L. M. S. MONOGRAPHS
Editors: P. M. Cohn and G. E. H. Reuter

SUBHARMONIC FUNCTIONS

Volume I

W. K. HAYMAN, F. R. S.
Imperial College of Science and Technology
University of London
and
the late
P. B. KENNEDY
University of York

1976
ACADEMIC PRESS
London New York San Francisco
A Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers

У. Хейман,
П. Кеннеди

СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Перевод с английского
В. В. Вавилова

под редакцией
Е. Д. Соломенцева

Издательство «Мир»
Москва
1980

УДК 517.1

Первый том задуманной авторами двухтомной монографии (второй том еще не вышел в свет в оригинале). В книге развивается современный теоретико-функциональный подход в теории потенциала, излагается фундаментальная теорема Рисса о представлении субгармонической функции, теория распределения значений, теория емкости и другие разделы теории потенциала, которые широко применяются в современной теории функций, в функциональном анализе и математической физике.

Написанная свежо, четко и доступно, книга будет полезна всем математикам, занимающимся развитием и применением математического анализа в самых разнообразных областях.

Редакция литературы по математическим наукам

1702050000

$X\frac{20203-012}{041(01)-80}$ 12—80

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Систематическое изучение субгармонических функций началось с основополагающих работ венгерского аналитика Ф. Рисса, опубликованных в 1926 г. Простейшими и важнейшими примерами таких функций являются модуль или логарифм модуля регулярной аналитической функции.

Теория субгармонических функций дает, следовательно, метод изучения свойств аналитических функций комплексного переменного. Однако основное значение этой теории заключено в связях субгармонических функций с теорией потенциала. Дело в том, что другими важными примерами субгармонических функций являются взятые со знаком минус ньютоновский потенциал притягивающих масс или логарифмический потенциал, а основная теорема Ф. Рисса показывает, что и обратно, всякая субгармоническая функция может быть представлена локально как сумма потенциала и некоторой гармонической функции. Таким образом, можно сказать, что изучение субгармонических и гармонических функций есть один из основных аспектов теории потенциала. Роль же теории потенциала в решении и исследовании проблем математической физики, в том числе и самых современных, весьма значительна и описана во многих книгах.

Первый из авторов предлагаемой книги — один из крупнейших современных английских математиков Уолтер Хейман — не нуждается в рекомендациях. Предыдущие его монографии «Многолистные функции» и «Мероморфные функции» пользуются широкой известностью и переведены на русский язык.

Данная книга написана Хейманом в соавторстве с его учеником, другом и коллегой П. Б. Кеннеди, безвременно погибшим в 1966 г.

Из имеющейся на русском языке литературы книга Хеймана — Кеннеди наиболее близка к классической монографии одного из основателей советской школы теории функций И. И. Привалова «Субгармонические функции», изданной еще в 1937 г. и являющейся в настоящее время библиографической редкостью. Однако за истекшие 40 лет развитие теории далеко шагнуло вперед как в методологическом отношении, так и в части накопления крупных результатов. Поэтому естественно, что о пересечениях с книгой

Привалова можно говорить лишь в первых трех вводных главах книги Хеймана — Кеннеди, трактующих в основном элементарные свойства субгармонических функций, включая (в гл. 3) основную теорему Рисса о представлении; однако и здесь изложение построено на современном понимании меры и интеграла.

Подробный обзор содержания книги читатель найдет во введении. Отметим только, что основные главы 4 и 5 этого тома посвящены некоторым из наиболее важных и увлекательных проблем теории потенциала: исследованию поведения функций, субгармонических во всем пространстве, и вопросам, связанным с понятием емкости множеств.

При переводе были исправлены замеченные мелкие неточности и добавлены некоторые литературные ссылки.

Нет сомнений в том, что перевод книги Хеймана — Кеннеди будет с интересом встречен советскими читателями, занимающимися вопросами математического анализа. Особо следует отметить живой и доходчивый характер изложения, делающий книгу вполне доступной (не формально, а по существу) не только специалистам, но и студентам математических факультетов университетов, педагогических институтов и втузов с повышенной математической подготовкой.

Июнь 1979 *Е. Соломенцев*

0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $f(z)$ — регулярная аналитическая функция в области D открытой комплексной плоскости z. Тогда

$$u(z) = \log |f(z)| \tag{0.1}$$

является субгармонической функцией в D. Другими словами, $u(z)$ полунепрерывна сверху в D и для любого круга $|z - z_0| \leqslant r$, лежащего в D, значение $u(z_0)$ в центре этого круга не превосходит среднего значения $u(z)$ на окружности $|z - z_0| = r$.

В этой книге мы изучаем проблему распространения свойств функций вида (0.1) на субгармонические функции общего вида в областях m-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$. Изучение свойств субгармонических функций и связанных с ними классов функций часто называют теорией потенциала. Она представляет собой сейчас обширную область исследований, и воздать ей должное в одной книге было бы трудно. История вопроса хорошо изложена в работе Брело [1972], насчитывающей около 200 ссылок. Среди множества книг отметим следующие: Келлог [1929], Радо [1937], Цудзи [1959], Брело [1960], Ландкоф [1966], Бауер [1966], Карлесон [1967], Мартенсен [1968], Хелмс [1969], Дю Плесси [1970], Фуледе [1972]. Из них наиболее тесно примыкает к нашей книга Цудзи. Однако она посвящена изучению функций на плоскости и является скорее книгой по теории функций комплексного переменного. Это же можно сказать и о книге Карлесона. Большинство других работ, цитируемых выше, нельзя причислить к книгам по теории функций, но они трактуют иные аспекты теории потенциала. Я рад признать, что многим обязан книгам Брело и Карлесона, которые в особенности помогли мне при написании гл. 5. Настоящая книга является промежуточным звеном между книгами по различным аспектам абстрактной теории потенциала и книгами по теории функций, использующими методы теории потенциала.

Опишу кратко содержание книги. В гл. 1 излагается вводный материал по теории множеств и определяются различные классы функций (полунепрерывные сверху, выпуклые, вещественно аналитические, класса C^n). Здесь же доказана теорема Грина в той форме, которая позволяет изучить основные свойства гармонических функций в $\mathbb{R}^m$, включая формулу Пуассона и ее обобщение для субгармонических функций, которая играет основную роль во всей теории. Если функция $f(z)$ в формуле (0.1) не имеет нулей, то эта формула определяет гармоническую функцию $u(z)$. Такие функции составляют важный подкласс для наших основных исследований. Далее рассматривается задача Дирихле о нахождении гармонической функции внутри области по заданным значениям на границе; в предположении, что эта задача разрешима, доказывается единственность ее решения. Существование установлено только для гипершара; более общие случаи отнесены в гл. 2 и 5.

В гл. 2 вводится понятие субгармонической функции, даются различные примеры таких функций, изучаются их элементарные свойства и, в частности, принцип максимума. Показано также, что функция u гармонична тогда и только тогда, когда функции u и $-u$ обе субгармоничны. Для решения задачи Дирихле в случае непрерывных граничных значений мы пользуемся методом Перрона [1923]. Решение строится только для регулярных областей и областей, обладающих свойством Пуанкаре — Зарембы [1]), которое состоит в том, что любая граничная точка служит вершиной некоторого конуса, лежащего целиком вне области. Основываясь на этом, мы доказываем теорему о выпуклости для средних значений субгармонических функций на гиперсферах. Обсуждается также вопрос о гармоническом продолжении внутрь области полунепрерывной функции, заданной на границе; к этому мы возвращаемся еще раз в гл. 5. Заканчивается глава введением понятия подчинения регулярных функций в единичном круге по Литлвуду. Развитый аппарат используется для доказательства теоремы Литлвуда о том, что средние значения $|f(z)|$ при подчинении убывают; доказываются также различные следствия этой теоремы.

Предположим, что функция $f(z)$ регулярна в некоторой области D. Если e — подмножество области D, то через $\mu(e)$ обозначим число нулей функции f в e с учетом кратностей. Так как μ — положительная мера, конечная на компактных подмножествах E области D, то, задавая E, можно написать

$$p(z)=\int_E \log|z-\zeta|\,d\mu(e_\zeta). \tag{0.2}$$

Здесь

$$p(z)=\log|P(z)|, \quad P(z)=\prod_{n=1}^{N}(z-\zeta_n)$$

и ζ_n — нули функции f на E. Определив теперь функцию $u(z)$ равенством (0.1), имеем

$$u(z)=p(z)+h(z), \tag{0.3}$$

[1]) Пуанкаре [1890], Заремба [1909]. В работе Зарембы впервые появилось условие с конусом.

где $h(z) = \log | f(z)/P(z) |$ — гармоническая функция внутри E. Таким образом, в равенстве (0.3) функция $u(z)$ локально представлена в виде суммы потенциала и гармонической функции.

В гл. 3 доказывается фундаментальный результат Ф. Рисса [1926, 1930], который устанавливает, что соответствующее разложение имеет место для субгармонических функций общего вида. Отличие состоит только в том, что в качестве меры берется произвольная положительная мера в D, конечная на компактных подмножествах области D и обращающаяся в нуль на тех открытых множествах, где функция $u(z)$ гармонична. Для функций $u(x)$, субгармонических в области D пространства $\mathbb{R}^m$, $m > 2$, (0.2) заменяется равенством

$$p(x) = \int_E - |x - \xi|^{2-m} d\mu(e_\xi). \tag{0.2$'$}$$

Мера μ единственным образом определяется по функции $u(z)$. Обратно, потенциалы (0.2) и (0.2)$'$, соответствующие любой указанной мере μ, являются во всем пространстве субгармоническими функциями, гармоническими вне компакта E. Таким образом, изучение субгармонических функций эквивалентно изучению потенциалов $p(x)$, что и объясняет название «теория потенциала». Случай (0.1) соответствует плоской мере μ, принимающей только целые значения. С другой стороны, если $u \in C^2(D)$, т. е. функция u непрерывна вместе со своими производными второго порядка в D, то

$$d\mu = \frac{1}{e_m} \nabla^2(u)\, dx, \tag{0.4}$$

где $e_2 = 2\pi$, $e_m = 4\pi^{m/2}/\Gamma\left(\frac{1}{2}m - 1\right)$, $m \geq 3$; $dx = dx_1 \ldots dx_m$ — элемент объема в $\mathbb{R}^m$ и

$$\nabla^2 u = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2}$$

— лапласиан. Для функций общего вида равенство (0.4) справедливо в смысле обобщенных функций.

Существует много доказательств теоремы Ф. Рисса, но я не знаю ни одного достаточно простого. На этом этапе требуются значительные познания в теории меры, и мы используем связь между положительными мерами и положительными линейными функционалами, которая также установлена Ф. Риссом [1909]. Эта идея полезна и по другим соображениям. Мера μ затем рассматривается как положительный линейный функционал L_u на классе $C_0^\infty(D)$ функций, имеющих непрерывные частные производные всех порядков и равных нулю вне некоторого компактного подмножества области D. Для таких функций v функционал L_u определяется при помощи (0.4) формулой

$$L_u(v)=\frac{1}{e_m}\int v\nabla^2 u\,dx=\frac{1}{e_m}\int u\nabla^2 v\,dx.$$

Затем функционал $L_u(v)$ единственным образом продолжается на класс $C_0(D)$ функций v, непрерывных в D и равных нулю вне компактного подмножества области D, и μ есть мера, ассоциированная с этим функционалом.

Первая половина гл. 3 посвящена развитию указанных выше идей, находящих свое завершение в теореме Рисса. В остальной части главы выводятся различные следствия. Пусть e — некоторое подходящее множество на границе конечной регулярной области D. Гармонической мерой $\omega(x, e)$ по определению называется гармоническое продолжение внутрь области D характеристической функции множества e. Если функция $u(x)$ субгармонична в замыкании D, то имеет место формула Пуассона — Иенсена

$$u(x)=\int_F u(\xi)\,d\omega(x, e_\xi)-\int_D g(x, \xi, D)\,d\mu e_\xi, \tag{0.5}$$

где F — граница D и $g(x, \xi, D)$ — функция Грина области D. Предполагается, что F имеет m-мерную меру нуль и D—регулярная область. Эти предположения устраняются в гл. 5.

Формула (0.5) была установлена Р. Неванлинной (см., например, [1929]) для случая (0.1) и послужила ему отправной точкой для построения теории мероморфных функций, носящей его имя. Мы используем эту формулу для получения аналога первой основной теоремы Неванлинны в случае субгармонических функций для гипершара в $\mathbb{R}^m$. В качестве последнего приложения получается представление субгармонических функций в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 3$, ограниченных сверху. Если $m = 2$, то такие функции с необходимостью являются константами. Оказывается, что для таких функций имеет место формула, аналогичная (0.5), где в качестве F фигурирует точка ∞, $u(\xi) \equiv C$ на F, C — точная верхняя грань $u(x)$, $g(x, \xi) = -|x-\xi|^{2-m}$. Показано, что $u(x) \to C$, когда $x \to \infty$ вне некоторого малого исключительного множества, в частности когда $x \to \infty$ вдоль почти всех линий фиксированного вида.

Эти рассмотрения естественно приводят к вопросу об общем поведении функций, субгармонических во всем пространстве $\mathbb{R}^m$, который изучается в гл. 4. Порядок роста таких функций определяется в терминах неванлинновской характеристики. Мы приводим представление субгармонических функций общего вида и субгармонических функций конечного порядка в терминах массы Рисса μ; в случае (0.1), когда $f(z)$ — целая функция, эти результаты принадлежат Вейерштрассу [1876] и Адамару [1893]. Далее мы получаем некоторые неравенства, связывающие величины

$$B(r) = \sup_{|x|=r} u(x), \quad N(r) = d_m \int_0^r \frac{n(t)\,dt}{t^{m-2}},$$

где $d_m = \max(1, m-2)$, $n(t)$ — масса Рисса в шаре $|x| \leqslant t$, и характеристику Неванлинны

$$T(r) = \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int u^+(x)\, d\sigma(x),$$

где $u^+(x) = \max(u(x), 0)$, c_m — площадь поверхности единичной сферы $|x| = 1$ в $\mathbb{R}^m$ и $d\sigma(x)$ — элемент площади поверхности сферы $|x| = r$. По определению полагаем

$$m(r, u) = \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int u^-(x)\, d\sigma(x),$$

где $u^-(x) = \sup(-u(x), 0)$. Упомянутая выше первая основная теорема устанавливает равенство

$$T(r) = m(r) + N(r) + u(0).$$

Дефект функции u определяется равенством

$$\delta(u) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{m(r)}{T(r)} = 1 - \varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r)}{T(r)}.$$

Для функций порядка $\lambda < 1$ в $\mathbb{R}^m$ получена точная (относительно λ) оценка сверху для $\delta(u)$. В полной аналогии со случаем целых функций экстремальные функции имеют массу Рисса, сосредоточенную на луче, выходящем из начала координат. Более поздний результат Дальберга [1972], устанавливающий точную нижнюю границу для

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{B(r)}{T(r)}$$

как функции от λ, только упоминается; мы доказываем несколько более слабое, но намного более простое неравенство.

Во второй половине главы приводятся различные аналоги теорем об асимптотических значениях целых функций. Пусть $f(z)$ — такая функция; тогда говорят, что $f(z)$ имеет асимптотическое значение a вдоль пути Γ, если $f(z) \to a$, когда $z \to \infty$ вдоль Γ. Если $f(z)$ имеет N различных конечных асимптотических значений a_ν, то, как заметил Хейнс [1959], для достаточно большого K множество точек, где $u(z) > K$, а $u(z)$ задана равенством (0.1), распадается в плоскости по крайней мере на N компонент. Используя только этот результат, Хейнс показал, что если $u(z)$ — субгармоническая функция в плоскости и множество точек, где $u(z) > K$, имеет не меньше $N \geqslant 2$ компонент, то порядок функции $u(z)$ не меньше $N/2$. Этот результат обобщает известную теорему Альфорса [1930].

Полное доказательство теоремы Хейнса дается в гл. 7 второгй тома. Здесь мы доказываем совсем простой, но менее точныо результат общего характера: если функция $u(x)$ субгармонична в $\mathbb{R}^m$, а множество точек, где $u(x) > 0$, имеет $N \geqslant 2$ компонент, то порядок функции $u(x)$ не меньше $A(m) N^{1/(m-1)}$, где $A(m)$ — положительная константа, зависящая только от m. Примеры показывают, что эта оценка имеет правильный порядок при фиксированном m и $N \to \infty$.

Наконец, мы доказываем некоторые обобщения классической теоремы Иверсена [1915]. Исходная теорема состоит в том, что если $f(z)$ — целая функция, отличная от константы, то ∞ является ее асимптотическим значением, т. е. $f(z) \to \infty$, когда $z \to \infty$ вдоль некоторого пути Г. Если $u(z)$ определена равенством (0.1), то получаем, что

$$u(z) \to +\infty, \quad \text{когда } z \to \infty \text{ вдоль } \Gamma. \tag{0.6}$$

Доказывается, что свойство (0.6) распространяется на субгармонические функции в $\mathbb{R}^m$ общего вида, исключая тривиальный случай, когда функция u ограничена сверху, который уже обсуждался в конце гл. 3. В полном объеме утверждение (0.6) было впервые доказано Фуледе [1975]. При $m = 2$ результат принадлежит Талпуру [1975], который доказал также [1976] несколько более слабый результат для случая $m > 2$, заменив путь Г цепочкой континуумов. Мы также изучаем вопрос о том, как быстро стремится к ∞ функция u в (0.6). Это зависит от того, конечен или бесконечен порядок λ функции u. Если порядок λ конечен, то всегда существует асимптотический путь Г, на котором u имеет порядок λ. Если же порядок λ бесконечен, то существуют пути, на которых функция u имеет произвольно большой конечный порядок, но не обязательно существует путь, на котором она имеет бесконечный порядок.

В последней гл. 5 содержатся некоторые более глубокие результаты классической теории потенциала. Пусть E — компакт в $\mathbb{R}^m$ и

$$K_0(x) = \log |x|, \qquad K_\alpha(x) = -|x|^{-\alpha}, \qquad \alpha > 0.$$

Если μ — распределение единичной массы на E, то положим

$$V(x) = \int_E K_\alpha(x - \xi)\, d\mu e_\xi.$$

Выберем μ таким образом, чтобы величина

$$I_\alpha(\mu) = \int_E V(x)\, d\mu(x) = \iint_{E \times E} K_\alpha(x - y)\, d\mu(x)\, d\mu(y)$$

достигла своего наибольшего значения V_α. Если $V_\alpha = -\infty$, то α-емкость $C_\alpha(E)$ компакта E считается равной нулю; в этом случае говорят, что E есть α-полярное множество. В противном случае полагаем

$$C_\alpha(E) = \begin{cases} e^{V_0}, & \alpha = 0, \\ (-V_\alpha)^{1/\alpha}, & \alpha > 0. \end{cases}$$

Мы имеем дело главным образом со случаем $\alpha = m - 2$; соответствующие α-полярные множества называем просто полярными множествами (Брело [1941]).

В соответствии с недавними результатами Шоке [1955], [1958] введенное таким образом понятие емкости и, в частности, понятие полярных множеств распространяется на любые борелевские множества в $\mathbb{R}^m$. Замечательная теория Шоке изложена в конце главы 5.

Оказывается, что полярные множества во многих вопросах теории потенциала играют роль пренебрежимых или устранимых множеств. Главная цель этой главы — доказать подобные результаты и их следствия. После некоторого вводного материала мы доказываем в § 5.3, что если E — компакт или счетное объединение компактных множеств, то субгармоническая функция, которая равна $-\infty$ на E, не будучи тождественно равной $-\infty$, существует тогда и только тогда, когда E — полярное множество. В конце главы этот результат распространен на любые борелевские множества E. Далее в § 5.4 исследуются метрические характеристики α-полярных множеств в терминах мер Хаусдорфа. Обозначим через $h_\alpha(E)$ α-меру Хаусдорфа компакта E; тогда если $C_\alpha(E) = 0$, то $h_\beta(E) = 0$ для любого $\beta > \alpha$; если же $h_\alpha(E) < \infty$, то $C_\alpha(E) = 0$. Таким образом, например, полярные множества в $\mathbb{R}^2$ имеют нулевую длину и, значит, вполне разрывны, но если $m \geqslant 3$, то множества конечной длины являются полярными в $\mathbb{R}^m$.

В следующих двух параграфах мы продолжаем изучать свойства полярных множеств. Во-первых, показано, что таким множеством можно пренебречь, формулируя принцип максимума для ограниченных сверху субгармонических функций. Другими словами, если субгармоническая функция $u(x)$ ограничена сверху в области D и

$$\varlimsup_{x \to \zeta} u(x) \leqslant 0$$

для множества e граничных точек ζ в D, которое непусто и дополнение к которому на границе области D есть полярное множество, то $u(x) < 0$ или $u(x) \equiv 0$ всюду в D. Отсюда следует, что если функция $u(x)$ субгармонична и ограничена сверху в области D, за исключением точек полярного множества E, то $u(x)$ допускает единственное продолжение во всю область D как субгармоническая функция. Если же функция $u(x)$ гармонична и ограничена в D вне E, то функция $u(x)$ допускает гармоническое продолжение во всю область D (Брело [1934]). Если E имеет положительную емкость, то эти результаты неверны.

Затем доказана теорема Эванса [1933] о том, что множество нерегулярных (иррегулярных) граничных точек произвольной ограниченной области полярно и, следовательно, им можно пренебречь при решении задачи Дирихле. Следуя Винеру [1924], мы доказываем, что задача Дирихле допускает единственное решение для произвольной ограниченной области D и произвольных непрерывных данных f на ее границе, если потребовать, чтобы решение было ограничено и принимало требуемые граничные значения в регулярных граничных точках области D. Так как значение решения задачи Дирихле в фиксированной точке $x \in D$ есть, очевидно, положительный линейный функционал от f, то отсюда следует (Брело [1939a]), что задача Дирихле разрешима также для функций f, интегрируемых по гармонической мере. Это приводит также к обобщению формулы Пуассона — Иенсена (0.5) на ограниченные области, которые не являются регулярными. Затем дано обобщение понятия функции Грина для произвольных областей D в $\mathbb{R}^m$ при условии, что $m > 2$ или что $m = 2$ и дополнение к D не является полярным множеством. Обсуждается свойство симметрии функции Грина.

Последний параграф гл. 5 посвящен теории Шоке измеримости по емкости. Определение емкости очевидным образом переносится с компактных на открытые множества. Пусть E — произвольное ограниченное множество; тогда его внутренней и внешней емкостью называется соответственно точная верхняя грань емкостей всех компактов, расположенных внутри E, и точная нижняя грань емкостей всех компактов, содержащих E. До сих пор единственными существенными свойствами этой функции множества $C(E)$, заданной только на компактах, были следующие: (i) $C(E) \geqslant 0$, (ii) $C(E)$ — возрастающая функция E ($C(E_1) \leqslant C(E_2)$, если $E_1 \subset E_2$), (iii) функция $C(E)$ полунепрерывна сверху, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта E существует компакт E', содержащий E строго внутри себя и такой, что $C(E') < C(E) + \varepsilon$.

Следуя Шоке, мы доказываем, что если, кроме этого, (iv) $C(E_n) \to C(E)$, где E_n — расширяющаяся последовательность множеств, такая, что $E_n \to E$, то все борелевские множества оказываются измеримыми по емкости, т. е. их внутренняя и внешняя емкости совпадают. При доказательстве этого утверждения мы следуем Карлесону [1967]. Доказывается также, что свойство (iv) влечет за собой для $C_{m-2}(E)$ при $m > 2$ свойство строгой субаддитивности:

$$C(E_1 \cup E_2) + C(E_1 \cap E_2) \leqslant C(E_1) + C(E_2),$$

где $C(E) = C_{m-2}(E)^{m-2}$. Для $m = 2$ доказательство свойства (iv) приходится несколько модифицировать.

Во втором томе мы надеемся доказать некоторые дальнейшие результаты, относящиеся по большей части к субгармоническим функциям на плоскости. В нем будут главы о минимуме и максимуме субгармонических функций на плоскости, об асимптотических значениях и родственных проблемах, и о примерах, возникающих при аппроксимации субгармонических функций на плоскости функциями вида (0.1), где f — целая функция. Мы надеемся рассмотреть также некоторые совсем недавние достижения и приложения, такие, например, как теория Бернстейна [1975].

БЛАГОДАРНОСТИ

Я уже воздал должное более ранним исследованиям по данному предмету. В дополнение к этому мне хочется особо поблагодарить профессора Брело за большую помощь в освещении истории вопроса. Часто легче самому доказать классическую теорему, чем найти ее первоначальное доказательство. Я заранее прошу прощения за возможные ошибки. Но без помощи профессора Брело их было бы намного больше.

Профессор Дрейзин прочитал несколько глав, и я признателен ему за ценные замечания. Г-н Дж. Камера внимательно прочитал всю книгу и исправил много неточностей. Он, г-н П. Риппон и г-н Дж. Хиггинсон прочитали все корректуры и составили указатель. Профессор Рейтер, редактор серии, также прочитал корректуры и дал весьма полезные советы. Г-жи П. Эдж, Дж. Грабб и Э. Миллз совместными усилиями привели в порядок весьма неприглядные рукописные каракули и проявили незаурядную интуицию, распознав неразличимые символы. Мне очень приятно поблагодарить их здесь.

Я закончу эти замечания на печальной ноте. Работа над этой книгой была начата моим другом и учеником П. Б. Кеннеди, но трагическая гибель в 1966 г. помешала ему ее закончить. Я надеюсь, что эта книга будет своеобразным памятником этому очень добросовестному и очень приятному человеку, которого мне до сих пор сильно недостает.

У. К. Хейман

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Глава 1

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.0. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе излагается математический анализ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ размерности m, включая теорию гармонических функций, настолько подробно, насколько это необходимо для наших дальнейших приложений. В первых трех параграфах обсуждаются множества в $\mathbb{R}^m$ и различные классы вещественных функций, такие, как выпуклые и полунепрерывные функции. В § 1.4 дается набросок теории интегрирования, который завершается теоремой Грина. В § 1.5 изложенные результаты применяются к гармоническим функциям в $\mathbb{R}^m$.

1.1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Мы будем рассматривать функции $f(x)$, где x обозначает точку евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ размерности m ($m \geqslant 1$). Для приложений к классической теории функций необходим плоский случай, т. е. $m = 2$, однако существует много замечательных обобщений и интересных проблем и в случае $m > 2$.

Пусть x — точка m-мерного пространства с координатами $(x_1, \ldots, x_m)$. Через

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$$

обозначается расстояние до точки x от начала координат 0, т. е. от точки $(0, 0, \ldots, 0)$. Если $x = (x_1, \ldots, x_m)$ и $y = (y_1, \ldots, y_m)$ — две точки, то через $x \pm y$ обозначаются точки, j-е координаты которых суть соответственно $x_j \pm y_j$. Через $x \cdot y$ обозначается число $\sum\limits_1^m x_\mu y_\mu$. Если λ — вещественное число, через λx обозначим точку с координатами λx_ν.

Если $m = 2$, мы часто будем писать z вместо x и отождествлять точку с координатами (x, y) с комплексным числом $z = x + iy$. Вообще из контекста всегда будет ясно, какое обозначение используется.

Если x_0 — точка в $\mathbb{R}^m$ и r — положительное число, то полагаем

$$D(x_0, r) = \{x \mid |x - x_0| < r\},$$
$$C(x_0, r) = \{x \mid |x - x_0| \leqslant r\},$$
$$S(x_0, r) = \{x \mid |x - x_0| = r\}.$$

Множество $D(x_0, r)$ будем называть *шаром* (*кругом*, если $m = 2$), $C(x_0, r)$ — *замкнутым шаром* (*замкнутым кругом*, если $m = 2$), а $S(x_0, r)$ — *сферой* (*окружностью*, если $m = 2$). Произвольное множество E, содержащее шар $D(x_0, r)$, называется *окрестностью* точки x_0. *Открытым множеством* называется множество, являющееся окрестностью всех своих точек. Множество E *замкнуто*, если его дополнение $\mathscr{C}E$, состоящее из всех тех точек $\mathbb{R}^m$, которые не входят в E, открыто. Множество, которое содержится в некотором шаре, называется *ограниченным*. Множество, одновременно ограниченное и замкнутое, называется *компактным*.

Символом $\varnothing$ обозначается *пустое множество*, не содержащее ни одной точки, а $\bigcup\limits_{\alpha} E_\alpha$ и $\bigcap\limits_{\alpha} E_\alpha$ — *объединение* и *пересечение* семейства множеств E_α.

Точка x называется *предельной точкой* множества E, если каждая ее окрестность содержит более одной точки из E. Очевидно, что в этом случае каждая такая окрестность содержит бесконечно много точек из E. Ясно, что множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки. Если E — некоторое множество, то через $\overline{E}$ обозначается его замыкание, т. е. множество, содержащее все точки множества E, а также все его предельные точки. Замыкание всякого множества замкнуто, т. е. $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$. Точка, принадлежащая одновременно $\overline{E}$ и $\overline{\mathscr{C}E}$, называется *граничной точкой* множества E. *Граница* множества E — это объединение всех его граничных точек.

Пусть E — некоторое множество. Пара множеств E_1, E_2 называется *разбиением* E, если

$$E_1 \cup E_2 = E, \quad \overline{E}_1 \cap E_2 = E_1 \cap \overline{E}_2 = \varnothing \text{ и } \quad E_1 \neq \varnothing, E_2 \neq \varnothing.$$

Другими словами, E_1 и E_2 — такие непересекающиеся непустые подмножества E, что ни одно из них не содержит предельных точек другого, а их объединение совпадает с E. Если множество E не допускает разбиения, то оно называется *связным*. Открытое связное множество называется *областью*. Компактное связное множество, содержащее по крайней мере две точки, называется *континуумом*.

Часто нам придется рассматривать множества, которые являются подмножествами фиксированного множества или пространства S. Для таких множеств можно повторить все предыдущие определения с учетом того, что теперь мы ограничиваемся точками множества S. Так, *окрестность в* S точки $x_0 \in S$ — это любое подмножество из S, которое содержит все точки из S, лежащие в некотором шаре $D(x_0, r)$. Подмножество из S, являющееся окрестностью в S всех своих точек, называется *открытым в* S, или *относительно открытым*. Подмножество $E \subset S$ называется *замкнутым в* S, или *относительно замкнутым*, если каждая предельная точка множества E, лежащая в S, лежит также и в E.

Следующий результат играет важную роль в теории множеств и часто используется как определение компактных множеств.

Теорема 1.1. *Пусть E — некоторое множество в $\mathbb{R}^m$. Тогда эквивалентны следующие три свойства:*

(i) *E компактно, т. е. ограничено и замкнуто;*

(ii) (свойство Вейерштрасса) *если x_n — последовательность точек из E, то существует ее подпоследовательность x_{n_p}, сходящаяся к пределу $x \in E$ при $p \to \infty$;*

(iii) (свойство Гейне — Бореля) *если E содержится в объединении открытых множеств G_α, то существует конечная подсистема $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \ldots, G_{\alpha_n}$ множеств G_α, объединение которой покрывает E.*

(i) $\Rightarrow$ (iii). Предположим, что выполнено условие (i). Так как множество E ограничено, то оно лежит в некотором гиперкубе H_0, т. е. в множестве вида $a_j \leqslant x_j \leqslant b_j$, $j = 1, \ldots, m$, где x_j есть j-я координата точки x. Гиперкуб H_0 является объединением 2^m гиперкубов вида $a_{j,1} \leqslant x_j \leqslant b_{j,1}$, где либо $a_{j,1} = a_j$, $b_{j,1} = \frac{1}{2}(a_j + b_j)$, либо $a_{j,1} = \frac{1}{2}(a_j + b_j)$, $b_{j,1} = b_j$.

Предположим теперь, что G_α — система открытых множеств, покрывающая E, и что никакая ее конечная подсистема не покрывает E. Тогда то же самое справедливо для точек множества E, лежащих по крайней мере в одном из гиперкубов, скажем H_1, длины ребер которых равны половине длин соответствующих ребер H_0. Продолжая этот процесс, мы получим такую последовательность гиперкубов H_N, что $H_{N+1} \subset H_N$, длина ребер каждого гиперкуба H_N составляет 2^{-N}-ю часть длины соответствующих ребер гиперкуба H_0 и подмножество множества E, содержащееся в H_N, не может быть покрыто конечным числом множеств G_α. Если H_N задается неравенствами

$$a_{j,N} \leqslant x_j \leqslant b_{j,N},$$

то $a_{j,N}$ составляют ограниченную возрастающую последовательность и, значит, стремятся к некоторому пределу c_j при $N \to \infty$. Кроме того, $b_{j,N} - a_{j,N} \to 0$, так что $b_{j,N} \to c_j$ при $N \to \infty$.

Пусть c — точка $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$. Если она не принадлежит множеству E, то, так как E замкнуто, она не является его предельной точкой, и поэтому существует ее окрестность M, не содержащая точек E. Так как H_N лежат в M при всех достаточно больших N, это противоречит нашему предположению о том, что лежащая в H_N часть множества E не может быть покрыта конечным числом множеств G_α. Если же точка c лежит в E, то она лежит в G_α для некоторого α, а так как это G_α открыто, то оно содержит H_N при всех достаточно больших N. Это снова противоречит сделанному предположению.

Таким образом, свойство (iii) выполняется.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Предположим, что свойство (ii) не выполняется. Тогда существует последовательность $x_n \in E$, не имеющая предельных точек в E. Это означает, что если x — произвольная точка из E, то она не является предельной точкой последовательности x_n. Поэтому существует шар $D(x, r)$, содержащий x_n не более чем для конечного числа номеров n. Объединение таких шаров $D(x, r)$ для всех точек $x \in E$ образует открытое покрытие E. Любое конечное подпокрытие этого покрытия содержит лишь конечное число точек x_n, и поэтому не может покрывать всего множества E. Таким образом, свойство (iii) не выполняется. Следовательно, если свойство (iii) выполнено, то выполнено и (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что множество E не ограничено. Тогда существует последовательность x_n его точек, таких, что $|x_n| > n$. Ясно, что последовательность x_n не имеет предельных точек, и поэтому не выполнено (ii). Предположим теперь, что множество E не замкнуто. Пусть x — предельная точка множества E, не содержащаяся в E. Тогда можно найти такую последовательность $x_n \in E$, что $|x - x_n| < 1/n$. Последовательность x_n сходится к x и поэтому не имеет отличных от x предельных точек, т. е. x_n не имеет предельных точек в E. Снова свойство (ii) не выполнено. Таким образом, если выполнено (ii), то выполнено и (i).

1.2. РАЗЛИЧНЫЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ

1.2.1. Полунепрерывные функции

Мы в основном будем иметь дело с вещественными и лишь иногда с комплексными функциями $f(x)$, определенными на множествах пространства $\mathbb{R}^m$. Вещественная функция $f(x)$, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}^m$, называется *полунепрерывной сверху* (пн. св.) на E, если она обладает следующими свойствами:

(i) $-\infty \leqslant f(x) < \infty$, $x \in E$;

(ii) множество $\{x \mid x \in E,\ f(x) < a\}$ открыто в E для любого a, $-\infty < a < +\infty$.

Функция $f(x)$ называется *полунепрерывной снизу* (пн. сн.) на E, если $-f(x)$ полунепрерывна сверху на E. Если функция $f(x)$ одновременно полунепрерывна сверху и снизу, она называется *непрерывной*.

Нам понадобятся следующие теоремы.

Теорема 1.2. *Если функция $f(x)$ пн. св. на (непустом) компактном множестве E, то она достигает максимума на E, т. е. найдется точка $x_0 \in E$, такая, что*

$$f(x_0) \geqslant f(x) \quad \textit{при всех} \quad x \in E.$$

Положим

$$M = \sup_{x \in E} f(x).$$

Если функция $f(x)$ не ограничена сверху на E, полагаем $M = +\infty$. Если $f(x) \equiv -\infty$, то в качестве x_0 можно взять любую точку на E, и все доказано. В противном случае существует такая последовательность точек $x_n \in E$, что $f(x_n) \to M$. В самом деле, если M конечно, то в качестве x_n можно взять любую точку, для которой

$$f(x_n) > M - \frac{1}{n}.$$

Если $M = +\infty$, выбираем x_n так, чтобы $f(x_n) > n$. Переходя, если понадобится, к подпоследовательности, из теоремы 1.1 выводим, что $x_n \to \xi \in E$ при $n \to \infty$.

Предположим теперь, что $f(\xi) = \lambda < M$, и выберем μ так, что $\lambda < \mu < M$. Так как функция $f(x)$ пн. св., то множество

$$G(\mu) = \{x \mid x \in E \quad \text{и} \quad f(x) < \mu\}$$

открыто в E и содержит точку ξ; но тогда $G(\mu)$ содержит все точки E, лежащие в некотором шаре $D(\xi, r)$, и, следовательно, $G(\mu)$ содержит x_n для всех достаточно больших n. Таким образом, $f(x_n) \leqslant \mu$ для всех достаточно больших n, что противоречит предположению $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$. Следовательно, $f(\xi) \geqslant M$. Из определения M вытекает, что $f(\xi) \leqslant M$, и, значит, $f(\xi) = M$.

Теорема 1.3. *Если $f_n(x)$ — убывающая последовательность пн. св. функций, определенных на некотором множестве E, то $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ — также пн. св. функция на E.*

Так как $f_n(x)$ убывает для каждой фиксированной точки $x \in E$ и $f_1(x) < +\infty$, то предел $f(x)$ существует для каждой $x \in E$

и $f(x) \leqslant f_1(x) < +\infty$. Пусть $E(a)$ — множество всех точек из E, для которых $f(x) < a$. Мы должны доказать, что $E(a)$ открыто.

Пусть ξ — некоторая точка из $E(a)$. Так как $f_n(\xi) \to f(\xi)$ и $f(\xi) < a$, найдется такое n, что $f_n(\xi) < a$. Поскольку $f_n(\xi)$ пн. св., множество $E_n(a)$ тех точек x из E, для которых $f_n(x) < a$, открыто в E и потому является окрестностью N точки ξ в E. Ясно, что $f(x) \leqslant f_n(x) < a$ в N, и, следовательно, $E(a)$ содержит окрестность N точки ξ в E. Поскольку точка ξ из $E(a)$ выбиралась произвольно, множество $E(a)$ открыто.

В обратном направлении справедлива следующая

Теорема 1.4. *Если $f(x)$ пн. св. на множестве E, то существует такая убывающая последовательность $f_n(x)$ непрерывных функций на E, что*

$$f_n(x) \to f(x) \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Предположим сначала, что $f(x) > 0$ на E. Поскольку функция f пн. св. на E, для любой данной точки $\xi \in E$ существует такое $\delta = \delta(\xi)$, что

$$\sup f(x) < +\infty \quad \text{для} \quad x \in D(\xi, \delta) \cap E.$$

Если это неравенство выполняется для некоторой точки ξ и любых положительных δ, то очевидно, что оно выполняется для всех точек ξ и всех положительных δ; в этом случае положим $\delta(\xi) = 1$ для всех ξ. В противном случае определяем $\delta(\xi)$ как нижнюю грань всех таких δ.

Заметим, что функция $\delta(\xi)$ непрерывна на E и что для любых точек $\xi_1, \xi_2 \in E$

$$|\delta(\xi_2) - \delta(\xi_1)| \leqslant |\xi_2 - \xi_1|. \tag{1.2.1}$$

В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$. Тогда для некоторого конечного M в предположении, что $|x - \xi_1| < \delta(\xi_1) - \varepsilon$, имеем $f(x) < M$. Это неравенство выполняется, в частности, для

$$|x - \xi_2| < \delta(\xi_1) - \varepsilon - |\xi_2 - \xi_1|,$$

и поэтому

$$\delta(\xi_2) \geqslant \delta(\xi_1) - \varepsilon - |\xi_2 - \xi_1|.$$

Так как ε произвольно, отсюда выводим, что

$$\delta(\xi_2) \geqslant \delta(\xi_1) - |\xi_2 - \xi_1|.$$

Аналогично, $\delta(\xi_1) \geqslant \delta(\xi_2) - |\xi_2 - \xi_1|$, откуда и следует неравенство (1.2.1).

Далее, для $h < \delta(\xi)$ положим

$$M(\xi, h) = \sup_{x \in E,\ |x-\xi| \leqslant h} f(x),$$

$$f_n(x) = \frac{2n}{\delta(x)} \int_0^{[\delta(x)]/2n} M(x, t)\, dt. \tag{1.2.2}$$

Докажем, что последовательность $f_n(x)$ обладает требуемыми свойствами. Прежде всего очевидно, что $M(\xi, h)$ является конечной неубывающей функцией h при $0 < h < \delta(\xi)$, и, поскольку $f(x)$ пн. св., при $h \to 0$ имеем $M(\xi, h) \to f(\xi)$. Значит, интегральное среднее

$$I(\xi, h) = \frac{1}{h}\int_0^h M(\xi, t)\,dt$$

существует при $h < \delta$ и также возрастает вместе с h. Действительно, при $0 < h_1 < h_2 < \delta$

$$h_1h_2[I(\xi, h_2) - I(\xi, h_1)] = h_1\int_0^{h_2} M(\xi, t)\,dt - h_2\int_0^{h_1} M(\xi, t)\,dt =$$

$$= (h_1 - h_2)\int_0^{h_1} M(\xi, t)\,dt + h_1\int_{h_1}^{h_2} M(\xi, t)\,dt \geqslant$$

$$\geqslant h_1(h_2 - h_1)[M(\xi, h_1) - M(\xi, h_1)] = 0.$$

Таким образом, функция $I(\xi, h)$ возрастает вместе с h и $I(\xi, h) \to f(\xi)$ при $h \to 0$. Значит, последовательность $f_n(x)$ убывает с увеличением n и при $n \to \infty$ имеем $f_n(x) \to f(x)$. Остается показать, что при фиксированном n функция $f_n(x)$ непрерывна. В силу неравенства (1.2.1), функция $\delta(\xi)$ непрерывна, поэтому достаточно показать, что при фиксированном n

$$\int_0^{\delta(\xi)/2n} M(\xi, t)\,dt$$

есть непрерывная функция переменной ξ.

Предположим, что $0 < f(x) < M$ при $|x - \xi_1| < \frac{5}{6}\delta(\xi_1)$ и что $|\xi_2 - \xi_1| \leqslant \eta < \frac{1}{4}\delta(\xi_1)$, $0 < h_1 < \frac{1}{3}\delta(\xi_1)$, $0 < h_2 < \frac{1}{3}\delta(\xi_1)$ и $|h_2 - h_1| < \eta$. Шар $D(\xi_2, t)$ содержится в шаре $D(\xi_1, t + \eta)$, поэтому

$$M(\xi_2, t) \leqslant M(\xi_1, t + \eta).$$

Следовательно,

$$\int_0^{h_2} M(\xi_2, t)\,dt \leqslant \int_\eta^{h_2+\eta} M(\xi_1, t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{h_1} M(\xi_1, t)\,dt + \int_{h_1}^{h_2+\eta} M(\xi_1, t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{h_1} M(\xi_1, t)\,dt + 2M\eta.$$

Аналогично,

$$\int_0^{h_1} M(\xi_1, t)\,dt \leqslant \int_0^{h_2} M(\xi_2, t)\,dt + 2M\eta,$$

так что

$$\left| \int_0^{h_1} M(\xi_1, t)\,dt - \int_0^{h_2} M(\xi_2, t)\,dt \right| \leqslant 2M\eta.$$

Полагая $h_1 = \frac{\delta(\xi_1)}{4n}$, $h_2 = \frac{\delta(\xi_2)}{4n}$, выводим из (1.2.1), что

$$|h_2 - h_1| \leqslant \frac{|\xi_2 - \xi_1|}{4n} \leqslant \frac{\eta}{4}.$$

Поэтому, если $|\xi_2 - \xi_1| < \eta < \frac{1}{2}\delta(\xi_1)$, то

$$\left| \int_0^{[\delta(\xi_1)]/2n} M(\xi_1, t)\,dt - \int_0^{[\delta(\xi_2)]/2n} M(\xi_2, t)\,dt \right| < 2M\eta.$$

Таким образом, $\int_0^{[\delta(\xi)]/2n} M(\xi, t)\,dt$ является непрерывной функцией ξ, поэтому непрерывны и функции $f_n(\xi)$. Это завершает доказательство теоремы 1.4 в случае, когда $f(\xi) > 0$ на E.

Если $f(x) > -K$ на E, требуемое утверждение можно получить, рассматривая вместо $f(x)$ функцию $f(x) + K$. И в этом случае функции $f_n(x)$ непрерывны.

В общем случае последовательность $f_n(x)$ строится так же, как выше, но функция $f(x)$ заменяется функциями $g_n(x) = \max(f(x), -n)$. Тогда функции $f_n(x)$ продолжают оставаться непрерывными. Поскольку последовательность $g_n(x)$ убывает с возрастанием n, то же верно и для последовательности $f_n(x)$, так как очевидно, что одно и то же $\delta(\xi)$ годится для всех функций $f_n(x)$. Чтобы доказать, что $f_n(x) \to f(x)$, предположим сначала, что $f(\xi) = -\infty$. Тогда при достаточно больших n для произвольной постоянной K имеем

$$f(x) < K, \quad |x - \xi| < \frac{\delta(\xi)}{2n}.$$

Поэтому, если n настолько велико, что $-n < K$, то $g_n(x) < K$, откуда $f_n(\xi) < K$. Значит, $f_n(\xi) \to -\infty$. Если же $f(\xi) > -\infty$, то для $-n < f(\xi)$ имеем $g_n(\xi) = f(\xi)$ и, следовательно, $M(\xi, t)$ для $f(x)$ то же самое, что и для $g_n(x)$. Таким образом, из тех же соображений, что и выше, получаем $f_n(x) \to f(x)$. Это завершает доказательство теоремы 1.4.

Примеры

1. Пусть функции $u_1, u_2, \ldots, u_n$ пн. св. на E. Докажите, что функции $u = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} u_k$ и $v = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$, где все λ_k положительны или равны нулю, пн. св. на E.

2. Докажите, что функция $f(x)$, определенная на множестве E, пн. св. на E тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие. Для данной точки $x_0 \in E$ и $K > f(x_0)$ существует такое δ, что если $|x - x_0| < \delta$ и $x \in E$, то $f(x) < K$.

3. Пусть функция $u(x)$ пн. св. на E и принимает значения в интервале (a, b), а функция $f(t)$ непрерывна и возрастает на (a, b). Докажите, что $f[u(x)]$ пн. св. на E.

4. Пусть функция $u(x)$ пн. св. на компактном множестве E и $U = \sup\limits_{x \in E} u(x)$. Покажите, что $u(x) = U$ на компактном подмножестве множества E.

5. Пусть функция $v(x)$ определена и ограничена сверху на множестве E и $u(x) = \lim\sup v(y)$ при $y \to x$ на E. Покажите, что $u(x)$ пн. св. на замыкании $\bar{E}$ множества E. (Если $M(x, t) = \sup\limits_{y \in D(x,\ t) \cap E} v(y)$, то $u(x)$ формально определяется как $u(x) = \lim\limits_{t \to 0+} M(x, t)$.)

1.2.2. Классы C^n и A

Говорят, что функция $f(x)$, определенная в области D пространства $\mathbb{R}^m$, принадлежит классу C, если она непрерывна в D. Если $n \geqslant 0$ и все частные производные функции f вплоть до порядка n принадлежат классу C, то говорят, что функция f принадлежит классу C^n. Если $f(x)$ есть функция класса C^n для любого целого положительного n, то говорят, что $f(x)$ принадлежит классу C^∞. Заметим, что если $f(x) \in C^n$, то разные частные производные функции $f(x)$ вплоть до порядка n не зависят от порядка дифференцирования. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1}$$

при $m = 2$ и $f \in C^2$. Тогда общий результат для C^n можно установить индукцией по n.

Итак, положим

$$\Delta(h) = f(x_1 + h, x_2 + h) + f(x_1, x_2) - f(x_1, x_2 + h) - \\ - f(x_1 + h, x_2) = \varphi(x_1 + h) - \varphi(x_1),$$

где $\varphi(x) = f(x, x_2 + h) - f(x, x_2)$; тогда, по теореме о среднем значении,

$$\Delta(h) = h\varphi'(x_1 + \theta_1 h) = h\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \theta_1 h, x_2 + h) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \theta_1 h, x_2)\right\} = \\ = h^2 \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1 + \theta_1 h, x_2 + \theta_2 h),$$

где $0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1$. Так как по предположению $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1} \in C$, то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2}$$

и, аналогично,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}.$$

Функция $f(x)$, определенная в области D, называется аналитической, или принадлежащей классу A, если при каждом $\xi \in D$ существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$, $|h| < \varepsilon$, имеем

$$f(\xi + h) = \sum_{(m)} a_{(m)} h^{(m)},$$

где (m) пробегает все наборы из m неотрицательных целых чисел $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$, $h^{(m)} = h_1^{n_1} h_2^{n_2} \ldots h_m^{n_m}$, $a_{(m)}$ не зависит от h и ряд абсолютно сходится.

Легко видеть, что так же, как и в случае $m = 1$, кратные ряды, сходящиеся при $|h| < \varepsilon$, можно почленно дифференцировать по h_ν любое число раз внутри шара $|h| < \varepsilon$ и получившиеся ряды, будучи равномерно сходящимися при $|h| < \lambda\varepsilon$, $0 < \lambda < 1$, остаются непрерывными. Полагая после дифференцирования $h = 0$, получим

$$n_1! n_2! \ldots n_m! a_{(m)} = \frac{\partial^n f(\xi)}{\partial \xi_1^{n_1} \partial \xi_2^{n_2} \ldots \partial \xi_m^{n_m}},$$

где $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$. В частности, $A \subset C^\infty$.

Для того чтобы установить, что класс A является собственным подклассом в C^∞, докажем следующее утверждение.

Теорема 1.5 (теорема единственности). *Если $f \in A$ в области D и $f \equiv 0$ в шаре $D(x_0, r)$, лежащем внутри D, то $f \equiv 0$ в D.*

Обозначим через E_1 множество всех таких точек $\xi \in D$, что $f \equiv 0$ в некоторой окрестности $D(\xi, h) \subset D$. Ясно, что множество

E_1 открыто. Пусть, далее, x — предельная точка множества D. Тогда существует такая последовательность $x_n \in E_1$, что $x_n \to x$ в D. Так как $f \equiv 0$ в окрестности каждой из точек x_n, все частные производные функции f обращаются в нуль в точках x_n, а следовательно, по непрерывности, и в точке x. Значит, ряд Тейлора функции f в точке x тождественно равен нулю, и поскольку $f \in A$, то $f \equiv 0$ в окрестности x. Следовательно, множество E_1 замкнуто в D. Так как D — область и E_1 непусто, то $E_1 = D$. Это доказывает теорему 1.5.

Пример. Функция

$$f(x) = \exp\{-|x|^{-2}\}, \quad |x| > 0, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad f(0) = 0,$$

принадлежит классу C^∞, но не принадлежит классу A.

Нетрудно доказать по индукции, что любая частная производная $\varphi(x)$ функции $f(x)$ может быть представлена в виде

$$\varphi(x) = \frac{P(x)}{|x|^k} f(x), \quad x \neq 0,$$

где $P(x)$ — полином от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и k — четное число. Следовательно, при $x \to 0$ имеем $\varphi(x) \to 0$, откуда вытекает, что частная производная $\varphi(x)$ существует и в точке $x = 0$, причем $\varphi(0) = 0$. Таким образом, $f(x) \in C^\infty$. Далее, ряд Тейлора функции $f(x)$ в $x = 0$ тождественно равен нулю, но сама функция $f(x)$ не обращается в нуль при $x \neq 0$ и, значит, не может быть задана своим рядом Тейлора ни в какой окрестности точки $x = 0$. Поэтому $f(x) \notin A$.

Для того чтобы показать, что для функции класса C^∞ теорема 1.5 не верна, определим функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = 0 \text{ при } x_1 \leqslant 0; \quad f(x) = \exp(-x_1^{-2}) \text{ при } x_1 > 0.$$

Легко видеть, что $f(x) \in C^\infty$ и $f(x)$ обращается в нуль в полупространстве $x_1 < 0$, не будучи тождественным нулем.

1.3. ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ

Вещественная функция $f(x)$ одного вещественного переменного x, определенная на интервале I, называется *выпуклой* на I, если для любых $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ и любой линейной функции $l(x)$, удовлетворяющей условиям

$$l(x_1) \geqslant f(x_1), \quad l(x_2) \geqslant f(x_2), \tag{1.3.1}$$

имеем также

$$l(x) \geqslant f(x) \quad (x_1 < x < x_2). \tag{1.3.2}$$

Если, в частности, взять линейную функцию $l(x)$, совпадающую с $f(x)$ в точках x_1 и x_2, то получим

$$f(x) \leqslant \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2) \quad (x_1 < x < x_2). \qquad (1.3.3)$$

Геометрически неравенство (1.3.3) означает, что любая секущая, соединяющая две точки графика функции $f(x)$, лежит над этим графиком.

Субгармоническая функция является обобщением на случай двух переменных понятия выпуклой функции. Кроме того, в дальнейшем мы увидим, что некоторые интегральные средние и другие функции, связанные с субгармоническими, сами являются выпуклыми. Дадим поэтому краткое описание выпуклых функций.

Простыми преобразованиями получаем из (1.3.3) неравенства

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}. \qquad (1.3.4)$$

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 1.6. *Если функция $f(x)$ выпукла на открытом интервале I, то в каждой точке I она обладает левой и правой производными, которые являются возрастающими функциями x и совпадают вне некоторого счетного множества. Левая производная непрерывна справа и не превосходит правой производной. В частности, функция $f(x)$ непрерывна на I.*

Предположим, что x_1, x, x_2 — такие три точки из I, что $x_1 < x < x_2$. Значит, выполнены неравенства (1.3.3) и (1.3.4), т. е.

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Поэтому для $h > 0$ функция

$$f(x_1, h) = \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \qquad (1.3.5)$$

возрастает вместе с h и при $h \to 0+$ стремится к пределу — правой производной $f_2(x)$. Аналогично, $f(x, h)$ стремится к левой производной $f_1(x)$ при $h \to 0-$. Устремляя одновременно x_1 и x_2 к x, выводим из (1.3.4), что $f_1(x) \leqslant f_2(x)$.

Тем самым доказано также, что $f(x, h)$ является возрастающей функцией h в предположении, что $h \neq 0$ и $x + h$ лежит в I. Следовательно, если δ — малое положительное число, то

$$f(x, -\delta) \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f(x, \delta),$$

так что обе функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ конечны в любой точке I. Другими словами, левая и правая производные существуют и конечны. Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна. Заметим, далее, что если точки x_1 и x_2 лежат в I и $x_2 - x_1 = \delta > 0$, то

$$f_1(x_1) \leqslant f_2(x_1) \leqslant f(x_1, \delta) = f(x_2, -\delta) \leqslant f_1(x_2) \leqslant f_2(x_2). \quad (1.3.6)$$

Поэтому $f_1(x)$ и $f_2(x)$ являются возрастающими функциями x.

Для завершения доказательства нам нужна следующая

Лемма 1.1. *Если $F(x)$ — возрастающая функция x на открытом интервале I, то левый и правый пределы $F(x-0)$ и $F(x+0)$ существуют всюду на I и совпадают с $F(x)$ вне некоторого не более чем счетного множества E. Таким образом, функция $F(x)$ непрерывна вне множества E.*

Если $x \in I$ и $h + x \in I$, то $F(x+h)$ — возрастающая функция переменной h. Легко видеть, что при $h \to 0+$ имеем $F(x+h) \to F(x+0)$, где $F(x+0)$ — нижняя грань таких $F(x+h)$, для которых $x+h \in I$ и $h > 0$. Аналогично, при $h \to 0-$ имеем $F(x+h) \to F(x-0)$, где $F(x-0)$ — верхняя грань $F(x+h)$ для $h < 0$. Так как функция F монотонна, для $h_1 < 0 < h_2$ имеем

$$F(x+h_1) \leqslant F(x) \leqslant F(x+h_2).$$

Устремляя h_1 и h_2 к нулю, заключаем, что

$$F(x-0) \leqslant F(x) \leqslant F(x+0).$$

Определим $\delta(x) = F(x+0) - F(x-0)$ как скачок функции $F(x)$ в точке x. Очевидно, что $F(x)$ непрерывна в точке $x = \xi$ тогда и только тогда, когда $\delta(\xi) = 0$.

Предположим теперь, что $x_1 = \xi_1' < \xi_1 < \xi_2' < \ldots < \xi_{n+1}' = x_2$, $x_1 \in I$, $x_2 \in I$; тогда из монотонности функции $F(x)$ вытекает, что для $1 \leqslant j \leqslant h$

$$\delta(\xi_j) = F(\xi_j + 0) - F(\xi_j - 0) \leqslant F(\xi_{j+1}') - F(\xi_j').$$

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{n} \delta(\xi_j) \leqslant \sum_{j=1}^{n} (F(\xi_{j+1}') - F(\xi_j')) = F(\xi_{n+1}') - F(\xi_1') = F(x_2) - F(x_1). \quad (1.3.7)$$

Это неравенство справедливо для любого конечного числа различных точек ξ_j в интервале (x_1, x_2). Следовательно, может существовать самое большее 2^N таких точек ξ, для которых

$$2^{-N}[F(x_2) - F(x_1)] \leqslant \delta(\xi) \leqslant 2^{1-N}[F(x_2) - F(x_1)].$$

Перенумеровав эти точки в порядке возрастания ξ поочередно для $N = 1, 2, 3, \ldots$, мы тем самым перенумеруем все точки интервала (x_1, x_2), в которых $\delta(\xi) > 0$. Следовательно, множество таких точек счетно. Так как весь интервал I является объединением счетного числа открытых интервалов, замыкания которых лежат в I, а счетное объединение счетных множеств счетно, то это завершает доказательство леммы 1.1.

Теперь мы в состоянии завершить доказательство теоремы 1.6. Пусть E — множество тех точек, в которых по крайней мере одна из функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ разрывна. По лемме 1.1, множество E конечно или счетно. Следовательно, дополнение к E плотно в I. Пусть x_1 — некоторая точка этого дополнения. Тогда, согласно (1.3.6), $f_1(x_1) \leqslant f_2(x_1)$. С другой стороны, если $x_2 > x_1$, то из (1.3.6) вытекает, что $f_2(x_1) \leqslant f_1(x_2)$. Поскольку функция $f_1(x)$ непрерывна в точке $x = x_1$, можно устремить в этом неравенстве x_2 к x_1 и получить $f_2(x_1) \leqslant f_1(x_1)$. Таким образом, $f_1(x_1) = f_2(x_1)$, так что f_1 и f_2 совпадают вне E. Следовательно, для x_1, лежащих вне счетного множества E, левая и правая производные функции $f(x)$ существуют и совпадают при $x = x_1$, а значит, существует $f'(x_1)$.

Остается доказать, что функция $f_1(x)$ непрерывна слева, а функция $f_2(x)$ непрерывна справа. Мы ограничимся доказательством второго утверждения; доказательство первого вполне аналогично. Из (1.3.6) следует, что $f_2(x_1) \leqslant f_2(x_2)$ при $x_1 < x_2$, поэтому, устремляя x_2 к x_1, получаем $f_2(x_1+0) \geqslant f_2(x_1)$.

С другой стороны, из определения $f_2(x_1)$ следует, что для заданного $\varepsilon > 0$ можно так выбрать $x_2 > x_1$, что

$$f_2(x_1) \geqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \varepsilon.$$

Тогда из непрерывности $f(x)$ вытекает, что можно так выбрать точку x_3, чтобы выполнялись неравенства $x_1 < x_3 < x_2$ и

$$f_2(x_1) \geqslant \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3} - 2\varepsilon.$$

Используя определение $f_2(x_3)$, выводим отсюда, что

$$f_2(x_1) \geqslant f_2(x_3) - 2\varepsilon$$

и, следовательно, $f_2(x_1) \geqslant f_2(x_1+0) - 2\varepsilon$. Поскольку число ε произвольно, $f_2(x_1) \geqslant f_2(x_1+0)$, так что $f_2(x_1) = f_2(x_1+0)$. Это завершает доказательство теоремы 1.6.

Примеры

1. Докажите, что в использованных выше обозначениях функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют одни и те же точки разрыва.

2. Докажите, что для каждой точки $x \in I$

$$f_2(x-0) = f_1(x-0) = f_1(x),\quad f_1(x+0) = f_2(x+0) = f_2(x).$$

3. Докажите, что если $x_1 < x_2$ и $x_1, x_2 \in I$, то $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы по Риману на $[x_1, x_2]$ и

$$\int_{x_1}^{x_2} f_1(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} f_2(x)\,dx = f(x_2) - f(x_1).$$

4. Из теоремы Лебега [1]) следует, что возрастающая функция почти всюду имеет производную. Докажите, что если функция $f_1(x)$ дифференцируема в точке $x = x_1$, то функция $f_2(x)$ также дифференцируема в этой точке и их производные совпадают.

5. Докажите, что функция $f(x)$ выпукла на открытом интервале I тогда и только тогда, когда она имеет вид

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt,$$

где x_0 — произвольная точка интервала I и $\varphi(t)$ возрастает на I.

6. Пусть $f''(x)$ существует для $x \in I$. Покажите, что функция $f(x)$ выпукла на I тогда и только тогда, когда $f''(x) \geqslant 0$ для любой точки интервала I. (Указание. Покажите, что функция $f'(x)$ возрастает тогда и только тогда, когда $f''(x) \geqslant 0$.)

7. Пусть функция $f(x)$ выпукла и $f(x) \leqslant 0$ для $a < x < b$ и, кроме того, $f(a) \leqslant 0$, $f(b) \leqslant 0$ и $f(x_0) > 0$ для некоторой точки x_0, такой, что $a < x_0 < b$. Докажите, что $f(x) \equiv 0$ при $a < x < b$. (Согласно (1.3.3), $f(x) \leqslant 0$ на $[a, b]$. Если $f(x_1) < 0$, где, например, $x_0 < x_1 < b$, то неравенство (1.3.3) с заменой x_1, x, x_2 на a, x_0, x_1 приводит к противоречию.)

8. Покажите, что если функция $f(x)$ выпукла на (a, b), то $f(a+0)$ и $f(b-0)$ существуют как конечные или бесконечные пределы. Если эти пределы конечны и значения $f(a)$, $f(b)$ определены произвольно, то функция $f(x)$ остается выпуклой на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда $f(a) \geqslant f(a+0)$, $f(b) \geqslant f(b-0)$.

9. Покажите, что если функция $f(x)$ выпукла на I, $x_1, x_2 \in I$ и $x_1 \neq x_2$, то $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ представляет собой возрастающую функцию любой из переменных x_1, x_2 при фиксированной другой переменной.

10. Пусть $f(x)$ — выпуклая функция на интервале (a, ∞). Покажите, что предел $\alpha = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ существует и $-\infty < \alpha \leqslant +\infty$.

[1]) См., например, Титчмарш [1939, стр. 358].

11. Пусть $f(x)$ — выпуклая функция на $(-\infty, +\infty)$. Покажите, что пределы

$$\alpha_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad \alpha_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{-x}$$

существуют и что $\alpha_1 \leqslant 0$ и $\alpha_2 \leqslant 0$ лишь тогда, когда $f(x) \equiv \text{const}$.

1.4. ТЕОРИЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ТЕОРЕМА ГРИНА

1.4.1. Интеграл Лебега

Мы будем рассматривать объемные интегралы в $\mathbb{R}^m$. Пусть x обозначает произвольную точку $\mathbb{R}^m$, а $f(x)$ пусть сначала обозначает ограниченную, положительную, измеримую по Борелю [1]) функцию с компактным носителем, т. е. обращающуюся в нуль всюду, кроме шара достаточно большого радиуса. Напомним определение и основные свойства интеграла Лебега. Этот интеграл

$$I(f) = \int f(x)\,dx = \int f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_m$$

может быть определен следующим образом. Предположим, что $f(x) < M$, и пусть $0 = M_1 < M_2 < \ldots < M_k = M$ — некоторое разбиение отрезка $[0, M]$. Пусть E_ν — такое подмножество в $\mathbb{R}^m$, что $M_\nu < f(x) \leqslant M_{\nu+1}$ для любой точки из E_ν. Тогда E_ν — ограниченное измеримое по Борелю множество и, значит, E_ν имеет меру Лебега $m(E_\nu)$. Составим суммы

$$s(\Delta) = \sum_{\nu=1}^{k-1} M_\nu m(E_\nu), \quad S(\Delta) = \sum_{\nu=1}^{k-1} M_{\nu+1} m(E_\nu).$$

Легко показать, что для любых двух различных разбиений Δ, Δ' всегда $s(\Delta) \leqslant S(\Delta')$. Таким образом, если I_1 — нижняя грань всех сумм $S(\Delta)$, а I_2 — верхняя грань всех сумм $s(\Delta)$ для всевозможных разбиений Δ, то $I_2 \leqslant I_1$. Если разбиение Δ таково, что $M_{\nu+1} - M_\nu < \varepsilon$ при каждом ν, то

$$S(\Delta) - s(\Delta) \leqslant \varepsilon \sum_{\nu=1}^{k-1} m(E_\nu) = \varepsilon m(E),$$

где E — ограниченное множество, вне которого функция f обращается в нуль. Так как ε может быть выбрано сколь угодно малым, то $I_1 = I_2$. Теперь мы по определению полагаем

$$I(f) = I_1 = I_2.$$

---

[1]) Это понятие определяется и подробно рассматривается в § 3.1.

Если f — произвольная измеримая по Борелю функция, неотрицательная, но не обязательно ограниченная, то положим $E_N = C(0, N)$ и

$$f_N(x) = \begin{cases} \min\{f(x), N\}, & x \in E_N, \\ 0, & x \notin E_N. \end{cases}$$

Очевидно, что последовательность $f_N(x)$ возрастает вместе с N и, значит, возрастает последовательность $I(f_N)$. Положим

$$I(f) = \lim_{N\to\infty} I(f_N)$$

и заметим, что конечный или бесконечный предел $I(f)$ всегда существует. Если $I(f)$ конечен, функция f называется *интегрируемой* (по Лебегу).

Далее, если E — произвольное измеримое по Борелю множество и f — неотрицательная измеримая по Борелю функция на E, то определим функцию $\varphi(x)$, полагая

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E, \\ 0, & x \notin E, \end{cases}$$

и пусть

$$\int_E f(x)\,dx = I(\varphi).$$

Наконец, если f измерима на борелевском множестве E, но не обязательно сохраняет постоянный знак, положим

$$f_1 = \max(f, 0), \quad f_2 = \min(f, 0),$$

так что $f = f_1 + f_2$, и пусть

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E f_1(x)\,dx - \int_E (-f_2(x))\,dx$$

при условии, что по крайней мере одна из функций f_1, f_2 интегрируема на E. Если обе функции f_1 и f_2 интегрируемы, то функция f называется *интегрируемой*.

Мы считаем известными обычные свойства интеграла Лебега, однако напомним теорему Фубини, которая позволяет сводить n-мерный интеграл к повторному. Этот результат можно сформулировать следующим образом [1]).

Теорема 1.7 (теорема Фубини). *Предположим, что функция f интегрируема на множестве E и для каждой точки $(x_2, \ldots, x_n)$ обозначим через $E(x_2, \ldots, x_n)$ множество всех таких x_1, для*

[1]) Более общая форма этого утверждения будет доказана в теореме 3.5. Оригинальную формулировку см. у Фубини [1907].

которых $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *принадлежат* E. *Тогда*

$$\int_E f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int dx_2\, dx_3 \ldots dx_n \int\limits_{E(x_2, \ldots, x_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1.$$

Заметим, что так как E и f измеримы по Борелю, то измеримыми по Борелю являются множества $E(x_2, \ldots, x_n)$ и функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для любой фиксированной точки $(x_2, \ldots, x_n)$ из $(n - 1)$-мерного пространства. Таким образом, правая часть равенства имеет смысл. Если f принимает значения разных знаков, возможна ситуация, когда интеграл

$$\int\limits_{E(x_2, \ldots, x_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1$$

не существует, поскольку f может быть неинтегрируемой при некоторых $(x_2, \ldots, x_n)$. Однако множество таких точек $(x_2, \ldots, x_n)$ имеет нулевую $(n - 1)$-мерную меру и поэтому может быть исключено из области интегрирования.

В дальнейшем все множества E и все функции f будут предполагаться измеримыми по Борелю. Нам понадобится также еще один результат из общей теории интегрирования.

Теорема 1.8. *Пусть* $y = T(x)$ — *взаимно однозначное отображение области* $D \subset \mathbb{R}^m$ *точек* $x = (x_1, \ldots, x_m)$ *на область* $D' \subset \mathbb{R}^m$ *точек* $y = (y_1, \ldots, y_m)$. *Предположим, кроме того, что* $T(x)$ *имеет непрерывные частные производные*

$$y_{\mu, \nu} = \frac{\partial y_\mu}{\partial x_\nu}, \quad \mu, \nu = 1, \ldots, m,$$

и якобиан

$$J(x) = \frac{\partial(y_1, \ldots, y_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)} = |y_{\mu, \nu}|$$

не обращается в нуль в D. *Тогда, если функция* $f(y)$ *интегрируема на* D', *то*

$$\int_{D'} f(y)\, dy = \int_D f\{T(x)\}\, |J(x)|\, dx$$

в том смысле, что интеграл в правой части равенства существует и равен интегралу в левой части.

1.4.2. Поверхностные интегралы

Теперь мы определим параметризованные поверхности и интегралы по ним. Параметризованная гиперповерхность в $\mathbb{R}^m$ определяется как образ S при взаимно однозначном отображении $y = T(x)$ некоторой области D в $(m-1)$-мерном пространстве точек $x = (x_1, \ldots, x_{m-1})$ в пространство $\mathbb{R}^m$ с координатами $(y_1, \ldots, y_m)$. Дополнительно мы предположим, что это отображение принадлежит классу C^1, т. е. что все частные производные

$$y_{\mu,\nu} = \frac{\partial y_\mu}{\partial x_\nu}, \quad \mu = 1, \ldots, m, \quad \nu = 1, \ldots, m-1,$$

существуют и непрерывны в D, и что в любой точке D не обращается в нуль по меньшей мере один из якобианов

$$J_\nu(x) = \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_{\nu-1}, y_{\nu+1}, \ldots, y_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_{m-1})} = (-1)^{\nu-1} \det y_{\mu,\nu},$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, \nu-1, \nu+1, \ldots, m, \quad \nu = 1, \ldots, m.$$

С каждой точкой $y \in S$ мы свяжем два единичных нормальных вектора

$$\mathbf{t} = \left\{\frac{J_\nu}{\sqrt{\sum_{\nu=1}^m J_\nu^2}}\right\}, \quad -\mathbf{t} = \left\{\frac{-J_\nu}{\sqrt{\sum_{\nu=1}^m J_\nu^2}}\right\},$$

$$\nu = 1, \ldots, m,$$

и заметим, что пара $(\mathbf{t}, -\mathbf{t})$ меняется непрерывно, когда x пробегает D и, значит, когда y пробегает S. Касательная плоскость в точке $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ определяется как гиперплоскость, проходящая через η ортогонально к $\mathbf{t}$, т. е.

$$\sum_{\nu=1}^m J_\nu (y_\nu - \eta_\nu) = 0.$$

Заметим, что эти определения не зависят от конкретного выбора параметризации.

В самом деле, пусть для определенности $J_m(x) \neq 0$ в точке $x = \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{m-1})$ и $T(\xi) = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$. Тогда отображение $x \mapsto (y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})$ локально обратимо, так что x, а значит, и y_m являются в окрестности $(\eta_1, \ldots, \eta_{m-1})$ непрерывно дифференцируемыми функциями $(y_1, \ldots, y_{m-1})$. Итак, имеем

$$dy_\mu = \sum_{\nu=1}^{m-1} y_{\mu\nu}\, dx_\nu, \quad \mu = 1, \ldots, m,$$

причем

$$\sum_{\mu=1}^{m} J_\mu \, dy_\mu = 0,$$

поскольку левая часть может быть представлена как линейная функция от dx_ν, коэффициенты которой суть определители с двумя равными столбцами. Поэтому

$$\frac{\partial y_m}{\partial y_\mu} = \frac{-J_\mu}{J_m}, \quad \mu = 1, \ldots, m-1,$$

и отношения $J_1 : J_2 : \ldots : J_m$ зависят только от S как множества точек и не зависят от конкретной параметризации. Значит, и пара векторов $(\mathbf{t}, -\mathbf{t})$ зависит только от S.

Теперь для произвольной заданной функции f на S мы определяем поверхностный интеграл, полагая

$$\int_S f \, d\sigma = \int_D f\,[T(x)] \sqrt{\sum_{\nu=1}^{m-1} J_\nu(x)^2} \, dx. \tag{1.4.1}$$

Аналогично, для любого $\nu = 1, \ldots, m-1$ полагаем

$$\int_S f \, d\sigma_\nu = \int_D f\,[T(x)]\, \varepsilon J_\nu(x) \, dx, \tag{1.4.2}$$

где $\varepsilon = \pm 1$ и знак εJ_ν определяется заданием в каждой точке S одного из двух возможных нормальных векторов $\mathbf{t}$ или $-\mathbf{t}$ и выбором для εJ_ν того знака, который имеет ν-я координата t. Применяя теорему 1.8, снова замечаем, что эти определения не зависят от параметризации. В самом деле, на поверхности можно выделить часть S', где одна из координат, например y_m, выражается как функция остальных, и если D' — соответствующая область точек $(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})$, то

$$\int_{S'} f \, d\sigma = \int_{D'} f\,[y_1, \ldots, y_{m-1}, y_m(y_1, \ldots, y_{m-1})] \times$$

$$\times \sqrt{1 + \sum_{\nu=1}^{m-1} \left(\frac{\partial y_m}{\partial y_\nu}\right)^2} \, dy_1 \ldots dy_{m-1}, \tag{1.4.3}$$

$$\int_{S'} f \, d\sigma_m = \int_{D'} \varepsilon f\,[y_1, y_2, \ldots, y_m(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})] \, dy_1 \ldots dy_{m-1}.$$

Часть поверхности S, где $J_\nu \neq 0$, можно разложить в счетное объединение непересекающихся борелевских множеств, в каждом из которых y_ν локально является функцией других координат, а часть S', где $J_\nu = 0$, дает нулевой вклад в интеграл (1.4.2). Таким образом, во всех случаях интегралы (1.4.1) и (1.4.2) зависят от S, а в случае (1.4.2) еще и от локального определения единичной нормали.

Часто не удается параметризовать всю поверхность указанным выше способом, и тогда мы приходим к понятию гиперповерхности. Гиперповерхность — это объединение S конечного или счетного множества параметризованных гиперповерхностей S_μ, определенных выше, такое, что

(i) каждая S_μ пересекается самое большее с конечным числом различных поверхностей S_ν;

(ii) если $\Gamma_{\mu\nu}$ — часть границы S_ν, которая лежит в S_μ, то $\Gamma_{\mu\nu}$ имеет нулевую площадь поверхности в том смысле, что

$$\int_{S_\mu} f\,d\sigma = 0, \quad \text{где} \quad f = \begin{cases} 1 & \text{на } \Gamma_{\mu\nu}, \\ 0 & \text{в остальных точках } S_\mu. \end{cases}$$

Наши интегралы можно очевидным способом продолжить до интегралов по S. Действительно, положим

$$\int_S = \sum_\nu \int_{S_\nu^\circ},$$

где через S_ν° обозначена внутренность (в топологии $(m-1)$-мерной области D_ν, образом которой является S_ν) части поверхности S_ν, которая не лежит в $S_1, S_2, \ldots, S_{\nu-1}$.

Заметим, что гиперсфера S: $\sum x_\nu^2 = 1$ является гиперповерхностью в нашем смысле. Действительно, вблизи любой ее точки, где $x_\nu \neq 0$, координата x_ν может быть локально выражена через остальные. Возьмем части, задаваемые неравенствами $1/2m < x_\nu \leqslant 1$, $-1/2m \geqslant x_\nu \geqslant -1$, $\nu = 1, \ldots, m$, и заметим, что они покрывают сферу и что их границы $x_\nu = \pm 1/2m$ имеют нулевую площадь.

1.4.3. Области и их граничные поверхности

Пусть D — область в $\mathbb{R}^m$. Предположим, что P является ее граничной точкой и что в некоторой окрестности V точки P все граничные точки D лежат на поверхности S, проходящей через P. Очевидно, что если окрестность V достаточно мала, то две единичные нормали $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$ к поверхности S в точке P больше не пересекаются с S внутри V. Таким образом, $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$ лежат либо целиком внутри, либо целиком снаружи области D.

Положим для определенности, что P — начало координат и что касательная плоскость к S в точке P не параллельна оси x_1. Тогда вблизи P поверхность S может быть представлена в виде

$$x_1 = f(x_2, \ldots, x_m),$$

где f — дифференцируемая функция и $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$. Пусть V^+ и V^- — множества, задаваемые соответственно неравенствами

$$x_1 > f(x_2, \ldots, x_m), \quad \sum_2^m x_\nu^2 < \varepsilon;$$

$$x_1 < f(x_2, \ldots, x_m), \quad \sum_2^m x_\nu^2 < \varepsilon.$$

Ясно, что любые две точки из V^+ могут быть соединены кривой в V^+. Действительно, пусть

$$\delta = \sup_{\sum_2^m x_\nu^2 \leqslant \varepsilon} |f(x_2, \ldots, x_m)|.$$

Точку $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ можно соединить с точкой $(2\delta, x_2, \ldots, x_m)$ в V^+, затем $(2\delta, x_2, \ldots, x_m)$ с $(2\delta, x_2', \ldots, x_m')$ и, наконец, $(2\delta, x_2', \ldots, x_m')$ с $(x_1', x_2', \ldots, x_m')$ тремя прямолинейными отрезками. Они лежат в V^+ и, следовательно, если ε и δ достаточно малы,— в V. Итак, если x_1 и ε достаточно малы, то либо обе эти точки лежат в области D, либо ни одна из них. Аналогично, все либо никакие точки из V^-, лежащие достаточно близко от начала координат, находятся в области D. Если область D содержит все точки из V^+, но не содержит точек из V^- вблизи начала координат, то говорят, что D лежит над S в начале координат. В этом случае определяем *внутреннюю*, соответственно *внешнюю*, нормаль как ту из нормалей $\mathfrak{t}_1$ и $\mathfrak{t}_2$, которая имеет положительную, соответственно отрицательную, x_1-компоненту.

Если область D содержит точки из V^-, но не содержит точек из V^+, определяем внутреннюю нормаль как нормаль, имеющую отрицательную x_1-компоненту, и внешнюю нормаль — как нормаль, имеющую положительную x_1-компоненту. В любом из этих случаев мы говорим, что S является односторонней границей области D.

Если область D содержит вблизи P как точки из V^+, так и точки из V^-, то говорят, что S является локально двусторонней границей D. Поскольку D — область и поэтому содержит все свои внутренние точки, то D не может целиком лежать на S и поэтому S вблизи каждой точки является либо односторонней, либо двусторонней границей D.

Ясно, что если S — односторонняя граница области D, то все достаточно близкие к P точки внутренней нормали находятся в D, а все близкие к P точки внешней нормали лежат вне D.

Дадим теперь следующее

Определение. Область D в $\mathbb{R}^m$ называется *допустимой*, если:

(i) D ограничена;

(ii) граница S области D является объединением конечного числа непересекающихся гиперповерхностей;

(iii) в любой своей точке S является односторонней границей D;

(iv) множество тех точек из S, в которых касательные плоскости параллельны одной из осей, имеет нулевую площадь;

(v) любая прямая, параллельная координатным осям, пересекает S не более чем в конечном числе точек.

1.4.4. Теорема Грина [1])

Мы закончим этот параграф доказательством теоремы Грина.

Теорема 1.9. *Предположим, что D — допустимая область в $\mathbb{R}^m$ с границей S и что $u \in C^1$ и $v \in C^2$ в $\overline{D}$. Тогда*

$$\int_S u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = -\int_D \left\{ \sum_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \frac{\partial v}{\partial x_\nu} + u\nabla^2 v \right\} dx, \tag{1.4.4}$$

где $\nabla^2 = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2}$ — оператор Лапласа. Следовательно, если $u, v \in C^2$ в $\overline{D}$, то

$$\int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = \int_D (v\nabla^2 u - u\nabla^2 v)\, dx. \tag{1.4.5}$$

Здесь $\partial/\partial n$ обозначает дифференцирование вдоль внутренней относительно D нормали.

Пусть $P(x) \in C^1$ в $\overline{D}$; рассмотрим интеграл

$$I_1 = \int_D \frac{\partial P}{\partial x_1} dx. \tag{1.4.6}$$

Пусть D_1 — проекция $\overline{D}$ на гиперплоскость $x_1 = 0$ и E_1 — проекция на эту же гиперплоскость той части S, на которой касательная плоскость ортогональна гиперплоскости $x_1 = 0$. По предположению, $(m - 1)$-мерная мера множества E_1 равна нулю. Если $\xi = (0, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ — точка из $D_1 - E_1$, то прямая $x_\nu = \xi_\nu$, $\nu = 2, \ldots, m$, пересекает D по конечному числу прямолинейных отрезков

$$\xi_{1,2\mu} < x_1 < \xi_{1,2\mu+1}, \quad \mu = 0, \ldots, k = k(\xi).$$

[1]) Интегральные тождества и связанные с ними функции, носящие имя Грина, впервые появились в работе Грина [1828].

Следовательно, по теореме Фубини и в силу того, что E_1 имеет нулевую $(m-1)$-мерную меру,

$$I_1=\int\limits_{D_1-E_1} dx_2\,dx_3\,\ldots\,dx_m \sum_{\mu=0}^{k}\int\limits_{\xi_{1,2\mu}}^{\xi_{1,2\mu+1}} \frac{\partial P}{\partial x_1}\,dx_1.$$

Поскольку $P\in C^1$, $\partial P/\partial x_1$ непрерывна по x_1 при фиксированных $(x_2, \ldots, x_m)$ и $\xi_{1,2\mu}\leqslant x_1\leqslant \xi_{1,2\mu+1}$. Поэтому

$$\int\limits_{\xi_{1,2\mu}}^{\xi_{1,2\mu+1}} \frac{\partial P}{\partial x_1}\,dx_1=P(\xi_{1,2\mu+1}, x_2, \ldots, x_m)-P(\xi_{1,2\mu}, x_2, \ldots, x_m).$$

Следовательно,

$$I_1=\int\limits_{D_1-E_1}\sum_{\mu=0}^{2k}(-1)^{\mu-1}P(\xi_{1,\mu}, x_2, \ldots, x_m)\,dx_2\,dx_3\,\ldots\,dx_m. \tag{1.4.7}$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$J_1=\int\limits_S P(x)\,d\sigma_1, \tag{1.4.8}$$

определенный в соответствии с (1.4.2). В каждой точке поверхности S мы должны выбрать один из двух возможных нормальных векторов; возьмем внутреннюю нормаль к поверхности S, т. е. нормальный вектор, направленный внутрь D. Разобьем поверхность S на две части: часть S_1, в точках которой нормаль параллельна плоскости $x_1=0$, и часть S_2 — дополнение в S к S_1. На S_1 имеем $J_1=0$ для любой локальной параметризации, и поэтому

$$\int\limits_{S_1} P\,d\sigma_1=0.$$

Вблизи произвольной точки из S_2 можно локально выразить x_1 через остальные координаты $(x_2, \ldots, x_m)$ и, следовательно,

$$\int\limits_{S_2} P\,d\sigma_1=\int\limits_{S_2}\pm P(x_1, x_2, \ldots, x_m)\,dx_2\,dx_3\,\ldots\,dx_m. \tag{1.4.9}$$

Знак «+» в этой формуле выбирается тогда, когда внутренняя нормаль образует острый угол с вектором, указывающим положительное направление оси x_1, т. е. когда x_1 возрастает вдоль внутренней нормали; в противоположном случае выбирается знак «—».

Правую часть формулы (1.4.9) можно переписать в виде

$$\int\limits_{D_2}\sum\pm P(x_1, x_2, \ldots, x_m)\,dx_2\,dx_3\,\ldots\,dx_m,$$

где через D_2 обозначено подмножество D_1, на которое проектируется S_2, а сумма берется при фиксированных $(x_2, \ldots, x_m)$ по всем точкам $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ на S, касательные плоскости в которых не параллельны оси x_1. Таким образом, D_2 включает в себя все точки множества D_1 и, возможно, некоторые точки E_1, а именно те, для которых прямая $x_\nu = \text{const}$, $\nu = 2, \ldots, m$, пересекает S в точках, где касательные плоскости параллельны оси x_1. Так как множество E_1 имеет нулевую меру, то

$$J_1 = \int\limits_{D_2} \sum \pm P(x_1, \ldots, x_m)\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_m =$$

$$= \int\limits_{D_1} \sum \pm P(x_1, \ldots, x_m)\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_m. \tag{1.4.10}$$

Заметим теперь, что для $(\xi_2, \ldots, \xi_m) \in D_1$ соответствующие точки $(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ — это в точности точки $x_1 = \xi_{1, \mu}$, $\mu = 0, \ldots, 2k$. Кроме того, так как отрезки $\xi_{1, 2\mu} < x_1 < \xi_{2, 2\mu+1}$ лежат в D, то проходимые в направлении возрастания x_1 они дают острый угол с внутренней нормалью в точках $x_1 = \xi_{1, 2\mu}$ и тупой угол в точках $x_1 = \xi_{1, 2\mu+1}$. Таким образом, в точке $\xi_{1, \mu}$ имеем знак «+», если μ четно, и «—», если μ нечетно. Используя (1.4.7), (1.4.8) и (1.4.10), получаем $I_1 = -J_1$, т. е.

$$\int\limits_D \frac{\partial P}{\partial x_1} dx = -\int\limits_S P\, d\sigma_1.$$

Аналогично, для $\nu = 1, \ldots, m$ имеем

$$\int\limits_D \frac{\partial P}{\partial x_\nu} dx = -\int\limits_S P\, d\sigma_\nu. \tag{1.4.11}$$

Заметим теперь, что если $(t_1, \ldots, t_{m-1})$ задает подходящую локальную параметризацию поверхности S вблизи $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, то в точке ξ

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \varepsilon \lim_{h \to 0} \frac{v\left(\xi_1 + \frac{J_1}{J} h,\ \xi_2 + \frac{J_2}{J} h,\ \ldots,\ \xi_m + \frac{J_m}{J} h\right) - v(\xi_1, \ldots, \xi_m)}{h},$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $J = \sqrt{\sum\limits_{\nu=1}^{m} J_\nu^2}$ и

$$J_\nu = (-1)^{\nu-1} \frac{\partial (x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots, x_m)}{\partial (t_1, t_2, \ldots, t_{m-1})}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \varepsilon \sum_{\nu=1}^{m} \frac{J_\nu}{J} \frac{\partial v}{\partial x_\nu},$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma = \varepsilon \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial v}{\partial x_\nu} \frac{J_\nu}{J}\, d\sigma.$$

Знак ε тот же, который приписывается внутренней нормали; таким образом, εJ_ν имеет знак «+», если x_ν возрастает в направлении внутренней нормали, и знак «—» в противоположном случае. Итак, (1.4.2) и (1.4.11) показывают, что

$$\int_S u \frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma = \sum_{\nu=1}^{m} \int_S u \frac{\partial v}{\partial x_\nu}\, d\sigma_\nu = -\sum_{\nu=1}^{m} \int_D \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(u \frac{\partial v}{\partial x_\nu}\right) dx =$$

$$= -\int_D \left\{u \nabla^2 v + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \frac{\partial v}{\partial x_\nu}\right\} dx.$$

Равенство (1.4.4) доказано. Равенство (1.4.5) получается вычитанием, и доказательство теоремы 1.9 завершено.

1.5. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1.5.1. Функция Грина и интеграл Пуассона [1])

Если $u \in C^2$ в области D и $\nabla^2 u = 0$ в этой области, то функция u называется *гармонической* в D. Приступим к изучению свойств гармонических функций.

Если $u = f(R)$ — гармоническая функция в некоторой области $\mathbb{R}^m$, где $R = \left(\sum_{\nu=1}^{m} x_\nu^2\right)^{1/2}$ — расстояние от точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ до начала координат, то

$$\sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} = \frac{(m-1)}{R} f'(R) + f''(R) = 0,$$

так что

$$u = A \log R + B, \qquad m = 2,$$

$$u = AR^{2-m} + B, \qquad m > 2.$$

Это приводит к следующему определению.

[1]) Пуассон [1823].

Определение. Функция $g(x, \xi, D)$ называется (классической) *функцией Грина* для x, отвечающей ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^m$ и точке $\xi \in D$, если:

(i) g — гармоническая функция x всюду в области D, за исключением точки $x = \xi$;

(ii) g непрерывна в $\overline{D}$, кроме точки $x = \xi$, и $g = 0$ на границе D;

(iii) $g + \log |x - \xi|$ остается гармонической функцией в точке $x = \xi$ при $m = 2$ или $g - |x - \xi|^{2-m}$ остается гармонической функцией в точке $x = \xi$ при $m > 2$.

В теореме 1.14 мы покажем, что функция $g(x, \xi, D)$ единственна (если она существует). Некоторое время мы сможем обходиться без этого результата, и поэтому пока будем называть функцией Грина произвольную функцию, обладающую свойствами (i) — (iii).

Имеет место следующая

Теорема 1.10. *Если $D = D(0, R)$ и ξ — точка области D, $\xi' = \xi R^2 |\xi|^{-2}$ и если при $m = 2$*

$$g(x, \xi, D) = \log \frac{|x-\xi'|\,|\xi|}{|x-\xi|\,R}, \quad \xi \neq 0, \qquad g(x, 0, D) = \log \frac{R}{|x|},$$

а при $m > 2$

$$g(x, \xi, D) = |x-\xi|^{2-m} - \{|\xi|\,|x-\xi'|/R\}^{2-m}, \quad \xi \neq 0,$$

$$g(x, 0, D) = |x|^{2-m} - R^{2-m}$$

то $g(x, \xi, D)$ является (классической) функцией Грина области D.

Из приведенных выше рассуждений очевидно, что так определенная функция $g(x, \xi, D)$ обладает свойствами (i) и (iii). Далее, если $|x| = R$, то

$$|x-\xi'|^2 = |x|^2 + |\xi'|^2 - 2\left(\sum x_\nu \xi_\nu\right)\frac{R^2}{|\xi|^2} =$$

$$= R^2 + \frac{R^4}{|\xi|^2} - 2\left(\sum x_\nu \xi_\nu\right)\frac{R^2}{|\xi|^2} = \frac{R^2\,|x-\xi|^2}{|\xi|^2},$$

так что

$$|\xi|\,|x-\xi'| = R\,|x-\xi|.$$

Поэтому $g(x, \xi, D) = 0$ при $|x| = R$, что завершает доказательство теоремы 1.10.

Отсюда получается

Теорема 1.11 (интеграл Пуассона). *Если функция u гармонична в $D(x_0, R)$ и непрерывна в $C(x_0, R)$, то для $\xi \in D(x_0, R)$ имеем*

$$u(\xi)=\frac{1}{c_m}\int\limits_{S(x_0,\ R)}\frac{R^2-|\xi-x_0|^2}{R\,|x-\xi|^m}\,u(x)\,d\sigma_x, \tag{1.5.1}$$

где $d\sigma_x$ обозначает элемент площади поверхности сферы $S(x_0, R)$ и $c_m = 2\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$.

Без потери общности можно считать, что $x_0 = 0$, поскольку в противном случае мы могли бы вместо функции $u(x)$ рассматривать функцию $u(x_0 + x)$.

Сначала будем считать, что функция u остается гармонической и, значит, принадлежит классу C^2 в шаре $D(0, R')$ для некоторого $R' > R$. Тогда мы можем применить теорему 1.9 с областью D_ε вместо D, где ε — малое положительное число и

$$D_\varepsilon = (|x| < R) \cap (|x-\xi| > \varepsilon).$$

Вместо функции u мы используем функцию $g = g(x, \xi, D)$ теоремы 1.10 и положим $S = S(0, R) \cup S(\xi, \varepsilon)$. Так как функции u и g гармоничны в D_ε, из (1.4.5) вытекает, что

$$\int\limits_{D_\varepsilon}(u\nabla^2 g - g\nabla^2 u)\,dx = 0.$$

Итак, на $S(0, R)$ имеем $g = 0$. Вычислим теперь $\partial g/\partial n$ на $S(0, R)$. Обозначим ξ через A, ξ' — через A' и произвольную точку x в пространстве — через Q. Пусть O — начало координат. Положим $OQ = r$, $OA = \rho$, и пусть θ — угол QOA. Тогда

$$AQ^2 = r^2+\rho^2-2r\rho\cos\theta,$$

$$A'Q^2 = r^2+\frac{R^4}{\rho^2}-\frac{2rR^2}{\rho}\cos\theta.$$

Поэтому

$$AQ\,\frac{\partial}{\partial r}\,AQ = r-\rho\cos\theta,$$

$$A'Q\,\frac{\partial}{\partial r}\,A'Q = r-\frac{R^2}{\rho}\cos\theta.$$

Если $m = 2$, то для $Q \in S(0, R)$, поскольку $r = R$, $A'Q = (AQ)(R/\rho)$, имеем

$$\frac{\partial g}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}\log\frac{A'Q}{AQ} = \frac{r-\rho\cos Q}{AQ^2}-\frac{r-(R^2/\rho)\cos\theta}{A'Q^2} =$$

$$=\frac{1}{AQ^2}\left[R-\rho\cos\theta-\frac{\rho^2}{R^2}\left(R-\frac{R^2}{\rho}\cos\theta\right)\right]=\frac{(R^2-\rho^2)}{RAQ^2}.$$

Для случая $m > 2$ аналогично получаем

$$\frac{\partial g}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{AQ^{m-2}} - \left(\frac{R}{\rho}\frac{1}{A'Q}\right)^{m-2}\right] =$$
$$= (m-2)\left[\frac{r-\rho\cos\theta}{(AQ)^m} - \left(\frac{R}{\rho}\right)^{m-2}\frac{r-(R^2/\rho)\cos\theta}{(A'Q)^m}\right] =$$
$$= \frac{m-2}{(AQ)^m}\left[R-\rho\cos\theta - \frac{\rho^2}{R^2}\left(R - \frac{R^2}{\rho}\cos\theta\right)\right] =$$
$$= \frac{(m-2)(R^2-\rho^2)}{R\,(AQ)^m}.$$

Таким образом, на $S(0, R)$ имеем

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \frac{(R^2-\rho^2)}{R\,(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\theta)}, \qquad m=2,$$
$$\frac{\partial g}{\partial n} = \frac{(m-2)(R^2-\rho^2)}{R\,(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\theta)^{m/2}}, \quad m>2.$$

Заметим далее, что при $\varepsilon \to 0$ на $S(\xi, \varepsilon)$ получаем

$$u(x) = u(\xi) + O(\varepsilon), \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = O(1),$$
$$g(x) = o(\varepsilon^{1-m}), \qquad \frac{\partial g}{\partial n} = -\varepsilon^{-1} + O(1), \quad m=2;$$
$$\frac{\partial g}{\partial n} = -(m-2)\,\varepsilon^{1-m} + O(1), \quad m>2,$$

$$\int\limits_{S(\xi,\varepsilon)} d\sigma = \varepsilon^{m-1}\int\limits_{S(0,1)} d\sigma = c_m\varepsilon^{m-1},$$

где c_m — постоянная. Поэтому

$$\int\limits_{S(\xi,\varepsilon)}\left(u\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma = \begin{cases} -c_2u(\xi)+o(1), & m=2,\\ -(m-2)\,c_mu(\xi)+o(1), & m>2.\end{cases}$$

Следовательно, по теореме 1.8 окончательно получаем

$$u(\xi) = \frac{1}{c_m}\int\limits_{S(0,R)}\frac{(R^2-\rho^2)\,u(x)\,d\sigma_x}{R\,(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\theta)^{m/2}},$$

где постоянная c_m равна площади поверхности гиперсферы радиуса 1 в m-мерном пространстве. Легким упражнением является проверка того, что

$$c_m = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}.$$

Мы предполагали, что функция u гармонична в некотором шаре $D(0, R')$ для $R' > R$. Если это условие не выполнено, то можно применить теорему 1.11 с R_1 вместо R, где $R_1 < R$ стремится к R снизу. Так как функция $u(x)$ непрерывна на $C(0, R)$, очевидно, что правая часть в формуле (1.5.1) остается непрерывной при $R_1 \to R$, откуда следует общий случай теоремы 1.11.

1.5.2. Принцип максимума для гармонических функций

Интеграл Пуассона является полезным инструментом для исследования свойств гармонических функций. Мы начнем со следующего утверждения.

Теорема 1.12 (принцип максимума). *Если функция u гармонична в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^m$ и непрерывна в $\bar{D}$ и если $u \leqslant M$ на границе области D, то либо $u < M$ в D, либо $u \equiv M$ в D.*

Пусть M' — максимум функции u в $\bar{D}$. Максимум достигается, так как $\bar{D}$ компактно. Если $M' < M$, то доказывать нечего. Если $M' = M$, $u < M$ в D, то снова все доказано. Поэтому можно считать, что $M' \geqslant M$ и что $u(\xi) = M'$ в некоторой точке $\xi \in D$.

