П. ДИРАК

СПИНОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Перевод с английского
А. М. ПЕРЕЛОМОВА

Издательство «Мир» Москва 1978

УДК 539.12 + 530.145 + 519.4

В книге одного из создателей квантовой механики, лауреата Нобелевской премии П. Дирака, излагается теория спиноров — особых математических величин, которые применяются в различных разделах квантовой механики, в теории представлений групп и т. д. Строгое изложение чисто математической стороны вопроса в ней сочетается с аппаратом, привычным для физиков-теоретиков. В качестве приложения в книгу добавлена классическая статья Брауэра и Вейля о спинорах.

Книга рассчитана на специалистов в области теоретической физики и физики элементарных частиц, а также на математиков, занимающихся спинорным анализом.

Редакция литературы по физике

Д $\frac{20402\text{-}048}{041(01)\text{-}77}$ 48-77

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Книга представляет собой математическое исследование, предназначенное для физиков-теоретиков, интересующихся фундаментальными проблемами естествознания.

Все обнаруженные в природе частицы относятся к двум видам: одни из них физики называют фермионами, а другие — бозонами. В книге математическое изложение ведется независимо от физических представлений. Но оказывается, что даже в случае спиноров в конечномерном пространстве математику требуются те же самые операторы, что и физику для описания фермионов. При переходе к бесконечному числу измерений возникает необходимость в дополнительных операторах, и они оказываются именно теми операторами, которые нужны для описания бозонов.

Таким образом, математика располагает всеми отдельными элементами, необходимыми для фундаментального описания природы, но как увязать их между собой — это совершенно не ясно и это остается проблемой для будущего.

П. Дирак

Февраль 1977

ВВЕДЕНИЕ

1. Гильбертово пространство

Под „гильбертовым пространством" мы в дальнейшем всегда будем понимать то, что математики называют сепарабельным гильбертовым пространством. Это пространство векторов, каждому из которых соответствует счетное число координат $q_1, q_2, q_3, \ldots$. Координаты обычно считают комплексными числами и каждому вектору приписывают квадрат длины, равный $\sum\limits_r |q_r|^2$. Величины q_r можно считать координатами вектора в гильбертовом пространстве лишь при том условии, что ряд для квадрата длины сходится.

Если представить координату q_r в виде суммы действительной и мнимой частей: $q_r = x_r + iy_r$, то квадрат длины вектора будет равен $\sum\limits_r (x_r^2 + y_r^2)$. Величины x_r и y_r можно рассматривать как координаты нового вектора. Это тоже вектор гильбертова пространства, но уже действительный вектор, т. е. вектор с действительными координатами.

Таким образом, в гильбертовом пространстве комплексным вектором однозначно определяется действительный вектор. Второму из них соответствует на первый взгляд вдвое большее число координат, чем первому. Но удвоенная счетная бесконечность остается счетной бесконечностью, так что в действительности второй вектор содержит точно такое же число координат, как и первый. Стало быть, в гильбертовом пространстве комплексный вектор не является более общим объектом, нежели действительный вектор.

Действительное же гильбертово пространство есть более элементарный объект. В самом деле, комплексное гильбертово пространство можно рассматривать как действительное, наделенное определенной структурой, а именно попарным сочетанием координат, причем пары играют роль комплексных чисел. Изменению фазовых множителей у комплексных чисел соответствует особый вид вращения в гильбертовом пространстве.

В действительном же гильбертовом пространстве, не обладающем такой структурой, отсутствуют какие-либо особые линейные преобразования. Все преобразования в таком пространстве равноценны, и его можно считать самой подходящей основой для общей математической теории. Наличие преобразований специального вида усложнило бы анализ фундаментальных идей. Поэтому мы будем рассматривать действительное гильбертово пространство, координаты вектора в котором действительны.

2. Спиноры

Спиноры, как и тензоры, — это геометрические объекты в неком пространстве, компоненты которых преобразуются линейно при преобразовании координат пространства. От тензоров спиноры отличаются тем, что меняют знак при полном обороте вокруг любой оси; тензоры же при этом не меняются. Таким образом, знак спиноров всегда можно выбирать произвольно.

Спиноры существуют в действительном евклидовом пространстве с любым числом измерений (бо́льшим единицы). Они могут существовать и в других пространствах, в которых имеет смысл понятие перпендикулярности, например в физическом пространстве Минковского. Одно лишнее измерение по сравнению с трехмерным евклидовым пространством — измерение времени — не имеет большого значения для теории спиноров. Все определяется лишь теми измерениями, которые обладают обычной перпендикулярностью евклидова пространства.

Гильбертово пространство — это просто евклидово пространство с бесконечным числом измерений, на координаты векторов которого налагается некое условие сходимости. Изучая спиноры в гильбертовом пространстве, мы сначала рассмотрим спиноры в n-мерном пространстве, а затем перейдем к $n \to \infty$.

Теорию спиноров в n-мерном евклидовом пространстве можно строить по-разному. Мы выберем путь, который облегчит нам в дальнейшем переход к $n \to \infty$.

КОНЕЧНОЕ ЧИСЛО ИЗМЕРЕНИЙ

3. Вращения в n-мерном пространстве

В n-мерном евклидовом пространстве вектор q задается координатами q_r ($r = 1, 2, \ldots, n$). Здесь мы будем рассматривать только действительные векторы q, для которых величины q_r — действительные числа. Вектору q приписывают квадрат длины, равный $q_r q_r$, причем подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Мы можем также записать эту величину в виде скалярного произведения (q, q).

При повороте векторного пространства вектор q переходит в вектор q^* с координатами

$$q_r^* = R_{rs} q_s, \tag{3.1}$$

где R_{rs} — действительные числа. При вращении не меняются ни длина вектора, ни скалярное произведение двух векторов q и p, так что

$$q_r p_r = q_r^* p_r^* = R_{rs} q_s R_{rt} p_t.$$

Чтобы это равенство было справедливо для всех векторов q и p, должно выполняться условие

$$R_{rs} R_{rt} = \delta_{st}. \tag{3.2}$$

Величины R_{rs} можно рассматривать как элементы матрицы R. Назовем транспонированной матрицей матрицу $R^{\sim}$ с элементами $R_{rs}^{\sim} = R_{sr}$. Тогда условие (3.2) может быть переписано в виде матричного уравнения

$$R^{\sim} R = 1. \tag{3.3}$$

Матрица R, обладающая таким свойством, называется ортогональной.

Мы можем рассмотреть бесконечно малое вращение, при котором R на бесконечно малую величину отличается от единичной матрицы. Тогда мы имеем

$$R = 1 + \varepsilon A,$$

где ε — бесконечно малое действительное число, а A — матрица с действительными элементами. Условие (3.3) теперь дает

$$A^{\sim} = -A \quad \text{или} \quad A_{rs} = -A_{sr}. \tag{3.4}$$

Таким образом, матрица A антисимметрична. Заметим, что любое конечное вращение может быть построено из бесконечно малых вращений.

Обозначим определитель матрицы S символом $\{S\}$. Тогда из уравнения (3.3) следует, что

$$\{R^{\sim}\}\{R\} = 1,$$

или

$$\{R\}^2 = 1,$$

так что

$$\{R\} = \pm 1.$$

Поскольку конечные вращения могут быть построены из бесконечно малых вращений, должно выполняться условие

$$\{R\} = 1.$$

Преобразование же векторов q, удовлетворяющее уравнениям (3.1) и (3.2) при

$$\{R\} = -1,$$

есть отражение.

4. Нулевые векторы и нулевые плоскости

Введем теперь комплексные векторы q с комплексными координатами q_r. Квадрат длины комплексного вектора по-прежнему равен (q, q). Будем называть комплексный вектор q нормированным, если

$$(q, \bar{q}) = 1,$$

что не совпадает с условием равенства длины вектора единице.

Два комплексных вектора q и p назовем взаимно перпендикулярными, если $(q, p) = 0$, и ортогональными, если $(q, \bar{p}) = 0$. Мы будем рассматривать только действительные вращения (т. е. действительные R_{rs}), при которых все вышеприведенные соотношения не меняются.

Комплексный вектор q может обладать нулевой длиной, т. е. он может удовлетворять условию

$$(q, q) = 0.$$

Такой вектор перпендикулярен сам себе. Он называется нулевым вектором. Комплексно сопряженный к нему вектор $\bar{q}$ — тоже нулевой. Рассмотрим m-мерную плоскость, такую, что любой вектор в ней — нулевой. Такая m-плоскость называется нулевой m-плоскостью. Для построения такой плоскости мы должны найти m независимых векторов q_a $(a = 1, \ldots, m)$, которые были бы все нулевыми и перпендикулярными друг другу:

$$\sum_r q_{ra} q_{rb} = 0, \quad a, b = 1, \ldots, m. \tag{4.1}$$

Тогда любая линейная комбинация их $\sum_a c_a q_{ra}$, где c_a — произвольные комплексные числа, будет тоже нулевым вектором, так что эти векторы порождают нулевую плоскость. Любые два вектора в нулевой плоскости взаимно перпендикулярны.

Комплексно сопряженные векторы $\bar{q}_a$ порождают другую нулевую m-плоскость.

5. Теорема о независимости

Если $q_1, \ldots, q_m$ — независимые нулевые векторы в нулевой плоскости, то все векторы $q_1, \ldots, q_m$, $\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_m$ независимы.

Чтобы доказать эту теорему, предположим, что она не верна и, следовательно, для векторов q_a, $\bar{q}_a$ выполняется соотношение

$$\sum_a (c_a q_a + c'_a \bar{q}_a) = 0 \tag{5.1}$$

с комплексными коэффициентами c_a, c'_a. Поскольку векторы $\sum_a c'_a \bar{q}_a$ и $\sum_b \bar{c}_b \bar{q}_b$ лежат в нулевой плоскости, они взаимно перпендикулярны, т. е.

$$\left(\sum_a c'_a \bar{q}_a, \sum_b \bar{c}_b \bar{q}_b\right) = 0.$$

Тогда уравнение (5.1) дает

$$\Big(\sum_a c_a q_a, \sum_b \bar{c}_b \bar{q}_b\Big) = 0$$

и, следовательно,

$$\sum_a c_a q_a = 0.$$

Поскольку все векторы q_a независимы, коэффициенты c_a должны быть равны нулю. Таким образом, каждое слагаемое в уравнении (5.1) должно быть равно нулю.

Как следствие этой теоремы мы получаем, что размерность нулевой плоскости не может превышать $^1/_2 n$.

При четном n размерность максимальной нулевой плоскости равна $^1/_2 n$. В силу теоремы о независимости максимальная нулевая плоскость и соответствующая комплексно сопряженная плоскость вместе порождают все пространство, т. е. любой вектор пространства можно представить в виде суммы вектора нулевой плоскости и вектора сопряженной к ней плоскости.

Если n — нечетное, то размерность максимальной нулевой плоскости равна $^1/_2(n-1)$. Векторы $q_a + \bar{q}_a$, $i(q_a - \bar{q}_a)$ теперь образуют множество $(n-1)$ независимых действительных векторов. Пусть q_0 — действительный вектор, перпендикулярный всем этим векторам. Тогда максимальная нулевая плоскость, плоскость комплексно сопряженная к ней, и вектор q_0 вместе порождают все пространство.

Нетрудно подсчитать все независимые действительные параметры, необходимые для того, чтобы охарактеризовать максимальную нулевую плоскость. Их число равно $^1/_2 n(^1/_2 n - 1)$ при четном n и $^1/_2(n-1)\,^1/_2(n+1)$ при нечетном n.

6. Задание нулевой плоскости без задания ее координат

Независимыми векторами $q_1, \ldots, q_m$, удовлетворяющими условию $(q_a, q_b) = 0$, определяются не только m-мерная нулевая плоскость, но и система координат в ней. В самом деле, любой вектор p в нулевой плоскости можно записать в виде

$$p = \sum c_a q_a,$$

и тогда величины c_a будут координатами вектора p. Мы можем заменить векторы q_a любыми m независимыми векторами q_a^*, являющимися линейными комбинациями векторов q_a. Тогда векторы q_a^* будут задавать ту же самую нулевую плоскость, но с иной системой координат на ней.

Система координат оказывается особенно простой, если взять все векторы q_a ортогональными,

$$(q_a, \bar{q}_b) = 0, \quad a \neq b,$$

и нормированными,

$$(q_a, \bar{q}_a) = 1.$$

Таким образом,

$$(q_a, \bar{q}_b) = \delta_{ab}.$$

Такие векторы q_a, задающие нулевую плоскость, называются *ортонормированными.*

Посмотрим, нельзя ли задать нулевую плоскость, не задавая на ней никаких координат. Введем линейный оператор ω, удовлетворяющий следующим условиям:

I. Действуя на любой вектор нулевой плоскости, оператор ω умножает его на i:

$$\omega q_a = i q_a.$$

II. Действуя на любой вектор плоскости, комплексно сопряженной к нулевой плоскости, оператор ω умножает его на $-i$:

$$\omega \bar{q}_a = -i \bar{q}_a.$$

III. Действуя на любой вектор, перпендикулярный нулевой плоскости и плоскости, комплексно сопряженной к ней, оператор ω дает нуль:

$$\omega u = 0, \quad \text{если} \quad \left.\begin{matrix}(u, q_a) \\ (u, \bar{q}_a)\end{matrix}\right\} = 0 \text{ при всех } a.$$

Оператор ω полностью определяется условиями I—III, так как любой вектор можно выразить через три вектора, о которых говорится в этих условиях.

Мы видим, что векторы нулевой плоскости — это собственные векторы оператора ω, соответствующие собственному значению i, векторы плоскости, сопряженной к нулевой плоскости, — это собственные векторы оператора ω, соответствующие собственному значению — i, а перпендикулярные векторы — это собственные векторы, соответствующие собственному значению 0. Оператор ω имеет три собственных значения $\pm i$, 0 и потому удовлетворяет уравнению

$$\omega^3 = -\omega. \tag{6.1}$$

Действительные векторы $q_a + \bar{q}_a$, $i(q_a - \bar{q}_a)$ и действительные векторы u, перпендикулярные им, порождают все пространство. Если применить оператор ω к любому из этих действительных векторов, то получится другой действительный вектор, именно $iq_a - i\bar{q}_a$, $-q_a - \bar{q}_a$ и 0. Если ω применить к любому действительному вектору v с координатами v_r, то в результате получим другой действительный вектор ωv с координатами

$$(\omega v)_r = \omega_{rs} v_s.$$

Таким образом, все элементы ω_{rs} действительны и матрица ω действительна.

Нетрудно показать, что матрица ω кососимметрична, т. е.

$$\omega_{rs} = -\omega_{sr}. \tag{6.2}$$

Для этого нужно доказать, что для любых двух векторов y и y' выполняется соотношение

$$(y, \omega y') = -(y', \omega y).$$

В этом можно убедиться, перебрав все случаи, когда y и y' являются векторами типа q, $\bar{q}$ и u. Например,

$$(q, \omega q') = (q, iq') = 0 = -(q', \omega q),$$
$$(\bar{q}, \omega q') = (\bar{q}, iq') = -(q', -i\bar{q}) = -(q', \omega \bar{q}).$$

Нулевой плоскостью определяется оператор ω с действительными элементами, который удовлетворяет условиям (6.1) и (6.2). Обратно, любой оператор ω с действительными элементами, который удовлетворяет условиям (6.1) и (6.2), определяет нулевую плоскость. Чтобы доказать это, возьмем все собственные векторы q_a, q_b, ... оператора ω, соответствующие собственному значению i. Для любой пары этих векторов q_a и q_b имеем

$$(q_a, \omega q_b) = q_{ra}\omega_{rs}q_{sb} = -(q_b, \omega q_a).$$

Но

$$(q_a, \omega q_b) = i(q_a, q_b)$$

и

$$(q_b, \omega q_a) = i(q_b, q_a).$$

Следовательно, $(q_a, q_b) = 0$. Полагая здесь $b = a$, получаем $(q_a, q_a) = 0$. Поэтому векторы q_a, q_b порождают нулевую плоскость.

Итак, нулевая плоскость и оператор ω однозначно определяют друг друга. Оператор ω и определяет нулевую плоскость без какой-либо ссылки на систему координат, связанную с этой плоскостью.

Если n-четное, а нулевая плоскость — максимальная, то не существует векторов u, перпендикулярных всем векторам типа q и $\bar{q}$. В этом случае

$$\omega^2 = -1 \qquad \left(m = \frac{n}{2}\right).$$

Если теперь y — любой вектор и мы положим

$$q = (1 - i\omega)\, y,$$

то

$$\omega q = iq,$$

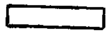
так что вектор q лежит в нулевой плоскости.

В случае четного n мы можем назвать оператор ω оператором четверти полного оборота, поскольку $\omega^4 = 1$ и он переводит каждый вектор в вектор, перпендикулярный исходному.

7. Матричные обозначения

Уравнения, с которыми мы встречаемся в теории нулевых плоскостей, как правило, удобнее записывать в матричных обозначениях. Рассмотрим векторы q_{ra}, порождающие нулевую плоскость. Здесь индекс r принимает значения $1, 2, \ldots, n$, а индекс a принимает значения $1, 2, \ldots, m$. Таким образом, величины q_{ra} образуют матрицу q с n строками и m столбцами, причем $m \leqslant {}^1/_2 n$. Это прямоугольная матрица следующего вида:

Транспонированная матрица $q^{\sim}$



имеет m строк и n столбцов.

Мы можем перемножить любые две матрицы при условии, что число столбцов в левом сомножителе равно числу строк в правом сомножителе. Таким образом, матрицу q можно умножить слева на квадратную матрицу с n строками и столбцами. Такую матрицу мы будем называть *большой* квадратной матрицей. Точно так же матрицу q можно умножить справа на матрицу с m строками и столбцами. Такую матрицу мы будем называть *малой* квадратной матрицей.

Матрицы R и A в разделе 3 — большие квадратные матрицы. Символ 1 в правой части соотношения (3.3), разумеется, означает большую единичную матрицу. Мы будем обозначать символом 1 как большую, так и малую единичную матрицу. Какова эта матрица, будет ясно из контекста. Аналогично символом 0 мы будем обозначать большие и малые квадратные матрицы и даже прямоугольные матрицы со всеми элементами, равными нулю.

Условия (4.1) для нулевой плоскости в матричных обозначениях принимают вид

$$q^{\sim} q = 0. \tag{7.1}$$

Условие независимости всех векторов q_a означает, что не существует таких чисел c_a, для которых $q_{ra}c_a = 0$. Стало быть, не существует малого столбца c, такого, что $qc = 0$. Следовательно, для малой квадратной матрицы $\bar{q}^{\sim} q$ имеется обратная матрица, ибо в противном случае должен был бы существовать малый столбец c, такой, что $\bar{q}^{\sim} qc = 0$. Отсюда вытекало бы, что $\bar{c}^{\sim}\bar{q}^{\sim}qc=0$ и $qc=0$. Таким образом, существуют матрицы $(\bar{q}^{\sim}q)^{-1}$ и $(q^{\sim}\bar{q})^{-1}$.

Найдем матрицу ω из § 6. Это большая квадратная матрица. Она должна удовлетворять трем условиям I — III. Нетрудно убедиться, что

$$\omega = iq(\bar{q}^{\sim}q)^{-1}\bar{q}^{\sim} - i\bar{q}(q^{\sim}\bar{q})^{-1}q^{\sim}, \tag{7.2}$$

поскольку из этого выражения для ω с учетом условия (7.1) получаем

$$\omega q = iq(\bar{q}^{\sim}q)^{-1}\bar{q}^{\sim}q = iq,$$

$$\omega\bar{q} = -i\bar{q}(q^{\sim}\bar{q})^{-1}q^{\sim}\bar{q} = -i\bar{q}$$

и $\omega u = 0$, если u — большой столбец, для которого $q^{\sim}u = 0$ и $\bar{q}^{\sim}u = 0$.

Рассмотрим большую квадратную матрицу

$$q(\bar{q}^{\sim}q)^{-1}\bar{q}^{\sim} + \bar{q}(q^{\sim}\bar{q})^{-1}q^{\sim}. \tag{7.3}$$

Если ее умножить справа на q, то получится q, а если ее умножить справа на $\bar{q}$, то получится $\bar{q}$. Таким образом, матрица (7.3), действуя на любой вектор нулевой плоскости или на любой вектор в плоскости, сопряженной к нулевой плоскости, в точности воспроизводит его.

Рассмотрим теперь случай, когда n — четное, а нулевая плоскость — максимальная, $m = {}^1/_2 n$. В этом случае векторы нулевой плоскости и векторы плоскости, сопряженной ей, порождают все пространство. Тогда оператор (7.3), действуя на любой вектор, дает тот же самый вектор. т. е. он единичный оператор:

$$q(\bar{q}^{\sim}q)^{-1}\bar{q}^{\sim} + \bar{q}(q^{\sim}\bar{q})^{-1}q^{\sim} = 1 \quad \left(m = \frac{n}{2}\right). \tag{7.4}$$

Теперь мы можем объединить соотношения (7.4) и (7.2) в одно уравнение:

$$\frac{1}{2}(1 - i\omega) = q(\bar{q}^{\sim} q)^{-1} \bar{q}^{\sim} \quad \left(m = \frac{n}{2}\right). \tag{7.5}$$

Уравнение (7.4) — это действительная, а уравнение (7.2) — мнимая часть уравнения (7.5).

Если матрица q — ортонормированная, то $\bar{q}^{\sim} q = 1$ и уравнения (7.2), (7.4) и (7.5) сводятся к виду

$$\omega = iq\bar{q}^{\sim} - i\bar{q}q^{\sim}, \tag{7.6}$$

$$1 = q\bar{q}^{\sim} + \bar{q}q^{\sim} \quad \left(m = \frac{n}{2}\right), \tag{7.7}$$

$$\frac{1}{2}(1 - i\omega) = q\bar{q}^{\sim} \quad \left(m = \frac{n}{2}\right). \tag{7.8}$$

Координаты u_1, u_2, u_3, ... вектора u, записанные последовательно одна за другой, образуют матрицу в виде одной строки. Если же эти координаты записать одну под другой, то получится матрица в виде одного столбца. Мы будем обозначать одним и тем же символом u и вектор, и матрицу в виде одного столбца. Тогда матрица, имеющая вид одной строки, записывается как $u^{\sim}$. Если v — второй вектор, то их скалярное произведение, записанное в матричных обозначениях, имеет вид $u^{\sim} v$. Его можно рассматривать как матрицу из одного столбца и одной строки. Такая матрица равна транспонированной матрице:

$$u^{\sim} v = v^{\sim} u. \tag{7.9}$$

8. Конечное вращение, выраженное через бесконечно малое вращение

Из бесконечно малого вращения A мы можем получить конечное вращение R по формуле

$$R = e^{A}. \tag{8.1}$$

При этом из условия антисимметрии для A вытекает условие ортогональности (3.3) для R. Действительно,

$$R^{\sim} = (e^{A})^{\sim} = e^{A^{\sim}} = e^{-A} = R^{-1}. \tag{8.2}$$

Поставим теперь следующий вопрос: можем ли мы, задавшись ортогональной матрицей R, найти антисимметричную матрицу A, удовлетворяющую условию (8.1)?

Рассмотрим собственные векторы матрицы R. Запишем их в виде больших столбцов. Пусть u_λ — собственный вектор, соответствующий собственному значению λ, так что

$$Ru_\lambda = \lambda u_\lambda. \tag{8.3}$$

Условие ортогональности гарантирует нам, что величина λ не равна нулю. Для каждого собственного значения λ выберем число a_λ, равное одному из логарифмов числа λ, и введем оператор A, удовлетворяющий условию

$$Au_\lambda = a_\lambda u_\lambda. \tag{8.4}$$

Оператор A полностью определяется условием (8.4), поскольку любой вектор можно выразить через собственные векторы. Мы имеем

$$e^A u_\lambda = e^{a_\lambda} u_\lambda = \lambda u_\lambda = Ru_\lambda,$$

так что A удовлетворяет равенству (8.1). Но, вообще говоря, это не антисимметричная матрица, и, для того чтобы она стала антисимметричной, мы должны выбрать ветвь логарифма специальным образом.

Пусть v_μ — другой собственный вектор, соответствующий собственному значению μ, так что

$$Rv_\mu = \mu v_\mu. \tag{8.5}$$

Транспонированное уравнение имеет вид

$$v_\mu^\sim R^\sim = \mu v_\mu^\sim,$$

где $v_\mu^\sim$ — большая строка. Запишем скалярное произведение векторов u_λ и v_μ:

$$v_\mu^\sim u_\lambda = v_\mu^\sim R^\sim R u_\lambda = \mu v_\mu^\sim \lambda u_\lambda.$$

Таким образом,

$$(1 - \lambda\mu)\, v_\mu^\sim u_\lambda = 0 \tag{8.6}$$

и скалярное произведение обращается в нуль, если $\lambda\mu \neq 1$. Полагая $\mu = \lambda$ и $v_\mu = u_\lambda$, получаем

$$(1 - \lambda^2) u_\lambda^\sim u_\lambda = 0.$$

Таким образом, u_λ — нулевой вектор, если $\lambda \neq \pm 1$.

Если же λ — собственное значение, отличное от ± 1, то величина λ^{-1}, очевидно, также должна быть собственным значением. В противном случае, как следует из равенства (8.6), вектор u_λ должен быть перпендикулярным любому собственному вектору и, следовательно, любому вектору. Такого рода рассуждения показывают, что при $\lambda \neq \pm 1$ число независимых собственных векторов, отвечающих собственному значению λ, равно числу векторов, отвечающих собственному значению λ^{-1}.

Чтобы матрица A была антисимметричной, для любой пары векторов a и b должно выполняться условие

$$a^\sim Ab + b^\sim Aa = 0.$$

В качестве a и b достаточно взять собственные векторы, поскольку любой вектор может быть выражен через собственные векторы. Тогда данное условие принимает вид

$$v_\mu^\sim A u_\lambda + u_\lambda^\sim A v_\mu = 0.$$

С учетом равенства (8.4) и соответствующего условия для v_μ его можно записать в виде

$$a_\lambda v_\mu^\sim u_\lambda + a_\mu u_\lambda^\sim v_\mu = 0,$$

или

$$(a_\lambda + a_\mu) v_\mu^\sim u_\lambda = 0. \qquad (8.7)$$

Если $\lambda\mu \neq 1$, то из (8.6) следует $v_\mu^\sim u_\lambda = 0$ и уравнение (8.7) выполняется. Если $\lambda\mu = 1$, а $\lambda \neq \pm 1$, то можно удовлетворить уравнению (8.7), взяв

$$a_{\lambda^{-1}} + a_\lambda = 0$$

при произвольном $\lambda \neq \pm 1$. Эти соотношения согласуются с формулой $a_\lambda = \ln \lambda$.

Если $\lambda\mu = 1$ и $\lambda = \mu = 1$, то можно удовлетворить требованию (8.7), положив $a_1 = 0$, что согласуется с условием $a_1 = \ln 1$. Оставшийся случай $\lambda\mu = 1$ и $\lambda = \mu = -1$ требует специального рассмотрения. В этом случае коэффициент a_λ определяется неоднозначно.

Число независимых собственных векторов, отвечающих собственному значению -1, должно быть четным, так как в противном случае произведение всех собственных значений было бы равно -1, а это означало бы, что $\langle R \rangle = -1$, т. е. рассматриваемое преобразование есть отражение. В пространстве этих собственных векторов выберем максимальную нулевую плоскость и положим $a_{-1}(1) = i\pi$ для векторов этой нулевой плоскости и $a_{-1}(2) = -i\pi$ для векторов сопряженной нулевой плоскости. Таким образом, во всех случаях имеем $e^{a_{-1}} = -1$. Для пары векторов u и v, находящихся или в нулевой плоскости, или же в плоскости, сопряженной к ней, мы имеем $v^\sim u = 0$. Если же в каждой из этих плоскостей находится по одному вектору, то $a_{-1}(1) + a_{-1}(2) = 0$, так что во всех случаях соотношение (8.7) выполняется.

Таким путем мы получаем лишь одно из решений нашей задачи, не единственное. Существует много антисимметричных матриц A, удовлетворяющих условию (8.1). Нетрудно убедиться, что матрица A, построенная описанным выше способом, — действительная.

9. Комплексное вращение

До сих пор мы рассматривали только действительное вращение, т. е. элементы матрицы R были действительными. Мы можем рассмотреть комплексное вращение (3.1), когда матрица R комплексна, но все же удовлетворяет условию ортогональности (3.2) или (3.3). Это условие, разумеется, отлично от условия унитарности.

Комплексное вращение переводит действительный вектор q в комплексный вектор q^*, но квадрат длины $q^{*\sim} q^*$ при этом остается действительным и положительным. Скалярное произведение любых двух новых векторов при этом тоже остается действительным. Если два вектора были взаимно перпендикулярны, то они остаются перпендикулярными, но если они были ортогональными, то они таковыми не остаются.

