно описываться уравнением Эйлера

$$R'' + \frac{\mu^2 - l(l+1)}{r^2} R = 0,$$

решения которого имеют вид

$$R(r) = c_1 r^{\nu+1} + c_2 r^{-\nu},$$

где $\nu = -1/2 + \sqrt{l(l+1/2)^2 - \mu^2}$ (в дальнейшем мы будем предполагать, что $\mu < l+1/2$). Требование ограниченности функции $R(r)$ при $r \rightarrow 0$ дает $c_2 = 0$, т. е. $R(r) \approx c_1 r^{\nu+1}$ при $r \rightarrow 0$.

Поставленная задача принадлежит к типу задач, рассмотренному в § 9. Действительно, в данном случае $\tilde{\rho}(r) = 1/r$ и требование ограниченности функции $\sqrt{\tilde{\rho}(r)}R(r)$ при $r \rightarrow 0$ и ее квадратичной интегрируемости на интервале $(0, \infty)$ вытекает из поведения $R(r)$ при $r \rightarrow 0$ и из условия нормировки (19). Поэтому при решении данной задачи мы воспользуемся методом, изложенным в § 9.

Приведем (18) к уравнению гипергеометрического типа

$$\sigma(r)y'' + \tau(r)y' + \lambda y = 0,$$

полагая $R(r) = \varphi(r)y(r)$, где $\varphi(r)$ — решение уравнения $\varphi'/\varphi = -\pi(r)/\sigma(r)$. Для полинома $\pi(r)$ в данном случае получаем

выражение

$$\pi(r) = 1/2 \pm \sqrt{(l+1/2)^2 - \mu^2 - 2\mu E r + (1 - E^2)r^2 + kr}.$$

Постоянная k должна выбираться из условия, чтобы подкоренное выражение имело кратный корень. В результате получаем следующие возможные виды полинома $\pi(r)$:

$$\pi(r) = \frac{1}{2} \pm \begin{cases} \sqrt{1 - E^2} r + v + 1/2, & k = 2\mu E + (2v + 1) \sqrt{1 - E^2}, \\ \sqrt{1 - E^2} r - v - 1/2, & k = 2\mu E - (2v + 1) \sqrt{1 - E^2}. \end{cases}$$

Из всех возможных видов полинома $\pi(r)$ следует выбрать такой, для которого функция $\tau(r) = \tilde{\tau}(r) + 2\pi(r)$ имеет отрицательную производную и корень на интервале $(0, +\infty)$. Этим условиям удовлетворяет функция

$$\tau(r) = 2(v + 1 - ar), \quad a = \sqrt{1 - E^2}, \quad v = -1/2 + \sqrt{(l + 1/2)^2 - \mu^2},$$

которой соответствуют

$$\begin{aligned} \pi(r) &= v + 1 - ar, & \varphi(r) &= r^{v+1} e^{-ar}, \\ \lambda &= 2[\mu E - (v + 1)a], & \rho(r) &= r^{2v+1} e^{-2ar}. \end{aligned}$$

Собственные значения энергии E определяются из уравнения

$$\lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2} \sigma'' = 0.$$

Отсюда

$$E = E_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu}{n + v + 1}\right)^2}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (20)$$

Соответствующие собственные функции $y = y_n(r)$ имеют вид

$$y_n(r) = \frac{B_{nl}}{r^{2v+1} e^{-2ar}} \cdot \frac{d^n}{dr^n} (r^{n+2v+1} e^{-2ar})$$

и с точностью до множителя совпадают с полиномами Лагерра $L_n^{2v+1}(x)$, где $x = 2ar$. Для радиальных функций $R(r) = R_{nl}(r)$ получаем выражение

$$R_{nl}(r) = C_{nl} x^{v+1} e^{-x/2} L_n^{2v+1}(x).$$

Легко проверить, что функции $R_{nl}(r)$ удовлетворяют исходному требованию $\int_0^\infty R_{nl}^2(r) dr < \infty$. Постоянная C_{nl} определяется из условия нормировки (19) точно так же, как и при решении соответствующего уравнения Шредингера.

Рассмотрим переход к нерелятивистскому пределу. В этом случае постоянная μ является малой величиной. Оценим другие

величины при $\mu \rightarrow 0$:

$$v \approx l, \quad E \approx 1 - \frac{\mu^2}{2(n+l+1)^2}, \quad a = \sqrt{1-E^2} \approx \frac{\mu}{n+l+1},$$

$$R_{nl}(r) \approx C_{nl} x^{l+1} e^{-x/2} L_n^{2l+1}(x), \quad x = \frac{2\mu}{n+l+1} r.$$

Эти формулы совпадают с формулами, полученными в п. 2 при решении уравнения Шредингера, если учесть, что для использованной нами системы единиц величина μr переходит в Zr для атомной системы единиц, а энергия $E = 1 - \frac{\mu^2}{2(n+l+1)^2}$ содержит энергию покоя частицы $E_0 = 1$.

б) Рассмотрим теперь уравнение Дирака для заряженной частицы с полуцелым спином в поле $U(r) = -Ze^2/r$.

В данном случае волновая функция частицы имеет четыре компоненты $\psi_k(r)$ ($k = 1, 2, 3, 4$). Если воспользоваться системой единиц, в которой масса частицы M , постоянная Планка $\hbar$ и скорость света c равны единице, то уравнение Дирака будет иметь вид [2]

$$\begin{aligned} i \left(E + \frac{\mu}{r} + 1 \right) \psi_1 + \frac{\partial \psi_2}{\partial z} + \frac{\partial \psi_4}{\partial x} - i \frac{\partial \psi_4}{\partial y} &= 0, \\ i \left(E + \frac{\mu}{r} + 1 \right) \psi_2 - \frac{\partial \psi_4}{\partial z} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + i \frac{\partial \psi_3}{\partial y} &= 0, \\ i \left(E + \frac{\mu}{r} - 1 \right) \psi_3 + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - i \frac{\partial \psi_2}{\partial y} &= 0, \\ i \left(E + \frac{\mu}{r} - 1 \right) \psi_4 - \frac{\partial \psi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + i \frac{\partial \psi_1}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Величины E , μ здесь имеют тот же смысл, что и для уравнения Клейна — Гордона, причем $0 < E < 1$.

В сферических координатах (r, θ, φ) переменные в системе (21) можно разделить, если искать решение в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_1(r) \\ \psi_2(r) \end{pmatrix} &= f(r) \Omega_{jlm}(\theta, \varphi); \\ \begin{pmatrix} \psi_3(r) \\ \psi_4(r) \end{pmatrix} &= (-1)^{(l-l'+1)/2} g(r) \Omega_{jl'm}(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь j — квантовое число, характеризующее полный момент количества движения частицы ($j = 1/2, 3/2, \dots$); l, l' — орбитальные квантовые числа, которые при заданном j могут принимать значения $j - 1/2, j + 1/2$, причем $l' = 2j - l$; квантовое число m принимает полуцелые значения в пределах от $-j$ до j .

Величины $\Omega_{jlm}(\theta, \varphi)$ и $\Omega_{jl'm}(\theta, \varphi)$ содержат зависимость волновой функции от угловых переменных (их называют *шаровыми спинорами*). Они могут быть выражены через сферические гармо-

ники и коэффициенты Клебша — Гордана, возникающие при сложении орбитального и спинного момента количества движения электрона. Шаровые спиноры связаны с функциями $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ следующим образом *):

$$\Omega_{jlm} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+m}{2l+1}} Y_{l,m-1/2}(\theta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{j-m}{2l+1}} Y_{l,m+1/2}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \quad \text{при } l = j - 1/2,$$

$$\Omega_{jlm} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j-m+1}{2l+1}} Y_{l,m-1/2}(\theta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{j+m+1}{2l+1}} Y_{l,m+1/2}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \quad \text{при } l = j + 1/2.$$

В результате подстановки (22) в (21) получаем систему уравнений для функций $f(r)$ и $g(r)$:

$$\begin{aligned} f' + \frac{1+\kappa}{r} f - \left(E + 1 + \frac{\mu}{r}\right) g &= 0, \\ g' + \frac{1-\kappa}{r} g + \left(E - 1 + \frac{\mu}{r}\right) f &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\kappa = \begin{cases} -(l+1), & l = j - 1/2, \\ l, & l = j + 1/2. \end{cases}$$

Заметим, что в нерелятивистском приближении $|f(r)| \gg |g(r)|$ (в дальнейшем это будет показано).

Условия, определяющие функции $f(r)$, $g(r)$ для состояний дискретного спектра, сводятся к следующим: функции $rf(r)$, $rg(r)$ должны быть ограниченными при $r \rightarrow 0$ и удовлетворять условию нормировки

$$\int_0^\infty r^2 [f^2(r) + g^2(r)] dr = 1. \quad (24)$$

Запишем систему (23) в матричной форме. Пусть

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(r) \\ g(r) \end{pmatrix}, \quad u' = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$u' = Au, \quad (25)$$

*) См., например, Ахизер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика.— М.: Наука, 1981.

где (см. также § 1, замечание 4)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1+\kappa}{r} & 1+E+\frac{\mu}{r} \\ 1-E-\frac{\mu}{r} & -\frac{1-\kappa}{r} \end{pmatrix}.$$

Для нахождения $u_1(r)$ исключим из (25) функцию $u_2(r)$. В результате для $u_1(r)$ получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$u_1 - \left(a_{11} + a_{22} + \frac{a'_{12}}{a_{12}} \right) u'_1 + \left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - a'_{11} + \frac{a'_{12}}{a_{12}} a_{11} \right) u_1 = 0. \quad (26)$$

Аналогично, исключая $u_1(r)$, получим уравнение для $u_2(r)$:

$$u_2 - \left(a_{11} + a_{22} + \frac{a'_{21}}{a_{21}} \right) u'_2 + \left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - a'_{22} + \frac{a'_{21}}{a_{21}} a_{22} \right) u_2 = 0. \quad (27)$$

Коэффициенты матрицы A имеют вид

$$a_{ik} = b_{ik} + c_{ik}/r,$$

где b_{ik} , c_{ik} — некоторые постоянные. Уравнения (26), (27) не являются обобщенными уравнениями гипергеометрического типа. Это связано с тем, что

$$\frac{a'_{12}}{a_{12}} = -\frac{c_{12}}{c_{12}r + b_{12}r^2},$$

в силу чего в (26) коэффициенты при $u'_1(r)$ и $u_1(r)$ имеют вид

$$a_{11} + a_{22} + \frac{a'_{12}}{a_{12}} = \frac{p_1(r)}{r} - \frac{c_{12}}{c_{12}r + b_{12}r^2},$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - a'_{11} + \frac{a'_{12}}{a_{12}} a_{11} = \frac{p_2(r)}{r^2} - \frac{c_{12}}{c_{12}r + b_{12}r^2} \cdot \frac{c_{11} + b_{11}r}{r}$$

($p_1(r)$, $p_2(r)$ — полиномы соответственно не выше первой и второй степени). Уравнение (26) являлось бы обобщенным уравнением гипергеометрического типа, для которого $\sigma(r) = r$, если бы коэффициенты b_{12} или c_{12} равнялись нулю. В связи с этим удобно воспользоваться следующими соображениями. При линейной замене

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

с невырожденной матрицей C , не зависящей от r , мы получаем

систему уравнений относительно функций $v_1(r)$ и $v_2(r)$ того же вида, что и исходная. Действительно, вместо (25) получаем

$$v' = \tilde{A}v, \quad (28)$$

где

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = CAG^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты $\tilde{a}_{ik}$ являются, очевидно, линейными комбинациями коэффициентов a_{ik} . Поэтому они имеют вид

$$\tilde{a}_{ik} = \tilde{b}_{ik} + \tilde{c}_{ik}/r,$$

где $\tilde{b}_{ik}, \tilde{c}_{ik}$ — некоторые постоянные.

Уравнения для функций $v_1(r)$ и $v_2(r)$ будут аналогичны уравнениям (26), (27):

$$v_1' - \left(\tilde{a}_{11} + \tilde{a}_{22} + \frac{\tilde{a}_{12}'}{\tilde{a}_{12}} \right) v_1' + \left(\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} - \tilde{a}_{12}\tilde{a}_{21} - \tilde{a}_{11}' + \frac{\tilde{a}_{12}'}{\tilde{a}_{12}} \tilde{a}_{11}' \right) v_1 = 0, \quad (29)$$

$$v_2' - \left(\tilde{a}_{11} + \tilde{a}_{22} + \frac{\tilde{a}_{21}'}{\tilde{a}_{21}} \right) v_2' + \left(\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} - \tilde{a}_{12}\tilde{a}_{21} - \tilde{a}_{22}' + \frac{\tilde{a}_{21}'}{\tilde{a}_{21}} \tilde{a}_{22}' \right) v_2 = 0. \quad (30)$$

Заметим, что вычисление коэффициентов в (29), (30) несколько облегчается благодаря подобию матриц A и $\tilde{A}$:

$$\tilde{a}_{11} + \tilde{a}_{22} = a_{11} + a_{22}, \quad \tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} - \tilde{a}_{12}\tilde{a}_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Чтобы (29) было обобщенным уравнением гипергеометрического типа, достаточно, чтобы либо $\tilde{b}_{12} = 0$, либо $\tilde{c}_{12} = 0$. Аналогично для (30) получаем условие: либо $\tilde{b}_{21} = 0$, либо $\tilde{c}_{21} = 0$. Эти условия накладывают определенные ограничения на выбор матрицы $\tilde{C}$. Пусть $C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Тогда

$$C^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}, \quad \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

$$\tilde{A} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{11}\alpha\delta - a_{12}\alpha\gamma + a_{21}\beta\delta - a_{22}\beta\gamma & a_{12}\alpha^2 - a_{21}\beta^2 + (a_{22} - a_{11})\alpha\beta \\ a_{21}\delta^2 - a_{12}\gamma^2 + (a_{11} - a_{22})\gamma\delta & -a_{11}\beta\gamma + a_{12}\alpha\gamma - a_{21}\beta\delta + a_{22}\alpha\delta \end{pmatrix}.$$

Условие $\tilde{b}_{12} = 0$ дает $(1 + E)\alpha^2 - (1 - E)\beta^2 = 0$,

$$\gg \tilde{c}_{12} = 0 \gg 2\kappa\alpha\beta + \mu(\alpha^2 + \beta^2) = 0,$$

$$\gg \tilde{b}_{21} = 0 \gg (1 + E)\gamma^2 - (1 - E)\delta^2 = 0,$$

$$\gg \tilde{c}_{21} = 0 \gg 2\kappa\gamma\delta + \mu(\gamma^2 + \delta^2) = 0.$$

Мы видим, что существует несколько возможностей для выбора величин α , β , γ , δ . В учебниках по квантовой механике обычно рассматривается лишь одна из возможностей, соответствующая условиям $\tilde{b}_{12} = 0$, $\tilde{b}_{21} = 0$. В виде примера рассмотрим случай, когда постоянные α , β , γ , δ выбираются из условий $\tilde{c}_{12} = 0$, $\tilde{c}_{21} = 0$ (впоследствии будет показано, что это требование предпочтительнее, чем требование $\tilde{b}_{12} = 0$, $\tilde{b}_{21} = 0$). Эти условия будут выполнены, если выбрать матрицу C в виде

$$C = \begin{pmatrix} \mu & \nu - \kappa \\ \nu - \kappa & \mu \end{pmatrix},$$

где $\nu = \sqrt{\kappa^2 - \mu^2}$. В результате приходим к следующей системе уравнений для функций $v_1(r)$, $v_2(r)$:

$$v_1' = \left(-\frac{\nu + 1}{r} + \frac{E\mu}{\nu} \right) v_1 + \left(1 + \frac{E\kappa}{\nu} \right) v_2, \quad (31)$$

$$v_2' = \left(1 - \frac{E\kappa}{\nu} \right) v_1 + \left(\frac{\nu - 1}{r} - \frac{E\mu}{\nu} \right) v_2. \quad (32)$$

Если $1 + E\kappa/\nu \neq 0$, то из системы (31), (32) можно исключить $v_2(r)$ и получить следующее дифференциальное уравнение для $v_1(r)$:

$$v_1'' + \frac{2}{r} v_1' + \frac{(E^2 - 1)r^2 + 2E\mu r - \nu(\nu + 1)}{r^2} v_1 = 0. \quad (33)$$

Пусть теперь $1 + E\kappa/\nu = 0$, т. е. $E = -\nu/\kappa$, что возможно лишь при $\kappa < 0$, так как $\nu > 0$ и $E > 0$. В этом случае решение уравнения (31) имеет вид

$$v_1(r) = c_1 r^{-\nu-1} \exp \left\{ \frac{E\mu}{\nu} r \right\}.$$

Функция $v_1(r)$ удовлетворяет условиям задачи лишь при $c_1 = 0$. При этом для $v_2(r)$ из (32) получаем выражение

$$v_2(r) = c_2 r^{\nu-1} \exp \left\{ \frac{E\mu}{\nu} r \right\}.$$

Функция $v_2(r)$ при $c_2 \neq 0$, очевидно, удовлетворяет условиям задачи.

Рассмотрим теперь решение уравнения (33). Выясним поведение функции $v_1(r)$ при $r \rightarrow 0$. Так как

$$|(E^2 - 1)r^2 + 2E\mu r| \ll \nu(\nu + 1)$$

при $r \rightarrow 0$, то в окрестности точки $r = 0$ поведение функции $v_1(r)$

будет приближенно описываться уравнением Эйлера

$$r^2 v_1'' + 2r v_1' - v(v+1)v_1 = 0,$$

решение которого имеет вид

$$v_1(r) = c_1 r^v + c_2 r^{-v-1}.$$

Из условий, налагаемых на функцию $v_1(r)$, вытекает, что $c_2 = 0$. Поэтому при $r \sim 0$ имеем $v_1(r) \approx c_1 r^v$.

Уравнение (33) является обобщенным уравнением гипергеометрического типа, для которого $\sigma(r) = r$, $\tau(r) = 2$, $\sigma(r) = (E^2 - 1)r^2 + 2E\mu r - v(v+1)$. Поставленная для (33) задача принадлежит к типу задач, рассмотренному в § 9. Действительно, в данном случае $\tilde{\rho}(r) = r$. Требование квадратичной интегрируемости на интервале $(0, \infty)$ и ограниченности функции $\sqrt{\tilde{\rho}(r)}v_1(r)$ при $r \rightarrow 0$ вытекает из условия нормировки (24) и поведения функции $v_1(r)$ при $r \rightarrow 0$. Поэтому при решении данной задачи воспользуемся методом, рассмотренным в § 9. Приведем (33) к уравнению гипергеометрического типа

$$\sigma(r)y'' + \tau(r)y' + \lambda y = 0$$

заменой $v_1 = \varphi(r)y$, где $\varphi(r)$ удовлетворяет уравнению $\varphi'/\varphi = \pi(r)/\sigma(r)$ ($\pi(r)$ — некоторый полином, не выше первой степени). Из четырех возможных видов полинома $\pi(r)$ выберем тот, для которого функция $\tau(r) = \tilde{\tau}(r) + 2\pi(r)$ имеет отрицательную производную и корень на интервале $(0, +\infty)$. Этим условиям удовлетворяет функция

$$\tau(r) = 2(v+1-ar), \quad a = \sqrt{1-E^2}, \quad v = \sqrt{\kappa^2 - \mu^2},$$

которой соответствуем

$$\begin{aligned} \pi(r) &= v - ar, \quad \varphi(r) = r^v e^{-ar}, \\ \lambda &= 2[\mu E - (v+1)a], \quad \rho(r) = r^{2v+1} e^{-2ar}. \end{aligned}$$

Значения энергии $E = E_n$ определяются из уравнения

$$\lambda + n\tau' + n(n-1)\sigma''/2 = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Отсюда

$$\mu E - (n+v+1)a = 0, \quad a = \sqrt{1-E^2}. \quad (34)$$

Собственные функции определяются по формуле Родрига

$$y_n(r) = \frac{C_n}{\rho(r)} \cdot \frac{d^n}{dr^n} [\sigma^n(r) \rho(r)] = C_n r^{-2v-1} e^{2ar} \frac{d^n}{dr^n} (r^{n+2v+1} e^{-2ar}). \quad (35)$$

Функции $y_n(r)$ с точностью до коэффициента пропорциональности совпадают с полиномами Лагерра $L_n^{2v+1}(x)$, где $x = 2ar$.

Найденное ранее собственное значение энергии $E = -\nu/\kappa$ удовлетворяет уравнению (34) при $n = -1$. В соответствии с этим естественно заменить в (34), (35) n на $n - 1$ и определять собственные значения энергии из равенства

$$\mu E - (n + \nu)a = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (36)$$

Собственные функции $v_1(r)$ будут иметь вид

$$v_1(r) = \begin{cases} A_n x^\nu e^{-x/2} L_{n-1}^{2\nu+1}(x), & n = 1, 2, \dots \\ 0, & n = 0. \end{cases} \quad (37)$$

Легко проверить, что функции $rv_1(r)$ удовлетворяют исходному требованию квадратичной интегрируемости.

Из уравнения (31) при $E = E_n$ ($n = 1, 2, \dots$) имеем

$$v_2(r) = \frac{1}{1 + E\kappa/\nu} \left[v_1'(r) + \left(\frac{\nu+1}{r} - \frac{E\mu}{\nu} \right) v_1(r) \right].$$

Подставляя сюда выражение для $v_1(r)$, находим

$$v_2(r) = x^{\nu-1} e^{-x/2} y(x),$$

где $y(x)$ — полином n -й степени. Для определения $y(x)$ получим предварительно уравнение для функции $v_2(r)$, исключая из системы (31), (32) функцию $v_1(r)$:

$$v_2'' + \frac{2}{r} v_2' + \frac{(E^2 - 1)r^2 + 2E\mu r + \nu(1 - \nu)}{r^2} v_2 = 0. \quad (38)$$

В результате придем к следующему дифференциальному уравнению для $y(x)$:

$$xy'' + (2\nu - x)y' + ny = 0. \quad (39)$$

Уравнение (39) является уравнением гипергеометрического типа. Единственным полиномиальным решением этого уравнения является полином Лагерра $y(x) = B_n L_n^{2\nu-1}(x)$, откуда

$$v_2(r) = B_n x^{\nu-1} e^{-x/2} L_n^{2\nu-1}(x). \quad (40)$$

Нетрудно убедиться, что полученное ранее решение при $E = -\nu/\kappa$ содержится в этой формуле при $n = 0$.

Для нахождения связи между постоянными A_n и B_n в (37) и (40) сравним поведение левой и правой частей равенства (31) при $r \rightarrow 0$, используя формулу

$$L_n^\alpha(0) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)}.$$

Имеем

$$2a\nu A_n L_{n-1}^{2\nu+1}(0) = -2a(\nu + 1) A_n L_n^{2\nu+1}(0) + \left(1 + \frac{E\kappa}{\nu}\right) B_n L_n^{2\nu-1}(0),$$

откуда

$$A_n = \frac{\nu + E\kappa}{an(n + 2\nu)} B_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Так как

$$n(n+2\nu) = (n+\nu)^2 - \nu^2 = \frac{E^2 \mu^2}{a^2} - \nu^2 = \frac{E^2 \kappa^2 - \nu^2}{a^2},$$

то $A_n = \frac{a}{E\kappa - \nu} B_n$. Зная функции $v_1(r)$, $v_2(r)$, можно найти $f(r)$,

$g(r)$:

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{2\nu(\kappa - \nu)} \begin{pmatrix} \mu & \kappa - \nu \\ \kappa - \nu & \mu \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$f(r) = \frac{B_n}{2\nu(\kappa - \nu)} x^{\nu-1} e^{-x/2} [f_1 x L_{n-1}^{2\nu+1}(x) + f_2 L_n^{2\nu-1}(x)],$$

$$g(r) = \frac{B_n}{2\nu(\kappa - \nu)} x^{\nu-1} e^{-x/2} [g_1 x L_{n-1}^{2\nu+1}(x) + g_2 L_n^{2\nu-1}(x)],$$

где

$$f_1 = \frac{a\mu}{E\kappa - \nu}, \quad f_2 = \kappa - \nu, \quad g_1 = \frac{a(\kappa - \nu)}{E\kappa - \nu}, \quad g_2 = \mu;$$

$$E = E_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2/(n + \nu)^2}}.$$

Формулы для $f(r)$, $g(r)$ сохраняют свою силу и при $n = 0$: в этом случае надо положить равными нулю слагаемые, содержащие $L_{n-1}^{2\nu+1}(x)$.

Вычислим нормировочную постоянную B_n с помощью условия нормировки (24). Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r^2 [f^2(r) + g^2(r)] dr = \\ = \frac{B_n^2}{4\nu^2(\kappa - \nu)^2(2a)^3} \int_0^\infty e^{-x} x^{2\nu} \{ [f_1 x L_{n-1}^{2\nu+1}(x) + f_2 L_n^{2\nu-1}(x)]^2 + \\ + [g_1 x L_{n-1}^{2\nu+1}(x) + g_2 L_n^{2\nu-1}(x)]^2 \} dx = 1. \end{aligned}$$

При вычислениях возникают два типа интегралов:

$$J_1 = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha+1} [L_n^\alpha(x)]^2 dx, \quad J_2 = \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_{n-1}^\alpha(x) L_n^{\alpha-2}(x) dx.$$

Интеграл J_1 можно выразить через квадрат нормы

$$d_n^2 = \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha [L_n^\alpha(x)]^2 dx = \frac{1}{n!} \Gamma(n + \alpha + 1),$$

если воспользоваться рекуррентным соотношением

$$xL_n^\alpha(x) = -(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) + (2n+\alpha+1)L_n^\alpha(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x)$$

и свойством ортогональности

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

Отсюда

$$J_1 = (2n+\alpha+1) \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha [L_n^\alpha(x)]^2 dx = \frac{1}{n!} (2n+\alpha+1) \Gamma(n+\alpha+1).$$

Для вычисления интеграла J_1 достаточно разложить полином $L_n^{\alpha-2}(x)$ по полиномам $L_k^\alpha(x)$:

$$L_n^{\alpha-2}(x) = c_1 L_n^\alpha(x) + c_2 L_{n-1}^\alpha(x) + \dots$$

Постоянные c_1, c_2 легко найти, если сравнить коэффициенты при x^n и x^{n-1} в обеих частях этого равенства: $c_1 = 1, c_2 = -2$. Это дает

$$J_1 = -2 \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha [L_{n-1}^\alpha(x)]^2 dx = -2 \frac{\Gamma(n+\alpha)}{(n-1)!}.$$

Поэтому

$$B_n = 2a^2 \sqrt{\frac{(\kappa-\nu)(E\kappa-\nu)n!}{\mu\Gamma(n+2\nu)}}.$$

Заметим, что нормировочная постоянная B_n сохраняет свой вид и при $n=0$.

Окончательно получаем

$$\begin{pmatrix} f(r) \\ g(r) \end{pmatrix} = \frac{a^2}{\nu} \sqrt{\frac{(E\kappa-\nu)n!}{\mu(\kappa-\nu)\Gamma(n+2\nu)}} x^{\nu-1} e^{-x/2} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xL_{n-1}^{2\nu+1}(x) \\ L_n^{2\nu-1}(x) \end{pmatrix}, \quad (41)$$

где

$$f_1 = \frac{a\mu}{E\kappa-\nu}, \quad f_2 = \kappa-\nu, \quad g_1 = \frac{a(\kappa-\nu)}{E\kappa-\nu}, \quad g_2 = \mu.$$

При $n=0$ величину $xL_{n-1}^{2\nu+1}(x)$ следует считать равной нулю.

Рассмотрим переход к нерелятивистскому пределу. В этом случае $\mu \approx Z/137$ является малой величиной. Оценим порядки других величин при $\mu \rightarrow 0$. Имеем

$$E \approx 1 - \mu^2/(2N^2), \quad N = n + \nu, \\ a = \sqrt{1-E^2} \approx \mu/N, \quad \nu - |\kappa| \approx -\mu^2/(2|\kappa|).$$

Оценим теперь порядок малости коэффициентов f_1, f_2, g_1, g_2 относительно μ .

1) Пусть $l = j - 1/2$. Тогда $\kappa = -(l + 1)$, $\kappa - \nu \approx 2\kappa$, $E\kappa - \nu \approx 2\kappa$ и, следовательно,

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mu^2 & 1 \\ \mu & \mu \end{pmatrix}.$$

2) Пусть $l = j + 1/2$. Тогда $\kappa = l$, $\kappa - \nu \approx \mu^2/(2l)$, $E\kappa - \nu = (E - 1)\kappa + (\kappa - \nu) \approx \mu^2(N^2 - l^2)/(2lN^2)$, откуда

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \mu^2 \\ \mu & \mu \end{pmatrix}.$$

Из этих рассуждений видно, что во всех случаях $|g(r)| \ll |f(r)|$, причем

$$f(r) \approx \pm 2\mu^{3/2} \sqrt{\frac{(N-l-1)!}{(N+l)!}} x^l e^{-x/2} L_{N-l-1}^{2l+1}(x). \quad (42)$$

Знак плюс соответствует $l = j + 1/2$, знак минус соответствует $l = j - 1/2$. Число $N = n + \nu$ в нерелятивистском случае равно $n + |\kappa| = n + |j + 1/2|$; оно соответствует главному квантовому числу для решений уравнения Шредингера. Выражение (42) для $f(r)$ полностью совпадает с соответствующим решением уравнения Шредингера.

Интересно отметить, что представление функций $f(r), g(r)$ в виде (41) удобно для перехода к нерелятивистскому пределу, так как один из коэффициентов f_1, f_2, g_1, g_2 при $\mu \rightarrow 0$ во много раз больше всех остальных. В то же время в традиционном представлении для функций $f(r), g(r)$ имеется несколько одинаковых по порядку малости коэффициентов. Поэтому для установления совпадения нерелятивистского предела с решением уравнения Шредингера приходится дополнительно использовать рекуррентные соотношения для гипергеометрических функций.

Полиномы Лагерра, входящие в выражения для $f(r)$ и $g(r)$, можно выразить через вырожденные гипергеометрические функции, если воспользоваться соотношением

$$L_n^\alpha(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n! \Gamma(\alpha+1)} F(-n, \alpha+1, x).$$

Тогда (41) примет вид

$$\begin{pmatrix} f(r) \\ g(r) \end{pmatrix} = D_n x^{\nu-1} e^{-x/2} \begin{pmatrix} \bar{f}_1 & \bar{f}_2 \\ \bar{g}_1 & \bar{g}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x F(-n+1, 2\nu+2, x) \\ F(-n, 2\nu, x) \end{pmatrix},$$

где

$$D_n = \frac{1}{\nu \Gamma(2\nu+2)} \sqrt{\frac{(E\kappa - \nu) \Gamma(n+2\nu)}{\mu (\kappa - \nu) n!}},$$

$$\bar{f}_1 = a\mu (E\kappa + \nu), \quad \bar{f}_2 = 2\nu a^2 (2\nu + 1) (\kappa - \nu),$$

$$\bar{g}_1 = a (\kappa - \nu) (E\kappa + \nu), \quad \bar{g}_2 = 2\mu \nu a^2 (2\nu + 1).$$

Полученные выражения для $f(r)$, $g(r)$ остаются справедливыми с точностью до нормировочного множителя и для состояний непрерывного спектра, если вместо целого значения n использовать постоянную $n = n(E)$, связанную с заданной величиной E соотношением (36), т. е.

$$n = \frac{\mu E}{i \sqrt{E^2 - 1}} - \nu, \quad E > 1.$$

Мы рассмотрели некоторые основные задачи квантовой механики. Теми же методами можно решать также многочисленные модельные задачи квантовой механики.

4. Коэффициенты Клебша — Гордана и их связь с полиномами Хана. Как известно из курса квантовой механики, в тех случаях, когда гамильтониан физической системы не меняется при поворотах системы координат, оператор квадрата момента количества движения и оператор проекции момента на определенное направление (например на ось z) коммутируют с гамильтонианом системы. Это означает, что существуют состояния, для которых волновая функция системы ψ является собственной функцией коммутирующих друг с другом операторов квадрата момента и проекции момента на ось z . В связи с этим рассмотрим более подробно свойства этих операторов.

Обозначим оператор момента количества движения и его проекции на координатные оси в единицах постоянной Планка $\hbar$ соответственно через $\mathbf{J}$ и J_x, J_y, J_z . Операторы J_x, J_y, J_z удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} J_x J_y - J_y J_x &= i J_z, \\ J_y J_z - J_z J_y &= i J_x, \\ J_z J_x - J_x J_z &= i J_y. \end{aligned} \quad (43)$$

Из этих соотношений вытекает, что операторы $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ и J_z коммутируют и имеют общую систему собственных функций ψ_{jm} , которые удовлетворяют уравнениям

$$J^2 \psi_{jm} = j(j+1) \psi_{jm}, \quad J_z \psi_{jm} = m \psi_{jm}, \quad (44)$$

$$J_{\pm} \psi_{jm} = \sqrt{j(j \mp m)(j \pm m + 1)} \psi_{j, m \pm 1}. \quad (45)$$

Здесь $J_{\pm} = J_x \pm i J_y$, система функций $\{\psi_{jm}\}$ является ортонормированной, квантовое число j может принимать только целые или полуцелые неотрицательные значения, а квантовое число m может принимать значения $-j, -j+1, \dots, j-1, j$.

В квантовой механике большое значение имеет задача о сложении двух моментов количества движения. Пусть физическая система состоит из двух подсистем, для которых операторы момента количества движения $\mathbf{J}_1$ и $\mathbf{J}_2$ коммутируют, и состояния подсистем описываются волновыми функциями $\psi_{j_1 m_1}, \psi_{j_2 m_2}$. В этом случае $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ — оператор полного момента системы, и для него справедливы коммутационные соотношения (43).

Поэтому должны существовать волновые функции Φ_{jm} операторов J^2 и J_z , удовлетворяющие (44), (45). Задача состоит в том, чтобы выразить Φ_{jm} через известные функции $\psi_{j_1 m_1}$ и $\psi_{j_2 m_2}$.

Эта задача может быть решена с помощью следующих соображений. Собственными функциями оператора $J_z = J_{1z} + J_{2z}$, соответствующими собственному значению $m = m_1 + m_2$, являются произведения $\psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2}$. Для построения функций Φ_{jm} требуется составить такую линейную комбинацию произведений $\psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2}$ при фиксированном значении $m = m_1 + m_2$, которая была бы собственной функцией оператора J^2 . Так как оператор J^2 коммутирует с операторами J_1^2 и J_2^2 , то в этой линейной комбинации числа j_1, j_2 можно считать фиксированными, т. е.

$$\Phi_{jm} = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle \psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2}. \quad (46)$$

Величины $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle$ называются коэффициентами Клебша — Гордана.

Так как $m = m_1 + m_2$ и, кроме того, $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$, $-j_2 \leq m_2 \leq j_2$, $-j \leq m \leq j$, то квантовое число j может принимать значения

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2. \quad (47)$$

В связи с этим в дальнейшем будем полагать коэффициенты Клебша — Гордана равными нулю, если не выполняются указанные ограничения для m_1, m_2, m, j .

Ортонормированность собственных функций $\Phi_{jm}, \psi_{j_1 m_1}, \psi_{j_2 m_2}$ приводит к условию нормировки

$$\sum_{m_1, m_2} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle|^2 = 1. \quad (48)$$

Коэффициенты Клебша — Гордана играют важную роль в квантовой механике. С их помощью можно, например, строить волновые функции сложных систем (ядер, атомов, молекул). Теория коэффициентов Клебша — Гордана достаточно развита. Не ставя своей целью полное изложение теории коэффициентов Клебша — Гордана, рассмотрим простой вывод явного выражения для этих коэффициентов и установим их связь с классическими ортогональными полиномами дискретной переменной *).

Рассмотрим соотношения (45) для функций $\Phi_{jm}, \psi_{j_1 m_1}, \psi_{j_2 m_2}$. Применяя к обеим частям (46) оператор $J_{\pm} = J_{1\pm} + J_{2\pm}$, приходим к следующим рекуррентным соотношениям для коэффициентов Клебша — Гордана:

$$\begin{aligned} \alpha_{m-1}^j \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j, m-1 \rangle = \\ = \alpha_{m_1}^{j_1} \langle j_1, m_1 + 1, j_2 m_2 | j m \rangle + \alpha_{m_2}^{j_2} \langle j_1 m_1 j_2, m_2 + 1 | j m \rangle, \end{aligned} \quad (49)$$

*) Более подробное изложение этих вопросов см. в книге: Никитин А. Ф., Суслив С. К., Уваров В. Б. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. — М.: Наука, 1984.

$$\alpha_m^j \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j, m+1 \rangle = \\ = \alpha_{m-1}^{j_1} \langle j_1, m_1-1, j_2 m_2 | j m \rangle + \alpha_{m-1}^{j_2} \langle j_1 m_1 j_2, m_2-1 | j m \rangle, \quad (50)$$

где $\alpha_m^j = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}$.

Приведем рекуррентные соотношения (49), (50) к более простому виду. Для этого достаточно заметить, что в (49) изменение любого из индексов m_1, m_2, m в коэффициенте $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle$ сопровождается появлением множителя с тем же индексом. Поэтому при фиксированных значениях j_1, j_2, j преобразование

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle = A(m_1) B(m_2) C(m) u_m(m_1, m_2) \quad (51)$$

позволяет с помощью подбора множителей A, B, C получить уравнение для функции $u_m(m_1, m_2)$ с произвольными постоянными коэффициентами:

$$cu_{m-1}(m_1, m_2) = au_m(m_1+1, m_2) + bu_m(m_1, m_2+1). \quad (52)$$

Для этого должны быть выполнены условия

$$\alpha_{m-1}^{j_1} \frac{A(m_1+1)}{A(m_1)} = a, \quad \alpha_{m-1}^{j_2} \frac{B(m_2+1)}{B(m_2)} = b, \quad \alpha_{m-1}^j \frac{C(m+1)}{C(m)} = c. \quad (53)$$

Если ввести обозначение

$$\beta_m^j = \prod_{i=m-j}^{m-1} \alpha_i^j, \quad \beta_{-j}^j = 1,$$

то частные решения уравнений (53) можно представить в виде

$$A(m_1) = \frac{a^{j_1+m_1}}{\beta_{m_1}^{j_1}}, \quad B(m_2) = \frac{b^{j_2+m_2}}{\beta_{m_2}^{j_2}}, \quad C(m) = \frac{\beta_m^j}{c^{j+m}}. \quad (54)$$

Так как для коэффициента $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle$ значения m_1 и m_2 связаны условием $m_1 + m_2 = m$, то в дальнейшем величину $u_m(m_1, m_2) = u_m(m_1, m - m_1)$ будем обозначать $u_m(m_1)$. В этих обозначениях (52) можно переписать в виде

$$cu_{m-1}(m_1) = au_m(m_1+1) + bu_m(m_1). \quad (55)$$

Удобно выбрать $a=1, b=-1, c=1$. Тогда (55) примет вид

$$u_{m-1}(m_1) = \Delta u_m(m_1), \quad (56)$$

где

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x),$$

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle = (-1)^{j_2+m_2} \frac{\beta_m^j}{\beta_{m_1}^{j_1} \beta_{m_2}^{j_2}} u_m(m_1), \quad m_2 = m - m_1. \quad (57)$$

Аналогично, рекуррентное соотношение (50) можно привести к виду

$$v_{m+1}(m_1) = \nabla v_m(m_1), \quad (58)$$

где

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-1),$$

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle = (-1)^{j_1+m_1} \frac{\beta_{m_1}^{j_1} \beta_{m_2}^{j_2}}{\beta_m^j} v_m(m_1), \quad m_2 = m - m_1. \quad (59)$$

Из уравнения (56) последовательно получаем

$$u_m(m_1) = \Delta u_{m+1}(m_1) = \Delta^2 u_{m+2}(m_1) = \dots = \Delta^{j-m} u_j(m_1). \quad (60)$$

Для определения $u_j(m_1)$ воспользуемся уравнением (58) при $m = j$. Так как $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j, j+1 \rangle = 0$, то $v_{j+1}(m_1) = 0$. Поэтому в силу (58) величина $v_j(m_1)$ не зависит от m_1 , т. е. $v_j(m_1) = C$, где постоянная C может зависеть лишь от j_1, j_2, j . Отсюда в силу (57), (59) имеем

$$\begin{aligned} u_j(m_1) &= (-1)^{j_2+j-m_1} \frac{\beta_{m_1}^{j_1} \beta_{j-m_1}^{j_2}}{\beta_j^j} \langle j_1 m_1 j_2, j-m_1 | j j \rangle = \\ &= (-1)^{j_1+j_2+j} C \left(\frac{\beta_{m_1}^{j_1} \beta_{j-m_1}^{j_2}}{\beta_j^j} \right)^2. \end{aligned} \quad (61)$$

Таким образом, с помощью (57), (60) получаем

$$\begin{aligned} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle &= \\ &= (-1)^{j_1+j_2+j+j_2+m_2} C \frac{\beta_m^j}{(\beta_j^j)^2 \beta_{m_1}^{j_1} \beta_{m_2}^{j_2}} \Delta^{j-m} \left[(\beta_{m_1}^{j_1} \beta_{j-m_1}^{j_2})^2 \right]. \end{aligned} \quad (62)$$

Так как

$$\beta_m^j = \left[\frac{(2j)! (j+m)!}{(j-m)!} \right]^{1/2},$$

то выражение (62) для коэффициентов Клебша — Гордана можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle &= \\ &= (-1)^{j_2+m_2} D \left[\frac{(j_1-m_1)! (j_2-m_2)! (j+m)!}{(j_1+m_1)! (j_2+m_2)! (j-m)!} \right]^{1/2} \times \\ &\quad \times \Delta^{j-m} \left[\frac{(j_1+m_1)! (j_2+j-m_1)!}{(j_1-m_1)! (j_2-j+m_1)!} \right], \end{aligned} \quad (63)$$

где D — некоторая постоянная, зависящая от j_1, j_2, j . Величину $|D|$ можно найти из условия нормировки (48) при $m = j$:

$$|D|^2 (2j)! \sum_{m_1} \frac{(j_1+m_1)! (j_2+j-m_1)!}{(j_1-m_1)! (j_2-j+m_1)!} = 1. \quad (64)$$

Из (63), (64) видно, что коэффициент Клебша — Гордана можно

определить с точностью до фазового множителя $e^{i\phi}$, который обычно выбирается из дополнительного условия

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle |_{m_1=j_1, m=j} \geq 0,$$

эквивалентного требованию $D = (-1)^{j-j_1+j_2} |D|$.

Сумма в (64) может быть вычислена с помощью соотношения

$$\Gamma(x) \Gamma(y) = \Gamma(x+y) \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Поскольку

$$(j_1 + m_1)! (j_2 + j - m_1)! = (j_1 + j_2 + j + 1) \int_0^1 t^{j_1+m_1} (1-t)^{j_2+j-m_1} dt,$$

то получаем

$$\begin{aligned} \sum_{m_1} \frac{(j_1 + m_1)! (j_2 + j - m_1)!}{(j_1 - m_1)! (j_2 - j + m_1)!} &= \\ &= \frac{(j_1 + j_2 + j + 1)!}{(j_1 + j_2 - j)!} \sum_{m_1} C_{j_1+j_2-j}^{j_1-m_1} \int_0^1 t^{j_1+m_1} (1-t)^{j_2+j-m_1} dt. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{m_1} C_{j_1+j_2-j}^{j_1-m_1} t^{j_1+m_1} (1-t)^{j_2+j-m_1} &= \\ &= t^{j_1+j-j_2} (1-t)^{j_2+j-j_1} \sum_{m_1} C_{j_1+j_2-j}^{j_1-m_1} (1-t)^{j_1-m_1} t^{j_2-j+m_1} = \\ &= t^{j_1+j-j_2} (1-t)^{j_2+j-j_1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{m_1} \frac{(j_1 + m_1)! (j_2 + j - m_1)!}{(j_1 - m_1)! (j_2 - j + m_1)!} &= \\ &= \frac{(j_1 + j_2 + j + 1)! (j_1 + j - j_2)! (j_2 + j - j_1)!}{(j_1 + j_2 - j)! (2j + 1)!}, \\ D = (-1)^{j-j_1+j_2} \left[\frac{(2j + 1) (j_1 + j_2 - j)!}{(j_1 + j_2 + j + 1)! (j + j_1 - j_2)! (j - j_1 + j_2)!} \right]^{1/2}. \quad (65) \end{aligned}$$

Раскрывая в (63) степень оператора конечной разности по формуле

$$\Delta^n f(m_1) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \frac{n!}{k! (n-k)!} f(m_1 + k),$$

приходим к выражению для коэффициентов Клебша — Гордана в виде суммы конечного числа слагаемых:

$$\begin{aligned} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle = & \\ = (-1)^{j_1 - m_1} & \left[\frac{(2j+1)(j_1+j_2-j)!}{(j_1+j_2+j+1)!(j+j_1-j_2)!(j-j_1+j_2)!} \times \right. \\ & \times \frac{(j-m)! (j+m)! (j_1-m_1)! (j_2-m_2)!}{(j_1+m_1)! (j_2+m_2)!} \Big]^{1/2} \times \\ & \times \sum_k \frac{(-1)^k (j_1+m_1+k)! (j_2+j-m_1-k)!}{k! (j-m-k)! (j_1-m_1-k)! (j_2-j+m_1+k)!} \quad (66) \end{aligned}$$

(при выводе формулы мы воспользовались тем, что $2(j+j_2-j_1)$ — четное число).

Из (66) можно получить следующие соотношения симметрии для коэффициентов Клебша — Гордана:

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle = (-1)^{j_1+j_2-j} \langle j_1, -m_1, j_2, -m_2 | j, -m \rangle, \quad (67)$$

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle = (-1)^{j_1+j_2-j} \langle j_2 m_2 j_1 m_1 | j m \rangle, \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle = & \left\langle \frac{j_1+j_2+m}{2} \frac{j_1-j_2+m_1-m_2}{2} \right. \\ & \left. \frac{j_1+j_2-m}{2} \frac{j_1-j_2-m_1+m_2}{2} | j, j_1-j_2 \right\rangle. \quad (69) \end{aligned}$$

С помощью (63) можно получить связь коэффициентов Клебша — Гордана с полиномами Хана $h_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, если воспользоваться формулой Родрига (12.22) для этих полиномов:

$$h_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \nabla^n \rho_n(x),$$

где

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{(-1)^n}{n!} s, \quad \rho(x) = \frac{(N+\alpha-1-x)! (\beta+x)!}{x! (N-1-x)!}, \\ \rho_n(x) &= \frac{(N+\alpha-1-x)! (\beta+n+x)!}{x! (N-n-1-x)!}. \end{aligned} \quad (70)$$

Для установления этой связи положим в (63) $x = j_1 - m_1$. Так как

$$\begin{aligned} \Delta_{m_1} f(m_1) &= f(m_1+1) - f(m_1) = f(j_1-x+1) - f(j_1-x) = \\ &= -\nabla_x f(j_1-x), \end{aligned}$$

то

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle = (-1)^x |D| \left[\frac{(j+m)!}{(j-m)!} \right]^{1,2} \times \\ \times \left[\frac{x! (j_1 + j_2 - m - x)!}{(2j_1 - x)! (j_2 - j_1 + m + x)!} \right] \nabla^{j-m} \left[\frac{(2j_1 - x)! (j - j_1 + j_2 + x)!}{x! (j_1 + j_2 - j - x)!} \right]. \quad (71)$$

Из сопоставления (70) и (71) видно, что коэффициенты Клебша — Гордана можно выразить через полиномы Хана при $n = j - m$, $N = j_1 + j_2 - m + 1$, $\alpha = j_1 - j_2 + m$, $\beta = j_2 - j_1 + m$, $x = j_1 - m_1$:

$$\sqrt{\rho(x)} h_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^{j_1 - m_1 + j - m}}{|D| \sqrt{(j-m)! (j+m)!}} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle.$$

Как нетрудно проверить,

$$|D| \sqrt{(j-m)! (j+m)!} = 1/d_n,$$

где d_n^2 — квадрат нормы полиномов Хана.

В результате мы получаем простую связь коэффициентов Клебша — Гордана и полиномов Хана:

$$(-1)^{j_1 - m_1 + j - m} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle = \frac{1}{d_n} \sqrt{\rho(x)} h_n^{(\alpha, \beta)}(x), \quad (72)$$

при

$$x = j_1 - m_1, \quad n = j - m, \quad N = j_1 + j_2 - m + 1, \\ \alpha = m + m', \quad \beta = m - m', \quad m' = j_1 - j_2, \\ \rho(x) = \frac{(j_1 + m_1)! (j_2 + m_2)!}{(j_1 - m_1)! (j_2 - m_2)!}.$$

Соотношение (72) установлено при ограничениях $\alpha > -1$, $\beta > -1$, для выполнения которых достаточно потребовать, чтобы

$$j_1 \geq j_2, \quad m \geq j_1 - j_2. \quad (73)$$

Этого всегда можно добиться для произвольного коэффициента Клебша — Гордана, если воспользоваться соотношениями симметрии (67)–(69).

Коэффициенты Клебша — Гордана $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle$ отличны от нуля при

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2, \quad m = m_1 + m_2. \quad (74)$$

Условия (74) являются необходимыми. Если они не выполнены, то коэффициенты Клебша — Гордана равны нулю. Кроме того, известны случаи обращения коэффициентов в нуль при частных значениях моментов и проекций, когда условия (74) выполнены. Существование таких корней приводит к дополнительным правилам отбора, запрещающим квантовые переходы, амплитуды которых пропорциональны нулевым коэффициентам Клебша — Гордана.

Связь коэффициентов Клебша — Гордана с полиномами Хана дает интерпретацию корней этих коэффициентов. Как было отмечено выше, произвольный коэффициент Клебша — Гордана соотношениями симметрии можно свести к коэффициенту, который выражается через полином Хана по формуле (72). Поэтому все корни коэффициента Клебша — Гордана являются корнями полинома Хана, находящимися в одной из точек $x = x_i = 0, 1, \dots, N-1$.

Пример. Рассмотрим корни коэффициента $\langle j, m, j_2, m_2 | j, j-1 \rangle$, которому соответствует полином Хана первой степени

$$h_1^{(\alpha, \beta)}(x) = -\tau(x) = (\alpha + \beta + 2)x - (\beta + 1)(N-1) = \\ = 2jx - (j_2 - j_1 + j)(j_1 + j_2 - j + 1).$$

При выполнении правил отбора (74) коэффициент Клебша — Гордана $\langle j, m, j_2, m_2 | j, j-1 \rangle$ обращается в нуль, когда корень полинома $h_1(x)$ находится в точке $x = j_1 - m_1$. Это приводит к условию

$$j(m_1 - m_2) = (j_1 - j_2)(j_1 + j_2 + 1).$$

Такой корень имеют, например, коэффициенты $\langle 1010 | 10 \rangle$ и $\langle 3220 | 32 \rangle$.

С помощью соотношения (72), связывающего коэффициенты Клебша — Гордана с полиномами Хана, можно получить целый ряд свойств этих коэффициентов, вытекающих из соответствующих свойств полиномов Хана. В виде примера получим удобное для исследования асимптотическое представление коэффициентов Клебша — Гордана $\langle j, m, j_2, m_2 | j, m \rangle$ при $j_1 \rightarrow \infty, j_2 \rightarrow \infty$ и фиксированных значениях $m' = j_1 - j_2, j, m$, считая, что $m' \geq 0, m \geq m'$. Для полиномов Хана это соответствует $N \rightarrow \infty$ и фиксированным значениям α, β, n . Так как при $z \rightarrow \infty$ $(z+a)! \approx z^a z!$, то можно получить следующее асимптотическое представление веса $\rho(x)$ для полиномов Хана при $N \rightarrow \infty$:

$$\rho(x) \approx (N/2)^{\alpha+\beta} (1-s)^{\alpha} (1+s)^{\beta}, \quad x = N(1+s)/2.$$

Кроме того, как показано в § 12, п. 6, при $N \rightarrow \infty$

$$h_n^{(\alpha, \beta)}(x) \approx N^n P_n^{(\alpha, \beta)}(s).$$

Поэтому при $j_1 \rightarrow \infty$ и фиксированных значениях $j, m, j_1 - j_2$ имеем

$$(-1)^{j_1 - m_1 + j - m} \sqrt{j_1 + j_2 - m + 1} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m \rangle \approx \\ \approx \frac{1}{2^m} \sqrt{\frac{(2j+1)(j-m)!(j+m)!}{(j-m')!(j+m')!}} \times \\ \times (1-s)^{(m+m')/2} (1+s)^{(m-m')/2} P_{j-m}^{(m+m', m-m')}(s),$$

где

$$s = \frac{(j_1 - m_1) - (j_2 - m_2) - 1}{(j_1 - m_1) + (j_2 - m_2) + 1}, \quad m \geq m' \geq 0, \quad m' = j_1 - j_2.$$

Если при этом величина $n = j - m$ достаточно велика, то для полиномов Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ можно воспользоваться асимптотическим представлением (19.18) при $n \rightarrow \infty$, что дает

$$(-1)^{j_1 - m_1 + j - m} \sqrt{j_1 + j_2 - m + 1} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle \approx \\ \approx \sqrt{\frac{2(2j+1)(j-m-1)!(j+m)!}{\pi(j-m')!(j+m')!}} \cdot \frac{\cos[(j+1/2)\theta - (m+m'+1/2)\pi/2]}{\sqrt{\sin \theta}},$$

где

$$\cos \theta = \frac{(j_1 - m_1) - (j_2 - m_2) - 1}{(j_1 - m_1) + (j_2 - m_2) + 1}, \quad m \geq m' \geq 0, \quad m' = j_1 - j_2,$$

$$0 < \delta \leq \theta \leq \pi - \delta.$$

Свойства коэффициентов Клебша—Гордана $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle$, связанные с изменением j , можно получить, используя связь полиномов Хана с дуальными полиномами Хана. В результате приходим к следующему соотношению между коэффициентами Клебша—Гордана и дуальными полиномами Хана:

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle = \left[\frac{(2j+1)\rho(j)}{d_n^2} \right]^{1/2} w_n^{(c)}(x, a, b).$$

Здесь $x = j(j+1)$, $a = m$, $b = j_1 + j_2 + 1$, $c = j_2 - j_1$, $n = j_1 - m_1$, $m \geq j_1 - j_2 \geq 0$, $\rho(j)$ и d_n^2 — вес и квадрат нормы дуального полинома Хана $w_n^{(c)}(x, a, b)$.

С помощью свойств симметрии

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle = \langle j_2, -m_2, j_1, -m_1 | j, -m \rangle = \\ = \left\langle \frac{j_1 + j_2 - m}{2} \frac{j_2 - j_1 - m_2 + m_1}{2} \frac{j_1 + j_2 + m}{2} \frac{j_2 - j_1 + m_2 - m_1}{2} \middle| j, j_2 - j_1 \right\rangle$$

можно получить аналогичное соотношение

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle = \left[\frac{(2j+1)\rho(l)}{d_n^2} \right]^{1/2} w_n^{(c)}(x, a, b).$$

Здесь $x = j(j+1)$, $a = j_2 - j_1$, $b = j_1 + j_2 + 1$, $c = m$, $n = j_1 - m_1$, $j_2 - j_1 \geq m \geq 0$.

5. 6j-символы Вигнера и полиномы Рака. В квантовой механике при сложении трех угловых моментов J_1, J_2, J_3 возможны различные схемы связи. Например,

$$J_1 + J_2 = J_{12}, \quad J_{12} + J_3 = J \quad (75)$$

или

$$J_2 + J_3 = J_{23}, \quad J_1 + J_{23} = J. \quad (76)$$

Обозначим собственные функции для полного момента J , соответствующие схемам сложения моментов (75), (76), соответственно через $|j_{12}jm\rangle$ и $|j_{23}jm\rangle$. Преобразование, связывающее

собственные функции $|j_{12}jm\rangle$ и $|j_{23}jm\rangle$, имеет вид

$$|j_{23}jm\rangle = \sum_{j_{12}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_{12} & j & j_{23} \end{pmatrix} |j_{12}jm\rangle. \quad (77)$$

Матрица преобразования $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_{12} & j & j_{23} \end{pmatrix}$ связана с так называемыми $6j$ -символами Вигнера

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix}$$

соотношением

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_{12} & j & j_{23} \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3+j} [(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix}. \quad (78)$$

Матрица преобразования между двумя ортонормированными системами функций $|j_{12}jm\rangle$ и $|j_{23}jm\rangle$ должна быть унитарной, что приводит к следующему соотношению ортогональности для $6j$ -символов:

$$\sum_{j_{23}} (2j_{12}+1)(2j_{23}+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j'_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix} = \delta_{j_{12}, j'_{12}}. \quad (79)$$

Покажем, что $6j$ -символы можно выразить через полиномы Рака. Из (77) следует, что $6j$ -символы можно выразить через коэффициенты Клебша — Гордана

$$\begin{aligned} \langle j_1 m_1 j_{23} m_{23} | j m \rangle \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_{12} & j & j_{23} \end{pmatrix} = \\ = \sum_{m_2} \langle j_{12} m_{12} j_2 m - m_{12} | j m \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_{12} m_{12} \rangle \times \\ \times \langle j_2 m_2 j_3, m_{23} - m_2 | j_{23} m_{23} \rangle. \end{aligned} \quad (80)$$

Выясним характер зависимости правой части данного равенства от переменной j_{23} . С этой целью воспользуемся соотношением между коэффициентами Клебша — Гордана и дуальными полиномами Хана $w_n^{(c)}(x, a, b)$ ($x = x(s) = s(s+1)$), приведенным в п. 41

$$\begin{aligned} \langle j_2 m_2 j_3 m_3 | j_{23} m_{23} \rangle = \left[\frac{\rho(j_{23})(2j_{23}+1)}{d_{j_2-m_2}^2} \right]^{1/2} \times \\ \times w_{j_2-m_2}^{(m_{23})} [j_{23}(j_{23}+1), j_3-j_2, j_2+j_3+1], \end{aligned} \quad (81)$$

$$j_3 - j_2 \geq m_{23} \geq 0,$$

где $\bar{\rho}(s)$ и $\bar{d}_n^2$ — вес и квадрат нормы полиномов $w_n^{(c)}(x, a, b)$:

$$\bar{\rho}(s) = \frac{\Gamma(a+s+1)\Gamma(c+s+1)}{\Gamma(s-a+1)\Gamma(b-s)\Gamma(b+s+1)\Gamma(s-c+1)^2}$$

$$\bar{d}_n^2 = \frac{\Gamma(a+c+n+1)}{n!(b-a-n-1)!\Gamma(b-c-n)}.$$

При подстановке (81) в (80) нетрудно видеть, что правая часть (80) с точностью до известного множителя $[\bar{\rho}(j_{23})(2j_{23}+1)]^{1/2}$ является полиномом по переменной $x = j_{23}(j_{23}+1)$. Степень такого полинома равна $\max(j_2 - m_2) = j_{12} + m_1 + j_2$. Выберем ее минимальной, т. е. положим $m_1 = -j_1$. Тогда, подставляя в (80) значения коэффициентов Клебша — Гордана частного вида, для указанного полинома можно вычислить вес и коэффициент при старшей степени, полагая $j_{12} = j_1 - j_2$. В результате, используя свойства ортогональности (79), находим

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix} = (-1)^{j_1+j+j_{23}} \left[\frac{\rho(j_{23})}{(2j_{12}+1)d_{j_{12}-j_1+j_2}^2} \right]^{1/2} \times$$

$$\times u_{j_{12}-j_1+j_2}^{(m-m', m+m')} [j_{23}(j_{23}+1); j_3 - j_2, j_3 + j_2 + 1], \quad (82)$$

где $m = j_1 - j_2$, $m' = j_3 - j$, $j_1 \geq j$, $j_3 \geq j_2$, $j_1 + j \geq j_2 + j_3$, $j_3 + j \geq j_1 + j_2$, $\rho(s)$ и d_n^2 — вес и квадрат нормы полиномов Рака $v_n^{(\alpha, \beta)}(x, a, b)$, $x = s(s+1)$.

§ 27. Применение специальных функций

в некоторых задачах вычислительной математики

1. Квадратурные формулы типа Гаусса. *Квадратурными формулами типа Гаусса* называют формулы вида

$$\int_a^b f(x) \rho(x) dx \approx \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j), \quad (1)$$

в которых коэффициенты λ_j и узлы x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) подбираются таким образом, чтобы формула (1) была точной для произвольного полинома степени $2n-1$.

Если известны моменты весовой функции

$$C_k = \int_a^b x^k \rho(x) dx,$$

то λ_j , x_j можно найти из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^k = C_k \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1.$$

Однако обычно для построения квадратурных формул вида (1) поступают иначе. Оказывается, что узлы x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) являются нулями полинома $p_n(x)$, ортогонального на интервале

(a, b) с весом $\rho(x)$. Для доказательства рассмотрим функцию

$$f(x) = x^k \tilde{p}_n(x),$$

где

$$\tilde{p}_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)$$

есть полином n -й степени, нули которого являются узлами квадратурной формулы. При $k=0, 1, \dots, n-1$ функция $f(x)$ представляет собой полином степени, не превосходящей $2n-1$. Поэтому, если $f(x)$ подставить в (1), то квадратурная формула должна давать точное значение интеграла при любых $k < n$. Отсюда при $k=0, 1, \dots, n-1$ имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \rho(x) dx &= \int_a^b x^k \tilde{p}_n(x) \rho(x) dx = \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^k (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) |_{x=x_j} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, полином $\tilde{p}_n(x)$ ортогонален к любой степени, меньшей n , и, следовательно, с точностью до постоянного множителя совпадает с полиномом n -й степени $p_n(x)$, ортогональным с весом $\rho(x)$ на интервале (a, b) . Отсюда можно сделать вывод, что для определения узлов квадратурной формулы x_j достаточно построить полином $p_n(x)$ и найти его нули.

Для нахождения коэффициентов λ_j , которые обычно называют числами Кристоффеля, удобно взять в (1) в качестве $f(x)$ полином степени, меньшей $2n$, который равен нулю во всех узлах, кроме $x = x_j$. В результате получим

$$\lambda_j = \frac{1}{f'(x_j)} \int_a^b f(x) \rho(x) dx.$$

Если положить, например, $f(x) = \left[\frac{1}{x - x_j} p_n(x) \right]^2$ или $f(x) = \frac{p_n(x)}{x - x_j} p_{n-1}(x)$, то придем к следующим выражениям для чисел λ_j :

$$\lambda_j = \int_a^b \left[\frac{p_n(x)}{p'_n(x_j)(x - x_j)} \right]^2 \rho(x) dx, \quad (2)$$

$$\lambda_j = \frac{1}{p'_n(x_j) p_{n-1}(x_j)} \int_a^b \frac{p_n(x)}{x - x_j} p_{n-1}(x) \rho(x) dx. \quad (3)$$

Из (2) видно, что $\lambda_j > 0$. Интеграл в правой части (3) легко

вычисляется. Так как

$$\frac{p_n(x)}{x-x_j} = \frac{a_n}{a_{n-1}} p_{n-1}(x) + q_{n-2}(x),$$

где a_n — коэффициент при старшей степени полинома $p_n(x)$, $q_{n-2}(x)$ — полином $(n-2)$ -й степени, то в силу свойств ортогональности полиномов $p_n(x)$ получаем

$$\lambda_j = \frac{a_n d_{n-1}^2}{a_{n-1} p'_n(x_j) p_{n-1}(x_j)}, \quad (4)$$

где $d_n^2 = \int_a^b p_n^2(x) \rho(x) dx$ — квадрат нормы.

Заметим, что все рассуждения, связанные с получением квадратурных формул типа Гаусса для вычисления интегралов, остаются справедливыми, если вместо интеграла $\int_a^b f(x) \rho(x) dx$ рассматривается сумма $\sum_i f(x_i) \rho(x_i)$ (см. § 12, п. 3). В этом случае для получения узлов квадратурной формулы и чисел Кристоффеля следует использовать соответствующие ортогональные полиномы дискретной переменной. Это часто позволяет для вычисления сумм, в которые входят трудно вычисляемые функции $f(x)$, использовать суммы, содержащие значительно меньшее число слагаемых.

Рассмотрим несколько характерных примеров применения квадратурных формул типа Гаусса.

Пример 1. Так как многие специальные функции могут быть представлены в виде определенных интегралов, то использование квадратурных формул типа Гаусса для вычисления этих интегралов приводит к удобным и достаточно точным приближенным формулам для рассматриваемых специальных функций.

Из цилиндрических функций наиболее часто встречаются в приложениях функции Бесселя $J_0(z)$ и $J_1(z)$. В ряде случаев для этих функций удобно использовать приближенные формулы простого вида (в частности, при проведении расчетов на ЭВМ, когда применение формул предпочтительнее пользования таблицами). Приведем вывод некоторых приближенных формул для функций $J_0(z)$, $J_1(z)$, вытекающих из интегрального представления Пуассона. Имеем

$$J_m(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(m+1/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^m \int_{-1}^1 (1-s^2)^{m-1/2} \cos zs \, ds.$$

Интеграл, входящий в правую часть, при $m=0$ можно

вычислить по квадратурной формуле типа Гаусса:

$$\int_{-1}^1 f(s) \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds \approx \sum_{j=1}^n \lambda_j f(s_j).$$

Здесь s_j — нули полиномов Чебышева первого рода, ортогональных на интервале $(-1, 1)$ с весом $1/\sqrt{1-s^2}$, λ_j — числа Кристоффеля:

$$s_j = \cos \frac{2j-1}{2n} \pi, \quad \lambda_j = \frac{\pi}{n}.$$

Полагая $f(s) = \cos zs$, получим следующую приближенную формулу:

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\cos zs}{\sqrt{1-s^2}} ds \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos \left(z \cos \frac{2j-1}{2n} \pi \right).$$

Используя соотношение $J_1(z) = -J'_0(z)$, можно найти также приближенную формулу для функции $J_1(z)$:

$$J_1(z) \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos \frac{2j-1}{2n} \pi \sin \left(z \cos \frac{2j-1}{2n} \pi \right).$$

При четных значениях n узлы s_j квадратурной формулы расположены симметрично относительно точки $s=0$. Поэтому для случая, когда $f(s)$ — четная функция, число различных слагаемых в квадратурной формуле будет равно $n/2$. Полагая, например, $n=6$, получим

$$J_0(z) \approx \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \cos zx_j, \quad J_1(z) \approx \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 x_j \sin zx_j.$$

Здесь

$$x_j = \cos \frac{2j-1}{12} \pi = \begin{cases} \cos(\pi/12) = 0,965926, \\ \cos(\pi/4) = 0,707107, \\ \cos(5\pi/12) = 0,258819. \end{cases}$$

Точность вычислений по этим формулам характеризуется табл. 5, в которой для сравнения приведены точные значения функций $J_0(z)$, $J_1(z)$ и значения, вычисленные по приближенным формулам (они обозначены через $J_0(z)$, $J_1(z)$).