Пусть E_1, E_2 — множества тех точек области D, в которых соответственно $u < M'$ и $u = M'$. Очевидно, что каждая точка D принадлежит E_1 или E_2. Кроме того, так как функция u непрерывна, множество E_1 открыто. Покажем, что множество E_2 тоже открыто.

Действительно, пусть $\xi \in E_2$ и $D(\xi, r) \subset D$. Покажем, что $D(\xi, r) \subset E_2$. В самом деле, если $\rho < r$, то из теоремы 1.10 следует, что

$$u(\xi) = \frac{\rho^{1-m}}{c_m} \int\limits_{S(\xi, \rho)} u(x)\, d\sigma_x$$

и, значит,

$$0 = u(\xi) - M' = \frac{\rho^{1-m}}{c_m} \int\limits_{S(\xi, \rho)} (u(x) - M')\, d\sigma_x.$$

Подынтегральное выражение в этом равенстве неположительно, и так как функция $u(x)$ непрерывна, то $u(x) \equiv M'$ на $S(\xi, \rho)$ для $\rho < r$, т. е. $u(x) = M'$ в $D(\xi, r)$. Таким образом, множество E_2 открыто.

Итак, оба множества E_1 и E_2 открыты, а поскольку D связно, то одно из них пусто. Поэтому либо $u < M'$ в D, а в этом случае $M' \leqslant M$, что доказывает наш результат, либо $u \equiv M'$ в D и, так как $u \leqslant M$ на (непустой) границе области D, а u непрерывна, снова выводим, что $M' \leqslant M$. Это завершает доказательство теоремы 1.12.

Пусть D — ограниченная область с границей S. *Задача Дирихле* [1]) заключается в нахождении функции u, гармонической в области D, непрерывной в $\overline{D}$ и принимающей заданные непрерывные значения на S. Имеет место следующая

Теорема 1.13. *Если решение задачи Дирихле существует, то оно единственно.*

Действительно, если u_1, u_2 — два решения задачи Дирихле в области D с данными граничными значениями, то функция $u = u_1 - u_2$ гармонична в D, непрерывна в $\overline{D}$ и обращается в нуль на границе D. Поэтому, согласно теореме 1.12, $u \leqslant 0$ в D и аналогично $-u \leqslant 0$, т. е. $u \equiv 0$ в области D.

Справедлива также

Теорема 1.14. *Классическая функция Грина* $g(x, \xi, D)$ (*если она существует*) *однозначно определяется свойствами* (i) — (iii) *п.* 1.4.2. *Кроме того,* $g(x, \xi, D) > 0$ *в области* D.

Действительно, пусть функции $g_1(x)$, $g_2(x)$ обладают свойствами (i) — (iii) для заданной области D и точки ξ. Тогда функция $g_1 - g_2$ остается гармонической в любой точке D, включая и точку ξ, поскольку вблизи ξ можно написать

$$g_1 - g_2 = g_1 + \log|x - \xi| - \{g_2 + \log|x - \xi|\}, \qquad m = 2;$$

$$g_1 - g_2 = (g_1 - |x - \xi|^{2-m}) - (g_2 - |x - \xi|^{2-m}), \qquad m > 2.$$

Кроме того, $g_1 - g_2 = 0$ на границе области D и, по принципу максимума, $g_1 = g_2$ в D.

Далее, если Δ — часть области D, находящаяся вне малой окрестности точки ξ, то g непрерывна в $\overline{\Delta}$, гармонична в Δ и, согласно условиям (ii) и (iii), $g \geqslant 0$ на границе Δ. Поэтому, применяя к g принцип максимума, мы видим, что либо $g > 0$ в Δ, либо $g \equiv 0$ в Δ. Вторая возможность исключается условием (ii), если выбрать окрестность точки ξ достаточно малой.

1.5.3. Аналитичность

Докажем следующую теорему.

Теорема 1.15. *Если функция* $u(x)$ *гармонична в области* D, *то* $u(x) \in A$ *в* D.

Для доказательства заметим, что если $|x - x_0| = R$, $|\xi - x_0| = \rho$, $(x - x_0)(\xi - x_0) = t$ и $\rho < R/3$, то

$$|x - \xi|^{-m} = (R^2 - 2t + \rho^2)^{-m/2} = R^{-m} \sum_{0}^{\infty} b_\nu \left(\frac{2t - \rho^2}{R^2}\right)^\nu,$$

[1]) Риман [1857] при обсуждении этой задачи ссылается на Дирихле.

где b_ν — биномиальные коэффициенты. Следовательно, если x_μ, ξ_μ — координаты векторов $x - x_0$, $\xi - x_0$ соответственно, то

$$|2t-\rho^2| = \left|2\sum x_\mu\xi_\mu - \sum \xi_\mu^2\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\sum |x_\mu|\,|\xi_\mu| + \sum \xi_\mu^2 \leqslant \rho^2 + 2R\rho \leqslant \frac{7}{9}R^2.$$

Поэтому для $|x - x_0| = R$, $|\xi - x_0| < R/3$ и $\xi - x_0 = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ мы можем написать

$$\frac{R^2-|\xi-x_0|^2}{R}\,|x-\xi|^{-m} = \sum a_{(\mu)}(x)\,\xi^{(\mu)},$$

где $\xi^{(\mu)} = \xi_1^{\mu_1}\xi_2^{\mu_2}\ldots\xi_m^{\mu_m}$ и суммирование ведется по всем наборам из m неотрицательных целых чисел $(\mu) = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$, а ряд в правой части сходится абсолютно и равномерно. Следовательно, если функция $u(x)$ гармонична в $C(x_0, R)$, то этот ряд можно подставить в (1.5.1) и почленно проинтегрировать по x. Получим разложение

$$u(\xi) = \sum_{(\mu)} a_{(\mu)}\xi^{(\mu)},$$

которое абсолютно и равномерно сходится для $|\xi - x_0| < R/3$. Такое разложение можно построить вблизи любой точки $x_0 \in D$, поэтому $u(\xi) \in A$. Напомним, что из результатов п. 1.2.2 следует, в частности, что $u(x) \in C^\infty$, а по теореме 1.5 функция $u(x)$ определена на D, если заданы ее значения на любом открытом множестве, лежащем в D.

Более глубокий анализ показывает, что ряды для $u(\xi)$ абсолютно сходятся при $\rho < R/\sqrt{2}$, причем эта оценка точная [1]).

1.5.4. Задача Дирихле для гипершара

Мы собираемся показать, как можно использовать интеграл Пуассона для решения задачи Дирихле для гипершара. Точнее, справедлива следующая

Теорема 1.16. *Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на $S(x_0, R)$, и пусть для $\xi \in D(x_0, R)$*

$$u(\xi) = \frac{1}{c_m}\int_{S(x_0,\,R)} f(x)\,\frac{R^2-|\xi-x_0|^2}{R\,|\xi-x|^m}\,d\sigma_x, \qquad (1.5.2)$$

где $d\sigma_x$ — элемент площади поверхности сферы $S(x_0, R)$. Тогда функция $u(\xi)$ является решением задачи Дирихле для $D(x_0, R)$ с граничными значениями $f(x)$.

---

[1]) Кизельман [1969], Хейман [1970].

Мы докажем этот результат в несколько шагов.

(i) *Функция* $u(\xi)$ *гармонична в* $D(x_0, R)$. В самом деле, очевидно, что можно произвольное число раз дифференцировать по ξ под знаком интеграла, поскольку функция $f(x)$ непрерывна и ядро

$$K(x, \xi) = \frac{1}{c_m} \frac{R^2 - |\xi - x_0|^2}{R\,|\xi - x|^m} \tag{1.5.3}$$

имеет непрерывные частные производные всех порядков по x, ξ при $\xi \neq x$. Поэтому достаточно показать, что функция $K(x, \xi)$ гармонична по переменным ξ при фиксированном x. Без потери общности можно считать, что $x = 0$, так как замена x на $\xi - x$ не нарушает гармоничности. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$, $x_0 = (x_1, \ldots, x_m)$, $x = 0$; тогда

$$K(x, \xi) = \frac{\sum x_\nu^2 - \sum (\xi_\nu - x_\nu)^2}{\left(\sum \xi_\nu^2\right)^{m/2}} = \frac{2\sum x_\nu \xi_\nu}{\left(\sum \xi_\nu^2\right)^{m/2}} - \left(\sum \xi_\nu^2\right)^{1-m/2}.$$

Как мы видели в п. 1.5.1, второе слагаемое в этом выражении есть гармоническая функция. Кроме того, если функция u является гармонической, то гармонической будет и функция $\partial u/\partial \xi_\nu$, так как u вещественно аналитична и поэтому

$$\nabla^2 \frac{\partial u}{\partial \xi_\nu} = \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} \nabla^2 u = 0.$$

Если $R = \left(\sum \xi_\nu^2\right)^{1/2}$, то при $m = 2$ функция $\log R$ гармонична и, следовательно, функция

$$\frac{x_1\xi_1 + x_2\xi_2}{R^2} = \left(x_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}\right) \log R$$

также гармонична; при $m > 2$ получаем аналогично, что

$$\frac{\sum x_\nu \xi_\nu}{R^m} = \frac{-1}{m-2} \left(\sum x_\nu \frac{\partial}{\partial \xi_\nu}\right) R^{2-m}$$

— гармоническая функция. Таким образом, гармонична функция $K(x, \xi)$, а вместе с ней и функция $u(\xi)$.

(ii) *Если* $m \leqslant f(x) \leqslant M$ *на* $S(x_0, R)$, *то* $m \leqslant u(x) \leqslant M$ *в* $D(x_0, R)$. Если $f(x) = C = \mathrm{const}$, то из теоремы 1.11 вытекает, что $u(\xi) = C$. Следовательно, для любой постоянной C

$$u(\xi) - C = \int\limits_{S(x_0, R)} K(x, \xi)(f(x) - C)\, d\sigma_x.$$

Так как $f(x) \leqslant M$ и $K(x, \xi) > 0$, мы видим, что $u(\xi) \leqslant M$. Аналогично доказывается, что $u(\xi) \geqslant m$.

(iii) *Если* N_1 — *окрестность точки* x_1 *в* $S(x_0, R)$ *и* $m \leqslant f(x) \leqslant M$ *в* N_1, *то*

$$m \leqslant \underline{\lim}\, u(\xi) \leqslant \overline{\lim}\, u(\xi) \leqslant M,$$

где пределы берутся при $\xi \to x_1$, $\xi \in D(x_0, R)$.

Представим $S(x_0, R)$ в виде $S(x_0, R) = N_1 \cup N_2$ и напишем

$$u(\xi) - M = \int_{N_1} K(x, \xi)(f(x) - M)\, d\sigma_x + \int_{N_2} K(x, \xi)(f(x) - M)\, d\sigma_x = I_1 + I_2.$$

Тогда, по предположению, $I_1 \leqslant 0$. Для $x \in N_2$

$$K(x, \xi) = \frac{R^2 - |\xi - x_0|^2}{c_m R\, |\xi - x|^m} \to 0$$

равномерно при $\xi \to x_1$, так как в этом случае $|\xi - x_0|^2 \to |x_1 - x_0|^2 = R^2$, а $|\xi - x| \to |x_1 - x|$, причем $|x_1 - x|$ ограничено снизу для точек $x \notin N_1$. Поэтому при $\xi \to x_1$ имеем $I_2 \to 0$. Следовательно, $\overline{\lim\limits_{\xi \to x_1}}\, u(\xi) \leqslant M$ и, аналогично, $\underline{\lim\limits_{\xi \to x_1}}\, u(\xi) \geqslant m$.

(iv) *Если* $x_1 \in S(x_0, R)$, *то* $u(\xi) \to f(x_1)$ *при* $\xi \to x_1$. Действительно, так как функция $f(x)$ непрерывна в точке x_1, можно применить (iii), положив $m = f(x_1) - \varepsilon$, $M = f(x_1) + \varepsilon$. Устремляя ε к нулю, выводим (iv) из (iii).

Теперь теорема 1.16 следует из (i) и (iv).

1.5.5. Свойство среднего значения

Из теоремы 1.11 вытекает, что если функция $u(x)$ гармонична в некоторой окрестности $C(x_0, R)$, то

$$u(x_0) = \frac{1}{c_m R^{m-1}} \int_{S(x_0, R)} u(x)\, d\sigma_x, \tag{1.5.4}$$

где через $d\sigma_x$ обозначен элемент площади поверхности сферы $S(x_0, R)$. Если функция $u(x)$ гармонична в $C(x_0, \rho)$, то можно проинтегрировать правую часть по R от 0 до ρ и получить

$$u(x_0) = \frac{1}{d_m \rho^m} \int_{C(x_0, \rho)} u(x)\, dx, \tag{1.5.5}$$

где dx — элемент m-мерного объема, а

$$d_m\rho^m = \int\limits_{C(0,\,\rho)} dx = \frac{c_m\rho^m}{m} = \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}\rho^m$$

— объем m-мерного шара радиуса ρ. Любое из свойств (1.5.4) и (1.5.5) можно взять в качестве определения гармонических функций.

Теорема 1.17. *Если функция $u(x)$ непрерывна в области $D \subset \mathbb{R}^m$ и для каждой точки $x_0 \in D$ выполняется равенство* (1.5.5) *при некотором произвольно малом ρ, то $u(x)$ гармонична в D.*

Пусть $C(x_0, r)$ — гипершар, расположенный в D, и пусть $v(x)$ — решение задачи Дирихле в $C(x_0, r)$ с граничными значениями $u(x)$, заданными на $S(x_0, r)$. По теореме 1.16, функция $v(x)$ существует, единственна и задается интегралом Пуассона. Положим $h(x) = v(x) - u(x)$ для $x \in D(x_0, r)$. Так как, согласно теореме 1.16, функция $v(x)$ гармонична в $D(x_0, r)$, то достаточно доказать, что $h(x) \equiv 0$ в $D(x_0, r)$. Заметим, что функция $h(x)$ непрерывна на замкнутом шаре $C = C(x_0, r)$ и обращается в нуль на его границе $S = S(x_0, r)$. Поэтому, если $h(x)$ не обращается тождественно в нуль, она должна иметь положительный максимум или отрицательный минимум в $C(x_0, r)$ и, следовательно, в $D = D(x_0, r)$. Предположим, например, что

$$m = \sup_{x \in C} h(x) > 0.$$

Множество E тех точек из D, для которых $h(\xi) = m$, компактно и непусто, так как функция $h(x)$ непрерывна. Поэтому найдется такая точка $\xi_0 \in E$, для которой $|\xi_0 - x_0|$ максимально. Поскольку $u(x)$ удовлетворяет равенству (1.5.5) для некоторого произвольно малого ρ, а функция $v(x)$ гармонична, $h(x)$ удовлетворяет (1.5.5) для этого же значения ρ, и поэтому мы можем выбрать сколь угодно малое ρ, такое, что

$$\int\limits_{C(\xi_0,\,\rho)} [h(x) - h(\xi_0)]\,dx = 0.$$

Подынтегральное выражение здесь непрерывно и неположительно в $C(\xi_0, \rho)$ и, значит, тождественно равно нулю. В частности, $h(\xi_1) = m$, где $\xi_1 = \xi_0 + \frac{\rho}{2}(\xi_0 - x_0)$. Но

$$|\xi_1 - x_0| = \left|\left(1 + \frac{\rho}{2}\right)[(\xi_0 - x_0)\right|,$$

что противоречит нашему предположению о максимальности $|\xi_0 - x_0|$. Таким образом, функция $h(x)$ должна быть тождественным нулем, и теорема 1.17 доказана.

Примеры

1. *Принцип симметрии Шварца.* Пусть функция u гармонична в области $D \subset \{x \in \mathbb{R}^m \mid x = (x_1, \ldots, x_m)$ и $x_1 > 0\}$, граница которой содержится в открытом множестве Δ гиперплоскости $x_1 = 0$, и остается непрерывной на Δ и обращается там в нуль. Докажите, что u можно продолжить как гармоническую функцию в область $D_1 = D \cup \Delta \cup D'$, где D' — область, симметричная D относительно гиперплоскости $x_1 = 0$. (Положите $u(x_1, \ldots, x_m) = -u(-x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $x \in D'$, и примените теорему 1.17.)

2. Докажите, что если $u \in C$ в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^m$ и частные производные $\partial^2 u/\partial x_\nu^2$ существуют в каждой точке D и удовлетворяют уравнению $\nabla^2 u = 0$, то функция u гармонична в D. (Пусть D'_ε — ограниченная область, замыкание которой содержится в D. Покажите, что функция $u + \varepsilon \mid x \mid^2$ удовлетворяет принципу максимума в D' для каждого $\varepsilon > 0$, и, значит, принципу максимума в D' удовлетворяет функция u. Выведите отсюда, что функция u совпадает в каждом шаре, содержащемся в D, с интегралом Пуассона от ее граничных значений.)

1.5.6. Неравенство Харнака и теорема Харнака

Мы собираемся доказать m-мерную форму неравенства, принадлежащего Харнаку [1886].

Теорема 1.18. *Предположим, что $u(x)$ — гармоническая и положительная функция в $D(x_0, r)$. Тогда для $|\xi - x_0| = \rho < r$ имеем неравенства*

$$\frac{(r-\rho)\, r^{m-2}}{(r+\rho)^{m-1}}\, u(x_0) \leqslant u(\xi) \leqslant \frac{(r+\rho)\, r^{m-2}}{(r-\rho)^{m-1}}\, u(x_0).$$

По теореме 1.16 для $\rho < R < r$ имеем

$$u(\xi) = \int\limits_{S(x_0,\, R)} u(x)\, K(x, \xi)\, d\sigma_x,$$

где $K(x, \xi)$ задается формулой (1.5.3), так что

$$\frac{R^2-\rho^2}{R\,(R+\rho)^m} \leqslant c_m K(x, \xi) \leqslant \frac{R^2-\rho^2}{R\,(R-\rho)^m}.$$

Полагая $\rho = 0$, получаем

$$u(x_0) = \frac{1}{c_m R^{m-1}} \int\limits_{S(x_0,\, R)} u(x)\, d\sigma_x.$$

Это сразу приводит к требуемому неравенству с R вместо r. Наш результат получим, устремляя R к r снизу.

Как было показано в п. 1.5.4, функции

$$u(x)=\frac{r^2-|x-x_0|^2}{r\,|x-x_1|^m},$$

где $|x_1-x_0|=r$, являются гармоническими. Рассматривая эти функции, нетрудно заметить, что неравенства теоремы 1.18 точны.

Теперь докажем следующий результат.

Теорема 1.19. *Если функция $u(x)$ гармонична и не постоянна в $\mathbb{R}^m$ и $A_1(r)=\sup\limits_{|x|=r} u(x)$, $A_2(r)=\inf\limits_{|x|=r} u(x)$, то*

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{A_2(r)}{r}<0<\varliminf_{r\to\infty}\frac{A_1(r)}{r}.$$

В частности, функция $u(x)$ не может быть ограниченной ни сверху, ни снизу.

Применяя к функции $A_1(r)-u(x)$ в $|x|<r$ теорему 1.18, получаем при $|x|=\rho<r$

$$A_1(r)-u(x)\leqslant\frac{(r+\rho)\,r^{m-2}}{(r-\rho)^{m-1}}\,[A_1(r)-u(0)],$$

т. е.

$$u(x)\geqslant\frac{(r+\rho)\,r^{m-2}}{(r-\rho)^{m-1}}\,u(0)-\frac{(r+\rho)\,r^{m-2}-(r-\rho)^{m-1}}{(r-\rho)^{m-1}}\,A_1(r).$$

Предположим теперь, что существует такая последовательность $r=r_n$, что

$$\frac{A_1(r_n)}{r_n}\to\alpha\leqslant 0.$$

Тогда, устремляя r по этой последовательности к бесконечности, получим, что $u(x)\geqslant u(0)$ в любой точке x пространства $\mathbb{R}^m$. Если функция $u(x)$ не постоянна, то это противоречит принципу максимума. Следовательно,

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{A_1(r)}{r}>0,\quad \text{и, аналогично,}\quad \varlimsup_{r\to\infty}\frac{A_2(r)}{r}<0.$$

Примеры

1. Докажите, что если $u(x)$ — положительная гармоническая функция в $D(0,r)$, то в точке $x=0$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|\leqslant\frac{m}{r}\,u(0).$$

2. Докажите, что если функция u гармонична в $D(x_0,r)$, удовлетворяет там неравенству $u<M$ и $u(x_0)=0$, то

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|<\frac{A(\lambda)\,M}{r}$$

в $D(x_0, \lambda r)$, где $0 < \lambda < 1$ и $A(\lambda)$ зависит только от λ. Выведите отсюда или иным методом докажите, что для любого $p = p_1 + p_2 + \ldots + p_m$

$$\left| \frac{\partial^p u}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_m^{p_m}} \right| < \frac{A(\lambda, p) M}{r^p} \quad \text{в} \quad D(x_0, \lambda r),$$

где $A(\lambda, p)$ зависит только от λ и p.

3. Докажите, что если $u(x)$ гармонична в пространстве и не сводится к полиному, то, в обозначениях теоремы 1.19,

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\log |A_f(r)|}{\log r} \to \infty.$$

(Если нижний предел равен $p < \infty$, покажите, что все частные производные порядков, меньших p, тождественно обращаются в нуль.)

Теперь мы докажем теорему Харнака [1]).

Теорема 1.20. *Пусть $u_n(x)$ — монотонно возрастающая последовательность гармонических в области D функций. Тогда либо последовательность $u_n(x)$ расходится к $+\infty$ всюду на D, либо $u_n(x) \to u(x)$ равномерно на каждом компактном подмножестве в D и $u(x)$ — гармоническая функция в D.*

Очевидно, что $u(x)$ существует всюду в D как конечный или бесконечный предел. Предположим, что $u(x_0) < +\infty$ по крайней мере в одной точке $x_0 \in D$. Тогда для $n > m > N_0(\varepsilon)$ имеем $u_n(x_0) - u_m(x_0) < \varepsilon$.

Если теперь $D(x_0, r)$ содержится в D, то, по теореме 1.18, для $|x - x_0| = \rho < r$ получаем

$$0 < u_n(x) - u_m(x) < \varepsilon \frac{(r+\rho) r^{m-2}}{(r-\rho)^{m-1}}, \quad n > m > N_0(\varepsilon).$$

Значит, последовательность $u_n(x)$ равномерно сходится в $C(x_0, \rho)$ для $\rho < r$ к пределу $u(x)$, и, стало быть, функция $u(x)$ конечна и непрерывна в $C(x_0, \rho)$. Аналогично, из левого неравенства теоремы 1.18 вытекает, что если $u(x_0) = \infty$, то $u(x) = \infty$ в $D(x_0, r)$. Таким образом, оба множества точек из D, в которых $u(x) = \infty$ и $u(x) < \infty$, открыты в D, и поэтому одно из них обязательно пусто. Если, например, $u(x) < \infty$ в D, то сходимость в D локально равномерна. Заметим теперь, что если $C(x_0, r) \subset D$ и $|\xi - x_0| = \rho < r$, то

$$u_n(\xi) = \int_{S(x_0, r)} u_n(x) K(x, \xi) d\sigma_x,$$

[1]) Харнак [1886].

где $K(x, \xi)$ — ядро Пуассона, определенное равенством (1.5.3). Устремляя n к бесконечности, получим

$$u(\xi) = \int\limits_{S(x_0, \xi)} u(x) K(x, \xi) d\sigma_x,$$

откуда, согласно теореме 1.16, следует, что функция $u(\xi)$ гармонична. Это завершает доказательство теоремы 1.20.

1.5.7. Заключение

Гармонические функции на плоскости имеют особое значение благодаря их связи с регулярными аналитическими функциями. Предположим, что $u(x, y)$ гармонична в плоской области D, и пусть $z = x + iy$,

$$f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = U + iV.$$

Тогда, поскольку $u \in C^2$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

и так как функция u гармонична, то

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Поэтому функция $f(z) = U + iV$ удовлетворяет уравнениям Коши—Римана и, так как $U, V \in C^1$, является регулярной аналитической функцией. Если положить вблизи любой фиксированной точки $z_0 \in D$

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi = u_1 + iv_1,$$

то легко видеть, что u_1, v_1 — гармонические функции и что $u(z) = u_1(z) + u(z_0)$. Следовательно, функция u локально является вещественной частью аналитической функции $F(z) + u(z_0)$. Этот результат вместе с использованием сопряженной гармонической функции $v_1(z)$ позволяет легко вывести многие свойства гармонических функций на плоскости. Однако, коль скоро установлены теоремы 1.12 и 1.16, их, как мы видели, можно использовать для получения таких доказательств многих стандартных свойств гармонических функций, которые проходят и в пространствах высших размерностей.

Пример

Докажите, что если функция $u(z)$ гармонична в плоской области D, а функция $z = t(w)$ регулярна в области D' и отображает ее в D, то $u[t(w)]$ гармонична в D'.

Глава 2

СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

2.0. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе мы дадим определение и установим простейшие свойства субгармонических функций. Эти функции связаны с гармоническими точно так же, как выпуклые функции одного переменного связаны с линейными. Вслед за определением и несколькими простыми примерами мы доказываем принцип максимума, который является одним из ключевых свойств субгармонических функций. Из этого принципа выводится, что график субгармонической функции в любом круге лежит ниже интеграла Пуассона, составленного по значениям этой функции на границе круга. Это приводит к центральной части главы, в которой излагается метод Перрона решения задачи Дирихле с помощью субгармонических функций, отсутствие аналитичности у которых делает их очень гибким инструментом. Далее следуют теоремы выпуклости для средних значений по гиперсферам. Эти теоремы будут играть важную роль в следующей главе. Мы заканчиваем главу кратким обсуждением понятия подчиненности для аналитических функций в круге — вопроса, в котором субгармонические функции имеют привлекательные применения.

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРИМЕРЫ

Из теоремы 1.17 вытекает, что в качестве определения гармонической функции можно взять свойство среднего значения. Если в соответствующем равенстве мы поставим знак $\leqslant$, получим определение субгармонической функции. График такой функции лежит ниже графика гармонической функции, точно так же как график выпуклой функции расположен ниже графика линейной функции. Действительно, выпуклые функции — это в точности субгармонические функции одного переменного. Эти соображения подсказывают следующее

Определение [1]**.** Функция $u(x)$, определенная в области $D \subset \mathbb{R}^m$, называется *субгармонической* в D, если

[1]) Эта изящная формулировка принадлежит, по-видимому, Ф. Риссу [1926, 1930].

(i) $-\infty \leqslant u(x) < +\infty$ в D;

(ii) $u(x)$ полунепрерывна сверху в D;

(iii) для любой точки $x_0 \in D$ существует сколь угодно малое положительное число r, такое, что

$$u(x_0) \leqslant \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int\limits_{S(x_0,\, r)} u(x)\, d\sigma(x),$$

где $d\sigma(x)$ — элемент площади поверхности $S(x_0, r)$ [1]).

Из (1.5.4) следует, что вещественные кратные гармонических функций суть субгармонические функции. Обратно, мы увидим, что функция u гармонична тогда и только тогда, когда функции u и $-u$ субгармоничны.

Отметим некоторые свойства субгармонических функций. Первые два свойства очень просты, и их доказательства предоставляются читателю.

Примеры

1. *Если $u_1, \ldots, u_k$ — субгармонические функции в D и $t_1, \ldots, t_k$ — неотрицательные вещественные числа, то $u = \sum\limits_{\nu=1}^{k} t_\nu u_\nu$ также субгармоническая функция в D.*

2. *Если $u_1, \ldots, u_k$ — субгармонические функции в D, то $u(x) = \sup\limits_{\nu=1, \ldots, k} u_\nu(x)$ также субгармоническая функция в D.*

3. *Если $u \in C^2$ в области D, то u — субгармоническая функция в D тогда и только тогда, когда $\nabla^2 u \geqslant 0$ в D.* Пусть $0 < \rho < r$. В этом случае из теоремы 1.9 вытекает, что если $C(x_0, r) \subset D$, то

$$\int\limits_{S(x_0,\, r)} - \int\limits_{S(x_0,\, \rho)} \frac{\partial u}{\partial r}\, d\sigma = \int\limits_{\Delta(x_0,\, \rho)} \nabla^2 u\, dx,$$

где $\Delta(x_0, \rho) = D(x_0, \rho) - C(x_0, r)$ и $\partial/\partial r$ означает дифференцирование в направлении возрастания r. Предположим сначала, что $\nabla^2 u \geqslant 0$ в области D. Тогда для данной точки $x_0 \in D$ и достаточно малого r находим, что $\mu(r) = r^{m-1} J'(r)$ является возрастающей функцией r, где

$$J(r) = \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int\limits_{S(x_0,\, r)} u(x)\, d\sigma(x).$$

[1]) Здесь и далее $c_m = 2\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$, как в теореме 1.1. Некоторые авторы предполагают еще, что $u(x)$ не равна тождественно $-\infty$, однако мы рассматриваем функцию, которая тождественно равна $-\infty$, как субгармоническую.

Очевидно, что $\mu(0) = 0$. Поэтому $J'(r) \geqslant 0$ при $r > 0$ и, значит,

$$J(r) \geqslant \lim_{r \to 0+} J(r) = u(x_0).$$

Так как функция u непрерывна, отсюда следует, что она субгармонична в D.

Предположим теперь, что $\nabla^2 u < 0$ в некоторой точке x_0 области D. Тогда из непрерывности функции $\nabla^2 u$ вытекает, что $\nabla^2 u < 0$ вблизи x_0 и, следовательно, функция $\mu(r)$ убывает и отрицательна для малых r. Таким образом, $J(r) < J(0)$ для достаточно малых r, и поэтому $u(x)$ не является субгармонической функцией вблизи x_0.

4. *Если $f(z)$ — аналитическая функция комплексного переменного z в плоской области D, то функция $u(z) = \log |f(z)|$ субгармонична в D.*

Ясно, что условия (i) и (ii) выполнены. Кроме того, очевидно, что условие (iii) выполняется, если точка z_0 является нулем функции $f(z)$, так как в этом случае $u(z_0) = -\infty$. Если $f(z_0) \neq 0$, то функция $\log f(z)$ аналитична вблизи z_0. Следовательно, функция $u(z) = \log |f(z)|$ гармонична и тем более субгармонична вблизи точки z_0.

2.2. НЕРАВЕНСТВО ИЕНСЕНА [1]

Для того чтобы получить некоторые другие классы субгармонических функций, нам нужно одно интегральное неравенство. Мы получим это неравенство в форме, не являющейся самой общей, однако достаточной для всех приложений, которые мы имеем в виду.

Теорема 2.1. *Предположим, что $u(x)$ есть функция x, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}^m$, и что $\varphi(u)$ — выпуклая функция переменного u, определенная на интервале, содержащем область значений функции $u(x)$. Тогда в предположении, что E — измеримое множество в $\mathbb{R}^m$, а $d\mu$ обозначает меру Лебега, или что множество E лежит на гиперповерхности S в $\mathbb{R}^m$, а $d\mu$ обозначает элемент площади поверхности S, и что, кроме того, $0 < \mu(E) < \infty$ и функция $u(x)$ интегрируема на E, справедливо неравенство*

$$\varphi\left\{\frac{1}{\mu(E)} \int_E u(x)\, d\mu(x)\right\} \leqslant \frac{1}{\mu(E)} \int_E \varphi[u(x)]\, d\mu(x). \qquad (2.2.1)$$

Неравенство понимается в следующем смысле. По предположению, интеграл

$$J = \frac{1}{\mu(E)} \int_E u(x)\, d\mu(x)$$

[1] Иенсен [1905].

конечен. Если область значений функции $u(x)$ содержится в конечном отрезке $[a, b]$, то число J также лежит в $[a, b]$. Если интервал, содержащий область значений функции $u(x)$, открыт или полуоткрыт, полагаем

$$\varphi(a)=\lim_{x\to a+}\varphi(x),\quad \varphi(b)=\lim_{x\to b-}\varphi(x).$$

Так как функция $\varphi(x)$ выпукла, эти пределы существуют, но могут оказаться бесконечными. Таким образом, левая часть неравенства (2.2.1) корректно определена. Если она равна $-\infty$, никакого утверждения не делается. Если она конечна, то правая часть существует как конечный интеграл, удовлетворяющий (2.2.1), или же правая часть равна $+\infty$. Если левая часть равна $+\infty$, то равна $+\infty$ и правая часть.

2.2.1. Прежде всего нам необходим дискретный аналог теоремы 2.1.

Лемма 2.1. *Пусть функция* $\varphi(u)$ *выпукла на* $[a, b]$, *а* $t_i\geqslant 0$, $i=1, \ldots, k$, *и* $\sum\limits_{i=1}^{k}t_i=1$. *Тогда если* $a\leqslant u_i\leqslant b$, $i=1, \ldots, k$, *то*

$$\varphi\Bigl(\sum_{i=1}^{k}t_iu_i\Bigr)\leqslant\sum_{i=1}^{k}t_i\varphi(u_i).$$

Без ущерба для общности можно считать, что $a\leqslant u_1\leqslant u_2\leqslant\ldots$ $\ldots\leqslant u_k\leqslant b$. Применим индукцию по k. При $k=1$ лемма тривиальна. При $k=2$ неравенство эквивалентно определению выпуклости (1.3.3). Допустим, что утверждение леммы уже доказано для $k-1\geqslant 2$. Кроме того, будем считать, что $0<t_k<1$, так как в противном случае требуемое неравенство следует либо из неравенства для $k-1$, либо из неравенства для 2. Напишем

$$t_1u_1+t_2u_2+\ldots+t_{k-1}u_{k-1}=(1-t_k)v_k.$$

Поскольку $\sum\limits_{i=1}^{k-1}t_i=1-t_k$, то $u_1\leqslant v_k\leqslant u_{k-1}$, так что v_k принадлежит отрезку $[a, b]$. Следовательно, из (1.3.3) находим, что, по предположению индукции,

$$\varphi\left[(1-t_k)v_k+t_kuk\right]\leqslant(1-t_k)\varphi(v_k)+t_k\varphi(u_k)\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{k-1}t_i\varphi(u_i)+t_k\varphi(u_k)=\sum_{i=1}^{k}t_i\varphi(u_i).$$

Это завершает доказательство леммы.

Переходя к доказательству теоремы 2.1, предположим прежде всего, что $u(x)$ — простая функция на множестве E, т. е. что $u(x)$ принимает лишь конечное число различных значений u_1, $u_2, \ldots, u_k$. Пусть E_i — подмножество множества E, на котором $u = u_i$; положим $\mu(E_i) = \mu_i$, $\mu(E) = \mu$, $\mu_i/\mu = t_i$. Тогда числа t_i, u_i удовлетворяют условиям леммы 2.1. На основании этой леммы заключаем, что

$$\varphi\left\{\frac{1}{\mu(E)}\int_E u(x)\,d\mu(x)\right\} = \varphi\left\{\sum_{i=1}^{k} t_i u_i\right\} \leqslant \leqslant \sum_{i=1}^{k} t_i \varphi(u_i) = \frac{1}{\mu(E)}\int_E \varphi[u(x)]\,d\mu(x),$$

и в этом случае теорема доказана.

Предположим теперь, что функция $u(x)$ ограничена на множестве E, т. е. $a \leqslant u \leqslant b$, и что функция $\varphi(u)$ выпукла на $[a, b]$. Пусть N — достаточно большое целое положительное число. Положим

$$u_i = a + \frac{i(b-a)}{N}, \quad 0 \leqslant i \leqslant N,$$

и

$$u_N(x) = \begin{cases} u_i, & \text{если} \quad u_{i-1} < u(x) \leqslant u_i, \quad i > 1; \\ u_1, & \text{если} \quad u_0 \leqslant u(x) \leqslant u_1. \end{cases}$$

Тогда $u_N(x)$ — простая функция, так что

$$\varphi\left\{\frac{1}{\mu(E)}\int_E u_N(x)\,d\mu(x)\right\} \leqslant \frac{1}{\mu(E)}\int_E \varphi[u_N(x)]\,d\mu(x). \qquad (2.2.2)$$

Заметим, что $u_N(x) \to u(x)$ при $N \to \infty$ равномерно по $x \in E$. Так как функция $\varphi(u)$ выпукла, а значит, непрерывна и равномерно непрерывна на $[a, b]$, то, по теореме 1.6, $\varphi[u_N(x)]$ стремится к $\varphi[u(x)]$ равномерно на E. Следовательно,

$$\int_E u_N(x)\,d\mu(x) \to \int_E u(x)\,d\mu(x),$$

$$\int_E \varphi[u_N(x)]\,d\mu(x) \to \int_E \varphi[u(x)]\,d\mu(x),$$

и поэтому из (2.2.2) вытекает неравенство (2.2.1).

Далее предположим, что наименьший интервал I, содержащий область значений функции $u(x)$, $x \in E$, не замкнут, т. е. является открытым или полуоткрытым интервалом, и может простираться в бесконечность. Пусть I_n — расширяющаяся последовательность отрезков $a_n \leqslant x \leqslant b_n$, стремящихся к I. Пусть a и b — нижняя и верхняя грани x в I. Если $a \in I$, то мы полагаем $a_n = a$ для всех n; в противном случае выбираем в качестве a_n строго убывающую последовательность, стремящуюся к a при $n \to \infty$. Аналогично, если $b \in I$, то мы полагаем $b_n = b$ для всех n, а в противном случае выбираем в качестве b_n строго возрастающую последовательность, стремящуюся к b при $n \to \infty$.

Пусть E_n — подмножество в E, состоящее из тех точек, в которых $a_n \leqslant u(x) \leqslant b_n$. Тогда функция $u(x)$ ограничена на E_n, а функция $\varphi(u)$ выпукла на $[a_n, b_n]$. Кроме того, E_n стремится к E при $n \to \infty$, и поэтому $\mu(E_n)$ стремится к $\mu(E)$. Следовательно, $\mu(E_n)$ положительна для всех достаточно больших n, и, значит, можно применить неравенство (2.2.1), заменяя в нем множество E множеством E_n. В результате получаем

$$\varphi\left\{\frac{1}{\mu(E_n)}\int\limits_{E_n} u(x)\,d\mu(x)\right\} \leqslant \frac{1}{\mu(E_n)}\int\limits_{E_n} \varphi[u(x)]\,d\mu(x). \tag{2.2.3}$$

Пусть E'_n — множество, в точках которого $u(x) < a_n$, и E''_n — множество, на котором $u(x) > b_n$. Так как функция $u(x)$ интегрируема на E, то при $n \to \infty$

$$\int\limits_{E'_n} u(x)\,d\mu(x) \to 0, \qquad \int\limits_{E''_n} u(x)\,d\mu(x) \to 0. \tag{2.2.4}$$

Поскольку $\varphi'(x)$ возрастает, для $x_0 \in (a, b)$, $x_0 < x < b$, имеем $\varphi'(x) \geqslant \varphi'(x_0)$ и, следовательно, $\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)\cdot(x - x_0)$.

Если $\varphi'(x) < 0$ для $a < x < b$, то функция $\varphi(x)$ убывает на (a, b) и, следовательно, ограничена сверху при $x \to b$. Значит, в этой ситуации $\varphi(u)$ ограничена при $u \to b$, за исключением случая $b = +\infty$, в котором

$$\varphi(u) = O(|u|) \quad \text{при} \quad u \to +\infty.$$

Поэтому в этом случае на основании (2.2.4) имеем

$$\int\limits_{E''_n} \varphi(u(x))\,d\mu(x) = O\left\{\int\limits_{E''_n} u(x)\,d\mu(x)\right\} + O(\mu(E''_n)) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

С другой стороны, если $\varphi'(u)$ положительна, то при $u \to b$ функция $\varphi(u)$ либо ограничена, либо $\varphi(u) \to +\infty$. В первом случае

$$\int\limits_{E''_n} \varphi(u(x))\,d\mu(x) \to 0. \tag{2.2.5}$$

Во втором случае либо выполняется (2.2.5), либо для каждого n

$$\int\limits_{E''_n} \varphi(u(x))\,d\mu(x) = +\infty. \tag{2.2.6}$$

Итак, в каждом случае выполняется либо условие (2.2.5), либо условие (2.2.6). Аналогичное заключение справедливо и для множеств E'_n. Из (2.2.4) вытекает, что

$$\frac{1}{\mu(E_n)}\int\limits_{E_n} u(x)\,d\mu(x) \to \frac{1}{\mu(E)}\int\limits_{E} u(x)\,d\mu(x) = J,$$

где $a \leqslant J \leqslant b$. Так как функция $\varphi(u)$ выпукла и поэтому непрерывна, то

$$\varphi\left\{\frac{1}{\mu(E_n)}\int\limits_{E_n} u(x)\,d\mu(x)\right\} \to \varphi(J),$$

где $\varphi(J)$ определена по непрерывности и в предельных случаях $J = a,\ b$. Следовательно, из (2.2.3), (2.2.5) и (2.2.6) находим, что

$$\varphi(J) \leqslant \lim \frac{1}{\mu(E_n)}\int\limits_{E_n} \varphi[u(x)]\,d\mu(x) \leqslant \frac{1}{\mu(E)}\int\limits_{E} \varphi[u(x)]\,d\mu(x).$$

Это завершает доказательство теоремы 2.1.

2.3. НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ КЛАССЫ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Воспользуемся теоремой 2.1 для доказательства следующего утверждения.

Теорема 2.2. *Если функция $u(x)$ субгармонична в области D, а функция $\varphi(u)$ выпукла и возрастает на области значений R функции $u(x)$, $x \in D$, или если функция $u(x)$ гармонична в D, а $\varphi(u)$ выпукла на R, то функция $\varphi[u(x)]$ субгармонична в D.*

Предположим сначала, что $u(x)$ — гармоническая функция в D. Так как $\varphi(u)$ выпукла и поэтому непрерывна на R, то, следовательно, функция $\varphi[u(x)]$ непрерывна и конечна. Таким образом, выполнены условия (i) и (ii). Кроме того,

$$u(x_0) = \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int\limits_{S(x_0,\, r)} u(x)\,d\sigma(x),$$

так что по теореме 2.1

$$\varphi[u(x_0)] = \varphi\left(\frac{1}{c_m r^{m-1}} \int\limits_{S(x_0,\, r)} u(x)\,d\sigma(x)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int\limits_{S(x_0,\, r)} \varphi[u(x)]\,d\sigma(x),$$

и субгармоничность в этом случае доказана.

Далее, пусть $u(x)$ субгармонична в D, а функция $\varphi(u)$ непрерывна и возрастает на области значений R функции $u(x)$, $x \in D$ (включая $u = -\infty$). Тогда функция $\varphi[u(x)]$ полунепрерывна сверху и не обращается в $+\infty$ на R. Значит, остается доказать условие (iii). Так как $\varphi(u)$ возрастает, а $u(x)$ субгармонична, по теореме 2.1 имеем

$$\varphi[u(x_0)] \leqslant \varphi\left(\frac{1}{c_m r^{m-1}} \int\limits_{S(x_0,\, r)} u(x)\, d\sigma(x)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int\limits_{S(x_0,\, r)} \varphi[u(x)]\, d\sigma(x).$$

Это завершает доказательство теоремы 2.2.

Следствие 1. *Если функция $u(x)$ субгармонична в области D, то субгармоническими в D являются также функции $e^{\lambda u}$ для $\lambda > 0$ и $[u^+(x)]^k$, $k \geqslant 1$, где $u^+(x) = \max(u(x), 0)$.*

Следствие 2. *Если функция $u(x)$ гармонична в D и $k \geqslant 1$, то функция $|u(x)|^k$ субгармонична в D.*

Следствие 3. *Если функция $f(z)$ аналитична в плоской области D, то функции $(\log^+ |f|)^k$, $k \geqslant 1$, и $|f|^\lambda$, $\lambda > 0$, являются субгармоническими в D, где*

$$\log^+ |f| = \max(\log |f|, 0).$$

Из примера 2 § 2.1 вытекает, что функция $u^+(x)$ в следствии 1 субгармонична в области D. Так как u^k выпукла и возрастает на $(0, \infty)$ для $k \geqslant 1$, а функция $e^{\lambda u}$ выпукла и возрастает на $(-\infty, \infty)$ для $\lambda > 0$, то отсюда вытекает следствие 1.

Если $u(x)$ гармонична, то гармонической будет и функция $-u(x)$. Следовательно, функция $|u(x)| = \max[u(x), -u(x)]$ является субгармонической и, согласно следствию 1, субгармонической является функция $|u(x)|^k$.

Если $f(z)$ — аналитическая функция в плоской области D, то на основании примера 4 § 2.1 функция $u = \log|f|$ субгармонична. Тогда, согласно следствию 1, субгармоническими являются также и функции $(\log^+ |f|)^k$ и $|f|^\lambda = e^{\lambda u}$. Это завершает доказательство следствий.

Следствие 3 и пример 4 § 2.1 являются основой многих приложений субгармонических функций в теории аналитических функций. Многие свойства функции $u(z) = \log|f(z)|$, где f аналитична, распространяются на произвольные субгармонические функции на плоскости, и зачастую этот подход ведет к упрощению доказательств.

2.4. ПРИНЦИП МАКСИМУМА

Теорема 2.3. *Предположим, что функция $u(x)$ субгармонична в области $D \subset \mathbb{R}^m$ и что для любой граничной точки ξ области D и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность N точки ξ, что*

$$u(x) < \varepsilon \quad \text{в} \quad N \cap D. \tag{2.4.1}$$

Тогда $u(x) < D$ в D или $u(x) \equiv 0$. Если область D не ограничена, мы рассматриваем $\xi = \infty$ как ее граничную точку и предполагаем, что условие (2.4.1) выполняется для внешней части N некоторого гипершара: $|x| > R$.

Для доказательства нам потребуется следующая

Лемма 2.2. *Если функция $u(x)$ субгармонична и $u(x) \leqslant 0$ в $D(x_0, r)$, $u(x_0) = 0$, то $u(x) \equiv 0$ в $S(x_0, \rho)$ для некоторого сколь угодно малого ρ.*

Из условия (iii) определения следует, что найдется сколь угодно малое число ρ, такое, что

$$u(x_0) = 0 \leqslant \frac{1}{c_m \rho^{m-1}} \int\limits_{S(x_0, \rho)} u(x)\, d\sigma(x).$$

Так как $u(x) \leqslant 0$, выводим отсюда, что

$$\int\limits_{S(x_0, \rho)} u(x)\, d\sigma(x) = 0.$$

Предположим, что в $S(x_0, \rho)$ существует такая точка x_1, что $u(x_1) < 0$. Тогда, согласно условию (ii) определения, можно найти такую окрестность N_1 точки x_1, что в этой окрестности $u(x) < -\eta$, где $\eta > 0$. Если N_2 — пересечение N_1 и $S(x_0, \rho)$, а E_2 — дополнение к N_2 в $S(x_0, \rho)$, то неравенство

$$\int\limits_{S(x_0, \rho)} u(x)\, d\sigma(x) = \int\limits_{N_2} + \int\limits_{E_2} \leqslant \int\limits_{N_2} u(x)\, d\sigma(x) \leqslant -\eta \int\limits_{N_2} d\sigma(x) < 0$$

приводит к противоречию. Следовательно, $u(x) \equiv 0$ в $S(x_0, \rho)$, и лемма 2.2 доказана.

Переходим к доказательству теоремы 2.3. Пусть

$$M = \sup_{x \in D} u(x).$$

Если $M < 0$, то доказывать нечего. Предположим поэтому, что $M > 0$, и пусть x_n — такая последовательность точек из D, что $u(x_n) \to M$. Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можно считать, что $x_n \to \xi$. Если ξ — граничная точка D, то, поскольку $M > 0$, условие $x_n \to \xi$ противоречит нашему основному предположению (2.4.1) для $\varepsilon = M/2$. Следовательно, ξ — точка области D. Кроме того, так как функция $u(x)$ полунепрерывна сверху, неравенство $u(\xi) < M$ также приводит к противоречию. Так как, по предположению, $u(\xi) \leqslant M$, остается принять, что $u(\xi) = M$.

Таким образом, если E — множество всех тех точек из D, для которых $u(x) = M$, то E не пусто. Если $M = 0$ и $u < 0$ в D, то снова нечего доказывать. Поэтому будем предполагать, что $M \geqslant 0$ и множество $E = \{x \in D \mid u(x) = M\}$ не пусто. Поскольку функция u полунепрерывна сверху, множество E замкнуто. Докажем, что множество E содержит всю область D.

Предположим противное: в D существуют такие точки x_1, x_2, что $u(x_1) < M = u(x_2)$. Так как D — область, можно соединить точки x_1 и x_2 в D ломаной с вершинами $x_1 = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n = x_2$, так что каждый прямолинейный отрезок $\xi_j\xi_{j+1} \in D$, $j = 1, \ldots, n-1$. Пусть j — последний номер, для которого $u(\xi_j) < M$. Тогда $u(\xi_{j+1}) = M$. Пусть

$$x(t) = (1-t)\,\xi_j + t\xi_{j+1},$$

и пусть t_0 — нижняя грань тех t, $0 < t < 1$, для которых $x(t) \in E$. Поскольку множество E замкнуто, $x_0 = x(t_0) \in E$. Применяя теперь к функции $u(x) - M$ лемму 2.2, получаем, что существует такое ρ, для которого $0 < \rho < |x_0 - \xi_j|$ и $S(x_0, \rho) \subset E$. Тогда $S(x_0, \rho)$ пересекает отрезок $[\xi_j, x_0]$, что противоречит определению t_0. Следовательно, множество E целиком содержит область D и $u(x) \equiv M$ в D.

Если область D ограничена, она имеет по крайней мере одну конечную граничную точку ξ, и если при этом $M > 0$, то мы приходим к противоречию. Таким образом, $M \leqslant 0$ и $u \equiv M$ в D или же $u < M$ в D. Если область D не ограничена, она имеет граничную точку ∞ и опять получается противоречие. Теорема 2.3 доказана.

Из теоремы 2.3 немедленно вытекает

Теорема 2.4. *Пусть функция $u(x)$ субгармонична, а функция $v(x)$ — гармонична в ограниченной области D и*

$$\varlimsup_{x\to\xi} \{u(x) - v(x)\} \leqslant 0,$$

когда x стремится к произвольной граничной точке ξ области D изнутри D. Тогда $u(x) < v(x)$ в D или же $u(x) \equiv v(x)$ в D.

Применим теорему 2.3 к функции $h(x) = u(x) - v(x)$, субгармонической в D и удовлетворяющей предположениям теоремы 2.3 при $M = 0$. Тогда $h(x) < 0$ в D или же $h(x) \equiv 0$ в D, что и требовалось доказать.

Если выполнено условие теоремы 2.4, то говорят, что функция $v(x)$ является *гармонической мажорантой* функции $u(x)$. Такие гармонические мажоранты играют важную роль в теории субгармонических функций.

2.5. СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИНТЕГРАЛ ПУАССОНА

Будем говорить, что функция $u(x)$ субгармонична на множестве E, если она субгармонична на некотором содержащем E открытом множестве.

Теорема 2.5. *Пусть $u(x)$ — субгармоническая функция в $C(x_0, R)$. Тогда для $\xi \in D(x_0, R)$ имеем*

$$u(\xi) \leqslant \int\limits_{S(x_0, R)} u(x) K(x, \xi)\, d\sigma_x, \tag{2.5.1}$$

где $K(x, \xi)$ — ядро Пуассона, задаваемое формулой (1.5.3), *а $d\sigma_x$ — элемент площади поверхности $S(x_0, R)$.*

Интеграл в неравенстве (2.5.1) понимается как интеграл Лебега. Поскольку функция $u(x)$ полунепрерывна сверху, она ограничена сверху на $S(x_0, R)$, и поэтому интеграл в (2.5.1) конечен или равен $-\infty$. В последнем случае теорема 2.5 интерпретируется как утверждение о том, что $u(\xi) = -\infty$.

Приступаем к доказательству теоремы 2.5. Так как функция $u(x)$ полунепрерывна сверху на $S(x_0, R)$, то, по теореме 1.4, можно найти такую последовательность $u_n(x)$ непрерывных функций на $S(x_0, R)$, что

$$u_n(x) \downarrow u(x), \quad x \in S(x_0, R). \tag{2.5.2}$$

Функции $u_n(x)$ можно продолжить на $D(x_0, R)$, полагая

$$u_n(\xi) = \int\limits_{S(x_0, R)} u_n(x) K(x, \xi)\, d\sigma_x, \quad \xi \in D(x_0, R). \tag{2.5.3}$$

По теореме 1.16, полученная функция $u_n(x)$ непрерывна в $C(x_0, R)$ и гармонична в $D(x_0, R)$. Кроме того, если x — точка $S(x_0, R)$ и $\xi \to x$, $\xi \in D(x_0, R)$, то из полунепрерывности сверху функции $u(\xi) - u_n(\xi)$ в $C(x_0, R)$ следует, что

$$\varlimsup_{\xi \to x} (u(\xi) - u_n(\xi)) \leqslant u(x) - u_n(x) \leqslant 0.$$

Поэтому, согласно принципу максимума, в $D(x_0, R)$

$$u(\xi) \leqslant u_n(\xi) = \int\limits_{S(x_0, R)} u_n(x) K(x, \xi)\, d\sigma_x.$$

Устремим в этом неравенстве n к бесконечности. По теореме Фату и из (2.5.2) получаем требуемое неравенство (2.5.1).

Заметим, что так как для фиксированной точки ξ функция $K(x, \xi)$ ограничена сверху и снизу положительными константами, то интеграл

$$\int\limits_{S(x_0, R)} u(x) K(x, \xi)\, d\sigma_x$$

конечен или равен $-\infty$ во всем $D(x_0, R)$ в зависимости от того, конечен или равен $-\infty$ интеграл $\int\limits_{S(x_0, R)} u(x)\, d\sigma_x$.

Одна из этих возможностей, по существу, не заслуживает внимания, как показывает следующая

Теорема 2.6. *Пусть функция $u(x)$ субгармонична в области D и $u(x) \not\equiv -\infty$. Тогда если шар $C(x_0, R)$ лежит в D, то*

$$\int\limits_{S(x_0, R)} u(x)\, d\sigma_x > -\infty; \tag{2.5.4}$$

если E — произвольное компактное подмножество области D, то

$$\int\limits_{E} u(x)\, dx > -\infty. \tag{2.5.5}$$

Предположим, что E — компактное подмножество в D, для которого условие (2.5.5) не выполняется, так что

$$\int\limits_{E} u(x)\, dx = -\infty. \tag{2.5.6}$$

Пусть $8\delta\sqrt{m}$ — расстояние от множества E до дополнения к области D. Разобьем пространство $\mathbb{R}^m$ на гиперкубы Q типа

$$m_\nu \delta \leqslant x_\nu \leqslant (m_\nu + 1)\delta.$$

Так как множество E компактно, только конечное число таких гиперкубов, скажем $Q_1, \ldots, Q_N$, содержат точки из E. Положим

$$Q = \bigcup_{\nu=1}^{N} Q_\nu, \qquad F = Q - E.$$

Тогда гиперкубы Q_ν лежат в D, и поэтому функция $u(x)$ ограничена сверху на каждом Q_ν, а значит, и на F. Следовательно,

$$\int\limits_{Q} u(x)\, dx = \int\limits_{E} u(x)\, dx + \int\limits_{F} u(x)\, dx < \int\limits_{E} u(x)\, dx + O(1) = -\infty.$$

Кроме того, так как пересечение $Q_\mu \cap Q_\nu$ имеет нулевую m-мерную меру, то

$$\int_Q u(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{N} \int_{Q_\nu} u(x)\,dx$$

и по крайней мере для одного из гиперкубов $Q_\nu = Q'$ имеем

$$\int_{Q'} u(x)\,dx = -\infty.$$

Пусть теперь ξ — точка, расстояние которой от некоторой точки множества E в Q' не меньше $2\delta\sqrt{m}$ и не больше $3\delta\sqrt{m}$. Тогда для значений $r \leqslant 7\delta\sqrt{m} - 3\delta\sqrt{m} = 4\delta\sqrt{m}$ шар $C(\xi, r)$ лежит в D. Кроме того, согласно теореме 2.5, для $\rho \leqslant 4\delta\sqrt{m}$ имеем

$$c_m \rho^{m-1} u(\xi) \leqslant \int_{S(\xi,\rho)} u(x)\,d\sigma_x,$$

и поэтому

$$c_m u(\xi) \int_{\delta\sqrt{m}}^{4\delta\sqrt{m}} \rho^{m-1} d\rho \leqslant \int_{\delta\sqrt{m}}^{4\delta\sqrt{m}} d\rho \int_{S(\xi,\rho)} u(x)\,d\sigma_x = \int_{E_1} u(x)\,dx,$$

где $E_1 = D(\xi, 4\delta\sqrt{m}) - C(\xi, \delta\sqrt{m})$. Но множество E_1 содержит гиперкуб Q', и поэтому

$$\int_{E_1} u(x)\,dx = \int_{E_1 - Q'} u(x)\,dx + \int_{Q'} u(x)\,dx = -\infty.$$

Следовательно, $u(\xi) = -\infty$. Поскольку ξ — это произвольная точка некоторого гиперкольца, мы заключаем, что если выполнено (2.5.6), то $u(x) \equiv -\infty$ на некотором открытом подмножестве области D.

Рассмотрим далее множество M всех тех точек $\xi \in D$, для которых $u(x) \equiv -\infty$ в некотором шаре $C(\xi, r)$. Очевидно, что множество M открыто. Кроме того, множество M замкнуто в D. Для того чтобы доказать это, рассмотрим предельную точку ξ множества M в D. Тогда для произвольно малого r сфера $S(\xi, r)$ пересекается с множеством M, и поэтому $u(x) = -\infty$ для таких r на некотором открытом подмножестве $S(\xi, r)$. Значит,

$$\int_{S(\xi,r)} u(x)\,d\sigma_x = -\infty,$$

и, следовательно, $u(x) = -\infty$ в $D(\xi, r)$ по теореме 2.5. Поэтому $\xi \in M$. Таким образом, множество M одновременно открыто и замкнуто и, как мы видели, если условие (2.5.5) не выполняется, то множество M не пусто. Значит, M содержит всю область D и $u \equiv -\infty$ в D. Совершенно так же, если условие (2.5.4) не выполнено, то из неравенства (2.5.1) следует, что $D(x_0, R) \subset M$, и поэтому множество M снова не пусто и $u(x) \equiv -\infty$ в D. Теорема 2.6 доказана.

Теперь мы в состоянии доказать следующее утверждение.

Теорема 2.7. *Пусть $u(x)$ — субгармоническая функция, $u(x) \not\equiv -\infty$ в некоторой области V и $C(x_0, R) \subset V$ — гипершар. Положим*

$$v(\xi) = \begin{cases} \int\limits_{S(x_0, R)} u(x) K(x, \xi)\, d\sigma_x, & \xi \in D(x_0, R), \\ u(\xi), & \xi \in V - D(x_0, R). \end{cases}$$

Тогда функция $v(\xi)$ субгармонична в V, гармонична в $D(x_0, R)$ и, кроме того, $u(\xi) \leqslant v(\xi)$ в $D(x_0, R)$.

Назовем функцию v *гармоническим продолжением* функции u *из* $S(x_0, R)$ *в* $D(x_0, R)$.

Неравенство $u \leqslant v$ в $D(x_0, R)$ есть в точности неравенство (2.5.1). Заметим, что, согласно теореме 2.6, функция $v(\xi)$ конечна в $D(x_0, R)$. Кроме того, используя убывающую последовательность $u_n(x)$, удовлетворяющую условию (2.5.2), и определяя $u_n(\xi)$ равенством (2.5.3), мы видим, что $u_n(\xi)$ — гармонические функции и $u_n(\xi) \to v(\xi)$ в $D(x_0, R)$. Следовательно, по теореме Харнака 1.20, функция $v(\xi)$ также гармонична в $D(x_0, R)$.

Остается показать, что функция $v(\xi)$ субгармонична в V. Для этого нужно проверить основные условия (i), (ii) и (iii) § 2.1. Эти условия, очевидно, выполняются в $D(x_0, R)$ (где функция v гармонична) и вне $C(x_0, R)$, где локально $v = u$. Поэтому рассмотрим некоторую точку $x \in S(x_0, R)$. Условие (i) здесь, очевидно, выполняется, так как $v(x) = u(x)$. Для того чтобы доказать (ii), устремим точку ξ к x. Так как $v(x) = u(x)$ вне $D(x_0, R)$ и функция $u(x)$ полунепрерывна сверху, достаточно рассмотреть ξ из $D(x_0, R)$. Пусть последовательность $u_n(x)$ определена условиями (2.5.2) и (2.5.3). Тогда $v(\xi) \leqslant u_n(\xi)$ в $D(x_0, R)$ и поэтому по теореме 1.16

$$\overline{\lim_{\xi \to x}}\, v(\xi) \leqslant \overline{\lim_{\xi \to x}}\, u_n(\xi) \leqslant u_n(x).$$

Из (2.5.2) мы заключаем, что $\overline{\lim\limits_{\xi \to x}}\, v(\xi) \leqslant u(x)$. Это доказывает полунепрерывность сверху функции $v(\xi)$. Наконец, поскольку $v(x) = u(x)$ и $v(\xi) \geqslant u(\xi)$ для всех ξ, то очевидно, что функция $v(x)$ удовлетворяет условию (iii), если заменить x_0, x на x, ξ. Этим завершается доказательство теоремы 2.7.

2.5.1. Теперь мы установим другое определение субгармонических функций, из которого немедленно получим, что в случае $m = 2$ субгармонические функции инвариантны относительно конформных отображений z-плоскости.

Теорема 2.8. *Функция $u(x)$, определенная в области D пространства $\mathbb{R}^m$, является субгармонической в D тогда и только тогда, когда $u(x)$ удовлетворяет условиям* (i) *и* (ii) § 2.1 *и следующему условию* [1]:

(iii′) *для любой области Δ, замыкание $\overline{\Delta}$ которой компактно и содержится в D, и для любой функции $v(x)$, гармонической в Δ, непрерывной в $\overline{\Delta}$ и такой, что на границе области Δ*

$$u(x) \leqslant v(x), \tag{2.5.7}$$

это неравенство выполняется также и во всей области Δ.

Следствие. *Если функция $u(z)$ субгармонична в плоской области D, а функция $z = t(w)$ регулярна при $w \subset D'$ и отображает D' в D, то функция $u[t(w)]$ субгармонична в D'.*

(Это следствие является субгармоническим аналогом примера п. 1.5.7.) Из теоремы 2.4 следует, что если функция $u(x)$ субгармонична в области D, то условие (iii′) выполнено. Поэтому остается доказать обратное. Предположим, что $C(x_0, R) \subset D$ и что функция $u(x)$ удовлетворяет условиям (i), (ii) и (iii′). Пусть $u_n(x)$ — последовательность непрерывных функций на $S(x_0, R)$, удовлетворяющих (2.5.2), а $u_n(\xi)$ — гармоническое продолжение функции $u_n(x)$ в $D(x_0, R)$, задаваемое равенством (2.5.3). Поскольку $u(x) \leqslant u_n(x)$ на $S(x_0, R)$, то из (iii′) следует, что это неравенство выполнено также и в $D(x_0, R)$. Поэтому, устремляя n к бесконечности, получаем, что для любой точки $\xi \in D(x_0, R)$

$$u(\xi) \leqslant \int\limits_{S(x_0, R)} u(x) K(x, \xi)\, d\sigma_x.$$

Полагая здесь $\xi = x_0$, получаем неравенство

$$u(x_0) \leqslant \frac{1}{c_m R^{m-1}} \int\limits_{S(x_0, R)} u(x)\, d\sigma_x,$$

т. е. условие (iii). Таким образом, условие (iii) выполнено для всех r, таких, что $C(x_0, r) \subset D$, и, в частности, для всех достаточно малых r. Это означает, что функция $u(x)$ субгармонична в D. Теорема 2.8 доказана.

Для того чтобы доказать следствие, предположим прежде всего, что отображение $z = t(w)$ однолистно, т. е. является взаим-

---

[1]) Это условие объясняет название «субгармоническая функция».

но однозначным отображением области D' на некоторую подобласть области D. Пусть Δ' — область, замыкание которой лежит в D', а $v(w)$ — функция, гармоническая в Δ', непрерывная в $\overline{\Delta'}$ и такая, что на границе F области Δ' выполнено неравенство

$$u\,[t\,(w)] \leqslant v\,(w). \tag{2.5.8}$$

Обозначим через Δ образ области Δ' при отображении $z = t\,(w)$; функция $v_1(z) = v\,[t^{-1}(z)]$ гармонична в Δ, непрерывна в $\overline{\Delta}$, а на границе $\overline{\Delta}$ удовлетворяет неравенству

$$u\,(z) \leqslant v_1\,(z). \tag{2.5.9}$$

Так как $u\,(z)$ субгармонична в D, то неравенство (2.5.9) остается справедливым во всей области Δ, и, следовательно, неравенство (2.5.8) остается справедливым во всей области Δ'. Таким образом, функция $u\,[t\,(w)]$ удовлетворяет в области D' условию (iii'). Поскольку условия (i) и (ii) удовлетворяются для нее очевидным образом, заключаем, что $u\,[t\,(w)]$ субгармонична в области D'.

Рассмотрим теперь общий случай. Заметим, что если функция $t\,(w)$ однолистна в окрестности точки $w_0 \in D'$, т. е. если $t'\,(w_0) \neq 0$, то на основании проведенных выше рассуждений функция $u\,[t\,(w)]$ субгармонична вблизи w_0. Поэтому предположим, что $t'\,(w_0) = 0$ в точке $w_0 \in D'$. Тогда в окрестности этой точки

$$t\,(w) = a_0 + a_k\,(w - w_0)^k + \ldots, \qquad a_k \neq 0,$$
$$\text{т. е. } [t\,(w) - a_0]^{1/k} = a_k^{1/k}\,(w - w_0) + \ldots.$$

Обозначим $[t\,(w) - a_0]^{1/k}$ через $\varphi\,(w)$. Имеем $\varphi'\,(w_0) \neq 0$, т. е. $t\,(w) = a_0 + [\varphi\,(w)]^k$. Заметим теперь, что функция $u\,(a_0 + z^k)$ субгармонична вблизи $z = 0$. В самом деле, условия (i) и (ii) выполнены. Проведенные выше рассуждения показывают, что функция $u\,(a_0 + z^k)$ субгармонична в окрестности z_0 для произвольного достаточно малого z_0, не равного нулю; следовательно, условие (iii) выполнено всюду, за исключением точки $z_0 = 0$. Если число R мало, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\,[a_0 + (Re^{i\theta})^k]\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\,[a_0 + R^k e^{ki\theta}]\,d\theta =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\,[a_0 + R^k e^{i\varphi}]\,d\varphi \geqslant u\,(a_0),$$

так как функция $u\,(z)$ субгармонична. Таким образом, условие (iii) выполнено также и в точке $z = 0$, т. е. функция $u\,(a_0 + z^k)$ субгармонична в окрестности точки $z = 0$. Так как $\varphi\,(w_0) = 0$, $\varphi'\,(w_0) \neq 0$, то из предыдущих рассуждений следует, что функция

$u[a_0 + \varphi(w)^k]$ субгармонична вблизи w_0, т. е. что $u[t(w)]$ субгармонична вблизи w_0, как и требовалось.

2.5.2. Исследуя возможность равенства в (2.5.1), мы получаем простое достаточное условие гармоничности.

Теорема 2.9. *Функция $u(x)$ гармонична в области D тогда и только тогда, когда $u(x)$ и $-u(x)$ субгармоничны в D.*

Прежде всего заметим, что гармонические функции являются субгармоническими, и поэтому сформулированное условие необходимо. Далее, пусть u — субгармоническая функция в области D. Предположим, что $C(x_0, R) \subset D$, и определим функцию v так же, как в теореме 2.7. Тогда из теорем 2.4 и 2.7 вытекает, что $u(\xi) < v(\xi)$ в $D(x_0, R)$, за исключением случая, когда $u(\xi) \equiv v(\xi)$ в $D(x_0, R)$, т. е. когда функция u гармонична в $D(x_0, R)$. Полагая $\xi = x_0$, получаем, что в условии (iii) имеет место строгое неравенство для всех достаточно малых r, за исключением случая, когда функция $u(x)$ гармонична вблизи x_0. Если функция $-u$ также субгармонична вблизи точки x_0, то для всех достаточно малых r в условии (iii) имеет место обратное неравенство. Поэтому в (iii) должен стоять знак равенства и, значит, функция $u(x)$ гармонична вблизи x_0. Если функции u и $-u$ субгармоничны в D, то это рассуждение справедливо для всех точек $x_0 \in D$ и, следовательно, функция $u(x)$ гармонична в D.

Между прочим, мы установили, что равенство в (2.5.1) возможно только тогда, когда функция u гармонична в $D(x_0, R)$. То, что в этом случае действительно всегда имеет место равенство, не совсем очевидно; мы отложим доказательство этого результата до § 2.7 (см. теорему 2.19).

Пример

Пусть $y = T(x)$ — ортогональное преобразование пространства $\mathbb{R}^m$, переводящее область D в область D', и $u(y)$ — гармоническая (или субгармоническая) функция в D'. Докажите, что $u[T(x)]$— гармоническая (или субгармоническая) функция в D.

2.6. МЕТОД ПЕРРОНА [1]) И ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ

Несмотря на то что субгармонические функции имеют много общих свойств с гармоническими функциями или, в случае $m = 2$, с логарифмами аналитических функций, они обладают существенно большей гибкостью. В то время как, согласно теоремам 1.5

[1]) Перрон [1923].

и 1.15, гармонические и аналитические функции вполне определяются своим поведением на любом открытом множестве, из теоремы 2.7 следует, что субгармоническую функцию, не являющуюся гармонической, всегда можно сделать гармонической в фиксированном шаре, не изменяя ее в остальных точках. Это свойство является одним из главных преимуществ субгармонических функций в различного рода конструкциях. В настоящем параграфе мы воспользуемся этим свойством для построения решения задачи Дирихле.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$ — область с границей S, а $f(\xi)$ — ограниченная функция, определенная на S. Если область D не ограничена, мы включаем в S единственную «бесконечно удаленную» точку, обозначаемую ∞, и предполагаем, что определено значение функции $f(\infty)$. Мы собираемся при подходящих условиях решить задачу Дирихле, т. е. найти гармоническую в области D функцию $u(x)$, которая стремится к $f(\xi)$, когда x стремится к точке $\xi \in S$ изнутри D. Для этого введем класс $U(f)$ функций u, обладающих следующими свойствами:

(a) *u субгармонична в D*;

(b) $\overline{\lim}\, u(x) \leqslant f(\xi)$, *когда x стремится к любой точке $\xi \in S$ изнутри D.*

Определим функцию $v(x)$, полагая

$$v(x) = \sup_{u \in U(f)} u(x). \tag{2.6.1}$$

Мы увидим, что при подходящих условиях функция $v(x)$ дает требуемое решение задачи Дирихле. Как показано в гл. 1, из принципа максимума следует, что если решение существует, то оно единственно.

2.6.1. Гармоничность

Докажем следующее предложение.

Лемма 2.3. *Функция $v(x)$ гармонична в области D. Если $m \leqslant f(\xi) \leqslant M$ на S, то $m \leqslant v(x) \leqslant M$ во всей области D.*

Предположим, что $m \leqslant f(\xi) \leqslant M$. Тогда функция $u(x) = m$ удовлетворяет условиям (a) и (b) и, следовательно, принадлежит классу $U(f)$. Таким образом, $v(x) \geqslant u(x) = m$ для любой точки $x \in D$. Предположим опять, что $u \in U(f)$. Тогда из принципа максимума (теорема 2.3) следует, что $u(x) - M \leqslant 0$. Поэтому

$$v(x) = \sup_{u \in U(f)} u(x) \leqslant M.$$

Докажем, что функция $v(x)$ гармонична в области D. Для этого рассмотрим гипершар Δ, лежащий вместе со своей границей в области D. Пусть x_1, x_2 — две точки из Δ, а $u_{j,n}(x)$ ($j = 1, 2$; $n = 1, 2, \ldots$) — такая последовательность функций из $U(f)$, что при $n \to \infty$

$$u_{j,n}(x_j) \to v(x_j), \quad j = 1, 2. \tag{2.6.2}$$

Положим

$$v_{j,n}(x) = \sup_{1 \leqslant r \leqslant n} u_{j,r}(x), \tag{2.6.3}$$

$$v_n(x) = \sup [v_{1,n}(x), v_{2,n}(x)]. \tag{2.6.4}$$

Определим теперь функции $V_{j,n}(x)$ и $V_n(x)$. В части области D вне Δ положим $V_{j,n}(x) = v_{j,n}(x)$ (соответственно $V_n(x) = v_n(x)$). В Δ пусть $V_{j,n}(x)$ (соответственно $V_n(x)$) есть гармоническое продолжение функции $v_{j,n}(x)$ (соответственно $v_n(x)$) с границы Δ в Δ. Из примера 2 § 2.1 следует, что функции $v_{j,n}(x)$ и $v_n(x)$ субгармоничны в D. Очевидно, что они удовлетворяют условию (b), поскольку ему удовлетворяют функции $u_{j,n}(x)$. Значит, $v_{j,n}(x) \in U(f)$ и $v_n(x) \in U(f)$. Кроме того, на основании теоремы 2.7 функции $V_{j,n}(x)$ и $V_n(x)$ субгармоничны в D. Функции $V_{j,n}(x)$ и $V_n(x)$ удовлетворяют условию (b), поскольку вне Δ, а значит, вблизи границы D они совпадают соответственно с $v_{j,n}(x)$ и $v_n(x)$. Таким образом, функции $V_{j,n}(x)$ и $V_n(x)$ принадлежат классу $U(f)$.

Заметим теперь, что $V_n(x)$ и $V_{j,n}(x)$ гармоничны в шаре Δ и являются возрастающими функциями натурального аргумента n, ограниченными сверху для каждой точки $x \in D$ константой M. Таким образом, из теоремы Харнака 1.20 вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} V_{j,n}(x) = V_j(x), \quad \lim_{n\to\infty} V_n(x) = V(x),$$

где $V_j(x)$ и $V(x)$ — функции, гармонические в Δ.

Поскольку $V_{j,n}(x)$, $V_n(x) \in U(f)$, из (2.6.1) следует, что при $x \in D$

$$V_{j,n}(x) \leqslant v(x), \quad V_n(x) \leqslant v(x), \quad j = 1, 2, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Отсюда для любой точки $x \in D$ получаем

$$V_j(x) \leqslant v(x), \quad V(x) \leqslant v(x).$$

Из нашего построения и теоремы 2.5 вытекает, что для любого натурального n

$$u_{j,n}(x_j) \leqslant v_{j,n}(x_j) \leqslant V_{j,n}(x_j) \leqslant v(x_j), \quad j = 1, 2,$$

и

$$V_{j,n}(x) \leqslant V_n(x) \leqslant v(x), \quad x \in D. \tag{2.6.5}$$

Первая система неравенств очевидна по построению. Вторая вытекает из (2.6.4) и того факта, что большей функции соответствует большее гармоническое продолжение, что является следствием положительности ядра $K(x, \xi)$ в теореме 2.7.

Из (2.6.2) следует, что

$$V_j(x_j) = V(x_j) = v(x_j), \quad j = 1, 2.$$

Кроме того, в силу неравенства (2.6.5), $V_j(x) \leqslant V(x)$ в Δ. Поскольку функция $V_j(x) - V(x)$ гармонична в Δ, из принципа максимума (теорема 2.1) следует, что $V_j(x) = V(x)$, $j = 1, 2$, в Δ, так что $V_1(x) = V_2(x)$ и, в частности,

$$v(x_2) = V_2(x_2) = V_1(x_2). \tag{2.6.6}$$

Фиксируем теперь точку $x_1 \in \Delta$ и заметим, что приведенная выше конструкция функции $V_1(x)$ совершенно не зависит от выбора точки x_2. Заставляя точку x_2 пробегать Δ, из (2.6.6) получаем, что $v(x) = V_1(x)$, и, следовательно, функция $v(x)$ является гармонической в Δ. Так как в качестве Δ можно взять окрестность произвольной точки области D, то функция $v(x)$ гармонична всюду в D. Лемма 2.3 доказана.

2.6.2. Поведение на границе [1]

Для того чтобы доказать, что $v(x)$ является решением задачи Дирихле, необходимо показать, что эта функция имеет правильное предельное поведение в граничных точках ξ области D. Для исследования поведения функции на границе нам нужно понятие барьера.

Определение. Пусть ζ_0 — граничная точка области $D \subset \mathbb{R}^k$. Будем говорить, что область D обладает *барьером в точке* ζ_0, если для точки ζ_0 существует барьерная функция $\omega(x)$ со следующими свойствами:

(i) $\omega(x)$ определена и субгармонична в $N_0 = N \cap D$, где N — некоторая окрестность точки ζ_0;

(ii) положим $\mu(\delta) = \sup\limits_{x \in N_0} \{\omega(x)\}$, причем $|x - \zeta_0| \geqslant \delta$, если ζ_0 конечно, и $|x| \leqslant \delta^{-1}$, если ζ_0 бесконечно; тогда $\mu(\delta) < 0$ для $\delta > 0$;

(iii) если $x \to \zeta_0$ изнутри множества N_0, то $\omega(x) \to 0$.

Граничная точка ζ_0 области D называется *регулярной* или *иррегулярной* (для задачи Дирихле) в зависимости от того, обладает или не обладает область D барьером в точке ζ_0.

Докажем теперь следующий результат.

Теорема 2.10. *Пусть D — область в пространстве $\mathbb{R}^k$, $f(\zeta)$ — ограниченная функция, определенная на границе S области D,*

[1] Понятия и результаты этого пункта принадлежат Лебегу [1924], который, кроме того, получил более сильный результат, чем теорема 2.11, и привел пример иррегулярной точки — так называемого острия Лебега.

и $\zeta_0 \in S$ *— регулярная точка. Если функция* $v(x)$ *определена равенством* (2.6.1), *то она гармонична в* D *и имеют место соотношения*

$$\varliminf_{\zeta\to\zeta_0} f(\zeta) \leqslant \varliminf_{x\to\zeta_0} v(x) \leqslant \varlimsup_{x\to\zeta_0} v(x) \leqslant \varlimsup_{\zeta\to\zeta_0} f(\zeta), \tag{2.6.7}$$

где внешние пределы берутся при $\zeta\to\zeta_0$ *на* S, *а внутренние — при* $x\to\zeta_0$ *изнутри* D. *В частности, если функция* $f(\zeta)$ *непрерывна в точке* ζ_0, *то* $v(x)\to f(\zeta_0)$ *при* $x\to\zeta_0$ *изнутри области* D.

Если функция $f(\zeta)$ *непрерывна на* S *и все точки границы* S *регулярны, то* $v(x)$ *является решением задачи Дирихле для* $f(\zeta)$ *и области* D. *Область, все граничные точки которой регулярны, называется регулярной областью.*

Предположим, что $f(\zeta) < M$, если $\zeta \in S$, и $f(\zeta) < M_0 \leqslant M$, если $\zeta \in S \cap N_1$, где N_1 — некоторая окрестность точки ζ_0. Пусть $\omega(x)$ — барьерная функция в точке ζ_0 и N — такая окрестность точки ζ_0, что $\overline{N} \subset N_1$ и функция $\omega(x)$ определена в $N_0 = \overline{N} \cap D$, где $\overline{N}$ — замыкание N.

Положим $-\eta = \sup \omega(x)$, где x изменяется вне $\overline{N}$. Из условий (ii) и (iii) следует, что при подходящем выборе множества N можно добиться того, что число η будет конечным и положительным. Положим теперь

$$\omega_1(x) = \begin{cases} -\eta, & \text{если } x \in D, x \text{ находится вне } \overline{N}, \\ \sup[\omega(x), -\eta], & \text{если } x \in \overline{N}. \end{cases}$$

Тогда функция $\omega_1(x)$ субгармонична в области D. Для точек, внешних по отношению к $\overline{N}$, это очевидно, поскольку там $\omega_1(x)$ постоянна. Кроме того, вблизи любой точки $x_0 \in \overline{N}$ функция $\omega(x)$ определена и субгармонична, а

$$\omega_1(x) = \sup(\omega(x), -\eta),$$

так что на основании примера 2 § 2.1 функция $\omega_1(x)$ также субгармонична в окрестности точки x_0, т. е. является барьерной функцией в точке ζ_0. Положим теперь

$$v_1(x) = M_0 - \frac{M - M_0}{\eta}\,\omega_1(x)$$

и докажем, что в области D

$$v(x) \leqslant v_1(x). \tag{2.6.8}$$

Для того чтобы установить это неравенство, предположим, что $u(x) \in U(f)$. Тогда функции $u(x)$, $-v_1(x)$ и, следовательно, $u(x) - v_1(x)$ субгармоничны в области D. Кроме того, если $\zeta \in S \cap N_1$, то $f(\zeta) < M_0$ и, значит, на основании условия (b), $u(x) < M_0$ для всех точек D, лежащих вблизи ζ, в то время как во всей области D имеем $v_1(x) \geqslant M_0$. Таким образом, в этом случае для всех точек x из некоторой окрестности ζ выполнено неравенство

$$u(x) \leqslant v_1(x). \tag{2.6.9}$$

С другой стороны, если $\zeta \in S$, но $\zeta \notin N_1$, то ζ лежит и вне $\overline{N}$, и поэтому $\omega_1(x) = -\eta$, $v_1(x) = M$ для всех $x \in D$, близких к точке ζ. Следовательно, неравенство (2.6.9) выполнено для всех таких x, когда ζ пробегает все точки границы S. Поскольку $u(x) - v_1(x)$ — субгармоническая функция, из принципа максимума (теорема 2.1) следует, что неравенство (2.6.9) выполняется для всех точек области D. Так как $u(x)$ — произвольная функция класса $U(f)$, то из (2.6.1) и (2.6.9) вытекает неравенство (2.6.8). Из свойства (iii) барьерной функции $\omega_1(x)$ получаем, что

$$\overline{\lim_{x\to\zeta_0}}\, v(x) \leqslant \overline{\lim_{x\to\zeta_0}}\, v_1(x) = M_0.$$

Так как число M_0 можно выбрать таким, что

$$M_0 < \overline{\lim_{\zeta\to\zeta_0}}\, f(\zeta) + \varepsilon,$$

где ε сколь угодно мало, то отсюда следует правое неравенство (2.6.7).

Остается доказать левое неравенство (2.6.7). С этой целью предположим, что $f(\zeta) \geqslant m$ на S и что $f(\zeta) > m_0 \geqslant m$ на $S \cap \overline{N}_1$. Определим функцию $\omega_1(x)$ так же, как и прежде, и положим

$$u_1(x) = m_0 + \frac{m_0 - m}{\eta}\, \omega_1(x).$$

Тогда функция $u_1(x)$ субгармонична в D, поскольку субгармонична в D функция $\omega_1(x)$. Кроме того, если $\zeta \in S$ и ζ лежит вне $\overline{N}_1$, то для всех точек области D, близких к ζ, имеем $\omega_1(x) = -\eta$, $u_1(x) = m \leqslant f(\zeta)$; если же $\zeta \in \overline{N}_1$, то $u_1(x) \leqslant m_0 \leqslant f(\zeta)$ в окрестности ζ. Таким образом, функция $u_1(x)$ удовлетворяет условию (b) и поэтому $u_1(x) \in U(f)$. Следовательно, $v(x) \geqslant u_1(x)$ и

$$\underline{\lim_{x\to\zeta_0}}\, v(x) \geqslant \underline{\lim_{x\to\zeta_0}}\, u_1(x) = m_0.$$

Поскольку число m_0 можно выбрать таким, что $m_0 > \underline{\lim\limits_{\zeta\to\zeta_0}}\, f(\zeta) - \varepsilon$, где ε сколь угодно мало, то отсюда следует левое неравенство (2.6.7). Среднее неравенство очевидно.

Если функция $f(\zeta)$ непрерывна в точке ζ_0, то внешние члены, а значит, и все члены (2.6.7) становятся равными $f(\zeta_0)$. Следовательно, если $x \to \zeta_0$ изнутри области D или вдоль границы S, то $v(x) \to f(\zeta_0)$. Если мы положим $v(x) = f(x)$ на S, то продолженная таким образом функция $v(x)$ непрерывна в точке ζ_0.

Если это выполняется для всех точек $\zeta_0 \in S$, получим функцию $v(x)$, непрерывную в $\overline{D}$ и гармоническую в D по лемме 2.3. Следовательно, $v(x)$ есть решение задачи Дирихле. Это завершает доказательство теоремы 2.10.

2.6.3. Условия регулярности и конструкция барьерной функции

С целью практического применения теоремы 2.10 мы получим сейчас простой геометрический критерий регулярности граничной точки области D.

Пусть x_0 — произвольная точка пространства и l — луч, задаваемый параметрическим уравнением

$$x = x_0 + t\zeta, \quad 0 \leqslant t < \infty,$$

где ζ — некоторая точка пространства. Прямой круговой конус $V(l, \alpha)$ с осью l и вершиной x_0 определяется как множество всех точек x, удовлетворяющих неравенству

$$d(x, l) < |x - x_0| \cos \alpha,$$

где $d(x, l)$ — расстояние от точки x до луча l и $0 < \alpha < \pi/2$. Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 2.11. *Пусть D — область пространства $\mathbb{R}^m$ и ζ — ее граничная точка. Точка ζ регулярна, если выполнено одно из следующих условий:*

(a) $m = 2$, $\zeta \neq \infty$ *и существует лежащая вне D дуга*

$$z = \zeta + re^{i\theta(r)}, \quad 0 \leqslant r \leqslant a,$$

где функция $\theta(r)$ непрерывна на $[0, a]$;

(b) $m = 2$, $\zeta = \infty$ *и существует лежащая вне D дуга*

$$z = \frac{1}{r} e^{i\theta(r)}, \quad 0 \leqslant r < a,$$

где $\theta(r)$ такая же, как в (a);

(c) $m > 2$ *и* $\zeta = \infty$;

(d) $m > 2$, $\zeta \neq \infty$ *и существует прямой круговой конус с вершиной ζ, все точки которого, достаточно близкие к ζ, лежат вне области D.*

Приведенные выше условия, в частности условия (a) и (b), удобные для большинства приложений, могут быть значительно ослаблены. Однако, как мы увидим в гл. 5, при $m > 2$ аналог условия (a) не верен; действительно, в этом случае изолированный прямолинейный отрезок состоит из иррегулярных точек для задачи Дирихле в $\mathbb{R}^m$.

Для доказательства (a) предположим, что $\theta(r) \to \theta_0$ при $r \to 0$. Можно считать, что $|\theta_0| \leqslant \pi$, а значит,

$$|\theta(r)| < 2\pi, \quad 0 \leqslant r \leqslant \delta.$$

Для точки z, не лежащей на дуге γ и такой, что $|z| < \delta$, положим

$$z = \zeta + re^{i\theta}, \quad \theta(r) < \theta < \theta(r) + 2\pi,$$

так что аргумент $\theta = \arg(z - \zeta)$ однозначно определен в части N_0 области D, лежащей в $|z - \zeta| < \delta$, и $|\theta| < 4\pi$. Положим в N_0

$$\omega(z) = -r^{1/9}\cos(\theta/9).$$

Функция $\omega(z)$ гармонична в N_0 и удовлетворяет условиям (i), (ii) и (iii) определения барьерной функции. Аналогично, в случае (b) определим N_0 как часть плоскости, для которой $|z| > R_0$ и $z \notin \gamma$. Так как $\theta(r)$ имеет предел при $r \to 0$, то при подходящем выборе R_0 можно представить z из N_0 в виде $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho \geqslant R_0$, где $\theta = \arg z$ однозначно определен и удовлетворяет условию $|\theta| < 4\pi$. Положим теперь

$$\omega(z) = -\rho^{-1/9}\cos(\theta/9)$$

и заметим, что $\omega(z)$ является барьерной функцией в ∞.

В случае (c) положим $\omega(x) = -|x|^{2-m}$.

Очевидно, что условия (i), (ii) и (iii) выполнены. Заслуживает внимания тот факт, что точка ∞ всегда регулярна для задачи Дирихле в $\mathbb{R}^m$, если $m \geqslant 3$.

Остается рассмотреть случай (d). Для этого нам нужна следующая

Лемма 2.4. *Пусть C — прямой круговой конус с вершиной x_0 и $D = \mathbb{R}^m - \overline{C}$. Тогда существует функция $u_1(x)$, субгармоническая в D, непрерывная в $\overline{D}$ и такая, что*

$$u_1(x) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \overline{D}, \tag{2.6.10}$$

причем равенство достигается только в точке $x = x_0$.

Заметим, что при ортогональном преобразовании прямой круговой конус переходит в прямой круговой конус, а данный луч можно отобразить на отрицательную полуось x_1. Используя пример в конце п. 2.5.2, мы можем, следовательно, считать, что ось нашего конуса — это отрицательная полуось x_1, где $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — координаты точки x. Тогда область D задается неравенством

$$x_1 \geqslant \cos(\pi - \delta)\left(\sum_{\nu=1}^{m} x_\nu^2\right)^{1/2}, \tag{2.6.11}$$

где $0 < \delta < \pi/2$. Положим $\rho^2 = \sum_{\nu=2}^{m} x_\nu^2$, и пусть $u = g(x_1, \rho) \in C^2$. Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} = \frac{x_\nu^2}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{x_\nu^2}{\rho^3}\right)\frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad \nu \geqslant 2,$$

так что

$$\nabla^2 u = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{m-2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}.$$

Положим теперь $x_1 = R\cos\theta$, $\rho = R\sin\theta$, и пусть $u = R^\alpha \varphi(\theta)$. Тогда

$$\nabla^2 u = R^{\alpha-2}[\varphi''(\theta) + (m-2)\varphi'(\theta)\operatorname{ctg}\theta + \alpha(\alpha + m - 2)\varphi(\theta)].$$

Пусть $\varphi_m(\theta)$ — решение уравнения

$$\varphi_m''(\theta) + (m-2)\operatorname{ctg}\theta\varphi_m'(\theta) = 1, \quad \varphi_m(0) = \varphi_m'(0) = 0,$$

так что

$$\varphi_m(\theta) = \int_0^\theta \frac{dt}{(\sin t)^{m-2}} \int_0^t (\sin\tau)^{m-2} d\tau.$$

Функция $\varphi_m(\theta)$ аналитична при $\theta = 0$ и даже при $-\pi < \theta < \pi$. Выберем a настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\varphi_m(\theta) - a \leqslant -1, \quad |\theta| \leqslant \pi - \delta/2.$$

Предположим, что α — малое положительное число, и пусть

$$u_1(x) = R^\alpha[\varphi_m(\theta) - a], \quad 0 \leqslant R < \infty.$$

Тогда $u_1(x) \leqslant -R^\alpha$ в области D, определяемой условием (2.6.11), и $u_1(0) = 0$, а отсюда следует (2.6.10). Но если α достаточно мало, то

$$\nabla^2 u_1 = R^{\alpha-2}[1 + \alpha(\alpha + m - 2)(\varphi_m(\theta) - a)] > 0$$

при $|\theta| \leqslant \pi - \delta$, так что u_1 — субгармоническая функция в D. Таким образом, функция $u_1(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2.4 и, значит, является барьерной функцией в точке ζ.

Теорема 2.11 доказана.

2.7. ТЕОРЕМЫ ВЫПУКЛОСТИ

Среднее субгармонической функции по сфере $S(x_0, r)$ обладает важными свойствами выпуклости, к исследованию которых мы сейчас переходим.

Теорема 2.12. *Пусть функция $u(x)$ субгармонична в замкнутом кольце $r_1 \leqslant |x - x_0| \leqslant r_2$ в $\mathbb{R}^m$ и не равна там тождественно $-\infty$. Положим*

$$I(r, u) = \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int\limits_{S(x_0, r)} u(x)\, d\sigma(x).$$

Тогда при $m = 2$ среднее $I(r, u)$ является выпуклой функцией от $\log r$, а при $m > 2$ — выпуклой функцией от r^{2-m} в кольце $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, если $0 < r_1 < r_2$.

Когда $r_1 = 0$, т. е. $u(x)$ субгармонична в $C(x_0, r_2)$, среднее $I(r, u)$ является непрерывной возрастающей функцией переменного r для $0 \leqslant r \leqslant r_2$, если положить $I(0, u) = u(x_0)$.

Предположим сначала, что функция $u(x)$ гармонична в кольце $r_1 \leqslant |x - x_0| \leqslant r_2$. Тогда из теоремы Грина 1.9 следует, что

$$\int\limits_{S(x_0, r_2')} - \int\limits_{S(x_0, r_1')} \frac{\partial u}{\partial r}\, d\sigma = 0, \quad r_1 \leqslant r_1' < r_2' \leqslant r_2.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$r^{m-1} \frac{\partial}{\partial r} \int\limits_{S(x_0, r)} u(x) \frac{d\sigma}{r^{m-1}} = \text{const}, \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_2,$$

или

$$r^{m-1} I'(r, u) = \text{const}, \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_2.$$

Следовательно, в этом случае существуют такие постоянные A и B, что

$$I(r, u) = A \log r + B, \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_2, \quad \text{если} \quad m = 2;$$
$$I(r, u) = A r^{2-m} + B, \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_2, \quad \text{если} \quad m > 2.$$

Это утверждение остается справедливым, если функция u гармонична в кольце $r_1 < |x - x_0| < r_2$ и непрерывна при $r_1 \leqslant |x - x_0| \leqslant r_2$, так как ясно, что в этом случае функция $I(r, u)$ остается непрерывной, когда $r \to r_1 +$ или же когда $r \to r_2 -$. Значит, и в этом случае $I(r, u)$ является линейной функцией от $\log r$ при $m = 2$ или от r^{2-m} при $m > 2$.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $v_n(x)$ — такая последовательность непрерывных функций, что при $n \to \infty$

$$v_n(x) \downarrow u(x) \quad \text{на} \quad F = S(x_0, r_1) \cup S(x_0, r_2). \qquad (2.7.1)$$

Такая последовательность существует по теореме 1.4, так как функция $u(x)$ полунепрерывна сверху на множестве F. Далее, множество F является границей области D: $r_1 < |x - x_0| < r_2$, и очевидно, что каждая точка $\xi \in F$ удовлетворяет условию (а) или (d) теоремы 2.11 и, следовательно, является регулярной граничной точкой области D. Поэтому, согласно теореме 2.10, разрешима задача Дирихле для области D с граничными значениями $v_n(x)$, и, таким образом, функции $v_n(x)$ продолжаются до функций, гармонических в D и непрерывных в $\overline{D}$.

Положим

$$I(r, v_n) = I_n(r), \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_2.$$

Так как последовательность $v_n(x)$ убывает на $S(x, r_1)$ и $S(x, r_2)$ с возрастанием n, то $I_n(r)$ убывает с возрастанием n для $r = r_1$, r_2. Следовательно, по свойству линейности, $I_n(r)$ убывает с возрастанием n для всех r из отрезка $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$. Итак, $I_n(r) \to I(r)$ при $n \to \infty$.

Но в силу (2.7.1)

$$I(r_1) = I(r_1, u), \quad I(r_2) = I(r_2, u). \tag{2.7.2}$$

По принципу максимума (теорема 2.4) получаем, что в области D для каждого n выполняется неравенство $u(x) \leqslant v_n(x)$ и, значит,

$$I(r, u) \leqslant I(r, v_n) = I_n(r), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad r_1 < r < r_2.$$

Следовательно,

$$I(r, u) \leqslant I(r), \quad r_1 < r < r_2. \tag{2.7.3}$$

Если $I(r_1) = -\infty$ или $I(r_2) = -\infty$, то, по линейности функции $I_n(r)$,

$$I(r, u) = I(r) = -\infty, \quad r_1 < r < r_2.$$

Интегрируя, получаем

$$\int\limits_{r_1 \leqslant |x| \leqslant r_2} u(x)\, dx = \int\limits_{r_1}^{r_2} c_m r^{m-1} I(r, u)\, dr = -\infty,$$

что в силу теоремы 2.6 приводит к противоречию, за исключением случая, когда $u(x) \equiv -\infty$. Следовательно, за исключением этого случая, $I(r_1)$ и $I(r_2)$ конечны, $I(r)$ является линейной функцией от $\log r$ $(m = 2)$ или r^{2-m} $(m > 2)$ и выполняются условия (2.7.2) и (2.7.3). Заменим в приведенных выше рассуждениях числа r_1, r, r_2 числами r_1', r, r_2', такими, что $r_1 \leqslant r_1' < r < r_2' \leqslant r_2$. Тогда, исключая случай $u(x) \equiv -\infty$, функция $I(r, u)$ конечна при $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ и

$$I(r, u) \leqslant I(r), \quad r_1' < r < r_2',$$

где $I(r)$ — линейная функция от $\log r$ $(m = 2)$ или r^{2-m} $(m > 2)$, удовлетворяющая соотношениям

$$I(r_1') = I(r_1', u), \quad I(r_2') = I(r_2', u).$$

Из неравенства (1.3.3) следует выпуклость функции $I(r, u)$.