С геометрической точки зрения комплексное вращение — это довольно искусственная и не очень интересная операция. Но она представляет интерес с алгебраической точки зрения, поскольку многие результаты, полученные для действительного вращения, остаются в силе и для комплексного.

В частности, сохраняется результат предыдущего раздела. Если матрица R действительна, то модули всех ее собственных значений равны единице и собственному значению λ соответствует собственное значение $\bar{\lambda}=\lambda^{-1}$. Если же матрица R комплексна, то, как и прежде, собственному значению λ соответствует собственное значение λ^{-1} и во всех случаях, кроме случая $\lambda=-1$, мы можем провести рассуждения, изложенные в предыдущем разделе. Выберем опять максимальную нулевую плоскость в пространстве собственных векторов, отвечающих собственному значению -1, и вторую максимальную нулевую плоскость, такую, чтобы вместе с первой они порождали все пространство собственных векторов. Затем снова возьмем $a_{-1}(1)=i\pi$ для векторов в первой нулевой плоскости и $a_{-1}(2)=-i\pi$ для векторов во второй плоскости. При этом все условия будут по-прежнему выполняться.

Если матрица R действительна, то мы можем, конечно, по-прежнему работать с этими двумя общими максимальными нулевыми плоскостями и получить антисимметричную матрицу A, удовлетворяющую условию (8.1). Взяв в качестве второй максимальной нулевой плоскости плоскость, сопряженную к первой, мы обеспечим действительный характер матрицы A.

Наши дальнейшие результаты относительно вращения будут, вообще говоря, справедливы и для комплексного вращения, и с этим в значительной мере связана их ценность.

10. Некоммутативная алгебра

Введем антикоммутирующие друг с другом величины ξ_r (по одной на каждое измерение векторного пространства), квадраты которых равны единице. Таким образом,

$$\xi_r\xi_s + \xi_s\xi_r = 2\delta_{rs}. \tag{10.1}$$

Величины ξ_r можно считать действительными, т. е. эрмитовыми, операторами, поскольку соотношение (10.1) не меняется, если заменить i на $-i$ и изменить порядок сомножителей в каждом произведении.

Величины ξ_r можно рассматривать как координаты вектора, которые при вращении вектора согласно формуле (3.1) преобразуются согласно формуле

$$\xi_r^* = R_{rs}\xi_s. \tag{10.2}$$

В зависимости от того, является ли вращение действительным или комплексным, величины ξ_r^* также действительны или комплексны.

Обозначив символом $[\alpha, \beta]_+$ антикоммутатор $\alpha\beta + \beta\alpha$, получим

$$[\xi_r^*, \xi_s^*]_+ = R_{rt}R_{su}[\xi_t, \xi_u]_+ = 2R_{rt}R_{su}\delta_{tu} = 2R_{rt}R_{st} = 2\delta_{rs}.$$

Таким образом, свойство (10.1) инвариантно относительно вращения.

Пусть теперь K — произвольная большая квадратная матрица. Построим оператор

$$\xi_r K_{rs}\xi_s.$$

Мы можем считать, что величины ξ_r образуют матрицу ξ из одного большого столбца или матрицу $\xi^{\sim}$ из одной большой строки, и записать этот оператор в матричных обозначениях в виде

$$\xi^{\sim}K\xi. \tag{10.3}$$

Из соотношения (10.1) получаем

$$\xi_r K_{rs}\xi_s + \xi_s K_{rs}\xi_r = 2K_{rs}\delta_{rs} = 2 \langle K \rangle,$$

где $\langle K \rangle$ — сумма диагональных элементов матрицы K. Таким образом,

$$\xi^{\sim} K \xi + \xi^{\sim} K^{\sim} \xi = 2 \langle K \rangle. \tag{10.4}$$

Если матрица K симметрична, то $K = K^{\sim}$ и $\xi^{\sim} K \xi = \langle K \rangle$. Следовательно, в этом случае величина (10.3) есть просто число. Лишь антисимметричная часть матрицы K дает вклад в члены оператора (10.3), не являющиеся числами.

Пусть A — большая антисимметричная матрица. Образуем оператор

$$\mathscr{A} = \frac{1}{4} \xi^{\sim} A \xi. \tag{10.5}$$

Пусть B — вторая большая антисимметричная матрица и аналогично

$$\mathscr{B} = \frac{1}{4} \xi^{\sim} B \xi.$$

Теперь мы имеем:

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}\mathscr{B} - \mathscr{B}\mathscr{A} &= \frac{1}{16} A_{rs} B_{tu} (\xi_r \xi_s \xi_t \xi_u - \xi_t \xi_u \xi_r \xi_s) = \\
&= \frac{1}{16} A_{rs} B_{tu} \{\xi_r (2\delta_{st} - \xi_t \xi_s) \xi_u - \xi_t (2\delta_{ur} - \xi_r \xi_u) \xi_s\} = \\
&= \frac{1}{8} A_{rs} B_{tu} \{\delta_{st} \xi_r \xi_u - \delta_{rt} \xi_s \xi_u - \delta_{ur} \xi_t \xi_s + \delta_{us} \xi_t \xi_r\} = \\
&= \frac{1}{4} \xi^{\sim} (AB - BA) \xi.
\end{aligned} \tag{10.6}$$

Таким образом, большая антисимметричная матрица $AB - BA$ связана с оператором $\mathscr{A}\mathscr{B} - \mathscr{B}\mathscr{A}$ тем же самым соотношением, которым матрица A связана с $\mathscr{A}$ и матрица B с $\mathscr{B}$. Именно для этого необходим множитель $1/4$ в формуле (10.5).

11. Операторы поворота

Рассмотрим вращение (которое может быть комплексным), примененное к величинам ξ_r:

$$\xi_r^* = \xi_s R_{sr},$$

или

$$\xi^{*\sim} = \xi^{\sim} R. \tag{11.1}$$

Это—преобразование, обратное преобразованию (10.2). Покажем, что можно найти оператор $\mathcal{R}$, такой, что

$$\xi_r^* = \mathcal{R}\xi_r\mathcal{R}^{-1}. \tag{11.2}$$

Такой оператор назовем оператором поворота. Оператор $\mathcal{R}$ должен удовлетворять уравнению

$$\xi_s R_{sr} = \mathcal{R}\xi_r\mathcal{R}^{-1}. \tag{11.3}$$

Рассмотрим сначала инфинитезимальный случай: $R = 1 + \varepsilon A$, причем матрица A антисимметрична. Введем оператор $\mathcal{A}$ согласно формуле (10.5). Мы имеем:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\xi_r - \xi_r\mathcal{A} &= \frac{1}{4} A_{st}(\xi_s\xi_t\xi_r - \xi_r\xi_s\xi_t) = \\ &= \frac{1}{4} A_{st}\{\xi_s(\xi_t\xi_r + \xi_r\xi_t) - (\xi_r\xi_s + \xi_s\xi_r)\xi_t\} = \\ &= \frac{1}{2}(A_{sr}\xi_s - A_{rt}\xi_t) = \xi_s A_{sr}.\end{aligned} \tag{11.4}$$

Следовательно, в первом порядке по ε

$$e^{\varepsilon\mathcal{A}}\xi_r e^{-\varepsilon\mathcal{A}} = \xi_s(1 + \varepsilon A)_{sr}$$

и уравнение (11.3) в инфинитезимальном случае справедливо.

Конечное вращение можно построить из инфинитезимального. Предположим, что соотношение

$$e^{\theta\mathcal{A}}\xi_r e^{-\theta\mathcal{A}} = \xi_s(e^{\theta A})_{sr} = (\xi e^{\theta A})_r \tag{11.5}$$

выполняется при некотором значении θ. Тогда, продифференцировав обе части равенства по θ, мы можем показать, что это соотношение выполняется и при близких значениях θ. Производная левой части равна

$$e^{\theta\mathcal{A}}(\mathcal{A}\xi_r - \xi_r\mathcal{A})e^{-\theta\mathcal{A}},$$

а производная правой части —

$$(\xi e^{\theta\mathcal{A}} A)_r = (e^{\theta A}\xi)_s A_{sr}.$$

То, что эти выражения совпадают, следует из уравнений (11.4) и (11.5) с первоначальным значением θ. Таким образом, соотношение (11.5) справедливо и в общем случае. Положив в нем $\theta = 1$, получим

$$e^{\mathcal{A}}\xi_r e^{-\mathcal{A}} = (\xi e^{A})_r. \tag{11.6}$$

Тем самым мы установили, что каждому вращению R соответствует оператор поворота $\mathcal{R}$. Чтобы найти явное выражение для $\mathcal{R}$, нужно выразить это вращение через инфинитезимальное вращение.

Если вращение — действительное, то матрица A может быть взята действительной; тогда оператор $\mathcal{A}$ антиэрмитов, а оператор $e^{\mathcal{A}}$ — унитарный. В этом случае преобразование (11.2) является унитарным.

12. Фиксация коэффициентов операторов поворота

Для данного вращения (11.1) оператор поворота $\mathcal{R}$, задаваемый формулой (11.2), полностью определен, с точностью до произвольного численного множителя. Действительно, если бы существовали два оператора $\mathcal{R}$, удовлетворяющие равенству (11.2) и потому приводящие к одним и тем же величинам ξ_r^*, то их отношение должно было бы коммутировать со всеми ξ_r и, следовательно, было бы числом. Мы хотим так фиксировать численные коэффициенты операторов поворота, чтобы каждому R соответствовал вполне определенный оператор $\mathcal{R}$.

Для произвольного оператора $\mathcal{B}$, являющегося функцией некоммутирующих величин ξ_r, мы введем понятие *обращенного* оператора $\mathcal{B}^{\sim}$, получающегося из $\mathcal{B}$ при изменении порядка сомножителей в каждом из произведений, входящих в $\mathcal{B}$. Мы используем один и тот же символ $\sim$ как для обращения оператора, так и для транспонирования матрицы, поскольку закон умножения для них имеет один и тот же вид:

$$(\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2)^{\sim} = \mathcal{B}_2^{\sim}\mathcal{B}_1^{\sim}.$$

При этом

$$(\mathcal{B}^{-1})^{\sim} = (\mathcal{B}^{\sim})^{-1}.$$

Производя обращение в уравнении (11.3), получаем

$$\xi_s R_{sr} = R^{\sim -1}\xi_r R^{\sim}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{R}^{\sim -1}\xi_r\mathcal{R}^{\sim} = \mathcal{R}\xi_r\mathcal{R}^{-1}.$$

Умножая обе части этого равенства слева на $\mathcal{R}^{\sim}$ и справа на $\mathcal{R}$, получаем

$$\xi_r\mathcal{R}^{\sim}\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\sim}\mathcal{R}\xi_r.$$

Следовательно, оператор $\mathcal{R}^{\sim}\mathcal{R}$ коммутирует со всеми величинами ξ_r и потому есть число:

$$\mathcal{R}^{\sim}\mathcal{R} = c.$$

Теперь введем новый оператор $\mathcal{R}$, равный предыдущему, умноженному на $c^{-1/2}$. Новый оператор $\mathcal{R}$ будет по-прежнему удовлетворять равенству (11.3), а также условию нормировки

$$\mathcal{R}^{\sim}\mathcal{R} = 1. \qquad (12.1)$$

Новый оператор $\mathcal{R}$ полностью определен, если не считать произвола в знаке, вносимого множителем $c^{-1/2}$. Условие (12.1) можно также переписать в виде

$$\mathcal{R}^{\sim} = \mathcal{R}^{-1}, \text{ или } \mathcal{R}\mathcal{R}^{\sim} = 1.$$

Вращения обладают групповым свойством: если мы применим последовательно два из них S и R, то получим третье вращение

$$T = RS. \qquad (12.2)$$

Предположим, что этим вращениям соответствуют операторы $\mathcal{S}$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{T}$. Имеем

$$\mathcal{S}\xi_r\mathcal{S}^{-1} = \xi_s S_{sr},$$

$$\mathcal{R}\mathcal{S}\xi_r\mathcal{S}^{-1}\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}\xi_s\mathcal{R}^{-1}S_{sr} = \xi_t R_{ts}S_{sr} = \xi_t T_{tr} = \mathcal{T}\xi_r\mathcal{T}^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{R}\mathcal{S} = k\mathcal{T}, \qquad (12.3)$$

где k коммутирует со всеми ξ_r и потому является числом.

Предположим теперь, что каждый из операторов $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ удовлетворяет условию нормировки. Мы получаем

$$k^2\mathcal{T}\mathcal{T}^{\sim}=\mathcal{R}\mathcal{S}(\mathcal{R}\mathcal{S})^{\sim}=\mathcal{R}\mathcal{S}\mathcal{S}^{\sim}\mathcal{R}^{\sim}=1.$$

Следовательно,

$$k^2=1$$

и

$$\mathcal{R}\mathcal{S}=\pm\mathcal{T}.$$

Таким образом, нормированные операторы поворота обладают групповым свойством, если не считать множителя ± 1.

13. Произвол в знаке

Если выразить конечное вращение R через бесконечно малое вращение A:

$$R=e^A, \tag{13.1}$$

то, согласно формуле (11.6), оператор поворота $\mathcal{R}$ имеет вид

$$\mathcal{R}=e^{\mathcal{A}}. \tag{13.2}$$

Этот оператор поворота нормирован, так как из условия антисимметрии матрицы A следует

$$\mathcal{A}^{\sim}=\frac{1}{4}(\xi_r A_{rs}\xi_s)^{\sim}=\frac{1}{4}\xi_s A_{rs}\xi_r=-\mathcal{A}$$

и потому

$$\mathcal{R}^{\sim}=e^{\mathcal{A}^{\sim}}=e^{-\mathcal{A}}=\mathcal{R}^{-1}.$$

Оператор $\mathcal{R}$ определен формулой (13.2) без произвола в знаке. Но он зависит от A. Для данного вращения R можно по-разному выбирать матрицу A в формуле (13.1), а разным A могут соответствовать разные знаки оператора $\mathcal{R}$. Это можно показать на примере.

Возьмем действительное вращение $R=e^{\theta A}$, где

$$A_{12}=1,\ A_{21}=-1,\ \text{а все остальные элементы } A_{rs} \text{ равны нулю.} \tag{13.3}$$

Тогда

$$A^3=-A.$$

Следовательно,

$$R = e^{\theta A} = 1 + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\right) A + \\ + \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \ldots\right) A^2 = \\ = 1 + \sin\theta \cdot A + (1 - \cos\theta) A^2. \quad (13.4)$$

Вращение $q_r^* = q_s R_{sr}$ теперь можно записать в виде

$$\begin{aligned} q_1^* &= q_1 \cos\theta - q_2 \sin\theta, \\ q_2^* &= q_1 \sin\theta + q_2 \cos\theta, \\ q_s^* &= q_s \quad (s > 2). \end{aligned} \quad (13.5)$$

Таким образом, оно соответствует вращению на угол θ в плоскости $q_1 q_2$.

Из (10.5) мы получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{4}(\xi_1\xi_2 - \xi_2\xi_1) = \frac{1}{2}\xi_1\xi_2, \\ \mathcal{A}^2 &= \frac{1}{4}\xi_1\xi_2\xi_1\xi_2 = -\frac{1}{4}, \\ e^{\theta\mathcal{A}} &= \cos\frac{\theta}{2} + 2\mathcal{A}\sin\frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Положим теперь $\theta = 2\pi$. Тогда вращение (13.5) будет одним оборотом в плоскости $q_1 q_2$, возвращающим векторы к их первоначальным значениям. Ему соответствует из (13.6) оператор $e^{2\pi\mathcal{A}} = -1$. Следовательно, полному повороту вокруг любой оси, построенному из инфинитезимальных вращений, соответствует оператор поворота -1.

Таким образом, мы имеем пример, для которого $R = 1$ и $\mathcal{R} = -1$. При $R = 1$ можно, конечно, взять $A = 0$, и тогда мы получим $\mathcal{R} = 1$. Стало быть, существует неустранимый произвол в знаке оператора $\mathcal{R}$.

14. Кет и бра

Алгебраические величины, с которыми мы имеем дело, можно рассматривать как линейные операторы, действующие слева на величины типа векторов. Как принято в квантовой механике, мы назовем последние *кет* и будем обозначать их символом $|X\rangle$. Векторы, дуальные кет, назовем *бра* и будем обозначать их символом $\langle Y|$. Для пары бра и кет существует скалярное произведение $\langle Y|X\rangle$, которое представляет собой число. Алгебраические величины можно рассматривать как линейные операторы, действующие на бра справа.

Мы можем образовать произведение вида

$$\langle Y|\alpha_1\alpha_2 \ \ldots \ |X\rangle \tag{14.1}$$

с бра слева, кет справа и произвольным числом операторов между ними, которые являются функциями переменных ξ_r. Величина (14.1) есть число. Выполняется также ассоциативный закон умножения.

Теория симметрична относительно бра и кет. Переход от бра к кет можно рассматривать как операцию обращения. Любое уравнение, содержащее бра и кет и линейные операторы, можно обратить (т. е. обратить каждый сомножитель в произведении и обратить порядок сомножителей), и в результате мы получим правильное уравнение.

Из сказанного в разделе 11 следует, что вращение R первоначального векторного пространства приводит к оператору поворота $\mathcal{R}$, такому, что

$$\xi_r^* = \mathcal{R}\xi_r\mathcal{R}^{-1}. \tag{14.2}$$

Такое преобразование координат ξ_r связано с преобразованием кет

$$|X^*\rangle = \mathcal{R}|X\rangle \tag{14.3}$$

и преобразованием бра

$$\langle Y^*| = \langle Y|\mathcal{R}^{-1}. \tag{14.4}$$

Все произведения вида (14.1) инвариантны относительно таких преобразований. Мы можем рассматривать преобразования (14.3) и (14.4) как вращение кет и бра. Вращение может быть комплексным.

Численный множитель, добавленный к $\mathcal{R}$, не изменяет преобразования (14.2), но изменяет преобразования (14.3) и (14.4). Чтобы, применив вращение к векторам кет и бра, можно было получать определенные результаты, нужно, чтобы операторы поворота имели вполне определенные коэффициенты. Из сказанного в разделах 12 и 13 следует, что операторам поворота можно приписать определенные коэффициенты, нельзя лишь исключить произвол в знаке. Таким образом, применение определенного вращения к кет или бра дает определенный результат, в котором остается произвольным лишь знак.

Знак минус соответствует одному полному обороту вокруг оси. Таким образом, кет и бра — спиноры.

Это спиноры простейшего вида. Путем перемножения их можно построить спиноры более сложного вида, как это было сделано Ван-дер-Варденом для спиноров в пространстве-времени. Мы здесь будем иметь дело только со спинорами простейшего вида.

15. Простые кет

Предположим, что кет $|Q\rangle$ удовлетворяет неким линейным условиям

$$(q_{ra}\xi_r + q'_a)\,|Q\rangle = 0 \quad (a = 1, 2, \ldots), \tag{15.1}$$

где q_{ra} и q'_a — числа. Если на $|Q\rangle$ наложить максимально возможное число условий, то $|Q\rangle$ становится полностью определенным с точностью до произвольного численного коэффициента.

Для любых двух условий типа (15.1) мы можем взять линейную комбинацию их, такую, что она будет новым условием, в которое не входят величины q'_a. Так, например, из условий $a = 1$ и $a = 2$ мы можем получить

$$(q'_2 q_{r1} - q'_1 q_{r2})\,\xi_r\,|Q\rangle = 0.$$

Стало быть, мы можем переписать условия (15.1) так, чтобы все или все, кроме одного условия, не содержали величин q'_a. Таким образом, эти условия можно представить в виде уравнений

$$q_{ra}\xi_r\,|Q\rangle = 0, \quad a = 1, 2, \ldots \tag{15.2}$$

и, возможно, еще одного уравнения

$$(y_r\xi_r + 1)\,|Q\rangle = 0. \tag{15.3}$$

Для того чтобы уравнения (15.2) были совместными, необходимо, чтобы уравнение

$$[q_{ra}\xi_r,\ q_{sb}\xi_s]_+\,|Q\rangle = 0$$

с учетом (10.1) приводило к соотношению

$$q_{ra}q_{rb} = 0.$$

Таким образом, векторы q_a в формуле (15.2) порождают нулевую плоскость. Далее, для того, чтобы условия (15.2) и (15.3) были совместными, необходимо, чтобы из уравнения

$$[q_{ra}\xi_r,\ y_s\xi_s]_+\,|Q\rangle = 0$$

следовало соотиошеиие

$$q_{ra}y_r = 0.$$

Таким образом, если уравнение (15.3) выполняется, то вектор y должен быть перпендикулярным нулевой плоскости. Из условия же

$$(y_s\xi_s - 1)(y_r\xi_r + 1)\,|Q\rangle = 0$$

следует, что

$$(y_ry_r - 1) = 0,$$

т. е. вектор y должен быть единичным.

Чтобы фиксировать $|Q\rangle$ с точностью до произвольного численного коэффициента, мы должны наложить на $|Q\rangle$ максимально возможное число линейных условий. При четном n условие типа (15.3) может отсутствовать, и тогда должны выполняться $^1/_2 n$ условий (15.2), так что векторы q_a порождают максимальную нулевую плоскость. Другой возможный вариант в случае четного n — взять одно условие (15.3) и $^1/_2 n - 1$

условий (15.2). Но такой вариант не очень интересен и не будет дальше рассматриваться.

При нечетном n мы должны взять $^1/_2(n-1)$ условий (15.2) и одно условие (15.3). Теперь векторы q_a будут порождать максимальную нулевую плоскость, так что векторы q_a и $\bar{q}_a$ и еще один действительный вектор, перпендикулярный всем векторам q_a и $\bar{q}_a$, будут порождать все пространство. Обозначим этот действительный вектор (после нормировки) через q_0. Теперь посмотрим, как вектор y в уравнении (15.3) выражается через векторы q_a, $\bar{q}_a$ и q_0. Он не может содержать никаких векторов $\bar{q}_a$, поскольку перпендикулярен всем векторам q_a. Он может не содержать векторов q_a, поскольку их можно опустить и в силу условий (15.2) это не повлияет на условие (15.3). Следовательно, вектор y кратен вектору q_0 и, поскольку оба они нормированы, $y = \pm q_0$.

Кет $|Q\rangle$ назовем *простым* кет, если при четном n он удовлетворяет $^1/_2 n$ условиям (15.2), а при нечетном n он удовлетворяет $^1/_2(n-1)$ условиям (15.2) и условию (15.3). В обоих случаях для того, чтобы фиксировать его, требуется максимальная нулевая плоскость, а при нечетном n еще остается выбор знака вектора y.

Так как каждое из линейных условий, необходимых для фиксации $|Q\rangle$, дает линейное условие для $|Q^*\rangle$, при вращении простой кет $|Q\rangle$ переходит в другой простой кет $|Q^*\rangle$. Условия (15.2) и (15.3) можно записать в виде

$$\xi^\sim q\,|Q\rangle = 0, \quad (\xi^\sim y + 1)\,|Q\rangle = 0. \qquad (15.4)$$

Применим к величинам ξ_r вращение (11.1). Мы получим величины ξ_r^*, определяющие новый простой кет $|Q^*\rangle$ согласно уравнениям

$$\xi^{*\sim} q\,|Q^*\rangle = 0, \quad (\xi^{*\sim} y + 1)\,|Q^*\rangle = 0. \qquad (15.5)$$

Тогда величины ξ_r^* будут связаны с ξ_r уравнением (11.2), а кет $|Q^*\rangle$ будет связан с $|Q\rangle$ уравнением

$$|Q^*\rangle = \mathscr{R}\,|Q\rangle.$$

С учетом соотношения (11.1) условия (15.5) для $|Q^*\rangle$ принимают вид

$$\xi^{\sim} Rq\,|Q^*\rangle = 0, \quad (\xi^{\sim} Ry + 1)\,|Q^*\rangle = 0.$$

Их можно записать в виде

$$\xi^{\sim} q^*\,|Q^*\rangle = 0, \quad (\xi^{\sim} y^* + 1)\,|Q^*\rangle = 0,$$

где

$$q^* = Rq, \quad y^* = Ry. \tag{15.6}$$

Обращенный простой кет будем называть простым бра.

ЧЕТНОЕ ЧИСЛО ИЗМЕРЕНИЙ

Далее будем рассматривать только случай четного n. При нечетном n существенных изменений нет, имеются лишь незначительные усложнения. В конечном итоге мы будем устремлять n к бесконечности, и тогда различие между случаем четного и случаем нечетного n становится несущественным.

16. Кет-матрица

Простой кет $|Q\rangle$ определяется уравнением

$$q_{ra}\xi_r|Q\rangle = 0, \tag{16.1}$$

где q_{ra} — элементы матрицы q, которая удовлетворяет следующим условиям:

I. Она состоит из n строк и $^1/_2 n$ столбцов.

II. $q^{\sim}q = 0$.

III. При действии направо она не имеет нулевого собственного значения, т. е. не существует малого столбца u, такого, что $qu = 0$. Это условие гарантирует, что все векторы q_a независимы.

Любую матрицу, удовлетворяющую перечисленным условиям, будем называть *кет-матрицей*. Ею с точностью до произвольного численного коэффициента определяется простой кет. Уравнения (16.1) теперь можно записать в матричных обозначениях:

$$\xi^{\sim}q|Q\rangle = 0, \tag{16.2}$$

или, с учетом соотношения (7.9),

$$q^{\sim}\xi|Q\rangle = 0. \tag{16.3}$$

Кет-матрица может удовлетворять условию ортонормированности

$$q^{\sim}\bar{q} = 1, \tag{16.4}$$

но это не обязательно.

Мы можем образовать малую эрмитову матрицу $\bar{q}^{\sim}q$ и заменить условие III другим условием:

III′. Матрица $\bar{q}^{\sim}q$ не имеет нулевых собственных значений.

Чтобы показать эквивалентность условий III и III′, отметим, что любой собственный вектор u матрицы q, соответствующий нулевому собственному значению, является также собственным вектором матрицы $\bar{q}^{\sim}q$ и обратно, если собственный вектор u матрицы $\bar{q}^{\sim}q$ соответствует нулевому собственному значению, то $\bar{u}^{\sim}\bar{q}^{\sim}qu=0$ или $(\bar{q}\bar{u}\,|^{\sim}qu)=0$, откуда следует, что $qu=0$.

Если записать одну за другой две матрицы q и $\bar{q}$, то мы получим матрицу $(q, \bar{q})$ с n строками и n столбцами, т. е. большую квадратную матрицу. Транспонировав ее, мы получим тоже большую квадратную матрицу

$$\begin{pmatrix} q^{\sim} \\ \bar{q}^{\sim} \end{pmatrix}.$$

Из условия II получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} q^{\sim} \\ \bar{q}^{\sim} \end{pmatrix}(q, \bar{q})=\begin{pmatrix} 0 & q^{\sim}\bar{q} \\ \bar{q}^{\sim}q & 0 \end{pmatrix},$$

которая, согласно условию III′, не имеет нулевых собственных значений. Отсюда следует, что матрица $(q, \bar{q})$ не имеет нулевых собственных значений, и мы получаем другое доказательство теоремы о независимости из раздела 5.

Уравнения (16.1), определяющие простой кет $|Q\rangle$, можно заменить на $^1/_2 n$ любых независимых их линейных комбинаций. Это дает возможность заменить кет-матрицу q_{ra} матрицей

$$q^*_{ra}=q_{rb}\alpha_{ba}$$

или, символически,

$$q^*=q\alpha, \tag{16.5}$$

где α — малая квадратная матрица с определителем, отличным от нуля. Уравнение (16.3) при этом переходит в уравнение

$$q^{*\sim}\xi\, Q\rangle = a^{\sim} q^{\sim}\xi\,|\,Q\rangle = 0.$$

Если матрица q ортонормирована и удовлетворяет условию (16.4), то условие ортонормированности матрицы q^* имеет вид

$$1 = q^{*\sim}\bar{q}^* = \alpha^{\sim} q^{\sim}\bar{q}\bar{\alpha} = \alpha^{\sim}\bar{\alpha},$$

т. е. при этом матрица α должна быть унитарной. Если матрица q не ортонормироваиа, то матрицу q^* можно сделать ортонормированной, выбрав подходящую матрицу α.

Кет-матрица, разумеется, является как раз матрицей типа q из раздела 7 для случая $m = {}^1/_2 n$ и потому удовлетворяет условию (7.4). Она задает оператор четверти оборота ω, который удовлетворяет условию $\omega q = iq$ и в явном виде определяется условием (7.2) или (7.5).