Очевидно, что полученными формулами можно пользоваться и для комплексных z при не слишком больших значениях $|z|$.

Пример 2. Рассмотрим применение квадратурных формул типа Гаусса для вычисления сумм вида

$$S_N = \sum_{k=0}^{N-1} f(k).$$

Таблица 5

	$J_0(z)$	$\tilde{J}_0(z)$	$J_1(z)$	$\tilde{J}_1(z)$
0,4	0,9604	0,9604	0,1960	0,1960
1,2	0,6711	0,6711	0,4983	0,4983
2,0	0,2239	0,2239	0,5767	0,5767
2,8	-0,1850	-0,1850	-0,4097	0,4097
3,6	-0,3918	-0,3918	0,09547	0,09548
4,4	-0,3423	-0,3423	-0,2028	-0,2027
5,2	-0,1103	-0,1105	-0,3432	-0,3427
6,0	0,1506	0,1496	-0,2767	-0,2748

При использовании квадратурных формул типа Гаусса сумма S_N заменяется суммой меньшего числа слагаемых:

$$S_N \approx \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j).$$

Узлы x_j квадратурной формулы в этом случае будут нулями полинома $p_n(x)$, обладающего следующими свойствами ортогональности:

$$\sum_{k=0}^{N-1} p_n(k) p_m(k) = 0, \quad m \neq n.$$

Соответствующими ортогональными полиномами будут полиномы Чебышева дискретной переменной (см. § 12). В качестве примера приведем сравнительную таблицу результатов вычисления сумм S_N при $f(k) = \sqrt{l+k}$ (l — некоторое целое число) для различного числа квадратурных точек n (табл. 6). Заметим, что при

Таблица 6

$N-1$		10		1000	
$n \backslash l$		1	10	1	10
1		26,944	42,603	22 405	22 606
3		25,808	42,360	21 207	21 453
5		25,786	42,360	21 148	21 405
N		25,785	42,360	21 129	21 395

$n = N$ квадратурная формула дает точное значение для исходной суммы.

Пример 3. Определение коэффициентов поглощения света в спектральных линиях приводит к необходимости вычисления интегралов вида *)

$$K(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ye^{-s^2}}{(x-s)^2 + y^2} ds, \quad y > 0. \quad (5)$$

*) См. Соболевман И. И. Введение в теорию атомных спектров.— М.: Физматгиз, 1963.

Существенная для интегрирования область значений s за счет множителя e^{-s^2} соответствует значениям $|s| < 1$. В этой области функция $1/[(x-s)^2 + y^2]$ при заданном значении x будет достаточно плавной функцией переменной s , если значение y сравнительно велико. Поэтому при $y > 1$ для вычисления функции $K(x, y)$ можно использовать квадратурные формулы типа Гаусса, основанные на применении полиномов Эрмита:

$$K(x, y) \approx K_1(x, y) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{y}{(x-s_j)^2 + y^2}. \quad (6)$$

Однако при малых значениях y функция $y/[(x-s)^2 + y^2]$ будет иметь резкий максимум при $x=s$ и квадратурная формула (6) при небольших значениях x будет давать неудовлетворительные результаты. Чтобы избежать этого, можно предварительно преобразовать выражение для $K(x, y)$ к виду, более удобному для применения квадратурных формул типа Гаусса. Имеем

$$K(x, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s^2}}{(x-s) - iy} ds.$$

Если с помощью теоремы Коши от интегрирования вдоль вещественной оси перейти к интегрированию вдоль прямой, параллельной вещественной оси, полагая $s = at + t$ ($a > 0$, $-\infty < t < \infty$), то получим

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(at+t)^2}}{(x-t) - i(a+y)} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} e^{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2} [(a+y) \cos 2at - (x-t) \sin 2at]}{(x-t)^2 + (a+y)^2} dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Благодаря такому преобразованию мы вместо функции $1/[(x-s)^2 + y^2]$ с резким максимумом получили в подынтегральном выражении более плавную функцию $1/[(x-t)^2 + (a+y)^2]$, которая в существенной для интегрирования области может быть достаточно точно аппроксимирована полиномом сравнительно небольшой степени. Правда, при этом в подынтегральном выражении возникает дополнительный осциллирующий множитель. Если выбрать $a \approx 1$, то в существенной для интегрирования области функция $[(a+y) \cos 2at - (x-t) \sin 2at]$ будет также достаточно плавной. Применим теперь к интегралу (7) квадратурную формулу типа Гаусса, использующую полиномы Эрмита:

$$K(x, y) \approx K_2(x, y) = \frac{e^{a^2}}{\pi} \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{(a+y) \cos 2as_j - (x-s_j) \sin 2as_j}{(x-s_j)^2 + (a+y)^2}. \quad (8)$$

Проведенный анализ показывает, что применение квадратурной формулы типа Гаусса к интегралу (7) даже при небольшом количестве квадратурных точек может дать хорошие результаты при любых значениях x и y , если выбрать $a \approx 1$. Для иллюстрации приведем сравнительную таблицу результатов вычисления интегралов (5) и (7) по формулам (6) и (8) при различном числе квадратурных точек для $a=1$ и различных значениях x, y (табл. 7).

Т а б л и ц а 7

n	x=0, y=0,01		x=1, y=0,01	
	K(x, y)=0,989		K(x, y)=0,369	
	K ₁ (x, y)	K ₂ (x, y)	K ₁ (x, y)	K ₂ (x, y)
3	37,6	1,013	0,0225	0,387
5	30,1	0,991	0,693	0,370
7	25,8	0,9895	0,0434	0,369
n	x=0, y=1		x=1, y=1	
	K(x, y)=0,428		K(x, y)=0,305	
	K ₁ (x, y)	K ₂ (x, y)	K ₁ (x, y)	K ₂ (x, y)
3	0,451	0,441	0,293	0,317
5	0,434	0,428	0,305	0,305
7	0,430	0,428	0,306	0,305

В заключение приведем таблицы (табл. 8—10) значений чисел Кристоффеля λ_j и узлов x_j для вычисления различного рода интегралов по квадратурным формулам типа Гаусса*). В этих формулах в качестве узлов x_j используются нули полиномов Лежандра, Лагерра и Эрмита. Для полиномов Лежандра и Эрмита в таблицах выписаны лишь неотрицательные значения x_j . Следует иметь в виду, что для каждого положительного значения x_j в этом случае существует также отрицательное значение $-x_j$ с тем же весом λ_j .

Квадратурные формулы имеют вид:

$$1) \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j)$$

(x_j — нули полиномов Лежандра $P_n(x)$, см. табл. 8);

$$2) \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j)$$

(x_j — нули полиномов Лагерра $L_n^0(x)$, см. табл. 9);

*) Для чисел $\lambda_j \ll 1$ используется сокращенная запись, например, 0,(4)233699 = 0,0000233699.

$$3) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j)$$

(x_j — нули полиномов Эрмита $H_n(x)$, см. табл. 10).

Таблица 8

n	x_j	λ_j	n	x_j	λ_j
2	0,5773502692	1	8	0,1834346422	0,3626837834
3	0	0,8888888888		0,5355324099	0,3137066459
	0,7745966692	0,5555555555		0,7966664774	0,222381035
4	0,3399810436	0,6521451549		0,9602898565	0,1012285363
	0,8611363116	0,3478548451	9	0	0,3302393550
5	0	0,5888888888		0,3242534234	0,3123470770
	0,5384693101	0,4786286705		0,6133714327	0,2806106964
	0,9061798459	0,2362688506		0,8360311073	0,1806481607
6	0,2386191861	0,4679139346		0,9681602395	0,08127438836
	0,6612093865	0,3607615731	10	0,1488743390	0,2955242247
	0,9324695142	0,1713244924		0,4333953941	0,2692667193
7	0	0,4179591837		0,6794095683	0,2190863625
	0,4058451514	0,3818300505		0,8650633667	0,1494513491
	0,7415311856	0,2797053915		0,9739065285	0,06667134430
	0,9491079123	0,1294849662			

2. Применение классических ортогональных полиномов дискретной переменной для сжатия информации. Задача хранения, сжатия и обработки информации была и остается одной из наиболее важных научно-технических задач. Необходимость рационального хранения данных диктуется не только научными, но и экономическими требованиями. Например, большое значение имеет вопрос о сжатии информации при обработке сигналов, получаемых с летательных аппаратов. При создании банков данных геофизических и сейсмических исследований осуществляется сжатие массивов результатов измерений. В медицине в связи с появлением автоматизированных диагностических систем весьма остро встал вопрос создания банков электрофизиологических данных больных. Часто бывает необходимо хранить длительный период электрокардиограммы, электроэнцефалограммы и другие характеристики каждого больного. Вообще, развитие многих научных направлений базируется на использовании большого экспериментального материала.

Кроме сжатия информации, для последующего ее хранения часто требуются и другие виды обработки информации, которые удобно проводить одновременно со сжатием. К ним относятся,

Таблица 9

n	x_j	λ_j	n	x_j	λ_j
1	1	1	8	0,1702796323	0,3691885893
2	0,5857864376	0,8535533906		0,9037017768	0,4187867808
	3,4142135624	0,1464466094		2,2210866299	0,1757949866
3	0,4157745567	0,7110930099		4,2667001703	0,03334349226
	2,2942803603	0,2785177336		7,0429054024	0,(2)2794536235
4	6,2899450829	0,0103892565		10,7585160102	0,(4)9076508773
	0,3225476896	0,6031541043	9	15,7406786413	0,(6)8485746716
	1,7457611011	0,3574186924		22,8331317369	0,(8)1048001175
	4,5366202969	0,03888790851		0,1523222277	0,3361264218
	9,3950709123	0,(3)53929447056		0,8072200227	0,4112139804
5	0,2635603197	0,5217556106		2,0051351556	0,1992875254
	1,4134030591	0,3986668111	10	3,7834739733	0,04746056277
	3,5964257710	0,07594244968		6,2049567778	0,(2)5599626611
	7,0858100059	0,(2)3611758679		9,3729852517	0,(3)3052497671
	12,6408008443	0,(4)2336997239		13,4662369110	0,(5)6592123026
6	0,2228466042	0,4589646740		18,8335977889	0,(7)4110769330
	1,1889321017	0,4170008308	10	26,3740718909	0,(10)3280874030
	2,9927363261	0,1133733821		0,1377934705	0,3084411158
	5,7721435691	0,01039919745		0,7294545495	0,4011199292
	9,8374674184	0,(3)2610172028		1,8083429017	0,1180682876
	15,9828739806	0,(6)8985479064		3,4014336979	0,06208745610
7	0,1930436766	0,4093189517		5,2224961400	0,(2)9501516975
	1,0266048953	0,4218312779	10	8,3301527468	0,(3)7530083886
	2,5678767450	0,1471263487		11,8437858379	0,(4)2825923350
	4,90003530845	0,02063351447		16,2792578314	0,(6)4249313985
	8,1821534446	0,(2)1074010143		21,9965858120	0,(8)1839564824
	12,7341802918	0,(4)1586546435		29,9206970122	0,(12)9911827220
	19,3957278623	0,(7)3170315479			

прежде всего, задача подавления или сглаживания высокочастотных помех. Еще одно важное направление обработки информации заключается в получении аналитического представления экспериментальных данных. Из экономических соображений очевидна необходимость комплексного решения этих проблем: формирования информации, обработки ее в целях правильной интерпретации, а также организации рационального длительного хранения экспериментальных данных.

В настоящее время для обработки информации широко применяются различные спектральные методы, основанные на следующем. Функция $f(t)$, полученная в виде таблицы значений, графической или аналитической зависимости в результате измерений, разлагается в ряд Фурье по полной ортогональной системе

n	x_j	λ_j	n	x_j	λ_j
1	0	1,772453851	8	0,3811869902 1,1571937124 1,9818567587 2,9306374203	0,6611470126 0,2078023258 0,01707798301 0,(3)1996040722
2	0,7071067812	8,8862269255			
3	0 1,2247448714	1,181635901 1,2954089752			
4	0,5246476233 1,6506801239	0,8049140900 0,08131283545	9	0 0,7235510188 1,4685532892 2,2665805845 3,1909932018	0,7202352156 0,4326515590 0,08847452739 0,(2)4943624276 0,(4)3960697726
5	0 0,9585724646 2,0201828705	0,9453087205 0,3936193232 0,01995324206			
6	0,4360774119 1,3358490740 2,3506049737	0,7246295952 0,1570673203 0,(2)4530009906	10	0,3429013272 1,0366108298 1,7566836493 2,5327316742 3,4361591188	0,6108626337 0,2401386111 0,03387439446 0,(2)1343645747 0,(5)7640432855
7	0 0,8162878829 1,6735516288 2,6519613568	0,8102646176 0,4256072526 0,05451558282 0,(3)9717812451			

функций $\{y_n(t)\}$, $n = 0, 1, \dots$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(t). \quad (9)$$

Коэффициенты Фурье c_n , как обычно, вычисляются с помощью соотношения ортогональности функций $y_n(t)$.

При таком преобразовании (фурье-преобразовании) исходной функции $f(t)$ решается сразу несколько задач, связанных с обработкой информации. Во-первых, запоминая несколько первых коэффициентов Фурье c_n вместо таблицы значений функции $f(t)$, мы добиваемся существенного сжатия информации об экспериментальных данных. Во-вторых, происходит разделение наиболее важных низкочастотных и, как правило, вредных высокочастотных характеристик. В-третьих, представление данных в форме разложения Фурье по ортогональной системе функций (базису) удобно для аналитической обработки, поскольку анализ данных в этом случае опирается на свойства ортогонального базиса. К тому же появляется возможность получить приближенные аналитические выражения, оставив лишь несколько первых членов разложения Фурье.

В качестве системы функций $\{y_n(t)\}$ удобно использовать классические ортогональные полиномы непрерывной и дискретной переменной. Многообразие систем классических ортогональных

полиномов позволяет эффективно проводить спектральный анализ и сжатие информации, получать сравнительно простые аналитические выражения для экспериментальных данных.

Обращение к полиномам дискретной переменной обусловлено задачами, в которых экспериментальные данные заданы в виде таблицы. В подобных случаях, конечно, можно использовать и полиномы непрерывной переменной. Обычно вычисление коэффициентов Фурье c_n по системе классических ортогональных полиномов непрерывной переменной требует трудоемкого численного интегрирования. Полиномы дискретной переменной для ЭВМ предпочтительнее, так как их применение позволяет заменить интегрирование суммированием по точкам сетки:

$$\int_a^b f(t) y_n(t) \rho(t) dt \approx \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i) y_n(t_i) \rho_i. \quad (10)$$

В качестве примера сжатия информации приведем результаты применения полиномов Чебышева дискретной переменной $t_n(x)$ для обработки электрокардиограмм. Для воспроизведения сигнала кривая $f(t)$ разбивалась на отдельные участки и для каждого участка кривой использовались лишь первые три члена разложения функции $f(t)$ по полиномам Чебышева. Размеры каждого участка подбирались таким образом, чтобы средняя квадратичная ошибка не превышала 1%. Даже такой простой алгоритм оказался достаточно эффективным: коэффициент сжатия информации находился в пределах 6—12*).

В заключение отметим, что в связи со спектральным методом обработки информации возникает интересная задача выбора оптимального базиса классических ортогональных полиномов.

3. Применение модифицированных функций Бесселя в задачах лазерного зондирования. Функции Бесселя находят широкое применение при решении задач, возникающих в самых различных областях науки и техники. В качестве примера рассмотрим применение модифицированных функций Бесселя $I_n(z)$ в задаче лазерного зондирования атмосферы, в которой используется информация о поглощении лазерного импульса в некоторой спектральной линии интересующего нас вещества.

Изучая поглощение света в спектральных линиях, во многих случаях можно получить важные сведения о физических свойствах вещества. Так, например, в астрофизике по доплеровским сдвигам судят о скорости направленного движения вещества, а по ширине спектральных линий — о температуре вещества и его плотности.

В настоящее время для определения химического и аэрозольного состава атмосферы и, в частности, для обнаружения малых концентраций нелокализованных в атмосфере газовых примесей широко используются лазерные методы исследования. Наиболее перспективным из них является,

*) См. Спектральные методы обработки информации в научных исследованиях. — В кн.: Материалы I Всесоюзного семинара «Спектральные методы обработки информации в научных исследованиях на основе ортогональных базисов». Пушчино, 1980, с. 21, 105.

по-видимому, метод сравнительного поглощения, основанный на использовании лазерных локаторов — лидаров.

В атмосферу посылаются лазерные импульсы на двух близких частотах ν_1 и ν_2 , одна из которых (ν_1) почти совпадает с центром линии поглощения ν_a исследуемого вещества, а другая лежит вне ее, причем интервал частот (ν_1, ν_2) не перекрывается с остальными линиями поглощения. На приемник излучение поступает в результате отражения лазерного импульса от какого-либо рефлектора.

Можно показать, что отношение величины сигналов, регистрируемых приемником на частотах ν_1, ν_2 , будет определяться поглощением лазерного излучения в спектральной линии исследуемого вещества на частоте ν_1 , если учесть, что сечения всех остальных процессов взаимодействия излучения с веществом для близких частот ν_1 и ν_2 с достаточной степенью точности можно считать равными.

Действительно, пусть $K_L(\nu)$ — контур линии излучения, т. е. спектральная интенсивность лазерного импульса, $K_a(\nu)$ — контур линии поглощения исследуемого вещества, т. е. спектральный коэффициент поглощения света в линии с частотой $\nu = \nu_a$, рассчитанный на единицу массы, $K(\nu)$ — спектральный коэффициент поглощения для остальных процессов взаимодействия излучения с веществом. Тогда мощность лазерного излучения, зарегистрированного приемником, в предположении однородности атмосферы, будет равна

$$\int_0^{\infty} K_L(\nu) \exp \{ - [\mu_a K_a(\nu) + K(\nu)] m \} d\nu, \quad (11)$$

где μ_a — процентное содержание (по массе) рассматриваемой компоненты вещества в атмосфере, m — масса поглощающего вещества на пути лазерного импульса: $m = LS\rho_0$ (L — путь, пройденный импульсом от лазера до приемника, S — площадь приемной антенны, ρ_0 — плотность атмосферы).

При дистанционном зондировании атмосферы используются узкополосные сигналы, для которых функция $K_L(\nu)$ существенно отлична от нуля лишь в узкой области частот $\nu \approx \nu_L$. При $\nu_L = \nu_1$ и $\nu_L = \nu_2$ в соответствующих областях частот изменением функции $K(\nu)$ можно пренебречь, т. е. в обоих случаях можно считать $K(\nu) = \text{const}$. Кроме того, при $\nu_L = \nu_2$ в силу выбора частоты ν_2 можно считать, что в существенной для интегрирования области частот $K_a(\nu) = 0$. Поэтому отношение величины сигналов на частотах ν_1, ν_2 будет даваться следующим выражением:

$$T = \frac{P_1}{P_2} = \frac{\int_0^{\infty} K_L^{(1)}(\nu) \exp \{ - \mu_a K_a(\nu) \cdot m \} d\nu}{\int_0^{\infty} K_L^{(2)}(\nu) d\nu} \quad (12)$$

Для многих практически важных случаев реальный контур линии поглощения близок к лоренцевскому, для которого

$$K_a(\nu) = \frac{J_0}{\pi} \cdot \frac{\gamma_a}{\gamma_a^2 + (\nu - \nu_a)^2},$$

где J_0 — интенсивность линии, γ_a — полуширина.

Подобным же контуром, как правило, описывается и частотная зависимость линии лазерного излучения $K_L(\nu)$, т. е.

$$K_L^{(i)}(\nu) = \frac{P_0}{\pi} \cdot \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\nu - \nu_i)^2},$$

где P_0 — мощность излученного импульса, $i = 1, 2$.

Для этого случая

$$T = \frac{\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (v - v_1)^2} \exp \left\{ -\frac{J_0 m \mu_a}{\pi} \frac{\gamma_a}{\gamma_a^2 + (v - v_a)^2} \right\} dv}{\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (v - v_2)^2} dv}.$$

Обычно $\gamma \ll v_1$, и поэтому интервал интегрирования $(0, \infty)$ можно заменить на $(-\infty, +\infty)$, практически не меняя величины T . Полагая $t = 2 \operatorname{arctg} [(v - v_a)/\gamma_a]$, имеем

$$T = T(z, a, \delta) = \frac{ae^{-z}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp \{-z \cos t\} dt}{1 + a^2(1 + \delta^2) + [1 - a^2(1 - \delta^2)] \cos t + 2a^2\delta \sin t}, \quad (13)$$

где

$$z = \frac{J_0 m \mu_a}{2\pi \gamma_a}, \quad a = \frac{\gamma_a}{\gamma}, \quad \delta = \frac{v_a - v_1}{\gamma_a}.$$

В полученном выражении все величины, от которых зависит функция T , легко определяются, за исключением μ_a . Поэтому, если величина T измерена в эксперименте, то для определения μ_a достаточно воспользоваться, например, построенным предварительно с помощью формулы (13) графиком функции $T = T(\mu_a)$.

Для вычисления интеграла (13) разложим функцию $\exp \{-z \cos t\}$ в ряд Фурье. Чтобы получить коэффициенты этого разложения, воспользуемся соотношением (16.12), заменяя в нем z на iz , ϕ на $\pi/2 - t$:

$$\exp \{-z \cos t\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n I_n(z) \exp \{-int\}.$$

Так как $I_{-n}(z) = I_n(z)$, то

$$\exp \{-z \cos t\} = I_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n(z) \cos nt.$$

Поэтому

$$T(z, a, \delta) = e^{-z} \left[I_0(z) S_0(a, \delta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n(z) S_n(a, \delta) \right],$$

где

$$S_n(a, \delta) = \frac{a}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nt dt}{1 + a^2(1 + \delta^2) + [1 - a^2(1 - \delta^2)] \cos t + 2a^2\delta \sin t}.$$

Интеграл $S_n(a, \delta)$ с помощью замены $\xi = e^{it}$ приводится к контурному интегралу по единичной окружности, который можно вычислить с помощью теории вычетов:

$$S_n(a, \delta) = (-1)^n \rho^n \cos n\alpha,$$

где

$$\rho = \sqrt{\frac{(a-1)^2 + a^2\delta^2}{(a+1)^2 + a^2\delta^2}}, \quad 0 \leq \rho < 1,$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - a^2(1 - \delta^2)}{r}, \quad \sin \alpha = \frac{2a^2\delta}{r},$$

$$r = \sqrt{[(a-1)^2 + a^2\delta^2][(a+1)^2 + a^2\delta^2]}.$$

В результате получаем

$$T(z, a, \delta) = e^{-z} \left[I_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n\alpha I_n(z) \right]. \quad (14)$$

Так как $\rho < 1$ и при фиксированном z и $n \rightarrow \infty$

$$I_n(z) \approx \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2} \right)^n,$$

то ряд (14) очень быстро сходится и поэтому удобен для вычислений. Заметим, что для функций $I_n(z)$ существуют подробные таблицы.

Полученные формулы позволяют проводить вычисления функции пропускания T при произвольных значениях γ_a , γ , μ_a , ν_1 , ν_2 , ν_a , а также исследовать различного рода предельные случаи.

Пусть, например, $\nu_1 = \nu_a$, т. е. частота сигнала совпадает с центром линии поглощения. В этом случае

$$\delta = 0, \quad \rho = \left| \frac{a-1}{a+1} \right|, \quad \alpha = \begin{cases} 0, & \gamma_a < \gamma, \quad a < 1, \\ \pi, & \gamma_a > \gamma, \quad a > 1. \end{cases}$$

По формуле (14) получаем

$$T(z, a, 0) = e^{-z} \left[I_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-a}{1+a} \right)^n I_n(z) \right].$$

В частности, если $\gamma_a = \gamma$ ($a = 1$), то

$$T(z, 1, 0) = e^{-z} I_0(z).$$

ДОПОЛНЕНИЕ

А. Гамма-функция

Гамма-функция относится к числу наиболее простых и в то же время важных специальных функций. Знакомство с ее свойствами является необходимой предпосылкой для изучения других специальных функций. Кроме того, многие интегралы, встречающиеся в анализе, могут быть выражены через гамма-функцию. В частности, через гамма-функцию можно выразить интеграл, определяющий так называемую бета-функцию.

1. Определение функций $\Gamma(z)$ и $B(u, v)$. Гамма-функция $\Gamma(z)$ и бета-функция $B(u, v)$ определяются следующим образом:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0; \quad (1)$$

$$B(u, v) = \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} dt, \quad \operatorname{Re} u > 0, \quad \operatorname{Re} v > 0. \quad (2)$$

По теореме 2 из § 3 функция $\Gamma(z)$ будет аналитической в области ее определения. Действительно, интеграл (1) равномерно сходится по z в области $0 < \delta \leq \operatorname{Re} z \leq A$ при любых значениях A, δ , так как

$$|e^{-t} t^{z-1}| \leq \begin{cases} t^{\delta-1}, & 0 < t \leq 1, \\ e^{-t} t^{A-1}, & t > 1, \end{cases}$$

и интегралы $\int_0^1 t^{\delta-1} dt$ и $\int_1^{\infty} e^{-t} t^{A-1} dt$ сходятся.

Аналогично можно показать, что функция $B(u, v)$ будет аналитической функцией каждой из переменных u, v при $\operatorname{Re} u > 0, \operatorname{Re} v > 0$.

Бета-функция может быть выражена через гамма-функцию. Для нахождения этой связи достаточно вычислить двумя способами интеграл

$$I(u, v) = \int \int e^{-(\xi^2 + \eta^2)} \xi^{2u-1} \eta^{2v-1} d\xi d\eta,$$

в котором интегрирование производится по области $\xi > 0, \eta > 0$.

С одной стороны,

$$I(u, v) = I(u)I(v),$$

где

$$I(u) = \int_0^{\infty} e^{-t^2} \xi^{2u-1} d\xi = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{u-1} dt = \frac{1}{2} \Gamma(u).$$

С другой стороны, переходя в выражении для $I(u, v)$ к полярным координатам $\xi = r \cos \varphi$, $\eta = r \sin \varphi$, получим

$$\begin{aligned} I(u, v) &= \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2u+2v-1} dr \int_0^{\pi/2} \cos^{2u-1} \varphi \sin^{2v-1} \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \Gamma(u+v) \int_0^{\pi/2} \cos^{2u-1} \varphi \sin^{2v-1} \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Интеграл по переменной φ можно выразить через бета-функцию $B(u, v)$, если воспользоваться заменой $\cos^2 \varphi = t$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2u-1} \varphi \sin^{2v-1} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} B(u, v).$$

Сопоставляя два выражения для $I(u, v)$, окончательно получим

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u) \Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}. \quad (3)$$

2. Функциональные соотношения. Функция $\Gamma(z)$ удовлетворяет следующим функциональным соотношениям:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (4)$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z, \quad (5)$$

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \Gamma(1/2)\Gamma(2z). \quad (6)$$

Эти соотношения играют важную роль при различных преобразованиях, связанных с гамма-функцией. Соотношение (5) называется *формулой дополнения* для гамма-функции, а соотношение (6) — *формулой удвоения*.

Для доказательства справедливости формул (4)–(6) их удобно записать, используя (3), в виде *функциональных соотношений* для бета-функции:

$$B(z, 1) = 1/z, \quad (7)$$

$$B(z, 1-z) = \pi/\sin \pi z, \quad (8)$$

$$2^{2z-1}B(z, z) = B(z, 1/2). \quad (9)$$

Соотношения (7)–(9) могут быть выведены с помощью непосредственного вычисления интеграла (2) для бета-функции

$B(u, v)$. Имеем

$$B(z, 1) = \int_0^1 t^{z-1} dt = \frac{1}{z},$$

что совпадает с (7).

Для доказательства соотношения (8) положим в (2) $u = z$, $v = 1 - z$:

$$B(z, 1 - z) = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{z-1} \frac{dt}{1-t}, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1.$$

Произведя замену $s = t/(1-t)$, получим

$$B(z, 1 - z) = \int_0^\infty \frac{s^{z-1}}{1+s} ds.$$

Полученный интеграл можно вычислить с помощью теории вычетов. Для этого от интегрирования вдоль действительной оси перейдем к интегрированию по замкнутому контуру C , изображенному на рис. 14. Функция

$$f(s) = \frac{s^{z-1}}{1+s}, \quad 0 < \arg s < 2\pi,$$

в области, ограниченной контуром C , не имеет других особенностей, кроме полюса при $s = e^{i\pi}$. Поэтому при $R > 1$

$$\int_C f(s) ds = 2\pi i \operatorname{Res}_{s=e^{i\pi}} f(s) = -2\pi i e^{i\pi z}.$$

С другой стороны, в силу условия $0 < \operatorname{Re} z < 1$, интегралы по окружностям радиусов r и R стремятся к нулю при $r \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$, а интеграл по нижнему берегу разреза отличается от интеграла по верхнему берегу множителем $-e^{2\pi i z}$. В результате при $r \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ получаем

$$B(z, 1 - z)(1 - e^{2\pi i z}) = -2\pi i e^{i\pi z},$$

что эквивалентно (8) при $0 < \operatorname{Re} z < 1$.

Чтобы доказать соотношение (9), положим в (2) $u = v = z$:

$$B(z, z) = \int_0^1 [t(1-t)]^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Так как парабола $y = t(1-t)$ симметрична относительно прямой $t = 1/2$, то

$$B(z, z) = 2 \int_0^{1/2} [t(1-t)]^{z-1} dt,$$

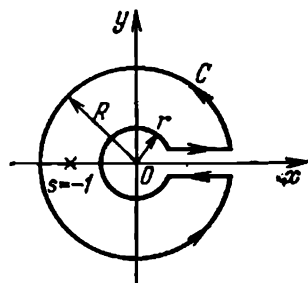


Рис. 14.

откуда после замены $s = 4t(1-t)$ получим

$$B(z, z) = \frac{1}{2^{2z-1}} \int_0^1 s^{z-1} (1-s)^{-1/2} ds = \frac{B(z, 1/2)}{2^{2z-1}},$$

что эквивалентно (9) при $\operatorname{Re} z > 0$.

Таким образом, функциональные соотношения (4)–(6) для гамма-функции доказаны.

В виде примера применения соотношений (4)–(6) вычислим значения гамма-функции $\Gamma(z)$ для целых и полуполных значений аргумента. Из (4) следует, что

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

так как $\Gamma(1) = 1$. Отсюда видно, что гамма-функция обобщает понятие факториала. Далее, полагая в (5) $z = 1/2$, находим

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Поэтому (6) можно переписать в виде

$$2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma(z+1/2) = \sqrt{\pi} \Gamma(2z). \quad (6a)$$

Полагая в этом соотношении $z = n + 1/2$, получим

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2n+1)}{2^{2n} \Gamma(n+1)} = \frac{\sqrt{\pi} (2n)!}{2^{2n} n!}. \quad (10)$$

Аналитическое продолжение $\Gamma(z)$ на область $\operatorname{Re} z > -(n+1)$ можно получить с помощью соотношения

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1) \dots (z+n-1)(z+n)}, \quad (11)$$

вытекающего из (4). Поскольку число n можно взять произвольным, мы получаем аналитическое продолжение $\Gamma(z)$ для любых значений z . Из (11) видно, что $\Gamma(z)$ *будет аналитической функцией всюду, кроме точек $z = -n$ ($n = 0, 1, \dots$), в которых она имеет полюсы первого порядка с вычетами*

$$\operatorname{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = (-1)^n / n!.$$

По принципу аналитического продолжения формулы (4)–(6) будут справедливы при всех значениях z , для которых они имеют смысл. Аналитическое продолжение бета-функции можно получить, используя (3).

Из (5) вытекает, что $\Gamma(z)$ *не имеет нулей на плоскости комплексной переменной z* . Действительно, пусть $\Gamma(z_0) = 0$. Очевидно, что $z_0 \neq n+1$ ($n = 0, 1, \dots$), так как $\Gamma(n+1) = n! \neq 0$. Поэтому функция $\Gamma(1-z)$ будет аналитической при $z = z_0$. С другой стороны,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z_0} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{\Gamma(z)} = \infty,$$

что противоречит аналитичности функции $\Gamma(1-z)$ при $z \neq n+1$.

График функции $y = \Gamma(x)$ приведен на рис. 15.

3. Логарифмическая производная гамма-функции. Наряду с функцией $\Gamma(z)$ широко используется также функция

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Функция $\psi(z)$ является аналитической во всей комплексной

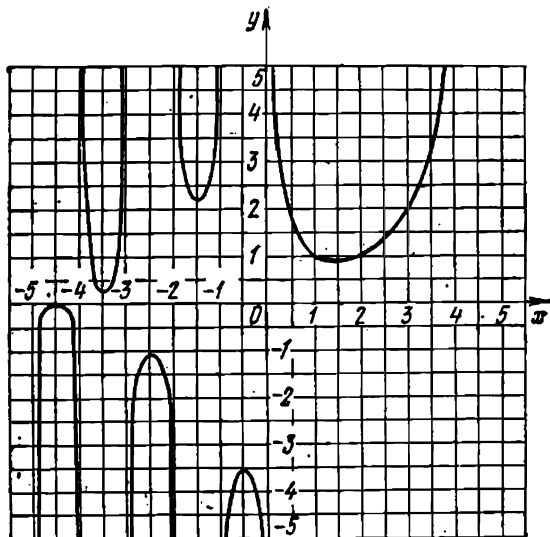


Рис. 15.

плоскости, за исключением точек $z = -n$ ($n = 0, 1, \dots$), в которых она имеет простые полюсы.

Из функциональных соотношений для гамма-функции вытекают следующие *функциональные соотношения* для функции $\psi(z)$:

$$\psi(z+1) = 1/z + \psi(z), \quad (12)$$

$$\psi(z) = \psi(1-z) - \pi \operatorname{ctg} \pi z, \quad (13)$$

$$2 \ln 2 + \psi(z) + \psi(z+1/2) = 2\psi(2z). \quad (14)$$

Отметим также соотношение, легко получаемое из (12):

$$\psi(z+n) = \psi(z) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{z+k-1}. \quad (15)$$

Соотношения (12)–(15) позволяют вычислить значения $\psi(z)$ для целых и полуцелых значений аргумента. Обозначим

$$\psi(1) = \Gamma'(1) = -\gamma.$$

Величина γ называется *постоянной Эйлера* ($\gamma = 0,577215\dots$). Полагая в (14) $z = 1/2$, находим

$$\psi(1/2) = -\gamma - 2 \ln 2.$$

При $z = 1$, $z = 1/2$ из (15) получаем

$$\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad (16)$$

$$\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2 \ln 2 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}. \quad (17)$$

Из интегрального представления для бета-функции можно получить интегральное представление для $\psi(z)$. По определению

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Gamma(z) - \Gamma(z - \Delta z)}{\Gamma(z) \Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta z} - \frac{\Gamma(z - \Delta z)}{\Gamma(z) \Delta z} \right].$$

Выражение $\Gamma(z - \Delta z)/(\Gamma(z)\Delta z)$ при достаточно малых $\Delta z > 0$ почти совпадает с бета-функцией:

$$B(z - \Delta z, \Delta z) = \frac{\Gamma(z - \Delta z) \Gamma(\Delta z)}{\Gamma(z)},$$

так как

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta z \Gamma(\Delta z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Gamma(1 + \Delta z) = 1.$$

Величину $1/\Delta z$, входящую в предельное соотношение для $\psi(z)$, удобно исключить, рассмотрев разность $\psi(z) - \psi(1)$. Имеем

$$\begin{aligned} \psi(z) - \psi(1) &= \psi(z) + \gamma = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\frac{\Gamma(1 - \Delta z)}{\Gamma(1) \Delta z} - \frac{\Gamma(z - \Delta z)}{\Gamma(z) \Delta z} \right] = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z \Gamma(\Delta z)} [B(1 - \Delta z, \Delta z) - B(z - \Delta z, \Delta z)] = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{1 - t^{z-1}}{1 - t} \left(\frac{1 - t}{t} \right)^{\Delta z} dt. \end{aligned}$$

После перехода к пределу под знаком интеграла, что допустимо в силу равномерной сходимости интеграла при достаточно малых Δz , получим интегральное представление для $\psi(z)$:

$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1 - t^{z-1}}{1 - t} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (18)$$

Заменяя в (18) t на e^{-t} , получаем еще одно часто используемое интегральное представление:

$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-zt}}{1 - e^{-t}} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (19)$$

Из интегрального представления (18) можно получить простое представление для $\psi(z)$ в виде ряда, если воспользоваться разло-

жением $1/(1-t)$ по степеням t и почленным интегрированием:

$$\psi(z) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z} \right). \quad (20)$$

4. Асимптотические представления. При выводе асимптотики функций $\Gamma(z)$ и $\psi(z)$ будем опираться на асимптотические свойства интеграла Лапласа (см. Дополнение Б)

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt.$$

Для этого предварительно преобразуем интегральное представление (19) для $\psi(z)$ следующим образом:

$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-zt}}{t} dt + \int_0^{\infty} (e^{-t} - e^{-zt}) \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

Отсюда

$$\psi(z) = \psi_0(z) - F(z),$$

где

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt, \quad f(t) = \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} = 1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1},$$

$$\psi_0(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-zt}}{t} dt - \gamma + F(1).$$

Функция $\psi_0(z)$ выражается через элементарные функции. Действительно,

$$\psi'_0(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} dt = \frac{1}{z},$$

откуда $\psi_0(z) = \ln z + C$. Постоянная C будет вычислена в дальнейшем.

Функция $f(t)$ удовлетворяет условиям теоремы из Дополнения Б при $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$. Поэтому при $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$

$$\psi(z) = \ln z + C - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k k!}{z^{k+1}} + O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right),$$

где a_k — коэффициенты разложения функции $f(t)$ в ряд по степеням t . Коэффициенты a_k можно выразить через числа Бернулли B_k , являющиеся коэффициентами разложения в ряд Тейлора функции $t/(e^t - 1)$:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}, \quad |t| < 2\pi.$$

В самом деле,

$$f(t) = 1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{t^{k-1}}{k!},$$

откуда

$$a_0 = 1 + B_1, \quad a_k = B_{k+1}/(k+1)!, \quad k \geq 1.$$

Так как $f(-t) = 1 - f(t)$, то $a_0 = 1/2$, $a_k = 0$ при $k = 2m$ ($m = 1, 2, \dots$).

Таким образом, при $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$

$$\psi(z) = C + \ln z - \frac{1}{2z} - \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k}}{2kz^{2k}} + R_n(z),$$

где $R_n(z) = O(1/z^{2n+2})$.

Так как

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z),$$

то, интегрируя асимптотическое представление для $\psi(z)$, получим $\ln \Gamma(z) = D + (C-1)z +$

$$+ \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z + \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}} + \bar{R}_n(z).$$

Здесь D — некоторая постоянная,

$$\bar{R}_n(z) = - \int_z^{\infty} R_n(\xi) d\xi.$$

В выражении для $\bar{R}_n(z)$ интегрирование производится по любому контуру, уходящему в бесконечность. Выбирая в качестве контура прямую $\xi = zt$ ($1 \leq t < \infty$), легко убедиться в том, что $\bar{R}_n(z) = O(1/z^{2n+1})$.

Для определения постоянных C , D воспользуемся функциональными соотношениями (4), (6) и оценкой для $\ln \Gamma(z)$, являющейся следствием полученного выше асимптотического представления для этой функции:

$$\ln \Gamma(z) = D + (C-1)z + (z-1/2) \ln z + O(1/z).$$

Из соотношения

$$\ln \Gamma(z+1) - \ln \Gamma(z) - \ln z = 0$$

следует, что

$$C-1 + (z+1/2) \ln(1+1/z) = O(1/z).$$

Так как

$$\ln(1+1/z) = 1/z + O(1/z^2),$$

то $C=0$. Аналогичным образом из (6а) находим $D = (\ln 2\pi)/2$.

Подставляя значения постоянных C и D , получаем при $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$ следующие асимптотические представления:

$$\psi(z) = \ln z - \frac{1}{2z} - \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k}}{2kz^{2k}} + O\left(\frac{1}{z^{2n+2}}\right), \quad (21)$$

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}} + O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right). \quad (22)$$

Для чисел Бернулли можно получить рекуррентное соотношение, если воспользоваться представлением

$$t = (e^t - 1) \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} t^{m+k} \frac{B_k}{m!k!}.$$

Положим здесь $m+k=n$ и просуммируем коэффициенты при t^n :

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{(n-k)!k!}.$$

Сравнивая коэффициенты при различных степенях t в левой и правой частях этого равенства, приходим к рекуррентному соотношению, позволяющему последовательно вычислять величины B_k :

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k = 0, \quad n > 1, \quad B_0 = 1, \quad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Асимптотическое представление (22) при $n=1$ дает

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{2\pi z} \left(\frac{z}{e}\right)^z \left[1 + \frac{1}{12z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right].$$

Полагая $z=n$, приходим к формуле Стирлинга

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} (n/e)^n.$$

Эта формула с довольно хорошей точностью годится даже для небольших значений n . Например, для $n=1, 2$ получаем вместо $1!$ и $2!$ соответственно $0,92$ и $1,92$.

5. Примеры. 1. Интегралы, выражающиеся через гамма-функцию:

$$\int_0^{\infty} \exp\{-\alpha t^\beta\} t^{\gamma-1} dt = \frac{\Gamma(p)}{\alpha^\gamma \beta^\gamma}, \quad p = \frac{\gamma}{\beta}, \quad (23)$$

$$\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \beta > 0, \quad \operatorname{Re} \gamma > 0;$$

$$\int_a^b (t-a)^{\alpha-1} (b-t)^{\beta-1} dt = (b-a)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (24)$$

$$\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \beta > 0.$$

Интеграл (23) при $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ вычисляется с помощью

замены $s = \alpha t^\beta$, а полученный результат обобщается затем на более широкую область значений α, β, γ с помощью принципа аналитического продолжения. Интеграл (24) сводится к бета-функции заменой $t = a + (b - a)s$.

2. Некоторые предельные соотношения:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right], \quad (25)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(s+a)}{\Gamma(s) z^a} = 1, \quad |\arg z| \leq \pi - \delta, \quad (26)$$

$$\lim_{s \rightarrow -n} \frac{\Psi(s)}{\Gamma(s)} = (-1)^{n+1} n!. \quad (27)$$

Соотношение (25) получается в результате перехода к пределу при $n \rightarrow \infty$ в формуле

$$\gamma = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \psi(n+1)$$

и использования представления (21) для $\psi(n+1)$. Соотношение (26) следует непосредственно из (22). Соотношение (27) вытекает из того факта, что главный член разложения $\Gamma(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = -n$ имеет вид $\frac{(-1)^n}{n! (z+n)}$.

Б. Аналитические свойства

и асимптотические представления интеграла Лапласа

Интегралами Лапласа называют интегралы вида

$$F(z) = \int_a^b e^{zs(t)} f(t) dt.$$

Для наших целей достаточно ограничиться случаем, когда $s(t) = -t$, $a = 0$, $b = +\infty$, т. е.

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt. \quad (1)$$

Рассмотрим вопрос об аналитическом продолжении интеграла $F(z)$ и выясним поведение функции $F(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$. Для изучения поведения $F(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ удобно получить так называемое *асимптотическое представление* этой функции, т. е. представление вида

$$F(z) = \sum_{h=0}^{n-1} C_h \varphi_h(z) + O(\varphi_n(z)),$$

где функции $\varphi_h(z)$ удовлетворяют условию

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{h+1}(z)}{\varphi_h(z)} = 0.$$

Запись $\psi(z) = O(\varphi_n(z))$ означает, что $|\psi(z)| \leq c|\varphi_n(z)|$ (c — постоянная).

Особенно часто для изучения поведения функций при $|z| \rightarrow \infty$ в качестве $\varphi_k(z)$ используются функции $\varphi_k(z) = 1/z^{\mu_k}$, где μ_k — некоторые постоянные.

1. Асимптотическое представление интеграла (1) можно получить с помощью следующей леммы.

Лемма Ватсона. Пусть функция $f(t)$ удовлетворяет условиям:

1) интеграл $\int_0^c |f(t)| dt$ существует при любом $c > 0$, т. е.