Предположим, наконец, что функция u субгармонична в $C(x_0, r_2)$. Тогда из определения субгармонической функции ((ii) и (iii) § 2.1) вытекает, что $I(r, u) \to u(x_0)$ при $r \to 0$. Пусть $0 < r_1' < r < r_2' \leqslant r_2$; положим $J(r) = I(r, u)$. Если $m = 2$, то из определения выпуклости следует, что

$$J(r) \leqslant \frac{\log r_2' - \log r}{\log r_2' - \log r_1'} J(r_1') + \frac{\log r - \log r_1'}{\log r_2' - \log r_1'} J(r_2').$$

Устремим теперь в этом неравенстве r_1' к нулю. Тогда второе слагаемое в правой части стремится к $J(r_2')$, первое слагаемое стремится к нулю, если $u(x_0) > -\infty$, и отрицательно, если $u(x_0) = -\infty$. Таким образом, во всех случаях

$$J(r) \leqslant J(r_2'), \quad 0 < r < r_2' \leqslant r_2.$$

При $m > 2$ этот результат получается из неравенства

$$J(r) \leqslant \frac{(r_2')^{2-m} - r^{2-m}}{(r_2')^{2-m} - (r_1')^{2-m}} J(r_1') + \frac{r^{2-m} - (r_1')^{2-m}}{(r_2')^{2-m} - (r_1')^{2-m}} J(r_2').$$

Следовательно, в обоих случаях $J(r)$ — возрастающая функция r при $0 \leqslant r \leqslant r_2$. Это завершает доказательство теоремы 2.12.

Проще доказывается аналог теоремы 2.12 для максимума

$$B(r, u) = \sup_{x \in S(x_0, r)} u(x).$$

Теорема 2.13. *В предположениях теоремы* 2.12 $B(r, u)$ *является выпуклой функцией от* $\log r$, *если* $m = 2$, *и от* r^{2-m}, *если* $m > 2$, $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, $0 < r_1 < r_2$.

Если функция $u(x)$ *субгармонична в* $C(x_0, r_2)$, *то* $B(r, u)$ — *возрастающая функция переменной* r *при* $0 \leqslant r \leqslant r_2$.

Вторая часть теоремы немедленно следует из принципа максимума (теорема 2.3). Для того чтобы доказать первую часть, предположим, что $r_1 \leqslant r_1' < r < r_2' \leqslant r_2$. Пусть $I(r)$ — линейная функция переменной $\log r$ ($m = 2$) или r^{2-m} ($m > 2$), совпадающая с $B(r, u)$ при $r = r_1', r_2'$. Тогда функция $v(x) = I(|x - x_0|)$ гармонична для $r_1' \leqslant |x - x_0| \leqslant r_2'$ и при $|x - x_0| = r_1'$ и $|x - x_0| = r_2'$ выполняется неравенство $u(x) - v(x) \leqslant 0$. Следовательно, по принципу максимума, $u(x) - v(x) \leqslant 0$ для всех x, удовлетворяющих неравенствам $r_1' < |x - x_0| < r_2'$. Таким образом, на $S(x_0, r)$ для $r_1' < r < r_2'$ имеем $u(x) \leqslant v(x) = I(r)$, т. е. $B(r, u) \leqslant I(r)$, $r_1' < r < r_2'$. Это доказывает выпуклость функции $B(r, u)$.

2.7.1. Некоторые приложения

Теоремы 2.12 и 2.13 играют важную роль в теории субгармонических функций. Получаем, например, что если функция $u(x)$ субгармонична в окрестности сферы $S(x_0, r)$ и, значит, в некотором кольце $r_1 < |x - x_0| < r_2$, где $r_1 < r < r_2$, то

$$I(r, u) = \int\limits_{S(x_0, r)} u(x)\, d\sigma_x > -\infty,$$

исключая случай, когда $u(x) \equiv -\infty$. Это неравенство является обобщением неравенства (2.5.4) теоремы 2.6. Кроме того, из свойств выпуклых функций вытекает, что $I(r, u)$ и $B(r, u)$ — непрерывные функции переменного r, обладающие всюду в $r_1 < r < r_2$ левыми и правыми производными, причем эти производные совпадают вне некоторого счетного множества. Окончательно имеем: функции

$$r^{m-1} \frac{d}{dr} I(r, u) \quad \text{и} \quad r^{m-1} \frac{d}{dr} B(r, u)$$

возрастают с возрастанием r.

Отсюда немедленно следует

Теорема 2.14. *Если функция $u(x)$ субгармонична в плоскости и не является константой, то существует предел*

$$\alpha = \lim_{r\to\infty} \frac{B(r, u)}{\log r} \tag{2.7.4}$$

и $\alpha > 0$. Если, кроме того, функция u не является гармонической, то

$$\beta = \lim_{r\to\infty} \frac{I(r, u)}{\log r} > 0. \tag{2.7.5}$$

Из теоремы 2.13 следует, что если $B(r) = B(r, u)$, то $B'(r) \geqslant 0$, $0 < r < \infty$. Если $B'(r) \equiv 0$, то $B(r) = u(0)$, $0 < r < \infty$, и по принципу максимума функция $u(x) = u(0)$ постоянна в плоскости. В противном случае $rB'(r) > 0$ для некоторого $r > 0$ и, поскольку $B(r)$ — выпуклая функция от $\log r$, предел $\alpha = \lim\limits_{r\to\infty} rB'(r)$ существует и $0 < \alpha \leqslant \infty$. Если α конечен, то для любого данного $\varepsilon > 0$

$$\alpha - \varepsilon < rB'(r) < \alpha, \quad r > r_0(\varepsilon),$$

$$(\alpha - \varepsilon) \log \frac{r}{r_0} < B(r) - B(r_0) < \alpha \log \frac{r}{r_0}.$$

Отсюда вытекает (2.7.4).

Аналогичным образом получаем, что предел β существует, $\beta > 0$ и $\beta = 0$, если $I(r, u) = u(0)$, $0 < r < \infty$. Обозначим в этом случае через $v(x)$ гармоническое продолжение функции u со сферы $S(0, R)$ в шар $D(0, R)$. По теореме 2.7, в $D(0, R)$ имеем $u(x) - v(x) \leqslant 0$. Кроме того,

$$v(0) = I(R, u) = u(0).$$

Следовательно, по принципу максимума, $u(x) - v(x) \equiv 0$ в $D(0, R)$, откуда заключаем, что функция $u(x)$ гармонична в $D(0, R)$ для любого положительного R, т. е. $u(x)$ гармонична во всей плоскости.

Из теоремы 2.14 следует, что если функция $u(x)$ не постоянна, то она не может быть ограничена во всей плоскости, поскольку $B(r, u)$ растет по меньшей мере так же быстро, как $\log r$. В пространстве размерности больше 2 этот результат уже не верен. В самом деле, функция $u = -r^{2-m}$ субгармонична, ограничена сверху в $\mathbb{R}^m$ и является гармонической вне начала координат. Тогда функция $\max(-1, u)$ субгармонична и ограничена в $\mathbb{R}^m$. С другой стороны, гармонические функции в пространстве не могут быть ограниченными. Имеет место следующая

Теорема 2.15. *Пусть функция $u(x)$ гармонична и не постоянна в пространстве; предел*

$$n = \lim_{r \to \infty} \frac{\log B(r, u)}{\log r}$$

конечен, если $u(x)$ — полином степени n от переменных $x_1, \ldots, x_n$, и равен $+\infty$ в противном случае.

Этот результат является следствием примера 3 п. 1.5.6.

Некоторые частные случаи теорем 2.12 и 2.13 стоит выделить в отдельную теорему.

Теорема 2.16. *Пусть функция u гармонична в плоском кольце $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2$, а функция $f(z)$ (возможно, многозначная) определена в этом кольце, аналитична всюду, кроме точек ветвления, и такова, что функция $|f(z)|$ однозначна. В этом случае перечисленные ниже величины являются выпуклыми функциями от $\log r$ при $r_1 < r < r_2$, а если $r_1 = 0$, то возрастающими функциями переменного r при $0 \leqslant r \leqslant r_2$:*

$$M(r, f) = \sup_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{и} \quad \log M(r);$$

$$I_\lambda(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\lambda \, d\theta \quad \text{и}^{1)} \quad \log I_\lambda(r, f) \text{ для } 0 < \lambda < \infty;$$

$$I_0(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \, d\theta \quad \text{и} \quad I_k(r, \log^+ f) \text{ для } k \geqslant 1;$$

$$I_k(r, u) \text{ для } k \geqslant 1,$$

в предположении, что функция $f = u + iv$ однозначна.

[1]) Результат для функций $I_\lambda(r, f)$ принадлежит Харди [1915].

Согласно примеру 4 § 2.1, функция $\log |f|$ является субгармонической. Из следствий 2 и 3 теоремы 2.2 вытекает, что субгармоническими будут также и функции $|f|^\lambda$ для $\lambda > 0$, $|u|^k$ и $(\log^+ |f|)^k$ для $k \geqslant 1$. Отсюда и из теоремы 2.13 немедленно получаем, что $M(r, f)$ и

$$\log M(r, f) = \sup_{|z|=r} \log |f(z)|$$

обладают требуемыми свойствами. Аналогично, из теоремы 2.12 получаем, что функции $I_\lambda(r, f)$ для $\lambda > 0$, $I_0(r, f)$, $I_k(r, \log^+|f|)$ и $I_k(r, u)$ для $k \geqslant 1$ обладают требуемыми свойствами выпуклости.

Остается показать, что $\log I_\lambda(r, f)$ есть выпуклая функция от $\log r$. Для этого достаточно доказать, что если $L(r) = A \log r + B$ — такая линейная функция от $\log r$, что $\log I_\lambda(r, f) \leqslant L(r)$ для $r = r_1, r_2$, то это же неравенство имеет место для $r_1 < r < r_2$.

Чтобы доказать это, рассмотрим вместо $f(z)$ функцию $\varphi(z) = z^\mu f(z)$. Очевидно, что $\varphi(z)$ аналитична в кольце $r_1 < |z| < r_2$ и ее модуль $|\varphi(z)|$ является однозначной функцией. Кроме того,

$$I_\lambda(r, \varphi) = r^{\lambda\mu} I_\lambda(r, f),$$

$$\log I_\lambda(r, \varphi) = \log I_\lambda(r, f) + \lambda\mu \log r.$$

Выберем μ таким образом, чтобы $-\lambda\mu = A$, $\mu = -A/\lambda$. Для $r = r_1$, r_2 имеем $I_\lambda(r, \varphi) \leqslant e^B$, а так как $I_\lambda(r, \varphi)$ — выпуклая функция от $\log r$, то это неравенство остается справедливым для всех r из интервала $r_1 < r < r_2$. Отсюда

$$\log I_\lambda(r, f) - A \log r \leqslant b, \quad \log I_\lambda(r, f) \leqslant L(r), \quad r_1 < r < r_2.$$

Теорема 2.16 тем самым полностью доказана.

Примеры

1. Положив $u = \log r$, покажите, что $I_\lambda(r, u)$ не является, вообще говоря, выпуклой функцией от $\log r$, когда функция u гармонична и $0 < \lambda < 1$.

2. Применяя к $\varphi(u) = u^{1/\lambda}$ неравенство Иенсена (теорема 2.1), покажите, что если функция u положительна, гармонична и не постоянна в круге $|x| < r$, то

$$I_\lambda(r, u) < u(0)^\gamma. \quad 0 < \lambda < 1.$$

Следовательно, $I_\lambda(\rho, u)$ не является возрастающей функцией переменного ρ при $0 < \rho < r$.

3. Пусть функция $f(z)$ регулярна, не обращается в нуль в кольце $r_1 < |z| < r_2$ и $\lambda < 0$. Покажите, что $I_\lambda(r, f)$ является

выпуклой функцией от $\log r$ при $r_1 < r < r_2$ и что если $r_1 = 0$, то $I_\lambda(r, f)$ есть возрастающая функция от r при $0 \leqslant r < r_2$.

Покажите, что если $f(z) = z - 1$ и $-1 < \lambda < 0$, то $I_\lambda(r, f)$ возрастает вместе с r при $0 < r < 1$ и убывает при $1 < r < \infty$, так что $I_\lambda(r, f)$ и $\log I_\lambda(r, f)$ не являются выпуклыми функциями переменного r ни в каком интервале, содержащем $r = 1$ в качестве внутренней точки.

2.7.2. Гармонические продолжения

В этом пункте мы рассмотрим некоторые обобщения теоремы 2.7. Сначала введем следующее

Определение 1. Пусть D — ограниченная регулярная область в $\mathbb{R}^m$, $f(\zeta)$ — непрерывная функция, определенная на границе F области D. Тогда, если функция $u(x)$ непрерывна в $\overline{D}$, гармонична в D и $u(\zeta) = f(\zeta)$ на F, ее называют *гармоническим продолжением*[1]) функции f из F в D.

Согласно теореме 2.10, функция $u(x)$ всегда существует. Она единственна по теореме 1.13. Можно распространить это определение на полунепрерывные функции с помощью следующего утверждения.

Теорема 2.17. *Пусть функция $f(\zeta)$ полунепрерывна сверху на F, $-\infty \leqslant f < +\infty$ и $f_n(\zeta)$ — последовательность непрерывных функций, монотонно убывающая при $n \to \infty$ и стремящаяся к $f(\zeta)$ для каждого $\zeta \in F$. Пусть $u_n(x)$ — гармоническое продолжение функции f_n из F в D. Тогда последовательность $u_n(x)$ при $n \to \infty$ убывает и стремится к пределу $u(x)$, который не зависит от выбора последовательности f_n и либо является гармонической функцией в D, либо тождественно равен $-\infty$.*

Определение 2. Функцию $u(x)$ будем называть *гармоническим продолжением* функции f из F в D. Если f полунепрерывна снизу, то ее гармоническим продолжением из F в D называется такая функция $u(x)$, что $-u(x)$ есть гармоническое продолжение $-f(x)$ из F в D.

Докажем теорему 2.17.

Из теоремы Харнака 1.20 следует, что функция $u(x)$ гармонична в D, либо тождественно обращается там в $-\infty$. Остается показать, что она не зависит от выбора последовательности f_n. Для этого покажем, что $u(x)$ есть точная нижняя грань всех функций

---

[1]) Следуя Пуанкаре, этот процесс часто называют выметанием (balayage), особенно в контексте теоремы 2.18.

$v(x)$, которые являются гармоническими продолжениями непрерывных функций $g(\zeta)$ из F в D, удовлетворяющих неравенству $g(\zeta) > f(\zeta)$ на F.

Действительно, предположим, что функция $g(\zeta)$ непрерывна и $g(\zeta) > f(\zeta)$ на F. Тогда для данной точки $\zeta_0 \in F$ существует такой номер $n_0 = n_0(\zeta_0)$, что $f_n(\zeta_0) < g(\zeta_0)$ при $n \geqslant n_0$. Так как $f_{n_0}(\zeta) - g(\zeta)$ пн. св., то существует такая окрестность N_0 точки ζ_0, что $f_{n_0}(\zeta) < g(\zeta)$ при $\zeta \in N_0$. Последовательность $f_n(\zeta)$ убывает с возрастанием n, поэтому $f_n(\zeta) < g(\zeta)$ при $\zeta \in N_0$, $n \geqslant n_0$.

Так как множество F компактно, то по теореме Гейне — Бореля 1.1 существует конечная система таких окрестностей, скажем $N_1, N_2, \ldots, N_k$, покрывающая F. Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — отвечающие этим окрестностям номера; положим $n' = \max(n_1, \ldots \ldots, n_k)$. Тогда

$$f_n(\zeta) < g(\zeta), \quad \zeta \in F, \quad n \geqslant n'.$$

Таким образом, если $v(x)$ — гармоническое продолжение функции $g(x)$ из F в D, то $u_n(x) < v(x)$ при $n \geqslant n'$ для всех $x \in F$. Следовательно, согласно принципу максимума, $u_n(x) < v(x)$ при $n \geqslant n'$ для всех $x \in D$. Итак,

$$u(x) \leqslant u_n(x) < v(x), \quad x \in D,$$

и, значит, $u(x)$ является нижней гранью всех функций $v(x)$.

С другой стороны, если точка x фиксирована и $K > u(x)$, то

$$u_n(x) + \frac{1}{n} < K, \quad n > n_0.$$

Кроме того, $u_n(x) + 1/n$ является гармоническим продолжением функции $f_n(x) + 1/n$, которая непрерывна на F и удовлетворяет там неравенству $f_n(x) + 1/n > f(x)$. Таким образом, K не является нижней гранью для всех гармонических продолжений непрерывных функций, больших чем $f(x)$, и поэтому $u(x)$ есть наибольшая из таких нижних граней.

Заметим, что если $f(\zeta)$ непрерывна на F, то можно положить $f_n(\zeta) = f(\zeta)$ для каждого n, так что $u(x)$ является продолжением f из F в D в смысле предыдущего определения. Если функция f одновременно полунепрерывна снизу и сверху, то она непрерывна, и в этом случае определение 2 совпадает с определением 1. Следовательно, определение 2 согласовано с определением 1 и не является противоречивым.

Далее будет доказана

Теорема 2.18. *Пусть функция $u(x)$ субгармонична в окрестности V множества $\overline{D}$, где D — ограниченная регулярная область в $\mathbb{R}^m$. Обозначим через F границу области D и определим функцию $v(x)$ в V следующим образом: для $x \in D$ пусть $v(x)$ — гармониче-*

ское продолжение $u(x)$ из F в D, а для всех других точек $x \in V$ пусть $v(x) = u(x)$. Тогда функция $v(x)$ субгармонична в V и $v(x) \geqslant u(x)$ в D.

Пусть $f_n(\xi)$ — убывающая последовательность непрерывных функций на F, стремящаяся к $u(\xi)$, а $u_n(\xi)$ — гармонические продолжения функций $f_n(\xi)$ из F в D. Тогда функции $u(x) - u_n(x)$ пн. св. в $\overline{D}$, субгармоничны в D и $u(x) - u_n(x) \leqslant 0$ на F, а значит, по принципу максимума, и в области D. Устремляя в этом неравенстве n к бесконечности и применяя теорему 2.17, получаем, что $u(x) \leqslant v(x)$ в области D.

Остается доказать, что функция $v(x)$ субгармонична в V. Воспользуемся определением § 2.1. Ясно, что $v(x) < +\infty$ в области D. Кроме того, так как $v(x) = u(x)$ вне D и $v(x)$ гармонична в D или тождественно равна там $-\infty$, нужно лишь проверить, что функция $v(x)$ пн. св. на F и удовлетворяет там свойству среднего значения.

Пусть $\xi_0 \in F$. Предположим, что $K > u(\xi_0)$, и выберем n настолько большим, что $f_n(\xi_0) < K$. Так как ξ_0 — регулярная граничная точка области D и функция $f_n(\xi)$ непрерывна, из теоремы 2.10 следует существование такой окрестности N_0 точки ξ_0, что $u_n(x) < K$ при $x \in N_0 \cap D$, а значит,

$$v(x) \leqslant u_n(x) < K, \quad x \in N_0 \cap D.$$

Кроме того, поскольку функция $u(x)$ субгармонична и тем самым пн. св. в точке ξ_0, существует такая окрестность N_1 точки ξ_0, что если $x \in N_1$ и $x \notin D$, то $v(x) = u(x) < K$. Значит, функция $v(x)$ пн. св. в точке ξ_0. Наконец, так как функция $u(x)$ субгармонична в точке ξ_0, то для всех достаточно малых положительных r

$$v(\xi_0) = u(\xi_0) \leqslant \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int\limits_{S(\xi_0, r)} u(x)\, d\sigma(x) \leqslant \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int\limits_{S(\xi_0, r)} v(x)\, d\sigma(x).$$

Следовательно, функция $v(x)$ субгармонична в V.

Если D — шар $D(x_0, R)$, то функция $v(x)$ совпадает с функцией, фигурирующей в теореме 2.7. При помощи теоремы о выпуклости 2.12 можно получить следующее утверждение.

Теорема 2.19. *Если D — шар $D(x_0, R)$, то функция $v(x)$ из теоремы 2.18 является единственной функцией, гармонической в $D(x_0, R)$, равной $u(x)$ во всех точках V, не лежащих в $D(x_0, R)$, и субгармонической в V. Таким образом, $u(x)$ является гармоническим продолжением функции u из $S(x_0, R)$ в смысле теоремы 2.7.*

Определим функцию $v(x)$ так же, как в теореме 2.18, и предположим, что $v_1(x)$ гармонична в $D(x_0, R)$, $v_1(x) = u(x)$ во всех точках V, не лежащих в $D(x_0, R)$, и $v_1(x)$ субгармонична в V.

По теореме 2.18, функция $v(x)$ также обладает этими свойствами, так что мы должны доказать равенство $v_1(x) = v(x)$.

Покажем прежде всего, что $v_1(x) \leqslant v(x)$ в D; эта часть рассуждений совершенно общая. Действительно, пусть $f_n(\xi)$ — последовательность непрерывных функций на F и $u_n(x)$ — гармонические продолжения функций $f_n(\xi)$ из F в D. Предположим, далее, что последовательность $f_n(\xi)$ убывает и стремится на F к функции $u(\xi)$. Положим

$$h_n(x) = v_1(x) - u_n(x).$$

Тогда если $\xi \in F$ и $x \to \xi$ изнутри области D, то

$$\overline{\lim}\, v_1(x) \leqslant v_1(\xi) = u(\xi) \leqslant f_n(\xi),$$
$$\lim u_n(x) = f_n(\xi),$$

поскольку функция $v_1(x)$ субгармонична и, значит, пн. св. в точке ξ, а $u_n(x)$ — гармоническое продолжение непрерывной функции $f_n(\xi)$. Таким образом, если $x \to \xi$ изнутри области D, то $\overline{\lim}\, h_n(x) \leqslant 0$. Из этого неравенства и принципа максимума следует, что в области D

$$h_n(x) \leqslant 0, \quad v_1(x) \leqslant u_n(x).$$

Устремляя в этих неравенствах n к бесконечности и используя тот факт, что $u_n(x) \to v(x)$, получаем, что $v_1(x) \leqslant v(x)$ в области D.

Теперь из принципа максимума (теорема 2.3) вытекает, что или $v_1(x) < v(x)$ в каждой точке D, или же $v_1(x)$ совпадает с $v(x)$. Предположим, что $D = D(x_0, R)$, и докажем, что в этом случае $v_1(x_0) = v(x_0)$. Отсюда будет следовать теорема 2.19.

Так как функция $v_1(x)$ субгармонична в V, а значит, и в $C(x_0, R)$, то из теоремы 2.12 следует, что $I(r, v_1)$ — непрерывная функция переменного r для $0 \leqslant r \leqslant R$. Кроме того, поскольку функция $v_1(x)$ гармонична в $D(x_0, R)$, функция $I(r, v_1)$ постоянна при всех $0 \leqslant r \leqslant R$. Следовательно,

$$v_1(x_0) = I(R, v_1) = I(R, u) = \lim_{n\to\infty} I(R, f_n) = \lim_{n\to\infty} u_n(x_0) = v(x_0).$$

Таким образом, $v_1(x_0) = v(x_0)$, и поэтому $v_1(x) \equiv v(x)$ в шаре $D(x_0, R)$. Теорема 2.19 доказана.

2.8. ПОДЧИНЕННОСТЬ

Здесь удобно обсудить понятие подчиненности, так как в этой теории субгармонические функции находят очень красивые применения. Результаты этого параграфа принадлежат Литлвуду [1924].

Пусть функции $f(z)$ и $F(z)$ мероморфны в круге $|z|<1$. Говорят, что функция $f(z)$ *подчинена* функции $F(z)$ или что $F(z)$ *подчиняет* $f(z)$ (обозначение $f(z) \prec F(z)$), если $f(z) = F(\omega(z))$, где функция $\omega(z)$ регулярна в $|z|<1$ и

$$|\omega(z)| \leqslant |z|, \quad |z|<1. \tag{2.8.1}$$

Таким образом, функция $\omega(z)$ должна удовлетворять условиям леммы Шварца. Наиболее полезные применения понятия подчиненности вытекают из следующей теоремы.

Теорема 2.20. *Пусть функции $F(z)$, $f(z)$ мероморфны в круге $|z|<1$ и отображают его в область D расширенной комплексной плоскости или, более общо, в область D римановой поверхности. Пусть, кроме того, $f(0) = F(0)$ и обратная функция $z = F^{-1}(w)$ задает взаимно однозначное конформное отображение области D в круг $|z|<1$ (если D односвязна) или, более общо, может быть неограниченно аналитически продолжена в D со значениями в $|z|<1$. Тогда $f(z) \prec F(z)$.*

Наиболее полезным является простейший случай, когда D — односвязная плоская область, однако функция $F(z)$ с требуемыми свойствами существует для любой плоской области D, дополнение к которой содержит по крайней мере три точки комплексной плоскости. Эта функция подчиняет себе все функции $f(z)$ со значениями в D и с данным значением $f(0)$ и является наибольшей среди таких функций [1]).

Для доказательства теоремы 2.20 положим

$$\omega(z) = F^{-1}\{f(z)\}$$

и заметим, что по предположению функцию $\omega(z)$ можно аналитически продолжить в круг $|z|<1$ со значениями, удовлетворяющими условиям $|\omega(z)|<1$, $\omega(0) = 0$. Кроме того, поскольку круг $|z|<1$ односвязен, функция $\omega(z)$ регулярна, т. е. однозначна в $|z|<1$. Следовательно, при $0<r<1$ функция $\omega(z)/z$ регулярна в круге $|z| \leqslant r$ и на окружности $|z| = r$ удовлетворяет неравенству

$$\left|\frac{\omega(z)}{z}\right| \leqslant \frac{1}{r}.$$

Из принципа максимума вытекает, что это неравенство выполняется во всем круге $|z| \leqslant r$. Фиксируя z и устремляя r к единице, получаем неравенство (2.8.1).

Следующие свойства очень легко выводятся прямо из определения.

---

[1]) См., например, Альфорс и Сарио [1960], особенно стр. 181.

Теорема 2.21. *Пусть в круге* $|z|<1$

$$f(z)=\sum a_n z^n \prec F(z)=\sum A_n z^n.$$

Тогда $a_0=A_0$,

$$|a_1|\leqslant|A_1|, \tag{2.8.2}$$

$$|a_2|\leqslant\max(|A_1|,\ |A_2|), \tag{2.8.3}$$

$$M(r,\ f)\leqslant M(r,\ F),\quad 0<r<1. \tag{2.8.4}$$

Полагая $f(z)=F[\omega(z)]$, где функция $\omega(z)=\sum\limits_1^\infty \omega_n z^n$ удовлетворяет (2.8.1), имеем

$$a_0=A_0,\quad a_1=A_1\omega_1,\quad a_2=A_2\omega_1^2+A_1\omega_2.$$

Из неравенства (2.8.1) сразу же получаем, что $|\omega_1|\leqslant 1$, причем равенство достигается лишь в случае $\omega(z)=ze^{i\lambda}$, $f(z)=F(ze^{i\lambda})$. Тем самым доказано неравенство (2.8.2). Кроме того, функция

$$\omega_1(z)=\frac{\omega(z)/z-\omega_1}{1-\bar{\omega}_1\omega(z)/z}=\frac{\omega_2 z}{1-|\omega_1|^2}+\ldots$$

удовлетворяет неравенству (2.8.1), так что

$$|\omega_2|\leqslant 1-|\omega_1|^2.$$

Следовательно,

$$|a_2|\leqslant|A_2|\,|\omega_1|^2+A_1(1-|\omega_1|^2)\leqslant\max(|A_1|,\ |A_2|),$$

откуда получаем (2.8.3). Наконец, из неравенства (2.8.1) вытекает, что

$$M(r,\ f)=\sup_{|z|\leqslant r}F[\omega(z)]\leqslant\sup_{|z|\leqslant r}|F(z)|=M(r,\ F),$$

т. е. неравенство (2.8.4). Теорема 2.21 доказана.

Теорема 2.22. *Предположим, что функция* $h(z)$ *субгармонична в круге* $|z|<1$, *а функция* $\omega(z)$ *регул рна в нем и удовлетворяет неравенству* (2.8.1). *Тогда*

$$\int_0^{2\pi} h[\omega(re^{i\theta})]\,d\theta\leqslant\int_0^{2\pi} h(re^{i\theta})\,d\theta,\quad 0<r<1. \tag{2.8.5}$$

Как непосредственное следствие отсюда получается следующая

Теорема 2.23. *Если* $f(z)=u(z)+iv(z)$ *подчинена функции* $F(z)=U+iV$, *а функция* $\varphi(u)$ *выпукла в области значений функции* $u(z)$, *принимаемых ею в круге* $|z|<1$, *то*

$$\int_0^{2\pi}\varphi[u(re^{i\theta})]\,d\theta\leqslant\int_0^{2\pi}\varphi[U(re^{i\theta})]\,d\theta,\quad 0<r<1. \tag{2.8.6}$$

Если $\psi(R)$ — *выпуклая возрастающая функция от* $\log R$ *в области значений функции* $R = |F(z)|$, *принимаемых ею в круге* $|z| < 1$, *то*

$$\int_0^{2\pi} \psi[|f(re^{i\theta})|]\,d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} \psi(|F(re^{i\theta})|)\,d\theta, \quad 0 < r < 1. \quad (2.8.7)$$

В частности, можно взять $\varphi(u) = |u|^k$, $k \geqslant 1$, $\psi(R) = R^\lambda$ *для* $\lambda > 0$, $\psi(R) = (\log^+ R)^k$ *для* $k \geqslant 1$ *или* $\psi(R) = \log R$.

Для доказательства теоремы 2.22 рассмотрим функцию $H(z)$ — гармоническое продолжение функции $h(z)$ в $|z| < r$. Без ограничения общности можно считать, что $\omega(z)$ не равна тождественно $ze^{i\lambda}$ для некоторого вещественного λ, так как в противном случае (2.8.5) превращается в тривиальное равенство. Таким образом, $|\omega(z)| < r$ для $|z| \leqslant r$, так что $H[\omega(z)]$ — гармоническая функция в круге $|z| \leqslant r$, и по теореме 2.7

$$\int_0^{2\pi} H[\omega(re^{i\theta})]\,d\theta = 2\pi H[\omega(0)] = 2\pi H(0) = \int_0^{2\pi} h(re^{i\theta})\,d\theta.$$

Кроме того, из этой же теоремы следует, что $h(\xi) \leqslant H(\xi)$, $|\xi| < r$, и поэтому

$$\int_0^{2\pi} h[\omega(re^{i\theta})]\,d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} H[\omega(re^{i\theta})]\,d\theta = \int_0^{2\pi} h(re^{i\theta})\,d\theta.$$

Теорема 2.22 доказана.

Из теоремы 2.2 получаем, что в предположениях теоремы 2.23 функции $\varphi[U(z)]$ и $\psi(|F(z)|)$ субгармоничны в круге $|z| < 1$. Стало быть теорема 2.23 следует теперь из теоремы 2.22. Если взять в (2.8.7) $\psi(R) = R^2$, то немедленно получаем

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\,d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^2\,d\theta,$$

или, в обозначениях теоремы 2.21,

$$\sum_0^\infty |a_n|^2 r^{2n} \leqslant \sum_0^\infty |A_n|^2 r^{2n}, \quad 0 < r < 1.$$

Устремляя r к единице, получаем

$$\sum_0^\infty |a_n|^2 \leqslant \sum_0^\infty |A_n|^2 \quad (2.8.8)$$

в предположении, что правая часть этого неравенства конечна.

Более тонкий подход приводит к следующему результату.

Теорема 2.24. *В предположениях теоремы* 2.21 *имеем*

$$\sum_0^N |a_n|^2 \leqslant \sum_0^N |A_n|^2, \quad N=1, 2, \ldots.$$

Положим

$$P(z)=\sum_0^N A_n z^n, \quad p(z)=P[\omega(z)].$$

Тогда

$$f(z)=\sum_0^\infty A_n [\omega(z)]^n = p(z)+O(z^{N+1}), \quad z \to 0.$$

Следовательно, функцию $p(z)$ можно представить в виде

$$p(z)=\sum_0^N a_n z^n + \sum_{N+1}^\infty b_n z^n.$$

Так как $p(z) \prec P(z)$, то из неравенства (2.8.8) следует, что

$$\sum_0^N |a_n|^2 + \sum_{N+1}^\infty |b_n|^2 \leqslant \sum_0^N |A_n|^2,$$

а это доказывает теорему 2.24. В частности, из теоремы 2.24 следует, что

$$|a_n| \leqslant \sqrt{n \max(|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_n|)},$$

и это неравенство дает правильный порядок роста в общем случае [1]), хотя для конкретных функций $F(z)$ можно получить более точные оценки.

Область D в $\mathbb{R}^m$ называется выпуклой, если для любой пары точек x_1, x_2 из D точки $tx_1+(1-t)x_2$ для $0<t<1$ также принадлежат D. По индукции можно получить, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — точки выпуклой области D, то

$$t_1x_1+t_2x_2+\ldots+t_nx_n \in D,$$

где t_j — неотрицательные числа, сумма которых равна единице. В частности, центр тяжести

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^n x_\nu$$

принадлежит области D. Используя это понятие, можно доказать следующую теорему:

Теорема 2.25. *Если* $f(z) \prec F(z)$, *где функция* $F(z)$ *взаимно однозначно и конформно отображает круг* $|z|<1$ *на выпуклую*

[1]) Примеры см. Рогозинский [1943].

область D, *то*

$$|a_n| \leqslant |A_1|, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Положим

$$f_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(ze^{2\pi i\nu/n}) = a_0 + a_n z^n + a_{2n} z^{2n} + \ldots .$$

Ясно, что функция $f_n(z)$ принимает значения только из области D, когда $|z| < 1$. Следовательно, при $|z| < 1$ функция

$$f_n(z^{1/n}) = a_0 + a_n z + a_{2n} z^2 + \ldots$$

также принимает значения только из области D. Поэтому, по теореме 2.20, $f_n(z^{1/n}) \prec F(z)$. Применяя к этой функции неравенство (2.8.2), получаем утверждение теоремы 2.25.

Упомянем здесь одно дальнейшее применение теоремы 2.23, для доказательства которого мы сошлемся на результаты, содержащиеся в других книгах.

Теорема 2.26. *Предположим, что функция* $f(z) = \sum_{1}^{\infty} a_n z^n$ *аналитична в круге* $|z| < 1$ *и что все значения* $f(z)$ *для* $|z| < 1$ *лежат в односвязной области, не содержащей значения* d. *Тогда*

$$I(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| \, d\theta < \frac{4|d|r}{1-r}, \quad 0 < r < 1; \tag{2.8.9}$$

$$|a_n| < 4|d| en, \quad n = 2, 3, \ldots . \tag{2.8.10}$$

Так как функция $f(z)$ принимает значения в D, то $f(z) \prec F(z) = \sum_{1}^{\infty} A_n z^n$, где $F(z)$ взаимно однозначно и конформно отображает круг $|z| < 1$ на область D. Поскольку $F(z) \neq d$, из теоремы Кёбе (см., например, Хейман [1958, теорема 1.2]) следует, что $|A_1| \leqslant 4|d|$. Тогда из теоремы Литлвуда (там же, теорема 1.6) получаем, что

$$I(r, F) < \frac{4|d|r}{1-r}.$$

Используя (2.8.7) с $\psi(R) = R$, получаем отсюда неравенство (2.8.9). Далее, интегральная формула Коши дает

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) \frac{dz}{z^{n+1}} \right| \leqslant \frac{I(r, f)}{r^n}.$$

Полагая $r = (n-1)/n$, получаем, что

$$|a_n| < 4d(n-1)\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = 4dn\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < 4den,$$

т. е. неравенство (2.8.10). Функция

$$f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=\sum_{1}^{\infty} nz^n$$

удовлетворяет предположениям теоремы 2.26, если в качестве области D взять w-плоскость с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси от $-\infty$ до $-1/4$, так что $d=-1/4$. Функция $I(r, f)$ в этом случае равна $r/(1-r^2)$. Литлвуд высказал гипотезу, что неравенства (2.8.9) и (2.8.10) можно заменить соответственно неравенствами

$$I(r, f)\leqslant\frac{4|d|r}{1-r^2} \quad \text{и} \quad |a_n|\leqslant 4|d|n.$$

Первая из этих гипотез недавно доказана Бернстейном [1975]. Вторая гипотеза до сих пор остается открытой.

Примеры

Мы предполагаем, что функция $f(z)=\sum\limits_{0}^{\infty} a_n z^n=u+iv$ аналитична в круге $|z|<1$ и подчинена функции $F(z)=\sum\limits_{0}^{\infty} A_n z^n$.

1. Пусть $F(z)\neq 0$ в $|z|<1$. Докажите, что

$$\inf_{|z|=r}|f(z)|\geqslant\inf_{|z|=r}|F(z)|, \quad 0<r<1.$$

2. Пусть $f(0)=\alpha+i\beta$ и $u(z)>0$ для $|z|<1$. Докажите, что

$$|a_n|\leqslant 2\alpha.$$

$$|f(0)|\frac{1-r}{1+r}\leqslant|f(z)|\leqslant|f(0)|\frac{1+r}{1-r}.$$

3. Пусть функция $f(z)$ не принимает в круге $|z|<1$ неотрицательных вещественных значений. Докажите, что $|a_n|\leqslant\leqslant 4n|a_0|$. (Рассмотрите функцию $g(z)=f(z)^{1/2}$ и используйте предыдущий пример.)

4. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $|z|<1$ и удовлетворяет там условию $|f(z)|>1$. Покажите, что $f(z)$ подчинена функции

$$F(z)=\exp\left\{\alpha\frac{1+z}{1-z}+i\beta\right\}$$

для подходящих положительного α и вещественного β. Выведите отсюда, что $|a_n|\leqslant|A_n|$ при $n>1$ (рассмотрите $\log f(z)$ и воспользуйтесь примером 2).

5. Пусть $|v| \leqslant l$ в круге $|z| < 1$. Докажите, что

$$|a_n| \leqslant 4l/\pi, \quad n \geqslant 1.$$

6. Покажите, что равенство в (2.8.3) может достигаться для любой заданной функции $F(z)$ и подходящей функции $f(z)$ и найдите все такие функции $f(z)$ для данной $F(z)$.

7. Покажите, что равенство в (2.8.4) возможно лишь тогда, когда $F(z)$ постоянна или $f(z) = F(ze^{i\lambda})$ для вещественного λ.

Глава 3

ТЕОРЕМЫ О ПРЕДСТАВЛЕНИИ

3.0. ВВЕДЕНИЕ

Один из наиболее важных результатов теории субгармонических функций, принадлежащий Ф. Риссу [1926, 1930], утверждает, что любая такая функция $u(x)$ может быть локально представлена как сумма потенциала и гармонической функции, т. е.

$$u(x) = p(x) + h(x).$$

Другими словами, если функция $u(x)$ субгармонична в области $D \subset \mathbb{R}^m$, то существует однозначно определяемая функцией $u(x)$ положительная мера $d\mu$, конечная на компактных подмножествах области D и такая, что если E — компактное подмножество D и

$$p(x) = \begin{cases} \int\limits_E \log|x-\xi|\, d\mu e_\xi, & m=2, \\ -\int\limits_E |x-\xi|^{2-m}\, d\mu e_\xi, & m>2, \end{cases} \tag{3.0.1}$$

то функция $h(x) = u(x) - p(x)$ гармонична внутри E.

Многие локальные свойства субгармонических функций можно получить при помощи этой теоремы из свойств потенциалов, таких, как $p(x)$. Распределение масс $d\mu$ также играет важную роль в более тонких вопросах, касающихся субгармонических функций. Так, например, если $m = 2$ и $u(z) = \log|f(z)|$, где f — аналитическая функция комплексного переменного z, то $\mu(E)$ сводится к числу нулей функции $f(z)$ на множестве E. С этой точки зрения основное различие между приведенным примером и общей субгармонической функцией заключается в том, что в общем случае «нули» не обязательно сосредоточены в отдельных точках, а имеют произвольное распределение масс.

В случае высших размерностей можно рассматривать $d\mu$ как гравитационный или электрический заряд, порождающий потенциал $p(x)$. По этой причине теорию субгармонических функций часто называют теорией потенциала.

В этой главе мы докажем цитированную выше теорему о представлении субгармонических функций. Вначале приводятся общие результаты из теории меры, интегрирования и линейных функционалов, включая знаменитую теорему Ф. Рисса [1909] о том, что любой положительный линейный функционал может быть представлен при помощи некоторой меры. После того как будет доказана теорема Рисса о представлении, мы выведем такой вариант формулы Пуассона — Иенсена (теорема 3.14), который позволит выразить произвольную субгармоническую функцию $u(x)$ через ее значение на границе области D и ее меру Рисса в D. Это в свою очередь приведет к обобщению теоремы 2.19 на более общие области D, даст первую основную теорему Неванлинны для функций, субгармонических в открытом шаре, и позволит охарактеризовать ограниченные субгармонические функции в $\mathbb{R}^m$ при $m \geqslant 3$.

3.1. МЕРА И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Пусть A и B — два произвольных множества. Через $A - B$ обозначим множество, состоящее из таких элементов x, что $x \in A$ и $x \notin B$. Семейство множеств R называется кольцом, если из того, что $A \in R$ и $B \in R$, вытекает, что

$$A \cup B \in R, \quad A - B \in R. \tag{3.1.1}$$

Так как $A \cap B = A - (A - B)$, то, если R — кольцо и $A \in R$, $B \in R$, имеем также $A \cap B \in R$. Кольцо называется σ-кольцом, если

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in R \tag{3.1.2}$$

при условии, что $A_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots$.

Очевидно, что пересечение любого числа σ-колец (т. е. класс множеств, принадлежащих всем σ-кольцам) снова образует σ-кольцо. В любом открытом или компактном множестве $X \subset \mathbb{R}^m$ пересечение всех σ-колец, содержащих открытые и замкнутые множества в X, называется σ-кольцом борелевских множеств в X. Любое борелевское множество может быть получено из открытых или замкнутых множеств посредством применения операций объединения и взятия разности конечное или счетное число раз.

Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется измеримой по Борелю, если все подмножества $\{x \in X \mid f(x) > a\}$, $\{x \in X \mid f(x) \geqslant a\}$, $\{x \in X \mid f(x) < a\}$ и $\{x \in X \mid f(x) \leqslant a\}$ суть борелевские множества для всевозможных вещественных значений a. Если функция $f(x)$ непрерывна, то все эти множества открыты или замкнуты, так что непрерывные функции всегда измеримы по Борелю. Легко проверить, что если функции f_1 и f_2 измеримы по Борелю, то функции $f_1 \pm f_2$, $f_1 f_2$ и f_1/f_2 (в предположении, что $f_2 \neq 0$) также измеримы по Борелю. Кроме того, если f_n, $n = 1, 2, \ldots,$— последовательность функций, измеримых по Борелю, и

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{3.1.3}$$

для каждого $x \in X$, то функция $f(x)$ также измерима по Борелю. В частности, согласно теореме 1.4, все полунепрерывные функции измеримы по Борелю.

Функция множества μ, заданная на некотором σ-кольце R, содержащем все открытые и замкнутые подмножества множества X и, следовательно, все борелевские множества в X, называется мерой, если выполнены следующие условия:

$$0 \leqslant \mu(E) \leqslant +\infty \quad \text{для} \quad E \in R. \tag{3.1.4}$$

Если E_n — конечное или счетное семейство попарно непересекающихся множеств из R, объединение которых есть E, то

$$\mu(E) = \sum \mu(E_n). \tag{3.1.5}$$

Для данной меры μ и измеримой по Борелю функции $f(x)$ на X можно следующим образом определить интеграл Радона [1])

$$\int_X f(x)\, d\mu.$$

Предположим вначале, что $f(x)$ — *простая функция*, т. е. $f(x)$ принимает лишь конечное число различных значений $y_0, y_1, \ldots, y_n$ соответственно на подмножествах $E_0, E_1, \ldots, E_n \subset X$, причем $y_0 = 0$ и $\mu(E_i) < \infty$ для $i > 0$. Положим

$$\int_X f(x)\, d\mu = \int_X f(x)\, d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \mu(E_i).$$

Далее, если $f(x) \geqslant 0$ на множестве X, то

$$I = \int_X f(x)\, d\mu = \sup \int_X g(x)\, d\mu,$$

где верхняя грань берется по всем простым функциям $g(x)$, таким, что $g(x) \leqslant f(x)$ на X. Следовательно, $0 \leqslant I \leqslant +\infty$. Аналогично, если $f(x) \leqslant 0$, полагаем

$$\int_X f(x)\, d\mu = -\int_X (-f(x))\, d\mu.$$

Наконец, для функции $f(x)$ общего вида положим

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \quad f^-(x) = -\min(f(x), 0),$$

так что $f = f^+ - f^-$. Обозначим

$$I^+ = \int_X f^+\, d\mu, \quad I^- = \int_X f^-\, d\mu$$

---

[1]) Радон [1919].

и определим интеграл Радона от функции $f(x)$ по мере μ формулой

$$\int\limits_X f\,d\mu = I^+ - I^-$$

в предположении, что хотя бы один из интегралов I^+ или I^- конечен. Если конечны оба интеграла I^+ и I^-, говорят, что функция f интегрируема по мере $d\mu$.

Определенный таким образом интеграл обладает всеми обычными свойствами. Из них для нас наиболее важны следующие свойства.

Аддитивность. Если $f(x)$ и $g(x)$ — интегрируемые функции, а a и b — вещественные числа, то функция $af(x)+bg(x)$ также интегрируема и

$$\int\limits_X (af+bg)\,d\mu = a\int\limits_X f\,d\mu + b\int\limits_X g\,d\mu. \tag{3.1.6}$$

Монотонная сходимость. Пусть $f_n(x)$ — последовательность измеримых по Борелю функций, причем $f_n(x)\to f(x)$ при $n\to\infty$ для каждого $x\in X$, за исключением, быть может, множества $X_0\subset X$, такого, что $\mu(X_0)=0$. В этом случае говорят, что $f_n(x)\to f(x)$ *μ-почти всюду* на X. Если $f_n(x)\to f(x)$ μ-почти всюду на X, функции $f_n(x)$ интегрируемы по мере μ для каждого n и последовательность $f_n(x)$ монотонна по n, то при $n\to\infty$

$$\int f_n(x)\,d\mu \to \int f(x)\,d\mu. \tag{3.1.7}$$

Подробное изложение теории интеграла Радона, включая доказательства всех упомянутых результатов, можно найти, например, в книге Рудина [1964], гл. 10.

3.2. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Мы уже видели, как исходя из меры, определенной на борелевских множествах, можно построить теорию интегрирования по Лебегу. Исследуем теперь обратную задачу: построить теорию меры и интегрирования, исходя из понятия положительного линейного функционала, имеющего те же основные свойства, что и интеграл.

Мы будем рассматривать классы функций $f(x)$, определенных на пространстве X, которое будет всегда предполагаться областью или компактным подмножеством $\mathbb{R}^m$. Носителем функции $f(x)$ называется замыкание в $\mathbb{R}^m$ множества тех точек, где $f(x)\neq 0$, т. е. множество всех точек и предельных точек того множества, где $f(x)\neq 0$.

Пусть $C_0 = C_0(X)$ — класс всех непрерывных функций на X, носители которых являются компактными подмножествами в X. Таким образом, если пространство X компактно, то C_0 — это просто класс всех непрерывных функций на X. Если X — область D, определим, кроме того, подмножество $C_0^\infty(D) \subset C_0(D)$, состоящее из функций класса C^∞, имеющих компактные носители в D.

Пусть $\mathscr{F}$ — такой класс функций на X, что если $f, g \in \mathscr{F}$, то функция $af + bg$, где a, b — вещественные числа, также принадлежат классу $\mathscr{F}$. Такой класс называется линейным. Положительным линейным функционалом или просто функционалом на линейном классе $\mathscr{F}$ называется вещественная функция $L(f)$, определенная на $\mathscr{F}$ и обладающая следующими свойствами.

Если $f(x) \in \mathscr{F}$ и $f(x) \geqslant 0$, то

$$0 \leqslant L(f) < \infty. \tag{3.2.1}$$

Кроме того, если $f, g \in \mathscr{F}$ и a, b — вещественные числа, то

$$L(af + bg) = aL(f) + bL(g). \tag{3.2.2}$$

Мы хотим показать, что (положительный) функционал, определенный на $C_0^\infty(D)$, можно продолжить до функционала на $C_0(D)$. Для этого нам понадобится следующая теорема аппроксимации.

Теорема 3.1. *Если D — область в $\mathbb{R}^m$, $f \in C_0(D)$ и $\varepsilon > 0$, то существует такая функция $g \in C_0^\infty(D)$, что*

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \text{в} \quad D.$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^m$ функцию $K(x)$ со следующими свойствами:

$$\begin{matrix} K(x) = 0, & |x| \geqslant 1, \\ K(x) > 0, & |x| < 1, \end{matrix} \quad K(x) \in C^\infty,$$

$$\int K(x)\, dx = 1, \tag{3.2.3}$$

где интеграл берется по всему пространству, или, что эквивалентно, по шару $|x| < 1$. Например, можно положить

$$K(x) = C \exp\left[-(1 - |x|^2)^{-1}\right], \quad |x| < 1,$$

где нормировочная константа C подбирается так, чтобы выполнялось равенство (3.2.3). Определим функцию g равенством

$$g(x) = \int f(x + \xi)\, \delta^{-m} K(\xi/\delta)\, d\xi, \tag{3.2.4}$$

где δ — достаточно малое положительное число. Получим искомую функцию.

В самом деле, полагая $x + \xi = u$, находим, что

$$g(x) = \delta^{-m} \int f(u) K\left(\frac{u-x}{\delta}\right) du.$$

Следовательно, можно бесконечно много раз дифференцировать под знаком интеграла [1]), откуда вытекает, что $g(x) \in C^{\infty}$ во всем пространстве. Кроме того, так как $f \in C_0(D)$, функция f обращается в нуль вне множества F, которое находится на положительном расстоянии δ_0 от дополнения к D. Поскольку $K(\xi/\delta) = 0$ для $|\xi| > \delta$, то $g(x) = 0$, если расстояние от точки x до F больше δ. Таким образом, если $\delta < \delta_0$, то функция $g(x)$ имеет компактный носитель в D, т. е. $g(x) \in C_0^{\infty}(D)$. Наконец,

$$g(x) - f(x) = \delta^{-m} \int\limits_{|\xi|<\delta} [f(x+\xi) - f(x)] K\left(\frac{\xi}{\delta}\right) d\xi.$$

Пусть число δ выбрано таким, что $|f(x+\xi) - f(x)| < \varepsilon$ для $|\xi| < \delta$. Такой выбор возможен, так как функция $f(x)$ непрерывна и имеет компактный носитель, а значит, равномерно непрерывна во всем пространстве. Тогда

$$|g(x) - f(x)| < \varepsilon\delta^{-m} \int\limits_{|\xi|<\delta} K\left(\frac{\xi}{\delta}\right) d\xi = \varepsilon.$$

Теорема 3.1. доказана.

Нам понадобится также следующая

Лемма 3.1. *Если D — область в $\mathbb{R}^m$ и F — компактное подмножество в D, то существует такая функция $g(x) \in C_0^{\infty}(D)$, что $g(x) \geqslant 0$ в D и $g(x) > 0$ в F.*

Пусть расстояние от множества F до дополнения к множеству D равно $2\delta_0$. Обозначим через F_1 множество всех точек, находящихся от множества F на расстоянии не больше δ_0, и пусть D_1 — дополнение к множеству F_1. Определим функцию $f(x)$ как расстояние от x до множества D_1. Очевидно, что она непрерывна, $f(x) \geqslant \delta_0 > 0$ на F, $f(x) \geqslant 0$ всюду и $f(x) = 0$ вне F_1. Следовательно, $f(x) \in C_0(D)$. Определим теперь функцию $g(x)$ равенством (3.2.4) и заметим, что $g(x) \geqslant 0$, так как $f(x) \geqslant 0$. Кроме того, если $\varepsilon < \delta_0$, то $g(x) > 0$ в F. Это завершает доказательство леммы 3.1.

Теперь мы можем доказать первую теорему о продолжении.

Теорема 3.2. *Если D — область в $\mathbb{R}^m$ и L — функционал на $C_0^{\infty}(D)$, то L допускает единственное продолжение на множество $C_0(D)$.*

---

[1]) При более общих предположениях это утверждение будет доказано в п. 3.4.1 (теорема 3.6).

Предположим, что $f(x) \in C_0(D)$. Пусть $g_1(x)$ и $g_2(x)$ — такие функции из $C_0^\infty(D)$, что $g_1(x) \leqslant f(x) \leqslant g_2(x)$ в области D. Назовем $g_1(x)$ нижней функцией, а $g_2(x)$ — верхней функцией. Положим

$$L^-(f) = \sup L(g_1), \quad L^+(f) = \inf L(g_2),$$

где верхняя грань берется по всем нижним функциям, а нижняя грань — по всем верхним функциям.

Поскольку $g_1 \leqslant g_2$, то на основании (3.2.1) и (3.2.2) имеем

$$L(g_2) = L(g_1) + L(g_2 - g_1) \geqslant L(g_1).$$

Следовательно, $L^-(f) \leqslant L^+(f)$. Покажем, что $L^-(f) = L^+(f)$. С этой целью предположим, что множество F является носителем функции f. Пусть F_1 — такое компактное подмножество области D, что F содержится в его внутренности D_1. Обозначим через $h(x)$ функцию из $C_0^\infty(D)$, такую, что $h(x) \geqslant 0$ в D и $h(x) > 0$ в F_1. Пусть η — минимум функции $h(x)$ в F_1. Приблизим $f(x)$ такой функцией $g(x) \in C_0^\infty(D_1)$, что для любых x и некоторого целого положительного n

$$|f(x) - g(x)| < \eta/n$$

и $f(x) = g(x) = 0$ вне множества F_1. Следовательно, для всех x имеем

$$g(x) - \frac{h(x)}{n} \leqslant f(x) \leqslant g(x) + \frac{h(x)}{n}.$$

Таким образом, если ввести обозначения $g_1 = g - h/n$, $g_2 = g + h/n$, получим

$$L^+(f) - L^-(f) \leqslant L(g_2) - L(g_1) = \frac{2}{n} L(h). \tag{3.2.5}$$

Поскольку число n может быть взято сколь угодно большим, отсюда следует, что $L^-(f) = L^+(f)$. Теперь для любой непрерывной функции f положим $L(f) = L^-(f) = L^+(f)$ и заметим, что в случае, когда $f \in C_0^\infty(D)$, это определение совпадает с первоначальным, так как для такой функции можно взять $g_1 = g_2 = f$. Очевидно, что для полученного продолжения выполняется неравенство (3.2.1).

Далее, если a — положительное число, а g_1 и g_2 — нижняя и верхняя функции для f, то ag_1 и ag_2 являются нижней и верхней функциями для af. Если же $a < 0$, то ag_2 и ag_1 — нижняя и верхняя функции для af. Отсюда получаем, что для любого вещественного числа a и функции $f \in C_0(D)$ выполняется равенство

$$L(af) = aL(f).$$

Если f_1, f_2 — нижняя и верхняя функции для f, а g_1, g_2 — нижняя и верхняя функции для g, где $f, g \in C_0(D)$, то $f_1 + g_1$, $f_2 + g_2$

являются нижней и верхней функциями для $f+g$ и

$$L(f_2+g_2)-L(f_1+g_1)=L(f_2-f_1)+L(g_2-g_1).$$

Правая часть в этом равенстве может быть сделана сколь угодно малой, поэтому $L(f+g)=L(f)+L(g)$. Следовательно, продолженный функционал удовлетворяет условию (3.2.2).

Это продолжение единственно, так как из неравенства (3.2.1) для $f_1 \leqslant f \leqslant f_2$ вытекает, что

$$L(f_1)\leqslant L(f)\leqslant L(f_2),$$

и поэтому для любого продолжения функционала L на более широкий класс функций f мы должны иметь

$$L^-(f)\leqslant L(f)\leqslant L^+(f).$$

Метод доказательства теоремы 3.2 в действительности позволяет продолжить функционал L на класс функций, который несколько шире класса непрерывных функций. Полученное таким образом продолжение соответствует интегралу Римана или Римана — Стилтьеса. Однако и этот класс еще недостаточно широк. Например, если X — открытый интервал $(0, 1)\subset \mathbb{R}^1$ и

$$L(f)=\int_0^1 f(x)\,dx,$$

где $f(x)\in C_0^\infty(D)$, то наш метод приводит к интегралу Римана для функций, интегрируемых по Риману. В самом деле, в этом случае $L^-(f)$ и $L^+(f)$ являются соответственно нижним и верхним интегралами Римана.

3.3. КОНСТРУКЦИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА (ТЕОРЕМА Ф. РИССА)

Предположим теперь, что на $C_0(X)$, где X — область или компактное подмножество в $\mathbb{R}^m$, задан положительный линейный функционал, и попытаемся единственным способом продолжить его на более широкий класс функций. С этой целью добавим в определение функционала еще одну аксиому.

Если последовательность f_n монотонно сходится к f и $L(f_n)$ определены и конечны для каждого $n=1, 2, \ldots$, то при $n\to\infty$

$$L(f_n)\to L(f). \tag{3.3.1}$$

Для интеграла Лебега эта аксиома выполняется согласно свойству (3.1.7). Кроме того, для функций $f(x)$, не принадлежащих $C_0(X)$, опустим в (3.2.1) требование $L(f)<\infty$. Покажем, что эти дополнительные предположения позволяют получить требуемое продолжение. Прежде всего покажем, что аксиома (3.3.1) согласована с предыдущими аксиомами.

Лемма 3.2. *Предположим, что* $f_n \in C_0(X)$, $n = 1, 2, \ldots$, *и что последовательность* f_n *монотонна, так что* $f_n \to f$ *при* $n \to \infty$ *и* $L(f_n) \to \lambda$. *Тогда если* $g \in C_0(X)$ *и* $g \leqslant f$, *то* $L(g) \leqslant \lambda$, *в то время как при* $g \geqslant f$ *имеем* $L(g) \geqslant \lambda$.

Предположим для определенности, что последовательность f_n возрастает с возрастанием n. В случае ее убывания доказательство аналогично. Если $g \geqslant f$, то $g \geqslant f_n$ для каждого n, и поэтому

$$L(g) \geqslant L(f_n).$$

Согласно (3.2.1) и (3.2.2), последовательность $L(f_n)$ возрастает и, значит, стремится к пределу λ. Следовательно, в этом случае $\lambda \leqslant L(g)$, как и требовалось.

Случай, когда $g \leqslant f$, немного труднее. Пусть F_1 — носитель функции f_1, G — носитель функции g и $F = F_1 \cup G$. Тогда F — компактное подмножество области D, и для точки x, расположенной вне F, имеем

$$g(x) = 0 = f_1(x) \leqslant f_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{3.3.2}$$

Построим теперь такую функцию $h(x) \in C_0(X)$, что

$$h(x) \geqslant 0 \text{ в } X, \quad h(x) \geqslant 1 \text{ в } F. \tag{3.3.3}$$

Если множество X компактно, можно положить $h(x) = 1$. Если X — область, воспользуемся леммой 3.1. Пусть p — фиксированное целое положительное число и $\varepsilon = p^{-1}$. Тогда для каждого $x \in F$ имеем $f(x) \geqslant g(x)$, так что

$$f_n(x) > g(x) - \varepsilon, \quad n \geqslant n_0(x).$$

Так как функции $f_n(x)$ и $g(x)$ непрерывны, то существует такой открытый шар $D(x, r)$ с центром в точке x и положительным радиусом, что

$$f_n(\xi) > g(\xi) - \varepsilon, \quad n = n_0(x), \quad \xi \in D(x, r).$$

По теореме Гейне — Бореля, конечное число $D_1, \ldots, D_N$ таких шаров покрывает множество F. Если $n_1, \ldots, n_N$ — соответствующие этим шарам номера и $m = \max(n_1, n_2, \ldots, n_N)$, то мы получаем, что

$$f_n(\xi) > g(\xi) - \varepsilon, \quad \xi \in F, \quad n > m.$$

С учетом (3.3.2) и (3.3.3) это дает

$$f_n(x) \geqslant g(x) - \frac{1}{p} h(x), \quad n \geqslant m, \quad x \in X.$$

Таким образом,

$$L(f_n) \geqslant L(g) - \frac{1}{p} L(h), \quad n \geqslant m.$$

Следовательно,

$$\lambda \geqslant L(g) - \frac{1}{p} L(h).$$

Поскольку p — произвольное положительное число, мы получаем, что $L(g) \leqslant \lambda$, что и требуется.

Отсюда немедленно вытекает следующая

Лемма 3.3. *Если функции f_n, f принадлежат $C_0(X)$ и $f_n \to f$ монотонно, то имеет место утверждение* (3.3.1).

Действительно, в этом случае можно в лемме 3.2 положить $g = f$, откуда $L(f) \leqslant \lambda$ и $L(f) \geqslant \lambda$. Мы видим, таким образом, что в $C_0(X)$ утверждение (3.3.1) является следствием (3.2.1) и (3.2.2).

Лемму 3.2 можно использовать для того, чтобы определить $L(f)$ для полунепрерывных функций. С этой целью так же, как в предыдущем параграфе, для любой вещественной функции $f(x)$ определим нижнюю функцию $f_1(x)$ и верхнюю функцию $f_2(x)$ как такие функции из $C_0(X)$, для которых соответственно $f_1(x) \leqslant \leqslant f(x)$ и $f_2(x) \geqslant f(x)$. Кроме того, положим

$$L^-(f) = \sup L(f_1), \quad L^+(f) = \inf L(f_2), \tag{3.3.4}$$

где нижняя и верхняя грани берутся соответственно по всем верхним и по всем нижним функциям. Если множество верхних функций для f пусто, полагаем $L^-(f) = -\infty$. Аналогично, $L^+(f) = \infty$, если пусто множество нижних функций для f.

3.3.1. Докажем теперь такое утверждение.

Лемма 3.4. *Если $f_n \in C_0(X)$ и $f_n \to f$ монотонно, то либо $L(f_n) \to L^-(f)$, либо $L(f_n) \to L^+(f)$ в зависимости от того, возрастает или убывает последовательность f_n.*

Предположим сначала, что последовательность f_n возрастает. Тогда для любого n функция f_n является нижней функцией для f. Таким образом,

$$L(f_n) \leqslant L^-(f), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и поэтому

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} L(f_n) \leqslant L^-(f).$$

С другой стороны, пусть g — произвольная нижняя функция для f. Тогда, по лемме 3.2, $\lambda \geqslant L(g)$. Поскольку это верно для любой функции g, то $\lambda \geqslant L^-(f)$. Следовательно, $\lambda = L^-(f)$. Аналогично, если последовательность f_n убывает, то $\lambda = L^+(f)$.

Таким образом, если мы хотим, чтобы выполнялось условие (3.3.1), нужно ввести следующее

Определение 3.3.1. Если f — полунепрерывная сверху функция на X, такая, что $f(x) \leqslant 0$ вне некоторого компактного подмножества в X, то полагаем $L(f) = L^+(f)$. Если же $f(x)$ — полунепрерывная снизу функция, такая, что $f(x) \geqslant 0$ вне некоторого компактного подмножества в X, то полагаем $L(f) = L^-(f)$.

Заметим, что функции, рассматриваемые в этом определении,— это в точности функции, являющиеся пределами монотонных последовательностей из $C_0(X)$. В самом деле, по теореме 1.3, монотонно убывающая последовательность непрерывных функций $f_n(x)$ сходится к пн. св. предельной функции $f(x)$. Если вдобавок функции $f_n(x)$ обращаются в нуль вне компактных подмножеств $F_n \subset X$, то $f_n(x) \leqslant 0$ вне F_1 и, значит, $f(x) \leqslant 0$ вне F_1.

Обратно, если функция $f(x)$ пн. св. на X, то, по теореме 1.4, существует убывающая последовательность $f_n(x)$ непрерывных функций на X, которая сходится к $f(x)$ при $n \to \infty$. Если X — компактное множество, то оно может быть взято в качестве того подмножества, вне которого $f_n = 0$ и $f \leqslant 0$. Если X — ограниченная область D, предположим, что $f(x) \leqslant 0$ вне некоторого компактного множества E, и продолжим функцию $f(x)$ нулем вне D. Тогда $f(x)$ пн. св. во всем пространстве $\mathbb{R}^m$. Кроме того, $f(x)$ ограничена сверху в $\mathbb{R}^m$, и поэтому в доказательстве теоремы 1.4 можно взять $\delta(\xi) = 1$. Так же, как в доказательстве этой теоремы, положим

$$M(\xi, h) = \sup_{|x-\xi| \leqslant h} f(x),$$

но слегка модифицируем (1.2.2) и положим

$$f_n(x) = 2n \int_{1/2n}^{1/n} M(x, t)\, dt.$$

Так, же, как и ранее, доказывается, что последовательность $f_n(x)$ для фиксированного x убывает с возрастанием n и сходится к $f(x)$ при $n \to \infty$; кроме того, при фиксированном n функции $f_n(x)$ непрерывны по x. Далее, если точка x находится от дополнения к D на расстоянии, меньшем $1/2n$, где n достаточно велико, то $M(x, t) = 0$ для $1/2n \leqslant t \leqslant 1/n$, и поэтому $f_n(x) = 0$. Таким образом, функции $f_n(x)$ обращаются в нуль вне некоторого компактного подмножества в D.

Если область D не ограничена, отобразим гомеоморфно $\mathbb{R}^m$ на открытый единичный шар в $\mathbb{R}^m$ и применим к преобразованной области описанную выше процедуру. Случай полунепрерывных снизу функций получается аналогично.

Заметим еще, что новое определение допускает ситуации $L(f) = -\infty$ (когда $f(x)$ пн. св.) и $L(f) = +\infty$ (когда $f(x)$ пн. сн.).

Теперь можно дать окончательное определение функционала $L(f)$.

Определение 3.3.2. Пусть $f(x)$ — произвольная функция, определенная на множестве X. Определим $L^-(f)$ и $L^+(f)$ формулами (3.3.4), где верхняя грань берется по всем полунепрерывным сверху функциям f_1, таким, что $f_1 \leqslant 0$ вне некоторого компактного подмножества из X и $f_1 \leqslant f$ на X, а нижняя грань берется по всем полунепрерывным снизу функциям f_2, таким, что $f_2 \geqslant 0$ вне некоторого компактного подмножества из X и $f_2 \geqslant f$ на X. Если $L^-(f)$ и $L^+(f)$ совпадают, определим $L(f)$ как их общее значение. Если, кроме того, значение $L(f)$ конечно, то говорят, что функция f *L-интегрируема.*

3.3.2. Докажем следующую теорему.

Теорема 3.3. *Пусть $\mathcal{F}$ — семейство L-интегрируемых функций. Семейство $\mathcal{F}$ линейно и определенный выше функционал $L(f)$ удовлетворяет условиям* (3.2.1) *и* (3.2.2). *Кроме того, если $f_n \in \mathcal{F}$, $L(f_n)$ ограничены и последовательность f_n монотонно стремится к f, то $f \in \mathcal{F}$ и выполнено условие* (3.3.1). *Значение $L(f)$ единственным образом определяется на $\mathcal{F}$ значением $L(f)$ на $C_0(D)$ и условиями* (3.2.1), (3.2.2) *и* (3.3.1).

С единственностью можно разделаться очень просто. Мы уже видели, что (3.3.1) вместе с исходным определением L на $C_0(D)$ задают L на всех нижних функциях f_1 и верхних функциях f_2, которые используются в определении интегрируемости. Таким образом, если $L(f)$ — произвольное продолжение L на линейный класс, содержащий эти полунепрерывные функции, то на основании свойств (3.2.1) и (3.2.2) имеем $L^-(f) \leqslant L(f) \leqslant L^+(f)$. Следовательно, если $L^-(f) = L^+(f)$, то $L(f)$ должно равняться общему значению этих двух величин.

Далее, если $f \geqslant 0$, то $f_1 = 0$ является нижней функцией и $L(f_1) = 0$. Поэтому $L(f) \geqslant 0$, так что выполнено условие (3.2.1).

Предположим теперь, что $L(f)$ существует, конечно и a — некоторое положительное число. Тогда можно найти такие верхнюю и нижнюю функции f_1 и f_2, что $f_1 \leqslant f \leqslant f_2$ и $L(f_2) < L(f_1) + \varepsilon$. При этом af_2 и af_1 являются верхней и нижней функциями для af и

$$L(af_2) - L(af_1) = a\{L(f_2) - L(f_1)\} < a\varepsilon.$$

Следовательно, функция af интегрируема. Если число a отрицательно, то af_2 и af_1 являются нижней и верхней функциями для af, и наш результат получается так же, как ранее. Итак, $L(af) = aL(f)$.

Предположим, наконец, что функции f, g интегрируемы и что f_1, g_1 — нижние функции соответственно для f, g, а f_2, g_2 — верхние функции для f, g, такие, что

$$L(f_2) - L(f_1) < \varepsilon, \quad L(g_2) - L(g_1) < \varepsilon.$$

Тогда $f_1 + g_1$, $f_2 + g_2$ суть нижняя и верхняя функции для $f + g$ и

$$L(f_2 + g_2) - L(f_1 + g_1) = L(f_2) - L(f_1) + L(g_2) - L(g_1) < 2\varepsilon.$$

Следовательно, функция $f + g$ интегрируема и $L(f + g) = L(f) + L(g)$.

Таким образом, класс $\mathscr{F}$ линеен и выполняются оба условия (3.2.1) и (3.2.2). Заметим, что верхние и нижние функции f_j из нашего определения интегрируемы в смысле нового определения в случае, когда $L(f_j)$ конечны. Например, если f_1 пн. св. и $f_1 < 0$ вне компактного подмножества из D, то, согласно определению 3.3.1, существует такая непрерывная функция f_2 с компактным носителем в D, что для данного $K > L(f_1)$

$$f_1 \leqslant f_2 \text{ в } D \text{ и } L(f_2) < K.$$

Таким образом, эти функции могут служить функциями f_1, f_2 определения 3.3.2. Аналогичным образом обстоит дело с полунепрерывными снизу функциями.

Остается установить свойство (3.3.1). Предположим вначале, что f_n — такая убывающая последовательность пн. св. функций, что $f_n \leqslant 0$ вне компактного подмножества из X и $f_n \to f$ при $n \to \infty$. Тогда, по теореме 1.3, функция f также полунепрерывна сверху. Пусть $g(x) \in C_0(X)$, $g(x) \geqslant f(x)$. Тогда в точности так же, как в доказательстве леммы 3.2, можно установить существование такой функции $h(x) \in C_0(X)$, что для данного $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что

$$f_n(x) < g(x) + \varepsilon h(x), \quad n > n_0.$$

Следовательно, поскольку $g(x)$, $h(x)$ принадлежат $C_0(X)$,

$$L(f_n) < L(g) + \varepsilon L(h), \quad n > n_0.$$

Таким образом, в этом случае

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} L(f_n) \leqslant L(g).$$

Так как это неравенство верно для любой непрерывной функции $g(x)$, такой, что $g(x) \geqslant f(x)$, то в силу полунепрерывности сверху функции $f(x)$ имеем $\lambda \leqslant L(f)$. Очевидно, что $L(f) \leqslant L(f_n)$ для любого n, и поэтому $L(f) \leqslant \lambda$. Следовательно, в этом случае $L(f) = \lambda$.

Аналогично, если f_n — возрастающая последовательность пн. сн. функций, каждая из которых неотрицательна вне компактного множества, то предельная функция f обладает теми же свойствами и выполнено условие (3.3.1).

Предположим теперь, что f_n — возрастающая последовательность интегрируемых функций. Введем обозначения $u_1 = f_1$, $u_n = f_n - f_{n-1}$, $n \geqslant 2$, так что

$$f_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Мы уже доказали, что функции u_n неотрицательны и интегрируемы для $n > 1$ и что

$$L(f_n) = \sum_{r=1}^{n} L(u_r).$$

Пусть $\lambda = \lim_{n\to\infty} L(f_n) = \sum_{r=1}^{\infty} L(u_r)$. Тогда найдутся такие пн. сн. функции g_r, что $u_r \leqslant g_r$ и $L(g_r) < L(u_r) + \varepsilon 2^{-r}$. Функция $g = \sum_1^\infty g_r$ пн. сн. и по доказанному выше

$$L(g) = \sum_1^\infty L(g_r) \leqslant \sum_1^\infty L(u_r) + \varepsilon = \lambda + \varepsilon.$$

Кроме того, g является верхней функцией для f и поэтому $L^+(f) \leqslant L(g) \leqslant \lambda + \varepsilon$. Поскольку это верно для любого положительного ε, имеем

$$L^+(f) \leqslant \lambda = \lim_{n\to\infty} L(f_n).$$

С другой стороны, $f_n \leqslant f$, и поэтому

$$L^-(f) \geqslant L^-(f_n) = L(f_n),$$

так что

$$L^-(f) \geqslant \lambda.$$

Таким образом, выполнено условие (3.3.1), и если λ конечно, то функция f интегрируема. Если последовательность f_n убывает, (3.3.1) доказывается аналогично. Этим завершается доказательство теоремы 3.3.

Заметим также, что если по крайней мере одна из функций f_n интегрируема, то условие (3.3.1) продолжает быть справедливым, даже если $L(f)$ бесконечно. Если, например, последовательность f_n монотонно возрастает и $L(f_n)$ конечно при каждом n, то $L(f_n)$ может стремиться только или к конечному пределу, или к $+\infty$. В последнем случае имеем $L^-(f) \geqslant L^-(f_n)$ для каждого n, и поэтому $L^-(\ ) = +\infty$. Следовательно, в этом случае $L^+(f) = L^-(f) = +\infty$.

3.3.3. Теперь уже нетрудно построить меру, ассоциированную с функционалом L, и показать, что она обладает требуемыми свойствами. Пусть E — некоторое множество. Характеристическая функция χ_E множества E по определению равна 1 на E и 0 вне E. Множество E называется измеримым, если функция χ_E L-интегрируема в смысле определения 3.3.2 или если E является пределом расширяющейся последовательности таких множеств. (Таким образом, множество E может быть измеримым, даже если $L(\chi_E) = +\infty$.) Определим меру μ, ассоциированную с функционалом L, полагая

$$\mu(E) = L(\chi_E).$$

Это определение приводит к теореме Рисса [1909] о положительных линейных функционалах.

Теорема 3.4. *Класс измеримых множеств является σ-кольцом R, содержащим все борелевские подмножества из X. Кроме того, μ является мерой на R и для любой интегрируемой функции $f(x)$ имеем*

$$L(f) = \int f\,d\mu. \tag{3.3.5}$$

Мера μ однозначно задается на борелевских множествах тем условием, что (3.3.5) *выполняется для $f \in C_0(X)$.*

Заметим, что если E — компактное подмножество в X, то χ_E пн. св. Кроме того, любое замкнутое подмножество в X является пределом расширяющейся последовательности компактных подмножеств из X. Таким образом, замкнутые подмножества в X измеримы. Следовательно, измеримы и открытые подмножества, так как если $A \cup B = X$, $A \cap B = \varnothing$, то $\chi_A = 1 - \chi_B$.

Предположим далее, что A и B — измеримые множества, имеющие в X компактные замыкания. Пусть $\chi_A(x)$, $\chi_B(x)$ — их характеристические функции, и пусть f_1, f_2 — соответственно нижняя и верхняя функции для χ_A и g_1, g_2 — нижняя и верхняя функции для χ_B. Рассматривая $\max(f_1, 0)$ вместо f_1 и $\inf(f_2, 1)$ вместо f_2, можно считать, что $0 \leqslant f_1 \leqslant \chi_A \leqslant f_2 \leqslant 1$ и, аналогично, $0 \leqslant g_1 \leqslant \chi_B \leqslant g_2 \leqslant 1$.

Так как функции f_1, g_1 пн. св. и неотрицательны, то функция $f_1 g_1$ пн. св. Аналогично, функция $f_2 g_2$ пн. сн. Кроме того, $f_1 g_1$ и $f_2 g_2$ являются нижней и верхней функциями для $\chi_A \chi_B$ и, в частности, измеримы. Наконец,

$$f_2 g_2 - f_1 g_1 = f_2(g_2 - g_1) + g_1(f_2 - f_1) \leqslant \leqslant g_2 - g_1 + f_2 - f_1.$$

Следовательно,

$$L(f_2 g_2 - f_1 g_1) \leqslant L[(g_2 - g_1) + (f_2 - f_1)] = = L(g_2) - L(g_1) + L(f_2) - L(f_1).$$

Правая часть этого неравенства может быть сделана сколь угодно малой, так как функции χ_A и χ_B измеримы. Следовательно, функция $\chi_A \chi_B$ также измерима и, значит, измеримо множество $A \cap B$. Далее, функция $\chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$ измерима. Так как она является характеристической функцией множества $A \cup B$, то $A \cup B$ также измеримо.

Кроме того, измерима функция $\chi_A - \chi_A \chi_B$, а так как это характеристическая функция множества $A - B$, то и $A - B$ измеримо.

Пусть, наконец, A_n — расширяющаяся последовательность измеримых множеств, обладающих в D компактными замыканиями. Тогда, согласно только что доказанному, $B_N = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$ является возрастающей последовательностью измеримых множеств. Пусть $\chi_N(x)$ — характеристическая функция B_N. Тогда $\chi_N(x)$ — возрастающая последовательность измеримых функций и, значит, функция $\chi(x) = \lim_{N\to\infty} \chi_N(x)$ также измерима и

$$L\{\chi(x)\} = \lim_{N\to\infty} L\{\chi_N(x)\}.$$

Следовательно, множество $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ измеримо и

$$\mu(B) = \lim_{N\to\infty} \mu(B_N). \tag{3.3.6}$$

Таким образом, R является σ-кольцом, содержащим все борелевские множества. Кроме того, если A_n — конечная или счетная система непересекающихся множеств в R и $B_N = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$, то $\chi_{B_N} = \sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n}$. Следовательно, поскольку все функции χ_{A_n} измеримы, мы заключаем, что

$$\mu(B_N) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n).$$

Если система счетна, из (3.36) вытекает, что

$$\mu(B) = \lim \mu(B_N) = \lim \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) = \sum_{1}^{\infty} \mu(A_n),$$

как и требовалось.

Заметим теперь, что равенство (3.3.5) выполняется в случае, когда f — характеристическая функция измеримого множества. Линейность функционала L и интеграла позволяет распространить это равенство на простые функции f и, следовательно, на произвольные измеримые функции. Наконец, для доказательства единственности меры μ заметим, что если равенство (3.3.5) выполнено для непрерывных функций, то $L(f)$ является положительным линейным функционалом, удовлетворяющим на непрерывных функциях условиям (3.2.1) и (3.2.2). Из леммы 3.4, определения 3.3.1 и (3.1.7) следует, что равенство (3.3.5) выполняется для функций, которые являются пределами монотонных последовательностей непрерывных функций с компактными носителями и, значит, для любых полунепрерывных функций. Отсюда следует, что равенство (3.3.5) выполняется для класса всех измеримых функций относительно функционала L, где измеримость понимается в смысле определения 3.3.2. В частности, (3.3.5) справедливо, если f — характеристическая функция борелевского множества, и поэтому μ определена на всех борелевских множествах. Это завершает доказательство теоремы 3.4.

3.4. ПОВТОРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ТЕОРЕМА ФУБИНИ

Меру μ, заданную на подмножестве X евклидова пространства, будем называть борелевской мерой, если X компактно и $\mu(X) < +\infty$ или если X открыто и $\mu(E) < \infty$ для любого компактного подмножества $E \subset X$. Очевидно, что мера, существование которой утверждалось в теореме 3.4, является борелевской. Таковыми же предполагаются и все меры, с которыми мы будем иметь дело в этой главе. Предположим теперь, что в области $D_1 \subset \mathbb{R}^p$ точек $x = (x_1, \ldots, x_p)$ задана борелевская мера μ_1, а в области $D_2 \subset \mathbb{R}^q$ точек $y = (x_{p+1}, \ldots, x_{p+q})$ задана борелевская мера μ_2. Мы хотим определить и исследовать борелевскую меру μ, заданную в области $D = D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^{p+q}$, состоящей из всех таких точек $z = (x_1, \ldots, x_{p+q})$, что $(x_1, \ldots, x_p) \in D_1$ и $(x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}) \in D_2$.

Пусть $f(z) = f(x, y)$ — непрерывная функция с компактным носителем в D. Положим

$$L_1(f) = \int d\mu_1(x) \int f(x, y)\, d\mu_2(y),$$
$$L_2(f) = \int d\mu_2(y) \int f(x, y)\, d\mu_1(x). \tag{3.4.1}$$

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 3.5. *Определяемые равенствами* (3.4.1) *функционалы* $L_1(f)$ *и* $L_2(f)$ *совпадают на* $C_0(D)$.

Пусть F — носитель функции f в D. Тогда множество F компактно и поэтому компактны его проекции F_1 и F_2 соответственно на D_1 и D_2. Следовательно, $f(x, y)$ для каждого $x \in D_1$ является непрерывной функцией с компактным носителем в D_2. Значит, определена функция

$$F(x) = \int f(x, y)\, d\mu_2(y).$$

Функция $F(x)$ непрерывна. Действительно, $f(x, y)$ непрерывна и, следовательно, равномерно непрерывна на F, а потому в D. Таким образом, для любого данного $\varepsilon > 0$ существует такое δ, что если

$$|x' - x''| < \delta \quad \text{и} \quad |y' - y''| < \delta, \tag{3.4.2}$$

то

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon. \tag{3.4.3}$$

В частности, если $x', x'' \in D_1$ и $|x' - x''| < \delta$, то

$$|F(x') - F(x'')| = \left| \int \{f(x', y) - f(x'', y)\}\, d\mu_2(y) \right| < \varepsilon\mu_2(F_2).$$

Следовательно, функция $F(x)$ непрерывна в D_1 и имеет носитель в F_1, так что интеграл $L_1(f)$ корректно определен. Аналогично, корректно определен интеграл $L_2(f)$. Так как интегралы $L_1(f)$ и $L_2(f)$ конечны, то выполняется условие (3.2.1). Из определения немедленно следует условие (3.2.2). Таким образом, $L_1(f)$ и $L_2(f)$ — положительные линейные функционалы.

Докажем теперь, что $L_1(f) = L_2(f) = L(f)$. С этой целью для данного $\varepsilon > 0$ выберем δ так, чтобы при условиях (3.4.2) было выполнено неравенство (3.4.3). Пусть δ_0 — расстояние от множества F до дополнения к области D, и пусть

$$\eta \leqslant \frac{1}{2(p+q)} \min(\delta, \delta_0).$$

Под интервалом I в пространстве $\mathbb{R}^{p+q}$ будем понимать множество, определяемое неравенствами

$$m_\nu \eta \leqslant x_\nu < (m_\nu + 1)\eta, \quad \nu = 1, \ldots, p+q, \tag{3.4.4}$$

где m_ν — целые числа. Пусть $I_1, \ldots, I_k$ — интервалы, пересекающиеся с множеством F. В силу выбора числа η, все эти интервалы расположены в $(\delta_0/2)$-окрестности F' множества F. Они попарно не пересекаются, и их объединение покрывает F.

Согласно теореме 3.3, оба функционала L_1 и L_2 могут быть единственным образом продолжены как линейные функционалы на ограниченные измеримые по Борелю функции с компактными носителями в D и, в частности, на характеристические функции $\chi_s(z)$ интервалов I_s. Если I_s — один из таких интервалов, задаваемых неравенствами (3.4.4), обозначим через I_s^x, I_s^y проекции I_s соответственно на области D_1 и D_2. Таким образом, I_s^x и I_s^y — интервалы в $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$, задаваемые неравенствами (3.4.4), в которых

$\nu = 1, \ldots, p$ и $\nu = p + 1, \ldots, p + q$ соответственно. В этих обозначениях очевидно, что

$$L_1(\chi_s) = \mu_1(I_s^x)\,\mu_2(I_s^y) = L_2(\chi_s).$$

Обозначим через L_s общее значение $L_1(\chi_s) = L_2(\chi_s)$. Пусть, далее, b_s и B_s — нижняя и верхняя грани функции $f(x, y)$ в I_s. В силу (3.4.3) и выбора числа η имеем

$$|B_s - b_s| < \varepsilon, \quad s = 1, \ldots, k.$$

Кроме того, для $j_s = 1, 2$

$$L_j(f) = L_j\Big(f\sum_{s=1}^{k} \chi_s\Big) = \sum_{s=1}^{k} L_j(f\chi_s) \leqslant \sum_{s=1}^{k} B_s L_s.$$

Аналогично имеем $L_j(f) \geqslant \sum\limits_{s=1}^{k} b_s L_s$. Следовательно,

$$|L_2(f) - L_1(f)| \leqslant \sum_{s=1}^{k} (B_s - b_s)\,L_s < \varepsilon \sum_{s=1}^{k} L_s \leqslant \varepsilon L_j(\varphi), \qquad j = 1, 2,$$

где φ — характеристическая функция F'. Поскольку число ε произвольно, $L_2(f) = L_1(f)$. Лемма 3.5 доказана.

Теперь мы в состоянии доказать теорему Фубини.

Теорема 3.5. *Пусть μ_1, μ_2 — борелевские меры, заданные соответственно на областях $D_1 \subset \mathbb{R}^p$ и $D_2 \subset \mathbb{R}^q$, а $f(x, y)$ — измеримая по Борелю функция в $D = D_1 \times D_2$. Тогда повторные интегралы $L_1(f)$ и $L_2(f)$, определенные равенствами* (3.4.1), *существуют и равны в предположении, что f имеет постоянный знак в D или, более общо, что $f \leqslant g$ или $f \geqslant -g$, где функция g неотрицательна в D и $L_1(g) = L_2(g) < \infty$.*

Согласно лемме 3.5, по крайней мере для $f \in C_0(D)$ имеем $L_1(f) = L_2(f) = L(f)$.

Кроме того, по теореме 3.3, функционал $L(f)$ можно единственным образом продолжить с сохранением свойств (3.2.1), (3.2.2) и (3.3.1) на линейный класс L-интегрируемых функций. Если допустить $+\infty$ в качестве возможного значения $L(f)$, то $L(f)$ оказывается определенным на всех положительных измеримых по Борелю функциях в области D.

Пусть $f_n(x, y)$ — монотонная последовательность неотрицательных измеримых по Борелю функций в D, сходящаяся к $f(x, y)$. Тогда для каждого фиксированного x последовательность

$$F_n(x) = \int f_n(x, y)\, d\mu_1(y)$$

монотонна и сходится к неотрицательному пределу $F(x)$. Следовательно, если $F_n(x)$ измерима по Борелю в D_1, то $F(x)$ измерима по Борелю в D. Так как интеграл Лебега от положительной функции удовлетворяет условию (3.3.1), то

$$F(x) = \int f(x, y)\, d\mu_2(y)$$

в предположении, что $F_n(x)$ конечно для некоторого n или что $F_n(x)$ возрастает с увеличением n.

Поскольку все характеристические функции борелевских множеств могут быть получены путем не более чем счетных объединений или взятия разности компактных множеств, то определения (3.4.1) можно распространить на такие функции, а значит, и на неотрицательные измеримые по Борелю функции, как в § 3.1. Таким образом, единственное продолжение функционала L на все неотрицательные измеримые по Борелю функции может быть задано любой из двух формул (3.4.1). Аналогичное заключение справедливо и для неположительных измеримых по Борелю функций в D.

Предположим, наконец, что $g \geqslant 0$ и что $L(g) < +\infty$ и $f \geqslant -g$. Представим функцию f в виде $f = f + g - g$. Тогда для $j = 1, 2$ имеем $L_j(f) = L_j(f+g) - L_j(g)$, где $L_j(f)$ определен формулами (3.4.1). По доказанному,

$$L_1(f+g) = L_2(f+g), \quad L_1(g) = L_2(g).$$

Следовательно, $L_1(f) = L_2(f)$, как и требовалось. Теорема 3.5 доказана. Заметим, что, поскольку каждый из повторных интегралов, определенных формулами (3.4.1), является линейным функционалом, он может быть представлен в виде интеграла Лебега относительно борелевской меры $d\mu$ в D, т. е.

$$L(f) = \int_D f(z)\, d\mu(z).$$

Мы видим, что для интервала I в D выполняется равенство $\mu(I) = \mu_1(I^x)\,\mu_2(I^y)$. Нетрудно показать, что это соотношение задает μ на всех борелевских множествах. Мера μ называется произведением мер μ_1 и μ_2. Эта процедура может быть проведена для произведения конечного числа мер. Например, произведение k одномерных мер Лебега дает k-мерную меру Лебега в пространстве $\mathbb{R}^k$.

3.4.1. Свертка

Пусть $K_\delta(x)$ — ограниченная борелевская функция в $\mathbb{R}^m$ с носителем в шаре $|x| < \delta$, $\mu(x)$ — борелевская мера в $|x| < \delta$ и $f(x)$ — функция, определенная в ограниченной области

$D \subset \mathbb{R}^m$. Определим свертку формулой

$$F(x) = \int K_\delta(y) f(x+y)\, d\mu(y)$$

и установим некоторые свойства $F(x)$. Если D — произвольная область, определим δ-внутренность $D^\circ(\delta)$ множества D как множество всех точек, находящихся от дополнения к D на расстоянии, большем δ. Имеет место следующая

Теорема 3.6. (i) *Если функция $f(x)$ субгармонична в D и $K_\delta(y) \geqslant 0$, то $F(x)$ субгармонична в $D^\circ(\delta)$. Если функция $f(x)$ гармонична в D, то $F(x)$ гармонична в $D^\circ(\delta)$.*

(ii) *Если $d\mu$ есть m-мерная мера Лебега, $K_\delta(y) \in C^p$ и $f(x)$ интегрируема в D, то $F(x) \in C^p$ в области $D^\circ(\delta)$.*

Предположим вначале, что функция $f(x)$ непрерывна в D и поэтому равномерно непрерывна в $D^\circ(\delta_0)$ для некоторого $\delta_0 > 0$. Пусть число δ_0 фиксировано. Тогда для данного $\varepsilon > 0$ существует такое η, что если $|x_1 - x_2| < \eta$ и $x_1, x_2 \in D^\circ(\delta_0)$, то $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Таким образом, если точки x_1, x_2 принадлежат $D^\circ(\delta + \delta_0)$ и $|x_1 - x_2| < \eta$, то

$$|F(x_1) - F(x_2)| = \left| \int_{|y|<\delta} (f(x_1+y) - f(x_2+y))\, K_\delta(y)\, d\mu(y) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int_{|y|<\delta} |K_\delta(y)|\, d\mu(y) = C\varepsilon,$$

где C — константа. Следовательно, функция $F(x)$ непрерывна. Предположим теперь, что $f(x)$ пн. св. в D и что $K(x) \geqslant 0$. Тогда, по теореме 1.4, существует убывающая последовательность $f_n(x)$ непрерывных функций в D, сходящаяся к $f(x)$. Положим

$$F_n(x) = \int K_\delta(y)\, f_n(x+y)\, d\mu(y).$$

Функции $F_n(x)$ непрерывны в $D^\circ(\delta + \delta_0)$ для любого положительного числа δ_0, и поскольку $K_\delta(y)$ положительна, то последовательность $F_n(x)$ убывает с возрастанием n. Поэтому последовательность $F_n(x)$ сходится к

$$F(x) = \int K_\delta(y) f(x+y)\, d\mu(y).$$

Следовательно, функция $F(x)$ является пределом убывающей последовательности непрерывных функций и, значит, полунепрерывна сверху.

Для того чтобы завершить доказательство пункта (i) теоремы 3.6, остается показать, что если функция $f(x)$ субгармонична и, значит, удовлетворяет неравенству среднего значения (определение 2.1, (iii)), то субгармонической является и функция $F(x)$. Предположим, что $x_0 \in D^\circ(\delta+\eta)$ и $r<\eta$. Тогда

$$\frac{1}{c_m r^{m-1}} \int\limits_{S(x_0,\, r)} F(x)\, d\sigma(x) =$$

$$= \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int\limits_{S(x_0,\, r)} d\sigma(x) \int\limits_{|y|<\delta} f(x+y) K_\delta(y)\, d\mu(y) =$$

$$= \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int\limits_{|y|<\delta} K_\delta(y)\, d\mu(y) \int\limits_{S(x_0,\, r)} f(x+y)\, d\sigma(x) \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{|y|<\delta} K_\delta(y)\, d\mu(y)\, f(x_0+y) = F(x_0).$$

Изменение порядка интегрирования в двойном интеграле законно на основании теоремы Фубини. Действительно, подынтегральное выражение равно нулю вне множества $|y| \leqslant \delta' < \delta$ и $|x-x_0| \leqslant r$. При этих условиях $x+y \in D^\circ(\delta+\eta-\delta'-r) = F_0$, и поэтому функция $f(x+y)$ равномерно ограничена сверху некоторой константой M. Так как $K_\delta(y)$ неотрицательна и ограничена, то функция $K_\delta(y) f(x+y)$ также равномерно ограничена сверху. Кроме того, $\mu(F_0) < \infty$. Следовательно, если положить $g(x,y) = M$ для $x+y \in F_0$ и $g(x,y)=0$ в противном случае, то функция $g(x,y)$ интегрируема относительно меры $d\mu$ и $f(x+y) K_\delta(y) \geqslant g(x,y)$. Таким образом, выполнены все условия теоремы Фубини. Значит, функция $F(x)$ субгармонична в $D^\circ(\delta+\eta)$ для каждого $\eta>0$, т. е. субгармонична в $D^\circ(\delta)$.

Предположим, наконец, что функция $f(x)$ гармонична в D. Тогда $f(x)$ и $-f(x)$ субгармоничны в D, и поэтому $F(x)$ и $-F(x)$ субгармоничны в $D^\circ(\delta)$. Следовательно, по теореме 2.9, $F(x)$ гармонична в $D^\circ(\delta)$. Этим завершается доказательство пункта (i) теоремы 3.6.

Переходим к доказательству пункта (ii). В предположениях этой теоремы можно представить $F(x)$ для $x \in D^\circ(\delta)$ в виде

$$F(x) = \int K_\delta(y) f(x+y)\, dy = \int K_\delta(z-x) f(z)\, dz, \qquad (3.4.5)$$

где интегрирование распространено на все пространство, но подынтегральное выражение равно нулю для $|y| \geqslant \delta$, т. е. для $|z-x| \geqslant \delta$. Следовательно, если $x_1, x_2 \in D^\circ(\delta+\eta)$, где $\eta>0$, то

$$F(x_1) - F(x_2) = \int\limits_{D^\circ(\eta)} f(z) \{K_\delta(z-x_1) - K_\delta(z-x_2)\}\, dz.$$

Если функция $K_\delta(y)$ непрерывна и поэтому равномерно непрерывна в пространстве, то для данного $\varepsilon>0$ можно выбрать такое

$\eta > 0$, что при $|y_1 - y_2| < \eta$ имеем $|K_\delta(y_1) - K_\delta(y_2)| < \varepsilon$. Таким образом, если $|x_1 - x_2| < \eta$, то

$$|F(x_1) - F(x_2)| < \varepsilon \int_D |f(z)|\, dz,$$

т. е. функция $F(x)$ непрерывна в $D^\circ(\delta)$.

Предположим теперь, что $K_\delta(y) \in C^p$. Тогда можно дифференцировать подынтегральное выражение во втором интеграле в (3.4.5) по переменным x. Действительно, если l обозначает точку на одной из координатных осей, $|l| = 1$ и $K'_\delta(y)$ — частная производная K в направлении этой оси, то можно выбрать η настолько малым, что если h — вещественное число, $|h| < \eta$ и y — произвольная точка, то

$$\left|\frac{K_\delta(y+hl) - K_\delta(y)}{h} - K'_\delta(y)\right| < \varepsilon.$$

Отсюда для $x_1 \in D^\circ(\delta)$ и достаточно малого h следует, что

$$\left|\frac{F(x_1+hl) - F(x_1)}{h} + \int K'_\delta(z-x) f(z)\, dz\right| < \varepsilon \int_D |f(z)|\, dz.$$

Следовательно, при $h \to 0$

$$\frac{F(x_1+hl) - F(x_1)}{h} \to - \int K'_\delta(z-x) f(z)\, dz.$$

Таким образом, $F(x)$ обладает всеми частными производными первого порядка. Поскольку функция $K'_\delta(y)$ непрерывна, то по доказанному выше все эти частные производные непрерывны. Если $K_\delta(y) \in C^p$, $p > 1$, то этот процесс можно продолжить и повторно продифференцировать по x подынтегральное выражение во втором интеграле (3.4.5). Этим завершается доказательство теоремы 3.6.

3.4.2. Теорему 3.6 можно использовать для получения некоторых дополнительных результатов о субгармонических функциях, играющих существенную роль в доказательстве теоремы Рисса. Начнем со следующего утверждения.