Поскольку матрица $q^{\sim}$ имеет ${}^1/_2 n$ строк, мы можем умножить обе части равенства (16.3) слева на любую матрицу с ${}^1/_2 n$ столбцами. Взяв в качестве такой матрицы $\bar{q}(q^{\sim}\bar{q})^{-1}$, получим

$$\bar{q}(q^{\sim}\bar{q})^{-1} q^{\sim}\xi\,|\,Q\rangle = 0. \qquad (16.6)$$

С учетом соотношения, сопряженного с (7.5), получаем

$$(1 + i\omega)\,\xi\,|\,Q\rangle = 0. \qquad (16.7)$$

От уравнения (16.7) можно вернуться к уравнению (16.3), поскольку из (16.7) следует (16.6), что дает (16.3) после умножения на $q^{\sim}$ слева. Таким образом, уравнение (16.7) дает другой способ задания простого кет. В него входит лишь оператор четверти оборота ω, и оно ие связано с системой координат на максимальной нулевой плоскости. При преобразовании (16.5) оно не меняется.

Если q — кет-матрица, то $\bar{q}$ — другая кет-матрица, оператор ω которой имеет обратный знак по отношению к ω для матрицы q.

Транспонирование кет-матрицы q дает бра-матрицу $q^{\sim}$. Ею определяется простой бра $\langle Q\,|$, удовлетворяющий уравнению

$$\langle Q \,|\, q_{ra}\xi_r = 0.$$

Его можно переписать в виде

$$\langle Q \,|\, q^{\sim}\xi = 0,$$

или

$$\langle Q \,|\, \xi^{\sim} q = 0. \tag{16.8}$$

17. Теорема о двух кет-матрицах

Пусть q и p — две кет-матрицы, которым соответствуют операторы четверти полного оборота ω_q и ω_p. Рассмотрим три определителя

$$\{q^{\sim}p\}, \quad \{q, p\} \quad \text{и} \quad \{\omega_q - \omega_p\}. \tag{17.1}$$

Первый из них представляет собой малый квадрат, а два остальных — большие квадраты. Теорема утверждает, что если обращается в нуль один из них, то два остальных также обращаются в нуль.

Определитель $\{q, p\}$ равен определителю транспонированной матрицы $\left\{\begin{matrix} q^{\sim} \\ p^{\sim} \end{matrix}\right\}$. Таким образом,

$$\{q, \ p\}^2 = \left\{\begin{matrix} q^{\sim} \\ p^{\sim} \end{matrix}\right\}\{q, \ p\} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} 0 & q^{\sim}p \\ p^{\sim}q & 0 \end{matrix}\right\} = -\{q^{\sim}p\}^2,$$

так что

$$\{q^{\sim}p\} = \pm i\{q, p\}.$$

Тем самым относительно первых двух определителей (17.1) теорема доказана.

Если $\{\omega_q - \omega_p\} = 0$, то существует большой столбец u, такой, что

$$(\omega_q - \omega_p)\, u = 0. \tag{17.2}$$

Мы можем считать матрицу-столбец u действительной, поскольку все уравнения, которым она должна удовлетворять, действительны. Теперь образуем большой столбец

$$v = \frac{1}{2}(1 - i\omega_q)\,u = \frac{1}{2}(1 - i\omega_p)\,u.$$

Если столбец u действителен, то v не может обращаться в нуль. Из (7.5) следует, что

$$v = q\,(\bar{q}^{\sim} q)^{-1}\,\bar{q}^{\sim} u.$$

Таким образом,

$$v^{\sim} q = u^{\sim}\bar{q}\,(q^{\sim}\bar{q})^{-1} q^{\sim} q = 0.$$

Аналогично

$$v^{\sim} p = 0,$$

и потому

$$v^{\sim}(q, p) = 0. \tag{17.3}$$

Таким образом, матрица (q, p) имеет нулевое собственное значение и ее определитель равен нулю.

Обратно, если нам дано уравнение (17.3), то $v^{\sim} q = 0$ и, стало быть, из (7.5) следует, что

$$v^{\sim}(1 - i\omega_q) = 0.$$

Аналогично условие $v^{\sim} p = 0$ приводит к уравнению

$$v^{\sim}(1 - i\omega_p) = 0.$$

Следовательно,

$$v^{\sim}(\omega_q - \omega_p) = 0 \tag{17.4}$$

и $\{\omega_q - \omega_p\} = 0$. Тем самым теорема доказана.

Следует иметь в виду, что если столбец v удовлетворяет уравнению $v^{\sim} q = 0$, то он не может быть действительным. В противном случае большой столбец v должен также удовлетворять уравнению $v^{\sim}\bar{q} = 0$, а это противоречит теореме о независимости. Таким образом, столбец v, удовлетворяющий условию (17.3) и, значит, условию (17.4), дает комплексный столбец u, удовлетворяющий условию (17.2) и эквивалентный двум действительным столбцам. Следовательно, каждому независимому решению уравнения (17.3) соответствуют два независимых решения уравнения (17.2). Таким образом, число независимых решений уравнения (17.2) должно быть четным.

Этот результат можно было бы получить более прямым путем, заметив, что для любого решения u уравнения (17.2) столбец $\omega_q u$ (равный $\omega_p u$) является другим решением. Действительно,

$$(\omega_q - \omega_p)\,\omega_q u = -\,\omega_p(\omega_q - \omega_p)\,u = 0.$$

Другая формулировка теоремы: если какой-либо из трех определителей

$$\{\bar{q}^{\sim}p\},\quad \{\bar{q}, p\}\quad \text{и}\quad \{\omega_q + \omega_p\}$$

обращается в нуль, то обращаются в нуль и два других определителя. Это следует из рассмотренной ранее формулировки теоремы, поскольку при замене оператора q оператором $\bar{q}$ оператор ω_q следует заменить оператором $-\omega_q$.

Как следствие этой теоремы мы имеем формулу

$$p\,(q^{\sim}p)^{-1}\,q^{\sim} + q\,(p^{\sim}q)^{-1}\,p^{\sim} = 1, \tag{17.5}$$

которая справедлива, если $\{q^{\sim}p\} \neq 0$. Чтобы показать правильность этой формулы, умножим обе части ее справа на квадратную матрицу (q, p). В левой части мы получим в точности матрицу (q, p). Поскольку определитель этой матрицы отличен от нуля, мы можем затем разделить обе части равенства на матрицу (q, p).

Если в формуле (17.5) положить $p = \bar{q}$, то мы вернемся к формуле (7.4).

18. Связь между двумя кет-матрицами

Теорема. Пусть q — кет-матрица, а R — большая ортогональная матрица. Тогда матрица $p = Rq$ — тоже кет-матрица.

Доказательство. Мы имеем

$$p^{\sim}p = q^{\sim}R^{\sim}Rq = q^{\sim}q = 0,$$

так что условие II из § 16 выполняется. При этом не должно существовать малого столбца u, удовлетворяющего условию $pu = 0$, поскольку отсюда следовало бы, что $Rqu = 0$ и потому $qu = 0$, а это противоречит условию III для q. Таким образом, условие III для p также выполняется.

Обратная теорема. Пусть q и p — кет-матрицы. Тогда существует большая ортогональная матрица R, такая, что $p = Rq$.

Доказательство. Возьмем

$$R = p(\bar{q}^{\sim} q)^{-1} \bar{q}^{\sim} + \bar{p}(p^{\sim} \bar{p})^{-1} q^{\sim}. \tag{18.1}$$

Мы сразу же видим, что $Rq = p$, а также

$$R^{\sim} = \bar{q}(q^{\sim} \bar{q})^{-1} p^{\sim} + q(\bar{p}^{\sim} p)^{-1} \bar{p}^{\sim}.$$

Поскольку $p^{\sim} p = 0$ и $q^{\sim} q = 0$, из соотношения (7.4) получаем

$$R^{\sim} R = \bar{q}(q^{\sim} \bar{q})^{-1} q^{\sim} + q(\bar{q}^{\sim} q)^{-1} \bar{q}^{\sim} = 1.$$

Таким образом, все условия для R выполняются.

Заметим, что если поменять местами q и p в правой части равенства (18.1), то мы получим как раз $R^{\sim}$, а это и нужно, чтобы выполнялось условие $q = R^{\sim} p$.

Равенство $p = Rq$ с данными кет-матрицами q и p и условие $R^{\sim} R = 1$ не определяют R однозначно, и формула (18.1) дает лишь одно решение.

Чтобы найти общее решение, рассмотрим сначала случай, когда $p = q$. В этом случае мы должны иайти общую матрицу S, такую, что

$$q = Sq, \qquad S^{\sim} S = 1. \tag{18.2}$$

Из этих соотношений следует, что $q = S^{\sim} q$ или $q^{\sim} = q^{\sim} S$. Тогда из (7.4) получаем

$$S = \{\bar{q}(q^{\sim} \bar{q})^{-1} q^{\sim} + q(\bar{q}^{\sim} q)^{-1} \bar{q}^{\sim}\} S \{\bar{q}(q^{\sim} \bar{q})^{-1} q^{\sim} + q(\bar{q}^{\sim} q)^{-1} \bar{q}^{\sim}\} = \bar{q}(q^{\sim} \bar{q})^{-1} q^{\sim} + q(\bar{q}^{\sim} q)^{-1} \bar{q}^{\sim} S \bar{q}(q^{\sim} \bar{q})^{-1} q^{\sim} + q(\bar{q}^{\sim} q)^{-1} \bar{q}^{\sim},$$

что сводится к равенству

$$S = 1 + qBq^{\sim}, \tag{18.3}$$

где

$$B = (\bar{q}^{\sim} q)^{-1} \bar{q}^{\sim} S \bar{q}(q^{\sim} \bar{q})^{-1}.$$

Из равенства $S^{\sim}S=1$ вытекает условие

$$1=(1+qB^{\sim}q^{\sim})(1+qBq^{\sim}),$$

или

$$q(B+B^{\sim})q^{\sim}=0.$$

Отсюда следует, что матрица B антисимметрична.

Мы можем взять произвольную малую антисимметричную матрицу B и подставить ее в формулу (18.3). Полученная таким путем матрица S удовлетворяет условиям (18.2).

Общим решением уравнений $p=Rq$ и $R^{\sim}R=1$ является произведение матрицы R [формула (28.1)] в качестве левого сомножителя на общую матрицу S [формула (18.3)] в качестве правого сомножителя. Таким образом,

$$R=p(\bar{q}^{\sim}q)^{-1}\bar{q}^{\sim}+\bar{p}(p^{\sim}\bar{p})^{-1}q^{\sim}+pBq^{\sim}, \qquad (18.4)$$

где B — самая общая антисимметричная матрица.

В качестве обобщения выражения (18.1) можно взять

$$R=p(u^{\sim}q)^{-1}u^{\sim}+v(p^{\sim}v)^{-1}q^{\sim}, \qquad (18.5)$$

где u и v — любые кет-матрицы, такие, что $\{u^{\sim}q\}\neq 0$ и $\{p^{\sim}v\}\neq 0$. Действительно, из выражения (18.5) прямо следует, что

$$Rq=p, \qquad p^{\sim}R=q^{\sim},$$

а из соотношения (17.5) следует, что

$$R^{\sim}R=u(q^{\sim}u)^{-1}p^{\sim}v(p^{\sim}v)^{-1}q^{\sim}+$$
$$+q(v^{\sim}p)^{-1}v^{\sim}p(u^{\sim}q)^{-1}u^{\sim}=$$
$$=u(q^{\sim}u)^{-1}q^{\sim}+q(u^{\sim}q)^{-1}u^{\sim}=1.$$

Разумеется, формула (18.5) есть частный случай формулы (18.4) при некотором определенном выборе матрицы B.

Если обе матрицы q и p ортонормированы, то выражение (18.1) сводится к виду

$$R=p\bar{q}^{\sim}+\bar{p}q^{\sim}. \qquad (18.6)$$

Такая матрица R действительна. Это единственная действительная матрица R, удовлетворяющая условиям $p = Rq$, $R^{\sim}R = 1$.

Вышеизложенную теорию, разумеется, можно применить к случаю, когда матрица p есть q^* из формулы (16.5), так что $|P\rangle$ и $|Q\rangle$ различаются лишь численным множителем. Полагая в (18.1) $p = q\alpha$, получаем

$$R = q\alpha(\bar{q}^{\sim}q)^{-1}\bar{q}^{\sim} + \bar{q}(q^{\sim}\bar{q})^{-1}\alpha^{\sim-1}q^{\sim}. \tag{18.7}$$

Нетрудно убедиться, что такая матрица R коммутирует с оператором ω из уравнения (7.5).

19. Представление кет

Чтобы получить представление всех кет, выберем некий простой кет в качестве стандартного, а остальные кет свяжем с ним. Обозначим стандартный кет символом $|Z\rangle$, и пусть z — ортонормированная кет-матрица, соответствующая кет $|Z\rangle$. Таким образом,

$$z^{\sim}\xi\,|Z\rangle = 0. \tag{19.1}$$

Определим комплексные алгебраические величины η_a формулой

$$\eta_a = 2^{-1/2}\bar{z}_{ra}\xi_r. \tag{19.2}$$

Соответствующие сопряженные величины даются формулой

$$\bar{\eta}_a = 2^{-1/2}z_{ra}\xi_r.$$

Существует $^1/_2 n$ величин η_a, и они, так же как и сопряженные величины, по теореме о независимости являются независимыми функциями координат ξ_a. Поэтому вместо координат ξ_a в качестве базисных алгебраических величин можно выбрать величины η_a.

В силу соотношений (10.1) и (7.1) для η_a выполняются соотношения

$$[\eta_a, \eta_b]_+ = \frac{1}{2}\bar{z}_{ra}\bar{z}_{sb}[\xi_r, \xi_s]_+ = \bar{z}_{ra}\bar{z}_{rb} = (\bar{z}^{\sim}\bar{z})_{ab} = 0. \tag{19.3}$$

Таким образом, все величины η_a (и $\bar{\eta}_a$) антикоммутируют. Полагая $b=a$, получаем

$$\eta_a^2=0, \quad \bar{\eta}_a^2=0. \tag{19.4}$$

Окончательно из условия ортонормированности находим

$$[\eta_a, \bar{\eta}_b]_+=(\bar{z}^{\sim}z)_{ab}=\delta_{ab}. \tag{19.5}$$

Мы можем считать, что величины η_a образуют малый столбец, и переписать формулу (19.2) в виде

$$\eta=2^{-1/2}\bar{z}^{\sim}\xi. \tag{19.6}$$

Тогда уравнение (19.1) можно записать так:

$$\bar{\eta}\,|Z\rangle=0. \tag{19.7}$$

Возьмем произвольную функцию $F(\eta, \bar{\eta})$, имеющую вид степенного ряда по переменным η_a и $\bar{\eta}_a$. Пользуясь соотношением (19.5), мы можем изменить порядок сомножителей в каждом слагаемом ряда так, чтобы все величины η_a находились слева от $\bar{\eta}_b$. В этом случае будем говорить, что функция F *правильно упорядочена*.

Если функция F правильно упорядочена, то в выражении для $F(\eta, \bar{\eta})\,|Z\rangle$ можно оставить лишь те члены, которые не содержат $\bar{\eta}_b$. Таким образом,

$$F(\eta, \bar{\eta})\,|Z\rangle=\psi(\eta)\,|Z\rangle, \tag{19.8}$$

где $\psi(\eta)$ — степенной ряд по переменной η_a. Но из равенств (19.4) следует, что переменная η_a не может входить в ψ в степени, более высокой, чем первая.

Мы можем теперь рассматривать функцию ψ антикоммутирующих переменных η_a как представляющую кет-вектор $F(\eta, \bar{\eta})\,|Z\rangle$. Так могут быть представлены все наши кет, поскольку единственный способ получения новых кет — это сложение и умножение кет слева на функции переменной ξ_a, т. е. переменных η_a и $\bar{\eta}_b$. Мы получаем представление, основанное на переменных η_a и стандартном кет $|Z\rangle$.

Подсчитаем теперь все независимые кет. Каждому возможному слагаемому в $\psi(\eta)$ соответствует один кет, так что существует один кет для любого произведения

$$\eta_a \eta_b \eta_c \ldots \tag{19.9}$$

с любым числом неодинаковых сомножителей. Любая величина η_a может и входить и не входить в это произведение, так что число возможных вариантов равно $2^{\frac{1}{2}n}$.

Таково число независимых элементарных спинорных величин в n-мерном пространстве при четном n. Оно намного больше n. При $n \to \infty$ оно превышает счетную бесконечность.

Мы можем рассматривать только такие кет, которые могут быть получены путем сложения кет и вращения стандартного кет. Оператор поворота содержит лишь четные степени ξ_a, так что ψ содержит лишь члены типа (19.9) с четным числом сомножителей. В этом случае каждое из η_a также может и входить и не входить в произведение, кроме последнего η_a, наличие или отсутствие которого зависит от числа сомножителей, ибо последнее должно быть четным. Теперь число возможных вариантов равно $2^{\frac{1}{2}n-1}$.

Введем для простого кет $|Z\rangle$, удовлетворяющего условию (19.1) или (19.7), обращенный простой кет $|\bar{Z}\rangle$ в соответствии с равенством

$$\bar{z}^{\sim}\xi\,|\bar{Z}\rangle = 0,$$

или

$$\eta\,|\bar{Z}\rangle = 0. \tag{19.10}$$

Из (19.4) явствует, что при подходящем выборе численного коэффициента мы имеем

$$|\bar{Z}\rangle = \prod \eta_a\,|Z\rangle, \tag{19.11}$$

где произведение берется по всем η_a в некотором порядке.

Для общего кет $\psi(\eta)\,|Z\rangle$ обращенный кет определяется как $\bar{\psi}(\bar{\eta})\,|\bar{Z}\rangle$, где $\bar{\psi}$ — функция, полученная из функции ψ путем замены в ней $i \to -i$ без изменения порядка сомножителей в произведении. Из любого уравнения, содержащего кет, мы получим обращенное уравнение, перейдя к обращенным кет и заменив i на $-i$.

Величины η_a и $\bar{\eta}_a$ с точки зрения физики можно интерпретировать как операторы рождения и уничтожения фермионов. Тогда кет $|Z\rangle$, удовлетворяющий условию (19.7), представляет состояние, в котором частицы отсутствуют, а кет $|\bar{Z}\rangle$, удовлетворяющий условию (19.10) или (19.11), представляет полностью заполненное состояние. В состоянии, обращенном по отношению к какому-либо состоянию, заполненные и незаполненные состояния отдельных фермионов меняются местами.

20. Представитель простого кет. Общий случай

Любой простой кет $|Q\rangle$ можно представить как результат действия оператора поворота $\mathcal{R} = e^{{}^1/_4 \xi^\sim A \xi}$ (при антисимметричном A) на стандартный кет $|Z\rangle$. Таким образом,

$$|Q\rangle = e^{{}^1/_4 \xi^\sim A \xi} |Z\rangle. \tag{20.1}$$

Мы можем выразить величины ξ_a, входящие в это выражение, через η_b и $\bar{\eta}_b$. Затем, разложив экспоненту в ряд и правильно упорядочив все члены ряда путем перестановки сомножителей, получим окончательную формулу

$$|Q\rangle = \psi(\eta) |Z\rangle. \tag{20.2}$$

Мы имеем два оператора четверти полного оборота ω_q и ω_z, связанных с простыми кет q и z. В общем случае

$$\langle\!\langle \omega_q + \omega_z \rangle\!\rangle \neq 0.$$

Можно показать, что в этом случае $\psi(\eta)$ имеет вид

$$\psi(\eta) = k e^{\eta^\sim \lambda \eta},$$

где λ — некая малая квадратная матрица, а k — число. Заметим, что в силу соотношения (19.3) вклад в произведение $\eta^\sim \lambda \eta$ дает лишь антисимметричная часть множителя λ.

Из теоремы о двух кет-матрицах следует, что, поскольку $\langle\bar{z}, q\rangle \neq 0$, векторы $\bar{z}_a$ и q_a порождают все пространство и любой вектор можно представить в виде линейной комбинации их. Выразим через них вектор z_b. Имеем

$$z_b = -\bar{z}_a\lambda_{ab} + q_a\mu_{ab}, \tag{20.3}$$

где λ_{ab} и μ_{ab} — некие малые квадратные матрицы. Знак минус перед λ введен для удобства. В матричных обозначениях

$$z = -\bar{z}\lambda + q\mu. \tag{20.4}$$

Транспонированное уравнение имеет вид

$$z^{\sim} = -\lambda^{\sim}\bar{z}^{\sim} + \mu^{\sim}q^{\sim}.$$

Таким образом

$$(z^{\sim} + \lambda^{\sim}\bar{z}^{\sim})(z + \bar{z}\lambda) = \mu^{\sim}q^{\sim}q\mu = 0.$$

С учетом условия ортонормированности для z это сводится к условию

$$\lambda + \lambda^{\sim} = 0,$$

откуда видно, что матрица λ антисимметрична.

Уравнения (16.3) дают

$$\mu^{\sim}q^{\sim}\xi|Q\rangle = 0,$$

так что

$$(z^{\sim} - \lambda\bar{z}^{\sim})\,\xi|Q\rangle = 0.$$

Пользуясь выражением (19.6) и сопряженным с ним выражением, это уравнение можно переписать в виде

$$(\bar{\eta}^{\sim} - \lambda\eta)|Q\rangle = 0$$

или, с учетом соотношения (20.2), как

$$(\bar{\eta}^{\sim} - \lambda\eta)\,\psi(\eta)|Z\rangle = 0. \tag{20.5}$$

Рассмотрим слагаемое вида (19.9) функции $\psi(\eta)$, в которое никакой сомножитель η_a не входит больше одного раза. Далее, для определенного $\bar{\eta}_g$ возьмем произведение

$$\bar{\eta}_g\eta_a\eta_b\eta_c\ldots|Z\rangle. \tag{20.6}$$

Если ни один из сомножителей $\eta_a, \eta_b, \eta_c, \ldots$ не совпадает с η_g, то произведение (20.6) равно нулю. Если один из этих сомножителей равен η_g, то мы можем перенести его в произведении (19.9) налево, учитывая, если необходимо, знак минус. Затем мы можем использовать тождество

$$\bar{\eta}_g \eta_g \eta_a \eta_b \ldots | Z\rangle = \eta_a \eta_b \ldots | Z\rangle,$$

показывающее, что $\bar{\eta}_g$ играет роль $\partial/\partial\eta_g$.

Таким образом, имеем

$$\bar{\eta}_g \eta_a \lambda_{ab} \eta_b | Z\rangle = \lambda_{ab} (\delta_{ga} \eta_b - \delta_{gb} \eta_a) | Z\rangle = 2\lambda_{gb} \eta_b | Z\rangle.$$

Следовательно,

$$\bar{\eta}_g (\eta^{\sim} \lambda \eta)^n | Z\rangle = 2\lambda_{gb} \eta_b n (\eta^{\sim} \lambda \eta)^{n-1} | Z\rangle$$

и

$$\bar{\eta}_g e^{1/2 \eta^{\sim} \lambda \eta} | Z\rangle = \lambda_{gb} \eta_b e^{1/2 \eta^{\sim} \lambda \eta} | Z\rangle.$$

Итак, интеграл уравнения (20.5) имеет вид

$$\psi(\eta) = k e^{1/2 \eta^{\sim} \lambda \eta}. \tag{20.7}$$

Для матрицы λ можно получить явное выражение. Умножая обе части равенства (20.4) слева на $q^{\sim}$ и учитывая условие $q^{\sim} q = 0$, мы получаем

$$q^{\sim} \bar{z} \lambda = - q^{\sim} z.$$

Таким образом,

$$\bar{q} (q^{\sim} \bar{q})^{-1} q^{\sim} \bar{z} \lambda = - \bar{q} (q^{\sim} \bar{q})^{-1} q^{\sim} z.$$

С учетом соотношения, сопряженного с соотношением (7.5), отсюда получаем

$$(1 + i\omega_q) \bar{z} \lambda = - (1 + i\omega_q) z. \tag{20.8}$$

Теперь, применяя (7.5) к z, имеем

$$(1 - i\omega_z) \bar{z} = 0$$

и сопряженное соотношение

$$(1 + i\omega_z) z = 0,$$

Таким образом, равенство (20.8) дает

$$(\omega_z + \omega_q)\bar{z}\lambda = (\omega_z - \omega_q) z.$$

Поскольку определитель суммы $\omega_z + \omega_q$ отличен от нуля, мы можем разделить обе части на $\omega_z + \omega_q$. Получим

$$\bar{z}\lambda = (\omega_z + \omega_q)^{-1} (\omega_z - \omega_q) z,$$

или

$$\lambda = z^{\sim} (\omega_z + \omega_q)^{-1} (\omega_z - \omega_q) z. \qquad (20.9)$$

Заметим, что

$$(\omega_z + \omega_q)(\omega_z - \omega_q) = \omega_q\omega_z - \omega_z\omega_q$$

и

$$(\omega_z - \omega_q)(\omega_z + \omega_q) = \omega_z\omega_q - \omega_q\omega_z.$$

Стало быть, оператор $\omega_z - \omega_q$ антикоммутирует с оператором $\omega_z + \omega_q$. Он должен антикоммутировать и с оператором $(\omega_z + \omega_q)^{-1}$. Отсюда следует, что матрица λ, даваемая формулой (20.9), антисимметрична.

21. Представитель простого кет. Частные случаи

Предположим теперь, что $\langle\!\langle \omega_q + \omega_z \rangle\!\rangle = 0$. Векторы $\bar{z}$ и q теперь уже не порождают все пространство, так что между ними существует линейное соотношение вида

$$\bar{z}u + qv = 0, \qquad (21.1)$$

где u и v — малые столбцы. Таким образом,

$$u^{\sim}\bar{z}^{\sim} + v^{\sim}q^{\sim} = 0.$$

Из уравнения (16.3) мы получаем

$$v^{\sim}q^{\sim}\xi\,|Q\rangle = 0,$$

так что

$$u^{\sim}\bar{z}^{\sim}\xi\,|Q\rangle = 0.$$

Тогда уравнение (19.6) дает

$$u^{\sim}\eta\,|Q\rangle = 0. \qquad (21.2)$$

Стало быть, для $|Q\rangle$ вида (20.2) мы должны иметь

$$u^{\sim}\eta\psi(\eta)=0. \tag{21.3}$$

Поскольку величины η_a антикоммутируют и квадраты их равны нулю, квадрат любой их линейной комбинации, например $u^{\sim}\eta$, должен быть равен нулю. Тогда из уравнения (21.3) следует, что $\psi(\eta)$ содержит $u^{\sim}\eta$ в качестве множителя.

Теперь рассмотрим все независимые соотношения (21.1)

$$\bar{z}u_m+qv_m=0, \qquad m=1,\ 2,\ \ldots . \tag{21.4}$$

Все величины u_m должны быть независимы, поскольку если бы между ними существовало линейное соотношение, то мы могли бы получить уравнение (21.4) с $u_m=0$, а это противоречило бы требованию независимости всех векторов q. Значит, каждое из уравнений (21.4) дает независимое уравнение (21.2) и множитель $u_m^{\sim}\eta$ в выражении для ψ. Таким образом, ψ имеет вид

$$\psi(\eta)=\prod_m(u_m^{\sim}\eta)\,\chi(\eta). \tag{21.5}$$

Теперь можно определить функцию $\chi(\eta)$, действуя так же, как в предыдущем разделе. Нужно написать уравнения типа (20.3), связывающие векторы z, $\bar{z}$ и q, и каждое из них даст дифференциальное уравнение для χ. Опять получаем, что χ имеет вид (20.7).

Линейные множители $u^{\sim}\eta$ в формуле (21.5) можно, конечно, заменить любыми их линейно независимыми комбинациями. Число этих множителей четно, если простой кет $|Q\rangle$ можно получить из стандартного кет $|Z\rangle$ путем вращения, и нечетно, если этот кет получается в результате отражения.

Функция $\psi(\eta)$ может состоять только из линейных сомножителей. В таком случае, согласно формуле (19.11), $|Q\rangle=|\bar{Z}\rangle$.

22. Фиксация коэффициентов простых кет

Рассмотрим какую-либо кет-матрицу q. Возьмем простой кет, соответствующий кет-матрице q, выбрав конкретное значение неопределенного множителя в нем, и обозначим его символом $|q\rangle$. Здесь мы исходим из кет-матрицы, чтобы задать кет.

Пусть теперь p — любая другая кет-матрица. Согласно сказанному в § 18, мы можем представить ее в виде $p=Rq$, где R — ортогональная матрица. Пусть $\mathcal{R}$ — оператор поворота, соответствующий матрице R. Тогда $\mathcal{R}|q\rangle$ — кет, соответствующий кет-матрице p. Если оператор $\mathcal{R}$ нормирован, то кет $\mathcal{R}|q\rangle$ определен однозначно с точностью до множителя ± 1. Мы обозначим его символом $|p\rangle$.

Если не считать произвола в знаке, то мы имеем теперь определенный простой кет для каждой кет-матрицы, после того как у одной из них фиксирован коэффициент. Простые кет с коэффициентами, фиксированными таким способом, можно задавать кет-матрицами.

Если фиксировать коэффициенты таким способом, то кет-матрица q, с которой мы начинали, не играет особой роли. Начав с любой другой кет-матрицы, мы получили бы тот же результат, поскольку операторы поворота, переводящие один простой кет в другой, имеют вполне определенные (если не считать множителя ± 1) коэффициенты независимо от начальной кет-матрицы. При этом нет никакой необходимости в том, чтобы начальная кет-матрица была ортонормированной.