функция $f(t)$ локально абсолютно интегрируема на интервале $(0, \infty)$;

2) при $t \rightarrow 0$ функцию $f(t)$ можно представить в виде

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^{\lambda_k} + O(t^{\lambda_n}),$$

где $-1 < \operatorname{Re} \lambda_0 < \operatorname{Re} \lambda_1 < \dots < \operatorname{Re} \lambda_n$;

3) $f(t) = O(e^{\nu t})$ при $t \rightarrow +\infty$, где $\nu > 0$ — некоторая постоянная.

Тогда функция $F(z)$, определяемая интегралом (1), при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \pi/2 - \varepsilon$ имеет следующее асимптотическое представление:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{\Gamma(\lambda_k + 1)}{z^{\lambda_k + 1}} + O\left(\frac{1}{z^{\lambda_n + 1}}\right). \quad (2)$$

Доказательство. Положим

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^{\lambda_k} + r_n(t).$$

Тогда

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{\lambda_k} dt + R_n(z),$$

где

$$R_n(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} r_n(t) dt.$$

Так как (см. Дополнение А, п. 5)

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} t^{\lambda_k} dt = \frac{\Gamma(\lambda_k + 1)}{z^{\lambda_k + 1}}, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2},$$

то лемма будет доказана, если мы убедимся в том, что

$R_n(z) = O(1/z^{\lambda_n+1})$ при $z \rightarrow \infty$. Имеем

$$R_n(z) = \int_0^{\delta} e^{-zt} r_n(t) dt + \int_{\delta}^{\infty} e^{-zt} r_n(t) dt = R_n^{(1)}(z) + R_n^{(2)}(z).$$

Из условий леммы вытекает, что $r_n(t) = O(t^{\lambda_n})$ при $t \rightarrow 0$. Поэтому существуют такие положительные постоянные M, δ , что при $0 \leq t \leq \delta$ имеет место неравенство $|r_n(t)| \leq M t^{\operatorname{Re} \lambda_n}$. При таком выборе постоянной δ и $\operatorname{Re} z > 0$ имеем

$$\begin{aligned} |R_n^{(1)}(z)| &\leq \int_0^{\delta} |e^{-zt} r_n(t)| dt \leq M \int_0^{\delta} e^{-t \operatorname{Re} z} t^{\operatorname{Re} \lambda_n} dt \leq \\ &\leq M \int_0^{\infty} e^{-t \operatorname{Re} z} t^{\operatorname{Re} \lambda_n} dt = M \frac{\Gamma(\operatorname{Re} \lambda_n + 1)}{(\operatorname{Re} z)^{\operatorname{Re} \lambda_n + 1}}. \end{aligned}$$

Если $|\arg z| \leq \pi/2 - \varepsilon$, то $\operatorname{Re} z \geq |z| \sin \varepsilon$ и, следовательно,

$$R_n^{(1)}(z) = O\left(\frac{1}{|z|^{\operatorname{Re} \lambda_n + 1}}\right) = O\left(\frac{1}{z^{\lambda_n + 1}}\right).$$

Для оценки $R_n^{(2)}(z)$ положим $t = \delta + \tau$:

$$R_n^{(2)}(z) = \int_{\delta}^{\infty} e^{-zt} r_n(t) dt = e^{-\delta z} \int_0^{\infty} e^{-z\tau} r_n(\tau + \delta) d\tau.$$

Интеграл $\int_0^{\infty} e^{-z\tau} r_n(\tau + \delta) d\tau$ равномерно ограничен при $|\arg z| \leq \pi/2 - \varepsilon$, $\operatorname{Re} z \geq \nu + \varepsilon$. Действительно, при таких значениях z

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-z\tau} r_n(\tau + \delta) d\tau \right| \leq \int_0^{\infty} e^{-(\nu + \varepsilon)\tau} |r_n(\tau + \delta)| d\tau.$$

Интеграл, стоящий в правой части полученного неравенства, сходится, так как в силу леммы функция $r_n(t)$ локально абсолютно интегрируема и $r_n(t) = O(e^{\nu t})$ при $t \rightarrow +\infty$. Поэтому

$$R_n^{(2)}(z) = O(e^{-\delta z}), \quad z \rightarrow \infty, \quad |\arg z| \leq \pi/2 - \varepsilon.$$

Учитывая, что $O(e^{-\delta z}) = O(z^{-\varepsilon})$ при $z \rightarrow \infty$ для произвольного положительного ε , получаем требуемую оценку для остатка:

$$R_n(z) = R_n^{(1)}(z) + R_n^{(2)}(z) = O\left(\frac{1}{z^{\lambda_n + 1}}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

З а м е ч а н и е. Лемма Ватсона имеет место и для интеграла вида

$$F(z) = \int_0^a e^{-zt} f(t) dt, \quad a > 0.$$

При этом условие 3) можно опустить.

2. Аналитическое продолжение интеграла Лапласа (1) и асимптотическое представление для аналитического продолжения в интересующих нас случаях можно получить с помощью следующей теоремы.

Т е о р е м а. Пусть функция $f(t)$ является аналитической в секторе $|t| > 0$, $-\theta_2 < \arg t < \theta_1$ ($\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$). Пусть в этом секторе при $t \rightarrow 0$ функцию $f(t)$ можно представить в виде

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^{\lambda_k} + O(t^{\lambda_n}),$$

где $-1 < \operatorname{Re} \lambda_0 < \operatorname{Re} \lambda_1 < \dots < \operatorname{Re} \lambda_n$, а при $t \rightarrow \infty$ в виде $f(t) = O(t^\beta)$, где β — некоторая постоянная. Тогда функция $F(z)$, определяемая интегралом (1) при $z > 0$, может быть аналитически продолжена в секторе $|z| > 0$, $-\pi/2 - \theta_1 < \arg z < \pi/2 + \theta_2$. Функция $F(z)$ при $-\pi/2 - \theta_1 + \varepsilon \leq \arg z \leq \pi/2 + \theta_2 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) имеет следующее асимптотическое представление:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{\Gamma(\lambda_k + 1)}{z^{\lambda_k + 1}} + O\left(\frac{1}{z^{\lambda_n}}\right). \quad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исследуем область аналитичности интеграла (1). Пусть $z = re^{i\varphi}$. По теореме об аналитичности интеграла, зависящего от параметра (см. теорему 2 из § 3), функция $F(z)$ будет аналитической в секторе $|z| > 0$, $|\varphi| < \pi/2$, так как интеграл $F(z)$ равномерно сходится по z в области $|\varphi| \leq \pi/2 - \varepsilon$, $|z| \geq \delta > 0$. Действительно, в этой области

$$|e^{-zt}| = \exp\{-tr \cos \varphi\} \leq \exp\{-t\delta \sin \varepsilon\},$$

и интеграл $\int_0^\infty \exp\{-t\delta \sin \varepsilon\} |f(t)| dt$ сходится в силу условий теоремы.

Для аналитического продолжения функции $F(z)$ в более широкую область удобно перейти в (1) от интегрирования по положительным значениям t к интегрированию по лучу $t = \rho e^{i\theta}$ ($\theta = \text{const}$, $\rho > 0$) и рассмотреть в связи с этим функцию

$$F_\theta(z) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} e^{-zt} f(t) dt = \int_0^\infty \exp\{-(ze^{i\theta})\rho\} f(\rho e^{i\theta}) e^{i\theta} d\rho, \quad (4)$$

$$-\theta_2 < \theta < \theta_1.$$

Исследование области аналитичности интеграла $F_\theta(z)$, аналогичное исследованию интеграла $F(z)$, показывает, что функция $F_\theta(z)$ будет аналитична в области $|\arg(ze^{i\theta})| = |\varphi + \theta| < \pi/2$. Докажем, что $F_\theta(z)$ при $|\theta| < \pi$ является аналитическим продолжением функции $F(z)$. Для доказательства достаточно убедиться в их равенстве на некотором луче $\varphi = \varphi_0$, принадлежащем области аналитичности обеих функций, например при $\varphi_0 = -\theta/2$.

Воспользуемся теоремой Коши, вычисляя интеграл $\int_C e^{-zt} f(t) dt$ по замкнутому контуру, изображенному на рис. 16:

$$\int_C e^{-zt} f(t) dt = 0.$$

На дуге радиуса R при $t = Re^{i\psi}$, $\psi \in [0, \theta]$ и $z = re^{-i\theta/2}$ имеем $f(t) = O(R^\delta)$, $|e^{-zt}| = \exp\{-rR \cos(\psi - \theta/2)\}$.

Так как $|\psi - \theta/2| \leq |\theta/2| < \pi/2$, то $\cos(\psi - \theta/2) \geq \cos(\theta/2) > 0$. В силу полученных оценок интеграл по дуге радиуса R стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$, т. е. при $\varphi = -\theta/2$ имеем $F(z) = F_\theta(z)$. Если в секторе $-\theta_2 < \theta < \theta_1$ возможны значения $|\theta| \geq \pi$, то аналогичным образом можно доказать, что $F_\theta(z)$ будет аналитическим продолжением функции $F_\theta(z)$, если $|\theta - \theta| < \pi$.

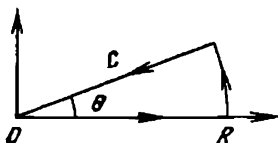


Рис. 16.

Таким образом, совокупность функций $F_\theta(z)$ при всех возможных значениях θ дает аналитическое продолжение функции $F(z)$ на область, являющуюся объединением секторов $|\varphi + \theta| < \pi/2$, $-\theta_2 < \theta < \theta_1$, т. е. на сектор $-\pi/2 - \theta_1 < \varphi < \pi/2 + \theta_2$. Первая часть теоремы доказана.

Для получения асимптотического представления функции $F_\theta(z)$ в секторе $|\varphi + \theta| \leq \pi/2 - \varepsilon$ достаточно воспользоваться леммой Ватсона и формулой (4) для $F_\theta(z)$. Так как в силу условий теоремы $f(\rho e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (\rho e^{i\theta})^{\lambda_k} + O(\rho^{\lambda_n})$ при $\rho \rightarrow 0$ и $f(\rho e^{i\theta}) = O(\rho^\delta)$ при $\rho \rightarrow +\infty$, то по лемме Ватсона

$$\begin{aligned} F_\theta(z) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k (e^{i\theta})^{\lambda_k} e^{i\theta} \Gamma(\lambda_k + 1)}{(ze^{i\theta})^{\lambda_k + 1}} + O\left(\frac{1}{z^{\lambda_n + 1}}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{\Gamma(\lambda_k + 1)}{z^{\lambda_k + 1}} + O\left(\frac{1}{z^{\lambda_n + 1}}\right). \end{aligned}$$

Замечания. 1. Если в окрестности точки $t=0$ функция $f(t)$ представима в виде $f(t) = t^\lambda g(t)$, где $g(t)$ — аналитическая функция, $\operatorname{Re} \lambda > -1$, то в условиях теоремы следует положить $\lambda_k = \lambda + k$; постоянные a_k являются коэффициентами разложения в ряд Тейлора функции $g(t)$: $g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$.

2. Если в условиях теоремы $f(t)$ зависит от параметров, является аналитической функцией каждого из параметров и непрерывна по совокупности переменных в области D изменения параметров при $|t| > 0$, $-\theta_2 < \arg t < \theta_1$, то аналитическое продолжение по переменной z функции $F(z)$ при $z \neq 0$ будет также ана-

литической функцией каждого из параметров в той части области D , где интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-\mu\rho} |f(\rho e^{i\theta})| d\rho$$

равномерно сходится относительно параметров при любом фиксированном значении $\mu > 0$. Действительно, в этом случае интеграл $F_\delta(z)$, дающий аналитическое продолжение функции $F(z)$, равномерно сходится при $|\varphi + \theta| \leq \pi/2 - \varepsilon$, $|z| \geq \delta$, так как в этой области

$$|F_\delta(z)| \leq \int_0^{\infty} e^{-\mu\rho} |f(\rho e^{i\theta})| d\rho, \quad \mu = \delta \sin \varepsilon.$$

Пример. Найдем область, на которую функция

$$F(z, p, q) = \int_0^{\infty} e^{-zt} t^p (1 + at)^q dt,$$

$$z > 0, \quad |\arg a| < \pi, \quad |\arg(1 + at)| < \pi, \quad \operatorname{Re} p > -1,$$

может быть аналитически продолжена по каждой из переменных и получим асимптотическое разложение этой функции при $z \rightarrow \infty$.

В данном случае $f(t) = t^p(1 + at)^q$, функция $g(t) = (1 + at)^q$ имеет особенность (точку ветвления) при $at = -1$. Эта функция будет аналитической в секторе $|\arg(at)| < \pi$, т. е. при $-\pi - \arg a < \arg t < \pi - \arg a$. Поэтому в условиях теоремы следует положить $\theta_1 = \pi - \arg a$, $\theta_2 = \pi + \arg a$, $\lambda_k = p + k$, $\beta = p + q$.

Для того чтобы найти область, на которую функция $F(z, p, q)$ может быть аналитически продолжена по каждой из переменных, найдем область, где интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-\mu\rho} |f(\rho e^{i\theta})| d\rho = \int_0^{\infty} e^{-\mu\rho} |(\rho e^{i\theta})^p (1 + a e^{i\theta} \rho)^q| d\rho,$$

$$|\arg(a e^{i\theta})| < \pi,$$

будет равномерно сходиться относительно переменных p, q при любом фиксированном значении $\mu > 0$ (см. замечание 2). Это будет иметь место, если $\operatorname{Re} p \geq \delta - 1$, $|p| \leq N$, $|q| \leq N$. Действительно, при $t = \rho e^{i\theta}$ ($0 \leq \rho \leq 1$) функция $|f(t)/t^{p-1}|$ будет ограничена, так как она непрерывна в замкнутой области по совокупности переменных, т. е. $|f(t)| \leq c_1 \rho^{\delta-1}$ ($0 < \rho \leq 1$). При $\rho \geq 1$ можно провести аналогичные рассуждения, заменив переменную ρ на $s = 1/\rho$ ($0 \leq s \leq 1$). В результате получим, что при $\rho \geq 1$ функция $|f(t)/t^{p-1}|$ будет ограничена, т. е. $|f(t)| \leq c_2 \rho^{2N}$. Постоянные c_1 и c_2 , как это видно из рассуждений, не зависят от пара-

метров p и q . Так как интегралы

$$\int_0^1 e^{-\mu\rho} \rho^{\delta-1} d\rho, \quad \int_1^\infty e^{-\mu\rho} \rho^{1-N} d\rho$$

сходятся, то интеграл

$$\int_0^\infty e^{-\mu\rho} |f(\rho e^{i\theta})| d\rho$$

сходится равномерно в рассматриваемой области. Поэтому функция $F(z, p, q)$ может быть аналитически продолжена по каждой из переменных в области

$$\operatorname{Re} p \geq -1 + \delta, \quad |p| \leq N, \quad |q| \leq N, \quad z \neq 0, \\ -3\pi/2 + \arg a < \arg z < 3\pi/2 + \arg a.$$

Ввиду произвольности постоянных δ, N указанную область изменения переменных можно заменить на область

$$\operatorname{Re} p > -1, \quad z \neq 0, \quad -3\pi/2 + \arg a < \arg z < 3\pi/2 + \arg a.$$

При $|\arg z| < \pi/2$ аналитическое продолжение функции $F(z, p, q)$ можно получить с помощью исходного интеграла

$$\int_0^\infty e^{-zt} t^p (1+at)^q dt, \quad \operatorname{Re} p > -1.$$

По теореме функция $F(z, p, q)$ в секторе $3\pi/2 + \arg a + \varepsilon \leq \arg z \leq 3\pi/2 + \arg a - \varepsilon$ имеет следующее асимптотическое представление при $z \rightarrow \infty$:

$$F(z, p, q) = \frac{\Gamma(q+1)}{z^{q+1}} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(p+k+1)}{k! \Gamma(q+1-k)} \left(\frac{a}{z}\right)^k + O\left(\frac{1}{z^n}\right) \right].$$

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Гамма-функция $\Gamma(z)$.

Определение:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Аналитическое продолжение. Функция $\Gamma(z)$ может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость, за исключением точек $z = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), в которых $\Gamma(z)$ имеет полюсы первого порядка с вычетами

$$\operatorname{Res} \Gamma(z) = (-1)^n / n!$$

Интегралы, связанные с гамма-функцией:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \operatorname{Re} x > 0, \operatorname{Re} y > 0;$$

$$\int_0^{\infty} \exp\{-\alpha t^\beta\} t^{\gamma-1} dt = \frac{\Gamma(p)}{\alpha^{\gamma/\beta}}, \quad p = \frac{\gamma}{\beta}, \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \gamma > 0.$$

Функциональные соотношения:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

$$2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma(z+1/2) = \sqrt{\pi} \Gamma(2z).$$

Частные значения:

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} (2n)!}{2^{2n} n!}.$$

Асимптотическое представление и его следствия:

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}} + O\left(\frac{1}{z^{2n-1}}\right), \quad |\arg z| \leq \pi - \delta,$$

B_k — числа Бернулли, которые можно определять из рекуррентного соотношения

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k = 0, \quad n > 1, \quad B_0 = 1, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x \left[1 + \frac{1}{12x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right], \quad x > 0,$$

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (\text{формула Стирлинга}),$$

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)} = z^a \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right], \quad |\arg z| \leq \pi - \delta.$$

График функции $y = \Gamma(x)$ приведен в Дополнении А.

2. Логарифмическая производная гамма-функции $\psi(z)$.

Определение:

$$\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z).$$

Функциональные соотношения:

$$\psi(z+1) = 1/z + \psi(z), \quad \psi(z) = \psi(1-z) - \pi \operatorname{ctg} \pi z,$$

$$2 \ln 2 + \psi(z) + \psi(z+1/2) = 2\psi(2z).$$

Частные значения:

$$\psi(1) = \Gamma'(1) = -\gamma, \quad \gamma = 0,57721566..., \quad \psi(1/2) = -\gamma - 2 \ln 2,$$

$$\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad \psi\left(n + \frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2 \ln 2 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}.$$

Интегральные представления и разложение в ряд:

$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1-t^{z-1}}{1-t} dt = -\gamma + \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-zt}}{1-e^{-t}} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

$$\psi(z) = -\gamma + (z-1) \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)(z+n)}, \quad z \neq -n, \quad n=0, 1, \dots$$

Асимптотическое представление:

$$\psi(z) = \ln z - \frac{1}{2z} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{B_{2k}}{2kz^{2k}} + O\left(\frac{1}{z^{2n}}\right),$$

$|\arg z| \leq \pi - \delta$, B_k — числа Бернулли (см. п. 1).

3. Обобщенное уравнение гипергеометрического типа.

Дифференциальное уравнение:

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)} u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)} u = 0,$$

$\sigma(z)$, $\tilde{\sigma}(z)$ — полиномы не выше второй степени, $\tilde{\tau}(z)$ — полином не выше первой степени.

Приведение обобщенного уравнения гипергеометрического типа к уравнению гипергеометрического типа. Заменой $u = \varphi(z)y$ исходное дифференциальное уравнение приводится к виду

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0,$$

где $\tau(z)$ — полином не выше первой степени, λ — постоянная. Функция $\varphi(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi'/\varphi = \pi(z)/\sigma(z),$$

где $\pi(z)$ — полином не выше первой степени:

$$\pi(z) = \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma}.$$

Постоянная k выбирается из условия равенства нулю дискриминанта квадратного трехчлена, стоящего под знаком корня. Полином $\tau(z)$ и постоянная λ определяются из равенства

$$\tau(z) = \tilde{\tau}(z) + 2\pi(z), \quad \lambda = k + \pi'(z).$$

Исключения. 1) Если полином $\sigma(z)$ имеет кратный корень, т. е. $\sigma(z) = (z-a)^2$, то исходное уравнение после замены $z = 1/(z-a)$ приводится к обобщенному уравнению гипергеометрического типа, для которого $\sigma(z) = z$.

2) Приведение исходного уравнения к уравнению гипергеометрического типа указанным выше способом невозможно, если $\sigma(z) = 1$, а $(\tau(z)/2)^2 - \tilde{\sigma}(z)$ — полином первой степени. В этом случае, если положить $\pi(z) = -\tilde{\tau}(z)/2$, исходное уравнение приводится к виду $y'' + (az+b)y = 0$. Это уравнение линейной заменой $z = az + b$ сводится к уравнению Ломмеля (14.4).

4. Уравнение гипергеометрического типа.

Дифференциальное уравнение:

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0,$$

$\sigma(z)$, $\tau(z)$ — полиномы не выше второй и первой степени соответственно, λ — постоянная. Решения этого уравнения называются *функциями гипергеометрического типа*.

Самосопряженный вид:

$$(\sigma y')' + \lambda \rho y = 0,$$

где функция $\rho(z)$ удовлетворяет уравнению

$$[\sigma(z)\rho(z)]' = \tau(z)\rho(z).$$

Линейной заменой независимой переменной уравнения гипергеометрического типа можно, как правило, привести к следующим *каноническим видам*.

1) Гипергеометрическое уравнение:

$$z(1-z)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]y' - \alpha\beta y = 0.$$

2) Вырожденное гипергеометрическое уравнение:

$$zy'' + (\gamma - z)y' - \alpha y = 0.$$

3) Уравнение Эрмита:

$$y'' - 2zy' + 2\nu y = 0.$$

Свойство производных функций гипергеометрического типа $y(z)$. Производные $v_n(z) = y^{(n)}(z)$ являются функциями гипергеометрического типа и удовлетворяют уравнению

$$\sigma(z)v_n'' + \tau_n(z)v_n' + \mu_n v_n = 0,$$

$$\tau_n(z) = \tau(z) + n\sigma'(z), \quad \mu_n = \lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''.$$

Самосопряженный вид уравнения для $v_n(z)$:

$$(\sigma \rho_n v_n')' + \mu_n \rho_n v_n = 0, \quad \rho_n(z) = \sigma^n(z) \rho(z).$$

Интегральные представления для частных решений $y_\nu(z)$:

$$y_\nu(z) = \frac{C_\nu}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^\nu(s) \rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}} ds.$$

Здесь C_ν — нормировочная постоянная, функция $\rho(z)$ удовлетворяет уравнению $[\sigma(z)\rho(z)]' = \tau(z)\rho(z)$, постоянная ν — корень уравнения $\lambda + \nu\tau' + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\sigma'' = 0$, контур C выбирается из условия $\left. \frac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}} \right|_{z_1}^{z_2} = 0$ (z_1, z_2 — концы контура). О различных возможностях выбора контуров C см. § 3.

Интегральные представления для производных частных решений $y_\nu(z)$:

$$y_\nu^{(k)}(z) = \frac{C_\nu^{(k)}}{\sigma^k(z)\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1-k}} ds, \quad C_\nu^{(k)} = C_\nu \prod_{s=0}^{k-1} \left(\tau' + \frac{\nu+s-1}{2} \sigma'' \right).$$

Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования для частных решений $y_\nu(z)$. Между любыми тремя функциями $y_{\nu_i}^{(k_i)}(z)$ существует линейное соотношение

$$\sum_{i=1}^3 A_i(z) y_{\nu_i}^{(k_i)}(z) = 0$$

с полиномиальными коэффициентами $A_i(z)$, если $\nu_i - \nu_j$ — целые числа. О способе вычисления коэффициентов $A_i(z)$ см. § 4 и § 21, п. 4.

5. Полиномы гипергеометрического типа. Полиномы гипергеометрического типа $y_n(z)$ — полиномиальные решения уравнения гипергеометрического типа

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0,$$

соответствующие

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'', \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Формула Родрига для полиномов гипергеометрического типа:

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)} \frac{d^n}{dz^n} [\sigma^n(z) \rho(z)]$$

(B_n — нормировочная постоянная).

Формула Родрига для производных от полиномов гипергеометрического типа $y_n(z)$:

$$y_n^{(m)}(z) = \frac{A_{mn}B_n}{\sigma^m(z)\rho(z)} \cdot \frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}} [\sigma^n(z) \rho(z)],$$

$$A_{mn} = \frac{n!}{(n-m)!} \prod_{k=0}^{m-1} \left(\tau' + \frac{n+k-1}{2} \sigma'' \right), \quad A_{0n} = 1.$$

Линейной заменой независимой переменной выражения для полиномов $y_n(z)$, функций $\sigma(z)$ и $\rho(z)$ можно привести к следующим каноническим видам.

1) Полиномы Якоби:

$$y_n(z) = P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-z)^{-\alpha} (1+z)^{-\beta} \frac{d^n}{dz^n} [(1-z)^{n+\alpha} (1+z)^{n+\beta}],$$

$$\sigma(z) = 1-z^2, \quad \rho(z) = (1-z)^\alpha (1+z)^\beta.$$

Важными частными случаями полиномов Якоби являются:

а) полиномы Лежандра: $P_n(z) = P_n^{(0,0)}(z)$;

б) полиномы Чебышева первого и второго рода:

$$T_n(z) = \frac{n!}{(1/2)_n} P_n^{(-1/2, -1/2)}(z) = \cos(n \arccos z),$$

$$U_n(z) = \frac{(n+1)!}{(3/2)_n} P_n^{(1/2, 1/2)}(z) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi}, \quad \varphi = \arccos z.$$

в) полиномы Гегенбауэра:

$$C_n^\lambda(z) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda + 1/2)_n} P_n^{(\lambda-1/2, \lambda-1/2)}(z).$$

Мы использовали обозначение $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)$, $(\alpha)_0 = 1$.

2) Полиномы Лагерра:

$$y_n(z) = L_n^\alpha(z) = \frac{1}{n!} e^z z^{-\alpha} \frac{d^n}{dz^n} (z^{n+\alpha} e^{-z}), \quad \sigma(z) = z, \quad \rho(z) = z^\alpha e^{-z}.$$

3) Полиномы Эрмита:

$$y_n(z) = H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z^2}), \quad \sigma(z) = 1, \quad \rho(z) = e^{-z^2}.$$

Формулы дифференцирования для полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} P_n^{(\alpha, \beta)}(z) &= \frac{1}{2} (n + \alpha + \beta + 1) P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(z), \\ \frac{d}{dz} L_n^\alpha(z) &= -L_{n-1}^{\alpha+1}(z), \quad \frac{d}{dz} H_n(z) = 2n H_{n-1}(z). \end{aligned}$$

Если полином $\sigma(z)$ имеет кратные корни, т. е. $\sigma(z) = (z-a)^2$, то соответствующие полиномы $y_n(z)$ можно выразить через полиномы Лагерра:

$$y_n(z) = C_n (z-a)^n L_n^\alpha \left(\frac{\tau(a)}{z-a} \right), \quad \alpha = -\tau' - 2n + 1$$

(C_n — нормировочная постоянная).

6. Некоторые общие свойства ортогональных полиномов. Полиномы $p_n(x)$ ортогональны на интервале (a, b) с весом $\rho(x)$, если

$$\int_a^b p_m(x) p_n(x) \rho(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

Явное выражение для полинома $p_n(x)$, ортогонального с весом $\rho(x)$ на интервале (a, b) :

$$p_n(x) = A_n \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_n \\ C_1 & C_2 & C_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n-1} & C_n & C_{2n-1} \\ 1 & x & x^n \end{vmatrix},$$

$C_n = \int_a^b x^n \rho(x) dx$ — момент весовой функции, A_n — нормировочная постоянная.

Рекуррентное соотношение:

$$x p_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}} p_{n+1}(x) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \right) p_n(x) + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2} p_{n-1}(x).$$

Здесь

$$d_n^2 = \int_a^b p_n^2(x) \rho(x) dx$$

есть квадрат нормы; a_n, b_n — коэффициенты при старших степенях полинома

$$p_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots, \quad a_n \neq 0.$$

Формула Дарбу — Кристоффеля:

$$\sum_{k=0}^n \frac{p_k(x) p_k(y)}{d_k^2} = \frac{1}{d_n^2} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{p_{n+1}(x) p_n(y) - p_n(x) p_{n+1}(y)}{x - y}.$$

7. Классические ортогональные полиномы. Классическими ортогональными полиномами называются полиномы гипергеометрического типа $y_n(x)$, для которых функция $\rho(x)$ удовлетворяет условию

$$\sigma(x) \rho(x) x^k \big|_{a=b} = 0$$

(a, b — некоторые вещественные числа; $k = 0, 1, \dots$), причем $\rho(x) > 0$ на интервале (a, b) . Эти полиномы ортогональны с весом $\rho(x)$ на интервале (a, b) , т. е.

$$\int_a^b y_m(x) y_n(x) \rho(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

Классические ортогональные полиномы линейной заменой переменных приводятся к следующим каноническим видам:

1) полиномы Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ при $\alpha > -1, \beta > -1$;

2) полиномы Лагерра $L_n^\alpha(x)$ при $\alpha > -1$;

3) полиномы Эрмита $H_n(x)$.

Основные характеристики этих полиномов содержатся в табл. 1, 2 (см. §§ 5, 6).

Асимптотические представления при $n \rightarrow \infty$:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) = \frac{\cos \{ [n + (\alpha + \beta + 1)/2] \theta - (2\alpha + 1) \pi/4 \}}{\sqrt{\pi n} (\sin(\theta/2))^{\alpha+1/2} (\cos(\theta/2))^{\beta+1/2}} + O(n^{-3/2}),$$

$$0 < \delta \leq \theta \leq \pi - \delta,$$

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{x/2} x^{-\alpha/2-1/4} n^{\alpha/2-1/4} \cos \left[2 \sqrt{n x} - (2\alpha + 1) \frac{\pi}{4} \right] + O(n^{\alpha/2-3/4}),$$

$$0 < \delta \leq x \leq N < \infty,$$

$$H_n(x) = \sqrt{2} \left(\frac{2n}{e} \right)^{n/2} e^{x^2/2} \left[\cos \left(\sqrt{2n} x - \frac{\pi n}{2} \right) + O(n^{-1/4}) \right],$$

$$|x| \leq N < \infty.$$

Производящие функции:

$$(1-t)^{-\alpha-1} \exp \left\{ -\frac{xt}{1-t} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^n, \quad \exp \{ 2xt - t^2 \} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

Полиномы Лежандра. Полиномы Лежандра $P_n(x)$ ортогональны с весом $\rho(x) = 1$ на интервале $(-1, 1)$. Они являются частным случаем полиномов Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ при $\alpha = \beta = 0$ и полиномов Гегенбауэра $C_n^\nu(x)$ при $\nu = 1/2$.

Дифференциальное уравнение:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad y = P_n(x).$$

Формула Родрига:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^n.$$

Интегральное представление:

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x + i\sqrt{1-x^2} \sin \varphi)^n d\varphi.$$

Производящая функция:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n.$$

Частные значения:

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad P_{2n+1}(0) = 0,$$

$$P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}.$$

Квадрат нормы:

$$d_n^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

Рекуррентные соотношения:

$$(1 - x^2) P'_n(x) = -(n+1) [P_{n+1}(x) - xP_n(x)],$$

$$P_n(x) = \frac{1}{n+1} [P'_{n+1}(x) - xP'_n(x)] = \frac{1}{2n+1} [P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)],$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$$

Асимптотическое представление:

$$P_n(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \frac{\cos [(n+1/2)\theta - \pi/4]}{\sqrt{\sin \theta}} + O(n^{-3/2}).$$

Графики полиномов Лежандра $P_n(x)$ для некоторых значений n приведены на рис. 1 (см. § 7).

8. Сферические функции:

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + l(l+1)u = 0.$$

Новые выражения:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \Theta_{lm}(\cos \theta), \quad -l \leq m \leq l,$$

$$\begin{aligned} \Theta_{lm}(x) &= \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (1-x^2)^l = \\ &= \frac{(-1)^{l-m}}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} (1-x^2)^{-m/2} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (1-x^2)^l, \end{aligned}$$

$$\Theta_{l,-m}(x) = (-1)^m \Theta_{lm}(x), \quad Y_{lm}^*(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{l,-m}(\theta, \varphi).$$

Свойство ортогональности:

$$\int Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$

Рекуррентное соотношение:

$$\cos \theta Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{4(l+1)^2 - 1}} Y_{l+1,m}(\theta, \varphi) + \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{4l^2 - 1}} Y_{l-1,m}(\theta, \varphi).$$

Формулы дифференцирования:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{lm}(\theta, \varphi) = im Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

$$e^{\pm i\varphi} \left(\mp \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} + m \operatorname{ctg} \theta Y_{lm} \right) = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} Y_{l,m \pm 1}$$

(при $m = \pm(l+1)$ следует полагать $Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0$).

Разложение произвольного однородного полинома степени l по сферическим функциям:

$$u_l(x, y, z) = r^l \sum_{m,n} C_{mn} Y_{l-2n,m}(\theta, \varphi).$$

Разложение произвольного однородного гармонического полинома степени l по сферическим функциям:

$$u_l(x, y, z) = r^l \sum_{m=-l}^l C_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Теорема сложения:

$$P_l(\cos \omega) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1) Y_{lm}^*(\theta_2, \varphi_2)$$

(ω — угол между векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, направления которых характеризуются углами θ_1, φ_1 и θ_2, φ_2),

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \omega) = \\ &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2l+1} \cdot \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1) Y_{lm}^*(\theta_2, \varphi_2) \right], \\ r_{<} &= \min(r_1, r_2), \quad r_{>} = \max(r_1, r_2). \end{aligned}$$

Обобщенные сферические функции. При вращении системы координат, определяемом углами Эйлера α, β, γ , сферические функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ пре-

образуются следующим образом:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m'=-l}^l D_{mm'}^l(\alpha, \beta, \gamma) Y_{lm'}(\theta', \varphi').$$

Коэффициенты $D_{mm'}^l(\alpha, \beta, \gamma)$ называются *обобщенными сферическими функциями порядка l* .

Явное выражение для функций $D_{mm'}^l(\alpha, \beta, \gamma)$:

$$D_{mm'}^l(\alpha, \beta, \gamma) = \exp\{i(m\alpha + m'\gamma)\} d_{mm'}^l(\beta),$$

$$d_{mm'}^l(\beta) = \frac{1}{2^m} \sqrt{\frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+m')!(l-m')!}} \times \\ \times (1-x)^{(m-m')/2} (1+x)^{(m+m')/2} P_{l-m}^{(m-m', m+m')}(x),$$

$P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ — полином Якоби, $x = \cos \beta$.

Связь обобщенных сферических функций со сферическими функциями:

$$D_{m0}^l(\alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\beta, \alpha),$$

$$D_{0m}^l(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^m \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\beta, \gamma),$$

$$D_{00}^l(\alpha, \beta, \gamma) = P_l(\cos \beta).$$

9. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. Классическими ортогональными полиномами дискретной переменной называются полиномы $y_n(x)$, удовлетворяющие разностному уравнению

$$\sigma(x)\Delta y + \tau(x)\Delta y + \lambda y = 0,$$

для которых функция $\rho(x)$, являющаяся решением разностного уравнения

$$\Delta[\sigma(x)\rho(x)] = \tau(x)\rho(x),$$

удовлетворяет условию

$$\sigma(x)\rho(x)x^k|_{x=a, b} = 0$$

(a, b — некоторые вещественные числа; если $b \neq \infty$, то $b-a$ — целое число; $k = 0, 1, \dots$), причем $\rho(x) > 0$ на интервале (a, b) . Здесь

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \quad \nabla f(x) = f(x) - f(x-1),$$

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2} \sigma''.$$

Эти полиномы ортогональны с весом $\rho(x)$ на отрезке $[a, b]$ в следующем смысле:

$$\sum_i y_m(x_i) y_n(x_i) \rho(x_i) = 0, \quad m \neq n.$$

Суммирование производится по значениям i , для которых $a \leq x_i \leq b-1$.
Формула Родрига:

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \Delta^n \left[\rho(x) \prod_{k=0}^{n-1} \sigma(x-k) \right].$$

Для классических ортогональных полиномов дискретной переменной остаются справедливыми все свойства полиномов $p_n(x)$, ортогональных на интервале (a, b) с весом $\rho(x)$, если в соответствующих формулах интегри-

рование на интервале (a, b) заменить суммированием по дискретным значениям независимой переменной.

Основные характеристики классических ортогональных полиномов дискретной переменной — полиномов Хаана $h_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, Чебышева $t_n(x)$, Мейкснера $m_n^{(\gamma, \mu)}(x)$, Кравчука $k_n^{(p)}(x)$, Шарлье $c_n^{(\mu)}(x)$ — содержатся в табл. 3а — 3в (см. § 12).

10. Некоторые специальные функции, родственные функциям второго рода $Q_0(z)$ для классических ортогональных полиномов.

а) *Неполная гамма-функция:*

$$\Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt.$$

После замены t на $x(1+s)$ интеграл для $\Gamma(a, x)$ приводится к интегральному представлению для вырожденной гипергеометрической функции второго рода $G(\alpha, \gamma, x)$:

$$\Gamma(a, x) = e^{-x} x^a G(1, 1+a, x).$$

Неполная бета-функция:

$$B_x(p, q) = \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt.$$

После замены t на xs интеграл для $B_x(p, q)$ приводится к интегральному представлению для гипергеометрической функции $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$:

$$B_x(p, q) = \frac{1}{x^p} {}_2F_1(p, 1-q, 1+p, x).$$

б) *Интегральная экспонента:*

$$E_m(z) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-zs}}{s^m} ds, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Рекуррентное соотношение и формула дифференцирования:

$$E_m(z) = \frac{1}{m-1} [e^{-z} - z E_{m-1}(z)], \quad E'_m(z) = -E_{m-1}(z).$$

Разложение в ряд функции $E_1(z)$:

$$E_1(z) = -\gamma - \ln z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{z^k}{k!}$$

(γ — постоянная Эйлера). Асимптотическое представление:

$$E_m(z) = \frac{e^{-z}}{z} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (m)_k}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right) \right],$$

$$(m)_k = m(m+1) \dots (m+k-1), \quad (m)_0 = 1.$$

Связь функции $E_1(z)$ с интегральной показательной функцией $Ei(z)$:

$$E_1(z) = -Ei(-z),$$

в) *Интегральные синус и косинус:*

$$Si(z) = \int_0^z \frac{\sin s}{s} ds, \quad Ci(z) = \int_{\infty}^z \frac{\cos s}{s} ds.$$

Разложения в степенные ряды:

$$\operatorname{Si}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!},$$

$$\operatorname{Ci}(z) = \gamma + \ln z - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^{2k}}{(2k)(2k)!}$$

(γ — постоянная Эйлера). Асимптотические представления:

$$\operatorname{Si}(z) = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos z}{z} P(z) - \frac{\sin z}{z} Q(z),$$

$$\operatorname{Ci}(z) = \frac{\sin z}{z} P(z) - \frac{\cos z}{z} Q(z),$$

где

$$P(z) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2k)!}{z^{2k}} + O(z^{-2n-2}),$$

$$Q(z) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2k+1)!}{z^{2k+1}} + O(z^{-2n-3}).$$

г) *Интеграл вероятности:*

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2} ds.$$

Разложение в степенной ряд:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{k! (2k+1)}.$$

Асимптотическое представление:

$$\Phi(z) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-z^2}}{z} \left[1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{(2z^2)^k} + O(z^{-2n-2}) \right],$$

$$|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta.$$

д) *Интегралы Френеля:*

$$S(z) = \int_0^z \sin \frac{\pi s^2}{2} ds, \quad C(z) = \int_0^z \cos \frac{\pi s^2}{2} ds.$$

Связь с интегралом вероятности:

$$C(z) - iS(z) = \int_0^z \exp \left\{ -i \frac{\pi t^2}{2} \right\} dt = \frac{1}{\sqrt{2i}} \Phi \left(\sqrt{i \frac{\pi}{2}} z \right).$$

Полученная связь позволяет получить асимптотическое поведение и разложение в ряды интегралов Френеля.

11. Цилиндрические функции.

а) Функции Бесселя.

Уравнение Бесселя:

$$z^2 u'' + zu' + (z^2 - \nu^2)u = 0,$$

$u = Z_\nu(z)$ — цилиндрическая функция порядка ν .

Уравнение Ломмеля:

$$\nu'' + \frac{1-2\alpha}{z}\nu' + \left[(\beta\gamma z^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2 \gamma^2}{z^2} \right] \nu = 0, \quad \nu(z) = z^\alpha Z_\nu(\beta z^\gamma).$$

Интегральные представления Пуассона для функций Бесселя первого рода $J_\nu(z)$ и функций Ханкеля $H_\nu^{(1,2)}(z)$ при $\operatorname{Re} \nu > -1/2$:

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} \cos zt \, dt,$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{\exp\{i(z - \pi\nu/2 - \pi/4)\}}{\Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^\infty e^{-it} t^{\nu-1/2} \left(1 + \frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2} dt,$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{\exp\{-i(z - \pi\nu/2 - \pi/4)\}}{\Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^\infty e^{-it} t^{\nu-1/2} \left(1 - \frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2} dt.$$

Интегральные представления Зоммерфельда:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_1} \exp\{iz \sin \varphi - i\nu\varphi\} d\varphi,$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{C_+} \exp\{iz \sin \varphi - i\nu\varphi\} d\varphi,$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{C_-} \exp\{iz \sin \varphi - i\nu\varphi\} d\varphi$$

(контуры C_1 , C_+ , C_- изображены на рис. 7, 8, см. § 16),

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\{iz \sin \varphi - in\varphi\} d\varphi, \quad e^{iz \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\varphi}.$$

Асимптотические представления:

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\cos\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z}\right) \sin z + O\left(\frac{1}{z}\right) \cos z \right],$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left\{i\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right],$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left\{-i\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

Связь между различными цилиндрическими функциями:

$$\begin{aligned} H_{-\nu}^{(1)}(z) &= e^{i\pi\nu} H_{\nu}^{(1)}(z), \quad H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-i\pi\nu} H_{\nu}^{(2)}(z), \\ J_{\nu}(z) &= \frac{1}{2} [H_{\nu}^{(1)}(z) + H_{\nu}^{(2)}(z)], \quad Y_{\nu}(z) = \frac{1}{2i} [H_{\nu}^{(1)}(z) - H_{\nu}^{(2)}(z)], \\ H_{\nu}^{(1)}(z) &= \frac{J_{-\nu}(z) - e^{-i\pi\nu} J_{\nu}(z)}{i \sin \pi\nu}, \quad H_{\nu}^{(2)}(z) = \frac{e^{i\pi\nu} J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z)}{i \sin \pi\nu}, \\ Y_{\nu}(z) &= \frac{\cos \pi\nu J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi\nu}, \quad J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z). \end{aligned}$$

Разложения в ряды:

$$\begin{aligned} J_{\nu}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}, \\ H_n^{(1,2)}(z) &= J_n(z) \pm \frac{i}{\pi} \left\{ 2J_n(z) \ln \frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k! (n+k)!} [\psi(n+k+1) + \psi(k+1)] \right\}, \\ Y_n(z) &= \frac{1}{\pi} \left\{ 2J_n(z) \ln \frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k! (n+k)!} [\psi(n+k+1) + \psi(k+1)] \right\} \end{aligned}$$

(при $n=0$ первую из сумм следует полагать равной нулю, $\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции).

Графики функций $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ для некоторых значений n изображены на рис. 9, 10 (см. § 17).

Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования:

$$\begin{aligned} Z_{\nu-1}(z) + Z_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z} Z_{\nu}(z), \\ Z_{\nu-1}(z) - Z_{\nu+1}(z) &= 2Z'_{\nu}(z), \\ \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n [z^{\nu} Z_{\nu}(z)] &= z^{\nu-n} Z_{\nu-n}(z), \\ \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n [z^{-\nu} Z_{\nu}(z)] &= z^{-(\nu+n)} Z_{\nu+n}(z) \end{aligned}$$

($Z_{\nu}(z)$ — любая из функций $J_{\nu}(z)$, $Y_{\nu}(z)$, $H_{\nu}^{(1,2)}(z)$).

Функции Бесселя полуцелого порядка:

$$\begin{aligned} J_{1/2}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \quad Y_{1/2}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z, \\ H_{1/2}^{(1,2)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{\pm i(z-\pi/2)}, \end{aligned}$$

$$J_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} z^n \left(-\frac{1}{z} \cdot \frac{d}{dz}\right)^n \cos z, \quad n = 0, 1,$$

$$H_{n-1/2}^{(1,2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} z^n \left(-\frac{1}{z} \cdot \frac{d}{dz}\right)^n e^{\pm iz}, \quad n = 0, 1,$$

$$Y_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} z^n \left(-\frac{1}{z} \cdot \frac{d}{dz}\right)^n \sin z, \quad n = 0, 1,$$

Интеграл Фурье — Бесселя:

$$f(x) = \int_0^\infty k F(k) J_\nu(kx) dk, \quad F(k) = \int_0^\infty x f(x) J_\nu(kx) dx.$$

Теорема сложения Графа:

$$Z_\nu(kR) e^{i\nu\psi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr) Z_{\nu+n}(k\rho) e^{in\theta}, \quad r < \rho.$$

Теорема сложения Гегенбауэра:

$$\frac{Z_\nu(kR)}{(kR)^\nu} = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} (\nu+n) \frac{J_{\nu+n}(kr)}{(kr)^\nu} \frac{Z_{\nu+n}(k\rho)}{(k\rho)^\nu} C_n^\nu(\mu), \quad r < \rho.$$

Здесь r, ρ, R — стороны произвольного треугольника, ψ — угол, лежащий между сторонами R и r , $\mu = \cos \theta$, θ — угол между сторонами r и ρ , k — произвольное число, $C_n^\nu(\mu)$ — полином Гегенбауэра, $Z_\nu(z)$ — любая из функций $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $H_\nu^{(1,2)}(z)$, $r < \rho$.

Разложение сферической волны по полиномам Лежандра (см. теорему сложения Гегенбауэра):

$$\frac{e^{ikR}}{R} = i\pi \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{H_{n+1/2}^{(1)}(k\rho)}{\sqrt{\rho}} P_n(\mu).$$

Разложение плоской волны по полиномам Лежандра:

$$e^{ikr} = \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \left(n + \frac{1}{2}\right) J_{n+1/2}(kr) P_n(\mu).$$

(k — волновой вектор, $\mu = \cos \theta$, θ — угол между векторами k и r).

б) Модифицированные функции Бесселя.

Дифференциальное уравнение:

$$z^2 u'' + zu' - (z^2 + \nu^2)u = 0, \quad u(z) = Z_\nu(iz).$$

Линейно независимыми решениями этого дифференциального уравнения при $z > 0$ являются функции

$$I_\nu(z) = \exp\left\{-i \frac{\pi\nu}{2}\right\} J_\nu(iz), \quad K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \exp\left\{i \frac{\pi(\nu+1)}{2}\right\} H_\nu^{(1)}(iz).$$

Интегральные представления Пуассона ($\operatorname{Re} \nu > -1/2$):

$$I_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1/2)} \int_{-1}^1 (1-s^2)^{\nu-1/2} \operatorname{ch} zs \, ds,$$

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \frac{1}{\Gamma(\nu+1/2)} \int_0^\infty e^{-s} s^{\nu-1/2} \left(1 + \frac{s}{2z}\right)^{\nu-1/2} ds.$$

Интегральные представления Зоммерфельда для $K_\nu(z)$:

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-z \operatorname{ch} \psi + \nu \psi\} d\psi = \int_0^{\infty} \exp\{-z \operatorname{ch} \psi\} \operatorname{ch} \nu \psi d\psi, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^{\infty} \exp\left\{-t - \frac{z^2}{4t}\right\} t^{-\nu-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Асимптотическое поведение при $z \rightarrow +\infty$:

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right], \quad K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

Связь между функциями $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ с различными значениями ν

$$I_{-n}(z) = I_n(z), \quad K_{-\nu}(z) = K_\nu(z), \quad K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \pi \nu}.$$

Разложения в ряды:

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(k+\nu+1)},$$

$$K_n(z) = (-1)^{n+1} I_n(z) \ln \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} + \\ + \frac{1}{2} (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+n}}{k! (k+n)!} [\psi(n+k+1) + \psi(k+1)]$$

(при $n=0$ первую из сумм следует полагать равной нулю).

Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования:

$$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} I_\nu(z),$$

$$I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) = 2I'_\nu(z), \quad I'_0(z) = I_1(z).$$

$$K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z} K_\nu(z),$$

$$K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) = -2K'_\nu(z), \quad K'_0(z) = -K_1(z).$$

Функции $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ полуцелого порядка:

$$I_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} z^n \left(\frac{1}{z} \cdot \frac{d}{dz}\right)^n \operatorname{ch} z, \quad n = 0, 1,$$

$$K_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} z^n \left(-\frac{1}{z} \cdot \frac{d}{dz}\right)^n e^{-z}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Графики функций $I_n(x)$ и $K_n(x)$ для некоторых значений n изображены на рис. 11, 12 (см. § 17).

12. Гипергеометрические функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$.

Дифференциальное уравнение:

$$z(1-z)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]y' - \alpha\beta y = 0.$$

Частные решения:

$$a) y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, z),$$

$$y_2 = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z),$$

$$\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$b) y_1 = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - z),$$

$$y_2 = (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - z);$$

$$в) y_1 = z^{-\alpha} F(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, 1/z),$$

$$y_2 = z^{-\beta} F(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, 1/z).$$

Интегральное представление:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} (1-zt)^{-\beta} dt,$$

$$\operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \alpha > 0.$$

Разложение в ряд:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1,$$

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1) \dots (a+n-1).$$

Формула дифференцирования:

$$\frac{dF(\alpha, \beta, \gamma, z)}{dz} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, z).$$

Рекуррентные соотношения. Любые три гипергеометрические функции $F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, z)$, $F(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, z)$ и $F(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, z)$ в случае, когда разности $\alpha_i - \alpha_k$, $\beta_i - \beta_k$, $\gamma_i - \gamma_k$ являются целыми числами, связаны между собой линейными соотношениями, коэффициенты которых являются полиномами переменной z (о методе вывода рекуррентных соотношений см. § 20).

Функциональные соотношения:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = F(\beta, \alpha, \gamma, z),$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, z),$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-z) +$$

$$+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-z),$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, \frac{1}{z}\right) +$$

$$+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} (-z)^{-\beta} F\left(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, \frac{1}{z}\right),$$

$$|\arg(-z)| < \pi.$$

Из последнего функционального соотношения и разложения гипергеометрических функций от аргумента $1/z$ в ряд вытекает *асимптотическое представление* для функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ при $z \rightarrow \infty$.

Комбинируя последние три функциональных соотношения, можно получить еще целый ряд других функциональных соотношений:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{-\alpha} \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha) \Gamma(\beta)} F\left(\alpha, \gamma-\beta, 1+\alpha-\beta, \frac{1}{1-z}\right) + \\ + (1-z)^{-\beta} \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta) \Gamma(\alpha)} F\left(\gamma-\alpha, \beta, 1-\alpha+\beta, \frac{1}{1-z}\right), \\ |\arg(-z)| < \pi, \quad |\arg(1-z)| < \pi,$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \\ = z^{-\alpha} \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha) \Gamma(\gamma-\beta)} F\left(\alpha, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha+\beta-\gamma, \frac{z-1}{z}\right) + \\ + z^{\alpha-\gamma} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} F\left(\gamma-\alpha, 1-\alpha, 1+\gamma-\alpha-\beta, \frac{z-1}{z}\right), \\ |\arg z| < \pi, \quad |\arg(1-z)| < \pi,$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{z}{z-1}\right), \quad |\arg(1-z)| < \pi;$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{-\beta} F\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma, \frac{z}{z-1}\right), \quad |\arg(1-z)| < \pi.$$

Выражение различных функций через гипергеометрическую функцию

$$F(\alpha, 0, \gamma, z) = 1, \quad F(\alpha, \beta, \beta, z) = (1-z)^{-\alpha},$$

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n! \Gamma(\alpha+1)} F\left(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1, \frac{1-z}{2}\right) = \\ = \frac{(-1)^n \Gamma(n+\beta+1)}{n! \Gamma(\beta+1)} F\left(-n, n+\alpha+\beta+1, \beta+1, \frac{1+z}{2}\right),$$

$$P_n(z) = F\left(-n, n+1, 1, \frac{1-z}{2}\right) = (-1)^n F\left(-n, n+1, 1, \frac{1+z}{2}\right),$$

$$K(z) = \int_0^{\pi/2} (1-z^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z^2\right),$$

$$E(z) = \int_0^{\pi/2} (1-z^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, z^2\right).$$

13. Вырожденные гипергеометрические функции $F(\alpha, \gamma, z)$ и $G(\alpha, \gamma, z)$. Дифференциальное уравнение:

$$zy'' + (\gamma - z)y' - \alpha y = 0.$$

Частные решения:

а) $y_1 = F(\alpha, \gamma, z)$, $y_2 = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)$;

б) $y_1 = G(\alpha, \gamma, z)$, $y_2 = e^z G(\gamma - \alpha, \gamma, -z)$.

Интегральные представления:

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} e^{zt} dt, \quad \operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \alpha > 0,$$

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{z^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1} dt, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0,$$

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-zs} s^{\alpha-1} (1+s)^{\gamma-\alpha-1} ds, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0.$$

Разложение в ряд:

$$F(\alpha, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

Формулы дифференцирования:

$$\frac{d}{dz} F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\alpha}{\gamma} F(\alpha+1, \gamma+1, z),$$

$$\frac{d}{dz} G(\alpha, \gamma, z) = -\alpha G(\alpha+1, \gamma+1, z),$$

$$\frac{d}{dz} [z^{\alpha} G(\alpha, \gamma, z)] = -\frac{\gamma - \alpha - 1}{z^2} [z^{\alpha} G(\alpha, \gamma-1, z)].$$

Рекуррентные соотношения. Любые три вырожденные гипергеометрические функции $F(\alpha_1, \gamma_1, z)$, $F(\alpha_2, \gamma_2, z)$ и $F(\alpha_3, \gamma_3, z)$ в случае, когда разности $\alpha_i - \alpha_k$, $\gamma_i - \gamma_k$ являются целыми числами, связаны между собой линейными соотношениями, коэффициенты которых являются полиномами относительно переменной z . Аналогичные утверждения имеют место и для функции $G(\alpha, \gamma, z)$ (о методе вывода рекуррентных соотношений см. § 20).

Функциональные соотношения:

$$F(\alpha, \gamma, z) = e^z F(\gamma - \alpha, \gamma, -z), \quad G(\alpha, \gamma, z) = z^{1-\gamma} G(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z),$$

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} F(\alpha, \gamma, z) + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z),$$

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} e^{\pm i\pi\alpha} G(\alpha, \gamma, z) + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^{\pm i\pi(\alpha-\gamma)} G(\gamma - \alpha, \gamma, -z)$$

(знак плюс соответствует $\operatorname{Im} z > 0$).

Об особых случаях функциональных соотношений см. § 21, п. 3.

Асимптотические представления при $z \rightarrow \infty$:

$$G(\alpha, \gamma, z) = z^{-\alpha} [1 + O(1/z)],$$

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right] + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right],$$

$$|\arg z| \leq \pi, \quad |\arg(-z)| \leq \pi.$$

Выражение различных функций через вырожденную гипергеометрическую функцию:

$$F(0, \gamma, z) = G(0, \gamma, z) = 1, \quad F(\alpha, \alpha, z) = e^z, \quad G(\alpha, \alpha+1, z) = z^{-\alpha},$$

$$L_n^{\alpha}(z) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n! \Gamma(\alpha+1)} F(-n, 1+\alpha, z),$$

$$I_{\nu}(z) = \frac{(z/2)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} e^{-z} F\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2z\right),$$

$$K_{\nu}(z) = \sqrt{\pi} (2z)^{\nu} e^{-z} G\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2z\right).$$

14. Функции Эрмита $H_\nu(z)$.

Дифференциальное уравнение:

$$y'' - 2zy' + 2\nu y = 0.$$

Частные решения:

а) $y_1 = H_\nu(z), \quad y_2 = H_\nu(-z);$

б) $y_1 = e^{z^2} H_{-\nu-1}(iz), \quad y_2 = e^{z^2} H_{-\nu-1}(-iz).$

Связь с вырожденными гипергеометрическими функциями:

$$H_\nu(z) = {}_2F_0(-\nu/2, 1/2, z^2), \quad |\arg z| \leq \pi/2,$$

$$H_\nu(z) = \frac{{}_2F_0(1/2)}{\Gamma((1-\nu)/2)} F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) + \frac{{}_2F_0(-1/2)}{\Gamma(-\nu/2)} z F\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right).$$

Интегральное представление:

$$H_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^\infty \exp\{-t^2 - 2zt\} t^{-\nu-1} dt.$$

Разложение в ряд:

$$H_\nu(z) = \frac{1}{2\Gamma(-\nu)} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \Gamma\left(\frac{n-\nu}{2}\right) \frac{z^n}{n!}.$$

Формула дифференцирования:

$$H'_\nu(z) = 2\nu H_{\nu-1}(z).$$

Рекуррентное соотношение:

$$H_\nu(z) - 2zH_{\nu-1}(z) + 2(\nu-1)H_{\nu-2}(z) = 0.$$

Функциональные соотношения:

$$H_\nu(z) = \frac{{}_2F_0(\nu+1)}{\sqrt{\pi}} e^{z^2} \left[\exp\left\{i\frac{\pi\nu}{2}\right\} H_{-\nu-1}(iz) + \exp\left\{-i\frac{\pi\nu}{2}\right\} H_{-\nu-1}(-iz) \right],$$

$$H_\nu(z) = e^{i\pi\nu} H_\nu(-z) + \frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)} \exp\left\{z^2 + i\frac{\pi(\nu+1)}{2}\right\} H_{-\nu-1}(-iz),$$

$$H_\nu(z) = e^{-i\pi\nu} H_\nu(-z) + \frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)} \exp\left\{z^2 - i\frac{\pi(\nu+1)}{2}\right\} H_{-\nu-1}(iz).$$

Асимптотические представления при $z \rightarrow \infty$:

$$H_\nu(z) = (2z)^\nu [1 + O(1/z^2)], \quad |\arg z| \leq \pi/2,$$

$$H_\nu(z) = (2z)^\nu \left[1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right] + \frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{z^2} (-2z)^{-\nu-1} \left[1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right],$$

$$\pi/2 \leq |\arg z| \leq \pi, \quad |\arg(-z)| < \pi/2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.— М.: Наука, 1973, т. 1, 2.
2. Бете Г., Солпитер Э. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами.— М.: Физматгиз, 1960.
3. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций.— М.: ИЛ, 1949.
4. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп.— М.: Наука, 1965.
5. Владимиров В. С. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1976.
6. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца.— М.: Физматгиз, 1958.
7. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций.— М.: ИЛ, 1952.
8. Евграфов М. А. Аналитические функции.— М.: Наука, 1968.
9. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1973.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). Т. 3.— М.: Физматгиз, 1974.
11. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения.— М.: Физматгиз, 1963.
12. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Основы теории специальных функций.— М.: Наука, 1974.
13. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной.— М.: Наука, 1979.
14. Сеге Г. Ортогональные многочлены.— М.: Физматгиз, 1962.
15. Сидоров Ю. В., Федорук М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1982.
16. Суэтин П. К. Классические ортогональные многочлены.— М.: Наука, 1979.
17. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1977.
18. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения.— М.: ИЛ, 1962.
19. Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа.— М.: Физматгиз, 1963.
20. Шифф Л. Квантовая механика.— М.: ИЛ, 1957.
21. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции.— М.: Наука, 1977.
22. Beckman P. Orthogonal polynomials for engineers and physicists.— Boulder, Colorado: The Golem Press, 1973.
23. Handbook of mathematical functions/Eds. M. Abramowitz, I. Stegun.— N. Y.: National Bureau of Standards, 1965. (Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган.— М.: Наука, 1979.)
24. Hochstadt H. Special functions of mathematical physics.— N. Y.: Holt, Rinehart and Winston, 1961.
25. Luke Y. L. The special functions and their approximations. V. 1—4.— N. Y.— L.: Academic Press, 1969.

26. Olver F. W. J. Asymptotics and special functions.— N. Y.: Academic Press, 1974. (Русск. пер. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции.— М.: Наука, 1978.)
27. Rainville E. D. Special functions.— N. Y.: The Macmillan company, 1960.
28. Sneddon I. N. Special functions of mathematical physics and chemistry.— N. Y.: Willey-Interscience, 1956.
29. Wallace P. R. Mathematical analysis of physical problems.— McGill University: Holt, Rinehart and Winston, 1972.
30. Wigner E. P. The application of group theory to the special functions of mathematical physics.— Princeton lectures, p. I, II, Spring, 1955.
31. Miller W. Encyclopedia of mathematics and its applications. V. 4 — Symmetry and separation of variables. Section: Special functions. Addison — Wesley, 1978, 4.

Более полный список литературы по специальным функциям можно найти в книгах [1, 4, 11, 21—27].

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Бесселя дифференциальное уравнение 161
 — неравенство 58
 — функции 161, 163
 — — второго рода 175
 — —, интегральное представление Зоммерфельда 171
 — —, — — Пуассона 165
 — — модифицированные (мнимого аргумента) 179
 — — — первого рода 179
 — — полуцелого порядка 176
 — —, теоремы сложения Графа и Гегенбауэра 182, 183
 Бета-функция 305
 Вигнера функция 85
 Водородоподобный атом 263—268
 — —, волновые функции 265
 Вырожденные гипергеометрические функции 208
 — — — второго рода 213
 — — —, связь с функциями Уиттекера 235
 Гамма-функция 304
 —, логарифмическая производная 309
 Гармонические полиномы 83
 Гармонический осциллятор 72
 Гегенбауэра полиномы 30
 Гипергеометрические функции 208
 — —, интегральные представления 208
 Гипергеометрическое дифференциальное уравнение 205
 — — — вырожденное 205
 — — —, фундаментальная система решений 213
 Дарбу — Кристоффеля формула 43
 Дини разложение 259
 Дирака уравнение для кулоновского поля 271
 Дуальные полиномы Хана 117, 152
 Интеграл вероятности 99
 Интегралы Френеля 99
 342
 Интегральная показательная функция 98
 — экспонента 97
 Интегральный косинус 98
 — синус 98
 Квадратурные формулы типа Гаусса 291
 Квазиклассическое приближение 189
 Классические ортогональные полиномы 37
 — — — дискретной переменной 107
 — — —, дифференциальное уравнение 29
 — — —, классификация 30, 31
 — — —, формула Родрига 29
 — — —, функции второго рода 93
 Кравчука полиномы 114
 Кристоффеля числа 292
 Лагерра полиномы 30
 — —, дифференциальное уравнение 230
 — —, функции второго рода 96
 Лангера формулы 200
 Лежандра полиномы 30
 — присоединение функции 79
 — — —, дифференциальное уравнение 77
 Ломмеля дифференциальное уравнение 161
 Макдональда функция 179
 Мейкспера полиномы 114
 Неймана функции 175
 Обобщенное уравнение гипергеометрического типа 13
 Обобщенные сферические функции 85
 Однородные гармонические полиномы 83
 — — —, связь со сферическими функциями 83
 Ортогональные полиномы 86
 Пуассона интегральные представления 165

Разложение плоской волны по полиномам Лежандра 189
— сферической волны по полиномам Лежандра 188
— функций в ряды по классическим ортогональным полиномам 61
— — — — функциям Бесселя 258

Рака полиномы 152
Родрига формула 18
— —, разностный аналог 105, 137

Стирлинга формула 313
Сферические гармоники 75
— функции 75
— —, обобщенные 85
— —, связь с однородными гармоническими полиномами 83
— —, — с присоединенными функциями Лежандра 79
— —, теорема сложения 90

Теорема осцилляционная 251
Теоремы разложения 61, 259

Уиттокера функции M и W 235
Ультрасферические полиномы — см. Гегенбауэра полиномы
Уравнение гипергеометрического типа 12
— — —, канонический вид 204, 205
— — —, самосопряженный вид 17
— Клейна — Гордона для кулоновского поля 268

Функции гипергеометрического типа 12

Фурье — Бесселя интеграл 260
— — ряд 259

Хана полиномы 112
— — дуальные 117, 152
Ханкеля функции 163
— — второго рода 143
— — первого рода 163

Цилиндрические функции — см. Бесселя функции

Чебышева полиномы второго рода 30
— — дискретной переменной 12
— — первого рода 30

Шарлье полиномы 114
Шаровые функции 80
Шредингера уравнение для гармонического осциллятора 72
— — — кулоновского поля 262
— — — центрально-симметричного поля 262
Штурма — Лиувилля задача 246

Эйлера постоянная 308
Эйри функция 182
Эллиптические интегралы 235
Эрмита полиномы 30
— —, функции второго рода 95
— функции 214
— —, дифференциальное уравнение 205

Якоби полиномы 30
— —, функции второго рода 232

УКАЗАТЕЛЬ ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- a_n — коэффициент при старшей степени полинома $p_n(x)$
 $\text{Si}(x)$ — интегральный косинус
 $C_n^{(\mu)}(x)$ — полиномы Шарлье
 $D_{m,m'}^l(\alpha, \beta, \gamma)$ — обобщенная сферическая функция порядка l
 d_n^2 — квадрат нормы ортогонального полинома
 $E_m(z)$ — интегральная экспонента
 $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ — гипергеометрическая функция
 $F(\alpha, \gamma, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция первого рода
 $G(\alpha, \gamma, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция второго рода
 $H_n(x)$ — полиномы Эрмита
 $H_\nu(z)$ — функция Эрмита
 $H_\nu^{(1)}(z)$ — функция Ханкеля первого рода порядка ν
 $H_\nu^{(2)}(z)$ — функция Ханкеля второго рода порядка ν
 $h_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ — полиномы Хапа
 $I_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка ν
 $J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка ν
 $K_\nu(z)$ — функция Макдональда
 $k_n^{(p)}(x, N)$ — полиномы Кравчука
 $L_n^\alpha(x)$ — полиномы Лагерра
 $m_n^{(\gamma, \mu)}(x)$ — полиномы Мейкснера
 $P_n(x)$ — полиномы Лежандра
 $P_n^m(x)$ — присоединенная функция Лежандра
 $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ — полиномы Якоби
 $Q_n(z)$ — функция второго рода для ортогональных полиномов
 $\text{Si}(x)$ — интегральный синус
 $T_n(x)$ — полиномы Чебышева первого рода
 $t_n(x)$ — полиномы Чебышева дискретной переменной
 $U_n(x)$ — полиномы Чебышева второго рода
 $u_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ — полиномы Рака
 $w_n^{(c)}(x)$ — дуальные полиномы Хана
 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ — сферическая функция порядка l
 $Y_\nu(z)$ — функция Бесселя второго рода порядка ν
 $B(x, y)$ — бета-функция
 $\Gamma(z)$ — гамма-функция
 γ — постоянная Эйлера
 $\Phi(x)$ — интеграл вероятности
 $\Psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции