Վ. Մ. ՄՈԼՈՏՈՎԻ ԱՆՎԱՆ ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

517
Ֆ-55

Գ. Մ. ՖԻԽՏԵՆԳՈԼՑ

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՇՎԻ ԴԱՍԸՆԹԱՑ

ՀԱՏՈՐ
I

[illegible]

ԵՐԵՎԱՆ 19[illegible]

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐ

§ 1. ՌԱՑԻՈՆԱԼ ԹՎԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆ

1. ՆԱԽՆԱԿԱՆ ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։ Ընթերցողին դպրոցական դասընթացից լավ հայտնի են ռացիոնալ թվերն ու նրանց հատկությունները։ Միաժամանակ, դեռևս տարրական մաթեմատիկայի պահանջները բերում են այդ թվային բազմության ընդլայնման անհրաժեշտությանը։ Իսկապես, ռացիոնալ թվերի մեջ հաճախ գոյություն չունեն արմատներ նույնիսկ դրական ամբողջ թվերից (բնական թվերից)։ Օրինակ, $\sqrt{2}$-ը. չկա այնպիսի $\frac{p}{q}$ ռացիոնալ կոտորակ (որտեղ p-ն և q-ն բնական թվեր են), որի քառակուսին հավասար լինի 2-ի։ *Այդ ապացուցելու համար ենթադրենք հակառակը. դիցուք գոյություն ունի այնպիսի $\frac{p}{q}$ կոտորակ, որ $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$։ Մենք իրավունք ունենք այդ կոտորակն անկրճատելի համարել, այսինքն՝ p-ն և q-ն համարել ընդհանուր բազմապատկիչից զուրկ։ Քանի որ $p^2=2q^2$, ապա p-ն զույգ թիվ է՝ $p=2r$ (r-ը ամբողջ է) և, հետևաբար, q-ն կենտ է (այլապես 2-ը կլիներ նրանց համար ընդհանուր բազմապատկիչ)։ p-ի փոխարեն դնելով իր արտահայտությունը, կգտնենք՝ $q^2=2r^2$, որտեղից հետևում է, որ q-ն զույգ պիտի լինի։ Ստացված հակասությունն ապացուցում է մեր ասածն այն մասին, որ $\frac{p}{q}$ ռացիոնալ կոտորակ գոյություն չունի, որի քառակուսին հավասար լինի 2-ի։*

Դրա հետ միաժամանակ, եթե մենք բավարարվեինք միայն ռացիոնալ թվերի բազմությամբ, երկրաչափության մեջ ակնե-

բնավին ոչ բոլոր հատվածները կկարողանային օժտվել երկարությամբ։ Իրոք, վերցնենք մի քառակուսի, որի կողմի երկարությունը հավասար է միավորի։ Նրա անկյունագիծը չի կարող ունենալ $\frac{p}{q}$ ռացիոնալ երկարություն, քանի որ, հակառակ դեպքում, Պյութագորի թեորեմայի համաձայն, այդ երկարության քառակուսին պիտի հավասար լիներ 2-ի, որը, ինչպես մենք տեսանք, հնարավոր չէ։

Այս ներածության մեջ մենք խնդիր ենք դնում ընդլայնել ռացիոնալ թվերի բազմությունը, նրանց միացնելով նոր բնույթի թվեր՝ իռացիոնալ թվեր։ Միաժամանակ մենք ցույց կտանք, որ ընդլայնված բազմության մեջ պահպանվում է ռացիոնալ թվերի այն բոլոր սովորական հատկությունների իրավացիությունը, որոնք վերաբերում են նրանց նկատմամբ թվաբանական գործողություններին և հավասարության ու անհավասարության նշանների միջոցով նրանց բաղդատումներին։ Որպեսզի իսկապես հնարավոր դարձնենք այդ հատկությունների ստուգումը ընդլայնված բազմության համար, շատ կարևոր է առանձնացնել նվազագույն թվով հիմնական հատկություններ, որոնցից կբխեին մյուս բոլոր հատկություններն իբրև ձևական-տրամաբանական հետևություններ. այն ժամանակ ստուգման ենթակա կլինեն միայն այդ հիմնական հատկությունները։

Այդ նպատակով մենք ստորև բերում ենք ռացիոնալ թվերի բազմության հիմնական հատկությունների ցուցակը։ Զուգընթացաբար մենք մի շարք օրինակների վրա ցույց ենք տալիս, թե ինչպես նրանց մյուս հայտնի հատկությունները միանգամայն ձևականորեն դուրս են բերվում այդ հիմնական հատկություններից։ Խոսելով «թվերի» մասին, մենք այստեղ միշտ ի նկատի ունենք ռացիոնալ թվերը. a, b, c տառերը հենց այդպիսի թվեր են նշանակում։

2. ՌԱՑԻՈՆԱԼ ԹՎԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ԿԱՐԳԱՎՈՐՈՒՄԸ։

Հենց սկզբից պայմանավորվենք, որ հավասար թվերը դիտելու ենք իբրև միևնույն թիվ՝ դանազան ձևերով արտահայտված։ Այլ խոսքով, մեզ համար «հավասար է» (=) գաղափարը նշանակում է «նույնական է»։ Այդ պատճառով մենք այստեղ չենք թվի հավասար թվերի հատկությունները։

Ռացիոնալ թվերի բազմության կարգավորումը կատարվում

է «մեծ է» ($>$) գաղափարի օգնությամբ, որի հետ կապված է հատկությունների առաջին խումբը.

I 1° a և b թվերի յուրաքանչյուր զույգի համար տեղի ունի

$$a=b, \quad a>b, \quad b>a$$

առնչություններից մեկը և միայն մեկը.

I 2° $a>b$ և $b>c$ առնչություններից հետևում է $a>c$ առնչությունը [$>$ նշանի տրանզիտիվ (փոխանցական) հատկությունը].

I 3° եթե $a>b$, ապա կգտնվի այնպիսի c թիվ, որ՝

$$a>c \text{ և } c>b^*$$

(խտության հատկություն):

«Փոքր է» ($<$) գաղափարը մուծվում է որպես իբրև ածանցյալ գաղափար. այն է՝ ասում են, որ $a<b$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $b>a$: Հեշտ է տեսնել, որ $a<b$ և $b<c$ առնչություններից բխում է $a<c$ առնչությունը ($<$ նշանի տրանզիտիվ հատկությունը): Իրոք, $a<b$ և $b<c$ անհավասարությունները, պայմանի համաձայն, համարժեք են $b>a$ և $c>b$ անհավասարություններին, որոնցից հետևում է $c>a$ (I 2°) կամ, որ միևնույնն է, $a<c$ անհավասարությունը:

«Մեծ է» գաղափարի մյուս հատկությունները, որոնք կապված են ռացիոնալ թվերի նկատմամբ կատարվող թվաբանական գործողությունների հետ, ցույց կտրվեն ստորև:

3. ՌԱՑԻՈՆԱԼ ԹՎԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄՆ ՈՒ ՀԱՆՈՒՄԸ: Հատկությունների երկրորդ խումբը կապված է գումարման հետ, այսինքն՝ երկու թվերի գումարը գտնելու գործողության հետ: Յուրաքանչյուր զույգ a և b թվերի համար գոյություն ունի մի (միակ) թիվ, որը կոչվում է նրանց գումար (նշանակում են՝ $a+b$): Այդ գաղափարն օժտված է հետևյալ հատկություններով.

II 1° $a+b=b+a$ (գումարման տեղափոխական հատկություն),

II 2° $(a+b)+c=a+(b+c)$ (գումարման զուգորդական հատկություն):

** Այդպիսի դեպքում ասում են նաև, որ c թիվը գտնվում է a և b թվերի միջև. ակներևաբար, այդպիսի թվեր կլինեն անթիվ բազմությամբ:*

II 3° $a+0=a$,

և, բացի դրանից՝

II 4° յուրաքանչյուր a թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $-a$ թիվ (a-ին սիմետրիկ), որ $a+(-a)=0$։

Այս հատկությունների շնորհիվ, ամենից առաջ, ապահովված է հանման, իբրև գումարմանը հակադարձ գործողության, հարցը։ Եթե a և b թվերի տարբերություն անվանենք, ինչպես սովորաբար, այնպիսի c թիվը, որի համար $c+b=a$, ապա հարց կառաջանա այդպիսի թվի գոյության և միակության մասին։*

Ընդունելով $c=a+(-b)$, *կստանանք* [II 2°, 1°, 4°, 3°]՝

$$c+b=[a+(-b)]+b=a+[(-b)+b]=$$
$$a+[b+(-b)]=a+0=a,$$

այնպես որ այդ c *թիվը բավարարում է տարբերության սահմանմանը։*

Դիցուք, հակադարձաբար, c'*-ը* a *և* b *թվերի տարբերությունն է, այնպես որ՝* $c'+b=a$։ *Այս հավասարության երկու մասերին ավելացնելով* $(-b)$ *և ձախ մասը ձևափոխելով* [II 2°, 4°, 3°]՝

$$(c'+b)+(-b)=c'+[b+(-b)]=c'+0=c',$$

եզրակացնում ենք, որ $c'=a+(-b)=c$։

Այսպիսով ապացուցվեց a *և* b *թվերի տարբերության գոյությունն ու միակությունը. տարբերությունը նշանակում են այսպես՝* $a-b$։

Տարբերության միակությունից բխում են մի շարք հետևություններ։ Ամենից առաջ, II 3°*-ից հետևում է, որ* $0=a-a$, *և մենք եզրակացնում ենք, որ, բացի 0-ից, ուրիշ թիվ գոյություն չունի, որն ունենար* II 3° *հատկության նման հատկություն։ Այնուհետև, հենց այստեղից էլ հետևում է տված թվին սիմետրիկ թվի միակությունը՝* $-a=0-a$։ *Եվ վերջապես, քանի որ* $a+(-a)=0$ *հավասարությունից հետևում է* $(-a)+a=0$ *հավասարությունը* [II 1°], *ապա պարզվում է, որ* $a=-(-a)$, *այսինքն՝ որ* a *և* $-a$ *թվերը փոխադարձաբար սիմետրիկ են։*

Դուրս բերենք սիմետրիկ թվերի մի հատկություն ևս՝

---

* *Տարբերությունը որոշող այդ հավասարությունը,* II 1° *հատկության շնորհիվ, կարելի է և այսպես գրել՝* $b+c=a$։

$$-(a+b)=(-a)+(-b)\text{։}$$

Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ

$$(a+b)+[(-a)+(-b)]=0,$$

իսկ այդ հետևում է II 1°, 2°, 4°, 3° *հատկություններից։*

Վերջապես, նշենք մի հատկություն ևս, որը $>$ *նշանը կապում է գումարի նշանի հետ.*

II 5° $a>b$ **անհավասարությունից հետևում է** $a+c>b+c$ **անհավասարությունը։**

Այս հատկությունն իրավունք է տալիս անհավասարության երկու մասերին համասար թվեր ավելացնել. նրա օգնությամբ ապացուցվում է

$$a>b \text{ և } a-b>0$$

անհավասարությունների համարժեքությունը։ Այնուհետև, $a>b$ *անհավասարությունից հետևում է* $-a<-b$ *անհավասարությունը։ Իրոք,* $a>b$ *անհավասարությունից բխում է, որ* $a-b>0$. *սակայն՝*

$$a-b=a+(-b)=(-b)+a=(-b)+[-(-a)]=$$
$$=(-b)-(-a),$$

այնպես որ, այդ հավասարությունը կարելի է գրել այսպես՝

$$(-b)-(-a)>0,$$

որտեղից՝

$$-b>-a \text{ կամ } -a<-b\text{։}$$

Մասնավորապես, $a>0$ *անհավասարությունից հետևում է, որ* $-a<0$, *իսկ* $a<0$ *անհավասարությունից հետևում է, որ* $-a>0$։ *Եթե* $a\neq 0$, *ապա* a *և* $-a$ *փոխադարձ սիմետրիկ թվերից մեկը (և միայն մեկը)* 0-*ից մեծ կլինի, որը և անվանում են ինչպես* a *թվի, այնպես էլ* $-a$ *թվի* *բ ա ց ա ր ձ ա կ մ ե ծ ու թ յ ու ն և նշանակում են այսպիսի նշանով՝*

$$|a|=|-a|\text{։}$$

0 *թվի բացարձակ մեծությունն ընդունում են* 0-*ի համար՝* $|0|=0$։

II 5° հատկության վրա է հիմնվում անհավասարությունների անդամ առ անդամ գումարելու հնարավորությունը. $a > b$ և $c > d$ անհավասարություններից հետևում է, որ $a + c > b + d$: Իսկապես, $a > b$ անհավասարությունից հետևում է, որ $a+c > b+c$, իսկ $c > d$ անհավասարությունից էլ հետևում է, որ $c+b > d+b$, կամ [II 1°], որ՝ $b + c > b + d$. այն ժամանակ, շնորհիվ I 2° հատկության, վերջնականապես ստանում ենք՝ $a + c > b + d$:

4. ՌԱՑԻՈՆԱԼ ԹՎԵՐԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄՆ ՈՒ ԲԱԺԱՆՈՒՄԸ: *Հատկությունների երրորդ խումբը կապված է բազմապատկման հետ, այսինքն երկու թվերի արտադրյալը գտնելու գործողության հետ: Յուրաքանչյուր զույգ a և b թվերի համար գոյություն ունի մի (միակ) թիվ, որը կոչվում է նրանց արտադրյալ (նշանակում են $a \cdot b$ կամ պարզապես ab): Այդ գաղափարն օժտված է հետևյալ հատկություններով.*

III 1° $ab=ba$ (բազմապատկման տեղափոխական հատկություն):

III 2° $(ab)c=a(bc)$ (բազմապատկման զուգորդական հատկություն)

Միավորի առանձնահատուկ դերը բնորոշվում է հետևյալ հատկությամբ՝

III 3° $a \cdot 1 = a$.

բացի դրանից՝

III 4° ամեն մի a թվի համար, որը տարբեր է 0-ից, գոյություն ունի այնպիսի $\frac{1}{a}$ թիվ (տվածին հակադարձ), որ $a \cdot \frac{1}{a} = 1$:

Բաժանման, իբրև բազմապատկման հակադարձ գործողության, հարցը լուծվում է բազմապատկման հատկությունների հիման վրա, այնպես, ինչպես վերևում լուծեցինք հանման հարցը՝ գումարման հատկությունների հիման վրա: Հակադարձ թիվը այստեղ նույն դերն է խաղալու, ինչ դեր այնտեղ խաղացել է սիմետրիկ թիվը:

a *և* b *թվերի (որտեղ* b *բաժանարարը միշտ ենթադրվում է 0-ից տարբեր) քանորդ անվանենք այնպիսի* c *թիվը, որ*

$$c \cdot b = a^{*}:$$

* *Քանորդը որոշող այս հավասարությունը, III 1° հատկության շնորհիվ, կարելի է գրել նաև այսպես՝* $b \cdot c = a$:

Այդ սահմանումը կբավարարվի, եթե ընդունենք $c=a\cdot\frac{1}{b}$, *քանի որ* [III 2°, 1°, 4°, 3°]՝

$$c\cdot b=\left(a\cdot\frac{1}{b}\right)\cdot b=a\cdot\left(\frac{1}{b}\cdot b\right)=a\left(b\cdot\frac{1}{b}\right)=a\cdot 1=a\text{։}$$

Եթե, հակադարձաբար, c' *թիվը բավարարում է* a *և* b *թվերի քանորդի սահմանմանը, այնպես որ* $c'\cdot b=a$, *ապա հավասարության երկու մասերը բազմապատկելով* $\frac{1}{b}$*-ով և ձախ մասը ձևափոխելով* [III 2°, 4°, 3°]՝

$$(c'\cdot b)\cdot\frac{1}{b}=c'\cdot\left(b\cdot\frac{1}{b}\right)=c'\cdot 1=c',$$

կստանանք՝ $c'=a\cdot\frac{1}{b}=c$։

Այսպիսով ապացուցվեց a *և* b *երկու թվերի քանորդի գոյությունն ու միակությունը (պայմանով, որ* $b\neq 0$*)․ քանորդը նշանակում են՝* a : b *կամ* $\frac{a}{b}$։

Քանորդի միակությունից ստանում ենք, որ, բացի 1 թվից, չկա ուրիշ թիվ, որն օժտված լինի III 3° *հատկությանը համանման հատկությամբ։ Այնուհետև, այստեղից բխում է, ինչպես վերևում էր, հակադարձ թվի միակությունը (իբրև 1-ի և a-ի քանորդ)։ Բացի դրանից, հեշտությամբ ցույց է տրվում, որ* a *և* $\frac{1}{a}$ *թվերը փոխադարձաբար հակադարձ թվեր են (փոխհակադարձ թվեր)*:

Հետևյալ հատկությունը միմյանց հետ կապում է երկու հիմնական թվաբանական գործողությունները՝ բազմապատկումն ու գումարումը։

III 5° $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ (բազմապատկման բաշխական հատկություն գումարի նկատմամբ):

Այստեղից հեշտ է ստանալ նաև բազմապատկման բաշխական հատկությունը տարբերության նկատմամբ՝

$$(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c\text{։}$$

Տարբերության սահմանման համաձայն, այդ ուղղակի բխում է նրանից, որ

$$(b-a)\cdot c+b\cdot c=[(a-b)+b]\cdot c=a\cdot c\text{։}$$

III 5° հատկությունը կիրառենք ապացուցելու նաև, որ

$$b \cdot 0 = 0 \cdot b = 0$$։

Իրոք, [II 3]-ի համաձայն՝

$$a + 0 = a, \quad (a+0) \cdot b = a \cdot b + 0 \cdot b = a \cdot b,$$

որտեղից և հետևում է, որ $0 \cdot b = 0$, ինչպես նաև [III 1], որ $b \cdot 0 = 0$։ Հակադարձաբար, եթե $a \cdot b = 0$ և $b \neq 0$, ապա անհրաժեշտաբար $a = 0$։ Իսկապես, $a = \frac{0}{b}$, սակայն միաժամանակ նաև $0 = \frac{0}{b}$ (քանի որ $b \cdot 0 = 0$), իսկ քանորդը միակն է։

Վերջապես, նշենք ևս մի հատկություն, որը նշանը կապում է արտադրյալի նշանի հետ.

III 6 $a > b$ և $c > 0$ անհավասարություններից հետևում է $a \cdot c > b \cdot c$ անհավասարությունը։

Այս հատկության վրա է հիմնվում դրական անդամներով անհավասարությունների անդամ առ անդամ բազմապատկումը։ Այստեղից էլ հետևում է, որ եթե $a > 0$ և $b > 0$, ապա նաև $a \cdot b > 0$։

Նկատենք, որ $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$, քանի որ՝

$$a \cdot b + (-a) \cdot b = [a + (-a)] \cdot b = 0 \cdot b = 0$$։

Այժմ դժվար չէ տեսնել, որ եթե $a < 0$, $b > 0$, այնպես որ $a = -|a|$, $b = |b|$, ապա

$$a \cdot b = (-|a|) \cdot |b| = -(|a| \cdot |b|) < 0$$։

Այդպես կլինի նաև երբ $a > 0$, $b < 0$։ Իսկ եթե $a < 0$, $b < 0$, ապա՝

$$a \cdot b = (-|a|) \cdot (-|b|) = -[|a| \cdot (-|b|)] =$$
$$= -[-(|a| \cdot |b|)] = |a| \cdot |b| > 0$$։

Այսպիսով, մենք լրիվին վերականգնեցինք հայտնի **նշանների կանոնը** բազմապատկելիս, որը հանդիսանում է ռացիոնալ թվերի վերևում թված հատկությունների տրամաբանական հետևանքը։ Այլ խոսքով, **նշանների կանոնը** հարկադրաբար պետք է ընդունել, եթե մենք ցանկանում ենք պահպանել մատնանշված հատկությունները։ Նույնը պետք է ասել (ինչպես այդ պարզվեց վերևում) նաև 0-ով բազմապատկելու կանոնի նկատմամբ։

Մեր տրամադրության տակ ունենալով գումարման ու բազ-

մասնավորման հատկությունները, մենք այժմ կկարողանայինք ապացուցել ռացիոնալ թվերի բազմության խտության այն հատկությունը, որը մենք վերևում ձևակերպել էինք հիմնական հատկությունների թվում [I 3]։ *Այդ հատկությունների օգնությամբ կարելի է ցույց տալ, օրինակ, որ* $a < b$ *անհավասարությունից հետևում է, որ* $a < \frac{a+b}{2} < b$։

5. ԱՐՔԻՄԵԴԻ ԱՔՍԻՈՄԱՆ։ *Ռացիոնալ թվերի հիմնական հատկությունների ցուցակն ավարտենք հետևյալ պարզ և կարևոր առաջադրությամբ, որը չի բխում վերևում թված հատկություններից.*

IV 1° Ինչպիսին էլ լինի $0 < c$ թիվը, գոյություն ունի բնական n թիվ, որը մեծ է c-ից *(«Արքիմեդի աքսիոմա»)*։

Իրականում Արքիմեդն արտահայտել է մի երկրաչափական առաջադրություն, որը և հայտնի է «Արքիմեդի աքսիոմա» անունով.

Եթե ուղիղի վրա տված են երկու որևէ A և B հատվածներ, ապա կարելի է A-ն իբրև գումարելի կրկնել այնքան անգամ, մինչև գումարը մեծ դառնա B-ից՝

$$\underbrace{A+A+\ldots+A}_{n \text{ անգամ}} = A \cdot n > B։$$

Եթե այդ ասածը ձևակերպենք a և b դրական թվերի համար, ապա նա կհանգի այնպիսի բնական n *թվի գոյությանը, որ*

$$\underbrace{a+a+\ldots+a}_{n \text{ անգամ}} = a \cdot n > b։$$

Այս անհավասարությունը, եթե օգտագործենք ռացիոնալ թվերի արդեն ուսումնասիրված հատկությունները, համարժեք կլինի այսպիսի անհավասարության՝ $n > \frac{b}{a}$։ $\frac{b}{a}$ *քանորդը նշանակելով* c*-ով, մենք կստանանք հենց այն ձևակերպումը, որը բերված է վերևում։*

§ 2. ԻՌԱՑԻՈՆԱԼ ԹՎԵՐԻ ՄՈՒԾՈՒՄԸ: ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ԿԱՐԳԱՎՈՐՈՒՄԸ

6. ԻՌԱՑԻՈՆԱԼ ԹՎԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ։ Ռացիոնալ թվերի բազմությունը, § 1-ում թված բոլոր հատկություններով, համարում ենք տված։

Մենք իռացիոնալ թվերի տեսությունը կշարադրենք, հետևելով Դեդեկինդին (R. Dedekind)։ *Այդ տեսության հիմքում ընկած է հատույթի գաղափարը ռացիոնալ թվերի բազմության մեջ։ Դիտարկենք բոլոր ռացիոնալ թվերի բազմության տրոհումը երկու ոչ-դատարկ (այսինքն՝ իսկապես թեկուզ մեկական թիվ պարունակող)* A *և* A′ *բազմությունների։ Մենք այդպիսի տրոհումը կանվանենք հատույթ, եթե բավարարվեն հետևյալ պայմանները.*

1° յուրաքանչյուր ռացիոնալ թիվ ընկնում է A և A′ բազմություններից մեկի և միայն մեկի* մեջ,

2° A բազմության յուրաքանչյուր a թիվ փոքր է A′ բազմության յուրաքանչյուր a′ թվից:

A *բազմությունը կոչվում է հատույթի ստորին դաս,* A′ *բազմությունը՝ վերին դաս։ Հատույթը նշանակելու ենք այսպես՝* A|A′*։*

Հատույթի սահմանումից հետևում է, որ ամեն մի ռացիոնալ թիվ, որը փոքր է ստորին դասին պատկանող մի a *թվից, նույնպես պատկանում է ստորին դասին։ Նմանապես, ամեն մի ռացիոնալ թիվ, որը մեծ է վերին դասին պատկանող մի* a′ *թըվից, նույնպես պատկանում է վերին դասին։*

Օրինակ 1. A *դասը որոշենք որպես այն բոլոր ռացիոնալ* a *թվերի բազմություն, որոնք բավարարում են* $a < 1$ *անհավասարությանը, իսկ* A′ *բազմության մեջ դցենք այն բոլոր* a′ *թվերը, որոնք* ≥ 1*։*

Հեշտ է ստուգել, որ այդպիսով մենք իրոք ստանում ենք հատույթ։ 1 *թիվը պատկանում է* A′ *դասին և, ակներևաբար, հանդիսանում է նրա մեջ ամենամեծ թիվը։ Մյուս կողմից,* A *դասում չկա ամենամեծ թիվը, քանի որ* A *բազմությունից ինչպիսի* a *թիվ էլ վերցնելու լինենք, միշտ հնարավոր է ցույց*

** Այն հանգամանքը, որ յուրաքանչյուր ռացիոնալ թիվ ընկնում է դասերից միայն մեկի մեջ, բխում է, ի միջի այլոց, 2° պահանջից:*

տալ այնպիսի a_1 ռացիոնալ թիվ, որը գտնվի a թվի և 1-ի միջև, հետևաբար, մեծ լինի a-ից և նույնպես պատկանի A դասին։

Օրինակ 2. Ստորին A դասի մեջ դցենք այն բոլոր a ռացիոնալ թվերը, որոնք ≤ 1, իսկ վերին դասի մեջ՝ 1-ից մեծ բոլոր a' ռացիոնալ թվերը։

Այս նույնպես հատույթ կլինի, ընդ որում այստեղ վերին դասում չկա ամենափոքր թիվ, իսկ ստորին դասում կա ամենամեծը (1 թիվը)։

Օրինակ 3. A դասի մեջ դցենք բոլոր բացասական ռացիոնալ թվերը, 0 թիվը և այն բոլոր դրական ռացիոնալ a թվերը, որոնց համար $a^2<2$, իսկ A' դասի մեջ՝ այն բոլոր դրական ռացիոնալ a' թվերը, որոնց համար $a'^2>2$։

Ինչպես հեշտ է համոզվել, մենք դարձյալ հատույթ ստացանք։ Այստեղ ոչ A դասում կա ամենամեծ թիվ, ոչ A' դասում՝ ամենափոքր թիվ։ Ապացուցենք, այդ պնդումներից, օրինակ, առաջինը (երկրորդն ապացուցվում է նման եղանակով)։ Դիցուք a-ն A դասի որևէ դրական թիվ է, այնպես որ $a^2<2$։ Ցույց տանք, որ կարելի է ընտրել այնպիսի n դրական ամբողջ թիվ, որ՝

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2<2,$$

այնպես որ $a+\frac{1}{n}$ թիվը նույնպես կպատկանի A դասին։ Այդ անհավասարությունը համարժեք է հետևյալ անհավասարություններին՝

$$a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<2, \qquad \frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<2-a^2։$$

Վերջին անհավասարությունը ավելի ևս տեղի կունենա, եթե n-ը բավարարի

$$\frac{2a+1}{n}<2-a^2$$

անհավասարությանը, որի համար բավական է վերցնել

$$n>\frac{2a+1}{2-a^2}.$$

Իսկ այդ միշտ հնարավոր է [համաձայն «Արքիմեդի աքսիոմայի», IV 1°]։

Այսպես, ուրեմն, ինչպիսի էլ լինի A դասին պատկանող a դրական թիվը, նույն A դասում կգտնվի a-ից մեծ թիվ, քանի որ 0 a թվերի համար այդ պնդումն ակներև է, ապա A դասի ոչ մի թիվ նրա մեջ ամենամեծը չէ։

Հեշտ է համոզվել, որ չի կարող գոյություն ունենալ այնպիսի հատույթ, որի համար միաժամանակ գտնվի ստորին դասում ամենամեծ a_0 թիվ, իսկ վերին դասում՝ ամենափոքր a'_0 թիվ։ *Իսկապես, ենթադրենք, թե գոյություն ունի այդպիսի հատույթ։ Այդ դեպքում վերցնենք, օգտվելով ռացիոնալ թվերի բազմության խտությունից [I 3], a_0-ի և a'_0-ի միջև որևէ c ռացիոնալ թիվ՝ $a_0 < c < a'_0$։ Այդ c թիվը չի կարող պատկանել A դասին, այլապես a_0-ն չէր լինի ամենամեծ թիվն այդ դասում. նմանապես c թիվը չի կարող պատկանել A′ դասին, իսկ այդ հակասում է հատույթի I հատկությանը, որը մտնում է նրա սահմանման մեջ։*

Այսպիսով, հատույթները կարող են լինել միայն երեք տեսակի, որոնք լուսաբանվում են հենց 1, 2, 3 օրինակներով.

1) կամ A ստորին դասում չկա ամենամեծ թիվ, իսկ A′ վերին դասում կա ամենափոքր r թիվ,

2) կամ A ստորին դասում կա ամենամեծ r թիվ, իսկ A′ վերին դասում չկա ամենափոքր թիվ,

3) կամ, վերջապես, ոչ ստորին դասում կա ամենամեծ թիվ, ոչ վերին դասում՝ ամենափոքր թիվ։

Առաջին երկու դեպքերում ասում ենք, որ հատույթն առաջանում է r ռացիոնալ թվի միջոցով (որը A և A′ դասերի միջև սահմանազատիչ թիվ է հանդիսանում), կամ, որ հատույթը որոշում է r ռացիոնալ թիվը։ 1, 2 օրինակներում այդպիսի r թիվը 1-ն էր։ Երրորդ դեպքում սահմանազատիչ թիվ չկա, հատույթը ոչ մի ռացիոնալ թիվ չի որոշում։ Այժմ մտցնենք նոր օբյեկտներ՝ իռացիոնալ թվեր, պայմանավորվելով ասել, որ 3) տեսակի ամեն մի հատույթ որոշում է մի որոշ α իռացիոնալ թիվ։ *Այդ α թիվը փոխարինում է պակասող սահմանազատիչ թվին. մենք կարծես թե այն մըտցնում ենք A դասի բոլոր a թվերի և A′ դասի բոլոր a′ թվերի միջև։ 3-րդ օրինակում այդպիսի նոր ստեղծած թիվ կլինի, ինչպես հեշտ է կռահել, հենց $\sqrt{2}$-ը։*

Իռացիոնալ թվերի համար միատիպ նշանակումներ* չմտցնելով, մենք α իռացիոնալ թիվը միշտ կապելու ենք ռացիոնալ թվերի բազմության այն A|A′ հատույթի հետ, որը որոշում է այդ թիվը։

Միակերպության տեսակետից հաճախ հարմար կլինի նույն բանը կատարել նաև r ռացիոնալ թվի նկատմամբ։ Սակայն յուրաքանչյուր r ռացիոնալ թվի համար գոյություն ունեն այդ թիվը որոշող երկու հատույթներ. երկուսի համար էլ $r > a$ թվերը պատկանում են ստորին դասին, $r < a$ թվերը՝ վերին դասին. իսկ r թիվն ինքը մեր ցանկությամբ կարող է մտցվել կամ ստորին դասի մեջ (այն ժամանակ նա այնտեղ կլինի ամենամեծը), կամ վերին դասի մեջ (նա այնտեղ կլինի ամենափոքրը)։ Որոշակիության համար մենք ընդմիշտ պայմանավորվենք, r ռացիոնալ թիվը որոշող հատույթի մասին խոսելիս, այդ թիվը մտցնել վերին դասի մեջ։

Ռացիոնալ և իռացիոնալ թվերն ստացել են իրական թվեր ընդհանուր անունը։ Իրական թվի գաղափարը մաթեմատիկական անալիզի հիմնական գաղափարներից մեկն է։

7. ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ԿԱՐԳԱՎՈՐՈՒՄԸ։ α և β երկու իռացիոնալ թվերը, որոնք համապատասխանաբար որոշվում են A|A′ և B|B′ հատույթներով, համարվում են միմյանց հավասար, եթե այդ հատույթները նույնական են. ի միջի այլոց, բավական է պահանջել, որ համընկնեն A և B ստորին դասերը, որովհետև այդ ժամանակ A′ և B′ վերին դասերն իրենք կհամընկնեն։ Այդ սահմանումը կարելի է պահպանել նաև այն դեպքում, երբ α և β թվերն ռացիոնալ են։ Այլ խոսքով, եթե α և β ռացիոնալ թվերն իրար հավասար են, ապա այդ թվերը որոշող հատույթները համընկնում են, և, հակադարձաբար, հատույթների համընկնելուց բխում է α և β թվերի հավասարությունը։ Այդ ժամանակ, հասկանալի է, պետք է հաշվի առնել այն

---

* Խոսքը վերաբերում է վերջավոր նշանակումներին. իռացիոնալ թվերի յուրատեսակ անվերջ նշանակումներին ընթերցողը կծանոթանա 9.-ում։ Ամենից հաճախ անհատապես տված իռացիոնալ թվերը նշանակում են, կախված նրանց ծագումից ու դերից, այսպես՝ $\sqrt{2}$, log 5, sin 10° և այլն։

*պայմանը, որն ընդունել էինք վերևում, ռացիոնալ թվերը հատույթների միջոցով որոշելիս**։*

Այժմ անցնենք «մեծ է» գաղափարի որոշմանն իրական թվերի նկատմամբ։ Ռացիոնալ թվերի համար այդ գաղափարն արդեն որոշված է։ r ռացիոնալ թվի և α իռացիոնալ թվի համար «մեծ է» գաղափարը փաստորեն որոշված է 6-ում. այն է՝ եթե α-ն որոշվում է A|A′ հատույթով, ապա մենք α-ն մեծ ենք համարում A դասին պատկանող բոլոր ռացիոնալ թվերից, իսկ A′ դասին պատկանող բոլոր ռացիոնալ թվերը՝ մեծ են α-ից։

Դիցուք այժմ ունենք երկու իռացիոնալ թվեր՝ α, որը որոշվում է A|A′ հատույթով, և β, որը որոշվում է B|B′ հատույթով։ Մենք համարելու ենք ավելի մեծ այն թիվը, որի ստորին դասն ավելի մեծ է։ Ավելի ճշգրիտ ասած, մենք համարելու ենք $\alpha>\beta$, երբ A դասն իր մեջ ընդգրկում է B դասն ամբողջությամբ, չհամընկնելով նրա հետ։ *(Այդ պայմանը, ակներևաբար, համարժեք է նրան, որ B′ դասն իր մեջ ընդգրկում է A′ դասն ամբողջությամբ, չհամընկնելով նրա հետ)։ Հեշտ է ստուգել, որ* այդ սահմանումը կարող է պահպանվել նաև այն դեպքերի համար, երբ α և β թվերից մեկը, կամ նույնիսկ երկուսն էլ ռացիոնալ են։

Ցույց տանք, որ իրական թվերի համար տեղի ունեն I 1 *և* I 2 *հատկությունները։*

I 1° յուրաքանչյուր զույգ α և β (իրական) թվերի համար տեղի ունի

$$\alpha=\beta,\quad \alpha>\beta,\quad \beta>\alpha$$

առնչություններից մեկը և միայն մեկը։

Եթե α թիվը որոշող A|A′ հատույթը համընկնում է β թիվը որոշող B|B′ հատույթի հետ, ապա α=β։ Եթե այդ հատույթները չեն համընկնում, ապա կամ A դասն իր մեջ ընդգրկում է B-ն ամբողջությամբ, և այն ժամանակ α>β, կամ ոչ։ Վերջին դեպքում B դասում կլինի b_0 թիվ, որն ընկնում է A′ դասի մեջ։ Այն ժամանակ A դասի ամեն մի a թվի համար կունե-

---

* *Առանց այդ պայմանի, օրինակի համար, 3. կետի 1 և 2 օրինակներում դիտարկված հատույթները երկուսն էլ կորոշեին միևնույն 1 թիվը. նույնաբար չհամընկնելով:*

նանք $a > b_0$, ուստի B դասն իր մեջ կընդգրկի A դասը, նրա հետ չհամընկնելով, և մենք կունենանք $\beta > \alpha$:

I 2° $\alpha > \beta$ և $\beta > \gamma$ անհավասարություններից հետևում է, որ $\alpha > \gamma$։

Դիցուք α, β, γ թվերը (որոնց մեջ կարող են և ռացիոնալ թվեր լինել) որոշվում են $A|A'$, $B|B'$, $C|C'$ հատույթներով։ Եթե $\alpha > \beta$, ապա, «մեծ է» գաղափարի սահմանման համաձայն, A դասն իր մեջ ընդգրկում է B-ն, նրա հետ չհամընկնելով։ Քանի որ $\beta > \gamma$, ապա B դասն էլ իր հերթին իր մեջ ընդգրկում է C դասը, չհամընկնելով նրա հետ։ Հետևաբար, A դասն իր մեջ ընդգրկում է C-ն ամբողջությամբ, չհամընկնելով նրա հետ, այսինքն՝ $\alpha > \gamma$։

Այժմ «փոքր է» գաղափարը որոշում ենք այնպես, ինչպես 2-ում. մենք ասում ենք, որ $\alpha < \beta$, եթե $\beta > \alpha$։ Ճիշտ այդպես էլ < նշանն օժտված է փ ո խ ա ն ց ա կ ա ն հատկությամբ, ինչպես > նշանը։

Այժմ ցույց տանք բոլոր իրական թվերի բազմության խ տ ո ւ թ յ ա ն հատկությունը (համեմատել I 3-ի հետ), ավելի ճշգրիտ ասած, մենք ապացուցենք հետևյալ առաջադրությունը.

Ինչպիսին էլ լինեն α և β երկու իրական թվերը, ընդ որում $\alpha > \beta$, միշտ նրանց միջև կգտնվի մի r ռ ա ց ի ո ն ա լ թիվ՝ $\alpha > r > \beta$ *(հետևաբար նաև՝ անթիվ բազմությամբ այդպիսի ռացիոնալ թվեր)։*

Քանի որ $\alpha > \beta$, ապա α թիվը որոշող հատույթի A ստորին դասն իր մեջ ընդգրկում է β թիվը որոշող հատույթի B ստորին դասն ամբողջությամբ, չհամընկնելով նրա հետ։ Ուստի A դասում կգտնվի այնպիսի r ռացիոնալ թիվ, որը չի պատկանում B-ին և, հետևաբար, պատկանում է B′ դասին, նրա համար կունենանք՝

$$\alpha \geq r \geq \beta$$

(հավասարությունը կարող է տեղի ունենալ միայն այն դեպքում, երբ β-ն ռացիոնալ է)։ Սակայն, քանի որ A դասում չկա ամենամեծ թիվ, ապա, հարկ եղած դեպքում մեծացնելով r-ը, կարելի է հավասարությունը բացառել։

Դ ի տ ո ղ ո ւ թ յ ո ւ ն ։ Հաստատելով, որ α և β իրական թվերի միջև (եթե $\alpha > \beta$) անհրաժեշտաբար գոյություն ունի ռ ա ց ի ո ն ա լ (և ոչ միայն իրական) թիվ, մենք իրական թվերի

բազմության համար փաստորեն ապացուցեցինք ավելի ուժեղ հատկություն, քան խ ո ւ թ յ ո ւ ն ն է։ Հետագայում մեզ հարկ է լինելու օգտվել այդ ո ւ ժ ե ղ ա ց ր ա ծ խ ո ւ թ յ ա ն հատկություններից։

8. ԻՐԱԿԱՆ ԹԻՎԸ ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԱՆՎԵՐՋ ԿՈՏՈՐԱԿՈՎ ՆԵՐԿԱՅԱՑՆԵԼԸ։ *Դիտարկենք α կամավոր իրական թիվը, որը որոշվում է $A|A'$ հատույթով, և փնտրենք նրա տ ա ս ն ո ր դ ա կ ա ն մ ո տ ա վ ո ր ո ւ թ յ ո ւ ն ն ե ր ը։*

Ամենից առաջ, «Ա ր ք ի մ ե դ ի աքսիոմայի» օգնությամբ հեշտ է համոզվել, որ A դասում կգտնվի Z ամբողջ թիվ, իսկ A' դասում՝ Z' ամբողջ թիվ, ընդ որում $Z' > Z$։ Z-ին ավելացնելով մեկական միավորներ, անհրաժեշտաբար կհասնենք երկու ի ր ա ր հ ա ջ ո ր դ ո ղ այնպիսի C_0 և C_0+1 ամբողջ թվերի՝ որ

$$C_0 \leqslant \alpha < C_0+1.$$

Այնուհետև, C_0 և C_0+1 թվերի միջև միջակայքը բաժանելով 10 հավասար մասերի և բաժանման կետերը վերցնելով, կհասնենք C_0,c_1 և $C_0,c_1+\frac{1}{10}$ թվերին (որոնք իրարից տարբերվում են $\frac{1}{10}$-ով), որոնց համար տեղի կունենա՝

$$C_0,c_1 \leqslant \alpha < C_0,c_1+\frac{1}{10}.$$

Այդ պրոցեսը շարունակելով, ընդհանրապես, $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ թվերը որոշելուց հետո, c_n թիվը որոշում ենք

$$C_0,c_1c_2\ldots c_n \leqslant \alpha < C_0,c_1c_2\ldots c_n+\frac{1}{10^n} \qquad (1)$$

անհավասարություններով։

Այսպիսով, α թվի տասնորդական մոտավորությունները գտնելու պրոցեսում մենք կառուցեցինք C_0 ամբողջ թիվը և $c_1, c_2, \ldots c_n, \ldots$ թվերի անվերջ հաջորդականությունը։ Նրանցից կազմված տասնորդական անվերջ կոտորակը, այսինքն՝

$$C_0,c_1c_2\ldots c_n\ldots \qquad (2)$$

սիմվոլը կարելի է դիտել իբրև α իրական թվի տ ա ս ն ո ր դ ա կ ա ն ն շ ա ն ա կ ո ւ մ։

Հեշտ է տեսնել, որ այդ կոտորակի «հատվածները»՝

$$C_n = C_0, c_1 c_2 \ldots c_n, \qquad (3)$$

որոնք ծառայում են իբրև α *թվի մոտավոր արժեքներ «պակասորդով»,* n*-ը աճելիս չեն նվազում՝*

$$C_{n+1} \geqslant C_n.$$

ընդ որում հավասարության նշանը տեղի ունի միայն $c_{n+1}=0$ *դեպքում։ Ընդհակառակը, «հավելումով» վերցրած մոտավոր արժեքները՝*

$$C'_n = C_0, c_1 c_2 \ldots c_n + \frac{1}{10^n} \qquad (4)$$

n*-ը աճելիս չեն աճում՝*

$$C'_{n+1} \leqslant C'_n.$$

ընդ որում այս անգամ հավասարության նշանը տեղի ունի միայն $c_{n+1}=9$ *դեպքում։*

Քանի որ (1) առնչություններում մենք հավասարություն թույլ ենք տալիս (եթե այն ընդհանրապես հնարավոր է) միայն ձախից, ապա (2) կոտորակում չի կարող լինել 9-ը պարբերության մեջ:

Իրոք, հակառակ դեպքում C'_n*-ը, սկսած* n*-ի մի որոշ արժեքից, կդադարեր փոփոխվել և հավասար կլիներ մի որոշ* C' *ռացիոնալ թվի։ Այն ժամանակ* α*-ի ու* C'*-ի միջև վերցնելով* r *ռացիոնալ թիվը (տես նախորդ* n°*-ը), բոլոր* n*-երի համար կունենայինք՝*

$$C_n \leqslant \alpha < r < C',$$

այնպես որ $s = C' - r$ *դրական ռացիոնալ թիվը փոքր կլիներ* $\frac{1}{10^n}$ *տեսքի ամեն մի կոտորակից, որտեղից կստանայինք՝*

$$10^n < \frac{1}{s} \qquad (n=1,2,3,\ldots)։$$

Սակայն այդ հնարավոր չէ, քանի որ ընդհանրապես $\frac{1}{s}$*-ից փոքր բնական թվեր կարող են լինել միայն վերջավոր թվով («Արքիմեդի աքսիոմայի» համաձայն)։*

[Եթե (1)-ում հավասարությունը թույլ տայինք աջից, ապա (2) կոտորակում չէր կարող լինել 0-ն պարբերության մեջ։]

Այժմ, հակադարձաբար, ենթադրենք, թե կամայապես վերցրած է (2) անվերջ կոտորակը, բայց առանց 9-ը պարբերության մեջ։ Հեշտ է կառուցել այն α իրական թիվը, որի համար հենց այդ կոտորակը ծառայում է իբրև տասնորդական մոտավորություն։ Պահպանելով (3) և (4) նշանակումները, մենք առաջացնենք հետևյալ հատույթը ռացիոնալ թվերի բազմության մեջ, վերին A′ դասի մեջ կդցենք այն a′ ռացիոնալ թվերը, որոնք մեծ են բոլոր C_n-երից (օրինակ, բոլոր C'_n թվերը), իսկ ստորին A դասի մեջ՝ մնացած բոլոր ռացիոնալ թվերը (օրինակ, հենց C_n թվերը)։ Հեշտ է համոզվել, որ այդպիսով կստանանք հատույթ. նրանով որոշվում է մի α թիվ, որը և կլինի մեր որոնածը։ Իրոք, քանի որ α-ն երկու դասերի միջև սահմանազատիչ թիվն է, ապա, մասնավորապես,

$$C_n \leq \alpha \leq C'_n\,։$$

Սակայն, ընդունելության համաձայն, 9-ը պարբերության մեջ լինել չի կարող, ուստի C'_n թվերը չեն դադարում նվազել և իրականում աջից հավասարություն լինել չի կարող։ Այսպիսով, վերցրած կոտորակի C_0 ամբողջ մասը և $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ թվանշանները α-ի համար բավարարում են (1) տեսքի անհավասարություններին։ Դրանով էլ հենց ապացուցվում է, որ կամայապես վերցրած (2) կոտորակը հանդիսանում է գտած թվի տասնորդական նշանակումը։

Կարելի էր խոսել նաև իրական թվի այնպիսի նշանակումների մասին, որոնց մեջ մասնակցում է 9-ը պարբերության մեջ. այդպիսի նշանակումներ մենք կստանայինք, եթե (1) առնչությունների մեջ հավասարության նշանը (եթե ընդհանրապես այն հնարավոր է) թույլ տայինք աջից։

Հեշտ է համոզվել, որ միայն վերջավոր տասնորդական կոտորակով արտահայտվող թվերը կարող են հավասարվել իրենց տասնորդական մոտավորություններին։ Մյուս բոլոր իրական թվերն ունեն միակ նշանակում տասնորդական կոտորակի տեսքով, իսկ մատնանշված տիպի թվերն ունեն երկու նշանակում՝ մեկը 0-ն պարբերության մեջ, մյուսը՝ 9-ը պարբերության մեջ։ Օրինակ,

$$2,364 = 2,364000\ldots \quad \text{և} \quad 2,364 = 2,363999\ldots$$

Այսուհետև իրական թիվը կարելի է պատկերացնել իբրև տասնորդական անվերջ կոտորակ։ Ընթերցողը գիտե, որ պարբերական տասնորդական կոտորակը ներկայացնում է ռացիոնալ թիվ և, հակադարձաբար, յուրաքանչյուր ռացիոնալ թիվ ներկայացվում է հենց պարբերական կոտորակի տեսքով։ Այստեղից պարզ է, որ իռացիոնալ թվերը, և միայն իռացիոնալ թվերն են ներկայացվում ոչ-պարբերական անվերջ կոտորակներով։

9. ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ։ Այժմ զբաղվենք բոլոր իրական թվերի բազմության մի շատ կարևոր հատկությամբ, որն այն էապես տարբերում է ռացիոնալ թվերի բազմությունից։ Դիտարկելով հատույթները ռացիոնալ թվերի բազմության մեջ, մենք տեսանք, որ երբեմն այդպիսի հատույթի համար այդ բազմության մեջ չկար սահմանազատիչ թիվ, որի մասին կարելի լիներ ասել, թե նա առաջացնում է այդ հատույթը։ Ռացիոնալ թվերի բազմության հենց այդ թերի լինելը, նրա մեջ հենց այդ բացտեղերի առկայությունն է հիմք ծառայել նոր՝ իռացիոնալ թվերի մուծման համար։ Այժմ սկսենք դիտարկել հատույթները բոլոր իրական թվերի բազմության մեջ։ Այդպիսի հատույթ ասելով մենք հասկանում ենք այդ բազմության տրոհումը A և A′ երկու ոչ-դատարկ բազմությունների, որի ժամանակ՝

1 յուրաքանչյուր իրական թիվ ընկնում է A և A′ բազմություններից մեկի և միայն մեկի մեջ*,

2 A բազմության յուրաքանչյուր α թիվ փոքր է A′ բազմության յուրաքանչյուր α' թվից։

Հարց է ծագում՝ այդպիսի A|A′ հատույթի համար արդյոք միշտ կգտնվի այդ հատույթն առաջացնող սահմանազատիչ թիվ (իրական թվերի բազմության մեջ), թե՞ իրական թվերի բազմության մեջ ևս կան դատարկ տեղեր (որոնք կարողանային հիմք ծառայել է՛լի նոր թվերի մուծման համար)։

Պարզվում է, որ իրականում այդպիսի դատարկ տեղեր չկան.

ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄԱ (Դեդեկինդի)։ Իրական թվերի

* Համեմատել 13 էջի ծանոթության հետ։

բազմության մեջ ամեն մի $A|A'$ հատույթի համար գոյություն ունի այդ հատույթն առաջացնող մի β իրական թիվ: Այդ β թիվը կլինի՝ 1) կամ ամենամեծը A ստորին դասի մեջ (այդ ժամանակ A' վերին դասում չկա ամենափոքրը), 2) կամ ամենափոքրը A' վերին դասի մեջ (այդ դեպքում A ստորին դասում չկա ամենամեծը):

Իրական թվերի բազմության այդ հատկությունն անվանում են այդ բազմության լրիվություն, ինչպես նաև անընդհատություն (կամ՝ անընդմեջություն)։

Ապացույց։ A *դասին պատկանող բոլոր ռացիոնալ թվերի բազմությունը նշանակենք* A*-ով, իսկ* A' *դասին պատկանող բոլոր ռացիոնալ թվերի բազմությունը՝* A'*-ով։ Հեշտ է համոզվել, որ* A *և* A' *բազմությունները կազմում են հատույթ բոլոր ռացիոնալ թվերի բազմության մեջ։*

Այդ $A|A'$ *հատույթը որոշում է մի* β *իրական թիվ։ Նա պետք է ընկնի* A *և* A' *դասերից մեկի մեջ. ենթադրենք, օրինակ, թե* β*-ն ընկնում է* A *ստորին դասի մեջ և ապացուցենք, որ այն ժամանակ իրականանում է 1) դեպքը, այսինքն՝* β*-ն* A *դասի մեջ ամենամեծն է։ Իսկապես, եթե այդպես չլիներ, ապա այդ դասի մեջ կգտնվեր մի այլ* α_0 *թիվ, որը մեծ կլիներ* β*-ից։* α_0 *և* β *իրական թվերի միջև տեղավորենք (հենվելով իրական թվերի բազմության ուժեղացրած խտության հատկության վրա) մի* r *ռացիոնալ թիվ՝*

$$\alpha_0 > r > \beta:$$

r-ը ևս կպատկանի A *դասին և, հետևաբար, նրա մասը կազմող* A *դասին։ Հանգեցինք հակասության.* β *թիվը որոշող հատույթի ստորին դասին պատկանող* r *ռացիոնալ թիվը մեծ ստացվեց այդ* β *թվից! Այսպիսով ապացուցվում է մեր պնդումն այն մասին, որ* β*-ն* A *դասի մեջ ամենամեծն է։ Միաժամանակ* A' *դասում ամենափոքր թվի գոյության անհնարինությունը ցույց է տրվում (հենվելով իրական թվերի բազմության խտության վրա) այնպես, ինչպես ռացիոնալ թվերի բազմության դեպքում։*

Նման դատողությունը ցույց է տալիս, որ եթե β*-ն ընկնի* A' *վերին դասի մեջ, ապա կիրականանա 2) դեպքը։*

10. ***ԹՎԱՅԻՆ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵԶՐԵՐԸ։*** *Օգտագործենք Դեդեկինդի հիմնական թեորեման [9], հենց այստեղ*

սահմանելու մի քանի գաղափարներ, որոնք կարևոր դեր են խաղում ժամանակակից անալիզի մեջ (նրանք հարկավոր կլինեն արդեն իսկ իրական թվերի հետ թվաբանական գործողությունների հարցը քննելիս)։

Պատկերացնենք թվերի մի կամավոր անվերջ բազմություն. նա կարող է տրված լինել որևէ եղանակով։ Այդպիսի բազմություններ են հանդիսանում, օրինակ, բնական թվերի բազմությունը, բոլոր կանոնավոր կոտորակների թվերի բազմությունը, 0-ի ու 1-ի միջև գտնվող բոլոր իրական թվերի բազմությունը, $\sin x = \frac{1}{2}$ հավասարման բոլոր արմատների բազմությունը, և այլն։

Բազմությանը պատկանող ցանկացած թիվը նշանակենք x-ով, այնպես որ x-ը կլինի բազմության թվերի տիպական նշանակումը։ x թվերի բազմությունն ինքը կնշանակենք՝ $X=\{x\}$։

Եթե դիտարկվող $\{x\}$ բազմության համար գոյություն ունի այնպիսի M վերջավոր թիվ, որ բոլոր $x \leq M$, ապա ասում են, որ տվյալ բազմությունը վերևից սահմանափակ է (M թվով), և M թիվը անվանում են նրա վերին եզր (верхняя граница)։ Օրինակ, կանոնավոր կոտորակների բազմությունը վերևից սահմանափակված է 1 թվով, ինչպես նաև 1-ից մեծ ամեն մի թվով։ Բնական թվերի բազմությունը վերևից սահմանափակ չէ։

Դրան համանման, եթե գոյություն ունի այնպիսի m վերջավոր թիվ, որ բոլոր $x \geq m$, ապա ասում են, որ $\{x\}$ բազմությունը ներքևից սահմանափակ է (m թվով), և m թիվը անվանում են նրա ստորին եզր (нижняя граница)։ Օրինակ, բնական թվերի բազմությունը ներքևից սահմանափակված է 1 թվով, ինչպես նաև 1-ից փոքր ամեն մի թվով։ Բոլոր կանոնավոր կոտորակների բազմությունը ներքևից սահմանափակված է 0 թվով, ինչպես նաև 0-ից փոքր ամեն մի թվով։

Վերևից (ներքևից) սահմանափակ բազմությունը կարող է սահմանափակ լինել նաև ներքևից (համապատասխանաբար՝ վերևից) կամ ոչ։ Այսպես, օրինակ, կանոնավոր կոտորակների բազմությունը սահմանափակ է և՛ վերևից, և՛ ներքևից, իսկ բնական թվերի բազմությունը ներքևից սահմանափակ է, բայց վերևից՝ ոչ։

Եթե բազմությունը վերևից (ներքևից) սահմանափակ չէ,

ապա նրա համար իբրև վերին (ստորին) եզր ընդունում են (համապատասխանաբար՝) «անիսկական թիվը»: Այդ «անիսկական թվերի» նկատմամբ ընդունում ենք, որ

— և -- ա ,

ինչպիսին էլ լինի ա իրական թիվը:

Եթե բազմությունը վերևից սահմանափակ է, այսինքն՝ ունի M վերջավոր վերին եզր, ապա նա միաժամանակ ունի անվերջ թվով վերին եզրեր, քանի որ M-ից մեծ ամեն մի թիվ նույնպես կլինի նրա համար վերին եզր: Բոլոր վերին եզրերի մեջ հատկապես կարևոր է նրանցից փոքրագույնը, որը մենք կանվանենք ճշգրիտ վերին եզր: *Նման ձևով, եթե բազմությունը ներքևից սահմանափակ է, ապա նրա ստորին եզրերից մեծագույնը կանվանենք* ճշգրիտ ստորին եզր: *Այսպես, օրինակ, բոլոր կանոնավոր կոտորակների բազմության համար ճշգրիտ եզրեր կլինեն, համապատասխանաբար, 1 և 0 թվերը:*

Հարց է ծագում, թե արդյոք վերևից (ներքևից) սահմանափակ բազմության համար միշտ գոյություն ունի ճշգրիտ վերին (ստորին) եզր: Իսկապես, քանի որ այդ դեպքում անվերջ թվով վերին (ստորին) եզրեր կան, իսկ թվերի անվերջ բազմության մեջ ոչ միշտ գոյություն ունի ամենափոքրը կամ ամենամեծը, ապա տվյալ բազմության բոլոր վերին (ստորին) եզրերի մեջ ամենափոքրի (ամենամեծի) գոյությունը ապացույց է պահանջում:*

ԹԵՈՐԵՄԱ: Եթե X={x} բազմությունը վերևից (ներքևից) սահմանափակ է, ապա նա ունի ճշգրիտ վերին (ստորին) եզր:

Ապացույց: Ապացույցը բերենք վերին եզրի վերաբերյալ: Քննության առնենք երկու դեպք.

1° X *բազմության* x *թվերի մեջ կա ամենամեծ* $\bar{x}$ *թիվը: Այդ դեպքում բազմության բոլոր թվերը կբավարարեն* $x \leq \bar{x}$ *անհավասարությանը, այսինքն՝* $\bar{x}$*-ը կլինի* X*-ի համար վերին եզր: Մյուս կողմից, քանի որ* $\bar{x}$*-ը պատկանում է* X*-ին, ապա վերջինիս ամեն մի* M *վերին եզրի համար տեղի ունի* $\bar{x} \leq M$ *անհավասարությունը: Այստեղից եզրակացնում ենք, որ* $\bar{x}$*-ը* X *բազմության համար ճշգրիտ վերին եզր է:*

---

* *Այդպիսիք չկան, օրինակ, բոլոր կանոնավոր կոտորակների բազմության մեջ:*

2° X բազմության x թվերի մեջ չկա ամենամեծը։ Բոլոր իրական թվերի բազմության մեջ հատույթ առաջացնենք հետևյալ ձևով. A' վերին դասի մեջ դցենք X բազմության բոլոր α' վերին եզրերը, իսկ A ստորին դասի մեջ մնացած բոլոր α իրական թվերը։ Այդ տրոհման ժամանակ X բազմության բոլոր x թվերը կընկնեն A դասի մեջ, քանի որ նրանցից ոչ մեկը, պայմանի համաձայն, ամենամեծը չէ։ Այդպիսով՝ A և A' դասերից ոչ մեկը դատարկ չէ։ Այդպիսի տրոհումն իրոք հատույթ է առաջացնում, քանի որ բոլոր իրական թվերը բաշխրվում են երկու դասի և A' դասի յուրաքանչյուր թիվ մեծ է A դասի ամեն մի թվից։ Դեդեկինդի հիմնական թեորեմայի [9] համաձայն, պետք է գոյություն ունենա այդ հատույթն առաջացնող β իրական թիվ։ Բոլոր x թվերը, իբրև A դասին պատկանող թվեր, չեն գերազանցում այդ β «սահմանազատիչ» թիվը, այսինքն՝ β-ն x-երի համար ծառայում է վերին եզր և, հետևաբար, պատկանում է A' դասին ու այնտեղ ամենափոքրն է։ Այդպիսով, β-ն իբրև բոլոր վերին եզրերի մեջ փոքրագույնը, հենց կլինի $X=\{x\}$ բազմության ճշգրիտ վերին եզրը։

Միշտ նման եղանակով ապացուցվում է թեորեմայի նաև երկրորդ մասը, որը վերաբերում է ճշգրիտ ստորին եզրի գոյությանը։

Եթե M^*-ը $X=\{x\}$ բազմության ճշգրիտ վերին եզրն է, ապա բոլոր x-երի համար կլինի՝

$$x \quad M^*.$$

Այժմ վերցնենք կամայապես փոքր ε դրական թիվ։ Քանի որ M^*-ը վերին եզրերի մեջ փոքրագույնն է, ուստի նրանից փոքր $M^*-\varepsilon$ թիվը, անկասկած, վերին եզր չի լինի X բազմության համար, այսինքն՝ X բազմության մեջ կգտնվի այնպիսի x' թիվ, որ՝

$$x' > M^* - \varepsilon.$$

Այդ երկու անհավասարություններով լրիվին բնորոշվում է X բազմության M^* ճշգրիտ վերին եզրը։ Այսինքն՝ M^*-ը կլինի $X=\{x\}$ բազմության ճշգրիտ վերին եզրը, եթե ամեն մի x-ի համար

$$x \quad M^*$$

և ցանկացած $\varepsilon > 0$ *թվի համար* X *բազմության մեջ գտնվի այնպիսի* x' *թիվ, որ*

$$x' > M^* - \varepsilon\text{։}$$

Ճիշտ այդպես էլ, m^**-ը կլինի* $X = \{x\}$ *բազմության ճշգրիտ ստորին եզրը, եթե ամեն մի* x*-ի համար*

$$x \geq m^*$$

և ցանկացած $\varepsilon > 0$ *թվի համար* X *բազմության մեջ գտնվի այնպիսի* x' *թիվ, որ*

$$x' < m^* + \varepsilon\text{։}$$

$X = \{x\}$ *բազմության ճշգրիտ վերին և ստորին եզրերի համար ընդունված են հետևյալ նշանակումները՝*

$$M^* = \sup X = \sup\{x\},$$

$$m^* = \inf X = \inf\{x\}$$

(լատիներեն՝ supremum = *բարձրագույն,* infremum = *ցածրագույն)։*

Նշենք մի ակնհայտ առաջադրություն, որը հետագայում հաճախ է օգտագործվելու.

Եթե $\{x\}$ բազմության բոլոր x թվերը բավարարում են $x \leq M$ անհավասարությանը, ապա $\sup\{x\} \leq M$։

Իրոք, պայմանից բխում է, որ M-ն այդ բազմության վերին եզրերից մեկն է, ուստի և բոլոր վերին եզրերի մեջ փոքրագույնը չի կարող նրանից մեծ լինել։

Նմանապես, $x \geq m$ անհավասարությունից հետևում է, որ $\inf\{x\} \geq m$։

Վերջապես, եթե $X = \{x\}$ *բազմությունը վերևից սահմանափակ չէ, պայմանավորվում ենք ասել, որ նրա ճշգրիտ վերին եզրն է* $+\infty$*-ը՝* $\sup\{x\} = +\infty$*։ Ինչպես նաև, եթե բազմությունը ներքևից սահմանափակ չէ, կասենք, որ նրա ճշգրիտ ստորին եզրն է* $-\infty$*-ը՝* $\inf\{x\} = -\infty$*։*

§ 3. ԹՎԱԲԱՆԱԿԱՆ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ՀԵՏ

11. ՕԺԱՆԴԱԿ ԱՌԱՋԱԴՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։ Հետագայում մեզ հաճախ են պետք գալու հետևյալ երկու լեմմաները։

1. ԼԵՄՄԱ։ Դիցուք տված է α կամայական իրական թիվը։ Ինչպիսին էլ լինի $\varepsilon>0$ ռացիոնալ թիվը, կգտնվեն այնպիսի a և a' ռացիոնալ թվեր, որ

$$a < \alpha < a', \quad a' - a < \varepsilon.$$

Ապացուցման ժամանակ բավական է սահմանափակվել այն դեպքով, երբ α թիվն իռացիոնալ է։ α թիվը գցենք երկու a_0 և a'_0 ռացիոնալ թվերի միջև՝ $a_0 < \alpha < a'_0$, և վերցնենք մի $\varepsilon' < \varepsilon$ դրական ռացիոնալ թիվ։

Կազմենք ռացիոնալ անդամներով թվաբանական պրոգրեսիա՝

$$a_0, \ a_0+\varepsilon', \ a_0+2\varepsilon', \dots, \ a_0+n\varepsilon', \dots;$$

բավականաչափ մեծ n-ի դեպքում $a_0+n\varepsilon$ թիվը մեծ կլինի a'_0 թվից (այդպես կլինի, երբ $n > \frac{a'_0-a_0}{\varepsilon'}$), հետևաբար, նաև α թվից։ Դիցուք $a_0+n_0\varepsilon'$ թիվն այդ շարքի թվերի մեջ առաջինն է, որը մեծ է α-ից։ Եթե ընդունենք՝

$$a = a_0+(n_0-1)\varepsilon', \quad a' = a_0+n_0\varepsilon',$$

ապա՝

$$a < \alpha < a', \quad a' - a < \varepsilon,$$

ինչ և պահանջվում էր։

2. ԼԵՄՄԱ։ Եթե երկու α և β իրական թվերը կարող են զետեղվել երկու a և a' ռացիոնալ թվերի միջև, որոնց տարբերությունը փոքր է ամեն մի նախապես տված $\varepsilon>0$ ռացիոնալ թվից, ապա α և β թվերն իրար հավասար են։

Ապացուցենք հակասող ընդունելության եղանակով։ Ենթադրենք, օրինակի համար, թե $\alpha>\beta$, և α ու β թվերի միջև վերցնենք երկու r_1 ու r_2 ռացիոնալ թվեր՝

$$\alpha > r_1 > r_2 > \beta.$$

Այն ժամանակ ամեն երկու a և a' ռացիոնալ թվերի համար, որոնց միջև գտնվում են α և β թվերը՝

$$a' - \alpha < \beta - a,$$

անկախաբար տեղի կունենան հետևյալ անհավասարությունները՝

$$a' = r_1 + r_2 + a, \quad a' - a = r_1 - r_2 > 0,$$

այնպես որ $a' - a$ տարբերությունը չի կարող կամայապես փոքր դառնալ, հակառակ լեմմայի պայմանին։

Այժմ անցնենք իրական թվերի նկատմամբ գործողությունների սահմանմանը։ Հետագայում հունական α, β, γ տառերով նշանակելու ենք իրական (ինչպես ռացիոնալ, այնպես և իռացիոնալ) թվերը։

12. ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ։ Դիցուք ունենք երկու α ու β իրական թվերը։ Դիտարկենք a, a' և b, b' ռացիոնալ թվերը, որոնք բավարարում են հետևյալ անհավասարություններին՝

$$a < \alpha < a' \quad \text{և} \quad b < \beta < b'։ \tag{1}$$

α ու β թվերի $\alpha + \beta$ գումար անվանենք այնպիսի γ թիվը, որը գտնվում է, մի կողմից, $a + b$ տեսքի բոլոր գումարների և, մյուս կողմից, $a' + b'$ տեսքի բոլոր գումարների միջև՝

$$a + b < \gamma < a' + b'։ \tag{2}$$

Նախ համոզվենք որ α ու β իրական թվերի ամեն մի զույգի համար գոյություն ունի այդպիսի γ թիվ։

Դիտարկենք $a + b$ տեսքի բոլոր հնարավոր գումարների բազմությունը։ Այդ բազմությունը վերևից սահմանափակ է, օրինակ, $a' + b'$ տեսքի յուրաքանչյուր գումարով։ Նշանակենք՝

$$\gamma = \sup\{a + b\}$$

(տես 10.)։ Այն ժամանակ $a + b \leq \gamma$ և միաժամանակ $\gamma \leq a' + b'$։ Քանի որ, ինչպիսին էլ լինեն (1) պայմաններին բավարարող a, b, a', b', ռացիոնալ թվերը, միշտ հնարավոր է, պահպանելով այդ պայմանները, a և b թվերը մեծացնել, իսկ a' և b' թվերը փոքրացնել, ուստի հենց նոր ստացված հավասարություն-անհավասարությունների մեջ իրականում ոչ մի դեպքում չի կարող հավասարություն լինել։ Այսպիսով, γ թիվը բավարարում է գումարի սահմանմանը։

Սակայն, այժմ հարց է ծագում, թե արդյոք $\gamma = \alpha + \beta$ գու-

մարը (2) անհավասարություններով միարժեք է որոշվում։ Գումարի միակության մեջ համոզվելու համար, 1 լեմմայի համաձայն ընտրենք a, a′, b, b′ *թվերն այնպես, որ՝*

$$a'-a<\varepsilon \text{ և } b'-b<\varepsilon,$$

որտեղ ε*-ը կամայապես փոքր դրական ռացիոնալ թիվ է։ Այդտեղից կստանանք՝*

$$(a'+b')-(a+b)=(a'-a)+(b'-b)<2\varepsilon,$$

*այսինքն՝ այս տարբերությունը ևս կարելի է ցանկացած չափով փոքր դարձնել**։ *Այն ժամանակ, 2 լեմմայի համաձայն,* a+b *և* a′+b′ *գումարների միջև գոյություն ունի միայն մեկ թիվ։*

Վերջապես, նկատենք, որ եթե α *ու* β *թվերը երկուսն էլ ռացիոնալ թվեր են, ապա նրանց* $\gamma=\alpha+\beta$ *սովորական գումարն, ակներևաբար, բավարարում է (2) անհավասարություններին։ Այսպիսով, երկու իրական թվերի գումարի վերաբերյալ վերևում տրված ընդհանուր սահմանումը չի հակասում երկու ռացիոնալ թվերի գումարի նախկին սահմանմանը։*

13. ԳՈՒՄԱՐՄԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ։ *Հեշտությամբ կարելի է համոզվել, որ իրական թվերի համար պահպանվում են հետևյալ հատկությունները.*

II 1° $\alpha+\beta=\beta+\alpha$,

II 2° $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$,

II 3° $\alpha+0=\alpha$։

Ապացուցենք, օրինակի համար, վերջին հատկությունը։ Եթե a, a′, b, b′ *ռացիոնալ թվերն այնպիսին են, որ*

$$a<\alpha<a', \quad b<0<b'$$

ապա, ակներևաբար՝

$$a+b<a<\alpha<a'<a'+b'։$$

Այսպիսով, α*-ն այնպիսի թիվ է, որը գտնվում է* a+b *տեսքի և* a′+b′ *տեսքի գումարների միջև, որոնց միջև գտնվում է, սահմանման համաձայն, նաև* α+0 *գումարը։ Սակայն միայն*

---

* 2ε *թիվը դառնում է ամեն մի* $\varepsilon'>0$ *թվից փոքր, եթե վերցնենք* $\varepsilon<\frac{\varepsilon'}{2}$։

մեկ այդպիսի թիվ կարող է լինել, ուստի $\alpha = 0 - \alpha$, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։

Այժմ դառնանք II 4 հատկությանը և ապացուցենք, որ յուրաքանչյուր α իրական թվի համար գոյություն ունի (ն ր ա ն ս ի մ ե տ ր ի կ) $-\alpha$ թիվ, որը բավարարում է $\alpha + (-\alpha) = 0$ պայմանին։

Կարելի է բավարարվել այն դեպքի համար ապացուցելով, երբ α թիվը ի ռ ա ց ի ո ն ա լ է։

Ենթադրելով որ α թիվը որոշվում է $A|A'$ հատույթով, մենք $-\alpha$ թիվը որոշենք հետևյալ կերպ. $-\alpha$ թվի $\bar{A}$ ստորին դասի մեջ դցում ենք բոլոր $-a'$ ռացիոնալ թվերը, որտեղ a'-ը որևէ թիվ է A' դասից, իսկ $\bar{A}'$ վերին դասի մեջ՝ բոլոր $-a$ ռացիոնալ թվերը, որտեղ a-ն որևէ թիվ է A դասից։ Դժվար չէ տեսնել, որ այդ տրոհումը հատույթ է հանդիսանում և իրոք որոշում է մի իրական (տվյալ դեպքում իռացիոնալ) թիվ. այդ թիվը նշանակենք $-\alpha$։

Այժմ ապացուցենք, որ այդ թիվը բավարարում է վերոհիշյալ պայմանին։ $-\alpha$ թվի սահմանումից երևում է, որ $\alpha + (-\alpha)$ գումարը միակ իրական թիվն է, որը գտնվում է $a - a'$ և $a' - a$ տեսքի թվերի միջև, որտեղ a և a' թվերն ռացիոնալ են և $a < \alpha < a'$։ Բայց ակներև է, որ

$$a - a' < 0 < a' - a,$$

այնպես որ 0 թիվը ևս գտնվում է այդ տեսքի թվերի միջև։ Այդ հատկությունն ունեցող թվի միակության շնորհիվ կստանանք

$$\alpha + (-\alpha) = 0,$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։

Վերջապես, ցույց տանք վերջին հիմնական հատկությունը՝

II 5° $\alpha > \beta$ անհավասարությունից հետևում է $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ անհավասարությունը:

Եթե $\alpha > \beta$, ապա նրանց միջև կարելի է տեղավորել երկու r_1 ու r_2 ռացիոնալ թվեր՝ $\alpha > r_1 > r_2 > \beta$։ 1 լեմմայի համաձայն, գոյություն ունեն երկու այնպիսի c և c' ռացիոնալ թվեր, որ՝

$$c < \gamma < c' \quad \text{և} \quad c' - c < r_1 - r_2։$$

Այդ բոլոր անհավասարությունները համադրելով, մենք գալիս ենք հենց պահանջվող եզրակացությանը։

Այսպիսով, իրական թվերի բազմությունը գումարման նկատմամբ օժտված է այն բոլոր II 1°—5° հիմնական հատկություններով, որոնք 3-ում նախապես ձևակերպված էին ռացիոնալ թվերի համար։ Հետևաբար, իրական թվերի վրա ավտոմատորեն փոխանցվում են այդ հիմնական հատկություններից բխող բոլոր ձևական-տրամաբանական հետևությունները։ Մասնավորապես, իրական թվերի համար կարելի է բառացի կրկնել այն բոլորը, որ 3-ում շարադրվել էին II խմբի հատկություններից հետո, այն է՝ կարելի է ապացուցել α ու β թվերի $\alpha-\beta$ տարբերության գոյությունն ու միակությունը, սահմանել α թվի բացարձակ մեծության գաղափարը (որի համար մենք պահպանում ենք $|\alpha|$ նշանակումը), և այլն։

14. ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ։ Այժմ անցնենք իրական թվերի բազմապատկմանը, նախ սահմանափակվելով դրական թվերով։ Դիցուք տված են այդպիսի երկու α և β թվեր։ Մենք այստեղ ևս կդիտարկենք (1) անհավասարություններին բավարարող բոլոր հնարավոր ռացիոնալ թվերը, ընդ որում այդ թվերը ևս վերցնում ենք դրական։

Երկու α ու β իրական դրական թվերի $\alpha\beta$ արտադրյալ անվանենք այնպիսի γ իրական թիվը, որը գտնվում է, մի կողմից, ab տեսքի բոլոր արտադրյալների և, մյուս կողմից, $a'b'$ տեսքի բոլոր արտադրյալների միջև՝

$$ab \leqslant \gamma \leqslant a'b'. \tag{3}$$

Այդպիսի γ թվի գոյությունն ապացուցելու համար վերցնենք բոլոր հնարավոր ab արտադրյալների բազմությունը. նա վերևից սահմանափակ է $a'b'$ տեսքի յուրաքանչյուր արտադրյալով։ Եթե ընդունենք

$$\gamma = \sup\{ab\},$$

ապա պարզ է, որ $ab \leqslant \gamma$ և միաժամանակ $\gamma \leqslant a'b'$։

a և b թվերը մեծացնելու և a' և b' թվերը փոքրացնելու հնարավորությունը այստեղ (ինչպես և գումարի դեպքում) թույլ է տալիս բացառելու հավասարության նշանը, այնպես որ γ թիվը բավարարում է արտադրյալի սահմանմանը։

Արտադրյալի միակությունը բխում է հետևյալ

դասողություններից․ 1 լեմմայի համաձայն ընտրենք a, a' և b, b' ռացիոնալ թվերն այնպես, որ

$$a' - a < \varepsilon \quad \text{և} \quad b' - b < \varepsilon,$$

որտեղ ε-ը կամայապես փոքր դրական ռացիոնալ թիվ է։ Ընդ որում կարելի է a և b թվերը դրական համարել, իսկ a' և b' թվերը՝ համապատասխանորեն ոչ մեծ նախապես վերցրած a'_0 և b'_0 թվերից։ Այն ժամանակ՝

$$a'b' - ab = a'(b' - b) + b(a' - a) < (a'_0 + b'_0)\cdot\varepsilon,$$

այսինքն՝ այդ տարբերությունը ևս կարելի է դարձնել ցանկացած չափով փոքր*, իսկ այդ էլ հենց բավական է, 2 լեմմայի համաձայն, համոզվելու, որ (3) անհավասարություններին բավարարել կարող է միայն մեկ γ թիվ։

Եթե α և β դրական թվերը երկուսն էլ ռացիոնալ են, ապա նրանց $\gamma = \alpha\beta$ սովորական արտադրյալը, ակնհայտաբար, բավարարում է (3) անհավասարություններին, այսինքն՝ նույնպիսի թիվ է ստացվում և չի հակասում երկու իրական թվերի արտադրյալի ընդհանուր սահմանմանը։

Վերջապես, որևէ երկու իրական թվերի (ոչ անպայման դրական) արտադրյալը սահմանելու համար պայմանավորվենք հետևյալի մասին.

ամենից առաջ պայման ընդունենք, որ

$$\alpha\cdot 0 = 0\cdot\alpha = 0,$$

ինչպիսին էլ լինի α թիվը։ Իսկ եթե երկու բազմապատկիչն էլ 0-ից տարբեր են, ապա հիմք ենք ընդունում սովորական «նշանների կանոնը»՝

$$\alpha\cdot\beta = |\alpha|\cdot|\beta|, \text{ եթե } \alpha\text{-ն ու } \beta\text{-ն նույն նշանն ունեն},$$

$$\alpha\cdot\beta = -(|\alpha|\cdot|\beta|), \text{ եթե } \alpha\text{-ն ու } \beta\text{-ն տարբեր նշաններ ունեն}$$

(թե ինչ է նշանակում $|\alpha|$ և $|\beta|$ դրական թվերի արտադրյալ, այդ արդեն գիտենք)։

Այդ պայմանավորումը, ինչպես տեսել ենք 4-ում, որոշ իմաստով մեզ համար պարտադիր է, եթե մենք ցանկանում

---

* Նկատենք, որ $(a'_0 + b'_0)\varepsilon$ արտադրյալը կդառնա ամեն մի $\varepsilon' > 0$ թվից փոքր, եթե վերցնենք $\varepsilon < \dfrac{\varepsilon'}{a'_0 + b'_0}$։

ենք, որպեսզի իրական թվերի նկատմամբ սահմանված գործողությունները ունենան ռացիոնալ թվերի գործողությունների բոլոր հիմնական հատկությունները։

15. ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՄԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ։ Ինչպես և ռացիոնալ թվերի դեպքում, իրական թվերի համար պահպանվում են հետևյալ հատկությունները.

III 1° $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$,

III 2° $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$,

III 3° $\alpha\cdot 1=\alpha$։

Օրինակի համար, ապացուցենք այդ հատկություններից երկրորդը, սկսելով այն դեպքից, երբ α, β, γ *երեք թվերն էլ դրական են։ Դիցուք* a, a', b, b', c, c', *թվերը որևէ ռացիոնալ թվեր են, որոնք բավարարում են հետևյալ անհավասարություններին՝*

$$0<a<\alpha<a',\quad 0<b<\beta<b',\quad 0<c<\gamma<c'։$$

Այն ժամանակ, երկու իրական թվերի արտադրյալի սահմանման համաձայն, կունենանք՝

$$ab<\alpha\beta<a'b' \quad \text{և} \quad bc<\beta\gamma<b'c'։$$

Կրկին անգամ օգտվելով նույն սահմանումից, կստանանք՝

$$(ab)c<(\alpha\beta)\gamma<(a'b')c' \quad \text{և} \quad a(bc)<\alpha(\beta\gamma)<a'(b'c')։$$

Քանի որ ապացուցվելիք հատկությունը ռացիոնալ թվերի համար արդեն հայտնի է, ապա ստացվում է, որ $(\alpha\beta)\gamma$ *և* $\alpha(\beta\gamma)$ *իրական թվերը գտնվում են միևնույն զույգ թվերի միջև՝*

$$(ab)c=a(bc) \quad \text{և} \quad (a'b')c'=a'(b'c')։$$

Սակայն հեշտ է ցույց տալ, որ a *ու* a', b *ու* b' *և* c *ու* c' *բազմապատկիչները միմյանց մոտեցնելով, կարելի է նաև նրանց* $a'b'c'-abc$ *արտադրյալների տարբերությունը դարձնել ցանկացած չափով փոքր (կարելի է օգտագործել 14-ում բերված նույն պնդումը երկու բազմապատկիչների արտադրյալի վերաբերյալ)։ Այստեղից էլ, 2 լեմմայի համաձայն, ստացվում է* $(\alpha\beta)\gamma$ *և* $\alpha(\beta\gamma)$ *թվերի հավասարությունը։*

Կամայական նշաններով թվերի դեպքին անցնելը կատարվ-

վում է անմիջականորեն, եթե հաշվի առնենք «նշանների կանոնը»։ Իսկ եթե α, β, γ թվերից գեթ մեկը հավասար է 0-ի, ապա երկու արտադրյալներն էլ դառնում են 0։

Անցնենք հետևյալ հատկությանը՝

III 4° զրոյից տարբեր յուրաքանչյուր α իրական թվի համար գոյություն ունի (նրան հակադարձ) այնպիսի $\frac{1}{\alpha}$ թիվ, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին՝

$$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1.$$

Բավական է սահմանափակվել այն դեպքով, երբ α թիվը իռացիոնալ է։ Նախ ենթադրենք α > 0։

Եթե α թիվը որոշվում է A|A′ հատույթով, մենք $\frac{1}{\alpha}$ թվի համար հատույթ կառուցենք հետևյալ կերպ. նրա $\tilde{A}$ ստորին դասի մեջ գցենք բոլոր բացասական ռացիոնալ թվերն ու զրոն, ինչպես նաև $\frac{1}{a'}$ տեսքի բոլոր թվերը, որտեղ a′-ը A′ դասին պատկանող որևէ թիվ է. վերին $\tilde{A}'$ դասի մեջ գցենք $\frac{1}{a}$ տեսքի բոլոր թվերը, որտեղ a-ն A դասին պատկանող որևէ դրական թիվ է։ Հեշտ է համոզվել, որ այդպիսով մենք իրոք ստացանք մի հատույթ, որը որոշում է մի դրական իրական (տվյալ դեպքում իռացիոնալ) թիվ։ Այդ թիվը նշանակում ենք $\frac{1}{\alpha}$։ Ցույց տանք, որ նա բավարարում է պահանջվելիք պայմանին։ Հակադարձ թվի սահմանման համաձայն, եթե հաշվի առնենք նաև արտադրյալի սահմանումը, կստանանք, որ $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}$ թիվը միակ իրական թիվն է, որը գտնվում է $\frac{a}{a'}$ և $\frac{a'}{a}$ տեսքի թվերի միջև, որտեղ a և a′ թվերը դրական ռացիոնալ թվեր են, որոնք բավարարում են $a<\alpha<a'$ անհավասարություններին։ Սակայն 1 թիվը նույնպես գտնվում է մատնանշված տեսքի թվերի միջև՝

$$\frac{a}{a'}<1<\frac{a'}{a},$$

հետևաբար, $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1$ և $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}$ թիվը հենց մեր որոնած արտադրյալն է։

Եթե $\alpha < 0$, *ընդունում ենք՝*

$$\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{|\alpha|}.$$

այն ժամանակ, «նշանների կանոնի» համաձայն կունենանք՝

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = |\alpha| \cdot \frac{1}{|\alpha|} = 1։$$

Այժմ, երբ մենք համոզվեցինք, որ իրական թվերի բազմության բազմապատկման նկատմամբ նույնպես օժտված է III 1°–4° *բոլոր հիմնական հատկություններով, պարզ է, որ նրա համար իր ուժը պահպանում է նաև 4-ում՝* α *և* β *թվերի* $\frac{\alpha}{\beta}$ *քանորդի գոյության ու միակության վերաբերյալ ամբողջ ասածը (պայմանով, որ* $\beta \neq 0$*), և այլն։*

Բաշխական հատկությունը՝

III 5° $(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$

նույնպես տեղի ունի բոլոր իրական թվերի համար, որը հեշտությամբ ապացուցվում է դրական թվերի դեպքում (ինչպես և III 2° *հատկությունը), իսկ մյուս բոլոր դեպքերն այդ դեպքին են բերվում՝ հավասարության երկու մասերում նշանները փոխելու կամ անդամները հավասարության մի մասից մյուսը տեղափոխելու միջոցով։ Բացառություն է կազմում այն դեպքը, երբ* $\alpha, \beta, \gamma, \alpha+\beta$ *թվերից մեկը հավասար է զրոյի. սակայն այս դեպքում հավասարությունն ակներև է։*

Վերջապես, առանց դժվարության ստուգվում է հետևյալ հատկությունը՝

III 6° $\alpha>\beta$ և $\gamma>0$ անհավասարություններից հետևում է $\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma$ անհավասարությունը: $\alpha>\beta$ *անհավասարությունը համարժեք է* $\alpha-\beta>0$ *անհավասարությանը։ Այն ժամանակ, «նշանների կանոնի» համաձայն, նաև* $(\alpha-\beta)\cdot\gamma>0$*։ Սակայն բազմապատկումն ունի բաշխական հատկություն նաև տարբերության նկատմամբ, այնպես որ* $\alpha\cdot\gamma-\beta\cdot\gamma>0$*, որտեղից՝* $\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma$*։*

16. ԱՄՓՈՓՈՒՄ։ *Մնում է հիշատակել նաև «Արքիմեդի աքսիոմայի» մասին՝*

IV 1° ինչպիսին էլ լինի γ իրական թիվը, գոյություն ունի n բնական թիվ, որը մեծ է γ-ից:

Այդ ստուգել հեշտ է. չէ որ γ *թիվը որոշող* $C|C'$ *հատույ-*

թի վերին դասում կա γ-ից մեծ c' ռացիոնալ թիվ, իսկ ռացիոնալ թվերի համար այդ աքսիոման տեղի ունի։

Այժմ կարելի է, վերջապես, հաստատված համարել, որ բոլոր իրական թվերի բազմության մեջ լրիվ պահպանվում են տարրական հանրահաշվի այն կանոնները, որոնք վերաբերում են թվաբանական չորս գործողություններին և հավասարությունների ու անհավասարությունների զուգորդմանը։

17. *ԲԱՑԱՐՁԱԿ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։* *Հետագայում օգտագործելու համար, մեր առածներին ավելացնենք մի քանի դիտողություններ և բ ա ց ա ր ձ ա կ մ ե ծ ո ւ թ յ ո ւ ն ն ե ր ի մ ա ս ի ն։*

Ամենից առաջ ցույց տանք, որ $|\alpha| < \beta$ *(որտեղ, իհարկե,* $\beta > 0$*) անհավասարությունը համարժեք է* $-\beta < \alpha < \beta$ *կրկնակի անհավասարությանը։ Իրոք,* $|\alpha| < \beta$ *անհավասարությունից հետևում է, որ միաժամանակ* $\alpha < \beta$ *և* $-\alpha < \beta$, *այսինքն՝* $\alpha > -\beta$։ *Հակադարձաբար, եթե տված է, որ* $\alpha < \beta$ *և* $\alpha > -\beta$, *ապա միաժամանակ ունենք* $\alpha < \beta$ *և* $-\alpha < \beta$։ *Սակայն* α *և* $-\alpha$ *թվերից մեկը* $|\alpha|$-*ն է, այնպես որ հաստատ* $|\alpha| < \beta$։

Նմանապես, համարժեք են նաև հետևյալ անհավասարությունները՝

$$|\alpha| \leqslant \beta \quad \text{և} \quad -\beta \leqslant \alpha \leqslant \beta.$$

Այնուհետև ապացուցենք շատ օգտակար մի անհավասարություն՝

$$|\alpha+\beta| \leqslant |\alpha|+|\beta|.$$

Անդամ առ անդամ գումարելով հետևյալ ակներև անհավասարությունները՝

$$-|\alpha| \leqslant \alpha \leqslant |\alpha| \quad \text{և} \quad -|\beta| \leqslant \beta \leqslant |\beta|,$$

կստանանք՝

$$-(|\alpha|+|\beta|) \leqslant \alpha+\beta \leqslant |\alpha|+|\beta|,$$

որտեղից էլ, վերևում արված դիտողության շնորհիվ, բխում է պահանջվելիք անհավասարությունը։

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի օգնությամբ այդ հատկությունը տարածվում է ցանկացած թվով գումարելիների դեպքի վրա՝

$$|\alpha+\beta+\ldots+\gamma| \leqslant |\alpha|+|\beta|+\ldots+|\gamma|.$$

Եթե ապացուցված անհավասարության մեջ β-ն փոխարինենք (−β)-ով, ապա կստանանք՝

$$|\alpha-\beta| \leqslant |\alpha|+|\beta|.$$

Քանի որ $\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$, ապա $|\alpha| \leqslant |\alpha+\beta|+|\beta|$, կամ՝

$$|\alpha+\beta| \geqslant |\alpha|-|\beta|.$$

Նմանապես նաև՝

$$|\alpha-\beta| \geqslant |\alpha|-|\beta|.$$

Այդ բոլոր անհավասարությունները կօգտագործենք սահմանների տեսության մեջ։

§ 4. ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ՀԵՏԱԳԱ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՆ ՈՒ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

18. ԱՐՄԱՏԻ ԳՈՅՈՒԹՅՈՒՆԸ։ ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՑՈՒՑՉՈՎ ԱՍՏԻՃԱՆ։ Իրական թվերի բազմապատկման (ու բաժանման) սահմանումը մեզ անմիջապես հանգեցնում է, ինչպես սովորաբար, ամբողջ դրական (և բացասական) ցուցչով աստիճանի սահմանմանը։ Անցնելով ընդհանրապես ռացիոնալ ցուցչով աստիճանի գաղափարին, կանգ առնենք նախ *արմատի գոյության* հարցի վրա։

Ինչպես մենք հիշում ենք, ռացիոնալ թվերի բազմության մեջ պարզագույն արմատների բացակայությունը այդ բազմության ընդլայնման առիթներից մեկն է եղել։ Այժմ ստուգենք, թե արդյոք կատարված ընդլայնումը ինչ չափով է լրացրել նախկին բացերը (չստեղծելով, իհարկե, նորերը)։

Դիցուք α-ն որևէ իրական թիվ է, իսկ n-ը՝ բնական թիվ։ Ինչպես հայտնի է, α թվի n-րդ աստիճանի արմատ կոչվում է այնպիսի ξ իրական թիվը, որի համար՝

$$\xi^n = \alpha.$$

Մենք սահմանափակվենք այն դեպքով, երբ α-ն դրական է, և փնտրենք մի դրական ξ թիվ, որը բավարարի այդ պայմանին, այսինքն՝ փնտրենք արմատի այսպես կոչված թ վ ա բ ա ն ա կ ա ն արժեքը։ Մենք կապացուցենք, որ միշտ գոյություն ունի այդպիսի ξ թիվ, այն էլ միայն մեկը։ Վերջին պնդումը ξ թվի միա-

կության մասին անմիջապես բխում է նրանից, որ տարբեր դրական թվերին համապատասխանում են տարբեր աստիճաններ՝

$$\text{եթե } 0<\xi<\xi', \text{ ապա } \xi^n<\xi'^n.$$

Եթե գոյություն ունի այնպիսի r ռացիոնալ թիվ, որի n-րդ աստիճանը հավասար է α-ին, ապա հենց այդ r-ը կլինի որոնելի ξ թիվը, ուստի բավական է սահմանափակվել այն ենթադրությամբ, թե այդպիսի ռացիոնալ թիվ չկա։

Այժմ բոլոր ռացիոնալ թվերի բազմության մեջ կառուցենք մի $X|X'$ հատույթ հետևյալ եղանակով, X դասի մեջ գցենք բոլոր բացասական ռացիոնալ թվերն ու զրոն, ինչպես նաև այն դրական ռացիոնալ x թվերը, որոնց համար $x^n<\alpha$։ X' դասի մեջ գցենք բոլոր x' դրական ռացիոնալ թվերը, որոնց համար $x'^n>\alpha$։ Հեշտ է տեսնել, որ այդ դասերը դատարկ չեն և որ X դասն իրոք նաև դրական թվեր է պարունակում։ Եթե վերցնենք, օրինակ, m բնական թիվն այնպես, որ $\frac{1}{m}<\alpha<m$, ապա առավել ևս կունենանք $\frac{1}{m^n}<\alpha<m^n$, այնպես որ $\frac{1}{m}$ թիվը իրոք մտնում է X դասի մեջ, իսկ m թիվը՝ X' դասի մեջ։ Հատույթի համար պահանջվող մյուս պայմաններն ստուգվում են անմիջականորեն։

Դիցուք այժմ ξ-ն այդ $X|X'$ հատույթով որոշվող թիվն է։ Ապացուցենք, որ $\xi^n=\alpha$, այսինքն որ՝ $\xi=\sqrt[n]{\alpha}$։ ξ^n թիվը դիտելով որպես ξ-ին հավասար n բազմապատիկների արտադրյալ, իրական դրական թվերի արտադրյալի սահմանման համաձայն [14] եզրակացնում ենք, որ եթե x-ը և x'-ը այնպիսի դրական ռացիոնալ թվեր են, որոնց համար

$$0<x<\xi<x',$$

ապա՝

$$x^n<\xi^n<x'^n.$$

Քանի որ x-ը պատկանում է X դասին, իսկ x'-ը՝ X' դասին, ապա, այդ դասերի որոշման համաձայն, կունենանք նաև՝

$$x^n<\alpha<x'^n.$$

Բայց $x'-x$ տարբերությունը կարելի է ամեն մի $\varepsilon>0$ թվից

փոքր դարձնել (1 լեմմա), ընդ որում ոչինչ չի խանգարում, որպեսզի x' թիվը համարենք նախապես վերցրած մի x'_0 թվից փոքր։ Այդ դեպքում կարող ենք գրել՝

$$x'^n - x^n = (x'-x)\,(x'^{n-1} + x\cdot x'^{n-2} + \dots + x^{n-1}) < \varepsilon\cdot n\cdot x_0^{n-1},$$

այսինքն՝ այդ տարբերությունը ևս կարելի է ցանկացած չափով փոքր դարձնել*։ Այստեղից էլ, 2 լեմմայի համաձայն, հետևում է ξ^n և α թվերի հավասարությունը։

Այժմ, երբ արմատի գոյությունն ապացուցված է, սովորական եղանակով սահմանվում է ցանկացած r ռացիոնալ ցուցչով աստիճանի գաղափարը և ստուգվում է, որ այդպիսի աստիճանների համար իրավացի են տարրական հանրահաշվի դասընթացում արտածվող սովորական կանոնները՝

$$\alpha^r\cdot\alpha^{r'} = \alpha^{r+r'},\quad \alpha^r : \alpha^{r'} = \alpha^{r-r'}$$

$$(\alpha^r)^{r'} = \alpha^{r\cdot r'},\quad (\alpha\beta)^r = \alpha^r\cdot\beta^r,$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r = \frac{\alpha^r}{\beta^r},$$ և այլն։

Մատնանշենք նաև, որ երբ $\alpha > 1$, α^r աստիճանը r ռացիոնալ ցուցչի աճման հետ միասին աճում է։

19. ՑԱՆԿԱՑԱԾ ԻՐԱԿԱՆ ՑՈՒՑՉՈՎ ԱՍՏԻՃԱՆ։ Այժմ անցնենք ցանկացած α իրական (դրական) թվի ցանկացած β իրական ցուցչով աստիճանի սահմանմանը։ Դիտարկման ենթարկենք α թվի b և b' ռացիոնալ ցուցիչներով աստիճանները՝

$$\alpha^b \quad \text{և} \quad \alpha^{b'}$$

որտեղ ցուցիչները բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝

$$b < \beta < b'.$$

$1 < \alpha$ թվի** β ցուցչով աստիճան անվանում են (և նշա-

---

* Նկատենք, որ $\varepsilon . n . x_0^{n-1}$ թիվը կդառնա ամեն մի $\varepsilon' > 0$ թվից փոքր, եթե վերցնենք $\varepsilon < \frac{\varepsilon'}{n x_0^{n-1}}$։

** Կարելի է սահմանափակվել այդ դեպքով, քանի որ $\alpha < 1$ դեպքում կարող ենք ընդունել, օրինակ, $\alpha^\beta = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-\beta}$։

նակում α^β սիմվոլով) այն իրական γ թիվը, որը գտնվում է α^b և $\alpha^{b'}$ աստիճանների միջև՝

$$\alpha^b < \gamma < \alpha^{b'}. \qquad (1)$$

Հեշտ է համոզվել, որ այդպիսի թիվ միշտ գոյություն ունի։ Իրոք, α^b թվերի բազմությունը վերևից սահմանափակ է, օրինակ՝ ամեն մի $\alpha^{b'}$ աստիճանով։ Ընդունենք [10]՝

$$\gamma = \sup_{b<\beta}\{\alpha^b\}.$$

Այդ թվի համար կունենանք՝

$$\alpha^b \le \gamma \le \alpha^{b'}.$$

Իրականում այստեղ հավասարության նշանները չեն լինի, քանի որ կարելի է b-ն մեծացնել և b'-ը փոքրացնել, այնպես, որ ստացած γ թիվը բավարարում է (1) պայմաններին։

Այժմ ապացուցենք այդ պայմաններով որոշվող թվի միակությունը։ Դրա համար նախ նկատենք, որ n° 11-ի 2 լեմման իր ուժը կպահպանի, նաև այն դեպքում, երբ հրաժարվենք պահանջել, որպեսզի a, a' և ε թվերն անպայման ռացիոնալ լինեն. ապացույցը մնում է նույնը։ Այնուհետև ցույց տանք մի շատ պարզ և հաճախ օգտագործվող անհավասարություն, որը երբեմն կապում են Յակ. Բեռնուլլիի (Jac. Bernoulli) անվան հետ. եթե n-ը մեկից մեծ բնական թիվ է և c > 1, ապա՝

$$c^n > 1 + n(c-1). \qquad (2)$$

Իրոք, ընդունելով $c = 1 + \lambda$, որտեղ $\lambda > 0$, Նյուտոնի երկանդամի բանաձևի համաձայն կունենանք՝

$$(1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \dots.$$

Քանի որ չգրված անդամները դրական են, ուստի՝

$$(1+\lambda)^n > 1 + n\lambda,$$

որը համարժեք է (2) անհավասարությանը։ (2)-ում դնելով $c = \sqrt[n]{\alpha}$ $(\alpha > 1)$, *կստանանք մի նոր անհավասարություն՝*

$$\sqrt[n]{\alpha} - 1 < \frac{\alpha - 1}{n}, \qquad (3)$$

որից մենք հենց հիմա կօգտվենք։

Համաձայն, 11-ի 1 լեմմայի, b և b′ թվերը կարելի է ընտրել այնպես, որ $b' - b < \frac{1}{n}$, նախապես տված ամեն մի n բնական թվի դեպքում. այն ժամանակ, (3) անհավասարության շնորհիվ, կստանանք՝

$$\alpha^{b'} - \alpha^{b} = \alpha^{b}(\alpha^{b'-b} - 1) < \alpha^{b}(\alpha^{\frac{1}{n}} - 1) < \alpha^{b}\frac{\alpha - 1}{n}.$$

Քանի որ b-ն փոքր է ցանկացած (բայց ֆիքսած) b'_0 թվից, ուստի բավական է վերցնել

$$n > \frac{\alpha^{b'_0}(\alpha - 1)}{\varepsilon}$$

որտեղ ε-ը կամայապես փոքր դրական թիվ է, որպեսզի լինի՝

$$\alpha^{b'} - \alpha^{b} < \varepsilon.$$

Այդ դեպքում, հենց նոր ընդհանրացած 2. լեմմայի համաձայն, α^{b} և $\alpha^{b'}$ տեսքի թվերի միջև չեն կարող երկու տարբեր γ թվեր գտնվել։

Եթե β-ն ռացիոնալ է, ապա վերևում տված սահմանումը մեզ վերադարձնում է α^{β} սիմվոլի սովորական գաղափարին։

Հեշտ է ստուգել, որ ցանկացած իրական ցուցչով աստիճանի համար տեղի ունեն սովորական աստիճանի համար հայտնի բոլոր կանոնները։ Կանգ առնենք, օրինակ, բազմապատկման ժամանակ ցուցիչները գումարելու կանոնի վրա՝

$$\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma}.$$

Դիցուք b, b′, c, c′ կամայական ռացիոնալ թվեր են, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝

$$b < \beta < b', \quad c < \gamma < c'.$$

Գումարի սահմանման համաձայն [12]՝

$$b + c < \beta + \gamma < b' + c',$$

իսկ աստիճանի սահմանման համաձայն՝

$$\alpha^{b} < \alpha^{\beta} < \alpha^{b'}, \quad \alpha^{c} < \alpha^{\gamma} < \alpha^{c'}, \quad \alpha^{b+c} < \alpha^{\beta+\gamma} < \alpha^{b'+c'}.$$

Առաջին երկու կրկնակի անհավասարությունները անդամ առ անդամ գումարելով (հաշվի առնելով, որ ռացիոնալ ցուցիչների համար ապացուցելիք թեորեման արդեն հայտնի է), կստանանք՝

$$\alpha^{b+c} < \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} < \alpha^{b'+c'}.$$

Այսպիսով, $\alpha^{\beta+\gamma}$ և $\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma}$ երկու թվերը գտնվում են միևնույն α^{b+c} և $\alpha^{b'+c'}$ թվերի սահմաններում, որոնք, ինչպես հեշտ է

ցույց տալ, կարող են իրար ցանկացած չափով մոտենալ։ Այստեղից, 2 ընդհանրացրած լեմմայի համաձայն, բխում է այդ թվերի հավասարությունը։

Ստուգենք նաև, որ $\alpha > 1$ դեպքում α^β աստիճանը β իրական ցուցչի աճման հետ միասին աճում է։ Եթե $\beta < \bar{\beta}$, ապա նրանց միջև վերցնելով r ռացիոնալ թիվը՝

$$\beta < r < \bar{\beta},$$

իրական ցուցչով աստիճանի սահմանման համաձայն, կունենանք՝

$$\alpha^\beta \leq \alpha^r \text{ և } \alpha^r \leq \alpha^{\bar{\beta}},$$

որտեղից՝

$$\alpha^\beta < \alpha^{\bar{\beta}}.$$

20. ԼՈԳԱՐԻԹՄՆԵՐ։ Օգտվելով ցանկացած իրական ցուցչով աստիճանի սահմանումից, այժմ հեշտ է ապացուցել ցանկացած իրական դրական x թվի լոգարիթմի գոյությունը 1-ից տարբեր դրական α հիմքի դեպքում (մենք կընդունենք, օրինակ, $\alpha > 1$)։

Եթե գոյություն ունի այնպիսի r ռացիոնալ թիվ, որ

$$\alpha^r = x,$$

ապա հենց այդ r-ը կլինի որոնելի լոգարիթմը։ Ենթադրենք, թե այդպիսի ռացիոնալ թիվ չկա։ Բոլոր ռացիոնալ թվերի բազմության մեջ կառուցենք B/B' հատույթը հետևյալ եղանակով. B դասի մեջ գցենք բոլոր այն b ռացիոնալ թվերը, որոնց համար $\alpha^b < x$, իսկ B' դասի մեջ՝ այն b' ռացիոնալ թվերը, որոնց համար $\alpha^{b'} > x$։ Ցույց տանք, որ B և B' դասերը դատարկ չեն։ (2) անհավասարության շնորհիվ կունենանք՝

$$\alpha^n > 1 + n(\alpha - 1) > n(\alpha - 1),$$

և բավական է վերցնել

$$n > \frac{x}{\alpha - 1},$$

որպեսզի ստանանք $\alpha^{-n} < x$ և $-n$ թիվը ընկնի B դասի մեջ։ Հատույթ ստանալու համար պահանջվող մյուս պայմանները նույնպես բավարարվում են այստեղ։

Այդ B/B' հատույթը որոշում է մի β իրական թիվ, որը

հանդիսանում է «սահմանազատիչ» թիվ երկու դասերին պատկանող թվերի միջև։ Աստիճանի սահմանման համաձայն ունենք՝

$$\alpha^{b} < \alpha^{\beta} < \alpha^{b'} \quad (b < \beta < b'),$$

ընդ որում α^{β} թիվը միակն է, որը բավարարում է նման անհավասարություններին։ Սակայն x թվի համար, հատույթի կառուցման համաձայն, ունենք՝

$$\alpha^{b} < x < \alpha^{b'}.$$

Հետևաբար՝

$$\alpha^{\beta} = x \quad \text{և} \quad \beta = \log_{\alpha} x,$$

որով և ապացուցվում է լոգարիթմի գոյությունը,

21. ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ՉԱՓՈՒՄԸ։ *Ռացիոնալ թվերի բազմության սահմաններում մնալով, բոլոր հատվածները երկարությամբ օժտելու անհնարինությունը նույնպես շատ կարևոր առիթ է եղել իռացիոնալ թվերի մուծման համար։ Այժմ ցույց տանք, որ թվային բազմության՝ վերը կատարված ընդլայնումը բավական է հատվածների չափման խնդիրը լուծելու համար։*

Ամենից առաջ ձևակերպենք այդ խնդիրը.*

Պահանջվում է յուրաքանչյուր A ուղղագիծ հատվածի հետ կապել մի որոշ $l(A)$ իրական դրական թիվ (որն անվանելու ենք «A հատվածի երկարություն») այնպես որ՝

1) մի որոշ նախապես ընտրած E հատված («երկարության էտալոն») ունենա 1 երկարություն՝ $l(E) = 1$,

2) հավասար հատվածներն ունենան միևնույն երկարությունը,

3) հատվածները գումարելիս գումարի երկարությունը միշտ հավասար լինի գումարվող հատվածների երկարությունների գումարին («ադիտիվության» հատկություն)՝

$$l(A+B) = l(A) + l(B).$$

Առաջադրված պայմանները բերում են խնդրի միարժեք լուծման։ 2) և 3) պայմաններից հետևում է, որ էտալոնի q-րդ մասը պետք է ունենա $\frac{1}{q}$ երկարություն, իսկ եթե այդ մասն

** Մենք այստեղ օգտվում ենք դպրոցում սովորած երկրաչափական տեղեկություններից և չենք ձևակերպում պահանջվող աքսիոմաները։*

իրեն գումարելի կրկնված է p անգամ, ապա ստացված հատվածը, 3) հատկության շնորհիվ, պետք է ունենա $\frac{p}{q}$ երկարություն։ Այսպիսով, եթե A հատվածը համաչափելի է երկարության էտալոնի հետ և A ու E հատվածների ընդհանուր չափը նրանց մեջ տեղավորվում է համապատասխանաբար p և q անգամ, ապա անհրաժեշտաբար՝

$$l(A) = \frac{p}{q}.$$

Հեշտ է տեսնել, որ այդ թիվը կախված չէ վերցրած ընդհանուր չափից, և որ, եթե էտալոնի հետ համաչափելի հատվածներին վերագրենք հենց այդ կանոնով ստացվող ռացիոնալ երկարություններ, ապա այդ հատվածների համար չափման խնդիրը լրիվին լուծված կլինի։

Եթե A հատվածը մեծ է B հատվածից, այնպես որ A = B + C, որտեղ C-ն նույնպես մի որոշ հատված է, ապա 3) հատկության շնորհիվ պետք է լինի՝

$$l(A) = l(B) + l(C),$$

և, քանի որ $l(C) > 0$, ապա $l(A) > l(B)$։ Այսպես, ուրեմն, անհավասար հատվածները պետք է ունենան անհավասար երկարություններ, այն է՝ մեծ հատվածը պետք է ունենա մեծ երկարություն։

Քանի որ յուրաքանչյուր $\frac{p}{q}$ դրական ռացիոնալ թիվ հանդիսանում է երկարության E էտալոնի հետ համաչափելի մի որոշ հատվածի երկարություն, ապա մեր ասածից, ի միջի այլոց, պարզ հետևում է, որ էտալոնի հետ անհամաչափելի ոչ մի հատված չի կարող ռացիոնալ երկարություն ունենալ։

*Այժմ ենթադրենք, թե Σ-ն E էտալոնի հետ անհամաչափելի հատված է։ Կգտնվեն անթիվ բազմությամբ S և S′ հատվածներ, որոնք համաչափելի են E-ի հետ և համապատասխանաբար մեծ են կամ փոքր Σ-ից**։ *Եթե նրանց երկարությունները նշանակենք s և s′՝ $l(S) = s$, $l(S') = s'$, ապա որոնելի $l(\Sigma)$ երկարությունը պետք է բավարարի հետևյալ անհավասարություններին՝*

---

* *Այդ հեշտ է ապացուցել, ելնելով «Արքիմեդի աքսիոմայից» (երկրաչափական), որի մասին արդեն խոսել ենք 5-ում։*

$$s < l(\Sigma) < s'^{*}։$$

Եթե բոլոր ռացիոնալ թվերը տրոհենք երկու S *և* S′ *դասերի այնպես, որ* S*-ի մեջ ընկնեն բոլոր* s *թվերն, ինչպես նաև բոլոր բացասական թվերն ու* 0*-ն, իսկ* S′ *դասի մեջ՝* s′ *թվերը, ապա կստանանք հատույթ ռացիոնալ թվերի բազմության մեջ։ Քանի որ, ակներևաբար, ստորին դասի մեջ չկա ամենամեծ թիվը, իսկ վերին դասի մեջ չկա ամենափոքրը, ապա այդ հատույթով որոշվում է* σ *իռացիոնալ թիվ, որը կլինի* $s < \sigma < s'$ *անհավասարություններին բավարարող միակ իրական թիվը։ Հենց այդ* σ *թիվն էլ անհրաժեշտ է ընդունել իբրև* $l(\Sigma)$ *երկարություն։*

Այժմ ենթադրենք, թե E*-ի հետ համաչափելի և անհամաչափելի բոլոր հատվածներին, մատնանշված կանոններով, վերագրված են որոշ երկարություններ։ Նրանց համար 1) և 2) պայմանների բավարարվելն ակներև է։ 3) հատկության բավարարվելը ցույց տալու համար վերցնենք* P *և* Σ *երկու հատվածներ, որոնց երկարություններն են՝*

$$\rho = l(P), \quad \sigma = l(\Sigma),$$

և նրանց $T = P + \Sigma$ *գումարը, որի երկարությունը նշանակենք* $\tau = l(T)$*։ Վերցնելով* r, r′, s, s′ *կամայական ռացիոնալ դրական թվերն այնպես, որ*

$$r < \rho < r', \quad s < \sigma < s'։$$

կառուցենք R, R′, S, S′ *հատվածները, որոնց համար իբրև երկարություններ ծառայում են հենց այդ թվերը։* R+S *հատվածը, որի երկարությունն է* r+s *թիվը, փոքր կլինի* T *հատվածից, իսկ* R′+S′ *հատվածը, որի երկարությունն է* r+s *թիվը, մեծ կլինի* T *հատվածից։ Այդ պատճառով էլ՝*

$$r + s < \tau < r' + s'։$$

Սակայն, [12], r+s *տեսքի թվերի*** *և* r′+s′ *տեսքի թվերի միջև գտնվող միակ իրական թիվը* ρ+σ *գումարն է։ Հետևաբար՝*

$$\tau = \rho + \sigma,$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։

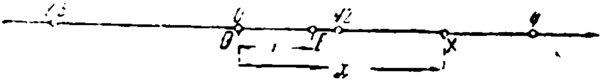
---

* *Հասկանալի է, որ* E*-ի հետ համաչափելի* Σ *հատվածի երկարության համար նույնպես բավարարվում են այդ անհավասարությունները։*

** r*-ը և* s*-ը դրական թվերով սահմանափակելը, իհարկե, էական չէ։*

«Անընդհատության հատկության» տարածումը ցանկացած վերջավոր թվով գումարելիների դեպքի վրա կատարվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով։

Եթե առանցքի (ուղղությամբ օժտված ուղղի) վրա (գծ. 1) ընտրենք O *սկզբնակետը և* OE *երկարության էտալոնը, ապա այդ ուղղի յուրաքանչյուր* X *կետին համապատասխանում է մի որոշակի իրական թիվ՝ նրա* x *աբսցիսը, որը հավասար է* OX *հատվածի երկարությանը, երբ* X *կետը գտնվում է* O *կետից դեպի դրական ուղղությունը, կամ այդ երկարությանը՝ վերցրած մինուս նշանով, երբ դասավորությունը հակառակն է։*



Գծ. 1.

Բնականաբար հարց է ծագում, թե արդյոք հակադարձը նույնպես ճիշտ կլինի, այսինքն՝ յուրաքանչյուր x իրական թիվ համապատասխանում է արդյոք ուղղի մի որոշ կետի: *Այդ հարցը լուծվում է դրական իմաստով ուղղի անընդհատության աքսիոմայի օգնությամբ, որն ուղղի, որպես կետերի բազմության, համար հաստատում է՝ իրական թվերի բազմության անընդհատությանը* [9] *նման մի հատկություն։*

Այսպիսով, բոլոր իրական թվերի և ուղղությամբ օժտված ուղղի (առանցքի) բոլոր կետերի միջև կարելի է հաստատել փոխադարձաբար միարժեք համապատասխանություն։ Իրական թվերը կարելի է պատկերացնել առանցքի վրա գտնվող կետերով, որի պատճառով էլ այդ առանցքն անվանում են թվային առանցք։ Մենք առաջիկայում մշտապես օգտվելու ենք այդպիսի պատկերացումից։

ԱՌԱՋԻՆ ԳԼՈՒԽ

ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

§ 1. ՎԱՐԻԱՆՏԱ ԵՎ ՆՐԱ ՍԱՀՄԱՆԸ

22. ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆ. ՎԱՐԻԱՆՏԱ։ Ֆիզիկայի և բնության վերաբերյալ այլ գիտությունների մեջ ընթերցողին հանդիպել են զանազան տեսակի բազմաթիվ մեծություններ՝ ժամանակ, երկարություն, ծավալ, կշիռ և այլն։ Նրանցից ամեն մեկը, նայած հանգամանքներին, երբեմն տարբեր արժեքներ է ընդունել, երբեմն՝ միայն մեկ արժեք։ Առաջին դեպքում մենք գործ ենք ունենում փոփոխական մեծության հետ, իսկ երկրորդ դեպքում՝ հաստատուն մեծության։

Մաթեմատիկայում, սակայն, մենք վերանում ենք դիտարկվող մեծության ֆիզիկական իմաստից, հետաքրքրվելով միայն այն թվով, որով այդ մեծությունն արտահայտվում է։ Մեծության ֆիզիկական իմաստը նորից կարևորություն է ստանում միայն այն ժամանակ, երբ զբաղվում ենք մաթեմատիկայի կիրառություններով։ Այսպիսով, մեզ համար փոփոխական մեծությունը (կամ կարճ՝ փոփոխականը)՝ այդ պարզապես մի նշան է, սիմվոլ է, (տառ է, օրինակ՝ x), որին վերագրվում են թվային արժեքներ։

Փոփոխականը տված է համարվում, եթե ցույց է տրված այն արժեքների $X = \{x\}$ բազմությունը, որոնք նա կարող է ընդունել։ Հաստատուն մեծությունը (կարճ՝ հաստատունը) հարմար է դիտել որպես փոփոխականի մասնավոր դեպք. այդ համապատասխանում է այն ենթադրությանը, որ $X = \{x\}$ բազմությունը բաղկացած է մեկ էլեմենտից։

x փոփոխականի սահմանի գաղափարը որոշելիս բավական չէ իմանալ միայն այն, թե այդ փոփոխականը թվային ինչպիսի X բազմությունից է ընդունում իր արժեքները. ան-

հրաժեշտ է նաև իմանալ, թե հենց ինչպիսի արժեքներ է նա ընդունում (որոնց մեջ կարող են և կրկնվող արժեքներ լինել) և ինչ կարգով։ Կարգավորյալ փոփոխականի և նրա սահմանի վերաբերյալ հարցի ընդհանուր առումով շարադրումը հետաձգելով մինչև հաջորդ հատորի վերջը*, երբ ընթերցողի մոտ այդ բնագավառում բավականաչափ փորձ կկուտակվի, մենք այս գլուխը հատկացնում ենք այդպիսի փոփոխական մեծության մի՝ ամենից պարզ ու միաժամանակ ամենից կարևոր մասնավոր տեսակի ուսումնասիրությանը։

Մենք սկսենք թվային հաջորդականության գաղափարի սահմանումից։ Պատկերացնենք բնական թվերի շարքը՝

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots, n', \ldots, \qquad (1)$$

որի մեջ թվերը դասավորված են աճման կարգով, այնպես որ մեծ n' թիվը հաջորդում է փոքր n թվին (կամ՝ փոքր n թիվը նախորդում է մեծ n' թվին)։ Եթե այժմ (1) շարքի մեջ յուրաքանչյուր n բնական թիվ որևէ օրենքով փոխարինենք մի որոշ x_n իրական թվով, ապա կստացվի հենց թվային հաջորդականություն՝

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n'}, \ldots, \qquad (2)$$

որի x_n անդամները կամ էլեմենտները համարակալված են բոլոր բնական թվերով և դասավորված են համարների աճման կարգով․ $n'>n$ դեպքում, $x_{n'}$ անդամը հաջորդում է x_n անդամին (x_n-ը նախորդում է $x_{n'}$-ին), անկախ նրանից, թե արդյոք $x_{n'}$ թիվն ինքը մեծ է, թե փոքր x_n թվից կամ նույնիսկ հավասար է նրան**։

Այն x փոփոխականը, որն ընդունում է արժեքների մի որոշ (2) հաջորդականություն, մենք, Մերեին (Ch. Méray) հետևելով, անվանելու ենք վարիանտա։ *Այդ՝ փոփոխականի հենց այն տեսակն է, որի ուսումնասիրությամբ մենք այստեղ սահմանափակվում ենք։*

Ընթերցողին մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում

---

* Տես այնտեղ «Ընդհանուր տեսակետ սահմանի վերաբերյալ» հոդվածը

** Նմանապես սահմանվում է ուղիղի կետերի կամ որևէ այլ բնույթի առարկաների հաջորդականության գաղափարը։

հանդիպել են հենց վարիանտայի տեսակի փոփոխականներ։ Նրանք ծանոթ են, օրինակ, հետևյալ տեսքի հաջորդականությունները՝

$$\underset{1}{a},\ \underset{2}{a+d},\ \underset{3}{a+2d},\ \dots,\ \underset{n}{a+(n-1)d},\ \dots,$$

(թվաբանական պրոգրեսիա), կամ՝

$$\underset{1}{a},\ \underset{2}{aq},\ \underset{3}{aq^2},\ \dots,\ \underset{n}{aq^{n-1}},\ \dots,$$

(երկրաչափական պրոգրեսիա). երկուսի մեջ էլ փոփոխական անդամը վ ա ր ի ա ն տ ա է։ Շրջանագծի երկարությունը որոշելու կապակցությամբ սովորաբար դիտարկվում է շրջանագծին ներգծած այնպիսի կանոնավոր բազմանկյան պարագիծը, որն ստացվում է վեցանկյունից՝ կողմերի թվի կրկնապատկմամբ. այդպիսով, այդ վ ա ր ի ա ն տ ա ն ստանում է ա ր ժ ե ք ն ե ր ի հ ե տ և յ ա լ հաջորդականությունը՝

$$\underset{1}{p_6 = 6R},\quad \underset{2}{p_{12} = 12R\sqrt{2-\sqrt{3}}},$$

$$\underset{3}{p_{24} = 24R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}},\quad \underset{4}{p_{48}},\ \dots$$

Հիշենք նաև $\sqrt{2}$-ի՝ հետզհետե աճող ճշգրտությամբ տասնորդական մոտավորությունների մասին (պակասորդով), որոնք կազմում են հետևյալ արժեքների հաջորդականությունը՝

$$\underset{1}{1{,}4},\ \underset{2}{1{,}41},\ \underset{3}{1{,}414},\ \underset{4}{1{,}4142},\ \dots$$

և կարող են դիտվել որպես վարիանտայի ստացած արժեքներ։

x փոփոխականը, որը հաջորդաբար ստանում է (2) արժեքները, հաճախ նշանակում են հենց x_n-ով, այն նույնացնելով այդ հաջորդականության փոփոխական («ընդհանուր») անդամի հետ։

Երբեմն x վարիանտան տրվում է նրանով, որ ա ն մ ի ջ ա կ ա ն ո ր ե ն ցույց է տրվում x_n-ի արտահայտությունը։ Օգտվելով այդ արտահայտությունից, կարելի է վարիանտայի ամեն մի արժեքն անմիջապես հաշվել նրա համարի օգնությամբ, չհաշվելով նախորդ արժեքները։ Այսպես, օրինակ, թվաբանական պրոգրեսիայի դեպքում $x_n = a+(n-1)d$, երկրաչափական պրո-

գրեսիայի դեպքում՝ $x_n = aq^{n-1}$*, Ներգծյալ կանոնավոր բազմանկյան պարագծի համար այդպիսի ընդհանուր արտահայտություն գրել հնարավոր կլինի միայն այն ժամանակ, երբ մտցնենք* π *թիվը. ընդհանրապես ներգծյալ կանոնավոր* m*-անկյան* p_m *պարագիծն արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝*

$$p_m = 2mR \sin\frac{\pi}{m}\text{:}$$

Այլ դեպքերում կարող է մեզ հայտնի չլինել (2) հաջորդականության x_n *ընդհանուր անդամի արտահայտությունը: Այնուամենայնիվ,* (2) հաջորդականությունը, և նրա հետ նաև նրան համապատասխանող վարիանտան, տրված է համարվում, եթե մենք համենայն դեպս գիտենք այն կանոնը, որով կարելի է հաշվել վարիանտայի ցանկացած արժեքը՝ հենց որ հայտնի լինի նրա համարը: *Ուստի և, իմանալով արմատների մոտավոր հաշվման կանոնը, մենք կարող ենք* $\sqrt{2}$*-ի տասնորդական մոտավորությունների ամբողջ հաջորդականությունը համարել տրված, չնայած մենք չգիտենք նրա ընդհանուր անդամի արտահայտությունը:*

Եթե վարիանտան տրված է (նշված իմաստով), ապա այդպիսով ոչ միայն բնորոշված է նրա ստանալիք բոլոր արժեքների բազմությունն ամբողջությամբ, այլև սահմանված է այդ արժեքներն ստանալու կարգը. յուրաքանչյուր համարի համապատասխանում է վարիանտայի մի որոշակի արժեք և երկու արժեքներից հաջորդ արժեք է համարվում այն, որի համարն ավելի մեծ է:

Կրկին անգամ հիշենք, որ վարիանտայի արժեքները չպետք է անպայման իրարից տարբեր լինեն: Օրինակ, եթե վարիանտան տրված է հետևյալ բանաձևերից մեկով՝

$$x_n = 1, \qquad x_n = (-1)^{n-1}, \qquad x_n = \frac{1+(-1)^n}{n},$$

ապա համապատասխան հաջորդականությունները կլինեն՝

$$\underset{1}{1},\ \underset{2}{1},\ \underset{3}{1},\ \underset{4}{1},\ \underset{5}{1},\ \underset{6}{1},\ \ldots$$

$$\underset{1}{1},\ \underset{2}{-1},\ \underset{3}{1},\ \underset{4}{-1},\ \underset{5}{1},\ \underset{6}{-1},\ \ldots$$

$$\underset{1}{0},\ \underset{2}{1},\ \underset{3}{0},\ \underset{4}{\frac{1}{2}},\ \underset{5}{0},\ \underset{6}{\frac{1}{3}},\ \ldots\text{:}$$

Առաջին դեպքում մենք ունենք պարզապես հաստատուն մեծություն. նրա ընդունելիք արժեքների ամբողջ «բազմությունը» վերածվում է մեկ արժեքի։ Երկրորդ դեպքում այդ բազմությունը բաղկացած է երկու արժեքից՝ 1-ից և (—1)-ից, որոնք իրար փոխարինում են հերթականությամբ։ Վերջապես, երրորդ դեպքում փոփոխականի ստացած արժեքների բազմությունն անվերջ է, սակայն այդ հանգամանքը չի խանգարում, որպեսզի փոփոխականի ստացած արժեքները մեկ ընդ մեջ դառնան 0. և մենք ընդունում ենք, որ հինգերորդ տեղում գրված 0 արժեքը հաջորդում է ոչ միայն երկրորդ տեղում գրված 1 արժեքին, այլև առաջին տեղում գրված 0 արժեքին։

23. ՎԱՐԻԱՆՏԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆԸ։ Ընթերցողը դպրոցական դասընթացից ծանոթ է նաև այս գաղափարին։ Ահա նրա ճշգրիտ սահմանումը։

a հաստատուն թիվը կոչվում է $x = x_n$ վարիանտայի սահման, եթե յուրաքանչյուր ε դրական թվի համար, որքան էլ այն փոքր լինի, գոյություն ունի այնպիսի N համար, որ x_n-ի այն բոլոր արժեքները, որոնց մոտ $n > N$, բավարարում են

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad (3)$$

անհավասարությանը։

Այն փաստը, որ a *թիվը հանդիսանում է* $x = x_n$ *վարիանտայի սահմանը, գրում են այսպես՝*

$$\lim x_n = a \quad \text{կամ} \quad \lim x = a$$

(lim-*ը լատիներեն* limes *բառի կրճատ ձևն է, որը նշանակում է «սահման»)։ Նաև ասում են, որ* $x = x_n$ *փոփոխականը ձգտում է* a-*ին և գրում են՝*

$$x_n \longrightarrow a \quad \text{կամ} \quad x \longrightarrow a\text{։}$$

Երբեմն a *թիվը անվանում են* (2) *հաջորդականության սահման և ասում են, որ այդ հաջորդականությունը զուգամիտում է* a *թվին։*

Վերը բերված սահմանումը կարելի է կարճ ձևակերպել այսպես՝

a թիվն $x = x_n$ վարիանտայի սահմանն է, եթե վերջինիս ար-

վերջիններն, սկսած մի որոշ համարից, ցանկացած չափով քիչ են տարբերվում a-ից:

(3) անհավասարությունը, որտեղ ε-ը կամայական փոքր թիվ է, հենց այն մտքի ճշգրիտ գրանցումն է, թե x_n-ը a-ից «ցանկացած չափով քիչ է տարբերվում», իսկ N-ը ցույց է տալիս հենց այն «համարը, որից սկսած» այդ հանգամանքը տեղի ունի:

Կարևոր է ճիշտ հասկանալ այն, որ N համարն, ընդհանրապես ասած, մեկ ընդմիշտ ցույց տրվել չի կարող, այլ այն կախված է ε թվի ընտրությունից: Այդ հանգամանքն ընդգծելու համար մենք երբեմն N-ի փոխարեն գրելու ենք N_ε: ε թիվը փոքրացնելիս, նրա համապատասխան $N=N_\varepsilon$ համարն, ընդհանրապես ասած, մեծանում է. x_n վարիանտայի արժեքներն a-ին որքան ավելի մոտ պահանջենք, այնքան ավելի հեռու պետք է վերցնենք այդ արժեքները (2) հաջորդականության մեջ:

Բացառություն է կազմում այն դեպքը, երբ x_n վարիանտայի բոլոր արժեքները հավասար են a հաստատուն թվին: Այս դեպքում, ակնհայտորեն, $a=\lim x_n$ և (3) անհավասարությունը տեղի կունենա ամեն մի $\varepsilon>0$ դեպքում՝ միաժամանակ x_n-ի բոլոր արժեքների համար:*

(3) անհավասարությունը ինչպես հայտնի է [17], համարժեք է հետևյալ անհավասարություններին՝

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

կամ՝

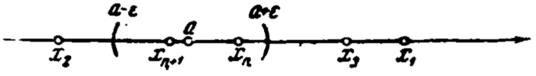
$$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon: \qquad (4)$$

Հետագայում մենք հաճախ օգտվելու ենք այս անհավասարություններից:

Եթե a ու $a\pm\varepsilon$ թվերը և մեր վարիանտայի x_n արժեքները պատկերենք թվային ուղղի [21] վրա (գծ. 2), ապա կստանանք վարիանտայի սահմանի երկրաչափական պարզ մեկնաբանությունը: Որքան էլ փոքրիկ (2ε երկարությամբ) հատված վերցնենք, որի կենտրոնը լինի a կետը, բոլոր x_n կետերը. սկսած

** Նման երևույթ տեղի ունի նաև այնպիսի x_n վարիանտայի համար, որի արժեքները հավասարվում են a-ին՝ սկսած մի որոշ համարից:*

մի որոշ համարից, պետք է ընկնեն այդ հատվածի ներսը (այնպես որ, նրանից դուրս կարող են մնալ միայն վերջավոր թվով այդպիսի կետեր)։ a թիվը պատկերող կետը հանդիսանում է վարիանտայի արժեքները պատկերող կետերի կույտի մի տեսակ կենտրոնացում։



Գծ. 2.

24. ԱՆՎԵՐՋ ՓՈՔՐ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։ Այն դեպքը, երբ վարիանտան ձգտում է զրոյի՝ $x_n \to 0$, առանձնահատուկ հետաքրքրություն է ներկայացնում։

Զրո սահմանն ունեցող x_n վարիանտան կոչվում է **անվերջ փոքր մեծություն**, կամ պարզապես՝ **անվերջ փոքր**։

Եթե վարիանտայի սահմանի սահմանման մեջ [23] ընդունենք $a=0$, *ապա (3) անհավասարությունը կընդունի այսպիսի տեսք՝*

$$|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon \quad (N_\varepsilon < n \text{ համար})։$$

Այսպիսով, անվերջ փոքրի վերոհիշյալ սահմանումը կարելի է առանց «սահման» տերմինը գործածելու ձևակերպել այսպես՝

x_n վարիանտան կոչվում է **անվերջ փոքր**, եթե նա, ըսկսած մի որոշ համարից, իր բացարձակ արժեքով դառնում է և այնուհետև մնում ավելի փոքր, քան նախապես տված ցանկացած չափով փոքր $\varepsilon > 0$ թիվը։

Ոչ լիովին հաջող (պատմականորեն ստեղծված) «անվերջ փոքր» մեծություն տերմինն ընթերցողին չպետք է մոլորության մեջ գցի. այդ մեծության ստացած արժեքներից ոչ մեկն առանձին վերցրած չի կարող որակվել իբրև «փոքր», եթե նա ինքը հենց զրո չէ։ Հարցը նրանումն է, որ այդ մեծությունը փոփոխական մեծություն է, որը միայն իր փոփոխման ընթացքում ի վիճակի է դառնալ ավելի փոքր, քան կամայապես վերցրած* $\varepsilon > 0$ *թիվը։*

---

* *Բացառյալ այն ոչ հետաքրքիր դեպքը, երբ տված մեծությունը նույնաբար հավասար է զրոյի։*

Եթե վերադառնանք ընդհանուր դեպքին, երբ x_n վարիանտան ունի a սահմանը, ապա փոփոխականի և իր սահմանի միջև տարբերությունը՝

$$\alpha_n = x_n - a,$$

ակնհայտաբար, կլինի անվերջ փոքր, քանի որ (3) անհավասարության շնորհիվ՝

$$|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon \quad (N_\varepsilon < n \text{ համար})։$$

Հակադարձաբար, եթե α_n-ը անվերջ փոքր է, ապա $x_n \to a$։ Այսպիսով, գալիս ենք հետևյալ եզրակացությանը՝

Որպեսզի a հաստատուն թիվը լինի x_n վարիանտայի սահմանը, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրանց $x_n - a = \alpha_n$ տարբերությունը լինի անվերջ փոքր։

Այս կապակցությամբ, «սահման» գաղափարի համար ևս կարելի կլիներ տալ մի ուրիշ (նախկինին համարժեք) սահմանում՝

a հաստատուն թիվը կոչվում է x_n վարիանտայի սահմանը, եթե նրանց տարբերությունն անվերջ փոքր մեծություն է։

Հասկանալի է, որ եթե ելնենք սահմանի այս վերջին սահմանումից, ապա անվերջ փոքրի համար պետք է ընդունել վերևում բերված երկու սահմանումներից երկրորդը։ Այլապես կստացվեր կախարդական շրջապտույտ. սահմանը կորոշվեր անվերջ փոքրի միջոցով, իսկ անվերջ փոքրը՝ սահմանի միջոցով։

Այսպես, ուրեմն, եթե վարիանտա $x_n \to a$, ապա նա կարող է ներկայացվել այսպես՝

$$x_n = a + \alpha_n,$$

որտեղ α_n-ը անվերջ փոքր է, և հակադարձաբար, եթե x_n վարիանտան հնարավոր է այդպես ներկայացնել, ապա նա ունի a սահմանը։ Սրանից հաճախ են օգտվում պրակտիկայում փոփոխականի սահմանը որոշելիս։

25. *ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ*։

1) Դիտարկենք հետևյալ վարիանտաները՝

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad x_n = -\frac{1}{n}, \quad x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Դրանց համապատասխանում են արժեքների այսպիսի հաջորդականություններ՝

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\ \ldots\ ,$$

$$-1,\quad -\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{3},\quad -\frac{1}{4},\ \ldots\ ,$$

$$1,\quad -\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad -\frac{1}{4},\ \ldots\ ,$$

Այդ երեք փոփոխականներն էլ անվերջ փոքրեր են, այսինքն՝ ունեն 0 սահմանը։ Իրոք, նրանց համար

$$|x_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

հենց որ $n > \frac{1}{\varepsilon}$: Այսպիսով, կարելի է որպես N_ε վերցնել, օրինակ, $\frac{1}{\varepsilon}$-ի մեջ մտնող ամենամեծ ամբողջ թիվը, այսինքն՝ $E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$-ը*:

Նկատենք, որ առաջին փոփոխականը միշտ մեծ է մնում իր 0 սահմանից, երկրորդ փոփոխականը միշտ նրանից փոքր է մնում, իսկ երրորդը՝ հաջորդաբար դառնում է մեկ մեծ, մեկ փոքր նրանից:

2) Եթե ընդունենք՝

$$x_n = \frac{2 + (-1)^n}{n},$$

ապա կստացվի արժեքների հետևյալ հաջորդականությունը՝

$$1,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{3}{6},\ \ldots$$

Այս դեպքում ևս $x_n \to 0$, քանի որ՝

$$|x_n| \leq \frac{3}{n} < \varepsilon,$$

երբ $n > \frac{3}{\varepsilon}$, այնպես որ, կարելի է ընդունել $N_\varepsilon = E\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)$:

Այստեղ մենք հանդիպում ենք մի հետաքրքրաշարժ դեպքի. փոփոխականը հաջորդաբար մեկ մոտենում է իր 0 սահմանին, մեկ հեռանում նրանից:

3) Դիցուք այժմ

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{n},$$

---

* Ընդհանրապես, $E(p)$-ով նշանակվում է p-ն չգերազանցող ամենամեծ ամբողջ թիվը. կամ, կարճ ասած, p թվի ամբողջ մասը: E-ն ֆրանսերեն Entier բառի սկզբնատառն է (նշանակում է «ամբողջ»):

այս վարիանտայի հետ մենք արդեն գործ ենք ունեցել n° 22-ի վերջում։ Այստեղ ևս $x_n \to 0$, քանի որ

$$|x_n| < \frac{2}{n} < \varepsilon,$$

հենց որ $n > N_\varepsilon = E\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$։ Նկատենք, որ այստեղ n-ի բոլոր կենտ արժեքների համար փոփոխականը հավասարվում է իր սահմանին:

Այս պարզ օրինակները հետաքրքիր են նրանով, որ նրանք ընդգծում են այն հնարավորությունների բազմազանությունը, որոնք ընդգրկվում են վարիանտայի սահմանի համար վերևում տրված սահմանմամբ։ Կարևոր չէ, թե փոփոխականի արժեքները սահմանի մեկ կողմում են գտնվում, թե ոչ. կարևոր չէ, թե արդյոք փոփոխականն իր սահմանին մոտենում է ամեն մի քայլից հետո. կարևոր չէ, վերջապես, թե փոփոխականը հասնում է արդյոք իր սահմանին, այսինքն՝ արդյոք նա ստանում է իր սահմանին հավասար արժեքներ։ Էականը միայն այն է, ինչի մասին ասված է սահմանման մեջ՝ փոփոխականը պետք է վերջ ի վերջո, այսինքն՝ իր արժեքներից բավականաչափ հեռավորների համար, ցանկացած չափով քիչ տարբերվի իր սահմանից։

4) Վերցնենք վարիանտայի ավելի բարդ օրինակ՝

$$x_n = \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4}.$$

Ցույց տանք, որ նրա սահմանը կլինի $\frac{1}{3}$ թիվը։ Դրա համար դիտարկենք նրանց տարբերությունը՝

$$x_n - \frac{1}{3} = \frac{-5n + 10}{3(3n^2 + 2n - 4)}$$

և գնահատենք նրա բացարձակ մեծությունը։ $n > 2$ համար կունենանք՝

$$\left| x_n - \frac{1}{3} \right| = \frac{5n - 10}{3(3n^2 + 2n - 4)} < \frac{5n}{3(3n^2 - 4)} < \frac{5n}{3 \cdot 2n^2} < \frac{1}{n},$$

այնպես որ այդ տարբերությունը ε-ից փոքր կլինի, եթե վերցնենք $n > N_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$։ Դրանով հենց ապացուցվում է, որ $x_n \to \frac{1}{3}$.

5) Դիտարկենք հետևյալ վարիանտան՝

$$x_n = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (a > 1)$$

և ցույց տանք, որ $x_n \to 1$։ Եթե օգտվենք n° 19-ի (3) անհավասարությունից, ապա կարող ենք գրել՝

$$|x_n - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a - 1}{n} < \varepsilon,$$

հենց որ $n > N_\varepsilon = E\left(\frac{a-1}{\varepsilon}\right)$: Սակայն կարելի է և այլ կերպ դատել: Այսպես,

$$|x_n - 1| = a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$$

անհավասարությունը համարժեք է հետևյալին՝

$$\frac{1}{n} < \log_a (1+\varepsilon)$$

կամ՝

$$n > \frac{1}{\log_a (1+\varepsilon)},$$

որը բավարարվում է, երբ $n > N_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\log_a (1+\varepsilon)}\right)$.

Նկատենք, որ մեր ընտրած երկու տարբեր եղանակներով ստացանք տարբեր արտահայտություններ N_ε-ի համար. Օրինակ, երբ $a=10$ և $\varepsilon=0{,}01$, առաջին եղանակով ստանում ենք $N_{0{,}01} = \frac{9}{0{,}01} = 900$, իսկ երկրորդ եղանակով՝ $N_{0{,}01} = E\left(\frac{1}{0{,}00432\ldots}\right) = 231$: Երկրորդ եղանակով մենք ստացանք $N_{0{,}01}$-ի բոլոր հնարավոր արժեքներից փոքրագույնը, քանի որ արդեն $10^{\frac{1}{231}} = 1{,}010017\ldots$ թվի և 1-ի տարբերությունը $\varepsilon=0{,}01$-ից մեծ է: Այդպես կլինի նաև ընդհանուր դեպքում, որովհետև, ինչպես հեշտ է տեսնել, երբ $n = \frac{1}{\log_a (1+\varepsilon)}$, անհրաժեշտաբար $a^{\frac{1}{n}} - 1 \geq \varepsilon$: Այդ առթիվ նկատենք, որ եթե խոսքը վերաբերվում է միայն սահմանին ձգտելու փաստի հաստատմանը, ապա մենք ամենևին էլ շահագրգռված չենք գտնելու N_ε-ի հնարավոր փոքրագույն արժեքը: Պետք է երաշխավորվի (3) անհավասարության բավարարվելը՝ սկսած մի որևէ համարից, հեռավոր համարից թե մոտիկ—այդ կարևոր չէ:

6) Անվերջ փոքրի շատ կարևոր օրինակ է տալիս

$$\alpha_n = q^n \quad (|q| < 1)$$

վարիանտը: Ապացուցելու համար, որ իրոք $\alpha_n \to 0$, դիտարկենք հետևյալ անհավասարությունը՝

$$|\alpha_n| = |q|^n < \varepsilon,$$

որը համարժեք է հետևյալին՝

$$n \cdot \log_{10} |q| < \log_{10} \varepsilon,$$

կամ՝

$$n > \frac{\log_{10}\varepsilon}{\log_{10}|q|}\text{*}:$$

Այսպիսով, եթե ε < 1 համարելով, ընդունենք

$$N_\varepsilon = E\left(\frac{\log_{10}\varepsilon}{\log_{10}|q|}\right),$$

ապա $n > N_\varepsilon$ դեպքում հիշատակված անհավասարությունն անկասկած տեղի կունենա:

Նմանապես հեշտ է համոզվել, որ

$$\alpha_n = A\cdot q^n \quad (|q| < 1)$$

վարիանտը, որտեղ A-ն հաստատուն թիվ է, նույնպես անվերջ փոքր է:

7) Այժմ դիտարկենք անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիան՝

$$\therefore\ a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots,\ aq^{n-1},\ \ldots \quad (|q| < 1)$$

և խնդիր դնենք հաշվել նրա գումարը: Անվերջ պրոգրեսիայի գումար ասելով, ինչպես հայտնի է, հասկացվում է այն սահմանը, որին ձգտում է նրա առաջին n անդամների s_n գումարը, երբ n-ը անսահմանորեն աճում է: Սակայն՝

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\cdot q^n,$$

այնպես որ s_n վարիանտը $\frac{a}{1-q}$ հաստատուն թվից տարբերվում է $\alpha_n = -\frac{a}{1-q}\cdot q^n$ մեծությամբ, որը, ինչպես մենք հենց նոր տեսանք, անվերջ փոքր է: Հետևաբար, սահմանի երկրորդ սահմանման համաձայն, պրոգրեսիայի գումարը կլինի՝

$$s = \lim s_n = \frac{a}{1-q}:$$

8) Դիցուք տված են a և b երկու թվերը: Ընդունենք $x_0 = a$, $x_1 = b$, իսկ x_n վարիանտայի հաջորդ արժեքները որոշենք

$$x_n = \frac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2} \quad (n \geq 2)$$

հավասարությամբ: Դրանով x_n վարիանտն իսկապես տրված է, քանի որ, ընդունելով n = 2, 3, 4, ..., կարելի է հաջորդաբար գտնել նրա ըն-

* Պետք է նկատի ունենալ, որ $|q| < 1$ և $\log_{10}|q| < 0$, ուստի և անհավասարության երկու մասերն այդ թվի վրա բաժանելիս անհավասարության նշանը պետք է փոխվի իր հակադարձին:

լոր արժեքները, մինչև որն էլ ցանկանանք: Սակայն սահմանը հաշվելու համար ավելի հարմար կլիներ ելնել x_n-ի անմիջական արտահայտությունից n-ի միջոցով. աշխատենք գտնել այդ արտահայտությունը: Եթե գրված հավասարության երկու մասերից հանենք x_{n-1}-ը, կստանանք՝

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{2}(x_{n-1} - x_{n-2}) \quad (n=2, 3, 4, \cdots):$$

Այսպիսով,

$$x_1 - x_0 = b - a, \quad x_2 - x_1, \cdots, \quad x_{n-1} - x_{n-2}, \quad x_n - x_{n-1}$$

տարբերություններից յուրաքանչյուրն (սկսած երկրորդից) ստացվում է իր նախորդից՝ բազմապատկելով $\left(-\frac{1}{2}\right)$-ով. այլ խոսքով, մենք այստեղ ունենք երկրաչափական պրոգրեսիա $-\frac{1}{2}$ հայտարարով: Այդ պրոգրեսիայի գումարը կլինի՝

$$(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - a = \frac{(b-a) - \left(-\frac{1}{2}\right)^n (b-a)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)},$$

որտեղից՝

$$x_n = \frac{a+2b}{3} - \frac{2}{3}(b-a)\left(-\frac{1}{2}\right)^n;$$

Մեր վարիանտան արտահայտվեց բանաձևով: Քանի որ աջ մասի երկրորդ գումարելին անվերջ փոքր մեծություն է, ուստի անմիջապես ստացվում է՝

$$\lim x_n = \frac{a+2b}{3}.$$

26. ՄԻ ՔԱՆԻ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ ՍԱՀՄԱՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ՎԱՐԻԱՆՏԱՅԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ: Դիցուք x_n վարիանտան ունի a սահմանը: Ամեն մի $p<a$ (կամ $q>a$) թվի համար հեշտ է $\varepsilon>0$ թիվն ընտրել այնպես, որ ստացվի

$$a-\varepsilon>p \quad (\text{կամ } a+\varepsilon<q).$$

դրա համար բավական է ε-ը վերցնել $a-p$ (կամ $q-a$) տարբերությունից փոքր: Սակայն, սահմանի սահմանման համաձայն [23], գոյություն ունի այնպիսի N համար, որ $n>N$ դեպքում տեղի ունի

$$x_n > a-\varepsilon \quad (\text{կամ } x_n < a+\varepsilon)$$

անհավասարությունը [տես (4)], և հետևաբար՝ նաև

$$x_n > p \quad (\text{կամ } x_n < q)$$

անհավասարությունը: Այսպիսով ստանում ենք՝

1° Եթե x_n վարիանտան ձգտում է a սահմանին և $a > p$ (կամ $a < q$), ապա փոփոխականի բոլոր արժեքները, սկսած մի որոշ համարից, նույնպես կլինեն $> p$ (կամ $< q$)։

Այս պարզ առաջադրությունն ունի մի շարք օգտակար հետևանքներ։ Մասնավորապես, ընդունելով $p = 0$ $(q = 0)$, *ստանում ենք՝*

2° Եթե x_n վարիանտան ձգտում է $a > 0$ (կամ $a < 0$) սահմանին, ապա x_n փոփոխականի արժեքներն իրենք, սկսած մի որոշ համարից, նույնպես > 0 (կամ < 0)։

Կարելի է ստանալ ավելի ճշգրիտ արդյունք՝

3° Եթե x_n վարիանտան ձգտում է a սահմանին, որը տարբեր է զրոյից, ապա x_n-ի առնվազն բավականաչափ հեռու արժեքները բացարձակ մեծությամբ կգերազանցեն մի որոշ r դրական թվից՝

$$|x_n| > r > 0 \quad (n > N \text{ համար})։$$

Իրոք, երբ $a > 0$ (< 0), *կարելի է վերցնել*

$$0 < p < a \quad (a < q < 0)$$

և ընդունել $r = p$ $(= |q|)$։

4° Եթե x_n վարիանտան ունի a սահմանը, ապա նա սահմանափակ է, *այն իմաստով, որ նրա բոլոր արժեքները բացարձակ մեծությամբ չեն գերազանցում մի որոշ թվից՝*

$$|x_n| \leq M \quad (M = \text{const}, \ n = 1, 2, 3, \ldots)։$$

Վերցնենք $M' > |a|$ *թիվը, այնպես որ, կունենանք՝* $-M' < a < M'$, *և ընդունենք* $p = -M'$, *իսկ* $q = M'$։ *Կգտնվի այնպիսի* N *համար, որ* $n > N$ *դեպքում տեղի կունենա՝*

$$-M' < x_n < M' \text{ կամ՝ } |x_n| < M'։$$

Այդ անհավասարությունն անկասկած տեղի ունի, երբ $n = N + 1$, $N + 2, \ldots$, *այնպես որ, նրան կարող են չբավարարել վարիանտայի միայն առաջին* N *հատ արժեքները կամ նրանցից մի քանիսը։ Ուստի, եթե* M*-ով նշանակենք*

$$|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, M'$$

թվերից ամենամեծը, ապա x_n*-ի բոլոր արժեքների համար կունենանք* $|x_n| \leq M$։

Դիտողություններ։ I. *Կարելի է* x_n *փոփոխականի սահմանափակության սահմանումը տալ մի քիչ այլ ձևով, պահանջելով, որ բավարարվեն*

$$K < x_n < g \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

անհավասարությունները, որտեղ K*-ն և* g*-ն երկու թվեր են։ Իսկապես, եթե* M*-ով նշանակենք* $|K|$ *և* $|g|$ *թվերից ամենամեծը, ապա գրված անհավասարություններից կստացվի* $|x_n| \leq M$*։ Հակադարձաբար, եթե տեղի ունի վերջին անհավասարությունը, ապա այն կարելի է գրել այսպես՝* $-M \leqslant x_n \leqslant M$*, այնպես որ* $-M$*-ը խաղում է* K*-ի դերը, իսկ* M*-ը՝* g*-ի դերը։*

II. 4° *առաջադրությունը հակադարձելի չէ. ոչ ամեն մի սահմանափակ վարիանտ սահման ունի։ Եթե ընդունենք, օրինակ,* $x_n = (-1)^{n+1}$*, ապա այդ վարիանտն, սահմանափակ լինելով հանդերձ* ($|x_n| \leqslant 1$)*, սահման չունի, քանի որ միշտ տատանվում է* $+1$*-ից մինչև* -1*-ը։*

Վերջում, հենվելով 1° *առաջադրության վրա, ապացուցենք սահմանի միակությունը.*

5° x_n վարիանտը չի կարող միաժամանակ ձգտել երկու տարբեր սահմանների:

Իսկապես, ենթադրենք հակառակը. թող միաժամանակ $x_n \to a$ *և* $x_n \to b$*, ընդ որում* $a \neq b$*, օրինակ՝* $a < b$*։ Վերցնենք* a*-ի ու* b*-ի միջև որևէ* r *թիվ՝*

$$a < r < b:$$

Մի կողմից, քանի որ $x_n \to a$ *և* $a < r$*, ապա կգտնվի այնպիսի* N' *համար, որ* $n > N'$ *դեպքում տեղի կունենա* $x_n < r$ *անհավասարությունը։ Մյուս կողմից, քանի որ* $x_n \to b$ *և* $b > r$*, ապա կգտնվի նաև այնպիսի* N'' *համար, որ* $n > N''$ *դեպքում տեղի կունենա* $x_n > r$ *անհավասարությունը։ Եթե այժմ* n *համարը վերցնենք և՛* N'*-ից մեծ, և՛* N''*-ից մեծ, ապա* x_n*-ի համապատասխան արժեքը պետք է միաժամանակ և՛* $< r$*, և՛* $> r$*, որը հնարավոր չէ։ Այդ հակասությունը հաստատում է մեր պնդումը։*

27. ԱՆՎԵՐՋ ՄԵԾ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։ *Անվերջ փոքր մեծություններին որոշ իմաստով հակադրվում են անվերջ մեծ մեծությունները, կամ պարզապես անվերջ մեծերը։*

x_n վարիանտան կոչվում է անվերջ մեծ, եթե նրա արժեքները, սկսած մի որոշ համարից, իրենց բացարձակ մեծությամբ դառնում են և այնուհետև մնում ավելի մեծ, քան նախապես տված ցանկացած չափով մեծ $M>0$ թիվը՝

$$|x_n|>M \quad (n>N_M \text{ համար})։$$

Ինչպես և անվերջ փոքրերի ժամանակ, այստեղ ևս պետք է նշել, որ անվերջ մեծ մեծության արժեքներից ոչ մեկն առանձին վերցրած չի կարող «մեծ» համարվել. մենք այստեղ գործ ունենք փոփոխական մեծության հետ, որը միայն իր փոփոխման ընթացքում ի վիճակի է դառնալ կամայապես մեծ վերցրած M թվից ավելի մեծ։

Անվերջ մեծ մեծությունների օրինակներ կարող են լինել

$$x_n=n, \quad x_n=-n, \quad x_n=(-1)^{n+1}n$$

վարիանտները, որոնք անցնում են թվերի բնական շարքով, սակայն նրանցից առաջինը պլյուս նշանով, երկրորդը՝ մինուս նշանով, իսկ երրորդը՝ հերթափոխվող նշաններով:

Ահա անվերջ մեծ մեծության մեկ օրինակ ևս՝

$$x_n=Q^n, \text{ երբ } Q>1։$$

Իսկապես, ինչպիսին էլ լինի $M>0$ թիվը,

$$|x_n|=|Q|^n>M$$

անհավասարությունը տեղի կունենա, հենց որ տեղի ունենա

$$n\cdot\log_{10}|Q|>\log_{10}M$$

կամ՝

$$n>\frac{\log_{10}M}{\log_{10}|Q|}\ ^{*}$$

անհավասարությունը, այնպես որ, կարելի է ընդունել՝

$$N_M=E\left(\frac{\log_{10}M}{\log_{10}|Q|}\right),$$

Եթե x_n վարիանտան անվերջ մեծ է, ապա ասում են նաև, որ նա ունի ∞ սահմանը կամ ձգտում է ∞-ի և գրում են՝

---

* *Քանի որ* $|Q|>1$, *ապա* $\log_{10}|Q|>0$:

$$\lim x_n = \infty \quad \text{կամ} \quad x_n \to \infty:$$

Հատկապես կարևոր են այն մասնավոր դեպքերը, երբ x_n անվերջ մեծ մեծությունը (առնվազն բավականաչափ մեծ n-ի դեպքում) պահպանում է որոշակի նշան (+ կամ —)։ Այդ ժամանակ ասում են, որ x_n վարիանտն ունի $+\infty$ կամ $-\infty$ սահմանը և գրում են՝

$$\lim x_n = +\infty, \quad x_n \to +\infty,$$

կամ՝

$$\lim x_n = -\infty, \quad x_n \to -\infty։$$

Այդ դեպքերում կարելի էր և անկախ սահմաններ տալ, $|x_n| > M$ անհավասարությունը փոխարինելով (նայած դեպքին)

$$x_n > M \quad \text{կամ} \quad x_n < -M$$

անհավասարությամբ, որտեղից արդեն կբխի, որ $x_n > 0$ կամ $x_n < 0$։

Ակներև է նաև

$$x_n \to \infty \quad \text{և} \quad |x_n| \to \infty$$

պնդումների համարժեքությունը։

Վերևում բերված անվերջ մեծ մեծությունների օրինակներից, ակներևորեն, $x_n = n$ վարիանտն ձգտում է $+\infty$, իսկ $x_n = -n$ վարիանտն՝ $-\infty$։ Ինչ վերաբերում է $x_n = (-1)^{n+1} \cdot n$ վարիանտին, ապա նա, ինչպես և բոլոր անվերջ մեծ մեծությունները, ձգտում է ∞, սակայն նրա մասին ոչ կարելի է ասել, թե նա ձգտում է $+\infty$, ոչ կարելի է ասել, թե ձգտում է $-\infty$։ Վերջապես, $x_n = Q^n$ վարիանտի վերաբերյալ կարելի է ասել, որ երբ $Q > 1$ նա ձգտում է $+\infty$, իսկ երբ $Q < -1$, միայն կարելի է ասել, որ նա ձգտում է ∞։

($\pm\infty$ «անիսկական թվերին», որոնց մենք արդեն հանդիպել ենք n°10-ում, այստեղ ավելացրինք նաև ∞-ը՝ առանց նշանի. պետք է հիշել, որ նրանց գործածությունը միանգամայն պայմանական իմաստ ունի և պիտի զգուշանալ այդ «թվերի» հետ թվաբանական գործողություններ կատարելուց)։

Անվերջ սահմանների մուծումը չի խախտում նախորդ n°-ում ապացուցված թեորեմի ս ա հ մ ա ն ի մ ի ա կ ո ւ թ յ ա ն *վերաբերյալ (տես 5°). Իսկապես, ինչպես հենց այնտեղ էլ ցույց է տրվել (4°), a վերջավոր սահմանն ունեցող վարիանտը սահմանափակ է և, հետևաբար, ոչ մի կերպ չի կարող միաժամանակ անվերջ սահմանի ձգտել։*

Վերջում նշենք այն կապը, որը գոյություն ունի անվերջ մեծ և անվերջ փոքր մեծությունների միջև.

Եթե x_n վարիանտան անվերջ մեծ է, ապա նրա հակադարձ մեծությունը՝ $\alpha_n = \frac{1}{x_n}$ կլինի անվերջ փոքր:

Վերցնենք $\varepsilon > 0$ *կամայական թիվը։ Քանի որ* $x_n \to \infty$, *ապա* $M = \frac{1}{\varepsilon}$ *թվի համար կգտնվի այնպիսի* N *համար, որ*

$$|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ հենց որ } n > N։$$

Այդ ժամանակ n*-ի այդ նույն արժեքների համար կունենանք՝*

$$|\alpha_n| < \varepsilon,$$

որը և ապացուցում է մեր պնդումը։

Նման եղանակով կարելի է ապացուցել նաև հակադարձը՝

Եթե α_n վարիանտան (որը 0 չի դառնում) անվերջ փոքր է, ապա նրա հակադարձ մեծությունը՝ $x_n = \frac{1}{\alpha_n}$ կլինի անվերջ մեծ:

§ 2. ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ, ՈՐՈՆՔ ՀԵՇՏԱՑՆՈՒՄ ԵՆ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐ ԳՏՆԵԼԸ

28. ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ԱՆՑՈՒՄ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ։ x_n *և* y_n *երկու վարիանտները միացնելով հավասարության կամ անհավասարության նշանով, մենք միշտ հասկանում ենք, որ խոսքը նրանց համապատասխան արժեքների մասին է, այսինքն՝ միևնույն համարն ունեցող արժեքների մասին է։*

1° Եթե x_n և y_n երկու վարիանտաներն իրենց փոփոխման ընթացքում միշտ իրար հավասար են՝ $x_n = y_n$, ընդ որում նրանցից յուրաքանչյուրն ունի վերջավոր սահման՝

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

ապա այդ սահմանները ևս իրար հավասար են՝ $a = b$:

Ապացույցն անմիջապես ստացվում է սահմանի միակության թեորեմայից [26; 5°]*։*

Սովորաբար այս թեորեմայից օգտվում են հավասարության մեջ սահմանային անցման ձևով. $x_n = y_n$ *հավասարությունից եզրակացնում են, որ* $\lim x_n = \lim y_n$*։*

2° Եթե x_n և y_n երկու փոփոխականների համար միշտ տեղի ունի $x_n \geqslant y_n$ անհավասարությունը, ընդ որում նրանցից յուրաքանչյուրն ունի վերջավոր սահման՝

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

ապա նաև $a \geqslant b$։

Ենթադրենք հակառակը, և թող $a < b$։ Դատելով այնպես, ինչպես n° 26, 5°-ում, a և b թվերի միջև վերցնենք r թիվը՝ $a < r < b$։ Այն ժամանակ, մի կողմից, կգտնվի այնպիսի N' համար, որ $n > N'$ դեպքում կլինի $x_n < r$, մյուս կողմից, կգտնվի նաև այնպիսի N'' համար, որ $n > N''$ դեպքում կլինի $y_n > r$։ Եթե այժմ N-ը վերցնենք N'-ից ու N''-ից մեծ, ապա $n > N$ դեպքում միաժամանակ տեղի կունենան երկու անհավասարությունները՝

$$x_n < r \text{ և } y_n > r,$$

որտեղից կբխի, որ՝

$$x_n < y_n,$$

որը, սակայն, հակասում է թեորեմայի պայմանին։ Թեորեմն ապացուցվեց։

Այս թեորեմն հաստատում է սահմանային անցման թույլատրելիությունն անհավասարության մեջ (հավասարության հետ միասին). $x_n \geqslant y_n$ անհավասարությունից կարելի է եզրակացնել, որ $\lim x_n \geqslant \lim y_n$։

Իհարկե, $\geqslant$ նշանը կարելի է ամենուրեք փոխարինել $\leqslant$ նշանով։

Ընթերցողի ուշադրությունը պետք է հրավիրել այն հանգամանքի վրա, որ $x_n > y_n$ խիստ անհավասարությունից, ընդհանրապես ասած, չի բխում նույնպիսի խիստ՝ $\lim x_n > \lim y_n$ անհավասարություն, այլ, առաջվա նման, միայն՝ $\lim x_n \geqslant \lim y_n$։ Այսպես, օրինակ, բոլոր n-երի համար տեղի ունի $\frac{1}{n} > -\frac{1}{n}$ խիստ անհավասարությունը, բայց և այնպես՝

$$\lim \frac{1}{n} = \lim \left(-\frac{1}{n}\right) = 0։$$

Վարիանտայի սահմանի գոյությունն ապացուցելիս և նրա

մեծությունը որոշելիս հաճախ օգտակար է լինում հետևյալ թեորեմը՝

3° Եթե x_n, y_n, z_n վարիանտաների համար միշտ տեղի ունեն

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$$

անհավասարությունները, ընդ որում x_n և z_n վարիանտները ձգտում են a ընդհանուր սահմանին՝

$$\lim x_n = \lim z_n = a,$$

ապա y_n վարիանտան ևս ունի նույն սահմանը՝

$$\lim y_n = a:$$

Վերցնենք $\varepsilon > 0$ *կամայական թիվը։ Այդ* ε*-ի համար նախ կգտնվի այնպիսի* N' *համար, որ* $n > N'$ *դեպքում տեղի կունենա՝*

$$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon,$$

այնուհետև կգտնվի այնպիսի N'' *համար, որ* $n > N''$ *դեպքում տեղի կունենա՝*

$$a-\varepsilon < z_n < a+\varepsilon.$$

N*-ը վերցնելով* N' *և* N'' *թվերից մեծ, այդ անհավասարությունները կբավարարվեն միաժամանակ, ուստի և՝*

$$a-\varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a+\varepsilon,$$

որտեղից հետևում է՝

$$a-\varepsilon < y_n < a+\varepsilon,$$

կամ՝

$$|y_n - a| < \varepsilon.$$

Այսպիսով, իսկապես $\lim y_n = a$.

Ապացուցած թեորեմից մասնավորապես հետևում է, որ եթե բոլոր n-երի համար

$$a \leqslant y_n \leqslant z_n$$

և հայտնի է, որ $z_n \longrightarrow a$, ապա նաև $y_n \longrightarrow a$: *Ի միջի այլոց, այդ շատ հեշտ է ապացուցել նաև անմիջականորեն։*

1°, 2° *և* 3° *թեորեմները հեշտությամբ տարածվում են նաև անվերջ սահմանների դեպքի վրա (*3° *թեորեմն ճիշտ կլինի միայն այն դեպքում, երբ խոսքը որոշակի նշանով անվերջության մասին լինի)։*

29. ԼԵՄՄԱՆԵՐ ԱՆՎԵՐՋ ՓՈՔՐԵՐԻ ՄԱՍԻՆ։ Հետագա թեորեմների մեջ մենք միաժամանակ պետք է դիտարկենք երկու կամ ավելի թվով վարիանտաներ, նրանք միացնելով թվաբանական գործողությունների նշաններով։ Այդ ժամանակ, ինչպես վերևում էինք արել, այդ նշանները մենք վերագրելու ենք վարիանտաների համապատասխան արժեքներին։ Օրինակ, խոսելով x_n և y_n երկու վարիանտաների գումարի մասին, որոնք հաջորդաբար ստանում են հետևյալ արժեքները՝

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

և

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots,$$

մենք նկատի ունենք $x_n + y_n$ վարիանտան, որը հաջորդաբար ստանում է հետևյալ արժեքները՝

$$x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, \dots, x_n+y_n, \dots։$$

Փոփոխականների հետ թվաբանական գործողությունների արդյունքների վերաբերյալ թեորեմների ապացուցման ժամանակ կարևոր դեր են խաղալու հետևյալ երկու լեմմաներն անվերջ փոքրերի մասին։

1. *ԼԵՄՄԱ.* Վերջավոր թվով անվերջ փոքրերի գումարը նույնպես անվերջ փոքր մեծություն է։

Ապացուցենք երկու անվերջ փոքրերի դեպքի համար (ընդհանուր դեպքի համար ապացույցը նման եղանակով է)։

Դիցուք ունենք α_n և β_n անվերջ փոքրերը։ Վերցնենք $\varepsilon > 0$ կամայական թիվը։ Անվերջ փոքրի սահմանման համաձայն α_n անվերջ փոքրի համար կգտնվի ε թվին համապատասխանող այնպիսի N' համար, որ $n > N'$ դեպքում կլինի՝

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}։$$

Ճիշտ այդպես էլ, β_n անվերջ փոքրի համար կգտնվի այնպիսի N'' համար, որ $n > N''$ դեպքում կլինի՝

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}։$$

Եթե N թիվը վերցնենք N' և N'' թվերից մեծ, ապա $n > N$ դեպքում այդ երկու անհավասարությունները տեղի կունենան միաժամանակ, և կստանանք՝

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon:$$

Այսպիսով, $\alpha_n + \beta_n$ մեծությունն իսկապես անվերջ փոքր է:

2. **ԼԵՄՄԱ.** x_n սահմանափակ փոփոխականի և α_n անվերջ փոքրի արտադրյալն անվերջ փոքր մեծություն է:

Դիցուք n-ի բոլոր արժեքների համար

$$|x_n| \leq M:$$

Վերցնենք $\varepsilon > 0$ կամայական թիվը: α_n անվերջ փոքրի համար կգտնվի $\frac{\varepsilon}{M}$ թվին համապատասխանող այնպիսի N համար, որ $n > N$ դեպքում կլինի՝

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}:$$

Այն ժամանակ, այդ նույն n-երի համար կստանանք՝

$$|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon:$$

Այստեղից էլ հետևում է, որ $x_n \cdot \alpha_n$ մեծությունն անվերջ փոքր է:

30. ԹՎԱԲԱՆԱԿԱՆ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՀԵՏ: Ստորև բերվող թեորեմները կարևոր են նրանով, որ նրանց օգնությամբ շատ դեպքերում կարիք չի լինում դիմել «սահմանի» գաղափարի սահմանմանը, տվյալ ε-ի համար համապատասխան N-ը գտնելով, և այլն: Դրանով իսկ սահմանների հաշվումն զգալի չափով հեշտանում է:

1) Եթե x_n և y_n վարիանտաները ունեն վերջավոր սահմաններ՝

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

ապա նրանց գումարը (տարբերությունը) նույնպես սահման ունի, ընդ որում՝

$$\lim (x_n \pm y_n) = a \pm b:$$

Թեորեմայի պայմանից հետևում է, որ՝

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \qquad (1)$$

որտեղ α_n-ը և β_n-ը անվերջ փոքրեր են: Այդ դեպքում՝

$$x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n):$$

Այստեղ $\alpha_n \pm \beta_n$ մեծությունն անվերջ փոքր է 1-ին լեմմա-

յի համաձայն. հետևաբար, օգտվելով սահմանի երկրորդ սահմանումից, կարելի է պնդել, որ $x_n + y_n$ *վարիանտան ունի* $a + b$ *սահմանը, որը և պահանջվում էր ապացուցել։*

Այս թեորեմն ու նրա ապացույցը տարածվում են ցանկացած վերջավոր թվով գումարելիների դեպքի վրա։

Եթե x_n և y_n վարիանտաներն ունեն վերջավոր սահմաններ՝

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

ապա նրանց արտադրյալը նույնպես սահման ունի և՝

$$\lim x_n y_n = ab.$$

Ելնելով նույն (1) հավասարություններից, այս անգամ կունենանք՝

$$x_n y_n = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n).$$

Փակագծերի ներսի արտահայտությունը, 1-ին և 2-րդ լեմմաների շնորհիվ, անվերջ փոքր մեծություն է, որտեղից և հետևում է, որ $x_n y_n$ *վարիանտան իրոք ունի* ab *սահմանը։*

Այս թեորեմը կարելի է տարածել ցանկացած վերջավոր թվով արտադրիչների դեպքի վրա (օրինակ, մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով)։

3 Եթե x_n և y_n վարիանտաներն ունեն վերջավոր սահմաններ՝

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

ընդ որում b-ն զրոյից տարբեր է, ապա նրանց հարաբերությունը նույնպես սահման ունի, և՝

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Քանի որ $b \neq 0$, *ուստի, համաձայն* n 26-*ի* 3 *թեորեմայի, սկսած մի որոշ համարից, ոչ միայն* $y_n \neq 0$, *այլև՝*

$$|y_n| > r > 0,$$

որտեղ r*-ը հաստատուն թիվ է։ Սահմանափակվելով* n *համարի այն արժեքներով, որոնց դեպքում բավարարվում է այդ պայմանը,* $\frac{x_n}{y_n}$ *հարաբերությունն իմաստ կունենա։ Այն ժամանակ, դարձյալ ելնելով (1) հավասարություններից, կունենանք՝*

$$\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}=\frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n}-\frac{a}{b}=\frac{1}{by_n}(b\alpha_n-a\beta_n).$$

Փակագծերի ներսի արտահայտությունը, 1-ին և 2-րդ լեմմաների շնորհիվ, անվերջ փոքր մեծություն է, իսկ նրա մոտ գրված բազմապատկիչը, ինչպես տեսանք, սահմանափակ փոփոխական է՝

$$\left|\frac{1}{by_n}\right|=\frac{1}{|b||y_n|}<\frac{1}{|b|r}.$$

Հետևաբար, 2-րդ լեմմայի համաձայն, աջ մասի ամբողջ արտադրյալն անվերջ փոքր մեծություն է։ Սակայն նա $\frac{x_n}{y_n}$ *փոփոխականի և* $\frac{a}{b}$ *թվի տարբերությունն է, ուրեմն* $\frac{x_n}{y_n}$ *փոփոխականի սահմանը* $\frac{a}{b}$ *թիվն է, որը և պահանջվում էր ապացուցել։*

31. ՀԱՏՈՒԿ ԴԵՊՔԵՐ։ ԱՆՈՐՈՇ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։

Նախընթաց n°*-ում մենք դիտարկեցինք հետևյալ արտահայտությունները՝*

$$x_n \pm y_n,\quad x_n y_n,\quad \frac{x_n}{y_n} \qquad (2)$$

և, ենթադրելով, որ x_n *և* y_n *փոփոխականները ձգտում են վերջավոր սահմանների (որոնցից* y_n*-ի սահմանը քանորդի ժամանակ չպետք է հավասարվեր զրոյի), մենք որոշեցինք այդ արտահայտություններից յուրաքանչյուրի սահմանը։*

Այժմ կանգ առնենք այն դեպքերի վրա, որոնք այնտեղ թողել էինք առանց քննարկման, այն է՝ երբ x_n *և* y_n *փոփոխականների սահմանները (մեկը կամ երկուսն էլ) անվերջ են կամ էլ, թե խոսքը քանորդի մասին է, երբ հայտարարի սահմանը զ ր ո է։*

Սկսենք քանորդից.

1) Եթե x_n-ը ունի վերջավոր սահման, իսկ y_n-ը ձգտում է ∞-ի, ապա $\frac{x_n}{y_n}$ քանորդը ձգտում է զրոյի։

Իսկապես, կարող ենք գրել՝

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{y_n}\cdot x_n$$

և, քանի որ երկրորդ բազմապատկիչը սահմանափակ է (ձգտում է վերջավոր սահմանի), իսկ առաջին բազմապատկիչն անվերջ փոքր է, ապա, n° 30*-ի* 2° *թեորեմայի համաձայն, այդ ամբողջ արտահայտությունը ձգտում է զրոյի։*

2° Եթե x_n-ը ունի անվերջ կամ վերջավոր, բայց զրոյից տարբեր սահման, իսկ y_n-ը ձգտում է զրոյի*, ապա $\frac{x_n}{y_n}$ քանորդը ձգտում է ∞։

Կարող ենք գրել՝

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{\frac{y_n}{x_n}},$$

$\frac{y_n}{x_n}$ *քանորդի նկատմամբ կիրառելի է* n 30*-ի* 3 *թեորեման, որի համաձայն այդ քանորդը ձգտում է զրոյի։ Հետևաբար,* [27] *հակադարձ մեծությունը կձգտի* ∞։

3° Եթե x_n-ը ձգտում է ∞, իսկ y_n-ը ունի վերջավոր սահման, ապա $\frac{x_n}{y_n}$ քանորդը նույնպես ձգտում է ∞։

Իսկապես, քանի որ տվածին հակադարձ՝ $\frac{y_n}{x_n}$ *հարաբերությունը,* 1°*-ի համաձայն, ձգտում է զրոյի, ապա* [27] *տված հարաբերությունը ձգտում է* ∞։

4° *Այժմ անցնենք այն դեպքերին, երբ* x_n *և* y_n *երկու փոփոխականները միաժամանակ ձգտում են զրոյի։ Այստեղ մենք առաջին անգամ հանդիպում ենք բոլորովին առանձնահատուկ մի երևույթի. չնայած մեզ հայտնի են* x_n*-ի և* y_n*-ի սահմանները, սակայն նրանց հարաբերության սահմանի մասին ոչ մի ընդհանուր եզրակացություն անել չենք կարող,*

---

* *Այդ ժամանակ զրո չդառնալով (այլապես չէր կարելի բաժանել* y_n*-ի վրա):*

եթե մեզ հայտնի չեն հենց այդ վարիանտաներն իրենք։ Այդ սահմանը, նայած, թե այդ երկու փոփոխականներն ինչ օրենքով են փոփոխվում, կարող է տարբեր արժեքներ ունենալ՝ կամ նույնիսկ գոյություն չունենալ: *Ստորև բերվող պարզ օրինակները պարզում են հենց այդ հանգամանքը։*

Ենթադրենք, օրինակ, $x_n=\frac{1}{n^2}$, $y_n=\frac{1}{n}$. *երկուսն էլ ձգտում են զրոյի. նրանց հարաբերությունը՝* $\frac{x_n}{y_n}=\frac{1}{n}$ *նույնպես ձգտում է զրոյի։ Եթե, ընդհակառակն, ընդունենք* $x_n=\frac{1}{n}$, $y_n=\frac{1}{n^2}$, *ապա. չնայած նրանք դարձյալ զրոյի են ձգտում, սակայն նրանց հարաբերությունը՝* $\frac{x_n}{y_n}=n$ *ձգտում է* ∞*։ Իսկ եթե վերցնենք զրոյից տարբեր որևէ* a *թիվ և կառուցենք* $x_n=\frac{a}{n}$ *և* $y_n=\frac{1}{n}$ *երկու անվերջ փոքրերը, ապա կտեսնենք, որ նրանց հարաբերությունն ունի* a *սահմանը (քանի որ նույնաբար հավասար է* a*-ի)։ Վերջապես, եթե ընդունենք* $x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $y_n=\frac{1}{n}$, *որոնք երկուսն էլ դարձյալ ունեն զրո սահմանը, ապա նրանց հարաբերությունը՝* $\frac{x_n}{y_n}=(-1)^{n+1}$ *ոչ մի սահման չունի։*

Այսպիսով, x_n *և* y_n *վարիանտաների միայն սահմանների իմանալով. տվյալ դեպքում. հնարավոր չէ դատել նրանց հարաբերության վարքի մասին. անհրաժեշտ է իմանալ հենց վարիանտաները, այսինքն՝ նրանց փոփոխման օրենքները, և անմիջականորեն հետազոտել* $\frac{x_n}{y_n}$ *հարաբերությունը։ Որպեսզի բնութագրենք* $x_n\to0$ *և* $y_n\to0$ *դեպքի այդ առանձնահատ-*

կություն, ասում են, որ $\frac{x_n}{y_n}$ արտահայտությունը ներկայացնում է $\frac{0}{0}$ տեսքի անորոշություն:

5) *Այն դեպքում, երբ միաժամանակ* $x_n\to\infty$ *և* $y_n\to\infty$, *նման երևույթ տեղի ունի։ Չիմանալով այդ փոփոխականների, նրանց հարաբերության վարքի մասին ընդհանուր եզրակացություն անել չի կարելի։ Դրանում կարելի է համոզվել այնպիսի օրինակներով, որոնք 4°-ում բերված օրինակների լրիվ անալոգներն են.*

$$x_n=n\to\infty,\quad y_n=n^2\to\infty,\quad \frac{x_n}{y_n}=\frac{1}{n}\to 0;$$

$$x_n=n^2\to\infty,\quad y_n=n\to\infty,\quad \frac{x_n}{y_n}=n\to\infty;$$

$$x_n=an\ (a\neq 0),\quad y_n=n\to\infty,\quad \frac{x_n}{y_n}=a\to a;$$

$$x_n=(-1)^{n+1}n\to\infty,\quad y_n=n\to\infty,\quad \frac{x_n}{y_n}=(-1)^{n+1}$$ *սահման չունի։*

Այս դեպքում էլ ասում են, որ $\frac{x_n}{y_n}$ արտահայտությունը ներկայացնում է անորոշություն, *այս անգամ՝* $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի:

Անցնենք $x_n y_n$ *արտադրյալի դիտարկմանը։*

6) Երբ x_n-ը ունի անվերջ կամ վերջավոր, բայց զրոյից տարբեր, սահման, իսկ y_n-ը ձգտում է ∞, ապա $x_n y_n$ արտադրյալը նույնպես ձգտում է ∞:

Իսկապես, այս հակադարձ մեծությունը՝

$$\frac{1}{x_n y_n}=\frac{1}{x_n}\cdot\frac{1}{y_n}$$

անվերջ փոքր մեծություն է (քանի որ առաջին արտադրիչն ունի վերջավոր սահման, իսկ երկրորդը ձգտում է զրոյի)։ Ուրեմն տված արտադրյալը կլինի անվերջ մեծ։

7° *Եթե x_n-ը ձգտում է զրոյի, իսկ y_n-ը՝ ∞, ապա, հետազոտելով $x_n y_n$ արտադրյալը, մենք հանդիպում ենք ճիշտ այնպիսի անորոշության, ինչ որ 4°-ում ու 5°-ում: Այդ մասին վկայում են հետևյալ օրինակները՝*

$$x_n = \frac{1}{n^2} \to 0, \qquad y_n = n \to \infty, \quad x_n y_n = \frac{1}{n} \to 0;$$

$$x_n = \frac{1}{n} \to 0, \qquad y_n = n^2 \to \infty, \quad x_n y_n = n \to \infty;$$

$$x_n = \frac{a}{n} \to 0 \ (a \neq 0), \ y_n = n \to \infty, \quad x_n y_n = a \to a;$$

$$x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \to 0, \ y_n = n \to \infty, \quad x_n y_n = (-1)^{n+1}$$ *սահման չունի:*

Այդ կապակցությամբ, $x_n \to 0$, $y_n \to \infty$ դեպքում ասում են, որ $x_n y_n$ արտահայտությունը ներկայացնում է $0 \cdot \infty$ տեսքի անորոշություն:

Դիտարկենք, վերջապես, $x_n \pm y_n$ հանրահաշվական գումարը:

8° Եթե x_n-ը ձգտում է ∞, իսկ y_n-ը ունի վերջավոր սահման, ապա $x_n \pm y_n$ գումարը նույնպես ձգտում է ∞:

Շնորհիվ n° 26-ի 4°-ի, y_n փոփոխականը սահմանափակ է՝

$$|y_n| \le M \quad (n = 1, 2, 3 \ldots):$$

Քանի որ $x_n \to \infty$, ապա կամայապես ընտրելով $M_1 > 0$ թիվը, $M + M_1$ թվին համապատասխան կգտնվի այնպիսի N համար, որ՝

$$|x_n| > M_1 + M, \text{ երբ } n > N:$$

Այն ժամանակ n-ի այդ նույն արժեքների համար կլինի՝

$$|x_n \pm y_n| \ge |x_n| - |y_n| > (M_1 + M) - M = M_1,$$

այսինքն՝ իսկապես $x_n \pm y_n \to \infty$:

Հեշտ է նկատել, որ եթե $x_n \to +\infty$ կամ $-\infty$, ապա նույնպիսի սահման ունի նաև $x_n \pm y_n$ գումարը:

9° Եթե x_n-ը և y_n-ը երկուսն էլ ձգտում են $+\infty$ կամ երկուսն էլ $-\infty$, ապա նույն սահմանին է ձգտում նաև $x_n + y_n$ գումարը:

Ցանկացած $M > 0$ դեպքում, սկսած որոշ համարից, կլինի՝

$$x_n > \frac{M}{2}, \qquad y_n > \frac{M}{2},$$

այն ժամանակ՝

$$x_n + y_n > M,$$

որն ապացուցում է թեորեմայի պնդումը։

10) Իսկ այն դեպքը, երբ x_n-ը և y_n-ը ձգտում են տարբեր նշաններով անվերջությունների, դարձյալ առանձնահատուկ դեպք է. $x_n + y_n$ գումարի մասին ոչինչ որոշակի չի կարելի ասել, չիմանալով x_n-ը և y_n-ը։ Այստեղ պատահող զանազան հնարավորությունների մասին կարելի է պատկերացնել հետևյալ օրինակների օգնությամբ՝

$$x_n = 2n \to +\infty, \qquad y_n = -n \to -\infty, \qquad x_n + y_n = n \to +\infty;$$

$$x_n = n \to +\infty, \qquad y_n = -2n \to -\infty, \qquad x_n + y_n = -n \to -\infty;$$

$$x_n = n + a \to +\infty, \qquad y_n = -n \to -\infty, \qquad x_n + y_n = a \to a;$$

$$x_n = n + (-1)^{n+1} \to +\infty, \quad y_n = -n \to -\infty, \quad x_n + y_n = (-1)^{n+1},$$

որը սահման չունի։

Այդ բոլորը նկատի ունենալով, ասում են, որ, երբ $x_n \to +\infty$ և $y_n \to -\infty$, $x_n + y_n$ արտահայտությունը ներկայացնում է $\infty - \infty$ տեսքի անորոշություն։

Այսպիսով, մեր առջև խնդիր դնելով՝ x_n և y_n վարիանտների սահմաններով որոշել այդ վարիանտներից կազմված (2) թվաբանական արտահայտությունների սահմանները, մենք հանդիպեցինք չորս դեպքի, երբ այդ կատարել հնարավոր չէ. դրանք հետևյալ չորս տեսքի անորոշություններն են՝

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty^{*}.$$

Այդ դեպքերում պետք է, հաշվի առնելով x_n և y_n վարիանտների փոփոխման օրենքը, անմիջականորեն հետազոտել

* Իհարկե, այդ սիմվոլները զուրկ են թվական որևէ իմաստից։ Նրանցից յուրաքանչյուրը լոկ համառոտ պայմանական բնութագիրն է բացառիկ տեսակի չորս արտահայտություններից մեկի ներկայացման համար։

մեզ հետաքրքրող արտահայտությունը: Այդպիսի հետազոտությունն ստացել է **անորոշությունների բացում** անունը: Ամենևին ոչ միշտ այդ այնպես պարզ է, ինչպես վերևում բերված սխեմատիկ օրինակներում: Ստորև մենք ցույց կտանք այդպիսի մի քիչ ավելի հետաքրքիր օրինակներ: (Ի միջի այլոց, անորոշությունների բացման ընդհանուր մեթոդները կտրվեն միայն IV գլխի § 3-ում):

32. ՍԱՀՄԱՆՆԵՐ ԳՏՆԵԼՈՒ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ: 1) Դիցուք $p(n)$-ը n-ի նկատմամբ ամբողջ բազմանդամ է հաստատուն գործակիցներով՝

$$p(n)=a_0n^k+a_1n^{k-1}+\dots+a_{k-1}n+a_k:$$

Հարց դնենք նրա սահմանի մասին: Եթե այդ բազմանդամի բոլոր անդամները դրական լինեին կամ բոլորը բացասական, ապա անմիջապես պարզ կլիներ, ըստ 31-ի 9°-ի համաձայն, որ $p(n)$-ի սահմանը կլիներ, համապատասխանաբար, $+\infty$ կամ $-\infty$: Իսկ տարբեր նշաններով գործակիցների առկայության դեպքում անդամներից մեկը կձգտեն $+\infty$, մյուսները՝ $-\infty$, և կստացվի $\infty-\infty$ տեսքի անորոշություն: Այդ անորոշությունը բացելու համար $p(n)$-ը ներկայացնենք այսպես՝

$$p(n)=n^k\left(a_0+\frac{a_1}{n}+\dots+\frac{a_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{a_k}{n^k}\right):$$

Քանի որ փակագծերի ներսի բոլոր գումարելիները, սկսած երկրորդից, n-ը անսահմանորեն աճելիս կլինեն անվերջ փոքրեր, ուստի փակագծերի ներսի արտահայտությունը կունենա a_0 սահմանը: Իսկ փակագծերի առջևի բազմապատկիչը ձգտում է $+\infty$: Հետևաբար [31, 6°], $p(n)$-ը կձգտի $+\infty$, կամ $-\infty$, նայած a_0-ի նշանին:

«Անորոշությունը» ոչնչացնելը տվյալ արտահայտության **ձևափոխության** օգնությամբ, որից մենք այստեղ օգտվեցինք, հաճախ է կիրառվում անորոշություններ բացելիս:

2) Եթե $q(n)$-ը նույնպիսի բազմանդամ է՝

$$q(n)=b_0n^l+b_1n^{l-1}+\dots+b_{l-1}n+b_l,$$

ապա նրանց $\frac{p(n)}{q(n)}$ քանորդը, երբ n-ը աճում է, ներկայացնում է $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշություն:

Այստեղ ևս յուրաքանչյուր բազմանդամ նախորդ ձևով ձևափոխելով, կստանանք՝

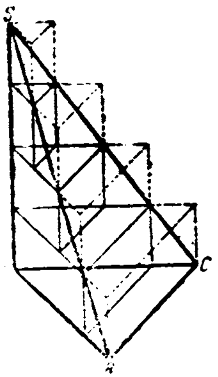
$$\frac{p(n)}{q(n)}=n^{k-l}\cdot\frac{a_0+\frac{a_1}{n}+\dots+\frac{a_k}{n^k}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\dots+\frac{b_l}{n^l}}:$$

Երկրորդ արտադրիչն ունի $\frac{a_0}{b_0}$ վերջավոր սահմանը: Եթե երկու բազ-

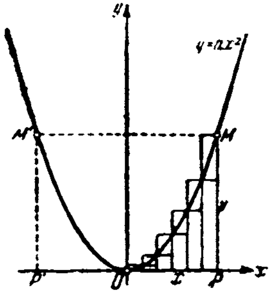
մանդամների աստիճանները հավասար են՝ $k=1$, ապա $\frac{p(n)}{q(n)}$ հարաբերությունը նույնպես կունենա $\frac{a_0}{b_0}$ սահմանը; $k>1$ դեպքում առաջին արտադրիչը ձգտում է $+\infty$, իսկ դիտարկվող հարաբերությունը կձգտի $\pm\infty$, նայած $\frac{a_0}{b_0}$ կոտորակի նշանին: Վերջապես, $k<1$ դեպքում առաջին արտադրիչը, և նրա հետ միասին ամբողջ արտահայտությունը, ձգտում է զրոյի:*

3) Գտնել SABC եռանկյուն բուրգի V ծավալը (գծ. 3):

Բուրգի H բարձրությունը բաժանելով n հավասար մասերի, բաժան-



Գծ. 3.



Գծ. 4.

ման կետերով տանենք հիմքի հարթությանը զուգահեռ հարթություններ, որոնք հատվելով բուրգի հետ կառաջացնեն հիմքին նման եռանկյուններ: Այդ եռանկյունների վրա կառուցենք ներգծած ու արտագծած պրիզմաներ. առաջիններից կազմված մարմինը կունենա մի V_n ծավալ, երկրորդներից կազմվածը՝ V'_n ծավալ, ընդ որում, ակներևաբար.

$$V_n<V<V'_n.$$

Սակայն V'_n-V_n տարբերությունը ոչ այլ ինչ է, քան ստորին արտագծած պրիզմայի ծավալը, որն ունի $Q=$ մակ. ABC հիմքը և $\frac{H}{n}$ բարձրությունը: Այսպիսով, այդ տարբերությունը՝

$$V'_n-V_n=\frac{Q\cdot H}{n}\to 0,$$

երբ n-ը աճում է: Այն ժամանակ $V-V_n$ և V'_n-V տարբերությունները ավելի ևս կձգտեն զրոյի, հետևաբար՝

$$V=\lim V_n=\lim V'_n:$$

---

* *Այդպես կարելի կլիներ ստանալ $\frac{1}{3}$ սահմանը n° 25-ի 4) օրինակում:*

Այժմ գտնենք V'_n-ի համար համապատասխան արտահայտությունը: Այստեղ մենք ունենք մի մարմին, որը բաղկացած է մի շարք կտրատված պրիզմաներից. բուրգի հատույթների հատկության համաձայն, նրանց հիմքերը համապատասխանաբար կլինեն՝

$$\frac{1}{n^2}\cdot Q,\quad \frac{2^2}{n^2}\cdot Q,\ldots,\ \frac{i^2}{n^2}\cdot Q,\ldots\ \frac{n^2}{n^2}Q=Q,$$

իսկ բարձրությունները նույնն են՝ $\frac{H}{n}$: Հետևաբար՝

$$V'_n=\frac{Q}{n^2}(1^2+2^2+\ldots+n^2)\cdot\frac{H}{n}=\frac{QH}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)^*}{6}=$$
$$=\frac{QH}{6}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^3},$$

այնպես որ՝

$$V=\lim V'_n=\frac{QH}{3}:$$

4) Գտնել OPM պատկերի Q մակերեսը, որը սահմանափակված է $y=ax^2\,(a>0)$ պարաբոլի OM աղեղով, x-երի առանցքի OP հատվածով և PM հատվածով (*գծ. 4*):

OP *հատվածը տրոհենք* n *հավասար մասերի և նրանց վրա կառուցենք ներգծած ու արտագծած ուղղանկյուններ: Այդ ուղղանկյուններից կազմված աստիճանաձև պատկերների* Q_n *և* Q'_n *մակերեսներն իրարից կտարբերվեն ամենամեծ ուղղանկյան մակերեսով, որը հավասար է* $\frac{x}{n}\cdot y$ (*x-ն ու y-ն* M *կետի կոորդինատներն են*)*: Այստեղից, նախորդ օրինակի նման,* $Q'_n-Q_n\to0$ *և, քանի որ*

$$Q_n<Q<Q'_n,$$

ուստի՝

$$Q=\lim Q_n=\lim Q'_n:$$

Քանի որ ուղղանկյունների բարձրությունները պարաբոլի այն կետերի օրդինատներն են, որոնք ունեն

$$\frac{1}{n}x,\quad \frac{2}{n}x,\ldots,\ \frac{i}{n}x,\ldots,\ \frac{n}{n}x=x$$

աբսցիսներ, և, պարաբոլի հավասարման համաձայն, հավասար են՝

$$a\cdot\frac{1}{n^2}x^2,\quad a\cdot\frac{2^2}{n^2}x^2,\ldots,\ a\cdot\frac{i^2}{n^2}x^2,\ldots,x^2,$$

ապա Q'_n-*ի համար կստանանք՝*

---

* *Այստեղ մենք օգտագործում ենք առաջին* n *բնական թվերի քառակուսիների գումարի հայտնի բանաձևը:*

$$Q'_n = \frac{ax^3}{n^2}(1^2+2^2+\ldots+n^2)\cdot\frac{x}{n} = \frac{ax^3}{6}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}:$$

Որտեղից՝

$$Q = \lim Q'_n = \frac{ax^3}{3} = \frac{x\cdot ax^2}{3} = \frac{xy}{3}:$$

Սրա վրա հենվելով, կարելի է հեշտությամբ ստանալ, որ M'OM պարաբոլական սեգմենտի մակերեսը հավասար է $\frac{4}{3}xy$, այսինքն՝ արտագծած ուղղանկյան մակերեսի երկու երրորդին (այս արդյունքը հայտնի է եղել դեռևս Ա ր ք ի մ ե դ ի ն):*

ծ) Ապացուցել, որ $0<k<1$ դեպքում՝

$$\lim\left[(n+1)^k - n^k\right] = 0:$$

Այստեղ ունենք $\infty-\infty$ տեսքի անորոշություն: Ձևափոխենք, n^k-ը փակագծերից դուրս բերելով՝

$$0 < (n+1)^k - n^k = n^k\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^k - 1\right] < n^k\left[\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\right] = \frac{1}{n^{1-k}}:$$

Քանի որ $\frac{1}{n^{1-k}} \to 0$, ապա նաև $(n+1)^k - n^k \to 0$, որը և պահանջվում էր ապացուցել:

կ) Գտնել

$$x_n = \sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

վարիանտայի սահմանը, որը (նախորդ օրինակի համաձայն) ներկայացնում է $\infty\cdot 0$ տեսքի անորոշություն:

Տված արտահայտությունը բազմապատկելով ու բաժանելով արտահայտության՝ $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ գումարի վրա, այն բերում ենք $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշության՝

$$x_n = \sqrt{n}\cdot\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}:$$

Վերջապես, համարիչն ու հայտարարը բաժանենք $\sqrt{n}$-ի վրա՝

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1},$$

Քանի որ՝

$$1 < \sqrt{1+\frac{1}{n}} < 1+\frac{1}{n},$$

* Կորագիծ պատկերի մակերեսի ընդհանուր ս ա հ մ ա ն ո ւ մ ը կտրվի միայն X գլխում (երկրորդ հատոր). հենց այնտեղ էլ ուրիշ կորագիծ պատկերների համար կընդհանրացվի մակերես հ ա շ վ ե լ ո ւ այստեղ կիրառված մեթոդը:

և աջ մասի արտահայտությունը ձգտում է 1-ի, ապա արմատը նույնպես կձգտի 1-ի, և վերջնականապես կստանանք՝

$$\lim x_n = \frac{1}{2}:$$

7) Գտնել

$$x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}, \quad y_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

փոփոխականների սահմանները, և ապա

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+i}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

փոփոխականի սահմանը:

x_n և y_n փոփոխականները ներկայացնում են $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշություն, քանի որ նրանց հայտարարները, լինելով $> n$, ձգտում են ∞: Համարիչներն ու հայտարարները բաժանենք n-ի վրա՝

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}, \quad y_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}};$$

Քանի որ հայտարարներում արմատներն ունեն 1 սահմանը (համեմատել նախորդ օրինակի հետ), ուստի՝

$$x_n \to 1 \quad և \quad y_n \to 1;$$

z_n-ի փոփոխականի արտահայտությունը յուրահատուկ ձև ունի, այդ գումարի յուրաքանչյուր անդամը կախված է n-ից, բայց նրանց թիվն էլ աճում է n-ի հետ միասին:* Քանի որ յուրաքանչյուր գումարելին առաջին գումարելիից փոքր է, իսկ վերջինից՝ մեծ, ապա՝

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < z_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

այսինքն՝

$$x_n < z_n < y_n;$$

Սակայն, ինչպես տեսանք, x_n և y_n փոփոխականները ձգտում են ընդհանուր սահմանի՝ 1-ի, հետևաբար, n° 28-ի 3° թեորեմայի համաձայն, այդ նույն սահմանին է ձգտում նաև z_n փոփոխականը:

8) Դիցուք տված են m հատ դրական թվեր՝

$$a_1, a_2, \ldots, a_m;$$

նրանցից ամենամեծը նշանակելով A-ով, ապացուցել, որ՝

---

* Այդ նույն յուրահատկությունն ունեին նաև V'_n և Q'_n փոփոխականների արտահայտությունները 4) և 5) օրինակներում:

$$\lim \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_m^n} = A.$$

Այդ եզրակացությունը բխում է

$$A \leqslant \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_m^n} \leqslant A \cdot \sqrt[n]{m}$$

ակներև անհավասարություններից [տես n° 25, 5]։

9) Մենք n° 27-ում տեսել էինք, որ $a>1$ դեպքում $a^n \to \infty$, երբ n-ը աճում էր: Այժմ հետազոտենք հետևյալ հարաբերության վարքը

$$\frac{a^n}{n^k} \quad (k>0),$$

Սա ներկայացնում է $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշություն:

Նախ ստանանք մի օժանդակ անհավասարություն (համեմատել Բեռնուլլիի անհավասարության հետ n° 19-ում)։ Նշանակենք $a=1+\lambda$, որտեղ $\lambda>0$. Նյուտոնի երկանդամի բանաձևի համաձայն, կունենանք՝

$$a^n = (1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 + \ldots > \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2.$$

Քանի որ $n>2$ դեպքում $n-1>\frac{n}{2}$, ուստի կստանանք՝

$$a^n > \frac{(a-1)^2}{4} n^2, \qquad (3)$$

Երբ $k=1$, այս անհավասարությունից անմիջապես ստանում ենք՝

$$\frac{a^n}{n} > \frac{(a-1)^2}{4} n,$$

որտեղից երևում է, որ՝

$$\lim \frac{a^n}{n} \to +\infty.$$

Քանի որ այդ ճիշտ է ամեն մի $a>1$ դեպքում, ապա, վերցնելով $k>1$, կարող ենք, գոնե բավականաչափ մեծ n-երի համար, գրել՝

$$\frac{a^n}{n^k} = \left[\frac{\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n}{n}\right]^k > \frac{\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n}{n},$$

որտեղից ստանում ենք՝

$$\lim \frac{a^n}{n^k} = +\infty \quad (a>1).$$

Այս եզրակացությունը, որն ստացվեց $k>1$ դեպքի համար, առավել ևս ճիշտ կլինի և $k<1$ դեպքում։

10) Օգտվելով նույն (3) անհավասարությունից, կարելի է ցույց տալ, որ՝

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1։$$

Այսպես, (3)-ում ընդունելով $a = \sqrt[n]{n}$, ստանում ենք՝

$$n > \frac{n^2}{4} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2,$$

որտեղից՝

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

այստեղից էլ ստացվում է պահանջվող արդյունքը։

11) Այժմ մենք կարող ենք ստանալ մի հետաքրքիր սահման ևս՝

$$\lim \frac{\log_a n}{n} = 0 \quad (a > 1)։$$

(Այստեղ մենք դարձյալ $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշություն ունենք, քանի որ, ինչպես հեշտ է ցույց տալ, $\log_a n \to +\infty$)։

Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվը. քանի որ $a^{\varepsilon} > 1$, ուստի բավականաչափ մեծ n-երի համար կլինի [26.1°]՝

$$\sqrt[n]{n} < a^{\varepsilon},$$

Լոգարիթմելով a հիմքով, կստանանք՝

$$\frac{\log_a n}{n} < \varepsilon,$$

որտեղից և հետևում է մեր պնդումը։

33. ՇՏՈԼՑԻ ԹԵՈՐԵՄԱՆ ՈՒ ՆՐԱ ԿԻՐԱՌՈՒՄՆԵՐԸ. $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի $\frac{x_n}{y_n}$ անորոշ արտահայտությունների սահմանները որոշելիս հաճախ օգտակար է լինում հետևյալ թեորեմը, որը պատկանում է Շ տ ո լ ց ի ն (O. Stolz)*.

Դիցուք վարիանտա $y_n \to +\infty$, ընդ որում, թեկուզ և մի որոշ համարից սկսած, n-ի հետ միաժամանակ աճում է նաև y_n-ը՝ $y_{n+1} > y_n$։ Այդ դեպքում՝

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}},$$

եթե միայն գոյություն ունի աջ կողմի սահմանը (վերջավոր կամ անվերջ, սակայն որոշակի նշանով)։

---

* Մասնավոր դեպքում, երբ $y_n = n$, այդ թեորեմային հանդիպում ենք դեռևս Կ ո շ ի ի (A. L. Cauchy) մոտ։

Նախ ենթադրենք, որ այդ սահմանը վերջավոր l թիվ է՝

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l.$$

Այդ դեպքում ամեն մի տված $\varepsilon > 0$ *թվի համար կգտնվի այնպիսի* N *համար, որ* $n > N$ *դեպքում կլինի՝*

$$\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

կամ՝

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < l + \frac{\varepsilon}{2}:$$

Ուրեմն, ինչպիսին էլ լինի $n > N$, *բոլոր՝*

$$\frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N}, \quad \frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+2}}, \ldots, \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{y_{n-1} - y_{n-2}}, \quad \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

կոտորակները կգտնվեն այդ նույն սահմանների միջև: Քանի որ դրանց հայտարարները, թեորեմայի պայմանի համաձայն, դրական են, ուստի այդ նույն սահմանների միջև կգտնվի նաև

$$\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N}$$

կոտորակը, որի համարիչը՝ վերևում գրված բոլոր կոտորակների համարիչների գումարն է, հայտարարը՝ հայտարարների գումարը:

Այսպիսով, $n > N$ *դեպքում ունենք՝*

$$\left| \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Գրենք հետևյալ նույնությունը, որն անմիջականորեն հեշտությամբ ստուգելի է,

$$\frac{x_n}{y_n} - l = \frac{x_N - l \cdot y_N}{y_n} + \left(1 - \frac{y_N}{y_n}\right)\left(\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - l\right),$$

որտեղից՝

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - l \right| \leqslant \left| \frac{x_N - l \cdot y_N}{y_n} \right| + \left| \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - l \right|.$$

Աջ մասի երկրորդ գումարելին, ինչպես տեսանք, $n > N$ *դեպքում դառնում է* $< \frac{\varepsilon}{2}$: *Առաջին գումարելին, շնորհիվ* $y_n \to +\infty$ *պայմանի, նույնպես կլինի* $< \frac{\varepsilon}{2}$, *սկսած, ասենք թե* $n > N'$ *համարներից: Եթե վերցնենք* $N' > N$, *ապա վերջնականապես կստանանք՝*

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - 1\right| < \varepsilon,$$

որը և ապացուցում է մեր պնդումը։

Անվերջ սահմանի դեպքը բերվում է դիտարկված դեպքին։ Ենթադրենք օրինակ,

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty\,։$$

Այստեղից, նախ, բխում է, որ բավականաչափ մեծ n-երի համար՝

$$x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1},$$

որտեղից հետևում է, որ y_n-ի հետ միասին նաև $x_n \to +\infty$, ընդ որում x_n վարիանտան նույնպես n-ի հետ միասին աճում է։ Այդ դեպքում ապացուցված թեորեման կարելի է կիրառել ավածին հ ա կ ա դ ա ր ձ՝ $\frac{y_n}{x_n}$ հարաբերության նկատմամբ՝

$$\lim \frac{y_n}{x_n} = \lim \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0$$

(քանի որ այստեղ սահմանն արդեն վ ե ր ջ ա վ ո ր է), որտեղից և հետևում է, որ՝

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty\,։$$

Դիմենք նորից օ ր ի ն ա կ ն ե ր ի։

12) Մենք 9) օրինակում արդեն տեսանք, որ $a > 1$ *դեպքում*

$$\lim \frac{a^n}{n} = +\infty\,։$$

Շ տ ո լ ց ի թեորեմայի օգնությամբ այդ ստացվում է անմիջականորեն՝

$$\lim \frac{a^n}{n} = \lim (a^n - a^{n-1}) = \lim a^n\left(1 - \frac{1}{a}\right) = +\infty:$$

Նույնը վերաբերում է նաև 11) օրինակին։

13) Շ տ ո լ ց ի թեորեման կիրառենք հետևյալ հետաքրքիր թեորեման ապացուցելու (թեորեման պատկանում է Կ ո շ ի ի ն).

Եթե a_n վարիանտան սահման ունի (վերջավոր կամ անվերջ, որոշակի նշանով), ապա նույն սահմանն ունի նաև նրա առաջին n արժեքների թվաբանական միջինը՝

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\,,$$

Իսկապես, Շտոլցի թեորեմայի մեջ ընդունելով

$$x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad y_n = n,$$

կստանանք՝

$$\lim b_n = \lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim a_n \text{։}$$

Օրինակ, եթե մենք գիտենք, որ $\sqrt[n]{n} \to 1$ [տես 10) օրինակ], ապա նաև՝

$$\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} \to 1 \text{։}$$

14) Այժմ դիտարկենք

$$z_n = \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} \quad \text{(k-ն բնական թիվ է)}$$

վարիանտան, որը ներկայացնում է $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշություն։

Շտոլցի թեորեմայում ընդունելով

$$x_n = 1^k + 2^k + \dots + n^k, \quad y_n = n^{k+1},$$

կունենանք՝

$$\lim z_n = \lim \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} \text{։}$$

Սակայն՝

$$(n-1)^{k+1} = n^{k+1} - (k+1) n^k + \dots,$$

այնպես որ՝

$$n^{k+1} - (n-1)^{k+1} = (K+1) n^k + \dots$$

և [տես 2) օրինակը]՝

$$\lim z_n = \lim \frac{n^k}{(K+1) n^k + \dots} = \frac{1}{K+1} \text{։}$$

15) Որոշենք հետևյալ վարիանտայի սահմանը՝

$$u_n = n \left(z_n - \frac{1}{K+1} \right) = \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^k} - \frac{n}{K+1},$$

որը առաջին ձևով ներկայացնում է $\infty \cdot 0$ տեսքի անորոշություն, իսկ երկրորդ ձևով՝ $\infty - \infty$ տեսքի։ Կոտորակների հանումը կատարելով, կստանանք $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշություն՝

$$u_n = \frac{(k+1)(1^k + 2^k + \dots + n^k) - n^{k+1}}{(k+1) n^k} \text{։}$$

Շտոլցի թեորեմայի մեջ ընդունելով x_n-ը հավասար այս կոտորակի համարիչին, իսկ y_n-ը՝ հայտարարին, կստանանք՝

$$\lim u_n=\lim\frac{(k+1)\,n^k-[n^{k+1}-(n-1)^{k+1}]}{(k+1)\,[n^k-(n-1)^k]}.$$

Սակայն՝

$$(k+1)n^k-[n^{k+1}-(n-1)^{k+1}]=\frac{(k+1)\cdot k}{2}\,n^{k-1}+\ldots,$$

և՝

$$n^k-(n-1)^k=kn^{k-1}+\ldots,$$

այնպես որ (տես 2)) վերջնականապես՝

$$\lim u_n=\lim\frac{\frac{(k+1)k}{2}\,n^{k-1}+\ldots}{(k+1)\,kn^{k-1}+\ldots}=\frac{1}{2}.$$

§ 3. ՄՈՆՈՏՈՆ ՎԱՐԻԱՆՏԱ

34. ՄՈՆՈՏՈՆ ՎԱՐԻԱՆՏԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆԸ։ Փոփոխականների սահմանների գոյության վերաբերյալ մինչև այժմ բերված թեորեմաներն ունեին այսպիսի բնույթ. ենթադրելով ուրիշ վարիանտաների սահմանների գոյությունը, ապացուցում էինք սահմանների գոյությունն ուրիշ վարիանտաների, որոնք այս կամ այն կերպ կապված էին առաջինների հետ։ Տվյալ վարիանտայի վերջավոր սահմանի գոյության հայտանիշի հարցն, անկախ այլ վարիանտաներից, մինչև այժմ չի դրվել։ Այդ հարցի ընդհանուր լուծումը թողնելով մինչև § 4, 39—42, մենք այստեղ քննության առնենք փոփոխականների մի պարզ ու կարևոր մասնավոր դաս, որի համար այդ հարցը հեշտությամբ լուծվում է։

x_n վարիանտան կոչվում է *աճող*, եթե

$$x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}<\cdots,$$

այսինքն՝ եթե $n'>n$ պայմանից հետևում է, որ $x_{n'}>x_n$։ Այն անվանում են *չնվազող*, եթե

$$x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_n\leq x_{n+1}\leq\cdots,$$

այսինքն՝ եթե $n'>n$ պայմանից հետևում է, որ $x_{n'}\geq x_n$։ Երկրորդ դեպքում էլ կարելի է փոփոխականն աճող համարել, եթե այդ տերմինին ավելի լայն իմաստ վերագրենք։

Նման ձևով սահմանվում է նվազող (խստի նեղ կամ լայն իմաստով) վարիանտայի գաղափարը. այդպես է կոչվում այն x_n վարիանտան, որի համար՝

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n > x_{n+1} > \cdots$$

կամ՝

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \cdots,$$

այնպես որ, $n' > n$ պայմանից հետևում է, որ $x_{n'} < x_n$ կամ $x_{n'} \leqslant x_n$։ Այդ բոլոր տեսակի փոփոխականները, որոնք փոփոխվում են մեկ ուղղությամբ, միավորվում են մեկ ընդհանուր՝ մ ո ն ո տ ո ն անվան տակ։ Սովորաբար վարիանտայի մասին ասում են, որ նա «մոնոտոն աճում է» կամ «մոնոտոն նվազում է»։

Մոնոտոն վարիանտաների վերաբերյալ տեղի ունի հետևյալ, ֆունդամենտալ կարևորություն ունեցող, թեորեման.