Теперь уравнение (16.3) принимает вид

$$q^{\sim}\xi|q\rangle=0, \tag{22.1}$$

и мы имеем общую формулу

$$|Rq\rangle=\mathcal{R}|q\rangle. \tag{22.2}$$

Мы можем взять в качестве кет-матрицы p матрицу $q\alpha$, и тогда получим простой кет $|p\rangle=|q\alpha\rangle$, который может отличаться от $|q\rangle$ только численным множителем, т. е.

$$|q\alpha\rangle=k|q\rangle.$$

Найдем этот численный множитель k.

Мы имеем теперь вращение R, задаваемое формулой (18.7). Нам нужно получить соответствующий оператор $\mathcal{R}$ и вычислить $\mathcal{R}|q\rangle$.

Рассмотрим инфинитезимальный случай $\alpha = 1 + \varepsilon\beta$, так что $R = 1 + \varepsilon A$, причем

$$A = q\beta(\bar{q}^{\sim} q)^{-1}\bar{q} - \bar{q}(q^{\sim}\bar{q})^{-1}\beta^{\sim} q^{\sim} = M - M^{\sim},$$

где

$$M = q\beta(\bar{q}^{\sim} q)^{-1}\bar{q}^{\sim}.$$

Умножая обе части равенства (22.1) слева на $\bar{q}(q^{\sim}\bar{q})^{-1}\beta^{\sim}$, получаем

$$M^{\sim}\xi \,|\, q\rangle = 0.$$

Тогда из (10.4) следует, что

$$\xi^{\sim} A\xi \,|\, q\rangle = \xi^{\sim}(M + M^{\sim})\xi \,|\, q\rangle = 2 < M > |\, q\rangle.$$

Теперь

$$< M > = < q\beta(\bar{q}^{\sim} q)^{-1}\bar{q}^{\sim} > = < \beta >,$$

поскольку, вычисляя диагональную сумму произведения матриц, мы можем их циклически переставлять, даже если сомножители не являются квадратными матрицами.

Мы имеем

$$\mathcal{R} = 1 + \varepsilon\mathcal{A},$$

где

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4}\xi^{\sim}\mathcal{A}\xi.$$

Таким образом,

$$\mathcal{A}\,|\, q\rangle = \frac{1}{2} < \beta > |\, q\rangle$$

и

$$\mathcal{R}\,|\, q\rangle = \left\{1 + \frac{\varepsilon}{2} < \beta > \right\} |\, q\rangle = \{1 + \varepsilon < \beta > \}^{1/2} |\, q\rangle =$$

$$= \langle\!\langle 1 + \varepsilon\beta \rangle\!\rangle^{1/2} |\, q\rangle.$$

Мы получим конечное преобразование, применяя повторно инфинитезимальные преобразования. Результат, очевидно, таков:

$$|\, q\alpha\rangle = \langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle^{1/2} |\, q\rangle. \tag{22.3}$$

Произвол в знаке кет соответствует произволу в знаке квадратного корня.

23. Формула для скалярного произведения

Указанный в предыдущем разделе способ фиксации численных коэффициентов простых кет будет применяться также и к простым бра. При этом бра будут задаваться соответствующими бра-матрицами. Тогда уравнение (16.8) примет вид

$$\langle q^{\sim} | \xi^{\sim} q = 0, \tag{23.1}$$

т. е. вид транспонированного уравнения (22.1). Общей формуле (22.2) соответствует формула

$$\langle q^{\sim} | \mathcal{R} = \langle q^{\sim} R |. \tag{23.2}$$

Ее можно получить путем транспонирования уравнения (22.2) и замены R на R^{-1}.

Если коэффициеиты простых бра и кет фиксированы, то для простого бра $\langle p^{\sim} |$ и простого кет $| q \rangle$ мы имеем вполне определенное скалярное произведение

$$\langle p^{\sim} | q \rangle. \tag{23.3}$$

Вычислим это произведение. Оно зависит лишь от произведения матриц $p^{\sim} q$, поскольку из (23.2) и (22.2) следует равенство

$$\langle p^{\sim} R^{-1} | Rq \rangle = \langle p^{\sim} | \mathcal{R}^{-1} \mathcal{R} | q \rangle = \langle p^{\sim} | q \rangle.$$

Посмотрим, как изменяется произведение (23.3) при малом изменении кет-матрицы q. Положим $q^* = (1 + \varepsilon A) q$, где A — антисимметричная матрица. Имеем

$$\langle p^{\sim} | q^* \rangle = \langle p^{\sim} | 1 + \frac{1}{4} \varepsilon \xi^{\sim} A \xi | q \rangle = \\ = \langle p^{\sim} | q \rangle + \frac{1}{4} \varepsilon \langle p^{\sim} | \xi^{\sim} A \xi | q \rangle.$$

Предположим, что $\{p^{\sim} q\} \neq 0$. Тогда из формул (17.5) у (23.1), примененных к p, получаем

$$\langle p^{\sim} | \xi^{\sim} A \xi | q \rangle = \\ = \langle p^{\sim} | \xi^{\sim} \{ p (q^{\sim} p)^{-1} q^{\sim} + q (p^{\sim} q)^{-1} p^{\sim} \} A \xi | q \rangle = \\ = \langle p^{\sim} | \xi^{\sim} q (p^{\sim} q)^{-1} p^{\sim} A \xi | q \rangle = \langle p^{\sim} | \xi^{\sim} K \xi | q \rangle,$$

где

$$K = q (p^{\sim} q)^{-1} p^{\sim} A.$$

Из (22.1) следует, что

$$\xi^{\sim} K^{\sim} \xi | q\rangle = 0. \tag{23.4}$$

Поэтому из (10.4) получаем

$$\langle p^{\sim} | \xi^{\sim} A \xi | q\rangle = \langle p^{\sim} | \xi^{\sim} (K + K^{\sim}) \xi | q\rangle = 2 <K> \langle p^{\sim} | q\rangle.$$

Но

$$<K> = <q (p^{\sim} q)^{-1} p^{\sim} A> = <p^{\sim} A q (p^{\sim} q)^{-1}>.$$

Поэтому

$$\langle p^{\sim} | q^{*}\rangle = \langle p^{\sim} | q\rangle \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon <p^{\sim} A q (p^{\sim} q)^{-1}> \right\}.$$

С точностью до первого порядка по ε

$$1 + \varepsilon <p^{\sim} A q (p^{\sim} q)^{-1}> = \{1 + \varepsilon p^{\sim} A q (p^{\sim} q)^{-1}\} =$$
$$= \{p^{\sim} q + \varepsilon p^{\sim} A q\} \{p^{\sim} q\}^{-1} = \{p^{\sim} q^{*}\} \{p^{\sim} q\}^{-1}.$$

Следовательно,

$$\frac{\langle p^{\sim} | q^{*}\rangle}{\{p^{\sim} q^{*}\}^{1/2}} = \frac{\langle p^{\sim} | q\rangle}{\{p^{\sim} q\}^{1/2}}.$$

Таким образом, величина $\langle p^{\sim} | q\rangle \{p^{\sim} q\}^{1/2}$ при изменении q не меняется. Точно так же она не меняется и при изменении p. Следовательно, это константа, которую мы можем нормировать к единице. Тогда

$$\langle p^{\sim} | q\rangle = \{p^{\sim} q\}^{1/2}. \tag{23.5}$$

Это общая формула для скалярного произведения простых бра и кет. В ней имеется произвол в знаке, поскольку знак простого бра и простого кет произволен. Заметим, что формула (23.5) согласуется с формулой (22.3).

Формула (23.5) была выведена в предположении, что величина $\{p^{\sim} q\}$ не равна нулю. Если же эта величина равна нулю, то формула тоже верна, поскольку тогда обе части ее равны нулю. Чтобы доказать равенство нулю левой части равенства, заметим, что в силу теоремы о двух кет-матрицах должен существовать вектор u, являющийся линейной комбинацией векторов q_a, а также линейной комбинацией векторов p_a.

Из формулы (22.1) следует, что

$$u^{\sim}\xi \mid q\rangle = 0,$$

и аналогично

$$u^{\sim}\xi \mid p\rangle = 0.$$

Это означает, что

$$\langle p^{\sim} \mid (u^{\sim}\xi)(\bar{u}^{\sim}\xi) + (\bar{u}^{\sim}\xi)(u^{\sim}\xi) \mid q\rangle = 0,$$

т. е.

$$2\bar{u}^{\sim}u\langle p^{\sim} \mid q\rangle = 0.$$

Таким образом, $\langle p^{\sim} \mid q\rangle = 0$.

Если R — произвольная ортогональная матрица, которая может быть и комплексиой, а $\mathcal{R}$ — соответствующий оператор поворота, то справедлива формула

$$\langle p^{\sim} \mid \mathcal{R} \mid q\rangle = \{ p^{\sim}Rq \}^{1/2}. \qquad (23.6)$$

Мы можем выразить $\mid q\rangle$ через стандартный кет $\mid z\rangle$, а $\langle p^{\sim} \mid$ — через стандартный бра $\langle \bar{z}^{\sim} \mid$. Тогда формула (23.6) прииимает вид

$$\langle \bar{z}^{\sim} \mid \mathcal{S} \mid z\rangle = \{\bar{z}^{\sim}Sz\}^{1/2}, \qquad (23.7)$$

где S — новая ортогональная матрица, а $\mathcal{S}$ — соответствующий оператор поворота.

БЕСКОНЕЧНОЕ ЧИСЛО ИЗМЕРЕНИЙ

24. Необходимость рассмотрения ограниченных матриц

Теперь мы перейдем к пределу при $n \to \infty$ и посмотрим, какие изменения придется сделать в развитой ранее теории. Мы чаще всего имели дело с уравнениями для матриц, а потому постараемся сохранить такие уравнения и в бесконечномерном случае.

Бесконечные матрицы можно перемножать при том условии, что столбцы первого сомножителя находятся во взаимно однозначном соответствии со строками второго и что сходятся все суммы, которыми выражаются элементы матрицы-произведения.

При повторном умножении в случае конечного числа измерений всегда выполняется ассоциативный закон умножения, и мы все время пользовались этим ранее. Но в бесконечномерном случае он, вообще говоря, не выполняется, и потому нам необходимо потребовать, чтобы используемые нами матрицы были ограниченными.

Ограниченная бесконечная матрица X — это матрица, обладающая тем свойством, что для любых двух нормированных векторов в гильбертовом пространстве u и v, записанных в виде столбцов, величина $|\tilde{u} X v|$ ограничена сверху. Ограниченные матрицы можно складывать и перемножать, причем в результате опять получаются ограниченные матрицы и умножение всегда ассоциативно. Используя вместо конечных ограниченные матрицы, мы можем надеяться сохранить общую схему уравнений [1]).

В дальнейшем для краткости мы будем называть взаимно однозначное соответствие просто *соответствием*. При наличии соответствия между строками

---

[1]) Строгую теорию ограниченных матриц см. в книге Винтнера (*Wintner A.*, Spectral Theorie der Unendlichen Matrizen S. Hirzel, Leipzig, 1929).

и столбцами бесконечной матрицы мы можем ввести понятия собственных значений и собственных векторов. В случае ограниченной матрицы должна существовать верхняя граница модуля ее собственных значений.

Напомним, что вращение задается матрицей R, удовлетворяющей уравнеиию

$$R^{\sim}R = RR^{\sim} = 1. \tag{24.1}$$

Такая матрица называется ортогональной. Ранее при рассмотрении этих уравнений не было необходимости в соответствии между строками и столбцами матрицы R. Теперь же для того, чтобы можно было рассматривать R как вращение, такое соответствие необходимо.

В случае действительного вращеиия матрица R унитарна, а потому должна быть и ограниченной, ибо все ее собственные значения равны по модулю единице. Если же R — комплексная матрица, то из уравнения (24.1) не следует, что она ограничена. Ее собственные значения могут стремиться к бесконечности.

Мы не хотим ограничиваться рассмотрением только действительных вращений. Многие важные результаты предыдущих разделов были получены благодаря использованию комплексиых вращений. Желая иметь аналогичную теорию для бесконечномерного случая, потребуем лишь, чтобы рассматриваемые комплексные вращения были ограничены.

25. Бесконечиая кет-матрица

Теперь у нас бесконечно большое число базисных алгебраических величин $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$, и все они попрежнему удовлетворяют уравнению (10.1). Мы будем иметь дело с величинами вида (10.3), где K — ограниченная матрица. Уравнение (10.4) по-прежнему выполняется при условии, что диагональная сумма $\langle K \rangle$ сходится.

Определим простой кет $|Q\rangle$ условиями

$$\sum_r q_{ra}\xi_r |Q\rangle = 0, \tag{25.1}$$

где q_{ra} при каждом значении a — компоненты вектора в гильбертовом пространстве, т. е.

$$\sum_r |q_{ra}|^2 \text{ сходится.} \tag{25.2}$$

Нам необходимо бесконечное число условий (25.1), так что величины q_{ra} образуют матрицу q с бесконечным числом строк и столбцов. Мы по-прежнему будем называть ее кет-матрицей. Таким образом, уравнение (25.1) можно записать в виде

$$q^{\sim}\xi|Q\rangle = 0. \tag{25.3}$$

Чтобы построить теорию, аналогичную конечномерному случаю, потребуем выполнения следующих условий:

I. Матрица q ограничена. Это условие сильнее условия (25.2).

II. $q^{\sim}q = 0$.

По аналогии с условием III из раздела 16 мы могли бы потребовать, чтобы не существовало вектора u_a в гильбертовом пространстве, такого, что

$$q_{ra}u_a = 0 \quad \text{или} \quad qu = 0. \tag{25.4}$$

Но такое условие было бы ие достаточно сильным. Оио гарантировало бы нам лишь, что q не будет иметь дискретного нулевого собственного значения при действии направо. Мы потребуем большего: матрица q не должна иметь при действии направо непрерывного интервала собственных значений, содержащего нуль. Это условие удобно сформулировать следующим образом:

III. q имеет ограниченную левую обратную матрицу. Существует ограниченная матрица b, такая, что

$$bq = 1. \tag{25.5}$$

На основании этого условия можно доказать теорему о том, что эрмитова матрица $\bar{q}^{\sim}q$ имеет ограниченную обратную[1]). В самом деле, возьмем произвольный нормированный вектор e в гильбертовом про-

[1]) Книга Винтнера, стр. 137.

странстве и рассмотрим его как столбец. Тогда

$$1 = \bar{e}^{\sim} e = \bar{e}^{\sim} bqe \leqslant | b^{\sim} \bar{e} | \, | qe |,$$

где для произвольного вектора в гильбертовом пространстве мы использовали обозначение $|u| = (\bar{u}^{\sim} u)^{1/2}$.

По-прежнему

$$| b^{\sim} \bar{e} |^2 = \bar{e}^{\sim} b \bar{b}^{\sim} e \leqslant \beta,$$

где β — верхияя граница матрицы $b\bar{b}^{\sim}$. Таким образом,

$$| qe |^2 \geqslant \beta^{-1},$$

или

$$\bar{e}^{\sim} \bar{q}^{\sim} qe \geqslant \beta^{-1}.$$

Это неравенство справедливо для любого нормированного вектора e в гильбертовом пространстве, так что матрица $\bar{q}^{\sim} q$ имеет нижнюю границу, т. е. наименьшее собственное значение. Отсюда следует условие

III′. Матрица $(\bar{q}^{\sim} q)^{-1}$ существует и ограничена.

Оно соответствует условию III′ из § 16.

В конечномерном случае у нас есть теорема о независимости, т. е. все векторы q_a, $\bar{q}_a$ независимы. Соответствующая теорема в рассматриваемом случае такова: матрица $(q, \bar{q})$, образованная путем последовательной записи двух матриц q и $\bar{q}$, имеет ограниченную левую обратную матрицу. Это можно доказать на основании условия III′. Имеем

$$\begin{pmatrix} \bar{q}^{\sim} \\ q^{\sim} \end{pmatrix} (q, \bar{q}) = \begin{pmatrix} \bar{q}^{\sim} q & 0 \\ 0 & q^{\sim} \bar{q} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} (\bar{q}^{\sim} q)^{-1} & 0 \\ 0 & (q^{\sim} \bar{q})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{q}^{\sim} \\ q^{\sim} \end{pmatrix} (q, \bar{q}) = 1. \qquad (25.6)$$

В конечномерном случае у нас было условие, что число столбцов матрицы q равно половине числа ее строк. Когда число строк равно бескоиечности, такое условие, очевидно, теряет смысл, и его нужно заменить каким-то другим условием. Мы потребуем, чтобы векторы q_a, $\bar{q}_a$ порождали все пространство, а поэтому возьмем следующее условие:

IV. Не существует вектора v в гильбертовом пространстве, элементы которого были бы в таком соответствии со строками матрицы q, что $v^{\sim} q=0$ и $v^{\sim}\bar{q}=0$.

Можно доказать следующую теорему: если A и B — ограниченные матрицы, такие, что $AB=1$, и если не существует вектора u в гильбертовом пространстве, удовлетворяющего условию $u^{\sim}B=0$, то $BA=1$. В самом деле, как иетрудно видеть,

$$(BA-1)B=0.$$

Поэтому для любого вектора v в гильбертовом пространстве выполняется соотношение

$$v^{\sim}(BA-1)B=0.$$

Таким образом, вектор $v^{\sim}(BA-1)$ должен быть равным нулю, ибо в противном случае это был бы вектор u, удовлетворяющий условию $u^{\sim}B=0$. Отсюда следует, что $BA-1=0$.

Применим эту теорему, взяв

$$A=\begin{pmatrix} (\bar{q}^{\sim}q)^{-1} & 0 \\ 0 & (q^{\sim}\bar{q})^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{q}^{\sim} \\ q^{\sim} \end{pmatrix}$$

и $B=(q, \bar{q})$. Условия теоремы выполняются в силу равенства (25.6) и условия IV. Получаем

$$(q, \bar{q})\begin{pmatrix} (\bar{q}^{\sim}q)^{-1} & 0 \\ 0 & (q^{\sim}\bar{q})^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{q}^{\sim} \\ q^{\sim} \end{pmatrix}=1. \qquad (25.7)$$

Таким образом, матрица $(q, \bar{q})$ имеет правую и левую обратные матрицы. Перемножая матрицы в равенстве (25.7), получаем

$$q(\bar{q}^{\sim}q)^{-1}\bar{q}^{\sim}+\bar{q}(q^{\sim}\bar{q})^{-1}q^{\sim}=1. \qquad (25.8)$$

Это уравнение аналогично уравнению (7.4) для конечномерного случая.

Оператор четверти полного оборота ω можно ввести посредством формулы

$$\frac{1}{2}(1 - i\omega) = q(\bar{q}^{\sim} q)^{-1} \bar{q}^{\sim}, \qquad (25.9)$$

аналогичной формуле (7.5). Сопряженное уравнение имеет вид

$$\frac{1}{2}(1 + i\bar{\omega}) = \bar{q}(q^{\sim} \bar{q})^{-1} q^{\sim}. \qquad (25.10)$$

Складывая равенства (25.9) и (25.10) и используя равенство (25.8), мы видим, что оператор ω действителен. Величина, стоящая в правой части равенства (25.9), эрмитова, так что левая его часть также должна быть эрмитовой, а, следовательно, оператор ω кососимметричен. Наконец, из соотношений (25.9) и (25.10) вытекает равенство

$$(1 - i\omega)(1 + i\omega) = 0,$$

которое показывает, что $\omega^2 = -1$. Таким образом, оператор ω обладает всеми свойствами соответствующего оператора в конечномерном случае.

26. Переход от одной кет-матрицы к другой

Теорема. Пусть q — кет-матрица, а λ — ограниченная матрица, имеющая ограниченную левую и правую обратные матрицы, и пусть ее строки находятся в соответствии со столбцами матрицы q. Тогда $q^* = q\lambda$ — другая кет-матрица.

Доказательство. Мы имеем

$$q^{*\sim} q^* = \lambda^{\sim} q^{\sim} q \lambda = 0,$$

так что выполняется условие II из § 25. Из условия III для q следует, что существует ограниченная матрица b, такая, что $bq = 1$. Таким образом,

$$\lambda^{-1} b q^* = \lambda^{-1} b q \lambda = 1,$$

т. е. q^* удовлетворяет условию III. Если существует вектор v в гильбертовом пространстве, такой, что

$$v^{\sim}q^* = 0, \quad v^{\sim}\bar{q}^* = 0,$$

то

$$v^{\sim}q\lambda = 0, \quad v^{\sim}\bar{q}\bar{\lambda} = 0.$$

Поскольку матрицы λ и $\bar{\lambda}$ обе имеют ограниченные правые обратные матрицы, мы можем считать, что

$$v^{\sim}q = 0, \quad \bar{v}^{\sim}q = 0,$$

а это означает, что матрица q не удовлетворяет условию IV. Следовательно, матрица q^* должна удовлетворять условию IV.

Кет-матрица q^* налагает на кет $|Q\rangle$ условия, эквивалентные условиям для q. Исходя непосредственно из формулы (25.9), можно убедиться, что это приводит к тому же оператору ω четверти полного оборота.

Если матрица q неортонормирована, то можно выбрать λ так, чтобы матрица q^* была ортонормированной. Для этого нам нужно, чтобы выполнялось соотношение

$$1 = q^{*\sim}\bar{q}^* = \lambda^{\sim}q^{\sim}\bar{q}\bar{\lambda}.$$

Отсюда

$$\bar{\lambda}\lambda^{\sim} = (q^{\sim}\bar{q})^{-1}.$$

Это решение не единственно. Другое возможное решеиие таково:

$$\lambda = (\bar{q}^{\sim}q)^{-1/2},$$

причем здесь можно взять положительный квадратный корень, поскольку все собственные значения матрицы $\bar{q}^{\sim}q$ положительны.

Теорема. Пусть q — кет-матрица, а R — ограниченная ортогональная матрица, столбцы которой находятся в соответствии со строками матрицы q. Тогда $p = Rq$ — также кет-матрица.

Доказательство. Имеем

$$p^{\sim}p = q^{\sim}R^{\sim}Rq = q^{\sim}q = 0,$$

так что условие II выполняется. Из условия III для q следует, что существует ограниченная матрица b, такая, что $bq = 1$. Таким образом,

$$1 = bR^{\sim}Rq = bR^{\sim}p$$

и, стало быть, p удовлетворяет условию III. Отсюда следует, что p удовлетворяет также условию III′, т. е. матрица $(\bar{p}^{\sim}p)^{-1}$ существует и ограничена.

Для проверки условия IV предположим, что существует вектор v в гильбертовом пространстве, такой, что

$$v^{\sim}p = 0; \quad v^{\sim}\bar{p} = 0. \tag{26.1}$$

Из соотношения (25.8) с учетом первого уравнения (26.1) получаем

$$\begin{aligned} v^{\sim} &= v^{\sim}R\left\{q(\bar{q}^{\sim}q)^{-1}\bar{q}^{\sim} + \bar{q}(q^{\sim}\bar{q})^{-1}q^{\sim}\right\}R^{\sim} = \\ &= v^{\sim}R\bar{q}(q^{\sim}\bar{q})^{-1}p^{\sim}. \end{aligned} \tag{26.2}$$

Тогда второе уравнение (26.1) дает

$$v^{\sim}R\bar{q}(q^{\sim}\bar{q})^{-1}p^{\sim}\bar{p} = 0,$$

и, поскольку матрица $p^{\sim}\bar{p}$ имеет ограниченную обратную матрицу, можно заключить, что $v^{\sim}R\bar{q} = 0$. Таким образом, из равенства (26.2) следует, что $v^{\sim} = 0$.

27. Разные виды кет-матрицы

Если q и p — две кет-матрицы, то строки матрицы q должны быть в соответствии со строками матрицы p, поскольку и те и другие должны быть в соответствии с величинами ξ_k, чтобы можно было образовать величины $\xi^{\sim}q$ и $\xi^{\sim}p$, входящие в уравнения вида (25.3). Но для столбцов матрицы q не необходимо соответствие со столбцами матрицы p. Таким образом, мы можем говорить о кет-матрицах разных видов, считая две из них матрицами одного вида, если имеется соответствие между столбцами.

В том случае, когда столбцы матрицы q находятся в соответствии со столбцами матрицы p, можно показать, что существует ортогональная ограниченная матрица R, такая, что $p=Rq$. Доказательство в точности то же, что и в § 18 для конечномерного случая. Для матрицы R по-прежнему справедлива формула (18.1):

$$R=p(\bar{q}^{\sim}q)^{-1}\bar{q}^{\sim}+\bar{p}(p^{\sim}\bar{p})^{-1}q^{\sim}. \tag{27.1}$$

Заметим, что для того, чтобы в формуле (27.1) можно было выполнить операции умножения, необходимо соответствие между столбцами матриц q и p.

Переход от q к p, рассмотренный выше, — это переход второго рода, о котором говорилось в § 26. Для перехода первого рода соответствие между столбцами матриц q и p не обязательно, поскольку нет необходимости в соответствии между строками и столбцами матрицы λ.

Если ограничиться кет-матрицами, для которых имеется соответствие, то мы можем развить теорию аналогично конечномерному случаю. Переход от одиой кет-матрицы к другой осуществляется при помощи ортогональной ограниченной матрицы R, которую можно представить в виде e^{A}, где A — антисимметричная и ограниченная матрица. Мы можем построить соответствующий оператор поворота $\mathcal{R}=e^{1/4\xi^{\sim}A\xi}$ с численным коэффициентом, определенным с точностью до знака.

Для кет-матриц q каждого вида мы построим простой кет $|q\rangle$, удовлетворяющий условию

$$q^{\sim}\xi|q\rangle=0, \tag{27.2}$$

с численным коэффициентом при нем, выбранным так, что для двух кет-матриц q и Rq выполняется соотношение

$$|Rq\rangle=\mathcal{R}|q\rangle,$$

точно такое же, как в конечномерном случае [формула (22.2)]. Такие простые кет, соответствующие кет-матрицам определенного вида, дают нам представление вращений в гильбертовом пространстве, поскольку, применив какое-либо вращение к одному кет, мы получим другой.

Чтобы получить представление в явном виде, выберем в качестве стандартного один из простых кет $|z\rangle$, где z — ортонормированная кет-матрица рассматриваемого нами вида. Затем введем согласно формуле (19.2) комплексные переменные η_k, как и в конечномерном случае. Они будут опять удовлетворять антикоммутационным соотношениям (19.3) и (19.5), и мы будем по-прежнему иметь

$$\bar{\eta}\,|z\rangle = 0. \tag{27.3}$$

Тогда любой другой кет рассматриваемого вида можно выразить так:

$$|q\rangle = \psi(\eta)\,|z\rangle.$$

Представление определяется законом изменения функций ψ под действием операторов поворота.

Если мы теперь рассмотрим кет-матрицы иного вида, то им будут соответствовать простые кет также иного вида, которые нельзя уже получить путем применения какого-либо оператора поворота к прежним кет. Они дадут другое представление вращений в гильбертовом пространстве, и их следует считать спинорами другого вида.

Мы можем перейти от кет-матрицы q к матрице $q^* = q\alpha$ другого вида. Простой кет $|q^*\rangle$, так же как и $|q\rangle$, удовлетворяет всем уравнениям (27.2). Но $|q^*\rangle$ — кет другого вида и не может отличаться от $|q\rangle$ лишь численным множителем, как это было в конечномерном случае [формула (22.3)]. Мы приходим к выводу, что уравнения (27.2) недостаточно, чтобы фиксировать простой кет, даже с учетом неопределенности в его численном коэффициенте.

28. Нарушение ассоциативного закона умножения

Для ограниченных матриц всегда справедлив ассоциативный закон умножения. Вектор в гильбертовом пространстве, записанный в виде столбца, ограничен и, следовательно, может быть включен в ассоциативную алгебру. Но матрица в виде одного столбца, составленная из величин ξ_k, неограничена. Точно так же неограниченной является одностолбцовая матрица, составленная из величин η_k. Такие матрицы, а также матрицы, полученные из них путем транспонирования, вообще говоря, не могут быть включены в ассоциативную алгебру.