Теорема 3.7. *Если μ — борелевская мера на компактном множестве E в $\mathbb{R}^m$ и $p(x)$ — потенциал, определенный формулой* (3.0.1), *то $p(x)$ есть субгармоническая функция в $\mathbb{R}^m$, гармоническая вне E. В частности, $p(x)$ почти всюду конечен и интегрируем относительно меры Лебега на любом компактном множестве.*

Положим

$$f(x) = \begin{cases} \log |x|, & m = 2, \\ -|x|^{2-m}, & m > 2. \end{cases}$$

Тогда, как было показано в п. 1.5.1, функция $f(x)$ гармонична всюду в $\mathbb{R}^m$, за исключением начала координат. Поскольку $f(x)$ стремится к $-\infty$ при $x \to 0$, то очевидно, что $f(x)$ остается субгармонической в начале координат, если положить $f(0) = -\infty$. Определим функцию $K_\delta(y)$ формулой

$$K_\delta(y) = \begin{cases} 1, & y \in E, \\ 0, & y \notin E. \end{cases}$$

Тогда по теореме 3.6 функция

$$F(x) = \int K_\delta(\xi) f(x+\xi)\, d\mu e_\xi = \int_E f(x+\xi)\, d\mu e_\xi$$

субгармонична во всем пространстве и гармонична в окрестности любой точки x, для которой $x + \xi \neq 0$, $\xi \in E$. Следовательно, функция $F(-x) = p(x)$ субгармонична в $\mathbb{R}^m$ и гармонична вне E. В частности, $p(x)$ конечна вне E. Последнее утверждение вытекает теперь из теоремы 2.6.

Нашим следующим результатом будет

Теорема 3.8. *Пусть функция $u(x)$ субгармонична в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^m$. Тогда существует такая последовательность $u_n(x)$ субгармонических функций класса C^∞ в $D^\circ(1/n)$, что для $x \in D^\circ(1/n_0)$ значения $u_n(x)$ строго убывают при $n > n_0$ и стремятся к $u(x)$ при $n \to \infty$.*

Если $u(x) = -\infty$, полагаем $u_n(x) = -n$ в D. Предположим теперь, что функция $u(x)$ не равна тождественно $-\infty$. Определим функцию $K(x)$ как ядро, используемое в доказательстве теоремы 3.1, и положим

$$u_n(x) = \int u(x+\xi)\, n^m K(n\xi)\, d\xi.$$

Очевидно, что функции $u_n(x)$ определены в $D^\circ(1/n)$ и субгармоничны там по теореме 3.6. Так как, в силу теоремы 2.6, для $x \in D^\circ(1/n)$ функция $u(x)$ интегрируема по шару $D(x, 1/n)$, то $u_n(x) \in C^\infty$ в $D^\circ(1/n)$.

Остается доказать, что последовательность $u_n(x_0)$, убывая, стремится к $u(x_0)$ при $n \to \infty$. С этой целью положим для $0 < r < 1$ и $x_0 \in D^\circ(r)$

$$f_r(x_0) = r^{-m} \int u(x_0 + \xi)\, K(\xi/r)\, d\xi =$$

$$= r^{-m} \int_0^r d\rho\, k(\rho/r) \int_{S(x_0,\, \rho)} u(\eta)\, d\sigma(\eta).$$

Здесь через $k(t)$ обозначено постоянное значение функции $K(x)$ на $S(0, t)$, $\sigma(\eta)$ — поверхностная мера на $S(x_0, \rho)$. В обозначениях теоремы 2.12 можно переписать $f_r(x_0)$ в виде

$$f_r(x_0) = r^{-m}\int_0^r c_m \rho^{m-1} k(\rho/r)\, I_\rho(u)\, d\rho.$$

Положим $\varphi(t) = c_m t^{m-1} k(t)$. Тогда

$$f_r(x_0) = \int_0^1 \varphi(t)\, I_{rt}(u)\, dt.$$

Функция $\varphi(t)$ положительна и непрерывна по t при $0 < t < 1$. Согласно (3.2.3), если $u \equiv 1$, то $f_r(x) \equiv 1$. Таким образом,

$$\int_0^1 \varphi(t)\, dt = 1.$$

Из теоремы 2.12 вытекает, что $I_r(u)$ является возрастающей функцией переменного r. Следовательно, $I_{rt}(u)$ — возрастающая функция r для каждого фиксированного t, и поэтому $f_r(x_0)$ —возрастающая функция r. Поэтому $u_n(x_0) = f_{1/n}(x_0)$ убывает с увеличением номера n. Кроме того, по теореме 2.12, $I_r(u) \to u(x_0)$ при $r \to 0$. Если $u(x_0) = -\infty$, то для любой данной положительной константы K имеем $I_r(u) < -K$, $r < r_0$, и поэтому $f_r(x_0) < -K$, $r < r_0$. Таким образом, $f_r(x_0) \to -\infty$ при $r \to 0$ и, следовательно, $u_n(x_0) \to -\infty = u(x_0)$ при $n \to \infty$. Если же $u(x_0)$ конечно, то для данного $\varepsilon > 0$ имеем

$$u(x_0) \leqslant I_r(u) < u(x_0) + \varepsilon, \quad 0 < r < r_0.$$

Это дает следующую оценку:

$$u(x_0) \leqslant f_r(x_0) < u(x_0) + \varepsilon, \quad 0 < r < r_0.$$

Таким образом, $f_r(x_0) \to u(x_0)$ при $r \to 0$ и, следовательно, $u_n(x_0) \to u(x_0)$ при $n \to \infty$. Последовательность $u_n(x)$ убывает и стремится к $u(x)$ при $n \to \infty$. Для того чтобы получить строгое убывание с увеличением n, заменим $u_n(x)$ функцией $u_n(x) + 1/n$. Этим завершается доказательство теоремы 3.8.

3.5. ФОРМУЛИРОВКА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ РИССА О ПРЕДСТАВЛЕНИИ

В этом параграфе мы докажем теорему Рисса. Будем рассматривать функции в $\mathbb{R}^m$, где $m \geqslant 2$, и положим

$$K(x) = \begin{cases} \log|x|, & m = 2, \\ -|x|^{2-m}, & m > 2. \end{cases} \tag{3.5.1}$$

Тогда теорема Рисса [1926, 1930] формулируется следующим образом.

Теорема 3.9. *Пусть $u(x)$ — субгармоническая функция в области $D \subset \mathbb{R}^m$, не равная тождественно $-\infty$. Тогда в D существует единственная борелевская мера μ, такая, что для любого компактного подмножества $E \subset D$*

$$u(x) = \int_E K(x-\xi)\, d\mu e_\xi + h(x), \tag{3.5.2}$$

где $h(x)$ — гармоническая функция во внутренности E.

В настоящее время существует много различных доказательств этой глубокой и важной теоремы. Предлагаемое доказательство следует идеям Лорана Шварца [1950] и основано на теории распределений, или линейных функционалов. Мы воспользуемся тремя леммами, на которые в итоге будет опираться доказательство.

3.5.1. Начнем с построения меры, существование которой утверждается в теореме 3.9, и сделаем это при помощи одного линейного функционала.

Лемма 3.6. *Пусть $u(x)$ — функция, субгармоническая в области $D \subset \mathbb{R}^m$, не равная тождественно $-\infty$. Тогда формула*

$$L_u(v) = \int_D u \nabla^2 v\, dx \tag{3.5.3}$$

определяет L_u как функционал на классе функций $v \in C_0^\infty(D)$.

Предположим вначале, что область D — открытый шар $D = D(x_0, r)$ в $\mathbb{R}^m$. Поскольку $v \in C_0^\infty(D)$ имеет компактный носитель в D, функция v и все ее частные производные обращаются в нуль вне некоторого шара $D' = D(x_0, r')$, где $r' < r$. Кроме того, согласно теореме 2.6, функция $u(x)$ интегрируема по шару D' и $\nabla^2 v$ равномерно ограничен в нем. Следовательно, функция $L_u(v)$ корректно определена и конечна. Ясно, что функционал $L_u(v)$ линеен для $v \in C_0^\infty(D)$. Остается показать, что функционал $L_u(v)$ положителен, т. е. что $L_u(v) \geqslant 0$, если $v(x) \geqslant 0$ в D.

Для этого воспользуемся теоремой 3.8. Пусть $u_n(x)$ — убывающая последовательность субгармонических функций, бесконечно дифференцируемых в окрестности замыкания $C' = C(x_0, r')$ шара D', сходящаяся к функции $u(x)$ в C'. Так как v и все ее частные производные обращаются в нуль на границе $S' = S(x_0, r')$ шара D', то по теореме Грина 1.9 имеем

$$\int_{D'} (u_n \nabla^2 v - v \nabla^2 u_n)\, dx = 0.$$

Таким образом, если $v \geqslant 0$ в D, то

$$L_{u_n}(v) = \int_D u_n \nabla^2 v\, dx = \int_{D'} u_n \nabla^2 v\, dx = \int_{D'} v \nabla^2 u_n\, dx \geqslant 0.$$

Кроме того, поскольку убывающая последовательность u_n сходится к u в D', имеем

$$\int_{D'} u_n\, dx \to \int_{D'} u\, dx,$$

т. е.

$$\int_{D'} (u_n - u)\, dx = \int_{D'} |u_n - u|\, dx \to 0$$

при $n \to \infty$. Далее, функция $\nabla^2 v$ непрерывна в C' и поэтому ограничена там некоторой константой M. Следовательно, при $n \to \infty$

$$\left| \int_{D'} u_n \nabla^2 v\, dx - \int_{D'} u \nabla^2 v\, dx \right| \leqslant \int_{D'} |u_n - u|\, |\nabla^2 v|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant M \int_{D'} |u_n - u|\, dx \to 0,$$

т. е.

$$L_{u_n}(v) \to L_u(v). \tag{3.5.4}$$

Значит, $L_u(v) \geqslant 0$. Этим завершается доказательство леммы 3.6 в случае, когда область D — шар.

Для того чтобы распространить этот результат на общий случай, применим конструкцию, называемую *разбиением единицы*. Пусть $v \in C_0^\infty(D)$ и E — компактное подмножество в D, содержащее носитель функции v. Из теоремы Гейне — Бореля следует, что множество E может быть покрыто конечным числом открытых шаров $D_\nu = D(x_\nu, r_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, N$, замыкания C_ν которых содержатся в D. В каждом D_ν определим функцию $e_\nu(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, положительную в D_ν и равную нулю вне D_ν. Можно положить, например,

$$e_\nu(x) = \exp\{-(r_\nu^2 - |x - x_\nu|^2)^{-2}\}, \quad x \in D_\nu.$$

Определим затем функцию $v_\nu(x)$ формулой

$$v_\nu(x) = \begin{cases} v(x)\, e_\nu(x) \Big/ \sum\limits_{\nu=1}^{N} e_\nu(x), & x \in D_\nu, \\ 0, & x \notin D_\nu. \end{cases}$$

Каждая граничная точка ξ шара D_μ, лежащая в E, содержится во внутренности некоторого шара D_ν, $\nu \neq \mu$; следовательно,

$\sum e_\nu(\xi) \neq 0$. Значит, $v_\nu(x) \in C^\infty$ в окрестности точки $x = \xi$. Если ξ — граничная точка D_ν, находящаяся вне E, то $v(x)$, а тем самым $v_\nu(x)$ обращаются в нуль в окрестности $x = \xi$. Таким образом, $v_\nu(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, причем носитель $v_\nu(x)$ содержится в D_ν.

Кроме того, если $v(x) \geqslant 0$, то $v_\nu(x) \geqslant 0$. Наконец,

$$v(x) = \sum_{\nu=1}^{N} v_\nu(x).$$

Следовательно, функционал $L_u(v)$, определенный равенством (3.5.3), линеен по v, и если $v \geqslant 0$ в D, то

$$L_u(v) = \sum_{\nu=1}^{N} L_u(v_\nu) \geqslant 0,$$

так как $v_\nu(x)$ имеют носители в D_ν. Лемма 3.6 тем самым доказана. Соотношение (3.5.4) остается верным и в общем случае, так как оно выполняется для каждой функции v_ν.

Из теоремы 3.2 теперь следует, что функционал $L_u(v)$ можно единственным образом продолжить как линейный функционал на класс функций $v \in C_0(D)$. Рассмотрим это продолжение. Из теоремы 3.4 вытекает существование такой борелевской меры μ, однозначно определенной на всех борелевских подмножествах в D, что для $v \in C_0(D)$ и, в частности, для $v \in C_0^\infty(D)$ имеет место равенство

$$L_u(v) = \int_D v \, d\mu. \tag{3.5.5}$$

Мы хотим показать, что мера μ, умноженная на некоторую константу, обладает всеми свойствами, указанными в теореме 3.9. Заметим, между прочим, что если функция u гармонична в D, то по теореме Грина $L_u(v)$, а значит, и μ тождественно обращается в нуль в D. Наш следующий результат будет заключаться в доказательстве обратного утверждения.

3.5.2. Для доказательства единственности меры μ в теореме 3.9 установим следующий результат.

Лемма 3.7. *Если функции u, u' субгармоничны в D и*

$$L_u(v) = L_{u'}(v)$$

для любой функции $v \in C_0^\infty(D)$, то $u(x) = u'(x) + h(x)$, где $h(x)$ — гармоническая функция в D.

Достаточно рассмотреть лишь такие функции v, носители которых содержатся в открытом шаре $D' = D(x_0, r') \subset D$. Предположим сначала, что функция u субгармонична и принадлежит классу C^∞ в окрестности шара $C' = C(x_0, r_2)$, где $r_2 < r'$. Тогда если $0 < r_1 < r_2$, то по теореме Грина

$$\int\limits_{S(x_0, r_1)} \frac{\partial u}{\partial r} d\sigma = \int\limits_{D(x_0, r_1)} \nabla^2 u\, dx. \tag{3.5.6}$$

Введя обозначение

$$I(r, u) = \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int\limits_{S(x_0, r)} u(x)\, d\sigma(x),$$

можно переписать уравнение (3.5.6) в виде

$$\left[r^{m-1} \frac{\partial}{\partial r} I(r, u)\right]_{r=r_1} = \int\limits_{D(x_0, r_1)} \frac{1}{c_m} \nabla^2 u\, dx.$$

Положим $t = \log r$ при $m = 2$, $t = -r^{2-m}$ при $m > 2$, и пусть

$$e_2 = c_2, \quad e_m = (m-2)\, c_m, \quad m > 2.$$

Тогда уравнение принимает вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} I(r, u)\right]_{r=r_1} = \frac{1}{e_m} \int\limits_{D(x_0, r_1)} \nabla^2 u\, dx.$$

Интегрируя его от $r = r_1$ до $r = r_2$, где $0 < r_1 < r_2 < r'$, получим

$$I(r_2, u) - I(r_1, u) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{m-1}} \int\limits_{D(x_0, r)} \frac{1}{c_m} \nabla^2 u\, dx.$$

Согласно теореме Фубини, в этом двойном интеграле можно изменить порядок интегрирования. Тогда

$$I(r_2, u) - I(r_1, u) = \int\limits_{D(x_0, r_2)} g(x)\, \nabla^2 u\, dx, \tag{3.5.7}$$

где

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{c_m} \displaystyle\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{m-1}}, & |x - x_0| \leqslant r_1, \\[2ex] \dfrac{1}{c_m} \displaystyle\int\limits_{|x|}^{r_2} \frac{dr}{r^{m-1}}, & r_1 < |x - x_0| < r_2. \end{cases}$$

Если g принадлежит C^∞, то (3.5.7) можно записать в виде

$$I(r_2, u) - I(r_1, u) = L_u(g). \tag{3.5.8}$$

Покажем теперь, что это равенство в действительности выполняется для произвольной субгармонической функции u, не обязательно принадлежащей классу C^∞.

Предположим сначала, что по-прежнему $u \in C^\infty$ и для всех $v \in C_0^\infty(D')$ функционал $L_u(v)$ определен равенством (3.5.3). Тогда для таких v имеем по теореме Грина

$$L_u(v) = \int v \nabla^2 u \, dx. \tag{3.5.9}$$

Это равенство определяет $L_u(v)$ как положительный линейный функционал на всех функциях $v \in C_0(D')$. Так как по теореме 3.2 продолжение из $C_0^\infty(D')$ в $C_0(D')$ единственно, то (3.5.9) остается верным для всех функций $v \in C_0(D')$ и, в частности, для g. Поэтому выполнено (3.5.8).

Если u — произвольная субгармоническая функция, не равная тождественно $-\infty$ в D', то пусть u_n — такая убывающая последовательность субгармонических функций в D' класса C^∞, что $u_n \to u$ при $n \to \infty$. Тогда из (3.3.1) следует, что для $j = 1, 2$

$$I(r_j, u_n) \to I(r_j, u) \quad \text{при } n \to \infty. \tag{3.5.10}$$

Докажем, что

$$L_{u_n}(g) \to L_u(g) \quad \text{при } n \to \infty. \tag{3.5.11}$$

С этой целью подберем в $C_0^\infty(D')$ такие функции g_1, g_2, что

$$g_1 \leqslant g \leqslant g_2, \quad L_u(g_2) < L_u(g_1) + \varepsilon. \tag{3.5.12}$$

Возможность построения таких функций g_1 и g_2 была показана в (3.2.5). Кроме того, из (3.5.4) и определения (3.5.3), которое имеет силу для g_1 и g_2, следует, что $L_{u_n}(g_j) \to L_u(g_j)$ при $n \to \infty$. Отсюда и из (3.5.12) заключаем, что для всех достаточно больших n

$$L_u(g) - \varepsilon < L_{u_n}(g_j) < L_u(g) + \varepsilon, \quad j = 1, 2.$$

Поскольку $L_{u_n}(v)$ при каждом n является положительным линейным функционалом, из этих неравенств и (3.5.12) вытекает, что

$$L_u(g) - \varepsilon < L_{u_n}(g) < L_u(g) + \varepsilon.$$

Это дает утверждение (3.5.11). Так как уже доказано, что равенство (3.5.8) выполняется для функций u_n из $C_0^\infty(D)$, то из (3.5.10) и (3.5.11) следует, что (3.5.8) выполняется для произвольной субгармонической функции u.

Предположим, наконец, что функции u, u' удовлетворяют условиям леммы 3.7. Тогда $L_u(v)$ и $L_{u'}(v)$ определяют один и тот же положительный линейный функционал на $C_0^\infty(D')$, и поэтому, в силу единственности продолжения (теорема 3.2), на $C_0(D')$. В частности, в условии леммы 3.7 можно положить $v = g$ и вывести из (3.5.8) следующее соотношение:

$$I(r_2, u') - I(r_1, u') = I(r_2, u) - I(r_1, u).$$

В частности, функция $I(r) = I(r, u') - I(r, u)$ постоянна при $0 < r \leqslant r'$. Это утверждение справедливо в любом шаре $D(x_1, \rho) \subset \subset D$, а не только в $D' = D(x_0, r')$. Поэтому для фиксированной точки $x_1 \in D$ функция

$$I(x_1, \rho) = \frac{1}{c_m \rho^{m-1}} \int\limits_{S(x_1, \rho)} [u'(x) - u(x)]\, d\sigma(x)$$

постоянна в предположении, что $\rho < \delta(x_1)$, где $\delta(x_1)$ есть расстояние от x_1 до дополнения к D.

Положим теперь

$$h(x_1) = I(x_1, \rho), \quad 0 < \rho < \delta(x_1). \tag{3.5.13}$$

Тогда из теоремы 2.12 следует, что

$$u'(x_1) = u(x_1) + h(x_1), \tag{3.5.14}$$

за исключением случая, когда одновременно $u'(x)$ и $u(x)$ тождественно равны $-\infty$. В этом последнем случае равенство (3.5.14) также имеет место, в том смысле, что обе его части равны $-\infty$. Следовательно, (3.5.14) выполняется во всех случаях.

Осталось доказать, что функция $h(x)$ гармонична в D. Для этого заметим, что $h(x)$ конечна в D и, согласно (3.5.14), для $x_1 \in D$, $\rho < \delta(x_1)$

$$\frac{1}{c_m \rho^{m-1}} \int\limits_{S(x_1, \rho)} h(x)\, d\sigma(x) = \frac{1}{c_m \rho^{m-1}} \int\limits_{S(x_1, \rho)} [u'(x) - u(x)]\, d\sigma(x) = h(x_1). \tag{3.5.15}$$

Кроме того, так как функции $u(x)$, $u'(x)$ субгармоничны и не обращаются тождественно в бесконечность, то из (3.5.14) следует, что $h(x)$ интегрируема относительно меры Лебега на компактных подмножествах в D. Пусть функция $k_\delta(\rho)$ непрерывна для всех положительных ρ, равна нулю при $\rho \geqslant \delta$, положительна при $0 < \rho < \delta$ и удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^\delta c_m \rho^{m-1} k_\delta(\rho)\, d\rho = 1.$$

Тогда полагаем

$$H(x) = \int\limits_{D(x, \delta)} h(\xi)\, k_\delta(|x - \xi|)\, d\xi = \int\limits_0^\delta k_\delta(\rho)\, d\rho \int\limits_{S(x, \rho)} h(\xi)\, d\sigma(\xi) = h(x).$$

По теореме 3.6 функция $H(x)$ непрерывна в $D_0(\delta)$, а значит, там непрерывна и функция $h(x)$. Так как число δ произвольно, то $h(x)$ непрерывна всюду в D. Поскольку выполнено равенство

(3.5.15), обе функции $h(x)$ и $-h(x)$ субгармоничны в D, и поэтому, в силу теоремы 2.9, $h(x)$ гармонична в D. Лемма 3.7 доказана

3.5.3. Нашим последним вспомогательным результатом будет следующая

Лемма 3.8. *Пусть* $K(x)$ — *ядро, определенное формулой* (3.5.1), *а* μ — *борелевская мера, заданная на компактных подмножествах области* D. *Предположим, что*

$$p(x)=\frac{1}{e_m}\int K(x-\xi)\,d\mu(\xi),$$

где $e_m = c_m d_m$ *и* $d_2 = 1$, $d_m = m-2$, $m > 2$. *Тогда*

$$L_p(v)=\int_D v\,d\mu.$$

Согласно теореме 3.2, достаточно доказать требуемый результат для $v \in C_0^\infty(D)$. Предположим сначала, что носитель функции v содержится в шаре $D' = D(x_0, r')$, замыкание которого принадлежит области D. По теореме 3.7 функция $p(x)$ субгармонична в $\mathbb{R}^m$ и, в частности, в области D. Поэтому из (3.5.3) вытекает, что

$$L_p(v)=\frac{1}{e_m}\int_{D'} p(x)\,\nabla^2 v(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{e_m}\int_{D'} \nabla^2 v(x)\,dx\int_D K(x-\xi)\,d\mu(\xi). \tag{3.5.16}$$

Изменим порядок интегрирования в этом двойном интеграле. Покажем прежде всего, что такое изменение законно. Положим

$$v_1(x) = \max(\nabla^2 v(x), 0), \qquad -v_2(x) = \inf(\nabla^2 v(x), 0),$$

так что $v_1(x)$ и $v_2(x)$ — неотрицательные непрерывные функции. Кроме того, произведение $v_1(x)K(x-\xi)$ ограничено сверху некоторой константой M_0 и, так как $\mu(D) < \infty$,

$$\int_{D'} M_0\,dx\int_D d\mu(\xi) < +\infty.$$

Следовательно, по теореме 3.5, можно изменить порядок интегрирования в двойных интегралах

$$\int_{D'} v_1(x)\,dx\int_D K(x-\xi)\,d\mu(\xi), \qquad \int_{D'} v_2(x)\,dx\int_D K(x-\xi)\,d\mu(\xi).$$

Поэтому можно изменить порядок интегрирования и в двойном интеграле

$$\int_{D'} \nabla^2 v(x)\,dx \int_D K(x-\xi)\,d\mu(\xi),$$

в предположении что интегралы для $v_1(x)$ и $v_2(x)$ конечны. Для того чтобы доказать это предположение, допустим, что $v_1 \leqslant M_1$. Тогда если $K^-(x) = -\inf(K(x), 0)$, то

$$\int_{D'} v_1(x)\,dx \int_D K(x-\xi)\,d\mu(\xi) \geqslant -\int_{D'} dx \int_D M_1 K^-(x-\xi)\,d\mu(\xi) =$$
$$= -\int_D d\mu(\xi) \int_{D'} M_1 K^-(x-\xi)\,dx > -\infty,$$

поскольку функция $K(x)$ локально интегрируема в окрестности начала координат. Таким образом, изменение порядка интегрирования в (3.5.16) законно. Следовательно,

$$L_p(v) = \frac{1}{e_m} \int_D d\mu(\xi) \int_{D'} \nabla^2 v(x)\,K(x-\xi)\,dx. \qquad (3.5.17)$$

Введем теперь следующее обозначение:

$$I(\xi) = \int_{D'} \nabla^2 v(x)\,K(x-\xi)\,dx.$$

Для того чтобы вычислить этот интеграл, выберем сначала некоторую точку $\xi \in D' = D(x_0, r')$ и оценим разность

$$I_\varepsilon(\xi) = \Bigl(\int_{D(x_0,\, r')} - \int_{D(\xi,\, \varepsilon)}\Bigr) \nabla^2 v K(x-\xi)\,dx,$$

где ε — малое положительное число. Согласно теореме Грина 1.9, эту разность можно переписать в виде

$$I_\varepsilon(\xi) = \int_{S(x_0,\, r')} \Bigl(v\frac{\partial K}{\partial n} - K\frac{\partial v}{\partial n}\Bigr) d\sigma(x) +$$
$$+ \int_{S(\xi,\, \varepsilon)} \Bigl(v\frac{\partial K}{\partial n} - K\frac{\partial v}{\partial n}\Bigr) d\sigma(x) + \Bigl(\int_{D(x_0,\, r')} - \int_{D(\xi,\, \varepsilon)}\Bigr) v\nabla^2 K(x-\xi)\,dx.$$

Поскольку функция $K(x-\xi)$ гармонична всюду, за исключением точки $x = \xi$, последний интеграл обращается в нуль. Функция v и ее частные производные обращаются в нуль на $S(x_0, r')$, поэтому интеграл по этой поверхности также равен нулю. Следовательно,

$$I_\varepsilon(\xi) = \int_{S(\xi,\, \varepsilon)} \Bigl(v\frac{\partial K}{\partial \varepsilon} - K\frac{\partial v}{\partial \varepsilon}\Bigr) d\sigma(x).$$

Второй интеграл в этом выражении стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Кроме того,

$$\frac{\partial K}{\partial \varepsilon} \sim d_m \varepsilon^{1-m} \quad \text{при } \varepsilon \to 0,$$

где $d_2 = 1$, $d_m = m - 2$, $m > 2$. Поэтому

$$I_\varepsilon(\xi) = \{v(\xi) + o(1)\} d_m \varepsilon^{1-m} \int\limits_{S(\xi,\, \varepsilon)} d\sigma(x) = c_m d_m v(\xi) + o(1), \quad \varepsilon \to 0.$$

Отсюда следует, что

$$I(\xi) = e_m v(\xi). \tag{3.5.18}$$

Предположим теперь, что точка ξ лежит вне шара D'. Тогда функция $K(x - \xi)$ гармонична на замыкании D', и непосредственное применение к D' теоремы Грина дает

$$I(\xi) = \int\limits_{S(x_0,\, r')} \left(v \frac{\partial K}{\partial n} - K \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma(x) + \int\limits_{D'} v \nabla^2 K(x - \xi)\, dx = 0.$$

Если точка ξ лежит на границе $S(x_0, r')$ области D', то выполняется такое же равенство. Действительно, поскольку носитель функции v является компактным подмножеством в D', можно заменить r' немного меньшим числом. Следовательно, равенство (3.5.18) выполняется для любой функции v, носитель которой лежит в шаре, целиком содержащемся в D. Так как произвольная функция $v \in C_0^\infty(D)$ методом п. 3.5.1 может быть представлена в виде конечной суммы функций $v_n \in C_0^\infty(D_n)$, где D_n — шары, содержащиеся в области D, то равенство (3.5.18) верно для всех функций $v \in C_0^\infty(D)$. Лемма 3.8 следует теперь из этого факта и равенства (3.5.17).

3.5.4. Доказательство теоремы Рисса

Предположим, что функция $u(x)$ субгармонична в области $D \subset \mathbb{R}^m$ и не равна там тождественно $-\infty$. Для функций $v \in C_0^\infty(D)$ определим функционал $L_u(v)$ формулой (3.5.3). По лемме 3.6, $L_u(v)$ — положительный линейный функционал, который однозначно продолжается на класс $C_0(D)$ и с помощью борелевской меры μ, однозначно определенной по u и D, задается формулой (3.5.5).

Пусть E — произвольное компактное подмножество в D; рассмотрим потенциал

$$p(x) = \frac{1}{e_m} \int\limits_E K(x - \xi)\, d\mu(\xi).$$

Из леммы 3.8 вытекает, что если Δ — внутренность множества E и $v \in C_0(\Delta)$, то

$$L_p(v) = \int v\, d\mu = L_u(v).$$

Поэтому, согласно лемме 3.7, $u(x) = p(x) + h(x)$, где $h(x)$ — гармоническая функция в Δ.

Обратно, предположим, что Δ — область, замыкание которой является компактным подмножеством в D. Пусть $\mu_1(x)$ — конечная мера на Δ, такая, что $u(x) = p_1(x) + h_1(x)$, где

$$p_1(x) = \frac{1}{e_m}\int K(x-\xi)\, d\mu_1(\xi),$$

а функция $h_1(x)$ гармонична в Δ. Тогда из (3.5.3) следует, что для произвольной функции $v \in C_0^\infty(\Delta)$

$$L_u(v) = L_{p_1}(v) + L_{h_1}(v) = L_{p_1}(v) = L_p(v).$$

Согласно лемме 3.8, отсюда следует, что

$$\int v\, d\mu = \int v\, d\mu_1.$$

Поскольку это равенство справедливо для любой функции $v \in C_0^\infty(\Delta)$, оно остается верным и для продолженного на $v \in C_0(\Delta)$ функционала. В силу теоремы 3.4 отсюда следует, что $\mu(e) = \mu_1(e)$ для любого борелевского подмножества $e \subset \Delta$. Этим доказана единственность меры μ, а значит, и вся теорема 3.9.

Заметим, что мы доказали теорему 3.9 для меры $e_m^{-1}\, d\mu$ вместо $d\mu$, где $d\mu$ — мера, определенная равенством (3.5.5). Если $u \in C_0^2(D)$, то из теоремы Грина следует, что в (3.5.5)

$$d\mu = \nabla^2 u\, dx,$$

так что в этом случае (3.5.2) принимает вид

$$u(x) = \frac{1}{e_m}\int\limits_E K(x-\xi)\, \nabla^2 u\, dx + h(x).$$

В дальнейшем *мерой Рисса* функции u мы будем называть меру μ из (3.5.2), а не по-другому нормированную меру (3.5.5).

3.6. ГАРМОНИЧЕСКАЯ МЕРА

В этом параграфе мы снова обсудим понятие гармонического продолжения, введенное впервые в п. 2.7.2. Материал, находящийся теперь в нашем распоряжении, позволит углубить понимание этого вопроса. Докажем следующее утверждение.

Теорема 3.10 [1]. *Пусть D — ограниченная регулярная область в $\mathbb{R}^m$ с границей F. Тогда для произвольной точки $x \in D$ и произвольного борелевского множества e на F существует функция $\omega(x, e)$ со следующими свойствами:*

(i) *$\omega(x, e)$ для фиксированной точки $x \in D$ является борелевской мерой на F и $\omega(x, F) = 1$;*

(ii) *$\omega(x, e)$ для фиксированного множества $e \subset F$ является гармонической функцией x в области D;*

(iii) *если $f(\xi)$ — полунепрерывная функция, определенная на F, то*

$$u(x) = \int_F f(\xi)\, d\omega(x, e_\xi) \tag{3.6.1}$$

является гармоническим продолжением функции $f(\xi)$ из F в D. Мера $\omega(x, e) = \omega(x, e, D)$ называется гармонической мерой множества e в точке x относительно области D.

Для доказательства теоремы 3.10 обозначим через $L_x(f)$ значение в точке $x \in D$ гармонического продолжения $u(x)$ функции f. Тогда $L_x(f)$ при фиксированном x определено для любых непрерывных функций f на F. По принципу максимума, если $f \geqslant 0$, то $L_x(f) \geqslant 0$. Кроме того, очевидно, что $L_x(f)$ линейно по f. Следовательно, $L_x(f)$ является положительным линейным функционалом на классе непрерывных функций f, определенных на F. Поэтому из теоремы 3.4 вытекает существование такой меры $\omega(x, e)$, однозначно определяемой множеством F, точкой x и областью D, что свойство (iii) выполняется для любой непрерывной функции f. Из теоремы 2.17 и свойства (3.3.1) линейного функционала следует, что $u(x) = L_x(f)$ остается гармоническим продолжением f в D и в случае полунепрерывной функции f. Для произвольной ограниченной и измеримой по Борелю функции f на F определим гармоническое продолжение f из F в D формулой (3.6.1). Поскольку продолжением $f = 1$ является функция $u(x) = 1$, то $\omega(x, F) = 1$, откуда следует свойство (i) и то, что $u(x)$ может быть определено формулой (3.6.1) для любой ограниченной и измеримой по Борелю функции f.

Остается доказать свойство (ii). Докажем более общее утверждение, что если функция f ограничена и измерима по Борелю, то $u(x)$ — гармоническая функция от x. Взяв для произвольного борелевского множества $e \subset F$ в качестве f его характеристическую функцию χ_e, мы выведем отсюда свойство (ii).

[1] Брело [1939a]. Решение Брело задачи Дирихле для произвольной функции f, интегрируемой относительно $d\omega$, приводит к тому же результату, хотя и несколько иным способом.

Если функция f пн. св., то из теоремы 2.17 следует, что $u(x)$ гармонична или тождественно равна $-\infty$. Аналогично, если f пн. сн., то $u(x)$ гармонична или тождественно равна $+\infty$. Случай бесконечности исключается, если функция f ограничена, так как тогда $u(x)$ для каждого x заключена между теми же границами. Пусть, наконец, функция f ограничена и измерима по Борелю. Пусть x_0 — фиксированная точка области D. Тогда f интегрируема относительно $\omega(x_0, e)$. Поэтому в силу определения 3.3.2 найдутся такие пн. св. на F функции $f_n(\xi)$, что

$$L_{x_0}(f_n) > L_{x_0}(f) - 1/n \tag{3.6.2}$$

и $f_n \leqslant f$ на F. Можно предположить, кроме того, что последовательность f_n монотонно возрастает, так как в противном случае можно заменить f_n функцией $g_n = \max\limits_{\nu=1,\ldots,n} f_\nu$.

Пусть $u_n(x)$ — гармоническое продолжение f_n из F в D. Так как функция f_n пн. св., то из теоремы 2.17 следует, что $u_n(x)$ гармонична по x. Поскольку $u_n(x) = L_x(f_n)$ — положительный линейный функционал, последовательность $u_n(x)$ возрастает для каждой фиксированной точки $x \in D$. Следовательно, по теореме Харнака 1.20 последовательность $u_n(x)$ сходится к гармонической в D функции $u(x)$, и на основании (3.6.2) имеем

$$L_{x_0}(f) = u(x_0).$$

Кроме того, так как $f_n \leqslant f$ на F, то для $x \in D$

$$u_n(x) = L_x(f_n) \leqslant L_x(f),$$

и поэтому

$$u(x) \leqslant L_x(f), \quad x \in D.$$

Аналогичным образом можно выбрать такую убывающую последовательность пн. сн. функций $g_n(\xi)$, что $g_n(\xi) \geqslant f(\xi)$ на F и $L_{x_0}(g_n) \to L_{x_0}(f)$ при $n \to \infty$. Тогда если $v_n(x)$ — гармоническое продолжение функции g_n в D, то последовательность $v_n(x)$, убывая, стремится к гармоническому пределу $v(x)$ в D, такому, что $v(x_0) = L_{x_0}(f)$ и

$$v(x) \geqslant L_x(f), \quad x \in D$$

Таким образом, $v(x) - u(x) \geqslant 0$ в области D, причем $v(x_0) = u(x_0)$. Из принципа максимума следует, что $v(x) = u(x)$ в D, и поэтому $u(x) = L_x(f) = v(x)$. Следовательно, $L_x(f)$ как функция от x гармонична в D.

Наконец, можно определить $L_x(f)$ и для неотрицательных неограниченных функций f, полагая

$$L_x(f) = \lim_{n\to\infty} L_x(f_n),$$

где $f_n = \inf(f, n)$. Так как последовательность f_n возрастает, то возрастает и последовательность $L_x(f_n)$ и, следовательно, по теореме Харнака $L_x(f)$ есть гармоническая функция от x или $L_x(f) \equiv \equiv +\infty$. Если f — произвольная функция и $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = -\min(f, 0)$, то $f = f^+ - f^-$. Положим

$$L_x(f) = L_x(f^+) - L_x(f^-)$$

при условии, что обе эти величины конечны в некоторой (а значит, в любой) точке $x \in D$. В этом случае говорят, что f интегрируема относительно гармонической меры. Если $L_x(f^+) = \infty$, а $L_x(f^-)$ конечна, полагаем $L_x(f) = +\infty$; если же $L_x(f^+)$ конечна, а $L_x(f^-) = \infty$, полагаем $L_x(f) = -\infty$. Таким образом, во всех случаях $L_x(f)$ либо есть гармоническая функция от x, либо тождественно равна $-\infty$, либо тождественно равна $+\infty$, либо не определена при каждом x. Этим оправдывается то, что заданная формулой (3.6.1) функция $u(x)$ была названа гармоническим продолжением функции f, когда f — произвольная измеримая по Борелю функция, для которой существует интеграл

$$\int_F f(\xi)\, d\omega(x, e_\xi).$$

Тем самым доказано свойство (ii) и завершено доказательство теоремы 3.10.

Из теоремы 3.10 следует, что $\omega(x, e)$ для любого борелевского подмножества из F является гармонической неотрицательной функцией переменного x. Поэтому по принципу максимума модуля $\omega(x, e) > 0$ в D или же $\omega(x, e) \equiv 0$ в D.

В первом случае говорят, что подмножество e имеет положительную гармоническую меру, во втором случае,— что e имеет нулевую гармоническую меру. Ясно, что две функции f_1 и f_2, которые отличаются только на подмножестве $e \subset F$, имеющем нулевую гармоническую меру, обладают одним и тем же гармоническим продолжением из F в D.

3.6.1. Следующий результат является, по сути дела, лишь незначительным обобщением теоремы 2.18, однако он естественным образом входит в круг рассматриваемых вопросов.

Теорема 3.11 (принцип гармонической меры [1]). *Пусть функция $u(x)$ субгармонична в ограниченной регулярной области $D \subset \subset \mathbb{R}^m$ с границей F. Предположим, что при $x \to \xi$ изнутри D*

$$\overline{\lim}\, u(x) \leqslant f(\xi) \text{ для любой точки } \xi \in F,$$

[1] В несколько менее общей формулировке, когда f — характеристическая функция, см. этот результат у Ф. и Р. Неванлинны [1922].

причем функция f ограничена сверху и измерима по Борелю на F. Тогда

$$u(x) \leqslant L_x(f),$$

где $L_x(f)$ — гармоническое продолжение функции f из F в D.

Предположение об ограниченности сверху функции f и, значит, u существенно. Например, если D — единичный круг в $\mathbb{R}^2$ и

$$u(z) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}, \qquad z = re^{i\theta},$$

то можно взять $f(1) = +\infty$, $f(e^{i\theta}) = 0$, $0 < \theta < 2\pi$. Гармоническое продолжение этой функции f равно нулю, тем не менее функция $u(z)$ гармонична и $u(z) > 0$ при $|z| < 1$.

Наиболее естественное применение теорема 3.11 находит в случае, когда $f(\xi) = 1$ на некотором замкнутом подмножестве $e \subset F$ и $f(\xi) = 0$ на его дополнении. В этом случае теорема 3.11 утверждает, что

$$u(x) \leqslant \omega(x, e),$$

где $\omega(x, e)$ — гармоническая мера множества e в D. По этой причине теорему 3.11 часто называют принципом гармонической меры.

Переходим к доказательству теоремы 3.11. С этой целью положим

$$g(\zeta) = \overline{\lim}\, u(x),$$

где верхний предел берется при $x \to \zeta$ изнутри области D. Тогда функция $g(\zeta)$ пн. св. на F. Действительно, если $\zeta_0 \in F$ и $\varepsilon > 0$, то $u(x) < g(\zeta_0) + \varepsilon$ для всех точек $x \in D$, принадлежащих некоторой окрестности N в $\mathbb{R}^m$ точки ζ_0. Следовательно, $g(\zeta) \leqslant g(\zeta_0) + \varepsilon$ для всех точек $\zeta \in F \cap N$. В частности, функция $g(\zeta)$ измерима по Борелю и ограничена сверху, так что функция $L_x(g)$ определена всюду в D и конечна или тождественно равна $-\infty$.

Пусть $g_n(\zeta)$ — убывающая последовательность непрерывных функций на F, сходящаяся к $g(\zeta)$, и пусть $u_n(x)$ — гармоническое продолжение $g_n(\zeta)$ в D. Такая последовательность g_n существует, поскольку функция $g(\zeta)$ пн. св. Так как D — регулярная область, то $u_n(x) \to g_n(\zeta)$, когда $x \to \zeta$ изнутри D. Следовательно,

$$\overline{\lim}\,\{u(x) - u_n(x)\} \leqslant g(\zeta) - g_n(\zeta) \leqslant 0,$$

если $x \to \zeta$ изнутри D, и это неравенство справедливо в каждой точке $\zeta \in F$. Поскольку функция $u(x) - u_n(x)$ субгармонична в D, из принципа максимума (теорема 2.3) следует, что $u(x) \leqslant u_n(x)$ в D. Таким образом, для каждого n имеем

$$u(x) \leqslant L_x(g_n).$$

Так как последовательность g_n убывает и стремится к g при $n \to \infty$, то из (3.3.1) вытекает, что $L_x(g_n) \to L_x(g)$ и, значит, $u(x) \leqslant$

$\leqslant L_x(g)$. Поскольку L_x — положительный линейный функционал и $g \leqslant f$, то $L_x(g) \leqslant L_x(f)$, откуда и следует теорема 3.11.

Выведем теперь в качестве следствия интересную теорему единственности для гармонических функций.

Теорема 3.12. *Пусть функция $u(x)$ ограничена и гармонична в регулярной ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^m$, а функция $g(x)$ ограничена на границе F области D. Предположим, что $u(x) \to g(\zeta)$ при $x \to \zeta$ изнутри D для всех точек $\zeta \in F$, за исключением множества нулевой гармонической меры. Тогда $u(x) = L_x(g)$.*

Положим

$$g_1(\zeta) = \overline{\lim}\, u(x), \quad g_2(\zeta) = \underline{\lim}\, u(x),$$

причем оба предела берутся при $x \to \zeta$ изнутри области D. Тогда g_1 пн. св., а g_2 пн. сн., так что обе эти функции измеримы по Борелю и ограничены, а следовательно, интегрируемы. Кроме того, $g_1 = g = g_2$ вне множества нулевой гармонической меры и поэтому

$$L_x(g_1) = L_x(g_2).$$

Следовательно, функция g также интегрируема и $L_x(g) = L_x(g_1) = L_x(g_2)$. Согласно теореме 3.11, $u(x) \leqslant L_x(g_2)$. Применяя теорему 3.11 к функции $-u(x)$, получим $u(x) \geqslant L_x(g_1)$. Из этих двух неравенств следует утверждение теоремы 3.12.

Теорема 3.12 дает удобный способ вычисления гармонической меры. Для этого достаточно построить в области D ограниченную гармоническую функцию, граничные значения которой равны 1 во всех точках некоторого множества $e \subset F$ и нулю на $F - e$, за исключением множества нулевой гармонической меры. Если D — открытый шар $D(x_0, r)$ в $\mathbb{R}^m$, то из (1.5.1) следует, что для любой непрерывной функции $f(\zeta)$ выполняется равенство (3.6.1), в котором

$$\omega(x, e) = \frac{1}{c_m} \int\limits_e \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{r\,|x - \zeta|^m}\, d\sigma_\zeta,$$

где $d\sigma_\zeta$ — элемент площади поверхности $S(x_0, r)$. В частности, гармоническая мера в точке x_0 пропорциональна площади множества e или телесному углу, под которым оно видно из начала координат. При $m = 2$ гармонические функции инвариантны относительно конформных отображений. Поэтому если D — односвязная область и e — некоторое множество на ее границе, то мы можем вычислить $\omega(x_0, e)$, отобразив D на круг $|z| < 1$ таким образом, чтобы x_0 перешла в начало координат. Если e' — образ множества e на окружности $|z| = 1$, то $\omega(x_0, e) = l/2\pi$, где l — длина множества e'.

В размерностях $m > 2$ метод конформных отображений неприменим и общего способа вычисления гармонической меры не существует.

Пример. Пусть D — полупространство $x_1 > 0$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Покажите, что если функция $u(x)$ гармонична и ограничена в D и непрерывна на его границе $F = \{x \mid x_1 = 0\}$, то

$$u(x) = \frac{1}{c_m} \int_F \frac{2x_1 u(\xi)\, d\sigma(\xi)}{|x_1 - \xi|^m},$$

где $d\sigma(\xi)$ обозначает $(m-1)$-мерную меру Лебега на F. (Указание. Покажите, что теория, изложенная в настоящем параграфе, обобщается на неограниченные области при условии, что в качестве единственной граничной точки берется $\zeta = \infty$.)

3.7. ФУНКЦИЯ ГРИНА И ФОРМУЛА ПУАССОНА — ИЕНСЕНА

Классическая функция Грина была определена в п. 1.5.1, а ее единственность доказана в теореме 1.14. В этом параграфе мы установим существование функции Грина и затем воспользуемся ею для получения общей теоремы о представлении для субгармонических функций.

Теорема 3.13. *Для регулярной области D в пространстве $\mathbb{R}^m$ функция Грина $g(x, \xi, D)$ существует. (В случае $m = 2$ область D должна иметь внешнюю точку.)*

Нам придется различать случаи $m = 2$ и $m > 2$. Предположим сначала, что $m > 2$, и пусть ξ — точка области D. Для точки x, расположенной на границе F области D, положим

$$f(x) = -|x - \xi|^{2-m}.$$

Пусть $u(x)$ — гармоническое продолжение функции f из F в D Так как $f(x)$ непрерывна и ограничена на F, включая и ∞, то согласно теореме 2.10, функция $u(x)$ однозначно определяется этими свойствами. Ясно, что функция

$$g(x, \xi, D) = u(x) + |x - \xi|^{2-m}$$

удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к функции Грина. Единственность функции Грина доказана в теореме 1.14.

Предположим теперь, что $m = 2$ и что область D имеет внешнюю точку, скажем x_0. Положим

$$f(x) = \log \left| \frac{x - \xi}{x - x_0} \right|$$

и заметим, что функция $f(x)$ непрерывна и ограничена на границе F области D, включая и точку ∞. Если $u(x)$ — гармоническое продолжение функции $f(x)$ в D, то искомой функцией Грина является

$$g(x, \xi, D) = u(x) + \log\left|\frac{x - x_0}{x - \xi}\right|.$$

3.7.1. Теперь мы можем доказать несколько более общий вариант формулы Пуассона — Иенсена [1]).

Теорема 3.14. *Пусть D — ограниченная регулярная область в $\mathbb{R}^m$, граница F которой имеет нулевую m-мерную меру Лебега, и пусть $u(x)$ — субгармоническая функция, не равная тождественно $-\infty$ в $D \cup F$. Тогда для $x \in D$ имеем*

$$u(x) = \int_F u(\xi)\, d\omega(x, e_\xi) - \int_D g(x, \xi, D)\, d\mu e_\xi, \qquad (3.7.1)$$

где $\omega(x, e)$ — гармоническая мера множества e в точке x, $g(x, \xi, D)$ — функция Грина области D и $d\mu$ — мера Рисса функции u в D.

Пример. Предположим, что функция $u(z)$ субгармонична в круге $|z| \leqslant r$ с мерой Рисса $d\mu$ в $|z| < r$. Применяя теорему 3.14 к субгармонической функции $u(z)$, получим

$$u(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi})\, \frac{(r^2 - \rho^2)\, d\varphi}{r^2 - 2r\rho\cos(\theta - \varphi) + \rho^2} + \\ + \int \log\left|\frac{r(z - \xi)}{r^2 - \bar{z}\xi}\right| d\mu e_\xi. \qquad (3.7.2)$$

Согласно теоремам 1.16 и 3.10, первый интеграл задает гармоническое продолжение функции $u(re^{i\varphi})$ в $|z| < r$. Если $u(z) = \log|f(z)|$, где функция $f(z)$ регулярна в $|z| \leqslant r$, то $\mu(e)$ равно числу нулей функции $f(z)$ на e и второй интеграл превращается в сумму

$$\sum_{\nu=1}^{n} \log\left|\frac{r(z - a_\nu)}{r^2 - \bar{a}_\nu z}\right|,$$

где a_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, — нули $f(z)$ в $|z| < r$. Вид функции Грина для этого случая был дан в теореме 1.10. Таким образом, классическая формула Пуассона — Иенсена для регулярных функций полу-

[1]) См. Р. Неванлинна [1929] для частного случая (0.1). Для субгармонических функций в круге см. Хейман [1952]. Результат с меньшими ограничениями см. в теореме 5.27.

чается отсюда как частный случай. Так же легко получается и мероморфный вариант формулы, если представить мероморфную функцию как частное двух регулярных функций.

Легко получить и другие формулы, в которых круг $|z| \leqslant r$ заменен различными односвязными или многосвязными плоскими областями D, при условии, что могут быть вычислены функция Грина области D и гармоническая мера в D. Предположение, что функция $u(z)$ субгармонична на замыкании $\overline{D}$ области D, более удобно, поскольку в этом случае не нужно требовать непрерывности $u(z)$. Очень полезен также m-мерный вариант теоремы 3.14. Отметим частный случай формулы (3.7.1), когда D — шар $D(0, r)$ в $\mathbb{R}^m$, где $m \geqslant 3$. Имеем

$$u(x) = \frac{1}{c_m} \int\limits_{S(0,\, r)} \frac{(r^2 - |x|^2)\, d\sigma(\xi)}{r\,|x-\xi|^m} - \int\limits_D g(x, \xi)\, d\mu e_\xi. \tag{3.7.3}$$

Здесь по теореме 1.10 имеем для $x, \xi \in D$

$$g(x, \xi) = |x-\xi|^{2-m} - \{|\xi|\, |x-\xi'|/r\}^{2-m},$$

где ξ' — точка, которая получается из ξ инверсией относительно $S(0, r)$.

3.7.2. Переходим к доказательству теоремы 3.14. Теорема 3.9 позволяет свести общий случай к случаю, когда $u(x) = K(x-\eta)$. Докажем теорему 3.14 сначала в этом частном случае.

Лемма 3.9. *Пусть D — область, такая, как в теореме 3.14, функция $K(x)$ определена равенствами (3.5.1) и x, η — соответственно точки D и $\mathbb{R}^m$. Тогда*

$$\int\limits_F K(\xi-\eta)\, d\omega(x, e_\xi, D) = \begin{cases} K(x-\eta) + g(x, \eta, D), & \eta \in D, \\ K(x-\eta), & \eta \notin D. \end{cases} \tag{3.7.4}$$

Предположим сначала, что η—внешняя для области D точка, так что $\eta \notin D \cup F$. Тогда $K(\xi-\eta)$ является гармонической функцией переменной ξ на $D \cup F$. Следовательно, в этом случае (3.7.4) вытекает из теоремы 3.10.

Далее, если $\eta \in D$, положим

$$h(\xi) = K(\xi-\eta) + g(\xi, \eta, D).$$

Функция $h(\xi)$ остается гармонической в точке η, а поэтому всюду в D. Так как функция $g(\xi, \eta, D)$ непрерывно обращается в нуль, когда ξ приближается к F изнутри D, то функция $h(\xi)$ непрерывна на F, если положить там $h(\xi) = K(\xi-\eta)$. Следовательно, в левой части (3.7.4) функцию $K(\xi-\eta)$ можно заменить функцией $h(\xi)$ и вывести из теоремы 3.10, что в этом случае правая часть превращается в $h(x)$. Значит, лемма 3.9 доказана для всех $\eta \in \mathbb{R}^m$, за исключением случая, когда $\eta \in F$.

Доказательство этого последнего случая сложнее, и именно для него нужно требование, чтобы множество F имело нулевую меру Лебега в $\mathbb{R}^m$. Будем считать точку x фиксированной, а точку η переменной; положим

$$J(\eta) = \int_F K(\xi - \eta)\, d\omega(x, e_\xi, D).$$

Так как $\omega(x, e_\xi, D)$ есть борелевская мера на F, то из теоремы 3.7 следует, что функция $J(\eta)$ субгармонична в $\mathbb{R}^m$. Пусть η_0 — некоторая точка множества F. Из условий (ii) и (iii) субгармоничности § 2.1) вытекает, что при $r \to 0$

$$I(r, J) = \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int_{S(\eta_0, r)} J(\eta)\, d\sigma(\eta) \to J(\eta_0).$$

Здесь через $\sigma(\eta)$ обозначена $(m-1)$-мерная мера на сфере $S(\eta_0, r)$. Следовательно, при $r \to 0$ имеем также

$$\frac{m}{c_m r^m} \int_{D(\eta_0, r)} J(\eta)\, d\eta = \frac{m}{r^m} \int_0^r I(\rho, J)\, \rho^{m-1}\, d\rho \to J(\eta_0). \quad (3.7.5)$$

Здесь через $d\eta$ обозначена m-мерная мера Лебега в $\mathbb{R}^m$. Поскольку множество F имеет нулевую m-мерную меру, можно произвольным образом менять подынтегральное выражение на F, не меняя самого интеграла. В частности, на F функцию $J(\eta)$ можно заменить функцией $K(x - \eta)$. Так как $K(x-\eta) \to K(x-\eta_0)$ при $\eta \to \eta_0$ и $g(x, \eta, D) \to 0$, когда $\eta \to \eta_0$ изнутри D, то из того факта, что лемма 3.9 верна для всех $\eta \in \mathbb{R}^m - F$, получаем при $r \to 0$

$$\int_{D(\eta_0, r)} J(\eta)\, d\eta = \int_{D(\eta_0, r)} \{K(x-\eta_0) + o(1)\}\, d\eta =$$

$$= \frac{c_m r^m}{m} \{K(x-\eta_0) + o(1)\}.$$

Сравнивая этот результат с (3.7.5), заключаем, что

$$J(\eta_0) = K(x - \eta_0).$$

Этим завершается доказательство леммы 3.9.

3.7.3. Предположим теперь, что функция $u(\xi)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.14. Тогда она субгармонична на компактном множестве E, содержащем в своей внутренности Δ множество

$D \cup F$. Согласно теореме 3.9, можно выразить $u(\xi)$ в виде

$$u(\xi) = \int_E K(\xi - \eta)\, d\mu e_\eta + h(\xi), \tag{3.7.6}$$

где через $\mu(e_\eta)$ обозначается мера Рисса функции u в E (так что $\mu(E) < \infty$), функция $K(\xi)$ определена равенствами (3.5.1), а функция $h(\xi)$ гармонична в Δ. Для любой функции $f(\xi)$, ограниченной сверху и измеримой по Борелю на множестве F, положим

$$L(f) = \int_F f(\xi)\, d\omega(x, e_\xi, D).$$

В частности,

$$L\{u(\xi)\} = \int_F d\omega(x, e_\xi, D) \int_E K(\xi - \eta)\, d\mu e_\eta + L\{h(\xi)\}.$$

Так как функция $h(\xi)$ гармонична на $D \cup F$, то из теоремы 3.10 следует, что

$$L\{h(\xi)\} = h(x).$$

Кроме того, функция $K(\xi - \eta)$ ограничена сверху для $\xi \in F$, $\eta \in E$ и обе меры $\omega(x, F, D)$ и $\mu(E)$ конечны. Поэтому из теоремы Фубини 3.5 следует, что можно изменить порядок интегрирования в двойном интеграле. По лемме 3.9 это дает

$$L\{u(\xi)\} = \int_E d\mu e_\eta L\{K(\xi - \eta)\} + h(x) =$$
$$= \int_E K(x - \eta)\, d\mu e_\eta + \int_D g(x, \eta, D)\, d\mu e_\eta + h(x).$$

Используя равенство (3.7.6), мы получаем отсюда теорему 3.14. В оставшейся части главы мы дадим несколько применений этого основного результата.

3.8. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ И НАИМЕНЬШИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ МАЖОРАНТЫ

Докажем одно обобщение теоремы 2.18.

Теорема 3.15. *В предположениях теоремы 3.14 гармоническое продолжение функции $u(x)$ из F в D является наименьшей гармонической мажорантой функции $u(x)$ в D.*

Пусть $v_0(x)$ — гармоническое продолжение функции $u(x)$ из F в D. Тогда, согласно теореме 3.10,

$$v_0(x) = \int_F u(\xi)\, d\omega(x, e_\xi).$$

Из теоремы 2.18 вытекает, что $v_0(x)$ является гармонической мажорантой функции $u(x)$ в D, т. е. $v_0(x)$ гармонична в D и $v_0(x) \geqslant v(x)$.

Заметим, далее, что функция Грина $g(x, \xi, D)$ непрерывна в точке (x, ξ), когда $\xi \in D$, $x \in D \cup F$ и $x \neq \xi$. Предположим, что $m \geqslant 3$ (случай $m = 2$ аналогичен). Если x и ξ удовлетворяют этим требованиям, то функция $K(x - \xi) = -|x - \xi|^{2-m}$ непрерывна по x и ξ и, в частности, равномерно непрерывна для $x \in F$ и ξ из компактного подмножества $e \subset D$. Следовательно, гармоническое продолжение $h(x, \xi)$ функции $K(x - \xi)$ переменного x из F в D непрерывно по совокупности переменных x и ξ. Кроме того, $h(x, \xi)$ равномерно непрерывно, когда $\xi \in e$, а $x \in D$, так как малое изменение ξ вызывает малое изменение функции $K(x - \xi)$ на F и, следовательно, по принципу максимума, малое изменение функции $h(x, \xi)$ для $x \in D$. Таким образом, если положить $g = 0$ для $x \in F$, то функция

$$g(x, \xi, D) = h(x, \xi) + |x - \xi|^{2-m}$$

непрерывна для $\xi \in e$ и x, расположенных вне e.

В частности, когда x приближается к F, а $\xi \in e$, $g(x, \xi, D) \to 0$ равномерно по x. Пусть μ — мера Рисса в D и

$$p(x) = \int_e g(x, \xi, D)\, d\mu e_\xi.$$

Тогда $p(x) \to 0$, когда x приближается к F. В частности, для данного $\varepsilon > 0$ можно найти такое компактное подмножество $e_1 \subset D$, содержащее e, что, $p(x) < \varepsilon$, $x \in D - e_1$. Следовательно, если $v(x)$ — произвольная гармоническая мажоранта функции $u(x)$ в D, то

$$u(x) + p(x) < u(x) + \varepsilon \leqslant v(x) + \varepsilon, \qquad x \in D - e_1.$$

Так как функция

$$u(x) + p(x) = v_0(x) + \int_{D-e} g(x, \xi, D)\, d\mu e_\xi$$

все еще субгармонична в D, то из принципа максимума следует, что $u(x) + p(x) \leqslant v(x) + \varepsilon$ при $x \in e_1$, т. е. что $v(x) \geqslant u(x) + p(x) - \varepsilon$ при $x \in D$. Поскольку число ε произвольно, отсюда получаем, что

$$v(x) \geqslant u(x) + p(x) = v_0(x) - \int_{D-e} g(x, \xi, D)\, d\mu e_\xi.$$

Тогда для последовательности множеств e_n, исчерпывающих D,

$$\int_{D-e_n} g(x, \xi, D)\, d\mu e_\xi \to 0.$$

Поэтому $v(x) \geqslant v_0(x)$ при $x \in D$. Таким образом, $v_0(x)$ является наименьшей гармонической мажорантой функции $u(x)$ в D. Следующий частный случай теоремы 3.14 представляет самостоятельный интерес.

Теорема 3.16. *Пусть функция $u(x)$ удовлетворяет предположениям теоремы 3.14 и является гармонической в области D. Тогда $u(x)$ представляет собой гармоническое продолжение функции $u(\xi)$ из F в D.*

Действительно, поскольку функция $u(x)$ гармонична в D, $d\mu = 0$ в D. Это дает

$$u(x) = \int_F u(\xi)\, d\omega(x, e_\xi).$$

Этот результат позволяет также значительно обобщить теорему 2.19. Имеет место следующая

Теорема 3.17. *Пусть D, F и $u(x)$ удовлетворяют предположениям теоремы 3.14, а функция $v(x)$ субгармонична на $D \cup F$, гармонична в D и $v(x) = u(x)$ на F. Тогда $v(x)$ совпадает в D с наименьшей гармонической мажорантой функции $u(x)$ и с гармоническим продолжением $u(x)$ из F в D.*

В самом деле, согласно теореме 3.15, наименьшая гармоническая мажоранта функции $u(x)$ в D совпадает с гармоническим продолжением $u(x)$ из F в D. Поскольку $u = v$ на F, гармоническое продолжение функции u из F в D совпадает с гармоническим продолжением v из F в D и, по теореме 3.16, с функцией v в D.

3.9. ТЕОРИЯ НЕВАНЛИННЫ [1]

Мы будем рассматривать функции, субгармонические в замкнутом шаре $C(0, r) \subset \mathbb{R}^m$ и не равные тождественно $-\infty$. Удобно считать, что $u(0) \neq -\infty$. Если это условие не выполнено, то можно заменить $u(x)$ в $D(0, \varepsilon)$ гармоническим продолжением значений функции $u(x)$ на сфере $S(0, \varepsilon)$ и получить функцию $v(x)$, субгармоническую в $C(0, r)$, гармоническую в $D(0, \varepsilon)$ и совпадающую с $u(x)$ в кольце $C(0, r) - D(0, \varepsilon)$. По теореме 3.17 (или даже по теореме 2.19) эти условия однозначно определяют функцию $v(x)$. Тогда формула Пуассона — Иенсена (3.7.2) или (3.7.3)

[1] См., например, Р. Неванлинна [1926] для частного случая (0.1).

дает

$$u(0)=\frac{1}{c_m r^{m-1}}\int\limits_{S(0,\ r)} u(x)\,d\sigma(x)-\int\limits_{D(0,\ r)} g(0,\ \xi)\,d\mu e_\xi. \qquad (3.9.1)$$

В этой формуле, согласно теореме 1.10,

$$g(0,\ \xi)=\log\left|\frac{r}{\xi}\right|, \qquad m=2,$$

$$g(0,\ \xi)=|\xi|^{2-m}-r^{2-m} \qquad m>2.$$

Слегка модифицируем формулу (3.9.1). Введем обозначения

$$u^+(x)=\max(u(x),\ 0),\quad u^-(x)=-\min(u(x),\ 0)$$

и положим [1])

$$T(r,\ u)=\frac{1}{c_m r^{m-1}}\int\limits_{S(0,\ r)} u^+(x)\,d\sigma(x), \qquad (3.9.2)$$

$$m(r,\ u)=\frac{1}{c_m r^{m-1}}\int\limits_{S(0,\ r)} u^-(x)\,d\sigma(x). \qquad (3.9.3)$$

Пусть, далее, $n(t)$ — масса Рисса замкнутого шара $C(0,\ t)$. Тогда

$$\int\limits_{D(0,\ r)} g(0,\ \xi)\,d\mu e_\xi=d_m\int\limits_0^r \frac{n(t)\,dt}{t^{m-1}}, \qquad (3.9.4)$$

где $d_2=1$, $d_m=m-2$, $m>2$.

Предположим сначала, что $m=2$. Тогда

$$\int\limits_{D(0,\ r)} g(0,\ \xi)\,d\mu e_\xi=\int\limits_0^r \log\frac{r}{t}\,dn(t)=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\log\frac{r}{\varepsilon}\,n(\varepsilon)+\int\limits_\varepsilon^r \frac{n(t)\,dt}{t}\right].$$

Так как значение $u(0)$ конечно, то оба интеграла

$$\int\limits_{D(0,\ r)} g(0,\ \xi)\,d\mu e_\xi=\int\limits_0^r \log\frac{r}{t}\,dn(t)$$

конечны, а поскольку $n(t)$ возрастает вместе с t, то при $\varepsilon\to 0$

$$n(\varepsilon)\log\frac{r}{\varepsilon}\leqslant\int\limits_0^\varepsilon \log\frac{r}{t}\,dn(t)\to 0.$$

[1]) То, что символ m обозначает также размерность пространства, не вызовет, как мы надеемся, никаких недоразумений.

Отсюда следует неравенство (3.9.4) в случае $m=2$. Если $m>2$, то аналогичным образом

$$\int\limits_{D(0,\,r)} g(0,\,\xi)\,d\mu e_\xi = \int\limits_0^r (t^{2-m}-r^{2-m})\,dn(t) = (m-2)\int\limits_0^r \frac{n(t)\,dt}{t^{m-1}},$$

откуда получаем (3.9.4).

Положим теперь

$$N(r,\,u) = d_m \int\limits_0^r \frac{n(t)\,dt}{t^{m-1}} \tag{3.9.5}$$

и заметим, что равенство (3.9.1) можно переписать в виде

$$T(r,\,u) = m(r,\,u) + N(r,\,u) + u(0). \tag{3.9.6}$$

Это — первая фундаментальная теорема Неванлинны для субгармонических функций. Функция $T(r,\,u)$ называется *характеристикой Неванлинны* функции u. Она в значительной степени определяет рост функции $u(x)$.

Отсюда немедленно получается интересная теорема о выпуклости.

Теорема 3.18. *Если $u(x)$ — субгармоническая функция в $C(0,\,r)$ и $u(0)\neq-\infty$, то $T(\rho,u)$ и $N(\rho,\,u)$ — возрастающие функции ρ для $0\leqslant\rho\leqslant r$. Кроме того, $T(\rho,\,u)$ и $N(\rho,\,u)$ — выпуклые функции $\log\rho$ при $m=2$ и ρ^{2-m} при $m>2$.*

Так как функция $u^+(x)=\max(u(x),\,0)$ субгармонична, то утверждения, касающиеся $T(r)$, являются непосредственными следствиями теоремы 2.12. Утверждения, относящиеся к $N(r,\,u)$, следуют из (3.9.5). Действительно, всюду, за исключением счетного множества точек, в которых функция $n(r)$ разрывна, имеет место равенство

$$r^{m-1}\frac{d}{dr}N(r,\,u) = d_m n(r).$$

Это равенство остается справедливым и в точках разрыва функции $n(r)$, если в левой части взять правую производную. Очевидно, что правая часть есть возрастающая функция r.

Нас также интересует максимум функции $u(x)$ на гиперсферах. Положим

$$B(r,\,u) = \sup_{|x|=r} u(x).$$

Величины $B(r,\,u)$ и $T(r,\,u)$ имеют сравнимый рост. Это вытекает из следующего неравенства.

Теорема 3.19. *Если функция $u(x)$ субгармонична в $C(0, r)$, то для $0 < \rho < r$ имеем*

$$T(\rho, u) \leqslant B(\rho, u^+) \leqslant \frac{r^{m-2}(r+\rho)}{(r-\rho)^{m-1}} T(r, u).$$

Левое неравенство очевидно. Для доказательства правого неравенства применим к функции $u^+(x)$, заданной в $D = D(0, r)$, формулу Пуассона — Иенсена. Вклад от массы Рисса неположителен. Поэтому получаем

$$u^+(\xi) \leqslant \frac{1}{c_m} \int\limits_{S(0, r)} \frac{r^2 - |\xi|^2}{r|r-\xi|^m} u^+(x)\, d\sigma_x \leqslant$$
$$\leqslant \frac{r^2-\rho^2}{r(r-\rho)^m} \cdot \frac{1}{c_m} \int\limits_{S(0, r)} u^+(x)\, d\sigma_x = \frac{r^{m-2}(r+\rho)}{(r-\rho)^{m-1}} T(r, u).$$

Выбирая ξ таким, что $u^+(\xi) = B(\rho, u^+)$, получаем правое неравенство.

3.10. ОГРАНИЧЕННЫЕ СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В $\mathbb{R}^m$

Из теоремы 2.14 вытекает, что единственными функциями, субгармоническими и ограниченными сверху во всей плоскости, являются константы. Однако, как было показано в п. 2.7.1, в слу, чае $m > 2$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ существуют непостоянные ограниченные сверху субгармонические функции. В этом параграфе мы изучаем такие функции. Основным результатом является следующая

Теорема 3.20. *Для произвольной данной борелевской меры μ в пространстве $\mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 3)$ пусть $n(t)$ — мера замкнутого шара $C(0, t)$. Для того чтобы μ была мерой Рисса субгармонической в $\mathbb{R}^m$ функции $u(x)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_1^\infty \frac{n(t)\, dt}{t^{m-1}} < \infty. \tag{3.10.1}$$

Если это условие выполнено, то единственная субгармоническая функция с мерой Рисса μ в $\mathbb{R}^m$ и точной верхней гранью C задается формулой

$$u(x) = C - \int \frac{1}{|x-\xi|^{m-2}}\, d\mu e_\xi. \tag{3.10.2}$$

Покажем сначала, что условие (3.10.1) необходимо. В самом деле, если $u(x) \leqslant C$, то очевидно, что при $0 < r < \infty$

$$T(r, u) \leqslant \max(C, 0).$$

Из формулы (3.9.6) вытекает, что

$$T(r, u) - T(1, u) = N(r, u) - N(1, u) + m(r, u) - m(1, u).$$

Этот результат остается справедливым при соответствующих изменениях в определении, даже если $u(0) = -\infty$. Таким образом, если $r > 1$ и если, как мы и предположим, функция $u(x)$ не равна тождественно $-\infty$, то при $r \to \infty$

$$d_m \int_1^r \frac{n(t)\,dt}{t^{m-1}} = N(r, u) - N(1, u) \leqslant m(1, u) + \max(C, 0) = O(1).$$

Отсюда следует условие (3.10.1).

Предположим теперь, что условие (3.10.1) выполнено и что функция $u(x)$ задана равенством (3.10.2), в котором $C = 0$. Предположим, что $|x| \leqslant r$, и представим $u(x)$ в виде

$$u(x) = -\int_{|\xi| \leqslant r} |x-\xi|^{2-m}\,d\mu e_\xi - \int_{|\xi|>r} |x-\xi|^{2-m}\,d\mu e_\xi = \\ = u_1(x) + u_2(x).$$

Тогда, по теореме 3.7, функция $u_1(x)$ субгармонична в пространстве. Кроме того, для любого целого $N > r$ функция

$$u_N(x) = -\int_{r<|\xi|<N} |x-\xi|^{2-m}\,d\mu e_\xi$$

гармонична при $|x| < r$ согласно этой же теореме. Ясно, что последовательность $u_N(x)$ убывает с возрастанием N. Следовательно, по теореме Харнака 1.20 функция

$$u_2(x) = \lim_{N\to\infty} u_N(x)$$

гармонична при $|x| < r$ в предположении, что предел в правой части конечен в некоторой точке из $|x| < r$, например в начале координат. Теперь имеем

$$u_N(0) = -\int_{r<|\xi|<N} |\xi|^{2-m}\,d\mu e_\xi = -\int_r^N t^{2-m}\,dn(t) = \\ = -(m-2)\int_r^N \frac{n(t)\,dt}{t^{m-1}} - [t^{2-m}n(t)]_r^N.$$

Согласно (3.10.1), этот интеграл остается ограниченным при $N \to \infty$. Кроме того, поскольку интеграл сходится и функция $n(t)$ возрастает с возрастанием t, можно для данного $\varepsilon > 0$ выбрать r

настолько большим, чтобы при $r > r_0$

$$\int_r^\infty \frac{n(t)\,dt}{t^{m-1}} < \varepsilon.$$

Следовательно, также и

$$n(r) \int_r^\infty t^{1-m}\,dt = \frac{n(r)\,r^{2-m}}{(m-2)} < \varepsilon.$$

Таким образом, при $r \to \infty$

$$\frac{n(r)}{r^{m-2}} \to 0. \tag{3.10.3}$$

Отсюда мы заключаем, что

$$u_2(0) = \lim_{N\to\infty} u_N(0) = -(m-2) \int_r^\infty \frac{n(t)\,dt}{t^{m-2}} + \frac{n(r)}{r^{m-2}} > -\infty. \tag{3.10.4}$$

Поэтому функция $u_2(x)$ гармонична в шаре $|x| < r$ и, значит, функция $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$ субгармонична. Кроме того, поскольку функция $u(x) - u_1(x)$ гармонична в $|x| < r$, $u(x)$ имеет в $|x| < r$ и, значит, во всем пространстве меру Рисса μ.

Далее, из (3.10.3) и (3.10.4) следует, что для данного $\varepsilon > 0$ можно выбрать число r_0 настолько большим, что $u_2(0) > -\varepsilon$ при $r > r_0$. Кроме того, для фиксированного r и $|x| > 2r$ при $x \to \infty$

$$u_1(x) = \int_{|\xi| \leqslant r} |x-\xi|^{2-m}\,d\mu e_\xi \leqslant \left|\frac{1}{2}x\right|^{2-m} n(r) \to 0.$$

Так как функция $u_2(x)$ субгармонична, то для любого $t > 0$

$$-\varepsilon < u_2(0) \leqslant \frac{1}{c_m t^{m-1}} \int_{S(0,\,t)} u_2(x)\,d\sigma(x).$$

Следовательно, можно найти такую точку x на $S(0, t)$, что $u_2(x) > -\varepsilon$, и, значит, если t достаточно велико, то, кроме того, $u_1(x) > -\varepsilon$. Поэтому

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) > -2\varepsilon.$$

Таким образом, точная верхняя грань функции $u(x)$ в $\mathbb{R}^m$ не может быть отрицательной, а поскольку $u(x) \leqslant 0$ всюду в $\mathbb{R}^m$, эта точная верхняя грань равна нулю. Следовательно, функция, задаваемая равенством (3.10.2), удовлетворяет всем условиям теоремы 3.20.

Остается показать, что функция $u(x)$, удовлетворяющая этим условиям, единственна. Предположим противное, что существует другая функция $u_0(x)$, неположительная в $\mathbb{R}^m$ и имеющая там меру Рисса μ. Пусть $h(x) = u_0(x) - u(x)$. Тогда, по теореме 3.9, функция $h(x)$ гармонична в $\mathbb{R}^m$. Кроме того, поскольку $u_0(x) \leqslant 0$,

$$h^+(x) = \max(h(x), 0) \leqslant u^-(x).$$

Таким образом,

$$T(r, h) \leqslant \frac{1}{c_m r^m} \int\limits_{S(0, r)} u^-(x)\, d\sigma(x) = m(r, u).$$

Мы предполагаем, что $u(0) > -\infty$; в противном случае следует рассматривать $u(x_0 + x)$ вместо $u(x)$ для подходящей точки x_0. Тогда, используя (3.9.6) и неравенство $u(x) \leqslant 0$, получаем, что $T(r, u) = 0$, и поэтому

$$m(r, u) = O(1) \quad \text{при } r \to \infty.$$

Следовательно,

$$T(r, h) = O(1) \quad \text{при } r \to \infty.$$

Полагая в теореме 3.19 $\rho = r/2$, получаем, что функция $h(x)$ ограничена сверху в $\mathbb{R}^m$ и, значит, в силу теоремы 2.15, $h(x)$ — константа. Это завершает доказательство теоремы 3.20.

3.10.1. Из теоремы 3.20 следует, что верхняя грань в $\mathbb{R}^m$ функции $u(x)$, заданной равенством (3.10.2), равна C. Мы завершим эту главу доказательством одного более точного результата.

Теорема 3.21. *Пусть $u(x)$ — субгармоническая в $\mathbb{R}^m$ функция с конечной точной верхней гранью C. Тогда для данного $q > m - 2$*

$$u(x) \to C \quad \textit{при } x \to \infty \tag{3.10.5}$$

вне конечного или счетного множества замкнутых шаров $C(x_k, r_k)$, таких, что $\sum \left(\frac{r_k}{|x_k|}\right)^q < \infty$.

В частности, (3.10.5) *имеет место, когда $x \to \infty$ вдоль почти всех фиксированных лучей, выходящих из начала координат* [1]).

Для доказательства нам понадобится лемма, которая является аналогом соответствующего результата Картана [1928] для функций, субгармонических в плоскости.

Лемма 3.10 (лемма Картана). *Пусть μ — такая мера в $\mathbb{R}^m$, что $\mu(\mathbb{R}^m) = \mu_0 < \infty$ и $0 < p < q < \infty$. Тогда если $h > 0$ и*

$$I(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} |x - \xi|^{-p} d\mu e_\xi, \tag{3.10.6}$$

[1]) Дени [1948] доказал, что этот результат верен вдоль всех лучей, за исключением множества нулевой емкости. [Как показал Еременко [1979a], условие этой теоремы нельзя ослабить. — *Прим. ред.*]

то

$$I(x) < h \tag{3.10.7}$$

вне объединения конечного или счетного числа замкнутых шаров $C(x_n, r_n)$, *таких, что*

$$\sum_n r_n^q < A_1 (\mu_0/h)^{q/p}, \tag{3.10.8}$$

где константа A_1 *зависит только от* p *и* q.

Для каждого фиксированного положительного целого ν построим максимальное число попарно непересекающихся замкнутых шаров $C_{k\nu} = C\left(x_{k\nu}, \frac{1}{2} r_\nu\right)$, $k = 1, \ldots, k_\nu$, таких, что

$$r_\nu = (\mu_0/h)^{1/p} 2^{-\nu/s}, \tag{3.10.9}$$

где $s = (p + q)/2$ и

$$\mu(C_{k\nu}) \geqslant \mu_0 2^{-\nu}. \tag{3.10.10}$$

Так как полная мера равна μ_0, то ясно, что может существовать не более 2^ν непересекающихся шаров $C_{k\nu}$ для каждого ν. Кроме того,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_\nu} r_\nu^q \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^\nu \left(\frac{\mu_0}{h}\right)^{q/p} 2^{-\nu q/s} =$$

$$= \left(\frac{\mu_0}{h}\right)^{q/p} \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu(q/s-1)} = A_2 \left(\frac{\mu_0}{h}\right)^{q/p}, \tag{3.10.11}$$

где константа A_2 зависит только от q, s и, значит, только от p и q.

Предположим теперь, что точка x находится вне всех шаров $C(x_{k\nu}, r_\nu)$. Тогда, если $n(r)$ — мера шара $C(x, r)$, то

$$n\left(\frac{1}{2} r_\nu\right) < \mu_0 2^{-\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots. \tag{3.10.12}$$

Действительно, если это неравенство для некоторого ν не выполнено, то шар $C = C(x, r_\nu/2)$ не пересекается ни с каким из шаров $C(x_{k\nu}, r_\nu/2)$, $k = 1, \ldots, k_\nu$, и получается противоречие с предположением о том, что множество шаров, удовлетворяющих условию (3.10.10), максимально, т. е. не существует шара, который не пересекается с другими и может быть добавлен к этому множеству. В частности, $n(0) = 0$.

Таким образом,

$$I(x) = \int\limits_{|\xi - x| \geqslant r_1/2} |x-\xi|^{-p} \, d\mu e_\xi + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int\limits_{\frac{1}{2} r_{\nu+1} \leqslant |\xi - x| < \frac{1}{2} r_\nu} |x-\xi|^{-p} \, d\mu e_\xi \leqslant$$

$$\leqslant 2^p \mu_0 \left\{ r_1^{-p} + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu} r_{\nu+1}^{-p} \right\} = 2^p \mu_0 \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{1-\nu} r_\nu^{-p} =$$

$$= 2^{p+1} h \sum_{1}^{\infty} 2^{-\nu + \nu p/s} = A_3 h,$$

где константа A_3 зависит только от p и s, т. е. только от p и q. Если мы возьмем $A_3 h$ вместо h и используем (3.10.11), то получим лемму 3.10 с константой $A_1 = A_2 A_3^{q/p}$.

3.10.2. Мы в состоянии теперь доказать теорему 3.21. Предположим, что ν — положительное целое число и $2^\nu < |x| \leqslant 2^{\nu+1}$. Пусть функция $u(x)$ задана равенством (3.10.2), которое можно представить в виде

$$C - u(x) = I_1(x) + I_2(x) + I_3(x),$$

где

$$I_1(x) = \int\limits_{|\xi| \leqslant 2^{\nu-1}} |x-\xi|^{2-m} \, d\mu,$$

$$I_2(x) = \int\limits_{2^{\nu-1} < |\xi| < 2^{\nu+2}} |x-\xi|^{2-m} \, d\mu,$$

$$I_3(x) = \int\limits_{|\xi| \geqslant 2^{\nu+2}} |x-\xi|^{2-m} \, d\mu.$$

Тогда из (3.10.3) следует, что при $\nu \to \infty$

$$I_1(x) \leqslant \left| \frac{1}{2} x \right|^{2-m} \int\limits_{|\xi| \leqslant 2^{\nu-1}} d\mu \leqslant \frac{n(2^{\nu-1})}{(2^{\nu-1})^{m-2}} \to 0. \tag{3.10.13}$$

Кроме того,

$$I_3(x) \leqslant \int\limits_{|\xi| \geqslant 2^{\nu+2}} \left| \frac{1}{2} \xi \right|^{2-m} d\mu = 2^{m-2} \int\limits_{2^{\nu+2}}^{\infty} t^{2-m} \, dn(t) =$$

$$= 2^{m-2} \left[\frac{n(t)}{t^{m-2}} \right]_{2^{\nu+2}}^{\infty} + 2^{m-2}(m-2) \int\limits_{2^{\nu+2}}^{\infty} \frac{n(t)\,dt}{t^{m-1}}.$$

Из (3.10.1) и (3.10.3) следует, что

$$I_3(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{3.10.14}$$

Остается рассмотреть $I_2(x)$. Пусть μ_ν — мера области

$$2^{\nu-1} < |\xi| < 2^{\nu+2}, \tag{3.10.15}$$

а ε_ν — положительное число. Тогда из леммы 3.10 находим, что

$$I_3(x) < \varepsilon_\nu \tag{3.10.16}$$

вне множества $E_\nu(\varepsilon)$ шаров радиусов r_n, таких, что для $q > m-2$

$$\sum r_n^q < A_1 \left(\frac{\mu_\nu}{\varepsilon_\nu}\right)^{q/(m-2)}. \tag{3.10.17}$$

Положим

$$\eta_\nu = \mu_\nu 2^{(2-m)\nu}$$

и заметим, что

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \eta_\nu \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{(2-m)\nu} \int\limits_{2^{\nu-1}}^{2^\nu} + \int\limits_{2^\nu}^{2^{\nu+1}} + \int\limits_{2^{\nu+1}}^{2^{\nu+2}} dn(t) \leqslant C \int\limits_1^\infty \frac{dn(t)}{t^{m-2}} < \infty, \tag{3.10.18}$$

где C — константа, зависящая от m. В терминах η_ν можно переписать неравенство (3.10.17) в виде

$$\sum \left(\frac{r_n}{2^\nu}\right)^q < A_1 \eta_\nu^{q/(m-2)} \varepsilon_\nu^{-q/(m-2)}.$$

Положим $\varepsilon_\nu^{q/(m-2)} = A_1 \eta_\nu^{q/(m-2)-1}$, так что $\varepsilon_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$. Заметим, что в области (3.10.15) вне множества шаров, радиусы которых r_n удовлетворяют условию

$$\sum \left(\frac{r_n}{2^\nu}\right)^q < \eta_\nu,$$

выполняется неравенство (3.10.16). Из (3.10.18) следует, что $\eta_\nu \to 0$, поэтому можно считать, что $\eta_\nu < 4^{-q}$, $\nu > \nu_0$. Мы отбрасываем все шары при $\nu \leqslant \nu_0$ и те шары при $\nu > \nu_0$, которые не пересекаются с областью (3.10.15). Если $C(x_{n\nu}, r_{n\nu})$ — оставшиеся шары, соответствующие области (3.10.15), то $r_{n\nu} < 2^{\nu-2}$. Поскольку эти шары пересекаются с областью (3.10.15), имеем $|x_{n\nu}| > 2^{\nu-2}$, так что

$$\sum \left(\frac{r_{n\nu}}{|x_{n\nu}|}\right)^q \leqslant 4^q \sum \left(\frac{r_n}{2^\nu}\right)^q \leqslant 4^q \eta_\nu.$$

Таким образом, если $x \to \infty$ любым способом вне исключительных шаров, соответствующих области (3.10.15), то для $2^\nu <$

$< |x| \leqslant 2^{\nu+1}$

$$C - u(x) < \varepsilon_\nu + o(1) \quad \text{при} \quad \nu \to \infty.$$

Кроме того, согласно (3.10.18), для исключительных шаров получаем

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \sum_{n} \left(\frac{r_{n\nu}}{|x_{n\nu}|}\right)^q \leqslant 4^q \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \eta_\nu < \infty.$$

Этим доказано главное утверждение теоремы 3.21.

Можно, в частности, взять $q = m - 1$. Тогда телесный угол с вершиной в начале координат, вмещающий $C(x_k, r_k)$, пропорционален $(r_k/|x_k|)^{m-1}$, и теорема 3.21 утверждает, что для телесных углов ω_ν, вмещающих исключительные шары C_ν, сумма сходится. Не изменяя заключения теоремы, можно выбросить конечное число исключительных шаров, и тем самым добиться того, чтобы

$$\sum \omega_\nu < \varepsilon.$$

Для всех лучей, не пересекающих оставшиеся исключительные шары при больших $|x|$, (3.10.5) выполняется без ограничения. Поскольку ε произвольно, заключаем отсюда, что (3.10.5) выполняется без ограничения на всех лучах, выходящих из начала координат, за исключением лучей, пересекающих единичную сферу $S(0, 1)$ по множеству нулевой $(m-1)$-мерной меры. Этим завершается доказательство теоремы 3.21.

Пример. При $q = m - 2$ заключение теоремы 3.21 не выполняется. Например, в случае $m = 3$ положим для $x = (x_1, x_2, x_3)$

$$u(x) = -\int_0^\infty \frac{dt}{\{(x_1+t)^2 + x_2^2 + x_3^2\}^{1/2}(t+1)}.$$

Эта функция удовлетворяет условиям теоремы 3.20 с мерой, сосредоточенной на отрицательной части оси x_1, и с

$$n(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\tau+1} = \log(t+1),$$

но $u(x) = -\infty$ всюду на отрицательной части оси x_1, и эта ось не может быть включена в множество шаров $C_k = C(\xi_k, r_k)$, для которых

$$\sum \frac{r_k}{|\xi_k|} < \infty.$$

Действительно, если E — множество, по которому C_k пересекает часть $x_1 < -1$ оси x_1, то

$$\int_E \frac{dx_1}{x_1} = O\left\{\sum \frac{r_k}{|\xi_k|}\right\} < \infty.$$

Глава 4

СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

4.0. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей главе была изложена теорема Рисса о локальном представлении субгармонической функции в виде суммы гармонической функции и потенциала. В этой главе будут получены аналогичные результаты для функций, субгармонических во всем пространстве $\mathbb{R}^m$.

Для случая $m = 2$ и

$$u(z) = \log |f(z)|,$$

где $f(z)$ — целая функция, мы докажем, в частности, классические теоремы Вейерштрасса и Адамара о представлении функции $f(z)$ в виде произведения сомножителей, определяемых ее нулями.

Как и в упомянутых выше частных случаях, большую роль играет порядок функции; в частности, используя указанные теоремы о представлении, мы получим некоторые точные оценки для функций порядка не выше первого. Это относится в первую очередь к соотношениям между $N(r)$, $T(r)$ и $B(r)$.

В конце главы рассматриваются обобщения понятий асимптотических значений и трактов на субгармонические функции в $\mathbb{R}^m$. Несмотря на то что полученные оценки не так точны, как в теореме Альфорса, они тем не менее дают правильный порядок величины числа таких трактов для функции с заданным порядком μ в $\mathbb{R}^m$. Нам удастся также обобщить классическую теорему Иверсена.

4.1. ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА О ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Пусть $K(x)$ — функция, определенная равенством (3.5.1). Тогда $K(x)$ — гармоническая функция в $\mathbb{R}^m$ при $m \geqslant 2$, исключая точку $x = 0$, и, таким образом, $K(x - \xi)$ гармонична в $\mathbb{R}^m$, исключая точку $x = \xi$. В частности, если $\xi \neq 0$, то $K(x - \xi)$ гармонична в окрестности начала координат и, следовательно, разлагается в степенной ряд по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_m$, сходящийся в окрестности начала координат. Имеем

$$K(x - \xi) = \sum_{0}^{\infty} a_\nu(x, \xi), \tag{4.1.1}$$

где для фиксированного ν и $\xi \neq 0$ через $a_\nu(x, \xi)$ обозначен однородный полином от $x_1, x_2, \ldots, x_m$ степени ν. Положим

$$K_q(x, \xi) = K_q(x, \xi, m) = K(x-\xi) - \sum_{\nu=0}^{q} a_\nu(x, \xi). \quad (4.1.2)$$

Нам нужно получить некоторые оценки для $K_q(x, \xi)$, но сначала получим оценки полиномов $a_\nu(x, \xi)$.

Лемма 4.1. *Полиномы $a_\nu(x, \xi)$ гармоничны по x при фиксированном ξ и непрерывны по совокупности переменных x, ξ при $|\xi| \neq 0$. Если $|x| = \rho$, $|\xi| = r > 0$, то имеет место точное неравенство*

$$|a_\nu(x, \xi)| \leqslant \frac{b_{\nu, m}\rho^\nu}{r^{m+\nu-2}}, \quad (4.1.3)$$

где $b_{\nu, m} = 1/\nu$, *если* $m = 2$, $\nu \geqslant 1$;

$$b_{\nu, m} = (\nu + m - 3)(\nu + m - 4) \ldots (\nu + 1)/(m-1)!,$$
$$m \geqslant 3, \quad \nu \geqslant 0.$$

Предположим сначала, что $m = 2$. Положим $z = x_1 + ix_2$, $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$; тем самым z и ζ — комплексные переменные и

$$K(x-\zeta) = \log|z-\zeta| = \operatorname{Re}\left\{\log|\zeta| + \log\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)\right\} =$$
$$= \operatorname{Re}\left\{\log|\zeta| - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^\nu\right\}.$$

Таким образом, в этом случае имеем для $\nu \geqslant 1$

$$|a_\nu(x, \zeta)| = \left|-\frac{1}{\nu}\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^\nu\right| \leqslant \frac{1}{\nu}\left(\frac{\rho}{r}\right)^\nu,$$

что и требовалось. Заметим также, что если $z/\zeta > 0$, то имеет место равенство.

В случае $m \geqslant 3$ для любых действительных векторов x, ξ и комплексного числа h рассмотрим выражение

$$\varphi(h) = -K(\xi - hx) = \left\{\sum_{n=1}^{m} (\xi_n - hx_n)^2\right\}^{-(m/2)+1} = -\sum_{\nu=0}^{\infty} h^\nu a_\nu(x, \xi).$$

Функция $\varphi(h)$ аналитична относительно комплексного переменного h при достаточно малых h, если квадратный корень выбран так, что $\varphi(0) > 0$. Имеем

$$\sum_{n=1}^{m} (\xi_n - hx_n)^2 = r^2 - 2th + \rho^2h^2,$$

где $t=\sum_{n=1}^{m}\xi_n x_n$, и, следовательно, $|t|\leqslant r\rho$. Таким образом,

$$\varphi(h)=\{r^2(1-\alpha h)(1-\beta h)\}^{1-(m/2)},$$

где α, β равны $(t\pm i\sqrt{r^2\rho^2-t^2})/r^2$. Ясно, что $|\alpha|=|\beta|=\rho/r$.

Заметим теперь, что если $p=(m-2)/2>0$, то

$$(1-\alpha h)^{-p}=\sum_{0}^{\infty}c_{\nu,\,p}(\alpha h)^{\nu},$$

где

$$c_{\nu,\,p}=\frac{p(p+1)\,\ldots\,(p+\nu-1)}{\nu!}>0.$$

Перемножая, видим, что при $|\alpha|=|\beta|=\rho/r$ коэффициенты функции $\varphi(h)$ максимальны, если $\alpha=\beta=\rho/r$; в этом случае они являются коэффициентами функции

$$r^{2-m}\left(1-\frac{\rho}{r}h\right)^{2-m}=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_{\nu,\,m}\rho^{\nu}r^{2-m-\nu}h^{\nu}.$$

Неравенство (4.1.3) доказано; если $x=\lambda\xi$, $\lambda>0$, то имеет место равенство.

Заметим также, что $K(\xi-hx)$ является действительной аналитической функцией относительно h и $x_1,\ldots,x_m$ в совокупности при $|h|<r/\rho$. Таким образом, в любой частной производной можно изменить порядок дифференцирования; в частности,

$$\nabla^2\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{\nu}K(\xi-hx)=\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{\nu}\nabla^2K(\xi-hx)=0,$$

так как $K(\xi-hx)$ при фиксированном h есть гармоническая функция по $x_1,\ldots,x_m$. Отсюда следует, что все производные $\varphi^{(\nu)}(h)$ функции $\varphi(h)$ суть гармонические функции по $x_1,\ldots$ $\ldots,x_m$; полагая $h=0$, видим, что $a_\nu(x,\xi)$ являются гармоническими полиномами. Это завершает доказательство леммы 4.1.

4.1.1. Оценим теперь функцию $K_q(x,\xi)$.

Лемма 4.2. *Если* $|\xi|=r>0$, *то* $K_q(x,\xi)-K(x,\xi)$ — *гармоническая функция в* $\mathbb{R}^m$. *Для* $|x|=\rho$ *имеет место неравенство*

$$|K_q(x,\xi)|\leqslant 4^{m+q}\frac{\rho^{q+2}}{r^{m+q-1}}\quad\text{при}\quad\rho\leqslant\frac{r}{2}.\tag{4.1.4}$$

Если $q=0$, $m=2$, *то*

$$K_0(x,\xi)\leqslant\log(1+\rho/r),\tag{4.1.5}$$

а во всех остальных случаях

$$K_q(x, \xi, m) \leqslant 4^{m+q} \frac{r\rho^q}{r^{m+q-2}} \inf\left\{1, \frac{\rho}{r}\right\}. \tag{4.1.6}$$

Если $m=2$, то

$$K_0(x, \xi) = \log|z-\xi| - \log|\xi| = \log\left|1-\frac{z}{\xi}\right| \leqslant \log\left(1+\frac{|z|}{|\xi|}\right),$$

и, таким образом, неравенство (4.1.5) доказано. Предположим теперь, что $\rho \leqslant \lambda r$, $0 \leqslant \lambda < 1$. Из (4.1.3) получаем

$$|K_q(x, \xi)| = \left|\sum_{\nu=q+1}^{\infty} a_\nu(x, \xi)\right| \leqslant \sum_{\nu=q+1}^{\infty} b_{\nu, m}\rho^\nu r^{2-m-\nu}.$$

Заметим, что при $m \geqslant 3$ отношение $b_{\nu+1, m}/b_{\nu, m}$ убывает с возрастанием ν и, следовательно, при $\nu = q+l$, где $l>0$, имеем $b_{\nu m} \leqslant b_{q+1, m}\cdot b_{l, m}/b_{1, m}$. Таким образом, для $m \geqslant 3$

$$|K_q(x,\xi)| \leqslant \frac{b_{q+1, m}}{b_{1,m}} \cdot \frac{\rho^q}{r^{m+q-2}} \sum_{l=1}^{\infty} b_{l, m}\left(\frac{\rho}{r}\right)^l \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(m+q-2)!\,\{(1-\lambda)^{2-m}-1\}\cdot\rho^{q+1}}{\lambda\,(q+1)!\,(m-2)!\,r^{m+q-1}}. \tag{4.1.7}$$

В случае $m=2$ получаем

$$|K_q(x, \xi)| \leqslant \frac{1}{q+1}\left(\frac{\rho}{r}\right)^q \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^l \leqslant \frac{1}{(q+1)(1-\lambda)}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{q+1} \tag{4.1.8}$$

Заметим, что число $\dfrac{(m+q-2)!}{q!\,(m-2)!}$ является коэффициентом разложения бинома $(1+1)^{m+q-2}$ и, следовательно,

$$\frac{(m+q-2)!}{(q+1)!\,(m-2)!} \leqslant \frac{(m+q-2)!}{q!\,(m-2)!} \leqslant 2^{m+q-2}.$$

Полагая $\lambda = 1/2$, из (4.1.7) при $m \geqslant 3$ имеем

$$|K_q(x, \xi)| \leqslant 2^{m+q-2}\cdot 2^{m-1}\frac{\rho^{q+1}}{r^{m+q-1}} = 2^{2m+q-3}\frac{\rho^{q+1}}{r^{m+q-1}}.$$

При $m=2$ и $q \geqslant 1$ последнее неравенство следует из (4.1.8). Таким образом, доказано неравенство (4.1.4) и для $\rho \leqslant r/2$ неравенство (4.1.6).