ԹԵՈՐԵՄԱ: Դիցուք տված է x_n մոնոտոն աճող վարիանտան: Եթե նա վերևից սահմանափակ է՝

$$x_n \leqslant M \ (M=\text{const.},\ n=1, 2, 3, \ldots),$$

ապա նա ունի վ ե ր ջ ա վ ո ր սահման, հակառակ դեպքում նա ձգտում է $+\infty$։

Միշտ այդպես էլ, մոնոտոն նվազող վարիանտան միշտ ունի սահման, որը վերջավոր է, եթե վարիանտան սահմանափակ է ներքևից՝

$$x_n \geqslant m \ (m=\text{const.},\ n=1, 2, 3, \ldots),$$

հակառակ դեպքում նա ձգտում է $-\infty$։

Ա պ ա ց ո ւ յ ց։ Սահմանափակվենք աճող, թեկուզ և լայն առումով, վարիանտայի դեպքով՝ իսկ նվազողի դեպքը կ ա պ ա ց ո ւ ց վ ի նրա անալոգիայով։

Նախ ընդունենք, որ տված վարիանտան վերևից սահմանափակ է։ Այն ժամանակ, n° 10 թեորեմայի համաձայն, նրա արժեքների $\{x_n\}$ բազմության համար գոյություն ունի ճ շ գ ր ի տ վ ե ր ի ն ե զ ր (վերջավոր)՝

$$a = \sup\{x_n\}։$$

Ինչպես հիմա ցույց կտանք, հենց այդ a թ ի վ ն է լ կ լ ի ն ի x_n վ ա ր ի ա ն տ ա յ ի ս ա հ մ ա ն ը։

Հիշենք, իսկապես, ճշգրիտ վերին եզրի բնորոշ հատկությունները [10]։ Նախ, n-ի բոլոր արժեքների համար կլինի

$$x_n \leq a,$$

և ապա, ինչպիսին էլ վերցնենք $\varepsilon > 0$ թիվը, կգտնվի այնպիսի N համար, որ՝

$$x_N > a - \varepsilon.$$

Քանի որ, x_n վարիանտայի մոնոտոնության շնորհիվ, $n > N$ դեպքում $x_n \geq x_N$ և առավել ևս $x_n > a - \varepsilon$, ապա n-ի այդ արժեքների համար կլինի՝

$$0 \leq a - x_n < \varepsilon \quad \text{կամ} \quad |x_n - a| < \varepsilon,$$

որտեղից և հետևում է, որ $\lim x_n = a$։

Դիցուք այժմ x_n վարիանտան վերևից սահմանափակ չէ։ Այդ դեպքում, որքան էլ մեծ լինի $M > 0$ թիվը, կգտնվի x_n վարիանտայի թեկուզ մեկ արժեք, որը մեծ կլինի M-ից. թող այդ լինի x_N արժեքը՝ $x_N > M$։ x_n վարիանտայի մոնոտոնության շնորհիվ, $n > N$ դեպքում առավել ևս՝

$$x_n > M,$$

որը և նշանակում է, թե $\lim x_n = +\infty$։

Հեշտ է համոզվել, որ բոլոր եզրակացությունները մնում են ուժի մեջ նաև այնպիսի փոփոխականի համար, որը մոնոտոն է դառնում միայն որոշ տեղից սկսած, որովհետև, առանց ազդելու փոփոխականի սահմանի վրա, կարելի է նրա սկզբնական արժեքները (ցանկացած թվով) դեն նետել։

Այժմ բերենք այդ թեորեմայի կիրառման օրինակներ։

35. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ: 1) Դիտարկենք

$$x_n = \frac{c^n}{n!} \quad (c > 0,\ n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n)$$

վարիանտան (որը $c > 1$ դեպքում ներկայացնում է $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշություն)։

Քանի որ

$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{c}{n+1},$$

ապա, հենց որ $n > c - 1$, փոփոխականը նվազող կդառնա: Նա միաժամանակ

ներքևից սահմանափակ է, օրինակ, զրոյով։ Հետևաբար, Թեորեմայի համաձայն, x_n վարիանտան ունի վ ե ր ջ ա վ ո ր սահման, որը կնշանակենք a-ով։

Այդ սահմանը գտնելու համար, վերևում գրված հավասարության մեջ անցնենք սահմանին. քանի որ x_{n+1}-ը անցնում է արժեքների նույն հաջորդականությամբ, ինչ որ x_n-ը (առաջին անդամի ճշգրտությամբ) և ունի միևնույն a սահմանը, ապա կստանանք՝

$$a = a \cdot 0,$$

այստեղից՝ $a = 0$, և վերջնականապես ստանում ենք՝

$$\lim \frac{c^n}{n!} = 0.$$

2) Նորից համարելով $c > 0$, x_n վարիանտան որոշենք այսպես՝

$$x_1 = \sqrt{c},\quad x_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}},\quad x_3 = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}},\ \ldots$$

և ընդհանրապես՝

$$x_n = \underbrace{\sqrt{c + \sqrt{c + \ldots + \sqrt{c}}}}_{n \text{ արմատներ}}.$$

Այսպիսով, x_{n+1}-ը x_n-ից ստացվում է այսպիսի բանաձևով՝

$$x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}.$$

Պարզ է, որ x_n վարիանտան մոնոտոն աճում է։ Միաժամանակ նա վերևից սահմանափակ է, օրինակ, $\sqrt{c} + 1$ թվով։ Իրոք, $x_1 = \sqrt{c}$ արժեքը փոքր է այդ թվից. այժմ եթե ընդունենք, որ մի որևէ արժեք՝ $x_n < \sqrt{c} + 1$, ապա հաջորդ արժեքի համար էլ կստանանք՝

$$x_{n+1} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} = \sqrt{c} + 1.$$

Այսպիսով, մեր պնդումը x_n վարիանտայի սահմանափակ լինելու մասին արդարացվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով։

Ուրեմն, հիմնական թեորեմայի համաձայն, x_n վարիանտան ունի մի վ ե ր ջ ա վ ո ր սահման։ Այդ սահմանը հաշվելու համար սահմանին անցնենք այս հավասարության մեջ՝

$$x_{n+1}^2 = c + x_n,$$

որտեղից կստանանք՝

$$a^2 = c + a:$$

Այս քառակուսի հավասարումն ունի տարբեր նշաններով արմատներ, սակայն մեզ հետաքրքրող a սահմանը չի կարող բացասական լինել, հետևաբար նա հավասար է այդ հավասարման դրական արմատին՝

$$a = \frac{\sqrt{4c + 1} + 1}{2},$$

) Դիցուք տված են a և b երկու դրական թվերը $(a > b)$։ Կազմենք նրանց թվաբանական և երկրաչափական միջինները՝

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab}.$$

Հայտնի է, որ առաջինը երկրորդից մեծ է*. միևնույն ժամանակ նրանք գտնվում են տված թվերի միջև՝

$$a > a_1 > b_1 > b.$$

a_1 և b_1 թվերի համար նորից կազմենք նրանց երկու միջինները՝

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1},$$

որոնց համար՝

$$a_1 > a_2 > b_2 > b_1.$$

և այլն։ Եթե a_n և b_n թվերն արդեն որոշված են, ապա a_{n+1} և b_{n+1} թվերը որոշվում են նման բանաձևերով՝

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$$

ընդ որում՝

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n.$$

Այսպիսով, կազմվում են a_n և b_n փոփոխականները, որոնցից առաջինը նվազող է, իսկ երկրորդը՝ աճող (մեկը մյուսին հանդիպակած) և միևնույն ժամանակ՝

$$a > a_n > b_n > b,$$

այսինքն՝ սահմանափակ են, հետևաբար, երկուսն էլ ձգտում են վերջավոր սահմանների՝

$$\lim a_n = \alpha, \quad \lim b_n = \beta.$$

Եթե սահմանին անցնենք

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \text{ կամ } b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

հավասարության մեջ, կստանանք՝

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} \text{ կամ } \beta = \sqrt{\alpha\beta}, \quad \beta^2 = \alpha\beta.$$

Երկուսից էլ ստանում ենք՝

$$\alpha = \beta.$$

Այսպիսով, թվաբանական միջինների և երկրաչափական միջինների

---

* Այդ անմիջապես հետևում է հետևյալ անհավասարությունից՝

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a - 2\sqrt{ab} + b) = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0, \text{ երբ } a \neq b.$$

երկու հաջորդականությունները ձգտում են մի ընդհանուր սահմանի՝ $\mu(a,b)$. Գաուսսին (C. F. Gauss) հետևելով, այդ սահմանն անվանում են տված a և b թվերի թվաբանա-երկրաչափական միջին. $\mu(a,b)$ թվի արտահայտումը a և b թվերով ստույգ մեզ համար մատչելի չէ. դրա համար պահանջվում է այսպես կոչված էլիպտական ինտեգրալ [տես 303 (երկրորդ հատոր)]։

4) Նորից ելնելով երկու a և b դրական թվերից ($a>b$), այս անգամ հաջորդաբար կազմենք նրանց թվաբանական միջինները ու ներդաշնակ միջինները*՝

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad b_1 = \frac{2ab}{a+b},$$

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, \qquad b_2 = \frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Մեզ արդեն հայտնի

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \quad (\text{երբ } a \neq b)$$

անհավասարությունից ստանում ենք՝

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab,$$

որտեղից՝

$$\frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b},$$

այսինքն՝ թվաբանական միջինը մեծ է ներդաշնակ միջինից: Միևնույն ժամանակ երկու միջինները էլ գտնվում են տված թվերի միջև. a_n և b_n թվերի համար այդ կլինի՝

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n.$$

Ճիշտ այնպես, ինչպես նախորդ օրինակում, կհամոզվենք, որ a_n և b_n երկու փոփոխականները ձգտում են մի ընդհանուր c սահմանի, որը կարելի կլիներ անվանել a և b թվերի թվաբանա-ներդաշնակ միջին։

---

c թիվը կոչվում է a և b երկու դրական թվերի ներդաշնակ (հարմոնիկ) միջին, եթե նրան հակադարձ $\frac{1}{c}$ թիվը՝ տված թվերին հակադարձ $\frac{1}{a}$ և $\frac{1}{b}$ թվերի թվաբանական միջինն է. այսինքն՝

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right), \quad \text{որտեղից՝ } c = \frac{2ab}{a+b}.$$

Այստեղ արդեն c սահմանն ունի պարզ արտահայտություն a-ով ու b-ով: *Այսպես, մենք տեսնում ենք, որ* $a_1 b_1 = ab$, *ինչպես նաև*

$$a_{n+1} b_{n+1} = a_n b_n,$$

որտեղից եզրակացնում ենք, որ n-ի բոլոր արժեքների համար՝

$$a_n b_n = ab.$$

Այստեղ անցնելով սահմանին, կստանանք՝

$$c = \sqrt{ab},$$

այսինքն՝ երկու թվերի թվաբանա-երկրաչափական միջինը պարզապես նրանց երկրաչափական միջինն է:

5) Վերջապես, բերենք մի ավելի բարդ օրինակ։

Ելնելով մի որոշ c իրական թվից, ընդունենք՝

$$x_1 = \frac{c}{2},$$

իսկ x_n *վարիանտայի հաջորդ արժեքներն ինդուկտիվորեն որոշենք հետևյալ բանաձևով՝*

$$x_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{x_n^2}{2}. \qquad (1)$$

Հետազոտենք այս վարիանտայի սահմանի հարցը, c-ի վերաբերյալ երկու տարբեր ենթադրություններ անելով։

Նկատենք, որ եթե մենք նախապես իմանայինք, որ այդ վարիանտայի համար գոյություն ունի վերջավոր սահման՝

$$\lim x_n = a, \qquad (2)$$

ապա այն գտնելը դժվարություն չէր ներկայացնի. բավական կլիներ միայն սահմանին անցնել մեր վարիանտան որոշող (1) հավասարության մեջ, որպեսզի ստանայինք՝

$$a = \frac{c}{2} + \frac{a^2}{2} \quad \text{կամ} \quad a^2 - 2a + c = 0.$$

Այս քառակուսի հավասարումից կգտնեինք՝

$$a = 1 \underset{(+)}{-} \sqrt{1-c}. \qquad (3)$$

Այստեղից անմիջապես պարզվում է, որ x_n *վարիանտան* $c > 1$ *դեպքում չի կարող վերջավոր սահման ունենալ։*

(ա) Նախ ենթադրենք, թե $0 < c \leq 1$*։ Այդ դեպքում պարզ է, որ* $x_n > 0$*։ (1)-ից անդամ առ անդամ հանելով նրա նման կազմած՝*

$$x_n = \frac{c}{2} + \frac{x_{n-1}^2}{2}$$

հավասարությունը, կգտնենք՝

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 - x_{n-1}^2}{2},$$

Ակներևաբար՝ $x_2>x_1=\frac{c}{2}$, *իսկ նախորդ հավասարությունից հետևում է, որ հենց որ լինի* $x_n>x_{n-1}$, *կլինի նաև* $x_{n+1}>x_n$։ *Այսպիսով, մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով հաստատվում է* x_n *վարիանտայի մոնոտոն աճելու փաստը։*

Նման ձևով ապացուցվում է, նաև մեր վարիանտայի (վերևից) սահմանափակ լինելը՝

$$x_n<1։$$

Այդ անհավասարությունն ակներև է $n=1$ *դեպքում, իսկ (1)-ից էլ երևում է, որ եթե նա ճիշտ է որևէ* n*-ի դեպքում, ճիշտ կլինի նաև* $(n+1)$*-ի դեպքում։ Նշանակում է, (2) սահմանն իրոք գոյություն ունի և այն ժամանակ նա արտահայտվում է (3) բանաձևով, այն էլ արմատի մոտ — նշանով, քանի որ այդ սահմանը չի կարող մեկից մեծ լինել։*

(բ) Դիցուք այժմ $-3\leqslant c<0$։ *Ակներևաբար, բոլոր* n*-երի համար կլինի՝*

$$x_n\geqslant\frac{c}{2}։$$

Ցույց տանք, որ այս դեպքում $x_n<0$. *այդ ճիշտ է* $n=1$ *դեպքում, իսկ եթե նա ճիշտ է որևէ* n*-ի համար, ապա*

$$|x_n|\leqslant\frac{|c|}{2},\quad x_n^2\leqslant\frac{|c|^2}{4}<|c|\quad (\text{քանի որ } \frac{|c|}{4}<1),$$

և x_{n+1}*-ը կունենա* $\frac{c}{2}$*-ի նշանը, այսինքն՝ բացասական կլինի։*

Այս անգամ x_n *վարիանտան մ ո ն ո տ ո ն չ ի լ ի ն ի։ Սակայն եթե (1)-ում նախ ընդունենք* $n=2k$ *և* $2k-2$, *ապա՝* $n=2k+1$ *և* $2k-1$, *և երկու դեպքում էլ անդամ առ անդամ հանենք, կստանանք՝*

$$\left.\begin{aligned} x_{2k+1}-x_{2k-1}&=\frac{x_{2k}^2-x_{2k-2}^2}{2}\\ x_{2k+2}-x_{2k}&=\frac{x_{2k+1}^2-x_{2k-1}^2}{2}\end{aligned}\right|\qquad(4)$$

Այստեղից ինդուկտիվորեն կարելի է եզրակացնել, որ միշտ՝

$$x_{2k+1}>x_{2k-1}\quad \text{և}\quad x_{2k+2}<x_{2k}։$$

Իսկապես, $x_3>x_1=\frac{c}{2}$. *այդ ժամանակ* $|x_3|<|x_1|$, $x_3^2<x_1^2$, *և (4) բանաձևերից երկրորդի համաձայն* $(k=1)$ *կստանանք* $x_4<x_2$։ *Հետևաբար,* $|x_4|>|x_2|$, $x_4^2>x_2^2$ *և (4) բանաձևերից առաջինի շնորհիվ կստանանք* $(k=2)$ $x_5>x_3$, *և այլն։*

Այսպիսով, այս դեպքում մոնոտոն կլինեն առանձին-առանձին վերցրած x_{2k-1} *և* x_{2k} $(k=1, 2, 3, \ldots)$ *վարիանտաները։ Քանի որ նրանք գրա-*

նրվում են $-\frac{c}{2}$-*ի և 0 վերջավոր սահմանների միջև, ապա նրանք երկուսն էլ ունեն վերջավոր սահմաններ՝*

$$\lim x_{2k-1}=a', \quad \lim x_{2k}=a''.$$

Մնում է ցույց տալ, որ $a'=a''$*։ Այդ նպատակով (1) հավասարության մեջ* n*-ը ձգտեցնենք անվերջության՝ նախ զույգ արժեքներով, ապա կենտ արժեքներով։ Սահմանում կստանանք երկու առնչություն.*

$$a'=-\frac{c}{2}+\frac{a''^2}{2}, \quad a''=-\frac{c}{2}+\frac{a'^2}{2}. \tag{5}$$

Իրարից հանելով, c*-ն արտաքսենք՝*

$$(a'-a'')(a'+a''+2)=0.$$

Եթե $c>-3$*, երկրորդ արտադրիչը զրո դառնալ չի կարող. որովհետև. հակառակ դեպքում, (5) առնչություններից երկրորդի մեջ դնելով* $a''=-a'-2$*,* a'*-ի համար կստանայինք*

$$a'^2+2a'+(4+c)=0$$

քառակուսի հավասարումը, որը $c>-3$ *դեպքում չի կարող իրական արմատներ ունենալ։ Մնում է, որ առաջին արտադրիչը զրո դառնա, որտեղից կստանանք՝*

$$a'=a''.$$

Իսկ եթե $c=-3$*, երկրորդ արտադրիչը զրո է դառնում առաջինի հետ միաժամանակ, որովհետև այդ դեպքում և՛* $a'=-1$*, և՛* $a''=-1$*։ Այսպիսով, բոլոր* $-3\leq c<0$ *դեպքերում* $a'=a''$*։ Այդ սահմանների ընդհանուր արժեքը նշանակելով* a*-ով, նրա համար կունենանք (3) արտահայտությունը, ընկերարար նորից — նշանով, քանի որ բացասական* x_n *փոփոխականի սահմանը չի կարող դրական լինել։*

Դիտողություն։ Բերված օրինակներն առիթ են տալիս հետևյալ դիտողությունն անելու։ Ապացուցված թեորեման տիպիկ գոյության թեորեմա է. նրա մեջ հաստատվում է սահմանի գոյության փաստը, բայց այդ սահմանը հաշվելու համար ոչ մի միջոց չի տալիս։ Այնուամենայնիվ, այդ թեորեման շատ կարևոր նշանակություն ունի։ Մի կողմից, տեսական հարցերում հաճախ սահմանի լոկ գոյությունն է հարկավոր լինում։ Մյուս կողմից, շատ դեպքերում սահմանի գոյության մեջ համոզվելը կարևոր է լինում նրանով, որ ճանապարհներ է բացում այդ սահմանը փաստորեն հաշվելու համար։ Այսպես. 1), 2), 4), 5) օրինակներում հենց սահմանի գոյությունն իմանալու փաստը հնարավորություն տվեց, որևէ հավասարությունների մեջ սահմանին անցնելու օգնությամբ հաշվենք սահմանի ճիշտ արժեքը։

Այդ տեսակետից առանձնապես ուսանելի է 5) (բ) օրինակը։ (3) արտահայտությունը $c<-3$ *դեպքում ևս իմաստը պահպանում է, սակայն այդ ամենևին չի նշանակում, թե այդ արտահայտությունը շարունակում է տալ*

x_n փոփոխականի սահմանի արժեքը։ Ընդհակառակն, այս դեպքում այդ սահմանը նույնիսկ գոյություն չունի. օրինակ, $c=-4$ դեպքում x_n փոփոխականը հաջորդաբար ստանում է հետևյալ արժեքները՝

$$-2,\ 0, -2,\ 0, -2,\ 0, \ldots$$

և ոչ մի սահման չունի:

3) օրինակում սահմանի համար արտահայտություն չստացանք, բայց իմանալով, որ այն գոյություն ունի, կարելի է նրա մոտավոր արժեքները հաշվել ցանկացած ճշգրտությամբ, որովհետև այդ սահմանը գտնվում է a_n և b_n փոփոխականների միջև, որոնք երկու կողմերից նրան են ձգտում:

Հաջորդ n°-ում մենք կծանոթանանք մոնոտոն փոփոխականի վերաբերյալ թեորեմայի կիրառման մի շատ կարևոր օրինակի հետ ևս:

36. e թիվը։ Մենք այստեղ սահմանային անցումը կօգտագործենք մի նոր, մինչև այժմ մեզ չպատահած, թիվ որոշելու համար։

Վերցնենք

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

փոփոխականն և փորձենք նրա նկատմամբ կիրառել n° 34-ի թեորեման։

Քանի որ n ցուցչի աճման հետ միասին աստիճանի հիմքը նվազում է, ապա փոփոխականի մոնոտոն լինելն այստեղ անմիջապես չի երևում։ Որպեսզի համոզվենք, որ նա իրոք մոնոտոն է, դիմենք Նյուտոնի բինոմի բանաձևին՝

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}\cdot\frac{1}{n^k}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n}=$$

$$1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (6)$$

Եթե x_n-ից անցնենք x_{n+1}-ին, այսինքն՝ n-ը մեծացնենք մեկ միավորով, ապա, նախ, կավելանա մի նոր, $(n+2)$-րդ անդամ (դրական), և, բացի այդ, արդեն գրված $(n+1)$ անդամներից

ամեն մեկը կմեծանա, որովհետև փակագծերում գրված $1-\frac{s}{n}$ տեսքի յուրաքանչյուր բազմապատկիչ կփոխարինվի իրենից մեծ՝ $1-\frac{s}{n+1}$ բազմապատկիչով։ Այսպիսով ստացվում է, որ

$$x_{n+1}>x_n,$$

այսինքն՝ x_n վարիանտան աճող է։

Այժմ ցույց տանք, որ նա վերևից սահմանափակ է։ (6) արտահայտությունից դեն նետելով փակագծերում գրված բոլոր արտադրիչները, մենք այդ արտահայտությունը կմեծացնենք, այնպես որ՝

$$x_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}=y_n.$$

Այս արտահայտության մեջ բոլոր հայտարարներում բոլոր արտադրիչները, սկսած 3-ից, փոխարինելով 2-ով, մենք նորից կմեծացնենք այդ արտահայտությունը՝

$$y_n<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Սակայն $\frac{1}{2}$ անդամից սկսվող պրոգրեսիան ունի 1-ից փոքր գումար, ուստի $y_n<3$, նշանակում է առավել ևս

$$x_n<3.$$

Այստեղից էլ հետևում է, n° 34-ի թեորեմայի համաձայն, որ x_n վարիանտան վերջավոր սահման ունի։ Էյլերի (L. Euler) օրինակով այդ սահմանը միշտ նշանակում են e տառով։ Այդ e թիվը՝

$$e=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

բացառիկ կարևորություն ունի ինչպես մաթեմատիկական անալիզի մեջ, այնպես էլ նրա կիրառությունների համար։ Ահա այդ թվի տասնորդական վերլուծության սկզբի 15 թվանշանները՝

$$e=2,7\ 1828\ 18284\ 59045\dots$$

Հաջորդ n°-ում մենք ցույց կտանք հարմար եղանակ e թվի

մոտավոր հաշվման համար, ինչպես նաև միաժամանակ ցույց կտանք, որ e-ն իռացիոնալ թիվ է։

e թվի մի քանի հատկությունները, որոնք մենք հետագայում ցույց կտանք [54, (13)], առանձնապես նպատակահարմար են դարձնում հենց այդ թվի ընտրությունն իբրև լոգարիթմների սիստեմի հիմք։ e հիմքով լոգարիթմները կոչվում են բնական լոգարիթմներ և նշանակվում են log նշանով*, առանց հիմքը ցույց տալու։ Տեսական հետազոտություններում օգտվում են բացառապես բնական լոգարիթմներից**։

Այստեղ նշենք, որ սովորական (տասնորդական) լոգարիթմները բնական լոգարիթմների հետ կապվում են հետևյալ բանաձևով՝

$$\log_{10} x = M \cdot \log x,$$

որտեղ M-ը փոխանցման մոդուլն է և հավասար է՝

$$M = \log_{10} e = \frac{1}{\log 10} = 0{,}434294\ldots :$$

Այդ բանաձևը հեշտ է ստանալ, 10 հիմքով լոգարիթմելով

$$x = e^{\log x}$$

նույնությունը։

37. e ԹՎԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ՀԱՇՎՈՒՄԸ։ Անդրադառնանք (6) հավասարությանը։ Եթե k-ն ֆիքսենք և, համարելով $n > k$, դեն նետենք $(k+1)$-րդին հաջորդող բոլոր անդամները, կստանանք անհավասարություն՝

---

* Այլ դասագրքերում բնական լոգարիթմները նշանակվում են նաև ln նշանով։ (Ծանոթ. հայ. հրատ. խմբագրի)։

** Այդ լոգարիթմները երբեմն սխալմամբ անվանում են նեպերյան լոգարիթմներ՝ լոգարիթմները հորինող շոտլանդացի մաթեմատիկոս Նեպերի (J. Napier, XVI—XVII դ.) անունով։ Նեպերն ինքը լոգարիթմների սիստեմի հիմքի մասին գաղափար չի ունեցել, քանի որ նա լոգարիթմները կազմել է յուրահատուկ ձևով այլ սկզբունքով, սակայն նրա լոգարիթմները համապատասխանում են այն լոգարիթմներին, որոնց հիմքը մոտ է $\frac{1}{e}$ թվին։ e-ին մոտ հիմք ունեին նրան ժամանակակից Բյուրգիի (J. Burgi) լոգարիթմները։

$$x_n > 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right),$$

Անցնենք սահմանին, n-ը ձգտեցնելով անվերջության. քանի որ բոլոր փակագծերի ներսի արտահայտությունները ձգտում են 1-ի, ուստի կունենանք՝

$$e \geqslant 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} = y_k.$$

Այս անհավասարությունը տեղի ունի ամեն մի բնական k-ի համար։ Այսպիսով, ունենք՝

$$x_n < y_n \leqslant e,$$

որտեղից հետևում է [n° 28-*ի* 3° *թեորեմայի համաձայն*], *որ*

$$\lim y_n = e.$$

e *թվի մոտավոր հաշվման համար* y_n *վարիանտան շատ ավելի հարմար է, քան* x_n*-ը։ Գնահատենք* y_n*-ի* e*-ին մոտենալու աստիճանը։ Այդ նպատակով նախ դիտարկենք* y_n*-ին հաջորդող որևէ* y_{n+m} *արժեքի և* y_n*-ի տարբերությունը։ Ունենք՝*

$$y_{n+m} - y_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+m)!} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots(n+m)}\right\},$$

Եթե { } *փակագծերի ներսը հայտարարների բոլոր արտադրիչները փոխարինենք* (n+2)*-ով, կստանանք*

$$y_{n+m} - y_n < \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right\}$$

անհավասարությունը, որը միայն կուժեղանա, եթե փակագծերը փոխարինենք անվերջ պրոգրեսիայի գումարով՝

$$y_{n+m} - y_n < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}.$$

Այստեղ n-ը անփոփոխ պահելով, m-ը մեծացնենք մինչև անվերջություն. m նշանիկով համարակալված y_{n+m} վարիանտը հաջորդաբար կստանա հետևյալ արժեքները՝

$$y_{n+1}, \ y_{n+2}, \ y_{n+3}, \ldots, y_{n+m}, \ldots,$$

որոնք, ակներևաբար, ձգտում են e-ին։ Սահմանում ստանում ենք՝

$$e - y_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1},$$

կամ, քանի որ $\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$ (այդ հեշտ է ստուգել), կունենանք՝

$$0 < e - y_n < \frac{1}{n!n}.$$

Եթե $e - y_n$ տարբերության և $\frac{1}{n!n}$ թվի հարաբերությունը նշանակենք θ-ով (ակներևաբար $0 < \theta < 1$), կարելի կլինի գրել՝

$$e - y_n = \frac{\theta}{n!n},$$

Այստեղ y_n-ը փոխարինելով իր լրիվ արտահայտությամբ, մենք կստանանք հենց այն կարևոր բանաձևը՝

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n}, \qquad (7)$$

որը ելակետ կծառայի e թիվը հաշվելու համար։ Դեն նետելով վերջին, «լրացուցիչ», անդամը և մնացած յուրաքանչյուր անդամ փոխարինելով իր տասնորդական մոտավորությամբ, մենք կստանանք e թվի մոտավոր արժեքը։

Մեր առջև խնդիր դնենք (7) բանաձևի օգնությամբ հաշվել e-ն, ասենք թե, $\frac{1}{10^7}$-ի ճշգրտությամբ։ Նախ պետք է պար-

գեր, թե ինչպիսին պիտի ընտրել մեր մոտավորության տակ գտնվող n-ը, որպեսզի իրականացնենք այդ ճշգրտությունը։

Հաջորդաբար հաշվելով ֆակտորիալներին հակադարձ թվերը (տես կից աղյուսակը), տեսնում ենք, որ n=10 դեպքում (7 բանաձևի «լրացուցիչ» անդամն արդեն կլինի

$$\frac{\theta}{n!n} \cdot \frac{\theta}{10!\,10} < 0,000\,000\,03,$$

այնպես որ, այդ անդամը դեն նետելով, մենք պահանջվող սահմանից նշանակալի չափով փոքր սխալ ենք կատարում։ Ուստի կանգ առնենք n-ի այդ արժեքի վրա։ Մնացած անդամներից յուրաքանչյուրը դարձնենք տասնորդական կոտորակ, կլորացնելով ութերորդ թվանշանում (պահեստի ճշգրտության համար) այնպես, որ սխալը բացարձակ արժեքով փոքր լինի ութերորդ տեղում գրված միավորի կեսից, այսինքն $\frac{1}{2\cdot 10^8}$-ից։ Հաշվումների արդյունքները մենք ամփոփել ենք աղյուսակի մեջ. մոտավոր արժեքի կողքին (+ կամ −) նշան է դրված, որը ցույց է տալիս, թե ճշգրիտ արժեքը վերականգնելու համար անհրաժեշտ ուղղումն ինչ նշան պիտի ունենա։

	2, 000 000 00
$\frac{1}{2!}$	=0, 500 000 00
$\frac{1}{3!}$	=0, 166 666 67−
$\frac{1}{4!}$	=0, 041 666 67−
$\frac{1}{5!}$	=0, 008 333 33+
$\frac{1}{6!}$	=0, 001 388 89−
$\frac{1}{7!}$	=0, 000 198 41+
$\frac{1}{8!}$	=0, 000 024 80+
$\frac{1}{9!}$	=0, 000 002 76−
$\frac{1}{10!}$	=0, 000 000 28−
	2, 718 281 81

Այսպիսով տեսնում ենք, որ լրացուցիչ անդամը դեն նետելու հետևանքով պահանջվող ուղղումը փոքր է $\frac{3}{10^8}$-ից։ Հաշվի առնելով նաև կլորացման ուղղումները (իրենց նշաններով), հեշտ է կռահել, որ e թվի համար ստացված մոտավոր արժեքի հանրագումարային ուղղումը գտնվում է

$$-\frac{3}{10^8} \text{ և } +\frac{5}{10^8}$$

թվերի միջև։

Հետևաբար, e թիվը ինքը գտնվում է

2,718 281 78 և 2,718 281 86

կոտորակների միջև, այնպես որ կարելի է գրել՝

$$e = 2,718\,281\,8 \pm 0,000\,000\,1.$$

Այսթեթից օգտվելով, նշենք նաև, որ նույն (7) բանաձևը կարող է ծառայել նաև e թվի իռացիոնալության ապացուցելու համար։ Հակառակ ընդունելությամբ ենթադրենք, թե e-ն հավասար է մի $\frac{m}{n}$ ռացիոնալ կոտորակի. այդ դեպքում, եթե (7) բանաձևը գրենք հենց այդ n-ի համար, կստանանք՝

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n} \quad (0<\theta<1).$$

Այս հավասարության երկու մասերը բազմապատկելով n!-ով, բոլոր կոտորակների հայտարարները, բացի վերջինից, կրճատվելուց հետո, մենք ձախ մասում կստանանք ամբողջ թիվ, իսկ աջ մասում՝ ամբողջ թիվ $\frac{\theta}{n}$ կոտորակի հետ միասին, որն անհնար է։ Ստացված հակասությունը հենց ապացուցում է, որ e թիվը ռացիոնալ չէ։

38. ՆԵՐԴՐՎԱԾ ՄԻՋԱԿԱՅՔԵՐԻ ԼԵՄՄԱՆ։ Մոնոտոն վարիանտային հատկացված այս պարագրաֆի վերջում կանգ առնենք իբրև «հանդիպական» ուղղությամբ փոփոխվող երկու այդպիսի վարիանտաների զուգակցման վրա։

Դիցուք տրված են մոնոտոն աճող x_n վարիանտան և մոնոտոն նվազող y_n վարիանտան, ընդ որում միշտ

$$x_n < y_n.$$

Եթե նրանց $y_n - x_n$ տարբերությունը ձգտում է զրոյի, ապա երկու վարիանտաներն ունեն մի ընդհանուր վերջավոր սահման՝

$$c = \lim x_n = \lim y_n.$$

Իսկապես, (8) պայմանից բխում է, որ

$$x_n < y_n \le y_1$$

և

$$y_n > x_n \ge x_1,$$

այնպես որ մոնոտոն աճող x_n վարիանտան սահմանափակ է վե-

րենց, իսկ մոնոտոն նվազող y_n *վարիանտան ներքևից, հետևաբար նրանք երկուսն էլ ունեն վերջավոր սահմաններ՝*

$$\lim x_n = c \quad \text{և} \quad \lim y_n = c'.$$

Սակայն, n° 30-*ի 1° թեորեմայի համաձայն, ունենք՝*

$$c' - c = \lim (y_n - x_n),$$

որը պայմանի համաձայն հավասար է զրոյի։ Ուրեմն $c' = c$, *որը և պահանջվում էր ապացուցել։*

Ապացուցած թեորեմային կարելի է տալ ուրիշ ձև, որն ավելի հաճախ է կիրառվում։

[a, b] *միջակայք (որտեղ* $a < b$) *անվանենք այն բոլոր* x *թվերի (կամ, ինչպես հաճախ ասում են. «կետերի») բազմությունը, որոնք բավարարում են*

$$a \leqslant x \leqslant b$$

անհավասարություններին։ a *և* b *թվերը («կետերը») կոչվում են միջակայքի, համապատասխանաբար, ձախ և աջ ծայրեր, իսկ նրանց* $b - a$ *տարբերությունը՝ միջակայքի երկարություն։ Դժվար չէ տեսնել, որ թվային առանցքի վրա միջակայքին համապատասխանում է հատված (միևնույն երկարությամբ)։*

Պայմանավորվենք ասել, որ [a′, b′] *միջակայքը պարունակվում է կամ ներդրված է* [a, b] *միջակայքում, եթե առաջին միջակայքի բոլոր կետերը պատկանում են երկրորդ միջակայքին, կամ, որ միևնույնն է, եթե*

$$a \leqslant a' < b' \leqslant b.$$

Դրա երկրաչափական իմաստը պարզ է։

Դիցուք ունենք միջակայքերի մի անվերջ հաջորդականություն՝

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ \dots,\ [a_n, b_n],\ \dots$$

որոնցից յուրաքանչյուրը ներդրված է իր նախորդի մեջ, ընդ որում նրանց երկարությունները, երբ n-ը աճում է, ձգտում են զրոյի՝

$$\lim (b_n - a_n) = 0.$$

Այդ դեպքում միջակայքերի a_n և b_n ծայրերը (տարբեր կողմերից) ձգտում են մի ընդհանուր սահմանի՝

$$e = \lim a_n = \lim b_n,$$

որը բոլոր միջակայքերի համար միակ ընդհանուր կետն է:

Այս՝ վերևում ապացուցված թեորեմայի նոր ձևակերպումն է. պայմանի համաձայն՝

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n,$$

այնպես որ, n-րդ միջակայքի a_n ձախ ծայրը և b_n աջ ծայրն այստեղ x_n և y_n մոնոտոն վարիանտաների դեր են կատարում։

Քանի որ a_n-ը c-ին ձգտում է աճելով, իսկ b_n-ը նվազելով, ապա

$$a_n \leq c \leq b_n \quad (n=1, 2, 3, \ldots),$$

այսինքն՝ c կետն իրոք որ պատկանում է բոլոր միջակայքերին։

Միևնույն ժամանակ, չի կարող լինել c-ից տարբեր մի այլ c' կետ, որն ունենա միևնույն հատկությունները. այլապես կլիներ

$$b_n - a_n \geq |c' - c| > 0$$

և n-րդ միջակայքի երկարությունը չէր կարող զրոյի ձգտել։

Հետագայում մենք հաճախ ենք հենվելու այս առաջադրության վրա, որն անվանելու ենք «ներդրված միջակայքերի լեմմա»։

§ 4. ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ: ՄԱՍՆԱԿԻ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐ:

39. ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ։ Դիցուք տված է x_n վարիանտան, որը հաջորդաբար ստանում է հետևյալ արժեքները՝

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_{n'}, \ldots \quad (1)$$

Զբաղվենք, վերջապես, այդ վարիանտայի համար վերջավոր սահմանի գոյության ընդհանուր հայտանիշի հարցով։ Սահմանի սահմանումն ինքն այդ նպատակին ծառայել չի կարող, որովհետև նրա մեջ մասնակցում է հենց այն սահմանը, որի գոյության մասին է խոսքը։ Մենք կարիք ունենք այնպիսի հայտանիշի, որի մեջ օգտագործվեր միայն այն, ինչ որ մեզ տված է, այն է՝ վարիանտայի արժեքների (1) հաջորդականությունը։

Առաջադրված հարցը լուծում է հետևյալ նշանավոր թեորեմը, որը պատկանում է չեխ մաթեմատիկոս Բոլցանոյին (B. Bolzano) *և ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Կոշիին* (A. L. Cauchy). *այն հաճախ անվանում են* զուգամիտության սկզբունք:

ԲՈԼՑԱՆՈ-ԿՈՇԻԻ ԹԵՈՐԵՄԱՆ: Որպեսզի x_n վարիանտան ընդհանրապես վ ե ր ջ ա վ ո ր սահման ունենա, անհրաժեշտ է ու բավարար, որ ամեն մի $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենա այնպիսի N համար, որպեսզի

$$|x_n - x_{n'}| < \varepsilon$$

անհավասարությունը տեղի ունենա, հենց որ $n > N$ և $n' > N$:

Ինչպես ընթերցողը տեսնում է, այստեղ հարցի էությունը կայանում է նրանում, որ փոփոխականի արժեքները միմյանց անվերջորեն մոտենան, երբ նրանց համարներն աճում են: Այժմ դառնանք թեորեմայի ապացույցին:

Ա ն հ ր ա ժ ե շ տ ո ւ թ յ ո ւ ն ը: Դիցուք x_n *վարիանտան ունի մի որոշ վերջավոր սահման, ասենք՝* a: *Սահմանի սահմանման համաձայն* [23], *ինչպիսին էլ լինի* $\varepsilon > 0$ *թիվը, կգտնվի* $\frac{\varepsilon}{2}$ *թվին համապատասխան այնպիսի* N *համար, որ* $n > N$ *դեպքում կլինի*

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Վերցնենք երկու որևէ համարներ՝ $n > N$ *և* $n' > N$. *նրանց համար միաժամանակ կլինեն՝*

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{և} \quad |a - x_{n'}| < \frac{\varepsilon}{2},$$

որտեղից կստանանք՝

$$|x_n - x_{n'}| = |(x_n - a) + (a - x_{n'})| \leq$$

$$\leq |x_n - a| + |a - x_{n'}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon:$$

Սրանով ապացուցվեց պայմանի անհրաժեշտությունը: Ավելի դժվար է ապացուցել բավարար լինելը:

Բավարարությունը։ Դիցուք Թեորեմայի պայմանը տեղի ունի. պահանջվում է ցույց տալ, որ այդ դեպքում x_n վարիանտայի համար գոյություն ունի որոշակի վերջավոր սահման։

Այդ նպատակով, բոլոր իրական թվերի բազմության մեջ հատույթ առաջացնենք հետևյալ կանոնով. A ստորին դասի մեջ դնենք այն բոլոր α իրական թվերը, որոնց համար, սկսած մի որոշ համարից, տեղի ունի

$$x_n > \alpha$$

անհավասարությունը։ A′ վերին դասի մեջ դնենք մյուս բոլոր (այսինքն A-ի մեջ չընկած) α' իրական թվերը։

Նախ օգտագործելով Թեորեմայի պայմանը, համոզվենք, որ այդ դասերը դատարկ չեն։ Վերցնելով $\varepsilon>0$ կամայական թիվը, ընտրենք նրան համապատասխանող N համարը։ Եթե $n>N$ և $n'>N$, ապա բավարարվում է (2) պայմանը, որտեղից՝

$$x_{n'}-\varepsilon < x_n < x_{n'}+\varepsilon. \qquad (3)$$

Այստեղից տեսնում ենք, որ յուրաքանչյուր $x_{n'}-\varepsilon$ թիվ, որտեղ $n'>N$, առանձին պատկանում է A դասին, որովհետև բավականաչափ մեծ n-երի համար (այն է՝ $n>N$ դեպքում) x_n-ը նրան գերազանցում է։ Մյուս կողմից, քանի որ միևնույն n-երի համար x_n թիվը փոքր է ամեն մի $x_{n'}+\varepsilon$ թվից ($n'>N$ դեպքում), ուստի այդպիսի ոչ մի թիվ չի կարող մտնել A դասի մեջ, հետևաբար, նա պատկանում է A′ դասին։

A և A′ դասերը որոշող կանոնն այնպես է ձևակերպված, որ նրանից անմիջապես երևում է, որ յուրաքանչյուր իրական թիվ ընկնում է այդ դասերից մեկի և միայն մեկի մեջ։ Դրա հետ միաժամանակ, A դասի յուրաքանչյուր α թիվ փոքր է A′ դասի ամեն մի α' թվից. եթե լիներ $\alpha>\alpha'$, ապա x_n վարիանտան, որոշ համարից սկսած կգերազանցեր նաև α' թիվը, հակառակ α' թվի որոշմանը։ Այսպիսով, իրական թվերի բազմության այդպիսի դասերի տրոհումն իրոք հատույթ է առաջացրել։

Դեդեկինդի հիմնական թեորեմայի [9] համաձայն, գոյություն ունի մի a թիվ, որը երկու դասերին պատկանող թվերի միջև սահմանազատիչ դեր ունի՝

$$\alpha \leqslant a \leqslant \alpha'.$$

Սակայն, ինչպես մենք նշել էինք, ամեն մի $n'>N$ դեպքում $x_{n'}-\varepsilon$ թիվը՝ α թվերից մեկն է, իսկ $x_{n'}+\varepsilon$ թիվը՝ α' թվերից մեկը, ուստի նաև՝

$$x_{n'}-\varepsilon<a<x_{n'}+\varepsilon,$$

կամ՝

$$|a-x_{n'}|=|x_{n'}-a|<\varepsilon,$$

երբ $n'>N$։ Սահմանի սահմանման համաձայն [23], այդ էլ հենց նշանակում է, որ՝

$$a=\lim x_n,$$

և թեորեմն ապացուցված է։

Այս հայտանիշի կիրառումները մեզ հաճախ կհանդիպեն հետագա շարադրման ընթացքում։

40. ՄԱՍՆԱԿԻ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ՄԱՍՆԱԿԻ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐ։ (1) հաջորդականության հետ միասին դիտարկենք նաև նրանից առանձնացրած մի որևէ *մ ա ս ն ա կ ի* հաջորդականություն (կամ *ե ն թ ա հ ա ջ ո ր դ ա կ ա ն ո ւ թ յ ո ւ ն*)՝

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ x_{n_3},\ \dots,\ x_{n_k},\ \dots, \tag{4}$$

որտեղ $\{n_k\}$-ն՝ բնական թվերի մի *ա ճ ո ղ* հաջորդականություն է՝

$$n_1<n_2<n_3<\dots<n_k<n_{k+1}<\dots\text{։} \tag{5}$$

Այստեղ հաջորդաբար բոլոր բնական արժեքներն ստացող համարի դերը կատարում է ոչ թե n-ը, այլ k-ն։ Իսկ n_k-ն իրենից ներկայացնում է այնպիսի վարիանտա, որն ստանում է բնական արժեքներ և, ակներևաբար, ձգտում է ∞, երբ n-ը աճում է։

Եթե (1) հաջորդականությունն ունի որոշակի a սահման (վերջավոր կամ անվերջ), ապա նույն սահմանն ունի նաև (4) մասնակի հաջորդականությունը։

Կանգ առնենք, օրինակի համար, այն դեպքի վրա, երբ a-ն վերջավոր է։ Դիցուք տված $\varepsilon>0$ թվի համար գտել ենք այնպիսի N, որ $n>N$ դեպքում բավարարվում է

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

անհավասարությունը։

Քանի որ $n_k \to \infty$, ապա գոյություն ունի նաև այնպիսի K, որ $k > K$ դեպքում կլինի $n_k > N$։ Այն ժամանակ, k-ի այդ նույն արժեքների համար կբավարարվի

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

անհավասարությունը, որը և ապացուցում է մեր պնդումը։

[Ի դեպ, նկատենք, որ այս դատողությունների ժամանակ մենք չէինք հենվում (5) անհավասարությունների վրա, այսինքն՝ չէինք օգտվում n_k վարիանտայի մոնոտոնությունից։ Այդ նշանակում է, որ մեր ասածն իր ուժը պահպանում է անկախ այն բանից, թե n_k ամբողջարժեք վարիանտան ի՞նչ օրենքով է ձգտում $+\infty$։]

Եթե x_n վարիանտայի կամ, որ միևնույնն է, (1) հաջորդականության համար չկա որոշակի սահման, ապա դա չի բացառում նրա որևիցե (4) մասնակի հաջորդականության կամ դրան համապատասխանող $x'_k = x_{n_k}$ վարիանտայի սահմանի գոյությունը։ Այդպիսի սահմանն անվանում են x_n վարիանտայի կամ (1) հաջորդականության *մասնակի սահման**։

Ենթադրենք, օրինակ, $x_n = (-1)^{n+1}$. այս վարիանտան սահման չունի, իսկ եթե n-ին տանք միայն կենտ կամ միայն զույգ արժեքներ, ապա այդպիսով առաջացող

$$x_1 = 1,\ x_3 = 1, \ldots,\ x_{2k-1} = 1, \ldots$$

և

$$x_2 = -1,\ x_4 = -1, \ldots,\ x_{2k} = -1, \ldots$$

մասնակի հաջորդականությունները կունենան, համապատասխանաբար, 1 և -1 սահմանները։ Ճիշտ այդպես էլ $x_n = (-1)^{n+1} n$ վարիանտան ունի $+\infty$ և $-\infty$ մասնակի սահմանները, իսկ $x_n = n^{(-1)^{n+1}}$ վարիանտան՝ $+\infty$ և 0 մասնակի սահմանները։

Հեշտ է կառուցել այնպիսի վարիանտաների օրինակներ, որոնք ունեն անթիվ բազմությամբ տարբեր մասնակի սահմաններ։ Ահա այդպիսի մի օրինակ. x_n վարիանտան որոշենք հետևյալ կանոնով. եթե n համարը տասնոր-

---

* Այստեղ և մոտակա n°-ներում խոսելով վարիանտայի կամ հաջորդականության սահմանի մասին, մենք ի նկատի ունենք կամ վերջավոր սահման, կամ անվերջ, սակայն որոշակի նշանով սահման։

դական սիստեմով գրված է այսպես՝ αβ...ν (որտեղ α, β, ..., ν՝ թվանշաններ են), ապա ընդունում ենք՝

$$x_n = 0, \alpha\beta\ldots\nu.$$

Օրինակ, $x_{13} = 0,13$, $x_{4035} = 0,4035$ և այլն։ Այդ ժամանակ, 0,1-ի և 1-ի միջև գտնվող ամեն մի վերջավոր տասնորդական կոտորակ այդ փոփոխականի արժեքների շարքում կհանդիպի անվերջ անգամ. օրինակ, 0,217 կոտորակը կհանդիպի 217-րդ, 2170-րդ, 21700-րդ,... տեղերում։ Այստեղից հետևում է, որ 0,1-ի և 1-ի միջև գտնվող ամեն մի վերջավոր տասնորդական կոտորակ կծառայի իբրև մեր փոփոխականի մասնակի սահման։ Իսկ եթե վերցնենք այդ նույն միջակայքում գտնվող որևէ ուրիշ α իրական թիվ, ապա բավական է այն ներկայացնել անվերջ տասնորդական կոտորակի տեսքով [8]՝

$$\alpha = 0, c_1 c_2 \ldots c_k \ldots \quad (c_1 \geq 1)$$

որպեսզի պարզ լինի, որ

$$x_{c_1} = 0, c_1, \; x_{c_1c_2} = 0, c_1 c_2, \ldots, x_{c_1c_2\ldots c_k} = 0, c_1 c_2 \ldots c_k \ldots$$

մասնակի հաջորդականությունն ունի հենց այդ α սահմանը։ Այսպիսով, ավյալ դեպքում, հաջորդականության մասնակի սահմաններով լցված է [0,1, 1] ամբողջ միջակայքը։

Արդյոք միշտ գոյություն ունեն մասնակի սահմաններ x_n փոփոխականի համար։ Այդ հարցին հեշտ է դրական պատասխան տալ այն դեպքում, երբ $\{x_n\}$ բազմությունը սահմանափակ չէ։ Ենթադրենք, օրինակ, որ նա վերևից սահմանափակ չէ. այն ժամանակ, ամեն մի բնական k-ի համար (1) շարքում կգտնվի k-ից մեծ x_{n_k} անդամ՝

$$x_{n_k} > k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

(ընդ որում հեշտ է այնպես անել, որ n_k համարները k-ի հետ միասին աճեն)։ Այժմ

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$$

մասնակի հաջորդականությունը, ակներևաբար, կունենա $+\infty$ սահմանը, որը և կլինի մեր փոփոխականի համար մասնակի սահման։

Առաջադրված հարցին կարելի է դրական պատասխան տալ նաև սահմանափակ փոփոխականի դեպքում, սակայն այդ պահանջում է ավելի նուրբ դատողություններ, որոնք մենք բերում ենք հաջորդ n°-ում։

41. ԲՈԼՑԱՆՈ-ՎԵՅԵՐՇՏՐԱՍՍԻ (B. BOLZANO-G. WEIERSTRASS) **ԹԵՈՐԵՄԱՆ**։ Ամեն մի (1) սահմանափակ հաջորդականությունից միշտ կարելի է առանձնացնել այնպիսի (4) մասնակի հաջորդականություն, որը ձգտի վերջավոր սահմանի։

(Այս ձևակերպումը չի բացառում հավասար թվերի գոյությունը տվյալ հաջորդականության մեջ, որը հարմար է կիրառություններում։)

Ապացույց։ Ենթադրենք, թե բոլոր x_n թվերը գտնվում են a և b թվերի միջև։ $[a,b]$ միջակայքը կիսենք. կեսերից գոնե մեկում կգտնվեն անվերջ թվով էլեմենտներ տված հաջորդականությունից, որովհետև, հակառակ դեպքում, ամբողջ $[a,b]$ միջակայքում էլ վերջավոր թվով այդպիսի էլեմենտներ կլինեին, որը կհակասեր պայմանին։ Թող $[a_1,b_1]$-ը լինի այդ կեսերից այն, որն անվերջ թվով x_n թվեր է պարունակում (եթե երկու կեսերն էլ այդպիսին են, ապա կարող է լինել նրանցից որևէ մեկը)։ Նման եղանակով $[a_1,b_1]$ միջակայքը կիսենք և $[a_2,b_2]$-ով նշանակենք այն կեսը, որն անվերջ թվով x_n-եր է պարունակում, և այդպես շարունակ։

Այդպես կառուցած միջակայքերից յուրաքանչյուրը (երկրորդից սկսած) մտնում է նախորդի մեջ, կազմելով նրա կեսը. k-րդ միջակայքի երկարությունը, որը հավասար է

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k},$$

ձգտում է զրոյի, երբ n-ը աճում է։ Կիրառելով ներդրված միջակայքերի լեմման [38], տեսնում ենք, որ a_k-ն և b_k-ն ձգտում են մի ընդհանուր c սահմանի։

Այժմ $\{x_{n_k}\}$ մասնակի հաջորդականությունը կառուցենք ինդուկտիվ մեթոդով։ Այսպես, իբրև x_{n_1} վերցնենք մեր հաջորդականության այն էլեմենտներից որևիցէ մեկը (օրինակ՝ առաջինը), որոնք գտնվում են $[a_1,b_1]$ միջակայքում։ Իբրև x_{n_2} վերցնենք x_{n_1} էլեմենտին հաջորդող այն x_n էլեմենտներից որևիցե մեկը (օրինակ՝ առաջինը), որոնք ընկել են $[a_2,b_2]$ միջակայքի մեջ, և այսպես շարունակ. ընդհանրապես, իբրև x_{n_k} վերցնենք նախապես արդեն ընտրած $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_{k-1}}$ էլեմենտներին հաջորդող այն x_n էլեմենտներից որևիցե մեկը (օրինակ՝ առաջին-

նը), որոնք ընկել են $[a_k, b_k]$ միջակայքի մեջ։ Այդպիսի հաջորդական ընտրության հնարավորությունն ապահովվում է նրանով, որ յուրաքանչյուր $[a_k, b_k]$ միջակայք պարունակում է անվերջ թվով x_n էլեմենտներ, այսինքն՝ պարունակում է ցանկացած չափով մեծ համարով x_n էլեմենտներ։

Այնուհետև, քանի որ

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$$

և

$$\lim a_k = \lim b_k = c,$$

ապա, n° 28-ի 3° թեորեմայի համաձայն, նաև

$$\lim x_{n_k} = c,$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Դիտարկվող միջակայքերը հաջորդաբար կիսելու մեթոդը, որը մենք կիրառեցինք վերջին թեորեման ապացուցելիս, հայտնի է Բոլցանոյի մեթոդ անունով։ Նա մեզ հաճախ է պետք գալու հետագայում։

Բոլցանո–Վեյերշտրասի թեորեմանն նշանակալի չափով հեշտացնում է մեծ թվով դժվար թեորեմաների ապացույցը, կարծես թե իր մեջ առնելով դատողությունների հիմնական դժվարությունը։ Իբրև օրինակ, նրա օգնությամբ նորից ապացուցենք զուգամիտության սկզբունքը. մենք ի նկատի ունենք այդ սկզբունքի մեջ մտնող պայմանի բավարարությունը, որի ապացույցը մեզնից զգալի ջանքեր պահանջեց n° 39-ում։

Այսպես, ուրեմն, ենթադրենք, թե պահանջվող պայմանը բավարարվում է և տված $\varepsilon>0$ թվին համապատասխան գտնված է այնպիսի N համար, որ $n>N$ և $n'>N$ դեպքում տեղի ունեն (2) կամ (3) անհավասարությունները։ Այժմ եթե n'-ը հաստատուն պահենք, ապա (3)-ից կերևա, որ x_n վարիանտան, համենայն դեպս, սահմանափակ կլինի. $n>N$ դեպքում նրա արժեքները գտնվում են $x_{n'}-\varepsilon$ և $x_{n'}+\varepsilon$ թվերի միջև և դժվար չէ այդ թվերի փոխարեն վերցնել այնպիսիները, որպեսզի ընդգրկվեն նաև սկզբի N արժեքները՝ $x_1, x_2, \ldots, x_N$։ Այն ժամանակ, հենց նոր ապացուցած թեորեմայի համաձայն, կարելի է առանձնաց-

նել մի $\{x_{n_k}\}$ մասնակի հաջորդականություն, որը ձգտի վերջավոր սահմանի՝

$$\lim x_{n_k} = c.$$

Ցույց տանք, որ այդ սահմանին է ձգտում նաև x_n վարիանտն ինքը։ Կարելի է k-ն այնքան մեծ ընտրել, որ տեղի ունենա

$$|x_{n_k} - c| < \varepsilon$$

անհավասարությունը և միաժամանակ լինի $n_k > N$։ Հետևաբար (2)-ում կարելի է վերցնել $n' = n_k$՝

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon$$

և, այդ երկու անհավասարությունները բաղդատելով, վերջնականապես ստանալ՝

$$|x_n - c| < 2\varepsilon, \text{ երբ } n > N,$$

որը և ապացուցում է մեր պնդումը։*

42. ՄԵԾԱԳՈՒՅՆ ԵՎ ՓՈՔՐԱԳՈՒՅՆ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐ։ Այսուհետև մենք տեսանք, որ ամեն մի x_n վարիանտայի համար, լինի նա սահմանափակ թե ոչ, գոյություն ունեն մասնակի սահմաններ։ Մենք հիմա ցույց կտանք, որ այդ մասնակի սահմանների շարքում անպայմանորեն կգտնվեն ամենամեծը և ամենափոքրը. նրանք կոչվում են x_n վարիանտայի մ ե ծ ա գ ու յ ն և փ ո ք ր ա գ ու յ ն ս ա հ մ ա ն ն ե ր և, համապատասխանորեն, նշանակվում են

$$\overline{\lim}\, x_n \quad \text{և} \quad \underline{\lim}\, x_n$$

ԹԵՈՐԵՄԱ:** x_n վարիանտայի համար միշտ գոյություն ունեն մեծագույն և փոքրագույն սահմանները։ Նրանց հավասարությունն անհրաժեշտ և բավարար պայման է վարիանտայի սահմանի (սովորական իմաստով) գոյության համար։

Ա պ ա ց ու յ ց։ Սկսենք մեծագույն սահմանի գոյության հարցից։ Մենք վ ե ր և ու մ արդեն տեսանք [40], որ եթե x_n վարիանտան վերևից սահմա-

---

* 2ε թիվը նույնպես կամայապես փոքր թիվ է, ինչպես և ε-ը։ Եթե ցանկանայինք, նախ կվերցնեինք ոչ թե ε, այլ $\frac{\varepsilon}{2}$, և այն ժամանակ այստեղ 2ε-ի փոխարեն կստանայինք ε։ Այդպիսի բաներն առաջիկայում թողնելու ենք ընթերցողին։

** Այս թեորեմը, որն ապացուցելիս չի օգտագործվում Բոլցանո-Վեյերշտրասի թեորեմը, ծածկում է վերջինիս։

ռացիոնալ չէ, բայց նրա արժեքների (1) հաջորդականությունից կարելի է առանձնացնել այնպիսի $\{x_{n_k}\}$ մասնակի հաջորդականություն, որ

$$\lim x_n = +\infty.$$

Այսպիսով, այս դեպքում $+\infty$-ը փոփոխականի մասնակի սահմաններից մեկն է և, ակնհայտորեն, բոլոր հնարավորներից մեծագույնը այնպես որ՝

$$\lim x_n = +\infty.$$

Այժմ ենթադրենք, թե x_n փոփոխականը վերևից սահմանափակ է՝

$$x_n \leq M, \ (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Վերցնենք x_n-ի արժեքների ճշգրիտ վերին եզրը, երբ $n>k$,

$$M_k = \sup_{n>k}\{x_n\} = \sup\{x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots\} \leq M.$$

Երբ k-ն աճի, M_k-ի արժեքը կարող է միայն նվազել, հետևաբար, մոնոտոն փոփոխականի վերաբերյալ թեորեմայի [34] համաձայն, k-ն անվերջ աճելիս միշտ գոյություն ունի

$$\lim M_k$$

սահմանը, վերջավոր կամ $-\infty$։

Այն դեպքում, երբ այդ սահմանը $-\infty$ է, հարցը լուծվում է հեշտությամբ. ամեն մի $L>0$ համար կգտնվի այնպիսի $k=N$ համար, որ

$$M_k < -L.$$

սակայն $n>N$ դեպքում, ակնհայտորեն, $x_n \leq M_N$ այնպես որ n-ի այդ արժեքների համար ստանում ենք՝

$$x_n < -L,$$

որը և նշանակում է, որ գոյություն ունի սովորական իմաստով սահման՝

$$\lim x_n = -\infty,$$

որը միաժամանակ կլինի և՛ մեծագույն սահման, և՛ փոքրագույն սահման*։

Մնում է քննարկել ամենակարևոր դեպքը, երբ գոյություն ունի վերջավոր սահման՝

$$\lim M_k = M^*.$$

Մենք ցույց կտանք, որ հենց այդ M^* թիվը կլինի x_n փոփոխականի մեծագույն սահմանը։ Այդ նպատակով նախ ցույց տանք M^* թվի երկու բնորոշ հատկություն։

* Փոփոխականի սովորական սահմանի առկայության դեպքում բոլոր մասնակի սահմանները նրա հետ համընկնում են [40]։

Եթե կամայապես վերցնենք $\varepsilon>0$ *թիվը, ապա կգտնվի այնպիսի* $k=N'$, *որ* $M_{N'}<M^*+\varepsilon$. *քանի որ* $n>N$ *դեպքում* $x_n \leqslant M_{N'}$, *ապա առավել ևս* $x_n<M^*+\varepsilon$: *Այսպիսով ստանում ենք՝*

M* թվի I հատկությունը. ինչպիսին էլ լինի $\varepsilon>0$ թիվը, գոյություն ունի այնպիսի N' համար, որ բոլոր $n>N'$ դեպքում

$$x_n<M^*+\varepsilon:$$

Մյուս կողմից, կամայական $\varepsilon>0$ *թվի և ցանկացած* k-*ի համար*

$$M_k \geqslant M^*>M^*-\varepsilon:$$

Սակայն, ճշգրիտ վերին եզրի հատկության համաձայն [10], x_n-*ի* $n=k+1,\ k+2,\ k+3, \ldots$ *համարներով արժեքների մեջ կգտնվի այնպիսի* $x_{n'}$ *արժեք, որ նաև* $x_{n'}>M^*-\varepsilon$: *Կամայապես վերցրած* k-*ն փոխարինելով* N-*ով, ձևակերպենք՝*

M* թվի II հատկությունը. ինչպիսին էլ լինեն $\varepsilon>0$ թիվն ու N համարը, կգտնվի $n'>N$ համարով այնպիսի $x_{n'}$ արժեք, որ

$$x_{n'}>M^*-\varepsilon:$$

(Ընդգծենք ձևակերպված երկու հատկությունների տարբերությունը. առաջին դեպքում անհավասարությունը բավարարվում է x_n-*ի բոլոր արժեքների համար, սկսած որոշ համարից, իսկ երկրորդ դեպքում անհավասարությունը բավարարում են* x_n-*ի միայն առանձին արժեքներ, որոնց մեջ, սակայն, կան ցանկացած չափով մեծ համարներ ունեցող արժեքներ):*

Օգտվելով այդ հատկություններից, նախ ցույց տանք, որ M* *թիվը* x_n *փոփոխականի համար մասնակի սահման է: Դրա համար պետք է առանձնացնել մի* $\{x_{n_i}\}$ *մասնակի հաջորդականություն, որը ձգտի* M* *թվին:*

Վերցնենք զրոյի ձգտող դրական թվերի հաջորդականություն՝ $\varepsilon_i \to 0$:

Ընդունելով $n_1=1$, *ենթադրենք, թե*

$$n_1=1<n_2<n_3<\cdots<n_{i-1}$$

համարներն արդեն ընտրված են և ցույց տանք, թե ինչպես պետք է ընտրել n_i-*ն: I հատկության համաձայն,* $\varepsilon=\varepsilon_i$ *թվի համար գտնենք* $N'=N_i$ *համապատասխան համարն այնպես, որ բոլոր* $n>N_i$ *դեպքում լինի* $x_n<M^*+\varepsilon_i$: *Այժմ դիմենք II հատկությանը, դարձյալ ընդունելով* $\varepsilon=\varepsilon_i$, *իսկ իբրև* N *ընդունելով* n_{i-1} *և* N_i *համարներից ամենամեծը.* ε *և* N *թվերի հենց այդպիսի ընտրությանն էլ համապատասխանում է* $n'=n_i$ *համարը: Նրա համար, մեկ կողմից՝*

$$x_{n_i}>M^*-\varepsilon_i,$$

մյուս կողմից, քանի որ $n_i > N_i$, միաժամանակ կունենանք նաև՝

$$x_{n_i} < M^* + \varepsilon_i.$$

Նշենք, բացի այդ, որ $n_i > n_{i-1}$։ Այդպես (ինդուկտիվ եղանակով) կառուցված հաջորդականության x_{n_i} էլեմենտների համար կունենանք՝

$$|x_{n_i} - M^*| < \varepsilon_i, \quad i = 2, 3, 4, \ldots,$$

այնպես որ, իսկապես $x_{n_i} \to M^*$։

Ցույց տանք, վերջապես, որ ոչ մի մասնակի սահման չի կարող գերազանցել M^* թիվը։ Իսկապես, ենթադրենք մի որոշ $\{x_{n_i}\}$ մասնակի հաջորդականության համար ունենք $x_{n_i} \to a$, այնպես որ a-ն արված վարիանտայի մասնակի սահմաններից մեկն է։ I հատկության համաձայն, բավականաչափ հեռու (N'-ից մեծ) համարների համար կլինի՝

$$x_{n_i} < M^* + \varepsilon.$$

Այստեղ անցնելով սահմանին, ստանում ենք՝

$$a \leqslant M^* + \varepsilon,$$

և, նկատի ունենալով ε-ի կամայական լինելը, վերջնականապես՝

$$a \leqslant M^*.$$

Այսպիսով, M^*-ն իսկապես կլինի ամենամեծ մասնակի սահմանը, այսինքն՝

$$M^* = \overline{\lim}\, x_n.$$

Նման եղանակով հաստատվում է փոքրագույն սահմանի գոյությունը։ Բոլոր դատողությունները չկրկնելով, նշենք հետևյալ երկու հանգամանքը.

Եթե այդ փոքրագույն սահմանը $+\infty$-ն է, ապա գոյություն ունի սովորական սահման և

$$\lim x_n = +\infty.$$

Իսկ եթե փոքրագույն սահմանը մի վերջավոր M_* թիվ է՝

$$M_* = \underline{\lim}\, x_n,$$

ապա նա ունի երկու հատկություններ, որոնք նման են M^* թվի համար վերևում բերված հատկություններին։

M_* թվի I հատկությունը. ինչպիսին էլ լինի $\varepsilon > 0$ թիվը. գոյություն ունի այնպիսի N'' համար, որ $n > N''$ դեպքում

$$x_n > M_* - \varepsilon.$$

M_* թվի II հատկությունը. ինչպիսին էլ լինեն $\varepsilon > 0$ թիվը ու N համարը. կգտնվի $n'' > N$ համարով այնպիսի $x_{n''}$ արժեք, որ՝

$$x_{n''} < M_* + \varepsilon.$$

Այժմ անցնենք թեորեմայի վերջին մասի ապացուցմանը: Եթե սովորական իմաստով

$$\lim x_n$$

սահման գոյություն ունի (վերջավոր կամ անվերջ, սակայն որոշակի նշանով), ապա բոլոր հնարավոր մասնակի սահմանները համընկնում են նրա հետ [40], այնպես որ արտահայտած պայմանի անհրաժեշտությունը ակնհայտ է:

Այժմ ենթադրենք, թե

$$\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n.$$

Եթե նրանց ընդհանուր արժեքը $+\infty$-ը կամ $-\infty$-ն է, ապա, ինչպես տեսանք, գոյություն ունի վարիանտայի սահման սովորական իմաստով, որը և ունի այդ նույն արժեքը:

Իսկ եթե, վերջապես, երկու սահմաններն էլ վերջավոր են՝

$$M^* = M_* = a,$$

Ապա, M^* և M_* թվերի 1 հատկությունները համադրելով, նախապես տված $\varepsilon>0$ թվի համար կգտնենք այնպիսի N համար, որ $n>N$ դեպքում կլինի՝

$$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon, \text{ այսինքն՝ } |x_n - a| < \varepsilon,$$

Որը և նշանակում է, որ a-ն x_n վարիանտայի սովորական սահմանն է: Թեորեման լրիվ ապացուցված է:

Նկատենք, որ այդ թեորեմայի օգնությամբ արդեն չափազանց հեշտությամբ է ապացուցվում Բոլցանո-Կոշիի պայմանի բավարարությունը [39]: Այսպես, եթե պահպանենք նախկին նշանակումները, ապա

$$x_{n'} - \varepsilon < x_n < x_{n'} + \varepsilon, \text{ երբ } n \text{ և } n' > N,$$

անհավասարություններից անմիջապես կեզրակացնենք, որ x_n վարիանտայի մեծագույն ու փոքրագույն սահմանները վերջավոր են և իրարից կարող են տարբերվել ոչ ավելի, քան 2ε-ով, հետևաբար, ε-ի կամայական լինելու շնորհիվ, նրանք համընկնում են: Այստեղից էլ բխում է սովորական վերջավոր սահմանի գոյությունը:

ԵՐԿՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§ 1. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԳԱՂԱՓԱՐԸ

43. ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԵՎ ՆՐԱ ՓՈՓՈԽՄԱՆ ՏԻՐՈՒՅԹԸ։ n° 22-ում *արդեն տրվել է ընդհանուր գաղափար փոփոխականի մասին։ x փոփոխականը տրվում է այն արժեքների $X=\{x\}$ բազմությամբ, որոնք նա ի վիճակի է ընդունել (դիտարկվող խնդրի մեջ)։ Այդ X-բազմությունը, որի մեջ x-ի յուրաքանչյուր արժեք հանդիպում է մեկ անգամ, կոչվում է x փոփոխականի* փոփոխման տիրույթ: *Ընդհանրապես, իբրև փոփոխականի փոփոխման տիրույթ կարող է ծառայել թվային ամեն մի բազմություն։*

Մենք արդեն ասել ենք, որ թվերը երկրաչափորեն մեկնաբանվում են որպես կետեր (թվային) առանցքի վրա։ x փոփոխականի փոփոխման X տիրույթն այդ առանցքի վրա պատկերացվում է կետերի որոշ բազմության տեսքով։ Այդ պատճառով սովորաբար x փոփոխականի թվային արժեքներն իրենք կոչվում են կետեր։

Հաճախ անհրաժեշտ է լինում գործ ունենալ այնպիսի n փոփոխականի հետ, որի համար փոփոխման տիրույթ է հանդիսանում բոլոր բնական թվերի X բազմությունը։ Օրինակ, $x_n=\frac{1+(-1)^n}{n}$ վարիանտայի համար փոփոխման տիրույթ կլինի $\frac{1}{2m}$ (երբ $m=1, 2, 3, \ldots$) տեսքի կոտորակների բազմությունը, ավելացրած նաև 0 թիվը։ Հաստատուն մեծության համար փոփոխման ամբողջ տիրույթը կազմված է մեկ թվից։

Սակայն անալիզի մեջ սովորաբար ուսումնասիրում են այնպիսի փոփոխականներ, որոնք փոփոխվում են, ինչպես ա-

սում են, ա ն ը ն դ հ ա տ կամ ա ն ը ն դ մ ե ջ. դրանց նախակերպարներն են ֆիզիկական մեծությունները՝ ժամանակը, շարժվող կետի անցած ճանապարհը և այլն։ Այդպիսի փոփոխականի համար փոփոխման տիրույթ ծառայում է թվային մ ի ջ ա կ ա յ ք ը։ Ամենից հաճախ այդ կլինի վ ե ր ջ ա վ ո ր միջակայք, սահմանափակված երկու a *և* b ($a<b$) *իրական թվերով՝ նրա ծայրերով, որոնք իրենք կարող են մտնել միջակայքի մեջ կամ ոչ, ըստ այնմ էլ մենք իրարից տարբերելու ենք հետևյալ դեպքերը՝*

փակ *միջակայք՝* $[a, b]$, *այսինքն՝* $a \leqslant x \leqslant b$
(երկու ծայրերը ներառյալ)

կիսաբաց *միջակայքեր՝* $\left\{ \begin{array}{l} (a, b], \text{ այսինքն՝ } a<x\leqslant b \\ [a, b), \text{ այսինքն՝ } a\leqslant x<b \end{array} \right.$
(միայն մեկ ծայրը ներառյալ),

բաց *միջակայք՝* (a, b), *այսինքն՝* $a<x<b$
(ոչ մի ծայրը չի ներառված)։

Բոլոր դեպքերում միջակայքի երկարություն կոչվում է $b - a$ *թիվը։*

Թվային միջակայքի երկրաչափական անալոգը, ինչպես հեշտ է հասկանալ, թվային առանցքի հատվածն է, ընդ որում, նայած միջակայքի տեսակին, հատվածի ծայրերը նույնպես կամ կպատկանեն հատվածին, կամ ոչ։

Հարկավոր է լինում ուսումնասիրել նաև ա ն վ ե ր ջ միջակայքեր, որոնց համար իբրև մեկ ծայր կամ երկուսն էլ ծառայում են $-\infty$, $+\infty$ *«անիսկական թվերը»։ Դրանց նշանակումները նման են վերը բերված նշանակումներին։ Օրինակ,* $(-\infty, +\infty)$*-ը՝ բոլոր իրական թվերի բազմությունն է.* $(a, +\infty)$*-ը նշանակում է այն* x *թվերի բազմությունը, որոնք բավարարում են* $x>a$ *անհավասարությանը։* $(-\infty, b]$ *միջակայքը որոշվում է* $x\leqslant b$ *անհավասարությամբ։ Անվերջ միջակայքերը երկրաչափորեն պատկերացվում են դեպի երկու կողմերն անվերջ շարունակվող ուղղի կամ ճառագայթի տեսքով։*

44. ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ԿԱԽՈՒՄ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ։ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ *Մաթեմատիկական անալիզի մեջ ուսումնասիրության գլխավոր առարկան, սակայն, հանդիսանում է ոչ թե մեկ փոփոխականի ինքնուրույն փոփոխությունը, այլ կախումն երկու կամ մի քանի փոփոխականների միջև՝ նրանց հ ա մ ա տ ե ղ փ ո փ ո խ մ ա ն ժամանակ։ Այստեղ մենք կսահմանափակվենք պարզագույն դեպքով, երբ ունենք երկու փոփոխական։*

Գիտության ու կյանքի բնագավառներում,—հենց մաթեմատիկայի, ֆիզիկայի, տեխնիկայի մեջ,—ընթերցողը հաճախ է հանդիպել այդպիսի համատեղ փոփոխվող փոփոխականների։ Նրանք միաժամանակ չեն կարող ընդունել ցանկացած զույգ արժեքներ (իրենց փոփոխման տիրույթներից)․ եթե նրանցից մեկին (անկախ փոփոխականին) տված է որոշակի արժեք, ապա դրանով հենց որոշվում է մյուսի (կախյալ փոփոխականի կամ ֆունկցիայի) արժեքը։ Բերենք մի քանի օրինակներ։

1) Շրջանի Q մակերեսը նրա R շառավղի ֆունկցիա է. նրա արժեքը կարելի է հաշվել շառավղի տված արժեքով՝

$$Q=\pi R^2$$

հայտնի բանաձևի օգնությամբ։

2) Ծանր նյութական կետի ազատ անկման դեպքում, երբ բացակայում է դիմադրությունը, շարժման սկզբից հաշված t ժամանակը (վայրկյաններով) և այդ ժամանակամիջոցում անցած s ճանապարհը (մետրերով) կապված են՝

$$s=\frac{gt^2}{2}$$

հավասարումով, որտեղ $g=9{,}81\ \frac{\text{մետր}}{\text{վրկ}^2}$ հանդիսանում է ծանրության ուժի արագացումը։ Այդ հավասարումից որոշվում է s-ի այն արժեքը, որը համապատասխանում է ժամանակի t պահին։ s ճանապարհը հանդիսանում է անցած ժամանակի ֆունկցիա։

3) Դիտարկենք գլանի մխոցի տակ գտնվող իդեալական գազի որոշ զանգված։ Ենթադրելով, որ ջերմաստիճանը պահվում է անփոփոխ, գազի այդ զանգվածի v (լիտր) ծավալը և p (ատմոսֆերա) ճնշումը ենթարկվում են Բոյլ-Մարիոտի օրենքին՝

$$pv=c=\text{const}։$$

Եթե v-ն կամայական կերպով փոփոխենք, ապա p-ն, որպես v-ի ֆունկցիա, ամեն անգամ միարժեք կերպով կորոշվի

$$p=\frac{c}{v}$$

բանաձևով։

4) Վերջապես, կանգ առնենք նաև օդի p (ատմ.) ճնշման և տեղի՝ ծովի մակերևույթից ունեցած h (մետր) բարձրության միջև եղած առնչության վրա։ Ֆիզիկայի մեջ արտածվում է

$$p = p_0 e^{-kh}$$

բարոմետրական բանաձևը, որտեղ p_0-ն՝ օդի ճնշումն է ծովի մակերևույթի վրա, իսկ k-ն որոշ հաստատուն է։ Այդ բանաձևով էլ որոշվում է p-ի, որպես h-ի ֆունկցիայի, արժեքը։

Այստեղ ևս թե նկատենք, որ դիտարկվող երկու փոփոխականներից անկախ փոփոխականի ընտրությունը երբեմն լինում է ըստ ցանկության կամ պարզապես կապված է լինում հարմարության հետ։ Բայց մեծ մասամբ այդ թելադրվում է կատարվող ուսումնասիրության նպատակադրումով։

Օրինակ, եթե վերջին օրինակի մեջ p ճնշման և h բարձրության միջև առնչությունն օգտագործվում է նրա համար, որպեսզի օդաչուին հնարավորություն տրվի տեսանելի ճնշման միջոցով որոշել, թե ինչ բարձրության է հասել, ապա, բնականաբար, պետք է փոփոխականների դերերը փոխել և բարոմետրական բանաձևը գրել հետևյալ տեսքով՝

$$h = \frac{1}{k} \log \frac{p_0}{p}.$$

45. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԳԱՂԱՓԱՐԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ։ Այժմ վերանանք, ինչպես սովորաբար, դիտարկվող մեծությունների ֆիզիկական իմաստից և տանք մաթեմատիկական անալիզի հիմնական գաղափարներից մեկի՝ ֆունկցիայի գաղափարի ընդհանուր ճշգրիտ սահմանումը։

Դիցուք տված են երկու փոփոխականներ՝ x և y, որոնց փոփոխման տիրույթներն են X և Y։ Ենթադրենք, թե խնդրի պայմաններով x փոփոխականին կարելի է վերագրել X տիրույթից կամավոր արժեք առանց որևէ սահմանափակման։ Այդ դեպքում *y* փոփոխականը կոչվում է *x* փոփոխականի ֆունկցիա նրա փոփոխման *X* տիրույթում, եթե *x*-ի՝ *X*-ից վերցրած յուրաքանչյուր արժեքի որևէ կանոնով կամ օրենքով համապատասխանեցվում է *y*-ի մի որոշակի արժեք *Y*-ից:

x անկախ փոփոխականը կոչվում է նաև ֆունկցիայի արգումենտ:

Այս սահմանման մեջ էական են երկու հանգամանք. առաջինը՝ x արգումենտի փոփոխման X տիրույթը ցույց տալը (վերջինս անվանում են ֆունկցիայի որոշման տիրույթ*) և երկրորդը՝ x և y փոփոխականների արժեքների համապատասխանության կանոնը կամ օրենքը հաստատելը։ (y ֆունկցիայի փոփոխման Y տիրույթը սովորաբար ցույց չի տրվում, քանի որ համապատասխանեցման օրենքն ինքն արդեն որոշում է ֆունկցիայի ստանալիք արժեքների բազմությունը)։*

Կարելի է ֆունկցիայի գաղափարը սահմանելիս կանգնել ավելի ընդհանուր տեսակետի վրա, թույլատրելով, որ X-ից վերցրած յուրաքանչյուր x արժեքին համապատասխանի y-ի ոչ թե մեկ, այլ մի քանի արժեքներ (նույնիսկ անվերջ բազմությամբ արժեքներ)։ Նման դեպքերում ֆունկցիան անվանում են բ ա զ մ ա ր ժ ե ք, ի տարբերություն վերևում սահմանված մ ի ա ր ժ ե ք ֆունկցիայից։ Ի միջի այլոց, անալիզի դասընթացում, որը կանգնած է իրական փոփոխականի տեսակետի վրա, խուսափում են բազմարժեք ֆունկցիաներից. հետագայում, ֆունկցիայի մասին խոսելիս, եթե հակառակը չի ասվի, մենք միշտ կհասկանանք մ ի ա ր ժ ե ք ֆունկցիա։

Նշելու համար այն փաստը, որ y-ը x-ի ֆունկցիա է, գրում են՝

$$y=f(x),\quad y=\varphi(x),\quad y=F(x)$$ *և այլն*։*

f, φ, F, ... *տառերը բնութագրում են հենց այն կանոնը, որով ստացվում է y-ի՝ տված x-ին համապատասխանող արժեքը։ Այդ պատճառով, երբ միաժամանակ ուսումնասիրվում են միևնույն x արգումենտից կախված տ ա ր բ ե ր ֆունկցիաներ, որոնք x-ի հետ կապված են համապատասխանության տ ա ր բ ե ր օրենքներով, այդ ֆունկցիաները չպետք է նշանակել միևնույն տառով։*

Չնայած հենց «էֆ» տառն է (տարբեր լեզուներում) կապված «ֆունկցիա» բառի հետ, սակայն ֆունկցիոնալ կախումը նշելու համար, հասկանալի է, կարելի է օգտագործել նաև ամեն մի այլ տառ. երբեմն նույնիսկ կրկնում են միևնույն y տառը՝ $y=y(x)$։

---

* *Այդ գրությունները կարդում են այսպես՝ «իգրեկը հավասար է էֆ իքսից», «իգրեկը հավասար է ֆի իքսից», և այլն։*

Որոշ գրքերում արգումենտը գրում են ֆունկցիայի մանշանիկի տեսքով, օրինակ՝ y_x։ Այդ տիպի նշանակում է *վարիանտայի* մեր սովորական x_n նշանակումը, որը հանդիսանում է (ինչպես այժմ կարող ենք ասել) ֆունկցիա «անկախ փոփոխական» n-ի, որը հերթով ընդունում է $N=\{n\}$ բնական թվային արժեքները։ Նույն ձևով N համարի համար (որը մասնակցում է վարիանտայի սահմանի սահմանման մեջ, 23) N_ε նշանակումը ընդգծում է նրա կախումը ε-ից, և այլն։

Եթե, դիտարկելով, ասենք՝ $y=f(x)$, ֆունկցիան, մենք ցանկանում ենք նշել նրա այն *մասնավոր* արժեքը, որը համապատասխանում է x-ի ընտրված x_0 մասնավոր արժեքին, ապա այդ արժեքը նշանակելու համար օգտագործում են $f(x_0)$ սիմվոլը։ Օրինակ, եթե

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad g(t)=\frac{10}{t},\quad h(u)=\sqrt{1-u^2},\ \ldots,$$

ապա $f(1)$-ը նշանակում է $f(x)$ ֆունկցիայի թվային արժեքը $x=1$ դեպքում, այսինքն՝ պարզապես $\frac{1}{2}$ *թիվը*։ Նմանապես, $g(5)$-ը նշանակում է 2 *թիվը*, $h\left(\frac{3}{5}\right)$-ը նշանակում է $\frac{4}{5}$ *թիվը*, և այլն։

Այժմ անցնենք փոփոխականների արժեքների *համապատասխանեցման կանոնին* կամ *օրենքին*, որը ֆունկցիոնալ կախման գաղափարի էությունն է կազմում։ Այդ կանոնը կարող է լինել ամենատարբեր բնույթի, որքանով որ այն ոչնչով չի սահմանափակվել։

Ամենից պարզ և բնական է թվում այդ կանոնի իրականացումն *անալիտիկ արտահայտության* կամ *բանաձևի* տեսքով, որը ցույց է տալիս այն օպերացիաները կամ գործողությունները, որոնք պետք է կատարել հաստատուն թվերի և x-ի արժեքի հետ՝ y-ի համապատասխան արժեքն ստանալու համար։ Ֆունկցիան տալու այդ *անալիտիկ եղանակը* մաթեմատիկական անալիզի համար հանդիսանում է ամենակարևորը (մենք դրան դեռ կանդրադառնանք հետևյալ n°-ում)։ Դրա հետ ընթերցողը ամենից լավ է ծանոթ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացից. վերջապես n° 44-ում բերված օրինակներում մենք օգտվեցինք *հենց անալիտիկ եղանակից*։

Սակայն սխալ կլիներ կարծել, թե այդ՝ ֆունկցիան տալու միակ եղանակն է։ Հենց մաթեմատիկայի մեջ բազմաթիվ չեն այն դեպքերը, երբ ֆունկցիան որոշվում է առանց բանաձևի օգնության։ Այդպիսին է, օրինակ, $E(x)$ ֆունկցիան՝ «x թվի ամբողջ մասը*»։ Չնայած $E(x)$ արտահայտության համար ոչ մի բանաձև մենք չունենք, բայց հեշտ է հասկանալ, որ՝

$$E(1)=1,\quad E(2{,}5)=2,\quad E(\sqrt{13})=3,\quad E(-\pi)=-4,$$ և այլն։

Այդպիսին են նաև բազմաթիվ «թվաբանական ֆունկցիաներ», այսինքն՝ բնական արգումենտից կախված ֆունկցիաներ, որոնք իրենք ևս ընդունում են միայն բնական արժեքներ։ Որպես օրինակ հիշեցնենք «n թվի ֆակտորիալի» մասին՝

$$n! = 1\,.\,2\,.\,3\ldots n,$$

ինչպես նաև $\tau(n)$ ֆունկցիայի մասին, որը ներկայացնում է n թվի բաժանարարների թիվը, կամ՝ $\varphi(n)$ ֆունկցիայի մասին, որը ցույց է տալիս թե $1, 2, 3\ldots n$ թվերի շարքի մեջ՝ n-ի նկատմամբ փոխադարձ պարզ քանի թիվ կա։ Չնայած այդ ֆունկցիաները տալու կանոնների յուրահատուկ բնույթին, այնուամենայնիվ նրանք թույլատրում են հաշվել ֆունկցիայի արժեքները նույնպիսի որոշակիությամբ, ինչպես բանաձևերը։ Օրինակ, ունենք՝

$$\tau(10)=4,\quad \tau(12)=6,\quad \tau(16)=5,\ldots$$
$$\varphi(10)=4,\quad \varphi(12)=4,\quad \varphi(16)=8,\ldots$$

Բնական գիտությունների և տեխնիկայի մեջ մեծությունների միջև կախումն հաճախ որոշվում է փորձնականորեն կամ դիտումների միջոցով։ Օրինակ, եթե ջուրը ենթարկենք կամայապես ընտրած p (մթն.) ճնշման, ապա փորձի միջոցով կարելի է որոշել ջրի եռման համապատասխան Θ (°C) ջերմաստիճանը. Θ-ն p-ի ֆունկցիա է։ Սակայն այդ ֆունկցիոնալ կապը տրվում է ոչ թե բանաձևով, այլ միայն աղյուսակով, որտեղ պարզապես զուգադրված են փորձից ստացված տվյալները։ Ֆունկցիայի տրման աղյուսակային եղանակի օրինակներ կարելի է գտնել յուրաքանչյուր տեխնիկական տեղեկագրքի մեջ։

---

* Տես 87-րդ էջի ծանոթությունը։

Վերջապես, հիշեցնենք նաև, որ որոշ դեպքերում (ինքնագիր գործիքների օգնությամբ) ֆիզիկական մեծությունների ֆունկցիոնալ առնչությունը տրվում է անմիջապես գ ր ա ֆ ի կ ի միջոցով։ Օրինակ, «ինդիկատորական դիագրաման», որը գծվում է ինդիկատորի միջոցով, տալիս է գոլորշու v *ծավալի և* p *ճնշման կապն աշխատող շոգեմեքենայի գլանի մեջ. «բարոգրամ»-ը, որը գծվում է բարոգրաֆով, ներկայացնում է ատմոսֆերային ճնշման օրական ընթացքը, և այլն։*

Մենք մանրամասն կանգ չենք առնի ֆունկցիոնալ առնչության աղյուսակի կամ գրաֆիկի միջոցով տալու եղանակների վրա, որովհետև մաթեմատիկական անալիզի մեջ այդ եղանակից օգտվելու հարկ չի լինում։

46. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՏՐՄԱՆ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ԵՂԱՆԱԿԸ։ ***Ֆունկցիան*** *ա ն ա լ ի տ ի կ ա ր տ ա հ ա յ տ ո ւ թ յ ա ն կամ բ ա ն ա ձ և ի միջոցով տալու վերաբերյալ անենք մի շարք պարզաբանիչ դիտողություններ, որոնք բացառիկ կարևոր դեր են խաղում մաթեմատիկական անալիզի մեջ։*

1° ամենից առաջ՝ ինչպիսի՞ ա ն ա լ ի տ ի կ օ պ ե ր ա ց ի ա ն ե ր կամ գ ո ր ծ ո ղ ո ւ թ յ ո ւ ն ն ե ր կարող են մտնել այդ բանաձևերի մեջ։ Առաջին հերթին այստեղ հասկացվում են տարրական հանրահաշվի և եռանկյունաչափության մեջ ուսումնասիրված օպերացիաները, այն է՝ թվաբանական գործողությունները, աստիճան բարձրացնելը (և արմատ հանելը), լոգարիթմելը, անկյուններից՝ նրանց եռանկյունաչափական մեծություններին անցնելը և հակադարձը [տես ստորև 48—51]։ Սակայն, և կարևոր է նշել այդ, մեր գիտելիքներն անալիզից զարգացնելու հետ միասին, այդ օպերացիաներին կավելանան նաև նոր օպերացիաներ. այդպիսին է առաջին հերթին սահմանային անցումը, որի հետ ընթերցողն արդեն ծանոթ է առաջին գլխից։

Այսպիսով «անալիտիկ արտահայտություն» կամ «բանաձև» տերմինի լրիվ բովանդակությունը կբացահայտվի միայն աստիճանաբար։

2° Երկրորդ դիտողությունը վերաբերում է անալիտիկ արտահայտության կամ բանաձևի միջոցով ֆունկցիայի ո ր ո շ մ ա ն տ ի ր ո ւ յ թ ի ն։

x *արգումենտ պարունակող յուրաքանչյուր անալիտիկ արտահայտություն ունի, այսպես ասած, կիրառման բ ն ա կ ա ն տիրույթ. այդ՝* x*-ի բ ո լ ո ր այն արժեքների բազմությունն է,*

որոնց համար այդ արտահայտությունն իմաստ ունի, այսինքն՝ ունի միանգամայն որոշակի, վերջավոր, իրական արժեք: Վերջինս պարզաբանենք պարզ օրինակներով:

Այսպես, $\frac{1}{1+x^2}$ արտահայտության համար այդպիսի տիրույթ կլինի իրական թվերի ամբողջ բազմությունը: $\sqrt{1-x^2}$ արտահայտության համար այդ տիրույթը բերվում է $[-1,1]$ փակ միջակայքին, որից դուրս նրա արժեքները դադարում են իրական լինել: Ընդհակառակը, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ արտահայտության համար որպես կիրառման բնական տիրույթ պետք է վերցնել $(-1, 1)$ բաց միջակայքը, որովհետև այդ միջակայքի ծայրերում հայտարարը դառնում է 0: Երբեմն, այն արժեքների տիրույթը, որոնց համար տրված արտահայտությունն իմաստ ունի, բաղկացած է անջատված միջակայքերից. Օրինակ՝ $\sqrt{x^2-1}$-ի համար դրանք կլինեն $(-\infty, -1]$ և $[1, +\infty)$ միջակայքերը, իսկ $\frac{1}{x^2-1}$-ի համար՝ $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ և $(1, +\infty)$ միջակայքերը, և այլն*:

Իբրև վերջին օրինակ, դիտարկենք՝

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\ldots=\lim(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})$$

անվերջ երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարը: Եթե $|x|<1$, ապա, ինչպես գիտենք [25,(7)], այդ սահմանը գոյություն ունի և նրա արժեքն է $\frac{1}{1-x}$: Երբ $|x|>1$, առաջին n անդամների՝

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=\frac{x^n-1}{x-1}$$

գումարը n-ի մեծացման հետ կձգտի ∞ [27]. Նույնը կլինի նաև $x=1$ դեպքում: Վերջապես, երբ $x=-1$, ապա $1-1+1-\ldots+(-1)^{n-1}$ գումարը, հերթականությամբ հավասարվելով կամ 0-ի կամ 1-ի, ոչ մի սահմանի չի ձգտում: Այսպիսով, վերոհիշյալ անալիտիկ արտահայտության համար կիրառման բնական տիրույթ կլինի $(-1, 1)$ բաց միջակայքը:

Հետագա շարադրման ժամանակ հարկավոր կլինի ուսումնասիրել ինչպես ավելի բարդ, այնպես և ավելի ընդհանուր անալիտիկ արտահայտություններ, և հաճախ պիտի զբաղվենք այդպիսի արտահայտությամբ տրված ֆունկցիայի հատկությունների ուսումնասիրությամբ այն ամբողջ տիրույթում, որտեղ

---

* Մեզ համար, հասկանալի է, հետաքրքրություն չեն ներկայացնում այնպիսի արտահայտություններ, որոնք x-ի ոչ մի արժեքի համար, ընդհանրապես, իմաստ չունեն:

այդ արտահայտությունն իմաստ ունի, այսինքն՝ պետք զբաղվենք հենց անալիտիկ ապարատի ուսումնասիրությամբ։

Սակայն հնարավոր է և այլ դրություն, որի վրա հարկ ենք համարում նախապես հրավիրել ընթերցողի ուշադրությունը։ Ենթադրենք, թե որևէ կոնկրետ խնդիր, որի մեջ x փոփոխականն ըստ խնդրի էության սահմանափակված է փոփոխման $\mathcal{X}$ տիրույթով, բերվել է մի $f(x)$ ֆունկցիայի դիտարկման, որն ունի անալիտիկ արտահայտություն։ Թեկուզ և կարող է պատահել, որ այդ արտահայտությունն իմաստ ունենա նաև $\mathcal{X}$ տիրույթից դուրս, սակայն, հասկանալի է, որ նրա սահմաններից դուրս գալ այնուամենայնիվ չի կարելի։ Այստեղ անալիտիկ արտահայտությունը ունի ենթարկվող, օժանդակ դեր։

Օրինակ, եթե, ուսումնասիրելով երկրի մակերևույթից h բարձրության վրա գտնվող ծանր նյութական կետի ազատ անկումը, մենք դիմում ենք

$$S=\frac{gt^2}{2}$$

բանաձևին [44,2], ապա անիմաստ կլիներ դիտարկել t-ի բացասական արժեքները, կամ այն արժեքները, որոնք մեծ են $T=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ արժեքից, որովհետև, ինչպես հեշտ է տեսնել, $t=T$ պահին կետն ընկնում է գետին։ Եվ այդ՝ չնայած այն հանգամանքին, որ $\frac{gt^2}{2}$ արտահայտությունն իմաստ ունի t-ի բոլոր իրական արժեքների համար։

3° Կարող է պատահել, որ ֆունկցիան արգումենտի բոլոր արժեքների համար միևնույն բանաձևի միջոցով չորոշվի, այլ որոշ արժեքների համար մի բանաձևի, իսկ այլ արժեքների համար՝ մի այլ բանաձևի միջոցով։ Որպես այդպիսի ֆունկցիայի օրինակ կարող է ծառայել հետևյալ երեք բանաձևերի միջոցով $(-\infty, +\infty)$ միջակայքում որոշվող ֆունկցիան՝

$f(x)=1$, եթե $|x|>1$ (այսինքն՝ եթե կամ $x>1$, կամ $x<-1$),
$f(x)=-1$, եթե $|x|<1$ (այսինքն՝ եթե $-1<x<1$),

և, վերջապես, $f(x)=0$, եթե $x=\pm 1$։

Հիշենք նաև Դիրիխլեի (P. Q. Lejeune-Dirichlet) ֆունկցիան, որը որոշվում է այսպես՝

$\chi(x)=1$, եթե x-ը ռացիոնալ է,
$\chi(x)=0$, եթե x-ն իռացիոնալ է։

Վերջապես, հետևելով Կրոնեկերին (L. Kronecker), դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան, որը նա անվանել է սիգնում x* և նշանակել է sgn x, այն է՝

$$\operatorname{sgn} x = 1, \quad \text{եթե } x > 0;$$
$$\operatorname{sgn} x = -1, \quad \text{եթե } x < 0;$$
$$\operatorname{sgn} 0 = 0:$$

Ի միջի այլոց չպետք է կարծել, թե *սկզբունքային* տարբերություն կա x-ի բոլոր արժեքների համար մեկ բանաձևով տված ֆունկցիայի և այն ֆունկցիայի միջև, որի որոշումը օգտագործում է մի քանի բանաձևեր: Մի քանի բանաձևերով տրված ֆունկցիան, սովորաբար (իհարկե արտահայտությունների որոշ բարդացման գնով) կարող է տրվել նաև մեկ բանաձևով:

Օրինակ, եթե ներգրավենք սահմանային անցման օպերացիան, ապա վերևում բերված ֆունկցիաներից առաջինը, f(x)-ը, կարող է տրվել մեկ բանաձևով, x-ի բոլոր արժեքների համար միանգամից, այսպես՝

$$f(x) = \lim \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1},$$

Իրոք, եթե $|x| > 1$, ապա $x^{2n} \to +\infty$, իսկ վերջինիս հակադարձ մեծությունը ձգտում է զրոյի [27], այնպես, որ

$$\lim \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} = \lim \frac{1-\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}} = 1,$$

Եթե $|x| < 1$, ապա $x^{2n} \to 0$ [25.6], և այդ դեպքում՝

$$\lim \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} = -1,$$

Իսկ եթե $x = \pm 1$, ակնհայտ է, որ $x^{2n} = 1$, որտեղից՝

$$\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} = 0,$$

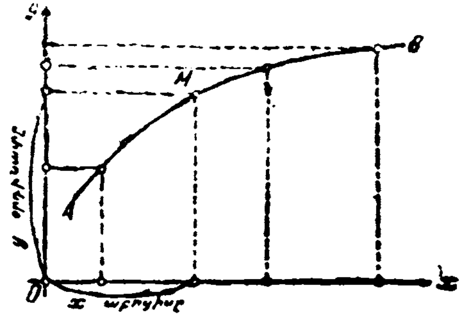
և սահմանում էլ կստացվի 0: Այս բոլորը լրիվ համապատասխանում է f(x)-ի վերևում բերված որոշմանը:

---

* Լատիներեն signum = նշան:

47. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԳՐԱՖԻԿԸ։ *Թեպետև մաթեմատիկական անալիզի մեջ ֆունկցիաները գրաֆիկորեն չեն տրվում, սակայն ֆունկցիայի գրաֆիկական պատկերացմանը միշտ դիմում են։ Գրաֆիկի պարզ դիտողականությունն ու զննականությունը նրան դարձնում են ֆունկցիայի հատկությունները ուսումնասիրելու անփոխարինելի օժանդակ միջոց։*

Դիցուք, մի որոշ X *միջակայքում տված է* $y=f(x)$ *ֆունկցիան։ Հարթության վրա պատկերացնենք երկու փոխադարձաբար ուղղահայաց կոորդինատային առանցքներ՝* x*-երի և* y*-ների առանցքները։ Դիտարկենք* x*-ի և* y*-ի մի զույգ համապատասխան արժեքներ, որտեղ* x*-ը վերցրած է* X *միջակայքից, իսկ* $y=f(x)$*․ այդ զույգի պատկերը հարթության վրա կհանդիսանա* $M(x, y)$ *կետը, որի աբսցիսը* x *է, իսկ օրդինատը՝* y*։ Երբ* x *փոփոխականը փոփոխվում է իր միջակայքի սահմաններում, այդ կետը գծում է մի որոշ* AB *կոր (գծ. 5), որը և հանդիսանում է մեր ֆունկցիայի երկրաչափական պատկերը և կոչվում է նրա գրաֆիկ։ Այս դեպքում* $y=f(x)$ *հավասարումն անվանում են* AB *կորի հավասարում։*



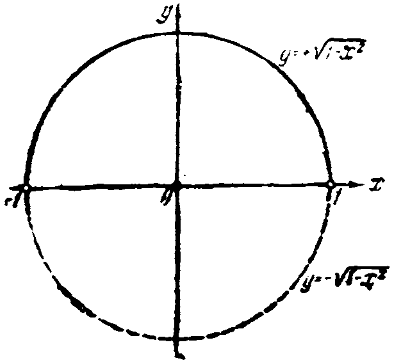
Գծ. 5.

Օրինակ, 6-րդ և 7-րդ գծագրերի վրա ներկայացված են

$$y=\pm\sqrt{1-x^2} \quad \text{և} \quad y=\pm\sqrt{x^2-1}$$
$$(|x|<1) \qquad\qquad (|x|\geq 1)$$

ֆունկցիաների գրաֆիկները։ Ընթերցողը կնկատի, որ այդ գծագրերից առաջինը շրջանագիծ է, իսկ երկրորդը՝ հավասարասրունք հիպերբոլ։ Ֆունկցիան գրաֆիկորեն պատկերացնելու շատ այլ օրինակներ ընթերցողը կգտնի մոտակա n°*-երում։*

Սովորաբար գրաֆիկը կառուցվում է կետերի միջոցով։ X միջակայքից վերցնում են x-ի մի շարք իրար մոտ



Գծ. 6.

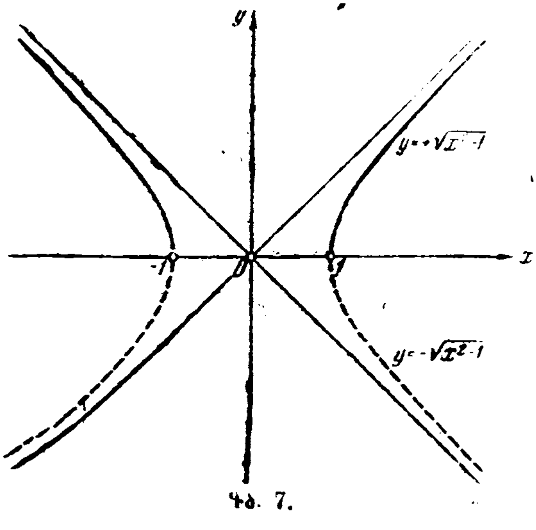
գտնվող արժեքներ, $y=f(x)$ *բանաձևով հաշվում են* y-*ի համապատասխան արժեքները՝*

$x=$	x_1	x_2	x_3	. . .	x_n
$y=$	y_1	y_2	y_3	. . .	y_n

և գծագրի վրա նշում

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3),\ \ldots,\ (x_n, y_n)$$

կետերը։

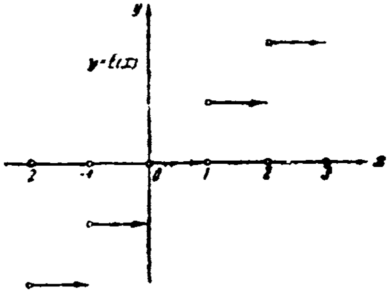


Գծ. 7.

Ձեռքի կամ լեկալի միջոցով այդ կետերով անց են կացնում կոր, որը (իհարկե, միայն որոշ մոտավորությամբ) տալիս է որոնելի գրաֆիկը։ Որքան ավելի սահուն է գրաֆիկի ընթացքը և որքան ավելի խիտ են նրա վրա վերցրած կետերը, գծած կորն այնքան ավելի մեծ ճշգրտությամբ է պատկերում այդ գրաֆիկը։

Պետք է նկատել, որ չնայած միշտ կարելի է «պատկերացնել» ֆունկցիայի երկրաչափական պատկերը, բայց միշտ չէ, որ այդ պատկերը կլինի սովորական, ինտուիտիվ, իմաստով կոր։

Օրինակ, կառուցենք $y=E(x)$ *ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Քանի որ* ... $[-2, -1)$, $[-1, 0)$, $[0, 1)$, $[1, 2)$, $[2, 3)$... *միջակայքերում ֆունկցիան պահպանում է* ..., −2, −1, 0, 1, 2, ... *հաստատուն արժեքները, հետևապես, գրաֆիկը կազմված կլինի մի շարք իրարից անջատված հորիզոնական հատվածներից, որոնք զրկված են աջ ծայրակետերից (գծ. 8)**։ *Դիրիխլեի* $\chi(x)$



Գծ. 8.

ֆունկցիայի գրաֆիկը կազմված է x-երի առանցքի վրա գտնվող իռացիոնալ աբսցիսներ ունեցող կետերի բազմությունից և այն կետերի բազմությունից, որոնք գտնվում են $y=1$ *ուղղի վրա և ունեն ռացիոնալ աբսցիսներ. այդ գրաֆիկը պատկերացնել էլ հնարավոր չէ։*

48. ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԿԱՐԵՎՈՐԱԳՈՒՅՆ ԴԱՍԵՐԸ։ *Այստեղ թվենք ֆունկցիաների մի քանի դասեր, որոնք ստացել են* տարրական *ֆունկցիաներ անունը։*

1° Ամբողջ և կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիաներ։

Այն ֆունկցիան, որը ներկայացվում է x տառի նկատմամբ ամբողջ բազմանդամով (պոլինոմով)՝

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

---

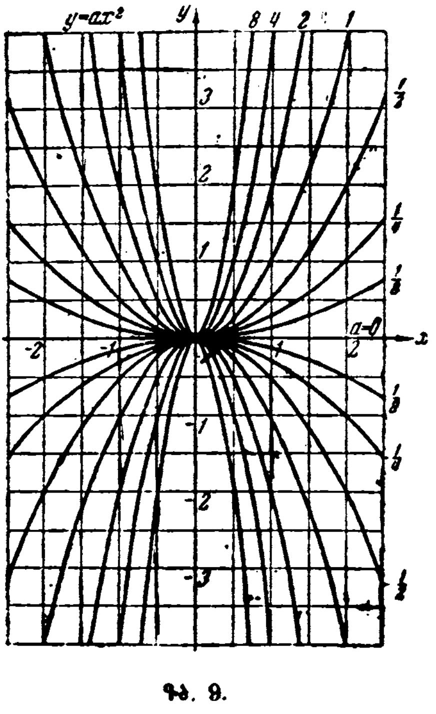
* *Այդ հանգամանքը նշվում է սլաքներով, որոնք իրենց սուր ծայրերով ցույց են տալիս գրաֆիկին չպատկանող կետերը։*

(a_0, a_1, a_2, ... թվերը հաստատուն են), կոչվում է ամբողջ ռացիոնալ ֆունկցիա։

Երկու այդպիսի բազմանդամների (պոլինոմների) հարաբերությունը՝

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} x + b_m}$$

կոչվում է կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիա։ Նա որոշված է x-ի բոլոր արժեքների համար, բացի այն արժեքներից, որոնք հայտարարը դարձնում են զրո։



Գծ. 9.

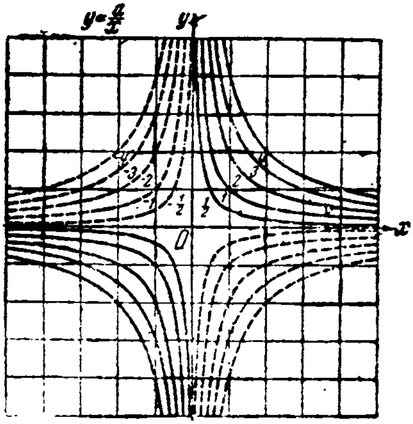
Որպես օրինակ, 9-րդ գծագրի վրա տրված են $y = ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկները a գործակցի տարբեր արժեքների դեպքում (պարաբոլներ), իսկ 10-րդ գծագրի վրա տրված են $y = \frac{a}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկները, դարձյալ a-ի տարբեր արժեքների համար (հավասարասրուն հիպերբոլներ)։

2° **Աստիճանային ֆունկցիա**:

Այսպես է կոչվում

$$y = x^{\mu}$$

տեսքի ֆունկցիան, որտեղ μ*-ն որևէ հաստատուն իրական թիվ է։ Երբ* μ*-ն ամբողջ է, ստացվում է ռացիոնալ ֆունկցիա։ Երբ*



Գծ. 10.

μ*-ն կոտորակ է, մենք կունենանք արմատ։ Ենթադրենք, օրինակ,* m*-ը բնական թիվ է և*

$$y = x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x}.$$

այս ֆունկցիան որոշված է x*-ի բոլոր արժեքների համար, եթե միայն* m*-ը կենտ է, իսկ եթե* m*-ը զույգ է, ապա նա որոշված է* x*-ի միայն ոչ բացասական արժեքների համար (այս դեպքում ինկատի ունենք արմատի միայն թվաբանական արժեքը)։ Վերջապես, եթե* μ*-ն իռացիոնալ թիվ է, մենք ենթադրելու ենք* $x>0$ *(*$x = 0$ *արժեքը թույլատրվում է միայն այն դեպքում, երբ* $\mu>0$*)։*

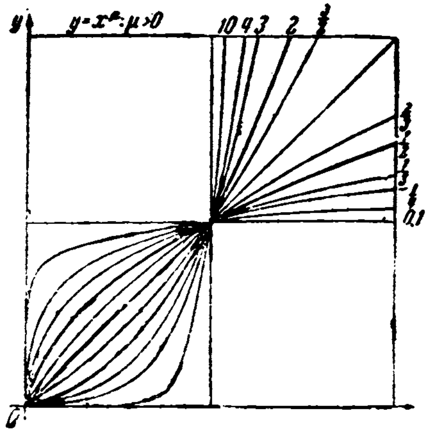
11-րդ և 12-րդ գծագրերի վրա տրված են աստիճանային ֆունկցիայի գրաֆիկները μ*-ի տարբեր արժեքների համար։*

3° **Ցուցչային ֆունկցիա**, *այսինքն՝*

$$y = a^{x}$$

տեսքի ֆունկցիա, որտեղ a*-ն (մեկից տարբեր) դրական թիվ է, իսկ* x*-ն ընդունում է ամեն մի իրական արժեք։*

a-ի տարբեր արժեքների համար ցուցչային ֆունկցիայի գրաֆիկները տրված են 13-րդ գծագրի վրա։

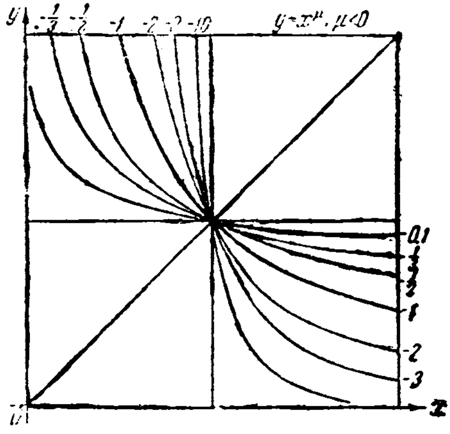


Գծ. 11.

4° **Լոգարիթմական ֆունկցիա**, *այսինքն՝*

$$y=\log_a x$$

տեսքի ֆունկցիա, որտեղ a-ն, ինչպես և վերևում, դրական թիվ է (մեկից տարբեր), իսկ x-ն ընդունում է միայն դրական արժեքներ։

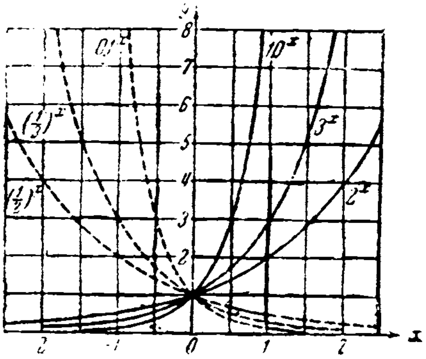


Գծ. 12.

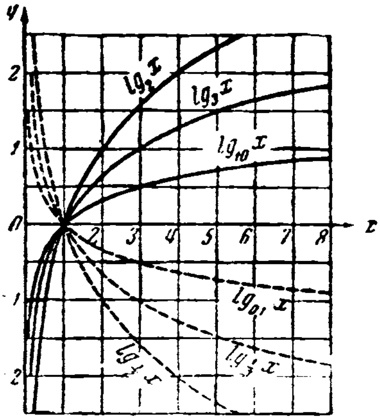
14-րդ գծագրի վրա տրված են այդ ֆունկցիայի գրաֆիկները a-ի տարբեր արժեքների համար։

5° **Եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ՝**

$$y = \sin x,\quad y = \cos x,\quad y = \operatorname{tg} x,$$
$$y = \operatorname{ctg} x,\quad y = \sec x,\quad y = \operatorname{cosec} x.$$



Գծ. 13



Գծ. 14.

Շատ կարևոր է մեկ ընդմիշտ յուրացնել, որ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արգումենտները, եթե դրանք դիտում ենք որպես անկյան չափեր, այդ անկյունները միշտ արտահայտում են *ռ ա դ ի ա ն ն ե ր ո՛վ (եթե հակառակ վերապահում չի կատարված)։* $\operatorname{tg} x$*-ի և* $\sec x$*-ի համար բացառվում են* $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ *տեսք ունեցող արժեքները, իսկ* $\operatorname{ctg} x$*-ի և* $\operatorname{cosec} x$*-ի համար՝* $k\pi$ *տեսք ունեցող արժեքները (*k*-ն ամբողջ է)։*

$y = \sin x$ $(\cos x)$ *և* $y = \operatorname{tg} x$ $(\operatorname{ctg} x)$ *ֆունկցիաների գրաֆիկները տրված են 15-րդ և 16-րդ գծագրերի վրա։*

Սինուսի գրաֆիկը սովորաբար անվանում են սինուսոիդ։

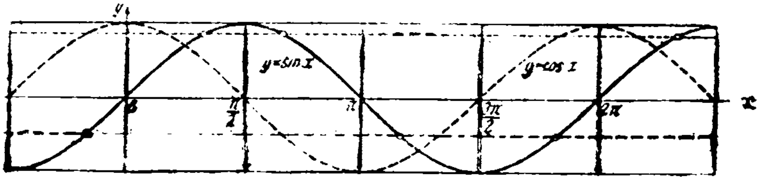
Երբեմն, հատկապես տեխնիկական հարցերում, հետաքրքրություն են ներկայացնում՝

6° **Հիպերբոլական ֆունկցիաները։** *Այսպես են կոչվում՝*

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

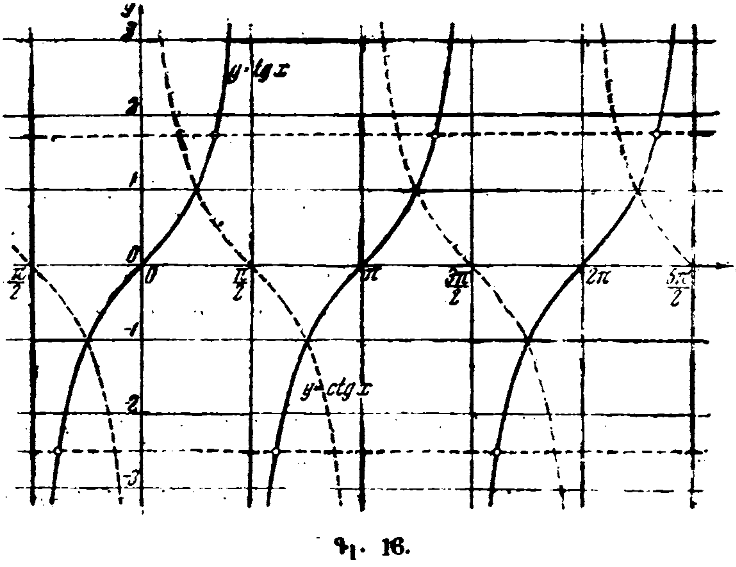
$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};\qquad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \ldots$$

ֆունկցիաները (հիպերբոլական սինուս, կոսինուս, տանգես, կոտանգես,...)։ Նրանք որոշված են x*-ի բոլոր արժեքների համար, բացառությամբ* $\mathrm{cth}\,x$*-ից, որը* $x=0$ *արժեքի համար*



Գծ. 15

իմաստ չունի։ Այս ֆունկցիաները ունեն ուշագրավ նմանություն եռանկյունաչափական ֆունկցիաներին։



Գլ. 16.

Այսպես, տեղի ունեն հետևյալ բանաձևերը (ուշադրություն դարձնել նշանների վրա)՝

$$\mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}\,x \cdot \mathrm{ch}\,y \pm \mathrm{sh}\,x \cdot \mathrm{sh}\,y,$$
$$\mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}\,x \cdot \mathrm{ch}\,x \pm \mathrm{sh}\,x \cdot \mathrm{sh}\,y,$$

որտեղից մասնավոր դեպքում, երբ $x = y$, *հետևում է՝*

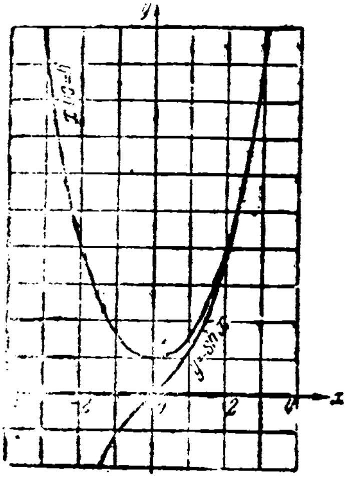
$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1, \quad \mathrm{ch}\,2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x,$$
$$\mathrm{sh}\,2x = 2\,\mathrm{sh}\,x \cdot \mathrm{ch}\,x.$$

այս բանաձևերից, օրինակ առաջինը բերվում է հետևյալ նույնությանը, որը հեշտ է ստուգել,

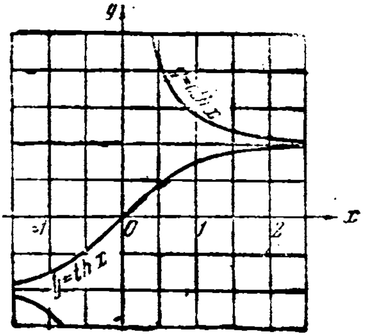
$$\frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}+\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{y}-e^{-y}}{2},$$

Նույն եղանակով ստուգվում են մնացած բանաձևերը։

Հիպերբոլական ֆունկցիաների գրաֆիկները պատկերված են 17-րդ և 18-րդ գծագրերի վրա։



Գծ. 17



Գծ. 18

49. ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԳԱՂԱՓԱՐԸ։ Նախքան հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներին անցնելը, որոշ պարզաբանումներ անենք ընդհանրապես հակադարձ ֆունկցիաների վերաբերյալ։

Ենթադրենք, թե $y=f(x)$ ֆունկցիան տրված է մի որոշ X տիրույթում և թող Y-ը լինի բոլոր այն արժեքների բազմությունը, որոնք այդ ֆունկցիան ընդունում է, երբ x-ը փոփոխվում է X տիրույթի սահմաններում։ (Մեր պրակտիկայում ինչպես X-ը, նույնպես և Y-ը սովորաբար իրենցից կներկայացնեն միջակայքեր)։

Y տիրույթից ընտրենք որևէ $y=y_0$ արժեք. այդ դեպքում X տիրույթում անպայման կգտնվի այնպիսի $x=x_0$ արժեք, որի համար մեր ֆունկցիան կընդունի հենց y_0 արժեքը, այնպես որ

$$f(x_0)=y_0։$$

Այդպիսի x_0 արժեքներ կարող են լինել նաև մի քանի հատ։ Այսպիսով Y-ից վերցրած յուրաքանչյուր y արժեքին համապա-

տասխանեցվում է x-*ի մեկ կամ մի քանի արժեք. այդպիսով* Y *տիրույթում որոշվում է մի* $x=g(y)$ *միարժեք կամ բազմարժեք ֆունկցիա, որը* $y=f(x)$ *ֆունկցիայի համար կոչվում է հակադարձ ֆունկցիա։*

Դիտարկենք օրինակներ.

1) Դիցուք $y=a^x (a>1)$, *որտեղ* x-*ը փոփոխվում է* $X=(-\infty, +\infty)$ *միջակայքում։* y-*ի արժեքները լցնում են* $Y=(0, +\infty)$ *միջակայքը, ընդ որում, ինչպես գիտենք* [20], *այդ միջակայքից վերցրած* y-*ի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է* X-*ի ներսը գտնվող միայն մեկ որոշակի* $x=\log_a y$։ *Այս դեպքում հակադարձ ֆունկցիան միարժեք է։*

2) Ընդհակառակը, $y=x^2$ *ֆունկցիայի համար, եթե* x-*ը փոփոխվում է* $X=(-\infty, +\infty)$ *միջակայքում, հակադարձ ֆունկցիան կլինի երկարժեք.* $Y=[0, +\infty)$ *միջակայքից վերցրած* y-*ի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է* X-*ից վերցրած երկու արժեք՝* $x=\pm\sqrt{y}$։ *Այս երկարժեք ֆունկցիայի փոխարեն սովորաբար դիտարկում են երկու առանձին միարժեք ֆունկցիաներ՝* $x=+\sqrt{y}$ *և* $x=-\sqrt{y}$ *(երկարժեք ֆունկցիայի «ճյուղերը»)։ Նրանք, առանձին-առանձին վերցրած, նույնպես կարող են համարվել* $y=x^2$ *ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիաներ, միայն թե պետք է ընդունել, որ* x-*ի փոփոխման տիրույթը սահմանափակված է, համապատասխանաբար,* $[0, +\infty)$ *կամ* $(-\infty, 0]$ *միջակայքով։*

3) Նույն ձևով, եթե վերցնենք $y=\operatorname{ch} x$, *որտեղ* x-*ի փոփոխման տիրույթը դարձյալ հանդիսանում է* $X=(-\infty, +\infty)$ *միջակայքը, ապա, լուծելով*

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=y \quad \text{կամ} \quad e^{2x}-2y\cdot e^x+1=0$$

հավասարումը e^x-*ի նկատմամբ, կստանանք (երբ* $y>1$*) երկու արժեքներ՝*

$$e^x=y\pm\sqrt{y^2-1},$$

որտեղից՝

$$x=\log\left(y\pm\sqrt{y^2-1}\right).$$

Դարձյալ ստացանք երկարժեք ֆունկցիա, որը վերածվում է երկու միարժեք ճյուղերի, որոնք առանձին-առանձին հա-

համապատասխանում են x-ի փոփոխման 0-ից մինչև $+\infty$ և ∞-ից մինչև 0 սահմաններում։

4) Իսկ եթե $y=\text{sh}\,x$, ապա

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=y \quad \text{կամ} \quad e^{2x}-2y\cdot e^x-1=0$$

հավասարումից, ցանկացած y-ի համար, կստանանք e^x-ի միայն մեկ արժեք՝

$$e^x=y+\sqrt{y^2+1},$$

որովհետև երկրորդ արժեքը, որը արմատից առաջ պիտի ունենար բացասական նշան, որպես բացասական արժեք, հնարավոր չէ և պետք է դեն նետել։ Այստեղից՝

$$x=\log(y+\sqrt{y^2+1}),$$

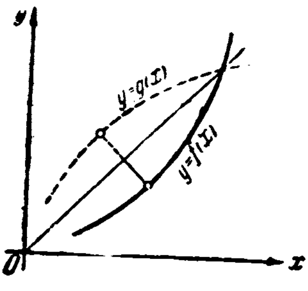
այնպես որ, այս դեպքում հակադարձ ֆունկցիան միարժեք է։

Նկատենք, որ $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկից հեշտ է կռահել, թե նրա հակադարձ $x=g(y)$ ֆունկցիան միարժեք կլինի թե ոչ։ Միարժեք կլինի, եթե x-երի առանցքին զուգահեռ ցանկացած ուղիղը այդ գրաֆիկը հատի միմիայն մեկ կետում․ ընդհակառակը, եթե այդ ուղիղներից ոմանք գրաֆիկը հատում են մի քանի կետերում, ապա հակադարձ ֆունկցիան կլինի բազմարժեք։ Այս դեպքում, հենց գրաֆիկի օգնությամբ, x-ի փոփոխման միջակայքը կարելի է բաժանել այնպիսի մասերի, որ յուրաքանչյուր մասին արդեն համապատասխանի այդ ֆունկցիայի միարժեք «ճյուղ»։ Օրինակ, մի հայացք նետելով 4-րդ գծագրի պարաբոլի վրա, որը հանդիսանում է $y=x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, պարզ կլինի, որ նրա հակադարձ ֆունկցիան երկարժեք է, և որպեսզի ստանանք միարժեք «ճյուղեր», բավական է միայն այդ պարաբոլի աջ և ձախ մասերը, այսինքն x-ի դրական և բացասական արժեքները դիտարկենք առանձին-առանձին*։

Եթե $x=g(y)$ ֆունկցիան հանդիսանում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի հակադարձը, ապա պարզ է, որ այդ երկու ֆունկցիաների գրաֆիկները համընկնում են։ Սակայն, կարելի է պահանջել, որ

* Ստորև [82] մենք դեռ կանդրադառնանք հակադարձ ֆունկցիայի գոյության միարժեքության հարցին։

հակադարձ ֆունկցիայի արգումենտն էլ նշանակվի x-տառով, այսինքն $x=g(y)$ ֆունկցիայի փոխարեն դիտարկվի $y=g(x)$-ը: Եթե այս դեպքում էլ, առաջվա նման x-ի արժեքները գրառվեն հորիզոնական առանցքի վրա, իսկ y-ի արժեքները՝ ուղղաձիգ առանցքի վրա, ապա գրաֆիկը պետք է ձևափոխել: Քանի որ գործը հանգում է x-երի և y-ների առանցքների դերերի փոխանակմանը ապա այդ ձևափոխությունը ամենից հեշտ կկատարվի, եթե գծագրի xOy հարթությունը առաջին կոորդինատային անկյան կիսողի շուրջը պտտենք 180° անկյունով (գծ. 19):



Գծ. 19.

Այսպիսով, $y=g(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն ստացվում է որպես $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի հայելապատկեր այդ կիսողի նկատմամբ: Օրինակ, 13-րդ և 14-րդ գծագրերից անմիջապես երևում է, որ նրանցից մեկը մյուսից ստացվել է հենց այդ եղանակով: Ճիշտ նման ձևով, ելնելով վերոհիշյալ դատողությունից, հեշտ է բացատրել 11-րդ և 12-րդ գծագրերից յուրաքանչյուրի սիմետրիկությունը (անկյան կիսողի նկատմամբ):

50. ՀԱԿԱԴԱՐՁ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ: Ի լրացումն n° 48-ում հիշատակված տարրական ֆունկցիաների դասերի, այժմ դիտարկենք՝

7° Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաները՝

$$y=\arcsin x,\quad y=\arccos x,\quad y=\operatorname{arctg} x,$$
$$y=\operatorname{arcctg} x,\quad (y=\operatorname{arcsc} x,\quad \operatorname{arccsc} x):$$

Նախ կանգ առնենք սրանցից առաջինի վրա: $y=\sin x$ ֆունկցիան որոշված է $X=(-\infty,+\infty)$ միջակայքում, ընդ որում նրա արժեքները ամբողջությամբ լրացնում են $Y=[-1, 1]$ միջակայքը: x-երի առանցքին զուգահեռ ուղիղը սինուսոիդը, այսինքն՝ $y=\sin x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (գծ. 15), հատում է անվերջ բազմությամբ կետերում. այլ խոսքով, $[-1, 1]$ միջակայքից վերցրած y-ի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում են x-ի անվերջ բազմությամբ արժեքներ: Հետևապես, հակադարձ ֆունկցիան, որը նշանակում են

$$x = \mathrm{Arcsin}\, y^{*}$$

կլինի բազմարժեք (անվերջ-արժեք)։

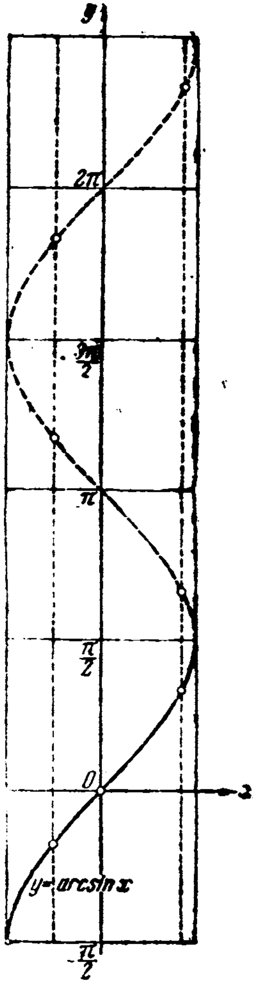
Սովորաբար դիտարկում են այդ ֆունկցիայի միայն մեկ «ճյուղը», որը համապատասխանում է x-ի փոփոխմանը $-\frac{\pi}{2}$-ի և $\frac{\pi}{2}$-ի միջև. $[-1, 1]$-ից վերցրած y-ի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է x-ի միայն մեկ արժեք այդ սահմաններում։ Այդ «ճյուղը» նշանակում են այսպես՝

$$x = \arcsin y$$

և անվանում են արկսինուսի գլխավոր արժեք։

Սինուսոիդը պտտելով առաջին կոորդինատային անկյան կիսորդի շուրջը (գծ. 20), կստանանք $y = \mathrm{Arcsin}\, x$ բազմարժեք ֆունկցիայի գրաֆիկը. անընդհատ կորով առանձնացված է նրա գլխավոր ճյուղը՝ $y = \arcsin x$-ի գրաֆիկը, որը միարժեք կերպով որոշված է x-ի արժեքների $[-1, 1]$ միջակայքում և բավարարում է

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$$



Գծ. 20.

անհավասարությանը, որը և բնորոշում է այդ ճյուղը մյուս ճյուղերի մեջ։

Տարրական եռանկյունաչափությունից վերհիշելով, թե տված սինուսն ունեցող անկյունների բոլոր արժեքներն ինչպես են արտահայտվում այդ արժեքներից մեկի միջոցով, հեշտ է գրել

* Մենք էլ ժամանակին [48,5°] արդեն նշել ենք, որ եռանկյունաչափական ֆունկցիայի x արգումենտն անկյունն արտահայտում է ռադիաններով. հասկանալի է, որ այստեղ էլ հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքներն արտահայտվում են ռադիաններով

այն բանաձևերը, որոնք արտահայտում են արկսինուսի բոլոր արժեքները՝

$$\mathrm{Arcsin}\,x = \arcsin x + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

կամ՝

$$\mathrm{Arcsin}\,x = (2k+1)\pi - \arcsin x.$$

Ելնելով սինուսի գումարման թեորեմայից, այն է՝

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

բանաձևից, կարելի է ստանալ արկսինուսի գումարման թեորեման։ Այսպես, ընդունելով $\alpha = \arcsin x$, $\beta = \arcsin y$ *(որտեղ* x*-ը և* y*-ը գտնվում են* -1*-ի և* $+1$*-ի միջև), կունենանք՝*

$$\sin\alpha = x, \quad \sin\beta = y, \quad \cos\alpha = \sqrt{1-x^2}, \quad \cos\beta = \sqrt{1-y^2},$$

ընդ որում, արմատների նշանները վերցվում են դրական, որովհետև արկսինուսի գլխավոր արժեքի բնորոշիչ հատկության շնորհիվ, α *և* β *անկյունները գտնվում են* $-\frac{\pi}{2}$*-ի և* $+\frac{\pi}{2}$*-ի միջև, այնպես որ նրանց կոսինուսները դրական են։ Այսպիսով՝*

$$\sin(\alpha+\beta) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}, \text{ որտեղից՝}$$

$$\alpha+\beta = \arcsin x + \arcsin y = \mathrm{Arcsin}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right).$$

Այս բանաձևը կարելի է գրել ավելի պարզ տեսքով՝

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

միայն այն դեպքում, երբ $\alpha+\beta$ *անկյունը ևս գտնվում է* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *միջակայքի մեջ։ Այս պայմանը միշտ տեղի ունի, երբ* x *և* y *արգումենտները (որանց հետ նաև* α*-ն և* β*-ն) տարբեր նշաններ ունեն։ Իսկ եթե նշանները միևնույնն են, վերոհիշյալ պայմանը, ինչպես հեշտ է տեսնել, համարժեք է՝*

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

պայմանին։

Նման դատողություններ կիրառելի են նաև $y=\cos x$ $(-\infty < x < +\infty)$ ֆունկցիայի նկատմամբ։ Այստեղ ևս

$$y=\operatorname{Arccos} x \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

հակադարձ ֆունկցիան՝ բազմարժեք (անվերջ-արժեք) է (տես գծ. 15)։ Միարժեք ճյուղն առանձնացնելու համար, ֆունկցիան ենթարկում են հետևյալ պայմանին՝

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi։$$

Այս՝ արկկոսինուսի գլխավոր ճյուղն է։

Arccos x ֆունկցիան arcsin x-ի հետ կապված է

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

ակնհայտ առնչությամբ․ իրոք, ոչ միայն $\frac{\pi}{2} - \arcsin x$ անկյան կոսինուսը հավասար է $\sin(\arcsin x)=x$, այլև ինքը, անկյունը, գտնվում է հենց 0-ի և π-ի միջև։ Arccos x-ի մյուս արժեքները նրա գլխավոր արժեքի միջոցով արտահայտվում են հետևյալ բանաձևով

$$\operatorname{Arccos} x = 2k\pi \pm \arccos x \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)։$$

$y=\operatorname{tg} x$ ֆունկցիան որոշված է x-ի բոլոր արժեքների համար, բացի $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ արժեքներից։ Այստեղ y-ի արժեքները լրացնում են $(-\infty, +\infty)$ միջակայքը, ընդ որում y-ի մի արժեքին դարձյալ համապատասխանում են x-ի անվերջ բազմությամբ արժեքներ (տես գծ. 16)։ Այդ պատճառով $x=\operatorname{Arctg} y$ հակադարձ ֆունկցիան, որը տված է $(-\infty, +\infty)$ միջակայքում, կլինի բազմարժեք (անվերջ-արժեք)։ 21-րդ գծագրի վրա պատկերված է $y=\operatorname{Arctg} x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, որն ստացվել է $y=\operatorname{tg} x$ ֆունկցիայի գրաֆիկն առաջին կոորդինատային անկյան կիսորդի շուրջը 180° անկյունով պտտելով։ Որպես արկտանգեսի գլխավոր արժեք՝ arctg x ընդունում են այդ բազմարժեք ֆունկցիայի արժեքներից այն, որը բավարարում է

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$$

անհավասարություններին։

Այսպիսով որոշվում է միարժեք ֆունկցիա՝ արկտանգեսի գլխավոր ճյուղը, որը տված է x-ի բոլոր արժեքների համար։ Արկտանգեսի մյուս արժեքները, ինչպես հեշտ է ցույց տալ, ստացվում են այսպես՝

$$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)։$$

Տանգեսի համար գումարման թեորեման՝

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta},$$

եթե ընդունենք $\alpha = \operatorname{arctg} x$, $\beta = \operatorname{arctg} y$, կտա (երբ $xy \neq 1$)՝

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{x+y}{1-xy}$$

բանաձևը, այնպես որ՝

$$\alpha + \beta = \operatorname{atctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{Arctg} \frac{x+y}{1-xy}։$$

Ա՛յս դեպքում էլ վերջին հավասարումը կբերվի

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$$

պարզ տեսքին, եթե միայն $-\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, այսինքն, եթե $xy < 1$։

Դժվար չէ $\operatorname{arctg} x$-ի և $\arcsin x$-ի միջև անմիջական կապ հաստատել՝

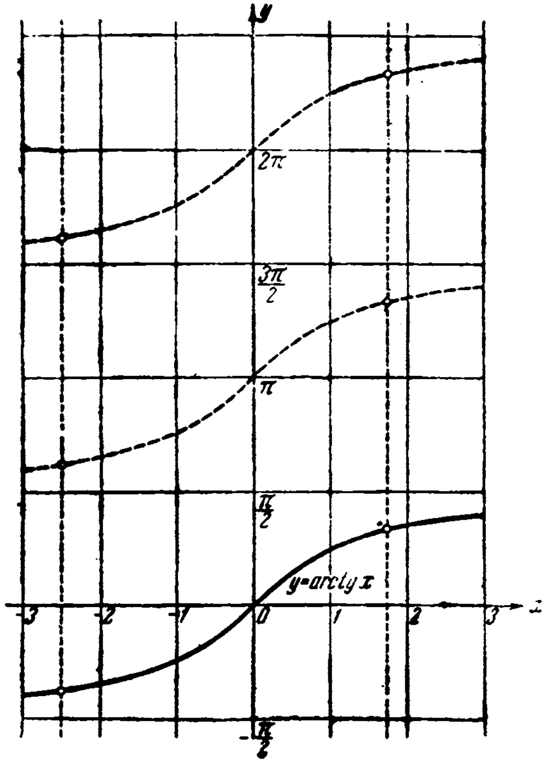
$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{կամ} \quad \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(-\infty < x < +\infty) \qquad\qquad (-1 < x < +1)$$

Օրինակ, եթե ընդունենք $\alpha = \operatorname{arctg} x$, այնպես որ $\operatorname{tg}\alpha = x$, ապա

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$ ընդ որում արմատը վերցվում է

դրական նշանով, որովհետև $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$։ Այստեղից էլ հենց բխում է, որ $x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$։



Գծ. 21.

Հիշենք նաև $\operatorname{Arcctg} x (-\infty < x < +\infty)$ ֆունկցիայի մասին. նրա գլխավոր արժեքը որոշվում է

$$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$$

անհավասարություններով և $\operatorname{arctg} x$-ի հետ կապված է

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$$

առնչությամբ։

Արկկոտանգենսի մյուս արժեքներն ունեն այսպիսի տեսք՝

$$\mathrm{Arcctg}\,x = \mathrm{arcctg}\,x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)։$$

arcsec x ($-\infty < x \leqslant -1$ և $1 \leqslant x < +\infty$) և arccsc x (փոփոխման նույն միջակայքերով) ֆունկցիաների վրա կանգ չենք առնի, նրանց հետազոտումը թողնելով ընթերցողին։

51. ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՍՈՒՊԵՐՊՈԶԻՑԻԱ։ ԵԶՐԱՓԱԿԻՉ ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։ Ծանոթանանք ֆունկցիաների սուպերպոզիցիայի կամ վերադրման (наложение) գաղափարի հետ, որը կայանում է նրանում, որ տված ֆունկցիայի արգումենտի տեղ տեղադրվում է մի այլ ֆունկցիա (կախված այլ արգումենտից)։ Օրինակ, sin x և log y ֆունկցիաների սուպերպոզիցիան տալիս է log sin x ֆունկցիան, նույն ձևով ստացվում են նաև

$$\sqrt{1 - x^2}, \quad \mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}, \text{ և այլ}$$

ֆունկցիաները։

Ընդհանուր դեպքում, ենթադրենք թե, $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $X = \{x\}$ տիրույթում գտնվող x-երի համար, ընդ որում նրա բոլոր արժեքները գտնվում են $Y = \{y\}$ տիրույթում։ Այնուհետև, դիցուք $z = \varphi(y)$ ֆունկցիան էլ որոշված է հենց Y տիրույթում։ Այդ դեպքում z փոփոխականը, ինչպես ասում են, ինքը ևս հանդիսանում է x-ի ֆունկցիա՝ y-ի միջոցով՝

$$z = \varphi(f(x))։$$

X-ից վերցրած x-ի միջոցով նախ գտնում են նրան համապատասխանող (f նշանով բնորոշվող օրենքով) y-ի արժեքը Y տիրույթից, և ապա որոշում են (φ նշանով բնորոշվող օրենքով) y-ի այդ արժեքին համապատասխանող z-ի արժեքը. վերջինս հենց համարում են z-ի՝ վերցրած x-ին համապատասխանող արժեքը։ Հենց այդպիսով ստացված ֆունկցիայի ֆունկցիան կամ բարդ ֆունկցիան էլ հանդիսանում է f(x) և φ(y) ֆունկցիաների սուպերպոզիցիայի արդյունքը։

Այն ենթադրությունը, թե f(x) ֆունկցիայի արժեքները դուրս չեն գալիս Y տիրույթից, որտեղ որոշված է φ(y) ֆունկցիան, չափազանց էական է. եթե այդ ինկատի չունենանք, կարող է և անհեթեթություն ստացվել։ Ընդունենք, օրինակ, $z = \arcsin y$, իսկ $y = x^2 + 2$. այդ դեպքում

$$z = \arcsin(x^2 + 2)$$

[redacted]յթությունն իմաստ չունի, որովհետև արկսինուսի նշանը կարող է փոփոխվել միայն [−1, +1] միջակայքում, մինչդեռ x^2+2 *ֆունկցիայի արժեքները բոլորը մեկից մեծ են:*

Հենց այստեղ էլ օգտակար ենք համարում ընդգծել, որ ֆունկցիայի, որպես բարդ ֆունկցիայի, խարակտերիստիկան կապված է ոչ թե z*-ի և* x*-ի ֆունկցիոնալ կախման բնույթի հետ, այլ միայն այդ կապը տալու եղանակի հետ: Օրինակ, դիցուք* $z=\sqrt{1-y^2}$, *երբ* y*-ը գտնվում է* $[-1, +1]$*-ում, իսկ* $y=\sin x$, *երբ* x*-ը գտնվում է* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$*-ում: Այդ դեպքում*

$$z=\sqrt{1-\sin^2 x}=\cos x:$$

Պարզվեց, որ այստեղ $\cos x$*-ը տված է բարդ ֆունկցիայի տեսքով:*

Այժմ, երբ լրիվ չափով պարզաբանված է ֆունկցիաների սուպերպոզիցիայի գաղափարը, կարող ենք ճշտորեն բնորոշել անալիզի մեջ ուսումնասիրվող ֆունկցիաների դասերից պարզագույնը: Այդ դասին են պատկանում ամենից առաջ, վերևում 1°—7° թված տարրական ֆունկցիաները, և ապա՝ բոլոր այն ֆունկցիաները, որոնք ստացվում են նրանցից՝ թվաբանական չորս գործողությունների և սուպերպոզիցիայի միջոցով, որոնք կիրառվում են այդ ֆունկցիաների նկատմամբ վերջավոր թիվ անգամ: Այդպիսի ֆունկցիաների մասին ասում են, որ նրանք արտահայտվում են տարրական ֆունկցիաների միջոցով վերջավոր տեսքով. երբեմն այդ բոլորը նույնպես անվանում են տարրական ֆունկցիաներ:

Հետագայում, երբ, տիրապետենք անալիտիկ ավելի բարդ ապարատի (անվերջ շարքեր, ինտեգրալներ), մենք կծանոթանանք նաև այլ ֆունկցիաների հետ, որոնք անալիզի մեջ դարձյալ կարևոր դեր են խաղում, սակայն տարրական ֆունկցիաների դասին չեն պատկանում:

§ 2 ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆԸ:

52. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ: *Դիտարկենք* $X=\{x\}$ *թվային բազմությունը:* a կետը կոչվում է այդ բազմության **խտացման կետ**, եթե a-ի ցանկացած մոտակայքում գտնվում են x-ի (a-ից տարբեր) արժեքներ X բազմությունից:

Որպեսզի այս սահմանումը արտահայտենք ավելի տերմիններով, մուծենք a կետի շրջակայքի գաղ այդպես է կոչվում յուրաքանչյուր (a—δ, a+δ) բաց միջակայք, որի կենտրոնը a կետն է։ Այժմ կարելի է ասել, որ a կետը կլինի x բազմության խ տ ա ց մ ա ն կ ե տ, եթե նրա յուրաքանչյուր շրջակայքում գտնվեն x-ի (a-ից տարբեր) արժեքներ X-ից:

Ընդ որում, խտացման կետն ինքը կարող է X-ին պատկանել կամ չպատկանել։

Դիցուք X տիրույթում, որի համար a-ն խտացման կետ է, տրված է մի որոշ y=f(x) ֆունկցիա։ Հետաքրքրություն է ներկայացնում այդ ֆունկցիայի վարքը x-ը a-ին մոտենալիս։ Ասում են, որ x-ը a-ին ձ գ տ ե լ ի ս (կամ a կետում) y=f(x) ֆունկցիայի սահմանը A թիվն է, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար կգտնվի այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որ՝

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \text{ հենց որ } |x-a|<\delta \tag{1}$$

(որտեղ x-ը վերցրած է X-ից և a-ից տ ա ր բ ե ր է)։*
Այդ փաստը նշանակում են այսպես՝

$$\lim_{x\to a} f(x)=A\text{։} \tag{2}$$

Եթե X միջակայքն այնպիսին է, որ a-ի կամավոր մոտակայքում, սակայն a-ից դեպի աջ, կգտնվեն a-ից տարբեր x-ի արժեքներ X-ից (այդ դեպքում a կետն անվանում են X-ի համար ա ջ ի ց խտացման կետ*), ապա կարելի է ֆունկցիայի սահմանի վերևում տրված սահմանումը մասնավորացնել, սահմանափակվելով միայն a<x-ի արժեքներով։ Այս դեպքում ֆունկցիայի սահմանը, եթե այն գոյություն ունի, կոչվում է f(x) ֆ ո ւ ն կ ց ի ա յ ի ս ա հ մ ա ն, ե ր բ x-ն ա ջ ի ց ձգտում է a-ին, կամ, ավելի կարճ, ա ջ ի ց (կամ աջակողմյան) սահման (a կետում) և նշանակում են*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \text{ կամ } f(a+0)^{**}$$

սիմվոլով։

** Քանի որ a-ն X-ի խտացման կետ է, հենց այդտեղից հետևում է, որ a կետի (a −δ, a+δ) շրջակայքում X-ի այդպիսի արժեքներ անշուշտ գոյություն ունեն։*

*** Եթե ինքը a-ն հավասար է 0-ի, ապա 0+0, (0−0) սիմվոլի փոխարեն գրում են +0 (−0)։*

Նույն ձևով սահմանվում է նաև ձախից խտացման կետի գաղափարը և ֆունկցիայի սահմանի *գաղափարը* երբ x-ը ձախից ձգտում է a-ին կամ a կետում ձախից (ձախակողմյան) սահմանի գաղափարը՝

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \text{ կամ } f(a-0)。^{*}$$

Եթե a կետը X-ի համար միաժամանակ ձախից և աջից խտացման կետ է, ապա, ինչպես հեշտ է տեսնել, (2)-րդ սահմանի գոյության համար անհրաժեշտ է ու բավարար աջից և ձախից սահմանների զատ-զատ գոյությունն ու հավասարությունը՝

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = A。$$

x-ը a վերջավոր սահմանին ձգտելիս, ֆունկցիան կարող է ունենալ նաև անվերջ մեծ սահման (առանց նշանի կամ որոշակի նշանով)։ Այն է, $f(x)$ ֆունկցիան ունի ∞ սահման x-ը a-ին ձգտելիս, եթե յուրաքանչյուր $E>0$ թվի համար գտնվի այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որ

$$|f(x)|>E, \text{ հենց որ } |x-a|<\varepsilon, \qquad (3)$$

(որտեղ, ինչպես միշտ, x-ը վերցված է X-ից և a-ից տարբեր է)։

Եթե այդ ժամանակ, x-ի՝ a-ին բավականաչափ մոտ գտնված արժեքների համար, $f(x)$ ֆունկցիան պահպանում է դրական (բացասական) նշան, այնպես որ (3) անհավասարություններից առաջինը կարող է փոխարինվել ավելի նեղ անհավասարությունով՝

$$f(x)>E \qquad (f(x)<-E)$$

ապա ասում են, որ $f(x)$-ը ձգտում է $+\infty(-\infty)$ սահմանին:

Այս փաստերը նշանակվում են (2)-ի նման, այն է՝

$$\lim_{x \to a} f(x)=\infty \ (+\infty, -\infty):$$

Վերևում կատարված դիտողությունները աջից և ձախից

---

* *Եթե ինքը a-ն հավասար է 0-ի, ապա $0+0$ $(0-0)$ սիմվոլի փոխարեն գրում են $+0$ (-0)։*

միակողմանի սահմանների վերաբերյալ, կարելի է կրկնել նաև այս դեպքի համար։

Եթե $X=\{x\}$ բազմությունը պարունակում է x-ի ցանկացած չափով մեծ արժեքներ (բացարձակ մեծությամբ), ապա ասում են, որ ∞-ը X-ի խտացման կետ է:

Այդ ենթադրությամբ, $f(x)$ ֆունկցիան ունի A սահմանը x-ը ∞ ձգտելիս, եթե, ինչպիսին էլ լինի $\varepsilon>0$ թիվը, նրա համար գոյություն ունի այնպիսի $\Delta>0$ թիվ, որ՝

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \text{ հենց որ } |x|>\Delta,$$

(որտեղ x-ը վերցվում է X-ից)։ Այդ դեպքում գրում են՝

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A\text{։} \tag{5}$$

Եթե դիտարկվում են x-ի միայն դրական (կամ միայն բացասական) արժեքները, ապա այդ դեպքում խոսում են ֆունկցիայի սահմանի մասին x-ը $+\infty$-ն (կամ $-\infty$-ն) ձգտելիս:

Վերջապես, այս բոլոր ասածները հեշտ է վերաձևակերպել նաև այն դեպքերի համար, երբ

$$A=\infty,\ +\infty \text{ կամ } -\infty\text{։}$$

Այս բոլոր սահմանումների էությունը միևնույնն է՝ $f(x)$ ֆունկցիան պետք է ցանկացած չափով «մոտ» լինի իր A սահմանին, հենց որ x անկախ փոփոխականը բավականաչափ «մոտ» է իր a սահմանին։ Սակայն փոփոխականը «մոտ» է իր վերջավոր սահմանին, եթե նրանց տարբերությունը (բացարձակ մեծությամբ) փոքր է, իսկ նա «մոտ» կլինի անվերջ *մեծ սահմանին, եթե ինքը փոփոխականը (բացարձակ մեծությամբ) մեծ է, ընդ որում, երբ խոսվում է որոշակի նշան ունեցող անվերջության մասին, նա պետք է պահպանի իր նշանը։*

Պարզ է, որ բոլոր դեպքերում $\delta(\Delta)$ թվերը կախված են $\varepsilon(E)$ թվերից։

Վերջում նշենք, որ երբ $f(x)$-ը ձգտում է 0-ի, այն անվանում են անվերջ փոքր։ $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է անվերջ մեծ, եթե նա ձգտում է ∞-ն։ Եթե այս վերջինս տեղի ունի երբ $x\to a$, ապա նաև ասում են, որ a կետում ֆունկցիան դառնում է անվերջություն։

53. ԲԵՐՈՒՄՆ ՎԱՐԻԱՆՏԱՅԻ ԴԵՊՔԻՆ։ Եթե վարիանտան դիտենք որպես բնական շարքի սահմաններում փոփոխվող n փոփոխականի ֆունկցիա, ապա այդ ֆունկցիայի սահմանը, երբ $n \to \infty$ (կամ, եթե անհրաժեշտ է, երբ $n \to +\infty$), ինչպես այն սահմանվեց 52-ում, ակներևաբար, համընկնում է 23-ում և 27-ում սահմանված վարիանտայի սահմանի հետ (Δ-ի դերն այնտեղ կատարում է N-ը)։ Այսպիսով, վարիանտայի սահմանը հանդիսանում է ֆունկցիայի սահմանի մասնավոր դեպքը։ Սակայն, հակադարձաբար, ֆունկցիայի սահմանը նույնպես կարելի է որոշ իմաստով բերել վարիանտայի սահմանին։

Դիցուք $X=\{x\}$ բազմությունը ունի a խտացման կետը (այստեղ a-ն կարող է լինել ինչպես վերջավոր թիվ, այնպես էլ անվերջություն)։ Այդ ժամանակ X-ից (անթիվ բազմությամբ եղանակներով) կարելի է անջատել x-ի (a-ից տարբեր) արժեքների այնպիսի

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots x_n,\ \ldots \tag{6}$$

հաջորդականություն, որի սահմանը լինի a-ն։

Իրոք, եթե a-ն վերջավոր է, ապա ելնելով զրոյի ձգտող δ_n վարիանտայից, a կետի յուրաքանչյուր $(a-\delta_n,\ a+\delta_n)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ շրջակայքում կգտնենք a-ից տարբեր մեկական $x=x_n$ կետ X-ից և, քանի որ $|x_n-a|<\delta_n$, ուրեմն $x_n \to a$։ Եթե a-ն անվերջ է, կելնենք $\Delta_n \to +\infty$ վարիանտայից և յուրաքանչյուր Δ_n-ի համար կգտնենք $x=x_n$ արժեք X-ից, որի համար $|x_n|>\Delta_n$. ակներև է, որ $x_n \to \infty$, և այլն։

Արգումենտի արժեքների (6) հաջորդականությանը կհամապատասխանի ֆունկցիայի արժեքների

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ \ldots \tag{7}$$

հաջորդականություն։

Հեշտ է նկատել, որ (2) հավասարության առկայության դեպքում վերջին հաջորդականությունը միշտ կզուգամիտի A-ին։ Օրինակի համար կանգ առնենք այն դեպքի վրա, երբ a-ն և A-ն վերջավոր են։ Եթե տված է կամավոր $\varepsilon>0$ թիվը, ապա նախ կվերցնենք այն $\delta>0$ թիվը, որը համապատասխանում է նրան ըստ սահմանի (2) սահմանման։ Քանի որ (6) հաջորդականությունը զուգամիտում է a-ին, ապա δ-ի համար կգտնվի [23]

այնպիսի N համար, որ երբ $n>N$, տեղի կունենա $|x_n - a|<\delta$ անհավասարությունը, և հետևապես նաև $|f(x_n)-A|<\varepsilon$ անհավասարությունը, [տես. (1)]։ Դրանով էլ ապացուցվում է (7) հաջորդականության զուգամիտումը A-ին։

Պարզվում է, որ ճիշտ է նաև հակադարձ պնդումը՝

Այժմ ենթադրենք, թե a սահմանն ունեցող ինչպիսի (6) հաջորդականության (X-ից վերցրած) վրայով էլ որ անցնի x անկախ փոփոխականը, ֆունկցիայի արժեքների համապատասխան (7) հաջորդականությունը միշտ ունի միևնույն A սահմանը։ Այդ դեպքում այդ A թիվը կլինի $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանը՝ 52-ում տված սահմանման իմաստով։

Այստեղ ևս սահմանափակվենք այն դեպքով, երբ a-ն և A-ն վերջավոր են։ Կատարելով հակասող ենթադրություն, ենթադրենք, թե A-ն ֆունկցիայի սահմանը չէ վերոհիշյալ իմաստով։ Այդ դեպքում մի որոշ $\varepsilon>0$ թվի համար արդեն գոյություն չէր ունենա համապատասխան δ թիվ. այսինքն՝ որքան էլ փոքր δ թիվ վերցնենք, միշտ կգտնվեր փոփոխականի $x=x'$ (a-ից տարբեր) գոնե մեկ արժեք, որի համար

$$|x'-a|<\delta \text{ և այնուամենայնիվ } |f(x')-A|\geq\varepsilon.$$

Վերցնենք զրոյի ձգտող դրական թվերի $\{\delta_n\}$ հաջորդականություն։ Հենց նոր ասածի համաձայն, յուրաքանչյուր $\delta=\delta_n$ թվի համար կգտնվեր այնպիսի $x'=x'_n$ արժեք, որ

$$|x'_n-a|<\delta_n \text{ և այնուամենայնիվ } |f(x'_n)-A|\geq\varepsilon.$$

Այսպիսով, այդ արժեքներից կկազմվեր մի որոշ

$$x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ \ldots,\ x'_n,\ \ldots$$

հաջորդականություն, որի համար՝

$$|x'_n-a|<\delta_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

քանի որ $\delta_n\to0$, ապա $x'_n\to a$։

Ըստ թեորեմայի պայմանի, ֆունկցիայի համապատասխան արժեքների

$$f(x'_1),\ f(x'_2),\ f(x'_3),\ \ldots,\ f(x'_n),\ \ldots$$

հաջորդականությունը պետք է ձգտի A-ին, սակայն այդ հնարավոր չէ, քանի որ բոլոր $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ արժեքների համար

ունենք $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$։ *Ստացված հակասությունը հաստատում է թեորեմայի ճշտությունը։*

Այսպիսով, ըստ էության, մենք հանգում ենք ֆունկցիայի սահմանի գաղափարի երկրորդ սահմանմանը, որը 52-ում արտահայտված է, այսպես ասած, «ε—δ լեզվով»։ Իսկ այժմ մենք կարող ենք այդ սահմանումն արտահայտել «հաջորդականությունների լեզվով», (2) հավասարությունը հասկանալով այն իմաստով, որ a սահմանն ունեցող յուրաքանչյուր (6) հաջորդականության համար համապատասխան (7) հաջորդականությունն ունի A սահմանը։

Եզրափակելով, նշենք, որ բավական է միայն ենթադրել, որ a սահմանին ձգտող ցանկացած (6) հաջորդականության համապատասխանող ամեն մի (7) հաջորդականության սահման գոյություն ունի, որպեսզի այստեղից անմիջապես բխի բոլոր այդ սահմանների հ ա մ ը ն կ ն ե լ ը։ *Իրոք, ենթադրենք, թե* a *սահմանին ձգտող*

$$x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ \ldots,\ x'_n,\ \ldots \quad \text{և} \quad x''_1,\ x''_2,\ x''_3,\ \ldots,\ x''_n,\ \ldots$$

երկու հաջորդականությունների համար ունենք՝

$$f(x'_n) \to A' \quad \text{և} \quad f(x''_n) \to A'',$$

որտեղ $A' \neq A''$։ *Այդ դեպքում միջանցնելով այդ երկու հաջորդականությունների անդամները, կստանանք մի նոր հաջորդականություն՝*

$$x'_1,\ x''_1,\ x'_2,\ x''_2,\ x'_3,\ x''_3,\ \ldots,\ x'_n,\ x''_n,\ \ldots,$$

որն, ակներևորեն, ձգտում է a-*ին, որովհետև* n-*ի բավականաչափ մեծ արժեքների համար թե* x'_n-*ը, և թե* x''_n-*ը ցանկացած չափով քիչ են տարբերվում* a-*ից։ Միաժամանակ ֆունկցիայի արժեքների համապատասխան*

$$f(x'_1),\ f(x''_1),\ f(x'_2),\ f(x''_2),\ \ldots,\ f(x'_n),\ f(x''_n),\ \ldots,$$

հաջորդականությունը, մեր ենթադրությանը հակառակ, բոլորովին սահման չունի, քանի որ դույզ կամ կենտ տեղերը գրավող անդամներից կազմված մասնակի հաջորդականությունները ձգտում են տ ա ր բ ե ր սահմանների [40]։ *Ստացված հակասությու-*

Դա հենց ապացուցում է, որ (7) տեսքի հաջորդականությունների իսկապես բոլորը ձգտում են միևնույն սահմանին։

51. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) ապացուցենք, որ

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \quad (\text{երբ } a>1)։$$

Ցանկացած E-ի համար, բավական է վերցնել $\Delta=\log_a E$, որպեսզի

$$x>\Delta \text{ անհավասարությունից բխի } a^x>E,$$

որը և ապացուցում է մեր ասածը*։

Նույն ձևով ապացուցվում է, որ

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad (\text{երբ } a>1)։$$

Իրոք, ինչպիսին էլ լինի $\varepsilon>0$ $(\varepsilon<1)$ թիվը. եթե վերցնենք $\Delta=\log_a\frac{1}{\varepsilon}=-\log_a\varepsilon$, ապա՝

$$-\Delta>x \text{ դեպքում անհրաժեշտաբար } a^x<\varepsilon։$$

Իսկ եթե $0<a<1$, ապա

$$a^x=\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

ձևափոխման օգնությամբ հեշտ է եզրակացնել, որ՝

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=0,\ \lim_{x\to-\infty} a^x=+\infty \quad (\text{երբ } 0<a<1)։$$

2) Ցույց տանք, որ $1<a$ դեպքում՝

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty,\quad \lim_{x\to+0}\log_a x=-\infty։$$

Յուրաքանչյուր $E>0$ թվի համար, հենց որ $x>a^E$, կունենանք $\log_a x>E$, և նույնպես, հենց որ $0<x<a^{-E}$ տեղի կունենա $\log_a x<-E$։ Այսպիսով ապացուցված են վերոհիշյալ երկու առնչությունները։

3) Այնուհետև ունենք՝

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{2}։$$

* $\lim a^n=\infty$ $(a>1)$ ավելի մասնավոր արդյունքի հետ մենք արդեն գործ ենք ունեցել 27-ում։

Օրինակի համար կանգ առնենք առաջին սահմանի վրա: Յանկացած ε-ի համար, բավական է վերցնել $x > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$, որպեսզի լինի $\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, այնպես որ՝

$$0 < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x < \varepsilon\text{։}$$

4) Ավելի նուրբ է հետևյալ առնչությունը՝

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty \quad (\text{երբ } a > 1)\text{։}$$

Հիշենք, որ այդ առնչության մասնավոր դեպքը՝

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$$

մենք արդեն ունեցել ենք [32, 9]. ակներևաբար, միաժամանակ տեղի կունենա նաև՝

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n+1} = +\infty\text{։}$$

Հետևապես, աված $E > 0$ թվի համար կարելի է գտնել այնպիսի N բնական թիվ, որ $n > N$ դեպքում տեղի կունենա

$$\frac{a^n}{n+1} > E$$

անհավասարությունը։

Այժմ, դիցուք, $x > N+1$. եթե ընդունենք $n = E(x)$, ապա՝

$$n > N \text{ և } n \leq x < n+1,$$

այնպես որ՝

$$\frac{a^x}{x} > \frac{a^n}{n+1} > E,$$

որը և ապացուցում է մեր պնդումը։

Այստեղից, ինչպես և [32, 10]-ում, հեշտ է ստանալ՝

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty \quad (a > 1,\ k > 0)\text{։}$$

5) Նույն ձևով, հենվելով նախկինում [32, (11)] ստացված՝

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log_a x}{n}=0 \ (a>1)$$

արդյունքի վրա. կարելի է եզրակացնել, որ ընդհանրապես

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x}=0 \ (a>1),$$

որտեղ x-ը ընդունում է ցանկացած իրական դրական արժեքներ։

Այստեղ x-ը փոխարինելով x^k-ով ($k>0$), հեշտ է ցույց տալ որ նաև

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^k}=0 \ (a>1,\ k>0).$$

Իրոք, եթե տված $\varepsilon>0$ թվի համար Δ-ն վերցնենք այնպես, որ $\Delta<x$ դեպքում տեղի ունենա

$$\frac{\log_a x}{x}<k\varepsilon$$

անհավասարությունը, ապա, երբ $x>\Delta_1=\Delta^{\frac{1}{k}}$ տեղի կունենան $x^k>\Delta$ անհավասարությունը և՝

$$\frac{\log_a x}{x^k}<\varepsilon.$$

Եթե այստեղ x-ը փոխարինենք $\frac{1}{x}$-ով, ապա ստացված արդյունքը կգրվի այսպես՝

$$\lim_{x\to+0} x^k\log_a x=0 \ (a>1,\ k>0).$$

ե) 25, բ)-ում ապացուցված՝

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$$

սահմանային առնչությունից կարելի է ստանալ ավելի ընդհանուր առնչություն՝

$$\lim_{x\to 0} a^x=1.$$

Նկատենք, որ, ակներևաբար, տեղի ունի նաև

$$\lim_{n\to+\infty} a^{-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}=1$$

առնչությունը։

Այդ պատճառով, ինչպիսին էլ լինի $\varepsilon>0$ թիվը, կարելի է գտնել այնպիսի n_0 բնական թիվ, որ (եթե, ասենք, $a>1$)՝

$$1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{n_0}}<a^{\frac{1}{n_0}}<1+\varepsilon.$$

Այժմ, եթե

$$|x|<\frac{1}{n_0} \quad \text{կամ} \quad -\frac{1}{n_0}<x<\frac{1}{n_0},$$

ապա՝

$$a^{-\frac{1}{n_0}}<a^x<a^{\frac{1}{n_0}},$$

որտեղից՝

$$1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon \quad \text{կամ} \quad |a^x-1|<\varepsilon,$$

որը և ապացուցում է մեր պնդումը։

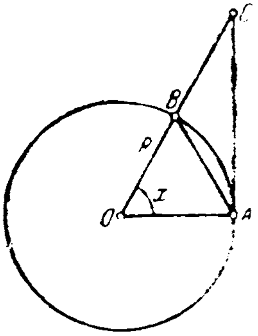
7) Այժմ ցույց տանք (հետագայի համար էլ կարևոր) մի առնչություն՝

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{8}$$

Սակայն, նախապես մենք պետք է ապացուցենք մի քանի օգտակար անհավասարություններ, որոնք են՝

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right). \tag{9}$$

Այդ նպատակով, R շառավիղ ունեցող շրջանի մեջ դիտարկենք $\sphericalangle AOB$ սուր անկյունը, AB լարը և շրջանագծին A կետում շոշափող AC ուղիղը (գծ. 22)։ Այդ դեպքում կունենանք՝



Գծ. 22.

մակ. $\triangle AOB<$ մակ. սեկտոր $AOB<$ մակ. $\triangle AOC$*

Եթե x-ով նշանակենք $\sphericalangle AOB$ անկյան ռադիանային չափը, ապա $\overset{\smile}{AB}$ աղեղի երկարությունը կարտահայտվի Rx արտադրյալով և այդ անհավասարությունները կգրվեն այսպես՝

* Մենք օգտվում ենք տարրական պատկերների մակերեսների վերաբերյալ այն գիտելիքներից, որոնք շարադրվում են դպրոցական դասընթացում։

$$\frac{1}{2}R^2 \cdot \sin x < \frac{1}{2}R^2 \cdot x < \frac{1}{2}R^2 \cdot \operatorname{tg} x.$$

Այստեղից, կրճատելով $\frac{1}{2}R^2$-ով, մենք կստանանք (9) անհավասարությունները:

Ենթադրելով, որ $0<x<\frac{\pi}{2}$, sin x-ը բաժանենք (9) անհավասարության յուրաքանչյուր անդամի վրա, կստանանք՝

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x,$$

որտեղից՝

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

Բայց՝

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < x$$

[(9)-ի շնորհիվ], այնպես որ՝

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x.$$

Այստեղից հետևում է՝

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x|$$

անհավասարությունը, որը ակներևաբար, տեղի ունի նաև այն դեպքում, երբ x-ը փոխում է իր նշանը, այսինքն՝ անհավասարությունը ճիշտ է բոլոր $x \neq 0$ արժեքների համար, միայն թե $|x| < \frac{\pi}{2}$.

Ստացված անհավասարությունն էլ լուծում է խնդիրը: Իրոք, եթե կամայականորեն տված է $\varepsilon > 0$ թիվը, ապա որպես δ բավական է վերցնել ε և $\frac{\pi}{2}$ թվերից փոքրագույնը: Երբ $|x| < \delta$, այդ անհավասարությունը կիրառելի է (չէ որ $\delta \leq \frac{\pi}{2}$) և դրա շնորհիվ (քանի որ $\delta \leq \varepsilon$) կունենանք՝

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon.$$

Ֆունկցիայի սահմանի սահմանման համաձայն [52], այդ նշանակում է, որ երբ x-ը ձգտում է 0-ի, $\frac{\sin x}{x}$ ֆունկցիան ձգտում է 1-ի, այնպես որ (8) առնչությունը ճիշտ է։

7ա) (8)-րդ սահմանային առնչությունը, համաձայն 53-ի, կարելի է հասկանալ նաև այնպես, որ հենց որ x-ն ընդունում է զրոյի ձգտող $\{x_n\}$ հաջորդականության արժեքները, $\frac{\sin x_n}{x_n}$ վարիանտան ամեն անգամ ձգտում է 1-ի։

Այս դիտողությունն օգտագործենք հետևյալ վարիանտայի սահմանը որոնելու համար՝

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n}$$

որտեղ φ-ն զրոյից տարբեր որևէ թիվ է։

Ակներև է, որ

$$\sin\varphi = 2\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2} = 2^2\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2^2} = \ldots$$

$$\ldots = 2^n\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n}\cdot\sin\frac{\varphi}{2^n},$$

այնպես որ, մեզ հետաքրքրող արտահայտությունը կներկայացվի այսպիսի տեսքով՝

$$\frac{\sin\varphi}{2^n\cdot\sin\frac{\varphi}{2^n}} = \frac{\sin\varphi}{\varphi}\cdot\frac{\frac{\varphi}{2^n}}{\sin\frac{\varphi}{2^n}},$$

Քանի որ $x_n = \frac{\varphi}{2^n} \to 0$, ապա վերևում ասածի համաձայն՝

$$\lim\frac{\sin\frac{\varphi}{2^n}}{\frac{\varphi}{2^n}} = 1,$$

և մեր վարիանտայի սահմանը կլինի $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ թիվը։

8) Այժմ ուսումնասիրենք նույնպես շատ կարևոր մի սահման ևս։ 36-ում e թիվը որոշվել էր որպես հետևյալ վարիանտայի սահման՝

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad (10)$$

Իսկ հիմա մենք ապացուցենք ավելի ընդհանուր արդյունք՝

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x. \tag{11}$$

Դրա համար, ինչպես հեշտ է հասկանալ, բավական է ցույց տալ, որ առանձին-առանձին գոյություն ունեն հետևյալ առընչությունները՝

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{և} \quad \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{11 ա}$$

Այս անգամ օգտվենք սահմանի երկրորդ սահմանումից, արտահայտված «հաջորդականությունների լեզվով» [53]։

Նախ հիշենք, որ (10)-ի հետ միաժամանակ տեղի ունի նաև

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e \tag{12}$$

հավասարությունը, եթե $\{n_k\}$*-ն այնպիսի բնական թվերի կամայական հաջորդականություն է, որոնք* k *համարի հետ միասին աճում են մինչև անվերջություն* [40]։

Այժմ, ենթադրենք, թե x*-ն անցնում է որևէ* $\{x_k\}$ *արժեքների հաջորդականությամբ, որը ձգտում է* $+\infty$. *Նույնիսկ կարելի է ընդունել, որ բոլոր* $x_k > 1$։ *Ընդունենք* $n_k = E(x_k)$, *այնպես որ՝*

$$n_k \leq x_k < n_k + 1 \text{ և } n_k \to +\infty.$$

Քանի որ այդ դեպքում

$$\frac{1}{n_k + 1} < \frac{1}{x_k} \leq \frac{1}{n_k},$$

ապա՝

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} < \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} < \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1}.$$

Ծայրերի երկու արտահայտությունները կարող են ձևափոխվել այսպես,

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1}}{1 + \frac{1}{n_k + 1}},$$

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right),$$

ընդ որում, (12)-ի շնորհիվ, կունենանք՝

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\to e,\ \text{ինչպես նաև}\ \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\to e,$$

այն ժամանակ, երբ ակներևորեն՝

$$1+\frac{1}{n_k}\to 1,\ 1+\frac{1}{n_k+1}\to 1։$$

Այսպիսով, վերոհիշյալ երկու արտահայտությունները ձգտում են միևնույն e սահմանին, և այն ժամանակ նրանց միջև գտնվող արտահայտությունը նույնպես կձգտի e-ին [ըստ 28,3° թեորեմայի]՝

$$\lim\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=e։$$

Դրանով էլ ավարտվում է (11ա) առնչություններից առաջինի ապացույցը «հաջորդականությունների լեզվով»։

Այդ առնչություններից երկրորդն ապացուցելու համար. ենթադրենք, որ $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանը $-\infty$ է (ընդ որում, կարելի է ընդունել որ բոլոր $x_n<-1$)։ Եթե նշանակենք $x_k=-y_k$, ապա $y_k\to+\infty$ (և բոլոր $y_k>1$)։ Ակներևաբար՝

$$\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=\left(1-\frac{1}{y_k}\right)^{-y_k}=\left(\frac{y_k}{y_k-1}\right)^{y_k}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)^{y_k-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)։$$

Քանի որ, վերևում ապացուցածի համաձայն, վերջին արտահայտության առաջին արտադրիչը ձգտում է e-ի, իսկ երկրորդի սահմանը 1-ն է, ուրեմն ձախ կողմում գրված արտահայտությունը նույնպես կձգտի e-ի։ (11)-րդ բանաձևը լրիվ ապացուցված է։

Այժմ $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ արտահայտության մեջ x-ը փոխարինենք

$\frac{1}{\alpha}$-ով. եթե α-ին տանք զրոյի ձգտող հաջորդական արժեքներ (բայց զրոյի ոչ հավասար), ապա $x=\frac{1}{\alpha}$-ը կձգտի ∞, ուստի (11)-րդ բանաձևը կարելի է գրել այսպես՝

$$e=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad (13)$$

e թվի բոլոր կիրառությունները հիմնված են այս նշանավոր արդյունքի վրա:

9) Վերջապես, հետաքրքրական է դիտարկել նաև այնպիսի օրինակ, երբ ֆունկցիայի սահմանը գոյություն չունի: Երբ x-ը ձգտում է $+\infty(-\infty)$, sin x ֆունկցիան ոչ մի սահման չունի:

Սահմանի բացակայության մեջ ամենից հեշտ է համոզվել, կանգնելով «հաջորդականությունների» տեսակետի վրա: Բավական է նկատել, որ x-ի արժեքների երկու

$$\left\{\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi\right\} \text{ և } \left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\} \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

հաջորդականություններին, որոնք ձգտում են $+\infty$, համապատասխանում են ֆունկցիայի արժեքների այնպիսի հաջորդականություններ, որոնք ձգտում են տարբեր սահմանների, այն է՝

$$\sin\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi=-1\to-1, \qquad \sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi=1\to1.$$

[Նույնը կարելի է արտահայտել նաև այլ կերպ. եթե վերցնենք x-ի արժեքների

$$\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\} \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

հաջորդականությունը, որը ձգտում է $+\infty$, ապա նրան կհամապատասխանի ֆունկցիայի արժեքների

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi=(-1)^n \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

հաջորդականությունը, որը ոչ մի սահման չունի]:

Եթե վերհիշենք սինուսոիդի տատանողական բնույթը, ապա այս դեպքում սահմանի բացակայությունը ակնառու կդառնա:

$\sin\frac{1}{\alpha}$ ֆունկցիան նույնպես ոչ մի սահման չունի, երբ α-ն ձգտում է 0-ի (աջից կամ ձախից): Ըստ էության, սա վերոհիշյալ օրինակի մի այլ ձևն է. համոզվելու համար բավական է միայն sin x ֆունկցիայի մեջ x-ը

փոխարինել $\frac{1}{\alpha}$-ով։ Ակներև է, որ երբ α-ն ստանում է աջից (ձախից) զրոյի ձգտող հաջորդական արժեքներ, ապա $x=\frac{1}{\alpha}$-ը ձգտում է $\infty(-\infty)$, և հակադարձը։

$\sin\frac{1}{x}$ արտահայտության մեջ α-ի փոխարեն նորից գրենք x տառը (որպեսզի վերադառնանք արգումենտի սովորական նշանակմանը) և դիտարկենք ստացված

$$y=\sin\frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

ֆունկցիայի շատ ուսանելի գրաֆիկը, սահմանափակվելով x-ի արժեքներով 0-ից մինչև $\frac{2}{\pi}$ (և $-\frac{2}{\pi}$-ից մինչև 0)։

Նշենք x-ի զրոյի ձգտող հետևյալ հաջորդական արժեքները՝

$$\frac{2}{\pi},\ \frac{1}{\pi},\ \frac{2}{3\pi},\ \frac{1}{2\pi},\ \frac{2}{5\pi},\ \frac{1}{3\pi},\ \frac{2}{7\pi},\ \ldots,\ \frac{2}{(2n-1)\pi},\ \frac{1}{n\pi},\ \frac{2}{(2n+1)\pi},\ \ldots$$

որոնց համապատասխանում են $\frac{1}{x}$-ի մինչև $+\infty$ աճող հետևյալ արժեքները

$$\frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ \frac{5\pi}{2},\ 3\pi,\ \frac{7\pi}{2},\ \ldots,\ \frac{(2n-1)\pi}{2},\ n\pi,\ \frac{(2n+1)\pi}{2},\ \ldots$$

Նշված արժեքների միջև գտնվող միջակայքերում $\sin\frac{1}{x}$ ֆունկցիան (x-ը նվազելիս) հերթականությամբ նախ նվազում է 1-ից մինչև 0 և 0-ից մինչև -1 և ապա աճում -1-ից մինչև 0 և 0-ից մինչև 1, և այլն։ Այսպիսով, այդ ֆունկցիան, sin x ֆունկցիայի նման, կատարում է անթիվ բազմությամբ տատանումներ, բայց այն ժամանակ, երբ sin x-ի համար այդ տատանումները բաշխվում են անվերջ միջակայքում, այստեղ նրանք բոլորը սեղմվում են վերջավոր միջակայքում, խտանալով դեպի 0-ն։

Այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է 23-րդ գծագրի վրա [հասկանալի է, որ ոչ լրիվ. անթիվ բազմությամբ տատանումները պատկերել հնարավոր չէ]։ Քանի որ x-ի նշանը փոխելիս $\sin\frac{1}{x}$-ը ևս նշանը փոխում է, ապա գրաֆիկի ձախ կեսը սիմետրիկ է աջին՝ սկզբնակետի նկատմամբ։

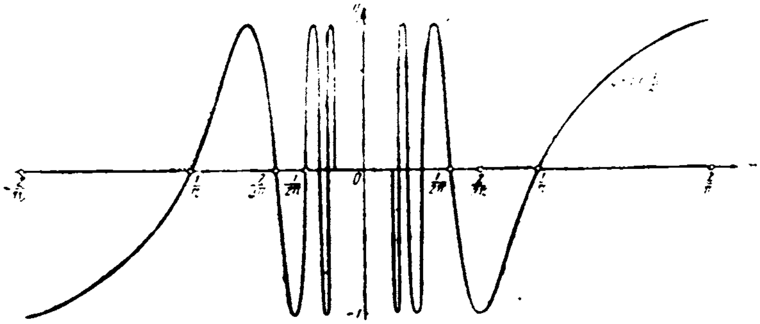
10) Եթե դիտարկենք $x\cdot\sin\frac{1}{x}$ ֆունկցիան $(x\neq 0)$, որը հենց նոր ուսումնասիրված $\sin\frac{1}{x}$ ֆունկցիայից տարբերվում է x արտադրյալով, ապա այս դեպքում, երբ $x\to 0$-ի, ֆունկցիայի սահմանը գոյություն ունի՝

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0,$$

որն անմիջապես հետևում է

$$\left|x \cdot \sin\frac{1}{x}\right| \leqslant |x|$$

անհավասարությունից։



Գծ. 23

Երբ x-ը ձգտում է զրոյի, այս ֆունկցիան նախորդի նման կատարում է անթիվ բազմությամբ տատանումներ. սակայն դրանց ամպլիտուդները (x բազմապատկչի շնորհիվ) նվազում են, ձգտելով զրոյի, որով և պահպանվում է սահմանի գոյությունը։

$$y = x \sin\frac{1}{x}$$

Ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է 24 գծագրի վրա. նա տեղավորված է կոորդինատային անկյունների՝ $y = x$ և $y = -x$ երկու կիսորդների միջև*։

Դիտողություն։ Մենք ունեցանք մի շարք սահմաններ՝

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

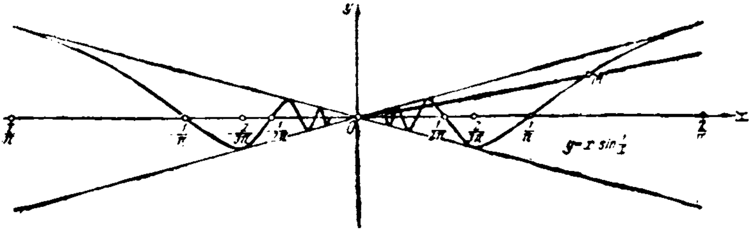
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0,$$

---

* Պարզության համար հարկ է եղել 23-րդ և 24-րդ գծագրերում x-երի առանցքի վրա վերցնել ավելի մեծ մասշտաբ, որն աղավաղում է նկարը։

որոնք ունեն մի ընդհանուր հատկություն՝ այստեղ դիտարկվող ֆունկցիաներից և ոչ մեկը $x=0$ *արժեքի համար որոշված չէ։ Սակայն այդ բոլորովին չի խանգարում խոսել այդ ֆունկցիաների սահմանների մասին, երբ* $x \to 0$, *որովհետև, 52-ում տրված սահմանման համաձայն, այդ դեպքում հենց* $x=0$ *արժեքը քննության չի առնվում։*

Այն հանգամանքը, որ $\sin\frac{1}{x}$ *ֆունկցիան* $x=0$ *արժեքի համար իմաստ չունի, դարձյալ չի խանգարում դնել նրա սահմանի հարցը, երբ* $x \to 0$. *սակայն այս անգամ պարզվում է, որ այդ սահմանը գոյություն չունի։*



Գծ. 24.

55. ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԸՆԴԱՐՁԱԿՈՒՄԸ։ Բնականաբար խնդիր է առաջանում՝ I *գլխում* (§§ 1 *և* 2) *վարիանտայի դեպքի համար զարգացրած սահմանների տեսությունն ընդարձակել կամայական ֆունկցիայի այստեղ դիտարկվող ընդհանուր դեպքի համար։*

Դրա համար գոյություն ունի երկու ճանապարհ։

1. *Ամենից առաջ, կարելի է այնտեղ շարադրված դատողություններն այստեղ վերաձևակերպել։ Որպես օրինակ, մենք այդ փաստացիորեն կատարենք* 26-*ի* 1° *թեորեմայի նկատմամբ։*

Դիտարկենք $f(x)$ *ֆունկցիան, որը տրված է* a* *կուտակման կետ ունեցող մի* X *տիրույթում։*

1° **Եթե x-ը a-ին ձգտելիս $f(x)$ ֆունկցիան ունի վերջավոր A սահման և $A>p$ ($A<q$), ապա a-ին բավականաչափ մոտ գտն-**

---

* a-*ն կարող է լինել նաև անվերջություն, սակայն որոշակիության համար մենք կսահմանափակվենք այն դեպքով, երբ* a-*ն վերջավոր է։*

ձգտող (a-ից տարբեր) x-ի արժեքների համար ֆունկցիան ինքն էլ բավարարում է

$$f(x) > p \quad (f(x) < q) \qquad (14)$$

անհավասարությունը:

Ընտրելով $\varepsilon < A - p \ (q - A)$ *դրական թիվը, կունենանք՝*

$$A - \varepsilon > p \quad (A + \varepsilon < q).$$

Սակայն, սահմանի սահմանման համաձայն, այդ ε*-ի համար կգտնվի այնպիսի* δ *թիվ, որ, հենց որ* $|x-a|<\delta$ *(որտեղ x-ը վերցված է X-ից և տարբեր է a-ից), ապա անմիջապես տեղի ունենան*

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$$

անհավասարությունները։ x-ի այդ նույն արժեքների համար առավել ևս տեղի կունենա (14) անհավասարությունը։

Ընթերցողը տեսնում է, որ ապացուցման համար ոչ մի նոր գաղափար օգտագործելու հարկ չեղավ։

Այստեղից անմիջապես հետևում է 26-ում տրված 2°, 3° և 5° թեորեմների ճշտությունն այս ընդհանուր դեպքի համար։ Օրինակ, 1°-ի մեջ ընդունելով $p=0$ $(q=0)$, *կստանանք՝*

2° եթե x-ը a-ին ձգտելիս f(x) ֆունկցիան ունի դրական (բացասական) վերջավոր սահման, ապա ֆունկցիան ինքն էլ դրական է (բացասական է) x-ի՝ գոնե a-ին բավականաչափ մոտ, բայց a-ից տարբեր արժեքների համար:

Ճիշտ է նաև 26-ի 4°-ին համանման թեորեման, բայց ավելի նեղ ձևով՝

4° եթե x-ը a-ին ձգտելիս f(x) ֆունկցիան ունի վերջավոր A սահման, ապա a-ին բավականաչափ մոտ գտնվող x-ի արժեքների համար ֆունկցիան կլինի սահմանափակ՝

$$|f(x)| \leqslant M' \quad (M'=\text{const.}, \ |x-a|<\delta).$$

Հիշենք, որ վերջավոր սահման ունեցող x_n *վարիանտայի համար ևս* $|x_n| \leqslant M'$ *անհավասարությունն սկզբում ստացվել էր միայն* $n>N$ *արժեքների համար. բայց, քանի որ վարիանտայի միայն վերջավոր թվով արժեքներ կարող էին չբավարարել այդ անհավասարությանը, ապա դժվար չէր, հարկ եղած դեպքում մեծացնելով* M'*-ը, հասնել այն բանին, որ այդ անհավասարությունը տեղի ունենար* x_n*-ի բոլոր արժեքների համար։ Իսկ*

այստեղ այդ կատարել ընդհանրապես, չի կարելի, որովհետև x-*ի այն արժեքները, որոնց համար* $|f(x)| > M'$, *կարող են լինել նաև անվերջ բազմությամբ։ Օրինակ,* $f(x) = \frac{1}{x}$ *ֆունկցիան ձգտում է մեկի, երբ* $x \to 1$ ($x > 0$ *համար). ակներև է, որ* $|x-1| < \frac{1}{2}$ *դեպքում* $f(x) < 2$, *սակայն* x-*ի դիտարկվող բոլոր արժեքների համար* $f(x)$ *ֆունկցիան բոլորովին էլ վերջավոր չի լինի։*

II. *Անցնելով մյուս թեորեմներին, որոնց մեջ փոփոխականները կապված են հավասարության, անհավասարության կամ թվաբանական գործողությունների նշաններով, մենք ամենից առաջ պետք է պայմանավորվենք, որ այդպիսի նշաններով միացնելով երկու կամ մի քանի* $f(x)$, $g(x), \ldots$ *ֆունկցիաներ (որոնք որոշված են միևնույն* X *տիրույթում), մենք միշտ ենթադրում ենք, որ նրանց արժեքները համապատասխանում են* x-*ի միևնույն արժեքին։*

Բոլոր այդ թեորեմները կարելի էր նորից ապացուցել վերոհիշյալ եղանակով, սակայն, և այդ կարևոր է ընդգծել, իրականում դրանց վերաապացուցման անհրաժեշտությունը չկա: *Եթե, ֆունկցիայի սահմանի մասին խոսելիս, կանգնենք «հաջորդականությունների տեսակետի» վրա,* ապա քանի որ հաջորդականությունների համար թեորեմները արդեն ապացուցված են, նրանք ճիշտ են նաև ֆունկցիաների համար:

Օրինակի համար կանգ առնենք 30-ի 1, 2, 3 *թեորեմների վրա.*

Դիցուք X տիրույթում (a կուտակման կետով) տրված են $f(x)$ և $g(x)$ երկու ֆունկցիաներ, և x-ը a-ի ձգտելիս երկուսն էլ ունեն վերջավոր սահմաններ՝

$$\lim f(x) = A, \quad \lim g(x) = B.$$

Այդ դեպքում

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (15)$$

ֆունկցիաները նույնպես ունեն վերջավոր սահմաններ (քանորդի դեպքում պետք է ենթադրել, որ $B \neq 0$), այն է՝

$$A \pm B, \quad A \cdot B, \quad \frac{A}{B},$$

Ցված առնչությունները «հաջորդականությունների լեզվով» կարտահայտվեն հետևյալ կերպ. եթե $\{x_n\}$-ը X-ից վերցրած x-ի արժեքների որևէ հաջորդականություն է, որի սահմանը a-ն է, ապա՝

$$f(x_n)\to A,\quad g(x_n)\to B.$$

Եթե այս երկու վարիանտների նկատմամբ կիրառենք արդեն ապացուցված թեորեմները, ապա անմիջապես կստանանք՝

$$\lim[f(x_n)\pm g(x_n)] = A\pm B,\quad \lim f(x_n)\cdot g(x_n) = A\cdot B,$$

$$\lim\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{A}{B},$$

իսկ այս («հաջորդականությունների լեզվով») արտահայտում է հենց այն, ինչ որ պետք էր ապացուցել*։

Նույն ձևով, այժմ մեր կողմից դիտարկվող ընդհանուր դեպքի վրա ավտոմատորեն տարածվում են նաև այն թեորեմները, որոնք ապացուցված են 31-ում և վերաբերում են հատուկ դեպքերին։ Եթե հայտնի են f(x) և g(x) ֆունկցիաների սահմանները (վերջավոր կամ անվերջ), ապա դրա համաձայն արդեն կարելի է դատել (15) արտահայտությունների սահմանների մասին բոլոր դեպքերում, բացի չորս դեպքերից, որոնք պայմանական կերպով բնորոշվում են

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty$$

սիմվոլներով։ Իսկ այս դեպքերում վերոհիշյալ արտահայտությունները ներկայացնում են անորոշություններ, որոնք պարզելու համար արդեն բավական չէ միայն իմանալ f(x) և g(x) ֆունկցիաների սահմանները, այլ պետք է ի նկատի ունենալ նաև այդ ֆունկցիաների փոփոխման օրենքը։

Ընթերցողը հեշտությամբ կարող է ստուգել, որ նախորդ n-ի 4) և 5) օրինակների մեջ մենք գործ ունեինք և $0\cdot\infty$

* Քանորդի դեպքում կարելի էր նշել (այնպես, ինչպես կատարվեց վարիանտների համար), որ a-ին բավականաչափ մոտ գտնվող x-ի արժեքների համար g(x) հայտարարը զրոյից տարբեր է, այնպես որ $\frac{f(x)}{g(x)}$ կոտորակը իմաստ ունի x-ի գոնե այդ արժեքների համար։

տեսքի անորոշությունների հետ, իսկ 7) օրինակի մեջ՝ $\frac{0}{0}$ տեսքի անորոշության հետ։ Հետևյալ n°-ում մենք կբերենք նոր օրինակներ, արդեն կիրառելով սահմանների տեսության պարզագույն թեորեմները։

56. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Ընդհանրացնելով 32-ում տրված 1) և 2) օրինակները. ուսումնասիրենք նախ

$$p(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\dots+a_{k-1}x+a_k$$

բազմանդամի, և ապա երկու այդպիսի բազմանդամների քանորդի՝

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_0x^k+a_1x^{k-1}+\dots+a_{k-1}x+a_k}{b_0x^l+b_1x^{l-1}+\dots+b_{l-1}x+b_l}$$

վարքը, երբ $x\to\pm\infty$։ Հեշտ է տեսնել,

$$p(x)=x^k\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\dots+\frac{a_k}{x^k}\right)$$

ձևափոխման միջոցով, որ՝

$$\lim_{x\to\pm\infty}p(x)=\pm\infty, \qquad (\infty\cdot\infty),$$

ընդ որում, սահմանի նշանը որոշվում է միայն a_0-ի նշանով, երբ k-ն զույգ է. իսկ երբ k-ն կենտ է՝ նա կախված է նաև x-ի նշանից։

2) Նույն ձևով կստանանք, որ

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\pm\infty,\ \frac{a_0}{b_0},\ 0 \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

կախված նրանից, թե հետևյալ պայմաններից որը գոյություն ունի՝ $k>l$, $k=l$ թե $k<l$։ Սահմանի նշանը (առաջին դեպքում) որոշվում է a_0 և b_0 գործակիցների նշանների միջոցով, իսկ երբ $(k-l)$-ը կենտ է՝ նաև x-ի նշանով։

3) Ապացուցենք

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r^* \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

բանաձևը՝ ամեն մի ռացիոնալ դրական r ցուցչի համար։

Հետագայում [76 (5) (գ)] այդ բանաձևը կընդհանրացվի նաև այն դեպքի համար, երբ ցուցիչը ցանկացած իրական թիվ է։

Սկսենք պարզագույն դեպքից, երբ ցուցիչը բնական թիվ է՝ $r=n$: Ըստ Նյուտոնի երկանդամի բանաձևի, կարող ենք գրել՝

$$\frac{(1+x)^n-1}{x}=\frac{nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+x^n}{x}=n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x+\ldots+x^{n-1}.$$

Քանի որ, երբ $x\to 0$, վերջին գումարի բոլոր անդամները, բացի առաջինից, ձգտում են զրոյի, ապա, իսկապես, կունենանք՝

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=n$$

Այժմ ենթադրենք $r=\frac{1}{m}$ (որտեղ m-ը բնական թիվ է) և դիտարկենք

$$\frac{\sqrt[m]{1+x}-1}{x}$$

արտահայտությունը: Ընդունենք

$$\sqrt[m]{1+x}-1=y, \text{ որտեղից } x=(1+y)^m-1:$$

Քանի որ (համարելով $|x|<1$)՝

$$1-|x|<\sqrt[m]{1+x}<1+|x|, \text{ ապա } \lim_{x\to 0}\sqrt[m]{1+x}=1,$$

այնպես որ x-ի հետ միասին նաև $y\to 0$: Իսկ այդ ժամանակ, համաձայն նախորդ դեպքի, կունենանք՝

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{(1+y)^m-1}=\frac{1}{m}:$$

Վերջապես, $r=\frac{n}{m}$ ընդհանուր դեպքը սպառվում է նույն y օժանդակ փոփոխականի մուծմամբ՝

$$\frac{(1+x)^{\frac{n}{m}}-1}{x}=\frac{(1+y)^n-1}{(1+y)^m-1}=\frac{(1+y)^n-1}{y}\cdot\frac{y}{(1+y)^m-1},$$

որտեղից՝

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{n}{m}}-1}{x}=\frac{n}{m}:$$

4) Գտնել

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-1-\frac{x}{m}}{x^2}$$

սահմանը: Նույն $\sqrt[m]{1+x}-1=y$ տեղադրության միջոցով դիտարկվող արտահայտությունը կձևափոխվի այսպես՝

$$\frac{y-\frac{1}{m}[(1+y)^m-1]}{[(1+y)^m-1]^2}=\frac{-\frac{m-1}{2}y^2+\ldots}{m^2y^2+\ldots}=\frac{-\frac{m-1}{2}+\ldots}{m^2+\ldots}$$

որտեղից անմիջապես երևում է, որ որոնելի սահմանը կլինի $-\frac{m-1}{2m^2}$:

5) [54, (8)]-ում արված

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

սահմանը հաճախ օգտագործվում են այլ սահմաններ գտնելու համար:

(ա) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\qquad\left(\frac{0}{0}\right),$$

Ակներևաբար՝

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

քանի որ փակագծի մեջ գրված արտահայտությունը ձգտում է մեկի, ապա ընդհանուր սահմանը կլինի $\frac{1}{2}$:

(բ) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}\qquad\left(\frac{0}{0}\right):$$

Այստեղ ևս կարելի է բերել արդեն ուսումնասիրված սահմաններին՝

$$\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2},$$

Նկատենք, որ, երբ $x\to 0$, ապա $\cos x\to 1$, ինչպես այդ հետևում է, օրինակ, (ա)-ում ստացված արդյունքից:

(գ) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg} x)=0 \quad (\infty-\infty),$$

այստեղ ավելի հարմար է անցնել $x=\frac{\pi}{2}-\alpha$ *փոփոխականին ակներև է, որ երբ* $x\to\frac{\pi}{2}$, *ապա* $\alpha\to 0$։ *Կունենանք՝*

$$\sec x-\operatorname{tg} x=\csc\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}\cdot\frac{\alpha}{\sin\alpha}\cdot\alpha\to 0։$$

57. ՄՈՆՈՏՈՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆԸ։ Ֆունկցիայի սահմանի՝

$$\lim_{x\to a} f(x)\text{-ի}$$

գոյության հարցն առանձնապես հեշտությամբ է լուծվում այն մասնավոր տիպի ֆունկցիաների համար, որոնք հանդիսանում են մոնոտոն վարիանտայի [34] ընդհանրացումը։

Դիցուք $f(x)$ *ֆունկցիան որոշված է մի* $X=\{x\}$ *տիրույթում։ Ֆունկցիան կոչվում է աճող (նվազող) այդ տիրույթում, եթե վերջինիս պատկանող յուրաքանչյուր զույգ արժեքների համար*

$x'>x$ *պայմանից հետևում է՝*

$f(x')>f(x)$ $[f(x')<f(x)]$ *պայմանը։*

Իսկ եթե՝ $x'>x$ *պայմանից հետևում է՝*

միայն $f(x')\geqslant f(x)$ $[f(x')\leqslant f(x)]$ *պայմանը,*

ապա ֆունկցիան կոչվում է չնվազող (չաճող)։ Երբեմն այս դեպքում էլ հարմար է ֆունկցիան անվանել աճող (նվազող), սակայն լայն իմաստով։ Բոլոր այս տիպի ֆունկցիաները կրում են մոնոտոն ընդհանուր անունը։ Մոնոտոն ֆունկցիայի համար գոյություն ունի մի թեորեմ, որը [34]-ում մոնոտոն վարիանտայի վերաբերյալ ապացուցված թեորեմայի անալոգն է։

ԹԵՈՐԵՄԱ: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն աճում է, թեկուզ լայն իմաստով, X տիրույթում, որն ունի a խտացման կետը, ընդ որում a-ն x-ի բոլոր արժեքներից մեծ է (կարող է լինել վեր-

չավոր կամ $+\infty$): Եթե այդ դեպքում ֆունկցիան միաժամանակ վերևից սահմանափակ է՝

$$f(x) \leq M \text{ (x-ի բոլոր արժեքների համար X-ից)},$$

ապա, երբ $x \to a$, ֆունկցիան կունենա վերջավոր սահման, իսկ հակառակ դեպքում նա կձգտի $+\infty$:

Ապացույց: Նախ ընդունենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան վերևից սահմանափակ է, այսինքն՝ վերևից սահմանափակ է ֆունկցիայի այն արժեքների $\{f(x)\}$ բազմությունը, որոնք համապատասխանում են x-ի փոփոխմանը X տիրույթում: Այդ դեպքում այդ բազմության համար գոյություն ունի [10] A վերջավոր ճշգրիտ վերին եզր: Ապացուցենք, որ հենց այդ A թիվը կլինի որոնելի սահմանը:

Վերցնելով կամավոր $\varepsilon > 0$ թիվը, ճշգրիտ վերին եզրի սահմանման համաձայն, կգտնենք այնպիսի $x' < a$ արժեք, որ $f(x') > A - \varepsilon$: Ֆունկցիայի մոնոտոնության հետևանքով, $x' < x < a$ արժեքների համար առավել ևս կլինի $f(x) > A - \varepsilon$: Մյուս կողմից, քանի որ միշտ $f(x) \leq A < A + \varepsilon$, հետևապես x-ի վերոհիշյալ արժեքների համար տեղի կունենա

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

անհավասարությունը:

Հենց այս էլ ապացուցում է մեր թեորեմը, բավական է միայն վերջավոր a-ի դեպքում ընդունել $x' = a - \delta$ (այսինքն՝ $\delta = a - x'$), իսկ երբ $a = +\infty$, վերցնել $\Delta = x'$:

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան վերևից սահմանափակ չէ, ապա, ինչպիսին էլ լինի E թիվը, միշտ կգտնվի այնպիսի x', որ $f(x') > E$, այդ դեպքում $x' < x$ արժեքների համար առավել ևս $f(x) > E$, և այլն:

Առաջարկվում է ընթերցողին՝ այս թեորեմը ձևափոխել այն դեպքի համար, երբ a սահմանային արժեքը փոքր է X-ի բոլոր արժեքներից, նաև այն դեպքի համար երբ ֆունկցիան *մ ո ն ո տ ո ն ն վ ա զ ո ղ* է:

Հեշտ է տեսնել, որ 34-ում ապացուցված մոնոտոն վարիանտային վերաբերող թեորեմը այս թեորեմի մասնավոր դեպքն է: Այնտեղ անկախ փոփոխականը n նշանիկն էր, որի փոփոխման տիրույթը հանդիսանում էր $N = \{n\}$ բնական շարքը $+\infty$ խտացման կետով:

Հետագայում հաճախ կարիք է լինելու որպես X տիրույթ, որտեղ դիտարկվում է $f(x)$ ֆունկցիան, վերցնել $[a',a]$ անընդմիջվող միջակայքը, որտեղ $a'<a$ և a-ն վերջավոր թիվ է կամ $+\infty$, կամ թե՝ $[a,a']$ միջակայքը, որտեղ $a'>a$ և a-ն վերջավոր թիվ է կամ $-\infty$։

58. ԲՈԼՑԱՆՈ-ԿՈՇԻԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ։ *Այժմ անցնենք ընդհանուր դեպքին՝ $f(x)$ ֆունկցիայի ուսումնասիրությանը, երբ տրված է a խտացման կետ ունեցող $X=\{x\}$ տիրույթում։ Այդ ֆունկցիայի վերջավոր սահմանի գոյության համար, երբ x-ը ձգտում է a-ին, կարելի է ստանալ նույնպիսի հայտանիշ, ինչպիսին ստացված է վարիանտայի դեպքում 39-ում։ Այդ հայտանիշի ձևակերպումը մենք տալիս ենք զուգահեռաբար վերջավոր a-ի և $a=+\infty$ դեպքերի համար։*

ԲՈԼՑԱՆՈ-ԿՈՇԻԻ ԹԵՈՐԵՄԱՆ: Որպեսզի $f(x)$ ֆունկցիան x-ը a-ին ձգտելիս ընդհանրապես ունենա վերջավոր սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունենա այնպիսի $\delta>0$ $(\Delta>0)$ թիվ, որ տեղի ունենա

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$$

անհավասարությունը, հենց որ

$$|x-a|<\delta \quad \text{և} \quad |x'-a|<\delta \quad (x>\Delta \text{ և } x'>\Delta)\text{։}$$

Ապացուցման ընթացքում կենթադրենք, որ a-ն վերջավոր թիվ է։

Անհրաժեշտությունը։ Դիցուք գոյություն ունի վերջավոր սահման՝

$$\lim_{x\to a} f(x)=A\text{։}$$

Այդ դեպքում, տված $\varepsilon>0$ թվի համար կգտնվի այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որ

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2},$$

հենց որ $|x-a|<\delta$։ Դիցուք նաև $|x'-a|<\delta$, այնպես որ նաև

$$|A-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2}\text{։}$$

Այստեղից կստանանք՝

$$|f(x)-f(x')| = |[f(x)-A]+[A-f(x')]| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x)-A| + |A-f(x')| < \varepsilon,$$

ենթադրելով, որ միաժամանակ՝

$$|x-a|<\delta \quad և \quad |x'-a|<\delta։$$

Բավարարությունը կարելի է ապացուցել այնպիսի դատողությունների միջոցով, որոնք միանգամայն նման են վարիանտայի դեպքում [39] *կիրառված դատողություններին։ Սակայն, ավելի հեշտ կլինի, չկիրառելով այդ դատողությունները հարցը ուղղակի հանգեցնել արդեն ուսումնասիրված դեպքին։ Դրա համար ճանապարհ է բացում ֆունկցիայի սահմանի գաղափարի երկրորդ սահմանումը՝ արտահայտված «հաջորդականությունների լեզվով»* [53]։

Այսպես, ուրեմն, դիցուք թեորեմայի մեջ ձևակերպված պայմանը տեղի ունի և կամայականորեն վերցրած $\varepsilon>0$ *թվի համար որոշված է համապատասխան* $\delta>0$ *թիվը։*

Եթե $\{x_n\}$*-ը* X*-ից վերցրած* x*-ի արժեքների որևէ հաջորդականություն է, որը զուգամիտում է* a*-ին, ապա, ըստ հաջորդականության սահմանի սահմանման, կարելի է գտնել այնպիսի* N *համար, որ* $N<n$ *արժեքների համար տեղի ունենա* $|x_n-a|<\delta$ *անհավասարությունը։* n*-ի հետ միասին վերցնենք նաև մի այլ համար՝* $n'>N$*, այնպես, որ միաժամանակ տեղի ունենան*

$$|x_n-a|<\delta \quad և \quad |x_{n'}-a|<\delta$$

անհավասարությունները։

Այդ դեպքում, δ *թվի ընտրության շնորհիվ, կունենանք*

$$|f(x_n)-f(x_{n'})|<\varepsilon։$$

Այսպիսով, վերջին անհավասարությունը տեղի ունի միակ պահանջի դեպքում, այն է՝ n *և* n' *երկու համարները մեծ լինեն* N*-ից։ Այդ նշանակում է, որ* $f(x_n)$ $(n=1, 2, 3, \dots)$ *վարիանտայի համար տեղի ունի 39 ում պահանջված պայմանը և, հետևապես,*

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3), \dots,\ f(x_n), \dots$$

հաջորդականությունը ունի վերջավոր սահման։

53-ում մենք տեսել ենք (տես վերջում կատարված դիտողությունը), որ այդքանը բավական է, որպեսզի, ինչպես էլ ընտրենք a-ին զուգամիտող $\{x_n\}$ հաջորդականությունը, միշտ ստացվի միևնույն սահմանը. հենց այդ սահմանն էլ կլինի ֆունկցիայի սահմանը, որի գոյությունը պետք էր ապացուցել։

[Վերոհիշյալ պայմանի բավարար լինելը հեշտությամբ կարելի է ստանալ նաև Բոլցանո-Վայերշտրասսի թեորեմայից այնպես, ինչպես այդ կատարված է վարիանտայի համար 41-ի վերջում։]

59. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՄԵԾԱԳՈՒՅՆ ԵՎ ՓՈՔՐԱԳՈՒՅՆ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԸ։ Նույնիսկ $f(x)$ ֆունկցիայի x-ը a-ին ձգտելիս որոշակի սահմանի բացակայության դեպքում կարող է a-ին ձգտող x_n-ի արժեքների տարբեր հաջորդականությունների համար

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n)$$

սահմանը այնուամենայնիվ գոյություն ունենալ. վերջիններս անվանում են ֆունկցիայի մասնակի սահման։

Օրինակ, $\sin x$ ֆունկցիայի համար, երբ $x \to \pm\infty$ (կամ $\sin\frac{1}{x}$-ի համար, երբ $x \to 0$) այդ մասնակի սահմանները լրացնում են -1-ից մինչև $+1$ ամբողջ միջակայքը։

Ֆունկցիայի մասնակի սահմանների միջև միշտ կգտնվի ինչպես ամենամեծը, նույնպես և ամենափոքրը, դրանք նշանակում են այսպես՝

$$\overline{\lim_{x \to a}} f(x) \quad և \quad \underline{\lim_{x \to a}} f(x)$$

և անվանում $f(x)$-ի մեծագույն և փոքրագույն սահմաններ։

Մեծագույն և փոքրագույն սահմանների հավասարությունն անհրաժեշտ և բավարար պայման է ֆունկցիայի որոշակի սահմանի գոյության համար՝ սովորական իմաստով։

Մենք սահմանափակվում ենք այս թեորեմայի ձևակերպումով, առանց ապացուցելու։ Այդ կարելի է կատարել նույն ձևով, ինչպես կատարված է 42-ում։

§ 3. ԱՆՎԵՐՋ ՓՈՔՐ ԵՎ ԱՆՎԵՐՋ ՄԵԾ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԴԱՍԱԿԱՐԳՈՒՄԸ

60. ԱՆՎԵՐՋ ՓՈՔՐԵՐԻ ԲԱՂԴԱՏՈՒՄԸ։ Ենթադրենք, թե մի որևէ հարցի հետազոտության ընթացքում դիտարկվում են մի շարք անվերջ փոքր մեծություններ՝

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots,$$

որոնք, ընդհանրապես կլինեն ֆունկցիաներ միևնույն փոփոխականի, ասենք x-ի, որը ձգտում է վերջավոր կամ անվերջ a սահմանին։

Շատ դեպքերում հետաքրքրություն է ներկայացնում վերոհիշյալ անվերջ փոքրերի բաղդատումն իրար հետ՝ ըստ նրանց զրոյի ձգտելու բնույթի։ α և β երկու անվերջ փոքրերի բաղդատման հիմքում դրվում է նրանց հարաբերության վարքը։ Այս առթիվ ընդունենք երկու պայման, այն է՝*

I. Եթե $\frac{\beta}{\alpha}$ (նրա հետ նաև $\frac{\alpha}{\beta}$) հարաբերությունը ունի վերջավոր և զրոյից տարբեր սահման, ապա α և β անվերջ փոքրերը համարվում են նույն կարգի մեծություններ։

II. Իսկ եթե $\frac{\beta}{\alpha}$ հարաբերությունը ձգտում է զրոյի (իսկ $\frac{\alpha}{\beta}$ հարաբերությունը՝ ∞), ապա β անվերջ փոքրը համարվում է ավելի բարձր կարգի մեծություն, քան α անվերջ փոքրը և միաժամանակ α անվերջ փոքրը կլինի ավելի ցածր կարգի, քան β անվերջ փոքրը։

Օրինակ, երբ $a = x \to 0$, *ապա այս անվերջ փոքրերի նկատմամբ նույն կարգի անվերջ փոքրեր կլինեն նաև՝*

$$\mathrm{sim}\, x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \sqrt[m]{1+x} - 1$$

մեծությունները, որովհետև, ինչպես գիտենք [54, 7); 56, 3)]՝

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[m]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{m};$$

ընդհակառակը,

$$\sqrt[m]{1+x} - 1 - \frac{x}{m}, \quad 1 - \mathrm{coc}\, x, \quad \operatorname{tg} x - \sin x$$

անվերջ փոքրերը, ակնհայտորեն, կլինեն ավելի բարձր կարգի, քան x-ը [56. 4); 5), *(ա) և (բ)*]։

Դիտողություն. կարող է պատահել, որ երկու անվերջ փոքրերի հարաբերությունը ոչ մի սահմանի չձգտի, օրինակ, եթե վերցնենք

$$\alpha = x \quad \text{և} \quad \beta = x \sin \frac{1}{x},$$

---

* *Մենք ընդունում ենք, որ այն փոփոխականը, որի վրա մենք բաժանում ենք, զրո չի դառնում, գոնե a-ին բավականաչափ մոտ գտնվող x-ի արժեքների համար։*

[տես 64 գ) և 10)], բայց նրանց հարաբերությունը, որը հավասար է $\sin\frac{1}{x}$-ի, սահման չունի, երբ $x\to 0$։ Այդ դեպքում ասում են, որ երկու անվերջ փոքրերը իրար հետ անբաղդատելի են.

Նշենք, որ երբ β անվերջ փոքրն ավելի բարձր կարգի է, քան α անվերջ փոքրը, այդ փաստը գրում են այսպես՝

$$\beta = o(\alpha).$$

Օրինակ, կարելի է գրել՝

$$1-\cos x = o(x), \quad \operatorname{tg} x - \sin x = o(x), \text{ և այլն։}$$

Այսպիսով, α-ից ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքրերի ընդհանուր նշանակման համար ծառայում է $o(\alpha)$ սիմվոլը։ Հետագայում մենք կօգտվենք այս հարմար նշանակումից։

61. ԱՆՎԵՐՋ ՓՈՔՐԵՐԻ ՍԱՆԴՂԱԿ։ Երբեմն անհրաժեշտ է լինում անվերջ փոքրերի վարքի ավելի ճշգրիտ համեմատական բնութագրում, անհրաժեշտ է լինում նրանց կարգերն արտահայտել թվերով։ Այդ դեպքում, նախ իբրև յուրատեսակ «էտալոն» (չափ) ընտրում են ուսումնասիրության ենթակա անվերջ փոքրերից որևէ մեկը (ասենք α-ն), և այն անվանում են հիմնական անվերջ փոքր։ Իհարկե, հիմնական անվերջ փոքրի ընտրությունը որոշ չափով կամավոր է, սակայն ընդհանրապես վերցնում են ամենապարզը։ Եթե դիտարկվող մեծությունները, ինչպես արդեն ընդունել ենք, հանդիսանում են x-ի ֆունկցիաներ և դառնում են անվերջ փոքրեր, երբ x-ը ձգտում է a-ին, ապա նայած թե a-ն զրո՞ է, վերջավոր և զրոյից տարբեր թի՞վ է, թե՞ անվերջություն է, ըստ այնմ էլ, բնական կլինի որպես հիմնական անվերջ փոքր վերցնել, համապատասխանաբար,

$$x, \quad x-a, \quad \frac{1}{x}$$

մեծությունները։

Այնուհետև, α հիմնական անվերջ փոքրի (համարելու ենք $\alpha>0$) տարբեր դրական ցուցիչներ ունեցող α^k աստիճաններից կազմում են սանդղակի (шкала) նման մի բան՝ ավելի բարդ բնույթի անվերջ փոքրերը գնահատելու համար։*

---

* Հեշտ է տեսնել, որ $0<k$ դեպքում α^k մեծությունը α-ի հետ միաժամանակ կլինի անվերջ փոքր։

III Պայմանավորվում են β անվերջ փոքրը համարել k-րդ կարգի մեծություն (հ ի մ ն ա կ ա ն α ա ն վ ե ր ջ փ ո ք ր ի ն կ ա տ մ ա մ բ), եթե β-ն և α^k-ը ($k>0$) նույն կարգի մեծություններ են, *այսինքն՝ եթե $\frac{\beta}{\alpha^k}$ հարաբերությունն ունի վերջավոր և զրոյից տարբեր սահման։*

Այժմ, օրինակ, կարելի է չբավարարվելով միայն այն պնդումով, թե (1) *անվերջ փոքրերը (երբ $x\to0$) ավելի բարձր կարգի են, քան $\alpha=x$ մեծությունը, ճշգրիտ կերպով ասել, որ դրանցից առաջին երկուսը $\alpha=x$-ի նկատմամբ ե ր կ ր ո ր դ կարգի անվերջ փոքրեր են, իսկ վերջինը՝ ե ր ր ո ր դ կարգի, որովհետև* [56, 4), 5) *(ա) և (բ)*]՝

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-1-\frac{1}{m}x}{x^2}=-\frac{m-1}{2m^2},\quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

Ավելի բարդ օրինակ վերցնելու համար դիտարկենք

$$\beta=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}$$

արտահայտությունը, որը կլինի անվերջ փոքր երբ $x\to+\infty$, այդ պարզ կլինի, եթե այդ արտահայտությունը գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$\beta=(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})-(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}.$$

Շարունակելով ձևափոխել, կստանանք՝

$$\beta=\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}=$$

$$=-\frac{2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})}.$$

Ընդունելով $\alpha=\frac{1}{x}$*, այժմ արդեն դժվար չէ հասկանալ, որ*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta}{\alpha^{3/2}}=$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{2(\sqrt{x})^3}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}\times$$

$$\times\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}=-\frac{1}{4}.^{*}$$

Այսպիսով, այստեղ կարգը արտահայտվում է $\frac{3}{2}$ թվով։

Իհարկե, չպետք է կարծել որ, ամեն մի 3 անվերջ փոքրի համար (անգամ x^k-ի բոլոր աստիճանների հետ բաղդատելի) կարելի է ստանալ որոշակի կարգ։

Սրան վերաբերող հետաքրքիր օրինակներ կարելի է ստանալ 54, 4) և 5-ում դրված բանաձևերից (երբ a>1 և k>0)՝

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^k}=+\infty,\quad \lim_{x\to+0}\frac{\log_a x}{x^k}=0.$$

Նախ և առաջ այստեղից հետևում է, որ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{\log_a x}=\infty.$$

Այստեղ x-ը փոխարինելով $\frac{1}{x}$-ով և առաջին արտահայտության մեջ նաև ընդունելով $a=\frac{1}{c}$, $0<c<1$, կստանանք՝

$$\lim_{x\to 0}\frac{c^{\frac{1}{x}}}{x^k}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\log_a x}}{x^k}=\infty.$$

Այսպիսով $c^{\frac{1}{x}}$ $(0<c<1)$ անվերջ փոքրը ավելի բարձր կարգի է, քան բոլոր x^k $(k<0)$ աստիճանները, այն ժամանակ, երբ $\frac{1}{\log_a x}$ $(a<1)$ անվերջ փոքրը ավելի ցածր կարգի է, քան x-ի բոլոր աստիճանները։

62. ՀԱՄԱՐԺԵՔ ԱՆՎԵՐՋ ՓՈՔՐԵՐ։ *Այժմ կանգ առնենք միևնույն կարգի անվերջ փոքրերի առանձնապես կարևոր մի դեպքի վրա։*

---

* *Այստեղ ամենուրեք օգտվում ենք $\lim_{z\to 0}\sqrt{1+z}=1$ առնչությունից, որն ապացուցված է 56, 3)-ում (կամավոր m ցուցիչով արմատի համար)։*

α և β անվերջ փոքրերը կանվանենք համարժեք (նշանակելով՝ $\alpha\sim\beta$), եթե նրանց $\beta-\alpha=\gamma$ տարբերությունը լինի ավելի բարձր կարգի մեծություն, քան α և β անվերջ փոքրերից յուրաքանչյուրն է, այսինքն՝

$$\gamma=o(\alpha) \text{ և } \gamma=o(\beta)։$$

Ի միջի այլոց բավական է պահանջել, որ γ-ն այդ անվերջ փոքրերից միայն մեկի նկատմամբ լինի բարձր կարգի, որովհետև, եթե, օրինակ, γ-ն ավելի բարձր կարգի է, քան α-ն, ապա նա բարձր կարգի կլինի նաև β-ի նկատմամբ։ Իրոք, $\lim\frac{\gamma}{\alpha}=0$ *հավասարությունից հետևում է, որ նաև*

$$\lim\frac{\gamma}{\beta}=\lim\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}=\lim\frac{\frac{\gamma}{\alpha}}{1+\frac{\gamma}{\alpha}}=0։$$

Դիտարկենք α և β երկու համարժեք անվերջ փոքրեր, որտեղ $\beta=\alpha+\gamma$, և $\gamma=o(\alpha)$։ Եթե մոտավորապես ընդունենք $\beta\doteq\alpha$, ապա այդ երկու մեծությունների փոքրացման հետ միասին զրոյի կձգտի ոչ միայն այդ փոխարինման հետևանքով առաջացած բացարձակ սխալը, որը ներկայացվում է $|\gamma|$ մեծությունով, այլև հարաբերական սխալը, որը հավասար է* $\left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|$*-ի։ Այլ խոսքով,* α-ի և β-ի բավականաչափ փոքր արժեքների դեպքում կարելի է ցանկացած չափով մեծ հարաբերական ճշգրտությամբ ընդունել $\beta=\alpha$։ *Սրա վրա է հիմնված, մոտավոր հաշվումների ժամանակ, բարդ անվերջ փոքրերը նրանց նկատմամբ համարժեք պարզ անվերջ փոքրերով փոխարինելը։*

Ստանանք երկու անվերջ փոքրերի համարժեքության մի օգտակար հայտանիշ, որն ըստ էության տալիս է այդ գաղափարի երկրորդ սահմանումը՝ նախորդին հավասարազոր։

α և β երկու անվերջ փոքրերի համարժեքության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1։$$

* $\doteq$ *նշանը նշանակում է մոտավոր հավասարություն։*

Դիցուք նախ տեղի ունի այդ առնչությունը, այնպես որ՝

$$\delta = \frac{\beta}{\alpha} - 1 \to 0.$$

Այդ դեպքում՝

$$\gamma = \beta - \alpha = \delta \cdot \alpha$$

մեծությունը կլինի ավելի բարձր կարգի, քան α-ն, որովհետև

$$\lim \frac{\gamma}{\alpha} = \lim \delta = 0.$$

Հակադարձաբար, դիցուք այժմ α-ն և β-ն համարժեք են, այսինքն՝ $\gamma = \beta - \alpha$ տարբերությունը ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր է, քան α-ն։ Այս հետևանքով կունենանք՝

$$\frac{\beta}{\alpha} - 1 = \frac{\gamma}{\alpha} \to 0, \quad \text{որտեղից} \quad \frac{\beta}{\alpha} \to 1,$$

այն, ինչ պահանջվում էր ապացուցել։

Այս հայտանիշի շնորհիվ, օրինակ, անմիջապես երևում է, որ երբ $x \to 0$, ապա $\sin x$ և $\operatorname{tg} x$ անվերջ փոքրերը համարժեք են x-ին, իսկ $(\sqrt[m]{1+x} - 1)$ մեծությունը համարժեք է $\frac{1}{m}x$-ին։ Այստեղից էլ կարելի է գրել հետևյալ մոտավոր բանաձևերը՝

$$\sin x \doteq x, \quad \operatorname{tg} x \doteq x, \quad \sqrt[m]{1+x} - 1 \doteq \frac{1}{m}x,$$

իսկ մասնավոր դեպքում՝ $\sqrt{1+x} - 1 \doteq \frac{1}{2}x$.

Համարժեք անվերջ փոքրերի այստեղ ապացուցված հատկությունն օգտագործվում է $\frac{0}{0}$ տեսքի անորոշությունները պարզելիս, այսինքն՝ երկու անվերջ փոքրերի $\frac{\beta}{\alpha}$ հարաբերության սահմանը հաշվելիս։ Այդ ժամանակ կարելի է դրանցից յուրաքանչյուրը փոխարինել, առանց սահմանի վրա ազդելու, իրեն համարժեք որևէ անվերջ փոքրով։

Իրոք, եթե $\bar{\alpha} \sim \alpha$ և $\bar{\beta} \sim \beta$, այսինքն՝ եթե

$$\lim \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} = 1 \quad \text{և} \quad \lim \frac{\bar{\beta}}{\beta} = 1,$$

ապա՝

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta}{\bar{\beta}} \cdot \lim \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \cdot \lim \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} = \lim \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}.$$

Եթե հաջողվի գտնել բավականաչափ պարզ α և β մեծություններ, ապա այդ կարող է խնդիրը միանգամից զգալի չափով պարզեցնել: Օրինակ՝

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{2x}=\frac{1}{4}\,:$$

Ապացուցածից նաև հետևում է, որ եթե երկու անվերջ փոքրեր համարժեք են երրորդին, ապա նրանք իրար ևս համարժեք են:

63. ԳԼԽԱՎՈՐ ՄԱՍԻ ԱՆՋԱՏՈՒՄԸ: *Եթե α հիմնական անվերջ փոքրն արդեն ընտրված է, ապա, բնական կլինի, պարզագույն անվերջ փոքրեր համարել $c\cdot\alpha^k$ տեսքի մեծությունները, որտեղ c-ն հաստատուն գործակից է իսկ $k>0$: Դիցուք β անվերջ փոքրը α-ի նկատմամբ k-րդ կարգի է, այսինքն՝*

$$\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c,$$

որտեղ c-ն զրոյից տարբեր վերջավոր թիվ է: Այդ դեպքում

$$\lim\frac{\beta}{c\alpha^k}=1$$

և β ու $c\alpha^k$ անվերջ փոքրերը կլինեն համարժեք՝ $\beta\sim c\alpha^k$: Այդ $c\alpha^k$ պարզագույն անվերջ փոքրը, որը համարժեք է տված β անվերջ փոքրին, կոչվում է վերջինիս գլխավոր մաս (կամ գլխավոր անդամ):

Օգտվելով վերևում ստացված արդյունքներից, բացի արդեն նշված պարզ օրինակներից, հեշտությամբ կարելի է անջատել հետևյալ արտահայտությունների գլխավոր մասերը՝

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad \operatorname{tg}x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3\,:$$

Այստեղ $x\to 0$ և հենց $\alpha=x$ մեծությունը հանդիսանում է հիմնական անվերջ փոքրը:

Վերջապես, եթե $x\to+\infty$ և որպես հիմնական անվերջ փոքր վերցրած է $\alpha=\frac{1}{x}$-ը, ապա կունենանք նաև՝

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\sim-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}\,:$$

Այս բոլոր արդյունքները դարձյալ հանգեցնում են մոտավոր բանաձևերի:

Դիցուք $\beta \sim c\alpha^{k}$, *այսինքն՝* $\beta = c\alpha^{k}+\gamma$, *որտեղ* $\gamma = o(c\alpha^{k})$։ *Կարելի է պատկերացնել, որ* γ *անվերջ փոքրից նորից անջատված է նրա գլխավոր մասը՝* $\gamma = c'\alpha^{k'}+\delta$, *որտեղ* $k'>k$, *իսկ* $\delta = o(\alpha^{k'})$, *և այլն։*

Օրինակ, եթե ընդունենք

$$\sqrt[m]{1+x}-1=\frac{1}{m}x+\gamma$$

$(x\to 0)$, *ապա, ինչպես արդեն* [56, 4)]-*ում ունեինք,*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\gamma}{x^2}=-\frac{m-1}{2m^2},$$

այնպես որ γ-*ի գլխավոր մասը կլինի՝* $-\frac{m-1}{2m^2}x^2$։ *Այստեղից՝*

$$\sqrt[m]{1+x}-1=\frac{1}{m}x-\frac{m-1}{2m^2}x^2+o(x^2)։$$

Մասնավորապես կունենանք՝

$$\sqrt{1+x}-1=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)։$$

Անվերջ փոքրից՝ հետզհետե աճող կարգի պարզագույն անվերջ փոքրերի հաջորդաբար անջատման այս պրոցեսը կարելի է էլի շարունակել։

Այս պարագրաֆում մենք սահմանափակվում ենք միայն ընդհանուր գաղափարների սահմանումով, դրանք լուսաբանելով միայն մի քանի օրինակներով։ Հետագայում մենք կնշենք սիստեմատիկ եղանակ ինչպես տված անվերջ փոքրի գլխավոր մասի կառուցման, այնպես էլ նրանից պարզագույն անվերջ փոքրերի հետագա անջատման համար, որի մասին այստեղ խոսվեց, [*տես* 103, 122]։

Վերջում, կանգ առնենք նաև հետևյալ հարցի վրա՝ եթե հայտնի են β *և* γ *անվերջ փոքրերի* $c\alpha^{k}$ *և* $c'\alpha^{k'}$ *գլխավոր անդամները, ապա ի՞նչ կարելի է ասել նրանց* $\beta+\gamma$ *գումարի գլխավոր անդամի մասին։*

Երբ $k\neq k'$, *ակներև է, որ գումարի գլխավոր անդամը կլինի* $c\alpha^{k}$ *և* $c'\alpha^{k'}$ *անդամներից այն, որի ցուցիչը ավելի փոքր է։ Դիցուք այժմ* $k=k'$. *այդ դեպքում գումարի գլխավոր մասը կհանդիսանա* $(c+c')\alpha^{k}$ *գումարը, ենթադրելով, սակայն, որ* $c+c'\neq 0$։ *Իսկ եթե երկու գլխավոր անդամները իրար չեղոքաց-*

նում են, այդ դեպքում $\beta+\gamma$ գումարը դառնում է ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր, քան այդ գումարելիներից յուրաքանչյուրը։

Այդպես կլինի, օրինակ,

$$\beta=\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x \quad \text{և} \quad \gamma=\sqrt{1-x}-1\sim-\frac{1}{2}x$$

անվերջ փոքրերի համար, երբ $x\to 0$։ Եթե սրանց մեջ անջատենք նաև հաջորդ անդամները՝

$$\beta=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2), \quad \gamma=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2),$$

ապա պարզ է, որ

$$\beta+\gamma=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2=-\frac{1}{4}x^2+o(x^2),$$

այնպես որ, $\beta+\gamma$ գումարը կլինի երկրորդ կարգի անվերջ փոքր, իսկ նրա գլխավոր անդամը հավասար է $-\frac{1}{4}x^2$։

64. ԽՆԴԻՐՆԵՐ։ Շարադրված դատողությունները լուսաբանելու համար, բերենք մի քանի խնդիրներ, որոնց մեջ նրանք օգտագործվում են։

1) Դիցուք, որևէ վայրի ուղղագիծ հեռավորությունը չափվում է l մ. երկարություն ունեցող չափաքանոնի միջոցով։ Քանի որ, փաստորեն, քանոնը վերադրվում է չափվող ուղղի վրա ոչ ճշգրտորեն, նշանակում է չափման արդյունքը իսկական երկարությունից որոշ չափով մեծ կլինի։

Գծ. 25.

Կատարենք ամենից անձեռնտու ենթադրությունը, այն է, որ քանոնը դրվում է զիգզագներով, այնպես, որ նրա ծայրերը ուղղից λ մ. հեռու են գտնվում, հերթականորեն մերթ դեպի մեկ, մերթ դեպի մյուս կողմը (գծ. 25.)։ Պահանջվում է գնահատել կատարված սխալը։

Քանոնը մեկ անգամ դնելուց առաջացած բացարձակ սխալը հավասար է քանոնի l երկարության և նրա՝ չափելի ուղղի վրա ձգած պրոյեկցիայի տարբերությանը. իսկ այդ պրոյեկցիան կլինի՝

$$2\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2-\lambda^2}=l\sqrt{1-\frac{4\lambda^2}{l^2}}.$$

Օգտվելով

$$\sqrt{1+x} \doteq 1+\frac{1}{2}x$$

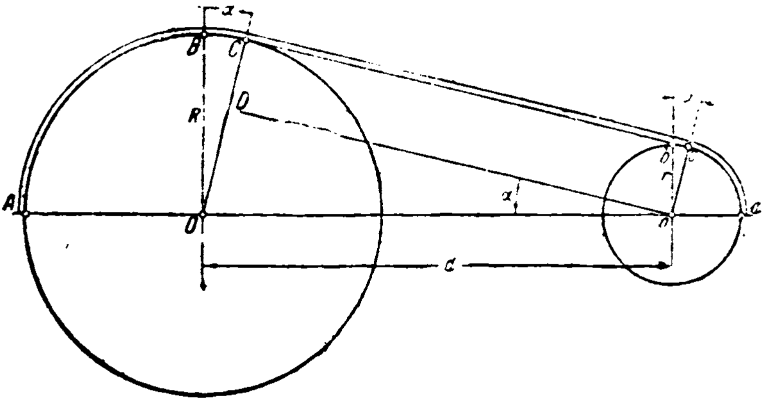
մոտավոր բանաձևից՝ $x=-\frac{4\lambda^2}{l^2}$ դեպքում (որն արդարացվում է, քանի որ λ-ն l-ի նկատմամբ բավականաչափ փոքր է), պրոյեկցիայի համար ստացված արտահայտությունը կփոխարինենք հետևյալով՝

$$l\left(1-\frac{2\lambda^2}{l^2}\right)=l-\frac{2\lambda^2}{l}.$$

Այսպիսով, վերոհիշյալ սխալը կլինի $\frac{2\lambda^2}{l}$, իսկ հարաբերական սխալը ակներևաբար, կլինի $\frac{2\lambda^2}{l^2}$։ Նույն հարաբերական սխալը կպահպանվի նաև մի քանի անգամ քանոնը դնելու ժամանակ։

Եթե այդ սխալի համար սահմանված է δ եզրը, այսինքն պետք է $\frac{2\lambda^2}{l^2}<\delta$, ապա այստեղից ստացվում է, որ $\lambda < l\sqrt{\frac{\delta}{2}}$։

Օրինակ, երկու մետր ($l=2$) երկարություն ունեցող քանոնով չափելիս, որպեսզի չափումը կատարվի 0,001 հարաբերական ճշգրտությամբ, պետք է, որ λ շեղումը մեծ չլինի, քան $2\sqrt{0,0005} \doteq 0,045$ մ. $=$ 4,5 սմ.։



Գծ. 26

2) *Բաց փոկը* (ремень) *հագցրած է R և r շառավիղներ ունեցող երկու անիվների վրա, որոնց կենտրոնների հեռավորությունը d է (գծ. 26.)։ Գտնել բանաձև փոկի l երկարության համար։*

Գծագրից ունենք՝

$$\frac{l}{2} = \overset{\frown}{AC} + Cc + \overset{\frown}{ca}.$$

Բայց $\breve{AC} = R\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, $\breve{ca} = r\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, *որտեղ* α-*ով նշանակված են իրար հավասար* ∠BOC *և* ∠boc *անկյունները: Իսկ* ΔODo-*ից ստացվում է՝*

$$Cc = Do = \sqrt{d^2-(R-r)^2}.$$

Այսպիսով՝

$$l = \pi(R+r)+2\alpha(R-r)+2\sqrt{d^2-(R-r)^2}.$$

Այս բանաձևը ավելի պարզացնելու համար հիշենք, որ

$$\alpha \doteq \sin\alpha = \frac{OD}{Oo} = \frac{R-r}{d},$$

Եթե ենթադրենք, որ R−r *տարբերությունը* d-*ի նկատմամբ շատ փոքր է՝ նույն ենթադրությունը կատարելով, կարող ենք գրել՝*

$$\sqrt{d^2-(R-r)^2} = d\sqrt{1-\left(\frac{R-r}{d}\right)^2} \doteq d\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{R-r}{d}\right)^2\right].$$

Այս արժեքները տեղադրելով և ձևափոխելով, կստանանք՝

$$l \doteq \pi(R+r)+2d+\frac{(R-r)^2}{d}$$

վերջնական բանաձևը:

3) Տեղանքում գտնվող շրջանագծային աղեղները մասերի բաժանելիս նշանակություն ունի հետևյալ խնդիրը՝ գտնել ABC շրջանագծային աղեղի $f = DB$ բարձրացման սլաքի և այդ աղեղի AB_1B կեսի $f_1 = D_1B_1$ բարձրացման սլաքի հարաբերությունը (*գծ. 27.*):

Եթե շրջանի շառավիղը ընդունենք r *և* ∠AOB = φ, *ապա* $\angle AOB_1 = \frac{\varphi}{2}$ *և կունենանք*

$$f = DB = r(1-\cos\varphi),\quad f_1 = r\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Գծ. 27.

Այսպիսով, որոնելի հարաբերությունը հավասար է

$$\frac{f}{f_1} = \frac{1-\cos\varphi}{1-\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Այս արտահայտությունը շատ բարդ է, ուստի պրակտիկայում նրանից օգտվելը հարմար չէ: Գտնենք սրա սահմանը, երբ φ→0 *(որովհետև բավականաչափ փոքր* φ-*երի դեպքում այդ արտահայտությունը մոտավորապես կարելի է փոխարինել իր սահմանով): Այդ նպատակով համարիչն ու հայտարարը փոխարինենք իրենց գլխավոր մասերով, կստանանք՝*

$$\lim\frac{f}{f_1} = \lim\frac{\frac{1}{2}\varphi^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varphi\right)^2} = 4.$$

Ուրեմն, ոչ մեծ կենտրոնական անկյուններին համապատասխանող

աղեղների համար կարելի է ընդունել, որ կիսաղեղի բարձրացման սլաքը մոտավորապես չորս անգամ փոքր է աղեղի բարձրացման սլաքից: *Այս հնարավորություն է տալիս հաջորդաբար կառուցել այն աղեղի միջակա կետերը, որի ծայրերը և միջնակետը տված են։*

65. ԱՆՎԵՐՋ ՄԵԾԵՐԻ ԴԱՍԱԿԱՐԳՈՒՄԸ։ *Նկատենք, որ անվերջ մեծ մեծությունների համար ևս կարելի է նման դասակարգում կատարել։ Ինչպես և 60-ում, այստեղ ևս կընդունենք, որ դիտարկվող անվերջ մեծ մեծությունները միևնույն* x *փոփոխականի ֆունկցիաներ են, որոնք ձգտում են* ∞*-ի, երբ* x*-ը ձգտում է* a*-ի։*

I. y և z երկու անվերջ մեծերը համարվում են նույն կարգի մեծություններ, եթե նրանց $\frac{z}{y}$ (իսկ նրա հետ նաև $\frac{y}{z}$) հարաբերությունն ունի վերջավոր և զրոյից տարբեր սահման:

II. Իսկ եթե $\frac{z}{y}$ հարաբերությունը ձգտում է ∞ (իսկ հակադարձ $\frac{y}{z}$ հարաբերությունը՝ զրոյի), ապա z-ը համարվում է ավելի բարձր կարգի անվերջ մեծ մեծություն, քան y-ը, և, միաժամանակ, y-ը կլինի ավելի ցածր կարգի անվերջ մեծ, քան z-ը:
Այն դեպքում, երբ $\frac{z}{y}$ *հարաբերությունը ոչ մի սահմանի չի ձգտում,* y *և* z *անվերջ մեծերը կլինեն անբաղդատելի։*

Մի շարք անվերջ մեծ մեծությունները միաժամանակ դիտարկելիս, նրանցից որևէ մեկը (ասենք՝ y*-ը) ընտրում են որպես հիմնական և նրա աստիճանների հետ բաղդատում են մյուս անվերջ մեծերը։ Օրինակ, եթե (ինչպես վերևում ենթադրել ենք) նրանք բոլորը* x*-ի ֆունկցիաներ են և ձգտում են* ∞*, երբ* $x \to a$ *ապա, որպես հիմնական անվերջ մեծ, սովորաբար վերցնում են* x*-ը՝ երբ* $a = \infty$*, և* $\frac{1}{x-a}$*-ն՝ երբ* a*-ն վերջավոր է։*

III. z անվերջ մեծը կոչվում է k-րդ կարգի (հիմնական y անվերջ մեծի նկատմամբ), եթե z-ը և y^k-ն նույն կարգի են, *այսինքն՝* $\frac{z}{y^k}$ *հարաբերությունն ունի վերջավոր և զրոյից տարբեր սահման։*

Մենք այստեղ օրինակներ չենք բերի, որովհետև դրանք հեշտությամբ ստացվում են, երբ վերևում դիտարկած անվերջ փոքր մեծությունները փոխարինում ենք իրենց հակադարձ մեծություններով։ Միայն կհիշեցնենք, որ a^x $(a>1)$ *անվերջ մեծը, երբ* $x \to \infty$*, կլինի անվերջ բարձր կարգի, իսկ* $\log_a x$ $(a>1)$ *անվերջ մեծը՝ ավելի ցածր կարգի, քան որևէ* x^k *աստիճան (դրական* k *ցուցիչով) այդ հետևում է* n 61*-ի (8)-րդ բանաձևից։*

§ 4. Ֆունկցիայի անընդհատությունը (և խզումները)

66. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ՝ ԿԵՏՈՒՄ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ։ *Ֆունկցիայի սահմանի գաղափարի հետ սերտորեն կապված է մաթեմատիկական անալիզի մի այլ կարևոր գաղափար՝ ֆունկցիայի անընդհատության գաղափարը։*

Դիտարկենք $f(x)$ *ֆունկցիան, որը որոշված է մի* $X=\{x\}$ *տիրույթում, որի համար* x_0*-ն խտացման կետ է, ընդ որում թող այդ* x_0 *կետն ինքը պատկանի ֆունկցիայի որոշման տիրույթին, այնպես որ այդ կետում ֆունկցիան ունի որոշակի* $f(x_0)$ *արժեք։*

Երբ սահմանում էինք ֆունկցիայի սահմանի գաղափարը x*-ը* x_0*-ին ձգտելիս* [52, 53]՝

$$\lim_{x \to x} f(x),$$

միշտ ընդգծում էինք, որ x *փոփոխականը* x_0 *արժեքը չի ընդունում. այդ արժեքը նույնիսկ կարող էր ֆունկցիայի որոշման տիրույթին չպատկանել, իսկ եթե պատկաներ էլ, ապա վերոհիշյալ սահմանը գրելիս* $f(x_0)$ *արժեքը ի նկատի չէինք ունենում։*

Սակայն հատուկ կարևորություն ունի հենց այն դեպքը, երբ

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=f(x_0): \qquad (1)$$

Ասում են, որ $f(x)$ ֆունկցիան **անընդհատ** է $x=x_0$ արժեքի համար (կամ $x=x_0$ կետում), եթե տեղի ունի այդ առնչությունը, իսկ եթե խախտվում է այն, ապա ասում են, որ այդ արժեքի համար (կամ այդ կետում) ֆունկցիան **խզում** ունի*։

Այն դեպքում, երբ $f(x)$ *ֆունկցիան* x_0 *կետում անընդհատ է (և, ակներևաբար, միայն այդ դեպքում),* $f(x)$ *ֆունկցիայի սահմանը հաշվելիս, երբ* $x \to x_0$, *նշանակություն չունի,*

** Այս տերմինաբանությունը կապված է կորի անընդհատության և խզման ինտուիտիվ պատկերացման հետ՝ ֆունկցիան անընդհատ է, եթե անընդհատ է նրա գրաֆիկը. ֆունկցիայի խզման կետերը համապատասխանում են գրաֆիկի խզման կետերին: Իրականում, սակայն, կորի անընդհատության գաղափարն ինքը հիմնավորում է պահանջում, և դեպի այդ հիմնավորումը տանող պարզագույն ճանապարհն սկսվում է հենց ֆունկցիայի անընդհատությունից:*

թե x-ը, x_0-ին ձգտելիս, մասնավորապես x_0 արժեքն ընդունում է թե ոչ։

*Ֆունկցիայի անընդհատության սահմանումը կարելի է ձևակերպել նաև այլ տերմիններով։ x_0 արժեքից x արժեքին անցնելը կարելի է պատկերացնել այնպես, որ x_0 արժեքին տրված է $\Delta x_0 = x - x_0$ աճ**։ *Ֆունկցիայի նոր $y = f(x) = f(x_0 + \Delta x_0)$ արժեքը նախկին՝ $y_0 = f(x_0)$ արժեքից կտարբերվի*

$$\Delta y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)$$

աճով։ Որպեսզի $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում լինի անընդհատ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ կետում նրա Δy_0 աճը ձգտի զրոյի՝ անկախ փոփոխականի Δx_0 աճի հետ միասին։ Ուրիշ խոսքով, անընդհատ ֆունկցիան բնորոշվում է նրանով, որ արգումենտի անվերջ փոքր աճին համապատասխանում է ֆունկցիայի նույնպես անվերջ փոքր աճ։

Անդրադառնալով (1) *հիմնական սահմանմանը, նրա բովանդակությունը բացահայտենք «ε-δ լեզվով»* [52]։ *x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատությունը հանգում է հետևյալին. ինչպիսին էլ լինի $\varepsilon > 0$ թիվը, նրա համար կգտնվի այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ $|x - x_0| < \delta$ անհավասարությունից կբխի $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ անհավասարությունը։ Այսպիսով, վերջին անհավասարությունը պետք է տեղի ունենա x_0-ի $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ բավականաչափ փոքր շրջակայքում։*

Վերջապես, «հաջորդականությունների լեզվով» ֆունկցիայի անընդհատությունը կարտահայտվի այսպես. X տիրույթից x-ի արժեքների ինչպիսի

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

հաջորդականություն էլ որ վերցնենք, որը զուգամիտում է x_0-ին, ֆունկցիայի արժեքների համապատասխան

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

հաջորդականությունը զուգամիտում է $f(x_0)$-ին։

---

* *Անալիզի մեջ ընդունված է $x, y, t, \ldots$ մեծությունների աճերը նշանակել $\Delta x, \Delta y, \Delta t, \ldots$։ Այս նշանակումները պետք է դիտել որպես ամբողջական սիմվոլներ, առանց Δ-ն x-ից (կամ մյուս փոփոխականներից) անջատելու։*

Հետագայում մենք սովորաբար դիտարկելու ենք այնպիսի ֆունկցիաներ, որոնք որոշված են X միջակայքում. նրա բոլոր կետերը հանդիսանում են խտացման կետեր, այնպես որ նրանցից յուրաքանչյուր կետի նկատմամբ կարելի է դնել անընդհատության վերաբերող հարցը։ Արտահայտության ձևի պարզացման համար, պայմանավորվում ենք ասել, որ ֆունկցիան անընդհատ է X միջակայքում, եթե նա անընդհատ է այդ միջակայքի յուրաքանչյուր կետում առանձին վերցրած։

67. ԹՎԱԲԱՆԱԿԱՆ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՆԿԱՏՄԱՄԲ։ *Նախքան անընդհատ ֆունկցիաների օրինակներին անցնելը, ապացուցենք հետևյալ թեորեմը, որը թույլ է տալիս հեշտությամբ ընդարձակել նրանց թիվը։*

ԹԵՈՐԵՄԱ։ Եթե $f(x)$ և $g(x)$ երկու ֆունկցիաները որոշված են միևնույն X միջակայքում և երկուսն էլ x_0 կետում անընդհատ են, ապա այդ կետում անընդհատ կլինեն նաև

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

ֆունկցիաները. վերջինը՝ այն պայմանով, որ $g(x_0) \neq 0$։

Այս անմիջապես բխում է՝ առանձին-առանձին սահմաններ ունեցող երկու ֆունկցիաների գումարի, տարբերության, արտադրյալի և քանորդի սահմանի վերաբերյալ [55]-ում ապացուցած թեորեմայից։

Օրինակի համար, կանգ առնենք երկու ֆունկցիաների քանորդի վրա։ x_0 կետում $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների անընդհատության վերաբերյալ կատարած ենթադրությունը համազոր է

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

հավասարությունների առկայությանը։ Բայց այստեղից, քանորդի սահմանի վերաբերող թեորեմայի համաձայն, (քանի որ հայտարարի սահմանը զրո չէ) կունենանք՝

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)},$$

իսկ այս հավասարությունը հենց ցույց է տալիս, որ $\frac{f(x)}{g(x)}$ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում։

68. ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1°. *Ամբողջ և կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիաներ*։ $f(x)=x$ ֆունկցիան, ակներևաբար, անընդհատ է $(-\infty, +\infty)$ ամբողջ միջակայքում, քանի որ, եթե $x_n \to x_0$, ապա $f(x_n)=x_n \to x_0=f(x_0)$։ Ճիշտ այդպես էլ անընդհատ է նաև նույնաբար հաստատունի վերածվող ֆունկցիան։

Այստեղից, նախորդ n° թեորեմայի շնորհիվ, արդեն հետևվում է յուրաքանչյուր

$$ax^m = a\cdot\overbrace{x\cdot x\dots x}^{m \text{ անգամ}}$$

միանդամ արտահայտության, որպես անընդհատ ֆունկցիաների *արտադրյալի* անընդհատությունը, ապա նաև

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

բազմանդամի (ամբողջ ռացիոնալ ֆունկցիայի), որպես անընդհատ ֆունկցիաների *գումարի* անընդհատությունը։ Այդ բոլոր դեպքերում անընդհատությունը տեղի ունի $(-\infty, +\infty)$ ամբողջ միջակայքում։

Վերջապես, ակներև է, որ երկու բազմանդամների

$$\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m}$$

քանորդը (կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիան) նույնպես անընդհատ կլինի x-ի յուրաքանչյուր արժեքի համար, բացի այն արժեքներից, որոնք հայտարարը դարձնում են զրո։

2°. *Ցուցչային ֆունկցիա*: Ապացուցենք a^x ցուցչային ֆունկցիայի անընդհատությունն ամեն մի $x=x_0$ արժեքի դեպքում, այլ խոսքով, ցույց տանք, որ

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}.$$

(բավական է սահմանափակվել այն դեպքով, երբ $a>1$)։

Մենք 54, 6)-ում տեսանք, որ

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1.$$

Քանի որ 1-ը մեր ֆունկցիայի հենց a^0 արժեքն է, ապա վերոհիշյալ հավասարությունը հենց արտահայտում է ցուցչային ֆունկցիայի անընդհատությունը $x=0$ կետում։ Այստեղից արդեն հեշտ է անցնել ցանկացած կետին. իրոք, ունենք՝

$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0}-1),$$

Բայց, երբ $x\to x_0$, ակներևաբար, $x-x_0\to 0$, այնպես որ, ըստ ապացուցածի՝

$$a^{x-x_0}\to 1 \text{ և } a^x\to a^{x_0},$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։

3. Հիպերբոլական ֆունկցիաներ։ Սրանց անընդհատությունը, արդեն հիշատակված թեորեմայի համաձայն, անմիջապես հետևում է ցուցչային ֆունկցիայի անընդհատությունից, որը հենց նոր ապացուցվեց, որովհետև դրանք բոլորը ռացիոնալ տեսքով արտահայտվում են e^x ֆունկցիայի միջոցով։

4. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ։ Նախ կանգ առնենք $\sin x$ ֆունկցիայի վրա։ Այս ֆունկցիան ևս անընդհատ է ցանկացած $x=x_0$ արժեքի դեպքում, այսինքն՝ տեղի ունի

$$\lim_{x\to x_0}\sin x = \sin x_0$$

հավասարությունը։

Ապացուցելու համար նկատենք, որ 54, (9)-ում $0<x<\frac{\pi}{2}$ դեպքի համար ստացած

$$\sin x < x$$

անհավասարությունից հեշտ է բխեցնել, որ

$$|\sin x| \leq |x|$$

անհավասարությունը ճիշտ է արդեն x-ի բոլոր արժեքների համար (երբ $|x|\geq\frac{\pi}{2}>1$, այդ հետևում է $|\sin x|\leq 1$ անհավասարությունից)։ Այնուհետև, ունենք՝

$$\sin x - \sin x_0 = 2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2},$$

այնպես, որ

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\cdot\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\cdot\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\cdot\frac{|x-x_0|}{2}$$

և, վերջնականապես, կունենանք՝

$$|\sin x - \sin x_0| \leqslant |x - x_0|, \qquad (2)$$

ինչպիսիք էլ լինեն x և x_0 արժեքները։

Եթե տրված է ցանկացած $\varepsilon > 0$, ապա ընդունենք $\varepsilon = \delta$. Հենց $|x - x_0| < \delta$ դեպքում էլ կլինի՝

$$|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon,$$

որը և ապացուցում է $\sin x$-ի անընդհատությունը։ Նույն կերպ ապացուցվում է նաև $\cos x$ ֆունկցիայի անընդհատությունը x-ի ցանկացած արժեքի դեպքում։

Այստեղից, նախորդ n°-ի թեորեմայի համաձայն, արդեն բխում է հետևյալ ֆունկցիաների անընդհատությունը՝

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \sec = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x},$$

Առաջին երկուսի համար բացառություն են կազմում $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ տեսքի արժեքները, որոնք $\cos x$-ը դարձնում են զրո, իսկ վերջին երկուսի համար՝ $k\pi$ տեսքի արժեքները, որոնք $\sin x$-ը դարձնում են զրո։

69. ՄԻԱԿՈՂՄՅԱՆ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆ։ ԽԶՈՒՄՆԵՐԻ ԴԱՍԱԿԱՐԳՈՒՄԸ։ Վերևում (1) հավասարության օգնությամբ սահմանեցինք x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատության գաղափարը։ Այդ ժամանակ, (1) սահմանը հաշվելիս, մենք կարող էինք x-ը մոտեցնել x_0-ին թե աջից և թե ձախից։ Այժմ սահմանենք տվյալ կետում ֆունկցիայի *միակողմյան* անընդհատության կամ *միակողմյան* խզման գաղափարը։

Ասում են, որ $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում *աջից* (*ձախից*) անընդհատ է, եթե տեղի ունի հետևյալ սահմանային առնչությունը՝

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0) \\ [\text{կամ՝ } f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)]\text{։} \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Իսկ եթե այդ առնչություններից մեկը կամ մյուսը տեղի չունի, ապա $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում ունի խզում, համապատասխանաբար, աջից կամ ձախից։

$f(x)$ ֆունկցիայի որոշման X միջակայքի ձախ (աջ) ծայրի* նկատմամբ կարող է խոսք լինել, ակներևաբար, միայն աջից (ձախից) անընդհատության կամ խզման մասին։ Իսկ եթե x_0-ն X միջակայքի ներքին կետ է, այսինքն՝ նրա ոչ մի ծայրակետի հետ չի համընկնում, ապա որպեսզի տեղի ունենա (1) հավասարությունը, որն արտահայտում է ֆունկցիայի անընդհատությունը x_0 կետում սովորական իմաստով, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենան [52]-ի (3)-րդ հավասարությունները, երկուսը միաժամանակ։ Այլ խոսքով, x_0 կետում ֆունկցիայի անընդհատությունը հավասարազոր է այդ կետում նրա անընդհատությանը աջից և ձախից միաժամանակ։

Ավելի մանրամասն կանգ առնենք x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատության և խզման վրա, առենք, աջից։ Ենթադրելով, որ $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է այդ կետից աջ մի որոշ $[x_0, x_0+h]$ $(h>0)$ միջակայքում, տեսնում ենք, որ անընդհատության համար անհրաժեշտ է և բավարար՝ նախ, որպեսզի գոյություն ունենա $f(x)$ ֆունկցիայի $f(x_0+0)$ վերջավոր սահման, երբ x-ը աջից ձգտում է x_0-ին, և երկրորդ, որպեսզի այդ սահմանը հավասար լինի ֆունկցիայի $f(x_0)$ արժեքին x_0 կետում։

Այդ պատճառով, հեշտ է հասկանալ, թե ինչպիսի՞ պայմաններում $f(x)$ ֆունկցիայի համար x_0 կետում երևան կգա աջից խզում։ Կարող է պատահել, որ թեկուզ և գոյություն ունի $f(x_0+0)$ վերջավոր սահման, սակայն այն հավասար չէ $f(x_0)$ արժեքին. այդպիսի խզումն անվանում են սովորական կամ առաջին տեսակի խզում**. Սակայն, կարող է նաև պատահել, որ $f(x_0+0)$-ի սահմանը լինի անվերջ, կամ այդ սահմանը բոլո-

---

* Ենթադրվում է, որ այդ ծայրը վերջավոր թիվ է։

** Այս դեպքում նաև ասում են, որ $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում աջից կատարում է թռիչք, որի մեծությունը հավասար է $f(x_0+0)-f(x_0)$ տարբերությանը։

ըովին գոյություն չունենա. այդ դեպքում խզումն անվանում են երկրորդ տեսակի։

Հետևյալ n°-ում մենք կբերենք այդպիսի խզումների օրինակներ։

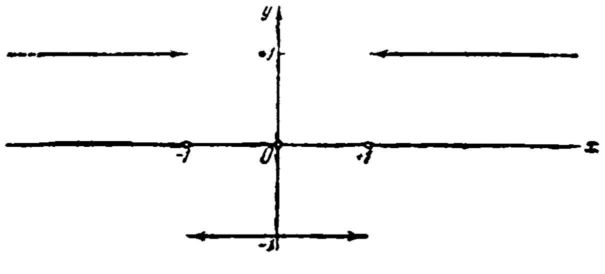
70. **ԽԶՎՈՂ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ.** 1) Դիտարկենք $y=E(x)$ ֆունկցիան (որի գրաֆիկը պատկերված է 8-րդ գծագրի վրա)։ Եթե x_0-ն ամբողջ թիվ չէ և $E(x_0)=m$, այսինքն՝ $m<x_0<m+1$, ապա x-ի այն բոլոր արժեքների համար, որոնք գտնվում են x_0-ի $(m, m+1)$ շրջակայքում, նույնպես կունենանք $E(x)=m$, այնպես որ այդ կետում ֆունկցիայի անընդհատությունն անմիջապես պարզ է։

Դրությունն այլ է, եթե x_0-ն հավասար է m ամբողջ թվի։ Աջից այդ կետում տեղի կունենա անընդհատություն, որովհետև $x=m$-ից աջ, հենց $(m, m+1)$-ում գտնվող x-ի արժեքների համար կլինի $E(x)=m$, այնպես որ նաև $E(m+0)=m=E(m)$. Ընդհակառակը, $x=m$-ից ձախ, $(m-1, m)$-ում գտնվող x-ի արժեքների համար, ակներևաբար, $E(x)=m-1$. այստեղից, նաև $E(m-0)=m-1$, որը հավասար չէ $E(m)$-ի արժեքին. $x=m$ կետում ֆունկցիան ձախից ունի սովորական խզում կամ կատարում է թռիչք։

2) Վերցնենք 46-ում դիտարկված հետևյալ ֆունկցիան՝

$$y=f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$$

(որի գրաֆիկը տված է 28-րդ գծագրի վրա)։ Այս ֆունկցիան ունի սովորա-



Գծ. 28.

կան խզումներ $x=\pm1$ կետում թե աջից և թե ձախից. որովհետև

$$f(\pm1)=0,\ f(-1-0)=f(1+0)=1,$$
$$f(-1+0)=f(1-0)=-1.$$

3)
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{x^3}, \text{ երբ } x\neq0, \\ f(0)=0 \end{cases}$$

հավասարումներով որոշվող ֆունկցիայի համար $x=0$ կետը հանդիսանում է

երկրորդ տեսակի խզման կետ (երկու կողմից), որովհետև այդ կետում ֆունկցիան թե աջից և թե ձախից դառնում է ∞, այն է՝

$$f(+0)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^3}=+\infty,\quad f(-0)=\lim_{x\to-0}\frac{1}{x^3}=-\infty.$$

4) Եթե 54-ում դիտարկված

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}\quad (x\neq0\text{-ի համար})$$

ֆունկցիայի սահմանումը լրացնենք, ընդունելով $f(0)$-ն հավասար ցանկացած թվի, ապա, ինչպիսին էլ լինի այդ թիվը, ստացված ֆունկցիան $x=0$ կետում կունենա երկրորդ տեսակի խզում (երկու կողմից), քանի որ x-ը 0-ի ձգտելիս այդ ֆունկցիայի համար սահման գոյություն չունի ոչ աջից և ոչ էլ ձախից։

Դիտողություն: Եթե x-ը x_0-ին ձգտելիս $f(x)$ ֆունկցիայի համար գոյություն չունի որոշակի վերջավոր սահման, ապա նույնիսկ այն դեպքում, երբ $x=x_0$ կետում ֆունկցիան անորոշ է, դարձյալ ասում են, որ այդ կետում ֆունկցիան խզվում է (նա այդտեղ միշտ խզում կունենա, լրացուցիչ ինչպիսի արժեք էլ վերագրենք ֆունկցիային $x=x_0$ կետում)։ Այդ պատճառով, 3)-րդ և 4)-րդ օրինակների մեջ խզումը առկա կլինի, թեկուզ և ֆունկցիան $x=0$ արժեքի համար թողնենք անորոշ։

5) Ընդհակառակը, եթե վերցնենք [54, 10]-ում դիտարկված

$$f(x)=x\sin\frac{1}{x}\quad (x\neq0\text{ արժեքների համար})$$

ֆունկցիան, ապա $x=0$ կետում այդ ֆունկցիայի անընդհատությունը կախված կլինի նրանից, թե ֆունկցիայի սահմանումն ինչպես կլրացնենք այդ կետում։ Բանը նրանումն է, որ, ինչպես մենք տեսանք, գոյություն ունի

$$\lim_{x\to0}f(x)=0$$

սահմանը։

Եթե մենք ընդունենք նաև $f(0)=0$, ապա առկա է անընդհատությունը, իսկ $f(0)$ արժեքի որևէ այլ ընտրության դեպքում ֆունկցիան $x=0$ կետում կունենա սովորական խզում աջից և ձախից։

6) Երկու ֆունկցիաներ որոշենք

$$f_1(x)=e^{\frac{1}{x}},\quad f_2(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

հավասարություններով $x\neq0$ արժեքների համար և, բացի դրանից, ընդունենք $f_1(0)=f_2(0)=0$։

Դրանցից առաջինի համար ունենք՝

$$f_1(+0)=\lim_{x\to+0} e^{\frac{1}{x}}=\lim_{z\to+\infty} e^{z}=+\infty,$$

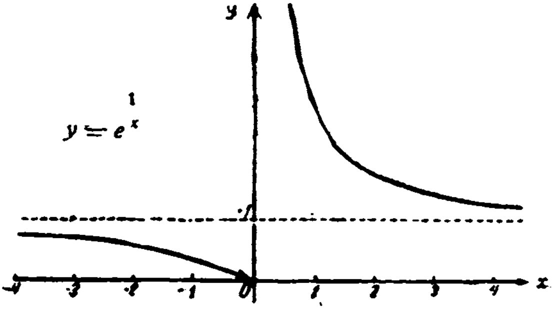
$$f_1(-0)=\lim_{x\to-0} e^{\frac{1}{x}}=\lim_{z\to-\infty} e^{z}=0,$$

այնպես որ, $x=0$ *կետում աջից՝ երկրորդ տեսակի խզում է, իսկ ձախից՝ անընդհատություն: Իսկ երկրորդի համար՝*

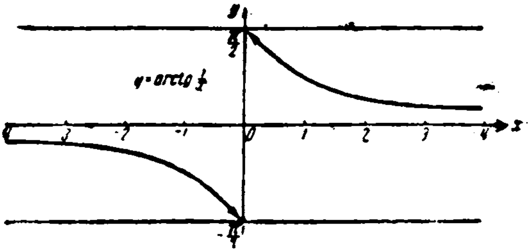
$$f_2(+0)=\lim_{x\to+0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\lim_{z\to+\infty} \operatorname{arctg} z=\frac{\pi}{2},$$

$$f_2(-0)=-\frac{\pi}{2},$$

և $x=0$ *կետում երկու կողմից էլ տեղի ունեն թռիչքներ: Այս ֆունկցիաների գրաֆիկները տրված են 29-րդ և 30-րդ գծագրերի վրա:*



Գծ. 29.



Գծ. 30.

7) Հիշենք նաև Դ ի ր ի խ լ ե ի ֆունկցիան [46]՝

$$\chi(x)=1, \text{ երբ } x\text{-ը ռացիոնալ է,}$$
$$\chi(x)=0, \text{ երբ } x\text{-ը իռացիոնալ է:}$$

Քանի որ ռացիոնալ կետի ցանկացած մոտակայքում կգտնվեն իռացիոնալ կետեր, և ընդհակառակը, ապա ինչպիսին էլ լինի x_0-ն $(-\infty, +\infty)$ միջակայքում, $\chi(x)$ ֆունկցիայի սահման, երբ $x\to x_0$, գոյություն չունի, այնպես որ ամեն մի կետում տեղի է երկրորդ տեսակի խզումը (երկու կողմից).

8) Վերջապես, $[0,1]$ միջակայքում որոշենք $f(x)$ ֆունկցիան այսպես. եթե x-ը ռ ա ց ի ո ն ա լ է և արտահայտվում է $\frac{p}{q}$ անկրճատելի կոտորակով, ապա $f(x)=\frac{1}{q}$, իսկ x-ի իռացիոնալ արժեքների համար ընդունենք $f(x)=0$: Մենք պնդում ենք, որ յուրաքանչյուր ռացիոնալ կետում այդ ֆունկցիան ունի սովորական խզում, մինչդեռ յուրաքանչյուր իռացիոնալ կետում այն անընդհատ է:

Իրոք, դիցուք x_0-ն դիտարկվող միջակայքի կամավոր կետ է: Եթե վերցնենք կամայական $\varepsilon>0$ թիվ, ապա գոյություն ունեն միայն վ ե ր ջ ա վ ո ր թվով q բնական թվեր, որոնք չեն գերազանցում $\frac{1}{\varepsilon}$-ը, և ուրեմն միջակայքում կգտնվեն միայն վերջավոր թվով $\frac{p}{q}$ ռացիոնալ կետեր, որոնց համար $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q}\geq\varepsilon$: x_0 կետը կարելի է շրջապատել այնպիսի $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ շրջակայքով, որ վերջինիս ներսը չընկնի վերոհիշյալ կետերից և ոչ մեկը (բացի, թերևս, x_0-ից): Այդ դեպքում, հենց որ $|x-x_0|<\delta$ $(x\neq x_0)$, կլինի x-ը ռացիոնալ թե ոչ, համենայն դեպս տեղի կունենա $|f(x)|<\varepsilon$ անհավասարությունը: Նշանակում է ցանկացած x_0 կետի համար գոյություն ունեն՝

$$f(x_0-0)=f(x_0-0)=0.$$

Եթե x_0-ն իռացիոնալ կետ է, ապա նաև $f(x_0)=0$, այսինքն՝ այդ կետում ֆունկցիան անընդհատ է. իսկ եթե x_0-ն ռացիոնալ է, ապա $f(x_0)$-ն զրոյից տարբեր է և տեղի է (սովորական) խզում, երկու կողմից էլ*:

71. ՄՈՆՈՏՈՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ԽԶՈՒՄՆԵՐԸ: Դիտարկենք մի $f(x)$ ֆունկցիա, որը մոնոտոն աճում է (նվազում է), գոնե լայն իմաստով [57], երբ x-ը փոփոխվում է $\mathcal{X}$ միջակայքում**: Այդպիսի ֆունկցիաների վերաբերյալ տեղի ունի հետևյալ թեորեմը՝

---

* Այդ ֆունկցիան ուսումնասիրել է Ռ ի մ ա ն ը (B. Riemann):

** Այդ միջակայքը կարող է լինել ինչպես վերջավոր, այնպես էլ անվերջ. փակ կամ բաց (մեկ կողմից կամ երկու կողմից էլ):

1°. Մոնոտոն աճող (նվազող) $f(x)$ ֆունկցիան X-ում կարող է ունենալ միայն առաջին տեսակի խզումներ, այսինքն՝ թռիչքներ:

X *միջակայքից վերցնենք որևէ* x_0 *կետ, և դիցուք այն չի հանդիսանում միջակայքի ձախ ծայրը։ Դիտարկելով միջակայքի այն մասը, որը գտնվում է* x_0*-ից դեպի ձախ, դրա նկատմամբ կիրառենք մոնոտոն ֆունկցիայի սահմանի վերաբերյալ 57-ում տրված թեորեմը։ Քանի որ* $x_0 < x$ *արժեքների համար, ակներևաբար, տեղի ունի* $f(x) \leq f(x_0)$ *անհավասարությունը, ապա գոյություն ունի հետևյալ սահմանը՝*

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x) \leq f(x_0)\text{։}$$

Եթե վերջինս համընկնում է $f(x_0)$ *արժեքի հետ, ապա* x_0 *կետում ֆունկցիան ձախից անընդհատ է, հակառակ դեպքում առկա է թռիչք։*

Նույն ձևով կհամոզվենք, որ X *միջակայքի յուրաքանչյուր* x_0 *կետում (որը միջակայքի աջ ծայր չի հանդիսանում) աջից նույնպես տեղի ունի կամ անընդհատություն, կամ թռիչք։*

Ապացուցված թեորեմայի օգնությամբ հեշտ է ստանալ մոնոտոն ֆունկցիայի անընդհատության մի հայտանիշ, որը հարմար է պրակտիկայում կիրառելու համար.