Неприятности, которые могут возникать, если предположить в этих случаях ассоциативность умножения, можно проиллюстрировать следующими выкладками. Возьмем две ограниченные матрицы λ_{ab}, μ_{ab}; тогда, пользуясь обычным обозначением для коммутатора $[\alpha, \beta]_- = \alpha\beta - \beta\alpha$, можем написать

$$[\eta^\sim\lambda\bar\eta, \eta^\sim\mu\bar\eta]_- = \lambda_{ab}\mu_{cd}\{\eta_a\bar\eta_b\eta_c\bar\eta_d - \eta_c\bar\eta_d\eta_a\bar\eta_b\} =$$
$$= \lambda_{ab}\mu_{cd}\{\eta_a(\delta_{bc} - \eta_c\bar\eta_b)\bar\eta_d - \eta_c(\delta_{ad} - \eta_a\bar\eta_d)\bar\eta_b\} =$$
$$= \eta_a\lambda_{ab}\mu_{bd}\bar\eta_d - \eta_c\mu_{ca}\lambda_{ab}\bar\eta_b = \eta^\sim(\lambda\mu - \mu\lambda)\bar\eta. \tag{28.1}$$

Мы можем в этой формуле поменять местами η_k и $\bar\eta_k$ и подставить $\lambda^\sim$ вместо λ и $\mu^\sim$ вместо μ. Тогда получим

$$[\bar\eta^\sim\lambda^\sim\eta, \bar\eta^\sim\mu^\sim\eta]_- = \bar\eta^\sim(\lambda^\sim\mu^\sim - \mu^\sim\lambda^\sim)\eta. \tag{28.2}$$

Но

$$\bar\eta^\sim\lambda^\sim\eta = \bar\eta_a\lambda_{ba}\eta_b = \lambda_{ba}(\delta_{ab} - \eta_b\bar\eta_a) = \langle\lambda\rangle - \eta^\sim\lambda\bar\eta, \tag{28.3}$$

и аналогичные формулы справедливы для $\bar\eta^\sim\mu^\sim\eta$ и $\bar\eta^\sim(\lambda^\sim\mu^\sim - \mu^\sim\lambda^\sim)\eta$. Таким образом, из равенства (28.2) следует

$$[\langle\lambda\rangle - \eta^\sim\lambda\bar\eta, \langle\mu\rangle - \eta^\sim\mu\bar\eta]_- =$$
$$= \langle\mu\lambda - \lambda\mu\rangle - \eta^\sim(\mu\lambda - \lambda\mu)\bar\eta. \tag{28.4}$$

Если мы сравним (28.4) и (28.1), то увидим, что левые части этих равенств совпадают, поскольку числа $\langle\lambda\rangle$ и $\langle\mu\rangle$ не дают вклада в коммутатор. Правые же части равны друг другу, если только выполнено соотношение

$$\langle\lambda\mu - \mu\lambda\rangle = 0. \tag{28.5}$$

Для конечных матриц данное соотношение всегда выполняется. Но оно может не выполняться для бесконечных матриц, даже если матрицы λ и μ ограничены. Возьмем, например,

$$\lambda = \left|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . \end{matrix}\right. \qquad \mu = \left|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . \end{matrix}\right. \tag{28.6}$$

Тогда

$$\lambda\mu - \mu\lambda = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . \end{matrix}\right.$$

и

$$<\lambda\mu - \mu\lambda> = 1.$$

Таким образом, соотношения (28.1) и (28.2) не совместны, поэтому они не могут выполняться одновременно. На основании симметрии же между ними можно сказать, что не выполняются оба эти соотношения.

Проведем соответствующие выкладки, оперируя с действительными величинами ξ_k. Пусть A и B — ограниченные антисимметричные матрицы. Вычислим коммутатор

$$\left[\frac{1}{4}\xi^{\sim}A\xi,\ \frac{1}{4}\xi^{\sim}B\xi\right]_{-}. \tag{28.7}$$

Вычисления производятся так же, как и в конечномерном случае (§ 10), и результат опять дается формулой (10.6), или

$$\left[\frac{1}{4}\xi^{\sim}A\xi,\ \frac{1}{4}\xi^{\sim}B\xi\right]_{-} = \frac{1}{4}\xi^{\sim}(AB - BA)\xi. \tag{28.8}$$

Теперь алгебраические величины, аналогичные величине $^1/_4\xi^{\sim}A\xi$, где A — антисимметричная матрица, являются операторами бесконечномалых вращений в гильбертовом пространстве. Следовательно, они должны удовлетворять перестановочным соотношениям (28.8). Вся процедура получения спиноров нарушалась бы, если бы не выполнялось соотношение (28.8). Таким образом, соотношение (28.8) — фундаментальная формула теории, а не просто результат алгебраических манипуляций сомнительного характера, подобных (28.1) и (28.2). Нам нужно модифицировать последние соотношения так, чтобы они согласовались с соотношением (28.8).

Из (19.6) находим

$$\eta^{\sim}\lambda\bar{\eta} = \frac{1}{2}\xi^{\sim}\bar{z}\lambda z^{\sim}\xi = \frac{1}{4}\xi^{\sim}(\bar{z}\lambda z^{\sim} - z\lambda^{\sim}\bar{z}^{\sim})\xi + {}$$
$$+ \frac{1}{4}\xi^{\sim}(\bar{z}\lambda z^{\sim} + z\lambda^{\sim}\bar{z}^{\sim})\xi = \frac{1}{4}\xi^{\sim}A\xi + \frac{1}{2}\langle\lambda\rangle, \tag{28.9}$$

где A — антисимметричная матрица

$$A = \bar{z}\lambda z^{\sim} - z\lambda^{\sim}\bar{z}^{\sim}, \tag{28.10}$$

причем мы воспользовались формулой (10.4) и соотношением

$$\langle\bar{z}\lambda z^{\sim}\rangle = \langle\lambda z^{\sim}\bar{z}\rangle = \langle\lambda\rangle.$$

Аналогично

$$\eta^{\sim}\mu\bar{\eta} = \frac{1}{4}\xi^{\sim}B\xi + \frac{1}{2}\langle\mu\rangle,$$

где

$$B = \bar{z}\mu z^{\sim} - z\mu^{\sim}\bar{z}^{\sim}.$$

Таким образом, левая часть соотношения (28.1) совпадает с выражением (28.7), где A и B — рассматриваемые нами матрицы.

Правую часть соотношения (28.1) теперь нужно исправить так, чтобы она согласовалась с правой частью соотношения (28.2). Действуя так же, как и при выводе формулы (28.9), получаем

$$\eta^{\sim}(\lambda\mu - \mu\lambda)\bar{\eta} = \frac{1}{4}\xi^{\sim}(AB - BA)\xi + \frac{1}{2}\langle\lambda\mu - \mu\lambda\rangle.$$

Следовательно, соотношение (28.1) нужно заменить соотношением

$$[\eta^{\sim}\lambda\bar{\eta}, \eta^{\sim}\mu\bar{\eta}]_{-} = \eta^{\sim}(\lambda\mu - \mu\lambda)\bar{\eta} - \frac{1}{2}\langle\lambda\mu - \mu\lambda\rangle. \tag{28.11}$$

Заметим, что при усреднении выражений, стоящих в правых частях равенств (28.1) и (28.4), мы получим правильное значение для каждого из них.

29. Фундаментальные коммутаторы

Мы будем использовать лишь одно представление вращений в гильбертовом пространстве, так что спиноры можно представлять посредством кет, которые выражаются через один стандартный кет $|z\rangle$. К этим кет мы можем применять операции вращения, построенные из бесконечномалых операторов вращения $\xi^{\sim}A\xi$, где A — антисимметричная матрица, и операции отражения, связанные с операторами $u^{\sim}\xi$, где u — вектор в гильбертовом пространстве. Величину $\xi^{\sim}A\xi$, вообще говоря, приходится считать элементарной величиной, которую нельзя представить в виде суммы слагаемых с численными коэффициентами. В противном случае вычисления не дают надежных результатов.

В случае коммутатора величин $\xi^{\sim}A\xi$ и $u^{\sim}\xi$ не возникает никаких трудностей. Но при рассмотрении коммутатора двух величин типа $\xi^{\sim}A\xi$ возможны неоднозначности.

Величины $\xi^{\sim}A\xi$ можно выразить через переменные η и $\bar{\eta}$. Тогда они разделяются на три типа.

1. Квадратичные по η_k, подобные $\eta^{\sim}\mu\eta$, где μ — антисимметричная матрица.

2. Квадратичные по $\bar{\eta}_k$, подобные $\bar{\eta}^{\sim}\nu\bar{\eta}$, где ν — антисимметричная матрица.

3. Билинейные по η_k и $\bar{\eta}_l$, подобные $\eta^{\sim}\lambda\bar{\eta}$ или $\bar{\eta}^{\sim}\lambda\eta$ с добавлением численных слагаемых.

Если величины этих трех типов обозначить символами $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$, то, как нетрудно видеть, их коммутаторы имеют вид

$$[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}'_1]_- = 0, \quad [\mathcal{T}_2, \mathcal{T}'_2]_- = 0, \quad [\mathcal{T}_3, \mathcal{T}'_3]_- = \mathcal{T}''_3,$$
$$[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]_- = \mathcal{T}_3, \quad [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3]_- = \mathcal{T}'_1, \quad [\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_3]_- = \mathcal{T}'_2. \tag{29.1}$$

При вычислении этих коммутаторов неоднозначность возникает только тогда, когда в результате мы получаем $\mathcal{T}_3$, а именно в случае коммутаторов $[\mathcal{T}_3, \mathcal{T}'_3]_-$ и $[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]_-$. Неоднозначность состоит в возможном добавлении численного слагаемого.

Случай $[\mathcal{T}_3, \mathcal{T}'_3]_-$ рассматривался в предыдущем разделе. Теперь рассмотрим случай $[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]_-$.

Пусть μ и ν — две произвольные матрицы (необязательно антисимметричные), строки и столбцы которых находятся в соответствии с величинами η_k. Мы имеем

$$\begin{aligned}
[\eta^{\sim}\mu\eta, \bar\eta^{\sim}\nu\bar\eta]_- = \mu_{ab}\nu_{cd}\{\eta_a\eta_b\bar\eta_c\bar\eta_d - \bar\eta_c\bar\eta_d\eta_a\eta_b\} =& \\
= \mu_{ab}\nu_{cd}\{\eta_a\eta_b\bar\eta_c\bar\eta_d - \bar\eta_c(\delta_{ad} - \eta_a\bar\eta_d)\eta_b\} =& \\
= \mu_{ab}\nu_{cd}\{\eta_a(\delta_{bc} - \bar\eta_c\eta_b)\bar\eta_d - \delta_{ad}(\delta_{bc} - \eta_b\bar\eta_c) +& \\
+ (\delta_{ac} - \eta_a\bar\eta_c)(\delta_{bd} - \eta_b\bar\eta_d)\} =& \\
= \eta^{\sim}(\mu - \mu^{\sim})(\nu - \nu^{\sim})\bar\eta - \mu_{ab}\nu_{ba} + \mu_{ab}\nu_{ab}.& \qquad (29.2)
\end{aligned}$$

Численные слагаемые здесь произвольны и могут зависеть от способа выполнения суммирования по a и b. Например, мы можем представить $\mu_{ab}\nu_{ab}$ в виде диагональной суммы четырех типов

$$<\mu\nu^{\sim}>, \quad <\nu\mu^{\sim}>, \quad <\mu^{\sim}\nu>, \quad <\nu^{\sim}\mu>.$$

Первые два из этих выражений равны друг другу, последние два также равны друг другу, но могут отличаться от первых двух. Чтобы найти правильный вид, заметим, что существенны только антисимметричные части матриц μ и ν. Таким образом, формулу (29.2) следует переписать в виде

$$\begin{aligned}
[\eta^{\sim}\mu\eta, \bar\eta^{\sim}\nu\bar\eta]_- = \eta^{\sim}(\mu - \mu^{\sim})(\nu - \nu^{\sim})\bar\eta -& \\
- \frac{1}{2}<(\mu - \mu^{\sim})(\nu - \nu^{\sim})>.& \qquad (29.3)
\end{aligned}$$

Правая часть в формуле (29.3) имеет вид

$$\eta^{\sim}\lambda\bar\eta - \frac{1}{2}<\lambda>, \qquad (29.4)$$

где λ — некоторая матрица. Эта специальная комбинация оператора и численного слагаемого опять является правильной комбинацией, дающей, согласно формуле (28.9), оператор бесконечно малого вращения $^1/_4\xi^\sim A\xi$. Такая комбинация всегда появляется для $\mathscr{T}_3$ в правой части одного из уравнений (29.1).

30. Бозонные переменные

Пусть λ — произвольная ограниченная матрица, строки и столбцы которой находятся в соответствии с величинами η_k. Положим

$$\mathscr{B}_\lambda = \eta^\sim \lambda \bar{\eta}.$$

Тогда результат (28.11) можно запнсать в виде

$$\mathscr{B}_\lambda \mathscr{B}_\mu - \mathscr{B}_\mu \mathscr{B}_\lambda = \mathscr{B}_{\lambda\mu-\mu\lambda} - \frac{1}{2} <\lambda\mu - \mu\lambda>. \quad (30.1)$$

Исходя из формулы (27.3), можно было бы предположить, что для каждой из переменных $\mathscr{B}_\lambda$ должно выполняться равенство

$$\mathscr{B}_\lambda | z\rangle = 0.$$

Но это неверно, поскольку левая часть формулы (30.1), примененная к $|z\rangle$, обращается в нуль, тогда как правая часть, примененная к $|z\rangle$, в нуль не обращается, если $<\lambda\mu - \mu\lambda> \neq 0$. Мы имеем здесь самое прямое нарушеиие ассоциативного закона. Величину $\mathscr{B}_\lambda$ приходится рассматривать как элементарную велнчину, причем

$$\mathscr{B}_\lambda | z\rangle \neq \eta^\sim \lambda \{\bar{\eta} | z\rangle\}.$$

Величина $\mathscr{B}_\lambda$ появляется в теории как примитивный оператор нового вида. В конечномерном случае ей нет аналога. Мы назовем такие операторы *бозонными* переменными.

Если для любой величины $\mathscr{T}_2$ типа 2 положить

$$\mathscr{T}_2 | z\rangle = 0, \quad (30.2)$$

то при этом не возникнет никакой несовместности. Таким образом, нет никакой необходимости считать величины типа $\mathscr{T}_2$ примитивными операторами нового тнпа. Точно так же нет необходимостн рассматривать как примитивные величины тнпа $\mathscr{T}_1$.

Итак, работая со стандартным кет $|z\rangle$, мы имеем в качестве примитивных операторов, которые могут действовать на $|z\rangle$, указанные выше бозонные переменные, а также фермионные переменные типа $v^{\sim}\eta$ или $v^{\sim}\bar{\eta}$, где v — вектор в гильбертовом пространстве, координаты которого находятся в соответствии с величинами η_k.

Всякая бозонная переменная $\mathscr{B}_\lambda$ связана с некоторым бесконечно малым вращением:

$$\frac{1}{4}\xi^{\sim}A\xi = \mathscr{B}_\lambda - \frac{1}{2}\langle\lambda\rangle, \tag{30.3}$$

где A — антисимметричная матрица, даваемая формулой (28.10). Заметим, что

$$\lambda = z^{\sim}A\bar{z}. \tag{30.4}$$

Посмотрим, чем характеризуются вращения, связанные с бозонными переменными, и чем они отличаются от вращений, связанных с переменными типа $\mathscr{T}_1$ и $\mathscr{T}_2$. Из соотношения (28.10) получаем

$$\bar{z}z^{\sim}A = \bar{z}z^{\sim}\bar{z}\lambda z^{\sim} = \bar{z}\lambda z^{\sim}.$$

Точно так же

$$A\bar{z}z^{\sim} = \bar{z}\lambda z^{\sim}\bar{z}z^{\sim} = \bar{z}\lambda z^{\sim}.$$

Таким образом, матрица A коммутирует с матрицей $\bar{z}z^{\sim}$. Если ω_z — оператор четверти полного оборота, связанный со стандартным кет, то из уравнения, сопряженного уравнению (7.8), мы находим

$$\frac{1}{2}(1 + i\omega_z) = \bar{z}z^{\sim}.$$

Следовательно, матрица A коммутирует с матрицей ω_z.

Обратно, всякая антисимметричная матрица A, коммутирующая с ω_z, связана с бозонной переменной соотношением (30.3). Чтобы доказать это, возьмем в качестве λ величину (30.4). Тогда

$$\bar{z}\lambda z^{\sim} = \bar{z}z^{\sim}A\bar{z}z^{\sim} = \frac{1}{4}(1 + i\omega_z)A(1 + i\omega_z) =$$

$$= \frac{1}{2}A + \frac{i}{4}(\omega_z A + A\omega_z).$$

Таким образом,

$$\mathcal{B}_\lambda = \eta^\sim \lambda \bar{\eta} = \frac{1}{2} \xi^\sim \bar{z} \lambda z^\sim \xi = \frac{1}{4} \xi^\sim A \xi + \frac{i}{8} \xi^\sim (\omega_z A + A \omega_z) \xi.$$

Поскольку матрица $\omega_z A + A\omega_z$ симметрична, последнее слагаемое есть число. Стало быть, такая матрица A приводит к бозонной переменной, а не к величинам типа $\mathcal{T}_1$ или $\mathcal{T}_2$.

Величина, эрмитово-сопряженная к бозонной переменной $\mathcal{B}_\lambda$, дается выражением

$$\bar{\mathcal{B}}_\lambda^\sim = \eta^\sim \bar{\lambda}^\sim \bar{\eta} = \mathcal{B}_{\bar{\lambda}^\sim}. \tag{30.5}$$

Это другая бозонная переменная, которая соответствует матрице, эрмитово-сопряженной к первоначальной матрице.

31. Бозонные операторы излучения и поглощения

Уравнения

$$\mathcal{B}_\lambda | z\rangle = 0 \tag{31.1}$$

не могут выполняться для всех бозонных переменных. Но они могут выполняться для определенного класса таких переменных. Исследуем класс матриц, входящих в эти бозонные переменные. Разумеется, этот класс таков, что любая линейная комбинация матриц этого класса также является матрицей этого класса.

Если матрицы λ и μ принадлежат рассматриваемому классу, то справедливы уравнения

$$\mathcal{B}_\lambda | z\rangle = 0, \quad \mathcal{B}_\mu | z\rangle = 0,$$

откуда следует, что

$$(\mathcal{B}_\lambda \mathcal{B}_\mu - \mathcal{B}_\mu \mathcal{B}_\lambda) | z\rangle = 0.$$

Отсюда с учетом соотношения (30.1) получаем

$$\mathcal{B}_{\lambda\mu - \mu\lambda} | z\rangle = \frac{1}{2} < \lambda\mu - \mu\lambda > | z\rangle. \tag{31.2}$$

Для того чтобы это равенство выполнялось, должны выполняться условия

$$<\lambda\mu - \mu\lambda> = 0$$

и

$$\mathcal{B}_{\lambda\mu - \mu\lambda} | z\rangle = 0.$$

Тем самым мы получаем два условия совместиости: если матрицы λ и μ принадлежат рассматриваемому классу, то

I. Матрица $\lambda\mu-\mu\lambda$ также принадлежит этому классу.

II. $<\lambda\mu-\mu\lambda>=0$.

Пусть F — ограниченная матрица конечного ранга, строки и столбцы которой находятся в соответствии с величииами η_k. Это значит, что элементы F имеют вид

$$F_{ab}=\sum_n \alpha_{an}\beta_{nb},$$

где n пробегает лишь конечное число значений. Тогда при любой матрице λ матрица $F\lambda-\lambda F$ также имеет конечный ранг и сумма ее диагональных элементов равиа нулю. Стало быть, все ограииченные матрицы конечного ранга можно включить в этот класс. Поэтому для любой ограниченной матрицы F конечного ранга мы положим

$$\mathscr{B}_F\,|z\rangle=0. \qquad (31.3)$$

Посмотрим, каковы соответствующие условия для матриц бесконечного ранга. Предположим, что переменные η_k естествениым образом упорядочены и имеется определенное начало, как если бы индекс k принимал значения $1, 2, 3, \ldots, \infty$. Тогда строки и столбцы матрицы λ точно так же упорядочены и она имеет вид

$$\begin{array}{|ccccc}
\hline
\times & \times & \times & \times & \cdot \\
\times & \times & \times & \times & \cdot \\
\times & \times & \times & \times & \cdot \\
\times & \times & \times & \times & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Существуют три вида матриц:

Диагональные матрицы, в которых все элементы, кроме элементов на главной диагонали, равны нулю.

Левые матрицы, в которых равны нулю все элементы, кроме находящихся слева от главной диагонали.

Правые матрицы, в которых равны нулю все элементы, кроме находящихся справа от главной диагонали.

Любую матрицу можно единственным способом представить в виде суммы матриц этих трех видов. Транспонирование левой матрицы дает, разумеется, правую матрицу.

Обозначим матрицы этих трех видов символами D, L и R. Тогда перестановочные соотношения для них будут иметь вид

$$\begin{aligned} &[D, D']_- = 0, \quad &[D, L]_- = L', \\ &[D, R]_- = R', \quad &[L, L']_- = L'', \\ &[R, R']_- = R'', \quad &[L, R]_- = L' + R' + D. \end{aligned}$$

Теперь мы можем рассмотреть систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{B}_D | z\rangle = 0, \\ \mathscr{B}_L | z\rangle = 0 \end{aligned}\right\} \text{ для всех } D \text{ и } L. \qquad (31.4)$$

Назовем ее L-системой. Можно принять и другую систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{B}_D | z\rangle = 0, \\ \mathscr{B}_R | z\rangle = 0 \end{aligned}\right\} \text{ для всех } D \text{ и } R, \qquad (31.5)$$

которую мы назовем R-системой. Обе эти системы удовлетворяют условиям I и II, но в других отношениях они не одинаково удовлетворительны.

Из второго уравнения (31.4) путем сопряжения и транспонирования получаем

$$\langle \bar{z}^{\sim} | \mathscr{B}_R = 0.$$

Точно так же из второго уравнения (31.5) путем сопряжения и транспонирования получаем

$$\langle \bar{z}^{\sim} | \mathscr{B}_L = 0.$$

Таким образом, для любой из двух систем имеем

$$\langle \bar{z}^{\sim} | \mathscr{B}_\lambda | z\rangle = 0 \quad \text{при всех } \lambda. \qquad (31.6)$$

Если мы примем L-систему, то из соотношений (30.1) и (31.6) будем иметь

$$\langle \bar{z}^{\sim} \mid \mathscr{B}_L \mathscr{B}_R \mid z \rangle = \langle \bar{z}^{\sim} \mid \mathscr{B}_L \mathscr{B}_R - \mathscr{B}_R \mathscr{B}_L \mid z \rangle = \frac{1}{2} < RL - LR >.$$

Один из диагональных элементов матрицы $RL - LR$ имеет вид

$$(RL - LR)_{aa} = \sum_{b>a} R_{ab} L_{ba} - \sum_{b<a} L_{ab} R_{ba}.$$

Таким образом,

$$\sum_{a=1}^{n} (RL - LR)_{aa} = \sum_{a=1}^{n} \sum_{b>a} R_{ab} L_{ba} - \sum_{b=1}^{n} \sum_{a<b} R_{ab} L_{ba},$$

если поменять местами a и b во второй двойной сумме. Приводя подобные члены, получаем

$$\sum_{a=1}^{n} \sum_{b=n+1}^{\infty} R_{ab} L_{ba}.$$

Следовательно,

$$\langle \bar{z}^{\sim} \mid \mathscr{B}_L \mathscr{B}_R \mid z \rangle = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \sum_{a=1}^{n} \sum_{b=n+1}^{\infty} R_{ab} L_{ba}. \qquad (31.7)$$

Квадрат длины кет $\mathscr{B}_R \mid z \rangle$ равен $\langle \bar{z}^{\sim} \mid \mathscr{B}_{\bar{R}^{\sim}} \mathscr{B}_R \mid z \rangle$, так что он дается формулой (31.7) при $L_{ba} = \bar{R}_{ab}$. Этот квадрат длины положителен или равен нулю. Стало быть, L-система задает для кет положительно определенную метрику.

Если же мы примем R-систему, то величина $\langle \bar{z}^{\sim} \mid \mathscr{B}_R \mathscr{B}_L \mid z \rangle$ будет равна правой части равенства (31.7), взятой с минусом. Таким образом, R-система не задает положительно определенной метрики для кет. Поэтому R-система менее удовлетворительна и далее рассматриваться не будет.

Работая с L-системой, мы можем интерпретировать операторы $\mathscr{B}_R$ как операторы рождения бозонов, а операторы $\mathscr{B}_L$ — как операторы их уничтожения. Тогда кет $\mid z \rangle$, удовлетворяющий уравнениям (31.4), представляет состояние, в котором нет ни бозонов, ни фермионов. Оператор рождения $\mathscr{B}_R$ будет нормирован, если мы выберем матрицу R_{ab} так, чтобы формула (31.7) при $L_{ba}=\overline{R}_{ab}$ давала единицу. Пример такой матрицы R — матрица λ из формулы (28.6), умноженная на $\sqrt{2}$.

32. Бесконечные определители

Посмотрим, останется ли справедливой в бесконечномерном случае формула для скалярного произведения, полученная в § 23. Для этого необходимо придать смысл определителю бесконечной матрицы.

Если конечную квадратную матрицу X представить в виде $X=e^Y$, то ее определитель дается формулой

$$\langle\!\langle e^Y\rangle\!\rangle = e^{<Y>}. \tag{32.1}$$

Эта формула с бесконечно малой величиной Y была использована при выводе соотношений (22.3), (23.5). Можно и в бесконечномерном случае принять (32.1) за определение определителя. Тогда определитель будет существовать только при том условии, что сумма $<Y>$ сходится.

Можно принять и другое определение:

$$\langle\!\langle X\rangle\!\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle\!\langle .X._n\rangle\!\rangle, \tag{32.2}$$

где $.X._n$ — квадратная матрица, образованная первыми n строками и столбцами матрицы X. Тогда бесконечный определитель будет существовать только в том случае, когда существует этот предел. Два разных определения обычно приводят к разным результатам. Мы примем здесь определение (32.2), ибо оно, как мы увидим, оставляет справедливой формулу для скалярного произведения, если работать с L-системой.

Лемма. Если G — бесконечная матрица общего вида, а D и R — диагональная и правая матрицы, то

$$\langle\!\langle G(D+R)\rangle\!\rangle = \langle\!\langle G\rangle\!\rangle\langle\!\langle D+R\rangle\!\rangle. \tag{32.3}$$

Доказательство. Имеем

$$[G(D+R)]_{ab} = \sum_{c\leqslant b} G_{ac}(D+R)_{cb}.$$

Если ограничиться значениями a и b, меньшими или равными n, то

$$.G(D+R)._n = .G._n.(D+R)._n.$$

Таким образом,

$$\{\!\!\{.G(D+R)._n\}\!\!\} = \{\!\!\{.G._n\}\!\!\}\{\!\!\{.(D+R)._n\}\!\!\}.$$

Если теперь устремить n к бесконечности, то мы получим соотношение (32.3), где определитель дается формулой (32.2). Если D_a — диагональный элемент матрицы D, то

$$\{\!\!\{D+R\}\!\!\} = \prod_{a=1}^{\infty} D_a. \tag{32.4}$$

Транспонируя обе части равенства (32.3), получаем формулу

$$\{\!\!\{(D+L)G\}\!\!\} = \{\!\!\{D+L\}\!\!\}\{\!\!\{G\}\!\!\}. \tag{32.5}$$

Теорема. Если G — бесконечная матрица, такая, что $\{\!\!\{.G._n\}\!\!\} \neq 0$ для всех n, то ее можно представить в виде

$$G = (1+L)D(1+R). \tag{32.6}$$

Доказательство. Из формулы (32.6) следует, что

$$.G._n = .(1+L)._n.D._n.(1+R)._n. \tag{32.7}$$

Производя замену $n \to (n-1)$, мы имеем

$$.G._{(n-1)} = .(1+L)._{(n-1)}.D._{(n-1)}.(1+R)._{(n-1)}. \tag{32.8}$$

Предположим, что мы нашли матрицы $.L._{(n-1)}$, $.D._{(n-1)}$ и $.R._{(n-1)}$, удовлетворяющие соотношению (32.8) при некотором значении n. Посмотрим, каким образом подобрать элементы матриц L, D и R в n-й строке и n-м столбце так, чтобы выполнялось соотношение (32.7). При $a < n$ получим

$$G_{na} = L_{na}D_a + \sum_{b<a} L_{nb}D_bR_{ba}, \tag{32.9}$$

$$G_{an} = D_aR_{an} + \sum_{b<a} L_{ab}D_bR_{bn}, \tag{32.10}$$

$$G_{nn} = D_n + \sum_{b<n} L_{nb}D_bR_{bn}. \tag{32.11}$$

Из (32.8) мы имеем

$$\{.G._{(n-1)}\} = \prod_{a=1}^{n-1} D_a.$$

Этот определитель не должен быть равным нулю, и поэтому мы можем считать, что $D_a \neq 0$ при $a \leqslant n-1$. Полагая в формуле (32.9) $a = 1, 2, \ldots, (n-1)$, мы получим последовательно уравнения, из которых найдем $L_{n1}, L_{n2}, \ldots, L_{n\,(n-1)}$. Аналогично из формулы (32.10) последовательно находим $R_{1n}, R_{2n}, \ldots, R_{(n-1)\,n}$. И наконец, из (32.11) находим D_n. Таким образом, соотношение (32.7) выполняется. Мы можем продолжать увеличивать n до бесконечности, и в результате получим соотношение (32.6).

Более общая теорема. Если G — бесконечная матрица, такая, что $\{.G._n\} \neq 0$ при всех $n \geqslant m$, то ее можно представить в виде

$$G = (1 + L)(F + D)(1 + R), \tag{32.12}$$

где F — такая матрица, что $F_{ab} \neq 0$ только при $a \leqslant m$ и $b \leqslant m$, а L_{ab}, D_a и R_{ab} равны нулю при $a \leqslant m$ и $b \leqslant m$.

Доказательство. При $a \leqslant m$ и $b \leqslant m$ из формулы (32.12) следует равенство

$$G_{ab} = F_{ab},$$

которое можно обеспечить, выбрав подходящую матрицу F. Далее мы имеем

$$\{.F._m\}\{.G._m\} \neq 0. \tag{32.13}$$

При $n > m$ получаем из (32.12) соотиошение

$$.G._n = .(1 + L)._n.(F + D)._n.(1 + R)._n. \tag{32.14}$$

Мы поступим с ним так же, как и прежде. Мы предположим, что выполняется соответствующее уравнение с заменой n на $n-1$, и затем выберем матричные элементы матриц L, D и R в n-й строке и n-м столбце так, чтобы выполнялось равенство (32.14). При $a \leqslant m$ формула (32.14) дает

$$G_{na} = \sum_{b \leqslant m} L_{nb} F_{ba}, \tag{32.15}$$

а при $n > a > m$

$$G_{na} = L_{na} D_a + \sum_b \sum_c L_{nb} (F + D)_{bc} R_{ca}. \qquad (32.16)$$

Полученными m уравнениями (32.15) определяются L_{nb} при $b \leqslant m$, поскольку, как это следует из (32.13), определитель из коэффициентов F_{ba} не равен нулю.

При $n = m + 1$ уравнения типа (32.16) отсутствуют. При $n > m + 1$ мы можем считать, что величины D_a в первом слагаемом справа отличны от нуля, ибо, по нашему предположению, выполняется соотношение (32.14) с $n - 1$ вместо n, а это означает, что

$$\langle\!\langle \cdot G \cdot_{n-1} \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \cdot (F + D) \cdot_{n-1} \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \cdot F \cdot_m \rangle\!\rangle \prod_{a=m+1}^{n-1} D_a$$

и определитель в левой части равенства не может быть равен нулю. Остальные слагаемые в правой части уравнения (32.16) содержат, помимо известных величин, лишь L_{nb} с $b < a$, так как $F_{bc} \neq 0$ только при $b \leqslant m$, а $R_{ba} \neq 0$ только при $b < a$. Таким образом, уравнением (32.16) определяются последовательно все величины L_{na} с $a = m + 1, m + 2, \ldots, n - 1$. Аналогично величины R_{an} при всех $a < n$ определяются величинами G_{an}. Наконец, D_n определяется через G_{nn} и при этом выполняется соотношение (32.14).

Формулу (32.12) можно записать также в виде

$$G = e^L e^{F+D} e^R, \qquad (32.17)$$

где матрицы L, F, D и R отличаются от прежних матриц, но как и раньше, $F_{ab} \neq 0$ только при $a \leqslant m$ и $b \leqslant m$, а L_{ab}, D_a и R_{ab} отличны от нуля только при $a > m$ и $b > m$. Заметим, что матрицы F и D коммутируют, так что $e^{F+D} = e^F e^D$.

33. Справедливость формулы для скалярного произведения

Мы будем рассматривать эту формулу в виде (23.7), куда входят стандартный кет и стандартный бра. В ней фигурирует общий оператор поворота $\mathcal{S}$. Представим себе, что оператор $\mathcal{S}$ построен из примененных последовательно бесконечно малых вращений типа $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ или $\mathcal{T}_3$, так что

$$\mathcal{S}=\prod e^{\varepsilon\mathcal{T}_a},$$

где $\mathcal{T}_a$ — величины типа $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ или $\mathcal{T}_3$. Принимая во внимание перестановочные соотношения, мы можем поменять местами сомножители так, чтобы все величины типа $\mathcal{T}_1$ стояли слева, все величины типа $\mathcal{T}_2$ — справа, а величины типа $\mathcal{T}_3$—посередине. Теперь все бесконечно малые вращения определенного типа перемножаются последовательно и мы можем образовать из них конечное вращение того же типа. Таким путем мы получаем

$$\mathcal{S}=e^{\mathcal{T}_1}e^{\mathcal{T}_3}e^{\mathcal{T}_2}.$$

Формула (23.7), которую иам нужно доказать, теперь выглядит так:

$$\langle\bar{z}^{\sim}\,|e^{\mathcal{T}_1}e^{\mathcal{T}_3}e^{\mathcal{T}_2}|\,z\rangle=\{\langle\bar{z}^{\sim}\,|e^{T_1}e^{T_3}e^{T_2}\,|\,z\rangle\}^{1/2}, \qquad (33.1)$$

где T_1, T_2 и T_3 — антисимметричные матрицы, связанные с операторами $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ и $\mathcal{T}_3$ формулой $\mathcal{T}={}^1/_4\xi^{\sim}T\xi$.

Из (30.2) следует

$$e^{\mathcal{T}_2}|\,z\rangle=|\,z\rangle.$$

Сопряженное и транспонированное уравнение имеет вид

$$\langle\bar{z}^{\sim}\,|e^{\mathcal{T}_1}=\langle\bar{z}^{\sim}\,|.$$

Таким образом, левая часть уравнения (33.1) приводится к виду

$$\langle\bar{z}^{\sim}\,|e^{\mathcal{T}_3}|\,z\rangle.$$

Теперь $\mathcal{T}_2$ имеет вид

$$\mathcal{T}_2=\bar{\eta}^{\sim}\nu\bar{\eta}=\frac{1}{2}\xi^{\sim}z\nu z^{\sim}\xi,$$

где ν — антисимметричная матрица. Таким образом,

$$T_2=2z\nu z^{\sim}.$$

Отсюда следует, что $T_2z=0$ и $e^{T_2}z=z$. Аналогично $\bar{z}^{\sim}T_1=0$ и $\bar{z}^{\sim}e^{T_1}=\bar{z}^{\sim}$. Стало быть, правая часть уравнения (33.1) приводится к виду

$$\{\bar{z}^{\sim} e^{T_3} z\}^{1/2}$$

и соотношение (33.1) принимает вид

$$\langle \bar{z}^{\sim} | e^{\mathcal{T}_3} | z \rangle = \{\bar{z}^{\sim} e^{T_3} z\}^{1/2}. \tag{33.2}$$

Согласно формуле (30.3), мы имеем

$$\mathcal{T}_3 = \frac{1}{4} \xi^{\sim} T_3 \xi = \mathcal{B}_\lambda - \frac{1}{2} <\lambda>,$$

где T_3 связано с λ формулой (28.10):

$$T_3 = \bar{z}\lambda z^{\sim} - z\lambda^{\sim}\bar{z}^{\sim}. \tag{33.3}$$

Отсюда следует, что

$$(T_3)^2 = \bar{z}\lambda^2 z^{\sim} + z\lambda^{\sim 2}\bar{z}^{\sim}$$

и по индукции

$$(T_3)^n = \bar{z}\lambda^n z^{\sim} + z(-\lambda^{\sim})^n \bar{z}^{\sim}.$$

Следовательно,

$$e^{T_3} = \bar{z} e^{\lambda} z^{\sim} + z e^{-\lambda^{\sim}} \bar{z}^{\sim} \tag{33.4}$$

и

$$\bar{z}^{\sim} e^{T_3} z = e^{-\lambda^{\sim}}.$$

Формула (33.2), которую требуется доказать, теперь сводится к выражению

$$\langle \bar{z}^{\sim} | \exp\left(\mathcal{B}_\lambda - \frac{1}{2} <\lambda>\right) | z \rangle = \{e^{-\lambda^{\sim}}\}^{1/2} = \{e^{-\lambda}\}^{1/2}. \tag{33.5}$$

Оператор поворота типа $e^{\mathcal{T}_3}$ можно рассматривать как произведение двух операторов поворота такого же типа, скажем

$$e^{\mathcal{T}_3} = e^{\mathcal{T}'_3} e^{\mathcal{T}''_3}. \tag{33.6}$$

Для того чтобы выполнялось равенство (33.6), должно выполняться соответствующее равенство для антисимметричных матриц T_3, T'_3 и T''_3, а именно:

$$e^{T_3} = e^{T'_3} e^{T''_3}. \tag{33.7}$$

В соответствии с (33.3) положим

$$T_3' = \bar{z}\lambda' z^{\sim} - z\lambda'^{\sim}\bar{z}^{\sim},$$
$$T_3'' = \bar{z}\lambda'' z^{\sim} - z\lambda''^{\sim}\bar{z}^{\sim}.$$

Тогда в соответствии с (33.4) получим

$$e^{T_3'} = \bar{z}e^{\lambda'}z^{\sim} + ze^{-\lambda'^{\sim}}\bar{z}^{\sim},$$
$$e^{T_3''} = \bar{z}e^{\lambda''}z^{\sim} + ze^{-\lambda''^{\sim}}\bar{z}^{\sim}.$$

Условие (33.7) теперь принимает вид

$$\bar{z}e^{\lambda}z^{\sim} + ze^{-\lambda^{\sim}}\bar{z}^{\sim} = (\bar{z}e^{\lambda'}z^{\sim} + ze^{-\lambda'^{\sim}}\bar{z}^{\sim}) \times$$
$$\times (\bar{z}e^{\lambda''}z^{\sim} + ze^{-\lambda''^{\sim}}\bar{z}^{\sim}) = \bar{z}e^{\lambda'}e^{\lambda''}z^{\sim} + ze^{-\lambda'^{\sim}}e^{-\lambda''^{\sim}}\bar{z}^{\sim}.$$

Отсюда вытекает соотношение

$$e^{\lambda} = e^{\lambda'}e^{\lambda''}. \tag{33.8}$$

Итак, мы получаем следующий результат: равенство (33.6), которое можно записать в виде

$$\exp\left(\mathscr{B}_{\lambda} - \frac{1}{2} <\lambda>\right) =$$
$$= \exp\left(\mathscr{B}_{\lambda'} - \frac{1}{2} <\lambda'>\right) \exp\left(\mathscr{B}_{\lambda''} - \frac{1}{2} <\lambda''>\right), \tag{33.9}$$

выполняется, если выполняется равенство (33.8). Этот результат можно, очевидно, обобщить на тот случай, когда в произведении справа имеется больше двух сомножителей.

Предположим теперь, что предел

$$\lim_{n\to\infty} \langle .e^{-\lambda}._n \rangle$$

существует и отличен от нуля. Тогда должно существовать число m, такое, что

$$\langle .e^{-\lambda}._n \rangle \neq 0 \quad \text{при всех} \quad n \geqslant m.$$

Стало быть, на основании общей теоремы предыдущего раздела мы можем представить $e^{-\lambda}$ в виде (32.17) или, если мы изменим знак L, F, D и R, написать

$$e^{-\lambda} = e^{-L}e^{-F-D}e^{-R}. \tag{33.10}$$

Тогда мы имеем равенство

$$\{e^{-\lambda}\} = \{e^{-F-D}\} = e^{-<F+D>}, \qquad (33.11)$$

так как оба определения (32.1) и (32.2) бесконечного определителя согласуются в случае матриц типа e^{-F} и e^{-D}.

Из соотношения (33.10) следует равенство

$$e^{\lambda} = e^{R} e^{F+D} e^{L}.$$

Таким образом, в соответствии с формулой (33.9) для случая трех сомножителей справа имеем

$$\exp\left(\mathscr{B}_{\lambda} - \frac{1}{2}<\lambda>\right) =$$

$$= \exp \mathscr{B}_R \exp\left(\mathscr{B}_{F+D} - \frac{1}{2}<F+D>\right) \exp \mathscr{B}_L.$$

Работая с L-системой, из (31.4) получаем

$$e^{\mathscr{B}_L} | z\rangle = | z\rangle, \qquad e^{\mathscr{B}_D} | z\rangle = | z\rangle.$$

Транспонируя первое из этих соотношений, можем написать

$$\langle \bar{z}^{\sim} | e^{\mathscr{B}_R} = \langle \bar{z}^{\sim} | .$$

Наконец, из (31.3) мы получаем

$$e^{\mathscr{B}_F} | z\rangle = | z\rangle.$$

Таким образом, левая часть равенства (33.5) равна

$$\langle \bar{z}^{\sim} | \exp \mathscr{B}_R \exp\left(\mathscr{B}_{F+D} - \frac{1}{2}<F+D>\right) \exp \mathscr{B}_L | z\rangle =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}<F+D>\right).$$

Но это квадратный корень из величины (33.11), и потому данная величина равна правой части формулы (33.5). Тем самым формула для скалярного произведения доказана.

34. Энергия бозона

Предположим, что оператор η_a — это оператор рождения фермиона с определенной энергией E_a и что энергия E_a меняется от некоего минимального значения до бесконечности. Такой случай часто встречается в физических приложениях. Тогда полная энергия всех фермионов представляется оператором

$$W = \sum_a E_a \eta_a \bar{\eta}_a.$$

Его можно символически записать как

$$W = \eta^{\sim} E \bar{\eta},$$

где E — диагональная матрица с элементами E_a.

Из (31.4) для L-системы мы имеем

$$W \mid z\rangle = 0.$$

Это значит, что состояние $\mid z\rangle$, в котором отсутствуют частицы, имеет нулевую энергию.

Теперь рассмотрим оператор $\mathscr{B}_R$ рождения бозона. Состояние, в котором присутствует один из бозонов, имеет вид

$$\mathscr{B}_R \mid z\rangle.$$

Определим его энергию.

Из (30.1) мы имеем

$$W \mathscr{B}_R \mid z\rangle = (W \mathscr{B}_R - \mathscr{B}_R W) \mid z\rangle = \mathscr{B}_{ER-RE} \mid z\rangle,$$

так как величина $<ER - RE>$ равна нулю. (Вследствие упрощений, возникающих в случае диагональной матрицы E, этот результат остается справедливым, даже если матрица E не ограничена.) Для того чтобы бозон был собственным состоянием оператора энергии, нужно выбрать R так, чтобы выполнялось условие

$$(ER - RE)_{ab} \to k R_{ab} \tag{34.1}$$

при $a \to \infty$ и $b \to \infty$, причем k — некоторое число, не зависящее от a и b. Условие (34.1) дает

$$(E_a - E_b - k)\, R_{ab} \to 0. \tag{34.2}$$

Мы можем обеспечить его выполнение, выбрав величины R_{ab} так, чтобы при любом достаточно большом значении a они были равны иулю при всех b, кроме одного зиачения $b=f(a)$, и это значение b было таким, что

$$E_a - E_{f(a)} - k \to 0$$

при $a \to \infty$. Но, поскольку мы имеем дело с правой матрицей, величина $f(a)$ должна быть больше a, и если E_a непрерывно увеличивается с увеличением a, то k должно быть отрицательным. Это означает, что энергия бозона отрицательна.

Мы можем выбрать более общий способ обеспечения условия (34.2), например, взяв величины R_{ab}, отличные от нуля не при всех, а лишь при некоторых значениях величины a, но это ие поможет нам избавиться от отрицательной эиергии.

35. Физическое приложение

Рассмотрим физическую теорию, в которой имеются фермионы, причем для каждого фермиона возможно бескоиечное число иезависимых состояний. Обозначим через η_a операторы рождеиия фермионов. Состоянию, не содержащему частиц, соответствует кет $|0\rangle$, удовлетворяющий уравнению

$$\bar{\eta}_a |0\rangle = 0 \quad \text{при всех} \quad a. \tag{35.1}$$

Теория, изложенная в иастоящей книге, показывает, что уравнений (35.1) ие достаточно для того, чтобы фиксировать состояние. Уравнениям (35.1) удовлетворяют много кет, существенно, а не просто численным коэффициентом, отличающихся друг от друга. Каждый из них связан с тем или иным способом упорядочения отдельных фермионных состояний. Чтобы точно охарактеризовать состояние, необходима кет-матрица.

Мы можем, например, взять ортонормированную кет-матрицу z, которую мы использовали как стаидартную, и затем положить $|0\rangle = |z\rangle$. Но мы могли бы взять и $|0\rangle = |z^*\rangle$, где

$$z^* = z\alpha,$$

а α — любая ограниченная матрица, строки которой находятся в соответствии со столбцами матрицы z и которая имеет ограниченную левую и правую обратные матрицы. И $|z\rangle$ и $|z^*\rangle$ одинаково хорошо удовлетворяют всем уравнениям (35.1).

У нас имеется большая свобода в выборе матрицы α. Строки матрицы α могут не быть в соответствии с ее столбцами. Тогда столбцы матрицы z^* не будут находиться в соответствии со столбцами матрицы z и это будет кет-матрица другого вида по классификации § 27. В этом случае кет $|z^*\rangle$ будет кет другого вида, не принадлежащим тому же представлению группы вращений в гильбертовом пространстве.

Потребуем, чтобы у матрицы α было соответствие между строками и столбцами. Тогда существует оператор поворота $\mathscr{R}$, который переводит $|z\rangle$ в $|z^*\rangle$,

$$|z^*\rangle = \mathscr{R}|z\rangle,$$

и этот оператор имеет вид

$$\mathscr{R} = \exp\left(\mathscr{B}_\lambda - \frac{1}{2} <\lambda>\right),$$

где $\mathscr{B}_\lambda$ — бозонная переменная. Связь между величинами λ и α дается равенством

$$e^{-\lambda} = \alpha^{\sim},$$

что явствует из сравнения формулы (18.7), где q нужно заменить на z, с формулой (33.4).

Таким образом, в теории, в которой вначале имеются только фермионные переменные, автоматически появляются бозонные переменные при условии, что число фермионных переменных бесконечно. В частности, должны существовать такие бозонные переменные, связанные с электронами. Для выяснения их физического смысла необходимы дальнейшие исследования. Энергия, соответствующая этим переменным, отрицательна, и потому нет состояния с наименьшей энергией, которое обычно принимают за вакуум.

В теории мы исходим из предположения, что фермионные состояния дискретны. В физике же обычно имеют дело с фермионными состояниями, меняющимися непрерывно. Теорию можно модифицировать, чтобы она была применима и в этом случае. Обычный способ таков: нужно заменить символ Кронекера δ в антикоммутационных соотношениях (19.5) δ-функцией, и тогда мы получим определенную некоммутативную алгебру. Правда, определение (32.2) бесконечного определителя тогда уже неприменимо, так что пользоваться формулой для скаляриого произведения мы больше не можем.

УКАЗАТЕЛЬ СПЕЦИАЛЬНЫХ ТЕРМИНОВ

ПРИЛОЖЕНИЕ

СПИНОРЫ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Р. Брауэр, Г. Вейль *)

Введение и сводка результатов

Пусть $\mathfrak{D}_n$ — группа ортогональных преобразований n-мерного пространства вида

$$x_i \to \sum_{k=1}^{n} o(ik)\, x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

а $\mathfrak{D}_n^+$ — подгруппа собственных преобразований с определителем $+1$, а не -1. Вначале мы будем работать на множестве всех комплексных чисел; специальные условия, возникающие в случае только действительных переменных, будут рассмотрены лишь в конце статьи (§ 8 и 10). Представлением Г: $o \to G(o)$ степени N определяются своего рода „ковариантные величины“: величину, характеризуемую N числами $a_1, \ldots, a_N$, отнесенными к произвольной декартовой системе координат в исходном n-мерном евклидовом пространстве, будем называть *величиной типа* Г, если ее компоненты a_K при преобразовании координат o претерпевают линейное преобразование $G(o)$. Эта величина называется *примитивной*, если представление неприводимо. Из того, что любое представление разбивается на неприводимые части, следует, что величины самого общего вида получаются как комбинации нескольких независимых примитивных величин.

Под *тензором ранга* f мы будем подразумевать здесь то, что обычно называют кососимметричным тензором: кососимметричную функцию $\alpha(i_1, \ldots, i_f)$ от f индексов, независимо пробегающих значения $1, \ldots, n$, которая при вращении преобразуется по

*) *R. Brauer, H. Weyl*, Amer. Journ. Math., **57**, 425 (1935). (Статья перепечатана также в собрании трудов Вейля [5]. — *Прим. перев.*)

закону

$$\alpha(i_1 \ldots i_f) \to \sum_{k_1, \ldots, k_f = 1}^{n} o(i_1 k_1) \ldots o(i_f k_f) \cdot \alpha(k_1 \ldots k_f).$$

Тензоры ранга f служат основой представления Γ_f степени $\binom{n}{f}$.

Мы часто будем рассматривать отдельно случай четной и случай нечетной размерности и соответственно этому будем полагать $n = 2\nu$ или $n = 2\nu + 1$. Введем обозначение $\nu = \langle n \rangle$ и отметим тождество

$$\frac{1}{2} n(n-1) \equiv \langle n \rangle (\bmod 2).$$

Э. Картан развил общий метод построения неприводимых представлений группы $\mathfrak{D}_n$ (и любой другой полупростой группы), рассматривая бесконечно малые преобразования. Он установил [1] [1]), что основными элементами конструкции теории представлений являются тензорные представления Γ_f и еще одно *двузначное представление* Δ: $o \to S(o)$ *степени* 2^ν. Величины типа Δ называются *спинорами*. Такие величины, определенные в четырехмерном мире, получили достойное признание в дираковской теории электрона со спином. Картан в соответствии со своим подходом установил закон преобразования спиноров $S(o)$ лишь для бесконечно малых вращений o. Мы дадим здесь простое описание конечных преобразований Δ и выведем из него простейшим алгебраическим методом основные свойства спиноров. Такая теория позволит выяснить, в какой мере исследования последнего времени в области спинорного исчисления выявили те существенные закономерности, которые сохраняются при более высоких размерностях. Один из основных наших результатов состоит в том, что уравнения движения для электрона Дирака и выражение для электрического тока однозначно определены и в случае произвольной размерности.

[1]) См. также работу Вейля [2].

Наше исследование строится следующим образом. Мы начинаем (§ 2) с некоторой ассоциативной алгебры П порядка $2^{2\nu}$ и доказываем, что она является полной матричной алгеброй в 2^{ν}-мерном пространстве и приводит к желаемому определению представления Δ (§ 3). Вначале мы получим Δ как проективное представление, так что смысл будут иметь лишь отношения компонент спинора. Мы докажем, что в случае четной размерности $n=2\nu$ (§ 3) произведение представления Δ на контрагредиентное представление $\breve{\Delta}$ расщепляется так:

$$\Delta \times \breve{\Delta} \sim \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_n,$$

а в нечетномерном случае (§ 5) так:

$$\Delta \times \breve{\Delta} \sim \Gamma_0 + \Gamma_2 + \Gamma_4 + \ldots + \Gamma_{n-1}.$$

Нормировав проективное представление Δ, можно получить обычное, хотя и двузначное, представление Δ, удовлетворяющее соотношению эквивалентности $\breve{\Delta} \sim \Delta$ (§ 4 и 5). Если ограничиться собственными ортогональными преобразованиями в четномерном пространстве, то Δ расщепится на пару представлений размерности $2^{\nu-1}$ (§ 6). Мы рассмотрим отдельно каждое из произведений вида $\Delta \times \breve{\Delta}$ при $\Delta = \Delta^+$ или $\Delta = \Delta^-$, а также условия эквивалентности $\breve{\Delta} \sim \Delta$. От наших конечных преобразований нетрудно перейти к инфинитезимальному описанию Картана (§ 7). Рассматривая лишь действительные преобразования, следует учитывать различия в индексе инерции фундаментальной квадратичной формы (§ 8). Будет доказано, что представление $\breve{\Delta}$ эквивалентно представлению Δ, но лишь с точностью до знака, определение которого, вызывающее особый интерес, тесно связано с индексом инерции. Неприводимость и эквивалентность возникающих представлений будут установлены в § 9. Вопрос о связи с физикой рассматривается в § 10.

В нашем нсследовании мы неоднократно обращаемся к закону дуальности тензоров и тензорных представлений Γ_f, сформулированному в § 1. Последний раздел (§ 11) посвящен демонстрации хорошо известного фундаментального предложения, относящегося к автоморфизмам полной матричной алгебры и необходимого для определения Δ.

§ 1. Дуальность тензоров

Представление Γ_n есть представление степени 1 полной группы вращений $\mathfrak{D}_n$, ставящее в соответствие вращению o сигнатуру $\sigma(o)$: $\sigma(o) = +1$ для собственных и $\sigma(o) = -1$ для несобственных вращений. Всякое представление $\Gamma: o \to G(o)$ связано с другим представлением $\sigma\Gamma: o \to \sigma(o)\,G(o)$, которое совпадает с Γ для вращений, принадлежащих $\mathfrak{D}_n^+$.

Соотношение

$$\alpha^*(i'_1 \ldots i'_{n-f}) = \alpha(i_1 \ldots i_f), \tag{2}$$

в котором $i_1 \ldots i_f i'_1 \ldots i'_{n-f}$ — любая четная перестановка чисел $1\,2 \ldots n$, ставит в соответствие любому тензору α ранга f некоторый тензор α^* ранга $n-f$. Это соотношение инвариантно относительно собственных ортогональных преобразований. Таким образом, для тензорных представлений Γ_f группы $\mathfrak{D}_n^+$ справедлнв *закон дуальности* $\Gamma_{n-f} \sim \Gamma_f$. Учитывая несобственные ортогональные преобразования, его нужно заменить законом

$$\Gamma_{n-f} \sim \sigma\Gamma_f.$$

В случае четного числа измерений $n = 2\nu$ представление Γ_ν особенно интересно, так как $\sigma\Gamma_\nu \sim \Gamma_\nu$. Равенство (2) или равенство

$$\alpha^*(i'_1 \ldots i'_\nu) = i^\nu \cdot \alpha(i_1 \ldots i_\nu) \tag{3}$$

устанавливает теперь закон преобразования $\alpha \to \alpha^*$ пространства тензоров ранга ν *на само себя.* Мы добавили множитель i^ν, чтобы это преобразование было инволюцией: $\alpha^{**} = \alpha$, так как если $i_1 \ldots i_\nu i'_1 \ldots i'_\nu$

есть четная перестановка, то перестановка $i'_1 \ldots i'_\nu i_1 \ldots i_\nu$ имеет характер $(-1)^\nu$. Мы различаем положительные и отрицательные тензоры ранга ν в зависимости от знака $\alpha^* = \alpha$ или $\alpha^* = -\alpha$. Любой тензор ранга ν можно разложить однозначным образом на положительную и отрицательную части:

$$\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*) + \frac{1}{2}(\alpha - \alpha^*).$$

Следовательно, как представление группы $\mathfrak{d}_{2\nu}^+$ представление Γ_ν расщепляется на два представления половинной степени, $\Gamma_\nu^+ + \Gamma_\nu^-$.

§ 2. Алгебра II

Наш подход будет точно таким же, как в классической статье Дирака [3] об электроне со спином. Введем n величин p_i, чтобы превратить фундаментальную квадратичную форму в квадрат линейной формы:

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = (p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n)^2. \tag{4}$$

Для этого необходимы условия

$$p_i^2 = 1, \quad p_k p_i = -p_i p_k \quad (k \neq i). \tag{5}$$

Величины p_i порождают алгебру, состоящую из всех линейных комбинаций 2^n единичных элементов

$$e_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n} \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{—целые, mod } 2). \tag{6}$$

В силу условий (5) закон умножения для этих единичных элементов имеет вид

$$e_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \cdot e_{\beta_1 \ldots \beta_n} = (-1)^\delta \cdot e_{\gamma_1 \ldots \gamma_n};$$
$$\gamma_i = \alpha_i + \beta_i, \quad \delta = \sum_{i > k} \alpha_i \beta_k.$$

Легко убедиться, что данный закон умножения ассоциативен.

Самый общий элемент a нашей алгебры можно записать в виде

$$a = \ldots + \frac{1}{f!} \sum_{(i_1, \ldots, i_f)} \alpha(i_1 \ldots i_f) p_{i_1} \ldots p_{i_f} + \ldots \quad (f = 0, 1, \ldots, n), \tag{7}$$

разлагая a на члены, различающиеся числом f неодинаковых множителей p. Поскольку произведение f различных множителей p вида $p_{i_1} \ldots p_{i_f}$ кососимметрично по индексам $i_1 \ldots i_f$, коэффициенты $\alpha(i_1 \ldots i_f)$ в формуле (7) также можно считать кососимметричными. При этом можно распространить сумму $\sum$ в формуле (7) независимо по всем индексам $i_1, \ldots, i_f$ от 1 до n. Следовательно, величина a эквивалентна „набору тензоров"[1]), состоящему из $n+1$ тензоров рангов $0, 1, \ldots, f, \ldots, n$. Сложение двух наборов тензоров и умножение набора на число имеют тривиальный смысл в рамках алгебры П. Но как представить произведение двух наборов a и b? Достаточно рассмотреть случай, когда a — это один тензор α ранга f, а b — один тензор β ранга g (остальные члены равны нулю). Произведение расщепляется на различные части в соответствии с числом совпадений r среди индексов тензоров α и β. Так как

$$p_{i_1} \ldots p_{i_{f-r}} \cdot p_{l_1} \ldots p_{l_r} p_{l_1} \ldots p_{l_r} p_{k_1} \ldots p_{k_{g-r}} = \\ = (-1)^{r(r-1)/2} \cdot p_{i_1} \ldots p_{i_{f-r}} p_{k_1} \ldots p_{k_{g-r}},$$

в произведение входит „свертка"

$$\gamma(i_1 \ldots i_{f-r} k_1 \ldots k_{g-r}) = \\ = \sum_{(l_1, \ldots, l_r)} \alpha(i_1 \ldots i_{f-r} l_1 \ldots l_r) \cdot \beta(l_1 \ldots l_r k_1 \ldots k_{g-r}) \tag{8}$$

---

[1]) В оригинале „tensor set". В статье Рашевского [6] используется термин „агрегат". — *Прим. перев.*

Однако после этого следует провести „альтернирование“, т. е. знакопеременное суммирование по всем перестановкам $f+g-2r$ индексов тензора γ. Поскольку тензор γ уже кососимметричен по $(f-r)$ индексам i и по $(g-r)$ индексам k, достаточно распространить антисимметризацию на все „смешанные“ пары. Такую операцию мы обозначим символом **M**. Принимая во внимание множитель $1/f!$ при f-м члене в сумме (7) и число различных распределений r совпадающих индексов $l_1 \ldots l_r$ среди индексов тензоров α и β, приходим к следующему результату. „Произведение“ двух тензоров α и β есть набор тензоров, в который входят лишь тензоры рангов $f+g-2r$. Числа r ограничены условиями

$$r \geqslant 0, \quad 2r \geqslant f+g-n, \quad r \leqslant f, \quad r \leqslant g.$$

Член с фиксированным r имеет вид

$$(-1)^{(r)}(1/r!)\cdot \mathbf{M}\gamma(i_1 \ldots i_{f-r}k_1 \ldots k_{g-r}),$$

где γ — свертка вида (8).

Интересна не столько сама процедура умножения, сколько то обстоятельство, что она *инвариантна относительно ортогональных преобразований.*

§ 3. Спиноры в четномерном пространстве

В этом параграфе мы полагаем, что число $n=2\nu$ четное. Алгебра П известна в квантовой теории — она используется в методе „вторичного квантования“ для перехода от теории одной частицы к теории с неопределенным числом частиц, подчиняющихся статистике Ферми. Эта связь непосредственно порождает некоторое представление $p_i \to P_i$ с помощью матриц P_i порядка 2^ν, описываемое двухрядными матрицами

$$1=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix},\quad 1'=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{Vmatrix},\quad P=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix},\quad Q=\begin{Vmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{Vmatrix}.$$

Строку от строки (и столбец от столбца) будем различать знаками плюс и минус. Матрицы $1'$, P, Q антикоммутируют друг с другом; их квадраты равны 1.

Наряду с $p_1, \ldots, p_{2\nu}$ мы иногда будем использовать обозначения $p_1, \ldots, p_\nu$, $q_1, \ldots, q_\nu$. Представление определяется формулами

$$\begin{gathered} p_\alpha \to P_\alpha = 1' \times \ldots \times 1' \times P \times 1 \times \ldots \times 1, \\ (\alpha = 1, \ldots, \nu). \\ q_\alpha \to Q_\alpha = 1' \times \ldots \times 1' \times Q \times 1 \times \ldots \times 1. \end{gathered} \tag{9}$$

В правой части мы имеем ν множителей, матрицы P и Q стоят на α-м месте. Строки и столбцы наших матриц или координаты x_A в 2^ν-мерном пространстве представления, согласно введенным обозначениям, различаются комбинацией знаков $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu)$, $(\sigma_\alpha = \pm)$. Легко видеть, что выполняются нужные нам правила

$$P_i^2 = 1, \quad P_k P_i = -P_i P_k \quad (i \neq k). \tag{10}$$

Таким образом, мы нашли некоторое *представление* $x \to X$ степени 2^ν для алгебры П. Будем считать, что *все матрицы X являются образами элементов x указанной алгебры.* Так как алгебра П — того же порядка $2^{2\nu} = (2^\nu)^2$, что и алгебра всех матриц в 2^ν-мерном пространстве, соотношение $x \rightleftarrows X$ есть взаимнооднозначное изоморфное отображение алгебры на полную матричную алгебру 2^ν-мерного „спинового пространства“: алгебра П изоморфна полной матричной алгебре в спиновом пространстве. Чтобы доказать это утверждение, вычислим матрицу U_α, представляющую элемент $u_\alpha = ip_\alpha q_\alpha$:

$$U_\alpha = iP_\alpha Q_\alpha = 1 \times \ldots \times 1 \times 1' \times 1 \times \ldots \times 1, \tag{11}$$

а также

$$U_1 \ldots U_{\alpha-1} P_\alpha = 1 \times \ldots \times 1 \times P \times 1 \times \ldots \times 1 \tag{11'}$$

и аналогично $U_1 \ldots U_{\alpha-1} Q_\alpha$. (Множители, отличные от единицы, стоят на α-м месте.) Таким образом, элементы

$$\frac{1}{2}(1 + u_\alpha) = z_\alpha^{++}, \quad \frac{1}{2} u_1 \ldots u_{\alpha-1}(p_\alpha - iq_\alpha) = z_\alpha^{+-},$$

$$\frac{1}{2} u_1 \ldots u_{\alpha-1}(p_\alpha + iq_\alpha) = z_\alpha^{-+}, \quad \frac{1}{2}(1 - u_\alpha) = z_\alpha^{--}$$

представляются произведениями вида (11), но с матрицами

$$\begin{Vmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{Vmatrix}$$

на α-м месте. Следовательно, образ элемента $\prod_{\alpha=1}^{\nu}\left(z_{\alpha}^{\sigma_\alpha\tau_\alpha}\right)$ есть матрица, содержащая элемент, отличный от нуля, т. е. единицу, только на пересечении строки $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$ со столбцом $\tau_1, \ldots, \tau_\nu$ $(\sigma_\alpha = \pm, \tau_\alpha = \pm)$.

Установим теперь связь с вращениями $o = \| o(ik) \|$ в n-мерном пространстве (метод 1). Применим ортогональное преобразование $o(ik)$:

$$P_i \to P_i^* = \sum_{k=1}^{n} o(ki) P_k, \quad P_i = \sum_{k=1}^{n} o(ik) P_k^* \tag{12}$$

и заметим, что новые матрицы P_i^* удовлетворяют тем же соотношениям (10), что и старые. Следовательно, соответствие $p_i \to P_i^*$ задает новое представление алгебры П. Но, поскольку *полная матричная алгебра допускает лишь внутренние автоморфизмы* [1]), это представление должно быть эквивалентно первоначальному. Иными словами, существует такая несингулярная матрица $S(o)$, что

$$P_i^* = S(o) P_i S(o)^{-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{13}$$

Этим соотношением матрица $S(o)$ определяется с точностью до „калибровочного" числового множителя: преобразование $S(o)$ следует понимать в „однородном" смысле, т. е. не как аффинное преобразование в 2^ν-мерном векторном пространстве, а как проективное преобразование в пространстве, состоящем из его лучей. Фиксируя произвольным образом калибровочные множители для вращений o, o' и $o'o$, мы приходим к соотношению вида

$$S(o'o) = cS(o') S(o). \tag{14}$$

[1]) Доказательство см. в § 11.

Следовательно, мы имеем *проективное представление* группы вращений степени 2^ν, так называемое *спиновое представление* Δ: $o \to S(o)$.

Эту связь можно описать также следующим образом (метод 2). Ортогональным преобразованием тензоров, входящих в произвольный набор, определяется взаимно однозначное отображение $x \to x^*$ в себя для алгебры П тензорных наборов. Однако такое отображение в представлении $x \to X$ тензорных наборов матрицами X порядка 2^ν непременно имеет вид

$$X \to X^* = SXS^{-1}$$

(S не зависит от x). Перепишем это уравнение в компонентах, $X = \| x_{JK} \|$:

$$x^*_{JK} = \sum_{R,T} s_{JR} \breve{s}_{KT} x_{RT},$$

где $\breve{S} = \| \breve{s}_{JK} \|$—матрица, контрагредиентная матрице S. Компоненты x_{JK} преобразуются по представлению $S \times \breve{S}$, чем доказывается редукция

$$\begin{aligned}\Delta \times \breve{\Delta} \sim \Gamma_0 + \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_n \sim \\ \sim \left\{ \begin{matrix} \Gamma_0 + \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_{\nu-1} + \\ \sigma\Gamma_0 + \sigma\Gamma_1 + \ldots + \sigma\Gamma_{\nu-1} \end{matrix} \right\} + (\Gamma_\nu \sim \sigma\Gamma_\nu). \quad (15)\end{aligned}$$

Величины вида $\{\psi^A\}$ и $\{\varphi_A\}$, преобразующиеся по представлениям Δ и $\breve{\Delta}$, будем называть первые ковариантными, а вторые контравариантными спинорами. Будем записывать компоненты ковариантного спинора ψ^A в виде столбца, а контравариантного спинора φ_A в виде строки. Согласно формуле (15), можно построить следующие линейные комбинации 2^ν произведений $\varphi_A \psi^B$: один скаляр, один вектор, один тензор 2-го ранга и т. д. Разумеется, скаляр равен

$$\varphi\psi = \sum_A \varphi_A \psi^A.$$

Вектор имеет компоненты $\varphi P_i \psi$. Действительно, подставив $\psi^* = S\psi$, $\varphi^* = \varphi S^{-1}$, получим

$$\varphi^* P_i \psi^* = \varphi S^{-1} P_i S\psi = \sum_{k=1}^{n} o(ik)\, \varphi S^{-1} P_k^* S\psi =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} o(ik)\, \varphi P_k \psi.$$

Тензор 2-го ранга имеет компоненты $\varphi (P_i P_k) \psi$, $i \neq k$, и т. д. Таким способом мы можем провести редукцию (15) в явном виде.

§ 4. Связь между ковариантными и контравариантными спинорами

Пусть n — по-прежнему четное. Покажем, что *представление* $\breve{\Delta}$ *эквивалентно представлению* Δ. В связи с этим заметим, что соотношения (10), справедливые для матриц P_i, выполняются также для транспонированных матриц P_i'. Согласно тому утверждению об изоморфизмах нашей матричной алгебры П, которое мы уже имели случай использовать, должна существовать некоторая неособенная матрица C, такая, что

$$P_i' = C P_i C^{-1} \tag{16}$$

для любого i. Легко найти явный вид матрицы C. Заметим, что

$$P_\alpha' = P_\alpha, \quad Q_\alpha' = -Q_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, \nu).$$

Если ν — нечетное, то произведение $p_1 \ldots p_\nu$ коммутирует с p_α и антикоммутирует с q_α; если же ν — четное, то ситуация противоположная. Поэтому можно считать, что

$$c = p_1 \ldots p_\nu \quad \text{или} \quad c = q_1 \ldots q_\nu$$

в зависимости от того, нечетное ν или четное. В том и другом случае, положив

$$C = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \times \ldots \tag{17}$$

(ν множителей), нетрудно убедиться в справедливости формулы (16).

Наряду с соотношением (12) имеем

$$P'_i \to P^{*\prime}_i = \sum_k o(ki) P'_k.$$

С одной стороны, это преобразование представляется в виде

$$P'_i \to S'(o)^{-1} P'_i S'(o) = \breve{S}(o) P'_i \breve{S}(o)^{-1}.$$

С другой стороны, элементы $P'_i = CP_iC^{-1}$, очевидно, преобразуются матрицами $CS(o)C^{-1}$. Следовательно, должно выполняться соотношение типа

$$CS(o)C^{-1} = \rho(o) \cdot \breve{S}(o),$$

где $\rho(o)$ — числовой множитель, зависящий от o. При умножении $S(o)$ на λ матрица $\breve{S}(o)$ умножается на λ^{-1}, а множитель ρ заменяется множителем $\rho\lambda^2$. Поэтому мы можем выбрать произвольный калибровочный множитель в S так, чтобы было $\rho = 1$:

$$\breve{S}(o) = CS(o)C^{-1}. \tag{18}$$

В результате

$$(\det S)^2 = 1 \tag{19}$$

и $S(o)$ определяется однозначно *с точностью до знака.* Если выбирать этот знак для двух вращений o, o' и их комбинации $o'o$ произвольным образом, то множитель c в формуле (14) будет принимать значения ± 1. Поскольку и матрица $X = S(o'o)$ и матрица $X = S(o')S(o)$ удовлетворяет соотношению

$$\breve{X} = CXC^{-1},$$

представление Δ — не проективное, а обыкновенное, хотя и двузначное.

Формула (18) дает соотношение между ковариантным и контравариантным спинорами в явном виде: если

C — матрица $\|c_{AB}\|$, то подстановка

$$\varphi_A = \sum_B c_{AB}\psi^B$$

переводит ковариантный спинор ψ в контравариантный спинор φ.

«Квадрат» двузначного представлення Δ есть однозначное представление и распадается на сумму тензорных представлений Γ_f:

$$\Delta \times \Delta \sim \Gamma_0 + \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_{n-1} + \Gamma_n.$$

§ 5. Нечетное число измерений ($n = 2\nu + 1$)

К нашим величинам $p_1, \ldots, p_{2\nu}$ следует добавить еще величину $p_{2\nu+1}$, $p_{2\nu+1}^2 = 1$, антикоммутирующую с остальными. Представление $p_i \to P_i$ $(i = 1, \ldots, 2\nu)$ можно дополнить соответствием

$$p_n \to P_n = 1' \times 1' \times \ldots \times 1' \qquad (n = 2\nu + 1).$$

Пусть $\iota = 1$ при четных и $\iota = i$ при нечетных ν. Произведение

$$u = \iota p_1 p_2 \ldots p_n \tag{20}$$

коммутирует со всеми элементами алгебры и удовлетворяет соотношению $u^2 = 1$. В описанном представлении u соответствует единичной матрице. Существует второе, неэквивалентное первому представление алгебры

$$p_i \to -P_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{21}$$

в котором $u \to -1$.

В рассматриваемом случае порядок алгебры П, равный $2 \cdot (2^\nu)^2$, вдвое больше порядка алгебры всех матриц X в 2^ν-мерном спиновом пространстве. Поэтому наше изоморфное отображение $x \to X$ становится взаимно однозначным лишь после редукции П по модулю $(1 - u)$; это осуществляется добавлением к определяющим формулам (5) условия $u = 1$. Полученную новую алгебру можно реализовать в виде подалгебры алгебры П разными способами, например как алгебру величин x, удовлетворяющих условию

$x = ux$. Удобнее рассматривать *четные элементы* алгебры П. Их базис состоит из произведений четного числа образующих p; в формуле (6) следует добавить ограничение $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \equiv 0 \pmod 2$. Соответствующие наборы состоят лишь из тензоров четного ранга. Любой нечётный элемент можно представить в виде ux, где x — четный элемент. Произвольная величина $x + ux'$ из алгебры П (x и x' — четные) представляется той же матрицей, что и четиая величина $x + x'$. Поэтому соответствие $x \to X$ является взаимно однозначным в рамках алгебры Π_e четных элеметов. Второе представление (21) для четных элементов совпадает с первым.

Далее процедура не отличается от изложенной выше (способ 1). Пусть $\| o(ik) \|$ — собственное ортогональное преобразование. Тогда по формуле (12) строится новое представление алгебры П. Легко видеть, что

$$U^* = \iota P_1^* \ldots P_n^* = \det [o(ik)] \cdot U = U.$$

Поэтому это представление, как и первоначальное, ставит в соответствие элементу u матрицу $+1$ (а не -1). Отображение $P_i \to P_i^*$ переводит алгебру П, редуцированную по модулю $(1 - u)$, в себя изоморфно; следовательно, выполняется соотношение вида

$$P_i^* = S P_i S^{-1}.$$

Представление $\Delta : o \to S(o)$ можно распространить на несобственные вращения, описывая отражение $x_i \to -x_i$, коммутирующее со всеми вращениями, матрицей $+1$ или -1. (Так как представление Δ двузначно, безразлично, выбирается ли значение $+1$ или -1.)

(Способ 2.) Ортогональное преобразование o — изоморфное отображение множества всех четных наборов тензоров на себя. Если представить это множество алгеброй всех 2^ν-мерных матриц X изложенным выше методом, то вращение o приводит к автоморфизму $X \to X^*$ полной матричной алгебры: $X^* =$

$=SXS^{-1}$. При этом сразу получается представление $S(o)$ всех собственных и несобственных вращений o. Затем мы получаем разложение

$$\Delta\times\breve{\Delta}\sim\Gamma_0+\Gamma_2+\ \dots\ +\Gamma_{2\nu}\sim\Gamma_0+\\+\sigma\Gamma_1+\Gamma_2+\sigma\Gamma_3+\dots,\qquad(22)$$

причем вторая сумма заканчивается членом Γ_ν или $\sigma\Gamma_\nu$. Таким образом, в представлении $\Delta\times\breve{\Delta}$ содержатся: собственный скаляр, несобственный вектор, собственный тензор ранга 2 и т. д.

Группа вращений $\mathfrak{D}_n$ при $n=2\nu+1$ включает в себя группу $\mathfrak{D}_{n-1}$, которая состоит из ортогональных преобразований переменных $x_1, \dots, x_{2\nu}$, не меняющих $x_{2\nu+1}$. Такое сужение превращает представление Δ группы $\mathfrak{D}_n$ в рассмотренное в § 3 представление Δ группы $\mathfrak{D}_{2\nu}$. То же сужение расщепляет тензор ранга f в n-мерном пространстве на пару тензоров ранга f и $f-1$ в $(n-1)$-мерном пространстве. Таким образом, разложение (22) переходит в разложение (15).

Для матрицы C [формула (17)], удовлетворяющей уравнениям $P'_i=CP_iC^{-1}$ (при $i=1, 2, \dots, 2\nu$), справедливо также условие

$$CP_nC^{-1}=(-1)^\nu P'_n$$

при $P_n=P_{2\nu+1}$. Поэтому матрицу C в таком виде можно использовать, как и в § 4, лишь при четном ν. В противоположном случае следует заменить C матрицей CP_n:

$$C=\begin{Vmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{Vmatrix}\times\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}\times\begin{Vmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{Vmatrix}\times\dots,$$

при этом $CP_iC^{-1}=-P'_i$ при любом i. В обоих случаях после надлежащего выбора калибровочного множителя в $S(o)$ получается уравнение (18) с определенной таким образом матрицей C. Итак, $\breve{\Delta}\sim\Delta$, и мы можем указать явный вид преобразования C, переводящего ковариантные спиноры в контравариантные.

§ 6. Расщепление представления Δ при сужении на собственные вращения

В случае нечетной размерности безразлично, рассматривается ли группа $\mathfrak{d}_n$ или $\mathfrak{d}_n^+$, так как отражение, коммутирующее со всеми вращениями, является несобственным вращением. В случае же четной размерности $n = 2\nu$ сужение на $\mathfrak{d}_n^+$ приводит к расщеплению спинового представления Δ на пару неэквивалентных представлений Δ^+ и Δ^- степени $2^{\nu-1}$. В соответствии с этим следует различать „положительные" и „отрицательные" спиноры. Это делается следующим образом.

Пусть, как и прежде,

$$u = \iota p_1 \ldots p_{2\nu} \to U = 1' \times 1' \times \ldots \times 1'. \tag{23}$$

Отделим четные комбинации знаков, для которых $\sigma_1 \ldots \sigma_\nu = +1$, от нечетных. Тогда матрицу U можно представить в виде

$$U = \left|\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right|. \tag{24}$$

Как следствие уравнений (12) для собственных вращений o имеем $U \to U^* = U$. Поскольку из равенства $P_i^* = SP_iS^{-1}$ следует равенство $U^* = SUS^{-1}$, матрица S коммутирует с матрицей (24) и потому распадается на „четную" и „нечетную" части:

$$S = \left|\begin{array}{c|c} S^+ & 0 \\ \hline 0 & S^- \end{array}\right|.$$

Матрицы $S^+(o)$ и $S^-(o)$ в двух представлениях Δ^+ и Δ^- степени $2^{\nu-1}$ определены однозначно с точностью до общего знака. Следовательно, то обстоятельство, что отражение представляется матрицей $+1$ в Δ^+ и матрицей -1 в Δ^{-}, означает существенную неэквивалентность.

Что означает разбиение матрицы X на четыре квадрата для соответствующих элементов x алгебры П или для тензорных наборов? 1. Из соотношения $UP_i = -P_iU$ явствует, что четные величины коммутируют с U, а нечетные — антикоммутируют. Стало быть, четные величины представляются матрицей вида

$$\left|\begin{array}{c|c} \times & \\ \hline & \times \end{array}\right|, \tag{25}$$

а нечетные — матрицей вида

$$\left|\begin{array}{c|c} & \times \\ \hline \times & \end{array}\right| \tag{26}$$

(в квадратах, не помеченных крестом, стоят нули). 2. Инволюция

$$a \to a^* = au, \quad A \to A^* = AU$$

не меняет двух левых квадратов в матрице

$$A = \left|\begin{array}{c|c} + & - \\ \hline + & - \end{array}\right|$$

и меняет знак у двух правых квадратов. Условимся приписывать величине a сигнатуру $+$, если $a^* = a$, и сигнатуру $-$, если $a^* = -a$. В первом случае величина a представляется матрицей

$$\left|\begin{array}{c|c} \times & \\ \hline \times & \end{array}\right|, \tag{27}$$

а во втором — матрицей

$$\left|\begin{array}{c|c} & \times \\ \hline & \times \end{array}\right|. \tag{28}$$

Любую величину можно однозначно представить в виде суммы двух членов с сигнатурами $+$ и $-$. (Помимо указанной операции $a \to a^*$ можно, разумеется, рассмотреть и такую: $a \to a^+ = ua$. При этом $a^+ = a^*$ для четных величин и $a^+ = -a^*$ для нечетных.) Таким образом, мы получаем следующую схему:

$$\left|\begin{array}{c|c} \times & \\ \hline & \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{c|c} & \times \\ \hline & \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{c|c} & \\ \hline \times & \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \times \end{array}\right|$$

четность:	$+$	$-$	$-$	$+$,
сигнатура:	$+$	$-$	$+$	$-$.

На вопрос, как описанная инволюция действует на тензоры, ответ дается соотношением

$$p_1 \ldots p_f \cdot u = (-1)^{\langle f \rangle} \iota p_{f+1} \ldots p_n.$$

Переход от $a = \{\alpha\}$ к $a^* = \{\alpha^*\}$ определяется равенством

$$a^*(i'_1 \ldots i'_{n-f}) = (-1)^{\langle f \rangle} \cdot \iota \cdot \alpha(i_1 \ldots i_f)$$

(где $i_1 \ldots i_f i'_1 \ldots i'_{n-f}$ — любая четная перестановка индексов). Множитель $(-1)^{\langle \nu \rangle} \iota$ равен i^ν.

Итак, учитывая указанное в § 1 расщепление Γ_ν на $\Gamma_\nu^+ + \Gamma_\nu^-$, получаем следующие редукции:

$$\begin{gathered} \Delta^+ \times \breve{\Delta}^+ \sim \Gamma_0 + \Gamma_2 + \ldots, \quad \Delta^+ \times \breve{\Delta}^- \sim \Gamma_1 + \Gamma_3 + \ldots, \\ \Delta^- \times \breve{\Delta}^+ \sim \Gamma_1 + \Gamma_3 + \ldots, \quad \Delta^- \times \breve{\Delta}^- \sim \Gamma_0 + \Gamma_2 + \ldots. \end{gathered} \tag{29}$$

Из двух сумм в левом столбце одна обрывается на $\Gamma_{\nu-1}$, а другая на Γ_ν^+; суммы в правом столбце обрываются на Γ_ν^- и $\Gamma_{\nu-1}$.

Из формулы (16) получаем

$$(-1)^\nu U' = CUC^{-1} \text{ или } CU = (-1)^\nu UC.$$

Отсюда следует, что C имеет вид (25) или (26) в зависимости от того, четно ν или нечетно. Обозначая ненулевые квадраты в матрице C через C_1 и C_2, получаем

$$\left.\begin{matrix} \breve{S}^+(o) = C_1 S^+(o) C_1^{-1}, & \breve{S}^-(o) = C_2 S^-(o) C_2^{-1} \\ \breve{\Delta}^+ \sim \Delta^+, & \breve{\Delta}^- \sim \Delta^- \end{matrix}\right\} \nu \text{ четно},$$

$$\left.\begin{matrix} \breve{S}^+(o) = C_1 S^-(o) C_1^{-1}, & \breve{S}^-(o) = C_2 S^+(o) C_2^{-1} \\ \breve{\Delta}^+ \sim \Delta^- & \breve{\Delta}^- \sim \Delta^+ \end{matrix}\right\} \nu \text{ нечетно}.$$

§ 7. Инфинитезимальное описание

В случае *четного числа измерений* для инфинитезимального описания квадратичную форму, инвариантную относительно ортогональных преобразований, удобно привести к виду

$$x^1 y^1 + x^2 y^2 + \ldots + x^\nu y^\nu \tag{30}$$

(здесь x^α, y^α — все $n = 2\nu$ переменных). Соответственно этому вместо p_α, q_α следует ввести величины s_α, t_α, удовлетворяющие соотношениям

$$s_\alpha = \frac{1}{2}(p_\alpha - iq_\alpha), \quad t_\alpha = \frac{1}{2}(p_\alpha + iq_\alpha);$$

$$s_\alpha t_\alpha + t_\alpha s_\alpha = 1, \quad s_\alpha t_\beta + t_\beta s_\alpha = 0 \quad (\beta \neq \alpha),$$

$$s_\alpha s_\beta + s_\beta s_\alpha = 0, \quad t_\alpha t_\beta + t_\beta t_\alpha = 0 \quad (\text{все } \alpha, \beta),$$

$$s_\alpha \to S_\alpha = \mathbf{1}' \times \ldots \times \mathbf{1}' \times \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \times \mathbf{1} \times \ldots \times \mathbf{1},$$

$$t_\alpha \to T_\alpha = \mathbf{1}' \times \ldots \times \mathbf{1}' \times \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \times \mathbf{1} \times \ldots \times \mathbf{1}.$$

(Множители, выписанные в виде матриц, стоят на α-м месте.)

Все инфинитезимальные вращения являются линейными комбинациями вращеиий следующих типов:

а) $$dx_\alpha = x_\alpha, \quad dy_\alpha = -y_\alpha;$$

б) $$dx_\alpha = x_\beta, \quad dy_\beta = -y_\alpha \quad (\alpha < \beta).$$

(Не выписанные дифференциалы равны нулю. В случае „б“ можно переставлять независимо друг от друга x_α с y_α и x_β с y_β.) Представление Δ инфинитезимального преобразования „а“ имеет вид

$$\frac{1}{2}U_\alpha = \frac{1}{2}(1 \times \ldots \times 1 \times 1' \times 1 \times \ldots \times 1), \qquad (31)$$

а в случае „б“ оно представляется матрицей $S_\alpha T_\beta$. Чтобы доказать это, достаточно убедиться в справедливости уравнений

а) $$dX = \frac{1}{2}[U_\alpha, X] = \frac{1}{2}(U_\alpha X - XU_\alpha) = 0$$

при $X = S_\beta$ или T_β $(\beta \neq \alpha)$ и $dS_\alpha = S_\alpha$, $dT_\alpha = -T_\alpha$;

б) $\delta X = [S_\alpha T_\beta, X] = 0$

для всех S и T, кроме $X = S_\beta$ и T_α. В этих случаях

$$\delta S_\beta = S_\alpha, \quad \delta T_\alpha = -T_\beta.$$

Это сразу видно из соотношения

$$[S_\alpha T_\beta, X] = S_\alpha(T_\beta X + XT_\beta) - (XS_\alpha + S_\alpha X)T_\beta.$$

Таким образом, мы приходим к инфинитезимальному описанию спинорного представления, найденному Картаном.

Случай *нечетного числа измерений* по существу ничем не отличается от изложенного. Фундаментальную квадратичную форму для удобства представим в виде

$$(x^0)^2 + 2(x^1y^1 + \ldots + x^\nu y^\nu).$$

Формула (31) показывает, что представление Δ *двузначно, а не однозначно*, так как вращение

$$x^1 \to e^{i\varphi}x^1, \quad y^1 \to e^{-i\varphi}y^1$$

(остальные переменные не меняются) ставится в соответствие операции $S(o)$, умножающей переменную $x_{\sigma_1 \ldots \sigma_\nu}$ в спиновом пространстве на $\exp[(i/2)\sigma_1\varphi]$, $\sigma_\alpha = \pm 1$.

§ 8. Условие действительиости

В случае *действительных* ортогональных преобразований возникает вопрос: эквивалентно ли представлению Δ комплексно сопряженное представление $\bar{\Delta}$: $o \to \bar{S}(o)$? Поскольку P_i — эрмитовы матрицы, мы имеем [1]) $\bar{P}_i = P'_i$. Если матричные элементы $o(ik)$ действительны, то из соотношения

$$P_i^* = \sum_k o(ki) P_k$$

следует равенство

$$\bar{P}_i^* = \sum_k o(ki) \bar{P}_k.$$

В результате

$$\bar{S}(o) = \rho(o) \breve{S}(o),$$

и единичная эрмитова форма $\sum x_A \bar{x}_A$ при подстановке S приобретает множитель ρ. Поэтому $\rho > 0$ и

$$|\det S|^2 = \rho^{2^\nu}.$$

При выбранной нами нормировке $(\det S)^2 = 1$ и $\rho = 1$, так что

$$\bar{S}(0) = \breve{S}(0), \quad \bar{\Delta} = \breve{\Delta},$$

т. е. представление Δ действительной ортогональной группы унитарно.

Если рассматривать лишь действительные переменные, то нужно учитывать, что фундаментальная квадратичная форма

$$\sum_{i,k}^{n} \alpha_{ik} x^i x^k \tag{32}$$

[1]) Чертой обозначается комплексно сопряженная, а штрихом — транспонированная матрица. — *Прим. перев.*

может иметь отличный от нуля индекс инерции t. Этот случай особенно важен для физики, так как, согласно теории относительности, в четырехмерном мире $t=1$. Теперь следует задать элементы p_i алгебры II условиями

$$(p_1x^1 + \ldots + p_nx^n)^2 = \sum a_{ik}x^ix^k$$

или

$$\frac{1}{2}(p_ip_k + p_kp_i) = a_{ik}.$$

Новые элементы p_i получаются из старых путем преобразования H', если фундаментальная форма (32) возникает из единичной, в которой $a_{ik}=\delta_{ik}$ как результат преобразования H.

Однако и в этом случае более детальное исследование удобно проводить с помощью действительной нормальной формы

$$-(x^1)^2 - \ldots - (x^t)^2 + (x^{t+1})^2 + \ldots + (x^n)^2 = \sum_i \varepsilon_i (x^i)^2. \tag{33}$$

(Не теряя общности, можно считать, что $2t \leqslant n$.) По аналогии с физикой будем называть первые t переменных временными, а остальные $(n-t)$ — пространственными координатами. Мы рассматриваем группу $\mathfrak{D}_n$ преобразований Лоренца, т. е. группу всех действительных линейных преобразований o, переводящих фундаментальную форму (33) в самое себя[1]).

Матрицы $P_{t+1}, \ldots, P_n$ сохраняют прежние значения, а матрицы $P_1, \ldots, P_t$ приобретают множитель $i=\sqrt{-1}$. Таким образом,

$$\overline{P}_i = -P'_i \quad (i=1, \ldots, t); \quad \overline{P}_i = P'_i \quad (i=t+1, \ldots, n).$$

Можно обозначить через $\widetilde{A}$ матрицу $\overline{A}'$, эрмитово-сопряженную с A. Матрицы $\overline{P}_i$, а также P'_i удовлетво-

[1]) Переменные x^i подвергаются преобразованию Лоренца o: $x^i \to \sum_k o(ik)\, x^k$. При этом p_i (или P_i) преобразуются контрагредиентно; но, поднимая индекс подстановкой $p^i=\varepsilon_i p_i$, можно ввести величины p_i, преобразующиеся когредиентно с переменными x_i.

ряют фундаментным коммутационным правилам. Эти два набора матриц связаны некоторым преобразованием B. Нетрудно указать его явный вид:

$$B = i^{t-\langle t\rangle} \cdot P_1 \ldots P_t. \tag{34}$$

Точнее, справедливы соотношения

$$P_i' = (-1)^t B\overline{P}_i B^{-1}. \tag{35}$$

Множитель $i^{t-\langle t\rangle}$ добавлен, чтобы матрица B была эрмитовой: $\widetilde{B} = B$. Транспонированная матрица B' может отличаться от B лишь знаком: $B' = (-1)^{\langle t\rangle} B$. При четном n матрица B имеет вид (25) или (26) в зависимости от четности t. Все эти свойства довольно легко установить на основании общих соображений. Но это не стоит труда, так как они сразу же следуют из явного выражения (34).

Из формулы (35) получается соотношение

$$B\overline{S}(o)\, B^{-1} = \rho(o)\, \breve{S}(o). \tag{36}$$

Умножая слева на $S'(o)$:

$$S'B\overline{S} = \rho B,$$

видим, что в результате преобразования $\overline{S}$ эрмитова форма B приобретает лишь множитель ρ. Отсюда легко получить, как и в случае положительно определенной формы, что множитель ρ действителен, может принимать лишь два значения

$$\rho(o) = \pm 1$$

и удовлетворяет соотношению

$$\rho(o'o) = \rho(o')\, \rho(o).$$

Но, чтобы найти знак множителя ρ, необходимы дополнительные рассуждения. „Временной" минор детерминанта $\|o(ik)\|$ преобразования Лоренца

$$\Omega = \begin{vmatrix} o(11), \ldots, o(1t) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ o(t1), \ldots, o(tt) \end{vmatrix} \begin{cases} \text{либо} \geqslant 1, \\ \text{либо} \leqslant -1. \end{cases} \tag{37}$$

В первом случае мы положим $\sigma_-(o) = +1$, а во втором — $\sigma_-(o) = -1$ и будем называть величину $\sigma_-(o)$ *временно́й сигнатурой*. Эта величина является характером, т. е.

$$\sigma_-(o'o) = \sigma_-(o') \cdot \sigma_-(o).$$

Нам не нужно доказывать это здесь, так как далее мы увидим, что величина $\rho(o)$ в формуле (36) совпадает с величиной $\sigma_-(o)$. Таким же образом можно ввести *пространственную сигнатуру* $\sigma_+(o)$, рассматривая пространственный минор матрицы $\|o(ik)\|$. Этот минор равен $\sigma(o) \cdot \Omega$, так что величина $\sigma(o)$, отличающая собственные преобразования от несобственных, равна $\sigma_+\sigma_-$. Можно сказать, что преобразования Лоренца с $\sigma_- = -1$ приводят к обращению времени, а преобразования с $\sigma_+ = -1$ связаны с отражением пространства. Группа преобразований Лоренца распадается на 4 не связанные одна с другой части, которые различаются знаками двух сигнатур σ_- и σ_+.

Чтобы доказать утверждение (37), введем два вектора

$$\mathfrak{v}'_i = \{o(i1), \ldots, o(it)\}, \quad \mathfrak{v}''_i = \{o(i, t+1), \ldots, o(in)\},$$

из которых первый лежит во временно́й, а второй — в пространственной области. В этих двух подпространствах скалярные произведения определяются, как обычно:

$$(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = a'_1 b'_1 + \ldots + a'_t b'_t.$$

Тогда соотношения для преобразований Лоренца принимают вид

$$(\mathfrak{v}'_i \mathfrak{v}'_k) = \delta_{ik} + (\mathfrak{v}''_i \mathfrak{v}''_k) \quad (i, k = 1, 2, \ldots, t).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{vmatrix} (\mathfrak{v}'_1\mathfrak{v}'_1), & \ldots, & (\mathfrak{v}'_1\mathfrak{v}'_t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (\mathfrak{v}'_t\mathfrak{v}'_1), & \ldots, & (\mathfrak{v}'_t\mathfrak{v}'_t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + (\mathfrak{v}''_1\mathfrak{v}''_1), & (\mathfrak{v}''_1\mathfrak{v}''_2), & \ldots, & (\mathfrak{v}''_1\mathfrak{v}''_t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\mathfrak{v}''_t\mathfrak{v}''_1), & (\mathfrak{v}''_t\mathfrak{v}''_2), & \ldots, & 1 + (\mathfrak{v}''_t\mathfrak{v}''_t) \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{t} (\mathfrak{v}''_i\mathfrak{v}''_i) + \frac{1}{2!}\sum_{i,k=1}^{t} \begin{vmatrix} (\mathfrak{v}''_i\mathfrak{v}''_i) & (\mathfrak{v}''_i\mathfrak{v}''_k) \\ (\mathfrak{v}''_k\mathfrak{v}''_i) & (\mathfrak{v}''_k\mathfrak{v}''_k) \end{vmatrix} + \ldots$$

Все члены в правой части $\geqslant 0$, так что детерминант в левой части, равный квадрату Ω, $\geqslant 1$.

То обстоятельство, что *знак величины* ρ *в формуле* (36) *равен* σ_-, доказывается следующим образом. Так как

$$P_i^* = \sum_{k=1}^{n} o(ki) P_k,$$

мы имеем

$$P_1^* \dots P_t^* = \begin{vmatrix} o(11) & \dots & o(1t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ o(t1) & \dots & o(tt) \end{vmatrix} P_1 \dots P_t + \dots . \tag{38}$$

Но произведение вида $P_{i_1} \dots P_{i_t} P_1 \dots P_t$, где $i_1 \dots i_t$ — различные индексы, имеет нулевой след, если индексы $(i_1 \dots i_t)$ не являются перестановкой $1 \dots t$; при этом

$$\mathrm{Sp}(P_1 \dots P_t P_1 \dots P_t) = (-1)^{(t)} \mathrm{Sp}(P_1^2 \dots P_t^2) = \\ = (-1)^{t-(t)} 2^\nu.$$

Умножая обе части равенства (38) справа на $P_1 \dots P_t$ и вычисляя след, находим для величины Ω:

$$2^\nu \Omega = (-1)^{t-(t)} \mathrm{Sp}(P_1^* \dots P_t^* P_1 \dots P_t).$$

Вспомнив определения матрицы S, а именно $P_i^* = SP_iS^{-1}$, и матрицы B, легко показать, что

$$2^\nu \Omega = \mathrm{Sp}(SBS^{-1} \cdot B) = \mathrm{Sp}(B \cdot SBS^{-1})$$

и, согласно формуле (36),

$$S^{-1} = \rho (B')^{-1} \tilde{S} B' = \rho B^{-1} \tilde{S} B.$$

Замена B' на B допустима, так как B' отличается от B лишь числовым множителем. В результате получаем

$$2^\nu \Omega = \rho\, \mathrm{Sp}(BS\tilde{S}B) = \rho\, \mathrm{Sp}(BS \cdot \tilde{S}\tilde{B}) = \\ = \rho \cdot \mathrm{Sp}(T \cdot \tilde{T}) = \rho \sum_{J, K} |t_{JK}|^2,$$

откуда следует, что знаки величин ρ и Ω одинаковы.

Всякому представлению группы Лоренца Γ: $o \to G(o)$ соответствует другое представление $\sigma_-\Gamma : o \to \sigma_-(o) G(o)$.

Поэтому из формулы (36) или соотношения

$$\bar{S}(o) = \sigma_{-}(o) B^{-1} \breve{S}(o) B$$

следует соотношение эквивалентности

$$\bar{\Delta} \sim \sigma_{-} \breve{\Delta}. \tag{39}$$

Преобразование B связывает сопряжение ковариантного спинора ψ с контравариантным спинором $\varphi: \varphi' = B\bar{\psi}$ (мы ограничиваемся преобразованиями Лоренца с положительной временной сигнатурой, $\sigma_{-} = 1$). Из соотношения (39), учитывая (15) и (22), получаем разложения

$$\Delta \times \bar{\Delta} \sim \left\{ \begin{matrix} \sigma_{-}\Gamma_0 + \sigma_{-}\Gamma_1 + \ldots + \sigma_{-}\Gamma_{\nu-1} \\ \sigma_{+}\Gamma_0 + \sigma_{+}\Gamma_1 + \ldots + \sigma_{+}\Gamma_{\nu-1} \end{matrix} \right\} + \\ + (\sigma_{-}\Gamma_{\nu} \sim \sigma_{+}\Gamma_{\nu}) \quad (n = 2\nu), \tag{40}$$

$$\Delta \times \bar{\Delta} \sim \sigma_{-}\Gamma_0 + \sigma_{+}\Gamma_1 + \sigma_{-}\Gamma_2 + \ldots \quad (n = 2\nu + 1).$$

Последняя сумма завершается членом $\sigma_{-}\Gamma_{\nu}$ или $\sigma_{+}\Gamma_{\nu}$.

В случае $n = 2\nu$ представление Δ расщепляется на Δ^{+} и Δ^{-}, если ограничиться группой $\mathfrak{d}_n^{-}$ собственных преобразований Лоренца, $\sigma(o) = 1$. Это ограничение снимает разницу между двумя сигнатурами σ_{-} и σ_{+}. Как говорилось ранее, при четных или нечетных t матрица B имеет вид (25) или (26). Следовательно,

$$\bar{\Delta}^{+} \sim \sigma_{-}\breve{\Delta}^{+}, \quad \bar{\Delta}^{-} \sim \sigma_{-}\breve{\Delta}^{-} \quad \text{при четных } t;$$

$$\bar{\Delta}^{+} \sim \sigma_{-}\breve{\Delta}^{-}, \quad \bar{\Delta}^{-} \sim \sigma_{-}\breve{\Delta}^{+} \quad \text{при нечетных } t.$$

§ 9. Неприводимость

Представление Γ_f заведомо неприводимо, если не существует однородного линейного соотношения с постоянными (не зависящими от o) коэффициентами, связывающего между собой миноры порядка f матрицы $\| o(ik) \|$, представляющей произвольное вращение. Это можно показать, не используя других вращений, кроме перестановки координатных осей в совокупности с отражениями. Действительно, предположим, что существует такое нетривиальное соотношение R, в которое некоторый минор $A\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_f \\ k_1 & \dots & k_f \end{pmatrix}$ входит с отличным от нуля коэффициентом. Путем надлежащих перестановок мы можем переместить этот минор в левый верхний угол матрицы. Рассмотрим теперь лишь изменения знаков координат:

$$\|o(ik)\| = \begin{Vmatrix} \pm 1 & & & \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pm 1 \end{Vmatrix},$$

матрицы которых имеют отличные от нуля главные миноры $A(i_1, \dots, i_f)$. Указанное линейное соотношение R будет содержать, помимо $A(1\ 2 \dots f)$, по крайней мере еще один член $A(1'\ 2' \dots f')$ с отличным от нуля коэффициентом. Хотя бы один из индексов $1', 2', \dots, f'$ будет отличен от $1, 2, \dots, f$; обозначим его через l. Если изменить знак переменной x_l, то соотношение R перейдет в другое соотношение R', в которое минор $A(1\ 2 \dots f)$ будет входить с тем же коэффициентом, но в котором коэффициент при $A(1'\ 2' \dots f')$ изменит знак. Поэтому сумма $\frac{1}{2}(R + R')$ будет иметь на один член меньше, чем R, а минор $A(1\ 2 \dots f)$ будет входить в нее с тем же коэффициентом, что и прежде. Такую процедуру сокращения можно повторять до тех пор, пока линейное соотношение $R = 0$ не приведет к невыполнимому уравнению $A(1\ 2 \dots f) = 0$.

Эти рассуждения справедливы в случае *полной* группы $\mathfrak{d}_n$. Если же допустить лишь собственные вращения из группы $\mathfrak{d}_n^+$, то может возникнуть необходимость скомбинировать перестановку на первом шаге с изменением знака одной переменной. Второй шаг можно выполнить тем же способом, если $2f < n$, выбрав l, как и раньше, из множества индексов $1'$,

$2', \ldots, f'$, а индекс m — таким образом, чтобы он не входил ни в $(1, 2, \ldots, f)$, ни в $(1', 2', \ldots, f')$, и изменив знаки обеих переменных x_l и x_m одновременно. Даже при $n = 2\nu$, $f = \nu$ процедура сокращения выполнима, если индексы $1', 2', \ldots, \nu'$ не совпадают с $\nu + 1, \ldots, n$. В последнем случае мы получаем соотношение вида

$$cA(1, 2, \ldots, \nu) + c'A(\nu + 1, \ldots, n) = 0. \qquad (41)$$

Одно такое равенство существует:

$$A(\nu + 1, \ldots, n) = A(1, 2, \ldots, \nu),$$

но другого соотношения такого типа, конечно, быть не может. Это означает не только то, что представления Γ_ν^+ и Γ_ν^- неприводимы, но также и то, что они *неэквивалентны*, ибо этим доказывается, что между двумя матрицами, связанными с одним и тем же произвольным вращением o в этих представлениях, нет линейного соотношения с фиксированными коэффициентами. Действительно, компоненты этих двух матриц таковы:

$$\frac{1}{2}\left[B\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_\nu \\ k_1 & \ldots & k_\nu \end{pmatrix} \pm i^\nu B\begin{pmatrix} i_1' & \ldots & i_\nu' \\ k_1 & \ldots & k_\nu \end{pmatrix}\right],$$

где

$$B\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_\nu \\ k_1 & \ldots & k_\nu \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[A\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_\nu \\ k_1 & \ldots & k_\nu \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} i_1' & \ldots & i_\nu' \\ k_1' & \ldots & k_\nu' \end{pmatrix}\right],$$

причем $i_1 \ldots i_\nu$, $i_1' \ldots i_\nu'$ и $k_1 \ldots k_\nu$, $k_1' \ldots k_\nu'$ — четные перестановки индексов $1, 2, \ldots, n$. Из сказанного выше явствует, что между величинами $B\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_\nu \\ k_1 & \ldots & k_\nu \end{pmatrix}$ нет универсального линейного соотношения.

Неэквивалентность двух представлений Γ_f, ранги которых в сумме не равны n, обусловлена тем, что у них неодинаковые степени.

Все эти рассуждения справедливы в случае *комплексной* ортогональной группы. Но ничто не изменится, если ограничиться *действительными* ортогональными преобразованиями. К тому же, сформулировав результат в инфинитезимальной форме, можно увидеть, что он не меняется от наличия ненулевого индекса инерции. Бесконечно малое преобразование

$$dx_i = x_k, \quad dx_k = -x_i \quad (i \neq k) \tag{42}$$

(остальные дифференциалы равны 0; такое преобразование порождает перестановку $x_i \to x_k$, $x_k \to -x_i$ и замену знака $x_i \to -x_i$, $x_k \to -x_k$) не меняется, если обе переменные (x_i, x_k) — временны́е или пространственные. Если же они входят в фундаментальную форму с разными знаками, т. е. одна из них — пространственная, а другая — временна́я, то преобразование (42) следует заменить преобразованием

$$dx_i = x_k, \quad dx_k = x_i.$$

Утверждение о неприводимости при всех преобразованиях (42) идентично утверждению о неприводимости при преобразованиях в знакопеременном случае, следует лишь заменить временну́ю переменную x_k величиной $\sqrt{-1} \cdot x_k$.

Произведение $\Gamma \times \breve{\Gamma}$ представления Γ на контрградиентное ему представление $\breve{\Gamma}$ содержит единичное представление Γ_0 по меньшей мере μ раз, если представление Γ распадается на μ частей. Если допустимо использовать общую и простую теорему о том, что неприводимые части всякого представления однозначно определены (в смысле эквивалентности и независимо от их порядка; см., например, книгу [4]), то формулы (15), (22) и (29) непосредственно указывают на неприводимость представлений Δ или Δ^+ и Δ^- соответственно, а также на неэквивалентность двух последних.

Другое прямое доказательство проводится следующим образом. Рассмотрим полную группу $\mathfrak{d}_n$ в четном случае $n = 2\nu$. Используя фундаментальную квадратичную форму в виде (30), рассмотрим „диагональные“

бесконечно малые вращения

$$dx_\alpha = i\varphi_\alpha x_\alpha, \quad dy_\alpha = -i\varphi_\alpha y_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, \nu) \qquad (43)$$

(φ_α — независимые параметры). В представлении Δ им соответствует диагональное преобразование

$$dx_{\sigma_1 \ldots \sigma_\nu} = \frac{i}{2}(\sigma_1\varphi_1 + \ldots + \sigma_\nu\varphi_\nu)\, x_{\sigma_1 \ldots \sigma_\nu} \quad (\sigma_\alpha = \pm).$$

Пусть подпространство P', входящее в полное спиновое пространство P, отлично от нуля и инвариантно относительно преобразований Δ. Выберем в P' ненулевой вектор z:

$$z = \sum_A z_A e_A = \{z_A\} \quad [A = (\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu)].$$

Повторяя подстановку (43), можно выделить каждое слагаемое $z_A e_A$, так как эти члены имеют различные веса $(i/2)\,(\sigma_1\varphi_1 + \ldots + \sigma_\nu\varphi_\nu)$. Поэтому хотя бы один из базисных векторов e_A принадлежит P'. Но $e_A = e_{\sigma_1 \ldots \sigma_\nu}$ переводится в любой другой базисный вектор $e_{\tau_1 \ldots \tau_\nu}$ подстановкой $x_\alpha \to y_\alpha$, $y_\alpha \to x_\alpha$ для тех пар (x_α, y_α), для которых знаки σ_α и τ_α неодинаковы. Поэтому подпространство P' совпадает с полным пространством P. Неприводимость представления Δ при нечетных $n = 2\nu + 1$ прямо следует из доказанной только что неприводимости для четных n, если ограничиться подгруппой $\mathfrak{d}_{n-1}$ группы $\mathfrak{d}_n$ при $n = 2\nu + 1$. Таким же образом можно усмотреть, что две части Δ^+, Δ^- неприводимы и неэквивалентны для группы $\mathfrak{d}_n^+$, $n = 2\nu$.

§ 10. Теория Дирака

Рассмотрим *спинорное поле* $\psi^A(x^1 \ldots x^n)$ в n-мерном мире с фундаментальной метрической формой (33). В *теории Дирака* самое существенное — это чтобы *вектор* можно было построить как линейную комбинацию произведений $\bar{\psi}^A\psi^B$. Если n четно, то из формулы (40) следует, что существует одна и только одна величина s_i, которая ведет себя как вектор при всех преобразованиях Лоренца без обращения времени, и один такой вектор для преобразований без отражения пространства. При нечетном n существует один вектор второго типа и нет векторов первого типа. Если мы абсолютно уверены в эквивалентности правого и левого, но готовы допустить неравноправие прошлого и будущего, то можем использовать лишь векторы первого типа. Тогда размерность n должна быть четной и вектор имеет вид

$$s_i = \bar{\psi} B P_i \psi.$$

Из этого вектора можно вывести скалярное поле

$$\sum_i \bar{\psi} B P^i (\partial \psi / \partial x^i) \quad (P^i = \varepsilon_i P_i). \tag{44}$$

Скаляр, возникающий из линейной комбинации произведений $\bar{\psi}^A \cdot \partial \psi^B / \partial x^i$, необходим для теории Дирака как основная часть *функции действия*, описывающей фундаментальные свойства квантовой теории. Здесь нет неоднозначности: при разложении на неприводимые части произведение $(\Delta \times \check{\Delta}) \times \check{\Gamma}_1$ содержит единичное представление Γ_0, точнее $\sigma_-\Gamma_0$, лишь один раз. Это видно из формулы (40), если учесть фундаментальную лемму теории представлений о том, что в произведении $\Gamma \times \check{\Gamma}_1$ единичное представление Γ_0 содержится один раз или отсутствует в зависимости от того, являются ли неприводимые представления той же группы Γ и Γ_1 эквивалентными или нет. Функция действия Дирака, помимо члена (44), содержит второй член, представляющий собой линейную комбинацию произведений $\bar{\psi}^A \psi_B$. Этот член умножается на массу и описывает инерцию материи. Как при нечетных, так и при четных n существует один и только один такой скаляр: $\bar{\psi} B \psi$.

Следует также считать существенным то обстоятельство, что в теории Дирака временная компонента электрического тока является положительно определенной, так как она пропорциональна „плотности вероятности" $\sum_A \bar{\psi}^A \psi^A$; этим обеспечивается атомистическая структура электрического заряда. Если фундаментальная форма (33) имеет индекс инерции t, то указанным свойством обладает не вектор, который содержится в произведении $\Delta \times \bar{\Delta}$, а тензор ранга t с компонентами $s_{i_1 \ldots i_t} = \bar{\psi} B P_{i_1} \ldots P_{i_t} \psi$ (индексы $i_1, \ldots, i_t$ неодинаковы), „временна́я" составляющая которого $s_{12 \ldots t}$ равна $\bar{\psi}\psi$ (с точностью до числового множителя). По-видимому, схема уравнений Максвелла требует, чтобы электрический ток был вектором; это требование вместе с постулатом об атомарности электричества вынуждает нас положить $t = 1$.

§ 11. Приложение. Автоморфизмы полной матричной алгебры

Взаимно однозначное соответствие $X \rightleftarrows X^*$ в кольце всех n-рядных матриц является изоморфным, если выполняются условия

$$(X+Y)^* = X^* + Y^*, \quad (\lambda \cdot X)^* = \lambda \cdot X^*, \quad (XY)^* = X^* Y^*$$

(λ — *произвольное число*). *Единственным таким автоморфизмом является „подобие":*

$$X^* = AXA^{-1},$$

где A — некоторая фиксированная несингулярная матрица.

Доказательство. Уравнение $GX = \gamma X$ имеет решение $X \neq 0$ только при условии, что γ — собственное число матрицы G; столбцы матрицы X должны быть собственными векторами, отвечающими собственному числу γ. Таким образом, собственные числа матрицы G определены способом, инвариантным относительно данного автоморфизма. Следовательно, матрица G^* имеет те же собственные числа, что и G. Выберем n фиксированных различных чисел $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ и образуем диагональную матрицу

$$G = \begin{Vmatrix} \gamma_1 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \gamma_n \end{Vmatrix}.$$

Поскольку матрица G^* имеет те же собственные числа, что и G, можно определить такую несингулярную матрицу A, что $G^* = AGA^{-1}$. Заменим каждую матрицу X^* матрицей $X^{**} = A^{-1}X^*A$ и рассмотрим автоморфизм $X \to XX^{**}$, который не меняет матрицу G. Матрица E_{ik}, имеющая отличный от нуля элемент, например 1, только на пересечении i-й строки с k-м столбцом, с точностью до числового множителя определяется равенствами

$$GE_{ik} = \gamma_i E_{ik}, \quad E_{ik}G = \gamma_k E_{ik}.$$

Поэтому

$$E_{ik} \to E_{ik}^{**} = \alpha_{ik} E_{ik}. \tag{45}$$

Из равенства $E_{ii}^2 = E_{ii}$ следуют равенства $\alpha_{ii}^2 = \alpha_{ii}$, $\alpha_{ii} = 1$. Так как

$$E_{ik} = E_{i1}E_{1k},$$

полагая $\alpha_{i1} = \alpha_i$, $\alpha_{1k} = \beta_k$, получаем $\alpha_{ik} = \alpha_i\beta_k$. Из равенства $\alpha_{ii} = 1$ следуют соотношения $\beta_i = 1/\alpha_i$ и $\alpha_{ik} = \alpha_i/\alpha_k$. Поэтому в силу формулы (45) произвольная матрица $X = \|x_{ik}\|$ и ее образ $X^{**} = \|x_{ik}^{**}\|$ связаны соотношениями

$$x_{ik}^{**} = \alpha_i x_{ik} / \alpha_k; \quad X^{**} = A_0 X A_0^{-1},$$

где A_0 — диагональная матрица с элементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Представленный вывод дает способ получения спинора из заданиого тензорного набора g. Таким способом мы будем пользоваться в основном тогда, когда набор g — это лишь один тензор определенного ранга.

Наше представление алгебры П степени 2^ν ставит в соответствие набору g матрицу G. Предположим, что γ — (простое) собственное число матрицы G, а ψ — соответствующий собственный вектор в спиновом пространстве: $G\psi = \gamma\psi$. Вращение o переводит g в набор $g(o)$, представляемый матрицей $G(o)$. Число γ является простым собственным как для G, так и для $G(o)$, и решение уравнения

$$G(o)\psi(o) = \gamma \cdot \psi(o)$$

получается из ψ в результате преобразования $S(o)$, являющегося спиновым представлением вращения o.

ЛИТЕРАТУРА [1]

1. *Cartan E.*, Bull. Soc. Math. de France, **41**, 53 (1913).
2. *Weyl H.*, Math. Zs., 24, 342 (1926).
3. *Dirac P. A. M.*, Proc. Roy. Soc., **A117**, 610 (1927); **A118**, 351 (1928).
4. *Weyl H.*, Theory of Groups and Quantum Mechanics, London, 1931, p. 136.

5*. *Weyl H.*, Gesammte Abhandlungen, Bd. III, Berlin, 1968, S. 493.

6*. Рашевский П. К., УМН, **10** (2), 3 (1955).

[1]) Литература, помеченная звездочкой, добавлена переводчиком. — *Прим. ред.*

СОДЕРЖАНИЕ

ПРИЛОЖЕНИЕ