Пусть $\rho > r/2$. Тогда если $m = 2$, $q \geqslant 1$, то

$$K_q(x, \xi) \leqslant \log\left(1+\frac{\rho}{r}\right) + \sum_{\nu=1}^{q}\left(\frac{1}{\nu}\right)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu} \leqslant 2\frac{\rho}{r} + \sum_{\nu=2}^{q}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\rho}{r}\right)^{q}\left[1+\left(\frac{r}{\rho}\right)+\ldots+\left(\frac{r}{\rho}\right)^{q-2}+2\left(\frac{r}{\rho}\right)^{q-1}\right] \leqslant$$

$$\leqslant 2^{q+1}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{q}. \tag{4.1.9}$$

Если $m > 2$, то из неравенства (4.1.3) получаем

$$K_q(x, \xi) \leqslant K(x-\xi) + \sum_{\nu=0}^{q} b_{\nu, m}\frac{\rho^{\nu}}{r^{m+\nu-2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{b_{q, m}\rho^{q}}{r^{m-2+q}}(1+2+2^2+\ldots+2^q) \leqslant 2^{q+1}b_{q, m}\frac{\rho^q}{r^{m+q-2}}.$$

Так как $\sum\limits_{q=0}^{\infty} b_{q, m}\left(\frac{1}{2}\right)^{q} = \left(1-\frac{1}{2}\right)^{2-m}$, то $b_{q, m} \leqslant 2^{q+m-2}$. Таким образом,

$$K_q(x, \xi) \leqslant 2^{2q+m-1}\frac{\rho^q}{r^{m+q-2}}.$$

Как видно из (4.1.9), это неравенство справедливо и при $m = 2$. Следовательно, (4.1.6) доказано во всех случаях. Этим завершается доказательство леммы 4.2.

4.1.2. Сформулируем и докажем теорему Вейерштрасса [1].

Теорема 4.1. *Предположим, что μ — борелевская мера в $\mathbb{R}^m$, и пусть $n(t)$ — мера шара $D(0, t)$, а $q(t)$ — положительная возрастающая функция от t, принимающая целые значения, непрерывная справа и такая, что для любого $t_0 > 0$*

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{t_0}{t}\right)^{q(t)+m-1} dn(t) < \infty. \tag{4.1.10}$$

Тогда существует функция $u(x)$, субгармоническая в $\mathbb{R}^m$ с мерой Рисса μ, и все такие функции могут быть записаны в виде

$$u(x) = \int_{|\xi|<1} K(x-\xi)\,d\mu e_{\xi} + \int_{|\xi|\geqslant 1} K_{q(|\xi|)}(x, \xi)\,d\mu e_{\xi} + v(x), \tag{4.1.11}$$

где $v(x)$ — гармоническая функция в $\mathbb{R}^m$. Второй интеграл в (4.1.11) сходится абсолютно в окрестности ∞ и равномерно для $|x| \leqslant \rho$ при любом фиксированном положительном ρ.

[1]) Случай (0.1) см. у Вейерштрасса [1876].

Ясно, что для заданной функции $n(t)$ существует функция $q(t)$, такая, что имеет место (4.1.10). Можно, например, в качестве $q(t)$ взять целую часть $[\log(n(t)+1)]$; тогда при $t \geqslant e^2 t_0$ имеем

$$\left(\frac{t_0}{t}\right)^{q(t)+m-1} \leqslant \exp\{-2\log(n(t)+1)\} = \frac{1}{(n(t)+1)^2}.$$

Следовательно, для выбранной так функции $q(t)$ неравенство (4.1.10) выполнено.

Предположим, что в условиях теоремы 4.1

$$q(t) = q = \mathrm{const}, \quad t_1 \leqslant t < t_2,$$

где $1 \leqslant t_1 < t_2 < \infty$ и

$$u_q(x) = \int\limits_{t_1 \leqslant |\xi| < t_2} K_q(x, \xi)\, d\mu e_\xi.$$

Тогда $u_q(x)$ — субгармоническая функция в $\mathbb{R}^m$, мера Рисса μ которой сосредоточена на множестве $t_1 \leqslant |\xi| < t_2$. В самом деле, это справедливо для функции

$$p(x) = \int\limits_{t_1 \leqslant |\xi| < t_2} K(x-\xi)\, d\mu e_\xi$$

в силу теоремы 3.7. Кроме того,

$$u_q(x) - p(x) = \sum_{\nu=0}^{q} \int\limits_{t_1 \leqslant |\xi| < t_2} -a_\nu(x, \xi)\, d\mu e_\xi.$$

По лемме 4.1 правая часть здесь представляет собой равномерный предел гармонических полиномов степени не выше q и, следовательно, есть также гармонический полином степени не выше q. По лемме 4.2 для $|x| \leqslant \rho$, $|\xi| = r$, $1 \leqslant \rho \leqslant t_1/2$ имеем

$$|u_q(x)| \leqslant 4 \int\limits_{t_1 \leqslant |\xi| < t_2} \left(\frac{4\rho}{r}\right)^{m+q-1} d\mu e_\xi = 4 \int\limits_{t_1 \leqslant t < t_2} \left(\frac{4\rho}{t}\right)^{m+q-1} dn(t).$$

Рассмотрим два случая. Предположим сначала, что функция $q(t)$ не ограничена, и пусть $q(1) = q_1$; в случае $q > q_1$ через r_q обозначим наименьшее значение r, для которого $q(r) \geqslant q$. Если $q(t)$ ограничена сверху и q_2 — максимальное значение $q(t)$, то для $q \leqslant q_2$ выберем r_q, как и раньше, а в случае $q > q_2$ положим $r_q = r_{q_2} + q - q_2$. Тогда в обоих случаях функция $q(t)$ постоянна для $r_q \leqslant t < r_{q+1}$ и $r_{q_1} = 1$, $r_q \to \infty$ при $q \to \infty$. Положим

$$u_q(x) = \int\limits_{r_q \leqslant |\xi| < r_{q+1}} K_{q(|\xi|)}(x, \xi)\, d\mu e_\xi.$$

По доказанному выше, для $|x| \leqslant \rho$, $1 \leqslant \rho < r_q/2$ имеем

$$|u_q(x)| < 4 \int\limits_{r_q \leqslant t < r_{q+1}} \left(\frac{4\rho}{t}\right)^{q(t)+m-1} dn(t).$$

При фиксированном ρ это неравенство имеет место для всех достаточно больших q. Таким образом, ряд $\sum\limits_{q=q_0}^{\infty} u_q(x)$, в силу (4.1.10), сходится равномерно и абсолютно для $|x| \leqslant \rho$. Сумма $\sum\limits_{q_0}^{\infty} u_q(x)$ есть гармоническая функция для $|x| \leqslant \rho$, если $r_{q_0} > 2\rho$, так как представляет собой предел ограниченных гармонических функций; это легко следует из теоремы 1.1.1. Таким образом, функция

$$u(x) = \int\limits_{|\xi|<1} K(x-\xi)\, d\mu e_\xi + \sum_{q=q_1}^{q_2-1} u_q(x) + \sum_{q_2}^{\infty} u_q(x)$$

субгармонична при $|x| \leqslant \rho$ и имеет меру Рисса μ, как и требовалось. Наконец, если $u_1(x)$ — любая другая функция с мерой Рисса μ в $\mathbb{R}^m$, то $v(x) = u(x) - u_1(x)$ является гармонической функцией на любом компактном подмножестве в $\mathbb{R}^m$ и, таким образом, по теореме 3.9, во всем пространстве $\mathbb{R}^m$. Теорема 4.1 полностью доказана.

4.2. ТЕОРЕМА АДАМАРА О ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Теорема 4.1 обычно не очень полезна для приложений вследствие наличия произвольных функций $q(t)$ и $v(x)$. Наибольший интерес представляют случаи, когда q может быть выбрана постоянной. Дадим следующее

Определение 4.1. Если $S(r)$ — положительная возрастающая функция от r при $r \geqslant r_0$, то ее *порядком* λ и *нижним порядком* μ называются числа, определяемые равенствами

$$\lambda = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log S(r)}{\log r}, \quad \mu = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log S(r)}{\log r}.$$

Будем говорить, что $S(r)$ имеет *минимальный*, *средний* или *максимальный тип*, если при $0 < \lambda < \infty$ величина

$$C = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{S(r)}{r^\lambda}$$

соответственно равна нулю, конечна и положительна или бесконечна. Кроме того, будем говорить, что функция $S(r)$ принадлежит *классу сходимости* или *классу расходимости*, если соответственно сходится или расходится интеграл

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{S(r)\,dr}{r^{\lambda+1}}.$$

Определение 4.2. Пусть $u(x)$ — неограниченная сверху субгармоническая функция в $\mathbb{R}^m$. Будем говорить, что функция $u(x)$ имеет *порядок* λ, *нижний порядок* μ, *минимальный*, *средний* или *максимальный тип* и принадлежит *классу сходимости* или *классу расходимости*, если этими свойствами обладает одна из функций $T(r, u)$ или $B(r, u)$, определенных в § 3.9.

Функции $B(r, u)$ и $T(r, u)$, в силу теорем 2.13 и 3.18, являются возрастающими функциями от r. Покажем, что определения в терминах $B(r, u)$ и $T(r, u)$ эквивалентны. Это сразу видно из теоремы 3.19. Действительно, полагая в этой теореме $r = 2\rho$, при условии, что $u(x)$ положительна на $|x| = \rho$ для некоторого ρ, имеем

$$T(\rho, u) \leqslant B(\rho, u) \leqslant 3\ 2^{m-2}T(2\rho, u). \tag{4.2.1}$$

Из этих неравенств следует равенство порядков и нижних порядков функций $T(r)$ и $B(r)$. Кроме того, если λ конечно и положительно, то эти неравенства показывают, что функции $T(r)$ и $B(r)$ одновременно имеют минимальный, средний или максимальный тип и одновременно принадлежат или не принадлежат классу сходимости или классу расходимости (подробнее см. Хейман [1964], теорема 1.7).

Лемма 4.3. *Если функция $S(r)$ удовлетворяет предположениям определения 4.1 и для некоторого $k > 0$*

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{S(r)\,dr}{r^{k+1}} < \infty, \tag{4.2.2}$$

то $\lambda \leqslant k$; если $\lambda = k$, то $S(r)$ имеет минимальный тип.

Докажем, что $S(r)$ имеет порядок, не превосходящий k, и минимальный тип. Действительно, если $\lambda < k$, то неравенство (4.2.2) имеет место, так как в этом случае можно подобрать такое $\varepsilon > 0$, что $\lambda + \varepsilon < k$ и

$$S(r) < r^{\lambda+\varepsilon}, \quad r > r_1.$$

Предположим теперь, что выполнено неравенство (4.2.2) и $\lambda = k$; в этом случае выберем r_1 настолько большим, чтобы

$$\int_{r_1}^{\infty} \frac{S(r)\,dr}{r^{k+1}} < \varepsilon.$$

Функция $S(r)$ возрастает вместе с r и, следовательно,

$$S(r_1)\int\limits_{r_1}^{\infty}\frac{dr}{r^{k+1}}<\varepsilon, \quad \text{т. е.} \quad S(r_1)<\frac{\varepsilon r_1^k}{k}.$$

Так как ε может быть выбрано сколь угодно малым, лемма 4.3 доказана.

4.2.1. Оценим интегралы в (4.1.11) для случая, когда $q(t)$ — постоянная. Имеет место

Лемма 4.4. *Предположим, что* μ *— борелевская мера в* $\mathbb{R}^m$, $n(t)$ *— мера шара* $D(0, t)$, $n(1)=0$ *и функция* $N(r)$, *определенная равенством* (3.9.5), *принадлежит классу сходимости порядка не выше* $q+1$. *Тогда интеграл*

$$u(x)=\int\limits_{|\xi|\geqslant 1}K_q(x, \xi)\,d\mu e_\xi \tag{4.2.3}$$

сходится абсолютно в окрестности бесконечности и равномерно при $|x|\leqslant\rho$. *Кроме того, если* $\rho\geqslant 1$, *то*

$$u(x)\leqslant 4^{m+q}(q+2)\left\{q\rho^q\int\limits_1^{\rho}\frac{N(r)\,dr}{r^{q+1}}+(q+1)\,\rho^{q+1}\int\limits_{\rho}^{\infty}\frac{N(r)\,dr}{r^{q+2}}\right\}. \tag{4.2.4}$$

В силу теоремы 4.1 для доказательства абсолютной сходимости интеграла в (4.2.3) достаточно проверить (4.1.10), т. е. установить неравенство

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{t^{q+m-1}}\,dn(t)<\infty. \tag{4.2.5}$$

Если $R>1$, то, поскольку $n(1)=0$,

$$\int\limits_1^{R}\frac{dn(t)}{t^{q+m-1}}=\frac{n(R)}{R^{q+m-1}}+(q+m-1)\int\limits_1^{R}\frac{n(t)\,dt}{t^{q+m}} \tag{4.2.6}$$

Аналогично, так как $N(1)=0$, получаем

$$\int\limits_1^{R}\frac{n(t)\,dt}{t^{q+m}}=\frac{1}{d_m}\cdot\int\limits_1^{R}\frac{dN(t)}{t^{q+1}}=\frac{1}{d_m}\frac{N(R)}{R^{q+1}}+(q+1)\int\limits_1^{R}\frac{N(t)\,dt}{t^{q+2}} \tag{4.2.7}$$

По предположению, $N(r)$ принадлежит классу сходимости порядка не выше $q+1$ и, следовательно, по лемме 4.3 является функцией минимального типа порядка $q+1$. Таким образом, правая часть в (4.2.7) ограничена при $R \to \infty$, а тем самым ограничена и левая часть. Отсюда следует, что функция $n(r)$ принадлежит классу сходимости порядка не выше $q+m-1$ и является функцией минимального типа этого порядка. Итак, (4.2.5) доказано, и по теореме 4.1 функция $u(x)$, определенная равенством (4.2.3), является субгармонической в $\mathbb{R}^m$ с мерой Рисса μ.

Осталось доказать (4.2.4). Пусть $\rho \geqslant 1$; тогда из (4.1.6) следует, что при $|x| = \rho$, за исключением случая $q = 0$ и $m = 2$, имеем

$$u(x) = \int\limits_{|\xi| \geqslant 1} K_q(x, \xi)\, d\mu e_\xi \leqslant 4^{m+q} \left\{ \int\limits_1^\rho \frac{\rho^q}{r^{m+q-2}}\, dn(r) + \int\limits_\rho^\infty \frac{\rho^{q+1}\, dn(r)}{r^{m+q-1}} \right\}.$$

Проинтегрируем дважды по частям, как в (4.2.6) и (4.2.7). За исключением случая, когда $q = 0$ и $m = 2$, имеем

$$\int\limits_1^\rho \frac{\rho^q\, dn(r)}{r^{m+q-2}} + \int\limits_\rho^\infty \frac{\rho^{q+1}\, dn(r)}{r^{m+q-1}} =$$

$$= (q+m-2)\rho^q \int\limits_1^\rho \frac{n(r)\, dr}{r^{m+q-1}} + (q+m-1)\rho^{q+1} \int\limits_\rho^\infty \frac{n(r)\, dr}{r^{m+q}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(q+m-1)}{d_m} \left\{ \rho^q \int\limits_1^\rho \frac{dN(r)}{r^q} + \rho^{q+1} \int\limits_\rho^\infty \frac{dN(r)}{r^{q+1}} \right\} =$$

$$= \frac{(q+m-1)}{d_m} \left\{ q\rho^q \int\limits_1^\rho \frac{N(r)\, dr}{r^{q+1}} + (q+1)\rho^{q+1} \int\limits_\rho^\infty \frac{N(r)\, dr}{r^{q+2}} \right\}.$$

Так как $d_m \geqslant m-2$, то отсюда следует неравенство (4.2.4).

Если $q = 0$ и $m = 2$, из (4.1.5) аналогично получаем, что

$$u(x) \leqslant \int\limits_1^\infty \log\left(1 + \frac{\rho}{r}\right) dn(r) = \rho \int\limits_1^\infty \frac{n(r)\, dr}{r(r+\rho)} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_1^\rho \frac{n(r)\, dr}{r} + \rho \int\limits_\rho^\infty \frac{n(r)\, dr}{r^2} = \rho \int\limits_\rho^\infty \frac{N(r)\, dr}{r^2}.$$

Таким образом, неравенство (4.2.4) верно при $|x| = \rho$ во всех случаях. По принципу максимума, оно остается верным и при $|x| < \rho$.

4.2.2. Сформулируем и докажем теперь теорему Адамара.

Теорема 4.2 [1]. *Пусть* μ — *борелевская мера в* $\mathbb{R}^m$, $n(t)$ — *мера множества* $1 \leqslant |x| < t$ *и функция* $N(r)$ *определена равенством* (3.9.5). *Тогда если* $N(r)$ *имеет порядок не выше* $q+1$ *и принадлежит классу сходимости, то в теореме* 4.1 *можно положить* $q(\xi) = q = \text{const}$. *В частности, если* $u(x)$ *имеет порядок не выше* $q+1$ *и принадлежит классу сходимости, то, кроме того, функция* $v(x)$ *является гармоническим полиномом степени не выше* q.

В силу предположений теоремы 4.2, к функции

$$u_0(x) = u(x) - \int\limits_{|\xi|<1} K(x-\xi)\, d\mu e_\xi$$

применима лемма 4.4, и, значит, в теореме 4.1 можно положить $q(\xi) = q = \text{const}$.

Пусть $u(x)$ имеет порядок не выше $q+1$ и принадлежит классу сходимости; тогда если $m = 2$, $|x| = \rho > 2$, то

$$\int\limits_{|\xi|<1} K(x-\xi)\, d\mu e_\xi = \int\limits_{|\xi|<1} \log|x-\xi|\, d\mu e_\xi \geqslant 0.$$

Если $m > 2$, то

$$\int\limits_{|\xi|<1} K(x-\xi)\, d\mu e_\xi \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

В обоих случаях порядок функции $u_0(x)$ не превышает порядка $u(x)$. Следовательно, $u_0(x)$ имеет порядок не выше $q+1$ и принадлежит классу сходимости. Ввиду (3.9.6), это же верно для функции $N(r)$. Таким образом, применимы предыдущие рассуждения.

Осталось оценить $v(x)$ в этом случае. Имеем

$$v(x) = u_0(x) - \int\limits_{|\xi|\geqslant 1} K_q(x, \xi)\, d\mu e_\xi.$$

Предположим, что $|x| = \rho > 1$, и пусть

$$u_1(x) = \int\limits_{|\xi|\geqslant 1} K_q(x, \xi)\, d\mu e_\xi.$$

Из (4.2.4) следует, что для $|x| = \rho > 1$

$$u_1(x) \leqslant \rho^q \int\limits_1^\rho \frac{o(r^{q+1})\, dr}{r^{q+1}} + \rho^{q+1} o(1) = o(\rho^{q+1}).$$

[1] Адамар [1893] доказал эту теорему в случае (0.1). Для функций, субгармонических на плоскости, этот результат при $q = 0$ получил Хейнс [1948], а в общем случае Кеннеди [1956].

Таким образом, в обозначениях § 3.9 имеем

$$m(r,\ v) = \frac{1}{c_m r^{m-1}} \left\{ \int\limits_{S(0,\ r)} v^-(x)\, d\sigma(x) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{c_m r^{m-1}} \left\{ \int\limits_{S(0,\ r)} u_0^-(x)\, d\sigma(x) + \int\limits_{S(0,\ r)} u_1^+(x)\, d\sigma(x) \right\} =$$

$$= m(r,\ u_0) + T(r,\ u_1) = o(r^{q+1}).$$

Так как функция $v(x)$ гармонична, $N(r,\ v) = 0$, и, значит, в силу (3.9.6)

$$T(r,\ v) = o(r^{q+1}).$$

Применяя (4.2.1), получаем

$$B(r,\ v) = o(r^{q+1}), \qquad B(r,\ -v) = o(r^{q+1}).$$

Отсюда уже следует (скажем, в силу примера 3 п. 1.5.6), что $v(x)$ есть гармонический полином степени не выше q. Это замечание завершает доказательство теоремы 4.2.

4.3. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ $T(r)$ И $B(r)$

Теперь мы в состоянии исследовать порядки различных функций, которые используются для оценки роста субгармонических функций в пространстве. Ясно, что

$$T(r,\ u) \leqslant B(r,\ u),$$

за исключением случая, когда правая часть отрицательна. Последнее имеет место при больших r только в том случае, когда $m > 2$ и функция u имеет такой вид, как в теореме 3.20. С другой стороны, может быть доказана следующая

Теорема 4.3[1]. *Если $u(x)$ — субгармоническая функция конечного нижнего порядка μ в $\mathbb{R}^m$, то*

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{B(r,\ u)}{T(r,\ u)} \leqslant K(\mu,\ m),$$

где $K(\mu,\ m) \leqslant 3\ \{2e(\mu-1)/(m-1)\}^{m-1}$ при $\mu \geqslant m$, $K(\mu,\ m) \leqslant (2me/\mu)^{\mu}$ при $0 < \mu < m$ и $K(0,\ m) = 1$.

Если $r = \lambda\rho$, где $\lambda > 1$, то по теореме 3.19

$$B(\rho) \leqslant \frac{\lambda^{m-2}(1+\lambda)}{(\lambda-1)^{m-1}}\, T(r).$$

[1]) Наилучшая возможная форма этого результата имеется у Говорова [1969] и Петренко [1969] для $u = \log|f|$, где f — целая функция, и у Дальберга [1972] в общем случае.

Предположим, что $\alpha > \mu$ и что для всех достаточно больших положительных целых $k \geqslant k_0$

$$T(\lambda^k) \geqslant \lambda^\alpha T(\lambda^{k-1}).$$

Тогда для всех $k \geqslant k_0$

$$T(\lambda^k) \geqslant \lambda^{\alpha(k-k_0)} T(\lambda^{k_0}).$$

Если $\lambda^k \leqslant \rho \leqslant \lambda^{k+1}$, то из предыдущего следует, что

$$T(\rho) \geqslant T(\lambda^k) \geqslant \lambda^{\alpha(k+1)} \frac{T(\lambda^{k_0})}{\lambda^{\alpha(k_0+1)}} \geqslant \rho^\alpha \frac{T(\lambda^{k_0})}{\lambda^{\alpha(k_0+1)}} = A\rho^\alpha.$$

Это неравенство имеет место для всех достаточно больших ρ, что противоречит предположению о том, что нижний порядок функции u равен $\mu < \alpha$. Таким образом, при некотором достаточно большом $\rho = \lambda^k$

$$T(\lambda\rho) \leqslant \lambda^\alpha T(\rho).$$

Для таких значений λ получаем

$$B(\rho) \leqslant \frac{\lambda^{\alpha+m-2}(1+\lambda)}{(\lambda-1)^{m-1}} T(\rho)$$

и тем самым

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{B(r)}{T(r)} \leqslant \frac{\lambda^{\alpha+m-2}(1+\lambda)}{(\lambda-1)^{m-1}}.$$

Так как α может быть любым числом, большим μ, то в полученном неравенстве можно заменить α на μ. Предположим сначала, что $\mu \geqslant m$, и положим $\lambda = (\alpha + m - 2)/(\alpha - 1)$; в этом случае

$$\frac{\lambda^{\alpha+m-2}(1+\lambda)}{(\lambda-1)^{m-1}} = \frac{(\alpha+m-2)^{\alpha+m-2}(2\alpha+m-3)}{(m-1)^{m-1}(\alpha-1)^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant 3\left(\frac{\alpha-1+m-1}{m-1}\right)^{m-1}\left(\frac{\alpha-1+m-1}{\alpha-1}\right)^{\alpha-1} \leqslant$$

$$\leqslant 3\left\{\frac{2e(\alpha-1)}{m-1}\right\}^{m-1}.$$

Если же $\mu < m$, то, полагая $\lambda = 1 + m/\alpha$, имеем

$$\frac{\lambda^{\alpha+m-2}(1+\lambda)}{(\lambda-1)^{m-1}} = \frac{(\alpha+m)^{\alpha+m-2}(2\alpha+m)}{m^{m-1}\alpha^\alpha} \leqslant \frac{(\alpha+m)^{\alpha+m}}{m^m\alpha^\alpha} =$$

$$= \left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m \left(\frac{\alpha+m}{\alpha}\right)^\alpha \leqslant \left(\frac{2me}{\alpha}\right)^\alpha.$$

Для $\mu > 0$ можно в последнем неравенстве положить $\alpha = \mu$, и утверждение теоремы 4.3 в этом случае доказано. Если $\mu = 0$, то α может быть выбрано сколь угодно малым, и, так как

$$\left(\frac{2me}{\alpha}\right)^{\alpha} \to 1 \quad \text{при} \quad \alpha \to 0,$$

теорема 4.3 доказана и в этом случае.

4.3.1. Два примера

Теорема 4.3 для $\mu = 0$ дает точное соотношение

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{B(r,\ u)}{T(r,\ u)} = 1.$$

В других случаях неравенство для $K(\mu,\ m)$ не является точным. Однако оказывается, что функция $K(\mu,\ m)$ имеет правильный порядок роста при $\mu \to \infty$ для фиксированного m. Например, если $m = 2$ и $\alpha \geqslant 1/2$, положим $x_1 + ix_2 = \rho e^{i\theta}$ и

$$u(x_1,\ x_2) = \begin{cases} \rho^{\alpha}\cos\alpha\theta, & |\theta| \leqslant \pi/2\alpha, \\ 0, & |\theta| > \pi/2\alpha \end{cases}$$

Ясно, что $u(x_1,\ x_2)$ является субгармонической функцией порядка α и

$$B(\rho,\ u) = \rho^{\alpha},$$

$$T(\rho,\ u) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2\alpha} \rho^{\alpha}\cos\alpha\theta\,d\theta = \frac{\rho^{\alpha}}{\pi\alpha}.$$

Таким образом, в этом случае $\dfrac{B(\rho,\ u)}{T(r,\ u)} = \pi\alpha$.

Соответствующие примеры можно построить и при $m > 2$. Воспользуемся для этого анализом, проведенным в п. 2.6.3. Положим

$$\rho^2 = \sum_{2}^{m} x_n^2, \qquad R^2 = \sum_{1}^{m} x_n^2,$$

$$x_1 = R\cos\theta, \qquad \rho = R\sin\theta,$$

$$u = R^{\alpha}\varphi(\theta);$$

тогда $\nabla^2 u = R^{\alpha-2}\left[\varphi''(\theta) + (m-2)\varphi'(\theta)\operatorname{ctg}\theta + \alpha(\alpha+m-2)\varphi(\theta)\right]$. Пусть $\lambda > 2$ и

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} 1 + \cos\lambda\theta, & |\theta| \leqslant \pi/\lambda, \\ 0, & \pi/\lambda \leqslant |\theta| \leqslant \pi. \end{cases}$$

Построенная функция u, очевидно, субгармонична в $\mathbb{R}^m$ при условии, что

$$L(\varphi) = \varphi''(\theta) + (m-2)\varphi'(\theta)\operatorname{ctg}\theta + \alpha(\alpha+m-2)\varphi(\theta) > 0,$$
$$0 < \theta < \pi/\lambda. \qquad (4.3.1)$$

Докажем, что неравенство (4.3.1) имеет место для достаточно больших α. Действительно, предположим, что $\pi - \delta \leqslant \lambda\theta < \pi$, где $\delta = \pi/4(m-2)$. Тогда

$$\varphi''(\theta) + (m-2)\varphi'(\theta)\operatorname{ctg}\theta = -\lambda^2\left[\cos\lambda\theta + (m-2)\frac{\sin\lambda\theta}{\lambda\sin\theta}\cos\theta\right] >$$
$$> \lambda^2[\cos\delta - (m-2)\sin\delta] > 0,$$

так как $\operatorname{tg}\delta < \frac{4}{\pi}\delta = \frac{1}{m-2}$. Следовательно, при этих условиях $L(\varphi) > 0$. С другой стороны, если $0 < \lambda\theta \leqslant \pi - \delta$, то

$$|\varphi''(\theta) + (m-2)\varphi'(\theta)|\operatorname{ctg}\theta| \leqslant (m-1)\lambda^2,$$
$$\alpha(\alpha+m-2)\varphi(\theta) \geqslant \alpha^2(1-\cos\delta) = 2\alpha^2\sin^2\frac{\delta}{2} \geqslant \frac{2\alpha^2\delta^2}{\pi^2} \geqslant \frac{\alpha^2}{8(m-2)^2}.$$

Таким образом, если $\alpha^2 > 8(m-2)^2(m-1)\lambda^2$, то всегда $L(\varphi) > 0$. В частности, можно положить $\alpha = 3\lambda m^{3/2}$. Построенная функция субгармонична и имеет порядок α в $\mathbb{R}^m$. Однако для любой сферы $S(0, R)$ только ее часть $|\theta| \leqslant \pi/\lambda$ вносит вклад в $T(r, u)$, так как вне нее $u = 0$. Площадь поверхности этой области не больше, чем $A(m)(\pi R/\lambda)^{m-1}$. Таким образом,

$$T(R, u) \leqslant B(R, u)\cdot\frac{1}{c_m}A(m)\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{m-1} \leqslant A_1(m)B(R, u)\alpha^{1-m},$$

где $A_1(m)$ — константа, зависящая только от m, и, следовательно, функция $K(\mu, m)$ имеет правильный порядок роста в теореме 4.3 при $\mu \to \infty$ и фиксированном m.

4.4. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ $N(r)$ И $T(r)$

Хорошо известно, что целые функции конечного порядка λ, не являющегося целым числом, принимают все значения (в частности, нуль) бесконечно много раз. Соответствующий результат для субгармонических функций состоит в том, что если такая функция гармонична и имеет конечный порядок в $\mathbb{R}^m$, то она есть гармонический полином, порядок которого равен его степени. Это утверждение является непосредственным следствием теоремы 4.2. Тем не менее мы можем обобщить более тонкие теоремы, относящиеся к минимальному числу нулей целой функции нецелого или нулевого порядка. Докажем следующий простой результат.

Теорема 4.4. *Предположим, что $u(x)$ — субгармоническая функция конечного положительного нецелого порядка λ в $\mathbb{R}^m$. Тогда функция $N(r, u)$ также имеет порядок λ и тот же самый тип (максимальный, минимальный или средний), что и функция $u(x)$.*

Предположим, что $q < \lambda < q+1$, где q — положительное целое число или нуль, и пусть, кроме того,

$$N(r, u) < cr^{\lambda_1}, \quad r_0 < r < \infty, \tag{4.4.1}$$

где $c > 0$, $q < \lambda_1 \leqslant \lambda$. По теореме 4.1

$$u(x) = \int\limits_{|\xi| \geqslant 1} K_q(x, \xi)\, d\mu e_\xi + v(x),$$

причем для $|x| = r$

$$v(x) = O(r^q) + \int\limits_{|\xi| < 1} K(x - \xi)\, d\mu e_\xi.$$

Если $m > 2$, то последнее слагаемое отрицательно, а при $m = 2$

$$\int\limits_{|\xi| < 1} \log|x - \xi|\, d\mu e_\xi = O(\log|x|), \quad x \to \infty.$$

Таким образом, в обоих случаях

$$u(x) \leqslant \int\limits_{|\xi| \geqslant 1} K_q(x, \xi)\, d\mu e_\xi + o(r^{\lambda_1}).$$

С другой стороны, по лемме 4.4, для $\rho > 1$, $|x| = \rho$, принимая во внимание (4.4.1), имеем

$$u(x) \leqslant A(q, m)\left\{\rho^q \int\limits_1^\rho \frac{N(r)\,dr}{r^{q+1}} + \rho^{q+1} \int\limits_\rho^\infty \frac{N(r)\,dr}{r^{q+2}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant A(q, m)\left\{c\rho^q \int\limits_1^\rho u^{\lambda_1 - q - 1}\,dr + c\rho^{q+1} \int\limits_\rho^\infty r^{\lambda_1 - q - 2}\,dr + o(\rho^{\lambda_1})\right\};$$

отсюда

$$B(\rho, u) \leqslant A(q, m)\, c\rho^{\lambda_1}\left[\frac{1}{\lambda_1 - q} + \frac{1}{q + 1 - \lambda_1} + o(1)\right].$$

Это приводит к противоречию, если только не выполняется равенство $\lambda_1 = \lambda$, так что функция $N(r)$ не может иметь меньший порядок, чем $B(r, u)$. Аналогично получаем, что если $u(x)$ имеет максимальный тип, то $N(r)$ также функция максимального типа. Если $N(r)$ имеет минимальный тип, то в (4.4.1) можно положить

$\lambda_1 = \lambda$ и выбрать c сколь угодно малым; следовательно, функция $B(r, u)$ и тем самым $u(x)$ имеет минимальный тип. Так как порядок и тип $N(r)$, согласно (3.9.6), не может превосходить порядка и типа функций $B(r)$ и $T(r)$, то теорема 4.4 доказана.

Можно доказать теорему, которая в некотором смысле точнее предыдущей. Для ее формулировки определим *дефект* $\delta(u)$ функции u равенством

$$\delta(u) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{m(r, u)}{T(r, u)} = 1 - \varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r, u)}{T(r, u)}. \qquad (4.4.2)$$

Если $m = 2$ и $u(z) = \log|f(z)|$, где $f(z)$ — целая функция, то $\delta(u)$ совпадает с дефектом значения нуль функции $f(z)$ в теории Неванлинны. Имеет место следующая

Теорема 4.5. *Пусть $u(x)$ — субгармоническая функция конечного порядка λ в $\mathbb{R}^m$, где $q < \lambda < q+1$. Тогда*[1])

$$\delta(u) \leqslant A(m, \lambda) = 1 - \frac{(q+1-\lambda)(\lambda-q)}{\lambda(q+2)4^{m+q}}, \quad \lambda \neq 0.$$

Нам нужна лемма о так называемых пиках Пойа (по поводу этого понятия, которое относится также и к нижнему порядку, см. Эдрей [1969]).

Лемма 4.5. *Предположим, что $\varphi_1(r)$, $\varphi_2(r)$, $\varphi(r)$ — непрерывные положительные функции от r для $r_0 < r < \infty$, такие, что $\varphi_2(r)/\varphi_1(r)$ возрастает и*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\varphi(r)}{\varphi_1(r)} = \infty, \quad \varliminf_{r\to\infty} \frac{\varphi(r)}{\varphi_2(r)} = 0. \qquad (4.4.3)$$

Тогда существует такая последовательность $r = r_n \to \infty$ при $n \to \infty$, что

$$\frac{\varphi(\rho)}{\varphi_1(\rho)} \leqslant \frac{\varphi(r)}{\varphi_1(r)}, \quad r_0 \leqslant \rho \leqslant r, \qquad \frac{\varphi(\rho)}{\varphi_2(\rho)} \leqslant \frac{\varphi(r)}{\varphi_2(r)}, \quad r \leqslant \rho < \infty. \qquad (4.4.4)$$

Мы построим для любого заданного положительного числа C такое r, что $r \geqslant C$ и r удовлетворяет (4.4.4). Для этого положим

$$M_1 = \sup_{r_0 \leqslant r \leqslant C} \frac{\varphi(r)}{\varphi_1(r)}.$$

---

[1]) Это неравенство не является точным. Для случая $0 \leqslant \lambda < 1$ мы докажем соответствующие точные оценки в следующем параграфе. Если $\lambda > 1$, то наилучшие известные оценки получены Майлзом и Ши [1973] в случае $m = 2$ и Рао и Ши [1976] при $m > 2$.

Так как имеет место (4.4.3), то существует наименьшее из чисел $R_1 \geqslant C$, удовлетворяющих равенству

$$\frac{\varphi(R_1)}{\varphi_1(R_1)} = M_1.$$

Пусть R_2 таково, что $R_2 \geqslant R_1$ и

$$\frac{\varphi(R_2)}{\varphi_2(R_2)} = \sup_{R \geqslant R_1} \frac{\varphi(R)}{\varphi_2(R)}$$

Выберем теперь R_3, $R_1 \leqslant R_3 \leqslant R_2$, так, чтобы

$$\frac{\varphi(R_3)}{\varphi_1(R_3)} = \sup_{R_1 \leqslant R \leqslant R_2} \frac{\varphi(R)}{\varphi_1(R)}. \tag{4.4.5}$$

Тогда

$$\frac{\varphi(R_3)}{\varphi_1(R_3)} \geqslant \frac{\varphi(R_1)}{\varphi_1(R_1)} = M_1 \geqslant \frac{\varphi(R)}{\varphi_1(R)}, \quad r_0 \leqslant r \leqslant R_1.$$

Таким образом, по построению, для $R_1 \leqslant R \leqslant R_3$ имеем

$$\frac{\varphi(R_3)}{\varphi_1(R_3)} \geqslant \frac{\varphi(R)}{\varphi_1(R)} \tag{4.4.6}$$

и, следовательно, это неравенство справедливо для $r_0 \leqslant R \leqslant R_3$.

По (4.4.5) и ввиду того, что функция φ_2/φ_1 возрастает, для $R_3 \leqslant R \leqslant R_2$ имеем

$$\frac{\varphi(R)}{\varphi_2(R)} = \frac{\varphi(R)}{\varphi_1(R)} \cdot \frac{\varphi_1(R)}{\varphi_2(R)} \leqslant \frac{\varphi(R_3)}{\varphi_1(R_3)} \cdot \frac{\varphi_1(R_3)}{\varphi_2(R_3)} = \frac{\varphi(R_3)}{\varphi_2(R_3)},$$

и для $R \geqslant R_2$

$$\frac{\varphi(R)}{\varphi_2(R)} \leqslant \frac{\varphi(R_2)}{\varphi_2(R_2)} \leqslant \frac{\varphi(R_3)}{\varphi_2(R_3)}.$$

Отсюда для $R \geqslant R_3$ получаем

$$\frac{\varphi(R)}{\varphi_2(R)} \leqslant \frac{\varphi(R_3)}{\varphi_2(R_3)}.$$

Таким образом, $r = R_3$ обладает нужными свойствами, и лемма 4.5 доказана.

Теперь мы можем доказать теорему 4.5.

Пусть q — некоторое целое число, $q \geqslant 0$, $q < \lambda < q+1$; применим лемму 4.5 к функциям $\varphi_1(r) = r^{\lambda-\varepsilon}$, $\varphi_2(r) = r^{\lambda+\varepsilon}$, $\varphi(r) = B(r, u)$. Предположим, что

$$N(r, u) \leqslant K \cdot B(r, u), \quad r \geqslant r_0,$$

и получим противоречие при достаточно малых K. Пусть r — некоторое большое положительное число, удовлетворяющее неравенствам (4.4.4) леммы 4.5. Тогда из теоремы 4.2 и леммы 4.4

следует, что при $|x| = r$ справедливо неравенство

$$u(x) \leqslant 4^{m+q}(q+2)K\cdot\left\{qr^q\int_1^r \frac{B(\rho)\,d\rho}{\rho^{q+1}} + \right.$$
$$\left. + (q+1)r^{q+1}\int_r^\infty \frac{B(\rho)\,d\rho}{\rho^{q+2}} + o(r^{\lambda-\varepsilon})\right\}.$$

Выбирая x таким, что $u(x) = B(r)$, и применяя лемму 4.5, получим

$$B(r) \leqslant 4^{m+q}(q+2)\cdot K\cdot B(r)\left\{qr^q\int_1^r \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\lambda-\varepsilon}\frac{d\rho}{\rho^{q+1}} + \right.$$
$$\left. + (q+1)r^{q+1}\int_r^\infty \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\lambda+\varepsilon}\frac{d\rho}{\rho^{q+2}}\right\} + o(r^{\lambda-\varepsilon}) =$$
$$= 4^{m+q}(q+2)\cdot K\cdot B(r)\left\{\frac{q}{\lambda-\varepsilon-q} + \frac{q+1}{q+1-\lambda-\varepsilon}\right\} + o(r^{\lambda-\varepsilon}).$$

Из (4.4.4) при подходящем выборе r_0 имеем

$$\frac{B(r)}{r^{\lambda-\varepsilon}} \geqslant \frac{B(r_0)}{r_0^{\lambda-\varepsilon}} = C_1;$$

разделив на $B(r)$ и устремляя r к бесконечности, получаем

$$1 \leqslant 4^{m+q}(q+2)K\left\{\frac{q}{\lambda-\varepsilon-q} + \frac{q+1}{q+1-\lambda-\varepsilon}\right\}.$$

Так как ε произвольно мало, то

$$K \geqslant \frac{(q+1-\lambda)(\lambda-q)}{\lambda(q+2)4^{m+q}},$$

и, таким образом,

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{N(r)}{T(r)} \geqslant \varlimsup_{r\to\infty}\frac{N(r)}{B(r)} \geqslant \frac{(q+1-\lambda)(\lambda-q)}{\lambda(q+2)4^{m+q}},$$

что и доказывает теорему 4.5.

Заметим, что $A(m, \lambda) \to 1$, когда λ приближается к любому целому положительному числу. Однако $A(m, \lambda)$ остается ограниченным сверху константой, меньшей единицы, при $\lambda \to 0$. Действительно, если $\lambda = 0$, то можно провести все рассуждения, как и выше, и получить $A(m, 0) = 1 - 4^{-m}/2$. Проведенный анализ можно значительно улучшить и получить точные оценки для функций порядка не выше 1, что и будет сделано ниже.

4.5. ФУНКЦИИ ПОРЯДКА НЕ ВЫШЕ 1

Начнем с уточнения оценки (4.2.4). Имеет место следующая

Лемма 4.6. *Предположим, что $u(x)$ — субгармоническая функция порядка не выше 1 в $\mathbb{R}^m$, принадлежащая классу сходимости и $|u(0)| < \infty$. Тогда для всех x имеем*

$$u(x) = u(0) + \int\limits_{|\xi|<\infty} K_0(x, \xi)\, d\mu e_\xi, \tag{4.5.1}$$

а для $|x| = \rho$

$$u(x) < u(0) + (m-1)\rho \int\limits_0^\infty \frac{t^{m-2} N(t)\, dt}{(\rho+t)^m}. \tag{4.5.2}$$

Если $u(\xi)$ — гармоническая функция всюду, кроме луча $\xi = -\lambda x$, $0 \leqslant \lambda < \infty$, то в (4.5.2) имеет место равенство.

По теореме 4.2 имеем

$$u(x) = \int\limits_{|\xi|<1} K(x-\xi)\, d\mu e_\xi + \int\limits_{|\xi|\geqslant 1} K_0(x, \xi)\, d\mu e_\xi + \text{const}. \tag{4.5.3}$$

Так как $|u(0)| < \infty$, то из (3.9.4) и (3.9.5) следует, что

$$N(1, u) = \int\limits_{D(0,\, 1)} g(0, \xi)\, d\mu e_\xi < \infty,$$

где

$$g(0, \xi) = \begin{cases} \log \dfrac{1}{|\xi|}, & m = 2, \\ |\xi|^{2-m} - 1, & m > 2. \end{cases}$$

Из (4.5.3), с учетом того что $K_0(x, \xi) = K(x-\xi) + g(0, \xi) + \varepsilon$, где $\varepsilon = 0$ при $m = 2$ и $\varepsilon = 1$ при $m > 2$, получаем

$$u(x) = \int K_0(x, \xi)\, d\mu e_\xi + \text{const}.$$

Так как $K_0(0, \xi) = 0$, то константа равна $u(0)$, что и дает равенство (4.5.1).

Заметим теперь, что для $|x| = \rho$, $|\xi| = t$

$$K_0(x, \xi) = \log\left|\frac{x-\xi}{t}\right| \leqslant \log\left(1 + \frac{\rho}{t}\right), \quad m = 2, \tag{4.5.4}$$

$$K_0(x, \xi) = |\xi|^{2-m} - |x-\xi|^{2-m} \leqslant t^{2-m} - (\rho+t)^{2-m}, \quad m > 2. \tag{4.5.5}$$

Если $m=2$, то

$$u(x)-u(0)\leqslant\int_1^\infty \log\left(1+\frac{\rho}{t}\right)dn(t)=$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}}\left\{\rho\int_\varepsilon^R\frac{n(t)\,dt}{t(t+\rho)}+\left[n(t)\log\left(1+\frac{\rho}{t}\right)\right]_\varepsilon^R\right\}.$$

Слагаемое, отвечающее $t=R$, пропадает, так как $u(x)$ является функцией минимального типа порядка не выше 1 и, значит,

$$\frac{n(R)}{R}\to 0 \quad \text{при} \quad R\to\infty.$$

Аналогично, так как $u(0)$ и $N(r)$ конечны при любом r, то

$$n(t)\log(1/t)\to 0 \quad \text{при} \quad t\to 0.$$

По тем же соображениям имеем

$$u(x)-u(0)\leqslant\rho\int_0^\infty\frac{n(t)\,dt}{t(t+\rho)}=\rho\int_0^\infty\frac{dN(t)}{(t+\rho)}=\rho\int_0^\infty\frac{N(t)\,dt}{(t+\rho)^2}.$$

Равенство будет только тогда, когда в (4.5.4) имеет место равенство для всех тех t, для которых мера μ не равна нулю, т. е. если мера сосредоточена в точках вида $-\lambda x$, где $\lambda>0$. Это замечание доказывает лемму 4.6 при $m=2$.

При $m>2$ аналогичным образом получаем

$$u(x)-u(0)\leqslant\int_0^\infty\{t^{2-m}-(\rho+t)^{2-m}\}\,dn(t)=$$

$$=(m-2)\int_0^\infty\{t^{1-m}-(\rho+t)^{1-m}\}\,n(t)\,dt=$$

$$=\int_0^\infty\left\{1-\left(\frac{t}{\rho+t}\right)^{m-1}\right\}dN(t)=$$

$$=(m-1)\rho\int_0^\infty\frac{t^{m-2}N(t)\,dt}{(\rho+t)^m}.$$

Равенство имеет место при тех же условиях, что и выше. Этим завершается доказательство леммы 4.6.

4.5.1. Точное неравенство, связывающее $N(r)$ и $B(r)$

Докажем следующую теорему [1]).

Теорема 4.6. *Предположим, что* $u(x)$ — *субгармоническая функция порядка* $\lambda < 1$, *не ограниченная сверху в* $\mathbb{R}^m$, *и* $|u(0)| < \infty$. *Тогда*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r)}{B(r)} \geqslant \frac{(m-2)!\sin\pi\lambda}{\pi\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+m-2)} = \frac{\Gamma(m-1)\Gamma(\lambda)\sin\pi\lambda}{\pi\Gamma(m+\lambda-1)}, \qquad (4.5.6)$$

причем правая часть считается равной 1, *если* $\lambda = 0$. *Равенство в* (4.5.6) *имеет место тогда, когда* $u(x)$ *гармонична всюду, за исключением некоторого луча, выходящего из начала координат, и* $N(r) = r^\lambda$, $0 < r < \infty$, *при* $\lambda > 0$ (*и для всех функций* $u(x)$ *при* $\lambda = 0$).

Применим лемму 4.5 к функциям $\varphi_1(r) = r^{\lambda-\varepsilon}$, $\varphi_2(r) = r^{\lambda+\varepsilon}$, $\varphi(r) = B(r)$ и выберем ρ, так, чтобы выполнялось (4.4.4), где ρ и r поменялись местами. Предположим, что

$$N(r) \leqslant CB(r), \quad r > r_0.$$

Выберем x так, чтобы $|x| = \rho$, $u(x) = B(\rho)$. Тогда из (4.5.2) получаем

$$B(\rho) \leqslant u(0) + (m-1)\rho\int_0^\infty \frac{t^{m-2}N(t)\,dt}{(\rho+t)^m} \leqslant$$

$$\leqslant (m-1)\rho C\int_0^\infty \frac{t^{m-2}B(t)\,dt}{(\rho+t)^m} + O(1) \leqslant$$

$$\leqslant O(1) + (m-1)\rho CB(\rho)\left\{\int_0^\rho \frac{t^{m-2}(t/\rho)^{\lambda-\varepsilon}\,dt}{(\rho+t)^m} + \right.$$

$$\left. + \int_\rho^\infty \frac{t^{m-2}(t/\rho)^{\lambda+\varepsilon}\,dt}{(\rho+t)^m}\right\} =$$

$$= O(1) + (m-1)CB(\rho)\left\{\int_0^1 \frac{x^{m-2+\lambda-\varepsilon}\,dx}{(1+x)^m} + \int_1^\infty \frac{x^{m-2+\lambda+\varepsilon}\,dx}{(1+x)^m}\right\}.$$

Разделив на $B(\rho)$ и устремляя ρ к бесконечности, имеем

$$1 \leqslant (m-1)C\left\{\int_0^1 \frac{x^{m-2+\lambda-\varepsilon}\,dx}{(1+x)^m} + \int_1^\infty \frac{x^{m-2+\lambda+\varepsilon}\,dx}{(1+x)^m}\right\}.$$

---

[1]) Случай, когда $u(z) = \log|f(z)|$, где $f(z)$ — целая функция, изучен Валироном [1935]. [Теорема 4.6, а также теорема 4.9, остается справедливой с нижним порядком λ вместо порядка; см. Ерёменко [1978].— *Прим. ред.*]

Так как эти интегралы непрерывно зависят от ε для малых ε, то в последнем неравенстве можно положить $\varepsilon = 0$; отсюда

$$1 \leqslant (m-1) C \int_0^\infty \frac{x^{m-2+\lambda}\,dx}{(1+x)^m}.$$

Полагая $x = t/(1-t)$, получим

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-2+\lambda}}{(1+x)^m}dx = \int_0^1 t^{m-2+\lambda}(1-t)^{-\lambda}\,dt = \frac{\Gamma(m-1+\lambda)\,\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(m)} =$$

$$= \frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+m-2)\,\Gamma(\lambda)\,\Gamma(1-\lambda)}{(m-1)!} =$$

$$= \frac{\pi\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+m-2)}{(m-1)!\,\sin\pi\lambda}.$$

Таким образом,

$$C \geqslant \frac{(m-2)!\,\sin\pi\lambda}{\pi\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+m-2)}, \quad \lambda > 0; \qquad C \geqslant 1, \quad \lambda = 0,$$

откуда и следует (4.5.6). Заметим, что так как $N(r) \leqslant T(r) + O(1) \leqslant B(r) + O(1)$, то при $\lambda = 0$ в (4.5.6) имеет место равенство.

Если $\lambda > 0$, положим $N(r) = r^\lambda$, т. е. $n(r) = \frac{\lambda}{d_m} r^{\lambda+m-2}$. Отсюда видно, что в (4.5.2) имеет место равенство, если $x_1 = \rho$, а функция $u(x)$ гармонична вне отрицательной полуоси x_1. В этом случае

$$B(\rho) = (m-1)\,\rho \int_0^\infty \frac{t^{m-2+\lambda}\,dt}{(\rho+t)^m} = \rho^\lambda / C(\lambda, m),$$

где

$$C(\lambda, m) = \frac{\Gamma(m-1)\,\Gamma(\lambda)\sin\pi\lambda}{\pi\Gamma(\lambda+m-1)} \qquad (4.5.7)$$

что и утверждалось.

4.5.2. Мы можем теперь уточнить теорему 4.5 при $\lambda < 1$. Справедлива следующая [1])

Теорема 4.7. *Если $u(x)$ — субгармоническая функция порядка $\lambda < 1$ в $\mathbb{R}^m$, то*

$$\delta(u) \leqslant 1 - C(\lambda, m),$$

где $C(\lambda, m)$ определена равенством (4.5.7). В частности, если $\lambda = 0$, то $\delta(u) = 0$.

[1]) Ср. Ерёменко [1978].— *Прим. ред.*

Если $\varepsilon > 0$, то, по теореме 4.6, для некоторого произвольно большого r

$$N(r) > (C(\lambda, m) - \varepsilon) B(r) \geqslant (C(\lambda, m) - \varepsilon) T(r),$$

откуда и вытекает утверждение теоремы 4.7. Так как $C(\lambda, m) = 1$ при $\lambda = 0$, то $\delta(u) = 0$.

При $\lambda > 0$ теорема 4.7 не точна. Однако если $0 < \lambda < 1$, то

$$C(\lambda, m) \geqslant \frac{\sin \pi\lambda \cdot (m-2)!}{\pi\lambda \cdot (m-1)!} = \frac{1}{(m-1)} \cdot \frac{\sin \pi\lambda}{\pi\lambda} > \frac{1-\lambda}{4^m},$$

а значит, неравенство в теореме 4.7 намного точнее соответствующего неравенства в теореме 4.5.

Для малых значений λ теорема 4.3 тоже допускает уточнение.

Теорема 4.8. *Если* $0 < \lambda < 1$, *то*

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{B(r, u)}{T(r, u)} \leqslant \frac{1}{C(\lambda, m)}.$$

Теорема 4.8 следует из теоремы 4.6, так как

$$\frac{B(r, u)}{T(r, u)} \leqslant \frac{B(r, u)}{N(r, u)}.$$

Неравенство теоремы 4.8 является точным при $m = 2$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1/2$. Действительно, в этом случае

$$\frac{1}{C(\lambda, m)} = \frac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}.$$

Рассмотрим [1]) $u(z) = r^{\lambda} \cos \lambda\theta$, где $z = re^{i\theta}$, $|\theta| \leqslant \pi$; тогда при $\lambda \leqslant 1/2$ имеем

$$T(r, u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} r^{\lambda} \cos \lambda\theta \, d\theta = \frac{r^{\lambda} \sin \pi\lambda}{\lambda\pi} = N(r, u)$$

и, следовательно, $u(0) = m(r, u) = 0$.

Ниже мы докажем, что $\delta(u) = 0$ для $0 \leqslant \lambda \leqslant 1/2$ и $m = 2$, так что теорема 4.7 все еще не является наилучшим из возможных результатов. Однако если $m > 2$, то величина $\delta(u)$ может быть положительной для произвольно малых λ. Этим свойством обладает экстремальная функция в теореме 4.6. Пусть

$$\rho^2 = |x|^2 = \sum_{\nu=1}^{m} x_\nu^2, \qquad x_1 = \rho \cos \theta,$$

---

[1]) Функция $u(z)$ субгармоническая, так как при малом δ, если $\pi - \delta < \theta < \pi + \delta$, $z = re^{i\theta}$, то $u(z) = \max \{ r^{\lambda} \cos \lambda\theta, r^{\lambda} \cos(\lambda(2\pi - \theta))\}$.

и предположим, что $N(r) = r^{\lambda}$, а функция $u(x)$ гармоническая вне отрицательной полуоси x_1. Тогда если j обозначает вектор $(1, 0, 0, \ldots, 0)$, то

$$u(x) = \int_0^{\infty} \{t^{2-m} - |x+jt|^{2-m}\}\, dn(t) =$$

$$= \frac{\lambda(\lambda+m-2)}{(m-2)} \int_0^{\infty} \{t^{2-m} - (t^2+\rho^2+2t\rho\cos\theta)^{1-(m/2)}\}\, t^{\lambda+m-3}\, dt.$$

Положим $t = \rho y$; тогда

$$u(x) = \frac{\lambda(\lambda+m-2)}{m-2} \rho^{\lambda} I(\lambda, m, \theta),$$

где

$$I(\lambda, m, \theta) = \int_0^{\infty} \{y^{2-m} - (1+y^2+2y\cos\theta)^{1-m/2}\}\, y^{\lambda+m-3}\, dy. \qquad (4.5.8)$$

Функция $I(\lambda, m, \theta)$ является, по существу, присоединенной функцией Лежандра и не может быть выражена через элементарные функции, если m нечетно. Можно выразить $I(\lambda, m, \theta)$ как мероморфную функцию от λ (для всех λ) при помощи контурного интеграла

$$I(\lambda, m, \theta) = \frac{1}{(e^{2\pi i\lambda} - 1)} \int_{\Gamma} \frac{z^{\lambda+m-3}\, dz}{(1+z^2+2z\cos\theta)^{m/2-1}},$$

где Γ — некоторый жорданов контур, охватывающий две точки

$$z = -\cos\theta \pm i\sin\theta$$

и не пересекающий положительную действительную полуось и точку нуль. Действительно, если контур Γ состоит из большой окружности и малой окружности с центром в нуле, соединенных между собой двумя отрезками, лежащими чуть выше и чуть ниже положительной действительной полуоси, то при $0 < \lambda < 1$ этот интеграл аппроксимирует правую часть (4.5.8).

Таким образом, при четном m мы можем оценить $I(\lambda, m, \theta)$ при помощи вычетов. Например, получаем

$$I(\lambda, 4, \theta) = \frac{\pi}{\sin\pi\lambda} \cdot \frac{\sin(\lambda+1)\theta}{\sin\theta},$$

а также рекуррентное соотношение

$$\frac{\partial}{\partial\theta} I(\lambda, m, \theta) = (m-2)\sin\theta \cdot I(\lambda-1, m+2, \theta),$$

из которого следует, в частности, равенство

$$I(\lambda, 6, \theta) = \frac{\pi}{2 \sin \pi\lambda} \cdot \frac{\cos\theta \sin(\lambda+2)\theta - (\lambda+2)\sin\theta \cos(\lambda+2)\theta}{\sin^3\theta}.$$

Заметим, что при $0 < \lambda < 1$, $m \geqslant 3$ функция $I(\lambda, m, \theta)$ обладает следующими свойствами:

(i) $I(\theta)$ — монотонно убывающая функция от θ, $0 \leqslant \theta < \pi$;

(ii) $I(\theta) > 0$ при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$;

(iii) $I(\theta) \to -\infty$ при $\theta \to \pi$.

Все эти свойства легко следуют из (4.5.8). Для вывода (iii) заметим, что при $\theta \to \pi$

$$I(\theta) \to \int_0^\infty \{y^{2-m} - |1-y|^{2-m}\} y^{\lambda+m-3}\, dy = -\infty.$$

4.5.3. Точная оценка для $\delta(u)$; формулировка результатов

Прилагая значительные усилия, можно получить наилучшую возможную форму теоремы 4.7.

Определим функцию $I(\lambda, m, \theta)$ формулой (4.5.8), где $0 < \lambda < 1$ и $m \geqslant 3$ — целое число, и положим

$$I(\lambda, 2, \theta) = \cos \lambda\theta.$$

Тогда для $\rho = |x|$ функция

$$u_0(x) = \rho^\lambda I(\lambda, m, \theta) \tag{4.5.9}$$

субгармонична в $\mathbb{R}^m$ и гармонична при $|\theta| < \pi$.

Наш результат составляет следующая

Теорема 4.9. *Если $u(x)$ — субгармоническая функция порядка λ в $\mathbb{R}^m$, $0 < \lambda < 1$, то* [1])

$$\delta(u) \leqslant \delta(u_0), \tag{4.5.10}$$

где функция $u_0(x)$ определена равенством (4.5.9).

По теореме 4.9 проблема точной оценки сверху для $\delta(u)$ сводится к вычислению $\delta(u_0)$. Это возможно в терминах элементарных функций только тогда, когда m четно. В частности, имеет место

Теорема 4.10. *Если $m = 2$ и функция $u_0(x)$ задана равенством* (4.5.9), *то*

$$\begin{aligned} &\delta(u_0) = 0, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1/2; \\ &\delta(u_0) = 1 - \sin(\pi\lambda), \quad 1/2 \leqslant \lambda < 1. \end{aligned} \tag{4.5.11}$$

[1]) Для $u(z) = \log|f(z)|$, где $f(z)$ — целая функция, этот результат является частным случаем теоремы Эдрея и Фукса [1960].

Если $m = 4$, *то*

$$\delta(u_0) = 1 - \frac{\sin \pi\lambda}{(\lambda+1)\sin(\pi/(\lambda+1))}, \quad 0 < \lambda < 1. \tag{4.5.12}$$

Для доказательства этих результатов нам понадобятся некоторые леммы.

Лемма 4.7. *Если*

$$|x| = \Big(\sum_{\nu=1}^{m} x_\nu^2\Big)^{1/2} = R,$$

то пусть $\rho \geqslant 0$ *и* θ *таковы, что* $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ *и* $x_1 = R\cos\theta$, $\rho = R\sin\theta$. *Тогда если* $\sigma(\theta_0)$ *обозначает площадь* $(m-1)$*-мерной сферической шапочки* $|\theta| < \theta_0$ *на гиперсфере* $|x| = R$, *то*

$$\sigma(\theta_0) = c_{m-1} R^{m-1} \int_0^{\theta_0} (\sin\theta)^{m-2}\, d\theta,$$

где, как обычно, $c_m = 2\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$.

Доказательство является элементарным упражнением в теории функций многих переменных, и мы его опустим.

Имеет место следующая

Лемма 4.8. *Пусть* $f(\theta)$ — *действительная непрерывная убывающая функция от* θ *для* $0 < \theta < \pi$, *такая, что*

$$\int_0^{\varepsilon} (\sin\theta)^{m-2} f(\theta)\, d\theta < +\infty$$

для некоторого (а значит, и для любого) положительного ε. *Тогда для любого измеримого множества* E *на сфере радиуса* R *в* $\mathbb{R}^m$ *имеем*

$$\int_E f(\theta)\, d\sigma \leqslant \int_{E_0} f(\theta)\, d\sigma,$$

где E_0 — *сферическая шапочка той же площади, что и* E.

Предположим, во-первых, что $f(\theta) \geqslant 0$ при $0 < \theta < \theta_0$, $f(\theta) = 0$ при $\theta_0 < \theta < \pi$ и что E_0 — сферическая шапочка $\theta < \theta_0$. В этом случае лемма 4.8 очевидна, так как, обозначая через S всю сферу, имеем

$$\int_E f(\theta)\, d\sigma \leqslant \int_S f(\theta)\, d\sigma = \int_{E_0} f(\theta)\, d\sigma$$

Теперь предположим только, что функция $f(\theta)$ удовлетворяет условиям леммы 4.8 и, кроме того, $f(\theta_0) = 0$, а E_0 — сферическая шапочка $0<\theta<\theta_0$. Пусть

$$g(\theta)=f(\theta),\quad \theta<\theta_0;\qquad g(\theta)=0,\quad \theta>\theta_0;$$

тогда, применяя предыдущие соображения к функции $g(\theta)$, получаем

$$\int_E f(\theta)\,d\sigma\leqslant\int_E g(\theta)\,d\sigma\leqslant\int_{E_0} g(\theta)\,d\sigma=\int_{E_0} f(\theta)\,d\sigma,$$

и лемма 4.8 в этом случае также доказана.

Наконец, в общем случае применим только что доказанный результат к функции $f(\theta)-f(\theta_0)$ вместо $f(\theta)$. Тогда

$$\int_E \{f(\theta)-f(\theta_0)\}\,d\sigma\leqslant\int_{E_0}\{f(\theta)-f(\theta_0)\}\,d\sigma,$$

т. е.

$$\int_E f(\theta)\,d\sigma\leqslant\int_{E_0} f(\theta)\,d\sigma+f(\theta_0)\left\{\int_E d\sigma-\int_{E_0} d\sigma\right\},$$

что и доказывает лемму 4.8, так как E и E_0 имеют равные площади.

Далее, имеет место следующая

Лемма 4.9. *Предположим, что $u(x)$, $u_1(x)$ — субгармонические функции порядка меньше 1 в $\mathbb{R}^m$, функция $u_1(x)$ гармонична всюду, за исключением отрицательной полуоси x_1, и*

$$N(r,u_1)=N(r,u),\quad 0<r<\infty,\quad u(0)=u_1(0).$$

Тогда если E, E_0 определены так же, как в лемме 4.8, то

$$\int_E u(x)\,d\sigma(x)\leqslant\int_{E_0} u_1(x)\,d\sigma(x).$$

По лемме 4.6 имеем

$$u(x)=u(0)+\int_{|\xi|<\infty} K_0(x,\xi)\,d\mu e_\xi,$$

где

$$K_0(x,\xi)=\log\left|\frac{x-\xi}{\xi}\right|,\qquad m=2;$$

$$K_0(x,\xi)=|\xi|^{2-m}-|x-\xi|^{2-m},\qquad m>2.$$

Пусть ξ_1 обозначает точку $(-|\xi|,0,0,\ldots,0)$; тогда

$$u_1(x)=u(0)+\int_{|\xi|<\infty} K_0(x,\xi_1)\,d\mu e_\xi.$$

Если E — измеримое множество на сфере $|x| = R$ и E_0 — сферическая шапочка на $|x| = R$, имеющая ту же площадь, что и E, то

$$\int_E u(x)\,d\sigma(x) = \int_E u(0)\,d\sigma(x) + \int_{|\xi|<\infty} d\mu e_\xi \int_E K_0(x, \xi)\,d\sigma(x). \qquad (4.5.13)$$

Порядок интегрирования можно изменить, так как для всех $x \in E$ имеем

$$K_0(x, \xi) \leqslant K_0(-x_1, \xi_1)$$

и, по лемме 4.6,

$$\int_E K_0(-x_1, \xi_1)\,d\sigma(x)\,d\mu(\xi) \leqslant mc_m R^m \cdot \int_0^\infty \frac{t^{m-2}N(t)\,dt}{(R+t)^m} < \infty.$$

Заметим теперь, что можно произвести изометрическое (ортогональное) преобразование или, вращение $y = T(x)$ в $\mathbb{R}^m$, которое переводит ξ в ξ_1. Так как такое преобразование не изменяет меры $d\sigma(x)$, то E переходит в некоторое множество E_1 той же меры, что и E_0.

Таким образом, так как $K_0(x, \xi)$ зависит только от $|\xi|$ и $|x - \xi|$, то

$$\int_E K_0(x, \xi)\,d\sigma(x) = \int_{E_1} K_0(y, \xi_1)\,d\sigma(y).$$

Функцию $K_0(y, \xi_1)$ можно представить в виде

$$K_0(y, \xi_1) = f_m(\theta),$$

где если $|\xi| = t$, $|y| = R$, $y_1 = R\cos\theta$, y_1 — первая координата y, то

$$\left.\begin{aligned} f_2(\theta) &= \frac{1}{2}\log\left\{\frac{R^2+2tR\cos\theta+t^2}{t^2}\right\}, \\ f_m(\theta) &= t^{2-m} - (R^2+2tR\cos\theta+t^2)^{1-m/2}, \quad m > 2. \end{aligned}\right\} \qquad (4.5.14)$$

По лемме 4.8 имеем

$$\int_{E_1} K_0(y, \xi_1)\,d\sigma(y) \leqslant \int_{E_0} K_0(x, \xi_1)\,d\sigma(x),$$

и неравенство (4.5.10) дает

$$\int_E u(x)\,d\sigma(x) \leqslant \int_E u(0)\,d\sigma(x) + \int_{|\xi|<\infty} d\mu e_\xi \int_{E_0} K_0(x, \xi_1)\,d\sigma(x) =$$

$$= \int_{E_0} u_1(x)\,d\sigma(x).$$

Лемма 4.9 доказана.

Из леммы 4.9 следует, что при доказательстве теоремы 4.9 можно ограничиться функциями, гармоническими всюду вне отрицательной полуоси x_1. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $|x| = R$ и θ определено равенством $R\cos\theta = x_1$. Тогда

$$u(x) = u(0) + \int_0^\infty f_m(t, \theta, R)\, dn(t),$$

где $n(t)$ обозначает массу Рисса в $|\xi| < t$ и тем самым на интервале $(-t, 0)$ отрицательной полуоси x_1, а функция $f_m(t, \theta, R)$ определена равенством (4.5.14). Интегрируя дважды по частям, получаем

$$u(x) = u(0) + \int_0^\infty \left\{1 - \frac{(R\cos\theta + t)\, t^{m-1}}{(R^2 + 2tR\cos\theta + t^2)^{m/2}}\right\} dN(t),$$

т. е.

$$u(x) = u(0) + \int_0^\infty \frac{P_m(t, R, \theta)\, N(t)\, dt}{(R^2 + 2tR\cos\theta + t^2)^{m/2+1}}, \tag{4.5.15}$$

где

$$P_m(t, R, \theta) = (m-1)\, R^3 t^{m-2}\cos\theta + R^2 t^{m-1}(m + (m-2)\cos^2\theta) + \\ + Rt^m (m-1)\cos\theta. \tag{4.5.16}$$

Имеет место следующая

Лемма 4.10. *Если*

$$Q_m(t, R, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{P_m(t, R, \theta)(\sin\theta)^{m-2}}{(R^2 + 2tR\cos\theta + t^2)^{m/2+1}}\, d\theta,$$

то $Q_m(t, R, \varphi) \geqslant 0$ *для всех положительных* t, R *и* $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

Заметим, что P_m при фиксированных t и R есть полином второй степени от $\cos\theta$, который положителен при $\cos\theta = 1$ и отрицателен или равен нулю при $\cos\theta = -1$. Таким образом, $P_m(t, R, \theta)$ имеет ровно один нуль θ_0, такой, что $0 < \theta_0 \leqslant \pi$, причем $P_m > 0$ для $0 \leqslant \theta < \theta_0$ и $P_m < 0$ для $\theta_0 < \theta \leqslant \pi$. Таким образом, функция $Q_m(t, R, \varphi)$ возрастает вместе с φ до максимума в точке $\varphi = \theta_0$, а затем убывает, и, следовательно, для доказательства леммы утверждение достаточно доказать при $\varphi = \pi$.

По лемме 4.7 можно написать

$$Q_m(t, R, \pi) = \frac{1}{c_{m-1} R^{m-1}} \int_{S(0,\ R)} \frac{P_m(t, R, \theta)}{(R^2 + 2tR\cos\theta + t^2)^{m/2+1}}\, d\sigma(x),$$

где x — точка на $S(0, R)$ и угол θ тот же, что и выше. Если $m \geqslant 2$, то

$$f(t, x) = \frac{P_m(t, R, \theta)}{(R^2+2tR\cos\theta+t^2)^{m/2+1}} = \frac{1}{d_m} \cdot \frac{\partial}{\partial t} t^{m-1} \frac{\partial}{\partial t} f_m(t, \theta, R),$$

где $d_2 = 2$, $d_m = m - 2$ при $m \geqslant 3$. Отсюда следует, что для $t \neq R$

$$Q_m(t, R, \pi) = \frac{1}{d_m c_{m-1} R^{m-1}} \frac{\partial}{\partial t} t^{m-1} \frac{\partial}{dt} \int\limits_{S(0,\ R)} f_m(t, \theta, R)\, d\sigma(x).$$

Так как $f_m(t, \theta, R)$ — субгармоническая функция, то правую часть можно найти при помощи формулы Пуассона — Иенсена (теорема 3.14). Таким образом,

$$\frac{1}{c_m R^{m-1}} \int\limits_{S(0,\ R)} f_m(t, \theta, R)\, d\sigma(x) = \begin{cases} 0, & R < t, \\ g(t, R), & R > t, \end{cases}$$

где

$$g(t, R) = \begin{cases} \log \dfrac{R}{t}, & m = 2, \\ t^{2-m} - R^{2-m}, & m > 2. \end{cases}$$

Следовательно, $Q_m(t, R, \pi) = 0$, $R \neq t$. При $t = R$ и всех θ

$$P_m(t, R, \theta) = R^{m+1}(1 + \cos\theta)(m + (m-2)\cos\theta) \geqslant 0$$

и, значит, $Q_m(R, R, \varphi) > 0$, $0 < \varphi < \pi$ и $Q_m(R, R, \pi) = +\infty$. Это завершает доказательство леммы 4.10.

4.5.4. Доказательство теоремы 4.9

Продолжим применение техники пиков Пойа для функции $u_1(x)$, построенной в лемме 4.9. По лемме 4.5 существует такая последовательность значений $r = r_n \to \infty$, что

$$N(t) \leqslant \begin{cases} N(r)\left(\dfrac{t}{r}\right)^{\lambda-\varepsilon}, & t_0 \leqslant t \leqslant r, \\ N(r)\left(\dfrac{t}{r}\right)^{\lambda+\varepsilon}, & t \geqslant r. \end{cases} \tag{4.5.17}$$

Пусть E — множество на сфере $|x| = r$, где $u(x) > 0$, и E_0 — сферическая шапочка на $|x| = r$, площадь которой равна мере E. Тогда, по лемме 4.9,

$$\int\limits_E u(x)\, d\sigma(x) \leqslant \int\limits_{E_0} u_1(x)\, d\sigma(x).$$

Если E_0 задано неравенством $|\theta| < \varphi$, то правая часть, согласно (4.5.15), может быть записана в виде

$$c_{m-1}r^{m-1}\int_0^{\varphi}(\sin\theta)^{m-2}\,d\theta\left\{u(0)+\int_0^{\infty}\frac{P_m(t,\ r,\ \theta)\,N(t)\,dt}{(r^2+2tr\cos\theta+t^2)^{m/2+1}}\right\}.$$

Предположим, что $|\varphi| < \pi$. Так как порядок функции $N(t)$ меньше 1, то повторный интеграл абсолютно сходится, и, таким образом, можно поменять порядок интегрирования; получим

$$\int_{E_0} u_1(x)\,d\sigma(x) = c_{m-1}r^{m-1}\int_0^{\infty} Q_m(t,\ r,\ \varphi)\,N(t)\,dt + u(0)\,\sigma(E_0).$$

В качестве множества E на сфере $|x| = r$ выберем такое множество, что $u(x) > 0$ на E и $\sigma(E_0) < c_m r^{m-1}$. Тогда

$$T(r,\ u)-1 < \frac{1}{c_m r^{m-1}}\int_E u(x)\,d\sigma(x) \leqslant \frac{1}{c_m r^{m-1}}\int_{E_0} u_1(x)\,d\sigma(x) =$$

$$= \frac{c_{m-1}}{c_m}\int_0^{\infty} Q_m(t,\ r,\ \varphi)\,N(t)\,dt + \max(u(0),\ 0). \qquad (4.5.18)$$

Так как $Q_m(t,\ R,\ \varphi) \geqslant 0$, то, используя (4.5.17), получим

$$T(r,\ u) \leqslant \frac{c_{m-1}}{c_m}N(r)\left\{\int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^{\lambda-\varepsilon} Q_m(t,\ r,\ \varphi)\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_r^{\infty}\left(\frac{t}{r}\right)^{\lambda+\varepsilon} Q_m(t,\ r,\ \varphi)\,dt\right\} + O(1) =$$

$$= \frac{c_{m-1}}{c_m}N(r)\left\{\int_0^1 s^{\lambda-\varepsilon}Q_m(s,\ 1,\ \varphi)\,ds + \right.$$

$$\left. + \int_1^{\infty} s^{\lambda+\varepsilon}Q_m(s,\ 1,\ \varphi)\,ds\right\} + O(1).$$

Если $1/2 \leqslant s \leqslant 2$, то $s^{\lambda-\varepsilon} \to s^{\lambda}$ равномерно при $\varepsilon \to 0$, и при $\lambda < 1$ интегралы

$$\int_0^{1/2} s^{\lambda-\varepsilon}Q_m(s,\ 1,\ \varphi)\,ds, \qquad \int_2^{\infty} s^{\lambda+\varepsilon}Q_m(s,\ 1,\ \varphi)\,ds$$

сходятся равномерно для $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Таким образом, для заданного $\eta > 0$ существует такое малое ε_0, что при $0 \leqslant \varphi \leqslant$

$\leqslant \pi,\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\int_0^1 s^{\lambda-\varepsilon} Q_m(s, 1, \varphi)\, ds + \int_1^\infty s^{\lambda+\varepsilon} Q_m(s, 1, \varphi)\, ds <$$

$$< (1+\eta) \int_0^\infty s^\lambda Q_m(s, 1, \varphi)\, ds + \eta.$$

Итак, при заданном $\eta > 0$ для некоторой последовательности $r = r_n \to \infty$ и соответствующей последовательности $\varphi = \varphi_n$ имеем

$$T(r, u) < (1+2\eta) \frac{c_{m-1}}{c_m} N(r) \left\{ \int_0^\infty s^\lambda Q_m(s, 1, \varphi)\, ds + \eta \right\} \leqslant$$

$$\leqslant (1+2\eta) \frac{c_{m-1}}{c_m} N(r) \left\{ \int_0^\infty s^\lambda Q_m(s, 1, \varphi_0)\, ds + \eta \right\},$$

где φ_0 выбрано так, чтобы интеграл в правой части был максимальным. Так как η — любое положительное число, то

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{T(r, u)}{N(r, u)} \leqslant \frac{c_{m-1}}{c_m} \int_0^\infty s^\lambda Q_m(s, 1, \varphi_0)\, ds. \qquad (4.5.19)$$

Заметим, что если $u_0(x)$ выбрана так, что вся ее масса сосредоточена на отрицательной полуоси x_1, и если ее считающая функция имеет вид $N(r) = r^\lambda$, то $u_0(x)$ является функцией вида (4.5.9). Для этой функции и любой сферической шапочки E_0, задаваемой соотношениями $|\varphi| < \varphi_1$, $|x| = r$, где $\varphi_1 < \pi$, имеем

$$\frac{1}{c_m r^{m-1}} \int_{E_0} u_0(x)\, d\sigma(x) = \frac{c_{m-1}}{c_m} \int_0^\infty Q_m(t, r, \varphi_1) N(t)\, dt =$$

$$= \frac{c_{m-1}}{c_m} r^\lambda \int_0^1 s^\lambda Q_m(s, 1, \varphi_1)\, ds.$$

Так как $u_0(x) > 0$ в некотором угле $|\varphi| < \varphi_0$, где φ_0 не зависит от r, то для всех положительных r

$$\frac{T(r, u_0)}{N(r, u_0)} = \max_{0\leqslant\varphi\leqslant\pi} \frac{c_{m-1}}{c_m} \int_0^\infty s^\lambda Q_m(s, 1, \varphi)\, ds = \frac{c_{m-1}}{c_m} \int_0^\infty s^\lambda Q_m(s, 1, \varphi_0)\, ds,$$

и из (4.5.16) получаем

$$1 - \delta(u) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r, u)}{T(r, u)} \geqslant \left\{ \frac{c_{m-1}}{c_m} \int_0^\infty s^\lambda Q_m(s, 1, \varphi_0)\, ds \right\}^{-1} = 1 - \delta(u_0).$$

Теорема 4.9 доказана.

4.5.5. Доказательство теоремы 4.10

Доказательство теоремы 4.10 мы проведем, используя функцию (4.5.9). Если $m = 2$, то рассмотрим функцию $u_0(x) = cr^\lambda \cos\lambda\theta$, где $\lambda \leqslant 1/2$; так как

$$T(r, u_0) = \frac{cr^\lambda}{\pi}\int_0^\pi \cos\lambda\theta\, d\theta = \frac{cr^\lambda \sin\pi\lambda}{\pi\lambda},$$

$$m(r, u_0) = 0,$$

то $\delta(u_0) = 0$. Таким образом, для функций $u(x)$ порядка $\lambda \leqslant 1/2$ при $m = 2$ имеем $\delta(u) = 0$, что и утверждалось в (4.5.11).

Если $1/2 < \lambda < 1$, то

$$T(r, u_0) = \frac{cr^\lambda}{\pi}\int_0^{\pi/2\lambda} \cos\lambda\theta\, d\theta = \frac{cr^\lambda}{\lambda\pi},$$

$$m(r, u_0) = \frac{-cr^\lambda}{\pi}\int_{\pi/2\lambda}^{\pi} \cos\lambda\theta\, d\theta = \frac{cr^\lambda(1-\sin\pi\lambda)}{\lambda\pi},$$

$$\delta(u_0) = \frac{m(r, u_0)}{T(r, u_0)} = 1 - \sin\pi\lambda,$$

что и завершает доказательство (4.5.11).

Наконец, если $m = 4$, то при $|x| = r$

$$u_0(x) = \frac{cr^\lambda \sin(\lambda+1)\theta}{\sin\theta}.$$

Из леммы 4.7 получаем

$$T(r, u_0) = c'r^\lambda \int_0^{\pi/(\lambda+1)} \sin(\lambda+1)\theta\cdot\sin\theta\, d\theta = c'\cdot r^\lambda \frac{(\lambda+1)}{\lambda(\lambda+2)} \sin\frac{\pi}{\lambda+1},$$

где c, c' — постоянные. Аналогично,

$$m(r, u_0) = -c'r^\lambda \int_{\pi/(\lambda+1)}^{\pi} \sin(\lambda+1)\theta\cdot\sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{c'r^\lambda}{\lambda(\lambda+2)}\left[(\lambda+1)\sin\frac{\pi}{\lambda+1} - \sin(\pi\lambda)\right]$$

и, таким образом,

$$\delta(u_0) = \frac{m(r, u_0)}{T(r, u_0)} = 1 - \frac{\sin\pi\lambda}{(\lambda+1)\sin(\pi/(\lambda+1))}.$$

Следовательно, равенство (4.5.12) и тем самым теорема 4.10 доказаны.

Заметим, что при $\lambda \to 0$

$$\delta(u_0) \sim \frac{\pi^2\lambda^3}{3},$$

тогда как теорема 4.7 дает только

$$\delta(u_0) = O(\lambda).$$

4.6. ТРАКТЫ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ

Пусть $f(z)$ — целая функция, имеющая k ($\geqslant 2$) различных асимптотических значений a_ν, $\nu = 1, \ldots, k$. Это означает, что существует k кривых Γ_ν на плоскости переменного z, выходящих из 0 и уходящих в бесконечность, для которых $f(z) \to a_\nu$ при $z \to \infty$ вдоль Γ_ν.

Так как a_ν все различны, то Γ_ν не пересекаются в бесконечности, и можно без ограничения общности считать их непересекающимися во всей z-плоскости. Предположим, что Γ_ν занумерованы против часовой стрелки вокруг начала, и пусть $\Gamma_{k+1} = \Gamma_1$. Тогда для любого $\nu = 1, \ldots, k$ кривые Γ_ν и $\Gamma_{\nu+1}$ ограничивают одно связную область D_ν, причем $D_\mu \cap D_\nu = \varnothing$ для $\mu \neq \nu$. Так как $a_\mu \neq a_{\mu+1}$, то $f(z)$ не ограничена [1]) в каждой области D_μ, несмотря на то что на каждой кривой Γ_μ функция $f(z)$ ограничена.

Отсюда Альфорс [1930] получил свое знаменитое доказательство гипотезы Данжуа о том, что нижний порядок $f(z)$ не меньше $k/2$. С целью обобщения этого результата на субгармонические функции Хейнсом [1959] было показано, что для доказательства этого факта можно использовать только то, что функция $u(z) = \log|f(z)|$ ограничена сверху на кривых Γ_μ, но не ограничена в каждой из областей D_μ. Таким образом, множество

$$E_M = \{z \mid u(z) \geqslant M\}$$

для больших M имеет точки в каждой области D_μ, но ни на одной кривой Γ_μ, и, следовательно, множество E_M имеет не меньше k компонент. Для функций $u(z)$, субгармонических в $\mathbb{R}^m$, можно показать, что число k различных компонент множества E_M не меньше 2, и получить отсюда оценку нижнего порядка функции $u(z)$. Нижняя граница, которую мы получим, хотя и не точнее оценки $k/2$ Альфорса, при фиксированном $m \geqslant 2$ имеет правильный порядок $k^{1/(m-1)}$ как функция от k при $k \to \infty$. К случаю $m = 2$ мы вернемся во втором томе. Изложение в этом разделе в значительной степени следует работам Талпура [1975, 1976].

---

[1]) См. Титчмарш [1939].

4.6.1. Предварительные результаты

Предположим, что функция $u(x)$ субгармонична в некоторой окрестности компактного множества E в $\mathbb{R}^m$. Для любого $M \geqslant 0$ множество

$$E_M = \{x \mid x \in E, \quad u(x) \geqslant M\}$$

является замкнутым подмножеством компакта E и, следовательно, также компактно. Мы нуждаемся в более подробном исследовании структуры E_M, и поэтому напомним некоторые понятия из топологии точечных множеств.

Множество E называется *связным*, если оно не допускает *разбиения* на два множества E_1 и E_2, такие, что

(a) $E_1 \cup E_2 = E$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$;

(b) $E_j \neq \varnothing$, $j = 1, 2$;

(c) E_j замкнуто в E, $j = 1, 2$.

Если E замкнуто и не связно, а (E_1, E_2) — разбиение E, то последнее условие означает, что E_1 и E_2 замкнуты.

Определим отношение эквивалентности для точек $x \in E$: $x_1 \sim x_2$, если существует связное подмножество $E(x_1, x_2)$ множества E, содержащее x_1 и x_2. Ясно, что это отношение симметрично и рефлексивно, так как точка — связное множество. Кроме того, оно транзитивно, так как объединение $E(x_1, x_2) \cup E(x_2, x_3)$ любых двух связных множеств, содержащих x_2, также связно. Таким образом, отношение $\sim$ разбивает множество E на непересекающиеся подмножества, которые называются его *компонентами*. Они являются максимальными связными подмножествами множества E. В самом деле, компонента E', содержащая точку x_1, есть объединение всех связных подмножеств множества E, содержащих x_1, и, таким образом, сама является связным множеством; по определению, она является наибольшим связным подмножеством, содержащим x_1.

Компактное связное множество, содержащее не меньше двух точек, называется *континуумом*. Нам понадобится следующая

Лемма 4.11. *Компонентами компактного множества в $\mathbb{R}^m$ могут быть только континуумы или точки.*

Пусть E_0 — компонента компакта E, содержащая точку x_0. Если E_0 состоит только из точки x_0, то доказывать нечего. Предположим теперь, что E_0 содержит не менее двух точек. Достаточно показать, что E_0 замкнуто в E, так как тогда E_0 будет замкнуто и в $\mathbb{R}^m$. Так как, кроме того, E_0 ограничено как подмножество E, то E_0 будет тогда компактом, а тем и самым континуумом.

Чтобы доказать, что E_0 замкнуто, покажем, что $\bar{E}_0 = E_0$, где $\bar{E}_0$ — замыкание E_0. Для этого достаточно показать, что $\bar{E}_0$ связно, так как в этом случае $\bar{E}_0$ лежит в E_0, которое является объединением всех связных подмножеств множества E, содержащих x_0.

Предположим противное, т. е. что $\bar{E}_0$ допускает разбиение (F_1, F_2), такое, что $x_1 \in F_1$ и $x_2 \in F_2$. Тогда, так как $\bar{E}_0$ замкнуто, F_1, F_2 также замкнуты и, таким образом, компактны, поэтому они расположены на положительном расстоянии δ друг от друга. Пусть E_1, E_2 — подмножества E_0, которые лежат в F_1, F_2 соответственно. Тогда (E_1, E_2) — разбиение множества E_0.

Действительно, условие (a) очевидно. Предположим, что $x_1 \in \in E_1$ — точка или предельная точка множества E_0. В первом случае E_1 не пусто. Во втором шар $D(x_1, \delta)$ содержит точку $\xi_1 \in E_0$, которая находится на расстоянии, меньшем δ, от точки $x_1 \in F_1$ и, значит, не принадлежит E_2. Таким образом, E_1 не пусто, так как $\xi_1 \in F_1 \cap E_0 = E_1$. Аналогично доказывается, что E_2 не пусто. Условие (b) доказано.

Наконец, $E_j = E_0 \cap F_j$, и так как F_j, $j = 1, 2$, замкнуто, то E_j замкнуто в E_0. Таким образом, выполнено условие (c) и, следовательно, (E_1, E_2) — разбиение множества E_0, что противоречит сделанным предположениям. Это завершает доказательство леммы 4.9.

Следующий результат, несмотря на его вспомогательную роль в нашей теории, представляет и самостоятельный интерес.

Теорема 4.11. *Пусть функция $u(x)$ субгармонична в окрестности компактного множества E в $\mathbb{R}^m$. Для любого действительного числа K через E_K обозначим подмножество множества E, на котором $u(x) \geqslant K$, а через $C(K)$ — некоторую компоненту E_K. Тогда функция*

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x \in C(K), \\ K, & x \notin C(K), \end{cases}$$

субгармонична внутри E.

Предположим сначала, что $u(x)$ непрерывна. Тогда E_K замкнуто и, таким образом, компактно, а следовательно, по лемме 4.11, $C(K)$ также компактно. Пусть $x_0 \in E$; тогда если $v(x_0) > > K$, то $x_0 \in C(K)$ и, стало быть, $u(x_0) > K$. Так как $u(x)$ непрерывна, то $u(x) > K$ в некоторой окрестности $D(x_0, r)$ точки x_0; таким образом, $D(x_0, r) \subset C(K)$ и, следовательно, $v(x) = u(x)$ в $D(x_0, r)$, т. е. $v(x)$ субгармонична в точке x_0. Если $v(x_0) = K$, то предположим, во-первых, что x_0 является внешней точкой для $C(K)$. Тогда окрестность $D(x_0, r)$ лежит вне $C(K)$ и, таким образом, образом, $v(x) = K$ в $D(x_0, r)$. Таким образом, и в этом случае $v(x)$ субгармонична в x_0. Аналогично рассматривается случай, когда x_0 — внутренняя точка $C(K)$ и $u(x_0) = K$.

Предположим наконец, что x_0 является граничной точкой $C(K)$; тогда $u(x_0) = K$. Ввиду непрерывности, если $u(x) < K$ или $u(x) > K$ в точке $x = x_0$, то соответствующее неравенство имеет место в некоторой окрестности точки x_0; таким образом, x_0 — либо внешняя, либо внутренняя точка $C(K)$. Так как $u(x)$ непрерывна в точке x_0 и $v(x) = K = u(x_0)$ или $v(x) = u(x)$, то $v(x) \to K = u(x_0)$ при $x \to x_0$. Таким образом, $v(x)$ непрерывна в точке x_0. Наконец, неравенство для среднего значения в точке x_0, очевидно, выполнено, так как всюду $v(x) \geqslant K = v(x_0)$. Теорема 4.11 в случае, когда $u(x)$ непрерывна, доказана.

Общий случай менее очевиден, но может быть доказан при помощи теоремы 3.8. По предположению, $u(x)$ субгармонична в некоторой окрестности множества E. Тогда, по теореме 3.8, существует последовательность функций $u_n(x)$, субгармонических и непрерывных в (меньшей) окрестности множества E и таких, что $u_n(x)$ монотонно убывает вместе с ростом n и $u_n(x) \to u(x)$ при $n \to \infty$. Пусть x_0 — фиксированная точка $C(K)$ и $C_n(K)$ — компонента множества

$$\{x \mid u_n(x) \geqslant K, \quad x \in E\},$$

которое содержит x_0; кроме того, положим

$$v_n(x) = \begin{cases} u_n(x), & x \in C_n(K), \\ K, & x \notin C_n(K). \end{cases}$$

Тогда, как мы только что видели, $v_n(x)$ — субгармоническая функция внутри E. Так как $u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x)$, то $C_{n+1}(K) \subset C_n(K)$. Таким образом, если x не принадлежит $C_{n+1}(K)$, то

$$K = v_{n+1}(x) \leqslant v_n(x);$$

если же $x \in C_{n+1}(K)$, то

$$K \leqslant v_{n+1}(x) = u_{n+1}(x) < u_n(x) = v_n(x).$$

Отсюда следует, что v_n — убывающая последовательность субгармонических функций в E и, следовательно, по теореме 1.3, функция $v_0(x) = \lim\limits_{n \to \infty} v_n(x)$ субгармонична в (окрестности) E. Действительно, $v_0(x) < +\infty$, так как $v_n(x) < +\infty$ и, наконец, в силу того, что $v_n(x) \downarrow v_0(x)$, имеем

$$\int\limits_{S(x_0, r)} v_0(x)\, d\sigma(x) = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{S(x_0, r)} v_n(x)\, d\sigma(x) \geqslant$$
$$\geqslant \lim_{n \to \infty} c_m r^{m-1} v_n(x_0) = c_m r^{m-1} v_0(x_0).$$

Таким образом, функция $v_0(x)$ удовлетворяет условиям § 2.1, т. е. является субгармонической.

Заметим, наконец, что $v_0(x)$ совпадает с функцией $v(x)$, определенной в теореме 4.11. В самом деле, пусть

$$C_0(K) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n(K).$$

Тогда $C_0(K)$ является пересечением счетного семейства вложенных друг в друга компактных связных множеств $C_n(K)$, и, таким образом, $C_0(K)$ компактно и связно [1]), т. е. $C_0(K)$ или состоит из одной точки или континуум. В $C_0(K)$ имеем также для любого n

$$v_n(x) = u_n(x) \geqslant K$$

и, следовательно, $v_0(x) = \lim u_n(x) = u(x) \geqslant K$.

Так как $C_n(K)$ содержит x_0 для любого n, то $C_0(K)$ также содержит x_0; стало быть, $C_0(K)$ — связное множество, содержащее x_0, на котором $u(x) \geqslant K$, и, следовательно, $C_0(K) \subset C(K)$. С другой стороны, в $C(K)$ имеем

$$K \leqslant u(x) \leqslant u_n(x);$$

отсюда следует, что $C(K) \subset C_n(K)$ для всех n. Таким образом, $C(K) \subset C_0(K)$, т. е. $C(K) = C_0(K)$.

Мы видели, что $v_0(x) = v(x)$ в $C(K)$. Если x лежит вне $C(K)$, то x лежит и вне $C_n(K)$ для некоторого n_0 и, таким образом, для всех $n \geqslant n_0$. Следовательно,

$$v_0(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x) = \lim_{n\to\infty} K = K = v(x).$$

Итак, $v(x) = v_0(x)$ в E, а так как $v_0(x)$ субгармонична в E, то теорема 4.11 доказана.

4.6.2. Предположим, что функция $u(x)$ субгармонична при $|x| < r_0$, где $0 < r_0 \leqslant \infty$, и что множество, где $u(x) \geqslant 0$, состоит по меньшей мере из $k \geqslant 2$ компонент в $C(0, r)$ при $r_1 \leqslant r < r_0$. Мы хотим получить отсюда оценку снизу для функции $u(x)$. Обозначим через $C_1(r), C_2(r), \ldots, C_k(r)$ различные компоненты множества, где $u(x) \geqslant 0$ в $C(0, r)$, и положим

$$v_\nu(x) = \begin{cases} u(x), & x \in C_\nu(r), \\ 0, & x \notin C_\nu(r). \end{cases}$$

Тогда, по теореме 4.11, функция $v_\nu(x)$ субгармонична в $D(0, r)$; кроме того, имеем

$$v_\nu(x) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad C(0, r), \tag{4.6.1}$$

$$v_\mu(x) \cdot v_\nu(x) = 0 \quad \text{для} \quad \mu \neq \nu. \tag{4.6.2}$$

[1]) См., например, Ньюмен [1951].

Предположим также, что $v_\nu(x)$ не равна тождественно нулю при $|x| \leqslant r_1$, так что

$$B_\nu(r_1) = \sup_{|x|=r_1} v_\nu(x) > 0, \quad \nu = 1, \ldots, k. \tag{4.6.3}$$

Мы увидим, что условия (4.6.1) — (4.6.3) сами по себе достаточны для того, чтобы получить довольно много информации о росте функций $v_\nu(x)$.

Пусть $e_\nu(r)$ — такое подмножество сферы $|x| = r$, на котором $v_\nu(x) > 0$, и

$$\theta_\nu(r) = \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int\limits_{e_\nu(r)} d\sigma(x),$$

где $d\sigma(x)$ — элемент площади $S(0, r)$. Множества $e_\nu(r)$, согласно (4.6.2), не пересекаются и, следовательно,

$$\sum_{\nu=1}^{k} \theta_\nu(r) \leqslant 1. \tag{4.6.4}$$

Далее, если

$$T_\nu(r) = \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int\limits_{e_\nu(r)} v_\nu(x)\, d\sigma(x)$$

— характеристическая функция $v_\nu(x)$ и

$$B_\nu(r) = \sup_{x \in e_\nu(r)} v_\nu(x) \tag{4.6.5}$$

есть максимум $v_\nu(x)$ на сфере $|x| = r$, то ясно, что

$$T_\nu(r) \leqslant \theta_\nu(r)\, B_\nu(r).$$

С другой стороны, по теореме 3.19, для $0 < \rho < r$ имеем

$$B_\nu(\rho) \leqslant \frac{r^{m-2}(r+\rho)}{(r-\rho)^{m-1}} T_\nu(r) \leqslant \frac{\theta_\nu(r)\, r^{m-2}(r+\rho)}{(r-\rho)^{m-1}} B_\nu(r). \tag{4.6.6}$$

Из (4.6.6), теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом и (4.6.4) получаем

$$\prod_{\nu=1}^{k} B_\nu(\rho) \leqslant \left[\frac{r^{m-2}(r+\rho)}{(r-\rho)^{m-1}}\right]^k \cdot \prod_{\nu=1}^{k} \{\theta_\nu(r)\, B_\nu(r)\} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{1}{k} \frac{r^{m-2}(r+\rho)}{(r-\rho)^{m-1}}\right]^k \prod_{\nu=1}^{k} B_\nu(r). \tag{4.6.7}$$

Теперь можно доказать следующую теорему.

Теорема 4.12. *Пусть функции* $v_\nu(x)$ *удовлетворяют условиям* (4.6.1) — (4.6.3) *в шаре* $D(0, r)$, *функция* $B_\nu(r)$ *определена равен-*

ством (4.6.5) *и*

$$B_0(r) = \Big(\prod_{\nu=1}^{k} B_\nu(r)\Big)^{1/k}.$$

Тогда для $r_1 \leqslant r < r_0$ *справедливо неравенство*

$$B_0(r) \geqslant \frac{2}{3}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{c_1} B_0(r_1), \tag{4.6.8}$$

где $c_1(k,\ m)$ *зависит только от* k *и* m *и можно взять*

$$c_1 = \log\left(\frac{3}{2}\right) \Big/ \log \frac{1+[3/2k]^{1/(m-1)}}{1-[3/2k]^{1/(m-1)}}. \tag{4.6.9}$$

Заметим, что при $k \to \infty$ и фиксированном m

$$c_1(k,\ m) \sim \frac{1}{2}\log\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2k}{3}\right)^{1/(m-1)},$$

и, таким образом, c_1 имеет правильный порядок роста как функция от k, по крайней мере при $m = 2$. Мы покажем на примере в конце главы, что и при $m > 2$ порядок величины c_1 также правильный.

Пусть $\varphi = \left[\frac{3}{2k}\right]^{1/(m-1)}$, $\lambda = \frac{1+\varphi}{1-\varphi}$, $r_\mu = r_1\lambda^{\mu-1}$, $B_0(r_\mu) = B_\mu$. Из (4.6.7), полагая $r = r_1\lambda^{\mu-1}$, $\rho = r_1\lambda^{\mu-2}$, при $r < r_0$ **получаем**

$$B_\mu \geqslant \frac{k(\lambda-1)^{m-1}}{\lambda^{m-2}(\lambda+1)} B_{\mu-1} \geqslant k\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)^{m-1} B_{\mu-1} = k\varphi^{m-1}B_{\mu-1} = \frac{3}{2}B_{\mu-1}.$$

Отсюда по индукции при $\mu \geqslant 1$ имеем

$$B_\mu \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{\mu-1} B_1.$$

Выберем в качестве μ наибольшее целое, при котором $r_\mu \leqslant r$; тогда

$$B_0(r) \geqslant B_0(r_\mu) \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{\mu-1} B_1 = \frac{2B_1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{\mu} = \frac{2B_1}{3}\left(\frac{r_{\mu+1}}{r_1}\right)^{c_1} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{3} B_0(r_1)\left(\frac{r}{r_1}\right)^{c_1},$$

где $c_1 = \log(3/2)/\log\lambda$, как и утверждалось.

4.6.3. Компоненты $C(K)$ в областях

Теорема 4.12 позволяет распространить теорему 4.11 на функции, субгармонические в областях, т. е. в открытых связных множествах. Нам понадобится следующая

Лемма 4.12. *Пусть функция* $u(x)$ *субгармонична в некоторой окрестности замкнутого шара* $C(x_1,\ r)$, $u(x_1) > K > -\infty$, *и пусть* C_1 — *та компонента множества* $\{x \mid u(x) \geqslant K\}$ *в* $C(x_1, r)$, *которая содержит* x_1. *Тогда для заданного* K_1, $K < K_1 \leqslant u(x_1)$, *существует такое* $\delta > 0$, *что* $u(x) < K_1$ *во всех точках шара* $D(x_1, \delta)$, *не принадлежащих* C_1.

Предположим, что x_2 — точка открытого шара $D(x_1, r)$, такая, что $x_0 \notin C_1$ и $u(x_2) \geqslant K_1$. Пусть C_2 — компонента множества $\{x \mid u(x) \geqslant K\}$ в $C(x_1, r)$, которая содержит x_2. Так как $x_2 \notin C_1$, то C_1 и C_2 не пересекаются. Для $\nu = 1, 2$ положим

$$u_\nu(x) = \begin{cases} u(x), & x \in C_\nu, \\ K, & x \in D(x_0, r) - C_\nu; \end{cases}$$

по теореме 4.11, функции $u_\nu(x)$ субгармоничны в $D(x_0, r)$.

Определим функции

$$v_\nu(x) = u_\nu(x_1 + x) - K, \quad |x| \leqslant r,$$

и заметим, что они удовлетворяют условиям (4.6.1) и (4.6.2). Кроме того, если $r_1 = |x_2 - x_1|$, то для $\nu = 1, 2$ имеем

$$B_\nu(r_1) = \sup_{|x| \leqslant r_1} v_\nu(x) \geqslant K_1 - K = B_0 > 0.$$

Отсюда, по теореме 4.12 (и в ее обозначениях), при $r_1 < \rho < r$ получаем

$$B_0(\rho) \geqslant \frac{2}{3}\left(\frac{\rho}{r_1}\right)^{c_1} B_0.$$

Так как

$$B_0(\rho) \leqslant \sup_{|x - x_1| \leqslant r} \{u(x) - K\} = B_1,$$

то

$$B_1 \geqslant \frac{2}{3}\left(\frac{\rho}{r_1}\right)^{c_1} B_0, \quad r_1 \geqslant \rho\left(\frac{2B_0}{3B_1}\right)^{1/c_1}.$$

При $\rho \to r$ получаем утверждение леммы 4.12 с

$$\delta = r\left(\frac{2B_0}{3B_1}\right)^{1/c_1} = r\left(\frac{2(K_1 - K)}{3B_1}\right)^{1/c_1}.$$

Предположим теперь, что $u(x)$ — субгармоническая функция в области D в $\mathbb{R}^m$, возможно, совпадающей со всем пространством. Для $n = 1, 2, \ldots$ через E_n обозначим компактные подмножества области D, такие, что E_n принадлежат внутренности E_{n+1} и $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = D$. Пусть x_0 — любая точка D; тогда $x_0 \in E_n$, скажем, для $n \geqslant n_0$. Если

$$u(x_0) \geqslant K > -\infty, \quad n \geqslant n_0,$$

то через $C_n(x_0, K)$ обозначим компоненту множества $\{x \mid u(x) \geqslant K\}$ в E_n, содержащую точку x_0.

Очевидно, что $C_n(x_0, K)$ расширяются с возрастанием n. Положим

$$C = C(x_0, K, D) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} C_n(x_0, K)$$

и будем называть C предельной компонентой, или иногда просто компонентой множества $\{x \mid u(x) \geqslant K\}$ в D. Следует заметить, что эта терминология допускает некоторую вольность речи. Действительно, множество C, несмотря на связность, не является, вообще говоря, максимальным связным множеством в D, а также не всегда замкнуто в D. Но любые две точки x_1, x_2 из C принадлежат континууму $C_n(x_0, K)$ для достаточно большого n и, следовательно, соединяются с точкой x_0, а значит, и одна с другой посредством континуума, на котором $u(x) \geqslant K$.

Обратно, если γ — любой континуум, содержащий x_0, на котором $u(x) \geqslant K$, то $\gamma \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, где через D_n обозначена внутренность E_n. Таким образом, по теореме Гейне — Бореля, $\gamma \subset \bigcup_{n=1}^{N} D_n$ для некоторого N, а тем самым $\gamma \subset D_N$. Следовательно, $\gamma \subset C_N(x_0, K)$, а значит, $\gamma \subset C$. Отсюда следует, что C есть объединение всех континуумов γ, расположенных в D, содержащих x_0 и в точках которых $u(x) \geqslant K$. В частности, мы видим, что C не зависит от выбора исчерпывающей последовательности E_n.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 4.13. *Если функция $u(x)$ субгармонична в области D, $C = C(x_0, K, D)$ обозначает предельную компоненту в D и*

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x \in C, \\ K, & x \notin C, \end{cases}$$

то функция $v(x)$ субгармонична в D.

Пусть x_1 — любая точка D. Для доказательства того, что функция $v(x)$ субгармонична в точке x_1, докажем, что она удовлетворяет условиям (i), (ii) и (iii) § 2.1. Будем различать три случая.

(a) Предположим, во-первых, что x_1 принадлежит дополнению к C и, таким образом, некоторая окрестность N точки x_1 не пересекается с C. Тогда $v(x) = K$ в N и, следовательно, $v(x)$ — постоянная, т. е. субгармоническая функция в окрестности точки x_1.

(b) Предположим теперь, что x_1 — некоторая точка C; тогда $v(x_1) = u(x_1) \geqslant K$. Так как $u(x)$ субгармонична, а значит, полунепрерывна сверху, то для заданного $\varepsilon > 0$ можно найти окрестность $N(\varepsilon)$ точки x_1, в которой $u(x) < u(x_1) + \varepsilon$ и поэтому

$$v(x) \leqslant \max(u(x), K) < u(x_1) + \varepsilon = v(x_1) + \varepsilon.$$

Таким образом, $v(x)$ — конечная пн. св. функция в точке x_1. Осталось доказать, что выполняется неравенство со средним значением. Пусть E_1 — компактное подмножество области D, содержащее x_1 в своей внутренности D_1, а C_1 — компонента множества $\{x \mid u(x) \geqslant K\}$ в E_1, содержащая x_1. Положим

$$v_1(x) = \begin{cases} u(x), & x \in C_1, \\ K, & x \in E_1 - C_1. \end{cases}$$

По теореме 4.11 функция $v_1(x)$ субгармонична в D_1. С другой стороны, C_1 — континуум, на котором $u(x) \geqslant K$, и потому C_1 содержится в C. Следовательно, $v_1(x) \leqslant v(x)$ в E_1, в то время как $v_1(x_1) = v(x_1) = u(x_1)$. Отсюда следует, что для всех достаточно малых r

$$v(x_1) = v_1(x_1) \leqslant \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int\limits_{S(x_1,\, r)} v_1(x)\, d\sigma(x) \leqslant \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int\limits_{S(x_1,\, r)} v(x)\, d\sigma(x).$$

Итак, неравенство среднего значения в точке x_1 выполнено и, следовательно, $v(x)$ субгармонична в точке x_1.

(c) Предположим наконец, что x_1 является предельной точкой C и не принадлежит C. Тогда $v(x_1) = K$ и $v(x) \geqslant K$ всюду, что влечет за собой свойства (i) и (iii) § 2.1. Осталось доказать, что $v(x)$ полунепрерывна сверху в точке x_1.

Предположим, во-первых, что $u(x_1) \leqslant K$. Тогда, так как $u(x)$ пн. св. в точке x_1, можно найти окрестность N точки x_1, в которой $u(x) < K + \varepsilon$, откуда

$$v(x) \leqslant \max(u(x), K) < K + \varepsilon = v(x_1) + \varepsilon.$$

Таким образом, в этом случае $v(x)$ пн. св. в точке x_1.

Наконец, предположим, что $u(x_1) > K$. Пусть F_1 — замкнутый шар $|x - x_1| \leqslant r_1$, содержащийся в D, и C_1 — компонента множества $\{x \mid u(x) \geqslant K\}$ в F_1, содержащая x_1. Так как x_1 не принадлежит C, то C_1 не пересекается с C. По лемме 4.12 для заданного ε, $0 < \varepsilon < u(x_1) - K$, можно найти такое $\delta > 0$, что C_1 содержит все точки шара $|x - x_1| \leqslant \delta$, в которых $u(x) \geqslant K + \varepsilon$. Эти точки, следовательно, не принадлежат C и $v(x) = K$ во всех таких точках. Во всех других точках шара $|x - x_1| \leqslant \delta$ имеем

$$v(x) \leqslant \max(u(x), K) < K + \varepsilon.$$

Таким образом, $v(x) \leqslant K + \varepsilon = v(x_1) + \varepsilon$ при $|x - x_1| \leqslant \delta$ и, следовательно, $v(x)$ пн. св. в точке x_1. Это завершает доказательство теоремы 4.13.

При помощи теоремы 4.13 можно получить полезную информацию о структуре компонент. Будем называть компоненту C множества $\{x \mid u(x) \geqslant K\}$ в области D *тонкой*, если $u(x) \equiv K$ на C; во всех остальных случаях будем называть ее *толстой* компонентой. Как это ни удивительно, существуют субгармонические функции, имеющие континуум различных тонких компонент. Соответствующие примеры мы приведем во втором томе. С другой стороны, толстые компоненты всегда имеют положительную m-мерную меру и, таким образом, множество этих компонент не более чем счетно. Эти результаты содержит следующая [1])

Теорема 4.14. *Пусть C — предельная компонента множества точек, в которых $u(x) \geqslant K$, в области D. Тогда C уходит к границе области D, т. е. C не принадлежит никакому компактному подмножеству области D. Далее, если C — толстая компонента, то C имеет положительный m-мерный объем.*

Предположим, что $u(x)$ не постоянна в D, так как в противном случае теорема 4.14 тривиальна. Пусть сначала C — толстая компонента; положим

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x \in C, \\ K, & x \in D - C. \end{cases}$$

Функция $v(x)$ по теореме 4.13 субгармонична в D.

Так как C — толстая компонента, то C содержит точку x_0, в которой $u(x_0) > K$. Если $v(x)$ постоянна в D, то $v(x) = v(x_0) = u(x_0) > K$. Таким образом, C содержит всю область D и функция $u(x)$ постоянна в D. Пусть теперь $v(x)$ не постоянна; тогда $v(x)$ не может достигать своей точной верхней грани M во внутренней точке области D и, значит, существует последовательность x_n точек D, стремящихся к границе области D, такая, что

$$v(x_n) \to M > K.$$

Таким образом, $v(x_n) > K$ для всех достаточно больших n и тем самым $x_n \in C$. Отсюда следует, что C уходит к границе области D.

Предположим теперь, что x_0 — точка C, в которой $u(x_0) > K$. Для малого $\delta > 0$ через G_1 и C_1 обозначим подмножества шара $D(x_0, \delta)$, в которых соответственно $v(x) = K$ и $v(x) > K$. Если C имеет меру нуль, то это выполняется и для C_1 при всех малых δ и

$$\iint\limits_{D(x_0,\ \delta)} (v(x) - v(x_0))\, dx = \iint\limits_{G_1} (v(x) - v(x_0))\, dx = (K - v(x_0))\, m < 0,$$

где m — мера $D(x_0, \delta)$. Это противоречит тому, что $v(x)$ субгармонична (например, по теореме 2.12). Таким образом, C — множество положительной меры.

[1]) Талпур [1975].

Осталось доказать, что, даже если C — тонкая компонента, она уходит к границе области D. Для этого рассмотрим произвольное компактное подмножество E_0 области D, содержащее x_0, границу которого мы обозначим через F_0. Пусть C — компонента в E_0 множества точек, где $u(x) \geqslant K$, содержащая x_0. Докажем, что множества C и F_0 пересекаются. Обозначим через C_n содержащую x_0 компоненту в E_0 множества, где $u(x) \geqslant K - 1/n$. Тогда C_n — толстая компонента, так как $u(x_0) \geqslant K$, поэтому, согласно доказанному выше, C_n пересекаются с F_0. Положим

$$\Gamma = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Так как $C_{n+1} \subset C_n$, то Γ есть пересечение счетного множества вложенных континуумов и, следовательно, непустое связное компактное множество. Кроме того, множества $C_n \cap F_0$ не пусты и компактны, а потому таковым является и их пересечение $\Gamma \cap F_0$. Таким образом, Γ содержит точку x_0 и пересекается с границей компакта E_0. Кроме того, ясно, что $u(x) \geqslant K$ на Γ, так что $\Gamma \subset C$. Отсюда следует, что пересечение множеств C и F_0 не пусто и, следовательно, C уходит к границе области D. Этим завершено доказательство теоремы 4.14.

Далее, имеет место следующая

Теорема 4.15. *Пусть функция $u(x)$ субгармонична и непостоянна в $\mathbb{R}^m$ и $C = C(K)$ — толстая компонента множества $\{x \mid u(x) \geqslant K\}$, такая, что $u(x) \leqslant M$ на C, где M — конечное число. Тогда $m \geqslant 3$ и выполняется одно из двух утверждений:*

(a) *C содержит все точки $\mathbb{R}^m$, в которых $u(x) > K$; в частности, $u(x) < M$ в $\mathbb{R}^m$.*

(b) *Существует по крайней мере одна толстая компонента C_1, не пересекающаяся с C. В этом случае функция $u(x)$ не ограничена сверху и имеет бесконечный нижний порядок на любой такой компоненте C_1. Точнее* [1], *тогда*

$$\log B_1(R)/\log R \to \infty \quad \text{при} \quad R \to \infty,$$

где $B_1(R) = \sup\limits_{|x| \leqslant R,\ x \in C_1} u(x).$

Следствие. *Если функция $u(x)$ субгармонична в $\mathbb{R}^m$, то существует такое K_0, что $u(x)$ не ограничена сверху на всех толстых компонентах $C(K)$ для $K > K_0$.*

Если C содержит все точки, в которых $u(x) > K$, то выполнено утверждение (a), и доказывать больше нечего. Поэтому пред-

[1]) Вообще, мы определяем нижний порядок, порядок и тип функции $u(x)$ на неограниченном множестве C_1 при помощи соответствующих соотношений для $B_1(R)$.

положим, что существует точка $x_1 \notin C$, в которой $u(x_1) > K$. Тогда компонента множества $\{x \mid u(x) \geqslant K\}$, которая содержит точку x_1, не пересекается с C. Таким образом, существует по крайней мере одна толстая компонента, не пересекающаяся с C. Предположим, что C_1 — такая компонента, скажем, множества, где $u(x) \geqslant K_1$, и покажем, что функция $u(x)$ имеет бесконечный нижний порядок в C_1. Для этого положим

$$v_1(x) = \begin{cases} u(x) - K_1, & x \in C_1, \\ 0, & x \notin C_1, \end{cases} \qquad v_2(x) = \begin{cases} u(x) - K, & x \in C, \\ 0, & x \notin C. \end{cases}$$

По теореме 4.13 функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ субгармоничны, и достаточно показать, что $v_1(x)$ имеет бесконечный нижний порядок.

Функции $v_1(x)$, $v_2(x)$ удовлетворяют соотношениям (4.6.1) и (4.6.2). Определим функции $\theta_\nu(r)$ так же, как в п. 4.6.2, функцию $B_\nu(r)$ — равенством (4.6.5) и воспользуемся неравенством (4.6.6). Для $0 < \rho < r < \infty$ имеем

$$B_\nu(\rho) < \frac{\theta_\nu(r)\, r^{m-2}(r+\rho)}{(r-\rho)^{m-1}} B_\nu(r). \tag{4.6.10}$$

Так как компоненты C и C_1 толстые, то $B_\nu(\rho) > 0$ для больших ρ. Кроме того, по предположению,

$$B_2(\rho) \to M - K \quad \text{при} \quad \rho \to \infty,$$

где $0 < M - K < \infty$. Таким образом, для любого данного $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших ρ и $r > \rho$ имеем

$$\theta_2(r) > \frac{(1-\varepsilon)(r-\rho)^{m-1}}{r^{m-2}(r+\rho)}.$$

При $r \to \infty$ и фиксированном ρ получаем $\theta_2(r) > 1 - 2\varepsilon$, $r > r_0$, т. е. $\theta_2(r) \to 1$ при $r \to \infty$. Отсюда и из (4.6.4) теперь следует, что $\theta_1(r) \leqslant 1 - \theta_2(r) \to 0$ при $r \to \infty$.

Выберем теперь r_0 таким, чтобы $B_1(r_0) > 0$, и положим $r_\mu = r_0 2^\mu$, $\theta_\mu = \theta_1(r_\mu)$. Тогда неравенство (4.6.10) с $\rho = r_\mu$, $r = r_{\mu+1}$ дает

$$B_1(r_\mu) < \theta_\mu \cdot 3 \cdot 2^{m-2} B_1(r_{\mu+1}),$$

а значит,

$$\frac{B_1(r_{\mu+1})}{B_1(r_\mu)} \to \infty \quad \text{при} \quad \mu \to \infty.$$

Таким образом,

$$\frac{\log B_1(r_{\mu+1}) - \log B_1(r_\mu)}{\log r_{\mu+1} - \log r_\mu} \to \infty,$$

откуда

$$\frac{\log B_1(r_\mu)}{\log r_\mu} \to \infty.$$

Если $r_\mu < r < r_{\mu+1}$, то $B_1(r) \geqslant B_1(r_\mu)$ и $\log r \leqslant \log r_\mu + \log 2$, откуда

$$\frac{\log B_1(r)}{\log r} \to \infty,$$

что и доказывает (b).

Если, кроме того, $m = 2$, то функция $v_2(x)$ ограничена сверху и, следовательно, по теореме 2.14, $v_2(x) = M = \text{const}$. Так как C — толстая компонента, то $M > K$, и потому $u(x) \equiv M$, что противоречит предположениям. Таким образом, $m \geqslant 3$.

Утверждение следствия очевидно, если функция $u(x)$ не ограничена сверху на каждой толстой компоненте. Если существует толстая компонента $C(K_1)$, на которой $u(x)$ ограничена сверху, скажем константой K_0, и $C_1(K)$ — какая-нибудь толстая компонента для $K > K_0$, то $C(K_1)$ и $C_1(K)$ не пересекаются и имеет место случай (b), так что $u(x)$ не ограничена на $C_1(K)$. Это завершает доказательство теоремы 4.15 и ее следствия.

4.6.4. Тракты и рост

Пусть функция $u(x)$ субгармонична и ограничена сверху в $\mathbb{R}^m$. Из теоремы 3.21 следует, что если M обозначает точную верхнюю грань $u(x)$ в $\mathbb{R}^m$, то

$$u(x) \to M \quad \text{при} \quad x \to \infty \tag{4.6.11}$$

на почти всех фиксированных прямых.

Предположим теперь, что функция $u(x)$ ограничена сверху константой M на некоторой толстой компоненте $C(K)$. Применим указанный выше результат к функции $v_2(x)$, построенной в предыдущем пункте. Получим, что для почти всех прямых Γ

$$v_2(x) \to M \quad \text{при} \quad x \to \infty \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

т. е.

$$M - \varepsilon < v_2(x) < M, \quad x \in \Gamma, \quad |x| > r_0(\varepsilon).$$

Выберем ε настолько малым, что $M - \varepsilon > K$. Тогда $v_2(x) = u(x)$ и, следовательно, утверждение (4.6.11) по-прежнему имеет место.

Если функция $u(x)$ не ограничена в $\mathbb{R}^m$, то для любого K существует по меньшей мере одна компонента $C(K)$. Пусть $K_2 > K_1 > K_0$; тогда, в силу следствия теоремы 4.15, функция $u(x)$ не ограничена ни на какой толстой компоненте $C(K_1)$ и, следовательно, каждая толстая компонента $C(K_1)$ содержит по крайней мере одну толстую компоненту $C(K_2)$.

Таким образом, если $N(K)$ обозначает число (возможно, бесконечное) различных толстых компонент $C(K)$, то $N(K)$ не убывает при возрастании K, $K > K_0$, в том смысле, что если $N(K_1) = \infty$ для некоторого K_1, то $N(K) = \infty$ для всех $K > K_1$.

Итак, в любом случае существует предел

$$N_0 = \lim_{K \to \infty} N(K)$$

и $0 \leqslant N_0 \leqslant \infty$. Кроме того, $N_0 = 0$ тогда и только тогда, когда функция $u(x)$ ограничена сверху в $\mathbb{R}^m$, а это может случиться для непостоянной $u(x)$ только при $m \geqslant 3$.

Мы называем N_0 *числом трактов* функции $u(x)$. Если N_0 конечно, то $N(K) = N_0$, скажем, для $K > K'_0$. В этом случае если $K_2 > K_1 > K'_0$, то каждая компонента $C(K_1)$ содержит по крайней мере одну и, следовательно, ровно одну компоненту $C(K_2)$. Все точки из $C(K_1)$, в которых $u(x) > K_2$, принадлежат одной и той же толстой компоненте $C(K_2)$. Если $u(z) = \log|f(z)|$, где $f(z)$ — целая функция, отличная от постоянной, то N_0 не меньше числа различных конечных асимптотических значений в классическом смысле. Имеет место [1]) следующая

Теорема 4.16. *Пусть функция $u(x)$ субгармонична в $\mathbb{R}^m$ и имеет нижний порядок λ. Тогда если $u(x)$ имеет N_0 трактов, где $N_0 \geqslant 2$, то*

$$\lambda \geqslant c_1(N_0, m),$$

где $c_1(k, m)$ — величина, фигурирующая в теореме 4.12. В частности, если $N_0 \geqslant 2$, то $\lambda > 0$, а если $N_0 = \infty$, то $\lambda = \infty$.

Если $\lambda = \infty$, то доказывать нечего, поэтому предположим, что λ конечно. Выберем такое целое положительное число N, что $2 \leqslant N \leqslant N_0$. Тогда функция $u(x)$ не ограничена на каждой компоненте $C(K)$, скажем, для $K \geqslant K_0$. Кроме того, так как $N(K)$ — положительное целое число или ∞, то можно выбрать K настолько большим, что $N(K) \geqslant N$. Таким образом, существует N попарно непересекающихся толстых компонент $C_\nu(K)$, $\nu = 1, \ldots, N$.

Положим

$$v_\nu(x) = \begin{cases} u(x) - K, & x \in C_\nu(K), \\ 0, & x \notin C_\nu(K); \end{cases}$$

так как функции $v_\nu(x)$ удовлетворяют соотношениям (4.6.1) и (4.6.2), то по теореме 4.13 они субгармоничны в $\mathbb{R}^m$. Кроме того, функции $v_\nu(x)$ не равны тождественно нулю, так как компоненты $C_\nu(K)$ являются толстыми. Таким образом, в теореме 4.12 мы можем выбрать r_1 настолько большим, чтобы $B_0(r_1) > 0$. При-

[1]) По поводу наиболее точных известных результатов в этом направлении см. Фридланд и Хейман [1976].

меняя эту теорему, получаем

$$B_0(r) \geqslant \frac{2}{3} B_0(r_1) \left(\frac{r}{r_1}\right)^{c_1}, \quad r > r_1.$$

Поскольку

$$B_0(r) \leqslant \sup_{|x| \leqslant r} (u(x) - K),$$

отсюда следует, что нижний порядок функции $u(x)$ не меньше c_1. Если $N_0 = \infty$, то можно выбрать N сколь угодно большим. Так как $c_1(N, m) \to \infty$ при $N \to \infty$, то это и означает, что нижний порядок функции $u(x)$ в этом случае бесконечен.

4.6.5. Теорема Иверсена

Классическая теорема Иверсена [1915] утверждает, что если $f(z)$ — целая функция, то существует такой путь Γ, уходящий в ∞, что

$$f(z) \to \infty \quad \text{при} \quad z \to \infty \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Мы установим аналог этой теоремы для субгармонических функций. Ряд серьезных проблем возникает здесь из-за того, что эти функции не являются, вообще говоря, непрерывными. Это обстоятельство заставляет нас рассматривать вместо пути Γ континуум, уходящий в ∞. Дадим соответствующее определение.

Будем говорить, что Γ есть *континуум, уходящий в* ∞ в $\mathbb{R}^m$, если

$$\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n,$$

где γ_n — такие континуумы, что

$$\gamma_n \cap \gamma_{n+1} \neq \varnothing, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и для любого компакта E существует такое $n_0 = n_0(E)$, что

$$\gamma_n \cap E = \varnothing, \quad n > n_0.$$

Континуум Γ называют *асимптотическим континуумом* и пишут

$$u(x) \to a \quad \text{при} \quad x \to \infty \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

если либо a конечно и для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует такое $R_0(\varepsilon)$, что

$$|u(x) - a| < \varepsilon \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \quad |x| > R_0(\varepsilon),$$

либо $a = +\infty$ и для любого заданного $K > 0$ существует такое $R_0(K)$, что

$$u(x) > K \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \quad |x| > R_0(\varepsilon).$$

Следующая теорема принадлежит Талпуру [1976].

Теорема 4.17. *Если функция* $u(x)$ *субгармонична в* $\mathbb{R}^m$ *и* C — *толстая компонента множества, где* $u(x) \geqslant K_1$ *для некоторого* K_1, *то существует асимптотический континуум* $\Gamma \subset C$, *такой, что* $u(x) \to M$ *при* $x \to \infty$ *на* Γ, *где* M — *точная верхняя грань* $u(x)$ *на* C. *В частности, в качестве* M *мы можем всегда взять точную верхнюю грань функции* $u(x)$ *в* $\mathbb{R}^m$.

Предположим, во-первых, что M конечна. Тогда, согласно (4.6.11), утверждение теоремы 4.17 имеет место для почти всех прямых Γ, проходящих через начало координат.

Если $M = +\infty$, то по теореме 4.15 и ее следствию существует такое K_0, что функция $u(x)$ не ограничена на любой толстой компоненте $C(K)$ при $K > K_0$. Возьмем $K_2 = \max(K_0, K_1)$, положим $M_n = K_2 + n$ и выберем такую точку x_1 в $C(K_1)$, что $u(x_1) > M_1$. Так как $M = +\infty$, то такая точка x_1 существует. Если точки x_n уже выбраны так, что $u(x_n) > M_n$, то через C_n обозначим ту компоненту множества, где $u(x) \geqslant M_n$, которая содержит точку x_n. Тогда $u(x)$ не ограничена на C_n и, следовательно, найдется такая точка x_{n+1} в C_n, что $u(x_{n+1}) > M_{n+1}$. Итак, $x_1 \in C(K_1)$ и, следовательно, в C_1 существует точка x_2. Так как $x_{n+1} \in C_n$ и $M_{n+1} > M_n$, то $C_{n+1} \subset C_n$. Таким образом,

$$C_n \subset C_{n-1} \subset \ldots \subset C_1 \subset C(K_1).$$

Точки x_n и x_{n+1} лежат в C_n; значит, существует континуум γ_n, содержащий x_n и x_{n+1} и такой, что $\gamma_n \subset C_n$. Положим

$$\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n;$$

Γ расположен в C_1 и, следовательно, в $C(K)$, как и требуется. Кроме того, $u(x) \geqslant M_n$ на γ_n. Если E — произвольный компакт, то $u(x) < M_{n_0}$ на E для некоторого n_0, так что γ_n не пересекается с E для $n \geqslant n_0$. Это означает, что Γ является континуумом, уходящим в ∞, и $u(x) \to \infty$ при $x \to \infty$ на Γ.

Пусть функция $u(x)$ ограничена постоянной M в $\mathbb{R}^m$ и M конечна. По теореме 4.15 можно выбрать $K_1 < M$, и тогда M является верхней гранью функции $u(x)$ на единственной толстой компоненте множества, где $u(x) \geqslant K_1$. Если $M = +\infty$, то выбираем $K_1 > K_0$, где K_0 определено, как в следствии теоремы 4.15. Тогда существует толстая компонента $C(K_1)$, на которой функция $u(x)$ не ограничена сверху. Теорема 4.17 полностью доказана.

Легко видеть, что если функция $u(x)$ непрерывна, то в качестве Γ можно выбрать путь. Имеет место следующая

Теорема 4.18. *Если в предположениях теоремы* 4.17 *функция* $u(x)$ *непрерывна, то в качестве* Γ *можно выбрать кусочно-полиго-*

нальный путь, т. е. в качестве γ_n в определении Γ могут быть выбраны отрезки прямых.

Действительно, в этом случае функция $u(x)$ равномерно непрерывна на любом γ_n. Предположим, что $u(x) \geqslant K_n > K_{n-1}$ на γ_n, и положим $\varepsilon = K_n - K_{n-1}$. Тогда, ввиду равномерной непрерывности, найдется такое δ_n, что

$$u(x) > K_{n-1}, \quad x \in \gamma_n(\delta_n),$$

где $\gamma_n(\delta_n)$ есть δ_n-окрестность γ_n, т. е. множество всех точек, расстояние которых до γ_n меньше δ_n. Очевидно, что $\gamma_n(\delta_n)$ — открытое множество. Если ξ_n, ξ_n' — точки $\gamma_n(\delta_n)$, то они могут быть соединены с точками x_n, x_n' в γ_n отрезками прямых, целиком лежащими в $\gamma_n(\delta_n)$. Таким образом, ξ_n, ξ_n' могут быть соединены континуумом, лежащим в $\gamma_n(\delta_n)$, и, следовательно, $\gamma_n(\delta_n)$ — связное открытое множество, или область. Любые две точки в произвольной области D можно соединить ломаной линией, или полигональным путем, лежащим в D. В самом деле, если D_1 обозначает множество точек, которые можно соединить таким образом с точкой x_1 в D, а D_2 — остальные точки, то множества D_1 и D_2 открыты в D и образуют разбиение D, если D_2 не пусто.

Итак, если x_n — любая точка из $\gamma_n \cap \gamma_{n-1}$, то можно соединить x_n с x_{n+1} ломаной линией, лежащей в $\gamma_n(\delta_n)$, на которой $u(x) \geqslant K_{n-1}$. Так как $K_{n-1} \to M$, то отсюда следует, как и раньше, что Γ является континуумом, уходящим в ∞, но теперь Γ есть счетное объединение прямолинейных отрезков. Теорема 4.18 доказана.

4.6.6. Построение асимптотического пути

Проблема нахождения пути вместо асимптотического континуума для общих субгармонических функций довольно трудна. Талпур [1975] показал, что в плоскости кусочно-полигональный путь действительно может быть найден. Немного позднее Фуледе [1975] доказал, что такой путь может быть найден и для высших размерностей. Его доказательство опирается на глубокую теорему Нгуен-Хен-Лока и Т. Ватанабе [1972] о броуновском движении. Этот последний результат показывает, что если x_1 и x_2 принадлежат связному множеству G, в котором субгармоническая функция положительна, то x_1 и x_2 в G могут быть соединены путем (по существу, броуновской траекторией). Отсюда немедленно следует, что в определении асимптотического континуума континуумы γ_n могут быть заменены путями, и тем самым мы получаем в действительности асимптотический путь Γ.

Карлесон [1974] при помощи тонких прямых рассуждений показал, что кусочно-полигональный асимптотический путь всегда существует; в его доказательстве не используется линейная связность связных множеств, в которых $u(x) > 0$.

Мы не располагаем здесь местом, чтобы изложить все упомянутые результаты, отдельные из которых весьма глубоки. Вместо этого мы докажем несколько более слабую теорему о линейной связности, из которой вытекает существование асимптотического пути, однако не полигонального. Наш результат составляет

Теорема 4.19. *Пусть функция $u(x)$ субгармонична в окрестности N континуума F и $u(x) \geqslant K$ в F. Тогда если x_1 и x_2 — две точки F, то в N существует путь, соединяющий эти точки, на котором $u(x) \geqslant K - 1$.*

Следствие. *В качестве континуумов γ_n в конструкции множества Γ в теореме 4.17 можно выбрать пути. Следовательно, Γ есть асимптотический путь, т. е. непрерывный образ положительной действительной полуоси.*

При выводе этого следствия достаточно предположить, что $M = +\infty$, так как в противном случае в качестве Γ можно выбрать прямую. Пусть x_n — точки, выбранные при доказательстве теоремы 4.17. Тогда, по построению, x_n и x_{n+1} могут быть соединены континуумом, на котором $u(x) \geqslant K_2 + n$, где K_2 — константа, и, следовательно, по теореме 4.19, точки x_n и x_{n+1} могут быть соединены путем, на котором $u(x) \geqslant K_2 + n - 1$. Запишем этот путь в виде

$$x = \alpha(t), \quad n - 1 \leqslant t \leqslant n,$$

где $\alpha(t)$ — непрерывная функция и $\alpha(n-1) = x_n$, $\alpha(n) = x_{n+1}$. Выбранная так функция $\alpha(t)$ определена для $t \geqslant 0$, непрерывна и, кроме того, $u\{\alpha(t)\} \geqslant K_2 + t - 1$ для всех t. Таким образом, путь Γ, заданный отображением $x = \alpha(t)$ для $t \geqslant 0$, и является искомым асимптотическим путем.

Докажем теорему 4.19, основываясь на лемме 4.12. Однако нам потребуется несколько более точная формулировка результата, установленного в этой лемме.

Лемма 4.13. *Пусть функция $u(x)$ субгармонична в шаре $C(x_1, r)$ и $u(x_1) \geqslant K + h$, $u(x) \leqslant K + B$ в $C_1(x_1, r)$, где h, B — положительные константы и K — действительное число. Тогда если $u(x_2) \geqslant K + h$ и $|x_2 - x_1| \leqslant \delta$, где*

$$\delta = r\left(\frac{2h}{3B}\right)^{\alpha}$$

и $\alpha = 1/c_1$ — положительная константа, зависящая только от m, то точки x_1 и x_2 могут быть соединены в $C(x_1, r)$ континуумом, на котором $u(x) \geqslant K$.

Продолжим наше построение. Окрестность N континуума F содержит множество F' всех точек, расстояния которых до F не превосходят некоторого положительного r. Так как F' компактно, то множество точек, в которых $u(x) \leqslant K - 1 + B$, принадлежит F', где B — некоторая положительная величина. Выбрав таким образом B, положим

$$r_n = r2^{-n}, \qquad \delta_n = r_n\left(\frac{2^{1-n}}{3B}\right)^{\alpha},$$

где α — константа из леммы 4.13.

Построим положительные целые числа $j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots$ и точки ξ_j^n, $0 \leqslant j \leqslant j_1 j_2 \ldots j_n$, следующим образом. Так как F связно, в нем существует такая цепочка точек ξ_j^1, $0 \leqslant j \leqslant j_1$, что

$$\xi_0^1 = x_1, \quad \xi_{j_1}^1 = x_2 \quad \text{и} \quad |\xi_{j+1}^1 - \xi_j^1| < \delta_1.$$

По лемме 4.13 точки ξ_j^1 и ξ_{j+1}^1 могут быть соединены континуумом γ_j', лежащим в $C(\xi_j, r_1)$, на котором $u(x) \geqslant K - 1 + 1/2$. Так как γ_j' — связное множество, на нем можно выбрать конечное число точек, образующих цепочку от ξ_j^1 к ξ_{j+1}^1, в которой расстояния между соседними точками меньше δ_2. Повторяя точки, если необходимо, мы можем предположить, что в каждой такой цепочке от ξ_j^1 к ξ_{j+1}^1 число точек равно $j_2 + 1$. Перенумеруем все эти точки и обозначим их через ξ_j^2, $0 \leqslant j \leqslant j_1 j_2$. Если p — целое, $0 \leqslant p \leqslant j_1$, то $\xi_{pj_2}^2 = \xi_p^1$. Если же $pj_2 \leqslant j \leqslant (p+1)j_2$, то точка ξ_j^2 лежит на континууме γ_p', соединяющем ξ_p^1 и ξ_{p+1}^1 и расположенном в $C(\xi_p^1, r_2)$, причем $u(x) \geqslant K - 1 + \frac{1}{2}$ на γ_p'.

Предположим, что точки ξ_p^n уже построены для $0 \leqslant p \leqslant j_1 j_2 \ldots j_n$ и

$$|\xi_{p+1}^n - \xi_p^n| < \delta_n, \qquad 0 \leqslant p \leqslant j_1 j_2 \ldots j_n - 1,$$
$$u(\xi_p^n) \geqslant K - 1 + 2^{1-n}.$$

Тогда точки ξ_p^n и ξ_{p+1}^n могут быть соединены в $C(\xi_p^n, r_n)$ континуумом, на котором $u(x) \geqslant K - 1 + 2^{-n}$. На этом континууме выберем такие точки ξ_j^{n+1}, $pj_{n+1} \leqslant j \leqslant (p+1)j_{n+1}$, что

$$\xi_{pj_{n+1}}^{n+1} = \xi_p^n, \qquad \xi_{(p+1)j_{n+1}}^{n+1} = \xi_{p+1}^n, \tag{4.6.12}$$

$$|\xi_{j+1}^{n+1} - \xi_j^{n+1}| < \delta_{n+1}. \tag{4.6.13}$$

Таким образом, точки ξ_j^n построены для всех n.

Пусть Q, для некоторого n, обозначает множество всех рациональных чисел t вида

$$t = \frac{p}{j_1 j_2 \ldots j_n},$$

где p — целое, $0 \leqslant p \leqslant j_1 j_2 \ldots j_n$. Определим функцию $\alpha(t)$ на этих рациональных числах равенством

$$\alpha(t) = \xi_p^n;$$

ввиду (4.6.12) она определена однозначно. Заметим, что функция $\alpha(t)$ равномерно непрерывна на Q.

В самом деле, предположим, что t, t' — такие два числа из Q, что

$$|t - t'| < \frac{1}{j_1 j_2 \ldots j_n}. \tag{4.6.14}$$

Тогда t и t' либо оба принадлежат одному интервалу, либо лежат в смежных интервалах вида

$$\frac{p}{j_1 j_2 \ldots j_n} \leqslant t \leqslant \frac{p+1}{j_1 j_2 \ldots j_n}. \tag{4.6.15}$$

Пусть точки t, t' принадлежат интервалу (4.6.15). Если $t = q/j_1 j_2 \ldots j_{n+1}$, то $\alpha(t)$ есть точка континуума, принадлежащего $C(\xi_p^n, r_n)$ и соединяющего ξ_p^n и ξ_{p+1}^n. Таким образом, если $t_0 = p/j_1 j_2 \ldots j_n$, то

$$|\alpha(t) - \alpha(t_0)| \leqslant r_n.$$

Если t принадлежит интервалу (4.6.15) и имеет вид

$$t = \frac{q}{j_1 j_2 \ldots j_{n+k}},$$

то по индукции получаем

$$|\alpha(t) - \alpha(t_0)| \leqslant r_n + r_{n+1} + \ldots + r_{n+k} \leqslant 2r_n.$$

Это неравенство имеет место для всех $t \in Q$, которые удовлетворяют соотношению (4.6.15). Если t, t' связаны неравенством (4.6.14) и лежат в одном и том же интервале или в смежных интервалах вида (4.6.15), то получаем, что

$$|\alpha(t) - \alpha(t')| \leqslant 4r_n. \tag{4.6.16}$$

Таким образом, функция $\alpha(t)$ равномерно непрерывна на Q, и так как Q плотно на отрезке $[0, 1]$, то $\alpha(t)$ можно единственным образом продолжить до непрерывной функции на всем отрезке $[0, 1]$. Для любого $t \in [0, 1]$ нужно только найти такую последовательность $t_n \in Q$, что $t_n \to t$. Тогда, в силу равномерной непрерывности, последовательность $\alpha(t_n)$ также сходится к какому-то пределу, который мы по определению считаем равным $\alpha(t)$. Ясно, что это определение не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности t_n. Далее, если t, t' — любые числа из отрезка $[0, 1]$, удовлетворяющие (4.6.14), то неравенство (4.6.16) также имеет место и, следовательно, функция $\alpha(t)$ непрерывна. Итак, $x = \alpha(t)$ есть путь γ, соединяющий точки x_1 и x_2. Все точки γ

лежат от F на расстоянии, не превосходящем $r = 2r_1$, следовательно, γ лежит в N.

Осталось показать, что $u(x) \geqslant K - 1$ на γ. Для этого предположим, что $z = \alpha(t)$— некоторая точка на γ, и пусть t_n — наибольшее не превосходящее t число вида

$$t_n = \frac{p}{j_1 j_2 \ldots j_n},$$

где p — целое. Положим $z_n = \alpha(t_n)$; тогда, по построению, точки z_n и z_{n+1} принадлежат континууму γ_n в $C(z_n, r_n)$, на котором $u(x) \geqslant K - 1 + 2^{-n}$. Положим

$$\Gamma_N = \bigcup_{n=1}^{N} \gamma_n.$$

Так как для $\xi \in \gamma_n$ имеем

$$|\xi - z_1| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n-1} |z_\nu - z_{\nu+1}| + r_n \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu = r_1 \sum_{\nu=1}^{n} 2^{1-\nu} < 2r_1 = r,$$

то отсюда следует, что Γ_N лежит в $C(z_1, r)$. Таким образом, Γ_N полностью принадлежит компоненте C множества точек в $C(z_1, r)$, где $u(x) \geqslant K - 1$, которая содержит z_1. В частности, все точки z_n принадлежат C. Так как множество C замкнуто и $z_n \to z$ при $n \to \infty$, то $z \in C$, т. е. $u(z) \geqslant K - 1$, и теорема 4.19 доказана.

Иногда полезно иметь жорданову дугу, соединяющую точки x_1 и x_2, т. е. путь без самопересечений. Такую возможность дает следующая [1])

Теорема 4.20. *Если γ — путь с различными концами x_1, x_2, принадлежащий множеству E, то на E существует жорданова дуга с этими же концами.*

Пусть I_0 обозначает замкнутый интервал $[0, 1]$, а путь γ задан равенствами

$$x = \alpha(t), \quad t \in I_0, \quad \alpha(0) = x_1, \quad \alpha(1) = x_2.$$

Если для $t \neq t'$ всегда $\alpha(t) \neq \alpha(t')$, то γ — жорданова дуга. Если нет, то пусть (t_1, t_1') обозначает такой интервал I_1, что разность $t_1' - t_1$ максимальна при условии, что $\alpha(t_1') = \alpha(t_1)$. Пусть интервалы $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$ определены; тогда в качестве $I_n = (t_n, t_n')$ выбираем интервал максимальной длины, принадлежащий множеству

$$I_0 - \bigcup_{\nu=1}^{n-1} I_\nu$$

[1]) См. Керекьярто [1923].

и такой, что $\alpha(t_n) = \alpha(t'_n)$, при условии что такая пара различных точек существует. Процесс либо заканчивается, когда уже нельзя выбрать новый интервал I_n, либо продолжается бесконечно. В любом случае мы пишем $J = I_0 - \bigcup I_\nu$. Тогда

(i) J — совершенное множество, т. е. замкнутое множество без изолированных точек, кроме, возможно, точек 0 и 1;

(ii) если t, t' — различные точки J, не являющиеся концами какого-то одного интервала I_ν, то $\alpha(t) \neq \alpha(t')$.

Ясно, что J замкнуто, так как $\bigcup I_\nu$ открыто. Если бы множество J имело изолированную точку $t_0 \neq 0, 1$, то нашлись бы интервалы I_μ, I_ν, лежащие по разные стороны от t_0. Тогда интервал $I_\mu \bigcup t_0 \bigcup I_\nu$ имел бы бо́льшую длину, чем I_μ, I_ν, что противоречит нашему построению, при котором на каждом этапе выбирались интервалы максимальной длины. Полученное противоречие доказывает (i).

Аналогично доказывается (ii): если $\alpha(t) = \alpha(t')$, то на некотором шаге величина $|t - t'|$ будет больше длины интервала I_ν, что приводит к противоречию.

Построим теперь функцию $\beta(t)$, непрерывную и неубывающую на отрезке $[0, 1]$ и такую, что $\beta(0) = 0$, $\beta(1) = 1$ и $\beta(t)$ постоянна на интервалах I_ν и только на них. Если точка 0 является концом одного из интервалов I_ν, то на замыкании этого интервала положим $\beta(t) = 0$. Аналогично, если точка 1 служит концом I_ν, то на замыкании I_ν положим $\beta(t) = 1$. Если существуют другие интервалы I_ν, то выберем один из них наибольшей длины, переобозначим его $I_{1/2}$ и положим на нем $\beta(t) = 1/2$. Затем выберем левее интервала $I_{1/2}$ интервал I_ν наибольшей длины (если он существует), переобозначим его $I_{1/4}$ и положим на нем $\beta(t) = 1/4$. Аналогично определяется интервал $I_{3/4}$, в точках которого полагаем $\beta(t) = 3/4$. Предположим, что на каком-то этапе построены точки или интервалы I_ν, на которых соответственно $\beta(t) = p/2^q$ и $\beta(t) = (p+1)/2^q$. Если между ними найдется некоторый интервал I_ν, то мы полагаем $(2p+1)/2^{q+1}$ на наибольшем таком интервале. С другой стороны, так как множество J не имеет изолированных точек, то в J между точками, где $\beta(t) = p/2^q$ и $\beta(t) = (p+1)/2^q$, должен располагаться целый интервал J_0. Определим $\beta(t)$ на интервале J_0 как линейную функцию и, в частности, положим $\beta(t) = (2p+1)/2^{q+1}$ в середине интервала J_0.

Так как на каждом шаге функция $\beta(t)$ определяется на наибольшем интервале I_ν из тех, в которых она не была определена ранее, ясно, что функция $\beta(t)$ определена и постоянна на каждом из интервалов I_ν и в их концах. В полных интервалах из J между I_μ и I_ν функция $\beta(t)$ непрерывна и строго возрастает. Другие точки t_0 являются пределами концов интервалов, где $\beta(t)$ определена, и так как $\beta(t)$ — неубывающая функция там, где она задана, то мы определим $\beta(t_0)$ как предел соответствующих значений функции $\beta(t)$. Так как функция $\beta(t)$ принимает любое значение вида $p/2^q$, она не может иметь скачков и, таким образом, непрерывна. По построению, функция $\beta(t)$ постоянна только на интервалах I_ν и равна там $p/2^q$ (с некоторыми p и q).

Для любого τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, через $P = \beta^{-1}(\tau)$ обозначим множество точек t, где $\beta(t) = \tau$. Если P состоит из одной точки t, то t не может быть концом никакого интервала I_ν, и мы полагаем $h(t) = \alpha(t)$. Если P — интервал, задаваемый неравенством $t_1 \leqslant t \leqslant t_1'$, то (t_1, t_1') есть некоторый интервал I_ν; таким образом, $\alpha(t_1) = \alpha(t_1')$ и мы полагаем $h(\tau) = \alpha(t_1) = \alpha(t_1')$. Ясно, что $h(\tau)$ по-прежнему непрерывна, но принимает в разных точках различные значения, т. е. $x = h(\tau)$ определяет жорданову дугу, соединяющую точки x_1 и x_2. Кроме того, значения, принимаемые функцией $h(\tau)$, образуют подмножество множества значений функции $\alpha(t)$. Это доказывает теорему 4.20.

Заметим, в частности, что путь, фигурирующий в теореме 4.19, всегда можно считать жордановой дугой.

4.6.7. Рост на асимптотических путях

Естественно спросить, как быстро должна расти к бесконечности функция $u(x)$ на асимптотическом пути. Если ограничиться только оценкой сверху, то на этот вопрос можно дать достаточно полный ответ [1]).

Теорема 4.21. *Пусть функция $u(x)$ субгармонична в $\mathbb{R}^m$, не ограничена сверху и имеет конечный нижний порядок λ, или, более общо, имеет конечное число N_0 трактов. Тогда для любой заданной последовательности x_n, такой, что $u(x_n) \to \infty$, существует асимптотический путь Γ, содержащий бесконечную подпоследовательность точек x_n. Если $N_0 = 1$, то можно выбрать Γ так, что он будет содержать все, за исключением конечного числа, точки x_n.*

Следствие. *Если $N_0 < \infty$, то существует асимптотический путь Γ, на котором функция $u(x)$ имеет тот же порядок и тип, что и в $\mathbb{R}^m$.*

По теореме 4.16, N_0 конечно, если конечен порядок λ. Итак, предположим, что N_0 конечно. Тогда найдется такое число K_0, что при любом $K \geqslant K_0$ существует ровно N_0 толстых компонент $C_\nu(K)$, $\nu = 1, \ldots, N_0$, множества, где $u(x) \geqslant K$. Каждая такая

1) В случае, когда $u(z) = \log |f((z)|$, где $f(z)$ — целая функция, два нижеследующих результата получены Хейманом [1960]. [Более сложный вопрос о нижнем порядке на асимптотическом пути см. в статьях Чжан Ганхэ [1977] для случая $u = \log|f|$, f — целая функция, и Ерёменко [1979b] в общем случае $m \geqslant 2$. — *Прим. ред.*]

компонента содержит ровно одну компоненту $C_\nu(K')$, если $K' > K$. Если x_n — такая же последовательность, как в теореме 4.21, то все, за исключением конечного числа, точки x_n принадлежат

$$\bigcup_{\nu=1}^{N} C_\nu(K_0).$$

Таким образом, по крайней мере одна компонента, например $C_1(K_0)$, содержит бесконечно много точек x_n.

Предположим, что y_n — бесконечная подпоследовательность последовательности x_n, принадлежащая $C_1 = C_1(K_0)$, и пусть, кроме того, $u(y_n) > u(y_{n-1})$ и $u(y_1) > K_0$. Выберем K_n так, что $u(y_n) < K_n < u(y_{n+1})$, $n \geqslant 1$. Тогда компонента $C_1(K_n)$ содержит все точки в C_1, в которых $u(x) > K_n$, и, в частности, точки y_{n+1}, y_{n+2}. Отсюда следует, что в $C_1(K_n)$ существует континуум, содержащий точки y_{n+1} и y_{n+2}. Тогда, по теореме 4.19, найдется путь γ_n, соединяющий y_{n+1} и y_{n+2}, в точках которого $u(x) \geqslant \geqslant K_n - 1$. Мы утверждаем, что

$$\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n$$

является искомым асимптотическим путем. Действительно, Γ содержит все точки y_n. Кроме того, $u(x) \geqslant K_{n-1}$ на Γ вне континуума $\bigcup_{\nu=1}^{n-1} \gamma_\nu$ и, таким образом, $u(x) \to +\infty$ при $x \to \infty$ на Γ. Так как $u(x) \geqslant K_n - 1$ в точках γ_n, то γ_n лежит вне фиксированного компактного множества при достаточно больших n.

Если $N_0 = 1$, то существует ровно одна толстая компонента $C(K)$ при $K \geqslant K_0$, заведомо содержащая все точки x_n, в которых $u(x_n) > K$. Без ограничения общности можно считать, что $u(x_n)$ не убывает с возрастанием n. Пусть n_0 обозначает наименьший индекс, для которого $u(x_{n_0}) > K_0$, а n_p — первый такой индекс, что $u(x_{n_p}) > u(x_{n_{p-1}})$; число K_p выберем таким, что

$$u(x_{n_p}) < K_p < u(x_{n_{p+1}}).$$

Тогда компонента $C(K_p)$ содержит все точки x_ν для $\nu \geqslant n_{p+1}$ и, следовательно, в $C(K_p)$ существует континуум γ_p, содержащий все точки x_ν для $n_{p+1} \leqslant \nu \leqslant n_{p+2}$. Действительно, построим такой континуум $\gamma_{p,\nu}$, содержащий точки $x_{n_{p+1}}$ и x_ν, и положим

$$\gamma_p = \bigcup_{\nu=n_{p+1}}^{n_{p+2}} \gamma_{p,\nu}.$$

По теореме 4.19, найдется путь γ'_ν, соединяющий x_ν и $x_{\nu+1}$, $n_{p+1} \leqslant \leqslant \nu < n_{p+2}$, на котором $u(x) \geqslant K_p - 1$. Тогда путь $\Gamma = \bigcup_{p=1}^{\infty} \gamma'_p$, содержащий все точки x_ν для $\nu \geqslant n_1$, является искомым. Теорема 4.21 доказана.

Для доказательства следствия достаточно построить последовательность x_n, на которой рост функции будет максимальным. Если функция $u(x)$ имеет порядок ρ, то выберем последовательность точек x_n из условия

$$\frac{\log u(x_n)}{\log |x_n|} \to \rho.$$

Если ρ конечно, а тип функции $u(x)$ не меньше T, то точки x_n выберем так, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{u(x_n)}{|x_n|^\rho} \geqslant T.$$

Тогда если y_n — подпоследовательность последовательности x_n, принадлежащая Γ, то $B_\Gamma(|y_n|, u) \geqslant u(y_n)$, и следствие доказано.

Рассмотрим далее случай, когда нижний порядок функции бесконечен; здесь результаты слабее.

Теорема 4.22. *Если функция $u(x)$ имеет бесконечный порядок, то для любого $\rho > 0$ существует асимптотический путь $\Gamma = \Gamma(\rho)$, на котором функция $u(x)$ имеет порядок не меньше ρ.*

Таким образом, существует асимптотический путь, на котором функция $u(x)$ имеет произвольно большой конечный порядок. Однако, как мы увидим, $u(x)$ не обязательно имеет бесконечный порядок на каждом асимптотическом пути.

Начиная доказательство теоремы 4.22, заметим, что если число N_0 трактов конечно, то, как вытекает из следствия теоремы 4.21, функция $u(x)$ имеет бесконечный порядок на некотором асимптотическом пути и, значит, можно предположить, что $N_0 = \infty$.

Выберем положительное целое число N настолько большим, что $c_1(N, m) > \rho$, где $c_1(N, m)$ — величина, фигурирующая в теореме 4.12. Так как $N_0 = \infty$, то при достаточно больших K_0 найдется N попарно различных компонент $C_\nu = C_\nu(K_0)$, $\nu = 1, \ldots, N$. Докажем прежде всего, что по крайней мере одна компонента C_ν обладает тем свойством, что функция $u(x)$ имеет порядок больше ρ на любой содержащейся в C_ν толстой подкомпоненте C'_ν.

Предположим противное, а именно пусть для $\nu = 1, \ldots, N$ существует принадлежащая C_ν толстая компонента $C'_\nu = C_\nu(K_\nu)$, на которой функция $u(x)$ имеет порядок не выше ρ. Положим

$$v_\nu(x) = \begin{cases} u(x) - K_\nu, & x \in C'_\nu, \\ 0, & x \notin C'_\nu. \end{cases}$$

Функции $v_\nu(x)$ удовлетворяют всем предположениям теоремы 4.12 в $D(0, r)$, где r достаточно велико. Таким образом, для всех больших r, в обозначениях теоремы 4.12, имеем $B_0(r) \geqslant Ar^{c_1}$, где A — константа, а следовательно, по крайней мере для одного ν

$$B_\nu(r) \geqslant Ar^{c_1}, \tag{4.6.17}$$

где $B_\nu(r) = K_\nu + \sup\limits_{x \in C'_\nu,\, |x|=r} u(x)$. Итак, неравенство (4.6.17) имеет место при произвольно больших значениях r по крайней мере для одного ν, но это противоречит предположению о том, что порядок функции $u(x)$ на C'_ν не выше $\rho < c_1(N, m)$.

Пусть теперь $C = C(K_0)$ — такая компонента, что функция $u(x)$ имеет порядок больше ρ на любой ее толстой подкомпоненте и, в частности, на всей C. Пусть $K_n = K_0 + n$ и x_1 — любая такая точка в C, что $u(x_1) > K_1 + |x_1|^\rho$. Если точка x_n уже построена, то выберем в качестве C_n компоненту множества, где $u(x) \geqslant K_n$, содержащую x_n, и найдем в ней такую точку x_{n+1}, что

$$u(x_{n+1}) > K_{n+1} + |x_{n+1}|^\rho. \tag{4.6.18}$$

По индукции получаем

$$C_n \subset C_{n-1} \subset \ldots \subset C_1 \subset C_0.$$

Так как функция $u(x)$ имеет порядок выше ρ на C_n, то точка x_{n+1} существует. Далее, точки x_n и x_{n+1} лежат на континууме γ_n в C_n, на котором $u(x) \geqslant K_n$, а следовательно, существует путь γ'_n, соединяющий x_n и x_{n+1}, на котором $u(x) \geqslant K_n - 1$. Таким образом,

$$\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma'_n$$

является асимптотическим путем, содержащим точки x_n, и ввиду (4.6.18) функция $u(x)$ имеет на Γ порядок не меньше ρ. Теорема 4.22 доказана.

4.6.8. Три примера

Мы закончим эту главу тремя примерами, которые показывают, что результаты предыдущего пункта не могут быть значительно улучшены.

Примеры

1. Функция $u(x) = |x_1|$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, субгармонична и имеет порядок 1 в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$. Если $K > 0$, то множество точек, где $u(x) > K$, распадается на две компоненты: $x_1 > K$ и $x_1 < -K$. Таким образом, существуют два тракта. Если y_n — последовательность $((-1)^n n, 0, \ldots, 0)$, то $u(y_n) = n \to \infty$. Но любой континуум, соединяющий y_n и $y_{n'}$, где n четно, а n' нечетно,

должен пересекать гиперплоскость $x_1 = 0$. Таким образом, если

$$\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n$$

— асимптотический континуум, то все γ_n, выходящие из определенной точки, должны лежать или в одном и том же полупространстве $x_1 > 0$ или $x_1 < 0$. Следовательно, Г не может содержать бесконечно много точек y_n как с четным, так и с нечетным n. Итак, условие $N_0 = 1$ существенно для последней части теоремы 4.21. Можно показать (Фридланд и Хейман [1976]), что если $N_0 = 2$, то нижний порядок функции не меньше единицы.

2. Пусть η_n — последовательность положительных чисел, такая, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \eta_n = 2$, и ε_n — последовательность положительных чисел, для которой при любом фиксированном $r > 0$

$$\varepsilon_n r^{1/\eta_n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Положим $s_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \eta_\nu$, $s_0 = 0$, и пусть

$$u(z) = \varepsilon_n r^{1/\eta_n} \sin\left(\frac{\theta - \pi s_{n-1}}{\eta_n}\right),$$

где $z = re^{i\theta}$, $\pi s_{n-1} \leqslant \theta \leqslant \pi s_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Функция $u(z)$ субгармонична в z-плоскости. Для точек z, не лежащих на прямых $\theta = \pi s_n$, это очевидно, так как вне этих прямых функция $u(z)$ гармонична. На всех этих прямых $u(z) = 0$ и, кроме того, всюду $u(z) \geqslant 0$. Следовательно, неравенство со средним значением выполнено и для точек, принадлежащих указанным прямым.

Наконец, функция $u(z)$ всюду непрерывна. Это очевидно для всех точек, кроме точек действительной положительной полуоси. Ясно, что при $\theta \to 0$ сверху и ограниченном $|z|$

$$u(z) = \varepsilon_n r^{1/\eta_n} \sin((\theta - \pi s_{n-1})/\eta_n) \to 0.$$

Если $\theta \to 2\pi$ и $r \leqslant R$, то $u(z) = O\{\varepsilon_n R^{1/\eta_n}\} \to 0$. Таким образом, функция $u(z)$ непрерывна и в точках положительной полуоси.

Так как при любом фиксированном n

$$\varliminf_{r \to \infty} \frac{B(r, u)}{r^{1/\eta_n}} \geqslant \varepsilon_n > 0$$

и $\eta_n \to 0$, то функция $u(z)$, очевидно, имеет бесконечный порядок. Нетрудно видеть, что подходящим выбором последовательностей η_n и ε_n можно заставить $B(r, u)$ стремиться к бесконечности сколь угодно быстро (для этого надо взять очень быстро стремящуюся к нулю последовательность η_n и положить $\varepsilon_n = n^{-1/\eta_n}$) или сколь угодно медленно (взяв достаточно быстро убывающую последовательность ε_n), но так, чтобы функция имела бесконечный нижний порядок (читатель может это проверить самостоятельно).

С другой стороны, $u(z) = 0$ на всех прямых $\arg z = \pi s_n$. Таким образом, если $\Gamma = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu$ — асимптотический континуум, то $u(z) > 0$ на γ_ν для $\nu \geqslant \nu_0$, и, следовательно, γ_ν не может пересекать ни одну из этих прямых. Если γ_{ν_0} содержит такую точку z, что

$$\pi s_{n-1} < \arg z < \pi s_n,$$

то это неравенство должно иметь место во всех точках γ_{ν_0}, а значит, на γ_{ν_0+1} и, следовательно, на всех γ_ν, $\nu \geqslant \nu_0$. Итак, Γ лежит в этом угле и, следовательно, порядок функции $u(z)$ на Γ не выше $1/\eta_n$, т. е. функция $u(z)$ имеет конечный порядок на любом асимптотическом континууме.

3. Величина $c_1(k, m)$ в теореме 4.12 играет ключевую роль в теории, и поэтому интересно получить для нее оценку снизу. Мы покажем, что оценка в теореме 4.12 дает по крайней мере правильный порядок при $k \to \infty$ и фиксированном m.

Для этого вспомним примеры п. 4.3.1. Там говорилось, что для заданного $\lambda > 2$ существует субгармоническая в $\mathbb{R}^m$ функция $u(x)$, такая, что

$$u(x) = 0, \quad \pi/\lambda \leqslant \theta \leqslant \pi, \tag{4.6.19}$$

$$u(x) = |x|^\alpha (1 + \cos \lambda\theta), \quad 0 \leqslant \theta < \pi/\lambda, \tag{4.6.20}$$

где

$$\alpha = 3\lambda m^{3/2}. \tag{4.6.21}$$

Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ — любая точка на единичной сфере и для любой точки $x \in \mathbb{R}^m$, $x \neq 0$, пусть $x' = (x'_1, \ldots, x'_m) = x/|x|$ — соответствующая ей точка на той же сфере. Определим θ формулой

$$\cos\theta = \sum_{\mu=1}^{m} x'_\mu \xi_\mu; \tag{4.6.22}$$

тогда

$$|x' - \xi|^2 = 2(1 - \cos\theta).$$

Функция $u(x)$, заданная равенствами (4.6.19)—(4.6.21), где угол θ определен соотношением (4.6.22), субгармонична, так как свойство субгармоничности инвариантно относительно ортогональных преобразований в $\mathbb{R}^m$. В частности, построенная функция $u(x)$ неотрицательна, не равна тождественно нулю и равна нулю при $|x' - \xi|^2 \geqslant 2\left(1 - \cos\frac{\pi}{\lambda}\right)$, т. е. при $|x' - \xi| \geqslant 2\sin\frac{\pi}{2\lambda}$.

Если $\delta > 0$ задано, то можно, конечно, найти N таких точек ξ_j, $j = 1, \ldots, N$, на единичной сфере в $\mathbb{R}^m$, что

$$|\xi_i - \xi_j| \geqslant \delta > 0, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant N, \tag{4.6.23}$$

где $N > A_1 (1/\delta)^{m-1}$ и A_1 — константа, зависящая только от m.

Если $\delta > 1/\sqrt{m}$, то можно положить $N = 1$. В противном случае выберем наибольшее целое $k > 0$, такое, что $k\delta \leqslant 1/\sqrt{m}$, и в качестве точек ξ_j рассмотрим все точки вида $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, где

$$x_j = \nu_j\delta, \quad -k \leqslant \nu_j \leqslant k, \quad j = 1, \ldots, m-1,$$

$$x_m = \sqrt{1 - \sum_{j=1}^{m-1} x_j^2}.$$

Так как для каждого ν_j имеется $2k+1$ возможных значений, то мы получаем таким способом $N = (2k+1)^{m-1} > (1/\delta\sqrt{m})^{m-1}$ различных точек, находящихся друг от друга на расстоянии не меньше δ.

Занумеруем эти точки $\xi_1, \ldots, \xi_N$, выберем $\alpha > 3m^{3/2}$, определим λ при помощи (4.6.21), положим $\delta = 4 \sin(\pi/2\lambda)$ и построим функции $v_j(x)$ так же, как была построена выше функция $u(x)$, с заменой ξ на ξ_j.

Множества, где $v_j(x) > 0$, не пересекаются для разных j, так как не пересекаются множества $|x' - \xi_j| < 2\sin(\pi/2\lambda) = \delta/2$. Таким образом, если $u(x) = \sum_{j=1}^{N} v_j(x)$, то функция $u(x)$ субгармонична в $\mathbb{R}^m$, имеет порядок α и средний тип, а при $K > 0$ существует N компонент множества, где $u(x) \geqslant K$, и

$$N \geqslant \{4\sqrt{m}\sin(\pi/2\lambda)\}^{1-m} = (4\sqrt{m}\sin(1{,}5\pi m^{3/2}/\alpha))^{1-m} \geqslant$$
$$\geqslant (\alpha/6\pi m^2)^{m-1}.$$

В частности, если N выбрано таким образом, то в теоремах 4.12 и 4.16 должно быть

$$c_1(N, m) \leqslant \alpha < 6\pi m^2 N^{1/(m-1)}.$$

Более точные результаты были получены Бреннаном, Фуксом, Хейманом и Кураном [1976]. Они показали, что правильный порядок величины $c_1(N, m)$ с точностью до множителя, равного абсолютной постоянной, равен $\log N$, если $2 \leqslant N < 2^m$, и $mN^{1/(m-1)}$, если $N \geqslant 2^m$.

Глава 5

ЕМКОСТЬ И УСТРАНИМЫЕ МНОЖЕСТВА

5.0. ВВЕДЕНИЕ

В гл. 3 было показано, что всякая субгармоническая функция может быть локально представлена в виде суммы потенциала и гармонической функции. В настоящей главе мы исследуем свойства потенциалов, которые получаются таким способом, а также свойства несколько более общих потенциалов (если это не вызовет дополнительных сложностей). Это исследование естественным образом приведет нас к понятию емкости множеств в $\mathbb{R}^m$, которое является одним из возможных обобщений таких понятий, как объем, длина или площадь. Некоторые множества емкости нуль оказываются устранимыми множествами в различных вопросах, таких, например, как принцип максимума для ограниченных гармонических функций или задача Дирихле. Это приведет нас к существенно более общему понятию решения задачи Дирихле, функции Грина и формулы Пуассона — Иенсена. Наконец, в последних двух параграфах изложены результаты Шоке о емкостях, которые показывают, что для аналитических и, в частности, для борелевских множеств внутренняя и внешняя емкости совпадают.

5.1. ПОТЕНЦИАЛЫ И α-ЕМКОСТЬ

Положим

$$K_\alpha(x) = -|x|^{-\alpha}, \quad \alpha > 0,$$
$$K_0(x) = \log|x|.$$

Пусть E — компактное множество в пространстве $\mathbb{R}^m$ и μ — такая мера на E, что $\mu(E) = 1$. Для $x \in \mathbb{R}^m$ определим α-потенциал $V_\alpha(x)$, полагая

$$V_\alpha(x) = \int_E K_\alpha(x-y)\, d\mu(y).$$

Так как функция $K_\alpha(x)$ субгармонична в $\mathbb{R}^m$ при $\alpha \leqslant m-2$, то из теоремы 3.6 (i) следует, что функция $V_\alpha(x)$ в этом случае также субгармонична в $\mathbb{R}^m$. Кроме того, если $\alpha = m-2$, то $V_\alpha(x)$ гармонична вне множества E. Это наиболее важный для нас случай, поэтому для $\alpha = m-2$ функции $K_\alpha(x)$ и $V_\alpha(x)$

будут обозначаться просто $K(x)$ и $V(x)$. Далее, если $\alpha > m-2$, то функция $V_\alpha(x)$ супергармонична вне множества E.

Заметим, что во всех рассматриваемых случаях функция $K_\alpha(x)$ полунепрерывна сверху. Поэтому, в силу теоремы 3.6, функция $V_\alpha(x)$ полунепрерывна сверху в $\mathbb{R}^m$. По той же причине, функция $V_\alpha(x)$ непрерывна вне множества E. Мы можем доказать несколько больше.

Теорема 5.1 (принцип непрерывности)[1]. *Если x_0 — точка множества E и потенциал $V_\alpha(x)$ непрерывен в x_0 как функция, определенная только на E, то $V_\alpha(x)$ непрерывен в x_0 и как функция, определенная всюду в $\mathbb{R}^m$.*

Так как $V_\alpha(x)$ непрерывен в точке x_0 как функция на E, то $V_\alpha(x_0)=V_0>-\infty$. Кроме того, функция $V_\alpha(x)$ пн. св., так что

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\, V_\alpha(x)\leqslant V_0.$$

Докажем, что

$$\underline{\lim_{x\to x_0}}\, V_\alpha(x)\geqslant V_0, \tag{5.1.1}$$

в предположении, что это неравенство выполнено, если $x\to x_0$ по множеству E.

Так как значение V_0 конечно, то мера точки x_0 не может быть положительной. Пусть ρ — малое положительное число. Обозначим через D дополнение к множеству E и положим

$$D_\rho = D\cap D(x_0,\ \rho),\qquad E_\rho = E\cap C(x_0,\ \rho).$$

Если x_0 — изолированная точка E, то x_0 не несет никакой массы, и поэтому $V_\alpha(x)$ во всяком случае непрерывен в x_0. Далее, если x_0 является внутренней точкой множества E, то она имеет окрестность $D(x_0,\ \rho_0)$, целиком лежащую в E, и утверждение теоремы 5.1 выполняется тривиальным образом. Поэтому можно считать, что x_0 — граничная точка множеств E и D.

Пусть $x\in D_\rho$ и x_1 — ближайшая к x точка E_ρ, так что $|x_1-x|\leqslant|x-a|$ для всех $a\in E_\rho$. Тогда для всех $a\in E_\rho$

$$|x_1-a|\leqslant|x-x_1|+|x-a|\leqslant 2\,|x-a|. \tag{5.1.2}$$

Выберем теперь для данного $\varepsilon>0$ число ρ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_{E_\rho} -K_\alpha(x_0-a)\,d\mu(a)<\varepsilon.$$

---

[1]) Эванс [1933].

Такой выбор возможен, так как V_α (x_0) конечно. Ясно, что функция

$$\int\limits_{E-E_\rho} K_\alpha (x-a)\, d\mu\,(a)$$

непрерывна в точке x_0. Так как для $x_1 \in E$ потенциал V_α (x_1), рассматриваемый как функция переменного x_1, непрерывен в точке x_0, то

$$\int\limits_{E_\rho} K_\alpha (x_1-a)\, d\mu\,(a) = V_\alpha\,(x_1) - \int\limits_{E-E_\rho} K_\alpha (x-a)\, d\mu\,(a)$$

как функция x_1 тоже непрерывен в x_0. Поэтому если $|\,x_1 - x_0\,| < \rho_1 < \rho$, то

$$\int\limits_{E_\rho} -K_\alpha (x_1-a)\, d\mu\,(a) < \int\limits_{E_\rho} -K_\alpha (x_0-a)\, d\mu\,(a) + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Предположим теперь, что $|\,x - x_0\,| < \rho_2 < \rho_1/2$. Тогда, согласно (5.1.2), $|\,x_1 - x_0\,| < \rho_1$.

Если $\alpha = 0$, то из (5.1.2) получаем

$$-K_\alpha\,(x - a) \leqslant -K_\alpha\,(x_1 - a) + \log 2.$$

Следовательно, если выбрать ρ настолько малым, чтобы $\mu\,(E_\rho) < \varepsilon$, то

$$\int\limits_{E_\rho} -K_\alpha (x-a)\, d\mu\,(a) \leqslant \int\limits_{E_\rho} -K_\alpha (x_1-a)\, d\mu\,(a) + \mu\,(E_\rho) \log 2 < 3\varepsilon.$$

Если $\alpha > 0$, то из (5.1.2) следует, что

$$\int\limits_{E_\rho} -K_\alpha (x-a)\, d\mu\,(a) \leqslant 2^\alpha \int\limits_{E_\rho} -K_\alpha (x_1-a)\, d\mu\,(a) < 2^{1+\alpha}\varepsilon.$$

Далее, поскольку функция $\int\limits_{E-E_\rho} K_\alpha\,(x - a)\, d\mu\,(a)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то для $|\,x - x_0\,| < \rho_2$, а значит, для $|\,x_1 - x_0\,| < 2\rho_2$ при достаточно малом ρ_2 имеем

$$\left|\int\limits_{E-E_\rho} K_\alpha (x-a)\, d\mu\,(a) - \int\limits_{E-E_\rho} K_\alpha (x_1-a)\, d\mu\,(a)\right| < \varepsilon.$$

В самом деле, оба входящих в это неравенство интеграла стремятся к $\int\limits_{E-E_\rho} K_\alpha\,(x_0 - a)\, d\mu\,(a)$. Таким образом, мы получаем окончательно, что

$$|V_\alpha(x)-V_\alpha(x_1)|\leqslant\left|\int\limits_{E-E_\rho}\{K_\alpha(x-a)-K_\alpha(x_1-a)\}\,d\mu(a)\right|+$$
$$+\left|\int\limits_{E_\rho}K_\alpha(x-a)\,d\mu(a)\right|+\left|\int\limits_{E_\rho}K_\alpha(x_1-a)\,d\mu(a)\right|<6^{1+\alpha}\varepsilon.$$

Так как функция $V_\alpha(x_1)$ непрерывна в точке $x_1 = x_0$, то отсюда следует неравенство (5.1.1). Это завершает доказательство теоремы 5.1.

Аналогичным методом можно доказать также ограниченный принцип минимума, имеющий важные приложения.

Теорема 5.2. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 5.1 *и, кроме того,* $V_\alpha(x)\geqslant\mu_0$ *на* E. *Тогда* $V_\alpha(x)\geqslant\mu_0'$ *в* $\mathbb{R}^m$, *где* $\mu_0' = 2^\alpha\mu_0$, *если* $\alpha>0$, *и* $\mu_0' = \mu_0 - \log 2$, *если* $\alpha = 0$.

Как и ранее, обозначим через D дополнение к множеству E в $\mathbb{R}^m$. Возьмем в качестве x произвольную точку D, и пусть x_1 — точка E, ближайшая к x. Тогда точно так же, как в (5.1.2), для любого $a\in E$ имеем $|x_1 - x|\leqslant|x-a|$ и $|x_1-a|\leqslant 2\,|x-a|$. Для $\alpha>0$ это дает неравенство $K_\alpha(x-a)\geqslant 2^\alpha K_\alpha(x_1-a)$, так что

$$V_\alpha(x)\geqslant 2^\alpha V_\alpha(x_1)\geqslant\mu_0',$$

как и требовалось. Если же $\alpha = 0$, то $K_0(x-a)\geqslant K_0(x_1-a)-$ $-\log 2$, и в этом случае получаем

$$V_0(x)\geqslant V_0(x_1)-\log 2\int\limits_E d\mu\geqslant\mu_0-\log 2=\mu_0'.$$

Положим теперь

$$I_\alpha(\mu)=\int\limits_E V_\alpha(x)\,d\mu(x)=\iint\limits_{E\times E}K_\alpha(x-y)\,d\mu(x)\,d\mu(y).$$

Так как функция $K_\alpha(x-y)$ ограничена сверху на множестве E, то этот интеграл всегда существует. Положим также

$$V_\alpha=\sup_\mu I_\alpha(\mu)$$

и назовем V_α *постоянной равновесия* множества E.

Пусть d — диаметр множества E, так что $|x-y|\leqslant d$ в E. Тогда

$$K_0(x-y)\leqslant\log d,\qquad K_\alpha(x-y)\leqslant -d^{-\alpha},\qquad \alpha>0.$$

Поскольку $\mu(E) = 1$, отсюда получаем, что

$$V_0\leqslant\log d,\qquad V_\alpha\leqslant -d^{-\alpha},\qquad \alpha>0.$$

Определим теперь α-емкость $C_\alpha(E)$ множества E, полагая

$$C_0(E) = e^{V_0}, \qquad \alpha = 0,$$
$$C_\alpha(E) = (-V_\alpha)^{-1/\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Так как $-\infty \leqslant V_\alpha < +\infty$, то

$$0 \leqslant C_\alpha(E) < \infty.$$

Если $C_\alpha(E) = 0$, то $I_\alpha(\mu) = -\infty$ для любой меры μ. Это равенство выполняется всякий раз, когда $\alpha \geqslant m$, а также может выполняться для некоторых множеств E и при $\alpha < m$.

5.1.1. Слабая сходимость

Нашей ближайшей целью является доказательство того, что верхняя грань $V_\alpha = \sup I_\alpha(\mu)$ достигается для подходящей меры μ на E, которую будем называть *равновесным распределением*. Для этого нам понадобится следующая теорема о слабой сходимости мер, которая имеет и большое самостоятельное значение.

Теорема 5.3 [1]**.** *Пусть μ_n — такая последовательность мер на компактном множестве E в $\mathbb{R}^m$, что $\mu_n(E) \leqslant A$ при всех n, где A — некоторая постоянная. Тогда существует подпоследовательность μ_{n_p}, слабо сходящаяся к предельной мере μ в E, т. е. для любой непрерывной функции $\varphi(x)$ на E*

$$\int_E \varphi(x)\, d\mu_{n_p} \to \int_E \varphi(x)\, d\mu \quad \textit{при} \quad p \to \infty.$$

Предположим, что множество E расположено в гиперкубе $|x_i| \leqslant M$, $i = 1, \ldots, m$, где x_i — координаты точки x. Рассмотрим все гиперкубы C вида

$$a_i \leqslant x_i < b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{5.1.3}$$

где a_i и b_i — такие рациональные числа, что $-M \leqslant a_i < b_i \leqslant M$. Множество таких гиперкубов счетно, и поэтому их можно занумеровать в последовательность C_k, $k = 1, 2, \ldots$.

Для фиксированного k величины $\mu_n(C_k)$ ограничены константой A, поэтому мы можем найти такую подпоследовательность $(n, 1)$ целых чисел, что $\mu_{n,1}(C_1) \to l_1$ при $n \to \infty$. Затем можно выбрать такую подпоследовательность $(n, 2)$, что $\mu_{n,2}(C_2) \to l_2$ при $n \to \infty$. Повторяя шаг за шагом этот процесс, для каждого положительного целого k найдем такую подпоследовательность (n, k), что $\mu_{n,k}(C_k) \to l_k$ при $n \to \infty$. Здесь через (n, k) обозначен n-й член k-й подпоследовательности.

---

[1]) Фростман [1935].

Рассмотрим теперь последовательность (n, n) и заметим, что для $n > k$ последовательность (n, n) принадлежит k-й подпоследовательности. Следовательно, $\mu_{n.n}(C_k) \to l_k$ при $n \to \infty$ для любого положительного целого k. Обозначим (p, p) через n_p. Тогда $n_p \geqslant p$, так что $n_p \to \infty$ при $p \to \infty$, и поэтому $\mu_{n_p}(C_k)$ сходится к некоторому пределу $\mu(C_k)$ для каждого гиперкуба C_k, ограниченного гранями с рациональными координатами.

Построим теперь линейный функционал на множестве непрерывных функций на E. Пусть $\varphi(x)$ — такая функция. Обозначим через $\Delta = \{C_1, C_2, \ldots, C_t\}$ произвольное конечное семейство непересекающихся гиперкубов C, объединение которых содержит E.

Пусть M_j и m_j — точные верхняя и нижняя грани функции $\varphi(x)$ на кубе C_j. Определим нижнюю и верхнюю суммы, полагая

$$s(\Delta, \varphi) = \sum_{j=1}^{t} m_j \mu(C_j), \quad S(\Delta, \varphi) = \sum_{j=1}^{t} M_j \mu(C_j).$$

Заметим, что если C_j не пересекаются с множеством E, то $\mu_n(C_j) = 0$ для каждого n и, значит, $\mu(C_j) = 0$. Поэтому соответствующие слагаемые в суммах можно положить равными нулю.

Назовем семейство Δ' элементарным подразбиением семейства Δ, если Δ' получается из Δ последовательными разбиениями одного гиперкуба C на два гиперкуба C' и C''. Если гиперкуб C задается неравенствами (5.1.3), то гиперкубы C' и C'' могут быть заданы этими же неравенствами для всех значений индекса i, за исключением одного какого-то значения $i = i_0$; для $i = i_0$ имеем

$$a_{i_0} \leqslant x_{i_0} < c_{i_0} \quad \text{на} \quad C' \quad \text{и} \quad c_{i_0} \leqslant x_{i_0} < b_{i_0} \quad \text{на} \quad C''.$$

Так как

$$\mu_{n_p}(C') + \mu_{n_p}(C'') = \mu_{n_p}(C),$$

то $\mu(C') + \mu(C'') = \mu(C)$. Далее, если обозначить через m', m'', m нижние грани и через M', M'', M — верхние грани функции $\varphi(x)$ соответственно на C', C'' и C, то сумма $s(\Delta')$ не меньше $s(\Delta)$, так как мы заменяем в $s(\Delta)$ слагаемое $m_j\mu(C_j)$ не меньшим слагаемым $m'_j\mu(C'_j) + m''_j\mu(C''_j)$. Если C' или C'' не пересекаются с E, то $s(\Delta') = s(\Delta)$. Таким образом, подразбиение увеличивает нижние суммы и, аналогично, уменьшает верхние суммы.

Любые два конечных семейства Δ и Δ', содержащие множество E, как нетрудно видеть, имеют общее подразбиение Δ'', которое получается, если взять все гиперкубы, образованные гранями гиперкубов семейств Δ и Δ'. Следовательно,

$$s(\Delta, \varphi) \leqslant s(\Delta'', \varphi) \leqslant S(\Delta'', \varphi) \leqslant S(\Delta', \varphi),$$

так что любая нижняя сумма не превосходит произвольной верхней суммы.

Пусть I — точная верхняя грань нижних сумм и J — точная нижняя грань всех верхних сумм; тогда $I \leqslant J$. С другой стороны, поскольку функция $\varphi(x)$ непрерывна на E, она равномерно непрерывна, и поэтому для любого данного $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, что если $x, x' \in E$ и $|x - x'| < \delta$, то $|\varphi(x) - \varphi(x')| \leqslant \varepsilon$. В частности, такое неравенство всегда выполняется, когда x и x' принадлежат одному и тому же гиперкубу диаметра, меньшего δ.

Таким образом, если Δ — произвольное семейство гиперкубов C_i диаметров, не превосходящих δ, то $M_i - m_i < \varepsilon$, и поэтому

$$J - I \leqslant S(\Delta, \varphi) - s(\Delta, \varphi) \leqslant \sum_i (M_i - m_i)\,\mu(C_i) \leqslant \varepsilon \sum_i \mu(C_i) \leqslant \varepsilon A,$$

поскольку гиперкубы C_i не пересекаются. Так как ε произвольно, то отсюда заключаем, что $I = J$.

Положим теперь

$$L(\varphi) = I(\varphi) = J(\varphi)$$

и покажем, что $L(\varphi)$ есть функционал в смысле § 3.2. Действительно, условие (3.2.1) очевидно. Далее, если $a > 0$, то $s(\Delta, a\varphi) = as(\Delta, \varphi)$, так что $L(a\varphi) = aL(\varphi)$. Аналогично, если $a < 0$, то $s(\Delta, a\varphi) = aS(\Delta, \varphi)$.

Наконец, если f и g — непрерывные функции, то имеют место очевидные неравенства

$$s(\Delta, f) + s(\Delta, g) \leqslant s(\Delta, f + g) \leqslant S(\Delta, f + g) \leqslant S(\Delta, f) + S(\Delta, g).$$

Если Δ — семейство достаточно малых гиперкубов, то первый и последний члены этого неравенства мало отличаются от $L(f) + L(g)$, поэтому

$$L(f + g) = L(f) + L(g).$$

Следовательно, условие (3.2.2) также выполнено и $L(f)$ — положительный линейный функционал на E. В силу теоремы 3.4, функционал $L(f)$ может быть представлен в виде интеграла по некоторой мере μ на E, так что для любой непрерывной функции f на E

$$L(f) = \int_E f\, d\mu.$$

Остается показать, что для любой непрерывной функции f на E имеем

$$\int f\, d\mu_{n_p} \to L(f) = \int f\, d\mu \quad \text{при} \quad p \to \infty.$$

Для этого возьмем некоторое семейство Δ гиперкубов C_i. Тогда если m_i и M_i — нижняя и верхняя грани функции f на C_i, то

$$\varliminf_{p\to\infty} \int f\, d\mu_{n_p} \geqslant \varliminf_{p\to\infty} \sum m_i \mu_{n_p}(C_i) = \sum_i m_i \mu(C_i) = s(\Delta, f).$$

Аналогично,

$$\varlimsup_{p\to\infty} \int f\,d\mu_{n_p} \leqslant S(\Delta, f).$$

Так как эти неравенства справедливы для любого семейства Δ, получаем

$$I \leqslant \varliminf \int f\,d\mu_{n_p} \leqslant \varlimsup \int f\,d\mu_{n_p} \leqslant J,$$

откуда

$$\lim_{p\to\infty} \int f\,d\mu_{n_p} = L(f),$$

как и требовалось. Это завершает доказательство теоремы 5.3.

5.2. ЕМКОСТНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ И ЕМКОСТЬ [1]

Теорема 5.4. *Пусть E — компактное множество в $\mathbb{R}^m$ и $V_\alpha(E) > -\infty$. Тогда на E существует такое распределение единичной массы μ, что*

$$I_\alpha(\mu) = V_\alpha(E).$$

Пусть μ_n — такая последовательность распределений единичных масс на E, что $I_\alpha(\mu_n) \to V_\alpha(E)$. В силу теоремы 5.3, переходя, если необходимо, к подпоследовательности, мы можем считать, что последовательность μ_n слабо сходится к некоторой мере μ на E. Взяв $f = 1$ на E, получаем, что

$$\mu(E) = \int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f\,d\mu_n = \lim_{n\to\infty} \mu_n(E) = 1.$$

Таким образом, μ — единичная мера.

Докажем теперь следующее полезное утверждение.

Лемма 5.1. *Если последовательность мер μ_n на фиксированном компактном множестве F слабо сходится к мере μ и если функция $f(x)$ полунепрерывна сверху на F, то*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int_F f(x)\,d\mu_n(x) \leqslant \int_F f(x)\,d\mu(x).$$

Так как функция $f(x)$ пн. св., то существует такая убывающая последовательность $f_m(x)$ непрерывных функций, что $f_m(x) \to f(x)$ при $m \to \infty$. Поэтому

$$\int_F f_m(x)\,d\mu(x) \to \int_F f(x)\,d\mu(x) \quad \text{при} \quad m \to \infty$$

[1] Результаты этого параграфа по большей части принадлежат Фростману [1935].

и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер m, что

$$\int_F f_m(x)\, d\mu(x) < \int_F f(x)\, d\mu(x) + \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int_F f\, d\mu_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_F f_m\, d\mu_n = \int_F f_m\, d\mu < \int_F f\, d\mu + \varepsilon,$$

что и доказывает лемму 5.1.

Применяя эту лемму к функции $K_\alpha(x-y)$, заданной на множестве $E \times E$, получаем, что $I_\alpha(\mu) \geqslant \varlimsup I_\alpha(\mu_n) = V_\alpha(E)$; противоположное неравенство следует из определения. Теорема 5.4 доказана.

Мера μ называется *емкостным* (или *равновесным*) *распределением* на E, а функция

$$U_\alpha(y) = \int_E K_\alpha(x-y)\, d\mu(x)$$

— *емкостным* (или *равновесным*) *потенциалом* множества E.

Здесь удобно определить емкость некомпактных множеств. Сделаем это следующим образом. Пусть E — произвольное множество; (внутренней) емкостью $C_\alpha(E)$ называется точная верхняя грань емкостей $C_\alpha(F)$ всех компактных подмножеств F, содержащихся в E. Далее, определим внешнюю [1]) емкость, полагая

$$C_\alpha^*(E) = \inf C_\alpha(G),$$

нижняя грань берется по всем открытым множествам G, содержащим E.

Очевидно, что если E_1 и E_2 — любые множества, такие, что $E_1 \subset E_2$, то $C_\alpha(E_1) \leqslant C_\alpha(E_2)$. Следовательно, если E — произвольное ограниченное множество, то всегда $C_\alpha(E) \leqslant C_\alpha^*(E)$. В случае, когда это неравенство превращается в равенство, говорят, что множество E *измеримо по емкости* (или *C-измеримо*).

В § 5.8 мы покажем, что все борелевские множества измеримы по емкости. Пока же мы вынуждены делать различие между емкостью и внешней емкостью.

Заметим, что если множества E_1 и E_2 таковы, что $E_1 \subset E_2$, то $C_\alpha^*(E_1) \leqslant C_\alpha^*(E_2)$.

Далее, из определения следует, что если G — открытое множество, то $C_\alpha^*(G) = C_\alpha(G)$, так что все открытые множества измеримы по емкости. Следующая теорема доставляет соответствующий результат для компактных множеств.

---

[1]) Брело [1939b].

Теорема 5.5. *Пусть E — компактное множество и G_n — последовательность ограниченных открытых множеств, таких, что $\overline{G}_{n+1} \subset G_n$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n = E$. Тогда*

$$C_\alpha(G_n) \to C_\alpha(E) \quad \textit{при} \quad n \to \infty. \tag{5.2.1}$$

Таким образом, компактные множества измеримы по емкости.

Из монотонности емкости следует, что если $C_n = C_\alpha(G_n)$, то $C_n \geqslant C_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Далее, для каждого фиксированного n

$$C_\alpha(E) \leqslant C_n.$$

Следовательно, существует предел $C = \lim\limits_{n\to\infty} C_n$ и $C_\alpha(E) \leqslant C$.

Пусть μ_n — распределение единичной массы на компактном множестве $\overline{G}_n$ с максимальным значением

$$V_n = I_\alpha(\mu_n) = \int\limits_{\overline{G}_n \times \overline{G}_n} K_\alpha(x-y)\, d\mu_n(x)\, d\mu_n(y).$$

Тогда, согласно теореме выбора 5.3, можно найти подпоследовательность μ_{n_p}, слабо сходящуюся к единичной мере μ.

Эта предельная мера μ распределена на $\overline{G}_{n_p}$ для каждого p и поэтому распределена на множестве E. Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, без ограничения общности можем считать, что μ_n слабо сходится к μ. Применяя лемму 5.1, получаем, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} V_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} \int\limits_{\overline{G}_n \times \overline{G}_n} K_\alpha(x-y)\, d\mu_n(x)\, d\mu_n(y) \leqslant$$

$$\leqslant V = \int\limits_{E\times E} K_\alpha(x-y)\, d\mu(x)\, d\mu(y).$$

Отсюда и из определения емкости следует, что

$$C = \lim_{n\to\infty} C_\alpha(\overline{G}_n) \leqslant C_\alpha(E).$$

Это доказывает (5.2.1).

Далее, если E — некоторое компактное множество, то в качестве G_n можно взять множество точек, удаленных от E меньше чем на $1/n$. Тогда выполнены условия теоремы 5.5, и поэтому имеет место (5.2.1). В частности, для данного $\varepsilon > 0$ найдется открытое множество G_n, содержащее E и такое, что $C_\alpha(G_n) < C_\alpha(E) + \varepsilon$. Таким образом, $C_\alpha^*(E) < C_\alpha(E) + \varepsilon$, и поэтому $C_\alpha^*(E) \leqslant C_\alpha(E)$. Следовательно, $C_\alpha^*(E) = C_\alpha(E)$, так что множество E измеримо по емкости.

Свойство, сформулированное в теореме 5.5, обычно перефразируют следующим образом: емкость полунепрерывна сверху. Это свойство играет важную роль во многих вопросах общей теории измеримости по емкости, к которой мы обратимся в § 5.8.

5.2.1. Природа емкостного потенциала

Теперь мы подробнее исследуем природу емкостного потенциала для произвольного компактного множества E. Для доказательства основного результата нам понадобится следующая

Теорема 5.6. *Пусть E — компактное множество и ν — такое распределение положительной массы на E, что $0 < \nu(E) < \infty$ и*

$$I(\nu) = \int_E K_\alpha(x-y)\, d\nu(x)\, d\nu(y) > -\infty \tag{5.2.2}$$

(*так что, в частности, $C_\alpha(E) > 0$). Тогда если E_1 — компактное подмножество E, такое, что $C_\alpha(E_1) = 0$, или счетное объединение таких множеств, то $\nu(E_1) = 0$.*

Так как множество E компактно, то для всех точек $x,\ y \in E$ и некоторого положительного d выполняется неравенство $|x - y| \leqslant d$, так что

$$K_\alpha(x-y) \leqslant 0, \qquad \alpha > 0,$$
$$K_\alpha(x-y) \leqslant \log^+ d, \qquad \alpha = 0.$$

Следовательно, если положить $d_1 = \log^+ d$, то для любых $x,\ y \in E$

$$K(x-y) = K_\alpha(x-y) - d_1 \leqslant 0.$$

Далее, имеет место неравенство

$$\int_E K(x-y)\, d\nu(x)\, d\nu(y) > -\infty,$$

и поэтому для всякого компактного подмножества $E_1 \subset E$

$$\int_{E_1} K(x-y)\, d\nu(x)\, d\nu(y) \geqslant \int_E K(x-y)\, d\nu(x)\, d\nu(y) > -\infty.$$

Таким образом,

$$\int_{E_1} K(x-y)\, d\nu(x)\, d\nu(y) > -\infty.$$

Если $\nu(E_1) > 0$, то отсюда следует, что $C(E_1) > 0$, а это противоречит предположению.

Если $E_1 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, где $C_\alpha(F_n) = 0$, то $\nu(F_n) = 0$ для каждого n. Поскольку мера аддитивна, то, как и ранее, $\nu(E_1) = 0$.

Множество E назовем [1]) *α-полярным множеством*, если $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, где F_n — такие компактные множества, что $C_\alpha(F_n) = 0$. Позже мы докажем, что $C_\alpha^*(E) = 0$ для α-полярных множеств E; пока мы сможем обойтись без этого результата. Если некоторое утверждение выполняется вне некоторого α-полярного множества, то мы будем говорить, что оно выполняется α-почти всюду.

Пусть E — компактное множество и μ — распределение положительной массы на E. Будем говорить, что точка x_0 принадлежит *носителю* E^* меры μ, если $\mu\{D(x_0, r)\} > 0$ для любого положительного r. Очевидно, E^* замкнуто, так что E^* — компактное подмножество множества E. Имеет место следующая

Теорема 5.7. *Пусть E — такое компактное множество, что $C_\alpha(E) > 0$, μ — соответствующее равновесное распределение на E и E^* — носитель μ. Тогда*

$$C_\alpha(E^*) = C_\alpha(E).$$

Прежде всего заметим, что если $E_0 = E - E^*$, то $\mu(E_0) = 0$. Действительно, если x_0 — произвольная точка E_0, то найдется открытый шар D с центром в x_0, не пересекающийся с E^* и такой, что $\mu(D) = 0$. Тогда существует открытый шар D_0 с центром в точке с рациональными координатами и рациональным радиусом, такой, что $x_0 \in D_0 \subset D$; следовательно, $\mu(D_0) = 0$. Множество всех таких шаров счетно, поэтому их можно расположить в такую последовательность D_i, что

$$\mu(E_0) \leqslant \sum_i \mu(D_i) = 0.$$

Таким образом, μ является распределением единичной массы на E^* и

$$V_\alpha(E^*) \geqslant \int\limits_{E^* \times E^*} K_\alpha(x-y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) = \\ = \int\limits_{E \times E} K_\alpha(x-y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) = V_\alpha(E).$$

Следовательно,

$$C_\alpha(E^*) \geqslant C_\alpha(E).$$

[1]) Термин «полярное множество» был впервые введен Брело [1941] для более широкого класса множеств.

Противоположное неравенство очевидно, так как $E^* \subset E$. Теорема 5.7 доказана.

Следующий результат принадлежит Фростману[1]). Цудзи [1959, стр. 60] не без основания назвал этот результат фундаментальной теоремой о емкостном потенциале.

Теорема 5.8. *Пусть E — такое компактное множество в $\mathbb{R}^m$, что $C_\alpha(E) > 0$, и пусть $u(x)$ — соответствующий емкостный потенциал, μ — соответствующее равновесное распределение и E^* — носитель μ, так что*

$$I_\alpha(\mu) = \int\limits_{E^*}\int K_\alpha(x-y)\,d\mu(x)\,d\mu(y) = V > -\infty. \tag{5.2.3}$$

Тогда всюду на E^*

$$u(x) = \int\limits_{E^*} K_\alpha(x-y)\,d\mu(y) \geqslant V, \tag{5.2.4}$$

а α-почти всюду на E

$$u(x) \leqslant V, \tag{5.2.5}$$

так что, в частности, α-почти всюду на E^*

$$u(x) = V. \tag{5.2.6}$$

Кроме того, в $\mathbb{R}^m$

$$u(x) \geqslant V', \tag{5.2.7}$$

где

$$V' = 2^\alpha V \text{ при } \alpha > 0 \text{ и } V' = V - \log 2 \text{ при } \alpha = 0. \tag{5.2.8}$$

Прежде всего докажем (5.2.5). Пусть A_n — множество таких точек $x \in E$, что

$$u(x) \geqslant V + \frac{1}{n}.$$

Так как функция $u(x)$ пн. св., то множество A_n компактно. Тогда множество A всех точек из E, для которых не выполнено (5.2.5), является объединением множеств A_n: $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Следовательно, для доказательства (5.2.5) достаточно показать, что $C_\alpha(A_n) = 0$.

Предположим, что наше утверждение неверно, и пусть E_1 — такое компактное подмножество в E, что для некоторого $\varepsilon > 0$

$$u(x) \geqslant V + 2\varepsilon, \quad x \in E_1,$$

и $C_\alpha(E_1) > 0$. Мы можем взять $E_1 = A_n$ для подходящего n и положить $\varepsilon = (3n)^{-1}$.

[1]) Фростман [1935].

Согласно теореме 5.7, μ является равновесным распределением как на E^*, так и на E, и

$$\int_{E^*} u(x)\, d\mu = V.$$

В частности, существует такое $a_0 \in E^*$, что $u(a_0) < V + \varepsilon$. Следовательно, a_0 лежит вне множества E_1, а так как $u(x)$ пн. св., то в подходящей окрестности $D(a_0, r)$ точки a_0 выполнено неравенство $u(x) < V + \varepsilon$. Выберем радиус r настолько малым, чтобы шар $D(a_0, r)$ находился на положительном расстоянии от E_1. Так как $a_0 \in E^*$, имеем $\mu\{D(a_0, r)\} = m > 0$.

Поскольку $C_\alpha(E_1) > 0$, существует такое распределение положительной массы σ на E_1, что

$$I_\alpha(\sigma) = \int_{E_1 \times E_1} K_\alpha(x-y)\, d\sigma(x)\, d\sigma(y) > -\infty, \qquad \sigma(E_1) = m > 0.$$

Определим на E распределение масс σ_1, полагая $\sigma_1 = \sigma$ на E_1, $\sigma_1 = -\mu$ в $D(a_0, r)$ и $\sigma_1 = 0$ вне этих множеств. Тогда если $0 < \eta < 1$, то $\mu_1 = \mu + \eta\sigma_1$ является распределением положительной массы на E и $\int_E d\mu_1 = 1$.

Далее, если η достаточно мало, то

$$\delta(I) = I_\alpha(\mu_1) - I_\alpha(\mu) = \int_E\int K_\alpha(x-y)\, d\mu_1(x)\, d\mu_1(y) -$$

$$- \int_{E \times E} K_\alpha(x-y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) =$$

$$= 2\eta \int_{E\times E} K_\alpha(x-y)\, d\mu(x)\, d\sigma_1(y) + \eta^2 \int_{E\times E} K_\alpha(x-y)\, d\sigma_1(x)\, d\sigma_1(y) =$$

$$= 2\eta \int_E u(y)\, d\sigma_1(y) + \eta^2 I_\alpha(\sigma_1) \geqslant$$

$$\geqslant 2\eta\left[(V + 2\varepsilon)\, m - (V + \varepsilon)\, m + \frac{1}{2}\eta I_\alpha(\sigma_1)\right] =$$

$$= 2\eta\left(\varepsilon m + \frac{1}{2}\eta I_\alpha(\sigma_1)\right) > 0.$$

Это противоречит свойству максимальности $I_\alpha(\mu)$. Поэтому $C_\alpha(A_n) = 0$ для всех n, и утверждение (5.2.5) доказано.

Докажем теперь неравенство (5.2.4). Для этого снова предположим противное, т. е. что для некоторого $x = x_0 \in E^*$ выполнено неравенство $u(x) < V - \varepsilon$. Так как функция $u(x)$ пн св., то это неравенство выполнено в некоторой окрестности $D(x_0, r)$ точки x_0, а поскольку $x_0 \in E^*$, то $\mu\{D(x_0, r)\} = m_0 > 0$.

Пусть E_2 — множество всех таких точек $x \in E^*$, для которых $u(x) > V$. Тогда, согласно (5.2.5) и теореме 5.6, $\mu(E_2) = 0$. Положим $E_3 = E^* \cap D(x_0, r)$ и $E_4 = E^* - E_3$. Тогда

$$V = \int\limits_E u(x)\, d\mu = \int\limits_{E^*} u(x)\, d\mu = \sum_{j=2}^{4} \int\limits_{E_j} u(x)\, d\mu =$$

$$= \int\limits_{E_3} u(x)\, d\mu + \int\limits_{E_4} u(x)\, d\mu \leqslant m_0 (V - \varepsilon) + (1 - m_0) V = V - m_0 \varepsilon.$$

Это неравенство противоречит нашему допущению, и поэтому доказано, что $u(x) \geqslant V$ на E^*. В силу (5.2.5), отсюда следует, что $u(x) = V$ α-почти всюду на E^*. Наконец, поскольку мера μ распределена на E^*, то, согласно теореме 5.2, из (5.2.4) следует (5.2.7). Это завершает доказательство теоремы 5.8.

5.3. ПОЛЯРНЫЕ МНОЖЕСТВА

В этом параграфе мы исследуем, на каких множествах потенциал может быть равен $-\infty$. Основной положительный результат содержит следующая

Теорема 5.9. *Пусть ν — распределение положительной массы на компактном множестве E,*

$$v(x) = \int\limits_E K_\alpha(x - y)\, d\nu(y)$$

— соответствующий потенциал и E_1 — компактное множество в $\mathbb{R}^m$, на котором $v(x) = -\infty$. Тогда

$$C_\alpha(E_1) = 0.$$

Предположим противное, т. е. пусть

$$C_\alpha(E_1) > 0.$$

Пусть $u(x)$ — соответствующий емкостный потенциал, μ — равновесное распределение и E_1^* — носитель μ. Тогда, согласно теореме 5.8, в $\mathbb{R}^m$

$$u(x) = \int\limits_{E_1^*} K_\alpha(x - y)\, d\mu(y) \geqslant V' > -\infty.$$

Далее, поскольку функция $K_\alpha(x - y)$ ограничена сверху, то по теореме Фубини

$$\int\limits_{E_1^*} v(x)\, d\mu(x) = \int\limits_{E_1^*} d\mu(x) \int\limits_E K_\alpha(x - y)\, d\nu(y) = \int\limits_E u(y)\, d\nu(y).$$

Левая часть этого равенства равна $-\infty$, в то время как правая часть не меньше $-V'$ и поэтому конечна. Полученное противоречие доказывает теорему 5.9.

В качестве следствия немедленно получается

Теорема 5.10. *Пусть $u(x)$ — не равная тождественно $-\infty$ субгармоническая функция, заданная в окрестности компактного множества $E \subset \mathbb{R}^m$, причем $u(x) = -\infty$ на E. Тогда*

$$C_{m-2}(E) = 0.$$

Пусть F — компактное множество, содержащее E в своей внутренности и такое, что функция $u(x)$ субгармонична в окрестности F. Тогда из теоремы Рисса 3.9 следует, что во всех внутренних точках множества F

$$u(x) = \int_F K_{m-2}(x-y)\, d\mu(y) + h(x),$$

где $h(x)$ — функция, гармоническая внутри F и поэтому ограниченная на E. Следовательно,

$$\int_F K_{m-2}(x-y)\, d\mu(y) = -\infty, \qquad x \in E.$$

Отсюда на основании теоремы 5.9 заключаем, что $C_{m-2}(E) = 0$.

Докажем теперь теорему, обратную к теореме 5.10.

Теорема 5.11 [1]. *Пусть E — такое компактное множество в $\mathbb{R}^m$, что $C_{m-2}(E) = 0$, или, более общо, произвольное $(m-2)$-полярное множество. Тогда в $\mathbb{R}^m$ существует субгармоническая функция $u(x)$, конечная в произвольно заданной точке $x_0 \in \mathbb{R}^m - E$ и такая, что $u(x) = -\infty$ в E. Если $m > 2$, то имеем также $u(x) < 0$ в $\mathbb{R}^m$. Если множество E компактно, то функция $u(x)$ конечна вне E.*

Предположим сначала, что множество E компактно, и пусть $D(0, R)$ — открытый шар, содержащий E. Пусть E_n — такая последовательность компактных множеств, что E_{n+1} лежит внутри E_n,

$$E_1 \subset D(0, R), \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = E$$

и, кроме того, все E_n являются объединениями конечного числа замкнутых шаров. Пусть G_n — дополнение к E_n в $D(0, R)$. Множество G_n содержит $S(0, R)$ как часть своей границы. Тогда на G_n разрешима задача Дирихле, и поэтому можно построить

[1]) Эванс [1936]; см. также Сельберг [1937].

такую функцию $\omega_n(x)$, что $\omega_n(x)$ непрерывна в $C(0, R)$, гармонична в G_n, $\omega_n(x) = 0$ на $S(0, R)$ и $\omega_n(x) = -1$ во всех других точках и, в частности, на E_n.

Очевидно, что функция $\omega_n(x)$ субгармонична в $D(0, R)$. Поэтому из формулы Пуассона — Иенсена (3.7.3) следует, что для $y \in D(0, R)$, $|y| < r < R$

$$\omega_n(y) = \frac{1}{c_m} \int\limits_{S(0,\, r)} \omega_n(\eta) \frac{r^2 - |y|^2}{r\,|\eta - y|^{m-1}} d\sigma(\eta) - \int\limits_{E_n} g(x, y, r)\, d\mu_n(x),$$

где $g(x, y, r)$ — функция Грина в $D(0, r)$, а $d\sigma(\eta)$ — элемент площади на $S(0, r)$. Устремляя $r \to R$, получаем

$$\omega_n(y) = -\int\limits_{E_n} g(x, y, R)\, d\mu_n(x).$$

Таким образом, μ_n является мерой Рисса на E_n.

Заметим теперь, что, в силу теоремы 1.10, для $x, y \in E_1$ справедливо неравенство

$$|g(x, y, R) + K_{m-2}(x - y)| \leqslant C, \tag{5.3.1}$$

где C — константа. Следовательно,

$$\left| \int\limits_{E_n} K_{m-2}(x-y)\, d\mu_n(x) - \omega_n(y) \right| \leqslant C\mu_n(E_n).$$

Положим $\mu_n(E_n) = M_n$ и $\nu_n = \mu_n/M_n$. Тогда ν_n является распределением единичной массы на E_n. Пусть $x, y \in E_n$. Так как $\omega_n(y) \geqslant -1$ на E_n, то

$$\int\limits_{E_n} K_{m-2}(x-y)\, d\nu_n(y) \geqslant -C - M_n^{-1}.$$

Докажем теперь, что $M_n \to 0$ при $n \to \infty$. Предполагая противное и переходя, если понадобится, к подпоследовательности, можно считать, что M_n^{-1} ограничена и что ν_n слабо сходится к единичной мере ν, которая распределена на E. Согласно лемме 5.1, имеем на E

$$\int\limits_{E} K_{m-2}(x-y)\, d\nu(y) \geqslant -C - \overline{\lim}\, M_n^{-1}.$$

Полученное неравенство противоречит предположению о том, что $C_{m-2}(E) = 0$.

Таким образом, взяв, если понадобится, подпоследовательность, можно считать, что $M_n \leqslant 2^{-n}$. Предполагая это условие выполненным, положим

$$\omega(y)=\sum_1^\infty \omega_n(y)=-\int g(x, y, R)\,d\mu(x),$$

причем для любого борелевского множества e в шаре $|x|<R$ имеет место неравенство

$$\mu(e)=\sum_1^\infty \mu_n(e)\leqslant\sum_1^\infty 2^{-n}=1. \tag{5.3.2}$$

Таким образом, μ — борелевская мера. Положим, наконец,

$$u(x)=\int_{E_1} K_{m-2}(x-y)\,d\mu(y).$$

Тогда из (5.3.1) и (5.3.2) следует, что на E_1

$$|u(y)-\omega(y)|\leqslant C. \tag{5.3.3}$$

Очевидно, что $\omega(y)$, а значит, и $u(y)$ равны $-\infty$ в E. Предположим теперь, что точка y лежит в $D(0, R)$, но вне множества E. Тогда y расположена вне множества E_n для $n\geqslant n_0$ и поэтому находится на положительном расстоянии δ от E_n для $n>n_0$. Представим $\omega(y)$ в виде

$$\omega(y)=\sum_{n=1}^{n_0-1}\omega_n(y)+\sum_{n=n_0}^\infty\omega_n(y)=\Sigma_1(y)+\Sigma_2(y).$$

Тогда $\Sigma_1(y)\geqslant -n_0$. Далее, для $x\in E_{n_0}$ имеем $g(x, y, R)\leqslant$ $\leqslant C(\delta)$, поэтому

$$-\Sigma_2(y)\leqslant\sum_{n=n_0}^\infty\int_{E_n} C(\delta)\,d\mu_n(x)\leqslant C(\delta).$$

Следовательно, $\omega(y)$ конечно во всех точках шара $D(0, R)$, лежащих вне множества E, а значит, в силу (5.3.3), во всех этих точках конечно и $u(y)$. Таким образом, функция $\omega(y)$, будучи потенциалом, субгармонична в $\mathbb{R}^m$ и равна $-\infty$ на множестве E и только на нем. Так как мера μ распределена на E_1, то функция $u(x)$ гармонична и поэтому конечна вне E_1 и тем более вне шара $D(0, R)$. Это завершает доказательство теоремы 5.11 в случае, когда множество E компактно.

Предположим теперь, что $E\subset\bigcup_{n=1}^\infty F_n$ и что E является $(m-2)$-полярным множеством. Тогда F_n — компактные множества нулевой $(m-2)$-емкости. Так как в $\mathbb{R}^m$ существует субгармоническая функция, которая равна $-\infty$ на множестве F_n, но не равна $-\infty$

тождественно, то, согласно теореме 2.6, F_n должно иметь нулевую m-мерную меру. Следовательно, множество E также должно иметь нулевую m-мерную меру. Поэтому существует по крайней мере одна точка x_0, лежащая вне множества E. Построим теперь функцию $u_n(x)$ со следующими свойствами:

$$u_n(x) \text{ субгармонична в } \mathbb{R}^m, \quad u_n(x) = -\infty \text{ на множестве } F_n \text{ и только на нем;} \tag{5.3.4}$$

$$|u_n(x_0)| \leqslant 1/n^2; \tag{5.3.5}$$

$$u_n(x) < 1/n^2, \qquad |x| < n. \tag{5.3.6}$$

Функция $u_n(x)$, удовлетворяющая условию (5.3.4), была построена выше. Для того чтобы удовлетворить условиям (5.3.5) и (5.3.6), умножим построенную функцию $u_n(x)$, если необходимо, на достаточно малое положительное число. Положим

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

и докажем, что функция $u(x)$ обладает требуемыми свойствами.

Действительно, пусть $S_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} u_n(x)$. Тогда функция

$$\sigma_N(x) = \sum_{1}^{N} \left(u_n(x) - \frac{1}{n^2}\right) = S_N(x) - \sum_{1}^{N} \frac{1}{n^2}$$

убывает с возрастанием N для достаточно больших N и для x, лежащих в круге $|x| < R$ произвольного фиксированного радиуса R. Следовательно, функция

$$u(x) = \lim_{N\to\infty} \sigma_N(x) + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

субгармонична в $\mathbb{R}^m$. Далее, $\sigma_N(x) = -\infty$ на F_n для $N > n$. Поэтому $u(x) = -\infty$ на F_n и тем более на множестве E. В силу (5.3.5), значение $u(x_0)$ конечно, так что $u(x)$ не равна тождественно $-\infty$. Если $m > 2$, то неравенство (5.3.6) можно заменить неравенством $u_n(x) < 0$ в $\mathbb{R}^m$, поскольку в этом случае $K_{m-2}(x) < 0$ в $\mathbb{R}^m$. Следовательно, $u(x) < 0$ в $\mathbb{R}^m$ при $m > 2$. Это завершает доказательство теоремы 5.11.

5.4. ЕМКОСТЬ И МЕРЫ ХАУСДОРФА

Большую роль в теории потенциала играют $(m-2)$-полярные или, короче, просто полярные множества. В предыдущем параграфе мы видели, что полярные множества — это в точности те F_σ-

множества, на которых могут обращаться в $-\infty$ субгармонические функции. Поэтому интересно изучить эти множества с точки зрения их размера. Из теоремы 2.6 следует, что если функция $u(x)$ субгармонична и $u(x) \not\equiv -\infty$, то множество тех точек x, в которых $u(x) = -\infty$, имеет нулевую m-мерную меру. В частности, этим свойством обладают полярные множества. Однако для полярных множеств справедливы более сильные утверждения. Для того чтобы получить более точные результаты, введем понятие меры Хаусдорфа [1]) и установим ее основные свойства.

Гиперкуб со стороной d — это множество таких точек $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, что

$$a_i < x_i < a_i + d, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где a_i — вещественные числа. В этом определении разрешается заменять знаки $<$ знаками $\leqslant$. Если для любого i выполнены строгие неравенства, гиперкуб является открытым, если во всех неравенствах стоит знак $\leqslant$, гиперкуб является замкнутым.

Предположим теперь, что $h(t)$ — положительная возрастающая функция переменного t, определенная при $0 < t \leqslant t_0$, причем $h(t) \to 0$ при $t \to 0$. Пусть e — ограниченное множество и ε — положительное число. Покроем e не более чем счетным множеством гиперкубов I_ν со сторонами d_ν, не превосходящими ε, и положим

$$H_\varepsilon(e) = \inf \sum_\nu h(d_\nu),$$

где нижняя грань берется по всем таким покрытиям.

Тогда $H_\varepsilon(e)$ — всюду конечная и невозрастающая функция переменного ε. Следовательно, существует предел

$$h^*(e) = \lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon(e)$$

и $0 \leqslant h^*(e) \leqslant \infty$. Число $h^*(e)$ называется *мерой Хаусдорфа* множества e, соответствующей функции $h(t)$.

Вместо гиперкубов со сторонами d_i для наших покрытий можно использовать шары радиуса d_i или произвольные (или выпуклые) множества диаметра d_i. Числа $h^*_\alpha(e)$ и $h^*_\beta(e)$, соответствующие двум произвольным покрытиям U_α и U_β множества e, удовлетворяют условиям $ah^*_\alpha(e) \leqslant h^*_\beta(e) \leqslant bh^*_\alpha(e)$, где a и b — некоторые ненулевые константы. В большинстве случаев мы будем интересоваться лишь тем, равна ли мера $h^*(e)$ нулю, конечна и положительна или бесконечна, а с этой точки зрения все такие покрытия приводят к эквивалентным результатам. Покрытие гиперкубами имеет то преимущество, что они прилегают друг к другу. Заметим, что если $h(t) = t^m$ и $e \subset \mathbb{R}^m$, то $h^*(e)$ — это в точности m-мерная мера Лебега.

[1]) Хаусдорф [1918].

Если $\alpha > 0$ и $h(t) = t^\alpha$, то $h^*(e)$ называется α-мерной мерой Хаусдорфа; если $h(t) = (\log 1/t)^{-1}$, то $h^*(e)$ называется логарифмической мерой Хаусдорфа. Следующий результат почти очевиден.

Лемма 5.2. *Если* $h_1(t)/h_2(t) \to 0$ *при* $t \to 0$ *и* $h_2^*(e) < \infty$, *то* $h_1^*(e) = 0$.

Действительно, для данного $\eta > 0$ имеем $h_1(t) < \eta h_2(t)$, $t < \rho_0(\eta)$. Это дает

$$H_{1\varepsilon}(e) = \eta H_{2\varepsilon}(e), \quad \varepsilon < \rho_0(\eta),$$

так что $h_1^*(e) \leqslant \eta h_2^*(e)$. Так как число η произвольно, то $h_1^*(e) = 0$. Лемма 5.2 доказана.

Обозначим α-мерную меру Хаусдорфа через $l_\alpha(e)$, а логарифмическую меру через $l_0(e)$. Наш следующий результат приведет к важному определению.

Лемма 5.3. *Если* e — *произвольное ограниченное множество в* $\mathbb{R}^m$, *то существует такое число* α_0, $0 \leqslant \alpha_0 \leqslant m$, *что*

$$l_\alpha(e) = 0 \quad \textit{при} \quad \alpha > \alpha_0, \quad l_\alpha(e) = \infty \quad \textit{при} \quad \alpha < \alpha_0.$$

Число α_0 называется *размерностью Хаусдорфа* множества e.

Заметим, что $l_m(e) < \infty$. Действительно, так как множество e ограничено, оно может быть помещено в некоторый гиперкуб I_0 со стороной $d < \infty$. Представим I_0 в виде объединения N^m гиперкубов I_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, N^m$, каждый со стороной $d_\nu = d/N$. Ясно, что

$$\sum (d_\nu)^m = N^m (d/N)^m = d^m.$$

Если выбрать N таким, что $d/N < \varepsilon$, то для функции $h(t) = t^m$ получаем $H_\varepsilon(e) \leqslant d^m$. Следовательно, $h^*(e) \leqslant d^m$, т. е. $l_m(e) \leqslant d^m < \infty$.

Из леммы 5.2 вытекает, что $l_\alpha(e) = 0$ при $\alpha > m$. Определим α_0 как нижнюю грань всех таких $\alpha > 0$, что $l_\alpha(e) = 0$; тогда $\alpha_0 \leqslant m$. Если $\alpha_1 > \alpha_0$, то из леммы 5.2 следует, что $l_{\alpha_1}(e) = 0$, так как в противном случае мы имели бы $l_\alpha(e) = \infty$ для $\alpha < \alpha_1$. Далее, если $\alpha < \alpha_0$, то можно найти такое α_2, что $\alpha < \alpha_2 < \alpha_0$ и $l_{\alpha_2}(e) > 0$. Следовательно, по лемме 5.2, $l_\alpha(e) = \infty$. Лемма 5.3 доказана.

Далее нам понадобится следующая

Теорема 5.12. *Пусть* e — *некоторое множество в* $\mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ — *фиксированная точка и* E — *множество положительных чисел* r, *для которых* e *пересекает гиперсферу* $S(x_0, r)$. *Тогда*

$$l_1(E) \leqslant l_1(e)\sqrt{m}.$$

Таким образом, если $l_1(e) = 0$, то дополнение к E всюду плотно на положительной полуоси. В этом случае множество e вполне разрывно.

Пусть I — замкнутый гиперкуб со стороной d. Тогда диаметр I равен $d\sqrt{m}$. Таким образом, множество тех r, для которых гиперкуб I пересекает сферы $S(x_0, r)$, представляет собой замкнутый отрезок длины, не превосходящей $d\sqrt{m}$.

Пусть $\{I_\nu\}$ — произвольное множество гиперкубов, покрывающих e. Тогда I_ν пересекает $S(x_0, r)$ для отрезка i_ν значений r, длина которого не превосходит $d_\nu\sqrt{m}$, где d_ν — сторона I_ν.

Из наших предположений следует, что объединение интервалов i_ν покрывает E. Для каждого $\varepsilon > 0$ можно считать, что $d_\nu < \varepsilon$ и $\sum d_\nu < l_1(e) + \varepsilon$. Поэтому $\sum d_\nu\sqrt{m} < \sqrt{m}\,(l_1(e) + \varepsilon)$, а так как ε может быть выбрано произвольно малым, то $l_1(E) \leqslant l_1(e)\sqrt{m}$.

Если $l_1(e) = 0$, то $l_1(E) = 0$, и поэтому множество E не может содержать никакого интервала $[a, b]$, где $b > a$. Таким образом, дополнение к E всюду плотно. Если e содержит какое-нибудь связное подмножество e_0 с двумя различными точками x_1, x_2, то e_0 должно пересекать сферы $S(x_1, r)$ при $0 < r < |x_2 - x_1|$, поскольку в противном случае подмножества e_0, для которых $|x - x_1| < r$ и $|x - x_1| > r$, образовывали бы разбиение e_0. Следовательно, если $x_0 \neq x_1$, то множество E содержит интервал, что противоречит доказанному выше.

Таким образом, e_0 содержит самое большее одну точку, т. е. все связные подмножества множества e сводятся к точкам. Значит, множество e вполне разрывно. Теорема 5.12 доказана.

Опишем теперь емкость множеств в терминах мер Хаусдорфа. Для этого нам понадобится следующая принадлежащая Фростману [1935]

Лемма 5.4. *Пусть E — такое компактное множество в $\mathbb{R}^m$, что $h^*(E) > 0$. Тогда на E существует такая мера μ, что $0 < \mu(E) < \infty$ и для любой точки a выполнено неравенство*

$$\mu[D(a, r)] < Ch(r), \qquad 0 < r \leqslant 1, \tag{5.4.1}$$

где C — константа.

Очевидно, что если найдется такая мера с константой C, то, взяв вместо μ меру μ/C, мы всегда можем считать, что $C = 1$. С другой стороны, вместо μ можно рассматривать меру $\mu/\mu(E)$, так что можно предполагать, что $\mu(E) = 1$.

Без ограничения общности можно считать, что функция $h(t)$ определена и возрастает для всех $t > 0$.

Так как множество E компактно, его можно покрыть гиперкубом Q_0 со стороной $2\delta_0$, задаваемым неравенствами $-\delta_0 \leqslant$

$\leqslant x_\nu < \delta_0$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$. Отметим следующее. Если E покрывается конечным числом гиперкубов со сторонами d_i, то

$$\sum_i h(d_i) > \eta > 0, \qquad (5.4.2)$$

где η не зависит от покрытия. Действительно, если бы сумму $\sum h(d_i)$ можно было сделать произвольно малой, то все числа d_i также были бы малыми. Следовательно, в этом случае мы имели бы $H_\varepsilon(E) = 0$ при каждом $\varepsilon > 0$, так что $h^*(E) = 0$ в противоречие с предположением.

Разобьем теперь гиперкуб Q_0 на $2^{m(n+1)}$ равных гиперкубов со сторонами $\delta_n = \delta_0 2^{-n}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Положим

$$Q_n^j = \left\{ x \,\middle|\, \frac{k_\nu \delta_0}{2^n} \leqslant x_\nu < \frac{k_\nu + 1}{2^n} \delta_0, \quad \nu = 1, \ldots, m \right\},$$

где все k_ν пробегают целые числа от -2^n до $2^n - 1$. Заметим, что гиперкуб Q_0, так же как и все гиперкубы Q_n^j, полуоткрыт. Далее, если $j \neq j'$, то Q_n^j и $Q_n^{j'}$ не пересекаются. Рассмотрим теперь только те гиперкубы Q_n^j, которые содержат точки E, и обозначим множество таких гиперкубов Q_n^j через $\mathcal{M}_n$. Определим на гиперкубах из $\mathcal{M}_n$ распределение масс следующим образом.

На первом шаге определяем плотность μ_n^1 в каждой точке гиперкуба $Q_n^j \in \mathcal{M}_n$, полагая ее постоянной и такой, что $\mu_n^1(Q_n^j) = h(\delta_n)$.

На втором шаге рассмотрим меры гиперкубов $\mu_n^1(Q_{n-1}^j)$, где μ_n^1 определена выше. Если $\mu_n^1(Q_{n-1}^j) \leqslant h(\delta_{n-1})$, то положим $\mu_n^2 = \mu_n^1$ в Q_{n-1}^j. В противном случае для множеств $e \in Q_{n-1}^j$ положим $\mu_n^2(e) = C_j \mu_n^1(e)$, где постоянная $C_j < 1$ выбрана так, что $\mu_n^2(Q_{n-1}^j) = h(\delta_{n-1})$, т. е. $C_j = h(\delta_{n-1})/\mu_n^1(Q_{n-1}^j)$.

Определив μ_n^2, рассмотрим $\mu_n^2(Q_{n-2}^j)$ для всех гиперкубов Q_{n-2}^j. Снова для множеств $e \in Q_{n-2}^j$ положим $\mu_n^3(e) = C_j \mu_n^2(e)$, где $C_j = \inf\{1, h(\delta_{n-2})/\mu_n^2(Q_{n-2}^j)\}$.

Продолжая этот процесс, мы определим в кубе Q_0 меры μ_n^k, $0 \leqslant k \leqslant n$. Наконец, положим $\mu_n^n = \mu_n$.

Из построения ясно, что любая точка $a \in E$ содержится в некотором гиперкубе Q_p^j, таком, что $\mu_n(Q_p^j) = h(\delta_p)$. Если таких гиперкубов несколько, мы выбираем тот, который имеет наименьший номер p. Такие гиперкубы мы называем специальными и обозначаем $Q^{(j)}$. Из конструкции очевидно, что различные специальные гиперкубы не пересекаются. Объединение всех специальных гиперкубов содержит множество E, так что в силу (5.4.2)

$$\sum \mu_n(Q^{(j)}) = \sum h(\delta_{p(j)}) \geqslant \eta, \qquad (5.4.3)$$

где $\delta_{p(j)}$ — сторона $Q^{(j)}$. С другой стороны, наша конструкция дает

$$\sum \mu_n (Q^{(j)}) \leqslant \mu_n (Q_0) \leqslant h(\delta_0). \tag{5.4.4}$$

Более общо, для любого гиперкуба Q_p^j независимо от того, содержит он или нет точки множества E, имеем из нашей конструкции

$$\mu_n (Q_p^j) \leqslant h(\delta_p). \tag{5.4.5}$$

Применим теперь теорему 5.3 к последовательности мер μ_n на замкнутом гиперкубе $\overline{Q}_0$; это возможно в силу (5.4.4). По теореме 5.3 существует подпоследовательность мер μ_{n_p}, слабо сходящаяся к мере μ на $\overline{Q}_0$. Покажем теперь, что мера μ обладает требуемыми свойствами.

Пусть сначала E_0 — произвольное компактное множество и $\varphi(x) \equiv 1$. Тогда в силу (5.4.4)

$$\mu(E_0) \leqslant \int \varphi(x)\, d\mu = \lim_{p\to\infty} \int \varphi(x)\, d\mu_{n_p} = \lim_{p\to\infty} \mu_{n_p}(Q_0) \leqslant h(\delta_0).$$

Таким образом, если $r \geqslant \delta_0$, то выполняется неравенство (5.4.1), причем $C = 1$.

Пусть теперь $r < \delta_0$ и число n таково, что

$$\delta_n = \delta_0 2^{-n} \leqslant r < \delta_{n-1}.$$

Выберем r' так, чтобы $r < r' < \delta_{n-1}$, и определим функцию $\varphi(x)$, полагая

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |x-a| \leqslant r, \\ \sup\{1-(|x-a|-r)/(r'-r),\ 0\}, & |x-a| > r. \end{cases}$$

Тогда $\varphi(x)$ непрерывна и $\varphi(x) = 1$ на $C(a, r)$, так что если $C = C(a, r)$, $C' = C(a, r')$, то

$$\mu(C) \leqslant \int \varphi(x)\, d\mu = \lim_{p\to\infty} \int \varphi(x)\, d\mu_{n_p} \leqslant \overline{\lim_{p\to\infty}}\, \mu_{n_p}(C').$$

Так как C' имеет диаметр $2r' < 4\delta_n$, то, очевидно, C' может пересекать самое большее 5^m гиперкубов из $\mathcal{M}_n$, причем мера каждого из пересечений, согласно (5.4.5), не превосходит $h(\delta_n) \leqslant h(r)$. Таким образом, для каждого p имеем $\mu_{n_p}(C') \leqslant 5^m h(r)$, и поэтому $\mu(C) \leqslant 5^m h(r)$, что доказывает (5.4.1) (с $C = 5^m$). Далее, пусть E' — компактное множество, не пересекающееся с E. Тогда E' находится на положительном расстоянии от E, которое обозначим 2δ. Положим

$$\varphi(x) = \sup\{0,\ 1 - d(x, E')/\delta\},$$

где $d(x, E')$ — расстояние от точки x до множества E'. Тогда если $\delta_n \sqrt{m} < \delta$, то $\varphi(x) = 0$ на каждом гиперкубе Q_n^j, пересекающемся с E, и поэтому $\int \varphi(x)\, d\mu_n = 0$ при $n > n_0$. Таким образом, $\mu(E') \leqslant \int \varphi(x)\, d\mu = 0$, т. е. μ распределена на E.

Наконец, положим $\varphi(x) = 1$ на Q_0. Из неравенства (5.4.3) следует, что

$$\mu(Q_0) = \int \varphi(x)\, d\mu = \lim_{p\to\infty} \int \varphi(x)\, d\mu_{n_p} \geqslant \eta,$$

так что $\mu(Q_0) = \mu(E) > 0$. Это завершает доказательство леммы 5.4.

5.4.1. Основные теоремы сравнения

В этом пункте мы сравним емкость и меры Хаусдорфа.

Теорема 5.13[1]). *Пусть E — компактное множество и $h^*(E) > 0$, где $h(t)$ — такая функция, что $\int\limits_0^1 \frac{h(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt < \infty$. Тогда $C_\alpha(E) > 0$. Таким образом, если $C_\alpha(E) = 0$, то $h^*(E) = 0$.*

Пусть $\mu(E)$ — распределение единичной массы на E, удовлетворяющее условиям леммы 5.4, и

$$I_0 = \int\limits_0^1 \frac{h(t)\, dt}{t^{\alpha+1}}.$$

Докажем, что соответствующий потенциал

$$V_\alpha(x) = \int K_\alpha(x-\xi)\, d\mu e_\xi$$

равномерно ограничен. Предположим сначала, что $\alpha = 0$. Пусть $n(t) = \mu(D(x, t))$. Тогда если R больше диаметра множества $E \cup \{x\}$, то по лемме 5.4

$$V_0(x) = \int\limits_0^R \log t\, dn(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{[n(t) \log t]_\varepsilon^R - \int\limits_\varepsilon^R \frac{n(t)\, dt}{t}\right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{n(R) \log R + n(\varepsilon) \log \frac{1}{\varepsilon}\right\} - \int\limits_0^R \frac{n(t)\, dt}{t} \geqslant$$

$$\geqslant -C \int\limits_0^1 \frac{h(t)\, dt}{t} - \int\limits_1^R \frac{dt}{t} \geqslant -CI_0 - \log R.$$

---

[1]) Фростман [1935].

Следовательно, потенциал $V_0(x)$ равномерно ограничен снизу на множестве E и $C_0(E) > 0$.

Аналогично, если $\alpha > 0$, то

$$V_\alpha(x) = \int_0^R -t^{-\alpha}\,dn(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\left[\frac{-n(t)}{t^\alpha}\right]_\varepsilon^R - \alpha\int_\varepsilon^R \frac{n(t)\,dt}{t^{\alpha+1}}\right\} \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{n(R)}{R^\alpha} - \alpha\int_0^R \frac{n(t)\,dt}{t^{\alpha+1}},$$

откуда следует требуемое утверждение.

Для того чтобы получить обратное утверждение, нам потребуется следующая

Лемма 5.5. *Пусть E — компактное множество, содержащееся в гиперкубе Q_0 и такое, что $h^*(E) < \infty$ для некоторой функции Хаусдорфа h. Пусть μ — распределение массы в гиперкубе Q_0 и E_1 — подмножество в E, состоящее из тех точек x, для которых*

$$\frac{\mu(Q_n)}{h(\delta_n)} \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

где Q_n — определенный в доказательстве леммы 5.4 гиперкуб со стороной δ_n, содержащий точку x. Тогда $\mu(E_1) = 0$.

Разобьем Q_0 на $2^{m(n+1)}$ гиперкубов Q_n^j из $\mathscr{M}_n$, как в доказательстве леммы 5.4, и положим

$$\varphi_n(x) = \frac{\mu(Q_n^j)}{h(\delta_n)}, \quad x\in Q_n^j.$$

Очевидно, функция $\varphi_n(x)$ измерима по Борелю. Следовательно, борелевским является множество E_1 тех точек $x \in E$, в которых

$$\varphi_n(x) \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{5.4.6}$$

Предположим теперь, что $\mu(E_1) = 2\mu_0 > 0$. Тогда, по теореме Егорова [1]), в E_1 существует такое подмножество E_2, что $\mu(E_2) > \mu_0$ и на E_2 равномерно выполняется соотношение (5.4.6). Выберем теперь число ε настолько малым, чтобы $2\cdot 3^m\varepsilon h^*(E) < \mu_0$. Тогда существует такое положительное целое n_0, что для $x\in E_2$ и $n \geqslant n_0$

$$\varphi_n(x) < \varepsilon. \tag{5.4.7}$$

Заметим теперь, что, согласно определению $h^*(E)$, найдется система открытых гиперкубов R_ν со сторонами $d_\nu < \delta_{n_0}$, покрывающая множество E и такая, что $\sum h(d_\nu) < 2h^*(E)$. Пусть $R = R_\nu$ — один из этих гиперкубов со стороной $d = d_\nu$, и пусть

[1]) Егоров [1911].

$\delta_n \leqslant d < \delta_{n-1}$, где $n > n_0$. Тогда R может пересекать не больше 3^m гиперкубов Q_n^j из $\mathcal{M}_n$, покрывающих R и имеющих стороны $\delta_n \leqslant d$. Взяв сумму по этим гиперкубам Q_n^j, получим

$$\sum h(\delta_n) \leqslant 3^m h(\delta_n) \leqslant 3^m h(d).$$

Таким образом, заменяя каждый из R_ν системой гиперкубов Q_n^j из $\mathcal{M}_n$ для некоторого n, зависящего от R_ν, получим покрытие E гиперкубами Q_n^j для $n \geqslant n_0$. Обозначим эти гиперкубы через $Q^{(\nu)}$. Если l_ν — длина стороны гиперкуба $Q^{(\nu)}$, то $\sum h(l_\nu) \leqslant 2 \cdot 3^m h^*(E)$.

Отберем теперь те гиперкубы $Q^{(\nu)}$, которые пересекают множество E_2, и заметим, что они покрывают E_2. Согласно (5.4.7), для таких гиперкубов $\mu(Q^{(\nu)}) < \varepsilon \cdot h(l_\nu)$. Таким образом, обозначая через $\sum'$ сумму по тем индексам ν, для которых $Q^{(\nu)}$ пересекает E_2, получим

$$\mu(E_2) \leqslant \sum{}' \mu(Q^{(\nu)}) \leqslant \varepsilon \sum{}' h(l_\nu) \leqslant 2 \cdot 3^m \varepsilon h^*(E) < \mu_0.$$

Получившееся противоречие доказывает лемму 5.5.

Теперь мы в состоянии доказать результат, обратный к теореме 5.13.

Теорема 5.14 [1]). *Пусть E — такое компактное множество в $\mathbb{R}^m$, что $l_\alpha(E) < \infty$, где $\alpha \geqslant 0$. Тогда $C_\alpha(E) = 0$.*

Следствие. *Если α_0 — размерность по Хаусдорфу множества E, то $C_\alpha(E) = 0$ для $\alpha > \alpha_0$ и $C_\alpha(E) > 0$ для $\alpha < \alpha_0$. Если $C_\alpha(E) = 0$ для $\alpha < 1$, то множество E вполне разрывно.*

Пусть μ — распределение единичной массы на E и

$$V_\alpha(x) = \int K_\alpha(x - \xi)\, d\mu e_\xi.$$

Покажем, что во всех точках множества E, лежащих вне некоторого множества E_1, имеет место равенство

$$V_\alpha(x) = -\infty. \tag{5.4.8}$$

Так как, в силу леммы 5.5, $\mu(E_1) = 0$, то из этого равенства следует, что

$$I_\alpha(\mu) = \int_E V_\alpha(x)\, d\mu(x) = -\infty.$$

Поскольку это верно для любой меры μ, то $I_\alpha = -\infty$ и $C_\alpha(E) = 0$.

Итак, осталось доказать (5.4.8). Пусть x — некоторая точка из $E - E_1$. Тогда существуют такое $\eta > 0$ и такая последователь-

[1]) Эта теорема была впервые доказана Эрдёшем и Джиллисом [1937] для случая $\alpha = 0$.

ность содержащих точку x гиперкубов $Q_{n_p}^{(j)} = R_p$ со сторонами $d_p = \delta_{n_p}$, что $\mu(R_p) > \eta h_\alpha(d_p)$, где $h_\alpha(t) = (\log 1/t)^{-1}$ при $\alpha = 0$ и $h_\alpha(t) = t^\alpha$ при $\alpha > 0$.

Если мера точки x положительна, то соотношение (5.4.8) очевидно. В противном случае для любого данного $p > 0$ можно выбрать такое $\varepsilon_p > 0$, что $\mu(R'_p) > \frac{1}{2}\eta h(d_p)$, где R'_p — часть R_p, удаленная от x больше чем на ε_p.

Далее, взяв, если необходимо, подпоследовательность, мы можем считать, что $d_{p+1}\sqrt{m} < \varepsilon_p$, так что множества R'_p для различных p не пересекаются. Таким образом,

$$V_\alpha(x) \leqslant \sum_p \int_{R'_p} K_\alpha(x-\xi)\, d\mu e_\xi + O(1).$$

Если $\alpha = 0$, то на R'_p имеем

$$K_\alpha(x-\xi) \leqslant -\log\left(\frac{1}{d_p\sqrt{m}}\right),$$

так что для $p > p_0$

$$\int_{R'_p} K_\alpha(x-\xi)\, d\mu e_\xi \leqslant -\log\left(\frac{1}{d_p\sqrt{m}}\right)\mu(R'_p) \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{1}{2}\eta\frac{\log(1/d_p\sqrt{m})}{\log(1/d_p)} < -\frac{\eta}{4}.$$

Отсюда следует (5.4.8). Аналогично, если $\alpha > 0$, то

$$\int_{R'_p} K_\alpha(x-\xi)\, d\mu e_\xi < -\left(d_p\sqrt{m}\right)^{-\alpha}\mu(R'_p) < -\frac{1}{2}\eta\left(\sqrt{m}\right)^{-\alpha}.$$

Отсюда снова вытекает (5.4.8). Тем самым теорема 5.14 доказана.

Следствие доказывается непосредственно. Действительно, если α_0 — размерность E и $\alpha > \alpha_0$, то, в силу леммы 5.3, $l_\alpha(E) = 0$ и, значит, по теореме 5.14, $C_\alpha(E) = 0$. Далее, если $\alpha < \alpha_0$, так что $\alpha_0 > 0$, выберем такое α_1, чтобы $\alpha < \alpha_1 < \alpha_0$. Тогда, по лемме 5.3, для $h(t) = t^{\alpha_1}$ имеем $h^*(E) = \infty$. В то же время

$$\int_0^1 \frac{h(t)\,dt}{t^{\alpha+1}} = \int_0^1 \frac{dt}{t^{1+\alpha-\alpha_1}} < \infty.$$

Таким образом, по теореме 5.13, $C_\alpha(E) > 0$.

Следовательно, если $C_\alpha(E) = 0$ для некоторого $\alpha < 1$, то $\alpha_0 < 1$ и поэтому множество E, в силу теоремы 5.12, вполне разрывно.

Теоремы 5.13 и 5.14 позволяют достаточно точно определить в терминах меры Хаусдорфа, обращается или не обращается в нуль емкость $C_\alpha(E)$. Если $\alpha = 0$, то необходимым условием для $C_\alpha(E) = 0$ является равенство $h^*(E) = 0$, где

$$h(t) = (\log 1/t)^{-1} (\log \log 1/t)^{-(1+\delta)}, \qquad \delta > 0;$$

достаточным является условие $h^*(E) < \infty$, где $h(t) = (\log 1/t)^{-1}$. Если $\alpha > 0$, то необходимым условием является равенство $h^*(E) = 0$, где $h(t) = t^\alpha (\log 1/t)^{-(1+\delta)}$, а достаточным — условие $h^*(E) < \infty$, где $h(t) = t^\alpha$. Это самые сильные результаты из тех, которые можно получить в общем случае. Полное описание емкости в терминах мер Хаусдорфа невозможно (см., например, Карлесон [1967], гл. IV).

5.4.2. Применение к ограниченным регулярным функциям

Пусть E — компактное множество на комплексной плоскости и N — окрестность E. Множество E называется *устранимым множеством по Пенлеве*, если любая регулярная и ограниченная функция в $N - E$ может быть продолжена как регулярная функция на всю окрестность N.

По-видимому, найти необходимые и достаточные условия для устранимых множеств по Пенлеве — трудная задача. Однако имеет место следующая

Теорема 5.15. *Для того чтобы E было устранимым множеством по Пенлеве, достаточно*[1]*, чтобы $l_1(E) = 0$, и необходимо*[2]*, чтобы $C_1(E) = 0$, т. е. чтобы $h^*(E) = 0$ для любой функции Хаусдорфа $h(t)$, удовлетворяющей условию*

$$\int_0^1 t^{-2} h(t)\, dt < \infty.$$

Теорема 5.15 показывает, в частности, что если α_0 — размерность E, то E является устранимым множеством по Пенлеве для $\alpha_0 < 1$ и не является таковым для $\alpha_0 > 1$.

Предположим сначала, что $C_1(E) > 0$. Тогда, в силу теоремы 5.8, существует такое распределение единичной массы μ на E, что для всех комплексных z

$$\int \frac{d\mu(\xi)}{|z-\xi|} \leqslant 2V' = \frac{2}{C_1(E)} = \eta_1.$$

[1] Этот принадлежащий Пенлеве результат, по-видимому, впервые опубликован в книге Цоретти [1905]. Позднее он был переоткрыт Безиковичем [1932] и другими авторами.

[2] Несколько более общий результат см. у Карлесона [1967].

Положим

$$f(z)=\int \frac{d\mu(\xi)}{z-\xi}.$$

Тогда функция $f(z)$ регулярна в расширенной комплексной плоскости вне множества E. Кроме того,

$$f(z)=\frac{1}{z}\int d\mu(\xi)+\frac{O(1)}{z^2}=\frac{1}{z}+\frac{O(1)}{z^2} \quad \text{при} \quad z\to\infty,$$

так что $f(z)\neq \mathrm{const}$. Если бы $f(z)$ можно было аналитически продолжить на E, то $f(z)$ была бы целой функцией, и мы получили бы противоречие с теоремой Лиувилля. Следовательно, E не является устранимым множеством по Пенлеве.

Обратно, предположим, что $l_1(E)=0$ и что $f(z)$ регулярна и ограничена на $N-E$. По предположению, E можно заключить в объединение квадратов C_n со сторонами d_n, такое, что $\sum d_n < <\varepsilon$. Далее, C_n может быть вложен в открытый круг $D_n=D(a_n, d_n)$, так что объединение этих кругов содержит E. По теореме Гейне — Бореля, для того чтобы покрыть E, достаточно взять конечное множество $D_1, \ldots, D_m$ этих открытых кругов. Можно считать, что множество E находится на расстоянии, большем 2ε, от замкнутого дополнения к окрестности N, так что каждый пересекающий E круг D_n целиком лежит в N вместе со своей граничной окружностью.

Пусть $G=\bigcup\limits_{n=1}^{m} D_n$. Тогда G — открытая окрестность множества E и функция $f(z)$ регулярна и ограничена в $G-E$. Граница множества G состоит из конечного числа дуг окружностей, общая длина которых не превосходит 2ε. Фиксируем сначала такую окрестность $G=G_0$ с $\varepsilon=\varepsilon_0$, а затем для данного $\varepsilon_1>0$ построим новую окрестность G_1, соответствующую ε_1, так что $E\subset G_1\subset \subset \overline{G_1}\subset G_0$. Пусть D_0 — одна из областей окрестности G_0, а D_1 — объединение всех компонент G_1, лежащих в D_0. Обозначим через C_0 и C_1 соответственно границы областей D_0 и D_1. Тогда из интегральной формулы Коши следует, что для $z\in D_0-D_1$

$$f(z)=\int\limits_{C_0}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}-\int\limits_{C_1}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=F_0(z)-F_1(z).$$

Оставляя C_0 и, следовательно, $F_0(z)$ фиксированными, будем варьировать область D_1 и вместе с ней интеграл $F_1(z)$. Тогда при условии, что z не принадлежит D_1, получаем, что $F_0(z)$ и $f(z)$, а значит, и $F_1(z)$ остаются неизменными. Обозначим через δ расстояние от точки z до множества E и предположим, что $\varepsilon_1 < < \delta/4$. Так как все окружности в D_1 содержат точки из E и имеют радиусы, не превосходящие ε_1, то расстояние от z до C_1 не меньше чем $\delta/2$. Таким образом,

$$|F_1(z)| \leqslant \int\limits_{C_1} \frac{|f(\zeta)|\,|d\zeta|}{|\zeta-z|} < \frac{2M}{\delta} \int\limits_{C_1} |d\zeta| < \frac{2M}{\delta} 2\pi\varepsilon_1,$$

где M — верхняя грань функции $f(z)$ в N, а ε_1 — граница для суммы радиусов C_1. Так как ε_1 произвольно, получаем, что $F_1(z) = 0$, т. е.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_0} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Это дает требуемое аналитическое продолжение во внутренность C_0 и, аналогично, во всю область G_0, а значит, в частности, на множество E. Следовательно, E — устранимое множество по Пенлеве. Теорема 5.15 полностью доказана.

Один из наиболее интересных открытых вопросов теории емкости касается компактных множеств конечной линейной меры. Иванов [1963] показал [1]), что если множество E лежит на достаточно гладкой кривой, то оно является устранимым по Пенлеве тогда и только тогда, когда его линейная мера равна нулю. С другой стороны, Витушкин [1959] и Гарнетт [1970] привели примеры плоских множеств канторова типа, которые являются устранимыми по Пенлеве, однако имеют положительную линейную меру. Напомним, что по теореме 5.14 для множеств конечной линейной меры $C_1(E) = 0$, так что теорема 5.15 здесь не помогает. Существует (довольно смелая) гипотеза, согласно которой плоское компактное множество E конечной линейной меры тогда и только тогда является устранимым по Пенлеве, когда оно иррегулярно в смысле Безиковича [1938], т. е. когда любая спрямляемая кривая пересекает E по множеству нулевой линейной меры.

Далее мы увидим (теорема 5.18), что соответствующие проблемы для субгармонических и гармонических функций значительно проще. Ограниченная гармоническая функция вблизи компактного множества E из $\mathbb{R}^m$ гармонически продолжается на E тогда и только тогда, когда $C_{m-2}(E) = 0$.

5.5. ОБОБЩЕННЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА ИЛИ ПРИНЦИП ФРАГМЕНА — ЛИНДЕЛЁФА

Исключительно важную роль при изучении субгармонических функций играют $(m-2)$-полярные, или просто полярные, множества. Дело в том, что для многих классов субгармонических

[1]) Для линейных множеств этот результат принадлежит Данжуа [1909], а для множеств на аналитических кривых — Альфорсу и Бёрлингу [1950].

функций можно не учитывать их поведение вблизи полярных множеств: это не приводит к значительному ослаблению соответствующих теорем. В этой связи ключевую роль играет функция, построенная в теореме 5.11.

Теорема 5.16 [1]). *Предположим, что функция $u(x)$ субгармонична и ограничена сверху в области $D \subset \mathbb{R}^m$. Пусть F — граница D, E — полярное подмножество F и*

$$\overline{\lim}\, u(x) \leqslant M, \tag{5.5.1}$$

когда x стремится к точке $\xi \in F - E$ изнутри области D. Если область D не ограничена, то при $m = 2$ в E можно включить точку ∞, а при $m > 2$ нельзя. Тогда если $F = E$, то $u(x)$ постоянна, в противном случае

$$u(x) < M \quad \text{в} \quad D \quad \text{или же} \quad u(x) \equiv M \quad \text{в} \quad D. \tag{5.5.2}$$

Отметим следующий важный момент в этой теореме: неравенство (5.5.1) не обязательно выполняется во всех точках F, а лишь только в точках $F - E$. Это типичная ситуация для принципа Фрагмена — Линделёфа.

В формулировке теоремы можно опустить условие ограниченности сверху функции $u(x)$, а потребовать лишь, чтобы $u(x)$ не очень быстро росла вблизи исключительных точек.

Для доказательства теоремы 5.16 предположим сначала, что область D ограничена или что $m > 2$. Построим в области D такую неположительную субгармоническую функцию $\omega(x)$, что $\omega(x) = -\infty$ в E. Это возможно в силу теоремы 5.11.

Пусть x_0 — некоторая точка D. Предположим, что $\omega(x_0) > -\infty$. Рассмотрим функцию $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon\omega(x)$, где ε — малое положительное число. Тогда если ξ — произвольная точка множества F, то $\overline{\lim}\, u_\varepsilon(x) \leqslant M$, когда x стремится к ξ изнутри D.

Действительно, если $\xi \notin E$, то это неравенство следует из (5.5.1) и из того, что $\omega(x) \leqslant 0$. Если же $\xi \in E$, то $\lim u_\varepsilon(x) = -\infty$, поскольку функция $u(x)$ ограничена сверху в D. Таким образом, из обычного принципа максимума, примененного к субгармонической функции $u_\varepsilon(x)$, следует, что $u_\varepsilon(x) \leqslant M$ в D и, в частности, $u_\varepsilon(x_0) \leqslant M$, т. е. $u(x_0) \leqslant M - \varepsilon\omega(x_0)$. Так как значение $\omega(x_0)$ конечно, а ε произвольно, заключаем, что $u(x_0) \leqslant M$. Это неравенство верно для любой точки $x_0 \in D$. Поэтому из обычного принципа максимума следует, что $u(x) < M$ или же $u(x) \equiv M$ в D.

Остается рассмотреть более трудный случай, когда область D не ограничена и $m = 2$. Так как E — полярное множество (нуле-

[1]) Асколи [1928].

вой емкости), то оно является счетным объединением компактных полярных множеств E_n. Согласно теореме 5.13, каждое из множеств E_n имеет линейную меру нуль. Следовательно, можно покрыть E_n объединением квадратов, сумма сторон которых не превосходит $\varepsilon \cdot 2^{-n}$, так что множество E покрывается объединением квадратов, сумма сторон которых не превосходит $\varepsilon \sum_1^\infty 2^{-n} = \varepsilon$. Таким образом, множество E имеет линейную меру нуль. Поэтому, в силу теоремы 5.12, множество тех r, для которых $S(0, r)$ не пересекает E, всюду плотно на положительной части вещественной оси. Мы будем называть такие значения r *нормальными*. Так как множество D не ограничено, то $S(0, r)$ пересекает D для всех $r > r_0$. Для любого нормального значения r положим

$$B(r) = \sup_{x \in D,\ |x|=r} u(x).$$

Предположим сначала, что $B(r) \leqslant M$ для некоторого произвольно большого нормального r. Пусть x_0 — некоторая точка D, $r > |x_0|$ и r таково, что $B(r) \leqslant M$; пусть также D_r — подобласть в $D \cap D(0, r)$, содержащая x_0. Применяя к D_r уже доказанную часть теоремы 5.16, получаем, что $u(x_0) \leqslant M$. Так как это верно для любой точки $x_0 \in D$, то условие (5.5.2) в этом случае выполнено.

Далее, предположим, что $B(r) > M$, r нормально и $r > r_0$. Заметим, что в этом случае существует такая точка $x \in D$, что $|x| = r$ и $u(x) = B(r)$. Действительно, можно выбрать такую последовательность точек x_n на $S(0, r) \cap D$, что $u(x_n) \to B(r)$ при $n \to \infty$. Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можем считать, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Точка x не может принадлежать E, поскольку $S(0, r)$ не пересекается с E. Точка x не принадлежит и $F - E$, так как в таких точках выполняется неравенство (5.5.1). Следовательно, x должна быть точкой области D, а так как функция u субгармонична в D, мы получаем, что $u(x) \geqslant B(r)$, т. е. $u(x) = B(r)$.

Покажем, что функция $B(r)$ возрастает для всех достаточно больших r. Действительно, если $B(r) > M$, то, применив только что доказанный результат к функции $u(x)$ во всех подобластях $D \cap D(0, r)$, из (5.5.2) найдем, что $u(x) \leqslant B(r)$ в $D \cap D(0, r)$. В частности, для $\rho < r$ имеем $B(\rho) \leqslant B(r)$.

Предположим теперь, что функция $B(r)$ постоянна вне некоторого отрезка. Тогда на множестве $|x| = r_1$ найдется такая точка x_1, что $u(x_1) = B(r_1) = B$ и $B(r) = B$ для $r > r_1$. Значит, $u(x) \equiv B$ в той компоненте D_r множества $D \cap D(0, r)$, которая содержит точку x_1. Устремляя r к бесконечности, получаем, что

$D_r \to D$ и, следовательно, $u(x) \equiv B$ в D. Таким образом, в этом случае функция $u(x)$ постоянна.

Если $B(r)$ не является постоянной вне отрезка, то $B(r) \to B$ при $r \to \infty$, и для произвольного фиксированного r имеем $B(r) < B$. Положим

$$u_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon \log(|x|/r)$$

и применим ко всем подобластям множества $(r < |x| < R) \cap D$ уже доказанную часть теоремы 5.16. Тогда, если для данного $\varepsilon > 0$ радиус R выбран достаточно большим, то в любой такой подобласти D_0

$$u_\varepsilon(x) \leqslant \max(B(r),\ B(r) - \varepsilon \log(R/r)) \leqslant$$
$$\leqslant \max(B(r),\ B - \varepsilon \log(R/r)) = B(r).$$

Так как для фиксированной точки x можно выбрать ε сколь угодно малым и затем положить $R > |x|$, то $u(x) \leqslant B(r)$ при $|x| > r$, т. е. $B(R) \leqslant B(r)$, $R > r$. Следовательно, $B(r)$ постоянна вне отрезка вопреки предположению. Таким образом, если $u(x)$ не постоянна, то во всех случаях выполняется неравенство (5.5.2).

Если множество E содержит все F, то условие (5.5.1) не обязательно должно выполняться во всех точках, так что в этом доказательстве мы можем заменить M любым меньшим числом. В частности, можно взять $M < u(x_0)$ для некоторой точки $x_0 \in D$. Тогда неравенство (5.5.2) становится неверным, и поэтому $u(x)$ — постоянная. В противном случае (5.5.1) выполняется по крайней мере в одной граничной точке $\xi \in F$, и поэтому, даже если $u(x) = B = \mathrm{const}$, имеем $B \leqslant M$. Это завершает доказательство теоремы 5.16.

Стоит отметить, что точка ∞ играет существенно различную роль в случаях $m = 2$ и $m > 2$. Если $m = 2$, она играет роль полярного множества. Поэтому если $u(x)$ субгармонична и ограничена сверху вне компактного полярного множества в открытой плоскости, то из теоремы 5.16 следует, что $u(x)$ — константа.

Если неравенство (5.5.1) выполняется во всех конечных граничных точках (в предположении, что имеется хотя бы одна такая точка) и если $u(x)$ ограничена сверху, мы немедленно получаем (5.5.2).

Эти утверждения неверны при $m > 2$, как показывает пример функции $u(x) = -|x|^{2-m}$, которая имеет верхнюю грань нуль в открытом пространстве, но ограничена сверху отрицательной константой на любом компактном подмножестве открытого пространства.

5.5.1. Единственность емкостного потенциала

Воспользуемся теоремой 5.16 для того, чтобы доказать значительное обобщение теоремы 5.8.

Теорема 5.17 [1]). *Предположим, что в теореме* 5.8 $\alpha = m - 2$. *Тогда неравенство* (5.2.7) *можно заменить неравенством*

$$u(x) \geqslant V \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^m, \tag{5.5.3}$$

так что

$$u(x) = V \quad \alpha\text{-почти всюду на } E. \tag{5.5.4}$$

Функция $u(x)$ *однозначно определяется следующими требованиями: она субгармонична в* $\mathbb{R}^m$, *гармонична вне* E, *удовлетворяет условиям* (5.5.3), (5.5.4) *и*

$$u(x) = \log|x| + o(1) \quad \text{при} \quad x \to \infty, \quad \text{если} \quad m = 2, \tag{5.5.5}$$

или же

$$u(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty, \quad m > 2. \tag{5.5.5'}$$

В частности, емкостный потенциал единствен.

Пусть G — неограниченная область, дополнительная к множеству E^*, F — граница G и F_0 — множество тех точек F, в которых $u(x) > V$. По теореме 5.8, F_0 является $(m-2)$-полярным множеством.

Рассмотрим теперь функцию $v(x) = -u(x)$, заданную на компоненте $G(R)$ множества $G \cap D(0, R)$, где R — большое положительное число. Так как $\alpha = m - 2$, то функция $-K_\alpha(x)$ гармонична вне начала координат, и поэтому $u(x)$ — гармоническая функция вне E^*. Кроме того, функция $u(x)$ непрерывна в граничных точках y множества E^*, не принадлежащих F_0. Действительно, так как функция $K_\alpha(x)$ пн. св., то $u(x)$ в любом случае пн. св. на E^* и на $\mathbb{R}^m$. Далее, $u(y) = V$ и $u(x) \geqslant V$ во всех других точках $x \in E^*$, так что $u(x)$ непрерывна в точке y как функция на E^*. Следовательно, из теоремы 5.1 вытекает, что функция $u(x)$ непрерывна в точке y и как функция на $\mathbb{R}^m$. Это же утверждение верно и для функции $v(x)$. Таким образом, $v(x) \to -V$, если $x \to y$ из $G(R)$, где y — произвольная граничная точка $G(R)$, не содержащаяся в F_0.

Если выбрать R достаточно большим, то на $S(x_0, R)$ получаем: $v(x) < 0$ при $m = 2$, $v(x) < \varepsilon$ при $m > 2$, где ε — положительное число, которое может быть выбрано меньшим, чем $-V$. Таким образом, для любой граничной точки компоненты $G(R)$ вне некоторого полярного множества имеет место неравенство

$$\overline{\lim}\, v(x) \leqslant -V.$$

[1]) Фростман [1935].

Так как функция $v(x)$ субгармонична в $G(R)$ и, согласно (5.2.7), ограничена сверху, то из теоремы 5.16 следует, что в области $G(R)$, а значит, вне E^* выполняется неравенство $v(x) \leqslant -V$, т. е. $u(x) \geqslant V$. Согласно (5.2.4), это неравенство выполняется всюду в $\mathbb{R}^m$. Используя (5.2.5), получаем (5.5.4).

Докажем теперь, что выполняется (5.5.5) или соответственно (5.5.5′). Предположим сначала, что $m = 2$. Тогда

$$u(x) = \int_{E^*} \log|x-y|\, d\mu(y) =$$

$$= \int_{E^*} \left\{\log|x| + \log\left|1 - \frac{y}{x}\right|\right\} d\mu(y) =$$

$$= \log|x|\,\mu(E^*) + O(|x|^{-1}) = \log|x| + O(|x|^{-1}),$$

т. е. (5.5.5) выполняется. С другой стороны, если $m > 2$, то

$$u(x) = \int_{E^*} -|x-y|^{2-m}\, d\mu(y)$$

и, очевидно, выполняется (5.5.5′).

Теперь можно доказать единственность функции $u(x)$. Действительно, пусть G — область, дополнительная к множеству E, и x_0 — такая ее граничная точка, что $u(x_0) = V$. Так как функция $u(x)$ пн. св., то

$$\varlimsup_{x \to x_0} u(x) \leqslant V$$

и, в силу (5.5.3), получаем, что $u(x) \to V$ при $x \to x_0$ изнутри G. Следовательно, этот результат справедлив для всех конечных граничных точек x_0 области G вне некоторого полярного множества F_0.

Предположим теперь, что $u_1(x)$ — другая функция, субгармоническая в $\mathbb{R}^m$, гармоническая вне E и удовлетворяющая условиям (5.5.3), (5.5.4) и (5.5.5) или (5.5.5′). Положим

$$h(x) = u(x) - u_1(x).$$

Тогда, согласно (5.5.5) и (5.5.5′), $h(x)$ гармонична и ограничена вне E. Кроме того, $h(x) \to 0$, когда x стремится к произвольной конечной граничной точке множества G или к ∞, за исключением точек полярного множества, которое является объединением полярных множеств, соответствующих функциям $u(x)$ и $u_1(x)$. Далее, функция $h(x)$ ограничена в G. Поэтому, применяя теоремы 5.16 к функциям $h(x)$ и $-h(x)$, видим, что $h(x) \equiv 0$ в G, а значит, вне множества E. В силу (5.5.4), $h(x) = 0$ α-почти всюду на E, так что $h(x) = 0$ α-почти всюду в $\mathbb{R}^m$.

Пусть, наконец, x_0 — точка полярного множества F, в которой функция $h(x)$ не обращается в нуль. Если $u(x_0) = u_1(x_0) = -\infty$, то доказывать нечего. В противном случае значение $h(x_0)$ корректно определено, и поскольку функции $u(x)$, $u(x_0)$ субгармоничны, а F имеет нулевую m-мерную меру, то из определения § 2.1 следует, что

$$h(x_0) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{d_m r^m} \int\limits_{D(x_0, r)} h(x)\, dx = 0,$$

где d_m — константа. Таким образом, $u(x) = u_1(x)$ в любой точке $\mathbb{R}^m$. Этим завершается доказательство теоремы 5.17.

5.5.2. Полярные множества как устранимые множества

Легко доказать два других следствия теоремы 5.16.

Теорема 5.18 [1]. *Пусть E — полярное множество в $\mathbb{R}^m$, G — открытое множество в $\mathbb{R}^m$ и $u(x)$ — ограниченная сверху функция, удовлетворяющая условиям субгармоничности* (i) — (iii) *из* § 2.1 *в $G - E$. Тогда $u(x)$ единственным образом продолжается до субгармонической функции в G.*

Если обе функции $u(x)$ и $-u(x)$ удовлетворяют перечисленным условиям, то $u(x)$ продолжается до гармонической функции в G.

Заметим, что, поскольку E — полярное множество, оно имеет нулевую $(m-1)$-мерную меру. Следовательно, сферические средние функции $u(x)$ не зависят от значений $u(x)$ на E, и сформулированные выше условия имеют смысл.

Докажем сначала первое утверждение. С этой целью для каждого $x_0 \in E \cap G$ положим

$$u(x_0) = \overline{\lim}\, u(x) \quad \text{при} \quad x \to x_0 \quad \text{из} \quad G - E. \tag{5.5.6}$$

Так как множество E полярное, оно не имеет внутренних точек, и данное определение корректно. Ясно, что функция $u(x)$ пн. св. в G. Можно считать, что область G ограничена. Построим такую субгармоническую функцию $\omega(x)$, что $\omega(x) < 0$ в G, $\omega(x) = -\infty$ в $E \cap G$, $\omega(x_0) > -\infty$, где x_0 — заданная точка из $G - E$. Это возможно в силу теоремы 5.11.

Мы хотим показать, что если $C(y, R)$ — произвольный шар в G и функция $v(x)$ гармонична в $D(y, R)$ и непрерывна в $C(y, R)$ и если $u(x) \leqslant v(x)$ в $S(y, R)$, то это же неравенство выполняется в $D(y, R)$.

Предположим сначала, что $x_0 \in D(y, R)$, но $x_0 \notin E$. Рассмотрим функцию

$$h_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon\omega(x) - v(x).$$

[1] Брело [1934].

Очевидно, что она субгармонична в $D(y, R)$. Действительно, в любой точке, не принадлежащей E, функции $u(x)$, $\omega(x)$ и $-v(x)$ удовлетворяют условиям субгармоничности; в точках множества E функция $h_\varepsilon(x)$ стремится к $-\infty$.

Во всех точках $S(y, R)$

$$h_\varepsilon(x) \leqslant u(x) - v(x) \leqslant 0.$$

Следовательно, $h_\varepsilon(x) \leqslant 0$ в $D(y, R)$. Для точки $x = x_0$, не принадлежащей E, устремляя ε к нулю, заключаем, что $u(x_0) \leqslant v(x_0)$.

Согласно (5.5.6) и в силу непрерывности функции $v(x)$, это неравенство остается верным для всех точек E. Отсюда, так же как в доказательстве теоремы 2.5, получаем, что $u(x)$ удовлетворяет неравенству для среднего значения и, следовательно, субгармонична.

Это продолжение единственно. В самом деле, поскольку продолженная функция $u(x)$ субгармонична, имеем для $x_0 \in G$

$$u(x_0) = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{d_m \rho^m} \int\limits_{D(x_0, \rho)} u(x)\, dx, \tag{5.5.7}$$

где d_m — объем единичного шара в $\mathbb{R}^m$. Это равенство следует, например, из определения субгармонических функций, данного в § 2.1. В этом равенстве можно не рассматривать точки множества E, так как E имеет m-мерную меру нуль.

Таким образом, (5.5.7) дает другое определение функции $u(x)$ во всех точках E, так что продолжение единственно.

Предположим теперь, что обе функции $u(x)$ и $-u(x)$ удовлетворяют условиям, сформулированным в теореме. Тогда, как только что было доказано, функцию $u(x)$ можно определить на E равенством (5.5.7). Полученная функция субгармонична в G. Это же рассуждение применимо к функции $-u(x)$, так что $-u(x)$, будучи продолженной на E с помощью (5.5.7), оказывается субгармонической в G. Таким образом, функции $u(x)$ и $-u(x)$ субгармоничны в G, поэтому, согласно теореме 2.9, функция $u(x)$ гармонична в G. Это продолжение единственно, так как оно задается равенством (5.5.7). Теорема 5.18 доказана.

Покажем теперь, что требование полярности множества E необходимо для выполнения теоремы 5.18. Действительно, пусть E — компактное множество положительной $(m-2)$-емкости, и пусть

$$V_{m-2}(x) = \int K_{m-2}(x-y)\, d\mu(y)$$

— соответствующий емкостный потенциал. Тогда функция $u(x) = -V_{m-2}(x)$ гармонична вне множества E и ограничена в любом фиксированном шаре. Действительно, функция $V_{m-2}(x)$ субгармонична в $\mathbb{R}^m$ и поэтому ограничена сверху в любом фиксированном шаре. Кроме того, $V_{m-2}(x)$ ограничена снизу по теореме 5.8. Далее,

$$u(x) > C \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^m, \quad u(x) \to C \quad \text{при} \quad x \to \infty, \tag{5.5.8}$$

где $C = 0$, если $m > 2$; $C = -\infty$, если $m = 2$.

Таким образом, $u(x)$ не допускает субгармонического продолжения в E. В самом деле, в противном случае $u(x)$ была бы субгармонической и, значит, пн. св. всюду в $\mathbb{R}^m$. Тогда $u(x)$ имела бы верхнюю грань M в $\mathbb{R}^m$, такую, что $M > C$. Следовательно, в силу (5.5.8), $u(x)$ должна была бы достигать значения M в некоторой точке $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Отсюда, согласно принципу максимума (теорема 2.3), следовало бы, что $u(x) \equiv M$ в $\mathbb{R}^m$, в противоречие с (5.5.8). Тем более функция $u(x)$ не допускает гармонического продолжения в E. Заметим, что теорема 5.18 дает аналог теоремы 5.15 для ограниченных гармонических функций или для ограниченных сверху субгармонических функций. Однако утверждение теоремы 5.18 значительно полнее.

5.6. ПОЛЯРНЫЕ МНОЖЕСТВА И ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ

Теперь мы хотим показать, что иррегулярные точки для задачи Дирихле (см. п. 2.6.2) образуют полярное множество. Отсюда будет следовать, что для произвольной области в $\mathbb{R}^m$ и любых непрерывных граничных значений задача Дирихле имеет единственное решение, если налагать требование надлежащего граничного поведения только в регулярных точках.

Прежде всего докажем утверждение, показывающее, что условия регулярности можно несколько ослабить.

Теорема 5.19 [1]). *Пусть D — область в $\mathbb{R}^m$, ζ_0 — граничная точка D, N — окрестность точки ζ_0 и $N_0 = N \cap D$. Тогда ζ_0 является регулярной граничной точкой области D, если существует такая функция $\psi(x)$, что:*

(i) $\psi(x)$ *субгармонична в* N_0;

(ii)′ $\psi(x) < 0$ *в* N_0;

(iii) $\psi(x) \to 0$ *при* $x \to \zeta_0$ *изнутри* N_0.

В частности, точка $\zeta_0 = \infty$ всегда регулярна, если область D не ограничена и $m > 2$.

Функция $\psi(x)$ в этой теореме удовлетворяет всем условиям барьера (§ 2.6), за исключением условия (ii), которое заменяется более простым условием (ii)′.

---

[1]) Булиган [1924].

Предположим сначала, что ζ_0 — конечная точка и N содержится в замкнутом шаре $C(\zeta_0, r)$. Пусть $0 < \rho < r$,

$$S_0 = S(\zeta_0, \rho) \cap D$$

и σ_0 — площадь поверхности S_0. Выберем в S_0 компактное подмножество e_1 с площадью σ_1, граница которого имеет в S_0 нулевую площадь. Например, в качестве e_1 можно взять объединение конечного числа замкнутых сферических шапочек из S_0.

Определим теперь $v_\rho(x)$ как ограниченную гармоническую функцию в $D(\zeta_0, \rho)$, граничные значения которой на $S(\zeta_0, \rho)$ задаются формулой

$$v_\rho(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in S_0 - e_1, \\ 0, & \text{если} \quad x \in S(\zeta_0, \rho) - \overline{(S_0 - e_1)}. \end{cases}$$

Такая функция определяется интегралом

$$v_\rho(x) = \int\limits_{S_0 - e_1} K(x, y)\, d\sigma(y),$$

где $K(x, y)$ — ядро Пуассона на $S(\zeta_0, \rho)$ и $d\sigma(y)$ — элемент площади поверхности $S(\zeta_0, \rho)$. Имеем

$$v_\rho(\zeta_0) = v_0 > 0,$$

где v_0 — отношение площади $S_0 - e_1$ к площади $S(\zeta_0, \rho)$. Выберем площадь e_1 настолько большой, чтобы выполнялось неравенство $v_0 < \rho/r$.

Рассмотрим теперь на границе Γ_0 множества $N_1 = D(\zeta_0, r) \cap \cap D$ функцию $f(\zeta) = |\zeta - \zeta_0|$ и попытаемся решить в области N_1 задачу Дирихле с этими граничными значениями. Другими словами, точно так же, как в § 2.6, мы определяем класс $U(f)$ субгармонических функций в N_1, которые удовлетворяют неравенству

$$\overline{\lim}\, u(x) \leqslant f(\zeta), \tag{5.6.1}$$

когда x стремятся к произвольной граничной точке $\zeta \in N_1$ изнутри N_1. Положим $v(x) = \sup\limits_{u \in U(f)} u(x)$ и напомним, что, согласно лемме 2.3, функция $v(x)$ гармонична в N_1 и

$$0 \leqslant v(x) \leqslant r, \quad x \in N_1. \tag{5.6.2}$$

С другой стороны, $u(x) = |x - \zeta_0|$ сама является субгармонической функцией в N_1 и удовлетворяет (5.6.1). Следовательно, (5.6.2) можно уточнить следующим образом:

$$|x - \zeta_0| \leqslant v(x) \leqslant r. \tag{5.6.3}$$

Рассмотрим функцию $\omega(x) = -v(x)$. Если мы докажем, что $\omega(x) \to 0$, т. е. что

$$v(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \zeta_0, \tag{5.6.4}$$

то окажется, что $\omega(x)$ удовлетворяет всем условиям (i) — (iii) определения барьера (п. 2.6.2).

Итак, приступим к доказательству (5.6.4). Поскольку функция $\psi(x)$ субгармонична и $\psi(x) < 0$ в N_0, то $\psi(x)$ пн. св. на компактном множестве e_1, и поэтому достигает на e_1 своей точной верхней грани, скажем $-m_1$. Допустим, что $u(x) \in U(f)$, и рассмотрим функцию

$$h(x) = u(x) - \rho + \frac{r\psi(x)}{m_1} - rv_\rho(x).$$

Функция $h(x)$ субгармонична в $N_\rho = D \cap D(\zeta_0, \rho)$. В граничных точках ζ области N_ρ имеет место неравенство

$$\overline{\lim_{x\to\zeta}}\, h(x) \leqslant 0. \tag{5.6.5}$$

Действительно, если ζ — граничная точка D, то

$$\overline{\lim_{x\to\zeta}}\, u(x) \leqslant |\zeta - \zeta_0| \leqslant \rho,$$

и, поскольку $\psi(x) < 0$, $v_\rho(x) > 0$, (5.6.5) выполняется. Если же $\zeta \in e_1$, то в силу (5.6.2) имеем

$$\overline{\lim_{x\to\zeta}}\, u(x) \leqslant v(\zeta) \leqslant r, \qquad \frac{r\psi(\zeta)}{m_1} \leqslant -r,$$

так что (5.6.5) снова выполняется. Наконец, если $\zeta \in S_0 - e_1$, то

$$\lim_{x\to\zeta} h(x) \leqslant r - \lim_{x\to\zeta} rv_\rho(x) = r - r = 0.$$

Таким образом, неравенство (5.6.5) выполнено во всех случаях, и мы получаем

$$h(x) \leqslant 0, \quad u(x) \leqslant \rho + rv_\rho(x) + \frac{r\psi(x)}{m_1}, \quad x \in N_\rho.$$

Поскольку эти неравенства справедливы для любой функции $u(x) \in U(f)$, то

$$v(x) \leqslant \rho + rv_\rho(x) + \frac{r\psi(x)}{m_1}, \quad x \in N_\rho.$$

Устремляя в последнем неравенстве $x \to \zeta_0$, получаем

$$\overline{\lim_{x\to\zeta_0}}\, v(x) \leqslant \rho + rv_\rho(\zeta_0) \leqslant 2\rho.$$

Так как ρ может быть сделано сколь угодно малым, отсюда вытекает (5.6.4). Следовательно, функция $-v(x)$ удовлетворяет всем условиям барьера в точке ζ_0, и ζ_0 — регулярная точка для задачи Дирихле, как и требовалось.

Осталось рассмотреть случай $\zeta_0 = \infty$. Если $m > 2$, то функция $\omega(x) = -|x|^{2-m}$ удовлетворяет всем условиям барьера (п. 2.6.2), так что точка ∞ в этом случае всегда регулярна. Если $m = 2$, будем обозначать комплексное число, соответствующее точке x, через z. Рассмотрим преобразование комплексной плоскости, задаваемое формулой

$$Z = z^{-1}.$$

Область D отобразится на некоторую область D_0. Так как по следствию теоремы 2.8 конформное преобразование не затрагивает свойств субгармоничности и гармоничности, то ∞ является регулярной граничной точкой области D тогда и только тогда, когда 0 является регулярной граничной точкой области D_0. Применяя к области D_0 и точке $\zeta_0 = 0$ доказанное выше, завершаем доказательство теоремы 5.19.

Теорема 5.20 [1]). *Пусть D — область в $\mathbb{R}^m$ и E — пересечение дополнения к D с фиксированным шаром $C(x_0, r)$, выбранным так, чтобы D находилась в неограниченной компоненте дополнения к E. Тогда граничная точка ζ_0 области D в $D(x_0, r)$ является регулярной для задачи Дирихле, если $C_{m-2}(E) > 0$ и $u(\zeta_0) = V$, где $u(x)$ — емкостный потенциал множества E и $V = V_{m-2}$ — соответствующая постоянная равновесия.*

В частности [2]), *иррегулярные точки для задачи Дирихле образуют полярное множество на границе области D.*

В самом деле, пусть $u(\zeta_0) = V$. Тогда емкостный потенциал $u(x)$ есть гармоническая функция вне множества E и, в частности, на множестве $N_0 = D(x_0, r) \cap D$.

Далее, согласно теореме 5.17, $u(x) \geqslant V$ в N_0. Так как функция $u(x)$ гармонична и отлична от константы в неограниченной компоненте дополнения к E, которая включает в себя D, то $u(x) > V$ в N_0. Поскольку $u(x)$ — потенциал и поэтому пн. св. в $\mathbb{R}^m$, то $u(x) \to V$, когда $x \to \zeta_0$ изнутри N_0. Таким образом, функция $\psi(x) = V - u(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 5.19 и, значит, ζ_0 — регулярная точка для задачи Дирихле.

Предположим теперь, что F — дополнение к области D в $\mathbb{R}^m$. Можно представить F в виде объединения счетного числа компактных множеств E_ν, диаметры которых меньше диаметра D, так что D лежит в неограниченной компоненте дополнения к E_ν. Следовательно, все конечные граничные точки области D регулярны для задачи Дирихле, за исключением тех точек, в которых для

---

1) Эванс [1933].

2) Этот последний результат принадлежит Келлогу [1928].

некоторого ν емкостный потенциал на E_ν не принимает значения постоянной равновесия. Согласно теореме 5.17, это исключительное множество иррегулярных точек является подмножеством полярного множества и поэтому полярно. Далее, если область D не ограничена, то ∞ есть регулярная точка при $m > 2$ и полярное множество при $m = 2$. Это завершает доказательство теоремы 5.20.

Теперь мы в состоянии получить значительно более общее решение задачи Дирихле. Этот результат принадлежит Винеру [1924].

Теорема 5.21. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^m$ с границей Γ и $f(x)$ — ограниченная функция на Γ, непрерывная вне полярного множества E_0 (E_0 может включать точку ∞ при $m = 2$, но не должно содержать ее при $m > 2$).*

Тогда если Γ — полярное множество, т. е. если $m = 2$ и область D не ограничена, то все ограниченные гармонические функции в D — константы.

В противном случае в области D существует единственная ограниченная гармоническая функция $v(x)$, которая равна $f(x)$ на Γ и непрерывна на $\bar{D}$ вне полярного подмножества $E_1 \subset \Gamma$. При этом множество E_1 может быть представлено в виде $E_0 \cup E$, где E — множество иррегулярных граничных точек области D.

Построим функцию $v(x)$ точно так же, как в § 2.6. Тогда функция $v(x)$ гармонична и ограничена в D. Далее, если при определении $v(x)$ мы полагаем $v(x) = f(x)$ на Γ, то из теоремы 2.10 следует, что функция $v(x)$ непрерывна в $\bar{D}$ вне множества $E_1 = E_0 \cup E$. Согласно теореме 5.20, E — полярное множество, а поэтому и E_1 — полярное множество. Таким образом, функция $v(x)$ обладает всеми перечисленными в теореме 5.21 свойствами. Если область D не ограничена, то в случае $m = 2$ мы включаем точку ∞ в множество E_1, а в случае $m > 2$ не включаем. По теореме 5.19, при $m > 2$ точка ∞ регулярна.

Далее, если $m = 2$ и Γ — полярное множество, то из теоремы 5.16 следует, что функция $v(x)$ постоянна в D. Предположим теперь, что граница Γ не есть полярное множество, так что $E_1 = E_0 \cup E$ является собственным подмножеством Γ. Осталось показать, что функция $v(x)$ единственна. Предположим, что $v_1(x)$ — еще одна функция, удовлетворяющая условиям теоремы 5.21. Пусть $h(x) = v(x) - v_1(x)$. Тогда $h(x)$ гармонична и ограничена в D и $h(x) \to 0$, когда $x \to \zeta$ изнутри D, за исключением случая, когда ζ принадлежит полярному множеству E_1. Из обобщенного принципа максимума (теорема 5.16), примененного к функциям $h(x)$ и $-h(x)$, следует, что $h(x) \leqslant 0$ в D и $h(x) \geqslant 0$ в D, т. е. $h(x) \equiv 0$ в D. Это завершает доказательство теоремы 5.21.

Пусть снова множества D и Γ такие же, как в теореме 5.21. Точка $\zeta_0 \in \Gamma$ называется *иррегулярной точкой* (для задачи Дирихле), если на Г существует функция $f(\zeta)$, удовлетворяющая условиям теоремы 5.21, непрерывная в точке ζ_0 и такая, что соответствующая функция $v(x)$ из теоремы 5.21 разрывна в ζ_0. Можно более подробно описать природу иррегулярных точек и получить обращение теоремы 5.20.

Теорема 5.22. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^m$ и ζ_0 — конечная точка на границе Г области D. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *ζ_0 — иррегулярная точка для задачи Дирихле;*

(ii) *если E — пересечение дополнения к D с произвольным фиксированным шаром $C(\zeta_0, r)$, таким, что D расположено в неограниченной компоненте дополнения к E, то либо $C_{m-2}(E) = 0$, либо*

$$u(\zeta_0) > V, \tag{5.6.6}$$

где $u(x)$ — емкостный потенциал множества E, а V — его постоянная равновесия;

(iii) *в точке ζ_0 не существует барьера, удовлетворяющего условиям 2.6.2.*

Если область D не ограничена, то точка $\zeta_0 = \infty$ иррегулярна тогда и только тогда, когда $m = 2$ и выполняется условие (iii).

Следовательно, множество всех иррегулярных точек на Г *образует полярное множество типа F_σ.*

Мы уже доказали, что (i) $\Rightarrow$ (iii) (теорема 2.10) и что (i) $\Rightarrow$ (ii) (теорема 5.20). Кроме того, из теорем 5.19 и 5.20 следует, что если для некоторого множества E условие (ii) не выполнено, то в точке ζ_0 существует барьер, так что ζ_0 — регулярная точка. Таким образом, имеет место импликация (iii) $\Rightarrow$ (ii). Остается доказать импликацию (ii) $\Rightarrow$ (i). Этим мы сейчас и займемся.

Предположим сначала, что вся граница Г, включая точку ∞, является полярным множеством. Тогда $m = 2$ и, по теореме 5.16, все ограниченные сверху субгармонические функции в D являются константами. В этом случае выполнены все три условия (i), (ii), (iii) и доказывать нечего. Таким образом, можно считать, что множество Г содержит по крайней мере одну регулярную граничную точку $\zeta_1 \neq \zeta_0$.

Пусть сначала $C_{m-2}(E) = 0$. Положим $f(\zeta) = \operatorname{ctg} |\zeta - \zeta_0|$ на границе области D и построим на D функцию $v(x)$ с граничными значениями $f(\zeta)$ (теорема 5.21). Тогда $v(x)$ — неотрицательная и ограниченная гармоническая функция в D. Поскольку $v(x) > 0$ в окрестности регулярной граничной точки ζ_1 области D, то по принципу максимума $v(x) > 0$ в D. Так как $C_{m-2}(E) = 0$, то в силу теоремы 5.18 существует гармоническое продолжение функции $v(x)$ в окрестность точки ζ_0. Таким образом, по принципу максимума $v(\zeta_0) > 0$ и $v(x) \to v(\zeta_0) \neq f(\zeta_0)$, когда $x \to \zeta_0$ изнутри D. Следовательно, ζ_0 — иррегулярная точка.

Предположим теперь, что $C_{m-2}(E) > 0$, но выполнено условие (5.6.6). Пусть сначала $m > 2$. Обозначим через $u(x)$ емкостный потенциал множества E и зададим граничные значения, полагая $f(\zeta) = V$ в точках $\zeta \in E \cap \Gamma$ и $f(\zeta) = u(\zeta)$ во всех других точках границы Γ (в частности, $f(\infty) = 0$). Пусть $v(x)$ — соответствующее решение задачи Дирихле, построенное по теореме 5.21.

Заметим, что, согласно теореме 5.17, $u(x) = V$, и поэтому, в силу теоремы 5.1, функция $u(x)$ непрерывна во всех точках $E \cap \Gamma$, за исключением некоторого полярного множества. Следовательно, функция $f(\zeta)$ непрерывна и совпадает с $u(\zeta)$ во всех точках Γ, исключая полярное множество. Далее, функция $u(x)$ ограничена и гармонична в D, непрерывна в $\bar{D}$ вне полярного множества и совпадает с $f(\zeta)$ на Γ, за исключением некоторого полярного множества. Таким образом, из теоремы 5.21 следует, что $v(x) = u(x)$.

Для того чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно показать, что при выполнении условия (5.6.6) функция $u(x)$ не может стремиться к V при $x \to \zeta_0$ изнутри D. В самом деле, предположим противное, т. е. что

$$u(x) \to V, \quad \text{когда} \quad x \to \zeta_0 \quad \text{изнутри} \quad D. \tag{5.6.7}$$

Тогда для данного $\varepsilon > 0$ при всех достаточно малых ρ имеем

$$u(x) < V + \varepsilon \quad \text{почти всюду в } D(\zeta_0, \rho). \tag{5.6.8}$$

Действительно, в силу (5.6.7), это выполнено для точек области D. Точки множества $D(\zeta_0, \rho) - D$ расположены в E, и поэтому, согласно теореме 5.17, в этих точках $u(x) = V$ вне некоторого полярного множества. Так как полярное множество имеет нулевую m-мерную меру, то

$$\int\limits_{D(\zeta_0,\, \rho)} \{u(x) - V\}\, dx \leqslant o(\rho^m) \quad \text{при} \quad \rho \to 0.$$

Поскольку функция $u(x)$ субгармонична, отсюда следует, что $u(\zeta_0) \leqslant V$. Это противоречит неравенству (5.6.6).

Если $m = 2$, наши рассуждения нужно несколько модифицировать. Пусть ζ — точка множества E и $E(\zeta)$ — круг $|z - \zeta| < \frac{1}{2}|\zeta - \zeta_0|$. Очевидно, конечное множество таких кругов покрывают часть множества E, для которой $|\zeta - \zeta_0| \geqslant 1/n$, и поэтому счетное множество кругов $E(\zeta)$ покрывают множество $E - \{\zeta_0\}$. Так как множество E не полярное, то существует по крайней мере одна такая точка $\zeta = \zeta_1$, что множество $E_1 = E \cap \overline{E(\zeta_1)}$ не полярное и поэтому имеет положительную емкость. Пусть

$u_1(x)$ и $u(x)$ — соответственно емкостные потенциалы множеств E_1 и E. Положим

$$f(\zeta)=\begin{cases} V-u_1(\zeta) & \text{на } E, \\ u(\zeta)-u_1(\zeta) & \text{во всех других точках } \Gamma. \end{cases}$$

Тогда, в силу (5.5.5), функция $f(\zeta)$ ограничена на Γ и непрерывна вне полярного множества. Поэтому задача Дирихле имеет решение по теореме 5.21; нетрудно видеть, что этим решением является функция

$$v(x) = u(x) - u_1(x).$$

Так же как выше, получаем, что при выполнении неравенства (5.6.6) нарушается условие (5.6.7). Поскольку функция $v_1(x)$ гармонична и, значит, непрерывна в точке ζ_0, функция $v(x)$ не может стремиться к $f(\zeta_0)$, когда $x \to \zeta_0$ изнутри D. Следовательно, ζ_0 — иррегулярная точка. Это завершает доказательство импликации (ii) $\Rightarrow$ (i), так что условия (i), (ii) и (iii) эквивалентны.

Покроем теперь конечные точки множества Γ счетным числом таких замкнутых шаров $C(x_\nu, r_\nu)$, что $2r_\nu$ не превышает диаметра области D. Пусть E_ν — пересечение дополнения к D с шаром $C(x_\nu, r_\nu)$ и F_ν — множество тех точек $\Gamma \cap E_\nu$, в которых выполняется неравенство (5.6.6). Поскольку потенциалы являются полунепрерывными сверху функциями, F_ν есть множество типа F_σ. Следовательно, таким же будет и множество всех иррегулярных точек, так как оно имеет вид $\bigcup F_\nu$. Согласно теореме 5.20, это полярное множество. Теорема 5.22 доказана.

5.7. ОБОБЩЕННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ И ФУНКЦИЯ ГРИНА

Обобщенное решение Винера задачи Дирихле, которое было получено в теореме 5.21, имеет много важных приложений. В частности, оно позволяет распространить всю развитую в § 3.6—3.8 теорию на произвольные области $D \subset \mathbb{R}^m$. Допуская исключительные полярные множества на границе области D, к которым относится и множество иррегулярных точек, можно избавиться от условия регулярности области D. Если подходящим образом модифицировать определения, то многие утверждения и доказательства гл. 3 почти не изменятся. Поэтому в этом параграфе мы ограничимся лишь формулировками определений и теорем, оставляя их доказательства читателю, кроме тех случаев, когда они существенно отличаются от приведенных в гл. 3.

5.7.1. Гармонические продолжения

Пусть D — область в $\mathbb{R}^m$, граница Γ которой не является полярным множеством, и пусть $f(\zeta)$ — непрерывная функция на Γ. Обозначим через $v(x)$ функцию на D, существование и единственность которой устанавливаются теоремой 5.21. Тогда можно сказать, что $v(x)$ *является гармоническим продолжением функции* $f(\zeta)$ *из* Γ *в* D.

Функция $v(x)$ характеризуется следующими свойствами:

(i) $v(x)$ — ограниченная гармоническая функция в D (причем $\min_{\zeta \in \Gamma} f(\zeta) \leqslant v(x) \leqslant \max_{\zeta \in \Gamma} f(\zeta)$);

(ii) если ζ — произвольная регулярная точка границы Γ, то

$$v(x) \to f(\zeta), \quad \text{когда } x \to \zeta \text{ изнутри } D. \tag{5.7.1}$$

В частности, условие (5.7.1) выполняется для всех точек $\zeta \in \Gamma$, которые не принадлежат полярному F_σ-множеству Γ_0, не зависящему от конкретного выбора функции f.

Теперь можно распространить наше определение, как в п. 2.7.2, на полунепрерывные функции $f(\zeta)$, принимая во внимание, что если $f_n(\zeta)$ — монотонная последовательность непрерывных функций на Γ с гармоническими продолжениями $u_n(x)$, то последовательность $u_n(x)$ сходится к пределу $u(x)$, который является гармонической функцией в D или тождественно равен бесконечности. Далее, $u(x)$ зависит только от предела $f(\zeta)$ последовательности $f_n(\zeta)$ и не зависит от конкретного выбора последовательности. Доказательство этих утверждений идентично доказательству теоремы 2.17, и они позволяют нам определить гармоническое продолжение из Γ в D полунепрерывных функций $f(\zeta)$.

При этих определениях остаются справедливыми утверждение и доказательство теоремы 3.10 для любой области из $\mathbb{R}^m$, дополнение которой не является полярным множеством. Для каждой такой области D определена гармоническая мера $\omega(x, e)$, где e — борелевское множество на границе Γ области D, а x — точка области D, удовлетворяющая условиям теоремы 3.10. При помощи этой меры гармоническое продолжение из Γ в D непрерывной или полунепрерывной функции $f(\zeta)$ задается формулой

$$u(x) = \int_\Gamma f(\zeta)\, d\omega(x, e_\zeta). \tag{5.7.2}$$

Затем можно использовать формулу (5.7.2) для того, чтобы определить [1]) гармоническое продолжение любой конечной боре-

[1]) Брело [1939a]. Брело также доказал, что даже в этом общем случае решение совпадает с решением (2.6.1), получаемым методом Перрона.

левской функции f, интегрируемой относительно меры $\omega(x, e)$. Условие интегрируемости снова не зависит от выбора точки x.

Стоит отметить следующее утверждение.

Теорема 5.23. *Если D — область в $\mathbb{R}^m$, F — граница области D и e — произвольное полярное множество на F, то e имеет гармоническую меру нуль. В частности, множество иррегулярных точек имеет гармоническую меру нуль. Любая точка ζ_0 имеет гармоническую меру нуль, за исключением, может быть, случая $m > 2$ и $\zeta_0 = \infty$.*

Предположим сначала, что e — произвольное компактное множество на границе области D. Для любой точки ζ обозначим через $\delta(\zeta) = \delta(\zeta, e)$ ее расстояние до множества e и положим

$$\delta_n(\zeta) = \max(1 - n\delta(\zeta), 0).$$

Ясно, что $\delta_n(\zeta)$ образуют убывающую последовательность непрерывных функций на Γ и что $\delta_n(\zeta) \to \chi_e(\zeta)$ при $n \to \infty$, где $\chi_e(\zeta)$ — характеристическая функция множества e. Таким образом, если $v_n(x)$ — гармонические продолжения функций $\delta_n(\zeta)$, то при $n \to \infty$

$$v_n(x) \to \omega(x, e),$$

где $\omega(x, e)$ — гармоническая мера множества e.

Предположим теперь, что ζ_0 — регулярная точка в дополнении d к множеству e относительно границы Γ области D. Тогда $\delta_n(\zeta)=0$ для $n \geqslant n_0$ в некоторой окрестности точки ζ_0, поэтому существует такая окрестность N_0 точки ζ_0, что $v_{n_0}(x) < \varepsilon$, $x \in N_0$. Таким образом, $\omega(x, e) < \varepsilon$, $x \in N_0$. Так как $\omega(x, e) \geqslant 0$ в D, то

$$\omega(x, e) \to 0, \quad \text{когда} \quad x \to \zeta_0 \quad \text{изнутри} \quad D,$$

где ζ_0 — произвольная регулярная точка множества d. Если e — полярное множество, то из теоремы 5.21 следует, что единственной ограниченной гармонической функцией, обладающей этим свойством, является тождественный нуль, так что в этом случае $\omega(x, e) = 0$.

Более общо, если $e \subset \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} e_\nu$, где e_ν — компактные полярные множества, то из свойств меры следует, что $\omega(x, e) \leqslant \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \omega(x, e_\nu) = 0$. Значит, наше утверждение справедливо для любого полярного множества e.

Приведенные выше рассуждения показывают, в частности, что любая конечная граничная точка имеет гармоническую меру нуль. При $m = 2$ с помощью конформного отображения это заключение можно распространить и на точку $\zeta_0 = \infty$. Теорема 5.23 доказана.

Если $m > 2$, то точка $\zeta_0 = \infty$ может иметь положительную гармоническую меру. Чтобы привести соответствующий пример, рассмотрим в качестве D область $|x| > 1$, а в качестве e точку ∞. Тогда $\omega(x, e) = 1 - |x|^{2-m}$.

Вообще, для того чтобы реализовалась ненулевая гармоническая мера, дополнение к D должно быть очень мало в ∞. Действительно, пусть $\omega(x)$ — гармоническая мера точки $\zeta_0 = \infty$ в D; предположим, что $\omega(x)$ не равна тождественно нулю. Тогда какая-нибудь компонента D_0 множества $\{\omega(x) > \varepsilon\}$ в D не ограничена при $\varepsilon > 0$. В противном случае для граничной точки ζ компоненты D_0 имелось бы две возможности:

$$\overline{\lim_{x\to\zeta}}\, \omega(x) \leqslant \varepsilon, \tag{5.7.3}$$

если $\zeta \in D$ (так как тогда $\omega(x)$ непрерывна в точке ζ), и

$$\overline{\lim_{x\to\zeta}}\, \omega(x) = 0,$$

если ζ — регулярная граничная точка D. Следовательно, неравенство (5.7.3) выполнялось бы для всех точек ζ, за исключением некоторого полярного множества, и поэтому по теореме 5.16 было бы $\omega(x) \leqslant \varepsilon$ в D_0 в противоречие с предположением. Таким образом, поскольку $\omega(x)$ ограничена в D_0, из доказательства теоремы 4.15 следует, что $\theta(r) = o(r^{m-1})$, где $\theta(r)$ есть $(m-1)$-мерная площадь пересечения дополнения к D_0 со сферой $S(0, r)$.

В частности, если D_1 — область в $\mathbb{R}^m$, дополнительная к D_0, то гармоническая мера точки $\zeta_0 = \infty$ равна нулю в D_1.

5.7.2. Обобщенная функция Грина

Теперь мы можем распространить понятие функции Грина на произвольные области $D \subset \mathbb{R}^m$. Пусть Γ — граница области D. Предположим сначала, что $m = 2$ и что Γ — полярное множество. Тогда из теоремы 5.16 следует, что единственными ограниченными сверху субгармоническими в D функциями являются константы. В этом случае говорят, что область D не имеет функции Грина. Во всех других случаях можно определить функцию Грина $g(x, \xi, D)$. Это можно сделать, например, в точности так же, как в § 3.7, исключая случай, когда $m = 2$ и D не имеет ни одной внешней точки. Для того чтобы охватить и этот случай, удобна несколько иная конструкция.

Пусть даны область D и точка $\xi \subset D$. Будем говорить, что $g(x, \xi, D)$ является (*обобщенной*) *функцией Грина* области D, если $g(x, \xi, D)$ обладает следующими свойствами:

(i) Функция g гармонична в D, за исключением точки $x = \xi$.

(ii)′ Если ζ — граничная точка D, не принадлежащая некоторому полярному множеству E, то $g(x, \xi, D) \to 0$, когда $x \to \zeta$

изнутри D; если же $\zeta \in E$, то $g(x, \xi, D)$ остается ограниченной, когда $x \to \zeta$ изнутри D.

(iii) Функция $g + \log|x - \xi|$ остается гармонической в точке $x = \xi$, если $m = 2$; функция $g - |x - \xi|^{2-m}$ остается гармонической в точке $x = \xi$, если $m > 2$.

Условия (i) и (iii) здесь в точности те же самые, что и в определении классической функции Грина (п. 1.5.1). В то же время условие (ii)′ является более слабым, чем условие (ii), и переходит в него, если все граничные точки области D регулярны. Таким образом, классическая функция Грина является частным случаем обобщенной функции Грина.

Имеет место следующая [1])

Теорема 5.24. *Если D — произвольная область в $\mathbb{R}^m$, граница которой не является полярным множеством, то (обобщенная) функция Грина области D существует и единственна.*

Прежде всего докажем единственность. Предположим, что две функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ удовлетворяют условиям (i), (ii)′ и (iii). Пусть

$$h(x) = g_1(x) - g_2(x).$$

Тогда функция $h(x)$ гармонична в D, и если ζ — граничная точка D, не принадлежащая исключительному множеству E, то

$$h(x) \to 0, \quad \text{когда} \quad x \to \zeta \quad \text{изнутри} \quad D. \tag{5.7.4}$$

Покажем теперь, что функция $h(x)$ ограничена в D. Предположим противное, т. е. предположим, что существует такая последовательность точек $x_n \in D$, что $h(x_n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Переходя, если понадобится, к подпоследовательности, можно считать, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$, где $x \in \mathbb{R}^m$ или же $x = \infty$. Точка x не может принадлежать области D, так как функция h гармонична и потому непрерывна в D. Точно так же x не может быть граничной точкой D, поскольку в силу (ii)′ функции $g_1(x_n)$, $g_2(x_n)$, а значит, и $h(x_n)$ остаются ограниченными при $x_n \to x$. Таким образом, мы пришли к противоречию. Следовательно, функция $h(x)$ ограничена в D.

Далее, по условию теоремы граница D не является полярным множеством. В то же время исключительное множество $E_1 \cup E_2$, соответствующее функциям g_1 и g_2, полярное. Поэтому (5.7.4) выполняется по крайней мере для одной точки ζ (возможно, ∞). Из теоремы 5.16 следует теперь, что $h(x) \geqslant 0$ и $h(x) \leqslant 0$, так что

[1]) Обобщенная функция Грина введена Булиганом [1924], который доказал, что исключительное множество в (ii)′ — это в точности множество иррегулярных граничных точек.

$h(x) \equiv 0$ в D. Следовательно, если функция $g(x, \xi, D)$ существует, то она единственна.

Установим теперь существование функции $g(x, \xi, D)$. Допустим сначала, что $m > 2$, и положим

$$f(x) = -|x - \xi|^{2-m}$$

на границе Γ области D. Тогда $f(x)$ ограничена и непрерывна на Γ, включая, возможно, и точку ∞. Следовательно, по теореме 5.21, функция $f(x)$ обладает таким гармоническим продолжением $u(x)$ в D, что функция $u(x)$ ограничена в D и $u(x) \to f(\zeta)$, когда x стремится к произвольной регулярной граничной точке ζ изнутри D. Таким образом, функция

$$g(x, \xi, D) = u(x) + |x - \xi|^{2-m}$$

удовлетворяет условиям (i), (ii)′ и (iii).

Предположим наконец, что $m = 2$. Обозначим через Γ_N пересечение дополнения к области D и круга $|x| \leqslant N$. Если бы Γ_N для каждого N было полярным множеством, то граница Γ также была бы полярным множеством, поскольку $x = \infty$ — полярное множество. Но это противоречит условию теоремы. Поэтому для некоторого $N > 0$ множество Γ_N имеет положительную емкость. Выберем такое N и определим соответствующий емкостный потенциал

$$V(x) = \int_{\Gamma_N} \log|x - \zeta|\, d\mu e_\zeta.$$

Пусть V — постоянная равновесия. Положим

$$f(x) = \begin{cases} \log|x-\xi| - V, & x \in \Gamma_N, \\ \log|x-\xi| - V(x), & x \in \Gamma - \Gamma_N. \end{cases}$$

Тогда функция $f(x)$ непрерывна всюду, за исключением тех точек $\Gamma_N \cap (|x| = N)$, в которых $V(x) \neq V$, т. е., в силу теоремы 5.17, непрерывна вне полярного множества. Следовательно, существует ее единственное гармоническое продолжение $u(x)$. Кроме того, поскольку $f(x)$ равномерно ограничена на Γ, $u(x)$ равномерно ограничена в $\mathbb{R}^2$. Можно положить

$$g(x, \xi, D) = u(x) + V(x) - \log|x - \xi|.$$

Заметим, что, когда x приближается к произвольной граничной точке ζ_0 области D, функция $g(x, \xi, D)$ остается ограниченной. Более того, для всех регулярных точек ζ_0, в которых потенциал $V(x)$ непрерывен, т. е. для всех ζ_0, не принадлежащих некоторому полярному множеству, $g(x, \xi, D) \to 0$, когда $x \to \zeta_0$. Следовательно, функция g удовлетворяет условию (ii)′, а также условиям (i) и (iii). Теорема 5.24 доказана.

Следующая теорема принадлежит Фростману [1935].

Теорема 5.25. *Предположим, что функция* $u(x)$ *субгармонична в области* $D \subset \mathbb{R}^m$ *и обладает там гармонической мажорантой* $v(x)$, *так что* $u(x) \leqslant v(x)$ *и* $v(x)$ — *гармоническая функция в* D. *Тогда для* $x \in D$

$$u(x) = h(x) - \int_D g(x, \xi)\, d\mu e_\xi, \qquad (5.7.5)$$

где $g(x, \xi)$ — *обобщенная функция Грина области* D, $h(x)$ — *наименьшая гармоническая мажоранта функции* $u(x)$ *в* D *и* μ — *мера Рисса функции* $u(x)$ *в* D.

Для доказательства теоремы 5.25 нам понадобится следующая

Лемма 5.6. *Функция Грина* $g(x, \xi, D)$ *является нижней огибающей всех таких функций* $g(x)$, *которые удовлетворяют условиям* (i) *и* (iii) *п.* 5.7.1 *и неравенству*

$$g(x) > 0 \quad \text{в} \quad D. \qquad (5.7.6)$$

Кроме того, если D_n — *последовательность областей с компактным замыканием, регулярных для задачи Дирихле и таких, что* $D_n \subset D_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$, *то*

$$g(x, \xi, D_n) \to g(x, \xi, D) \quad \textit{при} \quad n \to \infty. \qquad (5.7.7)$$

Покажем прежде всего, что функция $g(x, \xi, D)$ удовлетворяет (5.7.6). Из определения следует, что $-g(x, \xi, D)$ субгармонична в D, ограничена сверху и $-\overline{\lim}\, g(x, \xi, D) \leqslant 0$, когда $x \to \zeta$ изнутри D для всех граничных точек $\zeta \in \Gamma$, не принадлежащих некоторому полярному множеству. Следовательно, по теореме 5.16, $-g \leqslant 0$ в D, а так как g не постоянна, то выполняется неравенство (5.7.6).

Предположим теперь, что $u(x)$ — еще одна функция, удовлетворяющая условиям (i), (iii) из п. 5.7.1 и неравенству $u(x) > 0$ в D. Рассмотрим функцию

$$h(x) = g(x) - u(x).$$

Она гармонична в D и остается ограниченной сверху, когда x стремится к произвольной граничной точке ζ области D. Кроме того, в силу (ii)',

$$\overline{\lim_{x \to \zeta}}\, h(x) \leqslant 0$$

для всех точек ζ из Γ, лежащих вне некоторого полярного множества. Следовательно, по теореме 5.16, $h(x) \leqslant 0$ в D. Таким образом, $g(x, \xi, D)$ при любом $x \in D$ не превосходит любой функции $g(x)$, удовлетворяющей условиям (i), (iii) и неравенству (5.7.6). А поскольку $g(x, \xi, D)$ сама удовлетворяет этим условиям, то она является точной нижней огибающей, что и характеризует функцию Грина.

Пусть теперь D_n — последовательность областей из условия леммы, $g_n(x) = g(x, \xi, D_n)$, $g_0(x) = g(x, \xi, D)$. Ясно, что функции $g_n(x)$ возрастают с возрастанием n. Действительно, если $m > n$, $x \in D_n$, то $g_m(x) - g_n(x)$ гармонична в D_n. Если Γ_n — граница области D_n, то $g_n(x)$ непрерывна и равна нулю на Γ_n, в то время как $g_m(x) \geqslant 0$ на Γ_n. Следовательно, $g_m(x) - g_n(x) \geqslant 0$ в D_n. Таким образом, для фиксированных x и ξ из D функции $g_n(x)$ образуют возрастающую последовательность положительных гармонических функций в окрестности точки x. Поэтому $g_n(x) \to G(x)$ при $n \to \infty$, где функция $G(x)$ гармонична и удовлетворяет в D условиям (i), (iii) и (5.7.6), или же $G(x) \equiv +\infty$. Например, для того чтобы проверить условие (iii), заметим, что если $\xi \in D_n$, то функция $g_m(x) - g_n(x)$ гармонична в окрестности точки $x = \xi$ и, следовательно, в этой же окрестности $G(x) - g_n(x)$ есть гармоническая функция.

Итак, в силу первой части леммы, достаточно доказать следующее утверждение: если функция $g(x)$ удовлетворяет в области D условиям (i), (iii) и неравенству (5.7.6), то $g(x) \geqslant G(x)$. Действительно, функция $G(x)$ будет тогда точной нижней огибающей всех таких функций $g(x)$ и поэтому, по первой части леммы, $G(x) = g(x, \xi, D)$.

Заметим, что, по предположению, $h_n(x) = g(x) - g_n(x) \geqslant 0$ на границе Γ_n области D_n и что $h_n(x)$ гармонична в D_n. Следовательно, $h_n(x) \geqslant 0$, т. е. $g_n(x) \leqslant g(x)$ в D_n. Фиксируем точку x и устремим n к бесконечности; получим, что $G(x) \leqslant g(x)$, как и требовалось. Поскольку существует конечная функция $g(x) = g(x, \xi, D)$, функция $G(x)$ не равна $+\infty$, а значит, $G(x) = g(x, \xi, D)$, как и требовалось. Лемма 5.6 доказана.

Докажем теперь теорему 5.25. Если граница области D — полярное множество, то $m = 2$ и в D не существует ограниченной сверху субгармонической функции, отличной от константы. Следовательно, в предположениях теоремы $u(x) - v(x) = \text{const}$, так что $u(x)$ гармонична в D и сама является своей наименьшей гармонической мажорантой. Поэтому в этом случае теорема 5.25 верна и интеграл в (5.7.5) равен нулю.

Предположим теперь, что граница области D не есть полярное множество, так что существует функция Грина $g(x, \xi, D)$. Пусть D_n — последовательность областей, удовлетворяющая условиям леммы 5.6. Например, в качестве D_n можно взять объединение конечного числа компактных гипершаров. Пусть E — фиксированное компактное подмножество в D. Будем считать, что последовательность D_n выбрана так, что $E \subset D_1$. Положим

$$\varphi_n(x) = \int_E g(x, \xi, D_n)\, d\mu e_\xi.$$

Тогда, как было показано при доказательстве теоремы 3.15,

$$\varphi_n(x) \to 0, \quad \text{когда} \quad x \to \zeta, \tag{5.7.8}$$

где ζ — произвольная точка на границе Γ_n области D_n. Предположим, что $v(x)$ — некоторая гармоническая мажоранта функции $u(x)$, и рассмотрим функцию

$$h(x) = u(x) + \varphi_n(x) - v(x).$$

Из теоремы Рисса о представлении следует, что функция $h(x)$ субгармонична в D_n. Далее, в силу (5.7.8), $\lim h(x) \leqslant 0$, когда x стремится к произвольной точке Γ_n изнутри области D_n. Следовательно, по принципу максимума, $h(x) \leqslant 0$, т. е. $v(x) \geqslant u(x) + \varphi_n(x)$.

Пусть теперь $n \to \infty$. Тогда последовательность $g(x, \xi, D_n)$ монотонно сходится для каждого фиксированного x к функции $g(x, \xi, D)$, причем все рассматриваемые функции положительны. Следовательно, используя условие (3.3.1) монотонной сходимости для интегралов, получаем, что $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ при $n \to \infty$ для каждого фиксированного x, где

$$\varphi(x) = \int_E g(x, \xi, D)\, d\mu e_\xi.$$

Таким образом, для любого компактного подмножества $E \subset D$ выполнено неравенство

$$v(x) \geqslant u(x) + \int_E g(x, \xi, D)\, d\mu e_\xi.$$

Взяв теперь вместо E любую из областей D_n, определим функции g_n, полагая $g_n(x) = g(x, \xi, D_n)$, если $x, \xi \in D_n$, и $g_n(x) = 0$ в противном случае.

Тогда, если точка x выбрана так, что $u(x) > -\infty$, имеем

$$\int_D g_n(x)\, d\mu e_\xi \leqslant v(x) - u(x) < +\infty.$$

Так как функции $g_n(x)$ возрастают вместе с n, то, снова применяя условие монотонной сходимости, получаем, что

$$\int_D g(x, \xi, D)\, d\mu e_\xi \leqslant v(x) - u(x) < +\infty.$$

Таким образом,

$$v(x) \geqslant u(x) + \int_D g(x, \xi, D)\, d\mu e_\xi = h(x). \tag{5.7.9}$$

Для доказательства теоремы 5.25 нам нужно еще показать, что $h(x)$ является наименьшей гармонической мажорантой функции $u(x)$. Очевидно, что $h(x)$ — мажоранта $u(x)$, а в силу неравенства (5.7.9) $h(x)$ не может превосходить никакой гармонической мажоранты функции $u(x)$. Поэтому остается только доказать, что $h(x)$ — гармоническая функция в D.

Для этого предположим, что $x \in D_1$, и представим функцию $h(x)$ в виде

$$h(x) = u(x) + \int_{D_1} g(x, \xi, D)\, d\mu e_\xi + \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x),$$

где

$$h_n(x) = \int_{D_{n+1}-D_n} g(x, \xi, D)\, d\mu e_\xi.$$

Все $h_n(x)$ — положительные гармонические функции, поэтому и $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$ — также гармоническая функция (поскольку эта сумма $\not\equiv \infty$). Согласно теореме Рисса о представлении, функция

$$h_0(x) = u(x) + \int_{D_1} g(x, \xi)\, d\mu e_\xi =$$
$$= u(x) + \int_{D_1} \{g(x, \xi) + K_m(x-\xi)\}\, d\mu e_\xi - \int_{D_1} K_m(x-\xi)\, d\mu e_\xi$$

гармонична в D_1, поэтому гармонической является и функция $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)$. Это завершает доказательство теоремы 5.25.

5.7.3. Свойство симметрии функции Грина

Теорема 5.26. *Предположим, что D — область в $\mathbb{R}^m$, дополнение к которой не является полярным множеством. Тогда функция Грина $g(x, \xi, D)$ удовлетворяет условию*

$$g(x, \xi, D) = g(\xi, x, D).$$

В частности, g является гармонической функцией переменного ξ для фиксированного x из D, $\xi \neq x$.

Предположим сначала, что D — область с компактным замыканием, регулярная для задачи Дирихле. Тогда

$$g(x, \xi) = -K(x-\xi) + \int_{\Gamma} K(\eta-\xi)\, d\omega(x, e_\eta), \qquad (5.7.10)$$

где $K(x)$ определено формулой (3.5.1). Действительно, функция

$$h(x) = g(x, \xi) + K(x - \xi)$$

гармонична в D и непрерывна в $\overline{D}$. Поэтому, согласно теореме 3.10,

$$h(x) = \int_{\Gamma} h(\eta)\, d\omega(x, e_\eta).$$

Кроме того, на границе Γ области D имеем $g(\eta, \xi) = 0$, $h(\eta) = K(\eta - \xi)$, откуда следует (5.7.10).

Фиксируем теперь точку x и будем рассматривать $g(x, \xi, D)$ в (5.7.10) как функцию от ξ. Обозначим эту функцию через $\varphi(\xi) = g(x, \xi, D)$. Так как положительная мера $\omega(x, e_\eta)$ распределена на Γ, то, согласно теореме 3.6, функция $\varphi(\xi)$ определена и гармонична всюду на D, за исключением точки $x = \xi$. Далее, функция $\varphi(\xi) + K(x - \xi)$ остается гармонической в точке $\xi = x$ и $\varphi(\xi) \geqslant 0$ в D. Поэтому, по лемме 5.6, $\varphi(\xi) \geqslant g(\xi, x, D)$, т. е. $g(x, \xi) \geqslant g(\xi, x)$. Совершенно аналогично доказывается, что $g(\xi, x) \geqslant g(x, \xi)$, так что $g(x, \xi) = g(\xi, x)$. Для произвольной области это же утверждение следует теперь из леммы 5.6. Таким образом, теорема 5.26 доказана.

5.7.4. Продолженная функция Грина и формула Пуассона — Иенсена

Мы закончим этот параграф доказательством обобщенного варианта теоремы 3.14. Оказывается, можно опустить требование, чтобы граница области D была регулярна и имела нулевую m-мерную меру.

Теорема 5.27. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^m$. Пусть Γ_1 и Γ_2 — множества соответственно регулярных и иррегулярных граничных точек области D, так что $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ — граница D. Обозначим через $D_0 = \mathbb{R}^m - \overline{D}$ внешность D. Тогда для $\xi \in D$ существует*[1] *единственная функция $g(x, \xi)$, которая совпадает с функцией Грина для $x \in D$, равна нулю при $x \in D_0$ и субгармонична в $\mathbb{R}^m - \{\xi\}$. Для $x_0 \in \Gamma$ имеем*

$$g(x_0, \xi) = \overline{\lim}\, g(x, \xi), \tag{5.7.11}$$

где верхний предел берется при $x \to x_0$ изнутри D.

Более того, если $u(x)$ субгармонична в $\overline{D}$ с мерой Рисса μ, то для $x \in D$

$$u(x) = \int_{\Gamma_1} u(\zeta)\, d\omega(x, e_\zeta) - \int_{D \cup \Gamma_2} g(\eta, x)\, d\mu e_\eta, \tag{5.7.12}$$

где $\omega(x, e)$ — гармоническая мера в точке x.

[1]) Эти свойства функции $g(x, \xi)$ см. у Брело [1955].

Вернемся к уравнению (5.7.10) предыдущего пункта. Оно справедливо для любой ограниченной области D, поскольку правая часть очевидным образом удовлетворяет условиям (i), (ii)′ и (iii) п. 5.7.2. Так как функция $K(x-\xi)$ непрерывна на Γ, то верхний предел в (5.7.11) равен нулю во всех точках Γ_1. С другой стороны, в точках $x_0 \in \Gamma_2$ этот предел положителен. Действительно, в противном случае $-g(x, \xi)$ была бы функцией, удовлетворяющей условиям (i), (ii)′ и (iii) теоремы 5.19. Это означает, что x_0 была бы регулярной граничной точкой D в противоречие с предположением. Таким образом, функция $g(x_0, \xi)$ положительна на Γ_2 и равна нулю на Γ_1.

Для произвольной точки x не будем пользоваться для определения функции g формулой (5.7.11), а вместо этого положим

$$g(x, \xi) = -K(x-\xi) + \int\limits_{\Gamma} K(\eta - x)\, d\omega(\xi, e_\eta). \qquad (5.7.13)$$

Согласно (5.7.10) и теореме 5.26, правая часть совпадает с функцией Грина, когда x и $\xi \in D$. Далее, для $x \in D_0$ функция $K(\eta - x)$ гармонична в $\bar{D}$, так что правая часть (5.7.13) в этом случае равна нулю. Наконец, в силу теоремы 3.7, эта правая часть является для фиксированного ξ субгармонической функцией переменного x в $\mathbb{R}^m - \{\xi\}$.

Следовательно, равенство (5.7.13) определяет продолженную функцию Грина $g(x, \xi)$, удовлетворяющую условиям теоремы 5.27. Покажем теперь, что любая такая функция может быть задана для $x_0 \in \Gamma$ равенством (5.7.11).

Предположим сначала, что $x_0 \in \Gamma_1$. Тогда, согласно теореме 5.20, Γ_2 является ограниченным полярным множеством. Поэтому, в силу теоремы 5.11, в $\mathbb{R}^m$ существует субгармоническая функция $h(x)$, конечная в точке x_0 и равная $-\infty$ на Γ_2. Вычитая, если необходимо, константу, можем считать, что $h(x) < 0$ на Γ. Положим для любого $\varepsilon > 0$

$$g_\varepsilon(x) = g(x, \xi) + \varepsilon h(x).$$

Тогда, очевидно, $\overline{\lim}\, g_\varepsilon(x) < 0$, когда x стремится к произвольной точке $x_1 \in \Gamma$ из D_0 или из D. Таким образом, точка x_1 есть центр шара $N(x_1)$, такого, что $g_\varepsilon(x) < 0$, $x \in N(x_1) - \Gamma$. Объединение шаров $N(x_1)$ образует открытое множество N, содержащее Γ и такое, что $g_\varepsilon(x) < 0$ в $N - \Gamma$. Так как функция $g_\varepsilon(x)$ субгармонична в N, то по принципу максимума $g_\varepsilon(x) < 0$ в N.

Действительно, в противном случае функция $g_\varepsilon(x)$ достигала бы максимума в N на компактном множестве Γ. В частности, $g_\varepsilon(x_0) < 0$, т. е. $g(x_0, \xi) < -\varepsilon h(x_0)$. Так как ε произвольно, получаем, что $g(x_0, \xi) \leqslant 0$. Следовательно, на Γ_1 выполнено равенство (5.7.11).

Итак, функция $g(x_0, \xi)$ определена вне полярного множества Γ_2. Из теоремы 5.18 и из (5.5.6) теперь следует, что на множестве Γ_2 функция g должна задаваться равенством (5.7.11). Это доказывает единственность $g(x, \xi)$, а также тот факт, что функции, задаваемые равенствами (5.7.11) и (5.7.13), тождественны на Γ.

Уравнение (5.7.13) можно переписать в виде

$$\int_{\Gamma} K(\xi-\eta)\, d\omega(x, e_\xi) = K(x-\eta) + g(\eta, x), \quad x \in D, \quad \eta \in \mathbb{R}^m - \{x\}.$$

Это требуемое обобщение леммы 3.9. Доказательство теоремы 5.27 теперь завершается точно так же, как в п. 3.7.3. Так как $g(\eta, x) = 0$ вне $D \bigcup \Gamma_2$, то второй интеграл в (5.7.12) можно рассматривать лишь на $D \bigcup \Gamma_2$. Далее, поскольку по теореме 5.23 множество Γ_2 имеет гармоническую меру нуль, то первый интеграл в (5.7.12) нужно брать только по множеству Γ_1. Таким образом, по отношению к формуле Пуассона — Иенсена иррегулярные граничные точки ведут себя как внутренние точки области D.

Теорему 5.27 нельзя распространить на неограниченные области, не делая дополнительных предположений о поведении функции $u(x)$ вблизи ∞. Например, функция $u(x) = \alpha x_1$ гармонична в $\mathbb{R}^m$ и равна нулю на подпространстве $x_1 = 0$. Таким образом, $u(x) = 0$ на границе полупространства D_1, задаваемого неравенством $x_1 > 0$, однако $u(x)$ не является тождественным нулем, как того требует формула Пуассона—Иенсена. В то же время если $m = 2$, то теорема 5.27 распространяется на неограниченные области D, содержащие внешние точки, в предположении что функция $u(x)$ остается субгармонической в ∞. Дело в том, что такие области отображаются на ограниченные области при помощи конформного отображения расширенной комплексной плоскости.

Заметим также, что можно обобщить теоремы 3.15—3.17, хотя понятие иррегулярной граничной точки в этом случае требует некоторой модификации. При условиях теоремы 5.27 из теоремы 5.25 следует, что наименьшая гармоническая мажоранта функции $u(x)$ в D равна

$$\int_{\Gamma_1} u(\xi)\, d\omega(x, e_\xi) - \int_{\Gamma_2} g(\eta, x)\, d\mu e_\eta.$$

Эта мажоранта является гармоническим продолжением функции $u(x)$ из Γ в D тогда и только тогда, когда $\mu(\Gamma_2) = 0$. Последнее условие выполняется, например, когда функция $u(x)$ конечна в каждой точке множества Γ_2. Действительно, если бы в этом случае было $\mu(\Gamma_2) > 0$, то можно было бы найти компактное подмножество $E \subset \Gamma_2$, на котором функция $u(x)$ ограничена снизу и $\mu(E) > 0$. Тогда множество E имело бы положительную емкость, что противоречит полярности множества Γ_2.

Аналогичные замечания относятся к теоремам 3.16 и 3.17. Так, для $\alpha > 0$ функции $\alpha \cdot \log |z|$ гармоничны в проколотом круге $D = \{0 < |z| < 1\}$, субгармоничны в открытой плоскости и совпадают на границе области D, хотя и не равны тождественно.

5.8. ИЗМЕРИМОСТЬ ПО ЕМКОСТИ И СИЛЬНАЯ СУБАДДИТИВНОСТЬ

В этом параграфе мы изложим важные результаты Шоке [1955] об измеримости по емкости аналитических и, в частности, борелевских множеств. В соответствии с этим мы будем рассматривать функцию множества $\varphi(F)$, определенную на замкнутых (и потому компактных) подмножествах некоторого компактного метрического пространства S. Можно представлять себе S, например, как замкнутый шар в $\mathbb{R}^m$. Потребуем, чтобы наша функция множества удовлетворяла следующим условиям:

(i) $0 \leqslant \varphi(F) < \infty$ (φ конечна и положительна).

(ii) Если $F_1 \subset F_2$, то $\varphi(F_1) \leqslant \varphi(F_2)$ ($\varphi(F)$ возрастает вместе с F).

(iii) Для данных F и $\varepsilon > 0$ существует такое множество F_1, содержащее F в своей внутренности, что

$$\varphi(F_1) < \varphi(F) + \varepsilon$$

($\varphi(F)$ полунепрерывна сверху).

(iv) Для любой пары компактных множеств F_1 и F_2

$$\varphi(F_1 \cup F_2) + \varphi(F_1 \cap F_2) \leqslant \varphi(F_1) + \varphi(F_2)$$

($\varphi(F)$ сильно субаддитивна).

Очевидно, из (i) и (ii) следует, что $\varphi(F) \leqslant \varphi(S) = M_0 < \infty$, так что функция φ равномерно ограничена. Ясно, что если $g(x)$ — неотрицательная непрерывная строго возрастающая функция на $[0, M_0]$, такая, что $g(0) = 0$, то $g\{\varphi(F)\}$ удовлетворяет условиям (i)—(iii) тогда и только тогда, когда этим условиям удовлетворяет функция $\varphi(F)$. В дальнейшем окажется, что функцию g можно выбрать так, что если $\varphi(F)$ — емкость, то $g(\varphi(F))$ удовлетворяет условию (iv). В случае емкости на плоскости придется сделать незначительные изменения, которые, однако, не влияют на окончательные результаты.

Заметим, что определенная в § 5.1 α-емкость, очевидно, удовлетворяет условиям (i) и (ii), если мы ограничимся подмножествами фиксированного замкнутого шара. Из теоремы 5.5 следует, что эти емкости удовлетворяют также условию (iii). Значительно менее очевидно, что α-емкость в $\mathbb{R}^m$ или какая-нибудь подходящая функция от нее удовлетворяет условию (iv); мы получим такой результат только лишь в случае $\alpha = m - 2$. Заметим также, что любая мера, конечная в компактном пространстве S, заведомо удовлетворяет условиям (i) — (iv), причем в (iv) имеет место равенство. Поэтому из теории Шоке, в частности, следует, что все борелевские множества измеримы относительно любой такой меры. Мы увидим далее, что если определить внутреннюю и внешнюю φ-емкости аналогично тому, как это было сделано в § 5.2, то аналитические и, в частности, борелевские множества измеримы по φ-емкости.

5.8.1. Сильная субаддитивность

Установим сильную субаддитивность некоторых функций множества, чтобы к ним была применима развиваемая далее теория. Так как нелегко работать непосредственно с $(m-2)$-емкостью, мы будем иметь дело с аналогом емкости для конечных шаров.

Лемма 5.7. *Пусть E — компактное множество и N — такая его окрестность, что $D = N - E$ связно. Обозначим через Γ множество граничных точек D на E. Пусть $u(x)$ — ограниченная гармоническая функция в D и*

$$u(x) \to a, \quad \textit{когда } x \to \xi \textit{ изнутри } D, \tag{5.8.1}$$

для всех точек $\xi \in \Gamma$, за исключением, возможно, некоторого полярного множества. Предположим, далее, что $u(x) > a$ в D. Тогда $u(x)$ обладает субгармоническим продолжением в окрестность N, удовлетворяющим всюду в N неравенству

$$u(x) \geqslant a. \tag{5.8.2}$$

Положим $u(x) = a$ для всех точек E, отличных от иррегулярных граничных точек области D. Так как последние образуют полярное множество, наш результат следует из теоремы 5.18.

Пусть $D_0 = D(0, R_0)$. Назовем функцию $V(x)$ потенциалом на D_0, если $V(x)$ субгармонична в D_0, гармонична вне некоторого компактного подмножества D_0 и

$$V(x) \to 0 \quad \text{равномерно по } x, \quad \text{когда} \quad |x| \to R_0. \tag{5.8.3}$$

Тогда ясно, что наименьшая гармоническая мажоранта функции $V(x)$ в D_0 равна нулю. Поэтому теорема 5.25 дает

$$V(x) = -\int_E g_{R_0}(x, \xi)\, d\mu e_\xi, \tag{5.8.4}$$

где E — компактное подмножество в $D(0, R)$, на котором $V(x)$ не является гармонической. Обозначим через $M(V)$ полную массу Рисса функции $V(x)$. В обозначениях § 3.9 имеем для $R_0 - \delta <$

$< r < R_0$, где δ достаточно мало,

$$M = n(r) = \frac{1}{d_m} r^{m-1} \frac{d}{dr} N(r) = \frac{r^{m-1}}{d_m c_m} \frac{d}{dr} \frac{1}{r^{m-1}} \int\limits_{S(0,\, r)} V(x)\, d\sigma(x).$$

Положим

$$I(r) = \frac{1}{d_m c_m} \frac{1}{r^{m-1}} \int\limits_{S(0,\, r)} V(x)\, d\sigma(x);$$

тогда $M = r^{m-1} \frac{d}{dr} I(r)$. Так как, согласно (5.8.4), функция $V(x)$ остается гармонической на $S(0, R_0)$, можно положить в этих формулах $r = R_0$. Далее, в силу (5.8.3), $I(R_0) = 0$. Таким образом, получаем

$$M(V) = \lim_{r \to R_0} \left(-R_0^{m-1} \frac{I(r)}{R_0 - r} \right). \tag{5.8.5}$$

Отсюда следует, что $M(V)$ возрастает с убыванием V, т. е.

$$\text{если } V_1 \leqslant V_2, \quad \text{то } M(V_1) \geqslant M(V_2). \tag{5.8.6}$$

Кроме того, $M(V)$ зависит только от поведения V в окрестности $S(0, R_0)$.

Пусть E — компактное подмножество в D_0 и Δ_0 — компонента множества $D_0 - E$, содержащая $S(0, R_0)$ как часть своей границы. Определим на E емкостный потенциал $V_E(x)$, полагая его равным гармонической функции на Δ_0 с нулевым граничным значением на $S(0, R_0)$ и -1 почти всюду на той части границы Δ_0, которая лежит в D_0. Согласно лемме 5.7, $V_E(x)$ имеет субгармоническое продолжение на D_0, поэтому определено число $M(V_E(x))$, которое мы будем обозначать просто через $M(E)$. Докажем, что функция множества $M(E)$ сильно субаддитивна.

Лемма 5.8. *Если E_1 и E_2 — компактные подмножества D_0, то*

$$M(E_1 \cup E_2) + M(E_1 \cap E_2) \leqslant M(E_1) + M(E_2),$$

где $M(E)$ определена выше.

Заметим прежде всего, что если $E_1 \subset E_2$, то

$$V_{E_1}(x) \geqslant V_{E_2}(x) \quad \text{вне} \quad E_2, \quad \text{поэтому} \quad M(E_1) \leqslant M(E_2). \tag{5.8.7}$$

Действительно, $V_{E_1}(x) \geqslant -1$ всюду и $V_{E_2}(x) \to -1$, когда $x \to \xi$ из дополнительной к E_2 области D_2, где ξ — произвольная граничная точка области D_2, не принадлежащая некоторому полярному множеству. Следовательно,

$$\overline{\lim}\, (V_{E_2}(x) - V_{E_1}(x)) \leqslant 0,$$

когда x стремится к произвольной граничной точке области D_2, не принадлежащей некоторому полярному множеству. Так как

$V_{E_2} - V_{E_1} \leqslant 0$ в D_2, то получаем первое неравенство (5.8.7), а значит, и второе неравенство (5.8.6).

Рассмотрим теперь в области Δ, дополнительной к $E_1 \cup E_2$ и содержащей на своей границе $S(0, R_0)$, функцию

$$\varphi(x) = V_{E_1 \cup E_2} + V_{E_1 \cap E_2} - V_{E_1} - V_{E_2},$$

гармоническую в Δ. Поскольку функции $V_{E_1}(x)$, $V_{E_2}(x)$ — потенциалы и потому удовлетворяют условию (5.8.3), то $\varphi(x) = 0$ на $S(0, R_0)$. Кроме того, очевидно, что $\varphi(x)$ равномерно ограничена на Δ.

Пусть, наконец, ξ — граничная точка Δ, которая не принадлежит ни одному из исключительных полярных множеств для E_1, E_2, $E_1 \cup E_2$ или $E_1 \cap E_2$. Тогда мы увидим, что

$$\underline{\lim}\, \varphi(x) \geqslant 0, \quad \text{когда } x \to \xi \quad \text{изнутри} \quad \Delta. \tag{5.8.8}$$

Рассмотрим различные частные случаи. Предположим сначала, что $\xi \in E_1 \cap E_2$. Тогда все потенциалы V_{E_1}, V_{E_2}, $V_{E_1 \cap E_2}$ и $V_{E_1 \cup E_2}$ стремятся к -1, когда $x \to \xi$ изнутри Δ, так что неравенство (5.8.8) выполнено.

Предположим теперь, что ξ принадлежит E_1, но не принадлежит E_2. Тогда

$$V_{E_1 \cup E_2}(x) \to -1, \quad V_{E_1}(x) \to -1, \quad \text{когда} \quad x \to \xi \quad \text{изнутри} \quad D.$$

С другой стороны, поскольку $E_1 \cap E_2 \subset E_2$, то из (5.8.7) следует, что в Δ

$$V_{E_1 \cap E_2}(x) - V_{E_2}(x) \geqslant 0.$$

Таким образом, неравенство (5.8.8) снова выполнено. Совершенно аналогично разбирается случай, когда $\xi \in E_2$, но $\xi \notin E_1$. Итак, неравенство (5.8.8) выполняется во всех случаях для всех граничных точек ξ области D, не принадлежащих некоторому полярному множеству. Из обобщенного принципа максимума (теорема 5.16) заключаем, что $\varphi(x) \geqslant 0$ в Δ. Поэтому из (5.8.5) следует, что

$$M(E_1 \cup E_2) + M(E_1 \cap E_2) - M(E_1) - M(E_2) = \lim_{r \to R_0} - \frac{I(r, \varphi)}{R_0 - r} \leqslant 0.$$

Лемма 5.8 доказана.

Непосредственно выводится следующая

Теорема 5.28. *Если $C(F)$ есть $(m-2)$-емкость в $\mathbb{R}^m$, где $m > 2$, то $\varphi(F) = C(F)^{m-2}$ удовлетворяет условиям* (i) — (iv) § 5.8.

Мы уже установили, что функция $\varphi(F)$ удовлетворяет условиям (i) — (iii), в предположении что мы ограничимся лишь подмножествами данного компактного множества. Как и ранее, положим $V_E(x) = V_E(x, R)$ для данного шара $D(0, R)$ и устремим R к бесконечности. Функции $V_E(x, R)$ убывают с возрастанием R в дополнительной к E неограниченной области D. Поэтому $V_E(x, R)$ стремится к гармоническому пределу $V_E(x, \infty)$, причем $V_E(x, \infty) \geqslant -1$. Так как $V_E(x, R)$ убывает с возрастанием R, то $V_E(x, \infty) \to -1$, когда $x \to \xi$ изнутри D, для всех граничных точек ξ области D, за исключением, быть может, некоторого полярного множества.

Далее, поскольку функция $V_E(x, R)$ убывает и остается ограниченной, когда $R \to \infty$ по целым числам, то для любого фиксированного r, для которого $S(0, r)$ лежит в D, имеем

$$V_E(x, R) \to V_E(x, \infty) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial r} V_E(x, R) \to \frac{\partial}{\partial r} V_E(x, \infty).$$

Следовательно, если $M(E, R)$ — масса Рисса потенциала $V_E(x, R)$, то

$$M(E, R) = \frac{r^{m-1}}{d_m c_m} \frac{d}{dr} \frac{1}{r^{m-1}} \int\limits_{S(0, r)} V_E(x, R)\, d\sigma(x) \to M(E, \infty).$$

Таким образом, в силу леммы 5.8, $M(E, \infty)$ сильно субаддитивна.

Заметим теперь, что для $m > 2$

$$g_R(x, \xi) = |x - \xi|^{2-m} - \{|\xi| \cdot |x - \xi'|/R\}^{2-m},$$

где ξ' — образ точки ξ при инверсии относительно сферы $S(0, R)$. Поэтому при $R \to \infty$

$$g_R(x, \xi) \to |x - \xi|^{2-m}$$

равномерно для ограниченных x и ξ. В частности,

$$V_E(x, R) = -\int\limits_E g_R(x, \xi)\, d\mu_R(e_\xi) \to -\int\limits_E |x - \xi|^{2-m} d\mu(e_\xi) =$$

$$= V_E(x, \infty),$$

где μ — слабый предел мер μ_R, соответствующих $D(0, R)$. Итак, $V_E(x, \infty)/M(E, \infty)$ — потенциал единичной массы, равный $-1/M(E, \infty)$ почти всюду на конечной части границы области D и равный нулю в ∞. Следовательно, согласно теореме 5.17, $V_E(x, \infty)/M(E, \infty)$ есть емкостный потенциал E. Используя определения § 5.1, выводим отсюда, что

$$C_{m-2}(E) = M(E, \infty)^{1/(m-2)}.$$

Так как $M(E, \infty)$ сильно субаддитивна, этим завершается доказательство теоремы 5.28.

Ситуация в случае $m = 2$ сложнее. В этом случае функция

$$g_R(x, \xi) = -\log\left|\frac{R(x - \xi)}{R^2 - x\bar{\xi}}\right| = -\log|x - \xi| + \log R + \frac{O(1)}{R}$$

равномерно сходится при $R \to \infty$ для ограниченных x и ξ. Удобно рассмотреть функцию

$$u_E(x, R) = \frac{V_E(x, R)}{M(E, R)} + \log R = \frac{1}{M(E, R)} \int_E (-g_R(x, \xi) + \log R) d\mu_R(e_\xi)$$

$$\to \int_E \log |x - \xi| \, d\mu(e_\xi) = u_E(x, \infty),$$

где μ — слабый предел мер $\mu_R(e)/M(E, R)$; таким образом, μ — единичная мера. Далее, почти всюду на конечной части границы области D выполняется равенство

$$u_E(x, R) = -\frac{1}{M(E, R)} + \log R.$$

Отсюда следует, что $u_E(x, \infty)$ — емкостный потенциал E, так что

$$\log C_0(E) = \log R - \frac{1}{M(E, R)} + o(1).$$

Следовательно, в этом случае

$$\frac{1}{M(E, R)} = \log \left(\frac{R}{C_0(E)} \right) + o(1), \quad R \to \infty. \tag{5.8.9}$$

Это дает

$$M(E, R) = \frac{1}{\log R - \log(C_0(E)) + o(1)} = \frac{1}{\log R} + \frac{\log C_0(E) + o(1)}{(\log R)^2}.$$

Подставляя это выражение в лемму 5.8, убеждаемся, что $\log C_0(E)$ — субаддитивная функция. Однако этот результат не очень полезен, поскольку если $E_1 \cap E_2 = 0$, то левая часть неравенства (iv) для таких функций множества равна $-\infty$. К счастью, субаддитивность $M(E, R)$ вместе с равенством (5.8.9) позволяет нам все же получить требуемые утверждения.

5.8.2. Внешние емкости

Условия (i) — (iv) § 5.8 были использованы Шоке только для того, чтобы продолжить $\varphi(E)$ как функцию множества, удовлетворяющую определенным условиям, на произвольные подмножества из S. Полученная так функция называется *внешней емкостью*. Точнее, внешняя емкость $\varphi^*(E)$ — это функция множества, определенная на произвольных подмножествах E компактного пространства S и удовлетворяющая следующим условиям:

(i) $0 \leqslant \varphi^*(E) < \infty$;

(ii) если $E_1 \subset E_2$, то $\varphi^*(E_1) \leqslant \varphi^*(E_2)$;

(iii)' для данных E и $\varepsilon > 0$ существует содержащее E открытое множество G, такое, что $\varphi^*(G) < \varphi^*(E) + \varepsilon$;

(iv)′ для данной последовательности множеств E_n, таких, что $E_n \subset E_{n+1}$, имеем $\varphi^* (\bigcup E_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \varphi^* (E_n)$.

Условия (i) и (ii) те же самые, что и соответствующие условия на функцию φ, но распространенные на произвольные множества, а условие (iii)′ является незначительной модификацией (iii).

Однако условие (iv)′ сильно отличается от (iv), и на самом деле (iv) используется лишь для того, чтобы прийти к (iv)′. Соотношения между этими двумя системами условий дает следующая

Лемма 5.9. *Пусть $\varphi (F)$ — произвольная функция множества, определенная на компактных подмножествах компактного метрического пространства S и удовлетворяющая условиям* (i) — (iii) § 5.8. *Тогда $\varphi (F)$ можно единственным образом продолжить до функции множества $\varphi^* (E)$, определенной на произвольных подмножествах S и удовлетворяющей условиям* (i), (ii), (iii)′ *и* (iv)′ *в частном случае, когда все E_n компактны и E_n содержится внутри E_{n+1}. Мы будем называть этот случай ограниченной формой условия* (iv)′.

Пусть G — открытое множество и $\varphi (F)$ — функция множества из леммы 5.9. Будем обозначать компактные множества буквой F. Тогда

$$\alpha = \sup_{F \subset G} \varphi (F) = \varphi^* (G). \tag{5.8.10}$$

Действительно, $\varphi^* (G) \geqslant \varphi^* (F) = \varphi (F)$ для $F \subset G$, так что $\varphi^* (G) \geqslant \alpha$. С другой стороны, пусть F_n — такая последовательность, что F_n содержится внутри F_{n+1} и $\bigcup F_n = G$. В качестве F_n можно взять, например, множество точек из G, удаленных от дополнения к G не меньше, чем на $1/n$. Тогда если условие (iv)′ выполняется для компактных множеств F_n, то $\varphi^* (G) = \lim \varphi (F_n) \leqslant \alpha$. Таким образом, $\varphi^* (G) = \alpha$.

Покажем, что для любой такой последовательности компактных множеств F_n

$$\varphi (F_n) \to \alpha,$$

так что выполняется ограниченная форма условия (iv)′. Для этого рассмотрим произвольное компактное подмножество F множества G. Внутренности G_n множеств F_n покрывают F, поскольку сами F_n покрывают F и $F_n \subset G_{n+1}$. По теореме Гейне — Бореля, уже конечное число множеств G_n, скажем $G_1, \ldots, G_N$, покрывают F. Таким образом, $\varphi (F_{N+1}) \geqslant \varphi (F)$ и $\lim \varphi (F_{N+1}) \geqslant \geqslant \varphi (F)$. Так как F — произвольное компактное подмножество в G, то $\lim \varphi (F_n) \geqslant \alpha$, а поскольку противоположное неравенство тривиально, то $\varphi (F_n) \to \alpha$.

Итак, наше определение $\varphi^* (G)$ для открытых множеств получено из условия (iv)′ для компактных множеств E_n, таких, что E_n лежит строго внутри E_{n+1}, и удовлетворяет этому условию.

Положим теперь для произвольных множеств E

$$\varphi^* (E) = \inf \varphi^* (G), \tag{5.8.11}$$

где нижняя грань берется по всем открытым множествам, содержащим E. Дать такое определение нас вынуждают условия (ii) и (iii)$'$. Далее, из условия (iii) следует, что $\varphi^* (E) = \varphi (E)$ для компактных E. Итак, равенства (5.8.10) и (5.8.11) определяют единственное расширение $\varphi^* (E)$ функции $\varphi (F)$ на произвольные множества. Ясно, что наше новое определение удовлетворяет условиям (i), (ii) и (iii)$'$.

Мы видели, что функции множества φ, удовлетворяющие условиям (i), (ii) и (iii), единственным образом продолжаются до функций множества φ^*, удовлетворяющих условиям (i), (ii), (iii)$'$ и ограниченной форме условия (iv)$'$. Верно и обратное. Сужение любой функции множества φ^*, удовлетворяющей условиям (i), (ii) и (iii)$'$, на компактные множества, удовлетворяет условиям (i), (ii) и (iii). Не совсем очевидно только выполнение условия (iii). Для того чтобы проверить его, рассмотрим произвольное компактное множество F. Пусть G — такое открытое множество, что $\varphi^* (G) < \varphi^* (F) + \varepsilon$. Тогда найдется компактное множество F_1, содержащее F в своей внутренности и содержащееся в G. Поэтому $\varphi^* (F_1) \leqslant \varphi^* (G) < \varphi^* (F) + \varepsilon$, как и требовалось.

Ввиду соответствия между функциями φ и φ^* мы будем обозначать их одной буквой φ. Если φ определена только на компактных множествах, но удовлетворяет условиям (i), (ii) и (iii), то мы будем считать, что φ продолжена на произвольные множества, как в лемме 5.9.

Теперь можно доказать следующее утверждение.

Лемма 5.10. *Пусть φ — функция множества, удовлетворяющая условиям* (i) — (iv) § 5.8 *и продолженная на произвольные множества, как в лемме* 5.9. *Пусть E_n, G_n — такие множества, что G_n открыто, $E_n \subset G_n$ и $\varphi (G_n) < \varphi (E_n) + \varepsilon_n$. Тогда*

$$\varphi\Big(\bigcup_{n=1}^{N} G_n\Big) < \varphi\Big(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\Big) + \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n.$$

Предположим сначала, что множества E_n компактны, и докажем в этом случае лемму индукцией по N. Пусть H — компактное подмножество в $G_1 \cup G_2$. Тогда каждая точка множества H может быть заключена в замкнутый шар C, целиком лежащий либо в G_1, либо в G_2. Конечное число таких шаров покрывает H, и мы можем считать, что первые p из них $C_1, \ldots, C_p$ лежат в G_1, а остальные $q - p$ шаров $C_{p+1}, \ldots, C_q$ лежат в G_2. Положим

$$H_1 = H \cap \bigcup_{n=1}^{p} C_n, \quad H_2 = H \cap \bigcup_{n=p+1}^{q} C_n$$

Тогда очевидно, что множества H_1 и H_2 компактны, $H_1 \subset G_1$, $H_2 \subset G_2$ и $H_1 \cup H_2 = H$.

Докажем, что

$$\varphi(H_1 \cup H_2) \leqslant \varphi(E_1 \cup E_2) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Можно заменить H_j бо́льшими множествами $H_j \cup E_j$, которые по-прежнему компактны и содержатся в G_j. Таким образом, можно считать, что

$$E_1 \subset H_1 \subset G_1, \quad E_2 \subset H_2 \subset G_2.$$

Заметим теперь, что из сильной субаддитивности следует неравенство

$$\varphi(H_1 \cup H_2) + \varphi(E_1) \leqslant \varphi(E_1 \cup H_2) + \varphi(H_1).$$

Действительно, $E_1 \subset (E_1 \cup H_2) \cap H_1$ и $E_1 \cup H_2 \cup H_1 = H_1 \cup H_2$. Аналогично,

$$\varphi(E_1 \cup H_2) + \varphi(E_2) \leqslant \varphi(E_1 \cup E_2) + \varphi(H_2).$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\varphi(H_1 \cup H_2) + \varphi(E_1) + \varphi(E_2) \leqslant \varphi(E_1 \cup E_2) + \varphi(H_1) + \varphi(H_2).$$

Следовательно,

$$\varphi(H) = \varphi(H_1 \cup H_2) \leqslant \varphi(E_1 \cup E_2) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Взяв верхнюю грань по всем компактным подмножествам H множества $G_1 \cup G_2$, получаем лемму 5.10 для $N = 2$ и компактных множеств E_1 и E_2.

Предполагая по-прежнему, что множества E_n компактны, докажем теперь индукцией по N общий случай. Допустим, что неравенство леммы выполнено для N слагаемых, и положим

$$G = \bigcup_{n=1}^{N} G_n, \quad E = \bigcup_{n=1}^{N} E_n, \quad \varepsilon = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n.$$

Тогда $E \subset G$ и $\varphi(G) < \varphi(E) + \varepsilon$. Кроме того, $E_{N+1} \subset G_{N+1}$ и по предположению $\varphi(G_{N+1}) < \varphi(E_{N+1}) + \varepsilon_{N+1}$. Поскольку лемма 5.10 справедлива для $N = 2$, получаем

$$\varphi(G \cup G_{N+1}) < \varphi(E \cup E_{N+1}) + \varepsilon + \varepsilon_{N+1},$$

так что лемма справедлива для $N + 1$ слагаемых (в случае, когда E_n компактны).

Предположим теперь, что множества E_n открыты. Так как $\varphi(G_n) < \varphi(E_n) + \varepsilon_n$, то из определения функции φ для открытых множеств следует, что можно найти такие компактные подмножества $F_n \subset E_n$, что $\varphi(G_n) < \varphi(F_n) + \varepsilon_n$. Применяя только что рассмотренный случай, получаем

$$\varphi\Big(\bigcup_{n=1}^{N} G_n\Big) < \varphi\Big(\bigcup_{n=1}^{N} F_n\Big) + \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \leqslant \varphi\Big(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\Big) + \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n.$$

Это доказывает лемму 5.10 для открытых множеств E_n.

Наконец, предположим, что множества E_n произвольны. Пусть G — открытое множество, содержащее $\bigcup_{n=1}^{N} E_n$, и $F_n = G \cap G_n$. Тогда $E_n \subset F_n \subset G_n$ и

$$\varphi(G_n) < \varphi(E_n) + \varepsilon_n \leqslant \varphi(F_n) + \varepsilon_n.$$

Кроме того, множества F_n открыты. Следовательно, как только что было доказано,

$$\varphi\Big(\bigcup_{n=1}^{N} G_n\Big) \leqslant \varphi\Big(\bigcup_{n=1}^{N} F_n\Big) + \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \leqslant \varphi(G) + \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n.$$

Это неравенство выполняется для любого открытого множества G, содержащего $\bigcup_{n=1}^{N} E_n$. Поэтому, взяв нижнюю грань по всем таким G, получаем окончательно

$$\varphi\Big(\bigcup_{n=1}^{N} G_n\Big) \leqslant \varphi\Big(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\Big) + \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n,$$

что и требовалось.

Лемма 5.11. *Предположим, что функция множества* φ *удовлетворяет условиям* (i) — (iv) § 5.8. *Тогда продолжение* φ *в смысле леммы* 5.9 *является внешней емкостью.*

Достаточно показать, что $\varphi(E)$ удовлетворяет условию (iv)$'$ для внешних емкостей, так как мы уже видели, что остальные условия выполнены.

Пусть E_n — расширяющаяся последовательность множеств. Для данного E_n выберем такое открытое множество G_n, что $E_n \subset G_n$ и

$$\varphi(G_n) < \varphi(E_n) + \varepsilon 2^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Такой выбор возможен в силу (iii)$'$. Пусть F — компактное подмножество объединения $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. По теореме Гейне — Бореля, F лежит в конечном объединении $\bigcup_{n=1}^{N} G_n$ для некоторого N. Используя лемму 5.10, получаем

$$\varphi(F) \leqslant \varphi\Big(\bigcup_{n=1}^{N} G_n\Big) \leqslant \varphi\Big(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\Big) + \sum_{n=1}^{N} \varepsilon \cdot 2^{-n} \leqslant \varphi(E_N) + \varepsilon.$$

Пусть $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(E_n)$, $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Тогда $\varphi(F) \leqslant \alpha + \varepsilon$. Это неравенство справедливо для любого компактного подмножества $F \subset G$, поэтому $\varphi(G) \leqslant \alpha + \varepsilon$. Так как $E \subset G$, отсюда следует, что $\varphi(E) \leqslant \alpha + \varepsilon$, а поскольку ε произвольно, то $\varphi(E) \leqslant \alpha$. Противоположное неравенство очевидно, так как $E_n \subset E$, и поэтому $\varphi(E) \geqslant \varphi(E_n)$ для каждого n. Лемма 5.11 тем самым доказана.

Мы закончим этот раздел доказательством следующего утверждения.

Теорема 5.29. *Емкости $C_{m-2}(E)$ для подмножеств фиксированного компактного множества из $\mathbb{R}^m$ являются внешними емкостями при $m \geqslant 2$.*

Из теоремы 5.28 мы знаем, что для $m > 2$ функции множества $C_{m-2}(E)^{m-2}$ удовлетворяют условиям (i) — (iv) § 5.8 и потому на основании леммы 5.11 являются внешними емкостями. Следовательно, функции $C_{m-2}(E)$ тоже удовлетворяют условиям (i), (ii), (iii)′ и (iv)′ и являются внешними емкостями.

В случае $m = 2$ эти рассуждения не проходят, и мы изберем иной способ доказательства. Ранее мы видели, что $C_0(E)$ удовлетворяет условиям (i), (ii), (iii) § 5.8 даже для подмножеств $\mathbb{R}^m$. Поэтому соответствующее продолжение функции $C_0(E)$ удовлетворяет условиям (i), (ii) и (iii)′ определения внешней емкости. Остается проверить условие (iv)′.

Пусть E_n — такая расширяющаяся последовательность плоских множеств, что множество $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ ограничено. Применим лемму 5.11 к функции множества $M(E) = M(E, R)$, обсуждавшейся в лемме 5.8. Из леммы 5.11 следует, что $M(E, R)$, продолженная на произвольные множества, становится внешней емкостью. (Мы не доказывали полунепрерывности сверху, но это можно сделать точно так же, как в теореме 5.5. Свойства (i) и (ii) очевидны.) То же самое утверждение справедливо и для функции множества $\varphi(R, E) = Re^{-1/M(E,\, R)}$. Согласно (5.8.9), $\varphi(R, E) \to C_0(E)$ при $R \to \infty$ равномерно для множеств, лежащих в некотором фиксированном круге. Так как $\varphi(R, E)$ — внешняя емкость, то для фиксированного R

$$\varphi(R, E_n) \to \varphi(R, E).$$

Для данного $\varepsilon > 0$ выберем R настолько большим, чтобы для E и для всех множеств E_n выполнялись неравенства

$$|\varphi(R, E_n) - C_0(E_n)| < \varepsilon, \qquad |\varphi(R, E) - C_0(E)| < \varepsilon.$$

Фиксируем R и возьмем номер n настолько большим, чтобы $\varphi(R, E) < \varphi(R, E_n) + \varepsilon$. Тогда $C_0(E) < C_0(E_n) + 3\varepsilon$, и поэтому

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} C_0(E_n) \geqslant C_0(E) - 3\varepsilon.$$

Так как ε произвольно, заключаем, что $\alpha \geqslant C_0(E)$. Отсюда и из очевидного неравенства $\alpha \leqslant C_0(E)$ следует, что $\alpha = C_0(E)$. Теорема 5.29 доказана.

Этот результат [1]) распространяется на емкости $C_\alpha(E)$ для всех α, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant \alpha < m$.

5.8.3. Измеримость

Емкость в предыдущем пункте названа внешней потому, что в силу (iii)$'$ емкость произвольного множества E есть нижняя грань емкостей содержащих E открытых множеств G.

Будем говорить, что множество E измеримо по функции множества φ, если значение $\varphi(E)$ является верхней гранью значений $\varphi(F)$ по компактным множествам F, содержащимся в E. Таким образом, множество E измеримо тогда и только тогда, когда для данного $\varepsilon > 0$ существуют такие компактное множество F и открытое множество G, что

$$F \subset E \subset G, \quad \varphi(G) < \varphi(F) + \varepsilon. \tag{5.8.12}$$

Мы докажем принадлежащую Шоке замечательную теорему, которая утверждает, что все борелевские множества измеримы по внешней емкости φ, удовлетворяющей условиям (i), (ii), (iii)$'$ и (iv)$'$. В частности, все борелевские множества измеримы по емкости $C_{m-2}(E)$ в $\mathbb{R}^m$.

Из условия (iv)$'$ следует, что все открытые множества измеримы. Из условия (iii)$'$ получаем, что измеримы также все компактные множества. Поэтому естественно было бы попытаться установить, что все измеримые множества образуют σ-кольцо, доказав, что измеримы счетные объединения и пересечения измеримых множеств. Отсюда следовало бы, что измеримы все борелевские множества. Это классическая схема, применяемая в теории Лебега. Однако при переходе к емкости эта схема становится непригодной, так как пересечение двух измеримых по емкости множеств может не быть измеримым по емкости.

Пример. Пусть E обозначает класс подмножеств замкнутого квадрата $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$ на плоскости x, y. Обозначим через $\varphi(E)$ меру Лебега проекции E на ось x. Очевидно, что определенная таким образом функция φ удовлетворяет на компактных множествах аксиомам (i) — (iv) § 5.8. Действительно, если E_1, E_2 — компактные множества и F_1, F_2 — их проекции на ось x, то

---

[1]) Случай $\alpha > m - 2$ см. у Киси [1957]. Из одного результата Фуледе [1965] следует, что результат Киси справедлив также для $0 \leqslant \alpha < m - 2$. Для неограниченных множеств и $\alpha = 0$ необходимо воспользоваться одним результатом Шоке [1958]. Для общих емкостей см. также работу Ароншайна и Смита [1955].

$F_1 \cup F_2$ является проекцией $E_1 \cup E_2$, а проекция $E_1 \cap E_2$ содержится в $F_1 \cap F_2$. Следовательно, если обозначить через m меру Лебега, то

$$\varphi(E_1 \cup E_2) + \varphi(E_1 \cap E_2) \leqslant m(F_1 \cup F_2) + m(F_1 \cap F_2) = \\ = m(F_1) + m(F_2) = \varphi(E_1) + \varphi(E_2).$$

Таким образом, для φ выполняется аксиома (iv). Остальные аксиомы проверяются тривиально. Пусть теперь E_1 — произвольное неизмеримое по Лебегу множество, расположенное на интервале $[0, 1]$ оси x. Тогда E_1 не измеримо по φ. Обозначим через E_2 весь отрезок $[0, 1]$, а через E_3 — отрезок $y = 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Тогда множества $E_1 \cup E_3$ и E_2 оба измеримы и $\varphi(E_1 \cup E_3) = \varphi(E_2) = 1$, в то время как множество $E_1 = (E_1 \cup E_3) \cap E_2$ не измеримо.

Приведенный пример вынуждает нас избрать другой путь для исследования измеримости. Следуя Шоке, мы докажем, что все аналитические множества измеримы, а все борелевские множества аналитичны. Применяемый нами подход принадлежит Карлесону [1967, гл. I].

Предположим, что каждому конечному множеству неотрицательных целых чисел $(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ сопоставлено компактное множество $A_{n_1, n_2, \ldots, n_p}$ из $\mathbb{R}^m$. При помощи «операции Суслина» эти множества порождают множество

$$A = \bigcup_{n_1, \ldots, n_p, \ldots} A_{n_1} \cap A_{n_1, n_2} \cap \ldots \cap A_{n_1, n_2, \ldots, n_p} \cap \ldots \quad (5.8.13)$$

Возникающие таким образом множества A при различном выборе $A_{n_1, n_2, \ldots, n_p}$ называются *аналитическими множествами*. Докажем следующее утверждение.

Лемма 5.12. *Любое борелевское множество в* $\mathbb{R}^m$ *является аналитическим.*

Очевидно, что компактные множества являются аналитическими. Действительно, если E—компакт, положим $A_{n_1, n_2, \ldots, n_p} = E$ для произвольного набора положительных целых чисел, $(n_1, n_2, \ldots, n_p)$, и тогда $A = E$.

Далее, если $A^{(k)}$ — последовательность аналитических множеств, порожденных множествами $A^{(k)}_{n_1, n_2, \ldots, n_p}$, то $\bigcup A^{(k)}$ получается применением операции Суслина к множествам $A^{(n_1)}_{n_2, n_3, \ldots, n_p}$.

Покажем наконец, что $\bigcap A^{(k)}$ — также аналитическое множество. Для этого упорядочим пары целых чисел (k, p): $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$, $(3, 1)$, $(2, 2)$, $(1, 3)$, ... Пусть t — номер, соответствующий при таком упорядочении паре (k, p); например, $t = 5$ соответствует паре $(2, 2)$. Тогда для произвольной бесконечной последовательности положительных целых чисел $(n_1, n_2, \ldots, n_t, \ldots)$ находим для каждой пары (k, p) ее номер t и полагаем $n_{k,p} = n_t$. Кроме того, мы теперь полагаем

$$B_{n_1, n_2, \ldots, n_t} = A^{(k)}_{n_{k,1} n_{k,2}, \ldots, n_{k,p}}.$$

Последовательность $n_1, n_2, \ldots$ заменяется двойной последовательностью

$$\begin{matrix} n_1, & n_3, & n_6, & \ldots \\ n_2, & n_5, & n_9, & \ldots \\ n_4, & n_8, & n_{13}, & \ldots . \end{matrix}$$

Например,

$$B_{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5} = A^{(2)}_{n_2, n_5}.$$

Из этого определения непосредственно следует, что операция Суслина, примененная к множествам $B_{n_1, n_2, \ldots}$, дает множество $\bigcap A^{(k)}$.

Таким образом, открытые и компактные множества являются аналитическими. Обозначим через $\mathscr{F}$ наименьший класс множеств, содержащий все компактные множества и замкнутый относительно операций счетного объединения и счетного пересечения. Согласно результатам § 3.1, для того чтобы показать, что $\mathscr{F}$ содержит борелевские множества, достаточно установить, что $\mathscr{F}$ есть σ-кольцо. В свою очередь для этого достаточно показать, что если $A \in \mathscr{F}$, то дополнение A' к A в $\mathbb{R}^m$ также принадлежит $\mathscr{F}$. Это можно сделать следующим образом. Пусть A_n — последовательность таких множеств, что их дополнения принадлежат классу $\mathscr{F}$. Тогда $A = \bigcap A_n \in \mathscr{F}$ и

$$A' = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n \in \mathscr{F}.$$

Далее, компактные множества принадлежат $\mathscr{F}$ вместе со своими открытыми дополнениями. Следовательно, применяя указанные порождающие операции к $\mathscr{F}$, получаем только такие множества, которые принадлежат $\mathscr{F}$ вместе со своими дополнениями. Поэтому $\mathscr{F}$ есть σ-кольцо, а значит, $\mathscr{F}$ содержит борелевские множества. Приведенные рассуждения показывают теперь, что все множества из $\mathscr{F}$ являются аналитическими, так что борелевские множества суть аналитические множества. Лемма 5.12 доказана.

Лемма 5.13. *Пусть множество A определено формулой* (5.8.13). *Рассмотрим произвольную последовательность $\{h_i\}$ положительных целых чисел и положим*

$$F_p = \bigcup_{n_i \leqslant h_i} A_{n_1} \cap A_{n_1, n_2} \cap \ldots \cap A_{n_1, \ldots, n_p}. \qquad (5.8.14)$$

Тогда

$$F = \bigcap_p F_p \tag{5.8.15}$$

является компактным подмножеством A.

Ясно, что F_p — объединение конечного числа компактных множеств, поэтому F_p компактно для каждого p. Следовательно, F также компактно. Остается показать, что $F \subset A$. Для этого предположим, что $x \in F$. Тогда каждому номеру p соответствуют такие целые числа $n_{ip} \leqslant h_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$, что

$$x \in A_{n_{1p}} \cap A_{n_{1p}, n_{2p}} \cap \ldots \cap A_{n_{1p}, \ldots, n_{pp}}.$$

Выберем такую последовательность p_ν, что для каждого i существует предел $\lim\limits_{\nu \to \infty} n_{ip_\nu} = m_i$. Так как $n_{ip} \leqslant h_i$ для всех p, то такой выбор возможен. Таким образом,

$$x \in A_{m_1} \cap A_{m_1, m_2} \cap \ldots \cap A_{m_1, m_2, \ldots, m_p},$$

поэтому $x \in A$. Следовательно, $F \subset A$, что и требовалось.

Теперь мы в состоянии доказать следующую теорему.

Теорема 5.30. *Если* $\varphi(E)$ — *внешняя емкость, то ограниченные аналитические множества измеримы по* $\varphi(E)$.

Пусть A — аналитическое множество, определенное формулой (5.8.13), и пусть $A^{(h)}$ — множество

$$A^{(h)} = \bigcup_{\substack{n_1, n_2, \ldots \\ n_1 \leqslant h}} A_{n_1} \cap A_{n_1, n_2} \cap \ldots \cap A_{n_1, \ldots, n_j} \cap \ldots$$

Тогда множества $A^{(h)}$ расширяются с увеличением h и $A^{(h)} \to A$ при $h \to \infty$. Следовательно, в силу условия (iv)′ п. 5.8.2, для каждого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое $h = h_1$, что множество $A_1 = A^{(h_1)}$ удовлетворяет условию $\varphi(A_1) \geqslant \varphi(A) - \varepsilon/2$.

Предположим, что множества $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}$ уже выбраны, так что

$$\varphi(A_j) \geqslant \varphi(A_{j-1}) - \varepsilon \cdot 2^{-j}, \quad j = 1, \ldots, p-1.$$

Определим множества $A_p^{(h)}$, полагая

$$A_p^{(h)} = \bigcup_{\substack{n_1 \leqslant h_1, \ldots, n_{p-1} \leqslant h_{p-1} \\ n_p \leqslant h}} A_{n_1} \cap A_{n_1, n_2} \cap \ldots \cap A_{n_1, n_2, \ldots, n_j} \cap \ldots$$

Тогда при $h \to \infty$ числовая последовательность $\varphi(A_p^{(h)})$ сходится к $\varphi(A_{p-1})$, и поэтому можно выбрать $h = h_p$ так, что для $A_p = A_p^{(h_p)}$ выполняется неравенство

$$\varphi(A_p) \geqslant \varphi(A_{p-1}) - \varepsilon \cdot 2^{-p}.$$

Следовательно, $\varphi(A_p) \geqslant \varphi(A) - \varepsilon$, $p = 1, 2, \ldots$. Определив последовательность h_p, образуем по формуле (5.8.14) множества F_p. Тогда $A_p \subset F_p$, так что

$$\varphi(F_p) \geqslant \varphi(A) - \varepsilon, \quad p = 1, 2, \ldots.$$

Далее, определенное формулой (5.8.15) множество F является компактным подмножеством A. Если G — произвольное открытое множество, содержащее F, то, согласно (5.8.15), G содержит F_p для $p \geqslant p_0$, и поэтому $\varphi(G) \geqslant \varphi(F_{p_0}) \geqslant \varphi(A) - \varepsilon$. Из условия (iii)' п. 5.8.2 заключаем, что $\varphi(F) \geqslant \varphi(A) - \varepsilon$. Так как ε произвольно и для $\varphi = \varphi^*$ выполнено (5.8.11), то множество A удовлетворяет условию измеримости (5.8.12). Теорема 5.30 доказана.

Из предыдущих рассуждений следует, что для доказательства измеримости относительно функции множества φ нужно лишь проверить выполнение условий (i), (ii), (iii)' и (iv)'. Практически основная трудность заключается в проверке условия (iv)'. Используя метод Шоке сильной субаддитивности, мы проверили это условие для ограниченных множеств E из $\mathbb{R}^m$ и функции множества $C_{m-2}(E)$. Как было отмечено в конце п. 5.8.2, соответствующий результат для более общих емкостей может быть доказан другими методами.

Во всяком случае, наши результаты можно сформулировать следующим образом.

Теорема 5.31. *Если $\alpha = m - 2$ или $\alpha = m - 1$, то ограниченные аналитические множества в $\mathbb{R}^m$ и, в частности, ограниченные борелевские множества измеримы по емкости $C_\alpha(E)$ в $\mathbb{R}^m$.*

Действительно, если $\alpha = m - 2$, этот результат следует из теорем 5.29 и 5.30. Если $\alpha = m - 1$, то вложение $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^{m+1}$ позволяет применить только что доказанный результат к множествам, рассматриваемым как подмножества $\mathbb{R}^{m+1}$.

Иногда удобно рассматривать емкости неограниченных множеств E в $\mathbb{R}^m$. Такие емкости формально определяются как верхние грани (возможно, равные $+\infty$) емкостей содержащихся в E ограниченных множеств E_0.

5.9. МНОЖЕСТВА, НА КОТОРЫХ СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПРИНИМАЮТ БЕСКОНЕЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Мы завершим эту главу доказательством утверждения, которое является уточнением теоремы 5.11. Множество E, которое можно представить в виде счетного пересечения открытых множеств, называется множеством типа G_δ. Докажем следующую теорему.

Теорема 5.32 [1]). Пусть $u(x)$ — *субгармоническая функция в области* $D \subset \mathbb{R}^m$, *не равная тождественно* $-\infty$. *Тогда множество* $E \subset D$, *на котором* $u(x) = -\infty$, *является* G_δ-*множеством емкости нуль. Обратно, для произвольного множества* E *из* $\mathbb{R}^m$ *емкости нуль существует субгармоническая в* $\mathbb{R}^m$ *функция* $u(x)$, *не равная тождественно* $-\infty$ *и такая, что* $u(x) = -\infty$ *в* E.

Дени [1947] доказал более тонкий результат, согласно которому если E — произвольное G_δ-множество емкости нуль, то существует такая функция $u(x)$, что $u(x) = -\infty$ на E и больше нигде. Однако доказательство этой теоремы выходит за рамки настоящей книги.

Первая часть теоремы 5.32 доказывается очень легко. Пусть G_n — подмножество G, где $u(x) < -n$. Так как функция $u(x)$ пн. св. в G, то множество G_n открыто. Далее, множество E, на котором $u(x) = -\infty$, есть в точности пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, так что E является G_δ-множеством. Допустим, что E имеет положительную емкость. Так как E — борелевское множество, то из результатов предыдущего параграфа следует, что E измеримо по емкости. Таким образом, в E существует компактное подмножество E_0 положительной емкости. Но это невозможно, согласно теореме 5.10. Полученное противоречие доказывает первую часть теоремы 5.32.

Для доказательства второй части нам понадобится следующая

Лемма 5.14. *Пусть* G — *ограниченное открытое множество в* $\mathbb{R}^m$ *емкости* C. *Тогда на его замыкании* $\overline{G}$ *существует такое распределение единичной массы* μ, *что для сех* $x \in G$

$$V(x) = \int\limits_{\overline{G}} K_{m-2}(x-y)\,d\mu(y) = \begin{cases} \log C, & m=2, \\ -C^{2-m}, & m>2. \end{cases} \tag{5.9.1}$$

Пусть E_n — последовательность компактных подмножеств в G, таких, что E_n содержится внутри E_{n+1}, множество E_n регулярно для задачи Дирихле и $\bigcup E_n = G$. Пусть $V_n(x)$ — емкостный потенциал множества E_n, так что

$$V_n(x) = \int K_{m-2}(x-y)\,d\mu_n(y),$$

где μ_n — распределение единичной массы на E_n. Поскольку E_n регулярно для задачи Дирихле, можно выбрать функцию $V_n(x)$ непрерывной в $\mathbb{R}^m$, постоянной на E_n, гармонической вне E_n и удовлетворяющей в точке ∞ условиям (5.5.5) или (5.5.5′). Согласно теореме 5.17, эти условия однозначно определяют функцию $V_n(x)$.

---

[1]) Картан [1945].

На множестве E_n имеем также

$$V_n(x) = \begin{cases} \log C_n, & m=2, \\ -(C_n)^{2-m}, & m>2, \end{cases}$$

где C_n — емкость E_n. Из теоремы 5.29 следует, что

$$C_n \to C \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{5.9.2}$$

Поэтому по теореме 5.3 можно найти подпоследовательность мер μ_{n_p}, которая слабо сходится к предельной единичной мере μ.

Мера μ обязательно распределена на $\overline{G}$.

Функции $V_n(x)$, соответствующие мерам μ_n, сходятся по крайней мере для точек x, не лежащих в $\overline{G}$, к предельной функции

$$V(x) = \int_{\overline{G}} K_{m-2}(x-y)\, d\mu(y). \tag{5.9.3}$$

Рассмотрим функции

$$u_n(x) = \begin{cases} V_n(x) - \log C_n, & m=2, \\ V_n(x)(C_n)^{m-2}, & m>2. \end{cases}$$

Функция $u_n(x)$ гармонична вне множества E_n. На границе E_{n+1} выполняется неравенство $u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant 0$; это же неравенство справедливо и в точке ∞. Значит, оно остается верным и внутри множества E_{n+1}. Таким образом, $u_n(x)$ — убывающая последовательность субгармонических функций и, стало быть, $u_n(x)$ всюду сходится к субгармоническому пределу $u(x)$. Значит, и последовательность $V_n(x)$ всюду сходится к субгармоническому пределу $V(x)$, который задается формулой (5.9.3) по крайней мере вне множества $\overline{G}$. В то же время, поскольку функция $V(x)$ субгармонична в $\mathbb{R}^m$ и удовлетворяет (5.5.5) или (5.5.5′), нетрудно видеть, что $V(x)$ представляется в виде (5.9.1), где μ — масса Рисса функции $V(x)$. Так как полная масса может быть вычислена, если известно поведение $V(x)$ на сфере $S(0, R)$ для достаточно большого R, то полная масса должна быть единичной для любого такого представления.

Далее, если $x \in G$, то $x \in E_n$ для достаточно большого n, поэтому $V(x) = \lim V_n(x)$ принимает требуемые значения. Лемма 5.14 тем самым доказана.

Пусть теперь E — произвольное ограниченное множество в $\mathbb{R}^m$ емкости нуль, G_n — последовательность ограниченных открытых множеств, содержащих E и таких, что $G_{n+1} \subset G_n$ и

$$\log C(G_n) < -2^n, \quad m=2,$$
$$C(G_n)^{2-m} > 2^n, \quad m>2.$$

Такая последовательность существует в силу свойства (iii)′ внешней емкости, поскольку можно выбрать G_n так, чтобы $C(G_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Тогда из леммы 5.14 вытекает существование распределения единичной массы μ_n на $\bar{G}_n$, такого, что для любой точки $x \in G_n$

$$V_n(x) = \int\limits_{\bar{G}_n} K_{m-2}(x-y)\, d\mu_n(y) \leqslant -2^n.$$

Пусть $\mu = \sum\limits_1^\infty 2^{-n}\mu_n$. Тогда μ — распределение единичной массы, и если положить

$$V(x) = \int K_{m-2}(x-y)\, d\mu(y) = \sum_1^\infty 2^{-n} V_n(x),$$

то $V(x)$ — субгармоническая функция в $\mathbb{R}^m$, обращающаяся в $-\infty$ на множестве E. Это доказывает теорему 5.32 в случае, когда множество E ограничено.

Если же множество E не ограничено, обозначим через E_n часть E в шаре $|x| \leqslant n$. Тогда $C(E_n) = 0$, и поэтому можно построить такое распределение масс μ_n с полной массой 2^{-n}, что соответствующий потенциал тождественно равен $-\infty$ на E_n. Положим $\mu = \sum\limits_{n=1}^\infty \mu_n$; тогда μ является распределением единичной массы в $\mathbb{R}^m$. Если теперь определить $V(x)$ формулой

$$V(x) = \begin{cases} \int K_{m-2}(x-y)\, d\mu(y), & m > 2, \\ \int\limits_{|y| \leqslant 1} \log|x-y|\, d\mu(y) + \int\limits_{|y|>1} \log\left|\dfrac{x-y}{y}\right| d\mu(y), & m = 2, \end{cases}$$

то соответствующий потенциал равен $-\infty$ на множестве E_n для каждого n, а значит, всюду на E. Функция $V(x)$ имеет отличный от нуля предел при $x \to \infty$ и потому субгармонична в $\mathbb{R}^m$ и не равна там тождественно $-\infty$. Теорема 5.32 полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи, упомянутые в тексте, упорядочены по фамилиям авторов и годам публикаций. Разные работы одного автора отличаются друг от друга указанием года с соответствующими индексами. Звездочкой отмечены работы, добавленные редактором перевода.

Адамар (Hadamard J.) [1893] Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann, *J. de Math.* (4) 9 (1893), 171—215.

Альфорс (Ahlfors L. V.) [1930] Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildungen und der ganzen Funktionen. *Acta Soc. sci. Fenn.* Nova Ser. 1, no. 9 (1930).

Альфорс, Бёрлинг (Ahlfors L. V., Beurling A.) [1950] Conformal invariants and function-theoretic null sets. *Acta Math.* 83 (1950), 101—129.

Альфорс, Сарио (Ahlfors L. V., Sario L.) [1960] Riemann Surfaces, Princeton University Press, 1960.

Ароншайн, Смит (Aronszaijn N., Smith K. T.) [1955] Functional spaces and functional completion. *Ann. Inst. Fourier* 6 (1955—1956), 125—185.

Асколи (Ascoli G.) [1928] Sulla unicità della soluzione nel problema di Dirichlet. *Rendi Accad. d. Lincei*, Roma (6), 8 (1928), 348—351.

Бауер (Bauer H.) [1966] Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie. Lecture Notes in Mathematics 22, Springer, Berlin, 1966.

Безикович (Besicovitch A. S.) [1932] On sufficient conditions for a function to be analytic, and on the behaviour of analytic functions in the neighbourhood of non-isolated singular points. *Proc. London Math. Soc.* (2) 32 (1932), 1—9.
[1938] On the fundamental geometric properties of linearly measurable plane sets of points II. *Math. Ann.* 115 (1938), 296—329.

Бернстейн (Baernstein A. II) [1975] Integral means, univalent functions and circular symmetrization. *Acta Math.* 133 (1975), 139—169.

Брело (Brelot M.) [1934] Étude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point. Actualités scientifiques et industrielles, No. 134, Hermann, 1934.
[1939a] Familles de Perron et problème de Dirichlet. *Acta Szeged*, IX (1939), 133—153.
[1939b] Sur la théorie moderne du potentiel. *C.R. de l'Acad. sci. Paris* 209 (1939), 828.
[1941] Sur la théorie autonome des fonctions sousharmoniques. *Bull. Sci. Math.* 65 (1941), 72—98.
[1955] A new proof of the fundamental theorem of Kellog — Evans on the set of irregular points in the Dirichlet problem. *Rendi. Circ. Mat. di Palermo* (2) 11 (1955), 112—122.

[1960] Lectures on potential theory. Tata Institute, No. 19, 1960.

[1969]* Eléments de la théorie classique du potentiel, 4e éd., Paris, 1969. [Имеется перевод 2-го изд.: Брело М. Основы классической теории потенциала.— М.: Мир, 1964.]

[1972] Les étapes et les aspects multiples de la théorie du potentiel, *L'Enseign. math.*, 18 (1972), 1—36.

Бреннан, Фукс, Хейман, Куран (Brannan D. A., Fuchs W. H. J., Hayman W.K., Kuran Ü.) [1976] A characterisation of harmonic polynomials in the plane. *Proc. London Math. Soc.* (3) 32 (1976), 213—229.

Булиган (Bouligand G.) [1924] Domaines infinis et cas d'exception du problème de Dirichlet. *C.R. Acad. Sci. Paris* 178 (1924), 1054—1057.

Валирон (Valiron G.) [1935] Sur le minimum du module des fonctions entières d'ordre inférieur à un. *Mathematica* 11 (1935) (Cluj), 264—269.

Вейерштрасс (Weierstrass K.) [1876] Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Math. Abh. der Akad. der Wiss. zu Berlin 1876, 11—60.

Винер (Wiener N.) [1924] Certain notions in potential theory. *J. Math. Mass.* 3 (1924), 24—51.

Витушкин А. Г. [1959] Пример множества положительной длины, но нулевой аналитической емкости. *ДАН СССР*, 127, в. 2 (1959), 246—249.

Гарнетт (Garnett J.) [1970] Positive length but zero analytic capacity. *Proc. Amer. Math. Soc.* 24 (1970), 696—699.

Говоров Н. В. [1969] О гипотезе Пэли, *Функц. анализ и его прилож.*, 3, в.2 (1969), 41—45.

Грин (Green G.) [1828] Essay on the application of Mathematical Analysis to the theory of Electricity and Magnetism. Nottingham, 1828.

Дальберг (Dahlberg B.) [1972] Mean values of subharmonic functions. *Arkiv. för Math.* 10 (1972), 293—309.

Данжуа (Denjoy A.) [1909] Sur les fonctions analytiques uniformes à singularités discontinues. *C. R. Acad. sci. Paris* 149 (1909), 258—260.

Дени (Deny J.) [1947] Sur les infinis d'un potentiel. *C.R. Acad. sci. Paris* 224 (1947), 524—525.

[1948] Un théorème sur les ensembles effilés. *Annales Univ. Grenoble*, Sect. sci. Math. Phys. 23 (1948), 139—142.

Дю Плесси (Du Plessis N.) [1970] An Introduction to Potential Theory, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1970.

Егоров Д. Ф. [1911] Sur les suites des fonctions mesurables. *C.R. de l'Acad. sci. Paris* 152 (1911), 244—246.

Ерёменко А. Э. [1978] * Об одном неравенстве для субгармонических функций.— Теор. функций, функц. анализ и их прил., Харьков, вып. 29, 1978, с. 36—40; вып. 32, 1979, с. 100.

[1979a] * Об асимптотических кривых субгармонических функций в пространстве $\mathbb{R}^m$. Изв. АН Арм. ССР, матем.,1979, 14 (1979), №4, 292—296.

[1979b] * О росте субгармонических функций на асимптотических кривых. ДАН СССР, 248 (1979), №1, 28—31.

Заремба (Zaremba S.) [1909] Sur le principe du minimum, *Krakau Anz.* 1909 (2), 197—264.

Иванов Л. Д. [1963] О гипотезе Данжуа. *УМН*, 18, в. 4 (1963), 147—149.

Иверсен (Iversen F.) [1915] Sur quelques propriétés des fonctions monogènes au voisinage d'un point singulier. *Öfv. af Finska Vet. Soc. Forh.* 58A, No. 25 (1915—1916).

Иенсен (Jensen J. L. W. V.) [1905] Om konvexe Funktioner og Uligheder mellem Middelvaerdier. *Ngt. Tids. for Mat.* **16B** (1905), 49—68.

Карлесон (Carleson L.) [1967] Selected Problems on Exceptional Sets, Van Nostrand Mathematical studies, No. 13, Van Nostrand, 1967. [Имеется перевод: Карлесон Л. Избранные проблемы теории исключительных множеств.— М.: Мир, 1971].

[1974] Asymptotic paths for subharmonic functions in $\mathbb{R}^n$. Report No. 1 Institute Mittag-Leffler 1974.

Картан (Cartan H.) [1928] Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications. *Ann. sci. École norm. sup.* (3) 45 (1928), 255—346.

[1945] Théorie du potentiel newtonien, énergie, capacité, suites de potentiels. *Bull. Soc. Math.* 73 (1945), 74.

Келлог (Kellogg O. D.) [1928] Unicité des fonctions harmoniques, *C.R. Acad. sci. Paris* **187** (1928), 526—527.

[1929] Foundations of Potential Theory. Grundlehren der Math. Wiss, 31, Springer, Berlin, 1929.

Кеннеди (Kennedy P. B.) [1956] A class of integral functions bounded on certain curves. *Proc. London Math. Soc.* (3) **6** (1956), 518—547.

Керекьярто (Kerékjártó B. von) [1923] Vorlesungen über Topologie I, Berlin, 1923.

Кизельман (Kiselman C. O.) [1969] Prolongement des solutions d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants. *Bull. Soc. Math. Françe* **97** (1969), 329—356.

Киси (Kishi M.) [1957] Capacities of Borelian sets and the continuity of potentials. *Nagoya Math. J.* **12** (1957), 195—219.

Ландкоф Н. С. [1966] Основы современной теории потенциала.— М.: Наука, 1966.

Лебег (Lebesgue H.) [1924] Conditions de regularité, conditions d'irregularité, conditions d'impossibilité dans le problème de Dirichlet. *C.R. Acad. sci. Paris.* **178** (1924), 349—354.

Литтлвуд (Littlewood J. E.) [1924] On inequalities in the theory of functions. *Proc. London Math. Soc.* (2) **23** (1924), 481—519.

Мартенсен (Martensen E.) [1968] Potentialtheorie. Teubner, Stuttgart, 1968.

Майлз, Ши (Miles J., Shea D. F.) [1973] An extremal problem in value distribution theory. *Quart. J. of Math.*, Oxford (2) **24** (1973), 377—383.

Нгуен-Хен-Лок, Ватанабе (Nguyen-Xuan-Loc, Watanabe T.) [1972] Characterization of fine domains for a certain class of Markov processes. *Z. f. Wahrscheinlichkeitstheorie u. verw. Geb.* **21** (1972), 167—178.

Неванлинна Р. (Nevanlinna R.) [1929] Le théorème de Picard — Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Paris, 1929.

Неванлинна Ф., Неванлинна Р. (Nevanlinna F., Nevanlinna R.) [1922] Über die Eigenschaften einer analytischen Funktion in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie. *Acta Soc. Sci. Fenn.* **50**, No. 5 (1922).

Ньюмен (Newman M. H. A.) [1951] Elements of the Topology of Plane Sets of Points. 2nd Ed., Cambridge, 1951.

Перрон (Perron O.) [1923] Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$. *Math. Zeit.* **18** (1923), 42—54.

Петренко В. П. [1969] Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка, *Изв. АН СССР*, 33, в. 2 (1969), 415—454.

Привалов И. И. [1937] * Субгармонические функции.— М.—Л.: Гостехиздат, 1937.

Пуанкаре (Poincaré H.) [1890] Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique. *Amer. J. Math.* **12** (1890), 211—294.

Пуассон (Poisson S. D.) [1823] Mémoire sur le calcul numérique des integrales définies. *Mémoires de l'Acad. royale des sci. de l'Institut de France*, vi (1823, опубликовано в 1827), 571—602, особенно стр. 575.

Радо (Rado T.) [1937] Subharmonic Functions, Berlin, 1937.

Радон (Radon J.) [1919] Über lineare Funktionaltransformationen und Funktionalgleichungen. *Sitzungsber. Akad. Wien* (2) **128** (1919), 1083—1121.

Рао, Ши (Rao N. V., Shea D. F.) [1976] Growth problems for subharmonic functions of finite order in space. *Proc. London Math. Soc.* (1976).

Риман (Riemann B.) [1953] Theorie der Abelschen Funktionen. *Crelle's J.* **54** (1857). См. также Collected works, Dover, 1953, 88—144, особенно стр. 97.

Рисс Ф. (Riesz F.) [1909] Sur les opérations fonctionelles linéaires, *C.R. Acad. sci. Paris* **149** (1909), 1303—1305.

[1926] Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel. I *Acta Math.* 48 (1926), 329—343.

[1930] II ibid. 54 (1930), 321—360.

Рогозинский (Rogosinski W. W.) [1943] On the coefficients of subordinate functions. *Proc. London Math. Soc.* (2) 48 (1943), 48—82.

Рудин (Rudin W.) Principles of Mathematical Analysis, 2nd. Ed., McGraw-Hill, New York, 1964. [Имеется перевод: Рудин У. Основы математического анализа.— М.: Мир, 1976.]

Сельберг (Selberg H. L.) [1937] Über die ebenen Punktmengen von der Kapazität Null. *Ark. Norske Videnskap Akad. Oslo* (Mat. Naturvid. Kl.) (1937), No. 10.

Талпур (Talpur M. N. M.) [1975] A subharmonic analogue of Iversen's theorem. *Proc. London Math. Soc.* (3) **31** (1975), 129—148.

[1976] On the existence of asymptotic paths for subharmonic functions in $\mathbb{R}^n$. *Proc. London Math. Soc.* **32** (1976), 181—192.

Титчмарш (Titchmarsh E. C.) [1939] The Theory of Functions, 2nd Ed., Oxford, 1939. [Имеется перевод: Титчмарш Е. Теория функций.— М.— Л.: Гостехиздат, 1951.]

Фридланд, Хейман (Friedland S., Hayman W. K.) [1976] Eigenvalue inequalities for the Dirichlet problem and the growth of subharmonic functions. *Comment. Math. Helv.* (1976).

Фростман (Frostman O.) [1935] Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions. *Meddel. Lunds. Univ. Mat. Sem.* 3 (1935), 1—118.

Фубини (Fubini G.) [1907] Sugli integrali multipli. *Rendi. accad. d. Lincei Roma* (5) **16** (1907), 608—614.

Фугледе (Fuglede B.) [1965] Le théorème du minimax et la théorie fine du potentiel. *Ann. Inst. Fourier* **15** (1965), 65—88.

[1972] Finely harmonic functions. Lectures Notes in Mathematics 289, Springer, 1972.

[1975] Asymptotic paths for subharmonic functions. *Math. Ann.* **213** (1975), 261—274.

Харди (Hardy G. H.) [1915] On the mean value of the modulus of an analytic function. *Proc. London Math. Soc.* (2) **14** (1915), 269—277.

Харнак (Harnack A.) [1886] Existenzbeweise zur Theorie des Potentials in der Ebene und im Raume. *Leipziger Ber.* (1886), 144—169.

Хаусдорф (Hausdorff F.) [1918] Dimension und äusseres Maasz. *Math. Ann.* **79** (1918), 157—179.

Хейман (Hayman W. K.) [1952] The minimum modulus of large integral functions. *Proc. London Math. Soc.* (3) **2** (1952), 469—512.

[1958] Multivalent Functions, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 48, Cambridge University Press, Cambridge, 1958. [Имеется перевод: Хейман У. Многолистные функции.— М.: ИЛ, 1960.]

[1960] On the growth of integral functions on asymptotic paths. *J. Indian Math. Soc.* **24** (1960), 251—264.

[1964] Meromorphic Functions, Oxford Mathematical Monograph, Clarendon Press, Oxford, 1964. [Имеется перевод: Хейман У. Мероморфные функции.— М.: Мир, 1966.]

[1970] Power series expansions for harmonic functions. *Bull. London Math. Soc.* **2** (1970), 152—158.

Хейнс (Heins M.) [1948] Entire functions with bounded minimum modulus; subharmonic function analogues. *Ann. of Math.* (2) **49** (1948), 200—213.

[1959] On a notion of convexity connected with a method of Carleman. *J. Analyse Math.* **7** (1959), 53—77.

Хелмс (Helms L. L.) [1969] Introduction to Potential Theory, Wiley Interscience Pure and Applied Matematics, 22, New York, 1969.

Цоретти (Zoretti L.) [1905] Sur les fonctions analytiques uniformes qui possèdent un ensemble parfait discontinu de points singuliers. *J. Math. Pures Appl.* (6) **1** (1905), 1—51.

Цудзи (Tsuji M.) [1959] Potential Theory in Modern Function Theory, Maruzen, Tokyo, 1959.

Чжан Ганхэ (Chang Kuan-heo) [1977]* Asymptotic values of entire and meromorphic functions. *Sci. Sinica* **20** (1977), №6, 720—739.

Шварц Л. (Schwartz L.) [1950] Théorie des distributions, 2 vols., Paris, 1950—1951.

Шоке (Choquet G.) [1955] Theory of capacities. *Ann. Inst. Fourier* **5** (1955), 131—295.

[1958] Capacitabilité en potentiel logarithmique. *Bull. classe sci. Bruxelles*, **44** (1958), 321—326.

Эванс (Evans G. C.) [1933] Applications of Poincaré's sweeping out process. *Proc. Nat. Acad. sci.* **19** (1933), 457.

[1936] Potentials and positive infinite singularities of harmonic functions. *Monatsch. für Math. u. Phys.* **43** (1936), 419—424.

Эдрей (Edrei A.) [1969] Locally tauberian theorems for meromorphic functions of lower order less than one. *Trans. Amer. Math. Soc.* **140** (1969).

Эдрей, Фукс (Edrei A., Fuchs W. H. J.) [1960] The deficiencies of meromorphic functions of order less than one. *Duke Math. J.* **27** (1960), 233—249.

Эрдёш, Джиллис (Erdős P., Gillis J.) [1937] Note on the transfinite diameter. *J. London Math. Soc.* **12** (1937), 185—192.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Уважаемый читатель!

У. Хейман, Н. Кеннеди

СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1 том

Ст. науч. редактор Н. И. Плужникова
Мл. науч. редактор Ю. С. Андреева
Художник Б. Н. Юдкин
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор Т. А. Максимова
Корректор С. А. Денисова

ИБ № 1472

Сдано в набор 24.01.80. Подписано к печати 26.06.80.
Формат 60×90 1/16. Бумага типографская № 1.
Гарнитура обыкновенная. Печать высокая.
Объем 9,5 бум. л. Усл. печ. л. 19.
Уч.-изд. л. 17,21. Изд. № 1/0174.
Тираж 6200 экз. Зак. 0623. Цена 1 р. 70 к.

Издательство «Мир». 1-й Рижский пер., д. 2.

Ордена Трудового Красного Знамени
Московская типография № 7 «Искра революции» Союзполиграфпрома
Государственного Комитета СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
Москва 103001, Трехпрудный пер., д. 9.