2° Եթե X միջակայքում մոնոտոն աճող (նվազող) $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքները գտնվում են Y միջակայքում և անընդմեջ լրացնում են այն (այնպես, որ Y-ից վերցրած յուրաքանչյուր y արժեք ֆունկցիան ընդունում է գոնե մեկ անգամ), ապա այդ ֆունկցիան X-ում անընդհատ է*:

Փորձենք ենթադրել, թե X *միջակայքի մի որևէ* x_0 *կետում* $f(x)$ *ֆունկցիան խզում ունի, օրինակ, ձախից։ Ինչպես արդեն տեսանք, այդ խզումը կարող է միայն թռիչք լինել։ Այդ դեպքում գոյություն ունի* $f(x_0-0)$ *սահման, որը սակայն փոքր է* $f(x_0)$ *արժեքից։ Քանի որ* $x_0 > x$ *արժեքների համար կլինի* $f(x) \leq f(x_0-0)$*, իսկ* $x_0 < x$ *արժեքների համար, ակներևաբար* $f(x) \geq f(x_0)$*, ապա ֆունկցիան չի կարող ընդունել այն* $\dot{y}$ *ար-*

* *Այն պայմանը, որ* $f(x)$*-ի արժեքները պետք է անընդմեջ լրացնեն* Y *միջակայքը, այստեղ բերվում է որպես մոնոտոն ֆունկցիայի անընդհատության բավարար պայման. հետագայում* [81] *մենք կհամոզվենք, որ այն նաև անհրաժեշտ պայման է։*

ժեքները, որոնք գտնվում են Y-ին պատկանող $f(x_0-0)$ և $f(x_0)$ թվերի միջև։ Այս հակասում է թեորեմայի պայմանին. նշանակում է, իրոք $f(x)$ ֆունկցիան խզումներ չունի։

Հետևյալ n°-ում ընթերցողը կգտնի այս օգտակար թեորեմայի կիրառման մի շարք օրինակներ։

72. ՏԱՐՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ։ Մի շարք տարրական ֆունկցիաների անընդհատությունը ապացուցել ենք 68-ում, իբրև օրինակներ։ Օգտվելով նախորդ համարի 2°-րդ թեորեմայից, ամենից առաջ հեշտ է նորից ապացուցել a^x և $\sin x$ ֆունկցիաների անընդհատությունը։

$y=a^x\,(a>1)$ ֆունկցիան մոնոտոն աճում է, երբ x-ը փոփոխվում է $X=(-\infty, +\infty)$ միջակայքում։ Նրա արժեքները դրական են և լրացնում են $Y=(0, \infty)$ ամբողջ միջակայքը, որը երևում է նրանից, որ $x=\log_a y$ լոգարիթմը գոյություն ունի ցանկացած $y>0$ արժեքի համար [20]։ Հետևապես, ցուցչային ֆունկցիան անընդհատ է x-ի ամեն մի արժեքի համար։

Նմանապես, $y=\sin x$ ֆունկցիայի անընդհատությունը, առնենք, երբ x-ը փոփոխվում է $X=\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ միջակայքում, հետևում է այդ միջակայքում նրա մոնոտոն լինելուց, ինչպես նաև այն փաստից (որը հաստատվում է երկրաչափորեն), որ փոփոխման ընթացքում ֆունկցիան ընդունում է −1-ի և +1-ի միջև գտնվող ամեն մի արժեք։ Նույնը վերաբերում է նաև

$$\left[k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right] \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

տեսքի ամեն մի միջակայքի։

Սակայն, մեզ համար ավելի հետաքրքիր են նոր արդյունքները, որոնք նույնպես հեշտությամբ կարող են ստացվել, եթե կիրառենք վերոհիշյալ թեորեմանը։ Շարունակենք թվել տարրական ֆունկցիաները, որ սկսել էինք 68-ում։

5°. Լոգարիթմական ֆունկցիա՝ $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$։ Սահմանափակվելով $a>1$ դեպքով, տեսնում ենք, որ այդ ֆունկցիան աճում է, երբ x-ը փոփոխվում է $X=(0, +\infty)$ միջակայքում, ակներև է նաև, որ նա ընդունում է $Y=(-\infty, +\infty)$

միջակայքին պատկանող ամեն մի y արժեք, այն է՝ $x=a^y$-ի դեպքում։ Այստեղից հետևում է նրա անընդհատությունը։

6°. *Աստիճանային ֆունկցիա*՝ $y=x^{\mu}$ $(\mu \neq 0)$։ Երբ x-ը աճում է 0-ից մինչև ∞, ֆունկցիան աճում է, եթե $\mu>0$, և նվազում է, եթե $\mu<0$։ Այդ ժամանակ նա ընդունում է ամեն մի y դրական արժեք ($x=y^{\frac{1}{\mu}}$-ի դեպքում), հետևապես, այս ֆունկցիան ևս անընդհատ է*։

Վերջապես, հիշատակենք

7°. *Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաները*՝

$$y=\arcsin x,\quad y=\arccos x,\quad y=\operatorname{arctg} x,\quad y=\operatorname{arcctg} x\text{։}$$

Առաջին երկուսն անընդհատ են $[-1, +1]$ միջակայքում, իսկ վերջին երկուսը՝ $(-\infty, +\infty)$ միջակայքում։ Ապացուցելը թողնվում է ընթերցողին։

Ամփոփելով, կարելի է ասել, այսպիսով, որ հիմնական տարրական ֆունկցիաներն անընդհատ են բոլոր այն կետերում, որտեղ նրանք իմաստ ունեն (այսինքն՝ իրենց որոշման բնական տիրույթներում)։

73. ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՍՈՒՊԵՐՊՈԶԻՑԻԱ։ Կարելի է անընդհատ ֆունկցիաների ընդարձակ դասեր կառուցել այնպիսի ֆունկցիաների սուպերպոզիցիայի միջոցով [51], որոնց անընդհատ լինելն արդեն հայտնի է։ Դրա հիմքում ընկած է հետևյալ թեորեմը՝

ԹԵՈՐԵՄԱ։ Դիցուք $\varphi(y)$ ֆունկցիան որոշված է Y միջակայքում, իսկ $f(x)$ ֆունկցիան՝ X միջակայքում, ընդ որում վերջինի ֆունկցիայի արժեքները դուրս չեն գալիս Y-ի սահմաններից, երբ x-ը փոփոխվում է X-ում։ Եթե $f(x)$-ն անընդհատ է X-ի x_0 կետում, իսկ $\varphi(y)$-ն անընդհատ է Y-ի՝ x_0-ին համապա-

* Եթե $\mu>0$, ապա 0 արժեքը մտցվում է ինչպես x-ի փոփոխման միջակայքի, նույնպես և y-ի փոփոխման միջակայքի մեջ, իսկ երբ $\mu<0$, 0 արժեքը չի մտցվում նրանց մեջ։ Այնուհետև, եթե μ-ն ամբողջ թիվ է՝ $\pm n$, կամ կոտորակ՝ $\pm\frac{p}{q}$, կենտ հայտարարով, ապա x^{μ} աստիճանը կարելի է դիտարկել նաև $0<x$-երի համար. նրա անընդհատությունն այս արժեքների համար ապացուցվում է նույն եղանակով։

տասխանող $f(x_0)=y_0$ կետում, ապա $\varphi(f(x))$ բարդ ֆունկցիան նույնպես անընդհատ կլինի x_0 կետում:

Ապացույց։ *Վերցնենք $\varepsilon > 0$ կամավոր թիվը։ Քանի որ $\varphi(y)$-ն անընդհատ է $y=y_0$ դեպքում, ապա կարելի է գտնել ε-ին համապատասխան այնպիսի $\sigma>0$ թիվ, որ*

$$|y-y_0|<\sigma \text{ պայմանից հետևի } |\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon\text{։}$$

Մյուս կողմից, $x=x_0$ կետում $f(x)$-ի անընդհատության շնորհիվ, σ-ին համապատասխան կարելի է գտնել այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որ

$$|x-x_0|<\delta\text{-ից հետևի } |f(x)-f(x_0)|=|f(x)-y_0|<\sigma\text{։}$$

Հենց σ թվի ընտրության համաձայն այստեղից հետևում է, այնուհետև, որ՝

$$|\varphi(f(x))-\varphi(y_0)|=|\varphi(f(x))-\varphi(f(x_0))|<\varepsilon\text{։}$$

Այսպիսով, «ε-δ լեզվով» ապացուցվեց $\varphi(f(x))$ ֆունկցիայի անընդհատությունն x_0 կետում։

Օրինակի համար, եթե $x^\mu\ (x>0)$ աստիճանային ֆունկցիան ներկայացնենք

$$x^\mu = e^{\mu \log x}$$

բարդ ֆունկցիայի տեսքով, որն ստացվում է լոգարիթմական և ցուցչային ֆունկցիաների սուպերպոզիցիայից, ապա վերջին երկու ֆունկցիաների անընդհատությունից արդեն կհետևի աստիճանային ֆունկցիայի անընդհատությունը։

74. ՄԻ ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԼՈՒԾՈՒՄ: *Մոտակա n°-ում կատարվելիք շարադրանքը հեշտացնելու համար, այժմ զբաղվենք հետևյալ խնդրով (որը նաև ինքնուրույն հետաքրքրություն է ներկայացնում):*

Գտնել $(-\infty, +\infty)$ միջակայքում անընդհատ բոլոր այն $f(x)$ ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad \text{(A)}$$

պայմանին, ինչպիսին էլ լինեն x-ի և y-ի արժեքները:

(A) հավասարումը հանդիսանում է պարզագույն օրինակ այսպես կոչված ֆունկցիոնալ հավասարումների, որոնք արտահայտում են որոնելի ֆունկցիայի մի որոշ հատկություն, որով պետք է գտնել ֆունկցիան։ Մեր խնդիրն է՝ գտնել (A) հավասարման բոլոր անընդհատ լուծումները:

Հեշտ է տեսնել, որ

$$f(x)=cx \quad (c=\text{const}) \qquad (a)$$

տեսքի գծային համասեռ ֆունկցիաները բավարարում են այդ հավասարմանը՝

$$c(x+y)=cx+cy.$$

Բայց ամբողջ հարցը կայանում է հենց նրանում, թե արդյոք դրանք. միակ անընդհատ ֆունկցիաները կլինեն, որոնք ունեն (A) *հատկությունը։*

Որպեսզի ցույց տանք, որ այդ իրոք այդպես է, ենթադրենք, թե որևէ $f(x)$ *անընդհատ ֆունկցիա բավարարում է* (A) *հավասարման և ցույց տանք, որ այդ դեպքում նա անպայման կունենա* (a) *տեսքը։*

Ամենից առաջ, մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդի օգնությամբ, (A) *առնչությունը կարելի է ընդհանրացնել ցանկացած թվով* (=n) *գումարելիների դեպքի համար՝*

$$f(\overbrace{x+y+\ldots+z}^{n})=f(x)+f(y)+\ldots+f(z). \qquad (4)$$

Իրոք, եթե ընդունենք այդ առնչության ճշտությունը որևէ $n\geqslant 2$ *թվով գումարելիների համար, ապա կպարզվի, որ նա ճիշտ է նաև* $n+1$ *թվով գումարելիների համար՝*

$$f(\overbrace{x+y+\ldots+z}^{n}+u)=f(\overbrace{x+y+\ldots z}^{n})+f(u)=$$
$$=[f(x)+f(y)+\ldots+f(z)]+f(u).$$

(4)-*ի մեջ ընդունելով* $x=y=\ldots=z$, *կստանանք՝*

$$f(nx)=n\,f(x). \qquad (5)$$

Այստեղ x-*ը փոխարինելով* $\frac{1}{n}$ x-*ով, կստանանք՝*

$$f\left(\frac{1}{n}x\right)=\frac{1}{n}\cdot f(x)$$

և ապա, եթե x-*ի տեղ տեղադրենք* mx (m-*ը՝ բնական թիվ է) և օգտագործենք նախորդ հավասարությունը, կհանգենք այսպիսի առնչության՝*

$$f\left(\frac{m}{n}x\right)=\frac{m}{n}f(x). \qquad (6)$$

Այժմ (A) *հիմնական հավասարման մեջ ընդունենք* $x=y=0$, *կստանանք՝*

$$f(0)=2f(0), \text{ այսինքն, որ } f(0)=0. \qquad (7)$$

Իսկ եթե վերցնենք $y = -x$, *ապա հաշվի առնելով (7)-ը, կստանանք՝*

$$f(-x) = -f(x)$$

այնպես որ $f(x)$ *ֆունկցիան իր նշանը փոխում է, երբ փոխվում է* x*-ի նշանը: Իսկ այդ դեպքում (5)-ից և (6)-ից հեշտությամբ կստացվի՝*

$$f(-nx) = -f(nx) = -n \cdot f(x) \tag{8}$$

և համանման ձևով, ընդհանրապես կունենանք

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right) = -\frac{m}{n} f(x). \tag{9}$$

Ստացված (5)-ից մինչև (9) առնչությունները կարելի է միավորել մեկ հավասարության մեջ՝

$$f(rx) = r \cdot f(x),$$

որը ճիշտ է x*-ի ամեն մի իրական արժեքի համար, ինչպիսին էլ լինի* r *ռ ա ց ի ո ն ա լ թիվը:*

Եթե այստեղ վերցնենք $x=1$ *և* $f(1)$*-ը նշանակենք* c*-ով, ապա կստանանք*

$$f(r) = cr.$$

Այսպիսով, մենք փաստորեն պարզեցինք f *ֆունկցիայի տեսքը, բայց առայժմ արգումենտի միայն ռ ա ց ի ո ն ա լ արժեքների համար: Ընդ որում մենք օգտագործեցինք միայն այն փաստը, որ ֆունկցիան բավարարում է (A) պայմանին, և չհենվեցինք ֆունկցիայի անընդհատության վրա:*

Դիցուք այժմ ρ*-ն արգումենտի որևէ ի ռ ա ց ի ո ն ա լ արժեք է. Հեշտ է կառուցել ռացիոնալ թվերի*

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

հաջորդականություն, որը զուգամիտում է ρ*-ին (կարելի է, օրինակ, վերցնել համապատասխան անվերջ տասնորդական կոտորակի վերջավոր հատվածները): Մենք հենց նոր տեսանք, որ*

$$f(r_n) = cr_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Այստեղ անցնենք սահմանին, n*-ը ձգտեցնելով* $+\infty$*, աջ մասում կստանանք* $c\rho$*, իսկ ձախ մասում, հենց* f *ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, կստանանք՝*

$$\lim f(r_n) = f(\rho),$$

և վերջնականապես կունենանք՝

$$f(\rho) = c\rho.$$

Այսպիսով, իրոք, մեր ֆունկցիան արգումենտի բոլոր իրական արժեքների համար արտահայտվում է (a) բանաձևով: Այդ բանաձևը տալիս է (A) հավասարման ամենաընդհանուր լուծումն անընդհատ ֆունկցիաների ընտանիքում։

75. ՄԻ ՔԱՆԻ ՏԱՐՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ԲՆՈՒԹԱԳՐՈՒՄԸ: *Մենք ի նկատի ունենք այդպիսի բնութագրում տալ ցուցչային, լոգարիթմական և աստիճանային ֆունկցիաների համար:*

1. *Եթե*

$$f(x)=a^{x} \quad (a>0), \qquad (б)$$

ապա, ինչպիսին էլ լինեն x *և* y *երկու իրական թվերը, միշտ տեղի ունի*

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y), \qquad (Б)$$

հավասարությունը, որն արտահայտում է աստիճանների բազմապատկման հանրածանոթ կանոնը՝

$$a^{x+y}=a^{x}\cdot a^{y}.$$

Պարզվում է, որ ցուցչային ֆունկցիան լիովին որոշվում է (Б) ֆունկցիոնալ հատկությամբ՝ անընդհատության հատկության հետ միասին: Ավելի ճշգրիտ ասած՝

միակ ֆունկցիան, որը որոշված է ու անընդհատ $(-\infty, +\infty)$ ամբողջ միջակայքում և այնտեղ բավարարում է (Б) պայմանին, հանդիսանում է ցուցչային ֆունկցիան (***եթե չհաշվենք նույնաբար 0-ի հավասար ֆունկցիան***):

Այլ խոսքով, (б) բանաձևը (նշված բացառությամբ) տալիս է (Б) ֆունկցիոնալ հավասարման ամենաընդհանուր լուծումն անընդհատ ֆունկցիաների ընտանիքում: Այդ ապացուցելու համար, դիտարկենք մի կամավոր f(x) ***ֆունկցիա, որը որոշված է ու անընդհատ*** x-***ի բոլոր արժեքների համար և բավարարում է (Б) պայմանին: Բացառվում է տրիվիալ (ակնհայտ) դեպքը, երբ*** $f(x)\equiv 0$:

Այսպես, ուրեմն, մի որոշ $x=x_0$ ***արժեքի դեպքում այդ ֆունկցիան զրոյից տարբեր է: (Б) բանաձևի մեջ ընդունելով*** $y=x_0-x$, ***կստանանք՝***

$$f(x)\cdot f(x_0-x)=f(x_0)\neq 0.$$

այստեղից պարզ է, որ f(x)-***ը զրոյից տարբեր է ամեն մի*** x-***ի դեպքում: Դեռ ավելին, (Б)-ի մեջ*** x-***ը և*** y-***ը փոխարինելով*** $\frac{x}{2}$-***ով, կստանանք՝***

$$f(x)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{2},$$

այնպես, որ f(x)-***ը միշտ դրական է:***

Դրանից օգտվելով, լոգարիթմենք (Б) հավասարությունը, օրինակ, e ***բնական հիմքով, կստանանք՝***

$$\log f(x+y)=\log f(x)+\log f(y).$$

Եթե ընդունենք՝

$$\varphi(x)=\log f(x),$$

ապա $\varphi(x)$*-ը կլինի անընդհատ (որպես անընդհատ ֆունկցիաների սուպերպոզիցիայի արդյունք, 73) և կբավարարի*

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y),$$

պայմանին, որը նման է (A)-ին։ Այդ դեպքում ինչպես արդեն ապացուցել ենք, անհրաժեշտ է, որպեսզի՝

$$\varphi(x)=\log f(x)=cx \quad (c=\text{const}),$$

որտեղից, վերջապես, կստանանք՝

$$f(x)=e^{cx}=a^{x}$$

(եթե ընդունենք $a=e^{c}$*), ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։*

2°. *Եթե*

$$f(x)=\log_{a} x \quad (a>0,\ a\neq 1), \qquad (в)$$

ապա x-ի և y-ի ցանկացած դրական արժեքների դեպքում կլինի՝

$$f(xy)=f(x)+f(y). \qquad (B)$$

Այսպես է գրվում արտադրյալը լոգարիթմելու կանոնը՝

$$\log_{a}xy=\log_{a}x+\log_{a}y.$$

Այստեղ ևս՝ այդ հավասարումը, անընդհատության հետ միասին, լիովին բնութագրում է հենց լոգարիթմական ֆունկցիան՝ միակ ֆունկցիան, որը որոշված է ու անընդհատ $(0, +\infty)$ միջակայքում և այնտեղ բավարարում է (B) պայմանին, լոգարիթմական ֆունկցիան է *(նույն նշված բացառությամբ), այնպես որ (в) բանաձևը տալիս է (B) ֆունկցիոնալ հավասարման ամենաընդհանուր լուծումը անընդհատ ֆունկցիաների ընտանիքում։*

Ապացուցելու համար վերցնենք մի $f(x)$ *կամայական ֆունկցիա, որն անընդհատ է* $0<x$ *արժեքների դեպքում և բավարարում է վերոհիշյալ հավասարմանը։ Մտցնենք մի նոր* ξ *փոփոխական, որը փոփոխվում է* $(-\infty,+\infty)$*, միջակայքում և ընդունենք՝*

$$x=e^{\xi}, \quad \varphi(\xi)=f(e)^{\xi},$$

որտեղից՝

$$\xi=\log x, \quad f(x)=\varphi(\log x).$$

$\varphi(\xi)$ անընդհատ (73-ի շնորհիվ) ֆունկցիան բավարարում է (A) տեսակի հետևյալ պայմանին [տես (B)]՝

$$\varphi(\xi+\eta)=f(e^{\xi+\eta})=f(e^{\xi}\cdot e^{\eta})=f(e^{\xi})+f(e^{\eta})=\varphi(\xi)+\varphi(\eta).$$

Ուրեմն,

$$\varphi(\xi)=c.\xi \text{ և } f(x)=c.\log x.$$

Եթե բացառենք $c=0$ դեպքը (այդ ժամանակ $f(x)=0$), ապա ստացված արդյունքը կարելի կլինի գրել և այսպես՝

$$f(x)=\log_a x,$$

որտեղ $a=e^{\frac{1}{c}}$։ Այսպիսով, բոլորն ապացուցվեց։

3) Վերջապես, դառնանք

$$f(x)=x^{\mu} \tag{Г}$$

ֆունկցիային, որը, ակներևորեն, բավարարում է

$$f(xy)=f(x).f(y) \tag{Γ}$$

ֆունկցիոնալ հավասարմանը (x-ի և y-ի ցանկացած դրական արժեքների դեպքում), քանի որ՝

$$(xy)^{\mu}=x^{\mu}\cdot y^{\mu}.$$

Այս հավասարումը, անընդհատության հետ միասին, տվյալ դեպքում նույնպես բնութագրում է աստիճանային ֆունկցիան այն իմաստով, որ՝

միակ ֆունկցիան, որը որոշված է ու անընդհատ $(0, +\infty)$ միջակայքում և այդտեղ բավարարում է (Γ) պայմանին, աստիճանային ֆունկցիան է (ամբողջաբար կատարվող բացառությամբ):

Իրոք, եթե տրված է $0<x$ արժեքների համար անընդհատ և (Γ) պայմանին բավարարող $f(x)$ ֆունկցիա, ապա կդիմենք նույն տեղադրությանը ինչ որ 2'-ում: Այն ժամանակ $\varphi(\xi)$ ֆունկցիան կբավարարի (Б) տեսակի հետևյալ պայմանին [տես (Γ)]՝

$$\varphi(\xi+\eta)=f(e^{\xi+\eta})=f(e^{\xi}.e^{\eta})=f(e^{\xi}).f(e^{\eta})=\varphi(\xi).\varphi(\eta).$$

Մենք արդեն գիտենք, որ այդ ժամանակ (եթե բացառենք տրիվիալ դեպքը) պետք է

$$\varphi(\xi)=a^{\xi} \quad (a>0).$$

Այստեղից՝

$$f(x)=a^{\log x}=x^{\mu}$$

(եթե ընդունենք $\mu=\log a$), որը և պահանջվում էր ապացուցել:

(А), (Б), (В), (Г) ֆունկցիոնալ հավասարումներն առաջին անգամ դիտարկել է Կոշին: Նրան են պատկանում նաև եռանկյունաչափական ու հիպերբոլական հիմնական ֆունկցիաների ֆունկցիոնալ բնութագրումները, որոնց վրա մենք արդեն կանգ չենք առնի:

76. ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅԱՆ ՕԳՏԱԳՈՐԾՈՒՄԸ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐ ՀԱՇՎԵԼԻՍ: Սահմաններ հաշվելիս բազմաթիվ ձևերով կարելի է օգտագործել ֆունկցիայի անընդհատությունը*: Այս համարը մենք հատկացնում ենք այդ տեսակի օրինակների։

1) Ամեն մի իրական x-ի համար ունենք՝

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x.$$

Իրոք, դիտարկվող արտահայտությունը (համարելով $x\neq0$) կարելի է ներկայացնել այսպես՝

$$\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x.$$

Քանի որ $\frac{x}{n}\to0$, ապա քառակուսի փակագծի մեջ գրած վարիանտան ձգտում է e-ի [54 (13)], և այդ ժամանակ աստիճանային ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ (այստեղ $x=\text{const}$) ամբողջ արտահայտությունը կունենա e^x սահմանը։

2) Գտնել

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_k)}-x\right\} \qquad (\infty-\infty)$$

սահմանը, որտեղ $a_1, a_2, \dots, a_k$՝ տրված հաստատուն թվեր են։

Օգտվենք հետևյալ նույնությունից

$$y-z=\frac{y^k-z^k}{y^{k-1}+y^{k-2}z+\dots+z^{k-1}},$$

որի մեջ տեղադրենք

$$y=\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_k)} \text{ և } z=x.$$

---

* Փաստորեն մենք երբեմն այդ կատարել ենք նաև առաջ. այսպես, 56-ի 3)-րդ օրինակում մենք զուգընթացաբար ապացուցեցինք $\sqrt[m]{x}$-ի անընդհատությունը $x=1$ արժեքի դեպքում և այդ օգտագործեցինք, իսկ 5) (բ) օրինակում նույն կերպ վարվեցինք $\cos x$-ի նկատմամբ $x=0$ արժեքի դեպքում:

Այդ դեպքում դիտարկվող արտահայտությունը հաջորդաբար կներկայացվի այսպիսի տեսքով՝

$$\frac{(x+a_1)\ldots(x+a_k)-x^k}{\left(\sqrt[k]{\cdots}\right)^{k-1}+x\left(\sqrt[k]{\cdots}\right)^{k-2}+\ldots+x^{k-1}}=$$

$$=\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_k)+\frac{a_1a_2+\ldots+a_{k-1}a_k}{x}+\ldots}{\left(\sqrt[k]{\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\ldots\left(1+\frac{a_k}{x}\right)}\right)^{k-1}+\ldots+1}.$$

Երբ $x\to+\infty$, *ենթարմատային արտահայտությունը ձգտում է* 1-*ի, հետևաբար, ինքն արմատն էլ կունենա* $\sqrt[k]{1}=1$ *սահման՝ արմատի, որպես աստիճանային ֆունկցիայի մասնավոր դեպքի, անընդհատության շնորհիվ։ Քանի որ* (k—1)-*րդ աստիճանի բազմանդամը (արմատից), որը գտնվում է հայտարարում, նույնպես անընդհատ ֆունկցիա է, ապա հայտարարը ձգտում է* k-*ի, իսկ կոտորակի սահմանը կլինի՝*

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}.$$

3) Վերադառնանք 33, *13)-ում արված թեորեմային։ Դիցուք* $a_n>0$ *և* $a_n\to a$. *առայժմ սահմանափակվենք այն դեպքով, երբ* $0<a<+\infty$: *Վերոհիշյալ թեորեման կիրառենք* $\{\log a_n\}$ *հաջորդականության նկատմամբ։*

Քանի որ $\log a_n\to\log a$ (*լոգարիթմական ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ*), *ապա՝*

$$\lim\log\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}=\lim\frac{\log a_1+\ldots+\log a_n}{n}=\log a.$$

Այդ դեպքում, ցուցչային ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, կունենանք՝

$$\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}=e^{\log\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}}\to e^{\log a}=a.$$

54-*ի 1) և 2) սահմանների օգնությամբ այս արդյունքը տարածվում է նաև* $a=0$ ***և*** $a=+\infty$ ***դեպքերի վրա։***

Այսպիսով, մենք ստացանք վերոհիշյալ թեորեմայի հետևյալ վերաձևակերպումը՝

Եթե a_n դրական վարիանտան ունի a սահմանը (վերջավոր կամ ոչ), ապա նույն սահմանն ունի նաև

$$b_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n}$$

վարիանտան:

4) Այս թեորեման կիրառելով

$$a_1,\ \frac{a_2}{a_1},\ \frac{a_3}{a_2},\ \ldots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}},\ \frac{a_{n+1}}{a_n},\ \ldots,$$

հաջորդականության նկատմամբ, գալիս ենք հետաքրքիր հետևանքի՝

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

միայն ենթադրելով, որ այս սահմաններից երկրորդը գոյություն ունի

Օրինակի համար, գտնենք

$$\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

սահմանը: Ընդունելով $a_n = \frac{n!}{n^n}$, *կունենանք՝*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e},$$

Ուրեմն, որոնելի սահմանը նույնպես $\frac{1}{e}$ *մեծությունն է:*

5) Ստանանք մի շարք կարևոր սահմաններ, որոնք օգտագործվելու են հետևյալ գլխում՝

(ա) $$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \log_a e \qquad \left(\frac{0}{0}\right),$$

(բ) $$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \qquad \left(\frac{0}{0}\right),$$

(գ) $$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu \qquad \left(\frac{0}{0}\right),$$

Ունենք՝

$$\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha}=\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

և քանի որ աջ մասում լոգարիթմի տակ գրված արտահայտությունը ձգտում է e-*ի, երբ* $\alpha\to0$ [54, (13)], *ապա (լոգարիթմական ֆունկցիայի անընդհատության համաձայն) նրա լոգարիթմը կձգտի* $\log_a e$-*ին, որը և պետք էր ապացուցել։*

Նշենք ապացուցված բանաձևի մի մասնավոր դեպք, երբ խոսքը վերաբերում է բնական լոգարիթմին (a=e)*. այդ դեպքում՝*

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha}=1.$$

Բնական լոգարիթմների սիստեմի առավելությունները, բառ էության, արտահայտված են հենց այս արդյունքի պարզության մեջ։

Անդրադառնալով (բ) բանաձևին, ընդունենք $a^{\alpha}-1=\beta$. *այդ դեպքում, երբ* $\alpha\to0$, *(ցուցչային ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ) նաև* $\beta\to0$. *Այնուհետև, ունենք՝* $\alpha=\log_a(1+\beta)$, *այնպես, որ եթե օգտվենք արդեն ապացուցված արդյունքից, կստանանք՝*

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha}=\lim_{\beta\to0}\frac{\beta}{\log_a(1+\beta)}=\frac{1}{\log_a e}=\log a,$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Մասնավոր դեպքում, եթե վերցնենք $\alpha=\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, *ապա կստանանք հետաքրքիր բանաձև՝*

$$\lim_{n\to+\infty}n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\log a\quad(\infty\cdot0).$$

Վերջապես, (գ) բանաձևը ապացուցելու համար, ընդունենք $(1+\alpha)^{\mu}-1=\beta$. *երբ* $\alpha\to0$, *(աստիճանային ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ) նաև* $\beta\to0$. $(1+\alpha)^{\mu}=1+\beta$ *հավասարությունը լոգարիթմելով, կստանանք՝*

$$\mu\cdot\log(1+\alpha)=\log(1+\beta).$$

Այս առնչության օգնությամբ, տված արտահայտությունը կձևափոխենք այսպես՝

$$\frac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\log(1+\beta)}\cdot\mu\cdot\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha},$$

Ըստ ապացուցածի,

$$\frac{\beta}{\log(1+\beta)} \text{ և } \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha}$$

երկու հարաբերություններն էլ ձգտում են 1-ի, այնպես որ, ամբողջ արտահայտությունը կունենա μ սահմանը, որը և պահանջվում էր ապացուցել։

56, 3)-ում դիտարկված սահմանն այստեղից ստացվում է որպես մասնավոր դեպք, երբ $\mu=1$։

77. ԱՍՏԻՃԱՆԱ-ՑՈՒՑՉԱՅԻՆ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։ Այժմ դիտարկենք u^v աստիճանա-ցուցչային արտահայտությունը, որտեղ u-ն և v-ն ֆունկցիաներ են միևնույն x փոփոխականից, որի փոփոխման տիրույթը X-ն է, x_0 խտացման կետով. մասնավորապես u-ն և v-ն կարող են լինել նաև u_n և v_n վարիանտաներ։

Դիցուք գոյություն ունեն

$$\lim_{x\to x_0} u=a \quad \text{և} \quad \lim_{x\to x_0} v=b$$

վերջավոր սահմաններ, ընդ որում $a>0$։ Պահանջվում է գտնել u^v-ի սահմանը։

Վերջինս ներկայացնենք այլ տեսքով՝

$$u^v=e^{v\cdot\log u}.$$

v և $\log u$ ֆունկցիաներն ունեն հետևյալ սահմանները՝

$$\lim_{x\to x_0} v=b, \quad \lim_{x\to x_0}\log u=\log a$$

(այստեղ օգտագործվում է լոգարիթմական ֆունկցիայի անընդհատությունը), այնպես որ՝

$$\lim_{x\to x_0} v\log u=b\log a.$$

Այստեղից, ցուցչային ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, վերջնականապես ստացվում է՝

$$\lim_{x\to x_0} u^v = e^{b\cdot\log a} = a^b,$$

u^v *արտահայտության սահմանը կարելի է ստանալ նաև այն դեպքում, երբ հայտնի է* $v\cdot\log u$ *արտադրյալի* c *սահմանը՝ վերջավոր կամ անվերջ, բայց որոշակի նշանով։ Երբ* c*-ն վերջավոր է, որոնելի սահմանը կլինի, ակներևաբար,* e^c*-ն, իսկ եթե* $c=-\infty$ *կամ* $+\infty$*, ապա այդ սահմանը կլինի, համապատասխանաբար,* 0 *կամ* $+\infty$ [54, 1)]։

Իսկ $c=\lim\{v\log u\}$ *սահմանի որոշումը միայն տված* a *և* b *սահմանների միջոցով, միշտ հնարավոր է, բացի այն դեպքերից, երբ այդ արտադրյալը (երբ* $x\to x_0$*-ի) ներկայացնում է* $\infty\cdot 0$ *տեսքի անորոշություն։ Հեշտ է նկատել, որ այդ բացառիկ դեպքերը համապատասխանում են* a *և* b *արժեքների հետևյալ կոմբինացիաներին՝*

$$a=1,\qquad b=\infty;$$
$$a=0,\qquad b=0;$$
$$a=+\infty,\qquad b=0.$$

Այս դեպքերում ասում են, որ u^v *արտահայտությունը ներկայացնում է* 1^∞, 0^0, ∞^0 *տեսքի անորոշություն* (նայած դեպքին)։ Այստեղ արդեն* u^v *արտահայտության սահմանի հարցը լուծելու համար բավական չէ գիտենալ միայն* u *և* v *ֆունկցիաների սահմանները, այլ պետք է հաշվի առնել նաև այն օրենքը, որով նրանք ձգտում են իրենց սահմաններին։*

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *վարիանտան, երբ* $n\to\infty$*, կամ ավելի ընդհանուր՝* $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ *արտահայտությունը, երբ* $\alpha\to 0$*, որոնք ունեն* e *սահմանը, հանդիսանում են* 1^∞ *տեսքի անորոշության օրինակներ։ Վերևում, 76, 3)-ում, մենք դիտարկեցինք* $\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ *վարիանտան, որը ներկայացնում է* 0^0

* *Այդ սիմվոլների վերաբերյալ կարելի էր կրկնել այն, ինչ ասված է 76-րդ էջի տողատակի ծանոթության մեջ։*

տեսքի անորոշություն։ Վերջապես, 32, 10)-ում բերված $\sqrt[n]{n}$ արտահայտությունը՝ ∞^0 տեսքի անորոշություն էր։

Բերենք ևս մի քանի օրինակներ նոր տեսքի անորոշությունները պարզելու վերաբերյալ։

78. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Գտնել $\lim\limits_{x\to+\infty} (\log x)^{\frac{1}{x}}$ (∞^0)։

Տված արտահայտությունը նշանակելով y-ով, կունենանք [տես 54, 2) և 5)]՝

$$\log y = \frac{\log(\log x)}{x} = \frac{\log(\log x)}{\log x} \cdot \frac{\log x}{x} \to 0 \ \left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

այնպես որ՝ $y \to e^0 = 1$։

2) Գտնել $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$ (0^0)։

Այստեղ [54, 7) և 5)]՝

$$\log y = \sin x \cdot \log x = \frac{\sin x}{x} \cdot x \log \to 0$$

հետևապես. դարձյալ $y \to 1$։

3) 76-ի 1) օրինակը հիմա հեշտ է ընդհանրացնել հետևյալ կերպ. եթե x_n վարիանտան ձգտում է x-ի (որտեղ x-ը վերջավոր թիվ է). ապա՝

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = e^x \quad (1^\infty).$$

Ապացուցելու համար բավական է միայն առաջադրված արտահայտությունը ներկայացնել

$$\left[\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^{\frac{n}{x_n}}\right]^{x_n}$$

տեսքով. աստիճանի հիմքը այստեղ ձգտում է e-ի, իսկ ցուցիչը՝ x-ի։

4) Նրան կարելի է հանգեցնել նաև հետևյալ օրինակը՝

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\cos\frac{x}{n} + \lambda \sin\frac{x}{n}\right)^n = e^{\lambda x} \qquad (1^\infty).$$

Փակագծի մեջ գրված արտահայտությունը ընդունելով $\left(1+\frac{x_n}{n}\right)$-ին հավասար, կունենանք՝

$$x_n = n\cdot\left[\cos\frac{x}{n} - 1 + \lambda\cdot\sin\frac{x}{n}\right] = \lambda x\cdot\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} - x\cdot\frac{1-\cos\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \to \lambda x,$$

և այլն:

ե) Նույն ձևով լուծվում է հետևյալ օրինակը (a, b>0)՝

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \sqrt{ab} \qquad (1^\infty).$$

Այստեղ՝

$$x_n = n\cdot\left[\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2} - 1\right] = \frac{1}{2}\left[n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)+n\left(\sqrt[n]{b}-1\right)\right],$$

այնպես, որ 76-ի ե) (բ) բանաձևից ստացվող մի մասնավոր հետևանքի հիման վրա, կունենանք՝

$$x_n \to \frac{1}{2}(\log a+\log b)=\log\sqrt{ab},$$

և որոնելի սահմանը, իրոք, կլինի հավասար $e^{\log\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$ մեծությանը:

զ) Վերջապես, դիտարկենք հետևյալ սահմանը՝

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to0}\left[\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{-\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \qquad (1^\infty).$$

Ընթերցողը տեսնում է, որ 1^∞ տեսքի անորոշության դեպքում հարմար է լինում, երբ անմիջապես այդ հանգեցվում է e-ի սահմանին:

Ինչպես արդեն նշել ենք, բոլոր տեսքի անորոշությունները պարզելու ընդհանուր մեթոդները կտրվեն IV գլխում (§ 3):

§ 5, ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

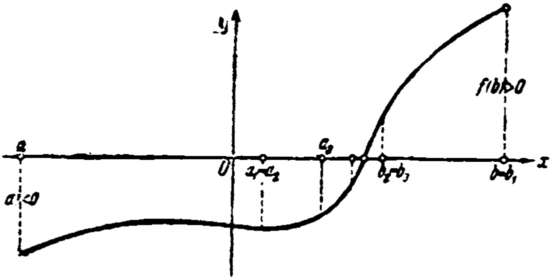
79. ՖՈՒՆԿՑԻԱՆ ԶՐՈ ԴԱՌՆԱԼՈՒ ԹԵՈՐԵՄԱՆ։ *Այժմ զբաղվենք մի որոշ միջակայքում անընդհատ ֆունկցիայի հիմնական հատկությունների ուսումնասիրությամբ։ Նաև ինքնին հետաքրքիր այս հատկությունները հետագա շարադրանքի մեջ հաճախ հիմք են ծառայելու զանազան եզրակացությունների համար։*

Սկսենք հետևյալ պարզ թեորեմայից, որը պատկանում է Կոշիին (A. L. Cauchy)։

ԿՈՇԻԻ ԱՌԱՋԻՆ ԹԵՈՐԵՄԱՆ։ Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է ու անընդհատ $[a, b]$ փակ միջակայքում և այդ միջակայքի ծայրերում ընդունում է տարբեր նշաններով արժեքներ։ Այդ դեպքում a-ի և b-ի միջև անպայման կգտնվի այնպիսի c կետ, որտեղ ֆունկցիան դառնում է զրո՝

$$f(c)=0 \quad (a<c<b)։$$

Այս թեորեման ունի շատ պարզ երկրաչափական իմաստ. եթե անընդհատ կորը x*-երի առանցքի մի կողմից անցնում է մյուս կողմը, ապա նա հատում է այդ առանցքը (գծ. 31)։*



Գծ. 31

Ապացույցը մենք կկատարենք Բոլցանոյի մեթոդով՝ միջակայքը հաջորդաբար կիսելով։ Որոշակիության համար ընդունենք, որ $f(a)<0$, *իսկ* $f(b)>0$։ $[a, b]$ *միջակայքը* $\frac{a+b}{2}$ *կետով կիսենք։ Կարող է պատահել, որ այդ կետում* $f(x)$ *ֆունկցիան դառնա զրո. այդ դեպքում թեորեման ապացուցված է՝ կարելի է ընդունել* $c=\frac{a+b}{2}$ ։ *Դիցուք, այժմ,* $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$.

այդ դեպքում $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ և $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ միջակայքերից մեկի ծայրերում ֆունկցիան կընդունի տարբեր նշաններով արժեքներ (ընդ որում բացասական արժեքը կընդունի ձախ ծայրում, իսկ դրականը՝ աջում)։ Այդ միջակայքը նշանակելով $[a_1, b_1]$-ով, կունենանք՝

$$f(a_1)<0, \quad f(b_1)>0.$$

$[a_1, b_1]$ միջակայքը կիսենք և նորից մի կողմ թողնենք այն դեպքը, երբ $f(x)$-ը այդ միջակայքի $\frac{a_1+b_1}{2}$ կենտրոնում դառնում է զրո, որովհետև այդ դեպքում թեորեման արդեն ապացուցված կլինի։ $[a_2, b_2]$-ով նշանակենք միջակայքի այն կեսը, որի համար՝

$$f(a_2)<0, \quad f(b_2)>0.$$

Միջակայքեր կառուցելու այս պրոցեսը շարունակենք։ Այդ ժամանակ, կամ վերջավոր թվով քայլերից հետո մենք կստանանք բաժանման այնպիսի կետ, որտեղ ֆունկցիան հավասար է զրոյի,—և թեորեմայի ապացույցը կավարտվի,— կամ կստանանք ներդրված միջակայքերի անվերջ հաջորդականություն։ Կանգ առնենք այս վերջին դեպքի վրա։ Այս դեպքում n-րդ՝ $[a_n, b_n]$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ միջակայքի համար կունենանք՝

$$f(a_n)<0, \quad f(b_n)>0, \tag{1}$$

ընդ որում նրա երկարությունը, ակներևաբար, հավասար է

$$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}. \tag{2}$$

Կառուցված միջակայքերի հաջորդականությունը բավարարում է ներդրված միջակայքերի վերաբերյալ լեմմային [38], որովհետև (2)-ից կստանանք $\lim(b_n-a_n)=0$։ Ուրեմն՝ $[a, b]$ միջակայքում գոյություն ունի այնպիսի c կետ, որի համար՝

$$\lim a_n=\lim b_n=c.$$

Ցույց տանք, որ հենց այդ կետը բավարարում է թեորեմայի պահանջին։

(1) անհավասարությունների մեջ անցնելով սահմանին և միաժամանակ օգտագործելով ֆունկցիայի ա ն ը ն դ հ ա տ ու թ յ ու ն ը (մասնավորապես $x = c$ կետում), կստանանք, որ միաժամանակ՝

$$f(c)=\lim f(a_n) \leq 0 \text{ և } f(c)=\lim f(b_n)\geq 0,$$

այնպես որ, իրոք, $f(c)=0$։ Թեորեմն ապացուցված է։

Ստորև մենք կտանք Կ ո շ ի ի թեորեմայի երկրորդ ապացույցը, որը կառուցված է այլ գաղափարի վրա։ Նախ բերենք հետևյալ ակնհայտ առաջադրությունը՝

ԼԵՄՄԱ։ Եթե $f(x)$ ֆունկցիան $x=x_0$ կետում անընդհատ է և նրա $f(x_0)$ արժեքը զրոյից տ ա ր բ ե ր է, ապա x_0-ին բավականաչափ մոտ գտնվող x-ի բոլոր արժեքների համար $f(x)$ ֆունկցիան պահպանում է նույն նշանը, ինչպիսին նա ունի x_0 կետում։

Այդ բխում է 55, I 2°-րդ թեորեմայից, ընդ որում, այս դեպքում, ֆունկցիայի A սահմանի դերը (ա ն ը ն դ հ ա տ ու թ յ ա ն շնորհիվ) խաղում է $f(x_0)$-ն։

II ա պ ա ց ու յ ց։ Դիտարկենք $[a, b]$ միջակայքի բոլոր այն $x=\bar{x}$ կետերը, որոնց համար $f(\bar{x})<0$։ Դրանց թվին կպատկանեն, օրինակ, a կետը և (լեմմայի շնորհիվ) նրան մոտակա կետերը։ $\{\bar{x}\}$ բազմությունը վերևից սահմանափակված է b թվով։ Այժմ ընդունենք $c=\sup\{\bar{x}\}$ [10]. մենք պնդում ենք, որ $f(c)=0$։

Իրոք, ենթադրենք հակառակը. այդ դեպքում կամ $f(c)<0$, կամ $f(c)>0$։ Եթե լիներ $f(c)<0$ (ուրեմն $c<b$, որովհետև մեզ տված է, որ $f(b)>0$), ապա, ըստ լեմմայի, c-ից դեպի աջ ևս կգտնվեին $\bar{x}$ արժեքներ, որոնց համար $f(\bar{x})<0$, իսկ սա կհակասեր c-ի որոշմանը որպես $\{\bar{x}\}$-ի վ ե ր ի ն եզր։ Իսկ եթե լիներ $f(c)>0$, ապա, դարձյալ ըստ լեմմայի, կունենայինք $f(x)>0$ նաև c-ի աջ կողմում և նրան շատ մոտ, այսինքն՝ բավականաչափ փոքր $(c-\delta, c]$ միջակայքում. իսկ այդ դեպքում այդտեղ $\bar{x}$ արժեքներ բոլորովին չէին լինի, որը նույնպես հնարավոր չէ, որովհետև ըստ սահմանման, c-ն $\{\bar{x}\}$-ի վ ե ր ի ն ճշգրիտ եզրն է։

Թեորեմն ապացուցված է։

Նկատենք, որ $[a, b]$ փակ միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիայի ա ն ը ն դ հ ա տ լինելու պահանջը էական է։ Այն ֆունկցիան, որը թեկուզ մեկ կետում խզում ունի, կարող է բացասական արժեք-

ներից անցնել զրոական արժեքների նաև առանց 0 դառնալու։ Այդպես կլինի, օրինակ, $f(x)=E(x)-\frac{1}{2}$ ֆունկցիայի հետ, որը ոչ մի տեղ զրո արժեք չի ընդունում, չնայած $f(0)=-\frac{1}{2}$, իսկ $f(1)=\frac{1}{2}$ ($x=1$ արժեքի համար ունի թռիչք)։

80. *ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ ԼՈՒԾԵԼԻՍ։* Ապացուցված թեորեմը կիրառվում է հավասարումներ լուծելիս։

Ամենից առաջ, նրա օգնությամբ *հաստատվում է արմատների գոյությունը*։ Օրինակ, բոլորի համար ակնհայտ է, որ

$$2^x=4x$$

հավասարումն ունի $x=4$ արմատը, բայց դժվար է նկատել ևս մեկ արմատի գոյությունը։ Մինչդեռ, $f(x)=2^x-4x$ ֆունկցիան $x=0$-ի համար ընդունում է $f(0)=1>0$ արժեք, իսկ $x=\frac{1}{2}$-ի համար՝ $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}-2<0$ արժեք, հետևաբար (քանի որ նա անընդհատ է) նա զրո է դառնում 0-ի և $\frac{1}{2}$-ի միջև գտնվող որոշ կետում։

Մի այլ օրինակ. դիտարկենք, ընդհանրապես, կենտ աստիճանի հանրահաշվական հավասարում (իրական գործակիցներով)՝

$$f(x)\equiv a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\ldots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0.$$

x-ի՝ բացարձակ մեծությամբ բավականաչափ մեծ արժեքների համար բազմանդամն ունի ավագ անդամի նշանը, այսինքն՝ դրական x-ի համար՝ a_0-ի նշանը, իսկ բացասական x-ի համար՝ հակառակ նշանը։ Քանի որ բազմանդամն անընդհատ ֆունկցիա է, ապա, նշանը փոխելով, նա միջանկյալ կետում անպայման դառնում է զրո։ Այստեղից՝ կենտ աստիճանի ամեն մի հանրահաշվական հավասարում (իրական գործակիցներով) ունի առնվազն մեկ իրական արմատ։

Կոշիի թեորեմայից կարելի է օգտվել ոչ միայն արմատի գոյությունն ապացուցելու համար, այլև նրա մոտավոր հաշվման համար։ Այդ պարզաբանենք օրինակով։ Դիցուք $f(x)=x^4-x-1$. քանի որ $f(1)=-1$, $f(2)=13$, նշանակում է 1-ի և 2-ի միջև բազմանդամն արմատ ունի։ Այդ $[1, 2]$ միջակայքը բաժանենք 10-ը հավասար մասերի՝ 1,1; 1,2; 1,3;... կետերով և սկսենք հաջորդաբար հաշվել՝

$$f(1{,}1)=-0{,}63\ldots,\quad f(1{,}2)=-0{,}12\ldots,\quad f(1{,}3)=+0{,}55\ldots,\ldots$$

Տեսնում ենք, որ արմատը գտնվում է 1, 2-ի և 1, 3-ի միջև։ Այս միջակայքը ևս բաժանելով 10 հավասար մասերի, կգտնենք՝

$$f(1{,}21)=-0{,}06\ldots,\quad f(1{,}22)=-0{,}004\ldots,\quad f(1{,}23)=+0{,}058\ldots,\ldots$$

Այժմ պարզ է, որ արմատը գտնվում է 1,22-ի և 1,23-ի միջև, այսպիսով մենք արդեն գիտենք արմատի արժեքը մինչև 0,01-ի ճշգրտությամբ, և այլն։*

Այս դիտողությունների լույսի տակ հետաքրքրական է համեմատել վերևում շարադրված միևնույն թեորեմայի երկու տարբեր ապացույցները։ Դրանցից երկրորդը հանդիսանում է $f(x)=0$ հավասարման արմատի միայն «գոյության ապացույցը», ոչինչ չասելով այն մասին, թե ինչպես պետք է գտնել արմատը։ Իսկ առաջինը նշում է արմատը ռեալ կերպով հաշվելու որոշակի ճանապարհ՝ միջակայքը հաջորդաբար կիսելու միջոցով (որով մենք սահմանափակվեցինք պարզության համար) իրականում կարելի է որոնելի արմատը վերցնել ցանկացած չափով փոքր երկարություն ունեցող միջակայքի ներսը. այսինքն՝ այդ արմատը հաշվել ցանկացած աստիճանի ճշգրտությամբ։

81. *ՄԻՋԱԿԱ ԱՐԺԵՔԻ ԹԵՈՐԵՄԱՆ։* n° 79-*ում ապացուցված թեորեման անմիջականորեն ընդհանրացվում է հետևյալ կերպ՝*

ԿՈՇԻԻ ԵՐԿՐՈՐԴ ԹԵՈՐԵՄԱՆ։ Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է ու անընդհատ մի որոշ X միջակայքում (փակ կամ բաց, վերջավոր կամ անվերջ)։ Եթե այդ միջակայքի $x=a$ և $x=b$ ($a<b$) երկու կետերում ֆունկցիան ընդունում է իրարից տարբեր արժեքներ՝

$$f(a)=A \text{ և } f(b)=B,$$

ապա, ինչպիսին էլ լինի A-ի և B-ի միջև գտնվող C թիվը, a և b կետերի միջև կգտնվի այնպիսի $x=c$ կետ, որ

$$f(c)=C^{**}$$

Ապացույց։ Ընդունենք, որ

$$A<B, \text{ այնպես որ՝ } A<C<B։$$

$[a,\ b]$ *միջակայքում դիտարկենք* $\varphi(x)=f(x)-C$ *օժանդակ*

---

* *Ի միջի այլոց, գործնականում այս ճանապարհն անձեռնտու է։* IV *գլխում* (§ 4) *ցույց կտրվի շատ ավելի էֆեկտիվ եղանակ։*

** *Ակներևաբար, Կոշիի առաջին թեորեման այս թեորեմայի մասնավոր դեպքն է. երբ A-ն և B-ն տարբեր նշաններով են, ապա որպես C կարելի է վերցնել հենց 0-ն։*

ֆունկցիան։ Այս ֆունկցիան [a, b] *միջակայքում անընդհատ է և նրա ծայրերում ունի տարբեր նշաններ՝*

$$\varphi(a)=f(a)-C=A-C<0,\quad \varphi(b)=f(b)-C=B-C>0\text{։}$$

Ուրեմն, ըստ Կոշիի առաջին թեորեմայի, a-*ի և* b-*ի միջև կգտնվի այնպիսի* $x=c$ *կետ, որտեղ* $\varphi(c)=0$, *այսինքն՝*

$$f(c)-C=0 \text{ կամ } f(c)=C,$$

ինչ և պետք էր ապացուցել։

Այսպիսով մենք ապացուցեցինք միջակայքում անընդհատ, $f(x)$ *ֆունկցիայի մի կարևոր հատկություն՝* **մեկ արժեքից մյուսին անցնելիս, ֆունկցիան գոնե մեկ անգամ ընդունում է այդ արժեքների միջև գտնվող յուրաքանչյուր արժեք:**

Այլ կերպ այդ հատկությունը կարելի է արտահայտել նաև այսպես՝ **այն արժեքները, որոնք $f(x)$ ֆունկցիան ընդունում է, երբ x-ը փոփոխվում է մի որոշ X միջակայքում, իրենք ևս անընդմեջ լրացնում են մի որոշ Y միջակայք:**

Իրոք, դիցուք

$$m=\inf\{f(x)\},\quad M=\sup\{f(x)\}^{*}$$

և y_0-*ն* m-*ի և* M-*ի միջև գտնվող կամավոր թիվ է՝*

$$m<y_0<M\text{։}$$

Անպայման կգտնվեն ֆունկցիայի՝ $y_1=f(x_1)$ *և* $y_2=f(x_2)$ *այնպիսի արժեքներ* (x_1-*ը և* x_2-*ը վերցված են* X *միջակայքից), որ՝*

$$m\le y_1<y_0<y_2\le M.$$

այդ հետևում է հենց թվային բազմության ճշգրիտ եզրերի սահմանումից։ Բայց այդ ժամանակ, ըստ ապացուցված թեորեմայի, գոյություն ունի x_1-*ի և* x_2-*ի միջև գտնվող այնպիսի* $x=x_0$ *արժեք (ակներևաբար, դարձյալ* X-*ին պատկանող), որ*

---

* *Ընթերցողին հիշեցնենք, որ եթե* $\{f(x)\}$ *բազմությունը վերևից (ներքևից) սահմանափակ չէ, ապա* 10-*ում մենք պայմանավորվել ենք ընդունել* $M=+\infty$ ($m=-\infty$)*։*

$f(x_0)$-ն ճշտորեն հավասար լինի y_0-ի, հետևապես, այս թիվը պատկանում է Y բազմությանը։

Այսպիսով, Y-ը ներկայացնում է մի միջակայք, որի ծայրերն են m-ը և M-ը (որոնք կարող են նրան պատկանել կամ ոչ՝ նայած դեպքին. համ. 83)։

71-ի 2°-ում մենք տեսանք, որ մոնոտոն ֆունկցիայի դեպքում վերոհիշյալ հատկությունից, հակադարձաբար, բղխում է ֆունկցիայի անընդհատությունը։ Սակայն չպետք է կարծել, որ միշտ այդպես կլինի. հեշտ է կառուցել խզվող ֆունկցիաներ, որոնք այնուամենայնիվ այդ հատկությունն ունեն։ Օրինակ [70,4]՝

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}\quad(x\neq 0),\quad f(0)=0,$$

ֆունկցիայի արժեքները, երբ x-ը փոփոխվում է $x=0$ խզման կետը պարունակող որևէ միջակայքում, անընդմեջ լրացնում են $[-1, 1]$ միջակայքը։

82. ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԳՈՅՈՒԹՅՈՒՆԸ։ *Անընդհատ ֆունկցիայի նախընթաց n°-ում ուսումնասիրած հատկություններն օգտագործենք (որոշ պայմանների առկայության դեպքում) ապացուցելու համար միարժեք հակադարձ ֆունկցիայի գոյությունն ու անընդհատությունը [համեմատել 4 9*

ԹԵՈՐԵՄԱ։ Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է, **մոնոտոն**՝ աճում (նվազում)* է և անընդհատ է մի որոշ X միջակայքում։ Այդ ժամանակ այդ ֆունկցիայի արժեքների Y համապատասխան միջակայքում գոյություն ունի $x=g(y)$ միարժեք հակադարձ ֆունկցիա, *որը նույնպես մոնոտոն աճող (նվազող) և անընդհատ է։*

Ապացույց։ Սահմանափակվենք աճող ֆունկցիայի դեպքով։ Վերևում տեսանք, որ անընդհատ ֆունկցիայի արժեքներն անընդմեջ լրացնում են մի որոշ Y միջակայք, այնպես, որ այդ միջակայքից վերցրած յուրաքանչյուր y_0 արժեքի համար կգտնվի գոնե մեկ այնպիսի x_0 արժեք (X-ից), որ՝

$$f(x_0)=y_0.$$

Այդ բառը խիստ (նեղ) իմաստով (այստեղ այդ էական է)։

Սակայն, ֆունկցիայի մոնոտոնության շնորհիվ, այդպիսի մ ի ա յ ն մ ե կ արժեք կգտնվի՝ եթե $x_1 >$ կամ $< x_0$, ապա, համապատասխանաբար, $f(x_1) >$ կամ $< f(x_0)$։

Հենց այդ x_0 արժեքը համապատասխանեցնելով Y-ից վերցրած կամավոր y_0 արժեքին, մենք կստանանք

$$x=g(y)$$

մ ի ա ր ժ ե ք ֆունկցիան, որը $y=f(x)$ ֆունկցիայի համար հակադարձ ֆունկցիա է։

Հեշտ է տեսնել, որ այդ $g(y)$ ֆունկցիան, $f(x)$ ֆունկցիայի նման, նույնպես մոնոտոն ա ճ ո ւ մ է։ Դիցուք՝

$$y'<y'' \text{ և } x'=g(y'),\ x''=g(y'').$$

այդ դեպքում, $g(y)$ ֆունկցիայի սահմանման համաձայն, միաժամանակ՝

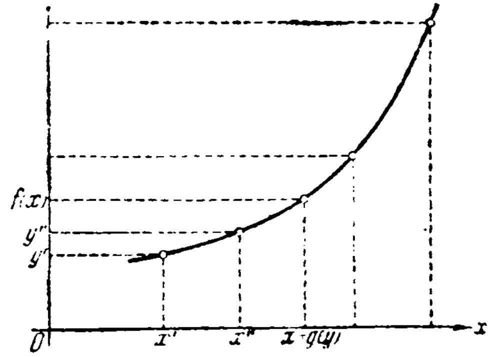
$$y'=f(x') \text{ և } y''=f(x'')։$$

Եթե լիներ $x'>x''$, ապա, $f(x)$ ֆունկցիայի աճման պատճառով, նա և կլիներ, $y'>y''$, որը հակասում է պայմանին։ Չի կարող լինել նաև $x'=x''$, որովհետև այդ ժամանակ կլիներ նաև $y'=y''$, որը նույնպես հակասում է պայմանին։ Ուրեմն, հնարավոր է միայն $x'<x''$ անհավասարությունը, այնպես որ, $g(y)$ ֆունկցիան իրոք աճում է։

Վերջապես, որպեսզի ապացուցենք $x=g(y)$ ֆունկցիայի անընդհատությունը, բավական է միայն վկայակոչել 71-ի 2° ում տրված թեորեման, որի պայմաններն այստեղ բավարարվում են. $x=g(y)$ ֆունկցիան մոնոտոն է և նրա արժեքները, ակներևաբար, անընդմեջ լրացնում են X միջակայքը*։

Ինչպիսի x էլ վերցնենք X-ից, բավական է միայն ընդունել $y=f(x)$, որպեսզի այդ y-ի համար $g(y)$ ֆունկցիան ունենա հենց մեր վերցրած x արժեքը։

Թեորեմայի բոլոր պնդումները երկրաչափորեն ակներև են, դրանք հեշտ է «կարդալ» 32-րդ գծագրի վրա։



Գծ. 32.

Ապացուցված թեորեմայի օգնությամբ կարելի է նորից հաստատել մի շարք մեզ հայտնի արդյունքներ։

Եթե այդ կիրառենք x^n *(n-ը բնական թիվ է) ֆունկցիայի նկատմամբ* $X=[0,+\infty]$ *միջակայքում, ապա կհանգենք* $x=\sqrt[n]{y}$ *(թվաբանական) արմատի գոյությանն ու անընդհատությանն* $\mathcal{Y}=[0,+\infty]$ *միջակայքում վերցրած* y-*ի համար։ Ելնելով* $X=(-\infty,+\infty)$ *միջակայքում որոշված* $y=a^x$ *ֆունկցիայից, կապացուցենք* $x=\log_a y$ *ֆունկցիայի գոյությունն ու անընդհատությունն* $\mathcal{Y}=(0,+\infty)$ *միջակայքում։ Վերջապես, դիտարկելով* $y=\sin x$ *և* $y=\operatorname{tg} x$ *ֆունկցիաները, առաջինը՝* $X_1=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *միջակայքում, իսկ երկրորդը՝* $X_2=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ *բաց միջակայքում, կհամոզվենք, որ նրանց նկատմամբ հակադարձ՝* $x=\arcsin y$ *և* $x=\operatorname{arctg} y$ *ֆունկցիաները գոյություն ունեն և անընդհատ են, համապատասխանաբար,* $\mathcal{Y}_1=[-1,+1]$ *և* $\mathcal{Y}_2=(-\infty,+\infty)$ *միջակայքերում։*

[Ընդ որում, ենթադրվում է, որ նախապես արդեն ապացուցված է x^n, a^x, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ *ֆունկցիաների անընդհատությունը, առանց հենվելու նրանց հակադարձ ֆունկցիաների գոյության վրա (հակառակ դեպքում կստացվեր* կախարդական շրջան*)։ Հենց այդպիսի ապացույցներ են տրվել* 68-*ում,*

իսկ n° 72-ում տրված դատողությունները, ակնհայտաբար, այստեղ պիտանի չեն]։

Դիտարկենք նաև մի այսպիսի օրինակ: Դիցուք $X=(-\infty, +\infty)$ միջակայքից վերցրած x-ի համար՝

$$y=x-\varepsilon\cdot\sin x, \text{ որտեղ } 0<\varepsilon<1: \tag{3}$$

Հեշտ է ցույց տալ, որ այդ ֆունկցիան մոնոտոն աճող է (նեղ իմաստով): Իսկապես, եթե $x''>x'$ և y'-ն ու y''-ը y-ի համապատասխան արժեքներն են, ապա՝

$$y''-y'=(x''-x')-\varepsilon(\sin x''-\sin x'):$$

Բայց [տես 2), 68]՝

$$|\sin x''-\sin x'|<x''-x',$$

որտեղից և հետևում է, որ $y''-y'>0$, այսինքն՝ $y''>y'$:

Այս դեպքի համար կիրառելով վերոհիշյալ թեորեման՝ համոզված ենք, որ x-ը ևս հանդիսանում է y-ի միարժեք ֆունկցիա, և այլն։

Բերված օրինակը հետաքրքրական է նրանով, որ նա առնչվում է աստղագիտության մի կարևոր խնդրի հետ։

$$E=M+\varepsilon\cdot\sin E \tag{3ա}$$

հավասարումը՝ Կեպլերի նշանավոր հավասարումն է, որը մոլորակի M միջին անոմալիան կապում է նրա E էքսցենտրիկ անոմալիայի հետ (ε-ը մոլորակի օրբիտայի էքսցենտրիսիտետն է)։ Ուրեմն, մենք ապացուցեցինք, որ ինչպիսին էլ լինի միջին անոմալիայի արժեքը, Կեպլերի հավասարումը, իսկապես, միարժեքորեն որոշում է էքսցենտրիկ անոմալիայի արժեքը:

83. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՈՒԹՅԱՆ ԹԵՈՐԵՄԱՆ։ Եթե $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է (հետևապես, ընդունում է վերջավոր արժեքներ) մի որոշ վերջավոր միջակայքի բոլոր x արժեքների համար, ապա այստեղից դեռևս անհրաժեշտաբար չի բխում ֆունկցիայի սահմանափակությունը, այսինքն՝ նրա ստանալիք արժեքների $\{f(x)\}$ բազմության սահմանափակությունը: Օրինակ, դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է այսպես՝

$$f(x)=\frac{1}{x}, \text{ եթե } 0<x\leq 1, \text{ և } f(0)=0։$$

Այս ֆունկցիան ընդունում է միայն վերջավոր արժեքներ, սակայն նա սահմանափակ չէ, որովհետև երբ x-ը մոտենում է

0-ին, նա կարող է ընդունել ցանկացած չափով մեծ արժեքներ։ Նկատենք ի միջի այլոց, որ $(0,1]$ կիսաբաց միջակայքում նա անընդհատ է, իսկ $x=0$ կետում խզում ունի։

Այլ արդյունք է ստացվում, երբ ֆունկցիան ա ն ը ն դ հ ա տ *է* լ ի ն ո ւ մ փ ա կ մ ի ջ ա կ ա յ ք ո ւ մ։

ՎԱՅԵՐՇՏՐԱՍԻ ԱՌԱՋԻՆ ԹԵՈՐԵՄԱՆ։ Եթե $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է ու անընդհատ $[a, b]$ փակ միջակայքում, ապա նա սահմանափակ է, այսինքն՝ գոյություն ունեն այնպիսի m և M հաստատուն վերջավոր թվեր, որ՝

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ երբ } a \leq x \leq b։$$

Ապացույցը կկատարենք հակառակ ընդունելության եղանակով. ենթադրենք, թե $f(x)$ ֆունկցիան, երբ x-ը փոփոխվում է $[a, b]$ միջակայքում, ս ա հ մ ա ն ա փ ա կ *չէ։*

Այդ դեպքում, յուրաքանչյուր n բնական թվի համար, $[a, b]$ միջակայքում կգտնվի այնպիսի $x=x_n$ արժեք, որ՝

$$|f(x_n)| > n։ \tag{4}$$

Ըստ Բ ո լ ց ա ն ո - Վ ա յ ե ր շ տ ր ա ս ի *թեորեմայի [41], $\{x_n\}$ հաջորդականությունից կարելի է առանձնացնել այնպիսի $\{x_{n_k}\}$ մասնակի հաջորդականություն, որը զուգամիտի վերջավոր սահմանի՝*

$$x_{n_k} \to x_0 \ (\text{երբ } k \to \infty),$$

ընդ որում, ակներևաբար, $a \leq x_0 \leq b$։ x_0 կետում ֆունկցիայի անընդհատության հետևանքով, այդ ժամանակ պետք է նաև՝

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0),$$

իսկ այս հնարավոր չէ, որովհետև (4)-ից հետևում է, որ

$$f(x_{n_k}) \to \infty։$$

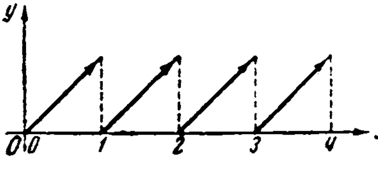
Ստացված հակասությունը հենց ապացուցում է թեորեման։

8. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՄԵԾԱԳՈՒՅՆ ՈՒ ՓՈՔՐԱԳՈՒՅՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԸ։ *Մենք գիտենք որ, թվային* ա ն վ ե ր ջ *բազմությունը,*

Թեկուզ և նա սահմանափակ լինի, կարող է յուր մեջ չպարունակել ամենամեծ (ամենափոքր) էլեմենտ։ Եթե f(x) *ֆունկցիան որոշված է և նույնիսկ սահմանափակ* x*-ի փոփոխման մի որոշ միջակայքում, ապա նրա արժեքների* {f(x)} *բազմության մեջ կարող է չգտնվել ամենամեծ (ամենափոքր) արժեք։ Այդ դեպքում* f(x) *ֆունկցիան վերոհիշյալ միջակայքում չի հասնում արժեքների վերին (ստորին) ճշգրիտ եզրին։ Այդպես կլինի, օրինակ,*

$$f(x)=x-E(x)$$

ֆունկցիայի հետ (որա գրաֆիկը տրված է 33-րդ գծագրում)։ Երբ x*-ը փոփոխվում է ցանկացած* $[0, b]$ $(b>1)$ *միջակայքում, ֆունկցիայի արժեքների վերին ճշգրիտ եզրը կլինի 1-ը, սակայն դա անհասանելի է, այնպես որ ֆունկցիան մեծագույն արժեք չունի։*



Գծ. 33.

Ընթերցողին, հավանաբար, պարզ է այս հանգամանքի կապը դիտարկվող ֆունկցիայի խզումների առկայության հետ՝ x*-ի բնական արժեքների դեպքում։ Իրոք, փակ միջակայքում անընդհատ ֆունկցիայի համար տեղի ունի՝*

ՎԱՅԵՐՇՏՐԱՍԻ ԵՐԿՐՈՐԴ ԹԵՈՐԵՄԱՆ։ Եթե f(x) ֆունկցիան որոշված է ու անընդհատ $[a, b]$ փակ միջակայքում, ապա նա այդ միջակայքում հասնում է իր վերին և ստորին ճշգրիտ եզրերին։

Այլ խոսքով, $[a, b]$ միջակայքում կգտնվեն այնպիսի $x=x_0$ և $x=x_1$ կետեր, որ $f(x_0)$ և $f(x_1)$ արժեքները համապատասխանաբար կլինեն f(x) ֆունկցիայի արժեքներից մեծագույնը և փոքրագույնը։

I *ապացույց։ Ընդունենք*

$$M=\sup\{f(x)\}.$$

ըստ նախորդ թեորեմայի, այդ թիվը վերջավոր է։ Ենթադրենք (հակառակ նրան, ինչ պետք է ապացուցել), որ միշտ $f(x)<M$,

այսինքն՝ M *եզրն անհասանելի է։ Այդ դեպքում կարելի է դիտարկել*

$$\varphi(x)=\frac{1}{M-f(x)}$$

օժանդակ ֆունկցիան։ Քանի որ, ըստ ենթադրության, հայտարարը զրո չի դառնում, ուստի այդ ֆունկցիան անընդհատ է, և հետևապես (ըստ նախորդ թեորեմայի), սահմանափակ է՝ $\varphi(x)\leqslant\mu$ $(\mu>0)$*։ Բայց այստեղից հեշտ է ստանալ, որ այդ դեպքում՝*

$$f(x)\leqslant M-\frac{1}{\mu},$$

այսինքն՝ $M-\frac{1}{\mu}$ *թիվը, որը* M*-ից փոքր է, պարզվեց, որ* f(x) *ֆունկցիայի արժեքների վերին եզրն է, որը լինել չի կարող, որովհետև* M*-ն այդ արժեքների վերին ճշգրիտ եզրն է։ Ստացված հակասությունն ապացուցում է թեորեման՝* [a, b] *միջակայքում կգտնվի այնպիսի* x_0 *արժեք, որ* $f(x_0)=M$ *արժեքը կլինի* f(x)*-ի բոլոր արժեքներից մեծագույնը։*

Նույն ձևով կարելի է ապացուցել փոքրագույն արժեքի վերաբերյալ թեորեման։

II *ապացույց։ Այստեղ նույնպես կարելի է ելնել Բոլցանո-Վայերշտրասի թեորեմայից* [41]*։ Սահմանափակվենք ամենամեծ արժեքին վերաբերող պնդումով։ Եթե, ինչպես և հենց նոր,*

$$M=\sup\{f(x)\},$$

ապա, վերին ճշգրիտ եզրի հատկության շնորհիվ [10]*, կամավոր* n*-ի համար կարելի է* [a, b] *միջակայքում գտնել այնպիսի* $x=x_n$ *կետ, որ՝*

$$f(x_n)>M-\frac{1}{n}. \qquad (5)$$

Այդ ժամանակ $\{x_n\}$ *հաջորդականությունից կարելի է առանձնացնել այնպիսի* $\{x_{n_k}\}$ *մասնակի հաջորդականություն,*

որը զուգամիտի [a, b]-ին պատկանող x_0 արժեքին՝ $x_{n_k} \to x_0$-, այնպես որ, ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, նաև կստանանք՝

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0).$$

Միաժամանակ (5)-ից ունենք՝

$$f(x_{n_k}) > M - \frac{1}{n_k}$$ և, սահմանում, $f(x_0) \geq M$։

Սակայն, $f(x_0)$-ն չի կարող ֆունկցիայի արժեքների M վերին եզրից մեծ լինել, և հետևապես,

$$f(x_0) = M,$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Նշենք, որ բերված երկու ապացույցներն էլ զուտ «գոյության ապացույցներ» են։ Օրինակ, $x = x_0$ արժեքը հաշվելու ոչ մի եղանակ չի տրված։ Հետագայում [գլուխ IV, § 1], ճիշտ է, ֆունկցիայի նկատմամբ ավելի խիստ ենթադրությունների դեպքում, մենք կսովորենք փաստորեն գտնել անկախ փոփոխականի այն արժեքները, որոնք ֆունկցիային տալիս են մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքներ։

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան, x-ը որևէ X միջակայքում փոփոխվելիս, սահմանափակ է, ապա նրա տատանում այդ միջակայքում անվանում են վերին և ստորին ճշգրիտ եզրերի՝

$$\omega = M - m$$

տարբերությունը։ ω տատանումը կարելի է սահմանել նաև որպես

$$f(x'') - f(x')$$

տարբերությունների վերին ճշգրիտ եզր, որտեղ x'-ը և x''-ը X միջակայքում ընդունում են իրարից անկախ կամայական արժեքներ, այսինքն՝

$$\omega = \sup_{x',\, x''\text{-ը } X\text{-ից}} |f(x'') - f(x')|.$$

Երբ խոսքը վերաբերում է $X=[a, b]$ փակ վերջավոր միջակայքում անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիային, ապա ինչպես հետևում է ապացուցած թեորեմայից, տատանումը պարզապես կլինի այդ միջակայքում ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքների տարբերությունը։

Այս դեպքում ֆունկցիայի արժեքների Y միջակայքը՝ $[m,M]$ փակ միջակայքն է, և տատանումը տալիս է նրա երկարությունը։

85. ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐԸ։ Եթե $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է մի որոշ X միջակայքում (փակ կամ բաց, վերջավոր կամ անվերջ) և անընդհատ է այդ միջակայքի x_0 կետում, ապա

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=f(x_0),$$

կամ [«ε—δ լեզվով», 66]՝ յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար կարելի է գտնել այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որ

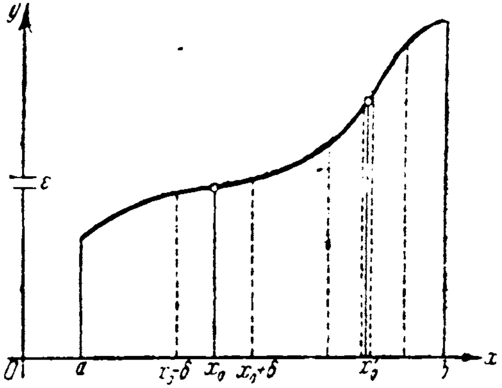
$|x-x_0|<\delta$ անհավասարությունից հետևի $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

Այժմ ենթադրենք, թե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ X միջակայքում, այսինքն՝ անընդհատ է այդ միջակայքի յուրաքանչյուր x_0 կետում։ Այդ դեպքում X-ի յուրաքանչյուր x_0 կետի համար առանձին կգտնվի տված ε-ին վերոհիշյալ իմաստով համապատասխանող δ թիվ։ Եթե x_0-ն փոփոխվի X-ի սահմաններում, նույնիսկ եթե ε-ը մնա հաստատուն, δ թիվը, ընդհանրապես ասած, կփոփոխվի։ Բավական է նայել 34-րդ գծագրին, որպեսզի համոզվենք, որ այն δ թիվը, որը պիտանի է այն հատվածում, որտեղ ֆունկցիան դանդաղ է աճում (գրաֆիկը թեթև բարձրացող կամ իջնող կոր է) կարող է լինել շատ մեծ այն հատվածի համար որտեղ ֆունկցիան արագ է աճում (որտեղ գրաֆիկը խիստ բարձրանում կամ իջնում է)։ Այլ խոսքով, δ թիվը ընդհանրապես կախված է ոչ միայն ε-ից, այլ և x_0-ից։

Եթե խոսքը վերաբերեր վերջավոր թվով x_0 արժեքների (անփոփոխ ε-ի դեպքում), ապա համապատասխան վերջավոր թվով δ թվերից կարելի կլիներ ընտրել ամենափոքրը, և այդ վերջինը պիտանի կլիներ, ակներևաբար, դիտարկվող բոլոր x_0 կետերի համար միաժամանակ։

Սակայն X միջակայքին պատկանող անվերջ բազմու-

թյամբ x_0 արժեքների նկատմամբ այդպես պատել արդեն չի կարելի. դրանց (հաստատուն ε-ի դեպքում) համապատասխանում է δ թվերի անվերջ բազմություն, որոնց մեջ կարող են գտնվել նաև ցանկացած չափով փոքրեր։ Այսպիսով, X միջակայքում անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիայի համար ծագում է հետևյալ հարցը՝ արդյոք տրված ε-ի համար գոյություն ունի այնպիսի δ թիվ, որը պիտանի լինի այդ միջակայքի բոլոր x_0 կետերի համար։



Գծ. 34.

Եթե տրված յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար կարելի է գտնել այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որ

$|x-x_0|<\delta$ անհավասարությունից հետևի $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,

որտեղ էլ գտնվելու լինեն x_0 և x կետերը դիտարկվող X միջակայքի սահմաններում, ապա այդ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան անվանում են հավասարաչափ անընդհատ X միջակայքում:

Այս դեպքում δ թիվը կախված է դառնում միայն ε-ից և այն կարելի է նշել նախքան x_0-ի ընտրությունը. δ-ն պիտանի է դառնում x_0-ի բոլոր արժեքների համար միաժամանակ։

Հավասարաչափ անընդհատությունը նշանակում է, որ միջակայքի բոլոր մասերում բավական է արգումենտի երկու արժեքների մոտիկության միևնույն աստիճանը, որպեսզի հասնենք ֆունկցիայի համապատասխան արժեքների մոտիկության տված աստիճանին։

Օրինակի վրա կարելի է ցույց տալ, որ միջակայքի բոլոր կետերում ֆունկցիայի անընդհատությունից անհրաժեշտաբեն չի հետևում նրա հավասարաչափ անընդհատությունն այդ

միջակայքում։ Դիցուք, օրինակ, $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, երբ x-ը գտնվում է 0-ի և $\frac{2}{\pi}$-ի միջև, բացառյալ 0-ն։ Այս դեպքում x-ի փոփոխման տիրույթը՝ $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$ ոչ փակ միջակայքն է, և նրա յուրաքանչյուր կետում ֆունկցիան անընդհատ է։ Այժմ ընդունենք $x_0 = \frac{2}{(2n+1)\pi}$, $x=\frac{1}{n\pi}$ (որտեղ n-ը որևէ բնական թիվ է)։ այդ ժամանակ՝

$$f(x) = \sin(2\pi+1)\frac{\pi}{2} = \pm 1, \quad f(x)=\sin n\pi=0,$$

ուստի՝

$$|f(x)-f(x_0)| = 1,$$

չնայած, որ $|x-x_0| = \frac{1}{n(2n+)\pi}$ մեծությունը n-ի աճման հետ կարելի է դարձնել ցանկացած չափով փոքր։ Այստեղ, $\varepsilon=1$-ի դեպքում, չի կարելի գտնել այնպիսի δ, որը պիտանի լինի $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$-ի բոլոր x_0 կետերի համար միաժամանակ, թեև, ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, x_0-ի յուրաքանչյուր առանձին արժեքի համար այդպիսի δ գոյություն ունի։

Չափազանց նշանակալից է այն հանգամանքը, որ $[a, b]$ փակ միջակայքում նման դրություն լինել արդեն չի կարող, ինչպես այդ երևում է հետևյալ թեորեմայից, որը պատկանում է Կանտորին (G. Cantor)։

86. ԿԱՆՏՈՐԻ ԹԵՈՐԵՄԱՆ: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է ու անընդհատ $[a, b]$ փակ միջակայքում, ապա նա նաև հավասարաչափ անընդհատ է այդ միջակայքում:

Ապացուցենք հակասող ընդունելության մեթոդով։ Դիցուք որևէ որոշակի $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն չունի այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որի մասին ասված է հավասարաչափ անընդհատության սահմանման մեջ։ Այդ դեպքում, ինչպիսի $\delta>0$ թիվ էլ որ վերցնենք, $[a, b]$ միջակայքում կգտնվեն երկու այնպիսի x'_0 և x' արժեքներ, որ

$$|x'-x_0'|<\delta, \text{ և այնուամենայնիվ՝ } |f(x')-f(x_0')| \geqslant \varepsilon։$$

Այժմ վերցնենք դրական թվերի այնպիսի $\{\delta_n\}$ *հաջորդականություն, որ* $\delta_n \to 0$: *Վերևում ասածի շնորհիվ, յուրաքանչյուր* δ_n*-ի համար* $[a, b]$*-ում կգտնվեն այնպիսի* $x_0^{(n)}$ *և* $x^{(n)}$ *արժեքներ (նրանք կատարում են* x_0'*-ի և* x'*-ի դերը), որ* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *դեպքում՝*

$|x_0^{(n)} - x^{(n)}| < \delta_n$, *և այնուամենայնիվ* $|f(x^{(n)}) - f(x_0^{(n)})| \geq \varepsilon$:

Ըստ Բոլցանո-Վայերշտրասի թեորեմայի [41], $\{x^{(n)}\}$ *սահմանափակ հաջորդականությունից կարելի է առանձնացնել այնպիսի մասնակի հաջորդականություն, որը զուգամիտի* $[a,b]$ *միջակայքի մի որոշ* x_0 *կետի: Նշանակումները չբարդացնելու համար ընդունենք, որ հենց ինքը* $\{x^{(n)}\}$ *հաջորդականությունը զուգամիտում է* x_0*-ին:*

Քանի որ $x^{(n)} - x_0^{(n)} \to 0$ *(որովհետև* $|x^{(n)} - x_0^{(n)}| < \delta_n$, *իսկ* $\delta_n \to 0$*), ուստի միաժամանակ նաև* $\{x_0^{n}\}$ *հաջորդականությունը կզուգամիտի* x_0*-ին: Այդ ժամանակ,* x_0 *կետում ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, պետք է*

$$f(x^{(n)}) \to f(x_0) \text{ և } f(x_0^{(n)}) \to f(x_0),$$

ուստի նաև՝

$$f(x^{(n)}) - f(x_0^{(n)}) \to 0,$$

իսկ այս հակասում է այն ենթադրությանը, որ n*-ի բոլոր արժեքների համար՝*

$$|f(x^{(n)}) - f(x_0^{(n)})| \geq \varepsilon:$$

Այսպիսով թեորեման ապացուցված է:

Ապացուցած թեորեմայից անմիջապես բխում է մի հետևանք, որը հետագայում մեզ համար օգտակար կլինի.

ՀԵՏԵՎԱՆՔ: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է ու անընդհատ $[a, b]$ փակ միջակայքում: Այդ ժամանակ տված $\varepsilon > 0$ թվին համապատասխան կգտնվի այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ եթե միջակայքը կամայական եղանակով տրոհենք δ-ից փոքր երկարություն ունեցող միջա-

կայքերի, ապա դրանցից յուրաքանչյուրում $f(x)$ ֆունկցիայի տատանումը փոքր կլինի ε-ից։

Իրոք, եթե տված ε-ի համար որպես δ վերցնենք այն թիվը, որի մասին տված է հավասարաչափ անընդհատության սահմանման մեջ, ապա δ-ից փոքր երկարություն ունեցող փոքրիկ միջակայքում ֆունկցիայի երկու կամավոր արժեքների տարբերությունը բացարձակ արժեքով փոքր կլինի ε-ից։ Մասնավորապես, այդ ճիշտ է նաև այդ արժեքներից մեծագույնի և փոքրագույնի տարբերության նկատմամբ, որը և տալիս է ֆունկցիայի տատանումը մատնանշված փոքրիկ միջակայքում [84]։

87. ԲՈՐԵԼԻ ԼԵՄՄԱՆ։ Այժմ մենք կապացուցենք մի հետաքրքիր օժանդակ առաջադրություն, որը, Բոլցանո-Վայերշտրասի թեորեմայի նման, կարող է օգտակար լինել շատ նուրբ դատողություններ կատարելիս։ Դա պատկանում է մեզ ժամանակակից ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Բորելին (E. Borel):

[a, b] *միջակայքի հետ միասին, դիտարկենք* σ *բաց միջակայքերի մի որոշ* Σ *սիստեմ ևս, որը կարող է լինել ինչպես վերջավոր, նույնպես և անվերջ։ Պայմանավորվենք ասել, որ* Σ *սիստեմը ծածկում է* [a, b] *միջակայքը (կամ թե այդ միջակայքը ծածկվում է* Σ *սիստեմով, և այլն), եթե* [a,b] *միջակայքի յուրաքանչյուր* x *կետի համար* Σ *սիստեմի մեջ կգտնվի այնպիսի* σ *միջակայք, որը կպարունակի այդ կետը։ Այս եղանակով արտահայտվելը մեզ համար կհեշտացնի հիշատակված առաջադրության ձևակերպումն ու ապացուցումը։*

ԲՈՐԵԼԻ ԼԵՄՄԱՆ: Եթե [a, b] փակ միջակայքը ծածկվում է բաց միջակայքերի $\Sigma = \{\sigma\}$ անվերջ սիստեմով, ապա միշտ կարելի է այդ սիստեմից առանձնացնել այնպիսի

$$\Sigma^* = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$$

վերջավոր ենթասիստեմ, որը նույնպես ծածկում է ամբողջ [a, b] միջակայքը:

I *ապացույցը կկատարենք հակասող ընդունելությամբ, կիրառելով Բոլցանոյի մեթոդը* [41]։ *Ենթադրենք թե* [a, b] *միջակայքը չի կարելի ծածկել* Σ *սիստեմից վերցրած վերջավոր թվով* σ *միջակայքերով։* [a, b] *միջակայքը կիսենք։ Այդ ժամանակ նրա կեսերից գոնե մեկը նույնպես չի կարող ծածկվել վերջավոր թվով* σ *միջակայքերով. իրոք, եթե դրանցից մեկը կարելի լիներ ծածկել* Σ-*ից վերցրած* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ *մի-*

ջակայքերով, իսկ երկրորդը՝ $\sigma_{m+1}, \sigma_{m+2}, \ldots, \sigma_n$ միջակայքերով, ապա այդ բոլոր միջակայքերից կկազմվեր վերջավոր Σ^* սիստեմ, որը արդեն կծածկեր ամբողջ $[a, b]$ միջակայքը՝ հակառակ մեր կատարած ենթադրության։ Միջակայքի այն կեսը, որը չի ծածկվում վերջավոր թվով σ միջակայքերով (եթե երկուսն էլ այդպիսին են, ապա դրանցից որևէ մեկը) նշանակենք $[a_1, b_1]$-ով։ Այս միջակայքը դարձյալ կիսենք և սրա այս կեսը, որը չի կարելի ծածկել վերջավոր թվով σ-ներով, նշանակենք $[a_2, b_2]$, և այլն։

Այս պրոցեսը անվերջ շարունակելով, մենք կստանանք անվերջ հաջորդականություն $[a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ներդրված միջակայքերի, որոնցից յուրաքանչյուրը կազմում է նախորդի կեսը։ Բոլոր այդ միջակայքերը ընտրվում են այնպես, որ նրանցից և ոչ մեկը չի ծածկվում վերջավոր թվով σ միջակայքերով։ Ըստ ներդրված միջակայքերի լեմմայի [38], գոյություն ունի դրանց բոլորին պատկանող այնպիսի c կետ, որին ձգտում են a_n և b_n ծայրերը։

Այդ c կետը, ինչպես նաև $[a, b]$ միջակայքի ամեն մի կետ, գտնվում է σ միջակայքերից որևէ մեկի, ասենք $\sigma_0 = (\alpha, \beta)$-ի, ներսը, այնպես որ $\alpha < c < \beta$։ Սակայն a_n և b_n վարիանտները, որոնք ձգտում են c-ին, իրենք ևս, որևէ համարից սկսած, կգտնվեն α-ի և β-ի միջև [25, 1°], այնպես որ, նրանցով որոշվող $[a_n, b_n]$ միջակայքը ծածկված կլինի միայն σ_0 միջակայքով՝ հակառակ այդ $[a_n, b_n]$ միջակայքերի ընտրության։ Ստացված հակասությունն էլ հենց ապացուցում է լեմմայի ճշտությունը։

Բերենք նաև մի այլ ապացույց՝ կառուցված մի նոր գաղափարի վրա, որը պատկանում է ժամանակակից մեկ ուրիշ ֆրանսիական մաթեմատիկոսի՝ Լեբեգին (H. Lebesque)։

II ապացույցը։ Դիտարկենք $[a, b]$ միջակայքի այն x^* կետերը, որոնցով կազմված $[a, x^*]$ միջակայքերը ծածկվում են վերջավոր թվով σ միջակայքերով։ Այդպիսի x^* կետեր ընդհանրապես կգտնվեն, քանի որ, օրինակ, a կետը գտնվում է որևէ σ-ի ներսը, ուստի նրան մոտ գտնվող բոլոր կետերը նույնպես կգտնվեն այդ σ-ի ներսը, և, հետևապես, դրանք կլինեն x^* կետեր։

Մեր խնդիրն է հաստատել, որ b *կետը նույնպես պատկանում է* x^* *կետերի թվին։*

Քանի որ բոլոր $x^* \le b$*, ուստի գոյություն ունի* [10] *և*

$$\sup\{x^*\}=c \le b.$$

Ինչպես և $[a, b]$ *միջակայքի յուրաքանչյուր կետ,* c*-ն կպատկանի մի որոշ* $\sigma=(\alpha, \beta)$*,* $\alpha<c<\beta$*, միջակայքի։ Սակայն, վերին ճշգրիտ եզրի հատկության համաձայն, կգտնվի այնպիսի* x_0^* *կետ, որ* $\alpha<x_0^*\le c$*։* $[a, x_0^*]$ *միջակայքը ծածկվում է վերջավոր թվով* σ*-ներով (համաձայն հենց* x^* *կետերի սահմանման)։ Եթե այդ միջակայքերին միացնենք միայն մեկ* σ_0 *միջակայք ևս, ապա կծածկվի նաև ամբողջ* $[a, c]$ *միջակայքը, այնպես որ* c*-ն կլինի* x^* *կետերից մեկը։*

Միաժամանակ պարզ է, որ c*-ն չի կարող* b*-ից փոքր լինել, որովհետև, հակառակ դեպքում,* c*-ի և* b*-ի միջև կգտնվեին էլի* x^* *կետեր, որը կհակասեր* c *թիվը որպես բոլոր* x^**-երի վերին եզր սահմանելուն։ Այսպիսով, անհրաժեշտաբար* $b=c$*։ Նշանակում է* b*-ն* x^**-երից մեկն է, այսինքն՝* $[a, b]$ *միջակայքը ծածկվում է վերջավոր թվով* σ *միջակայքերով, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։*

Նկատենք, որ լեմմայի եզրակացության իրավացիության համար հավասար չափով կարևոր են ինչպես այն ենթադրությունը, որ $[a, b]$ *հիմնական միջակայքը փակ է, նույնպես և այն որ* Σ *սիստեմը կազմող* σ *միջակայքերը բաց են։*

Օրինակ,

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right), \ldots, \left(\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}\right), \ldots$$

բաց միջակայքերի սիստեմը ծածկում է $(0,1]$ *միջակայքը, սակայն դրանցից չի կարելի առանձնացնել նույն հատկությունն ունեցող վերջավոր ենթասիստեմ։ Նմանապես նաև*

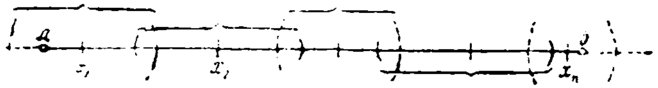
$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right], \ldots, \left[\frac{2^n-1}{2^n}, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right], \ldots \text{ և } [1,2]$$

փակ միջակայքերի սիստեմը ծածկում է $[0,2]$ *միջակայքը, սակայն այստեղ ևս հնարավոր չէ առանձնացնել վերջավոր ենթասիստեմ։*

88. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄԱՆԵՐԻ ՆՈՐ ԱՊԱՑՈՒՅՑՆԵՐ։ *Այժմ ցույց տանք, թե ինչպես Բորելի լեմման կարելի է օգտագործել ապացուցելու համար Կոշիի, Վայերշտրասի և Կանտորի՝ անընդհատ ֆունկցիաների վերաբերյալ հիմնական թեորեմները։*

1° Կոշիի առաջին թեորեման [79]։ *Այս անգամ այն ապացուցելու ենք հակասող ընդունելության մեթոդով։ Ենթադրենք, թե, թեորեմայի պայմանները պահպանելով հանդերձ, այնուամենայնիվ ոչ մի կետում* $f(x)$ *ֆունկցիան զրո չի դառնում։ Այդ ժամանակ, ըստ* n° 79-*ի լեմմայի,* $[a, b]$ *միջակայքի յուրաքանչյուր* x' *կետ կարելի է շրջապատել այնպիսի* $\sigma' = (x' - \delta', x' + \delta')$ *շրջակայքով, որ նրա սահմաններում** $f(x)$-*ը պահպանի որոշակի նշան։*

Այդ շրջակայքերի $\Sigma = \{\sigma\}$ *անվերջ սիստեմը, այսպիսով, ծածկում է տված ամբողջ* $[a, b]$ *միջակայքը։ Այդ ժամանակ, ըստ Բորելի լեմմայի, դրա համար բավական է միայն վերջավոր թվով վերոհիշյալ շրջակայքերից, որոնք կկազմեն* Σ^* *սիստեմ։*



Գծ. 35

Մեր միջակայքի a *ձախ ծայրը պատկանում է այդ* Σ^* *սիստեմի շրջակայքերից որևէ մեկին, ասենք,* $\sigma_1 = (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)$-*ին։ Սրա աջ ծայրը՝* $(x_1 + \delta_1)$-*ը, իր հերթին պատկանում է* Σ^*-*ի մի* $\sigma_2 = (x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2)$ *շրջակայքի,* $x_2 + \delta_2$ *կետը կպատկանի նույն* Σ^*-*ի մի* $\sigma_3 = (x_3 - \delta_3, x_3 + \delta_3)$ *շրջակայքի, և այլն (գծ. 35)։ Վերջավոր թվով քայլերից հետո, շարժվելով դեպի աջ, մենք կհասնենք* Σ^*-*ի մի* $\sigma_n = (x_n - \delta_n, x_n + \delta_n)$ *շրջակայքի, որը իր մեջ արդեն կպարունակի տված միջակայքի* b *աջ ծայրը։ Եթե* Σ_*-*ն, բացի*

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n \tag{6}$$

միջակայքերից, իր մեջ պարունակեր էլի որևէ այլ միջակայքեր, դրանք կարելի էր ուղղակի բաց թողնել։

---

* *Այսինքն՝ այդ շրջակայքի և* $[a, b]$ *միջակայքի ընդհանուր մասում, հենց միայն որտեղ էլ կարող է* x-*ը փոփոխվել։*

σ_1 շրջակայքում $f(x)$ ֆունկցիան պահպանում է որոշակի նշան, այն է՝ $f(a)$-ի նշանը։ Բայց նաև σ_2-ի ներսը ֆունկցիան ունի որոշակի նշան, որը նույնպես պետք է համընկնի $f(a)$-ի նշանի հետ, որովհետև σ_1 և σ_2 շրջակայքերը մասամբ իրար ծածկում են։ Նույնպես համոզվում ենք նաև, որ ֆունկցիան նույն նշանը պահպանում է ըստ կարգի հետևյալ σ_3 շրջակայքում ևս, որը մասամբ ծածկում է σ_2-ը, և այլն: Ի վերջո կգանք այն եզրակացության, որ նաև վերջին՝ σ_n շրջակայքում ֆունկցիան ունի $f(a)$-ի նշանը, ուստի $f(b)$-ի նշանը ևս համընկնում է $f(a)$-ի նշանի հետ, իսկ սա արդեն հակասում է թեորեմայի պայմանին։ Թեորեման ապացուցված է։

2° Վայերշտրասի առաջին թեորեման [83]։ $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, $[a, b]$ միջակայքից ինչպիսի x' կետ էլ վերցնելու լինենք, նախապես վերցնելով $0<\varepsilon$ թիվը, կարելի է այդ կետը շրջապատել այնպիսի $\sigma'=(x'-\delta', x'+\delta')$ փոքր շրջակայքով, որ նրան պատկանող բոլոր x արժեքների համար տեղի ունենան

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$$

կամ

$$f(x')-\varepsilon<f(x)<f(x')+\varepsilon$$

անհավասարությունները։ Այսպիսով, յուրաքանչյուր այդպիսի շրջակայքի սահմաններում $f(x)$ ֆունկցիան անկասկած սահմանափակ է՝ ներքևից $f(x')-\varepsilon$ թվով, իսկ վերևից $f(x')+\varepsilon$ թվով։

Ընթերցողի համար պարզ է, որ այստեղ ևս վերոհիշյալ հատկությունն ունեցող շրջակայքերի Σ անվերջ սիստեմի նկատմամբ պետք է կիրառել Բորելի լեմման։ Այդ լեմմայից հետևում է, որ Σ-ի մեջ կգտնվեն վերջավոր թվով (6) շրջակայքեր, որոնք նույնպես միասին կծածկեն ամբողջ $[a, b]$ միջակայքը։ Եթե

$$\begin{aligned} &\sigma_1\text{-ում՝ } m_1<f(x)<M_1,\\ &\sigma_2\text{-ում՝ } m_2<f(x)<M_2,\\ &\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\sigma_n\text{-ում՝ } m_n<f(x)<M_n, \end{aligned}$$

ապա, որպես m վերցնելով $m_1, m_2, \ldots, m_n$ թվերից ամենափոքրը, իսկ որպես M՝ $M_1, M_2, \ldots, M_n$ թվերից ամենամեծը, ակներևաբար, ամբողջ $[a, b]$ միջակայքում կունենանք՝

$$m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։

3° Կանտորի թեորեման [86]։ *Վերցնենք կամավոր* $\varepsilon > 0$ *թիվը։ Այս անգամ* $[a, b]$ *միջակայքի յուրաքանչյուր* x' *կետ շրջապատենք այնպիսի* $\sigma' = (x' - \delta', x' + \delta')$ *շրջակայքով, որ նրա սահմաններում տեղի ունենա*

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$$

անհավասարությունը։ Եթե x_0*-ն ևս այդ շրջակայքին պատկանող կետ է, ապա միաժամանակ տեղի կունենա նաև*

$$|f(x') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

անհավասարությունը։ Այսպիսով, σ'*-ի ցանկացած* x *և* x *կետերի համար կունենանք՝*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\text{։}$$

Յուրաքանչյուր σ' *շրջակայք, կենտրոնը թողնելով անփոփոխ, երկու անգամ փոքրացնենք, այսինքն* σ'*-ի փոխարեն դիտարկենք*

$$\bar{\sigma}' = \left(x' - \frac{\delta'}{2},\ x' + \frac{\delta'}{2}\right)$$

շրջակայքը։ Այդ շրջակայքերից նույնպես կկազմվի մի Σ *սիստեմ, որը կծածկի* $[a, b]$ *միջակայքը, և հենց սրա նկատմամբ կկիրառենք Բորելի լեմման։* $[a, b]$ *միջակայքը կծածկվի* $\bar{\Sigma}$*-ին պատկանող*

$$\bar{\sigma}_i = \left(x_i - \frac{\delta_i}{2},\ x_i + \frac{\delta_i}{2}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

վերջավոր թվով միջակայքերով։

Այժմ դիցուք δ*-ն՝* $\frac{\delta_i}{2}$ *թվերից ամենափոքրն է, և* x_0*-ն ու* x*-ը՝ մեր միջակայքի ցանկացած երկու կետեր են, որոնք բավարարում են՝*

$$|x - x_0| < \delta \qquad (7)$$

պայմանին։

x_0 կետը պետք է պատկանի վերևում վերցրած շրջակայքերից որևէ մեկին, օրինակ,

$$\bar{\sigma}_{i_0} = \left(x_{i_0} - \frac{\delta_{i_0}}{2},\ x_{i_0} + \frac{\delta_{i_0}}{2}\right)$$

շրջակայքին, այնպես որ՝ $|x - x_{i_0}| < \frac{\delta_{i_0}}{2}$։ Քանի որ $\delta \leq \frac{\delta_{i_0}}{2}$, ուստի, (7)-ի շնորհիվ, $|x - x_0| < \frac{\delta_{i_0}}{2}$, որտեղից՝ $|x - x_{i_0}| < \delta_{i_0}$, այսինքն՝ x կետը (առավել ևս՝ նաև x_0 կետը) պատկանում է սկզբում վերցրած այն

$$(x_{i_0} - \delta_{i_0},\ x_{i_0} + \delta_{i_0})$$

շրջակայքին, որը կծկելով ստացվել է $\bar{\sigma}_{i_0}$ շրջակայքը։ Այդ դեպքում, ըստ սկզբում վերցրած բոլոր շրջակայքերի հատկության, կունենանք՝

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\text{։}$$

Քանի որ δ-ն ընտրված էր անկախ x_0 կետի տեղից, ուստի (x) ֆունկցիայի հավասարաչափ անընդհատությունն ապացուցված է։

Ինչպես երևում է այս դատողություններից՝

Բորելի լեմման հաջողությամբ կիրառվում է այն դեպքերում, երբ «լոկալ» հատկությունը, որը կապված է առանձին կետի շրջակայքի հետ, պետք է տարածել դիտարկվող ամբողջ միջակայքի վրա։

ԵՐՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐ

§ 1. ԱԾԱՆՑՅԱԼ ԵՎ ՆՐԱ ՀԱՇՎՈՒՄԸ

89. ՇԱՐԺՎՈՂ ԿԵՏԻ ԱՐԱԳՈՒԹՅՈՒՆԸ ՀԱՇՎԵԼՈՒ ԽՆԴԻՐԸ։ *Սկսենք մասնավոր օրինակից, այն է՝ դիտարկենք ծանր նյութական կետի ազատ անկումը (դատարկության մեջ, որպեսզի հաշվի չառնենք օդի դիմադրությունը)։*

Եթե t (*վ.*) *ժամանակը հաշվվում է անկման սկզբից, ապա այդ ժամանակամիջոցում անցած* s (*մ*) *ճանապարհը, ըստ հայտնի բանաձևի, կարտահայտվի այսպես՝*

$$s = \frac{g}{2}t^2, \qquad (1)$$

Գծ. 36.

որտեղ $g = 9{,}81$*։ Այստեղից ելնելով,* պահանջվում է որոշել կետի շարժման v արագությունը տված t պահին, *երբ կետը գտնվում է* M *դիրքում* (*գծ. 37*)*։* t *փոփոխականին տանք մի որոշ* Δt *աճ և դիտարկենք* $t+\Delta t$ *պահը, երբ կետը կլինի* M_1 *դիրքում։* Δt *ժամանակամիջոցում ճանապարհի* MM_1 *աճը նշանակենք* Δs*-ով։*

(*1*)*-ինի մեջ* t*-ի փոխարեն տեղադրելով* $t+\Delta t$*, ճանապարհի նոր արժեքի համար կստանանք՝*

$$s+\Delta s = \frac{g}{2}(t+\Delta t)^2$$

արտահայտությունը, որտեղից

$$\Delta s = \frac{g}{2}(2t\,.\,\Delta t - \Delta t^2)\text{։}$$

Δs-ը բաժանելով Δt-ի վրա, մենք կստանանք կետի անկման միջին արագությունը MM_1 տեղամասում, այն է՝

$$v_{\text{միջ.}}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=gt+\frac{g}{2}\cdot\Delta t.$$

Ինչպես տեսնում ենք, այդ արագությունը փոփոխվում է Δt-ի հետ միասին և այնքան ավելի լավ է բնորոշում ընկնող մարմնի վիճակը t պահին, որքան փոքր է այդ պահից հետո անցած Δt ժամանակամիջոցը։

Կետի v արագություն ժամանակի t պահին անվանում են այն սահմանը, որին ձգտում է Δt ժամանակամիջոցի $v_{\text{միջ.}}$ միջին արագությունը, երբ Δt-ն ձգտում է 0-ի:

• *Մեր դեպքում, ակներևաբար՝*

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+\frac{g}{2}\cdot\Delta t\right)=gt.$$

Նույն ձևով հաշվում են v արագությունը նաև կետի ուղղագիծ շարժման ընդհանուր դեպքում։ Կետի դիրքը որոշվում է նրա s հեռավորությամբ, որը հաշվվում է որևէ O սկզբնակետից։ Հենց այդ հեռավորությունը կոչվում է կետի անցած ճանապարհ։ t ժամանակը հաշվվում է մի որոշ պահից, ընդ որում, անհրաժեշտ չէ, որ այդ պահին կետը գտնվի O-ում։ Շարժումը համարվում է լրիվին հայտնի, երբ հայտնի է $s=f(t)$ շարժման հավասարումը, որտեղից կարելի է որոշել կետի դիրքը ցանկացած t պահի համար. դիտարկված օրինակի մեջ այդպիսի դեր խաղաց (1) հավասարումը։

Տված t պահին v արագությունը որոշելու համար հարկ կլինի, ինչպես վերևում, t-ին տալ Δt աճ, որին կհամապատասխանի s ճանապարհի Δs աճ։

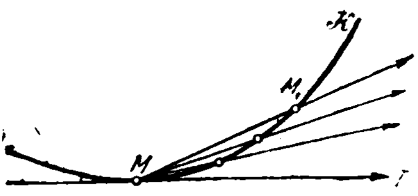
$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

հարաբերությունը կարտահայտի Δt ժամանակամիջոցում $v_{\text{միջ.}}$ միջին արագությունը։ Իսկ իսկական v արագությունը t պահին այստեղից կստացվի սահմանային անցման միջոցով՝

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{միջ.}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Ստորև մենք կդիտարկենք մի այլ կարևոր խնդիր, որը նույնպես հանգում է նման սահմանային անցման գործողության։

90. ՇՈՇԱՓՈՂ ՏԱՆԵԼՈՒ ԽՆԴԻՐԸ։ Դիցուք տրված է (K) կորը (գծ. 37) և նրա վրա M կետը. դիմենք M կետում կորի շոշափողի գաղափարի սահմանմանը։



Գծ. 37

Դպրոցական դասընթացում շրջանագծի շոշափողը սահմանում են որպես «ուղիղ, որը կորի հետ ունի միայն մեկ ընդհանուր կետ»։ Սակայն այս սահմանումը ունի մասնակի բնույթ և չի բացահայտում գործի էությունը։ Եթե փորձենք այդ կիրառել, օրինակ, $y=ax^2$ պարաբոլի նկատմամբ (գծ. 38ա), ապա կոորդինատների O սկզբնակետում կոորդինատային երկու առանցքներն էլ կհամապատասխանեն այդ սահմանմանը. այնինչ, ինչպես հավանաբար անմիջապես պարզ է նաև ընթերցողին, իրականում միայն x-երի առանցքն է ծառայում որպես պարաբոլի շոշափող O կետում։

Մենք հիմա կտանք շոշափողի ընդհանուր սահմանումը։ (K) կորի վրա (գծ. 37) վերցնենք, M կետից բացի, նաև M_1 կետ և տանենք MM_1 հատողը։ Երբ M_1 կետը կորի վրայով տեղափոխվի, այդ հատողը կպտտվի M կետի շուրջը։

M կետում (K) կորի **շոշափող** կոչվում է MM_1 հատողի MT **սահմանային** դիրքը, երբ M_1 կետը կորի վրայով ձգտում է համընկնել M կետի հետ։ *(Այս սահմանման իմաստը կայանում է նրանում, որ $\angle M_1MT$ անկյունը դառնում է ցանկացած չափով փոքր, հենց որ բավականաչափ փոքր է MM_1 լարը)։*

Օրինակի համար, այս սահմանումը կիրառենք $y=ax^2$ պարաբոլի նկատմամբ, նրա որևէ M(x, y) կետում։ Քանի որ շոշափողն անցնում է այդ կետով, ուրեմն նրա դիրքը որոշելու համար բավական է իմանալ նաև նրա անկյունային գործակի-

ցը։ Մենք էլ հենց նպատակ ենք դնում գտնել M կետում շոշափողի tgα անկյունային գործակիցը։

x աբսցիսին տալով Δx աճ, կորի M կետից կանցնենք M_1 կետին, որի աբսցիսն է $x+\Delta x$ և օրդինատը՝

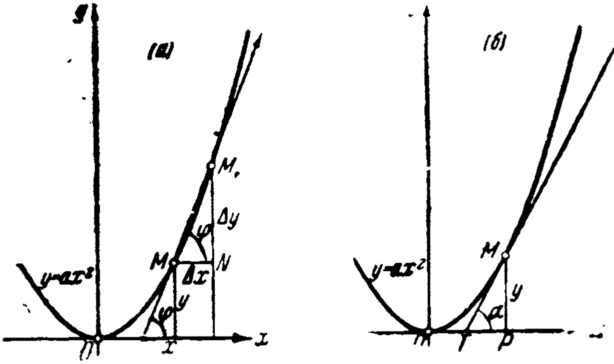
$$y+\Delta y = a(x+\Delta x)^2$$

(գծ. 38ա)։ MM_1 հատողի $\operatorname{tg}\varphi$ անկյունային գործակիցը կորոշվի $\triangle MNM_1$ ուղղանկյուն եռանկյունից։ Նրա MN էջը հավասար է աբսցիսի Δx աճին, իսկ NM_1 էջը, ակներևաբար, օրդինատի համապատասխան

$$\Delta y = a(2x.\Delta x+\Delta x^2)$$

աճն է, այնպես որ՝

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + a.\Delta x$$



Գծ. 38.

Շոշափողի անկյունային գործակիցն ստանալու համար, ինչպես հեշտ է հասկանալ, պետք է այստեղ անցնել սահմանին, երբ $\Delta x \to 0$։

Այսպիսով, մենք հանգում ենք հետևյալ արդյունքին՝

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} (2ax + a\cdot\Delta x) = 2ax.$$

Ի միջի այլոց նկատենք, որ այստեղից ստացվում է հարմար

եղանակ՝ պարաբոլի շոշափողի փաստական կառուցման համար։ Այսպես, MPT-ից (գծ. 38բ,) TP հատվածի համար կունենանք՝

$$TP = \frac{y}{tg\alpha} = \frac{ax^2}{2ax} = \frac{x}{2},$$

այնպես որ՝ T-ն OP հատվածի միջնակետն է։ Ուրեմն, որպեսզի տանենք պարաբոլի շոշափողը նրա M կետում, բավական է կիսել OP հատվածը և նրա միջնակետը միացնել M կետի հետ։]

Կամավոր կորի դեպքում, որի հավասարումն է

$$y = f(x),$$

շոշափողի անկյունային գործակիցը ստացվում է նույն ձևով։ Աբսցիսի Δx աճին համապատասխանում է օրդինատի Δy աճ և

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

հարաբերությունը արտահայտում է հատողի անկյունային գործակիցը՝ $tg\varphi$-ն։ Իսկ շոշափողի անկյունային գործակիցն այստեղից ստացվում է սահմանային անցման միջոցով, երբ $\Delta x \to 0$, այսինքն՝

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

91. ԱԾԱՆՑՅԱԼԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ։ Համեմատելով այն գործողությունները, որոնք մենք կատարեցինք վերևում դիտարկած երկու հիմնական խնդիրները լուծելիս, հեշտ է նկատել, որ երկու դեպքում էլ, եթե նկատի չունենանք փոփոխականների մեկնաբանումների միջև եղած տարբերությունը, ըստ էության կատարվում էր նույն բանը՝ ֆունկցիայի աճը բաժանում էինք անկախ փոփոխականի աճի վրա և ապա հաշվում այդ հարաբերության սահմանը։ Հենց այդպիսի ճանապարհով էլ մենք գալիս ենք դիֆերենցիալ հաշվի հիմնական գաղափարին՝ ածանցյալի գաղափարին։

Դիցուք $y=f(x)$ ֆունկցիան որոշված է X միջակայքում։ Ելնելով անկախ փոփոխականի որևէ $x = x_0$ արժեքից, նրան տանք

այնպիսի $\Delta x \lessgtr 0$ *աճ, որը նրան դուրս չբերի* X *միջակայքից, այնպես որ* $x_0+\Delta x$ *նոր արժեքը նույնպես պատկանի այդ միջակայքին։ Այդ ժամանակ, ֆունկցիայի* $y=f(x_0)$ *արժեքը կփոխարինվի նոր՝* $y+\Delta y=f(x_0+\Delta x)$ *արժեքով, այսինքն՝ նա կստանա*

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

աճ։

Եթե գոյություն ունի ֆունկցիայի աճի և անկախ փոփոխականի՝ այդ աճն առաջացնող աճի հարաբերության սահմանը, երբ x-ը ձգտում է 0-ի, այսինքն՝

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

ապա այդ սահմանը կոչվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալ ըստ x անկախ փոփոխականի, նրա $x=x_0$ տված արժեքի դեպքում (կամ տված կետում)։

Այսպիսով, ածանցյալը $x=x_0$ *տված արժեքի դեպքում, եթե այն գոյություն ունի, մի որոշակի թիվ է**։ *Իսկ եթե ածանցյալը գոյություն ունի ամբողջ* X *միջակայքում, այսինքն՝ այդ միջակայքի ամեն մի* x*-ի համար, ապա նա հանդիսանում է* x*-ի ֆունկցիա։*

Օգտվելով հենց հիմա տված գաղափարից, շարժվող կետի արագության վերաբերյալ 89-րդ պարագրաֆում ասածը կարելի է ձևակերպել այսպես՝

v արագությունը՝ s անցած ճանապարհի ածանցյալն է ըստ t ժամանակի:

Եթե «արագություն» բառը հասկանանք ավելի ընդհանուր իմաստով, ապա կարելի կլինի ածանցյալը միշտ մեկնաբանել, որպես ինչ-որ «արագություն»: Այսպես, ունենալով x *անկախ փոփոխականի* y *ֆունկցիան, կարելի է առաջադրել* y *փոփոխականի փոփոխման արագության հարցը՝* x *փոփոխականի փոփոխման նկատմամբ (*x*-ի տվյալ արժեքի դեպքում)։*

---

* *Առայժմ մենք սահմանափակվում ենք այն դեպքով, երբ վերոհիշյալ սահմանը վերջավոր է* [*տես* 100]:

Եթե x-ին տված Δx աճը առաջացնում է y-ի Δy աճ, ապա 89-ի նման, y-ի փոփոխման միջին արագություն x-ի համեմատությամբ, երբ x-ը փոփոխվում է Δx չափով, կարելի է ընդունել

$$v_{միջ.} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

հարաբերությունը:

Իսկ y-ի փոփոխման արագությունը x-ի տվյալ արժեքի դեպքում բնական կլինի անվանել այդ հարաբերության սահմանը, երբ Δx-ը ձգտում է զրոյի՝

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} v_{միջ.} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

այսինքն՝ հենց y-ի ածանցյալն ըստ x-ի:

90-ում մենք դիտարկեցինք $y=f(x)$ հավասարումով տված կորը և լուծեցինք տված կետում նրան շոշափող տանելու խնդիրը: Այժմ այնտեղ ստացված արդյունքը կարող ենք ձևակերպել այսպես՝

Շոշափողի $\operatorname{tg}\alpha$ անկյունային գործակիցը՝ y օրդինատի ածանցյալն է ըստ x աբսցիսի:

Ածանցյալի այս երկրաչափական մեկնաբանումը հաճախ օգտակար է լինում:

Ի լրացումն վերոհիշյալ դատողությունների, բերենք ևս մի քանի օրինակներ, որոնք բացահայտում են ածանցյալի գաղափարի դերը:

Եթե շարժման v արագությունը հաստատուն չէ, այլ ինքն էլ t ժամանակի ընթացքում փոփոխվում է՝ $v=f(t)$, ապա դիտարկում են «արագության փոփոխման արագությունը»՝ արագացում անվան տակ:

Այսպես՝ եթե ժամանակի Δt աճին համապատասխանում է արագության Δv աճ, ապա

$$a_{միջ.} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

հարաբերությունը կարտահայտի միջին արագացումը Δt ժամանակամիջոցում, իսկ նրա սահմանը կտա շարժման արագացումը տվյալ պահին՝

$$a = \lim_{\Delta x \to 0} a_{\text{միջ.}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Այսպիսով, արագացումը արագության ածանցյալն է ըստ ժամանակի:

Դիմենք ջերմության ուսմունքին և ածանցյալի օգնությամբ սահմանենք մարմնի ջերմունակության գաղափարը տվյալ ջերմաստիճանում։

Այս խնդրի մեջ մասնակցող ֆիզիկական մեծությունները նշանակենք հետևյալ կերպ. Θ-ով՝ ջերմաստիճանը (C աստիճաններով), W-ով՝ ջերմության այն քանակը, որը պետք է հաղորդել մարմնին՝ նրան 0°-ից մինչև Θ° տաքացնելիս (կալորիաներով)։ Պարզ է, որ W-ն Θ-ի ֆունկցիա է՝ $W=f(\Theta)$*։ Θ-ին տանք մի որոշ ΔΘ աճ, այդ ժամանակ W-ն նույնպես կստանա ΔW աճ։ Θ°-ից մինչև (Θ+ΔΘ)° տաքացնելիս միջին ջերմունակությունը կլինի՝*

$$c_{\text{միջ.}} = \frac{\Delta W}{\Delta \Theta}.$$

Բայց, քանի որ ΔΘ-ն փոփոխելիս այդ միջին ջերմունակությունը, ընդհանրապես, փոփոխվում է, ուստի մենք չենք կարող այդ հարաբերությունն ընդունել որպես մարմնի ջերմունակություն տված Θ ջերմաստիճանում։ Վերջինս ստանալու համար պետք է անցնել սահմանին՝

$$c = \lim_{\Delta\Theta \to 0} c_{\text{միջ.}} = \lim_{\Delta\Theta \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta \Theta}.$$

Այսպիսով, կարելի է ասել, որ մարմնի ջերմունակությունը՝ ջերմության քանակի ածանցյալն է ըստ ջերմաստիճանի:

Վերջապես, մի օրինակ էլ վերցնենք էլեկտրականության ուսմունքից. սահմանենք փոփոխական հոսանքի ուժի գաղափարը՝ տվյալ պահին։

t-ով նշանակենք ժամանակը (վայրկյաններով), հաշված մի որոշ սկզբնապահից, իսկ Q-ով՝ այդ ժամանակամիջոցում շղթայի լայնական հատույթով անցած էլեկտրականության քանակը (կուլոններով)։ Ակներևաբար, Q-ն t-ի ֆունկցիա է՝ $Q=f(t)$*։ Կրկնելով նախորդ դատողությունները, կստանանք, որ*

Δt ժամանակամիջոցում հոսանքի միջին ուժը կլինի՝

$$I_{միջ.} = \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

Իսկ տվյալ պահին հոսանքի ուժը կարտահայտվի դրա սահմանի միջոցով՝

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} I_{միջ.} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

այսինքն՝ հոսանքի ուժը՝ հոսած էլեկտրականության քանակի ածանցյալն է ըստ ժամանակի:

Ածանցյալի բոլոր այս կիրառությունները (որոնց թիվը հեշտ կլիներ մեծացնել) բավարար պարզությամբ դրսևորեցին այն փաստը, որ ածանցյալի գաղափարը էապես կապված է գիտության տարբեր բնագավառների հիմնական գաղափարների հետ:

Ածանցյալների հաշվումը, ուսումնասիրումը և նրանց հատկությունների օգտագործումը հենց կազմում են դիֆերենցիալ հաշվի հիմնական առարկան:

Ածանցյալի նշանակման համար օգտագործում են տարբեր սիմվոլներ՝

$\frac{dy}{dx}$ կամ $\frac{df(x_0)}{dx}$* Լայբնից (G. W. Leibniz),

y' կամ $f'(x_0)$ Լագրանժ (I. L. Lagrange),

Dy կամ $Df(x_0)$ Կոշի (A. L. Cauchy):

Մենք մեծ մասամբ կօգտվենք Լագրանժի պարզ նշանակումներից: Եթե կիրառում են ֆունկցիոնալ նշանակումը (տես երկրորդ սյունը), ապա փակագծերի մեջ գրած x_0 տառը ցույց է տալիս անկախ փոփոխականի այն արժեքը, որի համար վերցվում է ածանցյալը: Վերջապես, նկատենք, որ այն դեպքերում, երբ կարող է առաջանալ կասկած այն փոփոխականի նկատմամբ, ըստ որի վերցված է ածանցյալը (որի հետ բաղդա-

* Առայժմ Լայբնիցի նշանակումները դիտում ենք որպես ամբողջական սիմվոլներ. ստորև [103] մենք կտեսնենք, որ նրանք կարելի է դիտել նաև որպես կոտորակներ:

տելով սահմանած է «ֆունկցիայի փոփոխման արագությունը»), ապա այդ փոփոխականը գրվում է նշանիկի տեսքով ներքևում՝

$$y'_x,\ f'_x(x_0),\ D_x y,\ D_x f(x_0),$$

ընդ որում, x նշանիկը կապ չունի անկախ փոփոխականի այն մասնակի x_0 արժեքի հետ, որի դեպքում վերցվում է ածանցյալը։

[*Որոշ իմաստով, կարելի է ասել, որ*

$$\frac{df}{dx},\ f' \text{ կամ } f'_x,\ \ Df \text{ կամ } D_x f$$

ամբողջական սիմվոլները ֆունկցիոնալ նշանակումների դեր են կատարում ֆունկցիայի ածանցյալի համար]։

Այժմ վերևում ստացված մի քանի արդյունքները գրենք, օգտվելով ածանցյալի համար մուծված սիմվոլներից։ Շարժման արագության համար ունենք՝

$$v=\frac{ds}{dt} \text{ կամ } v=s'_t,$$

իսկ արագացման համար՝

$$a=\frac{dv}{dt} \text{ կամ } a=v'_t\ ։$$

Նույն ձևով, $y=f(x)$ կորի շոշափողի անկյունային գործակիցը կգրվի այսպես՝

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx} \text{ կամ } \operatorname{tg}\alpha=y'_x,$$

և այլն։

92. ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ՀԱՇՎԵԼՈՒ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ *Որպես օրինակներ հաշվենք մի շարք տարրական ֆունկցիաների ածանցյալները։*

1° Ամենից առաջ նշենք երկու ակնհայտ արդյունքներ. եթե $y=c=\text{const.}$, ապա $\Delta y=0$, ինչպիսին էլ լինի Δx-ը, այնպես որ $y'=0$։ Իսկ եթե $y=x$, ապա $\Delta y=\Delta x$ և $y'=1$։

2° Դիցուք այժմ $y=x^n$, որտեղ n-ը բնական թիվ է։

x-ին տանք Δx աճ, այդ ժամանակ y-ի նոր արժեքը կլինի՝*

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^n=x^n+nx^{n-1}.\Delta x+$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}.\Delta x^2+\ldots,$$

Այնպես որ կունենանք՝

$$\Delta y=nx^{n-1}.\Delta x+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}.\Delta x^2+\ldots,$$

և՝

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}.\Delta x+\ldots$$

Քանի որ Δx-ը զրոյի ձգտելիս բոլոր գումարելիները, բացի առաջինից, ձգտում են զրոյի, ուստի

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}.$$

3° Եթե $y=\frac{1}{x}$, *ապա* $y+\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}$, *այնպես որ՝*

$$\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)},$$

և

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x(x+\Delta x)}.$$

Այստեղից՝

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x^2}.$$

Այդ ժամանակ ենթադրվում է, իհարկե, որ $x\neq 0$:

4° Դիտարկենք $y=\sqrt{x}$ *ֆունկցիան (երբ* $x>0$)։ *Ունենք՝*

$$y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x},$$

---

* *Եթե ածանցյալը հաշվվում է արգումենտի ցանկացած արժեքի համար, ապա, սովորաբար, այդ արժեքը նշանակում են նույն տառով, ինչ որ արգումենտը, նրա մոտ առանց որևէ նշանի գրելու։*

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}},$$

վերջապես, օգտվելով արմատի անընդհատությունից, կստանանք՝

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}:$$

Այս բոլոր արդյունքները, որպես մասնավոր դեպքեր, պարունակվում են հետևյալում։

5° Աստիճանային ֆունկցիա՝ $y=x^{\mu}$ *(որտեղ* μ*-ն որևէ իրական թիվ է)։* x*-ի փոփոխման տիրույթը կախված է* μ*-ից. այն ցույց է տրված 48-ի 2°-ում։ Ունենք (երբ* $x\neq 0$*)՝*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^{\mu}-x^{\mu}}{\Delta x}=x^{\mu-1}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu}-1}{\frac{\Delta x}{x}},$$

Եթե օգտվենք 76-ի [5) (դ)]-ում հաշված սահմանից, ապա կստանանք՝

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\mu x^{\mu-1}.^{*}$$

Մասնավորապես,

եթե $y=\frac{1}{x}=x^{-1}$, *ապա* $y'=(-1)\cdot x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$,

եթե $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, *ապա* $y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$։

6° Ցուցչային ֆունկցիա՝ $y=a^{x}$ $(a>0,\ -\infty<x<+\infty)$։ *Այստեղ՝*

---

* *Եթե* $\mu>1$, *ապա հեշտ է անմիջապես ստանալ ածանցյալի արժեքը* $x=0$ *կետում՝* $y'=0$։

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

Օգտվելով 76 [5) (բ)]-ում հաշված սահմանից, կգտնենք՝

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\cdot\log a.$$

Մասնավորապես՝

եթե $y=e^x$, *ապա նաև* $y'=e^x$։

Ուրեմն, ցուցչային ֆունկցիայի աճման արագությունը (երբ $a>1$*) համեմատական է այդ ֆունկցիայի արժեքին՝ որքան ավելի մեծ արժեքի է արդեն հասել ֆունկցիան, այնքան ավելի արագ է նա աճում այդ պահին։ Այս տալիս է ցուցչային ֆունկցիայի աճման ճշգրիտ բնութագիրը, որի մասին մենք արդեն խոսելու առիթ ունեցել ենք [համեմատ. 65]։*

7° *Լոգարիթմական ֆունկցիա՝* $y=\log_a x$ $(0<a\neq 1,\ 0<x<+\infty)$։ *Այս դեպքում՝*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\frac{1}{x}\,\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Օգտվելով 76 [5) (ա)]-ում հաշված սահմանից, կստանանք՝

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a e}{x}.$$

Մասնավորապես, բնական լոգարիթմի համար կստացվի բացառիկ պարզ արդյունք՝

երբ $y=\log x$, *ունենք* $y'=\frac{1}{x}$։

Այս հիմք է հանդիսանում (թեկուզ և, ըստ էության, ոչ նոր)՝ տեսական հետազոտությունների ժամանակ բնական լոգարիթմը գերադասել մյուս լոգարիթմներից։

Այն հանգամանքը, որ լոգարիթմական ֆունկցիայի աճման արագությունը հակադարձ համեմատական է արգումենտի արժեքին (1<a դեպքում) և արգումենտն անվերջ մեծացնելիս նա

ձգտում է զրոյի, դրական մնալով, միանգամայն համընկնում է [65]*-ում այդ մասին ասածների հետ։*

8° Եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ։ *Դիցուք* y=sin x, *այդ ժամանակ՝*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

Օգտվելով sin x *ֆունկցիայի անընդհատությունից և* [54(8)]*-ից հայտնի՝* $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$ *սահմանից, կստանանք՝*

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos x^{*},$$

Նույն ձևով կստանանք՝

Եթե $y=\cos x$, *ապա* $y'=-\sin x$։

$y=\operatorname{tg}x$ *ֆունկցիայի համար կունենանք՝*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\operatorname{tg}(x+\Delta x)-\operatorname{tg}x}{\Delta x}=\frac{\frac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)}-\frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x}=$$

$$=\frac{\sin(x+\Delta x)\cdot\cos x-\cos(x+\Delta x)\cdot\sin x}{\Delta x\cdot\cos x\cdot\cos(x+\Delta x)}=\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\cos x\cos(x+\Delta x)};$$

Այստեղից՝

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x,$$

Նույն եղանակով՝

---

* *Նշենք, որ այս բանաձևը իր պարզությամբ պարտական է նրան, որ անկյունը չափվում է ռադիաններով։ Եթե* x*-ը չափենք, օրինակ. աստիճաններով, այդ դեպքում սինուսի և անկյան հարաբերության սահմանը հավասար չէր լինի մեկի, այլ ինչպես հեշտ է տեսնել, կլիներ* $\frac{\pi}{180}$, *և այդ ժամանակ մենք կունենայինք*

$$(\sin)'=\frac{\pi}{180}\cos x:$$

$$\text{Եթե } y=\operatorname{ctg} x, \text{ ապա } y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x։$$

93. ***ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼԸ։*** *Նախքան հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ածանցյալները հաշվելը, ապացուցենք հետևյալ ընդհանուր թեորեմը.*

ԹԵՈՐԵՄԱ։ Դիցուք 1) $y=f(x)$ ֆունկցիան $x=x_0$ կետում ունի վերջավոր և զրոյից տարբեր $f'(x_0)$ ածանցյալ, 2) նրա համար գոյություն ունի $x=g(y)$ միարժեք հակադարձ ֆունկցիա, որը անընդհատ է համապատասխան $y=y_0$ կետում, որտեղ $y_0=f(x_0)$։ Այդ ժամանակ գոյություն ունի նաև $g'(y_0)$ ածանցյալը և հավասար է $\frac{1}{f'(x_0)}$-ի։

Ապացույց։ $y=y_0$ արժեքին տանք Δy կամավոր աճ. այդ ժամանակ համապատասխան Δx աճ կստանա և $x=g(y)$ ֆունկցիան։ Նկատենք, որ երբ $\Delta y\neq0$, ապա, $y=f(x)$ ֆունկցիայի միարժեքության շնորհիվ, նաև $\Delta x\neq0$։ Ունենք՝

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}},$$

Այժմ, եթե որևէ օրենքով Δy-ը ձգտի զրոյի, ապա, $x=g(y)$ ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, նաև Δx աճը կձգտի 0-ի։ Սակայն այդ ժամանակ վերոհիշյալ հավասարության աջ մասի հայտարարը կձգտի $f'(x_0)\neq0$ սահմանին, հետևապես գոյություն ունի նաև ձախ մասի համար սահման, որը հավասար է $\frac{1}{f'(x_0)}$-ի և ներկայացնում է $g'(y_0)$ ածանցյալը։

Այսպիսով ստացանք հետևյալ պարզ բանաձևը՝

$$x'_y = \frac{1}{y'_x},$$

Հեշտ է պարզել վերջինիս երկրաչափական իմաստը։ Մենք գիտենք, որ y'_x ածանցյալը՝ $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին տարած շոշափողով և x-երի առանցքով կազմված α անկյան տանգենսն է։ Սակայն, $x=g(y)$ հակադարձ ֆունկցիան նույն գրաֆիկն ունի, միայն թե սրա համար անկախ փոփոխականի արժեքները դրվում են y-ների առանցքի վրա։ Այդ պատճառով, x'_y ածանցյալը հավասար է նույն շոշափողով և

y-ների առանցքով կազմված β անկյան տանգենսին (գծ. 39). Սրանից, ստացված բանաձևը հանգում է $\frac{\pi}{2}$ գումար ունեցող երկու α և β անկյունների տանգենսների միջև եղած հայտնի առնչությանը

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Օրինակի համար, ընդունենք $y = a^x$։ Սրա հակադարձ ֆունկցիան կլինի $x = \log_a y$։ Քանի որ (տես 6°) $y'_x = a^x \log a$, ուստի ըստ մեր բանաձևի կստանանք՝

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{a^x \log a} = \frac{\log_a e}{y},$$

որը նույնն է, ինչ որ 7°-ում ստացածը։

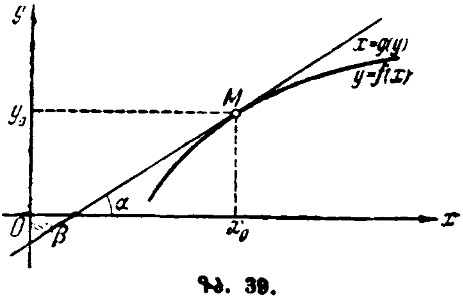
Այժմ անցնելով հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ածանցյալները հաշվելուն, հարմարության համար x և y փոփոխականների դերերը փոխենք և ստացված բանաձևը գրենք այսպես՝

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

9° Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ։ Դիտարկենք $y = \arcsin x$ ֆունկցիան $(-1 < x < 1)$, ընդ որում՝ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$։ Այս հանդիսանում է $x = \sin y$ ֆունկցիայի հակադարձը, որը y-ի վերոհիշյալ արժեքների համար ունի $x'_y = \cos y$ դրական ածանցյալ։ Այդ դեպքում գոյություն ունի նաև y'_x ածանցյալը, որը, ըստ մեր բանաձևի, հավասար է՝

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

արմատը վերցնում ենք դրական նշանով, որովհետև $\cos y > 0$։



Գծ. 39.

Մենք բացառեցինք $x=\pm1$ *արժեքները, որոնց համապատասխան* $y=\pm\frac{\pi}{2}$ *արժեքների համար ածանցյալը հավասար է զրոյի՝* $x'_y=\cos y=0$։

$y=\operatorname{arctg} x$ $(-\infty<x<+\infty)$ *ֆունկցիան հանդիսանում է* $x=\operatorname{tg} y$ *ֆունկցիայի հակադարձը։ Ըստ մեր բանաձևի, կունենանք՝*

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2},$$

Նույն ձևով կարելի է ստանալ՝

$y=\arccos x$ *ֆունկցիայի համար՝* $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1<x<1)$,

$y=\operatorname{arcctg} x$ *ֆունկցիայի համար՝* $y'=-\frac{1}{1+x^2}$ $(-\infty<x<+\infty)$։

94. ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԻ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԻ ՑԱՆԿ։ *Կատարենք մեր ստացած բոլոր բանաձևերի ամփոփում.*

1. $y=c$	$y'=0$
2. $y=x$	$y'=1$
3. $y=x^{\mu}$	$y'=\mu x^{\mu-1}$
$y=\frac{1}{x}$	$y'=-\frac{1}{x^2}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $y=a^x$	$y'=a^x\cdot\log a$
$y=e^x$	$y'=e^x$
5. $y=\log_a x$	$y'=\frac{\log_a e}{x}$
$y=\log x$	$y'=\frac{1}{x}$
6. $y=\sin x$	$y'=\cos x$
7. $y=\cos x$	$y'=-\sin x$

8. $y=\mathrm{tg}\ x$ $\qquad y'=\sec^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

9. $y=\mathrm{ctg}\ x$ $\qquad y'=-\csc^2 x=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

10. $y=\arcsin x$ $\qquad y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $y=\arccos x$ $\qquad y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $y=\mathrm{arctg}\ x$ $\qquad y'=\dfrac{1}{1+x^2}$

13. $y=\mathrm{arcctg}\ x$ $\qquad y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

95. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱՃԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ։ *Ապացուցենք երկու պարզ թեորեմաներ, որոնք հետագայում պետք է կիրառենք։*

Դիցուք $y=f(x)$ *ֆունկցիան որոշված է* X *միջակայքում։ Ելնելով այդ միջակայքի* $x=x_0$ *որոշակի արժեքից,* x*-ի կամավոր աճը նշանակենք* $\Delta x \lessgtr 0$, *միայն այն պայմանով որ* $x_0+\Delta x$ *կետը դուրս չգա* X*-ի սահմաններից։ Այդ ժամանակ ֆունկցիայի համապատասխան աճը կլինի՝*

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

1° Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում ունի $y'_x=f'(x_0)$ վերջավոր ածանցյալ, ապա ֆունկցիայի աճը կարող է ներկայացվել այսպես

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0).\Delta x+\alpha.\Delta x, \tag{2}$$

կամ, ավելի կարճ՝

$$\Delta y=y'_x.\Delta x+\alpha.\Delta x, \qquad (2ա)$$

որտեղ α-ն Δx-ից կախված մեծություն է և նրա հետ միասին ձգտում է զրոյի։

Քանի որ, հենց ածանցյալի սահմանման համաձայն, երբ $\Delta x \to 0$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to y'_x,$$

ուստի, ընդունելով

$$\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}-y'_x ,$$

տեսնում ենք, որ նաև $\alpha\to 0$: Այստեղից որոշելով Δy-ը, կստանանք (2ա) բանաձևը:

Քանի որ $\alpha.\Delta x$ մեծությունը (երբ $\Delta x\to 0$) կլինի Δx-ի նկատմամբ ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր, ուստի, օգտագործելով 60-ում տրված նշանակումը կարելի է վերոհիշյալ բանաձևերը գրել այսպես՝

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0).\Delta x+o(\Delta x) \tag{3}$$

կամ այսպես՝

$$\Delta y=y'_x\,.\,\Delta x+o(\Delta x): \qquad (3ա)$$

Դիտողություն: Մինչև հիմա մենք համարում էինք $\Delta x\neq 0$ և α մեծությունը $\Delta x=0$ արժեքի համար որոշված չէր: Երբ մենք ասում էինք, թե Δx-ը զրոյի ձգտելիս α-ն ձգտում է զրոյի, ապա (սովորաբար) ենթադրում էինք, որ Δx-ը ձգտում է 0-ի ցանկացած օրենքով, սակայն չընդունելով զրո արժեք: Այժմ ընդունենք $\alpha=0$, երբ $\Delta x=0$. այդ դեպքում, հասկանալի է, (2) բանաձևը ճիշտ կլինի նաև $\Delta x=0$ արժեքի համար: Բացի այդ, Δx-ը զրոյի ձգտելիս $\alpha\to 0$ առնչությունը կարելի է հասկանալ ավելի լայն իմաստով, քան առաջ, առանց բացառելու Δx-ի համար այն հնարավորությունը, որ նա զրոյի ձգտելիս մյուս արժեքների թվում ընդունի նաև զրո արժեքը,

Ապացուցված բանաձևերից անմիջապես բխում է՝

2° **Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում ունի (վերջավոր) ածանցյալ, ապա այդ կետում ֆունկցիան անհրաժեշտաբար անընդհատ է:**

Իրոք, (2ա)-ից պարզ է, որ $\Delta x\to 0$-ից հետևում է՝ $\Delta y\to 0$:

96. ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ՀԱՇՎԵԼՈՒ ՊԱՐԶԱԳՈՒՅՆ ԿԱՆՈՆՆԵՐ: *Նախորդ nn°-ում մենք հաշվեցինք տարրական ֆունկցիաների ածանցյալները: Այստեղ և հաջորդ n°-ում մենք կստանանք մի շարք պարզ կանոններ, որոնց օգնությամբ հնարավոր կլինի հաշվել ամեն մի ֆունկցիայի ածանցյալը, որը կազմված է տարրական ֆունկցիաներից՝ վերջավոր թվով թվաբանական գործողությունների և սուպերպոզիցիաների [51] միջոցով:*

I. Դիցուք $u=\varphi(x)$ ֆունկցիան (մի որոշ x կետում) ունի u'

ածանցյալ: *Ապացուցենք,* որ $y=cu$ ($c=\text{const.}$) ֆունկցիան նույնպես ունի ածանցյալ (նույն կետում) *և հաշվենք այն։*

Եթե x *անկախ փոփոխականն ստանա* Δx *աճ, ապա* u *ֆունկցիան կստանա* Δu *աճ, սկզբնական* u *արժեքից անցնելով* $u+\Delta u$ *արժեքին։* y *ֆունկցիայի նոր արժեքը կլինի* $y+\Delta y=c(u+\Delta u)$: *Այստեղից՝* $\Delta y=c\Delta u$, *և՝*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=c\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=c\cdot u'.$$

Ուրեմն, ածանցյալը գոյություն ունի և հավասար է

$$y'=(c\cdot u)'=c\cdot u'.$$

Այս բանաձևը արտահայտում է այսպիսի կանոն՝ հաստատուն արտադրիչը կարելի է դուրս բերել ածանցյալի նշանի տակից։

II. Դիցուք $u=\varphi(x)$ և $v=\psi(x)$ ֆունկցիաները (մի որոշ կետում) ունեն u' և v' ածանցյալներ։ Ապացուցենք, որ $y=u\pm v$ ֆունկցիան նույնպես ունի ածանցյալ (նույն կետում) և հաշվենք այն:

x*-ին տանք* Δx *աճ, այդ ժամանակ* u, v *և* y *ֆունկցիաները համապատասխանաբար կստանան* Δu, Δv *և* Δy *աճեր։ Նրանց* $u+\Delta u$, $v+\Delta v$ *և* $y+\Delta y$ *նոր արժեքները կապված կլինեն նույն առնչությամբ՝*

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)\pm(v+\Delta v).$$

Այստեղից՝

$$\Delta y=\Delta u\pm\Delta v,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

և՝

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'\pm v',$$

այնպես որ y' *ածանցյալը գոյություն ունի և հավասար է՝*

$$y'=(u\pm v)'=u'\pm v'.$$

Այս արդյունքը հեշտությամբ կարելի է տարածել ցանկացած թվով գումարելիների վրա (այն էլ՝ նույն մեթոդով)։

III. u և v ֆունկցիաների նկատմամբ անելով նույն ենթադրությունները, ապացուցենք, որ $y = u \cdot v$ ֆունկցիան նույնպես ածանցյալ ունի, *և հաշվենք այն։*

Ինչպես վերևում տեսանք, Δx աճին համապատասխանեն Δu, Δv և Δy աճեր, ընդ որում $y+\Delta y = (u+\Delta u)\cdot(v+\Delta v)$, *ուստի՝*

$$\Delta y = \Delta u . v + u . \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v$$

և՝

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} . v + u . \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} . \Delta v:$$

Քանի որ Δx-ը զրոյի ձգտելիս, 95-ում ասածի շնորհիվ, $\Delta v \to 0$, ուստի՝

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} . v + u . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' . v + u \cdot v' .$$

այսինքն՝ գոյություն ունի y' ածանցյալը և հավասար է՝

$$y' = (u \cdot v)' = u' . v + v' u.$$

Եթե $y = uvw$, *ընդ որում* u', v', w' *ածանցյալները գոյություն ունեն, ապա՝*

$$y' = [(uv)w]' = (uv)' . w + (uv) . w' = u'vw + uv'w + uvw':$$

Հեշտ է հասկանալ, որ n արտադրիչների դեպքում նման ձևով կստացվի՝

$$[\overbrace{u.v.w \ldots s}^{n}]' = u'vw \ldots s + uv'w \ldots s + uvw' \ldots s + \ldots$$
$$\ldots + uvw \ldots s': \qquad (4)$$

Այս ապացուցելու համար օգտվենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից։ Ենթադրելով, որ (4) բանաձևը ճիշտ է n թվով արտադրիչների համար, ապացուցենք, որ նա ճիշտ կլինի նաև $n+1$ *թվով արտադրիչների համար՝*

$$[\overbrace{uvw \ldots s.t}^{n+1}]' = [(\overbrace{u \cdot vw \ldots s}^{n}) \cdot t]' = (uvw \ldots s)' t + (uvw \ldots s) . t' .$$

Եթե $(uvw \ldots s)'$ *ածանցյալը ըստ (4)-րդ բանաձևի բացենք, ապա կստանանք՝*

$$[uvw\ldots st]' = u'vw\ldots st + uv'w\ldots st + uvw'\ldots st + \ldots + uvw\ldots s't + uvw\ldots st',$$

որը բոլորովին նման է (4) բանաձևին։ Քանի որ մենք արդեն հաստատել ենք (4) բանաձևի ճշտության մեջ n=2 *և* 3 *արժեքների դեպքում, ուստի այդ բանաձևը ճիշտ է ամեն մի* n-*ի համար։*

IV. Վերջապես, եթե u և v ֆունկցիաները բավարարում են նախորդ ենթադրություններին և, բացի այդ, v-ն զրոյից տարբեր է, ապա ապացուցենք, որ $\frac{u}{v}$ ֆունկցիան նույնպես ածանցյալ ունի *և հաշվենք այն։*

Վերոհիշյալ նշանակումներով, կունենանք՝

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v},$$

ուստի՝

$$\Delta y = \frac{\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)},$$

և՝

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)},$$

Δx*-ը ձգտեցնելով զրոյի (ընդ որում միաժամանակ նաև* $\Delta v \to 0$*), կհամոզվենք, որ գոյություն ունի*

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

ածանցյալը։

97. ԲԱՐԴ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼԸ։ *Այժմ մենք կարող ենք ստանալ, պրակտիկայում ածանցյալ գտնելու համար շատ կարևոր, մի կանոն, որը թույլ կտա հաշվել բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը, եթե հայտնի են բաղադրիչ ֆունկցիաների ածանցյալները։*

V. Դիցուք 1) $u = \varphi(x)$ ֆունկցիան մի որոշ x կետում ունի $u'_x = \varphi'(x)$ ածանցյալ, 2) $y = f(u)$ ֆունկցիան համապատասխան u կետում ունի $y'_u = f'(u)$ ածանցյալ։ Այդ ժամանակ $y = f(\varphi(x))$ բարդ ֆունկցիան ևս վերոհիշյալ x կետում կունենա ածանցյալ,

որը հավասար կլինի $f(u)$ և $\varphi(x)$ ֆունկցիաների ածանցյալների արտադրյալին՝

$$[f(\varphi(x))]' = f'_u(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)^{*},$$

կամ ավելի կարճ

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \,։$$

Ապացուցելու համար x-ին տանք կամավոր Δx աճ, դիցուք Δu-ն՝ $u=\varphi(x)$ ֆունկցիայի համապատասխան աճն է, իսկ Δy-ը՝ $y=f(u)$ ֆունկցիայի այն աճն է, որն առաջացել է Δu աճի շնորհիվ։ Օգտվենք (2ա) առնչությունից, որի մեջ, եթե x-ը փոխարինենք u-ով, կստանանք՝

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u$$

(α-ն կախված է Δu-ից և նրա հետ միասին ձգտում է զրոյի)։ Վերջինս անդամ առ անդամ բաժանելով Δx-ի վրա, կստանանք՝

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}\,։$$

Եթե Δx-ը ձգտում է զրոյի, ապա զրոյի կձգտի նաև Δu-ն [95, 2°], *իսկ այդ ժամանակ, ինչպես մենք գիտենք, զրոյի կձգտի նաև Δu-ից կախված α մեծությունը։ Հետևապես գոյություն ունի*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x$$

սահմանը, որը հենց հանդիսանում է որոնելի y'_x ածանցյալը։

Դիտողություն։ Այստեղ հանդես է գալիս $\Delta x=0$ արժեքի դեպքում α մեծության մասին 95-ում կատարված դիտողության օգտավետությունը՝ քանի դեռ Δx-ը անկախ փոփոխականի աճն է, մենք կարող ենք այն ընդունել զրոյից տարբեր, բայց երբ Δx-ը փոխարինված է $u=\varphi(x)$ ֆունկցիայի աճով, ապա նույնիսկ $\Delta x \neq 0$ արժեքների համար մենք արդեն իրավունք չունենք ընդունել, որ $\Delta u \neq 0$։

---

* *Ընդգծենք, որ $f'_u(\varphi(x))$ սիմվոլը նշանակում է $f(u)$ ֆունկցիայի ածանցյալը ըստ իր u արգումենտի (այլ ոչ ըստ x-ի), երբ այդ արգումենտը ունի $u=\varphi(x)$ արժեք։*

98. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ*։ *Նախ բերենք* I—IV *կանոնների կիրառման մի քանի օրինակներ։*

1) Վերցնենք՝

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n$$

բազմանդամը։ Ըստ II, *և ապա ըստ* I *կանոնի, կունենանք՝*

$$y'=(a_0x^n)'+(a_1x^{n-1})'+\ldots+(a_{n-2}x^2)'+(a_{n-1}x)'+(a_n)'=$$

$$=a_0(x^n)'+a_1(x^{n-1})'+\ldots+a_{n-2}(x^2)'+a_{n-1}(x)'+(a_n)'.$$

Օգտագործելով [94]*-ի 1, 2, 3 բանաձևերը, վերջնականապես կստանանք՝*

$$y'=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots+2a_{n-2}x+a_{n-1}.$$

2) $y=(2x^2-5x+1).e^x$*։ Ըստ* III *կանոնի, կունենանք՝*

$$y'=(2x^2-5x+1)'e^x+(2x^2-5x+1).(e^x)'.$$

Հենվելով նախորդ օրինակի և [94]*-ի 4-րդ բանաձևի վրա, կստանանք՝*

$$y'=(4x-5)e^x+(2x^2-5x+1)e^x=(2x^2-x-4)e^x.$$

3) $y=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$*. Ըստ* IV *կանոնի, կունենանք՝*

$$y'=\frac{(ax+b)'(x^2+1)-(ax+b)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{a(x^2+1)-2x(ax+b)}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{ax^2-2bx+a}{(x^2+1)^2}.$$

4) Նորից հաշվենք $y=\operatorname{tg}x$ *ֆունկցիայի ածանցյալը, ելնելով* $y=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ *բանաձևից։ Օգտվելով* IV *կանոնից (և 94-ի 6, 7 բանաձևերից) կստանանք՝*

$$y'=\frac{(\sin x)'.\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

(համեմատել 94-ի 8-ի հետ)։

5) $y=\dfrac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}$*։ Այստեղ՝ նախ պետք է օգտվել* IV *կանոնից, և ապա* II *և* III *կանոններից (տես 94-ի բանաձևերից).*

---

* *Ստորև* x, y, u, v *տառերով նշանակված են փոփոխականները, իսկ մյուս տառերով՝ հաստատունները։*

$$y' = \frac{(x\sin x + \cos x)'(x\cos x - \sin x) - (x\sin x + \cos x)(x\cos x - \sin x)'}{(x\cos x - \sin x)^2} =$$

$$= \frac{x\cos x\,(x\cos x - \sin x) - (x\sin x + \cos x)(-x\sin x)}{(x\cos x - \sin x)^2} = \frac{x^2}{(x\cos x - \sin x)^2}$$

Համարիչի և հայտարարի ածանցյալների հաշվումը մենք կատարեցինք առանց մանրամասն քայլերի վերածելու: Վարժությունների միջոցով անհրաժեշտ է հասնել այնպիսի դրության, որպեսզի կարողանալ ընդհանրապես ածանցյալները գրել միանգամից:

Բարդ ֆունկցիաների ածանցյալներ հաշվելու օրինակներ:

6) Դիցուք $y = \log\sin x$, *այլ խոսքով,* $y = \log u$, *որտեղ* $u = \sin x$: *Ըստ* V *կանոնի՝* $y'_x = y'_u \cdot u'_x$: *Այստեղ* $y'_u = (\log u)'_u = \frac{1}{u}$ *ածանցյալը (5-րդ բանաձև) պետք է վերցնել* $u = \sin x$*-ի դեպքում: Այսպիսով, կունենանք՝*

$$y'_x = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x \qquad \textit{(6-րդ բանաձև)}:$$

7) $y = \sqrt{1+x^2}$, *այսինքն՝* $y = \sqrt{u}$, *որտեղ* $u = 1 + x^2$, *ըստ* V *կանոնի՝*

$$y'_x = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+x^2)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \textit{(3-րդ բանաձև, 1 օրինակ)}:$$

8) $y = e^{x^2}$, *այսինքն՝* $y = e^u$, *որտեղ* $u = x^2$.

$$y'_x = e^{x^2}(x^2)' = 2x\,e^{x^2} \qquad (\text{V}; 4 \text{ և } 3):$$

Իհարկե, բարդ ֆունկցիայի բաղադրիչ ֆունկցիաներն առանձին-առանձին գրելը գործնականում անհրաժեշտ չէ:

9) $y = \sin ax$; $y'_x = \cos ax \cdot (ax)' = a \cdot \cos ax$ (V; 7, 1, 2):

10) $y = (x^2+x+1)^n$; $y'_x = n(x^2+x+1)^{n-1}(x^2+x+1)' =$

$$= n(2x+1)(x^2+x+1)^{n-1} \qquad (\text{V}; 3, \textit{օրինակ 1-ին}):$$

11) $y = 2^{\sin x}$; $y'_x = 2^{\sin x} \cdot \log 2 \cdot (\sin x)' = \log 2 \cdot \cos x \cdot 2^{\sin x}$

(V; 4, 6):

12) $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$; $y'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2}$ (V;12,3):

Երբ բարդ ֆունկցիան առաջանում է մի քանի սուպերպոզիցիաների հետևանքով, նրա ածանցյալը հաշվվում է V կանոնի հաջորդական կիրառումով.

13) $y=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}$,

այն ժամանակ՝

$$y'_x=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right)'_x= \qquad (V;\ 3)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}}\cdot\sec^2\frac{1}{2}x\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)'_x=$$

$$=\frac{\sec^2\frac{1}{2}x}{4\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}}.$$

14) $y'=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$, *այս դեպքում՝*

$$y'_x=e^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\left(\sin^2\frac{1}{x}\right)'_x= \qquad (V;\ 4)$$

$$e^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cdot\left(\sin\frac{1}{x}\right)'_x= \qquad (V;\ 3)$$

$$e^{\sin^2\frac{1}{x}}\,2\sin\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'_x= \qquad (V;\ 6)$$

$$=-\frac{1}{x^2}\cdot\sin\frac{2}{x}\cdot e^{\sin^2\frac{1}{x}}. \qquad (V;\ 3)$$

Տանք ևս մի քանի օրինակներ, որտեղ պետք է օգտագործել բոլոր կանոնները.

15) $y=\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$,

$$y'_x=\frac{1}{2}[(e^x)'_x-(e^{-x})'_x]=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch}x.$$

Համապատասխանաբար, եթե $y=\operatorname{ch}x$, ապա $y'=\operatorname{sh}x$: Վերջապես, ինչպես նաև 4)-ում հեշտ է ստանալ՝

$$\text{եթե } y=\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x},\ \text{ապա՝ } y'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x},$$

$$\text{իսկ եթե } y=\operatorname{cth}x=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x},\ \text{ապա՝ } y'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}.$$

16) $y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$, $y'_x=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot(x+\sqrt{x^2+1})'_x=$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Նույն արդյունքը կարելի է ստանալ նաև այլ նկատառումներով: 49, 4)-ում մենք տեսանք, որ $y=\log(x+\sqrt{1+x^2})$ ֆունկցիան հանդիսանում է $x=\operatorname{sh}y$ ֆունկցիայի հակադարձը, ուստի [93; օրինակ 15; 48, 6°]՝

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\operatorname{ch}y}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2y+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

17) $$y=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}};\ y'=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{x^2+a^2}-x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{(\sqrt{x^2+a^2})^2}=$$

$$=\frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}.$$

18) $$y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}\ (-1<x<1);$$

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}\cdot 2\cdot\frac{1\cdot(1-x^2)-x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{1}{1+x^2};$$

19) $$y=\frac{1}{\sqrt{b-ac}}\log\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b-ac}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac}}$$

(մենք ենթադրում ենք, որ $b-ac>0$);

$$y'=\frac{1}{\sqrt{b-ac}}\left[\frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}}{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b-ac}}-\frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac}}\right]=$$

$$=\frac{1}{(x+c)\sqrt{ax+b}}:$$

$$20)\ y=\frac{2}{\sqrt{ac-b}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ax+b}{ac-b}}$$

(այստեղ ենթադրված է, որ $ac-b>0$*)*;

$$y'=\frac{2}{\sqrt{ac-b}}\cdot\frac{1}{1+\frac{ax+b}{ac-b}}\cdot\frac{1}{\sqrt{ac-b}}\cdot\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}=\frac{1}{(x+c)\sqrt{ax+b}}$$

$$21)\ y=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{a\sin x+b}{a+b\sin x}\quad \left(|b|<a;\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right);$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a\sin x+b}{a+b\sin x}\right)^2}}\times$$

$$\times\frac{a\cos x\cdot(a+b\sin x)-(a\sin x+b).b\cos x}{(a+b\sin x)^2}=\frac{1}{a+b\sin x}$$

$$22)\ y=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\frac{b+a\sin x+\sqrt{b^2-a^2}.\cos x}{a+b\sin x}\quad (|a|<|b|);$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\left[\frac{a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{b+a\sin x-\sqrt{b^2-a^2}\cos x}-\frac{b\cos x}{a+b\sin x}\right]=$$

$$=\frac{1}{a+b\sin x}:$$

23) Վարժության կարգով հետազոտենք $y=u^v$ $(u>0)$ *աստիճանացուցչային արտահայտության ածանցյալի հարցը, որտեղ* u*-ն և* v*-ն* x*-ի ֆունկցիաներ են և տված կետում ունեն* u', v' *ածանցյալներ։*

Լոգարիթմելով $y=u^v$ *հավասարությունը, կստանանք՝*

$$\log y=v\cdot\log u: \tag{5}$$

Ուրեմն, y*-ի արտահայտությունը կարելի է գրել* $y=e^{v\log u}$ *տեսքով, որտեղից արդեն պարզ է, որ* y' *ածանցյալը գոյություն ունի։ Իսկ այդ ածանցյալի հաշվումը հեշտ է կատարել, հավասարեցնելով (5)-րդ հավասարության երկու մասերի ածանցյալներն ըստ* x*-ի։ Այդ ժամանակ մենք օգտագործում*

ենք V և III կանոնները (հիշելով, որ u. v և y փոփոխականները x-ից կախված ֆունկցիաներ են)։ Կստանանք՝

$$\frac{1}{y}\cdot y' = v'.\log u + v.\frac{1}{u}.u',$$

որտեղից՝

$$y' = y\left(\frac{vu'}{u} + v'\log u\right),$$

կամ, y-ի տեղ տեղադրելով նրա վերահիշյալ արտահայտությունը՝

$$y' = u^{v}\left(\frac{vu'}{u} + v'\log u\right)։ \qquad (6)$$

Այս բանաձևը առաջին անգամ ստացել է Ի. Բեռնուլին (Johann Bernoulli)։ Օրինակ՝

$$\text{եթե } y = x^{\sin x}, \text{ ապա՝ } y'_x = x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right)։$$

24) Ենթադրելով, որ f(x) ֆունկցիան ունի f'(x) ածանցյալ, գրել

$$(ա) \quad \sin f(x), \quad (բ)\ e^{f(x)}, \quad (գ)\ \log f(x)$$

ֆունկցիաների ածանցյալները ըստ x-ի և

$$(դ)\ f(\sin t), \quad (ե)\ f(e^{t}), \quad (զ)\ f(\log t)$$

ֆունկցիաների ածանցյալները ըստ t-ի։

Պատասխան՝ $(ա)\ \cos f(x).f'(x), \ (բ)\ e^{f(x)}.f'(x), \ (գ)\ \frac{f'(x)}{f(x)};$

$$(դ)\ f'(\sin t).\cos t, \ (ե)\ f'(e^{t}).e^{t}, \ (զ)\ f'(\log t).\frac{1}{t}։$$

Վերջին երեք՝ (դ), (ե), (զ) օրինակների առթիվ ընթերցողի ուշադրությունը հրավիրում ենք այն հանգամանքի վրա, որ f'(...) սիմվոլը նշանակում է ածանցյալն ըստ այն x ա ր գ ու մ ե ն տ ի, որից կախված է f(x) ֆունկցիան, սակայն այդ արգումենտի, համապատասխանաբար, x=sint, e^{t}, log t արժեքների դեպքում, որոնք արդեն կախված են t փոփոխականից։ Համեմատել 202-րդ էջի ապացույցի ծանոթության հետ:

25) Օ կետի նկատմամբ սիմետրիկ միջակայքում որոշված f(x) ֆունկցիան կոչվում է զույգ ֆունկցիա, եթե f(−x)=f(x), և կենտ ֆունկցիա, եթե $f(-x) = -f(x)$։ [Զույգ ֆունկցիայի օրինակներ կարող են ծառայել x^2, x^4...

զույգ աստիճանները, ինչպես և cos x-ը, ch x-ը: Կենտ ֆունկցիայի օրինակ-ներ են՝ x, x^3,... կենտ աստիճանները, sin x-ը, sh x-ը]:

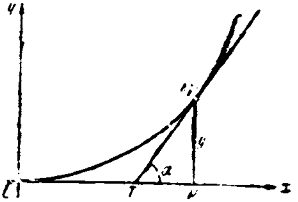
Ապացուցել, որ զույգ ֆունկցիայի ածանցյալը (եթե գոյություն ունի) հանդիսանում է կենտ ֆունկցիա, իսկ կենտ ֆունկցիայի ածանցյալը՝ զույգ ֆունկցիա:

26) Հաշվել $y = \log|x|$ ֆունկցիայի ածանցյալը, երբ $x \neq 0$:

Երբ $x > 0$, ակներևաբար, $y' = \frac{1}{x}$. Ցույց տանք, որ նույն բանաձևը ճիշտ է նաև $x < 0$ արժեքների համար: Իրոք, հաշվելով

$$y = \log|x| = \log(-x)$$

ֆունկցիայի ածանցյալը, որպես բարդ ֆունկցիայի, այս դեպքում էլ կստանանք՝



Գծ. 40.

$$y' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}:$$

27) Դիտարկենք

$$y = ax^m \ (m \neq 0)$$

կորը: Նրա (x, y) կետում տարած շոշափողի անկյունային գործակիցը կլինի [90—91]՝

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = max^{m-1},$$

40-րդ գծագրից երևում է, որ TP հատվածը (այսպես կոչված «ենթաշոշափողը») հավասար է՝

$$TP = \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{ax^m}{max^{m-1}} = \frac{x}{m},$$

Այս հանգամանքը հեշտացնում է շոշափողի կառուցումը: [Ու 90-ում ստացված արդյունքի ընդհանրացումը]:

28) $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{x} \ (a > 0)$

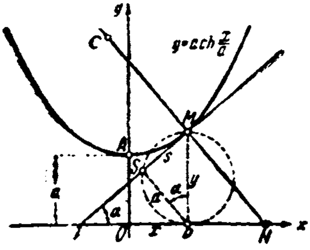
կորի («շղթայագծի») համար նույն ձևով կստացվի՝

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a},$$

Այս անգամ (ընդունելով $x > 0$) կունենանք՝

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}}} = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{x}{a}} = \frac{a}{y},$$

այնպես որ՝ $y.\cos\alpha=a$: Եթե y- PM օրդինատի P հիմքից (գծ. 41) MT շոշափողի վրա իջեցնենք PS ուղղահայացը, ապա պարզվում է, որ PS հատվածը հավասար է a-ի: Այստեղից դարձյալ ստացվում է դիտարկվող կորի շոշափողը կառուցելու հեշտ եղանակ: PM օրդինատի, որպես տրամագծի վրա կառուցում են կիսաշրջանագիծ և P կետից a շառավիղով հատում են վերոհիշյալ շրջանագիծը S կետում. MS ուղիղը կլինի որոնելի շոշափողը:



Գծ. 41.

29) Դիցուք նյութական կետը տատանվում է առանցքի վրա մի որոշ միջին դիրքի շուրջը՝

$$s = A\,.\sin(\omega t+\alpha) \qquad (A,\ \omega>0)$$

օրենքով: Այդպիսի տատանումը կոչվում է **ներդաշնակ կամ հարմոնիկ** տատանում. A-ն այդ շարժման ամպլիտուդն է, ω-ն՝ հաճախությունը, α-ն՝ սկզբնական փուլը:

Վերցնելով S ճանապարհի ածանցյալն ըստ t ժամանակի, կստանանք շարժման ա ր ա գ ո ւ թ յ ո ւ ն ը՝

$$v=A\omega.\cos(\omega t+\alpha):$$

Արագությունը իր $\pm A\omega$ մեծագույն արժեքին հասնում է այն պահերին, երբ $S=0$, այսինքն՝ երբ կետն անցնում է միջին դիրքով: Ընդհակառակը, երբ կետը գտնվում է այդ միջին դիրքից ամենամեծ հեռավորության վրա ($S=\pm A$), v արագությունը հավասարվում է զրոյի:

v-ի ածանցյալն ըստ t-ի՝

$$a = -A\omega^2.\sin(\omega t+\alpha)$$

տալիս է այն ա ր ա գ ա ց ո ւ մ ը, որով շարժվում է կետը. ակներևաբար՝

$$a = -\omega^2.s:$$

Այստեղից, եթե մտցնենք շարժվող կետի m զանգվածը, ապա, ըստ Ն յ ո ւ տ ո ն ի օրենքի, այդ F ուժը, որի ազդեցության ներքո առաջանում է հարմոնիկ տատանումը, կարտահայտվի այսպես՝

$$F = -m\omega^2.s:$$

Ինչպես տեսնում ենք, այդ ուժը միշտ ուղղված է դեպի միջին դիրքը (որովհետև նա ունի s-ի հակառակ նշանը) և համեմատական է կետի հեռավորությանը այդ դիրքից:

30) $s=Ae^{-kt}\sin\omega t \qquad (A,\ k,\ \omega>0$

օրենքով կատարվող շարժումը կոչվում է **մարվող տատանում**, որովհետև e^{-kt} արտադրիչի ներկայությունը ստիպում է կետին, թեկուզ և տատանվելով միջին դիրքի շուրջը, այնուամենայնիվ ձգտել այդ դիրքի հետ համընկնելու՝

$$\lim_{t\to\infty} s=0.$$

Այս դեպքում

$$v=s'_t=Ae^{-kt}(\omega\cos\omega t-k\sin\omega t)$$

և

$$a=v'_t=-Ae^{-kt}(\omega^2\sin\omega t+2\omega k\cos\omega t-k^2\sin\omega t).$$

Փակագծերի մեջ ավելացնելով նորից $\pm k^2\sin\omega t$ անդամներ, ակներև ձևափոխություններից հետո կստանանք՝

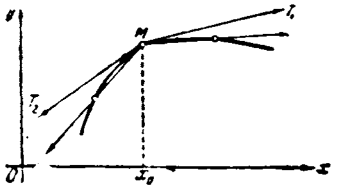
$$a=-Ae^{-kt}[(\omega^2+k^2)\sin\omega t+2k(\omega\cos\omega t-k\sin\omega t)]=$$
$$=-(\omega^2+k^2)\cdot s-2k\cdot v.$$

Այն ուժը, որի ազդեցությամբ առաջանում է նման շարժում, հավասար է

$$F=-(\omega^2+k^2)m\cdot s-2km\cdot v.$$

Մենք տեսնում ենք, որ նա բաղկացած է երկու ուժերից՝ 1) այն ուժից, որը համեմատական է կետի հեռավորությանը միջին դիրքից և ուղղված է դեպի այդ միջին դիրքը (ինչպես և հարմոնիկ շարժման դեպքում), և 2) շարժումը արգելակող ուժից, որը համեմատական է արագությանը և ուղղված է արագությանը հակառակ։

99. ՄԻԱԿՈՂՄՅԱՆ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ։ Վերջում դիմենք ածանցյալների նկատմամբ մի շարք հատուկ դեպքերի տեսությանը։ Սկսենք միակողմյան ածանցյալների գաղափարի սահմանումից։ Եթե դիտարկվող x արժեքը հանդիսանում է այն X միջակայքի ծայրերից մեկը, որտեղ որոշված է $y=f(x)$ ֆունկցիան, ապա $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ հարաբերության սահմանը հաշվելիս ստիպված կլինենք սահմանափակվել այն դեպքով, երբ Δx-ը զրոյի է ձգտում միայն աջից (երբ խոսքը վերաբերում է միջակայքի ձախ ծայրին) կամ ձախից (աջ ծայրի համար)։ Այս դեպքում խոսում են միակողմյան ածանցյալի մասին, աջից կամ ձախից։ Համապատասխան կետերում ֆունկցիայի գրաֆիկն ունի միակողմյան շոշափող։



Գծ. 42.

Կարող է պատահել, որ ներքին x կետի համար էլ գոյություն ունենան $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ հարաբերության միայն միակողմյան

սահմաններ (երբ $\Delta x \to +0$ կամ երբ $\Delta x \to -0$), որոնք իրարից տարբեր են. դրանք դարձյալ կոչվում են *միակողմյան* ածանցյալներ։ Համապատասխան կետում ֆունկցիայի գրաֆիկի համար գոյություն կունենան միայն *միակողմյան* շոշափողներ, որոնք իրար հետ անկյուն են կազմում, իսկ այդ կետը կլինի *անկյունային* կետ (գծ. 42)։

Որպես օրինակ քննության առնենք $y=f(x)=|x|$ ֆունկցիան։ Ելնելով $x=0$ արժեքից, կունենանք՝

$$\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=f(\Delta x)=|\Delta x|։$$

Եթե $\Delta x>0$, ապա՝

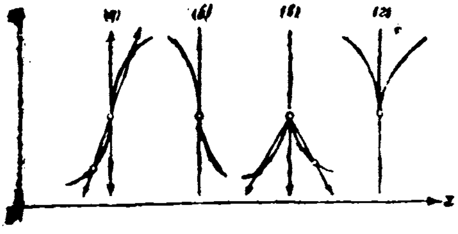
$$\Delta y=\Delta x, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=1։$$

Իսկ եթե $\Delta x<0$, ապա՝

$$\Delta y=-\Delta x, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=-1։$$

Կոորդինատների սկզբնակետը այս ֆունկցիայի գրաֆիկի համար անկյունային կետ է, որն ստացվում է առաջին և երկրորդ կոորդինատային անկյունների կիսորդների հատումից։

100. ԱՆՎԵՐՋ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ։ Եթե աճերի $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ հարաբերությունը, երբ $\Delta x \to 0$, ձգտում է ∞ ($+\infty$ կամ $-\infty$), ապա այդ անիսկական թիվը նույնպես անվանում են ածանցյալ (և նշանակում են սովորական ձևով)։ Նույն ձևով սահմանվում է *միակողմյան* անվերջ ածանցյալի գաղափարը։ Ածանցյալի երկրաչափական մեկնաբանումը, որպես շոշափողի անկյունային գործակից, տարածվում է նաև այս դեպքի վրա, բայց այստեղ շոշափողը լինում է y-ների առանցքին զուգահեռ (գծ. 43 ա, բ, գ, դ)։



Գծ. 43.

Նկատենք որ $y=f(x)$ *անընդհատ* ֆունկցիայի համար միակողմյան ածանցյալը կարող է միայն որոշակի նշանով անվերջություն լինել (այսինքն՝ կարող է հավասար լինել կամ $+\infty$ կամ՝ $-\infty$)։ Իրոք, դիցուք, օրինակ, խոսքը վերաբերում է $x=x_0$ կետում ածանցյալին աջից, այսինքն՝

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

հարաբերության սահմանին, երբ $x \to x_0+0$*: Երբ $x > x_0$, այդ հարաբերությունը ներկայացնում է x-ի անընդհատ ֆունկցիա և, նշանը փոխելիս, նա անպայման կդառնար զրո [ըստ Կոշիի թեորեմայի, 79]: Հենց այս պատճառով էլ, եթե նա ունի ∞ սահման, երբ $x \to x_0+0$, ապա x կետի մոտ նա չի կարող իր նշանը փոխել:

Այսպիսով, եթե անընդհատ ֆունկցիան որևէ կետում ունի անվերջ ածանցյալ, ապա նրա համար կարող են լինել միայն չորս հնարավոր դեպքեր, որոնք ներկայացված են 43-րդ գծագրի վրա: (ա) և (բ) դեպքերում այդ ածանցյալը, համապատասխանաբար $+\infty$ և $-\infty$ (երկու միակողմյան ածանցյալները իրենց նշաններով համընկնում են), իսկ (գ) և (դ) դեպքերում անվերջ ածանցյալը որոշակի նշան չունի (միակողմյան ածանցյալները տարբերվում են իրենց նշաններով).

Դիցուք, օրինակ, $f_1(x)=x^{\frac{1}{3}}$; $x \neq 0$ դեպքում 94-ի 3-րդ բանաձևը տալիս է՝

$$f'_1(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}},$$

որը, սակայն, կիրառելի չէ $x=0$ դեպքում: Այդ կետում ածանցյալը հաշվենք, ելնելով անմիջապես նրա սահմանումից, կազմելով

$$\frac{f_1(0+x\Delta)-f_1(0)}{\Delta x}=\frac{\Delta x^{\frac{1}{3}}}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x^{\frac{2}{3}}},$$

հարաբերությունը, տեսնում ենք, որ նրա սահմանը, երբ $\Delta x \to 0$, կլինի $+\infty$: Նույնը ճիշտ է նաև $f_2(x)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ ֆունկցիայի համար, երբ $x=0$, սակայն այս դեպքում անհրաժեշտ է, որ Δx-ը մեծ լինի զրոյից, և կարելի է խոսել միայն աջից միակողմյան ածանցյալի մասին: Նույն ձևով

* Այստեղ x_0 արժեքի տեղ դերը կատարում է $\Delta x=x-x_0$ տարբերությունը: $x \to x_0+0$ պահանջը, ակներևաբար, համազոր է $\Delta x \to +0$ պահանջին:

կհամոզվենք, որ $f_3(x)=x^{\frac{2}{3}}$ *ֆունկցիայի համար, երբ* $x=0$, *ածանցյալը ձախից հավասար է* $-\infty$, *իսկ աջից՝* $+\infty$:

Օգտվելով ածանցյալի գաղափարի ընդհանրացումից, կարելի է n° 93-ում տված հակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալին վերաբերող թեորեմն լրացնել ցուցումով այն մասին, որ այն դեպքերում, երբ $f'(x_0)$*-ն հավասար է զրոյի կամ անվերջության, հակադարձ ֆունկցիայի* $g'(y_0)$ *ածանցյալը գոյություն ունի և, հավասար է, համապատասխանաբար,* ∞ *կամ 0-ի։ Օրինակ, քանի որ* $\sin x$ *ֆունկցյան* $x=\pm\frac{\pi}{2}$ *դեպքում ունի* $\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=0$ *ածանցյալը, ապա* $\arcsin y$ *հակադարձ ֆունկցիայի համար* $y=\pm 1$ *դեպքում գոյություն ունի անվերջ ածանցյալ (այն է՝* $+\infty$*)։*

101. ՀԱՏՈՒԿ ԴԵՊՔԵՐԻ ԱՅԼ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1 Օրինակներ, երբ ածանցյալ գոյություն չունի։ *Ինչպես արդեն տեսանք,* $y=|x|$ *ֆունկցիան* $x=0$ *կետում [տես 99] սովորական, երկկողմյան, ածանցյալ չունի։ Սակայն ավելի հետաքրքիր է*

$$f(x)=x.\sin\frac{1}{x} \quad (\text{երբ } x\neq 0),\ f(0)=0$$

ֆունկցիայի օրինակը, որն անընդհատ է նաև $x=0$ *դեպքում [70, 5], բայց այդ կետում նա չունի նույնիսկ միակողմյան ածանցյալներ։ Իրոք.*

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x}$$

հարաբերությունը, երբ Δx*-ը ձգտում է* ± 0*-ի, ոչ մի սահմանի չի ձգտում։*

Այդ ֆունկցիայի գրաֆիկից (գծ. 24) հեշտ է նկատել, որ OM_1 *հատողը, որը դուրս է գալիս O սկզբնակետից, երբ* M_1 *կետը ձգտում է 0-ի, սահմանային դիրք չունի, ուստի սկզբնակետում կորը շոշափող (նույնիսկ միակողմյան) չունի։*

Հետագայում [երկրորդ հատոր, 416] մենք կծանոթանանք նշանավոր ֆունկցիայի օրինակի հետ, որը արգումենտի բոլոր արժեքների դեպքում անընդհատ է, բայց նրանցից ոչ մեկի դեպքում ածանցյալ չունի։

2 Օրինակներ, երբ ածանցյալը խզումներ ունի։ *Եթե մի որոշ X միջակայքի յուրաքանչյուր կետում* $y=f(x)$ *ֆունկցիայի համար գոյություն ունի* $y'=f'(x)$ *վերջավոր ածանցյալ, ապա այդ ածանցյալը, իր հերթին, իրենից ներկայացնում է x-ի ֆունկցիան X միջակայքում։ Մինչև հիմա մեզ հանդիպած բազմաթիվ օրինակների մեջ պարզվում էր, որ այդ ֆունկցիան ինքն էլ անընդհատ էր։ Սակայն, կարող է և այդպես չլինել։ Դիտարկենք օրինակ, հետևյալ ֆունկցիան՝*

$$f(x)=x^2\cdot\sin\frac{1}{x}\quad (\text{երբ } x\neq 0),\ f(0)=0։$$

Եթե $x\neq 0$, ապա նրա ածանցյալը հաշվվում է սովորական եղանակով,

$$f'(x)=2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}։$$

Սակայն ստացված արդյունքը $x=0$ արժեքի համար կիրառելի չէ։ Այս դեպքում, դիմելով անմիջապես ածանցյալի գաղափարի սահմանմանը, կունենանք՝

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}=0։$$

Միաժամանակ պարզ է, երբ $x\to 0$, $f'(x)$-ը ոչ մի սահմանի չի ձգտում, ուստի $x=0$ արժեքի դեպքում $f'(x)$ ֆունկցիան խզում ունի։

Այս ճիշտ է նաև

$$f(x)=x^{\alpha}\cdot\sin\frac{1}{x}\quad (\text{երբ } x\neq 0),\ f(0)=0,$$

կամավոր ֆունկցիայի համար, միայն թե պետք է լինի $\alpha>1$։

Այս օրինակների մեջ ածանցյալի խզումները երկրորդ տեսակի են։ Այդ պատահականություն չէ. հետագայում [119] մենք կտեսնենք, որ ածանցյալը առաջին տեսակի խզումներ, այսինքն թռիչքներ, ունենալ չի կարող։

§ 2. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ

102. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ։ Դիցուք ունենք $y=f(x)$ ֆունկցիան, որը որոշված է մի X միջակայքում և անընդհատ է նրա x_0 կետում։ Այդ ժամանակ արգումենտի Δx աճին կհամապատասխանի ֆունկցիայի

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

աճը, որը Δx-ի հետ միասին անվերջ փոքր է։ Մեծ կարևորություն ունի հետևյալ հարցը՝ արդյոք Δx-ի համար գոյությու՞ն ունի Δx-ի նկատմամբ գծային $A.\Delta x$ ($A=\text{const.}$) անվերջ փոքր այնպիսի մեծություն, որ նրանց տարբերությունը Δx-ի նկատմամբ լինի ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր՝

$$\Delta y = A.\Delta x + o(\Delta x)։ \qquad (1)$$

Երբ $A \neq 0$, (1) հավասարության առկայությունը ցույց է տալիս, որ $A.\Delta x$ անվերջ փոքրը համարժեք է Δy անվերջ փոքրին և, ուրեմն, վերջինիս համար ծառայում է իբրև գլխավոր մաս, եթե որպես հիմնական անվերջ փոքր վերցրած է Δx-ը [62, 63]։

Ակներև է, որ (1) հավասարությունը կարող է տեղի ունենալ (եթե ընդհանրապես տեղի ունի) A հաստատունի միայն մեկ արժեքի համար. իրոք, եթե նա տեղի ունենար $A = A_1$ և A_2 երկու արժեքների համար, ապա անհրաժեշտաբար կլիներ՝

$$(A_1 - A_2).\Delta x = o(\Delta x),$$

որը հնարավոր է միմիայն $A_1 = A_2$ պայմանի դեպքում։

Եթե (1) հավասարությունը տեղի ունի, ապա $y = f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է դ ի ֆ ե ր ե ն ց ի ա լ ի (տված $x = x_0$ արժեքի դեպքում), իսկ $A.\Delta x$ արտահայտությունը կոչվում է ֆունկցիայի դ ի ֆ ե ր ե ն ց ի ա լ և նշանակվում է dy կամ $df(x_0)$ սիմվոլով։

[Վերջին դեպքում, փակագծերի մեջ նշվում է x-ի սկզբնական արժեքը]։*

Կրկնում ենք, որ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը բնորոշվում է երկու հատկություններով. ա) նա ներկայացնում է արգումենտի Δx աճի գծային (համասեռ) ֆունկցիա և բ) ֆունկցիայի աճից տարբերվում է այնպիսի մեծությամբ, որը, երբ $\Delta x \to 0$, հանդիսանում է ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր, քան Δx-ը։

Դիտարկենք օրինակներ։

1) r շառավիղ ունեցող շրջանի Q մակերեսը տրվում է $Q = \pi r^2$ բանաձևով։ Եթե r շառավիղը մեծացնենք Δr-ով, Q մեծության համապատասխան ΔQ աճը կլինի շրջանային օղակի մակերես, որը գտնվում է r և $r + \Delta r$ շառավիղներ ունեցող համակենտրոն շրջանագծերի միջև

$$\Delta Q = \pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r.\Delta r + \pi(\Delta r)^2$$

արտահայտությունից անմիջապես նկատվում է, որ ΔQ-ի գլխա-

---

* *Այստեղ df-ը, որպես միասնական սիմվոլ, ֆունկցիայի նշանակման դեր է խաղում։*

վոր մասը, երբ $\Delta r \to 0$, կլինի $2\pi r . \Delta r$-ը. հենց այդ էլ dQ դիֆերենցիալն է։ Երկրաչափորեն այն ներկայացնում է այն ուղղանկյան մակերեսը (որը կարծես ստացված է օղակի «ուղղումից»), որի հիմքը հավասար է շրջանագծի $2\pi r$ երկարությանը, իսկ բարձրությունը՝ Δr։

2) Նմանապես, r շառավղով գնդի $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ ծավալի համար, երբ շառավիղը մեծանում է Δr-ով, ստացվում է հետևյալ աճը՝

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 =$$

$$= 4\pi r^2 . \Delta r + 4\pi r . (\Delta r)^2 + \frac{4}{3}\pi(\Delta r)^3,$$

աճ, որի գլխավոր մասը երբ $\Delta r \to 0$, ակներևաբար, կլինի $dV = 4\pi r^2 . \Delta r$։ Այդ՝ մի հարթ շերտի ծավալ է, որի հիմքը գնդի $4\pi r^2$ մակերևույթն է, իսկ բարձրությունը՝ Δr. կարծես թե r և $r+\Delta r$ շառավիղներ ունեցող երկու համակենտրոն գնդային մակերևույթների միջև գտնվող ծավալը «շերտատվել է» և վերածվել այդպիսի շերտի։

3) Վերջապես, քննության առնենք նյութական կետի ազատ անկումը, որը տեղի է ունենում $s=\frac{gt^2}{2}$ օրենքով։ Շարժվող կետը t-ից մինչև $t+\Delta t$, այսինքն՝ Δt ժամանակամիջոցում, կանցնի հետևյալ ճանապարհը՝

$$\Delta s = \frac{g(t+\Delta t)^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = gt . \Delta t + \frac{g}{2} . (\Delta t)^2։$$

Երբ $\Delta t \to 0$, նրա գլխավոր մասը կլինի $ds = gt . \Delta t$։ Հիշելով, որ արագությունը t պահին կլինի $y=gt$ [89], տեսնում ենք, որ ճանապարհի դիֆերենցիալը (որը մոտավորապես փոխարինում է ճանապարհի աճին) հաշվվում է որպես մի ճանապարհ, որը կանցներ կետը, եթե ամբողջ Δt ժամանակամիջոցում նա շարժվեր այդ արագությամբ։

103. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԱԾԱՆՑՅԱԼԻ ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ԿԱՊԸ։ *Այժմ հեշտ է ցույց տալ հետևյալ առաջադրության ճշտությունը։*

Որպեսզի $y=f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում դիֆերենցելի լինի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա համար այդ կետում գոյու-

բյուն ունենա $y'=f'(x_0)$ վերջավոր ածանցյալ։ Այդ պայմանի բավարարման դեպքում (1) հավասարությունը տեղի ունի A հաստատունի այն արժեքի համար, որը հավասար է հենց այդ ածանցյալին՝

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x + o(\Delta x)\text{։} \tag{1ա}$$

Անհրաժեշտությունը։ Եթե տեղի ունի (1) հավասարությունը, ապա այդտեղից կստացվի՝

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

ուստի, Δx-ը ձգտեցնելով 0-ի, կունենանք՝

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x\text{։}$$

Բավարարությունն անմիջապես բխում է 95-ի 1°-ից [տես այնտեղ (3ա)]։

Այսպես. $y=f(x)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը միշտ հավասար է՝

$$dy = y'_x \cdot \Delta x^{*}\text{։} \tag{2}$$

Հենց այստեղ ընդգծենք, որ վերոհիշյալ արտահայտության մեջ Δx-ի տակ հասկանում ենք անկախ փոփոխականի կամավոր աճ, այսինքն՝ կամավոր թիվ (որը հաճախ հարմար է լինում համարել x-ից անկախ)։ Ընդ որում բոլորովին էլ անհրաժեշտ չէ Δx-ը ընդունել անվերջ փոքր. սակայն, եթե $\Delta x \to 0$, ապա dy դիֆերենցիալը նույնպես կլինի անվերջ փոքր, և կլինի (երբ $y'_x \neq 0$) հենց ֆունկցիայի Δy անվերջ փոքր աճի գլխավոր մասը։ Հենց այս էլ հիմք է ծառայում մոտավորապես ընդունել՝

$$\Delta y \doteq dy, \tag{3}$$

---

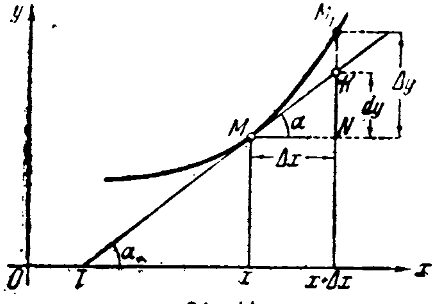
* *Հեշտ է ստուգել, որ նախորդ n°-ում քննության առած բոլոր դեպքերում հենց այդպես էլ կազմվում էր դիֆերենցիալը։ Օրինակ, 1; դեպքում ունենք՝*

$$Q = \pi r^2,\ Q'_r = 2\pi r,\ dQ = 2\pi r \cdot \Delta r.$$

և այլն։

այնքան ավելի մեծ ճշգրտությամբ, որքան ավելի փոքր է Δx-ը։ (3) մոտավոր հավասարության դիտարկմանը մենք կանդրադառնանք n° 106-ում։

$y=f(x)$ ֆունկցիայի dy դիֆերենցիալը և նրա կապը Δy աճի հետ երկրաչափորեն մեկնաբանելու համար, դիտարկենք այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը (գծ. 44)։ Արգումենտի x և օրդինատի y արժեքներով կորի վրա կորոշվի M կետը։ Կորի այդ կետում տանենք MT շոշափողը. ինչպես մենք արդեն տեսել ենք [91], նրա $\operatorname{tg}\alpha$ անկյունային գործակիցը հավասար է y'_x ածանցյալին։ Եթե x աբսցիսին տանք Δx աճ, ապա կորի y օրդինատը կստանա $\Delta y=NM_1$ աճ։ Միաժամանակ շոշափողի օրդինատը կստանա NK աճ։ Հաշվելով NK հատվածը, որպես MNK ուղղանկյուն եռանկյան էջ, կստանանք՝



Գծ. 44.

$$NK=MN.\operatorname{tg}\alpha=y'_x\,.\Delta x=dy.$$

Այսպիսով, այն ժամանակ, երբ Δy-ը կորի օրդինատի աճն է, dy-ը հանդիսանում է շոշափողի օրդինատի համապատասխան աճը։

Վերջում կանգ առնենք x անկախ փոփոխականի վրա. նրա դիֆերենցիալ անվանում են հենց իր Δx աճը, այսինքն՝ պայմանաբար ընդունում են՝

$$dx=\Delta x. \qquad (4)$$

Եթե x անկախ փոփոխականի դիֆերենցիալը նույնացնենք $y=x$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալի հետ (այստեղ էլ յուրատեսակ պայմանավորում է), ապա (4) բանաձևը կարելի է և ապացուցել, ելնելով (2)-րդ բանաձևից՝ $dx=x'_x\,.\Delta x=1.\Delta x=\Delta x$։

Հաշվի առնելով (4)-ը, այժմ կարելի է դիֆերենցիալի սահմանումը տվող (2)-րդ բանաձևը գրել այսպես՝

$$y=y'_x\cdot dx. \qquad (5)$$

սովորաբար հենց այսպես էլ գրում են։

Այստեղից ստացվում է՝

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \qquad (6)$$

ուստի՝ այն արտահայտությունը, որը մենք առաջ դիտում էինք որպես ամբողջական սիմվոլ, այժմ կարելի է մեկնաբանել որպես կոտորակ։ Այն հանգամանքը, որ վերոհիշյալ արտահայտության մեջ ձախ մասում գտնվում է միանգամայն որոշակի թիվ, այնինչ աջ մասում ունենք երկու անորոշ dy և dx թվերի հարաբերություն (չէ որ $dx=\Delta x$ մեծությունը կամայական է), ընթերցողին չպետք է շփոթեցնի։ dx և dy մեծությունները փոփոխվում են համեմատականորեն, ընդ որում y'_x ածանցյալը հենց հանդիսանում է համեմատականության գործակիցը։

Դիֆերենցիալի գաղափարը և «դիֆերենցիալ*» տերմինը պատկանում է Լայբնիցին, որը, սակայն, չի տվել այդ գաղափարի ճշգրիտ սահմանումը։ Դիֆերենցիալների հետ միասին Լայբնիցը դիտարկել է նաև «դիֆերենցիալ քանորդներ», այսինքն՝ երկու դիֆերենցիալների քանորդները, որոնք համարժեք են մեր ածանցյալներին. սակայն հենց դիֆերենցիալն է եղել Լայբնիցի համար սկզբնական գաղափար։ Կոշիի ժամանակից սկսած, որ սահմանների իր տեսությամբ հիմք ստեղծեց ամբողջ անալիզի համար և առաջին անգամ հստակորեն ածանցյալը սահմանեց որպես սահման, սովորական դարձավ ելնել հենց ածանցյալի գաղափարից, իսկ դիֆերենցիալի գաղափարը կառուցել արդեն ածանցյալի գաղափարի հիման վրա։

104. ԴԻՖԵՐԵՆՑՄԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐՆ ՈՒ ԿԱՆՈՆՆԵՐԸ։ Ֆունկցիաների դիֆերենցիալների հաշվումը կոչվում է *դիֆերենցում* (дифференцирование)**։ Քանի որ dy դի-

* Լատիներեն differentia բառից է, որը նշանակում է «տարբերություն»։

** Ի միջի այլոց, նույն տերմինով սովորաբար նշանակում են նաև ածանցյալների հաշվումը, որի համար ռուսերենում հատուկ տերմին չկա։ Օտար լեզուների մեծ մասում այդ գործողությունների նշանակման համար կան երկու տարբեր տերմիններ. օրինակ, ֆրանսերենում տարբերում են «dérivation» և «différentiation» տերմինները։ Հեղինակ

Հայերենում նույնպես պաշտոնապես ընդունված էր միայն դիֆերենցում (դիֆերենցել) տերմինը, սակայն վաղուց գործածական է դարձել նաև ածանցել հաջող տերմինը՝ միայն ածանցյալը գտնելու գործողության համար։ Խմբագիր

ֆերենցիալը y′-ի ածանցյալից տարբերվում է միայն dx *բազմապատկիչով, ուստի տարրական ֆունկցիաների ածանցյալների աղյուսակից* [94] *հեշտ է կազմել այդ ֆունկցիաների դիֆերենցիալների աղյուսակը՝*

1. $y=c$ — $dy=0$

2. $y=x^{\mu}$ — $dy=\mu x^{\mu-1}.dx$

   $y=\frac{1}{x}$ — $dy=-\frac{dx}{x^2}$

   $y=\sqrt{x}$ — $dy=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$

3. $y=a^x$ — $dy=a^x .\log a.dx$

   $y=e^x$ — $dy=e^x.dx$

4. $y=\log_a x$ — $dy=\frac{\log_a e \,.\, dx}{x}$

   $y=\log x$ — $dy=\frac{dx}{x}$

5. $y=\sin x$ — $dy=\cos x.dx$

6. $y=\cos x$ — $dy=-\sin x.dx$

7. $y=\mathrm{tg}\, x$ — $dy=\sec^2 x.dx=\frac{dx}{\cos^2 x}$

8. $y=\mathrm{ctg}\, x$ — $dy=-\csc^2 x.dx=-\frac{dx}{\sin^2 x}$

9. $y=\arcsin x$ — $dy=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $y=\arccos x$ — $dy=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $y=\mathrm{arctg}\, x$ — $dy=\frac{dx}{1+x^2}$

12. $y=\mathrm{arcctg}\, x$ — $dy=-\frac{dx}{1+x^2}$

*Դիֆերենցման կանոնները** *կգրվեն այսպես՝*

$$\text{I. } d(c \cdot u)=c \cdot du,$$

$$\text{II. } d(u \pm v)=du \pm dv,$$

$$\text{III. } d(uv)=u.dv+v.du,$$

$$\text{IV. } d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v.du-u.dv}{v^2},$$

Այս բոլորը հեշտությամբ ստացվում են ածանցյալների համար ստացված համապատասխան կանոններից։ Ապացուցենք, օրինակ, վերջին երկուսը.

$$d(u.v)=(u.v)' . dx=(u'.v+u.v')dx=$$

$$=v(u'.dx)+u.(v'.dx)=v.du+u.dv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{u}{v}\right)'.dx=\frac{u'.v-v'u}{v^2}.dx=\frac{v.(u'.dx)-u.(v'.dx)}{v^2}=$$

$$=\frac{v.du-u.dv}{v^2},$$

105. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼԻ ԳՐՈՒԹՅԱՆ ՁԵՎԻ ԱՆՓՈՓՈԽԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ։ *Բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցման կանոնը մեզ համար պարզում է դիֆերենցիալի մի ուշագրավ և կարևոր հատկություն։*

Դիցուք $y=f(x)$ *և* $x=\varphi(t)$ *ֆունկցիաներն այնպիսին են, որ նրանցից կարելի է կազմել* $y=f(\varphi(t))$ *բարդ ֆունկցիան։ Եթե գոյություն ունեն* y'_x *և* x'_t *ածանցյալները, ապա, ըստ* [97]*-ի* V *կանոնի, գոյություն ունի նաև*

$$y'_t=y'_x \cdot x'_t \tag{7}$$

ածանցյալը։

Եթե x*-ը ընդունենք որպես անկախ փոփոխական,* dy *դիֆերենցիալը կարտահայտվի (5)-րդ բանաձևով։ Այժմ ընդունենք, որ անկախ փոփոխականը* t*-ն է, այս դեպքում դիֆերենցիալի համար կունենանք այլ արտահայտություն՝*

---

* *Եթե խոսքը վերաբերում է հենց դիֆերենցիալները հաշվելուն։*

$$dy = y'_t \cdot dt.$$

Սակայն, y'_t ածանցյալը փոխարինելով իր (7)-րդ արտահայտությամբ և նկատելով, որ $x'_t\,dt$-ն x-ի, որպես t-ի ֆունկցիայի, դիֆերենցիալն է, վերջնականապես կստանանք՝

$$dy = y'_x \cdot x'_t \cdot dt = y'_x \cdot dx.$$

այսինքն՝ վերադարձանք դիֆերենցիալի նախկին ձևին։

Այսպիսով, մենք տեսնում ենք, որ դ ի ֆ ե ր ե ն ց ի ա լ ի ձ և ը կարող է պահպանվել նույնիսկ այն դեպքում, երբ նախկին անկախ փոփոխականը փոխարինվում է նորով։ *Մենք միշտ իրավունք ունենք y-ի դիֆերենցիալը գրել (5)-րդ ձևով, անկախ այն բանից, թե արդյոք x-ը անկախ փոփոխական է, թե ոչ. տարբերությունը կայանում է միայն նրանում, որ, եթե որպես անկախ փոփոխական վերցրած է t-ն, ապա dx-ը նշանակում է ոչ թե կամայական Δx աճ, այլ որպես t-ից կախված x-ի դիֆերենցիալ։ Հենց այս հատկությունն էլ անվանում են դ ի ֆ ե ր ե ն ց ի ա լ ի գ ր ո ւ թ յ ա ն ձ և ի ա ն փ ո փ ո խ ա ն ա կ ո ւ թ յ ո ւ ն (ի ն վ ա ր ի ա ն տ ո ւ թ յ ո ւ ն)։*

Քանի որ (5)-րդ բանաձևից անմիջապես ստացվում է (6)-րդ բանաձևը, որն y'_x ածանցյալն արտահայտում է dx և dy դիֆերենցիալների միջոցով, ապա վերջին բանաձևը նույնպես պահպանում է իր ուժը, ո ր ա ն կ ա խ փ ո փ ո խ ա կ ա ն ի (ինարկե, ամեն դեպքում՝ միևնույն) ն կ ա տ մ ա մ բ է լ հ ա շ վ ե լ ո ւ լ ի ն ե ն ք ն շ վ ա ծ դ ի ֆ ե ր ե ն ց ի ա լ ն ե ր ը։

Դիցուք, օրինակ, $y = \sqrt{1-x^2}$ $(-1 < x < 1)$, *այնպես որ՝*

$$y'_x = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Այժմ ընդունենք՝ $x = \sin t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$. *Այդ ժամանակ*
$y = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$, *և մենք կունենանք՝* $dx = \cos t \cdot dt$, $dy = -\sin t\,dt$. *Հեշտ է ստուգել, որ՝*

$$y'_x = \frac{-\sin t\,dt}{\cos t\,dt} = -\frac{\sin t}{\cos t}$$

բանաձևը տալիս է միայն այլ արտահայտություն վերևում հաշված ածանցյալի համար:

Այս հանգամանքից առանձնապես հարմար է օգտվել այն դեպքերում, երբ y-ի և x-ի կախումն անմիջապես տված չէ, այլ դրա փոխարեն տված է x և y երկու փոփոխականների կախումը որևէ երրորդ, օժանդակ, փոփոխականից (որը կոչվում է պարամետր)՝

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t). \tag{8}$$

Ենթադրելով, որ այդ երկու ֆունկցիաները ածանցյալներ ունեն և որ նրանցից առաջինի համար գոյություն ունի ածանցյալ ունեցող $t=\Theta(x)$ *հակադարձ ֆունկցիա* [82, 93], *հեշտ է տեսնել, որ այդ ժամանակ y-ը ևս կլինի x-ի ֆունկցիա՝*

$$y=\psi(\Theta(x))=f(x) \tag{9}$$

որի համար նույնպես գոյություն ունի ածանցյալ: Այդ ածանցյալի հաշվումը կարելի է կատարել վերևում նշված կանոնով, չվերականգնելով y-ի անմիջական կախումն x-ից, այն է՝

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t\cdot dt}{x'_t\cdot dt}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{10}$$

Օրինակ, եթե $x=\sin t,\ y=\cos t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$, *ապա* y'_x *ածանցյալը կարելի է որոշել այնպես, ինչպես այդ կատարված է վերևում, բոլորովին չօգտվելով* $y=\sqrt{1-x^2}$ *առնչությունից:*

Եթե x-ն ու y-ը դիտենք որպես հարթության վրա գտնվող կետի ուղղանկյուն կոորդինատներ, ապա (8)-րդ հավասարումները պարամետրի յուրաքանչյուր t արժեքին կհամապատասխանեցնեն մի որոշ կետ, որը, t-ի փոփոխման ժամանակ, հարթության վրա կգծի մի կոր: (8) հավասարումները կոչվում են այդ կորի պարամետրական հավասարումներ:

Այն դեպքում, երբ կորը տված է պարամետրորեն, (10) բանաձևը թույլ է տալիս անմիջապես (8) հավասարումներով ստանալ շոշափողի անկյունային գործակիցը, չանցնելով կորի տրմանը (9) հավասարումով, այն է՝

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{11}$$

Դիտողություն։ Ածանցյալը ցանկացած փոփոխականի նկատմամբ վերցրած դիֆերենցիալների միջոցով արտահայտելու հնարավորությունը, մասնավորապես, բերում է այն բանին, որ հակադարձ և բարդ ֆունկցիաների դիֆերենցման կանոնները լայբնիցյան նշանակումներով արտահայտող

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},$$

բանաձևերը դառնում են պարզ հանրահաշվական նույնություններ (որքանով, որ բոլոր դիֆերենցիալները այստեղ կարող են վերցվել ըստ միևնույն փոփոխականի)։ Ի միջի այլոց, չպետք է կարծել, որ դրանով տրվեց վերոհիշյալ բանաձևերի նոր արտածում. նախ՝ այստեղ չապացուցվեց այդ հավասարությունների աջ մասերում գրված ածանցյալների *գոյությունը*, իսկ, որ գլխավորն է, մենք ըստ էության օգտվեցինք դիֆերենցիալի ձևի անփոփոխականությունից, որն ինքը V կանոնի հետևանք է։

106. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐԸ ՈՐՊԵՍ ՄՈՏԱՎՈՐ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԻ ԱՂԲՅՈՒՐ։ Մենք տեսանք, որ Δx-ը զրոյի ձգտելիս, y ֆունկցիայի dy դիֆերենցիալը (եթե միայն $y'_x \neq 0$) իրենից ներկայացնում է ֆունկցիայի Δy անվերջ փոքր աճի *գլխավոր մասը*։ Ուստի $\Delta y \sim dy$, այնպես որ՝

$$\Delta y \doteq dy \tag{3}$$

կամ, ավելի մանրամասն՝

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \doteq f'(x_0)\cdot\Delta x, \tag{3ա}$$

Δx-ի նկատմամբ ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքրի ճշգրտությամբ։ Այդ նշանակում է [62], որ այդ հավասարման *հարաբերական սխալը*, բավականաչափ փոքր Δx-ի դեպքում, դառնում է ցանկացած չափով փոքր։

Դիտարկենք մի պարզ օրինակ։ Դիցուք՝ $y = x^3$. այդ ժամանակ՝

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x_0)^3 - x_0^3 = 3x_0^2.\Delta x + 3x_0.\Delta x^2 + \Delta x^3,$$

և Δy-ի գծային մասը (ինչպես մենք այդ ապացուցեցինք ընդհանուր տեսքի համար), իրոք, հանդիսանում է $dy = 3x_0^2.\Delta x = y'_x.\Delta x$ դիֆերենցիալը։ Ընդունենք $x_0 = 2,3$. եթե վերցնենք $\Delta x = 0,1$, ապա կունենանք, $\Delta y = 2,4^3 - 2,3^3 = 1,657$ և $dy = 3.2,3^2.0,1 = 1,587$, այնպես որ առաջին թիվը երկրորդով փոխարինելուց ստացված սխալը կլինի 0,070, իսկ հարաբերական սխալը 4%-ից մեծ կլինի։ Երբ $\Delta x = 0,01$, կստանանք՝ $\Delta y = 0,159391$ և $dy = 0,1587$, որը տալիս է արդեն 0,5%-ից փոքր հարաբերական սխալ։ Երբ $\Delta x = 0,001$ հարաբերական սխալը փոքր է 0,05%-ից, և այլն։

Նման հանգամանք կարելի է անմիջապես տեսնել 44-րդ գծագրից, որը տալիս է դիֆերենցիալի երկրաչափական մեկնաբանումը։ Գծագրից երևում է, որ Δx-ը փոքրացնելիս, իրոք, գնալով ավելի մեծ հարաբերական ճշգրտությամբ կարելի է կորի օրդինատի աճը փոխարինել շոշափողի օրդինատի աճով։

Ֆունկցիայի Δy աճը նրա dy դիֆերենցիալով փոխարինելու առավելությունը կայանում է, ինչպես ընթերցողի համար պարզ է, նրանում, որ dy-ը Δx-ից կախված է գծորեն, այնինչ Δy-ը սովորաբար իրենից ներկայացնում է Δx-ի ավելի բարդ ֆունկցիա։

Եթե ընդունենք $\Delta x = x - x_0$ և $x_0 + \Delta x = x$, ապա (3ա) հավասարությունը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(x) - f(x_0) \doteq f'(x_0).(x - x_0)$$

կամ՝

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0).(x - x)։$$

Այս բանաձևի միջոցով, x_0-ին մոտ x-ի արժեքների համար, $f(x)$ ֆունկցիան մոտավորապես փոխարինվում է գծային ֆունկցիայով։ Երկրաչափորեն այդ նշանակում է $y = f(x)$ կորի $(x_0, f(x_0))$ կետի մոտ գտնվող կտորը փոխարինել այդ կետում կորին տարած

$$y = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$$

շոշափողի հատվածով (տես գծ. 44)*։ Պարզության համար վերցնելով $x_0=0$ և սահմանափակվելով x-ի փոքր արժեքներով, կունենանք՝

$$f(x)\doteq f(0)+f'(0)\cdot x\text{։}$$

մոտավոր բանաձևը։

Այստեղից, f(x)-ը փոխարինելով զանազան տարրական ֆունկցիաներով, հեշտ է ստանալ մի շարք բանաձևեր՝

$$(1+x)^{\mu}\doteq 1+\mu x,\ \text{մասնավորապես,}\ \sqrt{1+x}\doteq 1+\frac{1}{2}x,$$

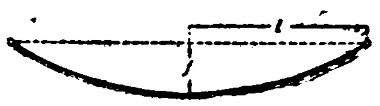
$$e^{x}\doteq 1+x,\ \log(1+x)\doteq x,\ \sin x\doteq x,\ \operatorname{tg} x\doteq x,\ \text{և այլն,}$$

(որոնցից շատերը մեզ արդեն հայտնի են)։

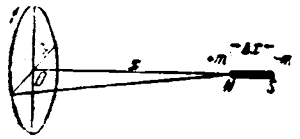
Բերենք այն տեսքի մոտավոր բանաձևերի օրինակներ, որոնց աղբյուրը դարձյալ (3) հավասարությունն է։

1) Եթե երկու ծայրերից կախված ծանր թելի (լարի, պարանի, փոկի) երկարությունը նշանակենք 2s-ով, ամրացված ծայրերի հեռավորությունը՝ 2l-ով, իսկ ճկվածքի սլաքը՝ f-ով (գծ. 45), ապա s-ը հաշվելու համար հաճախ օգտվում են հետևյալ (մոտավոր) բանաձևից՝

$$s=l\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{f^2}{l^2}\right)\text{։}$$



Գծ. 45.



Գծ. 46.

f մեծությունը ընդունենք անկախ փոփոխական, իսկ s-ը՝ f-ի ֆունկցիա։ Պահանջվում է գտնել կապը s երկարության Δs աճի և f մեծության Δf աճի միջև։

Δs-ը փոխարինելով ds-ով, կստանանք՝

Իրոք, k անկյունային գործակից ունեցող և (x_0, y_0) կետով անցնող ուղղի հավասարումը կլինի՝

$$y=y_0+k(x-x_0).$$

շոշափողի դեպքում այստեղ պետք է ընդունել $y_0=f(x_0)$, $k=f'(x_0)$։

$$\Delta s \doteq \frac{4}{3}\,\frac{f}{l}\,.\,\Delta f, \text{ որտեղից՝ } \Delta f \doteq \frac{3}{4}\,\frac{l}{f}.\Delta s:$$

Եթե, օրինակ, հաշվի առնենք լարի երկարության փոփոխությունը ջերմաստիճանի կամ բեռնվածության փոփոխումից, ապա վերջին բանաձևից կարելի է նախատեսել նաև իջվածքի սլաքի փոփոխությունը:

2) Հայտնի է, որ շրջանային հոսանքը (գծ. 46) իր առանցքի վրա O *կենտրոնից* x *հեռավորության վրա գտնվող մեկ միավոր մագնիսական զանգվածի վրա ազդում է*

$$\frac{k}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ուժով, որտեղ k*-ն հաստատուն գործակից է,* a*-ն՝ շրջանի շառավիղը: Գտնել այն ուժի արտահայտությունը, որով շրջանային հոսանքը կազդի հոսանքի առանցքի վրա գտնվող* Δx *երկարությամբ* NS *մագնիսի վրա: Ընդ որում, պետք է ընդունել, որ* N *բևեռում կենտրոնացված է* m *դրական մագնիսական զանգված, իսկ* S *բևեռում՝ նրան հավասար* —m *բացասական զանգված:*

Մագնիսի վրա ազդող հոսանքի F *ընդհանուր ուժը կարտահայտվի այսպես՝*

$$F = \frac{km}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{km}{[a^2+(x+\Delta x)^2]^{\frac{3}{2}}} = -km\,.\,\Delta\left[\frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]:$$

Ֆունկցիայի աճը փոխարինելով (ենթադրելով, որ Δx*-ը փոքր է) իր դիֆերենցիալով, կստանանք՝*

$$F \doteq -km.d\left[\frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = 3k.m.\Delta x.\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

107. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՍԽԱԼՆԵՐ ԳՆԱՀԱՏԵԼԻՍ: *Առանձնապես հարմար է ու բնական դիֆերենցիալի գաղափարը օգտագործել մոտավոր հաշվումների ժամանակ սխալները գնահատելիս: Դիցուք, օրինակ,* x*-ի մեծությունը չափում կամ հաշվում ենք* ա ն մ ի ջ ա կ ա ն ո ր ե ն, *իսկ նրանից կախված* y*-ի մեծությունը որոշում ենք* $y=f(x)$ բ ա ն ա ձ և ո վ: x*-ի մեծությունը չափելիս սովորաբար առաջանում է* Δx *սխալ, որի շնորհիվ ստացվում է* y *մեծության համար* Δy *սխալ: Ի նկատի ունենալով, որ այդ սխալները փոքր են, ընդունում են՝*

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x,$$

այսինքն՝ աճը փոխարինում են դիֆերենցիալով: Դիցուք x *մեծության բացարձակ սխալի մեծագույն արժեքը* δx *է, այսինքն՝* $|\Delta x| < \delta x$ *(սովորա-*

կան պայմաններում չափումների ժամանակ սխալի այդպիսի սահմանը հայտնի է)։ Այդ ժամանակ, ակներևաբար, y-ի համար որպես մեծագույն բացարձակ սխալ (սխալի եզր) կարելի է ընդունել

$$\delta y = |y'_x| \cdot \delta x \qquad (12)$$

մեծությունը։

1) Դիցուք, օրինակ, գնդի ծավալը որոշելու համար նախ անմիջականորեն չափում են (ձողակարկինի, հաստաչափի, մանրաչափի միջոցով, և այլն) գնդի D տրամագիծը և ապա հաշվում V ծավալը՝

$$V = \frac{\pi}{6} D^3$$

բանաձևով։

Քանի որ $V'_D = \frac{\pi}{2} D^2$, ուստի այս դեպքում, (12)-ի շնորհիվ, կունենանք՝

$$\delta V = \frac{\pi}{2} D^2 \cdot \delta D։$$

Այս հավասարությունը բաժանելով նախորդի վրա, կստանանք՝

$$\frac{\delta V}{V} = 3\frac{\delta D}{D},$$

այնպես որ ծավալի համար ստացված արժեքի (մեծագույն) հարաբերական սխալը երեք անգամ ավելի մեծ է, քան տրամագծի չափումից ստացված արժեքի (մեծագույն) հարաբերական սխալը։

2) Եթե x թիվը, որի համար պետք է հաշվել նրա $y = \log_{10} x$ տասնորդական լոգարիթմը, ստացված է որոշ սխալով, ապա այդ ազդում է լոգարիթմի վրա, նրանում ևս առաջացնելով սխալ։

Այստեղ $y'_x = \frac{M}{x}$ $(M = 0{,}4343)$, ուստի, ըստ (12)-րդ բանաձևի, կունենանք՝

$$\delta y = 0{,}4343 \cdot \frac{\delta x}{x},$$

Այսպիսով, լոգարիթմի (մեծագույն) բացարձակ սխալը ուղղակի որոշվում է հենց վերցրած թվի (մեծագույն) հարաբերական սխալով, և հակառակը։

Այս արդյունքը ունի բազմազան կիրառություններ։ Օրինակ, դրա միջոցով կարելի է գաղափար կազմել 25 սմ=250 մմ-անոց սովորական լո-

գարիթմական քանոնի ճշգրտության մասին։ Դիտազիծը դիտակայելիս կարելի է սխալվել, մոտավորապես, 0,1 մմ դեպի մեկ կամ մյուս կողմը, որին կհամապատասխանի լոգարիթմի

$$\delta y = \frac{0{,}1}{250} = 0{,}0004$$

սխալ։ Այստեղից, ըստ մեր բանաձևի, կունենանք՝

$$\frac{\delta x}{x} = \frac{0{,}0004}{0{,}4343} = 0{,}00092\ldots \approx 0{,}001\text{։}$$

Թվաքանոնի բոլոր մասերում հաշվման հարաբերական ճշգրտությունը միևնույնն է։

3) Լոգարիթմա-եռանկյունաչափական աղյուսակներով φ անկյունը հաշվելիս հարց է ծագում, թե որ աղյուսակներից է ձեռնտու օգտվել՝ սինուսների՞, թե՞ տանգենսների։ Ընդունենք՝

$$y_1 = \log_{10} \sin\varphi \text{ և } y_2 = \log_{10} \operatorname{tg}\varphi,$$

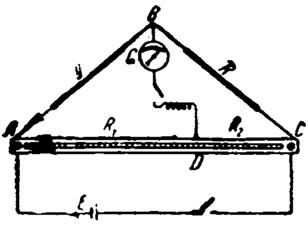
և այդ մեծությունների δy_1 ու δy_2 մեծագույն սխալները համարենք իրար հավասար (ասենք՝ մանտիսի վերջին թվանշանի կեսին)։ Եթե φ անկյան համապատասխան մեծագույն սխալները նշանակենք $\delta_1 y$ և $\delta_2 y$, ապա կստանանք՝

$$\delta y_1 = \frac{M}{\sin\varphi}\cdot\cos\varphi\cdot\delta_1\varphi,\quad \delta y_2 = \frac{M}{\operatorname{tg}\varphi}\cdot\sec^2\varphi\cdot\delta_2\varphi,$$

այնպես որ՝

$$\delta_2\varphi = \delta_1\varphi \cdot \cos^2\varphi < \delta_1\varphi\text{։}$$

Այստեղից պարզվում է, որ լոգարիթմի մեջ կատարված միևնույն սխալների դեպքում, տանգենսների աղյուսակը անկյան համար ավելի փոքր սխալ է տալիս, քան սինուսների աղյուսակը, հետևապես առաջինն ավելի ձեռնտու է*։



Գծ. 47.

4) Որպես վերջին օրինակ դիտարկենք Ուիտստոնի կամրջակի միջոցով անհայտ y դիմադրությունը չափելու ճշգրտության հարցը (գծ. 47)։ Այդ ժամանակ D շարժական կոնտակտը տեղափոխվում է AC աստիճանավորված քանոնի վրա այնքան ժամանակ, մինչև որ G գալվանաչափը ցույց տա հոսանքի բացակայություն։ y դիմադրությունը որոշվում է՝

* Այս հաշվումների ժամանակ մենք ենթադրել ենք, որ անկյունները արտահայտվում են ռադիաններով, սակայն արդյունքները, ակներևաբար, ճիշտ են անկախ նրանից, թե ինչ միավորներով են չափվում անկյունները։

$$y = \frac{Rx}{a-x} \qquad (13)$$

բանաձևով, որտեղ $a=AC$, $x=AD$, R-ը՝ BC ճյուղի հայտնի դիմադրությունն է։

(12)-րդ բանաձևով ստացվում է՝

$$\delta y = \left(\frac{Rx}{a-x}\right)'_x \cdot \delta x = \frac{aR}{(a-x)^2} \cdot \delta x.$$

Եթե այս հավասարությունն անդամ առ անդամ բաժանենք (13) հավասարության վրա, ապա y-ի (մեծագույն) հարաբերական սխալի համար կստանանք՝

$$\frac{\delta y}{y} = \frac{a \cdot \delta x}{x(a-x)},$$

Քանի որ $x(a-x)$ արտադրյալն իր մեծագույն արժեքին հասնում է $x=\frac{a}{2}$ դեպքում*, իսկ երկարությունը չափելիս ստացված δx սխալը կարելի է համարել x-ից անկախ, ուստի հարաբերական սխալի փոքրագույն արժեքն ստացվում է հենց $x=\frac{a}{2}$ դեպքում։ Այդ պատճառով, սովորաբար, հնարավորին չափ ճշգրիտ արդյունք ստանալու համար, R դիմադրությունը (դիմադրատուփի օգնությամբ) այն հաշվով են վերցնում, որ հոսանքն անհետանա D կոնտակտի՝ AC քանոնի կենտրոնին հնարավորին չափ մոտ դիրքի ժամանակ:

§ 3. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐ

108. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ։ Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան ունի $y'=f'(x)$ վերջավոր ածանցյալ մի X միջակայքում, այնպես որ այդ ածանցյալն ինքը ներ-

---

* $$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \geq 0$$

ակներև անհավասարությունից անմիջապես կստանանք

$$x(a-x) \leq \frac{a^2}{4},$$

որը ապացուցում է մեր ասածը։

կայացնում է X-ի ֆունկցիա, ապա կարող է պատահել, որ այդ ֆունկցիան իր հերթին X-ի մի x_0 կետում ունենա ածանցյալ, վերջավոր կամ ոչ։ Այդ ածանցյալն անվանում են $y=f(x)$ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալ կամ երկրորդ ածանցյալ վերոհիշյալ x_0 կետում, և նշանակում են հետևյալ սիմվոլներից մեկով՝

$$\frac{d^2y}{dx^2},\quad y'',\quad D^2y,\quad \frac{d^2f(x_0)}{dx^2},\quad f''(x_0),\quad D^2f(x_0)։$$

Այսպես, օրինակ, 91-ում մենք տեսանք, որ կետի շարժման արագությունը հավասար է կետի անցած s ճանապարհի ածանցյալին ըստ t ժամանակի՝ $v=\frac{ds}{dt}$, իսկ a արագացումը՝ v արագության ածանցյալն է ըստ ժամանակի՝ $a=\frac{dv}{dt}$։ Նշանակում է, արագացումը հանդիսանում է ճանապարհի երկրորդ կարգի ածանցյալն ըստ ժամանակի՝ $a=\frac{d^2s}{dt^2}$,

Նույն ձևով, եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան ունի երկրորդ կարգի վերջավոր ածանցյալ ամբողջ X միջակայքում (այսինքն՝ այդ միջակայքի յուրաքանչյուր կետում), ապա սրա ածանցյալը, վերջավոր կամ ոչ, X-ի որևէ x_0 կետում կոչվում $y=f(x)$ ֆունկցիայի երրորդ կարգի ածանցյալ կամ երրորդ ածանցյալ այդ կետում, և նշանակում են այսպես՝

$$\frac{d^3y}{dx^3},\quad y''',\quad D^3y,\quad \frac{d^3f(x_0)}{dx^3},\quad f'''(x_0),\quad D^3f(x_0)։$$

Նույն եղանակով, երրորդ կարգի ածանցյալից անցնում են չորրորդ կարգի ածանցյալին, և այլն։ Եթե ընդունենք, որ $(n-1)$-րդ կարգի ածանցյալի գաղափարն արդեն սահմանված է և որ $(n-1)$-րդ կարգի ածանցյալն X միջակայքում գոյություն ունի և վերջավոր է, ապա նրա ածանցյալը այդ միջակայքի որևէ x_0 կետում կոչվում է տված $y=f(x)$ ֆունկցիայի n-րդ կարգի ածանցյալ կամ n-րդ ածանցյալ։ Վերջինիս նշանակման համար օգտագործվում են հետևյալ նշանները (սիմվոլները)՝

$$\frac{d^n y}{dx^n},\ y^{(n)},\ D^n y,\quad \frac{d^n f(x_0)}{dx^n},\ f^{(n)}(x_0),\ D^n f(x_0).$$

Երբեմն, Լագրանժի և Կոշիի նշանակումներից օգտվելիս, կարող է անհրաժեշտ լինել ցույց տալ այն փոփոխականը, ըստ որի վերցված է ածանցյալը. այդ դեպքում այդ փոփոխականը ուրպես նշանիկ գրվում է սիմվոլների ներքևի ծայրերի մոտ՝

$$y''_{x^2},\ D^3_{x^3}y,\quad f^{(n)}_{x^n}(x_0),\ \text{և այլն,}$$

ընդ որում x^2, x^3,... արտահայտությունները xx, xxx, ... գրության ձևերի պայմանական կրճատ ձևերն են։ Օրինակ, կարելի է գրել՝ $a=s''_{t^2}$

(Ընթերցողի համար պարզ է, որ այստեղ ևս

$$\frac{d^n f}{dx^n},\quad f^{(n)}\ \text{կամ}\ f^{(n)}_{x^n},\ D^n(f)\ \text{կամ}\ D^n_{x^n}f$$

ամբողջական սիմվոլները կարելի է դիտել որպես ֆունկցիոնալ նշանակումներ։)

Այսպիսով, մենք սահմանեցինք n-րդ կարգի ածանցյալը, այսպես ասած, *ինդուկտիվ* եղանակով, հերթականությամբ առաջին կարգի ածանցյալից հաջորդին անցնելով։ n-րդ կարգի ածանցյալը որոշող

$$y^{(n)}=[y^{(n-1)}]'$$

առնչությունը անվանում են նաև «անդրադարձ» (կամ ռեկուրենտ) առնչություն, որքանով որ նա մեզ n-րդ ածանցյալից «վերադարձնում է» (n—1)-րդին։ n-րդ կարգի ածանցյալի հաշվումը, երբ տված է n թիվը, կատարվում է ընթերցողին արդեն հայտնի կանոններով ու բանաձևերով։ Օրինակ՝ եթե

$$y=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{6}x^3+2x^2+\frac{4}{3}x-\frac{1}{2},$$

ապա՝

$$y'=2x^3-\frac{1}{2}x^2+4x+\frac{4}{3},\ y''=6x^2-x+4,$$

$$y''' = 12x - 1, \quad y^{IV} = 12,$$

այնպես որ, հաջորդ բոլոր կարգի ածանցյալները նույնաբար հավասար են զրոյի:

Կամ, դիցուք՝

$$y = \log(x + \sqrt{x^2+1}),$$

այդ դեպքում՝

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad y'' = -\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}, \quad y''' = \frac{2x^2-1}{(x^2+1)^{5/2}},$$ և այլն։

Նկատենք, որ բարձր կարգի ածանցյալների համար էլ, ինդուկտիվ եղանակով, կարելի է սահմանել միակողմյան ածանցյալի գաղափարը [տես 99]։ Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է միայն X միջակայքում, ապա խոսելով որևէ կարգի ածանցյալի մասին այդ միջակայքի ծայրակետում, միշտ ինկատի ունեն հենց միակողմյան ածանցյալը։

109. ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐ ՑԱՆԿԱՑԱԾ ԿԱՐԳԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ։ Ինչպես տեսանք, որպեսզի հաշվենք որևէ ֆունկցիայի n-րդ կարգի ածանցյալը, ընդհանրապես ասած, պետք է նախապես հաշվել բոլոր նախորդող կարգի ածանցյալները։ Սակայն մի շարք դեպքերում հնարավոր է լինում n-րդ կարգի ածանցյալի համար ստանալ այնպիսի ընդհանուր արտահայտություն, որն անմիջապես կախված է n-ից ու այլևս չի պարունակում նախորդ ածանցյալների նշանակումները։

Այդպիսի ընդհանուր արտահայտություններ արտածելիս երբեմն օգտակար են լինում հետևյալ բանաձևերը՝

$$(c \cdot u)^{(n)} = c \cdot u^{(n)}, \qquad (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)},$$

որոնք n° 96-ի՝ ընթերցողին հայտնի I և II կանոններն են ընդհանրացված բարձր կարգի ածանցյալների համար։ Դրանք հեշտ է ստանալ այդ կանոնների հաջորդաբար կիրառման միջոցով։

1) Նախ դիտարկենք $y = x^{\mu}$ աստիճանային ֆունկցիան, որտեղ μ-ն որևէ իրական թիվ է։ Հաջորդաբար կունենանք՝

$$y' = \mu x^{\mu-1}, \quad y'' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2},$$

$$y''' = \mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3}, \ldots$$

Այստեղից հեշտ է նկատել նաև ընդհանուր օրենք՝

$$y^{(n)} = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)x^{\mu-n},$$

սակայն, խիստ ասած, այդ դեռ ենթակա է ապացուցման։ Դրա համար օգտվենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից։ Ընդունելով, որ n*-ի որևէ արժեքի համար վերոհիշյալ բանաձևը ճիշտ է, վերջինս դիֆերենցենք մի անգամ ևս։ Մենք կհանգենք հետևյալ արդյունքին՝*

$$[y^{(n)}]' = y^{(n+1)} = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)[x^{\mu-n}]' =$$
$$= \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)(\mu-n)x^{\mu-(n+1)},$$

ուստի մեր բանաձևը ճիշտ է նաև $(n+1)$*-րդ կարգի ածանցյալի համար, եթե նա ճիշտ է* n*-րդ կարգի ածանցյալի համար։ Այստեղից հետևում է նրա ճշտությունը* n*-ի բոլոր բնական արժեքների համար։*

Եթե, օրինակ, վերցնենք $\mu = -1$, *կստանանք՝*

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)(-2)\ldots(-n)x^{-1-n} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}},$$

իսկ եթե $\mu = -\frac{1}{2}$, *ապա*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)\ldots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-n} =$$
$$= \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2x)^n\sqrt{x}},$$ [*]

և այլն։

Երբ μ*-ն ինքը բնական* m *թիվ է, ապա* x^m*-ի* m*-րդ կարգի ածանցյալն արդեն կլինի* m! *հաստատուն թիվը, իսկ բոլոր հաջորդները՝ զրոներ։ Այստեղից պարզ է, որ* m *աստիճան*

---

n!! *սիմվոլով նշանակում են* n *թիվը չգերազանցող և նրա հետ միասին զույգ կամ կենտ բնական թվերի արտադրյալը, այնպես որ, օրինակ՝*

$$7!! = 1.3.5.7, \quad 10!! = 2.4.6.8.10։$$

ամբողջ աստիճանի բազմանդամի համար էլ գոյություն ունի նման հանգամանք։

2) Մի քիչ ավելի ընդհանուր՝

$$y=(a+bx)^{\mu} \qquad (a,\ b=\text{const.})$$

արտահայտության համար նույնպիսի հեշտությամբ կստանանք՝

$$y^{(n)}=\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1).b^{n}.(a+bx)^{\mu-n},$$

Մասնավոր դեպքում, ինչպես վերևում, ստացվում է՝

$$\left(\frac{1}{a+bx}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^{n}\,n!\,b^{n}}{(a+bx)^{n+1}},$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^{n}\,(2n-1)!!\,b^{n}}{2^{n}\,(a+bx)^{n}\sqrt{a+bx}}.$$

3) Դիցուք այժմ $y=\log x$։ Ամենից առաջ ունենք՝

$$y'=(\log x)'=\frac{1}{x}.$$

Սրա երկու մասից վերցնենք $(n-1)$-րդ կարգի ածանցյալ 1)-ի համապատասխան բանաձևի օգնությամբ, վերջինիս մեջ n-ը փոխարինելով $(n-1)$-ով, կստանանք՝

$$y^{(n)}=(y')^{(n-1)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n}}.$$

4) Եթե $y=a^{x}$, ապա՝

$$y'=a^{x}\cdot\log a,\quad y''=a^{x}\cdot(\log a)^{2},\ \ldots$$

իսկ

$$y^{(n)}=a^{x}.(\log a)^{n}$$

ընդհանուր բանաձևը հեշտությամբ ապացուցվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի միջոցով։

Մասնավոր դեպքում, ակներևաբար՝

$$(e^{x})^{(n)}=e^{x}.$$

5) *Ընդունենք* $y=\sin x$, *այդ ժամանակ*

$$y'=\cos x,\quad y''=-\sin x,\quad y'''=-\cos x,$$

$$y^{IV}=\sin x,\quad y^{V}=\cos x,\ \ldots$$

Այս ճանապարհով n-*րդ կարգի ածանցյալի համար ընդհանուր արտահայտությունը գտնելը դժվար է։ Սակայն գործն անմիջապես հեշտանում է, եթե առաջին կարգի ածանցյալի համար ստացված բանաձևը գրենք* $y'=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ *տեսքով, և պարզվում է, որ ամեն մի դիֆերենցումից հետո արգումենտին կցվում է* $\frac{\pi}{2}$, *ուստի՝*

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n.\frac{\pi}{2}\right)։$$

Նույն ձևով ստացվում է նաև

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n.\frac{\pi}{2}\right)$$

բանաձևը։

6) *Դիտարկենք* $y=\frac{1}{x^2-a^2}$ *ֆունկցիան։ Վերջինս գրելով*

$$y=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$$

տեսքով, մենք հնարավորություն կունենանք օգտագործել 3)-րդ օրինակը (և նրանից առաջ նշված ընդհանուր կանոնները)։ Վերջնականապես կստանանք՝

$$\left(\frac{1}{x^2-a^2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{2a}\left[\frac{1}{(x-a)^{n+1}}-\frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right]։$$

7) $y=e^{ax}\sin bx$ *ֆունկցիայի դեպքում կօգտագործենք ավելի արհեստական եղանակ։ Այսպես, ունենք՝*

$$y'=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx.$$

եթե վերցնենք մի օժանդակ φ անկյուն, որը որոշվում է

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

պայմաններով, ապա առաջին կարգի ածանցյալի համար ստացված արտահայտությունը կարելի է բերել հետևյալ տեսքին՝

$$y'=\sqrt{a^2+b^2}\,.\,e^{ax}(\sin bx\,.\,\cos\varphi+\cos bx\,.\,\sin\varphi)=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\,.\,e^{ax}.\sin(bx+\varphi).$$

կրկնելով դիֆերենցումը, հեշտությամբ կարելի է ստանալ ընդհանուր կանոն՝

$$y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}.e^{ax}.\sin(bx+n\varphi)$$

և այն հիմնավորել մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:

8) Կանգ առնենք նաև $y=\operatorname{arctg} x$ ֆունկցիայի վրա. Նախ $y^{(n)}$-ը արտահայտենք y-ի միջոցով: Քանի որ $x=\operatorname{tg} y$, ուստի՝

$$y'=\frac{1}{1+x^2}=\cos^2 y=\cos y\cdot\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right),$$

Երկրորդ անգամ դիֆերենցելով ըստ x-ի (և հիշելով, որ y-ը x-ի ֆունկցիա է), կստանանք՝

$$y''=\left[-\sin y\cdot\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+\cos y.\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right].y'=$$

$$=\cos^2 y.\cos\left(2y+\frac{\pi}{2}\right)=\cos^2 y\cdot\sin 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right),$$

Հաջորդ դիֆերենցումը կտա՝

$$y'''=\left[-2\sin y.\cos y.\sin 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+2\cos^2 y\cdot\cos 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right].y'=$$

$$=2\cos^3 y\cdot\cos\left(3y+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=2\cos^3 y\cdot\sin 3\left(y+\frac{\pi}{2}\right),$$

Վերջապես,

$$y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y\cdot\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$$

ընդհանուր բանաձևը, հիմնավորվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:

Եթե (երբ $x>0$) դնենք

$$z=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-y$$

ընդունենք, ապա այդ բանաձևը կարելի կլինի գրել այսպես՝

$$y^{(n)}=(n-1)!\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\cdot\sin n(\pi-z)$$

կամ, վերջնականապես այսպես՝

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\cdot\sin\left(n\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right).$$

9) Վերջում, վարժության կարգով ստանանք հետևյալ բանաձևը՝

$$D^n\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)=(-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots):$$

Նրա ճշտությունը $n=1$ և $n=2$ արժեքների դեպքում ստուգվում է անմիջականորեն: Այժմ ընդունենք, որ այդ բանաձևը ճիշտ է n-ի բոլոր արժեքների համար ընդհուպ մինչև որևէ $n\geq 2$ արժեքը, և ապացուցենք, որ այդ ժամանակ նա իր ճշտությունը պահպանում է նաև n-ը $(n+1)$-ով փոխարինելիս*: Այդ նպատակով դիտարկենք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$D^{n+1}\left(x^n e^{\frac{1}{x}}\right)=D^n\left[D\left(x^n e^{\frac{1}{x}}\right)\right]=$$

---

* Ընթերցողի ուշադրությունը հրավիրում ենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդի կիրառման այս յուրատեսակ ձևի վրա. իրականում (ակնառու չարտահայտված ձևով) մենք օգտագործում ենք մեր բանաձևի ճշտությունը n-ի և $(n-1)$-ի համար:

$$= D^n\left[n x^{n-1} e^{\frac{1}{x}} - x^{n-2} e^{\frac{1}{x}}\right] =$$

$$n \cdot D^n\left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}\right) - D\left[D^{n-1}\left(x^{n-2} e^{\frac{1}{x}}\right)\right].$$

Օգտվելով մեր ենթադրությունից, այս արտահայտությունը կարելի է գրել այսպես՝

$$D^{n+1}\left(x^n e^{\frac{1}{x}}\right) = n\cdot(-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}} - D\left[(-1)^{n-1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^n}\right] =$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+2}},$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել:

Ուրեմն, բանաձևը ճիշտ է n*-ի բոլոր բնական արժեքների համար:*

110. ԼԱՅԲՆԻՑԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ: *Ինչպես մենք արդեն նշեցինք նախորդ* n°*-ի սկզբում, 96-ի I և II կանոնները անմիջականորեն տարածվում են նաև ցանկացած կարգի ածանցյալների դեպքի վրա: Գործն ավելի բարդանում է III կանոնի համար, որը վերաբերում է արտադրյալի դիֆերենցմանը:*

Ենթադրենք x*-ից կախված* u *և* v *ֆունկցիաներն առանձին-առանձին ունեն մինչև* n*-րդ (ներառյալ) կարգի ածանցյալներ: Ապացուցենք, որ այդ դեպքում նրանց* $y=uv$ *արտադրյալը նույնպես կունենա* n*-րդ կարգի ածանցյալ և գտնենք նրա արտահայտությունը:*

Կիրառելով III կանոնը, սկսենք հաջորդաբար դիֆերենցել այդ արտադրյալը, կգտնենք՝

$$y' = u'v + v'u, \quad y'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''', \ldots$$

Հեշտ է տեսնել այն օրենքը, որով կազմված են բոլոր այս բանաձևերը՝ նրանց աջ մասերը հիշեցնում են $u+v$, $(u+v)^2$, $(u+v)^3$, ... *երկանդամների բանաձևերը, միայն թե* u*-ի և* v*-ի աստիճանների փոխարեն գրված են նրանց համապատասխան*

կարգի ածանցյալները։ Նմանությունն ավելի լրիվ է դառնում, եթե առաջված բանաձևերի մեջ u-ի և v-ի փոխարեն գրենք $u^{(0)}$ և $v^{(0)}$։ Այս օրենքը տարածելով ցանկացած n-ի դեպքի վրա, կստանանք ընդհանուր բանաձև*

$$y^{(n)}=(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n} C_n^i\, u^{(n-i)}\, v^{(i)}=$$

$$=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1.2}u^{(n-2)}v''+\dots$$

$$\dots+\frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{1.2\dots i}u^{(n-i)}\, v^{(i)}+\dots+uv^{(n)}. \qquad (1)$$

Այս ճշտությունն ապացուցելու համար դարձյալ դիմենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդին։ Ընդունենք, որ n-ի մի որոշ արժեքի համար վերոհիշյալ բանաձևը ճիշտ է։ Եթե u և v ֆունկցիաների համար գոյություն ունեն նաև $(n+1)$-րդ ածանցյալները, ապա կարելի է այդ բանաձևը մեկ անգամ ևս դիֆերենցել ըստ x-ի, կստանանք՝

$$y^{(n+1)}=\sum_{i=0}^{n} C_n^i\,[u^{(n-i)}\, v^{(i)}]'=$$

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i\, u^{(n-i+1)}\, v^{(i)}+\sum_{i=0}^{n} C_n^i\, u^{(n-i)}\, v^{(i+1)},$$

---

* $\sum$ սիմվոլը նշանակում է միատեսակ գումարելիների գումար։ Երբ այդ գումարելիները կախված են մեկ նշանիկից, որը փոփոխվում է որոշակի սահմաններում, ապա նշվում են հենց այդ սահմանները (ներքևից և վերևից)։ Օրինակ՝

$$\sum_{i=0}^{n} a_i=a_0+a_1+\dots+a_n,$$

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{m}, \text{ և այլն։}$$

Այժմ վերջին երկու գումարների մեջ միացնենք այն գումարելիները, որոնք իրենց մեջ պարունակում են u և v ֆունկցիաների միևնույն ածանցյալների արտադրյալներ (այդպիսի արտադրյալների մեջ, ինչպես հեշտ է տեսնել, ածանցյալների կարգերի գումարը միշտ հավասար է $n+1$)։ $u^{(n+1)}v^{(0)}$ արտադրյալը գտնվում է միայն առաջին գումարի մեջ (երբ $i=0$), որտեղ նրա գործակիցը $C_n^0=1$։ Ճիշտ նույնպես, $u^{(0)}v^{(n+1)}$-ն էլ գտնվում է միայն երկրորդ գումարի մեջ ($i=n$ համար ունեցող գումարելիի մեջ), որի գործակիցն է՝ $C_n^n=1$։ Մնացած բոլոր արտադրյալները, որոնք գտնվում են այդ գումարների մեջ, ունեն $u^{(n+1-k)}v^{(k)}$ տեսքը, ընդ որում $1\le k\le n$։ Յուրաքանչյուր այդպիսի արտադրյալ հանդիպում է թե առաջին գումարի ($i=k$ համար ունեցող գումարելիին) և թե երկրորդ գումարի ($i=k-1$ համար ունեցող գումարելիին) մեջ։ Համապատասխան գործակիցների գումարը կլինի $C_n^k+C_n^{k-1}$։ Բայց, ինչպես հայտնի է,

$$C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k,$$

Այսպիսով, վերջնականապես ստանում ենք՝

$$y^{(n+1)}=u^{(n+1)}v^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}C_{n+1}^{k}u^{[(n+1)-k]}v^{(k)}+u^{(0)}v^{(n+1)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^{k}u^{[(n+1)-k]}v^{(k)},$$

որովհետև $C_{n+1}^{0}=C_{n+1}^{n+1}=1$։

$y^{(n+1)}$-ի համար ստացանք մի արտահայտություն, որը (1) արտահայտության լրիվ անալոգն է [միայն n-ը փոխարինված է $(n+1)$-ով]։ Հենց սրանով ապացուցվում է (1) բանաձևի ճշտությունն n-ի բոլոր բնական արժեքների համար։

Ստացված բանաձևը կրում է **Լայբնիցի** բանաձև անունը։ Նա հաճախ օգտակար է լինում n-րդ կարգի ածանցյալի համար ընդհանուր արտահայտություններ արտածելիս։

Նկատենք, որ նման բանաձև կարելի էր ստանալ նաև $y = u.v\ldots t$ մի քանի արտադրիչների արտադրյալի n-րդ կարգի ածանցյալի համար. դա նման կլինի $(u+v+\ldots+t)^n$ բազմանդամի բացումից ստացված արտահայտությանը։

111. *ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Լայբնիցի բանաձևի օգնությամբ գտնենք*

$$(x^2.\cos ax)^{(50)}.$$

ածանցյալը։ Ընդունենք $v = x^2$, $u = \cos ax$։ *Այդ ժամանակ կունենանք՝*

$$u^{(k)} = a^k.\cos\left(ax + k.\frac{\pi}{2}\right),$$

$$v' = 2x,\ v'' = 2,\ v''' = v^{IV} = \ldots = 0.$$

Այդպիսով, (1) բանաձևի բոլոր գումարելիները, բացի առաջին երեքից, հավասար են զրոյի, և մենք կստանանք՝

$$(uv)^{(50)} = x^2.a^{50}.\cos\left(ax+50.\frac{\pi}{2}\right) + \frac{50}{1}.2x.a^{49}.\cos\left(ax+49.\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+\frac{50.49}{1.2}\cdot 2\cdot a^{48}.\cos\left(ax+48\cdot\frac{\pi}{2}\right) = a^{48}[(2450-a^2x^2)\cos ax -$$

$$-100ax.\sin ax].$$

2) Անդրադառնալով n 109-ի 7-րդ օրինակին, կարող ենք ստանալ

$$y = e^{ax}.\sin bx$$

ֆունկցիայի n-րդ կարգի ածանցյալի ընդհանուր արտահայտությունը՝ անմիջականորեն Լայբնիցի բանաձևով՝

$$y^{(n)} = e^{ax}\left[\sin bx\left(a^n - \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \ldots\right) + \right.$$

$$\left. + \cos bx\left(na^{n-1}b - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 + \ldots\right)\right].$$

3) Գտնենք $y = \arcsin x$ *ֆունկցիայի* $(n+1)$*-րդ կարգի ածանցյալի արտահայտությունը։*

Ամենից առաջ ունենք՝

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}},$$

ուստի, ըստ Լայբնիցի բանաձևի, կարող ենք գրել՝

$$y^{(n+1)} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(n)} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}} +$$

$$+n\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n-1)}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n-2)}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)''+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n-3)}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)'''+\ldots$$

Եթե $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ և $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ֆունկցիաների հաջորդական ածանցյալների հաշվումների համար կիրառենք 109-ի 2)-ում ստացված բանաձևերը, կգանք հետևյալ արդյունքին՝

$$y^{(n+1)}=\frac{1}{2^n\sqrt{1-x^2}}\left\{\frac{(2n-1)!!}{(1-x)^n}+n\frac{(2n-3)!!\,1!!}{(1+x)^{n-1}(1-x)}+\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{(2n-5)!!\,3!!}{(1+x)^{n-2}(1-x)^2}+\ldots\right\}։$$

4) Պահանջվում է գտնել $y=\operatorname{arctg}x$ ֆունկցիայի բոլոր հաջորդական ածանցյալների արժեքները, երբ $x=0$։

Քանի որ $y'=\frac{1}{1+x^2}$, *ուստի* $y'(1+x^2)=1$։ *Այս հավասարության երկու մասերից վերցնենք (n)-րդ կարգի ածանցյալ (օգտվելով Լայբնիցի բանաձևից)՝*

$$(1+x^2)y^{(n+1)}+2nx\cdot y^{(n)}+n(n-1)\cdot y^{(n-1)}=0։$$

Այստեղ տեղադրելով $x=0$, *եթե ածանցյալների արժեքները* $x=0$ *դեպքում նշենք ներքևում նշանիկ դնելով, կստանանք՝*

$$y_0^{(n+1)}=-n(n-1)\cdot y_0^{(n-1)}։$$

Երբ $x=0$, $y''=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ *ածանցյալը դառնում է զրո՝* $y''_0=0$։

Ստացված առնչությունից պարզ երևում է, որ միշտ $y_0^{(2m)}=0$։ *Իսկ ինչ վերաբերում է կենտ կարգի ածանցյալներին, ապա դրանց համար ունենք անդրադարձ բանաձև՝*

$$y_0^{(2m+1)}=-(2m-1)\cdot 2m\cdot y_0^{(2m-1)}։$$

Նկատի ունենալով, որ $y'_0=1$, *այստեղից կստանանք՝*

$$y_0^{(2m+1)}=(-1)^m(2m)!։$$

Միևնույն արդյունքը կարելի էր ստանալ նաև 109-*ի 8)-րդ օրինակի ընդհանուր բանաձևից։*

5) Նույնը՝ $y=\arcsin x$ *ֆունկցիայի համար։*

Ցուցմունք: Լայբնիցի բանաձևը կիրառել

$$(1-x^2)\cdot y''-x\cdot y'=0$$

առնչության նկատմամբ:

Պատասխան: $y_0^{(2m)}=0$, $y_0^{(2m-1)}=1^2\cdot 3^2\ldots(2m-1)^2=[(2m-1)!!]^2$:

Այս արդյունքը 3)-ի ընդհանուր արտահայտություններից ստացվում է ոչ այնքան էլ հեշտությամբ:

6) Դիտարկենք n-րդ աստիճանի (n=1, 2, 3, . . .), մի բազմանդամ, որը արտահայտվում է

$$P_n(x)=\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

հավասարությամբ, և նրա արժեքները գտնենք x=+1 ու x=−1 արժեքների համար:

$(x^2-1)^n$ աստիճանը դիտելով որպես $(x+1)^n$-ի և $(x-1)^n$-ի արտադրյալ, ըստ Լայբնիցի բանաձևի կարող ենք գրել՝

$$P_n(x)=(x+1)^n.\frac{d^n(x-1)^n}{dx^n}+C_n^1.\frac{d(x+1)^n}{dx}.\frac{d^{n-1}(x-1)^n}{dx^{n-1}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{d^n(x+1)^n}{dx^n}.(x-1)^n:$$

Քանի որ բոլոր գումարելիները, սկսած երկրորդից, պարունակում են (x−1) արտադրիչը և, հետևապես, x=1 դեպքում դառնում են զրո. ուստի, անմիջապես, կունենանք՝ $P_n(1)=2^n.n!$.

Նույն ձևով ստացվում է՝ $P_n(-1)=(-1)^n.2^n.n!$:

Եթե $P_n(x)$ *բազմանդամը բազմապատկենք* $c_n=\frac{1}{2^n.n!}$*-ով, կստանանք՝*

$$X_n(x)=c_n.P_n(x)$$

բազմանդամը, որը x=±1 դեպքում ընդունում է համապատասխանաբար 1 և $(-1)^n$ արժեքներ: Այդ բազմանդամը կոչվում է Լեժանդրի *(A. M. Legendre) n-րդ բազմանդամ [տես 117. ինչպես նաև երկրորդ հատորում 308]:*

7) Լայբնիցի բանաձևի օգնությամբ հեշտ է նաև ապացուցել, որ Լեժանդրի $X_n(x)$ բազմանդամը բավարարում է

$$(x^2-1)X_n''+2x.X_n'-n(n+1)X_n=0$$

առնչությանը, որը կարևոր դեր է խաղում այդ բազմանդամների տեսության մեջ:

Իրոք, ընդունելով $y=(x^2-1)^n$, կունենանք՝

$$y'=2nx.(x^2-1)^{n-1}, \text{ ուստի } (x^2-1).y'=2nx.y:$$

Այժմ այս վերջին հավասարության երկու մասերից վերցնենք (n+1)-րդ կարգի ածանցյալ՝ ըստ Լայբնիցի բանաձևի, կունենանք՝

$$(x^2-1)\,y^{(n+2)}+(n+1)\cdot 2x\cdot y^{(n+1)}+\frac{n(n+1)}{2}\cdot 2\cdot y^{(n)}=$$

$$=2nx\cdot y^{(n+1)}+(n+1)\cdot 2n\cdot y^{(n)},$$

Այստեղից կստանանք՝

$$(x^2-1)\,y^{(n+2)}+2xy^{(n+1)}-n(n+1)\,y^{(n)}=0$$

հավասարությունը, որը բազմապատկելով $c_n=\dfrac{1}{2^n.n!}$*-ով կստանանք ապացուցելի առնչությունը:*

112. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐ։ *Այժմ անցնենք բարձր կարգի դիֆերենցիալներին. նրանք նույնպես սահմանվում են ինդուկտիվ եղանակով։* $y=f(x)$ *ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ կամ երկրորդ դիֆերենցիալ տված որևէ կետում, կոչվում է նրա (առաջին) դիֆերենցիալի դիֆերենցիալը նույն կետում, և նշանակում են՝*

$$d^2y=d\,(dy)$$

սիմվոլով։ Երրորդ կարգի դիֆերենցիալ կամ երրորդ դիֆերենցիալ կոչվում է երկրորդ կարգի դիֆերենցիալի դիֆերենցիալը՝

$$d^3y=d\,(d^2y),$$

Ընդհանրապես, $y=f(x)$ *ֆունկցիայի* n*-րդ կարգի դիֆերենցիալ կամ* n*-րդ դիֆերենցիալ կոչվում է նրա* $(n-1)$*-րդ կարգի դիֆերենցիալի դիֆերենցիալը՝*

$$d^ny=d\,(d^{n-1}y),$$

Եթե օգտվենք ֆունկցիոնալ նշանակումներից, ապա հաջորդական դիֆերենցիալները կարող են նշանակվել այսպես՝

$$d^2f(x_0),\quad d^3f(x_0),\quad \ldots,\quad d^nf(x_0),\ldots,$$

ընդ որում հնարավոր է լինում նշել այն $x=x_0$ *մասնավոր արժեքը, որի դեպքում վերցվում են դիֆերենցիալները։*

Բարձր կարգի դիֆերենցիալներ հաշվելիս շատ կարևոր է հիշել այն, որ dx*-ը կամավոր և* x*-ից անկախ թիվ է, և ըստ* x*-ի դիֆերենցման ժամանակ այն պետք է դիտել որպես հաստատուն արտադրիչ։ Այդ ժամանակ, կունենանք (միշտ ենթադրելով, որ համապատասխան ածանցյալները գոյություն ունեն)՝*

$$d^2y=d(dy)=d(y'\cdot dx)=dy'\cdot dx=(y''\cdot dx)\cdot dx=y''\cdot dx^2,$$
$$d^3y=d(d^2y)=d(y''\cdot dx^2)=dy''\cdot dx^2=(y'''\cdot dx)\cdot dx^2=y'''\cdot dx^3,^*$$

և այլն։ Հեշտությամբ նկատվող

$$d^ny=y^{(n)}\cdot dx^n \qquad (2)$$

ընդհանուր օրենքն ապացուցվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով։ Այդ օրենքից հետևում է, որ

$$y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n},$$

ուստի սրանից հետո վերոհիշյալ սիմվոլը կարելի է դիտել որպես կոտորակ։

Օգտվելով (2) *հավասարությունից, այժմ արդեն հեշտ է Լայբնիցի բանաձևը գրել դիֆերենցիալների միջոցով։ Բավական է միայն այդ բանաձևի երկու մասը բազմապատկել* dx^n*-ով, որպեսզի ստացվի*

$$d^n(u\cdot v)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i d^{n-i}u\cdot d^iv \quad (d^0u=u,\ d^0v=v)$$

բանաձևը։ Լայբնիցն ինքն իր բանաձևն ստացել է հենց դիֆերենցիալների համար։

113. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ՁԵՎԻ ԱՆՓՈՓՈԽԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԽԱԽՏՈՒՄԸ։ *Հիշելով, որ ֆունկցիայի (առաջին) դիֆերենցիալի ձևը անփոփոխ է, բնական կլինի եթե առաջադրենք հետևյալ հարցը. արդյոք բարձր կարգի դիֆերենցիալները նույն հատկությունն ունեն, թե ոչ։ Օրինակով ցույց տանք, որ երկրորդ կարգի դիֆերենցիալն այլևս այդ հատկությունը չունի։*

Դիցուք $y=f(x)$ *և* $x=\varphi(t)$*, ուստի* y*-ը կարելի է դիտել որպես* t*-ի բարդ ֆունկցիա՝* $y=f(\varphi(t))$*։ Սրա (առաջին) դիֆերենց-*

---

* dx^2, dx^3 ... *և այլն նշանակումների տակ միշտ հասկացվում են դիֆերենցիալների աստիճանները՝* $(dx)^2$, $(dx)^3$, ...*։ Աստիճանի դիֆերենցիալը կնշանակենք այսպես՝* $d(x^2)$, $d(x^3)$, ...

ցիալը ըստ t-ի կարելի է գրել $dy = y'_x \cdot dx$ ձևով, որտեղ $dx = x'_t \cdot dt$ և t-ի ֆունկցիա է։ Հաշվենք երկրորդ կարգի դիֆերենցիալն ըստ t-ի՝ $d^2y = d(y'_x \cdot dx) = dy'_x \cdot dx + y'_x \cdot d(dx)$։ dy'_x դիֆերենցիալը, օգտվելով (առաջին) դիֆերենցիալի անփոփոխականությունից, կարելի է գրել $dy'_x = y''_{x^2} \cdot dx$ ձևով. ուստի վերջնականապես կունենանք՝

$$d^2y = y''_{x^2} \cdot dx^2 + y'_x \cdot d^2x, \qquad (3)$$

մինչդեռ, երբ x-ը անկախ փոփոխական էր, երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը ուներ $d^2y = y''_{x^2} \cdot dx^2$ տեսքը։ Իհարկե, (3) արտահայտությունը d^2y-ի համար հանդիսանում է ավելի ընդհանուր արտահայտություն, եթե, մասնավորապես, x-ը անկախ փոփոխական է, ապա $d^2x = 0$ և կմնա միայն առաջին անդամը։

Օրինակ։ Դիցուք $y = x^2$, այնպես որ քանի դեռ x-ը անկախ փոփոխական է՝

$$dy = 2x\,dx, \quad d^2y = 2\,dx^2.$$

Այժմ ընդունենք $x = t^2$. այդ ժամանակ $y = t^4$, և

$$dy = 4t^3\,dt, \quad d^2y = 12t^2\,dt^2.$$

dy-ի նոր արտահայտությունը կարելի է ստանալ նաև նախորդից, եթե այնտեղ տեղադրենք $x = t^2$, $dx = 2t \cdot dt$։ Սակայն d^2y-ի մեջ եթե կատարենք նույնպիսի տեղադրություն, $12t^2$, t^3-ու փոխարեն կստանանք $8t^2\,dt^2$։ Իսկ եթե ըստ t-ի դիֆերենցենք $dy = 2x\,dt$ հավասարությունը, x-ը համարելով t-ի ֆունկցիա, ապա (3)-ի նման, կստանանք՝

$$d^2y = 2dx^2 + 2x \cdot d^2x$$

բանաձևը։ Սրա մեջ տեղադրելով $x = t^2$, $dx = 2t \cdot dt$, $d^2x = 2\,dt^2$, արդեն կստանանք ճիշտ արդյունք՝ $12t^2\,dt^2$։

Ուրեմն, երբ x-ը դադարում է լինել անկախ փոփոխական, այդ դեպքում երկրորդ կարգի d^2y դիֆերենցիալն x-ի դիֆերենցիալի միջոցով արտահայտվում է (3)-րդ երկանդամ բանաձևով։ Երրորդ և ավելի բարձր կարգի դիֆերենցիալների համար լրացուցիչ անդամների թիվը (երբ անցնում ենք նոր անկախ փոփոխականի) ավելի մեծանում է։ Այդ պատճառով էլ y''_{x^2}, y'''_{x^3}, ... բարձր կարգի ածանցյալների՝ դիֆերենցիալներով գրված

$$y''_{x^2} = \frac{d^2y}{dx^2},\quad y'''_{x^3} = \frac{d^3y}{dx^3},\ \ldots \tag{4}$$

արտահայտությունների մեջ արդեն չի կարելի դիֆերենցիալները վերցնել ըստ ցանկացած փոփոխականի, այլ պետք է վերցնել միայն ըստ x-ի։

114. ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑՈՒՄ։ Կարելի է, ի միջի այլոց, ըստ x-ի վերցրած ածանցյալների արտահայտությունները գրել նաև այնպիսի դիֆերենցիալների միջոցով, որոնք վերցրած են ըստ ցանկացած t փոփոխականի, սակայն դրանք կլինեն ավելի բարդ տեսքի։ Այսպես, ներքոհիշյալ բոլոր դիֆերենցիալները համարելով վերցրած ըստ t-ի, հաջորդաբար կունենանք՝

$$y'_x = \frac{dy}{dx},\quad y''_{x^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_x = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\dfrac{dx\,.\,d^2y - d^2x\,.\,dy}{dx^2}}{dx};$$

այսինքն՝

$$y''_{x^2} = \frac{dx\,.\,d^2y - d^2x\,.\,dy}{dx^3}. \tag{5}$$

այնուհետև՝

$$y'''_{x^3} = \left(\frac{dx\,.\,d^2y - d^2x\,.\,dy}{dx^3}\right)'_x = \frac{d\left(\dfrac{dx.d^2y - d^2x\,.dy}{dx^3}\right)}{dx} =$$

$$= \frac{\dfrac{dx^3(dx\,d^3y - d^3x\,dy) - 3dx^2\,.\,d^2x\,(dx\,d^2y - d^2x\,dy)}{dx^6}}{dx}$$

և վերջնականապես՝

$$y'''_{x^3} = \frac{dx\,(dx\,d^3y - d^3x\,dy) - 3\,d^2x\,(dx\,d^2y - d^2x\,dy)}{dx^5}, \tag{6}$$

և այսպես շարունակ։ (5), (6),... բանաձևերը հանդիսանում են ամենաընդհանուր բանաձևեր. եթե դրանց մեջ x-ը ընդունենք անկախ փոփոխական, ապա d^2x, d^3x,... մեծությունները կդառնան զրո և մենք կվերադառնանք (4)-րդ բանաձևերին։

y-ի ածանցյալներն ըստ x-ի հաշվելու համար մեր ստացված բանաձևերը կիրառվում են, այսպես կոչված, պարա-

մետրական դիֆերենցումը։ Եթե x*-ը և* y*-ը տրված են որպես* t *պարամետրի ֆունկցիաներ՝*

$$x=\varphi(t),\quad y=\varphi(t),$$

ապա, ինչպես մենք n° 105*-ում տեսանք, որոշ պայմաններում այդտեղից* y*-ը կարելի է որոշել որպես* x*-ի ֆունկցիա՝* $y=f(x)$։ x*-ի ու* y*-ի՝ ըստ* t*-ի ածանցյալների առկայության դեպքում գոյություն կունենան* y*-ի համապատասխան ածանցյալներ ըստ* x*-ի և նրանք կարտահայտվեն վերոհիշյալ բանաձևերի միջոցով։*

Երբեմն ավելի հարմար է լինում ունենալ այնպիսի բանաձևեր, որոնք y*-ի ածանցյալներն ըստ* x*-ի արտահայտում են* x*-ի ու* y*-ի ածանցյալներով (և ոչ դիֆերենցիալներով) ըստ* t*-ի։ Դրանք հեշտությամբ կարելի է ստանալ վերոհիշյալ դիֆերենցիալ արտահայտություններից, համարիչը և հայտարարը բաժանելով, համապատասխանաբար,* $dt,\ dt^2,\ dt^3,\dots$ *մեծությունների վրա։*

Այդ ճանապարհով կստացվեն հետևյալ բանաձևերը՝

$$y'_x=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'_t}{x'_t},$$

$$y''_{x^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}=\frac{x'_t\,y''_{t^2}-y'_t\,x''_{t^2}}{(x'_t)^3}.$$

նույն ձևով՝

$$y'''_t=\frac{x'_t\left(x'_t\,y'''_{t^3}-x'''_{t^3}\,y'_t\right)-3x''_t\left(x'_t\,y''_{t^2}-x''_{t^2}\,y'_t\right)}{(x'_t)^5},$$

և այլն։

§ 4. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇՎԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԸ

115. **ՖԵՐՄԱՅԻ ԹԵՈՐԵՄԱՆ։** *Տվյալ* f(x) *ֆունկցիայի ածանցյալն իմանալը հաճախ թույլ է տալիս եզրակացություններ անել նաև ֆունկցիայի վարքի վերաբերյալ։ Այս և հաջորդ պարագրաֆները, ըստ էության, նվիրված են այդպիսի հարցերի քննությանը։*

Նախապես ապացուցենք հետևյալ պարզ լեմման.

ԼԵՄՄԱ։ Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում ունի վերջավոր ածանցյալ։ Եթե այդ ածանցյալը՝ $f'(x_0)>0$ $[f'(x_0)<0]$, ապա աջից x_0-ին բավականաչափ մոտ գտնվող x-ի արժեքների համար կլինի $f(x)>f(x_0)$ $[f(x)<f(x_0)]$, իսկ ձախից x_0-ին բավականաչափ մոտ գտնվող x-ի արժեքների համար՝ $f(x)<f(x_0)$ $[f(x)>f(x_0)]$։

Այս փաստը այլ կերպ արտահայտում են այսպես՝ $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կ ե տ ո ւ մ աճում է (նվազում է)։ *Եթե ի նկատի ունենանք միակողմյան ածանցյալը, օրինակ, աջից, ապա վերաձևակերպը ... հաշվի մերյալ պնդումը տեղի ունի միայն x-ի այն արժեքների համար, որոնք գտնվում են x_0-ից դեպի աջ։*

Ապացույց։ Ըստ ածանցյալի սահմանումի, ունենք՝

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

Եթե $f'(x_0)>0$ *(սահմանափակվենք այս դեպքով), ապա* 55, 2°-*ի համաձայն, կգտնվի* x_0-*ի այնպիսի* $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ *շրջակայք, որտեղ (երբ* $x\neq x_0$*)*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0։$$

Նախ ենթադրենք $x_0<x<x_0+\delta$*, այնպես որ* $x-x_0>0$*. այդ ժամանակ նախորդ անհավասարությունից հետևում է՝ որ* $f(x)-f(x_0)>0$*, այսինքն՝* $f(x)>f(x_0)$*։ Իսկ եթե* $x_0-\delta<x<x_0$ *և* $x-x_0<0$*, ապա, ակներևաբար, նաև* $f(x)-f(x_0)<0$*, այսինքն՝* $f(x)<f(x_0)$*։ Լեմման ապացուցվեց։*

ՖԵՐՄԱՅԻ (P. Fermat) ***ԹԵՈՐԵՄԱՆ***։ Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է մի X միջակայքում և այդ միջակայքի ներսի c կետում ընդունում է մեծագույն (փոքրագույն) արժեք։ Եթե այդ կետում գոյություն ունի $f'(c)$ վերջավոր ածանցյալ, ապա անհրաժեշտաբար $f'(c)=0$*։

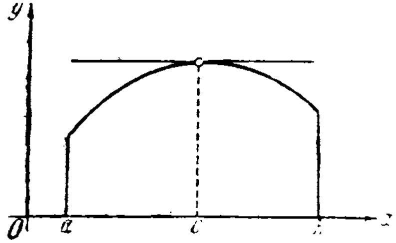
Ապացույց։ Դիցուք, որոշակիության համար, $f(x)$ *ֆունկցիան* c *կետում ընդունում է իր ա մ ե ն ա մ ե ծ արժեքը։*

---

* *Այս թեորեման, հատկանշական է, վերաբերում է միայն կոչված այն եղանակի, որը Ֆ ե ր մ ա ն կիրառել է ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները որոնելու համար (Ֆերման չուներ ածանցյալի գաղափարը)։*

Այն ենթադրությունը, որ $f'(c)\neq 0$, բերում է հակասության. կամ $f'(c)>0$ և այդ ժամանակ (ըստ լեմմայի) $f(x)>f(c)$, եթե $x>c$ և c-ին բավականաչափ մոտ է, և կամ $f'(c)<0$-ից, և այդ ժամանակ $f(x)>f(c)$, եթե $x<c$ և c-ին բավականաչափ մոտ է։ Երկու դեպքում էլ $f(c)$-ն չի կարող լինել $f(x)$ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքն X միջակայքում։ Ստացված հակասությունն ապացուցում է թեորեմը։

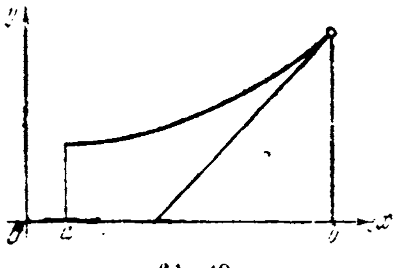
Հիշենք [90,91] $y'=f'(x)$ ածանցյալի երկրաչափական մեկնաբանումը, որպես $y=f(x)$ կորի շոշափողի անկյունային գործակից։ $f'(c)$ ածանցյալի զրո դառնալը երկրաչափորեն նշանակում է, որ այդ կորի համապատասխան կետում շոշափողը զուգահեռ է x-երի առանցքին։ 48-րդ գծագիրն այդ հանգամանքը դարձնում է միանգամայն դիտողական։



Գծ. 48.

Ապացույցի մեջ էապես օգտագործված էր այն ենթադրությունը, որ c-ն հանդիսանում է միջակայքի ներքին կետ որովհետև հարկ եղավ դիտարկել x-ից դեպի աջ և դեպի ձախ գտնվող կետերը։ Առանց այդ ենթադրության թեորեման կդադարեր ճիշտ լինել. եթե $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է փակ միջակայքում և իր մեծագույն (փոքրագույն) արժեքին հասնում է այդ միջակայքի ծայրակետերից մեկում, ապա այդ ծայրում $f'(x)$ ածանցյալը (եթե գոյություն ունի) կարող է նաև զրո չլինել։ Ընթերցողին ենք թողնում գտնել համապատասխան օրինակ։ Երկրաչափորեն այդ փաստը պատկերված է 49-րդ գծագրի վրա։

Ի լրացումն Ֆերմայի թեորեմայի, անենք հետևյալ դիտողությունը. եթե վերոհիշյալ c կետում գոյություն ունի անվերջ մեծ ածանցյալ, ապա վերջինս չի կարող որոշակի նշանով լինել։ Կարելի է նույնիսկ ավելի ճշգրիտ ասել, որ (եթե $f(c)$-ն մեծագույն արժեքն



Գծ. 49.

է) c կետում ածանցյալը ձախից հավասար կլինի $+\infty$, իսկ աջից՝ $-\infty$։ Ապացույցը թողնում ենք ընթերցողին։

Որպես Ֆերմայի թեորեմայի կիրառություն, ապացուցենք մի հետաքրքիր թեորեմ, որը վերաբերում է անընդհատ ֆունկցիայի ածանցյալին։

116. ԴԱՐԲՈՒԻ (G. Darboux) **ԹԵՈՐԵՄԱՆ։** Եթե $f(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ միջակայքում ունի վերջավոր ածանցյալ*, ապա $f'(x)$ ֆունկցիան առնվազն մեկ անգամ ընդունում է յուրաքանչյուր միջանկյալ արժեք $f'(a)$-ի և $f'(b)$-ի միջև։

Ապացույց։ Նախ ենթադրենք, որ $f'(a)$ և $f'(b)$ մեծությունները ունեն տարբեր նշաններ, օրինակ, որ $f'(a)>0$, իսկ $f'(b)<0$, և ապացուցենք a-ի ու b-ի միջև գտնվող այնպիսի c կետի գոյությունը, որտեղ ածանցյալը դառնում է զրո։ Իրոք, $f'(x)$ վերջավոր ածանցյալի գոյությունից հետևում է $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատությունը [95, 2°], իսկ այդ դեպքում, ըստ Վայերշտրասի 2-րդ թեորեմայի [84], $f(x)$-ը մի որոշ c կետում ընդունում է իր մեծագույն արժեքը։ Այդ c կետը չի կարող համընկնել ոչ a-ի և ոչ էլ b-ի հետ, որովհետև, համաձայն լեմմայի, $f(x)$-ը a-ի մոտակայքում (աջից) մեծ է $f(a)$-ից և b-ի մոտակայքում (ձախից) մեծ է $f(b)$-ից։ Ուրեմն $a<c<b$։ Այդ ժամանակ, ըստ Ֆերմայի թեորեմայի, կստանանք $f'(c)=0$։

Անցնելով ընդհանուր դեպքին, վերցնենք որևէ C թիվ, որը գտնվում է $f'(a)$-ի և $f'(b)$-ի միջև. դիցուք, որոշակիության համար, $f'(a)>C>f'(b)$։ Դիտարկենք $\varphi(x)=f(x)-Cx$ օժանդակ ֆունկցիան. նա $[a, b]$ միջակայքում անընդհատ է և ունի $\varphi'(x)=f'(x)-C$ ածանցյալը։ Քանի որ $\varphi'(a)=f'(a)-C>0$, իսկ $\varphi'(b)=f'(b)-C<0$, ուստի, ըստ ապացուցածի, գոյություն ունի այնպիսի c կետ ($a<c<b$), որտեղ

$$\varphi'(c)=f'(c)-C=0, \text{ այսինքն՝ } f'(c)=C։$$

Այս թեորեման շատ նման է Կոշիի 2-րդ թեորեմային [81], որի համաձայն յուրաքանչյուր անընդհատ ֆունկցիա մեկ արժեքից մյուսին անցնում է՝ միայն բոլոր միջանկյալ արժեքներն ընդունելով։ Սակայն Դարբուի թեորեման բոլորովին էլ Կո-

---

* *Ընդ որում ընդունում ենք, որ a կետում գոյություն ունի աջից ածանցյալ, իսկ b կետում՝ ձախից ածանցյալ։ Հետագայում դրանք նշանակելու ենք պարզապես $f'(a)$ և $f'(b)$։*

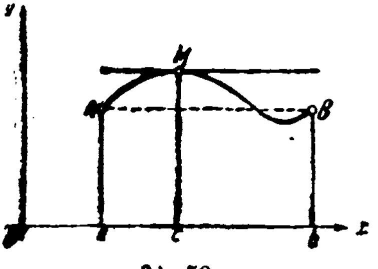
չի ի թեորեմայի հետևանքը չէ. որովհետև անընդհատ ֆունկցիայի $f'(x)$ *ածանցյալը ինքը կարող է անընդհատ ֆունկցիա չլինել։*

117. ՌՈԼԼԻ ԹԵՈՐԵՄԱՆ։ *Դիֆերենցիալ հաշվի շատ թեորեմաների ու բանաձևերի, ինչպես նաև նրա կիրառությունների, հիմքում ընկած է հետևյալ պարզ, բայց կարևոր թեորեման, որը կապված է Ռոլլի* (M. Rolle)* *անվան հետ։*

ՌՈԼԼԻ ԹԵՈՐԵՄԱՆ։ Դիցուք 1) $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է ու անընդհատ $[a, b]$ փակ միջակայքում, 2) գոյություն ունի վերջավոր $f'(x)$ ածանցյալ, առնվազն (a, b) բաց միջակայքում**, 3) միջակայքի ծայրակետերում ֆունկցիան ընդունում է հավասար արժեքներ՝ $f(a)=f(b)$։

Այդ դեպքում a-ի և b-ի միջև կգտնվի այնպիսի c $(a<c<b)$ կետ, որտեղ $f'(c)=0$։

Ապացույց։ $f(x)$*-ը* $[a, b]$ *փակ միջակայքում անընդհատ է և, ուրեմն, ըստ Վայերշտրասի 2-րդ թեորեմայի* [84], *նա այդ միջակայքում ընդունում է իր ինչպես* M *մեծագույն արժեքը, նույնպես և* m *փոքրագույն արժեքը։*



Գծ. 50.

Քննության առնենք երկու դեպք՝

1. $M = m$։ *Այդ ժամանակ* $f(x)$*-ը* $[a, b]$ *միջակայքում պահպանում է իր հաստատուն արժեքը. իրոք,* $m \leq f(x) \leq M$ *անհավասարությունը այդ դեպքում կտա, որ* $f(x)=M$՝ x*-ի բոլոր արժեքների համար, ուստի* $f'(x)=0$ *ամբողջ միջակայքում, այնպես որ, որպես* c *կետ, կարելի է վերցնել* (a, b)*-ի ամեն մի կետ։*

2. $M > m$։ *Մենք գիտենք, որ այս երկու արժեքներն էլ*

---

* *Իրականում Ռոլլը այդ թեորեման արտահայտել է միայն բազմանդամների համար։*

** *Իհարկե,* $f(x)$ *ֆունկցիայի անընդհատությունն* (a, b)*-ում արդեն 2)-ից հետևում է, բայց մենք ոչ այստեղ և ոչ էլ հետագայում նպատակ չունենք թեորեմայի պայմանը բաժանել երկու փոխադարձաբար անկախ ենթադրությունների։*

ֆունկցիան ընդունում է, բայց, քանի որ $f(a)=f(b)$, ուրեմն այդ արժեքներից գոնե մեկը նա ընդունում է a-ի և b-ի միջև գտնվող որևէ c կետում։ Այդ դեպքում Ֆ ե ր մ ա յ ի թեորեմայից հետևում է, որ այդ կետում $f'(c)$ ածանցյալը դառնում է զրո։ Թեորեմն ապացուցված է։

Երկրաչափորեն Ռ ո լ լ ի թեորեմն նշանակում է հետևյալը. եթե $y=f(x)$ կորի ծայրերի օրդինատները հավասար են, ապա կորի վրա կգտնվի այնպիսի կետ, որտեղ կորին տարած շոշափողը զուգահեռ է x-երի առանցքին (գծ. 50)։

Ուշադրություն դարձնենք այն բանի վրա, որ $[a,b]$ փ ա կ միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատությունը և ա մ բ ո ղ ջ (a,b) բաց միջակայքում ածանցյալի գոյության ունենալը էական են թեորեմայի եզրակացության ճշտության համար։ $f(x)=x-E(x)$ ֆունկցիան $[0,1]$ միջակայքում բավարարում է թեորեմայի բոլոր պայմաններին, բացառությամբ նրանից, որ $x=1$ արժեքի համար նա ունի խզում, իսկ $(0,1)$-ում ամենուրեք $f'(x)=1$։ Հետևյալ ֆունկցիան, որը որոշվում է $f(x)=x$, երբ $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$, և $f(x)=1-x$, երբ $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$, հավասարություններով, նույնպես բավարարում է բոլոր պայմաններին նույն միջակայքում, բացառելով միայն այն հանգամանքը, որ $\frac{1}{2}$ արժեքի համար ածանցյալ (երկկողմանի) գոյություն չունի, միաժամանակ միջակայքի ձախ կեսում $f'(x)$ ածանցյալը հավասար է $+1$-ի, իսկ աջ կեսում՝ -1-ի։

Ճիշտ նույնպես, կարևոր է նաև թեորեմայի 3)-րդ պայմանը. $f(x)=x$ ֆունկցիան $[0,1]$ միջակայքում բավարարում է թեորեմայի բոլոր պայմաններին, բացի 3)-րդից. իսկ նրա ածանցյալը ամենուրեք հավասար է մեկի՝ $f'(x)=1$։

Այս ֆունկցիաների գրաֆիկները գծելը թողնում ենք ընթերցողին։

Հետագայում մենք հաճախ ենք հանդիպելու Ռ ո լ լ ի թեորեմայի կիրառություններին։ Այստեղ սահմանափակվենք միայն մեկ օրինակով, կիրառելով այն Լ ե ժ ա ն դ ր ի [տես 111, 6)]՝

$$X_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

բազմանդամի արմատները որոշելու հարցում։

Ապացուցենք, որ այդ բազմանդամն ունի n թվով տարբեր իրական արմատներ, որոնք բոլորը գտնվում են −1-ի և +1-ի միջև։

Հեշտ է տեսնել, որ $(x^2-1)^n = (x-1)^n (x+1)^n$ *ֆունկցիան և նրա հաջորդական (n−1) ածանցյալները զրո են դառնում* $x=\pm 1$ *արժեքների համար։ Ուստի, ըստ Ռոլլի թեորեմայի, նրա առաջին ածանցյալը −1-ի և +1-ի միջև կունենա արմատ, ըստ նույն թեորեմայի, երկրորդ կարգի ածանցյալը −1-ի և +1-ի միջև կունենա երկու արմատ, և այլն, մինչև (n−1)-րդ կարգի ածանցյալը, որը, −1 և +1 արմատներից բացի, դրանց միջև կունենա (n−1) թվով արմատներ։ Մեկ անգամ էլ կիրառելով Ռոլլի թեորեման, կստանանք այն, ինչ պահանջվում էր ապացուցել։*

118. ԼԱԳՐԱՆԺԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ։ Անցնենք Ռոլլի թեորեմայի անմիջական հետևանքներին։

ԼԱԳՐԱՆԺԻ ԹԵՈՐԵՄԱՆ։ Դիցուք 1) $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է ու անընդհատ $[a, b]$ փակ միջակայքում, 2) գոյություն ունի $f'(x)$ վերջավոր ածանցյալ առնվազն (a, b) բաց միջակայքում։ Այդ ժամանակ a-ի և b-ի միջև կգտնվի այնպիսի c $(a<c<b)$ կետ, որի համար տեղի կունենա

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \tag{1}$$

հավասարությունը։

Ապացույց։ Վերցնենք մի օժանդակ ֆունկցիա, որը $[a, b]$ *միջակայքում որոշվում է այսպես՝*

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)։$$

Այդ ֆունկցիան բավարարում է Ռոլլի թեորեմայի բոլոր պայմաններին։ Իրոք, նա $[a, b]$*-ում անընդհատ է, որովհետև իրենից ներկայացնում է* $f(x)$ *անընդհատ ֆունկցիայի և գծային ֆունկցիայի տարբերություն։* (a, b)*-ում նա ունի որոշակի վերջավոր ածանցյալ, որը հավասար է՝*

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

Վերջապես, անմիջական տեղադրության միջոցով համոզվում ենք, որ $F(a) = F(b) = 0$, *այսինքն՝* $F(x)$ *ֆունկցիան միջակայքի ծայրակետերում ընդունում է հավասար արժեքներ։*

Հետևապես, $F(x)$ *ֆունկցիայի նկատմամբ կարելի է կիրա-*

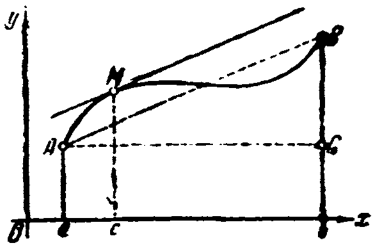
ռել Ռոլլի թեորեման և համոզվել, որ (a, b)-ում այնպիսի c կետ գոյություն ունի. որտեղ $F'(c)=0$։ Այսպիսով, կունենանք՝

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0, \text{ որտեղից՝ } f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

այն, ինչ պահանջվում էր ապացուցել։

Ապացուցված թեորեման անվանում են նաև *միջին արժեքի թեորեմա* (դիֆերենցիալ հաշվում)։

Ռոլլի թեորեման հանդիսանում է Լագրանժի թեորեմայի մասնավոր դեպքը։ Այն դիտողությունները, որոնք վերևում կատարվեցին այդ թեորեմայի 1) և 2) պայմանների նկատմամբ, ճիշտ են նաև այստեղ։



Գծ. 51.

Դիմելով Լագրանժի թեորեմայի երկրաչափական մեկնաբանմանը (գծ. 51), նկատենք, որ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{CB}{AC}$$

հարաբերությունը՝ AB հատողի անկյունային գործակիցն է, իսկ $f'(c)$ ածանցյալը՝ $y=f(x)$ կորին $x=c$ աբսցիս ունեցող կետում տարած շոշափողի անկյունային գործակիցն է։ Այսպիսով, Լագրանժի թեորեմայի պնդումը համարժեք է հետևյալին՝ AB աղեղի վրա միշտ կգտնվի առնվազն մեկ M կետ, որտեղ շոշափողը զուգահեռ է AB լարին։

Ապացուցված՝

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \text{ կամ } f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$$

բանաձևը կոչվում է *Լագրանժի բանաձև կամ վերջավոր աճերի բանաձև*։ Նա, ակնհայտաբար, տեղի ունի նաև այն դեպքում երբ $a>b$։

$[a, b]$ միջակայքում վերցնենք կամայական x_0 արժեք և նրան տանք այնպիսի $\Delta x \lessgtr 0$ աճ, որը նրան այդ միջակայքից դուրս չի բերում։ Լագրանժի բանաձևը կիրառենք $[x_0, x_0+\Delta x]$ միջակայքի նկատմամբ, երբ $\Delta x>0$ կամ $[x_0+\Delta x, x_0]$ միջակայքի

նկատմամբ, երբ $\Delta x \to 0$։ Այս դեպքում x_0-ի և $(x_0+\Delta x)$-ի միջև գտնվող c թիվը կարելի է ներկայացնել այսպես՝

$$c = x_0 + \Theta \cdot \Delta x, \text{ որտեղ } 0<\Theta<1^{*}։$$

Այդ ժամանակ Լագրանժի բանաձևը կընդունի

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0+\Theta\Delta x) \qquad (1ա)$$

կամ՝

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0+\Theta\Delta x) \cdot \Delta x \quad (0<\Theta<1) \qquad (2)$$

տեսքը։ Այս հավասարությունը, որը արգումենտի կամավոր Δx վերջավոր աճի դեպքում տալիս է ֆունկցիայի աճի ճշգրիտ արտահայտությունը, բնականաբար հակադրվում է

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \doteq f'(x_0) \cdot \Delta x$$

մոտավոր հավասարությանը [106, (3ա)], որի հարաբերական սխալը ձգտում է զրոյի միայն այն ժամանակ, երբ Δx-ը անվերջ փոքր է։ Հենց այստեղից էլ առաջացել է «վերջավոր աճերի բանաձև» անունը։

Լագրանժի բանաձևի բացասական կողմն այն է, որ նրա մեջ երևան է գալիս անհայտ Θ թիվը** (կամ c-ն)։ Սակայն այդ չի խանգարում այդ բանաձևի բազմազան կիրառություններին անալիզի մեջ։

119. ԱԾԱՆՑՅԱԼԻ ՍԱՀՄԱՆԸ։ Այդպիսի կիրառության օգտակար օրինակ տալիս է հետևյալ դիտողությունը։ Ենթադրենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[x_0, x_0+H]$ $(H>0)$ միջակայքում և $x>x_0$ արժեքների համար ունի վերջավոր $f'(x)$ ածանցյալ։ Եթե գոյություն ունի (վերջավոր կամ ոչ)

$$\lim_{x \to x_0+0} f'(x) = K$$

* Երբեմն ասում են, որ Θ-ն «կանոնավոր կոտորակ» է, սակայն չպետք է կարծել, որ խոսքը միայն ռացիոնալ կոտորակի մասին է. Θ թիվը կարող է լինել նաև իռացիոնալ:

** Միայն շատ քիչ դեպքերում մենք կարող ենք Θ-ն հաշվել. օրինակ, $f(x)=ax^2+bx+c$ քառակուսի ֆունկցիայի համար, ինչպես հեշտ է ստուգել, կունենանք $\Theta = \frac{1}{2}$:

սահմանը, ապա այդ հենց աջակողմյան ածանցյալն է x_0 *կետում։ Իրոք, երբ* $0<\Delta x<H$, *ունենք (1ա) հավասարությունը։ Եթե* $\Delta x\to 0$, *ապա, ի նկատի ունենալով որ* θ *մեծությունը սահմանափակ է, ածանցյալի* $x_0+\theta\cdot\Delta x$ *արգումենտը կձգտի* x_0*-ի, ուստի հավասարության աջ մասը, սրա հետ նաև ձախ մասը, կձգտի* K *սահմանին, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։*

Նույնը կարելի է անել նաև x_0 *կետի ձախակողմյան շրջակայքի նկատմամբ։*

Օրինակի համար, դիտարկենք՝

$$f(x)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$$

ֆունկցիան $[-1,1]$ *միջակայքում։ Եթե* $-1<x<1$, *ապա դիֆերենցիալ հաշվի սովորական կանոններով կարելի է հեշտությամբ գտնել՝*

$$f'(x)=\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\text{։}$$

Երբ $x\to 1-0$ $(x\to -1+0)$, *այդ ածանցյալը, ակներևաբար, կձգտի* $\frac{\pi}{2}$ $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ *սահմանին, ուրեմն՝ նաև* $x=\pm 1$ *արժեքների համար գոյություն ունեն (միակողմյան) ածանցյալներ՝* $f'(\pm 1)=\pm\frac{\pi}{2}$։

Վերոհիշյալ դիտողությունն ավելի հաճախ կիրառվում է հետևյալ պայմաններում. այն փաստից, որ, երբ $x\to x_0$ *ածանցյալի համար ստացված արտահայտությունը ձգտում է անվերջության, եզրակացնում են, որ նաև ինքը՝* $f'(x_0)$ *ածանցյալը հավասար է անվերջության [տես 100-ում բերված օրինակները]։*

Ասածից հետևում է նաև այն, որ եթե որևէ միջակայքում գոյություն ունի վերջավոր $f'(x)$ *ածանցյալ, ապա նա իրենից ներկայացնում է այնպիսի ֆունկցիա, որը չի կարող ունենալ սովորական խզումներ կամ թռիչքներ. յուրաքանչյուր կետում կամ նա անընդհատ է, կամ ունի 2-րդ կարգի խզում [տես* **101**, 2°]։

120. ԿՈՇԻԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ։ *Վերջավոր աճերի բանաձևն ընդհանրացվում է հետևյալ կերպ՝*

ԿՈՇԻԻ ԹԵՈՐԵՄԱՆ։ **Դիցուք 1)** $f(x)$ **և** $g(x)$ **ֆունկցիաները անընդհատ են** $[a,b]$ **փակ միջակայքում, 2) գոյություն ունեն վերջավոր** $f'(x)$ **և** $g'(x)$ **ածանցյալներ, առնվազն** (a,b) **բաց միջա-**

կայքում, 3) (a, b) միջակայքում $g'(x) \neq 0$։ Այդ ժամանակ a-ի և b-ի միջև կգտնվի այնպիսի c $(a < c < b)$ կետ, որի համար՝

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \qquad (3)$$

Այս բանաձևը կոչվում է Կոշիի բանաձև։

Ապացույց։ Նախ նկատենք, որ վերոհիշյալ հավասարության ձախ մասի հայտարարը զրոյի հավասար չէ, քանի որ հակառակ դեպքում այդ արտահայտությունը իմաստ չէր ունենա։ Եթե լիներ $g(b) = g(a)$, *ապա, ըստ Ռոլլի թեորեմայի, մի որոշ միջանկյալ կետում պետք է* $g'(x)$ *ածանցյալը հավասար լիներ զրոյի, որը կհակասեր 3)-րդ պայմանին, ուրեմն* $g(b) \neq g(a)$։

Այժմ դիտարկենք՝

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

օժանդակ ֆունկցիան։ Սա բավարարում է Ռոլլի թեորեմայի բոլոր պայմաններին։ Իրոք, $F(x)$*-ը* $[a, b]$*-ում անընդհատ է, որովհետև* $f(x)$ *և* $g(x)$ *ֆունկցիաները անընդհատ են։* $F'(x)$ *ածանցյալը* (a, b)*-ում գոյություն ունի և հավասար է*

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x)$$

արտահայտությանը։ Վերջապես, ուղղակի տեղադրության միջոցով համոզվում ենք, որ $F(a) = F(b) = 0$։ *Հետևապես* (a, b) *միջակայքում գոյություն ունի այնպիսի* c *կետ, որտեղ* $F'(c) = 0$։ *Այլ կերպ ասած, ունենք՝*

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0,$$

կամ՝

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c),$$

Բաժանելով $g'(c)$*-ի վրա (որը հնարավոր է, որովհետև* $g'(c) \neq 0$*), կստանանք պահանջվելիք հավասարությունը։*

Պարզ է, որ Լագրանժի թեորեման հանդիսանում է Կոշիի թեորեմայի մասնավոր դեպքը։ Կոշիի բանաձևից վերջա-

վոր անհրի բանաձևն ստանալու համար պետք է ընդունել $g(x)=x$։ Կոշիի թեորեման անվանում են միջին արժեքի ընդհանրացրած թեորեմա (դիֆերենցիալ հաշվում)։

Կոշիի թեորեմայի երկրաչափական մեկնաբանությունը նույնն է, ինչ որ Լագրանժի թեորեմայինը։ Որպեսզի ընթերցողի համար հեշտ լինի այդ տեսնել, անցնենք այլ նշանակումների. x-ը փոխարինենք t-ով, իսկ ֆունկցիաները նշանակենք $\varphi(t)$ և $\psi(t)$։ Եթե t-ն փոփոխվում է $[\alpha, \beta]$ միջակայքում, ապա Կոշիի բանաձևը կգրվի այսպես՝

$$\frac{\psi(\beta)-\psi(\alpha)}{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}=\frac{\psi'(\gamma)}{\varphi'(\gamma)} \quad (\alpha<\gamma<\beta)\text{։} \tag{4}$$

Այժմ դիտարկենք այն կորը, որը տված է

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\ (\alpha\leqslant t\leqslant\beta) \tag{5}$$

պարամետրական հավասարումներով։ Այդ ժամանակ, բանաձևի ձախ մասն այստեղ ևս կներկայացնի այդ կորի աղեղի ծայրակետերը միացնող լարի անկյունային գործակիցը, իսկ աջ մասը՝ աղեղի մի որոշ ներքին կետում շոշափողի անկյունային գործակիցը. այդ կետը համապատասխանում է $t=\gamma$ արժեքին [105, (11)]։

Դիտողություն։ Այս դատողությունները թելադրում են այն միտքը, որ հնարավոր է Լագրանժի բանաձևից ստանալ Կոշիի բանաձևը։ Այդ ստացման էությունը կայանում է նրանում, որ (5)-րդ պարամետրական կախման փոխարեն դըրնում են անմիջական $y=f(x)$ կապը և այդ ժամանակ դուրս է գալիս, որ (4) բանաձևը համարժեք է (1)-ին բանաձևին։

§ 5. ԹԵՅԼՈՐԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ

121. ԹԵՅԼՈՐԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄԻ ՀԱՄԱՐ։ Եթե $p(x)$-ը n-րդ աստիճանի ամբողջ բազմանդամ է՝

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n, \tag{1}$$

ապա այդ բազմանդամը հաջորդաբար n անգամ դիֆերենցելով, կստանանք՝

$$p'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2 x + 3 \cdot a_3 x^2 + \ldots + n \cdot a_n x^{n-1},$$

$$p''(x) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 x + \ldots + (n-1)n \cdot a_n x^{n-2},$$

$$p'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + \ldots + (n-2)(n-1)n \cdot a_n x^{n-3},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$p^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot a_n.$$

Այդ բոլոր բանաձևերի մեջ ընդունելով $x=0$, *կստանանք բազմանդամի գործակիցները՝ արտահայտված բազմանդամի ու նրա ածանցյալների արժեքներով* $x=0$ *կետում՝*

$$a_0 = p(0), \quad a_1 = \frac{p'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{p''(0)}{2!},$$

$$a_3 = \frac{p'''(0)}{3!}, \ \ldots, \ a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}.$$

Գործակիցների այս արժեքները տեղադրենք (1)-ի մեջ՝

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \frac{p'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n. \quad (2)$$

Այս բանաձևը (1)-ից տարբերվում է գործակիցների գրության ձևով։

Բազմանդամը x*-ի աստիճաններով վերլուծելու փոխարեն կարելի է վերցնել նրա վերլուծումը* $(x-x_0)$*-ի աստիճաններով, որտեղ* x_0*-ն* x*-ի որևէ մասնավոր հաստատուն արժեք է։ Այսպես՝*

$$p(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 +$$
$$+ A_3(x-x_0)^3 + \ldots + A_n(x-x_0)^n. \quad (3)$$

Ընդունելով $x - x_0 = \xi$, $p(x) = p(x_0+\xi) = P(\xi)$,

$$P(\xi) = A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 + A_3\xi^3 + \ldots + A_n\xi^n$$

բազմանդամի գործակիցների համար, ըստ ապացուցածի, կունենանք հետևյալ արտահայտությունները՝

$$A_0 = P(0), \quad A_1 = \frac{P'(0)}{1!}, \quad A_2 = \frac{P''(0)}{2!},$$

$$A_3 = \frac{P'''(0)}{3!}, \ \ldots, \ A_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!},$$

Սակայն՝

$$P(\xi)=p(x_0+\xi),\quad P'(\xi)=p'(x_0+\xi),$$
$$P''(\xi)=p''(x_0+\xi),\ \ldots,$$

ուստի՝

$$P(0)=p(x_0),\quad P'(0)=p'(x_0),\quad P''(0)=p''(x_0),\ \ldots$$

և՝

$$\left.\begin{aligned} &A_0=p(x_0),\quad A_1=\frac{p'(x_0)}{1!},\quad A_2=\frac{p''(x_0)}{2!},\\ &A_3=\frac{p'''(x_0)}{3!},\ \ldots,\ A_n=\frac{p^{(n)}(x_0)}{n!},\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

այսինքն՝ (3)-րդ վերլուծման գործակիցները արտահայտվեցին բազմանդամի ու նրա ածանցյալների արժեքներով՝ $x=x_0$ *կետում։*

(4) արտահայտությունները տեղադրելով (3)-ի մեջ, կստանանք՝

$$p(x)=p(x_0)+\frac{p'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{p''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$
$$+\frac{p'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots+\frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x^0)^n. \tag{5}$$

(5) բանաձևը, ինչպես նաև նրա (2) մասնավոր դեպքը (երբ $x_0=0$*), կոչվում է Թեյլորի* (B. Taylor)* *բանաձև։*

Հայտնի է, թե ինչպիսի կարևոր կիրառություններ ունի այս բանաձևը հանրահաշվի մեջ։

Կատարենք (հետագայի համար օգտակար) ակներև դիտողություն, այն է, որ եթե $p(x)$ *բազմանդամը ներկայացված է*

$$p(x)=c_0+\frac{c_1}{1!}(x-x_0)+\frac{c_2}{2!}(x-x_0)^2+$$
$$+\frac{c_3}{3!}(x-x_0)^3+\ldots+\frac{c_n}{n!}(x-x_0)^n$$

տեսքով, ապա անպայման պետք է

$$p(x_0)=c_0,\quad p'(x_0)=c_1,\quad p''(x_0)=c_2,\ \ldots,\ p^{(n)}(x_0)=c_n.$$

---

* *Իմիջիայլոց, (2) բանաձևը, դրա համար առանց որևէ հիմք ունենալու, հաճախ անվանում են Մակլորենի* (C. Maclaurin) *բանաձև։*

122. ԿԱՄԱՎՈՐ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄԸ. ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԱՆԴԱՄԸ ՊԵԱՆՈՅԻ ՁԵՎՈՎ։ *Այժմ անցնենք կամավոր* $f(x)$ *ֆունկցիայի դիտարկմանը, որն ընդհանրապես ամբողջ բազմանդամ չի հանդիսանում։ Ենթադրենք, թե մի* x_0 *կետում այդ ֆունկցիայի համար գոյություն ունեն բոլոր կարգի ածանցյալները, մինչև* n*-րդը ներառյալ։ Ավելի ճիշտն ասած, այդ նշանակում է, որ ֆունկցիան որոշված է և ունի բոլոր կարգի ածանցյալներ, մինչև* $(n-1)$*-րդը ներառյալ՝*

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x), \dots,\ f^{(n-1)}(x)$$

x_0 *կետը պարունակող մի* $[a, b]$ *միջակայքում, և, բացի այդ,* n*-րդ կարգի* $f^{(n)}(x_0)$ *ածանցյալ ունի հենց* x_0 *կետում*։ Այդ ժամանակ, (5)-ի օրինակով,* $f(x)$ *ֆունկցիայի համար ևս կարելի կլինի կազմել*

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{6}$$

բազմանդամ։ Համաձայն նախորդ դիտողության, այս բազմանդամն ու նրա ածանցյալները (մինչև n*-րդը ներառյալ)* x_0 *կետում ունեն նույն արժեքները, ինչ որ* $f(x)$ *ֆունկցիան ու նրա ածանցյալները։*

Սակայն այս անգամ, եթե միայն $f(x)$*-ը* n*-րդ աստիճանի ամբողջ ֆունկցիան չէ, արդեն չի կարելի պնդել, որ տեղի ունի* $f(x) = p(x)$ *հավասարությունը։* $p(x)$ *բազմանդամը տալիս է միայն* $f(x)$ *ֆունկցիայի մի որոշ մոտավորությունը։ Այդ պատճառով էլ հատուկ հետաքրքրություն է ստանում*

$$r(x) = f(x) - p(x) \tag{7}$$

տարբերության ուսումնասիրությունը։

Նախ ցույց տանք, որ երբ $x \to x_0$, այդ տարբերությունն իրե-

---

* *Եթե* x_0 *կետը հանդիսանում է* $[a, b]$ *միջակայքի ծայրակետերից մեկը, ապա այդ կետում ածանցյալի մասին խոսելիս, մենք ի նկատի ունենք միակողմյան ածանցյալը։*

ձից ներկայացնում է n-րդից ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր (*համեմատած* $(x-x_0)$*-ի հետ*)՝

$$r(x)=o\left((x-x_0)^n\right): \qquad (8)$$

$p(x)$ *բազմանդամի հատկության շնորհիվ*, $r(x)$ *ֆունկցիայի համար, ակներևաբար, տեղի կունենան հետևյալ հավասարությունները*՝

$$r(x_0)=r'(x_0)=r''(x_0)=\ldots=r^{(n)}(x_0)=0, \qquad (9)$$

որոնցից հենց կհանենք (8)-ը, որը կապացուցենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:

Երբ $n=1$, *ունենք*՝

$$r(x_0)=r'(x_0)=0,$$

այնպես որ՝

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{r(x)-r(x_0)}{x-x_0}=r'(x_0)=0,$$

$$r(x)=o(x-x_0)$$

և այս դեպքում մեր պնդումը ճիշտ է:

Այժմ ընդունենք, որ այդ պնդումը ճիշտ է մի որևէ $n\geqslant 1$ *արժեքի համար, և ապացուցենք, որ նա ճիշտ կլինի, եթե n-ը փոխարինենք* $(n+1)$*-ով: Իրոք, այդ ժամանակ* $r'(x)$ *ածանցյալը կբավարարի*

$$r'(x_0)=r''(x_0)=r'''(x_0)=\ldots=r^{(n+1)}(x_0)=0$$

հավասարություններին, որոնք (9)-ի տիպի են և, ըստ ենթադրության,

$$r'(x)=o\left((x-x_0)^n\right):$$

Սակայն, վերջավոր աճերի բանաձևի համաձայն [118], *ունենք*՝

$$r(x)=r(x)-r(x_0)=r'(c)\cdot(x-x_0),$$

որտեղ c*-ն գտնվում է* x_0*-ի և* x*-ի միջև. քանի որ* $|c-x_0|<|x-x_0|$, *ուստի*՝

$$r'(c)=o\left((c-x_0)^n\right)=o\left((x-x_0)^n\right)$$

և, վերջնականապես, կստանանք՝

$$r(x) = o((x - x_0)^{n+1}),$$

այն, ինչ պահանջվում էր ապացուցել։

Ինկատի ունենալով (6), (7) և (8) բանաձևերը, կստանանք՝

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \qquad (10)$$

բանաձևը, որը բազմանդամների համար ստացած (5)-րդ բանաձևից տարբերվում է (8) լրացուցիչ անդամի առկայությամբ։ Լրացուցիչ անդամը վերոհիշյալ ձևով տվել է Պեանոն (G. Peano)*։ Հենց (10)-րդ բանաձևը կոչվում է* **Թեյլորի բանաձև՝ Պեանոյի տված տեսքով լրացուցիչ անդամով:**

Ապացուցած բանաձևը հանդիսանում է n° 95*-ի (3)-րդ բանաձևի բնական ընդհանրացումը. այդ բանաձևը կարելի է գրել այսպես՝*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),$$

որը համապատասխանում է $n=1$ *դեպքին։ Այնտեղ* $f(x)$ *ֆունկցիան, առաջինից ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքրի ճշգրտությամբ, ներկայացվում էր գծային ֆունկցիայի տեսքով, իսկ այստեղ մենք* $f(x)$ *ֆունկցիան ներկայացնում ենք* n*-րդ աստիճանի բազմանդամով, բայց արդեն* n*-րդից բարձր կարգի անվերջ փոքրի ճշգրտությամբ։*

Հեշտ է ցույց տալ, որ $f(x)$ *ֆունկցիայի այդպիսի ներկայացումը միակն է, այսինքն՝ որ, եթե* x_0 *կետի մոտ միաժամանակ ունենանք այդ ֆունկցիայի երկու ներկայացումներ՝*

$$f(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + A_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

և՝

$$f(x) = A'_0 + A'_1(x - x_0) + A'_2(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + A'_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

ապա անհրաժեշտաբար՝

$$A_0 = A'_0,\ A_1 = A'_1,\ \dots,\ A_n = A'_n.$$

Իրոք,

$$A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \ldots + A_n(x-x_0)^n =$$

$$= A'_0 + A'_1(x-x_0) + A'_2(x-x_0)^2 + \ldots + A'_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

նույնությունից, երբ $x \to x_0$, *անմիջապես ստանում ենք* $A_0 = A'_0$. *Կրճատելով այդ անդամները և երկու մասերը բաժանելով* $(x-x_0)$*-ի վրա, կստանանք՝*

$$A_1 + A_2(x-x_0) + \ldots + A_n(x-x_0)^{n-1} =$$

$$= A'_1 + A'_2(x-x_0) + \ldots + A'_n(x-x_0)^{n-1} + o((x-x_0)^{n-1}),$$

որտեղից, նույն ձևով, ստացվում է $A_1 = A'_1$, *և այլն։*

Երբեմն ավելի հարմար է լինում (10)-րդ բանաձևը կիրառել այլ տեսքով։ $r(x)$ *լրացուցիչ անդամը կարելի է ներկայացնել այսպես՝*

$$r(x) = \frac{\alpha}{n!}(x-x_0)^n,$$

որտեղ α*-ն կախված է* x*-ից և* $(x-x_0)$*-ի հետ միասին ձգտում է զրոյի։ Այդ արտահայտությունը տեղադրելով, կստանանք՝*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)+\alpha}{n!}(x-x_0)^n. \qquad (10ա)$$

Այնուհետև, (10)-րդ բանաձևի մեջ $f(x_0)$*-ն տեղափոխելով ձախ մասը և ընդունելով* $x - x_0 = \Delta x$, *կարելի է այդ բանաձևը գրել այսպես՝*

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x_0)\cdot\Delta x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\cdot\Delta x^n + o(\Delta x^n). \qquad (10բ)$$

Այս ձևով նա ավելի մոտ է n° 95*-ի (3)-րդ՝*

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x + o(\Delta x)$$

բանաձևին։ Վերջինս ֆունկցիայի անվերջ փոքր $\Delta f(x_0)$ *աճից անջատում է միայն մեկ գլխավոր անդամը (ընդունելով, ինչ-*

պես միշտ, Δx-ը որպես հիմնական անվերջ փոքր), այնինչ (10բ) բանաձևի մեջ գրված են մինչև n-ը ներառյալ բոլոր կարգի անդամները, ընդ որում նրանք բոլորը հանդիսանում են պարզագույն անվերջ փոքրեր, n° 63-ում տրված իմաստով։

Այսպիսով, ֆունկցիայի աճը վերլուծված է անկախ փոփոխականի աճի աստիճաններով, լրացուցիչ անդամի ճշգրտությամբ։

Վերջապես, հիշելով, որ

$$f'(x_0)\cdot\Delta x = df(x_0),\ f''(x_0)\cdot\Delta x^2 = d^2f(x_0),\ \ldots$$
$$\ldots,\ f^{(n)}(x_0)\cdot\Delta x^n = d^n f(x_0),$$

(10բ) բանաձևը կարող ենք արտագրել այսպես՝

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0) + o(\Delta x^n).$$

Այստեղից տեսնում ենք, որ (երբ $\Delta x \to 0$) հաջորդական դիֆերենցիալները իրենցից ներկայացնում են, հայտարարներում գրված ֆակտորիալների ճշգրտությամբ, հենց համապատասխան կարգի պարզագույն անվերջ փոքրերը՝ ֆունկցիայի անվերջ փոքր աճի վերլուծության մեջ։

123. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ Թեյլորի բանաձևն ամենից պարզ տեսք է ընդունում $x_0 = 0$ դեպքում՝

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)^{*}. \quad (11)$$

Այս մասնավոր դեպքին միշտ կարելի է հանգել, վերցնելով $(x - x_0)$-ն որպես նոր փոփոխական։

Որպես օրինակ քննության առնենք մի քանի տարրական ֆունկցիաների կոնկրետ վերլուծումներ այս բանաձևով։

1) Դիցուք $f(x) = e^x$. այդ ժամանակ $k = 1, 2, 3, \ldots$ կամայական արժեքների համար կունենանք $f^{(k)}(x) = e^x$։ Քանի որ այս դեպքում $f(0) = 1$, $f^{(k)}(0) = 1$, ուստի, ըստ (11)-րդ բանաձևի, կունենանք՝

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

---

* Այս բանաձևը եռ կոչում են Մակլորենի անվան հետ (տես 328-րդ էջում բերված ծանոթությունը)։

2) Եթե $f(x)=\sin x$, *ապա* $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, *ուստի՝*

$$f(0)=0,\quad f^{(2m)}(0)=\sin m\pi=0,$$

$$f^{(2m-1)}(0)=\sin\left(m\pi-\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^{m-1}\quad (m=1, 2, 3, \ldots).$$

Այդ պատճառով, (11) բանաձևի մեջ ընդունելով $n=2m$, *կունենանք՝*

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o(x^{2m}).$$

3) Նույն ձևով, երբ $f(x)=\cos x$, *կունենանք՝*

$$f^{(k)}(x)=\cos\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right),\quad f(0)=1,\quad f^{(2m)}(0)=(-1)^m,$$

$$f^{(2m-1)}(0)=0\quad (m=1, 2, 3, \ldots).$$

Ուստի (եթե ընդունենք $n=2m+1$*)՝*

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m+1}).$$

4) Այժմ քննության առնենք x^m *աստիճանային ֆունկցիան, որտեղ* m*-ը՝ ոչ բնական թիվ է, ոչ էլ զրո։ Այս դեպքում, երբ* $x\to 0$, *կամ ինքը ֆունկցիան (եթե* $m<0$*), կամ նրա ածանցյալները (սկսած որևէ կարգից, երբ* $n>m$*) անվերջ մեծանում են։ Հետևապես, այստեղ արդեն չի կարելի վերցնել* $x_0=0$։

Վերցնենք $x_0=1$, *այսինքն՝* x^m*-ը վերլուծենք* $(x-1)$*-ի աստիճաններով։ Ի միջի այլոց, ինչպես արդեն ասվել է, որպես նոր փոփոխական կարելի է ընդունել* $(x-1)$*-ը։ Այդ փոփոխականը նախկինի նման պարզապես նշանակենք* x*-ով և* $(1+x)^m$ *ֆունկցիան վերլուծենք* x*-ի աստիճաններով։*

Ինչպես գիտենք [109, 2)],

$$f^{(k)}(x)=m(m-1)\ldots(m-k+1)(1+x)^{m-k},$$

ուստի՝

$$f(0)=1,\quad f^{(k)}(0)=m(m-1)\ldots(m-k+1).$$

Վերլուծումը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n + o(x^n).$$

Մասնավոր դեպքում, օրինակ, երբ $n=2$ *և* $m=-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, *կունենանք՝*

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2),$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2).$$

Սրանցից առաջին վերլուծումը հեշտությամբ ստացվում է տարրական եղանակով. այստեղ լրացուցիչ անդամը պարզապես հավասար է $\frac{x^2}{1+x}$-*ի։ Իսկ երկրորդը և երրորդը կպահանջեին ավելի երկար հաշվումներ* [*տես* 63]։

5) Եթե անցնենք $\log x$ *լոգարիթմական ֆունկցիային, որը, երբ* $x \to 0$, *ձգտում է* $-\infty$, *ապա, ինչպես և նախորդ օրինակում, նպատակահարմար կլինի դիտարկել* $f(x)=\log(1+x)$ *ֆունկցիան և այն վերլուծել* x-*ի աստիճաններով։*

Այդ ժամանակ [109, 3)] *կունենանք՝*

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!^{*}}{(1+x)^k},$$

$$f(0)=0, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!,$$

որտեղից՝

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

6) Դիցուք, այժմ $f(x)=\operatorname{arctg} x$։ *Մենք այս ֆունկցիայի ածանցյալների արժեքներն* $x=0$ *կետում արդեն ունենք 111-ի, 4)-ում, այն է՝*

---

* 0!-*ի տակ մենք, ինչպես միշտ, հասկանում ենք* 1։

$$f^{(2m)}(0)=0, \quad f^{(2m-1)}(0)=(-1)^{m-1}(2m-2)!,$$

ուստի նրա վերլուծումը կներկայացվի այսպես՝

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{2m-1} + o(x^{2m})։$$

7) $f(x)=\operatorname{tg} x$ ֆունկցիայի համար Թեյլորի բանաձևի գործակիցները կազմելու օրենքը շատ բարդ է։ Բայց և այնպես, այդ վերլուծման սկզբի մի քանի անդամները գրելը դժվար չէ։ Քանի որ, օրինակ,

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}, \quad f''(x)=2\frac{\sin x}{\cos^3 x}, \quad f'''(x)=2\frac{1+2\sin^2 x}{\cos^4 x},$$

$$f^{IV}(x)=8\sin x\cdot\frac{2+\sin^2 x}{\cos^5 x},$$

ուստի՝

$$f(0)=0, \quad f'(0)=1, \quad f''(0)=0, \quad f'''(0)=2, \quad f^{IV}(0)=0,$$

այնպես որ՝

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)։$$

Օգտվելով հայտնի վերլուծումներից, կարելի է, արդեն ստացած արդյունքները հաշվելու, անմիջապես գրել նաև ավելի բարդ ֆունկցիաների վերլուծումները։ Օրինակ, նախորդ բանաձևը կարելի էր ստանալ sin x և cos x ֆունկցիաների վերածումներից։ Բերենք նոր օրինակներ, ընդ որում x-ի բոլոր աստիճանները, մինչև նշվածը ներառյալ, մենք ճշտությամբ հաշվի կառնենք, իսկ ավելի բարձր աստիճանները (առանց դրանք գրելու) անմիջապես կմտցնենք լրացուցիչ անդամի մեջ։

8) Գրել $e^{\sin x}$ ֆունկցիայի վերածումը մինչև x^3-ը։ 1)-ի շնորհիվ կարող ենք գրել՝

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + o(x^3)^*.$$

բայց ըստ 2)-ի ունենք՝

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4),$$

ուստի՝

---

* Պետք էր գրել $o(\sin^3 x)$, բայց, x և $\sin x$ անվերջ փոքրերի համարժեքության շնորհիվ, այդ նույնն է, ինչ որ $o(x^3)$-ը։

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

x^3 պարունակող անդամները կրճատվում են, և, վերջնականապես, ստացվում է

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

Նույն եղանակով ստացվում է՝

$$e^{\operatorname{tg} x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$

6) Գտնել $\log \cos x$ ֆունկցիայի վերլուծումը մինչև x^6 պարունակող անդամը: Համաձայն 5)-ի ունենք՝

$$\log \cos x = \log[1 + (\cos x - 1)] = (\cos x - 1) - \frac{1}{2}(\cos x - 1)^2 +$$

$$+ \frac{1}{3}(\cos x - 1)^3 + o(x^6)^*.$$

Ընդ որում. 3)-ի շնորհիվ,

$$\cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + o(x^7).$$

այստեղից՝

$$\log \cos x = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6\right) +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}\right)x^6 + o(x^6)$$

կամ, նման անդամները միացնելուց հետո, կստանանք՝

$$\log \cos x = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6).$$

Նույն եղանակով կստանանք՝

$$\log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$$

և

$$\log \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 - \frac{1}{2835}x^6 + o(x^6).$$

---

* Քանի որ $(1 - \cos x)$-ը և x^2-ին միևնույն կարգի են [61], ուստի $o((1 - \cos x)^3)$-ը միաժամանակ $o(x^6)$ է:

Բոլոր այս վերլուծությունները, որոնք ստացվեցին առանց Թեյլորի բանաձևի անմիջական օգտագործման, ինչպես, կարող էին ստացվել նաև այդ բանաձևով, և ընդ որում՝ ճիշտ նույն գործակիցներով, ֆունկցիայի այդպիսի վերլուծման՝ վերևում ապացուցված միակության շնորհիվ։

Դիտողություն։ Քանի որ այստեղ դիտարկված ֆունկցիաները $x=0$ կետի շրջակայքում ունեին բոլոր կարգի ածանցյալներ, ուստի n-ի ընտրության համար (11) բանաձևում ոչ մի սահմանափակում չկար, այսինքն՝ մենք կարող էինք այդ վերլուծումը շարունակել ընդհուպ մինչև x-ի ցանկացած աստիճանը։

124. ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԱՆԴԱՄԻ ԱՅԼ ՁԵՎԵՐ։ Թեյլորի բանաձևը Պեանոյի տված ձևով գրված լրացուցիչ անդամով ունի բազմապիսի կիրառություններ (տես հաջորդ գլուխը), սակայն այդ բոլորը, այսպես ասած, «լոկալ» (տեղային) բնույթի են, այսինքն՝ վերաբերում են հենց x_0 կետին։ Եթե դրանց մեջ երբեմն խոսվում է նաև x-ի այլ արժեքների մասին, ապա այդ արժեքները ենթադրվում են x_0-ին «բավականաչափ մոտ» գտնվող և նախապես կամավոր կերպով չեն կարող վերցվել։

Մինչդեռ բնական կլինի փորձել $p(x)$ բազմանդամն օգտագործել որպես $f(x)$ ֆունկցիայի այնպիսի մոտավորություն, հենց որի օգնությամբ այդ ֆունկցիան հնարավոր լինի հաշվել ցանկացած ճշգրտությամբ։ Որպեսզի $p(x)$ բազմանդամը պիտանի լինի այդպիսի նպատակի համար, անհրաժեշտ է, որ մենք հնարավորություն ունենանք տված x-ի համար հաշվել (7)-րդ տարբերությունը։ Այդ դեպքում Պեանոյի տված ձևը, որը բնորոշում է միայն այն, որ երբ $x\to 0$, $r(x)$-ը նույնպես ձգտում է զրոյի, այդ նպատակին ծառայել չի կարող։ Նա չի կարող որոշել, թե x-ի որ արժեքների համար, նախապես տրված ճշգրտությամբ, $p(x)$ բազմանդամը կարող է փոխարինել $f(x)$ ֆունկցիայով։ Նա ոչինչ չի ասում նաև այն մասին, թե, տված x-ի համար, ինչպես կարելի է n-ի մեծացման հաշվին ազդել $r(x)=r_n(x)$ լրացուցիչ անդամի մեծության վրա*, և այլն։

Այդ պատճառով, մենք կդիմենք $r_n(x)$ լրացուցիչ անդամի

* Պետք է հիշել, որ $r(x)$ լրացուցիչ անդամը, ընդհանրապես ասած, n-ից կախված է. այս հանգամանքը ընդգծելու համար անհրաժեշտ դեպքում մենք այն կնշանակենք $r_n(x)$-ով։

այլ ձևերի արտածմանը։ Որոշակիության համար կդիտարկենք x_0*-ից աջ ընկած* $[x_0, x_0+H]$ $(H>0)$ *միջակայքը և* $f(x)$ *ֆունկցիան կհամարենք որոշված այդ միջակայքում. այն դեպքը, երբ ֆունկցիան տրված է լինում* $[x_0-H, x_0]$ *միջակայքում, ուսումնասիրվում է նույն եղանակով։*

Այս անգամ անենք ավելի խիստ ենթադրություններ, այն է, ընդունենք, որ ամբողջ $[x_0, x_0+H]$ *միջակայքում գոյություն ունեն և անընդհատ են առաջին* n *ածանցյալները՝*

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots,\ f^{(n)}(x)$$

և, բացի այդ, առնվազն (x_0, x_0+H) *բաց միջակայքում գոյություն ունի ու վերջավոր է* $(n+1)$*-րդ կարգի* $f^{(n+1)}(x)$ *ածանցյալը։*

Նկատենք, որ (6)-ի և (7)-ի շնորհիվ՝

$$r_n(x)=f(x)-f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)-\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2-\ldots-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad (12)$$

Այժմ $[x_0, x_0+H]$ *միջակայքում ֆիքսենք ցանկացած* x *արժեք, և (12) բանաձևի ձախ մասի օրինակով, այնտեղ հաստատուն* x_0 *թիվը փոխարինելով* z *փոփոխականով, կազմենք մի նոր, օժանդակ, ֆունկցիա՝*

$$\varphi(z)=f(x)-f(z)-\frac{f'(z)}{1!}(x-z)-\frac{f''(z)}{2!}(x-z)^2-\ldots$$

$$\ldots-\frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n,$$

ընդ որում ընդունում ենք, որ z *անկախ փոփոխականը փոփոխվում է* $[x_0, x]$ *միջակայքում։ Այդ միջակայքում* $\varphi(z)$ *ֆունկցիան անընդհատ է և նրա ծայրակետերում ստանում է*

$$\varphi(x_0)=r_n(x),\ \varphi(x)=0$$

արժեքներ [տես (2)]։

Բացի այդ, (x_0, x) *միջակայքում գոյություն ունի նրա ածանցյալը՝*

$$\varphi'(z)=-f'(z)-\left[\frac{f''(z)}{1!}(x-z)-f'(z)\right]-$$
$$-\left[\frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2-\frac{f''(z)}{1!}(x-z)\right]-$$
$$-\left[\frac{f^{IV}(z)}{3!}(x-z)^3-\frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2\right]-\dots$$
$$\dots-\left[\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n-\frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1}\right]$$

կամ, պարզեցնելուց հետո՝

$$\varphi'(z)=-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n.$$

Այժմ վերցնենք կամավոր $\psi(z)$ ֆունկցիա, որը $[x_0, x]$ միջակայքում անընդհատ է և առնվազն (x_0, x) բաց միջակայքում ունի զրո չդարձող $\psi'(z)$ ածանցյալ։

$\varphi(z)$ և $\psi(z)$ ֆունկցիաների նկատմամբ կիրառենք Կոշիի բանաձևը [120]՝

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)}=\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)},$$

որտեղ՝

$$x_0<c<x \text{ կամ } c=x_0+\theta(x-x_0) \quad (0<\theta<1).$$

Քանի որ՝

$$\varphi(x)=0, \quad \varphi(x_0)=r_n(x), \quad \varphi'(c)=-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n,$$

ուստի՝

$$r_n(x)=\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(c)}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Հիմա, եթե $\psi(z)$-ի փոխարեն տեղադրենք գրած պայմաններին բավարարող զանազան ֆունկցիաներ, մենք կստանանք $r_n(x)$ լրացուցիչ անդամի զանազան ձևեր։

Դիցուք՝ $\psi(z)=(x-z)^p$, որտեղ $p>0$.

կունենանք՝

$$\psi'(z)=-p(x-z)^{p-1} \quad (x_0<z<x).$$

Ակներևաբար, այս ֆունկցիան բավարարում է առաջադրված պայմաններին, ուստի՝

$$r_n(x) = \frac{-(x-x_0)^p}{-p(x-c)^{p-1}} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!\,p}(x-c)^{n+1-p}(x-x_0)^p.$$

Դնենք որ $c = x_0+\theta(x-x_0)$, *ուստի* $x - c = x-x_0-\theta(x-x_0) = (1-\theta)(x-x_0)$, *և վերջնականապես կստանանք՝*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!\,p}\cdot(1-\theta)^{n+1-p}(x-x_0)^{n+1}$$

$$(0<\theta<1).$$

Այս արտահայտությունը կոչվում է լրացուցիչ անդամ՝ Շլյոմիլխի և Ռոշի (O. Schlömilch — Roche) *տրված ձևով։*

Սրանից, p-*ին տալով կոնկրետ արժեքներ, կարելի է ստանալ լրացուցիչ անդամի ավելի մասնակի ձևեր։ Ընդունելով* $p=n+1$, *կստանանք Լագրանժի տված ձևով լրացուցիչ անդամ*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (x_0 < c < x),$$

որն ունի առանձնապես պարզ տեսք։ Նա հիշեցնում է Թեյլորի բանաձևի հաջորդ հերթական անդամը, միայն թե, $(n+1)$-*րդ ածանցյալը փոխանակ* x_0 *կետում հաշվելու, այն վերցնում են մի որոշ* c *միջին* (x_0-*ի և* x-*ի միջև*) *արժեքի համար։*

Այսպիսով, Թեյլորի բանաձևը Լագրանժի տված ձևով լրացուցիչ անդամով ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\ &\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \\ &(x_0 \lessgtr c \lessgtr x). \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Եթե դրա մեջ $f(x_0)$ անդամը տեղափոխենք ձախ կողմը, ապա հեշտությամբ կարելի է նկատել, որ այս բանաձևը հանդիսանում է ուղղակի ընդհանրացումը վերջավոր աճերի բանաձևի [118], որը կարելի է գրել նաև այսպես՝

$$f(x)=f(x_0)+f'(c)\cdot(x-x_0),$$

Չնայած ամենից սիրով օգտվում են հենց Լագրանժի տված ձևով լրացուցիչ անդամից, նրա պարզության պատճառով, այնուամենայնիվ որոշ դեպքերում լրացուցիչ անդամը գնահատելու համար այդ ձևը դառնում է անպետք, և ստիպված են լինում դիմելու այլ ձևերի, որոնք այնքան էլ պարզ չեն։ Դրանցից այստեղ հիշենք Կոշիի տված ձևով լրացուցիչ անդամը, որն ստացվում է Շլյոմիլխի և Ռոշի տված ընդհանուր ձևից $p=1$ դեպքում, այն է՝

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1},$$

126. ՄՈՏԱՎՈՐ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐ։ Պարզության համար (13) բանաձևի մեջ ընդունենք $x_0=0$, իսկ c-ի փոխարեն գրենք θx, որտեղ $0<\theta<1$, կստանանք՝

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad (14)$$

Եթե այստեղ լրացուցիչ անդամը չգրենք, ապա կստանանք մոտավոր բանաձև՝

$$f(x)\doteq f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

որն ավելի բարդ բնույթի ֆունկցիան փոխարինում է բազմանդամով։ Բայց այս անգամ մենք ի վիճակի ենք այս բանաձևի սխալը գնահատել, որովհետև այն հավասար է (իր բացարձակ մեծությամբ) հենց գեն նետած անդամին։ Օրինակ, եթե $(n+1)$-րդ կարգի ածանցյալը (առնվազն այն ժամանակ, երբ արգումենտը փոփոխվում է 0-ի և x-ի միջև) իր բացարձակ մեծությամբ սահմանափակված է M թվով, ապա՝

$$|r_n(x)| < \frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!},$$

Օրինակների համար դիմենք տարրական ֆունկցիաներին։ Մենք կարիք չունենք կրկնելու n° 123-ում կատարված հաշվումները, միայն լրացուցիչ անդամը կգրենք նոր ձևով։

1) Ընդունենք $f(x)=e^x$*։ Մոտավոր բանաձևը կլինի՝*

$$e^x \doteq 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!},$$

քանի որ այստեղ լրացուցիչ անդամն է

$$r_n(x)=\frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

ուստի, օրինակ, երբ $x>0$, *սխալը գնահատվում է այսպես՝*

$$|r_n(x)|<e^x\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Մասնավոր դեպքում, երբ $x=1$

$$e \doteq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}, \quad |r_n(1)|<\frac{3}{(n+1)!}.$$

Նման բանաձևից մենք արդեն օգտվել ենք 37-ում e *թվի մոտավոր հաշվման համար, սակայն լրացուցիչ անդամի գնահատականը, որն ստացված էր այն ճանապարհով, այնտեղ ավելի ճշգրիտ էր։*

2) Վերցնելով $f(x)=\sin x$, *կստանանք՝*

$$\sin x \doteq x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!},$$

Այս դեպքում լրացուցիչ անդամն է՝

$$r_{2m}(x)=\frac{\sin\left(\Theta x+(2m+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2m+1)!}x^{2m+1}=$$

$$=(-1)^m\cos\Theta x\cdot\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

և սխալը գնահատվում է հեշտությամբ՝

$$|r_{2m}(x)| \leq \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

Մասնավորապես, եթե մենք բավարարվենք միայն մեկ անդամով և ընդունենք

$$\sin x \doteq x,$$

ապա, որպեսզի սխալը ավելի փոքր լինի, քան, ասենք թե 0,001-ը, բավական է վերցնել (ընդունելով $x \geq 0$)՝

$$\frac{x^3}{6} < 0{,}001 \quad \text{կամ} \quad x < 0{,}1817,$$

որը մոտավորապես հավասար է 10^0-ի։ Եթե օգտվենք երկանդամ բանաձևից՝

$$\sin x \doteq x - \frac{x^3}{6},$$

նույն ճշգրտությունն ստանալու համար արդեն բավական է վերցնել

$$\frac{x^5}{120} < 0{,}001 \quad \text{կամ՝} \quad x < 0{,}6544 \ (\doteq 37°{,}5).$$

Իսկ եթե սահմանափակվենք $x < 0{,}4129$ $(\doteq 23°{,}5)$ անկյուններով, ապա սխալը նույնիսկ $< 0{,}0001$-ից, և այլն։

Մենք տեսնում ենք, որ Թեյլորի բազմանդամի անդամների թիվը մեծացնելիս, նա ավելի մեծ ճշգրտությամբ և ավելի մեծ տարածության վրա է վերարտադրում տված $f(x)$ ֆունկցիան։ Այս փաստը ակնառու կերպով երևում է 52ա գծագրի վրա, որտեղ $y = \sin x$ ֆունկցիայի գրաֆիկի կողքին գծված են նաև

$$y = x, \quad y = x - \frac{x^6}{6}, \quad y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120},$$ և այլն ֆունկցիաների գրաֆիկները։

3) Նույն ձևով, $f(x) = \cos x$ ֆունկցիայի համար ունենք

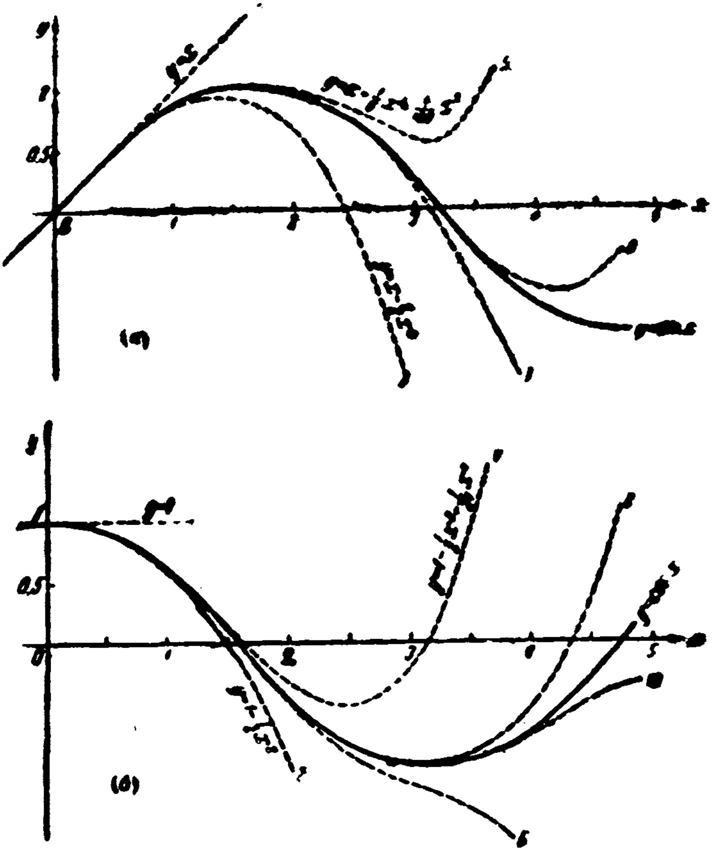
$$\cos x \doteq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

ընդ որում՝

$$r_{2m+1}(x) = (-1)^{m+1} \cos \theta x \cdot \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!},$$

այնպես որ՝

$$|r_{2m+1}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!},$$



Գծ. 52.

Օրինակ.

$$\cos x \doteq 1 - \frac{x^2}{2}$$

բանաձևի համար

$$|r_3(x)| \leqslant \frac{x^4}{24},$$

և սխալը անշուշտ փոքր կլինի, անգամ, 0,0001-ից, երբ $x < 0{,}2213$ *(≐13°), և այլն: 52-ը գծագրի վրա համեմատության համար ներկայացված են* $y = \cos x$ *ֆունկցիայի և*

$$y = 1, \quad y = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad y = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24},$$ *և այլն հաջորդական բազմանդամների գրաֆիկները:*

Մենք ընթերցողի ուշադրությունը հրավիրում ենք այն հանգամանքի վրա, որը կատարված է n° n° 62, 63, 106-*ում արված բանաձևերի համեմատությամբ.* այժմ մենք արդեն կարող ենք որոշել կատարված սխալի սահմանները և մեր ձեռքի տակ ունենք ցանկացած ճշգրտությամբ բանաձևեր:

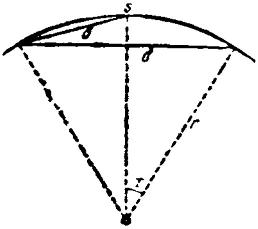
Նշենք նաև, որ Թեյլորի բանաձևը օգտակար է հանդիսանում նաև բոլորովին այլ տիպի մոտավոր բանաձևերի կառուցման համար:

4) Օրինակի համար կանգ առնենք Հյույգենսի (Ch. Huygens) *բանաձևի վրա՝ շառավղի համեմատությամբ փոքր շրջանագծային աղեղի մոտավոր ուղղման համար:*

Դիցուք աղեղի երկարությունը՝ s *է, համապատասխան լարի երկարությունը՝* d, *իսկ աղեղի կեսին համապատասխանող լարը՝* δ *(գծ. 53.): Մեր առաջ խնդիր ենք դնում՝* s*-ը հնարավորին չափ ճշգրիտ ներկայացնել հետևյալ մոտավոր բանաձևով՝*

$$s \doteq Ad + B\delta,$$

որտեղ A*-ն և* B*-ն որոշման ենթակա գործակիցներն են:*



Գծ. 53.

Եթե շրջանագծի շառավիղը r *է, իսկ* s *աղեղին համապատասխանող կենտրոնական անկյունը՝* 2x, *ապա կունենանք՝*

$$d = 2r \cdot \sin x = 2r\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{\Theta'}{120}x^5\right) \quad (0 < \Theta' < 1)$$

և, նույն ձևով, x*-ը փոխարինելով* $\frac{x}{2}$*-ով*

$$\delta = 2r \cdot \sin\frac{x}{2} = 2r\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{48}x^3 + \frac{\Theta''}{3840}x^5\right) \quad (0 < \Theta'' < 1).$$

Այստեղից՝

$$Ad + B\delta = 2r\left[\left(A + \frac{1}{2}B\right).x - \left(\frac{1}{6}A + \frac{1}{48}B\right).x^3 + \left(\frac{\Theta'}{120}A + \frac{\Theta''}{3840}B\right).x^5\right],$$

մինչդեռ $s = 2r\,x$։ *Բնականաբար պետք է* A *և* B *գործակիցները ընտրել այնպես, որպեսզի լինի*

$$A + \frac{1}{2}B = 1, \quad \frac{1}{6}A + \frac{1}{48}B = 0,$$

որովհետև այդ ժամանակ դիտարկվող բանաձևի ձախ և աջ մասերի տարբերությունը կլինի միայն x^5 *պարունակող անդամների մեջ։* A *և* B *գործակիցների համար կստանանք՝* $A = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{8}{3}$ *արժեքները, և բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$s = \frac{8\delta - d}{3} = 2\delta + \frac{2\delta - d}{3},$$

Դրա Δ *սխալը, ինչպես հեշտ է տեսնել, գնահատվում է այսպես՝*

$$|\Delta| < r \cdot \frac{x^5}{180},$$

Օրինակ, երբ կենտրոնական անկյունը 30° է, այսինքն՝ $x = \frac{\pi}{12}$, *համաձայն վերոհիշյալ գնահատականի, կունենանք՝* $|\Delta| < r\ 0.000007$, *իրականում* $s = r\,.\,523599\ldots$, *իսկ Հյույգենսի բանաձևով ստացվում է՝* $s = r \cdot 0{,}523593\ldots$, *այնպես որ, տարբերությունը չի գերազանցում նշված սահմանը։*

5) Նույն նպատակի համար Գ. Լ. Չեբիշևը տվել է հետևյալ կանոնը. աղեղը մոտավորապես հավասար է այն հավասարասրուն եռանկյան հավասար կողմերի գումարին, որը կառուցված է լարի վրա և որի բարձրությունը հավասար է սլաքի $\sqrt{\frac{4}{3}}$-ին։

Ընթերցողին առաջարկվում է ապացուցել, թե ինչով է պատճառաբանված $\sqrt{\frac{4}{3}}$ *գործակցի առկայությունը։*

Լրացուցիչ անգամ Թեյլորի բանաձևին մենք կվերադառնանք XI գլխում (երկրորդ հատոր), որը հատկացված է անվերջ շարքերին, որտեղ այդ բանաձևը կխաղա շատ կարևոր դեր։ Հենց նույն տեղում կբերվեն մոտավոր հաշվումների նկատմամբ շարքերի կիրառությունների բազմաթիվ օրինակներ, որոնք հաճախ, ըստ էության, հանդիսանում են Թեյլորի բանաձևի կիրառություններ։

ՉՈՐՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄՆ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ

§ 1. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՓՈՓՈԽՄԱՆ ԸՆԹԱՑՔԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

126. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԼԻՆԵԼՈՒ ՊԱՅՄԱՆԸ։ *Ֆունկցիայի փոփոխման ընթացքն ուսումնասիրելիս առաջին հերթին հարց է ծագում այն պայմանների մասին, որոնց առկայության դեպքում ֆունկցիան տվյալ միջակայքում պահպանում է հաստատուն արժեք կամ փոփոխվում է մոնոտոն* [57]։

1-ԻՆ ԹԵՈՐԵՄԱ. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է ու անընդհատ $[a, b]$ փակ միջակայքում և առնվազն (a, b) բաց միջակայքում ունի վերջավոր $f'(x)$ ածանցյալ։ Որպեսզի $f(x)$-ը $[a, b]$ միջակայքում լինի հաստատուն, անհրաժեշտ է ու բավարար հետևյալ պայմանը՝

$$f'(x)=0 \qquad (a, b)\text{-ում գտնվող } x\text{-երի համար։}$$

Պայմանի անհրաժեշտությունն ակնհայտ է՝ $f(x)=\mathrm{const}$ *պայմանից հետևում է* $f'(x)=0$։

Այժմ ապացուցենք հակադարձը։

Բավարարությունը։ Ենթադրենք, որ (a, b)*-ում տեղի ունի* $f'(x)=0$ *հավասարությունը։ Վերցնելով կամավոր* x, $a<x\leq b$, *դիտարկենք* $[a, x]$ *միջակայքը. այնտեղ* $f(x)$ *ֆունկցիայի համար տեղի ունեն Լագրանժի թեորեմայի* [118] *բոլոր պայմանները, հետևապես, կարելի է գրել՝*

$$f(x)-f(a)=f'(c)\cdot(x-a) \qquad (a<c<x)։$$

Սակայն, ըստ ենթադրության, $f'(c)=0$, ուրեմն բոլոր x-երի համար ունենք՝

$$f(x)=f(a)=\text{const}$$

և մեր թեորեմն ապացուցված է։

Ինտեգրալ հաշվի մեջ կարևոր կիրառություն ունի այստեղից ստացվող հետևյալ պարզ հետևանքը։

ՀԵՏԵՎԱՆՔ։ Եթե $f(x)$ և $g(x)$ երկու ֆունկցիաները որոշված են ու անընդհատ $[a, b]$ միջակայքում և (a, b) միջակայքում ունեն $f'(x)$, $g'(x)$ վերջավոր ածանցյալներ, ընդ որում

$$f'(x)=g'(x) \qquad (a<x<b),$$

ապա այդ ֆունկցիաները ամբողջ $[a, b]$ միջակայքում իրարից կտարբերվեն միայն հաստատունով՝

$$f(x)=g(x)+c \qquad (c=\text{const}).$$

Ապացուցելու համար բավական է վերոհիշյալ թեորեմն կիրառել $f(x)-g(x)$ տարբերության նկատմամբ. Քանի որ սրա $f'(x)-g'(x)$ ածանցյալը (a, b)-ում դառնում է զրո, ուստի ինքը տարբերությունը կլինի հաստատուն,

Այս թեորեմայից օգտվելու առանձնահատկությունները պարզենք օրինակներով:

1) Դիտարկենք երկու ֆունկցիաներ՝

$$\operatorname{arctg} x \text{ և } \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (-\infty<x<+\infty).$$

Գտնենք, որ սրանցից երկրորդի ածանցյալը՝

$$\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}$$

համընկնում է առաջին ֆունկցիայի ածանցյալի հետ. ուստի այդ ֆունկցիաները ցանկացած վերջավոր միջակայքում, և ուրեմն, նաև ամբողջ $-\infty$-ից մինչև $+\infty$ միջակայքում, իրարից տարբերվում են հաստատունով՝

$$\operatorname{arctg} x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

Այդ հաստատունի արժեքը որոշելու համար կարելի է, օրինակ, արգումենտ ընդունել $x=0$, քանի որ այդ արժեքի համար արկտանգենսը և արկսինուսը երկուսն էլ դառնում են 0, ուստի նաև C-ն պետք է լինի զրո։ Այսպիսով մենք ապացուցեցինք հետևյալ նույնությունը՝

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

որն, ի միջի այլոց, 50-ում ստացվել էր տարրական դատողություններից։

2) Առաջարկվում է, նույն ձևով, ապացուցել, որ

$$\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1)։$$

3) Այժմ դիտարկենք

$$\operatorname{arctg} x \text{ և } \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$$

ֆունկցիաները։ Հեշտ է ստուգել, որ սրանց ածանցյալները համընկնում են բոլոր x կետերում, բացառությամբ $x=\pm 1$) արժեքներից (որտեղ ֆունկցիաներից երկրորդը կորցնում է իր իմաստը)։ Այդ պատճառով

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

նույնությունը համարվում է ապացուցված միայն

$$(-1, +1), (-\infty, -1), (+1, +\infty)$$

միջակայքերից յուրաքանչյուրի համար առանձին վերցրած։ Հետաքրքրական է, որ նաև C հաստատունի արժեքները այդ միջակայքերում կլինեն տարբեր։ Դրանցից առաջինի համար $C=0$ (որում համոզվում ենք՝ ընդունելով $x=0$), իսկ մնացած երկուսի համար, համապատասխանաբար, կունենանք $C=\frac{\pi}{2}$ կամ $C=-\frac{\pi}{2}$ (որ հեշտ է տեսնել, եթե, օրինակ, ընդունենք որ x-ը ձգտում է $-\infty$ կամ $+\infty$)։

Այս բոլոր առնչությունները նույնպես կարելի է ապացուցել տարրական եղանակով։

Դիտողություն։ 1-ին թեորեմայի նշանակությունը երևան է գալիս առանձնապես հետազոտությունների ժամանակ և ընդհանրապես այն դեպքերում, երբ ֆունկցիան տրված է այնպես, որ նրա որոշումից անմիջապես չի հետևում, որ նա պահպանում է հաստատուն արժեք։ Այսպիսի դեպքեր հետագայում մեզ շատ կպատահեն։

127. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՄՈՆՈՏՈՆՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆԸ։ *Այժմ պարզենք, թե ինչպես ֆունկցիայի ածանցյալի միջոցով կարելի է դատել իր՝ ֆունկցիայի աճման (նվազման) մասին տվյալ միջակայքում։ Նախ կանգ առնենք այն դեպքի վրա, երբ ֆունկցիան մոնոտոն աճում է լայն իմաստով, այսինքն՝ չի նվազում (կամ մոնոտոն նվազում է լայն իմաստով, այսինքն՝ չի աճում)* [57]։

2-ՐԴ ԹԵՈՐԵՄԱ: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է ու անընդհատ $[a, b]$ փակ միջակայքում և, առնվազն (a, b) բաց միջակայքում, ունի վերջավոր ածանցյալ: Որպեսզի $f(x)$-ը $[a, b]$-ում լինի լայն իմաստով մոնոտոն աճող (նվազող), անհրաժեշտ է ու բավարար, որ (a, b)-ում գտնվող x-երի համար տեղի ունենա

$$f'(x) \geq 0 \; (\leq 0)$$

պայմանը*:

Անհրաժեշտությունը։ Եթե $f(x)$*-ը մոնոտոն աճում է, թեկուզ և լայն իմաստով, ապա, վերցնելով* a*-ի և* b*-ի միջև գտնվող որևէ* x *և նրան տալով* $\Delta x > 0$ *աճ, կունենանք՝*

$$f(x+\Delta x) \geq f(x), \quad \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0$$

և, երբ $\Delta x \to 0$, *սահմանում կստանանք* $f'(x) \geq 0$։

Բավարարությունը։ Դիցուք, այժմ, հակադարձաբար, տված է, որ (a, b)*-ում* $f'(x) \geq 0$։ $[a, b]$ *միջակայքից վերցնենք երկու* x' *և* x'' $(x' < x'')$ *արժեքներ և* $[x', x'']$ *միջակայքում* $f(x)$ *ֆունկցիայի նկատմամբ կիրառենք Լագրանժի բանաձևը՝*

$$f(x'')-f(x') = f'(c)\cdot(x''-x') \qquad (x' < c < x'')։$$

Քանի որ $f'(c) \geq 0$, *ուստի՝*

$$f(x'') \geq f(x'),$$

և $f(x)$ *ֆունկցիան կլինի աճող, առնվազն լայն իմաստով։*

Մինչև հիմա $f(x)$ *ֆունկցիայի համար չէր բացառված մի քանի միջակայքերում հաստատուն արժեք պահպանելու*

---

* *Չնայած աճող և նվազող ֆունկցիաների համար թեորեմները ձևակերպում ենք զուգահեռաբար, սակայն ապացույցի ժամանակ կսահմանափակվենք միայն աճման դեպքով։*

հնարավորությունը, իսկ նրա ածանցյալների համար՝ այդ մի-միջակայքերում նույնպես զրո դառնալը։ Եթե մենք այդ հնարավորությունը բացառենք, ապա կգանք նեղ իմաստով աճելու (կամ նվազելու) դեպքին։

3-ՐԴ ԹԵՈՐԵՄԱ: $f(x)$ **ֆունկցիայի անընդհատության և նրա** $f'(x)$ **ածանցյալի գոյության վերաբերյալ միևնույն ենթադրությունների դեպքում, որպեսզի** $f(x)$**-ը լինի մոնոտոն աճող (նվազող), անհրաժեշտ են ու բավարար հետևյալ պայմանները՝**

1) (a, b)-ի ներսը գտնվող x-երի համար $f'(x) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$.

2) $f'(x)$-ը նույնաբար զրո չի դառնում, (a, b)-ի մասը կազմող, ոչ մի միջակայքում:

Անհրաժեշտությունը։ Եթե $f(x)$*-ը* $[a, b]$ *միջակայքում աճում է, ապա ըստ 2-րդ թեորեմայի, կունենանք* $f'(x) \geqslant 0$*, ուստի 1-ին պայմանը տեղի ունի։ Տեղի ունի նաև 2)-րդ պայմանը, որովհետև, եթե ածանցյալը զրո դառնար որևէ միջակայքում ամբողջությամբ, ապա, ըստ 1-ին թեորեմայի, այդտեղ* $f(x)$*-ը կլիներ հաստատուն, որը կհակասեր աճման ենթադրությանը։*

Բավարարությունը։ Դիցուք տեղի ունեն թեորեմայի 1) և 2) պայմանները։ Այդ ժամանակ, 2-րդ թեորեմայի շնորհիվ, $f(x)$ *ֆունկցիան կլինի, համենայն դեպս, չնվազող։ Եթե* $[a, b]$ *միջակայքում վերցնենք երկու* x' *և* x'' $(x' < x'')$ *արժեքներ, ապա ոչ միայն կունենանք՝*

$$f(x') \leqslant f(x''), \tag{1}$$

այլև՝

$$f(x') \leqslant f(x) \leqslant f(x'') \tag{2}$$

$[x', x'']$ *միջակայքի ներսը գտնվող* x*-երի համար։*

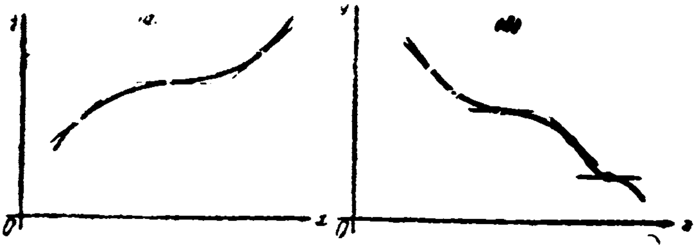
Ապացուցենք, որ (1) արտահայտության մեջ հավասարության նշանը լինել չի կարող։ Եթե լիներ $f(x') = f(x'')$*, ապա, (2)-ի շնորհիվ, կստանայինք*

$$f(x') = f(x) = f(x'')$$

հավասարությունները $[x', x'']$ *միջակայքի ներսը գտնվող* x*-երի համար, այսինքն՝* $f(x)$ *ֆունկցիան հաստատուն կլիներ* $[x', x'']$ *միջակայքում և մենք կունենայինք նաև այդ ամբողջ միջակայքում* $f'(x)=0$*, որը կհակասեր 2)-րդ պայմանին։ Հետևաբար՝*

$$f(x')<f(x''), \text{ երբ } x'<x'',$$

այսինքն՝ $f(x)$ ֆունկցիան, խիստ իմաստով, աճում է։ Այսպիսով թեորեմն ապացուցված է։



Գծ. 54.

Ածանցյալի նշանի և ֆունկցիայի փոփոխման ուղղության միջև ստացված կապը երկրաչափորեն միանգամայն ակներև կլինի, եթե վերհիշենք [90, 91], որ ածանցյալն իրենից ներկայացնում է ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողի անկյունային գործակիցը։ Այդ անկյունային գործակցի նշանը ցույց է տալիս, թե շոշափողն ուղղված է դեպի վերև, թե՞ դեպի ներքև, և դրա հետ միասին նաև ինքը կորը գնում է դեպի վերև, թե՞ դեպի ներքև (գծ. 54)։

Սակայն առանձին կետերում շոշափողը կարող է լինել նաև հորիզոնական, այսինքն, նույնիսկ խիստ իմաստով, աճող, (նվազող) ֆունկցիայի ածանցյալը կարող է x-ի առանձին արժեքների համար զրո դառնալ։

Օրինակներ. 1) Վերջին դեպքին վերաբերող պարզագույն օրինակ կարող է հանդիսանալ $f(x)=x^3$ ֆունկցիան. չնայած նա աճում է, բայց և այնպես նրա $f'(x)=3x^2$ ածանցյալը $x=0$ արժեքի համար դառնում է զրո։

2) Նմանապես, աճող կլինի նաև

$$f(x)=x-\sin x$$

ֆունկցիան, որովհետև նրա

$$f'(x)=1-\cos x$$

ածանցյալը բացասական չէ, զրո դառնալով $x=k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ արժեքների դեպքում։

3) Վերջապես, որպեսզի ցույց տանք, որ աճող ֆունկցիայի համար

ածանցյալը կարող է ն ո ւ յ ն ի ս կ վերջավոր միջակայքում ա ն վ ե ր ջ բ ա զ մ ու թ յ ա մ բ անգամ զրո դառնալ, դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան՝

$$\begin{cases} f(x)=e^{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}, \text{ երբ } x>0, \\ f(0)=0. \end{cases}$$

Ակներևաբար՝

$$\lim_{x\to+0} f(x)=0,$$

այնպես որ վերցված ֆունկցիան անընդհատ է նաև $x=0$ կետում. Երբ $x>0$՝

$$f'(x)=e^{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}\cdot\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}\geq 0,$$

ընդ որում այդ ածանցյալը զրո է դառնում $x=\frac{1}{2k\pi}$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$ կետերում,

Նկատենք, որ՝

$$0\leq f'(x)<2e\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}}\to 0, \text{ երբ } x\to+0.$$

այստեղից [119] նաև $f'(0)=0$.

Կարելի է կառուցել աճող (նվազող) ֆունկցիաների այնպիսի օրինակներ, որոնց համար, այն կետերը, որտեղ ածանցյալը դառնում է զրո, բաշխված լինեն էլ ավելի բարդ ձևով։ Սակայն այդպիսի դեպքերը հազվադեպ են, և գործնական նպատակների համար սովորաբար օգտվում են հետևյալ բ ա վ ա ր ա ր հ ա յ տ ա ն ի շ ի ց՝ եթե ամենուրեք, բացառությամբ թերևս x-ի միայն վերջավոր թվով արժեքներից, $f'(x)>0$ (<0), ապա $f(x)$ ֆունկցիան կլինի աճող (նվազող)։

Այստեղից բխում է կարևոր հետևանք.

ՀԵՏԵՎԱՆՔ: Դիցուք $f(x)$ ու $g(x)$ երկու ֆունկցիաները որոշված են ու անընդհատ $[a, b]$ միջակայքում և (a, b) միջակայքում ունեն $f'(x)$, $g'(x)$ վերջավոր ածանցյալներ: Եթե՝

$$f(a)=g(a) \text{ և } f'(x)>g'(x) \qquad (a, b)\text{-ում},$$

ապա նաև՝

$$f(x) > g(x), \quad [a, b]\text{-ում։}$$

$f(x)-g(x)$ ֆունկցիան (a, b)-ում ունի դրական ածանցյալ, հետևաբար աճող է և, մասնավոր դեպքում, $x>a$ համար կունենանք՝

$$f(x)-g(x)>f(a)-g(a)=0,$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։

Վերջինս կիրառենք մի քանի անհավասարությունների ապացուցման համար։

Օրինակներ։ 4) Քանի որ $f(x)=\cos x$ և $g(x)=1-\frac{1}{2}x^2$ ֆունկցիաները երկուսն էլ դառնում են 1, երբ $x=0$, իսկ նրանց ածանցյալների համար $0<x$ դեպքում տեղի ունի

$$f'(x)=-\sin x>g'(x)=-x \quad (\text{որովհետև } \sin x<x)$$

անհավասարությունը, ուստի $0<x$ դեպքում ունենք նաև

$$\cos x>1-\frac{1}{2}x^2.$$

Այստեղից նույն եղանակով կունենանք՝

$$\sin x>x-\frac{1}{6}x^3,$$

և այլն։

5) Ապացուցել, որ $0<x<\frac{\pi}{2}$ դեպքում կլինի

$$\operatorname{tg} x>x+\frac{1}{3}x^3.$$

Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ՝

$$(\operatorname{tg} x)'=\sec^2 x>1+x^2$$

կամ՝

$$\sec^2 x-1=\operatorname{tg}^2 x>x^2, \quad \operatorname{tg} x>x.$$

իսկ վերջին անհավասարությունը լավ հայտնի է [54 9)]։

6) Դիցուք $f(x)=x^{\alpha}-\alpha x$, երբ $x>0$ (որտեղ $0<\alpha<1$)։ Քանի որ ածանցյալի համար ունենք՝

$$f'(x)=\alpha(x^{\alpha-1}-1)\begin{cases} >0, & \text{երբ } 0<x<1, \\ <0, & \text{երբ } x>1, \end{cases}$$

ուստի $f(x)$ ֆունկցիան աճում է, քանի դեռ x-ը փոփոխվում է $[0,1]$ միջակայքում և նվազում է $[1,+\infty)$ միջակայքում։ Այստեղից պարզ է, որ $f(1)=1-\alpha$ մեծությունը կլինի ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը, ուստի $0<x$ դեպքում կունենանք՝

$$x^{\alpha}-\alpha x\leqslant 1-\alpha.$$

Այս անհավասարությունը կարելի է տալ այլ տեսք, որը կիրառությունների համար ավելի հարմար է։ Ընդունենք $\alpha=\frac{1}{p}$, որտեղ $p>1$, այնպես որ $1-\alpha=\frac{1}{q}$, որտեղ նաև $q=\frac{p}{p-1}>1$, ակնհայտորեն $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$։ x-ի փոխարեն տեղադրենք $\frac{a^p}{b^q}$, a-ի և b-ի տակ հասկանալով կամավոր դրական թվեր։ Այդ ժամանակ կստանանք՝

$$\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{1}{p}\cdot\frac{a^p}{b^q}+\frac{1}{q},$$

կամ, բազմապատկելով $b^{1+\frac{q}{p}}=b^q$-ով, վերջնականապես կստանանք՝

$$ab\leqslant\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q \tag{3}$$

$$\left(a>0,\ b>0,\ p>0,\ q>0,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)։$$

Հետագայում (երկրորդ հատորում) այս անհավասարությունից մենք կստանանք էլի մի շարք կարևոր անհավասարություններ։

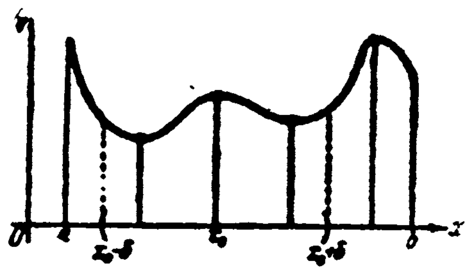
128. ՄԱՔՍԻՄՈՒՄՆԵՐ ԵՎ ՄԻՆԻՄՈՒՄՆԵՐ. ԱՆՀՐԱԺԵՇՏ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐ։ Եթե $[a, b]$ միջակայքում որոշված ու անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիան այդտեղ մոնոտոն չէ, ապա կգտնվեն $[a, b]$ միջակայքի այնպիսի $[\alpha, \beta]$ մասեր, որտեղ մեծագույն և փոքրագույն արժեքները ֆունկցիան կստանա ներքին կետում, այսինքն α-ի և β-ի միջև։ Ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա [գծ. 55] այդպիսի միջակայքերին համապատասխանում են յուրահատուկ ուռուցքներ կամ փոսեր։

Ասում են, որ $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում ունի *մաքսիմում* (*կամ մինիմում*)*, եթե այդ կետը կարելի է շրջապատել ֆունկցիայի որոշման միջակայքում գտնվող այնպիսի $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ շրջակայքով, որ այնտեղ գտնվող բոլոր x կետերի համար տեղի ունենա

$$f(x)\leqslant f(x_0) \quad (\text{կամ } f(x)\geqslant f(x_0))$$

անհավասարությունը։

Այլ խոսքով, x_0 կետը $f(x)$ ֆունկցիային տալիս է մաքսիմում



Գծ. 55.

(մինիմում), եթե $f(x_0)$ արժեքը հանդիսանում է այդ կետի մի որոշ (թեկուզ և փոքր) շրջակայքում ֆունկցիայի ստացած արժեքներից մեծագույնը (փոքրագույնը)։ Նկատենք, որ մաքսիմումի (մինիմումի) սահմանումն ինքը ենթադրում է, որ ֆունկցիան որոշված է x_0 կետի երկու կողմում։

Եթե գոյություն ունի այնպիսի շրջակայք, որի սահմաններում (երբ $x\neq x_0$) տեղի ունի

$$f(x)<f(x_0) \quad (\text{կամ } f(x)>f(x_0))$$

խիստ անհավասարությունը, ապա ասում են, որ ֆունկցիան x_0 կետում ունի *իսկական մաքսիմում* (*մինիմում*), հակառակ դեպքում՝ *ոչ իսկական*։

Եթե ֆունկցիան x_0 և x_1 կետերում մաքսիմումներ ունի, ապա $[x_0, x_1]$ միջակայքի նկատմամբ կիրառելով Վայերշտրասի 2-րդ թեորեմն [84], կտեսնենք, որ այդ միջակայքում

* Լատիներեն maximum և minimum բառերը նշանակում են «մեծագույն» և «փոքրագույն» (արժեքներ)։

ֆունկցիան իր փոքրագույն արժեքին հասնում է x_0-ի և x_1-ի միջև գտնվող մի x_2 կետում և այդտեղ նա ունի մ ի ն ի մ ո ւ մ: Նույն ձևով, երկու մինիմումների միջև անպայման կգտնվի մաքսիմում: Այն պարզագույն (և պրակտիկայում կարևորագույն) դեպքում, երբ ֆունկցիան ընդհանրապես ունի միայն վերջավոր թվով մաքսիմումներ ու մինիմումներ, դրանք ուղղակի իրար հաջորդում են:

Նկատենք, որ մաքսիմումն ու մինիմումը նշանակելու համար գոյություն ունի նաև դրանք միասին արտահայտող տերմին՝ է ք ս տ ր ե մ ո ւ մ:*

Խնդիր դնենք՝ գտնել արգումենտի բոլոր այն արժեքները, որոնք ֆունկցիային տալիս են էքստրեմում: Այս խնդիրը լուծելիս հիմնական դեր է խաղալու ածանցյալը:

Նախ ենթադրենք, որ (a, b) միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի վերջավոր ածանցյալ: Եթե x_0 կետում ֆունկցիան ունի էքստրեմում, ապա Ֆերմայի թեորեմն [115] կիրառելով $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ միջակայքի նկատմամբ, որի մասին վերևում խոսեցինք, կստանանք $f'(x_0)=0$. Հենց դրանում է կայանում էքստրեմումի ա ն հ ր ա ժ ե շ տ պ ա յ մ ա ն ը: էքստրեմում պետք է որոնել միայն այն կետերում, որտեղ ածանցյալը հավասար է զրոյի. այդպիսի կետերը կանվանենք ս տ ա ց ի ո ն ա ր կետեր**:

Սակայն կարիք չկա կարծելու, որ ամեն մի ստացիոնար կետ ֆունկցիային տալիս է էքստրեմում. վերևում նշված անհրաժեշտ պայմանը չի հանդիսանում բավարար պայման: Օրինակ, 127-ի 1)ում, մենք տեսանք, որ x^3 ֆունկցիայի համար $3x^2$ ածանցյալը դառնում է զրո $x=0$ կետում, սակայն այդ կետում ֆունկցիան էքստրեմում չունի, նա միշտ աճում է:

Եթե ընդարձակենք դիտարկվող $f(x)$ ֆունկցիաների դասը և ընդունենք, որ առանձին կետերում ածանցյալը հավասար է անվերջության կամ բոլորովին գոյություն չունի, ապա չի բացառվում այն հնարավորությունը, որ էքստրեմում կարող է ստացվել այդպիսի կետերից որևէ մեկում (չէ՞ որ Ֆ ե ր մ ա յ ի

---

* Լատիներեն extrèmum նշանակում է «ծայրագույն» (արժեք):

** Այդ կետերում ֆունկցիայի փոփոխությունը կարծես թե «կանգ է առնում», այդ փոփոխության արագությունը [91] դառնում է զրո:

Թեորեման ապացուցում է $f'(x)=0$ հավասարությունը միմիայն այն պայմանով, որ պետք է գոյություն ունենա վերջավոր ածանցյալ)։ Օրինակ, $x^{\frac{2}{3}}$ ֆունկցիան, ակներևաբար մինիմում ունի $x=0$ կետում, այնինչ այդ կետում նրա ածանցյալը հավասար է ∞ [100]։ Ճիշտ նույն կերպ $x=0$ կետում $|x|$ ֆունկցիան ունի մինիմում, չնայած այդ կետում նրա համար ածանցյալ բոլորովին գոյություն չունի [99]։ Հետևապես, նաև այն կետերը, որտեղ ածանցյալը անվերջ մեծ է կամ գոյություն չունի, նույնպես կարող են ֆունկցիային տալ էքստրեմում։ Սակայն, հասկանալի է, որ այդ դեպքում ևս միմիայն ածանցյալի գոյություն չունենալը կամ նրա անվերջություն դառնալը դեռևս չի ապահովում էքստրեմումի առկայությունը։ Որպես օրինակներ կարող են ծառայել $y=x^{\frac{1}{3}}$ և $y=x\sin\frac{1}{x}$ ($y=0$ երբ $x=0$ լրացուցիչ պայմանով) ֆունկցիաները։ Դրանցից առաջինը $x=0$ կետում ունի անվերջ մեծ ածանցյալ [100], իսկ երկրորդը նույն կետում բոլորովին ածանցյալ չունի [101, 1°], սակայն $x=0$ կետը ոչ մեկ և ոչ էլ մյուս ֆունկցիային էքստրեմում չի տալիս (որովհետև նրա կամավոր շրջակայքում երկու ֆունկցիաներն էլ ստանում են և՛ դրական և՛ բացասական արժեքներ)։

129. ԲԱՎԱՐԱՐ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐ։ ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՆՈՆ։ *Այսպիսով, եթե x_0 կետը ստացիոնար կետ է $f(x)$ ֆունկցիայի համար կամ եթե այդ կետում ֆունկցիայի համար գոյություն չունի վերջավոր ածանցյալ, ապա x_0 կետը հանդիսանում է, այսպես ասած, միայն «կասկածելի» կետ էքստրեմումի համար և ենթակա է հետագա ստուգման։ Այդ՝ էքստրեմումի գոյության այն բավարար պայմանների ստուգումն է, որոնք մենք հիմա կստանանք։*

Ենթադրենք, թե x_0 կետի մի որոշ $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ շրջակայքում (գոնե $x\neq x_0$ համար) գոյություն ունի $f'(x)$ վերջավոր ածանցյալ և, ինչպես x_0-ից ձախ, նույնպես և x_0-ից աջ (առանձին-առանձին) այդ ածանցյալը պահպանում է որոշակի նշան։ Այդ ժամանակ հնարավոր են հետևյալ երեք դեպքերը՝

I. $f'(x)>0$, *երբ* $x<x_0$, *և* $f'(x)<0$, *երբ* $x>x_0$. *այսինքն՝* x_0 կետով անցնելիս $f'(x)$ ածանցյալը նշանը փոխում է դրականից

բացասականի: *Այս դեպքում* $[x_0-\delta, x_0]$ *միջակայքում* $f(x)$ *ֆունկցիան աճում է, իսկ* $[x_0, x_0+\delta]$ *միջակայքում՝ նվազում* [127], *այնպես որ* $f(x_0)$ *արժեքը կլինի մեծագույնը* $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ *միջակայքում, այսինքն՝* x_0 *կետում ֆունկցիան ունի մ ա ք ս ի մ ո ւ մ:*

II. $f'(x)<0$, *երբ* $x<x_0$, *և* $f'(x)>0$, *երբ* $x>x_0$, *այսինքն՝* x_0 կետով անցնելիս $f'(x)$ ածանցյալը նշանը փոխում է բացասականից դրականի: *Այս դեպքում նույն ձևով համոզվում ենք, որ* x_0 *կետում ֆունկցիան ունի մ ի ն ի մ ո ւ մ:*

III. $f'(x)>0$ *ինչպես* $x_0<x$, *նույնպես և* $x_0>x$, *արժեքների համար, կամ թե՝* $f'(x)<0$ *այդ բոլոր արժեքների համար, այսինքն՝* x_0 կետով անցնելիս $f'(x)$-ը նշանը չի փոխում: *Այդ ժամանակ ֆունկցիան կամ միշտ աճում է, կամ միշտ նվազում.* x_0 *կետի ցանկացած մոտակայքում մի կողմից կգտնվեն այնպիսի* x *կետեր, որտեղ* $f(x)<f(x_0)$, *իսկ մյուս կողմից՝* x *կետեր, որտեղ* $f(x)>f(x_0)$, *այնպես որ՝* x_0 *կետում ոչ մի է ք ս տ ր ե մ ո ւ մ չկա:*

Պարզագույն հնարավորությունների գրաֆիկական պատկերացումը տրված է 56 ա, բ, գ գծագրերի վրա [(գ) դեպքում $f'(x_0)$ *գոյութ. չունի]:*

Այսպիսով, մենք ստանում ենք x_0 *«կասկածելի» արժեքն ստուգելու առաջին կանոնը.* $f'(x)$ ածանցյալի մեջ տեղադրելով նախ $x<x_0$, և ապա՝ $x>x_0$ արժեքներ, որոշում ենք ածանցյալի նշանը x_0-ի մոտակայքում՝ x_0-ից դեպի ձախ և դեպի աջ. եթե այդ ժամանակ $f'(x)$-ը նշանը փոխում է դրականից բացասականի, ապա առկա է մաքսիմում, եթե նշանը փոխում է բացասականից դրականի, ապա առկա է մինիմում, իսկ եթե նշանը չի փոխում, ապա էքստրեմում չկա:

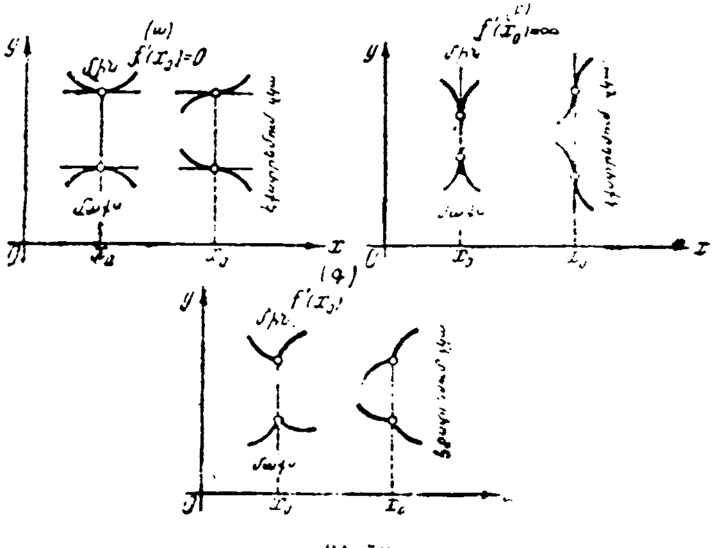
Այս եղանակը լրիվին որոշում է խնդիրը այն դեպքում, երբ (a, b) *միջակայքում, ինչպես այդ սովորաբար լինում է, գոյություն ունեն միայն վերջավոր թվով ստացիոնար կետեր կամ այնպիսի կետեր, որտեղ վերջավոր ածանցյալ չկա՝*

$$a<x_1<x_2<\ldots<x_k<x_{k+1}<\ldots<x_n<b. \qquad (4)$$

Այսպես, այդ ժամանակ, ամենից առաջ, ամեն մի

$$(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots (x_k, x_{k+1}), \ldots (x_n, b)$$

միջակայքում գոյություն ունի $f'(x)$ վերջավոր ածանցյալ և, բացի այդ, յուրաքանչյուր այդպիսի միջակայքում $f'(x)$-ը պահպանում է նշանը։ Իրոք, եթե $f'(x)$-ը փոխեր նշանը, օրինակ, (x_k, x_{k+1}) միջակայքում, ապա, ըստ Դարբուի թեորեմայի [116], նա զրո կդառնար x_k-ի և x_{k+1}-ի միջև գտնվող կետում, որը հնարավոր չէ, որովհետև ածանցյալի բոլոր արմատներն արդեն գտնվում են կետերի (4) շարքի մեջ։



Գծ. 56

Այս վերջին դիտողությունը որոշ դեպքերում օգտակար է լինում պրակտիկայում. $f'(x)$ ածանցյալի նշանը ամբողջ (x_k, x_{k+1}) միջակայքում կորոշվի, եթե հաշվենք նրա արժեքը (կամ եթե որոշենք միայն նշանը) այդ միջակայքի որևէ մի կետում։

130. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ. 1) Գտնել $f(x)=(x+2)^2(x-1)^3$ ֆունկցիայի էքստրեմումները։

Այս ֆունկցիայի ածանցյալը միշտ գոյություն ունի և վերջավոր է՝

$$f'(x)=2(x+2)(x-1)^3+3(x+2)^2(x-1)^2=$$

$$=(x+2)(x-1)^2(5x+4).$$

Ածանցյալի արմատներ (ստացիոնար կետեր) կլինեն՝

$$x_1=-2,\quad x_2=-\frac{4}{5}=-0{,}8,\quad x_3=1։$$

Այդ արժեքներով ամբողջ $(-\infty, +\infty)$ միջակայքը տրոհվում է հետևյալ մասերի՝

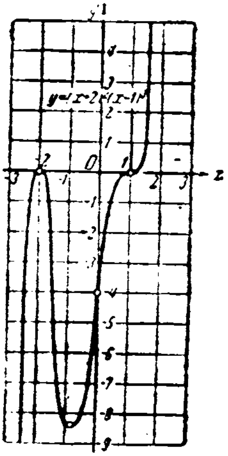
$$(-\infty, -2),\ (-2, -0{,}8),\ (-0{,}8, 1),\ (1, +\infty)։$$

Այդ միջակայքում ածանցյալի նշանը որոշելու համար կարելի է, օգտվելով վերևում կատարված դիտողություններից, այն որոշել կոնկրետ արժեքների համար. օրինակ, −3, −1, 0 և 2 արժեքների համար։ Որոշելով առանձին արտադրիչների նշանները, ամբողջ ածանցյալի համար կստանանք հետևյալ նշանները՝

$(-\infty, -2)$	միջակայքում	$(-)(+)(-)=+$
$(-2, -0{,}8)$	„	$(+)(+)(-)=-$
$(-0{,}8, 1)$	„	$(+)(+)(+)=+$
$(1, +\infty)$	„	$(+)(+)(+)=+$

Այստեղից պարզ է, որ $x=-2$ դեպքում ֆունկցիան ունի մաքսիմում, $x=-0{,}8$ դեպքում նա ունի մինիմում, իսկ $x=1$ դեպքում էքստրեմում բոլորովին չկա։

Սակայն, սովորաբար վարվում են այլ կերպ, առանց ածանցյալի մեջ կոնկրետ արժեքներ տեղադրելու։ Սկսենք $x=-2$ արժեքից։ Ածանցյալի վերջին երկու արտադրիչների՝ $(x-1)^2$-ի և $(5x+4)$-ի արտադրյալը $x=-2$ դեպքում ունի բացասական նշան, հետևապես (անընդհատության շնորհիվ) նա նույն նշանը կպահպանի նաև այդ կետի մոտակայքում (ինչպես ձախից, նույնպես և աջից)։ Իսկ $x+2$ արտադրիչը, երբ x-ը աճելով անցնում է $x=-2$ արժեքով, բացասական նշանը փոխում է դրականի, ուստի ածանցյալը դրական նշանը փոխում է բացասականի, և ֆունկցիան ունի մաքսիմում։ $x=-\frac{4}{5}$ դեպքում (այդ արժեքի մոտակայքում) ածանցյալի առաջին երկու արտադրիչները ունեն դրական նշան, իսկ վերջին $5x+4$ արտադրիչը (իսկ այդ հետ նաև ամբողջ ածանցյալը) բացասական նշանը փոխում է դրականի, ֆունկցիան այստեղ ունի մինիմում։ Վերջապես, $x=1$ արժեքով անցնելիս, ոչ միայն առաջին և երրորդ արտադրիչները, այլև երկրորդ արտադրիչն է նշանը պահպանում է, որովհետև քառակուսին միշտ դրական է. այստեղ էքստրեմում չկա։



Գծ. 57

Գտնելով այն կետերը, որտեղ ֆունկցիան ունի էքստրեմալ արժեքներ, այժմ արդեն հեշտ է հաշվել նաև հենց այդ արժեքները. մաքսիմումը՝ $f(-2)=0$, մինիմումը՝ $f(-0,8)=-8,40$:

57-րդ գծագրի վրա տրված է այն գրաֆիկը, որը ցույց է տալիս այդ ֆունկցիայի փոփոխությունը*

2) Գտնել $f(x)=\sin^3x+\cos^3x$ ֆունկցիայի էքստրեմումները:

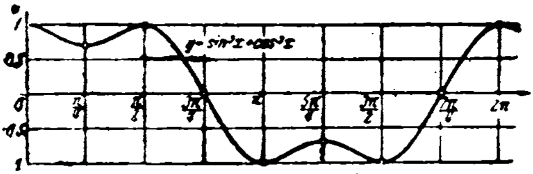
Ի նկատի ունենալով, որ ֆունկցիան ունի 2π պարբերություն, բավական է միայն ուսումնասիրել x-ի այն արժեքներով, որոնք գտնվում են $[0,2\pi]$ միջակայքում: Այդ ֆունկցիայի ածանցյալն ամենուրեք գոյություն ունի՝

$$f'(x)=3\sin^2x\cos x-3\cos^2x\sin x=3\sin x\cos x(\sin x-\cos x):$$

Այս դեպքում ածանցյալի արմատները (ստացիոնար կետերը) կլինեն՝

$$0,\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\ \ (2\pi):$$

$x=0$ արժեքով անցնելիս $\sin x$ արտադրիչը բացասական նշանը փոխում է դրականի, իսկ ամբողջ ածանցյալը դրական նշանը փոխում է բացասականի, որովհետև վերջին արտադրիչները $x=0$-ի շրջակայքում պահպանում են բացասական նշան. այսպիսով՝ գոյություն ունի մաքսիմում: $\sin x-\cos x$ արտադրիչը $x=\frac{\pi}{4}$ կետում դառնալով զրո, այդ կետով անցնելիս բացասա-



Գծ. 58.

կան նշանը փոխում է դրականի: Նույնը կլինի նաև ածանցյալի համար, որովհետև առաջին երկու արտադրիչները դրական են, հետևապես, այստեղ կլինի մինիմում: Նման եղանակով հետազոտվում են նաև մնացած ստացիոնար կետերը. դրանք բոլորը հերթականությամբ ֆունկցիային տալիս են մաքսիմումներ և մինիմումներ:

Տեղադրելով այդ արժեքները, կստանանք մաքսիմում և մինիմում արժեքները՝

* Այստեղ և հաջորդ օրինակների մեջ ֆունկցիայի փոփոխությունը մենք ցուցադրում ենք գրաֆիկներով, իսկ գրաֆիկ կառուցելու հարցը մանրամասն քննություն կանենք միայն հետևյալ պարագրաֆում: (Տես մանավանդ 139, 3):

մաքսիմումներ՝ $f(0)=f(2\pi)=1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\doteq -0{,}71$,

մինիմումներ՝ $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\doteq 0{,}71$, $f(\pi)=-1$, $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-1$։

Այս ֆունկցիայի գրաֆիկը ներկայացված է 58-րդ գծագրի վրա [համեմատել 137, 1)-ի հետ]:

3) Գտնել $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ *ֆունկցիայի էքստրեմումները։*
Այս անգամ

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x=\frac{2}{3}\cdot\frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$$

Վերջավոր ածանցյալը գոյություն ունի ամենուրեք, բացի $x=0$ *և* $x=\pm 1$ *կետերից։*

Երբ x-ը մոտենում է այդ արժեքներին, ածանցյալը ձգտում է ∞, ուրեմն, այդ կետերում նա հավասար է ∞ [119]:

Ածանցյալի արմատները գտնելու համար, նրա համարիչը հավասարեցնում ենք զրոյի. կստանանք $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$*։ Ուրեմն, էքստրեմումի համար «կասկածելի» կլինեն*

$$-1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 1$$

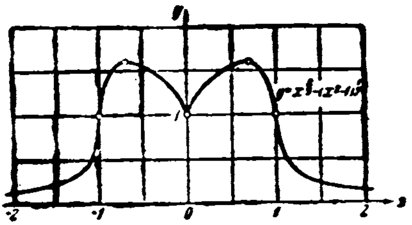
կետերը:

Երբ $x=0$ *(և այդ կետի մոտակայքում) համարիչը և հայտարարի երկրորդ արտադրիչը ունեն դրական նշան: Իսկ հայտարարի* $x^{\frac{1}{3}}$ *արտադրիչը բացասական նշանը փոխում է դրականի. ածանցյալը նույնպես, հետևապես գոյություն ունի մինիմում: Երբ* $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ *(և մոտակայքում) հայտարարը պահպանում է դրական նշան, իսկ համարիչը, ի նկատի ունենալով* $\frac{1}{\sqrt{2}}$*-ին մոտ գտնվող x-ի արժեքները, կարող ենք գրել այսպես՝*

$(1-x^2)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}$, սա զրո է դառնում, երբ $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, x-ի փոքրացման հետ՝ մեծանում է, իսկ մեծացման հետ՝ փոքրանում, ուստի նա դրական նշանը փոխում է բացասականի, և առկա է մաքսիմում: Նույնն է նաև երբ $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$: Իսկ $x = 1$ արժեքով անցնելիս հայտարարի $(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$ արտադրիչը, որն այդ կետում զրո է դառնում, նշանը չի փոխում: Նույնը տեղի ունի նաև ածանցյալի համար, ուստի $x=1$ կետում էքստրեմում չկա: Նույնը նաև $x = -1$ դեպքում:

Այսպիսով, մաքսիմումներն են՝ $y\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt[3]{4} \approx 1.59$, իսկ մինիմումն է $y(0) = 1$:

Գրաֆիկը տրված է 59-րդ գծագրի վրա (համեմատել 139. 4)-ի հետ):



Գծ. 59.

4) Մարվող տատանումներ: Դիցուք կետի շարժումը կատարվում է հետևյալ օրենքով՝

$$s = Ae^{-kt} \sin \omega t,$$

որտեղ s-ը՝ անցած ճանապարհն է (հաշված սկզբնական դրությունից), իսկ t-ն՝ ժամանակը (հաշված սկզբնական պահից): Ընդունենք, որ բոլոր A, k, ω հաստատունները, և նույնպես t փոփոխականը դրական են: Պարզենք այդ տատանման գրաֆիկի տեսքը. Հետաքրքրական է այն բաղդատել մեզ արդեն հայտնի $s = A \sin \omega t$ սինուսոիդի հետ: Քանի որ $e^{-kt} > 0$, ուստի, ակներևաբար, երկու գրաֆիկներն էլ x-ի առանցքը հատում են միևնույն $t = n\frac{\pi}{\omega}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) կետերում. Նկատենք, որ $s = A \sin \omega t$ ֆունկցիան $t = \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\omega}$ կետերում, որտեղ նրա $s' = A\omega \cos \omega t$ ածանցյալը դառնում է զրո, հաջորդաբար ունի մաքսիմումներ և մինիմումներ: Հաշվենք տված ֆունկցիայի ածանցյալը՝

$$s' = Ae^{-kt}(\omega \cos \omega t - k \sin \omega t) =$$

$$A\sqrt{\omega^2+k^2}\, e^{-kt}\left(\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+k^2}} \cos \omega t - \frac{k}{\sqrt{\omega^2+k^2}} \sin \omega t\right)$$

(համեմատել 98, 30)-ի հետ):

Մտցնենք կամավոր φ անկյուն, ընդունելով՝

$$\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+k^2}}=\cos\varphi,\qquad \frac{k}{\sqrt{\omega^2+k^2}}=\sin\varphi,$$

և ածանցյալի արտահայտությունը արտագրենք այսպես՝

$$s'=-A\sqrt{\omega^2+k^2}\,e^{-kt}\cos(\omega t+\varphi).$$

Սա զրո է դառնում

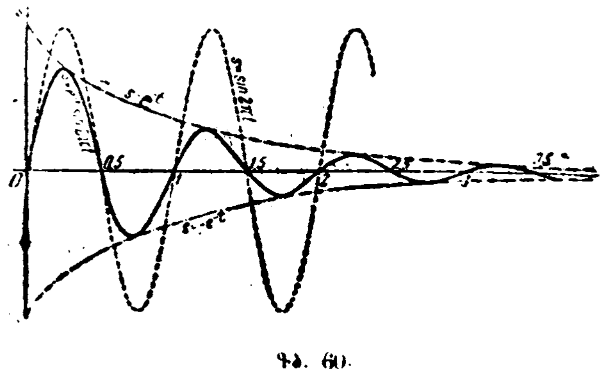
$$t=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$$

կետերում. և, քանի որ կոսինուսը զրոյով անցնելիս նշանը փոխում է, ուստի ճիշտ է հասկանալ, որ այդ արժեքների համար մեր ֆունկցիան իրոք ունի մաքսիմումներ զույգ n-ի դեպքում և մինիմումներ՝ կենտ n-ի դեպքում. Սինուսոիդի հետ համեմատած, առաջացել է էքստրեմալ կետերի տ ե ղ ա շ ա ր ժ դ ե պ ի ձ ա խ՝ $\frac{\varphi}{\omega}$-ով:

Դժվար չէ ստուգել, որ բոլոր մաքսիմումները կլինեն դրական, իսկ մինիմումները բացասական: Եթե n-րդ էքստրեմումի մեծությունը նշանակենք A_n-ով, ապա կունենանք՝

$$\left|\frac{A_n}{A_{n+1}}\right|=e^{\frac{k\pi}{\omega}},$$

ուստի ամպլիտուդները նվազում են երկրաչափական պրոգրեսիայով:



Գծ. 60.

Գրաֆիկը (մասնավոր պարզ դեպքի համար) ներկայացված է 60-րդ գծագրի վրա: Նման տիպի շարժումը կոչվում է մ ա ր ո ղ տ ա տ ա ն ու մ:

Դիտողություն։ Պրակտիկայում հանդիպող շատ դեպքերում նախորդ n°-ում շարադրված կանոնը միանգամայն բավարար է սկասկածելի արժեքները հետազոտելու համար։ Սակայն, պետք է ի նկատի ունենալ, որ կարող են պատահել այնպիսի դեպքեր, որտեղ այդ կանոնը կիրառելի չէ. այդ կլինի այն ժամանակ, երբ ուսումնասիրվող կետի ցանկացած մոտակայքում գտնվում են անվերջ բազմությամբ նույն տեսակի ուրիշ կետեր, և այդ կետի մեկ կամ մյուս կողմում *ածանցյալը չի պահպանում որոշակի նշան*։

Օրինակի համար, դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան՝

$$f(x)=x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} \text{ (երբ } x\neq 0) \text{ և } f(0)=0\text{։}$$

Մենք արդեն գիտենք, որ $x=0$ կետում նա ունի $f'(0)=0$ ածանցյալ [101, 2]։ Սակայն $x=0$ ստացիոնար կետի ամեն մի մոտակայքում թե՛ աջից, և թե՛ ձախից՝

$$f'(x)=2x \cdot \sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

ածանցյալն անվերջ բազմությամբ անգամ փոխում է իր նշանը։ Այստեղ $x=0$ կետում *էքստրեմում* չկա։ Իսկ եթե ֆունկցիան որոշենք այսպես՝

$$f(x)=x^2\left(1+\sin\frac{1}{x}\right), \text{ երբ } x\neq 0,\ f(0)=0,$$

ապա սա կունենա նույնպիսի առանձնահատկություն, բայց այս անգամ $x=0$ կետում ակներևաբար, կլինի *մինիմում*։ Այս երկու դեպքում էլ վերոհիշյալ կանոնը անկիրառելի է։

131. ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՆՈՆ։ Էքստրեմումները գտնելիս ուսումնասիրվող կետի մոտակայքում ածանցյալի նշանի հետազոտությունը կարելի է փոխարինել հենց այդ կետում *երկրորդ* կարգի ածանցյալի նշանի հետազոտությամբ։

Այսպես, դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան ոչ միայն x_0 կետի շրջակայքում ունի $f'(x)$ ածանցյալ, այլև ունի $f''(x_0)$ երկրորդ կարգի ածանցյալ հենց x_0 կետում։ x_0 կետը ստացիոնար է, այսինքն՝ $f'(x_0)=0$։ Եթե $f''(x_0)>0$, ապա, ըստ n° 115-ի լեմմայի, $f'(x)$ ֆունկցիան $x=x_0$ կետում *աճում* է, այսինքն՝ x_0 կետին մոտ ձախից՝ $f'(x)<f'(x_0)=0$, իսկ աջից՝ $f'(x)>f'(x_0)=0$։ Այսպիսով, $f'(x)$ ածանցյալը բացասական նշանը փոխում է դրականի և, հետևապես, $f(x)$-ը $x=x_0$ կետում ունի մինիմում։ Եթե $f''(x_0)<0$, ապա $f'(x)$-ը $x=x_0$ կետում *նվազում* է,

դրական նշանը փոխելով բացասականի, այնպես որ, առկա է մաքսիմում։

Այսպիսով կարելի է ձևակերպել x_0 «կասկածելի» արժեքը ստուգելու **երկրորդ կանոնը.** x_0 **արժեքը տեղադրում ենք $f''(x)$ երկրորդ կարգի ածանցյալի մեջ. եթե $f''(x_0)>0$, ապա ֆունկցիան ունի մինիմում, իսկ եթե $f''(x_0)<0$, ապա ֆունկցիան ունի մաքսիմում:**

Ընդհանրապես ասած, այս կանոնն ունի կիրառման ավելի նեղ շրջան. նա, օրինակ, բացահայտ կերպով անկիրառելի է այն կետերում, որտեղ գոյություն չունի առաջին կարգի վերջավոր ածանցյալ (որովհետև այդտեղ երկրորդ կարգի ածանցյալի մասին խոսք անգամ չի կարող լինել)։ Այն դեպքերում, երբ երկրորդ կարգի ածանցյալը զրո է դառնում, նույնպես այս կանոնը ոչինչ չի տալիս։ Այդ ժամանակ հարցի լուծումը կախված է բարձր կարգի ածանցյալների վարքից [տես հաջորդ [illegible]-ը]։

Եթե ցանկանանք այս կանոնը կիրառել 2)-րդ օրինակի նկատմամբ, ապա պետք է հաշվենք երկրորդ կարգի ածանցյալը՝

$$f''(x)=6\sin x\cos x(\cos x+\sin x)-3(\sin^3 x+\cos^3 x);$$

երբ $x=0\,(2\pi), \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, առաջին գումարելին դառնում է զրո և $f''(x)$-ի նշանը $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x$ ֆունկցիայի նշանի հակառակն է. նա կլինի բացասական $x=0(2\pi), \frac{\pi}{2}$ արժեքների համար (այստեղ մաքսիմումներ են). և դրական՝ $x=\pi$ և $\frac{3}{2}\pi$ արժեքների համար (այստեղ մինիմումներ են):

$x=\frac{\pi}{4}$ և $\frac{5\pi}{4}$ արժեքների դեպքում, $\sin x=\cos x$ հավասարության շնորհիվ, $f''(x)$-ը դառնում է $6\sin^3 x$, այնպես որ, այդ կետերից առաջինում երկրորդ կարգի ածանցյալի նշանը կլինի դրական (մինիմում), իսկ երկրորդում՝ բացասական (մաքսիմում)։

Ահա մի նոր օրինակ. գտնել $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x^2+1}$ ֆունկցիայի էքստրեմումները։

$$f'(x)=5\frac{x^2-2x-2}{(x^2+1)^2}$$

ածանցյալը զրո է դառնում համարիչի հետ միասին. արմատները կլինեն

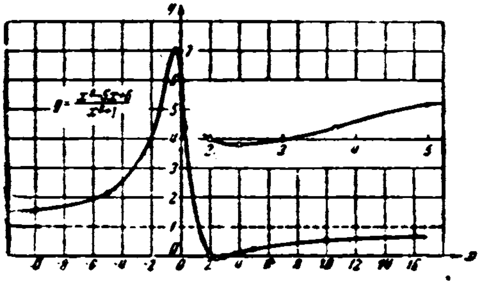
$x_1 = 1 - \sqrt{2} \doteq -0{,}41$ և $x_2 = 1 + \sqrt{2} \doteq 2{,}41$: Ածանցյալը նորից դիֆերենցելով որպես արտադրյալ՝

$$f''(x) = \frac{5}{(x^2+1)^2}(2x-2) + \ldots$$

ընդ որում կետերով փոխարինված է այն անդամը, որը պարունակում է (x^2-2x-1)-ը որպես արտադրիչ և նա մ ե զ պ ե տ ք չէ, որովհետև x-ի այն արժեքների համար, որոնք պետք է տեղադրենք, նա դառնում է զրո:

Հեշտ է տեսնել, որ $f''(x_1) < 0$, իսկ $f''(x_2) > 0$, հետևապես $f(x_1) \doteq 7{,}04$ արժեքը մաքսիմում է, իսկ $f(x_2) \doteq -0{,}03$՝ մինիմում:

Ֆունկցիայի գրաֆիկը տրված է 61-րդ գծագրի վրա (տես 139, 5):



Գծ. 61.

Վերջապես քննության առնենք երկրաչափական բնույթի մի այսպիսի խնդիր. գտնել տված (հարթության վրա) $P(\xi, \eta)$ կետի և $y = f(x)$ հավասարումով տված (K) կորի $M(x, y)$ կետերի r հեռավորության էքստրեմալ արժեքները:

r ֆունկցիայի փոխարեն կարելի է քննության առնել

$$u = \frac{1}{2} r^2 = \frac{1}{2}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]$$

ֆունկցիան, որտեղ $y = f(x)$։

$$u'_x = x - \xi + (y - \eta) \cdot y'_x,$$

ածանցյալը հավասարեցնելով զրոյի, կստանանք, որ որպեսզի (K) կորի վրա գտնվող $M(x, y)$ կետը r հեռավորությանը տա էքստրեմում, անհրաժեշտ է որ տեղի ունենա

$$\xi - x + y'_x (\eta - y) = 0$$

պայմանը:

Այլ խոսքով. $P(\xi, \eta)$ *կետը պետք է գտնվի*

$$X - x + y'_x (Y - y) = 0$$

ուղղի վրա, որը անցնում է կորի $M(x, y)$ *կետով և ուղղահայաց է շոշափողին*. այդ ուղիղը անվանում են կորի նորմալ:*

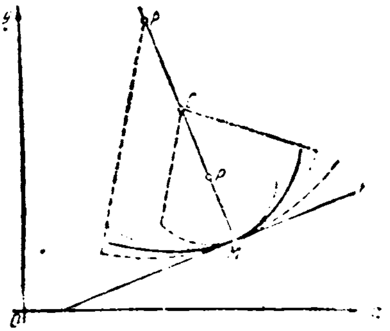
Այժմ ընդունենք, որ $P(\xi, \eta)$ *կետը իրոք գտնվում է* (K) *կորի* $M(x, y)$ *կետում տարած նորմալի վրա. արդյոք* MP *հեռավորությունը էքստրեմում կլինի: Այս հարցի պատասխանը կախված է երկրորդ կարգի*

$$u''_{x^2} = 1 + y'^2_x + (y - \eta) \cdot y''_{x^2}$$

ածանցյալի նշանից: Այս արտահայտությունը զրո կդառնա (ենթադրելով, որ $y''_{x^2} \neq 0$*) միայն C կետում, որի կոորդինատներն են՝*

$$\xi = x - y'_x \cdot \frac{1 + y'^2_x}{y''_{x^2}}, \qquad \eta = y + \frac{1 + y'^2_x}{y''_{x^2}}.$$

այդ կետի համար հարցը մնում է բաց: C կետը նորմալի վրա բաժանում է այն P կետերը, որոնց համար $u'' < 0$*, և MP-ն մաքսիմում է, այն P կետերից, որոնց համար* $u'' > 0$*, և այդ հեռավորությունը մինիմում է:*



Գծ. 62.

***Հետագայում* [233, 241]** *մենք կտեսնենք, որ նորմալի վրա գտնվող այդ սահմանագծային C կետը նշանավոր է շատ տեսակետներից:*

132. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԻ ՕԳՏԱԳՈՐԾՈՒՄԸ:

Մենք տեսանք, որ երբ $f'(x_0) = 0$ *և* $f''(x_0) > 0$*, ապա* $f(x)$ *ֆունկցիան* x_0 *կետում ստանում է մինիմում, իսկ երբ* $f'(x_0) = 0$ *և* $f''(x_0) < 0$*, ապա ֆունկցիան այդ կետում ունի մաքսիմում: Այն դեպքը, երբ* $f'(x_0) = 0$ *և* $f''(x_0) = 0$*, մենք թողեցինք առանց հետազոտության:*

---

* *Նրա* $-\frac{1}{y'_x}$ *անկյունային գործակիցը իր մեծությամբ ու նշանով շոշափողի* y'_x *անկյունային գործակցի հակադարձն է:*

Այժմ ենթադրենք, թե $f(x)$ *ֆունկցիան* $x=x_0$ *կետում ունի* n *հաջորդական ածանցյալներ, ընդ որում նրանք բոլորը, ընդհուպ մինչև* $(n-1)$*-րդը, այդ կետում դառնում են զրո՝*

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0,$$

մինչդեռ $f^{(n)}(x_0)\neq 0$: $f(x)$ *ֆունկցիայի* $f(x)-f(x_0)$ *աճը Թեյլորի բանաձևով վերլուծենք* $(x-x_0)$*-ի աստիճաններով՝ Պեանոյի ձևի լրացուցիչ անդամով* [122 (*10ա*)]: *Քանի որ* n*-ից ցածր կարգի բոլոր ածանցյալները* x_0 *կետում հավասար են զրոյի, ուստի կունենանք՝*

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)+\alpha}{n!}(x-x_0)^n:$$

Շնորհիվ այն բանի, որ երբ $x\to x_0$, $\alpha\to 0$, x_0*-ին բավականաչափ մոտ գտնվող* x*-ի համար համարիչում գտնվող գումարի նշանը կհամընկնի* $f^{(n)}(x_0)$*-ի նշանի հետ, ինչպես* $x<x_0$ *արժեքների, նույնպես և* $x>x_0$ *արժեքների դեպքում: Քննության առնենք երկու դեպք:*

1° n*-ը կենտ թիվ է՝* $n=2k+1$: x_0*-ից փոքր* x *արժեքներից՝* x_0*-ից մեծ արժեքներին անցնելիս,* $(x-x_0)^n$ *արտահայտությունը փոխում է նշանը, և քանի որ այդ դեպքում առաջին արտադրիչի նշանը չի փոխվում, ուստի նաև* $f(x)-f(x_0)$ *տարբերության նշանը կփոխվի: Այսպիսով,* x_0 *կետում* $f(x)$ *ֆունկցիան էքստրեմում ունենալ չի կարող, որովհետև այդ կետի մոտ նա ընդունում է* $f(x_0)$*-ից թե՛ փոքր, և թե՛ մեծ արժեքներ:*

2° n*-ը զույգ թիվ է՝* $n=2k$: *Այս դեպքում* $f(x)-f(x_0)$ *տարբերությունը,* x_0*-ից փոքր* x*-ից մեծին անցնելիս, նշանը չի փոխում, որովհետև բոլոր* x *արժեքների համար* $(x-x_0)^n>0$: *Ակներև է, որ* x_0*-ի մոտ թե՛ ձախից, և թե՛ աջից* $f(x)-f(x_0)$ *տարբերության նշանը համընկնում է* $f^{(n)}(x_0)$ *թվի նշանի հետ: Ուրեմն, եթե* $f^{(n)}(x_0)>0$, *ապա* x_0*-ի մոտ* $f(x)>f(x_0)$ *և* x_0 *կետում* $f(x)$ *ֆունկցիան ունի մինիմում. իսկ եթե* $f^{(n)}(x_0)<0$, *ապա ֆունկցիան ունի մաքսիմում:*

Այստեղից ստացվում է հետևյալ կանոնը՝

Եթե x_0 **կետում զրո չդարձող ածանցյալներից առաջինը կենտ կարգի է,** x_0 **կետում ֆունկցիան չունի ոչ մաքսիմում և ոչ էլ մինիմում: Եթե այդպիսի ածանցյալը զույգ կարգի է,** x_0 **կետում**

ֆունկցիան ունի մաքսիմում կամ մինիմում, նայած նրան, թե այդ ածանցյալը բացասակա՞ն է, թե դրական:

Օրինակ. $f(x)=e^{x}+e^{-x}+2\cos x$ *ֆունկցիայի համար* $x=0$ *կետը ստացիոնար կետ է, որովհետև այդ կետում*

$$f'(x)=e^{x}-e^{-x}-2\sin x$$

ածանցյալը դառնում է զրո: Այնուհետև՝

$$f''(x)=e^{x}+e^{-x}-2\cos x,\quad f''(0)=0;$$

$$f'''(x)=e^{x}-e^{-x}+\sin x,\quad f'''(0)=0,$$

$$f^{IV}(x)=e^{x}+e^{-x}+2\cos x,\quad f^{IV}(0)=4.$$

Քանի որ առաջին զրո չդարձող ածանցյալը զույգ կարգի է, ուստի առկա է էքստրեմում, այն է՝ մինիմում, որովհետև $f^{IV}(0)>0$։

Դիտողություն: Չնայած վերևում ստացված հայտանիշը էքստրեմումի հարցը լուծում է դեպքերի շատ ընդարձակ դասի համար, սակայն, տեսականորեն առած, նա այնուամենայնիվ համապարփակ չէ. Նույնաբար հաստատուն չլինելով հանդերձ, ֆունկցիան ուսումնասիրվող կետի շրջակայքում կարող է ունենալ բոլոր կարգի ածանցյալներ, որոնք, սակայն, այդ կետում բոլորը միասին դառնում են զրո։

Օրինակի համար քննության առնենք հետևյալ ֆունկցիան, որը ինքնըստինքյան հետաքրքրություն է ներկայացնում՝

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^{2}}}\ (\text{երբ } x\neq 0),\quad f(0)=0.$$

$x\neq 0$ *դեպքում նա ունի բոլոր կարգի ածանցյալներ՝*

$$f'(x)=\frac{2}{x^{3}}e^{-\frac{1}{x^{2}}},\qquad f''(x)=\left(-\frac{6}{x^{4}}+\frac{4}{x^{6}}\right)e^{-\frac{1}{x^{2}}},\ \dots$$

և ընդհանրապես,

$$f^{(n)}(x)=P_{n}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x^{2}}}\ (n=1,2,3,\dots),\qquad (5)$$

որտեղ $P_n(z)$-ը ամբողջ բազմանդամ է ($3n$ աստիճանի)։ Այդ օրենքի ընդհանրությունը կարելի է ստուգել մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով։

Այժմ ապացուցենք, որ նաև $x=0$ կետում մեր ֆունկցիայի համար գոյություն ունեն բոլոր կարգի ածանցյալները, ընդ որում դրանք բոլորը հավասար են զրոյի։ Իրոք, նախ և առաջ, ունենք՝

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}\to 0, \text{ երբ } x\to 0^{*},$$

ուստի՝ $f'(0)=0$։ Ընդունենք, որ այն, ինչ պետք է ապացուցենք, ճիշտ է մինչև n-րդ կարգի ածանցյալը ներառյալ բոլոր ածանցյալների համար։ Այն ժամանակ [տես (5)] կունենանք՝

$$\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\frac{\frac{1}{x}P_n\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}}\to 0, \text{ երբ } x\to 0,$$

քանի որ համարիչն իրենից ներկայացնում է $\frac{C}{x^m}$ տեսքի անդամների գումար։ Ուրեմն, նաև $f^{(n+1)}(0)=0$, Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով թեորեմն լրիվ ապացուցված է։

Թեև անմիջապես պարզ է, որ տված ֆունկցիան $x=0$ դեպքում ունի մինիմում, սակայն այդ փաստը հնարավոր չէր լինի հաստատել այդ կետում ֆունկցիայի հաջորդական ածանցյալների դիտարկման օգնությամբ։

133. ՄԵԾԱԳՈՒՅՆ ԵՎ ՓՈՔՐԱԳՈՒՅՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ՈՐՈՆՈՒՄԸ։ Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է ու անընդհատ

---

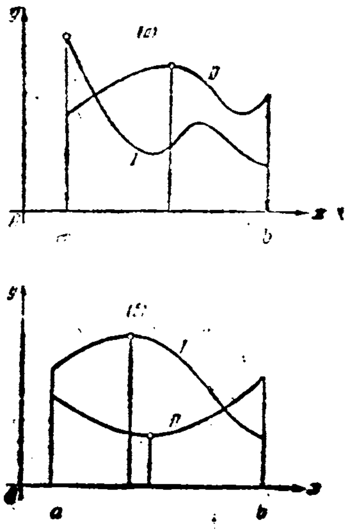
* Հիշենք, որ e^z-ը, երբ $z\to\infty$, կլինի ավելի բարձր կարգի անվերջ մեծ քան որևէ z^k աստիճանը, այսինքն՝

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z^k}{e^z}=0$$

[65]։ Այստեղ z-ի դերը խաղում է $\frac{1}{x^2}$-ին (երբ $x\to 0$)։

$[a, b]$ *վերջավոր փակ միջակայքում։ Մինչև հիմա մենք հետաքրքրվում էինք միայն նրա մաքսիմումներով և մինիմումներով, իսկ հիմա հարց ենք դնում գտնել այդ միջակայքում ֆունկցիայի ստացած արժեքներից մեծագույնը և փոքրագույնը*։ Ըստ Վայերշտրասի 2-րդ թեորեմայի* [84], *այդպիսի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ գոյություն ունեն։ Որոշակիության համար կանգ առնենք մեծագույն արժեքի վրա։*

Եթե այդ մեծագույն արժեքն ստացվում է a*-ի և* b*-ի միջև գտնվող որևէ կետում, ապա նա միաժամանակ կլինի նաև մաքսիմումներից որևէ մեկը (ակներևաբար ամենամեծը), սակայն մեծագույն արժեք կարող է ստացվել նաև միջակայքի ծայրակետերից որևէ մեկում,* a*-ում կամ* b*-ում (գծ. 63ա)։ Այսպիսով իրար հետ պետք է բաղդատել* $f(x)$ *ֆունկցիայի բոլոր մաքսիմումները և* $f(a)$ *ու* $f(b)$ *եզրային արժեքները. այդ թվերից ամենամեծը հենց կլինի* $[a, b]$*-ում* $f(x)$ *ֆունկցիայի բոլոր արժեքներից մեծագույնը։ Նույն ձևով որոնում են նաև ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը։*



Գծ. 63

Դիցուք, օրինակ, որոնվում են $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$ *ֆունկցիայի արժեքներից մեծագույնը և փոքրագույնը* $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ *միջակայքում. նրա երկու մաքսիմումները, որոնք հավասար են 1-ի, մեծ են* $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$ *եզրային արժեքներից, հետևապես, հենց 1-ը կլինի նշված միջակայքում ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը. Մինիմումը, որը հավա-*

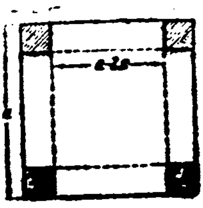
* *Այսպիսով, մաքսիմում տերմինի տակ մենք պահպանում ենք նրա լոկալ իմաստը (համապատասխան կետի անմիջական շրջակայքի մեծագույն արժեքը), և այն տարբերում ենք ամբողջ դիտարկվող միջակայքում ֆունկցիայի մեծագույն արժեքից։ Նույնը վերաբերում է նաև ֆունկցիայի մինիմումին և փոքրագույն արժեքին։*

ար է 0,7 ..., մեծ է եզրային արժեքներից, ուստի փոքրագույն արժեքը կլինի 0-ն: $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ միջակայքի համար որպես մեծագույն արժեք պետք է վերցնել ամենամեծը 1 և −0.7 երկու մաքսիմումներից, որոնք ստացվում են $x=\frac{\pi}{2}$ և $\frac{5\pi}{4}$ կետերում, որովհետև ծայրակետերում ստացվում են՝ $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0,7\ldots$ և $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ արժեքները, որոնք մեկից փոքր են: Փոքրագույն արժեքն ստացվում է աջ ծայրակետում ինչպես նաև $x=\pi$ կետում, համընկնելով մինիմումի հետ:

Եթե ցանկանում են խուսափել մաքսիմումը կամ մինիմումը ստուգելուց, կարելի է այլ կերպ վարվել: Հարկավոր է միայն հաշվել ֆունկցիայի արժեքները բոլոր «կասկածելի» (էքստրեմումների համար) կետերում և նրանք համեմատել $f(a)$ ու $f(b)$ եզրային արժեքների հետ. այդ թվերից ամենամեծը և ամենափոքրը հենց կլինեն ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները ֆունկցիայի բոլոր արժեքների մեջ ամբողջ միջակայքում:

Օրինակ, $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ միջակայքի համար բաղդատում ենք $f(0)=1$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0,7\ldots$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ էքստրեմալ արժեքները՝ $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0$ եզրային արժեքների հետ, իսկ $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ միջակայքի համար բաղդատում ենք $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $f(\pi)=-1$, $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-0,7\ldots$ էքստրեմալ արժեքները $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0,7\ldots$ և $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$ եզրային արժեքների հետ:

Դիտողություն: Կիրառական խնդիրներում ամենից հաճախ հանդիպում է այն պարզ դեպքը, երբ a-ի և b-ի միջև լինում է միայն մեկ «կասկածելի» x_0 կետ: Եթե այդ կետում ֆունկցիան ունի մաքսիմում (մինիմում), ապա, առանց եզրային արժեքների հետ բաղդատելու, պարզ է, որ այդ հենց կլինի միջակայքում ֆունկցիայի մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը (տես գծ. 64): Նման դեպքերում հաճախ ավելի հեշտ է լինում կատարել մաքսիմումի և մինիմումի հետազոտումը, քան թե ֆունկցիայի սահմանային արժեքների հաշվումն ու բաղդատումը (մասնավորապես, երբ նրա արտահայտության մեջ մտնում են տառային հաստատուններ):



Գծ. 64.

Հարկավոր է ընդգծել, որ վերևում ասածը լրիվ չափով կիրառելի է թե (a,b) բաց միջակայքի, և թե՛ անվերջ մեծ միջակայքի նկատմամբ.

134. ԽՆԴԻՐՆԵՐ: Այժմ, օրինակի ձևով, շարադրենք տարբեր բնագավառներից մի շարք խնդիրներ, որոնց լուծումը հենց բերվում է ֆունկցիա-

մի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքի որոնմանը։ Ի միջի այլոց, շատ հաճախ հետաքրքրություն են ներկայացնում ոչ այնքան այդ արժեքները, որքան որ այն կետերը (արգումենտի այն արժեքները), որոնք ֆունկցիային տալիս են այդպիսի արժեքներ։

1) a կողմ ունեցող քառակուսի թիթեղից, անկյուններից կտրելով հավասար քառակուսիներ և եզրերը ծալելով (գծ. 64), պատրաստում են բաց ուղղանկյուն արկղ։ Ի՞նչպես ստանալ ամենամեծ տարողություն ունեցող արկղը։

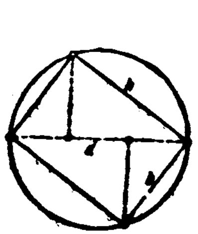
Եթե կտրվող քառակուսու կողմը նշանակենք x-ով, ապա արկղի y ծավալը կարտահայտվի այսպես՝ $y=x(a-2x)^2$, ընդ որում x-ը փոփոխվում է $\left[0, \frac{a}{2}\right]$ միջակայքում։ Այսպիսով խնդիրը հանգեց այդ միջակայքում y ֆունկցիայի մեծագույն արժեքի որոնմանը։

Քանի որ $y' = (a-2x)(a-6x)$ ածանցյալը 0-ի և $\frac{a}{2}$-ի միջև ունի միայն մեկ $x=\frac{a}{6}$ արմատ, ուստի, համոզվելով, որ այդ արժեքը ֆունկցիային տալիս է մաքսիմում, միաժամանակ կստանանք նաև որոնելի մեծագույն արժեքը։ Կամ, այլ խոսքով, երբ $x=\frac{a}{6}$, ունենք՝ $y=\frac{2a^3}{27}$, այն ինչ y-ի եզրային արժեքները հավասար են 0-ի. հետևապես, երբ $x=\frac{a}{6}$, իրոք, ստացվում է y-ի ամենամեծ արժեքը։

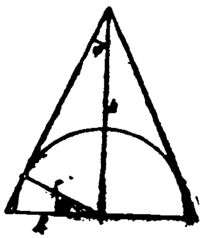
2) Տրված է d տրամագծով շրջանային հատույթով կոճղ։ Պահանջվում է այն տաշել այնպես, որ ստացվի ուղղանկյուն հատույթով գերան՝ ամենամեծ դիմացկունությամբ։

Ցուցմունք։ Նյութերի դիմադրության մեջ ապացուցվում է, որ ուղղանկյուն գերանի դիմացկունությունը համեմատական է bh^2 արտադրյալին, որտեղ b-ն՝ գերանի ուղղանկյուն հատույթի հիմքն է, իսկ h-ը՝ բարձրությունը։

Քանի որ $h^2=d^2-b^2$, ուստի խոսքը վերաբերում է $y=bh^2=b(d^2-b^2)$ արտահայտության մեծագույն արժեքին, ընդ որում b սահմանը փոփոխականը փոփոխվում է $(0,d)$ միջակայքում։ $y'=d^2-3b^2$ ածանցյալն այդ միջակայքի ներսում միայն մեկ անգամ է զրո դառնում՝ $b=\frac{d}{\sqrt{3}}$ կետում։ Երկրորդ կարգի ածանցյալը՝ $y''=-6b<0$, հետևապես, վերոհիշյալ կետում ստացվում է մաքսիմում, իսկ սրա հետ միաժամանակ նաև ամենամեծ արժեքը։



Գծ. 65.



Գծ. 66.

Երբ $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$, կունենանք $h = d\sqrt{\frac{2}{3}}$, ուստի $d : h : b = \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$.

65-րդ գծագրից երևում է, թե ինչպես պետք է կառուցել պահանջվող ուղղանկյունը (տրամագիծը բաժանված է երեք հավասար մասերի, բաժանման կետերում կանգնեցրած են ուղղահայացները)։ Մեր [illegible] կանոնադրությունները («урочное положение») առաջարկում է $h : b = 7 : 5$ հարաբերությունը. այդ հենց $\sqrt{2} \approx 1,4$ մոտավոր արժեքն է։

3) r շառավղով կիսագնդին արտագծել ամենափոքր ծավալ ունեցող կոն, ընդ որում ենթադրվում է, որ կիսագնդի և կոնի հիմքերը գտնվում են միևնույն հարթության վրա և համակենտրոն են (գծ. 66)։

Այստեղ պետք է նախ ռացիոնալ կերպով ընտրել անկախ փոփոխականը. Թող այդ լինի կոնի գագաթի φ անկյունը։ Ըստ գծագրի նշանակումների, կունենանք՝ $R = \frac{r}{\cos\varphi}$, $h = \frac{r}{\sin\varphi}$, ուստի ծավալը կլինի՝

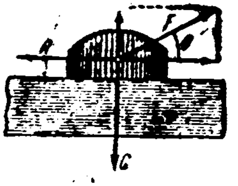
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\frac{1}{3}\pi r^3}{\cos^2\varphi \sin\varphi}.$$

Որպեսզի ծավալն ունենա փոքրագույն արժեք, ակնհայտորեն, պետք է որ հայտարարում կանգնող $y = \cos^2\varphi\sin\varphi$ արտահայտությունը ստանա իր մեծագույն արժեքը, երբ φ-ն փոփոխվում է $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ միջակայքում։ Ունենք՝

$$y'_{\varphi} = -2\cos\varphi \cdot \sin^2\varphi + \cos^3\varphi = 2\cos^3\varphi\left(\frac{1}{2} - tg^2\varphi\right).$$

0-ի և $\frac{\pi}{2}$-ի միջև ածանցյալը զրո է դառնում միայն $tg\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ կետում, այսինքն՝ երբ $\varphi = arctg\frac{1}{\sqrt{2}}$ (որը համապատասխանում է $35°\,15'\,52''$ անկյան), նշանը փոխելով դրականից բացասականի։ Հենց այդ անկյունը y-ին տալիս է ամենամեծ արժեք, իսկ V ծավալին՝ ամենափոքրը։

4) G ծանրություն ունեցող բեռը, որը գտնվում է հորիզոնական հարթության վրա, պետք է տեղից շարժել նրա վրա ազդող ուժով (գծ. 67)։ Շփման առկայության դեպքում հորիզոնականի հետ ինչ անկյան տակ պետք է կիրառել այդ ուժը, որպեսզի նրա F մեծությունը լինի փոքրագույնը։ Շփման μ գործակիցը հայտնի է։



Գծ. 67.

Լուծում։ Շփումը համարվում է համեմատական այն ուժին, որը մարմինը սեղմում է հարթությանը (Կուլոնի օրենքը) և ուղղված է շարժմանը հակառակ։ Համեմատականության μ արտադրիչը հենց կլինի շփման գործակիցը։

Որոշենք այժմ Θ անկյանը համապատասխանող F ուժը։ Այն վերլուծելով ըստ հորիզոնական և ուղղաձիգ ուղղությունների, բաղադրիչների համար կստանանք $F \cdot \cos\Theta$ *և* $F \cdot \sin\Theta$ *մեծությունները։ Այն ուժը, որը մարմնին սեղմում է հարթությանը, կլինի* $G - F \cdot \sin\Theta$, *ուստի, ըստ Կուլոնի օրենքի, շփումը կլինի՝* $R = \mu\,(G - F\sin\Theta)$. *Ձգող F ուժի հորիզոնական* $F\cos\Theta$ *բաղադրիչը հենց պետք է հավասարակշռի այդ շփումը՝*

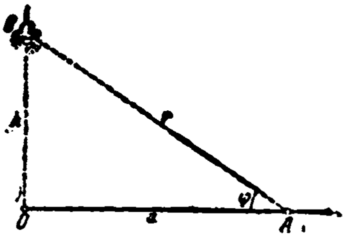
$$F.\cos\Theta = \mu.(G - F.\sin\Theta),$$

որտեղից

$$F = \frac{\mu G}{\cos\Theta + \mu\sin\Theta}.$$

Խնդիրը վերաբերում է այդ ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքի որոնմանը, կամ $\cos\Theta + \mu\sin\Theta$ *ֆունկցիայի մեծագույն արժեքի որոնմանը՝ երբ Θ-ն փոփոխվում է* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *միջակայքում։* $y'_\Theta = \mu\cos\Theta - \sin\Theta$ *ածանցյալը զրո է դառնում, երբ* $\operatorname{tg}\Theta = \mu$ *կամ* $\Theta = \operatorname{arctg}\mu$. *այդ Θ անկյունը կոչվում է շփման անկյուն։ Քանի որ* $y''_{\Theta^2} = -\mu\sin\Theta - \cos\Theta < 0$, *ուստի ստացվում է, որ ամենից ձեռնտու է ուժը կիրառել շփման անկյան տակ։ Օրինակ, երբ քարը պետք է տեղաշարժել փայտյա հատակի վրայով, ապա* $\mu = 0{,}4$ *և* $\Theta \doteq 22^\circ$։

6) Հայտնի է, որ նավի նավարկման արժեքը մեկ ժամում որոշվում է $a + bv^3$ *էմպիրիկ (փորձնական) բանաձևով, որտեղ a-ն և b-ն հաստատուններ են, որոնք պետք է որոշել յուրաքանչյուր նավի համար առանձին, իսկ v-ն՝ նավի արագությունն է հանգույցներով (հանգույցը 1,85* $\frac{\text{կմ}}{\text{ժամ}}$)*։ Ի՞նչ (տնտեսական) արագության դեպքում նավը ցանկացած տարածությունը կանցնի ամենափոքր ծախսով։*



Գծ. 68.

1 կմ. *անցնելու համար պահանջվում է* $\frac{1}{1{,}85v}$ *ժամ, համապատասխան ծախսերը կարտահայտվեն հետևյալ բանաձևով՝* $\frac{1}{1{,}85v}(a + bv^3) = \frac{1}{1{,}85}\left(bv^2 + \frac{a}{v}\right)$։ $y = bv^2 + \frac{a}{v}$ *արտահայտության ածանցյալը հավասարեցնելով զրոյի, կստանանք՝*

$$y'_v = 2bv - \frac{a}{v^2} = 0, \text{ որտեղից՝ } v = \sqrt[3]{\frac{a}{2b}}. \text{ Քանի որ } y''_{v^2} = 2b + \frac{2a}{v^3} > 0,$$

---

* *Այս բանաձևի մեջ ծախսի a հաստատուն մասը վերաբերում է ամորտիզացիային և անձնակազմի աշխատավարձին, իսկ երկրորդը՝* bv^3 *անդամը՝ վառելանյութի արժեքին*

ուստի v-ի ստացված արժեքի դեպքում բոլոր ծախսերը կ հ ա ս ն ե ն ն վ ա զ ա գ ո ւ յ ն ի:

Թվային օրինակ. $a=40$, $b=0{,}01$, $v=\sqrt[3]{2000} \doteq 12{,}6$ (*հանգույց*):

6) Դիցուք էլեկտրական լամպը կարող է տեղափոխվել (օրինակ, հարթակի վրա) OB ուղղաձիգ ուղիղով (գծ. 68): OA հորիզոնական հարթությունից ինչ հեռավորության վրա պետք է այն տեղավորել, որպեսզի այդ հարթության A կետում ստացվի ա մ ե ն ա մ ե ծ լ ո ւ ս ա վ ո ր վ ա ծ ո ւ թ յ ո ւ ն:

Լ ո ւ ծ ո ւ մ ը: J լուսավորվածությունը համեմատական է $\sin\varphi$-ին և հակադարձ համեմատական է $r=AB$ հեռավորության քառակուսուն, այսինքն՝

$$J = c \cdot \frac{\sin\varphi}{r^2},$$

որտեղ c-ն կախված է լամպի լույսի ուժից:

Եթե որպես անկախ փոփոխական ընդունենք $h=OB$ մեծությունը, ապա՝

$$\sin\varphi = \frac{h}{r},\quad r=\sqrt{h^2+a^2} \quad \text{և} \quad J = c \cdot \frac{h}{(h^2+a^2)^{3/2}}$$

$$(0<h<+\infty).$$

Այնուհետև՝

$$J'_h = c \cdot \frac{a^2-2h^2}{(h^2+a^2)^{5/2}}$$

ածանցյալը զրո է դառնում երբ $h=\frac{a}{\sqrt{2}} \doteq 0{,}7\,a$, այդ արժեքով անցնելիս նշանը փոխելով դրականից բացասականի: Հենց այդ կլինի ամենաօգտակար հեռավորությունը:

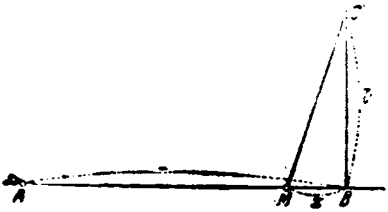
Որպես անկախ փոփոխական կարելի է ընդունել φ անկյունը, այդ ժամանակ՝

$$r = \frac{a}{\cos\varphi},\qquad J = \frac{c}{a^2}\cos^2\varphi\,\sin\varphi$$

և ամբողջը հանգում է $y=\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi$ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքի որոնմանը $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում: Բայց մենք արդեն գիտենք (տես 3) խնդիրը), որ այդ մեծագույն արժեքն ստացվում է φ_0 անկյան դեպքում, որի համար $\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; իսկ h հեռավորության համար ստացվում է նախկին՝

$a \cdot \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ արժեքը:

7) AB *երկաթուղային մագիստրալի* A *կետից (գծ. 69) դեպի* C *կետը, որը գտնվում է երկաթուղագծից* CB=l *հեռավորության վրա, բեռ է փոխադրվում։ Մեկ միավոր բեռը մեկ միավոր հեռավորության վրա տեղափոխելու արժեքը երկաթուղով* α *է, իսկ խճուղով՝* β*։ Մինչև որ* M *կետը պետք է անցկացնել* MC *խճուղին, որպեսզի բեռը* A*-ից* C*-ն տեղափոխելը* (AMC *ճանապարհով) կատարվի հնարավորին չափ էժան։*



Գծ. 69

Ըստ գծագրում կատարված նշանակումների, մեկ միավոր բեռի փոխադրման արժեքը, M *կետի կամայական դիրքի դեպքում, ստացվում է հավասար՝*

$$y = \alpha(d-x) + \beta\sqrt{x^2+l^2} \quad (0 \leq x \leq d).$$

Ունենք՝

$$y'_x = \frac{\beta x}{\sqrt{x^2+l^2}} - \alpha = \beta\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+l^2}} - k\right) \quad \left(k = \frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Եթե $k>1$ $(\alpha>\beta)$, *ապա այդ արտահայտությունը կպահպանի բացասական նշան, բոլորովին զրո չդառնալով։ Երբ* x*-ը աճում է* 0*-ից մինչև* d, y *ֆունկցիան նվազում է և, ակներևաբար, իր ամենափոքր արժեքին ստանում է* x=d *դեպքում։ Այս դեպքում ամենից ձեռնտու է խճուղին սկսել անմիջապես* A *կետից։*

Նույնը կլինի նաև $k<1$ *դեպքում, եթե միայն միաժամանակ տեղի ունենա*

$$\frac{kl}{\sqrt{1-k^2}} \geqslant d$$

անհավասարությունը։ Իրոք, $k<1$ *դեպքում*

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+l^2}} - k$$

արտահայտությունն ունի միայն մեկ արմատ՝

$$\frac{kl}{\sqrt{1-k^2}},$$

Բայց կատարված ենթադրության շնորհիվ այդ արմատը կընկնի x-ի համար թույլատրելի փոփոխման միջակայքից դուրս (կամ նրա ծայրում), ուստի միջակայքի ներսում y'_x *ածանցյալը կլինի բացասական։*

Միայն այն դեպքում, երբ վերոհիշյալ արժեքը փոքր լինի δ-ից, x-ի այդ արժեքը կորոշի M կետի դիրքը A-ի և B-ի միջև, որի ժամանակ փոխադրման ծախսը կլինի նվազագույնը:

Դիտողություն: Օգտվելով առիթից, ընթերցողի ուշադրությունը հրավիրենք հետևյալ հանգամանքի վրա: Արգումենտի փոփոխման որոշակի միջակայքի համար ֆունկցիայի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքը որոնելիս, կարող է պատահել, որ այդ միջակայքի ներսը բոլորովին չլինեն ածանցյալի արմատներ (կամ այլ «կասկածելի» արժեքներ): Այդ վկայում է այն մասին, որ դիտարկվող միջակայքում ֆունկցիան մոնոտոն աճող է կամ նվազող և, հետևապես, իր ինչպես մեծագույն, նույնպես և փոքրագույն արժեքներն ստանում է միջակայքի ծայրակետերում:

Վերջին օրինակում, նրա մեջ մասնակցող մեծությունների որոշ առընչությունների դեպքում, տեղի ունի հենց այդպիսի դրությունը:

§ 2. ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԳՐԱՖԻԿՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ

135. ԽՆԴՐԻ ԴՐՎԱԾՔԸ: Զինված դիֆերենցիալ հաշվի մեթոդներով, վերադառնանք ֆ ո ւ ն կ ց ի ա ն ե ր ի գ ր ա ֆ ի կ ն ե ր ի կ ա ռ ո ւ ց մ ա ն *հարցին [համ. 47]: (Դիցուք սկզբում պահանջվում է կառուցել [a, b] վերջավոր միջակայքում անընդհատ* $y=f(x)$ *ֆունկցիայի գրաֆիկը:) Այժմ մեր հիմնական նպատակն* է ֆունկցիայի փ ո փ ո խ մ ա ն ը ն թ ա ց ք ի հնարավորին չափ ճըշգրիտ բնութագրումը, *իսկ առանձին օրդինատների ճշգրտությունը մեզ ավելի քիչ չափով է հետաքրքրում:*

Ավելի կամ պակաս չափով խիտ դասավորված «կետերով» կառուցման սովորաբար կիրառվող եղանակը [47], որտեղ կետերը վերցվում են պատահական ձևով, և առանց (նախապես անհայտ) գրաֆիկի առանձնահատկությունները ի նկատի ունենալու, անպետք է: Այդ մեթոդը նախ և առաջ պահանջում է մեծ թվով կոորդինատների հաշվում, որը գործնականորեն հնարավոր չէ: Բայց ամենագլխավորն այն է, որ նա սկզբունքորեն անպետք է, որովհետև, հենց հաշվելի օրդինատների պատահականության շնորհիվ, նա այնուամենայնիվ չի ապահովում նպատակի իրագործումը:

(Այժմ ենթադրենք, թե $y=f(x)$ *ֆունկցիան ունի* $y'=f'(x)$ *ընդհանրապես վերջավոր ածանցյալ. բացառություն կարող է լինել միայն առանձին կետերում, որտեղ ածանցյալը հավասար է անվերջության: Այդ ժամանակ դիֆերենցիալ հաշվի մեթոդները հնարավորություն են տալիս գտնելու որոշ թվով «հենակետեր», որոնք* բ ն ո ր ո շ *են հենց տվյալ գրաֆիկի հա-*

մար, և որոնց միջոցով գրաֆիկը կառուցվում է բավարար ճըշգրտությամբ։

Ամենից առաջ մենք այստեղ ի նկատի ունենք գրաֆիկի շրջադարձի կետերը,) այսինքն՝ նրա ուռուցքների ու փոսերի գագաթները. որոնք համապատասխանում են ֆունկցիայի էքստրեմալ արժեքներին [128—132]*։ Ի միջի այլոց, դրանց պետք է ավելացնել ընդհանրապես բոլոր այն կետերը, որտեղ շոշափողը հորիզոնական է կամ ուղղաձիգ, թեկուզ և դրանք չլինեն ֆունկցիայի էքստրեմումները։) Հասկանալի է, որ պետք է նշել նաև գրաֆիկի ծայրերը։*

Երբ վերոհիշյալ կետերն արդեն նշված են գծագրի վրա (իսկ դրանց թիվը սովորաբար մեծ չէ), այդ արդեն, իհարկե, բավական է գրաֆիկը կառուցելու համար։

Այդ եղանակով կառուցված գրաֆիկն արդեն բավականաչափ լրիվ պատկերում է ֆունկցիայի փոփոխման ընթացքը, ճշգրտորեն ցույց տալով նրա աճման և նվազման միջակայքերը. նաև այն կետերը, որտեղ ֆունկցիայի փոփոխման արագությունը իջնում է մինչև 0-ի ($y'=0$) *կամ աճում է մինչև անվերջության* ($y'=\infty$)*։*

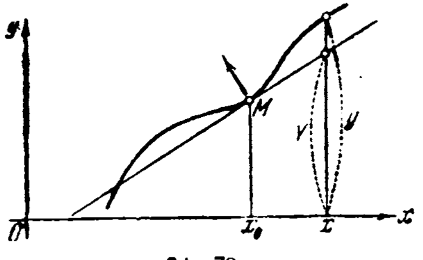
Կարելի է հասնել գրաֆիկի հետագա ճշգրտման, եթե ի նկատի ունենանք նրա գոգավորության ուղղությունը և շրջման կետերի տեղը. այդ գաղափարներին է նվիրված հետևյալ n°-ը։

136. ԳՈԳԱՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ՈՒՂՂՈՒԹՅՈՒՆԸ, ՇՐՋՄԱՆ ԿԵՏԵՐ։ *Եթե* $y=f(x)$ *ֆունկցիան* $x=x_0$ $(a<x_0<b)$ *կետում ունի* $f'(x_0)$ *վերջավոր կամ անվերջ ածանցյալ, ապա նրան համապատասխանող կորը, ֆունկցիայի գրաֆիկը,* $M(x_0, f(x_0))$ *կետում շոշափող ունի։*

Ասում են, որ M *կետում կորը գոգավորությամբ ուղղված է դեպի շոշափողի մի որոշակի կողմը, եթե* M *կետի բավականաչափ փոքր շրջակայքում կորը իր բոլոր կետերով գտնվում է շոշափողի հենց այդ կողմում (գծ. 70)։* M *կետն անվանում են շրջման կետ, եթե նրա բավականաչափ փոքր շրջակայքում* $x_0>x$ *աբսցիսներ ունեցող կետերը գտնվում են շոշափողի մեկ կողմում, իսկ* $x_0<x$ *աբսցիսներ ունեցող կետերը՝ մյուս կողմում, այսինքն՝ եթե* M *կետում կորը շոշափողի մեկ կողմից անցնում է դեպի մյուս կողմը, կամ, ավելի կարճ՝ հատում է շոշափողը (գծ. 71)։*

Սահմանափակվենք այն դեպքով, երբ $f'(x_0)$ ածանցյալը վերջավոր է, այնպես որ՝ շոշափողը ուղղաձիգ չէ։ M կետում շոշափողի հավասարումը կլինի՝

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)^{*}.$$



Գծ. 70.

Դոգավորության ուղղությունը կամ շրջման կետի առկայությունը վերաբերյալ հարցը լուծելու համար, պետք է ուսումնասիրել

$$y - Y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

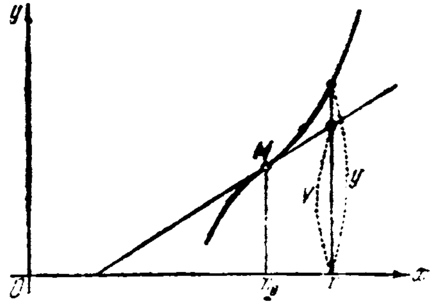
տարբերության նշանը x_0 կետի շրջակայքում։ Ենթադրենք, թե այդ շրջակայքում գոյություն ունի $f''(x)$ երկրորդ կարգի ածանցյալ։

Նախ ենթադրենք, թե $f''(x_0) \neq 0$։ Դիմելով Պեանոյի ձևով լրացուցիչ անդամով Թեյլորի բանաձևին [122 (10ա)] $n=2$ դեպքում, կստանանք՝

$$y - Y = \frac{f''(x_0) + \alpha}{2!}(x - x_0)^2,$$

որտեղ $\alpha \to 0$, երբ $x \to x_0$։ x_0-ին բավականաչափ մոտ գտնվող x արժեքների համար այդ տարբերությունը պահպանում է $f''(x_0)$ թվի նշանը, հետևապես, երբ $f''(x_0) > 0$, M կետում կորը իր գոգավորությամբ ուղղված է դեպի վերև, իսկ երբ $f''(x_0) < 0$՝ դեպի ներքև։

Եթե $f''(x_0) = 0$, ապա առջևում մնում է միայն $\frac{\alpha}{2}$ անդամը, որը $y - Y$ տարբերության նշանի մասին ոչինչ



Գծ. 71.

* Մենք դիտավորյալ կերպով շոշափողի կետի ընթացիկ օրդինատը նշանակեցինք Y-ով, որպեսզի այդ տարբերենք կորի՝ միևնույն x աբսցիսն ունեցող $y=f(x)$ օրդինատից։

չի տալու։ Այս դեպքում լրացուցիչ անդամը վերցնենք Լագրանժի ձևով [124 (*13*)], *նույնպես* n=2 *դեպքում կունենանք՝*

$$y-Y=\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2,$$

որտեղ կամ $x<c<x_0$, *կամ* $x_0<c<x$։ Եթե x_0 արժեքի մոտակայքում $f''(x)$ երկրորդ կարգի ածանցյալը պահպանում է (ինչպես ձախից, նույնպես և աջից) դրական կամ բացասական նշան, ապա նույն նշանը կպահպանի նաև $y-Y$ տարբերությունը. և M կետում գոգավորությունը ուղղված կլինի, համապատասխանաբար, դեպի վերև կամ դեպի ներքև։

Ընդհակառակը, եթե $f''(x)$-ը x_0 կետով անցնելիս նշանը փոխում է, ապա $y-Y$ տարբերությունը ևս նշանը կփոխի, և M կետում կլինի շրջում։ *Այս դեպքում* M *շրջման կետը (եթե սահմանափակվենք նրա բավականաչափ փոքր շրջակայքով) կարծես թե անջատում է բոլոր այն կետերը, որտեղ կորի գոգավորությունն ուղղված է դեպի վերև, այն կետերից, որտեղ գոգավորությունն ուղղված է դեպի ներքև**։

Օրինակի համար, քննության առնենք $y=\sin x$ *սինուսոիդը, այստեղ* $y''=-\sin x=-y$։ *Հետևաբար, այն միջակայքում, որտեղ* $\sin x$*-ը պահպանում է դրական (բացասական) նշան, սինուսոիդը գոգավորությամբ ուղղված է ներքև (վերև)։* $x=k\pi$ (k*-ն ամբողջ է) տեսք ունեցող արժեքների համար* y''*-ը դառնում է զրո, ընդ որում փոխելով նշանը. դրանց համապատասխանում են սինուսոիդի շրջման կետերը։ Ընդհակառակը,* $y=x^4$ *ֆունկցիայի համար ունենք* $y''=12x^2$ *և, թեկուզ և* $x=0$ *դեպքում երկրորդ կարգի ածանցյալը դառնում է զրո, սակայն* x*-ի այլ արժեքների համար նա պահպանում է դրական նշան, և կորը ամենուրեք գոգավորությամբ ուղղված է դեպի վերև։*

Շրջման առկայության համար (եթե ենթադրենք երկրորդ կարգի ածանցյալի գոյությունը) $y''=0$ պայմանն անհրաժեշտ է, բայց ոչ բավարար։

Այստեղ հեշտությամբ նկատում ենք անալոգիա էքստրեմումների տեսության հետ [համեմատել 128-ի և հաջորդի հետ]։

---

* *Երբեմն հենց այս հատկությունն են դնում շրջման կետերի սահմանման հիմքում։ Այդպիսի սահմանումը ոչ լրիվ է համընկնում վերևում տրված սահմանմանը։ Օրինակ, 43-րդ գծագրի վրա պատկերված կորերի դեպքում, մեր սահմանման համաձայն բոլորի համար էլ շրջումը առկա է, իսկ ըստ հենց հիմա տրված սահմանման միայն ձախ կողմի երկու կորերի համար։*

Վերջում նկատենք, որ x_0 կետի մոտակայքում $f''(x)$ երկրորդ կարգի ածանցյալի նշանի հետազոտման փոխարեն, այստեղ նույնպես կարելի է դիտարկել $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$, ... հաջորդական ածանցյալները հենց x_0 կետում։ Քանի որ դրան վերաբերող դատողությունները միանգամայն նման են n° 132-ում բերվածներին, ուստի այդ թողնում ենք ընթերցողին։

137. ԳՐԱՖԻԿ ԿԱՌՈՒՑԵԼՈՒ ՍԽԵՄԱՆ։ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ Եվ այսպես, դիցուք $y=f(x)$ ֆունկցիան դիտարկելի $[a,b]$ միջակայքում կրկնակի դիֆերենցելի է, բացի առանձին կետերից, որտեղ $y'=f'(x)$ ածանցյալը ունի անվերջ արժեք։

Այդ ժամանակ $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար պետք է կատարել հետևյալը՝

1) որոշել այն x արժեքները, որոնց համար $y'=f'(x)$ ածանցյալը հավասար է զրոյի կամ անվերջության, և նրանք հետազոտել էքստրեմումների նկատառումով.

2) որոշել այն x արժեքները, որոնց համար $y''=f''(x)$ երկրորդ կարգի ածանցյալը հավասար է զրոյի, և նրանք հետազոտել շրջման կետի նկատառումով.

3) հաշվել $y=f(x)$ ֆունկցիայի այն արժեքները, որոնք համապատասխանում են x-ի այդ բոլոր արժեքներին, ինչպես նաև դիտարկվող միջակայքի a և b ծայրերին։

Ավելի հարմար է արդյունքները գրել աղյուսակի ձևով [տես ներքևում բերված օրինակները], անպայման նշելով գրաֆիկի որոնելի կետի առանձնահատկությունը՝ մաքսիմում, մինիմում, $y'=0$, $y'=\infty$, շրջում։ Երբեմն գրաֆիկի վերոհիշյալ կետերին, ցանկացած դեպքում, ավելացնում են մի քանի ուրիշ կետեր ևս, օրինակ՝ գրաֆիկի և կոորդինատների առանցքների հատման կետերը։

Գծագրի վրա ստացված կետերը նշելուց հետո, գծում են գրաֆիկը, ի նկատի ունենալով բոլոր վերոհիշյալ առանձնահատկությունները։

Իհարկե մենք ի նկատի ունենք պրակտիկայում գրաֆիկներ գծելու սովորական դեպքը, երբ առաջին կարգի ածանցյալը 0 (կամ ∞) է դառնում, կամ երկրորդ կարգի ածանցյալը զրո է դառնում՝ միայն վերջավոր թվով կետերում։ Այդ ժամանակ՝ այդ կետերի միջև գտնվող միջակայքերում գրաֆիկը գնում է կամ միշտ դեպի վերև կամ միշտ դեպի ներքև, ինչպես նաև գոգավորությունը միշտ ուղղված է դեպի որոշակի կողմ։

Հաշվումները և կորի կառուցումը ավելի հեշտանում է, երբ x-ի նշանը փոխելիս ֆունկցիան իր արժեքը չի փոխում (զույգ ֆունկցիա), այնպես որ գրաֆիկը սիմետրիկ է ուղղաձիգ առանցքի նկատմամբ։ Նման դեր կարող է խաղալ նաև սիմետրիկությունը կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, որը անալիտիկորեն արտահայտված է նրանով, որ x-ի նշանը փոխելիս ֆունկցիան նույնպես միայն նշանն է փոխում (կենտ ֆունկցիա)։

Օրինակներ։ 1) n° 130-ի ե)-ում մենք արդեն հետազոտել ենք

$$y = \sin^3 x + \cos^3 x$$

ֆունկցիայի ընթացքը. նրա ածանցյալի օգնությամբ որոշել ենք x-ի այն արժեքները, որոնք ֆունկցիային տալիս են էքստրեմումներ. և հաշվել ենք ֆունկցիայի էքստրեմալ արժեքները։ Ըստ որում, ֆունկցիայի պարբերական լինելու շնորհիվ, մենք սահմանափակվել ենք x-ի փոփոխման $[0, 2\pi]$ միջակայքով։ Ֆունկցիայի գրաֆիկը նույնպես բավական է կառուցել միայն այդ միջակայքի համար։

Այժմ մեզ պետք է գտնել երկրորդ կարգի ածանցյալի արմատները։ Եթե այն ներկայացնենք

$$y'' = \frac{9}{2}(\sin x + \cos x)\left(\sin 2x - \frac{2}{3}\right)$$

տեսքով, հեշտ կլինի տեսնել, որ փակագծերի մեջ գտնվող առաջին արտադրիչը զրո կդառնա $x = \frac{3\pi}{4} \doteq 2{,}36$ և $x = \frac{7\pi}{4} \doteq 5{,}50$ դեպքում, իսկ երկրորդը՝ երբ $x \doteq 0{,}36$ (21°), 1,21 (69°), 3,51 (201°) և 4,35 (249°). բոլոր դեպքերում էլ y''-ի նշանը փոխվում է, ուստի տեղի է շրջում.

Կազմում ենք հետևյալ աղյուսակը՝

x=0	0,36	0,78	1,21	1,57	2,36	3,14	3,51	3,94	4,35
y=1	0,86	0,71	0,86	1	0	−1	−0,86	−0,71	−0,86
y′=0 մաքս.	շրջում	y′=0 մին.	շրջում	y′=0 մաքս.	շրջում	y′=0 մին.	շրջում	y′=0 մաքս.	շրջում

x=4,71	5,50	6,28
y=−1	0	1
y′=0 մին.	շրջում	y′=0 մաքս.

Հենց ըստ այս աղյուսակի էլ կառուցված է 58-րդ գծագրի վրա պատկերված գրաֆիկը։

Դիտողություն։ Ընթերցողը պետք է ի նկատի ունենա, որ այս գրքի մեջ բերված գծագրերը, մասշտաբի փոքրության պատճառով, լրիվ չափով չեն օգտագործում այն տվյալները, որոնք ստացված են հաշվումների

մինչդեռ Առաջարկվում է այդ գծագրերը կառուցել ավելի մեծ մասշտաբով:

2) Դիտարկենք

$$y = \sin x + \sin 2x$$

ֆունկցիան, որը ոչ միայն պարբերական է, այլև կենտ է: Ակնհայտ է, որ բավական է x-ի փոփոխման միջակայքը ավելի փոքրացնել, դարձնելով այն [0,π]:
Այդ միջակայքում

$$y' = \cos x + 2\cos 2x = 4\cos^2 x + \cos x - 2$$

ածանցյալը դառնում է զրո, երբ $\cos x = \frac{-1+\sqrt{33}}{8}$, այսինքն՝ երբ $x \doteq 0{,}94$ (54°) և 2,57 (147°). Քանի որ՝

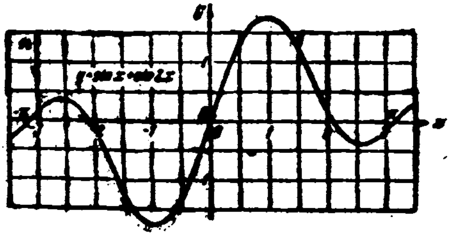
$$y'' = -\sin x - 4\sin 2x = -\sin x\,(1+8\cos x)$$

երկրորդ կարգի ածանցյալը այդ արժեքներից առաջինի համար բացասական է, իսկ մյուսի համար դրական է, ապա առաջին արժեքը տալիս է մաքսիմում արժեք, նույն ձևով, երկրորդ արժեքի համար ունենք մինիմում:

Ինչը, երկրորդ կարգի ածանցյալը, զրո է դառնում sin x-ի հետ միասին, երբ $x = 0$ կամ $x = \pi \doteq 3{,}14$; ինչպես նաև (բացառությամբ արտակարգ վերջին դեպքի) երբ $x \doteq 1{,}70$ (97°) դեպքում՝ բոլոր դեպքերում փոխելով նշանը (շրջում):
Աղյուսակը հետևյալն է՝

x=0	0,94	1,70	2,09	2,57	3,14
y=0	1,76	0,74	0	−0,37	0
շրջում	y′=0 մաքս.	շրջում		y′=0 մին.	շրջում

x-ի վերոհիշյալ արժեքներին մենք այստեղ ավելացրել ենք նաև



Գծ. 72.

$x = \frac{2}{3}\pi \doteq 2{,}09$ (120°) արժեքը, որի ժամանակ $y=0$ (գրաֆիկը հատում է x-երի առանցքը)։ Այդ կետերով կառուցված գրաֆիկը պատկերված է 72-րդ գծագրի վրա. $[-\pi, 0]$ միջակայքի համար գրաֆիկն ստացվում է երկու անգամ ծալելով, նախ՝ y-ների առանցքի շուրջը, և ապա x-երի առանցքի շուրջը։

138. ԱՆՎԵՐՋ ԽԶՈՒՄՆԵՐ, ԱՆՎԵՐՋ ՄԻՋԱԿԱՅՔ. ԱՍԻՄՊՏՈՏՆԵՐ. Օգտակար է դիտարկվող ֆունկցիաների դասը ընդարձակել երկու ուղղությամբ։ Նախ, մենք $y = f(x)$ ֆունկցիայի համար թույլ տանք անվերջության դառնալու հնարավորությունը x-ի առանձին արժեքների դեպքում։ Այդ նշանակում է, որ, եթե x_0-ն այդպիսի արժեքներից է, ապա $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$։ Երկրորդ, մեզ կարող է հետաքրքրել ֆունկցիայի ընթացքը նաև անվերջ միջակայքում։

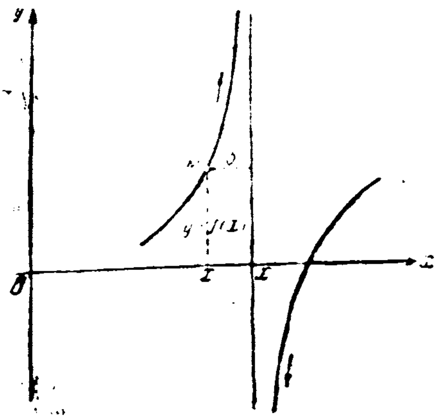
Քանի որ գծագրի չափերը, հասկանալի է, վերջավոր են, ուստի այդ երկու դեպքում էլ պետք է բավարարվել ամբողջ գրաֆիկի որևէ մասով։ Գծագրի սահմաններից դուրս աշխատում են թողնել գրաֆիկի այն մասերը, որոնց տեսքի մասին հեշտ է նախապես պատկերացում ունենալ, ելնելով նրանից, ինչ որ գծագրված է։

Կանգ առնենք այն դեպքի վրա, երբ ֆունկցիան ունի անվերջ խզում, օրինակ, $x = x_0$ կետում։ Նկատենք, որ երբ x-ը մեկ կողմից մոտենում է x_0-ին, ֆունկցիան անպայման ձգտում է որոշակի նշանով անվերջության*։ Այսպիսով, գրաֆիկը, անվերջության գնալով, անսահմանորեն կմոտենա $x = x_0$ ուղղաձիգ ուղիղին, նրա վերևի կամ ներքևի մասում, նայած անվերջ սահմանի նշանին։ Այդ ուղիղը թույլ է տալիս պարզ կերպով պատկերացնելու գրաֆիկի տեսքը նաև գծագրի սահմաններից դուրս (գծ. 73)։ Որպես օրինակներ կարող են ծառայել նաև մեզ արդեն հայտնի հետևյալ ֆունկ-

---

* Այդ հետևում է [Կոշիի թեորեմայի շնորհիվ, 79] $y = f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատությունից $x = x_0$ կետի մոտակայքում. Դեռ ավելին, եթե, գոնե միջակայքի վերջավոր մասում, $y' = f'(x)$ ածանցյալը միայն վերջավոր անգամ է փոխում նշանը, ապա x_0-ի անմիջական մոտակայքում ինչպես մեկ, այնպես և մյուս կողմից ֆունկցիան կփոփոխվի մոնոտոն։ Նկատենք, որ x_0-ի տարբեր կողմերում (եթե x_0-ն միջակայքի ծայրը չէ) ֆունկցիան կարող է ունենալ անվերջ սահմաններ նաև տարբեր նշաններով։

ցիաների գրաֆիկները՝ $y = \frac{a}{x}$, երբ $x=0$ (գծ. 10), $y = \operatorname{tg} x$, երբ $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ (գծ. 16), $y = \log_a x$, երբ $x=0$ (գծ. 14)։



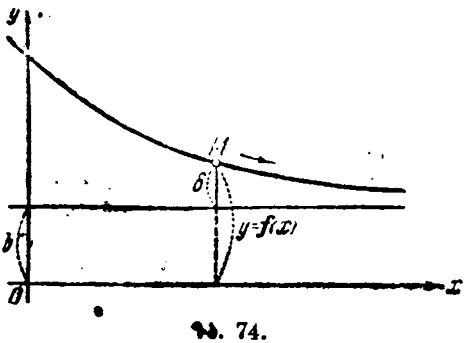
Գծ. 73.

Անվերջ (մեկ կամ երկու կողմից) միջակայքի դեպքում, նման ծառայություն երբեմն կատարում է հորիզոնական կամ թեք ուղիղը, որին գրաֆիկը անսահմանորեն մոտենում է։ Այդ կապակցությամբ տանք հետևյալ ընդհանուր սահմանումը։

Դիցուք ունենք մի կոր, որի ճյուղն այս կամ այն ուղղությամբ հեռանում է դեպի անվերջություն։ Երբ կորի կետի δ հեռավորությունը մի որոշ ուղղից ձգտում է զրոյի, երբ կետը անվերջ հեռանում է, ապա այդ ուղիղը կոչվում է կորի **ասիմպտոտ**:

Հենց նոր մենք գործ ունեցանք ուղղաձիգ ասիմպտոտների հետ. այժմ զբաղվենք հորիզոնական և թեք ասիմպտոտներով՝ միշտ այնպիսի կորի համար, որը տրված է $y=f(x)$ հավասարումով։

Հորիզոնական ասիմպտոտների օրինակներ մեզ արդեն պատահել են. $y = \frac{a}{x}$ կորի համար՝ $y=0$ ուղիղը, երբ $x \to \pm\infty$



Գծ. 74.

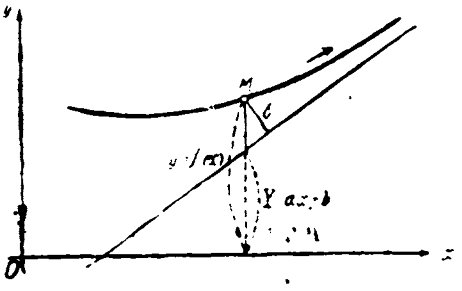
(գծ. 10)։ y=arctg x կորի համար՝ $y=\frac{\pi}{2}$ և $y=-\frac{\pi}{2}$ ուղիղնե-րը, համապատասխանաբար, երբ $x\to+\infty$ և $x\to-\infty$ (գծ. 21)։ $y=a^x$ կորի համար՝ $y=0$ ուղիղը, երբ $x\to-\infty$, եթե $a>1$, և երբ $x\to+\infty$, եթե $a<1$ (գծ. 13)։

Որպեսզի $y=f(x)$ կորի համար $Y=b$ ուղիղը լինի ասիմպտոտ, երբ, օրինակ, $x\to+\infty$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա հետևյալ պայմանը՝

$$\lim_{x\to+\infty}\delta=\lim_{x\to+\infty}|y-b|=0 \quad \text{կամ՝} \quad \lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}f(x)=b։$$

Այսպիսով, հորիզոնական ասիմպտոտի հարցը պարզապես հանգում է այդ սահմանի հարցին։

Այդպիսի սահման առանձին պետք է որոնել նաև $x\to-\infty$ դեպքում. այդ ժամանակ (ինչպես, օրինակ, $y=\operatorname{arctg}x$ կորի դեպքում) կարող է նաև ուրիշ ասիմպտոտ առաջանալ։



Անցնելով թեք ասիմպտոտներին, հիշենք, որ սրանց պարզ օրինակներ կարող են ծառայել վերլուծական երկրաչափության ընթերցողին արդեն հայտնի՝

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{կամ} \quad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \qquad (1)$$

հիպերբոլի $y=\pm\frac{b}{a}x$ ասիմպտոտները (տես նաև 7-րդ գծագիրը)։

Այժմ ենթադրենք, որ $y=f(x)$ կորը ունի

$$Y=ax+b \qquad (2)$$

թեք ասիմպտոտը (գծ. 75), ասենք, x առանցքի դրական մասի կողմում։ Քանի որ օրդինատների $|y-Y|$ տարբերությունը δ հեռավորությունից տարբերվում է միայն հաստատուն արտա-

ղղիչով (որը հավասար է ասիմպտոտով և x-երի առանցքով կազմված անկյան կոսինուսին), ուստի, երբ $x \to +\infty$, δ-ի հետ միաժամանակ զրոյի կձգտի նաև այդ տարբերությունը՝

$$\lim_{x \to +\infty} (y - ax - b) = 0. \tag{3}$$

Բաժանելով x-ի վրա, այստեղից կստանանք՝

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = a. \tag{4}$$

Բացի դրանից, (3)-րդ հավասարությունն անմիջապես տալիս է՝

$$\lim_{x \to +\infty} (y - ax) = b. \tag{5}$$

Այսպիսով, որպեսզի (2) ուղիղը լինի տված կորի ասիմպտոտը, անհրաժեշտ է, որ տեղի ունենան (4) և (5) պայմանները։ Հակադարձ դատողությունը հեշտությամբ ցույց կտա նաև դրանց բավարար լինելը։ Այստեղ խնդիրը բերվեց (4) և (5) սահմանների հաջորդաբար որոշմանը, որոնցով որոշվում են (2) ուղղի հավասարման գործակիցները։

Հասկանալի է, որ ամբողջ հետազոտությունը պետք է կրկնել նաև $x \to -\infty$ դեպքի համար։

Օրինակ, (1) հիպերբոլի դեպքում, ընդունելով որ $x \to +\infty$, կունենանք՝

$$\frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \pm \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \to \pm \frac{b}{a}.$$

այնուհետև,

$$y \mp \frac{b}{a} x = \pm \frac{b}{a} \left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right) = \mp \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \to 0,$$

և մենք կստանանք մեզ արդեն հայտնի ասիմպտոտները՝ $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Անդրադառնալով ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցման խնդրին, նախորդ n°-ի 1), 2), 3) կետերում առածներին այժմ կավելացնենք, որ պետք է նաև՝

4) որոշել x-ի այն արժեքները, որոնք $y = f(x)$ ֆունկցիան

պարձնում են անվերջություն, հաշվի առնելով նշանը, և կառուցել համապատասխան ուղղաձիգ ասիմպտոտները.

5) *գտնել գրաֆիկի հորիզոնական և թեք ասիմպտոտները (ընդ որում, եթե միջակայքը երկու կողմից էլ անվերջ է, ապա* $x\to+\infty$ *դեպքն առանձին և* $x\to-\infty$ *դեպքն առանձին)։*

Նորից դիմենք օրինակների։

139. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ *Վերադառնանք*

$$y=(x+2)^2\,(x-1)^3$$

ֆունկցիային, որի համար էքստրեմումները մենք արդեն գտել ենք 130-ի 1)-ում։ Այդ ֆունկցիան անընդհատ է, երբ $-\infty<x<+\infty$: *Երբ* $x\to\pm\infty$, *ոչ միայն y-ը, այլև* $\frac{y}{x}$*-ը ձգտում է* ∞, *ուստի ասիմպտոտ չկա։*

Լրացուցիչ կերպով դիտարկենք երկրորդ ածանցյալը՝

$$y''=2(x-1)(10x^2+16x+1)։$$

Սա զրո է դառնում, երբ $x=1; -0{,}07; -1{,}53$, *ամեն անգամ փոխելով նշանը (շրջում)։*

Կազմում ենք աղյուսակը՝

x −2	−1,53	−0,8	−0,07	0	1
y = 0	−3,58	−8,40	−4,56	−4	0
y′ = 0 մաքս.	շրջում	y′ = 0 մին.	շրջում		y′ = 0 շրջում

Սրա գրաֆիկը մենք արդեն ունենք 57-րդ գծագրի վրա։

4) *Դիցուք՝*

$$y=x^{\frac{2}{3}}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$$

[տես 130, 3)]։ Ֆունկցիան անընդհատ է $(-\infty,+\infty)$ *միջակայքում։ Այն ներկայացնելով հետևյալ տեսքով՝*

$$y=\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}(x^2-1)^{\frac{1}{3}}+(x^2-1)^{\frac{2}{3}}},$$

Հեշտ է տեսնել, որ $x\to\pm\infty$ *դեպքում* $y\to0$, *ուստի մեր ֆունկցիայի գրաֆիկի համար x-երի առանցքը ասիմպտոտ է (և՛ դեպի աջ, և՛ դեպի ձախ)։* y'' *երկրորդ կարգի ածանցյալը արմատներ չունի. շրջումներ կլինեն միայն այն*

կետերում, որտեղ $y' = \infty$: Ֆունկցիան զույգ լինելու շնորհիվ ունենք y-ների առանցքի նկատմամբ սիմետրիկություն:

Աղյուսակը հետևյալն է՝

$x = -\infty$	−1	−0,71	0	0,71	1	∞
$y = 0$	1	1,59	1	1,59	1	0
	$y' = \infty$	$y' = 0$ մաքս.	$y' = \infty$ մին.	$y' = 0$ մաքս.	$y' = -\infty$	

Գրաֆիկը արված է 59-րդ գծագրի վրա։

ե) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1}$ [տես 131]։

Անընդհատ է $(-\infty, +\infty)$ միջակայքում, երբ $x \to \pm\infty$, պարզ է, $\lim y = 1$, որը հորիզոնական ասիմպտոտն է։ Երկրորդ կարգի ածանցյալը՝

$$y'' = -10\,\frac{(x+1)(x^2 - 4x + 1)}{(x^2+1)^3}$$

զրո է դառնում, երբ $x = -1,\ 2 + \sqrt{3} \doteq 2,41$ և $2 - \sqrt{3} \doteq 0,27$, փոխելով իր նշանը (շրջում)։

Աղյուսակը հետևյալն է։

$x = -\infty$	−10	−5	−1	−0,41	0	0,27	2	2,41	3	3,73	5	10	+∞
$y = 1$	1,55	2,15	6	7,04	6	4,40	0	−0,03	0	0,08	0,23	0,55	[illegible]
			շրջ-ված	$y' = 0$ մաքս.		շրջ-ված		$y' = 0$ մին.		շրջ-ված			

Գրաֆիկը արված է 61-րդ գծագրի վրա։ Փոքր մասշտաբը այստեղ խանգարում է գծագրի պարզորոշությանը, հատկապես 2-ից մինչև 5-ը x-ի փոփոխման միջակայքում. գրաֆիկի այդ մասը ներկայացված է մեծացրած մասշտաբով։

Այժմ բերենք մի շարք նոր օրինակներ.

զ) $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$։

Ֆունկցիան դառնում է անվերջություն $(\pm\infty)$, երբ $x = -1$։ Քանի որ $x \to \pm\infty$ դեպքում ունենք՝

$$\frac{y}{x} \to 1, \quad y - x = \frac{-5x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} \to -5,$$

ուստի կորը ունի $Y = x - 5$ ասիմպտոտը։

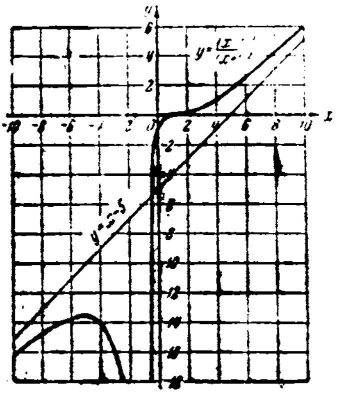
Հաշվենք ածանցյալները՝

$$y' = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}, \quad y'' = \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}.$$

Ածանցյալը զրո է դառնում $x = 1$ կետում (շրջում) և $x = -5$ կետում (մաքսիմում). ուրիշ շրջման կետեր չկան: Գրաֆիկը կառուցենք ըստ հետևյալ աղյուսակի, հաշվի առնելով ասիմպտոտը (գծ. 78)՝

$x = -10$	-5	-3	-1	0	1	5	10
$y = -16,4$	$-13,5$	-16	$-\infty$	-1	0	$1,78$	$6,05$
	$y' = 0$ մաքս.				$y' = 0$ շրջում		

է) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-a}}$ $(a > 0)$.



Գծ. 78.

Քանի որ ընդհանրապես ֆունկցիայի իրական արժեքները ստացվում են միայն $x \leq 0$ կամ $x > a$ դեպքում: $x = a$ դեպքում ֆունկցիան դառնում է անվերջություն:

Ընդունելով $x > a$, $x \to +\infty$ դեպքում կունենանք՝

$$\frac{y}{x} = \sqrt{\frac{x}{x-a}} \to 1,$$

$$y - x = \frac{x}{\sqrt{x-a}} \cdot \frac{a}{\sqrt{x} + \sqrt{x-a}} \to \frac{a}{2},$$

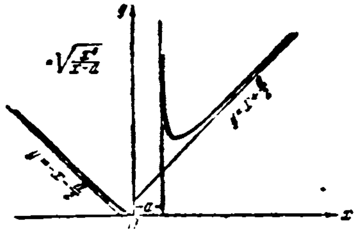
այնպես որ, դրական x-երի կողմից գիծը մոտենում է $Y = x + \frac{a}{2}$ ասիմպտոտին, նույն ձևով բացասական x-երի կողմից ստացվում է մյուս $Y = -x - \frac{a}{2}$ ասիմպտոտը:

$$y' = \frac{1}{y} \cdot \frac{x^2\left(x - \frac{3}{2}a\right)}{(x-a)^2} = \left(x - \frac{3}{2}a\right)\sqrt{\frac{x}{(x-a)^3}}$$

ածանցյալը զրո է դառնում $x = \frac{3}{2}a$ դեպքում, նշանը փոխելով բացասականից դրականի (մինիմում)։ Այն զրո է դառնում նաև $x=0$ կետում, որը սակայն, $(-\infty, 0)$ միջակայքի ծայրն է, որտեղ մենք դիտարկում ենք ֆունկցիան, և այդտեղ էքստրեմումի մասին խոսք լինել չի կարող։ Երկրորդ ածանցյալը՝

$$y'' = \frac{1}{y} \cdot \frac{\frac{3}{4}a^2 x}{(x-a)^3}\,,$$

այն մեծ է զրոյից և՛ $0>x$ դեպքում, և՛ $a<x$ դեպքում, այնպես որ, կորը գոգավորությամբ ուղղված է միշտ դեպի վեր։ Հաշվելով նաև $x = \frac{3}{2}a$ արժեքին համապատասխանող $y \approx 2{,}60a$ օրդինատը, մենք արդեն բավականաչափ տվյալներ կունենանք գրաֆիկի կառուցման համար (գծ. 77.)



Գծ. 77.

8) $y = \sqrt{\frac{a^3 - x^3}{3x}}$ $(a > 0)$։

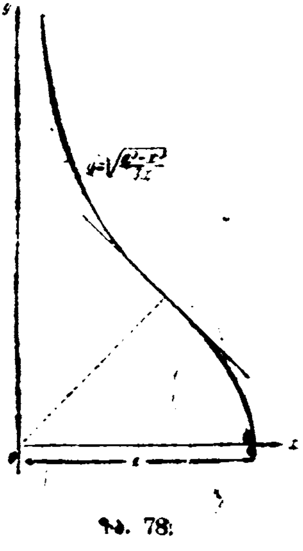
x փոփոխականը կարող է փոփոխվել միայն $(0, a)$ միջակայքում. $x=0$ կետում ֆունկցիան դառնում է անվերջություն։

$$y' = -\frac{a^3 + 2x^3}{6x^2 y} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$$

ածանցյալը միշտ բացասական է, ուստի ֆունկցիան նվազող է. $x=a$ կետում $y' = -\infty$։ Երկրորդ ածանցյալը՝

$$y'' = \frac{1}{2}(y - xy')\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right)$$

զրո է դառնում, փոխելով նշանը, միայն $y = x = \frac{a}{\sqrt[3]{4}} \doteq 0{,}63a$ դեպքում (շրջում)։ Այդ ժամանակ, ակներևաբար, $y' = -1$։ Գրաֆիկը ներկայացված է 78-րդ գծագրի վրա։



Գծ. 78.

§ 3. ԱՆՈՐՈՇՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԲԱՑՈՒՄԸ

140. $\frac{0}{0}$ ՏԵՍԱԿԻ ԱՆՈՐՈՇՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ: Այժմ ածանցյալի գաղափարը և նախորդ գլխի §§ 4, 5-ում ապացուցված թեորեմները կկիրառենք անորոշությունները բացելու համար: Հաջորդ 1—4 թեորեմները հիմնականում պատկանում են Լոպիտալին (G. F. de l'Hospitale) *և Բեռնուլլիին* (Joh. Bernoulli)*: Նրանց մեջ արտահայտված կանոնը սովորաբար անվանում են Լոպիտալի կանոն: Սկզբում մենք կզբաղվենք հիմնական դեպքի՝ $\frac{0}{0}$ տեսքի անորոշությունով, այսինքն՝ կուսումնասիրենք զրոյի ձգտող (որոշակի $x \to a$ սահմանի անցնելիս) $f(x)$ և $g(x)$ երկու ֆունկցիաների հարաբերության սահմանի հարցը:*

Սկսենք մի պարզ թեորեմայից, որը անմիջապես օգտագործում է հենց սահմանի գաղափարը:

1-ԻՆ ԹԵՈՐԵՄԱ: Դիցուք՝ 1) $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են $[a,b]$ միջակայքում, 2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, 3) գոյություն ունեն $f'(a)$ և $g'(a)$ վերջավոր ածանցյալներ, ընդ որում $g'(a) \neq 0$: Այդ ժամանակ՝

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Ապացույց: $f'(a)$ *և* $g'(a)$ *վերջավոր ածանցյալների գոյությունն ապահովված է* $f(x)$ *և* $g(x)$ *ֆունկցիաների անընդհատությունը* a *կետում: 2)-ի շնորհիվ ունենք՝* $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ *և* $g(a) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$*: Ի նկատի ունենալով, որ* $g'(a) \neq 0$, ըստ 115-ի *լեմմայի համաձայն,* a*-ին բավականաչափ մոտ գտնվող* x *արժեքների համար* $g(x) \neq 0$. *մենք հենց այդ արժեքներով էլ կսահմանափակվենք, այնպես որ* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *հարաբերությունը իմաստ կունենա:*

Այդ հարաբերությունը այժմ կարելի է գրել այսպես՝

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}},$$

Այստեղ անցնելով սահմանին, երբ $x \to a$, կստանանք հենց պահանջվող արդյունքը։

Առաջացած թեորեման լրացնենք հետևյալ դիտողությամբ։ Ենթադրենք, թե $g'(a)=0$, բայց $f'(a)$-ն զրոյից տարբեր է։ Այդ ժամանակ թեորեման կիրառելի է $\frac{g(x)}{f(x)}$ հակադարձ հարաբերության նկատմամբ, որը ձգտում է զրոյի։ Հետևաբար [միայն եթե $g(x)$-ը a-ին բավականաչափ մոտ գտնվող x արժեքների համար զրո չի դառնում] $\frac{f(x)}{g(x)}$ հարաբերությունը ձգտում է ∞։ Այսպիսով, միայն $f'(a)$ և $g'(a)$ ածանցյալները միաժամանակ զրո դառնալիս $\frac{f(x)}{g(x)}$ հարաբերության սահմանի հարցը բաց կմնա։

Օրինակներ։ Գտնել հետևյալ սահմանը՝

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\log(e-x) + x - 1}.$$

Թեորեմայի համաձայն, այն հավասար է ածանցյալների հարաբերությանը՝ հաշված $x=0$ կետում, այսինքն՝

$$\left. \frac{e^x + e^{-x}}{1 - \frac{1}{e-x}} \right|_{x=0} = \frac{2}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{2e}{e-1}.$$

2) Գտնել

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x - x^4} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[4]{x^3}}.$$

Այդ սահմանը հավասար է՝

$$\left. \frac{\frac{1 - 2x^3}{\sqrt{2x - x^4}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{-\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}} \right|_{x=1} = \frac{16}{9}.$$

Այն դեպքում, երբ միաժամանակ $f'(a)=0$, $g'(a)=0$, կարելի է օգտվել 1-ին թեորեմայի հետևյալ ընդհանրացումից, որը օգտագործում է բարձր կարգի ածանցյալները.

2-ՐԴ ԹԵՈՐԵՄԱ։ Դիցուք 1) $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են $[a, b]$ միջակայքում, 2) $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, 3) $[a, b]$ միջակայքում գոյություն ունեն բոլոր ածանցյալները, ներառյալ մինչև $(n-1)$-րդ կարգը՝ $f'(x)$, $f''(x)$, …, $f^{(n-1)}(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$, …, $g^{(n-1)}(x)$, 4) նրանք բոլորը զրո են դառնում $x = 0$ կետում, 5) գոյություն ունեն $f^{(n)}(a)$ և $g^{(n)}(a)$ վերջավոր ածանցյալները, ընդ որում $g^{(n)}(a) \neq 0$։ Այդ ժամանակ՝

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Ապացույց։ $f(x)$ *և* $g(x)$ *ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրի նկատմամբ* $[a, x]$ *միջակայքում* $(a < x < b)$ *կիրառենք Թեյլորի բանաձևը Պեանոյի ձևով լրացուցիչ անդամով [տես 122 (10ա)]։ 2)-ի և 4)-ի շնորհիվ կստանանք՝*

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a) + \alpha}{n!}(x-a)^n, \quad g(x) = \frac{g^{(n)}(a) + \beta}{n!}(x-a)^n,$$

որտեղ α*-ն և* β*-ն ձգտում են զրոյի, երբ* $x \to a$*։*

Այդ հավասարություններից հետևում է, $g^{(n)}(a) \neq 0$ *պայմանի շնորհիվ, առաջին հերթին այն, որ* $g(x)$*-ը զրոյից տարբեր է, առնվազն* a*-ին բավականաչափ մոտ գտնվող* x*-ի արժեքների համար։ Եթե սահմանափակվենք այդ արժեքներով, ապա* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *հարաբերությունը իմաստ կունենա։*

Այդ ժամանակ, փոխելով գրված հավասարություններից անմիջապես կստանանք պահանջված արդյունքը՝

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n)}(a) + \alpha}{g^{(n)}(a) + \beta} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Այն դեպքում, երբ $g^{(n)}(a) = 0$*, բայց* $f^{(n)}(a) \neq 0$*, հարցը հանգում է, ինչպես և վերևում,* $\frac{g(x)}{f(x)}$ *հակադարձ հարաբերության դիտարկմանը։*

Օրինակ 3) Գտնել՝

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}.$$

Այստեղ ունենք՝

$$f(x)=e^{x}-e^{-x}-2x,\quad f(0)=0;\quad g(x)=x-\sin x,\quad g(0)=0;$$

$$f'(x)=e^{x}+e^{-x}-2,\quad f'(0)=0;\quad g'(x)=1-\cos x,\quad g'(0)=0;$$

$$f''(x)=e^{x}-e^{-x},\quad f''(0)=0;\quad g''(x)=\sin x,\quad g''(0)=0;$$

$$f'''(x)=e^{x}+e^{-x},\quad f'''(0)=2;\quad g'''(x)=\cos x,\quad g'''(0)=1.$$

Հետևապես, որոնելի սահմանը հավասար է 2-ի։

Չնայած շատ դեպքերում ապացուցված թեորեմաները արդեն բավական են $\frac{0}{0}$ տեսքի անորոշությունների բացման համար, սակայն պրակտիկայում սովորաբար ավելի հարմար է կիրառել հետևյալ թեորեման՝

3-ՐԴ ԹԵՈՐԵՄԱ: Դիցուք՝ 1) $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են $[a,b]$ միջակայքում, 2) $\lim_{x\to a} f(x)=0$, $\lim_{x\to a} g(x)=0$, 3) $(a,b]$ միջակայքում գոյություն ունեն $f'(x)$ և $g'(x)$ վերջավոր ածանցյալները, ընդ որում $g'(x)\neq 0$, և, վերջապես, 4) գոյություն ունի

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$$

սահմանը (վերջավոր կամ ոչ)։ Այդ ժամանակ նաև՝

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=K.$$

Ապացույց։ $f(x)$ *և* $g(x)$ *ֆունկցիաների սահմանումը լրացնենք, ընդունելով, որ* $x=a$ *կետում նրանք հավասար են զրոյի՝* $f(a)=g(a)=0$*։ *Այդ ժամանակ այդ ֆունկցիաները*

* *Իհարկե, կարելի էր ուղղակի նախապես ենթադրել, որ ֆունկցիան որոշված է ու անընդհատ $x=a$ կետում, սակայն կիրառությունների ժամանակ երբեմն ավելի հարմար է թեորեմայի պայմանների այն ձևակերպումը, որը տրված է տեքստում (տես, օրինակ, 8*-րդ թեորեման)։*

անընդհատ կլինեն ամբողջ [a,b] փակ միջակայքում. նրանց արժեքները a կետում կհամընկնեն սահմանների հետ, երբ x→a [2)-ի շնորհիվ], իսկ մյուս կետերում անընդհատությունը հետևում է վերջավոր ածանցյալների գոյությունից [տես 3)]։ Կիրառելով Կոշիի թեորեմը [120], կստանանք՝

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

որտեղ $a < c < x$։ Այն հանգամանքը, որ $g(x) \neq 0$, այսինքն՝ $g(x) \neq g(a)$, հանդիսանում է $g'(x) \neq 0$ ենթադրության հետևանքը, ինչպես այդ արդեն ցույց ենք տվել Կոշիի բանաձևն ստանալիս։

Երբ $x \to a$, ակներևաբար, նաև $c \to a$, ուստի, 4)-ի շնորհիվ կունենանք՝

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = K,$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Այսպիսով, ապացուցված թեորեմն ֆունկցիաների հարաբերության սահմանը հանգեցնում է ածանցյալների հարաբերության սահմանին, եթե վերջինս գոյություն ունի։ Հաճախ պարզվում է, որ ածանցյալների հարաբերության սահմանը հաշվելը ավելի հեշտ է և կարելի է գտնել տարրական եղանակներով։

Օրինակ 1) Գտնել՝

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x},$$

ածանցյալների հարաբերությունը հաջորդաբար պարզեցվում է այսպես՝

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x},$$

երբ $x \to 0$, այդ հարաբերությունը, ակներևաբար, ձգտում է 2-ի։ Թեորեմայի համաձայն, սկզբնական սահմանը ևս կլինի 2-ը։

1-ին թեորեմն այս դեպքում կիրառելի չէր լինի, որովհետև $x = 0$ կետում համարիչի և հայտարարի ածանցյալները երկուսն էլ հավասար են զրոյի։ Իսկ ինչ վերաբերում է 2-րդ թեորեմային, ապա, թեև նրա օգնությամբ կարելի էր խնդիրը լուծել, բայց դրա համար կպահանջվեր (որում կարելի է հեշտությամբ համոզվել) ֆունկցիաների երեք հաջորդական ածանցյալների հաշվում։

Ընթերցողի ուշադրությունը հրավիրում ենք այն հանգամանքի վրա, որ այստեղ ածանցյալների հարաբերությունը կրկին եղավ $\frac{0}{0}$ տեսքի անորոշություն. բայց այդ անորոշությունը հնարավոր եղավ պարզել տարրական ձևափոխությունների միջոցով։ Այլ դեպքերում կարող է թեորեմն կրկին անգամ օգտագործելու հարկ լինել։ Կարևոր է ընդգծել, որ այդ ժամանակ թույլատրելի են առանց արտահայտությունների ամեն տեսակի պարզեցումներ՝ ընդհանուր արտադրիչների կրճատում, որոշ հայտնի սահմանների օգտագործում, և այլն։ (Այդ բոլորը կատարել չի կարելի, եթե կիրառվում է 2-րդ թեորեմը)։ Հետևյալ օրինակի մեջ 3-րդ թեորեմը հաջորդաբար կիրառվում է երեք անգամ. առաջին անգամ կիրառելուց հետո, մենք կրճատում ենք e^x-ով, իսկ երկրորդից հետո՝ հայտարարից դեն ենք նետում e^x արտադրիչը (քանի որ նա ձգտում է 1 մեկի)։ Դրանով հաշվումները ավելի պարզեցվում են։

Օրինակներ։ 5)

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{2x}+xe^{x}-2e^{2x}+2e^{x}}{(e^{x}-1)^{3}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{2x}+e^{2x}+xe^{x}+e^{x}-4e^{2x}+2e^{x}}{3e^{x}(e^{x}-1)^{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x}-3e^{x}+3+x}{3(e^{x}-1)^{2}}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x}+2e^{x}-3e^{x}+1}{2(e^{x}-1)e^{x}}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{-e^{x}+2xe^{x}+1}{e^{x}-1}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x}+e^{x}}{e^{x}}=\frac{1}{6}.$$

6) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x-(1+x)\log(1+x)}{x^{2}(1+x)}.$$

Քանի որ աջից գրված առաջին արտադրիչը ձգտում է e-ի, ուստի բավական է դիտել երկրորդ արտադրիչը։ 2-րդ թեորեմի կրկնակի կիրառման միջոցով կգտնենք, որ նրա սահմանը հավասար է $-\frac{1}{2}$-ի։

Պատասխան՝ $-\frac{e}{2}$.

3-րդ թեորեմի հետազոտությունը տարածվում է նաև այն դեպքի վրա, երբ x արգումենտը ձգտում է անվերջ սահմանի

$a = \pm\infty$ (հնարավոր է, որ այդ չի կարելի կատարել 1-ին և 2-րդ թեորեմների նկատմամբ)։

Ցույց տանք, օրինակ, հետևյալ թեորեմը՝

3*-ՐԴ ԹԵՈՐԵՄԱ. Դիցուք՝ 1) $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են $[c, +\infty)$ միջակայքում, 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$; 3) $[c, +\infty)$ միջակայքում գոյություն ունեն $f'(x)$ և $g'(x)$ վերջավոր ածանցյալներ, ընդ որում $g'(x) \neq 0$, և, վերջապես, 4) գոյություն ունի

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$$

սահմանը (վերջավոր կամ ոչ)։ Այդ ժամանակ նաև՝

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Ապացույց։ x փոփոխականը ձևափոխենք հետևյալ բանաձևով՝ $x = \frac{1}{t}$, $t = \frac{1}{x}$։ Այդ ժամանակ, եթե $x \to +\infty$, ապա $t \to +0$, և ընդհակառակը։ 2)-ի շնորհիվ կունենանք՝

$$\lim_{t\to+0} f\left(\frac{1}{t}\right) = 0, \quad \lim_{t\to+0} g\left(\frac{1}{t}\right) = 0.$$

Իսկ 4)-ի շնորհիվ՝

$$\lim_{t\to+0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = K.$$

t նոր փոփոխականից կախված $f\left(\frac{1}{t}\right)$ և $g\left(\frac{1}{t}\right)$ ֆունկցիաների նկատմամբ կարելի է կիրառել 3-րդ թեորեմը, որը մեզ կտա՝

$$\lim_{t\to+0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to+0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)} {}^{*}= \lim_{t\to+0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = K,$$

իսկ այդ ժամանակ նաև՝

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K,$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։

---

* $f\left(\frac{1}{t}\right)$ և $g\left(\frac{1}{t}\right)$ ֆունկցիաները ըստ t-ի դիֆերենցում ենք որպես բարդ ֆունկցիաներ։

141. $\frac{\infty}{\infty}$ ՏԵՍՔԻ ԱՆՈՐՈՇՈՒԹՅՈՒՆ։ *Դիմենք $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշությունների դիտարկմանը, այսինքն՝ հետազոտենք $f(x)$ և $g(x)$ երկու այնպիսի ֆունկցիաների հարաբերության սահմանի հարցը, որոնք ձգտում են անվերջության, երբ $x \to a$։ Ցույց տանք, որ այս դեպքում կիրառելի է Լոպիտալի նույն կանոնը. հետևյալ թեորեման՝ 3-րդ թեորեմայի պարզ վերաձևակերպումն է։*

4-ՐԴ ԹԵՈՐԵՄԱ։ Դիցուք՝ 1) $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են $(a, b]$ միջակայքում, 2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$, 3) $(a, b]$ միջակայքում գոյություն ունեն $f'(x)$ և $g'(x)$ վերջավոր ածանցյալներ, ընդ որում $g'(x) \neq 0$, և, վերջապես, 4) գոյություն ունի

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$$

սահմանը (վերջավոր կամ ոչ)։ Այդ ժամանակ նաև՝

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K$$

Ապացույց։ Նախ քննության առնենք այն դեպքը, երբ K*-ն վերջավոր է։ Նախապես վերցնելով $\varepsilon > 0$ կամայական թիվը, 4)-րդ պայմանի շնորհիվ կգտնենք այնպիսի $\eta > 0$, որ, երբ* $a < x < a + \eta$, *տեղի ունենա՝*

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - K \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

կամ՝

$$K - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < K + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Վերցնենք երկու այնպիսի x_0 *և* x *արժեքներ, որ՝* $a < x < x_0 < a + \eta$, *և* $[x, x_0]$ *միջակայքի նկատմամբ կիրառենք Կոշիի բանաձևը**, *կստանանք՝*

---

* *Հենց սրանում է կայանում այս և 3-րդ թեորեմների ապացույցների էական տարբերությունը. այստեղ Կոշիի բանաձևը* $[a, x]$ *միջակայքի նկատմամբ կիրառել չի կարելի, որովհետև ինչպես էլ որ սահմանենք* $f(x)$ *և* $g(x)$ *ֆունկցիաները* a *կետում, 2-րդ պայմանի շնորհիվ, նրանցից չի կարելի ստանալ այդ կետում անընդհատ ֆունկցիաներ։*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

որտեղ՝ $x<c<x_0$, հետևապես՝ նաև՝ $a<c<a+\eta$, ուստի,

$$K-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}<K+\frac{\varepsilon}{2}; \qquad (1)$$

Ֆիքսելով x_0-ն, x-ը թողնում ենք փոփոխական։

Այժմ մեզ հետաքրքրող $\frac{f(x)}{g(x)}$ կոտորակը համեմատենք հենց նոր ստացածի հետ. նրանց հարաբերությունը՝

$$\frac{f(x)}{g(x)}:\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}$$

ձգտում է 1-ի, երբ $x\to a$ որովհետև $f(x_0)$-ն և $g(x_0)$-ն հաստատուն թվեր են, իսկ $f(x)$-ը և $g(x)$-ը ձգտում են ∞, 2)-ի շնորհիվ։ Հետևապես, այդ հարաբերությունը կարելի է ներկայացնել $1+\alpha$ տեսքով, որտեղ $\alpha\to 0$, երբ $x\to a$։ (1) կրկնակի անհավասարության բոլոր անդամները բազմապատկելով $(1+\alpha)$-ով, կստանանք՝

$$K-\frac{\varepsilon}{2}+\alpha\left(K-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{f(x)}{g(x)}<K+\frac{\varepsilon}{2}+\alpha\left(K+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Այս անհավասարության ձախ և աջ մասերի վերջին գումարելիները ձգտում են զրոյի, երբ $x\to a$. a-ին բավականաչափ մոտ գտնվող x-ի արժեքների համար նրանց բացարձակ արժեքները կարելի է դարձնել $\frac{\varepsilon}{2}$-ից փոքր։ Ուստի, կարելի է ընտրել այնպիսի $\delta>0$ $(\delta<\eta)$, որ երբ $a<x<a+\delta$, արդեն տեղի ունենա՝

$$K-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x)}{g(x)}<K+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$$

կամ՝

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \varepsilon,$$

որը և ապացուցում է պահանջվելիք առնչությունը։

Այն դեպքում, երբ $K=\infty$*, *ունենք՝*

$$\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0,$$ *այնպես որ նաև* $$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=0,$$

որտեղից, վերջապես, կունենանք՝

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty.$$

3-րդ թեորեմայի նման, այս թեորեմն էլ կարելի է տարածել այն դեպքի վրա, երբ արգումենտի սահմանը անվերջ է.

4*-րդ **ԹԵՈՐԵՄԱ**։ Դիցուք՝ 1) $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են $[c, +\infty)$ միջակայքում, 2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\infty$, 3) $[c, +\infty)$ միջակայքում գոյություն ունեն $f'(x)$ և $g'(x)$ ածանցյալները, ընդ որում $g'(x)\neq 0$, և, վերջապես 4) գոյություն ունի

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$$

սահմանը (վերջավոր կամ ոչ)։ Այդ դեպքում նաև՝

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K.$$

Ապացույցը թողնում ենք ընթերցողին։

Դրա օգնությամբ հեշտությամբ կարելի է ստանալ մեզ արդեն հայտնի սահմանները՝

$$7)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^{\mu}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mu x^{\mu}}=0$$

(երբ $\mu>0$*)։*

---

* *Այդ ժամանակ, ակներևաբար,* $f'(x)\neq 0$, *առնվազն c-ի մոտակայքում։*

Այնուհետև ունենք՝

$$8)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\mu}}{a^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu x^{\mu-1}}{a^{x}\log a}\quad (a>1,\ \mu>0)\text{։}$$

Եթե $\mu>1$, *ապա այս մասում նորից կունենանք նույն՝* $\frac{\infty}{\infty}$ *տեսքի անորոշություն, բայց այդ գործողությունը շարունակելով և մի քանի անգամ 4-րդ թեորեման կիրառելով, վերջ ի վերջո համարիչում կստանանք բացասական ցուցիչով (կամ զրոյով) աստիճան. ուստի, բոլոր դեպքերում էլ, կստանանք՝*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\mu}}{a^{x}}=0\text{։}$$

Մի ընդհանուր դիտողություն անենք 3-րդ և 4-րդ (3 և 4*) թեորեմաների նկատմամբ։ Այդ թեորեմաներում հաստատվում է ֆունկցիաների հարաբերության սահմանը այն ենթադրությամբ, թե գոյություն ունի ածանցյալների հարաբերության սահմանը։ Սակայն այդ թեորեմաների շրջումը անթույլատրելի է, և առաջին սահմանը կարող է գոյություն ունենալ նաև այն դեպքում, երբ երկրորդը գոյություն չունի։ Օրինակ, գոյություն ունի*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

սահմանը, թեև ածանցյալների հարաբերությունը, որը հավասար է $1+\cos x$, *սահման չունի, երբ* $x\to+\infty$։

142. ԱՅԼ ՏԵՍՔԻ ԱՆՈՐՈՇՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։ *Նախորդ թեորեմաները վերաբերում էին* $\frac{0}{0}$ *և* $\frac{\infty}{\infty}$ *տեսքի անորոշություններին։*

Եթե մենք ունենք $0.\infty$ *տեսքի անորոշություն, ապա այն կարող ենք բերել* $\frac{0}{0}$ *կամ* $\frac{\infty}{\infty}$ *տեսքի և ապա օգտվել Լոպիտալի կանոնից։ Դիցուք՝*

$$\lim_{x\to a}f(x)=0,\quad \lim_{x\to a}g(x)=\infty\text{։}$$

Այդ ժամանակ կունենանք՝

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

Այս արտահայտություններից երկրորդը, երբ $x\to a$, իրենից ներկայացնում է $\frac{0}{0}$ տեսքի անորոշություն, երրորդը՝ $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշություն։

Օրինակ 9)

$$\lim_{x\to+0}(x^{\mu}\cdot\log x)=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x^{-\mu}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\mu x^{-\mu-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{x^{\mu}}{-\mu}=0$$

(մենք ընդունում ենք, որ $\mu>0$)։

$\frac{0}{0}$ կամ $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշության կարելի է բերել նաև $\infty-\infty$ տեսքի անորոշությունը։ Դիցուք ունենք $f(x)-g(x)$ արտահայտությունը, ընդ որում՝

$$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to a}g(x)=+\infty.$$

Այդ ժամանակ կարելի է կատարել, օրինակ, հետևյալ ձևափոխությունը, որը այդ արտահայտությունը բերում է $\frac{0}{0}$ տեսքի անորոշության՝

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}},$$

Հաճախ նույն նպատակին կարելի է հասնել ավելի հեշտությամբ։

Օրինակ 10)

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2x\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x-x^2\cdot\cos^2x}{x^2\sin^2x}.$$

սակայն

$$\frac{\sin^2 x - x^2 \cdot \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} \quad \frac{\sin x + x \cdot \cos x}{\sin x} \cdot \frac{\sin x - x \cdot \cos x}{x^2 \sin x}.$$

առաջին բազմապատկիչի սահմանը որոշվում է տարրական եղանակով

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x \right) = 2,$$

իսկ երկրորդի նկատմամբ կիրառենք 3-րդ թեորեմը՝

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{2x \sin x + x^2 \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2 + \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x} = \frac{1}{3},$$

Այսպիսով, որոնելի սահմանը հավասար է $\frac{2}{3}$-ի։

1^{∞}, 0°, ∞° տեսքի անորոշ արտահայտությունների դեպքում խորհուրդ է տրվում այդ արտահայտությունները նախապես լոգարիթմել։

Դիցուք $y = [f(x)]^{g(x)}$, այդ ժամանակ $\log y = g(x) \cdot \log f(x)$։ $\log y$-ի սահմանը իրենից ներկայացնում է արդեն ուսումնասիրված $0 \cdot \infty$ տեսքի անորոշություն։ Ընդունենք, որ վերահիշյալ եղանակներից որևէ մեկի միջոցով կարողացել ենք գտնել $\lim\limits_{x \to a} \log y$-ը, որը հավասար է k վերջավոր թվին, $+\infty$ կամ $-\infty$։ Այդ ժամանակ $\lim\limits_{x \to a} y$-ը, համապատասխանաբար, կլինի e^k, $+\infty$ կամ 0։

Օրինակ 11) Դիցուք՝

$$y = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}},$$

պահանջվում է գտնել $\lim\limits_{x \to 0} y$-ը (1^{∞} տեսքի անորոշություն)։

Եթե ընդունենք $x > 0$ (այդ ենթադրությամբ կարելի է սահմանափակվել, որովհետև y ֆունկցիան զույգ է), ապա՝

$$\log y=\frac{\log \sin x-\log x}{1-\cos x},$$

Երկու անգամ հաջորդաբար կիրառելով 3-րդ թեորեմը՝

$$\lim_{x\to 0}\log y=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin^2 x+2x\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\frac{\sin x}{x}+2\cos x}=-\frac{1}{3},$$

որտեղից՝

$$\lim_{x\to 0} y=e^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e}},$$

Օրինակ 12)

$$y=\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\log x}},$$

Երբ $x\to+\infty$, այս արտահայտությունը ներկայացնում է 0 տեսքի անորոշություն. Ունենք՝

$$\log y=\frac{\log\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)}{\log x}\qquad\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Ըստ Լոպիտալի կանոնի՝

$$\lim_{x\to+\infty}\log y=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}}$$

$$
=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x}{1+x^2}}{\operatorname{arctg}x-\dfrac{\pi}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{\dfrac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}=-1,
$$

ուստի $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\frac{1}{e}$:

§ 4. ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

143. *ՆԵՐԱԾԱԿԱՆ ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ: Այժմ դիտարկենք տված* $f(x)$ *ֆունկցիայի* *ա ր մ ա տ ն ե ր ը*, *այսինքն՝*

$$
f(x)=0 \qquad (1)
$$

հավասարման արմատները գտնելու խնդրում: Ի միջի այլոց, մենք այդ խնդիրը լուծելու ենք այն ենթադրությամբ, որ մեզ հետաքրքրող ξ *արմատը մեկուսացված է, այսինքն՝ որ գտնված է այդ արմատը պարունակող այնպիսի* $[a, b]$ *միջակայք՝*

$$
a<\xi<b,
$$

որտեղ ուրիշ արմատներ չկան:

Եթե, բացի դրանից, $f(x)$ *ֆունկցիան միջակայքի ծայրակետերում ունի* $f(a)$ *և* $f(b)$ *տարբեր նշաններով արժեքներ, ապա (ինչպես արդեն բացատրված է n° 80-ում, կապված Կոշիի 1-ին թեորեմայի կիրառության հետ) արմատը պարունակող միջակայքը հաջորդաբար մասերի տրոհելով, և բաժանման կետում* $f(x)$ *ֆունկցիայի նշանը որոշելով, կարելի է ցանկացած չափով փոքրացնել այդ միջակայքը և դրանով կատարել արմատի մոտավոր հաշվումը: Սակայն, այս եղանակը, չնայած նրա սկզբունքային պարզության, գործնականում հաճախ դառնում է անպետք, որովհետև պահանջում է շատ մեծ թվով հաշվումներ: Այս պարագրաֆում ընթերցողը կծանոթանա (1) հավասարման արմատի (մեկուսացված) մոտավոր հաշվման ավելի պարզ եղանակների հետ, որոնք ավելի արդյունավետ ու ավելի արագ են հասցնում նպատակին: Միաժամանակ մենք նորից առիթ կունենանք օգտագործել դիֆերենցիալ հաշվի հիմնական գաղափարներն ու մեթոդները:*

Մենք միշտ ենթադրելու ենք, որ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

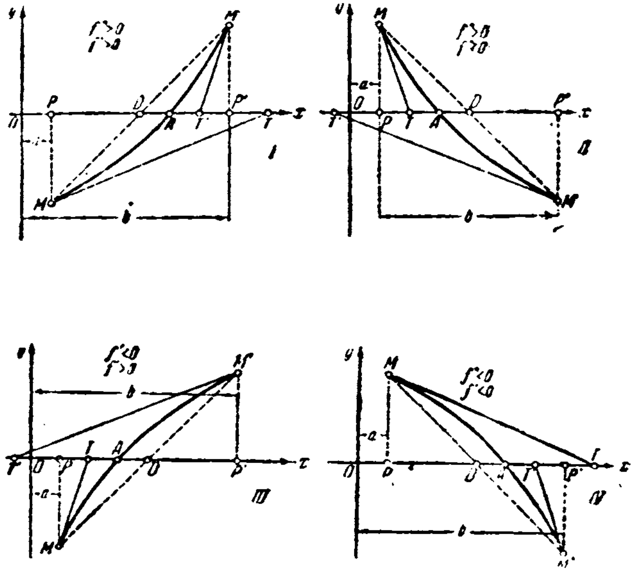
1) $[a, b]$ միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիան իր $f'(x)$ և $f''(x)$ ածանցյալների հետ միասին անընդհատ է.

2) միջակայքի ծայրակետերում ֆունկցիայի $f(a)$ և $f(b)$ արժեքները ունեն տարբեր նշաններ՝ $f(a)\cdot f(b)<0$:

3) $f'(x)$ և $f''(x)$ ածանցյալներից յուրաքանչյուրը պահպանում է իր որոշակի նշանը ամբողջ $[a, b]$ միջակայքում:

$f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատությունից և 3)-րդ պայմանից հետևում է, որ a-ի և b-ի միջև գտնվում է (1) հավասարման ξ արմատ [79]։ Քանի որ $f'(x)$ ածանցյալը նշանը պահպանում է [3)], ուստի $f(x)$-ը $[a, b]$ միջակայքում աճում է կամ նվազում և, հետևապես, զրո է դառնում միայն մեկ անգամ. ξ արմատը մեկուսացված է։

3)-րդ պայմանը երկրաչափորեն նշանակում է, որ $y=f(x)$ կորը ոչ միայն մեկ ուղղությամբ է գնում, միշտ դեպի վերև կամ միշտ դեպի ներքև, այլև նրա գոգավորությունը միշտ ուղղված է դեպի միևնույն կողմը [136]։ 79-րդ գծագրի վրա ներկայացված են բոլոր այն չորս հնարավոր դեպքերը, որոնք համապատասխանում են $f'(x)$-ի և $f''(x)$-ի նշանների զանազան զուգորդումներին։



Գծ. 79.

Հանրահաշվի մեջ ապացուցվում է, որ հ ա ն ր ա հ ա շ վ ա կ ա ն հավասարումների (իրական) արմատները հաշվելիս միշտ կարելի է ստեղծել այնպիսի դրություն, որ տեղի ունենան 1), 2), 3) պայմանները, ուստի այդ պայմանները սկզբունքորեն չեն սահմանափակում ստորև շարադրվելիք եղանակների կիրառությունները։ Այդ չի կարելի ասել տ ր ա ն ս ց ե ն դ ե ն տ (այսինքն՝ ոչ հանրահաշվական) հավասարումների նկատմամբ։ Սակայն գործնականում այդ սահմանափակումները քիչ կաշկանդիչ են, որովհետև մեծ մասամբ պատահում են այնպիսի դեպքեր, երբ վերոհիշյալ պայմանները տեղի ունեն։

144. ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ՄԱՍԵՐԻ ԿԱՆՈՆԸ (ԼԱՐԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ)։ Եթե $[a, b]$ միջակայքը բավականաչափ փոքր է, ապա որոշ ճշգրտությամբ կարելի է ընդունել, որ, երբ x-ը փոփոխվում է այդ միջակայքի սահմաններում,

f(x) ֆունկցիայի աճը համեմատական է արգումենտի աճին: Ֆունկցիայի արմատը նշանակելով ξ-ով, մասնավոր դեպքում, կունենանք՝

$$\frac{f(\xi)-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{\xi-a}{b-a},$$

որտեղից, ի նկատի ունենալով, որ $f(\xi)=0$, կստանանք՝

$$\xi=a-\frac{(b-a).f(a)}{f(b)-f(a)},$$

Այսպիսով, այստեղ որպես արմատի մոտավոր արժեք ընդունվում է

$$x_1=a-\frac{(b-a).f(a)}{f(b)-f(a)} \tag{2}$$

թիվը: Այս արտահայտությունը, ակնհայտորեն, կարելի է ներկայացնել նաև հետևյալ ձևով՝

$$x_1=b-\frac{(b-a).f(b)}{f(b)-f(a)}, \tag{2*}$$

Արմատի մոտավոր արժեքն ստանալու շարադրված կանոնը կոչվում է համեմատական մասերի կանոն*: Նա ունի երկրաչափական պարզ մեկնաբանություն. Կորի MM' աղեղը փոխարինենք (գծ. 79) MM' լարով: Վերջինիս հավասարումը կարելի է գրել, օրինակ, այսպես՝

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a). \tag{3}$$

Ըստ էության, մեր կանոնը հանգում է նրան, որ կորի և x-երի առանցքի հատման A կետի փոխարեն որոշվում է այդ լարի և x-երի առանցքի հատման D կետը: Իրոք, (3)-ի մեջ ընդունելով $y=0$, D կետի x_1 աբսցիսի համար կստանանք հենց 2-րդ արտահայտությունը:

Այս նկատառումով համեմատական մասերի կանոնը անվանում են նաև լարերի մեթոդ:

Այժմ դիմենք այն հարցի հետազոտությանը, թե x_1 կետը ξ արմատի նկատմամբ ինչ դիրք ունի: Անմիջապես պարզ է, որ x_1 կետը գտնվում է a-ի և b-ի միջև: Արված ենթադրությունների դեպքում, կարելի է նաև

---

* Առաջներում այն անվանում էին «կեղծ դրույթի կանոն» (правило ложного положения, regula falsi), որովհետև այն հիմնված է այնպիսի ենթադրության վրա, որը, խիստ ասած, իրականությանը չի համապատասխանում:

պնդել հետևյալը. x_1 կետը գտնվում է ξ արմատի այն կողմում, որտեղ $f(x)$ ֆունկցիան ունի $f''(x)$-ի նշանի հակառակ նշանը: Նշանակում է, I և IV դեպքերում x_1-ը գտնվում է a-ի և ξ-ի միջև, իսկ II և III դեպքերում՝ ξ-ի և b-ի միջև:

Ապացուցման ընթացքում կսահմանափակվենք I (և IV) դեպքով: Դիտարկենք

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad (a<x\leq b) \qquad (4)$$

հարաբերությունը: Նրա ածանցյալը կլինի՝

$$\varphi'(x)=\frac{f'(x)\cdot(x-a)-f(x)+f(a)}{(x-a)^2}.$$

Եթե օգտագործենք Թեյլորի բանաձևը Լագրանժի ձևով լրացուցիչ անդամով [124, (13)]՝

$$f(a)=f(x)+f'(x)\cdot(a-x)+\frac{1}{2}f''(c)\cdot(a-x)^{2}\,{}^{*} \quad (a<c<x),$$

ապա ստացվում է, որ

$$\varphi'(x)=\frac{1}{2}f''(c).$$

Հետևապես, $\varphi'(x)$-ը պահպանում է նույն նշանը, ինչ-որ $f''(x)$-ը, ուստի [127] $\varphi(x)$ ֆունկցիան աճում է (նվազում է) $(a, b]$ միջակայքում: Մասնավորապես, ամեն մի $x<b$ դեպքում կունենանք՝

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{(>)}{<} \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

կամ՝

$$f(x) \underset{(>)}{<} f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Երկրաչափորեն այս պարզապես նշանակում է, որ MM′ լարը իր բոլոր կետերով գտնվում է կորի MM′ աղեղից վեր (ներքև) [տես (8) և գծ. 79]: Նախորդ անհավասարության մեջ ընդունելով $x=x_1$, անմիջապես կստանանք՝

$$f(x_1)\underset{(>)}{<}0,$$

---

* Այստեղ $n=1$, x-ը խաղում է x_0-ի դերը, իսկ a-ն՝ x-ի դերը:

այնպես որ $f(x_1)$-ը, ինչը, ունի $f''(x)$-ի նշանի հակառակ նշանը, որը և պահանջվում էր ապացուցել:

Առաջիկայում ևս սահմանափակվելով I կամ IV դեպքերով, նորից կկիրառենք մեր կանոնը, այս անգամ $[x_1, b]$ միջակայքի նկատմամբ, (2)-ի մեջ a-ն փոխարինելով x_1-ով կստանանք ξ արմատի նոր մոտավոր արժեք՝

$$x_2 = x_1 - \frac{(b-x_1).f(x_1)}{f(b)-f(x_1)},$$

որը, ապացուցածի համաձայն, գտնվում է x_1-ի և ξ-ի միջև: Այս պրոցեսը կարելի է ցանկացած չափով շարունակել և կառուցել մշտապես աճող մոտավոր արժեքների հաջորդականություն՝

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < \xi:$$

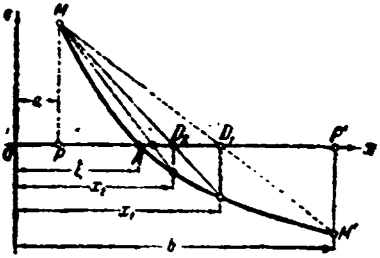
Այստեղ ամեն երկու իրար հաջորդող x_n և x_{n+1} արժեքները կապված են (2)-ի նման մի բանաձևով՝

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b-x_n)f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}, \qquad (5)$$

Ցույց տանք, որ n-ը աճելիս $x_n \to \xi$: Իսկապես, մոնոտոն աճող, բայց սահմանափակ (օրինակ, ξ թվով) x_n փոփոխականը պետք է ձգտի մի որոշ α վերջավոր սահմանի, որը $\leq \xi$: Եթե (5) հավասարության մեջ անցնենք սահմանին, այդ ժամանակ օգտագործելով $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատությունը, ապա կստանանք, որ

$$\frac{(b-\alpha).f(\alpha)}{f(b)-f(\alpha)} = 0,$$

որտեղից $f(\alpha)=0$: Քանի որ $[a, b]$ միջակայքում (1) հավասարումն ուրիշ արմատներ չունի, ուստի $\alpha = \xi$*:



Գծ. 80.

80-րդ գծագիրը ցույց է տալիս հաջորդական լարերի և x-երի առանցքի հատման D_1, D_2, ... կետերի աստիճանաբար մոտեցումը որոնելի A կետին:

---

* Պրոցեսի զուգամիտությունը կարելի է ցույց տալ նաև առանց այն ենթադրության, որը վերաբերում է երկրորդ կարգի ածանցյալին, բայց այդ ժամանակ չի բացառվում x_n կետերի արմատի մի կողմից մյուս կողմը անցնելու հնարավորությունը:

Հեշտ է հասկանալ, որ II և III դեպքերում կանոնի հաջորդաբար կիրառումը կբերի նվազող մոտավոր արժեքների հաջորդականության՝

$$b > x_1 > x_2 \ldots > x_n > x_{n+1} \ldots > \xi,$$

որը աջից կձգտի ξ արմատին:

Այսպիսով, բոլոր դեպքերում, բավականաչափ անգամ կիրառելով վերոհիշյալ կանոնը, կարելի է ցանկացած ճշտությամբ հաշվել ξ արմատը: Այդ ժամանակ, ի միջի այլոց, բաց է մնում այն հարցը, թե ինչպես գնահատել արդեն հաշված x_n մոտավոր արժեքի ճշտությունը:

Այդ հարցը լուծելու համար $f(x_n)$ և $f(\xi)$ տարբերության նկատմամբ կիրառենք վերջավոր աճերի բանաձևը [118]՝

$$f(x_n) = f(x_n) - f(\xi) = (x_n - \xi) \cdot f'(c) \quad (\xi < c < x_n).$$

Այստեղից՝

$$x_n - \xi = \frac{f(x_n)}{f'(c)}.$$

Եթե դիտարկվող միջակայքում $|f'(x)|$-ի փոքրագույն արժեքը նշանակենք m-ով (որը կարելի է նախապես մեկընդմիշտ հաշվել), ապա կստանանք հետևյալ գնահատականը՝

$$|x_n - \xi| < \frac{|f(x_n)|}{m}. \qquad (6)$$

Ուրեմն, $f(x_n)$-ի մեծությամբ կարելի է դատել այն մասին, թե x_n-ը որքան է մոտ արմատին:

Դիտարկենք հետևյալ օրինակը.

$$x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$$

Հավասարման արմատը ընկած է 3-ի և 4-ի միջև, որովհետև, եթե նրա ձախ մասը նշանակենք $f(x)$-ով, կունենանք՝

$$f(3) = -10 < 0, \quad f(4) = 9 > 0.$$

Այդ արմատը հաշվենք 0,01 ճշտությամբ։ $[3, 4]$ միջակայքում

$$f'(x) = 3^2 - 4x - 4 \quad \text{և} \quad f''(x) = 6x - 4$$

երկու ածանցյալները պահպանում են իրենց դրական նշանը (I դեպք). առաջինի փոքրագույն արժեքը կլինի $m = 11$.

Ունենք՝

$$x_1=3-\frac{f(3)}{f(4)-f(3)}=3+\frac{10}{19}=3+0,52\dots$$

Կլորացնելով, ընդունենք $x_1=3,52$: Քանի որ $f(3,52)=-2,246592$, ուստի, ըստ (6)-ի անհավասարության, պահանջվող ճշգրտությունը դեռևս չունենք: Շարունակում ենք՝

$$x_2=3,52-\frac{0,48.f(3,52)}{f(4)-f(3,52)}=3,52+\frac{1,07836416}{11,246592}=3,52+0,09\dots$$

կամ, կլորացնելով՝ $x_2=3,61$: Հաշվելով $f(3,61)=0,458319$ և օգտվելով (6)-ից անհավասարությունից, դարձյալ տեսնում ենք, որ մեր նպատակին դեռևս չենք հասել: Վերջապես,

$$x_3=3,61-\frac{0,39.f(3,61)}{f(4)-f(3,61)}=3,61+\frac{0,17874441}{9,458319}=3,61+0,0188\dots,$$

Կլորացնելով, ընդունենք $x_3=3,63$: Քանի որ մենք կլորացրինք ավելի արտաքին կողմը, ուստի կարող էինք նրա վրայով թռչել. որ այդ տեղի չի ունեցել, երևում է $f(3,63)=-0,041653$ թվի նշանից: Այս անգամ, ըստ (6)-ի անհավասարության, կունենանք՝

$$|x_3-\xi|=\xi-x_3<\frac{0,041}{11}<0,004$$

Այսպիսով՝

$$3,630<\xi<3,634,$$

այսինքն՝ $\xi=3,63+{}^{0,004}$

Այս օրինակով մենք կսահմանափակվենք, քանի որ լարերի մեթոդը շարադրված ձևով դեռևս քիչ էֆեկտիվ է. սովորաբար այն կոմբինացված է շոշափողների մեթոդի հետ, որին և հիմա մենք կանցնենք [տես ստորև 147 և 148 n°n°-երը]:

146. ՆՅՈՒՏՈՆԻ ԿԱՆՈՆԸ (ՇՈՇԱՓՈՂՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ): Վերադառնանք $f(x)$ ֆունկցիայի նկատմամբ նախկին ենթադրություններին [143]. այդ ֆունկցիայի որոնելի ξ արմատը մեկուսացված է $[a, b]$ միջակայքում՝ $a<\xi<b$: Ելնելով այդ միջակայքի որևէ ծայրից, օրինակ՝ b-ից, գրենք Թեյլորի բանաձևը Լագրանժի ձևով լրացուցիչ անդամով՝

$$0=f(\xi)=f(b)+f'(b).(\xi-b)+\frac{1}{2}f''(c).(\xi-b)^2 \quad (\xi<c<b). \qquad (7)$$

Դեն նետելով լրացուցիչ անդամը, կարելի է մոտավորապես ընդունել՝

$$f(b)+f'(b)\cdot(\xi-b)\doteq 0,$$

որտեղից՝

$$\xi\doteq b-\frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Այս ճանապարհով մենք գալիս ենք ξ արմատի մոտավոր արժեքին՝

$$x_1'=b-\frac{f(b)}{f'(b)}. \tag{8}$$

Այս արժեքի ստացումը ակնառու կերպով կարելի է մեկնաբանել նաև երկրաչափորեն։ Դիտարկենք $y=f(x)$ կորի b աբսցիս ունեցող M' կետում տարված շ ո շ ա փ ո ղ ը։ Նրա հավասարումը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$y-f(b)=f'(b)\cdot(x-b).$$

Այստեղ ընդունելով $y=0$, կստանանք շոշափողի և x-երի առանցքի հատման T' կետի աբսցիսը, որը ճշտորեն համընկնում է (8)-ի հետ։ Նշանակում է, գործի էությունը կայանում է կորի MM' աղեղը նրա որևէ ծայրում տարված շոշափողի հետ փոխարինելու մեջ [տես գծ. 79]։

Այս կանոնը, որը կրում է Ն յ ու տ ո ն ի *անունը, կոչվում է նաև* շոշափողների մեթոդ։

Սակայն հարց է ծագում, թե (8)-րդ բանաձևով ստացվող x_1 արժեքը որտեղ է գտնվում։ Չէ որ նույն 79-րդ գծագիրը ցույց է տալիս, որ շոշափողի և x-երի առանցքի հատման կետը կարող է նույնիսկ դիտարկվելիք միջակայքից դուրս գտնվել։ Մենք կապացուցենք, որ եթե $f(b)$ արժեքը և $f''(x)$-ը ունեն միևնույն նշանը (այսինքն՝ I և IV դեպքերում), ապա x'_1-ը կգտնվի ξ-ի և b-ի միջև։

Իրոք, քանի որ $f(b)$-ն և $f'(b)$-ն ունեն միևնույն նշանը, ուստի (8)-ից անմիջապես երևում է, որ $x'_1<b$։ Մյուս կողմից՝ 7)-ից և 8)-ից հետևում է

$$\xi-x'_1=\xi-b+\frac{f(b)}{f'(b)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{f''(c)}{f'(b)}(\xi-b)^2. \tag{9}$$

Բայց դիտարկվող դեպքերում $f''(x)$-ը և $f'(x)$-ը ունեն միևնույն նշանը, հետևաբար, $\xi<x'_1$։ Վերջնականապես՝ $\xi<x'_1<b$։

Նույն ձևով, եթե ելնենք a կետից և կորին շոշափող տանենք M (a աբսցիսով) ծայրում, ապա (8)-ի փոխարեն կստանանք հետևյալ մոտավոր արժեքը՝

$$x_1'=a-\frac{f(a)}{f'(a)}, \tag{8*}$$

Այս բանաձևով հաշված արժեքի նկատմամբ կարելի է, ինչպես և վերևում

ցույց տալ, որ եթե f(a) արժեքը և f''(x)-ը ունեն միևնույն նշանը (այսինքն՝ II և III դեպքերում), ապա x'_1-ը կգտնվի a-ի և ξ-ի միջև:

Այսպիսով, չորս հնարավոր դեպքերից յուրաքանչյուրի համար ցույց տվեցինք, թե Նյուտոնի կանոնով արմատին մոտեցման հաջորդությունը ինչ ձևով է արտահայտված: I և IV դեպքերում այդ կանոնի հաջորդաբար կիրառումը տալիս է նվազող արժեքների հաջորդականություն՝

$$b > x'_1 > x'_2 > \ldots > x'_n > x'_{n+1} > \ldots > \xi,$$

իսկ II և III դեպքերում՝ աճող արժեքների հաջորդականություն՝

$$a < x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_n < x'_{n+1} < \ldots < \xi,$$

ընդ որում նախորդ արժեքի միջոցով հաջորդ արժեքի ստացումը միշտ կատարվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$x'_{n+1} = x'_n - \frac{f(x'_n)}{f'(x'_n)}, \tag{10}$$

Այստեղ ևս հեշտ է ապացուցել, որ $x'_n \to \xi$: Մասնավորապես x'_n փոփոխականը ունի β վերջավոր սահման. (10)-րդ արտահայտության մեջ անցնելով սահմանին հաշվի առնելով f(x) և f'(x) երկու ֆունկցիաների անընդհատությունը, կստանանք՝

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = 0, \text{ որտեղից՝ } f(\beta) = 0 \text{ և } \beta = \xi:$$

81-րդ գծագրի միջոցով ցույց է տրված հաջորդական շոշափողների և x-երի առանցքի հատման T_1, T_2,... կետերի կազմից դեպի A կետին մոտենալը:

Այսպիսով, Նյուտոնի կանոնը ևս, բազմակի կիրառված, հնարավորություն է տալիս ξ արմատը հաշվել ցանկացած ճշգրտությամբ: Այդ ժամանակ, արդեն հաշված մոտավոր արժեքի ճշգրտությունը գնահատվում է, ինչպես և վերևում, (6)-րդ բանաձևի միջոցով:

Որպեսզի բնորոշենք $x_n - \xi$ տարբերությունների նվազման արագությունը, անդրադառնանք (9)-րդ բանաձևին. նրա մեջ b-ն փոխարինենք x'_n-ով, իսկ x'_1-ը՝ x'_{n+1}-ով, կստանանք՝

$$x'_{n+1} - \xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c)}{f'(x'_n)} \cdot (x'_n - \xi)^2,$$

Տված [a, b] միջակայքում |f''(x)|-ի մեծագույն արժեքը նշանակելով M-ով (m-ի համար պահպանելով նրա նախկին նշանակությունը), վերջինից

այժմ հեշտ է ստանալ՝

$$|x'_{n+1}-\xi| \leqslant \frac{M}{2m}\cdot|x'_n-\xi|^2. \qquad (11)$$

Քանի որ աջ կողմում գտնվում է քառակուսի արտահայտություն, ուստի դրանով ապահովված է x'_n-ի ξ-ին մոտենալու շատ մեծ արագություն (անկախ որոշ տեղից սկսած), հենց որն էլ շոշափողների մեթոդը դարձնում է արմատը մոտավոր հաշվելու ամենաէֆեկտիվ մեթոդներից մեկը։

(11) անհավասարությունը կատարում է և մեկ դեր. եթե հաշված x'_n արժեքի ճշգրտությունն արդեն գնահատված է, օրինակ, (6) անհավասարության միջոցով, ապա (11) անհավասարությունը հնարավորություն է տալիս նախապես գնահատել դեռևս չհաշված x'_{n+1} արժեքի ճշգրտությունը։ Այս կարող է օգտակար լինել, երբ լուծում ենք այն հարցը, թե այդ արժեքը մինչև որերորդ թվանշանն է նպատակահարմար կլորացնել։

Դիմենք օրինակների։ Նրանց լուծման ընթացքում, իհարկե, նախատեսվում է օգտագործել հաշվումների այն բոլոր օժանդակ միջոցները, որոնք կան մեր ձեռքի տակ, ինչպիսիներն են՝ աստիճանների ու արմատների աղյուսակներ, բազմապատկման աղյուսակներ, արիֆմոմետր, լոգարիթմական ու լոգարիթմա-եռանկյունաչափական աղյուսակներ, եռանկյունաչափական մեծությունների բնական աղյուսակներ, անկյան աստիճանային չափը ռադիանային չափով արտահայտող աղյուսակներ, և այլն։

146. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ ԵՎ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։ Այս n°-ում մենք կօգտվենք բացառապես շ ո շ ա փ ո ղ ն ե ր ի մ ե թ ո դ ի ց։

1) Հաշվել

$$x^3-2x^2-4x-7=0$$

հավասարման արմատը 0,01-ի ճշգրտությամբ, գիտենալով, որ այն գտնվում է (3,4) միջակայքում [հմմ. 144-ի հետ]։

Ունենք՝

$$f(x)=x^3-2x^2-4x-7,\quad f(3)=-10<0,\quad f(4)=+9>0,$$

$$f'(x)=3x^2-4x-4>0,\quad f''(x)=6x-4>0 \text{ (երբ } 3\leqslant x\leqslant 4$$

(1 դեպք). $|f'(x)|$-ի փոքրագույն արժեքն է $m=11$։

Ելնում ենք միջակայքի այն $b=4$ ծայրից, որի համար $f(x)$-ի և $f''(x)$-ի նշանները համընկնում են։ Ըստ (8)-րդ բանաձևի՝

$$x_1'=4-\frac{f(4)}{f'(4)}=4-\frac{9}{28}=4-0{,}32\ldots,$$

կլորացնելով, ընդունենք $x'_1=4-0{,}3=3{,}7$։ Քանի որ $f(x'_1)=f(3.7)=1{,}473$, ուստի, ըստ (6)-րդ անհավասարության, $x'_1-\xi<\frac{1{,}473}{11}<0{,}14$, այսինքն՝

ստացված ճշգրտությունը բավական չէ։ Այնուհետև,

$$x'_2=3,7-\frac{f(3,7)}{f'(3,7)}=3,7-\frac{1,473}{22,27}=3,7-0,066\ldots,$$

կունենանք $x'_2=3,7-0,066=3,634$: Այս անգամ $f(x'_2)=f(3,634)=0,042\ldots$ ուստի, (6)-ի շնորհիվ, $x'_2-\xi<\frac{0,042}{11}<0,004$։ Ուրեմն $3,630<\xi<3,634$ և

3,63 պահանջվող ճշգրտությամբ։

(Լարերի մեթոդով. նույն արդյունքը ստանալը 144-ում պահանջեց ե ր ե ք քայլ)։

2) Որպես երկրորդ օրինակ լուծենք

$$x\cdot\log_{10}x=1$$

հավասարումը։

Օգտվենք այս առիթից, որպեսզի պարզենք ընթերցողի համար, թե ֆունկցիայի գ ր ա ֆ ի կ ա կ ա ն պ ա տ կ ե ր ա ց ու մ ը ինչպես կարող է օգնել նախապես կողմնորոշվելու հավասարման արմատների դասավորության հարցում։

$$\log_{10}x=\frac{1}{x}$$

հավասարմանը բավարարող x արժեքը, ակներևաբար, իրենից ներկայացնում է

$$y=\log_{10}x \text{ և } y=\frac{1}{x}$$

կորերի հատման կետի աբսցիսը։ Նույնիսկ այդ կորերի կոպիտ պատկերացումը (գծ. 82) անմիջապես ցույց է տալիս, որ արմատի արժեքը գտնվում է 2-ի և 3-ի միջև։ Այդ հեշտությամբ կարելի է ստուգել նաև հաշվումներով. բավական է, ընդունելով $f(x)=x\cdot\log_{10}x-1$, կունենանք՝

$$f(2)=-0,39793\ldots<0,\quad f(3)=0,43136\ldots>0։$$

Վերոհիշյալ արմատը հաշվենք 0,0001-ի ճշգրտությամբ։

Ակներևաբար, երբ $2\leqslant x\leqslant 3$,

$$f'(x)=\log_{10}x+\log_{10}e>0,\quad f''(x)=\frac{\log_{10}e}{x}>0$$

(1 դեպք)։ Կարելի է ընդունել $m=0,7$։

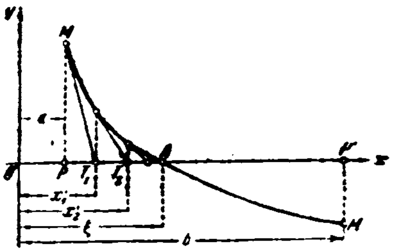
Քանի որ հենց $f(3)$-ը ունի $f''(x)$-ի նշանը, ուստի, ըստ (8)-րդ բանաձևի,

$$x'_1=3-\frac{f(3)}{f'(3)}=3-\frac{0,43136...}{0,91141}=3-0,473...$$

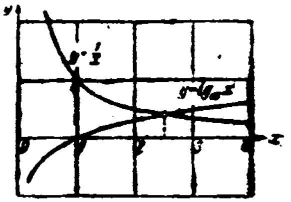
ընդունենք $x'_1=3-0,47=2,53$։ Ունենք $f(x'_1)=f(2,53)=0,019894...$, ուստի

$$x'_1-\xi<\frac{0,0199}{0,7}<0,03։$$ Այնուհետև

$$x'_2=2,53-\frac{f(2,53)}{f'(2,53)}=2,53-\frac{0,019894...}{0,85741...}=2,53-0,02375...,$$



Գծ. 81.



Գծ. 82.

վերցնենք $x'_2=2,53-0,0237=2,5063$։ Ըստ (6)-րդ բանաձևի, գտնում ենք սխալը՝

$$f(2,5063)=0,000096...,$$

$$x'_2-\xi<\frac{0,000096...}{0,7}<0,0002,$$

այսինքն՝ $2,5061<\xi<2,5063$։ Այդ դեպքում, արդեն որոնելի ճշգրտությամբ, ունենք՝

$$\xi=2,5062\pm0,0001։$$

[Իրականում 2,5062-ը հանդիսանում է ξ-ի համար մոտեցում հավելումով որովհետև $f(2,5062)>0$։]

3) Վերադառնանք

$$2^x=4x$$

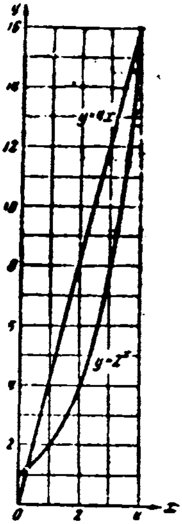
հավասարմանը, որի մասին արդեն խոսել ենք 80-ում։ Մենք այնտեղ տեսանք, որ այդ հավասարման արմատը գտնվում է 0-ի և 0,5-ի միջև։ Այդ հանգամանքը նույնպիսի հեշտությամբ կարելի էր տեսնել նաև $y=2^x$ և $y=4x$ ֆունկցիաների գրաֆիկների միջոցով. 82-րդ գծագրի վրա պարզ երևում է, որ այդ կորերը, բացի 4 աբսցիս ունեցող կետից, հատվում են

նաև 0-ի և 0,5-ի միջև գտնվող ξ արմատը ունեցող կետում: Այդ արմատը հաշվենք 0,0001-ի ճշգրտությամբ:

$0 < x < 0,5$ արժեքների համար ունենք՝

$$f(x) = 2^x - 4x,\quad f'(x) = 2^x \log 2 - 4 < 0,\quad f''(x) = 2^x . \log^2 2 > 0$$

(11 դեպք): Այստեղ $m = 4 - \sqrt{2} \log 2 > 3$, $M = \sqrt{2} \log^2 2 < 0{,}7$, $\frac{M}{2m} < 0{,}12$:



Գծ. 83.

Քանի որ $f(0) = 1$ և $f''(x)$ ունեն միևնույն նշանը, ուստի կսկսենք $a = 0$-ից: (6)-ի շնորհիվ, այդ մոտավոր արժեքի սխալը $\frac{1}{3}$-ից, իսկ այդ ժամանակ, (11)-ի շնորհիվ, կարելի է նախապես գնահատել կատարված սխալը՝

$$\xi - x'_1 < 0{,}12 . \frac{1}{9} < 0{,}014:$$

Ուստի (8^*) բանաձևով հաշված

$$x'_1 = -\frac{1}{\log 2 - 4} = \frac{1}{3{,}306852\ldots} = 0{,}30\ldots$$

արժեքը կլորացնում ենք երկրորդ թվանշանի վրա՝ $x'_1 = 0{,}30$: Օգտվելով $f(0{,}30) = 0{,}031144\ldots$ արժեքից, ըստ (6) անհավասարության, ավելի ճշգրտորեն գնահատում ենք սխալը՝

$$\xi - x'_1 < \frac{0{,}031144}{3} < 0{,}011$$

իսկ այդ ժամանակ, ըստ (11)-ի, կունենանք՝

$$\xi - x'_2 < 0{,}12 . 0{,}000121 < 0{,}000015,$$

այնպես որ մենք մոտենում ենք պահանջվող ճշգրտությանը: Հաջորդ մոտավորությունը՝

$$x'_2 = 0{,}30 - \frac{0{,}031144\ldots}{0{,}8533643\ldots - 4} = 0{,}30 +$$

$$+ \frac{0{,}031144\ldots}{3{,}1466356\ldots} = 0{,}309897\ldots$$

կլորացնելով հինգերորդ թվանշանի վրա դեպի արմատի կողմը, կստանանք՝ $x'_2 = 0{,}30990$: Քանի որ $f(0{,}30990) = 0{,}000021\ldots > 0$, ուստի այդ արժեքը դեռ էլի փոքր է արմատից: Իսկ նրա սխալը, (6)-ի շնորհիվ, կլինի

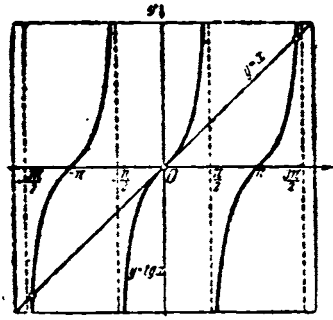
$$\xi - x'_2 < \frac{0{,}000022}{3} < 0{,}00001,$$

ուստի, վերջնականապես.

$$\xi = 0{,}30990 + 0{,}00001.$$

4) $\operatorname{tg} x = x$

Հավասարումը ունի անթիվ բազմությամբ արմատներ։ Այդ հեշտությամբ կարելի է տեսնել 84-րդ գծագրի վրա՝ $y = \operatorname{tg} x$ տանգենսոիդ գրաֆիկի և $y = x$ ուղղի հատման անվերջ մեծ թվով կետերից։ Գտնենք այդ հավասարման ամենափոքր դրական արմատը, որը գտնվում է $\frac{5\pi}{4}$-ի և $\frac{3\pi}{2}$-ի միջև։



Գծ. 84.

Քանի որ $x = \frac{3\pi}{2}$ դեպքում տանգեսը դառնում է անվերջություն, ուստի վերոհիշյալ հավասարումը ավելի հարմար է ներկայացնել այսպես՝

$$f(x) = \sin x - x \cos x = 0.$$

Ունենք՝

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{5\pi}{4}\right) > 0,$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 < 0,$$

$$f'(x) = x \sin x < 0, \quad m > 2{,}7; \quad f''(x) = \sin x + x \cos x < 0$$

(IV դեպք)։

Սկսենք $b = \frac{3\pi}{2} = 4{,}7123889\ldots$ ծայրից, կստանանք՝

$$x'_1 = \frac{3\pi}{2} - \frac{2}{3\pi} = 4{,}7123889\ldots - 0{,}2122066\ldots$$

Այստեղ մենք հանդիպում ենք հետևյալ դրությանը՝ եռանկյունաչափական մեծությունների (և նրանց լոգարիթմների) աղյուսակներում անկյունները տրվում են աստիճաններով, րոպեներով և վայրկյաններով. ուստի 0,2122066...-ի կլորացումը մեզ համար ձեռնտու է կատարել հենց այդ միավորներով։ Վերցնենք 12°10′, որը համապատասխանում է մի քիչ ավելի մեծ 0,21223484... թվին (կլորացում «դեպի արմատի կողմը»), ուստի

$$x'_1 = 4,5000406\ldots \quad (257°50')․$$

Այնուհետև,

$$f(x'_1) = -\cos 12°10' + 4,5000406\ldots \sin 12°10' = -0,291274\ldots,$$

$$f'(x'_1) = -4,398962\ldots,$$

$$x'_1 - \xi < \frac{0,03}{2,7} < 0,012․$$

Շարունակում ենք՝

$$x'_2 = 4,5000406\ldots - \frac{0,0291274\ldots}{4,398962\ldots} = 4,5000406\ldots - 0,0066214\ldots,$$

ուղղումը կլորացնում ենք մինչև 0,0066177... (22′45″) և վերցնում՝

$$x'_2 = 4,4934229\ldots \quad (257°27'15'')․$$

Քանի որ $f(x'_2) = -0,000059\ldots$, ուստի՝

$$x'_2 - \xi < \frac{0,00006}{2,7} < 0,0000223․$$

Այսպիսով՝

$$4,4934006\ldots < \xi < 4,4934229\ldots,$$

և կարելի է ընդունել

$$\xi = 4,4934 + 0,00003:$$

ծ) Նյուտոնի մեթոդի ուժը առանձնապես հանդես է գալիս այն ժամանակ, երբ արմատ պարունակող միջակայքը բավականաչափ կարճ է: Վերջում, մեծ ճշգրտությամբ, ասենք թե $\frac{1}{10^{10}}$-ի ճշգրտությամբ, հաշվենք $x^3 - 2x - 5 = 0$ հավասարման արմատը, ելնելով (2; 2,1) միջակայքից, որի ներսը գտնվում է որոնելի արմատը:

Այստեղ՝

$$f(x) = x^3 - 2x - 5, \quad f(2) = -1 < 0, \quad f(2,1) = 0,061 > 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2 > 0, \quad f''(x) = 6x > 0, \quad (\text{երբ } 2 \leqslant x \leqslant 2,1)$$

(I դեպքը): Հեշտ է հաշվել, որ $m = 10$, $M < 12,6$, ուստի՝

$$\frac{M}{2m} < 0,63․$$

Սկսենք $b=2{,}1$ *ծայրից: Ըստ (6)-րդ բանաձևի՝* $b-\xi \le \frac{0{,}061}{10} = 0{,}0061$*։*

Այժմ, օգտվելով (11) անհավասարությունից, մենք նախապես հաշվում ենք, թե ինչ ճշգրտություն կարելի է սպասել x'_1*-ից՝*

$$x'_1-\xi \le 0{,}63\cdot0{,}0061^2 < 0{,}000024\text{։}$$

Ուստի՝

$$x'_1=2{,}1-\frac{f(2{,}1)}{f'(2{,}1)}=2{,}1-\frac{0{,}061}{11{,}23}=2{,}1-0{,}00543\ldots$$

Թիվը կլորացնում ենք «դեպի արմատի կողմը» հինգերորդ թվանշանի վրա $x'_1=2{,}1-0{,}00544=2{,}09456$*։ Քանի որ* $f(x'_1)=f(2{,}09456)=0{,}000095078690816$, *ուստի այժմ, ըստ (6) բանաձևի, կարելի է սխալն ավելի ճշգրիտ հաշվել՝*

$$x'_1-\xi < \frac{0{,}000095}{10} < 0{,}00001\text{։}$$

Անցնելով x'_1*-ին և նորից դիմելով (11)-ին, նախապես հաշվում ենք*

$$x'_2-\xi < 0{,}63\cdot0{,}00001^2=0{,}000000000063\text{։}$$

Այդ պատճառով, x'_2 *թիվը՝*

$$x'_2=2{,}09456-\frac{0{,}000095078690816}{11{,}1615447808}=2{,}09456-0{,}00000851841 6\ldots,$$

կլորացրած տասնմեկերորդ թվանշանի վրա՝ $x'_2=2{,}09456-0{,}00000851841=$ $=2{,}09455148159$. *այնուամենայնիվ որոնելի արմատից տարբերվում է* $0{,}000000000007$*-ից փոքր թվով։ Ուրեմն՝*

$$2{,}09455148152<\xi<2{,}09455148159,$$

այսինքն՝ $\xi=2{,}0945514815 \pm \frac{1}{10^{10}}$*։*

147. ԿՈՄԲԻՆԱՑՎԱԾ ՄԵԹՈԴ: *Այս մեթոդը կայանում է շոշափողների և լարերի մեթոդների միաժամանակյա օգտագործման մեջ։*

Որոշակիության համար ենթադրենք, թե գործ ունենք I դեպքի հետ: x_1 *և* x'_1 *մոտավոր արժեքները կհաշվենք, ինչպես և վերևում, օգտվելով (2)-րդ և (8)-րդ բանաձևերից՝*

$$x_1=a-\frac{(b-a)\cdot f(a)}{f(b)-f(a)},\quad x'_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}.$$

այդ դեպքում, ապացուցածի համաձայն,

$$a<x_1<\xi<x'_1<b.$$

Հաջորդ քայլում մենք այդ բանաձևերի մեջ a-ն ու b-ն պարզապես փոխարինում ենք x_1-ով ու x'_1-ով՝

$$x_2=x_1-\frac{(x'_1-x_1).f(x_1)}{f(x'_1)-f(x_1)},\quad x'_2=x'_1-\frac{f(x'_1)}{f'(x'_1)}.$$

Այդ պրոցեսը կարելի է շարունակել ցանկացած չափով. ունենալով x_n և x'_n երկու մոտավոր արժեքներ, որոնց միջև գտնվում է ξ-ն, մոտավոր արժեքների հաջորդ զույգին անցնում ենք հետևյալ բանաձևերով՝

$$x_{n+1}=x_n-\frac{(x'_n-x_n)f(x_n)}{f(x'_n)-f(x_n)},\quad x'_{n+1}=x'_n-\frac{f(x'_n)}{f'(x'_n)}.$$

Դրանցից երկրորդը նույնաբար համընկնում է (10)-ի հետ, իսկ առաջինը (5)-ից էապես տարբերվում է նրանով, որ այստեղ b կետը փոխարինվում է x'_n կետով, որը ξ-ին ավելի ու ավելի է մոտենում: 144-ում ապացուցածից անմիջապես հետևում է, որ այդ հանգամանքը նպաստում է միայն x_n-ի ավելի արագ մոտեցմանը որոնելի արմատին:

Այսպիսով, կոմբինացված մեթոդի դեպքում մենք միաժամանակ ստանում ենք արմատի մոտավոր արժեքները թե՛ հավելուրդով և թե՛ պակասորդով, որոնք ձգտում են արմատին նրա տարբեր կողմերից: I և IV դեպքերում x'_n-ը ξ-ին մոտենում է ձախից, x'_n-ը՝ աջից, իսկ II և III դեպքերում, ակներևաբար, կլինի հակառակը: $|x'_n-x_n|$ մեծությունը անմիջապես հնարավորություն է տալիս դատել հասած մոտավորության որակի մասին, հենց սրանում է կայանում կոմբինացված մեթոդի հարմարությունը:

Դրա կիրառությունները լուսաբանենք օրինակներով:

148. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ ԵՎ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ: Այստեղ ենթադրվում է կիրառել միայն կոմբինացված մեթոդը:

1) Գտնել

$$f(x)=2x^3-x^2-7x+5=0$$

հավասարման երեք իրական արմատները՝ 0,001 ճշտությամբ:

$y=f(x)$ ֆունկցիայի կոպիտ գրաֆիկը օգնում է որոշելու այն միջակայքերը, որոնց մեջ գտնվում են այդ արմատները՝

$$-2<\xi_1<-1,\ 0<\xi_2<1,\ 1<\xi_3<2;$$

այդ հեշտ է ստուգել ֆունկցիայի նշանի փոփոխությամբ:

(ա). [−2, −1] միջակայքում՝

$$f'(x) = 6x^2 - 2x - 7 > 0, \quad f''(x) = 12x - 2 < 0,$$

(III դեպք): Քանի որ $f(-2) = -1 < 0$, $f(-1) = 9 > 0$, *ուստի Նյուտոնի կանոնը պետք է կիրառել միջակայքերի ձախ ծայրերի նկատմամբ: Ունենք* $f'(-2) = 21$ *և՝*

$$x'_1 = -2 - \frac{-1}{21} = -1{,}952\ldots, \quad x_1 = -1 - \frac{9}{9-(-1)} = -1{,}9.$$

x'_1*-ի արժեքը կլորացնելով դեպի փոքրացման կողմը, կստանանք* $\xi_1 = -1{,}96$ *թիվը: Իսկ եթե այն կլորացնենք դեպի մեծացման կողմը, այսինքն՝ դեպի արմատի կողմը, ապա կստանանք* $-1{,}95$ *թիվը. բայց* $f(-1{,}95) = 0{,}01775 > 0$, *այսինքն՝ այս դեպքում մենք անցանք արմատի մյուս կողմը: Այդ հանգամանքը մեզ համար օգտավետ է, որովհետև այդ հնարավորություն է տալիս արմատը պարունակող միջակայքը ավելի փոքրացնել, և, դեն նետելով* x_1*-ի նախկին արժեքը, ընդունել՝*

$$x'_1 = -1{,}96, \quad x_1 = -1{,}95.$$

Այնուհետև, ունենք՝

$$f(-1{,}96) = -0{,}180672, \quad f'(-1{,}96) = 19{,}9696,$$

$$x'_2 = -1{,}96 + \frac{0{,}180672}{19{,}9696} = -1{,}96 + 0{,}00904\ldots = -1{,}95095\ldots$$

$$x_2 = -1{,}95 - \frac{0{,}01 \cdot 0{,}01775}{0{,}01775 + 0{,}180672} = -1{,}95 - 0{,}00089\ldots =$$

$$= -1{,}95089\ldots$$

Քանի որ ξ_1*-ը պետք է գտնվի այդ սահմանների միջև, ուստի պարզ է, որ*

$$\xi_1 = -1{,}9509 \pm 0{,}0001$$

(այնպես որ, պահանջված ճշգրտությունը գերազանցված է):

(բ). $[0{,}1]$ *միջակայքում* $f'(x)$ *առաջին կարգի ածանցյալը պահպանում է բացասական նշան, իսկ* $f''(x)$ *երկրորդ կարգի ածանցյալը* $x = \frac{1}{6}$ *կետում զրո դառնալով, փոխում է նշանը: Այս հանգամանքը ստիպում է նախապես էլի փոքրացնել միջակայքի երկարությունը: Փորձելով* $x = 0{,}5$ *արժեքը, կստանանք՝* $f(0{,}5) = 1{,}5 > 0$. *քանի որ* $f(1) = -1 < 0$, *ուստի* ξ_2*-ը կգտնվի* $[0{,}5;\ 1]$ *միջակայքում, որտեղ* $f''(x)$*-ը պահպանում է դրական նշան (II դեպք): Այստեղ ևս Նյուտոնի կանոնը կիրառում ենք ձախ ծայրերի նկատմամբ. Ունենք՝*

$$x'_1=0,5+\frac{1,5}{6,5}=0,7307\doteq 0,74,$$

$$x_1=1-\frac{0,5}{2,5}=0,80։$$

x'_1-ի կլորացումը դեպի արմատը չափազանցորեն ցատկում դեպի արմատի մյուս կողմը, որովհետև $f(0,74)=0,082848>0$։ *Վերջապես,*

$$x'_2=0,74+\frac{0,082848}{5,1944}=0,755\ldots,$$

$$x_2=0,80-\frac{0,01296}{0,298848}=0,756\ldots,$$

ուստի՝ $0,755\ldots<\xi_2<0,756\ldots$ *և կարելի է ընդունել՝*

$$\xi_2=0,756\pm 0,001։$$

(գ). [1,2] միջակայքում երկրորդ կարգի ածանցյալը պահպանում է դրական նշան, բայց առաջին կարգի ածանցյալը փոխում է նշանը, զրո դառնալով երբ

$$x=\frac{1+\sqrt{43}}{6}\doteq 1,26։$$

Փորձում ենք 1,5 արժեքը՝ $f(1,5)=-1$, *մինչդեռ* $f(2)=3$, *այնպես որ՝* $1,5<\xi_3<2$. *այս միջակայքում* $f'(x)$*-ը ունի դրական նշան (1 դեպք)։ Ունենք՝*

$$x_1=1,5+\frac{1}{8}\doteq 1,6,\qquad x'_1=2-\frac{3}{13}\doteq 1,7.$$

այստեղ էլ արմատի վրայով ցատկում չկատարվեց, որովհետև $f(1,7)=0,036$։ *Վերջապես,*

$$x_2=1,6+\frac{0,0568}{0,604}=1,6+0,094\ldots=1,694\ldots,$$

$$x'_2=1,7-\frac{0,036}{6,94}=1,7-0,005\ldots=1,694\ldots,$$

ուստի՝ $\xi_3=1,694\pm 0,001$։

Դ ի տ ո ղ ո ւ թ յ ո ւ ն: *Քանի որ արմատների գումարը, ըստ հանրահաշվից*

հայտնի թեորեմայի, պետք է հավասար լինի 0,5-ի, ուստի դրանից կարելի է օգտվել արդյունքի ճշգրտությունը ստուգելու համար:

2) $$f(x)=x^4-3x^2+75x-10000=0$$

հավասարումն ունի երկու իրական արմատ. մեկը −11-ի և 10-ի միջև, իսկ մյուսը՝ 9-ի և 10-ի միջև: Այդ արմատները հաշվել 0,00001 ճշգրտությամբ:

(ա) [−11, −10] միջակայքում

$$f'(x)=4x^3-6x+75<0,\quad f''(x)=12x^2-6>0$$

(II դեպք): Ստանում ենք՝

$$x'_1=-11+\frac{3453}{5183}=-10,33\ldots\doteq-10,3,$$

$$x_1=-10-\frac{1050}{4503}=-10,23\ldots\doteq-10,2.$$

առաջին դեպքում մենք կլորացրեցինք դեպի արմատը, սակայն նրա վրայով չանցկացրինք: Այնուհետև,

$$x'_2=-10,3+\frac{164,3181}{4234,108}=-10,262\ldots\doteq-10,262,$$

$$x_2=-10,2-\frac{25,27984}{417,1165}=-10,260\ldots\doteq-10,260$$

(նույն դիտողությունը): Վերջապես,

$$x'_3=-10,262+\frac{4,334569118736}{4186,137218912}=-10,262+0,0010354\ldots=$$

$$=-10,2609645\ldots,$$

$$x_3=-10,260-\frac{0,00807038018}{8,369759358736}=-10,260-0,0009642\ldots=$$

$$=-10,2609642\ldots,$$

ուստի՝

$$\xi_1=-10,260964-0,000001$$

(նույնիսկ ավելի մեծ ճշգրտությամբ, քան պահանջվում էր):

(բ) [9, 10] միջակայքում $f'(x)>0$ և $f''(x)>0$ (I դեպք): Այստեղ՝

$$x_1 = 9 + \frac{3007}{3457} = 9 + 0,869\ldots \approx 9,87$$

(դեպի արմատի կողմը).

$$x'_1 = 10 - \frac{450}{4015} = 10 - 0,112\ldots \approx 9,89;$$

$$x_2 = 9,87 + \frac{1,2389658878}{77,4689008} = 9,87 + 0,01599\ldots = 9,88599\ldots,$$

$$x'_2 = 9,89 - \frac{15,52060641}{3885,406676} = 9,89 - 0,003993\ldots = 9,886006\ldots,$$

ուստի, ակներևաբար,

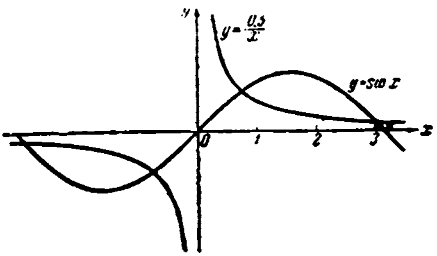
$$\xi_2 = 9,88600 \pm 0,00001$$

3) Քննության առնենք

$$f(x) = x \sin x - 0,5 = 0$$

հավասարումը:

Կառուցելով $y = \sin x$ և $y = \frac{0,5}{x}$ ֆունկցիաների գրաֆիկները (գծ. 85) տեսնում ենք, որ նրանք հատվում են անթիվ բազմությամբ կետերում ուստի մեր հավասարումը ունի անթիվ բազմությամբ արմատներ: Գրաֆիկից նաև երևում է, որ ամենափոքր դրական ξ արմատը մոտ է 0,7-ին. Հաշվենք այդ արմատը 0,000001 ճշգրտությամբ: [Այստեղ պետք է ինկատի ունենալ սահմանի մասերով կլորացման վերաբերյալ այն դիտողությունը, որն արվեց n 146 ում 4)-րդ խնդրի առթիվ]:



Գծ. 85.

$f(x)$ ֆունկցիայի մեջ տեղադրելով

$$a = 0,6981317\ldots\ (40^\circ)\ \text{և}\ b = 0,7853982\ldots\ (45^\circ)$$

արժեքները, առաջին դեպքում կստանանք բացասական արդյունք, իսկ երկրորդ դեպքում՝ դրական, ուրեմն՝ $a < \xi < b$. $f'(x)$ և $f''(x)$ երկու ածանցյալներն էլ այդ միջակայքում ունեն դրական նշան (I դեպք):

Հաշվումների սխեման՝

$$x'_1=0,6981317\ldots+0,0419512\ldots,$$
$$x'_1=0,7853982\ldots-0,0438510\ldots,$$

առաջին ուղղումը «կլորացնում ենք» մինչև 0,0418879...(2°24'), իսկ երկրորդը՝ մինչև 0,0439231...(2°31'), ուստի վերջնականապես ստանում ենք՝

$$x_1=0,7400196\ldots\ (42°24'),\quad x'_1=0,7414741\ldots\ (42°29')\text{։}$$

Այնուհետև,

$$x_2=0,7400196\ldots+0,0008211\ldots=0,7408407\ldots$$
$$x'_2=0,7414741\ldots-0,0006329\ldots=0,7408412\ldots$$

որտեղից և կստանանք պահանջվող ճշգրտությամբ՝

$$\xi=0,740841\pm0,0000005\text{։}$$

4) Վերջում վերադառնանք

$$f(x)=x^4-x-1=0$$

հավասարմանը։ 80-*ում մենք տեսանք, որ նա* ξ *արմատ ունի* $a=1,22$ *և* $b=1.23$ *թվերի միջև։ Պարզել, թե այդ արմատը հաշվելու համար կոմբինացված մեթոդի միայն երկու անգամ օգտագործումն ինչպիսի ճշգրտություն կտա։*

Հաշվումների սխեման (1 դեպք)՝

$$x_1=1,22+\frac{0,0000466544}{0,06353115}=1,22073\ldots\doteq1,2207,$$

$$x'_1=1,23-\frac{0,05886641}{6,443468}=1,22086\ldots\doteq1,2209;$$

$$x_2=1,2207+\frac{0,000000005533760598398}{0,001255538012096}=1,22074407\ldots,$$

$$x'_2=1,2209-\frac{0,0009788499821761}{6,279478581316}=1,2207441\ldots$$

Այսպիսով՝

$$\xi=1,2207441\pm0,0000001\text{։}$$

ՀԻՆԳԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§ 1. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐՆԵՐ

149. ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ԿԱԽՈՒՄ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ *Մինչև հիմա մենք ուսումնասիրում էինք երկու փոփոխականների համատեղ փոփոխությունը, որոնցից մեկը կախված էր մյուսից. անկախ փոփոխականի արժեքով արդեն լրիվին որոշվում էր կախյալ փոփոխականի կամ ֆունկցիայի արժեքը. Գիտության մեջ և կյանքում, սակայն, բացառիկ չեն այն դեպքերը, երբ լինում են մի քանի անկախ փոփոխականներ, և ֆունկցիայի արժեքը գտնելու համար անհրաժեշտ է նախապես որոշել այն արժեքները, որոնք համատեղ կերպով ստանում են բոլոր այդ անկախ փոփոխականները։*

1) Այսպես, օրինակ, շրջանային գլանի V *ծավալը ֆունկցիա է նրա հիմքի* R *շառավղի և նրա* H *բարձրության. այդ փոփոխականների միջև կապը արտահայտվում է*

$$V = \pi R^2 H$$

բանաձևով, որը հնարավորություն է տալիս, գիտենալով R *և* H *անկախ փոփոխականների արժեքները, հաշվել* V*-ի համապատասխան արժեքը։*

Հատած կոնի V *ծավալը համանմանաբար, հանդիսանում է երեք անկախ փոփոխականների ֆունկցիա՝ նրա երկու հիմքերի* R *և* r *շառավիղների և* H *բարձրության, որն արտահայտվում է*

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 = Rr + r^2)$$

բանաձևով։

2) Ըստ Օմի օրենքի, էլեկտրական հոսանքի շղթայի մեջ V լարումը շղթայի R դիմադրության և հոսանքի I ուժի հետ կապված է $V=RI$ առնչությամբ։ Եթե V-ն և R-ը համարենք հայտնի, ապա այստեղից I-ն կորոշվի որպես V-ի և R-ի ֆունկցիա՝

$$I=\frac{V}{R}.$$

3) Դիցուք գլանի մխոցի տակ գտնվող գազի զանգվածի ջերմաստիճանը հաստատուն չէ. այդ ժամանակ նրա v ծավալը և p ճնշումը կապված են նրա T (բացարձակ) ջերմաստիճանի հետ, այսպես կոչված, Կլապեյրոնի բանաձևով՝

$$pv=RT \quad (R=\text{const.})։$$

Այստեղից, օրինակ, ընդունելով v-ն և T-ն որպես անկախ փոփոխականներ, p ֆունկցիան դրանց միջոցով կարելի է արտահայտել այսպես՝

$$p=\frac{RT}{v}.$$

4) Ուսումնասիրելով որևէ մարմնի ֆիզիկական վիճակը, հաճախ հարկավոր է լինում դիտել նրա հատկությունների փոփոխությունը կետից կետ անցնելիս։ Այդպիսիք են՝ խտությունը, ջերմաստիճանը, էլեկտրական պոտենցիալը և այլն։ Բոլոր այդ մեծությունները «կետի ֆունկցիաներ» են կամ, եթե կուզեք, կետի x, y, z կոորդինատների ֆունկցիաներ են։ Եթե մարմնի ֆիզիկական վիճակը փոփոխվում է ժամանակի ընթացքում, ապա այդ անկախ փոփոխականների թվին կավելանա նաև t ժամանակը։ Այդ դեպքում մենք գործ կունենանք չորս անկախ փոփոխականների ֆունկցիայի հետ։

Նման օրինակների թիվն ընթերցողն ինքը կարող է ցանկացած չափով ավելացնել։

Մի քանի անկախ փոփոխականների ֆունկցիայի գաղափարի ճշգրտումը կսկսենք այն պարզ դեպքից, երբ այդ փոփոխականների թիվը երկուսն է։

150. ԵՐԿՈՒ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՈՐՈՇՄԱՆ ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐԸ։ *Խոսելով երկու x և y-ի անկախ փոփոխականների փոփոխման մասին, մենք ամեն անգամ պետք է ցույց տանք, թե նրանք (x, y) արժեքների ինչպիսի զույգեր կարող են ընդունել համատեղ. հենց այդ զույգերի M բազմությունը կլինի x, y փոփոխականների փոփոխման տիրույթը։*

Ֆունկցիայի սահմանումը տրվում է միևնույն արտահայտությունների միջոցով, ինչ-որ մեկ անկախ փոփոխականի դեպքում։

z փոփոխականը (փոփոխման Z տիրույթով) կոչվում է x, y անկախ փոփոխականների ֆունկցիա M բազմությունում, եթե M-ից վերցրած նրանց արժեքների յուրաքանչյուր (x, y) զույգին, որևէ օրենքով կամ կանոնով, համապատասխանեցվում է z-ի մեկ որոշակի արժեք (Z-ից)։

Այստեղ ի նկատի ունենք միարժեք ֆունկցիա. այս սահմանումը հեշտությամբ կարելի է տարածել նաև բազմարժեք ֆունկցիաների դեպքի վրա։

M բազմությունը, որի մասին վերևում խոսվեց, հենց ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է։ x, y փոփոխականները կոչվում են z ֆունկցիայի արգումենտներ։ z և x, y փոփոխականների միջև ֆունկցիոնալ կապը նշանակում են, մեկ անկախ փոփոխականի դեպքի նման, այսպես՝

$$z=f(x, y),\ z=\varphi(x, y),\ z=z(x, y), \text{ և այլն։}$$

Եթե (x_0, y_0) զույգը վերցրած է M-ից, ապա $f(x_0, y_0)$ նշանակում է $f(x, y)$ ֆունկցիայի այն մասնավոր (թվային) արժեքը, որը նա ընդունում է $x=x_0$, $y=y_0$ դեպքում։

Բերենք մի քանի ֆունկցիաների օրինակներ, որոնք տրված են անալիտիկորեն՝ բանաձևերով, ցույց տալով նրանց որոշման տիրույթները։

$$1)\ z=xy \text{ և } 2)\ z=x^2+y^2$$

բանաձևերը ֆունկցիաները որոշում են բոլոր (x, y) զույգերի համար առանց բացառության։

$$3)\ z=\sqrt{1-x^2-y^2},\quad 4)\ z=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

բանաձևերը պիտանի են (եթե մենք ցանկանում ենք գործ ունենալ z-ի

իրական վերջավոր արժեքների հետ) միայն այն (x, y) *զույգերի համար, որոնք բավարարում են համապատասխանաբար,*

$$x^2+y^2 \le 1 \text{ կամ } x^2+y^2 < 1$$

անհավասարությանը։

$$5)\quad z=\arcsin\frac{x}{a}+\arcsin\frac{y}{b}$$

բանաձևով ֆունկցիան որոշված է x*-ի և* y*-ի այն արժեքների համար, որոնք առանձին-առանձին բավարարում են*

$$-a \le x \le a,\quad -b \le y \le b$$

անհավասարություններին։

Այդ բոլոր դեպքերում մենք ցույց ավեցինք բանաձևի կիրառման ամենից ավելի ընդարձակ՝ բ ն ա կ ա ն [46, 2°] տիրույթը։

Այժմ դիտարկենք այսպիսի օրինակ.

6) Դիցուք եռանկյան կողմերը կամայապես փոփոխվում են, միայն այն սահմանափակումով, որ նրա պարագիծը պահպանում է իր հաստատուն $2p$ *մեծությունը։ Եթե նրա երկու կողմերը նշանակենք* x *և* y*, ապա նրա երրորդ կողմը կլինի* $2p-x-y$*, ուստի եռանկյունը միանշանակորեն որոշվում է իր* x *և* y *կողմերով։ Իմանալ, թե այդ մեծություններից ինչպե՞ս է կախված եռանկյան* z *մակերեսը։*

Ըստ Հ ե ր ո ն ի բանաձևի, այդ մակերեսը կարտահայտվի այսպես՝

$$z=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$$

Իսկ ինչ վերաբերում է այդ ֆունկցիայի որոշման M *տիրույթին, ապա նա այս անգամ պայմանավորված է այն կոնկրետ խնդրով, որը մեզ բերում է այդ ֆունկցիայի դիտարկմանը։ Քանի որ եռանկյան յուրաքանչյուր կողմի երկարությունը դրական թիվ է, որը փոքր է կիսապարագծից, ուստի պետք է տեղի ունենան*

$$0<x<p,\quad 0<y<p,\quad x+y<p$$

անհավասարությունները. հենց դրանք էլ բնորոշում են M *տիրույթը**.

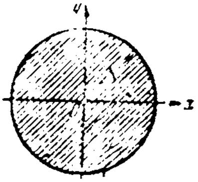
Այսպիսով, այն ժամանակ, երբ մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի համար արգումենտի փոփոխման ստանդարտ տիրույթ

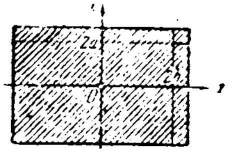
---

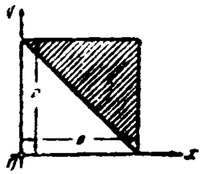
* *Չնայած նրան, որ ստացված բանաձևն ինքնըստինքյան իմաստ ունի նաև ավելի լայն տիրույթում, օրինակ,* $x>p$ *և* $y>p$ *արժեքների համար։*

հանդիսանում է (վերջավոր կամ անվերջ) միջակայքը, երկու փոփոխականների ֆունկցիայի դեպքում մենք հանդիպում ենք արգումենտների փոփոխման հնարավոր (և բնական) տիրույթների շատ բազմատեսակության և բարդության։

Այդ տիրույթների դիտարկումը նշանակալիորեն հեշտացվում է նրանց երկրաչափական մեկնաբանմամբ։ Եթե հարթության վրա վերցնենք երկու փոխադարձ ուղղահայաց առանցքներ և սովորական ձևով դրանց վրա դասավորենք x-ի և y-ի արժեքները, ապա, ինչպես հայտնի է, յուրաքանչյուր (x, y) զույգով հարթության վրա միարժեքորեն որոշվում է մի կետ, որի կոորդինատները այդ արժեքներն են, և, հակադարձաբար, յուրաքանչյուր կետով որոշվում է x-ի և y-ի արժեքների մի զույգ։


Գծ. 86


Գծ. 87


Գծ. 88.

Այն ժամանակ, բնորոշելու համար այն (x, y) զույգերը, որոնց համար ֆունկցիան որոշված է, ամենից ավելի հեշտ է ցույց տալ, թե xy հարթության վրա համապատասխան կետերով ի՞նչ պատկեր է լրացվում։

Այսպես. ասում ենք, որ 1) և 2) ֆունկցիաները որոշված են ամբողջ հարթության վրա, 3) և 4) ֆունկցիաները՝ շրջանում, համապատասխանաբար, փակ (այսինքն ներառյալ շրջանագիծը) կամ բաց (առանց շրջանագծի) (գծ. 86). 5)-րդը որոշված է ուղղանկյունում (գծ. 87), և վերջապես, 6)-րդ ֆունկցիան դիտարկվում է բաց եռանկյան ներսը (գծ. 88)։

Այս երկրաչափական մեկնաբանումն այնքան հարմար է, որ սովորաբար (x, y) թվերի զույգերը անվանում են «կետեր», իսկ այդպիսի «կետերի» բազմությունը, որը համապատասխանում է այս կամ այն երկրաչափական պատկերներին, անվանում են այդ պատկերների անունով։ Այսպես. այն «կետերի» կամ (x, y) զույգերի բազմությունը, որոնց համար տեղի ունեն

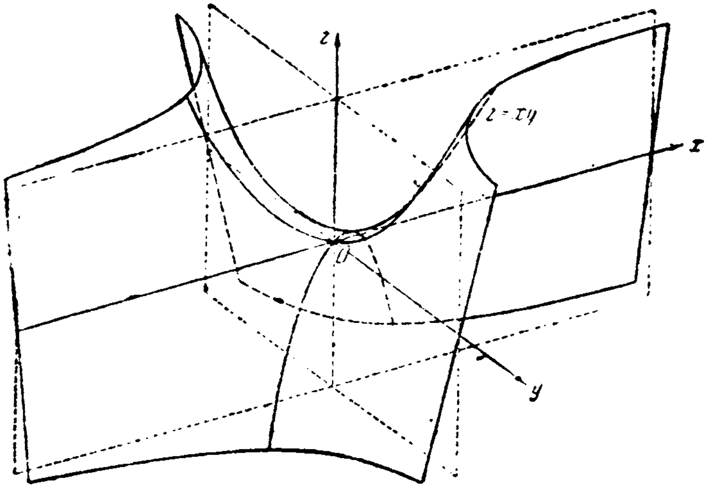
$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d$$

անհավասարությունները, «ուղղանկյուն» է, որի չափերը հավասար են b—a և d—c. այդ ուղղանկյունը կնշանակենք [a,b; c,d] սիմվոլով, որը նման է միջակայքի նշանակմանը։

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2<r^2$$

անհավասարությանը բավարարող «կետերի» կամ (x, y) զույգերի բազմությունը՝ r շառավղով «շրջան» է, որի կենտրոնը (α, β) «կետումն» է, և այլն։

Ինչպես որ y=f(x) ֆունկցիան երկրաչափորեն ներկայացվում էր իր *գրաֆիկով* [47], նույնպես և այստեղ կարելի է



Գծ. 89.

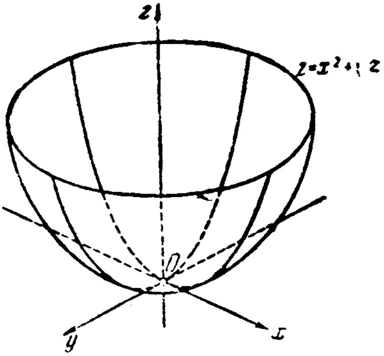
z=f(x,y) հավասարումը երկրաչափորեն մեկնաբանել։ Տարածության մեջ վերցնենք x, y, z կոորդինատային առանցքների ուղղանկյուն սիստեմ. xy հարթության վրա պատկերացնենք x և y փոփոխականների փոփոխման M տիրույթը, և, վերջապես, այդ տիրույթի յուրաքանչյուր M(x, y) կետում կանգնեցնենք xy հարթությանն ուղղահայաց և նրա վրա վերցնենք z=f(x, y) արժեքին համապատասխանող հատված։ Այդ ձևով ստացված կետերի երկրաչափական տեղը հենց կհանդիսանա մեր ֆունկցիայի յուրատեսակ *տարածական գրաֆիկը*։ Ընդհանրապես ասած, այդ կլինի մի որոշ մակերևույթ. z=f(x,y) հավասարումը, իր հերթին, կոչվում է *մակերևույթի հավասարում*։

Օրինակի համար 89, 90 և 91 գծագրերի վրա պատկերված են

$$z=xy,\quad z=x^2+y^2,\quad z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

ֆունկցիաների երկրաչափական պատկերները։

Դրանցից առաջինն իրենից ներկայացնում է հ ի պ ե ր բ ո լ ա կ ա ն պ ա ր ա բ ո լ ո ի դ, երկրորդը՝ պ տ տ մ ա ն պ ա ր ա բ ո լ ո ի դ, իսկ երրորդը՝ կ ի ս ա ս ֆ ե ր ա։



Գծ. 90.

Վերջում հիշեցնենք, որ երբեմն անհրաժեշտ է լինում դիտարկել $x_{m,n}$ *փոփոխականը, որի արժեքները համարակալված են երկու* m *և* n *բնական նշանիկներով (որոնցից յուրաքանչյուրը, անկախ մյուսից, հաջորդաբար ընդունում է բոլոր բնական արժեքները)։ Այդպիսի փոփոխականն իրենից ներկայացնում է, որոշ իմաստով,* x_n *վ ա ր ի ա ն տ ա յ ի ընդհանրացումը։ Կարելի է ընդունել, օրինակ,*

$$x_{m,n}=\frac{(m+n)!}{m!\,n!},$$

$$x_{m,n}=\frac{1}{m^2+n^2},$$

$$x_{m,n}=\frac{(m+1)\cdot n}{m(n+1)},$$

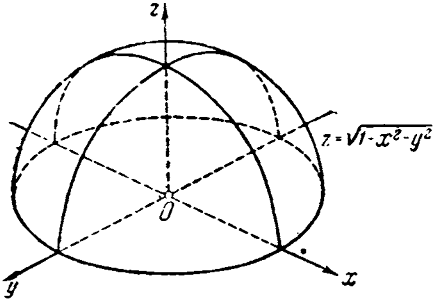
և այլն։

Ըստ էության, m *և* n *նշանիկները պետք է դիտարկել որպես անկախ փոփոխականներ, իսկ* $x_{m,n}$ *փոփոխականը՝ որպես նրանցից կախված ֆունկցիա։ Անկախ փոփոխականների փոփոխման տիրույթը տվյալ դեպքում երկրաչափորեն կպատկերացվի յուրատեսակ կետային քառակուսի ցանցով առաջին կոորդինատային անկյունում։*

151. ԹՎԱԲԱՆԱԿԱՆ n-ՉԱՓԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ։ *Անցնելով* n *անկախ փոփոխականների ֆունկցիաներին* ($n>3$ *դեպ-*

քում), մենք նախ կանգ առնենք այդ փոփոխականների համատեղ արժեքների սիստեմների վրա։

$n = 3$ դեպքում (x, y, z) երեք թվերի այդպիսի սիստեմը, ինչպես այդ պարզ է ընթերցողի համար, դեռևս կարող է երկրաչափորեն մեկնաբանվել որպես տարածության կետ, իսկ այդպիսի եռյակների բազմությունը՝ որպես տարածության մաս կամ երկրաչափական մարմին։ Բայց $3 < n$ դեպքում անմիջապես երկրաչափական մեկնաբանման հնարավորություն արդեն չկա, քանի որ մեզ մոտ բացակայում է երեքից ավելի չափում ունեցող տարածության ինտուիցիան։



Գծ. 91.

Այնուամենայնիվ, ցանկանալով տարածել երկրաչափական մեթոդները (որոնք օգտավետ եղան երկու և երեք փոփոխականի ֆունկցիաների համար) նաև ավելի շատ թվով փոփոխականների ֆունկցիաների տեսության վրա, անալիզի մեջ մտցնում են n-չափման «տարածության» գաղափարը նաև $3 < n$-ի դեպքում,

n հատ իրական թվերի սիստեմն անվանենք (n-չափման) «կետ»՝ $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, իսկ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ թվերը կհանդիսանան այդ M «կետի» կոորդինատները։ Բոլոր մտածելի n-չափման «կետերի» բազմությունը կազմում է n-չափման «տարածություն» (որը երբեմն անվանում են թվաբանական տարածություն)։

Նպատակահարմար է մտցնել նաև

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ և } M'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$$

* Գործ ունենալով անորոշ թվով փոփոխականների հետ, ավելի հարմար է լինում դրանք նշանակել ոչ թե տարբեր տառերով, այլ միևնույն տառով՝ միայն տարբեր համարներով։ Այսպիսով, x_i նշանակում է (հակառակ նախկին պրակտիկայի) ոչ թե որևէ փոփոխականի i-րդ արժեքը, այլ հենց i-րդ փոփոխականն ինքը, որը ինքն է ընդունում տարբեր արժեքներ։

երկու (n-չափման) «կետերի» MM' «հեռավորության» գաղափարը։ Հետևելով անալիտիկ երկրաչափությունից հայտնի բանաձևին, ընդունում են՝

$$\overline{MM'} = \overline{M'M} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x'_i - x_i)^2} =$$

$$= \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \cdots + (x'_n - x_n)^2}. \qquad (1)$$

$n=2$ և $n=3$ դեպքերում այդ «հեռավորությունը» համընկնում է երկու համապատասխան երկրաչափական կետերի սովորական հեռավորության հետ։

Եթե վերցնենք ևս մեկ «կետ»՝

$$M''(x''_1, x''_2, \ldots, x''_n),$$

ապա կարելի է ապացուցել, որ $\overline{MM'}$, $\overline{M'M''}$ և $\overline{MM''}$ «հեռավորությունների» համար տեղի ունի

$$\overline{MM''} \leq \overline{MM'} + \overline{M'M''} \qquad (2)$$

անհավասարությունը, որը հիշեցնում է երկրաչափության հայտնի թեորեման՝ «եռանկյան կողմը մեծ չէ մյուս երկու կողմերի գումարից»։

Իրոք կամավոր կերպով վերցրած $a_1, a_2, \ldots, a_n$ և $b_1, b_2, \ldots b_n$ իրական թվերի համար տեղի ունի

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

անհավասարությունը*։

---

* Եթե այդ անհավասարության երկու կողմերը քառակուսի բարձրացնենք և երկու մասերից դեն նետենք հավասար անդամները, ապա նա կհանգի Շվարցի հայտնի անհավասարությանը՝

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Զուգընթացաբար ցույց տանք, թե ինչպես այս վերջինս կարե-

Եթե այդտեղ ընդունենք

$$a_i = x'_i - x_i, \quad b_i = x''_i - x'_i,$$

այնպես որ՝

$$a_i + b_i = x''_i - x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ապա կստանանք՝

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x''_i - x_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x'_i - x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x''_i - x'_i)^2},$$

որը համարժեք է (2)-րդ անհավասարությանը։ Այսպիսով, հեռավորության այդ կարևոր հատկությունը գոյություն ունի նաև մեր «տարածության» մեջ։

n-չափման «տարածության» մեջ կարելի է դիտարկել նաև անընդհատ «կորեր»։ Հայտնի է [105], որ

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

հավասարումները, որտեղ $\varphi(t)$-ն ու $\psi(t)$-ն t պարամետրի ֆունկցիաներ են, որոնք անընդհատ են մի որոշ $[t', t'']$ միջա-

---

յի է տանում տարրական եղանակով: Հետևյալ՝

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot x^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \cdot x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

քառակուսի եռանդամը բացասական արժեքներ չի ընդունում։ Այդ դեպքում նա չի կարող ունենալ տարբեր իրական արմատներ, և նրա դիսկրիմինանտը բացասական չէ՝

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right\}^2 \geq 0,$$

որը համարժեք է Շվարցի անհավասարությանը։

կայքում, հարթության վրա ներկայացնում են անընդհատ կոր։ Նույնպես, բայց միայն երեք անընդհատ ֆունկցիաների օգնությամբ՝

$$x=\varphi(t),\ y=\chi(t),\ z=\mathbf{X}(t)\ (t'\leq t\leq t'')$$

ներկայացվում է (սովորական) տարածության մեջ գտնվող անընդհատ կոր։ Սրան հետևելով, դիտարկենք t-ից կախված n անընդհատ ֆունկցիաներ՝

$$x_1=\varphi_1(t),\ x_2=\varphi_2(t),\ \ldots,\ x_n=\varphi_n(t)\quad (t'\leq t\leq t'')։$$

Այդ ժամանակ, այն

$$(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t))$$

«կետերի» բազմությունը, որոնք ստացվում են պարամետրի տարբեր արժեքների համար, հենց կազմում է անընդհատ «կոր» n-չափման «տարածության» մեջ։ Ընդունելով՝

$$x'_1=\varphi_1(t'),\ \ldots,\ x'_n=\varphi_n(t'),\ x''_1=\varphi_1(t''),\ldots,\ x''_n=\varphi_n(t''),$$

կարող ենք ասել, որ «կորը» միացնում է

$$M'(x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_n)\ \text{և}\ M''(x''_1,\ x''_2,\ \ldots,x''_n)$$

«կետերը»։

Այն դեպքում, երբ բոլոր $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ֆունկցիաները գծային են, «կորը» դառնում է «ուղիղ»՝

$$x_1=\alpha_1 t+\beta_1,\ \ldots,\ x_n=\alpha_n t+\beta_n\ .$$

այստեղ ենթադրվում է, որ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ գործակիցները միաժամանակ զրո չեն դառնում, իսկ t-ն փոփոխվում է $-\infty$-ից մինչև $+\infty$։ Այդ ուղղի կետերը կհամարենք մեկը մյուսին հաջորդող՝ պարամետրի աճման կարգով. եթե $t'<t<t''$, ապա դրանց համապատասխանող M', M, M'' «կետերից» հենց M կետն է, որ գտնվում է մյուս երկուսի միջև. որովհետև նա հաջորդում է M'-ին և նախորդում է M''-ին։ Այս պայմանների դեպքում, հեշտ է ցույց տալ, որ դրանց միջև գտնվող հեռավորությունները բավարարում են հետևյալ առնչությունը՝

$$\overline{M'M''}=\overline{M'M}+\overline{MM''},$$

որը բնորոշ է սովորական տարածության մեջ գտնվող ուղղի համար։

Տված՝

$$M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \text{ և } M''(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$$

երկու «կետերով» անցնող «ուղիղի» հավասարումը, ակներևաբար, կարելի է գրել այսպես՝

$$x_1=x'_1+t(x''_1-x'_1), \dots, x_n=x'_n+t(x''_n-x'_n)$$

$$(-\infty<t<+\infty),$$

ընդ որում M' և M'' կետերին իրենք ստացվում են այստեղից $t=0$ և $t=1$ դեպքերում։ Իսկ եթե t-ն փոփոխենք 0-ից մինչև 1, կստանանք այդ «կետերը» միացնող «ուղղագիծ հատվածը»։

Այն «կորը», որը բաղկացած է վերջավոր թվով «ուղղագիծ հատվածներից», կոչվում է «բեկյալ»։

152. ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐԻ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ n-ՉԱՓՄԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ։ Այժմ դիմենք n-չափման «տարածության» մեջ «մարմինների» կամ «տիրույթների» մի քանի օրինակների դիտարկմանը։

1) Այն $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ «կետերի» բազմությունը, որոնց կոորդինատները իրարից անկախ բավարարում են հետևյալ անհավասարություններին՝

$$a_1\le x_1\le b_1,\ a_2\le x_2\le b_2, \dots, a_n\le x_n\le b_n,$$

կոչվում է (n-չափման) «ուղղանկյուն զուգահեռանիստ» և նշանակվում է այսպես՝

$$[a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n]\text{։}$$

Այստեղից, մասնավոր դեպքում, երբ $n=2$, ստացվում է այն «ուղղանկյունը», որի մասին արդեն խոսել ենք n° 150-ում. եռաչափ «զուգահեռանիստին» տարածության մեջ համապատասխանում է սովորական ուղղանկյուն զուգահեռանիստ։

Եթե վերոհիշյալ անհավասարությունների մեջ բացառենք հավասարության դեպքերը՝

$$a_1 < x_1 < b_1,\ a_2 < x_2 < b_2,\ \dots,\ a_n < x_n < b_n,$$

ապա այսպիսով կորոշվի բաց «ուղղանկյուն զուգահեռանիստ»

$$(a_1, b_1; a_2, b_2; \dots, a_n, b_n),$$

ի տարբերություն որից, վերևում դիտարկվածը կոչվում է փակ «զուգահեռանիստ»*։ Երկու զուգահեռանիստների համար էլ $b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ \dots,\ b_n-a_n$ տարբերությունները կոչվում են չափումներ, իսկ

$$\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \dots, \frac{a_n+b_n}{2}\right)$$

կետը՝ կենտրոն։

$M^0(x^0_1, x^0_2, \dots, x^0_n)$ «կետի» շրջակայք կոչվում է ամեն մի

$$(x^0_1-\delta_1, x^0_1+\delta_1; x^0_2-\delta_2, x^0_2+\delta_2; \dots; x^0_n-\delta_n; x^0_n+\delta_n) \quad (3)$$

$$(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n > 0)$$

բաց «զուգահեռանիստ», որի կենտրոնը M^0 կետն է. ամենից հաճախ այդ լինում է «խորանարդ»՝

$$(x^0_1-\delta, x^0_1+\delta; x^0_2-\delta, x^0_2+\delta; \dots; x^0_n-\delta, x^0_n+\delta),$$

$$(\delta > 0)$$

որի բոլոր չափումները իրար հավասար են $(=2\delta)$։

2) Դիտարկենք այն $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ կետերի բազմությունը, որոնց կոորդինատները բավարարում են հետևյալ անհավասարություններին՝

---

* Կարելի է դիտարկել նաև անվերջ «զուգահեռանիստ», որը որոշող միջակայքերը (կամ դրանցից ոմանք) անվերջ մեծ են։

n-չափման «զուգահեռանիստի» մասին խոսելիս, եթե ուրիշ վերապահում չի արված, մենք միշտ ի նկատի կունենանք վերջավոր «զուգահեռանիստ»:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0,\ x_1+x_2+\cdots+x_n \leq h \qquad (h>0)։$$

$n=2$ դեպքում այդ բազմությանը համապատասխանող երկրաչափական պատկերը կլինի հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյուն, իսկ $n=3$ դեպքում՝ քառանիստ (тетраэдр) (գծ. 92)։ Ընդհանուր դեպքում այն անվանում են *սիմպլեքս** (այն է *փակ* սիմպլեքս, ի տարբերություն *բաց* սիմպլեքսից, որը կստացվի, երբ վերոհիշյալ առնչություններից բացառենք հավասարության նշանը)։

3) Վերջապես, $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ «կետերի» այն բազմությունը, որը որոշվում է

$$(x_1-x^0_1)^2+(x_2-x^0_2)^2+(x_3-x^0_3)^2+\cdots+(x_n-x^0_n)^2 \leq r^2 \ (\text{կամ} < r^2)$$

անհավասարությամբ, որտեղ $M_0(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n)$-ն հաստատուն «կետ» է, իսկ r-ը՝ հաստատուն դրական թիվ, կազմում է *փակ (կամ բաց)* n-չափման «գունդ»՝ r շառավղով և M_0 կենտրոնով։ Այլ խոսքով, «գունդը» այն M «կետերի» բազմությունն է, որոնց «հեռավորությունը» մի M_0 հաստատուն «կետից» չի գերազանցում (կամ փոքր է) r-ից։ Ինքնըստինքյան պարզ է, որ $n=2$ դեպքում այդ «գնդին» համապատասխանում է շրջան [համեմատել 150-ի հետ], իսկ $n=3$ դեպքում՝ սովորական գունդ։

Ցանկացած $r>0$ շառավղով և $M_0(x^0_1, \ldots x^0_n)$ կենտրոնով բաց «գունդը» նույնպես կարելի է դիտել որպես այդ կետի *շրջակայք*. ի տարբերություն առաջ սահմանած («զուգահեռանիստային») շրջակայքից, այս շրջակայքը կանվանենք «գնդային» շրջակայք։

Պետք է մեկ անգամ ընդմիշտ իմանալ, որ եթե M_0 «կետը» շրջապատված է վերոհիշյալ երկու տեսակի շրջակայքերից որևէ մեկով, ապա այն կարելի է շրջապատել նաև մյուս տեսակի շրջակայքով այնպես, որ այդ շրջակայքը գտնվի առաջինի ներսում։

---

* Լատիներեն simplex նշանակում է «պարզ». իրոք, սիմպլեքսը իրենից ներկայացնում է ամենապարզ բազմանիստ մարմինը, տված տարածության համար հնարավոր նվազագույն թվով նիստերով։

Դիցուք նախ տված է (3)-րդ «զուգահեռանիստը», որի կենտրոնը M_0 «կետն» է։ Բավական է վերցնել նույն կենտրոնով և բոլոր δ_i-երից ($i=1, 2, \ldots, n$) փոքր r շառավղով մի գունդ, որպեսզի այդ գունդը ամբողջ գտնվի վերոհիշյալ «զուգահեռանիստի» ներսը։ Իրոք, այդ գնդի ցանկացած $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ «կետի» համար կունենանք (յուրաքանչյուր $i=1, 2, \ldots, n$ արժեքի համար)՝

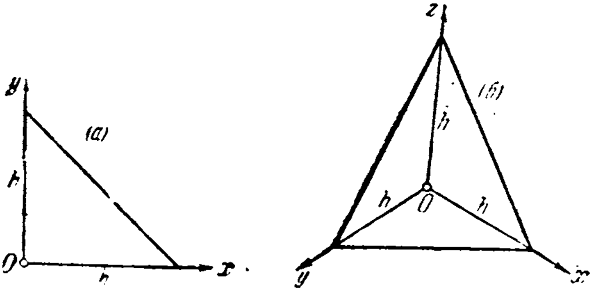
$$|x_i - x_i^0| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k^0)^2} = \overline{MM_0} < r < \delta_i$$

կամ

$$x_i^0 - \delta_i < x_i < x_i^0 + \delta_i,$$

ուստի այդ «կետը» պատկանում է տված «զուգահեռանիստին»։

Հակադարձաբար, եթե տված է r շառավղով և M_0 կենտրոնով



Գծ. 92.

«գունդ», ապա (3)-րդ «զուգահեռանիստը» նրա ներսը կգտնվի, օրինակ, երբ $\delta_1=\delta_2=\ldots=\delta_n=\frac{r}{\sqrt{n}}$։ Այս հետևում է նրանից, որ այդ «զուգահեռանիստի» ցանկացած $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ «կետը» M_0 «կետից» հեռացած է հետևյալ «հեռավորությամբ»՝

$$\overline{MM_0} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k^0)^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \delta_k^2} = r$$

և հետևաբար, պատկանում է տված «գնդին»։

153. ԲԱՑ ԵՎ ՓԱԿ ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ։ $M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ «կետը» կանվանենք M բազմության (n-չափման «տարածության» մեջ) ներքին «կետ», եթե նա M բազմությանն է պատկանում իր բավականաչափ փոքր շրջակայքի հետ միասին։ Նախորդ n°-ի վերջում ապացուցածից ակներևաբար հետևում է, որ նշանակություն չունի այն, թե այստեղ ինչ տիպի շրջակայք ենք ի նկատի ունենում՝ «զուգահեռանիստային», թե «գնդային»։

$$(a_1, b_1;\ a_2, b_2; \dots;\ a_n, b_n) \qquad (4)$$

բաց «ուղղանկյուն զուգահեռանիստի» համար նրա յուրաքանչյուր «կետը» հանդիսանում է ներքին կետ։ Իրոք, եթե

$$a_1<x'_1<b_1,\ a_2<x'_2<b_2, \dots, a_n<x'_n<b_n,$$

ապա հեշտ է գտնել այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որպեսզի տեղի ունենան

$$a_1<x'_1-\delta<x'_1+\delta<b_1, \dots, a_n<x'_n-\delta<x'_n+\delta<b_n$$

անհավասարությունները։

Նմանապես, r շառավղով և M_0 կենտրոնով բաց «գնդի» դեպքում, նրան պատկանող յուրաքանչյուր M' «կետը» հանդիսանում է նրա ներքին «կետ»։ Եթե ρ-ն վերցնենք այնպես, որ

$$0<\rho<r-\overline{M'M_0}$$

և M' «կետի» շուրջը գծենք այդ ρ շառավղով գունդ, ապա նա ամբողջապես կգտնվի սկզբում վերցրած «գնդի» ներսը. հենց որ $\overline{MM'}<\rho$, անմիջապես տեղի կունենա [151 (2)]՝

$$\overline{MM_0} \leq \overline{MM'}+\overline{M'M_0}<\rho+\overline{M'M_0}<r,$$

ուստի M «կետը» պատկանում է սկզբում վերցրած «գնդին»։

Նույնպիսի եզրակացություն կարելի է անել նաև

$$x_1>0, \dots, x_n>0,\ x_1+\dots+x_n<h \qquad (h>0) \qquad (5)$$

բաց սիմպլեքսի նկատմամբ։

Այդ տեսակի բազմությունը, որը ամբողջապես կազմված է ն ե ր ք ի ն «կետերից», կանվանենք բ ա ց «տիրույթ»:

Այսպիսով, բաց «ուղղանկյուն զուգահեռանիստը», բաց «գունդը», բաց սիմպլեքսը՝ ծառայում են որպես բաց «տիրույթների» օրինակներ։

Այժմ խտացման կետի գաղափարը [52] *ընդհանրացնենք n-չափման «տարածության» M բազմության դեպքի համար.* M_0 «կետը» կոչվում է ***M*** բազմության «խտացման կետ», երե նրա յուրաքանչյուր շրջակայքում (*դարձյալ՝ անկախ շրջակայքի տեսակից*) գտնվում է ***M*** բազմությանը պատկանող գոնե մեկ «կետ», որը M_0-ից տարբեր է:

Բաց «տիրույթի» այդ խտացման կետերը, որոնք «տիրույթին» չեն պատկանում, կոչվում են նրա ե զ ր ա յ ի ն «կետեր»։ Եզրային «կետերի» համախմբությունը կազմում է «տիրույթի եզրը»։ Բաց «տիրույթը» իր «եզրի» հետ միասին կոչվում է փ ա կ «տիրույթ»:

Դժվար չէ տեսնել, որ (4)-րդ բաց «զուգահեռանիստի» համար եզրային «կետեր» կլինեն այն $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *կետերը, որոնց համար*

$$a_1 \quad x_1 \quad b_1, \ldots, a_n \quad x_n \quad b_n ,$$

ընդ որում գոնե մեկ դեպքում տեղի ունի հենց հավասարությունը։

Ճիշտ նույն կերպ, վերևում դիտարկված բաց «գնդի» համար եզրային կլինեն այն M *«կետերը», որոնց համար ճշտորեն* $\overline{MM_0} = r$։

Վերջապես, (5)-րդ բաց սիմպլեքսի համար եզրային կետեր հանդիսանում են այն $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *«կետերը», որոնք բավարարում են հետևյալ առնչություններին՝*

$$x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0, \; x_1 + x_2 \quad \cdots \quad x_n \quad h$$

ընդ որում գոնե մեկ անգամ տեղի ունի հ ա վ ա ս ա ր ո ւ թ յ ո ւ ն։

Այսպիսով, փակ «ուղղանկյուն զուգահեռանիստը», փակ «գունդը» և փակ սիմպլեքսը տալիս են փակ «տիրույթների» օրինակներ։

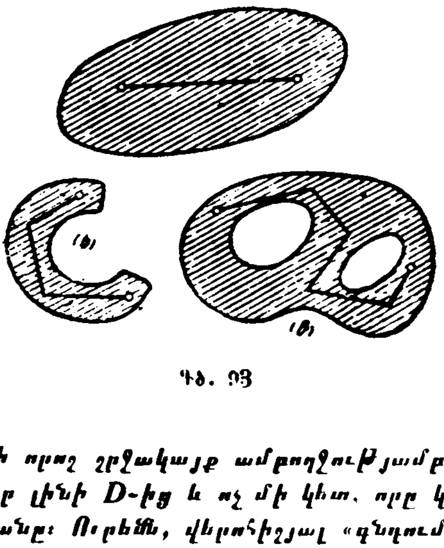
Հետագայում, խոսելով բաց կամ փակ «տիրույթի» մասին,

մենք միշտ ի նկատի կունենանք այստեղ նշված հատուկ իմաստով «տիրույթ»։

Այժմ ցույց տանք, որ փակ «տիրույթին» պատկանում են նրա բոլոր խտացման «կետերը»։

Դիցուք տված է D փակ «տիրույթը» և նրանից դուրս M_0 «կետը»։ Ապացուցենք, որ M_0-ն $\bar{D}$-ի համար խտացման «կետ» չի լինի։

$\bar{D}$ փակ «տիրույթն» ստացվում է մի որոշ D բաց «տիրույթից»՝ նրան իր E «եզրը» միացնելու միջոցով։ Ակներևաբար, M_0 կետը D-ի համար խտացման «կետ» չէ, հետևապես M_0-ն կարելի է շրջապատել այնպիսի բաց «գնդով», որ նրա մեջ D-ին պատկանող «կետեր» բոլորովին չգտնվեն։ Բայց այդ ժամանակ այդտեղ չեն գտնվի նաև E-ից «կետեր». չէ՞ որ, եթե E-ից որևէ M' «կետ» գտնվեր այդ գնդի



Գծ. 93

ներսը, ապա այդտեղ կգտնվեր նաև M' «կետի» մի որոշ շրջակայք ամբողջությամբ, և այդ շրջակայքի ներսը չէր լինի D-ից և ոչ մի կետ, որը կհակասեր «եզրի» սահմանմանը։ Ուրեմն, վերոհիշյալ «գնդում» $\bar{D}$-ից կետեր չկան, որը և ապացուցում է մեր պնդումը։

Ընդհանրապես «կետային» M բազմությունը, որն իր մեջ պարունակում է բոլոր իր խտացման «կետերը», անվանում են փ ա կ բազմություն։ Այսպիսով, փակ «տիրույթը» փակ բազմության մասնավոր դեպքն է։

Մուծենք էլի՛ մի շարք տերմիններ։ «Կետերի» M բազմությունը կոչվում է ս ա հ մ ա ն ա փ ա կ, եթե նա ամբողջապես գտնվում է մի «ուղղանկյուն զուգահեռանիստի» ներսը։

«Տիրույթը» կոչվում է կ ա պ ա կ ց վ ա ծ, եթե նրա կամավոր երկու «կետերը» կարելի է միացնել իր բոլոր կետերով «տիրույթի» ներսը գտնվող «բեկյալով»։ 93-րդ գծագրում լուսաբան-

ման համար ներկայացված են մի քանի կառուցված տիրույթներ հարթության վրա։

n-չափման «տարածության» մեջ սահմանափակ և կառուցված «տիրույթը» (բաց կամ փակ), որոշ իմաստով, վերջավոր միջակայքի (համապատասխանաբար՝ բաց կամ փակ) անալոգն է։ Ընթերցողը տեսնում է, սակայն, թե n-չափման ($n>2$) պատկերներին անցնելիս նրանց տեսքը որքան է բարդանում։ Պարզ ու միատեսակ միջակայքերին, որոնց եզրերը կազմված են ընդամենը երկու կետից, այստեղ հակադրվում են հսկայական բազմազանությամբ «տիրույթներ» բարդ եզրերով։

Վերջին nn°-ում շարադրվածները բոլորը կարելի է դիտարկել միայն որպես ինչ-որ երկրաչափական լեզվի սահմանում. վերջինիս հետ ($n>3$ դեպքում) ոչ մի իսկական երկրաչափական պատկերացում չի կապված։ Սակայն օգտակար է ընդգծել, որ n-չափման (թվաբանական) տարածությունը փաստորեն հանդիսանում է միայն առաջին քայլը դեպի տարածության գաղափարի վերին աստիճանի բեղմնավոր ընդհանրացումները, որոնք դրված են ժամանակակից անալիզի ավելի բարձր մասերից շատերի հիմքում։*

154. n ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ։ Դիցուք ունենք n հատ՝ $x_1, x_2, \dots x_n$ փոփոխականներ, որոնց համատեղ արժեքները կամավոր կերպով կարող են ընտրվել n-չափման տարածության մի որոշ M բազմությունից. այդ փոփոխականները կոչվում են անկախ։ Երկու փոփոխականի դեպքում ֆունկցիայի սահմանումը և նրա վերաբերյալ բոլոր ասածները [150] անմիջապես փոխանցվում են նաև այս դիտարկվող դեպքի վրա, ուստի դրանց վրա կանգ առնելու հարկ չկա։

Եթե $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ կետը նշանակենք M-ով, ապա այդ փոփոխականների $u=f(x_1, x_2, \dots x_n)$ ֆունկցիան երբեմն անվանում են M կետի ֆունկցիա և նշանակում են նույն նշանով՝ $u=f(M)$։

Այժմ ենթադրենք, թե m-չափման տարածության (որտեղ m-ը n-ի հետ կապված չէ) կետերի մի որոշ P բազմության

---

* Մենք չակերտների մեջ էինք առնում բոլոր այն երկրաչափական տերմինները, որոնք գործածվում էին սովորականից տարբեր իմաստով՝ «կետ», «հեռավորություն», «տիրույթ» և այլն։ Հետագայում այլևս չակերտներ չենք գործածելու։

մեջ տված են m հատ՝ $t_1, t_2, \dots, t_m$ փոփոխականների n հատ ֆունկցիաներ՝

$$x_1=\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, x_n=\varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m) \tag{5}$$

կամ, ավելի կարճ՝

$$x_1=\varphi_1(P), \dots, x_n=\varphi_n(P), \tag{5ա}$$

որտեղ P-ով նշանակված է m-չափման տարածության $(t_1, t_2, \dots, t_m)$ կետը: Բացի դրանից, ընդունենք, որ, երբ $P(t_1, t_2, \dots t_m)$ կետը փոփոխվում է P բազմության սահմաններում, նրան համապատասխանող n-չափման M կետը, որն ունի (5)-րդ [կամ (5ա)] կոորդինատներ, դուրս չի գալիս n-չափման այն M բազմության սահմաններից, որտեղ որոշված է $u=f(x_1, x_2, \dots, x_n)=f(M)$ ֆունկցիան:

Այդ ժամանակ u փոփոխականը կարելի է դիտել որպես $t_1, t_2, \dots, t_m$ (P բազմության ներսը) անկախ փոփոխականների բարդ ֆունկցիա՝ $x_1, x_2, \dots, x_n$ փոփոխականների միջոցով՝

$$u=f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m)).$$

u-ն հանդիսանում է $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ֆունկցիաների ֆունկցիա [համեմատել 51-ի հետ]:

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ֆունկցիաների և f ֆունկցիայի միջոցով բարդ ֆունկցիայի որոշման պրոցեսն ինքը կոչվում է (ինչպես և մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի պարզ դեպքում) սուպերպոզիցիա:

Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաների այն դասը, որի հետ սկզբնական շրջանում գործ պետք է ունենանք, շատ էլ մեծ չէ: Ըստ էության, նա կառուցվում է, սուպերպոզիցիայի օգնությամբ, մեկ փոփոխականի տարրական ֆունկցիաների [48. 50] և երկու փոփոխականների հետևյալ ֆունկցիաների վրա՝

$$z=x\pm y, \quad z=xy, \quad z=\frac{x}{y} \quad \text{և} \quad z=x^y,$$

այսինքն՝ թվաբանական չորս գործողությունների և, այսպես կոչված, աստիճանա-ցուցչային ֆունկցիայի վրա:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ անկախ փոփոխականների և հաստատունների նկատմամբ բազմակի կիրառված թվաբանական գործողությունները ամենից առաջ բերում են ամբողջ բազմանդամներին՝

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_n} C_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n} \;*$$

(ամբողջ ռացիոնալ ֆունկցիա) և երկու այդպիսի բազմանդամների հարաբերությանը՝

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\sum C_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_n^{\nu_n}}{\sum C'_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_n^{\mu_n}}$$

(կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիա)։

Մեկ փոփոխականի տարրական ֆունկցիաների օգտագործումը կհանգեցնի, օրինակ, այսպիսի ֆունկցիաների՝

$$f(x, y, z) = \frac{\log(x + y + z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \sin xy + \sin yz + \sin zt + \sin tx,$$

և այլն։

Այն դիտողությունները, որոնք կատարվել են n° 46-ում մեկ փոփոխականի ֆունկցիան անալիտիկորեն տալու առթիվ, կարող են կրկնվել և այստեղ։

155. ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆԸ։ Ենթադրենք, թե $f(x_1, \ldots, x_n)$ ֆունկցիան որոշված է մի որոշ M կետային բազմության, որն ունի $M_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ խտացման կետը։

Մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի սահմանի սահմանման

---

* Մենք գիտենք, որ $\sum$ նշանը նշանակում է միատեսակ գումարելիների գումար։ Այստեղ ունենք ավելի բարդ դեպք, երբ գումարելիները կախված են մի քանի նշաններից։

անալոգիայով, ասում են, որ $x_1, \ldots, x_n$ փոփոխականները համապատասխանաբար $a_1, \ldots, a_n$-ին ձգտելիս $f(x_1, \ldots, x_n)$ ֆունկցիան ունի A սահմանը, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար կգտնվի այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ՝

$$|f(x_1, \ldots, x_n) - A| < \varepsilon,$$

հենց որ՝

$$|x_1 - a_1| < \delta, \ldots, |x_n - a_n| < \delta.$$

Ընդ որում ենթադրվում է, որ $(x_1, \ldots, x_n)$ կետը վերցված է M բազմությունից և $(a_1, \ldots, a_n)$ կետից տարբեր է։ Ուրեմն ֆունկցիայի համար գրված անհավասարությունը պետք է տեղի ունենա M բազմության այն բոլոր կետերի համար, որոնք գտնվում են M_0 կետի բավականաչափ փոքր՝

$$(a_1 - \delta, a_1 + \delta; \ldots; a_n - \delta, a_n + \delta)$$

շրջակայքում, բացառությամբ հենց այդ կետից (եթե նա պատկանում է M-ին)։

Ֆունկցիայի սահմանը նշանակում են այսպես՝

$$A = \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, \ldots, x_n) \qquad (6)$$

$(x_1, \ldots, x_n)$ և $(a_1, \ldots, a_n)$ կետերը նշանակելով M-ով և M_0-ով, վերոհիշյալ սահմանումը երկրաչափական տերմիններով կարելի էր ձևակերպել այսպես. A թիվը կոչվում է $f(M)$ ֆունկցիայի սահման M կետը M_0-ին ձգտելիս (կամ՝ M_0 կետում), եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $r > 0$ թիվ, որ

$$|f(M) - A| < \varepsilon,$$

հենց որ $\overline{M_0M}$ հեռավորությունը $< r$-ից։

Ինչպես և վերևում, ենթադրվում է, որ M կետը վերցված է M բազմությունից, բայց M_0-ից տարբեր է։ Այսպիսով, ֆունկցիայի համար գրված անհավասարությունը պետք է տեղի ունենա M բազմության բոլոր այն կետերի համար, որոնք

գտնվում են M_0 կետի բավականաչափ փոքր գնդային շրջակայքում, բացառությամբ հենց այդ կետից։

Ֆունկցիայի սահմանի նշանակումը ևս կարելի է հարմարեցնել այս սահմանմանը՝

$$A = \lim_{M \to M_0} f(M)։ \qquad (6^*)$$

n° 152-*ում տարբեր տեսակի շրջակայքերի վերաբերյալ արված դիտողություններից անմիջապես երևում է վերևում բերված երկու սահմանումների համարժեքությունը։*

Նույն ձևով սահմանվում է ֆունկցիայի անվերջ սահմանի գաղափարը։ $A = \infty$, $+\infty$ *կամ* $-\infty$ *դեպքում միայն*

$$|f(x_1, \dots, x_n) - A| < \varepsilon$$

անհավասարությունը փոխարինվում է համապատասխանաբար

$$|f(x_1, \dots, x_n)| > E, \quad f(x_1, \dots, x_n) > E$$

կամ

$$f(x_1, \dots, x_n) < -E$$

տեսքի անհավասարությամբ, որտեղ E-*ն նախապես վերցրած կամավոր դրական թիվ է։*

Եզրափակման մեջ հիշենք այն դեպքի մասին, երբ $x_1, \dots, x_n$ *անկախ փոփոխականներից ոմանք ձգտում են անվերջ սահմանի։*

Կարելի էր M տիրույթի $M_0(a_1, \dots, a_n)$ *խտացման կետի գաղափարը տարածել նաև այն դեպքի վրա, երբ այդ կետի բոլոր կոորդինատները (կամ նրանցից մի քանիսը) անվերջ են**։ *Օրինակ,* $(+\infty, \dots, +\infty)$ կետը *M*-ի համար հանդիսանում է խտացման կետ, եթե այդ տիրույթում գտնվում են ցանկացած չափով մեծ (դրական) կոորդինատներ ունեցող կետեր:

Այդպիսի ենթադրությամբ, ասում են, որ բոլոր $x_1, \dots, x_n$ փոփոխականները $+\infty$-ն ձգտելիս $f(x_1, \dots, x_n)$ ֆունկցիայի սահմանը A թիվն է, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $\Delta > 0$ թիվ, որ՝

---

* *Այդ դեպքում* M_0 *կետը կոչվում է անիսկական կետ։*

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - A| < \varepsilon,$$

հենց որ՝

$$x_1 > \Delta, \; x_2 > \Delta, \; \ldots, \; x_n > \Delta:$$

Նշանակում են այսպես՝

$$A = \lim_{\substack{x_1 \to +\infty \\ \cdots \\ x_n \to +\infty}} f(x_1, \ldots, x_n).$$

Մասնավորապես, անդրադառնալով այն $x_{m,n}$ *փոփոխականին, որի մասին խոսվել է* n° 150-*ի վերջում, ասում են,* որ m և n երկու համարներն անվերջ մեծանալիս այդ փոփոխականը ձգտում է A սահմանին, երբ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գտնվի այնպիսի N համար, որ՝

$$|x_{m,n} - A| < \varepsilon, \text{ երբ } m > N, \; n > N.$$

Այդ գրում են այսպես՝

$$A = \lim_{\substack{m \to +\infty \\ n \to +\infty}} x_{m,n} \quad \text{կամ պարզապես՝} \quad A = \lim x_{m,n}.$$

Հեշտ է հասկանալ, թե ինչպես պետք է դասել այն դեպքում, երբ $A = \infty$ $(+\infty, -\infty)$։

156. ԲԵՐՈՒՄԸ ՎԱՐԻԱՆՏԱՅԻ ԴԵՊՔԻՆ։ n-*չափման տարածության մեջ դիտարկենք կետերի հաջորդականություն՝*

$$\{M_k(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})\} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

Մենք ասելու ենք, որ այդ հաջորդականությունը զուգամիտում է դեպի $M_0(a_1, \ldots, a_n)$ *սահմանային կետը, եթե երբ* $k \to +\infty$ $\overline{M_0 M_k}$ *հեռավորությունը ձգտում է զրոյի՝*

$$\overline{M_0 M_k} \to 0. \tag{7}$$

Սրա փոխարեն կարելի էր պահանջել, որ M_k *կետի կոոր-*

դինատներն առանձին-առանձին ձգտեին M_0 կետի համապատասխան կոորդինատներին, այսինքն՝ որպեսզի լիներ՝

$$x_1^{(k)} \to a_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)} \to a_n^{(k)}. \qquad (8)$$

Այս երկու սահմանումների համարժեքությունը, փաստորեն, հետևում է 152-ում երկու տեսակի շրջակայքերի վերաբերյալ ապացուցված առաջադրությունից: Իրոք, (7)-րդ պայմանը նշանակում է, որ, ինչպիսին էլ լինի $r>0$ թիվը, բավականաչափ մեծ k-ի համար M_k կետը բավարարում է

$$\overline{M_0M_k} < r$$

անհավասարությանը, այսինքն՝ գտնվում է r շառավղով և M_0 կենտրոնով (բաց) գնդի ներսը, իսկ (8)-րդ պահանջն ունի այն իմաստը, որ, ինչպիսին էլ լինի $\delta>0$ թիվը. վերոհիշյալ կետը, դարձյալ բավականաչափ մեծ k-ի համար, բավարարում է

$$|x_1^{(k)} - a_1| < \delta, \ldots, |x_n^{(k)} - a_n| < \delta$$

անհավասարություններին, այսինքն՝ գտնվում է

$$(a_1 - \delta, a_1 + \delta; \ldots; a_n - \delta, a_n + \delta)$$

(բաց) զուգահեռանիստի ներսը, որի կենտրոնը միևնույն կետն է:

Դիցուք այժմ $M_0(a_1, \ldots, a_n)$ կետը հանդիսանում է n-չափման տարածության մի որոշ M բազմության **խտացման կետ**: Այդ ժամանակ M-ից կարելի է անջատել M_0-ից տարբեր այնպիսի կետերի $\{M_k\}$ հաջորդականություն, որը ձգտի M_0-ին, որպես **սահմանային կետի**:

Այս ապացուցելու համար վերցնենք դրական վարիանտա $r_k \to 0$: Ըստ խտացման կետի սահմանման [153], M_0 կետի՝ ամեն մի r_k շառավղով գնդային շրջակայքում կգտնվի M բազմությանը պատկանող (M_0-ից տարբեր) M_k կետ: $\{M_k\}$ հաջորդականությունը, ակներևաբար, հենց կլինի որոնելի հաջորդականությունը:

Այժմ կարելի է ձևակերպել (6) [կամ (6*)] սահմանային հավասարության գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը. եթե M-ից վերցնենք M_0-ից տարբեր կետերի $\{M_k\}$ հաջորդականություն, որը զուգամիտում է M_0-ին, ապա $\{f(M_k)\}$ թվային հա-

զորդականությունը, որը կազմված է ֆունկցիայի համապատասխան արժեքներից, միշտ կզուգամիտի A-ին:

Անհրաժեշտությունը։ Դիցուք տեղի ունի (6*) հավասարությունը, և տված $\varepsilon>0$ թվի համար գտնված է նրան համապատասխանող $r>0$ թիվը, համաձայն նախորդ n°-ում տրված սահմանման։ Եթե կետերի $\{M_k\}$ հաջորդականությունը զուգամիտում է M_0-ին, ապա, բավականաչափ մեծ k-ի համար, կունենանք՝

$$M_0M_k<r,$$

իսկ սրանից կհետևի՝

$$|f(M_k)-A|<\varepsilon$$

անհավասարությունը, որը և ցույց է տալիս, որ $f(M_k)\to A$։

Բավարարությունը։ Այժմ ենթադրենք, որ տեղի ունի վերևում ասված պայմանը։ Որպեսզի ապացուցենք նախորդ n°-ում տրված սահմանման համաձայն (6*) հավասարության առկայությունը, ենթադրենք այդ սահմանման մեջ եղածի հակառակը։ Այդ ժամանակ մի որոշ $\varepsilon>0$ թվի համար արդեն գոյություն չի ունենա համապատասխան r, այսինքն, ինչպիսի $r>0$ թիվ էլ վերցնենք, M-ի մեջ միշտ կգտնվի այնպիսի (M_0-ից տարբեր) M' կետ, որ միաժամանակ տեղի կունենան՝

$$\overline{M_0M'}<r \text{ և } |f(M')-A|\geq\varepsilon\text{։}$$

Վերցնելով $r_k\to0$ դրական վարիանտան, սկսենք որպես r հերթականությամբ վերցնել r_k թվերը։ Ըստ վերևում ասածի, յուրաքանչյուր r_k-ի համար կգտնվի (M_0-ից տարբեր) իր M_k կետը, որի համար՝

$$M_0M_k<r_k, \text{ բայց } |f(M_k)-A|\geq\varepsilon\text{։}$$

Այս ձևով ստացված $\{M_k\}$ կետերի հաջորդականությունը զուգամիտում է M_0-ին, բայց միաժամանակ $\{f(M_k)\}$ թվային հաջորդականությունը չի կարող A սահմանն ունենալ, որը հակասում է պայմանին։ Այս հակասությունը հենց ապացուցում է մեր պնդումը։

Ընթերցողի համար պարզ է, որ վերոհիշյալ պայմանը տա-

լիս է ֆունկցիայի սահմանի սահմանման ուրիշ ձև («հաջորդականությունների լեզվով»)։

Այսպիսով, մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի համար ևս հնարավոր է ֆունկցիայի սահմանի հարցը հանգեցնել վարիանտայի սահմանի հարցին [*համ.* 53]*։ Այս արդյունքը հեշտությամբ կարելի է տարածել նաև այն դեպքի վրա, երբ* A, $a_1, \dots, a_n$ *թվերը, կամ նրանցից մի քանիսը, անվերջ են։*

Վերոհիշյալ հանգամանքը թույլ է տալիս այս նոր տեսակի սահմանի վրա տարածել բոլոր այն հիմնական գաղափարներն ու առաջադրությունները, որոնք շարադրված են I *գլխում սահմանների տեսության մեջ, ճիշտ այնպես, ինչպես այդ կատարվեց* 55*-ում մեկ անկախ փոփոխականի ֆունկցիայի սահմանի համար։*

***157. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։** 1) Օգտվելով արտադրյալի սահմանի վերաբերյալ թեորեմայից, ամենից առաջ հեշտ է ցույց տալ, որ՝*

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots \\ x_n \to a_n}} C x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n} = C a_1^{\nu_1} a_2^{\nu_2} \cdots a_n^{\nu_n},$$

որտեղ $C, a_1, \dots, a_n$*-ը ցանկացած իրական, իսկ* $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$*-ը՝ ոչ բացասական ամբողջ թվեր են։ Այստեղից, եթե ամբողջ ռացիոնալ ֆունկցիան* [154] *նշանակենք՝*

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n} C_{\nu_1, \dots, \nu_n} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n},$$

ապա, գումարի վերաբերյալ թեորեմայի համաձայն կստացվի նաև՝

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots \\ x_n \to a_n}} P(x_1, \dots, x_n) = P(a_1, \dots, a_n)։$$

Նույն ձևով, ըստ քանորդի վերաբերյալ թեորեմայի,

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sum C_{\nu_1, \dots, \nu_n} x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}}{\sum C'_{\mu_1, \dots, \mu_n} x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n}},$$

կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիայի [154] *համար կունենանք՝*

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots \\ x_n \to a_n}} Q(x_1, \ldots, x_n) = Q(a_1, \ldots, a_n),$$

իհարկե, միայն այն պայմանով, որ հայտարարը $(a_1, \ldots, a_n)$ *կետում զրո չի դառնում։*

2) Դիտարկենք x^y *աստիճանա-ցուցչային ֆունկցիան, երբ* $x > 0$ *իսկ* y*-ը կամավոր է։ Այդ ժամանակ, եթե* $a > 0$, *իսկ* b*-ն՝ կամավոր իրական թիվ է, կունենանք՝*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} x^y = a^b.$$

Իրոք, եթե վերցնենք որևէ x_n *և* y_n *վարիանտաներ այնպես, որ* $x_n \to a$ *և* $y_n \to b$, *ապա* [*համ.* 77] *կունենանք՝*

$$x_n^{y_n} = e^{y_n \log x_n} \to e^{b \cdot \log a} = a^b,$$

իսկ այս, «հաջորդականությունների լեզվով», հենց տալիս է պահանջվող արդյունքը։

3) Դիցուք հայտնի է, որ x_n *և* y_n *վարիանտաներն ունեն համապատասխանաբար* a *և* b *սահմանները և առաջադրըվում է դրանցից կազմված*

$$x_n \pm y_n, \quad x_n \cdot y_n, \quad \frac{x_n}{y_n} \text{ կամ } x_n^{y_n}$$

արտահայտության սահմանի հարցը։ Մենք գիտենք [31, 37], *որ ընդհանրապես այդ սահմանը գոյություն ունի և միարժեք կերպով որոշվում է* a *և* b *արժեքներով, բացի, այսպես կոչված անորոշ արտահայտությունների դեպքից, որոնք պայմանականորեն բնորոշվում են հետևյալ սիմվոլներով՝*

$$\infty - \infty, \ 0 \cdot \infty, \ \frac{0}{0}, \ \frac{\infty}{\infty}, \ 1^{\infty}, \ 0^{0}, \ \infty^{0}.$$

Իսկ այդ վերջին դեպքերում սահմանը կարող է բոլորովին գոյություն չունենալ, իսկ եթե գոյություն էլ ունի, ապա կարող է,

միևնույն a-ի և b-ի համար, ունենալ տարբեր արժեքներ՝ կախված x_n և y_n վարիանտաների փոփոխման մասնավոր օրենքներից։

Եթե վերհիշենք երկու անկախ փոփոխականների ֆունկցիայի սահմանի սահմանումը, «հաջորդականությունների լեզվով», ապա պարզ կլինի, որ վերոհիշյալ «անորոշությունների» տեսակները կապված են հետևյալ սահմանների գոյություն չունենալու հետ՝

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x-y),\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to\infty}} x.y,\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x}{y},\ \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x}{y},$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to\infty}} x^y,\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^y,\ \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to 0}} x^y.$$

4) Հարց առաջադրենք հետևյալ սահմանի մասին՝

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2},$$

(Այստեղ ֆունկցիան որոշված է ամբողջ հարթության վրա, բացառությամբ հենց $x=0,\ y=0$ կետից)։

Եթե վերցնենք կետերի երկու մասնակի հաջորդականություններ՝

$$\left\{M_k\left(\frac{1}{k},\ \frac{1}{k}\right)\right\} \text{ և } \left\{M'_k\left(\frac{2}{k},\ \frac{1}{k}\right)\right\},$$

որոնք, ակներևաբար, զուգամիտում են (0,0) կետին, ապա պարզվում է, որ k-ի բոլոր արժեքների համար՝

$$f(M_k)=f\left(\frac{1}{k},\ \frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2},\ \text{իսկ } f(M'_k)=f\left(\frac{2}{k},\ \frac{1}{k}\right)=\frac{2}{5}.$$

Այստեղից արդեն հետևում է, որ վերոհիշյալ սահմանը գոյություն չունի։

Առաջարկվում է նման եղանակով համոզվել, որ գոյություն չունի նաև հետևյալ սահմանը՝

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

5) Ընդհակառակը, գոյություն ունի այս սահմանը՝

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$$

Այդ անմիջապես բխում է հետևյալ անհավասարությունից՝

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{1}{2}|x|.$$

Ճիշտ նույն կերպ ապացուցվում է, որ նաև՝

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0.$$

158. ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐ։ Բացի $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ֆունկցիայի վերևում դիտարկված այն սահմանից, երբ բոլոր արգումենտները միաժամանակ ձգտում են իրենց սահմաններին, հարկավոր է լինում գործ ունենալ նաև այլ տեսակի սահմանների հետ, որոնք ստացվում են որպես մի շարք իրար հաջորդող սահմանային անցումների արդյունք՝ ըստ յուրաքանչյուր արգումենտի առանձին, այս կամ այն կարգով։ Առաջին սահմանը կոչվում է n-ապատիկ (կամ՝ կրկնապատիկ, եռապատիկ, և այլն, երբ $n=2, 3, \ldots$), իսկ վերջինը՝ հաջորդական սահման։

Պարզության համար սահմանափակվենք երկու փոփոխականների $f(x, y)$ ֆունկցիայի դեպքով։ Ենթադրենք նաև, որ x, y փոփոխականների փոփոխման M տիրույթն այնպիսին է, որ x-ը (անկախ y-ից) կարող է ընդունել ամեն մի արժեք մի որոշ X բազմությունից, որի համար a-ն խտացման կետ է, բայց նրան չի պատկանում, և նմանապես նաև y-ը (անկախ x-ից) փոփոխվում է մի Y բազմության ներսը, որի համար խտացման կետ է նրան չպատկանող b կետը։ Այդպիսի M տիրույթը կարելի էր սիմվոլիկ կերպով նշանակել, որպես $X\times Y$։ Օրինակ,

$$(a, a+H;\ b, b+K)=(a, a+H)\times(b, b+K).$$

Եթե Y-ից վերցրած և ֆիքսած յուրաքանչյուր y-ի դեպքում $f(x, y)$ ֆունկցիայի համար (որը կլինի միայն x-ի ֆունկցիա) գոյություն ունի սահման, երբ $x\to a$, ապա այդ սահմանը,

ընդհանրապես ասած, կախված կլինի նախապես ֆիքսած y-ի արժեքից՝

$$\lim_{x \to a} f(x, y) = \varphi(y)։$$

Այնուհետև կարելի է դնել $\varphi(y)$ ֆունկցիայի սահմանի հարցը, երբ $y \to b$՝

$$\lim_{y \to b} \varphi(y) = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y).$$

հենց այս էլ կլինի հաջորդական սահմաններից մեկը։ Մյուսը կստացվի, եթե սահմանային անցումները կատարենք հակադարձ կարգով՝

$$\lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y)։$$

Չպետք է կարծել, որ այդ հաջորդական սահմաններն անհրաժեշտաբար հավասար են։ Եթե, օրինակ, $M(0, +\infty; 0, +\infty)$ տիրույթում ընդունենք՝

$$1) \qquad f(x, y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$$

և վերցնենք $a = b = 0$, ապա կստանանք՝

$$\varphi(y) = \lim_{x \to 0} f(x, y) = y - 1, \quad \lim_{y \to 0} \varphi(y) = \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = -1,$$

մինչդեռ՝

$$\psi(x) = \lim_{y \to 0} f(x, y) = x + 1, \quad \lim_{x \to 0} \psi(x) = \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = 1.$$

Նաև կարող է պատահել, որ հաջորդական սահմաններից մեկը գոյություն ունենա, իսկ մյուսը՝ ոչ։ Այդպես կլինի, օրինակ, հետևյալ ֆունկցիաների համար՝

$$2) \qquad f(x, y) = \frac{x \sin\frac{1}{x} + y}{x + y}, \quad \text{կամ՝ } 3)\ f(x, y) = x \sin\frac{1}{y}.$$

այստեղ երկու դեպքում էլ գոյություն ունի $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f$ հաջորդական սահմանը, բայց չկա $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f$ հաջորդական սահման (իսկ վերջին օրինակում նույնիսկ չկա $\lim\limits_{y \to 0} f$ սովորական սահման)։

Այս պարզ օրինակները ցույց են տալիս, թե որքան զգույշ պետք է լինել զանազան փոփոխականների նկատմամբ. երկու սահմանային անցումները տեղափոխելիս. շատ հաճախ սխալ եզրակացություններ են ստացվել հենց այդպիսի ապօրինի տեղափոխումից։ Միաժամանակ, անալիզի կարևոր հարցերից շատերը կապված են հենց սահմանային անցումների տեղափոխման հետ, սակայն, հասկանալի է, որ ամեն անգամ պետք է հատկապես հիմնավորված լինի այդ տեղափոխման թույլատրելիությունը։

Այդպիսի հիմնավորման ճանապարհներից մեկը բաց է անում հետևյալ կարևոր թեորեմը, որը միաժամանակ կապ է հաստատում կրկնապատիկ և հաջորդական սահմանների միջև։

ԹԵՈՐԵՄԱ: Եթե 1) գոյություն ունի (վերջավոր կամ անվերջ) կրկնապատիկ սահման՝

$$A = \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$$

և 2) Y-ից վերցրած ամեն մի y-ի դեպքում գոյություն ունի (վերջավոր) պարզ սահման ըստ x-ի՝

$$\varphi(y) = \lim_{x \to a} f(x, y),$$

ապա գոյություն ունի նաև հաջորդական սահմանը՝

$$\lim_{y \to b} \varphi(y) = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y)$$

և այն հավասար է կրկնապատիկ սահմանին:

Այս ապացուցենք վերջավոր A, a *և* b *համար։ Համաձայն* n° 153*-ում տրված սահմանման նախապես տված* $\varepsilon > 0$ *թվի համար կգտնվի այնպիսի* $\delta > 0$ *թիվ, որ՝*

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon, \tag{9}$$

հենց որ $|x-a| < \delta$ *և* $|y-b| < \delta$ *(ընդ որում* x*-ը վերցվում է* X*-ից, իսկ* y*-ը՝* Y*-ից)։ Այժմ* y*-ը ֆիքսենք այնպես, որ տեղի ունենա* $|y-b| < \delta$ *անհավասարությունը և (9)-ի մեջ անցնենք սահմանին,* x*-ը ձգտեցնելով* a*-ին։ Քանի որ, 2)-ի շնորհիվ, այդ ժամանակ* f(x, y)*-ը ձգտում է* φ(y) *սահմանին, ուստի կստանանք՝*

$$|\varphi(y)-A|<\varepsilon.$$

Վերհիշելով, որ այստեղ y-ը Y-ից վերցրած ցանկացած թիվ է, միայն $|y-b|<\delta$ պայմանին բավարարող, գալիս ենք այն եզրակացության, որ՝

$$A=\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x, y),$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Եթե, 1) և 2) պայմանների հետ միասին, X-ից վերցրած ցանկացած x-ի համար գոյություն ունի (վերջավոր)

$$\psi(x)=\lim_{y\to b}f(x, y)$$

պարզ սահմանն ըստ y-ի, ապա, ինչպես հետևում է արդեն ապացուցածից, եթե x-ի և y-ի դերերը փոխենք, գոյություն կունենա նաև երկրորդ հաջորդական սահմանը՝

$$\lim_{x\to a}\psi(x)=\lim_{x\to a}\lim_{y\to b}f(x, y),$$

և հավասար կլինի միևնույն A թվին. այդ դեպքում երկու հաջորդական սահմանները իրար հավասար են։

Ապացուցված թեորեմայից անմիջապես պարզ է որ 1) և 2) օրինակներում կրկնապատիկ սահման գոյություն չունի (ինչու)։ Դրանում հեշտությամբ կարելի է համոզվել նաև անմիջականորեն։

3)-րդ օրինակում, ընդհակառակը, կրկնակի սահմանը գոյություն ունի.

$$\left|x\sin\frac{1}{y}\right|\leq|x|$$

անհավասարությունից տեսնում ենք, որ այդ սահմանը հավասար է զրոյի։ Այդ օրինակը ցույց է տալիս, որ թեորեմայի 1) պայմանից 2)-րդ պայմանը չի հետևում։

Սակայն չպետք է կարծել, որ կրկնապատիկ սահմանի գոյությունն անհրաժեշտ է հաջորդական սահմանների հավասարության համար. նախորդ n°-ի 4)-րդ օրինակում երկու հաջորդական սահմաններն էլ գոյություն ունեն և հավասար են զրոյի, թեկուզ և կրկնապատիկ սահման չկա։

§ 2. ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

159. ***ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆՆ ՈՒ ԽԶՈՒՄՆԵՐԸ։*** *Դիցուք* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *ֆունկցիան որոշված է* n-*չափման տարածության մի որոշ* M *բազմության և* $M'(x'_1, \ldots, x'_n)$-*ը այդ բազմության խտացման կետ է, որը պատկանում է հենց այդ բազմությանը։*

Ասում են, որ $f(x_1, \ldots, x_n)$ ֆունկցիան անընդհատ է $M'(x'_1, \ldots, x'_n)$ կետում, եթե տեղի ունի

$$\lim_{\substack{x_1 \to x'_1 \\ \cdots \\ x_n \to x'_n}} f(x_1, \ldots, x_n) = f(x'_1, \ldots, x'_n) \qquad (1)$$

հավասարությունը. հակառակ դեպքում *ասում են, որ* ֆունկցիան M' կետում խզվում է։

Ֆունկցիայի անընդհատությունը M' *կետում* «$\varepsilon - \delta$ *լեզվով» կարտահայտվի այսպես* [155]՝ նախապես տված ամեն մի $\varepsilon>0$ թվի համար պետք է գտնվի այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որ՝

$$|f(x_1, \ldots, x_n) - f(x'_1, \ldots, x'_n)| < \varepsilon, \qquad (2)$$

հենց որ՝

$$|x_1 - x'_1| < \delta, \ldots, |x_n - x'_n| < \delta. \qquad (3)$$

այլ խոսքով՝ $\varepsilon > 0$ թվի համար պետք է գտնվի այնպիսի $r > 0$ թիվ, որ՝

$$|f(M) - f(M')| < \varepsilon,$$

հենց որ այդ կետերի հեռավորությունը՝

$$\overline{MM'} < r.$$

Այդ ժամանակ ենթադրվում է, որ $M(x_1, \ldots, x_n)$ *կետը պատկանում է* M *բազմությանը, և մասնավորապես կարող է նաև համընկնել* M'-*ի հետ։ Այն սովորական պահանջը, որը* M-*ը*

պետք է լինի M'-ից տարբեր, այստեղ դառնում է ավելորդ, հենց այն պատճառով, որ ֆունկցիայի սահմանն M' կետում նույնաբար հավասար է այդ կետում ֆունկցիայի ունեցած արժեքին։

$x_1-x'_1, \ldots, x_n-x'_n$ տարբերությունները դիտելով որպես անկախ փոփոխականների $\Delta x'_1, \ldots, \Delta x'_n$ աճեր, իսկ

$$f(x_1, \ldots, x_n)-f(x'_1, \ldots, x'_n)$$

տարբերությունը՝ որպես ֆունկցիայի աճ, կարելի է ասել (ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում), որ ֆունկցիան անընդհատ է, եթե անկախ փոփոխականների անվերջ փոքր աճերին համապատասխանում է ֆունկցիայի անվերջ փոքր աճ։

Ֆունկցիայի վերևում սահմանված անընդհատությունն M' կետում՝ անընդհատություն է, այսպես ասած, $x_1, \ldots, x_n$ փոփոխականների խմբակցության նկատմամբ։ Եթե այդ տեղի ունի, ապա միաժամանակ տեղի կունենան նաև՝

$$\lim_{x_1 \to x'_1} f(x_1, x'_2, \ldots, x'_n)=f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n),$$

$$\lim_{\substack{x_1 \to x'_1 \\ x_2 \to x'_2}} f(x_1, x_2, x'_3, \ldots, x'_n) = f(x'_1, x'_2, x'_3, \ldots, x'_n),$$

և այլն, որովհետև այստեղ մենք իրականացնում ենք միայն M-ը M'-ին մոտեցնելու մասնակի օրենքներ։ Այլ խոսքով, պարզվում է, որ ֆունկցիան անընդհատ է ըստ յուրաքանչյուր x_i փոփոխականի առանձին վերցրած, ըստ x_i, x_j փոփոխականների յուրաքանչյուր զույգի, և այլն։

Անընդհատ ֆունկցիաների օրինակների մենք արդեն հանդիպել ենք։ Այսպես, 157-ի 1)-ինում ապացուցեցինք n արգումենտների ամբողջ և կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիաների անընդհատությունն ամբողջ n-չափման տարածության մեջ (կոտորակային ֆունկցիայի համար՝ բացառությամբ այն կետերից, որոնք նրա հայտարարը դարձնում են զրո)։ Նույն տեղում, 2)-ում, ապացուցեցինք x^y աստիճանացուցչային ֆունկցիայի անընդհատությունն աջ կիսահարթության բոլոր կետերի համար ($x>0$)։

Եթե նորից դիտարկենք

$$f(x, y)=\frac{xy}{x^2+y^2} \qquad (x^2+y^2>0)$$

ֆունկցիան, որն այդ բանաձևով որոշվում է ամբողջ հարթության վրա, բացի սկզբնակետից, և լրացուցիչ ընդունենք, որ $f(0,0)=0$, *ապա կստանանք խզման օրինակ: Այդ խզումը տեղի ունի հենց սկզբնակետում, որովհետև [157, 4) երբ* $x\to0$, $y\to0$ *ֆունկցիայի համար սահման գոյություն չունի:*

Այստեղ մենք հանդիպում ենք մի այսպիսի հետաքրքիր հանգամանքի: Դիտարկվող $f(x, y)$ *ֆունկցիան, չնայած (0,0) կետում անընդհատ չէ երկու փոփոխականների նկատմամբ միասին վերցրած, այնուամենայնիվ նա այդ կետում անընդհատ է ինչպես ըստ* x*-ի, այնպես և ըստ* y*-ի առանձին-առանձին վերցրած. այդ հետևում է նրանից, որ* $f(x,0)=f(0,y)=0$: *Ի միջի այլոց, այս փաստը կդադարի տարօրինակ թվալ, եթե ի նկատի ունենանք, որ ըստ* x*-ի և ըստ* y*-ի առանձին-առանձին անընդհատ լինելու մասին խոսելիս, մենք հաշվի ենք առնում միայն* x*-երի և* y*-ների առանցքներով (0,0) կետին մոտենալը, մի կողմ թողնելով մոտեցման անթիվ բազմությամբ այլ եղանակները:*

Եթե $f(M)$ *ֆունկցիայի համար* M*-ը* M'*-ին ձգտելիս բոլորովին գոյություն չունի*

$$\lim_{M\to M'} f(M)$$

որոշակի վերջավոր սահման, ապա ասում են, որ M' *կետում ֆունկցիան ունի խզում, նույնիսկ այն դեպքում, երբ* M' *կետում ֆունկցիան որոշված չէ [համ. 70-ի դիտողության հետ]:*

Ֆունկցիայի խզման կետերը ոչ միայն կարող են մեկուսացված լինել, ինչպես նախորդ օրինակում, այլև նրանք կարող են կազմել գիծ, մակերևույթ և այլն: Այսպես, երկու փոփոխականների

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}, \quad \frac{1}{x^2+y^2-1}$$

ֆունկցիաները ունեն խզումներ, առաջինը՝ $y=\pm x$ *ուղիղի երկայնությամբ, իսկ երկրորդը՝* $x^2+y^2=1$ *շրջանագծի վրա: Երեք փոփոխականների*

$$\frac{x+y+z}{xy-z}, \quad \frac{1}{x^2+y^2-z^2}$$

ֆունկցիաների համար, առաջին դեպքում խզումները կազմում են $z=xy$ *հիպերբոլական պարաբոլոիդը, իսկ երկրորդ դեպքում՝* $z^2=x^2+y^2$ *կոնը:*

160. ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՆԿԱՏՄԱՄԲ։ *Հեշտությամբ կարելի է ձևակերպել ու ապացուցել թեորեմա երկու ֆունկցիաների գումարի, տարբերության, արտադրյալի, քանորդի անընդհատության վերաբերյալ [հմմ. 67-ի հետ]. այդ թողնում ենք ընթերցողին։*

Մենք կանգ կառնենք անընդհատ ֆունկցիաների սուպերպոզիցիային վերաբերող թեորեմայի վրա։ Ինչպես և n° 154-ում, մենք կենթադրենք, որ n-չափման $M(x_1, \ldots, x_n)$ կետերի M բազմության մեջ տրված $u=f(x_1, \ldots, x_n)$ ֆունկցիայից բացի, մեզ տրված են նաև m-չափման $P(t_1, \ldots, t_m)$ կետերի մի որոշ P բազմությունում որոշված n հատ ֆունկցիաներ՝

$$x_1=\varphi_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, \; x_n=\varphi_n(t_1, \ldots, t_m), \tag{4}$$

ընդ որում (4) կոորդինատներով որոշվող M կետը վերոհիշյալ M բազմության սահմաններից դուրս չի գալիս։

ԹԵՈՐԵՄԱ: Եթե բոլոր $\varphi_i(P)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ ֆունկցիաները P-ին պատկանող $P'(t'_1, \ldots, t'_m)$ կետում անընդհատ են, իսկ $f(M)$ ֆունկցիան անընդհատ է համապատասխան $M'(x'_1, \ldots, x'_n)$ կետում, որի կոորդինատներն են՝

$$x'_1=\varphi_1(t'_1, \ldots, t'_m), \ldots, \; x'_n=\varphi_n(t'_1, \ldots, t'_m),$$

ապա՝

$$u=f(\varphi_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, \varphi_n(t_1, \ldots, t_m))=$$

$$=f(\varphi_1(P), \ldots, \varphi_n(P))$$

բարդ ֆունկցիան ևս կլինի անընդհատ P' կետում:

Իրոք, նախ $\varepsilon>0$ թվով կորոշվի այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որ (3)-ից կհետևի (2)-ը (f ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ)։ Այս δ թվով ($\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ֆունկցիաների անընդհատության շնորհիվ) կգտնվի այնպիսի $\eta>0$ թիվ, որ

$$|t_1-t'_1|<\eta, \ldots, \; |t_m-t'_m|<\eta \tag{5}$$

անհավասարություններից կհետևեն հետևյալ անհավասարությունները՝

$$|x_1-x'_1|=|\varphi_1(t_1, \dots, t_m)-\varphi_1(t'_1,\dots,t'_m)|<\delta,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$|x_n-x'_n|=|\varphi_n(t_1,\dots, t_m)-\varphi_n(t'_1,\dots,t'_m)|<\delta.$$

Բայց այդ ժամանակ, (5)-րդ անհավասարությունների առկայության դեպքում, նաև տեղի կունենա՝

$$|f(x_1,\dots,x_n)-f(x'_1,\dots,x'_n)|=$$

$$=|f(\varphi_1(t_1,\dots,t_m),\dots,\varphi_n(t_1,\dots,t_m))-$$

$$-f(\varphi_1(t'_1,\dots,t'_m),\dots,\varphi_n(t'_1,\dots,t'_n))|<\varepsilon,$$

որը և ապացուցում է մեր թեորեման։

161. ՏԻՐՈՒՅԹՈՒՄ ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ։ ԿՈՇԻԻ ԹԵՈՐԵՄԱՆԵՐԸ։ Մենք կասենք, որ $f(x_1,\dots,x_n)$ ֆունկցիան անընդհատ է n-չափման տարածության մի որոշ M բազմությունում, եթե նա անընդհատ է այդ բազմության յուրաքանչյուր կետում, որը նրա համար խտացման կետ է։ Հետագայում, որպես կանոն, կսահմանափակվենք այն դեպքով, երբ M բազմությունը իրենից ներկայացնում է բաց կամ փակ տիրույթ [153], այնպես, ինչպես մեկ փոփոխականի անընդհատ ֆունկցիաները մենք դիտարկում էինք միջակայքում։

Այժմ անցնենք n-չափման տարածության մի որոշ տիրույթի ներսում անընդհատ՝ մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի հատկությունների ուսումնասիրությանը։ Նրանք միանգամայն նման են մեկ փոփոխականի միջակայքում անընդհատ ֆունկցիայի հատկություններին (գլ. II, § 5)։

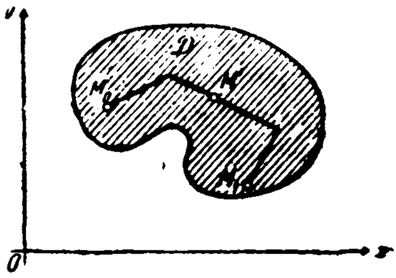
Շարադրման ընթացքում մենք միայն կարճության համար կսահմանափակվենք երկու անկախ փոփոխականի դեպքով։ Այդ բոլորն ընդհանուր դեպքի վրա տարածելը կատարվում է անմիջականորեն և առանձին դժվարություն չի ներկայացնում։ Ի միջի այլոց, այդ թվում որոշ դիտողություններ կկատարվեն զուգընթացաբար։

Այժմ ձևակերպենք մի թեորեմ, որը նման է Կոշիի 1-ին թեորեմային մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի համար [79]։

ԹԵՈՐԵՄԱ։ Դիցուք $f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է ու անընդհատ մի որոշ D կապակցված տիրույթում։ Եթե այդ տիրույթի $M_0(x_0, y_0)$ և $M_1(x_1, y_1)$ երկու կետերում ֆունկցիան ընդունում է տարբեր նշաններով արժեքներ՝

$$f(x_0, y_0)<0, \quad f(x_1, y_1)>0,$$

ապա այդ տիրույթում կգտնվի այնպիսի $M'(x', y')$ կետ, որտեղ ֆունկցիան դառնում է զրո՝ $f(x', y')=0$։



Գծ. 94.

Ապացույցը կկատարենք մեկ անկախ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքին բերելու միջոցով։

D տիրույթի կապակցվածության շնորհիվ, M_0 և M_1 կետերը կարելի է միացնել այնպիսի անընդհատ կորով (այն է՝ բեկյալով), որն իր բոլոր կետերով գտնվում է D-ում (գծ. 94)։ Դիցուք այդ կորի հավասարումներն են՝ $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, որտեղ t-ն փոփոխվում է մի $[t_0, t_1]$ միջակայքում, ընդ որում*

$$x_0=\varphi(t_0), \quad y_0=\psi(t_0) \text{ և } x_1=\varphi(t_1), \quad y_1=\psi(t_1)։$$

Երբ $M(x, y)$ կետը շարժվում է $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ կորով, մեր սկզբնական $f(x, y)$ ֆունկցիան դառնում է մեկ փոփոխականի՝ t-ի բարդ ֆունկցիա՝

$$F(t)=f(\varphi(t), \psi(t)) \quad (\text{որտեղ } t_0 \le t \le t_1),$$

որն, ակներևաբար, անընդհատ է (ըստ նախորդ n°-ի թեորեմայի), որովհետև f, φ և ψ ֆունկցիաներն անընդհատ են։ Բայց $F(t)$-ի համար ունենք՝

---

* *Հեշտ է ցույց տալ, որ բեկյալն ամբողջությամբ կարելի է ներկայացնել այդպիսի հավասարումներով, անընդհատ φ և ψ ֆունկցիաներով։ Բայց եթե հարկ լինի, կարելի է գործը հանգեցնել այն դեպքին, երբ M_0 և M կետերը հանդիսանում են բեկյալի հարևան գագաթները, այնպես որ φ և ψ ֆունկցիաները կարելի է վերցնել պարզապես գծային։*

$$F(t_0)=f(\varphi(t_0), \psi(t_0))=f(x_0, y_0)<0,$$

$$F(t_1)=f(\varphi(t_1), \psi(t_1))=f(x_1, y_1)>0։$$

Մեկ փոփոխականի $F(t)$ ֆունկցիայի նկատմամբ կիրառելով 79-ում արդեն ապացուցված թեորեմը, եզրակացնում ենք, որ $F(t')=0$ մի որոշ t' արժեքի դեպքում՝ t_0-ի և t-ի միջև։ Վերհիշելով $F(t)$ ֆունկցիայի սահմանումը, այսպիսով, ունենք, $f(\varphi(t'), \psi(t'))=0$։ $M'(x', y')$ կետը, որտեղ $x'=\varphi(t')$, $y'=\psi(t')$, հենց հանդիսանում է որոնելի կետը։

Այստեղից հետևում է, ինչպես և 81-ում, Կոշիի 2-րդ թեորեմը, որը, ի միջի այլոց, կարող էր ստացվել նաև միանգամից։

Ընթերցողը տեսնում է, որ n-չափման տարածության անցնելը (n > 2 դեպքում) ոչ մի դժվարություն չի առաջացնում, որովհետև n-չափման կապակցված տիրույթում գտնվող կետերը նույնպես կարող են միացվել այնպիսի «անընդհատ կորով», որի վրա ֆունկցիան կախված կլինի մեկ պարամետրից, և այլն։

162. ԲՈԼՑԱՆՈ-ՎԱՅԵՐՇՏՐԱՍԻ ԹԵՈՐԵՄԱՆ։ *Հետագա շարադրանքի համար մեզ պետք կգա Բոլցանո-Վայերշտրասի թեորեմայի [41] ընդհանրացումը ցանկացած թվով չափում ունեցող տարածության կետերի հաջորդականության դեպքում. ինչպես միշտ, կսահմանափակվենք «հարթ» դեպքով։*

ԹԵՈՐԵՄԱ: Կետերի՝

$$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n), \ldots$$

ամեն մի սահմանափակ հաջորդականությունից միշտ կարելի է անջատել այնպիսի՝

$$M_{n_1}(x_{n_1}, y_{n_1}), M_{n_2}(x_{n_2}, y_{n_2}), \ldots, M_{n_k}(x_{n_k}, y_{n_k}), \ldots$$

$$(n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots, n_k\to+\infty),$$

մասնակի հաջորդականություն, որը ձգտի սահմանային կետի:

I *ապացույցը մենք կստուգենք, այս դեպքի վրա փոխադրելով այն դատողությունները, որոնցից մենք օգտվել ենք «գծային» դեպքում [41]։*

Քանի որ կետերի տված հաջորդականությունը սահմանափակ է, ուստի կգտնվի այնպիսի (վերջավոր) [a, b; c, d] *ուղղանկյուն, որի ներսը ամբողջությամբ կգտնվի այդ հաջորդականությունը։ Ինչպես* x*-ի արժեքների* [a, b] *միջակայքը, նույնպես և* y*-ի արժեքների* [c, d] *միջակայքը տրոհենք երկու հավասար մասերի՝*

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \quad \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \text{ և } \left[c, \frac{c+d}{2}\right], \quad \left[\frac{c+d}{2}, d\right]։$$

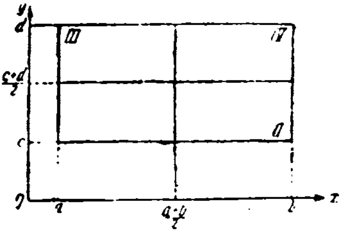
Առաջին միջակայքի յուրաքանչյուր կեսը համակցելով երկրորդ միջակայքի յուրաքանչյուր կեսի հետ, մենք կստանանք չորս ուղղանկյուններ՝

$$(I)\left[a, \frac{a+b}{2};\ c, \frac{c+d}{2}\right], \quad (II)\left[\frac{a+b}{2}, b;\ c, \frac{c+d}{2}\right],$$

$$(III)\left[a, \frac{a+b}{2};\ \frac{c+d}{2}, d\right], \quad (IV)\left[\frac{a+b}{2}, b;\ \frac{c+d}{2}, d\right],$$

որոնցից կազմված է [a, b; c, d] *հիմնական ուղղանկյունը (գծ. 95)։*

Այդ ուղղանկյուններից գոնե մեկում կգտնվեն տված հաջորդականության պատկանող անվերջ բազմությամբ կետեր, որովհետև, հակառակ դեպքում, նաև ամբողջ ուղղանկյան ներսը կլինեին միայն վերջավոր թվով կետեր, որը հնարավոր չէ։ Դիցուք $[a_1, b_1; c_1, d_1]$*-ը (I), (II), (III), (IV) ուղղանկյուններից այն է, որի ներսը գտնվում են մեր հաջորդականությունից անվերջ բազմությամբ կետեր (կամ այդ ուղղանկյուններից որևէ մեկը, եթե դրանք մի քանիսն են)։*



Գծ. 95.

Ստացված ուղղանկյունը դարձյալ տրոհում ենք չորս ավելի փոքր ուղղանկյունների և դրանցից վերցնում այն, որի ներսը գտնվում են տված հաջորդականությունից անվերջ բազմությամբ կետեր. այդ նշանակենք $[a_2, b_2; c_2, d_2]$*-ով։*

Ուղղանկյունների հաջորդական տրոհման այդ պրոցեսը մենք պատկերացնենք անվերջ շարունակվող։ k-րդ քայլում մենք կընտրենք $[a_k, b_k; c_k, d_k]$ *ուղղանկյունը, պայմանով, որ նրա ներսում գտնվում են անվերջ քանակությամբ* M_n *կետեր։ Այդ ուղղանկյան չափումները՝*

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}, \quad d_k - c_k = \frac{d-c}{2^k}$$

ձգտում են զրոյի, երբ $k \to \infty$*։*

Հիմա x-ի արժեքների $\{[a_k, b_k]\}$ *միջակայքերի հաջորդականության և y-ի արժեքների* $\{[c_k, d_k]\}$ *միջակայքերի հաջորդականության նկատմամբ առանձին-առանձին կիրառենք ներդրյալ միջակայքերի վերաբերյալ լեմման [38]։ Այդտեղից կհետևի, որ միջակայքերի* a_k *և* b_k *ծայրերը, նույնպես և* c_k*-ն և* d_k*-ն, համապատասխանաբար, ձգտում են ընդհանուր սահմանների՝*

$$\lim a_k = \lim b_k = \bar{x} \text{ և } \lim c_k = \lim d_k = \bar{y}։ \qquad (6)$$

Կարելի է ասել, որ $\{[a_k, b_k; c_k, d_k]\}$ *ուղղանկյունների հաջորդականությունը «կծկվում է»* $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$ *կետում։*

Այժմ, որպես M_{n_1} *վերցնելով մեր հաջորդականության որևէ կետը, որն ընկնում է* $[a_1, b_1; c_1, d_1]$ *ուղղանկյան ներսը, այնուհետև մենք կսկսենք հերթականությամբ առանձնացնել* $M_{n_2}, M_{n_3}, \ldots,$ *կետերը, ընդհանուր դեպքում, ընտրելով որպես* $M_{n_k}(x_{n_k}, y_{n_k})$ *մեր հաջորդականության որևէ կետ, որը հաջորդում է նախորդ ընտրածներին և գտնվում է* $[a_k, b_k; c_k, d_k]$ *k-րդ ուղղանկյան ներսը։ Այդ կարելի է կատարել հենց այն պատճառով, որ ուղղանկյուններից յուրաքանչյուրում գտնվում են անթիվ քանակությամբ* M_n *կետեր։*

Քանի որ՝

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k \text{ և } c_k \leqslant y_{n_k} \leqslant d_k,$$

ուստի, (6)-ի շնորհիվ,

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \bar{x}, \quad \lim_{k\to+\infty} y_{n_k} = \bar{y}$$

այնպես որ, ընտրած $\{M_{n_k}\}$ մասնակի հաջորդականությունը զուգամիտում է $M(\bar{x}, \bar{y})$ կետին, որպես սահմանային կետի [156]։

II ապացույց։ Սակայն ավելի հեշտ է վարվել այլ կերպ, օգտագործելով այն թեորեմը, որն ապացուցել ենք n° 41-ում գծային հաջորդականությունների դեպքի համար։ Եթե մեր հաջորդականության կետերը գտնվում են $[a, b; c, d]$ վերջավոր ուղղանկյան ներսը, ապա՝

$$a \leqslant x_n \leqslant b, \quad c \leqslant y_n \leqslant d \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)։$$

n° 41-ում ապացուցված թեորեմը կիրառելով նախ $\{x_n\}$ հաջորդականության նկատմամբ, անջատենք այնպիսի $\{x_{n_k}\}$ մասնակի հաջորդականություն, որը զուգամիտում է մի $\bar{x}$ սահմանի։ Այսպիսով, կետերի

$$(x_{n_1}, y_{n_1}), (x_{n_2}, y_{n_2}), \ldots, (x_{n_k}, y_{n_k}), \ldots$$

մասնակի հաջորդականության համար, առաջին կոորդինատներն արդեն սահման ունեն։ Վերոհիշյալ թեորեմը երկրորդ անգամ կիրառենք երկրորդ կոորդինատների $\{y_{n_k}\}$ հաջորդականության նկատմամբ և անջատենք այնպիսի $\{y_{n_{k_m}}\}$ մասնակի հաջորդականություն, որը ձգտում է մի $\bar{y}$ սահմանի։ Այդ ժամանակ, ակներևաբար, կետերի

$$(x_{n_{k_1}}, y_{n_{k_1}}), (x_{n_{k_2}}, y_{n_{k_2}}), \ldots, (x_{n_{k_m}}, y_{n_{k_m}}), \ldots$$

մասնակի հաջորդականությունը կձգտի $(\bar{x}, \bar{y})$ սահմանային կետին։

Այստեղ ևս նկատենք, որ երկու դատողություններն էլ հեշտությամբ կարող են փոխանցվել $n>2$ չափման տարածության դեպքի վրա։ Օրինակ, այդ դատողություններից առաջինում կփոխվի միայն այն մասերի թիվը, որոնք ստացվում են

տված ուղղանկյուն տիրույթը տրոհելուց, երբ այդ տիրույթը որոշող միջակայքերից յուրաքանչյուրը կիսում ենք. ընդհանուր դեպքում այդպիսի միջակայքերի թիվը կլինի n, *իսկ մասերի թիվը՝* 2^n :

163. *ՎԱՅԵՐՇՏՐԱՍԻ ԹԵՈՐԵՄԱՆԵՐԸ:* *Վերևում ապացուցված թեորեմայի օգնությամբ ամենից առաջ կարելի է ապացուցել Վայերշտրասի 1-ին թեորեման երկու փոփոխականների ֆունկցիայի համար։*

ԹԵՈՐԵՄԱ: Եթե $f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է ու անընդհատ D սահմանափակ փակ տիրույթում*, ապա նա սահմանափակ է, այսինքն՝ նրա բոլոր արժեքները գտնվում են երկու վերջավոր եզրերի միջև՝

$$m \le f(x, y) \le M:$$

Ապացույցը (հակառող ընդունելությամբ) միանգամայն նման է n° 83-*ում տրված դատողությանը։ Դիցուք* $f(x, y)$ *ֆունկցիան, երբ* (x, y)-*ը փոփոխվում է* D-*ում, սահմանափակ է։ Այդ ժամանակ ցանկացած* n-*ի համար* D-*ում կգտնվի այնպիսի* $M_n(x_n, y_n)$ *կետ, որ*

$$|f(x_n, y_n)| > n. \qquad (7)$$

Ըստ n° 162-*ի թեորեմայի,* $\{M_{n_k}\}$ *սահմանափակ հաջորդականությունից կարելի է ընտրել այնպիսի* $\{M_{n_k}\}$ *մասնակի հաջորդականություն, որը զուգամիտի* $\overline{M}(\overline{x}, \overline{y})$ *սահմանային կետի։*

Նկատենք, որ այդ $\overline{M}$ *կետը անպայման կպատկանի* D *տիրույթին։ Իրոք, հակառակ դեպքում* M_{n_k} *կետերը բոլորը նրանից տարբեր կլինեին, և* $\overline{M}$ *կետը կլիներ* D *տիրույթի խտացման կետ, որը նրան չէր պատկանի, իսկ վերջինս հնարավոր չէ* D *տիրույթի փակ լինելու պատճառով* [*տես* 153]։

$\overline{M}$ *կետում ֆունկցիայի անընդհատության հետևանքով պետք է տեղի ունենա հետևյալը՝*

---

* *Որն այս անգամ կարող է և կապակցված չլինել։*

$$f(M_{n_k}) = f(x_{k_n}, y_{n_k}) \to f(\overline{M}) = f(\overline{x}, \overline{y}),$$

իսկ այս հակասում է (7)-րդ անհավասարությանը։

Վայերշտրասի 2-րդ թեորեման ձևակերպվում և ապացուցվում է (օգտվելով նախորդ թեորեմայից) ճիշտ այնպես, ինչպես n 84-ում։

Նկատենք որ, դատողությունների մեջ առանց էական փոփոխությունների Վայերշտրասի երկու թեորեմաներն էլ փոխանցվում են այն դեպքի վրա, երբ ֆունկցիան անընդհատ է ցանկացած սահմանափակ փակ M բազմությունում (թեկուզ և նա իրենից տիրույթ չներկայացնի)։

Այնպես, ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում, $f(x, y)$ ֆունկցիայի համար, որը որոշված է ու սահմանափակ M բազմությունում, M-ում ֆունկցիայի արժեքների վերին ու ստորին ճշգրիտ եզրերի տարբերությունը կոչվում է նրա տատանում այդ բազմությունում։ Եթե M-ը սահմանափակ է և փակ (մասնավորապես եթե M-ը սահմանափակ փակ տիրույթ է), և f ֆունկցիան այնտեղ անընդհատ է, ապա տատանումը պարզապես նրա մեծագույն ու փոքրագույն արժեքների տարբերությունն է։

164. ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆ։ Մենք գիտենք, որ $f(x, y)$ ֆունկցիայի անընդհատությունը նրա որոշման M բազմության որոշակի (x_0, y_0) կետում, «ε—δ լեզվով» արտահայտվում է այսպես՝ ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար պետք է գտնվի այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որ

$$|f(x, y)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon$$

անհավասարությունը տեղի ունենա M-ից վերցրած ամեն մի (x, y) կետում, հենց որ

$$|x-x_0|<\delta, \quad |y-y_0|<\delta.$$

Դիցուք այժմ $f(x, y)$ ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ M բազմությունում. այդ ժամանակ հարց է ծագում, թե արդյոք կարելի՞ է տված $\varepsilon>0$ թվի համար գտնել այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որը պիտանի լինի, վերոհիշյալ իմաստով, M-ի բոլոր (x_0, y_0) կետերի համար միաժամանակ։ Եթե այդ հնարավոր

է (ամեն մի ε-ի համար) ապա ասում են, որ ֆունկցիան M-ում հավասարաչափ անընդհատ է։

ԿԱՆՏՈՐԻ ԹԵՈՐԵՄԱՆ։ Եթե $f(x, y)$ ֆունկցիան անընդհատ է D սահմանափակ փակ տիրույթում, ապա նա կլինի նաև հավասարաչափ անընդհատ D-ում։

Ապացույցը կկատարենք հակասող ընդունելությամբ։ Ենթադրենք, թե որևէ $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն չունի այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որը միաժամանակ պիտանի լիներ D տիրույթի բոլոր (x_0, y_0) կետերի համար։

Վերցնենք 0-ի ձգտող դրական թվերի հաջորդականություն՝

$$\delta_1>\delta_2>\dots>\delta_n>\dots>0, \quad \delta_n\to 0.$$

Քանի որ δ_n թվերից ոչ մեկը միաժամանակ չի կարող պիտանի լինել, վերոհիշյալ իմաստով, D տիրույթի բոլոր (x_0, y_0) կետերի համար, ուստի յուրաքանչյուր δ_n-ի համար D-ում կգտնվի այնպիսի մի կոնկրետ (x_n, y_n) կետ, որի համար δ_n-ը պիտանի չէ։ Դա նշանակում է, որ D-ում գոյություն ունի այնպիսի (x'_n, y'_n) կետ, որի համար չնայած

$$|x'_n - x_n| < \delta_n, \quad |y'_n - y_n| < \delta_n,$$

բայց այնուամենայնիվ՝

$$|f(x'_n, y'_n) - f(x_n, y_n)| \geq \varepsilon. \qquad (8)$$

Կետերի $\{(x_n, y_n)\}$ սահմանափակ հաջորդականությունից Բոլցանո-Վայերշտրասի թեորեմայի համաձայն, անջատենք այնպիսի $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$ մասնակի հաջորդականություն, որ $x_{n_k}\to\bar{x}$, $y_{n_k}\to\bar{y}$, ընդ որում $(\bar{x}, \bar{y})$ սահմանային կետը անպայման կպատկանի D տիրույթին (նրա փակ լինելու շնորհիվ)։

Այնուհետև, քանի որ՝

$$|x'_{n_k} - x_{n_k}| < \delta_{n_k}, \quad |y'_{n_k} - y_{n_k}| < \delta_{n_k}$$

և, k-ն մեծանալիս, $n_k \to \infty$ և $\delta_{n_k} \to 0$, ուստի՝

$$x'_{n_k} - x_{n_k} \to 0, \quad y'_{n_k} - y_{n_k} \to 0,$$

այնպես որ, նաև՝

$$x'_{n_k} \to \bar{x}, \quad y'_{n_k} \to \bar{y}.$$

D տիրույթին պատկանող $(\bar{x}, \bar{y})$ կետում ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, մենք պետք է ունենանք ինչպես՝

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) \to f(\bar{x}, \bar{y}),$$

նույնպես և՝

$$f(x'_{n_k}, y'_{n_k}) \to f(\bar{x}, \bar{y}),$$

որտեղից կստանանք՝

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) - f(x'_{n_k}, y'_{n_k}) \to 0,$$

որը հակասում է (8)-րդ անհավասարությանը։ Թեորեմն ապացուցված է։

Այստեղից բխող հետևանքը ձևակերպելու համար մեզ պետք կգա կետային բազմության տ ր ա մ ա գ ծ ի գաղափարը. այդպես է կոչվում բազմության երկու ցանկացած կետերի հեռավորությունների վերին ճշգրիտ եզրը։

ՀԵՏԵՎԱՆՔ: Եթե $f(x,y)$ ֆունկցիան անընդհատ է D սահմանափակ փակ տիրույթում, ապա տված $\varepsilon>0$ թվի համար կարելի է գտնել այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որ այդ տիրույթը ինչպիսի մասնակի $D_1, \ldots, D_n$ տիրույթների* էլ բաժանենք, որոնց տրամագծերը փոքր են δ-ից, այդ մասերից յուրաքանչյուրում առանձին վերցրած ֆունկցիայի տատանումը փոքր կլինի ε-ից։

Բավական է որպես δ վերցնել այն թիվը, որի մասին խոսվում է հավասարաչափ անընդհատության սահմանման մեջ։ Եթե D_i մասնակի տիրույթի տրամագիծը փոքր է δ-ից, ապա նրա (x, y) և (x_0, y_0) երկու կամավոր կետերի հեռավորությու-

* *Այդ տիրույթները կարող են ունենալ միայն եզրային ընդհանուր կետեր։*

նը փոքր է δ-ից՝ $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$*։ Այստեղից առավել ևս՝* $|x-x_0|<\delta$ *և* $|y-y_0|<\delta$, *ուստի՝* $|f(x, y)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon$*։ Եթե այդ կետերը ընտրենք այնպես, որ* $f(x, y)$ *և* $f(x_0, y_0)$ *արժեքները, համապատասխանաբար, լինեն* D_i *տիրույթում ֆունկցիայի արժեքներից մեծագույնը և փոքրագույնը, ապա կստանանք այն, ինչ պահանջվում էր։*

Հեշտ է տեսնել, որ ապացուցված թեորեման առանց փոփոխության փոխանցվում է (Վայերշտրասի թեորեմայի նման) այն դեպքի վրա, երբ ֆունկցիան անընդհատ է որևէ M սահմանափակ փակ բազմությունում։

165. ԲՈՐԵԼԻ ԼԵՄՄԱՆ։ 87-ում ապացուցված օգտակար թեորեման կարելի է ընդհանրացնել բազմաչափ բազմության դեպքում։

Դիցուք հարթության վրա ունենք σ բաց տիրույթների Σ սիստեմ․ եթե M բազմության յուրաքանչյուր կետ գտնվում է այդ σ տիրույթներից գոնե մեկում, ապա կասենք, որ Σ սիստեմը ծածկում է M բազմությունը։

ԲՈՐԵԼԻ ԼԵՄՄԱՆ: Եթե հարթության կետերի *M* սահմանափակ փակ բազմությունը ծածկվում է բաց տիրույթների $\Sigma=\{\sigma\}$ անվերջ սիստեմով, ապա այդ սիստեմից միշտ հնարավոր է անջատել այնպիսի վերջավոր ենթասիստեմ՝

$$\Sigma^*=\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\},$$

որը նույնպես ծածկում է ամբողջ *M* բազմությունը:

Ապացույց (հակասող ընդունելությամբ)։ Ենթադրենք, թե M բազմությունը հնարավոր չէ ծածկել Σ սիստեմից վերցրած վերջավոր թվով σ տիրույթներով։

M բազմության սահմանափակ լինելու շնորհիվ, նա կգտնվի մի $[a, b; c, d]$ *ուղղանկյան ներսը։* $[a, b]$ *և* $[c, d]$ *միջակայքերից յուրաքանչյուրը երկու հավասար մասի բաժանելով, մենք այդ ուղղանկյունը կբաժանենք, ինչպես և Բոլցանո-Վայերշտրասի թեորեման ապացուցելիս [162], չորս ուղղանկյունների։ Դրա հետ միասին նաև M բազմությունը կբաժանվի այնպիսի մասերի, որոնք համապատասխանաբար կգտնվեն այդ մասնակի ուղղանկյունների ներսը․ ի միջի այլոց, այդ մասերը կարող են նաև չորսից քիչ լինել, եթե ստացված ուղղանկյուններից որևէ մեկը M բազմության ոչ մի կետ չի պարու-*

նակում։ Այդ մասերից գոնե մեկը (ասենք, M_1-ը), իր հերթին, հնարավոր չէ ծածկել վերջավոր թվով σ տիրույթներով (քանի որ, հակառակ դեպքում, ամբողջ M բազմությունը կծածկվեր վերջավոր թվով σ տիրույթներով՝ հակառակ մեր ենթադրության)։ Մասնակի ուղղանկյուններից այն, որը, M բազմության հենց M_1 մասն է պարունակում, նշանակենք $[a, b; c, d]$։

Այդ ուղղանկյունը նորից բաժանում ենք չորս ուղղանկյունների։ Դրանցից գոնե մեկը, այն նշանակենք $[a_2, b_2; c_2, d_2]$-ով, կպարունակի M բազմության մի M_2 մաս, որը հնարավոր չէ ծածկել վերջավոր թվով σ տիրույթներով։

Այստեղից մենք եզրակացնում ենք, ինչպես և n° 162-ում, որ $[a_k, b_k; c_k, d_k]$ ուղղանկյունները «կծկվում են» $(\bar{x}, \bar{y})$ կետում, ուստի՝

$$\lim a_k = \lim b_k = \bar{x}, \quad \lim c_k = \lim d_k = \bar{y}.$$

Այդ $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$ կետը պատկանում է M բազմությանը։ Իրոք, $\bar{M}$ կետի ինչպիսի $(\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta; \bar{y}-\delta, \bar{y}+\delta)$ շրջակայք էլ վերցնենք, բավականաչափ մեծ k-ի համար կունենանք՝

$$\bar{x}-\delta < a_k < b_k < \bar{x}+\delta, \quad \bar{y}-\delta < c_k < d_k < \bar{y}+\delta$$

ուստի վերոհիշյալ շրջակայքի ներսը կգտնվի M բազմության M_k մասը (որը ընտրել ենք այնպես, որ անպայման կպարունակի անթիվ բազմությամբ կետեր)։ Հետևապես, $\bar{M}$ կետը հանդիսանում է M բազմության համար խտացման կետ և պետք է նրան պատկանի, բազմությունը փակ լինելու շնորհիվ։

Այդ դեպքում $\bar{M}$ կետը կգտնվի σ տիրույթներից որևէ մեկում, ասենք՝ σ_0-ում։ Քանի որ σ_0-ն բաց տիրույթ է, ուստի նրա ներսը կգտնվի նաև այդ կետի մի որոշ՝

$$(\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta; \bar{y}-\delta, \bar{y}+\delta)$$

շրջակայքը։ Հեշտ է ցույց տալ, ինչպես վերևում ցույց տվեցինք, որ այդ շրջակայքի ներսը ամբողջությամբ կգտնվի, բավականաչափ մեծ k-ի դեպքում, $[a_k, b_k; c_k, d_k]$ ուղղանկյունը, իսկ դրա հետ նաև նրա ներսը գտնվող M բազմության M_k մասը։

Այսպիսով, ամբողջ M_k բազմությունը ծածկվում է մեկ՝ σ_0 տիրույթով, մինչդեռ մենք այն ընտրել էինք այնպես, որ հնարավոր չէր ծածկել ոչ մի վերջավոր թվով σ տիրույթներով։ Ստացված հակասությունը հենց ապացուցում է լեմման։

Բորելի լեմմայի այն կիրառություններում, որոնց ընթերցողը կհանդիպի հաջորդ n°-ում և դասընթացի մյուս մասերում, որպես M բազմություն սովորաբար հանդես կգա փակ տիրույթ։ Սակայն երբեմն հարկավոր կլինի կիրառել այն նաև այլ տեսակի փակ բազմությունների, օրինակ՝ անընդհատ կորի նկատմամբ։

166. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄԱՆԵՐԻ ՆՈՐ ԱՊԱՑՈՒՅՑՆԵՐ։ 1° *Վայերշտրասի 1-ին թեորեման։* $f(x, y)$ ֆունկցիան ենթադրվում է անընդհատ D սահմանափակ փակ տիրույթում։ Հետևապես, այդ տիրույթի յուրաքանչյուր (x', y') կետը կարելի է շրջապատել այնպիսի σ' շրջակայքով, որ նրա սահմաններում (եթե ε-ով նշանակենք նախապես վերցրած թիվը) տեղի ունենա՝

$$|f(x, y)-f(x', y')|<\varepsilon$$

կամ

$$f(x', y')-\varepsilon<f(x, y)<f(x', y')+\varepsilon.$$

Այսպիսով, σ' տիրույթում ֆունկցիան սահմանափակ է։

Այդ շրջակայքերի $\Sigma=\{\sigma'\}$ սիստեմի նկատմամբ կիրառելով Բորելի լեմման, կարելի է Σ-ից անջատել վերջավոր թվով այնպիսի $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ շրջակայքեր, որոնք միասին ծածկում են ամբողջ D տիրույթը։ Եթե՝

$$m_i \leqslant f(x, y) \leqslant M_i \quad \sigma_i\text{-ում} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

ապա, որպես m վերցնելով m_i թվերից ամենափոքրը, իսկ որպես M՝ M_i թվերից ամենամեծը, D-ում կունենանք՝

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M,$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

2° *Կանտորի թեորեման։* Վերցնելով կամավոր $\varepsilon>0$ թիվ, յուրաքանչյուր (x', y') կետ շրջապատենք այնպիսի

$$\sigma'\ (x'-\delta', x'+\delta'; y'-\delta', y'+\delta')$$

շրջակայքով, որ նրան պատկանող յուրաքանչյուր կետի համար (D-ից) տեղի ունենա՝

$$|f(x, y)-f(x', y')|<\frac{\varepsilon}{2},$$

Եթե (x_0, y_0) կետը դրա նման մի այլ կետ է, այնպես որ նաև՝

$$|f(x', y')-f(x_0, y_0)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

ապա կստանանք՝

$$|f(x, y)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon. \qquad (9)$$

Յուրաքանչյուր σ' ուղղանկյունը փոխարինենք նույն կենտրոնն ունեցող չորս անգամ ավելի փոքր ուղղանկյունով՝

$$\bar{\sigma}'=\left(x'-\frac{\delta'}{2}, x'+\frac{\delta'}{2}; y'-\frac{\delta'}{2}, y'+\frac{\delta'}{2}\right).$$

Այդ բաց ուղղանկյունների $\Sigma=\{\bar{\sigma}'\}$ սիստեմը ծածկում է D տիրույթը։ Բորելի լեմմայի համաձայն, այդ սիստեմից անջատենք ուղղանկյունների *վերջավոր* սիստեմ՝

$$\bar{\sigma}_i=\left(x_i-\frac{\delta_i}{2}, x_i+\frac{\delta_i}{2}; y_i-\frac{\delta_i}{2}, y_i+\frac{\delta_i}{2}\right),$$

որն ունի նույն հատկությունը։ Վերջապես, δ-ով նշանակենք բոլոր $\frac{\delta_i}{2}$ թվերից ամենափոքրը։

Դիցուք (x, y) և (x_0, y_0) կետերը D տիրույթի որևէ երկու կետերն են, որոնց համար՝

$$|x-x_0|<\delta, \quad |y-y_0|<\delta. \qquad (10)$$

(x_0, y_0) կետը պատկանում է $\bar{\sigma}_i$ շրջակայքերից որևէ մեկին, օրինակ՝

$$\bar{\sigma}_{i_0}=\left(x_{i_0}-\frac{\delta_{i_0}}{2}, x_{i_0}+\frac{\delta_{i_0}}{2}; y_{i_0}-\frac{\delta_{i_0}}{2}, y_{i_0}+\frac{\delta_{i_0}}{2}\right)$$

շրջակայքին, այնպես որ՝

$$|x_0-x_{i_0}|<\frac{\delta_{i_0}}{2}, \quad |y_0-y_{i_0}|<\frac{\delta_{i_0}}{2}.$$

Քանի որ $\delta<\frac{\delta_{i_0}}{2}$, ուստի (10)-ից հետևում է, որ $|x-x_0|<\frac{\delta_{i_0}}{2}$ և $|y-y_0|<\frac{\delta_{i_0}}{2}$։ Այստեղից՝

$$|x-x_{i_0}|<\delta_{i_0}, \quad |y-y_{i_0}|<\delta_{i_0},$$

և (x, y), (x_0, y_0) կետերը, պարզվում է, որ երկուսն էլ գտնվում են *ս կ զ բ ո ւ մ* որոշված

$$(x_{i_0}-\delta_{i_0}, \; x_{i_0}+\delta_{i_0}; \; y_{i_0}-\delta_{i_0}, \; y_{i_0}+\delta_{i_0})$$

շրջակայքներից որևէ մեկում, իսկ այդ ժամանակ, ըստ վերևում ապացուցածի, այդ կետերի համար տեղի ունի (9)-րդ անհավասարությունը։

Ուրեմն, հաջողվեց $\varepsilon>0$ թվի համար, գտնել մի $\delta>0$ թիվ, *ա ն կ ա խ* (x_0, y_0) կետի դիրքից, որով և ապացուցվում է, որ $f(x, y)$ ֆունկցիան *հ ա վ ա ս ա ր ա չ ա փ* անընդհատ է։

§ 3. ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐՆ ՈՒ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐԸ

167. ՄԱՍՆԱԿԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ԵՎ ՄԱՍՆԱԿԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐ։ Շարադրանքի և գրության պարզեցման համար մենք սահմանափակվում ենք այն դեպքով, երբ ֆունկցիան կախված է երեք փոփոխականներից. սակայն բոլորը ճիշտ են նաև ցանկացած թվով փոփոխականներից կախված ֆունկցիաների համար։

Դիցուք մի D (բաց) տիրույթում ունենք $u=f(x, y, z)$ ֆունկցիա։ Այդ տիրույթում վերցնենք $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետը։ Եթե մենք y և z փոփոխականներին վերագրենք y_0 և z_0 հաստատուն արժեքներ և x-ը փոփոխենք, ապա u-ն կլինի մեկ x փոփոխականի ֆունկցիա (x_0-ի շրջակայքում). կարելի է առաջադրել $x=x_0$ կետում նրա ածանցյալը գտնելու հարցը։ Այդ x_0

արժեքին ավելացնենք Δx աճ, այդ ժամանակ ֆունկցիան կըստանա

$$\Delta_x u = \Delta_x f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)$$

աճը, որը կարելի էր անվանել նրա մասնակի աճ (ըստ x-ի), այնքանով, որքանով այդ աճն առաջացել է միայն մեկ փոփոխականի արժեքի փոփոխման հետևանքով։ Ածանցյալի սահմանման համաձայն, նա իրենից ներկայացնում է հետևյալ սահմանը՝

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}.$$

Այս ածանցյալը կոչվում է $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալ ըստ x-ի (x_0, y_0, z_0) կետում:

Ինչպես տեսնում ենք, այս սահմանման մեջ ոչ բոլոր կոորդինատներն են իրավահավասար, որովհետև y_0-ն և z_0-ն ֆիքսած են, իսկ x-ը փոփոխվում է, ձգտելով x_0-ի։

Մասնակի ածանցյալները նշանակում են հետևյալ սիմվոլներից մեկով՝

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}^{*}; \quad u'_x, \; f'_x(x_0, y_0, z_0); \quad D_x u, \; D_x f(x_0, y_0, z_0).$$

Նկատենք, որ այս նշանակումների մեջ ներքևից գրված x տառը միայն ցույց է տալիս, թե ածանցյալը ըստ որ փոփոխականի է վերցվում, և կապված չէ այն բանի հետ, թե որ (x_0, y_0, z_0) կետում ենք մենք հաշվում ածանցյալը**։

Նման ձևով, ընդունելով x-ը և z-ը հաստատուն, իսկ y-ը՝ փոփոխական, կարելի է դիտարկել հետևյալ սահմանը՝

---

* Յակոբին (C. G. J. Jacobi) առաջարկել է օգտվել կլոր ∂-ից (ուղիղ d-ի փոխարեն) հենց մասնակի ածանցյալ նշանակելիս։

** Այստեղ ևս

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad f'_x, \; D_x f$$

ամբողջական սիմվոլները կարելի է դիտել որպես ըստ x-ի վերցրած մասնակի ածանցյալի ֆունկցիոնալ նշանակումներ։ Նման ծանոթություններ հետագայում այլևս չենք կրկնելու։

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y},$$

Այդ սահմանը կոչվում է $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալ ըստ y-ի (x_0, y_0, z_0) կետում *և նշանակվում է նախորդին նման սիմվոլներով՝*

$$\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}; \quad u'_y, \quad f'_y(x_0, y_0, z_0); \quad D_y u_y, \quad Df(x_0, y_0, z_0).$$

Ճիշտ այդպես էլ որոշվում է նաև $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալն ըստ z-ի (x_0, y_0, z_0) կետում:

Մասնակի ածանցյալի հաշվումը ինքը, համեմատած սովորական ածանցյալի հաշվման հետ, ըստ էության ոչ մի նոր բան չի ներկայացնում։

Օրինակներ. 1) Դիցուք $u = x^y$ $(x > 0)$*։ Այս ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները կլինեն՝*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y . \log x,$$

որոնցից առաջինը հաշվվում է որպես x-*ի աստիճանային ֆունկցիայի ածանցյալ (երբ* $y = \text{const}$*), իսկ երկրորդը՝ որպես* y-*ի ցուցչային ֆունկցիայի ածանցյալ (երբ* $x = \text{const}$*)։*

2) Եթե $u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, *ապա*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2},$$

3) $u = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$ *ֆունկցիայի համար ունենք՝*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

4) Դիցուք $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$, *որտեղ* $f(u)$-*ն՝ կամայական ֆունկցիա է (ածանցյալ ունեցող)։*

Ցույց տալ, որ z-*ի համար միշտ տեղի ունի հետևյալ առնչությունը.*

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2},$$

ինչպիսին էլ լինի f ֆունկցիան։

Ըստ բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցման կանոնի (շտրիխով նշանակելով ածանցյալն ըստ u-ի) ունենք՝

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y.f'(x^2-y^2).2x=2xy.f'(x^2-y^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f(x^2-y^2)-2y^2.f'(x^2-y^2),$$

և այստեղից՝

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=$$

$$=2y.f'(x^2-y^2)+\frac{1}{y}.f(x^2-y^2)-2y.f'(x^2-y^2)=\frac{z}{y^2}.$$

բ) Եռանկյան a կողմը մյուս b ու c կողմերի և նրանցով կազմված α անկյան միջոցով որոշվում է այսպես՝

$$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\,.\,\cos\alpha}.$$

Այդ ժամանակ՝

$$\frac{\partial a}{\partial b}=\frac{b-c.\cos\alpha}{\sqrt{b^2+c^2-2bc\,.\,\cos\alpha}}=\frac{b-c.\cos\alpha}{a},$$

$$\frac{\partial a}{\partial \alpha}=\frac{bc.\sin\alpha}{a}.$$

գ) Ֆիզիկայից հայտնի՝ Կլապեյրոնի $vp=RT$ բանաձևը (որտեղ $R=\mathrm{const}$) արտահայտում է կապը իդեալական գազի որոշ զանգվածի v ծավալի, p ճնշման ու T բացարձակ ջերմաստիճանի միջև և p, v, T մեծություններից մեկը որոշում է որպես մյուս երկուսի ֆունկցիա։ Եթե p-ն ու v-ն անկախ փոփոխականներ են, իսկ T-ն նրանց ֆունկցիան է՝ $T=\frac{pv}{R}$, ապա՝

$$\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{v}{R},\quad \frac{\partial T}{\partial v}=\frac{p}{R}.$$

Եթե անկախ փոփոխականների դերը կատարում են p և T մեծությունները, իսկ v-ն նրանց ֆունկցիան է $v=\frac{RT}{p}$, ապա՝

$$\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{RT}{p^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial T} = \frac{R}{p}.$$

Վերջապես, դիցուք v-ն և T-ն անկախ փոփոխականներ են, իսկ p-ն նրանց ֆունկցիան՝ $p = \frac{RT}{v}$, *այդ ժամանակ՝*

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{RT}{v^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{R}{v}.$$

Ի միջի այլոց, այստեղից ստացվում է թերմոդինամիկայի մեջ կարևոր նշանակություն ունեցող հետևյալ առնչությունը՝

$$\frac{\partial p}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{RT}{v^2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{v}{R} = -\frac{RT}{pv} = -1.$$

Նկատենք, որ մասնակի ածանցյալների Յակոբիի նշանակումները (կլոր ∂-ով) պետք է դիտել միայն որպես ամբողջական սիմվոլներ, և ոչ թե որպես քանորդներ կամ կոտորակներ։ Հենց նոր ստացված առնչությունը առանձին պարզությամբ ընդգծում է սովորական և մասնակի ածանցյալների նշանակումների միջև եղած այդ էական տարբերությունը։ Եթե ձախ մասում գրված ածանցյալները լինեին սովորական ածանցյալներ, ապա դրանք կարելի կլիներ դիտել որպես միևնույն դիֆերենցիալների քանորդներ և կրճատումներից հետո −1-ի փոխարեն կստանայինք 1, իսկ այստեղ, ինչպես տեսնում ենք, այդպես վարվել չի կարելի։

$\frac{\partial u}{\partial x}$ *մասնակի ածանցյալի և կամայական* Δx *աճի արտադրյալը կոչվում է* u ֆունկցիայի մասնակի դիֆերենցիալ ըստ x-ի։ *Այդ նշանակում են այսպես՝*

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x.$$

Եթե այստեղ էլ անկախ x փոփոխականի d_x դիֆերենցիալի տակ հասկանանք Δx աճը, *ապա նախորդ բանաձևը կգրվի այսպես՝*

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx.$$

Նույն ձևով նաև՝

$$d_y u = \frac{\partial u}{\partial y}.dy, \quad d_z u = \frac{\partial u}{\partial z} dz։$$

Այսպիսով, մենք տեսնում ենք, որ կարելի էր նաև մասնակի ածանցյալները ներկայացնել կոտորակների տեսքով՝

$$\frac{d_x u}{dx}, \quad \frac{d_y u}{dy}, \quad \frac{d_z u}{dz},$$

սակայն անպայման նշելով, թե ըստ ո՞ր փոփոխականի է վերցվում դիֆերենցիալը։

168. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԼՐԻՎ ԱՃԸ։ *Եթե, ելնելով անկախ փոփոխականների* $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ *արժեքներից, այդ բոլոր երեքին էլ տանք* Δx, Δy, Δz *աճեր, ապա* $u=f(x, y, z)$ *ֆունկցիան կստանա հետևյալ աճը՝*

$$\Delta u=\Delta f(x_0, y_0, z_0)=f(x+\Delta x_0, y+\Delta y_0, z+\Delta z_0)-f(x_0, y_0, z_0),$$

որը կոչվում է ֆունկցիայի լրիվ աճ։

Մեկ փոփոխականի $y=f(x)$ *ֆունկցիայի դեպքում, ենթադրելով, որ* x_0 *կետում ֆունկցիայի համար գոյություն ունի* $f'(x_0)$ *(վերջավոր) ածանցյալ, ֆունկցիայի աճի համար տեղի ունի այսպիսի բանաձև* [95, *(2)*]՝

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f'(x_0).\Delta x+\alpha.\Delta x$$

որտեղ α*-ն կախված է* Δx*-ից և* $\alpha \to 0$, *երբ* $\Delta x \to 0$։

Մենք ցանկանում ենք այդ բանաձևի նման բանաձև ստանալ $u=f(x, y, z)$ *ֆունկցիայի աճի համար, այն է՝*

$$\Delta u=\Delta f(x_0, y_0, z_0)=$$

$$=f'_x(x_0, y_0, z_0).\Delta x+f'_y(x_0, y_0, z_0).\Delta y+f'_z(x_0, y_0, z_0).\Delta z+$$

$$+\alpha.\Delta x+\beta.\Delta y+\gamma.\Delta z, \qquad (1)$$

որտեղ α, β, γ *մեծությունները կախված են* Δx, Δy, Δz *աճերից և դրանց հետ միասին ձգտում են զրոյի։ Սակայն այս անգամ հարկ կլինի ֆունկցիան ենթարկել ավելի խիստ սահմանափակումների։*

ԹԵՈՐԵՄԱ։ Եթե $f'_x(x, y, z)$, $f'_y(x, y, z)$, $f'_z(x, y, z)$ **մասնակի ածանցյալները գոյություն ունեն ոչ միայն** (x_0, y_0, z_0) **կետում,**

այլև նրա մի որոշ շրջակայքում, և, բացի այդ, դրանք այդ կետում անընդհատ են (որպես x, y, z փոփոխականների ֆունկցիաներ), ապա տեղի ունի (1) բանաձևը:

Ապացուցելու համար ֆունկցիայի Δu ***լրիվ աճը ներկայացնենք հետևյալ կերպ՝***

$$\Delta u=[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)-f(x_0, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)]+$$

$$+[f(x_0, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)-f(x_0, y_0, z_0+\Delta z)]+$$

$$+[f(x_0, y_0, z_0+\Delta z)-f(x_0, y_0, z_0)].$$

Այս տարբերություններից յուրաքանչյուրն իրենից ներկայացնում է ֆունկցիայի մասնակի աճ միայն մեկ փոփոխականի նկատմամբ։ Քանի որ մենք ենթադրեցինք, որ (x_0, y_0, z_0) ***կետի շրջակայքում մասնակի ածանցյալները գոյություն ունեն, ուստի, բավականաչափ փոքր*** Δx, Δy, Δz ***աճերի դեպքում, այդ տարբերությունների նկատմամբ առանձին-առանձին վերցրած կարելի է կիրառել վերջավոր աճերի բանաձևը*** [118].* ***Մենք կստանանք՝***

$$\Delta u=f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z).\Delta x+$$

$$+f'_y(x_0, y_0+\theta_1\Delta y, z_0+\Delta z).\Delta y+f'_z(x_0, y_0, z_0+\theta_2\Delta z).\Delta z.$$

Եթե այստեղ ընդունենք՝

$$f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)=f'_x(x_0, y_0, z_0)+\alpha,$$

$$f'_y(x_0, y_0+\theta_1\Delta y, z_0+\Delta z)=f'_y(x_0, y_0, z_0)+\beta,$$

$$f'_z(x_0, y_0, z_0+\theta_2\Delta z)=f'_z(x_0, y_0, z_0)+\gamma,$$

ապա Δu***-ի համար կստանանք (1) արտահայտությունը։ Երբ*** $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, $\Delta z\to 0$, ***վերոհիշյալ հավասարությունների ձախ մասե-***

---

* ***Եթե վերցնենք, օրինակ, առաջին տարբերությունը, ապա այդ կարելի է դիտել որպես մեկ փոփոխականից կախված*** $f(x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$ ***ֆունկցիայի աճ, որը համապատասխանում է*** $x=x_0$ ***կետից դեպի*** $x=x_0+\Delta x$ ***կետը անցնելուն։ Այդ ֆունկցիայի ածանցյալն ըստ*** x***-ի, այսինքն՝*** $f'_x(x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$***-ը, ըստ ենթադրության, գոյություն ունի*** $[x_0, x_0+\Delta x]$ ***միջակայքի բոլոր*** x ***արժեքների համար, ուստի վերջավոր աճերի բանաձևը կիրառելի է, և այլն։***

րում գտնվող արգումենտները կձգտեն x_0-ի, y_0-ի և z_0-ի (որովհետև Θ, Θ_1, Θ_2 մեծությունները կանոնավոր կոտորակներ են), հետևապես, իրենք՝ ածանցյալները ևս կձգտեն աջ մասերում գրված ածանցյալներին, իսկ α, β, γ մեծությունները՝ զրոյի, որովհետև, ըստ արված ենթադրության, փոփոխականների այդ արժեքների համար մասնակի ածանցյալներն անընդհատ են։ Այսպիսով թեորեմն ապացուցված է։

Ապացուցած թեորեման, ի միջի այլոց, հնարավորություն է տալիս հաստատել, որ տված կետում մասնակի ածանցյալների գոյությունից և անընդհատությունից բխում է ֆունկցիայի իր անընդհատությունն այդ կետում. իրոք եթե $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$, ապա, ակներևաբար, նաև $\Delta u \to 0$։

Որպեսզի (1) բանաձևը գրենք ավելի սեղմ ձևով, մուծենք

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

արտահայտությունը, որը

$$(x_0, y_0, z_0) \text{ և } (x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$$

կետերի հեռավորությունն է։

Դրանից օգտվելով, կարող ենք գրել՝

$$\alpha.\Delta x + \beta.\Delta y + \gamma.\Delta x = \left(\alpha.\frac{\Delta x}{\rho} + \beta.\frac{\Delta y}{\rho} + \gamma.\frac{\Delta z}{\rho}\right).\rho։$$

Փակագծերի մեջ եղած արտահայտությունը նշանակելով ε-ով, կունենանք՝

$$\alpha.\Delta x + \beta.\Delta y + \gamma.\Delta z = \varepsilon.\rho,$$

որտեղ ε-ը կախված է $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ աճերից և ձգտում է զրոյի, երբ այդ աճերը ձգտում են զրոյի, կամ, ավելի կարճ, երբ $\rho \to 0$։ Ուրեմն (1) բանաձևն այժմ կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\Delta u = \Delta f(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0).\Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0).\Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0).\Delta z + \varepsilon.\rho, \qquad (2)$$

որտեղ $\varepsilon \to 0$, երբ $\rho \to 0$։ Ակներևաբար, $\varepsilon.\rho$ մեծությունը կարելի է գրել որպես $o(\rho)$ (եթե 60-ում կատարված նշանակումները՝ տա-

րածենք նաև մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի դեպքի վրա)։

Նկատենք, որ մեր դատողությունների մեջ ձևականորեն չէր բացառված այն դեպքը, երբ $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ աճերն առանձին-առանձին կամ նույնիսկ բոլորը միաժամանակ հավասար են զրոյի։ Այդպիսով, խոսելով

$$\alpha \to 0,\ \beta \to 0,\ \gamma \to 0,\ \varepsilon \to 0$$

սահմանային առնչությունների մասին, երբ $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$, մենք դրանք հասկանում ենք լայն իմաստով և այդ աճերի համար նրանց փոփոխման ընթացքում զրո դառնալու հնարավորությունը չենք բացառում։ (Համեմատել n° 95-ում կատարված համանման դիտողության հետ)։

Նախորդ թեորեմն ապացուցելիս մենք մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայից ավելի շատ բան պահանջեցինք, քան այն դեպքում, երբ ֆունկցիան կախված էր մեկ փոփոխականից։ Ապացուցելու համար, որ այդ պահանջները չբավարարվելու դեպքում այստեղ (1) կամ (2) բանաձևը կարող էր կիրառելի չլինել, եզրափակման մեջ քննության առնենք հետևյալ օրինակը (որտեղ պարզության համար գործ ունենք միայն երկու անկախ փոփոխականների հետ)։

$f(x, y)$ ֆունկցիան որոշենք հետևյալ հավասարություններով՝

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2} \quad (\text{երբ } x^2+y^2>0), \qquad f(0,0)=0։$$

Այս ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ հարթության վրա. (0,0) կետի համար այդ հետևում է 157, (5)-ից։ Այնուհետև, ըստ x-ի և ըստ y-ի մասնակի ածանցյալները նույնպես գոյություն ունեն ամբողջ հարթության վրա։ Երբ $x^2+y^2>0$, ակներևաբար՝

$$f'_x(x,y)=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \qquad f'_y(x,y)=\frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}։$$

Իսկ սկզբնակետում ունենք՝ $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$, այս անմիջապես հետևում է, հենց մասնակի ածանցյալների սահմանման համաձայն, նրանից, որ $f(x,0)=f(0,y)=0$։ Հեշտ է ցույց տալ, որ (0,0) կետում ածանցյալների անընդհատությունը խախտվում է (դրանցից առաջինի համար բավական է, օրինակ, ընդունել $y=x=\frac{1}{n}\to 0$)։

(1) կամ (2) տեսքի բանաձևը (0,0) կետում մեր ֆունկցիայի համար տեղի չունի։ Իրոք, եթե ենթադրենք որ այն տեղի ունի, ապա կլիներ՝

$$\Delta f(0,0) = \frac{\Delta x^2 \cdot \Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2} = \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

որտեղ $\varepsilon \to 0$, երբ $\Delta x \to 0$ և $\Delta y \to 0$։ Մասնավորապես ընդունելով $\Delta y = \Delta x > 0$, կունենայինք՝

$$\frac{1}{2}\Delta x = \varepsilon \cdot \sqrt{2} \cdot \Delta x, \quad \text{որտեղից՝} \quad \varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

և ε-ը չէր ձգտի զրոյի, երբ $\Delta x \to 0$, որը հակասում է ենթադրությանը։

Նման առանձնահատկություն ունի $(0,0)$ կետում նաև

$$f(x, y) = 1\sqrt{|xy|}$$

ֆունկցիան։ Առաջարկում ենք ընթերցողին՝ համոզվել դրանում։

169. ԼՐԻՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ։ Մեկ փոփոխականի $y = f(x)$ ֆունկցիայի դեպքում, մենք 102-ում քննության առանք ֆունկցիայի $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ աճի՝

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad (A = \text{const.}) \tag{3}$$

տեսքով ներկայացնելիության հարցը։ Պարզվեց [103], որ այդ տեսքով ներկայացնելու հնարավորության համար անհրաժեշտ է ու բավարար, որպեսզի $x = x_0$ կետում գոյություն ունենա $f'(x_0)$ վերջավոր ածանցյալ, ընդ որում վերոհիշյալ հավասարությունը տեղի ունի հենց $A = f'(x_0)$ դեպքում։

Ֆունկցիայի աճի գծային մասը՝

$$A \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot \Delta x = y'_x \cdot \Delta x$$

մենք անվանեցինք նրա դիֆերենցիալ՝ dy։

Անցնելով մի քանի, օրինակ երեք, փոփոխականների $f(x, y, z)$ ֆունկցիային, որը որոշված է մի (ասենք, թե բաց) D տիրույթում, բնական կլինի դնել նման հարց՝ նրա

$$\Delta u = \Delta f(x_0, y_0, z_0) =$$

$$= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)$$

աճի՝

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + C \cdot \Delta z + o(\rho), \tag{4}$$

տեսքով ներկայացնելիության վերաբերյալ, որտեղ A, B և C

մեծությունները հաստատուն են, իսկ $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$։

Ինչպես և 102*-ում, հեշտ է ցույց տալ, որ աճի այդպիսի ներկայացումը, եթե ընդհանրապես այն հնարավոր է, իրականացվում է միակ եղանակով։ Կարելի է ապացուցել ավելի ճշգրիտ արդյունք [հմմ.* 103*-ի հետ]՝ եթե տեղի ունի (4)-րդ վերլուծությունը, ապա* (x_0, y_0, z_0) *կետում գոյություն ունեն մասնակի ածանցյալները ըստ յուրաքանչյուր փոփոխականի, ընդ որում՝*

$$f'_x(x_0, y_0, z_0)=A,\ f'_y(x_0, y_0, z_0)=B,\ f'_z(x_0, y_0, z_0)=C.$$

Իրոք, (4)-ի մեջ ընդունելով, օրինակ, $\Delta y=\Delta z=0$ *և* $\Delta x\neq 0$, *կստանանք՝*

$$\frac{f(x_0+\Delta x, y_0, z_0)-f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}=A+o(|\Delta x|),$$

որտեղից և հետևում է, որ գոյություն ունի՝

$$f'_x(x_0, y_0, z_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0, z_0)-f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}=A.$$

Այսպիսով, (4)-րդ առնչությունը միշտ իրականացվում է միայն այսպիսի տեսքով՝

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0)=f'_x(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta x+ \\ +f'_y(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta y+f'_z(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta z+o(\rho) \qquad (5)$$

կամ, ավելի կարճ ձևով գրված, այսպես՝

$$\Delta u=u'_x\cdot\Delta x+u'_y\cdot\Delta y+u'_z\cdot\Delta z+o(\rho). \qquad (5^*)$$

Սակայն, այն ժամանակ, երբ մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում $y'_x=f'(x_0)$ *ածանցյալի գոյությունը դիտարկելի կետում նաև բավական էր (3)-րդ առնչության առկայության համար, այս դեպքում*

$$u'_x=f'_x(x_0, y_0, z_0),\ u'_y=f'_y(x_0, y_0, z_0),\ u'_z=f'_z(x_0, y_0, z_0)$$

մասնակի ածանցյալների գոյությունը դեռևս չի ապահովում (4) վերլուծությունը։ Երկու փոփոխականների ֆունկցիայի դեպքի համար մենք այդ տեսանք նախորդ n°*-ում, օրինակով։ Նույն տեղում*

ապացուցված թեորեմայի մեջ, նշված են (4) առնչության տեղի ունենալու բավարար պայմանները. այդ՝ մասնակի ածանցյալների գոյությունն է (x_0, y_0, z_0) *կետի շրջակայքում և նրանց անընդհատությունն այդ կետում։ Ի միջի այլոց, հեշտ է ցույց տալ, որ այդ պայմանները բոլորովին էլ անհրաժեշտ չեն (5) կամ (5*) բանաձևերի համար։ Այդ արդեն հետևում է նրանից, որ մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի համար (որը, եթե կուզեք, կարելի է դիտել նաև որպես ցանկացած թվով փոփոխականներից կախված ֆունկցիա) նման պայմաններ անհրաժեշտ չեն։*

(5) բանաձևի առկայության դեպքում $f(x, y, z)$ ֆունկցիան կոչվում է դ ի ֆ ե ր ե ն ց ե լ ի (x_0, y_0, z_0) կետում և *(միայն այդ դեպքում)* ֆունկցիայի աճի գծային մասը, այսինքն՝

$$u'_x \cdot \Delta x + u'_y \cdot \Delta y + u'_z \cdot \Delta z =$$

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta$$

արտահայտությունը, կոչվում է նրա (լրիվ) դիֆերենցիալ *և նշանակվում է* du *կամ* $df(x_0, y_0, z_0)$ *սիմվոլով։*

Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի դեպքում այն պնդումը, թե տված կետում «ֆունկցիան դիֆերենցելի է», ինչպես տեսնում ենք, արդեն համարժեք չէ այն պնդմանը, թե այդ կետում «ֆունկցիան ունի մասնակի ածանցյալներ ըստ բոլոր փոփոխականների», այլ ինչ-որ ա վ ե լ ի ն է նշանակում։ Ի միջի այլոց, մենք սովորաբար ենթադրելու ենք մասնակի ածանցյալների գոյությունն ու ա ն ը ն դ հ ա տ ո ւ թ յ ո ւ ն ը, իսկ դա արդեն ծածկում է դ ի ֆ ե ր ե ն ց ե լ ի ո ւ թ յ ա ն պահանջը։

Անկախ փոփոխականների dx, dy, dz *դիֆերենցիալների տակ պայմանավորվում ենք հասկանալ* $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ *կամայական աճեր*, ուստի կարելի է գրել՝*

---

* *Եթե* x *անկախ փոփոխականի դիֆերենցիալը նույնացնենք* x, y, z *անկախ փոփոխականներից կախված* x *ֆունկցիայի դիֆերենցիալի հետ, ապա, համաձայն ընդհանուր բանաձևի, կարելի է գրել՝*

$$dx = x'_x \cdot \Delta x + x'_y \cdot \Delta y + x'_z \cdot \Delta z = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + 0 \cdot \Delta z = \Delta x.$$

այդ ժամանակ $dx = \Delta x$ *հավասարությունն ապացուցված կլինի։*

$$df(x_0, y_0, z_0)=$$

$$=f'_x(x_0, y_0, z_0).dx+f'_y(x_0, y_0, z_0).dy+f'_z(x_0, y_0, z_0).dz,$$

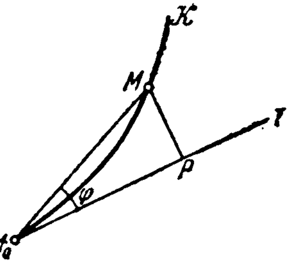
կամ՝

$$du=u'_x.dx+u'_y.dy+u'_z.dz\text{։}$$

Պարզվում է, որ լրիվ դիֆերենցիալը հավասար է մասնակի դիֆերենցիալների [167] գումարին։

170. ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՄԵԿՆԱԲԱՆՈՒՄ ԵՐԿՈՒ ԱՆԿԱԽ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԴԵՊՔՈՒՄ։ *Ցանկանալով վերևում ասածներին տալ այնպիսի երկրաչափական մեկնաբանում, որը նման լինի մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի ածանցյալի և դիֆերենցիալի երկրաչափական մեկնաբանմանը* [90, 103], *վերադառնանք K կորին նրա M_0 կետում տարած շոշափողի գաղափարին։ M_0T շոշափողը մենք սահմանել ենք (գծ. 96) որպես M_0M հատողի սահմանային դիրք, երբ $\overline{M_0M}$-ը ձգտում է զրոյի* [90]։ *Ակներևորեն կարելի է տալ նաև այսպիսի, նրան համարժեք, սահմանում՝*

M_0T ուղիղը կոչվում է *K* կորի շոշափող նրա M_0 կետում, եթե *K* կորի փոփոխական M կետի $\overline{MP}$ հեռավորությունը M_0T ուղիղից, երբ M_0M հեռավորությունը ձգտում է զրոյի, հանդիսանում է ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր, քան $\overline{M_0M}$-ը (այսինքն՝ եթե $\overline{MP}:\overline{M_0M}$ հարաբերությունը այդ ժամանակ ձգտում է զրոյի*)։



Գծ. 96.

Այժմ դիտարկենք մի S մակերևույթ և նրա վրա M_0 կետը (գծ. 97)։ Շոշափող ուղիղի սահմանման անալոգիայով, տանք շոշափող հարթության սահմանումը՝

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ։ M_0K հարթությունը կոչվում է *S* մակերևույթի շոշափող հարթություն նրա M_0 կետում, եթե *S* մակե-

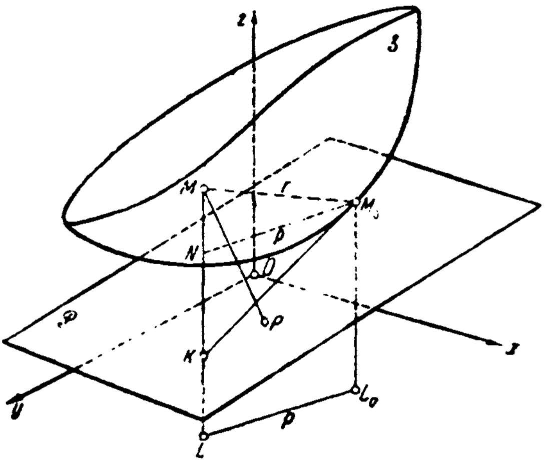
* *Իսկ այդ նշանակում է, որ զրոյի է ձգտում* sinφ-*ն, իսկ նրա հետ միասին նաև M_0M հատողով և M_0T ուղիղով կազմված φ անկյունը (տես գծագիրը)։*

րևույթի M փոփոխական կետի $\overline{MP}$ հեռավորությունն այդ հարթությունից, երբ $\overline{M_0M}$ հեռավորությունը ձգտում է զրոյի, հանդիսանում է ավելի **բարձր կարգի** անվերջ փոքր, քան $\overline{M_0M}$-ը *(այսինքն՝ եթե $\overline{MP}$ $\overline{M_0M}$ հարաբերությունը այդ ժամանակ ձգտում է զրոյի)։*

Դիցուք [150] *մակերևույթը տրված է ուղղանկյուն կոորդինատներով $z=f(x, y)$ հավասարման միջոցով։ Նրա վրա վերցնենք $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետը [որտեղ $z_0=f(x_0, y_0)$] և տեսնենք, թե M_0 կետով անցնող և*

$$Z-z_0=A(X-x_0)+B(Y-y_0) \tag{6}$$

հավասարումն ունեցող P հարթությունը ինչպիսի՞ պայմանների դեպքում կբավարարի վերոհիշյալ սահմանմանը։



Գծ. 97.

Տանենք z առանցքին զուգահեռ ML ուղիղը (տես գծագիրը) և M_0 կետից ML-ի վրա իջեցնենք M_0N ուղղահայացը։ Քանի որ $\overline{MK}$ հատվածը $\overline{MP}$-ից տարբերվում է հաստատուն (զրոյից տարբեր) արտադրիչով, ուստի $\overline{MP}/\overline{MM_0}$ հարաբերության փոխարեն կարելի է դիտարկել $\overline{MK}/\overline{MM_0}$ հարաբերությունը։ Այժմ ցույց տանք, որ շոշափող հարթության սահմանումն ըստ էության չփոխելով, կարելի է, վերջապես այստեղ $r=\overline{MM_0}$ հեռավորությունը փոխարինել $\rho=\overline{M_0N}$ հատվածով։

Եթե M-ը M_0-ին ձգտելիս $\overline{MK}/\rho$ հարաբերությունը ձգտում է զրոյի, ապա այդ առավել ևս ճիշտ է $\overline{MK}/r$ հարաբերության համար, որովհետև $r \geq \rho$: Այժմ ենթադրենք, թե $\overline{MK}/r$ հարաբերությունը ձգտում է զրոյի, և ցույց տանք, որ այդ ժամանակ զրոյի կձգտի նաև $\overline{MK}/\rho$ հարաբերությունը: Դրա համար բավական է ապացուցել, որ երբ $M \to M_0$, $\frac{r}{\rho}$ հարաբերությունը մնում է սահմանափակ:

$\overline{MK}$ հատվածը, նշանի ճշգրտությամբ, հավասար է՝

$$z-Z=z-z_0-A(x-x_0)-B(y-y_0),$$

արտահայտությանը, կամ, մտցնելով

$$x-x_0=\Delta x, \quad y-y_0=\Delta y, \quad z-z_0=\Delta z=\Delta f(x_0, y_0),$$

նշանակումները, հետևյալ արտահայտությունը՝

$$\Delta z-(A\,\Delta x+B\,\Delta y):$$

Արված ենթադրության շնորհիվ, գոնե M_0-ին բավականաչափ մոտ գտնվող M կետերի համար, կունենանք՝

$$|\Delta z-(A\,\Delta x+B\,\Delta y)|<\frac{1}{2}r=\frac{1}{2}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2},$$

այնպես որ՝

$$\frac{|\Delta z|}{\rho}<|A|\cdot\frac{|\Delta x|}{\rho}+|B|\cdot\frac{|\Delta y|}{\rho}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{|\Delta z|}{\rho}\right)^2},$$

կամ (ավելի ուժեղացնելով անհավասարությունը)՝

$$\frac{|\Delta z|}{\rho}<|A|+|B|+\frac{1}{2}\left(1+\frac{|\Delta z|}{\rho}\right),$$

Այստեղից՝

$$\frac{|\Delta z|}{\rho}<2(|A|+|B|)+1,$$

և հետևաբար՝

$$\frac{r}{\rho} \le \sqrt{1+\left(\frac{|\Delta z|}{\rho}\right)^2} \le 2(|A|+|B|+1),$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Այսպիսով, (6) հարթությունը մակերևույթին շոշափող կլինի այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\frac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\rho}$$

հարաբերությունը ρ-ի հետ միասին ձգտում է զրոյի, այսինքն՝ եթե տեղի ունի հետևյալ վերլուծումը՝

$$\Delta z=\Delta f(x_0, y_0)=A.\Delta x+B.\Delta y+o(\rho)$$

(համեմատել (4)-ի հետ)։

Մենք գալիս ենք վերջնական եզրակացության՝ որպեսզի $z=f(x, y)$ մակերևույթը $M_0(x_0,y_0,z_0)$ կետում, որտեղ $z_0=f(x_0,y_0)$, ունենա շոշափող հարթություն*, անհրաժեշտ է ու բավարար, որ $x=x_0$, $y=y_0$ դեպքում $f(x, y)$ ֆունկցիան լինի դիֆերենցելի։

Քանի որ այդ պայմանի բավարարման դեպքում A և B գործակիցները անհրաժեշտաբար հավասար են $f'_x(x_0,y_0)$ և $f'_y(x_0,y_0)$ մասնակի ածանցյալներին, ուստի շոշափող հարթությունը կներկայացվի հետևյալ հավասարումով՝

$$Z-z_0=f'_x(x_0, y_0).(X-x_0)+f'_y(x_0, y_0).(Y-y_0)։$$

Սովորաբար x, y, z մեծությունների մոտ նշանիկները չեն գրում. այդ ժամանակ շոշափող հարթության հավասարումը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$Z-z=f'_x(x, y).(X-x)+f'_y(x, y).(Y-y)։ \qquad (7)$$

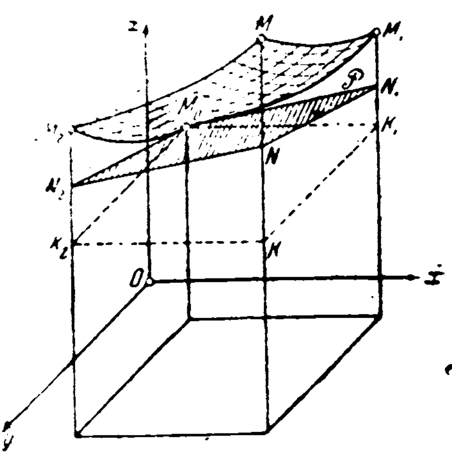
Դժվար չէ տեսնել, որ եթե մակերևույթը և նրա շոշափող հարթությունը հատենք կամավոր հարթությամբ, որն անցնում է M_0 կետով և զուգահեռ է Z-երի առանցքին, ապա առաջինի

* Ի նկատի ունենք Z-երի առանցքին ոչ զուգահեռ հարթություն։

նրա հատումից կստացվի որևէ կոր, իսկ երկրորդի հետ՝ նրան շոշափող ուղիղը*։

Համանմանապես, մակերևույթն $Y=y_0$ և $X=x_0$ հարթություններով հատելիս ստացվում են այնպիսի կորեր, որոնց անկյունային գործակիցները** համապատասխանաբար հավասար են՝

$$f'_x(x_0, y_0) \text{ և } f'_y(x_0, y_0)։$$



Գծ. 98

98-րդ գծագրի վրա K_1M_1, K_2M_2 և KM հատվածները ներկայացնում են ֆունկցիայի մասնակի և լրիվ աճերը, իսկ K_1N_1, K_2N_2 և KN հատվածները՝ նրա մասնակի և լրիվ դիֆերենցիալները [համ. n° 103-ի և գծ. 44-ի հետ]։

171. ԲԱՐԴ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԸ։

Դիցուք ունենք

$$u=f(x, y, z)$$

ֆունկցիան, որը որոշված է D տիրույթում, ընդ որում x, y, z փոփոխականներից յուրաքանչյուրն իր հերթին հանդիսանում է t փոփոխականի ֆունկցիա՝

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t),$$

t-ի մի որոշ միջակայքում։

Բացի այդ, դիցուք t-ն փոփոխվելիս (x, y, z) կետը D տիրույթի սահմաններից դուրս չի գալիս։

* Ստորև [224]-ում մենք քննության կառնենք ավելի ընդհանուր հարց՝ մակերևույթի վրա գտնվող և նրա ավյալ կետով անցնող կամայական կորերի շոշափողների հարցը։

** Հեշտ է հասկանալ, թե կոորդինատների ինչպիսի սիստեմների նկատմամբ են հաշվվում այդ անկյունային գործակիցները։

f ֆունկցիայի մեջ տեղադրելով x, y և z փոփոխականների արժեքները, կստանանք

$$u=f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$$

բարդ ֆունկցիա։

Ենթադրենք, թե u-ն ըստ x, y և z փոփոխականների ունի u'_x, u'_y, u'_z անընդհատ ածանցյալներ* և x'_t, y'_t, z'_t ածանցյալները գոյություն ունեն։ Այդ ժամանակ կարելի է ապացուցել բարդ ֆունկցիայի ածանցյալի գոյությունը և միաժամանակ հաշվել այն։

Իրոք, t փոփոխականին տանք որևէ Δt աճ, այդ ժամանակ x, y և z փոփոխականները համապատասխանաբար կստանան Δx, Δy և Δz աճեր, իսկ u ֆունկցիան կստանա Δu աճ։

u ֆունկցիայի աճը ներկայացնելով (1) ձևով (այդ մենք անել կարող ենք, որովհետև ենթադրել ենք u'_x, u'_y, u'_z անընդհատ մասնակի ածանցյալների գոյությունը), կստանանք՝

$$\Delta u=u'_x\cdot\Delta x+u'_y\cdot\Delta y+u'_z\cdot\Delta z+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y+\gamma\cdot\Delta z,$$

որտեղ $\alpha, \beta, \gamma\to 0$, երբ $\Delta x, \Delta y, \Delta z\to 0$։ Հավասարության երկու մասերը բաժանելով Δt-ի վրա, կունենանք՝

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}=u'_x\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+u'_y\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}+u'_z\cdot\frac{\Delta z}{\Delta t}+\alpha\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+\beta\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}+\gamma\cdot\frac{\Delta z}{\Delta t},$$

Δt աճը ձգտեցնենք զրոյի. այդ ժամանակ Δx, Δy, Δz աճերը կձգտեն զրոյի, քանի որ t-ից կախված x, y և z ֆունկցիաներն անընդհատ են (մենք ենթադրեցինք, որ x'_t, y'_t և z'_t ածանցյալները գոյություն ունեն), ուստի α, β և γ մեծությունները նույնպես կձգտեն զրոյի։ Սահմանում կստանանք՝

$$\boxed{u'_t=u'_x\cdot x'_t+u'_y\cdot y'_t+u'_z\cdot z'_t}\tag{8}$$

Տեսնում ենք, որ վերևում արված ենթադրությունների դեպքում բարդ ֆունկցիայի ածանցյալն իսկապես գոյություն ունի։ Եթե

* Փաստորեն բավական է ենթադրել, որ $u=f(x, y, z)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է։

օգտվենք դիֆերենցիալ նշանակումներից, ապա (8)-րդ բանաձևը կարելի կլինի գրել այսպես՝

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}. \tag{9}$$

Այժմ քննության առնենք այն դեպքը, երբ x, y և z փոփոխականները կախված են ոչ թե մեկ t փոփոխականից, այլ մի քանի փոփոխականներից, օրինակ՝

$$x=\varphi(t, v),\ y=\psi(t, v),\ z=\chi(t, v)։$$

Բացի $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալների գոյությունից ու անընդհատությունից*, մենք այստեղ ենթադրում ենք, որ գոյություն ունեն x, y, z ֆունկցիաների ածանցյալները ըստ t-ի և ըստ v-ի։

φ, ψ, χ ֆունկցիաները f ֆունկցիայի մեջ տեղադրելուց հետո, մենք կունենանք t և v երկու փոփոխականներից կախված մի որոշ ֆունկցիա, և հարց է առաջանում u'_t և u'_v մասնակի ածանցյալների անընդհատության և նրանք հաշվելու մասին։ Սակայն այս դեպքը էապես չի տարբերվում արդեն ուսումնասիրված դեպքից, որովհետև երկու փոփոխականների ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալը հաշվելիս մենք փոփոխականներից մեկը ֆիքսում ենք, և մեզ համար մնում է միայն մեկ փոփոխականի ֆունկցիա։ Հետևապես, այս դեպքի համար (8)-րդ բանաձևը մնում է անփոփոխ, իսկ (9)-րդ բանաձևը պետք է գրել այսպես,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}. \tag{9*}$$

172. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Դիտարկենք

$$u=x^y$$

աստիճանա-ցուցչային ֆունկցիան։

Ընդունելով $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ և դիֆերենցելով բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցման հենց նոր արտածված կանոնով, կստանանք Ի. Բեռնուլիի մեզ արդեն հայտնի բանաձևը՝

$$u'_t=y\cdot x^{y-1}x'_t+x^y\cdot\log x\cdot y'_t։$$

Առաջ մենք այդ ստացել էինք (այլ նշանակումներով) արհեստական մեթոդով [98, 23]։

* Տես նախորդ էջի ծանոթագրությունը։

2) Դիցուք u = f(x, y, z) ֆունկցիան ունի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ, և x, y, z փոփոխականների փոխարեն տեղադրված են՝

$$x = \eta - \zeta,\quad y = \zeta - \xi,\quad z = \xi - \eta.$$

Այդ ժամանակ՝

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y},$$

3) Եթե (f-ի նկատմամբ նույն ենթադրությունների դեպքում) x-ը պահպանելով որպես անկախ փոփոխական, ընդունենք՝

$$y = y(x) \text{ և } z = z(x),$$

որտեղ y(x), z(x) ֆունկցիաները դիֆերենցելի են ըստ x-ի, ապա u-ն, որպես x-ի բարդ ֆունկցիա, կունենա այսպիսի ածանցյալ՝

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx},$$

կամ՝

$$\frac{du}{dx} = f'_x(x, y(x), z(x)) + f'_y(x, y(x), z(x))\cdot y'(x) +$$

$$+ f'_z(x, y(x), z(x)).z'(x).$$

Այստեղ x-ն ինքն է կատարում t-ի դերը (8) բանաձևում։

4) Իսկ եթե x և y երկու փոփոխականներն էլ թողնենք որպես անկախ փոփոխականներ և z-ի փոխարեն տեղադրենք

$$z = z(x, y)$$

ֆունկցիան, որն ըստ x-ի և ըստ y-ի ածանցյալներ ունի, ապա u = f(x, y, z(x, y)) բարդ ֆունկցիայի համար կունենանք՝

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_x(x, y, z(x, y)) + f'_z(x, y, z(x, y)).z'_x(x, y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'_y(x, y, z(x, y)) + f'_z(x, y, z(x, y)).z'_y(x, y).$$

5) Որպես (8)-րդ բանաձևի կիրառման նոր օրինակ, քննության առնենք

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

դետերմինանտը դիֆերենցելու հարցը, այն ենթադրությամբ, որ նրա a_{ik} $(i, k = 1, 2, \dots, n)$ էլեմենտները մի t պարամետրի ֆունկցիաներ են, որոնց համար գոյություն ունեն ածանցյալներ ըստ t-ի՝ $\frac{da_{ik}}{dt}$։

Վերհիշելով դետերմինանտի վերլուծումն ըստ k-րդ սյան էլեմենտների՝

$$\Delta = A_{1k}\cdot a_{1k}+A_{2k}\cdot a_{2k}+\dots+A_{ik}\cdot a_{ik}+\dots+A_{nk}\cdot a_{nk},$$

որտեղ $A_{1k}, A_{2k}, \dots, A_{nk}$ մինորները a_{ik} էլեմենտը չեն պարունակում, գալիս ենք այն եզրակացության, որ՝

$$\frac{\partial\Delta}{\partial a_{ik}}=A_{ik}.$$

Այդ դեպքում, համաձայն (9)-րդ բանաձևի, կունենանք՝

$$\frac{d\Delta}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{ik}}\cdot\frac{da_{ik}}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}A_{ik}\cdot\frac{da_{ik}}{dt}.$$

Նկատենք, որ $\sum_{i=1}^{n}A_{ik}\cdot\frac{da_{ik}}{dt}$ գումարը տալիս է այնպիսի դետերմինանտի վերլուծումը, որը տարբերվում է միայն նրանով, որ նրա k-րդ սյան էլեմենտները փոխարինված են իրենց ածանցյալներով ըստ t-ի։ Այստեղից ստացվում է հետևյալ կանոնը՝ Δ դետերմինանտի ածանցյալը հավասար է n հատ այնպիսի դետերմինանտների գումարի, որոնք ստացվում են Δ-ից, հերթականությամբ նրա 1-ին, 2-րդ, ..., n-րդ սյան էլեմենտներն իրենց ածանցյալներով փոխարինելով։

(8) բանաձևը նման է $u'_t=u'_x\cdot x'_t$ բանաձևին մեկ x փոփոխականի u ֆունկցիայի դեպքի համար։ Սակայն, նորից ընդգծենք այն տարբերությունը, որը գոյություն ունի այդ բանաձևերն ստանալու պայմանների միջև։ Եթե u-ն կախված է մեկ փոփոխականից, ապա բավական է միայն ենթադրել u'_x ածանցյալի գոյությունը. իսկ մի քանի փոփոխական-

ների դեպքում՝ մենք ստիպված եղանք ենթադրել u'_x, u'_y, ... *ածանցյալների անընդհատությունը և։ Հետևյալ օրինակները ցույց են տալիս, որ այդ ածանցյալների միայն գ ո յ ո ւ թ յ ո ւ ն ը (8) բանաձևի ճշտության համար ընդհանրապես բավական չէ:*

6) Որոշենք $u=f(x, y)$ *ֆունկցիան, ընդունելով՝*

$$f(x, y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2} \text{ (երբ } x^2+y^2>0), \quad f(0,0)=0.$$

Ինչպես տեսանք, այդ ֆունկցիան բոլոր կետերում, առանց բացառելու նաև (0,0) սկզբնակետը, ունի մասնակի ածանցյալներ, ընդ որում

$$f'_x(0,0)=0, \quad f'_y(0,0)=0.$$

Նկատենք, որ հենց այդ կետում ածանցյալներն ունեն խզում.

Եթե մտցնենք t *նոր փոփոխական, ընդունելով* $x=t$ *և* $y=t$, *ապա կստանանք* t*-ից կախված բարդ ֆունկցիա։ Ըստ (8) բանաձևի, այդ ֆունկցիայի ածանցյալը* $t=0$ *դեպքում կ լ ի ն ե ր՝*

$$u'_t=u'_x \cdot x'_t+u'_y \cdot y'_t=0.$$

Բայց, մյուս կողմից, եթե x *և* y *փոփոխականների արժեքները տեղադրենք տված* $u=f(x, y)$ *ֆունկցիայի մեջ, կստանանք՝*

$$u=\frac{t^2 \cdot t}{t^2+t^2}=\frac{1}{2}t.$$

Հիմա անմիջականորեն դիֆերենցելով ըստ t*-ի, կունենանք* $u'_t=\frac{1}{2}$ t*-ի ամեն մի արժեքի դեպքում, ուրեմն նաև* $t=0$ *դեպքում։*

Պարզվում է, որ տվյալ դեպքում (8) բանաձևը կիրառելի չէ.

7)

$$f(x, y)=\frac{x^{\frac{5}{3}} \cdot y}{x^2+y^2} \text{ (երբ } x^2+y^2>0), \quad f(0,0)=0,$$

համապատասխանորեն որոշվող ֆունկցիայի վարքը (0,0) կետում միանգամայն նման է նախորդին։ Այստեղ վերցնելով $x=y=t$, *կստանանք* $u=\frac{1}{2} \cdot t^{\frac{2}{3}}$ *բարդ ֆունկցիան, որը* $t=0$ *դեպքում ունի ա ն վ ե ր ջ ածանցյալ։ Իսկ եթե ընդունենք՝* $x=t$, *իսկ*

$$y=t^{\frac{3}{4}} \cdot \sin\frac{1}{t} \text{ երբ } t\neq0, \text{ և } y=0 \text{ երբ } t=0,$$

ապա

$$u=\frac{t\cdot\sin\frac{1}{t}}{1+t^3\sin^2\frac{1}{t}}\quad \text{երբ } t\neq 0,\ u=0 \text{ երբ } t=0,$$

հավասարումներով որոշվող բարդ ֆունկցիան $t=0$ դեպքում ոչ մի ածանցյալ չի ունենա։

173. ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԱՃԵՐԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ։ Դիցուք $f(x, y, z)$ ֆունկցիան որոշված է ու անընդհատ D փակ տիրույթում և այդ տիրույթի ներսը (այսինքն նրա ամեն մի ներքին կետում) ունի f'_x, f'_y, f'_z անընդհատ մասնակի ածանցյալներ։ Դիտարկենք D-ից վերցրած երկու կետեր՝

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \text{ և } M_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z),$$

որոնք կարելի է միացնել M_0M ուղղագիծ հատվածով, որն ամբողջությամբ գտնվում է D տիրույթում։

Այդ ժամանակ տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$\Delta f(x_0, y_0, z)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)-f(x_0, y_0, z_0)$$

$$=f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y, z_0+\theta\Delta z)\cdot\Delta x+f'_y(\ldots)\cdot\Delta y+$$

$$+f'_z(\ldots)\cdot\Delta z,\quad (0<\theta<1), \tag{10}$$

որը լրիվին նման է մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի համար վերջավոր աճերի հայտնի բանաձևին [118, (2)]։

Այդ բանաձևն ապացուցելու համար, $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի մեջ ընդունենք՝

$$x=x_0+t\cdot\Delta x,\ y=y_0+t\cdot\Delta y,\ z=z_0+t\cdot\Delta z \tag{11}$$

(երբ $0\leqslant t\leqslant 1$), այսինքն՝ մեր ֆունկցիան դիտարկենք հենց M_0M_1 ուղղագիծ հատվածի կետերում։ t-ից կախված՝

$$F(t)=f(x_0+t\cdot\Delta x,\ y_0+t\cdot\Delta y,\ z_0+t\cdot\Delta z)$$

բարդ ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ $[0,1]$ միջակայքում

[160], *իսկ նրա նույնն ունի ածանցյալ, որը, ըստ (8) բանաձևի, հավասար է՝*

$$F'(t)=f'_x(x_0+t.\Delta x,\ y_0+t.\Delta y,\ z_0+t.\Delta z).\Delta x+$$

$$+f'_y(\dots).\Delta y+f'_z(\dots).\Delta z,$$

որովհետև, (11)-ից ունենք՝

$$\frac{dx}{dt}=\Delta x,\quad \frac{dy}{dt}=\Delta y,\quad \frac{dz}{dt}=\Delta z։$$

F(t) *ֆունկցիայի նկատմամբ* [0,1] *միջակայքում կիրառենք* n° 118-*ի* (2)-*րդ բանաձևը՝*

$$F(1)-F(0)=F'(\Theta)\qquad (0<\Theta<1)։$$

Եթե նկատենք, որ ըստ F(t) *ֆունկցիայի սահմանման,*

$$F(1)-F(0)=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)-f(x_0,\ y_0,\ z_0),$$

և $F'(\Theta)$ *ածանցյալի փոխարեն տեղադրենք վերևում ստացված արտահայտությունը (երբ* $t=\Theta$*), ապա կստանանք (10) բանաձևը։*

Իբրև ապացուցված բանաձևի կիրառման պարզ օրինակ, բերենք հետևյալ առաջադրությունը՝

Եթե $f(x,y,z)$ **ֆունկցիան անընդհատ է** *D* **փակ և կապակցված տիրույթում, տիրույթի ներսում ունի զրոյի հավասար մասնակի ածանցյալներ՝**

$$f'_x=f'_y=f'_z=0,$$

ապա այդ ֆունկցիան ամբողջ *D* **տիրույթում հաստատուն է՝**

$$f=\text{const}։$$

Դիցուք $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ *և* $M(x,\ y,\ z)$ *կետերը D տիրույթի որևէ երկու կետեր են։ Քանի որ, ըստ ենթադրության, D տիրույթը կապակցված է, ուստի այդ կետերը կարելի է միացնել D-ի սահմաններից դուրս չեկող բեկյալով։ Եթե* $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ *կետը հանդիսանում է բեկյալի այն գագաթը, որը հաջորդում է* M_0-*ին, ապա (10)-ի մեջ ընդունելով՝*

$$x_0+\Delta x=x_1,\quad y_0+\Delta y=y_1,\quad z_0+\Delta z=z_1,$$

անմիջապես կստանանք՝

$$f(x_1,\ y_1,\ z_1)=f(x_0,\ y_0,\ z_0).$$

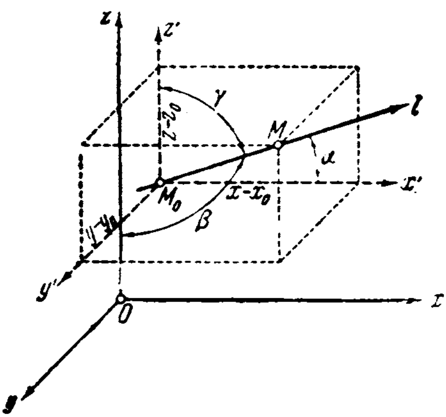
այս ձևով, հաջորդաբար մեկ գագաթից մյուսին անցնելով, վերջնականապես կստանանք՝

$$f(x,\ y,\ z)=f(x_0,\ y_0,\ z_0),$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։

174. ԱԾԱՆՑՅԱԼ ՏՎՅԱԼ ՈՒՂՂՈՒԹՅԱՄԲ։ $f(M)=f(x,y,z)$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալներն ըստ x-ի, ըստ y-ի, ըստ z-ի արտահայտում են ֆունկցիայի «փոփոխման արագությունը» կոորդինատային առանցքների ուղղությամբ։ Օրինակ, f'_x-ը ֆունկցիայի «փոփոխման արագությունն» է ըստ x-ի. ենթադրվում է, որ կետը տեղափոխվում է միայն x-երի առանցքին զուգահեռ ուղիղով։

Մինչդեռ, ֆիզիկական շատ հարցերում կարող է հետաքրքրություն ներկայացնել նաև $f(M)$ ֆունկցիայի «փոփոխման արագությունը» այլ ուղղություններով։ Այդպես կլինի, օրինակ, այն դեպքում, երբ տրված է ջերմաստիճանի դաշտը, այսինքն՝ երբ տրված է $f(M)$ ջերմաստիճանը՝ դիտարկվող մարմնի յուրաքանչյուր M կետում։ Ջերմության բաշխման ու տեղափոխման օրենքները էապես կախված են բոլոր ուղղություններով ջերմաստիճանի անկման (կամ բարձրացման) արագությունից։ Ճշտենք կամայապես տված ուղղությամբ ֆունկցիայի «փոփոխման արագության» կամ ածանցյալի գաղափարը։ Այստեղ ևս առիթ կունենանք օգտագործելու (9) բանաձևը։



Գծ. 99.

Դիցուք $f(M)$ ֆունկցիան

որոշված է մի որոշ (բաց) տիրույթում։ Դիտարկենք այդ տիրույթի որևէ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետը և այդ կետով անցնող և ուղղությամբ օժտված մի որևէ l ուղիղ (առանցք)։ (գծ. 99)։ Դիցուք $M(x, y, z)$-ը՝ այդ առանցքի որևէ մեկ այլ կետ է, M_0M-ը՝ M_0 և M կետերի միջև եղած հատվածի երկարությունն է վերցրած համապատասխան նշանով, այն է՝ դրական նշանով, եթե M_0M ուղղությունը համընկնում է l առանցքի ուղղության հետ, և բացասական նշանով, երբ չի համընկնում։

Դիցուք M-ը կամայականորեն մոտենում է M_0-ին։ Եթե գոյություն ունի՝

$$\lim_{M \to M_0} \frac{f(M)-f(M_0)}{M_0M}$$

սահմանը, ապա այն կոչվում է $f(M)$ ֆունկցիայի ածանցյալ l ուղղությամբ (կամ՝ ըստ l ուղղության, կամ՝ l առանցքի երկարությամբ) և նշանակվում է այսպես՝

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l}.$$

Հենց այս ածանցյալն էլ բնորոշում է M_0 կետում ֆունկցիայի «փոփոխման արագությունը» l ուղղությամբ։

Մասնավորապես, ինչպես արդեն ասացինք, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ մասնակի ածանցյալները և՛ կարելի է դիտել որպես ածանցյալներ «ըստ ուղղության»։

Այժմ ենթադրենք, թե $f(x, y, z)$ ֆունկցիան դիտարկվող տիրույթում ունի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ*։ Դիցուք l առանցքը կոորդինատային առանցքների հետ կազմում է α, β, γ անկյուններ։ Ապացուցենք, որ տրված ենթադրությունների դեպքում l ուղղությամբ ածանցյալ գոյություն ունի և արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \cos\gamma. \qquad (12)$$

---

* Տես 496 էջի ծանոթագրությունը։

Ապացուցելու համար նախ նկատենք, որ եթե ընդունենք $M_0M=t$, *ապա կունենանք*

$$x-x_0=t\cdot\cos\alpha,\quad y-y_0=t\cdot\cos\beta,\quad z-z_0=t\cdot\cos\gamma.$$

Ուրեմն, l առանցքի երկարությամբ x, y, z *կոորդինատները կարելի է դիտել որպես t-ի ֆունկցիաներ՝*

$$x=x_0+t\cdot\cos\alpha,\quad y=y_0+t\cdot\cos\beta,\quad z=z_0+t\cdot\cos\gamma, \tag{13}$$

իսկ $f(M)=f(x, y, z)$ *ֆունկցիան՝ որպես t-ի* $\varphi(t)$ *բարդ ֆունկցիա։ Այդ ժամանակ* M_0 *կետին համապատասխանում է* $t=0$ *արժեքը։*

Այսպիսով, ունենք՝

$$\frac{\partial f(M_0)}{dl}=\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{M_0M}=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}=\varphi'(0),$$

եթե միայն գոյություն ունի $\varphi'(0)$ *ածանցյալը։ Բայց, վերևում արված ենթադրությունների համաձայն,* $\varphi'(t)$ *ածանցյալը գոյություն ունի և արտահայտվում է, (9) բանաձևի համաձայն, հետևյալ կերպ՝*

$$\varphi'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}.$$

Օգտագործելով (13) բանաձևը, կստանանք՝

$$\varphi'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\cos\gamma,$$

որտեղից հետևում է մեր պնդումը։

Այժմ լուծենք հետևյալ հարցը՝ տված կետում ֆունկցիան ո՞ր ուղղությամբ ամենից արագ կաճի: *Իհարկե, այս հարցը իմաստ կունենա միայն այն դեպքում, երբ*

$$a=\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x},\quad b=\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y},\quad c=\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \tag{14}$$

ածանցյալները բոլորը միասին հավասար չեն զրոյի (որովհետև հակառակ դեպքում, ցանկացած ուղղությամբ վերցրած ածանցյալը հավասար կլիներ զրոյի)։

Այս ենթադրությամբ, դնենք (12) արտահայտության ձևափոխությունը՝

$$a.\cos\alpha+b.\cos\beta+c.\cos\gamma=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{\ldots}}.\cos\alpha+\frac{b}{\sqrt{\ldots}}.\cos\beta+\frac{c}{\sqrt{\ldots}}.\cos\gamma\right).$$

Փակագծերի մեջ գրված կոտորակները կարելի է դիտել որպես մի որոշ g ուղղության ուղղորդ կոսինուսներ՝

$$\frac{a}{\sqrt{\ldots}}=\cos\lambda,\quad \frac{b}{\sqrt{\ldots}}=\cos\mu,\quad \frac{c}{\sqrt{\ldots}}=\cos\nu,$$

և այդ ժամանակ մենք կստանանք՝

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}.(\cos\lambda.\cos\alpha+\cos\mu.\cos\beta+\cos\nu.\cos\gamma).$$

Եթե (g, l)-ով նշանակենք g և l ուղղություններով կազմված անկյունը, ապա անալիտիկ երկրաչափության հայտնի բանաձևի համաձայն կստանանք՝

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\cos(g,\ l) \tag{15}$$

Այժմ արդեն պարզ է, որ եթե l-ը համընկնի g-ի հետ, այդ ածանցյալը կստանա իր մեծագույն արժեքը՝

$$\frac{\partial f}{\partial g}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

g վեկտորը, որը կոորդինատների առանցքների վրա ունի (14) պրոյեկցիաները, ցույց է տալիս ֆունկցիայի ամենաարագ աճման ուղղությունը, իսկ նրա $|\vec{g}|$ երկարությունը տալիս է համապատասխան ածանցյալի մեծությունը։ Այդ վեկտորն անվանում են f(M)=f(x, y, z) ֆունկցիայի գրադիենտ:

(15) բանաձևը գրելով

$$\frac{\partial f}{\partial l}=|\vec{g}|\cdot\cos(\vec{g},\ l)$$

տեսքով, հեշտ է տեսնել, որ այն վեկտորը, որն ստացվում է, երբ l ուղղությամբ վերցնում ենք $\frac{\partial f}{\partial l}$ հատված, իրենից ներկայացնում է գրադիենտի պրոյեկցիան այդ ուղղության վրա։

175. (ԱՌԱՋԻՆ) ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼԻ ՁԵՎԻ ԱՆՓՈՓՈԽԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ։ Դիցուք $u=f(x, y, z)$ ֆունկցիան ունի u'_x, u'_y, u'_z մասնակի անընդհատ ածանցյալներ, ընդ որում x, y, z փոփոխականները, իրենց հերթին, հանդիսանում են t և v նոր փոփոխականների ֆունկցիաներ՝

$$x=\varphi(t, v), \quad y=\psi(t, v), \quad z=\chi(t, v),$$

որոնք նույնպես ունեն x'_t, x'_v, y'_t, y'_v, z'_t, z'_v մասնակի անընդհատ ածանցյալներ։ Այդ ժամանակ [171] ոչ միայն գոյություն ունեն u ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալներն ըստ t-ի և ըստ v-ի, այլև այդ ածանցյալները նույնպես անընդհատ են t-ի և v-ի նկատմամբ, ինչպես այդ հեշտ է նկատել (8) բանաձևից։

Եթե x, y, z փոփոխականները լինեին անկախ փոփոխականներ, ապա, ինչպես մենք արդեն գիտենք, u-ի լրիվ դիֆերենցիալը հավասար կլիներ՝

$$du=u'_x\cdot dx+u'_y\cdot dy+u'_z\cdot dz$$

արտահայտությանը։

Իսկ տվյալ դեպքում u-ն՝ x, y, z փոփոխականների միջոցով կախված է t և v փոփոխականներից։ Հետևապես, այդ փոփոխականների նկատմամբ դիֆերենցիալը կգտնվի այսպես՝

$$du=u'_t\cdot dt+u'_v\cdot dv.$$

Բայց, (8)-ի շնորհիվ, ունենք՝

$$u'_t=u'_x\cdot x'_t+u'_y\cdot y'_t+u'_z\cdot z'_t,$$

և, նույն ձևով՝

$$u'_v=u'_x\cdot x'_v+u'_y\cdot y'_v+u'_z\cdot z'_v.$$

Այս արժեքները տեղադրելով du-*ի համար գրված արտահայտության մեջ, կունենանք՝*

$$du=(u'_x\cdot x'_t+u'_y\cdot y'_t+u'_z\cdot z'_t)dt+(u'_x\cdot x'_v+u'_y\cdot y'_v+u'_z\cdot z'_v).dv.$$

Սրա անդամները վերախմբավորենք հետևյալ կերպ՝

$$du=u'_x\cdot(x'_t\cdot dt+x'_v\cdot dv)+u'_y\cdot(y'_t\cdot dt+y'_v\cdot dv)+$$
$$+u'_z\cdot(z'_t\cdot dt+z'_v\cdot dv).$$

Դժվար չէ տեսնել, որ փակագծերի մեջ գրված արտահայտությունները ոչ այլ ինչ են, եթե ոչ x, y, z *ֆունկցիաների* (u-*ից և* v-*ից կախված*) *դիֆերենցիալները, ուստի կարող ենք գրել՝*

$$du=u'_x\cdot dx+u'_y\cdot dy+u'_z\cdot dz.$$

Մենք ստացանք դիֆերենցիալի նույն ձևը, ինչ որ ունեինք այն դեպքում, երբ x, y, z *փոփոխականներն անկախ էին (բայց այստեղ, իհարկե,* dx, dy, dz *սիմվոլների իմաստը արդեն այլ է)։*

Ուրեմն, մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի համար տեղի ունի (առաջին) դիֆերենցիալի ձևի անփոփոխականություն (ինվարիանտություն), *ինչպես և մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի համար**։

Կարող է պատահել, որ x, y, z *փոփոխականները կախված լինեն տարբեր փոփոխականներից, օրինակ,*

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t, w),\ z=\chi(v, w).$$

Այսպիսի դեպքում մենք միշտ կարող ենք ընդունել, որ

$$x=\varphi_1(t, v, \varkappa),\ y=\psi_1(t, v, w),\ z=\chi_1(t, v, w),$$

և նախորդ բոլոր դատողությունները կիրառելի կլինեն նաև այս դեպքի նկատմամբ։

---

* *Նկատենք, որ միևնույն եզրակացությունը ճիշտ է նաև միայն այն ենթադրության դեպքում, երբ ընդունում ենք, որ բոլոր ֆունկցիաները դիֆերենցելի են։ Սրանում համոզվելու համար, բավական է ցույց տալ, որ դիֆերենցելի ֆունկցիաների սուպերպոզիցիաների արդյունքը դարձյալ դիֆերենցելի ֆունկցիա կլինի։*

Հետևանք։ Այն դեպքում, երբ x-ը և y-ը մեկ փոփոխականի ֆունկցիաներ են, ունենք հետևյալ բանաձևերը՝

$$d(c\cdot x)=c.dx,\quad d(x\pm y)=dx\pm dy,\quad d(x\,y)=y\cdot dx+x.dy,$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\cdot dx-x.dy}{y^2},$$

Այս բանաձևերը ճիշտ են նաև այն դեպքում, երբ x-ը և y-ը հանդիսանում են ցանկացած թվով փոփոխականների ֆունկցիաներ, այսինքն, երբ՝

$$x=\varphi(t,\ v,\ \dots),\ y=\psi(t,\ v,\ \dots)։$$

Ապացուցենք, օրինակ, վերջին բանաձևը։

Դրա համար սկզբում ընդունենք, որ x-ը և y-ը անկախ փոփոխականներ են, այդ ժամանակ կունենանք՝

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{y}.dx-\frac{x}{y^2}.dy=\frac{y.dx-x.dy}{y^2},$$

Տեսնում ենք, որ այդ ենթադրության դեպքում դիֆերենցիալը ունի նույն տեսքը, ինչ որ մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի համար։ Իսկ դիֆերենցիալի տեսքի անփոփոխականության հիման վրա կարելի է պնդել, որ այդ բանաձևը ճիշտ է նաև այն դեպքում, երբ x-ը և y-ը հանդիսանում են ցանկացած թվով անկախ փոփոխականների ֆունկցիաներ։

Լրիվ դիֆերենցիալի վերոհիշյալ հատկությունն ու նրանից բխող հետևանքները թույլ են տալիս ավելի հեշտացնելու դիֆերենցիալների հաշվումը. օրինակ

$$1)\quad d\,\mathrm{arctg}\frac{x}{y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}.d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y.dx-x.dy}{x^2+y^2},$$

$$2)\ d\frac{x}{x^2+y^2+z^2}=\frac{(x^2+y^2+z^2)dx-x.d(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}=$$

$$=\frac{(y^2+z^2-x^2)dx-2xy.dy-2xz.dz}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

Քանի որ անկախ փոփոխականների դիֆերենցիալների գործակիցները հանդիսանում են համապատասխան մասնակի ածանցյալները, ապա-

որ այստեղից անմիջապես ստացվում են նաև վերջինների արժեքները:

Օրինակ, $u = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$-ի համար անմիջապես կունենանք՝

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2},$$

իսկ $u = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$ ֆունկցիայի համար ուղղակի կստանանք՝

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

[համեմատել 167-ի 2)-ի և 3)-ի հետ]:

176. ԼՐԻՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՄՈՏԱՎՈՐ ՀԱՇՎՈՒՄՆԵՐՈՒՄ: Մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի անալոգիայով [107], մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալը ևս հաջողությամբ կիրառվում է մոտավոր հաշվումներում սխալները գնահատելիս: Դիցուք ունենք $u = f(x, y)$ ֆունկցիան, ընդ որում x-ի և y-ի արժեքները հաշվելիս կատարում ենք, ասենք թե, Δx և Δy սխալներ: Այդ ժամանակ նաև u-ի արժեքը, որը հաշվված է արգումենտների որոշ չափով սխալ արժեքներով, կստացվի $\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta x) - f(x, y)$ սխալով: Խոսքը վերաբերում է այդ սխալի գնահատմանը, եթե հայտնի են Δx և Δy սխալների գնահատականները:

Ֆունկցիայի աճը (մոտավորությամբ) փոխարինելով նրա դիֆերենցիալով (որը հնարավոր է միայն Δx-ի և Δy-ի բավականաչափ փոքր արժեքների դեպքում), կստանանք՝

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \Delta y \tag{16}$$

Այստեղ թե Δx և Δy սխալները, և թե նրանց գործակիցները կարող են լինել ինչպես դրական, նույնպես և բացասական մեծություններ. դրանք փոխարինելով իրենց բացարձակ արժեքներով, կստանանք հետևյալ անհավասարությունը՝

$$|\Delta u| \le \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \cdot |\Delta x| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \cdot |\Delta y|:$$

անհավասարությունը: Եթե δu, δx, δy սիմվոլներով նշանակենք առավելագույն բացարձակ սխալները (կամ բացարձակ սխալների սահմանները), ապա, ակներևաբար, կարելի է ընդունել՝

$$\delta u=\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\cdot\delta x+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\cdot\delta y. \qquad (17)$$

Բերենք օրինակներ:

1) Ամենից առաջ, վերևում ստացված բանաձևերի օգնությամբ հեշտությամբ կարելի է գտնել մոտավոր հաշվումների պրակտիկայում սովորաբար կիրառվող կանոնները: Դիցուք $u=x\cdot y$ *(որտեղ* $x>0,\ y>0$*), այնպես որ* $du=y\cdot dx+x\cdot dy$. *դիֆերենցիալներն աճերով փոխարինելով, կստանանք* $\Delta u=y\cdot\Delta x+x\cdot\Delta y$ *[տես (10)] կամ, անցնելով սխալների սահմաններին [տես (17)]՝*

$$\delta u=y\cdot\delta x+x\cdot\delta y.$$

Այս հավասարման երկու մասը բաժանելով $u=xy$*-ի վրա, կստանանք վերջնական բանաձևը՝*

$$\frac{\delta u}{u}=\frac{\delta x}{x}+\frac{\delta y}{y}, \qquad (18)$$

որն արտահայտում է հետևյալ կանոնը՝

Արտադրյալի (առավելագույն) հարաբերական սխալը հավասար է արտադրիչների (առավելագույն) հարաբերական սխալների գումարին:

Կարելի էր վարվել ավելի հեշտ ձևով՝ նախ լոգարիթմել $u=x\cdot y$ *բանաձևը, և ապա դիֆերենցել՝*

$$\log u=\log x+\log y,\quad \frac{du}{u}=\frac{dx}{u}+\frac{dy}{u}^{*},$$ *և այլն:*

Եթե $u=\frac{x}{y}$, *ապա այդ մեթոդով կգտնենք*

$$\log u=\log x-\log y,\quad \frac{du}{u}=\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}.$$

Անցնելով բացարձակ արժեքներին և առավելագույն սխալներին, մենք դարձյալ կստանանք (18) բանաձևը: Այսպիսով, **քանորդի (առավելագույն) հարաբերական սխալը հավասար է բաժանելիի և բաժանարարի (առավելագույն) հարաբերական սխալների գումարին:**

---

* *Ընթերցողի ուշադրությունը հրավիրում ենք այն հանգամանքի վրա, որ* log u*-ի դիֆերենցիալը մենք հաշվում ենք այնպես, ինչպես որ կհաշվեինք, եթե* u*-ն լիներ անկախ փոփոխական, չնայած որ իրականում* x*-ի և* y*-ի ֆունկցիա է* [175]: *Այս դիտողությունը պետք է ի նկատի ունենալ նաև հետագայում:*

2) Սխալների հաշվումը հաճախակի կիրառություն է գտնում տոպոգրաֆիայում, գլխավորապես եռանկյան անմիջականորեն չչափված էլեմենտները՝ նրա չափած էլեմենտների միջոցով հաշվելիս։

Այդ բնագավառից բերենք մի քանի օրինակներ։ Դիցուք ΔABC ուղղանկյուն եռանկյան AC = b էջը և նրան կից ∢BAC = α անկյունը չափված են, իսկ երկրորդը՝ a էջը հաշվվում է $a = b.\operatorname{tg}\alpha$ բանաձևով (գծ. 100)։ Իմանալ, թե b և α մեծությունները չափելիս առաջացած սխալները ինչպես կազդեն a-ի արժեքի վրա։

Լոգարիթմելով և դիֆերենցելով, կստանանք՝

$$\frac{da}{a} = \frac{db}{b} + \frac{d\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha} \quad \text{որտեղից} \quad da = \operatorname{tg}\alpha . db + \frac{b}{\cos^2\alpha}.d\alpha,$$

ուստի և՝

$$\delta a = \operatorname{tg}\alpha.\delta b + \frac{b}{\cos^2\alpha}.\delta\alpha.$$

Դիցուք, օրինակ, չափումներից ստացել ենք հետևյալ արդյունքները

$$b = 121,56 \text{ մ} \pm 0,05 \text{ մ},$$
$$\alpha = 25^\circ 21' 40'' \pm 12'',$$

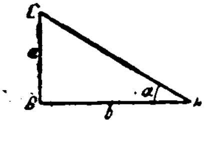
Այնպես որ՝

$$a = 57,62 \text{ մ}.$$

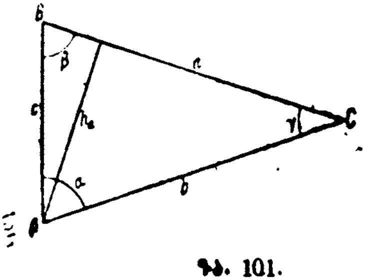
Մեր բանաձևի միջոցով հաշվելով δa-ն, պետք է ընդունենք $\delta b = 0,05$, իսկ $\delta\alpha = \frac{12''}{206265''}$ (δα-ն պետք է արտահայտել ռադիաններով, իսկ մեկ ռադիանը հավասար է հենց $\frac{60''.60.360}{2\pi} = 206265''$)։ Մենք կստանանք՝

$$\operatorname{tg}\alpha . \delta b = 0,0237, \quad \frac{b}{\cos^2\alpha}\delta\alpha = 0,0087,$$

ուստի, կլորացնելով, կարելի է ընդունել $\delta a = 0,04$։ Այսպիսով, $a = 57,62$ մ ± 0,04 մ։



Գծ. 100.



Գծ. 101.

3) Հաշվենք այն սխալը, որը առաջանում է, երբ ABC շեղանկյուն եռանկյան (գծ. 101) a կողմը հաշվում ենք

$$a = \sqrt{b^2+c^2-2bc.\cos\alpha}$$

բանաձևով։ Օգտվելով n 167-ի 5)-րդ օրինակի արդյունքներից, այս (17) բանաձևը կարելի է անմիջապես գրել՝

$$\delta a = \frac{b-c.\cos\alpha}{a}.\delta b + \frac{c-b.\cos\alpha}{a}.\delta c + \frac{bc.\sin\alpha}{a}.\delta\alpha ։$$

Գծագրից անմիջապես երևում է, որ՝

$$b-c.\cos\alpha = a.\cos\gamma,\quad c-b.\cos\alpha = a.\cos\beta,\quad bc.\sin\alpha = a.h_a,$$

որտեղ h_a-ն՝ եռանկյան A գագաթից իջեցրած բարձրությունն է։ Այսպիսով՝

$$\delta a = \cos\gamma.\delta b + \cos\beta.\delta c + h_a.\delta\alpha ։$$

Այս բանաձևի միջոցով հեշտ է իմանալ δb, δc, $\delta\alpha$ առանձին սխալների ազդեցությունը δa-ի վրա։

177. ՀԱՄԱՍԵՌ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ։ Ինչպես հայտնի է, համասեռ բազմանդամներ կոչվում են այն բազմանդամները, որոնք կազմված են միևնույն չափումներն ունեցող անդամներից։ օրինակ

$$3x^2-2xy+5y^2$$

արտահայտությունը երկրորդ աստիճանի համասեռ բազմանդամ է։ Եթե այստեղ x-ը և y-ը բազմապատկենք որևէ t արտադրիչով, ապա ամբողջ բազմանդամը ձեռք կբերի t^2 արտադրիչ։ Այսպիսի երևույթ տեղի ունի ամեն մի համասեռ բազմանդամի համար։

Սակայն, նաև ավելի բարդ կառուցվածքի ֆունկցիաները կարող են ունենալ վերոհիշյալ հատկությունը։ Օրինակ, եթե վերցնենք

$$x.\frac{\sqrt{x^4+y^4}}{x-y}.\log\frac{x}{y}$$

արտահայտությունը, ապա սա էլ կստանա t^2 արտադրիչ երբ x և y երկու արգումենտներն էլ բազմապատկվեն t-ով, այս տեսակետից նմանվելով երկրորդ աստիճանի համասեռ բազմանդամին։ Նման ֆունկցիան, բնական կլինի, դարձյալ անվանել երկրորդ աստիճանի համասեռ ֆունկցիա։

Տանք ընդհանուր սահմանում.

Սահմանում: n թվով արգումենտների $f(x_1, \dots, x_n)$ ֆունկցիան, որը որոշված է D տիրույթում, կոչվում է m-րդ աստիճանի համասեռ ֆունկցիա, երբ նրա բոլոր արգումենտները t-ով բազմապատկելիս ֆունկցիան ստանում է այդ նույն արտադրիչը՝ m-րդ աստիճանով, *այսինքն, եթե նույնաբար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝*

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^m \cdot f(x_1, \dots, x_n). \tag{19}$$

Պարզության համար մենք սահմանափակվում ենք այն ենթադրությամբ, որ այստեղ $x_1, \dots, x_n$ և t մեծությունները ընդունում են միայն դրական արժեքներ: Ենթադրվում է, որ այն D տիրույթը, որտեղ դիտարկվում է f ֆունկցիան, իր յուրաքանչյուր $M(x_1, \dots, x_n)$ կետի հետ միասին պարունակում է նաև բոլոր $M_t(tx_1, \dots, tx_n)$ տեսքի կետերը, երբ $t>0$, այսինքն՝ սկզբնակետից ելնող և M կետով անցնող ամբողջ ճառագայթը:

Համասեռության m աստիճանը կարող է լինել ցանկացած իրական թիվ. այսպես, օրինակ,

$$x^{\pi} \cdot \sin\frac{y}{x} + y^{\pi} \cdot \cos\frac{x}{y}$$

ֆունկցիան հանդիսանում է x և y արգումենտների π-րդ աստիճանի համասեռ ֆունկցիա:

Այժմ աշխատենք ստանալ m-րդ աստիճանի համասեռ ֆունկցիայի ընդհանուր արտահայտությունը:

Դիցուք սկզբում $f(x_1, \dots, x_n)$ ֆունկցիան զրո աստիճանի համասեռ ֆունկցիա է. այդ ժամանակ՝

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Ընդունելով $t=\frac{1}{x_1}$, *կստանանք՝*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right),$$

եթե մտցնենք $(n-1)$ արգումենտների ֆունկցիա՝

$$\varphi(u_1, \ldots, u_{n-1}) = f(1, u_1, \ldots, u_{n-1}),$$

ապա կպարզվի, որ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Այսպիսով, զրո աստիճանի յուրաքանչյուր համասեռ ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել արգումենտների հարաբերությունների ֆունկցիայի տեսքով։ Ակներևաբար, հակադարձը նույնպես ճիշտ է, այնպես որ նախորդ հավասարությունը տալիս է զրո աստիճանի համասեռ ֆունկցիայի ընդհանուր արտահայտությունը։

Եթե $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *ֆունկցիան* m*-րդ աստիճանի համասեռ ֆունկցիա է (և միայն այդ դեպքում), նրա հարաբերությունը* x_1^m*-ին կլինի զրո աստիճանի համասեռ ֆունկցիա, ուստի՝*

$$\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{x_1^m} = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Այսպիսով, մենք ստացանք m*-րդ աստիճանի համասեռ ֆունկցիայի ընդհանուր տեսքը՝*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^m \cdot \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Օրինակ՝

$$x\frac{\sqrt{x^4+y^4}}{x-y}\log\frac{x}{y} = x^2 \cdot \frac{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^4}}{\frac{y}{x}-1} \cdot \log\frac{y}{x}.$$

178. *ԷՅԼԵՐԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ։* *Այժմ ենթադրենք, թե* $f(x, y, z)$* *համասեռ* (m *աստիճանի) ֆունկցիան* ***D*** *(բաց) տիրույթում*

* *Միայն գրության պարզության համար այստեղ մենք սահմանափակվում ենք երեք փոփոխականների դեպքով:*

ունի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ ըստ բոլոր արգումենտների։ Ըստ ցանկության ֆիքսելով D-ի (x_0, y_0, z_0) *կետը, հիմնական (19) նույնության շնորհիվ, ցանկացած* $t>0$ *արժեքի համար կունենանք՝*

$$f(tx_0, ty_0, tz_0)=t^m f(x_0, y_0, z_0).$$

Այս հավասարությունը դիֆերենցենք ըստ t-*ի. հավասարության ձախ մասը՝ ըստ բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցման կանոնի*, աջ մասը՝ որպես աստիճանային ֆունկցիա։ Կստանանք՝*

$$f'_x(tx_0, ty_0, tz_0)\cdot x_0+f'_y(tx_0, ty_0, tz_0)\cdot y_0+$$

$$f'_z(tx_0, ty_0, tz_0)\cdot z_0=mt^{m-1}\cdot f(x_0, y_0, z_0).$$

Եթե այստեղ ընդունենք $t=1$, *կստանանք հետևյալ բանաձևը՝*

$$f'_x(x_0, y_0, z_0)\cdot x_0+f'_y(x_0, y_0, z_0)\cdot y_0+f'_z(x_0, y_0, z_0)\cdot z_0=$$

$$=mf(x_0, y_0, z_0).$$

Այսպիսով, ամեն մի (x, y, z) *կետի համար տեղի ունի այսպիսի հավասարություն՝*

$$f'_x(x, y, z)\cdot x+f'_y(x, y, z)\cdot y+f'_z(x, y, z)\cdot z=$$

$$=mf(x, y, z) \qquad (20)$$

որը և կոչվում է էյլերի (L. Euler) բանաձև։

Մենք տեսանք, որ այդ հավասարությունը բավարարում է ամեն մի m-*րդ աստիճանի համասեռ ֆունկցիա, որն ունի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ։ Այժմ ցույց տանք, որ նաև ընդհակառակը՝ ամեն մի ֆունկցիա, որն իր մասնակի ածանցյալների հետ միասին անընդհատ է և բավարարում է էյլերի (20) հավասարությանը, անպայման հանդիսանում է* m-*րդ աստիճանի համասեռ ֆունկցիա։*

* *Հենց նրա համար, որպեսզի իրավունք ունենանք կիրառելու այդ կանոնը, մենք ենթադրեցինք մասնակի ածանցյալների անընդհատությունը։*

Իրոք, դիցուք $f(x, y, z)$-ը այդպիսի ֆունկցիա է. Ըստ ցանկության ֆիքսելով x_0, y_0, z_0 արժեքները, քննության առնենք t-ից ($t>0$) կախված հետևյալ ֆունկցիան՝

$$\varphi(t)=\frac{f(tx_0, ty_0, tz_0)}{t^m},$$

որը որոշված է ու անընդհատ բոլոր $t>0$ արժեքների համար։ Կոտորակը դիֆերենցելու կանոնից օգտվելով, հաշվելով այդ ֆունկցիայի $\varphi'(t)$ ածանցյալը, դարձյալ կստանանք կոտորակ, որի համարիչը հավասար է՝

$$[f'_x(tx_0, ty_0, tz_0)\cdot x_0+f'_y(tx_0, ty_0, tz_0)\cdot y_0+$$

$$+f'_z(tx_0, ty_0, tz_0)\cdot z_0]\cdot t-mf(tx_0, ty_0, tz_0)։$$

Էյլերի (20) բանաձևի մեջ x-ը, y-ը, z-ը փոխարինելով tx_0, ty_0, tz_0 մեծություններով, տեսնում ենք, որ այդ համարիչը դառնում է զրո, ուստի $\varphi'(t)=0$ և $\varphi(t)=c=\text{const.}$ (երբ $t>0$)։ Որպեսզի որոշենք c հաստատունը, $\varphi(t)$-ն որոշող հավասարության մեջ ընդունենք $t=1$։ Կստանանք՝

$$c=f(x_0, y_0, z_0)։$$

Ուրեմն՝

$$\varphi(t)=\frac{f(tx_0, ty_0, tz_0)}{t^m}=f(x_0, y_0, z_0)$$

կամ՝

$$f(tx_0, ty_0, tz_0)=t^m\cdot f(x_0, y_0, z_0),$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Կարելի է ասել, որ Էյլերի բանաձևը նույն չափով է բնորոշում m-րդ աստիճանի համասեռ ֆունկցիան, ինչպես և (19) հիմնական հավասարությունը։

§ 4. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐ

179. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ. Եթե $u=f(x, y, z)$* ֆունկցիան մի որոշ D (բաց) տիրույթում ունի մասնակի

* Այստեղ ևս գրության պարզության համար մենք սահմանափակվում ենք երեք փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքով։

ածանցյալ ըստ փոփոխականներից մեկի, ապա այդ ածանցյալն ինքը ևս, հանդիսանալով x, y, z փոփոխականների ֆունկցիա, կարող է որոշ (x_0, y_0, z_0) կետում ունենալ մասնակի ածանցյալներ ըստ նույն կամ մի այլ փոփոխականի։ Այդ վերջին ածանցյալները $u = f(x, y, z)$ սկզբնական ֆունկցիայի համար կլինեն երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալներ (կամ երկրորդ մասնակի ածանցյալներ)։

Եթե առաջին ածանցյալը վերցրած է եղել, օրինակ, ըստ x-ի, ապա դրա ածանցյալներն ըստ x, y, z փոփոխականների նշանակվում են այսպես՝

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x \partial z}$$

կամ՝

$$u''_{x^2} = f''_{x^2}(x_0, y_0, z_0), \quad u''_{xy} = f''_{xy}(x_0, y_0, z_0),$$

$$u''_{xz} = f''_{xz}(x_0, y_0, z_0)^{*}։$$

Նմանօրինակ ձևով սահմանվում են 3-րդ, 4-րդ և այլ կարգի ածանցյալները (երրորդ, չորրորդ, ... ածանցյալները)։ n-րդ կարգի ածանցյալի ընդհանուր սահմանումը կարելի է տալ ինդուկտիվորեն։

Նկատենք, որ տարբեր փոփոխականների նկատմամբ վերցրած բարձր կարգի ածանցյալը, օրինակ՝

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x\, \partial y \partial z^2}, \ \ldots,$$

կոչվում է խառն մասնակի ածանցյալ։

---

* Հասկանալի է, որ դիֆերենցիալ նշանակումները պետք է դիտել որպես ամբողջական սիմվոլներ։ Հայտարարում գրված ∂x^2-ն փոխարինում է, պայմանական ձևով, $\partial x \partial x$-ին և ցույց է տալիս երկու անգամ ըստ x-ի դիֆերենցումը. ճիշտ նույն կերպ ներքևում գրված x^2 նշանիկը փոխարինում xx-ին։ Այս պետք է ի նկատի ունենալ նաև հետագայում։

Օրինակներ։ 1) Դիցուք $u=x^4y^3z^2$, *այդ ժամանակ՝*

$$u'_x=4x^3y^3z^2, \qquad u''_{xy}=12x^3y^2z^2,$$

$$u'_y=3x^4y^2z^2, \qquad u''_{yx}=12x^3y^2z^2,$$

$$u'_z=2x^4y^3z, \qquad u''_{zx}=8x^3y^3z,$$

$$u'''_{xyz}=24x^3y^2z, \qquad u^{IV}_{xyzx}=72x^2y^2z,$$

$$u'''_{yxx}=36x^2y^2z^2, \qquad u^{IV}_{yxxz}=72x^2y^2z,$$

$$u'''_{zxy}=24x^3y^2z, \qquad u^{IV}_{zxyx}=72x^2y^2z.$$

2) $u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ *ֆունկցիայի համար մենք արդեն ստացել ենք* [167] *նրա մասնակի ածանցյալները՝*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

այժմ հաշվենք նրա մյուս ածանցյալները՝

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3},$$

և այլն։

3) $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ֆունկցիայի համար հաջորդաբար կունենանք՝

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Նման արտահայտություններ կստանանք նաև $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ մասնակի ածանցյալների համար։ Դրանք գումարելով, համոզվում ենք, որ u ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ հավասարմանը՝

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0։$$

4) Դիցուք $y=f(x+at)+\varphi(x-at)$, որտեղ $a=\text{const.}$, իսկ $f(u)$, $\varphi(u)$ երկու ֆունկցիաները՝ առաջին և երկրորդ կարգի ածանցյալներ ունեցող կամավոր ֆունկցիաներ են։ Ցույց տալ, որ y-ը բավարարում է $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ հավասարմանը, ինչպիսին էլ լինեն f և φ ֆունկցիաները։

Օգտվելով բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցման կանոնից, կգտնենք*՝

$$\frac{\partial y}{\partial x}=f'(x+at)+\varphi'(x-at),\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=f''(x+at)+\varphi''(x-at),$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=f'(x+at).a+\varphi'(x-at).(-a),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=f''(x+at).a^2+\varphi''(x-at).(-a)^2=a^2\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

այն, ինչ պահանջվում էր ապացուցել։

5) Ապացուցել, որ

---

f', φ', ... նշանակումների մեջ եղած շտրիխները նշանակում են $f(u)$, $\varphi(u)$ ֆունկցիաների ածանցյալները ըստ u արգումենտի։

$$z=x\cdot\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

արտահայտությունը, որտեղ φ-ն և ψ-ն նշանակում են կամավոր ֆունկցիաներ (առաջին և երկրորդ կարգի ածանցյալներ ունեցող), բավարարում է հետևյալ հավասարմանը՝

$$x^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Ունենք՝

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}\cdot\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^2}\cdot\psi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}\cdot\psi'\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{y^2}{x^3}\cdot\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{2y}{x^3}\cdot\psi'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^4}\cdot\psi''\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{y}{x^2}\cdot\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{x^2}\psi'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^3}\cdot\psi''\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{x}\cdot\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\cdot\psi''\left(\frac{y}{x}\right),$$

վերջին երեք ածանցյալները համապատասխանաբար բազմապատկելով x^2, $2xy$, y^2 *մեծություններով և գումարելով, իսկապես կստանանք զրո։*

180. ԽԱՌՆ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԻ ԹԵՈՐԵՄԱՆ։ *1) և 2) օրինակները դիտարկելիս աչքի է ընկնում միևնույն փոփոխականների նկատմամբ, բայց տարբեր հերթականությամբ, վերցրած խառն ածանցյալների հավասարությունը։*

Պետք է անմիջապես նշել, որ այդ բոլորովին էլ անհրաժեշտորեն չի բխում խառն ածանցյալի սահմանումից, այնպես որ, գոյություն ունեն դեպքեր, երբ վերոհիշյալ համընկնումը չկա։

Օրինակի համար, դիտարկենք

$$f(x,\ y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\quad (\text{երբ } x^2+y^2>0),\ f(0,\ 0)=0$$

ֆունկցիան։ Ունենք

$$f'_x(x,y) = y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+x^2)^2}\right] \quad (\text{եթե } x^2+y^2 \neq 0),$$

$$f'_x(0,0)=0։$$

x-ին տալով զրոյին հավասար մասնակի արժեք, ցանկացած y-ի համար (սրանց թվում նաև երբ y=0) կունենանք՝ $f'_x(0,y)=-y$։

Այս ֆունկցիան ըստ y-ի դիֆերենցելով, կստանանք $f''_{xy}(0,y)=-1$։ *Այստեղից, մասնավորապես, հետևում է, որ նաև (0,0) կետում պետք է ունենանք*

$$f''_{xy}=(0,0)=-1։$$

Նույն ձևով հաշվելով f''_{yx}*-ը (0,0) կետում, կստանանք՝*

$$f''_{yx}(0,0)=1։$$

Ուրեմն, դիտարկվող ֆունկցիայի համար $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$։

Բայց և այնպես, օրինակներում նկատվող այն մասնակի ածանցյալների համընկնումը, որոնք իրարից տարբերվում են միայն դիֆերենցումների կարգով, պատահական չէ. այդ տեղի ունի բավականաչափ շատ դեպքերում, երբ բավարարվում են որոշ պայմաններ։ Սկսենք հետևյալ պարզ թեորեմայից։

ԹԵՈՐԵՄԱ։ Ենթադրենք, թե 1) $f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է D (բաց) տիրույթում, 2) այդ տիրույթում գոյություն ունեն f'_x ու f'_y առաջին կարգի, ինչպես նաև f''_{xy} ու f''_{yx} երկրորդ կարգի խառն ածանցյալները, և, վերջապես, 3) այդ վերջին f''_{xy} և f''_{yx} ածանցյալները, որպես x-ի ու y-ի ֆունկցիաներ, անընդհատ են D տիրույթի մի (x_0, y_0) կետում։ Այդ ժամանակ այդ կետում՝

$$f''_{xy}(x_0, y_0)=f''_{yx}(x_0, y_0)։ \tag{1}$$

Ապացույց։ Դիտարկենք

$$W=\frac{f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0+k)+f(x_0, y_0)}{hk}$$

արտահայտությունը, որտեղ h-ը և k-ն զրոյից տարբեր են, օրինակ, դրական են, և ընդ որում այնքան փոքր են, որ $[x_0, x_0+h; y_0, y_0+k]$ ուղղանկյունն ամբողջությամբ գտնվում է D-ում. այդ մեծությունները այդպես ֆիքսում ենք մինչև մեր դատողությունների վերջը։

Այժմ մտցնենք x-ից կախված մի օժանդակ ֆունկցիա՝

$$\varphi(x)=\frac{f(x, y_0+k)-f(x, y_0)}{k},$$

որը $[x_0, x_0+h]$ միջակայքում, 2)-ի շնորհիվ, ունի ածանցյալ՝

$$\varphi'(x)=\frac{f'_x(x, y_0+k)-f'_x(x, y_0)}{k}$$

և, հետևապես, անընդհատ է։

Այդ ֆունկցիայի օգնությամբ W արտահայտությունը, որը հավասար է՝

$$W=\frac{1}{h}\left[\frac{f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0+h, y_0)}{k}-\frac{f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)}{k}\right] \tag{2}$$

արտահայտությունը, կարելի է արտագրել այսպես՝

$$W=\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}.$$

Քանի որ $[x_0, x_0+h]$ միջակայքում $\varphi(x)$ ֆունկցիայի համար տեղի ունեն Լագրանժի թեորեմայի բոլոր պայմանները [118], ուստի մենք կարող ենք, ըստ վերջավոր աճերի բանաձևի, W արտահայտությունը ձևափոխել այսպես՝

$$W=\varphi'(x_0+\theta h)=\frac{f'_x(x_0+\theta h, y_0+k)-f'_x(x_0+\theta h, y_0)}{k}$$

$$(0<\theta<1)։$$

Օգտվելով $f''_{xy}(x, y)$ երկրորդ ածանցյալի գոյությունից, նորից կիրառենք վերջավոր աճերի բանաձևը, այս անգամ y-ից կախ-

ված $f'_x(x_0+\theta h, y)$ ֆունկցիայի նկատմամբ՝ $[y_0, y_0+k]$ միջակայքում։ Վերջնականապես կստանանք՝

$$W=f''_{xy}(x_0+\theta h,\ y_0+\theta_1 k) \qquad (0<\theta,\ \theta_1<1)։ \qquad (3)$$

Բայց W արտահայտությունը, մի կողմից, պարունակում է x և y, իսկ մյուս կողմից՝ h և k մեծությունները միատեսակ ձևով։ Ուստի դրանց դերերը կարելի է փոխել և, վերցնելով՝

$$\varphi(y)=\frac{f(x_0+h,\ y)-f(x_0,\ y)}{h}$$

օժանդակ ֆունկցիան, վերոհիշյալ դատողությունների միջոցով կարելի է ստանալ՝

$$W=f''_{yx}(x_0+\theta_2 h,\ y_0+\theta_3 k) \qquad (0<\theta_2,\ \theta_3<1)։ \qquad (4)$$

Բաղդատելով (3) և (4) արդյունքները, կգտնենք՝

$$f''_{xy}(x_0+\theta h,\ y_0+\theta_1 k)=f''_{yx}(x_0+\theta_2 h,\ y_0+\theta_3 k)։$$

Այժմ h-ը և k-ն ձգտեցնելով զրոյի, այս հավասարության մեջ անցնենք սահմանին։ θ, θ_1, θ_2, θ_3 մեծությունների սահմանափակ լինելու շնորհիվ ձախ և աջ մասերում արգումենտները կձգտեն, համապատասխանաբար, x_0-ի, y_0-ի։ Իսկ այդ ժամանակ, 3)-ի շնորհիվ, վերջնականապես կստանանք՝

$$f''_{xy}(x_0,\ y_0)=f''_{yx}(x_0,\ y_0),$$

այն, ինչ պահանջվում էր ապացուցել։

Այսպիսով, f''_{xy} և f''_{yx} անընդհատ խառն ածանցյալները միշտ իրար հավասար են։

Վերևում բերված օրինակի մեջ այդ ածանցյալները՝

$$f''_{xy}=f''_{yx}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\cdot\left\{1+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right\} \qquad (x^2+y^2>0)$$

բոլորովին սահման չունեն, երբ $x\to0$, $y\to0$, և, հետևապես, (0,0) կետում ունեն խզում. այդ դեպքում, մեր թեորեման բնականաբար կիրառելի չէ։

Հետաքրքրական է (1) հավասարության վերաբերյալ հարցը կապել n 158-ում դիտարկված հաջորդական սահմանների վերաբերյալ հարցի հետ։ Եթե ենթադրենք առաջին կարգի ածանցյալների գոյությունը, ապա, W արտահայտությունը գրելով (2) տեսքով, հեշտ է տեսնել, որ կունենանք՝

$$\lim_{k\to 0} W=\frac{f'_y(x_0+h,\ y_0)-f'_y(x_0,\ y_0)}{h}\quad (h=\text{const})\qquad (5)$$

և նմանապես՝

$$\lim_{h\to 0} W=\frac{f'_x(x_0,\ y_0+k)-f'_x(x_0,\ y_0)}{k}\quad (k=\text{const}).\qquad (5^*)$$

Այդ ժամանակ, հենց ածանցյալի սահմանման համաձայն, կունենանք՝

$$f''_{yx}(x_0, y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'_y(x_0+h,\ y_0)-f'_y(x_0,\ y_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} W,\qquad (6)$$

$$f''_{xy}(x_0,\ y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f'_x(x_0,\ y_0+k)-f'_x(x_0,\ y_0)}{k}=\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} W.\qquad (6^*)$$

Այսպիսով, խառն ածանցյալների գոյության և իրար հավասար լինելու հարցը նույնաբար համընկնում է W արտահայտության (h-ից և k-ից կախված) հաջորդական սահմանների գոյության և իրար հավասար լինելու հարցի հետ։

Այս դիտողությունը թույլ է տալիս հետևյալ կերպ ուժեղացնել վերևում ապացուցված թեորեմը։

Ենթադրենք, բացի առաջին ածանցյալների գոյությունից, միայն մեկ խառն ածանցյալի, օրինակ, $f''_{xy}(x,\ y)$-ի գոյությունը $(x_0,\ y_0)$ կետի շրջակայքում (նույնիսկ բացառելով այդ կետն ինքը)։ Դիցուք, այնուհետև, գոյություն ունի

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f''_{xy}(x,\ y)=A$$

վերջավոր սահմանը։

Այստեղից արդեն բխում է երկու խառն ածանցյալների գոյությունը (x_0, y_0) կետում և (1) հավասարությունը*:

Իրոք, ելնելով արված ենթադրություններից, կարելի է, ինչպես և վերևում, ստանալ (3) հավասարությունը, և ապա, օգտվելով $f''_{xy}(x, y)$ ֆունկցիայի սահմանի գոյությունից (x_0, y_0) կետում, ապացուցել W արտահայտության կրկնակի սահմանի գոյությունը, երբ h և k փոփոխականները միաժամանակ ձգտում են զրոյի՝

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} W = A.$$

Սակայն, ենթադրության համաձայն, (5) և (5) պարզ սահմանները գոյություն ունեն. այդ ժամանակ, ըստ n° 158-ի թեորեմայի, գոյություն ունեն նաև (6) և (6*) հաջորդական սահմանները և հավասար են կրկնակի սահմանին։ Իսկ այդ հենց նշանակում է, որ գոյություն ունեն և իրար հավասար են $f''_{xy}(x_0, y_0)$ ու $f''_{yx}(x_0, y_0)$ ածանցյալները։*

181. ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՈՒՄ։ Դիմենք, վերջապես, խառն ածանցյալների վերաբերյալ ընդհանուր թեորեմայի ապացույցին.

ԹԵՈՐԵՄԱ: Դիցուք n փոփոխականների $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ֆունկցիան որոշված է n-չափման D բաց տիրույթում և այդ տիրույթում ունի բոլոր հնարավոր մասնակի ածանցյալները՝ մինչև $(k-1)$-րդ կարգը ներառյալ, ինչպես նաև k-րդ կարգի խառն ածանցյալները, ընդ որում այդ բոլոր ածանցյալները D-ում անընդհատ են։

Այդ պայմաններում ցանկացած k-րդ կարգի խառն ածանցյալի արժեքը կախված չէ այն կարգից (հերթականությունից), որով կատարվում են հաջորդական ածանցումները։

Ապացույց։ $k=2$ *դեպքում թեորեման արդեն ապացուցված է; ուստի, օրինակի համար՝*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i},$$

Իրոք, որպեսզի այս դեպքը հանգեցնենք առաջին թեորեմային,

---

* *Այս թեորեման պատկանում է Շվարցին* (H. A. Schwarz):

բավական է նկատել, որ վերոհիշյալ ածանցյալները հաշվելիս կարելի է մնացած բոլոր փոփոխականներին (բացի x_i-ից և x_j-ից) վերագրել հաստատուն արժեքներ, ընդ որում այդ ածանցյալները, որոնք անընդհատ են փոփոխականների ամբողջ խմբակցության նկատմամբ, անընդհատ կլինեն նաև x_i և x_j փոփոխականների նկատմամբ, երբ մյուս փոփոխականները ֆիքսած են։ Դիցուք այժմ $k>2$։

Մեր թեորեման նախ ապացուցենք այն դեպքի համար, երբ k-րդ կարգի ածանցյալը հաշվելիս կատարված է միայն երկու իրար հաջորդող դիֆերենցումների տեղափոխություն, այսինքն՝ ապացուցենք հետևյալ հավասարության իրավացիությունը՝

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_h}\partial x_{i_{h+1}}\ldots\partial x_{i_k}}=\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_{h+1}}\partial x_{i_h}\ldots\partial x_{i_k}}, \quad (7)$$

(Այստեղ $i_1, i_2, \ldots, i_h, i_{h+1}, \ldots, i_k$-ն՝ n հատ 1, 2, ..., n նշանիկներից k թվով վերցրած մի որոշ խմբավորում է, հնարավոր կրկնություններով)։

Հաջորդաբար կատարելով բոլոր այն դիֆերենցումները, որոնք անհրաժեշտ են վերոհիշյալ մասնակի ածանցյալները հաշվելու համար, տեսնում ենք, որ երկու դեպքում էլ $(h-1)$-րդ կարգի ածանցյալները հավասար են։ Դրանց նկատմամբ կիրառելով $k=2$-ի համար արդեն ապացուցված թեորեման, կտեսնենք, որ նաև $(h+1)$-րդ կարգի ածանցյալներն իրար հավասար են։ Սրանից հետո արդեն երկուսի նկատմամբ էլ պետք է կատարել միևնույն գործողությունները, որոնք և կբերեն միևնույն արդյունքներին։

Ուրեմն, (7) հավասարությունը, իրոք, տեղի ունի և այս դեպքի համար թեորեման ապացուցված է։ Բայց քանի որ էլեմենտների ամեն մի տեղափոխություն կարելի է ստանալ երկու իրար հաջորդող էլեմենտների մի շարք տեղափոխությունների միջոցով, ուրեմն թեորեման ապացուցված է նաև ընդհանուր դեպքի համար՝ համապատասխան ածանցյալների անընդհատության դեպքում միշտ հնարավոր է ըստ տարբեր փոփոխականների կատարված դիֆերենցումների տեղափոխում։

Այսուհետև մենք միշտ ենթադրելու ենք, որ ածանցյալները անընդհատ են, ուստի մեզ համար դիֆերենցումների կարգը նշանակություն չի ունենա։ Այդ մեզ իրավունք է տալիս այսուհետև խառն ածանցյալները գրելիս ըստ միևնույն փոփոխականի կատարված դիֆերենցումները մի տեղ հավաքել։ Եթե u-ն $x_1, x_2, \ldots, x_n$ փոփոխականների ֆունկցիա է, ապա մենք այդպիսի ածանցյալը կգրենք այսպես՝

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

որտեղ $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = k$. իսկ եթե u-ն ֆունկցիա է $x, y, \ldots, z$ փոփոխականների, ապա այսպես՝

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} \ldots \partial z^{\gamma}},$$

որտեղ $\alpha + \beta + \ldots + \gamma = k$։ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ կամ $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ «ցուցիչներից» ոմանք կարող են լինել նաև զրո։ Եթե ունենք դիֆերենցիալ 0 «ցուցիչով», այդ նշանակում է, որ ըստ տվյալ փոփոխականի դիֆերենցում փաստորեն չի կատարված։ //

182. ԲԱՐԴ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԸ։ Դիցուք ունենք

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ֆունկցիան, որտեղ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ փոփոխականները, իրենց հերթին, $t_1, t_2, \ldots, t_m$ փոփոխականների ֆունկցիաներ են՝

$$x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)։$$

f և φ_i ֆունկցիաների նկատմամբ ենթադրենք, որ նրանք ունեն անընդհատ մասնակի ածանցյալներ ըստ բոլոր փոփոխականների՝ մինչև k-րդ կարգը ներառյալ։ u-ն դիտելով, որպես $t_1, t_2, \ldots, t_m$ փոփոխականների բարդ ֆունկցիա՝

$$u = F(t_1, t_2, \ldots, t_m) = f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n),$$

ցույց տանք, որ այդ բարդ ֆունկցիան նույնպես ունի բոլոր մասնակի ածանցյալները մինչև k-րդ կարգը ներառյալ, ընդ որում նրանք նույնպես անընդհատ են:

Ավելի ճշգրիտ ասած, մենք պետք է ապացուցենք հետևյալ թեորեմը՝ F *ֆունկցիայի յուրաքանչյուր* k-*րդ կարգի ածանցյալ գոյություն ունի և կազմվում է* f *ֆունկցիայի (ըստ նրա* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *արգումենտների) և* φ_i *ֆունկցիաների (ըստ նրանց* $t_1, t_2, \ldots, t_m$ *արգումենտների)* k-*ից ոչ բարձր կարգի ածանցյալներից՝ բազմապատկման և գումարման գործողությունների միջոցով:*

Ապացույցը կկատարենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով: $k=1$ *դեպքում այդ պնդումը ճիշտ է. նա հետևում է բարդ ֆունկցիայի ածանցյալի համար նախկինում ստացված բանաձևից* [171]*:*

Ենթադրենք, թե թեորեմն ճիշտ է k-*ից ցածր բոլոր կարգի ածանցյալների համար. ապացուցենք, որ այն ճիշտ է նաև* k-*րդ կարգի ածանցյալների համար:* k-*րդ կարգի յուրաքանչյուր ածանցյալ ստացվում է որևէ* $(k-1)$-*րդ կարգի ածանցյալը* t_j *փոփոխականներից որևէ մեկի նկատմամբ դիֆերենցելու միջոցով: Վերցնենք* $(k-1)$-*րդ կարգի ածանցյալը: Այն, ըստ մեր ենթադրության, ստացվում է* f *և* φ_i *ֆունկցիաների ըստ* x *և* t *փոփոխականների* $(k-1)$-*ից ոչ բարձր կարգի ածանցյալներից՝ բազմապատկման ու գումարման գործողությունների միջոցով, այսինքն՝ իրենից ներկայացնում է վերոհիշյալ ածանցյալների արտադրյալների գումար: Այդ արտադրյալներից որևէ մեկն ըստ* t_j-*ի դիֆերենցելիս, մենք պետք է հերթով դիֆերենցենք յուրաքանչյուր արտադրիչը: Եթե այդ արտադրիչը* φ *ֆունկցիաներից որևէ մեկի* $(k-1)$-*րդից ոչ բարձր կարգի ածանցյալն է, ապա դիֆերենցելուց հետո մենք կստանանք նույն ֆունկցիայի* k-*ից ոչ բարձր կարգի ածանցյալ: Իսկ եթե այդ լինի* f *ֆունկցիայի* $(k-1)$-*ից ոչ բարձր կարգի ածանցյալ, ապա, ածանցյալը դիտելով որպես* t *փոփոխականների բարդ ֆունկցիա և այն դիֆերենցելով*

ըստ t_j-ի, մենք այդ ածանցյալը կփոխարինենք մեզ արդեն հայտնի արտադրյալների գումարով։*

Այսպիսով, դիտարկվող k-րդ կարգի ածանցյալի համար ակներևաբար, կստացվի հենց վերևում նշված տեսքի արտահայտություն, որը և ապացուցում է մեր պնդումը։

F բարդ ֆունկցիայի ածանցյալների անընդհատությունը բխում է հենց այդ ածանցյալները f և φ_i ֆունկցիաների ածանցյալների միջոցով արտահայտելու ձևից, քանի որ, ըստ ենթադրության, վերջիններս անընդհատ են։

183. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐ։ *Դիցուք D տիրույթում տրված է մի $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ֆունկցիա, որը ունի առաջին կարգի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ։*

Այդ ժամանակ, ինչպես գիտենք, du (լրիվ) դիֆերենցիալ կոչվում է հետևյալ արտահայտությունը՝

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n,$$

որտեղ $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ մեծությունները՝ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ անկախ փոփոխականների կամավոր աճերն են։

Մենք տեսնում ենք, որ du-ն էլ հանդիսանում է $x_1, x_2, \ldots, x_n$ փոփոխականների ֆունկցիա։ Եթե ենթադրենք որ u-ի համար գոյություն ունեն երկրորդ կարգի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ, ապա du-ն կունենա առաջին կարգի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ և կարելի կլինի խոսել այդ du դիֆերենցիալի (լրիվ) դիֆերենցիալի մասին, այսինքն՝ d(du)-ի մասին, որը կոչվում է u-ի ***երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ*** *(կամ* ***երկրորդ դիֆերենցիալ****) և նշանակվում է d^2u սիմվոլով։*

Կարևոր է ընդգծել, որ այդ ժամանակ $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ աճերը դիտվում են որպես հաստատուններ և մեկ դիֆերենցիալից մյուսին անցնելիս նրանք մնում են միևնույնը։

* Այն ենթադրությունը, որ f-ի բոլոր ածանցյալները անընդհատ են, հենց իրավունքն է տալիս մեզ օգտվելու բարդ ֆունկցիայի ածանցյալները հաշվելու հայտնի կանոնից [171]։

Այսպիսով, եթե օգտվենք n° 175-ում նշված դիֆերենցման կանոններից, կունենանք՝

$$d^2u=d(du)=d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n\right)=$$

$$=d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\cdot dx_1+d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\cdot dx_2+\ldots+d\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\cdot dx_n$$

կամ, կատարելով մասնական դիֆերենցումները, կստանանք՝

$$d^2u=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}dx_1+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_n}dx_n\right)\cdot dx_1+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_1}dx_1+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}dx_2+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_n}dx_n\right)\cdot dx_2+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_n\partial x_1}dx_1+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)\cdot dx_n=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}dx_1^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}dx_2^2+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}dx_n^2+$$

$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}dx_1dx_2+2\frac{d^2 u}{\partial x_1\partial x_3}dx_1dx_3+$$

$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_3}dx_2dx_3+\ldots+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}\partial x_n}dx_{n-1}dx_n.$$

Նույն ձևով սահմանվում է երրորդ կարգի դիֆերենցիալը, d^3u-*ն, և այլն։ Ընդհանրապես, եթե* $(k-1)$-*րդ կարգի դիֆերենցիալը՝* $d^{k-1}u$-*ն արդեն սահմանված է, ապա* k-*րդ կարգի դիֆերենցիալը՝* d^ku-*ն սահմանվում է որպես* $(k-1)$-*րդ կարգի դիֆերենցիալի (լրիվ) դիֆերենցիալ՝*

$$d^ku=d(d^{k-1}u)^*$$

---

* *Հեշտ է սահմանել նաև ցանկացած կարգի մասնական դիֆերենցիալների գաղափարը, սակայն դրա վրա մենք կանգ չենք առնելու։*

Եթե u ֆունկցիայի համար գոյություն ունեն բոլոր մասնակի ածանցյալները մինչև k-րդ կարգին ներառյալ, ապա այդ k-րդ դիֆերենցիալի գոյությունն ապահովված է։ Բայց գնալով ավելի ու ավելի բարդանում են այդ հաջորդական դիֆերենցիալների համար ստացվող արտահայտությունները։ Նրանց դյուրությունը պարզեցնելու համար դիմում են հետևյալ մեթոդին։

Ամենից առաջ, առաջին կարգի դիֆերենցիալի արտահայտության մեջ պայմանաբար «u տառը փակագծերից դուրս բերենք». այդ ժամանակ այդ դիֆերենցիալը սիմվոլիկ ձևով կարելի կլինի գրել հետևյալ կերպ՝

$$du = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)\cdot u։$$

Այժմ նկատում ենք, որ եթե երկրորդ կարգի դիֆերենցիալի համար ստացված արտահայտության մեջ նույնպես «u-ն դուրս բերենք փակագծերից», ապա փակագծերի մեջ մնացող արտահայտությունը ձևականորեն իրենից ներկայացնում է

$$\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n$$

արտահայտության քառակուսին՝ բացված տեսքով, ուստի երկրորդ դիֆերենցիալը սիմվոլիկ ձևով կարելի է գրել այսպես՝

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2\cdot u։$$

Նույն կերպ կարելի է գրել երրորդ կարգի դիֆերենցիալը, և այլն։ Այդ կանոնը ընդհանուր է. ամեն մի k-ի համար կունենանք

$$d^ku = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^k\cdot u, \qquad (8)$$

սիմվոլիկ հավասարությունը, որը պետք է հասկանալ այսպես՝ նախ փակագծերի մեջ գտնվող բազմանդամը ձևականորեն բարձրացվում է աստիճան հանրահաշվի կանոններով, ապա

ստացված բոլոր անդամները «բազմապատկվում են» u-ով (որը գրվում է համարիչներում գտնվող ∂^k-ի կողքին), և միայն դրանից հետո բոլոր սիմվոլներին վերադարձվում են ածանցյալների և դիֆերենցիալների իրենց իմաստները։

Մենք տեսել ենք, որ վերոհիշյալ կանոնը ճիշտ է $k=1, 2$ դեպքերում, ուստի բավական է ցույց տալ, որ եթե այն ճիշտ է $d^k u$-ի համար, ապա ճիշտ կլինի նաև $d^{k+1}u$-ի համար։

Ընդունելով, որ այդ կանոնը $d^k u$-ի համար տեղի ունի, կունենանք՝

$$d^k u=\sum C_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}\cdot\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}\cdot dx_1^{\alpha_1}dx_2^{\alpha_2}\dots dx_n^{\alpha_n},$$

որտեղ գումարումը տարածվում է $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=k$ պայմանին բավարարող $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ոչ բացասական ամբողջ թվերից կազմված բոլոր հնարավոր խմբերի վրա, իսկ՝

$$C_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}=\frac{k!}{\alpha_1!\ \alpha_2!\dots\alpha_n!}$$

արտահայտությունները՝ «բազմանդամային» գործակիցներ են։

Ընդունելով, որ գոյություն ունեն $(k+1)$-րդ կարգի անընդհատ ածանցյալներ, նախորդ բանաձևը դիֆերենցելով, կստանանք՝

$$d^{k+1}u=\sum C_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}\cdot\left\{\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x_1^{\alpha_1+1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}dx_1^{\alpha_1+1}dx_2^{\alpha_2}\dots dx_n^{\alpha_n}+\right.$$

$$+\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2+1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}dx_1^{\alpha_1}dx_2^{\alpha_2+1}\dots dx_n^{\alpha_n}+\dots$$

$$\left.\dots+\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n+1}}dx_1^{\alpha_1}dx_2^{\alpha_2}\dots dx_n^{\alpha_n+1}\right\},$$

Ակներևաբար, նույնը մենք կարող էինք ստանալ, եթե ձևականորեն բազմապատկեինք հետևյալ սիմվոլիկ արտահայտությունները՝

$$\sum C_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}\frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}dx_1^{\alpha_1}dx_2^{\alpha_2}\dots dx_n^{\alpha_n}\times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right),$$

և ապա բոլոր անդամների մոտ գրենք u։ Սակայն այդ «արտադրյալը» ոչ այլ ինչ է, եթե ոչ՝

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^k\times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^{k+1},$$

ուստի՝

$$d^{k+1}u=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^{k+1},$$

այն, ինչ պահանջվում էր ապացուցել։

Նախորդ դատողություններից տեսնում ենք, որ k-րդ դիֆերենցիալը հանդիսանում է k աստիճանի համասեռ ամբողջ բազմանդամ, կամ, ինչպես ասում են, k աստիճանի ֆորմա է՝ անկախ փոփոխականների դիֆերենցիալների նկատմամբ, որոնց գործակիցները k-րդ կարգի մասնակի ածանցյալներն են՝ բազմապատկված ամբողջ թվային գործակիցներով («բազմանդամային» գործակիցներով)։

Օրինակ, եթե $u=f(x, y)$, ապա՝

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2,$$

$$d^3u=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+$$

$$+3\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}dx\,dy^2+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy^3,$$

$$d^4u=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}dx^4+4\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}dx^3\,dy+6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}dx^2dy^2+$$

$$+4\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^3}dxdy^3+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}dy^4,$$

և այլն։ Ընդունելով, մասնավորապես, $u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, կունենանք՝

$$du=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2},\qquad d^2u=\frac{2xy(dy^2-dx^2)+2(x^2-y^2)dx\,dy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$d^3u=\frac{(6x^2y-2y^3)dx^3+(18xy^2-6x^3)dx^2dy}{(x^2+y^2)^3}+$$

$$+\frac{(6y^3-18x^2y)dxdy^2+(2x^3-6xy^2)dy^3}{(x^2+y^2)^3}$$

և այլն։

Փոփոխականների թվի մեծացման հետ միասին դիֆերենցիալի արտահայտությունն ավելի բարդանում է։ Եթե $u=f(x,y,z)$, ապա, օրինակ, երրորդ կարգի d^3u դիֆերենցիալը բաց արած տեսքով այսպիսին է՝

$$d^3u=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{dy}dy+\frac{\partial}{\partial z}dz\right)^3u=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^3+\frac{\partial^3 y}{\partial y^3}dy^3+$$

$$+\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}dz^3+3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}dx^2\,dy+3\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+$$

$$+3\frac{\partial_3 u}{\partial x^2\partial z}dx^2\,dz+3\frac{d^3 u}{\partial x\partial z^2}dx\,dz^2+3\frac{\partial^3 n}{\partial y^2\partial z}dy^2dz+$$

$$+3\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial z^2}dy\,dz^2+6\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}dxdydz.$$

184. ԲԱՐԴ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐԸ։ *Դիցուք այժմ ունենք*

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

բարդ ֆունկցիան, որտեղ, իրենց հերթին,

$$x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_m) \qquad (i=1, 2, \ldots, n)։$$

Այս դեպքում առաջին դիֆերենցիալը կարելի է պահել նախկին տեսքով՝

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n$$

[*առաջին դիֆերենցիալի ձևի անփոփոխականության հիման վրա,* 175]։ *Բայց այստեղ* dx_1, dx_2, ..., dx_n *դիֆերենցիալներն արդեն հանդիսանում են ոչ թե անկախ փոփոխականների, այլ ֆունկցիաների դիֆերենցիալներ, և հետևապես, իրենք ևս կլինեն ֆունկցիաներ, և կարող են նախորդ դեպքի նման հաստատուններ չլինել։*

Այժմ հաշվելով մեր ֆունկցիայի երկրորդ դիֆերենցիալը, կունենանք [*եթե օգտվենք* n° 175-*ում տրված դիֆերենցման կանոններից*]՝

$$d^2u = d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right).dx_1 + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right).dx_2 + \ldots + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right).dx_n +$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x_1}.d(dx_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2}.d(dx_2) + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}.d(dx_n) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 . u +$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x_1}.d^2x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}.d^2x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}.d^2x_n ։$$

Մենք տեսնում ենք, որ առաջինից բարձր կարգի դիֆերենցիալի համար ձևի անփոփոխականություն ընդհանրապես տեղի չունի։

Այժմ դիտարկենք այն մասնավոր դեպքը, երբ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *փոփոխականները՝* $t_1, t_2, \ldots, t_m$ *փոփոխականների գծային ֆունկցիաներ են, այսինքն երբ՝*

$$x_i = \alpha_i^{(1)} t_1 + \alpha_i^{(2)} t_2 + \cdots + \alpha_i^{(m)} t_m + \beta_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

որտեղ $\alpha_i^{(j)}$ *և* β_i *մեծությունները հաստատուն են։*

Այդ դեպքում կունենանք՝

$$dx_i = \alpha_i^{(1)} dt_1 + \cdots + \alpha_i^{(m)} dt_m = \alpha_i^{(1)} \Delta t_1 + \cdots + \alpha_i^{(m)} \Delta t_m = \Delta x_i.$$

Տեսնում ենք, որ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *ֆունկցիաների բոլոր առաջին դիֆերենցիալներն այս դեպքում հաստատուններ են, կախված չեն* $t_1, t_2, \ldots, t_m$ *փոփոխականներից, հետևապես,* n° *183-ում կատարված հաշվումները առանց փոփոխության կիրառելի են։ Այստեղից հետևում է, որ* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ անկախ փոփոխականները $t_1, t_2, \ldots, t_m$ նոր փոփոխականների գծային ֆունկցիաներով փոխարինելու դեպքում, նույնիսկ բարձր կարգի դիֆերենցիալների համար կարող են պահպանվել նախկին արտահայտությունները: *Դրանց մեջ* $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ *դիֆերենցիալները համընկնում են* $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ *աճերի հետ, սակայն այդ աճերը անկախ չեն, այլ որոշվում են* $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_m$ *աճերի միջոցով։*

Այս պարզ ու կարևոր դիտողությունը մենք անմիջապես կօգտագործենք հետևյալ n°*-ում։*

185. ԹԵՅԼՈՐԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ։ *Մենք արդեն գիտենք* [124 (13)], *որ* $F(t)$ *ֆունկցիան, նրա առաջին* $(n+1)$ *ածանցյալների գոյության դեպքում, կարող է Թ ե յ լ ո ր ի բանաձևով վերլուծվել հետևյալ կերպ՝*

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)\cdot(t - t_0) +$$
$$+ \frac{1}{2!} F''(t_0)\cdot(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(t_0)\cdot(t - t_0)^n +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!} F^{(n+1)}(t_0 + \theta(t - t_0))\cdot(t - t_0)^{n+1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

(լրացուցիչ անդամը վերցրած է Լագրանժի ձևով)։ Ընդունելով՝

$$t-t_0=\Delta t=dt,\quad F(t)-F(t_0)=\Delta F(t_0),$$

վերոհիշյալ բանաձևը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$\Delta F(t_0)=dF(t_0)+\frac{1}{2!}d^2F(t_0)+\dots+\frac{1}{n!}d^nF(t_0)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(t_0+\Theta.\Delta t)\qquad(0<0<1)։$$

Միաժամանակ կարևոր է ընդգծել, որ աջ մասում գտնվող դիֆերենցիալների արտահայտությունների մեջ մտնող dt մեծությունը ճշտորեն հավասար է այն Δt աճին, որը գտնվում է ձախ մասում գրված ֆունկցիայի աճի մեջ։

Թեյլորի բանաձևը հենց այդ վերջին տեսքով գրված տարածվում է նաև մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի դեպքի վրա։

Գրության պարզեցման համար սահմանափակվում ենք երկու փոփոխականների $f(x, y)$ ֆունկցիայով։

Ենթադրենք, թե մի որոշակի (x_0, y_0) կետի շրջակայքում այդ ֆունկցիան ունի անընդհատ ածանցյալներ մինչև $(n+1)$-րդ կարգը ներառյալ։ x_0-ին և y_0-ին տանք Δx ու Δy աճեր այնպես, որ (x_0, y_0) և $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ կետերը միացնող ուղղագիծ հատվածը դուրս չգա (x_0, y_0) կետի դիտարկվող շրջակայքի սահմաններից։

Պահանջվում է ապացուցել, որ $f(x, y)$ ֆունկցիայի նկատմամբ արված ենթադրությունների դեպքում ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը՝

$$\Delta f(x_0, y_0)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)=$$

$$=df(x_0, y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0, y_0)+\dots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0, y_0)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\Theta\Delta x, y_0+\Theta\Delta y)\qquad(9)$$

$$(0<\Theta<1),$$

ընդ որում աջ մասում տարբեր աստիճաններով գրված dx ու dy դիֆերենցիալները հավասար են անկախ փոփոխականների հենց այն Δx ու Δy աճերին, որոնք առաջացրել են ձախ մասում գտնվող ֆունկցիայի աճը։

Ապացուցելու համար [ինչպես և n° 173-ում] մտցնենք մի նոր t անկախ փոփոխական, ընդունելով՝

$$x=x_0+t\cdot\Delta x,\quad y=y_0+t\cdot\Delta y\quad (0\leq t\leq 1). \tag{10}$$

x-ի և y-ի այս արժեքները տեղադրելով $f(x, y)$ ֆունկցիայի մեջ, կստանանք t մեկ փոփոխականի բարդ ֆունկցիա՝

$$F(t)=f(x_0+t\cdot\Delta x,\ y_0+t\cdot\Delta y).$$

Մենք արդեն գիտենք, որ մեր վերցրած (10) բանաձևերը երկրաչափորեն արտահայտում են $M_0(x_0, y_0)$ և $M_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ կետերը միացնող ուղղագիծ հատվածը։

Այժմ մենք տեսնում ենք, որ

$$\Delta f(x_0, y_0)=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$$

աճի փոխարեն մենք կարող ենք դիտարկել օժանդակ ֆունկցիայի՝

$$\Delta F(0)=F(1)-F(0)$$

աճը, որովհետև այդ երկուսը իրար հավասար են։ Բայց $F(t)$-ն հանդիսանում է մեկ փոփոխականի ֆունկցիա և ունի $(n+1)$ անընդհատ ածանցյալներ [182], հետևապես, նրա նկատմամբ կիրառելով Թեյլորի արդեն արտածված բանաձևը կստանանք՝

$$\left\{\begin{aligned}&\Delta F(0)=F(1)-F(0)=dF(0)+\frac{1}{2!}d^2F(0)+\dots\\&\dots+\frac{1}{n!}d^nF(0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(\theta)\quad(0<\theta<1),\end{aligned}\right. \tag{11}$$

ընդ որում, աջ մասում տարբեր աստիճաններով գրված dt դիֆերենցիալը հավասար է $\Delta t=1-0=1$։

Այժմ, օգտվելով նրանից, որ փոփոխականների գծային փոխարինման ժամանակ նույնիսկ բարձր կարգի դիֆերենցիալների ձևը չի փոխվում, կարող ենք գրել, որ՝

$$dF(0)=f'_x(x_0,\ y_0)\cdot dx+f'_y(x_0,\ y_0)\cdot dy=df(x_0,\ y_0),$$

$$d^2F(0)=f''_{x^2}(x_0,\ y_0)\cdot dx^2+2f''_{xy}(x_0,\ y_0)\cdot dx\,dy+$$

$$+f''_{y^2}(x_0,\ y_0)\cdot dy^2=d^2f(x_0,\ y_0),$$

և այլն։ Վերջապես, $(n+1)$-րդ դիֆերենցիալի համար կունենանք՝

$$d^{n+1}F(\theta)=d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y).$$

Կարևոր է նշել, որ այստեղ dx և dy դիֆերենցիալները ոչնչով չեն տարբերվում առաջուց վերցրած Δx և Δy աճերից. Իրոք,

$$dx=\Delta x\cdot dt=\Delta x,\quad dy=\Delta y\cdot dt=\Delta y.$$

Այս բոլորը տեղադրելով (11)-ի մեջ, մենք կստանանք հենց պահանջվող (9)-րդ վերլուծությունը։

Ընթերցողը պետք է իրեն հաշիվ տա, որ չնայած դիֆերենցիալ ձևով գրված Թեյլորի բանաձևը մի քանի փոփոխականների դեպքում ունի նույնպիսի պարզ տեսք, ինչպես և մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում, սակայն բացված տեսքով նա շատ ավելի բարդ է։ Ահա թե ինչպիսի տեսք կունենան այդ բանաձևի սկզբի երեք անդամները թեկուզ միայն երկու փոփոխականների ֆունկցիայի համար։

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)=$$

$$=[f'_x(x_0,\ y_0)\cdot\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\cdot\Delta y]+$$

$$+\frac{1}{2!}[f''_{x^2}(x_0,\ y_0)\cdot\Delta x^2+2f''_{xy}(x_0,\ y_0)\cdot\Delta x\Delta y+$$

$$+f''_{y^2}(x_0,\ y_0)\cdot\Delta y^2]+$$

$$+\frac{1}{3!}[f'''_{x^3}(x_0,\ y_0)\cdot\Delta x^3+3f'''_{x^2y}(x_0,\ y_0)\cdot\Delta x^2\Delta y+$$

$$+3f'''_{xy^2}(x_0,\ y_0)\cdot\Delta x\Delta y^2+f'''_{y^3}(x_0,\ y_0)\cdot\Delta y^3]+\dots$$

(9) բանաձևը տեղի ունի նաև $n=0$ *դեպքում. այդ մասնավոր դեպքը մենք արդեն քննության ենք առել* 173-*ում։*

§ 5. ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐ, ՄԵԾԱԳՈՒՅՆ ԵՎ ՓՈՔՐԱԳՈՒՅՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐ

186. ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐԸ։ ԱՆՀՐԱԺԵՇՏ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐ։ *Դիցուք*

$$u=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

ֆունկցիան որոշված է D տիրույթում և $(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$-*ն այդ տիրույթի ներքին կետ է։*

Ասում են, որ $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ ֆունկցիան $(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ կետում ունի մաքսիմում (մինիմում), եթե այդ կետը կարելի է շրջապատել այնպիսի

$$(x_1^0-\delta,\ x_1^0+\delta;\ x_2^0-\delta,\ x_2^0+\delta;\ \ldots;\ x_n^0-\delta,\ x_n^0+\delta),$$

շրջակայքով, որ այդ շրջակայքի բոլոր կետերի համար տեղի ունենա

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\leqslant f(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$$
$$(\geqslant)$$

անհավասարությունը։

Եթե այդ շրջակայքը հնարավոր է վերցնել այնքան փոքր, որ հավասարության նշանը տեղի չունենա, այսինքն՝ որ նրա յուրաքանչյուր կետում, բացի $(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ *կետից, տեղի ունենա*

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)<f(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$$
$$(>)$$

խիստ անհավասարությունը, ապա ասում են, որ $(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ *կետում կա իսկական մաքսիմում (մինիմում), հակառակ դեպքում մաքսիմումը (մինիմումը) կոչվում է ոչ իսկական։*

Մաքսիմումը և մինիմումը նշելու համար օգտագործվում է նաև ընդհանուր տերմին՝ էքստրեմում։

Ենթադրենք, թե մեր ֆունկցիան մի $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ կետում ունի էքստրեմում։

Ցույց տանք, որ եթե այդ կետում գոյություն ունեն

$$f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), \ldots, f'_{x_n}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$$

վերջավոր մասնակի ածանցյալներ, ապա բոլոր այդ մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոյի, այնպես որ, **առաջին կարգի մասնակի ածանցյալների զրո դառնալը հանդիսանում է էքստրեմումի գոյության անհրաժեշտ պայման**։

Այդ նպատակի համար ընդունենք $x_2=x_2^0, \ldots, x_n=x_n^0$, x_1-ը թողնելով փոփոխական. այդ ժամանակ մենք կստանանք միայն x_1 փոփոխականի ֆունկցիա՝

$$u = f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)։$$

Քանի որ մենք ենթադրում ենք, որ $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ կետում էքստրեմում գոյություն ունի (որոշակիության համար թող այդ լինի մաքսիմում), ապա, մասնավորապես, այստեղից հետևում է, որ $x_1=x_1^0$ կետի որևէ $(x_1^0-\delta, x_1^0+\delta)$ շրջակայքում անպայման պետք է տեղի ունենա

$$f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) \leq f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$$

անհավասարությունը, այնպես որ վերոհիշյալ մեկ փոփոխականի ֆունկցիան $x_1=x_1^0$ կետում կունենա մաքսիմում, իսկ այստեղից ըստ Ֆերմայի թեորեմայի [115] հետևում է, որ՝

$$f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)=0։$$

Նույն ձևով կարելի է ցույց տալ նաև, որ $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ կետում մյուս մասնակի ածանցյալները նույնպես հավասար են զրոյի։

Ուրեմն, էքստրեմումի համար «կասկածելի» հանդիսանում են այն կետերը, որտեղ բոլոր առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները դառնում են զրո. այդ կետերի կոորդինատները կարելի է գտնել, լուծելով հետևյալ հավասարումների սիստեմը՝

$$\left.\begin{array}{l} f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0, \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0^{*} \end{array}\right\} \quad (1)$$

Ինչպես և մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում, այդպիսի կետերը կոչվում են ստացիոնար կետեր։

Դիտողություններ։ I. *Էքստրեմումի գոյության անհրաժեշտ պայմանը կարճ կարելի է գրել նաև այսպես՝*

$$df(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0,$$

որովհետև, եթե $f'_{x_1}=f'_{x_2}=\ldots=f'_{x_n}=0$, *ապա ինչպիսին էլ լինեն* $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ *դիֆերենցիալները, միշտ՝*

$$df(x_1, x_2, \ldots, x_n)=f'_{x_1}\cdot dx_1+f'_{x_2}\cdot dx_2+\ldots+f'_{x_n}\cdot dx_n=0.$$

Եվ, հակադարձաբար, եթե տված կետում նույնաբար տեղի ունի այդ պայմանը, ապա, քանի որ $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ *դիֆերենցիալները կարող են ունենալ կամավոր արժեքներ, ուստի* $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \ldots, f'_{x_n}$ *ածանցյալները առանձին-առանձին հավասար են զրոյի։*

II. *Սովորաբար, դիտարկվող* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *ֆունկցիան ամբողջ տիրույթում ունենում է (վերջավոր) մասնակի ածանցյալներ, և այդ ժամանակ, ֆունկցիայի էքստրեմում տվող կետերը պետք է որոնել միայն ստացիոնար կետերի թվում։ Բայց պատահում է նաև այնպիսի դեպք, երբ առանձին կետերում մի քանի մասնակի ածանցյալներ ունենում են անվերջ*

---

* *Երկու փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում, երբ* $z=f(x, y)$, *ենթադրելով որ այն դիֆերենցելի է,*

$$f'_x(x, y)=0, \quad f'_y(x, y)=0$$

պայմանները ունեն պարզ երկրաչափական մեկնաբանություն՝ $z=f(x, y)$ մակերևույթի ֆունկցիային էքստրեմում տվող կետում շոշափող հարթությունը [տես 170 (6)], պետք է զուգահեռ լինի xy հարթությանը:

արժեքներ կամ բոլորովին գոյություն չեն ունենում (մինչդեռ մնացածները հավասար են զրոյի)։ Այդպիսի կետերը, փաստորեն, նույնպես պետք է միացնել էքստրեմումի համար «կասկածելի» կետերի շարքին, ստացիոնար կետերի կողքին [տես ներքևում՝ 191, *6)*]։

187. ԲԱՎԱՐԱՐ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐ (ԵՐԿՈՒ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԴԵՊՔԸ)։ *Ինչպես և մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում, այստեղ ևս ստացիոնար կետում բոլորովին էլ ապահովված չէ էքստրեմումի առկայությունը։ Եթե, օրինակի համար, վերցնենք* $z=xy$ *պարզ ֆունկցիան, ապա դրա համար* $z'_x=y$ *և* $z'_y=x$ *ածանցյալները միասին զրո են դառնում միայն մեկ կետում՝* $(0,0)$ *սկզբնակետում, որտեղ* $z=0$։ *Միաժամանակ անմիջապես երևում է, որ այդ կետի ամեն մի շրջակայքում ֆունկցիան ընդունում է թե՛ դրական, թե՛ բացասական արժեքներ, և էքստրեմում չկա։ 89-րդ գծագրի վրա պատկերված է* $z=xy$ *հավասարմանը համապատասխանող մակերևույթը (հիպերբոլական պարաբոլոիդ), սկզբնակետի մոտ նա թ ա մ բ ա ձ և է, մեկ ուղղաձիգ հարթությունում ծռվելով դեպի վերև, իսկ մյուսում՝ դեպի ներքև։*

Այսպիսով, առաջանում է էքստրեմումի գոյության (կամ բացակայության) բ ա վ ա ր ա ր պայմանների հարցը, այն հետազոտության հարցը, որին լրացուցիչ կերպով պետք է ենթարկվի ստացիոնար կետը։

Մենք նախ դիտարկենք երկու փոփոխականների $f(x,y)$ *ֆունկցիայի դեպքը։ Ենթադրենք, թե այդ ֆունկցիան որոշված է, անընդհատ է և ունի առաջին ու երկրորդ կարգի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ մի որոշ* (x_0, y_0) *կետի շրջակայքում, որն ստացիոնար կետ է, այսինքն՝ բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝*

$$f'_x(x_0, y_0)=0,\quad f'_y(x_0, y_0)=0. \qquad (1ա)$$

Որպեսզի իմանանք, թե արդյո՞ք մեր ֆունկցիան (x_0,y_0) *կետում էքստրեմում ունի, թե ոչ, բնականաբար պետք է դիմել*

$$\Delta=f(x, y)-f(x_0, y_0)$$

տարբերության դիտարկմանը։ Այդ տարբերությունը վերլուծենք

ըստ Թեյլորի բանաձևի [185], սահմանափակվելով սկզբի երկու անդամներով։ Բայց, քանի որ (x_0, y_0) կետը, ըստ ենթադրության, ստացիոնար կետ է, ուստի առաջին անդամը չքանում է, և մենք պարզապես կունենանք՝

$$\Delta = \frac{1}{2!}\{f''_{x^2}\cdot\Delta x^2 + 2f''_{xy}\cdot\Delta x\,\Delta y + f''_{y^2}\cdot\Delta y^2\}. \qquad (2)$$

Այստեղ Δx, Δy աճերի դերը խաղում են $x-x_0$ և $y-y_0$ տարբերությունները, և բոլոր ածանցյալները հաշվվում են մի՝

$$(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y) \qquad (0<\theta<1)$$

կետում։

Դիտարկման ենթարկենք այդ ածանցյալների արժեքները հենց ուսումնասիրվող կետում՝

$$a_{11} = f''_{x^2}(x_0, y_0),\quad a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_0),\quad a_{22} = f''_{y^2}(x_0, y_0) \qquad (3)$$

և ընդունենք՝

$$f''_{x^2}(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y) = a_{11} + \alpha_{11},$$
$$f''_{xy}(\ldots) = a_{12} + \alpha_{12},\quad f''_{y^2}(\ldots) = a_{22} + \alpha_{22},$$

այնպես որ, երկրորդ կարգի ածանցյալների անընդհատության շնորհիվ՝

բոլոր $\alpha\to 0$, երբ $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$։

Δ տարբերությունը կգրվի այսպես՝

$$\Delta = \frac{1}{2}\{a_{11}\Delta x^2 + 2a_{12}\Delta x\Delta y + a_{22}\Delta x^2 +$$
$$+ \alpha_{11}\Delta x^2 + 2\alpha_{12}\Delta x\Delta y + \alpha_{22}\Delta y^2\}.$$

Մենք ցույց կտանք, որ Δ տարբերության վարքն էապես կախված է $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ արտահայտության նշանից։

Դիտողությունները հեշտացնելու համար այժմ ընդունենք $\Delta x = \rho\cos\varphi$, $\Delta y = \rho\sin\varphi$, որտեղ $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ մեծությունը հանդիսանում է (x_0, y_0) և (x, y) կետերի հեռավորությունը։ Այդ

ժամանակ, վերջնականապես կունենանք՝

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2}\{a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi +$$

$$+\alpha_{11}\cos^2\varphi + 2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi + \alpha_{22}\sin^2\varphi\}։$$

1 Նախ ենթադրենք, թե, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$։

Այդ դեպքում $a_{11}a_{22} > 0$, ուստի $a_{11} \neq 0$, և {...} փակագծերի մեջ գտնվող առաջին եռանդամը կարելի է ներկայացնել այսպես՝

$$\frac{1}{a_{11}}[(a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi)^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\sin^2\varphi]։ \tag{5}$$

Այստեղից պարզ է, որ [...] փակագծերի մեջ եղած արտահայտությունը միշտ դրական է, ուստի վերոհիշյալ եռանդամը φ-ի բոլոր արժեքների համար, զրո չդառնալով, պահպանում է a_{11} գործակցի նշանը։ Նրա բացարձակ արժեքը, որպես $[0,2\pi]$ միջակայքում φ-ի անընդհատ ֆունկցիա, ունի (ակներևաբար, դրական) m փոքրագույն արժեք՝

$$|a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi| \geq m > 0։$$

Մյուս կողմից, եթե դիմենք {...} փակագծերի մեջ գրած երկրորդ եռանդամին, ապա, (4)-ի շնորհիվ, միանգամից բոլոր φ-երի համար կունենանք՝

$$|\alpha_{11}\cos^2\varphi + 2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi + \alpha_{22}\sin^2\varphi| \leq$$

$$\leq |\alpha_{11}| + 2|\alpha_{12}| + |\alpha_{22}| < m,$$

հենց որ ρ-ն (իսկ սրա հետ նաև Δx, Δy աճերը) բավականաչափ փոքր է։ Բայց այդ ժամանակ {...} փակագծերի մեջինի ամբողջ արտահայտությունը, և ուրեմն նաև Δ տարբերությունը, կպահպանի նույն նշանը, ինչ որ եռանդամներից առաջինը, այսինքն՝ a_{11}-ի նշանը։

Այսպիսով, եթե $a_{11} > 0$, ապա նաև $\Delta > 0$, այսինքն՝ դիտարկվող (x_0, y_0) կետում ֆունկցիան ունի մինիմում. իսկ

Եթե $a_{11}<0$, կունենանք նաև $\Delta<0$, այսինքն՝ կա մ ա ք ս ի մ ու մ։

2. Այժմ ենթադրենք, թե $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$։

Կանգ առնենք այն դեպքի վրա, երբ $a_{11}\neq 0$. այդ ժամանակ այստեղ ևս կարելի է օգտագործել (5) ձևափոխությունը։ Երբ $\varphi=\varphi_1=0$, [...] փակագծերի արտահայտությունը կլինի դ ր ա կ ա ն, որովհետև կդառնա a_{11}^2։ Ընդհակառակը, եթե φ_2 արժեքը որոշենք

$$a_{11}\cos\varphi_2+a_{12}\sin\varphi_2=0 \qquad (\sin\varphi_2\neq 0)$$

պայմանից, ապա այդ արտահայտությունը կբերվի հետևյալին՝ $(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)\sin^2\varphi_2$, և կլինի բ ա ց ա ս ա կ ա ն։ ρ-ի բավականաչափ փոքր արժեքի դեպքում [...] փակագծերի ե ր կ ր ո ր դ եռանդամը ինչպես $\varphi=\varphi_1$ արժեքի, նույնպես և $\varphi=\varphi_2$ արժեքի համար կլինի ցանկացած չափով փոքր, և Δ-ի նշանը կորոշվի ա ռ ա ջ ի ն եռանդամի նշանի միջոցով։ Այսպիսով, դիտարկվող (x_0, y_0) կետի ցանկացած մոտակայքում՝ այն ճառագայթների վրա, որոնք որոշվում են $\varphi=\varphi_1$ և $\varphi=\varphi_2$ անկյուններով, Δ տարբերությունը կունենա տարբեր նշաններով արժեքներ։ Հետևապես, այդ կետում էքստրեմում լինել չի կարող։

Եթե $a_{11}=0$, և [...] փակագծերի առաջին եռանդամը դառնում է՝

$$2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi+a_{22}\sin^2\varphi=\sin\varphi\cdot(2a_{12}\cos\varphi+a_{22}\sin\varphi),$$

ապա, օգտվելով նրանից, որ անպայման $a_{12}\neq 0$, կարելի է որոշել $\varphi_1\neq 0$ անկյունն այնպես, որ՝

$$|a_{22}||\sin\varphi_1|<2|a_{12}|\cdot|\cos\varphi_1|.$$

Այդ ժամանակ $\varphi=\varphi_1$ և $\varphi=\varphi_2=-\varphi_1$ արժեքների համար վերոհիշյալ եռանդամը կունենա հակառակ նշաններ, և դատողությունն ավարտվում է, ինչպես և վերևում։

Այսպիսով, երբ $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$, ապա փորձարկվող (x_0, y_0) ս տ ա ց ի ո ն ա ր կետում $f(x, y)$ ֆունկցիան ունի էքստրեմում, այն է՝ մ ա ք ս ի մ ու մ $a_{11}<0$ դեպքում և մինիմում $a_{11}>0$ դեպքում։ Իսկ եթե $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$, ապա էքստրեմում չկա։

Իսկ այն դեպքում, երբ $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$, *հարցը լուծելու համար պետք է դիմել բարձր կարգի ածանցյալներին. այդ «կասկածելի» դեպքը մենք քննության չենք առնի:*

Օրինակներ. 1) Մաքսիմումի ու մինիմումի համար հետազոտենք

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\quad (p>0,\ q>0)$$

ֆունկցիան: Հաշվենք մասնական ածանցյալները՝

$$z'_x=\frac{x}{p},\qquad z'_y=\frac{y}{p}.$$

Այստեղից անմիջապես տեսնում ենք, որ միակ ստացիոնար կետը համընկնում է (0,0) սկզբնակետը:

Հաշվելով a_{11}, a_{12} *և* a_{22} *արտահայտությունները, կստանանք՝*

$$a_{11}=\frac{1}{p},\ a_{12}=0,\ a_{22}=\frac{1}{q}.$$

այստեղից՝ $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$: *Հետևապես, (0,0) կետում z ֆունկցիան ունի մինիմում. ի միջի այլոց, այդ պարզ է նաև անմիջապես:*

Մեր ֆունկցիայի երկրաչափական պատկերը կլինի էլիպսական պարաբոլոիդ, որի գագաթը գտնվում է սկզբնակետում (տես. գծ. 90):

$$2)\quad z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}\quad (p>0,\ q>0).$$

$$z'_x=\frac{x}{p},\quad z'_y=-\frac{y}{q},$$

Այստեղ էլ տեսնում ենք, որ ստացիոնար կետ համընկնում է (0,0) կետը: Հաշվենք՝

$$a_{11}=\frac{1}{p},\quad a_{12}=0,\quad a_{22}=-\frac{1}{q}.$$

այստեղից՝ $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$: *Հետևապես, էքստրեմում չկա:*

Երկրաչափորեն մենք այստեղ գործ ունենք հիպերբոլական պարաբոլոիդի հետ, որի գագաթը գտնվում է սկզբնակետում:

3) $z=y^2+x^4$ կամ $z=y^2+x^3$.

երկու դեպքում էլ ստացիոնար կետ հանդիսանում է (0,0) կետը. և այնտեղ $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$:

Մեր հայտանիշը պատասխան չի տալիս. ընդ որում, ինչպես անմիջապես երևում է, առաջին դեպքում կինի *մ ի ն ի մ ու մ*, իսկ երկրորդ դեպքում *է ք ս տ ր ե մ ու մ բ ո լ ո ր ո վ ի ն* չկա:

Դիտողություն. Այս n-ի արդյունքները հետագայում [226] սերտորեն կկապվեն կորի «եզակի» կետի մոտակայքում նրա վարքին վերաբերող երկրաչափական խնդրի հետ:

188. ԲԱՎԱՐԱՐ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐ (ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԴԵՊՔ). Այժմ դիմենք ընդհանուր դեպքի դիտարկմանը: Դիցուք $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ֆունկցիան որոշված է, անընդհատ է և ունի առաջին և երկրորդ կարգի անընդհատ ածանցյալներ մի $(x_2^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ ստացիոնար կետի շրջակայքում:

$$\Delta=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)-f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$$

տարբերությունը վերլուծելով ըստ *Թ ե յ լ ո ր ի* բանաձևի, ինչպես և վերևում, կստանանք՝

$$\Delta=\frac{1}{2}\{f''_{x_1^2}\cdot\Delta x_1^2+f''_{x_2^2}\cdot\Delta x_2^2+\ldots+f''_{x_n^2}\cdot\Delta x_n^2+$$

$$+2f''_{x_1x_2}\cdot\Delta x_1\Delta x_2+2f''_{x_1x_3}\cdot\Delta x_1\Delta x_3+\ldots$$

$$\ldots+2f''_{x_{n-1}x_n}\cdot\Delta x_{n-1}\Delta x_n\}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} f''_{x_ix_k}\cdot\Delta x_i\Delta x_k,$$

որտեղ $\Delta x_i = x_i - x_i^0$. բոլոր ածանցյալները հաշված են մի որոշ

$$(x_1^0+\theta\Delta x_1,\ x_2^0+\theta\Delta x_2,\ \ldots,\ x_n^0+\theta\Delta x_n) \qquad (0<\theta<1)$$

կետում:

Այստեղ եթ նշանակենք՝

$$f''_{x_i x_k}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = a_{ik} \qquad (i, k=1, 2, \ldots, n), \tag{6}$$

այնպես որ՝

$$f''_{x_i x_k}(x_1^0+\Theta\Delta x_1, x_2^0+\Theta\Delta x_2, \ldots, x_n^0+\Theta\Delta x_n) = a_{ik}+\alpha_{ik}{}^{*}$$

և

$$\alpha_{ik}\to 0, \text{ երբ } \Delta x_1\to 0, \ldots, \Delta x_n\to 0\text{։} \tag{7}$$

Հիմա մեզ հետաքրքրող Δ արտահայտությունը կարելի է գրել այսպես՝

$$\Delta=\frac{1}{2}\left\{\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}\Delta x_i\Delta x_k+\sum_{i, k=1}^{n}\alpha_{ik}\Delta x_i\Delta x_k\right\}\text{։} \tag{8}$$

Այստեղ փակագծերի մեջ առաջին տեղում գտնվում է f ֆունկցիայի երկրորդ դիֆերենցիալը՝ հաշված դիտարկվող կետում. նա իրենից ներկայացնում է երկրորդ աստիճանի համասեռ բազմանդամ, կամ, ինչպես ասում են, քառակուսային ֆորմա $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ *փոփոխականներից**։ Ինչպես մենք կտեսնենք, հենց այդ քառակուսային ֆորմայի հատկություններից է կախված մեզ հետաքրքրող հարցի լուծումը։*

Բարձրագույն հանրահաշվի մեջ $y_1, \ldots, y_n$ փոփոխականներից կազմված՝

$$\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}y_i y_k \quad (a_{ik}=a_{ki}) \tag{9}$$

քառակուսային ֆորման անվանում են որոշյալ դրական (բա-

---

* *Պարզ է, որ* $a_{ik}=a_{ki}$ ($\text{և } \alpha_{ik}=\alpha_{ki}$)։

** *Երկրորդ գումարը ունի առաջին գումարի նման տեսք, բայց նրա մեջ գործակիցները ևս նույն փոփոխականների ֆունկցիաներ են։*

ցասական) *ֆորմա, եթե նա ունի դրական (բացասական) արժեքներ արգումենտների այն բոլոր արժեքների համար, որոնք միաժամանակ զրո չեն դառնում։ Օրինակ՝*

$$6y_1^2+5y_2^2+14y_3^2+4y_1y_2-8y_1y_3-2y_2y_3$$

ֆորման կլինի որոշյալ դրական ֆորմա։ Այդ պարզ կերևա, եթե այդ ֆորման ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$(2y_1-3y_3)^2+2(y_1+y_2+y_3)^2+3(y_2-y_3)^2։$$

Մենք հնարավորություն չունենք այստեղ այդ հարցի առթիվ մանրամասնությունների մեջ մտնելու Կսահմանափակվենք Սիլվեստրին (J. J. Sylvester) *պատկանող այն անհրաժեշտ և բավարար պայմանի հիշեցումով, որոնց դեպքում (9) ֆորման կլինի որոշյալ և դրական։ Այդ պայմանն արտահայտվում է հետևյալ անհավասարությունների շղթայով՝*

$$a_{11}>0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots$$

$$\ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0^{*}։$$

---

* *Ուշադրություն ենք հրավիրում այն բանի վրա, որ* y_iy_k $(i\neq k)$ *պարունակող անդամը (9) գումարի մեջ հանդիպում է երկու անգամ. ուստի* $a_{ik}=a_{ki}$*-ն հանդիսանում է* y_iy_k*-ի գործակցի կեսը։ Վերոհիշյալ պայմանը մեր օրինակի համար հեշտությամբ ստուգվում է, եթե ի նկատի ունենանք, որ՝*

$$a_{11}=6,\ a_{22}=5,\ a_{33}=14,$$

$$a_{12}=a_{21}=2,\ a_{13}=a_{31}=-4,\ a_{23}=a_{32}=-1։$$

Քանի որ որոշյալ բացասական ֆորման բոլոր անդամների նշանները փոխելիս դառնում է որոշյալ դրական ֆորմա, և հակառակը, ապա այստեղից հեշտությամբ կարելի է գտնել նաև բացասական ֆորմայի համար անհրաժեշտ ու բավարար պայմանները. Նրանք տրվում են այն անհավասարությունների շղթայով, որոնք ստացվում են վերևում գրվածներից, երբ այնտեղ մեկ ընդ մեջ (սկսած առաջինից) փոխում ենք անհավասարությունների իմաստը։

Օգտվելով այդ գաղափարներից, ձևակերպենք էքստրեմումի գոյության համար բավարար պայմանները.

Եթե երկրորդ դիֆերենցիալը, այսինքն՝

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\Delta x_i \Delta x_k \tag{10}$$

քառակուսային ֆորման, որտեղ a_{ik} գործակիցները որոշվում են (6)-ով, որոշյալ դրական (բացասական) ֆորմա է, ապա ստուգման ենթակա $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ կետում կլինի մինիմում (մաքսիմում):

Ապացուցելու համար, $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ և $(x_1, \ldots, x_n)$ կետերի հեռավորությունը նշանակենք ρ-ով՝

$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2}.$$

(8)-ի մեջ ρ^2-ին փակագծերից դուրս բերելով և ընդունելով՝

$$\frac{\Delta x_i}{\rho} = \xi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

Δ-ի արտահայտությունը կգրենք այսպես՝

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2}\left\{ \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k + \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik}\xi_i\xi_k \right\}. \tag{11}$$

Բոլոր ξ_i թվերը միաժամանակ զրո չեն դառնում, ուստի եթե (10) ֆորման դրական է, (11) քանակի փակա-

գծերի առաջին գումարը միշտ կունենա դրական նշան։ Դեռ ավելին, քանի որ՝

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = 1, \tag{12}$$

ապա կգտնվի այնպիսի m դրական թիվ, որ ξ_i-երի բոլոր հնարավոր արժեքների համար կլինի՝

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k \geqslant m.$$

Իրոք, այդ գումարը իրենից ներկայացնում է ξ_i արգումենտների անընդհատ ֆունկցիա ամբողջ տարածության մեջ, մասնավորապես նաև այն $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ կետերի M բազմությունում, որոնք բավարարում են (12) առնչությանը («գնդային մակերևույթ»)։ Բայց այդ բազմությունը, ինչպես դժվար չէ տեսնել, փակ է, այսինքն՝ պարունակում է իր բոլոր խտացման կետերը. իսկ այդ ժամանակ, ըստ Վայերշտրասի թեորեմայի [163, տես նրա ապացույցից հետո արված դիտողությունը], վերոհիշյալ գումարը M բազմությունում կունենա m փոքրագույն արժեք, որն անհրաժեշտաբար կլինի դրական (ինչպես և նրա բոլոր արժեքները M-ում)։

Մյուս կողմից, (7)-ի շնորհիվ, (11)-ի երկրորդ գումարը ρ-ի բավականաչափ փոքր արժեքների համար, ակնհայտաբար, իր բացարձակ արժեքով կլինի m-ից փոքր, այնպես որ ամբողջ փակագիծը կունենա դրական նշան։ Ուրեմն, $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ կետում կենտրոն ունեցող բավականաչափ փոքր գնդում Δ տարբերությունը կլինի դրական, որտեղից և հետևում է, որ վերոհիշյալ կետում $f(x_1, \ldots, x_n)$ ֆունկցիան ունի մինիմում.

Նույն ձևով ապացուցվում է նաև այն դեպքում, երբ (10) ֆորման որոշյալ է, բայց բացասական։

190. ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄԻ ԲԱՑԱԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԴԱՅՄԱՆՆԵՐԸ։ (9) քառակուսային ֆորման կոչվում է անորոշ, եթե նա կարող է ընդունել տարբեր նշաններով արժեքներ։ Այդպիսին է, օրինակ,

$$6y_1^2+y_2^2+y_3^2+8y_1y_2-8y_1y_3-2y_2y_3$$

ֆորմանը։ Իրոք, օրինակ, նրա արժեքը հավասար է 6-ի, երբ $y_1=1,\ y_2=y_3=0$, *և՝* -1*-ի, երբ* $y_1=1,\ y_2=-1,\ y_3=0$։

Այժմ մենք կարող ենք նախորդ n*-ում ապացուցված թեորեմը լրացնել հետևյալ կերպ.*

Եթե (10) քառակուսային ֆորման անորոշ է, ապա ստուգման ենթակա $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ կետում որոշակիորեն չկա էքստրեմում:

Դիցուք $\Delta x_i=h_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ *դեպքում (10) ֆորման ընդունում է դրական արժեք՝*

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}h_ih_k>0, \tag{13}$$

իսկ $\Delta x_i=\bar{h}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ *դեպքում՝ բացասական արժեք՝*

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\bar{h}_ih_k<0։$$

Նախ ընդունենք

$$\Delta x_i=h_it, \text{ երբ } t\neq 0 \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

որը համապատասխանում է $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *և* $(x_1^0+h_1, \ldots, x_n^0+h_n)$ *կետերը միացնող ուղիղով տեղափոխմանը։ Այդ ժամանակ (8)-ի մեջ* t^2*-ն հանելով փակագծերից, այդ դեպքի համար կստանանք՝*

$$\Delta=\frac{t^2}{2}\left\{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}h_ih_k+\sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik}h_ih_k\right\},$$

Փակագծերի մեջ առաջին գումարը որոշակի դրական թիվ է, (13)-ի շնորհիվ։ Իսկ ինչ վերաբերում է երկրորդ գումարին, ապա նրա գործակիցները ձգտում են 0-ի երբ $t\to 0$, *որովհետև, այդ ժամանակ, ակներևաբար, նաև բոլոր* $\Delta x_i\to 0$։ *Ուրեմն, բա-*

վականաչափ փոքր t-ի դեպքում մեծ փակագծերի մեջ գտնվող արտահայտությունը (իսկ դրա հետ նաև Δ տարբերությունը) դառնում է դրական, այսինքն՝ վերոհիշյալ ուղիղի այն կետերում, որոնք $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ կետին բավականաչափ մոտ են, կլինի՝

$$f(x_1, \ldots, x_n) > f(x_1^0, \ldots, x_n^0),$$

Իսկ մյուս կողմից, եթե վերցնենք՝

$$\Delta x_i = \bar{h}_i t, \text{ երբ } t \neq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

այսինքն՝ կետը տեղափոխելի մյուս ուղիղի վրայով, որը $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ կետը միացնում է $(x_1^0 + \bar{h}_1, \ldots, x_n^0 - \bar{h}_n)$ կետի հետ, ապա դրա այն կետերում, որոնք բավականաչափ մոտ են $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ կետին (այսինքն՝ համապատասխանում են բավականաչափ փոքր t-ին), կստացվի՝

$$f(x_1, \ldots, x_n) < f(x_1^0, \ldots, x_n^0),$$

Սրանով հենց ապացուցվում է, որ ստուգման ենթակա կետում չի կարող լինել ոչ մաքսիմում և ոչ էլ մինիմում։

Կարող է պատահել, որ (9) ֆորման, չկարողանալով ընդունել տարբեր նշանների արժեքներ, այնուամենայնիվ որոշյալ չլինի այն պատճառով, որ զրո դառնա ոչ միայն արգումենտների զրո արժեքների դեպքում. այդ դեպքում ֆորման անվանում են կիսորոշյալ: *Այդպիսին է, օրինակ, հետևյալ ֆորման՝*

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2y_1y_2 + 2y_1y_3 + 2y_2y_3 = (y_1 + y_2 + y_3)^2,$$

որը բացասական արժեքներ չի ընդունում, զրո է դառնում ամեն անգամ, երբ

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$

օրինակ, երբ $y_1 = y_2 = \frac{1}{2}$ *և* $y_3 = -1$։

Այն դեպքը, երբ (10) ֆորման կիսորոշյալ է, «կաս-

կածելի» դեպքն է։ Այդ դեպքում կարող է լինել էքստրեմում, կարող է և չլինել, դա կախված է բարձր կարգի ածանցյալների վարքից։ Մասնավոր դեպքում, երբ ստուգման ենթակա կետում բոլոր երկրորդ կարգի ածանցյալները դառնում են զրո, այդ ժամանակ ևս պետք է դիմել բարձր կարգի ածանցյալներին։

«Կասկածելի» դեպքի հետազոտությամբ մենք չենք զբաղվելու։

Դիտողություն։ Մեկ փոփոխականի $f(x)$ ֆունկցիայի համար (10) ֆորման բերվում է մեկ անդամի՝

$$f''(x_0)\cdot\Delta x^2,$$

որտեղ x_0-ն ստուգման ենթակա կետն է։ Այդ «ֆորման», ակներևաբար, որոշյալ է ու դրական, երբ $f''(x_0)>0$, և բացասական, երբ $f''(x_0)<0$։ Այսպիսով, n° 131-ի հայտանիշը հանդիսանում է n° 188-ում շարադրածի մասնավոր դեպքը։

Անցնելով երկու փոփոխականների $f(x, y)$ ֆունկցիայի դեպքին, նկատենք, որ n° 187-ի արդյունքը նույնպես պարունակվում է nn° 188-ում և 189-ում ստացվածի մեջ։ Հեշտ է նկատել, որ n° 187-ում զուգընթացաբար ապացուցվել էր, որ

$$a_{11}\Delta x^2+2a_{12}\Delta x\Delta y+a_{22}\Delta y^2$$

ֆորման այն դեպքում, երբ $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$, կլինի *որոշյալ* (դրական, երբ $a_{11}>0$, և բացասական, երբ $a_{11}<0$), իսկ այն դեպքում, երբ $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$, կլինի *անորոշ*։

190. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՄԵԾԱԳՈՒՅՆ ԵՎ ՓՈՔՐԱԳՈՒՅՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԸ։ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ Դիցուք $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ֆունկցիան որոշված է ու անընդհատ մի D *սահմանափակ փակ* տիրույթում և, բացառությամբ, թերևս, առանձին կետերի, այդ տիրույթում ունի վերջավոր մասնակի ածանցյալներ։ Ըստ *Վայերշտրասի* թեորեմայի [163], այդ տիրույթում կգտնվի այնպիսի $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ կետ, որտեղ ֆունկցիան ստանում է բոլոր արժեքներից *մեծագույնը* (*փոքրագույնը*)։ Եթե $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ կետը գտնվում է D տիրույթի *ներսը*, ապա այդտեղ ֆունկցիան, ակներևաբար, ունի մաքսիմում (մինիմում), ուստի այդ դեպքում մեզ հետաքրքրող կետը անպայման կգտնվի էքստրեմումի համար «կասկածելի» կետերի մեջ։

Սակայն u ֆունկցիան իր մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը կարող է ստանալ նաև տիրույթի եզրի վրա։ Ուստի, որպեսզի գտնենք $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ֆունկցիայի մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը D տիրույթում, պետք է գտնել էքստրեմումի համար «կասկածելի» բոլոր ներքին կետերը, այդ կետերում հաշվել ֆունկցիայի արժեքները և դրանք համեմատել տիրույթի եզրի կետերում ֆունկցիայի ստացած արժեքների հետ. այդ արժեքներից մեծագույնը (փոքրագույնը) հենց կլինի ֆունկցիայի մեծագույն (փոքրագույն) արժեքն ամբողջ տիրույթում:

Այս ասածները պարզաբանենք օրինակներով։

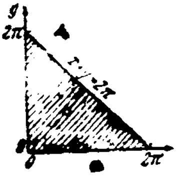
1) Դիցուք պահանջվում է գտնել

$$u=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$$

ֆունկցիայի մեծագույն արժեքն այն եռանկյունում, որը սահմանափակված է x-երի առանցքով, y-երի առանցքով և $x+y=2\pi$ ուղիղով (գծ. 102)։ Ունենք՝

$$u'_x=\cos x-\cos(x+y);\quad u'_y=\cos y-\cos(x+y)։$$

Տիրույթի ներսը ածանցյալները զրո են դառնում միայն $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ կետում, որտեղ $u=\frac{3\sqrt{3}}{2}$։ Քանի որ տիրույթի եզրի վրա, այսինքն՝ $x=0$, $y=0$ և $x+y=2\pi$ ուղիղների վրա, մեր ֆունկցիան հավասար է զրոյի, ուստի, ակներևաբար, հենց վերևում գտած $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ կետում ֆունկցիան ստանում է իր մեծագույն արժեքը.



Գծ. 102.

Ընդհանրապես, երկու փոփոխականների $f(x, y)$ ֆունկցիայի դեպքում, տիրույթը սովորաբար սահմանափակված է լինում կորով (կամ մի քանի կորերով)։ Այդ կորի վրա (կամ յուրաքանչյուր կորի վրա, եթե դրանք մի քանիսն են) x, y փոփոխականները կամ իրարից են կախված, կամ երկուսն էլ կախված են մեկ պարամետրից. ուստի եզրի վրա մեր $f(x, y)$ ֆունկցիան լինում է մեկ փոփոխականից կախված, և նրա մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը որոնվում է արդեն n° 133-ում շարադրված մեթոդներով։ Եթե, օրինակ, կորը տված է

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

պարամետրական հավասարումներով, որտեղ t-ն փոփոխվում է $[t_0, T]$ միջա-

կայքում. ապա այդ հարի վրա մեր ֆունկցիան կլինի t-ի (բարդ) ֆունկցիա՝

$$u=f(\varphi(t),\ \psi(t)),$$

որի համար մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը գտնել մենք կարող ենք։

3) Գտնել

$$u=xyzt$$

արտադրյալի մեծագույն արժեքը, որտեղ x, y, z, t փոփոխականները ոչ-բացասական թվեր են և որոնց գումարը պահպանում է հաստատուն արժեք՝

$$x+y+z+t=4c.$$

* Ցույց տանք, որ u-ի համար մեծագույն արժեք ստացվում է այն դեպքում, երբ բոլոր արտադրիչները իրար հավասար են՝ $x=y=z=t=c$։

Տված պայմանից գտնելով t-ն՝ $t=4c-x-y-z$, տեղադրենք այդ արտահայտությունը u-ի մեջ, կստանանք՝

$$u=xyz(4c-x-y-z).$$

Այստեղ մենք ունենք x, y, z երեք անկախ փոփոխականների ֆունկցիա, եռաչափ տիրույթում, որը որոշվում է՝

$$x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,\quad z\geqslant 0,\quad x+y+z\leqslant 4c$$

պայմաններով։ Երկրաչափորեն այդ տիրույթը ներկայացվում է $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=4c$ հարթություններով սահմանափակված քառանիստով:

Ածանցյալները հաշվենք և հավասարեցնենք զրոյի:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yz(4c-2x-y-z)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=zx(4c-x-2y-z)=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=xy(4c-x-y-2z)=0.$$

Տիրույթի ներսում այդ հավասարումները բավարարվում են միայն $x=y=z=c$ կետում, որտեղ $u=c^4$։ Քանի որ տիրույթի եզրին $u=0$, ուստի այդ կետում, իրոք, ֆունկցիայի համար ստացվում է մեծագույն արժեք։

---

* Մենք միայն որոշակիության համար արտադրիչների թիվը վերցրինք չորս. արդյունքը նույնը կլինի ցանկացած թվով արտադրիչների համար:

Մեր պնդումը ապացուցված է (որովհետև երբ $x=y=z=c$ *նաև* $t=c$)*։

Ընդհանրապես, երբ փոփոխականների $u=f(x, y, z)$ *ֆունկցիայի դեպքում տիրույթը սահմանափակված է լինում մակերևույթով (կամ մի շարք մակերևույթներով)։ Այդպիսի մակերևույթի վրա* x, y, z *փոփոխականները արդեն կախված կլինեն* **երկու պարամետրներից** *(այդպիսիններ կարող են ծառայել այդ փոփոխականներից երկուսը, ինչպես, օրինակ, հենց հիմա, երբ* $z=4c-x-y$)*։ Այդ ժամանակ* u *ֆունկցիան կախված կլինի միայն* **երկու պարամետրներից**. *այնպես որ նրա եզրի վրա մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը գտնելը արդեն ավելի պարզ խնդիր է, որի մասին խոսեցինք վերևում, և այսպես շարունակ։*

Եթե $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *ֆունկցիան տրված է միայն* D **բաց** *(կամ* **անսահմանափակ**) *տիրույթում, ապա արդեն նախապես չի կարելի ասել, որ այդ ֆունկցիան տիրույթում հասնում է իր մեծագույն (փոքրագույն) արժեքին։ Բայց և այնպես առանձին դեպքերում այդպիսի արժեք կարող է և գոյություն ունենալ։ Մենք օրինակի վրա ցույց կտանք, թե ինչպես կարելի է դրանում համոզվել։*

3) Գտնել x, y, z, t *դրական թվերի*

$$u=x+y+z+t$$

գումարի փոքրագույն արժեքը, այն պայմանով, որ դրանց արտադրյալը պահպանում է հաստատուն արժեք՝

$$xyzt=c^4.$$

Ցույց տանք, որ u*-ի համար փոքրագույն արժեք ստացվում է այն ժամանակ, երբ բոլոր գումարելիները իրար հավասար են՝*

$$x=y=z=t=c^{**}.$$

Որոշենք t*-ն՝* $t=\frac{c^4}{xyz}$, *և այն տեղադրենք* u*-ի մեջ՝*

---

* *Ասածից հետևում է, որ այն դրական թվերի* $xyzt$ *արտադրյալը, որոնց գումարը հավասար է* $4c$*-ի, չի գերազանցում* c^4*-ին, ուստի՝*

$$\sqrt[4]{xyzt} \le c = \frac{x+y+z+t}{4},$$

այսինքն՝ **երկրաչափական միջինը չի գերազանցում թվաբանական միջինին**։ *Այդ ճիշտ է ցանկացած քանակությամբ թվերի համար։*

** *Այստեղ կարելի է հենվել նույն դիտողությանը, ինչ որ վերևում (տես նախորդ ծանոթագրությանը)։*

$$u = x + y + z + \frac{c^4}{xyz},$$

Մենք պետք է որոնենք x, y, z երեք փոփոխականներից կախված այս ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքն այն տիրույթում, որը որոշվում է $x>0$, $y>0$, $z>0$ անհավասարություններով, այսինքն՝ առաջին կոորդինատային ութնորդում, որը բաց է և անսահմանափակ։

Փորձենք կիրառել նախկին մեթոդը՝ եթե տիրույթում գոյություն ունի այնպիսի կետ, որտեղ մեր ֆունկցիան հասնում է փոքրագույն արժեքի, ապա այդ կետը, ինչպես և առաջ, պետք է գտնվի ստացիոնար կետերի թվում։ Ունենք.

$$u'_x = 1 - \frac{c^4}{x^2yz} = 0, \qquad u'_y = 1 - \frac{c^4}{xy^2z} = 0,$$

$$u'_z = 1 - \frac{c^4}{xyz^2} = 0,$$

որտեղից $x=y=z=c$, որին համապատասխանում է $t=c$ արժեքը, այդ ժամանակ $u=4c$։

Այժմ ինչպես ստուգել, որ այդ արժեքը, իրոք, կլինի ա մ ե ն ա փ ո ք ր ը՝

Պարզ է, որ $x=0$, $y=0$, $z=0$ եզրային հարթություններին մոտենալիս, նույնպես և անվերջ հեռանալիս, մեր u ֆունկցիան անվերջ մեծանում է։ Դրված կետը կարելի է շրջապատել $[\varepsilon, E; \varepsilon, E; \varepsilon, E]$ խորանարդով, վերցնելով $0<E$ թիվն այնքան մեծ, իսկ $0<\varepsilon$ թիվն այնքան փոքր, որպեսզի այդ խորանարդից դուրս և նրա մակերևույթի վրա ունենանք $u>4c$։ Իսկ խորանարդում, որպես փակ և սահմանափակ տիրույթում, u ֆունկցիան պետք է ունենա փոքրագույն արժեք։ Այժմ արդեն պարզ է, որ այդ արժեքն ստացվում է հենց վերևում գտած կետում, և որ այդ կլինի փոքրագույնը նաև ամբողջ սկզբնական տիրույթում, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։

Դ ի տ ո ղ ո ւ թ յ ո ւ ն։ Այս բոլոր օրինակներում դիտարկվող տիրույթի ներսը գոյություն ուներ միայն մեկ ստացիոնար կետ։ Կարելի կլիներ համոզվել, որ այդ կետում կա մաքսիմում (կամ մինիմում)։ Սակայն, ի տարբերություն նրանից, ինչ նշված էր մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում [տես n° 133-ում արված դիտողությունը] — այստեղ միայն դրանից չէր կարելի եզրակացնել, որ մենք գործ ունենք տիրույթում ֆունկցիայի մեծագույն (փոքրագույն) արժեքի հետ։

Հետևյալ պարզ օրինակը ցույց է տալիս, որ այդպիսի եզրակացությունը իրականում կարող է հանգեցնել ոչ ճիշտ արդյունքի։ $[-5,5; -1,1]$ ուղղանկյան ներսը դիտարկենք

$$u = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$$

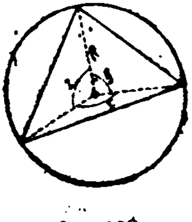
ֆունկցիան։ Նրա

$$u'_x = 3x^2 - 8x + 2y, \qquad u'_y = 2x - 2y$$

ածանցյալները տիրույթի սահմաններում զրո են դառնում միայն (0,0) կետում։ n° 187-ում արված հայտանիշի օգնությամբ, ինչպես հեշտ է տեսնել, այդ կետում ֆունկցիան ունի *մ ա ք ս ի մ ու մ* (որը հավասար է զրոյի)։ Բայց այդ արժեքը տիրույթում *մ ե ծ ա գ ու յ ն ը* չի լինի, որովհետև, օրինակ, (5,0) կետում ունենք u = 25։

Դրա հետևանքով, մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի դեպքում, տիրույթում ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները որոնելիս, մաքսիմումի և մինիմումի համար ֆունկցիայի հետազոտությունը գործնականորեն *հ ա ր կ ա վ ո ր* չէ։

101. ԽՆԴԻՐՆԵՐ։ Շատ խնդիրներ, — ինչպես մաթեմատիկայի բնագավառից, նույնպես և գիտության և տեխնիկայի այլ բնագավառներից, — բերվում են մի որոշ ֆունկցիայի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքը գտնելու հարցին։



Գծ. 103.

Ստորև բերված 1)—4) խնդիրների լուծումը կապված է նախորդ n°-ում արդեն դիտարկված օրինակների հետ։

1) Տված R շառավիղ ունեցող շրջանին ներգծած եռանկյունների թվում գտնել այն, որի մակերեսն ամենամեծն է (գծ. 103)։

Եթե եռանկյան կողմերի վրա հենված կենտրոնական անկյունները նշանակենք x, y, z, ապա դրանք կապված կլինեն $x+y+z=2\pi$ առնչությամբ, որտեղից $z=2\pi-x-y$։ Եռանկյան P մակերեսը դրանց միջոցով կարտահայտվի այսպես՝

$$P = \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin x + \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin y + \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin z =$$

$$= \frac{1}{2}R^2 \cdot [\sin x + \sin y - \sin(x+y)]։$$

Այստեղ x և y փոփոխականների փոփոխման տիրույթը որոշվում է $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \leq 2\pi$ պայմաններով։ Պետք է գտնել փոփոխականների այն արժեքները, որոնց փակագծերի ներսի արտահայտությունը տալիս են մեծագույն արժեք։

Մենք արդեն գիտենք [100, օրինակ 1)], որ դրանք կլինեն $x=y=\frac{3\pi}{3}$ արժեքները, այնպես որ նաև $z=\frac{2\pi}{3}$. ստացվում է *հ ա վ ա ս ա ր ա կ ո ղ մ* եռանկյուն։

2) Տված 2p պարագիծ ունեցող եռանկյուններից գտնել այն, որի P մակերեսը ամենամեծն է։

Դիցուք եռանկյան կողմերն են x, y, z. այդ ժամանակ, ըստ Հ ե ր ո ն ի բանաձևի, կունենանք՝

$$P=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Կարելի էր, այստեղ տեղադրելով $z=2p-x-y$, P-ն բերել հետևյալ տեսքին՝

$$P=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$$

և որոնել այդ ֆունկցիայի ամենամեծ արժեքը այն եռանկյան տիրույթում, որի մասին արդեն խոսել ենք n 150-ի 6)-ում։

Մենք կվարվենք այլ կերպ. խնդիրը բերվում է դրական թվերի՝

$$u=(p-x)(p-y)(p-z)$$

արտադրյալի ամենամեծ արժեքը գտնելուն, այն պայմանով, որ նրանց գումարը հաստատուն է՝

$$(p-x)+(p-y)+(p-z)=3p-2p=p.$$

Իսկ մենք արդեն գիտենք [190, օրինակ 3)], որ դրա համար բոլոր արտադրիչները պետք է իրար հավասար լինեն, ուստի $x=y=z=\frac{2p}{3}$։ Դարձյալ ստացվեց հ ա վ ա ս ա ր ա կ ո ղ մ եռանկյուն։

3) Տված

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

էլիպսոիդին ներգծված ուղղանկյուն զուգահեռանիստերից (որոնց կողերը զուգահեռ են էլիպսոիդի առանցքներին) գտնել այն, որն ունի ամենամեծ ծավալ։

Եթե x, y, z-ով նշանակենք այն գագաթի կոորդինատները, որը գտնվում է կոորդինատային առաջին եռանիստ անկյունում, ապա ծավալի համար կունենանք՝ $v=8xyz$։ v-ի փոխարեն կարելի է դիտարկել

$$u=\frac{v^2}{64a^2b^2c^2}=\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{y^2}{b^2}\cdot\frac{z^2}{c^2}$$

մեծությունը, որովհետև դրանք իրենց ամենամեծ արժեքներն ստանում են x, y, z-ի նույն արժեքների դեպքում։ Իսկ u-ի նկատմամբ խնդիրը դարձյալ բերվում է նախորդ n°-ի 2)-րդ օրինակին։

4) Ենթադրենք, թե մի որևէ գազ (օրինակ, օդ) սեղմվում է մխոցավոր կոմպրեսորի մեջ՝ p_0 մթնոլորտային ճնշումից մինչև $p>p_0$ ճնշումը։ Այն աշխատանքը, որը կատարվում է մեկ կիլոգրամ գազը սեղմելու համար, արտահայտվում է այսպես՝

$$A = RT_0\frac{\gamma}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right],$$

այստեղ R-ը «գազային հաստատունն» է, T_0-ն՝ մինչև սեղմումը գազի բացարձակ ջերմաստիճանը, իսկ γ-ն մի թիվ է (>1-ից), որը կախված է կոմպրեսորի կառուցվածքից։ A աշխատանքը, ակնհայտորեն, այնքան ավելի փոքր կլինի, որքան փոքր լինի սկզբնական T_0 ջերմաստիճանը։ Սեղմման բարձր աստիճանների ժամանակ, երբ կարևորություն ունի ծախսվող աշխատանքի տնտեսումը, սեղմման ամբողջ պրոցեսը բաժանում են մի քանի փուլերի, որոնց միջակայքում սեղմված (և միաժամանակ տաքացած) գազը ենթարկվում են սառեցման։

Դիցուք, օրինակ, մենք ունենք երեք փուլով կոմպրեսորներ, երկու միջանկյալ սառեցարաններով, որտեղ ջերմաստիճանը նորից դասցվում է T_0-ի։ Եթե p_1-ով ու p_2-ով նշանակենք ճնշումները առաջին և երկրորդ փուլերի վերջում, ապա սեղմման ընդհանուր աշխատանքն այժմ կլինի՝

$$A = RT_0\frac{\gamma}{\gamma-1}\left\{\left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right]+\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right]+\right.$$
$$\left.+\left[\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right]\right\}.$$

Այդ ժամանակ հարց է ծագում, թե տված p_0, p, T_0 մեծությունների դեպքում ինչպես ընտրել միջանկյալ p_1 և p_2 ճնշումները, որպեսզի ծախսվող աշխատանքի մեծությունը լինի փոքրագույնը։

Եթե զեն նետենք հաստատուն արտադրիչն ու հաստատուն գումարելիները, որոնք p_1 և p_2 ճնշումների մեծությունների վրա չեն ազդում, ապա այդ բոլորը կհանգի

$$u=\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}+\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}+\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

արտահայտության հետազոտմանը։ Քանի որ այդ գումարելիների արտադրյալը պահպանում է հաստատուն արժեք՝

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\cdot\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\cdot\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

ուստի. օգտվելով 190-ի 3)-րդ օրինակից, անմիջապես տեսնում ենք, որ u գումարն իր փոքրագույն արժեքին հասնում է այն ժամանակ, երբ նրա բոլոր գումարելիներն իրար հավասար են՝

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

կամ

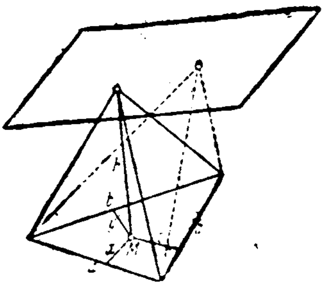
$$\frac{p_1}{p_0}=\frac{p_2}{p_1}=\frac{p}{p_2},$$

այնպես որ իրար հաջորդող ճնշումները կազմում են երկրաչափական պրոգրեսիա: Այստեղից՝

$$p_1=\sqrt[3]{p_0^2\cdot p},\qquad p_2=\sqrt[3]{p_0\cdot p^2}.$$

6) Հարթության վրա տված է a, b, c կողմեր ունեցող եռանկյուն (գծ. 104). Նրա վրա կարելի է կառուցել տված h բարձրություն ունեցող անթիվ բազմությամբ բուրգեր: Պահանջվում է գտնել այն, որն ունի ամենափոքր S կողմնային մակերևույթ:

Խնդիրը հանգում է բուրգի գագաթի M պրոյեկցիան գտնելուն: Դրա դիրքը որոշվում է այդ կետից եռանկյան a, b, c կողմերի վրա իջեցրած, համապատասխանաբար, x, y, z երեք ուղղահայացների մեծություններով: Յուրաքանչյուր ուղղահայացին մենք վերագրում ենք դրական նշան, եթե կետը և եռանկյունը գտնվում են միևնույն կողմում, իսկ հակառակ դեպքում՝ բացասական նշան: x, y, z մեծությունները իրար հետ կապված են հետևյալ առնչությամբ (P-ն եռանկյան մակերեսն է)՝



Նկ. 104.

$$ax+by+cz=2P,\quad \text{որտեղից}\quad z=\frac{2P-ax-by}{c}.$$

Մեզ հետաքրքրող կողմնային մակերևույթը կարտահայտվի այսպես՝

$$S=\frac{a}{2}\sqrt{x^2+h^2}+\frac{b}{2}\sqrt{y^2+h^2}+\frac{c}{2}\sqrt{z^2+h^2},$$

որտեղ z-ը պետք է փոխարինել վերևում գտած արտահայտությամբ. x, y անկախ փոփոխականների փոփոխման տիրույթը հանդիսանում է ամբողջ xy *հարթությունը։ Ունենք՝*

$$2S'_x=\frac{ax}{\sqrt{x^2+h^2}}-\frac{cz}{\sqrt{z^2+h^2}}\cdot\frac{a}{c}=0,$$

$$2S'_y=\frac{by}{\sqrt{y^2+h^2}}-\frac{cz}{\sqrt{z^2+h^2}}\cdot\frac{b}{c}=0,$$

կամ՝

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+h^2}}=\frac{z}{\sqrt{z^2+h^2}},$$ *որտեղից՝* $x=y=z$։

Ուրեմն, համապատասխան M *կետը եռանկյանը ներգծած շրջանի կենտրոնն է.*

Որ x*-ի և* y*-ի այդ արժեքներին համապատասխանում է* S*-ի ամենափոքր արժեքը, հեշտ է ցույց տալ, հենվելով այն բանի վրա (ինչպես նախորդ* n°*-ի 3)-րդ օրինակում), որ* x*-ի կամ* y*-ի անվերջ մեծացման հետ* S*-ը նույնպես անվերջ մեծանում է։*

6) Դիցուք հարթության վրա տրված են մեկ ուղղի վրա չգտնվող երեք կետեր՝ $M_1(a_1, b_1)$, $M_2(a_2, b_2)$, $M_3(a_3, b_3)$*։ Պահանջվում է այդ հարթության վրա գտնել այնպիսի կետ, որ նրա՝ տված կետերից ունեցած հեռավորությունների գումարը լինի ամենափոքրը:*

Վերցնելով կամավոր M(x, y) *կետ, ընդունենք՝*

$$\rho_i=\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2}\qquad(i=1,\ 2,\ 3)։$$

Այդ ժամանակ հետազոտման ենթակա է

$$u=\sum\rho_i=\sum\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2}$$

ֆունկցիան։ Այդ համար,— ամենուրեք, բացի տված կետերից,— գոյություն ունեն մասնակի ածանցյալներ՝

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sum\frac{x-a_i}{\rho_i}=\sum\cos\theta_i\ ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sum\frac{y-b_i}{\rho_i}=\sum\sin\theta_i\ ,$$

որտեղ θ_i*-ով նշանակված է* M_iM *ուղղով և* x*-երի առանցքով կազմված անկյունը։*

Այսպիսով, էքստրեմումի նկատմամբ «կասկածելի» կետեր հանդիսանում են, նախ և առաջ M_1, M_2 և M_3 կետերը, որտեղ ածանցյալներ գոյություն չունեն, և ապա այն M_0 կետը (մենք կտեսնենք, որ այդ կետը միշտ չէ որ գոյություն ունի), որտեղ ածանցյալները միասին դառնում են զրո: Քանի որ, երբ x-ը կամ y-ը անվերջ մեծանում են, մեր u ֆունկցիան էլ, ակներևաբար, անվերջ մեծանում է, ուստի նա իր ամենափոքր արժեքը ստանում է վերոհիշյալ կետերից որևէ մեկում:

Որպեսզի գտնենք M_0 ստացիոնար կետը, երկու մասնակի ածանցյալները հավասարեցնում ենք զրոյի. այդ մեզ կտա այսպիսի պայմաններ՝

$$\operatorname{coc}\Theta_1+\cos\Theta_2+\cos\Theta_3=0,\quad \sin\Theta_1+\sin\Theta_2+\sin\Theta_3=0:$$

Դրանցից առաջինը բազմապատկենք $\sin\Theta_2$-ով, իսկ երկրորդը $\cos\Theta_2$-ով, և իրարից հանենք. կստանանք՝

$$\sin(\Theta_1-\Theta_2)\;\sin(\Theta_2-\Theta_3),\quad \text{որտեղից՝}\quad \Theta_1-\Theta_2=\Theta_2-\Theta_3.$$

Նույն ձևով կստանանք՝

$$\Theta_2-\Theta_3=\Theta_3-\Theta_1:$$

Այսպիսով, զույգ առ զույգ վերցրած M_1M_0, M_2M_0, M_3M_0 ուղիղներով կազմված անկյունները բոլորը պետք է հավասար լինեն $\frac{2\pi}{3}$-ի, իսկ M_0 կետը ստացվում է $M_1M_2M_3$ եռանկյան կողմերի վրա կառուցված և $\frac{2\pi}{3}$ մեծության անկյուն պարունակող աղեղների հատումից:

Եթե այդ եռանկյունը չունի $\frac{2\pi}{3}$-ից մեծ կամ դրան հավասար անկյուն, ապա վերոհիշյալ աղեղները, իրոք, հատվում են եռանկյան ներսում և որոշում են այն M_0 կետը, որտեղից կողմերը երևում են $\frac{2\pi}{3}$-ին հավասար անկյունների տակ (գծ. 105): Այդ դեպքում պետք է իրար հետ համեմատել այն արժեքները, որոնք u-ն ստանում է վերոհիշյալ կետերում: Մենք կապացուցենք, որ M_0 ստացիոնար կետում u-ի արժեքը կլինի մյուսներից փոքր (և, հետևաբար, ընդհանրապես փոքրագույնը): Իրոք, ըստ կոսինուսների թեորեմայի, ունենք՝

$$\overline{M_1M_2}^2=\overline{M_0M_1}^2+\overline{M_0M_2}^2+\overline{M_0M_1}\cdot\overline{M_0M_2}>\left(\overline{M_0M_2}+\frac{1}{2}\overline{M_0M_1}\right)^2,$$

ուստի՝

$$\overline{M_1M_2}>\overline{M_0M_2}+\frac{1}{2}\overline{M_0M_1}:$$

Նույն ձևով՝

$$\overline{M_1M_3} > \overline{M_0M_3} + \frac{1}{2}\overline{M_0M_1}.$$

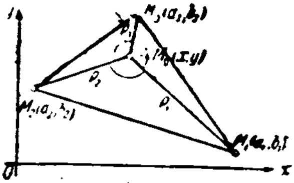
Գումարելով, կստանանք՝

$$\overline{M_1M_2} + \overline{M_1M_3} > \overline{M_0M_1} + \overline{M_0M_2} + \overline{M_0M_3},$$

այսինքն՝

$$u(M_1) > u(M_0).$$

Ակներևաբար, այստեղ M_1 կետը կարելի է փոխարինել M_2-ով կամ M_3-ով, որով և վերջանում է մեր ապացույցը.



Գծ. 105

Խնդիրն այլ ընթացք է ստանում, երբ $M_1M_2M_3$ եռանկյան անկյուններից մեկը հավասար կամ մեծ է լինում $\frac{2\pi}{3}$-ից: Այդ ժամանակ ստացիոնար կետը բոլորովին գոյություն չունի, և u ֆունկցիան իր փոքրագույն արժեքին հասնում է տված M_1, M_2, M_3 կետերից մեկում՝ հենց այն կետում, որը հանդիսանում է բութ անկյան գագաթը:

Այս խնդրի հետաքրքրական առանձնահատկությունը հանդիսանում է հենց այն, որ այստեղ պետք է լինում, բացի ստացիոնար կետից, հաշվի առնել նաև այնպիսի կետեր, որտեղ ածանցյալներ գոյություն չունեն [հմմ. 186-ի II դիտողությունը]:

2) Ընդհանրացնենք 1)-ին խնդիրը. գտնենք տված շրջանին (R շառավղով) ներգծած $(n+1)$-անկյուններից այն, որն ունի ամենամեծ P մակերես:

Բազմանկյան կողմերի վրա հենված կենտրոնական անկյունները նշանակենք $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$. այդ ժամանակ՝

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} = 2\pi,$$

որտեղից՝

$$x_{n+1} = 2\pi - (x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

P մակերեսը հավասար է՝

$$P = \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin x_1 + \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin x_2 + \dots$$

$$\dots+\frac{1}{2}R^2\cdot\sin x_n+\frac{1}{2}R^2\cdot\sin x_{n+1}.$$

երբ x_{n+1}-ի փոխարեն տեղադրենք իր արտահայտությունը, ապա խնդիրը կհանգի՝

$$u=\sin x_1+\sin x_2+\dots+\sin x_n+\sin[2\pi-(x_1+x_2+\dots+x_n)]$$

ֆունկցիայի մեծագույն արժեքի որոնմանը, ընդ որում $x_1, x_2, \dots, x_n$ անկախ փոփոխականների փոփոխման D տիրույթը որոշվում է

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \dots,\ x_n\geqslant 0,\ x_1+x_2+\dots+x_n\leqslant 2\pi,$$

անհավասարություններով, այսինքն՝ իրենից ներկայացնում է n-չափման սիմպլեքս [152]։

Համաձայն ընդհանուր կանոնի, հաշվենք ածանցյալները և հավասարեցնենք զրոյի՝

$$\cos x_1-\cos(x_1+x_2+\dots+x_n)=0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\cos x_n-\cos(x_1+x_2+\dots+x_n)=0.$$

տիրույթի միակ ներքին կետը, որտեղ բավարարվում են այդ պայմանները, կլինի այն կետը, որի համար

$$x_1=x_2=\dots=x_n=\frac{2\pi}{n+1}\qquad \text{(այդ ժամանակ նաև } x_{n+1}=\frac{2\pi}{n+1}\text{)}.$$

Այդ կետին համապատասխանում է $u=(n+1)\sin\frac{2\pi}{n+1}$ արժեքը։

Որպեսզի ապացուցենք, որ այդ իրոք կլինի u-ի մեծագույն արժեքը, օգտվենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից։ $n=2$ դեպքում մեր պնդումը արդեն ապացուցված է նախորդ n°-ի 1)-ին օրինակում։ Ենթադրենք, թե այդ ճիշտ է սինուսների n թվով գումարելիների համար (այնպես որ դրանց գումարի համար մեծագույն արժեքը կլինի $n\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$), և ապացուցենք, որ այդ ճիշտ է $n+1$ թվով սինուսների գումարի համար։

Համաձայն վերևում արված ընդհանուր ցուցմունքների, հարկավոր է, $(n+1)\cdot\sin\frac{2\pi}{n+1}$ արժեքը բաղդատել այն արժեքների հետ, որոնք ֆունկցիան ստանում է D տիրույթի եզրի վրա։ Վերցնենք, օրինակ, «սիմպլեքսի» $x_n=0$ նիստը. դրա վրա u-ն կլինի միայն $(n-1)$ փոփոխականների ֆունկցիա՝

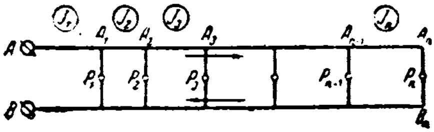
$$u = \sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_{n-1} + \sin[2\pi - (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})]$$

և, ըստ ենթադրության, այդտեղ մեծագույն արժեքը կլինի $n.\sin\frac{2\pi}{n}$: *Նույնը կարելի է ստանալ նաև մյուս «նիստերի» համար: Բայց քանի որ*

$$n.\sin\frac{2\pi}{n} < (n+1).\sin\frac{2\pi}{n+1}\,^{*},$$

ուստի մեր պնդումը ապացուցված է: Ամենամեծ մակերես կունենա կանոնավոր բազմանկյունը:

8) Դիտարկենք զուգահեռ միացումով էլեկտրական սնուցող ցանց: 106-րդ գծագրի վրա ներկայացված է ցանցի սխեման, ընդ որում A*-ն և* B*-ն հոսանքի աղբյուրներն են և* $P_1, P_2, \dots, P_n$*-ը՝ հոսանքի ընդունիչներն են, որոնք, համապատասխանաբար, ստանում են* $i_1, i_2, \dots, i_n$ *հոսանք: Պահանջվում է լարերի հատույթները ընտրել այնպես, որ ամբողջ մագիստրալի համար ծախսվի նվազագույն քանակությամբ պղինձ, երբ նախապես տրված է, որ պոտենցիալների ընդհանուր թույլատրելի անկումը հավասար է* 2e*-ի:*



Գծ. 106.

Ակներևաբար, բավական է սահմանափակվել լարերից միայն մեկի, ասենք AA_n*-ի, ուսումնասիրությամբ, որովհետև մյուս լարը [illegible] գտնվում է համանման պայմաններում:* $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ *մասերի երկարությունները (մետրերով) նշանակենք* $l_1, l_2, \dots, l_n$*-ով, նրանց հատույթների մակերեսները (մմ²-ներով)՝* $q_1, q_2, \dots, q_n$*-ով: Այդ ժամանակ*

$$u = l_1q_1 + l_2q_2 + \dots + l_nq_n$$

արտահայտությունը հենց կլինի ամբողջ ծախսված պղնձի ծավալը (սմ³-երով): Նրա համար պետք է ստանալ ամենափոքր արժեք, ի նկատի ունենալով, որ AA_n *լարի մեջ պոտենցիալի ընդհանուր անկումը պետք է հավասար լինի* e*-ի:*

* *Այդ հավասարությունը հետևում է նրանից, որ, ինչպես դժվար չէ համոզվել դիֆերենցիալ հաշվի մեթոդներով,* $\frac{\sin z}{z}$ *ֆունկցիան,* z*-ը* 0*-ից մինչև* π *աճելիս, մոնոտոն նվազում է:*

Հեշտ է հաշվել, թե շղթայի $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ *հատվածներում ինչպիսի* $J_1, J_2, \ldots, J_n$ *հոսանքներ կանցնեն՝*

$$J_1 = i_1 + i_2 + \cdots + i_n, \quad J_2 = i_2 + \cdots + i_n, \quad \ldots, \quad J_n = i_n.$$

Եթե մեկ մետր երկարության և մեկ մմ² հաստության պղնձյա լարի դիմադրությունը նշանակենք ρ-ով, ապա այդ հատվածների դիմադրությունները կլինեն՝

$$r_1 = \frac{\rho l_1}{q_1}, \quad r_2 = \frac{\rho l_2}{q_2}, \quad \ldots, \quad r_n = \frac{\rho l_n}{q_n},$$

ուստի, համաձայն Օմի օրենքի, այդ հատվածներում պոտենցիալի համապատասխան անկումները կարտահայտվեն այսպես՝

$$e_1 = r_1 J_1 = \frac{\rho l_1 J_1}{q_1}, \quad e_2 = r_2 J_2 = \frac{\rho l_2 J_2}{q_2}, \quad \ldots, \quad e_n = r_n J_n = \frac{\rho l_n J_n}{q_n}.$$

Որպեսզի խուսափենք բարդ հաշվումներից, մենք, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ *փոփոխականների փոխարեն, կվերցնենք հենց այդ* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *մեծությունները, որոնք իրար հետ կապված են հետևյալ պարզ պայմանով՝*

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_{n-1} + e_n = e, \quad \text{որտեղից՝} \quad e_n = e - e_1 - e_2 - \cdots - e_{n-1}.$$

Այդ ժամանակ, իր հերթին,

$$q_1 = \frac{\rho l_1 J_1}{e_1}, \quad q_2 = \frac{\rho l_2 J_2}{e_2}, \quad \ldots, \quad q_n = \frac{\rho l_n J_n}{e_n} = \frac{\rho l_n J_n}{e - e_1 - e_2 - \cdots - e_{n-1}},$$

և՝

$$u = \rho\left[\frac{l_1^2 J_1}{e_1} + \cdots + \frac{l_{n-1}^2 J_{n-1}}{e_{n-1}} + \frac{l_n^2 J_n}{e - e_1 - e_2 - \cdots - e_{n-1}}\right],$$

ընդ որում $e_1, e_2, \ldots, e_{n-2}$ *անկախ փոփոխականների փոփոխման տիրույթը որոշվում է*

$$e_1 > 0, \ e_2 > 0, \ \ldots, \ e_{n-1} > 0, \ e_1 + e_2 + \cdots + e_{n-1} < e$$

անհավասարություններով (բաց ս ի մ պ լ ե ք ս)։

u*-ի ածանցյալներն ըստ բոլոր փոփոխականների հավասարեցնելով զրոյի, կստանանք հավասարումների հետևյալ սիստեմը՝*

$$-\frac{l_1^2 J_1}{e_1^2} + \frac{l_n^2 J_n}{(e - e_1 - \cdots - e_{n-1})^2} = 0,$$

$$-\frac{l_2^2 J_2}{e_2^2}+\frac{l_n^2 J_n}{(e-e_1-\dots-e_{n-1})^2}=0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$-\frac{l_{n-1}^2 J_{n-1}}{e_{n-1}^2}+\frac{l_n^2 J_n}{(e-e_1-\dots-e_{n-1})^2}=0,$$

որտեղից (նորից գրելով e_n-ը) կունենանք՝

$$\frac{l_1^2 J_1}{e_1^2}=\frac{l_2^2 J_2}{e_2^2}=\dots=\frac{l_n^2 J_n}{e_n^2}.$$

Այս բոլոր հարաբերությունների ընդհանուր մեծությունը հարմար է նշանակել $\frac{1}{\lambda^2}$-ով ($\lambda>0$): Այդ ժամանակ՝

$$e_1=\lambda l_1\sqrt{J_1},\quad e_2=\lambda l_2\sqrt{J_2},\quad \dots,\quad e_n=\lambda l_n\sqrt{J_n},$$

ընդ որում λ-ն հեշտությամբ որոշվում է $e_1+e_2+\dots+e_n=e$ պայմանից՝

$$\lambda=\frac{e}{l_1\sqrt{J_1}+l_2\sqrt{J_2}+\dots+l_n\sqrt{J_n}}.$$

Քանի որ ($e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$) կետը տիրույթի եզրին մոտեցնելիս u-ն անվերջ մեծանում է, ուստի մեր գտած $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ (e_n) արժեքները իրոք u ֆունկցիային տալիս են ամենափոքր արժեք:

Վերջապես, վերադառնալով մեր հիմնական $q_1, q_2, \dots, q_n$ փոփոխականներին, կստանանք՝

$$q_1=\frac{\rho}{\lambda}\sqrt{J_1},\quad q_2=\frac{\rho}{\lambda}\sqrt{J_2},\quad \dots,\quad q_n=\frac{\rho}{\lambda}\sqrt{J_n},$$

այնպես որ լարերի ամենաձեռնտու հատույթները ստացվում են համեմատական համապատասխան հոսանքի ուժերից քառակուսի արմատներին:

9) Փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը: Այսպես է կոչվում դիտումների արդյունքները մշակելու շատ տարածված այն մեթոդը, որի էությունը կայանում է հետևյալում:

Դիցուք պահանջվում է որոշել x, y, z երեք* մեծությունների ար-

---

* Միայն գրության պարզության համար մենք սահմանափակվում ենք երեք մեծություններով:

ժեքները, եթե դրանց համար ստացվում են $n > 3$ թվով գծային հավասարումներ՝

$$a_i x + b_i y + c_i z = d_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ընդ որում a_i, b_i, c_i, d_i գործակիցներից մի քանիսը ստացված են փորձերի միջոցով և հայտնի են միայն որոշ մոտավորությամբ։ Միաժամանակ, մենք ենթադրում ենք, որ այդ հավասարումներից գոնե որևէ երեքը ունեն զրոյից տարբեր դետերմինանտ, օրինակ, դիցուք՝

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{14}$$

Բայց առաջին երեք հավասարումներից հաշված x, y, z արժեքները, ընդհանրապես ասած, ճշտորեն չեն բավարարի մնացածներին (կամ հավասարումների գործակիցներում կատարված անխուսափելի սխալների պատճառով, կամ այն պատճառով, որ հենց այդ հավասարումներն են մոտավոր)։ Հիմք չունենալով հավասարումներից ոմանց առավելություն տալ մյուսների նկատմամբ և հաշվի առնելով

$$\delta_i = a_i x + b_i y + c_i z - d_i$$

սխալների անխուսափելիությունը, ինչպիսին էլ որ վերցնենք x, y, z արժեքները, աշխատում են ձգտել միայն այն բանին, որպեսզի այդ սխալների քառակուսիների գումարը՝

$$W = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i y + c_i z - d_i)^2$$

լինի փոքրագույնը (այստեղից էլ ստացվում է մեթոդի անունը)։ Այլ խոսքով, փորձի արդյունքներին ամենից լավ համապատասխանող համարում են x, y, z մեծությունների այն արժեքները, որոնք $W = W(x, y, z)$ ֆունկցիային տալիս են փոքրագույն արժեք։

Ըստ ընդհանուր կանոնի, որպեսզի գտնենք այդ արժեքները, զրոյի հավասարեցնենք W-ի ածանցյալները ըստ x, y, z փոփոխականների՝

$$2 \sum_{i=1}^{n} a_i (a_i x + b_i y + c_i z - d_i) = 0,$$

$$2 \sum_{i=1}^{n} b_i (a_i x + b_i y + c_i z - d_i) = 0,$$

$$2\sum_{i=1}^{n} c_i(a_i x+b_i y+c_i z-d_i)=0.$$

Գաուսը (C. F. Gauss) միայն նշանիկներով տարբերվող միատիպ գումարելիների գումարի համար մտցրել է այլ նշանակումներ. այսպես նա գրում է՝

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2\text{-ի փոխարեն՝ } [aa], \quad \sum_{i=1}^{n} a_i b_i\text{-ի փոխարեն՝ } [ab], \text{ և այլն։}$$

x, y, z փոփոխականների արժեքները որոշելու համար ստացված հավասարումները Գաուսի նշանակումներով կգրվեն այսպես՝

$$[aa]x+[ab]y+[ac]z=[ad],$$

$$[ba]x+[bb]y+[bc]z=[bd],$$

$$[ca]x+[cb]y+[cc]z=[cd].$$

որոնց անվանում են նորմալ հավասարումներ։

Որպեսզի համոզվենք, որ այդ հավասարումներով միարժեքորեն որոշվում են x, y, z մեծությունների արժեքները, պետք է ցույց տալ, որ այդ սիստեմի դետերմինանտը զրոյից տարբեր է։ Բայց, ըստ հանրահաշվից հայտնի թեորեմայի, այդ դետերմինանտի քառակուսին ներկայացվում է այսպես՝

$$\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ba] & [bb] & [bc] \\ [ca] & [cb] & [cc] \end{vmatrix}^2 = \sum_{(i,j,k)} \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{vmatrix}^2,$$

ընդ որում գումարումը տարածվում է n թվով՝ 1, 2, 3, ..., n նշանիկներից երեքական վերցրած բոլոր հնարավոր (i, j, k) զուգորդությունների վրա։ Քանի որ, ըստ մեր ենթադրության, աջ կողմում գրված դետերմինանտներից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է, ուստի այստեղից հետևում է, որ ձախ մասում գրված դետերմինանտը նույնպես զրո չէ։

Մնում է համոզվել նաև նրանում, որ նորմալ հավասարումներից որոշվող փոփոխականների արժեքները իրոք W ֆունկցիային տալիս են փոքրագույն արժեք։ Դրա համար բավական է, օրինակ, ցույց տալ, որ բավականաչափ մեծ շառավղով գնդից դուրս W-ն կլինի ցանկացած չափով մեծ։

Այդ նպատակով դիտարկենք W արտահայտության առաջին երեք փակագծերի արժեքները՝

$$a_1x+b_1y+c_1z-d_1=u_1, \quad a_2x+b_2y+c_2z-d_2=u_2,$$

$$a_3x+b_3y+c_3z-d_3=u_3.$$

(14)-ի շնորհիվ, իրենց հերթին, այդ արժեքների միջոցով գծայնորեն կարտահայտվեն, միանգամայն որոշակի հաստատուն գործակիցներով, նաև x, y, z մեծությունները, ուստի, քանի դեռ բոլոր u_1, u_2, u_3 մեծությունները մնում են սահմանափակ, անհրաժեշտաբար սահմանափակ կլինեն նաև x, y, z մեծությունները: Այստեղից արդեն պարզ է, որ երբ $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ արտահայտությունն անվերջ մեծանում է, նաև $(u_1^2+u_2^2+u_3^2)$ արտահայտությունն անվերջ կմեծանա (և, հետևապես, նաև W-ն):

ՎԵՑԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ԴԵՏԵՐՄԻՆԱՆՏՆԵՐ. ՆՐԱՆՑ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

§ 1. ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ԴԵՏԵՐՄԻՆԱՆՏՆԵՐԻ ՁԵՎԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

192. ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ԴԵՏԵՐՄԻՆԱՆՏԻ (ՅԱԿՈԲԻԱՆԻ) ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ։ Այս գլխում, ինչպես նաև դասընթացի մյուս հատորներում, մեզ համար հետազոտության կարևոր գործիք են լինելու հատուկ տեսակի *դ ե տ ե ր մ ի ն ա ն տ ն ե ր*, որոնք կազմվում են մասնակի ածանցյալներից։ Նախ ուսումնասիրենք այդ դետերմինանտների հիմնական հատկությունները։

Դիցուք տված են n փոփոխականներից կախված n ֆունկցիաներ՝

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{array}\right\}, \qquad (1)$$

որոնք որոշված են n-չափման մի D տիրույթում և այնտեղ ունեն անընդհատ մասնակի ածանցյալներ ըստ բոլոր փոփոխականների։ Այդ մասնակի ածանցյալներից կազմենք հետևյալ դետերմինանտը՝

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

Այս դետերմինանտը սովորաբար կոչվում է (1) սիստեմի Յակոբիի ֆունկցիոնալ դետերմինանտ *կամ (1) սիստեմի* յակոբիան՝ *գերմանացի մաթեմատիկոս Յակոբիի* (C. G. J. Jacobi) *անունով, որն առաջինն է նրանք մտցրել գիտության մեջ։ Կարճության համար այն նշանակում են*

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

սիմվոլով, որը նման է ածանցյալի նշանակմանը։ Յակոբիանն ունի մի շարք հատկություններ, որոնք նման են սովորական ածանցյալի հատկություններին։

193. ՅԱԿՈԲԻԱՆՆԵՐԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ։ *Ֆունկցիաների (1) սիստեմի հետ միասին վերցնենք նաև ֆունկցիաների հետևյալ սիստեմը՝*

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_n), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

որոնք որոշված են մի P տիրույթում և այնտեղ ունեն անընդհատ մասնակի ածանցյալներ։ Ենթադրենք, թե $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ կետը P տիրույթում փոփոխվելիս, համապատասխան $x_1, x_2, \ldots, x_n$) կետը չի դուրս գալիս D տիրույթից, այնպես, որ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ մեծությունները կարելի է դիտել որպես $t_1, t_2, \ldots, t_n$ փոփոխականների բարդ ֆունկցիաներ՝ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ միջանկյալ ֆունկցիաների միջոցով։ Այժմ (1) սիստեմի յակոբիանը բազմապատկենք (2) սիստեմի յակոբիանով։ Դրա համար ամենից առաջ նկատենք, որ՝

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial x_2}{\partial t_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_n} & \frac{\partial x_2}{\partial t_n} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix},$$

Այնուհետև, դետերմինանտների տեսությունից հայտնի է դետերմինանտների բազմապատկման թեորեմը, որն արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

որտեղ վերջին դետերմինանտի ընդհանուր էլեմենտն այսպիսին է՝

$$c_{ik} = a_{i1}b_{k1} + a_{i2}b_{k2} + \cdots + a_{in}b_{kn}$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

(բազմապատկում՝ «տողը տողով» կանոնով)։ Այդ բանաձևը կիրառելով ֆունկցիոնալ դետերմինանտների նկատմամբ, կստանանք՝

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_n} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_n} & \frac{\partial x_2}{\partial t_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_n} + \cdots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_n} + \cdots + \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_n} + \cdots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}.$$

Նկատելով, որ բարդ ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևի համաձայն, այդ դետերմինանտի ընդհանուր էլեմենտը կլինի՝

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k}+\ldots+\frac{\partial y_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_k}=\frac{\partial y_i}{\partial t_k}$$

$$(i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

մենք կարող ենք վերջին դետերմինանտը գրել այսպես՝

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_2}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial y_2}{\partial t_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial t_1} & \frac{\partial y_n}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}.$$

Յակոբիանի առաջին հատկությունը, որը մենք հիմա ապացուցեցինք, կրճատ նշանակումներով կարելի է գրել այսպես՝

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \cdot \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(t_1, t_2, \ldots, t_n)} = \frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(t_1, t_2, \ldots, t_n)}; \quad (3)$$

Եթե մենք ունենայինք x*-ից կախված մեկ* y *ֆունկցիա, որտեղ* x*-ն էլ լիներ* t*-ի ֆունկցիա, ապա կստանայինք բարդ ֆունկցիայի ածանցյալի հայտնի բանաձևը՝*

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}.$$

այսպիսով, յակոբիանների համար ապացուցված հատկությունը՝ բարդ ֆունկցիայի ածանցյալի համար հայտնի բանաձևի ընդհանրացումն է։

Հատկապես նշենք այն դեպքը, երբ $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *փոփոխականները հենց* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *մեծություններն են, այսինքն որ ֆունկցիաների* (2) *սիստեմը* (1) *սիստեմի հ ա կ ա դ ա ր ձ մ ա ն արդյունքն է**։ *Այդ դեպքում մեր ստացած առնչությունը բերվում է հետևյալին՝*

---

* *Այդպիսի հ ա կ ա դ ա ր ձ մ ա ն հնարավորության հարցը մենք այստեղ բաց ենք թողնում (այդ մասին տես հաջորդ պարագրաֆը)։*

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \cdot \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = 1$$

կամ՝

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{1}{\dfrac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}}, \tag{4}$$

Այս տեսքով նա մեզ հիշեցնում է հակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը։

194. ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ (ՅԱԿՈԲԻԻ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ) ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ։ *Դիցուք ունենք* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n *հատ փոփոխականներից կախված* m *հատ ֆունկցիաներ* $(n \geq m)$՝

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases}$$

ընդ որում, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *փոփոխականներն էլ իրենց հերթին հանդիսանում են* m *հատ՝* $t_1, t_2, \ldots, t_m$ *փոփոխականների ֆունկցիաներ՝*

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), \\ x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)։ \end{cases}$$

Ենթադրելով, որ երկու դեպքում էլ գոյություն ունեն անընդհատ մասնակի ածանցյալներ, աշխատենք գտնել $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *մեծությունների, որպես* $t_1, t_2, \ldots, t_m$ *փոփոխականների ֆունկցիաների, յակոբիանի արտահայտությունը։*

Դետերմինանտների տեսությունում ապացուցվում է մ ա տ ր ի ց ն ե ր ի բ ա զ մ ա պ ա տ կ մ ա ն ընդհանուր թեորեմը (որի մասնավոր դեպքն է դետերմինանտների բազմապատկման թեորեմը, որը մենք օգտագործեցինք վերևում)։ Հիշեցնենք երկու մ ա տ ր ի ց ն ե ր (աղյուսակներ)՝

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}\right\| \quad \text{և} \quad \left\|\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{22} & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{matrix}\right\| \quad (n > m)\text{։}$$

Նրանց արտադրյալ կոչվում է հետևյալ դետերմինանտը՝

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{vmatrix},$$

որի էլեմենտները հաշվվում են հետևյալ բանաձևով՝

$$c_{ik} = a_{i1}b_{k1} + a_{i2}b_{k2} + \cdots + a_{in}b_{kn} \quad (i,\ k = 1, 2, \ldots, m)\text{։}$$

Այդ արտադրյալը հավասար է հետևյալ գումարին՝

$$\sum_{(i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_m)} \begin{vmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \cdots & a_{1i_m} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \cdots & a_{2i_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{mi_1} & a_{mi_2} & \cdots & a_{mi_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1i_1} & b_{1i_2} & \cdots & b_{1i_m} \\ b_{2i_1} & b_{2i_2} & \cdots & b_{2i_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{mi_1} & b_{mi_2} & \cdots & b_{mi_m} \end{vmatrix},$$

որը տարածվում է 1, 2, ..., n՝ n *հատ էլեմենտների* m*-ական ամեն հնարավոր* $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ *զուգորդությունների վրա։*

Այդ արդյունքը կիրառելով հետևյալ «ֆունկցիոնալ մատրիցների» («Յակոբիի մատրիցների») նկատմամբ՝

$$\left\|\begin{matrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{matrix}\right\| \quad \text{և} \quad \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_m} & \frac{\partial x_2}{\partial t_m} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_m} \end{matrix}\right\|,$$

կստանանք՝

$$
\begin{vmatrix}
\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\dots+\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m}+\dots+\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m} \\
\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\dots+\frac{\partial y_2}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m}+\dots+\frac{\partial y_2}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial y_m}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\dots+\frac{\partial y_m}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m}+\dots+\frac{\partial y_m}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m}
\end{vmatrix} =
$$

$$
= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_m)}
\begin{vmatrix}
\frac{\partial y_1}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial y_1}{\partial x_{i_2}} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_{i_m}} \\
\frac{\partial y_2}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial y_2}{\partial x_{i_2}} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_{i_m}} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial y_m}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial y_m}{\partial x_{i_2}} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_{i_m}}
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix}
\frac{\partial x_{i_1}}{\partial t_1} & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_{i_m}}{\partial t_1} \\
\frac{\partial x_{i_1}}{\partial t_2} & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_{i_m}}{\partial t_2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial x_{i_1}}{\partial t_m} & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial t_m} & \dots & \frac{\partial x_{i_m}}{\partial t_m}
\end{vmatrix},
$$

Եթե նորից վերհիշենք բարդ ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը, ապա այս հավասարության ձախ մասի դետերմինանտը կարտագրվի այսպես՝

$$
\begin{vmatrix}
\frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial t_m} \\
\frac{\partial y_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial t_m} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial y_m}{\partial t_1} & \frac{\partial y_m}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial t_m}
\end{vmatrix},
$$

Ստացված արդյունքը կրճատ նշանակումներով ունի հետևյալ տեսքը՝

$$
\frac{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}{D(t_1, t_2, \dots, t_m)} =
$$

$$
= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_m)} \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}{D(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})} \cdot \frac{D(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})}{D(t_1, t_2, \dots, t_m)}, \quad (5)
$$

որտեղ գումարը տարածվում է 1, 2, ..., n՝ n *հատ նշանիկների բոլոր հնարավոր* m-*ական* *զուգորդումների վրա։*

Ապացուցված բանաձևը $m=1$ *դեպքում բերվում է բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցման հայտնի բանաձևին՝*

$$\frac{dy}{dt}=\sum\frac{\partial y}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t},$$

և, այդպիսով, հանդիսանում է նրա ընդհանրացումը։

Նշենք մեր բանաձևի մի մասնավոր դեպք ևս, որն ստացվում է, երբ ընդունում ենք $n=3$, $m=2$՝

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(t_1, t_2)}=\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)}\cdot\frac{D(x_1, x_2)}{D(t_1, t_2)}+\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_2, x_3)}\cdot\frac{D(x_2, x_3)}{D(t_1, t_2)}+$$
$$+\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_3, x_1)}\cdot\frac{D(x_3, x_1)}{D(t_1, t_2)}. \qquad (6)$$

Այս բանաձևն առանձնապես շատ կիրառություններ ունի։

Մենք ցույց տվինք յակոբիանների մի շարք ձևական հատկություններ, որոնք նման են սովորական ածանցյալների հատկություններին. այդ հատկություններին միանում է մի բանաձև ևս, որը մենք կարտածենք առաջիկա n°-*ներից մեկում* [200, *8*]*։ Սակայն ավելի խոր նմանություն ածանցյալների ու յակոբիանների միջև երևան է գալիս այն դերի կապակցությամբ, որը նրանք խաղում են* ***անբացահայտ ֆունկցիաների*** *տեսության մեջ։*

§ 2. ԱՆԲԱՑԱՀԱՅՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

195. ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ԱՆԲԱՑԱՀԱՅՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԳԱՂԱՓԱՐԸ։ *Ենթադրենք, թե* x *և* y *երկու փոփոխականների արժեքներն իրար հետ կապված են մի հավասարումով, որը բոլոր անդամները ձախ մասը տեղափոխելուց հետո, ընդհանրապես կունենա հետևյալ տեսք՝*

$$F(x, y)=0. \qquad (1)$$

Այստեղ F(x, y)-*ը մի ֆունկցիա է երկու փոփոխականներից՝ որոշված մի որոշ տիրույթում ։ Եթե* x-*ի (մի որոշ միջակայքում) յուրաքանչյուր արժեքի համար գոյություն ունի* y-*ի մեկ*

(կամ մի քանի) արժեք, որն x-ի հետ միասին բավարարում է (1) հավասարմանը, ապա դրանով որոշվում է մի $y = f(x)$ ֆունկցիա (միարժեք կամ բազմարժեք), որի համար

$$F[x, f(x)] = 0 \qquad (2)$$

հավասարությունն արդեն նույնություն է դառնում x-ի նկատմամբ։

Վերցնենք, օրինակ,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (1ա)$$

հավասարումը, որն, ակներևաբար, որոշում է y-ն իբրև x-ի երկարժեք ֆունկցիա $[-a, +a]$ միջակայքում, այն է՝

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

Եթե (1ա) հավասարման մեջ y-ի փոխարեն տեղադրենք այդ արտահայտությունը, կստացվի նույնություն։

Այստեղ մեզ հաջողվեց y-ի համար գտնել շատ պարզ անալիտիկ արտահայտություն x-ի նկատմամբ, այն էլ տարրական ֆունկցիայի տեսքով։ Այդպես է լինում, անշուշտ, ոչ միշտ։ Եթե, օրինակի համար, վերցնենք

$$y - x - \varepsilon \sin y = 0 \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

հավասարումը, որին մենք արդեն հանդիպել ենք (82, միայն փոփոխականների այլ նշանակումներով), ապա ինչպես տեսել ենք, այդ հավասարումով y-ը որոշվում է որպես x-ի միարժեք ֆունկցիա, թեպետև նա տարրական ֆունկցիաներով վերջավոր տեսքով չի արտահայտվում։

$y = f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է անբացահայտ, եթե նա տված է y-ի նկատմամբ չլուծված (1) հավասարումով. Նա բացահայտ է դառնում, եթե դիտարկվում է y-ի անմիջական կախումը x-ից։ Ընթերցողի համար պարզ պիտի լինի, որ այդ տերմինները բնորոշում են միայն $y = f(x)$ ֆունկցիայի տրման եղանակը, միջոցը, և ոչ մի առնչություն չունեն նրա բնույթի հետ։ [Խիստ ասած, ֆունկցիան բացահայտ և անբացահայտ ձևով տալու հակադրումը լիակատար հստակությամբ հնարավոր կլինի այն դեպքում, երբ բացահայտ ասելով

հասկանանք ֆունկցիան բացահայտ անալիտիկ արտահայտությամբ տալը. իսկ եթե բացահայտ ասելով հասկանանք ֆունկցիան ցանկացած կանոնով տալը [45], ապա y-ն իբրև x-ի ֆունկցիա (1) հավասարումով տալը ոչնչով վատ չէ ամեն մի այլ կանոնով տալուց։]

Պարզագույն դեպքում, երբ (1) հավասարումը հանրահաշվական է, այսինքն՝ երբ F(x, y) ֆունկցիան x-ի և y-ի նկատմամբ ամբողջ բազմանդամ է, նրանով որոշվող y անբացահայտ ֆունկցիան (որն ընդհանրապես բազմարժեք է) կոչվում է հանրահաշվական։ Եթե հավասարման աստիճանը (y-ի նկատմամբ) չորսից բարձր չէ, ապա հանրահաշվական ֆունկցիան հնարավոր է բացահայտ արտահայտել արմատներով, իսկ եթե չորսից բարձր է, ապա այդպիսի արտահայտումը հնարավոր է միայն բացառիկ դեպքերում։

Այժմ մեզ հետաքրքրում է «անբացահայտ» ֆունկցիայի միայն գոյության ու միարժեքության հարցը (ինչպես նաև նրա ուրիշ հատկությունները), անկախ այդ ֆունկցիան անալիտիկ բանաձևով «բացահայտ» ձևով ներկայացնելու հնարավորությունից։ *Ի միջի այլոց, հարցի այդպիսի դրումը մեզ համար նոր չէ. նրա մասնավոր դեպքի հետ մենք գործ ենք ունեցել, երբ խոսք է եղել հակադարձ ֆունկցիայի գոյության ու նրա հատկությունների մասին, և*

$$y - f(x) = 0$$

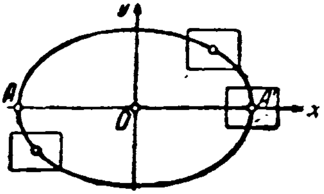
հավասարումով x փոփոխականը որոշվել է իբրև y-ի «անբացահայտ» ֆունկցիա։

Ուսանելի է առաջադրված հարցի երկրաչափական մեկնաբանությունը։ (1) հավասարումը, որոշ պայմանների առկայության դեպքում, ներկայացնում է մի կոր՝ հարթության վրա [օրինակ, (1ա) հավասարումը, ինչպես հայտնի է, ներկայացնում է էլիպս (գծ. 107)]. այդ դեպքում նա կոչվում է կորի անբացահայտ հավասարում։ Հարցը կայանում է նրանում, թե (1) կորը (կամ նրա մասը) կարո՞ղ է արդյոք արտահայտվել y=f(x) տեսքի սովորական հավասարումով, որի աջ մասում լինի միարժեք ֆունկցիա. երկրաչափորեն այդ նշանակում է, որ կորը (կամ նրա մասը) y-ների առանցքին զուգահեռ ուղիղով հատվում է միայն մեկ կետում։

Եթե մենք ցանկանում ենք միարժեք ֆունկցիա ունենալ, ապա, ինչպես երևում է նույն էլիպսի օրինակից, պետք է սահմանափակել ոչ միայն x-ի փոփոխման տիրույթը, այլև y-ի փոփոխման տիրույթը։

Կարճության համար, մենք ասելու ենք, որ (a, b; c, d) ուղղանկյան մեջ (1) հավասարումով y-ը որոշվում է որպես x-ի միարժեք ֆունկցիա, եթե x-ի՝ (a, b) միջակայքում գտնվող յուրաքանչյուր արժեքի համար (1) հավասարումն ունի մեկ և միայն մեկ y արմատ (c, d) միջակայքում։

Սովորաբար մեզ հետաքրքրելու է (1) հավասարմանը բավարարող մի որոշ (x_0, y_0) *կետ (կորի վրա գտնվող), իսկ վերևում հիշատակված ուղղանկյան դերում հանդես է գալու այդ կետի շրջակայքը։ Այսպես, օրինակ, էլիպսի դեպքում (գծ. 107), ակներևաբար, կարելի է պնդել, որ (1ա) հավասարումով* y *օրդինատը որոշվում է որպես* x *աբսցիսի միարժեք ֆունկցիա՝ էլիպսի ամեն մի կետի (բացի մեծ առանցքի վրա գտնվող* A *և* A′ *գագաթներից) բավականաչափ փոքր շրջակայքում։*



Գծ. 107.

196. ԱՆԲԱՑԱՀԱՅՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԳՈՅՈՒԹՅՈՒՆԸ։ Այժմ պարզենք այն պայմանները, որոնք ապահովում են միարժեք ու անընդհատ անբացահայտ ֆունկցիայի գոյությունը։

I ԹԵՈՐԵՄԱ: Դիցուք՝ 1) F(x, y) ֆունկցիան որոշված ու անընդհատ է մի

$$D=[x_0-\Delta,\ x_0+\Delta;\ y_0-\Delta',\ y_0+\Delta']$$

ուղղանկյունում, որի կենտրոնը (x_0, y_0) կետն է,

2) F (x, y) ֆունկցիան այդ կետում դառնում է զրո՝

$$F(x_0, y_0)=0.$$

3) հաստատուն x-ի դեպքում F (x, y) ֆունկցիան, y-ն աճելիս, մոնոտոն աճում է (կամ մոնոտոն նվազում է)։

Այդ դեպքում՝

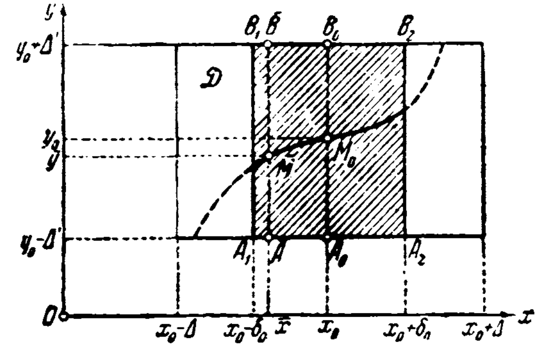
ա) (x_0, y_0) կետի մի որոշ շրջակայքում (1) հավասարումով y-ը որոշվում է, որպես x-ի միարժեք ֆունկցիա՝ $y=f(x)$.

բ) $x=x_0$ դեպքում այդ ֆունկցիան ընդունում է y_0 արժեքը՝ $y_0=f(x_0)$.

գ) $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է:

Ապացույց: *Սկսենք շարժվել* $M_0(x_0, y_0)$ *կետով անցնող և* Oy *առանցքին զուգահեռ ուղիղով, այսինքն՝ ֆիքսենք* $x=x_0$ *(գծ. 108). այդ ժամանակ* $F(x, y)$ *ֆունկցիան կդառնա մեկ փոփոխականի (*y*-ի) ֆունկցիա՝* $F(x_0, y)$*: 2) պայմանի շնորհիվ, երբ* $y=y_0$*, այդ ֆունկցիան դառնում է 0: Միաժամանակ, 3) պայմանի շնորհիվ,* $F(x_0, y)$ *ֆունկցիան* y*-ի հետ միասին աճում է, այնպես որ* $y<y_0$ *դեպքում նրա արժեքները զրոյից փոքր են, իսկ* $y>y_0$ *դեպքում՝ զրոյից մեծ են: Մասնավորապես* $A_0(x_0, y_0-\Delta')$ *և* $B_0(x_0, y_0+\Delta')$ *կետերում նա կունենա հակադիր նշաններով արժեքներ, այն է՝*

$$F(A_0)=F(x_0, y_0-\Delta')<0, \quad F(B_0)=F(x_0, y_0+\Delta')>0.$$



Գծ. 108.

Այժմ անցնենք այդ $A_0 B_0$ *կետերով անցնող հորիզոնական ուղիղներին, այսինքն՝ այս անգամ ֆիքսենք* $y=y_0-\Delta'$ *կամ* $y=y_0+\Delta'$*: Կստացվեն մեկ փոփոխականի (*x*-ի) երկու ֆունկցիաներ՝* $F(x, y_0-\Delta')$ *և* $F(x, y_0+\Delta')$*, որոնք* $x=x_0$ *դեպքում, ինչպես տեսանք, ունեն տարբեր նշաններ, առաջինը՝ բացասական, երկրորդը՝ դրական: Բայց 1) պայմանի համաձայն այդ ֆունկցիաներն անընդհատ են*, ուստի կգտնվի* x_0 *կետի մի* $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$ *շրջակայք* $(0<\delta_0<\Delta)$*, որտեղ այդ երկու ֆունկ-*

* *Մենք ենթադրել ենք* $F(x, y)$ *ֆունկցիայի անընդհատությունը* x *և* y *փոփոխականների խմբի նկատմամբ. բայց այդ դեպքում նա անընդհատ կլինի նաև փոփոխականներից յուրաքանչյուրի նկատմամբ առանձին:*

ցիաները պահպանում են իրենց նշանները [79, լեմմա], այնպես որ, երբ՝

$$x_0-\delta_0 < x < x_0+\delta_0,$$

կլինեն՝

$$F(x, y_0-\Delta') < 0 \text{ և } F(x, y_0+\Delta') > 0։$$

Այլ խոսքով, սկզբնական ուղղանկյան ստորին ու վերին հիմքերի վրա A_1A_2 և B_1B_2 հատվածների երկարությամբ, որոնք ունեն $2\delta_0$ երկարություն և համապատասխանաբար, A_0 ու B_0 կենտրոնները, տված $F(x, y)$ ֆունկցիան ունի առաջինի վրա բացասական, իսկ երկրորդի վրա դրական արժեքներ։

$(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$ միջակայքում ֆիքսենք որևէ $x=\bar{x}$ արժեք և դիտարկենք $\bar{A}(\bar{x}, y_0-\Delta')$ և $\bar{B}(\bar{x}, y_0+\Delta')$ կետերը միացնող ուղղաձիգ հատվածը, որի վրա տված $F(x, y)$ ֆունկցիան նորից կդառնա մեկ փոփոխականից (y-ից) կախված՝ $F(\bar{x}, y)$։ Քանի որ, 1) պայմանի համաձայն, այդ ֆունկցիան անընդհատ է և $[y_0-\Delta', y_0+\Delta']$ միջակայքի ծայրերում ունի տարբեր նշաններով արժեքներ՝

$$F(\bar{A})=F(\bar{x}, y_0-\Delta')<0, \quad F(\bar{B})=F(\bar{x}, y_0+\Delta')>0,$$

ապա, Կոշիի թեորեմայի համաձայն [79], $y_0-\Delta'$ ու $y_0+\Delta'$ արժեքների միջև գտնվող մի որոշ $y=\bar{y}$ արժեքի դեպքում $F(\bar{x}, y)$ ֆունկցիան կդառնա զրո՝

$$F(\bar{x}, \bar{y})=0։$$

Այստեղ նույնպես 3) պայմանից հետևում է, որ $y \gtrless \bar{y}$ դեպքում կլինի, համապատասխանաբար, $F(\bar{x}, y) \gtrless 0$, այնպես որ՝ $\bar{y}$-ը y-ի միակ արժեքն է $(y_0-\Delta', y_0+\Delta')$ միջակայքում, որը $x=\bar{x}$ արժեքի հետ միասին բավարարում է (1) հավասարմանը։ Յուրաքանչյուր $\bar{A}\bar{B}$ ուղղաձիգ հատվածի վրա կգտնվի միայն մեկ $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$ կետ, որը հավասարման ձախ մասը զրո կդարձնի։

Այսպիսով, (x_0, y) կետի

$$(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0; y_0-\Delta', y_0+\Delta')$$

շրջակայքում (1) հավասարումն իրոք y-ը որոշում է որպես x-ի միարժեք ֆունկցիա՝

$$y=f(x)։$$

Միաժամանակ նախորդ դատողությունը, 2) պայմանի շնորհիվ, ցույց է տալիս նաև, որ $f(x_0)=y_0$. այսպես, $F(x_0, y_0)=0$ պայմանից տեսնում ենք, որ y_0-ն y-ի հենց այն միակ արժեքն է $(y_0-\Delta', y_0+\Delta')$ միջակայքում, որը $x=x_0$ արժեքի հետ միասին բավարարում է (1) հավասարմանը։

Մնում է ցույց տալ $y=f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատությունը $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$ միջակայքում։ $x=x_0$ կետի համար այդ բխում է անմիջապես նախորդ դատողությունից, որը կիրառելի է ցանկացած փոքր ուղղանկյան նկատմամբ, որի կենտրոնը $M_0(x_0, y_0)$ կետն է. Δ' թվի փոխարեն վերցնելով ցանկացած $\varepsilon<\Delta'$ թիվը, մենք, ինչպես վերևում, կգտնենք այնպիսի $\delta<\delta_0$ թիվ, որ $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ միջակայքի յուրաքանչյուր x-ի համար y-ի միակ համապատասխան արժեքը, որն x-ի հետ միասին բավարարում է (1) հավասարմանը, գտնվի հենց $y_0-\varepsilon$ և $y_0+\varepsilon$ արժեքների միջև։ Այսպիսով, երբ $|x-x_0|<\delta$, կունենանք՝

$$|f(x)-y_0|=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

որը և ապացուցում է $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատությունն $x=x_0$ կետում։

Ցանկացած $x=\bar{x}$ կետի համար ապացույցը նման է $x=x_0$ կետի համար բերված ապացույցին։ $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$ կետը, որտեղ $\bar{y}=f(\bar{x})$, բավարարում է նույնպիսի պայմանների, ինչ որ $M_0(x_0, y_0)$ կետը, որովհետև $F(\bar{x}, \bar{y})=0$։ Ուստի, ինչպես նաև վերևում, $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$ կետի շրջակայքում (1) հավասարումով y փոփոխականը որոշվում է որպես x-ի միարժեք ֆունկցիա, որն անընդհատ է $x=\bar{x}$ կետում։ Սակայն, հենց այդ միարժեքության շնորհիվ, այդ նոր ֆունկցիան համընկնում է $f(x)$ ֆունկցիայի հետ, որով և հաստատվում է $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատությունը $x=\bar{x}$ կետում։

Մենք ապացուցեցինք անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության թեորեման, չշոշափելով նրա արժեքները հաշվելու կամ այն անալիտիկորեն ներկայացնելու հարցը. դրանով կզբաղվենք XII գլխում [414 և 423]։

Ապացուցած թեորեման, ակներևորեն, հանդիսանում է n° 82-ի թեորեմայի ընդհանրացումը։

197. ԱՆԲԱՑԱՀԱՅՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԵԼԻՈՒԹՅՈՒՆԸ։ Հիմա ուժեղացնենք $F(x, y)$ ֆունկցիայի նկատմամբ մեր պայմանները և այն ժամանակ հնարավորություն կունե-

նանք ապացուցելու նաև $y=f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալի գոյությունը։

II **ԹԵՈՐԵՄԱ։** Դիցուք՝

1) $F(x, y)$ ֆունկցիան որոշված ու անընդհատ է

$$D=[x_0-\Delta, x_0+\Delta; y_0-\Delta', y_0+\Delta']$$

ուղղանկյունում, որի կենտրոնը (x_0, y_0) կետն է.

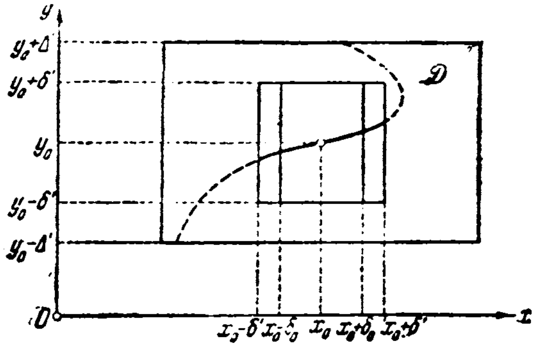
2) F'_x և F'_y մասնակի ածանցյալները գոյություն ունեն ու անընդհատ են D ուղղանկյունում.

3. $F(x, y)$ ֆունկցիան (x_0, y_0) կետում դառնում է զրո՝ $F(x_0, y_0)=0$.

4) $F'_y(x_0, y_0)\neq 0$։

Այդ դեպքում տեղի ունեն I թեորեմայի ա), բ), գ) եզրակացությունները և, բացի դրանցից,

դ) $f(x)$ ֆունկցիան ունի անընդհատ ածանցյալ:



Գծ. 109.

Ապացույց (գծ. 109)։ Ենթադրենք, օրինակ, $F'_y(x_0, y_0)>0$. *Քանի որ* $F'_y(x, y)$ *ածանցյալը, 2) պայմանի շնորհիվ, անընդհատ է, ապա կարելի է կառուցել այնպիսի քառակուսի՝*

$$[x_0-\delta', x+\delta'; y_0-\delta', y_0+\delta'] \quad (\delta'<\Delta \text{ և } \delta'<\Delta'),$$

որի բոլոր կետերի համար լինի $F'_y(x, y)>0$*։ *Այն ժամանակ, այդ քառակուսու համար բավարարվում են I թեորեմայի բոլոր*

* *Որովհետև մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի համար նույնպես ճիշտ է այն հատկությունը, որը մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի համար ձևակերպված է n 79-ի լեմմայում։*

պայմանները. մասնավորապես $F(x, y)$ ֆունկցիայի մոնոտոնությունն ըստ y-ի, երբ x=const., բխում է հենց $F'_y \neq 0$ պայմանից [127]։ Հետևաբար, ա), բ), գ) եզրակացությունները կարելի է արդարացված համարել։

Անցնելով դ) կետի ապացուցմանը, y-ի տակ պիտի հասկանանք հենց այն $y=f(x)$ անբացահայտ ֆունկցիան, որը որոշվում է (1) հավասարումով և նույնաբար բավարարում է նրան։ x-ին տանք Δx աճ. արգումենտի $x+\Delta x$ արժեքին կհամապատասխանի ֆունկցիայի $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$ արժեքը, որոնք միասին բավարարում են (1) հավասարմանը՝

$$F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)=0,$$

հետևաբար նաև $F(x, y)$ ֆունկցիայի աճը՝

$$\Delta F(x, y)=F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-F(x, y)=0։$$

ΔF-ը ներկայացնելով n 168-ի (1) բանաձևով, կստանանք՝

$$0=\Delta F(x, y)=F'_x(x, y)\cdot\Delta x+F'_y(x, y)\cdot\Delta y+\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y,$$

որտեղ α-ն ու β-ն կախված են Δx-ից ու Δy-ից և ձգտում են զրոյի, երբ Δx-ն ու Δy-ը միաժամանակ ձգտում են զրոյի։ Այդ հավասարությունից կստանանք՝

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x, y)+\alpha}{F'_y(x, y)+\beta},$$

Այժմ Δx-ը ձգտեցնենք զրոյի, այդ ժամանակ, $y=f(x)$ ֆունկցիայի արդեն ապացուցված անընդհատության շնորհիվ [տես գ)], Δy-ը նույնպես կձգտի զրոյի և, հետևաբար, միաժամանակ $\alpha\to 0$ և $\beta\to 0$։ Քանի որ $F'_y\neq 0$, ուստի գոյություն ունի աջ մասի սահմանը, հետևաբար գոյություն ունի նաև ձախ մասի սահմանը, այսինքն՝ y-ի ածանցյալն ըստ x-ի՝

$$f'(x)=y'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \qquad (3)$$

y-ի փոխարեն տեղադրելով $f(x)$, կստանանք՝

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

քանի որ համարիչում ու հայտարարում ունենք անընդհատ ֆունկցիաների անընդհատ ֆունկցիաներ, և հայտարարը զրո չի դառնում, ուստի պարզ է, որ $f'(x)$-ը նույնպես անընդհատ ֆունկցիա է։ Թեորեման ապացուցվեց։

Ուշադրության արժանի է այն հանգամանքը, որ մեզ անմիջականորեն տված $F(x, y)$ ֆունկցիայի հատկությունների օգնությամբ մենք կարող ենք գտնել $y=f(x)$ ֆունկցիայի հատկությունների վերաբերյալ, երբ այդ վերջինն անմիջականորեն տված չէ։

198. ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ԱՆԲԱՑԱՀԱՅՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ։ *(1) հավասարման անալոգիայով կարելի է դիտարկել նաև շատ փոփոխականներ պարունակող հավասարում՝*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)=0. \qquad (4)$$

Որոշ պայմանների առկայության դեպքում այս հավասարումով y-ը որոշվում է որպես n փոփոխականներից՝ x_1-ից, x_2-ից, ..., x_n-ից կախված «անբացահայտ» ֆունկցիա՝

$$y=f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

որն, ընդհանրապես, կլինի բազմարժեք։ Եթե այդ ֆունկցիան y-ի փոխարեն տեղադրենք տված հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n))=0$$

արդեն նույնաբար $x_1, x_2, \dots, x_n$ մեծությունների նկատմամբ։

Մենք ասելու ենք, որ $(n+1)$-չափման

$$(a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n; c, d)$$

զուգահեռանիստում (4) հավասարումը y-ը որոշում է որպես $x_1, x_2, \dots, x_n$ փոփոխականների միարժեք ֆունկցիա, եթե n-չափման՝

$$(a_1, b_1; a_2, b_2; \dots, a_n, b_n),$$

զուգահեռանիստի յուրաքանչյուր $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ կետի համար (4) հավասարումն ունի մեկ և միայն մեկ y արմատ (c, d) միջակայքում։

Այդպիսի զուգահեռանիստի դերում սովորաբար հանդես է գալու մեզ հետաքրքրող $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ կետի շրջակայքը։

Այժմ ձևակերպենք (4) հավասարմանը վերաբերվող հետևյալ թեորեման։

III ***ԹԵՈՐԵՄԱ.*** Դիցուք՝

1) $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ ֆունկցիան որոշված ու անընդհատ է $(n+1)$ չափման՝

$$D = [x_1^0-\Delta_1, x_1^0+\Delta_1; \dots; x_n^0-\Delta_n, x_n^0+\Delta_n; y_0-\Delta', y_0+\Delta']$$

զուգահեռանիստում, որի կենտրոնը $(x_1^0, \dots, x_n^0, y_0)$ կետն է.

2) $F'_{x_1}, \dots, F'_{x_n}, F'_y$ մասնակի ածանցյալները գոյություն ունեն և անընդհատ են D-ում.

3) F ֆունկցիան $(x_1^0, \dots, x_n^0, y_0)$ կետում դառնում է զրո.

4) F'_y ածանցյալն այդ կետում հավասար չէ զրոյի։

Այդ դեպքում՝

ա) $(x_1^0, \dots, x_n^0, y_0)$ կետի մի որոշ շրջակայքում (4) հավասարումով y-ը որոշվում է որպես $x_1, \dots, x_n$ փոփոխականների միարժեք ֆունկցիա՝ $y=f(x_1, \dots, x_n)$.

բ) երբ $x_1=x_1^0, \dots, x_n=x_n^0$, y-ն ընդունում է y_0 արժեքը՝ $f(x_1^0, \dots, x_n^0)=y_0$.

գ) $f(x_1, \dots, x_n)$ ֆունկցիան անընդհատ է իր արգումենտների խմբակցության նկատմամբ. և

դ) ունի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ՝ $f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n}$։

Ապացույցի վրա մենք կանգ չենք առնի, որովհետև նա կատարելապես նման է I և II թեորեմների ապացույցին։

Վերջապես, ամենաընդհանուր դեպքում կարող է տրված լինել $n+m$ փոփոխականներ պարունակող m հավասարումների սիստեմ՝

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)&=0, \\ F_2(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)&=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)&=0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Այստեղ խոսքն այն մասին է, որպեսզի այդ սիստեմով $y_1, \dots$

..., y_m՝ m հատ փոփոխականները որոշվեն որպես $x_1, x_2, \ldots$, $\ldots, x_n$՝ *n հատ փոփոխականների «անբացահայտ» ֆունկցիաներ՝*

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$y_m = \varphi_m(x_1, \ldots, x_n),$$

այնպես, որ (5) հավասարումների մեջ տեղադրելով ստացվեն նույնություններ՝

$$F_1(x_1, \ldots, x_n; \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)) = 0,$$
$$F_2(x_1, \ldots, x_n; \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)) = 0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$F_m(x_1, \ldots, x_n; \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)) = 0:$$

Ասում են, որ $(n+m)$-չափման

$$(a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n; c_1, d_1; \ldots; c_m, d_m)$$

զուգահեռանիստում (5) սիստեմը $y_1, \ldots, y_m$ մեծությունները որոշում է որպես $x_1, \ldots, x_n$ փոփոխականների միարժեք ֆունկցիաներ, եթե n-չափման

$$(a_1, b_1, \ldots; a_n, b_n)$$

զուգահեռանիստի յուրաքանչյուր $(x_1, \ldots, x_n)$ կետի համար հավասարումների (5) սիստեմն ունի $y_1, \ldots, y_m$ լուծումների մեկ և միայն մեկ սիստեմ m-չափման

$$(c_1, d_1; \ldots; c_m, d_m)$$

զուգահեռանիստում:

Մենք տեսանք, որ (1) կամ (3) մեկ հավասարումով որոշվող միարժեք անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության հարցում վճռական դեր խաղում էր այն պայմանը, որի համաձայն տված հավասարմանը բավարարող ելակետային կետում զրո չպետք է դառնա F'_y *ածանցյալը՝ ածանցյալը ըստ հենց այն փոփոխականի, որը պետք է որոշվի իբրև անբացահայտ ֆունկցիա: Իսկ (5) հավասարումների սիստեմով որոշվող* $y_1, \ldots, y_m$ *միարժեք անբացահայտ ֆունկցիաների գոյության հարցում, որին մենք*

հիմա անցնում ենք, նման դեր խաղալու է այդ հավասարումների աջ մասերից կազմած յակոբիանն ըստ $y_1, \dots, y_m$ *փոփոխականների, այն է՝*

$$J = \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}, \quad (6)$$

IV. ***ԹԵՈՐԵՄԱ***. Դիցուք՝

1) բոլոր $F_1, \dots, F_m$ ֆունկցիաները որոշված ու անընդհատ են $(n+m)$-չափման

$$D = [x_1^0 - \Delta_1, x_1^0 + \Delta_1; \dots; x_n^0 - \Delta_n, x_n^0 + \Delta_n; \\ y_1^0 - \Delta'_1, y_1^0 + \Delta'_1; \dots; y_m^0 - \Delta'_m, y_m^0 + \Delta'_m]$$

զուգահեռանիստում, որի կենտրոնը $(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$ կետն է.

2) այդ ֆունկցիաների մասնակի ածանցյալներն ըստ բոլոր արգումենտների գոյություն ունեն ու անընդհատ են D-ում.

3) $(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$ կետը բավարարում (5) սիստեմին.

4) (6) բանաձևով որոշվող J յակոբիանն այդ կետում հավասար չէ զրոյի:

Այդ դեպքում՝

ա) $(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$ կետի մի որոշ շրջակայքում (5) հավասարումների սիստեմը $y_1, \dots, y_m$ մեծությունները որոշում է որպես $x_1, \dots, x_n$ փոփոխականների միարժեք ֆունկցիաներ՝

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{m-1} &= f_{m-1}(x_1, \dots, x_n), \\ y_m &= f_m(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

բ) երբ $x_1=x_1^0,\dots,x_n=x_n^0$, այդ ֆունկցիաները համապատասխանաբար ընդունում են $y_1^0,\dots,y_{m-1}^0$, y_m^0 արժեքները՝

$$f_1(x_1^0,\dots,x_n^0)=y_1^0,$$
$$\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$f_{m-1}(x_1^0,\dots,x_n^0)=y_{m-1}^0,$$
$$f_m(x_1^0,\dots,x_n^0)=y_m^0.$$

գ) $f_1,\dots,f_m$ ֆունկցիաներն անընդհատ են, և

դ) ունեն անընդհատ մասնակի ածանցյալներ ըստ բոլոր արգումենտների:

Ապացույցը կատարենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով։ m=1 դեպքում, երբ սիստեմը բերվում է մեկ հավասարման, թեորեման ճիշտ է (այդ՝ III թեորեման է)։ Այժմ ընդունենք, որ թեորեման ճիշտ է այն դեպքի համար, երբ սիստեմը կազմված է m—1 հավասարումներից և խոսքը m—1 անբացահայտ ֆունկցիաներ որոշելու մասին է, և այն ապացուցենք այն դեպքի համար, երբ սիստեմը կազմված է m հավասարումներից։

Քանի որ J յակոբիանը $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ կետում զրոյից տարբեր է, ապա նրա վերջին սյան թեկուզ մեկ էլեմենտն այդ կետում հավասար չէ զրոյի. ենթադրենք, օրինակ, թե՝

$$\frac{\partial F_m(x_1^0,\dots,y_m^0)}{\partial y_m}\neq 0.$$

Այդ դեպքում, III թեորեմայի համաձայն, (5) սիստեմի վերջին հավասարումը $(x_1^0,\dots,y_m^0)$ կետի մի որոշ D^* շրջակայքում y_m-ը որոշում է որպես մյուս արգումենտների միարժեք անբացահայտ ֆունկցիա՝

$$y_m=\varphi(x_1,\dots,x_n;\ y_1,\dots,y_{m-1}), \tag{7}$$

այնպես որ այդ արգումենտների նկատմամբ նույնաբար ունենք՝

$$F_m(x_1,\dots,x_n;\ y_1,\dots,y_{m-1},\ \varphi(x_1,\dots,y_{m-1}))=0. \tag{8}$$

Այդ φ ֆունկցիան անընդհատ է և ունի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ․ բացի դրանից, նաև՝

$$\varphi(x_1^0, \dots, x_n^0;\ y_1^0, \dots, y_{m-1}^0) = y_m^0 \cdot \tag{9}$$

Կարևոր է նշել, որ, քանի դեռ առաջիկայում մենք սահմանափակվելու ենք D^* շրջակայքով,

$$F_m(x_1, \dots, x_n;\ y_1, \dots, y_m) = 0$$

հավասարումը համարժեք է (7) հավասարմանը. D^* շըրջակայքում այդ երկու հավասարումներին բավարարում են $x_1, \dots, x_n;\ y_1, \dots, y_m$ փոփոխականների միևնույն արժեքները։

(5) սիստեմի մեջ վերջին հավասարումը փոխարինելով իրեն համարժեք (7) հավասարումով և մյուս բոլոր հավասարումների մեջ y_m-ի փոխարեն տեղադրելով φ ֆունկցիան, մենք կստանանք մի նոր սիստեմ՝ արդեն կազմված $m-1$ հավասարումներից $n+m-1$ փոփոխականներով՝

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_1(x_1, \dots, x_n;\ y_1, \dots, y_{m-1}) = 0, \\ \Phi_2(x_1, \dots, x_n;\ y_1, \dots, y_{m-1}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi_{m-1}(x_1, \dots, x_n;\ y_1, \dots, y_{m-1}) = 0, \end{array}\right\} \tag{10}$$

որտեղ կարճության համար նշանակված են (երբ $j = 1, 2, \dots, m-1$)՝

$$\Phi_j(x_1, \dots, x_n;\ y_1, \dots, y_{m-1}) = \\ = F_j(x_1, \dots, x_n;\ y_1, \dots, y_{m-1}, \varphi(x_1, \dots, y_{m-1}))\cdot \tag{11}$$

Եթե D^* շրջակայքի սահմաններից դուրս չգանք, (5) սիստեմը համարժեք կլինի (10) սիստեմին՝ ավելացրած նաև (7) հավասարումը։ Հետևաբար, եթե մեզ հաջողվի ցույց տալ, որ $(x_1^0, \dots, y_{m-1}^0)$ կետի բավականաչափ փոքր d^* շրջակայքում (10) սիստեմով $y_1, \dots, y_{m-1}$ մեծությունները որոշվում են որպես $x_1, \dots, x_n$ փոփոխականների միարժեք ֆունկցիաներ՝

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_{m-1} = f_{m-1}(x_1, \dots, x_n), \end{array}\right. \tag{12}$$

ապա, (7)-ի շնորհիվ, y_m *մեծությունը նույնպես կորոշվի որպես այդ նույն փոփոխականների միարժեք ֆունկցիա՝*

$$y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= \varphi(x_1, \ldots, x_n;\ f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{m-1}(x_1, \ldots, x_n)), \qquad (12ա)$$

*և ա) եզրակացությունը լրիվին արդարացված կլինի**։

Վերադառնանք (10) սիստեմին և ցույց տանք, որ $(x_1^0, \ldots, y_{m-1}^0)$ *կետի շրջակայքում նրա համար բավարարվում են 1), 2), 3), 4) պայմաններին նման պայմաններ։ Առաջին երկուսը բխում են անմիջականորեն* F_j *և* φ *ֆունկցիաների հատկություններից, շնորհիվ (11)։ Ճիշտ այդպես էլ 3) պայմանը, շնորհիվ (11) և (9), մեզ տալիս է՝*

$$\Phi_j(x_1^0, \ldots, y_{m-1}^0) =$$
$$= F_j(x_1^0, \ldots, y_{m-1}^0, \varphi(x_1^0, \ldots, y_{m-1}^0)) =$$
$$= F_j(x_1^0, \ldots, y_{m-1}^0, y_m^0) = 0 \quad (j = 1, \ldots, m-1)։$$

Մնում է միայն դիտարկել հետևյալ յակոբիանը, որը կազմված է J *յակոբիանի անալոգիայով,*

$$J^* = \frac{D(\Phi_1, \ldots, \Phi_{m-1})}{D(y_1, \ldots, y_{m-1})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial y_{m-1}} \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial\Phi_2}{\partial y_{m-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} \end{vmatrix}$$

և համոզվել, որ նա զրո չի դառնում $(x_1^0, \ldots, y_{m-1}^0)$ *կետում։ Այդ նպատակով ձևափոխենք* J *դետերմինանտը, նրա առաջին*

---

* *Պարզաբանենք հետևյալը.* $(n+m-1)$*-չափման* d^* *բաց զուգահեռանիստը ենթադրվում է այնչափ փոքր, որպեսզի այդ զուգահեռանիստը որոշող միջակայքերը պարունակվեն* $(n+m)$*-չափման* D^* *զուգահեռանիստը որոշող համապատասխան միջակայքերի մեջ։* $(x_1^0, \ldots, y_m^0)$ *կետի այն շրջակայքը, որի մասին խոսվում է ա) եզրակացության մեջ, հենց որոշվում է* d^**-ի հետ կապված բոլոր միջակայքերով՝ ավելացրած* D^**-ի հետ կապված վերջին միջակայքը։*

$m-1$ *սյուների էլեմենտներին ավելացնելով* m-*րդ սյան էլեմենտները՝ նախապես վերջիններս բազմապատկելով համապատասխանաբար* $\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}}$ *ածանցյալներով՝*

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}+\frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}}+\frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}+\frac{\partial F_2}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial y_{m-1}}+\frac{\partial F_2}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1}+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}}+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}}+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}.$$

Եթե այստեղ համարենք $y_m=\varphi(x_1, \ldots, y_{m-1})$, *ապա բոլոր էլեմենտները, բացի վերջին տողում ու վերջին սյունում գտնվողներից, իրենցից կներկայացնեն* Φ_j *ֆունկցիաների մասնակի ածանցյալներն ըստ* $y_1, \ldots, y_{m-1}$ *փոփոխականների։ Իրոք, (11)-ի շնորհիվ,* Φ_j *ֆունկցիան դիֆերենցելով որպես բարդ ֆունկցիա ըստ* $y_1, \ldots, y_{m-1}$-*ի (օգտվելով* n° 171-*ի կանոնից), կստանանք, երբ* $j=1, \ldots, m-1$,

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial y_1}=\frac{\partial F_j}{\partial y_1}+\frac{\partial F_j}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y_1},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial y_{m-1}}=\frac{\partial F_j}{\partial y_{m-1}}+\frac{\partial F_j}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}}.$$

Մյուս կողմից, եթե ըստ $y_1, \ldots, y_{m-1}$-*ի դիֆերենցենք (8) նույնությունը*, կստանանք՝*

---

* *Որովհետև եթե (8)-ի ձախ մասում գտնվող բարդ ֆունկցիան նույնաբար հավասար է զրոյի, ապա նրա ածանցյալներն ըստ որևէ արգումենտի նույնպես կլինեն զրո։*

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_1} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}} = 0.$$

Այսպիսով, վերջին տողի բոլոր էլեմենտները, բացի վերջին էլեմենտներից, հավասար են զրոյի։ Վերջնականապես կստանանք՝

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ 0 & & 0 & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}.$$

Այս դետերմինանտը վերլուծելով ըստ վերջին տողի էլեմենտների, գալիս ենք հետևյալ եզրակացության՝

$$J = J^* \cdot \frac{\partial F_m}{\partial y_m}.$$

Այստեղ տեղադրենք, վերջապես, $x_1 = x_1^0, \dots, y_{m-1} = y_{m-1}^0$. *այդ ժամանակ, (9)-ի շնորհիվ,* $y_m = \varphi(x_1, \dots, y_{m-1})$*-ը կդառնա* y_m^0*։ Քանի որ այդ դեպքում, 4) պայմանի համաձայն, J-ն տարբեր է զրոյից, ապա զրո լինել չի կարող նաև* y^**-ը, որը և պահանջվում էր ապացուցել։*

(10) սիստեմի համար, որը պարունակում է $m-1$ *հավասարում, ենթադրել ենք, թե մեր թեորեման ճիշտ է, հետևաբար այդ սիստեմը* $(x_1^0, \dots, y_{m-1}^0)$ *կետի շրջակայքում որոշում է (12) ֆունկցիաները, որոնք անընդհատ են և ունեն անընդհատ ածանցյալներ. բացի դրանից, այդ ֆունկցիաները բավարարում են նաև բ) պահանջին՝*

$$\begin{aligned} f_1(x_1^0, \dots, x_n^0) &= y_1^0, \\ &\cdots\cdots \\ f_{m-1}(x_1^0, \dots, x_n^0) &= y_{m-1}^0. \end{aligned} \qquad (13)$$

Այստեղից հետևում է, որ m-րդ ֆունկցիան, որը որոշվում է (12ա) հավասարությունով, նույնպես անընդհատ է և ունի անընդհատ ածանցյալ, ինչպես նաև (13) և (9) շնորհիվ, տալիս է՝

$$f_m(x_1^0, \ldots, x_n^0) =$$
$$= \varphi(x_1^0, \ldots, x_n^0;\ f_1(x_1^0, \ldots, x_n^0), \ldots, f_{m-1}(x_1^0, \ldots, x_n^0)) =$$
$$\varphi(x_1^0, \ldots, x_n^0;\ y_1^0, \ldots, y_{m-1}^0) = y_m^0.$$

Թեորեման ապացուցվեց։

Դիտողություն։ Մենք ընթերցողի ուշադրությունը հրավիրում ենք անբացահայտ ֆունկցիաների գոյության վերաբերյալ բոլոր թեորեմների լոկալ (տեղային) բնույթի վրա. միշտ խոսքը միայն դիտարկելի կետի մի որոշ շրջակայքի մասին է։ *Սակայն այդ թեորեմները այդ տեսքով էլ օգտակար են. օրինակ, ինչպես կտեսնենք* VII *գլխում, երկրաչափական կերպի հատկությունը տվյալ կետում ուսումնասիրելու համար միանգամայն բավական է սահմանափակվել այդ կետի անմիջական շրջակայքով։*

199. ԱՆԲԱՑԱՀԱՅՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ։ Այն դատողությունների ընթացքը, որոնց օգնությամբ ապացուցեցինք անբացահայտ ֆունկցիաների գոյության թեորեմները, ընդհանուր դեպքում պատկերացում չտվեց անբացահայտ ֆունկցիաների առաջին կարգի ածանցյալները հաշվելու միջոցի մասին։ Բարձր կարգի ածանցյալների մասին ընդհանրապես խոսք չի եղել։ Այժմ կանգ առնենք հենց այդ կարևոր հարցերի վրա։

Սկսենք պարզագույն դեպքից, երբ տված է (1) հավասարումը։ Ընդունում ենք, որ II *թեորեմայի պայմանները բավարարվում են դիտարկելի կետի շրջակայքում. հետագայում կարևոր դեր է խաղալու* $F'_y \neq 0$ *պահանջը։*

Ցույց տանք y'_x *ածանցյալը հաշվելու պարզ եղանակ (եթե նրա գոյությունը նախապես հայտնի է)։ Մենք գիտենք, որ եթե* $y = f(x)$ *անբացահայտ ֆունկցիան տեղադրենք (1) հավասարման մեջ, վերջինս նույնություն կդառնա [տես* 195-*ի* (2)]։ *Այսպիսով, եթե (1) հավասարության ձախ մասում* y-*ի տեղ հասկանանք այդ* $f(x)$ *ֆունկցիան, ապա այդ ձախ մասը, այսինքն՝* $F(x, y)$-*ը, իրենից կներկայացնի* x-*ի մի բարդ ֆունկցիա, որը նույնաբար հավասար է զրոյի։ Այդ դեպքում նրա*

ածանցյալն ըստ x-ի նույնպես զրո կլինի։ Եթե այդ ֆունկցիան դիֆերենցենք n° 171-ի կանոնով, կստանանք՝

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \cdot y'_y = 0^*, \tag{14}$$

որտեղից (քանի որ $F'_y \neq 0$), կստանանք՝

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \tag{15}$$

ստացանք մեզ արդեն հայտնի բանաձևը [196, *(3)*]։

Այժմ կարող ենք շարունակել։ Եթե $F(x, y)$ ֆունկցիան ունի երկրորդ կարգի անընդհատ ածանցյալներ, ապա *(15)* բանաձևի աջ մասը կարելի է դիֆերենցել ըստ x-ի, հետևաբար գոյություն ունի նաև y'_x-ի ածանցյալը, այսինքն՝ y անբացահայտ ֆունկցիայի y''_{x^2} երկրորդ ածանցյալը։ Դիֆերենցումը կատարելով և ամեն անգամ y'_x-ի փոխարեն դնելով *(15)* արտահայտությունը, կգտնենք՝

$$y''_{x^2} = \frac{(F''_{xy} + F''_{y^2} \cdot y'_x) \cdot F'_x - (F''_{x^2} + F''_{xy} \cdot y'_x) \cdot F'_y}{F'^2_y} = \frac{2F'_x \cdot F'_y \cdot F''_{xy} - F'^2_y \cdot F''_{x^2} - F'^2_x \cdot F''_{y^2}}{F'^3_y}.$$

հենց այստեղից տեսնում ենք, որ երկրորդ ածանցյալը x-ի անընդհատ ֆունկցիա է։

Եթե $F(x, y)$ ֆունկցիան ունի երրորդ կարգի անընդհատ ածանցյալներ, ապա, ակներևաբար, գոյություն ունի նաև անբացահայտ ֆունկցիայի երրորդ ածանցյալը՝ y'''_{x^3}-ը, որի արտահայտությունը նորից կարելի է ստանալ անմիջապես դիֆերենցելով y''_{x^2}-ի արտահայտությունը, և այլն։ Մաթեմատիկական ինդուկցիայի օգնությամբ հեշտ է ապացուցել, որ $F(x, y)$ ֆունկցիայի մինչև k-րդ ($k > 1$) կարգի անընդհատ ածանցյալների գոյությունը (k-րդը ներառյալ) ապահովում է նաև անբացահայտ ֆունկցիայի k-րդ կարգի անընդհատ ածանցյալի գոյությունը։

---

* Փաստորեն այդպիսի գատողություններ մենք արդեն արել ենք վերևում, համեմատել 597 էջի ստորատակի ծանոթագրության հետ։

Երբ, այսպիսով, անբացահայտ ֆունկցիայի հաջորդական ածանցյալների գոյությունը հաստատված է, նրանց հաշվումն ավելի հեշտ է կատարել (14) նույնությունը հաջորդաբար դիֆերենցելով. հաշվի առնելով որ y-ը x-ի ֆունկցիա է։ Օրինակ, այդ նույնության հենց առաջին դիֆերենցումը մեզ կտա՝

$$F''_{x^2}+F''_{xy}\cdot y'_x+(F''_{xy}+F''_{y^2}\cdot y'_x)\cdot y'_x+F'_y\cdot y''_{x^2}=0, \qquad (16)$$

որտեղից (քանի որ $F'_y\neq 0$!)՝

$$y''_{x^2}=-\frac{F''_{x^2}+2F''_{xy}\cdot y'_x+F''_{y^2}\cdot y'^2_x}{F'_y}.$$

y'_x-ի փոխարեն դնելով նրա (15) արտահայտությունը, կստանանք y''_{x^2}-ի համար արդեն գտած արտահայտությունը, և այսպես շարունակ։

Հարցը նույն ձևով է լուծվում նաև (4) հավասարման դեպքում, երբ ֆունկցիան կախված է շատ փոփոխականներից։ Այստեղ ենթադրում ենք, որ բավարարվում են III թեորեմայի պայմանները։ Եթե (4) հավասարման մեջ y-ի տակ հասկանանք հենց այդ հավասարումով որոշվող անբացահայտ ֆունկցիան, ապա նա կդառնա նույնություն։ Ֆիքսելով $x_2, \dots, x_n$ փոփոխականների արժեքները և y-ը դիտելով որպես միայն x_1-ի ֆունկցիա, այդ նույնությունը դիֆերենցենք ըստ x_1-ի՝

$$F'_{x_1}+F'_y\cdot y'_{x_1}=0,$$

որտեղից՝

$$y'_{x_1}=-\frac{F'_{x_1}}{F'_y}.$$

Ճիշտ այսպես կստանանք նաև՝

$$y'_{x_2}=-\frac{F'_{x_2}}{F'_y}, \dots, y'_{x_n}=-\frac{F'_{x_n}}{F'_y}, \text{ և այլն։}$$

Եթե պետք է գտնել առաջին, երկրորդ, ... կարգի բոլոր ածանցյալները, ապա ավելի հեշտ կլինի միանգամից հաշվել dy, d^2y, ... լրիվ դիֆերենցիալները։ Մեր նույնությունը լրիվ դիֆերենցենք, այսինքն՝ զրոյի հավասարեցնենք նրա ձախ մասի լրիվ դիֆերենցիալը [օգտագործելով առաջին դիֆերենցիալի ձևի անփոփոխականությունը, 175]՝

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial F}{\partial y}\partial y=0,$$

այնպես որ՝

$$dy=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}dx_1-\dots-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}dx_n\,։$$

Միաժամանակ՝

$$dy=\frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n\,։$$

Ի նկատի ունենալով, որ $dx_1,\dots,dx_n$ *արժեքները կամայական են**, *այստեղից պարզ կլինի, որ*

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}},\ \dots,\ \frac{\partial y}{\partial x_n}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}},$$

ինչպես ստացել էինք և վերևում։

Մեկ անգամ էլ դիֆերենցելով, կստանանք՝

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}dx_1+\dots+\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_n}dx_n+\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial y}dy\right]dx_1+\dots$$

$$\dots+\frac{\partial F}{\partial y}d^2y=0$$

և կհաշվենք d^2y*-ը, որը մեզ կհանգեցնի*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_2},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2},\ \dots$$

ածանցյալների համար անհրաժեշտ արտահայտությունների, և այլն։ Մենք տեսնում ենք, որ այդ բոլոր հաշվումների ժամանակ հիմնական դեր է խաղում $F'_y=\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ *պայմանը։*

---

* $A_1dx_1+\dots+A_n dx_n=B_1dx_1+\dots+B_n dx_n$ *հավասարությունը, երբ* $dx_1,\dots,dx_n$ *ընդունում են կամայական արժեքներ, կարող է տեղի ունենալ միայն այն ժամանակ, երբ* $A_1=B_1,\dots,A_n=B_n$ *։*

Այժմ անցնենք (5) հավասարումների սիստեմի քննարկմանը: Ենթադրում ենք, որ դիտարկվելի կետի շրջակայքում բավարարվում են IV թեորեմայի պայմանները: Ընթերցողի ուշադրությունը նորից հրավիրում ենք այն դերի վրա, որ պիտի խաղա $J \neq 0$ պահանջը:

Մենք գիտենք, որ $y_1, \ldots, y_m$ անբացահայտ ֆունկցիաներն ունեն մասնակի ածանցյալներ ըստ $x_1, \ldots, x_n$ փոփոխականների. նրանց հաշվումը կատարվում է այն նույնությունների դիֆերենցումով, որոնք կստացվեն (5)-ից, երբ նրանց մեջ $y_1, \ldots, y_m$ մեծությունների տակ հասկանանք հենց այդ հավասարումներով որոշվող անբացահայտ ֆունկցիաները: Օրինակի համար, ըստ x_1-ի դիֆերենցումը տալիս է՝

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \cdot \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \cdot \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} = 0: \end{array}\right.$$

Այս՝ $\dfrac{\partial y_1}{\partial y_m}, \ldots, \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1}$ անհայտների նկատմամբ գծային հավասարումների սիստեմ է, որն ունի զրոյից տարբեր դետերմինանտ՝

$$J = \frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)},$$

Այստեղից՝

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(x_1, \ldots, y_m)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}}, \ldots, \frac{\partial y_m}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, x_1)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(F_1, \ldots, y_m)}},$$

Նման արտահայտություններ ստացվում են նաև $y_1, \ldots, y_m$ ֆունկցիաների՝ ըստ $x_2, \ldots, x_n$ փոփոխականների ածանցյալների համար:

Եթե $F_1, \ldots, F_m$ ֆունկցիաներն ունեն երկրորդ կարգի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ, ապա հենց նոր ստացած

բոլոր բանաձևերի աջ մասերը կունենան անընդհատ ածանցյալներ ըստ բոլոր արգումենտների, հետևաբար, գոյություն կունենան նաև անբացահայտ ֆունկցիաների երկրորդ կարգի ածանցյալները (նույնպես անընդհատ)։ Ընդհանրապես, ինչպես այդ հեշտությամբ կարելի է ապացուցել ինդուկցիայով, $F_1, \ldots, F_m$ ֆունկցիաների համար մինչև k-րդ կարգի (ներառյալ) անընդհատ ածանցյալների գոյությունն ապահովում է նաև անբացահայտ ֆունկցիաների համար մինչև k-րդ կարգի բոլոր ածանցյալների գոյությունն ու անընդհատությունը։

Անբացահայտ ֆունկցիաների ածանցյալների հաշվումն ընդհանուր դեպքում նույնպես կատարվում է կամ (5) նույնությունները դիֆերենցելով ըստ այս կամ այն փոփոխականի, կամ նրանք լրիվ դիֆերենցելով։ Ածանցյալները կամ դիֆերենցիալները որոշելու համար ստացվող գծային հավասարումների սիստեմի դետերմինանտը միշտ կլինի J յակոբիանը, որը զրոյից տարբեր է։ Այս դիտողությունները ավելի հասկանալի կդառնան օրինակներով։

200. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։

1) Դիցուք y-ն x-ի *հետ կապված է հետևյալ հավասարումով՝*

$$\log\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Հաջորդաբար դիֆերենցելով ըստ x-ի *(*y-ը *համարում ենք* x-ի *ֆունկցիա), կստանանք՝*

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2} = \frac{xy'-y}{x^2+y^2} \quad \text{կամ} \quad x+yy' = xy'-y,$$

այնուհետև՝

$$1+y'^2+yy'' = xy'', \ldots .$$

Առաջին հավասարումից գտնում ենք՝

$$y' = \frac{x+y}{x-y},$$

Երկրորդից (եթե տեղադրենք y-ի *համար գտած արտահայտությունը)՝*

$$y'' = \frac{1+y'^2}{x-y} = 2\,\frac{x^2+y^2}{(x-y)^3},$$

և այլն։

2) Տված է

$$F(x,\ y)=x^3+y^3-3axy=0$$

հավասարումը և պահանջվում է գտնել նրանով որոշվող y *ֆունկցիայի* (x*-ից կախված) էքստրեմումները։*

Այստեղ ունենք՝

$$F'_x=3(x^2-ay),\quad F'_y=3(y^2-ax)։$$

(15)-ի շնորհիվ, որպեսզի $y'_x=0$, *պետք է տեղի ունենա* $F'_x=0$ *հավասարությունը։ Միասին լուծելով* $F=0$ *և* $F'_x=0$ *հավասարումները, գտնում ենք* x*-ի և* y*-ի համապատասխան արժեքների երկու զույգ՝*

$$x=0,\ y=0 \text{ և } x=a\sqrt[3]{2},\quad y=a\sqrt[3]{4}։$$

Սակայն, առաջին կետում զրո է դառնում նաև F'_y*-ը, այնպես որ մենք չենք կարող պնդել, որ նրա շրջակայքում տված հավասարումը* y*-ը որոշում է որպես* x*-ի միարժեք ֆունկցիա, այդ պատճառով (0,0) կետը մի կողմ ենք թողնում։*

Երկրորդ կետում $F'_y=3a^2\sqrt[3]{2}>0$, *և նրա համար կիրառելի է* II *թեորեման։ Համոզվելու համար, որ էքստրեմում գոյություն ունի, հաշվենք* y''_{x^2}*-ն, երբ* $x=a\sqrt[3]{2}$. *ամենից հեշտ կլինի ելնել (16)-ից, այնտեղ ընդունելով* $y'_x=0$, *որը կտա՝*

$$y''_{x^2}=-\frac{F''_{x^2}}{F'_y}$$

[*Այս՝* y''_{x^2}*-ի համար ընդհանուր արտահայտություն չէ, այլ ճիշտ է միայն մեզ հետաքրքրող* $(a\sqrt[3]{2},\ a\sqrt[3]{4})$ *կետում*]։ *Քանի որ* $x=a\sqrt[3]{2}$ *դեպքում* $F''_{x^2}=6x>0$, *ուստի* $y''_{x^2}<0$ *և տեղի ունի մ ա ք ս ի մ ու մ։*

3) Դիցուք x*-ից ու* y*-ից կախված* z *անբացահայտ ֆունկցիան որոշվում է հետևյալ հավասարումով՝*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1։$$

Հաջորդաբար կունենանք՝

$$\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}+\frac{z\,dz}{c^2}=0,\quad dz=-\frac{c^2x}{a^2z}\,dx-\frac{c^2y}{b^2z}\,dy,$$

այնպես որ՝

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2y}{b^2z}.$$

Այնուհետև՝

$$\frac{dx^2}{a^2}+\frac{dy^2}{b^2}+\frac{dz^2}{c^2}+\frac{z\,d^2z}{c^2}=0,$$

որտեղից (եթե օգտվենք մեզ արդեն հայտնի dz-ի արտահայտությունից)՝

$$d^2z=-\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2}+\frac{2xy}{a^2b^2}\,dx\,dy+\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right],$$

որը մեզ կտա՝

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{c^4}{a^2z^3}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{c^4}{b^2z^3}\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right),$$ և այլն։

4) Դիցուք z-ն իբրև x-ի ու y-ի ֆունկցիա որոշվում է հետևյալ հավասարումից՝

$$z=x+y\cdot\varphi(z).$$

Ընդունելով $1-y\cdot\varphi'(z)\neq 0$; ապացուցել, որ

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Ունենք՝

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1-y\cdot\varphi'(z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\varphi(z)}{1-y\cdot\varphi'(z)},$$

որտեղից և բխում է պահանջվածը։

5) Դիցուք z-ն իբրև x-ի ու y-ի ֆունկցիա որոշվում է

$$y=x\varphi+\psi(z)$$

հավասարումից։ Ընդունելով, որ $x\cdot\varphi'(z)+\psi'(z)\neq 0$, ցույց տալ, որ այդ ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարմանը՝

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2=0,$$

կամ՝

$$r\cdot q^2-2pq\cdot s+t\cdot p^2=0,$$

որտեղ կարճ նշանակված են՝

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=q,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=s,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t.$$

Հաջորդաբար դիֆերենցելով ըստ x-ի ու y-ի, կստանանք՝

$$\varphi(z)+[x\cdot\varphi'(z)+\psi'(z)]\cdot p=0,\quad [x\cdot\varphi'(z)+\psi'(z)]\cdot q=1$$

և այնուհետև՝

$$\begin{array}{rl|l}
2\varphi'(z)\cdot p+[x\cdot\varphi''(z)+\psi''(z)]\cdot p^2+[x\cdot\varphi'(z)+\psi'(z)]\cdot r=0, & & q^2\\
\varphi'(z)\cdot q+[x\cdot\varphi''(z)+\psi''(z)]\cdot pq+[x\cdot\varphi'(z)+\psi(z)]\cdot s=0, & & -2pq\\
{[x\cdot\varphi''(z)+\psi''(z)]\cdot q^2+[x\cdot\varphi'(z)+\psi'(z)]\cdot t=0,} & & p^2
\end{array}$$

Կատարելով մատնանշված բազմապատկումը և գումարելով այդ հավասարումները, կստանանք պահանջվող առնչությունը։

6) Դիցուք տված են՝

$$x+y+z+u=a,\qquad x^2+y^2+z^2+u^2=b^2,\qquad x^3+y^3+z^3+u^3=c^3,$$

որոնք y-ը, z-ը, u-ն որոշում են իբրև x-ի ֆունկցիա։ Ունենք՝

$$1+y'+z'+u'=0,\quad x+yy'+zz'+uu'=0,$$
$$x^2+y^2y'+z^2z'+u^2u'=0.$$

Ընդունելով, որ՝

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\ y&z&u\\ y^2&z^2&n^2\end{vmatrix}=(z-y)(u-y)(u-z)\neq 0,$$

կստանանք՝

$$y'=-\frac{(z-x)(u-x)}{(z-y)(u-y)},\ \text{և այլն։}$$

7) Դիցուք** x, y, z-**ը կապված են** r, θ, φ **փոփոխականների հետ հետևյալ առնչություններով՝

$$x = r \cdot \cos\theta\cos\varphi, \quad y = r\cdot\sin\theta\cos\varphi, \quad z = r\cdot\sin\varphi,$$

որտեղ՝ $0 < r < +\infty$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$։ ***Յակոբիանը՝***

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\cos\varphi > 0։$$

Տված առնչությունները որոշում են r-***ը,*** θ-***ն, ու*** φ-***ն իբրև*** x-***ի,*** y-***ի,*** z-***ի ֆունկցիաներ։ Այդ ֆունկցիաների ածանցյալները հաշվելու համար տված առնչությունները լրիվ դիֆերենցում ենք՝***

$$\begin{aligned} &\cos\theta\cos\varphi\, dr - r\cdot\sin\theta\cos\varphi\, d\theta - r\cdot\cos\theta\sin\varphi\, d\varphi = dx, \\ &\sin\theta\cos\varphi\, dr + r\cdot\cos\theta\cos\varphi\, d\theta - r\cdot\sin\theta\sin\varphi\, d\varphi = dy, \\ &\sin\varphi\, dr \qquad\qquad\qquad\qquad + r\cdot\cos\varphi\, d\varphi = dz։ \end{aligned}$$

Այստեղից որոշում ենք dr, dθ ***և*** dφ՝

$$dr = \frac{r^2\cdot\cos\theta\cos^2\varphi}{J}dx + \frac{r^2\cdot\sin\theta\cos^2\varphi}{J}dy + \frac{r^2\cdot\sin\varphi\cos\varphi}{J}dz,$$

$$d\theta = -\frac{r\cdot\sin\theta}{J}dx + \frac{r\cdot\cos\theta}{J}dy,$$

$$d\varphi = -\frac{r\cdot\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}{J}dx - \frac{r\cdot\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi}{J}dy + \frac{r\cdot\cos^2\varphi}{J}dz։$$

Այսպիսով փաստորեն գտնվեցին մեզ հետաքրքրող ածանցյալները (եթե հաշվի առնենք J-***ի արժեքը)՝***

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \text{pos}\,\theta\cos\varphi, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta\cos\varphi, \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \sin\varphi,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r\cdot\cos\varphi}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r\cdot\cos\varphi}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\sin\theta\sin\varphi}{r}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\cos\varphi}{r}։$$

Առաջադրված հավասարումները հեշտ է լուծել r-ի, θ-ի ու φ-ի նկատմամբ՝

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}:$$

Այդ հնարավորություն է տալիս հաշվել այդ բոլոր ածանցյալները և այդպիսով ստուգել ստացած արդյունքները։

8) Իբրև անբացահայտ ֆունկցիայի դիֆերենցման վերջին օրինակ, արտածենք մի բանաձև ևս, որը կրկին անգամ ընդգծում է ֆունկցիաների սիստեմի յակոբիանի և մեկ ֆունկցիայի ածանցյալի անալոգիան։

Դիցուք տված է 2n փոփոխականների n ֆունկցիաների մի սիստեմ՝

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n)=0 \quad (i=1, 2, \ldots, n)։$$

Ընդունելով, որ

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

յակոբիանը զրոյից տարբեր է, $y_1, y_2, \ldots, y_n$-ը դիտենք իբրև $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ի ֆունկցիաներ, որոնք որոշվում են հավասարումների այդ սիստեմով և, հետևաբար, նրանք նույնություններ են դարձնում։ Այդ նույնությունները դիֆերենցելով ըստ յուրաքանչյուր x_j-ի, արդյունքները կարող ենք ներկայացնել այսպես՝

$$-\frac{\partial F_i}{\partial x_j}=\frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j}+\frac{\partial F_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_j}+\ldots+\frac{\partial F_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_j}$$

$$(i, j=1, 2, \ldots, n)։$$

Դրանց ձախ մասերից կազմած դետերմինանտն է՝

$$(-1)^n\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

իսկ աջ մասերից կազմած դետերմինանտը կլինի

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \text{ և } \frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

դետերմինանտների արտադրյալը [*տես* 193 (3)]։ *Այստեղից ստացվում է՝*

$$\frac{D(y_1,\ldots,y_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}=(-1)^n\frac{\dfrac{D(F_1,\ldots,F_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}}{\dfrac{D(F_1,\ldots,F_n)}{D(y_1,\ldots,y_n)}}$$

բանաձևը, որը (15) բանաձևի անալոգն է։

Եթե հավասարումները տված են $x_1, x_2, \ldots, x_n$*-ի նկատմամբ լուծված տեսքով՝*

$$x_i=\varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

ապա կստանանք դիտարկված դեպքը, եթե ընդունենք $F_i=\varphi_i-x_i$, *Քանի որ այստեղ* $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}=-1$ *կամ* 0, *նայած* $i=j$, *թե* $i\neq j$, *ապա համարիչում ստանում ենք՝*

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{vmatrix}=(-1)^n,$$

և բանաձևը կընդունի այսպիսի տեսք՝

$$\frac{D(y_1,\ldots,y_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}=\frac{1}{\dfrac{D(x_1,\ldots,x_n)}{D(y_1,\ldots,y_n)}}.$$

Այս արդյունքը մեզ արդեն ծանոթ է [193 (4)]։

§ 3. ԱՆԲԱՑԱՀԱՅՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

201. ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐ։ *Քննության առնենք* $n+m$ *փոփոխականներից կախված* $f(x_1, \ldots, x_{n+m})$ *ֆունկցիայի էքստրեմումի հարցը, ենթադրելով, որ այդ փոփոխականները ենթարկվում են և* m *հավասարումների՝*

$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})=0 \qquad (1)$$
$$(i=1, 2, \ldots, m),$$

որոնք կոչվում են կ ա պ ի հ ա վ ա ս ա ր ու մ ն ե ր:

Ասում են, որ $f(x_1, \ldots, x_{n+m})$ ֆունկցիան կ ա պ ի հ ա վ ա ս ա ր ու մ ն ե ր ի ն բ ա վ ա ր ա ր ո ղ $M_0(x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0)$ կետում ունի հ ա ր ա բ ե ր ա կ ա ն մաքսիմում (*մինիմում*), երբ

$$f(x_1, \ldots, x_{n+m}) \leqslant f(x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0)$$
$$(\geqslant)$$

հավասարությունը տեղի ունի M_0 կետի մի որոշ շրջակայքին պատկանող այն բոլոր $(x_1, \ldots, x_{n+m})$ կետերի համար, որոնք բ ա վ ա ր ա ր ու մ ե ն կ ա պ ի հ ա վ ա ս ա ր ու մ ն ե ր ի ն:

Մենք ենթադրելու ենք, որ f ֆունկցիան և Φ_i ֆունկցիաները դիտարկելի կետի շրջակայքում ունեն անընդհատ մասնակի ածանցյալներ ըստ բոլոր արգումենտների: Ենթադրենք, այնուհետև, որ Φ_i ֆունկցիաների մասնակի ածանցյալներից կազմած

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_{n+1}} \ldots \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_{n+m}} \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_n} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_{n+1}} \ldots \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_{n+m}} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_n} & \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_{n+1}} \ldots \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_{n+m}} \end{matrix} \right\| \qquad (2)$$

մատրիցի ռ ա ն գ ը M_0 կետում հավասար է m-ի, այսինքն՝ նրա m կարգի դետերմինանտներից թ ե կ ու զ մ ե կ ը, օրինակ՝

$$\frac{D(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)}{D(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_{n+1}} & \ldots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_{n+m}} \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_{n+1}} & \ldots & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_{n+m}} \\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_{n+1}} & \ldots & \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_{n+m}} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

դետերմինանտը հավասար չէ զրոյի (M_0 կետում).

Այդ ժամանակ, եթե սահմանափակվենք M_0 *կետի բավականաչափ փոքր շրջակայքով,* IV *թեորեմայի համաձայն,* (1) *սիստեմը համարժեք կլինի հետևյալ սիստեմին՝*

$$
\left.\begin{array}{l}
x_{n+1} = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
x_{n+m} = \varphi_m(x_1, \ldots, x_n),
\end{array}\right\} \qquad (4)
$$

որտեղ $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ *ֆունկցիաները՝* (1) *սիստեմով որոշվող անբացահայտ ֆունկցիաներն են։ Այլ խոսքով, այն պահանջը, որ համաձայն* $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ *փոփոխականների արժեքները պետք է բավարարեն* (1) *կապի հավասարումներին, կարելի է փոխարինել այն ենթադրությամբ, թե* $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ *փոփոխականներն իրենցից ներկայացնում են* $x_1, \ldots, x_n$ *փոփոխականների ֆունկցիաներ, [արտահայտված* (4)*-ով]։ Այսպիսով,* $n+m$ *փոփոխականների* $f(x_1, \ldots, x_{n+m})$ *ֆունկցիայի՝* $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0, x_{n+1}^0, \ldots, x_{n+m}^0)$ *կետում հարաբերական էքստրեմումի հարցը բերվում է* n *փոփոխականների՝*

$$f(x_1, \ldots, x_n; \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)) \qquad (5)$$

բարդ ֆունկցիայի սովորական (բացարձակ) էքստրեմումի հարցին՝ $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *կետում։*

Այս դատողությունները ցույց են տալիս նաև ռեալ ճանապարհ՝ գտնելու համար այն կետը, որտեղ $f(x_1, \ldots, x_{n+m})$ *ֆունկցիան ընդունում է էքստրեմում արժեք. եթե մենք կարող ենք փաստորեն լուծել կապի հավասարումները, ասենք թե,* $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ *փոփոխականների նկատմամբ, և գտնել բացահայտ արտահայտություններ* (4) *ֆունկցիաների համար, ապա խնդիրը կհանգի* (5) *ֆունկցիայի բացարձակ էքստրեմումը գտնելուն։ Փաստորեն մենք հենց այդպես էլ վարվել ենք մի շարք խնդիրներ լուծելիս* [190, 191], *օրինակ, երբ որոնում էինք* $x+y+z+t$ *գումարի փոքրագույն արժեքը՝* $xyzt=c^4$ *պայմանը բավարարվելու դեպքում, և այլն։*

Այժմ ցույց տանք էքստրեմումի $M_0(x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0)$ *կետը գտնելու ուրիշ ճանապարհ, չենթադրելով, որ* (4) *անբացահայտ*

ֆունկցիաների համար ունենք բացահայտ արտահայտություններ, սակայն նրանց գոյության փաստն օգտագործելու ենք նաև այստեղ։

Ենթադրենք, թե M_0 *կետում* $f(x_1, \dots, x_{n+m})$ *ֆունկցիան ունի հարաբերական էքստրեմում կամ, որ միևնույնն է, (5) բարդ ֆունկցիան* P_0 *կետում ունի բացարձակ էքստրեմում։ Այդ ժամանակ,* n° 186-*ի* I *դիտողության համաձայն, նրա լրիվ դիֆերենցիալն այդ կետում պետք է դառնա զրո, ընդ որում՝ անկախ փոփոխականների* $dx_1, \dots, dx_n$ *դիֆերենցիալների նկատմամբ նույնաբար։ Առաջին դիֆերենցիալի ձևի անփոփոխելիության շնորհիվ* [175], *այդ պայմանը կարելի է գրել այսպես՝*

$$\sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j = 0, \qquad (6)$$

որտեղ $dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m}$ *նշանների տակ հասկացվում են (4) ֆունկցիաների լրիվ դիֆերենցիալները* P_0 *կետում, մինչդեռ մասնակի ածանցյալները հաշվվում են* M_0 *կետում, որովհետև,* IV *թեորեմայի համաձայն՝*

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1^0, \dots, x_n^0) &= x_{n+1}^0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m(x_1^0, \dots, x_n^0) &= x_{n+m}^0. \end{aligned} \qquad (7)$$

(6)-ից, իհարկե, չի կարելի եզրակացնել, որ դիֆերենցիալների մոտի գործակիցները հավասար են զրոյի, քանի որ այդ դիֆերենցիալները ոչ բոլորն են կամայական: *Որպեսզի հարցը հանգեցնենք կամայապես ընտրելի դիֆերենցիալների, այսինքն՝ անկախ փոփոխականների* $dx_1, \dots, dx_n$ *դիֆերենցիալներին, աշխատենք այնտեղից արտաքսել կախյալ փոփոխականների* $dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m}$ *դիֆերենցիալները։ Այդ հեշտ է անել, եթե (1) կապի հավասարումները լրիվ դիֆերենցենք,* $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$-*ի տակ հասկանալով (4) ֆունկցիաները**՝

* *Ավելի ճիշտ՝ դիֆերենցում ենք այն նույնությունները, որոնք ստացվում են (1) հավասարումներից, երբ նրանց մեջ* $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$-*ի փոխարեն տեղադրում ենք (4) անբացահայտ ֆունկցիաները։ Այս ընդարձակ միտքը այդպես կարճ արտահայտելու եղանակին օգտագործելու ենք նաև առաջիկայում:*

$$\sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (i=1, 2, \ldots, m). \tag{8}$$

Այստեղ, ինչպես նաև վերևում, (7)-ի շնորհիվ, մասնակի ածանցյալները հաշված են M_0 կետում։ Քանի որ, ըստ մեր ենթադրության, (3) դետերմինանտն այդ կետում հավասար չէ զրոյի, $dx_{n+1}, \ldots, dx_{n+m}$ դիֆերենցիալները կարելի է այստեղից գծորեն արտահայտել $dx_1, \ldots, dx_n$ դիֆերենցիալների միջոցով։ Եթե այդ արտահայտությունները դնենք (6)-ում, կստանանք

$$A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_n = 0$$

տեսքի հավասարություն, որտեղ $A_1, \ldots, A_n$ գործակիցները՝ Φ_j ֆունկցիաների մասնակի ածանցյալների նկատմամբ ռացիոնալ արտահայտություններ են և այստեղ հաշված են M_0 կետում։ Քանի որ այդ հավասարման մեջ մասնակցում են միայն անկախ փոփոխականների $dx_1, \ldots, dx_n$ դիֆերենցիալներ, ապա M_0 կետում կունենանք՝

$$A_1 = 0, \ldots, A_n = 0.$$

Կապի հավասարումների հետ միասին ստանում ենք $n+m$ հավասարումներ՝ $x_1, \ldots, x_{n+m}$ անհայտ մեծությունները հաշվելու համար։

Իհարկե, մենք միայն բավարար պայմաններ ստացանք $M^0(x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0)$ էքստրեմալ կետի համար։ Սակայն այդ պայմաններն այդ տեսքով էլ կարող են օգտակար լինել նույնիսկ f ֆունկցիայի մեծագույն (կամ փոքրագույն) արժեքը որոշելիս, (1) պայմանների դեպքում, եթե խնդրի բնույթից նախապես պարզ է, որ դիտարկվող տիրույթի ներսը պետք է գոյություն ունենա այնպիսի կետ, որտեղ ֆունկցիան այդ մեծագույն (կամ փոքրագույն) արժեքն ստանում է, և կամ եթե այդպիսի ենթադրությունն արվել է այն հաշվով, որպեսզի գտած կետն ստուգվի ուրիշ միջոցներով։

Օրինակներ բերված են n° 204-ում։

202. ԼԱԳՐԱՆԺԻ ԱՆՈՐՈՇ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿԻՉՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ։ Վերևում շարադրված եղանակում խախտվում է համաչափու-

թյունը փոփոխականների նկատմամբ. նրանց մի մասը մեկնաբանվում է որպես անկախ փոփոխականներ, մյուս մասը՝ կախյալ. ոմանց դիֆերենցիալներն արտաքսվում են, ոմանցը՝ պահպանվում։ Երբեմն այդպիսի խտրականությունն առաջ է բերում հաշվումների բարդացում։ Լագրանժն առաջարկել է այնպիսի մեթոդ, որի ժամանակ բոլոր փոփոխականները հանդես են գալիս միատեսակ դերում։

(8) հավասարումները բազմապատկենք համապատասխանաբար, առայժմ կամայական («անորոշ»), λ_i $(i=1, 2, \dots, m)$ բազմապատկիչներով և արդյունքներն անդամ առ անդամ գումարենք (6)-ի հետ։ Կստանանք հետևյալ հավասարությունը՝

$$\sum_{j=1}^{n+m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}+\lambda_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j}+\dots+\lambda_m\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j}\right)dx_j=0, \tag{9}$$

որտեղ, առաջվա նման, $dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m}$՝ նշանակում են (4) անբացահայտ ֆունկցիաների դիֆերենցիալները (դատողություններում առայժմ պահպանում ենք փոփոխականների անհավասարաչափությունը), իսկ ածանցյալները հաշված են M_0 կետում։

Այժմ բազմապատկիչների համար ընտրենք այնպիսի $\lambda_i=\lambda_i^0$ $(i=1, 2, \dots, m)$ արժեքներ, որպեսզի հենց կախյալ փոփոխականների $dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m}$ դիֆերենցիալների գործակիցները դառնան զրո՝

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}+\lambda_1^0\cdot\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j}+\dots+\lambda_m^0\cdot\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j}=0 \tag{10}$$

$$(j=n+1, \dots, n+m)։$$

Այդ հնարավոր է, քանի որ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ արժեքները որոշելու համար ստացված գծային հավասարումների սիստեմի դետերմինանտը՝ (3) դետերմինանտն է, որը զրոյից տարբեր է։ λ_j բազմապատկիչների՝ այդպես ընտրած արժեքների դեպքում (9) հավասարումը կստանա հետևյալ տեսքը՝

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}+\lambda_1^0\cdot\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j}+\dots+\lambda_m^0\cdot\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j}\right)dx_j=0։ \tag{9*}$$

Այստեղ մենք նորից գործ ունենք միայն անկախ փոփոխականների դիֆերենցիալների հետ, ուստի նրանց գործակիցները պետք է դառնան զրո, այսինքն՝ (10)-ի հետ միասին կունենանք նաև՝

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}+\lambda_1^0\cdot\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j}+\ldots+\lambda_m^0\cdot\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j}=0 \qquad (10^*)$$

$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)։$$

Այսպիսով, $n+m$ հատ $x_1, \ldots, x_{n+m}$ անհայտներն ու m հատ $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ բազմապատկիչները որոշելու համար ունենք ճիշտ նույնքան հավասարումներ, այն է՝ m հատ կապի հավասարումներ և $n+m$ հատ հավասարումներ (10)-ից ու (10*)-ից, որոնք միասին կգրենք այսպես՝

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}+\lambda_1\cdot\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j}+\ldots+\lambda_m\cdot\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j}=0$$

$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n+m)։$$

Այս հավասարումները գրելը հեշտացնելու նպատակով սովորաբար մտցնում են մի օժանդակ ֆունկցիա՝

$$F=f+\lambda_1\cdot\Phi_1+\ldots+\lambda_m\cdot\Phi_m.$$

այն ժամանակ վերևում գրված հավասարումները կարելի է գրել այսպես՝

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}=0 \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n+m)։ \qquad (11)$$

Դրանք տեսքով նման են սովորական էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմաններին՝ F ֆունկցիայի համար. այս պետք է հասկանալ միայն հիշողության հեշտացման տեսակետից։

Լագրանժի մեթոդը նույնպես ցույց է տալիս անհրաժեշտ պայմանները։ Այնուհետև կարելի է այստեղ կրկնել այն բոլորն, ինչ որ ասված է նախորդ պարագրաֆի վերջում։

Դիտողություն։ Շարադրված տեսության մեջ էական դեր խաղում էր (2) մատրիցի ռանգի վերաբերյալ արված ենթադրությունը, որից մենք օգտվեցինք երեք անգամ։ Ցույց տված մեթոդներից որևէ մեկով խնդիրներ լուծելիս,—

համոզվելու համար, որ ֆունկցիային հարաբերական էքստրեմում տվող ոչ մի կետ բաց չի թողնված,—հարկավոր է նախապես ստուգել, թե արդյոք վերոհիշյալ ենթադրությունը իրո՞ք տեղի ունի դիտարկվող տիրույթի այն բոլոր կետերում, որոնք բավարարում են կապի հավասարումներին։ Պարզ դեպքերում մենք այդ ստուգումը թողնելու ենք ընթերցողին։

203. ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄԻ ԲԱՎԱՐԱՐ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԸ։ *Այդ առթիվ մենք բավարարվելու ենք մի քանի դիտողություններով։ Ենթադրենք, թե* f *և* Φ_j $(j=1, 2, \ldots, m)$ *ֆունկցիաների երկրորդ կարգի ածանցյալները գոյություն ունեն ու անընդհատ են։ Դիցուք* $M_0(x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0)$ *կետը* $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0$ *բազմապատկիչների հետ միասին բավարարում է վերևում ստացված անհրաժեշտ պայմաններին։*

Այդ կետում հարաբերական էքստրեմումի գոյության հարցը, ինչպես և 188-ում, կախված է

$$\Delta = f(x_1, \ldots, x_{n+m}) - f(x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0)$$

տարբերության նշանից, միայն այն էական վերապահությամբ, որ $(x_1, \ldots, x_{n+m})$ *կետը ևս բավարարում է (1) կապի հավասարումներին կամ, որ միևնույնն է, (4) հավասարումներին։ Հեշտ է հասկանալ, որ այդպիսի կետերի համար* f *ֆունկցիայի աճը կարելի է փոխարինել* F *օժանդակ ֆունկցիայի աճով (որտեղ բոլոր* λ_j *բազմապատկիչները համարում ենք հավասար* λ_i^0*-ներին)՝*

$$\Delta = F(x_1, \ldots, x_{n+m}) - F(x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0)\text{։}$$

Ի նկատի ունենալով այն, որ M_0 *կետում տեղի ունեն (11) պայմանները,—հենց դրանում էլ կայանում է* F *ֆունկցիային անցնելու օգտավետությունը,—այդ աճը կարելի է Թեյլորի բանաձևով [188, (8)] գրել այսպես՝*

$$\Delta = \frac{1}{2}\left\{\sum_{j,k=1}^{n+m} A_{j,k}\,\Delta x_j\,\Delta x_k + \sum_{j,k=1}^{n+m} a_{j,k}\,\Delta x_j\,\Delta x_k\right\},$$

որտեղ՝

$$\Delta x_j = x_j - x_j^0, \quad A_{j,k} = F''_{x_j x_k}(x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0)$$

$$(j, k = 1, 2, \ldots, n+m)$$

և $\alpha_{j,k}\to 0$, երբ $\Delta x_1\to 0,\ldots,\Delta x_n\to 0$ (մյուս՝ $\Delta x_{n+1},\ldots,\Delta x_{n+m}$ աճերն իրենք պիտի անվերջ փոքրեր լինեն (4) ֆունկցիաների անընդհատության շնորհիվ)։

Եթե այստեղ բոլոր Δx_j աճերը փոխարինենք համապատասխան dx_j դիֆերենցիալներով, անկախ փոփոխականների նկատմամբ դրանից ոչ մի փոփոխություն չի առաջանա. ինչ վերաբերում է կախյալ փոփոխականներին, ապա կատարած փոխարինման հետևանքով անհրաժեշտություն կառաջանա միայն $\alpha_{j,k}$ անվերջ փոքր գործակիցների փոխարեն գրել ուրիշ՝ $\beta_{j,k}$ անվերջ փոքր գործակիցներ՝

$$\Delta=\frac{1}{2}\left\{\sum_{j,k=1}^{n+m} A_{j,k}\,dx_j\,dx_k+\sum_{j,k=1}^{n+m}\beta_{j,k}\,dx_j\,dx_k\right\}.$$

Անցումը դիֆերենցիալներին օգտակար է նրանով, որ կախյալ և անկախ փոփոխականների դիֆերենցիալները կապված են (8) գծային առնչություններով։ Քանի որ (3) դետերմինանտը M_0 կետում, պայմանի համաձայն, զրո չէ, ուստի (8)-ից կարելի է կախյալ փոփոխականների դիֆերենցիալները գծորեն արտահայտել անկախ փոփոխականների դիֆերենցիալներով։ Այդ արտահայտությունները տեղադրելով Δ-ի մեջ, նրա առաջին գումարի փոխարեն կստանանք քառակուսային ֆորմա՝ $dx_1,\ldots,dx_n$ դիֆերենցիալների նկատմամբ։

Այժմ, ինչպես և 188-ում ու 189-ում, կարելի է ցույց տալ, որ եթե այդ քառակուսային ֆորման որոշյալ է, այն էլ՝ դրական (բացասական), ապա դիտարկվող կետում կլինի հարաբերական մինիմում (մաքսիմում), իսկ եթե քառակուսային ֆորման անորոշ է, ապա հարաբերական էքստրեմում չկա։

Ի միջի այլոց այս կրիտերիումի գործնական նշանակությունը մեծ չէ (հմմ. n 190 դիտողության հետ)։

Անցնենք օրինակների ու խնդիրների։

204. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ ԵՎ ԽՆԴԻՐՆԵՐ։ 1) Դիցուք պահանջվում է գտնել $f=x+y+z+t$ ֆունկցիայի էքստրեմումը, պայմանով, որ $\Phi=xyzt-c^4=0$. փոփոխականների փոփոխման տիրույթը որոշվում է $x>0,\ y>0,\ z>0,\ t>0$ անհավասարություններով։ Մենք այս խնդիրն արդեն լուծել ենք n 190,3)-ում, փաստորեն t-ն արտահայտելով վերջին պայմանից։ Այժմ այդ հավասարումը լրիվ դիֆերենցելով, կստանանք՝

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}+\frac{dt}{t}=0,$$

որտեղից՝

$$dt=-t\left(\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}\right)։$$

Այս և

$$df=dx+dy+dz+dt=0$$

հավասարությունից արտաքսելով dt-*ն, կստանանք՝*

$$\left(1-\frac{t}{x}\right)dx+\left(1-\frac{t}{y}\right)dy+\left(1-\frac{t}{z}\right)dz=0,$$

որը, dx, dy, dz *մեծությունների կամայական լինելու հետևանքով, վերածվում է երեք հավասարումների՝*

$$1-\frac{t}{x}=0,\qquad 1-\frac{t}{y}=0,\qquad 1-\frac{t}{z}=0.$$

այստեղից՝

$$x=y=z=t=c։$$

Նույն խնդրի լուծման համար կիրառելով Լագրանժի մեթոդը, կազմենք օժանդակ ֆունկցիան՝

$$F=x+y+z+t+\lambda xyzt\ *$$

և գրենք էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները՝

$$F'_x=1+\lambda yzt=0,\ldots,F'_t=1+\lambda xyz=0։$$

Այստեղից՝

$$yzt=xzt=xyt=xyz,$$

այնպես, որ՝

$$x=y=z=t=c։$$

Որպեսզի օգտվենք նախորդ n°-*ի արդյունքից, հաշվենք* $\lambda=-\frac{1}{c^3}$ *և դիտարկենք*

$$F=x+y+z+t-\frac{xyzt}{c^3}$$

ֆունկցիան: Նրա երկրորդ դիֆերենցիալը $x=y=z=t=c$ *կետում կլինի՝*

---

* *Եթե հիշենք այդ ֆունկցիայի դերը, ապա պարզ կլինի, որ* Φ *ֆունկցիայի կազմի մեջ մտնող հաստատուն գումարելին կարելի է բաց թողնել։*

$$d^2F = -\frac{2}{c}(dxdy+dxdz+dxdt+dydz+dydt+dzdt).$$

Դիֆերենցելով կապի հավասարումները (դարձյալ նույն կետում), կստանանք՝

$$dx+dy+dz+dt=0.$$

Եթե այստեղից որոշենք dt*-ն և տեղադրենք նախորդ արտահայտության մեջ, ապա կգտնենք՝*

$$-\frac{2}{c}[dxdy+dxdz+dydz-(dx+dy+dz)^2]=$$

$$=\frac{1}{c}[(dx+dy+dz)^2+dx^2+dy^2+dz^2].$$

Քանի որ այս քառակուսային ֆորման որոշյալ է և դրական, ուստի մեր գտած կետում ֆունկցիան կունենա հարաբերական մինիմում:

[*Այստեղից, սակայն, չի կարելի եզրակացնել, թե այդ մինիմումը* $f=x+y+z+t$ *ֆունկցիայի համար կլինի նաև փ ո ք ր ա գ ու յ ն արժեք՝ նրա արգումենտների մասնանշված կապի առկայությամբ. հմմ.* **190, 3)**].

2) *Վերադառնանք զուգահեռ միացումով էլեկտրական ցանցի լարերի ամենաձեռնտու հատույթների խնդրին* [**191, 8)**]: *Պահպանելով այնտեղ ընդունված նշանակումները, փնտրենք*

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n) = l_1q_1+l_2q_2+\ldots+l_nq_n$$

ֆունկցիայի էքստրեմումը, պայմանով, որ՝

$$\Phi(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \frac{\rho l_1J_1}{q_1}+\frac{\rho l_2J_2}{q_2}+\ldots+\frac{\rho l_nJ_n}{q_n} = e.$$

Մենք հիմա նույնիսկ չենք փորձելու $q_1, q_2, \ldots, q_n$ *մեծությունների փոխարեն նոր փոփոխականներ մուծել, ինչպես այդ արել էինք այնտեղ, որովհետև մեր նոր մեթոդներով խնդիրն այդպես էլ հեշտությամբ կլուծվի:*

Այսպես, ուրեմն, լ ր ի վ դ ի ֆ ե ր ե ն ց ե լ ո վ $\Phi=0$ *հավասարումը, այնուհետև* dq_n *դիֆերենցիալի համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունը՝*

$$dq_n = -\frac{q_n^2}{l_nJ_n}\left\{\frac{l_1J_1}{q_1^2}dq_1+\ldots+\frac{l_{n-1}J_{n-1}}{q_{n-1}^2}dq_{n-1}\right\}.$$

Տեղադրելով $df=l_1dq_1+\ldots+l_{n-1}dq_{n-1}+l_ndq_n=0$ *հավասարության մեջ, կստանանք՝*

$$\left(l_1-\frac{q_n^2}{J_n}\cdot\frac{l_1J_1}{q_1^2}\right)dq_1+\ldots+\Big(l_{n-1}\frac{q_n^2}{J_n}\cdot\frac{l_{n-1}J_{n-1}}{q_{n-1}^2}dq_{n-1}=0.$$

Քանի որ $dq_1, \ldots, dq_{n-1}$ արդեն կամավոր են, ապա նրանց գործակիցները զատ-զատ հավասար են զրոյի, որտեղից՝

$$\frac{q_1^2}{J_1} = \frac{q_2^2}{J_2} = \ldots = \frac{q_{n-1}^2}{J_{n-1}} = \frac{q_n^2}{J_n} = \lambda^2$$

և՝

$$q_1 = \lambda\sqrt{J_1}, \quad q_2 = \lambda\sqrt{J_2}, \ldots, \quad q_n = \lambda\sqrt{J_n}. \qquad (12)$$

Համեմատականության λ գործակիցը հեշտ է որոշել հետևյալ հավասարումից՝

$$\lambda = \frac{\rho}{e}\sum_{i=1}^{n} l_i\sqrt{J_i}.$$

Եթե ուզում ենք կիրառել Լագրանժի մեթոդը, ապա պետք է կառուցել օժանդակ ֆունկցիա*՝

$$F(q_1, q_2, \ldots, q_n) = l_1 q_1 + \ldots + l_n q_n + \lambda^2\left(\frac{l_1 J_1}{q_1} + \ldots + \frac{l_n J_n}{q_n}\right)$$

և զրոյի հավասարեցնել նրա ածանցյալները՝

$$\frac{\partial F}{\partial q_1} = l_1 - \frac{\lambda^2 l_1 J_1}{q_1^2} = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial q_n} = l_n - \frac{\lambda^2 l_n J_n}{q_n^2} = 0,$$

որտեղից կրկին կստանանք (12)-ը, և այլն:

3) Իբրև ավելի բարդ օրինակ, քննության առնենք այսպիսի խնդիր.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \; (a > b > c)$$

եռառանցք էլիպսոիդը հատված է նրա կենտրոնով անցնող $lx+my+nz=0$ հարթությամբ, պահանջվում է որոշել հատույթում ստացվող էլիպսի կիսառանցքները: Այլ խոսքով, պետք է գտնել $r^2=x^2+y^2+z^2$ ֆունկցիայի էքստրեմալ արժեքները, երբ փոփոխականները ենթարկվում են վերոհիշյալ երկու կապի հավասարումներին (էլիպսոիդի և հարթության):

n° 201-ի՝ կախյալ դիֆերենցիալների արտաքսման մեթոդն այստեղ հանգեցնում է բարդ հաշվումների, այդ պատճառով էլ մենք դիմում ենք Լագրանժի մեթոդին:

---

* Հարմարության համար մենք օժանդակ բազմապատկիչը վերցրել ենք λ^2 տեսքով, նրա մեջ մտցնելով ρ հաստատունը:

Համոզվելու համար, որ

$$\left\| \begin{matrix} \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} \\ l & m & n \end{matrix} \right\|$$

մատրիցի ռանգը հավասար է 2-ի էլիպսոիդի ու հարթության հատման բոլոր կետերում*, ենթադրենք դրա հակառակը։ Այդ ժամանակ. բոլոր երկրորդ կարգի դետերմինանտների զրո դառնալուց կբխեր մատրիցի վերին և ստորին տողերի էլեմենտների համեմատականությունը. բայց այդ դեպքում $lx+my+nz=0$ հավասարությունից կհետևեր, որ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$, որը հնարավոր չէ։ Այսպիսով համոզվեցինք, որ մատրիցի ռանգը հավասար է 2-ի։

Կազմենք օժանդակ ֆունկցիան՝

$$F(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)+2\mu(lx+my+nz)$$

և նրա ածանցյալները հավասարեցնենք զրոյի՝

$$\left.\begin{aligned} x+\lambda\cdot\frac{x}{a^2}+\mu l&=0, \\ x+\lambda\cdot\frac{y}{b^2}+\mu m&=0, \\ z+\lambda\cdot\frac{z}{c^2}+\mu n&=0, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Այս հավասարումները բազմապատկելով, համապատասխանաբար, x-ով, y-ով, z-ով, և արդյունքները գումարելով, կստանանք (հաշվի առնելով կապի հավասարումները)՝

$$\lambda=-r^2.$$

Եթե ընդունենք, որոշակիության համար, որ l, m, n թվերից ոչ մեկը հավասար չէ զրոյի, ապա (13)-ից կարելի է տեսնել, որ r-ը հավասար չէ ոչ a-ին, ոչ b-ին, ոչ c-ին։ Այդ դեպքում (13) հավասարումները կարելի է արտագրել այսպես՝

* Տես 202-ի դիտողությունը։

$$x = -\mu \frac{la^2}{a^2-r^2},$$

$$y = -\mu \frac{mb^2}{b^2-r^2},$$

$$z = -\mu \frac{nc^2}{c^2-r^2}.$$

Այստեղից հեշտ է գտնել μ*-ն, հետևաբար նաև* x*-ը,* y*-ը,* z*-ը. սակայն, չկատարելով այդ, կարելի է այդ հավասարումները, նախապես բազմապատկելով* l*-ով,* m*-ով,* n*-ով, գումարել և ստանալ մեկ հավասարում՝*

$$\frac{l^2a^2}{a^2-r^2} + \frac{m^2b^2}{b^2-r^2} + \frac{n^2c^2}{c^2-r^2} = 0,$$

որտեղից և անմիջապես կորոշվեն r^2*-ու՝ մեզ հետաքրքրող երկու էքստրեմալ արժեքները:*

Քանի որ այդ էքստրեմալ արժեքների գոյությունը նախապես մեզ հայտնի է, ապա այստեղ ստացվում է հարցի լրիվ լուծումը:

4) Վերջապես, մեր առաջ խնդիր դնենք՝ գտնել

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \quad (a_{ik}=a_{ki})$$

քառակուսային ֆորմայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները, պայմանով, որ՝

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1. \qquad (14)$$

Ամենից առաջ հեշտ է համոզվել, որ (14) պայմանին բավարարող $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *կետերի մեջ իրոք կան այնպիսիները, որտեղ* f *ֆունկցիան ընդունում է իր արժեքների մեջ ամենափոքր և ամենամեծ արժեքները: Եթե փոփոխականներից մեկն, օրինակ՝* x_n*-ը, (14)-ից արտահայտենք մյուս փոփոխականներով, ապա հարցը կհանգի երկու՝*

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \pm\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_{n+1}^2}\right)$$

անընդհատ ֆունկցիաների դիտարկմանը՝ $(n-1)$*-չափման*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \leq 1$$

փակ գնդում. այդ ֆունկցիաների նկատմամբ կկիրառենք Վ ա յ ե ր շ տ ր ա ս ի թեորեման [163] և կհամոզվենք, որ գոյություն ունեն էքստրեմումի կետեր:*

---

* *Ի միջի այլոց, կարելի էր Վ ա յ ե ր շ տ ր ա ս ի թեորեման կիրառել նաև անմիջապես* f *ֆունկցիայի նկատմամբ՝ այն կետերի բազմության մեջ, որոնք բավարարում են (14) հավասարմանը (սֆերիկ մակերևույթ), օգտվելով այդ բազմության փ ա կ լինելուց:*

Այժմ կազմենք Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2).$$

Արտաքսելով $x_1, x_2, \dots, x_n$ *հետևյալ պայմաններից՝*

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_1} = (a_{11}-\lambda)\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \dots + a_{1n}\cdot x_n = 0, \\
\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_2} = a_{21}\cdot x_1 + (a_{22}-\lambda)\cdot x_2 + \dots + a_{2n}\cdot x_n = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_n} = a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)\cdot x_n = 0,
\end{array}\right| \quad (15)$$

կստանանք λ-ի նկատմամբ n *աստիճանի հավասարում՝*

$$\begin{vmatrix}
a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda
\end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Եթե λ-ն նրա արմատներից մեկն է, ապա գծային հավասարումների (15) սիստեմին կարելի է բավարարել $x_1, x_2, \dots, x_n$ *փոփոխականների այնպիսի արժեքներով, որոնք ոչ բոլորն են հավասար զրոյի. այդ արժեքները բազմապատկելով հարմար բազմապատկիչով, կարելի է հասնել նաև (14) պայմանի բավարարմանը: Սակայն այդ արժեքները որոշելը մեզ համար հետաքրքրական չէ. որովհետև, ինչպես կտեսնենք,* f *ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքների հարցը լուծվում է նաև առանց նրանց:*

Իրոք, (15) հավասարությունները բազմապատկելով, համապատասխանաբար, $x_1, x_2, \dots, x_n$ *մեծություններով և անդամ առ անդամ գումարելով կստանանք՝*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = 0,$$

կամ, (14) շնորհիվ,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda.$$

Այսպիսով, եթե λ-ն բավարարում է (16) հավասարմանը, ապա f *ֆունկցիայի արժեքը համապատասխան* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *կետում հավասար կլինի հենց այդ λ-ին:*

Մենք հանգում ենք մի գեղեցիկ արդյունքի. f ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները, (14) պայմանի պահպանման դեպքում, համընկնում են (16) հավասարման իրական արմատների մեծագույն և փոքրագույն արժեքների հետ*։

205. ԳԱՂԱՓԱՐ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՆԿԱԽՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ։

Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիաների սիստեմը՝

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

որոնք իրենց մասնակի ածանցյալների հետ միասին որոշված ու անընդհատ են n-չափման մի D բաց տիրույթում։

Կարող է պատահել, որ նրանցից մեկն, օրինակ՝ y_j-ն, մյուսների ֆունկցիա լինի՝

$$y_j = \varphi(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_m),^{**} \tag{18}$$

որտեղ φ ֆունկցիան իր մասնակի ածանցյալների հետ միասին նույնպես ենթադրվում է անընդհատ (համապատասխան տիրույթում), ընդ որում ենթադրում ենք նաև, որ (18) հավասարությունը տեղի ունի նույնաբար $x_1, x_2, \dots, x_n$ փոփոխականների նկատմամբ՝ D տիրույթում։ Այդ ժամանակ ասում են, որ D տիրույթում y_j ֆունկցիան կախված է մյուս ֆունկցիաներից։ Մասնավորապես այդպես կլինի, երբ y_j-ն վերածվի հաստատունի, այդ դեպքում կարելի է ընդունել նաև $\varphi = \text{const.}$։

Ընդհանրապես, $y_1, y_2, \dots, y_m$ ֆունկցիաներն անվանում են կախյալ D տիրույթում, եթե նրանցից մեկը (միևնույն է, թե որը) կախված է մյուսներից։

* Ի դեպ, կարելի է ապացուցել, որ այդ հավասարման բոլոր արմատներն իրական են։

** Էական է, որ φ ֆունկցիան իր անմիջական արգումենտների թվում x-եր չի պարունակում։

Օրինակներ։ 1) Եթե ընդունենք՝

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \\ y_2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2, \\ y_3 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n, \end{cases}$$

ապա դժվար չէ ստուգել, որ ամբողջ n-չափման տարածության մեջ կբավարարվի հետևյալ նույնությունը.

$$y_2 = y_1^2 - 2y_3.$$

2) Նման ձևով,

$$\begin{cases} y_1 = x_1 x_2 - x_3, \\ y_2 = x_1 x_3 + x_2, \\ y_3 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + x_3^2) - (x_1^2 - 1)\, x_2 x_3 - x_1\, (x_2^2 - x_3)^2 \end{cases}$$

ֆունկցիաների համար տեղի ունի (եռաչափ տարածության մեջ) հետևյալ նույնությունը՝

$$y_3 = y_1^2 - y_1 y_2 + y_2^2.$$

Այդ բոլորը կախյալ ֆունկցիաներ են։

Եթե ոչ D տիրույթում, ոչ էլ նրա մասը կազմող որևէ մասնակի տիրույթում տեղի չունի (18) տեսքի նույնություն, ապա ասում են, որ $y_1, y_2, \dots, y_m$ ֆունկցիաներն անկախ են D տիրույթում։

Ֆունկցիաների անկախության հարցը լուծվում է այսպես կոչված Յակոբիի մատրիցի միջոցով, որը կազմվում է այդ ֆունկցիաների մասնակի ածանցյալներից ըստ բոլոր անկախ փոփոխականների՝

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|, \qquad (19)$$

Ենթադրելով $n \geqslant m$, ամենից առաջ ունենք այսպիսի թեորեմա՝

I **ԹԵՈՐԵՄԱ։** Եթե (19) մատրիցի էլեմենտներից կազմած m-րդ կարգի թեկուզ մեկ դիտերմինանտ D տիրույթում տարբեր է զրոյից, ապա այդ տիրույթում $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ֆունկցիաներն անկախ են։

Ապացույց։ Դիցուք՝

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0 \text{։} \tag{20}$$

Եթե զրոյից տարբեր լիներ ոչ թե այս, այլ որևէ ուրիշ դիտերմինանտ (m-րդ կարգի), ապա, փոփոխականների համարակալումը փոխելով, կարելի կլիներ հարցը հանգեցնել (20) պայմանին։

Թեորեման ապացուցինք հակառող ենթադրությամբ։ Ենթադրենք, թե ֆունկցիաներից մեկն, օրինակ y_m-ը, արտահայտվում է մյուսներով, այնպես որ՝

$$y_m = \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}), \tag{21}$$

թեկուզ և D տիրույթի մի D_0 մասում։ Այդ նույնությունը դիֆերենցելով ըստ յուրաքանչյուր x_i փոփոխականի $(i=1, \ldots, m)$, *մենք կստանայինք՝*

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_i} = \frac{\partial y_m}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial y_m}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}} \cdot \frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_i}$$

$$(i=1, 2, \ldots, m)$$

տեսքի մի շարք նույնություններ (D_0 տիրույթում)։

Այստեղից կերևար, որ (20) դետերմինանտի վերջին տողի էլեմենտները կստացվեին առաջին $m-1$ տողերի համապատասխան էլեմենտների գումարման միջոցով՝ նախապես նրանք բազմապատկելով $\frac{\partial y_m}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}}$ բազմապատկիչներով։ Սակայն

այդպիսի դետերմինանտը, ինչպես հայտնի է, պիտի լինի զրո, որը հակասում է թեորեմայի պայմանին։ Ստացված հակասությունն ապացուցում է (21) տեսքի հավասարության անհնարինությունը։

206. ՅԱԿՈԲԻԻ ՄԱՏՐԻՑԻ ՌԱՆԳԸ։ *Անցնելով ընդհանուր դեպքին, մտցնենք հետևյալ սահմանումը. Յակոբիի (19) մատրիցի ռանգ (D տիրույթում) անվանենք ամենաբարձր կարգը այդ մատրիցի էլեմենտներից կազմված այն դետերմինանտների, որոնք D տիրույթում նույնաբար զրո չեն դառնում. Եթե (19) մատրիցի ռանգն է $\mu \geqslant 1$, ապա գոյություն ունի մատրիցի էլեմենտներից կազմված թեկուզ մեկ դետերմինանտ μ կարգի (ինարկե, ենթադրվում է, որ $m \geqslant \mu$, $n \geqslant \mu$), որը D-ում նույնաբար հավասար չէ զրոյի, մինչդեռ μ-ից բարձր կարգի բոլոր դետերմինանտները (եթե այդպիսիները կան) նույնաբար հավասար են զրոյի։ Կարող է պատահել, որ (19) մատրիցի բոլոր էլեմենտները նույնաբար զրո են դառնում. այդ ժամանակ ասում են, որ մատրիցի ռանգը զրո է։ Սակայն այդ դեպքը հետաքրքիր չէ, որովհետև այդ ժամանակ բոլոր $y_1, y_2, \dots, y_m$ ֆունկցիաները պարզապես վերածվում են հաստատունների [173]։*

II **ԹԵՈՐԵՄԱ։** Դիցուք Յակոբիի մատրիցի ռանգը D տիրույթում հավասար է $\mu \geqslant 1$։ Այդ դեպքում այդ տիրույթի մի որոշ D_0 մասում մեր m հատ ֆունկցիաներից μ հատը կլինեն անկախ, իսկ մյուսները՝ նրանցից կախված։ [*Այդ ժամանակ անկախ կլինեն հենց այն ֆունկցիաները, որի ածանցյալներից կազմված է նույնաբար զրո չդարձող μ կարգի դետերմինանտը։*]

Ապացույց։ Առանց նսեմացնելու ընդհանրությունը, կարելի է ընդունել, որ D տիրույթի մի որոշ կետում զրոյից տարբեր է հենց հետևյալ դետերմինանտը՝

$$\frac{D(y_1, \dots, y_\mu)}{D(x_1, \dots, x_\mu)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_\mu} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_\mu}{\partial x_1} & \frac{\partial y_\mu}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_\mu}{\partial x_\mu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_\mu} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_\mu}{\partial x_1} & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu} \end{vmatrix} \quad (22)$$

Մասնակի ածանցյալների անընդհատության հետևանքով, այդ դետերմինանտը զրոյից տարբեր կլինի նաև վերոհիշյալ կետի մի որոշ շրջակայքում և, հետևաբար, I թեորեմայի համաձայն, $y_1, y_2, \dots, y_\mu$ ֆունկցիաները այդ շրջակայքում անկախ կլինեն։

Մյուս կողմից, n° 198-ի IV թեորեմայի համաձայն, եթե համապատասխան կերպով սահմանափակենք բոլոր փոփոխականների փոփոխությունները, ապա (17) հավասարումներից առաջին μ հատը՝

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, \dots, x_\mu; x_{\mu+1}, \dots, x_n) - y_1 = 0, \\ f_2(x_1, \dots, x_\mu; x_{\mu+1}, \dots, x_n) - y_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_\mu(x_1, \dots, x_\mu; x_{\mu+1}, \dots, x_n) - y_\mu = 0 \end{array}\right\} \qquad (23)$$

որոշում են $x_1, x_2, \dots, x_\mu$-ն իբրև համասեռ ֆունկցիաներ այդ հավասարումներին մասնակցող մյուս $y_1, \dots, y_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_n$, փոփոխականներից՝

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(y_1, \dots, y_\mu; x_{\mu+1}, \dots, x_n), \\ x_2 = \varphi_2(y_1, \dots, y_\mu; x_{\mu+1}, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_\mu = \varphi_\mu(y_1, \dots, y_\mu; x_{\mu+1}, \dots, x_n)։ \end{array}\right\} \qquad (24)$$

Այդ ժամանակ հավասարումների (23) և (24) սիստեմները կլինեն լիովին համարժեք. նկատենք, մասնավորապես, որ եթե (24)-ում $y_1, y_2, \dots, y_\mu$-ի տակ հասկանանք $f_1, f_2, \dots, f_\mu$ ֆունկցիաները, ապա x-երի նկատմամբ կստացվեն նույնություններ։

Այժմ վերցնենք (եթե $m>\mu$) (17) ֆունկցիաներից մնացածներից որևէ մեկը, օրինակ՝ $y_{\mu+1}$-ը, և ցույց տանք, որ նա կախված է առաջին μ ֆունկցիաներից՝ $y_1, y_2, \dots, y_\mu$-ից։ Եթե

$$y_{\mu+1} = f_{\mu+1}(x_1, \dots x_n)$$

հավասարության մեջ $x_1, \dots, x_\mu$-ի փոխարեն տեղադրենք (24) ֆունկցիաները, $y_{\mu+1}$-ը կներկայացվի $y_1, \dots, y_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_n$ փոփոխականների բարդ ֆունկցիայի տեսքով՝

$$y_{\mu+1} = f_{\mu+1}(\varphi_1(y_1, \ldots, y_\mu; x_{\mu+1}, \ldots, x_n), \ldots$$
$$\ldots, \varphi_\mu(y_1, \ldots, y_\mu; x_{\mu+1}, \ldots, x_n); x_{\mu+1}, \ldots, x_n) =$$
$$= F_{\mu+1}(y_1, \ldots, y_\mu; x_{\mu+1}, \ldots, x_n).$$

և, հակադարձաբար, եթե այստեղ $y_1, \ldots, y_\mu$-ի տակ հասկանանք (17)-ի համապատասխան ֆունկցիաները, ապա, վերևում արված դիտողության համաձայն, կստանանք x-երի նկատմամբ նույնություն։

Մնում է ցույց տալ նաև (եթե, իհարկե, $n>\mu$), որ $F_{\mu+1}$ ֆունկցիան փաստորեն կախված չէ $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$ արգումենտներից, այսինքն՝ նա իր արժեքը չի փոխում այդ x-երի կամայական փոփոխությունների դեպքում, եթե $y_1, \ldots, y_\mu$-ի արժեքները ֆիքսած են։ Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ նույնաբար [173]՝

$$\frac{\partial y_{\mu+1}}{\partial x_{\mu+1}} = 0, \quad \frac{\partial y_{\mu+1}}{\partial x_{\mu+2}} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial y_{\mu+1}}{\partial x_n} = 0։$$

Կանգ առնենք առաջին հավասարության վրա, իսկ մյուսները կապացուցվեն անալոգիայով։

Ֆիքսենք $x_{\mu+2}, \ldots, x_n$ փոփոխականների արժեքները (եթե $n>\mu+1$)։ $y_1, \ldots, y_\mu, y_{\mu+1}$-ը դիտենք որպես $y_1, \ldots, y_\mu, x_{\mu+1}$-ի բարդ ֆունկցիաներ, որոնք կստացվեն (17)-ի առաջին $\mu+1$ ֆունկցիաներից, եթե նրանց մեջ $x_1, \ldots, x_\mu$ փոխարեն տեղադրենք (24) ֆունկցիաները։ Յակոբիանների մի հատկության [193, (3)] համաձայն ունենք՝

$$\frac{D(y_1, \ldots, y_\mu, y_{\mu+1})}{D(y_1, \ldots, y_\mu, x_{\mu+1})} =$$
$$= \frac{D(y_1, \ldots, y_\mu, y_{\mu+1})}{D(x_1, \ldots, x_\mu, x_{\mu+1})} \cdot \frac{D(x_1, \ldots, x_\mu, x_{\mu+1})}{D(y_1, \ldots, y_\mu, y_{\mu+1})}։$$

Սակայն աջ մասի առաջին բազմապատկիչը՝ (20) մատրիցի էլեմենտներից կազմած $(\mu+1)$-րդ կարգի մի դետերմինանտ է, որը պայմանի համաձայն նույնաբար հավասար է զրոյի։ Հետևաբար, ձախ մասի դետերմինանտը ևս հավասար է զրոյի, որն

ինչպես հեշտ է տեսնել, վերածվում է $\frac{\partial y_{\mu+1}}{\partial x_{\mu+1}}$ ածանցյալին։

Այսպիսով, $F_{\mu+1}$ ֆունկցիայի մեջ $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$ արգումենտները կարելի է բաց թողնել՝ $y_{\mu+1}$-ը կախված է միայն $y_1, \ldots, y_\mu$-ից, որը և պահանջվում էր ապացուցել։

205-ի 1) օրինակում Յակոբիի մատրիցն ունի այսպիսի տեսք՝

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & \cdots & 2x_n \\ x_2+x_3+\ldots+x_n & x_1+x_3+\ldots+x_n & \ldots & x_1+x_2+\ldots+x_{n-1} \end{matrix}\right\|.$$

Եթե երրորդ տողի էլեմենտներին ավելացնենք երկրորդ տողի համապատասխան էլեմենտները, վերջիններս նախապես բազմապատկելով $\frac{1}{2}$-ով, ապա կստացվի համասար էլեմենտներից բաղկացած տող (առաջին տողի նման)։ Այստեղից արդեն պարզ է, որ երրորդ կարգի բոլոր դետերմինանտները զրոներ են։ Մատրիցի ռանգը երկուս է. և իրոք՝ երեք ֆունկցիաներից երկուսն անկախ են, իսկ երրորդը կախված է այդ երկուսից։

Այս ասածը նույնությամբ կիրառվում է նաև 205-ի 2) օրինակի նկատմամբ։

Վերջում նկատենք, որ հնարավոր են այնպիսի դեպքեր, երբ դիտարկվող տիրույթի մի մասում մի կախում գոյություն ունի ֆունկցիաների միջև, իսկ մյուս մասում՝ մի այլ կախում, կամ թե ֆունկցիաներն անկախ են. և այլն։

3) Դիցուք, օրինակ, x_1 և x_2 փոփոխականներից կախված y_1 և y_2 ֆունկցիաներն x_1x_2 հարթության վրա որոշվում են հետևյալ հավասարություններով՝

$$y_1=\begin{cases} x_1^3x_2^2, & \text{եթե } x_1\geqslant 0, \\ 0, & \text{եթե } x_1<0, \end{cases} \qquad y_1=\begin{cases} x_1^2x_2^3, & \text{եթե } x_2\geqslant 0, \\ 0, & \text{եթե } x_2<0. \end{cases}$$

Հեշտ է ստուգել, որ այդ ֆունկցիաներն իրենց ածանցյալների հետ միասին անընդհատ են ամբողջ հարթության վրա։

Տվյալ դեպքում Յակոբիի մատրիցի ռանգը հավասար է *երկուսի*՝ առաջին կոորդինատային անկյան համար, *մեկի*՝ երկրորդ և չորրորդ անկյունների համար, և *զրոյի*՝ երրորդ անկյան համար։ Ֆունկցիաներն անկախ են միայն առաջին կոորդինատային անկյունում։

§ 4. ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՓՈԽԱՐԻՆՈՒՄԸ

207. ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ։ Այս պարագրաֆի նպատակն է՝ ընթերցողին յուրացնել տալ փոփոխականների փոխարինման ձ և ա կ ա ն

պրոցեսը, ուստի մենք այստեղ ընթերցողի ուշադրությունը չենք շեղելու այն պայմանների պարզաբանությամբ, որոնց առկայության դեպքում կատարվող գործողությունները օրինական են (որոնք առանձին դժվարություն էլ չեն ներկայացնում)։

Ներկա պարագրաֆի մի զգալի մասը կարելի էր և ավելի վաղ շարադրել, սակայն մեզ նպատակահարմար թվաց փոփոխականների փոխարինման վերաբերյալ ամբողջ նյութը կենտրոնացնել մեկ տեղ։

Դիցուք տված է մի արտահայտություն՝

$$w=F(x,\ y,\ y'_x,\ y''_{x^2},\ \dots),$$

որը պարունակում է x անկախ փոփոխականը, նրանից կախված y ֆունկցիան և y-ի ածանցյալներն ըստ x-ի մինչև մի որոշ կարգը։ Երբեմն պահանջվում է այդպիսի արտահայտության մեջ անցնել նոր փոփոխականների՝ t անկախ փոփոխականին և նրանից կախված u ֆունկցիային, որոնց հետ x և y հին փոփոխականները կապված են որոշ առնչություններով (որոնք կրում են ձևափոխման կամ փոխարինման բանաձևեր անունը)։ Ավելի ճշգրիտ ասած՝ պահանջվում է w-ն ներկայացնել որպես ֆունկցիա t-ից, u-ից և u-ի ածանցյալներից ըստ t-ի։

Փոփոխականների այդպիսի փոխարինումը սովորաբար բացատրվում է կամ այն հանգամանքի հետաքրքրությամբ, որ դիտարկվող հարցում ներկայացնում են t և u փոփոխականները, կամ՝ w-ի մեջ այդ փոխարինմամբ կատարվող պարզեցումով։

Նախ կանգ առնենք այն դեպքի վրա, երբ փոխարինվում է միայն անկախ փոփոխականը և տված է ձևափոխման բանաձևը, որն x-ն անմիջապես կապում է t նոր անկախ փոփոխականի հետ։

Ենթադրենք, թե ձևափոխման այդ բանաձևը լուծված է x-ի նկատմամբ՝

$$x=\varphi(t)\text{։} \tag{1}$$

Եթե y-ն x-ի ֆունկցիա է, ապա x-ի միջոցով նա ֆունկցիա է նաև t-ից։ Մենք n° 114-ում արդեն ստացել ենք բանաձևեր, որոնք y-ի ածանցյալներն ըստ x-ի արտահայտում են x-ի և y-ի ածանցյալներով ըստ t-ի՝

$$\left.\begin{aligned} y'_x&=\frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{x^2}=\frac{x'_t y''_{t^2}-x''_{t^2}y'_t}{x'^3_t} \\ y'''_{x^2}&=\frac{x'_t(x'_t y'''_{t^3}-x'''_{t^3}y'_t)-3x''_{t^2}(x'_t y''_{t^2}-x''_{t^2}y'_t)}{x'^5_t}, \dots \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Քանի որ x'_t, x''_{t^2}, x'''_{t^3}, ... ածանցյալները կարելի է համարել t-ի հայտնի ֆունկցիաներ [նրանք ստացվում են (1)-ից դիֆերենցումով], ապա մնում է w-ի մեջ տեղադրել y'_x, y''_{x^2}, ... փոխարեն նրանց այդ արտահայ-

տությունները՝ t, y'_t, y''_{t^2}, ... նոր ածանցյալների միջոցով։

Եթե ձևափոխման բանաձևը տված է x-ի նկատմամբ չլուծված տեսքով՝

$$\Phi(x, t)=0, \tag{3}$$

ապա հարցը ըստ էության լուծվում է նույն ձևով, միայն x'_t, x''_{t^2},... ածանցյալները հաշվվում են անբացահայտ ֆունկցիաների դիֆերենցման կանոններով*։

Անցնելով ընդհանուր դեպքին, երբ փոխարինվում են երկու փոփոխականներն էլ, ենթադրենք, թե ձևափոխման բանաձևերը լուծված են հին փոփոխականների նկատմամբ՝

$$x=\varphi(t, u), \qquad y=\psi(t, u)। \tag{4}$$

Եթե y-ը կապված է x-ի հետ ֆունկցիոնալ կախումով, ապա այստեղից u-ն կապված կլինի t-ի հետ, և այն ժամանակ, (4)-ի շնորհիվ, x-ն ու y-ը կդառնան որպես t-ի բարդ ֆունկցիաներ։ Բարդ ֆունկցիաների դիֆերենցման կանոնի համաձայն կունենանք՝

$$x'_t=\varphi'_t+\varphi'_u u'_t, \quad y'_t=\psi'_t+\psi'_u u'_t;$$

$$x''_{t^2}=\varphi''_{t^2}+2\varphi''_{tu}u'_t+\varphi''_{u^2}u'^2_t+\varphi'_u u''_{t^2}, \quad y''_{t^2}=\psi''_{t^2}+\dots+\psi'_u u''_{t^2};\dots$$

Ընթերցողի ուշադրությունը հրավիրում ենք այն բանի վրա, որ x'_t-ով, y'_t-ով, և այլն՝ մենք նշանակել ենք x-ի և y-ի «լրիվ» ածանցյալները ըստ t-ի, այսինքն՝ հաշվի առնելով նաև u-ի կախումը t-ից, իսկ φ'_t-ով ψ'_t-ով, և այլն՝ նշանակել ենք ածանցյալները ըստ t-ի այնքանով, որքանով t-ն մտնում է φ, ψ... ֆունկցիաների մեջ՝ որպես նրանց երկու արգումենտներից մեկը։

Այդ արտահայտությունները տեղադրելով (2) բանաձևերի մեջ, կստանանք y-ի՝ ըստ x-ի ածանցյալների արտահայտությունները t-ով, u-ով և u-ի ածանցյալներով ըստ t-ի։

Եթե ձևափոխման բանաձևերը չեն լուծված x-ի և y-ի նկատմամբ՝

$$\Phi(x, y, t, u)=0, \quad \Psi=(x, y, t, u)=0 \tag{5}$$

ապա x'_t, y'_t, x''_{t^2}, y''_{t^2},... ածանցյալներն այստեղից պետք է հաշվել անբացահայտ ֆունկցիաների դիֆերենցման կանոններով։ Օրինակի համար, (5)-ը

* Այդ ժամանակ կարող է պատահել, որ W-ի վերջնական արտահայտության մեջ դեռևս մնա x. պետք է այն արտաքսել (3)-ի օգնությամբ։

դիֆերենցելով ըստ t-ի, որի ժամանակ ոչ միայն x-ն ու y-ը, այլև u-ն է համարվում t-ի ֆունկցիա, կստանանք հետևյալ հավասարումները՝

$$\Phi'_x x'_t + \Phi'_y y'_t + \Phi'_t + \Phi'_u u'_t = 0, \quad \Psi'_x x'_t + \Psi'_y y'_t + \Psi'_t + \Psi'_u u'_t = 0,$$

որոնցից կգտնվեն x'_t, y'_t ածանցյալները, և այլն։

Այն դեպքում, երբ ձևափոխման բանաձևերը լուծված են նոր փոփոխականների նկատմամբ՝

$$t = \alpha(x, y), \quad u = \beta(x, y), \tag{6}$$

կարելի է, ամենից առաջ, օգտվել հենց նոր շարադրված ընդհանուր մեթոդից։ Օրինակ, (6)-ը դիֆերենցելով ըստ t-ի, որի ժամանակ x-ը, y-ը, u-ն համարում ենք t-ի ֆունկցիաներ, կստանանք՝

$$1 = \alpha'_x x'_t + \alpha'_y y'_t, \qquad u'_t = \beta'_x x'_t + \beta'_y y'_t,$$

որտեղից՝

$$x'_t = \frac{\beta'_y - \alpha'_y u'_t}{\alpha'_x \beta'_y - \alpha'_y \beta'_x}, \qquad y'_t = \frac{\alpha'_x u'_t - \beta'_x}{\alpha'_x \beta'_y - \alpha'_y \beta'_x}$$

և, վերջապես՝

$$y'_x = \frac{\alpha'_x u'_t - \beta'_x}{\beta'_y - \alpha'_y u'_t}.$$

Սակայն, այս դեպքում ավելի պարզ կլինի վարվել այնպես, ինչպես եթե հակադարձ անցումն կատարենք՝ t, u փոփոխականներից դեպի x, y փոփոխականները։ (6) բանաձևերը դիֆերենցելով ըստ x-ի, որի ժամանակ t-ն, u-ն և y-ը համարում ենք x-ի ֆունկցիաներ, կստանանք՝

$$t'_x = \alpha'_x + \alpha'_y y'_x, \quad u'_x = \beta'_x + \beta'_y y'_x,$$

այնպես որ՝

$$u'_t = \frac{u'_x}{t'_x} = \frac{\beta'_x + \beta'_y y'_x}{\alpha'_x + \alpha'_y y'_x}. \tag{7}$$

որտեղից y'_x-ի համար ստացվում է նույն արտահայտությունը, ինչ որ վերևում։

Այստեղ ևս տարբերում ենք t'_x, u'_x և α'_x, β'_x ածանցյալները. առաջինները նշանակում են «լրիվ» ածանցյալներ ըստ x-ի՝ հաշվի առնելով նաև

y-ի կախումը x-ից, իսկ երկրորդները՝ միայն որքանով x-ը մտնում և ց ֆունկցիաների մեջ՝ որպես նրանց երկու արգումենտներից մեկը:

(6) բանաձևերով x, y փոփոխականներից t, u փոփոխականներին անցնելը կարելի է երկրաչափորեն մեկնաբանել որպես հարթության (կամ նրա մասի) կետային ձևափոխություն. եթե x-ն ու y-ը դիտվեն որպես հարթության մի որոշ M կետի կոորդինատներ, իսկ t-ն և u-ն՝ մի ուրիշ P կետի կոորդինատներ, ապա (6) ձևափոխությունը M կետը տեղափոխում է P կետը: Այնուհետև, հարթության վրա վերցնենք մի K կոր, որի հավասարումն է $y=f(x)$, x-ի ու y-ի միջև այդ կախմանը համապատասխանում է մի որոշ կախում t-ի և u-ի միջև՝ $u=g(t)$, որը նույնպես որոշում է մի L կոր հարթության վրա: Այսպիսով, (6) ձևափոխության ժամանակ K կորը փոխանցվում է դարձյալ L կորի: Եթե առաջին կորին նրա M կետում տանենք շոշափող՝ y'_x անկյունային գործակցով, ապա երկրորդ կորը համապատասխան P կետում կունենա շոշափող՝ u'_t անկյունային գործակցով, որը որոշվում է (7) բանաձևով: Այսպիսով, K կորի M կետի կոորդինատներով և այդ կետում տարած շոշափողի անկյունային գործակցով միարժեքորեն որոշվում են թե համապատասխան P կետի կոորդինատները ձևափոխված L կորի վրա, և թե P կետում L կորին տարած շոշափողի անկյունային գործակիցը: Հետևաբար, եթե M կետով տանենք երկու կորեր, որոնք այդ կետում շոշափվում են, ապա ձևափոխված կորերը պետք է նույնպես շոշափվեն համապատասխան P կետում: Հարթության այսպիսի կետային ձևափոխությունը պահպանում է շոշափումը [հմմ. ստորև 5) օրինակի հետ]:

208. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ: 1) Դիցուք տված է

$$x^2y''_{x^2}+xy'_x+y=0$$

հավասարումը. ձևափոխել այն, ընդունելով $x=e^t$:

Ըստ (2) բանաձևերի ունենք՝

$$y'_x=e^{-t}\cdot y'_t,\quad y''_{x^2}=e^{-2t}\cdot(y''_{t^2}-y'_t),$$

և հավասարումը կընդունի ավելի պարզ տեսք՝ $y''_{t^2}+y=0$:

2) Ձևափոխել

$$W=\frac{y''_{x^2}-y'_x(1=y'_x)^2}{(1+y'_x)^3},$$

արտահայտությունը, ընդունելով $x=t-y$:

Այս ձևափոխությունը կընկնի ընդհանուր սխեմայի տակ, եթե ընդունենք $x=t-u$, $y=u$: (2) բանաձևով՝

$$W = \frac{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t - y'_t (x'_t + y'_t)^2}{(x'_t + y'_t)^3}.$$

Մյուս կողմից, ձևափոխման բանաձևը տալիս է

$$x'_t = 1 - y'_t,$$

որը տեղադրելով, վերջնականապես կստանանք՝

$$W = y''_{t^2} - y'_t.$$

3) Փոփոխականների դերերի փոխանակումը։ Ենթադրենք, թե x *անկախ փոփոխականը և նրա* y *ֆունկցիան դերերը փոխանակում են՝* y-*ը դառնում է անկախ փոփոխական, իսկ* x-*ը՝ նրա ֆունկցիան։ Այս ձևափոխությունը կմտնի ընդհանուր սխեմայի տակ, եթե ընդունենք՝*

$$x = u, \quad y = t.$$

Մեր առջև խնդիր ունենք՝ y-*ի ածանցյալները ըստ* x-*ի արտահայտել* x-*ի ածանցյալներով ըստ* y-*ի։*

Նորից դիմում ենք (2) բանաձևերին, t-*ն փոխարինելով* y-*ով. եթե հաշվի առնենք, որ*

$$y'_y = 1, \quad \text{և} \quad y''_{y^2} = y'''_{y^3} = \ldots = 0,$$

ապա անմիջապես կստանանք՝

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}, \quad y''_{x^2} = -\frac{x''_{y^2}}{x'^3_y}, \qquad y'''_{x^3} = \frac{3x''^2_{y^2} - x'_y x'''_{y^3}}{x'^5_y} \ldots$$

Օրինակ, եթե այդ ձևափոխությունը կատարենք

$$W = y'_x y'''_{x^3} - 3y''^2_{x^2}$$

արտահայտության նկատմամբ, կստանանք՝

$$W = -\frac{x'''_{y^3}}{x'^5_y}.$$

4) Անցում բևեռային կոորդինատների։ Եթե x-*ն ու* y-*ը դիտենք իբրև կետերի ուղղանկյուն կոորդինատներ,*

$$y = f(x)$$

հավասարումը կարտահայտի մի կոր: Հաճախ օգտակար է լինում անցնել r և θ բևեռային կոորդինատների և կորն արտահայտել բևեռային հավասարումով՝

$$r = g(\theta).$$

Այդ ժամանակ բնականաբար անհրաժեշտություն է առաջանում՝ ելնելով կորի զանազան երկրաչափական էլեմենտների արտահայտություններից, որոնք տված են x, y, y'_x, y''_{x^2} ... միջոցով, ստանալ նրանց համապատասխան արտահայտությունները՝ θ, r, r'_θ, r''_{θ^2},... միջոցով:

Այդ դեպքում, ինչպես հայտնի է, ձևափոխման բանաձևերն ունեն այսպիսի տեսք՝

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Այս հավասարումները դիֆերենցելով ըստ θ-ի (հաշվի առնելով, որ r-ը θ-ի ֆունկցիան է), կստանանք՝

$$x'_\theta = r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta, \quad y'_\theta = r'_\theta\sin\theta + r\cos\theta;$$

$$x''_{\theta^2} = r''_{\theta^2}\cos\theta - 2r'_\theta\sin\theta - r\cos\theta, \quad y''_{\theta^2} = r''_{\theta^2}\sin\theta + 2r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta, \ldots,$$

Այստեղից, (2) բանաձևերով (t-ի տեղ դնելով θ), կգտնենք՝

$$y'_x = \frac{r'_\theta\sin\theta + r\cos\theta}{r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta}, \quad y''_{x^2} = \frac{r^2 + 2r'^2_\theta - rr''_{\theta^2}}{(r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta)^3}, \ldots$$

Այսպիսով, օրինակ, շոշափողի անկյունային գործակիցը կլինի՝

$$\operatorname{tg}\alpha = y'_x = \frac{r'_\theta\sin\theta + r\cos\theta}{r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta}.$$

շոշափողի՝ շառավիղ-վեկտորի շարունակության հետ կազմած ω անկյան տանգենսը (գծ. 110)՝

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}(\alpha - \theta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\theta} = \frac{xy'_x - y}{x + yy'_x}$$

այժմ կարտահայտվի պարզ բանաձևով՝

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{r}{r'_\theta},$$

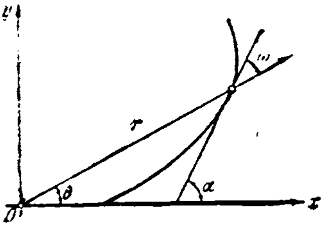
որի կապակցությամբ, երբ կորը տված է բևեռային հավասարումով, շոշափողի դիրքը նախընտրում են որոշել հենց այդ ω անկյունով:

Դիտարկենք նաև հետևյալ արտահայտությունը՝

$$R=\frac{\left(1+y'^{2}_{x}\right)^{\frac{3}{2}}}{x''_{x^2}},$$

որը, ինչպես հետագայում կտեսնենք [n° 239], ներկայացնում է կորի մի կարևոր երկրաչափական էլեմենտ («կորության շառավիղը»)։ Եթե սրա մեջ տեղադրենք y'_x-ի և y''_{x^2}-ու համար վերևում գտած արտահայտությունները, պարզեցումներից հետո կստանանք՝

$$R=\frac{\left(r^2+r'^{2}_{\theta}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^{2}_{\theta}-rr'_{\theta^2}},$$



Գծ. 110.

3) Լեժանդրի ձևափոխությունը։ Նախորդ n°-ում առաջադրված փոփոխականների փոխարինման խնդիրը կարելի է ընդհանրացնել, թույլ տալով ածանցյալների մասնակցությունը արդեն իսկ ձևափոխման բանաձևերում։ Մենք սահմանափակվում ենք այդպիսի մի օրինակով, որը կոչվում է Լեժանդրի ձևափոխություն, այն է՝

$$t=y'_x, \quad u=x\cdot y'_x-y.$$

Երկրորդ բանաձևը դիֆերենցենք ըստ x-ի, u-ն դիտելով որպես x-ի ֆունկցիա՝ t-ի միջոցով (t-ի կախումը x-ից տրվում է առաջին բանաձևով), կստանանք՝

$$u'_t\cdot y''_{x^2}=y'_x+x\cdot y''_{x^2}-y'_x=x\cdot y''_{x^2}.$$

Այստեղից, ենթադրելով $y''_{x^2}\neq 0$, կստանանք $u'_t=x$։ Այսպիսով, եթե հաշվի առնենք ձևափոխման բանաձևերը, կունենանք՝

$$x=u'_t, \qquad y=t.u'_t-u,$$

որով և բացատրվում է Լեժանդրի ձևափոխության փոխադարձելի բնույթը՝ t, u, u'_t մեծությունները x, y, y'_x-ով արտահայտվում են ճիշտ այնպես, ինչպես վերջիններս արտահայտվում են առաջիններով։

Նույն ձևով ըստ x-ի դիֆերենցելով $u'_t=x$ բանաձևը, կստանանք՝

$$u''_{t^2}\cdot y''_{x^2}=1,\ \text{որտեղից}\ y''_{x^2}=\frac{1}{u''_{t^2}};$$

Կրկին դիֆերենցումը տալիս է՝

$$u'''_{t^3}\cdot y''^2_{x^2}+u''_{t^2}\cdot y'''_{x^3}=0,\ \text{այնպես որ՝}\ y'''_{x^3}=-\frac{u'''_{t^3}}{u''^3_{t^2}},$$

և այլն։

Նկատենք, որ եթե *Լեժանդրի* ձևափոխությունը երկրաչափորեն մեկնաբանենք իբրև հարթության ձևափոխություն, ապա նա բոլորովին չի լինի *կետային* ձևափոխություն. P կետի t և u կոորդինատները որոշելու համար բավական չէ իմանալ M կետի x և y կոորդինատները, այլ հարկավոր է իմանալ նաև դիտարկվող $y=f(x)$ կորին M կետում տարած շոշափողի y'_x անկյունային գործակիցը։ Այնուամենայնիվ, այստեղ ևս կորը ձևափոխվում է դարձյալ կորի, ինչպես նաև *շոշափումը պահպանվում* է*։

209. ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ։ ԱՆԿԱԽ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՓՈԽԱՐԻՆՈՒՄԸ։ Այժմ անցնենք

$$W=F\left(x,\ y,\dots,z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \dots,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \dots\right)$$

արտահայտության ձևափոխությանը, որը պարունակում է, բացի x, y, ... անկախ փոփոխականներից ու նրանց z ֆունկցիայից, նաև z-ի մասնակի ածանցյալներն ըստ իր արգումենտների՝ մինչև մի որոշ կարգը։ Նախորդ պարզ դեպքերի նման, այստեղ ևս կարող է հարկավոր լինի անցնել նոր փոփոխականների, որոնք հների հետ կապված են *ձևափոխման բանաձևերով*։ Եթե նոր անկախ փոփոխականները նշանակենք t, u, ..., իսկ նրանցից կախված ֆունկցիան՝ v, ապա խնդիրը կայանում է նրանում, որպեսզի W-ն արտահայտենք t-ով, u-ով, ..., v-ով և v-ի ածանցյալներով ըստ իր արգումենտների։ Ակներևաբար, բավական է սովորել այդ անել $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, ..., $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, ... հին ածանցյալների նկատմամբ։ Գրության պարզության համար մենք կենթադրենք, որ անկախ փոփոխականները երկուսն են, հները՝ x և y, նորերը՝ t և u։

Այստեղ ևս սկսենք այն դեպքից, երբ փոխարինվում են միայն ան-

* Շոշափումը պահպանող այդպիսի ձևափոխությունները կարևոր դեր են խաղում երկրաչափության ու անալիզի զանազան բաժիններում։ Նրանք կոչվում են *շոշափման ձևափոխություններ*, կամ *հպման ձևափոխություններ*։ Կետային և Լեժանդրի ձևափոխությունները այդպիսի ձևափոխությունների սոսկ մասնավոր օրինակներ են։

կոր փոփոխականները և ձևափոխման բանաձևերն անմիջապես կապվում են x, y հին փոփոխականները t, u նոր փոփոխականների հետ։

Ենթադրենք, թե ձևափոխման բանաձևերը լուծված են հին փոփոխականների նկատմամբ՝

$$x=\varphi(t, u), \quad y=\psi(t, u). \tag{8}$$

z-ը դիտելով որպես t-ի և u-ի բարդ ֆունկցիա՝ x-ի և y-ի միջնորդությամբ, անբացահայտ ֆունկցիաների դիֆերենցման կանոնի համաձայն կստանանք՝

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t}&=\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}, \\ \frac{\partial z}{\partial u}&=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Այսպիսով $\frac{\partial z}{\partial x}$ և $\frac{\partial z}{\partial y}$ հին ածանցյալները որոշելու համար ունենք գծային հավասարումների սիստեմ, որտեղից հին ածանցյալները գծորեն կարտահայտվեն նորերով՝

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}&=A\frac{\partial z}{\partial t}+B\frac{\partial z}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial y}&=C\frac{\partial z}{\partial t}+D\frac{\partial z}{\partial u}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Կարևոր է նշել, որ A, B, C, D գործակիցները կազմվում են (8) բանաձևերում գրված φ, ψ ֆունկցիաների ածանցյալներից, իսկ z-ից բոլորովին կախված չեն։ Այս դիտողությունը թույլ է տալիս (10) բանաձևերը կիրառել $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ածանցյալների (z-ի փոխարեն) նկատմամբ։ Այսպիսով, օրինակ, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$-ի համար կստացվի՝

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+B\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)= \\ &=A\left(A\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+B\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u}+\frac{\partial A}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial u}\right)+ \\ &+B\left(A\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u}+B\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u}\right). \end{aligned}$$

(10)-ը կիրառելով երկրորդ կարգի ածանցյալների (z-ի փոխարեն) նկատմամբ, կարելի է ստանալ երրորդ կարգի ածանցյալների համար արտահայտություններ, և այլն:

Եթե ձևափոխման բանաձևերը լուծված են նոր փոփոխականների նկատմամբ՝

$$t=\alpha(x,\ y),\quad u=\beta(x,\ y),$$

ապա ավելի հարմար է դիմել հակադարձ մեթոդին, այսինքն՝ z-ը դիտել որպես x-ի և y-ի բարդ ֆունկցիա՝ t-ի և u-ի միջնորդությամբ, և z-ը դիֆերենցել ըստ հին փոփոխականների: Այդպիսով մենք իսկույն կստանանք (10)-ի տիպի բանաձևեր՝

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial u},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial u}. \tag{11}$$

Այս անգամ

$$A=\frac{\partial t}{\partial x},\qquad B=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad C=\frac{\partial t}{\partial y},\qquad D=\frac{\partial u}{\partial y}$$

գործակիցները կլինեն x-ի և y-ի ֆունկցիաներ, բայց դարձյալ կախված չեն z-ից:

Հաջորդաբար կիրառելով (11) բանաձևերը, այստեղ ևս կարելի է ստանալ բարձր կարգի ածանցյալների արտահայտությունները: Օրինակ՝

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial z}{\partial t}+B\frac{\partial z}{\partial u}\right)=$$

$$=\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial u}+A\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)+B\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)=$$

$$=\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial u}+A\left(A\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+B\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u}\right)+$$

$$+B\left(A\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u}+B\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)^{*}.$$

* Այստեղ հարմար է նախավերջին ծանոթագրության նման մի դիտողություն անել: Քանի որ հին ածանցյալները նորերով արտահայտելիս մասնակցում են x-ը և y-ը, ապա այդ արտահայտությունները W-ի մեջ տեղադրելուց հետո կարող է անհրաժեշտ համարվել արտաքսել x-ն ու y-ը՝ ձևափոխման բանաձևերի օգնությամբ: Ընթերցողը հետագայում ևս հեշտությամբ կնկատի սրան նման դեպքեր:

Վերջապես, ընդհանուր դեպքում, երբ ձևափոխման բանաձևերը տրված են կամավոր տեսքով՝

$$\Phi(x, y, t, u)=0, \qquad \Psi(x, y, t, u)=0, \tag{12}$$

կարելի է օգտվել ինչպես ուղիղ, այնպես էլ հակադարձ մեթոդից, անբացահայտ ֆունկցիաների դիֆերենցման կանոններով հաշվելով

$$\frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial y}{\partial u}$$

կամ

$$\frac{\partial t}{\partial x}, \quad \frac{\partial t}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}$$

մասնակի ածանցյալները։

210. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐԸ ՀԱՇՎԵԼՈՒ ՄԵԹՈԴԸ։ Այժմ ցույց տանք մի ուրիշ մեթոդ ևս՝ հին ածանցյալները նորերով արտահայտելու համար, որն առանձնապես հարմար է այն դեպքում, երբ W-ի մեջ մտնում են ոչ թե առանձին ածանցյալներ, այլ տվյալ կարգի բոլոր ածանցյալները։ Այդ՝ լրիվ դիֆերենցիալները հաշվելու մեթոդն է։ Նա նույնպես կարող է ներկայացվել երկու ձևով, նայած թե t-ն և u-ն են համարվում անկախ փոփոխականներ, թե՝ x-ը և y-ը։

Նախ ենթադրենք, թե անկախ փոփոխականները t-ն և u-ն են. բոլոր դիֆերենցիալները վերցվում են ըստ հենց այդ փոփոխականների (ուղիղ մեթոդ)։ Ձևափոխման (12) բանաձևերը լրիվ դիֆերենցելով, կարելի է dx-ն ու dy-ը գծորեն արտահայտել dt-ով ու du-ով՝

$$\left.\begin{aligned} dx &= \alpha . dt + \beta . du, \\ dy &= \gamma . dt + \delta . du. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

այնուհետև, դիֆերենցելով այս բանաձևերը, կարելի է d^2x-ն ու d^2y-ը ներկայացնել dt-ի և du-ի նկատմամբ երկրորդ աստճանի համասեռ բազմանդամի տեսքով՝

$$\left.\begin{aligned} d^2x &= \varepsilon . dt^2 + \zeta . dt\,du + \eta . du^2, \\ d^2y &= \theta . dt^2 + \iota . dt\,du + \varkappa . dy^2, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

և այլն։ α, β, ..., ι, κ գործակիցները՝ x-ի, y-ի, t-ի, u-ի հայտնի ֆունկցիաներ են։

Այժմ dz-ը ներկայացնենք երկու տեսքով (օգտվելով դիֆերենցիալի ձևի ինվարիանտությունից)՝

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial t} dt + \frac{\partial z}{\partial u} du. \tag{15}$$

Եթե այստեղ dx-ի ու dy-ի փոխարեն տեղադրենք նրանց (13) արտահայտությունները և հավասարության երկու մասերում dt-ի և du-ի գործակիցները համապատասխանորեն իրար հավասարեցնենք*, ապա կստացվեն գծային հավասարումներ՝

$$\alpha\frac{\partial z}{\partial x}+\gamma\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial t} \quad \text{և} \quad \beta\frac{\partial z}{\partial x}+\delta\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u},$$

որտեղից կորոշվեն $\frac{\partial z}{\partial x}$ և $\frac{\partial z}{\partial y}$ ածանցյալները։

d^2z-ը նույնպես կարելի է երկու տեսքով ներկայացնել (հիշելով, որ անկախ փոփոխականները ոչ թե x-ն ու y-ն են այլ t-ն և u-ն)՝

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial z}{\partial x}d^2x+\frac{\partial z}{\partial y}d^2y=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}dt^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u}dt\,du+\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du^2. \tag{16}$$

Այստեղ dx-ի, dy-ի, d^2x-ի և d^2y-ի փոխարեն տեղադրելով նրանց (13) և (14) արտահայտությունները, հավասարության երկու մասերում dt^2-ի, $dt\,du$-ի և du^2-ի գործակիցները համապատասխանորեն իրար հավասարեցնենք**. կստանանք երեք գծային հավասարումների սիստեմ՝ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ածանցյալները հաշվելու համար $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\text{-ը և }\frac{\partial z}{\partial y}\text{-ը արդեն հայտնի են}\right)$, և այլն։

Կիրառելու տեսակետից ավելի պարզ է հակադարձ մեթոդը, որի ժամանակ անկախ փոփոխականներ համարվում են x-ն ու y-ը և բոլոր դիֆերենցիալները վերցվում են ըստ այդ փոփոխականների։ Այստեղ, (12) ձևափոխման բանաձևերից հաջորդական դիֆերենցումով ստանում ենք՝

$$dt=a\,dx+b\,dy,\quad du=c\,dx+\partial\,dy; \tag{17}$$

$$d^2t=e\,dx^2+f\,dx\,dy+g\,dy^2,\quad d^2u=h\,dx^2+i\,dx\,dy+j\,dy^2 \tag{18}$$

և այլն։ Այստեղ ևս a, b, ..., i, j գործակիցները՝ x-ի, y-ի, t-ի և u-ի հայտնի ֆունկցիաներ են։

---

* $Adt+Bdu=A'dt+B'du$ հավասարությունը կարող է տեղի ունենալ կամայական dt-ի և du-ի համար միայն այն դեպքում, երբ $A=A'$ և $B=B'$։

** Տես նախորդ դիտողությունը։

Եթե (15)ում dt-ի և du-ի փոխարեն տեղադրենք նրանց (17) արտահայտությունները և հավասարության երկու մասերում dx-ի ու dy-ի գործակիցները համապատասխանորեն իրար հավասարեցնենք, ապա անմիջականորեն կստանանք՝

$$\frac{\partial z}{\partial x}=a\frac{\partial z}{\partial t}+c\frac{\partial z}{\partial u},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}+b\frac{\partial z}{\partial t}+\partial\frac{\partial z}{\partial u}.$$

(16)-ի փոխարեն այս դեպքում կունենանք՝

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2=$$
$$=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}dt^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u}dt\,\partial u+\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du^2+\frac{\partial z}{\partial t}d^2t+\frac{\partial z}{\partial u}d^2u.$$

(17) և (18) արտահայտությունների տեղադրումն ու dx^2-ի, $dx\,dy$-ի, dy^2-ի գործակիցների համապատասխանեցումը հավասարության երկու մասերում, անմիջականորեն կհանգեցնեն $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ածանցյալների հաշվմանը, և այլն։

211. ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՓՈԽԱՐԻՆՄԱՆ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԴԵՊՔԸ։ Անցնենք, վերջապես, ընդհանուր դեպքին, երբ փոխարինվում են և՛ անկախ փոփոխականները, և՛ ֆունկցիան։ Դիցուք ձևափոխման բանաձևերը լուծված են հին փոփոխականների նկատմամբ՝

$$x=\varphi(t,\ u,\ v),\quad y=\psi(t,\ u,\ v),\quad z=\chi(t,\ u,\ v).\tag{19}$$

Եթե z-ը x-ի ու y-ի ֆունկցիա է՝ $z=f(x, y)$, ապա այստեղ տեղադրելով x-ի, y-ի, z-ի արտահայտությունները t-ով, u-ով, v-ով, կստանանք կապ վերջին փոփոխականների միջև, այնպես որ v-ն կլինի t-ի և u-ի ֆունկցիա։

Անկախ փոփոխականներ համարելով t-ն և u-ն (ուղիղ մեթոդ), իսկ z-ը՝ նրանց ֆունկցիան x-ի և y-ի միջնորդությամբ, ինչպես վերևում, կստանանք (9) հավասարությունները, իսկ նրանցից էլ (10)-ը։ Սակայն այստեղ $\frac{\partial x}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial u}$-ի տակ հասկացվում են x-ի, y-ի, z-ի «լրիվ» մասնակի ածանցյալները ըստ t-ի կամ ըստ u-ի, որոնք ստացվում են (19)-ից՝ հաշվի առնելով այն հանգամանքը, որ v-ն ինքը կախված է t-ից և u-ից՝

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial \chi}{\partial u}+\frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u}.$$

A, B, C, D գործակիցները կպարունակեն ոչ միայն t, u, v, այլև $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial u}$ ածանցյալները. վերջինները մնում են ռացիոնալ տեսքով: (10) բանաձևերի հաջորդաբար կիրառումն այստեղ նույնպես կբերի երկրորդ կարգի ածանցյալների արտահայտությունը, և այլն:

Եթե ձևափոխման բանաձևերը լուծված են նոր փոփոխականների նկատմամբ՝

$$t=\alpha(x, y, z),\ u=\beta(x, y, z),\ v=\gamma(x, y, z), \tag{20}$$

ապա սովորաբար դիմում են հակադարձ մեթոդին, այսինքն՝ անկախ փոփոխականներ համարում են x-ն ու y-ը: Ունենք՝

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}:$$

$\frac{\partial t}{\partial x}, \dots, \frac{\partial v}{\partial y}$-ի փոխարեն այստեղ պետք է տեղադրել նրանց այն արտահայտությունները, որոնք ստացվում են (20) բանաձևերն ըստ x-ի և ըստ y-ի դիֆերենցելով, հաշվի առնելով, որ z-ն x-ի և y-ի ֆունկցիա է, այն է՝

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},$$

. . . .

. . . .

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial \gamma}{\partial y}+\frac{\partial \gamma}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}:$$

Այդպիսով ստացվում են $\frac{\partial z}{\partial x}$-ի և $\frac{\partial z}{\partial y}$-ի նկատմամբ գծային հավասարումներ, որտեղից այդ ածանցյալները հեշտությամբ կարտահայտվեն x, y, z, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial u}$ մեծություններով: Հաջորդ ածանցյալներն ավելի հեշտ է հաշվել այսպես. $\frac{\partial z}{\partial x}$-ի (կամ $\frac{\partial z}{\partial y}$-ի համար ստացած արտահայտությունը նորից դի-

ֆերենցում ենք ըստ x-ի (ըստ y-ի), $\frac{\partial v}{\partial t}$ և $\frac{\partial v}{\partial u}$ ածանցյալները դիտելով որպես x-ի և y-ի ֆունկցիաներ՝ t-ի և u-ի միջնորդությամբ, և այլն։

Այն դեպքում, երբ ձևափոխման բանաձևերը տրված են ընդհանուր տեսքով՝

$$\left.\begin{aligned} A(x, y, z, t, u, v)&=0, \\ B(x, y, z, t, u, v)&=0, \\ \Gamma(x, y, z, t, u, v)&=0, \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

կարելի է օգտվել այդ մեթոդներից՝ որից ցանկանանք, կիրառելով անբացահայտ ֆունկցիաների դիֆերենցման կանոնները։

Փոփոխականների փոխարինման այս ընդհանուր խնդրի լուծման համար կիրառելի է նաև լրիվ դիֆերենցիալների մեթոդը։ Մենք կբավարարվենք այդ մեթոդի այն դեպքի նկարագրությամբ, երբ իբրև անկախ փոփոխականներ ընդունում ենք x-ն ու y-ը (հակադարձ մեթոդ), այնպես որ բոլոր դիֆերենցիալները վերցվում են ըստ այդ փոփոխականների։

Ելնելով (21) բանաձևերից, կարելի է հաջորդական դիֆերենցումով ստանալ՝

$$\left.\begin{aligned} dt&=a_1dx+a_2dy+a_3dz, \quad du=b_1dx+b_2dy+b_3dz, \\ dv&=c_1dx+c_2dy+c_3dz; \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

$$\left.\begin{aligned} d^2t&=\partial_1dx^2+\partial^2dx\,dy+\partial_3dy^2+\partial_4dx\,dz+ \\ &\quad+\partial_5dy\,dz+\partial_6dz^2+a_3d^2z, \\ d^2u&=e_1dx^2+\ldots+e_6dz^2+b_3d^2z, \\ d^2v&=f_1dx^2+\ldots+f_6dz^2+c_3d^2z; \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Եթե՝

$$dv=\frac{\partial v}{\partial t}dt+\frac{\partial v}{\partial u}du$$

հավասարության մեջ dt-ի, du-ի, dv-ի փոխարեն տեղադրենք նրանց (22) արտահայտությունները, կստանանք՝

$$c_1dx+c_2dy+c_3dz=\frac{\partial v}{\partial t}(a_1dx+a_2dy+a_3dz)+ \\ +\frac{\partial v}{\partial u}(b_1dx+b_2dy+b_3dz),$$

որտեղից՝

$$dz=A\,dx+B\,dy, \qquad (24)$$

որտեղ A-ն և B-ն ռացիոնալ տեսքով պարունակում են $\frac{\partial v}{\partial t}$ *և* $\frac{\partial v}{\partial u}$ *ածանցյալները։ Բաղդատելով այդ*

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

բանաձևի հետ, տեսնում ենք, որ՝

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = B.$$

Այժմ վերցնենք հետևյալ հավասարությունը (t-ն և u-ն անկախ փոփոխականներ չեն)՝

$$d^2v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}dt^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}dt\,du + \frac{\partial^2 v}{\partial u^2}du^2 + \frac{\partial v}{\partial t}d^2t + \frac{\partial v}{\partial u}d^2u$$

և նրա մեջ dt, du, d^2t, d^2u, d^2v*-ի փոխարեն տեղադրենք (22) և (23)-ը, իսկ այնուհետև* dz*-ի փոխարեն տեղադրենք (24)-ը։ Ստացված հավասարությունից կորոշվի* d^2z*-ը՝*

$$d^2z = C\,dx^2 + 2D\,dx\,dy + E\,dy^2,$$

որտեղ C, D, E-ն ռացիոնալ տեսքով պարունակում են $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}$ *ածանցյալները։ Համեմատելով*

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\partial x\,\partial y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

բանաձևի հետ, ստանում ենք՝

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = C, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = D, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = E,$$

և այլն։

Փոփոխականների փոխարինման խնդրին այստեղ ևս կարելի է երկրաչափական իմաստ տալ։ Եթե (x, y, z) և (t, u, v) փոփոխականները դիտենք որպես տարածության M և P կետերի կոորդինատներ, ապա ձևափոխման բանաձևերը, օրինակ՝ (20) տեսքով, յուրաքանչյուր M կետին համապատասխանեցնում են մի P կետ, այսինքն՝ նրանք որոշում են տարածության (կամ նրա մասի) կետային ձևափոխություն։ x-ի, y-ի և z-ի միջև ֆունկցիոնալ կախմանը համապատասխանում է նման կախում

t-ի, u-ի և v-ի միջև, այնպես որ յուրաքանչյուր S մակերևույթին այդ ժամանակ համապատասխանում է մի T մակերևույթ։

Մենք տեսանք, որ $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ *արժեքներով միարժեքորեն որոշվում են* $t, u, v, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial u}$ *արժեքները։ Հիշելով շոշափող հարթության հավասարումը* [170 *(6)*]՝

$$Z-z=\frac{\partial z}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial z}{\partial y}(Y-y),$$

այստեղից հեշտ է եզրակացնել, որ M կետում շոշափվող երկու S_1 և S_2 մակերևույթներին ձևափոխման ժամանակ համապատասխանում են T_1 և T_2 մակերևույթներ, որոնք P կետում նույնպես շոշափվում են։ Տարածության կետային ձևափոխումը պահպանում է շոշափումը [*հմմ. ստորև 7-րդ օրինակը*]։

212. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Անցում բևեռային կոորդինատների։ Դիցուք z-ը կետի ֆունկցիա է հարթության վրա՝

$$z=f(M).$$

Սովորաբար կետի դիրքը որոշվում է նրա (x, y) ուղղանկյուն կոորդինատներով, այնպես որ z-ը հանդիսանում է x և y փոփոխականների ֆունկցիա։ Սակայն հաճախ ավելի հարմար է լինում կետի դիրքը որոշել r, θ բևեռային կոորդինատներով և այն ժամանակ անհրաժեշտություն է առաջանում փոփոխականների ձևափոխություն կատարել։ Այդ անցումը կատարենք տարբեր մեթոդներով։

Ուղիղ մեթոդ. անկախ փոփոխականներ համարվում են r-ը և θ-ն։ Ելնելով ձևափոխման բանաձևերից՝

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

(10)-ի օրինակով կունենանք՝

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial z}{\partial\theta}=-r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y},$$

որտեղից՝

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}, \tag{25}$$

այնպես որ $\cos\theta, -\frac{\sin\theta}{r}, \sin\theta, \frac{\cos\theta}{r}$ *արտահայտությունները այստեղ խաղում*

են A, B, C, D գործակիցների դերը։ Այնուհետև՝

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \cos\theta\frac{\partial z}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) -$$

$$- \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right) =$$

$$= \cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\theta} +$$

$$+ \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r},$$

Նմանապես գտնում ենք՝

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} -$$

$$- \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r},$$

և այլն։

Հակադարձ մեթոդ. անկախ փոփոխականներ համարվում են x-ն ու y-ը։ (11) բանաձևերից օգտվելու համար պետք է գիտենալ $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial\theta}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y}$ ածանցյալները, որոնք կարելի է գտնել, հին և նոր փոփոխականները կապող հավասարումները նախապես լուծելով նորերի նկատմամբ։ Բայց կարելի է օգտվել նաև անբացահայտ ֆունկցիաների դիֆերենցման կանոններից, հավասարումները նախապես չլուծելով։ Եթե ձևափոխման բանաձևերը դիֆերենցենք ըստ x-ի և ըստ y-ի, r-ն ու θ-ն համարելով x-ի ու y-ի ֆունկցիաներ, կստանանք՝

$$1 = \cos\theta\frac{\partial r}{\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}, \quad 0 = \sin\theta\frac{\partial r}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

և

$$0 = \cos\theta\frac{\partial r}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}, \quad 1 = \sin\theta\frac{\partial r}{\partial y} + r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}.$$

Այստեղից՝

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\theta,\quad \frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{\sin\theta}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\sin\theta,\quad \frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\cos\theta}{r}$$

և, ըստ (11)-ի, վերադառնում ենք (25)-ին, և այլն։

Դիֆերենցիալների հաշվելու մեթոդը։ Դիցուք անկախ փոփոխականներն են x-ն ու y-ը։ Ձևափոխման բանաձևերը լրիվ դիֆերենցում ենք՝

$$dx=\cos\theta\, dr-r\sin\theta\, d\theta,\quad dy=\sin\theta\, dr+r\cos\theta\, d\theta;$$

որտեղից՝

$$dr=\cos\theta\, dx+\sin\theta\, dy,\quad d\theta=\frac{-\sin\theta\, dx+\cos\theta\, dy}{r},$$

այնպես որ՝

$$dz=\frac{\partial z}{\partial r}dr+\frac{\partial z}{\partial\theta}d\theta=\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)dx+$$

$$+\left(\sin\theta\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)dy,$$

որը կրկին բերում է (25)-ին։

dr-ի և dθ-ի բանաձևերի կրկնակի դիֆերենցումը տալիս է՝

$$d^2r=-\sin\theta\, d\theta\, dx+\cos\theta\, d\theta\, dy=$$

$$=\frac{\sin^2\theta\, dx^2-2\sin\theta\cos\theta\, dx\, dy+\cos^2\theta\, dy^2}{r},$$

$$d^2\theta=\frac{-r(\cos\theta\, dx+\sin\theta\, dy)d\theta-(\cos\theta\, dy-\sin\theta\, dx)dr}{r^2}=$$

$$=\frac{2\sin\theta\cos\theta\, dx^2-2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)dx\, dy-2\sin\theta\cos\theta\, dy^2}{r^2}.$$

Այդ ժամանակ d²z-ի համար կունենանք՝

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}dr^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\theta}dr\, d\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}d\theta^2+\frac{\partial z}{\partial r}d^2r+\frac{\partial z}{\partial\theta}d^2\theta=$$

$$=\left(\cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\right.$$

$$+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\theta}\Big)dx^2+2(\ldots)dx\,dy+(\ldots)dy^2,$$

որտեղից, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, ... երկրորդ ածանցյալների համար կստացվեն նույն արտահայտությունները, ինչ որ վերևում։

Վերցնենք, օրինակի համար, հետևյալ արտահայտությունները՝

$$W_1=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2, \qquad W_2=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Գտած բանաձևերի օգնությամբ նրանք ձևափոխվում են այսպես՝

$$W_1=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2, \qquad W_2=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}.$$

2) *Անցումը սֆերիկ կոորդինատներին։* Ինչպիսի դեր հարթության վրա խաղում են բևեռային կոորդինատները, նույնպիսի դեր տարածության մեջ խաղում են այսպես կոչված *սֆերիկ կոորդինատները*՝ ρ, φ, θ, որոնց հետ x, y, z ուղղանկյուն կոորդինատները կապված են հետևյալ բանաձևերով՝

$$x=\rho\sin\varphi\cos\theta, \quad y=\rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z=\rho\cos\varphi.$$

Դիցուք պահանջվում է

$$W_1=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2, \quad W_2=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

արտահայտությունների մեջ, որտեղ u-ն՝ տարածության մեջ կետի որևէ ֆունկցիա է, անցնել սֆերիկ կոորդինատներին։

Եթե ձևափոխությունը կատարենք երկու քայլով՝ նախ ընդունելով $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\theta$ և z-ը թողնելով անփոփոխ, իսկ այնուհետև ընդունելով $z=\rho\cos\varphi$, $r=\rho\sin\varphi$ և θ-ն թողնելով անփոփոխ, ապա կարելի կլինի օգտվել 1) օրինակի արդյունքներից։

Օրինակի համար, երկրորդ արտահայտության համար ունենք՝

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r},$$

$$W_2=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Փակագծերի ներսի արտահայտությունը, նույն 1) օրինակի համաձայն, կգրվի այսպես՝

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}.$$

վերջապես՝

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

Այդ բոլորը տեղադրելով, վերջնականապես կստանանք՝

$$W_2=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{\rho^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

Դրա անալոգիայով կստանանք նաև՝

$$W_1=\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2,$$

3) Ցույց տալ, որ W_1 և W_2 արտահայտությունները պահպանում են իրենց ձևը՝ ուղղանկյուն կոորդինատները ուղղանկյուն կոորդինատներով փոխարինելիս՝

$$x'=a_1x+b_1y+c_1z,\qquad y'=a_2x+b_2y+c_2z,\qquad z'=a_3x+b_3y+c_3z,$$

որտեղ a, b, c գործակիցները բավարարում են հայտնի առնչություններին՝

$$a_ia_j+b_ib_j+c_ic_j=\begin{cases}1, & i=j \text{ դեպքում},\\ 0, & i\neq j \text{ դեպքում},\end{cases}\qquad (26)$$

Դիֆերենցիալները հաշվելու մեթոդը՝ x-ը, y-ը, z-ը համարելով անկախ փոփոխականներ, կունենանք՝

$$dx'=a_1dx+b_1dy+c_1dz,\quad d^2x'=0,$$

$$dy'=a_2dx+b_2dy+c_2dz,\quad d^2y'=0,$$

$$dz'=a_3dx+b_3dy+c_3dz,\quad d^2z'=0.$$

Այն ժամանակ՝

$$du=\frac{\partial u}{\partial x'}(a_1dx+b_1dy+c_1dz)+\frac{\partial u}{\partial y'}(a_2dx+b_2dy+c_2dz)+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial z'}(a_3dx+b_3dy+c_3dz),$$

որտեղից՝

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a_1\frac{\partial u}{\partial x'}+a_2\frac{\partial u}{\partial y'}+a_3\frac{\partial u}{\partial z'},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=b_1\frac{\partial u}{\partial x'}+b_2\frac{\partial u}{\partial y'}+b_3\frac{\partial u}{\partial z'},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=c_1\frac{\partial u}{\partial x'}+c_2\frac{\partial u}{\partial y'}+c_3\frac{\partial u}{\partial z'}.$$

Քառակուսի բարձրացնելով և գումարելով, (26)-ի շնորհիվ, կստանանք՝

$$W_1=\left(\frac{\partial u}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z'}\right)^2.$$

Այնուհետև՝

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}(a_1dx+b_1dy+c_1dz)^2+$$

$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x'\,\partial y'}(a_1dx+b_1dy+c_1dz)(a_2dx+b_2dy+c_2dz)+\dots$$

W_2 արտահայտությունը՝ dx^2-ու, dy^2-ու և dz^2-ու գործակիցների գումարն է։ (26)-ի օգնությամբ դժվար չէ ցույց տալ, որ՝

$$W_2=\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z'^2}.$$

4) $x=uv$, $y=vt$, $z=tu$ բանաձևերի օգնությամբ ձևափոխել հետևյալ հավասարումը՝

$$x^2\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}+yz\frac{\partial^2\omega}{\partial y\,\partial z}+zx\frac{\partial^2\omega}{\partial z\,\partial x}+xy\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}=0.$$

Լուծում։ Անկախ փոփոխականներ համարելով t-ն, u-ն, v-ն, կունենանք՝

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\partial\omega}{\partial y}v+\frac{\partial\omega}{\partial z}u,\quad \frac{\partial\omega}{\partial u}=\frac{\partial\omega}{\partial x}v+\frac{\partial\omega}{\partial z}t,\quad \frac{\partial\omega}{\partial v}=\frac{\partial\omega}{\partial x}u+\frac{\partial\omega}{\partial y}t,$$

որտեղից՝

$$x\frac{\partial\omega}{\partial x}=-\frac{1}{2}t\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{1}{2}u\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{1}{2}v\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

$$y\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{1}{2}t\frac{\partial\omega}{\partial t}-\frac{1}{2}u\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{1}{2}v\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

$$z\frac{\partial\omega}{\partial z}=\frac{1}{2}t\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{1}{2}u\frac{\partial\omega}{\partial u}-\frac{1}{2}v\frac{\partial\omega}{\partial v}.$$

Այնուհետև՝

$$x^2\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial\omega}{\partial x}-\omega\right)=$$

$$=x\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{2}t\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{1}{2}u\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{1}{2}v\frac{\partial\omega}{\partial v}-\omega\right)=$$

$$=\frac{1}{4}t^2\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}+\frac{1}{4}u^2\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+\frac{1}{4}v^2\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}+\frac{1}{2}uv\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}-$$

$$-\frac{1}{2}vt\frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial t}-\frac{1}{2}tu\frac{\partial^2\omega}{\partial t\,\partial u}+\frac{3}{4}t\frac{\partial\omega}{\partial t}-\frac{1}{4}u\frac{\partial\omega}{\partial u}-\frac{1}{4}v\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

$$yz\frac{\partial^2\omega}{\partial y\,\partial z}=z\frac{\partial}{\partial z}\left(y\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)=z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}t\frac{\partial\omega}{\partial t}-\frac{1}{2}u\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{1}{2}v\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}t^2\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}-\frac{1}{4}u^2\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}-\frac{1}{4}v^2\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}+\frac{1}{2}uv\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}+$$

$$+\frac{1}{4}t\frac{\partial\omega}{\partial t}-\frac{1}{4}u\frac{\partial\omega}{\partial u}-\frac{1}{4}v\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

և այլն։ Բոլոր նման արտահայտությունները գումարելով և դեն նետելով թվային բազմապատկիչը, ձևափոխման բանաձևը կստանանք հետևյալ տեսքով՝

$$t^2\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}+u^2\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}+v^2\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=0.$$

Մինչև հիմա փոխարինվում էին միայն անկախ փոփոխականները։ Այժմ բերենք այնպիսի օրինակներ, որտեղ փոխարինման ենթարկվում է նաև ֆունկցիան։

ծ) Ձևափոխել՝ հետևյալ հավասարումը՝ $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$, ընդունելով՝

$$x=t,\quad y=\frac{1}{1+tu},\quad z=\frac{t}{1+ty}.$$

Ուղիղ մեթոդ: Անկախ փոփոխականներն են՝ t, u: Ձևափոխման բանաձևերից երրորդը դիֆերենցում ենք ըստ t-ի և ըստ u-ի, z-ը և v-ն դիտելով իբրև t-ի և u-ի ֆունկցիաներ (առաջինը x-ի և y-ի միջոցով)՝

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{1}{(1+tu)^2}=\frac{1-t^2\frac{\partial v}{\partial t}}{(1+tv)^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{-t^2}{(1+tu)^2}=-\frac{t^2}{(1+tv)^2}\frac{\partial v}{\partial u}.$$

Այստեղից՝

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{(1+tv)^2}\left(1-t^2\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial v}{\partial u}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(1+tu)^2}{(1+tv)^2}\frac{\partial v}{\partial u}.$$

Ձևափոխված հավասարումը կրճատելուց հետո կստանա $\frac{\partial v}{\partial t}=0$ *տեսքը:*

Նույն խնդիրը լուծենք հակադարձ մեթոդով: Նոր փոփոխականներն արտահայտենք հներով՝

$$t=x,\quad u=\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\quad v=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$$

և x-ն ու y-ը համարենք անկախ փոփոխականներ: Երրորդ բանաձևերը դիֆերենցելով ըստ x-ի և ըստ y-ի (v-ն նրանցից կախված է t-ի և u-ի միջոցով), կստանանք՝

$$-\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{x^2}=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial u}\cdot\frac{1}{x^2},\quad -\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial u}\frac{1}{y^2}$$

կամ՝

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial v}{\partial u}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y^2}\frac{\partial v}{\partial u},$$ *և այլն:*

6) Ձևափոխել

$$W=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

արտահայտությունը $t=x+y,\ u=\frac{y}{x},\ v=\frac{z}{x}$ *բանաձևերով:*

Դիֆերենցիալները հաշվելու մեթոդը։ Անկախ փոփոխականներն են x-ն ու y-ը։ Դիֆերենցենք ձևափոխման բանաձևերը, կստանանք՝

$$dt = dx + dy,\quad du = -\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy,\quad dv = -\frac{z}{x^2}dx + \frac{1}{x}dz.$$

Եթե v-ն դիտենք x-ի ու y-ի ֆունկցիա՝ t-ի և u-ի միջնորդությամբ, ապա նրա dv դիֆերենցիալը կգրվի այսպես՝

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial u}du = \frac{\partial v}{\partial t}(dx+dy) + \frac{\partial v}{\partial u}\left(-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy\right).$$

dv-ի երկու արտահայտությունները բաղդատելով, կստանանք՝

$$dz = \frac{z}{x}dx + x\frac{\partial v}{\partial t}(dx+dy) + \frac{\partial v}{\partial u}\left(-\frac{y}{x}dx + dy\right).$$

Այժմ կազմենք նոր փոփոխականների երկրորդ դիֆերենցիալները՝

$$d^2t = 0,\quad d^2u = \frac{2y}{x^3}dx^2 - \frac{2}{x^2}dx\,dy,$$

$$d^2v = -\frac{2}{x^2}dx\,dz + \frac{2z}{x^3}dx^2 + \frac{1}{x}d^2z.$$

Մյուս կողմից՝

$$d^2v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}dt^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}dt\,du + \frac{\partial^2 v}{\partial u^2}du^2 + \frac{\partial v}{\partial t}d^2t + \frac{\partial v}{\partial u}d^2u =$$

$$= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(dx+dy)^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}(dx+dy)\left(-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy\right) +$$

$$+ \frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\left(-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial u}\left(\frac{2y}{x^3}dx^2 - \frac{2}{x^2}dx\,dy\right).$$

d²v-ի երկու արտահայտությունները հավասարեցնելով և dz-ը փոխարինելով նրա համար վերևում ստացված արտահայտությամբ, կստանանք մի հավասարություն, որտեղից կորոշվի d²z-ը՝

$$d^2z =$$

$$= 2\frac{dx}{x}\left[\frac{z}{x}dx + x\frac{dv}{dt}(dx+dy) + \frac{\partial v}{\partial u}\left(-\frac{y}{x}dx + dy\right)\right] - \frac{2z}{x^2}dx^2 +$$

$$+x\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(dx+dy)^2+2\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}(dx+dy)\left(-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\left(-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy\right)^2+\frac{\partial v}{\partial u}\left(\frac{2y}{x^3}dx^2-\frac{2}{x^2}dx\,dy\right)\right].$$

Այստեղից կարելի է որոշել $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ածանցյալները որպես dx^2-ու, $2dx\,dy$-ի, dy^2-ու գործակիցներ։ Սակայն մեզ հարկավոր արդյունքը կարելի է ավելի հեշտությամբ ստանալ, եթե նկատենք, որ d^2z-ը դառնում է W, երբ վերցնում ենք $dx=1$, $dy=-1$։ Այդպիսով գտնում ենք՝

$$W=\frac{(x+y)^2}{x^3}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}=\frac{(1+u)^3}{t}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}.$$

7) *Լեժանդրի ձևափոխությունը։* n° 208-ի 5)-ի նման այստեղ ևս *Լեժանդրի* ձևափոխությունը բերենք իբրև ավելի ընդհանուր ձևափոխության օրինակ, երբ ձևափոխման բանաձևերն իրենք արդեն պարունակում են ածանցյալներ։ Ընդունենք՝

$$t=\frac{\partial z}{\partial x},\quad u=\frac{\partial z}{\partial y},\quad v=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z.$$

z-ի տակ հասկանալով x-ի ու y-ի որոշակի $z=f(x,y)$ ֆունկցիա, ընդունում ենք, որ նրա համար՝

$$J=\frac{D(t,u)}{D(x,y)}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2\neq 0. \qquad (27)$$

Ձևափոխման երրորդ բանաձևը դիֆերենցելով ըստ x-ի և ըստ y-ի (v-ն դիտելով իբրև x-ի և y-ի ֆունկցիա՝ t-ի և u-ի միջոցով), կստանանք՝

$$\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 y}{\partial y\,\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

որտեղից՝

$$x=\frac{\partial v}{\partial t},\quad y=\frac{\partial v}{\partial u},\ \text{այնպես որ՝}\quad z=t\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial u}-v, \qquad (28)$$

այսինքն՝ ձևափոխությունը *փոխադարձ* բնույթ ունի։

(28)-ի առաջին երկու բանաձևերը դիֆերենցելով նախ ըստ x-ի, ապա ըստ y-ի, կստանանք՝

$$1=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\quad 0=\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},$$

և

$$0=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\quad 1=\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Քանի որ [193 (4)]՝

$$I=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}-\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}\right)^2=\frac{D(x,\,y)}{D(t,\,u)}=\frac{1}{J}\neq 0,$$

ապա այդ հավասարումներից՝

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}}{I},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}}{I},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}}{I}.$$

Եթե x, y, z-ը և t, u, v-ն դիտենք իբրև տարածության որոշ կետերի կոորդինատներ, ապա Լեժանդրի ձևափոխությունը կարելի է դիտել որպես տարածության ձևափոխություն (բայց ոչ կետային ձևափոխություն)։ x, y-ի և z-ի միջև կախումով բնորոշվող մակերևույթն այդ ժամանակ ձևափոխվում է t, u-ի և v-ի միջև կախումով բնորոշվող մակերևույթի։ Քանի որ t, u, v, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial u}$ մեծությունները կախված են միայն x, y, z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ մեծություններից, ուստի Լեժանդրի ձևափոխությունը շոշափումը պահպանում է*։

8) Հեշտ է Լեժանդրի ձևափոխությունն ընդհանրացնել որևէ չափման տարածության դեպքի համար։ Դիցուք z-ը $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ի ֆունկցիա է։ Ընդունենք՝

$$t_i=\frac{\partial z}{\partial x_i}\ (i=1,\,2,\ldots,n)\ \text{և}\ v=\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial z}{\partial x_i}-z.$$

* Տես 639 էջի տողատակի ծանոթագրությունը։

Այստեղ v-ն նոր ֆունկցիա է՝ $t_1, t_2, \ldots, t_n$ նոր փոփոխականներից։

Այստեղ ևս ենթադրում ենք, որ՝

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

v-ն որոշող բանաձևը դիֆերենցենք ըստ x_k-ի (v-ն դիտելով որպես $x_1, \ldots, x_n$-ի ֆունկցիա՝ $t_1, \ldots, t_n$-ի միջոցով)՝

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial t_i} \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} \quad (k=1, \ldots, n).$$

Քանի որ $J \neq 0$, ուստի այստեղից կստացվի՝

$$\frac{\partial v}{\partial t_i} = x_i \quad (i=1, \ldots, n).$$

Այսպիսով, նաև՝

$$z = \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{\partial v}{\partial t_i} - v,$$

այնպես որ, ընդհանուր դեպքում ես ձևափոխությունը փ ո խ ա դ ա ր ձ բնույթ ունի։

9) Վերջապես, դիտարկենք ձևափոխման մեկ օրինակ ևս, որը որոշ առանձնահատկություն ունի։ Դիցուք

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n; \; x_1, \ldots, x_n)\text{-ը}$$

$2n$ փոփոխականների ֆունկցիա է, որը $x_1, \ldots, x_n$ փոփոխականների նկատմամբ 2-րդ ա ս տ ի ճ ա ն ի հ ա մ ա ս ե ռ ֆունկցիա է։ Ենթադրելով, որ

$$H=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_n} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

ընդունենք՝

$$t_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

և $x_1, \dots, x_n$*-ի փոխարեն մտցնենք* $t_1, \dots, t_n$ *նոր անկախ փոփոխականներ։ Այդ ժամանակ* φ*-ի փոխարեն կստանանք մի նոր ֆունկցիա՝*

$$\psi(u_1, \dots, u_n;\ t_1, \dots, t_n).$$

Ապացուցել, որ՝

$$(\text{ա})\ \frac{\partial\psi}{\partial t_i}=x_i, \quad (\text{բ})\ \frac{\partial\psi}{\partial u_i}=-\frac{\partial\varphi}{\partial u_i} \quad (i=1, \dots, n).$$

Դիֆերենցենք $\varphi=\psi$ *ֆունկցիան ըստ* x_k*-ի,* ψ*-ն դիտելով* $x_1, \dots, x_n$*-ի ֆունկցիա՝* $t_1, \dots, t_n$*-ի միջոցով՝*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial t_i}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_k} \quad (k=1, \dots, n).$$

Մյուս կողմից, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$ *ածանցյալը* $x_1, \dots, x_n$ *փոփոխականների նկատմամբ կլինի առաջին աստիճանի համասեռ ֆունկցիա։ Ըստ Էյլերի բանաձևի* [178] *կունենանք.*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\partial x_i}x_i \quad (k=1, \dots, n).$$

$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$*-ի համար ստացած երկու արտահայտությունները բաղդատելով,* $H\neq 0$ *շնորհիվ, եզրակացնում ենք, որ (ա) առնչությունը ճիշտ է։*

Իսկ եթե դիֆերենցենք ըստ u_i-ի, կստանանք՝

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \frac{\partial \psi}{\partial u_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial t_k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial u_i},$$

Սակայն $\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}$-ն, ակներևաբար, $x_1, \ldots, x_n$ փոփոխականների նկատմամբ երկրորդ աստիճանի համասեռ ֆունկցիա է։ Կիրառելով Էյլերի բանաձևը, տեսնում ենք, որ վերջին գումարը տալիս է՝

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \right) x_k = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}.$$

Այստեղից էլ հետևում է (բ) առնչությունը։

ՅՈԹՆԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇՎԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄՆԵՐԸ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

§ 1. ԿՈՐԵՐԻ ԵՎ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԻ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄԸ

213. ԿՈՐԵՐ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ (ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԿՈՈՐԴԻՆԱՏՆԵՐՈՎ)։ *Ներկա գլխի մեջ մենք կանգ կառնենք դիֆերենցիալ հաշվի մեր ուսումնասիրած գաղափարների, փաստերի և մեթոդների մի քանի կիրառումների վրա երկրաչափության մեջ։ Նրանցից ոմանց հետ մենք արդեն գործ ենք ունեցել դեռևս 186-ի և 138-ի n°-ներում, ֆունկցիաների գրաֆիկները կառուցելիս։*

Մենք օգտակար ենք համարում նախապես հիշեցնել ընթերցողին կորերի ու մակերևույթների անալիտիկական ներկայացման զանազան եղանակների մասին. դրան է նվիրվում § 1-ը։ Հենց սկզբից ասենք, որ այն ֆունկցիաները, որոնց մասին խոսվելու է այս գլխում, ենթադրվում են անընդհատ և անընդհատ ածանցյալներ ունեցող ըստ իրենց բոլոր արգումենտների. հարկ եղած դեպքում, մենք կպահանջենք նաև բարձր կարգի ածանցյալների գոյությունն ու անընդհատությունը։

Սկսենք հարթ կորերից, ընդ որում հիմք ընդունենք կոորդինատների մի Oxy *ուղղանկյուն սիստեմ։*

Վերևում մենք շատ անգամ ենք դիտարկել

$$y=f(x) \text{ կամ } x=g(y) \tag{1}$$

տեսքի հավասարում և ուսումնասիրել նրան համապատասխանող կորը [47, 90, 135 *և հաջ.*]*։ Կորն այդ ձևով տալու դեպքում, երբ*

նրա կետի ընթացիկ կոորդինատներից մեկը ներկայացվում է մյուս կոորդինատի բացահայտ (միարժեք) ֆունկցիայի տեսքով, մենք ասելու ենք, որ կորը տված է (կամ ներկայացված է) բացահայտ: Կորի այդպիսի ներկայացումն օժտված է պարզությամբ և դիտողականությամբ: Ինչպես կտեսնենք, կորի ամեն մի այլ ձևով տալը կարող է (որոշ իմաստով) հանգեցվել դրան:

Անբացահայտ ֆունկցիաների տեսության կապակցությամբ մենք առիթ ենք ունեցել խոսելու նաև կորն անբացահայտ տալու մասին, այսինքն՝ կորը

$$F(x, y)=0 \tag{2}$$

տեսքի հավասարումով ներկայացնելու մասին, երբ հավասարումը լուծված չէ ոչ x-ի նկատմամբ, ոչ y-ի [195 *և հաջ.*]: *Այդպիսի հավասարումը կոչվում է կորի անբացահայտ հավասարում:*

Անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության թեորեմներից [195, 196] *հետևում է, որ եթե կորի* (x_0, y_0) *կետում տեղի ունի*

$$F'_x(x_0, y_0)\neq 0 \text{ կամ } F'_y(x_0, y_0)\neq 0$$

պայմանը, ապա առնվազն այդ կետի մի որոշ շրջակայքում, կորը կարող է ներկայացվել (1) բացահայտ հավասարումներից մեկի տեսքով, ընդ որում f կամ g ֆունկցիան իր ածանցյալի հետ միասին կլինի անընդհատ:

Այսպիսով, կորի միայն այն (x_0, y_0) *կետերը, որոնց համար միաժամանակ տեղի ունեն*

$$F'_x(x_0, y_0)=0, \quad F'_y(x_0, y_0)=0 \tag{3}$$

*երկու պայմանները, կարող են ունենալ այն եզակիությունը, որ նրանց շրջակայքում կորը բացահայտ հավասարումով (ոչ x-ի, ոչ y-ի նկատմամբ) ներկայացնելի չէ: Կորի այն կետերը, որոնք բավարարում են (3) հավասարումներին, կոչվում են եզակի կետեր**:

** Ճիշտն ասած, ավելի ճշգրիտ կլիներ նրանց անվանել «եզակիության տեսակետից կասկածելի» կետեր, քանի որ ոչ յուրաքանչյուր այդպիսի կետում փաստորեն տեղի ունի «եզակիություն»: Եթե, օրինակի համար,*

Ստորև [226] մենք կզբաղվենք (2) կորի վարքի հարցով՝ եզակի կետի մոտակայքում։ Սակայն, որպես կանոն, եզակի կետերը պետք է հեռացվեն դիտարկումից և պետք է կորն ուսումնասիրենք նրա միայն սովորական (ոչ եզակի) կետի շրջակայքում։

Վերջապես, նախընթաց շարադրության մեջ հաճախ է հիշատակվել այն մասին, որ

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t) \tag{4}$$

տեսքի հավասարումները, որոնք տալիս են կետի ընթացիկ կոորդինատների կախումը մի որոշ t պարամետրից, նույնպես որոշում են մի կոր հարթության վրա [տես, օրինակ, 105]։ Այդպիսի հավասարումները կոչվում են պարամետրական հավասարումներ. նրանք կորը ներկայացնում են պարամետրական տեսքով։

Վերցնենք (x_0, y_0) կետը, որը որոշվում է պարամետրի $t=t_0$ արժեքով, և ենթադրենք, թե $\varphi'(t_0)\neq 0$։ Այդ դեպքում, t-ի այդ արժեքի մոտակայքում ևս $x'_t=\varphi'(t)$ ածանցյալը, անընդհատության շնորհիվ, կպահպանի նույն նշանը. $x=\varphi(t)$ ֆունկցիան կլինի մոնոտոն [127]։ Այդ պայմաններում, 82-ի և 83-ի շնորհիվ, կարելի է t-ն դիտել որպես x-ի միարժեք ֆունկցիա $t=\Theta(x)$, որն անընդհատ է և ունի անընդհատ ածանցյալ։ Այդ ֆունկցիան t-ի փոխարեն տեղադրելով y-ի արտահայտության մեջ, կստանանք y-ի անմիջական կախումը x-ից՝

$$y=\psi(\Theta(x))=f(x),$$

որտեղ f ֆունկցիան ևս անընդհատ է իր ածանցյալի հետ միասին. այսպիսով, մենք բացահայտ հավասարումով արտահայտում ենք կորի առնվազն այն մասը, որը գտնվում է վերցրած կետի շրջակայքում։ Նման եզրակացության կարող ենք գալ նաև այն դեպքում, երբ $\varphi'(t_0)=0$, բայց $\psi'(t_0)\neq 0$, միայն այն տարբերությամբ, որ կստանանք մյուս տեսքի բացահայտ հավասարումը՝

$y=x$ ուղիղի հավասարումը գրենք $(y-x)^2=0$ տեսքով, ապա նրա բոլոր կետերն արտաքուստ կդառնան «եզակի», իրականում այդպիսին չլինելով։ Այլ խոսքով. «եզակիությունը» կարող է կապված լինել կորի՝ մեր կողմից ընտրած ներկայացման հետ միայն, և ոչ թե կորի իրեն հետ։ Սակայն, պարզության համար, մենք պահպանելու ենք սովորական տերմինաբանությունը, մանավանդ որ գործնականում այստեղից ոչ մի դժվարություն չի ծագի։

$$x=g(y)։$$

Միայն այն դեպքում, երբ միաժամանակ

$$x'_t=\varphi'(t_0)=0 \text{ և } y'_t=\psi'(t_0)=0, \qquad (5)$$

*կորը դիտարկվող կետի շրջակայքում կարող է չներկայացվել բացահայտ հավասարումով. այդպիսի կետն անվանելու ենք եզակի կետ**։

227-ում մենք համառոտակի կանգ կառնենք (4) կորի տեսքի վրա եզակի կետի մոտակայքում, սակայն որպես կանոն, այստեղ ևս պետք է ուսումնասիրենք միայն սովորական կետերը։

Այստեղ կարևոր է նշել, որ (x_0, y_0) սովորական կետի վերաբերյալ, այսինքն՝ այնպիսի կետի, որի համար (5) պայմանները տեղի չունեն, վերևում ասածները ենթադրում են նաև, որ *այդ կետն ստացվում է պարամետրի միայն մեկ* $t=t_0$ *արժեքի դեպքում*, այսինքն, ինչպես ասում են, *պարզ կետ* է։ Եթե, ընդհակառակը, (x_0, y_0) կետը լիներ *բազմապատիկ կետ* և համապատասխաներ պարամետրի, օրինակ, երկու տարբեր արժեքների՝ $t=t_0$, $t=t_1$, ապա այդ կետում, ընդհանրապես, կհատվեին կորի երկու ճյուղեր, որոնցից մեկը կորոշվեր t-ի՝ t_0-ին մոտ գտնվող արժեքներով, իսկ մյուսը՝ t_1-ին մոտ գտնվող արժեքներով։ Այդ դեպքում ամբողջ կորը տվյալ կետի շրջակայքում դարձյալ չէր կարելի ներկայացնել բացահայտ հավասարումով: Այսպիսով, *բազմապատիկ* կետերը, ըստ էության, նույնպես պիտի դասել *եզակի* կետերի թվում**։

---

* Այստեղ ևս կարելի է կրկնել նախորդ ծանոթագրության մեջ ասածը։ Եթե, օրինակի համար, շրջանագծի հայտնի պարամետրական հավասարումների՝

$$x=a\cos\theta, \quad y=a\sin\theta \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

մեջ θ անկյունը փոխարինենք t^3-ով $(0 \leq t \leq \sqrt[3]{2\pi})$, ապա $t=0$ դեպքում կստանանք «եզակի» կետ, որն առաջ չկար։

** Կա, ի միջի այլոց, մի դեպք, երբ կրկնակի անգամ ստացվող կետն այնուամենայնիվ չեն համարում եզակի կետ. այդ այն դեպքն է, երբ կետը համապատասխանում է պարամետրի երկու ծայրարժեքներին և այդ կետում կորը փակվում է։ [Շրջանագծի օրինակում՝ այն կետը, որը որոշվում է $\theta=0$ և $\theta=2\pi$ արժեքներով]։

Մեր ասածները ամփոփենք։ Մենք չփորձեցինք տալ կորի երկրաչափական բնութագիրը. մեզ համար կորը այնպիսի կետերի երկրաչափական տեղ է, որոնք բավարարում են (1), (2) կամ (4) տեսքի անալիտիկ առնչության, *ենթադրելով, որ նրանց մեջ հանդիպող ֆունկցիաներն իրենց ածանցյալների հետ միասին անընդհատ են։ Ճիշտ է, այդպիսի տարբեր եղանակներով որոշվող երկրաչափական պատկերները՝ ամբողջությամբ վերցրած կարող են զգալի չափով տարբերվել իրենց տեսքով, բայց փոքրության մեջ, սովորական (պարամետրականի դեպքում՝ և պարզ) կետի շրջակայքում նրանք բոլորը նմանվում են այն պարզ պատկերին, որը տրվում է (1) տեսքի հավասարումներով։*

214. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ *Տանք առավել հաճախ հանդիպող կորերի համառոտ տեսությունը (նրանցից շատերն արդեն ծանոթ են ընթերցողին անալիտիկ երկրաչափությունից)։*

1) Շղթայագիծ (գծ. 41)։ Նրա հավասարումն է՝

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a\ \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\,.$$

Այսպիսի գծով հավասարակշիռ վիճակ է ընդունում ճկուն և չձգվող ծանր թելը (շղթան, լարը և այլն), որը երկու ծայրերից կախված է։

A *գագաթի մոտ կորի ձևը հիշեցնում է պարաբոլ (տես գծագիրը), բայց գագաթից հեռանալիս կորն ավելի արագ է ձգտում անվերջության։* OA=a *հատվածն ավելի ճշգրիտ է որոշում նրա ձևը՝ որքան ավելի փոքր է* a*-ն, կորն այնքան ավելի դիք է* (круче)*։ Կորի այն դասավորությունը, որով նա պատկերված է գծագրում, բոլորովին պարտադիր չէ, բայց նա թույլ է տալիս առավել պարզ տեսք տալ կորի հավասարմանը։*

2) Էլիպսը, սիմետրիայի առանցքների նկատմամբ գրված, ունի հետևյալ հավասարումը՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Քանի որ $\frac{x}{a}$ *և* $\frac{y}{b}$ *մեծությունների քառակուսիների գումարը պետք է հավասարվի մեկի, ապա բնական կլինի նրանք ընդունել իբրև որևէ* t *անկյան կոսինուս և սինուս։ Այսպիսով ստանում ենք էլիպսի սովորական պարամետրական ներկայացումը՝*

$$x=a\cos t,\qquad y=b\sin t.$$

երբ t-ն փոփոխվում է 0-ից մինչև 2π, էլիպսը գծվում է ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ, սկսած մեծ առանցքի A(a, o) ծայրից:

Կարելի էր, իհարկե, օգտագործել նաև որևէ ուրիշ արտահայտություններ, որոնց քառակուսիների գումարը դարձյալ տալիս մեկ, և ընդունել օրինակի համար,

$$x = a\frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad y = b\frac{2u}{1+u^2},$$

որտեղ u-ն փոփոխվում է $-\infty$-ից մինչև $+\infty$: Քանի որ $u\to\infty$ դեպքում ունենք $x\to -a$, $y\to 0$, ապա կարելի է պայմանավորվել, որ $A'(-a,\ 0)$ կետն ստացվում է $u=\infty$ դեպքում:

Ճիշտ այդպես էլ, հ ի պ ե ր բ ո լ ի դեպքում, որի հավասարումն է

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

հիշելով հ ի պ ե ր բ ո լ ա կ ա ն կոսինուսն ու սինուսը կապող հայտնի առնչությունը, կարելի է ընդունել

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t, \qquad y = b\,\mathrm{sh}\,t \qquad (-\infty < t < +\infty):$$

Նույն կորի պարամետրական մի այլ ներկայացում կլինի՝

$$x = a\frac{1+u^2}{1-u^2}, \qquad y = b\frac{2u}{1-u^2} \quad (-\infty < u < +\infty,\ u \neq \pm 1):$$

Ընթերցողին խորհուրդ է տրվում բոլոր դեպքերում հաշվի առնել իրեն, թե պարամետրի փոփոխման ժամանակ կետն ինչպես է տեղափոխվում կորի վրայով:

3) Կ ի ս ա խ ո ր ա ն ա ր դ պ ա ր ա բ ո լ (գծ. 111)՝

$$y^2 - cx^3 = 0 \qquad (c>0):$$

Այստեղ եզակի կետ է (0,0) սկզբնակետը: Եթե հավասարումը լուծենք y-ի նկատմամբ, կստանանք կորի երկու սիմետրիկ ճյուղերի բացահայտ հավասարումները՝

$$y = \pm\sqrt{cx^3} = \pm\sqrt{c}\cdot x^{\frac{3}{2}}:$$

Քանի որ $x=0$ դեպքում երկու ճյուղերի համար էլ $y'=0$, ապա սկզբնակետում երկուսն էլ շոշափում են x-երի առանցքը և ստացվում է սայր (остриё) [*դարձակետ* (точка возврата), *տես* 226]:

4) Ա ս տ ր ո ի դ (գծ. 112), որի հավասարումն է՝

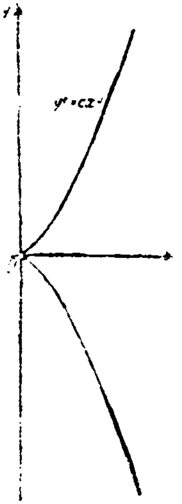
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \qquad (a>0):$$

Այս հավասարումն, ինչպես տեսած, չի համապատասխանում հավասարումների այն տեսակին, որով պայմանավորվել էինք բավարարվել։ Նրա ձախ մասի մասնակի ածանցյալներից մեկը $(\pm a, 0)$, *և* $(0, \pm a)$ *կետերից յուրաքանչյուրում դառնում է* ∞*։ Ի միջի այլոց, դժվար չէ, հավասարումն ազատելով իռացիոնալություններից, կորը ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝*

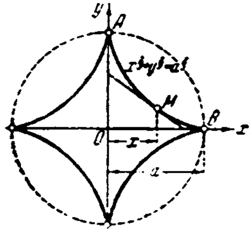
$$(x^2+y^2-a^2)^3+27a^2x^2y^2=0.$$

Կորն այս տեսքով ներկայացնելիս մատնանշված կետերը կլինեն հենց եզակի կետեր։

Կորի հավասարումից երևում է, որ նա գտնվում է $x^2+y^2=a^2$ *շրջանի մեջ և սիմետրիկ է երկու առանցքների նկատմամբ. այդ պատճառով բավարարվենք առաջին քառորդով։ Հավասարումը*



Գծ. 111.



Գծ. 112.

լուծելով y-*ի նկատմամբ՝*

$$y=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

և դիֆերենցելով՝

$$y'=-\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}},$$

տեսնում ենք, որ $x=0$ *դեպքում շոշափողն ուղղաձիգ դիրք ունի, իսկ* $x=a$ *դեպքում՝ հորիզոնական։ Այստեղից հետևում է, որ բոլոր չորս եզակի կետերում կլինեն* ***սայրեր*** *(դարձակետեր)։*

Ցանկանալով աստրոիդը ներկայացնել պարամետրական տեսքով, օգտագործենք այն հանգամանքը, որ, ինչպես հավասարումից երևում է, $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ *և* $\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ *արտահայտությունների քառակուսիների գումարը հավասար է մեկի։ Այդ արտահայտություններն ընդունելով* cos t *և* sin t, *կստանանք այսպիսի պարամետրական հավասարումներ՝*

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)։$$

Քանի որ

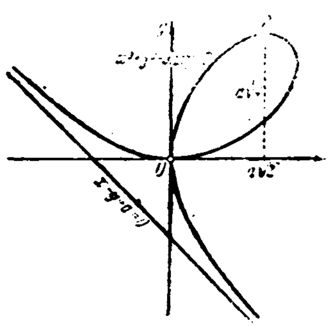
$$x'_t = -3a\cos^2 t \sin t, \quad y'_t = 3a\sin^2 t \cos t$$

ածանցյալները երկուսն էլ զրո են դառնում, երբ $t = 0(2\pi), \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, ուստի պարամետրի այդ արժեքներին համապատասխանում են եզակի կետեր նույն կետերը, ինչ որ վերևում։

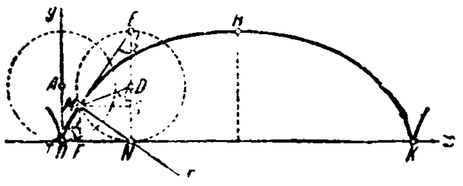
5) Դեկարտյան տերև (գծ. 113), որի հավասարումն է

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0^{*} \qquad (a > 0)։$$

Եզակի կետ է (0,0) սկզբնակետը. այդտեղ կորն ինքն իրեն հատում է։ Կորն ունի $x+y+a=0$ ասիմպտոտը՝ ինչպես $x \to +\infty$ դեպքում, այնպես էլ $x \to -\infty$ դեպքում։



Գծ. 113.



Գծ. 114.

Դրանում համոզվելու համար, հավասարումն անդամ առ անդամ բաժանենք x^3-ի վրա՝

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 = 3a\cdot\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x} - 1։$$

Այստեղից նախ կարելի է եզրակացնել, որ, ասենք $|x| > 3a$ դեպքում $\left|\frac{y}{x}\right|$-ը մնում է սահմանափակ, և այն ժամանակ արդեն պարզ է, որ $x \to \pm\infty$ դեպքում $\frac{x}{y} \to 1$։ Մյուս կողմից, հավասարումից ստանում ենք՝

$$x + y = \frac{3axy}{x^2 - xy + y^2} = \frac{3a\cdot\frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

* Տես 200-ի 3) օրինակը։ y-ի, որպես x-ի ֆունկցիայի, մաքսիմումին համապատասխանող $A(a\sqrt[3]{2},\ a\sqrt[3]{4})$ կետը նշված է գծագրում։

այնպես որ $x \to +\infty$ դեպքում կունենանք $y + x \to -a$, որով և արդարացվում է մեր ասածը [138]։

Իբրև պարամետր ընդունելով $t = \frac{y}{x}$ հարաբերությունը և կորի հավասարման մեջ տեղադրելով $y = tx$, հեշտ է ստանալ կորի պարամետրական հավասարումները՝

$$x = \frac{3at}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{3at^2}{t^3 + 1} \quad (-\infty < t < +\infty,\ t \neq -1)։$$

Երբ $t \to \infty$, երկու կոորդինատներն էլ ձգտում են 0-ի. կարելի է ընդունել, որ (0,0) սկզբնակետն ստացվում է երկու անգամ՝ երբ $t = 0$ և երբ $t = \infty$։ Երբ t-ն փոփոխվում է $-\infty$-ից մինչև -1, (x, y) կետը դուրս է գալիս սկզբնակետից և աջ ճյուղի վրայով հեռանում է դեպի անվերջություն։ Երբ t-ն փոփոխվում է -1-ից մինչև 0, այդ կետը՝ անվերջությունից կորի ձախ ճյուղի վրայով վերադառնում է սկզբնակետը։ Վերջապես, երբ t-ն աճում է 0-ից մինչև $+\infty$, կետը գծում է (ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ) հանգույց օղակը (петлю)։

216. ՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ԾԱԳՈՒՄ ՈՒՆԵՑՈՂ ԿՈՐԵՐ։ Շարունակելով օրինակների թվումը, դիտարկենք ևս մի քանի կորեր, որոնք ունեն մեխանիկական ծագում. նրանք ստացվում են արոշ կորեր ուրիշների վրայով գլորելով։

6) Ց ի կ լ ո ի դ (գծ. 114)։ Պատկերացնենք, որ OX ուղիղով ձախից դեպի աջ ա ռ ա ն ց ս a հ ե լ ո ւ գլորվում է մի շրջան, որի շառավիղն է a և կենտրոնը գտնվում է A կետում։ Այդ ժամանակ շրջանագծի որևէ կետի գծած կորը հենց կոչվում է ց ի կ լ ո ի դ։ Հետազոտենք, օրինակի համար, O կետի ճանապարհը, երբ շրջանը լրիվ պտույտ է կատարում։

Գլորվող շրջանը դիտարկենք նոր դիրքում։ Շոշափման կետն արդեն կլինի ուրիշը՝ N կետը. այդպիսով, շոշափման կետն ուղիղ գծով տեղափոխվել է ON հեռավորությամբ։ Այդ նույն ժամանակ O կետը տեղափոխվում է M դիրքը՝ շրջանագծով անցնելով $\smile{NM}$ ճանապարհը։ Քանի որ շրջանը գլորվում է ա ռ ա ն ց ս a հ ե լ ո ւ, ուստի այդ երկու ճանապարհները հավասար են՝

$$\smile{NM} = ON։$$

Եթե այժմ իբրև կետի դիրքը որոշող պարամետր ընդունենք $t = \angle NDM$ անկյունը, որով հաշվել է պտտվել սկզբում AO ուղղաձիգ դիրք ունեցող շառավիղը, ապա M կետի x և y կոորդինատները կարտահայտվեն այսպես՝

$$x = FO = ON - FN = \smile{NM} - MG = at - a\sin t,$$
$$y = FM = NG = ND - GD = a - a\cos t։$$

Այսպիսով, ցիկլոիդի պարամետրական հավասարումներն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t) \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)։$$

Երբ t*-ն փոփոխվի* $-\infty$*-ից մինչև* $+\infty$*, կստացվի մի կոր, որը բաղկացած է անթիվ բազմությամբ այնպիսի ճյուղերից, ինչպիսին պատկերված է 114-րդ գծագրում։*

Քանի որ

$$x'_t=a(1-\cos t), \qquad y'_t=a\sin t$$

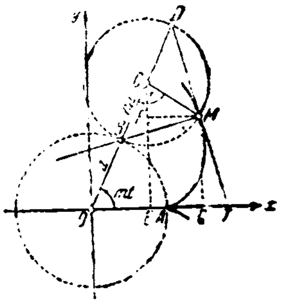
ածանցյալները միաժամանակ զրո են դառնում, երբ $t=2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2,\ldots)$*, ապա այդ արժեքներին համապատասխանում են կորի եզակի կետերը։ Սակայն* [105 (*10*)]՝

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2},$$

այնպես որ, երբ, օրինակ, $t\to 0$ *(կամ* $x\to 0$*),* $y'_x\to\infty$*. պարզ է, որ սկզբնակետում, ինչպես նաև մյուս եզակի կետերում, շոշափողն ուղղաձիգ դիրք ունի. այստեղ կորը սայր ունի [դարձակետ, 227]։*

7) Էպիցիկլոիդ և հիպոցիկլոիդ։ Եթե մի շրջան, առանց սահելու, դրսից գլորվում է մի ուրիշ շրջանի վրայով, ապա գլորվող շրջանի շրջանագծի որևէ կետի գծած կորը կոչվում է էպիցիկլոիդ։ Իսկ երբ շրջանը գլորվում է ներսից՝ ստացված կորը կոչվում է հիպոցիկլոիդ։ Կանգ առնենք առաջինի հավասարումների արտածման վրա։

Կոորդինատների սկզբնակետը վերցնենք անշարժ շրջանի O *կենտրոնում,* x*-երի առանցքը տանենք մեզ հետաքրքրող կետի այն* A *դիրքով, որտեղ նա հանդիսանում է երկու շրջանների շոշափման կետ (գծ. 115)։ Երբ գլորվող շրջանն ընդունի գծագրում ցույց տված նոր դիրքը,* A *կետը կգնա* M *կետը։ Մեզ հարկավոր է որոշել հենց այդ* M *կետերի երկրաչափական տեղը։*



Գծ. 115.

Անշարժ շրջանի շառավիղը նշանակենք a*, իսկ գլորվող շրջանինը՝* ma*։ Իբրև պարամետր այստեղ ընդունենք այն* $t=\sphericalangle MCB$ *անկյունը, որը կազմված է գլորվող շրջանի շրջանագծի վրա գտնվող մեզ հետաքրքրող* M *կետն այդ շրջանի* C *կենտրոնի հետ միացնող* CM *շառավղով և շրջանների շոշափման* B *կետով անցնող* CB *շառավղով։ Շարժման սկզբում այդ անկյունը համարենք* 0*։*

Ամենից առաջ տեսնենք, թե ինչով է այստեղ արտահայտվում սահելու բացակայությունը: Շոշափման կետի՝ անշարժ շրջանագծով անցած $\smile{AB}$ աղեղը պետք է հավասար լինի նույն կետի՝ գլորվող շրջանագծով անցած $\smile{MB}$ աղեղին՝

$$a\cdot\angle AOB = ma\cdot\angle MCB = mat,$$

որտեղից՝

$$\angle AOB = mt.$$

Այժմ M կետի x և y կոորդինատները արտահայտենք t պարամետրով: Ունենք՝

$$x = OG = OE + FM = (a+ma)\cos mt + ma\sin\angle FCM.$$

բայց՝

$$\angle FCM = \angle BCM - \angle OCE \quad \text{և} \quad \angle OCE = \frac{\pi}{2} - mt,$$

այնպես որ՝

$$\angle FCM = (1+m)t - \frac{\pi}{2} \quad \text{և} \quad \sin\angle FCM = -\cos(1+m)t.$$

Վերջնականապես՝

$$x = a[(1+m)\cos mt - m\cos(1+m)t].$$

Նման ձևով կգտնենք՝

$$y = a[(1+m)\sin mt - m\sin(1+m)t].$$

3) Այս հավասարումները էպիցիկլոիդը ներկայացնում են պարամետրական տեսքով:

Երբ գլորվող շրջանը նորից կշոշափվի անշարժ շրջանին հետ այն նույն կետում, որտեղ նրանք շոշափվում էին շարժման սկզբում (այսինքն՝ երբ $t=2\pi$), M կետը կավարտի կորի առաջին ճյուղը: Հետագա գլորման դեպքում նա կգծի կորի հաջորդ ճյուղը՝ առաջինին նման, և այլն:

Կոորդինատների ածանցյալները՝

$$x'_t = -m(m+1)a[\sin mt - \sin(1+m)t],$$

$$y'_t = m(m+1)a[\cos mt - \cos(1+m)t]$$

միաժամանակ զրո են դառնում, երբ $t=2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, այսինքն՝ ամեն անգամ, երբ գլորվող շրջանագծի վրա գտնվող դիտարկվող կետը դառ-

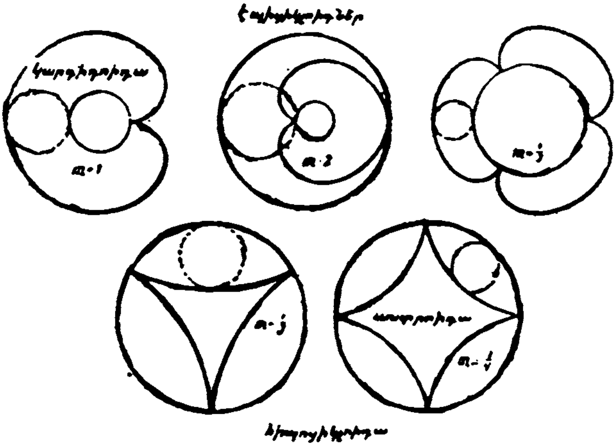
նում է շոշափման կետ։ Կորի համապատասխան կետերը կլինեն եզակի կետեր (դարձակետեր)։

Հիպոցիկլոիդի համար նման ձևով ստացվում են հետևյալ պարամետրական հավասարումները՝

$$x = a[(1-m)\cos mt + m\cos(1-m)t],$$

$$y = a[-(1-m)\sin mt + m\sin(1-m)t]\text{։}$$

Այստեղ ևս m-ը՝ գլորվող շրջանի և անշարժ շրջանի շառավիղների հարաբերությունն է։ Հեշտ է նկատել, որ այս հավասարումները կստացվեն էպիցիկլոիդի հավասարումներից՝ m-ը փոխարինելով −m-ով։



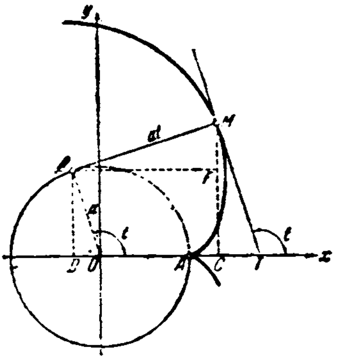
Գծ. 116.

116-րդ գծագրում պատկերված են էպիցիկլոիդներ, որոնք համապատասխանում են $m=1,\ 2,\ \frac{1}{3}$ արժեքներին, և հիպոցիկլոիդներ, որոնք համապատասխանում են $m=\frac{1}{3},\ \frac{1}{4}$ արժեքներին. վերջինս՝ ընթերցողին ծանոթ աստղոիդն է [եթե հիպոցիկլոիդի հավասարումների մեջ ընդունենք $m=\frac{1}{4}$ և a-ն փոխարինենք 4a-ով, կստանանք հենց 4)-ում բերված հավասարումները]։

8) Շրջանի էվոլվենտա։ Պատկերացնենք, որ O կենտրոն և a շառավիղ ունեցող շրջանի վրա ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ փաթաթված է թել և ենթադրենք, թե թելի ծայրը եղել է A կետում։ Սկսենք թելը ետ տալ շրջանի վրայից (ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ), միշտ

նրա ծայրից ձգելով։ Այդ ժամանակ թելի ծայրի գծած կորը կոչվում է **շրջանի էվոլվենտ** [համեմատե՛ք 242, 244]։

Կոորդինատների սկզբնակետ ընդունենք O կետը, իսկ x-երի առանցքը տանենք A կետով (գծ. 117)։ Երբ թելի AB մասը ետ ուղղված լինի, նա կգրավի BM դիրքը՝ շրջանագծի շոշափողի ուղղությամբ, իսկ A կետը կգնա M կետը։ Այդպիսով $\overset{\frown}{AB}=BM$։ Իբրև պարամետր ընդունենք OA և OB շառավիղների միջև կազմված $t=\angle AOB$ անկյունը։ M կետի x և y կոորդինատները կարտահայտվեն այսպես՝



գծ. 117.

$$x=DC-DO=BF-DO=$$
$$=BM\sin\angle BMC-OB\cos\angle DOB,$$

բայց՝

$$BM=\overset{\frown}{AB}=at,$$ իսկ՝ $\angle BMC$ և $\angle DOB$ հավասար են $(\pi-t)$-ի, այնպես որ՝

$$x=at\sin(\pi-t)-a\cos(\pi-t)=$$
$$=a(t\sin t+\cos t)։$$

Այնուհետև՝

$$y=CM=CF+FM=DB+FM=OB\sin\angle DOB+BM\cos\angle BMC=$$
$$=a(\sin t-t\cos t)։$$

Այսպիսով մեր կորը ներկայացվում է հետևյալ պարամետրական հավասարումներով՝

$$x=a(t\sin t+\cos t),\qquad y=a(\sin t-t\cos t)։$$

Միայն եզակի կետը համապատասխանում է $t=0$ արժեքին, որի դեպքում

$$x'_t=at\cos t \text{ և } y'_t=at\sin t$$

երկու ածանցյալներն էլ դառնում են զրո։

Ընթերցողին առաջարկում ենք համոզվել, որ նույն կորը կստացվի նաև այն ժամանակ, երբ ուղիղն առանց սահելու գլորենք անշարժ շրջանի վրայով և դիտարկենք ուղիղի որևէ կետի տրաեկտորիան։

216. ԿՈՐԵՐ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ (ԲԵՎԵՌԱՅԻՆ ԿՈՈՐԴԻՆԱՏՆԵՐՈՎ)։ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ Շատ դեպքերում ավելի պարզ է լինում կորը ներկայացնել իր **բևեռային հավասարումով**,

որը կապում է կորի կետերի r և θ ընթացիկ կոորդինատները։ θ բևեռային անկյունը մենք հաշվում ենք բևեռային առանցքից, այն դրական համարելով ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ։ Բևեռային r շառավիղ-վեկտորը վերցնելու ենք ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական. առաջին դեպքում այն վերցնում ենք θ անկյունով որոշվող ուղղությամբ, իսկ երկրորդ դեպքում՝ հակադիր ուղղությամբ։

Ինչպես ուղղանկյուն կոորդինատների դեպքում, այստեղ ևս r-ի և θ-ի միջև կախումը կարող է տրվել բացահայտ, անբացահայտ կամ պարամետրական տեսքով։ Մենք բավարարվում ենք, մեծ մասամբ, պարզագույն դեպքով, երբ կորը ներկայացվում է $r=f(\theta)$ տեսքի բացահայտ հավասարումով։

Եթե անցնենք ուղղանկյուն կոորդինատներին, սովորականի նման վերցնելով բևեռը որպես կոորդինատների սկզբնակետ, իսկ բևեռային առանցքը՝ x-երի առանցք, ապա

$$x=r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta,$$

$$y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta$$

հավասարումները մեր կորը կներկայացնեն պարամետրական տեսքով, որի մեջ պարամետրի դերը կխաղա θ բևեռային անկյունը։ Այստեղ ստացվող ֆունկցիաները, f-ի հետ միասին, կլինեն անընդհատ և կունենան անընդհատ ածանցյալներ.

Ածանցյալների համար ստացվող՝

$$x'_\theta=r'_\theta\cos\theta-r\sin\theta,$$

$$y'_\theta=r'_\theta\sin\theta+r\cos\theta$$

բանաձևերը ցույց են տալիս, որ եզակի կետ (ո 213-ի իմաստով) կարող է հանդիպել միայն այն դեպքում, երբ $r=r'_\theta=0$։

Դիտենք օրինակներ։

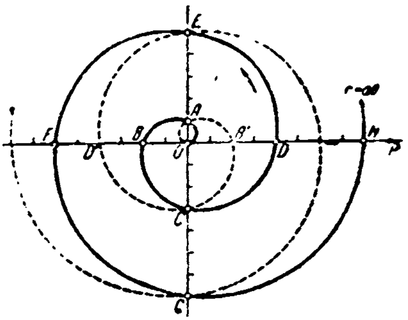
1) Արքիմեդյան սպիրալ (գալարագիծ) (գծ. 118)՝

$$r=a\theta.$$

Այս կորը կարելի է դիտել որպես մի կետի հետագիծ, որը հավասարաչափ շարժվում է բևեռից ելնող ճառագայթով, երբ վերջինս իր հերթին հավասարաչափ պտտվում է բևեռի շուրջը։

Կորի մի շարք՝ A, B. C, D, ... կետեր կառուցելու համար նախ ուղ-

դաձիգ ուղիղի վրա վերցնենք $OA = a \cdot \frac{\pi}{2}$, *իսկ այնուհետև՝* $OB = 2 \cdot OA$, $OC = 3 \cdot OA$, $OD = 4 \cdot OA$, *և այլն, որովհետև այդ կետերին համապատասխանում են* $\theta = 2 \cdot \frac{\pi}{2}$, $3 \cdot \frac{\pi}{2}$, $4 \cdot \frac{\pi}{2}$, ... *անկյունները։* θ *անկյունը փոփոխելով 0-ից մինչև* ∞, *կստանանք անվերջ բազմությամբ գալարներ* (виток)՝ OABCD, DEFGH, ... *Հարևան կարժերի հեռավորությունն ըստ ճառագայթի հավասար է* $2\pi a$:



Գծ. 118.

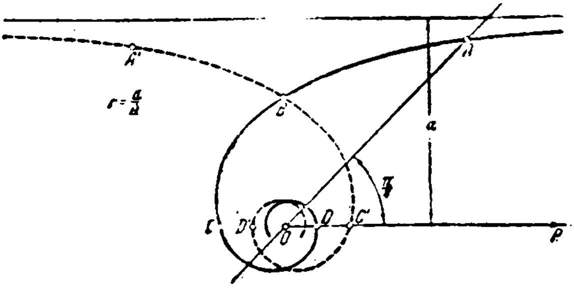
Կարելի է θ *անկյանը տալ նաև բացասական արժեքներ՝ 0-ից մինչև* $-\infty$։ *Այն ժամանակ կստացվի կորի երկրորդ մասը՝* OAB'CD'..., *որը նշանակված է կետերով. նա սիմետրիկ է առաջին մասին։*

Նկատենք, որ $r = a\theta + b$ *հավասարումը նույնպես արքիմեդյան սպիրալ է ներկայացնում. եթե բևեռային առանցքը պտտենք* $\alpha = -\frac{b}{a}$ *անկյունով, այդ հավասարումը կբերվի* $r = a\theta$ *տեսքին։*

2) Հիպերբոլական սպիրալ (գալարագիծ) (գծ. 119)՝

$$r = \frac{a}{\theta}.$$

Երբ θ *անկյունն աճում է մինչև անվերջություն, շառավիղ-վեկտորը ձգտում է զրոյի և կորի կետը ձգտում է համընկնել բևեռի հետ (երբեք*

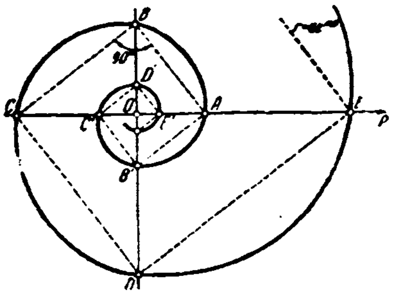


Գծ. 119.

չհասնելով նրան), այդպիսի դեպքում բևեռը կոչվում է կորի ասիմպտոտական կետ. Կորն անվերջ անգամ փաթաթվում է բևեռի շուրջը:

Եթե $\theta=\frac{\pi}{4}$ ճառագայթի վրա վերցնենք $OA=\frac{4a}{\pi}$ հատվածը, իսկ այնուհետև վերցնենք $OB=\frac{1}{2}OA$, $OC=\frac{1}{2}OB$, $OD=\frac{1}{2}OC$, ..., ապա A, B, C, D, ... կետերն ակներևաբար կգտնվեն կորի վրա (B, C, D... կետերը գտնվում են $\theta=\frac{\pi}{2}$, π, 2π, ... ճառագայթների վրա):

θ անկյունը կարող է ընդունել նաև բացասական արժեքներ: Երբ θ-ն փոփոխվում է 0-ից մինչև $-\infty$, ինչպես և արքիմեդյան սպիրալի դեպքում, այստեղ ևս ստացվում է կորի երկրորդ մասը՝ A'BC'D', որը սիմետրիկ է առաջինին, նա դարձյալ նշանակված է կետերով։



Գծ. 120.

Կորի ձևն անվերջությունում հետազոտելու համար, հետազոտենք կորի կետի ուղղաձիգ հեռավորությունը բևեռային առանցքից՝

$$y=r\sin\theta=a.\frac{\sin\theta}{\theta},$$

Երբ $r\to\infty$, այսինքն՝ $\theta\to\pm 0$, կունենանք՝ $\lim y=a$: Այսպիսով, բևեռային առանցքին զուգահեռ և նրանից a հեռավորության վրա գտնվող ուղիղը կորի համար ասիմպտոտ է.

3) *Լոգարիթմական սպիրալ (գալարագիծ) (գծ. 120)*՝

$$r=ae^{m\theta},$$

Երբ θ անկյունն աճում է (կամ նվազում է) թվաբանական պրոգրեսիայով, r-ն աճում է (նվազում է) երկրաչափական պրոգրեսիայով: Բևեռային առանցքի վրա վերցնենք OA=a հատվածը, իսկ նրա ուղղահայաց ուղղի վրա՝ $OB=ae^{m\frac{\pi}{2}}$ հատվածը. երկու կետն էլ պատկանում են մեր կորին: Եթե այժմ կառուցենք ABCDE... ուղղանկյուն բեկյալը, ապա եռանկյունների նմանությունից դժվար չի լինի եզրակացնել, որ OA, OB, OC, OD, OE, ... հատվածները երկրաչափական պրոգրեսիա են կազմում $e^{m\frac{\pi}{2}}$ հայտարարով. քանի որ համապատասխան անկյուններն են՝ $0, \frac{\pi}{2}, 2.\frac{\pi}{2}, 3.\frac{\pi}{2}, \ldots,$

ապա պարզ է, որ C, D, E, ... կետերը ևս գտնվում են մեր սպիրալի վրա։

Երբ θ անկյունն աճում է 0-ից մինչև $+\infty$, համապատասխան կետն անվերջ թվով պտույտներ է կատարում բևեռի շուրջը՝ արագ հեռանալով նրանից դեպի անվերջություն. գալարների միջև հեռավորություններն արդեն հավասար չեն։ θ անկյունը կարող է ընդունել նաև բացասական արժեքներ, երբ θ-ն ձգտում է $-\infty$, r-ը ձգտում է 0-ի։ Կորն անվերջ անգամ փաթաթվում է բևեռի շուրջը՝ նրան անսահմանորեն մոտենալով (բայց երբեք չհասնելով նրան. տես՝ 120 գծագրի վրա AB'C'D'E'... մասը). բևեռը ասիմպտոտական կետ է։

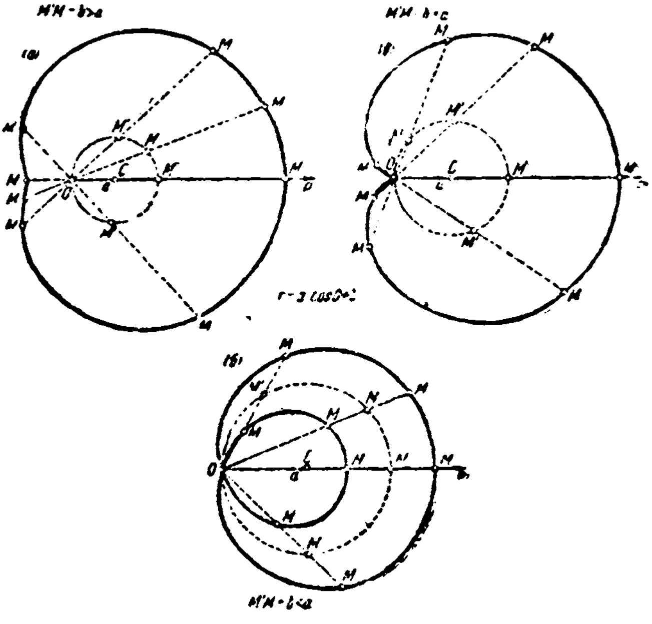
Նշենք, վերջապես, որ բևեռային առանցքը բևեռի շուրջը պտտելով կարելի է հասնել a բազմապատկչի ոչնչացմանը և լոգարիթմական սպիրալի հավասարումը բերել պարզագույն տեսքի՝

$$r = e^{m\theta}.$$

4) Խխունջներ (գծ. 121)՝

$$r = a\cos\theta + b.$$

Այս կորերի ծագումը կարելի է պատկերացնել այսպես. վերցնենք a տրամագծով շրջանագիծ. եթե O բևեռը ընտրենք շրջանագծի վրա և բևեռա-



Գծ. 121.

յին առանցքը տանենք շրջանի C *կենտրոնով, ապա շրջանագծի յուրաքանչյուր* M *կետի համար կունենանք՝* $r=a\cos\theta$. *այս հենց կլինի շրջանագծի բևեռային հավասարումը: Եթե այստեղ* θ *անկյունը փոփոխենք* 0*-ից մինչև* 2π, *փոփոխական կետը կ ր կ ն ա կ ի կգծի շրջանագիծ (ժամացույցի սլաքին հակառակ):*

Եթե այժմ շրջանագծի բոլոր OM′ *շառավիղ-վեկտորները երկարացնենք* $M'M=b$ $(b>0)$ *հաստատուն հատվածով, ապա այդպես կառուցված* M *կետերով կկազմվի մի նոր կոր, որը և կրում է խ խ ո ւ ն ջ ընդհանուր անունը. Նրա բևեռային հավասարումը կլինի* $r=a\cos\theta+b$:

Հարցն ամենից ավելի պարզ է, երբ $b \geq a$, *որովհետև այդ դեպքում շառավիղ-վեկտորը միշտ դրական է և կորը բոլոր կողմերից շրջապատում է բևեռը (գծ. 121ա)*: $b<a$ *դեպքում կորն անցնում է բևեռով և, ինքն իրեն հատելով, առաջացնում է ներքին հանգույց* (петля)*, ինչպես 121բ գծագրում: Որպեսզի որոշենք այն* θ *անկյունները, որոնց ժամանակ փոփոխական կետն անցնում է բևեռով, կորի հավասարման մեջ ընդունում ենք* $r=0$. *ստանում ենք* $\cos\theta=-\frac{b}{a}$ *հավասարումը, որը լուծում ունի հենց այն պատճառով, որ* $b<a$:

Առանձնապես հետաքրքիր է կորի միջանկյալ տեսակը, որը համապատասխանում է $b=a$ *դեպքին: Այստեղ բևեռը կորի վրա է գտնվում* $(\theta=\pi)$, *սակայն հանգույց չկա. կորը պատկերված է 121գ. գծագրի վրա: Իսկույն աչքի է ընկնում այս կորի նույնությունը կարդիոիդի հետ, որը վերևում դիտարկել էինք որպես է պ ի ց ի կ լ ո ի դ ի մասնավոր դեպք (գծ. 116): Ընթերցողին հանձնարարում ենք՝ համոզվել դրանում:*

5) Բ ե ռ ն ո ւ լ լ ի ի լ ե մ ն ի ս կ ա տ (գծ. 122)՝

$$r^2=2a^2\cos 2\theta:$$

Այս կորը կարելի է սահմանել որպես այնպիսի M *կետերի երկրաչափական տեղ, որոնց* $\rho=FM$ *և* $\rho'=F'M$ *հեռավորությունների արտադրյալը երկու* F *և* F′ *տված կետերից հաստատուն մեծություն է և հավասար է* a^2, *եթե* $FF'=2a$*.

Գծագրի նշանակումների համաձայն, OMF *և* OMF′ *եռանկյուններից ունենք՝*

$$\rho^2=r^2+a^2+2ar\cos\theta,$$
$$\rho'^2=r^2+a^2-2ar\cos\theta,$$

իսկ սահմանման համաձայն՝

---

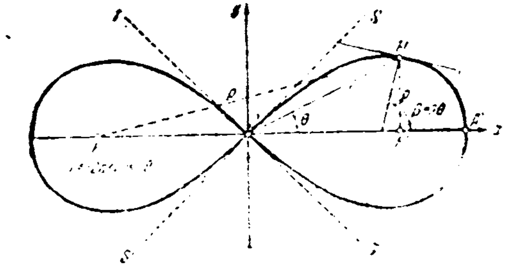
* FF′ *հեռավորության և* $\rho\rho'$ *արտադրյալի հաստատուն մեծության միջև մատնանշված առնչության դեպքում, ակներևաբար,* FF′ *հատվածի* O *միջնակետը պատկանում է կորին* $(\rho=\rho'=a)$: *Դրությունն այլ է, երբ* $\rho\rho'=b^2$ *որտեղ* $b\neq a$. *այդ դեպքում ստացվում են, այսպես կոչված, Կ ա ս ս ի ն ի ի օ վ ա լ ն ե ր:*

$$\rho^2\rho'^2=(r^2+a^2)^2-4a^2r^2\cos^2\theta=a^4,$$

որտեղից, տարրական ձևափոխություններից հետո, կստանանք՝

$$r^2=2a^2\cos 2\theta։$$

Այս էլ հենց լեմնիսկատի բևեռային հավասարումն է։



Գծ. 122.

Քանի որ այս հավասարման ձախ մասը, հետևաբար նաև աջ մասը, բացասական արժեքներ ստանալ չի կարող, ուստի θ անկյունը կարող է փոփոխվել միայն այնպիսի միջակայքերում, որոնց համար $\cos 2\theta \geq 0$. դրանք են՝

$$\left(0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right), \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)։$$

Ամբողջ կորը կտեղավորվի բևեռային առանցքի հետ $\frac{\pi}{4}$ և $\frac{3\pi}{4}$ անկյուններ կազմող SS և TT ուղիղներով կազմված երկու հակադիր անկյուններում (տես գծագիրը)։ Նա ինքն իրեն հատում է բևեռում, որին համապատասխանում են $\theta=\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ արժեքները։

Եթե սովորական ձևով անցնենք ուղղագիծ կոորդինատներին, հեշտությամբ կստանանք լեմնիսկատի հետևյալ (հանրահաշվական) հավասարումը՝

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)։$$

217. ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐ ԵՎ ԿՈՐԵՐ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ։

Մենք չենք ենթադրում այստեղ խորանալ դիֆերենցիալ հաշվի երկրաչափական կիրառություններում տարածության մեջ, այդ հարցերը թողնելով դիֆերենցիալ երկրաչափության հատուկ դասընթացին։ Այդ նկատառումով, տարածական կորերի նկատմամբ մենք կսահմանափակվենք սոսկ նրանով, ինչը անհրա-

ժեշտ է հենց անալիզի դասընթացի հետագա մասերի համար։

Ինչպես և վերևում (մեկ անգամ էլ հիշեցնենք այդ), բոլոր դիտարկվող ֆունկցիաները ենթադրելու ենք անընդհատ իրենց ածանցյալների հետ միասին ըստ բոլոր արգումենտների։

Մենք ելնելու ենք կոորդինատային առանցքների Oxyz *ուղղանկյուն սիստեմից։ Մենք արդեն առիթ ենք ունեցել ասելու, որ տարածության մեջ մակերևույթը կարող է արտահայտվել ընթացիկ կոորդինատների միջև հետևյալ տեսքի հավասարումով՝*

$$z=f(x, y) \tag{6}$$

[*տես. օրինակ,* 150]։ *Այդպիսի հավասարումը, ինչպես նաև նրան համանման* $x=g(y, z)$ *և* $y=h(z, x)$ *հավասարումները, մենք անվանելու ենք մակերևույթի բացահայտ հավասարում։*

Այս պարզագույն դեպքին, որոշ իմաստով, բերվում են նաև մակերևույթի տրման մյուս եղանակները։

Հաճախ է պատահում, երբ մակերևույթն արտահայտվում է

$$F(x, y, z)=0 \tag{7}$$

տեսքի հավասարումով, որը լուծված չէ այս կամ այն կոորդինատի նկատմամբ (մակերևույթը տրված է անբացահայտ)։ Եթե այդ հավասարմանը բավարարող (x_0, y_0, z_0) *կետում* $F'_x(x_0, y_0, z_0)$, $F'_y(x_0, y_0, z_0)$, $F'_z(x_0, y_0, z_0)$ *ածանցյալներից թեկուզ մեկը տարբեր է 0-ից, ապա այդ կետի շրջակայքում մակերևույթը ներկայացնելի է այս կամ այն տիպի բացահայտ հավասարումով։ Իրոք, եթե, օրինակի համար,* $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, *ապա* n° 198-*ի* III *թեորեմայի համաձայն, հավասարումն առնվազն դիտարկելի կետի շրջակայքում* z-*ը որոշում է իբրև* x-*ի ու* y-*ի՝* $z=f(x, y)$ *միարժեք ֆունկցիա (ընդ որում՝ անընդհատ իր ածանցյալների հետ միասին ըստ բոլոր արգումենտների)։*

Այսպիսով, բացառություն կարող է լինել մակերևույթի միայն եզակի կետերի նկատմամբ, որոնք բավարարում են միաժամանակ երեք պայմանների՝

$$F'_x=0, \quad F'_y=0, \quad F'_z=0^{*}.$$

** Այստեղ և հետագայում պետք է նկատի ունենալ «եզակի» կետերի սահմանումների վերաբերյալ ծանոթագրությունները 575 և 576 էջերում։*

$$F(x, y)=0 \tag{8}$$

հավասարումը, որը կոորդինատներից մեկը բոլորովին չի պարունակում, նույնպես կարող է մեկնաբանվել որպես մակերևույթ։ Իրոք, xy հարթության վրա նա արտահայտում է մի կոր. եթե նրա, որպես ուղղորդի, վրա կառուցենք գլանային մակերևույթ՝ z-երի առանցքին զուգահեռ ծնորդներով, ապա այդ մակերևույթի բոլոր կետերը, և միայն նրանք, կբավարարեն տված հավասարմանը (քանի որ z-ը նրա մեջ չի մտնում և ոչնչով կաշկանդված չէ)։

Նման ձևով մեկնաբանվում են նաև $G(y, z)=0$ *կամ* $H(z, x)=0$ *տեսքի հավասարումները։*

Այժմ դիմենք կորերին տարածության մեջ։ Տարածության մեջ կորը տալու պարզագույն եղանակն այն է, երբ երկու կոորդինատները, օրինակ՝ y-ն ու z-ը, տրվում են որպես երրորդի, x-ի, ֆունկցիաներ՝

$$y=f(x), \quad z=g(x)\text{։} \tag{9}$$

Այսպիսի եղանակը բնական ընդհանրացումն է հարթության վրա կորը բացահայտորեն տալու եղանակի։ Այստեղ էլ կարելի էր այդ տիպի հավասարումներն անվանել կորի բացահայտ հավասարումներ։

Ինչպես և հարթ կորի դեպքում տարածական կորն անալիտիկորեն ներկայացնելու մյուս եղանակները նույնպես, հիմնականում, բերվում են բացահայտ հավասարումների դեպքին:

(9) հավասարումներից յուրաքանչյուրը կարելի է մեկնաբանել կամ որպես համապատասխան կոորդինատային հարթության (xy-ի կամ xz-ի) վրա մեր կորի պրոյեկցիայի հավասարում, կամ որպես համապատասխան առանցքին (z-երի կամ y-երի) զուգահեռ ծնորդներ ունեցող պրոյեկտող գլանի հավասարում [տես (8)]։

Տարածական կորը տալու ավելի ընդհանուր եղանակն այն է, երբ կորը դիտում են որպես ընդհանրապես երկու մակերևույթների հատույթ։ Եթե այդ մակերևույթներից յուրաքանչյուրն արտահայտվում է հետևյալ հավասարումներից մեկով՝

$$F(x, y, z)=0, \quad G(x, y, z)=0, \tag{10}$$

ապա այդ երկու հավասարումները միասին անալիտիկորեն ներ-

կայացնում են հատման կորը։ (10) հավասարումներն անվանում են կորի անբացահայտ հավասարումներ։

F *և* G *ֆունկցիաների մասնակի ածանցյալներից կազմենք հետևյալ մատրիցը՝*

$$\left\| \begin{matrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{matrix} \right\|, \tag{11}$$

Դիցուք այդ մատրիցի դետերմինանտներից որևէ մեկը, օրինակ՝

$$\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}$$

դետերմինանտը, դիտարկվող կետում հավասար չէ 0*-ի։ Այդ ժամանակ,* n° 198*-ի* IV *թեորեմայի համաձայն, այդ կետի շրջակայքում (10) հավասարումները կարելի է փոխարինել (9) տիպի հավասարումներով (ընդ որում. այդ հավասարումներում մասնակցող ֆունկցիաներն իրենց ածանցյալների հետ միասին դարձյալ անընդհատ կլինեն)։*

Այսպիսով, կորը տալու պարզագույն եղանակին բերելու հնարավորությունը դադարում է ապահովվել կորի միայն այնպիսի կետի շրջակայքում, որտեղ (11) մատրիցի բոլոր երեք դետերմինանտները միաժամանակ զրո են դառնում (այդպիսի կետն անվանում են եզակի կետ)։

218. ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄԸ։ *Անցնենք, վերջապես, մակերևույթների ու կորերի պարամետրական ներկայացմանը, ընդ որում այս անգամ սկսենք կորերից։*

Ինչպես մենք արել էինք հարթության վրա, տարածական կորի փոփոխական կետի կոորդինատները կարելի է տալ որպես մի օժանդակ t *փոփոխականի—պարամետրի—ֆունկցիաներ՝*

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t), \tag{12}$$

այն հաշվով, որպեսզի t*-ի փոփոխման ժամանակ այդ հավասարումներով որոշվող կոորդինատներ ունեցող կետը գծի դիտարկելի կորը (կորն (9) բացահայտ հավասարումներով տալու դեպքում պարամետրի դերը խաղում էր* x*-ը)։*

Եթե կորի տվյալ կետում x'_t, y'_t, z'_t *ածանցյալներից թեկուզ մեկը տարբեր է* 0*-ից, ապա, ինչպես և հարթ կորի դեպ-*

քում, հեշտ է այդ կետի շրջակայքում պարամետրականից անցնել կորի բացահայտ հավասարումներին։ Միայն եզակի կետի շրջակայքում, որտեղ այդ երեք ածանցյալներն զրո են, չի կարելի երաշխավորել այդպիսի հնարավորություն։

*Ինչպես և հարթ կորի դեպքում, եզակի կետերի թվին են պատկանում նաև այսպես կոչված բազմապատիկ կետերը, այսինքն՝ այնպիսի կետեր, որոնք ստացվում են պարամետրի երկու կամ ավելի թվով արժեքների դեպքում**։

Այժմ դիմենք ***մակերևույթների պարամետրական ներկայացմանը***։

Այս անգամ կետի դիրքը մակերևույթի վրա որոշելու համար կպահանջվի երկու պարամետր (մակերևույթը (6) հավասարումով բացահայտորեն տալու դեպքում այդ պարամետրերի դերը խաղացել են կոորդինատներից երկուսը՝ x*-ն ու* y*-ը)։ Դիցուք ունենք*

$$x=\varphi(u, v), \quad y=\psi(u, v), \quad z=\chi(u, v) \qquad (13)$$

հավասարումները, որտեղ (u, v) *կետը փոփոխվում է մի* Δ *փակ տիրույթում։ Կազմենք ածանցյալների մատրիցը՝*

$$\left\|\begin{matrix} \varphi'_u & \psi'_u & \chi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v & \chi'_v \end{matrix}\right\| \qquad (14)$$

և ենթադրենք, թե $u=u_0$, $v=v_0$ *դեպքում զրոյից տարբեր է այդ մատրիցի դետերմինանտներից թեկուզ մեկը, օրինակ՝*

$$\begin{vmatrix} \varphi'_u & \psi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Այդ ժամանակ, (13) հավասարումներից առաջին երկուսը գրելով այսպես՝

$$\varphi(u, v)-x=0, \quad \psi(u, v)-y=0,$$

մենք կարող ենք, n° 198*-ի* IV *թեորեմայի համաձայն, պնդել, որ* u, v, x, y *չորս փոփոխականներով երկու հավասարումների այդ սիստեմով (եթե սահմանափակվենք մեզ հետաքրքրող արժեքներին մոտ արժեքներով)* u, v *փոփոխականները կորոշվեն որպես* x*-ի ու* y*-ի միարժեք ֆունկցիաներ՝*

* Տես 665 էջի ծանոթագրությունը։

$$u=g(x, y), \quad v=h(x, y),$$

որոնք անընդհատ են իրենց ածանցյալների հետ միասին։ Վերջապես, u-ի և v-ի այդ արտահայտությունները տեղադրելով (13)-ի երրորդ հավասարման մեջ, կհանգենք մակերևույթի սովորական բացահայտ ներկայացմանը՝

$$z=\chi(g(x, y), \quad h(x, y))=f(x, y),$$

որտեղ f ֆունկցիան եռ անընդհատ է և ունի անընդհատ ածանցյալներ։

Միայն այն դեպքում, երբ (14) մատրիցի երեք դետերմինանտներն էլ միաժամանակ դառնում են 0 (մակերևույթի համապատասխան կետը եղակի կետ կլինի) այդպիսի ներկայացումը կարող է անհնարին լինել։

Ընթերցողի համար պարզ է, որ մակերևույթի պարամետրական ներկայացման կապակցությամբ կարելի է սահմանել նաև մակերևույթի պարզ և բազմապատիկ կետերի գաղափարները. առաջինն ստացվում է պարամետրերի արժեքների միայն մեկ (u, v) սիստեմի դեպքում, իսկ երկրորդը՝ առնվազն երկու*։

Վերադառնալով մակերևույթի (13) պարամետրական հավասարումներին, ֆիքսենք նրանց մեջ պարամետրերից մեկի արժեքը, օրինակ, ընդունենք $u=u_0$։ Այդ ժամանակ, ակներևաբար, կստացվեն իր բոլոր կետերով մակերևույթի վրա գտնվող մի որոշ կորի հավասարումներ՝

$$x=\varphi(u_0, v), \quad y=\psi(u_0, v), \quad z=\chi(u_0, v)։$$

Փոփոխելով u_0 արժեքը, կստանանք այդպիսի «(u) կորերի» մի ամբողջ ընտանիք։ Նմանապես, ֆիքսելով $v=v_0$ արժեքը, դարձյալ կստանանք մակերևույթի վրա գտնվող մի կոր՝

$$x=\varphi(u, v_0), \quad y=\psi(u, v_0), \quad z=\chi(u, v_0).$$

այդպիսի «(v) կորերից» եռ կազմվում է ամբողջ ընտանիք։

Քանի որ u-ի և v-ի արժեքները կարելի է դիտել որպես կետերի կոորդինատներ մակերևույթի վրա, ուստի այդ

---

* Այստեղ պետք անել նույն վերապահումը, ինչ որ 665 էջի ծանոթագրությունում. միայն փակ կորի փոխարեն պետք խոսել փակ մակերևույթի մասին:

գծերն անվանում են մակերևույթի կոորդինատային գծեր։ Եթե մակերևույթի կետը պարզ կետ է, այսինքն՝ եթե ստացվում է պարամետրերի արժեքների միայն մեկ (u, v) սիստեմի դեպքում, ապա այդ կետով անցնում է յուրաքանչյուր ընտանիքից միայն մեկ կոորդինատային գիծ։

Ամփոփելով մակերևույթներն ու տարածական կորերն անալիտիկորեն ներկայացնելու տարբեր եղանակները [տես (6), (7), (8) և (9), (10), (12)], մենք կարող էինք կրկնել n° 213-ի վերջում ասածները. սովորական (և պարզ) կետի շրջակայքում հարցը հանգում է բացահայտ ներկայացման պարզագույն դեպքին։

219. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Վիվիանիի կորը։ Այդպես է կոչվում սֆերայի և ուղիղ գլանի հատման գիծը, երբ գլանի համար ուղղորդ է ծառայում սֆերայի շառավղի, որպես տրամագծի, վրա կառուցված շրջանագիծը (գծ. 123)։ Դիցուք սֆերայի շառավիղն է R. եթե առանցքները վերցնենք այնպես, ինչպես ցույց է տրված գծագրում, ապա սֆերայի ու գլանի հավասարումները համապատասխանաբար կլինեն՝

$$x^2+y^2+z^2=R^2,\quad x^2+y^2=Rx.$$

Այս երկու հավասարումները միասին որոշում են հենց մեր կորը։

Կորն ունի կապված 8 թվանշանի տեսք. (R, 0, 0) կետում նա ինքն իրեն հատում է, այնպես որ այդ կետն անշուշտ եզակի կետ է։ Այդ հաստատվում է նաև հաշվումներով։ Տված հավասարումների համար կազմած

$$\left\|\begin{matrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x-R & 2y & 0 \end{matrix}\right\|$$

մատրիցն ունի հետևյալ դետերմինանտները՝

$$\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{vmatrix}=-4yz,\quad \begin{vmatrix} 2z & 2x \\ 0 & 2x-R \end{vmatrix}=4xz-2Rz,\quad \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x-R & 2y \end{vmatrix}=2Ry,$$

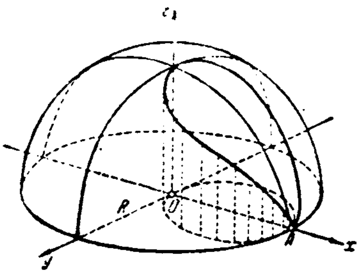
որոնք բոլորը միաժամանակ զրո են դառնում հենց այդ կետում։

Վիվիանիի կորը կարելի է ներկայացնել նաև պարամետրական տեսքով, օրինակի համար, այսպես՝

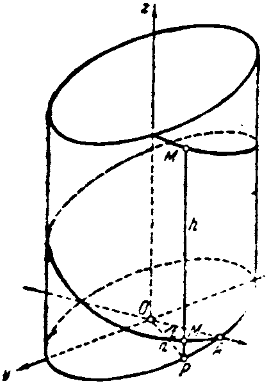
$$x=R\sin^2 t,\quad y=R\sin t\cos t,\quad z=R\cos t.$$

Իրոք, դժվար չէ ստուգել, որ այդ արտահայտությունները նույնաբար բավարարում են կորի անբացահայտ հավասարումներին և որ t պարամետրը, ասենք թե 0-ից մինչև 2π, փոփոխվելիս, ամբողջ կորը լրիվ գծվում է։ (R, 0, 0) կետն ստացվում է երկու անգամ՝ $t=\frac{\pi}{2}$ և $t=\frac{3\pi}{2}$ դեպքերում. այսինքն՝ բազմապատիկ կետ է, ինչպես և պիտի սպասեինք։

2) Դեպքեր կան, երբ պարամետրական ներկայացումը բնականաբար բխում է հենց կորի ծագումից։ Իբրև օրինակ դիտարկենք պ տ ու տ ա կ ա գ ի ծ ը։ Նրա ծագումը կարելի է պատկերացնել հետևյալ կերպ. դիցուք մի M *կետ, որն սկզբում գտնվել է* A *դիրքում (գծ. 124), հավասարաչափ պտտվում*



գծ. 123.



գծ. 124.

է z*-երի առանցքի շուրջը (ասենք թե ժամացույցի սլաքի շարժման ուղղությամբ) և միաժամանակ մասնակցում է այդ առանցքի զուգահեռ համընթաց հավասարաչափ շարժմանը (ասենք թե դրական ուղղությամբ)։* M *կետի տրաեկտորիան էլ հենց կոչվում է պ տ ու տ ա կ ա գ ի ծ։ Իբրև* M *կետի դիրքը որոշող պարամետր կարելի է վերցնել* t *անկյունը, որն* x*-երի առանցքի հետ կազմում է* OM *հատվածի* OP *պրոյեկցիան։* M *կետի* x *և* y *կոորդինատները կլինեն նույնը, ինչ որ* P *կետի համար, այսինքն որ* $x=a\cos t$ *և* $y=a\sin t$*, որտեղ* a*-ն՝* P *կետով գծվող շրջանագծի շառավիղն է։ Ինչ վերաբերում է* z *ուղղաձիգ տեղափոխությանը, ապա նա աճում է պտտման* t *անկյանը համեմատական (քանի որ համընթաց ու պտտական շարժումները երկուսն էլ հավասարաչափ են), այսինքն՝* $z=ct$*։ Պտուտակագծի պարամետրական հավասարումները, այսպիսով, կլինեն՝*

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=ct.$$

Ստացված պտուտակագիծը կոչվում է ձ ա խ պտուտակագիծ. կոորդինատային առանցքների աջ սիստեմի դեպքում կստանայինք աջ պտուտակագիծ։

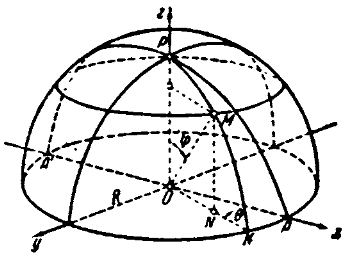
Հեշտ է (15) հավասարումներից t *պարամետրն արտաքսել և ստանալ բացահայտ հավասարումներ. օրինակ, վերջին հավասարումից* t*-ն գտնելով և տեղադրելով առաջին երկուսի մեջ կստանանք՝*

$$x=a\cos\frac{z}{c},\quad y=a\sin\frac{z}{c}.$$

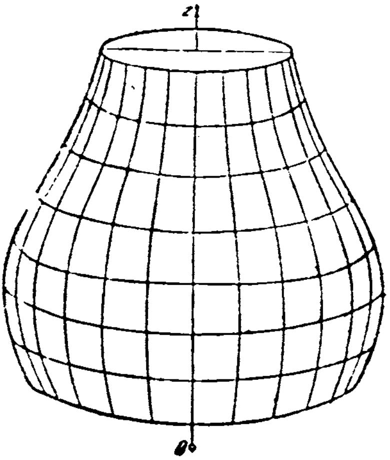
3) Դիտարկենք R շառավիղ ունեցող սֆերան, որի կենտրոնն սկզբնակետն է (գծ. 125)։ Նրա անբացահայտ հավասարումն, ինչպես հայտնի է, կլինի՝

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Ցանկանալով ստանալ նրա սովորական պարամետրական տեսքով ներկայացումը, առնենք նրա AKA' «հասարակածային» հատույթը, իսկ P ու P' բևեռներով և դիտարկելի M կետով՝



գծ. 125.



Գծ. 126.

PMKP' միջօրեականը։ M կետի դիրքը սֆերայի վրա կարելի է որոշել $\varphi=\angle POM$ և $\theta=\angle AOK$ անկյուններով։ Ունենք՝ $z=NM=R\cos\varphi$։ Այնուհետև՝ $ON=R\sin\varphi$, իսկ ON-ի միջոցով x ու y կոորդինատները (M-ի համար նույնն են, ինչ որ N-ի համար) կարտահայտվեն այսպես՝ $z=ON\cos\theta$ $y=ON\sin\theta$։ Այդ բոլոր արդյունքներն ի մի հավաքելով, սֆերայի պարամետրական հավասարումները կստանանք այսպիսի տեսքով՝

$$x=R\sin\varphi\cos\theta,\quad y=R\sin\varphi\sin\theta,\quad z=R\cos\varphi,$$

ընդ որում, բավական է φ անկյունը փոփոխել 0-ից մինչև π, իսկ θ անկյունը՝ 0-ից մինչև 2π։

Եթե φ անկյունը փոխարինենք $\lambda=\frac{\pi}{2}-\varphi$ անկյունով, որը փոփոխվում է $-\frac{\pi}{2}$-ից մինչև $+\frac{\pi}{2}$, իսկ θ-ն փոփոխենք $-\pi$-ից մինչև $+\pi$, մենք կստանանք սովորական աշխարհագրական կոորդինատները՝ աշխարհագրական լայնությունն ու երկարությունը։

Մասնակի ածանցյալներից կազմած

$$\left\|\begin{matrix} R\cos\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\sin\theta & -R\sin\varphi \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{matrix}\right\|$$

մատրիցի համար բոլոր դետերմինանտները, որոնք կլինեն՝

$$R^2\sin^2\varphi\cos\theta,\quad R^2\sin^2\varphi\sin\theta,\quad R^2\sin\varphi\cos\varphi,$$

միաժամանակ զրո են դառնում $\varphi=0$ և $\varphi=\pi$ դեպքում։ Սակայն ակներև է, որ երկու բևեռներն էլ եզակիություն ունեն սֆերայի միայն այս անալիտիկ ներկայացման համար։

Հեշտ է տեսնել, որ սֆերայի վրա կոորդինատային գծերի մի ընտանիքը կկազմվի *միջօրեականներից* ($\theta=$const.), իսկ մյուսը՝ զուգահեռական շրջանագծերից ($\varphi=$const.)։

4) Նախորդ օրինակը կարելի է ընդհանրացնել հետևյալ կերպ։ Դիցուք xz հարթության վրա տված է մի կոր (ծնորդ) իր պարամետրական հավասարումներով՝

$$x=\varphi(u),\quad z=\psi(u),\tag{16}$$

ընդ որում $\varphi(u)\geq 0$։ Սկսենք պտտել այն, իբրև պինդ մարմին, Oz առանցքի շուրջը (գծ. 126)։ Եթե v-ով նշանակենք պտտման անկյունը, ապա ստացվելիք *պտտման մակերևույթի* հավասարումները կգրվեն հետևյալ տեսքով՝

$$x=\varphi(u)\cos v,\quad y=\varphi(u)\sin v,\quad z=\psi(u)\quad (0\leq v\leq 2\pi)\text{։}$$

Եթե xz հարթության վրա վերցնենք կիսաշրջանագիծ՝

$$x=R\sin u,\quad z=R\cos u$$

և այն պտտենք z-երի առանցքի շուրջը, ապա այդպիսով ստացվող սֆերայի անալիտիկ ներկայացումը կստացվի նախկին տեսքով (նշանակումների ճշգրտությամբ)։

Ընթերցողին ենք թողնում համոզվել, որ պտտման մակերևույթի համար եզակի կետեր կարող են լինել միայն պտտման առանցքի վրա գտնվող կետերը կամ այնպիսի կետեր, որոնք պտտման ժամանակ ստացվում են ծնորդի եզակի կետերից։

Այստեղ էլ կոորդինատային գծեր են ծառայում ծնորդի տարբեր դիրքերը (միջօրեականները) և զուգահեռական շրջանագծերը։

5) Եթե (16) կորի *պտտական* շարժմանը միացնենք նաև համընթաց շարժում՝ պտտման առանցքին զուգահեռ, ապա (ենթադրելով, որ երկու շարժումներն էլ հավասարաչափ են) կստանանք *ընդհանուր պտուտակային մակերևույթ*՝

$$x=\varphi(u)\cos v,\quad y=\varphi(u)\sin v,\quad z=\psi(u)+cv\text{։}$$

Վերցնենք, մասնավորապես, որպես ծնորդ x-երի առանցքի դրական մասը՝

$$x=u,\quad z=0\qquad (u\geq 0)\text{։}$$

Նրան ենթարկելով պտուտակային շարժման, կստանանք սովորական *պտուտակային մակերևույթ*՝

$$x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = cv:$$

Ընդհանուր պտուտակային մակերևույթի համար կոորդինատային գծերի ընտանիքներից մեկը կազմված է ծնորդների տարբեր դիրքերից ($v = \mathrm{const.}$), *իսկ մյուսը՝ պտուտակագծերից* ($u = \mathrm{const.}$):

§ 2. ՇՈՇԱՓՈՂ ԵՎ ՇՈՇԱՇՈՂ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆ

220. ՀԱՐԹ ԿՈՐԻ ՇՈՇԱՓՈՂԻ ՈՒՂՂԱՆԿՑՈՒՆ ԿՈՈՐԴԻՆԱՏՆԵՐՈՎ։ *Շոշափողի գաղափարը մեզ արդեն հանդիպել է մի քանի անգամ [տես, օրինակ, 90]։ Այն կորը, որը տված է*

$$y = f(x)$$

բացահայտ հավասարումով, որտեղ f-ը՝ անընդհատ ֆունկցիա է և ունի անընդհատ ածանցյալ, իր յուրաքանչյուր (x, y) կետում ունի շոշափող, որի $\operatorname{tg}\alpha$ անկյունային գործակիցն արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\operatorname{tg}\alpha = y'_x = f'(x):$$

Այսպիսով, շոշափողի հավասարումն ունի այսպիսի տեսք՝

$$Y - y = y'_x(X - x): \tag{1}$$

Այստեղ, ինչպես նաև սորև, X-ն ու Y-ը նշանակում են ընթացիկ կոորդինատները, իսկ x-ն ու y-ը՝ շոշափման կետի կոորդինատները։

Հեշտ է ստանալ նաև նորմալի, այսինքն՝ շոշափման կետում շոշափողին ուղղահայաց ուղիղի, հավասարումը՝

$$Y - y = -\frac{1}{y'_x}(X - x)$$

կամ՝

$$X - x + y'_x(Y - y) = 0: \tag{2}$$

Շոշափողի ու նորմալի կապակցությամբ դիտարկում են մի քանի հատվածներ, այն է՝ TM, MN հատվածներն ու նրանց TP, PN պրոյեկցիաներն x-երի առանցքի վրա (գծ. 127)։ Վերջիններս կոչվում են, համապատասխանաբար, ենթաշոշափող և ենթանորմալ, և նշանակվում են՝ sbt (subtangens) *և* sbn

(subnormal)։ (1) և (2) հավասարումներում ընդունելով $Y=0$, հեշտ է հաշվել ու ստանալ՝

$$sbt=TP=\frac{y}{y'_x},\quad sbn=PN=yy'_x\text{ ։} \tag{3}$$

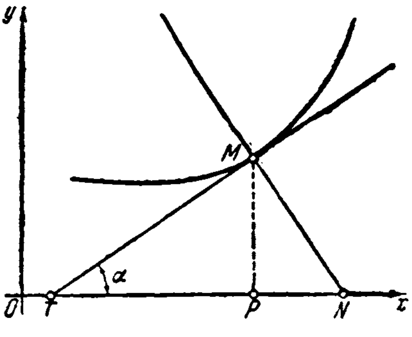
Այդ ժամանակ MPT և MPN եռանկյուններից կորոշվեն նաև շոշափողի ու նորմալի հատվածների երկարությունները՝

$$\left.\begin{aligned} t=TM&=\left|\frac{y}{y'_x}\sqrt{1+y'^2_x}\right|,\\ n=MN&=\left|y\sqrt{1+y'^2_x}\right|\text{ ։}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Կորը՝

$$F(x,\ y)=0$$

անբացահայտ հավասարումով տալու դեպքում, նրա $M(x,\ y)$ սովորական կետի շրջակայքում կարելի է պատկերացնել, որը կորը տված է բացահայտ հավասարումով։ Եթե M կետում, օրինակ՝ $F'_y(x,\ y)\neq 0$, ապա կորը կարտահայտվի $y=f(x)$ տեսքի հավասարումով, որտեղ f ֆունկցիան անընդհատ է, և ունի անընդհատ ածանցյալ։ Այստեղից պարզ է, որ կորի համար M կետում գոյություն ունի շոշափող, որի հավասարումը կարելի է ներկայացնել (1) տեսքով։ Սակայն մենք գիտենք [199 (15)], որ այդ դեպքում՝



Գծ. 127.

$$y'_x=-\frac{F'_x(x,\ y)}{F'_y(x,\ y)}.$$

տեղադրելով այս արտահայտությունը, պարզ ձևափոխություններից հետո կստանանք շոշափողի՝ x-ի ու y-ի նկատմամբ լրիվ սիմետրիկ հավասարումը՝

$$F'_x(x, y)(X-x)+F'_y(x, y)(Y-y)=0\text{։} \tag{5}$$

Նույն արդյունքը կստանանք նաև այն դեպքում, երբ M կետում $F'_y=0$, բայց $F'_x\neq 0$։ Միայն եզակի կետում է այդ հավասարումն իմաստը կորցնում և այնտեղ շոշափողի վերաբերյալ ոչինչ չի կարելի ասել առանց լրացուցիչ հետազոտության [226]։

Նորմալի հավասարումն այս դեպքում, ակներևաբար, կլինի այսպիսին՝

$$F'_y(x, y)(X-x)-F'_x(x, y)(Y-y)=0\text{։}$$

Վերջապես, ենթադրենք, թե կորը տված է պարամետրական հավասարումներով՝

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\text{։}$$

Մենք տեսել ենք [105 (11)], որ եթե $\varphi'(t)\neq 0$, կորի շոշափողը գոյություն ունի և ունի հետևյալ անկյունային գործակիցը՝

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y'_t}{x'_t}\text{։} \tag{6}$$

Շոշափողի հավասարումը կարելի է գրել այսպես՝

$$Y-y=\frac{y'_t}{x'_t}(X-x)$$

կամ այսպես՝

$$\frac{X-x}{x'_t}=\frac{Y-y}{y'_t}\text{։}$$

Այս վերջին տեսքով հավասարումը պիտանի է նաև այն դեպքում, երբ $x'_t=0$, բայց $y'_t\neq 0$*։ Միայն եզակի կետում,

* Այդ ժամանակ, ինչպես անալիտիկ երկրաչափության մեջ միշտ պայմանավորվում են, եթե $\frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}$ համեմատության մեջ հետնորդ անդամներից մեկը զրո է, այդ պարզապես նշանակում է, որ համապատասխան նախորդ անդամը նույնպես զրո է։

որտեղ և $x'_t=0$, և $y'_t=0$, հավասարումն իմաստը կորցնում է և շոշափողի հարցը բաց է մնում [227]։

Երբեմն հարմար է, երկու հայտարարները բազմապատկելով dt-ով, շոշափողի հավասարումը գրել այսպես՝

$$\frac{X-x}{dt}=\frac{Y-y}{dt}. \qquad (7)$$

221. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Պարաբոլ՝ $y^2=2px$։ Այս հավասարությունը դիֆերենցելով, y-ը համարելով x-ի ֆունկցիա, կստանանք $yy'_x=p$։ Այսպիսով [տես (3)], պարաբոլի ենթանորմալը հաստատուն մեծություն է։ Այստեղից բխում է պարզ եղանակ պարաբոլի նորմալի (նրա հետ նաև շոշափողի) կառուցման համար։

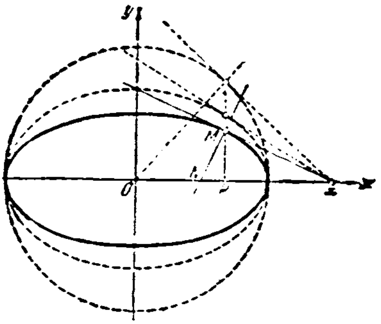
(4) բանաձևի համաձայն, պարաբոլի նորմալ[redacted]հատվածի[redacted]մար կունենանք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$n=\sqrt{y^2+p^2}.$$

2) Էլիպս՝ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (գծ. 128)։ (5) բանաձևի համաձայն, շոշափողի համար ունենք այսպիսի հավասարում

$$\frac{x}{a^2}(X-x)+\frac{y}{b^2}(Y-y)=0.$$

Հաշվի առնելով էլիպսի հավասարումը, այս հավասարումը կարելի է գրել ավելի պարզ տեսքով՝



Գծ. 128.

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}=1.$$

Այստեղ ընդունելով $Y=0$, կգտնենք $X=\frac{a^2}{x}$. Այսպիսով, x-երի առանցքի հետ շոշափողի հատման T կետը ոչ y-ից է կախված, ոչ b-ից։ Տարբեր b-երի համապատասխանող տարբեր էլիպսների՝ նրանց միևնույն x աբսցիսն ունեցող կետերում տարված շոշափողները բոլորն անցնում են x-երի առանցքի միևնույն T կետով։ Քանի որ $b=a$ դեպքում էլիպսը վեր է ածվում շրջանագծի, որի համար շոշափողը հեշտ է կառուցվում, ուստի T կետն անմիջապես որոշվում է, և այդ հանգամանքը բերում է էլիպսի շո-

շոշափողի կառուցման պարզ եղանակի, որը պարզ երևում է գծագրի վրա*։ Հեշտ է որոշել էլիպսի նորմալի հատվածի երկարությունը՝

$$n=\sqrt{\frac{b^4x^2+a^4y^2}{a^2}}.$$

Այդպիսի արտահայտություն կստացվի նաև

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

հիպերբոլի դեպքում։

9) Աստրոիդ՝ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (գծ. 112)։

Շոշափողի հավասարումը կլինի՝

$$x^{-\frac{1}{3}}(X-x)+y^{-\frac{1}{3}}(Y-y)=0,$$

որը կորի հավասարման օգնությամբ կարելի է ձևափոխել այսպես՝

$$\frac{X}{x^{\frac{1}{3}}}+\frac{Y}{y^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{2}{3}}$$

կամ այսպես՝

$$\frac{X}{a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}}+\frac{Y}{a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}}=1.$$

Այս վերջին հավասարումը՝ «հատվածներով արտահայտված հավասարում» է։ Հետևաբար, շոշափողն առանցքների վրա անջատում է $a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$ և $a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ հատվածները։ Այստեղից հեշտությամբ ստացվում է աստրոիդի մի հետաքրքիր հատկություն։ Շոշափողի՝ առանցքների միջև գտնվող հատվածի երկարությունը նշանակելով t-ով կունենանք՝

---

* Էլիպսի շոշափողների այդ հատկությունն անմիջականորեն կապված է այն փաստի հետ, որ էլիպսը կարելի է դիտել որպես արտագծած շրջանագծի օրթոգոնալ պրոյեկցիա, եթե շրջանագծի հարթությունն x-երի առանցքի շուրջը պտտենք համապատասխան անկյունով։

$$\tau^2 = a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{4}{4}} y^{\frac{2}{3}} = a^2$$

և՝

$$\tau = a = \text{const}.$$

Այսպիսով, աստրոիդի սիմետրիայի առանցքները բոլոր շոշափողների վրա անջատում են հավասար հատվածներ։

4) Ցիկլոիդ՝ $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ *(գծ. 114)։ Մենք արդեն ստացել ենք* [215, *6)*] $y'_x = \mathrm{ctg}\frac{t}{2}$ *հավասարությունը, այսինքն՝*

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{ctg}\frac{t}{2} = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right),$$

և կարելի է ընդունել՝ $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$.

Հիշենք (գծ. 114), որ $t = \angle MDN$, *այնպես որ* $\angle MEN = \frac{t}{2}$. *Եթե* EM *ուղիղը շարունակենք մինչև* x-*երի առանցքի հետ հատվելը* T *կետում, ապա* $\angle FTx = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} = \alpha$. *Հետևաբար,* ME *ուղիղը, որը ցիկլոիդի կետը միացնում է գլորվող շրջանի բարձրագույն կետի հետ (համապատասխան դիրքում), հենց կլինի շոշափողը։ Այստեղից պարզ է, որ* MN *ուղիղը կլինի նորմալը։*

Հետագայում մեզ հարկավոր է լինելու նորմալի n *հատվածի երկարության արտահայտությունը, որը հեշտությամբ ստացվում է* ΔMEN *ուղղանկյուն եռանկյունից, այն է՝*

$$n = MN = 2a\sin\frac{t}{2}.$$

5) Էպիցիկլոիդ [*գծ. 115*]՝

$$x = a[(1+m)\cos mt - m\cos(1+m)t],$$

$$y = a[(1+m)\sin mt - m\sin(1+m)t].$$

x'_t *և* y'_t *ածանցյալների արտահայտությունները գրելով այսպես՝*

$$x'_t = 2am(1+m)\cdot\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\left(m + \frac{1}{2}\right)t,$$

$$y'_t = 2am(1+m)\cdot\sin\frac{t}{2}\cdot\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t,$$

կգտնենք՝

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y'_t}{x'_t}=\operatorname{tg}\left(m+\frac{1}{2}\right)t.$$

Այստեղից՝

$$\alpha=\left(m+\frac{1}{2}\right)t.$$

Եթե D կետը միացնենք M կետի հետ (գծ. 115), հենց այդ ուղիղն x-երի առանցքի հետ կկազմի այդպիսի անկյուն՝

$$\angle xTD=\angle DOT+\angle ODT=mt+\frac{t}{2}.$$

Հետևաբար, DT-ն շոշափողն է M կետում, իսկ MB-ն կլինի նորմալը։

6) Շ ր ջ ա ն ի է վ ո լ վ ե ն տ (գծ. 117)՝

$$x=a(t\sin t+\cos t),\quad y=a(\sin t-t\cos t).$$

Այստեղ՝

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y'_t}{x'_t}=\operatorname{tg}t,$$

որտեղից $\alpha=t$։ Այսպիսով, MT շոշափողը զուգահեռ է OB շառավղին և BM-ը մեր կորի նորմալն է։

Դ ի տ ո ղ ո ւ թ յ ո ւ ն։ 4), 5), 6) օրինակների արդյունքները կարելի էր ստանալ առանց որևէ հաշվումների, ելնելով կինեմատիկական նկատառումներից. մի կոր մյուսի վրայով գլորելիս, շոշափման կետն ամեն անգամ ծառայում է որպես ակնթարթային կենտրոն շարժվող պատկերի համար, այնպես որ նրա ամեն մի կետի տրաեկտորիայի նորմալն անցնում է այդ շոշափման կետով։

222. ՇՈՇԱՓՈՂԸ ԲԵՎԵՌԱՅԻՆ ԿՈՈՐԴԻՆԱՏՆԵՐՈՎ. Եթե կորը տված է $r=f(\theta)$ բևեռային հավասարումով, ապա, սովորական եղանակով անցնելով ուղղանկյուն կոորդինատներին, կորը պարամետրական տեսքով ներկայացնում ենք այսպես՝

$$x=r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta,$$

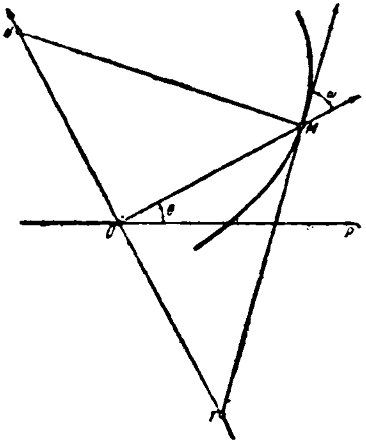
$$y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta,$$

ընդ որում, այստեղ պարամետրի դերը խաղում է θ-ն։ Այդ դեպքում, (6) ընդհանուր բանաձևի համաձայն, կստանանք՝

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y'_\theta}{x'_\theta}=\frac{r'_\theta\sin\theta+r\cos\theta}{r'_\theta\cos\theta-r\sin\theta}.$$

Սակայն, երբ կորը հետազոտում են բևեռային կոորդինատներով, սովորաբար շոշափողի դիրքը որոշում են ոչ թե բևեռային առանցքի հետ կազմած α *անկյունով, այլ շառավիղ-վեկտորի շարունակության հետ կազմած* ω *անկյունով (գծ. 110 և 129)։ Մենք արդեն ստացել ենք* [208, *4*] *պարզ բանաձև՝*

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{r}{r'_\theta}. \qquad (8)$$



Գծ. 129.

Ճիշտ այդպես էլ, t, n, sbt, sbn *հատվածների փոխարեն, որոնց մասին խոսվել է* n° 220*-ում, այստեղ դիտարկվում են ուրիշ հատվածներ։* O *բևեռով տանելով շառավիղ-վեկտորին ուղղահայաց մի առանցք (որը պտտվում է կետի տեղափոխման ժամանակ), շոշափողն ու նորմալը շարունակում են մինչև այդ առանցքի հետ, համապատասխանաբար,* T *և* M *կետերում հատվելը։ Այդ ժամանակ* TM *և* MN *հատվածները կոչվում են շոշափողի և նորմալի բևեռային հատվածներ, իսկ նրանց* TO *և* ON *պրոյեկցիաները այդ առանցքի վրա՝ բևեռային ենթաշոշափող ու բևեռային ենթանորմալ։ Այդ հատվածները նշանակելու ենք առաջվա նման, ներքևում նշանիկի տեղում ավելացնելով* p *տառը։ Օգտագործելով (8) բանաձևը, հեշտությամբ կստանանք՝*

$$sbt_p=TO=r\operatorname{tg}\omega=\frac{r^2}{r'_\theta},$$

$$sbn_p=ON=r\operatorname{ctg}\omega=r'_\theta,$$

իսկ այստեղից էլ՝

$$t_p = TM = \left|\frac{r}{r'_\theta}\sqrt{r^2 + r'^2_\theta}\right|,$$

$$n_p = MN = \sqrt{r^2 + r'^2_\theta}\text{:}$$

223. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ: *1) Արքիմեդյան սպիրալ (գալարագիծ) (գծ. 118)՝*

$$r = a\theta.$$

Քանի որ $r'_\theta = a$, *ուստի* $sbn_p = a = \text{const}$: *Այդ հնարավորություն է տալիս իսկույն որոշելու N կետի դիրքը, իսկ նրա հետ նաև նորմալի ու շոշափողի դիրքերը: Նկատենք, որ* $\operatorname{tg}\omega = \theta$, *այնպես որ՝* $\operatorname{tg}\omega \to \infty$, *երբ* $\theta \to \infty$, *այսինքն՝* ω *անկյունը ձգտում է ուղիղ անկյան:*

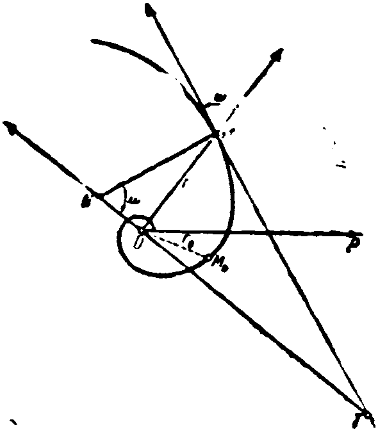
2) Հիպերբոլական սպիրալ (գծ. 119)՝

$$r = \frac{a}{\theta}\text{:}$$

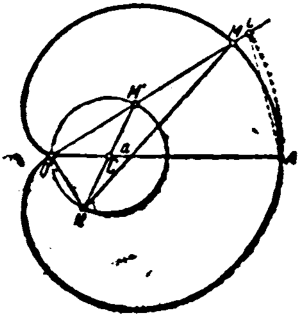
Այս անգամ $r'_\theta = -\frac{a}{\theta^2}$, $sbt_p = -a = \text{const.}$, *որը նույնպես հեշտացնում է շոշափողի կառուցումը:*

3) Լոգարիթմական սպիրալ (գծ. 130)՝

$$r = ae^{m\theta}\text{:}$$



Գծ. 130.



Գծ. 131.

Ունենք՝ $r'_\theta = mae^{m\theta}$, *այնպես որ՝* $\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{m} = \text{const.}$ *և* $\omega = \text{const.}$:

Այսպիսով, լոգարիթմական սպիրալն օժտված է մի նշանավոր հատկու-

թյամբ՝ շառավիղ-վեկտորով և շոշափողով կազմված անկյունը մնում է հաստատուն։ Այլ խոսքով՝ լոգարիթմական սպիրալն իր բոլոր շառավիղ-վեկտորները հատում է հաստատուն անկյունով։ Այդ հատկությամբ նա հիշեցնում է շրջանագիծը, որը նույնպես իր բոլոր շառավիղ-վեկտորները (կենտրոնից ելնող) հատում է հաստատուն (ուղիղ) անկյունով։ Ի միջի այլոց, շրջանագիծն էլ կարելի է դիտել որպես լոգարիթմական սպիրալի մասնավոր դեպք, որը համապատասխանում է $m=0$ արժեքին]։

4) Խխունջներ (գծ. 131)՝

$$r = a \cdot \cos\theta + b.$$

Նշենք, որ $sbn_p = r'_\theta = -a\sin\theta$ և, ուրեմն, կախված չէ b-ից։ Այսպիսով եթե բևեռից ելնող մի ուղիղի վրա վերցնենք b-ի տարբեր արժեքների համապատասխանող խխունջների պատկանող կետեր, ապա այդ բոլոր կետերի համար բևեռային ենթանորմալն ընդհանուր կլինի, այսինքն՝ N կետը միևնույնն է։ Սակայն $b=0$ դեպքում ստացվում է շրջանագիծ, որի համար շոշափողի կառուցումն ակնհայտ է. այդ ժամանակ հեշտ կլինի կառուցել նորմալ նաև ամեն մի խխունջի համար (գծ. 131)։ ΔMON եռանկյունից կարելի է հաշվել բևեռային նորմալը՝

$$n_p = \sqrt{a^2 + 2ab\cos\theta + b^2}.$$

Բևեռային նորմալի արտահայտությունն առանձնապես պարզ է կարդիոիդի ($b=a$ դեպքում) համար՝

$$n_p = 2a\cos\frac{\theta}{2}.$$

(Հենց այս մասնավոր դեպքն էլ պատկերված է 131 գծագրում)։

5) Լեմնիսկատ (գծ. 122)՝

$$r^2 = 2a^2 \cdot \cos 2\theta.$$

Դիֆերենցենք այս հավասարությունը, r-ը համարելով θ-ի ֆունկցիա, կստանանք՝

$$rr'_\theta = -2a^2 \cdot \sin 2\theta.$$

Այս երկու հավասարությունները անդամ առ անդամ իրար վրա բաժանելով և ի նկատի ունենալով (8), կգտնենք՝

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{r}{r'_\theta} = -\operatorname{ctg} 2\theta,$$

որտեղից՝ $\omega=2\theta+\frac{\pi}{2}$։ Շոշափողի ու նորմալի թեքության անկյունները նշանակելով α և β, կունենանք՝

$$\beta=\alpha-\frac{\pi}{2},\quad \alpha=\omega+\theta=3\theta+\frac{\pi}{2},$$

հետևաբար, $\beta=2\theta$. լեմնիսկատի նորմալի թեքության անկյունը հավասար է շոշափման կետի բևեռային անկյան եռապատիկին։ Այդ պարզ միջոց է տալիս նորմալի կառուցման համար։

224. ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ԿՈՐԻ ՇՈՇԱՓՈՂԸ։ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՇՈՇԱՓՈՂ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆԸ։ 1° տարածական կորի դեպքում շոշափողի սահմանումը տառացիորեն մնում է նույնը, ինչ որ հարթ կորի դեպքում [90]։ Այստեղ սահմանափակվենք այն դեպքով, երբ կորը տված է պարամետրական հավասարումներով՝

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t)։$$

Վերցնենք t-ի մի որոշակի արժեք և, այդպիսով, մի որոշակի $M(x, y, z)$ կետ կորի վրա. դիցուք այդ մի սովորական ու պարզ կետ է [213]։ t-ին տանք Δt աճ. այդ ժամանակ պարամետրի $t+\Delta t$ աճած արժեքին կհամապատասխանի մի այլ՝ $M_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$ կետ։ MM_1 հատողի հավասարումները կլինեն՝

$$\frac{X-x}{\Delta x}=\frac{Y-y}{\Delta y}=\frac{Z-z}{\Delta z},$$

որտեղ X, Y, Z-ը՝ ընթացիկ կոորդինատներն են։ Այդ հավասարումների երկրաչափական իմաստը չի փոխվի, եթե մենք բոլոր հայտարարները բաժանենք Δt-ի վրա՝

$$\frac{X-x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{Y-y}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{Z-z}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

Եթե այս հավասարումները, երբ $\Delta t\to 0$, սահմանում պահպանում են որոշակի իմաստ, ապա հենց դրանով էլ հաստատվում է հատողի սահմանային դիրքի, այսինքն՝ շոշափողի գոյությունը։ Բայց սահմանում մենք ստանում ենք՝

$$\frac{X-x}{x'_t}=\frac{Y-y}{y'_t}=\frac{Z-z}{z'_t}, \tag{9}$$

և այս հավասարումներն իրոք արտահայտում են մի ուղիղ, որքանով որ ոչ բոլոր հայտարարներն են զրո։

Այսպիսով, կորի ամեն մի սովորական կետում շոշափող գոյություն ունի և արտահայտվում է այդ հավասարումներով։ Եզակի կետի համար շոշափողի հարցը բաց է մնում։

Դիտողություն։ Հատողի հավասարումների մեջ մենք սահմանին անցանք, Δt-ն ձգտեցնելով 0-ի. ցույց տանք, որ այդ համարժեք է այն ենթադրության, թե $\overline{MM_1}\to 0$։ φ, ψ, χ ֆունկցիաների անընդհատության շնորհիվ, $\Delta t\to 0$ պայմանից հետևում է, որ նաև

$$\overline{MM_1}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}\to 0.$$

Հակադարձ եզրակացությունն ապացուցելու համար վերցնենք $\varepsilon>0$ կամայական թիվը։ Քանի որ MM_1-ը Δt-ի անընդհատ ֆունկցիա է, ապա $|\Delta t|\geqslant\varepsilon$ դեպքում այդ ֆունկցիան ունի δ փոքրագույն արժեք, որն, ակներևորեն, դրական է (քանի որ վերցրած կետը պարզ կետ է, այսինքն՝ չի ստացվում պարամետրի ոչ մի արժեքի դեպքում, որը տարբեր է t-ից)։ Այդ դեպքում անհրաժեշտաբար $|\Delta t|<\varepsilon$, երբ $\overline{MM_1}<\delta$, որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Երբեմն հարմար է լինում (9) հավասարումները գրել այսպես՝

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz},$$

որոնք ստացվում են (9)-ից, բոլոր հայտարարները բազմապատկելով dt-ով։

Եթե շոշափողի՝ կոորդինատային առանցքների հետ կազմած անկյունները նշանակենք α, β, γ, ապա ուղղորդ կոսինուսները կարտահայտվեն այսպես՝

$$\cos\alpha=\frac{x'_t}{\pm\sqrt{x'^2_t+y'^2_t+z'^2_t}},\quad \cos\beta=\frac{y'_t}{\pm\sqrt{x'^2_t+y'^2_t+z'^2_t}},$$

$$\cos\gamma=\frac{x'_t}{\pm\sqrt{x'^2_t+y'^2_t+z'^2_t}}.$$

Որոշակի նշանի ընտրությունն արմատի առաջ համապատասխանում է շոշափողի վրա որոշակի ուղղության ընտրությանը.

$F(x, y, z)=0$ և $G(x, y, z)=0$ անբացահայտ հավասարումներով տված կորի շոշափողի հարցը կդիտարկենք 3°-ում.

2° Դիցուք մակերևույթը տված է բացահայտ հավասարումով՝

$$y=f(x, y).$$

n° 170-ում մենք տվել ենք շոշափող հարթության սահմանումը և, $f(x, y)$ ֆունկցիայի դիֆերենցելիության դեպքում*, գտել էինք այդ հարթության հավասարումը [170 (6)]՝

$$Z-z=f'_x(x, y)(X-x)+f'_y(x, y)(Y-y).$$

Սովորաբար նշանակում են՝

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x, y)=p, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x, y)=q$$

և շոշափող հարթության հավասարումը գրում այսպես՝

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y). \tag{10}$$

Եթե $\cos\lambda$-ն, $\cos\mu$-ն, $\cos\nu$-ն՝ մակերևույթի նորմալի (շոշափման կետում շոշափող հարթությանն ուղղահայաց ուղիղի) ուղղորդ կոսինուսներն են, ապա նրանց համար ունենք՝

$$\cos\lambda=\frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\mu=\frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos\nu=\frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{11}$$

արմատի առաջ կրկնակի նշանը համապատասխանում է նորմալի երկու հակադիր ուղղություններին.

Այժմ մակերևույթի վրայով տանենք դիտարկվող կետով անցնող մի կամավոր կոր՝

---

* Մենք այստեղ ենթադրում ենք մասնակի ածանցյալների գոյությունն ու անընդհատությունը, հետևաբար դիֆերենցելիությունն առկա է [169]:

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t),$$

այնպես որ, t-ի նկատմամբ նույնաբար կունենանք՝

$$\chi(t)=f(\varphi(t), \varphi(t))։$$

Այս նույնությունը դիֆերենցենք ըստ t-ի [171]՝

$$\chi'(t)=p\varphi'(t)+q\psi'(t)։$$

Կորի դիտարկելի ոչ եզակի կետում շոշափողը վերցնենք (9) տեսքով։ Եթե, վերջապես, նախորդ հավասարության մեջ φ', ψ', χ' ածանցյալները փոխարինենք (9)-ի շնորհիվ նրանց համեմատական $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ տարբերություններով, ապա կգանք (10)-ին։ Այսպիսով, (9) շոշափողն իր բոլոր կետերով գտնվում է (10) շոշափող հարթության վրա։ Հետևաբար, մենք կարող ենք այժմ մակերևույթի շոշափող հարթությունը սահմանել որպես այնպիսի հարթություն, որի վրա գտնվում են շոշափման կետով մակերևույթի վրայով տարված բոլոր կորերի շոշափողները (մասամբ այդ մասին խոսվել է արդեն n° 170-ում)։

Եթե մակերևույթը տված է $F(x, y, z)=0$ անբացահայտ հավասարումով, ապա, ենթադրելով, որ դիտարկելի կետում $F'_z \neq 0$, նրա շրջակայքում կարելի է մակերևույթն արտահայտել նաև $z=f(x, y)$ բացահայտ հավասարումով, այնպես որ շոշափող հարթության գոյությունն ապահովված է։ Քանի որ այդ դեպքում՝

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad q=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z},$$

ապա p-ի և q-ի այդ արժեքները տեղադրելով (10) հավասարման մեջ, հեշտությամբ ձևափոխում ենք այն և ստանում՝

$$F'_x(x, y, z)(X-x)+F'_y(x, y, z)(Y-y)+$$
$$+F'_z(x, y, z)(Z-z)=0։ \qquad (12)$$

Ակներևաբար, շոշափող հարթության հավասարումն այսպիսի տեսքով կարտահայտվի նաև այն դեպքում, երբ $F'_z=0$, բայց մյուս երկու՝ F'_x, F'_y ածանցյալներից որևէ մեկը զրոյից տարբեր է։ Միայն եզակի կետում է այդ հավասարումն իմաստը կորցնում և շոշափող հարթության հարցը մնում է բաց։

3° Այժմ հեշտ է պատկերացնել, թե ինչպես գտնել այն կորի շոշափողը, որը տված է անբացահայտ հավասարումներով՝

$$F(x, y, z)=0, \quad G(x, y, z)=0,$$

այսինքն՝ հանդիսանում է համապատասխան երկու մակերևույթների հատման գիծը։ Եթե կորի վրա դիտարկվող կետը սովորական կետ է, ապա նրա շրջակայքում կորը կարող է և բացահայտ հավասարումներով արտահայտվել [217]*, այնպես որ շոշափողի գոյությունն ապահովված է։ Այդ շոշափողն, ակներևորեն, գտնվում է վերոհիշյալ երկու մակերևույթների շոշափող հարթությունների վրա, այսինքն՝ հանդիսանում է նրանց հատման գիծը և, հետևաբար, արտահայտվում հետևյալ հավասարումներով՝*

$$\left.\begin{aligned} F'_x(X-x)+F'_y(Y-y)+F'_z(Z-z)=0, \\ G'_x(X-x)+G'_y(Y-y)+G'_z(Z-z)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

[*Քանի որ սովորական կետում գործակիցների մատրիցի գոնե մեկ դետերմինանտը զրոյից տարբեր է, ուստի այդ հավասարումներով, իրոք, կորոշվի ուղիղ*]։

3° Վերադառնալով մակերևույթին, դիտարկենք, վերջապես, այն դեպքը, երբ նա արտահայտվում է պարամետրական հավասարումներով՝

$$x=\varphi(u, v), \quad y=\psi(u, v), \quad z=\chi(u, v).$$

Դարձյալ սահմանափակվենք սովորական (և պարզ) կետով, քանի որ նրա շրջակայքում մակերևույթը կարող է և բացահայտ հավասարումով արտահայտվել [218]*, ուստի շոշափող հարթության գոյությունն ապահովված է։ Նրա հավասարումը կարելի է գրել այսպես՝*

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0, \qquad (14)$$

որտեղ A, B, C *գործակիցները դեռևս ենթակա են որոշման։*

Եթե մակերևույթի հավասարումներում v*-ի համար ֆիքսենք այն արժեքը, որը համապատասխանում է մեր ընտրած կետին, ապա կստացվեն այդ կետով անցնող կոորդինատային գծի («(*v*) գծի») հավասարումները։ Այդ կորի շոշափողը դիտարկելի կետում կարտահայտվի հետևյալ հավասարումներով [տես (9)]՝*

$$\frac{X-x}{x'_u}=\frac{Y-y}{y'_u}=\frac{Z-z}{z'_u},$$

Նմանապես, ֆիքսելով u-ն, կստանանք տված կետով անցնող մյուս կոորդինատային գիծը («(u) գիծը»), որն այդ կետում ունի հետևյալ շոշափողը՝

$$\frac{X-x}{x'_v}=\frac{Y-y}{y'_v}=\frac{Z-z}{z'_v}.$$

Քանի որ այդ երկու շոշափողներն էլ պիտի գտնվեն (14) շոշափող հարթության մեջ, ապա պիտի բավարարվեն հետևյալ պայմանները՝

$$A\cdot x'_u+B\cdot y'_u+C\cdot z'_u=0,$$
$$A\cdot x'_v+B\cdot y'_v+C\cdot z'_v=0.$$

Այդ դեպքում A, B, C *գործակիցները պիտի համեմատական լինեն*

$$\left\|\begin{matrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{matrix}\right\|$$

մատրիցի դետերմինանտներին։ Սովորաբար նրանց ընդունում են այդ դետերմինանտներին հավասար՝

$$A=\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y_v \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

Այժմ շոշափող հարթության հավասարումն ամենից հարմար է գրել դետերմինանտի օգնությամբ՝

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}=0. \qquad (16)$$

սովորական կետում այս դետերմինանտն, ինչպես արտահայտում է հարթություն։

Նորմալի ուղղորդ կոսինուսները կլինեն՝

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\mu=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ \cos\nu=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

225. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Դիտարկենք պտուտակագիծը (գծ. 124)՝

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=ct.$$

Այդ դեպքում՝

$$x'_t=-a\sin t,\quad y'_t=a\cos t,\quad z'_t=c,$$

և շոշափողի հավասարումները կլինեն՝

$$\frac{X-x}{-a\sin t}=\frac{Y-y}{a\cos t}=\frac{Z-z}{c},$$

իսկ ուղղորդ կոսինուսները՝

$$\cos\alpha=-\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+c^2}},\quad \cos\beta=\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}},\quad \cos\gamma=\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Նշենք, որ $\cos\gamma=\text{const.}$, *հետևաբար, նաև* $\measuredangle\gamma=\text{const.}$: *Եթե պտուտակագիծը պատկերացնենք փաթաթված ուղիղ շրջանային գլանին, ապա կարելի է ասել, որ պտուտակագիծն այդ գլանի բոլոր ծնորդները հատում է ուղիղ անկյունով*։*

2) Էլիպսոիդ՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Շոշափող հարթությունն ստացվում է (12) տեսքով, հաշվի առնելով էլիպսոիդի իր հավասարումը, այսպես,

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1.$$

3) Կոն (երկրորդ կարգի)՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Շոշափող հարթությունը կլինի՝

** Եթե գլանի մակերևույթը կտրենք ծնորդի երկարությամբ և փռենք, պտուտակագիծը կդառնա մի ուղիղ, որը բոլոր ուղղաձիգ ուղիղները, ընդհանրապես, կհատի միևնույն անկյունով։ Այս դատողությունը նախորդ արդյունքը դարձնում է միանգամայն ակներև։*

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-\frac{zZ}{c^2}=0.$$

Կոնի (0,0,0) գագաթում, որը եզակի կետ է, այդ հավասարումը կորցնում է իմաստը, և շոշափող հարթություն չկա։

4) Վ ի վ ի ա ն ի ի կ ո ր ը (գծ. 123)՝

$$x^2+y^2+z^2=R^2,\quad x^2+y^2=Rx.$$

Շոշափողն արտահայտվում է հետևյալ հավասարումներով [տես (13)]՝

$$xX+yY+zZ=R^2,\quad (2x-R)X+2yY=Rx.$$

Այս հավասարումները դադարում են ուղիղ ներկայացնել (R, 0, 0) եզակի կետում։

5) Պ տ ո ւ տ ա կ ա յ ի ն մ ա կ ե ր և ո ւ յ թ՝

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=cv.$$

(16) բանաձևով շոշափող հարթության հավասարումը կլինի՝

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & c \end{vmatrix}=0.$$

Հաշվի առնելով մակերևույթի հավասարումը, այդ հավասարումը կարելի է պարզեցնել այսպես՝

$$\sin v\cdot X-\cos v\cdot Y+\frac{u}{c}\cdot Z=uv.$$

226. ՀԱՐԹ ԿՈՐԵՐԻ ԵԶԱԿԻ ԿԵՏԵՐԸ (особые точки).

Ներկա n°-ում մենք ավելի մանրամասն զբաղվենք

$$F(x, y)=0$$

անբացահայտ հավասարումով տված կորի վարքով նրա (x_0, y_0) եզակի կետի մոտակայքում։ Ի նկատի չունենալով սպառել այդ հարցը, մենք ցանկանում ենք միայն ծանոթացնել ընթերցողին եզակի կետերի հիմնական տեսակների հետ։ Մենք F ֆունկցիան ենթադրում ենք անընդհատ և առաջին երկու կարգի անընդհատ ածանցյալներ ունեցող։ Առանց նվազեցնելու ընդհանրությունը, կարելի է ընդունել $x_0=0$, $y_0=0$, այդ պարզապես նշանակում է կոորդինատների սկզբնակետը տեղափոխել մեր դիտարկելի կետը։ Այսպես, ուրեմն, ունենք՝

$$F(0,0)=0,\quad F'_x(0,0)=0,\quad F'_y(0,0)=0.$$

Մացնենք հետևյալ նշանակումները՝

$$a_{11}=F''_{x^2}(0,0),\quad a_{12}=F''_{xy}(0,0),\quad a_{22}=F''_{y^2}(0,0).$$

Ենթադրելով, որ a_{11}, a_{12}, a_{22} *թվերից գոնե մեկը զրո չէ, մենք սկսենք բոլոր հնարավոր դեպքերը դասակարգել՝* $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2$ *արտահայտության նշանից կախված։ Այս* n°-*ի հետազոտությունները սերտորեն հարում են* n° 187-*ի հետազոտություններին։*

1° $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0.$

Այս դեպքում, ինչպես գիտենք, $F(x, y)$ *ֆունկցիան սկզբնակետում ունի էքստրեմում։ Նշանակում է, այդ կետի բավականաչափ փոքր շրջակայքում* $F>0$ *կամ* $F<0$ *(բացառյալ. ինքն՝ սկզբնակետը, որտեղ* $F=0$*)։ Այլ խոսքով, այդ շրջակայքում մեր կորը ոչ մի կետ չունի, բացի սկզբնակետից. այս վերջինս կորի* մեկուսացած կետն է (изолированная точка)։

Այս դեպքը ցուցադրող օրինակներ են՝

$$x^2+y^2=0 \text{ և } (x^2+y^2)(x+y-1)=0.$$

Սկզբնակետը երկու կորին էլ պատկանում է և երկուսի համար էլ մեկուսացած կետ է։ Սակայն, մինչդեռ առաջինը բաղկացած է միայն մեկ կետից, երկրորդը, բացի այդ կետից, պարունակում է նաև $x+y=1$ *ուղիղը որն այդ կետով չի անցնում։*

2° $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0.$

Ինչպես և n° 187-*ում, սկզբնակետի շրջակայքում* $F(x,y)$-*ը կարելի է ներկայացնել այսպես՝*

$$F(x, y)=\frac{1}{2}\{a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+$$
$$+\alpha_{11}x^2+\alpha_{12}xy+\alpha_{22}y^2\},$$

որտեղ՝

բոլոր $\alpha \to 0$, *երբ* $x \to 0$, $y \to 0$,

կամ, մտցնելով ρ, φ *բևեռային կոորդինատները, այսպես՝*

$$F(x, y) = \frac{\rho^2}{2}\{a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi +$$

$$+ \alpha_{11}\cos^2\varphi + 2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi + \alpha_{22}\sin^2\varphi\}.$$

Այս դեպքում, եթե ենթադրենք նաև $a_{22} \neq 0$, $a_{11} + 2a_{12}t + a_{22}t^2$ *եռանդամն ունի* t_1 *և* t_2 $(t_1 < t_2)$ *տարբեր իրական արմատներ և վերլուծվում է արտադրիչների՝* $a_{22}(t - t_1)(t - t_2)$. *Նշանակենք* $\varphi_1 = \operatorname{arctg} t_1$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg} t_2$, *այնպես որ՝* $t_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$, $t_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$. *Այժմ հեշտ է ձևափոխել* $\{\ldots\}$ *փակագծերի ներսի առաջին եռանդամը, տալով նրան այսպիսի տեսք՝*

$$a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi =$$

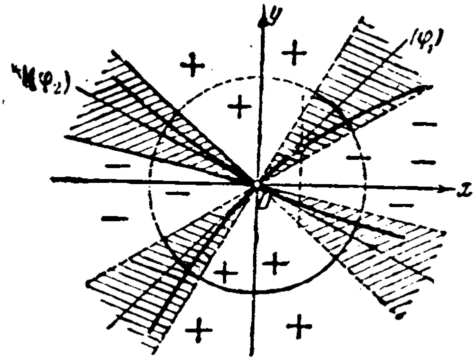
$$= a_{22}\cos^2\varphi(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_1)(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_2). \tag{18}$$

Այստեղից պարզվում է, որ սկզբնակետից տարած այն ուղիղները, որոնք x-երի առանցքի հետ կազմում են φ_1 *և* φ_2 *անկյուն (կարճության համար այդ ուղիղները կանվանենք* (φ_1) *և* (φ_2) *ուղիղներ), հարթությունը բաժանում են երկու անկյունային տարածությունների, որոնց մեջ հիշյալ եռանդամը պահպանում է մեկում դրական նշան, իսկ մյուսում՝ բացասական նշան (գծ. 132)*.*

Այժմ (φ_1) *և* (φ_2) *ուղիղների շուրջը վերցնենք ցանկացած չափով նեղ անկյունային տարածություններ՝ երկու զույգ հակադիր անկյուններ, որոնք գտնվում են, համապատասխանաբար,* $(\varphi_1 - \varepsilon)$ *և* $(\varphi_1 + \varepsilon)$ *ուղիղների կամ* $(\varphi_2 - \varepsilon)$ *և* $(\varphi_2 + \varepsilon)$ *ուղիղների միջև (132-րդ գծագրի վրա այդ անկյունները գծիկներով ծածկված են). Սկզբնակետի շուրջը վերցնելով բավականաչափ փոքր* r_ε *շառավղով շրջան, կարելի է պնդել, որ նա (հանելով հիշյալ անկյունները) կտրոհվի երկու անկյունային տարածությունների, որոնցից յուրաքանչյուրում արդեն ֆունկցիան*

* *Դրանով մենք որոշ չափով խորացնում ենք 187, 2°-ում ասածը. այնտեղ բավական էր ցույց տալ երկու ուղիղների գոյությունը, որոնց վրա եռանդամը տարբեր նշաններ ունի։*

ինքը պահպանում է որոշակի նշան, մեկում՝ պլյուս, մյուսում՝ մինուս (տես գծագիրը)։ Իսկապես, քանի որ անկյունը ($\varphi_1-\varepsilon$, $\varphi_1+\varepsilon$) և ($\varphi_2-\varepsilon$, $\varphi_2+\varepsilon$) միջակայքերից դուրս փոփոխելիս (18) եռանդամը զրո չի դառնում, ապա նա բացարձակ արժեքով մեծ է մնում մի դրական m_ε թվից։ Մյուս կողմից, բավականաչափ փոքր ρ-ի դեպքում $\alpha_{11}\cos^2\varphi+2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi+\alpha_{22}\sin^2\varphi$ արտահայտությունը բացարձակ արժեքով կլինի $<m_\varepsilon$։ Այստեղից էլ հետևում է մեր պնդումը (համեմատել n° 187-ի դատողությունների հետ)։



Գծ. 132.

Այժմ դիտարկենք շրջանի երկու հակադիր սեկտորներ, որոնք ծածկված են գծիկներով, օրինակ՝ ($\varphi_1-\varepsilon$) և ($\varphi_1+\varepsilon$) ուղիղների միջև գտնըվողները։ Քանի որ այդ ուղիղների վրա ֆունկցիան տարբեր նշաններ ունի, ուստի հիշյալ սեկտորները հատող ամեն մի ուղղաձիգ ուղիղի վրա կգտնվի այնպիսի կետ, որտեղ $F(x, y)$ ֆունկցիան դառնում է զրո, այսինքն մեր կորին պատկանող կետ։ Այդ հետևում է անընդհատ ֆունկցիայի հայտնի հատկությունից [79], եթե այն կիրառենք y-ից կախված $F(x, y)$ ֆունկցիայի նկատմամբ (հաստատուն x-ի ժամանակ)*։ Այսպիսով, գծիկներով ծածկված սեկտորներից յուրաքանչյուր զույգի ներսը կորը ճյուղ ունի, որն անցնում է սկզբնակետով, մինչդեռ նրանցից դուրս, շրջանի սահմաններում, կորը կետեր չունի։ ε-ի կամայապես փոքրության շնորհիվ պարզ է, որ այդ

* Համեմատել n° 196-ում անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության վերաբերյալ I թեորեմայի ապացույցի հետ։

ճյուղերն սկզբնակետում շոշափում են, համապատասխանաբար, (φ_1) և (φ_2) ուղիղները։

Ճիշտ է, դեռևս բաց է մնացել այն հարցը, թե միակն է արդյոք հիշյալ ուղղաձիգ ուղիղի վրա այն կետը, որտեղ $F(x, y)=0$։ *Եթե այդպիսի երկու կետ լիներ, ապա, Ռոլլի թեորեմայի* [117] *համաձայն, նրանց միջև նույն ուղիղի վրա կգտնվեր այնպիսի կետ, որտեղ* $F'_y(x, y)=0$։ *Այսպիսով, միակությունը հաստատված կլինի, եթե մենք ապացուցենք, որ այդպիսի հավասարություն անհնար է, թեկուզ միայն սկզբնակետին բավականաչափ մոտ կետերում։*

Ենթադրենք հակառակը։ Այն ժամանակ կունենայինք $F'_y(x_n, y_n)=0$՝ $\{x_n, y_n\}$ *կետերի մի հաջորդականության համար, որտեղ* $x_n\to 0$ *և* $\frac{y_n}{x_n}\to \operatorname{tg}\varphi_1=t_1$։ $F'_y(x, y)$ *ֆունկցիայի նկատմամբ կիրառենք վերջավոր աճերի բանաձևը* [173 *(9)*]՝

$$0=F'_y(x_n, y_n)-F'_y(0,0)=$$

$$=F''_{xy}(\theta_n x_n, \theta_n y_n)\cdot x_n+F''_{y^2}(\theta_n x_n, \theta_n y_n)\cdot y_n \quad (0<\theta_n<1)$$

կամ՝

$$F''_{xy}(\theta_n x_n, \theta_n y_n)+F''_{y^2}(\theta_n x_n, \theta_n y_n)\cdot\frac{y_n}{x_n}=0.$$

Այստեղ անցնելով սահմանին, վերջնականապես կստանայինք՝ $a_{12}+a_{22}t_1=0$ *կամ* $t_1=-\frac{a_{12}}{a_{22}}$, *որը ճիշտ չէ.* t_1-*ն այդպիսի արժեք կարող էր ունենալ միայն այն դեպքում, եթե* $a_{11}+2a_{12}t+a_{22}t^2$ *եռանդամն ունենար հավասար արմատներ։*

Ասածներից, ի միջի այլոց, բխում է, որ սկզբնակետի բավականաչափ փոքր մոտակայքում հիշյալ երկու ճյուղերի ոչ մի կետը, բացի սկզբնակետից, արդեն եզակի կետ չէ։

Նման եղանակով ստուգվում է նաև այն դեպքը, երբ $a_{22}=0$, *բայց* $a_{11}\neq 0$, *կամ* $a_{11}=a_{22}=0$, *բայց* $a_{12}\neq 0$. *միայն նշենք, որ վերջին դեպքում (φ_1) և (φ_2) ուղիղների դերը խաղում են կոորդինատային առանցքները։*

Այսպիսով, արված՝ $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$ *ենթադրության դեպքում* (0,0) *կետը կորի* կրկնակի կետ է (двойная точка). *այնտեղ հատվում են*

կորի երկու ճյուղեր, որոնցից յուրաքանչյուրն այդ կետում ունի իր շոշափողը։ Այդ շոշափողների անկյունային գործակիցները միշտ որոշվում են $a_{11}+2a_{12}t+a_{22}t^2=0$ *հավասարումից. միայն* $a_{22}=0$ *դեպքում պետք է ընդունել, որ, բացի վերջավոր արմատից, այդ հավասարումն ունի նաև անվերջ արմատ։*

Իբրև օրինակ կարող են ծառայել մեզ արդեն ծանոթ կորերը՝

$$(x^2+y^2)^2+2a^2(y^2-x^2)=0$$ *[լեմնիսկատ, գծ. 122]*

$$x^3+y^3-3axy=0$$ *[դեկարտյան տերև, գծ. 113],*

որոնց համար հենց սկզբնակետը կրկնակի կետ է։ Առաջին դեպքում ունենք՝

$$a_{11}=-4a^2,\quad a_{12}=0,\quad a_{22}=4a^2,\quad t_1=1,\quad t_2=-1,$$

այնպես որ սկզբնակետում շոշափողներ կլինեն կոորդինատային անկյունների կիսորդները։ Երկրորդ դեպքում՝

$$a_{11}=a_{22}=0,\quad a_{12}=-3a,\quad t_1=0,\quad t_2=\infty,$$

և շոշափողներ ծառայում են կոորդինատային առանցքները։

3° $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$.

Այստեղ ևս ընդունենք, որ $a_{22}=0$*.* $a_{11}+2a_{12}t+a_{22}t^2$ *քառակուսի եռանդամն այս դեպքում ունի կրկնակի արմատ՝* $t_1=-\frac{a_{12}}{a_{22}}$*. Նշանակելով, ինչպես վերևում,* $\varphi_1=\operatorname{arctg} t_1$*, սկզբնակետով տանենք x-երի առանցքի հետ այդպիսի* φ_1 *անկյուն կազմող ուղիղ։ Այդ ուղիղի շուրջը վերցնենք անկյունային տարածություն՝* $(\varphi_1-\varepsilon)$ *և* $(\varphi_1+\varepsilon)$ *ուղիղների միջև (113-րդ գծագրի վրա նա գծիկներով ծածկված է)։ Վերևում կիրառված դատողությունների օգնությամբ կարելի է ցույց տալ, որ գծիկներով ծածկված տարածությունից դուրս, բայց սկզբնակետին բավականաչափ մոտ կետերում,* $F(x, y)$ *ֆունկցիան պահպանում է որոշակի նշան, երկու կողմում էլ միևնույն նշանը՝ պլյուս, երբ* $a_{22}>0$*, և մինուս, երբ* $a_{22}<0$*։ Այժմ* $(\varphi_1\pm\varepsilon)$ *ուղիղների վրա ֆունկցիան ունի միևնույն նշանը, և Կոշիի թեորեման կիրառել չի կարելի։*

Մենք չենք խորանալու այս դեպքի հետազոտությունների

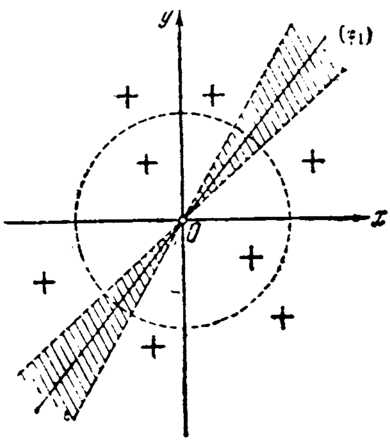
մեջ, որը պահանջում է ավելի բարդ դատողություններ, բարձր կարգի ածանցյալների օգտագործումով։ Բավարարվենք նշելով այն հիմնական հնարավոր դեպքերը, որոնք այստեղ կարող են լինել։

ա) Սկզբնակետի մոտակայքում, բացի սկզբնակետից, կորն ուրիշ կետեր չունի. **մեկուսացած կետ** *է (ինչպես 1° դեպքում)։*

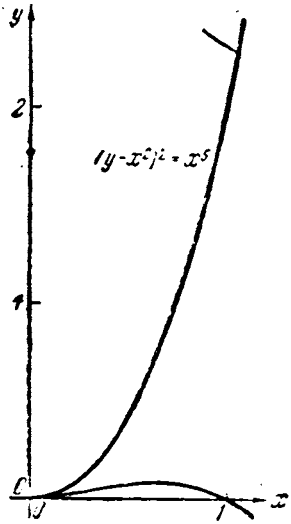
Օրինակներ՝

$$x^4+y^2=0 \text{ կամ՝ } (x^4+y^2)(x+y-1)=0։$$

Երկուսի համար էլ սկզբնակետը մեկուսացած կետ է։



Գծ. 133.



Գծ. 134.

բ) Գծիկներով ծածկված երկու հակադիր անկյուններում է (սկզբնակետին բավականաչափ մոտ) յուրաքանչյուր ուղղաձիգ ուղիղի վրա կան երկուական կետեր մեր կորից. սկզբնակետով անցնում են կորի երկու ճյուղեր, որոնք այնտեղ ունեն (Շ$_1$) ընդհանուր շոշափողը. **կրկնակի կետ** *է (ինչպես և 2° դեպքում)։*

Օրինակ՝

$$x^4-y^2=0, \text{ այսինքն՝ } y=\pm x^2,$$

երկու պարաբոլներ են, որոնք սկզբնակետում շոշափում են x-երի առանցքը։

գ) Գծիկներով ծածկված անկյուններից մեկում կորը բոլորովին կետեր չունի, իսկ մյուսում ունի երկու ճյուղ, որոնք կարծես վերջանում են սկզբնակետում, ունենալով այնտեղ (φ_1) ընդհանուր շոշափող: Այստեղ մենք գործ ունենք եզակի կետի նոր տեսակի հետ՝ դարձակետի (точка возврата) [կամ սրման կետի (точка заострения)] հետ: Նայած թե այնտեղ հանդիպող երկու ճյուղերն ընդհանուր շոշափողի տարբեր կողմերում են գտնվում, թե մեկ կողմում՝ իրարից տարբերում են առաջին և երկրորդ տեսակի դարձակետեր:

Սկզբնակետում առաջին տեսակի դարձակետ ունեցող կորի օրինակ կարող է ծառայել

$$y^2 - x^3 = 0$$

կորը (կիսախորանարդ պարաբոլ, գծ. 111)։
Երկրորդ տեսակի դարձակետ ունեցող կորի հազվադեպ օրինակ է հանդիսանում հետևյալ կորը՝

$$x^5 - (y - x^2)^2 = 0 \quad \text{կամ} \quad y = x^2 \pm x^2\sqrt{x} \quad (x \geq 0)։$$

Երկու ճյուղն էլ սկզբնակետում շոշափում են x-երի առանցքը. գտնվելով (գոնե սկզբնակետի մոտակայքում) նրանից վեր (գծ. 134)։

Եթե $a_{11}=a_{12}=a_{22}=0$, ապա պետք է դիտարկել բարձր կարգի ածանցյալները։ Այդ դեպքում հնարավոր են նաև ավելի բարդ տեսակի եզակի կետեր (եռակի, կամ, ընդհանրապես, n-ապատիկ կետեր, և այլն)։

227. ԿՈՐԸ ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՏԵՍՔՈՎ ՏԱԼՈՒ ԴԵՊՔԸ։ Մի քանի խոսք էլ ասենք հարթ կորերի եզակի կետերի մասին, երբ կորերը տված են պարամետրական հավասարումներով՝

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Դիցուք $t = t_0$ դեպքում ունենք՝

$$x'_0 = \varphi'(t_0) = 0 \quad \text{և} \quad y'_0 = \psi'(t_0) = 0,$$

իսկ երկրորդ կարգի x''_0 և y''_0 ածանցյալներից գոնե մեկը, օրինակ x''_0-ն տարբեր է զրոյից։

Տանենք հատող՝ կորի (x_0, y_0) և (x, y) կետերով, որոնք համապատասխանում են պարամետրի t_0 և t արժեքներին։ Նրա հավասարումը կարելի է գրել այսպես՝

$$\frac{X-x_0}{x-x_0}=\frac{Y-y_0}{y-y_0},$$

Սակայն, Թեյլորի բանաձևի համաձայն [Պեանոյի ձևով լրացուցիչ անդամով, 112 (10ա)], քանի որ $x'_0=y'_0=0$, ունենք,

$$x-x_0=\frac{1}{2}(x''_0+\alpha)(t-t_0)^2,$$

$$y-y_0=\frac{1}{2}(y''_0+\beta)(t-t_0)^2,$$

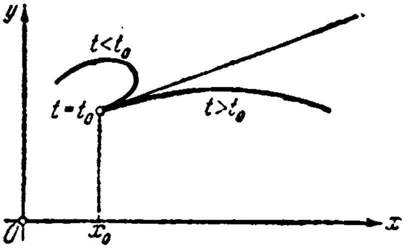
որտեղ α-ն և β-ն ձգտում են զրոյի, երբ $t\to t_0$։ Տեղադրելով և հայտարարները կրճատելով $\frac{1}{2}(t-t_0)^2$-ի վրա, հատողի հավասարումը կգրենք այսպես՝

$$\frac{X-x_0}{x''_0+\alpha}=\frac{Y-y_0}{y''_0+\beta},$$

Այստեղ կարելի է անցնել սահմանին, երբ $t\to t_0$*, և այդպիսով ստանալ շոշափողի հավասարումը՝

$$\frac{X-x^0}{x''_0}=\frac{Y-y_0}{y''_0} \quad \text{կամ} \quad Y-y_0=\frac{y''_0}{x''_0}(X-x_0)։ \qquad (19)$$

Մենք ընդունել էինք $x''_0\neq 0$։ Դիցուք այժմ, ասենք թե $x''_0>0$։ Այդ ժամանակ $x=\varphi(t)$ ֆունկցիան $t=t_0$ դեպքում ունի մինիմում [131], այսինքն՝ $x>x_0$, երբ t-ի արժեքները մոտ են t_0-ին (ինչպես $t<t_0$ դեպքում, այնպես էլ $t>t_0$ դեպքում)։ Այդպիսով, (x_0, y_0) կետում իրար կպչում են կորի երկու ճյուղեր, որոնք համապատասխանում են $t<t_0$ և $t>t_0$ արժեքներին. Նրանք ունեն ընդհանուր շոշափող (հորիզոնական կամ թեք) և երկուսն էլ ընկած են $x=x_0$ ուղղից դեպի աջ։ Այլ խոսքով, առկա է դարձակետ (գծ. 135)։ Այս՝ պարամետրական տեսքով տված կորի համար եզակի կետի հիմնական դեպքն է։



Գծ. 135.

Հեշտ է այս ուղղությամբ շարունակել հետազոտու-

* Տես n° 224-ի դիտողությունը, որը կիրառելի է նաև այստեղ, եթե դիտարկելի կետը պարզ կետ է։

թյունը, որպեսզի պարզենք, թե ո՞ր տեսակի կլինի այդ դարձի կետը։ Այդ նպատակով ներգրավենք երրորդ կարգի ածանցյալները և $x-x_0$ ու $y-y_0$ աճերը գրենք այսպես՝

$$x-x_0=\frac{1}{2}x''_0(t-t_0)^2+\frac{1}{6}(x'''_0+\tilde{\alpha})(t-t_0)^3,$$

$$y-y_0=\frac{1}{2}y''_0(t-t_0)^2+\frac{1}{6}(y'''_0+\tilde{\beta})(t-t_0)^3,$$

որտեղ $\tilde{\alpha}$-ն ու $\tilde{\beta}$-ն դարձյալ ձգտում են զրոյի, երբ $t\to t_0$։

(19) հավասարումից օգտվելով, հաշվենք շոշափողի այն կետի Y օրդինատը, որն ունի x աբսցիս, կստանանք՝

$$Y-y_0=\frac{y''_0}{x''_0}(x-x_0)=$$

$$=\frac{1}{2}y''_0(t-t_0)^2+\frac{1}{6}\frac{y''_0}{x''_0}(x'''_0+\tilde{\alpha})(t-t^0)^3,$$

Կազմենք, վերջապես, միևնույն x-ին համապատասխանող Y և y օրդինատների տարբերությունը՝

$$Y-y=\frac{1}{6}\left(\frac{x'''_0y''_0-x''_0y'''_0}{x''_0}+\tilde{\gamma}\right)(t-t_0)^3,$$

որտեղ $\tilde{\gamma}$-ով նշանակված է դարձյալ անվերջ փոքր մեծություն, երբ $t\to t_0$։

Այժմ, եթե միայն $x'''_0y''_0-x''_0y'''_0\neq 0$ (որը սովորաբար և տեղի է ունենում), պարզ է, որ $Y-y$ տարբերությունը կունենա տարբեր նշաններ $t<t_0$ և $t>t_0$ դեպքերում, այսինքն՝ կորի այն երկու ճյուղերի համար, որոնք հանդիպում են (x_0, y_0) կետում (ենթադրելով, իհարկե, որ մենք բավարարվում ենք t_0-ին բավականաչափ մոտ t-ի արժեքներով)։ Ճյուղերը գտնվում են շոշափողի տարբեր կողմերում, և ստացվում է առաջին տեսակի դարձի կետ։

Այդպիսի եզակիություն ունեցող օրինակներ մեզ արդեն հանդիպել են մի քանի անգամ՝ ցիկլոիդ, էպի-կամ հիպոցիկլոիդ, շրջանի էվոլվենտ, որոնք բոլորն ունեն այդպիսի դարձի կետեր (գծ. 114—117)։

Բացառիկ դեպքերում կարող է պատահել, որ $x_0'''y_0''-x_0''y_0'''=0$. *այդ ժամանակ* $Y-y$ *տարբերության վերլուծությունը* $(t-t_0)$*-ի աստիճաններով կսկսվի դրա չորրորդ կամ ավելի բարձր աստիճանից։ Եթե այդ աստիճանը զույգ է, ապա եզակի կետը կլինի երկրորդ տեսակի դարձի կետ։*

§ 3. ԿՈՐԵՐԻ ՓՈԽԱԴԱՐՁ ՇՈՇԱՓՈՒՄԸ

228. ԿՈՐԵՐԻ ԸՆՏԱՆԻՔԻ ՊԱՐՈՒՐԻՉԸ։ *Եթե երկու կոր ունեն ընդհանուր* M_0 *կետ և ընդհանուր շոշափող այդ կետում, ապա ասում են, որ կորերը շոշափվում են* (касаются) M_0 *կետում։ Ներկա պարագրաֆը նվիրված է մի քանի հարցերի, որոնք կապված են հարթ կորերի շոշափման հետ։*

Սկսելով կորերի ընտանիքի պարուրիչի դիտարկումը, նախ կանգ առնենք հենց կորերի ընտանիքի գաղափարի վրա։ Մենք արդեն հաճախ ենք առիթ ունեցել հանդիպել կորերի այնպիսի հավասարումների, որոնց մեջ, բացի փոփոխական կետի x *ու* y *ընթացիկ կոորդինատներից, մտնում է նաև մեկ կամ մի քանի պարամետր։ Մեկ պարամետրի, ասենք թե* a*-ի, դեպքում հավասարումն ունի այսպիսի տեսք՝*

$$F(x,\ y,\ a)=0\text{։} \qquad (1)$$

Ձախ մասը երեք փոփոխականների ֆունկցիա է, որոնցից a *փոփոխականը մենք այլ կերպ ենք կոչում սոսկ այն պատճառով, որ նա առանձնահատուկ դեր ունի. կոնկրետ մեկ կոր ստանալու համար պետք է* a*-ի արժեքը ֆիքսել։ Այդ արժեքը փոփոխելիս (սովորաբար մի որոշ միջակայքում), ընդհանրապես կստացվեն տարբեր (ըստ ձևի կամ դիրքի) կորեր։*

Այդ բոլոր կորերի խմբակցությունը հենց անվանում են մեկ պարամետրով կորերի ընտանիք, (семейство), *իսկ (1) հավասարումը՝ ընտանիքի հավասարում։*

Երբեմն պատահում է, երբ կորերի այդպիսի ընտանիքի համար գոյություն ունի այնպիսի կոր, որը շոշափվում է ընտանիքի յուրաքանչյուր կորի հետ մեկ կամ մի քանի կետում և ինքն ամբողջովին կազմված է հենց այդ շոշափման կետերից (գծ. 136)։ *Այդպիսի կորն անվանում են տվյալ ընտանիքի* պարուրիչ (огибающая)։ *Մենք հիմա ցույց կտանք, թե ինչպես իմանալ՝ գոյություն ունի՞ պարուրիչ և, գոյություն ունենալու դեպքում, ինչպես գտնել այն։*

Այդ նպատակով նախ ենթադրենք, թե պարուրիչ գոյություն ունի։

Պարզության համար ենթադրենք, թե խոսքն այնպիսի պարուրիչի (ավելի ճշգրիտ՝ պարուրիչի ճյուղի) մասին է, որն ընտանիքի յուրաքանչյուր կորի հետ շոշափվում է մեկ կետում։ Այդ ժամանակ այդ շփման կետի կոորդինատները միարժեքորեն որոշվում են ընտանիքի կորը նշելու միջոցով, այսինքն՝ a պարամետրի արժեքով՝

$$x=\varphi(a), \quad y=\psi(a)։ \tag{2}$$

Քանի որ պարուրիչն ամբողջովին բաղկացած է շոշափման կետերից, ապա հենց այդ հավասարումներն էլ պարամետրական տեսքով ներկայացնում են պարուրիչը։

Գծ. 136.

Մենք ենթադրում ենք, որ գոյություն ունեն ու անընդհատ են F ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները և φ ու ψ ֆունկցիաների ածանցյալները։

(2) կետը գտնվում է (1) կորի վրա, որը որոշվում է a պարամետրի միևնույն արժեքով այնպես որ տեղի ունի a-ի նկատմամբ այսպիսի նույնություն՝

$$F(\varphi(a), \psi(a), a)=0։ \tag{3}$$

Այս ֆունկցիան լրիվ դիֆերենցելով ըստ a-ի [171, 175], կստանանք*

$$F'_x\cdot dx+F'_y\cdot dy+F'_a\cdot da=0, \tag{4}$$

որտեղ ածանցյալները հաշված են արգումենտների՝ (3)-ում ցույց տրված արժեքների համար, իսկ dx-ն ու dy-ը նշանակում են (2) ֆունկցիաների դիֆերենցիալները։

* Այստեղ, ի միջի այլոց, մենք օգտագործում ենք նաև F ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալների անընդհատությունը.

Այժմ աշխատենք անալիտիկորեն արտահայտել այն փաստը, որ պարուրիչը (2) կետում շոշափվում է (1) կորով։ Պետք է համընկնեն (1) կորի շոշափողը [220 *(5)*]՝

$$F'_x(X-x)+F'_y(Y-y)=0 \tag{5}$$

և (2) կորի շոշափողը [220 *(7)*]՝

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}, \tag{6}$$

Այդ ուղիղների համընկնելու պայմանը կարելի է գրել այսպիսի տեսքով՝

$$F'_x \cdot dx+F'_y \cdot dy=0\text{։} \tag{7}$$

Այստեղ, ինչպես և վերևում, x*-ի ու* y*-ի տակ մենք հասկանում ենք նրանց (2) արժեքները, իսկ* dx *ու* dy *դիֆերենցիալների տակ՝ (2) ֆունկցիաների դիֆերենցիալները։*

Նկատենք, որ (5) և (6) հավասարումներն իրոք արտահայտում են կորերի շոշափողները միայն այն դեպքում, երբ դիտարկելի կետը նրանց համար եզակի կետ չէ։ Այնուամենայնիվ, (7) հավասարությունը տեղի ունի անգամ այն դեպքում, երբ այդ կետը եզակի կետ է մեկ կամ մյուս կորի համար։

(7)-ը բաղադրելով (4)-ի հետ և հաշվի առնելով, որ da*-ն կամայական թիվ է, կստանանք՝* $F'_a=0$*, կամ, ավելի մանրամասն՝*

$$F'_a(\varphi(a),\ \psi(a),\ a)=0\text{։} \tag{8}$$

(3) և (8) նույնությունները ցույց են տալիս, որ մեզ անհայտ (2) ֆունկցիաները պետք է a*-ի նկատմամբ նույնաբար բավարարեն հետևյալ հավասարումների սիստեմին՝*

$$F(x,\ y,\ a)=0;\quad F'_a(x,\ y,\ a)=0\text{։} \tag{9}$$

Այսպես, ուրեմն, եթե պարուրիչ գոյություն ունի, ապա նրա (2) պարամետրական հավասարումներն ստացվում են որպես (9) սիստեմի լուծումներ ըստ x*-ի ու* y*-ի։*

Այն դեպքում, երբ այդ սիստեմը փոփոխական a*-ի դեպքում ընդհանրապես չունի լուծում* a*-ի ֆունկցիայի տեսքով,*

դրությունը պարզ է՝ պարուրիչ բոլորովին չկա։ Իսկ այժմ ենթադրենք, թե (9) սիստեմը լուծելով ստացվել են (2) հավասարումները, որոնք արտահայտում են եզակի կետերից զերծ կոր*։ Կլինի՞ արդյոք այդ կորը մեր կորերի ընտանիքի պարուրիչը։

Քանի որ (2) ֆունկցիաները բավարարում են (9) հավասարումներին, ապա բավարարվում են (3) և (8) նույնությունները։ Դրանից առաջինը դիֆերենցելով, կստանանք (4)-ը, որը բաղդատելով (8)-ի հետ, կհանգենք (7) հավասարությանը։ Եթե (2) կետը (α-ի ոչ մի արժեքի դեպքում) եզակի կետ չէ համապատասխան (1) կորի վրա, այնպես որ (5) հավասարումն իրոք այդ կորի շոշափողն է արտահայտում, ապա (7) հավասարությունը պայմանավորում է այդ շոշափողի համընկնումը (2) կորի (6) շոշափողի հետ։ Այդ դեպքում (2) կորն իսկապես կլինի ընտանիքի պարուրիչ։

Մասնավորապես այդ կարելի է երաշխավորել, եթե, օրինակ, տված ընտանիքի կորերը բոլորովին զերծ են եզակի կետերից։

Ընդհակառակը, եթե այդպիսի եզակի կետեր կան α-ի փոփոխման ժամանակ նրանց երկրաչափական տեղը կազմում է (2) կորը, ապա նրա համապատասխանող φ և ψ ֆունկցիաներն անհրաժեշտաբար բավարարում են (9) սիստեմին**, թեկուզ և այդ դեպքում կորը կարող է և պարուրիչ չլինել։

Այսպիսով, եզակի կետերի առկայության դեպքում, (9) սիստեմի լուծումից ստացված (2) կորը դեռ ենթակա է ստուգման. այդ կորը կարող է պարուրիչ լինել, կարող է ընտանիքի կորերի վրա եզակի կետերի երկրաչափական տեղ լինել, կամ, վերջապես, մասամբ պարուրիչ լինել, մասամբ էլ՝ այդպիսի երկրաչափական տեղ։

Սովորաբար պարուրիչը որոնելիս (9) սիստեմի վրա կանգ

---

* Առանձին եզակի կետերի առկայության դեպքում կսահմանափակվենք պարամետրի փոփոխության այնպիսի միջակայքով, որը չի պարունակում նրա կրիտիկական արժեքները։

** Նրանց համար բավարարվում է (3)-ը, նշանակում է նաև (4)-ը։ Այնուհետև, տեղի ունի (7)-ը, ինչպես ասվել էր վերևում տեքստում. բաղդատելով (4)-ի հետ, հանգում ենք (8)-ին։

չեն առնում, այլ ավելի առաջ են գնում՝ նրանցից ա ր տ ա ք ս ու մ են a-ն։ Այլ խոսքով, ստանում են

$$\Phi(x, y)=0 \qquad (10)$$

տեսքի առնչություն, որն արդեն չի պարունակում a-ն և իրենից ներկայացնում է այն պայմանը, որն անհրաժեշտ է ու բավարար, որպեսզի x, y արժեքների զույգի համար գտնվի a-ի այնպիսի արժեք, որը նրանց հետ միասին բավարարի (9) հավասարումներին։

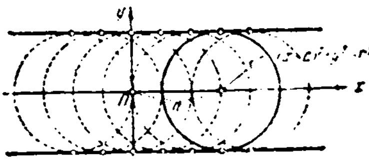
(9) սիստեմի լուծումից ստացված (2) կորի բոլոր կետերը պետք է բավարարեն (10) հավասարմանը, ուստի, եթե այս վերջինս ոչ մի կոր չի արտահայտում, ապա անմիջապես պարզ է, որ պարուրիչ չկա։ Իսկ եթե (10) հավասարումն արտահայտում է մի որոշ կոր (այն անվանում են ընտանիքի դ ի ս կ ր ի մ ի ն ա ն տ կոր) ապա նա ենթակա է ստուգման, ինչպես վերևում։ Նրա կազմում պետք է լինի պարուրիչը (եթե նա գոյություն ունի), բայց պետք է լինի նաև եզակի կետերի երկրաչափական տեղ (եթե այդպիսի կետեր գոյություն ունեն)։ Բացի դրանից, այստեղ կա նաև մի ոչ հաճելի հնարավորություն, որը պիտի վերացնել ստուգման միջոցով. դիսկրիմինանտ կորի կազմի մեջ կարող է մտնել պարզապես մեկ կամ մի քանի մասնավոր կորեր մեր ընտանիքից։ Այդպես կլինի այն դեպքում, երբ դիսկրիմինանտ կորի ա ն վ ե ր ջ բ ա զ մ ու թ յ ա մ բ կետերին համապատասխանում է a-ի մ ի և ն ու յ ն արժեքը, որը նրանց հետ միասին բավարարում է (9) հավասարումներին*։

Բոլոր ասածներն ամենից լավ կպարզաբանվեն օրինակներով։

229. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Գտնել

$$(x-a)^2+y^2=r^2 \quad (r=\text{const.})$$

շրջանագծերի ընտանիքի պարուրիչը (գծ. 137)։



Գծ. 137.

Դիֆերենցենք ըստ a-ի՝

$$-2\cdot(x-a)=0.$$

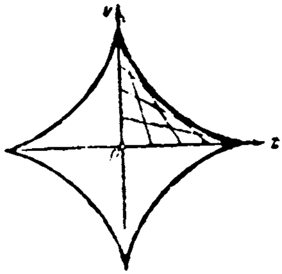
Արտաքսելով a-ն կստանանք

* Եթե գործ ունենանք անմիջապես (9) հավասարումների հետ, ապա այդպիսի հնարավորությունը կբացառվի, որովհետև հավասարումները փորձում են լուծել, նախապես a-ն համարելով փոփոխական։

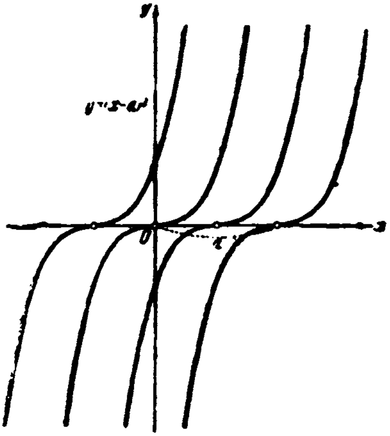
$y^2-r^2=0$ կամ $y=\pm r$. x-երի առանցքին զուգահեռ երկու ուղիղներ, որոնք, ակներևաբար, հանդիսանում են պարուրիչներ*։

2) Գտնել այն ուղիղի զանազան դիրքերի պարուրիչը, որն իրարից a հաստատուն հեռավորության վրա գտնվող երկու կետերով սահում է կոորդինատային առանցքների վրայով (գծ. 138)։

Իբրև պարամետր վերցնելով այն θ անկյունը, որը շարժվող ուղիղին ուղղահայաց ուղիղը կազմում է x-երի առանցքի հետ, ուղիղի հավասարումը



Գծ. 138.



Գծ. 139.

կարելի է գրել այսպես՝

$$\frac{x}{\sin\theta}+\frac{y}{\cos\theta}=a.$$

Դիֆերենցելով ըստ θ-ի, կստանանք՝

$$-\frac{x}{\sin^2\theta}\cdot\cos\theta+\frac{y}{\cos^2 y}\cdot\sin\theta=0,$$

կամ՝

* Եթե ընտանիքի հավասարումը վերցնենք

$$x-a\pm\sqrt{r^2-y^2}=0$$

տեսքով, ապա ըստ a-ի դիֆերենցման արդյունքը կլինի՝ $-1=0$. այս հավասարության անհնարինությունից, թվում է, թե պետք է բխեր, որ պարուրիչ չկա։ Այդպիսի եզրակացությունը, սակայն, ճիշտ չէր լինի, քանի որ շարադրված ամբողջ տեսությունը ենթադրում է, որ գոյություն ունեն ու անընդհատ են ընտանիքի հավասարման ձախ մասի մասնակի ածանցյալները, իսկ այստեղ ($y=\pm r$ դեպքում) ըստ y-ի վերջավոր ածանցյալ չկա։

$$\frac{x}{\sin^3\theta} = \frac{y}{\cos^3\theta}.$$

Այլ կերպ այդ կարելի է գրել այսպես՝

$$\frac{\frac{x}{\sin\theta}}{\sin^2\theta} = \frac{\frac{y}{\cos\theta}}{\cos^2\theta} = \frac{\frac{x}{\sin\theta}+\frac{y}{\cos\theta}}{\sin^2\theta+\cos^2\theta} = a,$$

որտեղից՝

$$x = a\sin^3\theta, \qquad y = a\cos^3\theta.$$

Ընթերցողը հանձին այս հավասարումների ճանաչում է աստրոիդի պարամետրական ներկայացումը [214, 4); $t = \frac{\pi}{2} - \theta$], որը տվյալ դեպքում հենց կլինի պարուրիչ։

Աստրոիդի այս հատկության հետ մենք արդեն ծանոթացել ենք [221, 3)]։

3) Շատ դեպքերում պարուրիչը կարծես թե սահմանափակում է («պարուրում է») հարթության այն մասը, որն զբաղեցրած է ընտանիքին պատկանող կորերով։ Որ ոչ միշտ է այդպես, ցույց է տալիս հետևյալ օրինակը՝

$$y = (x-a)^3.$$

Այստեղ իբրև պարուրիչ ծառայում է x-երի առանցքը, որը հատում է ընտանիքին պատկանող բոլոր կորերը (գծ. 139)։

Նման հանգամանք տեղի ունի նաև հետևյալ, ավելի բարդ, օրինակում։

4) Գտնել $y = a^2(x-a)^2$ պարաբոլների ընտանիքի պարուրիչը։

Այս հավասարումը համադրելով հետևյալ հավասարման հետ՝

$$2a(x-a)^2 - 2a^2(x-a) = 2a(x-a)(x-2a) = 0,$$

կստանանք՝ $x = a$ ($y = 0$) կամ $x = 2a$ ($y = a^4$), այնպես որ դիսկրիմինանտ կորը բաղկացած է $y = 0$ ուղիղից և $16y = x^4$ կորից։ Առաջինը շոշափում է բոլոր պարաբոլները գագաթներում, իսկ երկրորդը յուրաքանչյուր պարաբոլի հետ ունի երեք ընդհանուր կետ՝ շոշափում է $x = 2a$ կետում և հատում $x = -2a \pm 2a\sqrt{2}$ կետերում։

5) Դիտարկենք $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ էլիպսը։ Սկսենք որոնել այն շրջանագծերի ընտանիքի պարուրիչը, որոնք կառուցված են էլիպսի՝ y-ների առանցքին զուգահեռ լարերի, որպես տրամագծերի, վրա (գծ. 140)։

Իբրև պարամետր ընդունելով շրջանագծի կենտրոնի t աբսցիսը, այդ ընտանիքի հավասարումը կգրենք հետևյալ տեսքով՝

$$F(x, y, t)=(x-t)^2+y^2-\frac{b^2}{a^2}(a^2-t^2)=0,$$

ընդ որում t-ն փոփոխվում է $[-a, a]$ միջակայքում։ Դիֆերենցենք ըստ t-ի՝

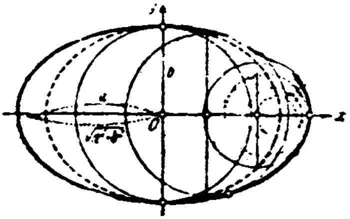
$$F'_t=-2(x-t)+\frac{2b^2}{a^2}t=0,$$

որտեղից՝

$$t=\frac{a^2}{a^2+b^2}x.$$

t-ի այս արժեքը տեղադրելով $F=0$ հավասարման մեջ, պարուրիչի հավասարումը կստանանք հետևյալ տեսքով՝

$$\left(x-\frac{a^2x}{a^2+b^2}\right)^2+y^2-\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-\frac{a^4x^2}{(a^2+b^2)^2}\right)=0$$



Գծ. 140.

կամ, որոշ ձևափոխություններից հետո՝

$$\frac{x^2}{a^2+b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

տեսքով։ Մենք ստացանք էլիպս՝ սիմետրիայի նույն առանցքներով, ինչ որ տված էլիպսը։

Հետաքրքրական է նշել, որ այդ էլիպսը շոշափում է ընտանիքի ոչ բոլոր շրջանագծերը։ Այդ հեշտ է տեսնել, եթե ոչ թե t-ն արտաքսենք $F=0$ և $F'_t=0$ հավասարումներից, այլ այդտեղից x-ն ու y-ը արտահայտենք t-ով՝

$$x=\frac{a^2+b^2}{a^2}t, \qquad y=\pm\frac{b}{a^2}\sqrt{a^4-(a^2+b^2)t^2}.$$

Իսկապես, այստեղից անմիջապես երևում է, որ y-ի արտահայտությունն իրական կլինի միայն այն դեպքում, երբ

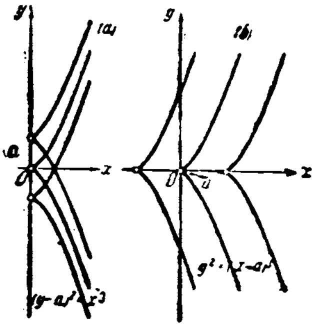
$$|t|\leq\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Նշանակում է՝ պարուրիչ գոյություն ունի շրջանագծերի ընտանիքի միայն

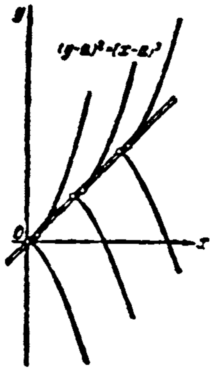
այն մասի համար, որը համապատասխանում է t-ի մատնանշված արժեքներին:

Այս ուսանելի օրինակը ցույց է տալիս, որ պարուրիչը պարամետրական տեսքով ներկայացնելն ավելի ձեռնտու է, որովհետև այդ դեպքում ավելի հեշտ է տեսնել, թե տված ընտանիքի որ մասի համար իսկապես գոյություն ունի պարուրիչ:

6) $x^2+y^2=a$ $(a\geqslant 0)$ համակենտրոն շրջանագծերի ընտանիքի համար պարուրիչ չկա. դիֆերենցումը ըստ a-ի անմիջապես բերում է ոչ հնարավոր հավասարության՝ $0=1$:



Գծ. 141.



Գծ. 142.

7) Դիտարկենք կիսախորանարդ պարաբոլների երկու ընտանիքը՝

$$(ա)\qquad (y-a)^2-x^2=0$$

և

$$(բ)\qquad y^2-(x-a)^2=0$$

(գծ. 141): Դիսկրիմինանտ կորը կլինի՝

$$(ա)\quad x=0,\qquad (բ)\quad y=0$$

և երկու դեպքում էլ համընկնում է եզակի կետերի կորին: Սակայն (բ) դեպքում նա համենայն դեպս միաժամանակ նաև պարուրիչ է, իսկ (ա) դեպքում պարուրիչ չկա:

8) Այդ նույն տեսակի, բայց ավելի բարդ, օրինակ է տալիս կիսախորանարդ պարաբոլների մի ուրիշ ընտանիքը՝

$$(y-a)^2-(x-a)^3=0$$

(գծ. 142): Այստեղ դիսկրիմինանտ կորը տրոհվում է երկու ուղիղների՝

$y=x$ և $y=x-\frac{4}{27}$։ Առաջինը միայն եզակի կետերի երկրաչափական տեղ է, իսկ երկրորդը կլինի պարուրիչ։

9) Վերջապես, դիտարկենք հետևյալ ուղիղների ընտանիքը՝

$$4(1+t)x=t^2y\cdot$$

Դիֆերենցենք ըստ t-ի՝ $4x=2ty$ և երկու հավասարումներից t-ն արտաքսենք, կստանանք՝

$$x(x+y)=0\text{։}$$

Այս հավասարումը ներկայացնում է երկու ուղիղ՝ $x=0$ և $y=-x$, որոնք մտնում են տված փնջի մեջ ($t=0$ և $t=-2$ դեպքում)։ Դրանցից ոչ մեկը ոչ պարուրիչ է, ոչ էլ եզակի կետեր կրող։ Այս դեպքում պարուրիչ չկա։

Այս օրինակը ցուցադրում է մեր կողմից նշված այն դեպքի հնարավորությունը, երբ (10) հավասարումը կարող է ներկայացնել ոչ թե պարուրիչ, այլ ընտանիքի մեկ կամ մի քանի կոր։ Եթե մենք, t-ն չարտաքսելով, փորձեինք x-ն ու y-ն արտահայտել t-ով՝ փ ո փ ո խ ա կ ա ն t-ի դեպքում, այդ անհնարին կլիներ։

230. ԽԱՐԱԿՏԵՐԻՍՏԻԿ ԿԵՏԵՐ. *Պարուրիչի գաղափարի հետ սերտորեն կապված է երկրաչափական մի այլ հետաքրքիր գաղափար՝ խ ա ր ա կ տ ե ր ի ս տ ի կ կ ե տ ե ր ի գաղափարը։*

Վերցնենք

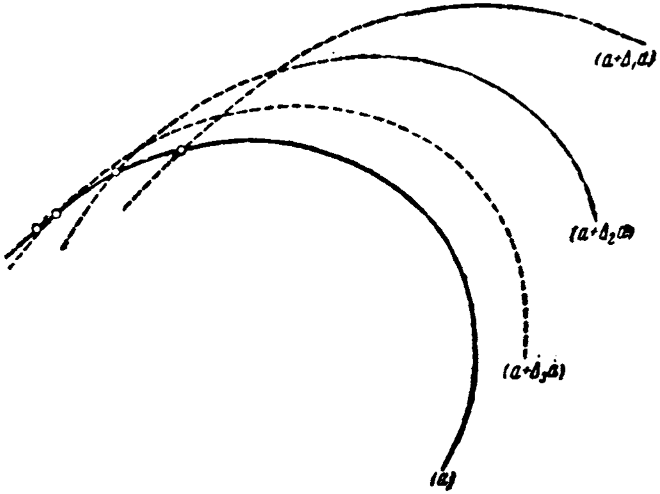
$$F(x,\ y,\ a)=0$$

ընտանիքի կորերից մեկը, որը որոշվում է պարամետրի a արժեքով։ a-ին տանք մի որոշ Δa աճ. պարամետրի $a+\Delta a$ արժեքին կհամապատասխանի ընտանիքի մի այլ՝ առաջինին «մերձավոր» կոր՝

$$F(x,\ y,\ a+\Delta a)=0\text{։}$$

Կարող է պատահել, որ բավականաչափ փոքր Δa-ի դեպքում երկու կորերը հատվեն մեկ կամ մի քանի կետում։ Δa-ն զրոյի ձգտեցնելիս, հատման այդ կետերը որևէ եղանակով կտեղափոխվեն առաջին կորի վրայով։ Եթե այդ ժամանակ հատման կետերից որևէ մեկը ձգտում է որոշակի սահմանային դիրքի, ապա այդ սահմանային կետն անվանում են խ ա ր ա կ տ ե ր ի ս տ ի կ կ ե տ սկզբնական կորի վրա (գծ. 143)։ [Ընթերցողի ուշադրությունը հրավիրում ենք այն հանգամանքի վրա, որ խարակտերիստիկ կետը կապված է ոչ միայն այն կորի հետ, որի վրա նա

գտնվում է, այլև ամբողջ ընտանիքի հետ։ Առանձին վերցրած կորի համար խոսել խարակտերիստիկ կետի մասին անիմաստ կլիներ։]



Գծ. 143․

Վերոհիշյալ կորերի հատման կետը պետք է բավարարի հետևյալ հավասարումների սիստեմին՝

$$F(x, y, a)=0, \quad F(x, y, a+\Delta a)=0,$$

կամ նրան համարժեք հետևյալ սիստեմին՝

$$F(x, y, a)=0, \qquad \frac{F(x, y, a+\Delta a)-F(x, y, a)}{\Delta a}=0։ \qquad (11)$$

Այստեղ Δa-ն ձգտեցնելով զրոյի, կստանանք մեզ արդեն ծանոթ (9) սիստեմը՝

$$F(x, y, a)=0, \quad F'_a(x, y, a)=0,$$

որին, այսպիսով, տվյալ a-ի դեպքում, պիտի բավարարեն խարակտերիստիկ կետի կոորդինատները։

Ավելի ճշգրիտ ասած, եթե x-ի և y-ի համար պահպանենք հատման կետի կոորդինատների արժեքները, ապա (11)-ի փոխարեն, կիրառելով Լագրանժի բանաձևը, կարելի է գրել՝

$$F(x, y, a)=0, \quad F'_a(x, y, a+\theta\cdot\Delta a)=0 \quad (0<\theta<1)։$$

Եթե $\Delta a \to 0$ դեպքում x, y կոորդինատներն ունեն համապատասխանաբար $\bar{x}, \bar{y}$ սահմանները, ապա, գրված հավասարությունների անցնելով սահմանին, հեշտ է համոզվել (F և F'_a ֆունկցիաների անընդհատության շնորհիվ), որ խարակտերիստիկ կետի $\bar{x}, \bar{y}$ կոորդինատներն իսկապես բավարարում են (9) հավասարումների սիստեմին։

Այժմ ենթադրենք, թե խարակտերիստիկ կետեր գոյություն ունեն ընտանիքի յուրաքանչյուր կորի վրա։ Այդ ժամանակ կարող է հարց առաջանալ խարակտերիստիկ կետերի երկրաչափական տեղի մասին։ Եթե այդ երկրաչափական տեղն իրենից ներկայացնում է (2) տեսքի կոր, ապա նրա հավասարումներում մասնակցող φ(a) և ψ(a) ֆունկցիաները պիտի բավարարեն (9) սիստեմին, և, նշանակում է, կստացվեն x-ի ու y-ի նկատմամբ այդ հավասարումների լուծումների թվում։ Ճիշտ այդպես էլ այդ երկրաչափական տեղի բոլոր կետերը բավարարում են նաև (10) հավասարմանը, այսինքն՝ այդ երկրաչափական տեղն անհրաժեշտաբար կմտնի դիսկրիմինանտ կորի կազմի մեջ։

Ասածից պարզ է, որ խարակտերիստիկ կետերի երկրաչափական տեղը, եթե այն գոյություն ունի, իրենից ներկայացնում է (լրիվ կամ մասամբ) կամ պարուրիչ, կամ եզակի կետեր կրող։

Հեշտ է համոզվել, որ նախորդ n°-ի 1), 2), 4), 5) օրինակներում խարակտերիստիկ կետերի երկրաչափական տեղը համընկնում է պարուրիչի հետ։ Այդ, որոշ իմաստով, ընդհանուր երևույթ է։ Բայց ահա 7) (ա) օրինակում այդ երկրաչափական տեղը միայն եզակի կետեր կրող է, իսկ 3) և 7) (բ) օրինակներում ամենևին չկան կորերի հատման կետեր (թեպետև պարուրիչ գոյություն ունի)։

231. ԵՐԿՈՒ ԿՈՐԵՐԻ ՇՈՇԱՓՄԱՆ ԿԱՐԳԸ. *Դիտարկենք երկու կորեր, որոնք շոշափվում են* (касаются) M_0 *կետում։*

Եթե կորերը տված են

$$y=f(x) \text{ և } y=g(x)$$

բացահայտ հավասարումներով և M_0 կետն ունի x_0 աբսցիսն, ապա կորերի օրդինատների և շոշափողների անկյունային գոր-

ծակիցների համընկնելն այդ կետում կարելի է գրել այսպես՝

$$f(x_0)=g(x_0),\quad f'(x_0)=g'(x_0)\text{։}$$

M_0 կետի շրջակայքում դիտարկելի կորերի մերձավորությունը բնորոշելու համար այդ կորերի վրա վերցնենք x աբսցիս ունեցող M և m կետերը (գծ. 144) և որոշենք

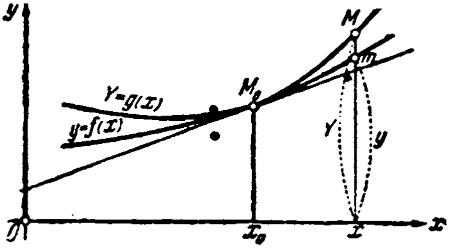
$$mM=Y-y=g(x)-f(x)=\varphi(x)$$

անվերջ փոքր հատվածի կարգը՝ $x-x_0$ հիմնական անվերջ փոքրի նկատմամբ։ Եթե այդ կարգը հավասար է $(n+1)$-ի (կամ $(n+1)$-ից բարձր է), ապա ասում են, որ կորերն M_0 կետում ունեն շոշափման n կարգ (порядок касания) (կամ n-ից ավելի բարձր կարգ)։

Մենք տեսել ենք, որ շոշափման առկայության դեպքում միշտ՝

$$\varphi(x_0)=g(x_0)-f(x_0)=0,$$

$$\varphi'(x_0)=g'(x_0)-f'(x_0)=0\text{։}$$



Գծ. 144.

Դիցուք, թե x_0 կետում $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների համար գոյություն ունեն բոլոր կարգի ածանցյալներ մինչև $(n+1)$-րդ կարգին ներառյալ, ընդ որում՝

$$f''(x_0)=g''(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0)=g^{(n)}(x_0),$$

այնպես որ

$$\varphi''(x_0)=g''(x_0)-f''(x_0)=0$$

. . . .

$$\varphi^{(n)}(x_0)=g^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)=0\text{։}$$

$f^{(n+1)}(x_0)$ և $g^{(n+1)}(x_0)$ ածանցյալների մեծությունների վերաբերյալ առայժմ ոչ մի ենթադրություն չենք անում։ $\varphi(x)$ ֆունկցիայի նկատմամբ կիրառենք Թեյլորի բանաձևը, լրացուցիչ անդամը վերցնելով Պեանոյի տեսքով [122 (10ա)]՝

$$mM=Y-y=\varphi(x)=\left[\frac{\varphi^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}+\alpha_{n+1}\right](x-x_0)^{n+1}, \qquad (12)$$

Տեսնում ենք, որ՝

$$\lim_{x\to x_0}\frac{mM}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{\varphi^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}=\frac{g^{(n+1)}(x_0)-f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!},$$

Այսպիսով, եթե $f^{(n+1)}(x_0)\neq g^{(n+1)}(x_0)$, *ապա կորերն ունեն* n-*րդ կարգի շոշափում, իսկ եթե* $f^{(n+1)}(x_0)=g^{(n+1)}(x_0)$, *ապա շոշափման կարգը* n-*ից մեծ կլինի։ Այստեղից հետևում է (ենթադրելով, որ բոլոր հիշատակվող ածանցյալները գոյություն ունեն)՝*

Որպեսզի x_0 աբսցիս ունեցող կետում $y=f(x)$ և $Y=g(x)$ կորերն ունենան n-րդ կարգի շոշափում, անհրաժեշտ են և բավարար հետևյալ պայմանները՝

$$f(x_0)=g(x_0),\quad f'(x_0)=g'(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0)=g^{(n)}(x_0), \tag{13}$$

$$f^{(n+1)}(x_0)\neq g^{(n+1)}(x_0). \tag{14}$$

[*Եթե վերջին անհավասարությունը հաստատված չէ, ապա կարելի է պնդել միայն այն, որ շոշափման կարգը* n-*ից ցածր չէ։*]

Այն դեպքում, երբ շոշափման կարգը ճշգրիտ n *է,* (12)-*ից անմիջապես բխում է, որ զույգ* n-*ի դեպքում կորերն* M_0 *կետում շոշափվելիս իրար հատում են, իսկ կենտ* n-*ի դեպքում այդպես չէ։*

Դիտողություն։ Արտածված պայմանների լույսի տակ մենք կրկին անդրադառնանք շոշափման կարգի սահմանումին։ Այդ սահմանումը կարծես թե կապված է կոորդինատային սիստեմի ընտրության հետ։ Իսկ փաստորեն երկու կորերի շոշափման կարգը կոորդինատային սիստեմի ընտրությունից կախված չէ *(միայն թե* y-*երի առանցքը զուգահեռ չլինի ընդհանուր շոշափողին), այնպես որ սահմանված գաղափարն իսկապես որ երկրաչափական է։*

Եթե կոորդինատային սիստեմը պտտենք α *անկյունով, ապա* $\bar{x}$, $\bar{y}$ *նոր կոորդինատները* x, y *կոորդինատներով կարտահայտվեն ձևափոխման հայտնի բանաձևերի օգնությամբ՝*

$$\bar{x}=x\cos\alpha+y\sin\alpha,\quad \bar{y}=-x\sin\alpha+y\cos\alpha.$$

Դիցուք կոորդինատների հին սիստեմով տված է $y=f(x)$ *կորը. Եթե նախորդ հավասարումներում* y-*ի տակ հասկացվի հենց*

այդ ֆունկցիան, ապա նրանք կորը կներկայացնեն պարամետրական տեսքով նոր սիստեմի նկատմամբ, պարամետրի դերում ունենալով x-ը։ Ակներևորեն,

$$\frac{d\bar{x}}{dx}=\cos\alpha+\frac{dy}{dx}\sin\alpha, \quad \frac{d\bar{y}}{dx}=-\sin\alpha+\frac{dy}{dx}\cos\alpha$$

ածանցյալները միաժամանակ զրո դառնալ չեն կարող, այնպես, որ նոր տեսքով ներկայացրած կորը ոչ մի եզակի կետ չունի. այդ ժամանակ պարզ է, որ այդ ածանցյալներից առաջինը զրո չէ մեզ հետաքրքրող կետում (այլապես այդ կետում կորի շոշափողը զուգահեռ կլիներ y-ների առանցքին!)։ Հետևաբար, այդ կետի շրջակայքում կորը նոր սիստեմի նկատմամբ նույնպես կարտահայտվի բացահայտ հավասարումով՝ $\bar{y}=\bar{f}(\bar{x})$։

Այժմ հեշտ է տեսնել, որ [համեմատել 114]՝

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}=\frac{-\sin\alpha+\frac{dy}{dx}\cos\alpha}{\cos\alpha+\frac{dy}{dx}\sin\alpha}, \quad \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\cos\alpha+\frac{dy}{dx}\sin\alpha\right)^3},$$

և ընդհանրապես՝

$$\frac{d^k\bar{y}}{d\bar{x}^k}=R_k\left(\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ky}{dx^k}\right),$$

որտեղ R_k-ն ռացիոնալ ֆունկցիայի նշան է։ Այստեղից պարզ է, որ հենց որ x-ից կախված երկու y ֆունկցիաների համար բավարարվում են (13) հավասարությունները, $\bar{x}$-ից կախված երկու համապատասխան $\bar{y}$ ֆունկցիաների համար էլ բավարարվում են համանման պայմաններ։ Ճիշտ այդպես էլ, (13)-ի առկայության դեպքում, (14) անհավասարությունից բխում է այդպիսի անհավասարություն նոր ֆունկցիաների համար, որովհետև հակառակ դեպքում, հակադարձ ձևափոխությունը մեզ կհանգեցներ դարձյալ հավասարության՝ (14) անհավասարության փոխարեն։

Այսպիսով ավարտվում է մեր ապացույցը։

232. ԿՈՐԵՐԻՑ ՄԵԿԻ ԱՆԲԱՑԱՀԱՅՏ ՏՐՄԱՆ ԴԵՊՔԸ. Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ երկրորդ կորը տված է անբացահայտ հավասարումով՝

$$G(x,\ y)=0. \tag{15}$$

Դիցուք $M_0(x_0,\ y_0)$ *կետն այդ կորի համար եզակի կետ չէ, այսինքն՝* $G'_y(x_0,\ y_0)\neq 0$. *Այդ դեպքում* M_0 *կետի շրջակայքում (15) հավասարումը որոշում է մի* $y=g(x)$ *միարժեք ֆունկցիա, և շոշափման կարգը որոշելու համար կարելի է օգտագործել արդեն հայտնի (13) [և (14)] պայմանները։*

Սակայն, քանի որ $g(x)$ *ֆունկցիայի բացահայտ արտահայտությունն այս դեպքում մենք չունենք, ուստի ավելի հարմար կլիներ այդ պայմաններն արտահայտել այնպիսի տեսքով, որն օգտագործեր միայն տված* G *ֆունկցիան։*

Դրա համար հիշենք, որ $g(x)$ *ֆունկցիայի ու նրա* $g'(x)$, $g''(x)$, ..., $g^{(n)}(x)$ *ածանցյալների արժեքները հաջորդաբար ու միարժեքորեն որոշվում են (15) հավասարումով և այն հավասարումներով, որոնք նրանից ստացվում են ըստ* x*-ի դիֆերենցումով, եթե* y*-ի տակ հասկանանք* $g(x)$ [*119*], *այն է՝*

$$G(x,\ \underline{g(x)})=0,\quad G'_x(x,\ g(x))+G'_y(x,\ g(x))\underline{g'(x)}=0,$$

$$G''_{x^2}+2G''_{xy}g'(x)+G''_{y^2}[g'(x)]^2+G'_y\underline{g''(x)}=0$$

. . . .

$$G^{(n)}_{x^n}+\ldots+G'_y\underline{g^{(n)}(x)}=0^{*}.$$

Այդ պատճառով, եթե ($x=x_0$ *կետում) այդ հավասարություններում ամեն տեղ* $g(x_0)$, $g'(x_0)$, ..., $g^{(n)}(x_0)$ *մեծությունների փոխարեն տեղադրենք համապատասխանաբար* $f(x_0)$, $f'(x_0)$,... ..., $f^{(n)}(x_0)$, *ապա կստացվեն հետևյալ պայմանները՝*

$$G(x_0,\ \underline{f(x_0)})=0,\quad G'_x(x_0,\ f(x_0))+G'_y(x_0,\ f(x_0))\underline{f'(x_0)}=0,$$

$$G''_{x^2}+2G''_{xy}f'(x_0)+G''_{y^2}[f'(x_0)]^2+G'_y\underline{f''(x_0)}=0,$$

. . . .

$$G^{(n)}_{x^n}+\ldots+G'_y\underline{f^{(n)}(x_0)}=0,$$

---

* *Յուրաքանչյուր հավասարման մեջ ընդգծված է հենց այն մեծությունը, որը նրանից միարժեքորեն որոշվում է, եթե արդեն որոշված են նախորդ մեծությունները։ Այդ վերաբերում է նաև ստորև բերվող հավասարումների սիստեմին։*

որոնք լիովին համարժեք են (13) պայմաններին.

Որպեսզի այդ պայմանները ներկայացնենք ավելի ակնառու տեսքով, մտցնենք հետևյալ նշանակումը՝

$$\Phi(x)=G(x;\ f(x)). \tag{16}$$

Այն ժամանակ այդ պայմանները կգրվեն այսպես՝

$$\Phi(x_0)=0,\ \Phi'(x_0)=0, \ldots,\ \Phi^{(n)}(x_0)=0. \tag{17}$$

Այսպիսով, (17) պայմանների բավարարման դեպքում (x_0 կետում) (15) կորը $y=f(x)$ կորի հետ կունենա n-ից ոչ ցածր կարգի շոշափում: *Դժվար չէ ցույց տալ, որ* այդ կարգը կլինի ճշգրիտ n, եթե բացի դրանից նաև

$$\Phi^{(n+1)}(x_0)\neq 0. \tag{18}$$

***233.** ՀՊՎՈՂ ԿՈՐ. Այժմ ենթադրենք, թե (15)- կորի փոխարեն մեզ տված է կորերի ընտանիք* $n+1$ *պարամետրերով՝*

$$G(x, y, \overbrace{a, b, \ldots, l}^{n+1})=0. \tag{19}$$

Այժմ բնականաբար հարց է առաջանում, թե կարելի՞ է արդյոք, փոփոխելով պարամետրերի արժեքները, այդ ընտանիքից ընտրել այնպիսի կոր, որը տված $y=f(x)$ *կորի հետ* $M_0(x_0,\ f(x_0))$ *կետում ունենա տվյալ ընտանիքի համար հնարավոր ամենաբարձր կարգի շոշափում.*

Հենց այդպիսի կորը կոչվում է տվյալ կորին հպվող (соприкасающаяся) M_0 *կետում. [Ավելի ճշգրիտ կլինել ասել՝ հպվող կոր այսինչ ընտանիքից, քանի որ առանձին վերցրած (15) կորի համար այդ տերմինն իմաստ չունի.]*

Հպվող կորը գտնելու համար մտցնենք հետևյալ նշանակումը, որը (16)-ի անալոգիան է.

$$\Phi(x, a, b, \ldots, l)=G(x, f(x), \ldots, a, b, \ldots, l)$$

և գրենք (17-ի նման պայմաններ՝

$$\left.\begin{aligned}&\Phi(x_0, a, b, \ldots, l)=0,\quad \Phi'_x(x_0, a, b, \ldots, l)=0, \ldots\\ &\ldots,\ \Phi^{(n)}_{x^n}(x_0, a, b, \ldots, l)=0.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Մենք այստեղ ունենք $n+1$ *հավասարումների սիստեմ՝*

$n+1$ հատ $a, b, \ldots, l$ անհայտներով։ Սովորաբար այդ սիստեմը միարժեքորեն որոշում է պարամետրերի արժեքների սիստեմը, և այդպիսով գտնվում է հպվող կորը, որն ունի n-ից ոչ ցածր կարգի շոշափում։

Այդպիսի ժամանակ սովորաբար ստացվում է՝

$$\Phi^{(n+1)}_{x^{n+1}}(x_0, a, b, \ldots, l) \neq 0,$$

այնպես որ այդ կարգը ճշգրիտ հավասար է n-ի։ Այսպիսի դրությունը ($n+1$ պարամետրի դեպքում) համարվում է նորմալ։

Իսկ այն բացառիկ կետերում, որտեղ լրացուցիչ կերպով տեղի ունի նաև

$$\Phi^{(n+1)}_{x^{n+1}}(x_0, a, b, \ldots, l) = 0 \qquad (21)$$

հավասարությունը, ասում են, որ գերհպում (пересоприкасание) *տեղի ունի։ Այդ կետերը կարելի է գտնել, եթե (20) և (21) հավասարությունները դիտենք որպես $n+2$ հավասարումների սիստեմ՝ $n+2$ հատ $x_0, a, b, \ldots, l$ անհայտներով։*

Օրինակներ։ 1) Հպվող ուղիղ։ *Ուղիղների ընտանիքն արտահայտվում է երկու պարամետր պարունակող*

$$y = ax + b$$

հավասարումով, ուստի ընդհանուր դեպքում շոշափման ամենաբարձր կարգը կլինի առաջին կարգը։ Այստեղ ունենք՝

$$\Phi(x, a, b) = y - ax - b,$$

$$\Phi'_x(x, a, b) = y' - a,$$

$$\Phi''_{x^2}(x, a, b) = y'',$$

եթե y-ի տակ հասկանանք $f(x)$։ Զրոյիկներով նշանակելով y-ի, y'-ի, y''-ի այն արժեքները, որոնք համապատասխանում են մեր ընտրած $x = x_0$ արժեքին, a և b պարամետրերի որոշման համար կստանանք՝

$$y_0 - ax_0 - b = 0, \quad y'_0 - a = 0:$$

Այստեղից՝ $a = y'_0$, $b = y_0 - y'_0 x_0$։ Այս արժեքները տեղադրելով ուղիղի հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0),$$

որն, ինչպես հեշտությամբ կճանաչի ընթերցողը, շոշափողի հավասարումն է։

Այսպես, ուրեմն, հպվող ուղիղ հանդիսանում է շոշափողը։

Շոշափումը ընդհանրապես, ինչպես ասվել էր, կլինի առաջին կարգի։ Այդ կարգը բարձրանում է այն առանձին կետերում, որտեղ տեղի է ունենում $y''_0=0$ լրացուցիչ պայմանը (օրինակ, շրջման կետերում)։

2) Հպվող շրջան*։ *Շրջանագծերի ընտանիքն արտահայտվում է*

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=R^2$$

հավասարումով, որը պարունակում է ξ, η, R երեք պարամետրեր։ Շոշափման ամենաբարձր կարգն ընդհանրապես կլինի երկրորդ կարգը։

Քանի որ, դարձյալ y-ի տակ հասկանալով $f(x)$, կունենանք՝

$$\Phi(x, \xi, \eta, R)=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2-R^2,$$

$$\frac{1}{2}\Phi'_x(x, \xi, \eta, R)=x-\xi+(y-\eta)y',$$

$$\frac{1}{2}\Phi''_{x^2}(x, \xi, \eta, R)=1+y'^2+(y-\eta)y'',$$

ապա պարամետրերը կորոշվեն հետևյալ հավասարումներից՝

$$(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2=R^2, \quad x_0-\xi+(y_0-\eta)y'_0=0,$$

$$1+y_0'^2+(y_0-\eta)y''_0=0.$$

Վերջին երկուսից (ենթադրելով, որ $y''_0\neq 0$) գտնում ենք կենտրոնի կոորդինատները՝

$$\xi=x_0-y'_0\frac{1+y_0'^2}{y''_0}, \quad \eta=y_0+\frac{1+y_0'^2}{y''_0}, \tag{22}$$

և այն ժամանակ առաջինից կստացվի շառավիղը՝

$$R=\frac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''_0|}. \tag{23}$$

Այս էլեմենտներով էլ որոշվում է հպվող (կամ հպման) շրջանը։

n° 231-ում ասածի համաձայն, որպես կանոն, շոշափողը չի հատում

* *Այս կոնտեքստում շրջան բառը սովորական առումով գործ է ածվում շրջանագծի իմաստով։*

կորը, իսկ, հպվող շրջանն, ընդհակառակը, հատում է այն։ Բացառություն կարող է լինել միայն այնպիսի կետերում, որտեղ շոշափման կարգը նորմալից բարձրանում է։

234. ԱՅԼ ՄՈՏԵՑՈՒՄ ՀՊՎՈՂ ԿՈՐԵՐԻ ՆԿԱՏՄԱՄԲ. *Դիցուք տված են* $y=f(x)$ *կորը և (19) կորերի ընտանիքն* $n+1$ *պարամետրերով. Կորի վրա վերցնենք* $n+1$ *հատ կամայական կետեր* $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ *աբսցիսներով. Որպեսզի ընտանիքի կորն անցնի այդ կետերով, պետք է տեղի ունենան հետևյալ* $n+1$ *պայմանները՝*

$$\Phi(x_1, a, b, \ldots, l)=0,$$
$$\Phi(x_2, a, b, \ldots, l)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Phi(x_{n+1}, a, b, \ldots, l)=0.$$

Սովորաբար պարամետրերի արժեքներն այստեղից որոշվում են միարժեքորեն. Նշանակենք այդ արժեքները $\tilde{a}, \tilde{b}, \ldots, \tilde{l}$*-ով.*

Այժմ ենթադրենք, թե երբ վերցրած $n+1$ *կետերը կամայական եղանակով ձգտում են կորի մի որոշակի կետի, որի աբսցիսն է* x_0*, ապա պարամետրերի* $\tilde{a}, \tilde{b}, \ldots, \tilde{l}$ *արժեքները նույնպես կձգտեն* $a, b, \ldots, l$ *որոշակի սահմանների. Կարելի է ասել, որ ընտանիքի հիշյալ կետերով անցնող կորը, տեղափոխվելով կամ դեֆորմացիայի ենթարկվելով, ձգտում է սահմանային կորի.*

Այդ սահմանային կորը գտնելու համար դատում ենք այսպես. x-ից կախված

$$\Phi(x, \tilde{a}, \tilde{b}, \ldots, \tilde{l})$$

ֆունկցիան զրո է դառնում x-ի $n+1$ *արժեքների համար, որոնք նշանակենք* $x_1<x_2<\ldots<x_{n+1}$*. Այն ժամանակ, Ռոլլի թեորեմայի համաձայն [117], առաջին ածանցյալը զրո է դառնում x-ի n արժեքների համար՝* $x'_1<x'_2<\ldots<x'_n$*, երկրորդ ածանցյալը՝* $n-1$ *արժեքների համար՝* $x''_1<x''_2<\ldots<x''_{n-1}, \ldots$ *..., (n − 1)-րդ ածանցյալը՝ երկու արժեքների համար՝* $x_1^{(n-1)}<x_2^{(n-1)}$ *և, վերջապես, n-րդ ածանցյալը՝ մի որոշ* $x_1^{(n)}$ *արժեքի համար. ընդ որում այդ բոլոր արժեքները գտնվում են* x_1*-ի և* x_{n+1}*-ի միջև.*

Այսպիսով տեղի ունեն $n+1$ *հավասարություններ՝*

$$\Phi(x_1, \tilde a, \tilde b, \dots, \tilde l) = 0, \quad \Phi'_x(x'_1, \tilde a, \tilde b, \dots, \tilde l) = 0,$$

$$\Phi''_{x^2}(x''_1, \tilde a, \tilde b, \dots, \tilde l) = 0, \dots$$

$$\dots, \Phi^{(n)}_{x^n}(x_1^{(n)}, \tilde a, \tilde b, \dots, \tilde l) = 0.$$

Եթե այժմ միաժամանակ $x_1 \to x_0$, $x_2 \to x_0$, $\dots$, $x_{n+1} \to x_0$, *ապա* $\tilde a \to a$, $\tilde b \to b$, $\dots$, $\tilde l \to l$ *և, ակներևաբար, նաև* $x'_1 \to x_0$, $x''_1 \to x_0, \dots$ $\dots, x_1^{(n)} \to x_0$: *Վերևում գրված հավասարություններում անցնելով սահմանին, մենք կվերադառնանք մեզ արդեն ծանոթ (20) սիստեմին, որը որոշում է հպվող կորը:*

Այսպիսով, եթե գոյություն ունի տվյալ կորի $n+1$ կետերով անցնող և ընտանիքին պատկանող կորի սահմանային դիրքը, ապա հենց այդ սահմանային կորը կլինի հպվողը:

Այդ կապակցությամբ էլ երբեմն ասում են (ոչ շատ խիստ, բայց պատկերավոր), որ հպվող կորն «այն կորն է ($n+1$ *պարամետր ունեցող ընտանիքից), որն անցնում է տվյալ կորի* $n+1$ *անվերջ մոտ կետերով»: Մասնավորապես, շոշափողն անցնում է կորի երկու անվերջ մոտ կետերով, իսկ հպվող շրջանը՝ երեք:*

§ 4. ԿՈՐՈՒԹՅՈՒՆ

235. ԱՂԵՂԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐԸ: Այս գաղափարը պատկանում է, փաստորեն, ինտեգրալ հաշվին և մանրամասնորեն կուսումնասիրվի X գլխում [§ 1]: Սակայն նրա կարիքը մենք զգում ենք հենց այժմ, անցնելով կորության ուսումնասիրմանը: Այդ պատճառով էլ մենք այստեղ կտանք աղեղի երկարության սահմանումը, և կնշենք նրա մի քանի հատկությունները, նրանց ապացույցը թողնելով հիշյալ գլխին:

Դիտարկենք կորի մի AB վերջավոր աղեղ (գծ. 145ա), որը տված է պարամետրական հավասարումներով՝

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{1}$$

որտեղ t-*ն փոփոխվում է* t_0-*ից մինչև* T $(T > t_0)$: *Դիցուք* $t = t_0$ *արժեքին համապատասխանում է A կետը, իսկ* $t = T$ *արժեքին՝*

B կետը։ *Մենք ենթադրում ենք, որ կորը զերծ է բազմապատիկ կետերից (բայց նա կարող է փակ լինել, այսինքն՝* A *և* B *կետերը կարող են համընկնել)։ Այսպիսով, կորի յուրաքանչյուր կետը (բացառությամբ, թերևս,* A *և* B *կետերի, եթե նրանք համընկնում են) ստացվում է պարամետրի միայն մեկ արժեքի դեպքում։*

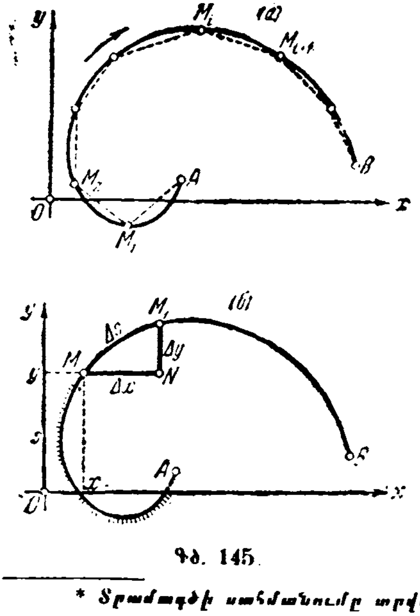
Եթե կորի կետերը համարենք դասավորված t *պարամետրի աճման կարգով (այսինքն՝ երկու կետերից այն համարենք հաջորդ, որը համապատասխանում է պարամետրի ավելի մեծ արժեքին), ապա դրանով կորի վրա ստեղծվում է ուղղություն։ Այժմ կորի վրա վերցնենք հիշյալ ուղղությամբ իրար հաջորդող մի շարք կետեր՝*

$$A=M_0,\ M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_i,\ M_{i+1},\ \ldots,\ M_m=B.$$

Նրանց համապատասխանում են պարամետրի աճող արժեքներ՝

$$t_0<t_1<t_2<\ldots<t_i<t_{i+1}<\ldots<t_m=T.$$

AB *կորին ներգծենք* $AM_1M_2\ldots B$ *բեկյալը և նրա պարագիծը նշանակենք* p*-ով։*



Գծ. 145.

Երբ M_iM_{i+1} մասնակի աղեղների տրամագծերից* մեծագույնը զրոյի ձգտելիս այդ p պարագծի համար գոյություն ունի վերջավոր s սահման, անկախ բեկյալը ներգծելու օրենքից, ապա այդ սահմանը կանվանենք AB աղեղի երկարություն՝

$$S=\overset{\smile}{AB}\ \lim p.$$

AB *կորն ինքն այդ դեպքում կոչվում է ուղղելի կոր։*

* *Տրամագծի սահմանումը տրվել է* 164*-ում։ Տես նաև երկրորդ հատորում,* 316*։*

Սահմանումից անմիջապես երևում է, որ AB **աղեղի երկարությունը մեծ է AB լարի երկարությունից՝**

$$\breve{AB} > AB$$

(եթե միայն աղեղը չի համընկնում լարի հետ).

Հենց այստեղ նշենք աղեղի երկարության մի կարևոր հատկություն՝ նրա ադիտիվությունը [համեմատել՝ 21, 3-րդ պայման].

Եթե AB աղեղի վրա վերցնենք C կետ, ապա

$$\breve{AB} = \breve{AC} + \breve{CB},$$

ենթադրելով, որ այդ բոլոր աղեղներն ուղղելի են*.

$\breve{AB}$ *աղեղի երկարության գոյության հարցը, բերված սահմանմանը համապատասխան, կորոշվի երկրորդ հատորում* [320]. *Իսկ այստեղ մենք առանց ապացուցման ընդունենք, որ այդ երկարությունն անշուշտ գոյություն ունի, եթե (1) հավասարումների մեջ φ և ψ ֆունկցիաները բավարարում են ներկա գլխում սովորաբար պահանջվող պայմաններին՝ անընդհատ են և անընդհատ ածանցյալներ ունեն.*

*236. **ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԱՂԵՂ.** Այժմ* AB *աղեղի վրա վերցնենք մի* M *կետ, որը համապատասխանում է պարամետրի կամայական* t *արժեքին. Այդ ժամանակ* AM *աղեղի*

$$\breve{AM} = s = s(t)$$

երկարությունը փոփոխական կլինի. Նա t*-ի ֆունկցիա է (ակներևորեն՝ աճող ֆունկցիա). Կարելի է ապացուցել, որ այդ ֆունկցիան ոչ միայն անընդհատ կլինի, այլև կունենա անընդհատ ածանցյալ ըստ* t*-ի, որն արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝*

---

* *Փաստորեն բավական է ենթադրել միայն* $\breve{AB}$ *աղեղի կամ առանձին-առանձին* $\breve{AC}$ *և* $\breve{CB}$ *աղեղների ուղղելիությունը: Տես երկրորդ հատոր,* 319.

$$s'_t=\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2} \tag{2}$$

[*տես երկրորդ հատոր, 321*]։

Եթե այս հավասարությունը քառակուսի բարձրացնենք և բոլոր անդամները բազմապատկենք dt^2*-ով, կստանանք իր պարզությամբ նշանավոր մի բանաձև՝*

$$ds^2=dx^2+dy^2, \tag{3}$$

որն օժտված է նաև երկրաչափական տեսանելի հատկությամբ։ 145-ր գծագրում MNM_1 *ուղղանկյուն (կորագիծ) եռանկյան մեջ որպես «էջեր» ծառայում են* M *կետի կոորդինատների*

$MN=\Delta x$, $NM_1=\Delta y$ *աճերը, իսկ որպես ներքնաձիգ՝* MM_1 Δs

աղեղը, որը $\overset{\smile}{AM}=s$ *աղեղի աճն է։ Պարզվում է, որ եթե ոչ աճերի իրենց համար, ապա նրանց գլխավոր մասերի՝ դիֆերենցիալների՝ համար տեղի ունի յուրատեսակ «պյութագորյան թեորեմա»։*

Օգտակար է նշել (2) կարևոր բանաձևի մասնավոր դեպքերը, որոնք համապատասխանում են կորի տրման զանազան մասնավոր դեպքերին։ Այսպես, եթե կորը տված է դեկարտյան կոորդինատներով՝ $y=f(x)$ *բացահայտ հավասարումով, ապա «պարամետրի» դերում հանդես է գալիս* x*-ը,* s *աղեղը դառնում է* x*-ի ֆունկցիա՝* $s=s(x)$*՝ և (2) բանաձևն ընդունում է այսպիսի տեսք՝*

$$s'_x=\sqrt{1+y'^2_x} \tag{2ա}$$

Իսկ եթե կորը տված է $r=g(\theta)$ *բևեռային հավասարումով, ապա այդ, ինչպես մենք գիտենք, համարժեք է նրա տալուն՝*

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

պարամետրական հավասարումներով, որտեղ պարամետրը θ*-ն է. այս անգամ աղեղը կլինի* θ*-ի ֆունկցիա՝* $s=s(\theta)$*։ Քանի որ՝*

$$x'_\theta=r'_\theta\cdot\cos\theta-r\cdot\sin\theta,$$
$$y'_\theta=r'_\theta\cdot\sin\theta+r\cdot\cos\theta,$$

ապա՝

$$x_\theta'^2 + y_\theta'^2 = r_\theta'^2 + r^2,$$

և (2) բանաձևը ձևափոխվում է այսպես՝

$$s_\theta' = \sqrt{r_\theta'^2 + r^2}. \qquad (2բ)$$

Հաճախ հարմար է լինում աղեղներ հաշվելու համար իբրև A սկզբնակետ վերցնել ոչ թե աղեղի ծայրակետերից մեկը, այլ նրա ներքին կետերից որևէ մեկը։ Այդպիսի ժամանակ, բնականաբար, նրանից դեպի պարամետրի աճման կողմը ուղղված աղեղները համարում են դրական, իսկ դեպի մյուս կողմը ուղղված աղեղները՝ բացասական, և, դրան համապատասխան, աղեղի երկարությունն առաջին դեպքում օժտել պլյուս նշանով, իսկ երկրորդ դեպքում՝ մինուս նշանով։ Ահա աղեղի հենց այդ s մեծությունն իր նշանով մենք կարճության համար անվանելու ենք պարզապես աղեղ։ (2), (3), (2ա), (2բ) բանաձևերը տեղի ունեն բոլոր դեպքերում։

[Նկատենք, որ եթե աղեղները հաշվելու համար դրական ընդունեինք ոչ թե պարամետրի աճման ուղղությունը, ինչպես սովորաբար արվում է, այլ նվազման ուղղությունը, ապա (2), (2ա). (2բ) բանաձևերում հարկ կլիներ արմատի առջև դնել մինուս նշան։]

237. ԱՂԵՂԸ ՊԱՐԱՄԵՏՐԻ ԴԵՐՈՒՄ. ՇՈՇԱՓՈՂԻ ԴՐԱԿԱՆ ՈՒՂՂՈՒԹՅՈՒՆԸ.

Քանի որ $s = \overset{\smile}{AM}$ փոփոխական աղեղը t պարամետրի մոնոտոն աճող անընդհատ ֆունկցիա է, ապա այդ t պարամետրն էլ իր հերթին կարող է դիտվել որպես s-ի միարժեք անընդհատ ֆունկցիա՝ $t = \omega(s)$, որտեղ s-ը փոփոխվում է 0-ից մինչև ամբողջ դիտարկվող կորի S երկարությունը [82]։ t-ի այս արտահայտությունը տեղադրելով (1) հավասարումների մեջ, մենք կստանանք x և y ընթացիկ կոորդինատները՝ արտահայտված s-ի ֆունկցիաներով՝

$$x = \varphi(\omega(s)) = \Phi(s), \quad y = \psi(\omega(s)) = \Psi(s).$$

Անկասկած, $s = \overset{\smile}{AM}$ աղեղը, որը M կետի «կորագիծ աբսցիսի» դեր է կատարում, ամենաբնական պարամետրն է M կետի դիրքը որոշելու համար։

Նկատենք, որ աղեղներ հաշվելու համար A սկզբնակետը կարելի է վերցնել նաև դիտարկվող կորի ոչ թե որևէ ծայրում, այլ ներքին կետերում. այն ժամանակ, ինչպես պարզաբանվեց վերևում, s աղեղը կարող է ընդունել ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական արժեքներ։

Դիցուք (1) տեսքով ներկայացված կորի M կետը սովորական կետ է, այնպես որ [տես (2)]՝

$$s'_t=\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}>0.$$

այդ դեպքում [93] s-ի համապատասխան արժեքի համար (ու նրա մոտակայքում) գոյություն ունի նաև t-ի անընդհատ ածանցյալն ըստ s-ի՝

$$t'_s=\omega'(s)=\frac{1}{\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}},$$

և, հետևաբար, գոյություն ունեն ու անընդհատ են նաև

$$x'_s=\Phi'(s),\quad y'_s=\Psi'(s)$$

ածանցյալները։

(3) հիմնական բանաձևից, ենթադրելով, որ բոլոր դիֆերենցիալները վերցրած են, օրինակ, ըստ s-ի, կստանանք՝

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1. \qquad (4)$$

Այսպիսով, եթե M կետը սովորական կետ էր կորի (1) տեսքով ներկայացման դեպքում, ապա նա անշուշտ սովորական կետ կլինի նաև s պարամետրին անցնելու ժամանակ։ (4) բանաձևն այնուհետև հնարավորություն է տալիս հաստատել հետևյալ պարզ ճշմարտությունը.

Դիցուք M-ը կորի **սովորական** կետ է։ Եթե նույն կորի փոփոխական կետը նշանակենք M_1-ով, ապա M_1-ն M-ին ձգտելիս MM_1 լարի երկարության հարաբերությունն $\overset{\frown}{MM_1}$ աղեղի երկարությանը կձգտի միավորի՝

$$\lim_{\overset{\frown}{MM_1}\to 1}\frac{MM_1}{\overset{\frown}{MM_1}}=1. \qquad (5)$$

Աղեղն ընդունենք որպես պարամետր և թող M *կետը համապատասխանի աղեղի* s *արժեքին, իսկ* M_1 *կետը՝* $s+\Delta s$ *արժեքին։ Նրանց դեկարտյան կոորդինատները թող լինեն* x, y *և* $x+\Delta x$, $y+\Delta y$*։ Այն ժամանակ՝*

$$\overset{\frown}{MM_1}=|\Delta s|, \text{ իսկ } MM_1=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},$$

այնպես որ՝

$$\frac{MM_1}{\overset{\frown}{MM_1}}=\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{|\Delta s|}=\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2}.$$

Անցնելով սահմանին, երբ $\Delta s\to 0$, *(4)-ի շնորհիվ կստանանք պահանջվող արդյունքը։*

Մինչև այժմ մենք կորի (սովորական) M *կետում շոշափողի դիրքը որոշում էինք նրա* $\operatorname{tg}\alpha$ *անկյունային գործակցով, չտարբերելով երկու հակադիր ուղղությունները շոշափողի իր վրա. երկու ուղղությունների համար* $\operatorname{tg}\alpha$*-ն միևնույնն է։ Որոշ հետազոտությունների ժամանակ, սակայն, անհրաժեշտություն է առաջանում նշել այդ երկու ուղղություններից մեկը։*

Պատկերացնենք, որ աղեղներ հաշվելու համար կորի վրա ընտրված են սկզբնակետ և ուղղություն. որպես կորի վրա կետի դիրքը որոշող պարամետր վերցնենք հենց աղեղը։

Դիցուք M *կետին համապատասխանում է* s *աղեղը։ Եթե* s*-ին տանք* Δs *դրական աճ, ապա* $s+\Delta s$ *աղեղը կորոշի մի նոր* M_1 *կետ, որը կգտնվի* M *կետից դեպի աղեղների աճման կողմը։ Հատողն ուղղենք* M*-ից դեպի* M_1*-ը և հատողի այդ ուղղության կազմած անկյունն* x*-երի առանցքի դրական ուղղության հետ նշանակենք* β*-ով։* MM_1 *հատվածը պրոյեկտելով կոորդինատային առանցքների վրա, պրոյեկցիաների տեսության հայտնի թեորեմայի համաձայն կստանանք (գծ. 146)՝*

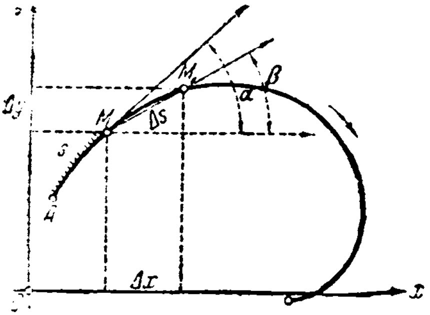
$$\text{պր.}_x\, MM_1=\Delta x=MM_1\cdot\cos\beta,$$

$$\text{պր.}_y\, MM_1=\Delta y=MM_1\cdot\sin\beta,$$

որտեղից՝

$$\cos\beta=\frac{\Delta x}{MM_1},\quad \sin\beta=\frac{\Delta y}{MM_1}.$$

Քանի որ $MM_1 = \Delta s$, *ապա այդ հավասարությունները կարելի է գրել այսպես՝*



Գծ. 146.

$$\cos\beta = \frac{\Delta x}{\Delta s}\,\frac{\overline{MM_1}}{MM_1},$$

$$\sin\beta = \frac{\Delta y}{\Delta s}\,\frac{\overline{MM_1}}{MM_1}. \qquad (6)$$

Դրական ենք անվանելու շոշափողի այն ուղղությունը, որը գնում է դեպի աղեղների աճման կողմը. *ավելի ճշգրիտ՝ նա որոշվում է որպես սահմանային դիրք (երբ* $\Delta s \to 0$*)* MM_1 *ճառագայթի, որն ուղղված է այնպես, ինչպես վերևում բացատրվեց։ Եթե շոշափողի դրական ուղղության կազմած անկյունն* x*-երի առանցքի դրական ուղղության հետ նշանակենք* α*-ով, ապա (6)-ից սահմանում կստանանք, հաշվի առնելով նաև (5)-ը,*

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \sin\alpha = \frac{dy}{ds}. \qquad (7)$$

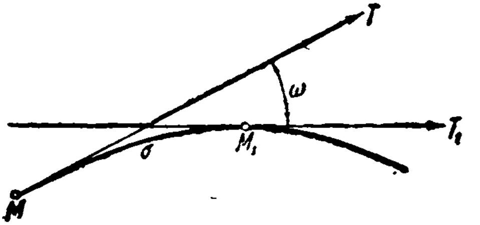
Այս բանաձևերը α *անկյունը որոշում են արդեն* $2k\pi$*-ի (*k*-ն ամբողջ է) ճշգրտությամբ, հետևաբար, նրանք իսկապես որոշում են շոշափողի երկու հնարավոր ուղղություններից մեկը, այն է՝ դ ր ա կ ա ն ո ւ ղ ղ ո ւ թ յ ո ւ ն ը։*

238. ԿՈՐՈՒԹՅԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐԸ։ Այս նախապատրաստական դիտողություններից հետո դիմենք ներկա պարագրաֆի հետազոտության հիմնական առարկային՝ կ ո ր ո ւ թ յ ա ն գաղափարին։

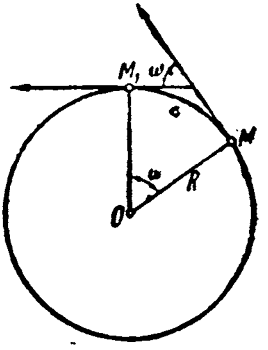
Դիտարկենք բազմապատիկ և եզակի կետերից զերծ կորի աղեղը։ Եթե նրա յուրաքանչյուր կետում տանենք շոշափող (ասենք թե դրական ուղղությամբ), ապա, կորի «կորացած» լինելու հետևանքով, շոշափման կետը տեղափոխելիս շոշափողը կպտտվի. դրանով էլ կորն էապես տարբերվում է ո ւ ղ ի ղ ի ց, որի համար շոշափողը (իր հետ համընկած լինելով) պահպանում է միևնույն ուղղությունը բոլոր կետերի համար։

Կորի ընթացքը որոշող կարևոր էլեմենտը՝ նրա «կորացածության աստիճանը» կամ «կորությունն» է զանազան կետերում. այդ կորությունը կարելի է արտահայտել թվով։

Դիցուք $\overset{\frown}{MM_1}$*-ը կորի աղեղն է (գծ. 147). դիտարկենք այդ աղեղի ծայրակետերում դրական ուղղությամբ տարված* MT *և* M_1T_1 *շոշափողները։ Բնական կլինի կորի կորությունը բնորոշել աղեղի միավոր երկարության համար հաշված շոշափողի պտտման անկյունով, այսինքն՝* $\frac{\omega}{\sigma}$ *հարաբերությամբ, որտեղ* ω *անկյունը չափվում է ռադիաններով, իսկ* σ *երկարությունը՝ երկարության ընտրած միավորներով։* Այդ հարաբերությունն անվանում են կորի աղեղի **միջին կորություն**:



Գծ. 147.



Գծ. 148.

Կորի տարբեր մասերում նրա միջին կորությունն ընդհանրապես տարբեր կլինի։ Ի միջի այլոց գոյություն ունի մի կոր (միակ կորը), որի համար միջին կորությունն ամենուրեք միևնույնն է. այդ շրջանագիծն է։ Իրոք նրա համար ունենք (գծ. 148)՝*

$$\frac{\omega}{\sigma}=\frac{\omega}{R\omega}=\frac{1}{R},$$

շրջանագծի որ աղեղն էլ վերցնելու լինենք։

$\overset{\frown}{MM_1}$ *աղեղի միջին կորության գաղափարից անցնենք կորի կորության գաղափարին տվյալ կետում։*

---

* *Չհաշվելով ուղիղը, որի համար կորությունը միշտ հավասար է զրոյի։*

Կորի կորություն M կետում կոչվում է այն սահմանը, որին ձգտում է $\overset{\frown}{MM_1}$ աղեղի միջին կորությունը, երբ M_1 կետը կորի վրայով ձգտում է M կետին:

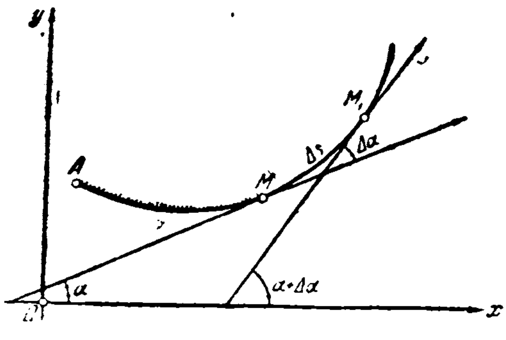
Կորի կորությունը տվյալ կետում նշանակելով k-ով, կունենանք՝

$$k = \lim_{\sigma \to 0} \frac{\omega}{\sigma}.$$

Շրջանագծի համար, ակներևորեն, $k = \frac{1}{R}$, *այսինքն՝* շրջանագծի կորությունը նրա շառավղի հակադարձ մեծությունն է:

Դիտողություն. Միջին կորության և տվյալ կետում կորության գաղափարները համանման են շարժվող կետի միջին արագության և տվյալ կետում արագության գաղափարներին. Կարելի է ասել, որ միջին կորությունը բնորոշում է շոշափողի ուղղության փոփոխման միջին արագությունը մի որոշ աղեղի վրա, իսկ կորությունը կետում՝ այդ ուղղության փոփոխման իսկական արագությունը տվյալ կետում։

Այժմ անցնենք կորության համար անալիտիկ արտահայտության արտածմանը, որով կարելի կլինի հաշվել այդ կորությունը ելնելով կորի պարամետրական հավասարումներից.



Գծ. 149.

Նախ ենթադրենք, թե պարամետրի դերում հանդես է գալիս աղեղը. Կորի վրա վերցնենք M սովորական կետը, և թող նրան համապատասխանի աղեղի s արժեքը. s-ին տալով Δs կամայական աճ, կստանանք մի որոշ $M_1(s+\Delta s)$ *կետ (գծ. 149).* M

կետից M_1 կետին անցնելիս շոշափողի թեքության անկյան $\Delta\alpha$ աճը կամ երկու շոշափողներով կազմված ω անկյունը՝ $\omega=\Delta\alpha$։ Քանի որ $\sigma=\Delta s$, ուստի միջին կորությունը հավասար կլինի $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ հարաբերությանը։

$\overset{\frown}{MM_1}=\Delta s$-ը ձգտեցնելով զրոյի, M կետում կորի կորության համար կստանանք՝

$$k=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{d\alpha}{ds}. \tag{8}$$

Կարևոր է նշել, որ այս բանաձևը ճիշտ է միայն նշանի ճշգրտությամբ, քանի որ մեր սահմանման համաձայն կորությունը ոչ-բացասական թիվ է, իսկ աջ մասում կարող է ստացվել նաև բացասական թիվ։ Բանը նրանումն է, որ ինչպես $\Delta\alpha$-ն, այնպես էլ Δs-ը կարող են բացասական լինել, այնպես որ, խիստ ասած, պիտի գրեինք՝ $\omega=|\Delta\alpha|$, $\sigma=|\Delta c|$ և՝

$$k=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|.$$

Այս դիտողությունը պիտի ի նկատի ունենալ առաջիկայում։

Որպեսզի (8) բանաձևին տանք այնպիսի տեսք, որը հարմար է կորությունն անմիջականորեն հաշվելու համար (և դրա հետ միասին ապացուցելու կորության գոյությունը), դիմենք կորի (1) կամայական հավասարումների պարամետրական տեսքով, ընդ որում այս անգամ φ և ψ ֆունկցիաները ենթադրենք առաջին երկու կարգի անընդհատ ածանցյալներ ունեցող։

Դիցուք դիտարկելի $M(t)$ կետը սովորական (և պարզ) կետ է. առանց ընդհանրությունը նվազեցնելու կարելի է համարել, որ հենց $x'_t=\varphi'(t)\neq 0$։

Այժմ (8) բանաձևն արտագրենք այսպես՝

$$k=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}}=\frac{\alpha'_t}{s'_t}, \tag{9}$$

բայց $s'_t=\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}$ [236 (2)]. մնում է գտնել միայն α'_t։ Քանի որ [105 (11)]՝

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y'_t}{x'_t} \text{ և } \alpha=\operatorname{arctg}\frac{y'_t}{x'_t},$$

ապա՝

$$\alpha'_t=\frac{1}{1+\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2}\cdot\frac{x'_t y''_{t^2}-x''_{t^2} y'_t}{x'^2_t}=\frac{x'_t y''_{t^2}-x''_{t^2} y'_t}{x'^2_t+y'^2_t}. \qquad (10)$$

s'_t-ի ու α'_t-ի արժեքները տեղադրելով (9)-ի մեջ, կստանանք վերջնական բանաձև՝

$$k=\frac{x'_t y''_{t^2}-x''_{t^2} y'_t}{(x'^2_t+y'^2_t)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (11)$$

Այս բանաձևը շատ հարմար է հաշվելու համար, որովհետև նրա մեջ մասնակցող բոլոր ածանցյալները հեշտությամբ հաշվվում են կորի պարամետրական հավասարումներից։

Երբ կորը տրված է $y=f(x)$ բացահայտ հավասարումով, այդ բանաձևն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$k=\frac{y''_{x^2}}{(1+y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (11ա)$$

Վերջապես, երբ կորը տրված է $r=g(\theta)$ բևեռային հավասարումով, կարելի է, ինչպես սովորաբար անում ենք, անցնել պարամետրական ներկայացմանը ուղղանկյուն կոորդինատներով, որպես պարամետր ընդունելով θ-ն։ Այդ ժամանակ (11)-ի օգնությամբ կստանանք՝

$$k=\frac{r^2+2r'^2_\theta-rr''_{\theta^2}}{(r^2+r'^2_\theta)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (11բ)$$

239. ԿՈՐՈՒԹՅԱՆ ՇՐՋԱՆ ԵՎ ԿՈՐՈՒԹՅԱՆ ՇԱՌԱՎԻՂ։ Շատ հետազոտություններում հարմար է լինում դիտարկելի

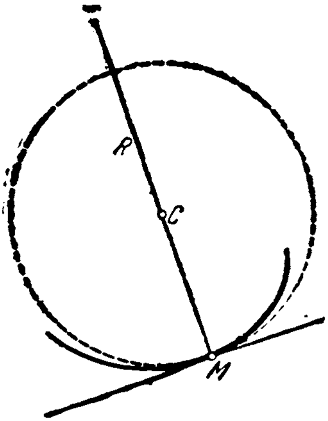
կետի մոտակայքում կորը մոտավորապես փոխարինել այնպիսի շրջանագծով, որն ունի նույն կորությունը, ինչ որ կորը տվյալ կետում.

Մենք կորի կ ո ր ու թ յ ա ն շ ր ջ ա ն* նրա M կետում անվանելու ենք այն շրջանագիծը, որը՝

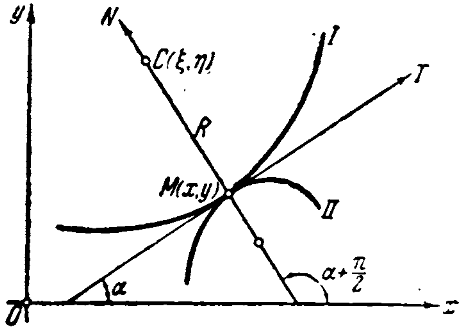
1) շոշափում է կորը M կետում,

2) այդ կետում գոգավորությամբ ուղղված է դեպի այն կողմը, դեպի որ կողմն ուղղված է կորը,

3) ունի նույն կորությունը, ինչ որ կորը M կետում *(գծ. 150).*



Գծ. 150.



Գծ. 151.

Կորի կորության շրջանի C *կենտրոնը պարզապես կոչվում է այդ կորի կ ո ր ու թ յ ա ն կ ե ն տ ր ո ն, իսկ շառավիղը՝ կ ո ր ու թ յ ա ն շ ա ռ ա վ ի ղ տվյալ կետում.*

Կորության շրջանի սահմանումից երևում է, որ կորության կենտրոնը միշտ գտնվում է կորի դիտարկվող կետում տարած նորմալի վրա՝ գոգավորության կողմում. Եթե կորի կորությունը տվյալ կետում նշանակենք k-*ով, ապա, հիշելով* [238], *որ շրջանագծի համար ունեինք* $k=\frac{1}{R}$ *բանաձևը, այժմ կորության շառավղի համար ակներևորեն կունենանք՝*

* *Ինչպես արդեն ասվել է, այստեղ «շ ր ջ ա ն» բառը գործ է ածվում շ ր ջ ա ն ա գ ծ ի իմաստով։*

$$R=\frac{1}{k},$$

Օգտվելով կորության համար նախորդ n°-ում արտածված տարբեր արտահայտություններից, մենք կարող ենք կորության շառավղի համար միանգամից գրել մի շարք բանաձևեր՝

$$R=\frac{ds}{d\alpha}, \tag{12}$$

$$R=\frac{\left(x_t'^2+y_t'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x_t' y_{t^2}'' - x_{t^2}'' y_t'}, \tag{13}$$

$$R=\frac{\left(1+y_x'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y_{x^2}''}, \tag{13ա}$$

$$R=\frac{\left(r^2+r_\theta'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r_\theta'^2-rr_{\theta^2}''}, \tag{13բ}$$

որոնք և օգտագործվում են համապատասխան դեպքերում։

Այս բոլոր բանաձևերից կորության շառավիղն ստացվում է նշանով, ինչպես վերևում կորությունը։ Սակայն այստեղ մենք նշանը չենք նետի մի կողմ, այլ կաշխատենք պարզել նրա երկրաչափական իմաստը։

Այդ նպատակով մտցնենք կորի նորմալի դրական ուղղության գաղափարը։ Մենք n° 237-ում արդեն ասել էինք, որ շոշափողի վրա դրական է համարվում աղեղների աճման ուղղությունը։ Իսկ նորմալի վրա դրական կհամարենք այն ուղղությունը, որը շոշափողի դրական ուղղության նկատմամբ այնպես կողմնորոշված լինի, ինչպես y-ների առանցքը x-երի առանցքի նկատմամբ։ Օրինակ, այդ առանցքների սովորական դասավորության դեպքում, նորմալը շոշափողի հետ պետք է կազմի $+\frac{\pi}{2}$ անկյուն՝ ժամացույցի սլաքի ուղղությանը հակառակ։

Այժմ, R=MC կորության շառավիղը դիտելով որպես ուղղությամբ օժտված հատված, որը գտնվում է նորմալի վրա, բնական կլինի նրան վերագրել պլյուս նշան, երբ նա գտնվում է նորմալի դրական կողմում, և մինուս նշան՝ հակառակ դեպքում։ Այսպես, 151 գծագրում I կորի դեպքում կորության շառավիղը կունենա պլյուս նշան, իսկ II կորի դեպքում՝ մինուս նշան։

Մենք պնդում ենք, որ վերևում արտածված ոչ բանաձևով էլ ստանանք կորության շառավիղը, նրա նշանը ճշտորեն կհամապատասխանի հենց նոր տված սահմանմանը։ Ընդ որում, կարևոր է շեշտել, որ բոլոր դեպքերում ենթադրվում է, որ աղեղները հաշվելու դրական ուղղությունը համապատասխանում է պարամետրի (t-ի, x-ի կամ θ-ի) աճմանը։

Դրանում համոզվելն ամենից ավելի հեշտ է կորի բացահայտ տրման դեպքում. այստեղ (գծ. 151) շոշափողն ուղղված է դեպի աջ, հետևաբար, նորմալը՝ դեպի վեր։ Եթե $y''_{x^2}>0$, *ապա* [136] *կորի գոգավորությունը նույնպես ուղղված է դեպի վեր և կորության* R *շառավիղը դրական է. նա հենց այդպիսին էլ ստացվում է (13ա) բանաձևով։ Ընդհակառակը,* $y''_{x^2}<0$ *դեպքում գոգավորությունն ուղղված է դեպի ներքև,* R *շառավիղը բացասական է, որն այս դեպքում էլ լիովին համապատասխանում է (13ա) բանաձևին։*

Նույնը կարելի է ցույց տալ նաև մյուս բանաձևերի համար։

240. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ *1) Շղթայագիծ (գծ. 41)՝*

$$y = a \cdot \operatorname{ch}\frac{x}{a}.$$

Այս դեպքում [համեմատել 98, 28)՝

$$\sqrt{1+y'^2_x} = \operatorname{ch}\frac{x}{a} = \frac{y}{a}.$$

Մյուս կողմից՝

$$y''_{x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a} = \frac{y}{a^2},$$

ուստի [տես (13ա)]՝

$$R=\frac{\left(\frac{y}{a}\right)^3}{\frac{y}{a^2}}=\frac{y^2}{a},$$

Քանի որ, ինչպես դժվար չէ տեսնել, այդ նույն արտահայտությունն ունի նաև նորմալի n=MN հատվածը, ապա հանգում ենք կորության C կենտրոնը կառուցելու այսպիսի եղանակի. նորմալի MN հատվածը (տես գծագիրը) պետք է վերադրել նույն նորմալի վրա, բայց հակառակ (դրական) ուղղությամբ:

2) Աստրոիդ (գծ. 112)՝

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

y'_x և y''_{x^2} ածանցյալները կարելի է գտնել, հավասարումը չլուծելով y-ի նկատմամբ, այլ անբացահայտ ֆունկցիաների դիֆերենցման մեթոդով՝

$$x^{\frac{1}{3}}+y^{-\frac{1}{3}}y'=0 \text{ կամ } x^{\frac{1}{3}}y'+y^{\frac{1}{3}}=0, \text{ որտեղից՝ } y'=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Այնուհետև՝

$$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y'+\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}y'+y^{\frac{1}{3}}y''=0,$$

որտեղից՝

$$y''=-\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3xy^{\frac{2}{3}}}y'=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}.$$

y'-ի ու y''-ի արժեքները տեղադրելով (13ա) բանաձևի մեջ, կստանանք՝

$$R=3(axy)^{\frac{1}{3}}.$$

3) Ցիկլոիդ (գծ. 114)՝

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t).$$

Քանի որ [221, 4] $\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}$ ապա՝ $d\alpha=-\frac{1}{2}dt$:

Մյուս կողմից՝

$$x'_t = a(1-\cos t), \quad y'_t = a\sin t, \quad x'^2_t + y'^2_t = 4a^2\sin^2\frac{t}{2},$$

այնպես որ՝

$$s'_t = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = 2a\sin\frac{t}{2}, \text{ այսինքն՝ } ds = 2a\sin\frac{t}{2}dt.$$

Այսպիսի դեպքում R-ը հաշվելու համար կարելի է օգտվել (12) հիմնական բանաձևից՝

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{2a\sin\frac{t}{2}dt}{-\frac{1}{2}dt} = -4a\sin\frac{t}{2}.$$

Եթե վերհիշենք նորմալի n հատվածի համար 221-ում արտածված 4) արտահայտությունը, ապա կստացվի՝

$$R = -2n.$$

Այստեղից էլ ստացվում է կորության C կենտրոնի կառուցումը, որը պարզ երևում է գծագրի վրա։

4) Շրջանի էվոլվենտ (գծ. 117)՝

$$x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t).$$

Այստեղ $\alpha = t$ [221, 6], այնպես որ $d\alpha = dt$։ Մյուս կողմից՝

$$x'_t = at\cos t, \quad y'_t = at\sin t, \quad x'^2_t + y'^2_t = a^2t^2,$$

այստեղից՝

$$s'_t = at, \quad ds = at\,dt.$$

Ուստի հեշտությամբ ստանում ենք՝

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = at = MB.$$

Այսպիսով, շոշափման B կետը (որտեղ թելը պոկվում է շրջանի վրայից) հենց կլինի թելի M ծայրի տրաեկտորիայի կորության կենտրոնը։ Պարզվում է, որ մեր կորի կորության կենտրոնների երկրաչափական տեղը հենց սկզբնական շրջանագիծն է։

[Այստեղ մենք հանդիպում ենք մի փաստի մասնավոր դեպքին, որն ընդհանուր առումով կդիտարկենք 243]։

5) Լոգարիթմական սպիրալ (գծ. 130)՝

$$r = ae^{m\theta}$$

Ունենք՝ $r'_\theta = mr$, $r''_{\theta^2} = m^2 \cdot r$։ *Տեղադրելով (13բ) բանաձևի մեջ, կստանանք՝*

$$R = \frac{(r^2 + m^2 r^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2m^2 r^2 - m^2 r^2} = r\sqrt{1+m^2}.$$

Բայց $m = \operatorname{ctg} \omega$ [223, *3)*], *այնպես որ կարելի է գրել՝*

$$R = \frac{r}{\sin \omega},$$

և այն ժամանակ գծագրից անմիջապես երևում է, որ նորմալի բևեռային հատված $n_p = NM$, *հետևաբար, կորության կենտրոնը կլինի N կետը․ այդ հեշտ միջոց է տալիս լոգարիթմական սպիրալի կորության կենտրոնը կառուցելու համար։*

6) Կարդիոիդ (գծ. 131)՝

$$r = a(1 + \cos\theta).$$

Այստեղ՝

$$r'_\theta = -a \sin\theta, \quad r''_{\theta^2} = -a \cos\theta.$$

Հեշտ է հաշվել, որ՝

$$r^2 + r'^2_\theta = 4a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}.$$

Մնում է հաշվել նաև՝

$$r'^2_\theta - rr''_{\theta^2} = a^2(1 + \cos\theta) = 2a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2};$$

և այն ժամանակ, (13ա) բանաձևով կստանանք՝

$$R = \frac{4}{3} a \cos \frac{\theta}{2}.$$

Հիշելով [223, *4)*] *կարդիոիդի համար նորմալի բևեռային հատվածի արտահայտությունը, տեսնում ենք, որ՝*

$$R=\frac{2}{3}\cdot n_p.$$

7) Լեմնիսկատ (գծ. 122)՝

$$r^2=2a^2\cdot\cos^2 2\theta.$$

Մենք n° *223, 5)-ում տեսել էինք, որ այս դեպքում* $\alpha=3\theta+\frac{\pi}{2}$, *այնպես որ* $d\alpha=3d\theta$. *Այդ ժամանակ (12) բանաձևով իսկույն ստանում ենք՝*

$$R=\frac{ds}{d\alpha}=\frac{1}{3}\,s'_\theta=\frac{1}{3}\sqrt{r^2+r_\theta'^2}=\frac{1}{3}n_p=\frac{2a^2}{3r}.$$

Քանի որ մենք կարող ենք կառուցել լեմնիսկատի նորմալը, ուստի այստեղից ստացվում է նաև կորության կենտրոնը կառուցելու եղանակը։

8) Պարաբոլ՝

$$y^2=2px.$$

Օգտվելով անբացահայտ ֆունկցիաների դիֆերենցման մեթոդից, հաջորդաբար կգտնենք՝

$$yy'_x=p,\quad yy''_{x^2}+y_x'^2=0,\ \text{որտեղից՝}\ y^3y''_{x^2}=-p^2.$$

Այժմ, (13ա) բանաձևի համաձայն՝

$$R=\frac{(1+y_x'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''_{x^2}}=\frac{[y^2+(yy'_x)^2]^{\frac{3}{2}}}{y^3y''_{x^2}}=\frac{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{-p^2}\qquad (y>0).$$

Հիշելով [221, *1)*], *որ նորմալի հատվածը* $n=\sqrt{y^2+p^2}$, *ստանում ենք՝*

$$R=-\frac{n^3}{p^2}.$$

9) Էլիպս և հիպերբոլ՝

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Այս հավասարությունը երկու անգամ դիֆերենցենք՝

$$\frac{x}{a^2}\pm\frac{yy'_x}{b^2}=0,\ \text{որտեղից՝}\ yy'_x=\mp\frac{b^2x}{a^2}.$$

Այնուհետև,

$$yy''_{x^2} = -\frac{b^2}{a^2} - y'^2_x, \quad \text{կամ} \quad y^3y''_{x^2} = -\frac{b^4}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right) = -\frac{b^4}{a^2},$$

Նախորդի նման, այստեղից՝

$$R = -\frac{(b^4x^2+a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4} \quad (y \neq 0)\text{:}$$

Այս դեպքի համար մենք արդեն ունենք [221, 2)] նորմալի հատվածի արտահայտությունը՝

$$n = \frac{\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}}{a^2},$$

այնպես որ՝

$$R = -\frac{a^2}{b^4}n^3,$$

— Հայտնի է, որ ինչպես էլիպսի, այնպես էլ հիպերբոլի համար p կիսապարամետրն արտահայտվում է այսպես՝ $p = \frac{b^2}{a}$, ուստի այստեղ էլ R-ի համար ստացվում է նույն վերջնական արտահայտությունը, ինչ որ պարաբոլի համար։

Բոլոր երեք կոնական հատույթների համար կորության շառավիղը, պարզվում է, որ համեմատական է նորմալի հատվածի խորանարդին։

10) Վերջում մի քանի խոսք ասենք մի գործնական հարցի մասին, որտեղ հենց էապես օգտագործվում է կորության փոփոխությունը կորի երկարությամբ. խոսքն այսպես կոչված *փոխանցման կորերի* մասին է, որոնք օգտագործվում են երկաթուղու բոլորումների կառուցման ժամանակ։

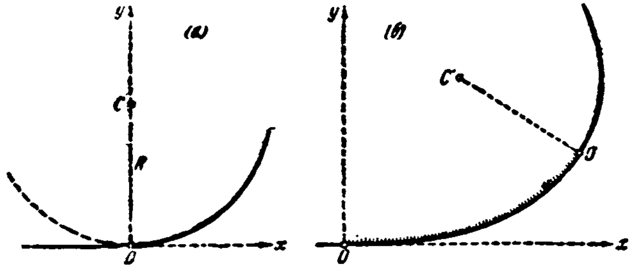
Ինչպես ցույց է տրվում մեխանիկայում, նյութական կետի կորագիծ շարժման ժամանակ զարգանում է կենտրոնախույս ուժ, որի մեծությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$F = \frac{mv^2}{R},$$

որտեղ m-ը կետի զանգվածն է, v-ն՝ նրա արագությունը, իսկ R-ը՝ կորի կորության շառավիղն է նրա դիտարկվող կետում։

Եթե երկաթուղու ուղղագիծ մասն անմիջապես միանար շրջանային աղեղով կառուցվող բոլորմանը (գծ. 182ա), ապա այդ բոլորման վրա անցնելիս կենտրոնախույս ուժը կծագեր ակնթարթորեն, առաջացնելով հանկարծակի և ուժեղ ցնցում, որը վտանգավոր է շարժակազմի և գծի վերին կառուցվածքի համար։ Դրանից խուսափելու համար ուղու ուղղագիծ մասը շրջա-

նային աղեղի հետ կապում են մի որոշ փոխանցման կորի օգնությամբ (գծ. 152ա)։ Այդ կորի երկարությամբ կորության շառավիղը աստիճանաբար նվազում է անվերջ մեծ արժեքից (ուղղագիծ մասին կցվելու կետում) մինչև շրջանի շառավիղը (շրջանային աղեղին կցվելու կետում), և դրան համապատասխան կենտրոնախույս ուժն աճում է՝ աստիճանաբար։



Գծ. 152.

Որպես փոխանցման կոր ամենից հաճախ օգտագործվում է $y=\frac{x^3}{6q}$ խորանարդ պարաբոլը։ Այս դեպքում ունենք՝

$$y'=\frac{x^2}{2q},\ y''=\frac{x}{q},$$

այնպես որ կորության շառավղի համար ստացվում է՝

$$R=\frac{q}{x}\left(1+\frac{x^4}{4q^2}\right)^{\frac{3}{2}};$$

$x=0$ դեպքում ունենք՝ $y'=0$ և $R=\infty$, այսինքն՝ մեր կորը կոորդինատների սկզբնակետում շոշափում է x-երի առանցքը և այստեղ ունի զրո կորություն*։

Երբեմն որպես փոխանցման կոր օգտագործվում է նաև լեմնիսկատը։

241. ԿՈՐՈՒԹՅԱՆ ԿԵՆՏՐՈՆԻ ԿՈՈՐԴԻՆԱՏՆԵՐԸ։ Այժմ արտածենք բանաձևեր կորության կենտրոնի կոորդինատների համար։ Կորի դիտարկելի M կետի կոորդինատները կնշանա-

* Դիֆերենցիալ հաշվի մեթոդներով հեշտ է ցույց տալ [128, 129], որ R-ի արտահայտությունը նվազում է միայն մինչև $x=0{,}946\cdot\sqrt{q}$ կետը, որտեղ նա ունի մինիմում՝ $1{,}309\sqrt{q}$։ Գործնականում օգտագործվում է կորի հենց այդ մասը միայն։

կենք x, y, *իսկ նրան համապատասխանող կորության* C *կենտրոնի կոորդինատները՝* ξ, η։

$R=MC$ *(գծ. 152) կորության շառավիղը գտնվում է առանցքի վրա, այն է՝ ուղղությամբ օժտված նորմալի վրա, որն* x*-երի առանցքի հետ կազմում է* $\alpha+\frac{\pi}{2}$ *անկյուն։* MC *հատվածը հերթով պրոյեկտելով* x*-երի առանցքի և* y*-ների առանցքի վրա, պրոյեկցիաների տեսության հիմնական թեորեմայի համաձայն կունենանք՝*

$$\xi-x=R\,\mathrm{coc}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-R\sin\alpha,$$

$$\eta-y=R\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=R\cos\alpha.$$

Այստեղից, կորության կենտրոնի կոորդինատների համար կստանանք՝

$$\xi=x-R\sin\alpha,\quad \eta=y+R\cos\alpha. \tag{14}$$

Օգտագործելով նախկինում ստացած [239 *(12)*, 237 *(7)*]

$$R=\frac{ds}{d\alpha},\quad \cos\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \sin\alpha=\frac{dy}{ds}$$

բանաձևերը, (14)-ը կարելի է գրել այսպես՝

$$\xi=x-\frac{dv}{d\alpha},\quad \eta=y+\frac{dx}{d\alpha}. \tag{15}$$

Եթե կորը տված է (1) պարամետրական հավասարումներով, հիշելով α'_t*-ի համար (10) արտահայտությունը, (15) բանաձևերը կարելի է հեշտությամբ ձևափոխել այսպես՝*

$$\xi=x-\frac{x_t'^2+y_t'^2}{x_t'y_{t^2}''-x_{t^2}''y_t'}y_t',\quad \eta=y+\frac{x_t'^2+y_t'^2}{x_t'y_{t^2}''-x_{t^2}''y_t'}x_t'. \tag{16}$$

Ինչպես տեսնում ենք, ξ*-ն ու* η*-ն այստեղ արտահայտվում են նույն* t *պարամետրի ֆունկցիաներով, ինչ որ* x*-ն ու* y*-ը։*

$y=f(x)$ *բացահայտ հավասարումով տրված կորի դեպքում (16) բանաձևերն ընդունում են հետևյալ մասնավոր տեսքը՝*

$$\xi=x-\frac{1+y_x'^2}{y_{x^2}''}y_x',\quad \eta=y+\frac{1+y_x'^2}{y_{x^2}''}. \tag{16ա}$$

(16) բանաձևերը կարելի է կիրառել նաև այն դեպքում, երբ կորը տված է $r=g(\theta)$ *բևեռային հավասարումով, իբրև պարամետր վերցնելով, ըստ սովորականի,* θ *անկյունը։*

Եթե (16ա) բանաձևերը համեմատենք նորմալի վրա գտնվող սահմանային կետի համար n° 131*-ում (գծ. 62) խնդրի լուծման ժամանակ գտած բանաձևերի հետ, ապա կհամոզվենք, որ հիշյալ սահմանային կետը համընկնում է կորության կենտրոնի հետ։*

Է՛լ ավելի կարևոր արդյունք կստացվի, եթե (16ա) և (13ա) բանաձևերը համեմատենք n° 238*-ի (22) և (23) բանաձևերի հետ.* կորի կորության շրջանը տվյալ կետում հենց ինքը հպվող շրջանն է։ *Այլ խոսքով* [234], կորության շրջանն իրենից ներկայացնում է կորի երեք կետերով անցնող շրջանագծի սահմանային դիրքը, երբ այդ կետերը ձգտում են համընկնել տվյալ կետին։

Այդ, իհարկէ, կարելի էր կանխատեսել. տվյալ կորի և շրջանագծի միջև երկրորդ կարգի շոշափման դեպքում y *օրդինատն ու նրա* y'_x, y''_{x^2} *երկու ածանցյալները տվյալ կետում երկու կորերի համար ունեն միևնույն արժեքները, այնպես որ նրանց համար այդ կետում համընկնում են գոգավորության ուղղությունները և կորության մեծությունները, որոնք կախված են միայն վերոհիշյալ ածանցյալներից։*

242. ԷՎՈԼՅՈՒՏԻ ԵՎ ԷՎՈԼՎԵՆՏԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ. ԷՎՈԼՅՈՒՏԻ ՈՐՈՆՈՒՄԸ։ *Երբ* $M(x, y)$ *կետը տեղափոխվում է տված կորի վրա, նրան համապատասխանող* $C(\xi, \eta)$ *կորության կենտրոնը, ընդհանրապես ասած, նույնպես գծում է մի որոշ կոր։* Տված կորի կորության կենտրոնների երկրաչափական տեղը կոչվում է կորի է վ ո լ յ ու տ: Հակադարձաբար, սկզբնական կորն իր էվոլյուտի նկատմամբ կոչվում է է վ ո լ վ ե ն տ.

Նախորդ n°*-ի (16) կամ (16ա) բանաձևերը, որոնք* C *կորության կենտրոնի* ξ, η *կոորդինատներն արտահայտում են* t *(կամ* x*) պարամետրով, կարելի է դիտել որպես էվոլյուտի արդեն պատրաստի պ ա ր ա մ ե տ ր ա կ ա ն հ ա վ ա ս ա ր ու մ ն ե ր։ Երբեմն ձեռնտու է լինում նրանցից արտաքսել պարամետրը և էվոլյուտն արտահայտել անբացահայտ հավասարումով՝*

$$F(\xi, \eta)=0.$$

Օրինակներ։ 1) Գտնել $y^2=2px$ *պարաբոլի էվոլյուտը։*
Օգտվելով վերևում [240, *8*)] *ստացված*

$$yy'_x=p,\quad y^3y''_{x^2}=-p^2$$

հավասարություններից, (16а) բանաձևերով գտնում ենք կորության կենտրոնի կոորդինատները՝

$$\xi=x-yy'_x\frac{y^2+(yy'_x)^2}{y^3y''_{x^2}}=x+\frac{y^2+p^2}{p}=3x+p=\frac{3y^2}{2p}+p,$$

$$\eta=y+y\frac{y^2+(yy'_x)^2}{y^3y''_{x^2}}=y-\frac{y}{p^2}(y^2+p^2)=-\frac{y^3}{p^2},$$

Այստեղից, պարաբոլի էվոլյուտի պարամետրական հավասարումները (որպես պարամետր վերցնելով y*-ը) կլինեն՝*

$$\xi=\frac{3y^2}{2p}+p,\quad \eta=-\frac{y^3}{p^2},$$

Այս հավասարումներից արտաքսելով y*-ը, կստանանք՝*

$$y^2=\frac{2p}{3}(\xi-p),\quad y^3=-p^2\eta,$$

որտեղից վերջնականապես կստացվի՝

$$\eta^2=\frac{8}{27p}(\xi-p)^3.$$

Մենք տեսնում ենք, որ պարաբոլի էվոլյուտը կիսախորանարդային պարաբոլ է (գծ. 153)։

2) Գտնել $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ *էլիպսի էվոլյուտը։*

Ունենք

$$x'_t=-a\sin t,\quad x''_{t^2}=-a\cos t,\quad y'_t=b\cos t,\quad y''_{t^2}=-b\sin t.$$

Տեղադրելով (16)-ի մեջ, կստանանք՝

$$\xi=a\cos t-\frac{b\cos t(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)}{ab}=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,$$

$$\eta=-\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t.$$

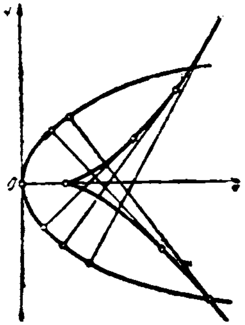
Այսպիսին է էլիպսի էվոլյուտի պարամետրական ներկայացումը։ t-ն արտաքսելով, կստանանք նրա հավասարումն անբացահայտ տեսքով՝

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}}+(b\eta)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}} \qquad (\text{որտեղ } c^2=a^2-b^2).$$

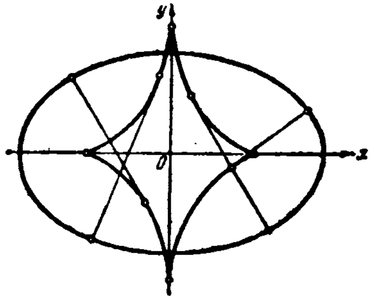
Այս կորը հիշեցնում է աստրոիդը և նրանից ստացվում է ձգվելով ուղղաձիգ ուղղությամբ (գծ. 154)։

Նման եղանակով, բայց միայն եռանկյունաչափական ֆունկցիաների փոխարեն օգտագործելով հիպերբոլական ֆունկցիաներ, կստացվի $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ հիպերբոլի էվոլյուտը՝

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}}-(b\eta)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}} \qquad (\text{որտեղ } c^2=a^2+b^2).$$



Գծ. 153.



Գծ. 154.

3) Գտնել $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ աստրոիդի էվոլյուտը։
Մենք արդեն ունեցել ենք [240, 2]՝

$$y'_x=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$y''_{x^2}=\left(\frac{a^2}{3x^4y}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Տեղադրելով (16ա)-ի մեջ, պարզեցումներից հետո կստանանք՝

$$\xi=x+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}},$$

$$\eta = y + 3x^{\frac{2}{2}} y^{\frac{1}{3}}:$$

Այս հավասարումներից ու աստրոիդի իր հավասարումից x-ն ու y-ը կարելի է արտաքսել հետևյալ կերպ՝

$$\xi + \eta = (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})^3, \quad \xi - \eta = (x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}})^3,$$

$$(\xi + \eta)^{\frac{2}{3}} + (\xi - \eta)^{\frac{2}{3}} = 2(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}) = 2a^{\frac{2}{3}}.$$

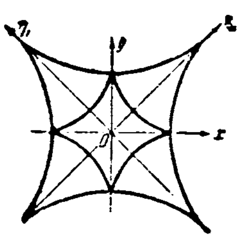
Եթե կոորդինատային առանցքները պտտենք 45°-ով, ապա ξ_1, η_1 նոր կոորդինատները ξ, η հին կոորդինատներով կարտահայտվեն այսպես՝

$$\xi_1 = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \qquad \eta_1 = -\frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}},$$

այնպես որ որոնելի էվոլյուտի հավասարումը նոր կոորդինատային սիստեմով կստանա հետևյալ տեսքը՝

$$\xi_1^{\frac{2}{3}} + \eta_1^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{4}}.$$

Այստեղ մենք կրկին տեսնում ենք աստրոիդի հավասարում: Այսպիսով, աստրոիդի էվոլյուտը դարձյալ աստրոիդ է՝ կրկնակի անգամ մեծացրած չափերով և հների նկատմամբ 45°-ով պտտված առանցքներով (գծ. 155):



Գծ. 155.

4) Գտնել $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ *ցիկլոիդի էվոլյուտը:*

Մենք գիտենք [221, 4)], *որ ցիկլոիդի համար*

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}, \qquad d\alpha = -\frac{1}{2} dt,$$

ուստի ավելի հարմար է օգտագործել (15) բանաձևերը: Այդ բանաձևերի մեջ տեղադրելով $d\alpha$*-ի արժեքը, կստանանք՝*

$$\xi = x + 2y'_t, \quad \eta = y - 2x'_t$$

կամ՝

$$\xi = a(t + \sin t), \quad \eta = -a(1 - \cos t).$$

Ընդունելով $t = \tau - \pi$, *այդ հավասարումները կարտագրենք այսպես՝*

$$\xi = -\pi a + a(\tau - \sin \tau), \quad \eta = -2a + a(1 - \cos \tau).$$

Այստեղից պարզ երևում է, որ ցիկլոիդի էվոլյուտը մի ցիկլոիդ է,

որը կոնգրուենտ (համադրելի) է տվածին, բայց տեղափոխված է πa հատվածի չափ դեպի ձախ (x-երի առանցքին զուգահեռ, բացասական ուղղությամբ) և $2a$ հատվածի չափ դեպի ներքև (y-ների առանցքին զուգահեռ, դարձյալ բացասական ուղղությամբ)։

Ընթերցողին ենք թողնում համոզվել, որ էպիցիկլոիդի կամ հիպոցիկլոիդի էվոլյուտը նույնպես կոնգրուենտ է սկզբնական կորին և նրանից ստացվում է պարզ պտտման միջոցով։

5) Գտնել $r=ae^{m\theta}$ լոգարիթմական սպիրալի էվոլյուտը։

Կորության կենտրոնի երկրաչափական կառուցումը, որը ցույց է տրված n° 240, 5)-ում, թույլ է տալիս հեշտությամբ որոշելու նրա r_1 և θ_1 բևեռային կոորդինատները։ Այսպես (տես գծ. 130)՝

$$r_1=n_p=r\operatorname{ctg}\omega=mr,\qquad \theta_1=\theta+\frac{\pi}{2}.$$

Այս հավասարումներից ու սպիրալի իր հավասարումից արտաքսելով r-ն ու θ-ն, կստանանք էվոլյուտի հավասարումը՝

$$r_1=mae^{m(\theta_1-\frac{\pi}{2})}=a_1e^{m\theta_1}.$$

Բևեռային առանցքը համապատասխան անկյունով պտտելով, կարելի է այս հավասարումը նույնական դարձնել սկզբնական հավասարման հետ. այսպիսով, լոգարիթմական սպիրալի էվոլյուտը նույնպիսի սպիրալ է, որն սկզբնական սպիրալից ստացվում է բևեռի շուրջը պտտելով։

Տվյալ կորի համար էվոլվենտի կառուցմանը կվերադառնանք էվոլյուտի ու էվոլվենտի մի շարք հատկությունները ուսումնասիրելուց հետո։

243. ԷՎՈԼՅՈՒՏՆԵՐԻ ՈՒ ԷՎՈԼՎԵՆՏՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ. Մենք էվոլվենտի պարամետրական հավասարումները ունեինք հետևյալ տեսքով՝

$$\xi=x-R\sin\alpha,\quad \eta=y+R\cos\alpha, \tag{14}$$

որտեղ x, y, R, α մեծությունները պարամետրի ֆունկցիաներ են. Այժմ ենթադրենք, թե գոյություն ունեն x-ի ու y-ի երրորդ կարգի անընդհատ ածանցյալներ ըստ պարամետրի*. այդ ժամանակ կարելի է (14) արտահայտությունը դիֆերենցել՝

$$d\xi=dx-R\cos\alpha\,d\alpha-dR\sin\alpha$$
$$d\eta=dy-R\sin\alpha\,d\alpha+dR\cos\alpha.$$

* Հիշենք, որ R-ի մեջ արդեն մտնում են երկրորդ կարգի ածանցյալներ։

ի նկատի ունենալով, որ՝

$$R\cos\alpha\, d\alpha = \frac{ds}{d\alpha}\frac{dx}{ds}d\alpha = dx,$$

$$R\sin\alpha\, d\alpha = \frac{ds}{d\alpha}\frac{dy}{ds}d\alpha = dy,$$

վերջնականապես կստանանք՝

$$d\xi = -\sin\alpha\, dR, \quad d\eta = \cos\alpha\, dR. \tag{17}$$

Այժմ սահմանափակվենք դիտարկելով կորի այնպիսի կտոր, որի վրա R-ը ոչ զրո է դառնում, ոչ անվերջություն, և dR-ը զրո չի դառնում։ Այդպիսով բացառվում է եզակի կետերի հնարավորությունը ինչպես կորի, այնպես էլ նրա էվոլյուտի վրա։ Քանի որ $dR \neq 0$, կորության R շառավիղը մոնոտոն է փոփոխվում. կամ մշտապես աճում է, կամ նվազում։

Բաժանելով (17) բանաձևերից մեկը մյուսի վրա, կստանանք՝

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

այնպես որ էվոլյուտի ու էվոլվենտի շոշափողների անկյունային գործակիցներն իրար հակադարձ մեծություններ են և հակառակ նշաններով, իսկ շոշափողներն իրենք փոխադարձաբար ուղղահայաց են։ Այսպիսով՝

1° էվոլվենտի նորմալը էվոլյուտի համար շոշափող է (կորության կենտրոնում)։

Վերցնենք էվոլվենտի նորմալների ընտանիքը. նա կախված է մեկ պարամետրից (օրինակ, այն պարամետրից, որով որոշվում է կետի դիրքը տվյալ կորի վրա)։ Ապացուցածից երևում է, որ էվոլյուտը նորմալների այս ընտանիքի պարուրիչն է։

Վարժության համար ընթերցողին առաջարկում ենք այդ նույն բանում համոզվել այլ ճանապարհով. ելնելով նորմալների՝

$$(X-x)x'_t+(Y-y)y'_t=0$$

հավասարումից (որտեղ t պարամետրը մտնում է x, y, x'_t, y'_t

մեծությունների մեջ) n° 228-*ի մեթոդներով գտնել պարուրի-չը և ցույց տալ, որ նա համընկնում է (16) էվոլյուտի հետ։ Կարելի է ապացուցել նաև, որ* կորության կենտրոնը խարակտերիստիկ կետ է նորմալի վրա, *այսինքն՝ տվյալ նորմալի ու նրան անվերջ մոտ նորմալի հատման կետի սահմանային դիրքն է։*

Այժմ անցնենք էվոլյուտի σ աղեղի դիտարկմանը։ (17) հավասարությունները քառակուսի բարձրացնելով և իրար գումարելով (հաշվի առնելով n° 235-*ի (3) բանաձևն աղեղի դիֆերենցիալի համար), կստանանք՝*

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 = dR^2,$$

որտեղից՝

$$d\sigma = \pm dR \qquad (18)$$

կամ (քանի որ $dR \neq 0$*)՝*

$$\frac{d\sigma}{dR} = \pm 1.$$

Քանի որ այս հարաբերությունը պարամետրի անընդհատ ֆունկցիա է, որը չի կարող −1 արժեքից ցատկել +1 արժեքին (չընդունելով միջանկյալ արժեքները), ուստի նա ամբողջ աղեղի վրա հավասար է այդ թվերից մեկին։ Այլ կերպ ասած, (18) հավասարության աջ մասում գտնվում է միշտ միևնույն նշանը՝ պլյուս կամ մինուս, ամբողջ աղեղի համար։

Այդ նշանը կախված է էվոլյուտի վրա աղեղներ հաշվելու ուղղության ընտրությունից։ Եթե այդ ուղղությունն ընտրենք այնպես, որ σ աղեղն R շառավղի հետ միասին աճի, (18) բանաձևում պետք է վերցնել պլյուս նշան. իսկ եթե σ աղեղն աճում է այնպիսի ուղղությամբ, որին համապատասխանում է R-ի նվազումը, ապա պետք է վերցնել մինուս նշան։

Ենթադրենք, թե տեղի ունի առաջին դեպքը, այն ժամանակ՝

$$dR = d\sigma,$$

որտեղից՝

$$R - \sigma = c = \text{const}. \qquad (19)$$

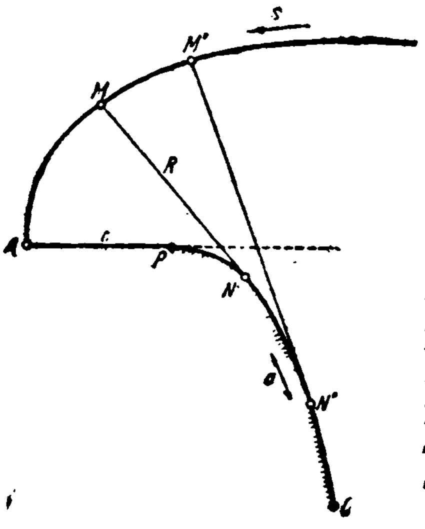
և մենք ստանում ենք՝

2° կորության շառավիղն էվոլյուտի աղեղից տարբերվում է հաստատուն մեծությամբ:

Այսպիսով, էվոլվենտի երկու կետերում կորության շառավիղների տարբերությունը հավասար է էվոլյուտի աղեղին՝ համապատասխան կորության կենտրոնների միջև։ Այստեղից, ի միջի այլոց, բխում է էվոլյուտի աղեղի ուղղման հետաքրքիր եղանակ։

Էվոլյուտի հենց նոր ապացուցած հատկությունը ունի մեխանիկական գեղեցիկ մեկնաբանություն։ Նրա շարադրումը հեշտացնելու համար ենթադրենք, թե R կորության շառավիղը, որը զրո չդառնալով ամբողջ աղեղի վրա պահպանում է միևնույն նշանը, ամենուրեք դրական է. դրան կարելի է հասնել էվոլվենտի վրա աղեղների հաշվման համար հարմար ուղղության ընտրությամբ։ Այնուհետև, էվոլվենտի վրա աղեղը հաշվելով այն P կետից, որին համապատասխանում է կորության փոքրագույն շառավիղ, կունենանք նաև σ>0։ Այս պայմաններում (19) հավասարության մեջ մասնակցող c հաստատունը նույնպես դրական է։

Այժմ պատկերացնենք, թե էվոլյուտի վրա թել է փաթաթված՝ նրա Q վերջից մինչև P սկիզբը (գծ. 156). Նա էվոլյուտից հեռանում է նրա P սկզբնակետում շոշափողի ուղղությամբ և կտրվում է P կետից c հեռավորության վրա՝ էվոլվենտի համապատասխան A կետում։ Սկսենք թելը բացել, ետ տալով էվոլյուտի վրայից, միշտ պահելով ձգված վիճակում։ Դիցուք թե QNM-ը նրա կամավոր դիրքն է. քանի որ NM-ը PA=c-ից մեծ է հենց $\overset{\frown}{PN}=\sigma$ աղեղի երկարությամբ, ուստի NM-ը կլինի կորության R շառավիղը, այսինքն՝ M կետը գտնվում է էվոլվենտի վրա։



Գծ. 156.

Ուրեմն, էվոլվենտը կարող է գծվել՝ նախապես էվոլյուտի վրա փաթաթած թելը բացելու (ետ տա-

յու) միջոցով*: *Այլ կերպ կարելի է ասել, որ* էվոլվենտը AP ուղիղի A կետի տրաեկտորիան է, երբ այդ ուղիղը առանց սահելու գլորվում է էվոլյուտի վրայով։

Վերջում արտածենք մի բանաձև էվոլյուտի կորության ρ շառավղի համար։

β-ով նշանակելով էվոլյուտի շոշափողի կազմած անկյունն x-երի առանցքի հետ, ունենք՝

$$\beta=\alpha\pm\frac{\pi}{2}, \text{ այնպես որ՝ } d\beta=d\alpha. \qquad (20)$$

Այդ պատճառով էլ [տես (19) և (20)]՝

$$\rho=\frac{d\sigma}{d\beta}=\frac{dR}{d\alpha}=\frac{ds}{d\alpha}\cdot\frac{dR}{ds}=R\cdot\frac{dR}{ds}, \qquad (21)$$

Հարկավոր է հիշել, որ այս բանաձևը ենթադրում է, որ σ-ն R-ի հետ միասին աճում է. հակառակ դեպքում պետք է աջ մասում դրվեր մինուս նշան։ Իսկ եթե ընդունենք, որ σ-ն աճում է s-ի հետ միասին, ապա բանաձևը կգրվի այսպես՝

$$\rho=R\left|\frac{dR}{ds}\right|, \qquad (22)$$

միավորելով, այսպիսով, $\frac{dR}{ds}>0$ *դեպքը (R-ն աճում է s-ի հետ միասին) և* $\frac{dR}{ds}<0$ *դեպքը (R-ը նվազում է s-ի աճման հետ միասին)։*

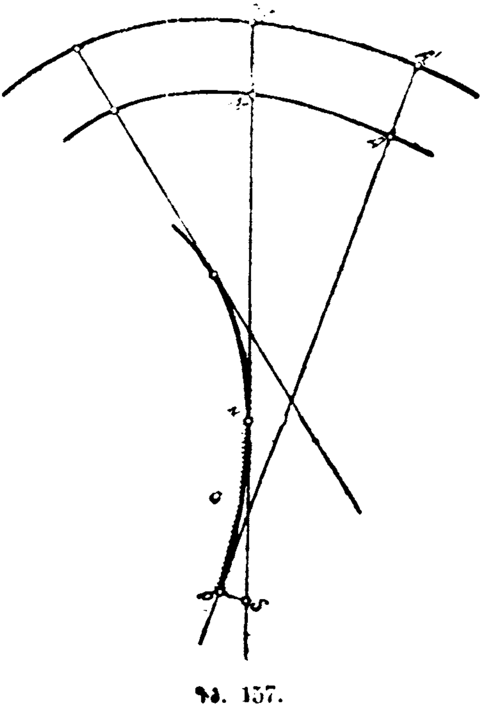
244. ԷՎՈԼՎԵՆՏՆԵՐԻ ՈՐՈՆՈՒՄԸ։ *Մենք տեսանք, որ ամեն մի էվոլվենտ կարող է վերականգնվել իր էվոլյուտով՝ վերջինիս վրա փաթաթված թելը բացելու միջոցով և կամ, որն ըստ էության նույնն է, ուղիղն էվոլյուտի վրայով առանց սահելու գլորելու միջոցով։ Այժմ ապացուցենք հակադարձ պնդումը. եթե ուղիղն առանց սահելու գլորվում է տված կորի վրայով, ապա նրա ամեն մի կետի տրաեկտորիան այդ կորի համար էվոլվենտ է։ [Այսպիսով, ամեն մի կոր ունի անթիվ բազմությամբ էվոլվենտներ։]*

* *Այստեղից են, փաստորեն, ծագում էվոլյուտ և էվոլվենտ տերմինները, որոնք նշանակում են «փռվող» („развертывающаяся") և «փռվածք»* („развёртка):

Դիցուք PN կորը (գծ. 137) տված է պարամետրական տեսքով՝

$$\xi=\varphi(t), \quad \eta=\psi(t)$$

հավասարումներով, ընդ որում φ և ψ ֆունկցիաներն ունեն մինչև երկրորդ կարգի անընդհատ ածանցյալներ. ենթադրենք նաև, որ կորի դիտարկվող կտորի վրա չկան բազմապատիկ և ընդհանրապես եզակի կետեր։ Կորի s աղեղը հաշվենք P կետից։



Գծ. 137.

P կետում տարված և աղեղների աճման կողմն ուղղված շոշափողի վրա վերցնենք մի A կետ, որի հեռավորությունը P կետից (նշանը հաշվի առնելով) նշանակենք c-ով և հետևենք նրա տրաեկտորիային, երբ PA ուղիղն առանց սահելու գլորվում է տված կորի վրայով։ Ուղիղի նոր դիրքի ժամանակ, երբ շոշափման կետ կդառնա N-ը, P-ն կտեղափոխվի S կետը, իսկ A-ն՝ M կետը. ակներևորեն՝

$$SN=\overset{\frown}{PN}=\sigma, \text{ այնպես որ } NM=c-\sigma.$$

Եթե N և M կետերի կոորդինատները համապատասխանաբար նշանակենք (ξ, η) և (x, y), իսկ SN ուղիղի կազմած անկյունը x-երի առանցքի հետ նշանակենք β-ով, ապա NM հատվածը պրոյեկտելով առանցքների վրա, դժվար չի լինի ստանալ՝

$$x=\xi+(c-\sigma)\cos\beta, \quad y=\eta+(c-\sigma)\sin\beta. \tag{23}$$

Այս հավասարումները հենց տալիս են որոնելի տրաեկտորիան պարամետրական տեսքով։ Դիֆերենցելով, կստանանք՝

$$dx=d\xi-\cos\beta\,d\sigma-(c-\sigma)\sin\beta\,d\beta,$$
$$dy=d\eta-\sin\beta\,d\sigma+(c-\sigma)\cos\beta\,d\beta.$$

Քանի որ [*տես* 237 *(7)*]՝

$$\cos\beta=\frac{d\xi}{d\sigma}, \quad \sin\beta=\frac{d\eta}{d\sigma}, \tag{24}$$

ապա այդ բանաձևերը պարզեցվում են՝

$$dx=-(c-\sigma)\sin\beta\cdot d\beta,$$
$$dy=(c-\sigma)\cos\beta\cdot d\beta.$$

Բացառելով այն դեպքերը, երբ $d\beta=0$ *կամ* $\sigma=c$*, *այդ հավասարությունները բաժանենք իրար վրա, կստանանք՝*

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}=-\operatorname{ctg}\beta=-\frac{1}{\frac{d\eta}{d\xi}}.$$

Այստեղից արդեն պարզ է, որ երկու կորերի շոշափողներն իրար ուղղահայաց են, այնպես որ տված կորն իսկապես պարուրիչ է կառուցված կորի նորմալների ընտանիքի համար, այսինքն՝ այդ կորի էվոլյուտն է։ Նշանակում է կառուցված կորը տված կորի համար էվոլվենտ է, որն և պահանջվում էր ապացուցել։

Նշված ճանապարհով էվոլվենտ ստանալու օրինակ կարող է ծառայել շրջանագծի էվոլվենտը, որն արդեն դիտարկել ենք վերևում [(215, *8*) *համեմատել* 240, *4*)]։

* *Նրանց համապատասխանում են եզակի կետեր կառուցված կորի վրա։*

ԼՐԱՑՈՒՄ

ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՇԱՐՈՒՆԱԿՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

245. *ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԴԵՊՔԸ. Դիտարկենք $f(x)$ ֆունկցիան, որը որոշված է X միջակայքում (վերջավոր կամ անվերջ), կամ, ավելի ընդհանուր, վերջավոր թվով այդպիսի միջակայքերից բաղկացած X տիրույթում.* Եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է X տիրույթում և այնտեղ ունի անընդհատ ածանցյալներ մինչև n-րդ կարգը ներառյալ $(n\geqslant 1)$, ապա ասում են, որ նա X տիրույթում պատկանում է C^n դասին.

*Նշենք, որ եթե որևէ միջակայքի ծայրակետը մտնում է տիրույթի կազմի մեջ, ապա այդ կետի համար ի նկատի ունենք միակողմյան ածանցյալները.**

Դիցուք այժմ $f(x)$ ֆունկցիան պատկանում է C^n դասին $(n=1, 2, 3, \ldots)$ մի X տիրույթում, որը չի ընդգրկում ամբողջ թվային առանցքը. Ենթադրենք, թե X տիրույթը ծածկող մի այլ X^* տիրույթում գոյություն ունի նույնպես C^n դասին պատկանող մի $f^*(x)$ ֆունկցիա, որը X և X^* տիրույթների ընդհանուր մասում համընկնում է $f(x)$-ի հետ. այդ ժամանակ f^* ֆունկցիան իրականացնում է f ֆունկցիայի շարունակումն X^* տիրույթում՝ պահպանելով դասը.

Արդյոք միշտ հնարավոր է ֆունկցիայի այդպիսի շարունակումն ավելի ընդարձակ տիրույթում. Այդ հարցին պատասխանում է հետևյալ թեորեման.

---

* *Կամ, որը տվյալ դեպքում միևնույնն է նշանակում, ածանցյալների սահմանային արժեքները, երբ x-ը միջակայքի ծայրակետին մոտենում է նրա ներսից։*

ԹԵՈՐԵՄԱ. X փակ* միջակայքում C^n ($n=1, 2, 3, \dots$) դասին պատկանող ամեն մի ֆունկցիա կարելի է շարունակել ամբողջ $X^*=(-\infty,+\infty)$ թվային առանցքի վրա՝ դասը պահպանելով.

Ցույց տանք, որ շարունակումն այստեղ իրականացվում է պարզապես ամբողջ բազմանդամների օգնությամբ. Այդ նպատակով նախ անենք հետևյալ դիտողությունները.

Ինչպես մենք տեսել էինք 121-ում, n աստիճանի

$$p(x)=c_0+\frac{c_1}{1!}(x-\alpha)+\frac{c_2}{2!}(x-\alpha)^2+\dots+\frac{c_n}{n!}(x-\alpha)^n \qquad (1)$$

բազմանդամն $x=\alpha$ *կետում իր* n *ածանցյալների հետ միասին ընդունում է հենց* $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ *արժեքները.*

Այնուհետև ենթադրենք, թե պահանջվում է կառուցել այնպիսի բազմանդամ, որն $x=\alpha$ *կետում բավարարելով նախկին պայմաններին, իր* n *ածանցյալների հետ միասին ընդուներ նախապես տված* $d_0, d_1, d_2, \dots, d_n$ *արժեքները մի այլ՝* $x=\beta$ *կետում. Որոնելի բազմանդամը վերցնենք*

$$p(x)+(x-\alpha)^{n+1}q(x)$$

տեսքով, որտեղ $p(x)$*-ն (1) բազմանդամն է, իսկ* n *աստիճանի* $q(x)$ *բազմանդամը դեռևս ենթակա է որոշվելու. Ինչպես էլ ընտրենք* $q(x)$*-ը, (2) բազմանդամն* $x=\alpha$ *կետում ամեն դեպքում բավարարում է առաջադրված պայմաններին. (2) բազմանդամն* n *անգամ հաջորդաբար դիֆերենցենք և բազմանդամի ու իր ածանցյալների մեջ տեղադրենք* $x=\beta$. *ստացվող արտահայտությունները հավասարեցնելով, համապատասխանաբար,* $d_0, d_1, d_2, \dots, d_n$ *թվերին, կստանանք* $q(\beta), q'(\beta), q''(\beta), \dots, q^{(n)}(\beta)$ *մեծությունների նկատմամբ գծային հավասարումների սիստեմ, որոնցից էլ հաջորդաբար կորոշվեն այդ արժեքները. Իսկ այդ արժեքների միջոցով, օգտվելով (1)-ին համանման բանաձևից, արդեն դժվար չէ որոշել* $q(x)$ *ֆունկցիան.*

Այժմ անցնենք թեորեմայի ապացուցմանը. Ենթադրենք, ընդհանուր դեպքում, որ X *տիրույթը բաղկացած է* X_k ($k=1, 2, \dots, m$) *փակ միջակայքերից, որոնք համարակալված են ձա-*

---

* *Այսինքն՝ որը բաղկացած է* $[a, b]$, $[a, +\infty]$, $[-\infty, b]$ *տեսքի մեկ կամ մի քանի փակ միջակայքերից:*

խից դեպի աջ։ Այդ միջակայքերում ընդունելով $f^*=f$, այդ ֆունկցիայի որոշումը լրացնենք հետևյալ կերպ. եթե X_1 միջակայքի a_1 ձախ ծայրը վերջավոր թիվ է, ապա $a_1>x$ արժեքների համար f^*-ն ընդունենք հավասար (1) տեսքի բազմանդամի, ընդունելով՝

$$c_0=f(a_1),\quad c_1=f'(a_1),\ \ldots,\ c_n=f^{(n)}(a_1).$$

Նման ձևով f ֆունկցիան տարածվում է նաև X_m-ից դեպի աջ, եթե միայն այդ միջակայքի b_m աջ ծայրը վերջավոր թիվ է։ Վերջապես, X_k-ն X_{k+1}-ից անջատող (b_k, a_{k+1}) $(k=1, 2, \ldots, m-1)$ միջակայքի համար f^*-ը նույնացնենք այնպիսի բազմանդամի հետ, որն իր n ածանցյալների հետ միասին $x=b_k$ և $x=a_{k+1}$ կետերում ընդունում է նույն արժեքները, ինչ որ f ֆունկցիան ու իր ածանցյալները։ Դժվար չէ տեսնել, որ հենց այդպես որոշված f^* ֆունկցիան էլ իրականացնում է պահանջվելիք շարունակումն ամբողջ $X^*=(-\infty, +\infty)$ տիրույթում։

246. ՀԱՐՑԻ ԴՐՈՒՄԸ ԵՐԿՉԱՓ ԴԵՊՔԻ ՀԱՄԱՐ. Հարցը անմիջապես բարդանում է մի քանի փոփոխականների ֆունկցիային անցնելիս։ Մենք կսահմանափակվենք երկու փոփոխականների ֆունկցիայի դեպքով։ Այդ դեպքի համար ստացվող արդյունքները փոխանցվում են ընդհանուր դեպքին, երբ ֆունկցիան կախված է շատ փոփոխականներից։

Մենք դիտարկելու ենք երկչափ տարածության մեջ M տիրույթներ, դրանց տակ հասկանալով կամ բաց տիրույթ, կամ բաց տիրույթ՝ իր L եզրի մի մասի հետ միասին և կամ ամբողջ եզրի հետ միասին (վերջին դեպքում տիրույթը փակ կլինի)։

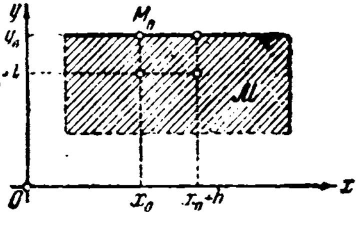
C^n $(n\geqslant 1)$ դասի ֆունկցիաների սահմանումը տվյալ դեպքի համար ընդհանրացնելիս մենք հանդիպում ենք յուրատեսակ դժվարության։ Բանը նրանումն է, որ տիրույթի L եզրի վրա գտնվող կետում կարող է պարզապես կիրառելի չլինել այս կամ այն տիպի մասնակի ածանցյալի սահմանումն ինքը։ Օրինակ, եթե M տիրույթը՝ $x^2+y^2\leqslant 1$ փակ շրջանն է, ապա $(0, \pm 1)$ կետերում չի կարելի խոսել ըստ x-ի մասնակի ածանցյալների մասին, որովհետև $y=\pm 1$ դեպքում չի կարելի $x=0$ արժեքին որևէ աճ տալ այնպես, որ անմիջապես դուրս չգանք այն տի-

կույթից, որտեղ տրված է ֆունկցիան։ Նման ձևով իմաստ չունի մասնակի ածանցյալն ըստ y-ի $(\pm 1, 0)$ կետերում։

Խոսելով մասնակի ածանցյալի (որոշ կարգի և տիպի) մասին, որն անընդհատ է M տիրույթում, մենք պայմանավորվում ենք տիրույթի M_0 եզրային կետում այդ ածանցյալի տակ հասկանալ (նրա համար պահպանելով սովորական նշանակումները) սոսկ այն սահմանային արժեքը, որին ձգտում է տիրույթի ներքին M կետում հաշված համանուն ածանցյալը, երբ M կետը ձգտում է M_0-ին՝ անկախ նրանից, թե այդ սահմանային արժեքն իրո՞ք ածանցյալի դեր կկատարի, թե ոչ։

Հետագա շարադրանքից հետո կպարզվի, որ հիշյալ սահմանային արժեքը, բավականաչափ շատ դեպքերում, միաժամանակ կլինի իսկական ածանցյալ, եթե միայն M_0 կետի դիրքը տիրույթի նկատմամբ թույլ է տալիս ընդհանրապես խոսել տվյալ տիպի ածանցյալի մասին։ Պարզագույն դեպքում, երբ տրված է ուղղանկյուն տիրույթ, այդ մենք հենց այժմ ցույց կտանք։

Ենթադրենք, թե $f(x, y)$ ֆունկցիան և իր ածանցյալները մինչև n-րդ կարգը ներառյալ անընդհատ են մի M ուղղանկյուն տիրույթում և $M_0(x_0, y_0)$ կետը գտնվում է $y=y_0$ ուղիղի այն հատվածի վրա, որն այդ ուղղանկյան համար եզր է ծառայում և մտնում է նրա կազմի մեջ (գծ. 158)։



Գծ. 158.

Սկսենք f'_y ածանցյալից, որի համար հարցն սպառվում է հեշտությամբ։ Ըստ Լագրանժի բանաձևի [118], աճերի հարաբերությունը՝

$$\frac{f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)}{k}=f'_y(x_0, y_0+\theta k) \quad (0<\theta<1)$$

և, երբ $k\to 0$, ձգտում է հենց $f'_y(x_0, y_0)$ սահմանային արժեքին, որն այդպիսով հանդիսանում է նաև ածանցյալ իսկական իմաստով [համեմատել 119]։

Ինչ վերաբերում է f'_x ածանցյալին, ապա նրան համապատասխանող աճերի հարաբերությունն ինքը կարող է դիտվել որպես սահման՝

$$\frac{f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)}{h}=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0+k)}{h}.$$

Այս արտահայտությունը Լագրանժի բանաձևով ձևափոխվում է այսպես՝

$$\frac{f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0+k)}{h}=f'_x(x_0+\theta h, y_0+k)$$

$$(0<\theta<1).$$

Երբ $h\to 0$, $k\to 0$, այդ արտահայտությունը ձգտում է $f'_x(x_0, y_0)$ սահմանային արժեքին։ Իսկ n° 158-ի թեորեմայի համաձայն, $k\to 0$ դեպքում պարզ սահմանի գոյության շնորհիվ, այդ կրկնակի սահմանը ծառայում է նաև իբրև հաջորդական սահման՝

$$f'_x(x_0, y_0)=\lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0+k)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)}{h},$$

այնպես որ, այստեղ ևս իբրև ածանցյալի սահմանային արժեք որոշված $f'_x(x_0, y_0)$ թիվը իսկական ածանցյալ է հանդիսանում։

Այս ասածները հաջորդաբար փոխանցվում են նաև բարձր կարգի ածանցյալներին։

Այսպիսով, մեր պայմանավորման համաձայն, մենք կարող ենք այժմ խոսել անընդհատ ածանցյալների մասին ամեն մի M տիրույթում նրա կազմի մեջ մտնող եզրային կետերն ինչ կերպ էլ դասավորված լինեն տիրույթի նկատմամբ։ $f(x, y)$ **ֆունկցիան M երկչափ տիրույթում պատկանում է $C^n (n\geqslant 1)$ դասին, եթե նա և իր բոլոր տիպի ու բոլոր կարգի ածանցյալները մինչև n-րդ կարգը ներառյալ անընդհատ են M տիրույթում։** *Ենթադրենք, թե M տիրույթը չի ընդգրկում ամբողջ հարթությունը. եթե M տիրույթը ծածկող մի M^* տիրույթում գոյություն ունի C^n դասին պատկանող մի f^* ֆունկցիա, որը M և M^* տի-*

բույթների ընդհանուր մասում համընկնում է f-ի հետ, ապա մենք կասենք, որ նա իրականացնում է f ֆունկցիայի շարունակումն M^* տիրույթում՝ դասը պահպանելով։

Բնական կլինի այստեղ էլ հարց տալ՝ արդյոք միշտ հնարավոր է ֆունկցիայի այդպիսի շարունակումն ավելի ընդարձակ տիրույթում, մասնավորապես ամբողջ հարթությունում։ Ինչպես մենք ցույց կտանք, փակ տիրույթի համար այդ հարցին կարելի է դրական պատասխան տալ, եթե միայն նրա եզրը բավարարում է որոշ պայմանների։

Այդ արդյունքները պատկանում են ամերիկացի մաթեմատիկոսներ Ուիտնեյին (H. Whitney) *և Հեստինսին* (M. R. Hestenes)։

247. ՕԺԱՆԴԱԿ ԱՌԱՋԱԴՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։ *Հիմնական թեորեմայի ապացույցը հեշտացնելու համար նախ ապացուցենք մի քանի լեմմաներ։*

I ԼԵՄՄԱ։ Դիցուք $\varphi(u, v)$ ֆունկցիան պատկանում է $C^n (n \geqslant 1)$ դասին մի P տիրույթում, որը որոշվում է

$$a<u<b, \quad 0 \leqslant v<\Delta$$

անհավասարություններով*։ Այդ ժամանակ գոյություն ունի φ ֆունկցիայի φ^* շարունակումն՝ դասի պահպանումով ամբողջ

$$P^* = (a, b; -\Delta, \Delta)$$

ուղղանկյունում։

$n+1$ *հատ* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ *թվերը որոշենք* $n+1$ *հատ գծային հավասարումների հետևյալ սիստեմից՝*

$$(-1)^k\lambda_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k\lambda_2 + \ldots + \left(-\frac{1}{n+1}\right)^k\lambda_{n+1} = 1 \quad (3)$$

$$(k=0, 1, 2, \ldots, n)։$$

Այդ կատարել կարելի է, քանի որ սիստեմի դետերմինանտն այսպես կոչված Վանդերմոնդի դետերմինանտն է իրար անհավասար՝ $-1, -\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{1}{n+1}$ *թվերի համար, որն, ինչպես հայտնի է, զրոյից տարբեր է։*

* (a, b) *բաց միջակայքը կարող է և անվերջ լինել, ինչպես նաև* Δ *թիվը կարող է* $+\infty$ *լինել։*

Այժմ P^* տիրույթում որոշենք $\varphi^*(u, v)$ ֆունկցիան, ընդունելով՝

$$\varphi^*(u, v) = \varphi(u, v), \text{ երբ } v > 0,$$

և

$$\varphi^*(u, v) = \lambda_1 \varphi(u, -v) + \lambda_2 \varphi\left(u, -\frac{1}{2} v\right) + \ldots$$
$$\ldots + \lambda_{n+1} \varphi\left(u, -\frac{1}{n+1} v\right), \quad (4)$$

երբ $v < 0$։

Եթե u_0-ն u-ի կամայական արժեք է (a, b) միջակայքից, ապա նախ և առաջ, (3) պայմաններից առաջինի շնորհիվ, որը համապատասխանում է $k = 0$ արժեքին, կունենանք՝

$$\lim_{\substack{u \to u_0 \\ v \to -0}} \varphi^*(u, v) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n+1}) \varphi(u_0, 0) = \varphi(u_0, 0).$$

Դրանով հաստատվում է φ^* ֆունկցիայի անընդհատությունը P^* ուղղանկյան այն կետերում, որոնք գտնվում են $v = 0$ ուղիղի վրա. նրա անընդհատությունը մյուս կետերում ակնհայտ է։ Այժմ դառնանք P^* տիրույթում φ^* ֆունկցիայի ածանցյալների գոյության ու անընդհատության հարցին. այստեղ էլ դիտարկման կարիք ունեն միայն $v = 0$ ուղիղի վրա գտնվող կետերը։

Բոլոր

$$\frac{\partial^{i+k} \varphi^*(u, v)}{\partial u^i \partial v^k} \quad (1 \leqslant i + k \leqslant n) \quad (5)$$

ածանցյալների համար ցույց տանք՝

$$\lim_{\substack{u \to u_0 \\ v \to -0}} \frac{\partial^{i+k} \varphi^*(u, v)}{\partial u^i \partial v^k} = \frac{\partial^{i+k} \varphi(u_0, v)}{\partial u^i \partial v^k} \quad (6)$$

սահմանային հավասարությունը։ Դրա համար (4) հավասարությունը դիֆերենցենք i անգամ ըստ u-ի և ապա k անգամ ըստ v-ի $(v > 0)$՝

$$\frac{\partial^{i+k}\varphi^*(u, v)}{\partial u^i \partial v^k} = (-1)^k \lambda_1 \frac{\partial^{i+k}\varphi^*(u, -v)}{\partial u^i \partial v^k} + \left(-\frac{1}{2}\right)^k \lambda_2 \frac{\partial^{i+k}\varphi\left(u, -\frac{1}{2}v\right)}{\partial u^i \partial v^k} + \dots$$

$$\dots + \left(-\frac{1}{n+1}\right)^k \lambda_{n+1} \frac{\partial^{i+k}\varphi\left(u, -\frac{1}{n+1}v\right)}{\partial u^i \partial v^k}$$

և անցնենք սահմանին, երբ $u \to u_0$ *և* $v \to -0$։ *(3) հավասարության շնորհիվ կստանանք հենց (6)-ը։*

Այսպիսով, ամեն մի (5) ածանցյալի համար միակ սահմանային արժեքի գոյությունն ինչպես $0 < v$*-երի կողմից, այնպես էլ* $0 > v$*-երի կողմից, ապահովված է։ Ավելին, եթե* $v = 0$ *ուղիղին պատկանող կետերում որպես (5) ածանցյալի արժեք վերցնենք հենց այդ սահմանային արժեքը, ապա կստանանք ամբողջ* P^* *տիրույթում անընդհատ ֆունկցիա։ Սակայն* $(u_0, 0)$ *կետը* P^**-ի համար ներքին կետ է և այստեղ մեզ պետք էր իսկական իմաստով ածանցյալ։ Այդ առումով մենք հնարավորություն ունենք հենվելու նախորդ n°-ում ապացուցվածի վրա՝ հիշյալ սահմանային արժեքը միաժամանակ կլինի նաև իսկական ածանցյալ։*

P^* *ֆունկցիան հենց իրականացնում է* φ *ֆունկցիայի որոնելի շարունակումը* P^* *տիրույթում։*

II ԼԵՄՄԱ։ Դիցուք f(x, y) ֆունկցիան պատկանում է C^n դասին մի M բաց տիրույթում, որը չի ընդգրկում ամբողջ E հարթությունը*։ Եթե այդ տիրույթի L եզրի յուրաքանչյուր կետ կարելի է շրջապատել այնպիսի շրջակայքով, որի սահմաններում հնարավոր է f ֆունկցիայի շարունակումը՝ դասի պահպանմամբ, ապա այդպիսի շարունակումը հնարավոր է նաև ամբողջ E հարթության վրա։

$\overline{M} = M + L$ *փակ տիրույթի յուրաքանչյուր* M *կետի հա-*

---

* *Մենք այդ տիրույթը չենք ենթադրում նույնիսկ կապակցված և, առայժմ, ոչինչ չենք ասում նրա եզրի ձևի մասին։*

մար կգտնվի* կամ այնպիսի շրջակայք, որտեղ f ֆունկցիան որոշված է և պատկանում է C^n դասին, կամ էլ այնպիսի շըրջակայք, որի վրա կարելի է շարունակել f ֆունկցիան դասը պահպանելով։ Այդ շրջակայքը կարելի է վերցնել, օրինակ, $\bar{\sigma} = K(M, 3r)$ բաց շրջանի տեսքով, որի կենտրոնը M կետն է, իսկ շառավիղը հավասար է 3r-ի։ Այդպիսով, ամբողջ $\bar{M}$ փակ տիրույթը ծածկվում է ոչ միայն այդ $\bar{\sigma}$ շրջաններից կազմված $\bar{\Sigma}$ սիստեմով, այլև երեք անգամ փոքր շառավիղ ունեցող $\sigma = K(M, r)$ շրջաններից կազմված Σ սիստեմով։

Եթե **M** տիրույթը, իսկ նրա հետ միասին նաև $\bar{M}$-ը, սահմանափակ է, ապա տվյալ դեպքում կիրառելի է Բորելի լեմման [165] և $\bar{M}$-ը կծածկվի Σ-ից անջատած մի վերջավոր

$$\Sigma^*_m = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m\}$$

սիստեմով։ Իսկ հակառակ դեպքում, սկզբնակետի շուրջը գծելով 1, 2, 3, ..., K, ... շառավիղներով համակենտրոն շրջանագծեր և Բորելի լեմման կիրառելով $\bar{M}$ տիրույթի այն մասերի նկատմամբ, որոնք գտնվում են այդպիսի երկու հարևան շրջանագծերի միջև, մենք կկառուցենք շրջանների ամբողջ $\bar{M}$ տիրույթը ծածկող հաջորդականություն՝

$$\Sigma^* = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i, \ldots\}։$$

Այստեղ՝

$$\sigma_i = K(M_i, r_i) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

միաժամանակ դիտարկելու ենք նաև՝

$$\sigma'_i = K(M_i, 2r_i) \quad և \quad \sigma''_i = K(M_i, 3r_i)$$

շրջանները։ Ընդ որում, հարկ եղած դեպքում փոքրացնելով սկզբում վերցրած շրջանների շառավիղները, կարելի է այնպես անել, որպեսզի E հարթության յուրաքանչյուր կետ, եթե նա ընդհանրապես պատկանում է σ_i շրջաններից որևէ մեկին, մտնի (նույնիսկ իր որոշ շրջակայքի հետ

---

* Կախված այն հանգամանքից, թե արդյոք M կետը գտնվում է M բաց տիրույթում, թե նրա L եզրի վրա։

միասին) միայն վերջավոր թվով այդպիսի σ_i' շըրջանների մեջ։

Հեշտ է կառուցել E հարթությունում C^n դասին պատկանող $h_i(M) = h_i(x, y)$ ֆունկցիա այնպես, որ՝

$$h_i(M)=0 \quad \sigma_i\text{-ում} \quad \text{և} \quad h_i(M)=1 \quad E-\sigma_i'\text{-ում}$$
$$(i=1,\ 2,\ 3, \ldots)\text{։}$$

Կարելի է, օրինակ, n° 245-ի մեթոդներով կառուցել ամբողջ $-\infty<t<+\infty$ միջակայքում C^n դասին պատկանող $h(t)$ ֆունկցիա այնպես, որ լինի

$$h(t)=0, \text{ երբ } t\leqslant 1, \text{ և } h(t)=1, \text{ երբ } t\geqslant 2,$$

և այնուհետև ընդունել՝

$$h_i(M)=h\left(\frac{\overline{MM_i}}{r_i}\right).$$

h_i ֆունկցիաների օգնությամբ կազմենք հետևյալ ֆունկցիաները՝

$$H_1=H_1(M)=1-h_1,$$
$$H_i=H_i(M)=h_1\ h_2 \ldots h_{i-1}(1-h_i) \quad (i>1).$$

Նրանք նույնպես պատկանում են C^n դասին E-ում։ Ակներևաբար՝

$$H_j=0 \quad \sigma_i\text{-ում} \quad (\text{բոլոր } j>i \text{ համար}), \tag{7}$$
$$H_i=0 \quad E-\sigma_i'\text{-ում}, \tag{8}$$

որովհետև σ_i-ում զրո է դառնում h_i բազմապատկիչը, իսկ $E-\sigma_i'$-ում՝ $1-h_i$ բազմապատկիչը։ Վերևում ընդգծվածի համաձայն, (8)-ից երևում է, որ E-ի յուրաքանչյուր կետում (իր անմիջական շրջակայքի հետ միասին) միայն վերջավոր թվով H_i ֆունկցիաներ կարող են զրոյից տարբեր լինել։ Այնուհետև, քանի որ՝

$$H_1+H_2+\ldots+H_i=(1-h_1)+h_1(1-h_2)+\ldots$$
$$\ldots+h_1h_2\ldots h_{i-1}(1-h_i)=1-h_1h_2\ldots h_i,$$

ապա՝

$$H_1+H_2+\ldots+H_i=1 \ \sigma_i\text{-ում}, \tag{9}$$

որովհետև այնտեղ զրո է դառնում h_i բազմապատկիչը։

Այժմ ենթադրենք, թե φ_i ֆունկցիան σ_i''-ում համընկնում է f ֆունկցիայի կամ նրա՝ վերևում հիշատակված շարունակման հետ, իսկ σ_i''-ից դուրս M-ին պատկանող կետերում $\varphi_i=f$, և մյուս կետերում $\varphi_i=0$։ φ_iH_i ֆունկցիան $E-\sigma_i'$-ում դառնում է զրո [տես (8)] և, ակներևաբար, ամբողջ E հարթության վրա պատկանում է C^n դասին։ Ընդունենք, վերջապես, E-ի բոլոր կետերում՝

$$f^*=\sum\varphi_jH_j,$$

ընդ որում ամեն անգամ գումարը տարածվում է j-ի այն արժեքների վրա, որոնց համապատասխանող գումարելիները զրոյից տարբեր են։ Քանի որ յուրաքանչյուր կետում, նույնիսկ իր որոշ շրջակայքի հետ միասին, միայն վերջավոր թվով φ_jH_j տեսքի արտադրյալներ կարող են զրոյից տարբեր լինել, ուստի այդ հավասարությամբ f* ֆունկցիան, իրոք, որոշվում է ամբողջ հարթության վրա և պատկանում է C^n դասին։

Վերցնենք որևէ M կետ M-ից. նա պատկանում է մի որոշ σ_i շրջանի։ Քանի որ բոլոր $\varphi_j(M)=f(M)$ և, բացի այդ, այդ կետում [(9)-ի և (7)-ի շնորհիվ]՝

$$H_1+H_2+\cdots+H_i=1, \ \text{իսկ} \ H_j=0 \quad i<j\text{-երի համար},$$

ուստի $f^*(M)=f(M)$։ Այսպիսով f*-ը հենց որոնելի ֆունկցիան է։

248. ՇԱՐՈՒՆԱԿՄԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄԱՆ։ Այժմ մենք ի վիճակի ենք ապացուցել շարունակման թեորեման նաև երկու փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում, բայց որոշ սահմանափակումներ անելով եզրագծի նկատմամբ։

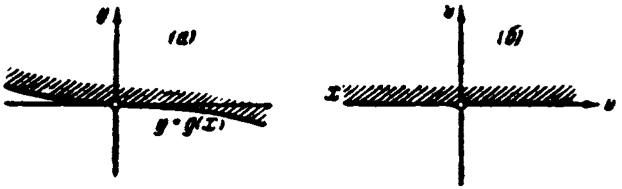
Պայմանավորվենք $C^n (n \geq 1)$ դասին պատկանող ողորկ կոր *անվանել բազմապատիկ ու եզակի կետերից զերծ այնպիսի կորը որն արտահայտվում է*

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t) \tag{10}$$

հավասարումներով, որտեղ t-ն փոփոխվում է մի որոշ Γ միջակայքում, ենթադրելով, որ φ և ψ ֆունկցիաներն այդ միջակայքում պատկանում են C^n դասին։ Ընդ որում կորի համար չենք բացառում դեպի անվերջություն ձգվելու հնարավորությունը. Γ միջակայքը նույնպես կարող է անվերջ լինել։

1-ին ԹԵՈՐԵՄԱ. **Եթե** $f(x, y)$ **ֆունկցիան պատկանում է** $C^n (n \geq 1)$ **դասին *M* փակ տիրույթում, որի *L* եզրագիծը բաղկացած է մեկ կամ մի քանի (իրար հետ չհատվող) ողորկ կորերից, որոնք նույնպես պատկանում են** C^n **դասին, ապա այդ ֆունկցիան կարող է շարունակվել ամբողջ *E* հարթության վրա՝ դասի պահպանումով:**

Դիցուք $M_0(x_0, y_0)$*-ն L եզրագծի կամայական կետ է. պարզության համար կընդունենք* $x_0=y_0=0$։ *Այդ կետը գտնվում է L-ի կազմի մեջ մտնող կորերից մեկի վրա և նրա համար սովորական կետ է։ Այդ դեպքում, առանց ընդհանրությունը նվազեցնելու, կարելի է ենթադրել, որ* M_0 *կետի շրջակայքում կորն արտահայտվում է* $y=g(x)$ *բացահայտ հավասարումով, որտեղ g ֆունկցիան նույնպես պատկանում է* C^n *դասին, և որ M տիրույթը գտնվում է նրանից վերև, այսինքն՝ այդ տիրույթը* M_0 *կետի մոտակայքում որոշվում է* $y \geqslant g(x)$ *անհավասարությունով (գծ. 159ա)։*



Գծ. 159.

Կատարենք փոփոխականների փոխարինում, ընդունելով՝

$$x=u, \quad y=g(u)+v.$$

Այդ ժամանակ $f(x, y)$ *ֆունկցիան կդառնա*

$$\varphi(u, v)=f(u, g(u)+v),$$

որը կպատկանի C^n դասին $u=v=0$ կետի մոտակայքում, այն է՝ $0<v$-երի համար (գծ. 159բ)։ I լեմմայի համաձայն, φ ֆունկցիան կարելի է, դասը պահպանելով, շարունակել նաև $0>v$-երի արժեքների համար (միշտ սահմանափակվելով սկզբնակետին բավականաչափ մոտ կետերով)։ Եթե այդ շարունակումն իրականացվում է $\varphi^*(u, v)$ ֆունկցիայով, ապա վերադառնալով հին փոփոխականներին հեշտ է տեսնել, որ

$$f^*(x, y)=\varphi^*(x, y-g(x))$$

ֆունկցիան իրականացնում է f ֆունկցիայի շարունակումն M_0 կետի մի որոշ շրջակայքում։

II լեմմայի համաձայն մենք այժմ կարող ենք եզրակացնել, որ f ֆունկցիան իրոք շարունակելի է ամբողջ E հարթության վրա, դասը պահպանելով։

249. ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՈՒՄ։ Ստացած արդյունքը գործնական կարիքների համար այնուամենայնիվ բավական չէ, որքանով որ հարկ է լինում գործ ունենալ այնպիսի տիրույթների հետ, որոնց եզրերն ունեն «անկյունային կետեր»։ Պայմանավորվենք կտոր առ կտոր ողորկ անվանել այնպիսի կորը, որը կազմված է մի քանի՝ իրար հետ որոշ անկյունով (ոչ 0-ի, ոչ π-ի հավասար) միացող ողորկ կորերից։ Մենք այդ կորը կանվանենք C^n դասին պատկանող կտոր առ կտոր ողորկ կոր, եթե յուրաքանչյուր բաղադրիչ ողորկ կոր պատկանում է C^n դասին։

2-րդ ԹԵՈՐԵՄԱ: 1-ին թեորեմայի եզրակացությունը պահպանվում է, եթե *M* տիրույթի *L* եզրագիծը բաղկացած է C^n դասին պատկանող մեկ կամ մի քանի իրար հետ չհատվող կտոր առ կտոր ողորկ կորերից:

Մենք արդեն տեսանք, որ L եզրագծի յուրաքանչյուր ոչ անկյունային կետ կարելի է շրջապատել այնպիսի շրջակայքով, որի սահմաններում հնարավոր է f ֆունկցիայի շարունակումը դասի պահպանմամբ։ Այժմ այդ նույնն ապացուցենք $M_0(x_0, y_0)$ անկյունային կետի նկատմամբ։

Այստեղ էլ կարելի է ընդունել $x_0=y_0=0$. կարելի է, ընդհանրությունը չխախտելով, նաև ենթադրել, որ սկզբնակետում իրար կցվող աղեղներն այդ կետում ունեն շոշափողներ, որոնցից մեկը համընկնում է x-երի առանցքի դրական մասի հետ,

իսկ մյուսը նրա հետ որոշ անկյուն է կազմում (գծ. 160)։ Այդ դեպքում, սկզբնակետին բավականաչափ մոտ կետերում, այդ աղեղներն արտահայտվում են, համապատասխանաբար, հետևյալ հավասարումներով՝

$$y=g(x) \text{ և } x=h(y),$$

ընդ որում $g'(0)=0$։ g և h երկու ֆունկցիաներն էլ պատկանում են C^n դասին։

Դիմենք փոփոխականների փոխարինման՝

$$x=u+h(v), \quad y=g(u)+v. \tag{11}$$

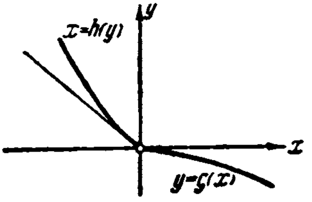
Քանի որ այդ ֆունկցիաների

$$J=\begin{vmatrix} 1 & h'(v) \\ g'(u) & 1 \end{vmatrix}=1-g'(u)h'(v)$$

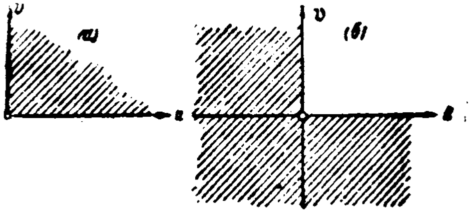
յակոբիանը $u=v=0$ կետում դառնում է 1, ապա (11) սիստեմը բոլոր արգումենտների զրո արժեքների շրջակայքում թույլ է տալիս միարժեք հակադարձում՝

$$u=\lambda(x, y), \quad v=\mu(x, y), \tag{12}$$

ընդ որում λ, μ ֆունկցիաները նույնպես պատկանում են C^n դասին [199]։



Գծ. 160.



Գծ. 161.

$v=0$ և $u\geqslant 0$ դեպքում (11)-ից ստանում ենք $y=g(x)$ և $x\geqslant 0$, այնպես որ u-երի առանցքի դրական մասին համապատասխանում է հիշյալ աղեղներից առաջինը. Նման ձևով համոզվում ենք նաև, որ v-երի առանցքի դրական մասին համապատասխանում է երկրորդ աղեղը։

Ակներևաբար, այն երկու անկյունաձև տարածությունները,

որոնց այդ աղեղներով տրոհվում է սկզբնակետի շրջակայքը xy հարթության վրա, այդ ձևափոխության ժամանակ համապատասխանում են այն երկու («ընդգրկվող» և «ընդգրկող») ուղիղ անկյուններին, որոնց u-երի և v-երի առանցքներով տրոհվում է սկզբնակետի շրջակայքը uv հարթության վրա (գծ. 161, ա և բ)։

f ֆունկցիայի մեջ տեղադրելով (11) արտահայտությունները, կստանանք՝

$$\varphi(u, v)=f(u+h(v), g(u)+v)$$

ձևափոխված ֆունկցիան, որը որոշված է ու պատկանում է C^n դասին հենց նոր հիշատակված երկու ուղիղ անկյուններից մեկում կամ մյուսում, նայած դեպքին։

Եթե խոսքն «ընդգրկվող» անկյան մասին է (գծ. 161ա), ապա, I լեմմայի համաձայն, նախ φ ֆունկցիան շարունակում են IV կոորդինատային անկյունում, և այնուհետև ստացված ֆունկցիան շարունակում են (u-ի և v-ի դերերը փոխելով) արդեն II և III կոորդինատային անկյուններում, այսինքն՝ սկզբնակետի լրիվ շրջակայքում։

Գործն ավելի բարդ է, երբ խոսքն «ընդգրկող» անկյան մասին է (գծ. 161բ)։ Այս դեպքում վարվում են այսպես։ Ամենից առաջ, հենվելով I լեմմայի վրա (բայց փոխելով u-ի նշանը) φ ֆունկցիան շարունակում են ձ ա խ կիսահարթությունից ա ջ կիսահարթության վրա (միշտ ի նկատի ունենալով միայն սկզբնակետին մոտ կետերը) և այդպիսով ստանում φ_1 ֆունկցիա՝ սկզբնակետի լրիվ շրջակայքում։ Այնուհետև վերցնում են $\psi=\varphi-\varphi_1$ ֆունկցիան ս տ ո ր ի ն կիսահարթությունում և, օգտվելով I լեմմայի ապացուցման ժամանակ ցույց տրված մեթոդից, շարունակում են այն վ ե ր ի ն կիսահարթությունում, որը կտա ψ_1 ֆունկցիա՝ սկզբնակետի լրիվ շրջակայքում։ Բայց III անկյունում $\psi_1=\psi=\varphi-\varphi_1=0$, և այն ժամանակ հենց հիշյալ մեթոդի բնույթից պարզ է, որ $\psi_1=0$ նաև II անկյունում։ Եթե այժմ սկզբնակետի շրջակայքում ընդունենք $\varphi^*=\psi_1+\varphi_1$, ապա II ու III անկյուններում $\psi_1=0$ և $\varphi_1=\varphi$, այնպես որ նաև $\varphi^*=\varphi$, իսկ IV անկյունում $\psi_1=\psi=\varphi-\varphi_1$ և դարձյալ $\varphi^*=(\varphi-\varphi_1)+\varphi_1=\varphi$։ Այսպիսով, մեր կառուցած φ^* ֆունկցիան իրականացնում է φ ֆունկցիայի շարունակումն սկզբնակետի լրիվ շրջակայքում։

(12) հակադարձ ձևափոխության օգնությամբ ստացվում է նաև f ֆունկցիայի շարունակումը՝

$$f^*(x, y) = \varphi^*(\lambda(x, y), \mu(x, y)).$$

Ապացույցը ավարտվում է, ինչպես և I թեորեմայում, հենվելով II լեմմայի վրա։

250. ԱՄՓՈՓԻՉ ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։ Ֆունկցիաների շարունակման վերաբերյալ ապացուցված թեորեմաները ունեն բազմազան կիրառություններ։ Մենք այստեղ կսահմանափակվենք միայն նշելով անալիզի մի շարք լոկալ (այսինքն՝ տվյալ կետի շրջակայքի հետ կապված) բանաձևերի ու թեորեմաների ընդհանրացումն այն դեպքի համար, երբ տրված կետը գտնվում է տիրույթի եզրին, և ոչ թե նրա ներսը, ինչպես սովորաբար ենթադրվում է։

Դիցուք, օրինակ, վերևում դիտարկված տիպի L եզրագծով սահմանափակված M փակ տիրույթում որոշված է $z = f(x, y)$ ֆունկցիան, որն իր f'_x և f'_y ածանցյալների հետ միասին անընդհատ է այդ տիրույթում։ Այդ ժամանակ, եթե միայն (x_0, y_0) կետը գտնվում է M տիրույթի ներսը, ֆունկցիայի լրիվ աճի համար տեղի ունի հետևյալ հայտնի [118] բանաձևը՝

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \end{aligned} \tag{13}$$

որտեղ α-ն ու β-ն Δx-ի ու Δy-ի հետ միասին ձգտում են զրոյի։ Այս բանաձևի ապացուցման համար արված դատողությունները ընդհանրապես կիրառելի չեն, երբ (x_0, y_0) կետը գտնվում է եզրի վրա։ Մինչդեռ բանաձևը ճիշտ է նաև այդ դեպքի համար, եթե միայն Δx-ն ու Δy-ն այնպիսին են, որ $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta x)$ կետը չի դուրս գալիս M-ի սահմաններից։ Դրանում հեշտ է համոզվել, եթե բանաձևը նախ գրենք f^* ֆունկցիայի համար, որը տալիս է f ֆունկցիայի շարունակումն ամբողջ հարթության վրա, և այնուհետև, ինչպես ասել էինք՝ սահմանափակվելով M տիրույթի կետերով, վերադառնալ տված f ֆունկցիային։

Այն բոլոր դեպքերում, երբ մեր եզրակացությունների հիմքում եղել է (13) բանաձևը, մենք այժմ էական լրացումներ ենք անում նախկին արդյունքներին։

Այսպես, f ֆունկցիայի նկատմամբ արված ենթադրու-

թյունների դեպքում այդ ֆունկցիան դիֆերենցելի է [169] *ոչ միայն **M** տիրույթի ներքին կետերում, այլև նրա եզրագծի կետերում։* $z=f(x, y)$ *հավասարումով արտահայտվող մակերևույթի համար մենք հնարավորություն ենք ստանում խոսել նրա շոշափող հարթության* [170] *վերաբերյալ՝ անգամ նրա եզրագծի կետերում տարված։*

Դիտարկելի բանաձևի վրա է հիմնված, ինչպես գիտենք, նաև բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցման կանոնը [171]*. Եթե*

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad (t_0 \leq t \leq T) \tag{14}$$

ֆունկցիաներն ածանցյալներ ունեն և $(\varphi(t), \psi(t))$ *կետերը բոլորը գտնվում են **M** տիրույթի ներսում, ապա* $z=f(\varphi(t),\psi(t))$ *բարդ ֆունկցիայի համար մենք ունեինք հետևյալ բանաձևը՝*

$$z'_t=f'_x x'_t+f'_y \cdot y'_t.$$

*Այժմ այդ բանաձևը տարածվում է նաև այն դեպքի վրա, երբ (14) «կորը» ընդհուպ մոտենում է **M** տիրույթի եզրին։ Եվ այլն, և այսպես շարունակ։*

Մանրամասնությունների մեջ չմտնելով, նշենք մի կարևոր օրինակ ևս։

Ենթադրենք ունենք այնպիսի ֆունկցիաների սիստեմ՝

$$x=\varphi(u, v), \quad y=\psi(u, v), \tag{15}$$

որոնք իրենց ածանցյալների հետ միասին անընդհատ են uv *հարթության մի **P** փակ տիրույթում, որի եզրագիծն է **K**, և ենթադրենք, թե այդ տիրույթի մի որոշ* (u_0, v_0) *կետում*

$$J=\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$$

յակոբիանը զրոյից տարբեր է. Եթե (u_0, v_0) *կետը գտնվում է **P** տիրույթի ներսում, ապա* n° 198-*ի* IV *թեորեմայի համաձայն ֆունկցիաների (15) սիստեմը հակադարձելի է, այնպես որ* (x_0, y_0) *կետի շրջակայքում, որտեղ*

$$x_0=\varphi(u_0, v_0), \quad y_0=\psi(u_0, v_0),$$

u, v *փոփոխականներն արտահայտվում են իբրև* x, y *փոփոխականների միարժեք ֆունկցիաներ՝*

$$u=\lambda(x, y), \quad v=\mu(x, y), \tag{15*}$$

որոնք իրենց ածանցյալների հետ միասին անընդհատ են հիշյալ շրջակայքում։ Այսպիսով, սահմանափակվելով u, v, x, y *մեծությունների այն արժեքներով, որոնք բավականաչափ մոտ*

են, համապատասխանաբար, u_0, v_0, x_0, y_0 արժեքներին, կարելի է ասել, որ (15) և (15*) առնչությունները լիովին համարժեք են։

Դրանից մենք օգտվել էինք, օրինակ, երբ ապացուցում էինք, որ

$$x=\varphi(u, y),\ y=\psi(u, v),\quad z=\chi(u, v)$$

մակերևույթը, որտեղ (u, v)-ն փոփոխվում է P տիրույթում, նրա $M_0(x_0, y_0)$ սովորական կետի մոտակայքում կարող է արտահայտվել բացահայտ հավասարումով [218]։ Իսկ մակերևույթի եզրագծի կետերի նկատմամբ մեր դատողությունները կիրառելի չէին, որովհետև uv հարթության վրա (u_0, v_0) կետը չէր կարող գտնվել P տիրույթի K եզրագծի վրա։

Իսկ այժմ, օգտվելով φ և ψ ֆունկցիաների φ^* և ψ^* շարունակումներից կարող ենք ֆունկցիաների սիստեմի հակադարձման վերաբերյալ արդյունքն ընդհանրացնել նաև այն դեպքի համար, երբ (u_0, v_0) կետը գտնվում է K եզրագծի վրա։ P տիրույթի այն մասին, որն անմիջապես կից է (u_0, v_0) կետին, xy հարթության վրա համապատասխանում է մի որոշ տիրույթ՝ (x_0, y_0) կետին անմիջապես կից, որի սահմաններում համենայն դեպքս թույլատրելի է հակադարձումը։ Համապատասխան ձևով լրացվում է նաև հիշյալ երկրաչափական արդյունքը։

Բերված օրինակները բավական են, որպեսզի ընթերցողն ըմբռնի ապացուցված թեորեմների կարևորությունն ինչպես իր՝ մաթեմատիկական անալիզի, այնպես էլ նրա կիրառումների համար։ Ֆունկցիաների շարունակման վերաբերյալ թեորեմների կիրառման այլ օրինակներ ընթերցողը կգտնի այս դասընթացի հաջորդ հատորներում։

ԱՅԲԲԵՆԱԿԱՆ ՑԱՆԿ

(ԹՎԵՐԸ ՑՈՒՅՑ ԵՆ ՏԱԼԻՍ ԷՋԵՐԸ)

Ածանցյալ 244, տես նաև ֆունկցիաների անունները
— անվերջ 272
— բարձր կարգի 291
—, գոյություն չունենալը 274
—, երկրաչափական մեկնաբանություն 246
—, խզումը 274
—, հաշվելու կանոնները 258
— մասնակի 479
— — բարձր կարգի 517
— միակողմյան 271
— տվյալ ուղղությամբ 502
Ածանցում (դիֆերենցում) 280
Աղեղ, դիֆերենցիալը 740
—, երկարությունը 737
— փոփոխական 739
Աղյուսակային եղանակը ֆունկցիայի տրման 122
Աճերի (վերջավոր) բանաձևը 317, 500
Աճ մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի, լրիվ 483
— — — — —, մասնակի 479
— փոփոխականի 188
— ֆունկցիայի, բանաձևը 188, 257
Աճող վարիանտա 86
— ֆունկցիա 170
Ամբողջ մասը թվի [E(p)] 55
— ռացիոնալ ֆունկցիա 129
— — —, անընդհատությունը 190
— — — մի քանի փոփոխականների 447
Անալիտիկ արտահայտությունը ֆունկցիայի 123
— ներկայացումը կորերի 662, 682
— — մակերևույթների 680
Անբացահայտ ֆունկցիա 582, 591, 592
— —, ածանցյալների հաշվումը 599
— —, գոյությունը և հատկությունները 584, 587, 591
— —, դիֆերենցելիությունը 588, 591
Անընդհատ ֆունկցիաներ, գործողություններ նրանց հետ 189, 463
— —, հատկությունները 215, 464—478
— —, սուպերպոզիցիան (վերադրումը) 200, 463
Անընդհատություն իրական թվերի բազմության 21
— ուղիղի 46
— ֆունկցիայի, կետում 187, 188, 460
— —, հավասարաչափ 230, 471
— —, միակողմյան 192
— —, միջակայքում 189
— —, տիրույթում ու բազմությունում 464
Անիսկական թվեր (կետեր) 24, 63, 449
Անկախ փոփոխականներ 118, 427
Անկյունային կետ 272
Անոմալիա (էքսցենտրիկ) մոլորակի 224

Անորոշ բազմապատկիչների մեթոդը (Լագրանժի) 614
Անորոշություն, բացումը 76, 391
— $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ *տեսքով* 73, 391, 398
— $0\cdot\infty, \infty-\infty$ *տեսքով* 74, 75, 401, 402
— $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$ *տեսքով* 212, 403
Անվերջ ածանցյալ 272
— *խզում* 383
— *մեծ մեծություն* 61
— — —, *դասակարգումը* 186
— — —, *կարգը* 186
— — *ֆունկցիա* 148
— *միջակայք* 117, 383
— *տասնորդական կոտորակ* 18
— *փոքր մեծություն* 53
— — — *բարձր կարգի* [$o(x)$ *նշանակումը*] 176
— — —, *դասակարգումը* 175
— — —, *լեմմաները* 67
— — —, *կարգը* 175
— — —, *համարժեքությունը* 178
Անվերջություն ($\infty, +\infty, -\infty$) 24, 63, 64
Անցման կորեր տես Փոխանցման կորեր
— *մոդուլ (բնական լոգարիթմներից տասնորդականներին)* 97
Անփոփոխականությունը (ինվարիանտությունը) դիֆերենցիալի ձևի 282, 506
Աշխարհագրական կոորդինատներ 688
Առանցք թվային 46
Ասիմպտոտ 384
Ասիմպտոտական կետ 678, 679
Աստիճան իրական ցուցիչով 39, 40
Աստիճանային ֆունկցիա 131
— —, *ածանցյալը* 251
— —, *անընդհատությունը* 200, 201
— —, *ֆունկցիոնալ բնութագրումը* 206
Աստիճանա-ցուցչային արտահայտություն, ածանցյալը 267, 496
— — —, *սահմանը* 211
— — *ֆունկցիա (երկու փոփոխականի)* 446
— — —, *անընդհատությունը* 461
— — —, *դիֆերենցումը* 480
— — —, *սահմանը* 454, 455
Աստրոիդ 667, 673, 694, 722,.......
Արագացում 246, 247
Արագություն կետի շարժման 240
— *միջին* 240
— *տվյալ պահին* 241, 246
Արգումենտ 119
Արկսինուս, արկկոսինուս և այլն 138
Արմատ, գոյությունը 37
—, *թվաբանական արժեքը* 37, 131
— *հավասարման, գոյությունը* 218
— *ֆունկցիայի, գտնելը* 405
Արտադրյալ թվերի 8, 31, 33
— *վարիանտների, սահմանը* 69, 73
— *ֆունկցիաների, ածանցյալը և դիֆերենցիալը* 260, 282, 301, 307, 508
— —, *անընդհատությունը* 189, 463
— —, *սահմանը* 165
Արքիմեդ 79
Արքիմեդյան սպիրալ (գալարագիծ) 675, 698
Արքիմեդի աքսիոման 11, 19, 35

Բազմապատիկ կետ կորի 665, 685
Բազմարժեք ֆունկցիա 120, 136, 429, 582, 590
Բազմության ներքին կետ 442
Բազմություն թվային, սահմանափակ վերևից, ներքևից 23
— *կետերի, սահմանափակ* 444
— —, *փակ* 444
Բանաձև 121, 123, *տես նաև համապատասխան անունները*
Բաշխական հատկություն (բազմապատկման) 9, 35
Բարդ ֆունկցիա 144, 446
— —, *ածանցյալը և դիֆերենցիա-*

լը 261, 282, 307, 496, 506, 527, 535
— —, անընդհատությունը 200, 464
Բարձր կարգի ածանցյալներ 291,
— — —, ընդհանուր բանաձևեր 294
— — — մասնակի 517
— — անվերջ փոքրեր [o (α) նշանակումը] 176
— — դիֆերենցիալներ 306
— — — մասնակի 530
— — — մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի 529
Բարոմետրական բանաձև 119
Բացարձակ էքստրեմում 612
— մեծություն 7, 31, 36
— սխալ տես Սխալ
Բաց գունդ 440, 443
— զուգահեռանիստ 442—445
— միջակայք 117
— սիմպլեքս 442—445
— տիրույթ 442—445
Բեկյալ n-չափման տարածության մեջ 438
Բեռնուլլի անհավասարությունը 40
— բանաձևը 268, 496
— լեմնիսկատ 679, 699, 755, 757
Բնական լոգարիթմ 97
Բոլցանո 104
Բոլցանոյի մեթոդը 110
— - Կոշիի թեորեման 104, 178
— - — հայտանիշը 104, 178
— - Վեյերշտրասսի թեորեման 109, 466
Բոյլ—Մարիոտի օրենքը 118
Բորել 233
Բորելի լեմման 233, 474
Բևեռային ենթանորմալ, ենթաշոշափող 696
— կոորդինատներ 636, 648
— հավասարում կորի 674
— հատված նորմալի, շոշափողի 696

Գալարագիծ տես Սպիրալ
Գաուսս 91, 572
Գլխավոր ճյուղ (գլխավոր արժեք) արկսինուսի, արկկոսինուսի և այլն 139—143
— մաս (գլխավոր անդամ) անվերջ փոքրի 181
Գոգավորություն 377
Գրադիենտ ֆունկցիայի 505
Գրաֆիկ ֆունկցիայի 123, 127
— —, կառուցումը 336
— —, տարածական 432
Գումար թվերի 5, 28
— վարիանտների, սահմանը 68, 75
— ֆունկցիաների, ածանցյալը և դիֆերենցիալը 259, 282, 294, 508
— —, անընդհատությունը 189, 163
— —, սահմանը 165
Գունդ n-չափման 440, 442

Դասակարգումը անվերջ մեծերի 186
— — փոքրերի 174
Դաս ողորկ կորի 781
Դասեր ֆունկցիաների 129
Դարբուի թեորեման 313
Դարձակետ (վերադարձի կետ) 714, 715
Դեդեկինդ 12
Դեդեկինդի հիմնական թեորեման 21
Դեկարտյան տերև 669
Դետերմինանտ, ածանցյալը 498
— ֆունկցիոնալ (յակոբիան) 574
Դիսկրիմինանտ կոր 721, 728
Դիրիխլեի ֆունկցիան 125, 129, 197
Դիֆերենցելի ֆունկցիա 276, 489
Դիֆերենցելիությունը անբացահայտ ֆունկցիայի 587
Դիֆերենցիալ 275, 276, 280
— աղեղի 740
—, երկրաչափական մեկնաբանությունը 279

— 2-րդ, 3-րդ, n-րդ կարգի 306
— լրիվ 489
— —, երկրաչափական մեկնաբանությունը 490
— —, 2-րդ, 3-րդ, n-րդ կարգի 529—531
— —, հաշվելու եղանակը (փոփոխականները փոխարինելիս) 642
— —, ձևի անփոփոխականությունը (ինվարիանտությունը) 506
Դիֆերենցիալ, կիրառումը մոտավոր հաշվումների ժամանակ 285, 509
—, ձևի անփոփոխականությունը (ինվարիանտությունը) 282
— մասնակի 482, 530
Դիֆերենցում (ածանցում), 280
—, կանոնները 281, 282, 508
— պարամետրական 309, 310
Դիֆերենցումների տեղափոխումը 521, 525

Եզակի կետ (կորի կամ մակերևույթի) 663, 665, 681, 683, 684, 685, 707, 714
— — բազմապատիկ 665, 685, 714
— — կրկնակի (կրկնապատիկ) 713
— — մեկուսացած 708
Եզրային կետ 443
Եզր թվային բազմության (վերին, ստորին) 22—26
— — — ճշգրիտ 22—26
— տիրույթի 443
Ենթահաջորդականություն 106
Ենթանորմալ 690
— բևեռային 697
Ենթաշոշափող 269, 690
— բևեռային 697
Եռակի (եռապատիկ) կետ 711
— սահման 456
Եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ 133
— —, ածանցյալները 253
— —, անընդհատությունը 191

Երկրաչափական մարմին 434
— մեկնաբանությունը ածանցյալի 246
— — դիֆերենցիալի 279
— — լրիվ դիֆերենցիալի 490
— միջին 92
Երկու փոփոխականի ֆունկցիա 429
e (թիվը) 95, 160
—, իռացիոնալությունը 101
—, մոտավոր հաշվումը 97

Զուգահեռանիստ n-չափման 438, 439
— — անվերջ, վերջավոր 439
Զուգամիտության սկզբունքը 103, 110
Զուգորդական հատկություն գումարման, բազմապատկման 5, 8, 29, 33

Էլեկտրական ցանց 568
Էլեմենտար ֆունկցիաներ տես Տարրական ֆունկցիաներ
Էլիպս 666, 693, 723, 755, 760
Էլիպսոիդ 706
Էկվիվալենտ տես Համարժեք
Էյլեր 96
Էյլերի բանաձևը 514
Էպիցիկլոիդ և հիպոցիկլոիդ 671, 679, 695
Էվոլյուտ 759, 763, 767
Էվոլվենտ 759, 763, 767
— շրջանի (շրջանագծի) 673, 696, 753
Էքստրեմում (մաքսիմում, մինիմում) 351, 352
—, գտնելու կանոնները 354, 362, 365
— անիսկական, իսկական 352
— մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի 540, 541
— — — — — բացարձակ 612
— — — — — հարաբերական 610, 617

Էքսցենտրիկ անոմալիա մոլորակի 224

Ընթացքի ֆունկցիայի փոփոխման 343

Ընտանիք կորերի 718

Թեյլորի բանաձևը 321, 324, 536
Թեք ասիմպտոտ 385
Թիվ տես Ռացիոնալ, Իռացիոնալ, Իրական թվեր
Թվաբանական արժեք արմատի 37, 131
— n-չափման տարածություն 433
Թվաբանա-երկրաչափական միջին 91
— - ներդաշնակ միջին 91
Թվային առանցք 46
— բազմության վերին, ստորին եզրեր 22—26
— — — — ճշգրիտ եզրեր 22—26
— հաջորդականություն 48

Ինվարիանտություն տես Անփոփոխականություն
Իռացիոնալ թվեր 12, 14
Իրական թվեր 15
— —, բազմապատկումն ու բաժանումը 31—35
— —, գումարումն ու հանումը 28—31
— —, հավասարությունը 15
— —, տասնորդական մոտավորությունները 18
— թվերի բազմության անընդհատությունը 21
— — — խտությունը 17
— — — կարգավորումը 15

Լագրանժ 248, 336, 614
Լագրանժի բանաձևը, թեորեման 316, 318
— ձևը լրացուցիչ անդամի 336, 537
— մեթոդը անորոշ բազմապատկիչների 614
Լայբնից 248, 280, 300, 307
Լայբնիցի բանաձևը 302, 307
Լարերի մեթոդը հավասարումների մոտավոր լուծման 407
Լեբեգ 234
Լեժանդրի ձևափոխությունը 638, 657, 658
Լեմնիսկատ Բեռնուլիի 679, 699, 755, 757
Լոգարիթմ բնական (կամ նեպերյան) 97
— —, անցումը տասնորդականին 97
—, գոյությունը 42
— տասնորդական
Լոգարիթմական սպիրալ (գալարագիծ) 677, 698, 763
— ֆունկցիա 132
— —, ածանցյալը 252
— —, անընդհատությունը 199, 223
— —, ֆունկցիոնալ բնութագրումը 205
Լոպիտալի կանոնը 391, 398
Լրացուցիչ անդամ Թեյլորի բանաձևի 324—327, 333, 537
Լրիվ աճ ֆունկցիայի 483
— դիֆերենցիալ 489, 506, 516, 529, 535
— —, երկրաչափական մեկնաբանումը 490
— —, կիրառումը մոտավոր հաշվումներում 509
— —, ձևի անփոփոխականությունը (ինվարիանտությունը) 507

Խառն ածանցյալներ, թեորեման 520
Խարակտերիստիկ կետ կորի վրա 726
Խզում 193
— ածանցյալի 274
— անվերջ 383
— մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի 460
— մոնոտոն ֆունկցիայի 198
— սովորական, 1-ին տեսակի, 2-րդ տեսակի 193, 194

Խխունջ 678, 699
Խորանարդ ո-չափման 439
Խտացման կետ 145, 146, 443

Կախյալ ֆունկցիաներ 625
Կանոն տես Համապատասխան անունները
Կանտորի թեորեման 231, 238, 472, 476
Կապակցված տիրույթ 444
Կապի հավասարումներ 611
Կասսինիի օվալը (ձվածիր, ձվարդ) 679
Կարգ ածանցյալի 291
— անվերջ մեծ մեծության 186
— — փոքր մեծության 175
— դիֆերենցիալի 306
— կորերի շոշափման 728
Կարդիոիդ 673, 678, 679, 699
Կենտրոն կորության 749, 757
Կեպլերի հավասարումը 224
Կետ տես Համապատասխան անունները
Կետային բազմության տրամագիծ 473
Կետեր ֆունկցիայի 447
Կիսաբաց միջակայք 117
Կիսախորանարդ պարաբոլ 667, 725
Կլապեյրոնի բանաձևը 428, 481
Կոմբինացված մեթոդ (հավասարումների մոտավոր լուծման) 420

Կոմպրեսոր 562
Կոն 2-րդ կարգի 706
Կոշի 82, 84, 104, 280, 293, 337
Կոշիի 1-ին թեորեման 215, 236, 465
— 2-րդ թեորեման 219, 466
— բանաձևը 320
— ձևը լրացուցիչ անդամի 337
Կոշի-Բոլցանոյի թեորեման 104, 172
— - — հայտանիշը (սկզբունքը) 104, 172
Կոորդինատային գծեր (մակերևույթի) 686
Կոորդինատներ աշխարհագրական 688
— բևեռային 636, 648
— ո-չափման կետի 434
— սֆերիկ 651
Կոպար (վերին, ստորին, ճշգրիտ) տես Եզր (վերին, ստորին, ճշգրիտ)
Կոսեկանս 133
Կոսինուս 133
— հիպերբոլական 133
Կոտանգենս 133
— հիպերբոլական 133
Կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիա 129
— — —, անընդհատությունը 190
— — — մի քանի փոփոխականների 447
Կոր տես Համապատասխան անունը
—, անալիտիկ ներկայացումը 662, 682
—, հավասարումը 127, 284, 662, 674, 683, 686
— հարթության վրա 662
— ո-չափման տարածության մեջ 436
— տարածության մեջ 680, 682
Կորեր փոխանցման (փոխանցիչ) 756
Կորերի ընտանիք 718
— շոշափումը 717
— —, կարգը 728
Կորություն 746
— միջին 745
Կորության կենտրոն, շառավիղ, շրջան 749, 757
Կրկնակի (կրկնապատիկ) կետ կորի 713
— (—) սահման ֆունկցիայի 456
Կրոնեկեր 126
Կուլոնի օրենքը 372

Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ 138
— — —, ածանցյալները 255, 256
— — —, անընդհատությունը 200, 224

— Հիպերբոլական ֆունկցիաներ 136, 137
ֆունկցիա 135
— —, ածանցյալը 254
— —, գոյությունը 221
Համասեռ ֆունկցիա 513
Համարժեք անվերջ փոքր մեծություններ 178
Համեմատական մասերի կանոնը 406, 407
Հայտանիշ Բոլցանո-Կոշիի 104, 172
Հանրահաշվական ֆունկցիա 583
Հաջորդական սահման մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի 456
Հաջորդականություն 48
— մասնակի (ենթահաջորդականություն) 106
Հաստատուն ֆունկցիա, պայմանը 343
Հավասարաչափ անընդհատություն ֆունկցիայի 229, 471
Հավասարում, արմատների գոյությունը 216
— կորի 127, 284, 662, 674, 683, 686
— մակերևույթի 432, 681, 684
—, մոտավոր լուծումը 216, 405
Հատված նորմալի, շոշափողի 691
— — — բևեռային 697
—, չափումը 43
Հատույթ թվային բազմությունում 12, 21
Հարաբերական էքստրեմում 610, 617
— սխալ 286, 510
Հարմոնիկ (ներդաշնակ) միջին 91
— (—) տատանում 270
Հեռավորություն կետերի միջև n-չափման տարածության մեջ 435
Հեստինս 775
Հիպերբոլ 667, 755
— հավասարումը 127, 130
Հիպերբոլական հակադարձ ֆունկցիաներ 136, 137
— պարաբոլոիդ 433
— սինուս, կոսինուս և այլն 133
— սպիրալ 676, 698
— ֆունկցիաների ածանցյալները 265, 266
— — անընդհատությունը 191
Հիպոցիկլոիդ 672, 673
Հյույգենսի բանաձևը 341
Հոսանքի ուժ 248
Հորիզոնական ասիմպտոտ 384
Հպվող (հպման) կոր 733
— շրջան, ուղիղ 734
Ձվածիր կամ ձվարդ տես Օվալ
Ձևափոխություն Լեժանդրի 638, 657, 658
— կետային (հարթության, տարածության) 647
Ճշգրիտ եզր (վերին, ստորին) 24
Մակերևույթ 433, 680—684
—, անալիտիկ ներկայացումը 680
— պտտման 689
Մակլորենի բանաձևը 323, 328
Մասնակի (մասնական) ածանցյալ 478
— աճ 479
— (մասնավոր) արժեք ֆունկցիայի 121
— դիֆերենցիալ 482
— հաջորդականություն (ենթահաջորդականություն) 106
— սահման վարիանտայի 106
— — ֆունկցիայի 174
Մատրիցներ, բազմապատկումը 579
— ֆունկցիոնալ (Յակոբիի) 579, 626, 628
— —, ռանգը 611, 616, 628
Մարմին երկրաչափական 434
Մարվող տատանում 269, 360
Մաքսիմում տես էքստրեմում
Մեծագույն արժեք ֆունկցիայի 225, 369
— — — մի քանի փոփոխականների 555
— սահման վարիանտայի 111
— — ֆունկցիայի 174

Մեկուսացված եզակի կետ (կորի) 708, 713
Մերն 48
Մերձակայք տես Շրջակայք
Միակողմյան ածանցյալ 271
— — բարձր կարգի 294
— անընդհատություն կամ խզում (ֆունկցիայի) 192
— շոշափող 272
Միակություն սահմանի 61
Միավոր 8, 33
Միարժեք ֆունկցիա 120, 429
Միջակա արժեք, թեորեման 219
Միջակայք 102
— բաց, կիսաբաց, փակ, վերջավոր, անվերջ 117
Միջին արագություն 240
— արժեքի թեորեման 317
— — ընդհանրացրած թեորեման 321
— երկրաչափական 92
— թվաբանա-երկրաչափական 91
— թվաբանա-ներդաշնակ 91
— կորություն 745
— ներդաշնակ (հարմոնիկ) 91
Մինիմում տես էքստրեմում
Մոդուլ անցման (բնական լոգարիթմից տասնորդականին) 97
Մոլորակի անոմալիա (էքսցենտրիկ) 224
Մոնոտոն վարիանտա 86
— ֆունկցիա 168
— —, անընդհատությունը, խզումները 198
— —, մոնոտոնության պայմանը 346
Մոտավոր բանաձևեր 180, 182, 285, 337
— լուծում հավասարման 405
— հաշվումներ, դիֆերենցիալի կիրառումները 285, 509

Յակոբի 479
Յակոբիի դետերմինանտ, յակոբիան 574
— մատրիցներ 579, 626

Նեպեր, Նեպերյան լոգարիթմներ 97
Ներդաշնակ (հարմոնիկ) միջին 91
— տատանում 270
Ներդրված միջակայքերի լեմման 101—103
Ներքին կետ (բազմության) 442
Նյուտոնի եղանակը (հավասարումների մոտավոր լուծման) 411
Նշանների կանոնը (բազմապատկելիս) 10, 32
Նորմալ կորին 690
— —, հատվածը 691
— —, բևեռային հատվածը 697
— — մակերևույթին 702, 705
Նվազագույն քառակուսիների մեթոդը տես Փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը
Նվազող վարիանտա 86
— ֆունկցիա 170
n-ապատիկ կետ 314
— սահման 456
n-չափման գունդ 440, 442
— զուգահեռանիստ 438, 441, 442
— սիմպլեքս 440, 442
— տարածություն 433
n փոփոխականների ֆունկցիա 445

Շառավիղ կորության 749
Շարժման հավասարումը 241
Շարունակումը ֆունկցիաների 770
Շլյոմիլխի և Ռոշի ձևը լրացուցիչ անդամի 336
Շղթայագիծ 269, 666, 751,
Շոշափման ձևափոխություն 635, 639, 648, 658
Շոշափող 242, 272, 490, 690, 700, 715
—, դրական ուղղությունը 741, 744
— հարթություն 490, 703
—, հատվածը 691
—, — բևեռային 697
— միակողմյան 272
Շոշափողների մեթոդը հավասարումների մոտավոր լուծման 411
Շոշափում կորերի 717
— —, կարգը 728
Շվարց 525

Շվարցի անհավասարությունը 435
Շտոլցի թեորեման 82
Շրջակայք կետի 146
— —, n-չափման 439
Շրջան (շրջանագիծ) կորության 749
— հպման 734
Շրջման կետ 377

Ողորկ կոր 781

Չափում հատվածների 43
Չեբիշև 342

Պարաբոլ 78, 130, 693, 723, 755 760
Պարաբոլիդ հիպերբոլական 433
— պտտման 433
Պարամետր 284
Պարամետրական դիֆերենցում 309—310
— ներկայացում կորի 284, 664, 675
— — — տարածության մեջ 683
— — մակերևույթի 684
Պարբերական տասնորդական կոտորակ 21
Պարզ կետ (կորի, մակերևույթի) 665, 685
Պարուրիչ կորերի ընտանիքի 717
Պեանոյի ձևը լրացուցիչ անդամի 324
Պտտման մակերևույթ 689
— պարաբոլիդ 433
Պտուտակագիծ 683, 706
Պտուտակային մակերևույթ 690, 707
Պրոյեկտող (պրոյեկտիչ) գլան 682

Ջերմունակություն 247

Ռանգ մատրիցի 611, 616, 628
Ռացիոնալ թվեր, բազմությունը 3—11
— —, բազմապատկումը և բաժանումը 8
— —, գումարումը և հանումը 5
— —, կարգավորումը 4
— ֆունկցիա 129
— —, անընդհատությունը 190
— — մի քանի փոփոխականների 447, 453, 461
Ռիման 197
Ռոլլի թեորեման 314
Ռոշի ու Շլյոմիլխի ձևը լրացուցիչ անդամի 336

Սահման ածանցյալի 318
— արտադրյալի, քանորդի 69
— գումարի, տարբերության 68
— մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի 447, 456
— — — —, հաջորդական 456
— մոնոտոն ֆունկցիայի 170
— վարիանտայի 51, 54
— —, անվերջ 62
— —, մասնակի 107
— —, մեծագույն, փոքրագույն 111
— —, միակությունը 61
— — մոնոտոն 86
— ֆունկցիայի 145, 151
— —, մասնակի 174
— —, մեծագույն, փոքրագույն 174

Սահմանային անցում հավասարության, անհավասարության մեջ 64, 65
— անցումների տեղափոխումը 458, 524
Սահմանափակ կետային բազմություն 444
— վարիանտա 60
— —, վերևից կամ ներքևից, թվային բազմություն 23
Սահմանափակությունն անընդհատ ֆունկցիայի 225, 237, 470, 476
Սեկանս 133
Սիգնում (ֆունկցիա) 126
Սիլվեստր 550
Սիմպլեքս n-չափման 440
Սինուս 133
— հիպերբոլական 133
— և աղեղի հարաբերության սահմանը 155
Սինուսոիդ 134
Սխալ բացարձակ, հարաբերական 179, 286, 289, 510

Սխալների գնահատումը 288, 510
Սկզբունք զուգամիտության 103, 110
Սովորական կետ (կորի, մակերևույթի) 664, 665, 686
Սպիրալ (գալարագիծ) արքիմեդյան 675, 695
— լոգարիթմական 677, 698, 763
— հիպերբոլական 676, 698
Ստացիոնար կետ 353, 542
Ստորին եզր (граница) թվային բազմության 22—26
— ճշգրիտ եզր 22—26
Սրման կետ 714
Սուպերպոզիցիա (վերադրում) ֆունկցիաների 144, 446
Սֆերա 433
— n-չափման (գունդ) 440, 441
Սֆերիկ կոորդինատներ 651

Վարիանտա 48, 433
— աճող (չնվազող) 86
— մոնոտոն 86
— նվազող (չաճող) 86
—, որը սահման չունի 59
—, որպես նշանիկի ֆունկցիա 149
— սահմանափակ 60
Վեյերշտրասի 1-ին թեորեման 225, 237, 470, 471, 476
— 2-րդ թեորեման 226, 470, 471
— - Բոլցանոյի թեորեման 109, 466
Վերադարձի կետ (դարձակետ) 714, 715
Վերադրում (սուպերպոզիցիա) ֆունկցիաների 144, 446
Վերին եզր (граница) թվային բազմության 22—26
— ճշգրիտ եզր 22—26
Վերջավոր աճերի բանաձևը 317, 500
Վիվիանիի կորը 686, 707

Տանգենս 133
— հիպերբոլական 133
Տասնորդական անվերջ կոտորակ 18
— լոգարիթմներ 97
— մոտավորություններ իրական թվի 18
— պարբերական կոտորակ 21
Տատանում մարվող 269, 360
— ներդաշնակ (հարմոնիկ) 270
— ֆունկցիայի 228, 471
Տարածական գրաֆիկ ֆունկցիայի 432
Տարածություն n-չափման (թվաբանական) 433
Տարբերություն թվերի 6, 31
— վարիանտաների և այլն տես Գումար
Տարրական ֆունկցիաներ 145
— —, ածանցյալները 249, 256, 294
— —, անընդհատությունը 149
Տեղափոխական հատկություն գումարման, բազմապատկման 5, 8, 29, 33
Տեղափոխում դիֆերենցումների 521, 525
— սահմանային անցումների 458, 524
Տիրույթ բաց 442—445
— փակ 442—445
— փոփոխականի (փոփոխականների) փոփոխման 119, 120, 429
— ֆունկցիայի որոշման 120, 429
— n-չափման տարածությունում 438
Տիրույթի եզր 443
Տրամագիծ կետային բազմության 473

Ցիկլոիդ 670, 695, 752
Ցուցչային ֆունկցիա 131
— —, ածանցյալը 252
— —, անընդհատությունը 190, 199
— —, ֆունկցիոնալ բնութագրումը 204

Ուիտնեյ 775
Ուղիղ հպման (հպվող) 734
— n-չափման տարածությունում 438
Ուղղաձիգ ասիմպտոտ 384

Փակ բազմություն 444
— գունդ 440, 443
— զուգահեռանիստ 440, 443
— միջակայք 117
— սիմպլեքս 440, 443
— տիրույթ 442
Փոխանցման (փոխանցիչ) կորեր 756
Փոփոխական 47, 116
— աղեղ 739
—, անկախ 118, 227, 445
Փոփոխականների փոխարինումը 631
Փոքրագույն արժեք ֆունկցիայի 225, 369
— — մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի 555
— սահման վարիանտայի 111
— — ֆունկցիայի 174
— քառակուսիների մեթոդ 570

Քանորդ թվերի 8, 35
— վարիանտաների, սահմանը 69, 70
— ֆունկցիաների, ածանցյալն ու դիֆերենցիալը 261, 282, 308
— —, անընդհատությունը 189, 190, 463
— —, սահմանը 165, 166, 167
Քառակուսային ֆորմա (ձև) 549
— — անորոշ, կիսաորոշյալ, որոշյալ 549, 552, 554
— —, մեծագույն և փոքրագույն արժեքները 623

Օվալ (ձվածիր, ձվարդ) Կասսինիի 679

Ֆերմայի թեորեմ 311
Ֆորմա քառակուսային (կվադրատիկ) 549
Ֆորմուլա տես Բանաձև
Ֆունկցիա 119, տես նաև անունները
—, անալիտիկ արտահայտությունը 121, 123
—, հետազոտումը 343
— մի քանի փոփոխականների 427, 445
—, տարածական գրաֆիկը 432
— փոփոխման ընթացքը
— ֆունկցիայի (ֆունկցիաների) 144, 446
Ֆունկցիաների անկախությունը 625
— վերադրումը (սուպերպոզիցիա) 144, 446
Ֆունկցիոնալ դետերմինանտ (յակոբիան) 574
— կախում 117, 427
— հավասարումներ 201, 204
— մատրից 579

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐ

§ 1. Ռացիոնալ թվերի բազմություն

1. *Նախնական դիտողություններ* 3
2. *Ռացիոնալ թվերի բազմության կարգավորումը* . . . 4
3. *Ռացիոնալ թվերի գումարումն ու հանումը* 5
4. *Ռացիոնալ թվերի բազմապատկումն ու բաժանումը* . . . 8
5. *Արքիմեդի աքսիոման* 11

§ 2. Իռացիոնալ թվերի մուծումը: Իրական թվերի բազմության կարգավորումը

6. *Իռացիոնալ թվի սահմանումը* 12
7. *Իրական թվերի բազմության կարգավորումը* 15
8. *Իրական թիվը տասնորդական անվերջ կոտորակով ներկայացնելը* 18
9. *Իրական թվերի բազմության անընդհատությունը* . . . 21
10. *Թվային բազմությունների եզրերը* 22

§ 3. Թվաբանական գործողություններ իրական թվերի հետ

11. *Օժանդակ առաջադրություններ* 27
12. *Իրական թվերի գումարի սահմանումը* 28
13. *Գումարման հատկությունները* 29
14. *Իրական թվերի արտադրյալի սահմանումը* 31
15. *Բազմապատկման հատկությունները* 33
16. *Ամփոփում* 35
17. *Բացարձակ մեծություններ* 36

§ 4. Իրական թվերի հետագա հատկություններն ու կիրառությունները

18. *Արմատի գոյությունը: Ռացիոնալ ցուցչով աստիճան* . . . 37
19. *Ցանկացած իրական ցուցչով աստիճան* 39
20. *Լոգարիթմներ* 42
21. *Հատվածների չափումը* 43

ԱՌԱՋԻՆ ԳԼՈՒԽ

ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

§ 1. Վարիանտա և նրա սահմանը

22. *Փոփոխական մեծություն, վարիանտա*	47
23. *Վարիանտայի սահմանը*	51
24. *Անվերջ փոքր մեծություններ*	53
25. *Օրինակներ*	54
26. *Մի քանի թեորեմներ սահման ունեցող վարիանտայի վերաբերյալ*	59
27. *Անվերջ մեծ մեծություններ*	61

§ 2. Սահմանների վերաբերյալ թեորեմներ, որոնք հեշտացնում են սահմաններ գտնելը

28. *Սահմանային անցում հավասարության և անհավասարության մեջ*	64
29. *Լեմմաներ անվերջ փոքրերի մասին*	67
30. *Թվաբանական գործողություններ փոփոխականների հետ*	68
31. *Հատուկ դեպքեր։ Անորոշ արտահայտություններ*	70
32. *Սահմաններ գտնելու օրինակներ*	76
33. *Շտոլցի թեորեմը ու նրա կիրառումները*	82

§ 3. Մոնոտոն վարիանտա

34. *Մոնոտոն վարիանտայի սահմանը*	86
35. *Օրինակներ*	88
36. e *թիվը*	95
37. e *թվի մոտավոր հաշվումը*	97
38. *Ներդրված միջակայքերի լեմման*	101

§ 4. Զուգամիտության սկզբունքը։ Մասնակի սահմաններ

39. *Զուգամիտության սկզբունքը*	103
40. *Մասնակի հաջորդականություններ և մասնակի սահմաններ*	106
41. *Բոլցանո-Վեյերշտրասի թեորեմ*	109
42. *Մեծագույն և փոքրագույն սահմաններ*	111

ԵՐԿՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§ 1. Ֆունկցիայի գաղափարը

43. *Փոփոխական և նրա փոփոխման տիրույթը*	116
44. *Ֆունկցիոնալ կախում փոփոխականների միջև։ Օրինակներ*	117
45. *Ֆունկցիայի գաղափարի սահմանումը*	119
46. *Ֆունկցիայի տրման անալիտիկ եղանակը*	123

47. Ֆունկցիայի գրաֆիկը . . 127
48. Ֆունկցիաների կարևորագույն դասերը . . 129
49. Հակադարձ ֆունկցիայի գաղափարը . . 135
50. Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ . . 138
51. Ֆունկցիաների սուպերպոզիցիա։ Եզրափակիչ դիտողություններ 144

§ 2. Ֆունկցիայի սահմանը

52. Ֆունկցիայի սահմանի սահմանումը 145
53. Բերումը վարիանտայի դեպքին 149
54. Օրինակներ 152
55. Սահմանների տեսության ընդարձակումը 163
56. Օրինակներ 167
57. Մոնոտոն ֆունկցիայի սահմանը 170
58. Բոլցանո-Կոշիի ընդհանուր հայտանիշը 172
59. Ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն սահմանները . . 174

§ 3. Անվերջ փոքր և անվերջ մեծ մեծությունների դասակարգումը

60. Անվերջ փոքրերի բաղդատումը 174
61. Անվերջ փոքրերի սանդղակ 176
62. Համարժեք անվերջ փոքրեր 178
63. Գլխավոր մասի անջատումը 181
64. Խնդիրներ 183
65. Անվերջ մեծերի դասակարգումը 186

§ 4. Ֆունկցիայի անընդհատությունը (և խզումները)

66. Ֆունկցիայի՝ կետում անընդհատության սահմանումը . 187
67. Թվաբանական գործողությունները անընդհատ ֆունկցիաների նկատմամբ 189
68. Անընդհատ ֆունկցիաների օրինակներ 190
69. Միակողմյան անընդհատություն։ Խզումների դասակարգումը . 192
70. Խզվող ֆունկցիաների օրինակներ 194
71. Մոնոտոն ֆունկցիաների անընդհատությունը և խզումները . 197
72. Տարրական ֆունկցիաների անընդհատություն 199
73. Անընդհատ ֆունկցիաների սուպերպոզիցիա . . . 200
74. Մի ֆունկցիոնալ հավասարման լուծում 201
75. Մի քանի տարրական ֆունկցիաների ֆունկցիոնալ բնութագրումը 204
76. Ֆունկցիաների անընդհատության օգտագործումը սահմաններ հաշվելիս 207
77. Աստիճանացուցչային արտահայտություններ 211
78. Օրինակներ 213

§ 5. Անընդհատ ֆունկցիաների հատկությունները

79. Ֆունկցիայի զրո դառնալու թեորեմը . 215
80. Կիրառումը հավասարումներ լուծելիս . 215

81. Միջակա արժեքի թեորեման 219
82. Հակադարձ ֆունկցիայի գոյությունը . . . 221
83. Ֆունկցիայի սահմանափակության թեորեման 224
84. Ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները . . . 225
85. Հավասարաչափ անընդհատության գաղափարը 229
86. Կանտորի թեորեման 231
87. Բորելի լեմման 233
88. Հիմնական թեորեմաների նոր ապացույցներ 236

ԵՐՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐ

§ 1. Ածանցյալ և նրա հաշվումը

89. Շարժվող կետի արագությունը հաշվելու խնդիրը 240
90. Շոշափող տանելու խնդիրը 242
91. Ածանցյալի սահմանումը 244
92. Ածանցյալներ հաշվելու օրինակներ 249
93. Հակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալը 254
94. Ածանցյալների բանաձևերի ցանկ 256
95. Ֆունկցիայի աճի բանաձևը 257
96. Ածանցյալներ հաշվելու պարզագույն կանոններ . . . 258
97. Բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը 261
98. Օրինակներ 263
99. Միակողմյան ածանցյալներ 271
100. Անվերջ ածանցյալներ 272
101. Հատուկ դեպքերի այլ օրինակներ 274

§ 2. Դիֆերենցիալ

102. Դիֆերենցիալի սահմանումը 275
103. Դիֆերենցելիության և ածանցյալի գոյության կապը . . 277
104. Դիֆերենցման հիմնական բանաձևերն ու կանոնները . . 280
105. Դիֆերենցիալի գրության ձևի անփոփոխականությունը . . 282
106. Դիֆերենցիալը որպես մոտավոր բանաձևերի աղբյուր . . 285
107. Դիֆերենցիալների կիրառումը սխալներ գնահատելիս . . 288

§ 3. Բարձր կարգի ածանցյալներ և դիֆերենցիալներ

108. Բարձր կարգի ածանցյալների սահմանումը 291
109. Ընդհանուր բանաձևեր ցանկացած կարգի ածանցյալների համար 294
110. Լայբնիցի բանաձևը 300
111. Օրինակներ 303
112. Բարձր կարգի դիֆերենցիալներ 306
113. Բարձր կարգի դիֆերենցիալների համար ձևի անփոփոխականության խախտումը 307
114. Պարամետրական դիֆերենցում 309

§ 4. Դիֆերենցիալ հաշվի հիմնական թեորեմաները

115.—Ֆերմայի թեորեման 310
116. Դարբուի թեորեման 313
117.—Ռոլլի թեորեման 314
118.—Լագրանժի բանաձևը 316
119. Ածանցյալի սահմանը 318
120. Կոշիի բանաձևը 319

§ 5. Թեյլորի բանաձևը

121. Թեյլորի բանաձևը բազմանդամի համար 321
122. Կամավոր ֆունկցիայի վերլուծումը, լրացուցիչ անդամը Պեանոյի ձևով 324
123. Օրինակներ 328
124. Լրացուցիչ անդամի այլ ձևեր 333
125. Մոտավոր բանաձևեր 337

ՉՈՐՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ

§ 1. Ֆունկցիայի փոփոխման ընթացքի ուսումնասիրությունը

126. Ֆունկցիայի հաստատուն լինելու պայմանը 343
127. Ֆունկցիայի մոնոտոնության պայմանը 346
128. Մաքսիմումներ և մինիմումներ. անհրաժեշտ պայմաններ . . 352
129. Բավարար պայմաններ։ Առաջին կանոն 354
130. Օրինակներ 356
131. Երկրորդ կանոն 362
132. Բարձր կարգի ածանցյալների օգտագործումը 365
133. Մեծագույն և փոքրագույն արժեքների որոնումը . . . 368
134. Խնդիրներ 370

§ 2. Ֆունկցիաների գրաֆիկների կառուցումը

135. Խնդրի դրվածքը 376
136. Գոգավորության ուղղությունը, շրջման կետեր 377
137. Գրաֆիկ կառուցելու սխեման։ Օրինակներ 380
138. Անվերջ խզումներ, անվերջ միջակայք։ Ասիմպտոտներ . . 383
139. Օրինակներ 387

§ 3. Անորոշությունների բացումը

140. $\frac{0}{0}$ տեսքի անորոշություն . 397

141. $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշություն 398

142. Այլ տեսքի անորոշություններ 401

§ 4. Հավասարումների մոտավոր լուծումը

143. Ներածական դիտողություններ 405

144. Համեմատական մասերի կանոնը (լարերի մեթոդը) 406

145. Նյուտոնի կանոնը (շոշափողների մեթոդը) 411

146. Օրինակներ և վարժություններ . . 414

147. Կոմբինացված մեթոդ 420

148. Օրինակներ և վարժություններ . . . 421

ՀԻՆԳԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§ 1. Հիմնական գաղափարներ

149. Ֆունկցիոնալ կախում փոփոխականների միջև։ Օրինակներ . 427

150. Երկու փոփոխականների ֆունկցիաներ և նրանց որոշման տիրույթները 429

151. Թվաբանական n-չափանի տարածություն 433

152. Տիրույթների օրինակներ n-չափանի տարածության մեջ . 438

153. Բաց և փակ տիրույթների ընդհանուր սահմանումը . . 442

154. n փոփոխականների ֆունկցիաներ . . . 445

155. Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի սահմանը . . 447

156. Բերումը վարիանտայի դեպքին . . . . . . 45[illegible]

157. Օրինակներ . . . . 45[illegible]

158. Հաջորդական սահմաններ 456

§ 2. Անընդհատ ֆունկցիաներ

159. Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաների անընդհատությունն ու խզումները 460

160. Գործողություններ անընդհատ ֆունկցիաների հետ . . . 463

161. Տիրույթում անընդհատ ֆունկցիաներ։ Կոշիի թեորեմները . . 464

162. Բոլցանո-Վեյերշտրասի թեորեմը 466

163. Վեյերշտրասի թեորեմները 470

164. Հավասարաչափ անընդհատություն 471

165. Բորելի լեմման 474

166. Հիմնական թեորեմների նոր ապացույցներ . . . 476

§ 3. Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաների ածանցյալներն ու դիֆերենցիալները

167. Մասնակի ածանցյալներ և մասնակի դիֆերենցիալներ . . . 478
168. Ֆունկցիայի լրիվ աճը 483
169. Լրիվ դիֆերենցիալ 487
170. Երկրաչափական մեկնաբանում երկու անկախ փոփոխականների ֆունկցիայի դեպքում 490
171. Բարդ ֆունկցիաների ածանցյալները 494
172. Օրինակներ 496
173. Վերջավոր աճերի բանաձևը 500
174. Ածանցյալ տվյալ ուղղությամբ 502
175. (Առաջին) դիֆերենցիալի ձևի անփոփոխականությունը . . 506
176. Լրիվ դիֆերենցիալի կիրառումը մոտավոր հաշիվներում . . 509
177. Համասեռ ֆունկցիաներ 512
178. Էյլերի բանաձևը 514

§ 4. Բարձր կարգի ածանցյալներ և դիֆերենցիալներ

179. Բարձր կարգի ածանցյալներ 516
180. Խառն ածանցյալների թեորեմը 520
181. Ընդհանրացում 525
182. Բարդ ֆունկցիայի բարձր կարգի ածանցյալները . . . 527
183. Բարձր կարգի դիֆերենցիալներ 529
184. Բարդ ֆունկցիաների դիֆերենցիալները 535
185. Թեյլորի բանաձևը 536

§ 5. Էքստրեմումներ, մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ

186. Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաների էքստրեմումները։ Անհրաժեշտ պայմաններ 540
187. Բավարար պայմաններ (երկու փոփոխականների ֆունկցիայի դեպքը) 543
188. Բավարար պայմաններ (ընդհանուր դեպք) 548
189. Էքստրեմումի բացակայության պայմանները 552
190. Ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները։ Օրինակներ . 555
191. Խնդիրներ 560

ՎԵՑԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ԴԵՏԵՐՄԻՆԱՆՏՆԵՐ, ՆՐԱՆՑ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

§ 1. Ֆունկցիոնալ դետերմինանտների ձևական հատկությունները

192. Ֆունկցիոնալ դետերմինանտի (յակոբիանի) սահմանումը . 574
193. Յակոբիանների բազմապատկումը 575
194. Ֆունկցիոնալ մատրիցների (Յակոբիի մատրիցների) բազմապատկումը 578

§ 2. Անբացահայտ ֆունկցիաներ

195. Մեկ փոփոխականի անբացահայտ ֆունկցիայի գաղափարը . 581
196. Անբացահայտ ֆունկցիայի գոյությունը 584
197. Անբացահայտ ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը . . . 587
198. Մի քանի փոփոխականների անբացահայտ ֆունկցիաները . . 590
199. Անբացահայտ ֆունկցիաների ածանցյալների հաշվումը . . 599
200. Օրինակներ 604

§ 3. Անբացահայտ ֆունկցիաների տեսության մի քանի կիրառություններ

201. Հարաբերական էքստրեմումներ 610
202. Լագրանժի՝ անորոշ բազմապատկիչների մեթոդը . . . 614
203. Հարաբերական էքստրեմումի բավարար պայմանները . . 617
204. Օրինակներ և խնդիրներ 618
205. Գաղափար ֆունկցիաների անկախության մասին . . 625
206. Յակոբիի մատրիցի ռանգը 628

§ 4. Փոփոխականների փոխարինումը

207. Մեկ փոփոխականի ֆունկցիաներ 631
208. Օրինակներ 635
209. Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաներ։ Անկախ փոփոխական-
ների փոխարինումը 639
210. Դիֆերենցիալները հաշվելու մեթոդը 642
211. Փոփոխականների փոխարինման ընդհանուր դեպքը . . . 644
212. Օրինակներ 648

ՅՈԹԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇՎԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄՆԵՐԸ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

§ 1. Կորերի և մակերևույթների անալիտիկ ներկայացումը

213. Կորեր հարթության վրա (ուղղանկյուն կոորդինատներով) . 662
214. Օրինակներ 666
215. Մեխանիկական ծագում ունեցող կորեր 670
216. Կորեր հարթության վրա (բևեռային կոորդինատներով) . . 674
217. Մակերևույթներ և կորեր տարածության մեջ . . . 680
218. Պարամետրական ներկայացումը 683
219. Օրինակներ 686

§ 2. Շոշափող և շոշափող հարթություն

220. Հարթ կորի շոշափողն ուղղանկյուն կոորդինատներով . . 690
221. Օրինակներ 693

222. Շոշափողը բևեռային կոորդինատներով 696
223. Օրինակներ 698
224. Տարածական կորի շոշափողը; Մակերևույթի շոշափող հարթությունը 700
225. Օրինակներ 706
226. Հարթ կորերի եզակի կետերը 707
227. Կորը պարամետրական տեսքով տալու դեպքը 714

§ 3. Կորերի փոխադարձ շոշափումը

228. Կորերի ընտանիքի պարուրիչը 717
229. Օրինակներ 721
230. Խարակտերիստիկ կետեր 726
231. Երկու կորերի շոշափման կարգը 728
232. Կորերից մեկի անբացահայտ տրման դեպքը 731
233. Հպվող կոր 733
234. Այլ մոտեցում հպվող կորերի նկատմամբ 736

§ 4. Կորություն

235. Աղեղի երկարության գաղափարը 737
236. Փոփոխական աղեղ 739
237. Աղեղը պարամետրի դերում: Շոշափողի դրական ուղղությունը . 741
238. Կորության գաղափարը 744
239. Կորության շրջան և կորության շառավիղ 748
240. Օրինակներ 751
241. Կորության կենտրոնի կոորդինատները 757
242. Էվոլյուտի և էվոլվենտի սահմանումը, էվոլյուտի որոնումը . 759
243. Էվոլյուտների ու էվոլվենտների հատկությունները . . 763
244. Էվոլվենտների որոնումը 767

ԼՐԱՑՈՒՄ

ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՇԱՐՈՒՆԱԿՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

245. Մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքը 770
246. Հարցի դրումը երկչափ դեպքի համար 772
247. Օժանդակ առաջադրություններ 775
248. Շարունակման հիմնական թեորեմ 780
249. Ընդհանրացում 782
250. Ամփոփիչ դիտողություններ 785

Թարգմանությունը՝ ՑՈՂԻԿ ԱՐԱՋՅԱՆԻ և ուրիշների

Խմբագիր՝ դոցենտ Վ. ՍԱՂԱԹԵԼՅԱՆ
Տեխ. խմբագիր՝ Ց. ՉԱԽԱԼՅԱՆ
Կոնտրոլ սրբագրիչ՝ Գ. ՊԱՐԻԶ

ՎՖ 04430, Պատվեր 225, Տիրաժ 1500

Տպագրական 50½ մամուլ

Հանձնված է արտադրության 10/VI 1949 թ.
Ստորագրված է տպագրության 24/VI 1950 թ.

Վ. Մ. Մոլոտովի անվան Պետական համալսարանի տպարան,
Երևան, Կիրովի փողոց № 12: