Վ. Մ. ՄՈԼՈՏՈՎԻ ԱՆՎԱՆ ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Գ. Մ. ՖԻԽՏԵՆԳՈԼՑ

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՇՎԻ ԴԱՍԸՆԹԱՑ

ՀԱՏՈՐ II

Թույլատրված է ՍՍՌՄ Բարձրագույն կրթության մինիստրության կողմից իբրև ձեռնարկ համալսարանների մաթեմատիկական բաժինների ուսանողների և ասպիրանտների համար

ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ 1950

ՈՒԹԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՆԱԽՆԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ (ԱՆՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼ)

§ 1. ԱՆՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ԵՎ ԱՅՆ ՀԱՇՎԵԼՈՒ ՊԱՐԶԱԳՈՒՅՆ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐԸ

251. ՆԱԽՆԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ (ԵՎ ԱՆՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ) ԳԱՂԱՓԱՐԸ։ Գիտության ու տեխնիկայի շատ հարցերում հարկ է լինում ոչ թե տրված ֆունկցիայով նրա ածանցյալը գտնել, այլ ընդհակառակը՝ վերականգնել ֆունկցիան ըստ նրա հայտնի ածանցյալի։ n° 91-ում, ենթադրելով, որ հայտնի է շարժման $s=s(t)$ *հավասարումը, այսինքն՝ ճանապարհի փոփոխության օրենքը ժամանակի ընթացքում, մենք դիֆերենցելով գտանք նախ* $v=\frac{ds}{dt}$ *արագությունը, իսկ այնուհետև նաև* $a=\frac{dv}{dt}$ *արագացումը։ Գործնականում, սակայն, հաճախ հարկ է լինում լուծել հակադարձ խնդիրը.* a *արագացումը տրված է որպես* t *ժամանակի ֆունկցիա՝* $a=a(t)$ *և պահանջվում է որոշել* v *արագությունը և անցած* s *ճանապարհը, կախված* t*-ից։ Այսպիսով, այստեղ կարիք է լինում ըստ* $a=a(t)$ *ֆունկցիայի վերականգնել այն* $v=v(t)$ *ֆունկցիան, որի համար* a*-ն ածանցյալ է հանդիսանում, իսկ այնուհետև, իմանալով* v *ֆունկցիան, գտնել այն* $s=s(t)$ *ֆունկցիան, որի համար ածանցյալ կհանդիսանա* v*-ն։*

Տանք հետևյալ սահմանումը՝

$F(x)$ ֆունկցիան տվյալ միջակայքում կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի **նախնական ֆունկցիա** կամ նրա ինտեգրալ, եթե այդ ամբողջ միջակայքում $f(x)$-ը հանդիսանում է $F(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը, կամ, որ միևնույն է, $f(x)dx$-ը $F(x)$-ի համար ծառայում է որպես դիֆերենցիալ՝

$$F'(x)=f(x) \quad \text{կամ} \quad dF(x)=f(x)dx^{*}.$$

** Այս դեպքում ասում են նաև, որ* $F(x)$ *ֆունկցիան* $f(x)dx$ *դիֆերենցիալ արտահայտության համար նախնական ֆունկցիա (կամ ինտեգրալ) է։*

Ֆունկցիայի բոլոր նախնական ֆունկցիաների որոնումը, որը նրա ինտեգրում է կոչվում, հենց ինտեգրալ հաշվի հիմնական խնդիրներից մեկն է կազմում. ինչպես տեսնում ենք, այս խնդիրը դիֆերենցիալ հաշվի հիմնական խնդրի հակադարձն է։

Թեորեմա: Եթե մի որոշ (վերջավոր կամ անվերջ, փակ կամ ոչ-փակ) X միջակայքում $F(x)$ ֆունկցիան նախնական ֆունկցիա է $f(x)$ ֆունկցիայի համար, ապա $F(x)+C$ ֆունկցիան ևս. որտեղ C-ն ցանկացած հաստատուն է, նույնպես կլինի նախնական ֆունկցիա $f(x)$-ի համար: Հակադարձորեն՝ յուրաքանչյուր ֆունկցիա, որը նախնական ֆունկցիա է $f(x)$-ի համար X միջակայքում, կարող է ներկայացվել այդ ձևով:

Ապացույցը բավական է ստանմանափակել այն դեպքով, երբ X-ը $[a, b]$ վերջավոր փակ միջակայք է։

Այն հանգամանքը, որ, $F(x)$-ի հետ մեկտեղ, $F(x)+C$-ն ևս $f(x)$-ի համար նախնական ֆունկցիա է, միանգամայն ակներև է, քանի որ $[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$.

Դիցուք այժմ $\Phi(x)$-ը ցանկացած նախնական ֆունկցիա է $f(x)$-ի համար, այնպես որ $[a, b]$ միջակայքում

$$\Phi'(x)=f(x).$$

Քանի որ $F(x)$ և $\Phi(x)$ ֆունկցիաները դիտարկվող միջակայքում միևնույն ածանցյալն ունեն, ապա նրանք տարբերվում են հաստատունով [126, հետևանք]՝

$$\Phi(x)=F(x)+C,$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Թեորեմայից հետևում է, որ տվյալ $f(x)$ ֆունկցիայի բոլոր նախնական ֆունկցիաներն իմանալու համար բավական է գտնել միայն մեկ $F(x)$ նախնական ֆունկցիա, քանի որ նրանք իրարից տարբերվում են միայն հաստատուն գումարելիներով։

Դրա շնորհիվ $F(x)+C$ արտահայտությունը, որտեղ C-ն կամայական հաստատուն է, ներկայացնում է այն ֆունկցիայի ընդհանուր տեսքը, որն ունի $f(x)$ ածանցյալը կամ $f(x)dx$ դիֆերենցիալը։ *Այդ արտահայտությունն անվանում են $f(x)$-ի անորոշ ինտեգրալ և նշանակում*

$$\int f(x)dx$$

սիմվոլով, որտեղ անբացահայտ կերպով արդեն պարունակվում է կամայական հաստատուն։ $f(x)dx$ *արտահայտությունը կոչվում է ընդինտեգրալ արտահայտություն, իսկ* $f(x)$ *ֆունկցիան՝ ընդինտեգրալ ֆունկցիա։*

Օրինակ։ Դիցուք $f(x)=x^2$*. այդ դեպքում, ինչպես դժվար չէ տեսնել, այդ ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալը կլինի*

$$\int x^2dx = \frac{x^3}{3}+C.$$

Այդ հեշտ է ստուգել հակադարձ գործողությամբ՝ դիֆերենցմամբ։

Ընթերցողի ուշադրությունը հրավիրում ենք այն հանգամանքի վրա, որ «ինտեգրալի» $\int$ *նշանի տակ գրում են որոնելի նախնական ֆունկցիայի դիֆերենցիալը, և ոչ թե ածանցյալը (մեր օրինակում՝* x^2dx, *և ոչ* x^2*)։ Գրության այդ ձևը, ինչպես սորև կպարզվի* [282], *պատմականորեն է առաջ եկել. դրա հետ միասին, նա ունի նաև մի շարք առավելություններ, և նրա պահպանումը միանգամայն նպատակահարմար է։*

Անորոշ ինտեգրալի սահմանումից անմիջականորեն բխում են հետևյալ հատկությունները՝

1. $$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx,$$

այսինքն՝ d և $\int$ նշանները, երբ առաջինը դրված է երկրորդի առջև, փոխադարձաբար կրճատվում են։

2. Քանի որ $F(x)$*-ը նախնական ֆունկցիա է* $F'(x)$*-ի համար, ապա ունենք՝*

$$\int F'(x)dx=F(x)+C,$$

որը կարող ենք արտագրել այսպես՝

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

Այստեղից երևում է, որ $F(x)$-ի առջև դրված d և $\int$ նշանները կրճատվում են նաև այն ժամանակ, երբ d-ն դրված է $\int$-ից հետո, սակայն այդ դեպքում $F(x)$-ին պետք է գումարել կամայական հաստատուն։

Վերադառնալով n-ի սկզբում դրված խնդրին, այժմ կարող ենք գրել, որ

$$v=\int a(t)dt \quad \text{և} \quad s=\int v(t)dt.$$

Որոշակիության համար ենթադրենք, որ գործ ունենք հավասարաչափ արագացող շարժման հետ, օրինակ՝ ծանրության ուժի ազդեցությամբ առաջացող շարժման հետ. այդ դեպքում $a=g$ (եթե ուղղաձիգ ուղղությունը դեպի ցած դրական համարենք) և, ինչպես դժվար չէ կռահել,

$$v=\int g\,dt = gt+C.$$

v արագության համար մենք ստացանք մի արտահայտություն, որի մեջ, բացի t ժամանակից, մտնում է նաև C կամայական հաստատունը։ C-ի տարբեր արժեքների դեպքում արագության համար ևս կստանանք տարբեր արժեքներ ժամանակի միևնույն պահին. հետևապես, մեր ունեցած տվյալները բավական չեն խնդրի լրիվ լուծման համար։ Խնդրի միանգամայն որոշակի լուծման համար բավական է իմանալ արագության մեծությունը ժամանակի որևէ մի պահին։ Օրինակի համար, դիցուք մեզ հայտնի է, $t=t_0$ պահին արագությունը՝ $v=v_0$. այս արժեքները տեղադրենք արագության համար ստացված արտահայտության մեջ՝

$$v_0=gt_0+C, \text{ որտեղից } C=v_0-gt_0,$$

և այժմ մեր լուծումն ընդունում է միանգամայն որոշակի տեսք՝

$$v=g(t-t_0)+v_0.$$

Այնուհետև գտնենք արտահայտություն s ճանապարհի համար։ Ունենք՝

$$s=\int[g(t-t_0)+v_0]dt=\frac{1}{2}g(t-t_0)^2+v_0(t-t_0)+C'$$

(դիֆերենցելով հեշտ է ստուգել, որ նախնական ֆունկցիան կարելի է այս ձևով վերցնել)։ Մեզ համար անհայտ C' նոր հաստատունը կարելի է որոշել, եթե, օրինակ, տրված է, որ $t=t_0$ պահին ճանապարհը՝ $s=s_0$. Գտնելով, $C'=s_0$, լուծումը կարող ենք գրել վերջնական ձևով՝

$$s=\frac{1}{2}g(t-t_0)^2+v_0(t-t_0)+s_0.$$

t_0, s_0, v_0 արժեքները պայմանական կերպով կոչվում են t, s և v մեծությունների սկզբնական արժեքներ։

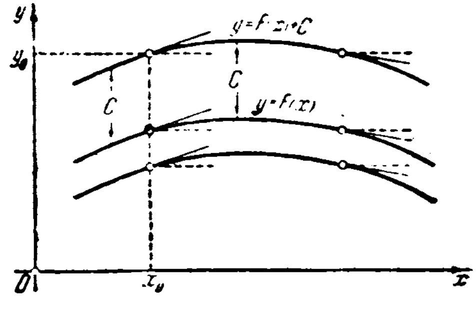
Մենք գիտենք, որ $y = F(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը տալիս է համապատասխան գրաֆիկի շոշափողի անկյունային գործակիցը։ Ուստի տրված $f(x)$ ֆունկցիայի համար $F(x)$ նախնական ֆունկցիան որոնելու խնդիրը կարելի է մեկնաբանել այսպես՝ պահանջվում է գտնել մի $y=F(x)$ կոր, որի համար կիրառելի լինի շոշափողի անկյունային գործակցի փոփոխության

$$\operatorname{tg}\alpha = f(x)$$

տրված օրենքը։

Եթե $y=F(x)$-ն այդպիսի կորերից մեկն է, ապա մնացած բոլոր կորերը կարող են դրանից ստացվել y առանցքին զուգահեռ (C կամայական հատվածի չափով) պարզ տեղափոխության միջոցով (գծ. 1)։ Կորերի այդ բազմության միջից որևէ կոր առանձնացնելու համար բավական է, օրինակ, որ տրված լինի մի (x_0, y_0) կետ, որով պետք է կորն անցնի. $y_0 = F(x_0) + C$ սկզբնական պայմանը տալիս է

$$C = y_0 - F(x_0).$$

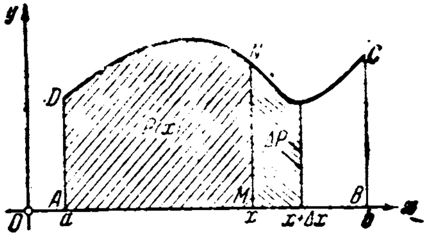


Գծ. 1.

252. ԻՆՏԵԳՐԱԼ ԵՎ ՄԱԿԵՐԵՍԸ ՈՐՈՇԵԼՈՒ ԽՆԴԻՐԸ։ Շատ ավելի կարևոր է նախնական ֆունկցիան որպես կորագիծ պատկերի մակերես մեկնաբանելը։ Քանի որ պատմականորեն նախնական ֆունկցիայի գաղափարը սերտորեն կապված է եղել մակերեսը հաշվելու խնդրի հետ, ապա մենք այդ խնդրի վրա կանգ կառնենք հենց այստեղ (օգտվելով պատկերի մակերեսի ինտուիտիվ պատկերացումից և այդ հարցի ճշգրիտ դրումը հետաձգելով մինչև X գլուխը)։

Դիցուք $[a, b]$ միջակայքում տրված է $y=f(x)$ անընդհատ ֆունկցիան, որը միայն դրական (ոչ բացասական) արժեքներ է ստանում։ Դիտարկենք ABCD պատկերը (գծ. 2), որը սահմանափակված է $y=f(x)$ կորով, $x=a$ և $x=b$ երկու օրդինատնե-

րով և x*-երի առանցքի հատվածով. Նման պատկերն անվանենք* կորագիծ սեղան (կամ սեղանակերպ): *Ցանկանալով որոշել այդ պատկերի* P *մակերեսի մեծությունը, ուսումնասիրենք* AMND *փոփոխական պատկերի մակերեսը որը գտնվում է* x=a *սկզբնական օրդինատի և* [a, b] *միջակայքում* x*-ին կամայապես ընտրած արժեքին համապատասխանող օրդինատի միջև։* x*-ի փոփոխման դեպքում այս վերջին մակերեսը համապատասխանաբար կփոփոխվի ընդ որում յուրաքանչյուր* x*-ին կհամապատասխանի նրա միանգամայն որոշակի արժեք, այնպես որ* AMND *կորագիծ սեղանի մակերեսը հանդիսանում է* x*-ի մի որոշ ֆունկցիա. այդ ֆունկցիան նշանակենք* P(x)*-ով։*



Գծ. 2.

Մեր առջև խնդիր դնենք նախ գտնել այդ ֆունկցիայի ածանցյալը։ Այդ նպատակով x*-ին տանք մի որոշ (ասենք, դրական)* Δx *աճ. այդ դեպքում* P(x) *մակերեսը կստանա* ΔP *աճ։* $[x, x+\Delta x]$ *միջակայքում* f(x) *ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները* **[84]** *նշանակենք, համապատասխանաբար,* m *և* M, *և* ΔP *մակերեսը համեմատենք այն ուղղանկյունների մակերեսների հետ, որոնք կառուցված են* Δx *հիմքի վրա և ունեն* m *և* M *բարձրությունները։ Ակներևաբար՝*

$$m\Delta x < \Delta P < M\Delta x,$$

որտեղից՝

$$m < \frac{\Delta P}{\Delta x} < M.$$

Եթե $\Delta x \to 0$, *ապա, անընդհատության հետևանքով,* m*-ը և* M*-ը կձգտեն* f(x)*-ի, իսկ այդ դեպքում նաև*

$$P'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = f(x).$$

Այսպիսով, մենք հանգում ենք նշանավոր թեորեմայի (որը սովորաբար կոչվում է Նյուտոնի և Լայբնիցի

թեորեմս* $P(x)$ փոփոխական մակերեսի ածանցյալն ըստ x վերջավոր աբսցիսի հավասար է $y=f(x)$ վերջավոր օրդինատին:

Ուրիշ խոսքով. $P(x)$ փոփոխական մակերեսը տվյալ $y=f(x)$ ֆունկցիայի համար ն ա խ ն ա կ ա ն ֆ ու ն կ ց ի ա է ներկայացնում: *Մյուս նախնական ֆունկցիաների շարքում այս աչքի է ընկնում նրանով, որ դառնում է զրո $x=a$ դեպքում։ Ուստի, եթե հայտնի է $f(x)$ ֆունկցիայի որևէ $F(x)$ նախնական ֆունկցիան և, նախորդ n-ի թեորեմայի համաձայն*

$$P(x)=F(x)+C,$$

ապա C հաստատունը հեշտ է որոշել, ընդունելով այստեղ $x=a$՝

$$0=F(a)+C, \text{ այնպես որ } C=-F(a)։$$

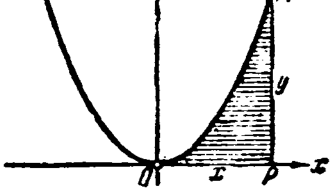
Վերջնականորեն՝

$$P(x)=F(x)-F(a)։$$

Մասնավորապես, ամբողջ ABCD կորագիծ սեղանի մակերեսն ստանալու համար պետք է վերցնել $x=b$՝

$$P=F(b)-F(a)։$$

Օրինակի համար, գտնենք $y=ax^2$ պ ա ր ա բ ո լ ո վ, տվյալ x աբսցիսին համապատասխանող օրդինատով և x-երի առանցքի հատվածով սահմանափակված պատկերի $P(x)$ մակերեսը (գծ. 3)։ Քանի որ պարաբոլն x-երի առանցքը հատում է կոորդինատների սկզբնակետում, ապա x-ի սկզբնական արժեքն այստեղ 0 է։ $f(x)=ax^2$ ֆունկցիայի համար հեշտ է գտնել նախնական ֆունկցիան՝ $F(x)=\frac{ax^3}{3}$։ Այս ֆունկցիան հենց 0 է դառնում $x=0$ դեպքում, այնպես որ՝



Գծ. 4,

$$P(x)=F(x)=\frac{ax^3}{3}=\frac{xy}{3}$$

[համեմատել 32,4]։

* *Իրականում, սակայն, այդ թեորեման, թեև այլ ձևով, հրապարակել է դեռևս Բառոուն (Is. Barrow)՝ Նյուտոնի ուսուցիչը։*

Ինտեգրալները հաշվելու և հարթ պատկերների մակերեսները գտնելու, այսինքն նրանց քառակուսման միջև գոյություն ունեցող կապի պատճառով սովորական է դարձել հենց ինտեգրալների հաշվումը ևս քառակուսում անվանել։

Որպեսզի վերևում ասածն ամբողջովին տարածվի նաև բացասական արժեքներ ընդունող ֆունկցիայի դեպքի վրա, բավական է պայմանավորվել բացասական համարել պատկերի այն մասերի մակերեսները, որոնք դասավորված են x առանցքից ցած։

Այսպիսով, ինչպիսին էլ լինի [a, b] *միջակայքում անընդհատ* f(x) *ֆունկցիան, ընթերցողը միշտ կարող է նրա նախնական ֆունկցիան պատկերացնել որպես փոփոխական մակերես, որը սահմանափակված է տվյալ ֆունկցիայի գրաֆիկով։ Սակայն, հասկանալի է, որ այս երկրաչափական իլյուստրացիան չի կարելի նախնական ֆունկցիայի գոյության ապացույց համարել, քանի որ դեռևս հիմնավորված չէ հենց իրեն՝ մակերեսի գաղափարը։*

Հաջորդ գլխում [293] *մենք կկարողանանք տալ խիստ և ընդսմին զուտ անալիտիկ ապացույցն այն կարևոր փաստի, որ* տվյալ միջակայքում անընդհատ յուրաքանչյուր f(x) ֆունկցիա այդ միջակայքում ունի նախնական ֆունկցիա։ *Այդ պնդումը մենք ընդունում ենք այժմ իսկ։*

Այս գլխում մենք խոսելու ենք միայն անընդհատ ֆունկցիաների նախնական ֆունկցիաների մասին։ Եթե ֆունկցիան կոնկրետորեն է տրված և խզման կետեր ունի, ապա այն կդիտարկենք միայն նրա անընդհատության միջակայքում։ Ուստի, ընդունելով վերևում ձևակերպած պնդումը, մենք ազատվում ենք ամեն անգամ ինտեգրալների գոյության մասին վերապահումներ անելու անհրաժեշտությունից. մեր կողմից դիտարկվող ինտեգրալները բոլորն էլ գոյություն ունեն։

253. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ԱՂՅՈՒՍԱԿ։ *Դիֆերենցիալ հաշվի ամեն մի բանաձև, որը հաստատում է, թե* F(x) *ֆունկցիայի ածանցյալը կլինի* f(x)*-ը, անմիջականորեն բերում է ինտեգրալ հաշվի համապատասխան բանաձևի՝*

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

Մեկ-մեկ հիշելով n° 94-ի բանաձևերը, որոնցով տարրական ֆունկցիաների ածանցյալներն էինք հաշվում, այլև հետագայում արտածված որոշ բանաձևեր (հիպերբոլիկ ֆունկցիաների համար), այժմ կարող ենք կազմել ինտեգրալների հետևյալ աղյուսակը՝

1. $\int 0 \cdot dx = C.$

2. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C.$

3. $\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C.$ $(\mu \neq -1)$

4. $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \log|x| + C.$

5. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

6. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C.$

$\int e^x dx = e^x + C.$

8. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

9. $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

11. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

12. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C.$

13. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C.$

14. $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C.$

15. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C.$

Չորրորդ բանաձևի առթիվ ունենք հետևյալ պարզաբանումը։ Այն կիրառելի է զրո չպարունակող ամեն մի միջակայքում։ Իրոք, եթե այդ միջակայքը զրոյից դեպի աջ է գտնվում, այսինքն՝ $x>0$, *ապա դիֆերենցման՝* $[\log x]' = \frac{1}{x}$ *հայտնի բանաձևից անմիջականորեն հետևում է, որ*

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C.$$

Իսկ եթե միջակայքը գտնվում է զրոյից դեպի ձախ և $x<0$, ապա դիֆերենցելով հեշտ է համոզվել, որ $[\log(-x)]'=\frac{1}{x}$, որտեղից՝

$$\int\frac{dx}{x}=\log(-x)+C.$$

Այս երկու բանաձևերն էլ հենց միավորված են 4 բանաձևի մեջ.

Վերը բերված ինտեգրալների աղյուսակի շրջանակները լայնանում են ինտեգրման կանոնների օգնությամբ.

254. ԻՆՏԵԳՐՄԱՆ ՊԱՐԶԱԳՈՒՅՆ ԿԱՆՈՆՆԵՐԸ. I. Եթե a-ն հաստատուն է ($a\neq 0$), ապա

$$\int a\cdot f(x)dx=a\cdot\int f(x)dx.$$

Իրոք, դիֆերենցելով աջակողմյան արտահայտությունը, կստանանք [104, I]՝

$$d\left[a\cdot\int f(x)dx\right]=a\cdot d\left[\int f(x)dx\right]=a\cdot f(x)dx,$$

այսինքն՝ այդ արտահայտությունը $a\cdot f(x)dx$ դիֆերենցիալ արտահայտության համար նախնական ֆունկցիա է, որը և պահանջվում էր ապացուցել. Այսպիսով, հաստատուն արտադրիչն ինտեգրալի նշանի տակից կարելի է դուրս հանել:

$$\text{II. }\int[f(x)\pm g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)dx.$$

Դիֆերենցենք աջակողմյան արտահայտությունը [104. II]՝

$$d\left[\int f(x)dx\pm\int g(x)dx\right]=d\int f(x)dx\pm d\int g(x)dx=$$
$$=[f(x)\pm g(x)]dx.$$

այսպիսով, այդ արտահայտությունը նախնական ֆունկցիա է հանդիսանում վերջին դիֆերենցիալ արտահայտության համար, որը և պահանջվում էր ապացուցել. Դիֆերենցիալների գումարի (տարբերության) անորոշ ինտեգրալը հավասար է առանձին-առանձին դիֆերենցիալների ինտեգրալների գումարին (տարբերությանը):

Դիտողություն. Այդ երկու բանաձևերի առթիվ նկատենք հետևյալը. Դրանց մեջ մասնակցում են անորոշ ինտեգրալներ, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է կամայական

հաստատուն գումարելի։ Նման տիպի հավասարությունները հասկացվում են այն իմաստով, որ նրանց աջ և ձախ մասերի տարբերությունը հաստատուն է։ Այդ հավասարությունները կարելի է նաև տառացիորեն հասկանալ, սակայն այդ դեպքում նրանց մեջ մասնակցող ինտեգրալներից մեկը դադարում է կամայական նախնական ֆունկցիա լինելուց. նրա մեջ հաստատունը որոշվում է մյուս ինտեգրալների հաստատունների ընտրությունից հետո։ Այս կարևոր դիտողությունը պետք է ի նկատի ունենալ նաև առաջիկայում։

III. *Եթե*

$$\int f(t)dt = F(t) + C,$$

ապա

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\cdot F(ax+b) + C'.$$

Իրոք, տվյալ առնչությունը համարժեք է հետևյալին՝

$$\frac{d}{dt}F(t) = F'(t) = f(t).$$

Բայց այդ դեպքում՝

$$\frac{d}{dx}F(ax+b) = F'(ax+b)\cdot a = a\cdot f(ax+b),$$

այնպես որ

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right] = f(ax+b),$$

այսինքն՝ $\frac{1}{a}F(ax+b)$*-ն իրոք նախնական ֆունկցիա է* $f(ax+b)$ *ֆունկցիայի համար։*

Առանձնապես *հաճախ են պատահում այնպիսի դեպքեր, երբ* $a=1$ *կամ* $b=0$՝

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C_1, \quad \int f(ax)dx = \frac{1}{a}\cdot F(x) + C_2.$$

[*Իրականում* III-ը *հանդիսանում է շատ մասնակի մի դեպք անորոշ ինտեգրալի մեջ փոփոխականի փոխարինման կանոնի, որի մասին կխոսվի ստորև,* **256**.]

255. *ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։* 1) $\int(6x^2-3x+5)dx$։

Օգտվելով II *և* I *կանոններից (և 3-րդ ու 2-րդ բանաձևերից), ունենք՝*

$$\int(6x^2-3x+5)\,dx=\int 6x^2\,dx-\int 3x\,dx+\int 5dx=$$
$$=6\int x^2dx-3\int x\,dx+5\int dx=$$
$$=2x^3-\frac{3}{2}x^2+5x+C\text{։}$$

2) *Հեշտ է ինտեգրել բազմանդամը նաև ընդհանուր տեսքով՝*

$$\int(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n)\,dx=a_0\int x^ndx+$$
$$+a_1\int x^{n-1}\,dx+\dots+a_{n-1}\int x\,dx+a_n\int dx=$$
$$=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\dots+\frac{a_{n-1}}{2}x^2+a_nx+C\text{։}\ (II,\ I;\ 3,\ 2)$$

3) $$\int(2x^2+1)^3dx=\int(8x^6+12x^4+6x^2+1)dx=$$
$$=\frac{8}{7}x^7+\frac{12}{5}x^5+2x^3+x+C\text{։}\quad (\textit{օրինակ 2})$$

4) $$\int(1+\sqrt{x})^4\,dx=\int(1+4\sqrt{x}+6x+4x\sqrt{x}+x^2)dx=$$
$$=\int dx+4\int x^{\frac{1}{2}}\,dx+6\int x\,dx+4\int x^{\frac{3}{2}}\,dx+\int x^2dx=$$
$$=x+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x^2+\frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}x^3+C\text{։}\quad (II,\ I;\ 3,\ 2)$$

5) $$\int\frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}dx=\int\frac{x^3+x^2-3x-3}{3x^2}dx=$$
$$=\int\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{1}{3}\int x\,dx+\frac{1}{3}\int dx-\int\frac{dx}{x}-$$
$$-\int x^{-2}\,dx=\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x-\log x+\frac{1}{x}+C\text{։}\quad (II,\ I;\ 3,\ 2,\ 4)$$

6) $$\int\frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx=\int\frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx=$$
$$=\int x^{\frac{7}{6}}\,dx-\int x^{\frac{1}{6}}\,dx=\frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}}-\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+C\text{։}\quad (II;\ 3)$$

Տանք մի շարք օրինակներ III կանոնի կիրառման վերաբերյալ՝

7) (ա) $\int \frac{dx}{x-a} = \log|x-a| + C$ (III; 4)

(բ) $\int \frac{dx}{(x-a)^{\kappa}} = \int (x-a)^{-\kappa} dx =$
$(\kappa > 1)$

$= \frac{1}{-k+1}(x-a)^{-\kappa+1} + C = -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{\kappa-1}} + C$ (III; 3)

8) (ա) $\int \sin mx\, dx = -\frac{1}{m}\cos mx + C$ (III; 8)
$(m \neq 0)$

(բ) $\int \cos mx\, dx = \frac{1}{m}\sin mx + C$ (III; 9)

(գ) $\int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$ (III; 7)

9) (ա) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$ (III; 6)
$(a > 0)$

(բ) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$ (III; 5)

Օրինակներ բոլոր կանոնների վերաբերյալ՝

10) $\int \frac{(e^x-1)(e^{2x}+1)}{e^x} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1 - e^{-x}) dx =$

$= \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + e^{-x} + C$ (II, III; 7, 2)

11) $\int \frac{ax+b}{cx+d} dx$.

Համարիչը հայտարարի վրա բաժանելով, ընդինտեգրալ արտահայտությունը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\,\frac{1}{cx+d}.$$

Այստեղից որոնելի ինտեգրալը հավասար է՝

$\frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2}\log|cx+d| + C$ (II, 1, III; 2, 4)

12) $\int \frac{2x^2-3x+1}{x+1} dx = \int \left(2x - 5 + \frac{6}{x+1}\right) dx =$

$= x^2 - 5x + 6\log|x+1| + C$

Բարդ հայտարար ունեցող կոտորակի ինտեգրումը հաճախ շատ ավելի հեշտանում է, երբ այն վեր ենք ածում ավելի պարզ հայտարարներ ունեցող կոտորակների գումարի։ Օրինակ,

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right),$$

ուստի [տես օրինակ 7) (ա)]՝

$$13)\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right]=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

Ավելի ընդհանուր տեսք ունեցող

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)}$$

կոտորակի համար կարելի է ցույց տալ, օրինակ, այսպիսի եղանակ. ակներևորեն $(x+a)-(x+b)=a-b$, *ուստի ունենք նույնորեն՝*

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{a-b}\cdot\frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+a}\right).$$

Այսպիսով՝

$$14)\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{a-b}\log\left|\frac{x+b}{x+a}\right|+C.$$

Մասնավորապես՝

$$15)\ (ա)\int\frac{dx}{x^2-5x+6}=\int\frac{dx}{(x-2)(x-3)}=\log\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C,$$

$$(բ)\int\frac{dx}{4x^2+4x-3}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)}=\frac{1}{8}\log\left|\frac{2x-1}{2x+3}\right|+C.$$

$$16)\int\frac{dx}{Ax^2+2Bx+C}\quad (\text{երբ } B^2-AC>0).$$

Հայտարարը վերլուծվում է իրական արտադրիչների այսպես $A(x-\alpha)(x-\beta)$, *որտեղ*

$$\alpha=\frac{-B+\sqrt{B^2-AC}}{A},\quad \beta=\frac{-B-\sqrt{B^2-AC}}{A},$$

և այդ դեպքում, համաձայն 14) օրինակի, համարելով $a=-\beta$, $b=-\alpha$, *կստանանք՝*

$$\int\frac{dx}{Ax^2+Bx+C}=\frac{1}{2\sqrt{B^2-AC}}\log\left|\frac{Ax+B-\sqrt{B^2-AC}}{Ax+B+\sqrt{B^2-AC}}\right|+C'.$$

Որոշ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ, այս կամ այն տարրական ձևափոխումներից հետո, ինտեգրվում են նույնպես պարզագույն եղանակների օգնությամբ։

Ակներև է, օրինակ, որ

$$\cos^2 mx = \frac{1+\cos 2mx}{2}, \quad \sin^2 mx = \frac{1-\cos 2mx}{2},$$

որտեղից՝

$$17)\ (ա)\int \cos^2 mx\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4m}\sin 2mx + C,$$

$$(m \neq 0)$$

$$(բ)\int \sin^2 mx\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4m}\sin 2mx + C.$$

Ավելի ընդհանուր ձևով ունենք՝

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x].$$

Համարելով $m \pm n \neq 0$, կստանանք հետևյալ ինտեգրալները՝

$$18)\ (ա)\int \sin mx \cos nx\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2(m+n)}\cos(m+n)x - \frac{1}{2(m-n)}\cos(m-n)x + C,$$

$$(բ)\int \cos mx \cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)x + \frac{1}{2(m-n)}\sin(m-n)x + C,$$

$$(գ)\int \sin mx \sin nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2(m-n)}\sin(m-n)x - \frac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)x + C.$$

Վերջում դիտարկենք մի փոքր ավելի բարդ օրինակ.

19) (ա) $\int \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$.

Քանի որ

$$\sin 2nx = \sum_{k=1}^{n} [\sin 2kx - \sin(2k-2)x] = 2\sin x \sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x,$$

ապա ընդինտեգրալ արտահայտությունը բերվում է $2\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x$ *տեսքի, և որոնելի ինտեգրալը հավասար կլինի՝*

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} + C.$$

Համանման ձևով՝

$$\int \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = x + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin 2kx}{2k} + C.$$

256. ԻՆՏԵԳՐՈՒՄ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՓՈԽԱՐԻՆՄԱՆ ՄԻՋՈՑՈՎ. *Տարրերենք ֆունկցիայի ինտեգրման ամենազորեղ եղանակներից մեկը՝ փոփոխականի փոխարինման կամ տեղադրման մեթոդը։ Այդ մեթոդի հիմքում դրված է հետևյալ պարզ դիտողությունը՝*

Եթե հայտնի է, որ

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

ապա այդ դեպքում

$$\int g(\omega(x))\omega'(x)dx = G(\omega(x)) + C.$$

[Ենթադրվում է, որ այստեղ մասնակցող բոլոր՝ $g(t)$, $\omega(x)$, $\omega'(x)$ *ֆունկցիաներն անընդհատ են։]*

Այդ ուղղակի բխում է բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցման կանոնից [97]՝

$$\frac{d}{dx}G(\omega(x))=G'\omega(x)\omega'(x)=g(\omega(x))\omega'(x),$$

եթե հաշվի առնենք, որ $G'(t)=g(t)$։ *Նույն բանը կարելի է արտահայտել նաև այլ ձևով, ասելով, որ*

$$dG(t)=g(t)dt$$

առնչությունն իր ուժը պահպանում է նաև այն դեպքում, երբ t *անկախ փոփոխականը փոխարինվում է* $\omega(x)$ *ֆունկցիայով* [105]։

Դիցուք պահանջվում է հաշվել

$$\int f(x)dx$$

ինտեգրալը։ Շատ դեպքերում հաջողվում է որպես նոր փոփոխական ընտրել x*-ի այնպիսի* $t=\omega(x)$ *ֆունկցիա, որպեսզի ենթինտեգրալ արտահայտությունը ներկայանա*

$$f(x)dx=g(\omega(x))\omega'(x)dx, \qquad (1)$$

տեսքով, որտեղ $g(t)$*-ն ինտեգրման համար ավելի հարմար ֆունկցիա է, քան* $f(x)$*-ը։ Այդ դեպքում, վերն ասածի համաձայն, բավական է գտնել*

$$\int g(t)dt=G(t)+C$$

ինտեգրալը, որպեսզի դրանից ստացվի որոնելի ինտեգրալը $t=\omega(x)$*-ի տեղադրման միջոցով։ Սովորաբար պարզապես գրում են*

$$\int f(x)\,dx=\int g(t)dt, \qquad (2)$$

ենթադրելով արդեն, որ աջ կողմում ինտեգրալով ներկայացված t*-ի ֆունկցիայի մեջ կատարված է նշված փոխարինումը։*

Գտնենք, օրինակ, հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx.$$

Քանի որ $d \sin x = \cos x \, dx$, *ապա ընդունելով* $t = \sin x$, *ընդինտեգրալ արտահայտությունը ձևափոխենք և բերենք հետևյալ տեսքին՝*

$$\sin^3 x \cos x \, dx = \sin^3 x \, d \sin x = t^3 dt.$$

Վերջին արտահայտության ինտեգրալը հեշտությամբ կարելի է հաշվել՝

$$\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C.$$

Մնում է միայն վերադառնալ x *փոփոխականին,* t*-ի փոխարեն տեղադրելով* $\sin x$*՝*

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Ընթերցողի ուշադրությունը հրավիրում ենք այն բանի վրա, որ ընդինտեգրալ արտահայտությունը պարզեցնող $t = \omega(x)$ *տեղադրումն ընդունելու ժամանակ պետք է հիշել, որ նրա կազմի մեջ պետք է գտնվի* $\omega'(x)dx$ *արտադրիչը, որը տալիս է նոր փոփոխականի* dt *դիֆերենցիալը [տես (1)]։ Նախորդ օրինակում* $t = \sin x$ *տեղադրման հաջողությունը պայմանավորվում էր* $\cos x \, dx = dt$ *արտադրիչի առկայությամբ։ Այդ կապակցությամբ ուսանելի է*

$$\int \sin^3 x \, dx$$

օրինակը. այստեղ $t = \sin x$ *տեղադրումը պիտանի չէր լինի հիշյալ արտադրիչի բացակայության պատճառով։ Եթե փորձենք ընդինտեգրալ արտահայտությունից առանձնացնել որպես նոր փոփոխականի դիֆերենցիալ՝* $\sin x \, dx$ *արտադրիչը, կամ ավելի լավ է՝* $-\sin x \, dx$ *արտադրիչը, ապա դա կբերի* $t = \cos x$ *տեղադրման. քանի որ մնացած*

$$-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$$

արտահայտությունն այդ տեղադրումով պարզացվում է. ապա տեղադրումն արդարացված է։ Ունենք

$$\int \sin^3 x\,dx = \int (t^2-1)dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

Տեղադրում կատարելու որոշ հմտություն ձեռք բերելուց հետո t փոփոխականը կարելի է նույնիսկ չգրել։ Օրինակ,

$$\int \sin^2 x \cos x\,dx = \int \sin^2 x\,d\sin x$$

ինտեգրալի մեջ $\sin x$-ը մտքով դիտում են որպես նոր փոփոխական և միանգամից անցնում են արդյունքին։ Համանման ձևով

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\frac{x}{a}}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C.$$

$t=\frac{x}{a}$ տեղադրումն այստեղ հասկացվում է։

Այժմ ընթերցողը տեսնում է, որ n° 254-ի III կանոնն ըստ էության հանգում է $t=ax+b$ գծային տեղադրման՝

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}\int f(t)dt.$$

Երբեմն տեղադրումը կիրառվում է նշվածից տարբեր ձևով։ Այն է՝ $f(x)dx$ ենթինտեգրալ արտահայտության մեջ x-ի փոխարեն անմիջականորեն տեղադրում են t նոր փոփոխականի $x=\varphi(t)$ ֆունկցիա և արդյունքում ստանում են

$$f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = g(t)dt$$

արտահայտությունը։ Ակներև է, որ եթե այս արտահայտության մեջ տեղադրենք $t=\omega(x)$, որտեղ $\omega(x)$-ը $\varphi(t)$-ի համար հակադարձ ֆունկցիա է, ապա կվերադառնանք $f(x)dx$ սկզբնական

ընդինտեգրալ արտահայտությանը։ Ուստի, ինչպես և առաջ․ տեղի ունի (2) հավասարությունը, որտեղ աջ կողմում, ինտեգրալը հաշվելուց հետո, պետք է ընդունել $t = \omega(x)$։

Օրինակի համար գտնենք հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}.$$

Եթե ընդունենք $x = t^6$ (որպեսզի բոլոր արմատները «հանվեն»), կստանանք $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $dx = 6t^5 dt$ և

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})} = 6\int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = 6\left\{\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2}\right\} = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C.$$

Այժմ մնում է վերադառնալ x փոփոխականին՝ $t = \sqrt[6]{x}$ բանաձևի օգնությամբ, և վերջնականորեն կստանանք

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})} = 6(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x}) + C.$$

Ավելի հետաքրքիր է հետևյալ օրինակը՝

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Արմատի տակ քառակուսիների տարբերությունը (որոնցից առաջինը հաստատուն է) մեզ թելադրում է $x = a \sin t$* եռանկյունաչափական տեղադրումը։ Ունենք՝

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t, \qquad dx = a \cos t\, dt$$

և

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \int \cos^2 t\, dt.$$

Բայց մենք արդեն գիտենք [255 (17) (ա)], որ

$$a^2 \int \cos^2 t\, dt = a^2 \left[\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t\right] + C.$$

---

* Տեղին է նշել, որ x-ը համարում ենք $-a$ և a սահմաններում փոփոխվող, իսկ t-ն՝ $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$-ի և $\frac{\pi}{2}$-ի միջև։ Ուստի $t = \arcsin \frac{x}{a}$։

x-ին անցնելու համար տեղադրում ենք $t=\arcsin\frac{x}{2}$. Երկրորդ գումարելիի ձևափոխումը հեշտանում է նրանով, որ

$$\frac{a^2}{4}\sin 2t=\frac{1}{2}a\sin t\cdot a\cos t=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}.$$

Վերջնականապես՝

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

Ձեռնտու տեղադրումներ գտնելու հմտությունը վարժությունների օգնությամբ է ձեռք բերվում. Թեև այդ մասին հնարավոր չէ ընդհանուր ցուցումներ տալ, բայց, այդ որոնումը հեշտացնող առանձին մասնավոր դիտողություններ ընթերցողը կգտնի հետևյալ n°-ում. Կանոնական դեպքերում տեղադրումները պարզապես կնշվեն դասընթացի մեջ։

257. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) (ա) $\int e^{x^2}x\,dx$, (բ) $\int\frac{x\,dx}{1+x^4}$, (գ) $\int\frac{x^2}{\cos^2 x^3}dx$։

(ա) Լուծում։ Ընդունելով $t=x^2$, ունենք $dt=2x\,dx$, այնպես որ

$$\int e^{x^2}x\,dx=\frac{1}{2}\int e^t\,dt=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$$

(բ) Ցուցում։ Միևնույն տեղադրումն է։ Պատասխան՝ $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+C$։ Երկու դեպքում էլ ինտեգրալներն ունեին

$$\int g(x^2)\,x\,dx=\frac{1}{2}\int g(x^2)\,dx^2,$$

տեսքը, որտեղ g-ն ինտեգրման համար հարմար ֆունկցիա է. այդպիսի ինտեգրալների համար բավական է $t=x^2$ տեղադրումը։ Համանման ձևով

$$\int g(x^3)x^2\,dx=\frac{1}{3}\int g(x^3)\,dx^3$$

տեսքի ինտեգրալների համար վերցնում են $t=x^3$ տեղադրումը և այլն։ Վերջին տիպին հարմար է գալիս երրորդ ինտեգրալը։

(գ) Պատասխան՝ $\frac{1}{3}\operatorname{tg}x^3+C$։

$$2)\ \int (\alpha x^2+\beta)^{\mu}\, x\, dx\ \ (\mu \neq -1).$$

Լուծում։ Այստեղ կարելի է ընդունել $t=x^2$, բայց ավելի լավ է միանգամից վերցնել $u=\alpha x^2+\beta$, որովհետև $x dx$ արտադրիչը միայն թվային գործակցով է տարբերվում $du=2\alpha x dx$-ից։ Այսպիսով, ունենք՝

$$\int (\alpha x^2+\beta)^{\mu}\, x\, dx = \frac{1}{2\alpha}\int u^{\mu} du = \frac{1}{2\alpha(\mu+1)} u^{\mu+1} + C =$$

$$= \frac{1}{2\alpha(\mu+1)} (\alpha x^2+\beta)^{\mu+1} + C.$$

$$3)\ (ա)\ \int \frac{\log x}{x} dx,\ (բ)\ \int \frac{dx}{x \log x},\ (գ)\ \int \frac{dx}{x \log^2 x}.$$

Ցուցում։ Այս բոլոր ինտեգրալներն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\int g(\log x)\frac{dx}{x} = \int g(\log x)\, d\log x$$

և դրանց համար վերցնում են $t=\log x$ տեղադրումը։

Պատասխան։ $(ա)\ \frac{1}{2}\log^2 x + C;\ (բ)\ \log\log x + C;\ (գ)\ -\frac{1}{\log x} + C.$

$$4)\ \int g(\sin x)\cos x\, dx,\ \int g(\cos x)\sin x\, dx,\ \int g(\operatorname{tg} x)\frac{dx}{\cos^2 x}$$

տեսքի ինտեգրալները վերցվում են (ինտեգրվում են), համապատասխանաբար, հետևյալ տեղադրումներով՝

$$t=\sin x,\ u=\cos x,\ v=\operatorname{tg} x.$$

Օրինակի համար

$$(ա)\ \int \frac{\cos x\, dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}\sin x + C;$$

$$(բ)\ \int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{du}{u} =$$

$$= -\log|u| + C = -\log|\cos x| + C;$$

$$(գ)\ \int \frac{dx}{A^2\sin^2 x + B^2\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{A^2\operatorname{tg}^2 x + B^2} = \int \frac{dv}{A^2v^2+B^2} =$$

$$= \frac{1}{AB}\operatorname{arctg}\frac{Av}{B} + C = \frac{1}{AB}\operatorname{arctg}\left(\frac{A}{B}\operatorname{tg} x\right) + C.$$

5) (ա) $\int \frac{2x\,dx}{x^2+1}$, (բ) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$, (գ) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$,

(դ) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$.

Լուծում։ (ա) *Եթե ընդունենք* $t=x^2+1$, *ապա* $2x dx$ *համարիչը ճշտորեն տալիս է* dt. *ինտեգրալը բերվում է հետևյալին՝*

$$\int \frac{dt}{t}=\log|t|+C=\log(x^2+1)+C.$$

Նկատենք, որ միշտ, երբ առաջարկված ինտեգրալն ունի

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int \frac{df(x)}{f(x)}$$

տեսքը, այսինքն՝ ինտեգրանդային արտահայտության մեջ համարիչը հայտարարի դիֆերենցիալն է ներկայացնում, $t=f(x)$ *տեղադրումը միանգամից նպատակին է հասցնում՝*

$$\int \frac{dt}{t}=\log|t|+C=\log|f(x)|+C.$$

Այդպես վարվելով կունենանք

(բ) $\int \operatorname{ctg} x\,dx=\int \frac{d\sin x}{\sin x}=\log|\sin x|+C$ [*համեմատել 4) (բ)*].

(գ) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{d(e^{2x}+1)}{e^{2x}+1}=\frac{1}{2}\log(e^{2x}+1)+C;$

(դ) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}=\int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x}=\log|\operatorname{tg} x|+C.$

6) *Վերջին ինտեգրալից հեշտությամբ ստացվում են երկու օգտակար ինտեգրալներ՝*

(ա) $\int \frac{dx}{\sin x}=\int \frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{g}\right|+C;$

(բ) $\int \frac{dx}{\cos x}=\int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\log\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$

7) (ա) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx=\int \sqrt{\operatorname{arctg} x}\, d\operatorname{arctg} x=\frac{2}{3}(\operatorname{arctg} x)^{\frac{3}{2}}+C;$

(բ) $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{de^x}{(e^x)^2+1} = \operatorname{arctg} e^x + C.$

(գ) $\int \operatorname{tg}\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} = -\int \operatorname{tg}\frac{1}{x}\, d\,\frac{1}{x} = \log\left|\cos\frac{1}{x}\right| + C$ [տես 4) (բ)]։

Այժմ տանք a^2-x^2, x^2+a^2 և x^2-a^2 տեսքի երկանդամներ պարունակող արտահայտությունների ինտեգրման մի քանի օրինակներ։ Այսպիսի դեպքերում սովորաբար ձեռնտու է լինում x-ը փոխարինել t նոր փոփոխականի եռանկյունաչափական կամ հիպերբոլիկ ֆունկցիայով, օգտագործելով հետևյալ առնչությունները՝

$$\sin^2 t+\cos^2 t=1, \quad 1+\operatorname{tg}^2 t=\sec^2 t=\frac{1}{\cos^2 t},$$

$$\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t=1, \quad 1-\operatorname{th}^2 t=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}.$$

8) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$.

Տեղադրում՝ $x=a\operatorname{tg} t$*, $dx=\frac{a\,dt}{\cos^2 t}$, $x^2+a^2=\frac{a^2}{\cos^2 t}$, այնպես որ

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^3}\int \cos^2 t\,dt=\frac{1}{2a^3}(t+\sin t\cos t)+C \quad \text{[տես 255, 17) (ա)]}$$

Այժմ անցնենք x փոփոխականին, դնելով $t=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ և $\sin t$-ն ու $\cos t$-ն արտահայտելով $\operatorname{tg} t=\frac{x}{a}$-ով։ Վերջնականապես

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^2}\,\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$.

Այստեղ ավելի հարմար է կիրառել հիպերբոլական տեղադրում։ Կանգ առնելով, օրինակ, առաջին նշանի վրա, ընդունենք՝ $x=a\operatorname{ch} t$ (երբ x և $t>0$),

* Ընդ որում բավական է ենթադրել, որ t-ն փոփոխվում է $-\frac{\pi}{2}$-ից և $\frac{\pi}{2}$-ի միջև։

$dx=a\,sh\,t\,dt$, $\sqrt{x^2-a^2}=a\,sh\,t$: *Ինտեգրալը պարզապես կբերվի՝* $\int dt = t + C$: *Այժմ* x*-ին անցնելու համար կիրառենք հիպերբոլիկ կոսինուսի հակադարձ ֆունկցիայի արտահայտությունը* [49, *3*)]՝

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+C=$$
$$=\log(x+\sqrt{x^2-a^2})+C',$$

ընդ որում C' *հաստատունի մեջ մենք մտցնում ենք նաև* $-\log a$ *գումարելին:*

$$10\ (ա)\ \int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}},\quad (բ)\ \int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{3/2}},\quad (գ)\ \int\frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}:$$

Տվյալ դեպքում հավասար հեշտությամբ նպատակին են հասցնում թե եռանկյունաչափական, թե հիպերբոլիկ տեղադրումները: Օրինակի համար, երկրորդ ինտեգրալի մեջ վերցնենք $x=a\sec t$, $dx=\frac{a\sin t\,dt}{\cos^2 t}=\frac{a\,tg\,t\,dt}{\cos t}$, *այդ դեպքում* $x^2-a^2=a^2 tg^2 t$ *և*

$$\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{3/2}}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t}=-\frac{1}{a^2}\frac{1}{\sin t}+C=-\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+C:$$

$$11)\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}:$$

$x=a\sin t$, $dx=a\cos t\,dt$ *տեղադրումն այս ինտեգրալը բերում է այսպիսի տեսքի՝*

$$\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sin t}=\frac{1}{a}\log\left|tg\frac{t}{2}\right|+C \qquad [տես\ 6)\ (ա)]$$

Բայց

$$tg\frac{t}{2}=\frac{1-\cos t}{\sin t}=\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x},$$

այնպես որ, վերջնականապես

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\log\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C:$$

Վերջում դիտարկենք փոփոխականի փոխարինման միջոցով ինտեգրման երկու օրինակ ևս, որտեղ տեղադրումն այնքան էլ բնական չէ, ինչպես նախորդ դեպքերում, սակայն արագ նպատակին է հասցնում:

$$12)\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}\ (\alpha\neq 0):$$

Ընդունենք $\sqrt{x^2+\alpha}=t-x$ և t-ն ընդունենք իբրև նոր փոփոխական։ Բառակուսի բարձրացնելիս կարելի է x^2-ն երկու մասերից դեն նետել և արդյունքում կստացվի՝

$$x=\frac{t^2-\alpha}{2t},$$

այնպես որ

$$\sqrt{x^2+\alpha}=t-\frac{t^2-\alpha}{2t}=\frac{t^2+\alpha}{2t}, \qquad dx=\frac{t^2+\alpha}{2t^2}dt.$$

Վերջնականապես

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\int\frac{dt}{t}=\log|t|+C=\log|x+\sqrt{x^2+\alpha}|+C.$$

[Համեմատել՝ 9)]

13) $$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}\quad(\alpha<x<\beta).$$

Ընդունենք՝ $x=\alpha\cos^2\varphi+\beta\sin^2\varphi\ (0<\varphi<\frac{\pi}{2})$, որտեղ φ-ն նոր փոփոխական է. այդ դեպքում

$$x-\alpha=(\beta-\alpha)\sin^2\varphi,\quad \beta-x=(\beta-\alpha)\cos^2\varphi.$$

$$dx=2(\beta-\alpha)\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi.$$

Այսպիսով՝

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}=2\int d\varphi=2\varphi+C=2\arcsin\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}+C.$$

258. ՄԱՍԵՐՈՎ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄ. Դիցուք $u=f(x)$-ը և $v=g(x)$-ը x-ի երկու ֆունկցիաներն են, որոնք ունեն $u'=f'(x)$ և $v'=g'(x)$ անընդհատ ածանցյալներ. Այդ դեպքում, արտադրյալի դիֆերենցման կանոնի համաձայն, $d(uv)=udv+vdu$ կամ $udv=d(uv)-vdu$. Սակայն $d(uv)$ արտահայտության համար, ակներևորեն, նախնական ֆունկցիա կլինի uv-ն. ուստի տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du. \tag{3}$$

Այս բանաձևն արտահայտում է *մասերով* ինտե-

գրման կանոնը, որը $u\,dv = uv'\,dx$ *արտահայտության ինտեգրումը բերում է* $v\,du = vu'\,dx$ *արտահայտության ինտեգրմանը։*

Դիցուք, օրինակի համար, պահանջվում է գտնել $\int x \cos x\, dx$ *ինտեգրալը։ Ընդունենք՝*

$$u = x,\quad dv = \cos x\, dx,\quad \text{այնպես որ՝}\quad du = dx,\quad v = \sin x^{*},$$

և, ըստ (3) բանաձևի,

$$\int x \cos x\, dx = \int x\, d \sin x = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C \tag{4}$$

Այսպիսով, մասերով ինտեգրումը հնարավորություն տվեց $x \cos x$ *բարդ ընդինտեգրալ ֆունկցիան փոխարինել* $\sin x$ *պարզ ֆունկցիայով։ Զուգընթացաբար հարկ եղավ* v*-ն ստանալու համար ինտեգրել* $\cos x\, dx$ *արտահայտությունը. այստեղից էլ առաջ է եկել մասերով (կամ մաս առ մաս) ինտեգրում տերմինը։*

Առաջարկված ինտեգրալը հաշվելու համար (3) բանաձևը կիրառելիս հարկ է լինում ընդինտեգրալ արտահայտությունը տրոհել երկու արտադրիչների՝ u *և* $dv = v'\,dx$ *որոնցից առաջինը դիֆերենցվում է, իսկ երկրորդն ինտեգրվում է աջ մասում ինտեգրալին անցնելու ժամանակ։ Պետք է աշխատել, որ* dv *դիֆերենցիալի ինտեգրումը դժվարություններ չներկայացնի և որպեսզի* u*-ի փոխարինումը* du*-ով և* dv*-ի փոխարինումը* v*-ով միասին վերցրած տանի դեպի ընդինտեգրալ արտահայտության պարզացում։ Այսպես, քննարկված օրինակի մեջ ակնհայտորեն անձեռնտու կլիներ վերցնել, ասենք,* $x\, dx$*-ը* dv*-ի փոխարեն, իսկ* $\cos x$*-ը* u*-ի փոխարեն։*

Որոշ հմտության դեպքում կարիք չկա u *և* v *նշանակումները մտցնել, և կարելի է միանգամից կիրառել բանաձևը [համեմատել (4)]։*

---

* *Քանի որ մեր նպատակների համար բավական է* $\cos x\, dx$ *արտահայտությունը գոնե մեկ ձևով* dv *տեսքով ներկայացնել, ապա կարիք չկա* v*-ի համար կամայական հաստատուն պարունակող ամենաընդհանուր արտահայտությունը։ Այս դիտողությունը պետք է նկատի ունենալ հետագայում ևս։*

Մասերով ինտեգրման կանոնը կիրառման ավելի սահմանափակ բնագավառ ունի, քան փոփոխականի փոխարինումը։ Բայց կան ինտեգրման ամբողջ դասեր, օրինակ՝

$$\int x^k \log^m x\,dx, \quad \int x^k \sin bx\,dx, \quad \int x^k \cos bx\,dx, \quad \int x^k e^{ax}dx \text{ և այլն,}$$

որոնք հենց մասերով ինտեգրման օգնությամբ են հաշվվում։

Մասերով ինտեգրման կանոնի կրկնաբար կիրառումը բերում է այսպես կոչված ***մասերով ինտեգրման ընդհանրացրած բանաձևին։***

Ենթադրենք, թե u *և* v *ֆունկցիաները դիտարկվող միջակայքում ունեն բոլոր կարգերի անընդհատ ածանցյալներ, մինչև* $(n+1)$*-երորդը ներառյալ* $u', v', u'', v'', \ldots, u^{(n)}, v^{(n)}, u^{(n+1)}, v^{(n+1)}$.

(3) բանաձևի մեջ փոխարինելով v*-ն* $v^{(n)}$*-ով կստանանք*

$$\int uv^{(n+1)}dx = \int u\,dv^{(n)} = uv^{(n)} - \int v^{(n)}du = uv^{(n)} - \int u'v^{(n)}dx.$$

Համանման ձևով

$$\int u'v^{(n)}dx = u'v^{(n-1)} - \int u''v^{(n-1)}dx,$$

$$\int u''v^{(n-1)}dx = u''v^{(n-2)} - \int u'''v^{(n-2)}dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int u^{(n)}v'dx = u^{(n)}v - \int u^{(n+1)}v\,dx.$$

Այս հավասարությունները հերթով բազմապատկելով $+1$*-ով կամ* -1*-ով և իրար գումարելով, աջ ու ձախ մասերում միատեսակ ինտեգրալները ոչնչացնելուց հետո, կստանանք որոնելի բանաձևը՝*

$$\int uv^{(n+1)}dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \ldots +$$
$$+ (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\,dx. \qquad (5)$$

Այս բանաձևից առանձնապես ձեռնտու է օգտվել, երբ ընդինտեգրալ ֆունկցիայի արտադրիչներից մեկը ամբողջ բազմանդամ է։ Եթե u*-ն* n*-րդ աստիճանի բազմանդամ է ներկայացնում, ապա* $u^{(n+1)}$*-ը նույնաբար հավասար է զրոյի, և ձախ մասի ինտեգրալի համար ստացվում է վերջնական արտահայտություն։*

Անցնենք օրինակների։

259. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) $\int x^3 \log x\,dx$։

log x*-ի դիֆերենցումը բերում է պարզացման, ուստի ընդունում ենք՝*

$$u=\log x,\ dv=x^3\,dx,\quad \text{այնպես որ}\quad du=\frac{dx}{x},\quad v=\frac{1}{4}x^4$$

և

$$\int x^3 \log x\,dx=\frac{1}{4}x^4 \log x-\frac{1}{4}\int x^3 dx=\frac{1}{4}x^4 \log x-\frac{1}{16}x^4+C.$$

2) *(ա)* $\int \log x\,dx$, *(բ)* $\int \operatorname{arctg} x\,dx$, *(գ)* $\int \arcsin x\,dx$։

Բոլոր դեպքերում ընդունելով $dx=dv$, *կստանանք*

$$(ա)\int \log x\,dx=x\log x-\int x\,d\log x=x\log x-\int dx=$$
$$=x(\log x-1)+C;$$

$$(բ)\int \operatorname{arctg} x\,dx=x\operatorname{arctg} x-\int x\,d\operatorname{arctg} x=x\operatorname{arctg} x-$$
$$-\int\frac{x}{x^2+1}dx=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\log(x^2+1)+C\quad [\text{տես } 257,\ 5)\ (ա)].$$

$$(գ)\int \arcsin x\,dx=x\arcsin x-\int x\,d\arcsin x=x\arcsin x-$$
$$-\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C\quad [\text{տես } 257,\ 2)]։$$

3) $\int x^2 \sin x\,dx$։

Ունենք

$$\int x^2 d(-\cos x)=-x^2\cos x-\int(-\cos x)dx^2=$$
$$=-x^2\cos x+2\int x\cos x\,dx:$$

Այսպիսով, որոնելի ինտեգրալը բերինք մեկ արդեն ծանոթ ինտեգրալի [258 *(4)*]. *տեղադրելով նրա արժեքը, կստանանք*

$$\int x^2 \sin x\,dx = -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C.$$

Մասերով ինտեգրման կանոնն այստեղ հարկ եղավ կիրառել ընդամենը երկու անգամ:

Նույնպես էլ, այդ կանոնի կրկնակի կիրառմամբ, հաշվվում են հետևյալ ինտեգրալները՝

$$\int P(x)e^{ax}dx, \quad \int P(x)\sin bx\,dx, \quad \int P(x)\cos bx\,dx,$$

որտեղ $P(x)$*-ը* x*-ի նկատմամբ ամբողջ բազմանդամ է:*

4) Եթե օգտվելու լինենք մասերով ինտեգրման ընդհանրացրած բանաձևից, ապա այդ տեսքն ունեցող ինտեգրալների համար միանգամից կարելի է ստանալ ընդհանուր արտահայտություններ:

Ենթադրելով, որ $v^{(n+1)} = e^{ax}$, *կունենանք*

$$v^{(n)} = \frac{e^{ax}}{a}, \quad v^{(n-1)} = \frac{e^{ax}}{a^2}, \quad v^{(n-2)} = \frac{e^{ax}}{a^3} \text{ և այլն:}$$

Ուստի $P(x)$*-ը* n*-րդ աստիճանի բազմանդամ համարելով, ըստ (5) բանաձևի կստանանք*

$$\int P(x)e^{ax}dx = e^{ax}\left[\frac{P}{a} - \frac{P'}{a^2} + \frac{P'}{a^3} - \dots\right] + C:$$

Նման ձևով, եթե վերցնենք $v^{(n+1)} = \sin bx$, *ապա*

$$v^{(n)} = -\frac{\cos bx}{b}, \quad v^{(n-1)} = -\frac{\sin bx}{b^2}, \quad v^{(n-2)} = \frac{\cos bx}{b^3} \text{ և այլն:}$$

Այստեղից ստացվում է հետևյալ բանաձևը՝

$$\int P(x)\sin bx\,dx =$$
$$= \sin bx \cdot \left[\frac{P'}{b^2} - \frac{P''}{b^4} + \dots\right] - \cos bx \cdot \left[\frac{P}{b} - \frac{P'}{b^3} + \dots\right] + C.$$

Նման ձևով ապացուցվում է նաև հետևյալ բանաձևը՝

$$\int P(x)\cos bx\,dx =$$
$$= \sin bx \cdot \left[\frac{P}{b} - \frac{P'}{b^3} + \dots\right] + \cos bx \cdot \left[\frac{P''}{b^2} - \frac{P'''}{b^4} + \dots\right] + C:$$

5) $\int x^3 \log^2 x\,dx.$ *Ունենք՝*

$$\int \log^2 x\,d\frac{x^4}{4} = \frac{1}{4}x^4\log^2 x - \frac{1}{4}\int x^4 d\log^2 x = \frac{1}{4}x^4\log^2 x - \frac{1}{2}\int x^3 \log x\,dx,$$

և այսպիսով հարցը հանգեցրինք 1) ինտեգրալին։ Վերջնականապես ունենք՝

$$\int x^3 \log^2 x\,dx = \frac{1}{4}x^4 \log^2 x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 \log x - \frac{1}{16}x^4\right) + C =$$
$$= \frac{1}{4}x^4\left(\log^2 x - \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{8}\right) + C։$$

Այսպես, հաջորդաբար, հաշվվում է հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int x^k \log^m x\,dx,$$

որտեղ k*-ն ցանկացած իրական թիվ է* ($k \neq -1$), *իսկ* $m = 1, 2, 3, \ldots$ *Եթե այս ինտեգրալի նկատմամբ կիրառենք մասերով ինտեգրման բանաձևը, ընդունելով* $u = \log^m x$, *կստանանք հետևյալ ռ ե կ ու ր ե ն տ (ա ն դ ր ա դ ա ր ձ) բ ա ն ա ձ և ը՝*

$$\int x^k \log^m x\,dx = \frac{1}{k+1}x^{k+1}\log^m x - \frac{m}{k+1}\int x^k \log^{m-1} x\,dx,$$

որի համաձայն դիտարկվող ինտեգրալի հաշվումը հանգում է նման տիպի ինտեգրալ հաշվելուն, սակայն $\log x$*-ի մոտ մեկ միավորով պակաս ցուցիչով։*

Ի միջի այլոց $t = \log x$ *տեղադրումը դիտարկվող ինտեգրալը բերում է* $\int t^m e^{(k+1)t}\,dt$ *տեսքի ինտեգրալի, որն արդեն ուսումնասիրել ենք 3)-ում ու 4)-ում։*

6) Հետաքրքիր օրինակ են ներկայացնում

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx, \quad \int e^{ax}\sin bx\,dx$$

ինտեգրալները։ Եթե դրանց նկատմամբ կատարենք մասերով ինտեգրում (ասենք, թե երկու դեպքում էլ վերցնելով $dv = e^{ax}dx$, $v = \frac{1}{a}e^{ax}$)*, ապա կստանանք*

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx,$$
$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx։$$

*Այսպիսով, այս ինտեգրալներից յուրաքանչյուրն արտահայտվեց մյուսով**։

---

* *Եթե ինտեգրալ ասելով հասկանանք ո ր ո շ ա կ ի նախնական ֆունկցիա [համեմատել n° 254-ի դիտողության հետ], ապա, ցանկանալով երկրորդ բանաձևում ունենալ նույն ֆունկցիաները, ինչ որ առաջինում, մենք պետք է, խստորեն ասած, աջ կողմում մի որոշ հաստատուն էլ միացնեինք։ Ի հարկե նա կկլանվեր* C *և* C′ *հաստատունների կողմից վերջնական արտահայտությունների մեջ։*

Սակայն եթե առաջին բանաձևի մեջ տեղադրենք երկրորդ ինտեգրալի արտահայտությունը երկրորդ բանաձևից, ապա կստանանք հավասարում առաջին ինտեգրալի նկատմամբ, որից և նա կորոշվի՝

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C;$$

Նման ձևով գտնում ենք և երկրորդ ինտեգրալը

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C';$$

7) Որպես մասերով ինտեգրման մեթոդի կիրառման վերջին օրինակ արտածենք ռեկուրենտ բանաձև

$$J_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots)՝$$

ինտեգրալը հաշվելու համար։

Դրա նկատմամբ կիրառենք (3) բանաձևը, ընդունելով

$$u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n},\ dv=dx,\ \text{ուրեմն և}\ du=-\frac{2nx\cdot dx}{(x^2+a^2)^{n+1}},\ v=x;$$

Մենք կստանանք

$$J_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx;$$

վերջին ինտեգրալը կարելի է ձևափոխել հետևյալ կերպ՝

$$\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx=\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx=$$

$$=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}-a^2\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}=J_n-a^2J_{n+1};$$

Այս արտահայտությունը նախորդ հավասարության մեջ տեղադրելով, կստանանք հետևյալ առնչությունը՝

$$J_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nJ_n-2na^2J_{n+1},$$

որտեղից

$$J_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}\,\frac{1}{a^2}J_n;$$

Ստացված բանաձևը J_{n+1} ինտեգրալի հաշվումը բերում է J_n ինտեգրալի հաշվելուն, որի ինդեքսը մեկով պակաս է։ Գիտենալով

$$J_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}$$

ինտեգրալը [255, 9) (բ)․ վերցնում ենք նրա արժեքներից մեկը], այս բանաձևով, n = 1 դեպքում, գտնում ենք

$$J_2 = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}$$

[որը մենք վերևում ստացանք այլ ճանապարհով, տես 257, 8)]։ Ընդունելով (6) բանաձևի մեջ n=2, այնուհետև կստանանք

$$J_3 = \frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2}J_2 =$$

$$= \frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$$

և այլն։ Այսպիսով J_n ինտեգրալը կարելի է հաշվել ցանկացած բնական n ցուցիչի համար։

§ 2. ՌԱՑԻՈՆԱԼ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄԸ

260. ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՏԵՍՔՈՎ ԻՆՏԵԳՐՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ԴՐՈՒՄԸ։ *Մենք ծանոթացանք անորոշ ինտեգրալներ հաշվելու տարրական եղանակների հետ։ Այդ եղանակները ճշտորեն չեն նախորոշում այն ուղին, որով պետք է ընթանալ տվյալ ինտեգրալը հաշվելու համար, և շատ բան են վերապահում հաշվելու հմտությանը։ Այս և հետևյալ պարագրաֆներում մենք ավելի մանրամասն կանգ կառնենք ֆունկցիաների մի քանի կարևոր դասերի վրա և նրանց ինտեգրալների նկատմամբ հաշվելու միանգամայն որոշակի կարգ կսահմանենք։*

Այժմ պարզենք, թե հատկապես ինչ է մեզ հետաքրքրելու վերոհիշյալ դասերի ֆունկցիաներն ինտեգրելու ժամանակ և ինչ սկզբունքով է կատարվելու այդ դասերի առանձնացումն ինքը։

n° *51-ում բնորոշվեց այն ֆունկցիաների բազմությունը, որոնց նկատմամբ առաջին հերթին կիրառվում է անալիզը։ Դրանք այսպես կոչված, տարրական ֆունկցիաներն են և այն ֆունկցիաները, որոնք արտահայտվում են տարրականների միջոցով վ ե ր ջ ա վ ո ր թ վ ո վ թվաբանական գործողությունների և սուպերպոզիցիաների օգնությամբ (առանց սահմանային անցման)։*

III գլխում մենք տեսանք, որ բոլոր այդպիսի ֆունկցիաները դիֆերենցվում են և նրանց ածանցյալները պատկանում են նույն բազմությանը։ Այլ է գործը նրանց ինտեգրալների հետ։ Շատ հաճախ պարզվում է, որ վերոհիշյալ բազմությանը պատկանող ֆունկցիայի ինտեգրալն այդ բազմությանը չի պատկանում, այսինքն՝ չի արտահայտվում տարրական ֆունկցիաներով վերջավոր թվով վերևում նշված օպերացիաների օգնությամբ։ Նախահայտորեն վերջավոր տեսքով չարտահայտվող այդպիսի ինտեգրալների թվին են պատկանում, օրինակ, հետևյալ ինտեգրալները՝

$$\int e^{-x^2}dx, \quad \int \sin x^2\, dx, \quad \int \cos x^2\, dx,$$

$$\int \frac{\sin x}{x}dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}dx, \quad \int \frac{dx}{\log x}.$$

Նման տեսակի ուրիշ օրինակներ կբերվեն ստորև [268, 277, 278 և հաջորդները]։ Կարևոր է ընդգծել որ այդ բոլոր ինտեգրալները ռեալ կերպով գոյություն ունեն*, սակայն դրանք միանգամայն նոր ֆունկցիաներ են ներկայացնում և չեն բերվում այն ֆունկցիաներին, որոնք մենք տարրական ենք անվանել։

Հայտնի են ֆունկցիաների համեմատաբար ոչ շատ ընդհանուր դասեր, որոնց ինտեգրումը կարող է կատարվել վերջնական տեսքով. հենց այդ դասերով էլ մենք ավելի մոտիկից կզբաղվենք։ Դրանց մեջ առաջին տեղը պետք է դնել ռացիոնալ ֆունկցիաների կարևոր դասը։

261. ՊԱՐԶ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄԸ։ Քանի որ անկանոն ռացիոնալ կոտորակի մեջ կարելի է առանձնացնել ամբողջ մասը, որի ինտեգրումը դժվարություններ չի ներկայացնում, ապա բավական է զբաղվել կանոնավոր կոտորակների ինտեգրումով (որոնց համարիչի աստիճանը հայտարարի աստիճանից ցածր է)։

Մենք այստեղ կանգ կառնենք դրանցից, այսպես կոչված պարզ կոտորակների վրա, դրանք կլինեն հետևյալ չորս տիպի կոտորակներ՝

---

* Տես այդ մասին ասածը n° 252-ում։ Մենք դրան կվերադառնանք ստորև, n° 293-ում։

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}, \quad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^k}, \ (k=2,\,3,\,\ldots) \quad \text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}, \ (m=2,\,3,\,\ldots)$$

որտեղ A, M, N, a, p, q — *իրական թվեր են, բացի այդ,* III *և* IV *տեսքի կոտորակների նկատմամբ ենթադրվում է, որ* x^2+px+q *եռանդամը իրական արմատներ չունի, այսինքն՝*

$$\frac{p^2}{4}-q<0 \text{ կամ } q-\frac{p^2}{4}>0.$$

I *և* II *տեսքի կոտորակների ինտեգրումը մենք արդեն գիտենք* [255, 7)]՝

$$A\int\frac{dx}{x-a}=A\log|x-a|+C,$$

$$A\int\frac{dx}{(x-a)^k}=-\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C:$$

Ինչ վերաբերում է III *և* IV *տեսքի կոտորակներին, ապա նրանց ինտեգրումը հեշտանում է հետևյալ տեղադրումով.* x^2+px+q *արտահայտությունից առանձնացնենք լրիվ քառակուսի՝*

$$x^2+px+q=x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]=$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right):$$

Փակագծերի մեջ եղած վերջին արտահայտությունը, ենթադրության համաձայն, դրական թիվ է, ուստի այն կարելի է ընդունել հավասար a^2, *եթե վերցնենք՝*

$$a=+\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.$$

Այժմ դիմենք հետևյալ տեղադրմանը՝

$$x+\frac{p}{2}=t, \qquad dx=dt,$$

$$x^2+px+q=t^2+a^2, \qquad Mx+N=\ t+\left(N-\frac{Mp}{2}\right).$$

III դեպքում կունենանք՝

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{t^2+a^2}dt=$$
$$=\frac{M}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$
$$=\frac{M}{2}\log(t^2+a^2)+\frac{1}{a}\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C,$$

կամ, վերադառնալով x-ին և a-ի փոխարեն իր արժեքը տեղադրելով՝

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=$$
$$=\frac{M}{2}\log(x^2+px+q)+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

IV դեպքի համար նույն տեղադրումը կտա

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx=\int\frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^m}dt=$$
$$=\frac{M}{2}\int\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^m}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}. \qquad (1)$$

Աջակողմյան ինտեգրալներից առաջինը հեշտությամբ կարելի է հաշվել $t^2+a^2=u$, $2t\,dt=du$ տեղադրումով

$$\int\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^m}=\int\frac{du}{u^m}=-\frac{1}{m-1}\,\frac{1}{u^{m-1}}+C=$$
$$=-\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}+C. \qquad (2)$$

Իսկ աջակողմյան ինտեգրալներից երկրորդը, ցանկացած m-ի դեպքում, կարելի է հաշվել ըստ n° 259-ի (6) ռեկուրենտ բանաձևի։ Այնուհետև x փոփոխականին անցնելու համար կմնա միայն արդյունքում ընդունել $t=\frac{2x+p}{2}$.

Սրանով սպառվում է հասարակ կոտորակների ինտեգրման հարցը։

262. ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄԸ ՊԱՐԶ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ. *Այժմ կանգ առնենք հանրահաշվի բնագավառից մի թեորեմայի վրա, որը, սակայն, հիմնական արժեք ունի ռացիոնալ կոտորակների ինտեգրման տեսության մեջ։*

Յուրաքանչյուր

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

կանոնավոր կոտորակ կարող է ներկայացվել վերջավոր թվով պարզ կոտորակների գումարի տեսքով։

Կանոնավոր կոտորակի այս վերլուծումը պարզ կոտորակների սերտորեն կապված է նրա $Q(x)$ հայտարարի պարզ արտադրիչների վերլուծման հետ։ Ինչպես հայտնի է, իրական գործակիցներ ունեցող յուրաքանչյուր ամբողջ բազմանդամ վերլուծվում է (այն էլ միակ եղանակով) $x-a$ և x^2+px+q տիպի գարծյալ իրական արտադրիչների. այդ դեպքում ենթադրվում է, որ քառակուսային արտադրիչներն իրական արմատներ չունեն և, հետևաբար, իրական գծային արտադրիչների չեն վերածվում: Միացնելով միատեսակ արտադրիչները (եթե այդպիսիներ կան) և համարելով, պարզության համար, որ $Q(x)$ բազմանդամի ավագ գործակիցը հավասար է մեկի, այդ բազմանդամի վերլուծումը սխեմատիկորեն կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$Q(x)=(x-a)^k\ldots(x^2+px+q)^m\ldots, \tag{3}$$

որտեղ $k, \ldots, m, \ldots$ *բնական թվեր են։*

Նկատենք, որ եթե բազմանդամը n աստիճանի է, ապա ակներև է, որ բոլոր k ցուցիչների գումարը, գումարած բոլոր m ցուցիչների կրկնապատիկ գումարին, ճշգրտորեն կտա n

$$\sum k+2\sum m=n: \tag{4}$$

Թեորեմն ապացուցելու համար նախ ապացուցենք հետևյալ երկու օժանդակ առաջադրությունները։

1° Դիտարկենք որևէ $x-a$ գծային արտադրիչ, որը հայտարարի վերլուծման մեջ մտնում է 1 ցուցիչով, այնպես որ

$$Q(x)=(x-a)\,Q_1(x),$$

որտեղ Q_1 բազմանդամն արդեն $x-a$-ի վրա չի բաժանվում, Այդ դեպքում տվյալ

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)^k Q_1(x)}$$

կոտորակը կարելի է պատկերացնել որպես երկու կանոնավոր կոտորակների գումար՝

$$\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}\text{*},$$

որոնցից առաջինը պարզ է, իսկ երկրորդի հայտարարը $x-a$ արտադրիչը պարունակում է ավելի ցածր աստիճանով, քան առաջ։

Ապացուցման համար բավական է A թիվը և $P_1(x)$ բազմանդամն այնպես ընտրել, որ տեղի ունենա հետևյալ նույնությունը՝

$$P(x)-AQ_1(x)=(x-a)P_1(x).$$

Նախ A-ն որոշենք այնպես, որ ձախ մասը բաժանվի $x-a$-ի վրա. դրա համար բավական է (ըստ Բեզուի հայտնի թեորեմայի), որ $x=a$ դեպքում նրա արժեքը զրո լինի։ Դա բերում է A-ի համար հետևյալ արտահայտությունը՝

$$A=\frac{P(a)}{Q_1(a)}.$$

Դա իմաստ ունի հենց այն պատճառով, որ (նույնպես ըստ Բեզուի թեորեմայի) $Q_1(a)\neq 0$։ A-ի նշված ձևով ընտրության դեպքում P_1 բազմանդամը կորոշվի պարզապես որպես քանորդ։

2° *Այժմ թող x^2+px+q-ն լինի քառակուսային արտադրիչներից որևէ մեկը, որը հայտարարի վերլուծման մեջ մտնում է $1\leq m$ ցուցիչով, այնպես որ այս անգամ կարելի է ընդունել*

$$Q(x)=(x^2+px+q)^m Q_1(x),$$

* P, Q *տառերը (տարբեր նշիչներով) այստեղ ամբողջ բազմանդամներ են նշանակում, իսկ* A, M, N *տառերը՝ հաստատուն թվեր են։*

որտեղ Q_1 եռանդամը x^2+px+q-ի վրա չի բաժանվում։ Այդ դեպքում տվյալ

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^m Q_1(x)}$$

կանոնավոր կոտորակը կարող է ներկայացվել կանոնավոր կոտորակների գումարի տեսքով՝

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}+\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}Q_1(x)},$$

որոնցից առաջինը նույնպես պարզ կոտորակ կլինի, իսկ երկրորդը հայտարարում պարունակում է վերոհիշյալ եռանդամը դարձյալ ավելի ցածր աստիճանով։

Ապացուցման համար բավական է M, N թվերը և $P_1(x)$ բազմանդամն այնպես ընտրել, որ տեղի ունենա հետևյալ նույնությունը՝

$$P(x)-(Mx+N)Q_1(x)=(x^2+px+q)P_1(x).$$

Որոշենք M-ը և N-ը այնպես, որ այս անգամ ձախ մասը բաժանվի x^2+px+q քառակուսի եռանդամի վրա։ Դիցուք P-ն և Q-ն այդ եռանդամի վրա բաժանվելուց ստացված մնացորդներն են, համապատասխանաբար, $\alpha x+\beta$ և $\gamma x+\delta$։ Այդ դեպքում հարցը կհանգի այն բանին, որպեսզի (x^2+px+q)-ի վրա բաժանվի հետևյալ արտահայտությունը՝

$$\alpha x+\beta-(Mx+N)(\gamma x+\delta)=$$

$$=-\gamma Mx^2+(\alpha-\delta M-\gamma N)x+(\beta-\delta N).$$

Այստեղ իսկապես կատարելով բաժանումը, մնացորդում կունենանք

$$[(p\gamma-\delta)M-\gamma N+\alpha]x+[q\gamma M-\delta N+\beta].$$

Մենք պետք է այդ երկու գործակիցն էլ զրոյի հավասարեցնենք և, այսպիսով, M-ը և N-ը որոշելու համար կստանանք երկու գծային հավասարումների սիստեմ. նրա

$$\begin{vmatrix} p\gamma-\delta & -\gamma \\ q\gamma & -\delta \end{vmatrix}=\delta^2-p\gamma\delta+q\gamma^2$$

դետերմինանտը տարբեր է զրոյից։ Իրոք $\gamma \neq 0$ դեպքում այն կարելի է գրել այսպես՝

$$\gamma^2\left[\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)^2+p\cdot\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)+q\right].$$

բայց քառակուսի փակագծերի միջի արտահայտությունը մեր x^2+px+q եռանդամի արժեքն է $x=-\frac{\delta}{\gamma}$ կետում և, հետևապես, զրո լինել չի կարող, քանի որ այդ եռանդամն իրական արմատներ չունի։ Երբ $\gamma=0$, դետերմինանտը դառնում է δ^2, իսկ այդ դեպքում δ-ն նախահայտորեն զրո չէ, քանի որ Q_1 բազմանդամը x^2+px+q-ի վրա չի բաժանվում։

Նշված ճանապարհով M-ի ու N-ի արժեքները որոշելով, P_1 բազմանդամն այստեղ էլ առանց դժվարության կորոշենք որպես քանորդ։

Այժմ դառնանք ներկա n°-ի սկզբում արտահայտած թեորեմայի ապացուցմանը։ Վերջինս կհանգի տվյալ կանոնավոր կոտորակից պարզ կոտորակների հաջորդական առանձնացման հնարավորությունն ապահովող 1° և 2° առաջադրությունների կրկնաբար կիրառմանը, ընդհուպ մինչև այդ կանոնավոր կոտորակի սպառումը։

Եթե $x-a$ արտադրիչը Q-ի մեջ մտնում է միայն առաջին աստիճանով, ապա 1°-ի հիման վրա ($k=1$ դեպքում) մենք նրան կհամապատասխանեցնենք հետևյալ տեսքի միակ պարզ կոտորակը՝

$$\frac{A}{x-a},$$

Իսկ այն դեպքում, երբ $x-a$-ի ցուցիչ $k>1$, 1°-ի հիման վրա առանձնացնելով

$$\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

պարզ կոտորակը, մնացած կոտորակի նկատմամբ նորից կկիրառենք 1°-ը ու կառանձնացնենք

$$\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}$$

պարզ կոտորակը և այլն, մինչև որ $x-a$ արտադրիչը հայտարարի վերլուծումից իսպառ կվերանա. Այսպիսով, դիտարկվող դեպքում $(x-a)^k$ $(k>1)$ արտադրիչին կհամապատասխանի k թվով պարզ կոտորակների մի խումբ՝

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}. \tag{5}$$

Նույնպիսի դատողություն հերթով կկիրառենք նաև դեռևս մնացած յուրաքանչյուր գծային արտադրիչի նկատմամբ, մինչև որ հայտարարը կսպառվի կամ նրա վերլուծման մեջ միայն քառակուսային արտադրիչները կմնան.

Համանման ձևով, օգտվելով 2°-ից, x^2+px+q քառակուսային արտադրիչին կհամապատասխանեցնենք միայն մեկ՝

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$$

տեսքի պարզ կոտորակ, եթե այդ արտադրիչն առաջին աստիճանի է, և m թվով պարզ կոտորակների մի խումբ՝

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}, \tag{6}$$

եթե այդ արտադրիչի ցուցիչ $m>1$.

Նույն ձևով կարելի է վարվել և մյուս քառակուսային արտադրիչների հետ, եթե նրանք դեռևս կան. դրանով էլ ավարտվում է թեորեմայի ապացույցը.

263. ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ. ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄԸ. Այսպիսով, (3) վերլուծումը գիտենալով, դրանով իսկ գիտենք այն պարզ կոտորակների հայտարարները, որոնք տվյալ $\frac{P}{Q}$ կոտորակի վերլուծման մեջ են մտնում. կանգ առնենք համարիչները որոշելու, այսինքն՝ A, M, N գործակիցները որոշելու հարցի վրա. Քանի որ (5) կոտորակների խմբի համարիչները k թվով գործակից են պարունակում, իսկ (6) կոտորակների խմբի համարիչները $2m$ թվով գործակից, ապա (4)-ի շնորհիվ, նրանք ընդամենը n հատ կլինեն.

Վերոհիշյալ գործակիցները որոշելու համար սովորաբար

դիմում են անորոշ գործակիցների մեթոդին, որը կայանում է հետևյալում: Գիտենալով $\frac{P}{Q}$ կոտորակի վերլուծման ձևը, այդ վերլուծումը գրում են տառային գործակիցներով աջակողմյան համարիչներում: Բոլոր պարզ կոտորակների ընդհանուր հայտարարը, ակներևաբար, կլինի Q. գումարելով դրանք, կստանանք կանոնավոր կոտորակ*: Այժմ եթե ձախից և աջից դեն նետենք Q հայտարարը, ապա կհանգենք $(n-1)$-րդ աստիճանի երկու բազմանդամների հավասարության, որն x-ի նկատմամբ նույնություն կլինի: Աջակողմյան բազմանդամի մեջ x-ի զանազան աստիճանների գործակիցները կլինեն տառերով նշանակված n գործակիցների նկատմամբ գծային համասեռ բազմանդամներ: Դրանք հավասարեցնելով P բազմանդամի համապատասխան թվային գործակիցներին, կստանանք, վերջապես, n գծային հավասարումների սիստեմ, որից և կորոշվեն տառային գործակիցները: Քանի որ պարզ կոտորակների վերլուծելու հնարավորությունը նախապես ապացուցված է, ապա վերոհիշյալ սիստեմը երբեք հակասական չի կարող լինել:

Դեռ ավելին. քանի որ հավասարումների վերոհիշյալ սիստեմը լուծում ունի, ինչպիսին էլ լինեն ազատ անդամները (P բազմանդամի գործակիցները), ապա սիստեմի դետերմինանտն անհրաժեշտաբար զրոյից տարբեր կլինի: Այլ խոսքով, սիստեմը միշտ որոշյալ կլինի: Այս հասարակ դիտողությունը զուգընթացաբար ապացուցում է նաև կանոնավոր կոտորակի պարզ կոտորակների վերածման միակությունը:

Ասածը պարզաբանենք օրինակով:

Դիցուք տրված է $\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$ կոտորակը: Ընդհանուր թեորեմայի համաձայն այդ կոտորակի համար ունենք հետևյալ վերլուծումը՝

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

A, B, C, D, E գործակիցները կորոշենք, ելնելով հետևյալ նույնությունից՝

* Կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակների գումարը միշտ կանոնավոր կոտորակ էլ ներկայացնում է:

$$2x^2+2x+13=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)(x-2)+(Dx+E)(x-2).$$

Ձախ և աջ մասում եղած x-ի միատեսակ աստիճանների գործակիցները հավասարեցնելով, կստանանք հինգ հավասարումների սիստեմ՝

$$\begin{array}{c|l} x^4 & A+B=0, \\ x^3 & -2B+C=0, \\ x^2 & 2A+B-2C+D=2, \\ x^1 & -2B+C-2D+E=2, \\ x^0 & A-2C-2E=13, \end{array}$$

որտեղից՝

$$A=1,\ B=-1,\ C=-2,\ D=-3,\ E=-4.$$

Վերջնականապես՝

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

Քիչ առաջ մեր հաստատած հանրահաշվական փաստն անմիջական կիրառում ունի ռացիոնալ կոտորակներ ինտեգրելիս: Ինչպես n° 261-ում տեսանք, պարզ կոտորակներն ինտեգրվում են վերջավոր տեսքով: Այժմ այդ նույնը կարող ենք ասել ցանկացած ռացիոնալ կոտորակի մասին: Եթե ուշադրության դրենք այն ֆունկցիաները, որոնց միջոցով արտահայտվում են ամբողջ բազմանդամի ու կանոնավոր կոտորակների ինտեգրալները, ապա կարելի է ձևակերպել ավելի ճշգրիտ արդյունք.

Ցանկացած ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրալն արտահայտվում է վերջավոր տեսքով՝ ռացիոնալ ֆունկցիայի, լոգարիթմի և արկտանգեսի օգնությամբ:

Օրինակ, վերադառնալով քիչ առաջ դիտարկված օրինակին և հիշելով n° 261-ի բանաձևերը, ունենք՝

$$\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx=\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{x+2}{x^2+1}dx-\int\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{3-4x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\log\frac{(x-2)^2}{x^2+1}-4\operatorname{arctg}x+C.$$

264. ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՄԱՍԻ ԱՌԱՆՁՆԱՑՈՒՄԸ. Գոյություն ունի Մ. Վ. Օստրոգրադսկու և Շ. Հերմիտին (Ch. Hermit) պատկանող մի եղանակ, որի օգնությամբ կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակի ինտեգրալը գտնելը զգալիորեն պարզացվում է. Այդ եղանակը հնարավորություն է տալիս զուտ հանրահաշվական ճանապարհով առանձնացնել ինտեգրալի ռացիոնալ մասը.

Մենք տեսանք [261], որ ինտեգրալի կազմի մեջ ռացիոնալ անդամներ ստացվում են II և IV տեսքի պարզ կոտորակների ինտեգրման դեպքում. Առաջին դեպքում ինտեգրալը միանգամից կարելի է գրել՝

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = -\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C. \qquad (7)$$

Այժմ որոշենք, ինչ տեսք ունի

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx \quad \left(m>1,\ q-\frac{p^2}{4}>0\right)$$

ինտեգրալի ռացիոնալ մասը.

Դիմելով մեզ արդեն հայտնի $x+\frac{p}{2}=t$ տեղադրմանը, օգտագործենք (1), (2) հավասարությունները և n° 259-ի (6) վերածման բանաձևը $n=m-1$ դեպքում. Եթե վերադառնանք x փոփոխականին, ապա կստանանք

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx = \frac{M'x+N'}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \alpha\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}},$$

որտեղ M'-ը, N'-ը և α-ն որոշ հաստատուն գործակիցներ են. Այդ նույն բանաձևի համաձայն, m-ը փոխարինելով $m-1$-ով, վերջին ինտեգրալի համար կգտնենք (եթե $m>2$)՝

$$\int \frac{\alpha\, dx}{(x^2+px+q)^{m-1}} = \frac{M''x+N''}{(x^2+px+q)^{m-2}} + \beta\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-2}},$$

և այլն, մինչև որ x^2+px+q եռանդամի ցուցիչը աջակողմյան ինտեգրալի մեջ մեկի կհավասարվի. Հաջորդաբար առանձնացող բոլոր ռացիոնալ անդամները կանոնավոր կոտորակներ են.

Դրանք ի մի հավաքելով, արդյունքը կստանանք հետևյալ տեսքով՝

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx=$$
$$=\frac{R(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\lambda\int\frac{dx}{x^2+px+q}, \quad (8)$$

որտեղ $R(x)$-ը հայտարարից ցածր աստիճանի ամբողջ բազմանդամ է*, իսկ λ-ն հաստատուն է։

Դիցուք ունենք $\frac{P}{Q}$ կանոնավոր կոտորակը, որն անկրճատելի ենք համարելու, և դիցուք նրա Q հայտարարը պարզ արտադրիչների է վերլուծված [տես (3)]։ Այդ դեպքում այդ կոտորակի ինտեգրալը կներկայանա (5) կամ (6) տեսքի կոտորակների ինտեգրալների գումարի տեսքով։ Եթե k-ն (կամ m-ը) մեկից մեծ են, ապա (5) [կամ (6)] խմբի բոլոր կոտորակների ինտեգրալները, բացի առաջինից, կձևափոխվեն (7) [կամ (8)] բանաձևով։ Այդ բոլոր արդյունքները միավորելով, վերջնականապես կստանանք հետևյալ տեսքի բանաձև՝

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx. \quad (9)$$

Ինտեգրալի $\frac{P_1}{Q_1}$ ռացիոնալ մասն ստացվել է վերևում առանձնացրած ռացիոնալ մասերի գումարումից. հետևապես, նա ամենից առաջ կանոնավոր կոտորակ է հանդիսանում, իսկ նրա Q_1 հայտարարն ունի հետևյալ վերլուծումը՝

$$Q_1(x)=(x-a)^{k-1}\ldots(x^2+px+q)^{m-1}\ldots$$

Իսկ ինչ վերաբերում է ինտեգրալի նշանի տակ մնացած $\frac{P_2}{Q_2}$ կոտորակին, ապա այն ստացվել է I և III տեսքի կոտորակների գումարումից, ուստի նա ևս կանոնավոր է, և

$$Q_2(x)=(x-a)\ldots(x^2+px+q)\ldots$$

Ակներևաբար [տես (3)], $Q=QQ_2$.

* Տես նախորդ տողատակի ծանոթագրությունը։

Հենց (9) բանաձևն էլ կոչվում է Օստրոգրադսկու-Հերմիտի բանաձև։

Դիֆերենցելով, կարելի է այն ներկայացնել իրեն համարժեք տեսքով՝

$$\frac{P}{Q}=\left[\frac{P_1}{Q_1}\right]'+\frac{P_2}{Q_2}, \tag{10}$$

Մենք տեսանք, որ Q_1 *և* Q_2 *բազմանդամները հեշտությամբ են գտնվում, եթե հայտնի է* Q *բազմանդամի (3) վերլուծումը։ Բայց նրանք առանց այդ վերլուծման էլ կարող են որոշվել։ Իրոք, քանի որ* Q' *ածանցյալը պարունակում է* Q*-ի բոլոր պարզ արտադրիչները հենց մեկով պակաս ցուցիչներով, ապա* Q_1*-ը ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է հանդիսանում* Q*-ի և* Q'*-ի համար, ուստի և նա կարող է որոշվել այդ բազմանդամների օգնությամբ, օրինակ, հաջորդական բաժանման եղանակով։ Եթե* Q_1*-ը հայտնի է, ապա* Q_2*-ը կարելի է որոշել պարզապես* Q*-ն* Q_1*-ի վրա բաժանելով։*

Այժմ դառնանք (10) բանաձևի մեջ P_1 *և* P_2 *համարիչները որոշելուն։ Դրա համար նույնպես օգտվում են անորոշ գործակիցների մեթոդից։*

Q, Q_1, Q_2 *բազմանդամների աստիճանները նշանակենք, համապատասխանաբար,* n, n_1, n_2, *այնպես որ* $n_1+n_2=n$. *այդ դեպքում* P, P_1, P_2 *բազմանդամների աստիճանները ավելի բարձր չեն լինի, քան* $n-1$, n_1-1, n_2-1*։ Որպես* P_1 *և* P_2 *տեղադրենք* n_1-1 *և* n_2-1 *աստիճանների բազմանդամներ տառային գործակիցներով. ընդամենը կլինի* n_1+n_2, *այսինքն՝* n *գործակից։ (10)-ի մեջ դիֆերենցում կատարենք՝*

$$\frac{P'_1Q_1-P_1Q'_1}{Q_1^2}+\frac{P_2}{Q_2}=\frac{P}{Q}.$$

Այժմ ցույց տանք, որ առաջին կոտորակը միշտ կարելի է Q *հայտարարի բերել, համարիչն ամբողջ պահպանելով, այն է՝*

$$\frac{P'_1Q_1-P_1Q'_1}{Q_1^2}=\frac{P'_1Q_2-P_1\frac{Q'_1Q_2}{Q_1}}{Q_1Q_2}=\frac{P'_1Q_2-P_1H}{Q},$$

եթե H-ը նշանակում է $\dfrac{Q'_1Q_2}{Q_1}$ քանորդը։ Բայց այդ քանորդը կարելի է ներկայացնել ամբողջ բազմանդամի տեսքով։ Իրոք, եթե $(x-a)^k$-ը $k>1$ դեպքում, մտնում է Q_1-ի կազմի մեջ, ապա $(x-a)^{k-1}$-ը կմտնի Q'-ի մեջ, իսկ $(x-a)$-ն՝ Q_2-ի կազմի մեջ. Նման եզրակացություն կարելի է հանել և $(x^2+px+q)^m$ տեսքի արտադրիչի վերաբերյալ $m>1$ դեպքում։ Հետևապես, H համարիչն ամբողջովին բաժանվում է հայտարարի վրա, և այսուհետև H ասելով կարելի է հասկանալ ամբողջ բազմանդամ (n_2-1 աստիճանի)։

Q ընդհանուր հայտարարից ազատվելով կգանք երկու ($n-1$ աստիճանի) բազմանդամների նույնության՝

$$P'_1Q_2-P_1H+P_2Q_1=P.$$

Այստեղից, ինչպես և վերևում, մեր մնացած n տառային գործակիցները որոշելու համար կստանանք n գծային հավասարումների սիստեմ։

Քանի որ (10)-ի վերլուծման հնարավորությունը հաստատված է, P-ն ինչպիսին էլ լինի, ապա վերոհիշյալ սիստեմը համատեղելի կլինի ցանկացած ազատ անդամների դեպքում։ Այստեղից ինքնըստինքյան բխում է, որ այդ սիստեմի դետերմինանտը զրոյից տարբեր է, ուրեմն և սիստեմն անհրաժեշտաբար որոշյալ կլինի և (10) վերլուծումը, նշված Q_1 և Q_2 հայտարարների դեպքում, հնարավոր է միակ եղանակով*։

Օրինակ։ Դիցուք պահանջվում է առանձնացնել հետևյալ ինտեգրալի ռացիոնալ մասը՝

$$\int\frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}dx.$$

Ունենք

$$Q_1=Q_2=(x+1)(x^2+1)=x^3+x^2+x+1,$$

$$\frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x^3+x^2+x+1)^2}=$$

$$=\left[\frac{ax^2+bx+c}{x^3+x^2+x+1}\right]'+\frac{dx^2+ex+f}{x^3+x^2+x+1},$$

* Հմմ. համանման դիտողություն կանոնավոր կոտորակները պարզ կոտորակների վերածելու առթիվ, էջ 44։

որտեղից՝

$$4x^4+4x^3+16x^2+12x+8=(2ax+b)(x^3+x^2+x+1)-$$
$$-(ax^2+bx+c)(3x^2+2x+1)+(dx^2+ex+f)(x^3+x^2+x+1):$$

Համասարության երկու մասերում x-*ի միատեսակ աստիճանների գործակիցները հավասարեցնելով, կստանանք հավասարումների սիստեմ, որտեղից էլ կորոշվեն* a, b, . . . , f *անհայտները՝*

x^5	$d=0$, *(հաջորդում արդեն* d-*ն հաշվի չենք առնում)*
x^4	$-a+e=4$,
x^3	$-2b+e+f=4$.
x^2	$a-b-3c+e+f=16$, $\quad a=-1,\ b=1,\ c=-4$,
x^1	$2a-2c+e+f=12$, $\quad d=0,\ e=3,\ f=3$.
x^0	$b-c+f=8$.

Այսպիսով, որոնելի ինտեգրալը կլինի

$$\int\frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2\,(x^2+1)^2}\,dx=-\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1}+$$
$$+3\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1}+3\operatorname{arctg}x+C:$$

Այս օրինակի մեջ վերջին ինտեգրալի հաշվումը հեշտությամբ միանգամից կատարվեց: Ուրիշ դեպքերում հարկ է լինում նորից պարզ կոտորակների վերածել: Հնարավոր է, ի միջի այլոց, այս պրոցեսը ևս միացնել նախորդի հետ:

265. *ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ:* *Ռացիոնալ ֆունկցիաների ինտեգրման մի քանի օրինակներ ևս բերենք:*

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$:

Պարզ կոտորակների վերլուծման այստեղ կարելի է հասնել ոչ շատ սրամիտ ձևափոխումների միջոցով՝

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}=\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)^2}=\frac{1}{x^2(1+x^2)}-\frac{1}{(1+x^2)^2}=$$
$$=\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)}-\frac{1}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Պատասխան՝ $-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C$:

2) $\displaystyle\int\frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\,dx$:

Ունենք

$$\frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}=\frac{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{11}{8}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)}=$$

$$=\frac{A}{x-\frac{1}{2}}+\frac{B}{x+\frac{3}{3}}+\frac{C}{x-\frac{5}{2}},$$

որտեղից ստացվում է հետևյալ նույնությունը՝

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{11}{8}=A\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)+B\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)+$$

$$+C\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right):$$

Աջ և ձախ մասերում x-ի միատեսակ աստիճանների գործակիցները հավասարեցնելու փոխարեն, կարելի է այլ կերպ վարվել: Այս նույնության մեջ հաջորդաբար ընդունենք $x=\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$. միանգամից կստանանք $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{8}$, $C=\frac{3}{8}$ (որովհետև ամեն անգամ աջ կողմում մնում է միայն մեկ գումարելի):

Պատասխան՝ $\frac{1}{4}\log\left|x-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{8}\log\left|x+\frac{3}{2}\right|+\frac{3}{8}\log\left|x-\frac{5}{2}\right|+C=$

$$=\frac{1}{8}\log\left|\frac{(2x-1)^2(2x-5)^3}{2x+3}\right|+C'^{*}:$$

3) $\int\frac{dx}{x^4+1}$:

Քանի որ

$$x^4+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2=(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2=$$

$$=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1),$$

ապա վերլուծումը փնտրում ենք հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}:$$

---

* Ակներևաբար, C′ հաստատունը C հաստատունից տարբերվում է $-\frac{1}{2}\log 2$-ով:

Հետևյալ նույնությունից՝

$$1=(Ax+B)(x^2-x\sqrt{2}+1)+(Cx+D)(x^2+x\sqrt{2}+1)$$

ստանում ենք հավասարումների այսպիսի սիստեմ

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=0, \\ x^1 & A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0, \\ x^0 & B+D=1, \end{array}$$

որտեղից

$$A=-C=\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad B=D=\frac{1}{2}\,.$$

Այսպիսով,

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)+C.$$

Օգտագործելով արկտանգենսների գումարման բանաձևը [50], այս արդյունքը կարելի է ներկայացնել այսպիսի ձևով՝

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C'.$$

Սակայն հարկավոր է նկատել, որ այս արտահայտությունը պետքական է միայն առանձին-առանձին $(-\infty, -1)$, $(-1,1)$, $(1, +\infty)$ միջակայքերի համար, որովհետև $x=\pm1$ կետերում նա իր իմաստը կորցնում է։ Այդ միջակայքերի համար C' հաստատունը, համապատասխանաբար, հավասար է

$$C-\frac{\pi}{2\sqrt{2}},\quad C,\quad C+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Հաստատունի թռիչքային փոփոխությունը փոխհատուցում է հենց իր ֆունկցիայի խզումները $x=\pm1$ կետերում։

$$4)\qquad \int\frac{2x^4-4x^3+24x^2-40x+20}{(x-1)(x^2-2x+2)^3}dx.$$

Դիմենք ինտեգրալի ռացիոնալ մասի առանձնացմանը։ Ունենք

$$Q_1=(x^2-2x+2)^2,\quad Q_2=(x-1)(x^2-2x+2).$$

Այսպիսով՝

$$\frac{2x^4-4x^3+24x^2-40x+20}{(x-1)(x^2-2x+2)^3}=$$

$$=\left[\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x^2-2x+2)^2}\right]'+\frac{e}{x-1}+\frac{fx+g}{x^2-2x+2},$$

ընդ որում մենք միաժամանակ արդեն իսկ պարզ կոտորակների ենք վերլուծում այն արտահայտությունը, որը դեռևս ինտեգրման ենթակա է (ինտեգրալի ռացիոնալ մասի առանձնացումից հետո)։

Հետևյալ նույնությունը՝

$$2x^4-4x^3+24x^2-40x+20=(3ax^2+2bx+c)(x^2-2x+2)(x-1)-$$

$$-(ax^3+bx^2+cx+d)\cdot 2(2x-2)(x-1)+$$

$$+e(x^2-2x+2)^3+(fx+g)(x-1)(x^2-2x+2)^2$$

Բերում է հավասարումների այսպիսի սիստեմի՝

x^6	$e+f=0$
x^5	$-a-6e-5f+g=0,$
x^4	$-a-2b+18e+12f-5g=2,$
x^3	$8a+2b-3c-32e-16f+12g=-4,$
x^2	$-6a+4b+5c-4d+36e+12f-10g=24,$
x^1	$-4b+8d-24e-4f+12g=-40,$
x^0	$-2c-4d+8e-4g=20,$

որտեղից

$$a=2,\ b=-6,\ c=8,\ d=-9,\ e=2,\ f=-2,\ g=4.$$

Պատասխան $\dfrac{2x^3-6x^2+8x-9}{(x^2-2x+2)^2}+\log\dfrac{(x-1)^2}{x^2-2x+2}+$

$$+2\,\mathrm{arctg}\,(x-1)+C.$$

б) $\displaystyle\int\frac{x^6-x^5+x^4+2x^3+3x^2+3x+3}{(x+1)^2(x^2+x+1)^3}dx.$

Առանձնացնենք ինտեգրալի ռացիոնալ մասը։ Ունենք

$$Q_1=(x+1)(x^2+x+1)^2,\quad Q_2=(x+1)(x^2+x+1).$$

Վերլուծումը փնտրում ենք այս ձևով

$$\left[\frac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}{(x+1)(x^2+x+1)^2}\right]'+\frac{fx^2+gx+h}{(x+1)(x^2+x+1)},$$

Հավասարումների հետևյալ սիստեմից՝

$$\begin{array}{l|l} x^7 & f=0, \\ x^6 & -a+g=1, \\ x^5 & a-2b+3g+h=-1, \\ x^4 & 5a-b-3c+5g+3h=1, \\ x^3 & 4a+3b-3c-4d+5g+5h=2, \\ x^2 & 3b+c-5d-5e+3g+5h=3, \\ x^1 & 2c-d-7e+g+3h=3, \\ x^0 & d-3e+h=3 \end{array}$$

գտնում ենք

$$a=-1,\ b=0,\ c=-2,\ d=0,\ e=-1,\ f=g=h=0։$$

Այսպիսով, այստեղ ինտեգրալն ամբողջովին բերվում է իր ռացիոնալ մասին՝ $\frac{x^4+2x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)^2}+C$.

§ 3. ԱՐՄԱՏՆԵՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՄԻ ՔԱՆԻ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄԸ

266. $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$ ՏԵՍՔԻ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄԸ*. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ. Վերը մենք սովորեցինք ռացիոնալ դիֆերենցիալների վերջավոր տեսքով ինտեգրումը։ Հետագայում դիֆերենցիալ արտահայտությունների այս կամ այն դասերի ինտեգրման հիմնական եղանակ կհանդիսանա այնպիսի $t=\omega(x)$ (որտեղ ω-ն ինքն արտահայտվում է տարրական ֆունկցիայի միջոցով) տեղադրումների որոնումը, որոնք ընդինտեգրալ արտահայտությունը ռացիոնալ տեսքի կբերեն։ Այդ եղանակը անվանենք *ընդինտեգրալ արտահայտության ռացիոնալացման մեթոդ*։

---

* Պայմանավորվենք մեկ ընդմիշտ R տառով նշանակել իր արգումենտների ռացիոնալ ֆունկցիան։

Որպես այդ մեթոդի կիրառման առաջին օրինակ դիտարկենք

$$R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx \tag{1}$$

տեսքի ինտեգրալը, որտեղ R-ը երկու արգումենտի ռացիոնալ ֆունկցիա է նշանակում, m-ը՝ բնական թիվ է, իսկ α, β, γ, δ՝ հաստատուններ են։
Ընդունենք

$$t=\omega(x)=\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},\quad t^m=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},\quad x=\varphi(t)=\frac{\delta t^m-\beta}{\alpha-\gamma t^m}.$$

Ինտեգրալը կփոխարկվի հետևյալին՝

$$\int R(\varphi(t), t)\,\varphi'(t)\,dt.$$

այստեղ դիֆերենցիալն արդեն ռացիոնալ տեսք ունի, քանի որ R-ը, φ-ն, φ' ռացիոնալ ֆունկցիաներ են։ Այս ինտեգրալը նախորդ պարագրաֆի կանոններով հաշվելով, հին փոփոխականին կվերադառնանք, տեղադրելով $t=\omega(x)$։

(1) տեսքի ինտեգրալին են հանգում նաև ավելի ընդհանուր ինտեգրալներ՝

$$\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^r, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^s, \ldots\right)dx,$$

որտեղ r, s,... բոլոր ցուցիչները ռացիոնալ են. արժե միայն այդ ցուցիչները m ընդհանուր հայտարարի բերել, որպեսզի ինտեգրալի նշանի տակ ստացվի x-ի և $\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$ արմատի ռացիոնալ ֆունկցիա։

Օրինակներ։ 1) $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$։

Այստեղ $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ կոտորակագծային ֆունկցիան, մանավորապես, բերվեց պարզագույն գծային ֆունկցիայի։ Ընդունում ենք՝ $t=\sqrt{x+1}$, $dx=2t\,dt$. այդ դեպքում

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx = 2\int \frac{t+2}{t^3-1}dt = \int\left(\frac{2}{t-1}-\frac{2t+2}{t^2+t+1}\right)dt =$$

$$= \log\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C,$$

որտեղ մնում է միայն տեղադրել $t=\sqrt{x+1}$։

2) $$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{x+1}.$$

Ընդունում ենք՝ $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$, $x=\frac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx=-\frac{6t^2dt}{(t^3-1)^2}$.

այդ դեպքում

$$\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{x+1} = \int\frac{-3\,dt}{t^3-1} = \int\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C,$$

որտեղ $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$,

267. ԲԻՆՈՄԱՑԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐԻ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄԸ։ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ.

Բինոմային կոչվում են

$$x^m(a+bx^n)^p dx$$

տեսքի դիֆերենցիալները, որտեղ a-ն ու b-ն ցանկացած հաստատուններ են, իսկ m, n, p ցուցիչները՝ ռացիոնալ թվեր են։ Գտնենք այն դեպքերը, երբ այդ արտահայտություններն ինտեգրվում են վերջավոր տեսքով։

Այդպիսի դեպքերից մեկը պարզ է անմիջականորեն՝ եթե p-ն ամբողջ թիվ է (դրական, զրո կամ բացասական), ապա դիտարկվող արտահայտությունը պատկանում է նախորդ n°-ում ուսումնասիրված տեսակին։ Այն է՝ եթե m և n կոտորակների հայտարարների ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը նշանակենք λ-ով, ապա այնտեղ կունենանք $R(\sqrt[\lambda]{x})\,dx$ տեսքի արտահայտություն, այնպես որ նրա ռացիոնալացման համար բավական է տեղադրել՝ $t=\sqrt[\lambda]{x}$։

Այժմ տվյալ արտահայտությունը ձևափոխենք $z=x^n$ *տեղադրումով։ Այդ դեպքում*

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx=\frac{1}{n}(a+bz)^p\,z^{\frac{m+1}{n}-1}$$

և, համառոտության համար ընդունելով

$$\frac{m+1}{n}-1=q,$$

կունենանք

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\frac{1}{n}\,(a+bz)^p z^q\,dz. \qquad (2)$$

Եթե q*-ն ամբողջ թիվ է, ապա մենք նորից գալիս ենք ուսումնասիրված տեսակի արտահայտությանը։ Իրոք, եթե* p *կոտորակի հայտարարը նշանակենք* ν, *ապա ձևափոխված արտահայտությունը կունենա* $R(z, \sqrt[\nu]{a+bx})$ *տեսքը։ Ընդինտեգրալ արտահայտության ռացիոնալացմանը կարելի է հասնել և միանգամից, հետևյալ տեղադրումով՝*

$$t=\sqrt[\nu]{a+bz}=\sqrt[\nu]{a+bx^n}.$$

Վերջապես, (2) ինտեգրալներից երկրորդն արտագրենք այսպես՝

$$\int\left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{p+q}\,dz.$$

Հեշտ է տեսնել, որ $p+q$ *ամբողջ լինելու դեպքում դարձյալ ունենք ուսումնասիրված դեպքը. ձևափոխված արտահայտությունն ունի* $R\left(z, \sqrt[\nu]{\frac{a+bz}{z}}\right)$ *տեսքը։ Տվյալ ինտեգրալի մեջ ընդինտեգրալ արտահայտությունը ռացիոնալացվում է և միանգամից՝ հետևյալ տեղադրումով՝*

$$t=\sqrt[\nu]{\frac{a+bz}{z}}=\sqrt[\nu]{ax^{-n}+b}.$$

Այսպիսով, (2)-ի երկու ինտեգրալն էլ արտահայտվում են վերջավոր տեսքով, երբ ամբողջ է

$$p, \ q, \ p+q$$

թվերից մեկը կամ *(որ միևնույն է)*

$$p, \ \frac{m+1}{n}, \ \frac{m+1}{n}+p$$

թվերից մեկը։

Ինտեգրման այս դեպքերը, ըստ էության, հայտնի էին դեռևս Նյուտոնին։ Սակայն միայն անցյալ դարի կեսերին Պ. Լ. Չեբիշևը հաստատեց այն նշանավոր փաստը, որ բինոմային դիֆերենցիալների համար վերջավոր տեսքի ինտեգրման ուրիշ դեպքեր գոյություն չունեն։

Դիտարկենք օրինակներ։

1) $$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx.$$

Այստեղ՝ $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$, $p=\frac{1}{3}$. *քանի որ* $\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=$ $=2$, *ապա ունենք ինտեգրելիության երկրորդ դեպքը։ Նկատելով, որ* $\nu=3$, *ընդունենք (ընդհանուր կանոնի համաձայն)*

$$t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}, \quad x=(t^3-1)^4, \quad dx=12t^2(t^3-1)^3dt.$$

այդ դեպքում

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=12\int (t^6-t^3)dt=\frac{3}{7}t^4(4t^3-7)+C$$ *և այլն։*

2) $$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\int x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx.$$

Այս անգամ $m=0$, $n=4$, $p=-\frac{1}{4}$. *ինտեգրելիության երրորդ դեպքն է, քանի որ* $\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$։ *Այստեղ* $\nu=4$. *ընդունենք*

$$t=\sqrt[4]{x^{-4}+1}=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}, \quad x=(t^4-1)^{-\frac{1}{4}},$$

$$dx = -t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}\,dt,$$

այնպես որ՝ $\sqrt[4]{1+x^4} = tx = t\,(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}$ և՝

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int \frac{t^2 dt}{t^4-1} =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right)dt - \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{4}\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C,$$

և այլն։

$$3)\qquad \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} = \int x^{-1}(1+x^5)^{-\frac{1}{3}}dx.$$

Այստեղ $m=-1$, $n=5$, $p=-\frac{1}{3}$. ինտեգրելիության երկրորդ դեպքն է $\frac{m+1}{n}=0$. $\nu=3$։ Ընդունենք՝

$$t = \sqrt[3]{1+x^5}, \quad x = (t^3-1)^{\frac{1}{5}}, \quad dx = \frac{3}{5}t^2(t^3-1)^{-\frac{4}{5}}dt.$$

ունենք

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} = \frac{3}{5}\int\frac{t\,dt}{t^3-1} = \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{t-1}{t^2+t+1}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{10}\log\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} + \frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C,$$

և այլն։

268. ԲԵՐՄԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐ. Քանի որ բինոմային դիֆերենցիալի ինտեգրալը կարելի է փոխակերպել

$$J_{p,q} = \int (a+bz)^p z^q dz \qquad (3)$$

տեսքի [տես (2)], ապա հետագայում կսահմանափակվենք հենց այդպիսի ինտեգրալների դիտարկումով։

Ստանանք մի շարք բ ե ր մ ա ն բ ա ն ա ձ և ե ր, որոնց օգնությամբ (3) ինտեգրալը, ընդհանրապես ասած, կարող է արտահայտվել իր նման մի $J_{p',q'}$ ինտեգրալի միջոցով, որտեղ p'-ը և q'-ը տարբերվում են p-ից և q-ից կամավոր ամբողջ թվերով։

Ունենալով հետևյալ նույնությունները՝

$$(a+bz)^{p+1}z^{q}=a(a+bz)^{p}z^{q}+b(a+bz)^{p}z^{q+1},$$

$$\frac{d}{dz}[(a+bz)^{p+1}z^{q+1}]=$$
$$=(p+1)\,b(a+bz)^{p}z^{q+1}+(q+1)(a+bz)^{p+1}z^{q},$$

կգտնենք

$$J_{p+1,\,q}=aJ_{p,\,q}+bJ_{p,\,q+1},$$

$$(a+bz)^{p+1}z^{q+1}=(p+1)\,bJ_{p,\,q+1}+(q+1)J_{p+1,\,q}.$$

Այստեղից ստացվում են առաջին երկու բանաձևերը՝

(I) $$J_{p,\,q}=-\frac{(a+bz)^{p+1}z^{q+1}}{a(p+1)}+\frac{p+q+2}{a(p+1)}J_{p+1,\,q},\quad (p\neq-1)$$

(II) $$J_{p,\,q}=\frac{(a+bz)^{p+1}z^{q+1}}{a(q+1)}-b\,\frac{p+q+2}{a(q+1)}J_{p,\,q+1},\quad (q\neq-1)$$

որոնք թույլատրում են p կամ q ցուցիչը մեկով մեծացնել (եթե նա —1-ից տարբեր է)։

Լուծելով այս հավասարությունները $J_{p+1,\,q}$-ի և $J_{p,\,q+1}$-ի նկատմամբ և փոխարինելով p-ն և q-ն համապատասխանաբար p—1-ով և q—1-ով, կստանանք հետևյալ բանաձևերը՝

(III) $$J_{p,\,q}=\frac{(a+bz)^{p}z^{q+1}}{p+q+1}+\frac{ap}{p+q+1}J_{p-1,\,q},\quad (p+q\neq-1)$$

(IV) $$J_{p,\,q}=\frac{(a+bz)^{p+1}z^{q}}{b(p+q+1)}-\frac{aq}{b(p+q+1)}J_{p,\,q-1},$$

որոնք թույլատրում են p կամ q ցուցիչը մեկով փոքրացնել (եթե միայն p+q գումարը —1-ից տարբեր է)։

Եթե ոչ p-ն, ոչ q-ն, ոչ p+q-ն ամբողջ թվեր չլինեն (այնպես որ $J_{p,\,q}$ ինտեգրալը տարրական ֆունկցիաների միջոցով վերջավոր տեսքով չի արտահայտվում), ապա բերման բանաձևերը կարող են հաջորդաբար կիրառվել առանց որևէ սահմանափակումի։ Դրանց օգնությամբ p և q պարամետրերը կարելի է դարձնել, օրինակ, կանոնավոր կոտորակներ։

Կանգ առնենք մեզ համար ավելի հետաքրքիր դեպքի վրա, երբ ինտեգրալը կարելի է վերջավոր տեսքով վերցնել։ Այդ դեպքում կարելի է ենթադրել, որ p կամ q ցուցիչն է ամբողջ ստացվում, որովհետև $p+q$-ի ամբողջ լինելու դեպքը $z=\frac{1}{u}$ տեղադրումով բերվում է ամբողջ q-ի դեպքին։

Այդ դեպքում, արտածված բանաձևերի հաջորդական կիրառումը թույլատրում է այդ p կամ q ամբողջ ցուցիչը դարձնել 0 (եթե նա դրական էր) կամ -1 (եթե նա բացասական էր)։ Դրանով սովորաբար ինտեգրումը կամ վերջանում է, կամ, համենայն դեպս, բավականին պարզանում է։

Օրինակներ. 1) Դիտարկենք հետևյալ ինտեգրալը*

$$H_m=\int\frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad (m\text{-ը ամբողջ է})։$$

Այստեղ $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$, ուստի m-ը կենտ դեպքում ամբողջ թիվ է լինում $\frac{m+1}{n}=\frac{m+1}{2}$, իսկ m-ը զույգ դեպքում ամբողջ թիվ է լինում $\frac{m+1}{n}+p=\frac{m+1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{m}{2}$, այնպես որ բոլոր դեպքերում ինտեգրալը կարելի է վերջավոր տեսքով վերցնել։ $z=x^2$ տեղադրումով այն կբերենք հետևյալ ինտեգրալին՝

$$\frac{1}{2}\int(1-z)^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{m-1}{2}}dz=\frac{1}{2}J_{-\frac{1}{2},\,\frac{m-1}{2}},$$

Եթե, համարելով, $m>1$, այս վերջին ինտեգրալի նկատմամբ կիրառենք (IV) բանաձևը, ապա կստանանք՝

$$J_{-\frac{1}{2},\,\frac{m-1}{2}}=-2\frac{(1-z)^{\frac{1}{2}}z^{\frac{m-1}{2}}}{m}+\frac{m-1}{m}J_{-\frac{1}{2},\,\frac{m-3}{2}},$$

---

* Նման ձևով կարելի է հետազոտել նաև հետևյալ ինտեգրալները՝

$$\int\frac{x^m}{\sqrt{x^2-1}}dx,\qquad \int\frac{x^m}{\sqrt{x^2+1}}dx։$$

կամ, տված ինտեգրալին վերադառնալով՝

$$H_m = -\frac{1}{m}x^{m-1}\sqrt{1-x^2}+\frac{m-1}{m}H_{m-2}.$$

Այս բանաձևը, m-ի արժեքը 2-ով փոքրացնելով, H_m-ի հաշվումը հաջորդաբար բերում է կամ՝

$$H_1=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}+C,$$

երբ m-ը կենտ թիվ է, կամ թե՝

$$H_0=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C,$$

երբ m-ը զույգ է։

Դիցուք այժմ $m<-1$, այնպես որ $m=-\mu$, $\mu>1$։ Այս անգամ կիրառենք (II) բանաձևը՝

$$J_{-\frac{1}{2},\ \frac{m-1}{2}}=2\frac{(1-z)^{\frac{1}{2}}z^{\frac{m+1}{2}}}{m+1}+\frac{m+2}{m+1}J_{-\frac{1}{2},\ \frac{m+1}{2}},$$

որտեղից՝

$$H_{-\mu}=-\frac{x^{-(\mu-1)}\sqrt{1-x^2}}{\mu-1}+\frac{\mu-2}{\mu-1}H_{-(\mu-2)}.$$

Այս բանաձևի օգնությամբ մենք հնարավորություն ունենք μ-ի արժեքը 2-ով փոքրացնելու և, հաջորդաբար, $H_{-\mu}$-ի հաշվումը բերել կամ՝

$$H_{-1}=\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\log\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C,$$

երբ μ-ն կենտ թիվ է, կամ թե՝

$$H_{-2}=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C,$$

երբ μ-ն զույգ է։

2) Եթե

$$J_{n+1}=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}=\frac{1}{2}\int(a^2+z)^{-(n+1)}z^{-\frac{1}{2}}dz=J_{-(n+1),\ -\frac{1}{2}}$$

$(n=1,2,3,\ldots)$

ինտեգրալի նկատմամբ* կիրառենք (1) բանաձևը՝

$$J_{-(n+1)-\frac{1}{2}}=\frac{(a^2+z)^{-n-\frac{1}{2}}}{na^2}+\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{a^2}J_{-n,-\frac{1}{2}},$$

ապա J_n-ին վերադառնալով, կստանանք մեզ արդեն հայտնի [259, (6)] բերման բանաձևը՝

$$J_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{a^2}J_n.$$

269. $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ ՏԵՍՔԻ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄԸ. ԷՅԼԵՐԻ ՏԵՂԱԴՐՈՒՄՆԵՐԸ։ Անցնում ենք ինտեգրալների շատ կարևոր դասի՝

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx \tag{4}$$

դիտարկմանը։ Ենթադրում ենք, իհարկե, որ քառակուսի եռանդամը հավասար արմատներ չունի, այնպես որ $\sqrt{ax^2+bx+c}$-ն ռացիոնալ արտահայտությամբ չի կարելի փոխարինել։ Մենք կուսումնասիրենք երեք տեղադրում, որոնք էյլերի (L. Euler) տեղադրումներ են կոչվում և որոնց օգնությամբ այստեղ միշտ կարելի է հասնել ընդինտեգրալ արտահայտության ռացիոնալացմանը։

I տեղադրումը կիրառելի է այն դեպքում, երբ $a>0$։ Այս դեպքում ընդունում ենք՝

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x^{**}.$$

Այս հավասարությունը քառակուսի բարձրացնելով և երկու մասերում էլ ax^2 ոչնչացնելով, կստանանք $bx+c=t^2-2\sqrt{a}tx$, այնպես որ

---

* Նման ձևով կարելի է հետազոտել նաև

$$\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}}$$

ինտեգրալը։

** Կարելի է տեղադրել նաև

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t+\sqrt{a}x.$$

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b},$$

$$dx=2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt\text{։}$$

Էյլերյան տեղադրման ամբողջ արժանությունը հենց նրանում է, որ x-ը որոշելու համար առաջին աստիճանի հավասարում է ստացվում այնպես որ x-ը, և դրա հետ միասնաբար նաև $\sqrt{ax^2+bx+c}$ արմատը t-ի միջոցով ռացիոնալ են արտահայտվում։

Եթե ստացված արտահայտությունները (4)-ի մեջ տեղադրենք, հարցը կհանգի t-ի ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրման։ Արդյունքում, x-ին վերադառնալով, պետք է տեղադրել $t=\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x$։

II *տեղադրումը կիրառելի է, երբ* $c>0$։ *Այս դեպքում կարելի է ընդունել՝*

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}\,^*\text{։}$$

Եթե քառակուսի բարձրացնենք, երկու մասերում c-ն ոչնչացնենք և x-ով կրճատենք, ապա կստանանք $ax+b=xt^2+2\sqrt{c}t$՝ *որից՝ x-ի նկատմամբ առաջին աստիճանի հավասարում։ Այստեղից՝*

$$x=\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2},$$

$$dx=2\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{(a-t^2)^2}dt\text{։}$$

Այս տեղադրելով (4)-ի մեջ, ակնհայտորեն, կիրագործենք ընդինտեգրալ արտահայտության ռացիոնալացումը։ Ինտեգրելով, արդյունքում կտեղադրենք $t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}$.

Դիտողություն 1. *Վերը դիտարկված դեպքերը* ($a>0$ *և* $c>0$), *մեկը մյուսին են բերվում* $x=\frac{1}{z}$ *տեղադրումով։ Աս-*

---

* *կամ* $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt-\sqrt{c}$։

տի մեջ կարելի է խուսափել երկրորդ տեղադրման օգտագոր-ծումից։

Վերջապես, III տեղադրումը պիտանի է այն դեպքում, երբ ax^2+bx+c քառակուսի եռանդամն ունի λ և μ (տարբեր) իրական արմատներ։ Այդ դեպքում, ինչպես հայտնի է, այդ եռանդամը վերլուծվում է գծային արտադրիչների՝

$$ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu).$$

Ընդունենք՝

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda).$$

Բարձրացնելով քառակուսի և կրճատելով $x-\lambda$-ով, այստեղ ևս կստանանք առաջին աստիճանի հավասարում՝ $a(x-\mu)=t^2(x-\lambda)$, այնպես որ

$$x=\frac{-a\mu+\lambda t^2}{t^2-a},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(\lambda-\mu)t}{t^2-a},$$

$$dx=\frac{2a(\mu-\lambda)t}{(t^2-a)^2}dt$$

և այլն։

Դիտողություն II։ Արված ենթադրությունների դեպքում, $\sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)}$ արմատը (որոշակիության համար, ասենք, $x>\lambda$) կարելի է ձևափոխել հետևյալ տեսքի՝

$$(x-\lambda)\sqrt{a\frac{x-\mu}{x-\lambda}},$$

այնպես որ դիտարկվող դեպքում

$$R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})=R_1\left(x,\sqrt{a\frac{x-\mu}{x-\lambda}}\right),$$

և, ըստ էության, գործ ունենք n° 266-ում ուսումնասիրված տեսակի դիֆերենցիալի հետ։ Էյլերի III տեղադրումը, որը կարելի է գրել

$$t=\sqrt{a\frac{x-\mu}{x-\lambda}}$$

ձևով, նույնական է արդեն n° 266-ում նշված տեղադրմանը։

Այժմ ցույց տանք, որ Էյլերի միայն I և III տեղադրումները բավական են (4)-ի մեջ ընդինտեգրալ արտահայտության ռացիոնալացումն իրագործելու համար բոլոր հնարավոր դեպքերում։ Իրոք, եթե ax^2+bx+c եռանդամն իրական արմատներ ունի, ապա, ինչպես տեսանք, կիրառելի է III տեղադրումը։ Բայց եթե իրական արմատներ չկան, այսինքն՝ $b^2-4ac<0$, ապա

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4}[(ax+b)^2+(4ac-b^2)]$$

եռանդամը x փոփոխականի բոլոր արժեքների դեպքում a-ի նշանն ունի։ $a<0$ դեպքը մեզ չի հետաքրքրում, որովհետև այդ դեպքում արմատն ամենևին չէր ունենա իրական արժեքներ, իսկ $a>0$ դեպքում կիրառելի է I տեղադրումը։

Այս նկատառումները բերում են դրա հետ միասին հետևյալ ընդհանուր եզրակացությանը՝ (4) տեսակի ինտեգրալները միշտ վերցվում են (ինտեգրվում են) վերջավոր տեսքով, ընդ որում նրանց ներկայացման համար, բացի այն ֆունկցիաներից, որոնց միջոցով արտահայտվում են ռացիոնալ դիֆերենցիալների ինտեգրալները, պետք են նաև միայն քառակուսի արմատներ։

270. ԷՅԼԵՐՅԱՆ ՏԵՂԱԴՐՈՒՄՆԵՐԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՄԵԿՆԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ։ Այնչափ արհեստական թվացող էյլերյան տեղադրումները բոլորն էլ կարող են ստացվել ակնառու երկրաչափական նկատառումներից։

Դիտարկենք երկրորդ կարգի մի կոր՝

$$y=\pm\sqrt{ax^2+bx+c} \text{ կամ } y^2=ax^2+bx+c.$$

Եթե այդ կորի վրա վերցնենք (x_0, y_0) կամավոր կետ, այնպես որ

$$y_0^2=ax_0^2+bx_0+c, \qquad (5)$$

ապա նրանով անցնող $y-y_0=t(x-x_0)$ հատողը կհատի կորը և միայն մեկ (x, y) կետում։ Վերջինիս կոորդինատները կարելի է գտնել հասարակ հաշվումով։ Կորի և հատողի հավասարումներից y-ն արտաքսելով, կստանանք՝

$$[y_0+t(x-x_0)]^2=ax^2+bx+c,$$

որտեղից, հաշվի առնելով (5)-ը՝

$$2y_0t(x-x_0)+t^2(x-x_0)^2 = a(x^2-x_0^2)+b(x-x_0)$$

կամ, $x-x_0$*-ը կրճատելուց հետո՝*

$$2y_0t+t^2(x-x_0)=a(x+x_0)+b.$$

Այսպիսով, երկրորդ հատման կետի x *աբսցիսը, իսկ դրա հետ նաև* y *օրդինատը, արտահայտվում են* t *փոփոխական անկյունային գործակցի ռացիոնալ ֆունկցիաներով։ Ընդ որում ակներև է, որ,* t*-ն պատշաճ կերպով փոփոխելով, կարելի է* (x, y) *կետին ստիպել, որ նա գծի ամբողջ կորը։*

Այժմ պարզ է, որ

$$\sqrt{ax^2+bx+c}-y_0=t(x-x_0)$$

կախումը որոշում է հենց այն տեղադրումը, որը նախահայտարեն ռացիոնալացնում է ընդինտեգրալ արտահայտությունը (4) դեպքում։

Դիցուք ax^2+bx+c *եռանդամն ունի* λ *և* μ *իրական արմատներ. այդ նշանակում է, որ մեր կորը* x *առանցքը հատում է* $(\lambda, 0)$ *և* $(\mu, 0)$ *կետերում. վերցնելով, օրինակ, դրանցից առաջինը* (x_0, y_0) *կետի փոխարեն, կհանգենք Էյլերի* III *տեղադրմանը՝*

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda).$$

Եթե $c>0$*, ապա կորը* y *առանցքը հատում է* $(0, \pm\sqrt{c})$ *կետերում. վերցնելով դրանցից մեկը* (x_0, y_0) *կետի փոխարեն, կստանանք Էյլերի* II *տեղադրումը՝*

$$\sqrt{ax^2+bx+c}\pm\sqrt{c}=tx.$$

Վերջապես, ըստ էության, դատողությունների նույն կարգով *էլ ստացվում է Էյլերի* I *տեղադրումը, միայն թե* (x_0, y_0) *կետի փոխարեն ընդունում ենք կորի անվերջ հեռու կետ։ Այն է՝ ենթադրելով* $a>0$ *(այդ դեպքում կորը հիպերբոլ կլինի), դիտարկենք կորի* $y=\pm\sqrt{a}\,x$ *ասիմպտոտը և սկսենք հատել կորը ասիմպտոտին զուգահեռ* $y=t\pm\sqrt{a}\,x$ *ուղիղներով (նրանք*

կանգնելու վերոհիշյալ անվերջ հեռու կետով)։ Յուրաքանչյուր այդպիսի ուղիղ կորը հատում է երկրորդ (x, y) կետում, որի կոորդինատները t-ի ռացիոնալ ֆունկցիաներ կլինեն։ Այստեղից էլ հետևյալ տեղադրումը՝

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}\,x.$$

271. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ Մեզ արդեն հայտնի են դիտարկվող տեսակին պատկանող երկու հիմնական ինտեգրալներ [267, 9) և 12); 266]՝

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\log|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

Դրանցից ելնելով, կարելի է հաշվել և ուրիշ ինտեգրալներ։

1) $\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}$։ Այս ինտեգրալը հաշվելիս կտարբերենք երկու դեպք՝ $\alpha>0$, $\alpha<0$։

Եթե $\alpha>0$, ապա ինտեգրալը հեշտությամբ փոխարկվում է հիմնականներից առաջինին (եթե $\frac{\beta}{\alpha}=\pm a^2$)՝

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{\beta}{\alpha}}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\log\left|x+\sqrt{x^2+\frac{\beta}{\alpha}}\right|+C.$$

Կարելի է նաև լոգարիթմի արգումենտը α-ով բազմապատկել, որը կմտցնի $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\log\alpha$ լրացուցիչ գումարելի և, հետևապես, միայն C-ի վրա կանդրադառնա։ Վերջնականապես կստանանք՝

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\log|\alpha x+\sqrt{\alpha(\alpha x^2+\beta)}|+C' \quad (\alpha>0) \tag{6}$$

Իսկ եթե $\alpha<0$, այնպես որ $\alpha=-|\alpha|$, ապա արմատը կարտահայտվի $\sqrt{\beta-|\alpha|x^2}$ տեսքով։ Որպեսզի արմատն ընդհանրապես իրական արժեքներ ունենա, անհրաժեշտ է այստեղ ենթադրել $\beta>0$։ Ինտեգրալը կփոխարկվի հիմնական ինտեգրալներից երկրորդին ($\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=a^2$ դնելով), և՝

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}=\frac{1}{\sqrt{|\alpha|}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{|\alpha|}{\beta}}\,x\right)+C \quad (\alpha<0) \tag{7}$$

Տարրական եղանակների օգնությամբ (6), (7) ինտեգրալների են բերվում ուրիշ շատ ինտեգրալներ ևս։ Օրինակ,

2) $\int\sqrt{\alpha x^2+\beta}\,dx$ ինտեգրվում է մասերով՝

$$\int\sqrt{\alpha x^2+\beta}\,dx = x\sqrt{\alpha x^2+\beta}-\int x\,d\sqrt{\alpha x^2+\beta} = x\sqrt{\alpha x^2+\beta}-\int\frac{\alpha x^2}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{\alpha x^2+\beta}-\int\frac{(\alpha x^2+\beta)-\beta}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{\alpha x^2+\beta}-\int\sqrt{\alpha x^2+\beta}\,dx+\beta\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}.$$

Աջ կողմում դարձյալ ստացանք սկզբնական ինտեգրալը, որը ձախ կողմ տեղափոխելով և ամբողջ հավասարությունը 2-ի բաժանելով, կգտնենք՝

$$\int\sqrt{\alpha x^2+\beta}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{\alpha x^2+\beta}+\frac{\beta}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}} \tag{8}$$

Վերջնական արդյունքը ստանալու համար մնում է միայն վերջին ինտեգրալի փոխարեն տեղադրել նրա (6) կամ (7) արտահայտությունը, նայած այն բանին, $\alpha>0$, թե $\alpha<0$։

3) Հետևյալ ինտեգրալները՝

$$(\text{ա})\int\frac{dx}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta}},\qquad (\text{բ})\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\alpha x^2+\beta}},\qquad (\text{գ})\int\frac{dx}{(\alpha x^2+\beta)^{3/2}}$$

հանգում են տրված հայտնի ինտեգրալների, հատուկ տեղադրումով՝ $x=\frac{1}{t}$, $dx=-\frac{1}{t^2}dt$։ Ունենք (որոշակիության համար, դիցուք x և $t>0$)՝

$$3)\ (\text{ա})\int\frac{dx}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta}} = -\int\frac{dt}{\sqrt{\alpha+\beta t^2}}$$

և հետագա հաշվումը կատարվում է ըստ (6) կամ (7) բանաձևի, նայած β-ի նշանին։ Այնուհետև՝

$$(\text{բ})\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\alpha x^2+\beta}} = -\int\frac{t\,dt}{\sqrt{\alpha+\beta t^2}} = -\frac{1}{\beta}\sqrt{\alpha+\beta t^2}+C =$$

$$= -\frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}{\beta x}+C$$

և նման ձևով՝

$$(\text{գ})\int\frac{dx}{(\alpha x^2+\beta)^{3/2}} = -\int\frac{t\,dt}{(\alpha+\beta t^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{\beta}\frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta t^2}}+C = \frac{1}{\beta}\frac{x}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}+C։$$

4) Ընդհանուր արտահայտությունների նույնական ձևափոխությունները վերը արդեն հաշված ինտեգրալներին են բերում, օրինակ, հետևյալ ինտեգրալները՝

$$(\text{ա})\ \int\frac{x^2dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}},\quad (\text{բ})\ \int\frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}{x}dx,\quad (\text{գ})\ \int\frac{x^3}{(\alpha x^2+\beta)^{3/2}}dx։$$

Ունենք՝

$$(\text{ա})\ \int\frac{x^2dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}=\frac{1}{\alpha}\int\frac{(\alpha x^2+\beta)-\beta}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int\sqrt{\alpha x^2+\beta}\,dx-\frac{\beta}{\alpha}\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}$$

կամ, օգտվելով (8) բանաձևից,

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}=\frac{1}{2\alpha}x\sqrt{\alpha x^2+\beta}-\frac{\beta}{2\alpha}\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}$$ և այլն [տես 1)]։

Այնուհետև՝

$$(\text{բ})\ \int\frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}{x}dx=\int\frac{\alpha x^2+\beta}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta}}dx=$$

$$=\alpha\int\frac{x\,dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}+\beta\int\frac{dx}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta}}.$$

Ինտեգրալներից առաջինը միանգամից կարելի է վերցնել, իսկ երկրորդը հաշված է 3)-ում։ Վերջապես՝

$$(\text{գ})\ \int\frac{x^3}{(\alpha x+\beta)^{3/2}}dx=\frac{1}{\alpha}\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}-\frac{\beta}{\beta}\int\frac{dx}{(\alpha x^2+\beta)^{3/2}}$$

[տես 1) և 3)]։

5) Եթե արմատի տակ գտնվում է ax^2+bx+c լրիվ քառակուսի եռանդամ, հաճախ ձեռնտու է գծային տեղադրումով այն երկանդամ դարձնել։ Առանձնացնելով լրիվ քառակուսին՝

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}[(2ax+b)^2+4ac-b^2],$$

ընդունում են $t=2ax+b$։ Այդ ճանապարհով, օրինակ, (6) և (7) բանաձևերից $a>0$ դեպքում ստացվում է

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\log|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\log\left|ax+\frac{b}{2}+\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right|+C', \quad (6^*)$$

իսկ $a<0$ դեպքում՝

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=-\frac{1}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+C. \quad (7^*)$$

6) Այժմ դիմենք էյլերյան տեղադրումներին։ 275, 12)-ի մեջ մենք փաստորեն կիրառել ենք I տեղադրումը հետևյալ ինտեգրալը հաշվելու համար

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}},$$

երկրորդ հիմնական ինտեգրալը՝

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

հայտնի է տարրական նկատառումներից, բայց, պարզաբանելու համար, այնուամենայնիվ նրա նկատմամբ կկիրառենք էյլերյան տեղադրում։

(ա) Եթե նախ օգտվենք III տեղադրումից՝ $\sqrt{a^2-x^2}=t(a-x)$,

$$x=a\frac{t^2-1}{t^2+1}, \qquad dx=\frac{4at\,dt}{(t^2+1)^2}, \quad \sqrt{a^2-x^2}=\frac{2at}{t^2+1}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=2\int \frac{dt}{t^2+1}=2\operatorname{arctg} t+C=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+C$$

Քանի որ տեղի ունի

$$2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\arcsin\frac{x}{a}+\frac{\pi}{2} \qquad (-a<x<a)$$

նույնությունը, ապա այս արդյունքը մեզ արդեն հայտնի արդյունքից լոկ ձևով է տարբերվում։

Ընթերցողը հեշտությամբ կարող է համոզվել, որ ինտեգրալը կարող է տարբեր ձևերով ստացվել, կախված այն բանից, թե հատկապես ինչ մեթոդ է կիրառվել։

(բ) Եթե նույն ինտեգրալի նկատմամբ կիրառենք II տեղադրումը՝ $\sqrt{a^2-x^2}=xt-a$, ապա նման ձևով կստանանք

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-2\int \frac{dt}{t^2+1}=-2\operatorname{arctg} t+C=$$

$$=-2\operatorname{arctg}\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}+C$$

Այստեղ մենք հանդիպում ենք մի այլ հետաքրքրաշարժ հանգամանքի*. այս արդյունքը պիտանի է առանձնաբար $(-a, 0)$ միջակայքի համար և $(0, a)$ միջակայքի համար, որովհետև $x=0$ կետում

$$-2\operatorname{arctg}\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

արտահայտությունն՝ իմաստից զուրկ է։ Այդ արտահայտության սահմանները

* Համեմատել n° 265-ի 3) օրինակը։

որ $x \to -0$ դեպքում և $x \to +0$ դեպքում տարբեր են. նրանք հավասար են, համապատասխանաբար, π և $-\pi$ թվերին։ Չնչյալ միջակայքերի համար C հաստատունի նույնպես տարբեր արժեքներ ընտրելով այնպես, որ նրանցից երկրորդն առաջինից 2π-ով մեծ լինի, կարելի է կազմել մի ֆունկցիա, որն անընդհատ կլինի $(-a, a)$ ամբողջ միջակայքում, եթե նրա արժեքը $x=0$ դեպքում ընդունենք ընդհանուր սահմանն աջից և ձախից։

Այս անգամ ևս ստացանք նախկին արդյունքը միայն այլ ձևով, որովհետև տեղի ունեն հետևյալ նույնությունները

$$-2\,\mathrm{arctg}\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\begin{cases}\arcsin\dfrac{x}{a}-\pi, & 0<x<a \text{ համար}\\[2ex] \arcsin\dfrac{x}{a}+\pi, & -a<x<0 \text{ համար։}\end{cases}$$

7) $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

(ա) Նախ կիրառենք I տեղադրումը՝ $\sqrt{x^2-x+1}=t-x$,

$$x=\frac{t^2-1}{2t-1}, \qquad dx=2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt,$$

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}dt=$$

$$=\int\left[\frac{2}{t}-\frac{3}{2t-1}+\frac{3}{(2t-1)^2}\right]dt=$$

$$=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t-1}+2\log|t|-\frac{3}{2}\log|2t-1|+C։$$

Եթե այստեղ տեղադրենք $t=x+\sqrt{x^2-x+1}$, ապա վերջնականապես կստանանք

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1}-$$

$$-\frac{3}{2}\log|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1|+2\log|x+\sqrt{x^2-x+1}|+C։$$

(բ) Այժմ կիրառենք II տեղադրումը՝ $\sqrt{x^2-x+1}=tx-1$,

$$x=\frac{2t-1}{t^2-1}, \quad dx=-2\frac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2}dt, \quad \sqrt{x^2-x+1}=\frac{t^2-t+1}{t^2-1},$$

$$x+\sqrt{x^2-x+1}=\frac{t}{t-1},$$

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^3}dt=$$

$$=\int\left[\frac{2}{t}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{t-1}-\frac{3}{2}\,\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}\right]dt=$$

$$\frac{3}{t+1}+2\log|t|-\frac{1}{2}\log|t-1|-\frac{3}{2}\log|t+1|+C'.$$

Մնում է այստեղ տեղադրել $t=\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}$, *ակներև պարզացումներից հետո կստանանք*

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{3x}{\sqrt{x^2-x+1}+x+1}+$$

$$+2\log|\sqrt{x^2-x+1}+1|-\frac{1}{2}\log|\sqrt{x^2-x+1}-x+1|-$$

$$-\frac{3}{2}\log|\sqrt{x^2-x+1}+x+1|+C'.$$

Այս արտահայտությունը թեև առաջ ստացվածից ձևով տարբերվում է, բայց $C'=C+\frac{3}{2}$ *դեպքում նրա հետ նույնանում է։*

8) $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}$.

(ա) Քանի որ ենթաինտեգրալային արտահայտության արմատները իրական են, ապա կարելի է կիրառել III *տեղադրումը՝* $\sqrt{a^2-x^2}=t(a-x)$. *այստեղ* $-a<x<a$ *և* $t>0$։ *Ունենք*

$$x=a\frac{t^2-1}{t^2+1},\quad dx=\frac{4at\,dt}{(t^2+1)^2},\qquad \sqrt{a^2-x^2}=\frac{2at}{t^2+1},$$

$$x^2+a^2=\frac{2a^2(t^4+1)}{(t^2+1)^2}$$

և

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{2a^2}\int\frac{2t^2+2}{t^4+1}dt=$$

$$=\frac{1}{2a^2}\int\left[\frac{1}{t^2+t\sqrt{2}+1}+\frac{1}{t^2-t\sqrt{2}+1}\right]dt=$$

$$=\frac{1}{a^2\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}(t\sqrt{2}+1)+\operatorname{arctg}(t\sqrt{2}-1)\right]+C,$$

որտեղ, վերջնական արդյունքը ստանալու համար, դեռևս պետք է տեղադրել

$$t=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}:$$

Օգտվելով արկտանգենսների գումարի բանաձևից, այլև հետևյալ ակնհայտ առնչությունից

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha}=-\operatorname{arctg}\alpha+\frac{\pi}{2} \qquad (\alpha>0 \text{ դեպքում}),$$

արդյունքին կարելի է տալ ավելի պարզ տեսք՝

$$\frac{1}{a^2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a^2-x^2}}+C_1 \qquad \left(\text{որտեղ } C_1=C+\frac{\pi}{2a^2\sqrt{2}}\right):$$

(բ) Եթե նույն ինտեգրալի նկատմամբ կիրառենք II տեղադրումը՝ $\sqrt{a^2-x^2}=tx-a$, ապա կստանանք, որ

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a^2\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)t+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)t\right]+C',$$

երբ $t=\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$: Այս արդյունքը պիտանի է առանձին-առանձին $(-a, 0)$ միջակայքի համար և $(0, a)$ միջակայքի համար: Հեշտ է կռահել, որ փոխելով C' հաստատունի արժեքը x-ի 0-ով անցնելու ժամանակ, կարելի է այն պիտանի դարձնել $(-a, a)$ ամբողջ միջակայքում: Վերջապես, եթե այն ձևափոխենք արկտանգենսների գումարի բանաձևով, ապա նա կընդունի նախորդ արդյունքի ձևը:

9) $$\int\frac{dx}{(x^2+\lambda)\sqrt{x^2+\mu}}:$$

I տեղադրում՝ $\sqrt{x^2+\mu}=t-x$: Ունենք

$$\int\frac{dx}{(x^2+\lambda)\sqrt{x^2+\mu}}=2\int\frac{2t\,dt}{t^4+2(2\lambda-\mu)t^2+\mu^2}=2\int\frac{du}{u^2+2(2\lambda-\mu)u+\mu^2}:$$

Այսպիսով հարցը հանգում է տարրական ինտեգրալի հաշվելուն. արդյունքում հարկավոր է տեղադրել

$$u=t^2=(x+\sqrt{x^2+\mu})^2:$$

272. ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ ՀԱՇՎԵԼՈՒ ԱՅԼ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐ. Թեև Էյլերի տեղադրումները սկզբունքորեն բոլոր դեպքերում լուծում են (4) տիպի ինտեգրալի հաշվումը վերջավոր տեսքով, բայց երբեմն, նրանց կիրառման ժամանակ, նույնիսկ հասարակ դիֆերենցիալները բարդ հաշվումների են բերում. Նկատի առ-

նելով դիտարկվող տիպի ինտեգրալների կարևորությունը, նրանք հաշվելու համար կմատնանշենք ուրիշ եղանակներ ևս։

Կարճության համար, նշանակենք

$$Y=ax^2+bx+c \quad և \quad y=\sqrt{Y}:$$

$R(x, y)$ ռացիոնալ ֆունկցիան կարող է ներկայացվել որպես քանորդ երկու բազմանդամների, որոնք x-ի և y-ի նկատմամբ ամբողջ են. y^2-ն ամեն տեղ Y-ով փոխարինելով, $R(x, y)$-ը կբերենք հետևյալ տեսքին՝

$$R(x, y)=\frac{P_1(x)+P_2(x)y}{P_3(x)+P_4(x)y},$$

որտեղ $P_i(x)$-երը ամբողջ բազմանդամներ են։ Այս կոտորակի համարիչն ու հայտարարը $P_3(x)-P_4(x)y$ արտահայտությամբ բազմապատկելով (և նորից y^2-ն Y-ով փոխարինելով), R-ի համար կստանանք նոր ձև՝

$$R(x, y)=R_1(x)+R_2(x)y:$$

Աջակողմյան գումարելիներից առաջինի ինտեգրալը մենք արդեն կարող ենք վերջավոր տեսքով արտահայտել. հետևապես, մեզ մնում է զբաղվել միայն երկրորդ գումարելիով, որը բազմապատկելով և բաժանելով y-ի, վերջնականորեն կստանանք այսպիսի արտահայտություն՝

$$R^*(x)\frac{1}{y}=R^*(x)\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

որի ինտեգրումով էլ կզբաղվենք։

Ամենից առաջ $R^*(x)$ ռացիոնալ ֆունկցիայից առանձնացնենք $P(x)$ ամբողջ մասը, իսկ կանոնավոր-կոտորակային մասը պատկերացնենք պարզ կոտորակների վերածված [262]։ Այդ դեպքում ստացված արտահայտության ինտեգրումը կհանգի հետևյալ երեք տիպի ինտեգրալներ հաշվելուն՝

$$\text{I.} \int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$$

$$\text{II.} \int \frac{A\,dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

$$\text{III.} \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$$

որտեղ բոլոր գործակիցներն իրական են, իսկ x^2+px+q *եռանդամի արմատները կեղծ են։ Կանգ առնենք դրանցից յուրաքանչյուրի վրա առանձին-առանձին։*

I. *Ընդունենք* ($m=0, 1, 2, \ldots$ *համար*),

$$V_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{Y}}.$$

Այս ինտեգրալների համար հեշտ է ստանալ ռեկուրենտ բանաձև։ Այդ նպատակով, համարելով $m \geq 1$, *վերցնենք ածանցյալ երկու կողմերից՝*

$$(x^{m-1}\sqrt{Y})' = (m-1)\,x^{m-2}\sqrt{Y} + \frac{x^{m-1}Y'}{2\sqrt{Y}} =$$

$$= \frac{2(m-1)\,x^{m-2}(ax^2+bx+c)+x^{m-1}(2ax+b)}{2\sqrt{Y}} =$$

$$= ma\frac{x^m}{\sqrt{Y}} + \left(m-\frac{1}{2}\right)b\frac{x^{m-1}}{\sqrt{Y}} + (m-1)\,c\frac{x^{m-2}}{\sqrt{Y}}$$

և ինտեգրենք ստացված նույնությունը՝

$$x^{m-1}\sqrt{Y} = maV_m + \left(m-\frac{1}{2}\right)bV_{m-1} + (m-1)cV_{m-2}.$$

Այստեղ վերցնելով $m=1$, *կգտնենք*

$$V_1 = \frac{1}{a}\sqrt{Y} - \frac{b}{2a}V_0,$$

այնուհետև ընդունելով $m=2$ (*և* V_1*-ի համար ստացված արտահայտությունն օգտագործելով*), *կստանանք*

$$V_2 = \frac{1}{4a^2}(2ax-3b)\sqrt{Y} + \frac{1}{8a^2}(3b^2-4ac)V_0:$$

Շարունակելով այսպես վարվել, կստանանք ընդհանուր բանաձև՝

$$V_m = P_{m-1}(x)\sqrt{Y} + \lambda_m V_0,$$

որտեղ $P_{m-1}(x)$*-ը՝* $(m-1)$*-րդ աստիճանի բազմանդամ է, իսկ* $\lambda_m = \mathrm{const}$. *Այսպիսով*, բոլոր V_m ինտեգրալները բերվում են V_0-ի։

Եթե I ինտեգրալի մեջ P(x) բազմանդամը n աստիճանի լինի, ապա այդ ինտեգրալը $V_0, V_1, \dots V_n$ ինտեգրալների գծային կոմբինացիա կներկայացնի, ուրեմն և, ըստ նախորդ բանաձևի, կգրվի հետևյալ տեսքով՝

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{Y}}dx = Q(x)\sqrt{Y} + \lambda \int \frac{dk}{\sqrt{Y}}, \tag{9}$$

որտեղ Q(x)-ը՝ (n—1)-րդ աստիճանի մի բազմանդամ է, իսկ $\lambda = \text{const}$։

Q(x) բազմանդամի և λ հաստատունի որոշումը սովորաբար կատարվում է անորոշ գործակիցների մեթոդով։ Դիֆերենցելով (9)-ը և ստացված հավասարությունը բազմապատկելով $\sqrt{Y}$-ով, կստանանք

$$P(x) = Q'(x)(ax^2+bx+c) + \frac{1}{2}Q(x)(2ax+b) + \lambda.$$

Եթե Q(x)-ի փոխարեն այստեղ տեղադրենք (n−1)-րդ աստիճանի բազմանդամ տառային գործակիցներով, ապա երկու մասերում էլ կունենանք n աստիճանի բազմանդամներ։ Նրանց գործակիցները հավասարեցնելով, կստանանք n+1 գծային հավասարումների սիստեմ, որտեղից էլ կորոշվեն Q(x) բազմանդամի n գործակիցները և λ հաստատունը*։

Դիտողություն։ (9) բանաձևն իրականացնում է

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{Y}}dx$$

ինտեգրալից հանրահաշվական մասի առանձնացումը։ Նման առանձնացում կարելի կլիներ կատարել նաև

$$\int \frac{R(x)}{\sqrt{Y}}dx$$

* Ապացուցածից երևում է, որ այդ սիստեմը համատեղ կլինի ազատ անդամների ցանկացած արժեքների դեպքում, իսկ այդպիսի դեպքում նրա դետերմինանտը անհրաժեշտաբար տարբերվում է զրոյից, և սիստեմը միշտ որոշյալ է լինում։ Դրանով զուգընթացաբար հաստատվում է նաև (9) ներկայացման միակությունը։ (Տես էջ 44 և 49)։

ընդհանուր տեսքի ինտեգրալի նկատմամբ, որտեղ R-ը կամավոր ռացիոնալ ֆունկցիայի նշան է։ Դրա վրա մենք կանգ չենք առնում։

$$\text{II.}\ \int \frac{dx}{(x-\alpha)^{k}\sqrt{Y}}\ .$$

ինտեգրալը $x-\alpha=\frac{1}{t}$ տեղադրումով բերվում է հենց նոր դիտարկված ինտեգրալի տիպին։ Իրոք ունենք՝

$$dx=-\frac{dt}{t^2},\quad ax^2+bx+c=\frac{(a\alpha^2+b\alpha+c)t^2+(2a\alpha+b)t+a}{t^2},$$

այնպես որ (որոշակիության համար համարելով $x>\alpha$ և $t>0$)՝

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^{k}\sqrt{ax^2+bx+c}}=$$

$$=-\int \frac{t^{k-1}dt}{\sqrt{(a\alpha^2+b\alpha+c)t^2+(2a\alpha+b)t+a}}\,.$$

Եթե $a\alpha^2+b\alpha+c=0$, այսինքն՝ α-ն Y եռանդամի արմատ է հանդիսանում, ապա գործն ավելի է պարզվում՝ ստանում ենք n° 266-ում դիտարկված տիպի ինտեգրալ։

III. (ա) Դիմելով վերջին ինտեգրալին, դիտարկենք առանձնապես այն դեպքը, երբ ax^2+bx+c եռանդամը միայն a գործակցով է տարբերվում x^2+px+q եռանդամից։ Այդ դեպքում որոնելի ինտեգրալն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}dx.$$

Այս ինտեգրալը հեշտ է ներկայացնել որպես երկու ինտեգրալների գումար՝

$$\frac{M}{2a}\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}\,dx+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}$$

որոնցից առաջինը միանգամից ինտեգրվում է $t=ax^2+bx+c$ *տեղադրումով։*

Մյուս ինտեգրալը՝

$$\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}=\int\frac{dx}{Y^{\frac{2m+1}{2}}}$$

հաշվելու համար ամենից ավելի հարմար է այսպես կոչված Աբելի (N.-H. Abel) *տեղադրումը՝*

$$t=(\sqrt{Y})'=\frac{Y'}{2\sqrt{Y}}=\frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Քառակուսի բարձրացնելով և 4Y-*ով բազմապատկելով, կստանանք*

$$4t^2Y=(Y')^2=4a^2x^2+4abx+b^2$$

հավասարությունը, որը կհանենք հետևյալ հավասարությունից, վերջինս նախապես բազմապատկելով 4a-*ով,*

$$Y=ax^2+bx+c.$$

Արդյունքում կստացվի

$$4(a-t^2)Y=4ac-b^2,$$

որտեղից

$$Y^m=\left(\frac{4ac-b^2}{4}\right)^m\frac{1}{(a-t^2)^m}. \qquad (10)$$

Այժմ դիֆերենցելով

$$t\sqrt{Y}=ax+\frac{b}{2}$$

հավասարությունը, կգտնենք

$$\sqrt{Y}\,dt+t^2dx=a\,dx,$$

այնպես որ

$$\frac{dx}{\sqrt{Y}}=\frac{dt}{a-t^2}. \qquad (11)$$

(11)-ից և (10)-ից՝

$$\frac{dx}{Y^{\frac{2m+1}{2}}}=\left(\frac{4}{4ac-b^2}\right)^m (a-t^2)^{m-1}dt$$

և, վերջապես,

$$\int\frac{dx}{Y^{\frac{2m+1}{2}}}=\left(\frac{4}{4ac-b^2}\right)^m \int(a-t^2)^{m-1}dt: \tag{12}$$

Այսպիսով, հարցն ամբողջապես հանգում է բազմանդամի ինտեգրալ հաշվելուն։

Մասնավորապես, օրինակ, $m=1$ *դեպքում ունենք*

$$\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}}=\frac{2}{4ac-b^2}\,\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

(բ) Ընդհանուր դեպքում նշանակումներն ավելի սիմետրիկ լինելու համար ընդունենք՝

$$ax^2+bx+c=a(x^2+p'x+q'),$$

ընդ որում կարող ենք ենթադրել, որ փակագծերի եռանդամը նույնական չէ x^2+px+q *եռանդամին։ Խնդիր դնենք* x *փոփոխականն այնպես ձևափոխել, որ երկու եռանդամի մեջ էլ միանգամից չքանան առաջին աստիճանի անդամները։*

Դիցուք սկզբում $p\neq p'$*։ Այդ դեպքում, հարմար ձևով ընտրելով* μ *և* ν *գործակիցները, մեր նպատակին կարող ենք հասնել*

$$x=\frac{\mu t-\nu}{t+1} \tag{13}$$

կոտորակա-գծային տեղադրման օգնությամբ։ Ունենք

$$x^2+px+q=$$

$$=\frac{(\mu^2+p\mu+q)t^2+[2\mu\nu+p(\mu+\nu)+2q]t+(\nu^2+p\nu+q)}{(t+1)^2}$$

և նման ձևով՝ երկրորդ եռանդամի համար։ Որոնելի գործակիցները որոշվում են հետևյալ պայմաններից՝

$$2\mu\nu+p(\mu+\nu)+2q=0,\quad 2\mu\nu+p'(\mu+\nu)+2q'=0$$

կամ՝

$$\mu+\nu=-2\frac{q-q'}{p-p'},\quad \mu\nu=\frac{p'q-pq'}{p-p'}.$$

Այսպիսով, μ-ն և ν-ն հետևյալ քառակուսի հավասարման արմատներն են

$$(p-p')z^2+2(q-q')z+(p'q-pq')=0.$$

Որպեսզի այդ արմատներն իրական և տարբեր լինեն* (անհրաժեշտ և) բավարար է հետևյալ պայմանը՝

$$(q-q')^2-(p-p')(p'q-pq')>0. \tag{14}$$

համոզվենք, որ այն տեղի ունի։

Այդ պայմանն արտագրենք համարժեք ձևով՝

$$[2(q+q')-pp']^2>(4q-p^2)(4q'-p'^2). \tag{14*}$$

Տված է, որ $4q-p^2>0$ (որովհետև x^2+px+q եռանդամը կեղծ արմատներ ունի), ուստի (14*) անհավասարությունը նախահայտորեն իրագործելի է, եթե միաժամանակ $4q'-p'^2<0$։ Մնում է ուսումնասիրել այն դեպքը, երբ նաև $4q'-p'^2>0$։ Այդ դեպքում $q>0$, $q'>0$ և $4\sqrt{qq'}>pp'$, և հաջորդաբար ունենք**

$$\begin{aligned}[2(q+q')-pp']^2&\geqslant[4\sqrt{qq'}-pp']^2=\\ &=(4q-p^2)(4q'-p'^2)+4(p\sqrt{q'}-p'\sqrt{q})^2\geqslant\\ &\geqslant(4q-p^2)(4q'-p'^2).\end{aligned}$$

Այստեղ կրկնակի անհավասարության նշանը միանում է հավասարության նշանի հետ, բայց հավասարությունը չի կարող երկու դեպքում էլ միաժամանակ տեղի ունենալ. եթե $q\neq q'$, ապա

* Երբ $\mu=\nu$ տեղադրումն իր իմաստը կորցնում է, որովհետև այն հանգում է $x=\mu$։

** Քանի որ $\frac{q+q'}{2}\geqslant\sqrt{qq'}$։

անշուշտ համասարություն չկա առաջին դեպքում, իսկ երբ $q=q'$, անշուշտ համասարություն չկա երկրորդ դեպքում։ Այսպիսով, (14*) անհամասարությունը, իսկ դրա հետ նաև (14)-ը, ապացուցված են։

Կատարելով տեղադրումը, մենք որոնելի ինտեգրալը կըձևափոխենք

$$\int\frac{P(t)dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\alpha t^2+\beta}}$$

տեսքի, որտեղ $P(t)$-ն $2m-1$ աստիճանի բազմանդամ է (և $\lambda>0$)։ Այժմ ($m>1$ դեպքում) նորից դիմելով

$$\frac{P(t)}{(t^2+\lambda)^m}$$

կոտորակը պարզագույների վերլուծելուն, կհանգենք հետևյալ տեսքի ինտեգրալների գումարին՝

$$\int\frac{At+B}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt \qquad (k=1,\ 2,\ \dots,\ m).$$

Բացառիկ դեպքում, երբ $p=p'$, առաջին աստիճանի անդամների ոչնչացման կարելի է հեշտ հասնել՝ $x=t-\frac{p}{2}$ տեղադրումով, և մենք անմիջականորեն ստանում ենք քիչ առաջ մատնանշված տեսքի ինտեգրալ։

Ստացված ինտեգրալը բնականորեն վերլուծվում է երկու ինտեգրալների՝

$$\frac{A}{\alpha}\int\frac{\alpha t\,dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\alpha t^2+\beta}}+B\int\frac{dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\alpha t^2+\beta}}.$$

Դրանցից առաջինը հեշտությամբ կարելի է հաշվել $u=\sqrt{\alpha t^2+\beta}$ տեղադրումով։ Իսկ երկրորդի նկատմամբ կիրառելի է մեզ արդեն ծանոթ Աբելի տեղադրումը՝

$$u=\frac{\alpha t}{\sqrt{\alpha t^2+\beta}}.$$

Այն է՝ (11)-ի հիման վրա, ունենք

$$\frac{dt}{\sqrt{\alpha t^2+\beta}}=\frac{du}{\alpha-u^2}.$$

Բացի այդ, հեշտ է հաշվել, որ՝

$$t^2+\lambda=\frac{(\beta-\alpha\lambda)u^2+\lambda\alpha^2}{\alpha(\alpha-u^2)}.$$

Ուստի

$$\int\frac{dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\alpha t^2+\beta}}=\alpha^m\int\frac{(\alpha-u^2)^{m-1}}{[(\beta-\alpha\lambda)u^2+\lambda\alpha^2]^m}du,$$

և որոնելի ինտեգրալը ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրալի բերվեց։

Դ ի տ ո ղ ո ւ թ յ ու ն։ Բացի այն, որ սույն n°-*ում (4) տիպի ինտեգրալը հաշվելու մի շարք նոր ձևեր մատնանշեցինք, բերված դատողությունները տալիս են նախկին ապացույցից անկախ ապացույց այն ընդհանուր եզրակացության, որը ձևակերպեցինք* n° **269**-*ի վերջում։*

273. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) $\int\frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$։

Ընդունում ենք՝

$$\int\frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=$$

$$=(ax^2+bx+c)\sqrt{x^2+2x+2}+\delta\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}},$$

որտեղից

$$x^3-x+1=(2x+b)(x^2+2x+2)+(ax^2+bx+c)(x+1)+\delta.$$

Հավասարությունների հետևյալ սիստեմից՝

$$3a=1,\ 5a+2b=0,\ 4a+3b+c=-1,\ 2b+c+\delta=1$$

ստանում ենք $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{5}{6}$, $c=\frac{1}{6}$, $\delta=\frac{5}{2}$։ *Այսպիսով, երբ հաշվի առնենք* n° 271-*ի 5) օրինակը, վերջնականապես կստանանք*

$$\int\frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\frac{1}{6}(2x^2-5x+1)\sqrt{x^2+2x+2}+$$

$$+\frac{5}{2}\log(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+C.$$

2) $$\int\frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}\,.$$

$x-1=\frac{1}{t}$ տեղադրումը (երբ, ասենք, $x>1$ և $t>0$) ինտեգրալը բերում է այսպիսի տեսքի՝

$$-\int\frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-2t^2}}\,.$$

Այս ինտեգրալը հեշտ է հաշվել տարրական միջոցներով [տես 271, 4)]։

Պատասխան՝ $$\frac{1}{4}t\sqrt{1-2t^2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin t\sqrt{2}+C=$$

$$=\frac{1}{4(x-1)^2}\sqrt{x^2-2x-1}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{x-1}+C.$$

3) $$\int\frac{dx}{(2x^2-x+2)^{7/2}}$$

Աբելի

$$t=\frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x+2}}$$

տեղադրումով ինտեգրալը հետևյալ ձևով է փոխակերպվում՝

$$\frac{64}{3375}\int(2-t^2)^2dt.$$

այդ դեպքում կարելի է կամ n° 272, III (ա)-ի ընդհանուր հաշվումները կրկնել մասնավոր դեպքի համար, կամ օգտվել (12) պատրաստի բանաձևերից։

Պատասխան՝ $$\frac{64}{3375}\left\{2\,\frac{4x-1}{(2x^2-x+2)^{1/2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{6}\,\frac{(4x-1)^3}{(2x^2-x+2)^{3/2}}+\frac{1}{160}\,\frac{(4x-1)^5}{(2x^2-x+2)^{5/2}}\right\}+C.$$

4) $$\int\frac{(x+3)\,dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\,.$$

Կոտորակա-գծային

$$x=\frac{\mu t+\nu}{t+1}$$

տեղադրումը տալիս է

$$x^2\pm x+1=\frac{(\mu^2\pm\mu+1)t^2+[2\mu\nu\pm(\mu+\nu)+2]t+(\nu^2\pm\nu+1)}{(t+1)^2}.$$

$$2\mu\nu+(\mu+\nu)+2=0 \text{ կամ } \mu+\nu=0,\ \mu\nu=-1$$

պայմանները բավարարվում են, օրինակ, $\mu=1$, $\nu=-1$ դեպքում: Ունենք՝

$$x=\frac{t-1}{t+1},\quad dx=\frac{2dt}{(t+1)^2},\quad x+3=\frac{4t+2}{t+1},\quad x^2+x+1=\frac{t^2+3}{(t+1)^2}$$

և

$$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\sqrt{3t^2+1}}{t+1},$$

եթե, որոշակիության համար, համարենք $t+1>0$ (այսինքն՝ $x>-1$): Այսպիսով՝

$$\int\frac{(x+3)\,dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{(8t+4)\,dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}},$$

Ստացված ինտեգրալը տրոհվում է երկու ինտեգրալի՝

$$8\int\frac{t\,dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}+4\int\frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}},$$

Առաջինը հեշտությամբ կարելի է հաշվել $u=\sqrt{3t^2+1}$ տեղադրումով և ստացվում է, որ հավասար է $\sqrt{8}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{3t^2+1}{8}}+C'$, երկրորդի նկատմամբ կիրառելի է Աբելի տեղադրումը՝

$$u=\frac{3t}{\sqrt{3t^2+1}},$$

որը նրան հետևյալ տեսքին է բերում՝

$$12\int\frac{du}{27-8u^2}=\frac{1}{6\sqrt{6}}\log\left|\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}\,u}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\,u}\right|+C''.$$

Մնում է միայն վերադառնալ x փոփոխականին:

ձ) $\int\frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}-x^3+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\,dx$

Ցուցում: Ընդինտեգրալ ֆունկցիան ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{2x^4+x^3+2x^2+1}{x+1}-\frac{2x^5+2x^4+3x^3-1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}=(2x^3-x^2+3x-3)+\frac{4}{x+1}-$$

$$-\frac{2x^4+3x^3-3x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{4}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

երկրորդ գումարելիի նկատմամբ կիրառել n° 272, I մեթոդը, իսկ վերջինի նկատմամբ՝ $x+1=\frac{1}{t}$ տեղադրումը:

§ 4. ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ԵՎ ՅՈՒՑՉԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄԸ

274. $R(\sin x, \cos x)dx$ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐԻ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄԸ. *Այս տեսքի դիֆերենցիալները միշտ կարող են ռացիոնալացվել հետևյալ տեղադրումով՝* $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $(-\pi<x<\pi)$. *Իրոք՝*

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x=2\operatorname{arctg} t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

այնպես որ

$$R(\sin x,\ \cos x)dx=R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Այսպիսով՝

$$\int R(\sin x,\ \cos x)dx$$

տիպի ինտեգրալները միշտ ինտեգրվում են վերջավոր տեսքով. դրանց արտահայտության համար, բացի ռացիոնալ դիֆերենցիալների ինտեգրման ժամանակ պատահող ֆունկցիաներից, պետք են նաև միայն եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ:

(1) տիպի ինտեգրալների համար ընդհանրական (ունիվերսալ) հանդիսացող վերոհիշյալ տեղադրումը երբեմն բարդ հաշվումների է բերում. Ստորև նշված են դեպքեր, երբ նպատակին կարելի է հասնել ավելի պարզ տեղադրումների օգնությամբ. Նախապես անենք հետևյալ դիտողությունները հանրահաշվի բնագավառից.

Երբ $R(u, v)$ *ամբողջ կամ կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիան արգումենտներից մեկի, օրինակ,* u*-ի նշանը փոխելու դեպքում իր արժեքը չի փոխում, այսինքն՝ եթե*

$$R(-u,\ v)=R(u,\ v),$$

ապա նա կարող է բերվել

$$R(u,\ v)=R_1(u^2,\ v)$$

տեսքի, որն u*-ի միայն զույգ աստիճաններ է պարունակում։*

Իսկ եթե, ընդհակառակը, u*-ի նշանը փոխելիս* $R(u, v)$ *ֆունկցիան նույնպես փոխում է իր նշանը, այսինքն՝ եթե*

$$R(-u, v) = -R(u, v),$$

ապա նա բերվում է հետևյալ տեսքի՝

$$R(u, v) = R_2(u^2, v)u.$$

այդ անմիջականորեն բխում է նախորդ դիտողությունից, եթե վերջինս կիրառենք $\frac{R(u, v)}{u}$ *ֆունկցիայի նկատմամբ։*

I. *Դիցուք այժմ* $R(u, v)$*-ն փոխում է իր նշանը* u*-ի նշանը փոխելիս. այն ժամանակ*

$$R(\sin x, \cos x)dx = R_0(\sin^2 x, \cos x)\sin x\, dx =$$
$$= -R_0(1 - \cos^2 x, \cos x)d\cos x,$$

և ռացիոնալացման կարելի է հասնել $t = \cos x$ *տեղադրումով։*

II. *Նմանապես, եթե* $R(u, v)$*-ն իր նշանը փոխում է* v*-ի նշանը փոխվելիս, ապա*

$$R(\sin x, \cos x)dx = R_0^*(\sin x, \cos^2 x)\cos x\, dx =$$
$$= R_0^*(\sin x, 1 - \sin^2 x)d\sin x,$$

այնպես որ, այստեղ նպատակահարմար է $t = \sin x$ *տեղադրումը։*

III. *Վերջապես, ենթադրենք, թե* u*-ի և* v*-ի նշանները միաժամանակ փոխվելիս* $R(u, v)$ *ֆունկցիան իր արժեքը չի փոխում*

$$R(-u, -v) = R(u, v).$$

Այս դեպքում u*-ն փոխարինելով* $\frac{u}{v}v$*-ով, կունենանք՝*

$$R(u, v) = R\left(\frac{u}{v}v, v\right) = R^*\left(\frac{u}{v}, v\right).$$

Ըստ R *ֆունկցիայի հատկության, եթե* u*-ի և* v*-ի նշանները փոխենք (*$\frac{u}{v}$ *հարաբերության նշանն այդ դեպքում չի փոխվում), ապա*

$$R^*\left(\frac{u}{v}, -v\right) = R^*\left(\frac{u}{v}, v\right),$$

իսկ այդ դեպքում, ինչպես գիտենք,

$$R^*\left(\frac{u}{v}, v\right) = R_1^*\left(\frac{u}{v}, v^2\right).$$

Ուստի

$$R(\sin x, \cos x) = R_1^*(\operatorname{tg} x, \cos^2 x) = R_1^*\left(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right),$$

այսինքն՝ պարզապես

$$R(\sin x, \cos x) = R(\operatorname{tg} x).$$

Այստեղ նպատակի է հասցնում $t=\operatorname{tg} x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ *տեղադրումը, քանի որ*

$$R(\sin x, \cos x)dx = R(t)\frac{dt}{1+t^2}$$ *և այլն.*

Դիտողություն։ Պետք է ասել, որ ինչպիսին էլ լինի $R(u, v)$ *ռացիոնալ արտահայտությունը, այն միշտ կարելի է ներկայացնել վերը դիտարկված մասնավոր տիպերի երեք արտահայտությունների գումարով։ Օրինակ, կարելի է գրել՝*

$$R(u, v) = \frac{R(u, v) - R(-u, v)}{2} + \frac{R(-u, v) - R(-u, -v)}{2} + \frac{R(-u, -v) + R(u, v)}{2}.$$

Այս արտահայտություններից առաջինն իր նշանը փոխում է u*-ի նշանը փոխելիս, երկրորդն իր նշանը փոխում է* v*-ի նշանը փոխելիս, իսկ երրորդը պահպանում է իր արժեքը* u*-ի և* v*-ի նշանը միաժամանակ փոխելիս։* $R(\sin x, \cos x)$ *արտահայտությունը համապատասխան գումարելիների վերածելով, նրանցից առաջինի նկատմամբ կարելի է կիրառել* $t=\cos x$ *տեղադրումը, երկրորդի նկատմամբ՝* $t=\sin x$ *տեղադրումը և, վերջապես, երրորդի նկատմամբ՝* $t=\operatorname{tg} x$ *տեղադրումը։ Այսպիսով, (1) տիպի ինտեգրալը հաշվելու համար այս երեք տեղադրումները բավական են։*

275. $\sin^{\nu} x \cdot \cos^{\mu} x$ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄԸ. *Ընդունենք, որ ν-ն և μ-ն ռացիոնալ թվեր են, իսկ x փոփոխականը փոփոխվում է $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում։ Այդ դեպքում* $z=\sin^2 x$, $dz=2\sin x \cos x\, dx$ *տեղադրումը տալիս է*

$$\sin^{\nu} x \cos^{\mu} x\, dx = \frac{1}{2} \sin^{\nu-1} x \left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{\mu-1}{2}} 2 \sin x \cos x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} (1-z)^{\frac{\mu-1}{2}} z^{\frac{\nu-1}{2}} dz,$$

այնպես որ, գործը հանգում է բինոմային դիֆերենցիալի ինտեգրման [267]՝

$$\int \sin^{\nu} x \cos^{\mu} x\, dx = \frac{1}{2} \int (1-z)^{\frac{\mu-1}{2}} z^{\frac{\nu-1}{2}} dz = \frac{1}{2} J_{\frac{\mu-1}{2}, \frac{\nu-1}{2}}, \tag{2}$$

Հիշելով բինոմային դիֆերենցիալների ինտեգրելիության դեպքերը, այժմ տեսնում ենք, որ մեզ հետաքրքրող ինտեգրալը վերցվում է վերջավոր տեսքով, 1) եթե $\frac{\mu-1}{2}$*-ն* $\left(\text{կամ } \frac{\nu-1}{2}\text{-ն}\right)$ *ամբողջ թիվ է, կամ 2) եթե* $\frac{\mu+\nu}{2}$*-ն ամբողջ թիվ է, այսինքն՝ եթե* $(\mu+\nu)$*-ն զույգ ամբողջ թիվ է։*

Սրան է վերաբերում, մասնավորապես, նաև այն դեպքը, երբ μ և ν երկու ցուցիչներն էլ ամբողջ են. սակայն, այդ դեպքում $\sin^{\nu} x \operatorname{cox}^{\mu} x$ *արտահայտությունը ռացիոնալ է* $\sin x$*-ի ու* $\cos x$*-ի նկատմամբ, այսինքն՝ պատկանում է նախորդ n°-ում արդեն դիտարկված արտահայտությունների դասին։*

Այդ դեպքում, եթե ν (կամ μ) ցուցիչը կենտ է, ապա $t=\cos x$ *(կամ* $t=\sin x$*) տեղադրումով կարելի է միանգամից ռացիոնալացման հասնել։ Սակայն եթե ν և μ երկու ցուցիչներն էլ զույգ են (նույնպես և եթե երկուսն էլ կենտ են), ապա նույն նպատակի համար կարելի է կիրառել* $t=\operatorname{tg} x$ *կամ* $t=\operatorname{ctg} x$ *տեղադրումը։*

Նկատենք, որ եթե ν և μ երկու ցուցիչներն էլ դրակա զույգ թվեր են, ապա գերադասելի է ուրիշ եղանակ, որ հիմնված է հետևյալ բանաձևերի կիրառման վրա՝

$$\sin x\,\mathrm{cox}\,x=\frac{\sin 2x}{2},\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},$$

Այն է, եթե $\nu=2n$, $\mu=2m$, *ապա* $\nu>\mu$ *դեպքում գրում են*

$$\sin^{2n}x\cos^{2m}x=(\sin x\cos x)^{2m}\sin^{2(n-m)}x=$$

$$=\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^{2m}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^{n-m},$$

իսկ $\nu=\mu$ *դեպքում*

$$\sin^{2n}x\cos^{2m}x=(\sin x\cos x)^{2n}\cos^{2(m-n)}x=$$

$$=\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^{2n}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^{m-n}.$$

Բացված տեսքով կստացվի հետևյալ տեսքի անդամների գումար՝

$$C\sin^{\nu'}2x\cos^{\mu'}2x,$$

որտեղ $\nu'+\mu'\leqslant n+m=\frac{\nu+\mu}{2}$. *Այն անդամները, որոնց* ν' *և* μ *ցուցիչներից գոնե մեկը կենտ թիվ է, հեշտությամբ ինտե գրվում է վերոհիշյալ եղանակով. Մնացած անդամները նման վերլուծման են ենթարկվում, անցնելով* $\sin 4x$*-ին և* $\cos 4x$*-ին և այլն: Քանի որ յուրաքանչյուր վերլուծման ժամանակ ցուցիչների գումարը առնվազն երկու անգամ փոքրանում է, ապա վերլուծման պրոցեսն արագ ավարտվում է։*

Վերադառնանք վերը հաստատված (2) կախմանը. Այժմ կարող ենք օգտվել բինոմային ինտեգրալների բերման բանաձևերից [268], *որպեսզի ընդունելով այնտեղ* $a=1, b=-1$, $p=\frac{\mu-1}{2}$, $q=\frac{\nu-1}{2}$, *դիտարկվող տիպի ինտեգրալների համա արտածենք բերման բանաձևեր։*

Այս ճանապարհով ստացվում են հետևյալ բանաձևեր

(որոնք, իհարկե, կարող են ինքնուրույն կերպով արտածվել)՝

$$\text{(I)} \int \sin^{\nu} x \cos^{\mu} x\, dx = -\frac{\sin^{\nu+1} x \cos^{\mu+1} x}{\mu+1} + \frac{\nu+\mu+2}{\mu+1} \int \sin^{\nu} x \cos^{\mu+2} x\, dx \quad (\mu \neq -1),$$

$$\text{(II)} \int \sin^{\nu} x \cos^{\mu} x\, dx = \frac{\sin^{\nu+1} x \cos^{\mu+1} x}{\nu+1} + \frac{\nu+\mu+2}{\nu+1} \int \sin^{\nu+2} x \cos^{\mu} x\, dx \quad (\nu \neq -1),$$

$$\text{(III)} \int \sin^{\nu} x \cos^{\mu} x\, dx = \frac{\sin^{\nu+1} x \cos^{\mu-1} x}{\nu+\mu} + \frac{\mu-1}{\nu+\mu} \int \sin^{\nu} x \cos^{\mu-2} x\, dx \quad (\nu+\mu \neq 0),$$

$$\text{(IV)} \int \sin^{\nu} x \cos^{\mu} x\, dx = -\frac{\sin^{\nu-1} x \cos^{\mu+1} x}{\nu+\mu} + \frac{\nu-1}{\nu+\mu} \int \sin^{\nu-2} x \cos^{\mu} x\, dx \quad (\nu+\mu \neq 0).$$

Այս բանաձևերն ընդհանրապես թույլատրում են ν կամ μ ցուցիչը 2-ով փոքրացնել (բացի նշված բացառություններից)։ Եթե ν և μ երկու ցուցիչներն էլ ամբողջ թվեր են, ապա բերման բանաձևերի հաջորդական կիրառմամբ կարելի է գործը հանգեցնել հետևյալ ինը տարրական ինտեգրալներից մեկին (որոնք համապատասխանում են ν-ի և μ-ի՝ -1, 0 կամ 1 արժեքների զանազան կոմբինացիաներին)՝

$$1) \int dx = x, \quad 2) \int \cos x\, dx = \sin x,$$

$$3) \int \frac{dx}{\cos x} = \log\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|, \quad 4) \int \sin x\, dx = -\cos x,$$

$$5) \int \sin x \cos x\, dx = \frac{\sin^2 x}{2}, \quad 6) \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\log|\cos x|,$$

$$7) \int \frac{dx}{\sin x} = \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|, \quad 8) \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \log|\sin x|,$$

$$9) \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \log|\operatorname{tg} x|.$$

276. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$։ *Ընդինտեգրալ արտահայտությունը փոխվում է իր նշանը* $\cos x$-*ը* $(-\cos x)$-*ով փոխարինելիս։ Տեղադրումն է* $t = \sin x$.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int t^2(1-t^2)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C:$$

2) $\frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx$։ *Ընդինտեգրալ արտահայտությունն իր նշանը փոխվում է* $\sin x$-*ը* $(-\sin x)$-*ով փոխարինելիս։ Տեղադրումն է* $t = \cos x$։

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx = -\int \frac{t^4 - 2t^2 + 1}{t^4} dt = -t - \frac{2}{t} + \frac{1}{3t^3} + C =$$

$$= -\cos x - \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C։$$

3) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$։ *Ընդինտեգրալ արտահայտությունն իր արժեքը չի փոխվում* $\sin x$-*ը* $(-\sin x)$-*ով և* $\cos x$-*ը* $(-\cos x)$-*ով փոխարինելիս։ Տեղադրումն է* $t = \operatorname{tg} x$՝

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} dt = t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3} + C =$$

$$= \operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C։$$

4) $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$։ *Այստեղ պիտանի է նույն տեղադրումը, բայց ավելի դյուրին է օգտվել անկյան կրկնապատկման բանաձևից՝*

$$\sin^2 x \cos^4 x = \frac{1}{8}\sin^2 2x(\cos 2x + 1) =$$

$$= \frac{1}{8}\sin^2 2x \cos 2x + \frac{1}{16}(1 - \cos 4x)$$

և

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \frac{1}{48}\sin^3 2x + \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + C։$$

5) $\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$։ *Պիտանի է* $t = \sin x$ *տեղադրումը, բայց ավելի դյուրին է դիմել բերման* (II) *բանաձևին՝*

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = -\frac{1}{2\sin x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x} = -\frac{1}{2\sin x} + \frac{1}{2}\log\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C։$$

6) $\frac{dx}{\cos^5 x}$։ *Պիտանի է* $t = \sin x$ *տեղադրումը. բայց ավելի դյուրին է դիմել երկու անգամ բերման* I *բանաձևին՝*

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\cos^3 x},$$

իր հերթին

$$\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos x}=$$

$$=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\log\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+c,$$

այնպես որ

$$\int\frac{dx}{\cos^5 x}=\frac{\sin x}{4\cos^4 x}+\frac{3\sin x}{8\cos^2 x}+\frac{3}{8}\log\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C:$$

7) $\int\frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx$: Կարելի է $t=\cos x$ տեղադրումը, բայց ավելի դյուրին է օգտվել բերման II և III բանաձևերից՝

$$\int\frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx=-\frac{\cos^5 x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}\int\frac{\cos^4 x}{\sin x}dx,$$

$$\int\frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx=\frac{1}{3}\cos^3 x+\int\frac{\cos^2 x}{\sin x}dx=\frac{1}{3}\cos^3 x+\cos x+\log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

այնպես որ (պարզագույն ձևափոխություններից հետո)

$$\int\frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\cos x-\frac{3}{2}\log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C:$$

8) $\int\frac{dx}{\sin x\cos 2x}=\int\frac{dx}{\sin x(2\cos^2 x-1)}$, Տեղադրում է $t=\cos x$

$$\int\frac{dx}{\sin x(2\cos^2 x-1)}=\int\frac{dt}{(1-t^2)(1-2t^2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{1+t\sqrt{2}}{1-t\sqrt{2}}\right|+$$

$$+\frac{1}{2}\log\frac{1-t}{1+t}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x}\right|+\log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C,$$

9) $\int\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$, Քանի որ, $\sin x$-ի և $\cos$-ի նշանները փոփոխելիս ենթինտեգրալ արտահայտությունը փոփոխություն չի կրում, ապա պիտանի է $t=\operatorname{tg} x$ տեղադրումը

$$\int\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{t^2dt}{(1+t)(1+t^2)^2}=\int\left[\frac{1}{4}\frac{1}{t+1}-\frac{1}{4}\frac{t-1}{t^2+1}+\frac{1}{2}\frac{t-1}{(t^2+1)^2}\right]dt=$$

$$=\frac{1}{4}\log\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{1}{4}\frac{1+t}{1+t^2}+C=\frac{1}{4}\log\left|\sin x+\cos x\right|-\frac{1}{4}\cos x\left(\sin x+\cos x\right)+C,$$

10) $\frac{dx}{A\cos^2 x+2B\sin x\cos x+C\sin^2 x}$, երբ $AC-B^2>0$, ենթադրելով,

որ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ կարող ենք $t = \operatorname{tg} x$ տեղադրման օգնությամբ ինտեգրալը բերել հետևյալ տեսքի՝

$$\int \frac{dt}{A + 2Bt + Ct^2} \, ,$$

Պատասխան՝ $$\frac{1}{\sqrt{AC - B^2}} \operatorname{arctg} \frac{C \operatorname{tg} x + B}{\sqrt{AC - B^2}} + C' \, .$$

$$11) \int \frac{dx}{a + b \operatorname{tg} x} = \int \frac{dt}{(a + bt)(1 + t^2)}, \text{ երբ } t = \operatorname{tg} x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right) .$$

Պարզ կոտորակների վերածելով՝

$$\frac{1}{(a+bt)(1+t^2)} = \frac{A}{a+bt} + \frac{Bt + C}{1+t^2} \, ,$$

A, B, C գործակիցները որոշելու համար կստանանք հետևյալ հավասարումները՝

$$A + bB = 0, \; aB + bC = 0, \; A + aC = 1,$$

որտեղից

$$A = \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \; B = -\frac{b}{a^2 + b^2}, \; C = \frac{a}{a^2 + b^2} \, .$$

Պատասխան՝

$$\frac{a}{a^2 + b^2} \operatorname{arctg} t + \frac{b}{a^2 + b^2} \log \frac{a + bt}{\sqrt{1 + t^2}} + C' =$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2} \left[ax + b \log \left| a \cos x + b \sin x \right| \right] + C' \, .$$

12) Այս նույն ինտեգրալին են բերվում հետևյալ երկուսը՝

$$T_1 = \int \frac{\sin x \, dx}{a \cos x + b \sin x}, \qquad T_2 = \int \frac{\cos x \, dx}{a \cos x + b \sin x},$$

Ի միջի այլոց, նրանց հաշվելն ավելի հեշտ է, երբ ելնում ենք նրանց կապող հետևյալ առնչություններից՝

$$bT_1 + aT_2 = \int dx = x + C_1,$$

$$-aT_1 + bT_2 = \int \frac{-a \sin x + b \cos x}{a \cos x + b \sin x} dx = \int \frac{d(a \cos x + b \sin x)}{a \cos x + b \sin x} =$$

$$\log | a \cos x + b \sin x | + C_2,$$

որտեղից և ստանում ենք

$$T_1 = \frac{1}{a^2 + b^2} \left[bx - a \log \left| a \cos x + a \sin x \right| \right] + C,$$

$$T_2=\frac{1}{a^2+b^2}\left[ax+b\log\left|a\cos x+b\sin x\right|\right]+C'$$

13) $\frac{1}{2}\int\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx \qquad (0<r<1,\ -\pi<x<\pi)$:

Այստեղ կիրառենք $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ընդհանրական տեղադրումը։ Ունենք

$$\frac{1}{2}\int\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx=(1-r^2)\int\frac{dt}{(1-r)^2+(1+r)^2t^2}=$$

$$=\operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)+C=\operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

Այս ինտեգրալին է բերվում նաև այսպիսին՝

$$\int\frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}\,dx=\int\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}x+\operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C:$$

14) $\frac{dx}{a+b\cos x}$, *ենթադրելով, որ* $|a|\gtrless|b|$ $(-\pi<x<\pi)$:

Դիցուք, սկզբում $|a|>|b|$ *և (որը չի նսեմացնում ընդհանրությունը)* $a>0$։ *Ինչպես և քիչ առաջ դիտարկված մասնավոր դեպքում.* $=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ *տեղադրումը տալիս է*

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

Այս արտահայտությունը կարելի է ձևափոխել և բերել հետևյալ տեսքի՝

$$\mp\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{a\cos x+b}{a+b\cos x}+C',$$

Ընդ որում վերին նշանն է վերցվում, եթե $0<x<\pi$, *իսկ ստորինը՝ եթե* $-\pi<x<0$, *և* C' *հաստատունի արժեքն աճում է* $\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ *— ով, երբ* x*-ը անցնում է* 0*-ով։*

Դիցուք այժմ $|a|<|b|$ *և* $b>0$։ *Նույն տեղադրումն է*

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x}=\int\frac{2dt}{(b+a)-(b-a)t^2}=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\left|\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\,t}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\,t}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\left|\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C.$$

Այս արտահայտությունը հեշտությամբ ձևափոխվում է հետևյալ տեսքի՝

$$\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\left|\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}\right|+C.$$

$\int\frac{dx}{a+b\sin x}$ *ինտեգրալը նախորդին է բերվում* $x=\frac{\pi}{2}-t$ *տեղադրումով։*

15) Վերջապես, 14) ինտեգրալին է բերվում և $\int\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}$ *ինտեգրալը։ Եթե մտցնենք α անկյունն այնպես, որ*

$$\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}},\quad \sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}},$$

ապա ինտեգրալը կարտագրվի այսպես՝

$$\int\frac{dx}{a+\sqrt{b^2+c^2}\cos(x-\alpha)}$$

և տեղադրումը կլինի $t=x-\alpha$*։ Իհարկե այստեղ ևս հետաքրքիր է* $a\gtrless\sqrt{b^2+c^2}$ *դեպքը։*

277. *ԱՅԼ ԴԵՊՔԵՐԻ ԱԿՆԱՐԿ.* 259, *4)-ում մենք արդեն տեսանք, թե ինչպես են ինտեգրվում*

$$P(x)e^{ax}\,dx,\quad P(x)\sin bx\,dx,\quad P(x)\cos bx\,dx$$

տեսքի արտահայտությունները, որտեղ $P(x)$*-ը՝ ամբողջ բազմանդամ է։ Հետաքրքրական է նշել, որ*

$$\frac{e^x}{x^n}dx,\quad \frac{\sin x}{x^n}dx,\quad \frac{\cos x}{x^n}dx\quad (n=1,2,3,\ldots)$$

կոտորակային արտահայտություններն արդեն չեն ինտեգրվում վերջավոր տեսքով։

Մասերով ինտեգրման օգնությամբ հեշտ է այդ արտահայտությունների ինտեգրալների համար ռեկուրենտ բանաձևեր ստանալ և բերել դրանք, համապատասխանաբար, հետևյալ երեք հիմնական ինտեգրալներին՝

I. $\int\frac{e^x}{x}dx=\int\frac{dy}{\log y}=\mathrm{li}\,y$* (*«ինտեգրալային լոգարիթմ»*).

* *Տեղադրում է* $x=\log y$:

II. $\int \frac{\sin x}{x} dx = \operatorname{si} x$ («*ինտեգրալային սինուս*»),

III. $\int \frac{\cos x}{x} dx = \operatorname{ci} x$ («*ինտեգրալային կոսինուս*»)*

Մենք արդեն գիտենք հետևյալ ինտեգրալները [259,6)]՝

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2+b^2} e^{ax} + C,$$

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2+b^2} e^{ax} + C:$$

Դրանցից ելնելով, կարելի է վերջավոր տեսքով գտնել հետևյալ ինտեգրալները՝

$$\int x^n e^{ax} \sin bx\, dx, \quad \int x^n e^{ax} bx\, dx,$$

որտեղ n=1,2,3... *Այն է՝ մասերով ինտեգրելով, կստանանք*

$$\int x^n e^{ax} \sin bx\, dx = x^n \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2+b^2} e^{ax} -$$

$$-\frac{na}{a^2+b^2}\int x^{n-1} e^{ax} \sin bx\, dx + \frac{nb}{a^2+b^2}\int x^{n-1} e^{ax} \cos bx\, dx,$$

$$\int x^n e^{ax} \cos bx\, dx = x^n \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2+b^2} e^{ax} -$$

$$-\frac{nb}{a^2+b^2}\int x^{n-1} e^{ax} \sin bx\, dx - \frac{na}{a^2+b^2}\int x^{n-1} e^{ax} \cos bx\, dx:$$

Այս ռեկուրենտ բանաձևերը թույլատրում են մեզ հետաքրքրող ինտեգրալները բերել n=0 *դեպքին*.

Եթե P(...)-*ն առաջվա պես ամբողջ բազմանդամ հասկանանք, ապա որպես վերջնական արդյունք կարելի է պնդել, որ վերջավոր տեսքով վերցվում են հետևյալ ինտեգրալները*՝

---

* *Ի միջի այլոց, բոլոր երեք դեպքերում պետք է նաև կամավոր հաստատուն ֆիքսել. այդ կարգի հետագայում։*

$$\int p(x, e^{a'x}, e^{a''x}, \ldots, \sin b'x, \sin b''x, \ldots, \cos b'x, \cos b''x, \ldots)\,dx,$$

որտեղ $a', a'', b', b'', \ldots$՝ *հաստատուններ են։*

Ակներևաբար գործը հանգում է

$$x^n e^{ax} \sin^{k'} b'x \sin^{k''} b''x \ldots \cos^{m'} b'x \ldots$$

արտահայտության ինտեգրման։ Եթե օգտագործենք

$$\sin^2 bx = \frac{1-\cos 2bx}{2},$$

$$\sin b'x \sin b''x = \frac{1}{2}[\cos(b'-b'')x - \cos(b'+b'')x]$$

և սրանց նման տարրական եռանկյունաչափական բանաձևեր, ապա դիտարկվող արտահայտությունը հեշտ է վերածել $Ax^n e^{ax} \sin bx$ *և* $Bx^n e^{ax} \cos bx$ *տիպի գումարելիների, որոնց հետ վարվելու ձևն արդեն գիտենք։*

§ 5. ԷԼԻՊՏԻԿ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

278. ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄՆԵՐ։ *Դիտարկենք*

$$\int R(x, y)\,dx \tag{1}$$

տեսքի ինտեգրալը, որտեղ y*-ը* x*-ի հանրահաշվական ֆունկցիա է, այսինքն՝* [195] *բավարարում է*

$$P(x, y) = 0 \tag{2}$$

հանրահաշվական հավասարմանը (այստեղ P*-ն* x*-ի և* y*-ի նկատմամբ ամբողջ բազմանդամ է)։ Այս տեսակի ինտեգրալները ստացել են աբելյան ինտեգրալներ անունը։ Դրանց թվին են պատկանում § 3-ում ուսումնասիրված ինտեգրալները՝*

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx, \quad \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx.$$

Իրոք,

$$y = \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \quad y = \sqrt{ax^2+bx+c}$$

ֆունկցիաները բավարարում են, համապատասխանաբար,

$$(\gamma x+\delta)y^m-(ax+\beta)=0, \quad y^2-(ax^2+bx+c)=0$$

հանրահաշվական հավասարումներին։

Կանգնելով երկրաչափական տեսակետի վրա, աբելյան (1) ինտեգրալը կապված են համարում այն հանրահաշվական կորի հետ, որը որոշված է (2) հավասարումով։ Օրինակ,

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx \qquad (3)$$

ինտեգրալը կապված է $y^2=ax^2+bx+c$ *երկրորդ կարգի կորի հետ։ (2) կորի հատկություններից է կախված, թե արդյոք ընդհանրապես (1) ինտեգրալը կարտահայտվի՞ վերջավոր տեսքով, թե ոչ։*

Եթե (2) կորը կարելի լինի ներկայացնել պարամետրական տեսքով՝

$$x=r_1(t), \quad y=r_2(t)$$

այնպես, որ $r_1(t)$ և $r_2(t)$ ֆունկցիաները ռացիոնալ լինեն (այդ դեպքում կորը ունիկուրսալ կոր է կոչվում*, ապա (1) ինտեգրալի մեջ հնարավոր է դառնում ընդինտեգրալ արտահայտության ռացիոնալացումը: $x=r_1(t)$ *տեղադրումով այն բերվում է հետևյալ տեսքին՝*

$$R(r_1(t), \quad r_2(t))r_1'(t)dt,$$

և ինտեգրալը վերցվում է վերջավոր տեսքով։ Հենց այս դասին են պատկանում վերոհիշյալ երկու դեպքերը։ Մասնավորապես, (3) տիպի ինտեգրալի ընդինտեգրալ արտահայտության ռացիոնալացման հնարավորությունը կապված է հենց այն փաստի հետ, որ երկրորդ կարգի կորն ունիկուրսալ կոր է [269, 270]։

Սակայն նման հանգամանքը որոշ իմաստով բացառություն է հանդիսանում։ Ընդհանուր դեպքում (2) կորն ունիկուրսալ կոր չէ, իսկ այդ ժամանակ, ինչպես կարելի է ապացուցել, (1) ինտեգրալը նախանձայտորեն ոչ միշտ, այսինքն՝

* *Կարելի է տալ ունիկուրսալ կորի նաև զուտ երկրաչափական բնութագիրը, բայց մենք դրա վրա կանգ չենք առնի։*

ոչ ամեն մի R ֆունկցիայի դեպքում, կարող է արտահայտվել վերջավոր տեսքով (թեև դրա հնարավորությունը բացառված չէ առանձին կոնկրետ R-երի համար):

Այդ բանին մենք արդեն հանդիպում ենք հետևյալ ինտեգրալների կարևոր դասը դիտարկելիս՝

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}\right)dx,$$
$$\int R\left(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}\right)dx, \qquad (4)$$

որոնք 3-րդ կամ 4-րդ աստիճանի բազմանդամներից քառակուսի արմատներ են պարունակում և ընդհանուր (3) ինտեգրալներին են հարում։ (4) տեսքի ինտեգրալները, որպես կանոն, արդեն չեն արտահայտվում տարրական ֆունկցիաների միջոցով վերջավոր տեսքով: *Այդ պատճառով էլ դրանց հետ ծանոթանալը մենք զգել ենք եզրափակիչ պարագրաֆի մեջ, որպեսզի գլխավորապես վերջավոր տեսքով վերցվող ինտեգրալների դասի ուսումնասիրությանը նվիրված սույն գլխի շարադրման հիմնական գիծը չընդհատենք։*

Ենթադրվում է, որ (4)-ի ենթարմատային բազմանդամներն իրական գործակիցներ ունեն։ Բացի այդ, միշտ կհամարենք, որ նրանք բազմապատիկ արմատներ չունեն, որովհետև հակառակ դեպքում գծային արտադրիչն արմատի տակից կարելի կլիներ դուրս հանել. հարցը կհանգեր արդեն առաջ ուսումնասիրված տիպերին պատկանող արտահայտությունների ինտեգրման, և ինտեգրալը վերջավոր տեսքով կարտահայտվեր։ Վերջին հանգամանքը կարող է տեղի ունենալ երբեմն նաև բազմապատիկ արմատների բացակայության դեպքում. օրինակ, հեշտ է ստուգել, որ

$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} + C,$$

$$\int \frac{5x^3+1}{\sqrt{2x^3+1}}dx = x\sqrt{2x^3+1} + C.$$

(4) տիպի արտահայտությունների ինտեգրալներն ընդհանրապես անվանում են էլիպտիկ ինտեգրալներ [կապված այն հանգամանքի հետ, որ առաջին անգամ դրանց հանդիպել են էլիպսի ուղղման խնդիրը լուծելիս, 322, 8)]։ Ի միջի այլոց, այդ անունը, ստույգ իմաստով, սովորաբար վերագրում են այդ ինտեգրալներից նրանց, որոնք վերջավոր տեսքով չեն վերցվում, իսկ մյուսները, քիչ առաջ բերվածների նմանները, անվանում են պսևդոէլիպտիկ (կեղծ էլիպտիկ)։

(4) արտահայտությունների ինտեգրալների ուսումնասիրությունը և նրանց արժեքների համար աղյուսակներ կազմելը a, b, c, ..., կամավոր գործակիցների դեպքում, իհարկե, դժվարին գործ է։ Ուստի բնական է ցանկանալ այդ բոլորը բերել սակավ թվով այնպիսի ինտեգրալների, որոնց կազմի մեջ հնարավորին չափ քիչ կամավոր գործակիցներ (պարամետրներ) մտնեն։

Դրան կարելի է հասնել տարրական ձևափոխումների օգնությամբ, որ կդիտարկենք հաջորդ nn°-ում։

279. ՕԺԱՆԴԱԿ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒՄՆԵՐ։ 1° Ամենից առաջ, նկատենք, որ բավական է սահմանափակվել արմատի տակ 4-րդ աստիճանի բազմանդամի դեպքով, որովհետև հեշտությամբ դրան է բերվում և այն դեպքը, երբ արմատի տակ 3-րդ աստիճանի բազմանդամ է։ Իրոք, իրական գործակիցներ ունեցող ax^3+bx^2+cx+d 3-րդ աստիճանի բազմանդամն անպայման իրական արմատ ունի [80], ասենք՝ λ, և, հետևապես, թույլատրում է իրական վերլուծում՝

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\lambda)(x^2+px+q).$$

Հենց $x-\lambda=t^2$ (կամ $x-\lambda=-t^2$) տեղադրումն էլ իրականացնում է պահանջված ձևափոխությունը՝

$$\int R(x, \sqrt{ax^3+\ldots})\,dx=\int R(t^2+\lambda, t\sqrt{at^4+\ldots})\,2t\,dt.$$

Այսուհետև կդիտարկենք միայն այնպիսի դիֆերենցիալներ, որոնք պարունակում են արմատ 4-րդ աստիճանի բազմանդամից։

2° Ըստ հանրահաշվի հայտնի թեորեմայի, իրական գործակիցներով չորրորդ աստիճանի բազմանդամը կարող է ներկա-

յացվել դարձյալ իրական գործակիցներ ունեցող երկու քառակուսի եռանդամների արտադրյալի տեսքով՝

$$ax^4+bx^3+cx^2+\partial x+e=$$

$$=a(x^2+px+q)(x^2+p'x+q'). \qquad (5)$$

Այժմ աշխատենք պատշաճ տեղադրումով երկու եռանդամի մեջ էլ միանդամից ոչնչացնել առաջին աստիճանի անդամները։ Նման խնդրի հետ մենք արդեն գործ ենք ունեցել 272, III (բ)-ում։

Եթե $p=p'$, ապա մեր նպատակին ենք հասնում, ինչպես նշվել է, $x=t-\frac{p}{2}$ հասարակ տեղադրումով։ Այժմ դիցուք, $p\neq p'$. այդ դեպքում, ինչպես և վերևում, կօգտվենք կոտորակա-գծային տեղադրումից՝

$$x=\frac{\mu t+\nu}{t+1},$$

μ և ν գործակիցների համար իրական և ընդսմին տարբեր արժեքներ որոշելու հնարավորությունը. ինչպես տեսանք, պայմանավորված է հետևյալ անհավասարությամբ՝

$$(q-q')^2-(p-p')(p'q-pq')>0. \qquad (6)$$

Այս անհավասարությունը մենք արդեն ապացուցել ենք ենթադրելով, որ դիտարկվող եռանդամներից մեկը կեղծ արմատներ ունի, և այդ բանը մեր դատողությունների մեջ էական դեր է խաղացել։ Իսկ այժմ, դիցուք (5) եռանդամները երկուսն էլ իրական արմատներ ունեն, ասենք, առաջինը՝ α և β արմատներ, իսկ երկրորդը՝ γ և δ։ Տեղադրելով

$$p=-(\alpha+\beta),\quad q=\alpha\beta,\quad p'=-(\gamma+\delta),\quad q'(\gamma\delta),$$

(6)-ը կարելի է արտագրել այսպես

$$(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)>0. \qquad (6')^*$$

Իսկ այս հավասարությունն իրականացնելու համար բավական է միայն հոգ տանել, որ եռանդամների արմատները չընդմիջ-

վեն (օրինակ, որպեսզի լինի՝ $\alpha>\beta>\gamma>\delta$), իսկ այդ մեզնից է կախված*։

Այսպիսով, հարմար կերպով ընտրելով μ և ν, նշված տեղադրման օգնությամբ կստանանք՝

$$\int R(x, \sqrt{ax^4+\ldots})dx=$$

$$=\int R\left(\frac{\mu t+\nu}{t+1}, \frac{\sqrt{(M+Nt^2)(M'+N't^2)}}{(t+1)^2}\right)\frac{\mu-\nu}{(t^2+1)^2}dt,$$

որը կարող ենք (եթե բացառենք վերասերման դեպքերը, երբ M, N, M', N' գործակիցներից որևէ մեկը զրո է լինում) արտագրել այսպես՝

$$\int R(t, \sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)})dt,$$

երբ A, m և m' թվերը տարբեր են զրոյից։

3° n° 272-ի սկզբում կիրառված համանման նկատառումների օգնությամբ այս ինտեգրալը, ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրալի ճշտությամբ, կարելի է այսպիսի ինտեգրալի բերել՝

$$\int \frac{R^*(t)}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}}dt.$$

Այժմ $R^*(t)$ ռացիոնալ ֆունկցիան երկու գումարելիների վերածենք՝

$$R^*(t)=\frac{R^*(t)+B^*(-t)}{2}+\frac{R^*(t)-B^*(-t)}{2}.$$

---

* Զուգընթացաբար նկատենք, որ (6) անհավասարությունը (6′) տեսքով ներկայացնելը կարող է օգտագործվել նրա ապացուցման համար և այն դեպքերում, երբ α, β, ... արմատներն իրական չեն։ Եթե միայն առաջին եռանդամն ունի ոչ իրական արմատներ, այսինքն՝ կոմպլեքս համալուծ α և β արմատներ, իսկ γ և δ թվերն իրական են, ապա $\alpha-\gamma$ և $\beta-\gamma$ արտադրիչները համալուծ կլինեն, այնպես որ նրանց արտադրյալը, ինչպես հայտնի է, դրական իրական թիվ կլինի. նույնը վերաբերում է նաև $\alpha-\delta$ և $\beta-\delta$ արտադրիչներին։ Բայց եթե ինչպես α, β, այնպես էլ γ, δ արմատները զույգ-զույգ համալուծ կոմպլեքս թվեր են, ապա համալուծ կլինեն նաև $\alpha-\gamma$ և $\beta-\delta$, ինչպես և $\alpha-\delta$ և $\beta-\gamma$ արտադրիչները, և նրանց արտադրյալները դարձյալ դրական իրական թվեր կտան։

Դրանցից առաջինը, t-ն −t-ով փոխարինելիս, իր նշանը չի փոխում, հետևաբար, բերվում է t^2-ի ռացիոնալ ֆունկցիայի՝ $R_1(t^2)$, իսկ երկրորդը նշված փոխարինման ժամանակ իր նշանը փոխում է, ուստի ունի $R_2(t^2)t$ տեսքը*։ Դիտարկվող ինտեգրալը կներկայացվի երկու ինտեգրալների գումարի տեսքով՝

$$\int\frac{R_1(t^2)dt}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}}+\int\frac{R^2(t^2)t\,dt}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}}.$$

Սակայն դրանցից երկրորդը $u=t^2$ տեղադրումով միանգամից բերվում է տարրական ինտեգրալի՝

$$\frac{1}{2}\int\frac{R_2(u)du}{\sqrt{A(1+mu)(1+m'u)}},$$

որը վերցվում է վերջավոր տեսքով։ Այսպիսով, հետագա հետազոտության ենթակա է միայն հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int\frac{R(t^2)dt}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}}. \tag{7}$$

280. ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ՁԵՎԻ ԲԵՐԵԼԸ։ Վերջապես, ցույց տանք, որ (7) տիպի յուրաքանչյուր ինտեգրալ կարող է ներկայացվել հետևյալ ձևով՝

$$\int\frac{R(z^2)dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \tag{8}$$

որտեղ k-ն մի որոշ կանոնավոր կոտորակ է՝ $0<k<1$։ Այս ձևը *կ ա ն ո ն ա կ ա ն* անվանենք։

Կարճության համար նշանակենք՝

$$y=\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}.$$

Չնսեմացնելով ընդհանրությունը, թույլատրելի է համարել այստեղ $A=\pm1$. բացի այդ, որոշակիության համար սահմանափակվենք t-ի դրական արժեքներով։ Այժմ դիտարկենք A-ի, m-ի, m′-ի նշանների զանազան հնարավոր կոմբինացիա-

*Տես դիտողությունները համանման դեպքի առթիվ n 274-ում։

ներ և յուրաքանչյուր դեպքի համար այնպիսի տեղադրումը ցույց տանք, որը (8) ինտեգրալն անմիջականորեն կանոնական ձևի է բերում.

1) $A=+1$, $m=-h^2$, $m'=-h'^2$ $(h>h'>0$. *Որպեսզի արմատը իրական արժեքներ ունենա, պետք է լինի* $t<\frac{1}{h}$ *կամ* $t>\frac{1}{h'}$. *Ընդունենք՝*

$$ht=z, \text{ որտեղ } 0<z<1 \text{ կամ } z>\frac{h}{h'}.$$

Այդ դեպքում՝

$$\frac{dt}{y}=\frac{dz}{h\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h'^2}{h^2}z^2\right)}},$$

այնպես որ այստեղ $\frac{h'}{h}$*-ը պետք է ընդունել* k.

2) $A=+1$, $m=-h^2$, $m'=h'^2$ $(h, h'>0)$. *Որպեսզի արմատն իրական արժեքներ ունենա, սահմանափակվենք* $t<\frac{1}{h}$ *արժեքներով. Ընդունում ենք՝*

$$ht=\sqrt{1-z^2}, \text{ որտեղ } 0\leqslant z\leqslant 1.$$

Այդ դեպքում՝

$$\frac{dt}{y}=-\frac{1}{\sqrt{h^2+h'^2}}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h'^2}{h^2+h'^2}z^2\right)}},$$

և կարելի է վերցնել $k=\frac{h'}{\sqrt{h^2+h'^2}}$.

3) $A=+1$, $m=h^2$, $m'=h'^2$ $(h>h'>0$. *Այստեղ* t*-ի փոփոխությունը ոչնչով չի սահմանափակված. Ընդունում ենք*

$$ht=\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}, \text{ որտեղ } 0\leqslant z<1.$$

Այս դեպքում

$$\frac{dt}{y}=\frac{dz}{h\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}z^2\right)}},$$

և $k=\dfrac{\sqrt{h^2-h'^2}}{h}$։

4) $A=-1$, $m=-h^2$, $m'=h'^2$ $(h,\ h'>0)$։ Այժմ t-ի փոփոխությունը սահմանափակված է $t>\dfrac{1}{h}$ անհավասարությամբ։ Վերցնում ենք

$$ht=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}},\ \text{որտեղ}\ 0<z<1,$$

այնպես որ

$$\frac{dt}{y}=\frac{dz}{\sqrt{h^2+h'^2}\sqrt{(1-z^2)\left(1-\dfrac{h^2}{h^2+h'^2}z^2\right)}}$$

և $k=\dfrac{h}{\sqrt{h^2+h'^2}}$։

5) $A=-1$, $m=-h^2$, $m'=-h'^2$ $(h>h'>0)$։ Այստեղ t փոփոխականը կարող է փոփոխվել միայն $\dfrac{1}{h}$-ի և $\dfrac{1}{h'}$-ի միջև։ Ընդունում ենք՝

$$h't=\sqrt{1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}z^2},\ \text{որտեղ}\ 0<z<1։$$

Ունենք՝

$$\frac{dt}{y}=-\frac{dz}{hh'\sqrt{(1-z^2)\left(1-\dfrac{h^2-h'^2}{h^2}z^2\right)}}$$

և $k=\dfrac{\sqrt{h^2-h'^2}}{h}$։ Սրանով սպառվում են բոլոր հնարավոր դեպքերը, որովհետև այն դեպքում, երբ $A=-1$ և երկու թվերն էլ՝ $m,\ m'>0$, արմատն ընդհանրապես իրական արժեքներ չէր կարող ունենալ։ $R_1(t^2)$ արտադրիչի մասին մենք ոչինչ չասացինք, որովհետև նա բոլոր դեպքերում, ակներևորեն, z^2-ի ռացիոնալ ֆունկցիայի է փոխակերպվում։

Նշենք նաև, որ (8) ինտեգրալը դիտարկելիս կարող ենք սահմանափակվել $z<1$ արժեքներով. $z>\dfrac{1}{k}$ դեպքը դրան է բերվում $kz=\dfrac{1}{\zeta}$ տեղադրումով, որտեղ $\zeta<1$։

281. 1-ԻՆ, 2-ՐԴ ԵՎ 3-ՐԴ ՏԵՍԱԿԻ ԷԼԻՊՏԻԿ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ. Այժմ մնում է ուսումնասիրել (8) տեսքի ինտեգրալներից պարզագույնները, որոնց կարող էին բերվել այդ տեսքի բոլոր ինտեգրալները և, հետևապես, վերջին հաշվով, նաև ընդհանրապես բոլոր էլիպտիկ ինտեգրալները։

(8) ընդինտեգրալ արտահայտության մեջ գտնվող $R(x)$ ռացիոնալ ֆունկցիայից առանձնացնենք $P(x)$ ամբողջ մասը, իսկ նրա կանոնավոր-կոտորակային մասը պարզ կոտորակների վերլուծենք։ Եթե հայտարարի համալուծ կոմպլեքս արմատները չմիավորենք (ինչպես այն անում էինք 262-ում), այլ դրանք զատ-զատ դիտարկենք, ինչպես իրական արմատներն էինք դիտարկում, ապա $R(x)$-ը կներկայանա որպես գումար x^n ($n=0, 1, 2, \ldots$) աստիճանների և $\frac{1}{(x-a)^m}$ ($m=1, 2, 3,\ldots$) տեսքի կոտորակների (որտեղ a-ն կարող է լինել նաև կեղծ թիվ), բազմապատկած թվային գործակիցներով։ Այստեղից պարզ է, որ (8) ինտեգրալը, ընդհանուր դեպքում, հետևյալ ինտեգրալների գծային ագրեգատ է,

$$I_n=\int\frac{z^{2n}dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (n=0, 1, 2, \ldots) \quad \text{և} \quad H_m=\frac{dz}{(z^2-a)^m\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (m=1, 2, \ldots)$$

Կանգ առնենք I_n ինտեգրալների վրա։ Եթե ինտեգրենք (հեշտությամբ ստուգվող) հետևյալ նույնությունը՝

$$[z^{2n-3}\sqrt{(1=z^2)(1-k^2z^2)}]'=$$

$$=(2n-3)z^{2n-4}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}+$$

$$+z^{2n-3}\frac{2k^2z^3-(k^2+1)z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=$$

$$=\frac{(2n-1)k^2z^{2n}-(2n-2)(k^2+1)z^{2n-2}+(2n-3)z^{2n-4}}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

ապա կստացվի երեք հաջորդական I ինտեգրալներ կապող ռեկուրենտ առնչությունը՝

$$(2n-1)k^2I_n-(2n-2)(k^2+1)I_{n-1}+(2n-3)I_{n-2}=$$

$$=z^{2n-3}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}, \tag{9}$$

Այստեղ ընդունելով $n=2$, կարտահայտենք I-ը I_0-ի և I_1-ի միջոցով. եթե վերցնենք $n=3$, և I-ի փոխարեն տեղադրենք նրա արտահայտությունը I_0-ի և I-ի միջոցով, ապա I_3-ը նույնպես այդ նույն ինտեգրալների միջոցով կարտահայտվի։ Այսպես

շարունակելով, հեշտ է համոզվել, որ $I_n (n \geqslant 2)$ *ինտեգրալներից յուրաքանչյուրն արտահայտվում է* I_0*-ի և* I_1*-ի միջոցով, և նույնիսկ, հաշվի առնելով (9)-ը, կարելի է որոշել և նրանց կապող բանաձևի տեսքը՝*

$$I_n = \alpha_n I_0 + \beta_n I_1 + Q_{2n-3}(z)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)},$$

որտեղ α_n*-ը և* β_n*-ը հաստատուններ են, իսկ* $Q_{2n-3}(z)$*-ը՝* $2n-3$ *աստիճանի կենտ բազմանդամ է։ Այստեղից պարզ է, որ եթե* $P_n(x)$*-ը* x*-ի նկատմամբ* n *աստիճանի բազմանդամ է, ապա՝*

$$\int \frac{P_n(z^2)dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} =$$

$$= \alpha I_0 + \beta I_1 + zQ_{n-2}(z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}, \qquad (10)$$

որտեղ α*-ն և* β*-ն հաստատուններ են, իսկ* $Q_{n-2}(x)$*-ը՝* x*-ի նկատմամբ* $(n-2)$*-րդ աստիճանի մի բազմանդամ է։ Այդ հաստատունները և* Q *բազմանդամի գործակիցները որոշելը կարելի է կատարել (եթե* P *բազմանդամը կոնկրետորեն տված է) անորոշ գործակիցների մեթոդի օգնությամբ* [տես 272, I]։

Նկատենք, որ (9)-ից I_0*-ի և* I_1*-ի միջոցով կարելի կլիներ* I_n *ինտեգրալներն արտահայտել նաև* n*-ի բացասական արժեքների դեպքում՝* $n = -1, -2, \ldots$, *այնպես որ* H_m *ինտեգրալների մեջ բավական է սահմանափակվել* $a \neq 0$ *դեպքով։*

Անցնելով H_m *ինտեգրալներին (ասենք, իրական* a*-երի դեպքում) նման ձևով նրանց համար կստանանք հետևյալ ռեկուրենտ առնչությունը՝*

$$(2m-2)[-a+(k^2+1)a^2-k^2a^3]H_m -$$

$$-(2m-3)[1-2a(k^2+1)+3k^2a^2]N_{m-1}+$$

$$+(2m-4)[(k^2+1)-3k^2a]H_{m-2}-(2m-5)k^2H_{m-3}=$$

$$= \frac{z}{(z-a)^{m-1}}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)},$$

որն իրավացի է m*-ի նաև բացասական ու զրո արժեքների դեպքում։ Այստեղից բոլոր* H_m*-երը կարտահայտվեն նրանցից երեքի միջոցով՝*

$$H_1=\int\frac{dz}{(z^2-a)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

$$H_0=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=I_0,$$

$$H_{-1}=\int\frac{(z^2-a)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=I_1-aI_0,$$

այսինքն, վերջնականապես, I_0-ի I_1-ի և H_1-ի միջոցով:

Նշենք, որ այս բոլորը պարունակում է իր ուժը a պարամետրի նաև կեղծ արժեքների դեպքում. սակայն այդ առթիվ այստեղ մենք բացատրությունների մեջ չենք մտնի, այլ կառաջարկենք ընթերցողին դիմել XII գլխի § 5-ին:

Այսպիսով, մեր բոլոր դատողություններից հետո գալիս ենք այսպիսի ընդհանուր եզրակացության՝ բոլոր էլիպտիկ ինտեգրալները տարրական տեղադրումների օգնությամբ, և վերջավոր տեսքով արտահայտվող գումարելիների ճշտությամբ,— բերվում են* հետևյալ երեք ստանդարտ ինտեգրալների՝

$$\left.\begin{matrix}\displaystyle\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, & \displaystyle\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\\ \displaystyle\int\frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\end{matrix}\right\}\quad(0<k<1)$$

(վերջինը ստացվում է H_1-ից, երբ $a\neq0$ փոխարեն մտցըվում է նոր՝ $h=-\frac{1}{a}$ պարամետրը): Այս ինտեգրալները, ինչպես ցույց է տվել Լիուվիլը (J. Liouville), արդեն վերջավոր տեսքով չեն վերցվում: Դրանք Լեժանդրն անվանել է էլիպտիկ ինտեգրալներ, *համապատասխանաբար,* 1-ին, 2-րդ և 3-րդ

* *Թեև վերը բավականաչափ ցուցումներ են տրվել, որպեսզի կամավոր էլիպտիկ ինտեգրալը երեք վերոհիշյալ ինտեգրալներին բերելու հարցը սկզբունքորեն լուծված համարվի, սակայն գործնականում այդ ճանապարհին կարող են դժվարություններ հանդիպել: Էլիպտիկ ինտեգրալներին և հարակից հարցերին նվիրված հատուկ մենագրությունների մեջ կարելի է գտնել այլ՝ գործնականորեն հարմար եղանակներ այդ նպատակի համար:*

տեսակի: *Առաջին երկուսը միայն մեկ* k *պարամետր են պարունակում, իսկ վերջինը, բացի այդ, նաև* h *(կոմպլեքս) պարամետր։*

Լեժանդրն այդ ինտեգրալների մեջ էլի հետագա պարզացումներ է մտցրել, կատարելով նրանց մեջ $z = \sin\varphi$ *տեղադրում (*φ *փոփոխվում է 0-ից մինչև* $\frac{\pi}{2}$*)։ Այդ դեպքում նրանցից առաջինն անմիջականորեն բերվում է հետևյալ ինտեգրալին՝*

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2\varphi)}}. \tag{11}$$

Երկրորդը ձևափոխվում է այսպես՝

$$\int \frac{\sin^2\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{k^2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{k^2}\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

այսինքն՝ բերվում է նախորդ ինտեգրալին և մի նոր ինտեգրալի՝

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi. \tag{12}$$

Վերջապես, երրորդ ինտեգրալը նշված տեղադրումով դառնում է

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{13}$$

(11), (12) և (13) ինտեգրալները նույնպես 1-ին, 2-րդ և 3-րդ տեսակի էլիպտիկ ինտեգրալներ են կոչվում՝ Լեժանդրի ձևով։

Դրանցից հատուկ կարևորություն և հաճախակի կիրառում ունեն առաջին երկուսը։ Եթե համարենք, որ $\varphi=0$ *դեպքում այդ ինտեգրալները զրո են դառնում, և դրանով ֆիքսենք նրանց մեջ պարունակվող կամավոր հաստատունները, ապա կստացվեն* φ*-ի երկու միանգամայն որոշակի ֆունկցիաներ, որոնք Լեժանդրը նշանակել է, համապատասխանաբար,* $F(k, \varphi)$ *և* $E(k, \varphi)$*։ Այստեղ, բացի* φ *անկախ փոփոխականից, նշված է նաև այդ ֆունկցիաների արտահայտությունների մեջ մտնող* k *պարամետրը, որը մոդուլ է կոչվում։*

Լեժանդրը այդ ֆունկցիաների արժեքների լայնածավալ

աղյուսակներ է կազմել տարբեր φ-երի և տարբեր k-երի դեպքում։ Այդ աղյուսակների մեջ ոչ միայն φ արգումենտն է աստիճաններով արտահայտվում, որը մեկնաբանվում է որպես անկյուն, այլև k մոդուլը (կանոնավոր կոտորակը!) դիտարկվում է որպես մի որոշ անկյան սինուս, որը և նշվում է աղյուսակի մեջ մոդուլի փոխարեն, և ընդսմին նույնպես աստիճաններով։

Բացի այդ, ինչպես Լեժանդրի, այնպես էլ ուրիշ գիտնականների կողմից ուսումնասիրվել են այդ ֆունկցիաների շատ խորը հատկություններ, ստացվել են դրանց վերաբերող մի շարք բանաձևեր և այլն։ Դրա շնորհիվ, Լեժանդրի F և E ֆունկցիաները մտել են անալիզի և նրա կիրառումների մեջ հանդիպող ֆունկցիաների ընտանիքը, տարրական ֆունկցիաների հետ հավասար իրավունքներով։

Ինտեգրալ հաշվի ցածրագույն մասը, որով հիմնականում ստիպված ենք առայժմ սահմանափակվել, զբաղվում է «վերջավոր տեսքով ինտեգրումով»։ Սակայն սխալ կլիներ կարծել, որ դրանով սահմանափակվում են ինտեգրալ հաշվի խնդիրներն ընդհանրապես. F և E էլիպտիկ ինտեգրալները այնպիսի ֆունկցիաների օրինակներ են հանդիսանում, որոնք բեղմնավոր կերպով ուսումնասիրվում են իրենց ինտեգրալ արտահայտություններով, թեև տարրական ֆունկցիաների միջոցով չեն կարող պատկերացվել վերջավոր տեսքով։

Մենք դեռևս կվերադառնանք F և E ինտեգրալներին հետևյալ գլխում և, ընդհանրապես, դեռ շատ կհանդիպենք դրանց դասընթացի հետագա մասերում։

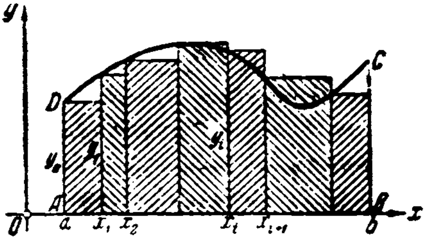
ԵՐԿՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

§ 1. ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄՆ ՈՒ ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԸ

282. *ԱՅԼ ՄՈՏԵՑՈՒՄ ՄԱԿԵՐԵՍԻ ԽՆԴՐԻՆ.* *Վերադառնանք* ABCD *(գծ. 4) կորագիծ սեղանի մակերեսը որոշելու խնդրին, որով արդեն զբաղվել ենք* n° 252-*ում. Այժմ կշարադրենք այդ խնդրի լուծման մի այլ մոտեցում**.

Մեր պատկերի AB *հիմքը կամայական եղանակով տրոհենք մասերի և տանենք տրոհման կետերին համապատասխանող օրդինատները. այդ ժամանակ կորագիծ սեղանը կտրոհվի մի շարք շերտերի (տես գծագիրը)։*



Գծ. 4

Այժմ յուրաքանչյուր շերտ մոտավորապես փոխարինենք մի ուղղանկյունով, որի հիմքը նույնն է, ինչ որ շերտինը, իսկ բարձրությունը համընկնում է շերտի օրդինատներից մեկին, ասենք՝ ձախակողմյանին. Այսպիսով, կորագիծ պատկերը կփոխարինվի առանձին ուղղանկյուններից կազմված մի աստիճանաձև պատկերով.

Տրոհման կետերի աբսցիսները նշանակենք

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b: \qquad (1)$$

i-*րդ ուղղանկյան հիմքը* (i=0,1,2,..., n—1), *ակներևաբեն, հավասար է* $x_{i+1} - x_i$ *տարբերությանը, որը կնշանակենք* Δx_i-*ով.*

---

* *Ընդհանրացնելով այդ ժամանակ այն գաղափարը, որն արդեն մեկ անգամ կիրառվել է մասնավոր օրինակում* [32, 4]:

Ինչ վերաբերում է բարձրությանը, ապա, ըստ մեր ասածի, նա հավասար է $y_i=f(x_i)$։ Ուստի i-րդ ուղղանկյան մակերեսը կլինի՝ $y_i\Delta x_i=f(x_i)\Delta x_i$։

Բոլոր ուղղանկյունների մակերեսները միագումարելով, կստանանք կորագիծ սեղանի P մակերեսի մոտավոր արժեքը՝

$$P \doteq \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x_i \quad \text{կամ} \quad P \doteq \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i.$$

Այս հավասարության սխալը բոլոր Δx_i-երը անսահմանորեն նվազելիս ձգտում է զրոյի։ P մակերեսի ճշգրիտ արժեքը կըստացվի որպես սահման՝

$$P=\lim \sum y_i\Delta x_i=\lim \sum f(x_i)\,\Delta x_i, \qquad (2)$$

այն ենթադրությամբ, որ բոլոր Δx_i երկարությունները միաժամանակ ձգտում են 0-ի։

Նույն եղանակը կիրառելի է նաև AMND (գծ. 2) պատկերի P(x) մակերեսը հաշվելու համար, միայն կարիք կլինի մասերի տրոհել AM հատվածը։ Նկատենք և այն, որ այն դեպքը, երբ $y=f(x)$ ստանում է նաև բացասական արժեքներ, սպառվում է 252-ում պարունակված այն պայմանով, որ պատկերի x-երի առանցքից ցածր գտնվող մասերի մակերեսները պետք է բացասական համարել։

$\sum y\Delta x$ տեսքի գումարը (ավելի ճշգրիտ՝ այդ գումարի սահմանային արժեքը) նշանակելու համար Լայբնիցը մտցրել է $\int ydx$ սիմվոլը, որտեղ ydx-ը հիշեցնում է գումարի տիպական գումարելին, իսկ $\int$-ը՝ ոճավորված S տառն է՝ լատինական «Summa»* բառի սկզբնատառը։ Քանի որ այդ սահմանային արժեքը ներկայացնող մակերեսը միաժամանակ y ֆունկցիայի նախնական ֆունկցիան է հանդիսանում, ապա միևնույն սիմվոլը պահպանվել է նաև նախնական ֆունկցիան

* «Ինտեգրալ» (լատիներեն integer=ամբողջ) տերմինն առաջարկվել է Լայբնիցի աշակերտ և աջակից Իոհան Բեռնուլլիի (Ioh. Bernoulli) կողմից. Լայբնիցը սկզբում հենց «գումար» էլ ասելիս է եղել։

նշանակելու համար։ Հետագայում, երբ մտցվել է ֆունկցիոնալ նշանակումը, սկսել են գրել

$$\int f(x)dx,$$

եթե խոսքը վերաբերում էր փոփոխական մակերեսին, և

$$\int_a^b f(x)dx$$

ABCD հաստատուն պատկերի մակերեսի դեպքում, որը համապատասխանում է x-ի փոփոխմանը a-ից մինչև b։

Մենք օգտվեցինք մակերեսի ինտուիտիվ պատկերացումից, որպեսզի բնականորեն մոտենանք (2) տեսքի յուրատեսակ գումարների սահմանների դիտարկմանը (որոնք պատմականորեն մտցվել են հենց մակերես հաշվելու խնդրի կապակցությամբ)։ Սակայն մակերեսի գաղափարն ինքը հիմնավորման կարիք է զգում, և եթե խոսքը վերաբերում է կորագիծ սեղանին, այդ հիմնավորումը տրվում է հենց վերոհիշյալ սահմանների օգնությամբ։ Հասկանալի է, որ դրան պետք է նախորդի (2) սահմանների ինքնին ուսումնասիրությունը, վերանալով երկրաչափական նկատառումներից։ Հենց դրան է նվիրված դասընթացի ներկա գլուխը։

(2) տեսքի սահմանները բացառիկ կարևոր դեր են խաղում մաթեմատիկական անալիզում և նրա բազմազան կիրառություններում։ Ընդսմին, այստեղ զարգացվող գաղափարները տարբեր ձևափոխություններով բազմիցս կկրկնվեն դասընթացի ամբողջ ընթացքում:

283 ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ. Դիցուք f(x) ֆունկցիան տված է մի որոշ [a,b] միջակայքում։ Այդ միջակայքը կամավոր եղանակով տրոհենք մասերի, մտցնելով a-ի և b-ի միջև տրոհման (1) կետերը։ $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $(i=0,1,\dots,n-1)$ տարբերություններից մեծագույնն այսուհետև նշանակելու ենք λ-ով։

$[x_i, x_{i+1}]$ մասնակի միջակայքերից յուրաքանչյուրի մեջ կամայապես վերցնենք $x=\xi_i$ կետը*

$$x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1} \quad (i=0,\dots,n-1)$$

---

* Վերևում որպես ξ_i բոլոր դեպքերում վերցնում էինք փոքրագույն արժեքը՝ x_i:

և կազմենք հետևյալ գումարը՝

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, \Delta x_i \,.$$

Ասում են, որ σ գումարը $\lambda \to 0$ դեպքում ունի I (վերջավոր) սահմանը, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար կգտնվի այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ, հենց որ լինի $\lambda < \delta$ (այսինքն՝ հիմնական միջակայքը տրոհված լինի այնպիսի մասերի, որոնց Δx_i երկարությունները $< \delta$),

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

անհավասարությունը տեղի կունենա ξ թվերի ցանկացած ընտրության դեպքում:

Այդ գրի են առնում այսպես՝

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma: \qquad (3)$$

Այս սահմանումին, «ε-δ լեզվով» արտահայտված, ինչպես սովորաբար, հակադրում են «հաջորդականությունների լեզվով» արտահայտված սահմանումը. Պատկերացնենք, որ [a, b] *միջակայքը հաջորդաբար տրոհվում է մասերի, նախ մի եղանակով, ապա՝ երկրորդ եղանակով, երրորդ եղանակով և այլն. Միջակայքի տրոհումների այսպիսի հաջորդականությունը կանվանենք հ ի մ ն ա կ ա ն, եթե* $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ *արժեքների համապատասխան հաջորդականությունը ձգտում է զրոյի.*

(3) հավասարությունն այժմ կարելի է հասկանալ և այն իմաստով, որ միջակայքի տրոհումների ցանկացած հիմնական հաջորդականության համապատասխանող σ *գումարի արժեքների հաջորդականությունը միշտ ձգտում է* I *սահմանին, ինչպես էլ ընտրելու լինենք այդ ժամանակ* ξ *թվերը.*

Երկու սահմանումների համարժեքության ապացուցումը կարելի է կատարել դատողությունների նույն կարգով, ինչ որ n° 53-*ում. Երկրորդ սահմանումը թույլատրում է սահմանների տեսության հիմնական գաղափարներն ու առաջադրությունները փոխանցել այս նոր տեսակի սահմանի վրա.*

Եթե $\lambda \to 0$ դեպքում գոյություն ունի σ գումարի I (վերջավոր) սահման, ապա այն կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալ a-ից մինչև b միջակայքում և նշանակվում է

$$I=\int_a^b f(x)dx \tag{4}$$

սիմվոլով. այդ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է ինտեգրելի $[a, b]$ միջակայքում։

a և b թվերը կոչվում են ինտեգրալի, համապատասխանաբար, ստորին և վերին սահմաններ։ Հաստատուն սահմանների դեպքում որոշյալ ինտեգրալը ներկայացնում է հաստատուն թիվ։

Բերված սահմանումը պատկանում է Ռիմանին (B. Riemann), որն առաջինն է արտահայտել այն ընդհանուր ձևով և ուսումնասիրել նրա կիրառման բնագավառը։ Հենց σ գումարն էլ երբեմն ռիմանյան գումար են անվանում*. բայց մենք գերադասելու ենք այն անվանել ինտեգրալ (կամ ինտեգրելային) գումար, ընդգծելու համար նրա կապն ինտեգրալի հետ։

Այժմ խնդիր դնենք՝ պարզել այն պայմանները, որոնց դեպքում σ ինտեգրալ գումարը վերջավոր սահման ունի, այսինքն՝ գոյություն ունի (3) որոշյալ ինտեգրալը։

Ամենից առաջ նկատենք, որ բերված սահմանումը իրականում կարող է գործադրվել միայն սահմանափակ ֆունկցիայի նկատմամբ։ Իրոք, եթե $f(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ միջակայքում անսահմանափակ լիներ, ապա, միջակայքը ցանկացած եղանակով մասերի տրոհելիս, նա կպահպաներ նման հատկություն մասերից գոնե մեկի մեջ։ Այդ դեպքում, այդ մասի մեջ ξ կետի ընտրության հաշվին կարելի կլիներ $f(\xi)$-ը, իսկ դրա հետ միասին նաև σ գումարը, դարձնել ցանկացած չափով մեծ. այս պայմաններում σ-ի համար վերջավոր սահման, ակներևորեն, չէր կարող գոյություն ունենալ։ Այսպիսով, ինտեգրելի ֆունկցիան անհրաժեշտորեն սահմանափակ է։

Այդ պատճառով էլ հետագա հետազոտության ժամանակ նախապես կենթադրենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է՝

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad (\text{եթե } a \leqslant x \leqslant b)։$$

---

* Փաստորեն դեռևս Կոշին է պարզորոշ կերպով օգտվել նման գումարների սահմաններից, բայց միայն անընդհատ ֆունկցիայի դեպքի համար։

284. ԴԱՐԲՈՒԻ ԳՈՒՄԱՐՆԵՐԸ։ Որպես հետազոտման օժանդակ միջոց, ինտեգրալ գումարների հետ միասին, Դարբուի օրինակով, դիտարկման ենթարկենք նաև ուրիշ, դրանց նման, բայց ավելի պարզ գումարներ։

m_i*-ով ու* M_i*-ով նշանակենք* $f(x)$ *ֆունկցիայի, համապատասխանաբար, ստորին և վերին ճշգրիտ եզրերը* $[x_i, x_{i+1}]$ *միջակայքում, և կազմենք հետևյալ գումարները՝*

$$s=\sum_{i=0}^{n-1} m_i\Delta x_i, \qquad S=\sum_{i=0}^{n-1} M_i\Delta x_i.$$

Հենց այս գումարները կոչվում են, համապատասխանաբար, ստորին և վերին ինտեգրալ գումարներ, կամ Դարբուի գումարներ։

Մասնավոր դեպքում, երբ $f(x)$*-ը անընդհատ է, նրանք պարզապես, հանդիսանում են վերցրած տրոհմանը համապատասխանող ինտեգրալ գումարներից մեծագույնն ու փոքրագույնը, որովհետև այդ դեպքում* $f(x)$ *ֆունկցիան յուրաքանչյուր միջակայքում հասնում է իր ճշգրիտ եզրերին և* ξ_i *կետերը կարելի է ընտրել այնպես, որ, ըստ ցանկության, լինի*

$$f(\xi_i)=m_i \quad \text{կամ} \quad f(\xi_i)=M_i\,.$$

Անցնելով ընդհանուր դեպքին, հենց ստորին և վերին եզրերի սահմանումից ունենք՝

$$m_i\leqslant f(\xi_i)\leqslant M_i\,.$$

Այս անհավասարությունների երկու մասերն էլ Δx_i*-ով բազմապատկելով (*Δx_i*-ն դրական է) և ըստ* i*-ի միագումարելով, կստանանք՝*

$$s\leqslant\sigma\leqslant S.$$

Տրված տրոհման դեպքում s *և* S *գումարները հաստատուն թվեր կլինեն, մինչդեռ* σ *գումարը դեռևս փոփոխական է մնում* ξ_i *թվերի կամավոր լինելու շնորհիվ։ Բայց հեշտ է տեսնել որ* ξ_i*-երի ընտրության հաշվին կարելի է* $f(\xi_i)$ *արժեքները ցանկացած չափով մոտեցնել ինչպես* m_i*-ին, այնպես էլ* M_i*-ին, ուրեմն և* σ *գումարը ցանկացած չափով մոտեցնել* s*-ին կամ*

S-ին։ *Իսկ այդ դեպքում նախորդ անհավասարությունները բերում են հետևյալ արդեն ընդհանուր դիտողությանը՝* միջակայքի տվյալ տրոհման դեպքում Դարբուի s և S գումարները ծառայում են որպես ինտեգրալ գումարների, համապատասխանաբար, ստորին և վերին ճշգրիտ եզրեր։

Դարբուի գումարներն օժտված են հետևյալ պարզ հատկություններով՝

1-ին հատկություն. Եթե եղած տրոհման կետերին նոր կետեր ավելացնենք, ապա Դարբուի ստորին գումարը դրանից թերևս կարող է միայն մեծանալ, իսկ վերին գումարը՝ թերևս միայն փոքրանալ։

Ապացույց։ Այս հատկությունն ապացուցելու համար բավական է սահմանափակվել արդեն եղած տրոհման կետերին մեկ x′ տրոհման կետ ևս ավելացնելով։

Դիցուք այդ կետն ընկնում է x_k *և* x_{k+1} *կետերի միջև, այնպես որ*

$$x_k < x' < x_{k+1}.$$

Եթե նոր վերին գումարը նշանակենք S′, ապա նախկին S-ից նա միայն նրանով կտարբերվի, որ S գումարի մեջ $[x_k\ \ x_{k+1}]$ *միջակայքին համապատասխանում էր*

$$M_k(x_{k+1}-x_k)$$

գումարելին, իսկ S′ նոր գումարի մեջ այդ միջակայքին համապատասխանում է

$$\overline{M}_k\ (x'-x_k)+\overline{\overline{M}}_k(x_{k+1}-x')$$

երկու գումարելիների գումարը, որտեղ $\overline{M}_k$*-ն ու* $\overline{\overline{M}}_k$*-ն f(x) ֆունկցիայի վերին ճշգրիտ եզրերն են* $[x_k, x']$ *և* $[x', x_{k+1}]$ *միջակայքերում։ Քանի որ այդ միջակայքերը* $[x_k, x_{k+1}]$ *միջակայքի մասերն են հանդիսանում, ապա*

$$\overline{M}\leqslant M_k,\quad \overline{\overline{M}}\leqslant M_k,$$

այնպես որ

$$\overline{M}_k(x'-x_k)\leqslant M_k(x'-x_k),\quad \overline{\overline{M}}_k(x_{k+1}-x')\leqslant M_k(x_{k+1}-x'):$$

Գումարելով այս անհավասարությունները, կստանանք

$$\overline{M}_k(x'-x_k)+\overline{\overline{M}}_k(x_{k+1}-x')<M_k(x_{k+1}-x_k).$$

Այստեղից հետևում է, որ $S'<S$. *Ստորին գումարի համար ապացույցը կատարվում է նման եղանակով։*

Դիտողություն։ *Քանի որ* $M_k-\overline{M}_k$ *և* $M_k-\overline{\overline{M}}_k$ *տարբերությունները, ակներևաբար, չեն գերազանցում* $f(x)$ *ֆունկցիայի* Ω *տատանումին ամբողջ* $[a, b]$ *միջակայքում, ապա* $S-S'$ *տարբերությունը չի կարող գերազանցել* $\Omega\Delta x_k$ *արտադրյալին։ Այդ ճիշտ է մնում նաև այն դեպքում, երբ* k*-րդ միջակայքում վերցնում են տրոհման մի քանի նոր կետեր։*

2-րդ հատկություն։ Դարբուի յուրաքանչյուր ստորին գումար չի գերազանցում յուրաքանչյուր վերին գումարին, թեկուզ և միջակայքի այլ տրոհման համապատասխանող:

Ապացույց։ $[a, b]$ *միջակայքը կամայական եղանակով տրոհենք մասերի և այդ տրոհման համար կազմենք Դարբուի գումարները՝*

$$s_1 \text{ և } S_1. \qquad (I)$$

Այժմ դիտարկենք $[a, b]$ *միջակայքի մի այլ, առաջինի հետ ոչ մի կերպ չկապված, տրոհում։ Դրան նույնպես կհամապատասխանեն իր Դարբուի գումարներ՝*

$$s_2 \text{ և } S_2. \qquad (II)$$

Պահանջվում է ապացուցել, որ $s_1 \leqslant S_2$*։ Այդ նպատակով միացնենք մեկ և մյուս տրոհման կետերը. այդ դեպքում կստանանք մի երրորդ, օժանդակ, տրոհում, որին կհամապատասխանեն*

$$s_3 \text{ և } S_3 \qquad (III)$$

գումարները։

Երրորդ տրոհումը մենք ստացանք առաջինից, ավելացնելով տրոհման նոր կետեր. ուստի, Դարբուի գումարների ապացուցված 1-ին հատկության հիման վրա, ունենք

$$s_1 \leqslant s_3.$$

Այժմ երկրորդ և երրորդ տրոհումները համեմատելով, ճիշտ նույնպես եզրակացնում ենք, որ

$$S_3 \leqslant S_2.$$

Բայց $s_3 \leqslant S_3$*, այնպես որ հենց նոր ստացված անհավասարություններից բխում է*

$$s_1 \leqslant S_2,$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Ապացուցածից հետևում է, որ ստորին գումարների ամբողջ $\{s\}$ բազմությունը սահմանափակված է վերևից, օրինակ, ցանկացած S վերին գումարով։ Այդպիսի դեպքում [10] այդ բազմությունն ունի վերջավոր վերին ճշգրիտ եզր՝

$$I_*=\sup\{s\}$$

և, բացի այդ,

$$I_* \leqslant S,$$

ինչպիսին էլ լինի S վերին գումարը։ Քանի որ վերին գումարների $\{S\}$ բազմությունը, այդպիսով, ներքևից սահմանափակված է լինում I_* թվով, ապա նա ունի վերջավոր ստորին ճշգրիտ եզր՝

$$I^*=\inf\{S\},$$

ընդ որում, ակներևորեն,

$$I_* \leqslant I^*.$$

Համեմատելով բոլոր ասածները, Դ ա ր բ ու ի ցանկացած ստորին և վերին գումարների համար ունենք

$$s \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S. \qquad (5)$$

I_* և I^* թվերն անվանում են, համապատասխանաբար, Դ ա ր բ ու ի ստորին և վերին ինտեգրալներ [տես. ստորև 289]։

285. ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆԸ։ Դ ա ր բ ու ի գումարների օգնությամբ այժմ հեշտ է բանաձևել այդ պայմանը։

ԹԵՈՐԵՄԱ։ Որոշյալ ինտեգրալի գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի լինի

$$\lim_{\lambda\to 0}(S-s)=0. \qquad (6)$$

283-ում ասվածը բավական է այդ սահմանի իմաստը պարզաբանելու համար։ Օրինակ, «$\varepsilon-\delta$ լեզվով», (6) պայմանը նշանակում է, որ ցանկացած $\varepsilon>0$ համար կգտնվի այնպիսի $\delta>0$, որ հենց որ $\lambda<\delta$ (այսինքն՝ միջակայքը տրոհվի այնպիսի մասերի, որոնց Δx_i երկարությունները $<\delta$), անմիջապես տեղի է ունենում

$$S-s<\varepsilon$$

անհավասարությունը։

Ապացույց։ Անհրաժեշտությունը։ Ենթադրենք, թե գոյություն ունի (4) ինտեգրալը։ Այդ դեպքում ամեն մի տված $\varepsilon>0$ թվի համար կգտնվի այնպիսի $\delta>0$, որ հենց որ բոլոր $\Delta x_i<\delta$, անմիջապես՝

$$|\sigma-I|<\varepsilon \text{ կամ } I-\varepsilon<\sigma<I+\varepsilon,$$

ինչպես էլ ընտրելու լինենք ξ_i-երը համապատասխան միջակայքերի սահմաններում։ Բայց s և S գումարները, միջակայքի տված տրոհման դեպքում, ինչպես մենք ցույց տվեցինք, ինտեգրալ գումարների համար, համապատասխանաբար, ստորին և վերին ճշգրիտ եզրեր են հանդիսանում. ուստի դրանց համար կունենանք՝

$$I-\varepsilon\leqslant s\leqslant S\leqslant I+\varepsilon,$$

այնպես որ

$$\lim_{\lambda\to 0} s=I,\quad \lim_{\lambda\to 0} S=I, \tag{7}$$

որտեղից և հետևում է (6)-ը։

Բավարարությունը։ Ենթադրենք, թե (6) պայմանը կատարվում է. այդ դեպքում (5)-ից անմիջապես պարզ է, որ $I_*=I^*$ և, եթե նրանց ընդհանուր արժեքը նշանակենք I-ով,

$$s\leqslant I\leqslant S. \tag{5*}$$

Եթե σ-ի տակ հասկացվի ինտեգրալ գումարի այն արժեքներից մեկը, որոնք համապատասխանում են միջակայքի նույն տրոհմանը, ինչ որ s և S գումարները, ապա, ինչպես գիտենք,

$$s\leqslant\sigma\leqslant S.$$

Համաձայն (6) պայմանի, եթե բոլոր Δx_i-երը ենթադրենք բավականաչափ փոքր, s և S գումարներն իրարից ավելի քիչ կտարբերվեն, քան կամավոր կերպով վերցրած $\varepsilon>0$ թիվը։ Սակայն այդ դեպքում այդպես կլինի նաև նրանց միջև գտնվող σ և I թվերի նկատմամբ՝

$$|\sigma-I|<\varepsilon,$$

այնպես որ, I-ն σ-ի համար հանդիսանում է սահման. այսինքն որոշյալ ինտեգրալ։

Եթե ֆունկցիայի $M_i - m_i$ *տատանումը* i-*րդ մասնակի միջակայքում նշանակենք* ω_i-*ով, ապա կունենանք*

$$S-s=\sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i,$$

և որոշյալ ինտեգրալի գոյության պայմանը կարող է արտագրվել այսպես՝

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0.$$

Սովորաբար այն այս ձևով էլ կիրառվում է։

286. ԻՆՏԵԳՐԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԱՍԵՐ։ Մեր գտած հայտանիշը կիրառենք ինտեգրելի ֆունկցիաների մի քանի դասեր որոշելու համար։

I. Եթե f(x) ֆունկցիան [a, b] միջակայքում անընդհատ է, ապա այն ինտեգրելի է։

Ապացույց։ Քանի որ f(x) *ֆունկցիան անընդհատ է, ապա Կանտորի թեորեմայի հետևանքի հիման վրա* [86] *տրված* $\varepsilon>0$ *թվով միշտ կգտնվի այնպիսի* $\delta>0$, *որ հենց որ* [a, b] *միջակայքը տրոհվի այնպիսի մասերի, որոնց* Δx_i *երկարությունները* $<\delta$, *ապա բոլոր* $\omega_i<\varepsilon$։ *Այստեղից՝*

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i=\varepsilon(b-a).$$

Քանի որ (b—a)-*ն հաստատուն թիվ է, իսկ* ε-*ը կամայականորեն փոքր է, ապա (8) պայմանը բավարարվում է, իսկ դրանից էլ բխում է ինտեգրալի գոյությունը։ Ապացուցված պնդումը կարելի է մի փոքր ընդհանրացնել։*

II. Եթե f(x) սահմանափակ ֆունկցիան [a, b] միջակայքում միայն վերջավոր թվով խզման կետեր ունի, ապա այն ինտեգրելի է։

Ապացույց։ Դիցուք, խզման կետերն են՝ $x', x'', \ldots, x^{(k)}$. *Վերցնենք կամայական* $\varepsilon>0$։ *Խզման կետերը շրջապատենք այնպիսի շրջակայքերով՝* $(x'-\varepsilon', x'+\varepsilon')$, $(x''-\varepsilon'', x''+\varepsilon'')$, $\ldots$, $(x^{(k)}-\varepsilon^{(k)}, x^{(k)}+\varepsilon^{(k)})$ *այնպես, որպեսզի յուրաքանչյուրի երկա-*

րությունն ε-ից փոքր լինի։ Մնացած (փակ) միջակայքերում $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ կլինի, և նրանցից յուրաքանչյուրի նկատմամբ առանձնաբար կարող ենք կիրառել Կանտորի թեորեմայի հետևանքը։ Ըստ ε-ի ստացված δ թվերից ընտրենք ամենափոքրը (այն նույնպես կնշանակենք δ տառով)։ Այդ դեպքում նա պիտանի կլինի վերը նշված միջակայքերից յուրաքանչյուրի համար։ Մեզ ոչինչ չի խանգարում վերցնել այդ դեպքում $\delta<\varepsilon$։ Այժմ $[a, b]$ միջակայքը մասերի տրոհենք այնպես, որ նրանց Δx_i երկարությունները δ-ից փոքր լինեն։ Ստացված մասնակի միջակայքերը երկու տեսակի կլինեն՝

1) Միջակայքեր, որոնք ամբողջովին գտնվում են խզման կետերի մոտ առանձնացրած շրջակայքերից դուրս։ Նրանց մեջ ֆունկցիայի տատանումը՝ $\omega_i < \varepsilon$։

2) Միջակայքեր, որոնք կամ ամբողջովին գտնվում են առանձնացրած շրջակայքերի ներսը, կամ մասամբ վերադրվում են այդ շրջակայքերի վրա։

Քանի որ $f(x)$ ֆունկցիան ենթադրվում է սահմանափակ, ապա այդ միջակայքերից յուրաքանչյուրում նրա տատանումը չի գերազանցում նրա Ω տատանումին ամբողջ $[a, b]$ միջակայքում։

$$\sum \omega_i \Delta x_i$$

գումարը տրոհենք երկու գումարների՝

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} \text{ և } \sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''},$$

որոնք տարածվում են, համապատասխանաբար, առաջին և երկրորդ տեսակի միջակայքերի վրա։

Առաջին գումարի համար, ինչպես և նախորդ թեորեմայում, կունենանք՝

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} < \varepsilon \sum_{i'} \Delta x_{i'} < \varepsilon (b-a)։$$

Ինչ վերաբերում է երկրորդ գումարին, նկատենք, որ երկրորդ տեսակի այն միջակայքերի երկարությունների գումարը, որոնք ամբողջովին ընկել են առանձնացրած շրջակայքերի ներսը, $k\varepsilon$-ից փոքր է, իսկ նրանց վրա վերադրվող

միջակայքերի թիվը կարող է լինել ոչ ավելի 2k-ից, և նրանց երկարությունների գումարը $<2k\delta$, ուրեմն ավելի ևս $<2k\varepsilon$. Հետևաբար՝

$$\sum_{i''}\omega_{i''}\Delta x_{i''}<\Omega\sum_{i''}\Delta x_{i''}<\Omega\cdot 3k\varepsilon.$$

Այսպիսով, վերջնականորեն, $\Delta x_i<\delta$ դեպքում ունենք՝

$$\sum_{i}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon[(b-a)+3k\Omega].$$

Հենց այս էլ ապացուցում է մեր պնդումը, քանի որ քառակուսի փակագծերի մեջ պարունակվում է հաստատուն թիվ, իսկ ε-ը կամայականորեն փոքր է։

Վերջապես, նշենք ինտեգրելի ֆունկցիաների մի պարզ դաս ևս, որը նախորդի մեջ չի մտնում.

III. $f(x)$ մոնոտոն սահմանափակ ֆունկցիան միշտ ինտեգրելի է։

Ապացույց. Դիցուք, $f(x)$-ը մոնոտոն աճող ֆունկցիա է։ Այդ դեպքում նրա տատանումը $[x_i, x_{i+1}]$ միջակայքում կլինի

$$\omega_i=f(x_{i+1})-f(x_i).$$

Վերցնենք ցանկացած $\varepsilon>0$ և ընդունենք՝

$$\delta=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)},$$

Հենց որ լինի $\Delta x_i<\delta$, անմիջապես կունենանք

$$\sum\omega_i\Delta x_i<\delta\sum[f(x_{i+1})-f(x_i)]=\delta[f(b)-f(a)]=\varepsilon,$$

որտեղից և հետևում է ֆունկցիայի ինտեգրելիությունը։

287. ԻՆՏԵԳՐԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ. n° 285-ի հայտանիշից կարելի է արտածել ինտեգրելի ֆունկցիաների մի շարք ընդհանուր հատկություններ ևս։

I. Եթե $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a, b]$ միջակայքում,

ապա $|f(x)|$ և $kf(x)$ (որտեղ $k=\text{const.}$) ֆունկցիաները նույնպես ինտեգրելի են այդ միջակայքում։

Ապացույցը կատարենք $|f(x)|$ ֆունկցիայի համար։ Քանի որ $[a, b]$ միջակայքի ցանկացած x', x'' կետերի համար ունենք [17]՝

$$|f(x'')|-|f(x')|\leqslant|f(x'')-f(x')|,$$

ապա $|f(x)|$ ֆունկցիայի ω^*_i տատանումն այդ միջակայքում չի գերազանցում ω_i-ին [84]։ Այստեղից՝

$$\sum\omega^*_i\Delta x_i\leqslant\sum\omega_i\Delta x_i$$

և, քանի որ վերջին գումարը ձգտում է զրոյի ($\lambda\to 0$ դեպքում) ապա առաջինն առավել ևս, որից բխում է $|f(x)|$ ֆունկցիայի ինտեգրելիությունը։

II. Եթե $f(x)$ և $g(x)$ երկու ֆունկցիաներ ինտեգրելի են $[a, b]$ միջակայքում, ապա նրանց գումարը, տարբերությունը և արտադրյալը նույնպես ինտեգրելի են։

Ապացույցը սահմանափակենք $f(x)\,g(x)$ արտադրյալի դեպքով։

Դիցուք $|f(x)|\leqslant k$, $|g(x)|\leqslant L$։ Վերցնելով $[x_i, x_{i+1}]$ միջակայքում երկու որևէ x', x'' կետեր, դիտարկենք հետևյալ տարբերությունը՝

$$f(x'')\,g(x'')-f(x')\,g(x')=$$

$$=[f(x'')-f(x')]g(x'')+[g(x'')-g(x')]f(x')։$$

Ակներևորեն,

$$|f(x'')g(x'')-f(x')g(x')|\leqslant L\,\omega_i+K\overline{\omega}_i$$

եթե ω_i-ով ու $\overline{\omega}_i$-ով նշանակենք, համապատասխանաբար $f(x)$ ու $g(x)$ ֆունկցիաների տատանումները $[x_i, x_{i+1}]$ միջակայքում։ Բայց այդ դեպքում [84] $f(x)g(x)$ ֆունկցիայի Ω_i տատանման համար այդ միջակայքում կունենանք

$$\Omega_i\leqslant L_i+K\omega_i,$$

որտեղից

$$\sum \Omega_i \Delta x_i < L\sum \omega_i \Delta x_i + K\sum \bar{\omega}_i \Delta x_i.$$

Քանի որ վերջին երկու գումարները ձգտում են զրոյի ($\lambda \to 0$ *դեպքում), ապա առաջինն առավել ևս, որը և ապացուցում է* $f(x)g(x)$ *ֆունկցիայի ինտեգրելիությունը։*

III. Երբ $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a, b]$ միջակայքում, ապա այն ինտեգրելի է նաև այդ միջակայքի ցանկացած $[\alpha, \beta]$ մասում: Հակադարձաբար, երբ $[a, b]$ միջակայքը տրոհված է մասերի, և $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է առանձնաբար յուրաքանչյուր մասում, ապա այն ինտեգրելի է նաև $[a, b]$ ամբողջ միջակայքում:

Ապացույց։ Ենթադրենք, թե $f(x)$ *ֆունկցիան ինտեգրելի է* $[a, b]$ *միջակայքում և այդ միջակայքի համար կառուցենք* $\sum \omega_i \Delta x_i$ *գումարը (համարելով, որ* α*-ն և* β*-ն մտնում են տրոհման կետերի կազմի մեջ)։ Այստեղից նման գումար կըստացվի* $[\alpha, \beta]$ *միջակայքի համար, եթե բաց թողնենք մի շարք (դրական) գումարելիներ. այդ գումարն անշուշտ ձգտում է զրոյի, եթե զրոյի է ձգտում առաջին գումարը։*

Այժմ դիցուք $[a, b]$ *միջակայքը տրոհված է, ասենք, երկու մասի՝* $[a, c]$ *և* $[c, b]$ *(որտեղ* $a<c<b$*), և դրանցից յուրաքանչյուրի մեջ* $f(x)$ *ֆունկցիան ինտեգրելի է։ Վերցնենք դարձյալ* $\sum \omega_i \Delta x_i$ *գումարը* $[a, b]$ *միջակայքի համար. եթե* c *կետը գտնվի տրոհման կետերի թվում, ապա հիշյալ գումարը կկազմըվի երկու նման գումարներից* $[a,c]$ *և* $[c,b]$ *միջակայքերի համար և նրանց հետ միասին ձգտում է զրոյի։ Այս եզրակացությունն ուժի մեջ է մնում և այն դեպքի համար, երբ* c*-ն տրոհման կետ չի հանդիսանում. միացնելով այդ կետը, մենք կըփոխենք գումարի միայն մեկ անդամը, որն ինքը, ակներևորեն, ձգտում է զրոյի։*

IV. Երբ ինտեգրելի ֆունկցիայի արժեքները փոփոխենք վերջավոր թվով $(=k)$ կետերում, ապա նրա ինտեգրելիությունը չի խախտվի:

Ապացույցն ակներև է, որովհետև հիշյալ փոփոխությունները կվերաբերեն $\sum \omega_i \Delta x_i$ *գումարի ոչ ավելի քան* k *անդամներին։*

Հեշտ է հասկանալ, որ ինտեգրալի իր արժեքն էլ այդ դեպքում չի փոխվի։ Այդ բխում է նրանից, որ երկու ֆունկցիաների համար էլ՝ սկզբնականի և փոփոխվածի, ինտեգրալ գումարի մեջ ξ_i կետերը միշտ կարելի է ընտրել այնպես, որ նրանք չհամընկնեն այն կետերի հետ, որոնց համար նրանց արժեքները տարբերվում են։

Դիտողություն։ Այդ հատկության շնորհիվ մենք հնարավորություն ենք ստանում խոսելու $\int_a^b f(x)dx$ ինտեգրալի մասին նույնիսկ այն ժամանակ, երբ $f(x)$ ֆունկցիան որոշված չէ $[a, b]$ միջակայքի վերջավոր թվով կետերում։ Այդ դեպքում այդ կետերում կարելի է վերագրել մեր ֆունկցիային միանգամայն կամայական արժեքներ և դիտարկել ինտեգրալ այնպիսի ֆունկցիայից, որը որոշված է այսպիսով ամբողջ միջակայքում։ Ինչպես տեսանք, ոչ այդ ինտեգրալի գոյությունը, ոչ նրա մեծությունը կախում չունեն այն արժեքներից, որոնք վերագրվել են ֆունկցիային այն կետերում, որտեղ նա որոշված չէր։

288. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ ԵՎ ԼՐԱՑՈՒՄՆԵՐ։ *Որպես վարժություն բերենք* n° 285-*ի հայտանիշի կիրառման օրինակներ կոնկրետ ֆունկցիաների նկատմամբ։*

1) Վերադառնանք n° 70, 8)-*ում դիտարկված ֆունկցիային՝* $f(x)=\frac{1}{q}$, *եթե* x-*ը անկրճատելի կոտորակ է, և հավասար է զրոյի* $[0,1]$ *միջակայքի մյուս կետերում։*

Դիցուք $[0,1]$ *միջակայքը տրոհված է* $\Delta x_i<\lambda$ *երկարություններ ունեցող մասերի։ Վերցնենք մի կամավոր բնական* N *թիվ։ Բոլոր մասնակի միջակայքերը երկու դասի բաժանենք՝*

(ա) Առաջին դասին վերագրենք այն միջակայքերը, որոնք պարունակում են $q<N$ *հայտարարներ ունեցող* $\frac{p}{q}$ *թվեր. քանի որ այդպիսի թվեր գոյություն ունեն միայն վերջավոր* $k=k_N$ *թվով, ապա և առաջին դասի միջակայքերի թիվը* $2k$-*ից ավելի չի լինի, իսկ նրանց գումարը չի գերազանցի* $2k\lambda$-*ին։*

(բ) Երկրորդ դասին վերագրենք այն միջակայքերը, որոնք չեն պարունակում նշված թվերը. դրանց համար ω_i *տատանումը, ակներևորեն,* $\frac{1}{N}$-*ից փոքր է։*

Եթե դրան համապատասխան $\sum \omega_i \Delta x_i$ գումարը երկու մասի բաժանենք և յուրաքանչյուրն առանձին գնահատենք, ապա արդյունքում կստանանք՝

$$\sum \omega_i \Delta x_i < 2k_N \lambda + \frac{1}{N}.$$

Վերցնելով նախ $N > \frac{2}{\varepsilon}$, և ապա $\lambda < \frac{\varepsilon}{4k_N} = \delta$, կունենանք $\sum \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$, որն ապացուցում է ֆունկցիայի ինտեգրելիությունը։

Այս օրինակը հետաքրքիր է նրանով, որ տվյալ ֆունկցիան անթիվ բազմությամբ խզման կետեր ունի, բայց և այնպես ինտեգրելի է։ [Ի միջի այլոց, այս տեսակ օրինակներ կարելի է կառուցել և III թեորեմայի հիման վրա։]

2) Այժմ նորից դիտարկենք Դիրիխլեի ֆունկցիան [46; 70. 7)]՝

$\chi(x)=1$, եթե x-ը ռացիոնալ թիվ է, և

0, եթե x-ը իռացիոնալ է։

Քանի որ [0, 1] միջակայքի ցանկացած մասում այդ ֆունկցիայի տատանումը՝ $\omega=1$, ապա նաև $\sum_i \omega_i \Delta x_i = 1$, այնպես որ ֆունկցիան նախահայտորեն ինտեգրելի չէ։

3) n° 285-ում դուրս բերված որոշյալ ինտեգրալի գոյության հայտանիշը կարելի է ներկայացնել հետևյալ ձևով՝

Որոշյալ ինտեգրալի գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի տրված $\varepsilon>0$ և $\sigma>0$ թվերով կարելի լինի գտնել այնպիսի $\delta>0$, որ հենց որ բոլոր $\Delta x_i > \delta$, ապա այն միջակայքերի երկարությունների

$$\sum_{i'} \Delta x_{i'}$$

գումարը, որոնց համապատասխանում են

$$\omega_i \geqslant \varepsilon$$

տատանումները, ինքը լինի $<\sigma$։

Անհրաժեշտությունը պարզ է հետևյալ անհավասարություններից՝

$$\sum_{i'} \omega_i \Delta x_i \geqslant \sum_{i} \omega_{i'} \Delta x_{i'} \geqslant \varepsilon \sum_{i'} \Delta x_{i'},$$

եթե δ-ի ընտրության հաշվին, առաջին գումարը դարձնենք ավելի փոքր, քան εσ-ն, իսկ բավարարությունը բխում է հետևյալ գնահատումներից՝

$$\sum_{i}\omega_{i}\Delta x_{i}=\sum_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'}+\sum_{i''}\omega_{i''}\Delta x_{i''}<$$

$$<\Omega\sum_{i'}\Delta x_{i'}+\varepsilon\sum_{i''}\Delta x_{i''}<\Omega\sigma+\varepsilon\,(b-a)։$$

(Այստեղ Ω-ն, ինչպես միշտ, նշանակում է ֆունկցիայի տատանումը դիտարկվող ամբողջ միջակայքում. i'' նշիչով նշված են այն մասնակի միջակայքերը, որոնցում տատանումները՝ $\omega_{i''}<\varepsilon$)։

4) Կիրառենք հայտանիշն այս նոր ձևով հետևյալ առաջադրությունը ապացուցելու համար՝

Եթե f(x) ֆունկցիան ինտեգրելի է [a, b] միջակայքում, ընդ որում նրա արժեքները դուրս չեն գալիս [c, d] միջակայքի սահմաններից, որում φ(y) ֆունկցիան անընդհատ է, ապա φ(f(x)) բարդ ֆունկցիան նույնպես ինտեգրելի է [a, b]-ում։

Կամայականորեն վերցնենք $\varepsilon>0$ և $\sigma>0$ թվերը։ ε թվի համապատասխան, φ(y) ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, կգտնվի այնպիսի $\eta>0$, որ y-ի արժեքների ամեն մի միջակայքում, որի երկարությունը փոքր է η-ից, φ ֆունկցիայի տատանումը կլինի $<\varepsilon$։

f ֆունկցիայի ինտեգրելիության շնորհիվ, η և σ թվերով այժմ կգտնվի այնպիսի δ, որ հենց որ միջակայքը տրոհվի այնպիսի Δx_i մասերի, որոնց երկարությունները $<\delta$, դրանցից այն հատվածների երկարությունների $\sum_{i}\Delta x_{i'}$ գումարը, որոնց համար f ֆունկցիայի տատանումները՝ $\omega_{i'}[f]\geqslant\eta$, ինքը փոքր կլինի σ-ից (տես 3))։ Մնացած միջակայքերի համար ունենք՝ $\omega_{i''}[f]<\eta$, հետևաբար, հենց η թվի ընտրության համաձայն, $\omega_{i''}[\varphi(f)]<\varepsilon$։

Այսպիսով, φ(f(x)) բարդ ֆունկցիայի համար տատանումները կարող են լինել $\geqslant\varepsilon$ առաջին խմբի միայն մի քանի միջակայքերում, որոնց երկարությունների գումարը նախահայտորեն $<\sigma$։ Բարդ ֆունկցիայի նկատմամբ կիրառելով 3) հայտանիշը, համոզվում ենք, որ այն ինտեգրելի է։

5) Եթե φ ֆունկցիայի նկատմամբ էլ միայն ինտեգրելիություն ենթադրենք, ապա բարդ ֆունկցիան կարող է լինել և ոչ ինտեգրելի։ Ահավասիկ օրինակ՝

Որպես f(x) ֆունկցիա վերցնենք այն, որն արդեն վերը ուսումնասիրեցինք 1)-ում. այդ ֆունկցիան ինտեգրելի է [0, 1] միջակայքում, ընդ որում նրա արժեքներն այդ միջակայքի սահմաններից չեն դուրս գալիս։ Այնուհետև, դիցուք

$$\varphi(y)=1,\ \text{երբ}\ 0<y<1$$

և

$$\varphi(0)=0։$$

φ(y) ֆունկցիան նույնպես ինտեգրելի է [0,1] միջակայքում.

Սակայն φ(f(x)) բարդ ֆունկցիան, ինչպես հեշտ է տեսնել, համընկ-

նում է Դիրիխլեի ֆունկցիայի հետ [տես 2)]. այն ինտեգրելի չէ [0,1] միջակայքում։

289. ՍՏՈՐԻՆ ԵՎ ՎԵՐԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԸ ՈՐՊԵՍ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐ։ Վերջում վերադառնանք ստորին և վերին ինտեգրալներին, որոնք n° 284-ում սահմանվեցին որպես Դարբուի s և S գումարների ճշգրիտ եզրեր։ Այժմ ցույց տանք, որ դրա հետ միասին նրանք հանդիսանում են նաև հիշյալ գումարների սահմաններ։

ԴԱՐԲՈՒԻ ԹԵՈՐԵՄԱՆ։ Ինչպիսի էլ լինի $f(x)$ սահմանափակ ֆունկցիան, նրա համար միշտ

$$I_* = \lim_{\lambda \to 0} s, \qquad I^* = \lim_{\lambda \to 0} S.$$

Ապացույցը կատարենք, օրինակ, վերին գումարների համար։

Ամենից առաջ, նախապես տրված $\varepsilon > 0$ թվի համապատասխան վերցնենք $[a, b]$ միջակայքի այնպիսի տրոհում, որ նրան համապատասխանող S' վերին գումարի համար լինի

$$S' < I^* + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

Այդ հնարավոր է, քանի որ I^*-ը ծառայում է որպես ստորին ճշգրիտ եզր վերին գումարների բազմության համար։ Դիցուք այդ ստորաբաժանումը պարունակում է m' թվով տրոհման (ներքին) կետեր։ Այժմ ընդունենք՝

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2m'\Omega},$$

որտեղ Ω-ն՝ $f(x)$ ֆունկցիայի տատանումն է ամբողջ $[a, b]$ միջակայքում, և դիտարկենք միջակայքի կամայական մի տրոհում, որի համար բոլոր Δx_i-երը փոքր են δ-ից. դիցուք դրան համապատասխանում է S գումար։

S-ի և I^*-ի միջև տարբերությունը գնահատելու համար, մտցնենք մեր միջակայքի մի երրորդ տրոհում ևս, միախառնելով առաջին երկու տրոհումների տրոհման կետերը։ Եթե նրան համապատասխանող վերին գումարն է S'', ապա, Դարբուի գումարների առաջին հատկության համաձայն [284], $S'' \leqslant S'$, այնպես որ առավել ևս [տես (9)]՝

$$S'' < I^* + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10}$$

Մյուս կողմից, համաձայն n° 284-ի դիտողության, $S - S''$ տարբերությունը չի գերազանցում Ω-ի և երկրորդ տրոհման այն միջակայքերի Δx_i երկարությունների գումարի արտադրյալին, որոնց ներսը ընկել են առաջին տրոհման բաժանման կետերը։ Բայց այդպիսի միջակայքերի թիվը m'-ից մեծ չէ, իսկ նրանցից յուրաքանչյուրի երկարությունը փոքր է δ-ից, այնպես որ

$$S - S'' < m'\Omega\delta = \frac{\varepsilon}{2},$$

որտեղից, (10)-ի կապակցությամբ,

$$S < I^* + \varepsilon.$$

Քանի որ մյուս կողմից. $S \geqslant I^*$, ապա հենց որ $\Delta x_i < \delta$, կունենանք

$$0 < S - I^* < \varepsilon,$$

այնպես որ, իրոք, $S \to I^*$։

Ապացուցված թեորեմայից անմիջականորեն հետևում է, որ միշտ

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = I^* - I_*.$$

Այս առնչությունը թույլատրում է ինտեգրալի գոյության կրիտերիումը արտահայտել հետևյալ ձևով [հմմ. 285]։

Որոշյալ ինտեգրալի գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ Դարբուի ստորին և վերին ինտեգրալները իրար հավասար լինեն՝

$$I_* = I^*.$$

(Այս պայմանի կատարման դեպքում, ակներևաբար, նրանց ընդհանուր արժեքն էլ հենց տալիս է որոշյալ ինտեգրալի մեծությունը)։

Պայմանի այս նոր ձևը որոշ առավելություն ունի առաջինի նկատմամբ։ Համոզվելու համար, որ Դարբուի ինտեգրալները հավասար են, բավական է ցույց տալ, որ

$$S - s < \varepsilon$$

անհավասարությանը, կամայական ε-ի դեպքում, բավարարում է s և S գումարների գոնե մեկ զույգ։ Իրոք (5)-ի շնորհիվ, այդ դեպքում կլինի նաև

$$0 < I^* - I_* < \varepsilon,$$

որտեղից, ε-ի կամայական լինելու շնորհիվ, բխում է և պահանջված հավասարությունը։

Հեշտ է գլխի ընկնել, թե ինչպես դրան համապատասխան կարող է հեշտացվել նաև ինտեգրելիության այն պայմանը, որն արտահայտված է նախորդ n°-ում [տես 3)]։

§ 2. ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

290. *ԻՆՏԵԳՐԱԼ ԸՍՏ ԿՈՂՄՆՈՐՈՇՎԱԾ ՄԻՋԱԿԱՅՔԻ.* *Մինչև հիմա, խոսելով «ինտեգրալի մասին a-ից մինչև b միջակայքում», մենք միշտ ենթադրում էինք, որ $a < b$։ Այժմ վերացնենք այդ նեղիչ սահմանափակումը։*

Այդ նպատակով մենք, ամենից առաջ, սահմանենք ուղ-

ղուԹյամբ օժտված կամ կողմնորոշված միջակայքի գաղափարը։ [a, b] կողմնորոշված միջակայք ասելով (*որտեղ կարող է լինել և'* $a<b$, *և'* $a>b$), մենք հասկանալու ենք x-ի այն արժեքների բազմությունը, որոնք բավարարում են, համապատասխանաբար,

$$a \leqslant x \leqslant b \text{ կամ } a \geqslant x \geqslant b$$

անհավասարություններին և դասավորված կամ կարգավորված են a-ից դեպի b-ն, *այսինքն՝ աճման կարգով, եԹե* $a<b$, *կամ նվազման կարգով, եԹե* $a>b$։ *Այսպիսով, մենք իրարից տարբերում ենք* [a, b] *և* [b, a] *միջակայքերը. համընկնելով իրենց կազմով (որպես Թվային բազմուԹյուններ), նրանք տարբերվում են ուղղուԹյամբ։*

Ինտեգրալի այն սահմանումը, որը տրվել է 283-ում, վերաբերում է [a, b] *կողմնորոշված միջակայքին, բայց միայն այն դեպքի համար, երբ* $a<b$։

Դիմենք ինտեգրալը որոշելուն [a, b] *կողմնորոշված միջակայքում, ենԹադրելով, որ* $a>b$։ *Այս դեպքի համար կարելի է կրկնել միջակայքի տրոհման սովորական պրոցեսը, մտցնելով տրոհման այնպիսի կետեր, որոնք գնում են* a-*ից դեպի* b *ուղղուԹյամբ՝*

$$x_0=a>x_1>x_2>\ldots>x_i>x_{i+1}>\ldots>x_n=b.$$

Յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}]$ *միջակայքում ընտրելով մեկական* ξ_i *կետ այնպես, որ* $x_i \geqslant \xi \geqslant x_{i+1}$, *կազմենք*

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

ինտեգրալ գումարը, որտեղ, այս անգամ, բոլոր $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i < 0$։ *Վերջապես, այդ գումարի սահմանը, երբ* $\lambda=\max|\Delta x_i|\to 0$ *հենց կբերի մեզ ինտեգրալի գաղափարին՝*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\lambda\to 0}\sigma.$$

Եթե [a, b] *և* [b, a] *միջակայքերի համար (որտեղ* $a<b$*)) վերցնենք տրոհման միևնույն կետերը և միևնույն* ξ *կետերը, ապա դրանց համապատասխանող ինտեգրալ գումարները կտարբերվեն միայն նշաններով. Այստեղից անցնելով սահմաններին, ստանում ենք այսպիսի առաջադրություն՝*

1° Եթե $f(x)$-ը ինտեգրելի է [b, a] միջակայքում, ապա այն ինտեգրելի է նաև [a, b] միջակայքում, ընդ որում՝

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Ի միջի այլոց, կարելի էր հենց այս հավասարությունն ընդունել որպես $\int_a^b$ *ինտեգրալի սահմանում* $a>b$ *դեպքում, ենթադրելով, որ* $\int_b^a$ *ինտեգրալը գոյություն ունի.*

Նկատենք նաև, որ հենց սահմանումի համաձայն էլ համարում ենք

$$\int_a^a f(x)\,dx=0.$$

291. ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐՈՎ ԱՐՏԱՀԱՅՏՎՈՂ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.

Թվենք որոշյալ ինտեգրալների հաջորդ հատկությունները, որոնք արտահայտվում են հավասարություններով.*

2° Դիցուք $f(x)$-ը ինտեգրելի է [a, b], [a, c] և [c, b] միջակայքերից ամենամեծում**: Այդ դեպքում այն ինտեգրելի է նաև մյուս երկուսում, և տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

---

* *Այստեղ և հետագայում, եթե խոսքը վերաբերում է* $\int_a^b$ *ինտեգրալին, մենք համարում ենք, որ* $a<b$ *և* $a>b$ *երկու դեպքն էլ հնարավոր են (եթե հատուկ վերապահում չի արված)։*

** *Դրա փոխարեն կարելի էր ենթադրել, որ* $f(x)$ *ֆունկցիան ինտեգրելի է երկու փոքր միջակայքերից յուրաքանչյուրում. այդ դեպքում այն ինտեգրելի կլիներ նաև մեծում։*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

ինչպիսին էլ լինի a, b և c կետերի փոխադարձ դասավորությունը:

Ապացույց։ Նախ ենթադրենք, թե $a<c<b$ *և ֆունկցիան ինտեգրելի է* [a, b] *միջակայքում։*

Այն, որ ֆունկցիան ինտեգրելի է [a, c] *և* [c, b] *միջակայքերում, հետևում է* 287-*ի* III-*ից։*

Դիտարկենք [a, b] *միջակայքի մասերի տրոհումը, ընդ որում* c *կետը համարենք տրոհման կետերից մեկը։ Կազմելով ինտեգրալ գումարը, կունենանք (նշանակումների իմաստը պարզ է)՝*

$$\sum_a^b f(\xi)\,\Delta x = \sum_a^c f(\xi)\,\Delta x + \sum_c^b f(\xi)\,\Delta x.$$

Անցնելով սահմանին $\lambda\to 0$ *դեպքում, մենք կստանանք պահանջված հավասարությունը։*

a, b, c *կետերի դասավորության այլ դեպքերը բերվում են այդ դեպքին։ Դիցուք, օրինակ,* $b<a<c$ *և* f(x) *ֆունկցիան ինտեգրելի է* [c, b] *միջակայքում կամ, որ միևնույնն է 1°-ի համաձայն, ինտեգրելի է* [b, c] *միջակայքում։ Այդ դեպքում, ըստ ապացուցածի, կունենանք՝*

$$\int_b^c f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx,$$

որտեղից, առաջին և երկրորդ ինտեգրալները հավասարության մի մասից մյուսը փոխադրելով և սահմանները տեղափոխելով (1° հատկության հիման վրա), կգանք դարձյալ նախկին առնչությանը։

3° Եթե f(x)-ն ինտեգրելի է [a, b] միջակայքում, ապա kf(x)-ը *(*որտեղ k=const.*)* նույնպես ինտեգրելի է այդ միջակայքում, ընդ որում՝

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

4° Եթե $f(x)$-ն ու $g(x)$-ը երկուսն էլ ինտեգրելի են $[a, b]$ միջակայքում, ապա $f(x)\pm g(x)$-ը նույնպես ինտեգրելի է այդ միջակայքում, ընդ որում՝

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx.$$

Երկու դեպքում էլ ապացույցը կատարվում է համանման ձևով՝ ելնելով ինտեգրալ գումարներից և անցնելով սահմանին։ Կատարենք այդ ապացույցը, օրինակ, վերջին առաջադրության համար։

$[a, b]$ *միջակայքը կամայական կերպով տրոհենք մասերի և կազմենք ինտեգրալ գումարներ բոլոր երեք ինտեգրալների համար։ Այդ դեպքում* ξ_i *կետերն ամեն մի մասնակի միջակայքում ընտրում ենք կամայականորեն, բայց բոլոր գումարների համար միևնույնը, և ստանում ենք՝*

$$\sum[f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\Delta x_i=\sum f(\xi_i)\,\Delta x_i\pm\sum g(\xi_i)\Delta x_i.$$

Դիցուք այժմ $\lambda\to 0$. *քանի որ աջակողմյան երկու գումարների համար էլ գոյություն ունի սահման, ապա ձախակողմյան գումարի համար ևս գոյություն ունի սահման, որով և հաստատվում է* $f(x)\pm g(x)$ *ֆունկցիայի ինտեգրելիությունը։ Նախորդ հավասարության մեջ անցնելով սահմաններին, գալիս ենք պահանջված առնչությանը։*

Դիտողություն։ Ուշադրություն ենք հրավիրում այն բանի վրա, որ վերջին երկու պնդումների ապացուցման ժամանակ կարիք չեղավ հենվել 287-ի I և III առաջադրությունների վրա. $kf(x)$ *և* $f(x)\pm g(x)$ *ֆունկցիաների ինտեգրելիությունն ապացուցվում է անմիջականորեն սահմանին անցնելով։*

292. ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ԱՐՏԱՀԱՅՏՎՈՂ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։ Մինչև այժմ մենք դիտարկում էինք ինտեգրալների այն հատկությունները, որոնք արտահայտվում են հավասարություններով. այժմ անցնենք այն հատկություններին, որոնք արտահայտվում են անհավասարություններով։

5° Եթե $[a, b]$ միջակայքում ինտեգրելի $f(x)$ ֆունկցիան բացասական չէ և $a<b$, ապա

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Ապացույցն ակներև է։

Համեմատաբար դժվար է ապացուցել ավելի ճշգրիտ արդյունքը՝

Եթե [a, b] միջակայքում ինտեգրելի f(x) ֆունկցիան դրական է և a<b, ապա

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Ապացուցենք հակառակ ենթադրությամբ։ Ենթադրենք, թե

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Այն ժամանակ $\lambda \to 0$ *դեպքում Դարբուի վերին գումարը՝ S-ը նույնպես ձգտում է զրոյի* [285 (7)]*։ Վերցնելով կամայական* $\varepsilon_1 > 0$, *կարող ենք այդ գումարը* $\varepsilon_1(b-a)$*-ից փոքր դարձնել։ Այդ դեպքում* M_i *վերին սահմաններից գոնե մեկը փոքր կլինի* ε_1*-ից, ուրիշ խոսքով,* [a, b]*-ում կգտնվի այնպիսի մի* $[a_1, b_1]$ *մաս, որի սահմաններում* f(x)*-ի բոլոր արժեքները փոքր են* ε_1*-ից։*

Քանի որ նաև

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx = 0^{*},$$

ապա նման ձևով, $[a_1, b_1]$*-ից կառանձնանա այնպիսի*

---

* *Իրոք, ըստ 2°-ի*

$$\int_a^b = \int_a^{a_1} + \int_{a_1}^{b_1} + \int_{b_1}^{b} \text{ և, քանի որ } \int_a^{a_1} \geqslant 0,\ \int_{b_1}^{b} \geqslant 0, \text{ ապա}$$

$$0 \leqslant \int_{a_1}^{b_1} \leqslant \int_a^b = 0.$$

$[a_2, b_2]$ *մաս, որի սահմաններում* $f(x) < \varepsilon_2$, *որտեղ* ε_2-*ը ցանկացած դրական թիվ է՝ փոքր* ε_1-*ից, և այլն։*

Վերցնելով $\varepsilon_k \to 0$ *դրական թվերի հաջորդականություն, կարելի է որոշել ներդրված (և, եթե ցանկանանք, երկարությամբ մինչև 0 նվազող)* $[a_k, b_k]$ *միջակայքերի այնպիսի հաջորդականություն, որ*

$$0 \leq f(x) < \varepsilon_k, \text{ եթե } a_k \leq x \leq b_k \quad (k=1, 2, 3, \ldots)$$

Այդ դեպքում, ըստ n° 38 *լեմմայի, գոյություն ունի մի* c *կետ, որն ընդհանուր է այդ բոլոր միջակայքերի համար. նրա համար պետք է լինի՝*

$$0 < f(c) < \varepsilon_k \text{ երբ } k=1, 2, 3\ldots,$$

որն անհնար է, որովհետև $\varepsilon_k \to 0$։ *Թեորեմն ապացուցված է։*

Այստեղից (և 4°-ից) պարզ հետևանք է հանդիսանում՝

6° Եթե $f(x)$ **և** $g(x)$ **երկու ֆունկցիաներն էլ ինտեգրելի են** $[a, b]$ **միջակայքում և միշտ** $f(x) \leq g(x)$ **[կամ** $f(x) < g(x)$**], ապա և**

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx \quad \left[\text{կամ } \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx\right],$$

ենթադրելով, որ $a < b$։

Պետք է միայն նախորդ հատկությունը կիրառել $g(x) - f(x)$ *տարբերության նկատմամբ։ Նույնպես հեշտությամբ ստացվում է՝*

7° Դիցուք $f(x)$ **ֆունկցիան ինտեգրելի է** $[a, b]$ **միջակայքում, և** $a < b$. **այդ դեպքում ունենք հետևյալ անհավասարությունը՝**

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Վերջին ինտեգրալի գոյությունը հետևում է 287-*ի* I-*ից։* 6° *հատկությունն այնուհետև կիրառում ենք հետևյալ ֆունկցիաների նկատմամբ՝*

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

Ի միջի այլոց, անհավասարությունը հեշտությամբ կարե-

լի է ստանալ և անմիջականորեն, ելնելով հետևյալ ինտեգրալ գումարներից՝

$$\left|\sum f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant \sum |f(\xi_i)| \cdot \Delta x_i\,^*$$

և անցնելով սահմաններին։

8° Եթե $f(x)$-ը ինտեգրելի է $[a, b]$-ում, որտեղ $a<b$ և եթե այդ ամբողջ միջակայքում տեղի ունի

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

անհավասարությունը, ապա

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Կարելի է 6° հատկությունը կիրառել m, $f(x)$ և M ֆունկցիաների նկատմամբ, բայց ավելի հեշտ է անմիջականորեն օգտվել հետևյալ ակներև անհավասարություններից՝

$$m\sum \Delta x_i \leqslant \sum f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant M\sum \Delta x_i\,^*$$

և անցնել սահմանին։

Ապացուցված առնչություններին կարելի է ավելի հարմար հավասարության ձև տալ, միաժամանակ ազատվելով $a<q$ սահմանափակումից։

9° **ՄԻՋԻՆ ԱՐԺԵՔԻ ԹԵՈՐԵՄԱՆ**: Դիցուք $f(x)$-ն ինտեգրելի է $[a, b]$-ում $(a \gtrless b)$ և դիցուք այդ ամբողջ միջակայքում $m \leqslant f(x) \leqslant M$ այդ դեպքում՝

$$\int_b^a f(x)\,dx = \mu(b-a),$$

որտեղ $m \leqslant \mu \leqslant M$.

Ապացույց։ Եթե $a<b$, *ապա* 8° *հատկության համաձայն կունենանք՝*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a),$$

որտեղից՝

---

* *Քանի որ* $a<b$, *ապա բոլոր* $\Delta x_i>0$։

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Ընդունելով

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu,$$

ստանում ենք պահանջված հավասարությունը։

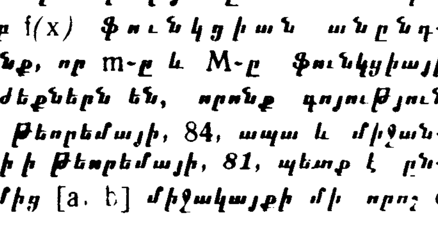
Այն դեպքի համար, երբ $a > b$, *անում ենք նույն դատողությունը* $\int_b^a$*-ի համար, իսկ այնուհետև, տեղափոխելով սահմանները, գալիս ենք նախկին բանաձևին։*

Հենց նոր ապացուցված հավասարությունը առանձնապես պարզ տեսք է ընդունում, երբ $f(x)$ *ֆունկցիան անընդհատ է։ Իրոք, եթե ընդունենք, որ* m*-ը և* M*-ը ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներն են, որոնք գոյություն ունեն ըստ Վայերշտրասի թեորեմայի, 84, ապա և միջանկյալ* μ *արժեքը ևս, ըստ Կոշիի թեորեմայի, 81, պետք է ընդունվի* $f(x)$ *ֆունկցիայի կողմից* $[a, b]$ *միջակայքի մի որոշ* c *կետում։ Այսպիսով՝*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c),$$

որտեղ c*-ն պարունակվում է* $[a, b]$*-ի մեջ։*

Վերջին բանաձևի երկրաչափական իմաստը պարզ է։ Դիցուք $f(x) \geqslant 0$։ *Դիտարկենք* $y = f(x)$ *կորի տակ գտնվող* ABCD *կորագիծ պատկերը (գծ. 5)։ Այդ ժամանակ կորագիծ պատկերի մակերեսը (որն արտահայտվում է որոշյալ ինտեգրալով) հավասար է այն ուղղանկյան մակերեսին, որն ունի նույն հիմքը և որպես բարձրություն՝ մի որոշ* LM *միջին օրդինատ։*



Գծ. 5.

10° **ՄԻՋԻՆ ԱՐԺԵՔԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՐԱԾ ԹԵՈՐԵՄԱՆ:** Դիցուք՝ 1) $f(x)$-ը և $g(x)$-ը ինտեգրելի են $[a, b]$ միջակայքում. 2) $m \le f(x) \le M$. 3) $g(x)$-ը ամբողջ միջակայքում նշանը չի փոխում՝ $g(x) \geqslant 0$ $[g(x) \leqslant 0]$։ Այդ դեպքում՝

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx,$$

որտեղ $m \le \mu \le M$*.

Ապացույց։ Դիցուք սկզբում $g(x) \geqslant 0$ *և* $a < b$. *այդ դեպքում ունենք*

$$m g(x) \le f(x) g(x) \le M g(x).$$

Այս անհավասարությունից, 6° և 3° հատկությունների հիման վրա, ստանում ենք

$$m \int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x) g(x)\,dx \le M \int_a^b g(x)\,dx.$$

$g(x)$ *ֆունկցիայի մասին արած ենթադրության շնորհիվ, ըստ* 5°*-ի, ունենք՝*

$$\int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0.$$

Եթե այս ինտեգրալը հավասար է զրոյի, ապա նախորդ անհավասարություններից պարզ է, որ միաժամանակ նաև

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0,$$

և թեորեմայի պնդումն ակներև է դառնում։ Իսկ եթե ինտեգրալը զրոյից մեծ է, ապա, բաժանելով նրա վրա վերևում ստացված կրկնակի անհավասարության բոլոր մասերը, ընդունենք

$$\frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} = \mu$$

և կգանք պահանջված արդյունքին։

---

* $f(x)\,g(x)$ *արտադրյալի ինտեգրալի գոյությունն ինքը հետևում է* 287, 11-*ից։*

Այն սահմանափակումները, որ $a<b$ *և* $g(x)\geqslant 0$, *փաստորեն պետք չեն. սահմանների տեղափոխումը կամ* $g(x)$*-ի նշանի փոխելը համասարությունը չեն խախտում։*

Եթե $f(x)$*-ը անընդհատ է, ապա, այդ բանաձևը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx,$$

որտեղ c*-ն պարունակվում է* $[a, b]$*-ում.*

293. ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼԸ ՈՐՊԵՍ ՎԵՐԻՆ ՍԱՀՄԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱ. *Եթե* $f(x)$ *ֆունկցիան ինտեգրելի է* $[a, b]$ *միջակայքում* $(a \gtrless b)$, *ապա* [287, III] *այն ինտեգրելի է նաև* $[a, x]$ *միջակայքում, որտեղ* x*-ը* $[a, b]$*-ից վերցրած ցանկացած արժեք է։ Որոշյալ ինտեգրալի* b *սահմանը փոխարինելով* x *փոփոխականով, կստանանք հետևյալ արտահայտությունը՝*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt^{*}, \qquad (1)$$

որը, ակներևաբար, x*-ի ֆունկցիա է հանդիսանում։ Այդ ֆունկցիան օժտված է հետևյալ հատկություններով՝*

11° Երբ $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a, b]$-ում, ապա $\Phi(x)$-ը կլինի x-ի անընդհատ ֆունկցիա նույն միջակայքում:

Ապացույց. x*-ին տալով* $\Delta x = h$ *կամայական աճ (միայն այնպես, որ* $x+h$*-ը դուրս չգա դիտարկվող միջակայքի սահմաններից), կստանանք ֆունկցիայի նոր արժեքը (1)՝*

$$\Phi(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt = \int_a^x + \int_x^{x+h}$$

[*տես 2°*], *այնպես որ՝*

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

---

* *Ինտեգրման փոփոխականն այստեղ մենք նշանակում ենք* t*-ով, որպեսզի այն չշփոթենք* x*-ի վերին սահմանի հետ. հասկանալի է, որ, ինտեգրման փոփոխականի նշանակման փոփոխությունը չի անդրադառնում ինտեգրալի մեծության վրա։*

Այս ինտեգրալի նկատմամբ կիրառենք միջին արժեքի 9° թեորեման՝

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=\mu h. \qquad (2)$$

այստեղ μ*-ն գտնվում է* $f(x)$ *ֆունկցիայի* m' *և* M' *ճշգրիտ եզրերի միջև* $[x, x+h]$ *միջակայքում, և, հետևապես, առավել ևս* m *և* M *(համապատասխան) եզրերի միջև* $[a, b]$* *հիմնական միջակայքում.*

Եթե այժմ h*-ը ձգտեցնենք զրոյի, ապա, ակներևաբար,*

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)\to 0 \text{ կամ } \Phi(x+h)\to\Phi(x),$$

որը և ապացուցում է $\Phi(x)$ *ֆունկցիայի անընդհատությունը.*

12° **Եթե ենթադրենք, որ** $f(x)$ **ֆունկցիան** $t=x$ **կետում անընդհատ է, ապա այդ կետում** $\Phi(x)$ **ֆունկցիան ունի ածանցյալ, որը հավասար է** $f(x)$**-ին՝**

$$\Phi'(x)=f(x).$$

Ապացույց. Իրոք, (2)-ից ունենք՝

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\mu, \text{ որտեղ } m'\le\mu\le M'.$$

Բայց, $t=x$ *դեպքում* $f(x)$ *ֆունկցիայի անընդհատության պատճառով, ցանկացած* $\varepsilon>0$ *թվի համար կգտնվի այնպիսի* $\delta>0$*, որ* $|h|<\delta$ *դեպքում՝*

$$f(x)-\varepsilon<f(t)<f(x)+\varepsilon,$$

t*-ի բոլոր արժեքների համար* $[x, x+h]$ *միջակայքում. Այդ դեպքում տեղի ունեն նաև հետևյալ անհավասարությունները՝*

$$f(x)-\varepsilon\le m'\le\mu\le M'\le f(x)+\varepsilon,$$

այնպես որ՝

$$|\mu-f(x)|\le\varepsilon.$$

Այժմ պարզ է, որ՝

$$\Phi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\mu=f(x),$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել.

---

* *Հիշեցնենք, որ ինտեգրելի ֆունկցիան սահմանափակ է* [283].

Մենք եկանք մի եզրակացության, որն ունի սկզբունքային և գործնական հսկայական նշանակություն։ Եթե ենթադրենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a, b]$ ամբողջ միջակայքում, ապա այն ինտեգրելի է [282, I], և նախորդ պնդումը կիրառելի է լինում այդ միջակայքի ցանկացած x կետի նկատմամբ՝ (1) ինտեգրալի ածանցյալն ըստ x փոփոխական վերին սահմանի ամենուրեք հավասար է $f(x)$ ընդինտեգրալ ֆունկցիայի արժեքին այդ սահմանում:

Ուրիշ խոսքով, $[a, b]$ միջակայքում անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիայի համար միշտ գոյություն ունի նախնական ֆունկցիա, որպես դրա օրինակ հանդիսանում է փոփոխական վերին սահման ունեցող (1) որոշյալ ինտեգրալը:

Այսպիսով, մենք, վերջապես, հաստատեցինք այն առաջադրությունը, որի մասին հիշատակել էինք դեռ n° 252-ում։

Մասնավորապես, մենք այժմ կարող ենք Լեժանդրի F *և* E *ֆունկցիաները* [281] *գրել որոշյալ ինտեգրալների տեսքով՝*

$$F(k, \varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \quad E(k, \varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta.$$

Հենց նոր ապացուցածի համաձայն, դրանք կլինեն նախնական ֆունկցիաներ, համապատասխանաբար, հետևյալ ֆունկցիաների համար՝

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},$$

ընդ որում նրանք վերջիններիս այն նախնական ֆունկցիաներն են, որոնք 0 են դառնում $\varphi=0$ դեպքում։

Դիտողություն. Այս n°-ում ապացուցված պնդումները հեշտությամբ տարածվում են ինտեգրալի այն դեպքի վրա, երբ փոփոխական է ստորին սահմանը, քանի որ (1°)՝

$$\int_x^b f(t)\, dt = -\int_b^x f(t)\, dt.$$

Այս ինտեգրալի ածանցյալն ըստ x-ի, ակներևաբար, հավասար է $-f(x)$-ի (եթե x-ը անընդհատության կետ է)։

294. ՄԻՋԻՆ ԱՐԺԵՔԻ ԵՐԿՐՈՐԴ ԹԵՈՐԵՄԱՆ. *Վերջում ապացուցենք մի թեորեմա ևս, որը վերաբերում է երկու ֆունկցիաների արտադրյալի ինտեգրալին՝*

$$I=\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx.$$

Այն ներկայացնում են տարբեր ձևերով. Սկսենք հետևյալ առաջադրության ապացույցից.

13° Եթե [a, b] միջակայքում $(a<b)$ $f(x)$-ը մոնոտոն նվազում է (թեկուզ լայն իմաստով) և ոչ բացասական է, իսկ $g(x)$-ը ինտեգրելի է, ապա

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=f(a)\int_a^{\xi} g(x)\,dx, \tag{3}$$

որտեղ ξ-ն մի որոշ արժեք է վերոհիշյալ միջակայքից:

[a, b] *միջակայքը կամայապես տրոհելով մասերի* x_i $(i=0, 1, \ldots, n, n+1)$ *կետերի օգնությամբ,* I *ինտեգրալը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝*

$$I=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,g(x)\,dx=\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)\,dx+$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x)-f(x_i)]\,g(x)\,dx=\sigma+\rho.$$

Եթե L*-ով նշանակենք* $|g(x)|$ *ֆունկցիայի վերին եզրը, իսկ* ω_i*-ով (ինչպես սովորաբար)* $f(x)$ *ֆունկցիայի տատանումը* $[x_i, x_{i+1}]$ i*-րդ միջակայքում, որի երկարությունն է* Δx_i*, ապա, ակներևաբեն՝*

$$|\rho|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x)-f(x_i)|\,|g(x)|\,dx\leqslant L\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i.$$

Այստեղից, $f(x)$ *ֆունկցիայի ինտեգրելիության շնորհիվ* [286,

III], պարզ է, որ $\rho \to 0$, երբ $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$, այնպես որ

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma.$$

Այժմ մուծենք հետևյալ ֆունկցիան՝

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$

և դրա օգնությամբ σ գումարը արտագրենք այսպես՝

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)[G(x_{i+1}) - G(x_i)]$$

կամ, վերջապես, բանալով փակագծերը և գումարելիները այլ կերպ խմբավորելով, այսպես՝

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} G(x_i)[f(x_{i-1}) - f(x_i)] + G(b)f(x_{n-1}).$$

$G(x)$ անընդհատ ֆունկցիան [293, 11°], երբ x-ը փոփոխվում է $[a, b]$ միջակայքում, ունենում է ինչպես m փոքրագույն արժեք, այնպես էլ M մեծագույն արժեք։ Քանի որ բոլոր

$$f(x_{i-1}) - f(x_i) \quad (\text{երբ } i = 1, 2, \ldots, n-1) \text{ և } f(x_{n-1})$$

արտադրիչները, $f(x)$ ֆունկցիայի նկատմամբ արած ենթադրությունների շնորհիվ, ոչ-բացասական են, ապա, G-ի արժեքները փոխարինելով, համապատասխանաբար, m-ով և M-ով, կստանանք երկու թիվ՝

$$mf(a) \text{ և } Mf(a),$$

որոնց միջև գտնվում է σ գումարը։ Նույն թվերի միջև էլ, ակներևաբար, պարունակվում է նաև I ինտեգրալը որպես այդ գումարի սահման, կամ այլ կերպ՝

$$I = \mu f(a), \text{ որտեղ } m \leqslant \mu \leqslant M.$$

Սակայն, $G(x)$ ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, $[a, b]$ միջակայքում կգտնվի այնպիսի ξ արժեք, որ $\mu = G(\xi)$ [81].

Այդ դեպքում՝

$$I=f(a)G(\xi),$$

որը հավասարազոր է (3) բանաձևին։

Նման ձևով, եթե, f(x) ֆունկցիան, մնալով ոչ-բացասական, մոնոտոն աճում է, ապա տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(b)\int_\xi^b g(x)dx,$$

որտեղ $a\leqslant\xi\leqslant b$։ *Այս բանաձևերը սովորաբար անվանում են Բոննեի (O. Bonnet) բանաձևեր։ Վերջապես,*

14° Եթե պահպանենք f(x) ֆունկցիայի միայն մոնոտոնության ենթադրությունը, չպահպանելով նրա ոչ-բացասականությունը, ապա կարելի է պնդել, որ

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^\xi g(x)dx+f(b)\int_\xi^b g(x)dx \qquad (4)$$

$$a\leqslant\xi\leqslant b.$$

Իրոք, դիցուք, օրինակ, f(x) *ֆունկցիան մոնոտոն նվազում է. այդ դեպքում, ակներևորեն, հետևյալ տարբերությունը* $f(x)-f(b)\geqslant 0$, *և արժե միայն այդ ֆունկցիայի նկատմամբ կիրառել (3) բանաձևը, որպեսզի թեթև ձևափոխություններից հետո ստանանք (4)-ը։*

Հենց այս ապացուցած թեորեման էլ կոչվում է միջին արժեքի երկրորդ թեորեմա [*համեմատել* 292, *10°*]։

Հետևյալ պարզ դիտողությունը թույլ է տալիս տալ նրան մի քիչ ավելի ընդհանուր տեսք։ Եթե փոխենք f(x) *ֆունկցիայի արժեքները* a *և* b *կետերում, վերցնելով նրանց փոխարեն ցանկացած* A *և* B *թվեր, միայն այն պայմանով, որ*

$A\geqslant f(a+0)$ *և* $B\leqslant f(b-0)$ *(եթե f-ը նվազում է),*

$A\leqslant f(a+0)$ *և* $B\geqslant f(b-0)$ *(եթե f-ը աճում է),*

ապա ոչ միայն I ինտեգրալի արժեքը չի փոխվի, այլև կպահպանվի f(x) *ֆունկցիայի մոնոտոնությունը, այնպես որ (4)-ի օրինակով կարելի է պնդել, որ*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=A\int_a^\xi g(x)dx+B\int_\xi^b g(x)dx. \qquad (5)$$

Մասնավորապես,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a+0)\int_a^{\xi} g(x)dx + f(b-0)\int_{\xi}^{b} g(x)dx. \qquad (5^*)$$

Այստեղ, ինչպես և վերևում, ξ-ն նշանակում է մի որոշ թիվ [a, b] միջակայքից, բայց նա, ընդհանրապես ասած, կախված է A և B թվերի ընտրությունից։

§ 3. ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ ԵՎ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒՄԸ

295. ՀԱՇՎՈՒՄԸ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ԳՈՒՄԱՐՆԵՐԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ. *Բերենք որոշյալ ինտեգրալ հաշվելու մի շարք օրինակներ, ինտեգրալն անմիջականորեն դիտելով որպես ինտեգրալ գումարների սահման՝ համաձայն նրա սահմանումի։ Նախապես գիտենալով, որ անընդհատ ֆունկցիայի համար ինտեգրալ գոյություն ունի, այն հաշվելու համար կարող ենք միջակայքի տրոհումն ու ξ կետերը ընտրել, ղեկավարվելով բացառապես հարմարության նկատառումներով։*

1) $\int_a^b x^k dx$ *(a-ն և b-ն՝ կամայական իրական թվեր են, իսկ k-ն՝ բնական թիվ է)։*

Նախ հաշվենք $\int_0^a x^k dx$ $(a \neq 0)$ *ինտեգրալը։* [0, a] *միջակայքը տրոհենք n հավասար մասերի, իսկ յուրաքանչյուր մասնակի միջակայքում* x^k *ֆունկցիան հաշվենք նրա աջ ծայրի համար, եթե a>0, և ձախ ծայրի համար, եթե a<0։ Այդ դեպքում ինտեգրալ գումարը կլինի*

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}a\right)^k \cdot \frac{a}{n} = a^{k+1}\frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}$$

և, եթե հաշվի առնվի n 38-ի 14) խնդիրը, ապա

$$\int_0^a x^k dx = \lim_{n \to \infty} \sigma_n = \frac{a^{k+1}}{k+1}.$$

Այստեղից արդեն դժվար չէ ստանալ նաև ընդհանուր բանաձևը

$$\int_a^b x^{\mu} dx = \int_0^b - \int_0^a = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

2) $\int_a^b x^{\mu} dx$ $(b > a > 0$, *μ-ն կամայական իրական թիվ է)։*

Այս անգամ [a, b] միջակայքը տրոհենք անհավասար մասերի, այն է a-ի և b-ի միջև տեղավորենք n−1 հատ երկրաչափական միջիններ. Ուրիշ խոսքով, ընդունելով

$$q = q_n = \sqrt[n]{\frac{b}{a}},$$

դիտարկենք թվերի հետևյալ շարքը՝

$$a,\ aq, \ldots,\ aq^i, \ldots, aq^n = b:$$

Նկատենք, որ երբ $n \to \infty$, q հարաբերությունը, որը հավասար է q_n-ին, ձգտում է 1-ի, իսկ $aq^{i+1} - aq^i$ տարբերությունները բոլորը ավելի փոքր են $b(q-1)$ մեծությունից, որը $\to 0$:

Հաշվելով ֆունկցիան ձախ ծայրերի համար, ունենք

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} (aq^i)^\mu (aq^{i+1} - aq^i) = a^{\mu+1}(q-1) \sum_{i=0}^{n-1} (q^{\mu+1})^i:$$

Այժմ ենթադրենք, թե $\mu \neq 1$. այդ դեպքում

$$\sigma_n = a^{\mu+1}(q-1) \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\mu+1} - 1}{q^{\mu+1} - 1} = (b^{\mu+1} - a^{\mu+1}) \frac{q-1}{q^{\mu+1} - 1}$$

և, օգտագործելով արդեն հայտնի սահմանը [n° 76, ենթ. 5), (գ)], կստանանք՝

$$\int_a^b x^\mu\, dx = \lim_{n \to \infty} \sigma_n = (b^{\mu+1} - a^{\mu+1}) \lim_{q \to 1} \frac{q-1}{q^{\mu+1} - 1} = \frac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu+1}:$$

Իսկ այն դեպքում, երբ $\mu = -1$, կլինի՝

$$\sigma_n = n(q_n - 1) = n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right),$$

և մյուս հայտնի հետևանքի հիման վրա [նույն տեղում, (ե)]՝

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{n \to \infty} \sigma_n = \lim_{n \to \infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right) = \log b - \log a:$$

3) $\int_a^b \sin x\,dx$: Տրոհելով [a, b] միջակայքը n հավասար մասերի, ընդունենք՝ $h=\frac{b-a}{n}$. Հաշվենք sin x ֆունկցիան աջ ծայրերի համար, երբ $a<b$, և ձախերի համար, երբ $a>b$: Այդ դեպքում՝

$$\sigma_n = h\sum_{i=1}^{n} \sin(a+ih):$$

Այդ գումարի համար գտնենք սեղմ արտահայտություն: Բազմապատկելով և բաժանելով այն $2\sin\frac{h}{2}$-ի վրա, իսկ այնուհետև բոլոր գումարելիները ներկայացնելով որպես կոսինուսների տարբերություն, հեշտությամբ կստանանք

$$\sum_{i=1}^{n}\sin(a+ih)=\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\sum_{i=1}^{n}2\sin(a+ih)\sin\frac{h}{2}=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\sum_{i=1}^{n}\left[\cos\left(a+\overline{i-\frac{1}{2}}\,h\right)-\cos\left(a+\overline{i+\frac{1}{2}}\,h\right)\right]=$$

$$=\frac{\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(a+\overline{n+\frac{1}{2}}\,h\right)}{2\sin\frac{h}{2}}: \qquad (1)$$

Այսպիսով՝

$$\sigma_n=\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}h\right)\right]:$$

Քանի որ $h\to0$, երբ $n\to\infty$, ապա՝

$$\int_a^b \sin x\,dx=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}h\right)\right]=$$

$$=\mathrm{coc}\,a-\cos b:$$

Համանման ձևով, ելնելով հետևյալ տարրական բանաձևից՝

$$\sum_{i=1}^{n}\cos(a+ih)=\frac{\sin\left(a+\overline{n+\frac{1}{2}}\,h\right)-\sin\left(a+\frac{1}{2}h\right)}{2\sin\frac{h}{2}}\,^{*}, \qquad (2)$$

---

* Որն ստացվում է (1)-ից, փոխարինելով a-ն $\left(a+\frac{\pi}{2}\right)$-ով:

հեշտ է ցույց տալ, որ

$$\int_a^b \cos x\,dx = \sin b - \sin a:$$

4) Որպեսզի տանք պակաս տեխնիկայի օրինակ, դիտարկենք հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_0^\pi \log(1-2r\cos x+r^2)\,dx,$$

որը սովորաբար կապվում է Պուասսոնի անվան հետ (S.-D. Poisson): Քանի որ

$$(1-|r|)^2 < 1-2r\cos x+r^2,$$

ապա, ենթադրելով $|r| \neq 1$, տեսնում ենք, որ ընդինտեգրալ ֆունկցիան անընդհատ է, և ինտեգրալը գոյություն ունի:

Բաժանելով $[0, \pi]$ միջակայքը n հավասար մասերի, ունենք

$$\sigma_n = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \log\left(1-2r\cos k\frac{\pi}{n}+r^2\right) =$$

$$= \frac{\pi}{n}\log\left[(1+r)^2\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-2r\cos k\frac{\pi}{n}+r^2\right)\right],$$

որտեղ Π-ն արտադրյալի նշան է: Մյուս կողմից, հանրահաշվից հայտնի է հետևյալ վերլուծումը*

---

* Հաշվի առնելով այն արմատները, որոնք ստացվում են մեկից 2n աստիճանի արմատ հանելիս, ունենք $z^{2n}-1$-ի հետևյալ գծային արտադրիչների վերլուծումը՝

$$z^{2n}-1 = \prod_{k=-n}^{n-1}\left(z-\cos\frac{k\pi}{n}-i\sin\frac{k\pi}{n}\right),$$

որտեղ i-ն կեղծ միավորն է: Միատեղ հավաքելով համալուծ արտադրիչները, մենք հենց կստանանք, որ $z^{2n}-1$-ը հավասար է

$$(z^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(z-\cos\frac{k\pi}{n}-i\sin\frac{k\pi}{n}\right)\left(z-\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}\right)=$$

$$=(z^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-2z\cos\frac{k\pi}{n}+z^2\right):$$

$$z^{2n}-1=(z^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-2z\cos k\frac{\pi}{n}+z^2\right).$$

Օգտագործելով այս նույնությունը $z=r$ դեպքում, σ_n-ը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\sigma_n=\frac{\pi}{n}\log\left\{\frac{r+1}{r-1}\left(r^{2n}-1\right)\right\},$$

Դիցուք այժմ $|r|<1$. այդ դեպքում $r^{2n}\to 0$, և

$$\int_0^{\pi}\log(1-2r\cos x+r^2)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sigma_n=0:$$

Իսկ եթե $|r|>1$, ապա արտագրելով σ_n-ը այսպես՝

$$\sigma_n=\frac{\pi}{n}\log\left\{\frac{r+1}{r-1}\cdot\frac{r^{2n}-1}{r^{2n}}\right\}+2\pi\log|r|,$$

կգտնենք՝

$$\int_0^{\pi}\log(1-2r\cos x+r^2)\,dx=2\pi\log|r|:$$

Ընթերցողը տեսնում է, որ որոշյալ ինտեգրալը հաշվելու ուղղակի եղանակը, այսինքն՝ որպես գումարների սահման հաշվումը, նույնիսկ հասարակ դեպքերում պահանջում է գործադրել զգալի ճիգեր. ուստի այդ եղանակը սակավ է օգտագործվում. Ամենից ավելի գործնական է հանդիսանում հետևյալ n°-ում շարադրված եղանակը.

296. ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՇՎԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԸ: 293-ում մենք տեսանք, որ $[a, b]$ միջակայքում անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիայի համար

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

ինտեգրալը նախնական ֆունկցիա է հանդիսանում։ Եթե $F(x)$*-ը* $f(x)$*-ի ցանկացած նախնական ֆունկցիա է (օրինակ, նախորդ գլխի §§ 1—4-ի մեթոդներով գտնված) ապա* [251]՝

$$\Phi(x)=F(x)+C\text{։}$$

C *հաստատունը հեշտ է որոշել, ընդունելով այստեղ* $x=a$, *որովհետև* $\Phi(a)=0$. *այսպիսով, կունենանք*՝

$$0=\Phi(a)=F(a)+C, \text{ որտեղից } C=-F(a)\text{։}$$

Վերջնականապես՝

$$\Phi(x)=F(x)-F(a)\text{։}$$

Մասնավորապես, երբ $x=b$ *կստանանք*

$$\Phi(b)=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)\text{։} \qquad (A)$$

Այս՝ ինտեգրալ հաշվի հիմնական բանաձևն է*։

***Այսպիսով,* որոշյալ ինտեգրալի արժեքն արտահայտվում է ցանկացած նախնական ֆունկցիայի՝ $x=b$ դեպքում և $x=a$ դեպքում ստացած երկու արժեքների տարբերությամբ։**

Եթե ինտեգրալի նկատմամբ կիրառենք միջին արժեքի թեորեման [292, 9°] *և հիշենք, որ* $f(x)=F'(x)$, *ապա կստանանք*

$$F(b)-F(a)=f(c)\cdot(b-a)=F'(c)(b-a) \quad (a<c<b).$$

այս բանաձևն ընթերցողին հիշեցնում է Լագրանժի բանաձևը $F(x)$ *ֆունկցիայի համար* [118]*։ Այսպիսով,* (A) *հիմնական բանաձևի օգնությամբ կապ է հաստատվում միջին արժեքների թեորեմաների միջև դիֆերենցիալ հաշվում և ինտեգրալ հաշվում։*

---

* *Այստեղ դատողությունները լրիվին նման են այն դատողություններին, որոնցով օգտվում էինք* n° 252-*ում* $P(x)$ *ֆունկցիան և* P *մակերեսը հաշվելիս։ Ինքը՝* (A) *բանաձևը հեշտությամբ կարող էր ստացվել* nn° 252-*ի և* 282-*ի արդյունքները համադրելով։*

(A) բանաձևը արդյունավետ ու պարզ միջոց է տալիս $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալը հաշվելու համար։ Չէ՞ որ այդպիսի ֆունկցիաների մի շարք պարզ դասերի համար մենք կարողանում ենք նախնական ֆունկցիան արտահայտել վերջավոր տեսքով՝ տարրական ֆունկցիաների միջոցով։ Այդպիսի դեպքերում որոշյալ ինտեգրալը հաշվվում է անմիջականորեն հիմնական բանաձևի միջոցով։ Նկատենք միայն, որ աջակողմյան տարբերությունը սովորաբար նշանակում են $F(x)\Big|_a^b$ սիմվոլով («կրկնակի տեղադրում a-ից մինչև b») և բանաձևը գրում են այս տեսքով՝

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b. \qquad (A^*)$$

Այսպես, օրինակ, միանգամից գտնում ենք

$$1)\ \int_a^b x^{\mu}\,dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\Big|_a^b = \frac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu+1} \quad (\mu \neq -1),$$

$$2)\ \int_a^b \frac{dx}{x} = \log x\Big|_a^b = \log b - \log a \quad (a>0, b>0),$$

$$3)\ \int_a^b \sin x\,dx = -\cos x\Big|_a^b = \cos a - \cos b,$$

$$\int_a^b \cos x\,dx = \sin x\Big|_a^b = \sin b - \sin a$$

*— արդյունքներ, որոնք ոչ առանց դժվարության ստացանք նախորդ n°-ում [համեմատել 1), 2), 3) օրինակները]**

297. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ Բերենք (A) բանաձևն օգտագործելու հետագա օրինակներ.

** Նախորդ n°-ի 4) օրինակն արդեն չի կարող այդպես պարզ կերպով ապացուցվել, որովհետև համապատասխան անորոշ ինտեգրալը վերջավոր տեսքով չի արտահայտվում։*

$$4)\ (ա)\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\ \sin nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n}-\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0\ (n\neq m),$$

$$(բ)\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx\,dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 2mx}{2m}\right]\Bigg|_{-\pi}^{+\pi}=\pi$$ [տես 255, 17), 18)],

Նման ձևով՝

$$(գ)\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\ \cos nx\,dx=0.$$

$$(դ)\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\ \cos nx\,dx=0$$ կամ π, նայած $n\neq m$, թե $n=m$:

5) Գտնել հետևյալ ինտեգրալների արժեքները (m, n բնական թվեր են)՝

$$(ա)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m-1)}{\sin x}\,dx$$ [Դիրիխլե (P. G. Lejeune-Dirichlet)]:

$$(բ)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx$$ [Ֆեյեր (L. Feje'r)]:

Ցուցում: (ա) (2) բանաձևից, ընդունելով այնտեղ $a=0$, $h=2x$ և $n=m-1$, կարելի է դուրս բերել, որ

$$\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{m-1}\cos 2ix=\frac{\sin(2m-1)x}{2\sin x},$$

Այստեղից, քանի որ առանձին գումարելիները հեշտությամբ ինտեգրվում են (A) բանաձևով, միանգամից ստացվում է

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m-1)}{\sin x}\,dx=\frac{\pi}{2}:$$

(բ) (1) բանաձևից, ընդունելով $a=-x$, $h=2x$, *կգտնենք*

$$\sum_{m=1}^{n} \sin(2m-1)x = \frac{1-\cos 2nx}{2\sin x} = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}:$$

Այստեղից, եթե օգտագործենք նախորդ արդյունքը,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx = n\frac{\pi}{2}:$$

զ) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}\,\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}},$$

որտեղ $0<\alpha,\ \beta<1$:

Եթե հետևյալ բանաձևի [271 *(6*)*] *մեջ*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log\left| ax+\frac{b}{2}+\sqrt{a}\,\sqrt{ax^2+bx+c}\right| + C$$

նույնացնենք

$$ax^2+bx+c=(1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\beta x+\beta^2),$$

ապա, դիֆերենցելով, կգտնենք՝

$$ax+\frac{b}{2} = -\alpha(1-2\beta x+\beta^2)-\beta(1-2\alpha x+\alpha^2):$$

Այստեղից հեշտ է դուրս բերել, որ $x=1$ *դեպքում լոգարիթմի նշանի տակ գտնվող արտահայտությունը կստանա հետևյալ արժեքը՝*

$$-\alpha(1-\beta)^2-\beta(1-\alpha)^2+2\sqrt{\alpha\beta}\,(1-\alpha)(1-\beta)=$$
$$=-[\sqrt{\alpha}\,(1-\beta)-\sqrt{\beta}\,(1-\alpha)]^2=-(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2(1+\sqrt{\alpha\beta})^2,$$

իսկ $x=-1$ *դեպքում՝*

$$-(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2(1-\sqrt{\alpha\beta})^2:$$

Այսպիսով, որոնելի ինտեգրալի համար վերջնականապես ստացվում է հետևյալ պարզ արտահայտությունը՝

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \log \frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}},$$

որը կախված է միայն $\alpha\beta$ *արտադրյալից*:*

** Մեր հաշվումներն անցանելի են միայն* $\alpha\neq\beta$ *դեպքում, սակայն հեշտ է տեսնել, որ արդյունքը ճիշտ է նաև* $\alpha=\beta$ *դեպքում:*

Նկատենք, որ հիմնական բանաձևն արտածելիս մենք փաստորեն կարիք չունեինք պահանջելու, որ F(x) *ֆունկցիան* f(x)*-ի համար նախնական ֆունկցիա լինի* [a, b] *փակ միջակայքում։ Հենվելով* n° 126*-ի հետևանքի վրա, բավական կլիներ այդ ենթադրել* (a, b) *բաց միջակայքի համար,* միայն թե նրա ծայրերում էլ F(x) ֆունկցիան պահպաներ անընդհատությունը։

Այդ պատճառով, օրինակ, իրավունք ունենք գրելու [256]՝

$$7)\ \int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{\pi a^2}{2},$$

Թեև $x=\pm a$ *դեպքում գտած նախնական ֆունկցիայի ածանցյալի հարցը դեռևս հետազոտություն կպահանջեր։*

Մենք որոշ դժվարության ենք հանդիպում հետևյալ ինտեգրալը հաշվելիս՝

$$8)\ \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx \qquad (0<r<1),$$

որովհետև 276, *13)-ում գտած նախնական ֆունկցիան՝*

$$F(x)=2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$$

$x=\pm\pi$ *դեպքում իմաստ չունի։ Սակայն գոյություն ունեն, ակներևաբար, հետևյալ սահմանները*

$$\lim_{x\to-\pi+0}F(x)=-\pi,\quad \lim_{x\to\pi-0}F(x)=\pi$$

և եթե լրացուցիչ կերպով ընդունենք F(−π)*-ն և* F(π)*-ն՝ հենց այդ սահմաններին հավասար, ապա* F(x) *ֆունկցիան ոչ միայն որոշված, այլև անընդհատ կլինի միջակայքի ծայրերում։ Ուստի այնուամենայնիվ ունենք*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx=F(x)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=F(\pi)-F(-\pi)=2\pi\text{։}$$

9) Նման ձևով հաշվվում է նաև հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{A\cos^2x+2B\cos x\sin x+C\sin^2x}\quad (AC-B^2>0)\text{։}$$

Մենք արդեն ունենք [276, *10)*] *նախնական ֆունկցիայի արտահայտությունը՝*

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\operatorname{arctg}\frac{C\operatorname{tg}x+B}{\sqrt{AC-B^2}},$$

որը պիտանի է $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$-ի համար։ Այստեղից՝

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{A\cos^2 x+2B\cos x\sin x+C\sin^2 x}=F(x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}+0}^{\frac{\pi}{2}-0}=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}},$$

ընդ որում $-\frac{\pi}{2}+0$, $\frac{\pi}{2}-0$ նշիչները պայմանավորում են $F(x)$ ֆունկցիայի համապատասխան սահմանային արժեքները վերցնելու անհրաժեշտությունը։

10) Եթե

$$\int_0^1\frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$$

ինտեգրալը հաշվելիս ելնենք նրա՝

$$-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}$$

նախնական ֆունկցիայից և տեղադրենք այստեղ $x=0$ և $x=1$, ապա ինտեգրալի համար կստացվի պարադոքսային արժեք՝ 0 (չէ որ դրական ֆունկցիայի ինտեգրալը չի կարող զրո արժեք ունենալ)։

Սխալը նրանում է, որ նախնական ֆունկցիան $x=\sqrt{2-\sqrt{3}}=x_0$ դեպքում թռիչք է կատարում։ Եթե ինտեգրալներն առանձին-առանձին հաշվենք 0-ից մինչև x_0 և x_0-ից մինչև 1, ապա կստացվի ճիշտ արդյունք

$$\int_0^1=\Big|_0^{x_0-0}+\Big|_{x_0+0}^1=\frac{\pi}{3}.$$

11) Նախնական ֆունկցիաների օգնությամբ հեշտ է հաշվել հետևյալ ինտեգրալները՝

$$\int_1^2\frac{dx}{x}=\log x\Big|_1^2=\log 2,$$

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4},$$

Եթե հիշենք, որ դրանք են ձգտում համապատասխան ինտեգրալ գումարները, ապա կարելի է ստանալ, օրինակ, այսպիսի սահմանային առնչությունները՝

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right)=\log 2,$$

$$\lim\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\dots+\frac{1}{2n^2}\right)\cdot n=\frac{\pi}{4}.$$

298. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԻ ՄԻ ԱՅԼ ԱՐՏԱԾՈՒՄ. *Այժմ ապացուցենք* (A) *հիմնական բանաձևը, անելով ավելի ընդհանուր ենթադրություններ. Դիցուք* $f(x)$ *ֆունկցիան ինտեգրելի է* $[a, b]$ *միջակայքում, իսկ* $[a, b]$*-ում անընդհատ* $F(x)$ *ֆունկցիան ունի* $f(x)$ *ածանցյալը՝*

$$F'(x)=f(x) \tag{3}$$

ամենուրեք (a, b)*-ում կամ նույնիսկ միայն ամենուրեք, բացառելով վերջավոր թվով կետեր.*

$[a, b]$ *միջակայքը կամայական ձևով մասերի տրոհենք հետևյալ կետերով՝*

$$x_0=a<x_1<x_2<\dots<x_i<x_{i+1}<\dots<x_n=b$$

[հոգ տանելով միայն այն մասին, որ նրանց թվում լինեն բոլոր այն կետերը, որտեղ (3) *առնչությունը տեղի չունի, եթե այդպիսի կետեր կան]. Ակներևաբար կունենանք՝*

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=0}^{n-1}[F(x_{i+1})-F(x_i)].$$

Գումարի նշանի տակ գտնվող յուրաքանչյուր տարբերության նկատմամբ կիրառենք վերջավոր աճերի բանաձևը (նրա կիրառման համար բոլոր պայմանները տեղի ունեն). Այդ դեպքում կստանանք

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=0}^{n-1}F'(\xi_i)(x_{i+1}-x_i),$$

որտեղ ξ_i*-ն՝* x*-ի մի որոշակի (թեև մեզ անհայտ) արժեք է* x_i*-ի*

և x_{i+1}-ի միջև։ Քանի որ այդ արժեքի համար $F'(\xi_i)=f(\xi_i)$, ապա կարող ենք գրել՝

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Աջ կողմում ստացվեց σ ինտեգրալ գումարը $f(x)$ ֆունկցիայի համար։ Մենք ենթադրեցինք, որ σ գումարի համար $\lambda\to 0$ դեպքում գոյություն ունի որոշակի սահման, որ կախում չունի ξ_i թվերի ընտրությունից։ Հետևաբար, մասնավորապես, մեր գումարը, որ պահպանում է (այդ թվերի նշված ընտրության դեպքում) հաստատուն արժեք, նույնպես ձգտում է ինտեգրալին, որտեղից և բխում է, որ՝

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Նախորդ n°-ում մենք հիմնական բանաձևի օգնությամբ հաշվում էինք որոշյալ ինտեգրալը։ Բայց այն կարող է օգտագործվել և այլ ուղղությամբ։ Փոխարինելով հիմնական բանաձևի մեջ b-ն՝ x-ով, իսկ $f(x)$-ը՝ $F'(x)$-ով, կարելի է գրել այն հետևյալ տեսքով՝

$$F(x)=F(a)+\int_a^x F'(t)\,dt.$$

Այսպիսով, սահմանային պրոցեսի օգնությամբ (քանի որ որոշյալ ինտեգրալը սահման է), տված $F'(x)$ ածանցյալով «վերականգնվում» է $F(x)$ նախնական ֆունկցիան։

Ի միջի այլոց, այդ ենթադրում է, որ ածանցյալը ոչ միայն սահմանափակ է, այլև ինտեգրելի է ռիմանյան իմաստով, որը ոչ միշտ է իրագործվում։

299. ԲԵՐՄԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐ։ Մենք տեսանք, որ հիմնական բանաձևը նպաստավոր պայմաններում միանգամից տալիս է որոշյալ ինտեգրալի արժեքը։ Մյուս կողմից, նրա օգնությամբ անորոշ ինտեգրալների տեսության զանազան բերման բանաձևեր փոխակերպվում են որոշյալ ինտեգրալների համանման բանաձևերի, որոնք մի որոշյալ ինտեգրալի հաշվումը բերում են մի այլ (սովորաբար ավելի պարզ) ինտեգրալ հաշվելուն։

Մենք ամենից առաջ նկատի ունենք մասերով ինտեգրման բանաձևը՝

$$\int udv=uv-\int vdu$$

և նրա ընդհանրացումը [258 *(3)* *և* *(5)*], *ինչպես և բերման ուրիշ բանաձևեր* [259 *(6)* 268; 275], *որոնք մասամբ հիմնվում են նրա վրա. Նրանց ընդհանուր ձևն այսպիսին է՝*

$$\int f(x)dx=\varphi(x)-\int g(x)dx. \tag{4}$$

Եթե նման բանաձևի կիրառման ընդգավառը հանդիսանում է [a, b] *միջակայքը, ապա որոշյալ ինտեգրալների մեջ նրան համապատասխանում է հետևյալ բանաձևը՝*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\varphi(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)dx. \tag{5}$$

Այդ ժամանակ f *և* g *ֆունկցիաները համարելու ենք անընդհատ.*

Ապացուցման համար (4) բանաձևի վերջին ինտեգրալը նշանակենք $\Phi(x)$*-ով. Այդ դեպքում*

$$\int_a^b f(x)dx=[\varphi(x)-\Phi(x)]\Big|_a^b=\varphi(x)\Big|_a^b-\Phi(x)\Big|_a^b.$$

Քանի որ, միևնույն ժամանակ,

$$\int_a^b g(x)\,dx=\Phi(x)\Big|_a^b,$$

ապա մենք գալիս ենք ապացուցված բանաձևին.

Մասնավորապես, մասերով ինտեգրման բանաձևն այժմ կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu, \tag{6}$$

իսկ ընդհանրացրած բանաձևը կբերվի այսպիսի բանաձևի՝

$$\int_a^b uv^{(n+1)}dx = [uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \ldots + (-1)^n u^{(n)}v]\Big|_a^b +$$

$$+(-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)} v\, dx. \qquad (7)$$

այդ ժամանակ առաջվա պես u և v ֆունկցիաները և նրանց բոլոր հանդիպող ածանցյալները ենթադրվում են անընդհատ։

(5) բանաձևը, որը կապ է հաստատում թվերի միջև, սկզբունքորեն ավելի պարզ է, քան (4) բանաձևը, որի մեջ մասնակցում են ֆունկցիաներ. այն առանձնապես ձեռնտու է, եթե կրկնակի տեղադրումը հավասար է զրոյի։

300. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները՝

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx, \quad J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\, dx$$

(երբ m-ը բնական թիվ է)։

Մասերով ինտեգրելով, կգտնենք

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x\, d(-\cos x) =$$

$$= -\sin^{m-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 x\, dx:$$

Կրկնակի տեղադրումը դառնում է զրո։ $\cos^2 x$-ը փոխարինելով $1-\sin^2 x$-ով, կստանանք

$$J_m = (m=1)J_{m-2} - (m-1)J_m,$$

որտեղից ստացվում է անդրադարձ բանաձև՝

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2},$$

որի միջոցով J_m ինտեգրալը հաջորդաբար բերվում է J_0-ի կամ J_1-ի։ Այսպես, $m=2n$ դեպքում ունենք

$$J_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx=\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2n.(2n-2)\ldots 4.2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

իսկ եթե $m=2n+1$, ապա

$$J_{2n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx=\frac{2n.(2n-2)\ldots 4.2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3.1},$$

Ճիշտ նույնպիսի արդյունքներ են ստացվում նաև J'_m-ի համար։

Գտած արտահայտությունները ավելի համառոտ ձևով գրի առնելու համար օգտվենք $m!!$ սիմվոլից*։ Այդ դեպքում կարելի է գրել՝

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\, dx=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{եթե } m\text{-ը զույգ է,}\\ \dfrac{(m-1)!!}{m!!}, & \text{եթե } m\text{-ը կենտ է։}\end{cases} \qquad (8)$$

2) Ապացուցել հետևյալ բանաձևերը՝

$$(\text{ա})\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos(m+2)x\, dx=0,$$

$$(\text{բ})\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin(m+2)x\, dx=\frac{1}{m+1},$$

$$(\text{գ})\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos(m+2)x\, dx=-\frac{\sin\frac{m\pi}{2}}{m+1},$$

$$(\text{դ})\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \sin(m+2)x\, dx=\frac{\cos\frac{m\pi}{2}}{m+1}$$

(որտեղ m-ը ցանկացած դրական թիվ է)։

---

* Հիշեցնենք, որ $m!!$-ը նշանակում է m-ին չգերազանցող և նրա հետ միևնույն զույգություն ունեցող բնական թվերի արտադրյալ։

Դիտարկենք հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} x \cos(m+2)x\,dx$$

և նրա մեջ երկու անգամ մասերով ինտեգրում կատարենք՝

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} x \cos(m+2)x\,dx=$$

$$=\frac{1}{m+2}\left[\cos^{m+2} x \sin(m+2)x-\cos^{m+1} x \sin x \cos(m+2)x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+$$

$$+\frac{1}{m+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-(m+1)\cos^{m} x \sin^2 x+\cos^{m+1} x\right]\cos(m+2)x\,dx.$$

Սահմանների տեղադրումը դառնում է զրո։ Այստեղ էլ $\sin^2 x$*-ը փոխարինելով* $1-\cos^2 x$*-ով, կգանք հետևյալ հավասարությանը՝*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} x \cos(m+2)x\,dx=$$

$$=-\frac{m+1}{m+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m} x\cos(m+2)x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+2} x\cos(m+2)x\,dx,$$

որտեղից և հետևում է (ա)-ն։

Նման ձևով ապացուցվում են մյուս հավասարությունները։

3) Հաշվել (բնական n*-ի դեպքում) հետևյալ ինտեգրալները՝*

$$K_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n} x\sin nx\,dx,\quad L_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n} x\cos nx\,dx.$$

Մասերով ինտեգրելով, կունենանք

$$K_n=\frac{1}{n}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1} x\sin x\cos nx\,dx.$$

Եթե երկու մասերին էլ գումարենք K_n*, ապա, ձևափոխելով աջ կողմում ընդինտեգրալ արտահայտությունը, հեշտ է ստանալ*

$$2K_n=\frac{1}{n}+K_{n-1}$$

կամ

$$K_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+K_{n-1}\right),$$

Այս անդրադարձ բանաձևով հեշտ է արդեն գտնել

$$K_n=\frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}\right).$$

Նման ձևով

$$L_n=\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

4) Գտնել

$$H_{k,m}=\int_0^1 x^k\log^m x\,dx$$

ինտեգրալը, որտեղ $k>0$, իսկ m-ը բնական թիվ է։

Մասերով ինտեգրումը [համեմատել 259,5)]՝

$$\int_0^1 x^k\log^m x\,dx=$$

$$=\frac{1}{k+1}x^{k+1}\log^m x\Big|_{+0}^{1}-\frac{m}{k+1}\int_0^1 x^k\log^{m-1}x\,dx$$

բերում է հետևյալ անդրադարձ բանաձևին՝

$$H_{k,m}=-\frac{m}{k+1}H_{k,m-1},$$

որտեղից և ստացվում է

$$H_{k,m}=(-1)^m\frac{m!}{(k+1)^{m+1}}.$$

Այս օրինակի առանձնահատկությունը կայանում է նրանում, որ $x=0$ կետում ինչպես ընդինտեգրալ ֆունկցիաների, այնպես էլ տեղադրման նշանի տակ գտնվող ֆունկցիայի արժեքները որոշվում են որպես սահմանային արժեքներ, երբ $x\to+0$։

5) Ըստ n° 268-ի (III) բանաձևի ունենք (համարելով, որ p-ն և q-ն բնական թվեր են)

$$\int(1-x)^p x^q dx=\frac{(1-x)^p x^{q+1}}{p+q+1}+\frac{p}{p+q+1}\int(1-x)^{p-1}x^q dx,$$

որը, որոշյալ ինտեգրալների անցնելու դեպքում՝ 0-ից մինչև 1 միջակայքում, տալիս է

$$\int_0^1 (1-x)^p x^q dx = \frac{p}{p+q+1} \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^q dx.$$

Հաջորդաբար կիրառելով այս բանաձևը, ստանում ենք

$$\int_0^1 (1-x)^p x^q dx = \frac{p(p-1)\dots 1}{(p+q+1)(p+q)\dots(q+2)} \int_0^1 x^q dx$$

և վերջնականապես՝

$$\int_0^1 (1-x)^p x^q dx = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}.$$

6) Եթե n° 275-ի (IV) բանաձևում, բնական μ-ի և ν-ի դեպքում, անցնենք որոշյալ ինտեգրալների, ապա, օգտագործելով 1) օրինակի արդյունքը, կարելի է ստանալ ավելի ընդհանուր բանաձև՝

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\nu x \cos^\mu x \, dx = \begin{cases} \dfrac{(\nu-1)!!(\mu-1)!!}{(\nu+\mu)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (\mu\text{-ի և } \nu\text{-ի զույգ դեպքում}), \\ \dfrac{(\nu-1)!!(\mu-1)!!}{(\nu+\mu)!!} & (\text{մնացած բոլոր դեպքերում}). \end{cases}$$

301. ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼՈՒՄ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՓՈԽԱՐԻՆՄԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԸ. Միևնույն (A) հիմնական բանաձևը թույլ կտա մեզ որոշել փոփոխականի փոխարինման կանոնը որոշյալ ինտեգրալի նշանի տակ.

Դիցուք պահանջվում է հաշվել $\int_a^b f(x)dx$ ինտեգրալը, որտեղ $f(x)$-ը՝ անընդհատ ֆունկցիա է $[a, b]$ միջակայքում. Ընդունենք $x=\varphi(t)$, ենթարկելով $\varphi(t)$ ֆունկցիան հետևյալ պայմաններին՝

1) $\varphi(t)$-ն որոշված ու անընդհատ է մի որոշ $[\alpha, \beta]$ միջակայքում և $[a, b]$ միջակայքի սահմաններից դուրս չի գալիս*, երբ t-ն փոփոխվում է $[\alpha, \beta]$-ում.

* Կարող է պատահել, որ $f(x)$ ֆունկցիան որոշված ու անընդհատ է $[a, b]$-ից ավելի լայն՝ $[A, B]$ միջակայքում. այդ դեպքում բավական է պահանջել, որպեսզի $\varphi(t)$-ի արժեքները դուրս չգան $[A, B]$ սահմաններից։

2) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

3) $[\alpha, \beta]$-ում գոյություն ունի $\varphi'(t)$ անընդհատ ածանցյալ. Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{9}$$

Շնորհիվ այն ենթադրության, որ ընդինտեգրալ ֆունկցիաներն անընդհատ են, գոյություն ունեն ոչ միայն այդ որոշյալ ինտեգրալները, այլև նրանց համապատասխան անորոշները, և երկու դեպքում էլ կարելի է օգտվել հիմնական բանաձևից. Բայց եթե $F(x)$*-ը լինի նախնական ֆունկցիաներից մեկը* $f(x)dx$ *դեֆերենցիալի համար, ապա* $\Phi(t)=F(\varphi(t))$ *ֆունկցիան, ինչպես գիտենք, նախնական ֆունկցիա կլինի* $f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ *դիֆիրենցիալի համար [համեմատել* **256**]. *Ուստի ունենք միաժամանակ՝*

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

և

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a),$$

որտեղից և բխում է ապացուցվելիք հավասարությունը.

Դիտողություն. Նշենք (9) բանաձևի մի կարևոր առանձնահատկությունը: Այն ժամանակ, երբ փոփոխականի փոխարինման միջոցով անորոշ ինտեգրալը հաշվելիս, ստանալով t *փոփոխականով արտահայտված որոնելի ֆունկցիան, մենք պետք է վերադառնայինք հին փոփոխականին՝* x*-ին, այստեղ դրա կարիքը չկա. Եթե հաշված է (9) որոշյալ ինտեգրալներից երկրորդը, ապա դրանով իսկ հաշված է նաև առաջինը.*

302. *ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ: 1) Գտնենք* $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ *ինտեգրալը՝* $x=a\sin t$ *տեղադրման օգնությամբ.* α*-ի և* β*-ի դերն այստեղ կատարում են* 0 *և* $\frac{\pi}{2}$ *արժեքները: Ունենք*

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

[համեմատել 256-ի հետ]։

2) Ընդհանրապես բնական n-ի դեպքում նույն տեղադրումով ստանում ենք

$$\int_0^a (a^2-x^2)^n dx = a^{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t\,dt = a^{2n+1}\frac{2n!!}{(2n+1)!!}$$

[տես (8)], և համանման ձևով՝

$$\int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{2n-1}{2}} dx = a^{2n}\,\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\cdot\frac{\pi}{2}\,,$$

3) $\displaystyle\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\,dx$։

Տեղադրումն է՝ $x = a\sec t$. x փոփոխականի a և $2a$ սահմաններին համապատասխանում են t փոփոխականի 0 և $\frac{\pi}{3}$ սահմանները։ Գտնում ենք՝

$$\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos t\,dt = \frac{1}{a^2}\,\frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{8a^2}\,,$$

4) Դիտարկենք հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\,,$$

Վերջին ինտեգրալը $x=\pi-t$ տեղադրումով (որտեղ t-ն փոփոխվում է $\frac{\pi}{2}$-ից

մինչև 0) բերվում է հետևյալ տեսքին՝

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt$$

և ներկայացվում է որպես տարբերություն

$$\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt.$$

Տեղադրելով, կրճատումներից հետո, կստանանք

$$\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt=-\pi\operatorname{arctg}(\cos t)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

5) Հաշվել $I=\int_{0}^{1}\frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$ ինտեգրալը։

$x=\operatorname{tg}\varphi$ տեղադրումը $\left(\text{որտեղ } \varphi\text{-ն փոփոխվում է } 0\text{-ից մինչև } \frac{\pi}{4}\right)$

նրան բերում է $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\log(1+\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi$ ինտեգրալին։ Բայց՝

$$1+\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}{\cos\varphi},$$

այնպես որ

$$J=\frac{\pi}{8}\log 2+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\log\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)d\varphi-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\log\cos\varphi\,d\varphi.$$

Քանի որ երկու ինտեգրալները հավասար են (օրինակ, երկրորդը բերվում է

առաջինին $\varphi=\frac{\pi}{4}-\psi$ տեղադրումով, ընդ որում ψ-ն փոփոխվում է $\frac{\pi}{4}$-ից մինչև 0), ապա վերջնականապես՝

$$I=\frac{\pi}{8}\log 2.$$

Նկատենք, որ նույն արժեքն ունի նաև $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}\,dx$ ինտեգրալը, որում հեշտ է համոզվել մասերով ինտեգրելով։

6) Ցույց տալ, որ

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t}\,dt.$$

Ցուցում։ Տեղադրումն է $x=\operatorname{tg}\frac{t}{2}$։

7) Հետևյալ ինտեգրալները փոխակերպել մեկը մյուսին՝

$$\int_0^{\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n\,d\varphi=\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{(x-\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^{n+1}},$$

համարելով $x>1$ և n-ը՝ բնական թիվ։

Այդ ձեռք է բերվում փոփոխականը փոխարինելով հետևյալ բանաձևով՝

$$(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)(x-\sqrt{x^2-1}\cos\theta)=1.$$

Այստեղից

$$\cos\varphi=\frac{-\sqrt{x^2-1}+x\cos\theta}{x-\sqrt{x^2-1}\cos\theta},$$

ընդ որում աջակողմյան արտահայտությունն իր բացարձակ արժեքով մեկից ավելի չէ և $[0, \pi]$ միջակայքում յուրաքանչյուր θ-ին միարժեքորեն համապատասխանում է մի որոշ φ նույն միջակայքում։ Երբ $\theta=0$ կամ π-ի նույնպես և $\varphi=0$ կամ π-ի։ Ունենք

$$\sin\varphi\,d\varphi=\frac{\sin\theta\,d\theta}{(x-\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^2}$$

և, քանի որ

$$\sin\varphi=\frac{\sin\theta}{x-\sqrt{x^2-1}\cos\theta},$$

ապա

$$d\varphi = \frac{d\theta}{x - \sqrt{x^2-1}\cos\theta},$$

այնպես որ վերջնականապես՝

$$(x - \sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n d\varphi = \frac{d\theta}{(x - \sqrt{x^2-1}\cos\theta)^{n+1}},$$

որտեղից և հետևում է պահանջված հավասարությունը:

[Նկատենք, որ երկու ինտեգրալն էլ (π արտադրիչի ճշտությամբ) արտահայտում են Լ ե ժ ա ն դ ր ի n-րդ բազմանդամը՝ $X_n(x)$. 111, 6)],

8) Ինչպիսին էլ լինի $[0, a]$ $(a>0)$ միջակայքում անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիան, միշտ

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-t)\,dt$$

(տեղադրումն է՝ $x=a-t$, $a \geqslant t \geqslant 0$): Մասնավորապես, քանի որ $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, ապա ցանկացած անընդհատ $F(u)$ ֆունկցիայի համար կլինի

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\cos x)\,dx:$$

9) Դիցուք $f(x)$-ը անընդհատ է $[-a, a]$ $(a>0)$ սիմետրիկ միջակայքում: Այն ժամանակ զ ո ւ յ գ ֆունկցիայի դեպքում [98, 25)]՝

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx,$$

իսկ կ ե ն տ ֆունկցիայի դեպքում՝

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0:$$

Երկու դեպքում էլ $\int_{-a}^{a}$ ինտեգրալը ներկայացվում է որպես $\int_{-a}^{0} + \int_{0}^{a}$

ինտեգրալների գումարը և դրանցից առաջինի նկատմամբ կիրառվում է $x=-t$ *տեղադրումը:*

10) *Դիցուք ունենք* $f(x)$ *պարբերական անընդհատ ֆունկցիան՝* ω *պարբերությամբ, այնպես որ ցանկացած x-ի դեպքում* $f(x+\omega)=f(x)$։ *Այն ժամանակ պարբերության հավասար* ω *երկարությամբ ցանկացած միջակայքում այդ ֆունկցիայի ինտեգրալն ունի միևնույն արժեքը՝*

$$\int_a^{a+\omega} f(x)\,dx=\int_0^{\omega} f(x)\,dx։$$

Ապացուցելու համար վերլուծում ենք $\int_a^{a+\omega}=\int_a^0+\int_0^\omega+\int_\omega^{a+\omega}$ *և, կիրառելով աջակողմյան երրորդ ինտեգրալի նկատմամբ* $x=t+\omega$ *տեղադրումը, համոզվում ենք, որ այն միայն նշանով է տարբերվում առաջինից։*

11) *Ապացուցել, որ*

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx,$$

որտեղ $f(u)$*-ն որևէ անընդհատ ֆունկցիա է* $[0,1]$ *միջակայքում։*

Ցուցում։ Օգտվել $x=\pi-t$ *տեղադրումից։*

12) *Ապացուցել, որ*

$$\int_0^{2\pi}\varphi(a\cos\theta+b\sin\theta)\,d\theta=2\int_0^{\pi}\varphi(\sqrt{a^2+b^2}\cos\lambda)\,d\lambda,$$

որտեղ $\varphi(u)$*-ն որևէ ֆունկցիա է, որն անընդհատ է* $|u|<\sqrt{a^2+b^2}$ *դեպքում։*

α *անկյունը որոշելով*

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+{}^2}},\qquad \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

առնչություններից, ունենք

$$a\cos\theta+b\sin\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)։$$

10)-ի շնորհիվ կարելի է գրել

$$\int_0^{2\pi}\varphi(a\cos\theta+b\sin\theta)d\theta=\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi}\varphi(\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha))d\theta$$

կամ, եթե ընդունենք $\theta-\alpha=\lambda$ և օգտագործենք 9)-ը,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\sqrt{a^2+b^2}\cos\lambda)d\lambda=2\int_0^{\pi}\varphi(\sqrt{a^2+b^2}\cos\lambda)d\lambda\text{։}$$

13) Ապացուցել, որ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(\sin 2u)\cos u\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(\cos^2 v)\cos v\,dv,$$

որտեղ $g(z)$-ը՝ z-ի որևէ անընդհատ ֆունկցիա է $[0, 1]$ միջակայքում։

Առաջին ինտեգրալը ներկայացնելով որպես ինտեգրալների գումար՝ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$, $u=\frac{\pi}{2}-u'$ տեղադրումով դրանցից երկրորդը բերում ենք դարձյալ $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ միջակայքին և ստանում՝

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}g(\sin 2u)(\cos u+\sin u)\,du\text{։}$$

Այստեղ կատարում ենք փոփոխականի փոխարինում, ելնելով

$$\sin 2u=\cos^2 v$$

առնչությունից․ u-ի աճմանը 0-ից մինչև $\frac{\pi}{4}$, ակներևաբար, համապատասխանում է v-ի նվազումը $\frac{\pi}{2}$-ից մինչև 0։ Դիֆերենցում ենք

$$\cos 2u\,du=-\sin v\cos v\,dv\text{․}$$

Հաշվի առնելով, որ

$$\cos 2u = \sqrt{1-\sin^2 2u} = \sqrt{1-\cos^4 v} = \sin v\,\sqrt{1+\cos^2 v}$$

և

$$1+\cos^2 v = 1+2\sin u\cos u = (\sin u+\cos u)^2,$$

վերջնականապես գտնում ենք

$$(\sin u+\cos u)\,du = -\cos v\,dv.$$

Այժմ արդեն դժվար չէ ստանալ պահանջվելիք արդյունքը։

15) Վերջում վերադառնանք Պուասոնի ինտեգրալին

$$I(z) = \int_0^\pi \log(1-2r\cos x+r^2)\,dx$$

[համեմատել 295, 4)]։ Մենք արդեն գիտենք, որ $|r| \neq 1$ դեպքում ենթինտեգրալ ֆունկցիան անընդհատ է և ինտեգրալը գոյություն ունի։ Մենք նորից կհաշվենք այն մի արհեստական եղանակի օգնությամբ, որտեղ փոփոխականի փոխարինումը էական դեր կխաղա։

Նախապես նկատենք, որ հետևյալ ակնհայտ անհավասարություններից՝

$$(1-|r|)^2 \leqslant 1-2r\cos x+r^2 \leqslant (1+|r|)^2,$$

լոգարիթմելով և այնուհետև ինտեգրելով 0-ից մինչև π, ստանում ենք ($|r|<1$ դեպքում)

$$2\pi\log(1-|r|) \leqslant I(r) \leqslant 2\pi\log(1+|r|).$$

Այստեղից պարզ է, որ երբ $r \to 0$, նաև $I(r) \to 0$։

Այժմ դիտարկենք հետևյալ ինտեգրալը՝

$$I(-r) = \int_0^\pi \log(1+2r\cos x+r^2)\,dx.$$

Եթե այս ինտեգրալի մեջ ընդունենք $x=\pi-t$, ընդ որում t-ն փոփոխվում է π-ից մինչև 0, ապա կստացվի, որ

$$I(-r) = \int_\pi^0 \log(1+2r\cos(\pi-t)+r^2)\,d(\pi-t) =$$

$$= \int_0^\pi \log(1-2r\cos t+r^2)\,dt = I(r).$$

Այդ դեպքում

$$2I(r)=I(r)+I(-r)=$$

$$=\int_0^{\pi}\log\left[(1-2r\cos x+r^2)(1+2r\cos x+r^2)\right]dx$$

կամ

$$2I(r)=\int_0^{\pi}\log(1-2r^2\cos 2x+r^4)\,dx:$$

Ընդունելով $x=\frac{t}{2}$ *(որտեղ* t-*ն փոփոխվում է* 0-*ից մինչև* 2π), *կստանանք*

$$2I(r)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\log(1-2r^2\cos t+r^4)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi}:$$

Ստացված ինտեգրալներից վերջինը $t=2\pi-u$ *տեղադրումով (որտեղ* u-*ն փոփոխվում է* π-*ից մինչև* 0) *բերվում է առաջինին. այնպես որ մենք ստանում ենք*

$$2I(r)=I(r^2),$$

որտեղից

$$I(r)=\frac{1}{2}I(r^2):$$

Փոխարինելով այստեղ r-*ը* r^2-*ով, և այլն, հեշտ է ստանալ*

$$I(r)=\frac{1}{2^n}I(r^{2^n})\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

ընդհանուր բանաձևը:

Դիցուք այժմ $|r|<1$, *այնպես որ* $r^{2^n}\to 0$, *երբ* $n\to\infty$. *քանի որ այդ դեպքում (համաձայն սկզբում արած դիտողության)* $I(r^{2^n})\to 0$, *ապա պարզ է ունենանք նույնաբար՝*

$$I(r)=0,\ \text{երբ}\ |r|<1:$$

Այժմ հեշտ է այդ ինտեգրալը հաշվել նաև $|r|>1$ *դեպքում. իրոք*

$$1-2r\cos x+r^2=r^2\left(1-2\frac{1}{r}\cos x+\frac{1}{r^2}\right).$$

այնպես որ, ինտեգրելով 0-ից մինչև π, կունենանք

$$I(r)=2\pi \log |r|+I\left(\frac{1}{r}\right).$$

Բայց, նախորդի համաձայն, $I\left(\frac{1}{r}\right)=0$. Հետևապես, $|r|>1$ դեպքում ունենք

$$I(r)=2\pi \log |r|.$$

Նույն արդյունքները մենք ստացել ենք նաև n° 295-ում։

303. ԳԱՈՒՍՍԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ: ԼԱՆԴԵՆԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆԸ։ Որպես փոփոխականի փոխարինման մի օրինակ ևս դիտարկենք մի նշանավոր բանաձև, որը սահմանել է Գ ա ո ւ ս ս ը (C. F. Gauss) ձևափոխելու համար հետևյալ ինտեգրալը՝

$$G=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}} \qquad (a>b>0).$$

Ընդունենք այստեղ

$$\sin\varphi=\frac{2a\sin\theta}{(a+b)+(a-b)\sin^2\theta}.$$

Հեշտ է տեսնել, որ երբ θ-ն փոփոխվում է 0-ից մինչև $\frac{\pi}{2}$, ապա φ-ն ևս աճում է նույն սահմաններում։ Դիֆերենցում ենք՝

$$\cos\varphi\, d\varphi=2a\frac{(a+b)-(a-b)\sin^2\theta}{[(a+b)+(a-b)\sin^2\theta]^2}\cos\theta\, d\theta.$$

Բայց

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2\sin^2\theta}}{(a+b)+(a-b)\sin^2\theta}\cos\theta,$$

այնպես որ

$$d\varphi=2a\frac{(a+b)-(a-b)\sin^2\theta}{(a+b)+(a-b)\sin^2\theta}\,\frac{d\theta}{\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2\sin^2\theta}}.$$

Մյուս կողմից,

$$\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}=a\frac{(a+b)-(a-b)\sin^2\theta}{(a+b)+(a-b)\sin^2\theta}$$

և վերջնականապես՝

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cos^2\theta + ab\sin^2\theta}}\,.$$

Եթե տեղադրենք $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = \sqrt{ab}$, ապա

$$G = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a_1^2\cos^2\theta + b_1^2\sin^2\theta}}\,,$$

Հենց այս է Գաուսի բանաձևը։

Այս ձևափոխումը կրկնարար կիրառելով, կստանանք, որ

$$G = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_n^2\cos^2\varphi + b_n^2\sin^2\varphi}} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

որտեղ a_n, b_n վարիանտները որոշվում են հետևյալ անդրադարձ առնչություններով՝

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}\,.$$

Մենք արդեն գիտենք [35, 3)], որ այդ վարիանտները ձգտում են մի որոշ $\mu = \mu(a, b)$ ընդհանուր սահմանի, որ մենք անվանեցինք a և b թվերի «թվաբանա-երկրաչափական միջին»։ Հեշտությամբ ստացվող հետևյալ անհավասարություններից՝

$$\frac{\pi}{2a_n} < G < \frac{\pi}{2b_n}$$

անցնելով սահմանին, այժմ գտնում ենք, որ

$$G = \frac{\pi}{2\mu(a, b)}, \text{ որտեղից } \mu(a, b) = \frac{\pi}{2G}\,.$$

G ինտեգրալը բերվում է առաջին տեսակի լրիվ* էլիպտիկ ինտեգրալի

---

* Լրիվ անվանում են Լեժանդրի $F(k, \varphi)$ և $E(k, \varphi)$ ինտեգրալները [281, 283] $\varphi = \frac{\pi}{2}$ դեպքում։ Այդ դեպքում դրանց նշանակումների մեջ երկրորդ արգումենտը սովորաբար բաց են թողնում և պարզապես գրում են $F(k)$, $E(k)$։ Լրիվ ինտեգրալների համար գոյություն ունեն հատուկ աղյուսակներ,

$$G=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\varphi}}=\frac{1}{a}F\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$$

և հեշտությամբ կարող է հաշվվել աղյուսակների օգնությամբ։

Հակադարձաբար, առաջին տեսակի լրիվ էլիպտիկ ինտեգրալը՝

$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

k մոդուլի ցանկացած արժեքի դեպքում ստացվում է G-ից՝ $a=1$ և $b=\sqrt{1-k^2}=k'$ դեպքում։ Ցանկանալով դրա նկատմամբ կիրառել Գաուսի բանաձևը, ամենից առաջ հաշվում ենք

$$a_1=\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{2}=\frac{1+k'}{2}, \qquad b_1=\sqrt{k'},$$

$$k_1=\frac{\sqrt{a_1^2-b_1^2}}{a_1}=\frac{1-k'}{1+k'}, \qquad \frac{1}{a_1}=1+k_1,$$

այնպես որ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=(1+k_1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\theta}}$$

կամ

$$F(k)=(1+k_1)F(k_1)։$$

Այս բանաձևը, որը համարժեք է Գաուսի բանաձևին, փաստորեն ստացված է եղել Գաուսից առաջ և ներկայացնում է այսպես կոչված Լանդենի (Landen) ձևափոխության մասնավոր դեպք։

Այն հաջորդաբար կիրառելով՝ կստանանք

$$F(k)=(1+k_1)(1+k_2)\,\dots\,(1+k_n)F(k_n),$$

որտեղ k_n վարիանտան որոշվում է

$$k_n=\frac{1-\sqrt{1-k_{n-1}^2}}{1+\sqrt{1-k_{n-1}^2}}$$

ինդուկտիվ ձևով, այնպես որ

$$0<k_n<1 \text{ և } k_n<k_{n-1}^2,$$

որով ապացուցվում է k_n-ի արագ ձգտումը 0-ի, երբ $n\to\infty$: Միևնույն ժամանակ

$$0<F(k_n)-\frac{\pi}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_n^2\sin^2\varphi}}-\frac{\pi}{2}=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt{1-k_n^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-k_n^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi<\frac{\pi}{2}\,\frac{1-\sqrt{1-k_n^2}}{\sqrt{1-k_n^2}},$$

որտեղից,

$$F(k_n)\to\frac{\pi}{2},\quad \text{երբ } n\to\infty,$$

և, վերջապես,

$$F(k)=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}(1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_n):$$

Սրա վրա է հիմնված F(k) ինտեգրալի մոտավոր հաշվման մեթոդը: Այդ ինտեգրալը, n-ի բավականաչափ մեծ լինելու դեպքում, պարզապես համարում են հավասար՝

$$F(k)\doteq\frac{\pi}{2}(1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_n)$$

304. ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՓՈԽԱՐԻՆՄԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԻ ՄԻ ԱՅԼ ԱՐՏԱԾՈՒՄ. *Այժմ մենք կտանք (9) բանաձևի այլ արտածում, փոփոխելով պայմանները:*

Ամենից առաջ (և այդ ամենակարևորն է) մենք չենք ենթադրի, որ f(x) ֆունկցիան անընդհատ է, այլ միայն կենթադրենք, որ նա ի ն տ ե գ ր ե լ ի է: Բայց դրա փոխարեն φ(t) ֆունկցիայից կպահանջենք լրացուցիչ կերպով, որպեսզի, երբ t-ն փոփոխվի α-ից մինչև β, նա անցնի a=φ(α) արժեքից դեպի b=φ(β) արժեքը՝ մ ո ն ո տ ո ն փոփոխվելով,

Որոշակիության համար ենթադրենք, թե a<b և α<β, այնպես որ φ(t) ֆունկցիան մոնոտոն աճում է:

[α, β] միջակայքը կամայականորեն տրոհենք մասերի հետևյալ կետերի օգնությամբ՝

$$t_0=\alpha<t_1<t_2<\dots<t_i<t_{i+1}<\dots<t_n=\beta.$$

եթե ընդունենք $x_i=\varphi(t_i)$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$), ապա միաժամանակ կունենանք

$$x_0=a<x_1<x_2<\dots<x_i<x_{i+1}<\dots<x_n=b.$$

Եթե $\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$ երկարություններից ամենամեծը (նշանակենք այն λ-ով) ձգտում է զրոյի, ապա շնորհիվ $x=\varphi(t)$ ֆունկցիայի (հավասարաչափ) անընդհատության, նույնը կլինի նաև $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)$ երկարություններից ամենամեծի նկատմամբ [տես 86]։

Այժմ կամայական կերպով վերցնենք τ_i թիվ յուրաքանչյուր $[t_i, t_{i+1}]$ միջակայքում և կազմենք ինտեգրալ գումար (9) ինտեգրալներից երկրորդի համար՝

$$\sigma=\sum_i f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i.$$

Ընդունենք $\xi_i=\varphi(\tau_i)$, այնպես որ $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$։ Եթե $[t_i, t_{i+1}]$ միջակայքում $\varphi(t)$ ֆունկցիայի նկատմամբ կիրառենք վերջավոր աճերի բանաձևը, ապա կստանանք

$$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)=\varphi'(\bar{\tau}_i)\Delta t_i,$$

որտեղ նույնպես $t_i<\bar{\tau}_i<t_{i+1}$, իսկ $\bar{\tau}$-ն (որը մեզ անհայտ է) ընդհանրապես տարբեր է պատահականորեն վերցրած τ_i-ի արժեքից։ Դրա հետ միասին (9) ինտեգրալներից առաջինի ինտեգրալ գումարը

$$\bar{\sigma}=\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

այժմ կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\bar{\sigma}=\sum_i f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\bar{\tau}_i)\Delta t_i.$$

Այդ գումարը $\lambda\to 0$ դեպքում, ակներևորեն, ձգտում է $\int_a^b f(x)dx$ ինտեգրալին, որպես իր սահմանին։ Ցույց տալու հա-

մար, որ σ գումարը ևս ձգտում է նույն սահմանին, բավական է հաստատել, որ $\sigma-\bar{\sigma}$ տարբերությունը ձգտում է զրոյի.

Վերցնելով $\varepsilon>0$ կամայական թիվը, $\varphi'(t)$ ֆունկցիայի (հավասարաչափ) անընդհատության շնորհիվ, կարելի է գտնել այնպիսի $\delta>0$, որ $\lambda<\delta$ դեպքում տեղի ունենան հետևյալ անհավասարությունները

$$|\varphi'(\tau_i)-\varphi'(\bar{\tau}_i)|<\varepsilon$$

[տես 86, հետևանքը]. Այդ դեպքում

$$|\sigma-\bar{\sigma}|\leqslant\sum_i |f(\varphi(\tau_i))|\,|\varphi'(\tau_i)-\varphi'(\bar{\tau}_i)|\,\Delta t_i<L(\beta-\alpha)\varepsilon,$$

եթե L-ով նշանակենք $|f(x)|$-ի վերին եզրը և $\sum\Delta t_i$ գումարը փոխարինենք $\beta-\alpha$-ով.

Այժմ պարզ է, որ $\lambda\to0$ դեպքում σ գումարը ձգտում է $\int_a^b f(x)dx$ սահմանին, իսկ այդ նշանակում է, որ գոյություն ունի $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ ինտեգրալը և տեղի ունի (9) բանաձևը. Ապացույցն ավարտված է.

Դիտողություն. Առանձնապես ընդգծենք, որ ապացուցածի համաձայն, նախորդ n°-ի 8), 9), 10) վարժությունների մեջ արտածված պարզ և հաճախ օգտակար բանաձևերը այժմ տարածվում են ցանկացած $f(x)$ ինտեգրելի ֆունկցիայի դեպքի վրա.

§ 4. ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄՆԵՐ

305. ՎԱԼԼԻՍԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ. n° 300-ի (8) բանաձևից հեշտ է դուրս բերել Վալլիսի (J. Wallis) նշանավոր բանաձևը.

Ենթադրելով, որ $0<x<\frac{\pi}{2}$, ունենք հետևյալ անհավասարությունները

$$\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x.$$

Ինտեգրենք այս անհավասարությունները 0-ից մինչև $\frac{\pi}{2}$ *միջակայքում՝*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}x\,dx.$$

Այստեղից, (8)-ի շնորհիվ, գտնում ենք

$$\frac{2n!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{2n!!}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

կամ

$$\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n}.$$

Քանի որ երկու ծայրային արտահայտությունների տարբերությունը

$$\frac{1}{2n(2n+1)}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2 < \frac{1}{2n}\,\frac{\pi}{2}$$

անվերջորեն, ձգտում է 0-ի, երբ $n\to\infty$, *ապա* $\frac{\pi}{2}$ *հանդիսանում է նրանց ընդհանուր սահմանը։ Այսպիսով,*

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}$$

կամ

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2.\,2.\,4.\,4\ldots 2n.2n}{1.\,3.\,3.\,5\ldots(2n-1)\,(2n+1)}.$$

Հենց այս է Վալլիսի բանաձևը։ Նա ունի պատմական հետաքրքրություն որպես π *թվի առաջին ներկայացում՝ հեշտ հաշվվող ռացիոնալ վարիանտայի սահմանի տեսքով։ Տեսական հետազոտություններում նրանից օգտվում են նաև այժմ* [*տես, օրինակ,* 393]։ π *թվի մոտավոր հաշվման համար այժմ գոյություն ունեն այնպիսի մեթոդներ, որոնք շատ ավելի արագ են նպատակին հասցնում* [397]։

306. *ԹԵՅԼՈՐԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԱՆԴԱՄՈՎ։* *Մասերով ինտեգրման (7) ընդհանրացված բանաձևի մեջ* [299] *ընդունենք* $v=(b-x)^n$։ *Այդ դեպքում՝*

$$v' = -n(b-x)^{n-1},\quad v'' = n(n-1)(b-x)^{n-2},\ \ldots,$$

$$v^{(n)} = (-1)^n n(n-1)\ldots 1,\quad v^{(n+1)} = 0.$$

$x=b$ դեպքում բոլոր $v, v', \ldots, v^{(n-1)}$ ֆունկցիաները զրո են դառնում։ $u, u', u'', \ldots$-ի համար օգտվելով $f(x), f'(x), f''(x), \ldots$ նշանակումներից, (7)-ը արտագրենք հետևյալ ձևով՝

$$0=(-1)^n\Big[n!f(b)-n!f(a)-n!f'(a)(b-a)-\frac{n!}{2!}f''(a)(b-a)^2-\ldots-$$

$$-f^{(n)}(a)(b-a)^n\Big]+(-1)^{n+1}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx։$$

Այստեղից ստացվում է Թ ե յ լ ո ր ի բանաձևը, որի լրացուցիչ անդամը տրվում է որոշյալ ինտեգրալի ձևով՝

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx։$$

Անցնելով nn° 122—124 նշանակումներին, այստեղ b-ն փոխարինենք x-ով, a-ն՝ x_0-ով՝

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Լրացուցիչ անդամի համար ստացված նոր արտահայտությունը, ի տարբերություն nn° 122 և 124-ում ուսումնասիրվածներից, ոչ մի անհայտ թիվ չի պարունակում։

Եթե ցանկանանք, այս արտահայտությունից կարող ենք դուրս բերել լրացուցիչ անդամի մեզ արդեն ծանոթ ձևերը։ Օրինակ, օգտվելով նրանից, որ ընդինտեգրալ ֆունկցիայի $(x-t)^n$ արտադրիչն իր նշանը չի փոխում, վերջինիս ինտեգրալի նկատմամբ կարելի է կիրառել միջին արժեքի ընդհանրացված թեորեմը [292, *10°*]՝

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(c)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt=$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

որտեղ c-ն գտնվում է $[x_0, x]$ միջակայքում։ Այսպիսով, մենք նորից ստացանք լրացուցիչ անդամի Լագրանժյան ձևը։

307. e **ԹՎԻ ՏՐԱՆՍՑԵՆԴԵՆՏՈՒԹՅՈՒՆԸ։** n° 299-ի նույն (7) բանաձևը կարող է ելակետ ծառայել ապացուցելու համար Հ ե ր մ ի տ ի մի նշանավոր թեորեմ, որը վերաբերում է e թվին։

Բոլոր իրական (ինչպես և ընդհանրապես կոմպլեքս) թվերը բաժանվում են երկու դասի՝ հ ա ն ր ա հ ա շ վ ա կ ա ն թ վ ե ր ի և տ ր ա ն ս ց ե ն դ ե ն տ թ վ ե ր ի։ Թիվը կոչվում է հ ա ն ր ա հ ա շ վ ա կ ա ն, եթե նա ռացիոնալ գործակիցներով հանրահաշվական հավասարման արմատ է հանդիսանում (ակներևորեն, առանց նվազեցնելու ընդհանրությունը, այդ գործակիցները կարելի է ամբողջ թվեր համարել)։ Հակառակ դեպքում թիվը կոչվում է տ ր ա ն ս ց ե ն դ ե ն տ։

Որպես հանրահաշվական թվի օրինակ կարող է ծառայել ցանկացած ռացիոնալ թիվ կամ իռացիոնալ թիվ, որն արտահայտվում է արմատանշանի տակ եղած ռացիոնալ թվերով, օրինակ, $-\frac{11}{17}$ թիվը՝ $17x+11=0$ հավասարման համար արմատ է ծառայում, իսկ $\sqrt{1+\sqrt[3]{2}}$ թիվը՝ արմատ է ծառայում $x^6-3x^4+3x^2-3=0$ հավասարման համար, և այլն։

Հ ե ր մ ի տ ը հաստատել է, որ e-ն տ ր ա ն ս ց ե ն դ ե ն տ թ ի վ է*։ Բերենք այդ թեորեմայի ապացույցը։

Ենթադրենք, թե e-ն ծառայում է որպես

$$c_0+c_1e+c_2e^2+\ldots+c_me^m=0 \tag{1}$$

հավասարման արմատ, որտեղ $c_0, c_1, \ldots, c_m$ բոլոր գործակիցներն ամբողջ թվեր են։

Դիցուք n° 299-ի (7) բանաձևի մեջ $u=f(x)$-ը՝ n-րդ աստիճանի կ ա մ ա յ ա կ ա ն բազմանդամ է, իսկ $v=(-1)^{n+1}e^{-x}$. այդ դեպքում, եթե վերցնենք $a=0$, այդ բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\int_0^b f(x)e^{-x}dx=-e^{-x}\left[f(x)+f'(x)+\ldots+f^{(n)}(x)\right]\Big|_0^b,$$

քանի որ $f^{(n+1)}(x)=0$։ Կարճության համար ընդունելով

$$f(x)+f'(x)+\ldots+f^{(n)}(x)=F(x),$$

* Դրանից անմիջապես հետո Լ ի ն դ ե մ ա ն ը (F. Lindemann) ապացուցեց π թվի տրանսցենդենտությունը, որով առաջին անգամ հաստատեց շրջանի քառակուսման հնուց հայտնի խնդրի անլուծելիությունը։

այստեղից ունենք

$$e^{b}F(0)-F(b)=e^{b}\int_{0}^{b} f(x)\, e^{-x}dx.$$

Այստեղ հաջորդաբար վերցնենք $b=0, 1, 2, \ldots, m$. ստացված հավասարությունները բազմապատկելով համապատասխանաբար $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_m$-ով և գումարելով, (1)-ի շնորհիվ կգանք այսպիսի վերջնական հավասարության՝

$$0=c_0F(0)+c_1F(1)+\ldots+c_mF(m)+\sum_{i=0}^{m} c_i e^{i}\int_{0}^{i} f(x)\, e^{-x}dx, \tag{2}$$

որը, հիշեցնենք այդ, պետք է տեղի ունենա ցանկացած $f(x)$ բազմանդամի համար: Այժմ մենք ցույց տանք, որ այդ բազմանդամը կարելի է ընտրել այնպես, որ (2) հավասարությունն անհնար լինի. դրանով էլ թեորեմն ապացուցված կլինի:

Այդ նպատակով վերցնենք՝

$$f(x)=\frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(x-1)^{p}(x-2)^{p}\ldots(x-m)^{p},$$

որտեղ p-ն պարզ թիվ է և մեծ է m-ից ու $|c_0|$-ից: Այդ բազմանդամի p և ավելի բարձր կարգի ածանցյալներն ունեն ամբողջ գործակիցներ և բաժանվում են p-ի վրա. այդ անմիջականորեն բխում է նրանից, որ p հատ հաջորդական բնական թվերի արտադրյալը բաժանվում է $p!$-ի վրա: Ուստի x-ի ցանկացած ամբողջ արժեքների դեպքում այդ բոլոր ածանցյալներն ունեն ամբողջ արժեքներ, որոնք բազմապատիկ են p-ին: Քանի որ $x=1, 2, \ldots, m$ դեպքում $f(x)$ բազմանդամը և նրա առաջին $p-1$ ածանցյալները զրո են դառնում, ապա $F(1), F(2), \ldots, F(m)$-ը կլինեն ամբողջ թվեր, որոնք բազմապատիկ են p-ին:

Այլ է գործը $F(0)$-ի հետ: $x=0$ դեպքում $f(x)$ բազմանդամը 0 է դառնում միայն իր $p-2$ ածանցյալների հետ միասին, այնպես որ՝

$$F(0)=f^{(p-1)}(0)+f^{(p)}(0)+\ldots$$

Բոլոր գումարելիները, սկսած երկրորդից, ինչպես տեսանք, ամբողջ թվեր են, բազմապատիկ p-ին. բայց $f^{(p-1)}(0)=(-1)^{p}m!$, իսկ նրա հետ և $F(0)$-ն, p-ի վրա չի բաժանվում: Քանի որ p-ի նկատմամբ արած ենթադրությունների պատճառով c_0-ն էլ p-ի վրա չի բաժանվում, ապա գալիս ենք այն եզրակացության, որ (2) հավասարության աջ կողմի առաջին գումարն ամբողջ թիվ է, որը p-ի վրա չի բաժանվում և, հետևապես, նախահայտորեն հավասար չէ զրոյի:

Դիմենք (2)-ի երկրորդ գումարին։ [0, m] *միջակայքում, ակնհայտորեն՝*

$$|f(x)| < \frac{1}{(p-1)!} m^{p-1} m^p m^p \ldots = \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}.$$

Ուստի

$$\left|\int_0^i f(x) e^{-x}\, dx\right| < \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}\int_0^i e^{-x} dx < \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}$$

և, եթե $|c_0|+|c_1|+\ldots+|c_m|$ *գումարը նշանակենք* C*-ով, ապա*

$$\left|\sum_{i=0}^{m} c_i e^i \int_0^i f(x) e^{-x} dx\right| < Ce^m \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} = Ce^m m^m \frac{(m^{m+1})^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Բայց մենք գիտենք [35, 1), *որ երբ* $p\to\infty$, *վերջին արտադրիչը ձգտում է* 0*-ի, այնպես որ (2)-ի երկրորդ գումարը, բավականաչափ մեծ* p*-ի դեպքում, իր բացարձակ արժեքով առաջինից փոքր կլինի։ Այդպիսի դեպքում նրանց գումարը չի կարող հավասար լինել* 0*-ի, և մենք եկանք հակասության։*

308. ԼԵԺԱՆԴՐԻ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԸ։ Մեր առջև խնդիր դնենք՝ գտնել n*-րդ աստիճանի այնպիսի* $P_n(x)$ *բազմանդամ, որ* n *աստիճանից ցածր ամեն մի* $Q(x)$ *բազմանդամի համար տեղի ունենա*

$$\int_a^b P_n(x)\, Q(x)\, dx = 0 \tag{3}$$

հավասարությունը, որտեղ a*-ն և* b*-ն կամայական, բայց ֆիքսած թվեր են։*

n*-րդ աստիճանի յուրաքանչյուր* $P_n(x)$ *բազմանդամ կարելի է դիտարկել որպես* 2n *աստիճանի մի որոշ* $R(x)$ *բազմանդամի* n*-րդ ածանցյալ, որը ստացվում է* $P_n(x)$*-ից՝* n *անգամ հաջորդաբար ինտեգրելով։ Եթե ամեն մի ինտեգրման ժամանակ կամայական հաստատունն ընտրենք այնպես, որ* $x=a$ *դեպքում ինտեգրալը դառնա* 0, *ապա* $R(x)$ *բազմանդամի համար բավարարված կլինեն նաև հետևյալ պայմանները՝*

$$R(a)=0,\ R'(a)=0, \ldots,\ R^{(n-1)}(a)=0. \tag{4}$$

Այսպիսով, մեր խնդիրը հանգում է 2n *աստիճանի այնպիսի* $R(x)$ *բազմանդամ գտնելուն, որպեսզի* n*-ից ցածր աստիճանի ցանկացած* $Q(x)$ *բազմանդամի համար լինի*

$$\int_a^b R^{(n)}(x)Q(x)dx=0 \qquad (5)$$

և, բացի այդ, տեղի ունենան (4) հավասարությունները։ Բայց, համաձայն n° 299-ի (7) բանաձևի, եթե այնտեղ n-ը փոխարինենք n—1-ով, ապա

$$\int_a^b R^{(n)}(x)\,Q(x)dx=[Q(x)R^{(n-1)}(x)-Q'(x)R^{(n-2)}(x)+\ldots-$$

$$\pm Q^{(n-1)}(x)R(x)\Big|_a^b \mp \int_a^b Q^{(n)}(x)\,R(x)\,dx.$$

Եթե նկատի առնենք (4)-ը, ալլև այն, որ $Q^{(n)}(x)\equiv 0$, ապա (5) պայմանը կբերվի հետևյալ տեսքին՝

$$Q(b)\,R^{(n-1)}(b)-Q'(b)\,R^{(n-2)}(b)+\ldots\pm Q^{(n-1)}(b)\,R(b)=0. \qquad (6)$$

Շնորհիվ այն հանգամանքի, որ $(n-1)$-րդ աստիճանի $Q(x)$ բազմանդամը միանգամայն կամայական է, այդ բազմանդամի $Q(b)$, $Q'(b)$, ..., $Q^{(n-1)}(b)$ արժեքները և նրա հաջորդական ածանցյալների արժեքները $x=b$ կետում կարելի է դիտարկել որպես կամայական թվեր, իսկ այդ դեպքում (6) պայմանը հավասարազոր է հետևյալներին՝

$$R(b)=0,\quad R'(b)=0,\ \ldots,\ R^{(n-1)}(b)=0. \qquad (7)$$

(4)-ից և (7)-ից տեսնում ենք, որ $R(x)$ բազմանդամը պետք է a և b թվերն ունենա որպես n-պատիկ արմատներ և, հետևաբար, $(x-a)^n\,(x-b)^n$ արտադրյալից կարող է տարբերվել միայն հաստատուն արտադրիչով։ Այսպիսով, վերջնականապես

$$P_n(x)=c_n\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n\,(x-b)^n].$$

Եթե մասնավորապես, վերցնենք $a=-1$ և $b=+1$, ապա կգանք մեզ արդեն հայտնի՝ Լեժանդրի բազմանդամներին՝

$$X_n(x)=c_n\frac{d^n\,(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Վերևում մենք տեսանք [111, 6)], որ եթե ընդունենք $c_n=\frac{1}{2^n n!}=\frac{1}{(2n)!!}$, ապա $X_n(1)=1$, $X_n(-1)=(-1)^n$։ Սովորաբար ընդունում են նաև $X_0(x)=1$։ X_n բազմանդամի բոլոր անդամների ցուցիչները n-ի հետ նույն զույգությունն ունեն։ Ավագ գործակիցը, ակներևորեն, կլինի

$$\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{2n!!}=\frac{(2n-1)!!}{n!},$$

Հենց Լեժանդրի· բազմանդամի սահմանման համաձայն միշտ ունենք

$$\int_{-1}^{1} X_n(x)\,Q(x)\,dx = 0, \tag{8}$$

ինչպիսին էլ լինի n-ից ցածր աստիճանի Q(x) բազմանդամը։ Մասնավորապես, եթե n-ը և m-ը երկու անհավասար ոչ բացասական ամբողջ թվեր են, ապա

$$\int_{-1}^{1} X_n(x)\,X_m(x)\,dx = 0. \tag{9}$$

Գտնենք $\int_{-1}^{1} X_n^2(x)\,dx$ ինտեգրալի արժեքը. նա տարբերվում է

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \cdot \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,dx$$

ինտեգրալից միայն $c_n^2 = \frac{1}{(2n!!)^2}$ արտադրիչով։ Եթե վերջինիս նկատմամբ նորից կիրառենք n° 299-ի բանաձևը, փոխարինելով n-ը՝ (n−1)-ով և ընդունելով

$$u = \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, \qquad v = (x^2-1)^n,$$

ապա այն կհանգի հետևյալ ինտեգրալին՝

$$(-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}} \cdot (x^2-1)^n\,dx = 2\cdot 2n!\int_{0}^{1} (1-x^2)^n\,dx$$

(բոլոր արտաինտեգրալ անդամները չքանում են, որովհետև v ֆունկցիան և նրա ածանցյալները, ներառյալ մինչև (n−1)-րդը, $x=\pm 1$ դեպքում 0 են դառնում)։ Այստեղ ընդունելով $x=\sin t$ [համեմատել 302,2], կստանանք

$$2\cdot 2n!\cdot\frac{2n!!}{(2n+1)!!} = \frac{2}{2n+1}(2n!!)^2,$$

այնպես որ վերջնականորեն

$$\int_{-1}^{1} X_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}. \tag{10}$$

Վերջում, օգտագործելով Լեժանդրի բազմանդամների հատկությունները, արտածենք այդպիսի երեք հաջորդական բազմանդամները կապող անդրադարձ առնչությունը։

Նախապես նկատենք, որ x^n աստիճանը կարող է ներկայացվել որպես $X_0, X_1, \dots, X_n$-երի գծային համասեռ ֆունկցիա հաստատուն գործակիցներով. այդ դեպքում այդպես կլինի նաև n աստիճանի ցանկացած բազմանդամի համար։ Ուստի

$$xX_n = a_0 X_{n+1} + a_1 X_n + a_2 X_{n-1} + a_3 X_{n-} + \dots,$$

որտեղ $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$՝ հաստատուն գործակիցներ են։ Հեշտ է ցույց տալ, որ $a_3 = a_4 = \dots = 0$։ Օրինակ, որոշելու համար a_3-ը, բազմապատկենք այդ հավասարության երկու մասերը X_{n-2}-ով և ինտեգրենք −1-ից մինչև +1՝

$$\int_{-1}^{1} X_n . xX_{n-2}\,dx = a_0 \int_{-1}^{1} X_{n+1} X_{n-2}\,dx + a_1 \int_{-1}^{1} X_n X_{n-2}\,dx +$$

$$+ a_2 \int_{-1}^{1} X_{n-1} X_{n-2}\,dx + a_3 \int_{-1}^{1} X^2_{n-2}\,dx + \dots$$

(8)-ի և (9)-ի շնորհիվ բոլոր ինտեգրալները, բացի մեկից, զրո կլինեն, և մենք կստանանք

$$a_3 \int_{-1}^{1} X^2_{n-2}\,dx = 0,$$ որտեղից $a_3 = 0$։

a_1 գործակիցը նույնպես հավասար է 0-ի, որովհետև ձախ կողմում ամենևին չկա x^n պարունակող անդամ։ a_0-ն որոշելու համար հավասարության երկու մասերում x^{n+1}-ի գործակիցներն իրար հավասարեցնենք՝

$$\frac{(2n-1)!!}{n!} = a_0 \frac{(2n+1)!!}{(n+1)!},$$ որտեղից $a_0 = \frac{n+1}{2n+1}$,

Վերջապես, որպեսզի գտնենք a_2-ը, հավասարության երկու մասերն իրար հավասարեցնենք $x=1$ դեպքում՝

$$1 = a_0 + a_2,$$ այնպես որ $a_2 = 1 - a_0 = \frac{n}{2n+1}$։

Տեղադրելով գործակիցների գտած արժեքները, վերջնականապես ստանում ենք

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)\,x\,X_n + nX_{n-1} = 0 \qquad (11)$$

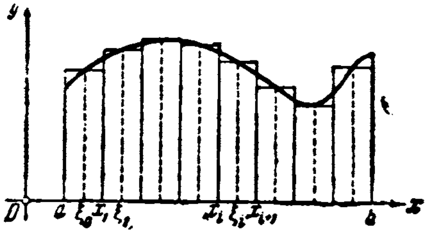
չենց այս է որոնելի անդրադարձ առնչությունը, որը թույլատրում է գտնել Լեժանդրի բազմանդամները հաջորդաբար, ելնելով $X_0=1$-ից և $X_1=x$-ից՝

$$X_2=\frac{3x^2-1}{2},\quad X_3=\frac{5x^3-3x}{2},\quad X_4=\frac{35x^4-30x^2+3}{8},\ \ldots$$

§ 5. ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ՀԱՇՎՈՒՄԸ

309. ԽՆԴՐԻ ԴՐՈՒՄԸ։ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՎ ՍԵՂԱՆՆԵՐԻ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԸ։ Դիցուք պահանջվում է հաշվել $\int_a^b f(x)\,dx$ որոշյալ ինտեգրալը, որտեղ $f(x)$-ը $[a, b]$ միջակայքում տրված մի որոշ անընդհատ ֆունկցիա է։ § 3-ում մենք նման ինտեգրալներ հաշվելու շատ օրինակներ ունեցանք։ Այդ ինտեգրալները հաշվում էինք կամ նախնական ֆունկցիայի օգնությամբ, եթե այն արտահայտվում էր վերջավոր տեսքով, կամ թե, մի կողմ թողնելով նախնականը, զանազան հնարքների օգնությամբ, մեծ մասամբ արհեստական։ Պետք է նշել սակայն, որ այդ բոլորով սպառվում է ինտեգրալների միայն մի բավականաչափ նեղ դաս. դրա սահմաններից դուրս սովորաբար դիմում են մոտավոր հաշվման զանազան մեթոդների։

Սույն պարագրաֆում մենք կծանոթանանք այդ մեթոդներից պարզագույնների հետ, որոնց ժամանակ ինտեգրալների համար մոտավոր բանաձևեր կազմվում են ընդինտեգրալ ֆունկցիայի որոշ թվով արժեքներով, որոնք հաշվվում են անկախ փոփոխականի մի շարք (սովորաբար հավասարահեռ) արժեքների դեպքում։



գծ. 6.

Դրանց վերաբերող առաջին բանաձևերը ամենից հեշտությամբ ստացվում են երկրաչափական նկատառումներից։

Մեկնաբանելով $\int_a^b f(x)\,dx$ ինտեգրալը որպես մի որոշ պատկերի մակերես, որը սահմանափակված է $y=f(x)$ կորով [282], մեր առջև դնում ենք հենց այդ մակերեսը որոշելու խնդիրը։

Ամենից առաջ, երկրորդ անգամ օգտագործելով այն միտքը, որը հենց մեզ բերեց որոշյալ ինտեգրալի գաղափարին, կարելի է ամբողջ պատկերը (գծ. 6) տրոհել շերտերի, ասենք՝ միևնույն $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$* լայնության ու-

* Պահպանում ենք n° 282-ի նշանակումները։

նեցող, իսկ այնուհետև յուրաքանչյուր շերտը մոտավորապես փոխարինել ուղղանկյունով, որի բարձրությունն է ընդունված նրա որևէ օրդինատը: Այդ մեզ հանգեցնում է հետևյալ բանաձևին՝

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{n}\left[f(\xi_0)+f(\xi_1)+\ldots+f(\xi_{n-1})\right],$$

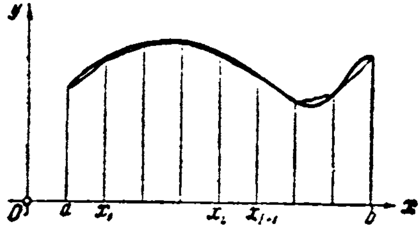
որտեղ $X_i \leqslant \xi_i \leqslant X_{i+1}$ $(i=0,1,\ldots, n-1)$: *Այստեղ կորագիծ պատկերի որոնելի մակերեսը փոխարինվում է ուղղանկյուններից բաղկացած մի որոշ աստիճանաձև պատկերով (կամ, եթե ցանկանում եք, որոշյալ ինտեգրալը փոխարինվում է ինտեգրալ գումարով): Հենց այս մոտավոր բանաձևն էլ կոչվում է* **ուղղանկյունների բանաձև:**

Գործնականում սովորաբար վերցնում են $\xi_i=\frac{X_i+X_{i+1}}{2}=X_{i+\frac{1}{2}}$, *եթե համապատասխան* $f(\xi_i)=f(X_{i+\frac{1}{2}})$ *միջին օրդինատը նշանակենք* $y_{i+\frac{1}{2}}$*-ով, ապա բանաձևը կարտագրվի այսպես՝*

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{n}\left(y_{\frac{1}{2}}+y_{\frac{3}{2}}+\cdots+y_{n-\frac{1}{2}}\right). \qquad (1)$$

Հետագայում, խոսելով ուղղանկյունների բանաձևի մասին, մենք նկատի կունենանք հենց այս բանաձևը:

Երկրաչափական նկատառումները բնականաբար բերում են նաև մի այլ, հաճախ կիրառվող, մոտավոր բանաձևի: Տվյալ կորը փոխարինենք ներգծյալ բեկյալով, որի գագաթները լինեն (x_i, y_i) *կետերում, որտեղ* $y_i=f(x_i)$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$: *Այդ ժամանակ մեր կորագիծ պատկերը կփոխարինվի մի ուրիշով, որը բաղկացած կլինի մի շարք սեղաններից (գծ. 7): Եթե առաջվա նման համարենք, որ* $[a, b]$ *միջակայքը տրոհված է հավասար մասերի, ապա այդ սեղանների մակերեսները կլինեն*



գծ. 7.

$$\frac{b-a}{n}\,\frac{y_0+y_1}{2},\quad \frac{b-a}{n}\,\frac{y_1+y_2}{2},\ \ldots,\ \frac{b-a}{n}\,\frac{y_{n-1}+y_n}{2},$$

Գումարելով, կստանանք մի նոր մոտավոր բանաձև՝

$$\int_a^b f(x)dx \doteq \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right). \qquad (2)$$

Սա, այսպես կոչված սեղանների բանաձևն *է։ Կարևոր է ցույց տալ, որ* n*-ը մինչև անվերջություն աճելիս ուղղանկյունների բանաձևի և սեղանների բանաձևի սխալն անվերջ նվազում է։ Այսպիսով, բավականաչափ մեծ* n*-ի դեպքում այդ երկու բանաձևն էլ վերարտադրում են ինտեգրալի որոնելի արժեքը կամայական տարիճանի ճշգրտությամբ։*

Օրինակի համար վերցնենք մեզ հայտնի հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}=0{,}785398\cdots$$

և դրա նկատմամբ կիրառենք երկու մոտավոր բանաձևերը, վերցնելով $n=10$ *և հաշվումը կատարելով չորս թվանշանով։*

Ըստ ուղղանկյունների բանաձևի ունենք՝

$x_{1/2}=0{,}05$	$y_{1/2}=0{,}9995$
$x_{3/2}=0{,}15$	$y_{3/2}=0{,}9780$
$x_{5/2}=0{,}25$	$y_{5/2}=0{,}9412$
$x_{7/2}=0{,}35$	$y_{7/2}=0{,}8909$
$x_{9/2}=0{,}45$	$y_{9/2}=0{,}8316$
$x_{11/2}=0{,}55$	$y_{11/2}=0{,}7678$
$x_{13/2}=0{,}65$	$y_{13/2}=0{,}7029$
$x_{15/2}=0{,}75$	$y_{15/2}=0{,}6400$
$x_{17/2}=0{,}85$	$y_{17/2}=0{,}5806$
$x_{19/2}=0{,}95$	$y_{19/2}=0{,}5256$
Գումար	7,8581

$$\frac{7{,}8581}{10}=0{,}78581$$

Իսկ ըստ սեղանների բանաձևի՝

$x_0=0{,}0$	$y_0=1{,}0000$
$x_{10}=1{,}0$	$y_{10}=0{,}5000$
Գումար	1,5000

$$\frac{1}{10}\left(\frac{1{,}500}{2}+7{,}0998\right)=$$

$$=0{,}78498$$

$x_1=0{,}1$	$y_1=0{,}9901$
$x_2=0{,}2$	$y_2=0{,}9615$
$x_3=0{,}3$	$y_3=0{,}9174$
$x_4=0{,}4$	$y_4=0{,}8621$
$x_5=0{,}5$	$y_5=0{,}8000$
$x_6=0{,}6$	$y_6=0{,}7353$
$x_7=0{,}7$	$y_7=0{,}6711$
$x_8=0{,}8$	$y_8=0{,}6098$
$x_9=0{,}9$	$y_9=0{,}5525$
Գումար	7,0998

Ստացված երկու մոտավոր արդյունքներն էլ օժտված են համարյա միատեսակ աստիճանի ճշգրտությամբ, իսկական արժեքից նրանք տարբերվում են (դեպի մեկ և մյուս կողմը) ավելի պակաս քան 0,0005-ով։

Ընթերցողը, իհարկե, իրեն հաշիվ է տալիս, որ այստեղ մենք կարողացանք գնահատել սխալը միայն այն պատճառով, որ առաջուց իմանում էինք ինտեգրալի ճիշտ արժեքը։ Որպեսզի մեր բանաձևերն իրոք պիտանի լինեն մոտավոր հաշվումների համար, պետք է սխալի համար ունենալ այնպիսի մի հարմար արտահայտություն, որը հնարավորություն տար ոչ միայն գնահատելու սխալը տվյալ n-ի դեպքում, այլև այնպես ընտրելու n-ը, որ այն ապահովի պահանջված աստիճանի ճշգրտություն։ Այդ հարցին մենք կանդրադառնանք n° 312-ում։

310. ՊԱՐԱԲՈԼԱԿԱՆ ԻՆՏԵՐՊՈԼԱՑՈՒՄ։ $\int_a^b f(x)dx$ ինտեգրալի մոտավոր հաշվման համար կարելի է փորձել f(x) ֆունկցիան փոխարինել իրեն «մոտ» բազմանդամով՝

$$y = P_k(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_{k-1}x + a_k \tag{3}$$

և ընդունել

$$\int_a^b f(x)dx \doteq \int_a^b P_k(x)\,dx.$$

Այլ կերպ կարելի է ասել, որ այստեղ, մակերեսը հաշվելու ժամանակ, տվյալ y=f(x) «կորը» փոխարինվում է (3) «k-րդ կարգի պարաբոլով», որի կապակցությամբ էլ այդ պրոցեսը կոչվել է պարաբոլական ինտերպոլացում։

$P_k(x)$ ինտերպոլյացիոն բազմանդամի ընտրությունն ինքը ամենից հաճախ կատարում են հետևյալ կերպ։ [a, b] միջակայքում վերցնում են անկախ փոփոխականի k+1 արժեքներ $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k$ և բազմանդամն ընտրում են այնպես, որ x-ի վերցրած արժեքների դեպքում նրա արժեքները համընկնեն f(x) ֆունկցիայի արժեքների հետ։ Այս պայմանով $P_k(x)$ բազմանդամը որոշվում է միարժեքորեն, և նրա արտահայտությունը տրվում է (հանրահաշվից հայտնի) Լագրանժի ինտերպոլյացիոն բանաձևով՝

$$P_k(x) = \frac{(x-\xi_1)(x-\xi_2)\dots(x-\xi_k)}{(\xi_0-\xi_1)(\xi_0-\xi_2)\dots(\xi_0-\xi_k)}f(\xi_0) +$$

$$= \frac{(x-\xi_0)(x-\xi_2)\dots(x-\xi_k)}{(\xi_1-\xi_0)(\xi_1-\xi_2)\dots(\xi_1-\xi_k)}f(\xi_1) + \dots$$

$$\dots + \frac{(x-\xi_0)(x-\xi_1)\dots(x_k-\xi_{k-1})}{(\xi_k-\xi_0)(\xi_k-\xi_1)\dots(\xi_k-\xi_{k-1})}f(\xi_k).$$

Ինտեգրման ժամանակ ստացվում է $f(\xi_0), \dots, f(\xi_k)$ արժեքների նկատմամբ գծային արտահայտություն, որի գործակիցներն արդեն կախում

չունենք այդ արժեքներից: Գործակիցները մի անգամ ընդմիշտ հաշվելով կարելի է նրանցից օգտվել ցանկացած f(x) ֆունկցիայի համար տվյալ [a, b] միջակայքում:

Պարզագույն դեպքում, երբ $k=0$, f(x) ֆունկցիան պարզապես փոխարինվում է $f(\xi_0)$ հաստատունով, որտեղ ξ_0-ն՝ ցանկացած կետ է [a, b] միջակայքում, ասենք, միջնակետը՝ $\xi=\frac{a+b}{2}$: Այդ դեպքում մոտավորապես՝

$$\int_a^b f(x)dx \doteq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right): \tag{4}$$

Երկրաչափորեն՝ կորագիծ սեղանի մակերեսը այստեղ փոխարինվում է մի ուղղանկյան մակերեսով, որի բարձրությունը հավասար է նրա միջին օրդինատին:

$K=1$ դեպքում f(x) ֆունկցիան փոխարինվում է $P_1(x)$ գծային ֆունկցիայով, որը $x=\xi_0$ և $x=\xi_1$ դեպքում f(x)-ի հետ միատեսակ արժեքներ ունի: Եթե վերցնենք $\xi_0=a, \xi_1=b$ ապա

$$P_1(x)=\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b) \tag{5}$$

և, ինչպես հեշտ է հաշվել,

$$\int_a^b P_1(x)\,dx=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}:$$

Այսպիսով, այստեղ մենք մոտավորապես համարում ենք

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}: \tag{6}$$

Այս անգամ կորագիծ սեղանի մակերեսը փոխարինվում է սեղանի մակերեսով՝ կորի փոխարեն վերցվում է նրա ծայրերը միացնող լարը:

Ավելի պակաս տարրական արդյունք կստանանք, վերցնելով $K=2$: Եթե ընդունենք $\xi_0=a$, $\xi_1=\frac{a+b}{2}$, $\xi=b$, ապա $P_2(x)$ ինտերպոլյացիոն բազմանդամը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$P_2(x)=\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+$$

$$+\frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}f(b): \tag{7}$$

Հեշտ հաշվումների օգնությամբ կարող ենք ստանալ.

$$\int_a^b \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)}\,dx=$$

$$=\frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b \left[(x-b)+\frac{b-a}{2}\right](x-b)\,dx=$$

$$=\frac{2}{(b-a)^2}\left[\frac{(x-b)^3}{3}+\frac{b-a}{2}\cdot\frac{(x-b)^2}{2}\right]\Bigg|_a^b=\frac{b-a}{6}$$

և նման ձևով՝

$$\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}\,dx=4\frac{b-a}{6},$$

$$\int_a^b \frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}\,dx=\frac{b-a}{6}.$$

Այսպիսով, հանգում ենք հետևյալ մոտավոր բանաձևին՝

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]. \qquad (8)$$

Այստեղ տվյալ կորի տակ գտնված պատկերի մակերեսը փոխարինվում է մի պատկերի մակերեսով, որը սահմանափակված է կորի ծայրային և միջին կետերով անցնող (և ուղղաձիգ առանցք ունեցող) սովորական պարաբոլով։

Մեծացնելով ինտերպոլյացիոն բազմանդամի k *աստիճանը, այսինքն՝ (3) պարաբոլին անցկացնելով տվյալ կորի ավելի ու ավելի շատ թվով կետերով, կարելի է հուսալ հասնելու ավելի մեծ ճշգրտության։ Բայց ավելի գործնական է մի այլ ճանապարհ, որը հիմնված է պարաբոլական ինտերպոլացման գաղափարը և միջակայքի տրոհման գաղափարի զուգորդման վրա։*

311. ԻՆՏԵԳՐՄԱՆ ՄԻՋԱԿԱՅՔԻ ՏՐՈՀՈՒՄԸ։ $\int_a^b f(x)dx$ *ինտեգրալը հաշվելիս կարելի է վարվել այսպես։* [a, b] *միջակայքը նախ տրոհենք մի որոշ* n *թվով հավասար միջակայքերի՝*

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n] \quad (x_0=a,\ x_n=b),$$

որի կապակցությամբ որոնելի ինտեգրալը կներկայանա հետևյալ գումարի տեսքով՝

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx. \tag{9}$$

Իսկ այժմ այդ միջակայքերից յուրաքանչյուրի նկատմամբ կիրառենք պարաբոլական ինտերպոլացում, այսինքն՝ (9) ինտեգրալները հաշվենք (4), (6), (8), ... մոտավոր բանաձևերից մեկի միջոցով։

Հեշտ է գլխի ընկնել, որ ելնելով (4) կամ (6) բանաձևերից, մենք այդ ճանապարհով նորից կստանանք մեզ արդեն հայտնի ուղղանկյունների և սեղանների (1) և (2) բանաձևերը։

Այժմ (9) ինտեգրալների նկատմամբ կիրառենք (8) բանաձևը. ընդ որում կարճության համար, ընդունենք, ինչպես և վերևում,

$$f(x_i) = y_i, \quad \frac{x_i + x_{i+1}}{2} = x_{i+1/2}, \quad f(x_{i+1/2}) = y_{i+1/2}.$$

Մենք կստանանք

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \doteq \frac{b-a}{6n}\,(y_0 + 4y_{1/2} + y_1),$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \doteq \frac{b-a}{6n}\,(y_1 + 4y_{3/2} + y_2),$$

. . . .

. . . .

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \doteq \frac{b-a}{6n}\,(y_{n-1} + 4y_{n-1/2} + y_n).$$

Վերջապես, գումարելով այդ հավասարությունները, կստանանք հետևյալ բանաձևը՝

$$\int_a^b f(x)dx \doteq \frac{b-a}{6n}\,[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) +$$

$$+ 4(y_{1/2} + y_{3/2} + \ldots + y_{n-1/2})]. \tag{10}$$

Դա կրում է Սիմպսոնի (Th. Simpson) բանաձև անունը։ Ինտեգրալների մոտավոր արժեքը հաշվելու համար այդ բանաձևից օգտվում են ավելի հաճախ, քան ուղղանկյունների և սեղանների բանաձևերից, որովհետև այդ բանաձևը, աշխատանքի նույնչափ ծախսման դեպքում սովորաբար ավելի ճշգրիտ արդյունք է տալիս։

Համեմատելու համար նորից հաշվենք $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ ինտեգրալը (տես 309) Սիմպսոնի բանաձևով։ Վերցնենք n=2, այնպես որ օգտագործված օրդինատների թիվն այս անգամ նույնիսկ ավելի փոքր է, քան առաջ էր։ Ունենք (հաշվումը կատարելով հինգ թվանշանով)

$$x_0=0,\ x_{1/2}=\frac{1}{4},\qquad x_1=\frac{1}{2},\quad x_{3/2}=\frac{3}{4};\quad x_2=1.$$

$$y_0=1,\quad 4y_{1/2}=3{,}76471,\ 2y_1=1{,}6,\ 4y_{3/2}=2{,}56,\quad y_2=0{,}5.$$

$$\frac{1}{12}(1+3{,}76471+1{,}6+2{,}56+0{,}5)=\underline{0{,}78539\ldots}$$

—բոլոր հինգ թվանշաններն էլ ճիշտ են։

Իհարկե, (10) բանաձևի նկատմամբ կարելի է կրկնել այն դիտողությունները, որ արվել են n 309-ի վերջում։ Այժմ հենց անցնում ենք մոտավոր բանաձևերի սխալի գնահատմանը։

312. ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ԲԱՆԱՁԵՎԻ ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԱՆԴԱՄԸ։ Սկսենք (4) բանաձևից։ Ենթադրենք, թե [a, b] միջակայքում f(x) ֆունկցիան ունի առաջին երկու կարգի անընդհատ ածանցյալներ։ Այդ դեպքում, վերլուծելով f(x)-ը [ըստ Թեյլորի բանաձևի, 124 (13)] ըստ $x-\frac{a+b}{2}$ երկանդամի աստիճանների՝ ընդհուպ մինչև նրա քառակուսին, կունենանք x-ի բոլոր արժեքների համար [a, b]-ում՝

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi),$$

որտեղ ξ-ն գտնվում է x-ի և $\frac{a+b}{2}$-ի միջև և կախված է x-ից։

Եթե այս հավասարությունն ինտեգրենք a-ից մինչև b միջակայքում, ապա աջ կողմում երկրորդ անդամը կչքանա, որովհետև

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx=0.$$

Այսպիսով կստանանք

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\tilde{\xi})\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx,$$

այնպես որ (4) բանաձևի լրացուցիչ անդամը, որը վերականգնում է նրա ճշգրտությունը, ունի այս տեսքը՝

$$\rho=\frac{1}{2}\int_a^b f''(\tilde{\xi})\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx.$$

[a, b] միջակայքում $f''(x)$ անընդհատ ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները նշանակելով, համապատասխանաբար, m և M [84] և օգտվելով այն բանից, որ ընդհանրացված արտահայտության երկրորդ արտադրիչն իր նշանը չի փոխում, միջին արժեքի ընդհանրացված թեորեմայի [292, 10] համաձայն կարող ենք գրել՝

$$\rho = \frac{1}{2}\mu \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^3}{24}\mu,$$

որտեղ μ-ն գտնվում է m-ի և M-ի միջև։ Անընդհատ ֆունկցիայի հայտնի հատկության համաձայն [81], [a, b] միջակայքում կգտնվի այնպիսի ξ^* կետ, որ $\mu = f''(\xi^*)$, և վերջնականապես

$$\rho = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi^*).$$

Եթե [a, b] միջակայքը բաժանենք n հավասար մասերի, ապա յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}]$ մասնակի միջակայքի համար կունենանք,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{b-a}{n} f(x_{i+1/2}) + \frac{(b-a)^3}{24n^3} f''(\xi^*_i) \quad (x_i < \xi^*_i < x_{i+1})$$

Ճշգրիտ բանաձևը։

Այդ հավասարությունները ($i = 0, 1, \ldots n-1$ դեպքում) գումարելով անդամ առ անդամ, սովորական կրճատ նշանակումներով կստանանք

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left(y_{1/2} + y_{3/2} + \ldots + y_{n-1/2}\right) + R_n,$$

որտեղ

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot \frac{f''(\xi_0^*) + f''(\xi_1^*) + \ldots + f''(\xi^*_{n-1})}{n}$$

արտահայտությունը հենց ուղղանկյունների (1) բանաձևի լրացուցիչ անդամն է։ Քանի որ $\frac{f''(\xi_0^*) + \ldots + f''(\xi^*_{n-1})}{n}$ արտահայտությունը նույնպես գտնվում է m-ի և M-ի միջև, ապա դա ևս ներկայացնում է $f''(x)$ ֆունկցիայի արժեքներից մեկը։

Ուստի վերջնականապես ունենք

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi) \quad (a < \xi < b): \qquad (11)$$

n-ը աճելիս այդ լրացուցիչ անդամը նվազում է մ ո տ ա վ ո ր ա պ ե ս այնպես, ինչպես $\frac{1}{n^4}$*։

Օրինակի համար, վերադառնանք $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ ինտեգրալին, որը մեկ անգամ հաշվեցինք n° 309-ում։ $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ենթինտեգրալ ֆունկցիայի համար ունենք $f''(x)=2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$. այս ածանցյալը [0, 1] միջակայքում փոխում է նշանը, բայց բացարձակ արժեքով 2-ից փոքր է մնում։ Այստեղից, ըստ (11) բանաձևի $|R_{10}|<0{,}85\cdot10^{-3}$։ Մենք հաշվում էինք օրդինատները չորս թվանշանով, 0,00005 ճշգրտությամբ. դժվար չէ տեսնել, որ օրդինատները կլորացնելուց առաջացած սխալը կարելի է մտցնել վերը բերված արժեքի մեջ։ Իսկական սխալը, իհարկե, փոքր է այդ սահմանից։

313. ՍԵՂԱՆՆԵՐԻ ԲԱՆԱՁԵՎԻ ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԱՆԴԱՄԸ։ Այժմ զբաղվենք (6) բանաձևով, պահպանելով f(x) ֆունկցիայի նկատմամբ արած նախկին ենթադրությունները։ Եթե a-ի և b-ի միջև գտնվող x-ի համար ընդունենք [տես (5)]

$$f(x)=P_1(x)+K(x-a)(x-b), \tag{12}$$

որտեղ K թիվը հենց այդ հավասարությունով էլ կորոշվի. աշխատենք գտնել նրա համար ավելի հարմար արտահայտություն։

Ֆիքսելով x-ը (իսկ դրա հետ և K-ն), դիտարկենք z փոփոխականի այսպիսի ֆունկցիա [a, b] միջակայքում

$$\varphi(z)=f(z)-P_1(z)-K(z-a)(z-b)։$$

Նա անընդհատ է և ունի առաջին երկու կարգի ածանցյալները։ Այդ ֆունկցիան, ակներևաբար, զրո է դառնում ոչ միայն $z=a$ և $z=b$ դեպքում, այլև [(12)-ի շնորհիվ] $z=x$ դեպքում։ Կիրառելով նրա նկատմամբ Ռ ո լ լ ի թեորեմը [117] [a, x] և [x, b] միջակայքերում, կհամոզվենք այն բանում, որ $\varphi'(z)$ ածանցյալը զրո է դառնում երկու կետերում՝ $z=\eta_1$ և $z=\eta_2$, իսկ այդ դեպքում Ռ ո լ լ ի նույն թեորեմայի համաձայն, դրանց միջև կգտնվի $z=\tilde{\eta}$ կետ, որտեղ զրո է դառնում $\varphi''(z)$-ը։

$$\text{Սակայն } \varphi''(z)=f''(z)-2K, \text{ ուստի } \varphi''(\tilde{\eta})=f''(\tilde{\eta})-2K=0 \text{ և}$$

$$K=\frac{1}{2}f''(\tilde{\eta}),$$

* Մենք ասում ենք մ ո տ ա վ ո ր ա պ ե ս, որովհետև n-ը փոփոխվելիս ξ-ն էլ կարող է փոփոխվել։ Այդ բանը պետք է հիշել նաև առաջիկայում։

որտեղ $\tilde{\eta}$-ն գտնվում է a-ի և b-ի միջև և կախված է x-ից։

Ինտեգրելով (12) բանաձևը a-ից մինչև b-ն, կգտնենք

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\tilde{\eta})(x-a)(x-b)\,dx,$$

այնպես որ (6) բանաձևի լրացուցիչ անդամը կլինի

$$\rho=\frac{1}{2}\int_a^b f''(\tilde{\eta})(x-a)(x-b)\,dx.$$

Դատելով այնպես, ինչպես վերևում, և օգտվելով նրանից, որ ընդինտեգրալ ֆունկցիայի երկրորդ արտադրիչը այստեղ չի փոխում է նշանը, կգտնենք

$$\rho=\frac{1}{2}f''(\eta^*)\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta^*)\quad(a\leqslant\eta^*\leqslant b).$$

Վերջապես, միջակայքը n հավասար մասերի բաժանելու դեպքի համար՝

$$R_n=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\eta)\qquad(a\leqslant\eta\leqslant b).\tag{13}$$

Այսպիսին է սեղանների (2) բանաձևի լրացուցիչ անդամը։ n-ի աճման դեպքում նա նույնպես նվազում է, մոտավորապես, ինչպես $\frac{1}{n^2}$։ Մենք տեսնում ենք, որ սեղանների բանաձևի կիրառումը բերում է նույն կարգի սխալի, ինչ որ ուղղանկյունների բանաձևինը։

314. ՍԻՄՊՍՈՆԻ ԲԱՆԱՁԵՎԻ ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԱՆԴԱՄԸ։ Դիմենք, վերջապես, (8) բանաձևին։ Կարելի կլինեք, ինչպես այդ քիչ առաջ արեցինք, ընդունել [տես (7)]

$$f(x)=P_2(x)+K(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b),\tag{14}$$

դրանով իսկ որոշելով K թիվը x-ի՝ a-ից, $\frac{a+b}{2}$-ից և b-ից տարբեր բոլոր արժեքների համար. հեշտ է նաև արտահայտել K-ն $f'''(x)$-ի արժեքի միջոցով որևէ միջին կետում (այն ենթադրությամբ, որ այդ ածանցյալը գոյություն ունի և անընդհատ է)։ Սակայն, ինտեգրելով (14) հավասարությունը, մենք չէինք կարող լրացուցիչ անդամի համար ինտեգրալ արտահայտությունը պարզեցնել միջին արժեքի թեորեմայի օգնությամբ, որովհետև ընդինտեգրալ ֆունկցիայի մեջ $(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)$ արտահայտությունն արդեն փոխում է նշանը [a, b] միջակայքում։ Այդ պատճառով մենք կվարվենք այլ կերպ։

$$P_2(z)+K(z-a)\left(z-\frac{a+b}{2}\right)(z-b)$$

արտահայտությունը, ինչպիսին էլ լինի K թիվը, $z=a, \frac{a+b}{2}, b$ կետե-

բում ընդունում է նույն արժեքները, ինչ որ $f(z)$ ֆունկցիան։ Այժմ հեշտ է K թիվը ընտրել այնպես, որպեսզի այդ արտահայտության ածանցյալը ևս $z=\frac{a+b}{2}$ դեպքում համընկնի $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ածանցյալին։ Նկատի ունենալով K-ի այդ արժեքը, ընդունենք այժմ՝

$$f(x)=P_2(x)+K(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)+$$

$$+L(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b), \tag{15}$$

որտեղ L-ը որոշվում է հենց այդ հավասարությունով x-ի ցանկացած արժեքի դեպքում $[a, b]$ միջակայքում, որոնք տարբեր են a-ից, $\frac{a+b}{2}$-ից և b-ից։ Ֆիքսելով x-ը (ինչ դրա հետ և L-ը) դիտարկենք z փոփոխականի հետևյալ ֆունկցիան $[a, b]$ միջակայքում՝

$$\varphi(z)=f(z)-P_2(z)-K(z-a)\left(z-\frac{a+b}{2}\right)(z-b)-$$

$$-L(z-a)\left(z-\frac{a+b}{2}\right)^2(z-b)։$$

Եթե ենթադրենք, որ $f(z)$ ֆունկցիան անընդհատ է իր ածանցյալների հետ միասին՝ ներառյալ մինչև չորրորդ կարգը, ապա այդպիսին կլինի նաև $\varphi(z)$ ֆունկցիան։ Ակներևաբար, $\varphi(z)$ ֆունկցիան զրո է դառնում չորս կետերում՝ a, $\frac{a+b}{2}$, b և x։ Այդ դեպքում, ըստ Ռոլլի թեորեմայի [117], $\varphi'(z)$ ածանցյալը զրո կդառնա $[a, b]$ միջակայքի երեք կետերում, որոնք տարբեր են դրանցից։ Սակայն K թվի հատկության համաձայն, նաև $\varphi'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, այնպես որ առկա են $\varphi'(z)$ ածանցյալի չորս արմատներ։ Ռոլլի թեորեմայի հաջորդաբար կիրառմամբ համոզվում ենք, որ $[a, b]$ միջակայքի մի որոշ $z=\tilde{\zeta}$ կետում զրո է դառնում $\varphi^{(4)}(z)$ չորրորդ ածանցյալը։ Այստեղից հեշտ է ստանալ, որ

$$L=\frac{1}{24}f^{(4)}(\tilde{\zeta}) \qquad (a<\tilde{\zeta}<b)։$$

Այժմ ինտեգրելով (15) հավասարությունը, կգտնենք

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]+$$

$$+\frac{1}{24}\int_a^b f^{(4)}(\tilde{\zeta})(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\,dx.$$

քանի որ

$$\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b)\,dx =$$

$$=\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{(b-a)^2}{4}\right] dx=0։$$

Ինչպես և նախորդ դեպքերում, օգտվելով այն բանից, որ ընդհանրացված արտահայտության մեջ երկրորդ արտադրիչը նշանը չի փոխում, (8) բանաձևի

$$\rho=\frac{1}{24}\int_a^b f^{(4)}(\tilde{\zeta})\,(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b)\,dx,$$

լրացուցիչ անդամը կարելի է ներկայացնել այսպիսի տեսքով։

$$\rho=\frac{1}{24}\,f^{(4)}(\zeta^*)\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b)\,dx=$$

$$=\frac{1}{24}f^{(4)}(\zeta^*)\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{(b-a)^2}{4}\right] dx=$$

$$=-\frac{(b-a)^5}{180.2^4}f^{(4)}(\zeta^*)^{*}։$$

Եթե $[a, b]$ միջակայքը բաժանված է n հավասար մասերի, ապա Ս ի մ պ ս ո ն ի (10) բանաձևի համար լրացուցիչ անդամը կստանանք հետևյալ տեսքով՝

$$R_n=-\frac{(b-a)^5}{180.(2n)^4}f^{(4)}(\zeta) \qquad (a\leqslant\zeta\leqslant b) \qquad (16)$$

n-ը աճելիս այդ արտահայտությունը նվազում է, մ ո տ ա վ ո ր ա պ ե ս, ինչպես $\frac{1}{n^4}$-ը. այսպիսով, Ս ի մ պ ս ո ն ի բանաձևն իրոք ավելի ճշգրիտ է, քան նախորդ բանաձևերը։

---

* Եթե $f(x)$-ը երրորդից ոչ բարձր աստիճանի բազմանդամ է, ապա ակնհայտորեն, ρ-ն դառնում է 0։ Ուրեմն, այդպիսի բազմանդամի համար (8) բանաձևը ճ շ գ ր ի տ կլինի (որում կարելի է համոզվել և անմիջականորեն)։

Նորից վերցնենք $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ ինտեգրալը։ Որպեսզի խուսափենք (16) բանաձևի մեջ մասնակցող չորրորդ ածանցյալը հաշվելուց, նկատենք, որ $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ֆունկցիան իրեն $y=\operatorname{arctg} x$-ի ածանցյալն է հանդիսանում, այնպես որ մենք կարող ենք օգտվել 109, 8) պատրաստի բանաձևից։ Նրա համաձայն՝

$$f^{(4)}(x)=y^{(5)}=24\cos^5 y\sin 5\left(y+\frac{\pi}{2}\right)=24\cos^5 y\cos 5y.$$

այս արտահայտությունն, իր բացարձակ արժեքով, 24-ից մեծ չէ, այնպես որ ըստ (16) բանաձևի $|R_2|<\frac{1}{1920}<0{,}0006$։ Իսկական սխալը, ինչպես տեսել ենք, զգալիորեն փոքր է այդ սահմանից։

Դիտողություն։ Այս օրինակի վրա աչքի է ընկնում, որ մեր բանաձևով գտած սխալի սահմանը բավականաչափ կոպիտ է։ Դժբախտաբար, և հենց դրանում է արտածված բանաձևերի գործնական թերությունը.— նման հանգամանքը հանդիպում է ոչ սակավ։

Այնուամենայնիվ հենց այդ բանաձևերի օգնությամբ, որոնք թույլ են տալիս սխալը նախապես գնահատել, կարելի է իրականացնել որոշյալ ինտեգրալների մոտավոր հաշվումը։ Դիմենք օրինակների։

315. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ Հաշվենք $\int_1^2 \frac{dx}{x}=\log 2$ ինտեգրալը 0,001 ճշգրտությամբ, օգտվելով ուղղանկյունների բանաձևից։

Քանի որ $f(x)=\frac{1}{x}$-ի համար ունենք $0<f''(x)=\frac{2}{x^3}\leqslant 2$ (երբ $1\leqslant x\leqslant 2$), ապա ըստ (11) բանաձևի՝

$$0<R_n<\frac{1}{12n^2}.$$

Եթե վերցնենք $n=10$, ապա մեր բանաձևի լրացուցիչ անդամը կլինի $R_{10}<\frac{1}{1200}<0{,}84\cdot10^{-3}$։ Մենք հարկ կունենանք մտցնել նոր սխալ ևս, կլորացնելով ֆունկցիայի արժեքները. կաշխատենք, որ այդ նոր սխալի սահմանները տարբերվեն ավելի քիչ, քան $0{,}16\cdot10^{-3}$-ը։ Այդ նպատակով բավա-

կան է հաշվել $\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի արժեքները չորս թվանշանով 0,00005 ճշգրտությամբ: Ունենք՝

$$
\begin{array}{ll}
x_{1/2} = 1{,}05 & y_{1/2} = 0{,}9524 \\
x_{3/2} = 1{,}15 & y_{3/2} = 0{,}8696 \\
x_{5/2} = 1{,}25 & y_{5/2} = 0{,}8 \\
x_{7/2} = 1{,}35 & y_{7/2} = 0{,}7407 \\
x_{9/2} = 1{,}45 & y_{9/2} = 0{,}6897 \\
x_{11/2} = 1{,}55 & y_{11/2} = 0{,}6452 \\
x_{13/2} = 1{,}65 & y_{13/2} = 0{,}6061 \\
x_{15/2} = 1{,}75 & y_{15/2} = 0{,}5714 \\
x_{17/2} = 1{,}85 & y_{17/2} = 0{,}5405 \\
x_{19/2} = 1{,}95 & y_{19/2} = 0{,}5128 \\
\hline
 & \text{Գումար } 6{,}9284
\end{array}
\qquad \frac{6{,}9284}{10} = 0{,}69284
$$

Հաշվի առնելով, որ յուրաքանչյուր օրդինատի (և հետևապես, նրանց թվաբանական միջինի) սխալը պարունակվում է $\pm 0{,}00005$ թվերի միջև, այլև նկատի ունենալով R_{10} լրացուցիչ անդամի գնահատումը, կգտնենք, որ $\log 2$-ը գտնվում է $0{,}69279 = 0{,}69284 - 0{,}00005$ և $0{,}69373 = 0{,}69284 + 0{,}00005 + 0{,}00084$ սահմանների միջև, հետևապես և, առավել ևս 0,692-ի և 0,694-ի միջև: Այսպիսով, $\log 2 = 0{,}693 \pm 0{,}001$:

2) Կատարել նույն հաշվումը սեղանների բանաձևով:

Այս դեպքում (13) բանաձևով՝

$$R_n < 0,$$

$$|R_n| < \frac{1}{6n^2}.$$

Փորձենք այստեղ ևս վերցնել $n = 10$, թեև այդ դեպքում կարելի է երաշխավորել միայն, որ $|R_{10}| < \frac{1}{600} < 1{,}7 \cdot 10^{-3}$: Օրդինատները (որոնք հաշված են նույն ճշգրտությամբ, ինչ որ վերևում) կլինեն՝

$$
\begin{array}{ll}
x_1 = 1{,}1 & y_1 = 0{,}9091 \\
x_2 = 1{,}2 & y_2 = 0{,}8333 \\
x_3 = 1{,}3 & y_3 = 0{,}7692 \\
x_4 = 1{,}4 & y_4 = 0{,}7143 \\
x_5 = 1{,}5 & y_5 = 0{,}6667 \\
x_6 = 1{,}6 & y_6 = 0{,}6250 \\
x_7 = 1{,}7 & y_7 = 0{,}5882 \\
x_8 = 1{,}8 & y_8 = 0{,}5556 \\
x_9 = 1{,}9 & y_9 = 0{,}5263 \\
\hline
 & \text{գումար } 6{,}1877
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
x_0 = 1{,}0 & y_0 = 1{,}0000 \\
x_{10} = 2{,}0 & y_{10} = 0{,}5000 \\
\hline
 & \text{գումար } 1{,}5000
\end{array}
$$

$$\frac{1}{10}\left(\frac{1{,}5000}{2} + 6{,}1877\right) = 0{,}69377$$

Հաշվի առնելով բոլոր ուղղումները, կգտնենք, որ log 2-ը գտնվում է 0,69202 = 0,69377 − 0,00005 − 0,00170 և 0,69382 = 0,69377 + 0,00005 սահմանների միջև, այսինքն՝ նորից 0,692-ի և 0,694-ի միջև, և այլն։

3) Սիմպսոնի բանաձևի օգնությամբ, օրդինատների նույն թվի դեպքում, կարելի է սպասել ավելի ճշգրիտ արդյունք։ Քանի որ ընդինտեգրալ ֆունկցիայի չորրորդ ածանցյալը $\frac{24}{x^5}$ է, ապա ըստ (16) բանաձևի՝

$$R_n < 0$$

և

$$|R_n| \quad \frac{24}{180\cdot(2n)^4} = \frac{2}{15\cdot(2n)^4}.$$

Երբ n=5 (այն ժամանակ օրդինատների թիվը կլինի նույնը, ինչ որ նախորդ դեպքում), ունենք $|R_5| < 1,4\cdot10^{-5}$։ Հաշվումը կատարենք հինգ թվանշանով, 0,000005 ճշգրտությամբ՝

$x_1 = 1,2$	$y_1 = 0,83333$	$x_{1/2} = 1,1$	$y_{1/2} = 0,90909$
$x_2 = 1,4$	$y_2 = 0,71429$	$x_{3/2} = 1,3$	$y_{3/2} = 0,76923$
$x_3 = 1,6$	$y_3 = 0,62500$	$x_{5/2} = 1,5$	$y_{5/2} = 0,66667$
$x_4 = 1,8$	$y_4 = 0,55556$	$x_{7/2} = 1,7$	$y_{7/2} = 0,58824$
	գումար 2,72818·2	$x_{9/2} = 1,9$	$y_{9/2} = 0,52632$
	5,45636		գումար 3,45955·4
			13,83820

$x_0 = 1,0$	$y_0 = 1,00000$
$x_5 = 2,0$	$y_5 = 0,50000$
	գումար 1,50000

$$\frac{1}{30}(1,50000 + 5,45636 + 13,83820) = 0,693152.$$

Այստեղից, log 2-ը պարունակվում է

$$0,693133 = 0,693152 - 0,000005 - 0,000014$$

և

$$0,693157 = 0,693152 + 0,000005$$

սահմանների միջև, այնպես որ, օրինակ, կարելի է ընդունել log 2 = 0,69315 ± 0,00001։

Իրականում log 2 = 0,69314718 . . ., և իրական սխալը 0,000005-ից փոքր է ստացվում։ [Համեմատել նախորդ n°-ի վերջում արված դիտողությունը]։

4) Խնդիր դնենք հաշվել հետևյալ՝

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx$$

*2-րդ տեսակի լրիվ էլիպտիկ ինտեգրալը** 0,001 *ճշգրտությամբ Սիմպսոնի բանաձևով։*

$$f(x) = \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}$$ *ֆունկցիայի համար, երբ* x*-ը փոփոխվում է* 0*-ից մինչև* $\frac{\pi}{2}$, *ունենք* $|f^{(4)}| < 12$**, *ուստի [տես (16)]*

$$|R_n| < \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{180\cdot(2n)^4}\cdot 2 < \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(2n)^4},$$ *քանի որ* $\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 < 10$։

Վերցնենք $n=3$, *այնպես որ* $|R_3| < 0{,}00052$։ *Այդ դեպքում*

$x_0 = 0$	$(0°)$	$y_0 = 1{,}0000$
$x_{1/2} = \frac{\pi}{12}$	$(15°)$	$4y_{1/2} = \sqrt{12+\sqrt{12}} = 3{,}9324$
$x_1 = \frac{\pi}{6}$	$(30°)$	$2y_1 = \sqrt{14} : 2 = 1{,}8708$
$x_{3/2} = \frac{\pi}{4}$	$(45°)$	$4y_{3/2} = \sqrt{12} = 3{,}4641$
$x_2 = \frac{\pi}{3}$	$(60°)$	$2y_2 = \sqrt{10} : 2 = 1{,}5811$
$x_{5/2} = \frac{5\pi}{12}$	$(75°)$	$4y_{5/2} = \sqrt{12-\sqrt{12}} = 2{,}9216$
$x_3 = \frac{\pi}{2}$	$(90°)$	$y_3 = \sqrt{2} : 2 = 0{,}7071$
		գումար $15{,}4771$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{15{,}4771}{18} = 1{,}35068\ldots$$

Ստացված արդյունքին, բացի R_3 *սխալից, պետք է ավելացնել նաև (ոչ բացասական) սխալը կլորացման համար, որը չի գերազանցում*
$\frac{0{,}0003\pi}{36} < 0{,}00003$։

Այսպիսով,

$$1{,}35011 < E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 1{,}35118,$$

և կարելի է գրել, որ $E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1{,}351 \pm 0{,}001$։

---

* *Տես ծանոթությունը 127 էջում։*

** *Ակնհայտորեն,* $y = f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. *դիֆերենցելով* $y^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x$ *հավասարությունը, հեշտ է հաջորդաբար ստանալ* y', y'', y''', $y^{(4)}$ *ածանցյալների բացարձակ արժեքների գնահատականները (վերևից)։*

(Փաստորեն ստացված արդյունքի մեջ բոլոր թվանշանները ճիշտ են)։

5) Հաշվել

$$W=\int_0^1 e^{-x^2}\,dx,$$

ինտեգրալը 0,0001 ճշգրտությամբ Սիմպսոնի բանաձևով։

Անմիջականորեն հաշվելով ինտեգրանդ ֆունկցիայի չորրորդ ածանցյալը, համոզվում ենք, որ բացարձակ արժեքով նա չի գերազանցում 12-ին. ուստի

$$|R_n| \leq \frac{12}{180\cdot(2n)^4},$$

Բավական է վերցնել $n=5$, որովհետև $|R_5|<0{,}7\cdot10^{-5}$։ Ունենք

$x_0=0{,}0 \quad y_0=1{,}00000$

$x_5=1{,}0 \quad y_5=0{,}36788$

գումար $1{,}36788$

$x_1=0{,}2 \quad y_1=0{,}96079$

$x_2=0{,}4 \quad y_2=0{,}85214$

$x_3=0{,}6 \quad y_3=0{,}69768$

$x_4=0{,}8 \quad y_4=0{,}52729$

գումար $3{,}03790\cdot 2$

$6{,}07580$

$x_{1/2}=0{,}1 \quad y_{1/2}=0{,}99005$

$x_{3/2}=0{,}3 \quad y_{3/2}=0{,}91393$

$x_{5/2}=0{,}5 \quad y_{5/2}=0{,}77880$

$x_{7/2}=0{,}7 \quad y_{7/2}=0{,}61263$

$x_{9/2}=0{,}9 \quad y_{9/2}=0{,}44486$

գումար $3{,}74027\cdot 4$

$14{,}96108$

$$\frac{1{,}36788+6{,}07580+14{,}96108}{30}=0{,}746825$$

$$0{,}746813<W<0{,}746837$$

$$W=0{,}7468+0{,}00005.$$

(Այստեղ ևս ստացված արդյունքում բոլոր վեց թվանշաններն էլ ճիշտ են։)

6) Գտնենք

$$G=\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$$

ինտեգրալը [համեմատել 302, 6)] Սիմպսոնի բանաձևով, երբ $n=5$, հաշվելով հինգ թվանշաններով՝

$y_0 = 1$	$y_{\frac{1}{2}} = 0,99668$
$y_5 = 0,78540$	$y_{\frac{3}{2}} = 0,97152$
գումար 1,78540	$y_{\frac{5}{2}} = 0,92730$
$y_1 = 0,98698$	$y_{\frac{7}{2}} = 0,87246$
$y_2 = 0,95127$	$y_{\frac{9}{2}} = 0,81424$
$y_3 = 0,90070$	
$y_4 = 0,84343$	
գումար 3,68238 . 2	գումար 4,58220 . 4
7,36476	18,32880

$$\frac{1,78540 + 7,36476 + 18,32880}{30} = 0,915965.$$

Ստացված արդյունքի մեջ բոլոր թվանշանները ճիշտ են, ընթերցողին ենք թողնում գնահատել սխալը (16) բանաձևով։

G-ի արժեքը երբեմն անվանում են Կ ա տ ա լ ա ն ի (E. Catalan) հաստատուն [*տես նաև* 412, *5*) (*ա*)]։

Դ ի տ ո ղ ու թ յ ու ն։ Վերջին երեք օրինակները հետաքրքրական են նրանով, որ համապատասխան նախնական ֆունկցիաները վերջավոր տեսքով չեն արտահայտվում, այնպես որ օգտվել նրանցից հաշվելու համար որոշյալ ինտեգրալներն անհնար կլիներ։

Ընդհանրապես, եթե այդ նախնական ֆունկցիաները ներկայացվեն որոշյալ ինտեգրալների տեսքով փոփոխական վերին սահմանով, ապա կարելի կլիներ հաշվել այդ ինտեգրալների արժեքները, որոնք համապատասխանում են վերին սահմանի մի շարք արժեքներին։ Սրանով է, սկզբունքային տեսակետից, բացատրվում՝ միայն իրենց ինտեգրալ արտահայտություններով տրված ֆունկցիաների համար նույնպիսի աղյուսակներ կազմելու հնարավորությունը, ինչպիսիններն ընթերցողին հայտնի են տարրական ֆունկցիաների համար։

Այս ճանապարհով ընթանալիս՝ վերոհիշյալ ֆունկցիաների համար նույնպես կարելի է ստանալ և մոտավոր արտահայտություններ։

ՏԱՍՆԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՇՎԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ, ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԵՎ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ՄԵՋ

§ 1. ԱՂԵՂԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

316. ԼԵՄՄԱՆԵՐ։ *Դիտարկենք AB (ոչ փակ կամ փակ) կորը, որը տրված է*

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t), \qquad (1)$$
$$(t_0 \leqslant t \leqslant T)$$

պարամետրական հավասարումներով, որտեղ φ և ψ ֆունկցիաները ենթադրվում են միայն անընդհատ։ Ընդունենք, որ A կետը համապատասխանում է $t=t_0$ արժեքին, իսկ B կետը՝ $t=T$ արժեքին։ Ընդ որում դիցուք կորի վրա բազմապատիկ կետեր չկան։

Եթե M'-ը և M''-ը համապատասխանում են պարամետրի t' և t'' արժեքներին ($t_0 \quad t' \quad t'' \quad T$), ապա $\overset{\frown}{M'M''}$ աղեղ ասելով մենք կհասկանանք կորի այն M կետերի բազմությունը, որոնք համապատասխանում են $t' \quad t \quad t''$ արժեքներին։ Փակ կորի դեպքում, եթե A սկիզբը և B վերջը համընկնում են, $\overset{\frown}{AM'}$ աղեղ ասելով, որտեղ M'-ը որոշվում է t_0-ի և T-ի միջև գտնվող t' արժեքով՝ հասկացվում է այն M կետերի բազմությունը, որոնք համապատասխանում են $t_0 \quad t \quad t'$ արժեքներին, իսկ $\overset{\frown}{M'A}$ աղեղ ասելով՝ այն կետերի բազմությունը, որոնց համար $t' \quad t \quad T$։

Աղեղի տրամագիծ կլինի նրա M_1 և M_2 ցանկացած երկու կետերը միացնող լարերից մեծագույնը [համեմատել 164]։ Այդպիսի լարի գոյությունը հեշտ է ապացուցել. իրոք, եթե M. և M.

կետերը որոշվում են պարամետրի t_1 *և* t_2 *արժեքներով, ապա* $M_1 M_2$ *աղեղի*

$$\overline{M_1M_2}=\sqrt{[\varphi(t_2)-\varphi(t_1)]^2+[\psi(t_2)-\psi(t_1)]^2} \qquad (2)$$

երկարությունը կլինի t_1 *և* t_2 *երկու փոփոխականների անընդհատ ֆունկցիա* $[t', t''; t', t'']$ *փակ ուղղանկյան մեջ և, հետևապես* [163], *հասնում է իր մեծագույն արժեքին։*

ԼԵՄՄԱ 1. Ամեն մի դրական δ-ի համար կգտնվի այնպիսի $\eta>0$, որ երբ $t''-t'<\eta$ $(t'<t'')$ ոչ միայն $\overline{M'M''}$ լարի երկարությունը $<\delta$, այլև $\overset{\frown}{M'M''}$ աղեղի տրամագիծը նույնպես $<\delta$։

Իրոք, շնորհիվ (1)-ում φ *և* ψ *ֆունկցիաների (հավասարաչափ) անընդհատության, ըստ* $\delta>0$ *կգտնվի այնպիսի* $\eta>0$, *որ երբ* $|t''-t'|<\eta$ *միաժամանակ կլինի*

$$|\varphi(t'')-\varphi(t')|<\frac{\delta}{\sqrt{2}}, \quad |\psi(t'')-\psi(t')|<\frac{\delta}{\sqrt{2}},$$

իսկ հենց դրանով էլ [համեմատել (2)] նաև

$$\overline{M'M''}<\delta.$$

Քանի որ այդ ճիշտ է յուրաքանչյուր $\overline{M_1M_2}$ *լարի համար, որը միացնում է* $\overline{M'M''}$ *աղեղի* $(t''-t'<\eta$ *դեպքում) ցանկացած երկու* M_1 *և* M_2 *կետերը, ապա լեմման ապացուցված է։*

Տեղի ունի նաև

ԼԵՄՄԱ 2. Ոչ փակ կորի դեպքում ցանկացած $\eta>0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $\delta>0$, որ հենց որ լարի երկարությունը՝ $\overline{M'M''}<\delta$, իսկույն պարամետրի նրա ծայրերին համապատասխանող արժեքների $t''-t'$ $(t'<t'')$ տարբերությունը կլինի $<\eta$։

Ենթադրենք հակառակը. այդ դեպքում մի որոշ $\eta>0$ *համար, ցանկացած* $\delta>0$ *դեպքում, կգտնվեն այնպիսի երկու* $M'(t')$ *և* $M''(t'')$ *կետեր, որ*

$$\overline{M'M''}<\delta \text{ և միևնույն ժամանակ } t''-t'\geq\eta.$$

Վերցնելով 0-ի զուգամիտող մի $\{\delta_n\}$ *հաջորդականություն, և հերթով ընդունելով* $\delta=\delta_n$ $(n=1,2,3\ldots)$, *կստանանք կետերի երկու հաջորդականություններ՝* $\{M'_n(t'_n\}$ *և* $\{M''_n(t''_n)\}$, *որոնց համար*

$$\overline{M'_n M''_n}<\delta_n, \text{ բայց } t''_n-t'_n\geq\eta \quad (n=1,2,3\ldots).$$

Ըստ Բոլցանո-Վայերշտրասի թեորեմայի [41], *առանց նվազեցնելու ընդհանրությունը, կարելի է ենթադրել, որ այդ դեպքում*

$$t'_n \to t^*, \quad t''_n \to t^{**}$$

(այդ բանին կարելի է հասնել, անցնելով՝ պետք եղած դեպքում՝ մասնակի հաջորդականությունների)։ Ակներևորեն,

$$t^{**} - t^* \geqslant \gamma_1,$$

այնպես որ $t^* \neq t^{**}$*։ Միևնույն ժամանակ* M^* *և* M^{**} *համապատասխան կետերի համար ունենք* $M^* M^{**}=0$ *այսինքն՝ այդ կետերը պետք է համընկնեն, որն անհնարին է, քանի որ կորը չունի բազմապատիկ կետեր և փակ չէ։ Ստացված հակասությունը ավարտում է ապացույցը։*

Փակ կորի համար լեմմայի պնդումը ճիշտ չէ. $M'M''$*-ը կարող է ցանկացած չափով փոքր լինել նաև այն դեպքում, երբ* t'*-ը բավականաչափ մոտ է* t_0*-ին, իսկ* t''*-ը՝* T*-ին։*

ԼԵՄՄԱ 3. Ցանկացած $\gamma_1>0$ համար գոյություն ունի այնպիսի $\delta>0$, որ, հենց որ $\overset{\frown}{M'M''}$ աղեղի* տրամագիծը $<\delta$, իսկույն պարամետրի նրա ծայրերին համապատասխանող արժեքների $t''-t'$ ($t'<t''$) տարբերությունը կլինի $<\gamma_1$։

Ոչ փակ կորի դեպքում այդ ուղղակի բխում է նախորդ լեմմայից (որովհետև $M'M''$ *լարի երկարությունը չի գերազանցում* $\overset{\frown}{M'M''}$ *աղեղի տրամագծին)։*

Իսկ եթե կորը փակ է, վերցնենք նրա վրա C *և* D *կետեր, որոնք որոշվում են պարամետրի* $\bar{t}$ *և* $\bar{\bar{t}}$ *արժեքներով, ընդ որում* $t_0<\bar{t}<\bar{\bar{t}}<T$*, և, կիրառելով նախորդ լեմման առանձնաբար* AD *և* CA *կորերի նկատմամբ, ըստ տրված* $\gamma_1>0$ *կգտնենք երկու համապատասխան թվեր՝* δ_1 *և* δ_2*։ Այժմ որպես* δ *ընտրենք* δ_1, δ_2 *և* $\overline{CD}$ *երեք թվերից ամենափոքրը։ Եթե* $\overset{\frown}{M'M''}$ *աղեղի տրամագիծը* $<\delta$*, ապա* M'*,* M'' *կետերը նախահայտորեն գտնվում են երկուսն էլ* $\overset{\frown}{AD}$ *աղեղի վրա կամ երկուսն էլ* $\overset{\frown}{CD}$ *աղե-*

* *Այդ ժամանակ կարևոր է խստորեն հետևել* $M'M''$ *աղեղի այն սահմանումին, որը տրված է վերևում, տեքստի մեջ։*

ղի վրա (իրոք, անհնար է, որ M-ը գտնվի $\overset{\frown}{AC}$ *աղեղի վրա, իսկ* M''*-ը* $\overset{\frown}{DA}$ *աղեղի վրա, որովհետև այդ դեպքում* $\overset{\frown}{M'M''}$ *աղեղի տրամագիծը կլիներ* $\geqslant \overline{CD}$*)։ Հետևապես,* $t''-t'<\eta$*, որը և պահանջվում էր ապացուցել։*

317. ՈՒՂՂՈՒԹՅՈՒՆԸ ԿՈՐԻ ՎՐԱ։ n° 235-*ում մենք* (1) *հավասարումով տրված AB կորի կետերը դասավորեցինք t պարամետրի աճման կարգով և դրանով որոշեցինք ուղղությունը կորի վրա։ Սակայն ձևականորեն այդ որոշումը կախման մեջ է դրված* (1) *մասնավոր պարամետրական ներկայացումից։ Ցույց տանք, որ կորի վրա ուղղության գաղափարը իրականում կախում չունի կորի տրման կոնկրետ եղանակից։*

Սկսենք ավելի պարզ դեպքից՝ ոչ փակ կորի դեպքից։

Եթե AB ոչ փակ կորը, (1) ներկայացման հետ միասին ունի նաև

$$x=\varphi^*(u), \quad y=\psi^*(u) \qquad (1^*)$$
$$(u_0 \leqslant u \leqslant U)$$

ներկայացումը (նույնպես առանց բազմապատիկ կետերի). որտեղ φ^* և ψ^* ֆունկցիաներն առաջվա պես անընդհատ են, և $u=u_0$ արժեքին համապատասխանում է A կետը, իսկ $u=U$ արժեքին՝ B կետը, ապա երկու ներկայացումն էլ կորի վրա որոշում են միևնույն ուղղությունը։

t-ի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է կորի մի որոշ կետ, որն իր հերթին միարժեքորեն որոշում է u-ի արժեքը. հակադարձաբար, յուրաքանչյուր u-ին համապատասխանում է t-ի մի որոշակի արժեք։ Այսպիսով, u-ն հանդիսանում է t-ի միարժեք ֆունկցիա՝ $u=\omega(t)$*, որը և միաժամանակ, երբ t-ն փոփոխվում է* t_0*-ի և T-ի միջև, ընդունում է իր յուրաքանչյուր արժեքը միայն մեկ անգամ։ Մասնավորապես,* $\omega(t_0)=u_0$ *և* $\omega(T)=U$*։*

1-ին լեմմայի համաձայն, t-ի երկու բավականաչափ մոտ արժեքներին համապատասխանում են կորի ցանկացած չափով իրար մոտ կետեր, իսկ այդ դեպքում, ըստ 2-րդ լեմմայի, դրանց համապատասխանում են u-ի նույնպես ցանկացած չափով մոտ արժեքներ, այսինքն՝ $u=\omega(t)$ *ֆունկցիան անընդհատ է։*

Այստեղից կարելի է եզրակացնել, որ այդ ֆունկցիան կլինի մոնոտոն աճող (նեղ իմաստով)։ Իրոք, եթե $t_0 < t' < t''$ դեպքում ունենայինք $u' = \omega(t') > u'' = \omega(t'') > u_0 = \omega(t_0)$, ապա, անընդհատ ֆունկցիայի հայտնի հատկության համաձայն [81], t_0-ի և t'-ի միջև կգտնվեր այնպիսի t''' արժեք, որի համար $\omega(t''') = u''$, այնպես որ $u = \omega(t)$ ֆունկցիան u'' արժեքը կընդուներ երկու անգամ ($t = t''$ դեպքում և $t = t'''$ դեպքում), հակառակ նրան, ինչ ապացուցվեց վերևում։

Այժմ, քանի որ հաստատված է, որ $u = \omega(t)$-ն աճում է t-ի հետ միասին, արդեն պարզ է, որ կետերի դասավորությունն ըստ t պարամետրի աճման միանգամայն հավասարազոր է նրանց դասավորությանն ըստ u պարամետրի աճման։

Այդ ուղղությունը, որը կարելի կլիներ անվանել կորի ուղղություն A կետից դեպի B կետը, դուրս է գալիս, որ միանգամայն երկրաչափական գաղափար է։

Համանման ձևով, փոխարինելով, ասենք, t-ն $(-t')$-ով և կետերը դասավորելով ըստ t' պարամետրի աճման կստանանք կորի վրա B կետից դեպի A կետն ուղղության գաղափարը. այդ ուղղությունը, ակներևորեն, կարելի է ստանալ նաև կետերը դասավորելով ըստ t պարամետրի նվազման։ Իհարկե, այդ ուղղությունը ևս կախված չէ կորի ներկայացման մասնավոր ընտրությունից։

Դառնանք, վերջապես, փակ կորի վրա ուղղության հարցին։ Նրա վրա կամայականորեն վերցնենք երկու (A-ից տարբեր) C և D կետեր, և դիցուք դրանց համապատասխանում են պարամետրի $t = t_1$ և $t = t_2 > t_1$ արժեքները, այնպես որ այն դասավորության մեջ, որը հաստատված էր վերևում t պարամետրի օգնությամբ, D կետը հաջորդում է C-ին։ Կարելի է ցույց տալ որ կորի վրա ամեն մի ուղղություն, որը որոշված է ցանկացած պարամետրական ներկայացմամբ, բայց պահանջում է C և D կետերի այդ կարգը, համընկնում է նախկինին։ Իրոք, եթե $t = t_0^*$ և $t = T^*$ արժեքներին, որտեղ $t_0 < t_0^* < t_1$ և $t_2 < T^* < T$, համապատասխանում են A^* և B^* կետերը, ապա A^*B^* (ոչ փակ) աղեղի համար նման եզրակացությունը բխում է նախորդից. բայց քանի որ կարելի է t_0^*-ը t_0-ին ցանկացած չափով մոտ վերցնել, իսկ T^*-ն՝ T-ին, ապա այն արդարացի է և ամբողջ կորի համար։

Այսպիսով, կարելի է խոսել A-ից C-ի և D-ի վրայով դեպի

A ուղղության *մասին, որպես այնպիսի ուղղության, որը կախում չունի կորի պարամետրական ներկայացման ընտրությունից։ Համանման ձևով որոշվում է* A-ից D-ի և C-ի վրայով դեպի A ուղղության *գաղափարը։*

318. ԱՂԵՂԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ։ Աղեղի երկարության սահմանումը, որն արդեն բերվել էր n° *235-ում, այժմ կարելի է պատշաճ կերպով ճշգրտել։ Այնտեղ էական դեր էր խաղում կորի վրա ընտրած ուղղությունը։ Բեկյալի հաջորդական գագաթները՝*

$$A=M_0,\ M_1,\ M_2, \ldots M_i,\ M_{i+1}, \ldots,\ M_m=B$$

ընտրվում էին այնպես, որ նրանք գնան A*-ից դեպի* B *ուղղությամբ, համապատասխանելով պարամետրի*

$$t=t_0,\ t_1,\ t_2, \ldots,\ t_i,\ t_{i+1}, \ldots,\ t_m=T$$

աճող արժեքներին։ Բայց նախորդ n°*-ում պարզվեց ուղղության գաղափարի, իսկ դրա հետ նաև ներգծյալ բեկյալի գաղափարի անկախությունը (1) մասնավոր պարամետրական ներկայացումից։*

Նորից վերարտադրենք հիշյալ սահմանումը։

Կորի $\breve{AB}$ աղեղի երկարություն կոչվում է կորին ներգծած բեկյալի p պարագծի s սահմանը, երբ $\breve{M_i M_{i+1}}$ մասնակի աղեղների տրամագծերից մեծագույնը ձգտում է զրոյի՝

$$s=\breve{AB}=\lim p.$$

Այս սահմանման բովանդակությունը կարելի է բացահայտել այսպես՝ յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ *համար պետք է գտնվի այնպիսի* $\delta>0$, *որ հենց որ* M_iM_{i+1} *բոլոր մասնակի աղեղների տրամագծերը դառնում են* $<\delta$, *տեղի է ունենում հետևյալ անհավասարությունը՝*

$$0<s-p<\varepsilon.$$

Իսկ «հաջորդականությունների լեզվով» այդ նշանակում է, որ

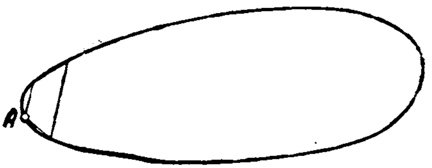
$$s=\lim p_n$$

(p_n)* *ներգծյալ բեկյալների ցանկացած հաջորդականության p_n պարագծերի համար, որը բավարարում է միայն այն պայմանին, որ n-ը աճելիս մասնակի աղեղների տրամագծերից մեծագույնը ձգտում է 0-ի։*

Նկատենք, որ ոչ փակ կորի դեպքում աղեղի երկարությունը կարելի է ավելի պարզ սահմանել որպես ներգծյալ բեկյալի պարագծի սահման, երբ այդ բեկյալի $M_i M_{i+1}$ կողմերից մեծագույնը ձգտում է զրոյի։

Այս սահմանումի և վերևում տրվածի համարժեքությունը բխում է 2 և 1 լեմմաներից։

Սակայն, ինչպես հեշտ է տեսնել, փակ կորի դեպքում այդպիսի սահմանումը չի կարող անվերապահորեն կիրառվել. չէ՛ որ նույնիսկ նշված պայմանը պահպանվելու դեպքում ոչինչ չի խանգարի բեկյալին կծկվել մի կետում, իսկ նրա պարագծին՝ ձգտելու 0-ի (գծ. 8)։ Գործի էությունն այն է, որ ոչ փակ կորի դեպքում



Գծ. 8.

(p) բեկյալի բոլոր կողմերի հենց միայն նվազելը մինչև զրո արդեն իսկ ապահովում է նրանց ընդհուպ մոտեցումը համապատասխան մասնակի աղեղներին. հենց այդ պատճառով էլ բնական է նրա p պարագծի սահմանն ընդունել որպես ամբողջ աղեղի երկարություն։ Իսկ փակ կորի դեպքում գործն արդեն այդպես չի դասավորվում։

Վերջում հիշեցնենք, որ շատ դեպքերում ավելի հարմար է լինում սահմանային պրոցեսի ժամանակ փոխանակ մասնակի աղեղների տրամագծերից մեծագույնը զրոյի ձգտեցնելու, ելնել այն բանից, որ զրոյի ձգտի $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ տարբերություններից մեծագույնը։ *Հարցի երկու դրույթների լիակատար համասարագորությունը (ինչպես ոչ փակ կորի, այն-*

---

* *Բեկյալը նշանակելով (p)-ով, մենք p սիմվոլով միշտ կնշանակենք նրա պարագիծը։*

պես էլ փակ կորի դեպքում) անմիջապես բխում է 1 և 3 լեմմաներից։

319. ԱՂԵՂԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՆ ԱԴԻՏԻՎՈՒԹՅՈՒՆԸ։ Այժմ դիմենք աղեղի երկարության ադիտիվության հատկությանը։ Վերցնենք AB աղեղի վրա մի M կետ, որը համապատասխանում է պարամետրի t' արժեքին ($t_0<t'<T$)։

Դիցուք $\overset{\frown}{AB}$ աղեղն ուղղելի է. այդ դեպքում առանձին-առանձին ուղղելի են նաև $\overset{\frown}{AM}$ և $\overset{\frown}{MB}$ աղեղները։ $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AM}$ և $\overset{\frown}{MB}$ աղեղների երկարությունները նշանակելով, համապատասխանաբար, s, s' և s'', այդ դեպքում կունենանք

$$s=s'+s''. \tag{3}$$

Պատկերացնենք բեկյալների երկու հաջորդականություն $\{(p'_n)\}$, $\{(p''_n)\}$, որոնք ներգծված են, համապատասխանաբար, $\overset{\frown}{AM}$ և $\overset{\frown}{MB}$ աղեղներին, ընդ որում երկու դեպքում էլ մասնակի աղեղների ամենամեծ տրամագիծը ձգտում է զրոյի։ (p'_n) և (p''_n) բեկյալներից կկազմվի (p_n) բեկյալ, որը ներգծված կլինի արդեն $\overset{\frown}{AB}$ աղեղին և նրա

$$p_n=p'_n+p''_n$$

պարագիծը պետք է ձգտի այդ աղեղի s երկարությանը։

Ֆիքսում ենք $\{(p''_n)\}$ հաջորդականությունն այնպես, որ p''_n պարագիծը ձգտի որևէ s''_0 վերջավոր սահմանի։ Այդ միշտ կարելի է իրականացնել, դիմելով, հարկ եղած դեպքում, $\{(p''_n)\}$ հաջորդականության մասնակի հաջորդականությամբ փոխարինմանը, Բոլցանո-Վեյերշտրասի թեորեմայի հիման վրա [41]*։ Այդ դեպքում p'_n պարագիծն ունի $s'=s-s_0'$ սահման, որը և հանդիսանում է $\overset{\frown}{AM}$ աղեղի երկարությունը։

Միաժամանակ պարզվում է, որ ինչպես էլ ընտրենք $\{(p''_n)\}$ բեկյալների հաջորդականությունը, p''_n պարագիծը կձգտի $s''=s-s'=s''_0$ սահմանին, այնպես որ $\overset{\frown}{AB}$ աղեղը նույնպես ուղ-

* $\{p''_n\}$ բազմությունը սահմանափակ է, որովհետև $p''_n<p_n<s$։

*ղելի է։ Ընդ որում բավարարվում է նաև (3) հավասարու-
թյունը։*

Հակադարձաբար, եթե $\overset{\frown}{AM}$ և $\overset{\frown}{MB}$ աղեղներն առանձին-առան-
ձին ուղղելի են, ապա ուղղելի է և $\overset{\frown}{AB}$ աղեղը

Դիցուք s'*-ը և* s''*-ը, համապատասխանաբար,* $\overset{\frown}{AM}$ *և* $\overset{\frown}{M[B]}$
աղեղների երկարություններն են։

Ներգծենք $\overset{\frown}{AB}$*-ին (p) կամայական բեկյալը։ Եթե M կետ[ը]
ընկել է բաժանման կետերի կազմի մեջ, ապա (p) բեկյալ[ը]
տրոհվում է (p′) և (p″) երկու բեկյալների՝ ներգծված, համա-
պատասխանաբար,* $\overset{\frown}{AM}$ *և* $\overset{\frown}{MB}$ *աղեղներին, ընդ որում*

$$p=p'+p''.$$

*Իսկ եթե M-ը չպատկանի բաժանման կետերի թվում, ապա այդ կետ[ը]
լրացուցիչ կերպով մտցնելով նրանց կազմի մեջ, կստանանք մ[ի]*
$(\tilde{p})$ *նոր բեկյալ, որի համար նույնպես արդարացի է*

$$\tilde{p}=\tilde{p}'+\tilde{p}''$$

վերլուծումը։ Ակներևաբար, $\tilde{p}$*-ն կարող է գերազանցել p-ին ա[յն]
վելի քիչ, քան 2λ, եթե λ-ով նշանակենք մասնակի աղեղներ[ի]
տրամագծերից ամենամեծը։ Այժմ պարզ է, որ, համենայն դեպ[ս],
երբ* $\lambda \to 0$, *կլինի*

$$\lim \tilde{p}=s'+s'',$$

որը և ապացուցում է մեր պնդումը։

***320. ԱՂԵՂԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՆ ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ԲԱՎԱՐԱՐ ՊԱՅ-
ՄԱՆՆԵՐԸ ԵՎ ՆՐԱ ՀԱՇՎՈՒՄԸ։*** *Աղեղի երկարության գոյու-
թյան ընդհանուր պայմանների պարզումը թողնելով մինչև I[I]
հատորը, այստեղ սահմանափակվենք այն ենթադրությամբ, ո[ր]
կորի (1) պարամետրական ներկայացման մեջ մասնակցող φ [և]
ψ ֆունկցիաներն իրենց ածանցյալների հետ միասին անընդ-
հատ են։ Մենք չենք բացառում փակ կորի դեպքը, բայց ենթա-
դրում ենք բազմապատիկ կետերի բացակայությունը։ Այդ պայ-
մաններում, ինչպես կապացուցենք, կորն ուղղելի է և աղեղի եր-
կարությունն արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝*

$$s=\int_{t_0}^{T}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=\int_{t_0}^{T}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt. \qquad (4$$

Մենք կելնենք $[t_0, T]$ միջակայքը

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots < t_n = T$$

կետերով $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ երկարությամբ մասերի տրոհելուց t-ի այդ արժեքներին համապատասխանում են $\overset{\frown}{AM}$ աղեղին ներգծված $AM_1 \ldots M_{n-1}B$ բեկյալի գագաթները, և (ինչպես վերևում բացատրեցինք) նրա s երկարությունը կարելի է որոշել որպես բեկյալի p պարագծի սահման, երբ $\lambda^* = \max \Delta t_i$ ձգտում է զրոյի։

Ընդունենք՝

$$\varphi(t_i) = x_i, \quad \psi(t_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

և

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

Ներգծյալ բեկյալի i-րդ կողմի՝ $M_i M_{i+1}$-ի երկարությունը կարտահայտվի այսպես՝

$$\overline{M_i M_{i+1}} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}.$$

(1) ֆունկցիաների Δx_i և Δy_i աճերի նկատմամբ առանձին-առանձին կիրառելով վերջավոր աճերի բանաձևը, կստանանք

$$\Delta x_i = \varphi(t_i + \Delta t_i) - \varphi(t_i) = \varphi'(\tau_i)\,\Delta t_i,$$

$$\Delta y_i = \psi(t_i + \Delta t_i) - \psi(t_i) = \psi'(\tau_i^*)\,\Delta t_i,$$

ընդ որում τ_i և τ_i^* արժեքների մասին մենք ոչինչ չգիտենք բացի այն, որ նրանք երկուսն էլ պարունակվում են t_i-ի և t_{i+1}-ի միջև։ Այժմ ունենք

$$\overline{M_i M_{i+1}} = \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i^*)]^2}\,\Delta t_i,$$

այնպես որ ամբողջ բեկյալի պարագծի համար ստացվում է հետևյալ արտահայտությունը՝

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i^*)]^2}\,\Delta t_i.$$

Եթե արմատանշանի տակ երկրորդ գումարելիի մեջ ամենուրեք τ^*-ն փոխարինենք τ_i-ով, ապա ձևափոխված

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2}\, \Delta t_i$$

արտահայտությունը, ակներևորեն, կներկայացնի ինտեգրալ գումար հենց (4) ինտեգրալի համար։ λ^*-ն զրոյի ձգտելիս հենց այդ գումարն էլ որպես սահման կունենա հիշյալ ինտեգրալը*։ Ապացուցելու համար, որ նույն սահմանին է ձգտում նաև բեկյալի p պարագիծը, բավական է ցույց տալ, որ $p-\sigma$ տարբերությունը ձգտում է զրոյի։

Այդ նպատակով գնահատենք այդ տարբերությունը՝

$$|p-\sigma| \leq \sum_i \left| \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i^*)]^2} - \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2} \right| \Delta t_i.$$

Հետևյալ տարրական անհավասարությունը՝

$$\left| \sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+b_1^2} \right| \leq |b-b_1|^{**},$$

եթե այն կիրառենք վերևում գրված գումարի յուրաքանչյուր գումարելիի նկատմամբ առանձին-առանձին, մեզ կտա

$$|p-\sigma| \leq \sum_i |\psi'(\tau_i) - \psi'(\tau_i^*)|\, \Delta t_i.$$

$\psi'(t)$ անընդհատության շնորհիվ, ցանկացած տրված $\varepsilon>0$ թվով կգտնվի այնպիսի $\delta>0$, որ $|\psi'(t)-\psi'(t^*)|<\varepsilon$, հենց որ

---

* Նրա գոյությունը տարակուսանք չի առաջացնում, որովհետև ընդինտեգրալ ֆունկցիան անընդհատ է [286, I]։

** Այս անհավասարությունը ակներև է $a=0$ դեպքում. իսկ եթե $a \neq 0$, ապա այն անմիջականորեն բխում է հետևյալ նույնությունից՝

$$\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+b_1^2} = \frac{b+b_1}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b_1^2}}(b-b_1),$$

քանի որ փակագծերի մեջ եղած տարբերության բազմապատկիչը բացարձակ մեծությամբ մեկից փոքր է։

$|t - t^*| < \delta$. Եթե վերցնենք բոլոր $\Delta t_i < \delta$, ապա և $|\tau_i - \tau_i^*| < \delta$, այնպես որ $|\psi(\tau_i) - \psi(\tau_i^*)| < \varepsilon$ և

$$|p - \sigma| \leqslant \varepsilon \sum_i \Delta t = \varepsilon (T - t_0).$$

Հենց այս էլ ապացուցում է մեր պնդումը։

Եթե կորը տրված է բացահայտ հավասարումով ուղղանկյուն կոորդինատներով՝

$$y = f(x) \quad (x_0 \leqslant x \leqslant X),$$

ապա x-ը ընդունելով պարամետր, (4) բանաձևից, որպես նրա մասնավոր դեպք, կստանանք

$$s = \int_{x_0}^{X} \sqrt{1 + y'^2_x}\, dx = \int_{x_0}^{X} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{5}$$

Վերջապես, կորը բևեռային կոորդինատներով տալու դեպքը՝

$$r = g(\theta) \quad (\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \Theta)$$

ինչպես հայտնի է, նույնպես բերվում է պարամետրականի՝ անցման սովորական բանաձևերի օգնությամբ

$$x = r\cos\theta = g(\theta)\cos\theta, \quad y = r\sin\theta = g(\theta)\sin\theta,$$

որտեղ պարամետրի դերը խաղում է θ-ն։ Այս դեպքի համար

$$s = \int_{\theta_0}^{\Theta} \sqrt{r^2 + r'^2_\theta}\, d\theta = \int_{\theta_0}^{\Theta} \sqrt{[g(\theta)]^2 + [g'(\theta)]^2}\, d\theta. \tag{6}$$

Դիտողություն. Ստացված արդյունքներն անմիջականորեն տարածվում են մի քիչ ավելի ընդհանուր դեպքի վրա, երբ (1)-ի φ և ψ ֆունկցիաները վերջավոր թվով $t = t_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ արժեքների համար, պահպանելով անընդհատությունը, երկկողմանի ածանցյալներ չունեն, թեև գոյություն ունեն

$$\varphi'(t_k \pm 0) \text{ և } \psi'(t_k \pm 0)$$

սահմանային արժեքները։ Այս դեպքում կորը կարծես թե բաղկացած է վերջավոր թվով (մեկը մյուսին կցված) մասերից, որոնցից յուրաքանչյուրն արդեն բավարարում է վերևում առաջադրված բոլոր պայմաններին։

321. ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԱՂԵՂ. ՆՐԱ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼԸ։ *$\overset{\frown}{AB}$ աղեղի վրա վերցնենք մի M կետ, որը համապատասխանում է պարամետրի t կամայական արժեքին։ Այդ դեպքում $\overset{\frown}{AM}$ աղեղի երկարությունը, (4)-ի փոխարեն, կարտահայտվի*

$$s = s(t) = \overset{\frown}{AM} = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}\, dt \tag{7}$$

բանաձևով և, ակներևորեն, կլինի t-ի աճող և անընդհատ ֆունկցիա։

Դեռ ավելին, ընդինտեգրալ ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, այդ s = s(t) փոփոխական աղեղը կունենա ըստ t-ի ածանցյալ, որը հավասար կլինի ընդինտեգրալ ֆունկցիային [293, 12°]՝

$$s'_t = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}. \tag{8}$$

Այսպիսով, վերջապես, հիմնավորվեց այն բանաձևը, որից մենք արդեն օգտվել ենք առաջ [236], *ինչպես և նրանից բխող բանաձևն աղեղի դիֆերենցիալի համար՝*

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Եթե պարամետրի դերում հանդես է գալիս x-ը (ուղղանկյուն կոորդինատներով բացահայտորեն տալու դեպքը), ապա $s = \overset{\frown}{AM}$ փոփոխական աղեղը կլինի x-ի ֆունկցիա՝

$$s = s(x) = \overset{\frown}{AM} = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + y'^2_x}\, dx \tag{9}$$

և նրա համար

$$s'_x = \sqrt{1 + y'^2_x}. \tag{10}$$

Համանման ձևով, կորը բ և և ռ ա յ ի ն կոորդինատներով տալու դեպքում

$$s=s(\theta)=\overset{\frown}{AM}=\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{r^2+r'^2_{\theta}}\,d\theta \qquad (11)$$

և

$$s'_{\theta}=\sqrt{r^2+r'^2_{\theta}}. \qquad (12)$$

Կարող է պատահել, որ որպես աղեղների հաշվման սկզբնակետ վերցվում է որևէ ն ե ր ք ի ն M_0 կետ։ Եթե t_0-ն առաջվա պես որոշում է հենց այդ կետը (այդ դեպքում t_0-ն արդեն չի հանդիսանա այն միջակայքի ծայրը, որտեղ փոփոխվում է t-ն), ապա (7) բանաձևը, ակներևորեն, տալիս է $\overset{\frown}{AM}$ աղեղի մեծությունը իր ն շ ա ն ո վ, այն է՝ պլյուս նշանով, եթե $t>t_0$ և M կետը M_0 կետից դեպի դրական կողմն է գտնվում, և մինուս նշանով, եթե $t<t_0$ և M-ը M_0-ի բացասական կողմում է գտնվում։

Նույն դիտողությունը կարելի է կրկնել նաև (9), (11) բանաձևերի համար։ Աղեղի ածանցյալը միշտ արտահայտվում է (8), (10), (12) բանաձևերից համապատասխան բանաձևով, եթե աղեղների հաշվման դրական ուղղությունը որոշվում է պարամետրի աճումով։

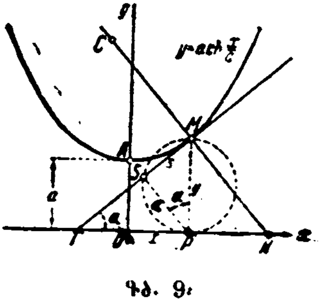
322. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Շ ղ թ ա յ ա գ ի ծ՝ $y=a\,ch\,\frac{x}{a}$ (գծ. 9)։

240-ի 1)-ում մենք արդեն ունեինք՝

$$\sqrt{1+y'^2_x}=ch\,\frac{x}{a}.$$

Այդ դեպքում ըստ (9) բանաձևի, եթե աղեղների հաշվման սկիզբն ընդունենք կորի A գագաթը, ապա

$$s=\overset{\frown}{AM}=\int_0^x ch\,\frac{x}{a}\,dx=a\,sh\,\frac{x}{a}.$$



Գծ. 9։

Հիշելով, որ $tg\,\alpha=y'_x=sh\,\frac{x}{a}$, ունենք նույնպես $s=a\,tg\,\alpha$։ Այսպիսով, ΔMPS-ի մեջ (գծ. 9) $MS=a\,tg\,\alpha$ էջը (երկարությամբ) հավասար է s աղեղին։ Մենք ստացանք շղթայագծի գրաֆիկորեն ուղղման (երկարության հաշվելու) պարզ եղանակ։

2) *Պարաբոլ*՝ $y = \frac{x^2}{2p}$։

Ընդունելով O $(x=0)$ *գագաթը որպես աղեղների հաշվման սկիզբ*, x *աբսցիս ունեցող կամայական* M *կետի համար ունենք*

$$s = \overset{\frown}{OM} = \frac{1}{p}\int_0^x \sqrt{x^2+p^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{p}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+p^2} + \frac{p^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+p^2})\right]\Bigg|_0^x =$$

$$= \frac{x}{2p}\sqrt{x^2+p^2} + \frac{p}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p},$$

3) *Աստրոիդ*՝ $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$։ *Օգտվելով* x'_t*-ի և* y'_t*-ի առաջին հաշված արժեքներից* [214, 4)], *ունենք*

$$\sqrt{x'^2_t+y'^2_t} = 3a\sin t\cos t \quad \left(\text{եթե } 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)։$$

Աստրոիդի մեկ քառորդի երկարությունը A $(a, 0)$ *և* B $(0, a)$ *կետերի միջև, ըստ* (4) *բանաձևի, հավասար է*

$$\overset{\frown}{AB} = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\,dt = \frac{3a}{2}\sin^2 t\,\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2},$$

այնպես որ ամբողջ կորի երկարությունը կլինի $6a$։

4) *Ցիկլոիդ*՝ $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$։

Այստեղ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi$ *դեպքում*)՝

$$\sqrt{x'^2_t+y'^2_t} = a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t} = 2a\sin\frac{t}{2}$$

ցիկլոիդի մեկ ճյուղի երկարությունը, ըստ (4) *բանաձևի, կլինի*

$$2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = 8a։$$

5) *Շրջանի էվոլվենտը*՝ $x=a(t\sin t+\cos t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$։ *Ունենք* $(t>0$ *դեպքում*)՝

$$\sqrt{x'^2_t+y'^2_t} = a\sqrt{(t\cos t)^2+(t\sin t)^2} = at,$$

այնպես որ $\overset{\frown}{AM}$ *փոփոխական աղեղը* A $(t=0)$ *կետից մինչև ցանկացած* M $(t>0)$ *կետը կարտահայտվի այսպես*՝

$$\overset{\frown}{AM} = s = \frac{at^2}{2}։$$

$0 > t$-ի դեպքում նախորդ բանաձևի մեջ աջ կողմից պետք է միայն դնել մինուս նշան։

6) Արքիմեդյան սպիրալ (գալարագիծ)՝ $r = a\theta$

Ըստ (11) բանաձևի, հաշվելով աղեղը O բևեռից մինչև ցանկացած (θ անկյանը համապատասխանող) M կետը, ստանում ենք՝

$$\overset{\frown}{OM} = a\int_0^{\theta} \sqrt{1+\theta^2}\, d\theta = \frac{a}{2}\left[\theta\sqrt{1+\theta^2} + \log\left(\theta + \sqrt{1+\theta^2}\right)\right]։$$

Հետաքրքրական է, որ այստեղ դնելով $\theta = \frac{r}{a}$, մենք կստանանք մի արտահայտություն, որը ձևականորեն նման է պարաբոլի աղեղի երկարության համար ստացված արտահայտությանը [տես 2)]։

7) Լոգարիթմական սպիրալ՝ $r = ae^{m\theta}$ (գծ. 10)։

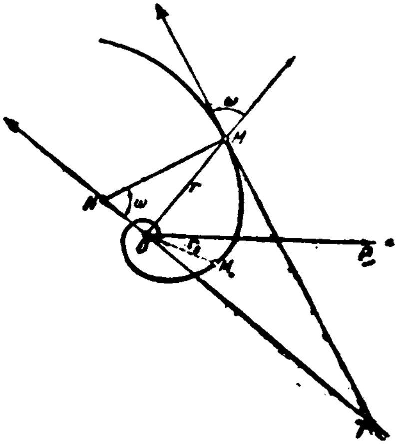
Քանի որ $r'_\theta = mr$, ապա $r = \frac{1}{m} r'_\theta$, և $\overset{\frown}{M_0M}$ աղեղի համար (r_0, θ_0) և (r, θ)՝ կոորդինատներ ունեցող երկու կետերի միջև կունենանք, ըստ նույն (11) բանաձևի,

$$s = \overset{\frown}{M_0M} = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{r^2 + r'^2_\theta}\, d\theta = \sqrt{1+\frac{1}{m^2}} \int_{\theta_0}^{\theta} r'_\theta\, d\theta =$$

$$= \sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\,(r - r_0)։$$

Եթե հիշենք, որ լոգարիթմական սպիրալի համար $\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{m}$, ապա ստացված արդյունքը կարելի է գրել այսպես՝

$$s = \overset{\frown}{M_0M} = \frac{r - r_0}{\cos\omega}։$$



Գծ. 10.

M_0 կետը մոտեցնելով O բևեռին, այսինքն՝ r_0-ն ձգտեցնելով զրոյի և այդ դեպքում $\overset{\frown}{M_0M}$ աղեղի երկարության սահմանը ընդունելով որպես $\overset{\frown}{OM}$ աղեղի երկարություն, կստանանք ավելի պարզ արդյունք՝

$$s = \overset{\frown}{OM} = \frac{r}{\cos\omega}։$$

Այս բանաձևի օգնությամբ Δ MOT-ից (տես գծագիրը) արդեն հեշտ է նկատել, որ s աղեղը հավասար է շոշափողի t_p բևեռային հատվածին՝

$$\breve{OM} = TM^{*}.$$

Մենք ստացանք շատ պարզ եղանակ մեր կորի գրաֆիկորեն ուղղման համար։

8) Էլիպս՝ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

Ավելի հարմար է, սակայն, էլիպսի հավասարումը վերցնել պարամետրական ձևով՝ $x=a\sin t$, $y=a\cos t$. Այնուհետև,

$$\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}=\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}=\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2 t}=$$
$$=a\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t},$$

որտեղ $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ էլիպսի թվային էքսցենտրիսիտետն է։

Հաշվելով էլիպսի աղեղի երկարությունը փոքր առանցքի վերին ծայրից մինչև նրա ցանկացած կետն առաջին քառորդում, կստանանք

$$s=a\int_0^t\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt=aE(\varepsilon,t).$$

Այսպիսով, էլիպսի աղեղի երկարությունն արտահայտվում է 2-րդ տեսակի էլիպտիկ ինտեգրալով [281, տես նաև 293]. ինչպես նշվել է, հենց այդ փաստն է առիթ ծառայել «էլիպտիկ» անվան համար։

Մասնավորապես, էլիպսի շրջագծի մեկ քառորդի երկարությունն արտահայտվում է լրիվ էլիպտիկ ինտեգրալով**

$$a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt=aE(\varepsilon),$$

իսկ ամբողջ շրջագծի երկարությունը կլինի

$$S=4aE(\varepsilon).$$

Հետաքրքրական է նշել, որ $y=c\sin\frac{x}{b}$ սինուսոիդի, որտեղ $c=\sqrt{a^2-b^2}$, մեկ ալիքի երկարության համար ճշտորեն նույն արդյունքն է ստացվում։

---

* Լոգարիթմական սպիրալի այս հատկությունը թույլատրում է հեշտությամբ հաստատել հետևյալ առաջադրությունը՝ երբ այդ կորն առանց սահելու գլորվում է MT ուղիղի վրայով, ապա O բևեռը (եթե համարենք, որ նա անփոփոխ կերպով կապված է կորի հետ) գծում է մի որոշ ուղիղ։ Ապացույցը թողնում ենք ընթերցողին։

** Տես ծանոթություն 177 էջում։

Երկրաչափորեն այդ համընկնումը հեշտ է բացատրել: Պատկերացնենք ուղիղ շրջանային գլան. նրա մակերևույթի և ծնորդներին թեք տարած հարթության հատումից ստացվում է էլիպս: Եթե գլանի մակերևույթը կտրենք փոքր առանցքի գագաթով անցնող ծնորդի ուղղությամբ, և փռենք, ապա էլիպսի շրջագիծը կդառնա սինուսոիդ:

Համանման ձևով էլիպտիկ ինտեգրալների է բերվում (երկու տեսակի) հիպերբոլի աղեղի հաշվումը:

9) Խխունջ՝ $r = a\cos\theta + b$:

Այստեղ $r'_\theta = -a\sin\theta$ և

$$r^2 + {r'_\theta}^2 = a^2 + 2ab\cos\theta + b^2 = (a+b)^2\left[1 - \frac{4ab}{(a+b)^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right],$$

Ուստի (երբ $b \neq a$) $\theta = 0$-ին համապատասխանող կետից մինչև ցանկացած $\theta < \pi$ ունեցող կետը աղեղի երկարության համար կստանանք մի արտահայտություն (2-րդ տեսակի) էլիպտիկ ինտեգրալի տեսքով՝

$$s = (a+b)\int_0^\theta \sqrt{1 - \frac{4ab}{(a+b)^2}\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta =$$

$$= 2(a+b)\int_0^{\frac{\theta}{2}} \sqrt{1 - \frac{4ab}{(a+b)^2}\sin^2 t}\;dt = 2(a+b)\,E\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}, \frac{\theta}{2}\right):$$

Ամբողջ կորի երկարությունը կարտահայտվի լրիվ էլիպտիկ ինտեգրալով՝

$$S = 4(a+b)\,E\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right):$$

Սակայն մասնավոր դեպքում, կարդիոիդի համար ($b = a$) գործը բավականին հեշտանում է:

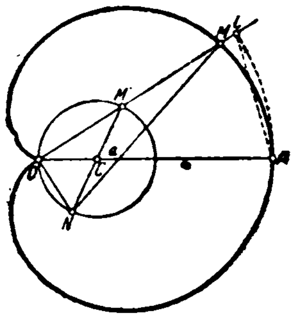
Այդ դեպքում

$$r^2 + {r'_\theta}^2 = 4a^2\cos^2\frac{\theta}{2},$$

այնպես որ ($0 < \theta \leqslant \pi$)՝

$$s = 2a\int_0^\theta \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 4a\sin\frac{\theta}{2}:$$

Եթե (գծ. 11) O բևեռից 2a շառավղով գծենք $\overset{\frown}{AL}$ աղեղը մինչև հատվելը OM շառավղի վեկտորի շարունակության հետ, ապա AL լարը, ակնհայտորեն, հավասար կլինի $s = \overset{\frown}{AM}$ աղեղին:



Գծ. 11:

Ամբողջ կարդիոիդի երկարությունը կլինի 8a։

10) Լ ե մ ն ի ս կ ա տ՝ $r^2=2a^2\cos 2\theta$։

Հաշվենք լեմնիսկատի աղեղի երկարությունը գագաթից, որը համապատասխանում է $\theta=0$ արժեքին, մինչև $\theta<\frac{\pi}{4}$ բևեռային անկյունն ունեցող ցանկացած կետը։

Ունենք

$$rr'_\theta=-2a^2\sin 2\theta,\ \text{որտեղից}\ r'_\theta=-\frac{2a^2\sin 2\theta}{r}։$$

Այդ դեպքում

$$\sqrt{r^2+r'^2_\theta}=\frac{2a^2}{r}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\theta}},$$

և ըստ (11) բանաձևի՝

$$s=a\sqrt{2}\int_0^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}=a\sqrt{2}\int_0^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}}.$$

Մենք նորից հանգում ենք է լ ի պ տ ի կ ի ն տ ե գ ր ա լ ի (1-ին տեսակի)։ Քանի որ աղյուսակները կազմված են այնպիսի ինտեգրալների համար, որոնցում $\sin^2\theta$-ի k^2 բազմապատկիչը մեկից փոքր է, ուստի դիմում ենք փոփոխականի փոխարինման։ Ընդունենք $2\sin^2\theta=\text{cin}^2\varphi$ (քանի որ $\theta<\frac{\pi}{4}$, ապա $2\sin^2\theta<1$, և այստեղից իրոք որ φ անկյունը հնարավոր է որոշել), այդ ժամանակ

$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi,\quad \cos\theta\, d\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi\, d\varphi,$$

$$d\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}},\quad \sqrt{1-2\sin^2\theta}=\cos\varphi$$

և վերջնականապես

$$s=a\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}=aF\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\varphi\right)։$$

Համարելով, որ սահմանային դեպքում* $\theta=\frac{\pi}{4}$, իսկ $\varphi=\frac{\pi}{2}$, լեմնիսկա-

---

* Մենք հարկադրված ենք այդ դեպքը դիտարկել հենց որպես սահմանային դեպք, s-ի համար ստացված արտահայտության մեջ անցնելով սահմանին, երբ $\theta\to\frac{\pi}{4}$ կամ $\varphi\to\frac{\pi}{2}$, քանի որ $\theta=\frac{\pi}{4}$ դեպքում r'_θ ածանցյալը հավասար է ∞ և (11) բանաձևն ա ն մ ի ջ ա կ ա ն ո ր ե ն կիրառելի չէ։

որ մեկ քառորդի համար կստանանք մի արտահայտություն լրիվ էլիպտիկ ինտեգրալի միջոցով՝

$$s=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}=aF\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

ամբողջ լեմնիսկատի երկարությունը կլինի $s=4aF\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$։

Ուշագրավ է այն, որ կորի աղեղի ուղղման խնդիրն այդչափ հաճախ բերում է հատկապես էլիպտիկ ինտեգրալների։

11) Վերջում բերենք աղեղի երկարության բանաձևի օգտագործման օրինակ կորի էվոլվենտը [244] կառուցելիս։

Դիտարկենք շղթայագիծը։ Եթե նրա կետի ընթացիկ կոորդինատները նշանակենք ξ, η (n°244-ի նշանակումներին համապատասխան), իսկ նրա, գագաթից հաշվվող, աղեղը՝ σ-ով, ապա կորի հավասարումը կգրվի

$$\eta=a\,\mathrm{ch}\frac{\xi}{a}$$

տեսքով, իսկ աղեղը կներկայացվի

$$\sigma=a\,\mathrm{sh}\frac{\xi}{a}$$

բանաձևով [տես 1)]։ Այստեղից կարելի է ξ-ն և η-ն արտահայտել անմիջականորեն որպես σ-ի ֆունկցիա՝

$$\xi=a\left[\log\left(\sigma+\sqrt{\sigma^2+a^2}\right)-\log a\right],\quad \eta=\sqrt{\sigma^2+a^2}.$$

Այժմ ըստ n° 244-ի (23) բանաձևի, հաշվի առնելով, որ այստեղ [տես (24)]

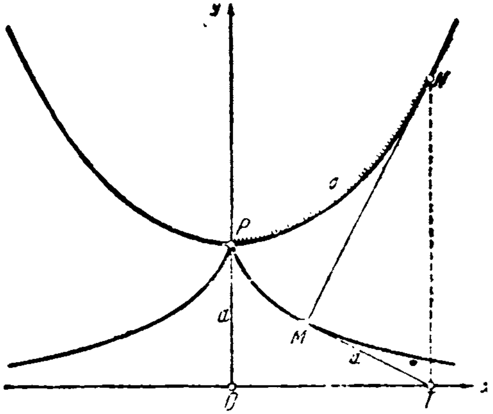
$$\cos\beta=\frac{a}{\sqrt{\sigma^2+a^2}},\qquad \sin\beta=\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+a^2}},$$

կարելի է կամայական էվոլվենտի համար գրել պարամետրական հավասարումներ՝

$$x=a\left[\log\left(\sigma+\sqrt{\sigma^2+a^2}\right)-\log a\right]+(c-\sigma)\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+a^2}},$$

$$y=\sqrt{a^2+\sigma^2}+(c-\sigma)\frac{a}{\sqrt{\sigma^2+a^2}}.$$

Կանգ առնենք այն էվոլվենտի վրա, որը համապատասխանում է $c=0$-ին. նա ելնում է շղթայագծի գագաթից և այնտեղ ունի դարձակետ (գծ. 12):



Գծ. 12:

Արտաքսելով z-ն, այդ կորը (որը տրակտրիսա է կոչվում) կարելի է արտահայտել նաև

$$x=\pm\left[a\log\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}\right]$$

բացահայտ հավասարումով:

Եթե հիշենք «շոշափողի հատվածի» արտահայտությունը [220, (4)],

$$t=\left|\frac{y}{y'_x}\sqrt{1+y'^2_x}\right|=y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2},$$

ապա այստեղից հեշտ է ստանալ, որ $t=a$: Սրանով արտահայտված է տրակտրիսայի նշանավոր հատկությունը՝ շոշափողի հատվածը տրակտրիսայի համար ունի հաստատուն մեծություն*:

Այս արդյունքը հեշտությամբ ստացվում է և անմիջականորեն շղթայագծի հատկություններից [տես 1)-ում նրա ուղղումը, գծ. 9]:

323. ՀԱՐԹ ԿՈՐԻ ԲՆԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄԸ. Կորի պատկերացումը նրա կետերի կոորդինատների միջև եղած հավասարման օգնությամբ (կոորդինատների որևէ սիստեմի նկատմամբ), չնայած այդ պատկերացման մեծ օգտակարությանը, հաճախ արհեստական բնույթ է կրում, որովհետև կոորդինատները կորի էական երկրաչափական տարրեր չեն հանդիսանում. Այդպիսի էական տարրեր, ընդհակառակը, հանդիսանում են կորի s աղեղը, որը հաշվվում է որոշ ուղղությամբ մի որևէ սկզբնական կետից, և կորության R շառավիղը (կամ $k=\frac{1}{R}$ կո-

* Դրա հետ է կապված հենց տրակտրիսա անունը (որ առաջ է գալիս լատինական trahere ձգել, քաշել բառից). եթե հորիզոնականով շարժվող T կետը TM թելի օգնությամբ քաշում է իր ետևից M կետը. ապա վերջինս հենց տրակտրիսա է գծում.

րությունը ինքը) [տես 238, 239]։ Յուրաքանչյուր կորի համար այդ էլեմենտների միջև կարելի է հաստատել

$$F(s, R)=0$$

տեսքի կախում, որը և կոչվում է կորի *բնական հավասարում* (натуральное կամ естественное уравнение)*։

Ապացուցենք, որ միևնույն բնական հավասարումն ունեցող կորերը կարող են տարբերվել միայն իրենց դիրքով հարթության վրա, *այնպես որ բնական հավասարումը կորի ձևը որոշում է լրիվ միարժեքորեն։*

Դիցուք, ուրեմն, (I) և (II) երկու կորերը ունեն միևնույն բնական հավասարումը, որը կվերցնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{1}{R}=g(s). \qquad (13)$$

Ապացուցելու համար, որ այդ կորերը կոնգրուենտ են (համաձայնելի են), նախ այդ կորերից մեկը տեղափոխենք այնպես, որ համընկնեն այն կետերը, որոնցից հաշվվում են աղեղները երկու կորերի վրա, իսկ այնուհետև այդ կորը դարձնենք այնպես, որ համընկնեն այդ կետերով անցնող շոշափողների դրական ուղղությունները։

Ցուցիչներով (1 և 2) նշենք երկու կորերի միևնույն s արժեքին համապատասխանող էլեմենտները՝

փոփոխական կետի կոորդինատները՝ (x_1, y_1) և (x_2, y_2),
շոշափողի և OX առանցքի միջև անկյունը՝ α_1 և α_2,
կորության շառավիղը՝ R_1 և R_2։

(13)-ի շնորհիվ բոլոր s-երի դեպքում կունենանք $\frac{1}{R_1}=\frac{1}{R_2}$, այսինքն՝ [238, (9)]՝

$$\frac{d\alpha_1}{ds}=\frac{d\alpha_2}{ds}, \qquad (14)$$

Բացի այդ, ինչպես ենթադրված է, $s=0$ դեպքում

$$x_1=x_2, \quad y_1=y_2 \qquad (15)$$

և

$$\alpha_1=\alpha_2. \qquad (16)$$

---

* Գերմաներեն natürliche Gleichung տերմինի թարգմանությունն է. ոչ պակաս տարածված է և ֆրանսերեն տերմինը՝ équation intrinsèque (այսինքն՝ «ներքին հավասարում»)։

(14)-ից, համաձայն n° 126-*ի հետևանքի, բխում է, որ* α_1-*ը և* α_2-*ը կարող են տարբերվել միայն հաստատունով. բայց, ինչպես տեսանք,* $s=0$ *դեպքում այդ մեծությունները համընկնում են, հետևապես, (16) հավասարությունը միշտ էլ տեղի ունի։ Այդ դեպքում* s-*ի բոլոր արժեքների համար կլինի* [237, (7)]՝

$$\frac{dx_1}{ds}=\cos\alpha_1=\cos\alpha_2=\frac{dx_2}{ds},$$

$$\frac{dy_1}{ds}=\sin\alpha_1=\sin\alpha_2=\frac{dy_2}{ds},$$

որտեղից համանման ձևով եզրակացնում ենք, որ (15) հավասարությունները ևս միշտ տեղի ունեն, այսինքն՝ կորերը համընկնում են։

Այժմ ցույց տանք, թե ինչպես կորի (13) հավասարումով վերականգնել նրա կոորդինատային ներկայացումը։ Ամենից առաջ (13)-ից ունենք $\frac{d\alpha}{ds}=g(s)$, *այնպես որ՝*

$$\alpha=\int_0^s g(s)ds+\alpha_0, \tag{17}$$

որտեղ α_0-*ն հաստատուն է։ Այնուհետև, ելնելով*

$$dx=\cos\alpha\, ds,\quad dy=\sin\alpha\, ds \tag{18}$$

հավասարություններից, ինտեգրելով գտնում ենք՝

$$x=\int_0^s\cos\alpha\, ds=x_0,\qquad y=\int_0^s\sin\alpha\, ds+y_0, \tag{19}$$

որտեղ x_0-*ն և* y_0-*ն նոր հաստատուններ են։*

Դժվար չէ հասկանալ, որ կորի պտտումն առաջ է բերում α_0 *հաստատունի փոփոխությունը, իսկ նրա զուգահեռ տեղափոխությունը կապված է* x_0, y_0 *հաստատունների փոփոխության հետ*։ Այդ հաստատունները զրոյի հավասար լինելը նշանակում է, ակներևորեն, որ կորը դասավորված է այնպես, որ*

---

* *Հակադարձելով այս պնդումները, հեշտ է ստանալ այն առաջադրության նոր ապացույցը, որն արտահայտված էր վերևում։*

աղեղների հաշվման սկզբնակետը համատեղված է կոորդինատների սկզբի հետ, իսկ նրա շոշափողի դրական ուղղությունը համընկնում է x*-երի առանցքի դրական ուղղության հետ։*

Դիցուք այժմ (13) հավասարումը վերցրած է կամայականորեն [միայն $g(s)$ *ֆունկցիան մենք կենթադրենք* ***անընդհատ***]։ *Այդ դեպքում որոշելով նախ* α*-ն (17) բանաձևով, իսկ այնուհետև* x*-ը և* y*-ը (19) հավասարումներով, կստանանք մի որոշ կորի պարամետրական ներկայացում։ Դիֆերենցելով (19)-ը, կվերադառնանք (18)-ին, որտեղից ամենից առաջ նկատում ենք՝*

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

այնպես որ ds*-ը, իրոք, այդ կորի աղեղի դիֆերենցիալն է, իսկ* s*-ը՝ աղեղը (եթե հաշվման սկզբնակետը պատշաճ կերպով ընտրվի)։ Այնուհետև նույն (18) հավասարությունները բերում են այն եզրակացության, որ* α*-ն նույն կորին տարած շոշափողի* Ox *առանցքի հետ կազմած անկյունն է։ Վերջապես, դիֆերենցելով (17)-ը, կգտնենք, որ կորությունը հավասար կլինի*

$$\frac{d\alpha}{ds} = g(s)$$

և, այսպիսով, (13) հավասարումը մեր կորի համար իրոք ***բնական հավասարում*** *է։ Այսպիսով՝*

(13) տեսքի յուրաքանչյուր հավասարում, որտեղ $g(s)$ ֆունկցիան անընդհատ է, կարող է դիտվել որպես մի որոշ կորի **բնական հավասարում**։

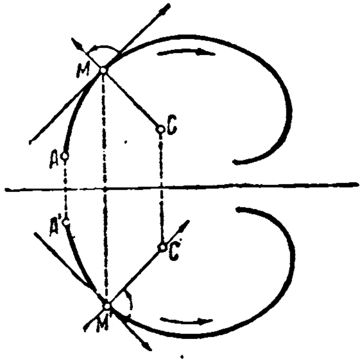
Ընթերցողների ուշադրությունն ենք հրավիրում այն բանի վրա, որ սկզբնական կետի և կորի վրա աղեղների հաշվման ուղղության ընտրության հաշվին կարելի է բնական հավասարման մեջ փոփոխություններ մտցնել (սակայն ոչ էական փոփոխություններ)։

Վերջում նկատենք նաև, որ ***սիմետրիկ*** *դասավորված երկու կորեր* (գծ. 13) ունեն (13) տեսքի բնական հավասարումներ, որոնք տարբերվում են միայն աջ կողմի նշանով՝*

$$\frac{1}{R} = g(s) \text{ և } \frac{1}{R} = -g(s)\text{:} \qquad (20)$$

** Այդ կորերը հարթության վրա տեղափոխելով համատեղել անհնար է. դրա համար կպահանջվեր պտտում տարածության մեջ։*

Իրոք, երկու կորերի վրա սկզբնական կետերի և աղեղների հաշվման ուղղության համաձայնեցված ընտրության դեպքում, նրանց կորության շառավիղները կունենան հակառակ նշաններ։ Հակադարձաբար, երկու կորեր, որոնք ունեն, համապատասխանաբար, (20) հավասարումները, հարթության վրա տեղափոխելով՝ կարող են բերվել սիմետրիկ դրության։ Կարելի է համարել, որ այդպիսի երկու կորերը ևս ձևով էապես չեն տարբերվում։



Գծ. 13։

324. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Գտնել այն կորը, որը համապատասխանում է $R^2=2as$ *բնական հավասարմանը։*

Ունենք

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2as}}, \quad \alpha=\sqrt{\frac{2s}{a}}^{*},$$

$$s=\frac{a}{2}\alpha^2,$$

այնպես որ $ds=a\alpha\, d\alpha$։ *Ընտրելով* α*-ն որպես պարամետր, կստանանք՝*

$$dx=\cos\alpha\, ds=a\,\alpha\cos\alpha\, d\alpha,$$

$$dy=\sin\alpha . ds=a\,\alpha\sin\alpha\, d\alpha,$$

որտեղից՝

$$x=a(\cos\alpha+\alpha\sin\alpha), \quad y=a(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)։$$

Տեսնում ենք, որ կորը շրջանի էվոլվենտն է [215, 8)]։

2) Նույնը՝ $R^2+s^2=16a^2$ *բնական հավասարման համար։ Այստեղ*

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{1}{\sqrt{16a^2-s^2}}, \quad \alpha=\arcsin\frac{s}{4a},\ s=4a\sin\alpha,\ ds=4a\cos\alpha\, d\alpha։$$

Այդ դեպքում

$$dx=\cos\alpha\, ds=4a\cos^2\alpha\, d\alpha, \qquad dy=\sin\alpha\, ds=4a\sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha$$

և այստեղից, ինտեգրելով,

$$x=2a\left(\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)=a(2\alpha+\sin 2\alpha)$$

$$y=-a\cos 2\alpha=a-a(1+\cos 2\alpha)։$$

* *Քանի որ մենք պետք է վերականգնենք թեկուզ մեկ կոր, ապա ինտեգրման հաստատունները կընտրենք ելնելով միայն հարմարության նկատառումներից։ Այս դիտողությունը պետք է նկատի առնել նաև հետագայում։*

Եթե տանենք $t=2\alpha-\pi$ պարամետրին, ապա ստացված կորի հավասարում-ները կընդունեն հետևյալ տեսքը՝

$$x=\pi a+a\,(t-\sin t),\quad y=a-a\,(1-\cos t),$$

և մենք կճանաչենք ցիկլոիդը [215, 6)], որը, համեմատած իր սովորական դասավորության հետ, միայն տեղաշարժված ու շրջված է։

3) Նույնը՝ $R=ms$ բնական հավասարման համար։

Ակներևորեն,

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{1}{ms},\quad \alpha=\frac{\log s}{m},\quad s=e^{m\alpha},\quad ds=m\,e^{m\alpha}d\alpha,$$

$$dx=\cos\alpha\,.\,me^{m\alpha}d\alpha,\quad dy=\sin\alpha\,.\,me^{me}d\alpha$$

և, վերջապես,

$$x=\frac{m}{1+m^2}(m\cos\alpha+\sin\alpha)\,e^{m\alpha},\quad y=\frac{m}{1+m^2}(m\sin\alpha-\cos\alpha)\,e^{m\alpha}.$$

Անցնենք բևեռային կոորդինատներին։ Ամենից առաջ՝

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\,e^{m\alpha}.$$

Այնուհետև, մտցնելով ω հաստատուն անկյունը ընդունելով $\operatorname{tg}\omega=\frac{1}{m}$, կունենանք՝

$$\frac{y}{x}=\frac{m\sin\alpha-\cos\alpha}{m\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\frac{1}{m}}{1+\frac{1}{m}\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}(\alpha-\omega),$$

այնպես որ θ բևեռային անկյունը կարելի է ընդունել հավասար $(\alpha-\omega)$-ի, որտեղից $\alpha=\omega+\theta$։ Վերջնականապես տված կորի բևեռային հավասարումը կլինի այսպիսին՝

$$r=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\,e^{m\omega}\,e^{m\theta}.$$

սա լոգարիթմական սպիրալ է [216. 3)]։ $e^{m\theta}$-ի գործակցի մեծությունը դեր չի խաղում, այն կարելի է 1-ի հասցնել բևեռային առանցքի պտտումով։

4) Այժմ զբաղվենք այլ տեսակի խնդրով՝ տված կորի միջոցով որոշենք նրա բնական հավասարումը։

(ա) $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ շղթայագծի համար ունենք [322. 1); 240. 1)]՝

$$s=a\,\mathrm{sh}\frac{x}{a}=\sqrt{y^2-a^2},\quad R=\frac{y^2}{a}.$$

այստեղից $R=a+\frac{s^2}{a}$։

(բ) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ *աստրոիդի համար. եթե աղեղների հաշվման սկիզբը ընտրենք նրա ճյուղի միջնակետը առաջին քառորդում, կլինի [համեմատել 322, 3)]՝*

$$s = \frac{3a}{2}\sin^2 t - \frac{3a}{4},\quad R = 3a\sin t\cos t.$$

Ուստի՝

$$R^2 = 4\cdot\frac{3a}{2}\sin^2 t\cdot\frac{3a}{2}\cos^2 t = 4\left(\frac{3a}{4}+s\right)\left(\frac{3a}{4}-s\right) = \frac{9a^2}{4} - 4s^2$$

և վերջնականորեն աստրոիդի բնական հավասարումը կարելի է գրել $R^2 + 4s^2 = \frac{9a^2}{4}$ *տեսքով։*

(գ) Կարդիոիդի դեպքում $r = a(1+\cos\theta)$ *և մենք ունենք [322, 9) 240, 6)]՝*

$$s = 4a\sin\frac{\theta}{2},\quad R = \frac{4}{3}a\cos\frac{\theta}{2}.$$

ակներևորեն, $9R^2 + s^2 = 16a^2$։

(դ) Վերջին երկու արդյունքները որպես մասնավոր դեպքեր մտնում են հետևյալ օրինակի մեջ։ Էպի- և հիպոցիկլոիդի համար [215, 7)] *բնական հավասարումը կլինի* $(1+2m)^2R^2 + s^2 = 16m^2(1+m^2)a^2$։

(ե) Դժվար չէ նորից ստանալ բնական հավասարումներ շրջանի էվոլվենտի, ցիկլոիդի և լոգարիթմական սպիրալի համար, որոնք հայտնի են մեզ 1)—3)-ից։

5) Կորի բնական հավասարման միջոցով կարելի է որոշել նրա էվոլվենտի հավասարումը։ Մենք ունենք հետևյալ առնչությունը [243, *(21)*]

$$\rho = R\,\frac{dR}{ds}, \tag{21}$$

եթե էվոլյուտի վրա աղեղների հաշվման սկիզբն ընտրենք այնպես, որ լինի $R = \sigma$ *[տես 243, 2°], ապա, արտաքսելով* R*-ը և* s*-ը այդ երկու առնչություններից և տվյալ կորի բնական հավասարումից, կհանգենք* ρ*-ի և* σ*-ի միջև կախմանը, այսինքն՝ կստանանք էվոլյուտի բնական հավասարումը։*

(զ) Լոգարիթմական սպիրալի համար $R = ms$. *այդ դեպքում* $\rho = mR = m\sigma$։ *Նշանակումների ճշգրտությամբ մենք վերադարձանք նախկին հավասարմանը. այստեղից եզրակացնում ենք, որ էվոլյուտը կլինի նույնպես լոգարիթմական սպիրալը, որը ելակետայինից կարող է տարբերվել միայն դիրքով [համեմատել 242, 5)]։*

(բ) Շրջանի էվոլվենտի համար՝

$$\sigma = R = \sqrt{2as}, \quad s = \frac{\sigma^2}{2a},$$

$$\frac{dR}{ds} = \sqrt{\frac{a}{2}}\frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{a}{\sigma}, \quad \rho = \sigma \cdot \frac{a}{\sigma} = a$$

(մի արդյունք, որը պետք էր նախատեսել)։

(գ) Եթե կորի բնական հավասարումն ունի $R^2 + k^2 s^2 = c^2$ *տեսքը, ապա նրա էվոլյուտը կլինի նույնպիսի կոր, բայց գծային չափերով* k *անգամ մեծացրած։*

Իրոք, ունենք՝

$$\sigma = R = \sqrt{c^2 - k^2 s^2}, \quad ks = \sqrt{c^2 - \sigma^2},$$

$$\frac{dR}{ds} = -\frac{k^2 s}{\sqrt{c^2 - k^2 s^2}} = -\frac{k\sqrt{c^2 - \sigma^2}}{\sigma},$$

և, վերջապես,

$$\rho = -\sigma \cdot \frac{k\sqrt{c^2 - \sigma^2}}{\sigma} = -k\sqrt{c^2 - \sigma^2} \text{ կամ } \rho^2 + k^2 c^2 = (kc)^2.$$

Այստեղից էլ բխում է արված պնդումը։

Ստացված արդյունքը կիրառելի է ցիկլոիդի [համեմատել 242, 4] էպի-և հիպոցիկլոիդի, մասնավորապես, կարդիոիդի և աստրոիդի նկատմամբ [համեմատել 242, 3)]։

Դիտողություն։ Նշված մեթոդը բոլոր դեպքերում թույլ է տալիս դատել էվոլյուտի միայն ձևի մասին, թողնելով բաց նրա դիրքի հարցը։

325. ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ԿՈՐԻ ԱՂԵՂԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ.

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ *տարածական կորի, առանց բազմապատիկ կետերի, նկատմամբ աղեղի երկարության սահմանումը կարելի է տալ նույն ձևով, ինչպես և հարթ կորի համար* [316-320]. *Այստեղ ևս կորի երկարության համար ստացվում է մի բանաձև, որը նման է (4)-ին՝*

$$s = \breve{AB} = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\, dt$$

և այլն, Այս դեպքի համար, համարյա առանց փոփոխության, կարելի է կիրառել հարթ կորի դեպքի համար բոլոր ասածները. կանգ չառնելով դրա վրա, բերենք օրինակներ։

1) Պտուտակագիծ՝ $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ct$։

Քանի որ այստեղ

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} = \sqrt{a^2 + c^2},$$

ապա կորի աղեղի երկարությունը A(t=0) կետից մինչև M (ցանկացած t) կետը կլինի

$$s=\smile{AM}=\int_0^t\sqrt{a^2+c^2}\,dt=\sqrt{a^2+c^2}\,t.$$

ակներև արդյունք, եթե հիշենք, որ գլանային մակերևույթը փռելու դեպքում նրա վրա գտնված պտուտակագիծը փոխարկվում է թեք ուղիղի։

2) Վիվիանիի կորը՝ $x=R\sin^2 t,\ y=R\sin t\cos t,\ z=R\cos t$։ Ունենք՝

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}=R\sqrt{1+\sin^2 t}\,.$$

Այդպիսի դեպքում ամբողջ կորի երկարությունը կարտահայտվի 2-րդ տեսակի լրիվ էլիպտիկ ինտեգրալով՝

$$S=4R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2 t}\,dt=4R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 t}\,dt=$$

$$=4\sqrt{2}\,R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 t}\,dt=4\sqrt{2}\,RE\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)։$$

§ 2. ՄԱԿԵՐԵՍՆԵՐ ԵՎ ԾԱՎԱԼՆԵՐ

326. ՄԱԿԵՐԵՍԻ ԳԱՂԱՓԱՐԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ. ԱԴԻՏՎՈՒԹՅԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ. Բազմանկյուն տիրույթ, կամ կարճ՝ բազմանկյուն, մենք կանվանենք յուրաքանչյուր վերջավոր (հնարավոր է և ոչ կապակցված) հարթ պատկեր, որը սահմանափակված է մեկ կամ մի քանի փակ բեկյալներով։ Այդպիսի պատկերի մակերեսի գաղափարը բավականաչափ ուսումնասիրվել է երկրաչափության դպրոցական դասընթացում, այդ մենք հիմք կընդունենք։

Այժմ վերցնենք հարթության վրա կամայական (P) պատկեր, որն իրենից ներկայացնում է սահմանափակ ու փակ տիրույթ։ Նրա (K) եզրը կամ կոնտուրը մենք միշտ պատ-

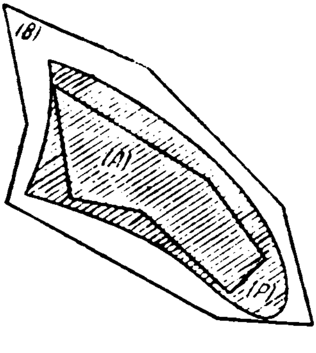
*կերացնելու ենք փակ կորի (կամ մի քանի այդպիսի կորերի) տեսքով**։*

Դիտարկենք բոլոր հնարավոր (A) *բազմանկյունները, որոնք ամբողջովին պարունակվում են* (P)*-ի մեջ և բոլոր հնարավոր* (B) *բազմանկյունները, որոնք իրենց մեջ ամբողջովին պարունակում են* (P)*-ն (գծ. 14)։ Եթե* A*-ն և* B*-ն նշանակում են, համապատասխանաբար, նրանց մակերեսները, ապա միշտ* $A \leqslant B$*։ Թվերի* $\{A\}$ *բազմությունը, որը վերևից սահմանափակված է ցանկացած* B*-ով, ունի* P *ճշգրիտ վերին եզր* [10]*, ընդ որում* $P_* \leqslant B$*։ Ճիշտ այդպես էլ, թվերի* $\{B\}$ *բազմությունը, որը ներքևից սահմանափակված է* P_* *թվով, ունի ճշգրիտ ստորին եզր՝* $P^* \geqslant P_*$*։ Այդ եզրերը կարելի կլիներ անվանել առաջինը՝* (P) *պատկերի ներքին մակերես, իսկ երկրորդը՝ արտաքին մակերես։*

Երբ

$$P_* = \sup\{A\} \text{ և } P^* = \inf\{B\}$$

երկու եզրերը համընկնում են, ապա նրանց P ընդհանուր արժեքը կոչվում է *(P)* պատկերի մակերես: *Այդ դեպքում* (P) *պատկերն անվանում են քառակուսելի։*



Գծ. 14։

Ինչպես հեշտ է տեսնել, մակերեսի գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գտնվեն այնպիսի *(A)* և *(B)* երկու բազմանկյուններ, որ $B - A < \varepsilon$։

Իրոք, այդ պայմանի անհրաժեշտությունը բխում է ճշգրիտ եզրերի հիմնական հատկություններից [10]. *Եթե* P *մակերեսը գոյություն ունի, ապա կգտնվի*

---

* *Այս պարագրաֆում, խոսելով կորի մասին, մենք միշտ նկատի ենք ունենալու անընդհատ կոր, որը կարելի է պարամետրով ներկայացնել և առանց բազմապատիկ կետերի է։ Ինչպես ապացուցել է Ժորդանը* (C. Jordan) *այդ տիպի փակ կորը միշտ հարթությունը տրոհում է երկու տիրույթների՝ ներքին և արտաքին, որոնց համար նա ընդհանուր եզր է ծառայում։*

$A > P - \frac{\varepsilon}{2}$ *և* $B < P + \frac{\varepsilon}{2}$*։ Պայմանի բավարարությունը անմիջականորեն բխում է հետևյալ անհավասարություններից*

$$A \leqslant P_* \leqslant P^* \leqslant B\text{։}$$

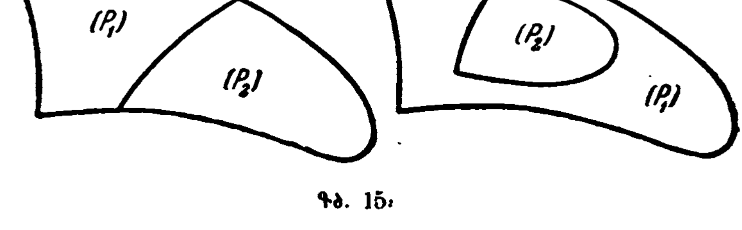
Դիցուք այժմ (P) պատկերը վերլուծված է (P_1) և (P_2) երկու պատկերների. կարելի է պատկերացնել, օրինակ, որ այդ իրագործված է, (P)-ի եզրագծի երկու կետերը միացնող կամ ամբողջովին նրա ներսը գտնվող կորի միջոցով (գծ. 15, ա և բ)։ Ապացուցենք, որ*

այդ (P), (P_1), (P_2) երեք պատկերներից երկուսի քառակուսելիությունը առաջ է բերում երրորդի քառակուսելիություն, ընդ որում միշտ

$$P = P_1 + P_2, \tag{1}$$

այսինքն՝ մակերեսն օժտված է ադիտիվության հատկությամբ։

Որոշակիության համար ենթադրենք, որ մակերես ունեն (P_1) և (P_2) պատկերները։ Դիտարկենք դրանց համապատասխանող (A_1), (B_1) և (A_2), (B_2) ընդգրկյալ ու ընդգրկող բազմանկյունները։ (A_1) և (A_2) փոխադարձաբար չծածկող բազմանկյուններից կկազմվի (A) բազմանկյուն տիրույթ՝ $A = A_1 + A_2$ մակերեսով, որն ամբողջապես կգտնվի (P) տիրույթի մեջ։ Իսկ (B_1) և (B_2), հնարավոր է և փոխադարձաբար ծածկող, բազմանկյուններից կկազմվի մի (B) տիրույթ՝ $B_1 + B_2 \geqslant B$ մակերեսով, որն իր մեջ պարունակում է (P) տիրույթը։



Գծ. 15։

* *Նրանք կարող են ունենալ մասնակի ընդհանուր եզր, սակայն, առանց մեկը մյուսին ծածկելու, այսինքն՝ նրանք չունեն ընդհանուր ներքին կետեր։*

Ակներևորեն,

$$A_1+A_2=A\leqslant B\leqslant B_1+B_2.$$

Քանի որ այդ դեպքում B_1-ը A_1-ից և B_2-ը A_2-ից կարող են տարբերվել կամայականորեն փոքր չափով, ապա այդ արդարացի է նաև B-ի ու A-ի նկատմամբ, որտեղից և բխում է (P) տիրույթի քառակուսելիությունը։

Մյուս կողմից, միաժամանակ ունենք

$$A_1+A_2=A\leqslant P\leqslant B\leqslant B_1+B_2$$

և

$$A_1+A_2\leqslant P_1+P_2\leqslant B_1+B_2,$$

այնպես որ P թիվն ու P_1+P_2 թիվը գտնվում են միևնույն և ընդնմին իրար կամայականորեն մոտ A_1+A_2 և B_1+B_2 սահմանների միջև. հետևապես, այդ թվերը հավասար են, որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Նկատենք, մասնավորապես, որ այստեղից՝ $P_1<P$, այնպես որ պատկերի մասն ավելի փոքր մակերես ունի, քան ամբողջ պատկերը:

327. ՄԱԿԵՐԵՍԸ ՈՐՊԵՍ ՍԱՀՄԱՆ. *Քառակուսելիության նախորդ n^0-ում ձևակերպած պայմանը կարելի է վերաձևակերպել այսպես՝*

1) Որպեսզի (P) պատկերը քառակուսել լինի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենան (P)-ի մեջ պարունակվող և (P) ն իրենց մեջ պարունակող այնպիսի բազմանկյունների $\{(A_n)\}$ և $\{(B_n)\}$ երկու հաջորդականություններ, որոնց մակերեսներն ունենան ընդհանուր սահման՝

$$\lim A_n=\lim B_n=P: \tag{2}$$

Այդ սահմանն էլ, ակներևորեն, կլինի (P) պատկերի մակերեսը:

Երբեմն ձեռնտու է բազմանկյունների փոխարեն օգտագործել ուրիշ այնպիսի պատկերներ, որոնց քառակուսելիությունն արդեն հաստատված է՝

2) Երբ (P) պատկերի համար կարելի է կառուցել, համապատասխանաբար, (P)-ի մեջ պարունակվող և (P)-ն իրենց մեջ պարունակող այնպիսի քառակուսելի պատկերների $\{(Q_n)\}$ և

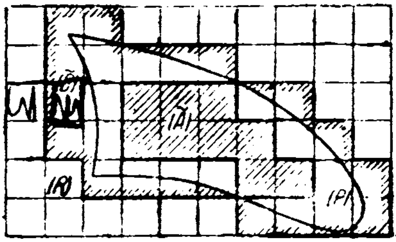
$\{(R_n)\}$ երկու հաջորդականություններ, որոնց մակերեսներն ունեն ընդհանուր սահման՝

$$\lim Q_n = \lim B_n = P, \tag{3}$$

ապա (P) պատկերը նույնպես քառակուսելի է, ընդ որում հենց այդ սահմանն էլ կլինի նրա մակերեսը:

Այդ անմիջապես բխում է նախորդ պնդումից, եթե յուրաքանչյուր (Q_n) պատկեր փոխարինենք նրա մեջ պարունակվող (A_n) բազմանկյունով, իսկ (R_n)-ը իրեն պարունակող (B_n) բազմանկյունով, որոնք ըստ մակերեսների մեծության այնքան մոտ լինեն նրանց, որպեսզի միաժամանակ տեղի ունենա և (2)-ը:

Թեև վերևում բանաձևված երկու հայտանիշների մեջ հիշատակվող (A_n), (B_n), (Q_n), (R_n) պատկերների ընտրությունը գործնականում դժվարություններ չի էլ հարուցում, բայց և այնպես սկզբունքային հետաքրքրություն է ներկայացնում այդ ընտրության հետ կապված անորոշության վերացումը: Այդ նպատակով կարելի է վարվել, օրինակ, այսպես՝



Գծ. 16:

Տեղավորելով (P) պատկերը մի այնպիսի (R) ուղղանկյան ներսում, որի կողմերը զուգահեռ են կոորդինատային առանցքներին, տրոհենք այդ ուղղանկյունը մասերի՝ տանելով նրա կողմերին զուգահեռ մի շարք ուղիղներ: (P) տիրույթի մեջ ամբողջապես պարունակվող ուղղանկյուններից կազմենք $(\tilde{A})$ պատկեր (գծ. 16-ում այդ մասը գծիկներով ծածկված է), իսկ այն ուղղանկյուններից, որոնք (P)-ի հետ ունեն ընդհանուր ներքին կետեր, բայց կարող են մասամբ նաև դուրս գալ այդ տիրույթից, կազմենք $(\tilde{B})$ պատկեր: Այդ պատկերները, ակներևաբար, ներկայացնում են այն (A) և (B) բազմանկյունների մասնավոր դեպքը, որոնց մասին խոսք եղավ մակերեսի գաղափարը սահմանելիս. դրանց $\tilde{A}$ և $\tilde{B}$ մակերեսները կախված են (R) ուղղանկյան մասերի վերլուծման եղանակից: Մասնա-

կից ուղղանկյունների անկյունագծերից մեծագույնի երկարությունը նշանակենք d *տառով։*

3) Եթե d-ն զրոյի ձգտելիս $\tilde{A}$ և $\tilde{B}$ երկու մակերեսները ձգտեն P ընդհանուր սահմանի, և միայն այդ դեպքում, *(*P*)* տիրույթը քառակուսելի կլինի. այդ պայմանի կատարման դեպքում հիշյալ սահմանը հենց կհանդիսանա (17*)* պատկերի մակերեսը։

Ընթերցողը ինքը հեշտությամբ կարտահայտի այստեղ հանդես եկող սահմանի գաղափարը, ինչպես «ε-δ լեզվով», այնպես էլ «հաջորդականությունների լեզվով»։

Ապացույցի կարիք է զգում նշված պայմանի միայն անհրաժեշտությունը։ Ենթադրենք P *մակերեսի գոյությունը և ցույց տանք, որ այդ դեպքում*

$$\lim_{d\to 0}\tilde{A}=\lim_{d\to 0}\tilde{B}=P. \qquad (4)$$

Տրված $\varepsilon>0$*-ի միջոցով կգտնվեն* [326] *այնպիսի* A *և* B *բազմանկյուններ, որ* $B-A<\varepsilon$*. ընդ որում կարելի է ենթադրել, որ նրանց եզրագծերը (*P*) պատկերի (*K*) եզրագծի հետ ընդհանուր կետեր չունեն։ δ-ով նշանակենք, մի կողմից, երկու ուղղանկյունների եզրագծերի կետերի և, մյուս կողմից, (*K*) կորի կետերի միջև եղած հեռավորություններից փոքրագույնը*։ Եթե հիմա վերցնենք* $d<\delta$, *ապա յուրաքանչյուր մասնակի ուղղանկյուն, որը գոնե մի կետում դիպչում է (*K*) կո-*

** Դիցուք ունենք երկու վերջավոր անընդհատ կորեր հարթության վրա. ենթադրենք, օրինակ, որ դրանք տրված են պարամետրական ձևով՝*

$$(I)\ x=\varphi(t),\ y=\psi(t);\quad (II)\ x=\varphi^*(u),\ y=\psi^*(u),$$
$$t_0\leqslant t\leqslant T \qquad\qquad u_0\leqslant u\leqslant U$$

որտեղ φ, ψ, φ^*, ψ^*՝ *յուրաքանչյուրն իր արգումենտի անընդհատ ֆունկցիա է։ Այդ դեպքում այդ կորերի երկու կամայական կետերի միջև եղած*

$$\sqrt{[\varphi(t)-\varphi^*(u)]^2+[\psi(t)-\psi^*(u)]^2}$$

հեռավորությունը կլինի (t,u)*-ի անընդհատ ֆունկցիա* $[t_0, T; u_0, U]$ *փակ տիրույթում և, հետևապես, այնտեղ նա հասնում է իր փոքրագույն արժեքին* [163]*։ Եթե կորերը չեն հատվում, ապա այդ փոքրագույն հեռավորությունը զրոյից տարբեր կլինի։*

րին, նախահայտորեն գտնվում է (A) բազմանկյունից դուրս և (B) բազմանկյան ներսը։ Այստեղից էլ հետևում է, որ

$$A \leqslant \tilde{A} \leqslant P \leqslant \tilde{B} \leqslant B,$$

այնպես որ $P-\tilde{A}<\varepsilon$ և $\tilde{B}-P<\varepsilon$, որը և բերում է (4)-ին։

Պարզ է, որ (4) հավասարության վրա հիմնվելով կարելի կլիներ կառուցել և հենց մակերեսի գաղափարի սահմանումը, ակներևորեն, համարժեք նախկինին։ Այդպիսի սահմանումը շատ պարզ և բնական է թվում, սակայն թերությունը նրա կախումն է (հարկե կարծեցյալ) կոորդինատային առանցքների կողմնորոշումից։

328. *ՔԱՌԱԿՈՒՍԵԼԻ ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐԻ ԴԱՍԵՐ։* (K) կորը, (P) տիրույթի եզրագիծը, էական դեր է խաղում այդ տիրույթի քառակուսելիության հարցում։

Եթե քառակուսելիությունն առկա է, ապա, ինչպես տեսանք 326-ում, տրված $\varepsilon>0$ թվի միջոցով (K) կորը կարելի է ամփոփել մի որոշ (B—A) բազմանկյուն տիրույթի մեջ, որը պարունակվում է (A) և (B) երկու բազմանկյունների եզրագծերի միջև (տես գծ. 14) և ունի $(B-A)<\varepsilon$ մակերես։

Այժմ ենթադրենք, հակադարձորեն, որ (K) եզրագիծը կարող է ամփոփվել $C<\varepsilon$ մակերես ունեցող (C) բազմանկյուն տիրույթի մեջ, որտեղ ε-ը նախապես տրված դրական թիվ է։ Ընդորում, առանց նվազեցնելու ընդհանրությունը, կարելի է ենթադրել, որ (C)-ն չի ծածկում ամբողջ (P) պատկերը։ Այդ դեպքում (P) տիրույթի այն կետերից, որոնք չեն ընկնում (C)-ի ներսը, կկազմվի (A) բազմանկյուն տիրույթը, որը պարունակվում է (P)-ի մեջ. իսկ եթե (A)-ին միացնենք (C)-ն, կստացվի (B) բազմանկյուն տիրույթը, որն արդեն իր մեջ պարունակում է (P)-ն։ Քանի որ $B-A=C<\varepsilon$, ապա, ըստ n° 326-ի կրիտերիումի, այստեղից հետևում է (P) տիրույթի քառակուսելիությունը։

Խոսքի հեշտացման համար պայմանավորվենք ասել, որ (փակ կամ ոչ փակ) (k) կորն ունի 0 մակերես, եթե այն

կարելի է ծածկել կամայականորեն փոքր մակերես ունեցող բազմանկյուն տիրույթով։ Այդ դեպքում վերը բերված դատողությունը թույլատրում է բանաձևել քառակուսելիության հետևյալ պայմանը՝

որպեսզի (P) պատկերը քառակուսելի լինի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա (K) եզրագիծն ունենա 0 մակերես:

Այս կապակցությամբ կարևորություն է ստանում 0 մակերես ունեցող կորերի ընդարձակ դասերի առանձնացումը։

Ամենից առաջ հեշտ է ցույց տալ, որ այդ հատկությամբ օժտված է ամեն մի անընդհատ կոր, որն արտահայտվում է

$$y=f(x) \quad \text{կամ} \quad x=g(y) \qquad (5)$$
$$(a\leqslant x\leqslant b) \qquad (c\leqslant y\leqslant d)$$

տեսքի բացահայտ հավասարումով (f-ը և g-ն՝ անընդհատ ֆունկցիաներ են)։

Դիցուք, օրինակ, մենք գործ ունենք այդ հավասարումներից առաջինի հետ։ Տրված $\varepsilon>0$-ի միջոցով կարելի է $[a, b]$ միջակայքը վերլուծել $[x_i, x_{i+1}]$ $(i=0, 1, \ldots, n+1)$ մասերի այնպես, որ նրանցից յուրաքանչյուրի մեջ f ֆունկցիայի ω_i տատանումը լինի $<\frac{\varepsilon}{b-a}$ [86]։ Եթե i-րդ միջակայքում f ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները նշանակենք, ինչպես սովորաբար, m_i և M_i, ապա մեր ամբողջ կորը կծածկվի մի պատկերով, որը բաղկացած է

$$[x_i, x_{i+1}; m_i, M_i] \quad (i=0, \ldots, n-1)$$

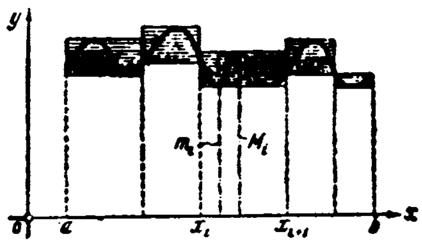
ուղղանկյուններից (տես գծ. 17), որոնց ընդհանուր մակերեսն է

$$\sum_i (M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i)=\sum_i \omega_i \Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_i \Delta x_i=\varepsilon,$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։ Ուրեմն (5) կորն ունի 0 մակերես։ Այստեղից հետևում է՝

Եթե (P) պատկերը սահմանափակված է մի քանի անընդհատ կորերով, որոնցից յուրաքանչյուրն, առանձին վերցրած, արտա-

հայտնվում է (5) բացահայտ հավասարումով (այս կամ այն տիպի), ապա այդ պատկերը քառակուսելի է:



Գծ. 17։

Իսկ, քանի որ հիշատակված կորերից յուրաքանչյուրն ունի 0 մակերես, ապա և ամբողջ եզրագիծը, ակներևորեն, նույնպես կունենա 0 մակերես։

Այս կրիտերիումից կարելի է ստանալ մի ուրիշ, ավելի մասնավոր, կրիտերիում, որը, սակայն, գործնականում ավելի հարմար է։

Այն կորը, որը տրված է

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t) \qquad (6)$$
$$(t_0 \leqslant t \leqslant T)$$

պարամետրական հավասարումով, կանվանենք ողորկ կոր, եթե 1) φ և ψ ֆունկցիաները, պարամետրի փոփոխման $[t_0, T]$ *ամբողջ միջակայքում ունեն անընդհատ ածանցյալներ, և 2) կորը չունի ոչ բազմապատիկ, ոչ էլ ընդհանրապես որևէ եզակի կետ։ Փակ կորի դեպքում կպահանջենք նաև հետևյալ հավասարությունները՝*

$$\varphi'(t_0)=\varphi'(T), \quad \psi'(t_0)=\psi'(T).$$

Այժմ ցույց տանք, որ հարթ կորն ունի 0 մակերես։

Կորի վրա վերցնենք ցանկացած $\overline{M}$ *կետը, որը որոշվում է պարամետրի* $\bar{t}$ *արժեքով։ Քանի որ այդ կետը եզակի կետ չէ, ապա, ինչպես տեսել ենք [213], գոյություն ունի այնպիսի*

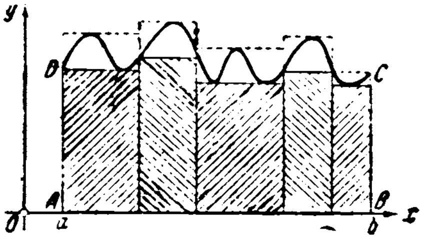
$$\bar{\sigma}=(\bar{t}-\bar{\delta}, \ \bar{t}+\bar{\delta})$$

միջակայք, որ կորի համապատասխան մասը կարող է արտահայտվել և բացահայտ հավասարումով։

Այժմ կիրառենք Բորելի լեմման [87] $[t_0, T]$ *միջակայքի նկատմամբ և նրան ծածկող շրջակայքերի* $\sum = \{\sigma\}$ *սիստեմի նկատմամբ. ամբողջ միջակայքը կծածկվի վերջավոր թվով այդպիսի միջակայքերով, այնպես որ կորը կտարբաժանվի վերջավոր թվով այնպիսի մասերի, որոնցից յուրաքանչյուրն արտահայտվում է (5) բացահայտ հավասարումով (այս կամ այն տիպի)։ Մնում է միայն հիմնվել վերևում ապացուցածի վրա։ Ուրեմն,*

Եթե (P) պատկերը սահմանափակված է մեկ կամ մի քանի ողորկ կորերով, ապա այն նախահայտորեն քառակուսելի է:

Այս եզրակացությունը պահպանում է իր ուժը նույնիսկ այն դեպքում, երբ կորն ունի վերջավոր թվով եզակի կետեր. առանձնացնելով այդ կետերը կամայականորեն փոքր մակերես ունեցող շրջակայքերի օգնությամբ, մենք գործ կունենանք արդեն ողորկ կորերի հետ։



Գծ. 18։

329. ՄԱԿԵՐԵՍԻ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒՄՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՈՎ.

Այժմ դիմենք հարթ պատկերների մակերեսները ինտեգրալների օգնությամբ հաշվելուն։

Առաջին հերթին դիտարկենք, առաջին անգամ՝ խիստ շարադրումով, ABCD *կորագիծ սեղանի մակերեսը որոշելու մեզ արդեն հանդիպած խնդիրը (գծ. 18)։ Այդ պատկերը վերևից սահմանափակված է* DC *կորով, որի հավասարումն է*

$$y = f(x),$$

որտեղ $f(x)$*-ը դրական և* $[a, b]$ *միջակայքում անընդհատ ֆունկցիա է. ներքևից նա սահմանափակված է* x *առանցքի* AB *հատվածով, իսկ կողքերից՝* AD *և* BC *երկու օրդինատներով (որոնցից յուրաքանչյուրը կարող է դառնալ մի կետ)։ Փաստորեն,*

դիտարկվող ABCD պատկերի P մակերեսի գոյությունը հետևում է նախորդ n°-ում ապացուցածից, և խոսքը վերաբերում է միայն նրա հաշվմանը։

Այդ նպատակով [a, b] միջակայքը տրոհենք, ինչպես սովորաբար, մասերի, a-ի և b-ի միջև տեղավորելով մի շարք կետեր՝

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n.$$

Նշանակելով m_i և M_i, համապատասխանաբար, $f(x)$ ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները i-րդ $[x_i, x_{i+1}]$ միջակայքում $(i=0, 1, \dots, n-1)$, կազմենք (Դարբուի) գումարները՝

$$s = \sum_i m_i \Delta x_i, \quad S = \sum_i M_i \Delta x_i.$$

Դրանք, ակներևորեն, ներկայացնում են այն աստիճանաձև պատկերների մակերեսները, որոնք կազմված են, համապատասխանաբար, ընդգրկյալ և ընդգրկող ուղղանկյուններից (տես գծագիրը)։ Ուստի՝

$$s < P < S.$$

Բայց երբ Δx_i տարբերություններից ամենամեծը ձգտում է զրոյի, երկու գումարն էլ որպես իրենց սահման ունեն $\int_a^b f(x)\,dx$ ինտեգրալը*, հետևապես, հենց դրան էլ հավասար է որոնելի մակերեսը՝

$$P = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (7)$$

* 327. 1)-ի շնորհիվ դա ինքնըստինքյան ապացուցում է ABCD կորագիծ սեղանի քառակուսելիությունը. ստանալու համար պատկերների այնտեղ հիշատակված հաջորդականությունները, կարելի կլիներ, օրինակ, բաժանել միջակայքը հավասար մասերի։

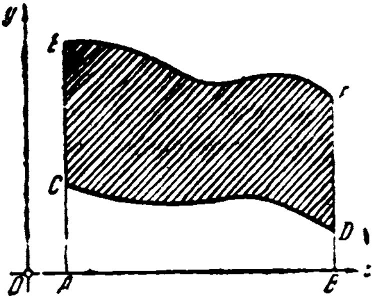
Եթե CDFE կորագիծ սեղանը և՛ ներքևից և՛ վերևից սահմանափակված է կորերով (գծ. 19), որոնց հավասարումները են

$$y_1=f_1(x) \quad և \quad y_2=f_2(x) \quad (a\leqslant x\leqslant b),$$

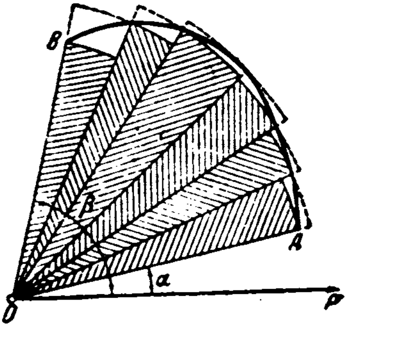
ապա, այն դիտարկելով որպես ABFE և ABDC երկու պատկերների տարբերություն, այդ սեղանի մակերեսը կստանանք հետևյալ տեսքով՝

$$P=\int_a^b (y_2-y_1)\,dx=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\,dx. \qquad (8)$$

Դիցուք այժմ տված է AOB սեկտորը (գծ. 20), որը սահմանափակված է AB կորով և OA ու OB երկու շառավիղ-վեկտորներով (որոնցից յուրաքանչյուրը կարող է մի կետ դառ-



Գծ. 19։



Գծ. 20։

նալ)։ Այդ դեպքում AB կորը տրվում է $r=g(\theta)$ բևեռային հավասարումով, որտեղ $g(\theta)$-ն դրական անընդհատ ֆունկցիա է $[\alpha, \beta]$ միջակայքում։ Այստեղ ևս հարցը միայն սեկտորի P մակերեսի հաշվումն է, քանի որ մակերեսի գոյությունը պայմանավորված է պատկերի եզրագծի հատկություններով։

Տրոհելով α-ի և β-ի միջև (տես գծագիրը) հետևյալ արժեքները՝

$$\alpha=\theta_0<\theta_1<\theta_2<\dots<\theta_i<\theta_{i+1}<\dots<\theta_n=\beta,$$

տանենք այդ անկյուններին համապատասխանող շառավիղ վեկտորները։ Եթե այստեղ ևս մուծենք $g(\theta)$ ֆունկցիայի $[\theta_i, \theta_{i+1}]$-ում փոքրագույն և մեծագույն արժեքները՝ μ_i և M_i, ապա այդ շառավիղներով գծված շրջանային սեկտորները AOB պատկերի համար կլինեն, համապատասխանաբար, ընդգրկյալ և ընդգրկող։ Ընդգրկյալ սեկտորներից և ընդգրկող սեկտորներից կազմենք երկու առանձին պատկերներ, որոնց մակերեսները կլինեն

$$\sigma = \frac{1}{2}\sum_i \mu_i^2\,\Delta\theta_i \quad և \quad \Sigma = \frac{1}{2}\sum_i M_i^2\,\Delta\theta_i$$

և, ակներևորեն,

$$\sigma < P < \Sigma.$$

Հանձին այդ σ և Σ գումարների հեշտ է ճանաչել Դարբուի գումարները $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [g(\theta)]^2\,d\theta$ ինտեգրալի համար. երբ $\Delta\theta$ տարբերություններից մեծագույնը ձգտում է զրոյի, նրանք երկուսն էլ որպես սահման ունեն այդ ինտեգրալը, այնպես որ նաև*

$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [g(\theta)]^2\,d\theta. \tag{9}$$

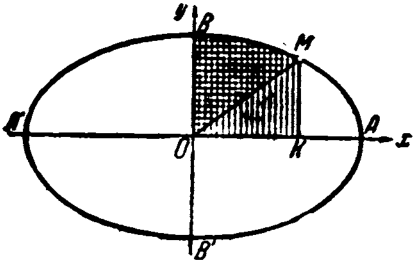
330. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Որոշել այն պատկերի P մակերեսը, որը սահմանափակված է $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ շղթայագծով, x-երի առանցքով և երկու օրդինատներով, որոնք համապատասխանում են 0 և x աբսցիսներին (գծ. 9)։

Ունենք՝

$$P = \int_0^x a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\,dx = a^2\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a} = as,$$

** Այստեղ կարելի կլիներ նախորդ դիտողությանը համանման դիտողություն անել, բայց հիմնվելով 327, 2)-ի վրա։*

որտեղ s-ը՝ շղթայագծի AM աղեղի երկարությունն է [322, 1)]։ Այսպիսով որոնելի AOPM մակերեսը ստացվեց հավասար PS և SM հատվածների վրա կառուցված ուղղանկյան մակերեսին (որովհետև $SM = \overset{\frown}{AM}$)։



Գծ. 21։

2) Տված է $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսը և նրա վրա M(x, y) կետը (գծ. 21)։ Որոշել BOKM կորագիծ սեղանի և OMB սեկտորի մակերեսները։

Էլիպսի հավասարումից ունենք $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x}$, այնպես որ, ըստ (7) բանաձևի՝

$$P_1 = \text{մակ. } BOKM = \int_0^x \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx =$$

$$= \frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{b}{2a}x\sqrt{a^2-x^2} = \frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{xy}{2}\text{։}$$

Քանի որ վերջին գումարելին ներկայացնում է $\triangle OKM$-ի մակերեսը, ապա, այն հանելով, սեկտորի մակերեսի համար կստանանք՝

$$P_2 = \text{մակ. } OMB = \frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a}\text{։}$$

$x=a$ դեպքում էլիպսի մեկ քառորդ մասի մակերեսի համար կգտնենք $\frac{\pi ab}{4}$ արժեքը, այնպես որ ամբողջ էլիպսի մակերեսը՝ $P=\pi ab$։ Շրջանի համար $a=b=r$ և ստացվում է $P=\pi r^2$ հայտնի բանաձևը։

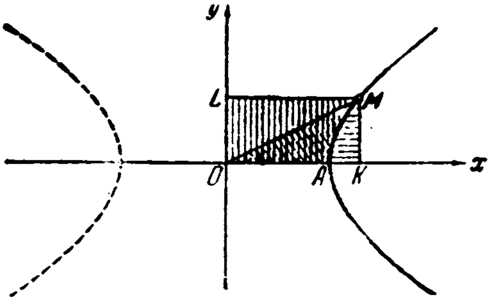
3) Տրված է $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ հիպերբոլը և նրա վրա M(x, y) կետը (գծ. 22)։ Որոշել AKM, OAM և OAML կորագիծ պատկերների մակերեսները։

Հիպերբոլի հավասարումից ունենք $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, և, ըստ (7) բանաձևի՝

$$P_1 = \text{մակ.}\ AKM = \frac{b}{a}\int_a^x \sqrt{x^2-a^2}\,dx =$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right]\Big|_a^x =$$

$$= \frac{1}{2}xy - \frac{ab}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$



Գծ. 22։

Քանի որ $\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} = \frac{y}{b}$, *ապա այս արտահայտությունը կարելի է ներկայացնել ավելի սիմետրիկ ձևով՝*

$$P_1 = \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}ab\log\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

Այստեղից արդեն հեշտ է ստանալ

$$P_2 = \text{մակ.}\ OAM = \frac{ab}{2}\log\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right),$$

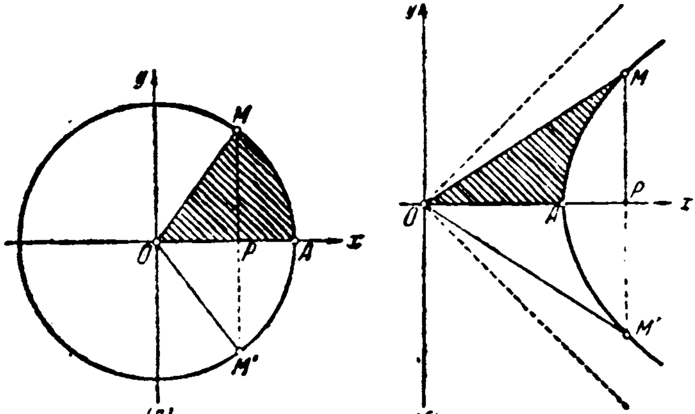
$$P_3 = \text{մակ.}\ OAML = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}ab\log\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

Դիտողություն։ *Ստացված արդյունքը թույլ կտա մեզ մի փոքր ավելի խորացնել անալոգիան եռանկյունաչափական (շրջանային) և հիպերբոլական ֆունկցիաների միջև։ Համեմատենք իրար հետ 1 շառավիղ ունեցող* $x^2+y^2=1$ *շրջանը և* $x^2-y^2=1$ *հավասարակողմ հիպերբոլը (գծ. 23, ա և բ)։ Այս կորերը պարամետրական տեսքով կարող են ներկայացվել այսպես՝*

շրջանի համար՝ $OP = x = \cos t,\quad PM = y = \sin t,$

հիպերբոլի համար՝ $OP = x = \operatorname{ch} t,\quad PM = y = \operatorname{sh} t.$

Բայց, մինչդեռ շրջանի դեպքում t-ի երկրաչափական դերը պարզ է (այդ՝ ∢ AOM-ն է), հիպերբոլի համար t թվային պարամետրն այդպես մեկնաբանել անհնարին է։ Կարելի է, օրինակ, շրջանի համար տալ t պարա-



(a) (б)

Գծ. 23։

մետրի մի այլ մեկնաբանություն ևս, այն է՝ t-ն AOM սեկտորի կրկնակի մակերեսն է (կամ M'OM սեկտորի մակերեսը)։ Պարզվում է, որ այս մեկնաբանությունը կարելի է տարածել և հիպերբոլի դեպքի վրա․ իրոք, եթե M կետի կոորդինատներն են

$$x = \operatorname{ch} t = \frac{e^{t} + e^{-t}}{2}, \qquad y = \operatorname{sh} t = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2},$$

ապա $x + y = e^{t}$ և $t = \log(x+y)$։ Եթե հիշենք P_2-ի համար վերևում գտած բանաձևը և ընդունենք այնտեղ $a=b=1$, ապա կտեսնենք, որ t-ն հավասար է AOM սեկտորի կրկնակի մակերեսին (ինչպես և շրջանի համար)։

Այսպիսով, շրջանի մեջ PM և OP հատվածները ներկայացնում են AOM շրջանային սեկտորի կրկնակի մակերեսի շրջանային սինուսը և կոսինուսը, իսկ հիպերբոլի համար համանման հատվածներն արտահայտում են AOM հիպերբոլական սինուսն ու կոսինուսը։ Հիպերբոլական ֆունկցիաների դերը հիպերբոլի նկատմամբ միանգամայն համանման է շրջանային (եռանկյունաչափական) ֆունկցիաների դերին շրջանի նկատմամբ։

Հիպերբոլական ֆունկցիաների արգումենտը որպես ինչ որ մակերես մեկնաբանելու հետ կապված են նաև նրանց հակադարձ ֆունկցիաների նշանակումները [տես 49, 3) և 4)]՝

Ar sh x, Ar ch x և այլն։

Ar տառերը լատիներեն Area բառի, որ նշանակում է «մակերես», սկզբնատառերն են։

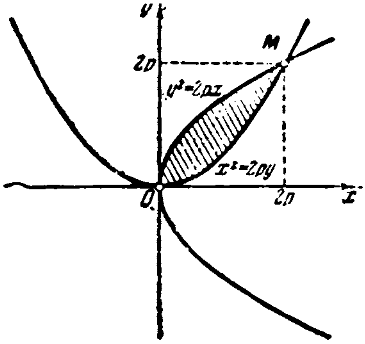
4) Գտնել այն պատկերի P մակերեսը, որը սահմանափակված է կոորդինատային առանցքներով և

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a} \qquad (a>0)$$

պարաբոլով։

Պատասխան՝ $P=\int_0^a y\,dx=\frac{1}{6}a^2$։ *(Թողնում ենք ընթերցողին կազմել գծագիրը)։*

5) Որոշել $y^2=2px$ *և* $x^2=2py$ *երկու կոնգրուենտ պարաբոլների միջև պարփակված պատկերի մակերեսը (գծ. 24)։*



Գծ. 24։

Ակներևորեն, պետք է օգտվել (8) *բանաձևից, ընդունելով այնտեղ*

$$y_1=\frac{x^2}{2p}, \quad y_2=\sqrt{2px}\,։$$

Ինտեգրման միջակայքը որոշելու համար տվյալ հավասարումները միատեղ լուծենք և գտնենք երկու պարաբոլների հատման այն M *կետի աբսցիսը, որը տարբեր է սկզբնակետից. այն հավասար է* 2p*-ի։ Ունենք՝*

$$P=\int_0^{2p}\left(\sqrt{2px}-\frac{x^2}{2p}\right)dx=\left(\frac{2}{3}\sqrt{2p}\,x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{6p}\right)\Bigg|_0^{2p}=\frac{4}{3}p^2\,։$$

6) Գտնել հետևյալ հավասարումով տված էլիպսի P *մակերեսը՝*

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1 \qquad (AC-B^2>0,\ C>0)։ \qquad (10)$$

Լուծում։ Այդ հավասարումից՝

$$y_1=\frac{-Bx-\sqrt{B^2x^2-C(Ax^2-1)}}{C},$$

$$y_2=\frac{-Bx+\sqrt{B^2x^2-C(Ax^2-1)}}{C},$$

ընդ որում y_1, y_2*-ը իրական արժեքներ են ստանում* x*-ի միայն այն արժեքների համար, որոնք բավարարում են*

$$C-(AC-B^2)x^2\geqslant 0$$

անհավասարությանը, այսինքն՝ որոնք գտնվում են $[-\alpha, \alpha]$ *միջակայքում, որտեղ* $\alpha=\sqrt{\frac{C}{AC-B^2}}$։

Այդ դեպքում որոնելի մակերեսը կլինի՝

$$P=\int_{-\alpha}^{\alpha}(y_2-y_1)\,dx=\frac{2}{C}\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{C-(AC-B^2)x^2}\,dx=$$

$$=\frac{2}{C}\sqrt{AC-B^2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx=\frac{2}{C}\sqrt{AC-B^2}\cdot\frac{1}{2}\pi\alpha^2=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}.$$

7) Դիցուք, վերջապես, էլիպսը տրված է ընդհանուր հավասարումով՝

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0.$$

պահանջվում է գտնել նրա P մակերեսը:

Այս խնդիրը կարող է բերվել նախորդին:

Եթե սկիզբը տեղափոխենք էլիպսի (ξ, η) կենտրոնը, որը, ինչպես հայտնի է, որոշվում է

$$a\xi+b\eta+d=0, \qquad (11)$$
$$b\xi+c\eta+e=0$$

Հավասարումներից, ապա էլիպսի հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$ax^2+2bxy+cy^2+f'=0, \qquad (12)$$

որտեղ

$$d\xi+e\eta+f=f'.$$

Արտաքսելով ξ-ն և η-ն (11) և (12) հավասարություններից, կգտնենք

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f-f' \end{vmatrix}=0,$$

որտեղից

$$f'=\frac{\Delta}{ac-b^2},\quad \text{ուր}\quad \Delta=\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}^{*}.$$

Ստացված հավասարումը հեշտությամբ բերվում է 6)-ում դիտարկված տեսքի, եթե ընդունենք՝

$$A=-\frac{a}{f'},\quad B=-\frac{b}{f'},\quad C=-\frac{c}{f'}.$$

*) Ակներևաբար, f'-ն ու Δ-ն բացասական են (այլ կերպ հավասարումը իրական կոր չէր արտահայտի):

Ուրեմն էլիպսի մակերեսը կլինի՝

$$P = \frac{\pi\,|f'|}{\sqrt{ac-b^2}} = -\frac{\pi\Delta}{(ac-b^2)^{3/2}}։$$

8) (7) բանաձևը կարող է օգտագործվել և այն դեպքում, երբ կորագիծ սեղանը սահմանափակող կորը տրված է պարամետրական տեսքով կամ (6) տեսքի հավասարումով։ (7) ինտեգրալում փոփոխականի փոխարինում կատարելով, կստանանք (ենթադրելով, որ $x=a$, երբ $t=t_0$, և $x=b$, երբ $t=T$)՝

$$P = \int_{t_0}^{T} y x'_t\,dt = \int_{t_0}^{T} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt։ \tag{13}$$

Եթե, օրինակ, էլիպսի մակերեսը հաշվելու ժամանակ ելնենք նրա

$$x = a\cos b, \quad y = b\sin t$$

պարամետրական ներկայացումից և հաշվի առնենք, որ x-ը աճում է $-a$-ից մինչև a, երբ t-ն նվազում է π-ից մինչև 0, ապա կգտնենք՝

$$P = 2\int_{\pi}^{0} b\sin t\cdot(-a\sin t)\,dt = 2ab\int_{0}^{\pi}\sin^2 t\,dt = \pi ab։$$

Այսպես մենք հաշվեցինք էլիպսի վերին կեսի մակերեսը և կրկնապատկեցինք այն։

9) Հաշվենք $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ցիկլոիդով սահմանափակված պատկերի մակերեսը։ Ըստ (13) բանաձևի ունենք

$$P = \int_{0}^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,dt = a^2\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{2\pi} = 3\pi a^2։$$

Այսպիսով, ստացվեց, որ որոնելի մակերեսը հավասար է ծնող շրջանի եռապատիկ մակերեսին։

10) Գտնել $r=a\theta$ արքիմեդյան գալարագծի (սպիրալի) մեկ գալարի մակերեսը (գծ. 25)։

Ըստ (9) բանաձևի ունենք

$$P_1 = \frac{1}{2}a^2\int_{0}^{2\pi}\theta^2\,d\theta = \frac{a^2}{6}\theta^3\Bigg|_{0}^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2,$$

մինչդեռ $2\pi a$ շառավիղ ունեցող շրջանի մակերեսը կլինի $4\pi^3 a^2$։ Գալարագծի մեկ գալարի մակերեսը հավասար է շրջանի մակերեսի մեկ երրորդին (այս արդյունքը հայտնի է եղել դեռևս Արքիմեդին)։

Ընթերցողին ենք թողնում ցույց տալ, որ հաջորդական գալարների միջև պարփակված պատկերների մակերեսները կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա, որի տարբերությունն է $8\pi^3a^2$:

11) Գտնել

$$r = a\cos\theta + b, \qquad b > a,$$

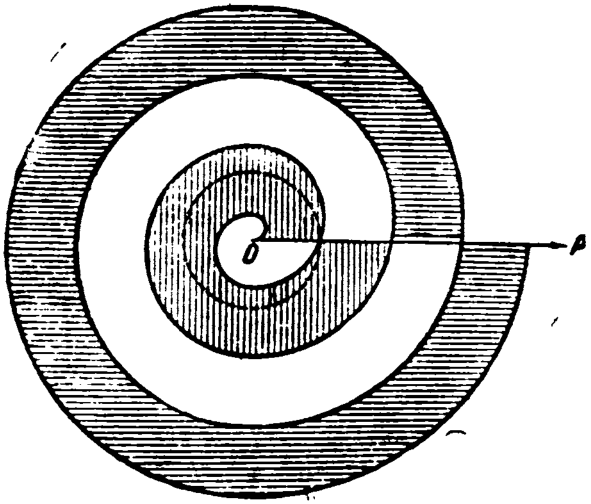
խխունջի մակերեսը:

Ըստ (9) բանաձևի ունենք

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos\theta + b)^2\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}a^2+b^2\right)\theta + \frac{1}{4}a^2\sin 2\theta + 2ab\sin\theta\right]\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}(a^2+2b^2):$$

Մասնավորապես, կարդիոիդի (b=a) մակերեսը հավասար է $\frac{3}{2}\pi a^2$:



Գծ. 25:

12) Գտնել $r^2=2a^2\cos 2\theta$ լեմնիսկատի մակերեսը:

Բավական է կրկնապատկել աջ ճյուղի (օղակի) մակերեսը, որին համապատասխանում է θ անկյան փոփոխությունը $-\frac{\pi}{4}$-ից մինչև $\frac{\pi}{4}$՝

$$P = 2\cdot\frac{1}{2}2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,d\theta = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,d\theta = 2a^2:$$

13) Գտնել $x^3+y^3-3axy=0$ դեկարտյան տերևի մակերեսը:

Անցնենք բևեռային կոորդինատներին: Կորի հավասարման մեջ ընդունելով $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, կրճատելով r^2-ով, կհանգենք այսպիսի բևեռային հավասարման՝

$$r=\frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}:$$

Քանի որ կորի գալարն ինքը համապատասխանում է θ անկյան փոփոխմանը 0-ից մինչև $\frac{\pi}{2}$, ապա ըստ (9) բանաձևի՝

$$P=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}d\theta:$$

Փոխարինելով $\sin\theta$-ն $\operatorname{tg}\theta\cos\theta$-ով, ընդինտեգրալ արտահայտությունը կբերենք հետևյալ տեսքին՝

$$\frac{\operatorname{tg}^2\theta\, d\operatorname{tg}\theta}{(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2},$$

որտեղից անմիջականորեն գտնվում է նախնական ֆունկցիան՝

$$-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\operatorname{tg}^3\theta}=-\frac{1}{3}\frac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}:$$

Այսպիսով,

$$P=-\frac{3a^2}{2}\frac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3a^2}{2}:$$

14) Նորից լուծել 6) խնդիրը, օգտվելով բևեռային կոորդինատներից:

Լուծում: Մուծելով բևեռային կոորդինատներ, էլիպսի (10) հավասարումը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$r^2=\frac{1}{A\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+C\sin^2\theta}:$$

Այդ դեպքում, ըստ (9) բանաձևի, անմիջապես կստանանք [297, 9)]՝

$$P=2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{A\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+C\sin^2\theta}=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}:$$

Ամբողջ էլիպսի մակերեսն այստեղ մենք հավասարեցրինք նրա այն

մասի կրկնապատիկ մակերեսին, որը գտնվում I և IV կոորդինատային անկյուններում։ Ինչպիսի՞ դժվարություններ կհանդիպեին, եթե 276, 10)-ի արդյունքն օգտագործվեր անմիջականորեն էլիպսի ամբողջ մակերեսը հաշվելու համար։

15) (9) բանաձևը կարելի է հարմարեցնել այն դեպքին, երբ կորը տված է իր (6) տեսքի պարամետրական հավասարումներով։ Քանի որ

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \text{ և } \theta'_t = \frac{xy'_t - x'_t y}{x^2 + y^2},$$

ապա

$$\frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\left(xy'_t - x'_t y\right) dt։$$

Եթե θ անկյան փոփոխմանը α-ից մինչև β համապատասխանում է t պարամետրի փոփոխում t_0-ից մինչև T, ապա

$$P = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} (xy'_t - x'_t y)\, dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} [\varphi(t)\,\psi'(t) - \varphi'(t)\,\psi(t)]\, dt։ \qquad (14)$$

Առավել սիմետրիկության շնորհիվ այս բանաձևը հաճախ բերում է ավելի պարզ հաշվումների։ Օրինակ, եթե դրա միջոցով հաշվենք էլիպսի մակերեսը, ելնելով նրա $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ *պարամետրական հավասարումներից, կստանանք՝*

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t \cdot b\cos t + a\sin t \cdot b\sin t)\, dt = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = \pi ab։$$

16) Հաշվենք նաև (14) բանաձևով $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ *աստրոիդի մակերեսը։ Ունենք*

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t + 3a\cos^2 t\sin t \cdot a\sin^3 t]\, dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\, dt = \frac{3}{16}a^2\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3}{8}\pi a^2։$$

331. ԾԱՎԱԼԻ ԳԱՂԱՓԱՐԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ, ՆՐԱ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ։ *Այնպես, ինչպես n° 326-ում, ելնելով բազմանկյան մակերեսի գաղափարից, մենք սահմանեցինք կամայական հարթ պատկերի մակերեսի գաղափարը, այժմ կտանք մարմնի ծավալի սահմանումը, հենվելով բազմանիստի ծավալի գաղափարի վրա։*

Այսպես, դիցուք տված է կամայական ձևի (V) մարմին, այսինքն՝ սահմանափակ փակ տիրույթ եռաչափ տարածության մեջ։ Դիցուք մարմնի (S) եզրը հանդիսանում է մի փակ մակերևույթ (կամ մի քանի այդպիսի մակերևույթներ)։*

Մենք կդիտարկենք X ծավալ ունեցող (X) բազմանիստներ, որոնք ամբողջապես պարունակվում են մեր վերցրած մարմնի մեջ, և Y ծավալ ունեցող (Y) բազմանիստներ, որոնք իրենց մեջ պարունակում են այդ մարմինը։ Միշտ գոյություն ունի V_* ճշգրիտ վերին եզր X-ի համար և V^* ճշգրիտ ստորին եզր Y-ի համար, ընդ որում $V_* \leq V^*$. դրանք կարելի կլիներ անվանել մարմնի, համապատասխանաբար, ***ներքին*** *և* ***արտաքին ծավալներ***։

Եթե

$$V_* = \sup\{X\} \text{ և } V^* = \inf\{Y\}$$

երկու եզրերը համընկնում են, ապա նրանց ընդհանուր V արժեքը կոչվում է (V) մարմնի **ծավալ**։

Այստեղ էլ հեշտ է տեսնել, որ ծավալի գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար գտնվեն այնպիսի (X) և (Y) երկու բազմանիստներ, *որոնց համար* $Y-X<\varepsilon$:

Այնուհետև՝

Եթե (V) մարմինը վերլուծված է (V_1) և (V_2) երկու մարմինների, ապա այդ երեք մարմիններից երկուսի ծավալի գոյությունից բխում է նաև երրորդ մարմնի ծավալի գոյությունը, ընդ որում՝

$$V=V_1+V_2,$$

այսինքն՝ ծավալը ևս օժտված է ***ադիտիվության հատկությամբ***։

Հեշտ է վերաձևակերպել ծավալների համար նաև այն 1), 2), 3) առաջադրությունները, որոնք n° 327-*ում ապացուցվել են մակերեսների համար*։

---

* *Մենք նկատի ունենք այնպիսի անընդհատ մակերևույթ, որը թույլ է տալիս պարամետրական ներկայացում և առանց բազմապատիկ կետերի է։*

1) Որպեսզի (V) մարմինը ծավալ ունենա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենան այնպիսի, համապատասխանաբար, ընդգրկվող և ընդգրկող բազմանիստների $\{(X_n)\}$ և $\{(Y_n)\}$ երկու հաջորդականություններ, որոնց ծավալներն ունենան ը ն դ հ ա ն ո ւ ր ս ա հ մ ա ն՝

$$\lim X_n = \lim Y_n = V.$$

Հենց այդ սահմանն էլ կլինի (V) մարմնի ծ ա վ ա լ ը։

Օգտակար է նշել և այնպիսի առաջադրություն, որտեղ բազմանիստների փոխարեն դեր են խաղում կամայական մարմիններ, որոնք նախահայտորեն ծավալ ունեն։

2) Երե (V) մարմնի համար կարելի է կառուցել այնպիսի, համապատասխանաբար, ընդգրկվող և ընդգրկող բազմանիստների $\{(T_n)\}$ և $\{(U_n)\}$ երկու հաջորդականություններ, որոնք ունեն ծավալներ, ընդ որում այդ ծավալները ձգտում են ը ն դ հ ա ն ո ւ ր ս ա հ մ ա ն ի՝

$$\lim T_n = \lim U_n = V,$$

ապա (V) մարմինը ևս ունի ծավալ, որը հավասար է հենց այդ սահմանին:

Վերջում հիշատակենք դիտարկվող մարմնին մոտեցող բազմանիստները «ստանդարտ» ձևով ընտրելու հնարավորության մասին։ Մարմինը ամփոփելով մի որոշ (W) ուղղանկյուն զուգահեռանիստի ներսը, որի նիստերը զուգահեռ են կոորդինատային հարթություններին, այն տրոհենք մասերի մի շարք հարթությունների օգնությամբ, որոնք զուգահեռ են նրա նիստերին։ (V)-ի մեջ մտնող մասնակի զուգահեռանիստներից կազմենք մի $(\tilde{X})$ մարմին, իսկ դրանց միացնելով (V)-ից մասնակիորեն դուրս եկող զուգահեռանիստները, կստանանք $\tilde{Y}$ մարմին։ Այդ մարմինները ներկայացնում են այն (X) և (Y) բազմանիստների մասնավոր դեպքերը, որոնց մասին խոսք եղավ վերևում։ d-ով նշանակենք այն ուղղանկյուն զուգահեռանիստների անկյունագծերից ամենամեծը, որոնց վերլուծվել է (W) զուգահեռանիստը։

3) Երե d-ն 0-ի ձգտելիս $\tilde{X}$ և $\tilde{Y}$ երկու ծավալն էլ ձգտում

են V ընդհանուր սահմանի, և միայն այդ դեպքում, (V) մարմինը կունենա ծավալ. այդ պայմանի բավարարման դեպքում հենց հիշյալ սահմանն էլ կարտահայտի (V) մարմնի ծավալը:

Այս բոլոր պնդումների ապացույցը թողնում ենք ընթերցողին. դրանք հեշտ է ընդօրինակել n° 327 *դատողություններից:*

332. ԾԱՎԱԼՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԴԱՍԵՐԸ: *Ինչպես և մակերեսի դեպքում, (V) մարմնի համար ծավալի գոյությունը անբողջապես կախված է այդ մարմնի (S) եզրի հատկություններից: Հեշտ է ստանալ այսպիսի կրիտերիում [համեմատել 328]՝* (V) մարմնի ծավալի գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա (S) եզրը ունենա 0 ծավալ, *այսինքն՝ որ այդ եզրը հնարավոր լինի ամփոփել կամայականորեն փոքր ծավալ ունեցող բազմանիստ մարմնի մեջ:*

0 ծավալ ունեցող մակերևույթների թվին, ամենից առաջ, պատկանում են այն մակերևույթները, որոնք արտահայտվում են հետևյալ երեք տիպերին պատկանող բացահայտ հավասարումներից մեկով՝

$$z=f(x, y), \quad y=g(z, x), \quad x=h(y, z),$$

որտեղ f-*ը*, g-*ն և* h-*ը երկու արգումենտի անընդհատ ֆունկցիաներ են որոշ սահմանափակ տիրույթներում:*

Դիցուք, տված է, ասենք, առաջին տիպի հավասարում (P) տիրույթում, որը գտնվում է (R) ուղղանկյան մեջ: Համաձայն n° **164** *թեորեմայի, ինչպիսին էլ լինի* $\varepsilon>0$ *թիվը, կարելի է այդ ուղղանկյունը վերլուծել այնչափ մանր* (R_i) $(i=1, 2, \ldots, n)$ *ուղղանկյունների, որ* f *ֆունկցիայի տատանումը (P) տիրույթի այն* (P_i) *մասում, որը պարունակվում է* (R_i)-*ում, լինի* $<\frac{\varepsilon}{R}$. *Եթե* m_i *և* M_i *հանդիսանում են* f *ֆունկցիայի արժեքներից փոքրագույնը և մեծագույնը* (P_i)-*ում, ապա մեր ամբողջ մակերևույթը կարող է ամփոփվել մի այնպիսի բազմանիստի մեջ, որը կազմված է հիմքերի* R_i *մակերեսներ և* $\omega_i=M_i-m_i$ *բարձրություններ ունեցող ուղղանկյուն զուգահեռանիստներից: Այդ բազմանիստների ծավալը կլինի՝*

$$\sum \omega_i R_i < \frac{\varepsilon}{R} \sum R_i = \varepsilon,$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել:

Ուստի, եթե (V) մարմինը սահմանափակված է մի քանի անընդհատ մակերևույթներով, որոնցից յուրաքանչյուրն առանձին վերցրած արտահայտվում է բացահայտ հավասարումով (երեք տիպերից մեկով), ապա այդ մարմինն ունի ծավալ:

Գործնականում սովորաբար կիրառվող մասնավոր կրիտերիումը տալու համար սահմանենք ո ղ ո ր կ մակերևույթի գաղափարը:

Դիցուք մակերևույթն արտահայտվում է

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

պարամետրական հավասարումներով, որտեղ φ, ψ, χ ֆունկցիաներն անընդհատ են իրենց մասնակի ածանցյալների հետ միասին մի որոշ (Q) սահմանափակ փակ տիրույթում uv հարթության վրա: Այդ տիրույթի (L) սահմանը մենք կպատկերացնենք բաղկացած ո ղ ո ր կ կորերից: Վերջապես, ենթադրենք, որ մակերևույթը չունի ոչ բազմապատիկ, ոչ էլ ուրիշ եզակի կետեր: Այս բոլոր պայմանների բավարարման դեպքում մակերևույթն էլ կոչվում է ո ղ ո ր կ:

Դիցուք $\bar{M}$-ը մակերևույթի ցանկացած կետ է, որը որոշվում է պարամետրի $u = \bar{u}$, $v = \bar{v}$ արժեքներով. քանի որ նա եզակի կետ չէ, ապա կարելի է [տես 218] $(\bar{u}, \bar{v})$ կետը uv հարթության վրա շրջապատել այնպիսի*

$$\bar{\sigma} = (\bar{u} - \bar{\delta}, \bar{u} + \bar{\delta}; \bar{v} - \bar{\delta}, \bar{v} + \bar{\delta})$$

շրջակայքով, որ մակերևույթի համապատասխան տեղամասն արտահայտվի բացահայտ հավասարումով: Մնում է միայն կիրառել Բ ո ր ե լ ի լեմման [165] (Q) փակ տիրույթի և նրան ծածկող $\Sigma = \{\sigma\}$ շրջակայքերի սիստեմի նկատմամբ, որպեսզի ցույց տրվի, որ դիտարկվող ողորկ մակերևույթը հնարավոր է

---

* *Եթե $(\bar{u}, \bar{v})$ կետը գտնվում է (Q) տիրույթի (L) եզրի վրա, ապա նրա նկատմամբ պետք է ի նկատի ունենալ n° 250-ում ասածը:*

վերլուծել վերջավոր թվով այնպիսի մասերի, որոնցից յուրաքանչյուրն արտահայտվում է հավասարումների երեք տիպերից մեկով։ Այստեղից, համաձայն նախորդի, հետևում է, որ ո ղ ո ր կ մ ա կ ե ր և ո ւ յ թ ն ո ւ ն ի 0 ծ ա վ ա լ։

Այժմ պարզ է, որ

մեկ կամ մի քանի ո ղ ո ր կ մակերևույթներով սահմանափակված մարմինը նախահայտորեն ունի ծավալ։

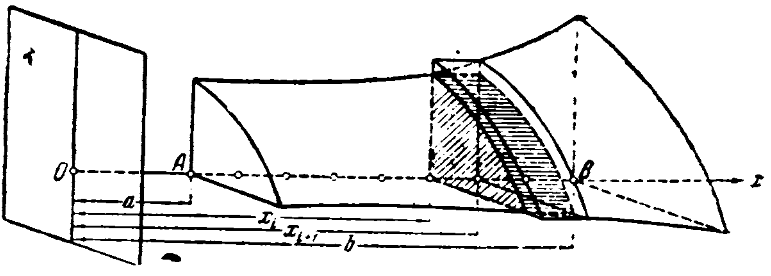
Թույլատրելի է, սակայն, մարմինը սահմանափակող մակերևույթի վրա վերջավոր թվով եզակի կետերի առկայություն ևս, որոնք կարող են առանձնացվել կամայապես փոքր ծավալ ունեցող շրջակայքերով։

333. ԾԱՎԱԼԻ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒՄԸ ԻՆՏԵԳՐԱԼՈՎ. Սկսենք գրեթե ակներև դիտողություններից. H բարձրություն ունեցող ուղիղ գլանը, որի հիմքը (P) քառակուսելի հարթ պատկերն է, ունի ծավալ, որը հավասար է հիմքի մակերեսի և բարձրության արտադրյալին՝ V=PH։

(An) *և* (Bn) *բազմանկյունները* [327 *1)*], *որոնք, համապատասխանաբար, պարունակվում են* (P)*-ի մեջ և պարունակում են իրենց մեջ* (P)*-ն, վերցնենք այնպես, որ նրանց* A_n *և* B_n *մակերեսները ձգտեն* P*-ին։ Եթե այդ բազմանկյունների վրա կառուցվեն* (X_n) *և* (Y_n) *ուղիղ պրիզմաներ* H *բարձրությամբ, ապա նրանց*

$$X_n = A_n H \text{ և } Y_n = B_n H$$

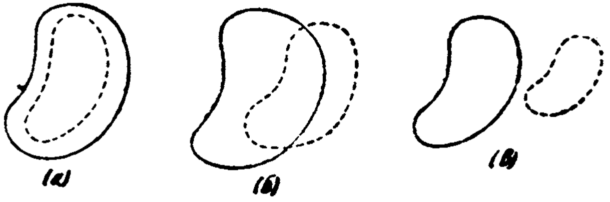
ծավալները կձգտեն V=PH *ընդհանուր սահմանին, որը,* n 331*-ի 1)-ի շնորհիվ, կլինի հենց մեր գլանի ծավալը։*



Գծ. 20։

Այժմ դիտարկենք $x=a$ *և* $x=b$ *հարթությունների միջև գտնվող մի* (V) *մարմին, և այն հատենք* x *առանցքին ուղղահայաց հարթություններով (գծ. 26)։ Ենթադրենք, թե այդ բոլոր հատույթները քառակուսելի են, և դիցուք* x *աբսցիսին համապատասխանող հատույթի մակերեսը, նշանակենք այն* $P(x)$*-ով,* x*-ի անընդհատ ֆունկցիա է* ($a \leqslant x \leqslant b$ *համար)։*

Եթե երկու նման հատույթներ պրոյեկտենք (առանց աղավաղման) x *առանցքին ուղղահայաց որևէ հարթության վրա, ապա նրանք կամ կպարունակվեն մեկը մյուսի մեջ (ինչպես 27,* (a) *գծագրում) և կամ էլ մասամբ իրար կծածկեն կամ կգտնվեն մեկը մյուսից դուրս (տես գծ. 27,* (б) *և* (в)*)։*



Գծ. 27։

Նախ կանգ առնենք այն դեպքի վրա, երբ երկու տարբեր հատույթներ, պրոյեկտվելով x *առանցքին ուղղահայաց հարթության վրա, միշտ մեկը մյուսի մեջ է գտնվում։*

Անելով այս ենթադրությունը, կարելի է պնդել, որ մարմինն ունի ծավալ, որն արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով

$$V=\int_a^b P(x)\,dx. \tag{15}$$

Ապացուցման համար x *առանցքի* $[a, b]$ *հատվածը տրոհենք մասերի՝*

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_n=b$$

կետերով և բաժանման կետերով տարած $x=x_i$ *հարթություններով ամբողջ մարմինը վերլուծենք շերտերի։ Դիտարկենք* i*-րդ*

շերտը, որը գտնվում է $x=x_i$ և $x=x_{i+1}$ $(i=0, 1, \ldots, n-1)$ հարթությունների միջև։ $[x_i, x_{i+1}]$ միջակայքում $P(x)$ ֆունկցիան ունի M_i մեծագույն արժեք և m_i փոքրագույն արժեք։ Եթե այդ միջակայքում x-ի զանազան արժեքներին համապատասխանող հատույթները տեղավորենք մեկ, ասենք, $x=x_i$ հարթության վրա, ապա նրանք բոլորն էլ (արված ենթադրության դեպքում) կպարունակվեն ամենամեծի մեջ, որի մակերեսն է M_i և կպարունակեն իրենց մեջ ամենափոքրը, որի մակերեսն է m_i։ Եթե այդ մեծագույն և փոքրագույն հատույթների վրա կառուցենք ուղիղ գլաններ $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ բարձրությամբ, ապա նրանցից մեծը կպարունակի իր մեջ մեր մարմնի դիտարկվող շերտը, իսկ փոքրը ինքը կպարունակվի այդ շերտի մեջ։ Սկզբում արված դիտողության համաձայն, այդ գլանների ծավալները կլինեն, համապատասխանաբար, $M_i\Delta x_i$ և $m_i\Delta x_i$։

Ընդգրկված գլաններից կկազմվի մի (T) մարմին, իսկ ընդգրկողներից՝ մի (U) մարմին։ Նրանց ծավալները հավասար են, համապատասխանաբար,

$$\sum_i M_i\Delta x_i \quad \text{և} \quad \sum_i m_i\Delta x_i$$

և ունեն (15) ընդհանուր սահմանը, երբ $\lambda=\max \Delta x_i$ ձգտում է զրոյի։ 311, 2)-ի շնորհիվ, այդպիսին կլինի և (V) մարմնի ծավալը*։

Կարևոր մասնավոր դեպք, երբ նախահայտորեն բավարարվում է վերևում նշված ենթադրությունը հատույթների փոխդասավորության մասին, ներկայացնում են պ տ տ մ ա ն մ ա ր մ ի ն ն ե ր ը։ Պատկերացնենք xy հարթության վրա մի կոր, որը տրված է $y=f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ հավասարումով, որտեղ $f(x)$-ը անընդհատ է և ոչ-բացասական. սկսենք պտտել նրանով սահմանափակված կորագիծ սեղանը x-երի առանցքի շուրջը (գծ. 28,

---

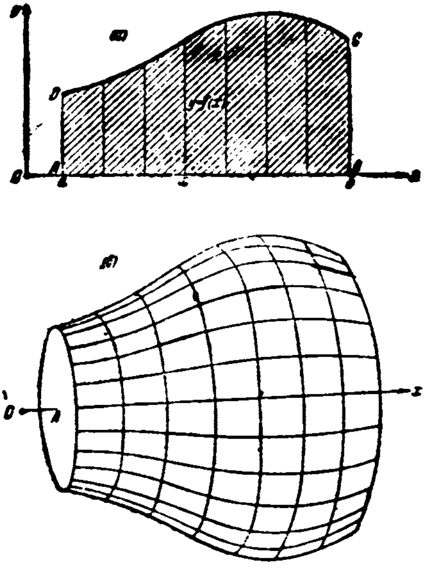
* Բաժանելով միջակայքը, օրինակ, հավասար մասերի, հեշտ է առանձնացնել ընդգրկվող և ընդգրկող մարմինների այն հ ա ջ ո ր դ ա կ ա ն ո ւ թ յ ո ւ ն ն ե ր ը, որոնց մասին խոսվում է մեջ բերված առաջադրության մեջ։

(a) և (б))։ *Ստացված (V) մարմինը, ակներևաբեն, մտնում է դիտարկվող դեպքի մեջ, որովհետև նրա հատույթները պրոյեկտվում են* x *առանցքին ուղղահայաց հարթության վրա որպես համակենտրոն շրջաններ։ Այստեղ՝*

$$P(x) = \pi y^2 = \pi[f(x)]^2,$$

այնպես որ

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx. \qquad (16)$$



Գծ. 28։

Եթե կորագիծ սեղանը սահմանափակված է և՛ ներքևից, և՛ վերևից $y_1 = f_1(x)$ *և* $y_2 = f_2(x)$ *կորերով, ապա, ակներևաբեն,*

$$V = \pi\int_a^b [y_2^2 - y_1^2] dx = \pi\int_a^b \{[f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2\} dx, \qquad (17)$$

թեև հատույթների վերաբերյալ արած ենթադրությունները այստեղ կարող է չկատարվել։ Ընդհանրապես, ապացուցված արդյունքը հեշտությամբ տարածվում է բոլոր այնպիսի մարմինների վրա, որոնք ստացվում են այն մարմինների գումարման կամ հանման միջոցով, որոնք բավարարում են վերոհիշյալ ենթադրությանը։

Ընդհանուր դեպքում կարելի է պնդել միայն հետևյալը՝ եթե (V) մարմինը ունի ծավալ*, ապա այն արտահայտվում է (15) բանաձևով։

** Այդպես կլինի, օրինակ, եթե մարմինը սահմանափակված է մեկ կամ մի քանի ողորկ մակերևույթներով* [332]։

Իրոք, վերցնելով կամայական $\varepsilon>0$, մենք կարող ենք $x=a$ *և* $x=b$ *հարթությունների միջև կառուցել զուգահեռանիստերից կազմված այնպիսի* $(\tilde{X})$ *և* $(\tilde{Y})$ *երկու մարմիններ, որ առաջինը պարունակվի* (V)*-ի մեջ, իսկ երկրորդն իր մեջ պարունակի* (V)*-ն, և ընդ որում լինի* $\tilde{Y}-\tilde{X}<\varepsilon$*։ Քանի որ այդ մարմինների նկատմամբ մեր բանաձևը, ակներևորեն, կիրառելի է, ապա նշանակելով* $A(x)$*-ով և* $B(x)$*-ով նրանց լայնական հատույթների մակերեսները, կունենանք՝*

$$\tilde{X}=\int_b^a A(x)dx, \quad \tilde{Y}=\int_a^b B(x)dx.$$

Մյուս կողմից, քանի որ $A(x)\leqslant P(x)\leqslant B(x)$*, ապա և*

$$\tilde{X}=\int_a^b A(x)\,dx\leqslant\int_a^b P(x)\,dx\leqslant\int_a^b B(x)dx=\tilde{Y},$$

այնպես որ V *ծավալը և* $\int_a^b P(x)dx$ *ինտեգրալը երկուսն էլ պարունակվում են միևնույն* $\tilde{X}$ *և* $\tilde{Y}$ *սահմանների միջև, որոնք տարբերվում են ավելի փոքր չափով, քան* ε*-ը։ Այստեղից էլ բխում է պահանջվող եզրակացությունը։*

334. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ *1) Հաշվել շրջանային կոնի* V *ծավալը, որի հիմքի շառավիղն է* r *և բարձրությունը՝* h*։*

Կոնի առանցքով տանենք հատող հարթություն և այդ առանցքն ընտրենք որպես x*-երի առանցք, սկզբնակետ համարելով կոնի գագաթը. y-ների առանցքը տանենք ուղղահայաց կոնի առանցքին (գծ. 29)։ Կոնի ծնորդի հավասարումը կլինի*

$$y=\frac{r}{h}x$$

և, ըստ (16) բանաձևի, կստանանք՝

$$V=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2h.$$

Այս արդյունքն ընթերցողին հայտնի է դպրոցական դասընթացից։

2) Դիցուք $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսը պտտվում է x-երի առանցքի շուրջը։ Քանի որ

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

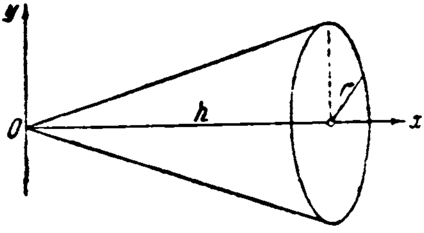
ապա պտտման էլիպսոիդի համար կգտնենք

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_{0}^{a}(a^2-x^2)dx=$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

Համանման ձևով, y-ների առանցքի շուրջը պտտումից առաջացած մարմնի ծավալի համար կգտնենք $\frac{4}{3}\pi a^2b$։ Ենթադրելով այդ բանաձևերի մեջ $a=b=r$, մենք կստանանք $\frac{4}{3}\pi r^3$ հայտնի արտահայտությունը r շառավիղ ունեցող գնդի ծավալի համար։

3) Որոշել $y=a.\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ շղթայագծի՝ x-երի առանցքի շուրջը պտտումից առաջացած մարմնի ծավալը այն հատույթների միջև, որոնք համապատասխանում են O և x կետերին։



Գծ. 29։

Ունենք՝

$$V=\pi a^2\int_0^x \mathrm{ch}^2\frac{x}{a}\,dx=\frac{1}{2}\pi a^2\int_0^x\left(1+\mathrm{ch}\frac{2x}{a}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}2\pi^2\left(x+\frac{a}{2}\mathrm{sh}\frac{2x}{a}\right)=\frac{1}{2}\pi a\left(ax+a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}\cdot a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}\right).$$

Հիշելով [322, 1)], որ $a\,\mathrm{sh}\frac{x}{a}$ մեր կորի աղեղի s երկարությունն է, վերջնականապես կստանանք $V=\frac{1}{2}\pi a(ax+sy)$։

4) Նույնը՝ $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$ ցիկլոիդի ճյուղի համար։

Կորի պարամետրական հավասարումները հեշտացնում են $x=a(t-\sin t)$, $dx=a(1-\cos t)dt$ տեղադրումները

$$V=\pi\int_0^{2\pi a} y^2dx$$

բանաձևում։ Այն է՝

$$V=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=$$

$$=\pi a^3\left(\frac{5}{2}t-4\sin t+\frac{3}{4}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=5\pi^2a^3.$$

5) Նույնը՝ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ աստղոիդի համար։ Ունենք՝

$$y=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}},\qquad V=\pi\int_{-a}^{a}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3dx=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

Առաջարկվում է կրկնել հաշվումները, ելնելով աստղոիդի պարամետրական հավասարումներից և դիմելով փոփոխականի փոխարինմանը (ինչպես նախորդ խնդրում)։

6) Գտնել $2az=x^2+y^2$ պարաբոլոիդի և $x^2+y^2+z^2=3a^2$ գնդի ընդհանուր մասի ծավալը։

Լուծում։ Այդ երկու մարմինների հետ միասին նրանց ընդհանուր մասը ևս կլինի պտտման մարմին z-երի առանցքի շուրջը։ Նշված մակերևույթների հատումը տեղի է ունենում $z=a$ հարթությամբ։

z-երի առանցքին ուղղահայաց հարթությունները դիտարկվող մարմինը հատում են շրջաններով. այդ շրջանների շառավիղների քառակուսիները հավասար են $2az$-ի, քանի դեռ $z\leq a$, և հավասար են $(3a^2-z^2)$-ի, հենց որ z-ը դառնում է $>a$։ Օգտվելով (16)-ի համանման բանաձևերից կունենանք՝

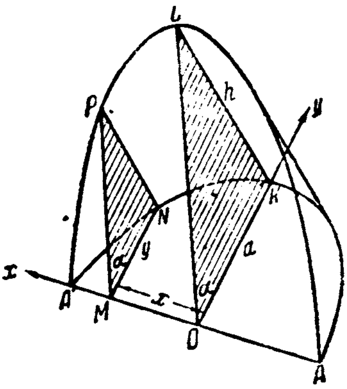
$$V=2\pi a\int_0^a zdz+\pi\int_a^{a\sqrt{3}}(3a^2-z^2)dz=\frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3}-5).$$

7) Գտնել $x^2+y^2+z^2=R^2$ գնդի և $x^2=y^2+z^2$ $(x\geq 0)$ կոնի ընդհանուր մասի ծավալը։

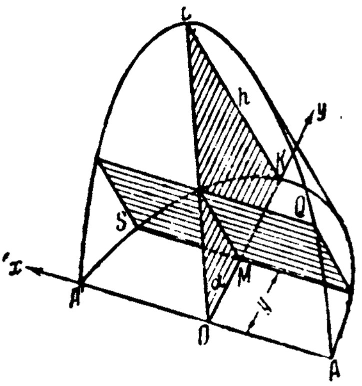
Ցուցում։ Մակերեսությունների հատումը տեղի է ունենում $x=\frac{R}{\sqrt{2}}$ հարթությամբ։ Ունենք՝

$$V=\pi\int_{0}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} x^2dx+\pi\int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R}(R^2-x^2)dx=\frac{\pi R^3}{3}(2-\sqrt{2})։$$

Մինչև այժմ մենք դիտարկում էինք (16) մասնավոր բանաձևի կիրառման օրինակներ։ Այժմ անցնենք (15) ընդհանուր բանաձևին։ Քանի որ



Գծ. 30։



Գծ. 31։

ծավալի գոյությունն ինքը բոլոր դեպքերում հեշտությամբ կարող է հիմնավորվել, օրինակ, ելնելով n° 332-ի նկատառումներից, ապա մենք դրա վրա կանգ չենք առնի, այլ կզբաղվենք միայն ծավալի հաշվումով։

8) Որոշել գլանային հատվածի ծավալը։ Այսպես կոչվում է այն երկրաչափական մարմինը, որը հատվում է ուղիղ շրջանային գլանից՝ հիմքի տրամագծով անցնող հարթությամբ (գծ. 30)։

Ենթադրենք, որ գլանի հիմքը a շառավղով մի շրջան է, որի հավասարումն է $x^2+y^2=a^2$, և որ հատող հարթությունն անցնում է AA′ տրամագծով, կազմելով հիմքի հարթության հետ α անկյուն։ Որոշենք x-երի առանցքին ուղղահայաց և այդ առանցքը M(x) կետում հատող հատույթի մակերեսը։ Այդ հատույթը կլինի ուղղանկյուն եռանկյուն. ակներևորեն,

$$P(x)=\text{մակ. } MNP=\frac{1}{2}y^2\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}(a^2-x^2)\operatorname{tg}\alpha,$$

այնպես որ, ըստ (15) բանաձևի,

$$V=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx=\frac{2}{3}a^3\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}a^2h,$$

որտեղ $h=KL$ գլանային հատվածի բարձրությունն է։

Հետաքրքրական է նշել, որ նույն ծավալը կարելի կլիներ ստանալ, ստիպելով, որ y-ների առանցքը խաղա այն դերը, ինչ մինչև այժմ խաղում էր x-երի առանցքը, այսինքն՝ հատելով մարմինը y-ների առանցքին ուղղահայաց հարթություններով (գծ. 31)։ Այդպիսի հարթությունը, որն անցնում է y օրդինատ ունեցող M կետով, մեր մարմինը կհատի SQ ուղղանկյունով, որի մակերեսը կլինի

$$P(y)=2xy\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}\alpha\cdot y\sqrt{a^2-y^2}.$$

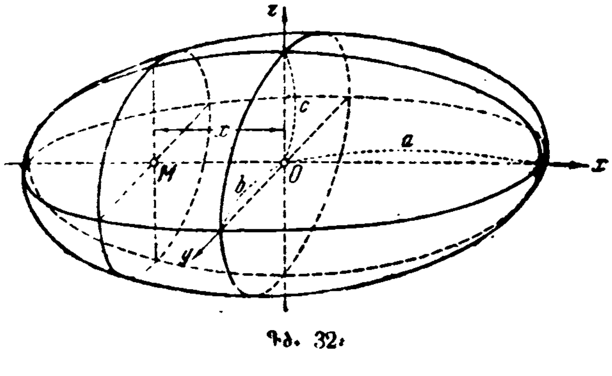
Ուստի, (15)-ի նման

$$V=2\operatorname{tg}\alpha\int_{0}^{a}y\sqrt{a^2-y^2}\,dy=\frac{2}{3}\operatorname{tg}\alpha(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{a}=\frac{2}{3}a^3\operatorname{tg}\alpha.$$

9) Գտնել այն եռառանցք էլիպսոիդի ծավալը, որը տրված է

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

կանոնական հավասարումով (գծ. 32)։



Գծ. 32։

x-երի առանցքին ուղղահայաց և այդ առանցքի M(x) կետով անցնող հարթությունը էլիպսոիդը կհատի էլիպսով. yz հարթության վրա նրա պրոյեկցիայի (առանց աղավաղման) հավասարումը կլինի այսպիսին

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1\quad(x=\text{const.}).$$

Այստեղից պարզ է, որ նրա կիսառանցքները կլինեն, համապատասխանաբար,

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \text{ և } c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

իսկ մակերեսը [տես 330, 2), 8), 15)] կարտահայտվի այսպես՝

$$P(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2)։$$

Այսպիսով, ըստ (15) բանաձևի որոնելի ծավալը

$$V=\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi abc։$$

10) Գտնել այն էլիպսոիդի ծավալը, որի հավասարումը գրված է կենտրոնի նկատմամբ՝

$$Ax^2+Bxy^2+Cz^2+2Fyz+2Gzx+2Hxy=1։$$

Լուծում։ Եթե ֆիքսենք z-ը, ապա համապատասխան հատույթի (կամ ավելի ճիշտ, xy հարթության վրա նրա պրոյեկցիայի) հավասարումը կլինի՝

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0,$$

որտեղ գրված է՝

$$a=A, \quad b=H, \quad c=B, \quad d=Gz, \quad e=Fz, \quad f=Cz^2-1։$$

Ըստ 330, 7)-ի, այդ հատույթի մակերեսը հավասար է

$$P(z)=-\frac{\pi\Delta^*}{(AB-H^2)^{3/2}},$$

եթե Δ^*-ով նշանակենք հետևյալ դետերմինանտը

$$\begin{vmatrix} A & H & Gz \\ H & B & Fz \\ Gz & Fz & Cz^2-1 \end{vmatrix}=\Delta z^2-(AB-H^2),$$

որտեղ՝

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}։$$

Տեղադրելով, կստանանք՝

$$P(z)=-\frac{\pi}{(AB-H^2)^{3/2}}[\Delta z^2-(AB-H^2)]։$$

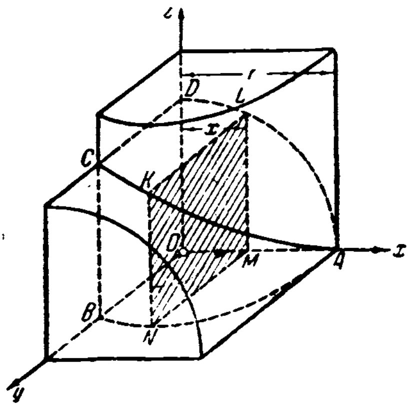
Ակներևորեն, z-ը կարող է փոփոխվել միայն հետևյալ սահմաններում՝

$$-\sqrt{\frac{AB-H^2}{\Delta}}\text{-ից մինչև } +\sqrt{\frac{AB-H^2}{\Delta}}.$$

ինտեգրելով այդ սահմաններում, վերջնականապես կգտնենք

$$V=\frac{4}{3}\pi\frac{1}{\sqrt{\Delta}}։$$

11) Դիտարկենք r շառավիղ ունեցող երկու շրջանային գլաններ, որոնց առանցքները հատվում են ուղիղ անկյան տակ, և որոշենք դրանցով սահմանափակված մարմնի ծավալը։



Գծ. 33։

Գծ. 33-ում պատկերված OABCD *մարմինը կազմում է մեզ հետաքրքրող մարմնի մեկ ութերորդ մասը։ x-երի առանցքը տանենք գլանների առանցքների հատման O կետով, ուղղահայաց երկու առանցքներին։ Այդ դեպքում,* OABCD *մարմնի այն հատույթում, որը տարված է O-ից x հեռավորության վրա, ուղղահայաց x-երի առանցքին, կստացվի* KLMN *քառակուսին, որի կողմն է* $MN=\sqrt{r^2-x^2}$, *այնպես որ* $P(x)=r^2-x^2$։ *Այդ ժամանակ, ըստ (13) բանաձևի,*

$$V=8\int_0^r(r^2-x^2)dx=\frac{16}{3}r^3։$$

12) Վերջում լուծենք նույն խնդիրը, բայց այն ենթադրությամբ, որ գլաններն ունեն տարբեր շառավիղներ՝ r և $R>r$։

Տարբերությունը, համեմատած նախկինի հետ, կլինի միայն այն, որ դիտարկվող մարմնի O կետից x հեռավորության վրա տարած հարթության հատույթում քառակուսու փոխարեն կստացվի ուղղանկյուն, որի կողմերը կլինեն $\sqrt{r^2-x^2}$ *և* $\sqrt{R^2-x^2}$։ *Այսպիսով, այս դեպքում V ծավալը կարտահայտվի արդեն էլիպտիկ ինտեգրալով՝*

$$V=8\int_0^r\sqrt{(R^2-x^2)(r^2-x)}\,dx$$

կամ, եթե կատարենք $x = r\sin\varphi$ տեղադրում և ընդունենք $k = \frac{r}{R}$, ապա՝

$$V = 8Rr^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = 8Rr^2 I.$$

Զբաղվենք I ինտեգրալը երկու տեսքի լրիվ էլիպտիկ ինտեգրալների բերելու հարցով։ Ամենից առաջ՝

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi - k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = I_1 + I_2,$$

Բայց՝

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \frac{k^2-1}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} +$$

$$+\frac{1}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \left(1-\frac{1}{k^2}\right)F(k) + \frac{1}{k^2}E(k).$$

Մյուս կողմից, մասերով ինտեգրելով, ունենք՝

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi\, d\sqrt{1-k^2\sin\varphi} = \frac{1}{2}\sin 2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\varphi\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= E(k) - 2I.$$

Այստեղից՝

$$I = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{k^2}+1\right)E(k) - \left(\frac{1}{k^2}-1\right)F(k)\right],$$

Այսպիսով, վերջնականապես՝

$$V=\frac{8R^3}{3}\{(1+k^2)E(k)-(1-k^2)F(k)\}։$$

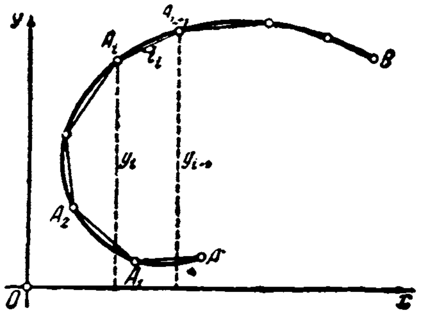
335. ՊՏՏՄԱՆ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՄԱԿԵՐԵՍԸ։ *Դիցուք* xy *հարթության վրա (այն է՝ վերին կիսահարթության մեջ) ունենք մի որոշ* AB *կոր (գծ. 34), որը տրված է (6) տեսքի հավասարումներով, որտեղ* φ*-ն ու* ψ*-ն՝ անընդհատ ֆունկցիաներ են և ունեն* φ′, ψ′ *անընդհատ ածանցյալներ։ Ենթադրելով, որ կորը չունի եզակի և բազմապատիկ կետեր, կարող ենք որպես պարամետր մտցնել* s *աղեղը, հաշված* $A(t_0)$ *կետից, և անցնել*

$$x=\Phi(s),\quad y=\Psi(s) \tag{18}$$

հավասարումներին։ S *պարամետրն այստեղ փոփոխվում է 0-ից մինչև* S, *եթե* S*-ով նշանակենք ամբողջ* AB *կորի երկարությունը։*

Եթե կորը պտտենք x*-երի առանցքի շուրջը, ապա նա կգծի մի որոշ պտտման մակերևույթ։ Խնդիր դնենք՝ հաշվել այդ մակերևույթի մակերեսը։*

Մենք հնարավորություն չունենք սահմանելու այստեղ ընդհանուր ձևով «կոր» (այսինքն՝ ոչ հարթ) մակերևույթի մակերեսի գաղափարը. այդ բանը կարվի երրորդ հատորում։ Իսկ այժմ այդ գաղափարը մենք սահմանենք մասնավորապես պտտման մակերևույթի համար և սովորենք որոշել նրա մակերեսը, ընդ որում կելնենք գլանի, կոնի և հատած կոնի կողմնային մակերևույթները հաշվելու դեռևս դպրոցական դասընթացում տրրված կանոններից։ Հետագայում մենք կհամոզվենք, որ մեր ստացած բանաձևը որպես մասնավոր դեպք մտնում է կոր մակերևույթի ընդհանուր բանաձևի մեջ։



Գծ. 34։

Վերցնենք AB *կորի վրա* A*-ից դեպի* B *ուղղությամբ մի շարք կետեր (տես գծագիրը)՝*

$$A_0=A,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_i,\ A_{i+1},\ldots,\ A_{n-1},\ A_n=B \tag{19}$$

և դիտարկենք կորին ներգծած $A_0A_1 \dots A_{n-1}B$ բեկյալը։ Այդ բեկյալը կորի հետ միասին պտտենք x-երի առանցքի շուրջը. նա կգծի մի որոշ մակերևույթ, որի մակերեսը մենք կարող ենք որոշել տարրական երկրաչափության կանոններով։ Այժմ պայմանավորվենք կորի գծած մակերևույթի մակերես ասելով հասկանալ բեկյալի գծած Q մակերևույթի մակերեսի P սահմանը, երբ մասնակի աղեղներից մեծագույնը ձգտում է զրոյի։ Պտտման մակերևույթի մակերեսի այս սահմանումը մեր ձեռքը բանալի է տալիս այն հաշվելու համար։

Մենք արդեն գիտենք, որ թվերի (19) շարքը կարող է ստացվել, ելնելով s-ի աճող արժեքների շարքից, որոնք դրված են 0-ի և S-ի միջև՝

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_i < s_{i+1} < \dots < s_{n-1} < s_n = S.$$

Բեկյալի յուրաքանչյուր օղակը x-երի առանցքի շուրջը պտտվելու ժամանակ կգծի հատած կոնի մակերևույթ*։ Եթե A_i և A_{i+1} կետերի օրդինատները նշանակենք, համապատասխանաբար, y_i և y_{i+1}, իսկ A_iA_{i+1} օղակի (հատվածի) երկարությունը՝ l_i, ապա i-րդ օղակի գծած մակերևույթի մակերեսը կլինի

$$2\pi \frac{y_i + y_{i+1}}{2} l_i.$$

Իսկ ամբողջ բեկյալի գծած մակերևույթի մակերեսը կլինի

$$Q = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} l_i.$$

Ստացված գումարը կարելի է տրոհել երկու գումարի հետևյալ ձևով՝

---

* Մասնավորապես այդ մակերևույթը կարող է դառնալ կոնի կամ գլանի մակերևույթ. Նրա մակերեսը, սակայն, այդ դեպքում ևս կարելի է հաշվել հատած կոնի ընդհանուր բանաձևի օգնությամբ։

$$Q=2\pi\sum_{i=0}^{n-1} y_i l_i+\pi\sum_{i=0}^{n-1}(y_{i+1}-y_i)l_i.$$

Քանի որ $y=\Psi(s)$ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա (հավասարաչափ անընդհատության հատկության համաձայն) կարելի է ենթադրել, որ մեր կորը վերլուծված է այնչափ մանր մասերի, որ բոլոր $y_{i+1}-y_i$ տարբերությունները իրենց բացարձակ մեծությամբ չեն կարող գերազանցել կամայապես փոքր ε դրական թիվը. Այդ դեպքում՝

$$\left|\pi\sum_{i=0}^{n-1}(y_{i+1}-y_i)l_i\right|<\varepsilon\pi\sum_{i=0}^{n-1} l_i\leqslant\varepsilon\pi S.$$

այստեղից հետևում է, որ այդ գումարը ձգտում է զրոյի, երբ $\max \Delta s_i\to 0$.

Ինչ վերաբերում է

$$2\pi\sum_{i=0}^{n-1} y_i l_i$$

գումարին, ապա այն կարելի է վերլուծել երկու գումարի՝

$$2\pi\sum_{i=0}^{n-1} y_i\Delta s_i-2\pi\sum_{i=0}^{n-1} y_i(\Delta s_i-l_i).$$

Քանի որ $\Psi(s)$ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա այն սահմանափակ է, այնպես որ բոլոր $|y_i|\leqslant M$, որտեղ M-ը մի որոշ հաստատուն թիվ է. Նշանակելով վերջին գումարը τ-ով, ունենք

$$|\tau|=2\pi\left|\sum_{i=0}^{n-1} y_i(\Delta s_i-l_i)\right|\leqslant 2\pi M\left(S-\sum_{i=0}^{n-1} l_i\right).$$

Կորը ավելի ու ավելի մանր մասերի տրոհելիս,

$$S-\sum_{i=0}^{n-1} l_i$$

տարբերությունը, աղեղի երկարությունը որպես ներգծյալ բեկյալի պարագծի սահման սահմանելու համաձայն*, պետք է ձգտի զրոյի։ Բայց այդ դեպքում նաև $\tau\to 0$։

Մնացած գումարը՝

$$\sigma=2\pi\sum_{i=0}^{n-1} y\,\Delta s_i$$

ինտեգրալային գումար է հանդիսանում

$$2\pi\int_0^S y\,ds$$

ինտեգրալի համար, որը $y=\Psi(s)$ ֆունկցիայի անընդհատության հետևանքով գոյություն ունի, այնպես որ $\max\Delta s_i\to 0$ դեպքում, σ-ն ձգտում է այդ ինտեգրալին։

Մենք ստանում ենք վերջնականապես, որ, արված ենթադրությունների դեպքում, պտտման մակերևույթի մակերեսը գոյություն ունի և արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$P=2\pi\int_0^S y\,ds=2\pi\int_0^S \Psi(s)\,ds. \tag{20}$$

Եթե վերադառնանք մեր կորի տրմանը (6) ընդհանուր պարամետրական տեսքով, ապա, նախորդ ինտեգրալի մեջ փոփոխականի փոխարինում կատարելով [տես 301, (9)], կձևափոխենք այն հետևյալ տեսքի՝

$$P=2\pi\int_{t_0}^{T} y\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=2\pi\int_{t_0}^{T}\psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt. \tag{21}$$

---

* Քանի որ աղեղի տրամագիծը, ակներևորեն, չի գերազանցում նրա երկարությանը, ապա երբ $\max\Delta s_i\to 0$, զրոյի է ձգտում նաև մասնակի աղեղների տրամագծերից մեծագույնը։

Մասնավորապես, եթե կորը տրված է $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ *բացահայտ հավասարումով, այնպես որ պարամետրի դերում հանդես է գալիս* x*-ը, կունենանք՝*

$$P=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2_x}\,dx=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \qquad (22)$$

336. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ: 1) Որոշել գնդային գոտու մակերևույթի մակերեսը: Դիցուք սկզբնակետի շուրջը r *շառավղով գծած կիսաշրջանագիծը պտտվում է* x*-երի առանցքի շուրջը: Շրջանագծի հավասարումից ունենք* $y=\sqrt{r^2-x^2}$, *այնուհետև՝*

$$y'_x=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}, \qquad \sqrt{1+y'^2_x}=\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}},$$

$$y\sqrt{1+y'^2_x}=r.$$

Այդ դեպքում այն աղեղով գծած գոտու մակերեսը, որի ծայրերն ունեն x_1 *և* $x_2>x_1$ *աբսցիսներ, ըստ (22) բանաձևի կլինի*

$$p=2\pi\int_{x_1}^{x_2} r\,dx=2\pi r(x_2-x_1)=2\pi rh,$$

որտեղ h*-ը գոտու բարձրությունն է: Այսպիսով, գնդային գոտու մակերևույթի մակերեսը հավասար է մեծ շրջանի շրջանագծի երկարության և գոտու բարձրության արտադրյալին:*

Մասնավոր դեպքում, երբ $x_1=-r$, $x_2=r$, *այսինքն՝* $h=2r$ *դեպքում, ստանում ենք ամբողջ գնդային մակերևույթի մակերեսը՝* $P=4\pi r^2$.

2) Գտնել $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ *շղթայագծի այն աղեղի պտտումից առաջացած մակերևույթի մակերեսը, որի ծայրերն ունեն* 0 *և* x *աբսցիսներ:*

Քանի որ $\sqrt{1+y'^2_x}=\mathrm{ch}\frac{x}{a}$, *ապա ըստ (22) բանաձևի*

$$P=2\pi\int_0^x \mathrm{ch}^2\frac{x}{a}\,dx=\frac{2}{a}V,$$

որտեղ V*-ն համապատասխան պտտման մարմնի ծավալն է [տես* 334, *3)]:*

3) Նույնը $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ *աստղաձևի համար:*

Բավական է կրկնապատկել աստրոիդի 1 քառորդում գտնվող $\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$ աղեղի պտտած մակերևույթի մակերեսը: Մենք արդեն ունեցել ենք $\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}=3a\sin t\cos t$. այդ դեպքում ըստ (21) բանաձևի՝

$$P=2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\cdot 3a\sin t\cos t\,dt=12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\,dt=$$

$$=12\pi a^2\frac{\sin^5 t}{5}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{12}{5}\pi a^2.$$

4) Նույնը $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ցիկլոիդի համար:

Քանի որ $y=2a\sin^2\frac{t}{2}$, $ds=2a\sin\frac{t}{2}dt$, ապա

$$P=2\pi\int_0^{2\pi}4a^2\sin^3\frac{t}{2}\,dt=16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3 u\,du=$$

$$=16\pi a^2\left(\frac{\cos^3 u}{3}-\cos u\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

5) Գտնել $r=a(1+\cos\theta)$ կարդիոիդի բևեռային առանցքի շուրջը պտտելուց առաջացած մակերևույթի մակերեսը:

Պետք է (21) հիմնական բանաձևում անցնել բևեռային կոորդինատներին՝

$$P=2\pi\int_0^S y\,ds=2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2_\theta}\,d\theta. \tag{23}$$

Մեր դեպքում $\alpha=0$, $\beta=\pi$, և

$$y=r\sin\theta=a(1+\cos\theta)\sin\theta=4a\cos^3\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2},\quad ds=2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta,$$

ուստի

$$P=2\pi\cdot 8a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta=\frac{32}{5}\pi a^2\text{։}$$

6) Նույնը $r^2=2a^2\cos 2\theta$ *լեմնիսկատի համար։*

Այստեղ $y=a\sqrt{2}\sqrt{\cos^2\theta}\sin\theta$, $ds=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta$, *այնպես որ, ըստ (23) բանաձևի,*

$$P=2\cdot 2\pi\cdot 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\,d\theta=8\pi a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\doteq 7{,}361\,a^2\text{։}$$

Վերջապես,

7) որոշենք պտտման էլիպսոիդի, ինչպես ձգվածի, այնպես էլ սեղմվածի (սֆերոիդի), մակերևույթը։

Եթե $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *էլիպսը պտտվում է x-երի առանցքի շուրջը, և* $a>b$, *ապա ունենք հաջորդաբար՝*

$$y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2,\quad yy'=-\frac{b^2}{a^2}x,$$

$$y\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{y^2+(yy')^2}=\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2+\frac{b^4}{a^4}x^2}=$$

$$=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}\text{։}$$

Բայց $a^2-b^2=c^2$, *որտեղ* c-*ն ֆոկուսի հեռավորությունն է կենտրոնից, և* $\frac{c}{a}$ *հավասար է էլիպսի* ε *էքսցենտրիսիտետին։ Այսպիսով*

$$y\sqrt{1+y'^2}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}$$

և

$$P=2\pi\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx=4\pi\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx=$$

$$=4\pi\frac{b}{a}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}+\frac{a^2}{2\varepsilon}\arcsin\frac{\varepsilon x}{a}\right)\Bigg|_0^a=$$

$$=2\pi\frac{b}{a}\left(a\sqrt{a^2-\varepsilon^2a^2}+\frac{a^2}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right)\cdot$$

բայց $a^2-\varepsilon^2a^2=a^2-c^2=b^2$, *այնպես որ վերջնականապես ունենք*

$$P=2\pi b\left(b+\frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right),$$

Եթե էլիպսը պտտվում է փոքր առանցքի շուրջը, ապա, որպեսզի ավելի հարմար լինի օգտվել արդեն արված հաշվումներից, մենք կհամարենք, որ x-երի առանցքը ծառայում է որպես փոքր առանցք։ Այդ դեպքում $(y\sqrt{1+y'^2})$-ի համար ստացված արտահայտության մեջ պետք է միայն տեղափոխել a-ն և b-ն, այնպես որ այժմ

$$y\sqrt{1+y'^2}=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\frac{a^2--b^2}{b^2}x^2}=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}x^2}.$$

այդ դեպքում

$$P=2\pi\frac{a}{b}\int_{-b}^{b}\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}x^2}\,dx=$$

$$=2\pi\frac{a}{b}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}x^2}+\frac{b^3}{2c}\log\left(\frac{c}{b}x+\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}x^2}\right)\right]\Bigg|_{-b}^{b}=$$

$$=2a\pi\left(\sqrt{b^2+c^2}+\frac{b^2}{2c}\log\frac{\sqrt{b^2+c^2}+c}{\sqrt{b^2+c^2}-c}\right).$$

բայց $\sqrt{b^2+c^2}=a$, $c=\varepsilon a$, այնպես որ P-ի համար վերջնական արտահայտությունը կլինի այսպիսին՝

$$P=2\pi a\left(a+\frac{b^2}{2c}\log\frac{a+c}{a-c}\right)=2\pi a\left(a+\frac{b^2}{2a}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right).$$

337. ԳԼԱՆԱՁԻՆ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՄԱԿԵՐԵՍԸ։ Դիտարկենք կոր մակերևույթի մի մասնավոր տեսակ ևս, որի համար նույնպես կսահմանենք *մակերեսի* գաղափարը (կռահելով այն ընդհանուր սահմանումը, որը միայն հետագայում կտրվի)։ Մենք նկատի ունենք *գլանային մակերևույթը*։

Վերադառնանք xy հարթության վրա գտնվող AB կորին, որի մասին խոսք եղավ n° 335-ում։ Ընդունելով այն որպես ուղղորդ, պատկերացնենք մի գլանային մակերևույթ, որի ծնորդը զուգահեռ է z-երի առանցքին (գծ. 35)։ Այդ մակերևույթի վրա տանենք մի CD կոր, որը յուրաքանչյուր ծնորդի հետ հատվում է մեկ կետում. այդ կորը կորոշվի, եթե (6) հավասարումներին միացվի նաև երրորդը՝

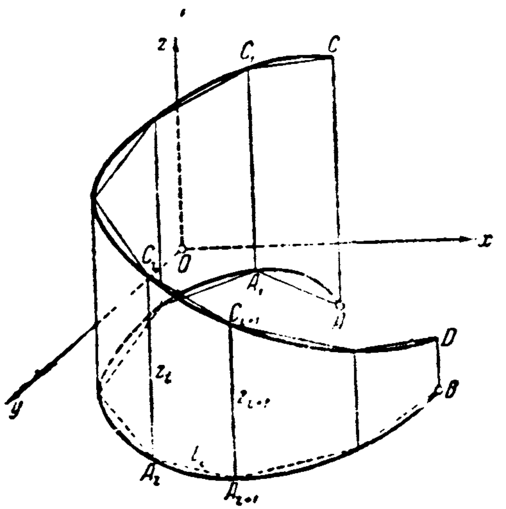
$$z=\chi(t)\quad(\chi>0).\tag{24}$$

Խոսքը վերաբերում է գլանային մակերևույթի՝ «այդ կորի տակ» գտնվող մասի P մակերեսը հաշվելուն։

Ինչպես և n° 335-ում, որպես պարամետր մտցնենք s աղեղը. այդ դեպքում ոչ միայն AB կորի (6) հավասարումները կփոխարինվեն (18) հավասարումներով, այլև (24) հավասարումը կդառնա

$$z = X(s)\cdot$$

AB կորին ներգծելով $AA_1\ldots A_{n-1}B$ բեկյալը և, դրան համապատասխան, CD կորին՝ $CC_1\ldots C_{n-1}D$ բեկյալը (տես գծագիրը), $A_iA_{i+1}C_{i+1}C_i$ սեղաններից կազմենք հարթանիստ մակերևույթ, որը ներգծված է դիտարկվող գլանային մակերևույթին։ Այդ գլանային մակերևույթի մակերես ասելով կհասկանանք այստեղ հիշված հարթանիստ մակերևույթի Q մակերեսի P սահմանը։



Գծ. 35։

Ընդունելով $z_i = A_iC_i$, ունենք (պահպանելով մյուս նախկին նշանակումները)

$$Q = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{z_i + z_{i+1}}{2}\, l_i\cdot$$

Նույնպիսի նկատառումների օգնությամբ, ինչ որ n° 335-ում (ընթերցողն ինքը կարող է այդ անել լրիվին), հարցը հանգում է

$$\sum_{i=0}^{n-1} z_i \Delta s_i$$

գումարի սահմանը հաշվելուն, որը, ինչպես հեշտ է տեսնել, ինտեգրալային գումար է։ Վերջնականապես՝

$$P = \int_0^S z\,ds = \int_0^S \Psi(s)\,ds^{*}\cdot$$

Վերադառնալով t կամայական պարամետրին, հեշտ է ստանալ նաև ընդհանուր բանաձև՝

$$P = \int_{t_0}^{T} z\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt = \int_{t_0}^{T} \chi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt\cdot \qquad (25)$$

* Այս արդյունքը միանգամայն ակնառու է դառնում, եթե գլանային մակերևույթը պատկերացնենք հարթության վրա փռված, այնպես որ դիտարկվող պատկերը կդառնա «կորագիծ սեղան»։

Վերջապես, AB կորի $y=f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ բացահայտ տրման դեպքում այդ բանաձևը կարտագրվի այսպես՝

$$P=\int_a^b z\sqrt{1+y'^2_x}\,dx=\int_a^b \chi(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \qquad (26)$$

338. **Օրինակներ:** Դիցուք գծ. 36-ում AB կորը ներկայացնում է մի պարաբոլ, որի գագաթը գտնվում է B կետում: Նրա հավասարումը (ըստ գծագրի նշանակումների) կլինի

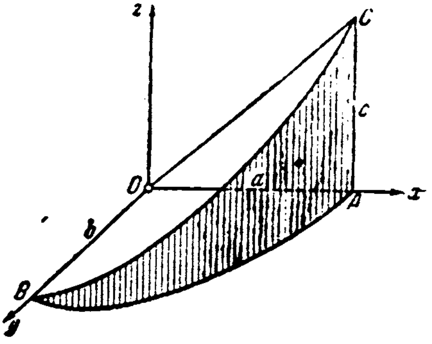
$$y=b-\frac{bx^2}{a^2}:$$

Նրա վրա կառուցված գլանային մակերևույթը հատված է OBC հարթությամբ, որի հավասարումն է

$$z=\frac{c}{a}x:$$

Գտնել գլանային մակերևույթի ABC մասի P մակերեսը:

Լուծում: Ըստ (26) բանաձևի՝



Գծ. 36:

$$P=\int_0^a z\sqrt{1+y'^2}\,dx=\frac{c}{a^3}\int_0^a x\sqrt{a^4+4b^2x^2}\,dx=\frac{c}{12b^2}\left[(a^2+4b^2)^{\frac{3}{2}}-a^3\right]:$$

2) Եթե AB կորը լինի $y=\sqrt{a^2-x^2}$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$ շրջանագծի մեկ քառորդ մասը, ապա (26) բանաձևից չի կարելի օգտվել անմիջապես, որովհետև $x=a$ դեպքում y'_x ածանցյալը դառնում է ∞: Դիմելով

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t\left(0<t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

պարամետրական ներկայացմանը, մենք ըստ (25) ընդհանուր բանաձևի կունենանք

$$P=\int_0^{\frac{\pi}{2}} z\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}\,dt=ac\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=ac:$$

Եթե վերադառնանք այն գլանային հատվածին, որի մասին խոսք եղավ 334,-ի 8)-ում, ապա նրա կողմնային մակերևույթը, ինչպես հետևում է հենց նոր ստացված արդյունքներից, հավասար կլինի 2ah ($c=h$)։

3) Վերջապես, լուծենք նույն խնդիրն այն ենթադրությամբ, որ որպես AB կոր կլինի

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t\quad \left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

էլիպսի քառորդը։ [Բացահայտ հավասարումից այստեղ չպետք է օգտվել նույն պատճառով, ինչ որ վերևում։]

(ա) Դիցուք նախ $a>b$։ Մտցնելով էլիպսի $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ էքսցենտրիսիտետը, ըստ (25) բանաձևի, կստանանք

$$P=c\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=\frac{c}{b}\int_0^a\sqrt{b^2+\varepsilon^2u^2}\,du$$

(տեղադրումն է $u=a\sin t$), և վերջնականապես

$$P=\frac{1}{2}ac\left\{1+\frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right\}.$$

(բ) Այն դեպքում, երբ $a<b$, էքսցենտրիսիտետը՝ $\varepsilon=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$ և

$$P=bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\cos t\,dt=\frac{bc}{2}\left\{\sqrt{1-\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right\}.$$

4). Դիտարկենք $x^2+y^2=Rx$ գլանային մակերևույթի այն մասը, որը սահմանափակված է $x^2+y^2+z^2=R^2$ գնդային մակերևույթով (սֆերայով)։ Հատումից առաջացած կորը [Վիվիանիի կոր, 219, 1)], ինչպես գիտենք, կարող է պարամետրական տեսքով ներկայացվել այսպես՝

$$x=R\sin^2 t,\quad y=R\sin t\cos t,\quad z=R\cos t.$$

Եթե սահմանափակվենք առաջին ութնորդով (օկտանտ), ապա t-ն այստեղ պետք է փոփոխել 0-ից մինչև $\frac{\pi}{2}$։ Ակներևաբար, առաջին երկու հավասարումները խաղում են (6) հավասարումների դերը, իսկ վերջինը՝ (24) հավասարման դերը։

Հիշյալ մակերևույթի մակերեսը (25) բանաձևի համաձայն կլինի՝

$$P = 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = 4R^2 ։$$

5) Որոշել այն մարմնի մակերևույթի մակերեսը, որն ընդհանուր է r *շառավիղ ունեցող երկու այնպիսի գլանների համար, որոնց առանցքները հատվում են ուղիղ անկյան տակ [համեմատել 334, 11)]։ Վերցնենք կոորդինատների այնպիսի սիստեմ, ինչպես գծ. 33-ում։*

Սահմանափակվելով գլանային մակերևույթներից մեկով, առաջին ութնորդի համար ունենք

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t$$

և, վերջապես,

$$z = \sqrt{r^2 - x^2} = r\sin t \qquad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right) ։$$

Ըստ (25) բանաձևի, որոնելի մակերեսի կեսը հավասար է

$$\frac{1}{2} P = 8r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = 8r^2, \text{ այնպես որ } P = 16r^2 ։$$

6) Նույն խնդիրը, բայց այն դեպքի համար, երբ գլաններն ունեն տարբեր շառավիղներ՝ r *և* $R > r$ *[համեմատել 334, 12)]։*

Նախ հաշվենք r *շառավիղ ունեցող գլանային մակերևույթի մի մասի մակերեսը։ Ունենք*

$$x = r\sin t, \quad y = r\cos t \quad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

$$z = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{R^2 - r^2\sin^2 t} = R\sqrt{1 - k^2\sin^2 t} \quad \left(k = \frac{r}{R}\right) ։$$

Ըստ (25) բանաձևի

$$P_1 = 8Rr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2 t} \, dt = 8RrE(k) ։$$

Այժմ դիտելով R *շառավիղ ունեցող գլանային մակերևույթին, փոխենք* z*-երի առանցքի և* y*-ների առանցքի դերերը։ Այս անգամ*

$$x = R\sin t, \quad z = R\cos t,$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - R^2\sin^2 t} = r\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}\sin^2 t} \qquad \left(k = \frac{r}{R}\right),$$

ընդ որում t-ն կարող է փոփոխվել (եթե, ինչպես միշտ, սահմանափակվենք առաջին ութերորդով) միայն 0-ից մինչև arcsin k: Այդ դեպքում, (25)-ին համաձայն բանաձևով, կստանանք

$$P_2=8\int_0^{\arcsin k} y\sqrt{x_t'^2+z_t'^2}\,dt=8Rr\int_0^{\arcsin k}\sqrt{1-\frac{1}{k^2}\sin^2 t}\,dt.$$

Տեղադրելով

$$\sin t=k\sin\varphi,\quad dt=\frac{k\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

որտեղ φ-ն փոփոխվում է 0-ից մինչև $\frac{\pi}{2}$, կստանանք

$$\int_0^{\arcsin k}\sqrt{1-\frac{1}{k^2}\sin^2 t}\,dt=k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Վերջին ինտեգրալին մենք արդեն հանդիպել ենք 334, 12)-ում. այն հավասար է

$$\left(1-\frac{1}{k^2}\right)F(k)+\frac{1}{k^2}E(k).$$

Այսպիսով,

$$P_2=8R^2\{E(k)-(1-k^2)F(k)\}.$$

Վերջնականապես՝

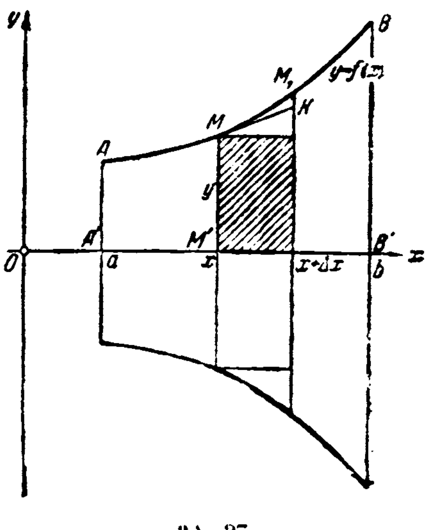
$$P=P_1+P_2=8R(R+r)\{E(k)-(1-k)F(k)\}.$$

Սրանով սպառվում են որոշյալ ինտեգրալի պարզագույն երկրաչափական կիրառումները: Երկրաչափական պատկերների հաշվման ավելի բարդ և ընդհանուր դեպքերին մենք կհանդիպենք երրորդ հատորում:

§ 3. ՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ՈՒ ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ

339. ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԿԻՐԱՌՄԱՆ ՍԽԵՄԱՆ. *Նախքան անցնելը որոշյալ ինտեգրալի կիրառմանը մեխանիկայի, ֆիզիկայի և տեխնիկայի բնագավառում, օգտակար է առաջուց պարզել այն ճանապարհը, որով գործնական հարցերում սովորաբար հանգում են որոշյալ ինտեգրալին. Այդ նպատակով մենք կուրվագծենք ինտեգրալի կիրառման ընդհանուր սխեման, լուսաբանելով այն արդեն ուսումնասիրված երկրաչափական խնդիրների օրինակներով.*

Պատկերացնենք, որ պահանջվում է որոշել մի որոշ հաստատուն մեծություն (երկրաչափական կամ այլ մեծություն), որը կապված է [a, b] *միջակայքի հետ. Ընդ որում դիցուք* [a, b] *միջակայքի մեջ պարունակվող յուրաքանչյուր* [α, β] *մասնակի միջակայքին համապատասխանում է* Q *մեծության որոշ մաս այնպես, որ* [a,b] *միջակայքի վերլուծումը մասնակի միջակայքերի որպես հետևանք առաջ է բերում նաև* Q *մեծության համապատասխան մասերի վերլուծում: Կարելի կլիներ ասել, որ դիտարկվում է մի որոշ «ադիտիվ ֆունկցիա միջակայքից կախված», և պետք է հաշվել նրա այն արժեքը, որը համապատասխանում է ամբողջ* [a, b] *միջակայքին:*



Գծ. 37.

Օրինակի համար վերցնենք հարթության վրա $y=f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ *կորը (գծ. 37)**. *Այդ դեպքում՝ 1)* AB *կորի* S *երկարությունը, 2) այդ*

---

* *Ենթադրվում է, որ* f(x) *ֆունկցիան անընդհատ է և ունի անընդհատ ածանցյալ. Որոշակիության համար ենթադրենք, որ կորը շարունակ դեպի վեր է գնում և գոգավորությամբ ուղղված է դեպի վերև:*

կորով սահմանափակված $AA'B'B$ կորագիծ սեղանի P մակերեսը և 3) այդ սեղանի՝ x-երի առանցքի շուրջը պտտումից առաջացած մարմնի V ծավալը,—բոլոր երեքն էլ նշված տիպի մեծություններ են։ Դժվար չէ իրեն հաշիվ տալ, թե դրանք ինչպիսի «միջակայքի ֆունկցիաներ» են առաջանում։

Դիտարկենք Q մեծության ΔQ «էլեմենտը», որը համապատասխանում է $[x, x+\Delta x]$ «տարրական (էլեմենտար) միջակայքին»։ Ելնելով խնդրի պայմաններից, աշխատում են ΔQ-ի համար գտնել $q(x)\Delta x$ տեսքի մոտավոր արտահայտություն՝ Δx-ի նկատմամբ գծային, այնպես որ նա տարբերվի ΔQ-ից թերևս միայն ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր մեծությամբ։ Ուրիշ խոսքով, ΔQ անվերջ փոքր «էլեմենտից» ($\Delta x \to 0$ դեպքում) առանձնացնում են նրա գլխավոր մասը։ Պարզ է, որ այդ դեպքում

$$\Delta Q \doteq q(x)\,\Delta x \qquad (1)$$

մոտավոր հավասարության հարաբերական սխալը կձգտի զրոյի Δx-ի հետ միասին։

Այսպես, 1) օրինակում աղեղի $\overset{\frown}{MM_1}$ էլեմենտը կարելի է փոխարինել շոշափողի MK հատվածով, այնպես որ ΔS-ից առանձնացվում է

$$\sqrt{1+y'^2_x}\,\Delta x = \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\Delta x$$

գծային մասը։ 2) օրինակում բնական է ΔP էլեմենտար շերտը փոխարինել ընդգրկվող ուղղանկյունով, որի մակերեսն է՝

$$y\Delta x = f(x)\,\Delta x\text{։}$$

Վերջապես, 3) օրինակում ΔV էլեմենտար շերտից առանձնացվում է նրա գլխավոր մասը՝ ընդգրկվող շրջանային գլանի տեսքով, որի ծավալն է

$$\pi y^2\Delta x = \pi[f(x)]^2\,\Delta x\text{։}$$

Բոլոր երեք դեպքերում էլ դժվար չէ ցույց տալ, որ այդպիսի փոխարինումից առաջացած սխալը կլինի ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր մեծություն, քան Δx-ն է։ Այն է*, 1) դեպքում նա կլինի ավելի փոքր, քան $KM_1=\Delta y-dy$, 2) դեպքում կլինի $\Delta x\,\Delta y$-ից փոքր կարգի, իսկ 3) դեպքում՝ $\pi(2y+\Delta y)\,\Delta x\,\Delta y$-ից փոքր կարգի։

* Նախորդ էջի ծանոթության մեջ արած ենթադրությունների դեպքում։

Հենց որ այդ արված է, կարելի է պնդել, որ որոնելի Q մեծությունը ճշտորեն արտահայտվում է հետևյալ ինտեգրալով՝

$$Q = \int_a^b q(x)\,dx. \tag{2}$$

Այդ բացատրելու համար $[a, b]$ միջակայքը $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ կետերի միջոցով էլեմենտար միջակայքերի վերլուծենք՝

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_i, x_{i+1}], \ldots, [x_{n-1}, b].$$

Քանի որ յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}]$ կամ $[x_i, x_i+\Delta x_i]$ միջակայքին համապատասխանում է մեր մեծության այնպիսի մաս, որը մոտավորապես հավասար է $q(x_i)\Delta x_i$, ապա որոնելի Q մեծությունը մոտավորապես կարտահայտվի հետևյալ գումարով

$$Q \doteq \sum_i q(x_i)\Delta x_i.$$

Ստացված արժեքի ճշգրտության աստիճանը կլինի այնքան ավելի բարձր, որքան ավելի մանր են մասնակի միջակայքերը. այնպես որ Q-ն, ակներևորեն, կլինի հիշյալ գումարի սահմանը, այսինքն՝ իրոք կարտահայտվի $\int_a^b q(x)\,dx$ որոշյալ ինտեգրալով։

Այս լրիվ չափով վերաբերում է դիտարկված բոլոր երեք օրինակներին։ Եթե S, P, V մեծությունների համար վերևում ստացանք մի փոքր այլ բանաձևեր, ապա այդ այն պատճառով էր, որ մեր խնդիրը կայանում էր ոչ միայն նրանց հաշվելում, այլև նրանց գոյությունն ապացուցելում՝ համաձայն նախօրոք արված սահմանումների։

Այսպիսով, ամբողջ գործը հանգում է (1) մոտավոր հավասարությունը ստանալուն, որը սովորաբար գրվում է հետևյալ ձևով՝

$$dQ = q(x)\,dx. \tag{3}$$

Այնուհետև մնում է միայն «հանրագումարել» այդ տարրերը, որը և բերում է (2) բանաձևին։

Ընդգծում ենք, որ այստեղ սովորական գումարի փոխարեն ինտեգրալից օգտվելը շատ էական է։ Գումարը Q-ի համար կտար միայն մոտավոր արտահայտություն, որովհետև նրա վրա կանդրադառնային (3) տիպի առանձին հավասարությունների սխալները. իսկ սահմանային անցումը, որի օգնությամբ գումարից ինտեգրալ է ստացվում, ոչնչացնում է սխալը և բերում է միանգամայն ճշգրիտ արդյունքի։ Այսպիսով, սկզբում պարզության շահերից ելնելով, dQ էլեմենտի արտահայտության մեջ դեն են ձգվում բարձր կարգի անվերջ փոքր մեծությունները և առանձնացվում է գլխավոր մասը, իսկ այնուհետև, նկատի ունենալով ճշգրտության շահերը, գումարումը փոխարինվում է ինտեգրումով, և պարզ ստացվող արդյունքը դառնում է ճշգրիտ։

Սակայն կարելի կլիներ հարցին մոտենալ և այլ տեսակետից։ $Q(x)$-ով նշանակենք Q մեծության փոփոխական մասը, որը համապատասխանում է $[a, x]$ միջակայքին, ընդ որում $Q(a)$-ն բնականաբար համարում ենք հավասար 0-ի։

Մեր օրինակներում այդ կլիներ՝ 1) $\overset{\frown}{AM}$ փոփոխական աղեղը 2) $AA'M'M$ փոփոխական սեղանի մակերեսը և, վերջապես, 3) այն մարմնի ծավալը, որն ստացվում է հենց այդ սեղանի պտտումից։

ΔQ մեծությունը պարզապես $Q(x)$ ֆունկցիայի աճն է, իսկ $q(x)\Delta x$ արտադրյալը, որը նրա գլխավոր մասն է ներկայացնում, ոչ այլ ինչ է, եթե ոչ այդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը [102, 103]։ Այսպիսով, (3) հավասարությունը, որը գրված է դիֆերենցիալ նշանակումներով, իրականում հանդիսանում է ոչ թե մոտավոր, այլ ճշգրիտ հավասարություն։ Այստեղից նույնպես միանգամից ստացվում է պահանջվող արդյունքը։

Մենք գերադասեցինք, այնուամենայնիվ, մանրամասնորեն զարգացնել կիրառումների մեջ ավելի արդյունավետ հանդիսացող անվերջ փոքր տարրերի հանրագումարման գաղափարը։

340\. ԿՈՐԻ ՍՏԱՏԻԿ ՄՈՄԵՆՏՆԵՐՆ ՈՒ ԾԱՆՐՈՒԹՅԱՆ ԿԵՆՏՐՈՆԸ ԳՏՆԵԼԸ։ Ինչպես հայտնի է, m մասսա ունեցող նյութական կետի M ստատիկ մոմենտը որևէ առանցքի նկատմամբ հավասար է m մասսայի և կետի՝ առանցքից ունեցած d հեռավորության արտադրյալին։ $m_1, m_2, \ldots m_n$ մասսաներ ունեցող և առանցքի հետ մի հարթության մեջ գտնվող n նյութական կետերի սիստեմի դեպքում, երբ այդ կետերն առանցքից ունեն. հա-

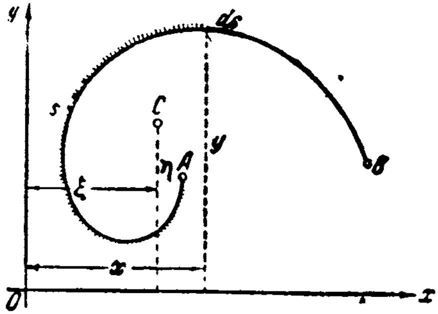
համապատասխանաբար, $d_1, d_2, \ldots, d_n$ հեռավորություններ, ստատիկ մոմենտը կարտահայտվի հետևյալ գումարով

$$M=\sum_i m_i d_i \text{։}$$

Ընդ որում, առանցքի մի կողմում գտնվող կետերի հեռավորությունները վերցվում են պլյուս նշանով, իսկ մյուս կողմում գտնվողները՝ մինուս նշանով։

Իսկ եթե մասսաները չեն կենտրոնացած առանձին կետերում, այլ դասավորված են անընդմեջ, լցնելով գիծ կամ հարթ պատկեր, ապա այդ դեպքում ստատիկ մոմենտն արտահայտելու համար գումարի փոխարեն կպահանջվի ինտեգրալ։

Կանգ առնենք որևէ AB հարթ կորի երկարությամբ դասավորված մասսաների՝ x-երի առանցքի նկատմամբ M ստատիկ մոմենտը որոշելու հարցի վրա (գծ. 38)։ Ընդ որում մենք ենթադրենք, որ այդ կորը համասեռ է, այնպես որ նրա ρ գծային խտությունը (այսինքն՝ երկարության միավորի վրա գտնվող մասսան) հաստատուն կլինի. պարզության համար ենթադրենք նույնիսկ, որ



Գծ. 38։

$\rho=1$ (հակառակ դեպքում հարկ կլինի ստացված արդյունքը միայն բազմապատկել ρ-ով)։ Այս ենթադրությունների դեպքում մեր կորի ցանկացած աղեղի մասսան չափվում է պարզապես նրա երկարությամբ, և ստատիկ մոմենտի գաղափարը զուտ երկրաչափական բնույթ է ստանում։ Նկատենք ընդհանրապես, որ երբ խոսում են կորի ստատիկ մոմենտի (կամ ծանրության կենտրոնի) մասին — առանց հիշատակելու նրա երկարությամբ մասսաների բաշխման մասին, ապա միշտ էլ նկատի ունեն հենց այնպիսի ստատիկ մոմենտ (ծանրության կենտրոն), որը որոշված է հիշյալ ենթադրությունների դեպքում։

Այժմ առանձնացնենք կորի մի որևէ ds էլեմենտ (որի մասսան նույնպես արտահայտվում է ds թվով)։ Այդ էլեմենտը մոտավորապես ընդունելով որպես նյութական կետ, որը գտնվում է առանցքից y հեռավորության վրա, նրա ստատիկ մոմենտի համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունը

$$dM_x = y\,ds \text{։}$$

Հանրագումարելով այդ էլեմենտար ստատիկ մոմենտները, ընդ որում որպես

անկախ փոփոխական վերցնելով s աղեղը, որը հաշվվում է A կետից, կստանանք

$$M_x = \int_0^S y ds. \tag{4}$$

Համանման ձևով է արտահայտվում մոմենտը նաև y-ների առանցքի նկատմամբ՝

$$M_y = \int_0^S x\, ds. \tag{5}$$

Իհարկե, այստեղ ենթադրվում է, որ y-ը (կամ x-ը) արտահայտված է s-ի միջոցով։ Գործնականորեն այս բանաձևի մեջ s-ը փոխարինում են այն փոփոխականով (t, x կամ θ), որը կորի անալիտիկ ներկայացման մեջ անկախ փոփոխականի դեր է կատարում։

Կորի M_x և M_y ստատիկ մոմենտները թույլատրում են հեշտությամբ որոշել նրա C (ξ, η) ծանրության կենտրոնը։ C կետն ունի այն հատկությունը, որ եթե այնտեղ կենտրոնացնենք կորի ամբողջ S «մասսան» (որն արտահայտվում է նույն թվով, ինչ որ երկարությունը), ապա այդ մասսայի մոմենտը ցանկացած առանցքի նկատմամբ համընկնում է կորի մոմենտի հետ այդ առանցքի նկատմամբ. մասնավորապես, եթե դիտարկենք կորի մոմենտները կոորդինատային առանցքների նկատմամբ, ապա կգտնենք

$$S\xi = M_y = \int_0^S x\, ds, \quad S\eta = \int_0^S y\, ds,$$

որտեղից

$$\xi = \frac{M_y}{S} = \frac{1}{S}\int_0^S x\, ds, \quad \eta = \frac{M_x}{S} = \frac{1}{S}\int_0^S y\, ds. \tag{6}$$

Ծանրության կենտրոնի η օրդինատի բանաձևից մենք կստանանք մի նշանավոր երկրաչափական հետևանք։ Իրոք, ունենք

$$\eta S = \int_0^S y d,$$

որտեղից

$$2\pi\eta S = 2\pi\int_0^S y\, ds.$$

բայց այդ հավասարության աջ մասը ներկայացնում է AB կորի պտտումից առաջացած մակերևույթի P մակերեսը [տես 335, 2)], իսկ հավասարության ձախ մասում $2\pi\eta$-ն նշանակում է կորի ծանրության կենտրոնի՝ x-երի առանցքի շուրջը պտտումից գծված շրջանագծի երկարությունը, S-ն էլ մեր կորի երկարությունն է։ Այսպիսով, հանգում ենք Գուլդինի (P. Guldin) հետևյալ թեորեմային՝

Կորն իրեն չհատող որևէ առանցքի շուրջը պտտելուց առաջացած մակերևույթի մեծությունը հավասար է այդ կորի աղեղի երկարությանը, բազմապատկած կորի C ծանրության կենտրոնի գծած շրջանագծի երկարությամբ *(գծ. 38)*՝

$$P = S\cdot 2\pi\eta.$$

Այս թեորեման հնարավորություն է տալիս որոշել կորի ծանրության կենտրոնի η կոորդինատը, եթե հայտնի են նրա S երկարությունը և նրա գծած պտտման մակերևույթի P մակերեսը։

341. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Գտնել $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *էլիպսի կամարի ստատիկ մոմենտը x-երի առանցքի նկատմամբ (ենթադրելով, որ a>b)։*

Վերին (կամ ստորին) կիսաէլիպսի համար այդ մոմենտը միայն 2π արտադրիչի բացակայությամբ է տարբերվում համապատասխան պտտման մակերևույթի մեծությունից։ Ուստի [տես 336, 7)]՝

$$M_x = 2b\left(b+\frac{a}{2}\arcsin\varepsilon\right).$$

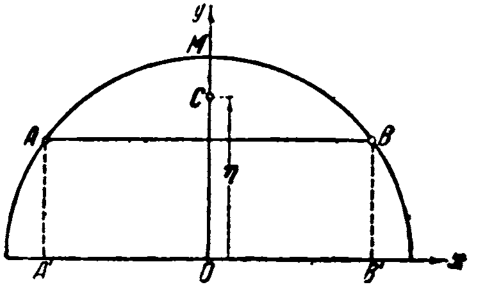
2) Եթե դիտարկվող աղեղը սիմետրիկ է որևէ ուղիղի նկատմամբ, ապա աղեղի ծանրության կենտրոնն անհրաժեշտաբար գտնվում է այդ ուղիղի վրա։

Ապացուցման համար սիմետրիայի առանցքն ընդունենք որպես y-ների առանցք, իսկ նրա հատման կետը կորի հետ՝ աղեղների հաշվման սկզբնակետ։ Այդ դեպքում $x=\Phi(s)$ ֆունկցիան կլինի s-ի կենտ ֆունկցիա, և, եթե այս անգամ ամբողջ կորի երկարությունը նշանակենք 2S, ապա կունենանք [տես 302, 9)]՝

$$M_y = \int_{-S}^{S} x\,ds = 0,$$

որտեղից և $\xi=0$։

3) Օգտվելով Գուլդինի թեորեմայից, որոշել r շառավիղ ունեցող շրջանագծի $\overset{\frown}{AB}$ աղեղի ծանրության կենտրոնի դիրքը (գծ. 38)։



Գծ. 39։

Քանի որ այդ աղեղը սիմետրիկ է իր M միջնակետով անցնող OM շառավղի նկատմամբ, ապա նրա C ծանրության կենտրոնը գտնվում է այդ շառավղի վրա, և ծանրության կենտրոնի դիրքի լրիվ որոշման համար անհրաժեշտ է միայն գտնել նրա η հեռավորությունը O կենտրոնից Առանցքներն ընտրում ենք այնպես, ինչպես ցույց է տրված գծագրում և նշանակում ենք $\overset{\frown}{AB}$ աղեղի երկարությունը s-ով, իսկ նրա $AB(=A'B')$ լարի երկարությունը d-ով։ Դիտարկվող աղեղն x-երի առանցքի շուրջը պտտելուց ստացվում է մի գնդային գոտի, որի մակերևույթի P մակերեսը, ինչպես գիտենք [336, *1*)], հավասար է $2\pi rd$։ Ըստ Գուլդինի թեորեմայի նույն մակերևույթը հավասար է $2\pi\eta s$, այնպես որ $s\eta = rd$ և $\eta = \frac{rd}{s}$։

Մասնավորապես, կիսաշրջանագծի համար $d=2r$, $s=\pi r$ և $\eta = \frac{2}{\pi} r \doteq 0{,}637\ r$։

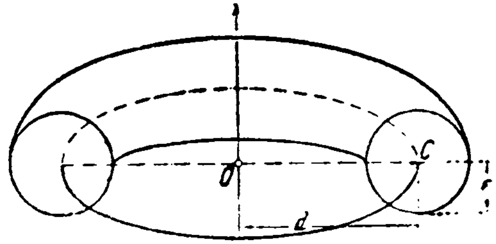
4) Որոշել

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

ցիկլոիդի մի ճյուղի ծանրության կենտրոնը։

Եթե հաշվի առնենք սիմետրիան, ապա անմիջապես պարզ է, որ $\xi=\pi a$։ Իսկ հաշվի առնելով n° 336-ի *4)* օրինակի արդյունքները, հեշտ է այնուհետև ստանալ $\eta=\frac{4}{3}a$։

5) Այն դեպքերում, երբ նախապես հայտնի է ծանրության կենտրոնի դիրքը, կարելի է Գուլդինի թեորեմայից օգտվել պտտման մակերևույթի մակերեսը որոշելու համար։ Դիցուք, օրինակ, պահանջվում է որոշել օղակի (տորի) մակերևույթի մեծությունը (տորն այն մարմինն է, որն առաջանում է շրջանն իր մակերեսը չհատող առանցքի շուրջը պտտելուց, գծ. 40)։ Քանի որ ակներև է, որ շրջանագծի ծանրության կենտրոնը համընկնում է նրա (երկրաչափական) կենտրոնի հետ, ապա (նկարի նշանակումների դեպքում) ունենք՝



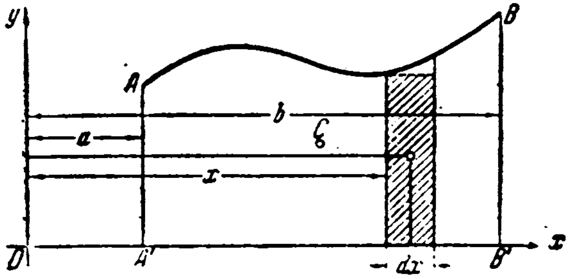
Գծ. 40։

$$P=2\pi r\cdot 2\pi d=4\pi^2 rd։$$

342. ՀԱՐԹ ՊԱՏԿԵՐԻ ՍՏԱՏԻԿ ՄՈՄԵՆՏՆԵՐՆ ՈՒ ԾԱՆՐՈՒԹՅԱՆ ԿԵՆՏՐՈՆԸ ԳՏՆԵԼԸ։ Դիտարկենք $AA'B'B$ հարթ պատկերը (գծ. 41), որը վերևից սահմանափակված է $y=f(x)$ բացահայտ հավասարումով տրված AB կորով։ Ենթադրենք, թե այդ պատկերի մակերեսով հավասարաչափ բաշխված են-

մասսաներ, այնպես որ նրանց ρ մակերևութային խտությունը (այսինքն՝ միավոր մակերեսին ընկնող մասսան) հաստատուն է։ Այդ դեպքում, առանց էապես նվազեցնելու ընդհանրությունը, կարելի է ընդունել, որ ρ=1, այսինքն՝ որ մեր պատկերի ցանկացած մասի մասսան չափվում է նրա մակերեսով։ Հենց այդ էլ միշտ հասկացվում է, երբ խոսվում է պարզապես հարթ պատկերի ստատիկ մոմենտների (կամ ծանրության կենտրոնի) մասին։

Ցանկանալով որոշել այդ պատկերի M_x, M_y ստատիկ մոմենտները կոորդինատային առանցքների նկատմամբ, մենք առանձնացնենք, ինչպես սովորաբար, մեր պատկերի որևէ էլեմենտ՝ անվերջ նեղ ուղղաձիգ շերտի տեսքով (տես գծագիրը)։ Ընդունելով այդ շերտը մոտավորապես որպես ուղղանկյուն, տեսնում ենք, որ նրա մասսան (որն արտահայտվում է նույն թվով, ինչ որ մակերեսը) կլինի ydx։ Որոշելու համար համապատասխան



Գծ. 41։

dM_x, dM_y էլեմենտար մոմենտները, ենթադրենք, որ շերտի ամբողջ մասսան կենտրոնացած է նրա ծանրության կենտրոնում (այսինքն՝ ուղղանկյան կենտրոնում), որը, ինչպես հայտնի է, չի փոխում ստատիկ մոմենտների մեծությունը։ Ստացված նյութական կետը գտնվում է x-երի առանցքից $\frac{1}{2}y$ հեռավորության վրա. իսկ y-երի առանցքից՝ $\left(x+\frac{1}{2}dx\right)$ հեռավորության վրա. վերջին արտահայտությունը կարելի է պարզապես x-ով փոխարինելու, որովհետև դեն ձգված $\frac{1}{2}dx$ մեծությունը, բազմապատկելով ydx մասսայով, կտար երկրորդ կարգի անվերջ փոքր մեծություն։ Այսպիսով, ունենք

$$dM_x=\frac{1}{2}y^2dx, \qquad dM_y=xydx.$$

Հանրագումարելով այս էլեմենտար մոմենտները, կգանք հետևյալ արդյունքին՝

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx, \qquad M_y=\int_a^b xydx, \tag{7}$$

ընդ որում y-ի տակ հասկացվում է, անշուշտ, AB կորի հավասարման մեջ մասնակցող f(x) ֆունկցիան։

Ինչպես և կորի դեպքում, դիտարկվող պատկերի՝ կոորդինատային առանցքների նկատմամբ այս ստատիկ մոմենտների օգնությամբ այժմ հեշտ է որոշել նաև պատկերի ծանրության կենտրոնի ξ, η կոորդինատները։ Եթե պատկերի մակերեսը (հետևապես,՝ և մասսան) նշանակենք P, ապա ծանրության կենտրոնի հիմնական հատկության համաձայն՝

$$P\xi = M_y = \int_a^b xy\,dx, \qquad P\eta = M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx,$$

որտեղից

$$\xi = \frac{M_y}{P} = \frac{1}{P}\int_a^b xy\,dx, \qquad \eta = \frac{M_x}{P} = \frac{1}{2P}\int_a^b y^2\,dx\text{։} \tag{8}$$

Տվյալ դեպքում ևս մենք ստանում ենք կարևոր երկրաչափական հետևանք ծանրության կենտրոնի η օրդինատի բանաձևից։ Իրոք, այդ բանաձևից ունենք՝

$$2\pi\eta P = \pi\int_a^b y^2\,dx\text{։}$$

Այս հավասարության աջ մասն արտահայտում է AA′B′B հարթ պատկերն x-երի առանցքի շուրջը պտտելուց ստացված մարմնի V ծավալը [333 (16)], իսկ ձախ մասն արտահայտում է այդ պատկերի P մակերեսի և ծանրության կենտրոնի գծած շրջանագծի $2\pi\eta$ երկարության արտադրյալը։ Այստեղից ստացվում է Գուլդինի երկրորդ **թեորեմը**՝

Հարթ պատկերի՝ իր մակերեսը չհատող առանցքի շուրջը պտտելուց առաջացած մարմնի ծավալը հավասար է այդ պատկերի մակերեսի և պատկերի ծանրության կենտրոնի գծած շրջանագծի երկարության արտադրյալին՝

$$V = P \cdot 2\pi\eta\text{։}$$

Նկատենք, որ (7) և (8) բանաձևերը տարածվում են նաև այն դեպքի վրա, երբ պատկերը թե՛ վերևից, թե՛ ներքևից սահմանափակված է կորերով (գծ. 19)։ Օրինակ, այդ դեպքի համար

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2\right)dx, \qquad M_y = \int_a^b x(y_2 - y_1)\,dx. \tag{7a}$$

այստեղից արդեն պարզ է, թե ինչպես են ձևափոխվում (8) բանաձևերը։ Եթե հիշենք n° 329-ի (8) բանաձևը, ապա հեշտ է տեսնել, որ Գուլդինի թեորեման իրավացի է նաև այս դեպքի համար։

343. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Գտնել $y^2=2px$ պարաբոլով, x-երի առանցքով և x աբսցիսին համապատասխանող օրդինատով սահմանափակված պատկերի M_x, M_y ստատիկ մոմենտները ու ծանրության կենտրոնի կոորդինատները։

Քանի որ $y=\sqrt{2px}$, ապա ըստ (7) բանաձևերի՝

$$M_x=\frac{1}{2}\cdot 2p\int_0^x x\,dx=\frac{1}{2}px^2,\quad M_y=\sqrt{2p}\int_0^x x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2\sqrt{2p}}{5}x^{\frac{5}{2}}.$$

Մյուս կողմից, մակերեսը [329 (7)]՝

$$P=\sqrt{2p}\int_0^x x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2\sqrt{2p}}{3}x^{\frac{3}{2}}.$$

Այդ դեպքում, ըստ (8) բանաձևերի,

$$\xi=\frac{3}{5}x,\quad \eta=\frac{3}{8}\sqrt{2px}=\frac{3}{8}y.$$

Օգտվելով ξ և η արժեքներից, հեշտ է գտնել, ըստ Գուլդինի թեորեմայի, դիտարկվող պատկերը կոորդինատային առանցքների շուրջը կամ վերջավոր օրդինատի շուրջը պտտելուց առաջացած մարմնի ծավալը։ Օրինակ, եթե կանգ առնենք վերջին դեպքի վրա, քանի որ ծանրության կենտրոնի հեռավորությունը պտտման առանցքից $\frac{2}{5}x$ է, ապա որոնելի ծավալը կլինի $V=\frac{8}{15}\pi x^2 y$։

2) Գտնել $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսի առաջին քառորդի ծանրության կենտրոնը, օգտվելով 330, 2) և 334, 2) արդյունքներից։

Ըստ Գուլդինի թեորեմայի $\xi=\frac{4a}{3\pi}$, $\eta=\frac{4b}{3\pi}$։

3) Եթե պատկերն ունի սիմետրիայի առանցք, ապա պատկերի ծանրության կենտրոնն անհրաժեշտաբար գտնվում է այդ առանցքի վրա։

Այդ ապացուցենք այն դեպքի համար, երբ պատկերը ներքևից և վերևից սահմանափակված է $y_1=f_1(x)$ և $y_2=f_2(x)$ կորերով։ Եթե սիմետրիայի առանցքը վերցնենք որպես y-ների առանցք, ապա y_1 և y_2 երկու ֆունկցիաներն էլ զույգ կլինեն. իսկ x-ի փոփոխման միջակայքը այդ դեպ-

քում կունենա [−a, a] տեսք։ Այդ դեպքում (7ա) բանաձևերից երկրորդի համաձայն [տես 302, 9)]՝

$$M_y=\int_{-a}^{a} x(y_2-y_1)dx=0,$$ դրա հետ միասին նաև $\xi=0$։

4) Գտնել $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ցիկլոիդի մի ճյուղով և x-երի առանցքով սահմանափակված պատկերի ծանրության կենտրոնը։

Օգտվելով 330, 9)-ից և 334, 4)-ից, ըստ Գուլդինի թեորեմայի հեշտ է որոշել՝ $\eta=\frac{5}{6}a$։ Սիմետրիայի շնորհիվ $\xi=\pi a$։

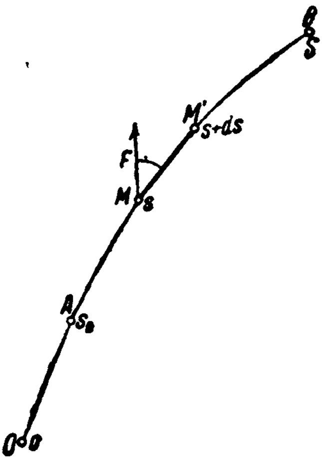
5) Նույնը այն պատկերի համար, որը սահմանափակված է $y^2=2px$ և $x^2=2py$ երկու պարաբոլներով (տես գծ. 24)։

Հիշելով 330-ի 5) օրինակը, ըստ (7ա) բանաձևի գտնում ենք

$$\eta=\xi=\frac{1}{p}\int_0^{2p} x\left(\sqrt{2px}-\frac{x^2}{2p}\right)dx=\frac{\frac{6}{5}p^3}{\frac{4}{3}p^2}=\frac{9}{10}p։$$

6) Ինչպես Գուլդինի առաջին թեորեման [համեմատել 341, 5)-ը], երկրորդ թեորեման նույնպես կարող է օգտագործվել այն դեպքում, երբ ծանրության կենտրոնի դիրքը պարզ է, որոշելու համար համապատասխան պտտման մարմնի ծավալը։ Օրինակ, տորի համար (գծ. 40) ծավալը ստացվում է $V=2\pi^2dr^2$։

344. ՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ։ Տարրական մեխանիկայից ընթերցողին հայտնի է, որ եթե M շարժվող կետի վրա ազդող ուժը պահպանում է հաստատուն F մեծություն և հաստատուն անկյուն կետի տեղափոխման ուղղության հետ, ապա այդ ուժի կատարած A աշխատանքը կետի s տեղափոխման համար կարտահայտվի $F\cos(F, s)\cdot s$ արտադրյալով, որտեղ (F,s)-ը նշանակում է այն անկյունը, որ գտնվում է ուժի ուղղության և կետի տեղափոխման ուղղության միջև։ $F_s=F\cos(F, s)$ արտադրյալը, ակներևաբար, ներկայացնում է F ուժի պրոյեկցիան s տեղափոխման ուղղության վրա մացնելով այդ պրոյեկցիան, կարելի է աշխատանքի արտահայտությունը ներկայացնել $A=F_s s$ տեսքով։ Եթե ուժի ուղղությունը համընկնում է կետի տեղափոխման ուղղության հետ, ապա $A=Fs$. իսկ այն դեպքում, երբ երկու ուղղությունները ուղղակի հակադիր են, $A=-Fs$.



Գծ. 42։

Ընդհանրապես տված, սակայն, և՛ F ուժի մեծությունը, և՛ նրա կազմած

անկյունը տեղափոխման ուղղության հետ կարող են հաստատուն չմնալ։ Այդ մեծություններից գոնե մեկի անընդհատ փոփոխման դեպքում աշխատանքի մեծությունն արտահայտելու համար հարկ է լինում նորից դիմել որոշյալ ինտեգրալի։

Դիցուք կետի անցած s ճանապարհը անկախ փոփոխականն է, ընդ որում ենթադրենք, որ մեր M կետի սկզբնական A դիրքին համապատասխանում է $s=s_0$ արժեքը, իսկ վերջնական B դիրքին՝ $s=S$ արժեքը (գծ. 42)։ (s_0, S) միջակայքում s-ի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է շարժվող կետի մի որոշակի դիրք, այլև F և cos(F, s) մեծությունների որոշակի արժեքներ, որոնք, այսպիսով, կարող են դիտարկվել որպես s-ի ֆունկցիաներ։ Վերցնելով M կետը նրա որևէ դիրքում, որը որոշվում է ճանապարհի s արժեքով, գտնենք այժմ աշխատանքի էլեմենտի համար մոտավոր արտահայտություն, որը համապատասխանում է ճանապարհի ds աճին, s-ից մինչև s+ds, որի ժամանակ M կետը կտեղափոխվի մոտակա M′ դիրքը (տես գծագիրը)։ M դիրքում կետի վրա ազդում է որոշակի F ուժ՝ որոշակի (F, s) անկյան տակ. քանի որ կետը M-ից M′-ը անցնելիս այդ մեծությունների փոփոխությունը՝ փոքր ds-ի դեպքում՝ նույնպես փոքր է, անտեսենք այդ փոփոխությունը և, F ուժի մեծությունն ու (F, s) անկյունը մոտավորապես հաստատուն համարելով, ds տեղափոխման դեպքում աշխատանքի էլեմենտի համար կգտնենք

$$dA = F\cos(F, s)\cdot ds$$

արտահայտությունը, այնպես որ ամբողջ A աշխատանքը կներկայացվի հետևյալ ինտեգրալով՝

$$A = \int_{s_0}^{S} F\cos(F, s)\,.\,ds \tag{9}$$

F ուժի աշխատանքի այս ընդհանուր արտահայտությունից պարզ է, որ երբ $(F, s)=\frac{\pi}{2}$, ապա աշխատանքը զրո է դառնում. իրոք, այդ դեպքում $\cos(F, s)=0$, այնպես որ ընդինտեգրալ ֆունկցիան զրո է լինում։ Այսպիսով, տեղափոխման ուղղությանն ուղղահայաց ուժը մեխանիկական աշխատանք չի կատարում։

Եթե կետի վրա ազդող F ուժը վերլուծենք (զուգահեռագծի կանոնով) երկու բաղադրիչների՝ մեկը ճանապարհի շոշափողի ուղղությամբ, մյուսը՝ նրա նորմալի ուղղությամբ, ապա, համաձայն ասածի, աշխատանք կկատարի միայն $F_s = F\cos(F, s)$ շոշափող բաղադրիչը՝

$$A = \int_{s_0}^{S} F_s\, dz \tag{9ա}$$

Այժմ ենթադրենք, որ F-ը կետի վրա ազդող բոլոր ուժերի համազորն է. այդ դեպքում, Նյուտոնի՝ շարժման օրենքի համաձայն, F_S շոշափող բաղադրիչը հավասար է կետի m մասսայի և նրա a արագացման արտադրյալին, և A աշխատանքի արտահայտությունը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$A=\int_{s_0}^{S} ma\,ds։$$

Այժմ հիշենք, որ

$$a=\frac{dv}{dt} \text{ և } v=\frac{ds}{dt}, \text{ այնպես որ } a=\frac{dv}{ds}\,\frac{ds}{dt}=\frac{dv}{ds}\cdot v$$

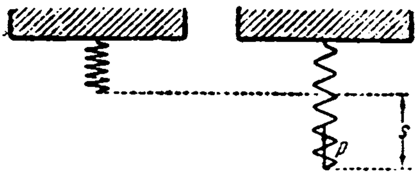
այդ դեպքում՝

$$A=\int_{s_0}^{S} mv\frac{dv}{ds}ds=\int_{s_0}^{S} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\frac{1}{2}mv^2\Big|_{s_0}^{S}=\frac{1}{2}mV^2-\frac{1}{2}mv_0^2,$$

որտեղ v_0-ով ու V-ով նշանակված են արագության մեծությունները, համապատասխանաբար, սկզբնական և վերջնական կետերում։

Ինչպես հայտնի է, $\frac{1}{2}mv^2$-ն՝ կետի կենդանի ուժը կամ կինետիկ էներգիան է. այսպիսով, մենք հանգեցինք կարևոր առաջադրության՝ A մեխանիկական աշխատանքը, կատարված այն ուժով, որի ազդեցության տակ տեղի է ունեցել կետի շարժումը, հավասար է կետի կինետիկ էներգիայի աճին: (Հասկանալի է, որ A աշխատանքը և կինետիկ էներգիայի աճը կարող են միաժամանակ նաև բացասական լինել։) Այս սկզբունքը, որ կարելի է տարածել և նյութական կետերի սիստեմների վրա, և անընդհատ մարմինների վրա, շատ կարևոր դեր է խաղում մեխանիկայում ու ֆիզիկայում։ Այն անվանում են «կենդանի ուժի օրենք»։

345. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Որպես օրինակ, (9) բանաձևը կիրառենք մեկ ծայրն ամրացված զսպանակի ձգման (կամ սեղմման) աշխատանքը հաշվելու համար (գծ. 43). այդպիսի հաշվում կարիք է լինում կատարել, օրինակ, երկաթուղային վագոնների թափարգելների (բուֆերների) նախահաշվումների ժամանակ։



Գծ. 43։

Հայտնի է, որ զսպանակի s ձգումը (եթե միայն զսպանակը գերբեռնված չէ) առաջացնում է մի p լարում, որը մեծու-

թյամբ համեմատական է ձգմանը, այնպես որ $p=cs$, որտեղ c-ն՝ զսպանակի առաձգական հատկություններից կախում ունեցող մի որոշ հաստատուն է («զսպանակի «կոշտությունը»)։ Այն ուժը, որը ձգում է զսպանակը, պետք է հաղթահարի այդ լարումը։ Եթե հաշվի առնենք գործող ուժի միայն այն մասը, որը ծախսվում է դրա վրա, ապա նրա աշխատանքը, երբ ձգումն աճում է 0-ից մինչև S, կարտահայտվի այսպես՝

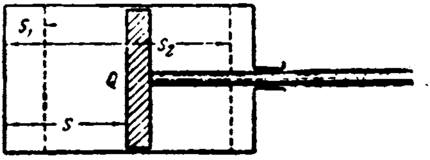
$$A=\int_0^S p\,ds=c\int_0^S s\,ds=c\frac{s^2}{2}\Big|_0^S=\frac{cS^2}{2}.$$

P-ով նշանակելով լարման (կամ նրան հաղթահարող ուժի) այն առավելագույն մեծությունը, որը համապատասխանում է զսպանակի S ձգմանը (և հավասար է cS-ի), մենք կարող ենք աշխատանքի արտահայտությունը ներկայացնել հետևյալ ձևով՝

$$A=\frac{1}{2}PS.$$

Եթե զսպանակի ազատ ծայրին միանգամից կիրառված լիներ P ուժ (օրինակ, բեռ կախված լիներ), ապա S տեղափոխման համար նա կկատարեր երկու անգամ ավելի աշխատանք՝ PS։ Ինչպես տեսնում ենք, նրա միայն կեսն է ծախսվում զսպանակի ձգման համար, մյուս մասը կծախսվի զսպանակին կինետիկ էներգիա հաղորդելու համար։

2) Դիցուք որոշ քանակությամբ գազ (գոլորշի) պարունակվում է գլանի մեջ (գծ. 44)՝ մխոցի մի կողմում, և ենթադրենք, որ այդ գազը լայնացել է և մխոցը տեղափոխել է դեպի աջ։ Խնդիր դնենք՝ որոշելու այն աշխատանքը, որ այդ դեպքում կատարել է գազը։ Եթե մխոցի սկզբնական և վերջնական հեռավորությունները գլանի ձախ հատակից նշանակենք s_1 և s_2, ճնշումը (մխոցի մակերեսի քառակուսի միավորի վրա)՝ p, իսկ մակերեսը՝ Q, ապա մխոցի վրա ազդող ամբողջ ուժը կլինի pQ, և աշխատանքը, ինչպես գիտենք, կարտահայտվի



Գծ. 44։

$$A=Q\int_{s_1}^{s_2} p\,ds$$

ինտեգրալով։

Գազի դիտարկվող մասսայի ծավալը նշանակելով v, ակներևորեն,

կունենանք $v=Qs$։ *Այժմ դժվար չէ* s *փոփոխականից անցնել* v *նոր փոփոխականին. կստանանք*

$$A=\int_{v_1}^{v_2} p\,dv, \tag{10}$$

որտեղ v_1 *և* v_2 *նշանակում են* v *ծավալի սկզբնական և վերջնական արժեքները։*

Եթե մեզ հայտնի լիներ p *ճնշումը որպես* v *ծավալի ֆունկցիա, ապա դրանով կորոշվեր* A *աշխատանքը։ Նախ ենթադրենք, որ գազն ընդարձակվելիս նրա ջերմաստիճանը մնում է հաստատուն, այնպես որ նրա ընդարձակման համար անհրաժեշտ էներգիան ջերմության տեսքով ստացվում է դրսից. այդ դեպքում պրոցեսը կոչվում է* ի զ ո թ ե ր մ ի կ *պրոցես։ Համարելով, որ գազն «իդեալական» է, ըստ* Բ ո յ լ - Մ ա ր ի ո տ ի *օրենքի կունենանք՝* $pv=c=\text{const.}$, *այնպես որ* $p=\dfrac{c}{v}$, *և աշխատանքի համար ստանում ենք հետևյալ արժեքը՝*

$$A=\int_{v_1}^{v_2} \frac{c}{v}dv=c\log v\Big|_{v_1}^{v_2}=c\log\frac{v_2}{v_1}.$$

Եթե պրոցեսի սկզբի և վերջի ճնշումները նշանակենք p_1 *և* p_2, *ապա* $p_1v_1=p_2v_2$ *և* $\dfrac{v_2}{v_1}=\dfrac{p_1}{p_2}$։ *Ուստի* p_1 *ճնշումից* $p_2<p_1$ *ճնշմանն անցնելու հետ կապված ընդարձակման աշխատանքը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝*

$$A=c\log\frac{p_1}{p_2}.$$

Վերջապես, c*-ի փոխարեն այդ բանաձևերի մեջ կարելի է տեղադրել* p_1v_1 *արտադրյալը։*

Սակայն, հաճախ ավելի բնական է լինում ենթադրել, որ ընդարձակման ժամանակ գազի և շրջապատող միջավայրի միջև ջերմային փոխանակում տեղի չի ունենում, և աշխատանքի կատարման վրա ծախսվում է հենց գազի իր էներգիան, որի ջերմաստիճանն այդ դեպքում իջնում է. այդպիսի պրոցեսը կոչվում է ա դ ի ա բ ա տ ի կ *պրոցես։ Այս դեպքում գազի դիտարկվող մասսայի* p *ճնշման և* v *ծավալի միջև կախումն ունի հետևյալ տեսքը*

$$pv^{k}=c=\text{const.}$$

[*այս կախումը կարտածվի ստորև, 352, 3)*], *որտեղ* k*-ն յուրաքանչյուր գազի (գոլորշու) համար բնորոշ հաստատուն է և միշտ մեծ է մեկից։ Այստեղից* $p=cv^{-k}$ *և*

$$A=\int_{v_1}^{v_2} cv^{-k}dv=\frac{c}{1-k}v^{1-k}\Bigg|_{v_1}^{v_2}=\frac{c}{1-k}(v_2^{1-k}-v_1^{1-k})=$$

$$=\frac{c}{1-k}\left(\frac{1}{v_1^{k-1}}-\frac{1}{v_2^{k-1}}\right).$$

Այս արդյունքը կարելի է ավելի հարմար ձևով ներկայացնել, եթե հիշենք, որ $cv_1^{-k}=p_1$, $cv_2^{-k}=p_2$. տեղադրելով, աշխատանքի համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$A=\frac{p_1v_1-p_2v_2}{k-1}.$$

Միայն դատողությունների պարզության և ակնառության համար էր, որ մենք ենթադրեցինք, թե ընդարձակվող գազը պարփակված է գլանի մեջ։ (10) հիմնական բանաձևը, ինչպես և նրանից ստացված մասնավոր բանաձևերը, պահպանում են իրենց ուժը անկախ այն հանգամանքից, թե տվյալ յուրաքանչյուր պահին գազի դիտարկվող մասսան ինչ ձև ունի։ Հասկանալի է, որ նույն բանաձևերն արտահայտում են նաև գազի ս ե ղ մ մ ա ն աշխատանքը v_2 ծավալից մինչև $v_1<v_2$ ծավալը (որն ուղեկցվում է ճնշման բարձրացումով p_2-ից մինչև $p_1>p_2$), այսինքն՝ արտաքին ուժի աշխատանքը, որը ստիպում է գազին սեղմվել. գազի իր աշխատանքն այդ դեպքում բացասական է։

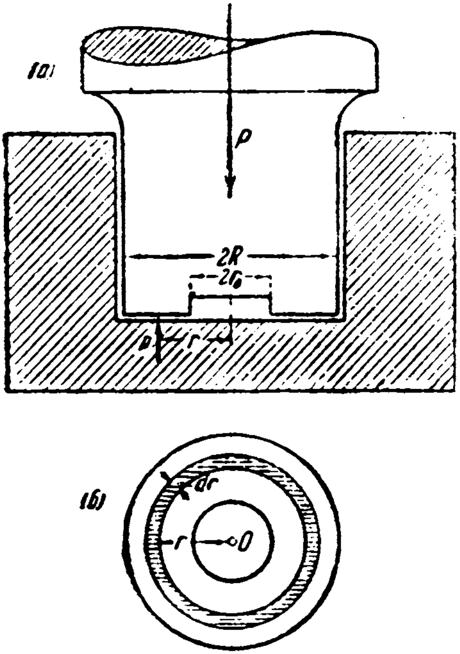
346. ՇՓՄԱՆ ՈՒԺԻ ԱՇԽԱՏԱՆՔԸ ՀԱՐԹ ԿՐՆԿՈՒՄ։ *Կ ր ու ն կ ընդհանրապես անվանում են պտտվող ուղղաձիգ լիսեռի հենարանային մասը. անշարժ հենարանը, որի մեջ կրունկը պտտվում է, կոչվում է կ ր ն կ ա կ ա լ։ Այս n°-ում մենք կդիտարկենք կրունկներում շփումը հաղթահարելու վրա ծախսվող կարողության հարցը, ընդ որում կսահմանափակվենք պարզագույն դեպքով՝ հ ա ր թ-կրունկով։*

Հարթ կրունկը ներկայացնում է մի գլանաձև մարմին, որը հենվում է կրնկակալի վրա իր հարթ հիմքով (գծ. 45)։ Ընդհանրապես, այդ հիմքն ունի կլոր օղակի ձև, որի արտաքին շառավիղն է R և ներքին շառավիղը r_0. մասնավոր դեպքում, երբ $r_0=0$, մենք ստանում ենք լրիվ շրջանային հատույթ։

Կրնկի հաղորդած լրիվ ճնշումը նշանակենք P, լիսեռի պտտման անկյունային արագությունը՝ ω(1/վրկ.), շփման գործակիցը՝ μ, վերջապես, կրնկի միավոր մակերեսի վրա եղած ճնշումը նրա դիտարկվող կետում նշանակենք p։ Չշոշափելով առայժմ ճնշման բաշխման հարցը, նշենք միայն մի ակներև հանգամանք՝ կրնկի այն կետերը, որոնք հավասարապես են հեռացած նրա O կենտրոնից, գտնվում են միատեսակ պայմաններում, և այդ կետերում ճնշումը պետք է միատեսակ լինի։ Այսպիսով, p-ն ընդհանրապես կարելի է համարել r շառավիղ-վեկտորի ֆունկցիա։ Սակայն կնշվեն այն ենթադրությունները, որոնք սովորաբար արվում են այդ ֆունկցիայի

նկատմամբ. բայց մի պայմանի նա համենայն դեպս պետք է բավարարի, այն է՝ կրնկի վրա եղած լրիվ ճնշումը պետք է հավասարակշռվի լիսեռի կողմից եղած p ճնշումով։

Այդ լրիվ ճնշումը հաշվելու համար, նորից դիմենք անվերջ փոքր էլեմենտների հանրագումարման մեթոդին ըստ n 339-ի սխեմայի, ընդ որում որպես անկախ փոփոխական ընդունենք r շառավիղը, որը փոփոխվում է r_0-ից մինչև R։ Այդ միջակայքը տրոհելով մասերի, մենք միևնույն ժամանակ կարող ենք ամբողջ օղակը վերլուծել էլեմենտար համակենտրոն օղակների, այնպես որ p ճնշումը կկազմվի առանձին օղակներին համապատասխանող էլեմենտար ճնշումներից։ Այժմ դիտարկենք մի օղակ, որը



Գծ. 45։

սահմանափակված է r և $r+dr$ շառավիղներ ունեցող շրջանագծերով (45 բ նկարում այդ օղակը գծիկներով պատված է)։ Այդ օղակի մակերեսն է $\pi(r+dr)^2 - \pi r^2 = 2\pi r dr + \pi(dr)^2$. դեն ձգելով $\pi(dr)^2$ երկրորդ կարգի անվերջ փոքր մեծությունը, կարելի է այդ մակերեսն ընդունել մոտավորապես հավասար $2\pi r\, dr$։ Եթե p-ն ճնշումն է (միավոր մակերեսի վրա) այն կետում, որը կենտրոնից r հեռավորության վրա է գտնվում, ապա դիտարկվող օղակին համապատասխանում է

$$dP = p \cdot 2\pi r\, dr$$

էլեմենտար ճնշում, այնպես որ, հանրագումարելով, ստանում ենք հետևյալ հավասարությունը՝

$$P = 2\pi \int_{r_0}^{R} pr\, dr \qquad (11)$$

Այս հավասարությունը, կրկնում ենք, արտահայտում է հենց այն փաստը, որ կրնկի վրա բաշխված հանրագումարային ճնշումը հավասար է լիսեռի կողմից եղած ճնշմանը։

Այժմ որոշենք պտտվող կրնկում շփման ուժի M մոմենտը պտտման առանցքի նկատմամբ։ Նորից դիտարկենք այն էլեմենտար օղակը, որի մասին վերը խոսք եղավ. նրա մեջ առաջացող շփման ուժը, որը հակադրվում է պտտմանը, կլինի

$$\mu\, dP = 2\pi\mu pr\, dr,$$

այնպես որ նրան համապատասխանող dM էլեմենտար մոմենտը կարտա-

հայտվի ուժի և (օղակի բոլոր կետերի համար ընդհանուր) r լծակի արտադրյալով

$$dM=2\pi\mu pr^2dr\text{։}$$

Այստեղից շփման լրիվ մոմենտը կլինի

$$M=2\pi\mu\int_{r_0}^{R} pr^2dr\text{։} \qquad (12)$$

Ինչպես հայտնի է մեխանիկայից, այդպիսի M հաստատուն պտտական մոմենտի մի վայրկյանում առաջացրած A աշխատանքը ստացվում է՝ բազմապատկելով M մոմենտը պտտման ω(1/վրկ.) *անկյունային արագությամբ,*

$$A=M\omega\text{։}$$

A աշխատանքի հաշվումը մինչև վերջը հասցնելու համար, այժմ պետք է անել այս կամ այն ենթադրությունները կրնկի մակերևույթի վրա p-ի բաշխման օրենքի նկատմամբ։

Ամենապարզ ենթադրությունն այն է, որ ճնշումը հավասարաչափ է բաշխվում, այսինքն՝ որ $p=c=\text{const}$։ *Այդ հաստատունի մեծությունը որոշվում է (11) պայմանից։ Ի միջի այլոց, այս դեպքում անմիջականորեն պարզ է, որ եթե P ճնշումը հավասարաչափ է բաշխվում օղակի* $\pi(R^2-r_0^2)$ *մակերեսի վրա, ապա միավոր մակերեսին կընկնի* $p=c=\dfrac{P}{\pi(R^2-r_0^2)}$ *ճնշում։*

Տեղադրել այս արժեքը (12)-ի մեջ p-ի փոխարեն, այնուհետև կգտնենք

$$M=2\pi\mu\frac{P}{\pi(R^2-r_0^2)}\int_{r_0}^{R} r^2dr=\frac{2}{3}\mu P\frac{R^3-r_0^3}{R^2-r_0^2}\text{։}$$

Մասնավորապես լրիվ կրնկի համար կունենանք $M=\dfrac{2}{3}\mu PR$։

Սակայն այս արդյունքները կիրառում են միայն նոր, դեռ չշփված (չմաշված) կրունկների նկատմամբ։ Բանը նրանումն է, որ պտտման ժամանակ կրնկի O կենտրոնից ավելի հեռու գտնվող կետերն ավելի մեծ արագությամբ են շարժվում, այդտեղ շփման աշխատանքն ավելի մեծ է և, համապատասխանաբար, ավելի մեծ է նաև ինչպես կրնկի, այնպես էլ կրնկակալի մաշումը. դրա շնորհիվ ճնշման մի մասը փոխադրվում է կրնկի կենտրոնին ավելի մոտ մասերի վրա։ Հին, արդեն բանած, կրունկների համար սովորաբար ենթադրվում է, որ ճնշումը նրանց վրա այնպես է բաշխվում, որ շփման աշխատանքը (միավոր մակերեսի վրա), և նրա հետ մաշումը, ամենուրեք պահպանում են հաստատուն մեծություն։ Բաժանելով $dA=\omega dM$ *լեմենտար աշխատանքը էլեմենտար օղակի* $2\pi r\,dr$ *մակերեսի վրա, մեր ենթադրությունը կգրենք այս տեսքով՝*

$$\omega\mu pr=\text{const.},\quad \text{որտեղից և}\quad pr=c=\text{const.}$$

այսպիսով, մենք ենթադրում ենք, որ p-ն փոփոխվում է հակադարձ համեմատական կենտրոնից ունեցած r հեռավորությանը: Տեղադրելով (11) պայմանի մեջ pr-ի փոխարեն c, կգտնենք այդ հաստատունի մեծությունը՝

$$P=2\pi c\int_{r_0}^{R} dr=2\pi c(R-r_0) \quad \text{որտեղից} \quad c=\frac{P}{2\pi(R-r_0)}:$$

Վերջապես, փոխարինելով (12)-ի մեջ ևս pr-ը ստացված արտահայտությամբ, կհանգենք այսպիսի արդյունքի՝

$$M=2\pi\mu\frac{P}{2\pi(R-r_0)}\int_{r_0}^{R} r\,dr=\frac{1}{2}\mu P(R+r_0):$$

Իսկ լրիվ կրնկի համար $M=\frac{1}{2}\mu PR$:

Հեշտ է տեսնել, որ շփման համար կարողության կորուստը բանած կրունկների դեպքում ավելի փոքր է, քան նոր կրունկների դեպքում:

347. ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԱՆՎԵՐՋ ՓՈՔՐ ԷԼԵՄԵՆՏՆԵՐԻ ՀԱՆՐԱԳՈՒՄԱՐՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ: Բերենք մի շարք խնդիրներ ևս, որոնք լուծվում են անվերջ փոքր էլեմենտների հանրագումարման մեթոդով:

1) Գտնել բանաձև արտահայտելու համար (V) մարմնի M ստատիկ մոմենտը ավյալ հարթության նկատմամբ, եթե հայտնի են մարմնի՝ այդ հարթությանը զուգահեռ լայնական հատույթների մակերեսները (որպես այդ հարթությունից ունեցած x հեռավորության ֆունկցիաներ): Խտությունը ենթադրվում է հավասար մեկի:

n 333-ի նշանակումներով, հարթությունից x հեռավորության վրա գտնվող էլեմենտար շերտի մասսան (ծավալը) հավասար է $P(x)dx$, նրա ստատիկ մոմենտը՝ $dM=xP(x)dx$, այնպես որ, հանրագումարելով, կստանանք

$$M=\int_a^b xP(x)\,dx:$$

Մարմնի ծանրության կենտրոնի ξ հեռավորությունը տվյալ հարթությունից կարտահայտվի այսպես՝

$$\xi=\frac{M}{V}=\frac{\int_a^b x\,P(x)\,dx}{\int_a^b P(x)\,dx}:$$

Մասնավորապես պտտման մարմնի համար՝

$$\xi=\frac{\int\limits_a^b xy^2\,dx}{\int\limits_a^b y^2\,dx}.$$

Եթե այդ արդյունքը կիրառենք (ա) շրջանային կոնի նկատմամբ և (բ) կիսասֆերայի նկատմամբ, ապա կգտնենք, որ ծանրության կենտրոնի հեռավորությունը հիմքից կկազմի (ա) բարձրության $\frac{1}{4}$-ը, (բ) շառավղի $\frac{3}{8}$-ը:

2) Գտնել բանաձև արտահայտելու համար պտտման մակերևույթի M ստատիկ մոմենտը պտտման առանցքին ուղղահայաց հարթության նկատմամբ: «Մակերևույթային խտությունը» ենթադրվում է հավասար մեկի.

Պտտման առանցքն ընդունենք որպես x-երի առանցք, իսկ որպես կոորդինատների սկիզբ վերցնենք նրա հատման կետը հիշյալ հարթության հետ: n 335-ի նշանակումներով, աղեղի սկզբից s հեռավորության վրա գտնվող էլեմենտար օղակային շերտի մասսան (մակերեսը) հավասար է $2\pi y\,ds$, նրա ստատիկ մոմենտը՝ $dM=2\pi xy\,ds$ և, վերջնականորեն,

$$M=2\pi\int\limits_0^S xy\,ds=2\pi\int\limits_0^S \varphi(s)\psi(s)\,ds.$$

Մասնավորապես, եթե պտտվող կորը տրված է $y=f(x)$ $(a\leq x\leq b)$ բացահայտ հավասարումով, ապա

$$M=2\pi\int\limits_a^b xy\sqrt{1+y_x'^2}\,dx=2\pi\int\limits_a^b x\cdot f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Մակերևույթի ծանրության կենտրոնի ξ հեռավորությունը այդ հարթությունից կլինի

$$\xi=\frac{M}{P}=\frac{\int\limits_0^S xy\,ds}{\int\limits_0^S y\,ds}=\frac{\int\limits_a^b xy\sqrt{1+y_x'^2}\,dx}{\int\limits_a^b y\sqrt{1+y_x'^2}\,dx}.$$

Վերջին բանաձևը կիրառել՝ (ա) շրջանային կոնի, (բ) կիսասֆերայի մակերևույթի նկատմամբ: Պատասխան՝ Ծանրության կենտրոնի հեռավորությունը հավասար է՝ (ա) բարձրության $\frac{1}{3}$-ին, (բ) շառավղի $\frac{1}{2}$-ին:

3) Որոշել գլանային մակերևույթի M_{yz}, M_{zx}, M_{xy} ստատիկ մոմենտները կոորդինատային հարթությունների նկատմամբ [337, գծ. 35] և նրա ծանրության կենտրոնի դիրքը: Ստացված բանաձևերը կիրառել գլանային հատվածի կողմնային մակերևույթի նկատմամբ [334, 8):]

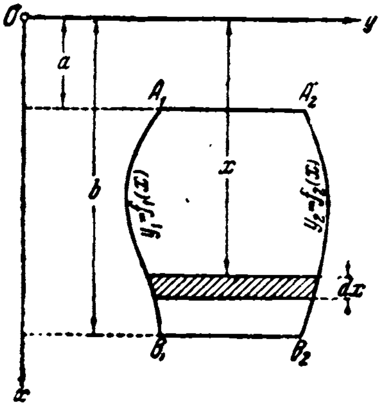
Պատասխան՝ ընդհանուր բանաձևերն են՝

$$M_{yz}=\int_0^S xz\,ds,\quad M_{zx}=\int_0^S yz\,ds,\quad M_{xy}=\frac{1}{2}\int_0^S z^2 ds,$$

$$\xi=\frac{M_{yz}}{P},\quad \eta=\frac{M_{zx}}{P},\quad \zeta=\frac{M_{xy}}{P},$$

որտեղ P-ն մակերևույթի մակերեսն է: Առաջարկված օրինակի մեջ՝ $\xi=0$, $\eta=\frac{\pi}{4}a$, $\zeta=\frac{\pi}{8}h$:

4) m մասսա ունեցող նյութական կետի իներցիայի մոմենտ (կամ քառակուսային մոմենտ) որևէ առանցքի (կամ հարթության) նկատմամբ կոչվում է m մասսայի և կետից մինչև առանցքը (մինչև հարթությունը) d հեռավորության քառակուսու արտադրյալը: Սրանից ելնելով, առաջարկվում է գտնել արտահայտությունը՝ $A_1B_1B_2A_2$ հարթ պատկերի՝ y-ների առանցքի նկատմամբ I_y իներցիայի մոմենտի համար (գծ. 46), այն ենթադրությամբ, որ մասսաների բաշխման «մակերևույթային խտությունը» հավասար է մեկի:



Գծ. 46:

Ունենք

$$dI_y=x^2(y_2-y_1)dx,$$

$$I_y=\int_a^b x^2(y_2-y_1)dx:$$

Օրինակ, գծ. 47-ում պատկերված դեպքերի համար կստանանք

(ա) $y_2-y_1=b$,

$$I_y=b\int_{c-\frac{h}{2}}^{c+\frac{h}{2}}x^2\,dx=bc^2h+\frac{bh^3}{12},$$

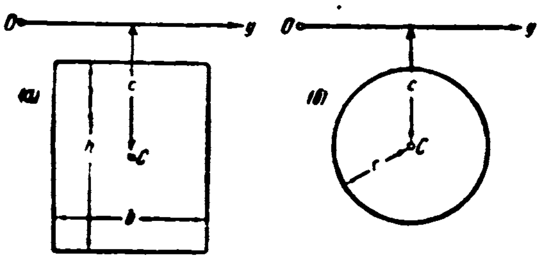
մասնավորապես, երբ $c=0$, կլինի $I_y=\frac{bh^3}{12}$.

(բ) $y_2-y_1=2\sqrt{r^2-(x-c)^2}$, $I_y=2\int_{c-r}^{c+r}x^2\sqrt{r^2-(x-c)^2}\,dx=$

$$=\pi r^2c^2+\frac{\pi r^4}{4},$$

մասնավորապես, երբ $c=0$, կլինի $I_y=\frac{\pi r^4}{4}$։

5) Որոշել 1) խնդրում դիտարկված (V) մ ա ր մ ն ի իներցիայի մոմենտը այնտեղ հիշատակված Oy առանցքի նկատմամբ։ Ստացված բանաձևը կիրառել հաշվելու համար՝ (ա) շրջանային կոնի, (բ) կիսագնդի իներցիայի մոմենտը հիմքի հարթության նկատմամբ։



Գծ. 47։

Պատասխան։ $I=\int_a^b x^2P(x)dx$. մասնավորապես, (ա) $I=\frac{\pi}{30}R^2h^3$, (բ) $I=\frac{2\pi}{15}R^5$։

6) Հեղուկի ճնշումը որևէ հարթակի վրա, որը նրա մակերևույթից h(մ) խորության վրա է գտնվում, հավասար է հեղուկի այն գլանաձև սյան կշռին, որի հիմքն այդ հարթակն է, իսկ բարձրությունը՝ h-ը։ Այսպիսով, միավոր մակերեսին ընկնող ճնշումը (կգ մ²-ով) h(մ) խորության վրա հա-

վասար է $h\gamma$, եթե γ-ն նշանակում է հեղուկի տեսակարար կշիռը (կգ/մ³):

Ենթադրենք, թե հեղուկի մեջ ուղղաձիգ ընկղմված է $A_1B_1B_2A_2$ հարթ պատկերը (գծ. 46)*:

Գտնել W լրիվ հիդրոստատիկ ճնշումը այդ պատկերի վրա և նրա M իներցիայի մոմենտը (հեղուկի ազատ մակերևույթի նկատմամբ):

$dP=(y_2-y_1)dx$ էլեմենտար հարթակը կրում է $dW=\gamma x(y_2-y_1)dx$ ճնշում, որի մոմենտը y-ների առանցքի նկատմամբ հավասար է $dM=\gamma x^2(y_2-y_1)dx$: Այստեղից՝

$$W=\gamma\int_a^b x(y_2-y_1)dx. \qquad M=\gamma\int_a^b x^2(y_2-y_1)dx:$$

Առաջին ինտեգրալը, ակներևորեն, ներկայացնում է պատկերի M_y ստատիկ մոմենտը y-ների առանցքի նկատմամբ, իսկ երկրորդը տալիս է պատկերի I_y իներցիայի մոմենտը նույն առանցքի նկատմամբ:

Եթե ξ-ն պատկերի C ծանրության կենտրոնի հեռավորությունն է ազատ մակերևույթից, իսկ P-ն՝ նրա մակերեսը, ապա կարելի է գրել, որ $W=\gamma P\xi$: Ճնշման կենտրոնը, այսինքն՝ ամբողջ ճնշման համազորի կիրառման կետը, գտնվում է ազատ մակերևույթից

$$\xi^*=\frac{M}{W}=\frac{P\xi}{I_y}$$

հեռավորության վրա:

Այս բանաձևերը կիրառենք 47-րդ գծագրում պատկերված դեպքերի նկատմամբ:

ա) դեպքում՝ $\xi=c$, $P=bh$ և $W=\gamma bhc$: Այնուհետև, քանի որ 4)-ի մեջ մենք արդեն հաշվեցինք $I_y=bc^2h+\frac{bh^3}{12}$, ապա կարող ենք միանգամից գրել՝

$$\xi^*=c+\frac{h^2}{12c}:$$

Մասնավորապես, եթե $c=\frac{h}{2}$ (այսինքն՝ ուղղանկյան վերին կողմը գտնվում է հեղուկի մակարդակի վրա), ունենք՝

$$W=\frac{1}{2}\gamma bh^2, \qquad \xi^*=\frac{2}{3}c:$$

---

* Մենք վերցնում ենք y-երի առանցքը հեղուկի ազատ մակերևույթի վրա:

բ) դեպքում $\xi = c$, $P = \pi r^2$ *և* $W = \gamma c \pi r^2$*։ Այստեղ* $I_y = \pi r^2 c^2 + \frac{\pi r^4}{4}$ [*տես 4)*]*։*

Ուստի՝

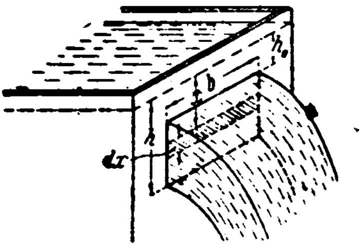
$$\xi^* = c + \frac{r^2}{4c}։$$

7) Եթե ջրով լի ավազանի պատը ջրի մակերևույթից h(մ) *խորության վրա ունի հորիզոնական ճեղք, ապա այդտեղից ջուրը դուրս կհոսի*

$$v = \sqrt{2gh}^*$$

արագությամբ $\left(\frac{\text{մ}}{\text{վրկ.}}\text{-ով}\right)$*։*

Այժմ ենթադրենք, թե ավազանի պատի մեջ կա ուղղանկյուն անցք (գծ. 48)։ Պահանջվում է որոշել ջրի ծախսը, այսինքն՝ 1 վայրկյանում դուրս հոսած ջրի Q(մ³) *ծավալը։*



Գծ. 48։

dx *լայնություն ունեցող էլեմենտար շերտին, որն ունի* x *խորություն, համապատասխանում է* $v = \sqrt{2gx}$ *արագություն. քանի որ նրա մակերեսն է* $b\,dx$, *ապա այդ անցքից դուրս հոսող ջրի քանակը կարտահայտվի այսպես՝* $dQ = \sqrt{2gx} \cdot b\,dx$*։ Հանրագումարելով, կգտնենք՝*

$$Q = \sqrt{2g}\, b \int_{h_0}^{h} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{2g}\, b \left(h^{\frac{3}{2}} - h_0^{\frac{3}{2}}\right)։$$

Փաստորեն դուրս հոսած ջրի քանակը հաշվածից պակաս է, շնորհիվ հեղուկի մեջ եղած շփման և ջրի շիթի սեղմման։ Այս գործոնների ազդեցությունը սովորաբար հաշվի են առնում որոշ փորձնական (էմպիրիկ) $\mu < 1$ *գործակցի օգնությամբ և բանաձևը գրում են հետևյալ տեսքով*

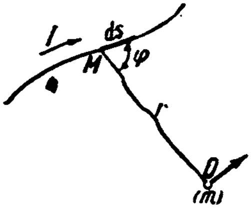
$$Q = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2g}\, b \left(h^{\frac{3}{2}} - h_0^{\frac{3}{2}}\right)։$$

* *Այս բանաձևը, որն ապացուցվում է հիդրոդինամիկայում, հայտնի է Տ ո ր ի չ ե լ լ ի ի բանաձև անունով։ Նշենք, որ նա ունի նույն տեսքը, ինչ որ այն արագության բանաձևը, որը ձեռք է բերում ծանր նյութական կետը, երբ ցած է ընկնում* h *բարձրությունից։*

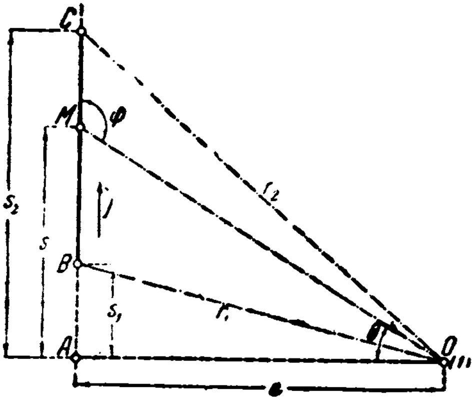
$h_0=0$ *դեպքում այստեղից ստացվում է բանաձև ուղղանկյուն ջրթողի միջոցով ծախսվող ջրի համար*

$$Q=\frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}\,bh^{\frac{3}{2}}\text{։}$$

8) Ուսումնասիրելով հոսանքը մագնիսադաշտը, Բ ի ո ն և Ս ա վ ա ր ը եկել են այն եզրակացության, որ այն ուժը, որով հոսանքն ազդում է մագնիսաբևեռի վրա, կարող է դիտվել որպես համագոր այնպիսի ուժերի, որոնք



Գծ. 49։



Գծ. 50։

որպես թե ելնում են տարանձին անվերջ փոքր «հոսանքի էլեմենտներից»։ Նրանց սահմանած օրենքի համաձայն, հոսանքի ds *էլեմենտը (գծ. 49) ազդում է* O *կետում տեղավորված* m *մագնիսական մասսայի վրա*

$$dF=\frac{I\,m\sin\varphi\,ds}{r^2}\ ^{*}$$

ուժով, որտեղ I*-ն՝ հոսանքի ուժն է,* r*-ը՝* OM *հեռավորությունը, իսկ* φ*-ն՝* (ds, r) *անկյունը։ Այդ ուժն ուղղված է* O*-ով ու* ds*-ով անցնող հարթության ուղղահայացով, ընդ որում, մեր նկարում պատկերված դեպքում, ընթերցողից դեպի թերթի մյուս երեսը։*

Եթե ցանկանանք որոշել հոսանքի վ ե ր ջ ա վ ո ր հատվածի ազդեցությունը մագնիսաբևեռի վրա, պետք է հանրագումարել այդ էլեմենտար ուժերը

---

* *Բանաձևն այս տեսքով տեղի ունի միայն միավորների հարմար ընտրության դեպքում (օրինակ, եթե ուժն արտահայտենք դիններով, հեռավորությունը, սմ-ներով, մագնիսական մասսան ու հոսանքի ուժը՝ էլեկտրամագնիսական միավորներով)։*

Օրինակի համար, որոշենք այն ուժը, որով 1 *մագնիսական մասսայի վրա ազդում է հոսանքի* BC *ուղղանկյուն հատվածը (գծ. 50), նկատում նշված նշանակումների դեպքում։*

Քանի որ $\sin\varphi = \sin\angle OMA = \frac{a}{r}$, *ապա* dF-*ը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝*

$$dF = \frac{al\,ds}{r^3} = \frac{al\,ds}{(a^2+s^2)^{3/2}},$$

էլեմենտար ուժերն այստեղ կարելի է անմիջականորեն գումարել, որովհետև նրանք ունեն միևնույն ուղղությունը։ Ուստի՝

$$F = al\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{(a^2+s^2)^{3/2}} = \frac{l}{a}\,\frac{s}{\sqrt{s^2+a^2}}\Bigg|_{s_1}^{s_2} = \frac{l}{a}\left(\frac{s_2}{r_2} - \frac{s_1}{r_1}\right),$$

§ 4 ՊԱՐԶԱԳՈՒՅՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

348. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐՆԵՐ։ ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՐԳԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ։ VIII *գլխում մենք դիտարկել ենք* $y=y(x)$ *ֆունկցիան որոշելու խնդիրը նրա*

$$y' = f(x) \tag{1}$$

տրված ածանցյալով [կամ, որ միևնույն է, նրա $dy=f(x)dx$ *դիֆերենցիալով] և սովորել ենք կատարել ինտեգրման գործողությունը կամ քառակուսում, որի օգնությամբ լուծվում է այն՝*

$$y = \int f(x)dx + C^{*}. \tag{2}$$

Այս ընդհանուր լուծման մեջ մասնակցում է մի C *հաստատուն։ Ինչպես օրինակներով տեսանք* [251. 252], *եթե տված են սկզբնական պայմաններ՝*

$$y = y_0,\ \text{երբ}\ x = x_0, \tag{3}$$

ապա դրանով որոշվում է հաստատունի $C=C_0$ *կոնկրետ արժեքը։ Տեղադրե-*

---

* *Այս պարագրաֆում* $\int f(x)dx$ *սիմվոլի տակ մենք կհասկանանք թեև կամայական, բայց որոշակի նախնական ֆունկցիա, այնպես որ ինտեգրման հաստատունն այն սիմվոլի մեջ չենք մտցնի և կգրենք առանձին։*

լով այն (2)-ի մեջ, կգանք մեր խնդրի *մասնակի լուծման*, այսինքն՝ մի $y=y(x)$ կոնկրետ ֆունկցիայի, որն ունի ոչ միայն նախապես տրված ածանցյալը, այլև բավարարում է (3) սկզբնական պայմաններին։

Հաճախ, սակայն, հարկ է լինում $y=y(x)$ ֆունկցիան որոշել

$$F(x, y, y', y'', \ldots)=0$$

տեսքի ավելի բարդ առնչություններից, որոնք x անկախ փոփոխականի արժեքները կապում են ինչպես իր՝ որոնելի y ֆունկցիայի, այնպես էլ նրա $y', y'', \ldots$ ածանցյալների արժեքների հետ։ Այս տեսակի առնչություններն ընդհանրապես կոչվում են *դիֆերենցիալ հավասարումներ*։

Կանգ առնենք *առաջին կարգի* հավասարման վրա, որը պարունակում է միայն y' առաջին ածանցյալը՝

$$F(x, y, y')=0։ \tag{4}$$

Դրա լուծում հանդիսանում է ամեն մի $y=y(x)$ ֆունկցիա, որը դրան բավարարում է նույնաբար x-ի նկատմամբ։ Ինչպես կարելի է ցույց տալ (F ֆունկցիայի նկատմամբ հայտնի ենթադրությունների դեպքում), դրա *ընդհանուր լուծումը*, սկզբում հիշված պարզագույն դեպքի նման [տես (2)], այստեղ նույնպես պարունակում է C կամայական հաստատուն, այսինքն ունի

$$y=\varphi(x, C) \tag{5}$$

տեսքը։ Երբեմն, սակայն, այդ լուծումը ստացվում է անբացահայտ ձևով՝

$$\Phi(x, y, C)=0 \text{ կամ } \psi(x, y)=C։ \tag{6}$$

Դիֆերենցիալ հավասարման այս կամ այն ձևով ընդհանուր լուծման որոնումը կոչվում է *հավասարման ինտեգրում*։

Օրինակի համար, դիտարկենք այսպիսի խնդիր՝ *գտնել այն կորերը, որոնց համար ենթանորմալը հաստատուն է*։ Եթե պատկերացնենք, որ այդպիսի կորը արտահայտված է $y=y(x)$ բացահայտ հավասարումով, ապա հարցը կհանգի այնպիսի ֆունկցիաներ գտնելուն, որոնք բավարարում են $yy'=p$ պայմանին, որտեղ $p=\text{const}$. [220 (3)]։ Արտագրենք այն $(y^2)'=2p$ տեսքով. այժմ պարզ է, որ դրա ընդհանուր լուծումը կլինի

$$y^2=2px+C \text{ կամ } y=\pm\sqrt{2px+C}։ \tag{7}$$

Այսպիսով, դրված պահանջին բավարարում է այնպիսի պարաբոլների մի ամբողջ ընտանիք, որոնք ստացվում են մեկը մյուսից՝ x-երի առանցքին զուգահեռ տեղափոխությամբ։

Այստեղ խնդրի պատասխան հանդիսանում է ընդհանուր լուծումը. քանի որ պահանջվում էր գտնել հիշյալ հատկությամբ օժտված բոլոր կորերը։ Եթե խնդրի մեջ լրացուցիչ կերպով նշված լինեին, որ կորը պետք է անցնի տրված (x_0, y_0) կետով, ապա, տեղադրելով x-ի և y-ի այդ արժեք-

ները ստացված (7) հավասարման մեջ, կարող էինք որոշել C-ի արժեքը՝

$$C_0 = y_0^2 - 2px_0.$$

Ընդունելով (7)-ի մեջ $C=C_0$, մենք կգայինք $y=2px+C_0$ մասնակի լուծման, որն արդեն կոնկրետ կոր է արտահայտում:

Պետք է ասել, որ ավելի հաճախ հենց այնպես է պատահում, որ դիֆերենցիալ հավասարման հանգող խնդիրը պահանջում է կոնկրետ մասնակի լուծում: Սովորաբար վերջինս որոշվում է (3) տիպի սկզբնական պայմաններով, որոնք առաջադրվում են հենց իր՝ խնդրի կողմից: Ըստ այդ պայմանների, ինչպես և քիչ առաջ, ամենից առաջ կարող է որոշվել $C=C_0$ կոնկրետ արժեքը. դա կորոշվի այն հավասարումից, որը կստացվի, եթե (5) [կամ (6)] ընդհանուր լուծման մեջ դնենք $x=x_0$, $y=y_0$: Եվ և այժմ այդ ընդհանուր լուծման մեջ C-ի փոխարեն տեղադրենք գտած C_0 արժեքը, ապա և կգանք այն մասնավոր լուծմանը, որը բավարարում է խնդրին:

349. ԱԾԱՆՑՅԱԼԻ ՆԿԱՏՄԱՄԲ ԱՌԱՋԻՆ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ: ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ԱՆՋԱՏՈՒՄԸ: Այժմ ենթադրենք, թե (4) հավասարման մեջ y' ածանցյալը առաջին աստիճանի է, այսինքն՝ որ հավասարումն ունի

$$P(x,y)+Q(x,y)y'=0$$

տեսքը, որտեղ P-ն, Q-ն x-ի ու y-ի ֆունկցիաներն են: Ընդունելով այստեղ $y'=\frac{dy}{dx}$, կարելի է հավասարումը ներկայացնել

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{8}$$

ձևով, որը հաճախ ավելի հարմար է լինում:

Մենք այստեղ կանգ կառնենք (8) հավասարման միայն այն ամենապարզ մասնավոր դեպքերի վրա, երբ նրա ինտեգրումն անմիջականորեն քառակուսացման է հանգում. այս դեպքերի դիտարկումը, այսպիսով, ծառայում է բնական լրացում VIII գլխի:

Եթե (8) հավասարման մեջ P գործակիցը փաստորեն միայն x-ից է կախված, իսկ Q գործակիցը՝ միայն y-ից, այսինքն՝ եթե հավասարումն ունի

$$P(x)dx+Q(y)dy=0 \tag{9}$$

տեսքը, ապա ասում են, որ փոփոխականներն անջատված են: Այս դեպքում ինտեգրումը շատ պարզ է կատարվում:

Ենթադրենք, թե P(x) ֆունկցիան անընդհատ է [a, b] միջակայքում, իսկ Q(y) ֆունկցիան՝ [c, d] միջակայքում: Այդ դեպքում P(x)dx-ը կլինի

$\mathcal{P}(x)=\int P(x)dx$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը, իսկ Q(y)dy-ը՝ $\mathcal{Q}(y)=\int Q(y)dy$

ֆունկցիայի դիֆերենցիալը, նույնիսկ եթե y ասելով հասկացվի այն y(x) ֆունկ-

ցիան, որը բավարարում է (9) հավասարմանը։ Այդ դեպքում (9) հավասարման ձախ մասը իրենից կներկայացնի $P(x)+Q(y)$ գումարի դիֆերենցիալը։ Քանի որ այդ դիֆերենցիալը, (9) հավասարման շնորհիվ, հավասար է* 0, *ապա ինքը ֆունկցիան հանգում է հաստատունի՝*

$$P(x)+Q(y)=C\text{։} \tag{10}$$

Հեշտ է տեսնել, որ հակադարձաբար էլ, երբ $y=y(x)$ ֆունկցիան (ցանկացած x-ի դեպքում) բավարարում է այդ հավասարմանը, ապա բավարարում է նաև (9) հավասարմանը։ (10) հավասարումը տալիս է (9) հավասարման ընդհանուր լուծումը։

Այն $y=y(x)$ լուծումների գոյությունը, որոնք բավարարում են կամայական (3) սկզբնական պայմանների (որտեղ $a<x_0<b$ և $c<y_0<d$), ինքը դեռևս ճշգրտում է պահանջում։ Այդ նպատակով ենթադրենք լրացուցիչ կերպով, որ $Q(y)$-ը 0 չի դառնում և, հետևապես, $[c, d]$-ում պահպանում է որոշակի նշան, օրինակ պլյուս նշան։ Այդ դեպքում $z=Q(y)$-ը կլինի մոնոտոն աճող ֆունկցիա, նրա համար գոյություն ունի $y=g(z)$ դիֆերենցելի հակադարձ ֆունկցիա, այնպես որ (10) ընդհանուր լուծումը կարելի է արտագրել բացահայտ ձևով այսպես՝

$$y=g(C-Q(x))\text{։}$$

Այստեղից հեշտությամբ բխում է պահանջվող եզրակացությունը։

(9) հավասարումը լուծելիս երբեմն գերադասում են dx և dy պարունակող անդամները տեղափոխել հավասարման տարբեր մասերում՝

$$Q(y)dy=-P(x)dx\text{։} \tag{11}$$

Ինտեգրելով յուրաքանչյուր մասն առանձին-առանձին և չմոռանալով կամայական հաստատունը, որը բավական է միացնել ինտեգրալներից մեկին, կգանք հետևյալ արդյունքին՝

$$\int Q(y)dy=-\int P(x)dx+C,$$

որը նույնական է վերևում ստացածի հետ։

Ենթադրենք, թե պահանջվում է բավարարել (3) սկզբնական պայմաններին։ Փոխանակ սկզբում ընդհանուր լուծումը գտնելու, իսկ հետո, ելնելով այդ պայմաններից, C հաստատունն ընտրելու, կարելի է ավելի պարզ վարվել՝ «հանրագումարել» (11) էլեմենտար մեծությունները, աջ կողմում x_0-ի և x-ի միջև, իսկ ձախ կողմում՝ դրանց համապատասխանող y_0 և y արժեքների միջև։ Մենք կստանանք

$$\int_{y_0}^{y} Q(y)dy=-\int_{x_0}^{x} P(x)dx$$

* *Դիֆերենցիալի ձևի անփոփոխականության պատճառով [105]։*

հավասարություն, որը և տալիս է պահանջվող մասնակի լուծումը. այդ լուծման հենց տեսքն ընդգծում է, որ այն նախահայտորեն բավարարվում է $x=x_0$ և $y=y_0$ դեպքում։ Ընթերցողը հեշտությամբ կարող է հասկանալ, որ այս եղանակը միայն ձևով է տարբերվում նախկինից։

Օրինակ 1)։ Դիցուք տված է

$$\sin x\, dx+\frac{dy}{\sqrt{y}}=0$$

հավասարումը։ Ինտեգրում ենք՝

$$\int \sin x\, dx+\int \frac{dy}{\sqrt{y}}=C \quad \text{կամ} \quad -\cos x+2\sqrt{y}=C,$$

որտեղից՝

$$y=\frac{(\cos x+C)^2}{4}.$$

Այսպիսին է առաջադրված հավասարման ընդհանուր լուծումը։ Եթե տված են սկզբնական պայմաններ, օրինակ՝

$$y=1, \text{ երբ } x=0,$$

ապա տեղադրելով այդ արժեքները, միանգամից գտնում ենք $C=1$, որը բերում է հետևյալ մասնավոր լուծմանը՝

$$y=\frac{(1+\cos x)^2}{4}.$$

Ինչպես հիշվել է, այս դեպքում կարելի է և խուսափել նախապես ընդհանուր լուծումը կազմելու անհրաժեշտությունից, միանգամից գրելով՝

$$\int_1^y \frac{dy}{\sqrt{y}}=-\int_0^x \sin x\, dx, \quad \text{այսինքն՝} \quad 2(\sqrt{y}-1)=\cos x-1,$$

որտեղից՝

$$\sqrt{y}=\frac{1+\cos x}{2}, \quad y=\left(\frac{1+\cos x}{5}\right)^2.$$

Հաճախ պատահում է, որ թեև (8) հավասարումը չունի (9) տեսքը, բայց կարող է ձևափոխվել և այդ տեսքի բերվել, որից հետո ինտեգրվում է, ինչպես ցույց է տրված վերևում։ Հենց այդպիսի ձևափոխումն էլ կրում է փոփոխականների անջատում անունը։ Փոփոխականները հեշտությամբ անջատվում են այն դեպքում, երբ P-ն ու Q-ն ներկայացվում են այնպիսի արտադրիչների արտադրյալներ, որոնցից յուրաքանչյուրը կախում ունի միայն մեկ փոփոխականից, այսինքն երբ՝

$$P(x, y)=P_1(x)P_2(y) \text{ և } Q(x, y)=Q_1(x)Q_2(y).$$

Իրոք, բավական է

$$P_1(x)P_2(y)dx+Q_1(x)Q_2(y)dy=0 \qquad (12)$$

հավասարման երկու մասերն էլ բաժանել $P_2(y)Q_1(x)$-ի վրա որպեսզի հենց դրանով արդեն անջատվեն փոփոխականները՝

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx+\frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy=0\text{։}$$

Օ ր ի ն ա կ 2)։ $y\sin\frac{x}{2}\,dx-\cos\frac{x}{2}\,dy=0$։

Հավասարումն ունի (1°) տեսքը. անջատում ենք փոփոխականները

$$\frac{dy}{y}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\,dx$$

և ինտեգրում ենք

$$\log y=-2\log\cos\frac{x}{2}+c\text{։}$$

Պոտենցելով, այստեղից որոշում ենք y-ը՝

$$y=\frac{e^c}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2e^c}{1+\cos x}\text{։}$$

Ընդունելով $C=2e^c$, ընդհանուր լուծումը կբերենք հետևյալ տեսքին՝

$$y=\frac{C}{1+\cos x}\text{։}$$

350. ԽՆԴԻՐՆԵՐ։ Դիտարկենք մի շարք խնդիրներ գիտության զանազան բնագավառներից, որոնք հանգում են անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարումների։

1) Գտնել այն կորերը, որոնց նորմալի n հատվածը (մինչև x-երի առանցքի հետ հատվելը) պահպանում է r հաստատուն մեծություն։

Հիշելով n-ի համար ստացած արտահայտությունը [220, (4)], այն պայմանը, որին պետք է բավարարի x-ի որոնելի y ֆունկցիան, գրում ենք դիֆերենցիալ հավասարման տեսքով՝

$$|y\sqrt{1+y'^2}|=r \quad \text{կամ} \quad y^2(1+y'^2)=r^2\text{։}$$

Այստեղից՝

$$y' = \frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{y} \quad \text{կամ} \quad -\frac{y\,dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \pm dx\text{։}$$

Ինտեգրում ենք՝

$$-\sqrt{r^2 - y^2} = \pm(x + c) \quad \text{կամ} \quad (x + c)^2 + y^2 = r^2\text{։}$$

Ինչպես և պետք էր սպասել, մենք ստացանք այն շրջանագծերի ընտանիքը, որոնց կենտրոնը գտնվում է x-երի առանցքի վրա և շառավիղը r է։

2) Գտնել այն կորերը, որոնց շոշափողի t հատվածը մինչև x-երի առանցքի հետ հատվելը պահպանում է a հաստատուն մեծություն։

220 (4)-ի շնորհիվ, խնդրի դիֆերենցիալ հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը

$$\left|\frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}\right| = a\text{։}$$

Ընդունելով $y' = \frac{dy}{dx}$, այն հեշտ է ձևափոխել այսպես՝

$$\left|y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\right| = a \quad \text{կամ} \quad dx = \mp\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}\,dy\text{։}$$

Ինտեգրում ենք՝

$$x + C = \pm\left[a \log\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}\right].$$

մենք ստացանք տրակտրիսաների ընտանիքը [համեմատել 322, 11)]։

3) Սառեցման օրենքը։ Դիցուք θ°C ջերմաստիճան ունեցող սառեցվող մարմինը շրջապատված է 0°C ջերմաստիճան ունեցող միջավայրով։ Նյուտոնը սահմանել է մի օրենք, որի համաձայն սառեցման արագությունը համեմատական է θ ջերմաստիճանին, այսինքն՝

$$\frac{d\theta}{dt} = -k\theta,$$

որտեղ k-ն դրական հաստատուն է։ Որոշել այն օրենքը, որով նվազում է մարմնի ջերմաստիճանը։

Ունենք

$$\frac{d\theta}{\theta} = -k\,dt,$$

որտեղից, ինտեգրելով, կգտնենք

$$\log \theta = -kt + \log C\text{*}$$

Ակներևորեն,

$$\theta = Ce^{-kt}.$$

Ընդունելով այստեղ $t=0$, *տեսնում ենք, որ* C*-ն այլ բան չէ, քան* θ *սկզբնական ջերմաստիճանը։ Տեղադրելով, կգանք*

$$\theta = \theta_0 e^{-kt}$$

վերջնական բանաձևին, որը որոշում է մարմնի ջերմաստիճանը ցանկացած պահին, եթե միայն այն հայտնի էր (θ_0) *սկզբնական պահին։*

k *գործակիցը կախված է մարմնի միջավայրի հատկություններից. այն որոշվում է փորձնական ճանապարհով։*

4) Անջատման և միացման էքստրա-հոսանքներ։ *Եթե էլեկտրական շղթայի մեջ գործում է* V *հաստատուն լարում, ապա, շղթայի դիմադրությունը նշանակելով* R *և հոսանքի ուժը՝* I, *Օմի օրենքի համաձայն կունենանք* $V=RI$։ *Իսկ երբ* V *լարումը փոփոխվում է (այլև հաստատուն լարման հոսանքի անջատման և միացման պահին), շատ դեպքերում տեղի ունի ինքնինդուկցիայի երևույթ, որը կայանում է նրանում, որ հանդես է գալիս լրացուցիչ էլեկտրաշարժ ուժ, որը համեմատական է հոսանքի ուժի փոփոխության* $\frac{dI}{dt}$ *արագությանը, բայց ունի հակառակ նշան։ Այսպիսով, ինքնինդուկցիայի այդ էլեկտրաշարժիչ ուժի մեծությունը կարելի է ներկայացնել այսպես՝*

$$-L\frac{dI}{dt},$$

որտեղ L*-ը «ինքնինդուկցիայի գործակիցն է»* ($L>0$)։

Եթե առկա է ինքնինդուկցիան, ապա հոսանքի անջատման պահին նրա ուժը միանգամից չի ընկնում մինչև զրո, իսկ միացման պահին՝ միանգամից չի հասնում իր նորմալ մեծության։ Հետազոտենք այս երևույթները անալիտիկորեն։

Օմի օրենքն այժմ ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$V - L\frac{dI}{dt} = RI \quad \text{կամ} \quad \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{V}{L}. \tag{13}$$

(ա) Դիցուք I_0 *ուժի հաստատուն հոսանքը* $t=0$ *պահին անջատվում է։ Քանի որ այդ դեպքում* $V=0$, *ապա ունենք*

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0 \quad \text{կամ} \quad \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt$$

---

* *Նախատեսելով պոտենցումը, հարմարության համար միանգամից հաստատունը վերցնում ենք* $\log C$ *տեսքով։*

և (համաձայն 3)-ին)

$$I=I_0e^{-\frac{R}{L}t},$$

Այդ հոսանքը, որը շղթայի մեջ անցնում է միայն ինքնինդուկցիայի էլեկտրաշարժ ուժի ազդեցության տակ, կոչվում է անջատման էքստրա-հոսանք։ t-ի աճման հետ նրա ուժն արագորեն ձգտում է 0-ի, և որոշ ժամանակից հետո նա դառնում է աննշմարելի։

(բ) Եթե շղթան $t=0$ պահին միանում է (փակվում է) և նրա մեջ սկսում է գործել V հաստատուն լարում, ապա (13) հավասարումից, նորից առանձնացնելով փոփոխականները, կստանանք՝

$$\frac{-RdI}{V-RI}=-\frac{R}{L}dt,\quad \log(V-RI)=\frac{R}{L}t+\log C,$$

$$V-RI=Ce^{-\frac{R}{L}t},$$

C հաստատունը կորոշենք սկզբնական պայմաններից՝ $I=0$, երբ $t=0$. ակներևորեն, $C=V$, այնպես որ վերջնականապես

$$I=\frac{V}{R}\left(1-e^{\frac{R}{L}t}\right)։$$

Մենք տեսնում ենք, որ $\frac{V}{R}$ հոսանքի հետ, որը համապատասխանում է Օմի օրենքին, միաժամանակ հակառակ ուղղությամբ հոսում է

$$\frac{V}{R}e^{-\frac{R}{V}t}$$

հոսանքը։

Հենց այս է միացման էքստրա-հոսանքը. նրա ուժը նույնպես արագորեն նվազում է t-ի աճմանը զուգընթաց։

5) Քիմիական ռեակցիայի հավասարումը։ Դիտարկենք մի քիմիական պրոցես, որի ժամանակ A, B,... փոխազդող նյութերը փոխարկվում են M, N,... նյութերի։ Ռեակցիայի մեջ մտնողող նյութի քանակը գնահատելու համար, այն արտահայտում են գրամ-մոլեկուլներով կամ մոլերով։ Որևէ նյութի մոլ կոչվում է նրա այնպիսի կշռաքանակը, որը գրամներով արտահայտվում է նրա մոլեկուլային կշռին հավասար թվով։ Ցանկացած նյութի մոլի մեջ միշտ պարունակվում են միևնույն քանակությամբ մոլեկուլներ, անկախ նյութից։

Եթե ենթադրենք, որ մի նյութի յուրաքանչյուր մոլեկուլի հետ փոխազդեցության մեջ է մտնում մյուս նյութի մեկ մոլեկուլ, ապա մեկի յու

րաքանչյուր մոլին կընկնի մյուսի մեկ մոլ։ Ռեակցիայի սկզբից t ժամանակ անցնելուց հետո փոխազդող մարմիններից յուրաքանչյուրից ռեակցիայի մեջ կմտնի մոլերի միևնույն x քանակ։ x-ի *աճման արագությունը* ժամանակի նկատմամբ, այսինքն՝ $\frac{dx}{dt}$ ածանցյալը, կոչվում է *քիմիական ռեակցիայի արագություն*։

Դիցուք պրոցեսում մասնակցում են երկու A և B նյութեր, որոնց սկզբնական քանակները (մոլերով) նշանակենք a և b (ընդ որում դիցուք, ասենք, b > a)։ t ժամանակամիջոցից հետո կունենանք a−x քանակությամբ A նյութ և b−x քանակությամբ B նյութ։ Բնական է ենթադրել, որ քիմիական ռեակցիայի արագությունը t պահին համեմատական է փոխազդող մասսաների արտադրյալին, այսինքն՝ այն փոխազդիչների քանակի արտադրյալին, որոնք դեռևս փոփոխման չեն ենթարկվել։ Այդ բերում է այսպիսի դիֆերենցիալ հավասարման՝

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x) \quad \text{կամ} \quad \frac{dx}{(a-x)(b-x)}=k\,dt,$$

Ինտեգրելով, կստանանք

$$\frac{1}{b-a}\log\frac{a-x}{b-x}=-kt+C,$$

Քանի որ t=0 պահին մենք պետք է ունենանք նաև x=0, ապա $C=\frac{1}{b-a}\log\frac{a}{b}$։ Տեղադրելով C-ի այս արժեքը՝

$$\log\frac{(a-x)b}{(b-x)a}=-k(b-a)t,$$

այնուհետև հեշտությամբ գտնում ենք

$$x=ab\frac{1-e^{-k(b-a)t}}{b-ae^{-k(b-a)t}},$$

t-ն աճելիս ցուցչային արտահայտությունը ձգտում է 0-ի. վերջավոր ժամանակամիջոցից հետո նա դառնում է այնքան փոքր, որ x-ը արդեն a-ից չենք տարբերի, և գործնականորեն ռեակցիան վերջանում է։

6) *Մաթեմատիկական ճոճանակ*։ Դիցուք m մասսա ունեցող նյութական կետը կախված է չձգվող թելից կամ ձողից (որի կշիռն անտեսում ենք) այնպես, որ կարող է շարժվել շրջանագծի աղեղով (գծ. 51)։ Այդ սիստեմը կոչվում է **մաթեմատիկական ճոճանակ**։ Ճոճանակը հանելով OA հավասարակշռության դրությունից և հասցնելով OB դրության $\left(\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$, բաց թողնենք ճոճանակը, առանց նրան սկզբնական արագություն հաղորդելու։ Խնդիրը կայանում է նրանում, որպեսզի որոշենք ճոճանակի տատանումների բնույթը, այսինքն՝ պարզենք ճոճանակի դիրքը որոշող $\theta=\angle AOM$ բևեռային անկյան և շարժման սկզբից անցած t (վրկ.) ժամանակի միջև եղած կախումը։

Կետի վրա ազդող $F=mg$ *ծանրության ուժը վերլուծելով այնպես, ինչպես ցույց է տրված գծագրում, տեսնում ենք, որ նրա շոշափող բաղադրիչ* $F_s=mg\cdot\sin\theta$, *այն ժամանակ երբ նորմալ բաղադրիչը ոչնչանում է թելի կամ ձողի դիմադրությամբ։ Մտցնելով* $s=\overset{\frown}{BM}=l(\alpha-\theta)$ *աղեղը այն* A *աշխատանքի մեծության համար, որը կատարում է* F_s *ուժը* $\overset{\frown}{BM}$ *ճանապարհի վրա, ունենք հետևյալ արտահայտությունը* [344, (9ա)]՝

$$A=\int_0^s mg\cdot\sin\theta\,ds$$

կամ, եթե անցնենք θ *փոփոխականին՝*

$$A=-mgl\int_0^\theta \sin\theta\,d\theta=mg\,l(\cos\theta-\cos\alpha)\text{։}$$

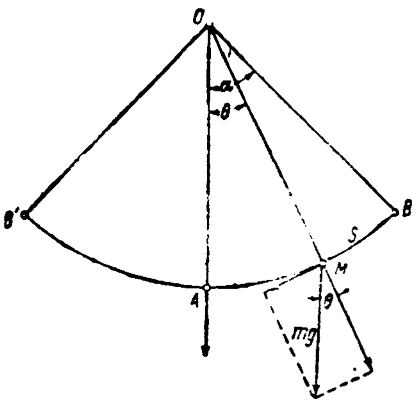
Այդ դեպքում, ըստ կենդանի ուժի օրենքի [344], *քանի որ սկզբնական արագությունը հավասար է զրոյի, կլինի*

$$\frac{1}{2}mv^2=mgl(\cos\theta-\cos\alpha),$$

$$v=\sqrt{gl}\,\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}\text{։}$$

Բայց, մյուս կողմից, $v=\frac{ds}{dt}=-l\frac{d\theta}{dt}$, *այնպես որ* θ*-ի և* t*-ի միջև եղած կախումը որոշելու համար ստանում ենք*

$$\frac{d\theta}{dt}=-\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}$$



Գծ. 51։

կամ

$$dt=-\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}}$$

դիֆերենցիալ հավասարումը, որտեղ փոփոխականներն արդեն անջատված են։

Ինտեգրելով ձախ կողմում 0-ից մինչև t, *իսկ աջում՝* α*-ից մինչև* θ, *գալիս ենք, վերջապես, որոնելի կախմանը*

$$t=-\sqrt{\frac{l}{g}}\int_\alpha^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}}=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_\theta^\alpha\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}}\text{։}$$

Սակայն քառակուսումն այս անգամ վերջավոր տեսքով չի վերցվում՝ աջակողմյան ինտեգրալը պատկանում է էլիպտիկ ինտեգրալների դասին [278]։

Որոշենք ճոճանակի մեկ թափի տևողությունը $B(\theta=\alpha)$ դիրքից մինչև $B'(\theta=-\alpha)$ դիրքը՝

$$T=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}}=2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{0}^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}}։$$

Եթե հայտարարում եղած կոսինուսներից յուրաքանչյուրը փոխարինենք ըստ $\cos x = 1-2\sin^2\frac{x}{2}$ բանաձևի, ապա կգտնենք

$$T=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{0}^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}։$$

Ընդունելով $\sin\frac{\alpha}{2}=k$ $(0<k<1)$ և մտցնելով ինտեգրման նոր փոփոխական ըստ հետևյալ բանաձևի

$$\sin\frac{\theta}{2}=k.\sin\varphi,\quad \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=k.\cos\varphi\, d\varphi,$$

վերջնականապես T-ի համար կստանանք I տեսակի լրիվ էլիպտիկ ինտեգրալի տեսքով արտահայտություն՝

$$T=2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=2\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot F(k)։$$

Նշենք, որ ստացված T պարբերությունն իրականում կախված է α անկյունից, որով ճոճանակն սկզբում թեքվել է, որովհետև k-ն կախված է α-ից։ k մոդուլը, α փոքր անկյունների դեպքում, փոխարինելով զրոյով, կստանանք պարզ մոտավոր բանաձև՝

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

որը և սովորաբար բերվում է ֆիզիկայի տարրական դասընթացներում։

351. ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ ԿԱԶՄԵԼՈՒ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ։ Սահմանափակվելով (8) տեսքի առաջին կարգի հավասարումով, մենք կանգ կառնենք նման հավասարում կազմելու հարցի վրա։ Այդ առթիվ արած մեր դիտողությունները ընթերցողը կարող է համեմատել

n° 339-ում $dQ=q(x)dx$ պարզագույն հավասարման վերաբերյալ ասածների հետ։

Որպես կանոն, հավասարումներ կազմելիս հարկ է լինում դիտարկել խնդրի մեջ մտնող մարմինների անվերջ փոքր էլեմենտներ և այն մեծությունների անվերջ փոքր աճեր, որոնց մասին խոսք է լինում։ Ճիշտ է, նախորդ n°-ի խնդիրներում մեզ, ըստ երևույթին, հաջողվեց խուսափել դրանից, բայց միայն օգտագործելով շոշափողի անկյունային գործակցի արդեն պատրաստ արտահայտությունը, այս կամ այն մեծության փոփոխության արագության պատրաստ արտահայտությունը՝ մեծություններ, որոնք իրենք հանդես էին գալիս անվերջ փոքր էլեմենտների դիտարկման ժամանակ։

Անվերջ փոքր էլեմենտների միջև կախումը որոշելիս, պետք է օգտվել ամեն տեսակի հնարավոր պարզացնող ենթադրություններից ու մոտավոր փոխարինումներից, որոնք էապես հանգում են բարձր կարգի անվերջ փոքր մեծություններ դեն ձգելուն։ Մասնավորապես խորհուրդ է տրվում դիտարկվող մեծությունների բոլոր անվերջ փոքր աճերը փոխարինել իրենց դիֆերենցիալներով․ ինչպես ընթերցողը գիտե, այդ նույնպես հանգում է բարձր կարգի անվերջ փոքր մեծություններ դեն ձգելուն։ Այս բոլոր ցուցումների իսկական իմաստը ամենից լավ կպարզվի օրինակների օգնությամբ (տես հետևյալ n°-ը)։

Իսկ այստեղ մենք ցանկանում ենք կանգ առնել նաև այն կարևոր հանգամանքը բացատրելու վրա, որ այդ բոլոր պարզացումների և դեն ձգումների հետևանքով ստացվող

$$P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy=0 \qquad (8)$$

տեսքի դիֆերենցիալ հավասարումն ամենևին էլ մոտավոր չի հանդիսանում, այլ միանգամայն ճշգրիտ*։

Այսպես ուրեմն, ենթադրենք, թե Δx և Δy աճերը փոխարինելով dx և dy դիֆերենցիալներով և, հարկ եղած դեպքում, դեն ձգելով Δx-ի նկատմամբ ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր մեծությունները, մենք հանգեցինք (8) հավասարմանը։ Եթե մենք այդ փոխարինումը չկատարեինք, ապա dx-ի ու dy-ի փոխարեն կունենայինք Δx ու Δy։ Բացի այդ, վերականգնենք բարձր կարգի բոլոր անվերջ փոքրերը և, տեղափոխելով աջ կողմը, նշանակենք նրա գումարը α-ով․ ակներևաբար, α-ն նույնպես կլինի բարձր կարգի անվերջ փոքր։ Այսպիսով, խստորեն դատելով, մենք կգայինք ոչ թե (8), այլ այսպիսի մի հավասարության՝

$$P(x,\ y)\Delta x+Q(x,\ y)\Delta y=\alpha,$$

որը միանգամայն ճշգրիտ է։ Այժմ նրա երկու մասերն էլ բաժանենք Δx-ի՝

$$P(x,\ y)+Q(x,\ y)\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\alpha}{\Delta x}$$

* Այդ նման է n° 339-ի վերջում $dQ=q(x)dx$ հավասարության վերաբերյալ ասածին։

և անցնենք սահմանին, երբ $\Delta x \to 0$։ Քանի որ այդ դեպքում $\frac{\alpha}{\Delta x} \to 0$, ապա սահմանում կստանանք հետևյալ հավասարությունը՝

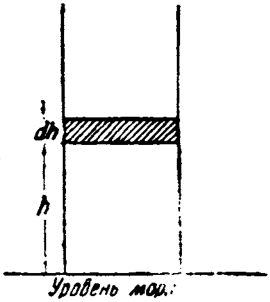
$$P(x, y)+Q(x, y)y'=0 \quad \text{կամ} \quad P(x, y)+Q(x, y)\frac{dy}{dx}=0,$$

որը նույնական է (8)-ի հետ։ Ուստի (8) հավասարումը ևս ճշգրիտ է։

Թեև հավասարումներ կազմելու սովորական մեթոդի դեպքում մենք բացահայտորեն չենք դիմում սահմանային անցմանը, բայց փաստորեն մենք հենց այդ ենք կատարում, երբ դեն ենք ձգում բարձր կարգի անվերջ փոքրերը և աճերը փոխարինում ենք դիֆերենցիալներով։

Ընթերցողի ուշադրությունը հրավիրում ենք այն բանի վրա, որ մենք ամենևին էլ չենք պնդում, որ բարձր կարգի անվերջ փոքրերի ամեն մի դեն ձգում բերում է ճ շ գ ր ի տ արդյունքի։ Միայն այն դեպքում, երբ այդ դեն ձգումը «մինչև վերջ» է հասցված, և արդյունքում ստացվել է (8) տեսքի հավասարում, որը դիֆերենցիալների նկատմամբ գ ծ ա յ ի ն է և հ ա մ ա ս ե ռ, կարելի է արդեն երաշխավորել նրա ճշգրտությունը։ [Դարձյալ համանմանություն n 339-ի հետ!]

352. ԽՆԴԻՐՆԵՐ։ 1) Բ ա ր ո մ ե տ ր ի կ բ ա ն ա ձ և։ Խնդիր դնենք կախում հաստատել տվյալ վայրի՝ ծովի մակարդակից ունեցած h(մ) բարձրության և օդի p(կգ/մ²) ճնշման միջև։



Գծ. 52։

Պատկերացնենք ծովի մակարդակի վրա գտնվող 1մ² տարածությամբ մի հարթակ և դիտարկենք այդ հարթակի վրա հենվող օդի ուղղաձիգ սյունը։ h բարձրության վրա այդ սյան հատույթում օդի p ճնշումը պայմանավորված է սյան այն մասի կշռով, որը հենվում է հիշյալ հատույթի վրա։ Եթե h բարձրությունը մ ե ծ ա ց ն ե ն ք dh անվերջ փոքր մեծությամբ, ապա դրա հետևանքով կստացվի ճնշման dp նվազում, որը չափվում է (h) և (h+dh) հարթակների միջև եղած օդի սյան կշռով (գծ. 52)՝

$$-dp=s\,ds,$$

որտեղ s-ը՝ 1մ³ օդի կշիռն է (կգ-ներով) p ճնշման տակ։ Ինչպես հեշտ է ստանալ Բ ո յ լ-Մ ա ր ի ո տ ի օրենքից, s մեծությունն ինքը համեմատական է p ճնշմանը՝ $s=kp$, այնպես որ վերջնականորեն՝

$$dp=-kp\,dh \quad \text{կամ} \quad \frac{dp}{p}=-k\,dh,$$

այսինքն՝ ստացվում է մեզ արդեն ծանոթ տեսակի հավասարում [համեմատել 350, խնդ. 3) և 4) (ա)]։ Այստեղից՝

$$p=p_0 e^{-kh},$$

Եթե այս հավասարումը լուծենք h-ի նկատմամբ, ապա կստանանք

$$h=\frac{1}{k}\log\frac{p_0}{p}$$

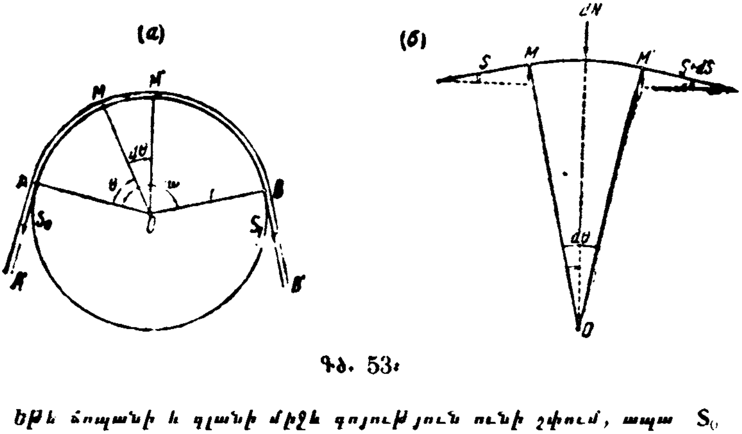
բանաձևը, որը հնարավորություն է տալիս օդի p ճնշման միջոցով դատել ծովի մակարդակից եղած վերելքի h բարձրության մասին։

$\frac{1}{k}$ հաստատունը, ինչպես ցույց է տրվում ֆիզիկայում, հավասար է (կլորացումով) $8000(1+0{,}004t)$, որտեղ t-ն օդի միջին ջերմաստիճանն է։ Եթե անցնենք տասնորդական լոգարիթմներին (բազմապատկելով և բաժանելով $M=0{,}43$ մոդուլի վրա) և ճնշումների $\frac{p_0}{p}$ հարաբերությունը փոխարինենք բարոմետրական հաշվարկումների $\frac{b_0}{b}$ հարաբերությամբ, ապա կստանանք վերջնական բանաձև՝

$$h=18\,400(1+0{,}004t)\log\frac{b_0}{b}\text{ ։}$$

Այս բանաձևը պիտանի է նաև ամեն երկու կետերի h բարձրությունների տարբերությունը որոշելու համար, որտեղ բարոմետրի ցուցմունքները համապատասխանաբար հավասար են b_0 և b։

2) Ճոպանների և փոկերի շփումը։ Պատկերացնենք, որ անշարժ ամրակցված գլանի վրայով ձգված է ճոպան (փոկ. և այլն), որը գլանին հպվում է մի որոշ AB աղեղով (գծ. 53, a), ընդ որում այդ աղեղը համապատասխանում է ω կենտրոնական անկյան («ընդգրկման անկյուն»)։ Դիցուք ճոպանի A ծայրին կիրառված է S_0 ուժ, իսկ B ծայրին՝ S_1 ուժ։



Գծ. 53։

Եթե ճոպանի և գլանի միջև գոյություն ունի շփում, ապա S_0 ուժը կարող է հավասարակշռել ճոպանի մյուս ծայրին կիրառված նույնիսկ իրենից մեծ ուժ։ Ո՞րն է հապա այն S_1 մեծագույն ուժը, որը շփման առկայության դեպքում կարող է հավասարակշռվել տվյալ S_0 ուժով։

Այդ հարցը լուծելու համար նախ տեսնենք, թե S ձգումը ինչպես է բաշխվում ճոպանի AB մասի երկարությամբ այն պահին, երբ հենց նոր սկսվում է սահքը։ Որ այդ ձգումը հաստատուն չի լինի, պարզ է արդեն այն բանից, որ A և B կետերում այն, համապատասխանաբար, հավասար է S_0 *և* S_1*։*

AB *աղեղի վրա վերցնենք որևէ* M *կետ, որի դիրքը որոշվում է* $\theta=\measuredangle AOM$ *անկյունով, և որոշենք, թե ինչ ուժեր են ազդում ճոպանի* $\overset{\frown}{MM'}$ *էլեմենտի վրա, որը համապատասխանում է* $d\theta$ *կենտրոնական անկյանը։ Ամենից առաջ, M կետում ազդում է* $S=S(\theta)$ *ձգումը, իսկ* M' *կետում՝* $S-dS$ *ձգում (գծ. 53, b)։ Այդ երկու ուժերն էլ ուղղված են գլանի շրջանագծի շոշափողների ուղղությամբ։ Որոշելու համար այդ շփման ուժը, որը տեղի ունի դիտարկվող էլեմենտի վրա, պետք է հաշվել այդ էլեմենտը գլանի մակերևույթին սեղմող* dN *նորմալ ուժը։ Այդ ուժը բաղկացած է երկու ձգումների շառավղային բաղադրիչներից, այնպես որ*

$$dN=S\sin\frac{d\theta}{2}+(S+dS)\sin\frac{d\theta}{2}։$$

Այստեղ կարելի է դեն ձգել $dS\sin\frac{d\theta}{2}$ *արտադրյալը որպես բարձր կարգի անվերջ փոքր և* $\sin\frac{d\theta}{2}$ *փոխարինել իրեն համարժեք* $\frac{d\theta}{2}$ *անվերջ փոքրով (որը դարձյալ համազոր է բարձր կարգի անվերջ փոքրը դեն ձգելուն)։ Վերջնականապես*

$$dN=S\,d\theta։$$

Քանի որ շփման ուժը համեմատական է այդ նորմալ ուժին, ապա, համեմատականության գործակիցը (շփման գործակիցը) նշանակելով μ, *կստանանք*

$$dR=\mu dN=\mu S d\theta։$$

Շփումը հակազդում է սկսվող շարժմանը, այնպես որ dR *ուժը* M *կետում եղած* S *ձգման հետ միասին պետք է հավասարակշռեն* $S+dS$ *ձգումը* M' *կետում, որտեղից*

$$dS=\mu S\,d\theta։$$

Մենք նորից ստացանք ծանոթ տիպի դիֆերենցիալ հավասարում։ Կարելի է միանգամից գտնել նրա լուծումը (հաշվի առնելով սկզբնական պայմանը՝ $S=S_0$, *երբ* $\theta=0$*)*

$$S=Se^{\mu\theta}։$$

Վերջապես, ընդունելով այստեղ $\theta=\omega$, *կգտնենք*

$$S_1=S_0e^{\mu\omega}։$$

Այս կարևոր բանաձևը պատկանում է Է յ լ ե ր ի ն։

3) Պուասսոնի (S. D. Poisson) բանաձևը։ Խնդիր դնենք կախում հաստատել իդեալական գազի միավոր մասսայի (1 կգ) v ծավալի և p ճնշման միջև ադիաբատիկ պրոցեսի ժամանակ (այսինքն՝ այն դեպքում, երբ գազի և շրջապատող միջավայրի միջև ջերմափոխանակումը լրիվ բացակայում է)։

Գազի վիճակը, բացի v և p մեծություններից, բնորոշվում է նաև նրա T (բացարձակ) ջերմաստիճանով։ Սակայն այդ մեծություններն անկախ չեն. նրանք կապված են Կլապեյրոնի հայտնի բանաձևով՝

$$pv = RT \quad (R = \text{const.}), \tag{14}$$

Որոշենք, թե ջերմության միավորներով արտահայտված ինչ քանակությամբ dU էներգիա պետք է ծախսել, որպեսզի գազը (p, v, T) վիճակից բերենք $(p+dp,\ v+dv,\ T+dT)$ անվերջ մոտ վիճակին։

Անցման պրոցեսը կարելի է պատկերացնել երկու փուլերից բաղկացած։ Նախ, գազի v ծավալը մեծանում է dv-ով և, երկրորդ, գազի T ջերմաստիճանը, հաստատուն ծավալի դեպքում, փոխվում է dT-ով։

Որպեսզի հաշվենք գազի ընդարձակման էլեմենտար աշխատանքը, ենթադրենք պարզության համար, որ գազի դիտարկվող մասսան գտնվում է է գլանում մխոցի մեկ կողմում (համեմատել 345, 2))։ Գազի կողմից մխոցի վրա ազդող ուժը կլինի pQ, որտեղ Q-ն մխոցի մակերեսն է։ Եթե գազի ընդարձակման ժամանակ մխոցը շարժվել է ds հեռավորությամբ, ապա գազի կատարած աշխատանքը հավասար կլինի $pQ\,ds$-ի կամ $p\,dv$-ի (քանի որ $Q\,ds = dv$)։ Այսպես է արտահայտվում աշխատանքը՝ աշխատանքի սովորական միավորներով, օրինակ, կգմ-ով (եթե p-ն տված է կգ/մ²-ով, v-ն՝ մ³-ով)։ Ցանկանալով որոշել այդ աշխատանքի վրա ծախսված ջերմությունը, պետք է ստացված արտահայտությունը բազմապատկել այսպես կոչված աշխատանքի ջերմային համարժեքով՝ $A = \frac{1}{427}$ կալ/կգմ-ով, որը կտա $Ap\,dv$։

Ջերմաստիճանի dT_0-ով փոփոխությունը կպահանջի $c_v\,dT$ կալ, որտեղ c_v-ն՝ գազի ջերմությունն է հաստատուն ծավալի դեպքում։ Գումարելով, կստանանք՝

$$dU = c_v\,dT + Ap\,dv։ \tag{15}$$

Այստեղից dT-ն արտաքսելը հեշտ է։ Եթե դիֆերենցենք (14) բանաձևը՝

$$p\,dv + v\,dp = R\,dT \tag{16}$$

և որոշենք dT-ն

$$dT = \frac{1}{R}(p\,dv + v\,dp),$$

ապա կմնա միայն տեղադրել այդ արտահայտությունը (15)-ի մեջ՝

$$dU=\frac{c_v}{R}v\,dp+\frac{c_v+AR}{R}p\,dv:$$

Կարելի է ցույց տալ, որ c_v+AR*-ը հենց գազի* c_p *- ջերմունակությունն է հաստատուն ճնշման դեպքում**, *այնպես որ վերջնականապես*

$$dU=\frac{c_v}{R}v\,dp+\frac{c_p}{R}p\,dv:$$

Այժմ վերադառնանք սկզբում արած այն ենթադրությանը, որ պրոցեսն ընթանում է ադիաբատիկորեն. այդ դեպքում $dU=0$: *Այստեղից, մենք հանգում ենք* p*-ն ու* v*-ն կապող դիֆերենցիալ հավասարման՝*

$$c_v v\,dp+c_p p\,dv=0 \quad \text{կամ} \quad \frac{dp}{p}+k\frac{dv}{v}=0 \quad \left(\text{որտեղ} \quad k=\frac{c_p}{c_v}>1\right):$$

Ինտեգրելով, կգտնենք

$$\log p+k\log v=0 \quad \text{կամ} \quad pv^k=C:$$

Հենց այս է Պուասսոնի բանաձևը:

---

* *Եթե (16)-ից որոշենք*

$$p\,dv=RdT-v\,dp$$

և տեղադրենք (15)-ի մեջ, ապա կստանանք

$$dU=(c_v+AR)dT-Av\,dp:$$

Ընդունելով այստեղ $p=\text{const.}$, *այսինքն՝* $dp=0$, *կգտնենք*

$$dU=(c_v+AR)dT$$

հավասարությունը, որը և ցույց է տալիս, որ c_v+AR*-ը* c_p*-ն է:*

ՏԱՍՆՄԵԿԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ԱՆՎԵՐՋ ՇԱՐՔԵՐ ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԱՆԴԱՄՆԵՐՈՎ

§ 1. ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

353. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐՆԵՐ. *Դիցուք տված է թվերի մի որոշ անվերջ հաջորդականություն՝*

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n, \ldots \tag{1}$$

Այդ թվերից կազմված հետևյալ սիմվոլը

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{2}$$

կոչվում է ***անվերջ շարք***, *իսկ (1) թվերն իրենք՝ շարքի* ***անդամներ***. *(2)-ի փոխարեն, օգտվելով գումարի նշանից, հաճախ գրում են այսպես՝*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{2a}$$

n նշիչը այստեղ ընդունում է բոլոր արժեքները 1-ից մինչև ∞.*

Սկսենք հաջորդաբար գումարել շարքի անդամները, կազմելով (անվերջ քանակությամբ) գումարներ՝

$$\left.\begin{aligned} A_1 = a_1,\ A_2 = a_1 + a_2,\ A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \\ \ldots A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

* *Ի միջի այլոց, շարքի անդամների համարակալումը երբեմն ավելի հարմար է լինում սկսել ոչ թե մեկից, այլ զրոյից կամ էլ՝ մեկից մեծ որևէ բնական թվից։*

դրանց անվանում են շարքի մասնակի գումարներ (կամ հատվածներ)։ Մասնակի գումարների այդ $\{A_n\}$ *հաջորդականությունը մենք միշտ կզուգադրենք* (2) *շարքի հետ. այդ սիմվոլի դերը կայանում է հենց հիշյալ հաջորդականության առաջացման մեջ։*

Եթե (2) շարքի A_n մասնակի գումարը, $n \to \infty$ դեպքում, ունի վերջավոր կամ անվերջ *(*բայց որոշակի նշանով*)* A սահման՝

$$A = \lim A_n ,$$

ապա այդ սահմանն անվանում են *շարքի գումար* և գրում են՝

$$A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n ,$$

դրանով էլ թվային իմաստ տալով (2) *կամ* (2a) *սիմվոլին։* Եթե շարքն ունի վերջավոր գումար, այն անվանում են *զուգամետ*, իսկ հակառակ դեպքում (այսինքն՝ եթե գումարը հավասար է $\pm\infty$, կամ թե գումար ամենևին չկա)՝ *տարամետ*։

Այսպիսով, (2) *շարքի զուգամիտության հարցը, ըստ սահմանման, համարժեք է* (3) *հաջորդականության համար վերջավոր սահմանի գոյության հարցին։ Հակադարձորեն, ինչպիսի* $x = x_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *փոփոխական էլ նախապես վերցնելու լինենք, դրա համար վերջավոր սահմանի գոյության հարցը կարելի է հանգեցնել հետևյալ շարքի զուգամիտության հարցին՝*

$$x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_n - x_{n+1}) + \ldots , \qquad (4)$$

որի համար մասնակի գումարներ կհանդիսանան հենց այդ փոփոխականի հաջորդական արժեքները՝

$$x_1, x_2, x_3, \ldots , x_n , \ldots .$$

Ընդ որում շարքի գումարը համընկնում է փոփոխականի սահմանի հետ։

Ուրիշ խոսքով, անվերջ շարքի և նրա գումարի դիտարկումը պարզապես մի նոր ձև է փոփոխականի (կամ հաջորդականության) ու նրա սահմանի ուսումնասիրության։ Բայց այդ

ձևը, ինչպես ընթերցողը կտեսնի հետագա շարադրումից, անգնահատելի առավելություններ ունի ինչպես սահմանի հենց գոյությունը հաստատելիս, այնպես էլ այն հաշվելիս։ Այդ հանգամանքը անվերջ շարքերը դարձնում է հետազոտման մի կարևորագույն զենք մաթեմատիկական անալիզում ու նրա կիրառություններում։

354. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ 1) Անվերջ շարքի պարզագույն օրինակ է հանդիսանում ընթերցողին արդեն ծանոթ երկրաչափական պրոգրեսիան՝

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$$

Նրա մասնակի գումարը կլինի (եթե $q \neq 1$)

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Եթե պրոգրեսիայի q քանորդը (հայտարարը) բացարձակ մեծությամբ փոքր է մեկից, ապա [ինչպես արդեն գիտենք, 25, 7)] s_n-ը ունի վերջավոր սահման՝

$$s = \frac{a}{1-q},$$

այսինքն մեր շարքը զուգամետ է և s-ը կլինի նրա գումարը։

$|q| = 1$ դեպքում նույն պրոգրեսիան տալիս է տարամետ շարքի օրինակ։ Եթե $q = +1$, ապա նրա գումարը կլինի անվերջություն (որոշակի նշանով). մնացած դեպքերում գումար ամենևին չկա։ Նշենք, մասնավորապես, մի հետաքրքրաշարժ շարք, որը ստացվում է $a = 1$ և $q = -1$ դեպքում՝

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \equiv 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots\text{*}.$$

Դրա մասնակի գումարները մեկընդմեջ հավասար են մերթ 1-ի, մերթ 0-ի։

2) a իրական թիվը, որն անվերջ տասնորդական կոտորակի է վերածված՝

$$C_0, c_1 c_2 c_3 \cdots c_n \cdots$$

[8], ակնհայտորեն, ներկայացնում է հետևյալ շարքի գումար

$$a = C_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{c_3}{10^3} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} + \cdots$$

---

* Եթե շարքը որևէ a անդամ բացասական թիվ է լինում՝ $a = -b$ (որտեղ $b > 0$), ապա փոխանակ գրելու

$$\cdots + (-b) + \cdots, \text{ գրում են՝ } \cdots - b + \cdots$$

ընդգծենք, որ շարքի անդամ այստեղ այնուամենայնիվ կլինի $-b$-ն, այլ ոչ b-ն։

3) (4)-ի օրինակով կառուցված է հետևյալ շարքը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} [\log(n+1)-\log n],$$

որը բացահայտորեն տարամետ է, որովհետև $\log(n+1) \to +\infty$։

4) Նույն գաղափարի վրա է. փաստորեն, կառուցված նաև հետևյալ շարքը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)։$$

Քանի որ n-րդ մասնակի գումարը հավասար է $1-\frac{1}{n+1}$, ապա շարքը զուգամիտում է և նրա գումարն է 1;

5) Հեշտ է որոշել հետևյալ շարքի տարամիտությունը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots։$$

Իրոք, քանի որ նրա անդամները նվազում են, ապա նրա n-րդ մասնակի գումարը

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} > n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

և աճում է մինչև անվերջություն n-ի հետ միասին։

6) Վերջապես, ավելի պակաս ակներև օրինակ կտա մեզ հետևյալ վարիանտը

$$y_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!},$$

որը, ինչպես ցույց ավեցինք 37-ում, ձգտում է e թվին։ Այդ հավասարազոր է այն պնդումին, որ e-ն հանդիսանում է հետևյալ անվերջ շարքի գումարը՝

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}։$$

Հիշելով e թվի մոտավոր հաշվումը 37-ում, ընթերցողն այս օրինակով կարող է գնահատել ավելի ու ավելի նվազ զգալի ուղղումների հաջորդական

մուծումը, որոնք հետզհետե բարելավում են e-ի՝ հանձին մասնակի գումարների ստացվող մոտավոր արժեքները:

355. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ. Եթե (2) *շարքում դեն նետենք առաջին* m *անդամները, ապա կստացվի հետևյալ շարքը*

$$a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}+\cdots=\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n, \tag{5}$$

որը կոչվում է (2) *շարքի մնացորդ* m-*րդ անդամից հետո:*

1° Եթե (2) շարքը զուգամետ է, ապա զուգամետ է նաև նրա (5) մնացորդներից յուրաքանչյուրը. հակադարձորեն՝ (5) մնացորդի զուգամիտությունից բխում է (2) սկզբնական շարքի զուգամիտությունը:

Ֆիքսենք m-*ը և* (5) *շարքի* k-*րդ մասնակի գումարը նշանակենք* A'_k-*ով՝*

$$A'_k=a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}.$$

Այդ դեպքում, ակներևորեն,

$$A'_k=A_{m+k}-A_m. \tag{6}$$

Եթե (2) *շարքը զուգամիտում է, այնպես որ* $A_n \to A$, *ապա* k-*ն անվերջորեն աճելիս, գոյություն ունի վերջավոր սահման նաև* A'_k *գումարի համար՝*

$$A'=A-A_m, \tag{7}$$

որը և նշանակում է, որ (5) *շարքը զուգամետ է:*

Հակադարձորեն, եթե տված է, որ զուգամիտում է (5) *շարքը, այնպես որ* $A'_k\to A'$, *ապա* (6) *հավասարության մեջ ընդունելով* $k=n-m$, *այն կարտագրենք այսպես՝*

$$A_n=A_m+A'_{n-m}.$$

այստեղից կարելի է տեսնել, որ n-*ը անվերջորեն աճելիս* A_n *մասնակի գումարն ունի սահման՝*

$$A=A_m+A', \tag{8}$$

այսինքն (2) *շարքը զուգամետ է:*

Ուրիշ խոսքով, շարքի սկզբից վերջավոր թվով անդամներ դեն ձգելը կամ նրա սկզբում մի քանի նոր անդամներ ավելացնելը չի անդրադառնում շարքի վ ա ր ք ի վրա (նրա զուգամիտության կամ տարամիտության իմաստով)։

(5) *շարքի գումարը, եթե այդ շարքը զուգամետ է, նշանակենք* A′*-ի փոխարեն* α_m*-ով, նշիչով ցույց տալով, թե որ անդամից հետո է վերցված մնացորդը։ Այդ դեպքում* (8) *և* (7) *բանաձևերը կարտագրվեն հետևյալ ձևով՝*

$$A = \mathbf{A}_m + \alpha_m, \quad \alpha_m = A - A_m. \tag{9}$$

Եթե m*-ը մեծացնենք մինչև անվերջություն, ապա* $A_m \to A$, *իսկ* $\alpha_m \to 0$։ *Այսպիսով՝*

2° **Երբ (2) շարքը զուգամետ է, ապա m-րդ անդամից հետո նրա մնացորդի α_m գումարը, m-ը անվերջորեն աճելիս, ձգտում է զրոյի։**

Հիշատակենք զուգամետ շարքերի հետևյալ պարզ հատկությունները.

3° **Երբ (2) զուգամետ շարքի անդամները բազմապատկենք միևնույն c բազմապատկիչով, ապա նրա զուգամիտությունը չի խախտվի (իսկ գումարը միայն կբազմապատկվի c-ով)։**

Իրոք,

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n + \cdots$$

շարքի $\bar{A}_n$ *մասնակի գումարը, ակներևորեն, հավասար է*

$$\bar{A}_n = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = cA_n$$

և նրա սահմանն է cA։

4° **Երկու զուգամետ շարքերը՝**

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

և

$$B = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$$

կարելի է անդամ առ անդամ գումարել (կամ հանել), այնպես որ՝

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n) + \cdots$$

շարքը նույնպես զուգամետ է, և նրա գումարը հավասար է, համապատասխանաբար, $A \pm B$։

Եթե A_n, B_n *և* C_n *նշանակում են հիշյալ շարքերի մասնակի գումարները, ապա, ակներևաբար,*

$$C_n = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n) =$$
$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = A_n \pm B_n.$$

Անցնելով սահմանին, կգտնենք, որ

$$\lim C_n = \lim A_n \pm \lim B_n,$$

որը և ապացուցում է մեր պնդումը։

Այժմ դառնանք (2) *շարքի զուգամիտության ընդհանուր պայմանը որոշելուն։ Քանի որ այդ զուգամիտությունը հավասարազոր է* A_n *վարիանտայի վերջավոր սահմանի գոյությանը, ապա, հիշելով* [39] *վարիանտայի դեպքի համար զուգամիտության սկզբունքը, կարելի է շարքի նկատմամբ այն ձևակերպել այսպես՝*

5° (2) շարքի զուգամիտության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվին համապատասխանի այնպիսի N համար, որ $N < n$-երի դեպքում

$$|A_{n+m} - A_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon \qquad (10)$$

անհավասարությունը տեղի ունենա, ինչպիսին էլ լինի $m = 1, 2, 3, \ldots$։

Սակայն, այս պայմանից օգտվելը գործնականում սովորաբար դժվար է. ուստի շարքերի տեսության մեջ որոշվում են զուգամիտության (և տարամիտության) շատ բազմատեսակ հայտանիշներ։ Այդ հայտանիշները նույնքան ընդհանրական (ունիվերսալ) չեն, որքան զուգամիտության սկզբունքը. Նրանք տալիս են միայն բավարար պայմաններ, բայց նրանք պարզ են և, միասին վերցրած, սպառում են բոլոր գործնական պահանջները։ Դրանց կնվիրվեն հետևյալ երկու պարագրաֆները։

Վերջում անենք մի դիտողություն ևս։ Եթե, ենթադրելով որ շարքը զուգամետ է, (10) *անհավասարության մեջ, մասնավորապես, վերցնենք* $m = 1$, *ապա կստանանք՝*

$$|a_{n+1}| < \varepsilon \quad (n > N \text{ դեպքում}),$$

այնպես որ $a_{n+1} \to 0$ *կամ (որ միևնույն է)* $a_n \to 0$։

Այսպիսով՝

6) Զուգամետ շարքի a_n ընդհանուր անդամը ձգտում է զրոյի.

Այդ կարելի է ապացուցել նաև միանգամայն տարրական ձևով՝ քանի որ A_n-ը (իսկ դրա հետ միասին նաև A_{n-1}-ը) ունի A վերջավոր սահման, ապա

$$a_n = A_n - A_{n-1} \to 0.$$

Նախորդ պնդումի մեջ պարունակվում է անհրաժեշտ պայման շարքի զուգամիտության համար, որով մենք հաճախ կօգտվենք. Այդ պայմանի խախտման դեպքում շարքը անկասկած տարամետ է. Սակայն կարևոր է ընդգծել, որ այդ պայմանը զգալիորեն քիչ է պահանջում, քան զուգամիտության սկզբունքը, և ինքնըստինքյան բավարար չէ շարքի զուգամիտության համար. Այլ խոսքով, նույնիսկ այդ պայմանի բավարարման դեպքում շարքը կարող է տարամիտել. Որպես դրա օրինակ ծառայում է վերը դիտարկված [354, 3)] *շարքը՝*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

այդ տեսակի բազմաթիվ այլ օրինակներ ընթերցողը կգտնի հետագայում.

§ 2. ԴՐԱԿԱՆ ՇԱՐՔԵՐԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

356. ԴՐԱԿԱՆ ՇԱՐՔԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆԸ. *Զուգամիտության (կամ տարամիտության) որոշելու հարցը ամենից ավելի հեշտ լուծվում է այն շարքերի համար, որոնց անդամները բացասական չեն. կարճության համար այդպիսի շարքերը մենք կանվանենք պարզապես դրական շարքեր.*

Դիցուք

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (A)$$

շարքը դրական է, այսինքն՝ $a_n \geqslant 0$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$։ Այդ դեպքում, ակներևորեն,

$$A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geqslant A_n,$$

այսինքն՝ A_n վարիանտան աճող է։ Հիշելով մոնոտոն վարիանտայի սահմանի վերաբերյալ թեորեման [34], մենք անմիջապես գալիս ենք հետևյալ հիմնական առաջադրությանը դրական շարքերի տեսության մեջ՝

(A) դրական շարքը միշտ ունի գումար. այդ գումարը կլինի վերջավոր (և, հետևապես, շարքը՝ զուգամետ), եթե շարքի մասնակի գումարները վերևից սահմանափակ են, իսկ հակառակ դեպքում՝ գումարը կլինի անվերջ (իսկ շարքը՝ տարամետ)։

Դրական շարքերի զուգամիտության (և տարամիտության) բոլոր հայտանիշները, վերջին հաշվով, հիմնված են այս պարզ թեորեմայի վրա։ Սակայն նրա *անմիջական* կիրառումը միայն հազվադեպ է հնարավորություն տալիս դատել շարքի բնույթի մասին։ Բերենք այդ տեսակի օրինակներ։

1) Դիտարկենք հետևյալ շարքը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

որ հայտնի է հարմոնիկ (ներդաշնակ) շարք* անվան տակ։

Ունենք ակներև անհավասարություն՝

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \tag{1}$$

եթե. դեն նետելով առաջին երկու անդամը, հարմոնիկ շարքի մնացած ան

*) Նրա անդամներից յուրաքանչյուրը, սկսած երկրորդից, ներկայացնում է երկու հարևան անդամների *ներդաշնակ միջինը*. [c թիվը կոչվում է a և b թվերի *ներդաշնակ միջին*, եթե՝

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)։]$$

անդամները հաջորդաբար տրոհենք խմբերի, յուրաքանչյուրում վերցնելով 2, 4, 8, ..., 2^{k-1}, ...*-ական անդամ՝*

$$\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{2};\quad \underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{2^2};\quad \underbrace{\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{16}}_{2^3};\quad \dots;$$

$$\underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1}+\dots+\frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}};\dots,$$

ապա այդ գումարներից յուրաքանչյուրն առանձին վերցրած մեծ կլինի $\frac{1}{2}$*-ից. դրանում հեշտ է համոզվել, (1)-ում ընդունելով հաջորդաբար* $n=2, 4, 8, \dots, 2^{k-1}, \dots$: *Հարմոնիկ շարքի* n*-րդ մասնակի գումարը նշանակենք* H_n. *այդ դեպքում, ակներևորեն,*

$$H_{2^k} > k\cdot\frac{1}{2}:$$

Մենք տեսնում ենք, որ մասնակի գումարները չեն կարող սահմանափակված լինել վերևից. շարքն ունի անվերջ գումար:

Նկատենք, որ (1) անհավասարությունը միանգամից դրսևորում է 335, 5*-ի զուգամիտության հիմնական պայմանի խախտումը. չէ որ* $\varepsilon=\frac{1}{2}$ *և* $m=n$ *դեպքում (10) անհավասարությունը տեղի չի ունենում և ոչ մի* n*-ի դեպքում:*

Հիշատակենք հենց այստեղ, որ n*-ի աճման զուգընթաց* H_n*-ը շատ դանդաղ է աճում: Էյլերը, օրինակ, հաշվել է, որ*

$$H_{1000}=7,48\dots,\quad H_{1000000}=14,39\dots,\quad \text{և այլն:}$$

Հետագայում մենք առիթ կունենանք ավելի ճշգրիտ բնութագրելու H_n *գումարի աճումը* [358, 10)]:

2) *Այժմ դիտարկենք ավելի ընդհանուր շարք՝*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^s}+\dots+\frac{1}{n^s}+\dots,$$

որտեղ s*-ը որևէ իրական թիվ է: Նա իր մեջ պարունակում է, որպես մասնավոր դեպք (երբ* s=1*), նախորդ շարքը: 1) շարքին նման լինելու պատճառով, այս շարքը ևս անվանում են հարմոնիկ շարք:*

Քանի որ $s<1$ *դեպքում դիտարկվող շարքի անդամները մեծ են 1) շարքի համապատասխան անդամներից, ապա, այս ենթադրությամբ, մասնա-*

կի գումարներն ավելի և սահմանափակված չեն վերևից, այնպես որ շարքը տարամետ է։

Դիտարկենք այն դեպքը, երբ $s > 1$։ Հարմարության համար նշանակենք $s=1+\sigma$, որտեղ $\sigma>0$։ (1)-ի նմանությամբ, այս անգամ ունենք՝

$$\frac{1}{(n+1)^s}+\frac{1}{(n+2)^s}+\ldots+\frac{1}{(2n)^s}<n\cdot\frac{1}{n^s}=\frac{1}{n^\sigma}, \tag{2}$$

Առանձնացնելով, ինչպես և վերևում, անդամների հաջորդական խմբեր՝

$$\underbrace{\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}}_{2};\quad \underbrace{\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{8^s}}_{2^2};\quad \underbrace{\frac{1}{9^s}+\ldots+\frac{1}{16^s}}_{2^3};\ \ldots$$

$$\ldots;\ \underbrace{\frac{1}{(2^{k-1}+1)^s}+\ldots+\frac{1}{(2^k)^s}}_{2^{k-1}};\ \ldots,$$

(2)-ի օգնությամբ հեշտ է ցույց տալ, որ այդ գումարները համապատասխանաբար փոքր են հետևյալ պրոգրեսիայի անդամներից

$$\frac{1}{2^\sigma},\quad \frac{1}{4^\sigma}=\frac{1}{(2^\sigma)^2},\quad \frac{1}{8^\sigma}=\frac{1}{(2^\sigma)^3},\quad \ldots\quad \frac{1}{(2^{k-1})^\sigma}=\frac{1}{(2^\sigma)^{k-1}},\ \ldots$$

Այդ դեպքում պարզ է, որ դիտարկվող շարքի ինչպիսի մասնավոր գումար էլ վերցնենք, նա փոքր կլինի հետևյալ հաստատուն թվից

$$L=1+\frac{1}{2^s}+\frac{\frac{1}{2^\sigma}}{1-\frac{1}{2^\sigma}},$$

հետևապես, շարքը զուգամետ է։

[Նրա գումարը, որը կախված է s-ից, ներկայացնում է Ռիմանի $\zeta(s)$ նշանավոր ֆունկցիան, որը կարևոր դեր է խաղում թվերի տեսության մեջ։]

357. ՇԱՐՔԵՐԻ ԲԱՂԴԱՏՄԱՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԸ. Դրական շարքի զուգամիտությունը կամ տարամիտությունը հաճախ որոշում են՝ բաղդատելով այն մի այլ շարքի հետ, որը նախահայտորեն զուգամետ է կամ տարամետ։ Այդ բաղդատման հիմքում դրված է հետևյալ պարզ թեորեման։

ԹԵՈՐԵՄԱ 1. Դիցուք տրված են երկու դրական շարքեր՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (A)$$

և

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \qquad (B)$$

եթե, թեկուզ որևէ տեղից սկսած (ասենք, $N<n$-երի համար), տեղի է ունենում $a_n \leqslant b_n$ անհավասարությունը, ապա (B) շարքի զուգամիտությունից բխում է (A) շարքի զուգամիտությունը կամ, որ միևնույն է, (A) շարքի տարամիտությունից հետևում է (B) շարքի տարամիտությունը։

Ապացույց։ *Այն հիման վրա, որ շարքի սկզբից վերջավոր թվով անդամների դեն ձգելը չի անդրադառնում նրա վարքի վրա* [355, 1°], *կարող ենք համարել, առանց ընդհանրության խախտելու, որ* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *բոլոր արժեքների դեպքում* $a_n \leqslant b_n$։ *Նշանակելով* (A) *և* (B) *շարքերի մասնավոր գումարները, համապատասխանաբար,* A_n *և* B_n, *կունենանք՝*

$$A_n \leqslant B_n.$$

Դիցուք (B) *շարքը զուգամետ է. այդ դեպքում, ըստ հիմնական թեորեմայի* [356], B_n *գումարները սահմանափակ են՝*

$$B_n \leqslant L \qquad (L = \text{const}. \quad n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Նախորդ անհավասարության շնորհիվ, առավել ևս

$$A_n \leqslant L,$$

իսկ դա, նույն թեորեմայի համաձայն, հետևեցնում է (A) *շարքի զուգամիտությունը։*

Երբեմն գործնականում ավելի հարմար է հետևյալ թեորեման, որը բխում է առաջինից՝

ԹԵՈՐԵՄԱ 2. Եթե գոյություն ունի վերջավոր և զրոյից տարբեր

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = k^*$$

սահման, ապա (A) և (B) երկու շարքերն էլ միաժամանակ զուգամետ են կամ միաժամանակ տարամետ.

Ապացույց. Վերցնենք $k > \varepsilon$ դրական թիվը. Հենց սահմանի սահմանման համաձայն, բավականաչափ մեծ n-երի համար (ասենք, $N < n$-երի համար) տեղի կունենան հետևյալ անհավասարությունները՝

$$k - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon, \quad \textit{որտեղից} \quad (K - \varepsilon)\, b_n < a_n < (K + \varepsilon)\, b_n.$$

Եթե (B) *շարքը զուգամետ է, ապա,* 355, 3-*ի շնորհիվ, զուգամետ է նաև* $\Sigma (K + \varepsilon)\, b_n$ *շարքը, որը ստացվել է բազմապատկելով նրա անդամները* $K + \varepsilon$ *հաստատուն թվով. Այստեղից, նախորդ թեորեմայի համաձայն, բխում է* (A) *շարքի զուգամիտությունը.*

Իսկ եթե զուգամիտում է (A) *շարքը, ապա, նորից ըստ* 1 *թեորեմայի, զուգամիտում է* $\sum (K - \varepsilon)\, b_n$ *շարքը, իսկ այդ դեպքում զուգամիտում է նաև* (B) *շարքը, որն այստեղից ստացվում է բազմապատկելով բոլոր անդամները* $\frac{1}{K - \varepsilon}$-*ով* [355, 3°].

Վերջապես, բերենք բաղդատման մի թեորեմա ևս, որը նույնպես առաջինի հետևանքն է ներկայացնում.

ԹԵՈՐԵՄԱ 3. Եթե, սկսած բեկուզ մի որոշ տեղից (ասենք՝ $N < n$-երի համար), տեղի է ունենում

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}^{**} \tag{3}$$

---

* *Ընդ որում ենթադրում ենք, որ* $b_n \neq 0$.

** *Այդ դեպքում* a_n-*ը և* b_n-*ը, իհարկե, ենթադրվում են զրոյից տարբեր:*

անհավասարությունը, ապա (B) շարքի զուգամիտությունից բխում է (A) շարքի զուգամիտությունը կամ, որ միևնույն է, (A) շարքի տարամիտությունից բխում է (B) շարքի տարամիտությունը։

Ապացույց։ *Ինչպես և վերևում՝ 1 թեորեմայի ապացուցման ժամանակ, առանց նվաստացնելու ընդհանրությունը, կարելի է համարել, որ (3) անհավասարությունն իրավացի է* $n=1, 2, 3, \ldots$ *բոլոր արժեքների համար։ Այդ դեպքում կունենանք՝*

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{b_2}{b_1}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leqslant \frac{b_3}{b_2}, \ldots, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Այդ անհավասարությունները անդամ առ անդամ բազմապատկելով, կստանանք՝

$$\frac{a_n}{a_1} \leqslant \frac{b_n}{b_1} \text{ կամ } a_n \leqslant \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n \quad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Դիցուք (B) *շարքը զուգամետ է. դրա հետ միասին զուգամետ է* $\sum \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n$ *շարքը, որ ստացվել է բազմապատկելով նրա անդամները* $\frac{a_1}{b_1}$ *հաստատուն բազմապատկիչով։ Իսկ այդ դեպքում, ըստ 1 թեորեմայի, զուգամետ է նաև* (A) *շարքը, որը և պահանջվում էր ապացուցել։*

Այժմ անցնենք բաղդատման թեորեմաների անմիջական կիրառումով շարքերի զուգամիտությունը կամ տարամիտությունը որոշելու օրինակներին։

358. *ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ*։ *1)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ $(a>0)$։

Եթե $a \leqslant 1$, *ապա զուգամիտության 355, 6 անհրաժեշտ պայմանը խախտվում է և շարքը տարամետ է։ Երբ* $a>1$, *շարքի անդամները փոքր են լինում* $\sum \left(\frac{1}{a}\right)^n$ *զուգամետ շարքի անդամներից՝ շարքը զուգամետ է (թեորեմա 1)։*

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ զուգամետ է, քանի որ

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n!}{2^n \cdot (2n-1)!!} < \frac{1}{2^n}$$

(Թեորեմ 1)։

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin\frac{x}{3^n} \qquad (0 < x < 3\pi)$։

Քանի որ

$$2^n \cdot \sin\frac{x}{3^n} < x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

և $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$ շարքը զուգամետ է, ապա այդ նույնն իրավացի է նաև տվյալ շարքի համար (Թեորեմ 1)։

4) Դիտարկենք նորից $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ հարմոնիկ շարքը և այն բաղդատենք, ըստ 2 թեորեմայի, նախահայտորեն տարամետ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [\log(n+1) - \log n] = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ շարքի հետ [354, 3)]։ Քանի որ [76, 5) (ա)]

$$\lim \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1,$$

ապա այստեղից արդեն բխում է հարմոնիկ շարքի տարամիտությունը։

Կամ այլ կերպ՝ կիրառելով վերջավոր աճերի բանաձևը $\log x$ ֆունկցիայի նկատմամբ $[n, n+1]$ միջակայքում, կգտնենք, որ

$$\log(n+1) - \log n = \frac{1}{n+\theta} \qquad (0 < \theta < 1)։$$

Այս դեպքում հարմոնիկ շարքը, որի անդամները համապատասխանաբար ավելի մեծ են, առավել ևս տարամետ է (Թեորեմ 1)։

5) Համանման ձևով կարելի է նորից որոշել $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}}$ ($\sigma > 0$ դեպքում) շարքի զուգամիտությունը, բաղդատելով այն նախահայտորեն զուգամետ $\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-1)^{\sigma}} - \frac{1}{n^{\sigma}}\right]$ շարքի հետ: Կիրառելով վերջավոր աճերի բանաձեը $\frac{1}{x^{\sigma}}$ ֆունկցիայի նկատմամբ $[n-1, n]$ միջակայքում, կգտնենք՝

$$\frac{1}{(n-1)^{\sigma}} - \frac{1}{n^{\sigma}} = \frac{\sigma}{(n-\theta)^{1+\sigma}} \qquad (0<\theta<1):$$

Այսպիսով, $n \geq 2$ դեպքում,

$$\frac{1}{n^{1+\sigma}} < \frac{1}{\sigma}\left[\frac{1}{(n-1)^{\sigma}} - \frac{1}{n^{\sigma}}\right],$$

որտեղից, ըստ 1 թեորեմայի, հենց բխում է փորձարկվող շարքի զուգամիտությունը:

6) Որպեսզի նույն ձևով ստանանք նոր արդյունք, դիտարկենք $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ շարքը (որի անդամներն ավելի փոքր են, քան հարմոնիկ շարքի համապատասխան անդամները):

Բաղդատենք այն նախահայտորեն տարամետ

$$\sum_{n=2}^{\infty} [\log\log(n+1) - \log\log n]$$

շարքի հետ: Կիրառելով վերջավոր աճերի բանաձեը $\log\log x$ ֆունկցիայի նկատմամբ $[n, n+1]$ միջակայքում, կստանանք՝

$$\log\log(n+1) - \log\log n = \frac{1}{(n+\theta)\log(n+\theta)} \qquad (0<\theta<1),$$

որտեղից, ըստ 1 թեորեմայի, եզրակացնում ենք, որ տվյալ շարքը, որի անդամները համապատասխանաբար ավելի մեծ են, ուստի և տարամետ է:

7) Բաղդատումը 4) և 5) հարմոնիկ շարքերի հետ, հնարավորություն է տալիս պարզել ուրիշ շատ շարքերի վարքը: Ըստ 1 թեորեմայի՝

(ա) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ տարամետ է՝ $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$.

(բ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ զուգամետ է՝ $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{n^{3/2}}$.

(գ) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^p}$ $(p>0)$ տարամետ է՝ $(\log n)^p < n$ (բավականաչափ մեծ n-երի համար).

(դ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ զուգամետ է՝ $\frac{n!}{n^n} < \frac{2}{n^2}$ ($n>3$-ի համար).

(ե) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$ զուգամետ է՝ $\frac{1}{(\log n)^{\log n}} = \frac{1}{n^{\log \log n}}$

$< \frac{1}{n^2}$ (բավականաչափ մեծ n-երի համար).

(զ) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\log \log n)^{\log n}}$ զուգամետ է՝ $\frac{1}{(\log \log n)^{\log n}} =$

$= \frac{1}{n^{\log \log \log n}} < \frac{1}{n^2}$ (նույնպես).

(է) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log \log n}}$ տարամետ է՝ $\frac{1}{(\log n)^{\log \log n}} =$

$= \frac{1}{e^{(\log \log n)^2}} > \frac{1}{e^{\log n}} = \frac{1}{n}$ (նույնպես)։

8) Ըստ 2 թեորեմայի՝

(ա) $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{(a+bn)^s}$ $(b>0)$ զուգամետ է $s>1$ դեպքում, տարամետ է $s \leq 1$ դեպքում՝ $\frac{1}{(a+bn)^s} : \frac{1}{n^s} \to \frac{1}{b^s}$.

(բ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$ տարամետ է՝ $\frac{1}{n \sqrt[n]{n}} : \frac{1}{n} \to 1$.

(գ) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{n}$ $(0<x<\pi)$ *տարամետ է՝* $\sin \frac{x}{n} : \frac{1}{n} \to x$. *Նման ձևով, տարամետ են նաև հետևյալ շարքերը՝*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{x}{n}\right) (x>0) \quad \text{և} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a}-1) \ (a\neq 1).$$

(դ) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$ *զուգամետ է՝* $1-\cos\frac{x}{n} : \frac{1}{n^2} \to \frac{x^2}{2}$:

9) *Ահա այդ տիպի ավելի բարդ օրինակներ՝*

$$(\text{ա}) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{\log n}{n}\right)^n,$$

Դիտարկենք այդ շարքի ընդհանուր անդամի և $\frac{1}{n}$*-ի հարաբերության* x_n*-ի լոգարիթմը՝*

$$\log x_n = \log n + n \log\left(1-\frac{\log n}{n}\right),$$

Օգտվելով $\log(1+x)$*-ի վերլուծումից, որի մասին խոսք եղավ 123-ի 5)-ում, կարելի է գրել՝*

$$\log\left(1-\frac{\log n}{n}\right) = -\frac{\log n}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{\log n}{n}\right)^2 + \alpha_n \cdot \left(\frac{\log n}{n}\right)^2,$$

որտեղ $\alpha_n \to 0$, *երբ* $n \to \infty$: *Ուստի՝*

$$\log x_n = -\frac{1}{n} \cdot \frac{\log^2 n}{n} + \alpha_n \cdot \frac{\log^2 n}{n} \to 0,$$

Հետևապես, $x_n \to 1$, *և առաջարկված շարքը տարամետ է:*

$$(\text{բ}) \sum_{n=1}^{\infty} \left(n \log\frac{2n+1}{2n-1} - 1\right),$$

Օգտվելով այստեղ էլ $\log(1+x)$-ի հիշյալ վերլուծումից, կունենանք՝

$$\log\frac{2n+1}{2n-1}=\log\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)=$$

$$=\frac{2}{2n-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^3+\beta_n\cdot\left(\frac{2}{2n-1}\right)^3,$$

որտեղ $\beta_n\to 0$, երբ $n\to\infty$, այնպես որ՝

$$n\log\frac{2n+1}{2n-1}-1=\frac{2n+3}{3(2n-1)}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2+\beta_n\cdot\frac{8n}{2n-1}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2.$$

Այսպիսով, փորձարկվող շարքի ընդհանուր անդամի հարաբերությունը $\frac{1}{(2n-1)^2}$-ին ունի $\frac{1}{3}$ սահմանը. մեր շարքը զուգամիտում է։

10) Վերջապես, դիտարկենք հետևյալ շարքը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}\right).$$

Դիֆերենցիալ հաշվի մեթոդներով հեշտ է ստանալ հետևյալ անհավասարությունը

$$\log(1+x)<x\quad(x\neq 0,\ -1<x<+\infty).$$

Օգտվելով դրանից, կարող ենք գրել՝

$$\log\frac{n+1}{n}=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},$$

և միևնույն ժամանակ՝

$$\log\frac{n+1}{n}=-\log\frac{n}{n+1}=-\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)>\frac{1}{n+1}.$$

Ուստի՝

$$0<\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}.$$

Այսպիսով, տվյալ շարքի անդամները դրական են և $\sum\frac{1}{n(n+1)}$ զուգամետ շարքի համապատասխան անդամներից փոքր են [354, 4)]. Հետևապես, տվյալ շարքը էլ զուգամետ է։

Եթե դրա գումարը նշանակենք C, ապա մասնակի գումարը՝

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\log\frac{k+1}{k}\right)=H_n-\log(n+1)\to C$$

(H_n-ը նշանակում է, ինչպես միշտ, հարմոնիկ շարքի մասնակի գումարը)։ Կարելի է փոխարինել այստեղ $\log(n+1)$-ը $\log n$-ով, որովհետև նրանց տարբերությունը, որը հավասար է $\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, ձգտում է զրոյի։ Վերջնականապես, նշանակելով γ_n-ով մի որոշ անվերջ փոքր, ունենք H_n-ի համար նշանավոր բանաձև՝

$$H_n = \log n + C + \gamma_n: \tag{4}$$

Այդ բանաձևը ցույց է տալիս, որ n-ը անվերջորեն աճելիս հարմոնիկ շարքի H_n մասնակի գումարն այնպես է աճում, ինչպես $\log n$-ը։

(4) բանաձևի մեջ մասնակցող C հաստատունը կոչվում է էյլերյան հաստատուն։ Նրա թվային արժեքը (որը հաջողվում է հաշվել այլ նկատառումներից ելնելով) այսպիսին է՝

$$C = 0{,}5772156649\ldots$$

359. ԿՈՇԻԻ ԵՎ ԴԱԼԱՄԲԵՐԻ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԸ։ Տվյալ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{A}$$

շարքի բաղդատումը նախահայտորեն զուգամետ կամ տարամետ զանազան *ստանդարտ* շարքերի հետ, կարող է կատարվել, այսպես ասած, ավելի կազմակերպված ձևով։

Բաղդատման համար վերցնենք, որպես (B) շարք, մի կողմից, *զուգամիտող* երկրաչափական պրոգրեսիա՝

$$\sum q^n = q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots \quad (0 < q < 1),$$

իսկ մյուս կողմից, տարամիտող պրոգրեսիա՝

$$\sum 1 = 1 + 1 \ldots + 1 + \ldots$$

(A) փորձարկվող շարքը բաղդատելով այդ շարքերի հետ, համաձայն 1 թեորեմայի սխեմայի, կգանք հետևյալ հայտանիշին՝

ԿՈՇԻԻ ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ։ (A) շարքի համար կազմենք

$$C_n = \sqrt[n]{a_n}$$

վարիանտան․ եթե, բավականաչափ մեծ n-երի դեպքում, տեղի ունի

$$C_n \leqslant q$$

անհավասարությունը, որտեղ q-ն մեկից փոքր հաստատուն թիվ է, ապա շարքը զուգամետ է. իսկ եթե, սկսած մի որոշ տեղից,

$$C_n \geqslant 1,$$

ապա շարքը տարամետ է․

Իրոք, $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ կամ $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ անհավասարությունները համարժեք են, համապատասխանաբար, այսպիսիներին՝ $a_n \leqslant q^n$ կամ $a_n \geqslant 1$. Մնում է կիրառել 1 թեորեման․*

Հաճախ, սակայն, այդ հայտանիշը կիրառում են այլ՝ սահմանային ձևով.

Ենթադրենք, թե C_n վարիանտան ունի սահման (վերջավոր կամ ոչ)՝

$$\lim C_n = C.$$

Այդ դեպքում երբ $C<1$, շարքը զուգամետ է, իսկ երբ $C>1$, շարքը տարամետ է․

Եթե $C<1$, ապա վերցնենք $1-C$-ից փոքր մի ε դրական թիվ, այնպես որ նաև $C+\varepsilon<1$․ Ըստ սահմանի սահմանման, $N<n$-երի համար կլինի՝

$$C-\varepsilon<C_n<C+\varepsilon.$$

$C+\varepsilon$ թիվը խաղում է q թվի դերը նախորդ բանաձևման մեջ. շարքը զուգամետ է․

Իսկ եթե $C>1$ (և վերջավոր է), ապա, վերցնելով $\varepsilon=C-1$, այնպես որ $C-\varepsilon=1$, մենք n-ի բավականաչափ մեծ արժեքների համար այս անգամ կունենանք $C_n>1$, այսինքն՝ շարքը տարամետ է․ Նման արդյունք է ստացվում նաև $C=+\infty$ դեպքում․

** Շարքի տարամիտությունը, իհարկե, կարելի է հաստատել նաև պարզապես հիմնվելով այն բանի վրա, որ խախտվել է զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը (355, 6°)։*

Այն դեպքում, երբ $C = 1$, այս հայտանիշը հնարավորություն չի տալիս պարզելու շարքի վարքի մասին։

C_n փոփոխականը կանվանենք Կոշիի փոփոխական։

Եթե (A) շարքի բաղդատումը նշված ստանդարտ շարքերի հետ կատարենք ըստ 3 թեորեմայի, ապա կհանգենք այսպիսի հայտանիշի՝

ԴԱԼԱՄԲԵՐԻ (J. d'Alembert) *ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ։* Դիտարկենք (A) շարքի համար

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

փոփոխական։ Եթե, բավականաչափ մեծ n-երի դեպքում, տեղի է ունենում

$$D \leqslant q$$

անհավասարությունը, որտեղ q-ն մեկից փոքր հաստատուն թիվ է, ապա շարքը զուգամետ է, իսկ եթե, սկսած որևէ տեղից,

$$D_n \geqslant 1,$$

ապա շարքը տարամետ է*։

Այս դեպքում ևս հարմար է օգտվել հայտանիշի սահմանային ձևից՝

Ենթադրենք, թե D_n փոփոխական ունի սահման (վերջավոր կամ ոչ),

$$\lim D_n = D.$$

Այդ դեպքում, երբ $D < 1$, շարքը զուգամետ է, իսկ երբ D 1, շարքը տարամետ է։

Ապացույցը նույնպիսին է, ինչ որ Կոշիի հայտանիշի դեպքում։

---

* *Այստեղ ևս տարամիտությունն ուղղակի բխում է զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանի խախտումից։ Չէ որ, եթե* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ *կամ* $a_{n+1} \geqslant a_n$, *ապա* a_n*-ը չի կարող 0-ի ձգտել։*

Այս հայտանիշը ևս ոչինչ չի տալիս, եթե ստացվում է $D=1$։ D_n վարիանտան կանվանենք Դալամբերի վարիանտա։

76-ի 4) օրինակում մենք տեսանք, որ D_n վարիանտայի սահմանի գոյությունից արդեն բխում է նաև C_n վարիանտայի սահմանի գոյությունը, ընդ որում երկու սահմաններն էլ հավասար են։ Այսպիսով, բոլոր դեպքերում, երբ Դալամբերի հայտանիշը պատասխանում է շարքի վարքի վերաբերյալ հարցին, պատասխանը կարող է ստացվել նաև Կոշիի հայտանիշի օգնությամբ։ Ստորև օրինակներով կտեսնենք, որ հակառակ պնդումը ճիշտ չէ, և Կոշիի հայտանիշը Դալամբերի հայտանիշից ուժեղ է։ Սակայն գործնականում Դալամբերի հայտանիշից օգտվելը սովորաբար ավելի պարզ է։

360. ՌԱԱԲԵԻ ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ։ Այն դեպքերում, երբ նշված պարզ հայտանիշները պատասխան չեն տալիս, հարկ է լինում դիմել ավելի բարդ հայտանիշների, որոնք հիմնված են փորձարկվող շարքը արդեն ուրիշ, այսպես ասած, պրոգրեսիայից «ավելի դանդաղ» զուգամիտող կամ «ավելի դանդաղ» տարամիտող ստանդարտ շարքերի հետ բաղդատելու վրա*։

Մենք այստեղ կդիտարկենք նաև Ռաաբեի (J. L. Raabe) հայտանիշը, որն իրագործում է տվյալ (A) շարքի բաղդատումը հարմոնիկ շարքերի հետ, այն է՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\sigma}}=1+\frac{1}{2^{1+\sigma}}+\frac{1}{3^{1+\sigma}}+\ldots+\frac{1}{n^{1+\sigma}}+\ldots \quad (H_\sigma)\ (\sigma>0)$$

զուգամիտող շարքերի և՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \qquad (H)$$

տարամիտող շարքի հետ, 3 թեորեմայի օգնությամբ։ Ընդ որում կարիք է լինում դիտարկել Ռաաբեի վարիանտան՝

$$R_n=n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right).$$

---

* Համեմատել 365, 5)։

ՌԱԱԲԵԻ ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ. Եթե, բավականաչափ մեծ n-երի դեպքում, տեղի է ունենում

$$R_n > r$$

անհավասարությունը, որտեղ r-ը մեկից մեծ հ ա ս տ ա տ ու ն թիվ է, ապա շարքը զուգամետ է, իսկ եթե, սկսած մի որոշ տեղից,

$$R_n \leqslant 1,$$

ապա շարքը տարամետ է։

Այսպես, դիցուք, բավականաչափ մեծ n-*երի դեպքում, ունենք՝*

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>r>1 \quad \text{կամ} \quad \frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{r}{n}.$$

Այժմ վերցնենք σ դրական թիվն այնպես՝ որ լինի $1+\sigma<r$, *և ցույց տանք, որ բավականաչափ մեծ* n-*երի համար*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\sigma}. \qquad (5)$$

Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ, սկսած մի որոշ տեղից,

$$1+\frac{r}{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\sigma} \quad \text{կամ} \quad \frac{r}{n}-\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\sigma}-1\right]>0.$$

Բայց վերջին արտահայտությունը, որն անվերջ փոքր է, երբ $n\to\infty$, *ունի դ ր ա կ ա ն գլխավոր մաս՝*

$$\frac{r-(1+\sigma)}{n},$$

որը բավականաչափ մեծ n-*երի դեպքում, իրոք, իր նշանը կհաղորդի ամբողջ արտահայտությանը։*

(5) *անհավասարությունը կարելի է արտագրել հետևյալ ձևով՝*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\left(\frac{n}{n+1}\right)^{1+\sigma}=\frac{\dfrac{1}{(n+1)^{1+\sigma}}}{\dfrac{1}{n^{1+\sigma}}}.$$

Այդ կողմում մենք ունենք (H_3) շարքի երկու հաջորդական անդամների հարաբերությունը. կիրառելով 3 թեորեմը, համոզվում ենք, որ (A) շարքը զուգամետ է։

Իսկ եթե, սկսած մի որոշ տեղից,

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leqslant 1,$$

ապա այստեղից անմիջապես գտնում ենք, որ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant\frac{n}{n+1}=\frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}}.$$

Կիրառելով (A) և (H) շարքերի նկատմամբ 3 թեորեմը, եզրակացնում ենք, որ (A) շարքը տարամետ է։

Ռաաբեի հայտանիշը ևս կիրառվում է առավելապես սահմանային ձևով՝

Ենթադրենք, թե R_n վարիանտան ունի սահման (վերջավոր կամ ոչ)՝

$$\lim R_n = R.$$

Այդ դեպքում, երբ $R>1$, շարքը զուգամետ է, իսկ երբ $R<1$, շարքը տարամետ է։

Համեմատելով Դալամբերի և Ռաաբեի հայտանիշները, տեսնում ենք, որ վերջինս զգալիորեն ուժեղ է առաջինից. եթե $D=\lim D_n$ սահմանը գոյություն ունի և մեկից տարբեր է, ապա $R_n = n\left(\frac{1}{D_n}-1\right)$-ի համար գոյություն ունի R սահման, որը հավասար է $+\infty$, երբ $D<1$ և՝ $-\infty$, երբ $D>1$։ Այսպիսով, եթե Դալամբերի հայտանիշը պատասխանում է այն հարցին, թե ինչ վարք ունի տվյալ շարքը, ապա Ռաաբեի հայտանիշն առավել ևս տալիս է այդ. դեռ ավելին, բոլոր այդպիսի դեպքերն ընդգրկվում են R-ի հնարավոր արժեքներից ընդամենը երկուսով, այն է՝ $\pm\infty$-ով։ R-ի մնացած բոլոր արժեքները (բացառությամբ $R=1$), որոնք համապատասխանում են զուգամիտության հարցին, համապատասխանում են, այնպի-

սով, այն դեպքերին, երբ Դալամբերի հայտանիշը նախահայտարեն պատասխան չի տալիս, որովհետև $D=1$։

Բայց այնուամենայնիվ այստեղ ևս, երբ $R=1$, մենք շարքի վարքի հարցի մասին պատասխան չունենք. Նման դեպքերում (որոնք շատ հազվադեպ են) հարկ է լինում դիմել էլ ավելի նուրբ ու բարդ հայտանիշների [տես, օրինակ, առաջ. n° 362]։

361. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Կիրառենք Կոշիի հայտանիշը հետևյալ շարքերի նկատմամբ՝

$$(\text{ա}) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}, \quad C_n = \frac{1}{\log n}, \quad C=0\text{՝ շարքը զուգամետ է.}$$

$$(\text{բ}) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n \quad (x>0), \quad C_n = \frac{x}{n}, \quad C=0\text{՝ շարքը զուգամետ է,}$$

$$(\text{գ}) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{a_n}\right)^n$$ ($x>0$, իսկ a_n-ը՝ դրական փոփոխական է, որն ունի a սահման)։ $C_n = \frac{x}{a_n}$; եթե $a=0$, ապա $C=+\infty$, և շարքը տարամետ է. եթե $a=+\infty$, ապա $C=0$, և շարքը զուգամետ է. վերջապես, երբ $0<a<+\infty$, կլինի $C=\frac{x}{a}$, և շարքի վարքը կախված է x-ից. երբ $x<a$, շարքը զուգամետ է, իսկ երբ $x>a$, շարքը տարամետ է։ Երբ $x=a$, ընդհանուր դեպքում շարքի վարքի մասին ոչինչ չենք կարող ասել, այն արդեն կախված է a_n-ի՝ a-ին մոտենալու բնույթից։

2) Կիրառենք Դալամբերի հայտանիշը հետևյալ շարքերի նկատմամբ

$$(\text{ա}) \ 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x>0), \quad D_n = \frac{x}{n+1}, \quad D=0\text{. շարքը զուգամետ է.}$$

$$(\text{բ}) \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad (x>0), \qquad D_n = x \cdot \frac{n+1}{n}, \quad D=x\text{. շարքը զուգամետ է,}$$

երբ $x<1$, և տարամետ է, երբ $x \geq 1$ ($x=1$ դեպքում դրանում համոզվում ենք անմիջականորեն)։

գ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s}$ $(x>0,\ s>0)$, $D_n = x\left(\frac{n}{n+1}\right)^s$, $D=x$. Շարքը զուգամետ է $x<1$ դեպքում և տարամետ է $x>1$ դեպքում. երբ $x=1$, ստացվում է հարմոնիկ շարք, որի վարքը, ինչպես արդեն գիտենք, կախված է s-ից։

$$(դ)\ \sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n \quad (x>0),\quad D_n = \frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},\quad D=\frac{x}{e}.$$

$x<e$ դեպքում շարքը զուգամետ է, $x>e$ դեպքում՝ տարամետ է. երբ $x=e$, Դալամբերի հայտանիշը սահմանային ձևով ոչինչ չի տալիս, բայց քանի որ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ վարիանտը աճելով է մոտենում e-ին, այնպես որ $D_n>1$, ապա հայտանիշի սկզբնական ձևը թույլատրում է այնուամենայնիվ եզրակացնել, որ շարքը տարամետ է։

$$(ե)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!} \quad (x>0),\quad D_n = x\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\quad D=x\cdot e;$$

$x<\frac{1}{e}$ դեպքում շարքը զուգամետ է, իսկ $x>\frac{1}{e}$ դեպքում՝ տարամետ. երբ $x=\frac{1}{e}$, այս անգամ Դալամբերի հայտանիշի օգնությամբ ոչինչ չի կարելի որոշել, քանի որ D_n-ը մոտենում է $D=1$-ին ներքևից։ Այս դեպքին մենք կվերադառնանք ստորև, 5) (դ)-ում։

3) Վերցնենք հետևյալ շարքը՝

$$1+a+ab+a^2b+a^2b^2+\cdots+a^nb^{n-1}+a^nb^n+\cdots,$$

որտեղ a-ն և b-ն՝ երկու տարբեր դրական թվեր են։ Այստեղ $D_{2n-1}=a$, $D_{2n}=b$, և Դալամբերի հայտանիշը (սկզբնական ձևով) թույլատրում է եզրակացություն անել շարքի զուգամիտության կամ տարամիտության մասին, եթե միայն a և b երկու թվերն էլ մեկից փոքր են կամ երկուսն էլ մեկից մեծ են։

Միևնույն ժամանակ՝

$$C_{2n-1}=\sqrt[2n-1]{a^{n-1}b^{n-1}} \quad և \quad C_{2n}=\sqrt[2n]{a^nb^{n-1}},$$

այնպես որ $C=\sqrt{ab}$. ըստ Կոշիի հայտանիշի $ab<1$ դեպքում շարքը

զուգամետ է, իսկ $ab>1$ դեպքում (ավելին, նաև $ab=1$ դեպքում) տարամետ է։

4) Դիտարկենք $\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)x^{n}$ շարքը, որտեղ $x>0$ և $\tau(n)$-ը՝ նշանակում է n բնական թվի բաժանարարների թիվը։ $\tau(n)$ ֆունկցիայի փոփոխության քմահաճ ընթացքի պատճառով այստեղ հնարավոր չէ կիրառել Դալամբերի հայտանիշը։ Մինչդեռ Կոշիի հայտանիշը լիովին կիրառելի է՝

$$x\leqslant C_n=\sqrt[n]{\tau(n)}\cdot x\leqslant\sqrt[n]{n}\cdot x,$$ այնպես որ $C=x$.

և $x<1$ դեպքում շարքը զուգամետ է, իսկ $x>1$ դեպքում (ավելին, նաև $x=1$ դեպքում)՝ տարամետ։

5) Բերենք Ռաաբեի հայտանիշը կիրառելու օրինակներ։

$$(\text{ա})\ 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}\,;$$

Դալամբերի հայտանիշն այս շարքի նկատմամբ կիրառելի չէ, որովհետև $D_n=\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}\to 1$ (և բացի դրանից $D_n<1$)։ Կազմենք Ռաաբեի վարիանտը՝

$$R_n=n\left(\frac{2n(2n+1)}{(2n-1)^2}-1\right)=\frac{(6n-1)n}{(2n-1)^2},$$

Քանի որ $R=\lim R_n=\frac{3}{2}>1$, ապա շարքը զուգամետ է.

$$(\text{բ})\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,!}{(x+1)\cdots(x+n)}\ (x>0)\,;$$

Քանի որ $D_n=\frac{n+1}{x+n+1}$, $D=1$, ապա այստեղ ևս Դալամբերի հայտանիշը կիրառելի չէ։ Ունենք, այնուհետև, $R_n=\frac{n}{x+1}x$, այնպես որ $R=x$։ Այսպիսով $x<1$ դեպքում շարքը տարամետ է, իսկ $x>1$ դեպքում՝ զուգամետ. $x=1$ դեպքում ստացվում է տարամիտող հարմոնիկ շարք (առանց առաջին անդամի)։

$$(\text{գ})\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,!\,x^{n}}{(x+a_1)(2x+a_2)\cdots(nx+a_n)}\,,$$

որտեղ $x>0$, և a_n-ը՝ դրական վարիանտ է, որն ունի վերջավոր a սահման։

Ունենք՝ $D_n = \frac{(n+1)x}{(n+1)x+a_{n+1}}$, $D=1$։ Այնուհետև, $R_n = \frac{na_{n+1}}{(n+1)x}$, $R=\frac{a}{x}$։ Այսպիսով, $x<a$ դեպքում շարքը զուգամիտում է, $x>a$ դեպքում՝ տարամիտում։ Երբ $x=a$ ընդհանուր դեպքում ոչինչ չի կարելի ասել. այդ դեպքում շարքի վարքը կախված է a_n-ի a-ին մոտենալու բնույթից։

(դ) Վերջապես, դիտարկենք հետևյալ շարքը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Դրա համար

$$R_n = n\left[\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}-1\right].$$

այս փոփոխականի սահմանը հաշվելու համար, այն փոխարինենք ավելի ընդհանուր արտահայտությամբ՝

$$\frac{1}{x}\left[\frac{e}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-1\right] \quad (x\to 0),$$

որի նկատմամբ արդեն կարելի է կիրառել դիֆերենցիալ հաշվի մեթոդները։ Լոպիտալի կանոնի համաձայն, անցնում ենք ածանցյալների հարաբերությանը՝

$$-\frac{e}{\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^2}\times$$

$$\times\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\log(1+x)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}\cdot(1+x)^{\frac{1}{x}-1}\right\}=$$

$$=\frac{e}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\log(1+x)-\frac{x}{1+x}}{x^2},$$

Ընդունելով՝

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+0(x^2),\quad \frac{x}{1+x}=x-x^2+0(x^2),$$

միանգամից ստանում ենք, որ որոնելի սահմանը հավասար է $\frac{1}{2}$։ Շարքը տարամետ է։

362. ԿՈՒՄՄԵՐԻ ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ։ Այժմ մենք կապացուցենք մի շատ ընդհանուր հայտանիշ, որը պատկանում է Կումմերին (E. E. Kummer)։

Այդ հայտանիշն ավելի շուտ կարելի է դիտել որպես ը ն դ հ ա ն ո ւ ր ս խ ե մ ա՝ կոնկրետ հայտանիշներ ստանալու համար։

ԿՈՒՄՄԵՐԻ ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ։ Դիցուք

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\text{-ը}$$

դրական թվերի այնպիսի կամայական հաջորդականություն է, որ

$$\sum_1^\infty \frac{1}{c_n}$$

շարքը տարամետ է*։ Փորձարկվող (A) շարքի համար կազմենք հետևյալ վարիանտը

$$K_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}։$$

Եթե (N < n-երի համար) տեղի է ունենում

$$K_n \geq \delta$$

անհավասարությունը, որտեղ δ-ն հ ա ս տ ա տ ո ւ ն դրական թիվ է, ապա շարքը զուգամետ է, իսկ եթե (N < n-երի համար)

$$K_n \leq 0,$$

ապա շարքը տարամետ է։

Ա պ ա ց ո ւ յ ց։ Դիցուք՝

$$K_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq \delta > 0$$

(այս անհավասարությունը, ակնհայտորեն, կարելի է համարել բավարարված բոլոր n-երի դեպքում)։

Այս անհավասարության երկու մասերն էլ բազմապատկելով a_{n+1}-ով, կստանանք՝

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geq \delta \cdot a_{n+1}, \qquad (6)$$

ուրեմն

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} > 0 \text{ կամ } c_n a_n > c_{n+1} a_{n+1}։$$

---

* *Ընթերցողի ուշադրությունն ենք հրավիրում այն բանի վրա, որ վերջին ենթադրությունից օգտվելու ենք միայն տ ա ր ա մ ի տ ո ւ թ յ ա ն հայտանիշն արտածելիս, զ ո ւ գ ա մ ի տ ո ւ թ յ ա ն հայտանիշը դրա կարիքը չի զգում։*

Այստեղից հետևում է, որ $c_n a_n$ փոփոխականը մոնոտոնորեն նվազում է և, հետևապես, ձգտում է վերջավոր սահմանի (որովհետև նա ներքևից սահմանափակ է զրոյով)։

Այսպիսով,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1})$$

շարքը զուգամետ է, որովհետև նրա առաջին n անդամների գումարը՝

$$c_1 a_1 - c_{n+1} a_{n+1}$$

ունի վերջավոր սահման։ Բայց այդ դեպքում (6) անհավասարությունից ըստ 1-ին թեորեմայի, հետևում է, որ $\sum_{n=1}^{\infty} \delta a_{n+1}$ շարքը, իսկ դրա հետ նաև տվյալ (A) շարքը, զուգամետ է։

Իսկ եթե, $N<n$-երի համար,

$$K_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0,$$

ապա ունենք՝

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}}.$$

Քանի որ $\sum \frac{1}{c_n}$ շարքը ենթադրվում է տարամետ, ապա, ըստ 3 թեորեմայի, տարամետ է նաև փորձարկվող (A) շարքը, որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Սահմանային ձևով կումմերի հայտանիշն այսպիսի տեսք ունի՝

Ենթադրենք, թե K_n փոփոխականն ունի սահման (վերջավոր կամ ոչ)՝

$$\lim K_n = K.$$

Այդ դեպքում, երբ $K>0$, շարքը զուգամետ է, իսկ երբ $K<0$՝ տարամետ։

Այժմ ցույց տանք, թե ինչպես կումմերի հայտանիշի օգնությամբ կարելի է ստանալ զուգամիտության մի քանի կարևոր հայտանիշներ որպես նրա մասնավոր դեպքեր։

(ա) Ընդունենք, օրինակ, $c_n = 1$. այդպիսով $\sum \frac{1}{c_n}$ շարքի տարամիտության պայմանը ապահովված է։ Ունենք՝

$$K_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{D_n} - 1\,.$$

Եթե D_n փոփոխականը ձգտում է D սահմանի, ապա K_n-ը ձգտում է $K = \frac{1}{D} - 1$ սահմանի ($K = +\infty$, եթե $D = 0$, և $K = -1$, եթե $D = +\infty$)։ Եթե $D > 1$, ապա $K < 0$, և ըստ Կումմերի հայտանիշի, շարքը տարամետ է, իսկ եթե $D < 1$, ապա $K > 0$, և շարքը զուգամետ է։ Այսպիսով, մենք նորից եկանք Դալամբերի հայտանիշին։

(բ) Ընդունենք, այնուհետև, $c_n = n$ և նշենք, որ $\sum \frac{1}{n}$ շարքը տարամետ է։ K_n արտահայտությունը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$K_n = n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) = R_n - 1\,.$$

Եթե R_n փոփոխականը ձգտում է R սահմանի, ապա K_n-ը ձգտում է $K = R - 1$ սահմանի ($K = \pm\infty$, եթե $R = \pm\infty$)։ Երբ $R > 1$, ունենք $K > 0$, և, ըստ Կումմերի հայտանիշի, շարքը զուգամետ է, իսկ եթե $R < 1$, ապա $K < 0$, այնպես որ շարքը տարամետ է։ Մենք նորից ստացանք Ռաաբեի հայտանիշը։

(գ) Վերջապես, վերցնենք $c_n = n \log n$ $(n \geq 2)$։ Այդպիսի ընտրությունը թույլատրելի է, որովհետև $\sum \frac{1}{n \log n}$ շարքը տարամետ է [358, 6)]։ Այս դեպքում ունենք՝

$$K_n = n \log n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\log(n+1),$$

որը կարելի է ներկայացնել նաև հետևյալ տեսքով՝

$$K_n = \log n \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = R_n - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1},$$

եթե B_n-ով նշանակենք հետևյալ նոր փոփոխականը՝

$$B_n = \log n \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] = \log n \cdot \left(R_n - 1 \right).$$

Այստեղից ստացվում է արդեն նոր հայտանիշ՝

ԲԵՐՏՐԱՆԻ (J. Bertrand) *ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ։*

Ենթադրենք, թե B_n փոփոխականն ունի սահման (վերջավոր կամ ոչ)՝

$$B=\lim B_n:$$

Այդ դեպքում, երբ $B>1$, շարքը զուգամետ է, իսկ երբ $B<1$՝ տարամետ։

Իրոք, քանի որ $\lim\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\log e=1$, *ապա Կ ու մ մ ե ր ի* K_n *փոփոխականը ձգտում է* $K=B-1$ ($K=\pm\infty$, *եթե* $B=\pm\infty$)*։ Մնում է միայն հիմնվել Կ ու մ մ ե ր ի հայտանիշի վրա։*

Համեմատելով Ռ ա ա բ ե ի ու Բ ե ր տ ր ա ն ի հայտանիշները, կարելի կլիներ կրկնել նույն դիտողությունները, ինչ որ մենք վերն արեցինք Դ ա լ ա մ բ ե ր ի և Ռ ա ա բ ե ի հայտանիշների առթիվ [360]*։ Այս ավելի ու ավելի զգայուն (բայց և ավելի բարդ) հայտանիշների շղթան կարելի է անսահմանորեն շարունակել։*

363. *ԳԱՈՒՍՍԻ ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ։* *Դ ա լ ա մ բ ե ր ի, Ռ ա ա բ ե ի և Բ ե ր տ ր ա ն ի հայտանիշներից կարող է ստացվել Գ ա ու ս ս ի* (C. F. Gauss) *հետևյալ հայտանիշը։*

ԳԱՈՒՍՍԻ ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ։ Ենթադրենք, թե տվյալ (A) շարքի համար $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ հարաբերությունը կարող է ներկայացվել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^2},$$

որտեղ λ-ն ու μ-ն՝ հաստատուններ են, իսկ θ_n-ը սահմանափակ մեծություն է՝ $|\theta_n|\leq L$. այդ դեպքում շարքը զուգամետ է, երբ $\lambda>1$, կամ երբ $\lambda=1$, $\mu>1$, և տարամետ է, երբ $\lambda<1$, կամ երբ $\lambda=1$, $\mu\leq 1$։

$\lambda\gtrless 1$ *դեպքերը բերվում են Դ ա լ ա մ բ ե ր ի հայտանիշին, որովհետև* $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{\lambda}$*։ Դիցուք այժմ* $\lambda=1$*. այդ դեպքում՝*

$$R_n=n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\mu+\frac{\theta_n}{n},\quad R=\mu,$$

և $\mu\gtrless 1$ *դեպքերը ստացվում են Ռ ա ա բ ե ի հայտանիշով։ Վերջապես, եթե* $\mu=1$, *ապա ունենք*

$$B_n=\log n\left(R_n-1\right)=\frac{\log n}{n}\cdot\theta_n.$$

Քանի որ $\frac{\log n}{n}$*-ը, ինչպես հայտնի է, ձգտում է զրոյի, երբ* $n\to\infty$, *իսկ* θ_n*-ը սահմանափակ է, ապա* $B=\lim B_n=0$, *և, համաձայն Բ ե ր տ ր ա ն ի հայտանիշի, շարքը տարամետ է։*

Որպես օրինակ դիտարկենք այսպես կոչված հիպերերկրաչափական շարքը (Գ ա ու ս ս)՝

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha.(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1).\beta\cdot(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma\cdot(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n=$$

$$=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)}{1.2\cdot\gamma\cdot(\gamma+1)}x^2+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1).(\alpha+2).\beta.(\beta+1).(\beta+2)}{1.2.3\cdot\gamma.(\gamma+1)\cdot(\gamma+2)}x^3+\cdots,$$

ենթադրելով ա ռ ա յ ժ մ $\alpha, \beta, \gamma, x>0$։ Այստեղ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}\cdot x\to x,$$

այնպես որ ըստ Դ ա լ ա մ բ ե ր ի հայտանիշի միանգամից որոշվում է զուգամիտությունը երբ $x<1$ և տարամիտությունը, երբ $x>1$։ Իսկ եթե $x=1$, ապա վերցնենք հետևյալ հարաբերությունը

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(1+n)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}$$

և օգտվելով

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{n}}=1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{1+\frac{\alpha}{n}}\cdot\frac{1}{n^2},\qquad \frac{1}{1+\frac{\beta}{n}}=1-\frac{\beta}{n}+\frac{\beta^2}{1+\frac{\beta}{n}}\cdot\frac{1}{n^2}$$

վերլուծումներից, ներկայացնենք այն հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2},$$

որտեղ θ_n-ը սահմանափակ է։ Կիրառելով Գ ա ու ս ս ի հայտանիշը, տեսնում ենք, որ $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ շարքը զուգամետ է $\gamma-\alpha-\beta>0$ դեպքում և տարամետ է $\gamma-\alpha-\beta\leq 0$ դեպքում։ Ստորև մենք կվերադառնանք հիպերերկրաչափական շարքին, անելով ավելի ընդհանուր ենթադրություններ α, β, γ, x-ի նկատմամբ։

364. ԿՈՇԻԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ. Վերջում արտածենք մի հայտանիշ ևս, որն իր ձևով տարբերվում է բոլոր նախորդներից. Այդ հայտանիշը կառուցված է շարքի և ինտեգրալի զուգամիտման գաղափարի վրա և ներկայացնում է այն ձևի ընդհանրացումը, որից մենք արդեն օգտվել ենք պարզելու համար

շարքի զուգամիտությունը կամ տարամիտությունը n° 358-ի 4), 5), 6) օրինակներում: Դիցուք առաջարկված շարքն ունի հետևյալ ձևը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n), \qquad (7)$$

որտեղ $f(n)$-ը մի որոշ $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքն է $x=n$ դեպքում, որը որոշված է 1 x-երի համար*. այդ ֆունկցիան ենթադրենք անընդհատ, դրական և մոնոտոն նվազող:

Դիտարկենք $f(x)$-ի որևէ $F(x)$ նախնական ֆունկցիա. քանի որ նրա ածանցյալը $F'(x)=f(x)>0$, ապա $F(x)$-ը աճում է x-ի հետ միասին և, երբ $x \to +\infty$, հավանորեն, ունի սահման, վերջավոր կամ ոչ: Առաջին դեպքում

$$\sum_{n=1}^{\infty}[F(n+1)-F(n)] \qquad (8)$$

շարքը զուգամետ է, իսկ երկրորդ դեպքում՝ տարամետ: Հենց այս շարքի հետ էլ կբաղդատենք փորձարկվող շարքը:

Ըստ վերջավոր աճերի բանաձևի, (8) շարքի ընդհանուր անդամը կներկայացվի հետևյալ տեսքով

$$F(n+1)-F(n)=f(n+\theta) \quad (0<\theta<1),$$

այնպես որ $f(x)$ ֆունկցիայի մոնոտոնության հետևանքով՝

$$a_{n+1}=f(n+1)<F(n+1)-F(n)<f(n)=a_n. \qquad (9)$$

(8) շարքի զուգամիտության դեպքում, ըստ 1 թեորեմայի, զուգամետ է $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n+1)$ շարքը, որի անդամները փոքր են (8) շարքի համապատասխան անդամներից. ուրեմն, զուգամետ է նաև տվյալ (7) շարքը: (8) շարքի տարամիտու-

---

* n համարի սկզբնական արժեքը, 1-ի փոխարեն, կարող է լինել նաև ամեն մի n_0 բնական թիվ. այդ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան էլ պետք է դիտել $n_0 \leq x$-երի դեպքում:

Այդ դեպքում, տարամետ է նաև տվյալ (7) շարքը, որովհետև նրա անդամները մեծ են (8) շարքի համապատասխան անդամներից։

Այսպիսով, մենք գալիս ենք հետևյալ հետաքրքիր հայտանիշին, որը պատկանում է Կոշիին։

ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՅՏԱՆԻՇ. Արված ենթադրությունների դեպքում, (7) շարքը զուգամետ է կամ տարամետ կախված նրանից, թե $x \to +\infty$ դեպքում

$$F(x)=\int f(x)dx$$

ֆունկցիան ունի վերջավոր սահման թե ոչ:

Բերենք այդ հայտանիշի կիրառման օրինակներ (բացի n° 358-ում դիտարկվածներից)։

$$1)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\log^{1+\sigma}n}\quad(\sigma>0),$$

Այստեղ $f(x)=\frac{1}{x.\log^{1+\sigma}x}$; $F(x)=-\frac{1}{\sigma\log^{\sigma}x}\to 0$, *երբ* $x\to+\infty$, *շարքը զուգամետ է:*

$$2)\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\log n\,.\,\log\log n},$$

Ունենք՝ $f(x)=\frac{1}{x\,.\,\log x\,.\,\log\log x}$; $F(x)=\log\log\log x\to$ $\to+\infty$՝ *շարքը տարամետ է։*

$$3)\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\log n.(\log\log n)^{1+\sigma}}\quad(\sigma>0).$$

Այս դեպքում՝

$$f(x)=\frac{1}{x\cdot\log x(\log\log x)^{1+\sigma}};\ F(x)=-\frac{1}{\sigma(\log\log x)^{\sigma}}\to\infty,$$

շարքը զուգամետ է։ Եվ այլն։

$F(x)$ *նախնական ֆունկցիան կարելի է վերցնել նաև որոշյալ ինտեգրալի ձևով՝*

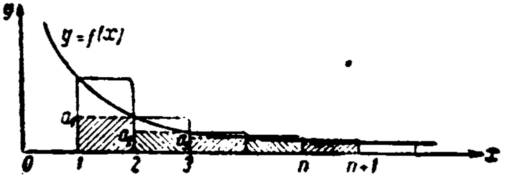
$$F(x)=\int_1^x f(t)dt:$$

Նրա սահմանը, $x\to+\infty$ *դեպքում, անվանում են «ինտեգրալ 1-ից մինչև* $+\infty$*»* և նշանակում են այսպես՝*

$$F(+\infty)=\int_1^{+\infty} f(t)dt.$$

Այսպես ուրեմն, առաջարկված *(7)* շարքը զուգամետ է կամ տարամետ, նայած, թե այդ ինտեգրալը վերջավոր արժեք ունի թե ոչ։

Այս ձևով ինտեգրալային հայտանիշը թույլատրում է հասարակ երկրաչափական մեկնաբանում. Եթե $f(x)$ *ֆունկցիան պատկերացնենք կորով (գծ. 54), ապա* $F(x)$ *ինտեգրալը կարտահայտի մի պատկերի մակերես, որը սահմանափակված է այդ կորով,* x*-երի առանցքով և երկու օրդինատներով. իսկ* $F(+\infty)$ *ինտեգրալը, որոշ իմաստով, կարելի է դիտել որպես կորի տակ դեպի աջ անվերջ տարածվող ամբողջ պատկերի մակերեսի արտահայտություն. Մյուս կողմից, (7) շարքի* $a_1, a_2,\dots, a_n,\dots$ *անդամները արտահայտում են օրդինատների մեծությունները* $x=1, 2,\dots, n,\dots$ *կետերում կամ, որ միևնույն է, այն ուղղանկյունների մակերեսները, որոնց հիմքերը հավասար են 1-ի, իսկ բարձրությունները հավասար են հիշյալ օրդինատներին.*



Գծ 54։

Այսպիսով, (7) շարքի գումարը ոչ այլ ինչ է, եթե ոչ ընդգրկող ուղղանկյունների մակերեսների գումար, և միայն առաջին անդամով է տարբերվում ընդգրկված ուղղանկյունների մակերեսների գումարից. Այդ միանգամայն ակնա-

* *Այդ այսպես կոչված անիսկական ինտեգրալ է. նման ինտեգրալներով մենք կզբաղվենք* XIII *գլխում։*

ում է դարձնում վերևում ստացված արդյունքը. եթե կորագիծ պատկերի մակերեսը վերջավոր է, ապա առավել ևս վերջավոր է նրա մեջ պարունակված աստիճանաձև պատկերի մակերեսը, և առաջարկված շարքը զուգամիտում է. իսկ եթե կորագիծ պատկերի մակերեսն անվերջ է, ապա անվերջ է նաև այն պարունակող աստիճանաձև պատկերի մակերեսը, այնպես որ այս դեպքում շարքը տարամետ է։

Այժմ անենք մի շարք դիտողություններ (9) անհավասարությունների հետագա օգտագործման վերաբերյալ։

(ա) Երբ գոյություն ունի

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=F(+\infty)$$

վերջավոր սահման, կարելի է նշել հարմար գնահատում առաջարկված շարքի մնացորդի։ Այսպես, միագումարելով

$$a_k=f(k)<F(k)-F(k-1)$$

անհավասարությունները $k=n+1,\ldots, n+m$ դեպքում, կստանանք՝

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k=\sum_{k=n+1}^{n+m} f(k)<F(n+m)-F(n),$$

Անցնենք սահմանի, մեծացնելով այստեղ m-ը մինչև անվերջություն՝

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k=\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)\leqslant F(+\infty)-F(n).$$

հենց այս էլ տալիս է որոնելի գնահատումը*.

* Ակներևորեն

$$F(n+m)-F(n)=\int_n^{n+m} f(t)dt.$$

Երբ $m\to+\infty$, այս ինտեգրալի սահմանը $\int_n^{+\infty} f(t)dt$ անիսկական ինտեգրալն է, ուստի ստացված վերջին անհավասարությունը կարող է արտագրվել այսպես՝

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k=\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)\leqslant\int_n^{+\infty} f(x)dx.$$

Օրինակ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}}$ *շարքի համար կլինի*

$$f(x)=\frac{1}{x^{1+\sigma}},\quad F(x)=-\frac{1}{\sigma\cdot x^{\sigma}},\quad F(+\infty)=0$$

և

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\sigma}} < \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{n^{\sigma}}.$$

(բ) Իսկ եթե $F(x)$*-ը* x*-ի հետ միասին աճում է մինչև անվերջու- թյուն, ապա այդ ֆունկցիան թույլատրում է գտնել տրոհարկ- ված շարքի մասնակի գումարի աճման արագու- թյան մասին։ Դիտարկենք*

$$0 < f(k)-[F(k+1)-F(k)] < f(k)-f(k+1)$$

անհավասարությունները և, միագումարելով դրանք $k=1$*-ից մինչև* $k=n$*, կստանանք աճող, բայց սահմանափակ վարիանտա*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)-[F(n+1)-F(1)] < f(1)-f(n+1) < f(1),$$

որը ձգտում է վերջավոր սահմանի։ Նույնն արդարացի է նաև հետևյալ վարիանտայի համար

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)-F(n+1):$$

Եթե նրա սահմանը նշանակենք C*, իսկ այն անվերջ փոքր մե- ծությունը, որով նա տարբերվում է իր սահմանից, նշանակենք* α_n*, ապա կհանգենք հետևյալ բանաձևին՝*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=F(n+1)+C+\alpha_n.$$

Օրինակ, $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \log x$ *դեպքում այստեղից նորից ստացվում է* n° 358-*ի* (4) *բանաձևը*։

365. *ԼՐԱՑՈՒՄՆԵՐ*։ 1) Դիցուք (A) շարքի անդամները մոնոտոն նվազում են. այդ ժամանակ (A) շարքը զուգամիտում կամ տարամիտում է $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$ շարքի հետ միաժամանակ (*Կոշի*)։

Իրոք, մի կողմից,

$$A_{2^k} < a_1 + (a_2 + a_3) + \dots + (a_{2^k} + \dots + a_{2^{k+1}-1}) < a_1 + 2a_2 + \dots + 2^k a_{2^k},$$

իսկ մյուսից՝

$$A_{2^k} = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{2^{k-1}+1} + \dots + a_{2^k}) >$$

$$> \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \dots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} (a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^k a_{2^k})։$$

Այստեղից էլ հետևում է պահանջվող եզրակացությունը։

Օրինակ, $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *շարքի վարքը համընկնում է* $\sum_{0}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k}$ $\sum_{0}^{\infty} 1$ *շարքի վարքի հետ, որը բացահայտորեն տարամետ է*։ $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}}$ ($\sigma > 0$) *շարքը զուգամիտում է* $\sum_{0}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^{k(1+\sigma)}}$ $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2^{k\sigma}}$ *շարքի հետ միասին*։ $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ *շարքը տարամետ է, որովհետև տարամետ է* $\sum_{1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k \log 2^k} \equiv \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k \log 2}$ *շարքը, և այլն*։

Այս թեորեմայում $\sum 2^k a_{2^k}$ *բաղդատման շարքը կարող է փոխարինվել նաև* $\sum_{k=0}^{\infty} m^k \cdot a_{m^k}$ *ավելի ընդհանուր շարքով, որտեղ* m-*ը՝ ցանկացած բնական թիվ է*։

2) Դիցուք (A)-*ն կամայական զուգամետ շարք է*։ *Ի՞նչ եզրակացություններ կարելի է անել* a_n *ընդհանուր անդամի փոքրության կարգի մասին՝* $\frac{1}{n}$-*ի բաղդատմամբ*։

Ամենից առաջ, ակներև է, որ եթե այդ անվերջ փոքրերը ընդհանրապես բաղդատելի են իրար հետ [60], այսինքն՝ եթե գոյություն ունի

$$\lim \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim na_n = c$$

սահման, ապա անհրաժեշտաբար $c=0$, այնպես որ

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)։ \tag{10}$$

Իրոք, այլ կերպ, $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ հարմոնիկ շարքի տարամիտության պատճառով, տվյալ շարքը ևս տարամետ կլիներ [357, թեորեմ 2]։

Սակայն, այդպիսի սահմանի գոյությունը, ընդհանրապես ասած, պարտադիր չէ, ինչպես այդ երևում է հետևյալ շարքի օրինակից՝

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10^2}+\dots$$

Այս շարքի զուգամետ լինելը պարզ է $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ շարքի հետ համեմատելուց. միևնույն ժամանակ, եթե n-ը լրիվ քառակուսի չէ, ապա նրա համար $na_n = \frac{1}{n}$, իսկ հակառակ դեպքում՝ $na_n = 1$։

Սակայն, եթե շարքի անդամները մոնոտոն նվազում են, ապա նրա զուգամիտության համար (10) պայմանն այնուամենայնիվ անհրաժեշտ է։ Իրոք, ցանկացած m-ի և $m<n$-ի դեպքում՝

$$(n-m)\,a_n < a_{m+1}+\dots+a_n < \alpha_m,$$

որտեղ α_m-ը շարքի մնացորդն է։ Այստեղից՝

$$na_n < \frac{n}{n-m}\cdot\alpha_m։$$

Դիցուք սկզբում m-ը վերցրած է այնպես, որ α_m-ը փոքր է կամայական տրված $\varepsilon>0$ թվից. եթե այժմ n-ը ենթադրենք այնչափ մեծ, որ՝

$$\frac{n}{n-m} < \frac{\varepsilon}{\alpha_m},$$ ապա միաժամանակ $na_n < \varepsilon$,

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Վերջում նկատենք, որ նույնիսկ մոնոտոն նվազող անդամներ ունեցող շարքերի համար (10) պայմանն ամենևին էլ բավարար չէ շարքի զուգամիտության համար։ Այդ երևում է $\sum_2^\infty \frac{1}{n\log n}$ շարքի օրինակից։

3) Եթե $\sum_1^\infty d_n$ շարքը տարամետ է, և D_n-ը նշանակում է նրա n-րդ մասնակի գումարը, ապա $\sum_1^\infty \frac{d_n}{D_n}$ շարքը նույնպես տարամետ է, մինչդեռ $\sum_1^\infty \frac{d_n}{D_n^{1+\sigma}}$ ($\sigma>0$) շարքը զուգամետ է։ [*Աբել* (N. H. Abel) և *Դինի* (U. Dini)]։

Ունենք՝

$$\frac{d_{n+1}}{D_{n+1}}+\ldots+\frac{d_{n+m}}{D_{n+m}}>\frac{d_{n+1}+\ldots+d_{n+m}}{D_{n+m}}=1-\frac{D_n}{D_{n+m}}.$$

Որքան էլ մեծ n *վերցնելու լինենք, միշտ կարելի է ընտրել այնպիսի* m, *որ լինի՝*

$$\frac{D_n}{D_{n+m}}<\frac{1}{2}\quad \text{և, հետևապես,}\quad \frac{d_{n+1}}{D_{n+1}}+\ldots+\frac{d_{n+m}}{D_{n+m}}>\frac{1}{2}.$$

$\sum_1^\infty \frac{d_n}{D_n}$ *շարքի համար խախտված է զուգամիտության հիմնական պայմանը* [355, 5°], *շարքը տարամետ է։*

$\sum_1^\infty \frac{d_n}{D_n^{1+\sigma}}$ *շարքի զուգամիտությունն ապացուցելու համար դիմենք մի եղանակի, որը նման է Կոշիի կիրառածին* [364]։

$\int \frac{dx}{x^{1+\sigma}}=-\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{x^{\sigma}}$ *ֆունկցիայի նկատմամբ* $x=D_{n-1}$-*ից մինչև* $x=D_n$ *միջակայքում կիրառենք վերջավոր աճերի բանաձևը՝*

$$\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{D_{n-1}^{\sigma}}-\frac{1}{D_n^{\sigma}}\right)=\frac{d_n}{\bar{D}_n^{1+\sigma}},\quad \text{որտեղ}\quad D_{n-1}<\bar{D}_n<D_n.$$

Այսպիսով, դիտարկվող շարքի անդամները համապատասխանաբար փոքր են $\sum_1^\infty \frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{D_{n-1}^{\sigma}}-\frac{1}{D_n^{\sigma}}\right)$ *զուգամետ շարքի անդամներից, որը և ապացուցում է առաջադրված պնդումը։*

4) Եթե $\sum_1^\infty c_n$ շարքը զուգամետ է, և γ_n-ը նշանակում է նրա մնա-

զորդը n-րդ անդամից հետո, ապա $\sum_{1}^{\infty} \frac{c_n}{\gamma_{n-1}}$ շարքը տարամետ է, մինչդեռ

$\sum_{1}^{\infty} \frac{c_n}{\gamma_{n-1}^{1-\sigma}}$ $(0<\sigma<1)$ շարքը զուգամետ է *(Դինի)*։

Ապացույցը նման է նախորդին։

5) *Դիցուք տրված են երկու զուգամետ շարքեր՝*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ և } \sum_{n=1}^{\infty} c'_n\text{։}$$

Երկրորդը կոչվում է ավելի դանդաղ զուգամիտող, քան առաջինը, եթե երկրորդ շարքի γ'_n *մնացորդը ավելի ցածր կարգի անվերջ փոքր է, քան առաջինի* γ_n *մնացորդը՝*

$$\lim \frac{\gamma_n}{\gamma'_n} = 0\text{։}$$

Յուրաքանչյուր $\sum_{1}^{\infty} c_n$ զուգամիտող շարքի համար կարելի է կառուցել ավելի դանդաղ զուգամիտող շարք։ *Բավական է վերցնել, օրինակ,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c'_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\gamma_{n-1}} - \sqrt{\gamma_n}\right)^{*}$$

շարքը, քանի որ այդ դեպքում $\gamma'_n = \sqrt{\gamma_n}$։

Այժմ դիտարկենք երկու տարամետ շարքեր՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \text{ և } \sum_{n=1}^{\infty} d'_n\text{։}$$

Երկրորդի մասին ասում են, որ նա ավելի դանդաղ է տարամիտում, քան առաջինը, եթե նրա D'_n *մասնակի գումարը հանդիսանում է ավելի ցածր կարգի անվերջ մեծ, քան առաջինի* D_n *մասնակի գումարը՝*

$$\lim \frac{D'_n}{D_n} = 0\text{։}$$

---

* γ_0*-ն ընդունում ենք ամբողջ* $\sum_{1}^{\infty} c_n$ *գումարը։*

Յուրաքանչյուր $\sum_{1}^{\infty} d_n$ տարամետ շարքի համար կարելի է կառուցել ավելի դանդաղ տարամիտող շարք։ *Այդ նպատակի համար կարելի է օրինակ, վերցնել հետևյալ շարքը՝*

$$\sum_{n=1}^{\infty} d'_n \equiv \sqrt{D_1} + \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{D_n} - \sqrt{D_{n-1}}),$$

այստեղ $D'_n = \sqrt{D_n}$ ։

Նման եզրակացություններ կարելի է ստանալ նաև Աբելի և Դինիի շարքերի օգնությամբ, որոնք դիտարկել ենք 3)-ում ու 4)-ում։

Կառուցված օրինակները բերում են այսպիսի սկզբունքային կարևոր պնդումի՝ ոչ մի զուգամետ (տարամետ) շարք չի կարող ծառայել որպես համապարփակ միջոց՝ այդ շարքի հետ բաղդատելու միջոցով* ուրիշ շարքերի զուգամիտությունը (տարամիտությունը) որոշելու համար։

Այդ պարզ է նրանից, որ

$$\frac{c_n}{c'_n} = \frac{\gamma_{n-1} - \gamma_n}{\sqrt{\gamma_{n-1}} - \sqrt{\gamma_n}} = \sqrt{\gamma_{n-1}} + \sqrt{\gamma_n} \to 0$$

և

$$\frac{d_n}{d'_n} = \frac{D_n - D_{n-1}}{\sqrt{D_n} - \sqrt{D_{n-1}}} = \sqrt{D_n} + \sqrt{D_{n-1}} \to +\infty ։$$

6) Դիցուք տված են դրական թվեր՝

$$a_1, a_2, \dots, a_n \text{ և } b_1, b_2, \dots, b_n ։$$

Եթե $p>1$, *ապա տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i^p \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \sum_{i=1}^{n} b_i^p \right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{11}$$

որը ցույց է տվել Մինկովսկին (N. Minkowski)։ *Եթե մտցնենք նաև* $q<1$ *թիվը, որը* p-*ի հետ կապված է*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{12}$$

---

* n° 357-*ի թեորեմաներից ցանկացածի օգնությամբ։*

ռանչությամբ, ապա իրավացի է նաև այսպիսի անհավասարությունը՝

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i^p \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{n} b_i^q \right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{13}$$

որը պատկանում է Կոշիին և Հյոլդերին (O. Hölder)։

Սկսենք վերջինի ապացուցումից։ Նախ ենթադրենք, որ

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^p = \sum_{i=1}^{n} b_i^q = 1, \tag{14}$$

այնպես որ ապացուցման ենթակա անհավասարությունը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant 1\text{։} \tag{13ա}$$

Մենք արդեն ունեցել ենք [տես 127 (3)]

$$ab \leqslant \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

անհավասարությունը. այստեղ տեղադրելով $a=a_i$, $b=b_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ և միագումարելով ստացված անհավասարությունները, կգանք հենց (13ա)-ին, եթե հաշվի առնենք այդ ժամանակ (14-ը) և (12)-ը։

Իսկ ընդհանուր դեպքը բերվում է դիտարկված մասնավորին, եթե a_i, b_i թվերի փոխարեն մտցնենք

$$a'_i = \frac{a_i}{\left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k^p \right\}^{\frac{1}{p}}}, \quad b'_i = \frac{b_i}{\left\{ \sum_{k=1}^{n} b_k^q \right\}^{\frac{1}{q}}}$$

թվերը, որոնց համար արդեն կատարվում են (14) տիպի պայմանները։ Ըստ ապացուցածի՝

$$\sum_{i=1}^{n} a'_i b'_i = \frac{\sum_{i}^{n} a_i b_i}{\left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k^p \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{n} b_k^q \right\}^{\frac{1}{q}}} \leqslant 1,$$

իսկ այդ հավասարազոր է (13)-ին։

* $p=q=2$ դեպքում այդ անհավասարությունները արդեն դիտարկվել են առաջին հատորի 485 էջում, և, ինչպես այնտեղ նշել ենք, անմիջականորեն բերվում է մեկը մյուսին։

Դիմենք Մինկովսկու (11) անհավասարությանը։ Ունենք՝

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot(a_i+b_i)^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}b_i\cdot(a_i+b_i)^{p-1}.$$

Եթե վերջին երկու գումարներից յուրաքանչյուրի նկատմամբ կիրառենք արդեն ապացուցված Կոշի–Հյոլդերի (13) անհավասարությունը, ապա կստանանք [տես (12)]՝

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\le\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(p-1)q}\right\}^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\left\{\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(b-1)q}\right\}^{\frac{1}{q}}=$$

$$=\left\{\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}\right\}\cdot\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right\}^{\frac{1}{q}}$$

և, վերջապես, կրճատելով վերջին բազմապատկչով, կհանգենք (11)-ին։

Դիցուք այժմ մեզ տված են դրական թվերի երկու անվերջ հաջորդականություններ՝

$$a_1, a_2, \ldots, a_i \ldots \text{ և } b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots$$

Գրելով (11) և (13) անհավասարությունները ցանկացած n-ի համար և անցնելով սահմանի, երբ $n\to\infty$, կստանանք համանման անհավասարություններ նաև հետևյալ անվերջ շարքերի համար՝

$$\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i+b_i)^p\right\}^{\frac{1}{p}}\le\left\{\sum_{i=1}^{\infty}a_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\sum_{i=1}^{\infty}b_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}\qquad(11^*)$$

և

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_ib_i\le\left\{\sum_{i=1}^{\infty}a_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{\sum_{i=1}^{\infty}b_i^q\right\}^{\frac{1}{q}},\qquad(13^*)$$

Այդ դեպքում զուգընթացաբար ստացվում է, որ այդ անհավասարություններից ամեն մեկի աջ մասում եղած շարքերի զուգամիտությունից բխում է արդեն ձախ մասի շարքի զուգամիտությունը։

§ 3. ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ ՇԱՐՔԵՐԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

366. ԲԱՑԱՐՁԱԿ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅՈՒՆ։ Դառնանք այնպիսի շարքերի զուգամիտության հարցին, որոնց անդամները կարող են ունենալ կամայական նշաններ։ Քանի որ զուգամիտության սկզբունքի կիրառումը [355, *5°*], *ինչպես նշվել է, գործնականում դժվարություններ է հարուցում, ապա հետաքրքրություն է ներկայացնում այնպիսի դեպքերի դասերի ուսումնասիրությունը, երբ հարցը լուծվում է ավելի հասարակ միջոցների օգնությամբ։*

Նախորդ պարագրաֆում մենք տեսանք, որ դրական շարքերի նկատմամբ զուգամիտությունը, մեծ մասամբ հեշտությամբ է որոշվում, շնորհիվ մի շարք հարմար հայտանիշների առկայության։ Ուստի բնական է սկսել այն դեպքերից, երբ տվյալ շարքի զուգամիտության հարցը բերվում է դրական շարքի զուգամիտության հարցին։

Եթե շարքի բոլոր անդամները դրական չեն, բայց սկսած մի որոշ տեղից դրական են դառնում, ապա շարքի սկզբից բավականաչափ անդամներ դեն ձգելով [355, *1°*], *գործը կհանգի դրական շարքի հետազոտության։ Եթե շարքի անդամները բացասական են կամ գոնե մի որոշ տեղից սկսած դառնում են բացասական, ապա բոլոր անդամների նշանները փոխելու միջոցով կվերադառնանք արդեն դիտարկված դեպքերին* [355, *3°*]*։ Այսպիսով, էապես նոր դեպք կլինի այն, երբ շարքի անդամների մեջ կան անվերջ քանակությամբ ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական անդամներ։ Այստեղ հաճախ օգտակար է լինում հետևյալ ընդհանուր թեորեմը։*

ԹԵՈՐԵՄԱ։ Դիցուք տված է

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \qquad (A)$$

շարքը, որի անդամներն ունեն կամայական նշաններ։ Եթե զուգամետ է

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots, \qquad (A^*)$$

շարքը, որը կազմված է նրա անդամների բացարձակ մեծություններից, ապա տվյալ շարքը նույնպես զուգամետ է։

Ապացույցն իսկույն ստացվում է զուգամիտության սկզբունքից.

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+m}|\leqslant|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\cdots+|a_{n+m}|$$

անհավասարությունը ցույց է տալիս, որ եթե զուգամիտության պայմանը կատարվում է (A) շարքի համար, ապա առավել ևս այն կատարվում է (A) շարքի համար։*

Կարելի է և այլ կերպ դատել։ Նշանակենք՝

$$p_n=\frac{|a_n|+a_n}{2},\qquad q_n=\frac{|a_n|-a_n}{2}, \tag{1}$$

այնպես որ $a_n\geqslant 0$ *դեպքում ունենք՝* $p_n=a_n$, $q_n=0$, *իսկ* $a_n<0$ *դեպքում, ընդհակառակը՝* $p_n=0$, $q_n=|a_n|$. *Ակներևորեն,*

$$a_n=p_n-q_n;\ 0\leqslant p_n\leqslant|a_n|\ \text{և}\ 0\leqslant q_n\leqslant|a_n|.$$

Այդ դեպքում, (A) շարքի զուգամիտությունից, ըստ* n° 357-*ի* 1 *թեորեմայի, բխում է*

$$P=\sum_{n=1}^{\infty}p_n\ \text{և}\ Q=\sum_{n=1}^{\infty}q_n \tag{2}$$

երկու շարքերի զուգամիտությունը, և հետևապես [355, 4] *նաև (A) շարքի զուգամիտությունը։*

Բացի դրանից, այդ շարքի A գումարի համար մենք ունենք

$$A=P-Q \tag{3}$$

արտահայտությունը, որից օգտվելու ենք։ Կարելի է ասել, որ արված ենթադրությունների դեպքում տվյալ շարքի գումարը հավասար է երկու այնպիսի շարքերի գումարների տարբերությանը, որոնցից մեկը կազմված է նրա միայն դրական անդամներից, իսկ մյուսը՝ բացասական անդամների բացարձակ մեծություններից։ *Իրոք, (2) շարքերը քիչ առաջ հիշված շարքերից*

տարբերվում են միայն նրանով, որ զանազան տեղերում մտցված են զրոյի հավասար անդամներ, որը էական չէ։

Եթե (A) շարքը զուգամիտում է (A*) շարքի հետ միասին, որը կազմված է նրա անդամների բացարձակ մեծություններից, ապա (A) շարքի մասին ասում են, որ այն բ ա ց ա ր ձ ա կ զ ու գ ա մ ե տ է։ *Ապացուցված թեորեմայի համաձայն, միայն (A*) շարքի զուգամիտությունն արդեն բավական է (A) շարքի բացարձակ զուգամիտության համար։*

Ինչպես ստորև կտեսնենք, հնարավոր են այնպիսի դեպքեր, երբ (A) շարքը զուգամետ է, իսկ (A) շարքը՝ ոչ։* Այդ դեպքում (A) շարքը կոչվում է ո չ-բ ա ց ա ր ձ ա կ* զուգամետ։

(A) շարքի բ ա ց ա ր ձ ա կ զուգամիտությունը որոշելու համար (A) դրական շարքի նկատմամբ կարող են կիրառվել զ ու գ ա մ ի տ ու թ յ ա ն, նախորդ պարագրաֆում ուսումնասիրված, բոլոր հայտանիշները։ Բայց պետք է զգույշ լինել տ ա ր ա մ ի տ ու թ յ ա ն հայտանիշների հետ՝ եթե նույնիսկ (A*) շարքը տարամետ լինի, ապա (A) շարքն այնուամենայնիվ կարող է զուգամետ լինել (ո չ-բ ա ց ա ր ձ ա կ)։ Բացառություն են կազմում միայն Կ ո շ ի ի և Դ ա լ ա մ բ ե ր ի հայտանիշները, և այն էլ այն պատճառով, որ երբ նրանք հաստատում են (A*) շարքի տարամիտությունը, ապա՝ այդ նշանակում է, որ (A*) շարքի $|a_n|$ ընդհանուր անդամը զրոյի չի ձգտում**, իսկ այդ դեպքում a_n-ը ևս զրոյի չի ձգտում, այնպես որ (A) շարքը նույնպես զուգամետ է։ Ուստի հիշված հայտանիշները կարելի է վերաձևակերպել կամայական շարքի նկատմամբ։ Անենք այդ, օրինակ, Դ ա լ ա մ բ ե ր ի հ ա յ տ ա ն ի շ ի համար (որը և առավելապես կիրառվում է պրակտիկայում)։*

ԴԱԼԱՄԲԵՐԻ ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ: Դիցուք $D_n^*=\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ վարիանտայի համար գոյություն ունի որոշակի սահման՝

$$D^*=\lim D_n^*,$$

այդ դեպքում, երբ $D^*<1$, տվյալ (A) շարքը բ ա ց ա ր ձ ա կ զուգամետ է, իսկ երբ $D^*>1$՝ այն տարամետ է։

---

* *կամ՝ պ ա յ մ ա ն ա կ ա ն։*

** *Տես ծանոթությունները* 351 *և* 352 *էջերում։*

367. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Կիրառել Դ ա լ ա մ բ ե ր ի հայտանիշը (ա)—(ե) բոլոր շարքերի նկատմամբ, որոնց մասին խոսք եղավ n° 361-ի 2)-ում, բայց դեն նետելով $x>0$ պահանջը։ Մենք կստանանք, որ

(ա) շարքը բ ա ց ա ր ձ ա կ զուգամետ է x-ի բոլոր արժեքների համար,

(բ) շարքը բ ա ց ա ր ձ ա կ զուգամետ է, երբ $-1<x<1$, և տարամետ է, երբ $x>1$ կամ $x<-1$ ($x=\pm1$ դեպքում խախտվում է զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը)։

(գ) շարքը բ ա ց ա ր ձ ա կ զուգամետ է, երբ $-1<x<1$, և տարամետ է, երբ $x>1$ կամ $x<-1$. եթե $s>1$, ապա $x=\pm1$ դեպքում շարքը նույնպես բ ա ց ա ր ձ ա կ զուգամետ է, իսկ եթե $0<s\leq1$, ապա $x=1$ դեպքում շարքը նախահայտորեն տարամետ է, իսկ $x=-1$ դեպքում հ ա ր ց ը ա ռ ա յ ժ մ բ ա ց է մ ն ու մ։

(դ) շարքը բ ա ց ա ր ձ ա կ զուգամետ է, երբ $-e<x<e$, և տարամետ է, երբ $x>e$ կամ $x<-e$ ($x=\pm e$ դեպքում խախտվում է զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը)։

(ե) շարքը բ ա ց ա ր ձ ա կ զուգամետ է, երբ $-\frac{1}{e}<x<\frac{1}{e}$, և տարամետ է, երբ $x>\frac{1}{e}$ կամ $x<-\frac{1}{e}$ ($x=-\frac{1}{e}$ դեպքում հ ա ր ց ը ա ռ ա յ ժ մ բ ա ց է մ ն ու մ)։ ●

2) $$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdot\ldots\cdot(1+x^n)}\qquad (x\neq-1)։$$

Ունենք՝

$$D_n^*=\frac{|x|}{|1+x^n|},\qquad D^*=\begin{cases}|x|, & \text{եթե } -1<x<1\\ \frac{1}{2}, & \text{եթե } x=1,\\ 0, & \text{եթե } x<-1 \text{ կամ } x>1։\end{cases}$$

Ուրեմն, շարքը բացարձակ զուգամետ է $x\neq-1$ բոլոր արժեքների համար։

3) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}\quad (x\neq\pm1),$$

Այստեղ՝

$$D_n^*=\left|\frac{x-x^{n+1}}{1-x^{n+1}}\right|,\quad D^*=\begin{cases}|x|, & \text{եթե } -1<x<1\\ 1, & \text{եթե } x>1 \text{ կամ } x<-1։\end{cases}$$

$|x|<1$ դեպքում շարքը բ ա ց ա ր ձ ա կ զուգամետ է. $|x|>1$ դեպքում Դ ա լ ա մ բ ե ր ի հայտանիշը ոչինչ չի տալիս, բայց և այնպես կարելի է եզրա-

կացնել շարքի տարամիտության մասին, զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանի խախտման պատճառով:

4) Վերադառնանք հիպերերկրաչափական շարքին [363]:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x)=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot \ldots \cdot(\alpha+n-1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)\cdot \ldots \cdot(\beta+n-1)}{n!\gamma\cdot(\gamma+1)\cdot \ldots \cdot(\gamma+n-1)} x^{n}$$

դրական α, β, γ, x-ի դեպքում (α, β, γ պարամետրերը ենթադրվում են միայն տարբեր զրոյից և ամբողջ բացասական թվերից):

Կիրառելով Դալամբերի հայտանիշը նոր ձևով, համոզվում ենք, որ $|x|<1$ դեպքում այդ շարքը բացարձակ զուգամետ է, իսկ $x>1$ դեպքում տարամետ:

Դիցուք այժմ $x=1$. քանի որ

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2} \quad (|\theta_n| \leq L)$$

Հարաբերությունը բավականաչափ մեծ n-երի համար կլինի դրական, ապա շարքի անդամները, սկսած մի որոշ տեղից, կունենան միևնույն նշանը, իսկ այդ դեպքում դրանց նկատմամբ (կամ դրանց բացարձակ մեծությունների նկատմամբ) կիրառելի է, առաջվա պես, Գաուսի հայտանիշը, որը ցույց է տալիս, որ շարքը զուգամետ է (իհարկե բացարձակ), երբ $\gamma-\alpha-\beta>0$, և տարամետ է, երբ $\gamma-\alpha-\beta\leq 0$:

Դիցուք վերջապես, $x=-1$: Հենց քիչ առաջ ասածից պարզ է, որ $\gamma-\alpha-\beta>0$ դեպքում կզուգամիտի տվյալ $F(\alpha, \beta, \gamma, -1)$ շարքի անդամների բացարձակ մեծություններից կազմված շարքը, այնպես որ տվյալ շարքն այս դեպքում բացարձակ զուգամետ է: $\gamma-\alpha-\beta<-1$ դեպքում կունենանք, սկսած մի որոշ տեղից,

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|<1, \text{ այսինքն՝ } |a_n|<|a_{n+1}|$$

a_n-ը ձգտում է զրոյի, շարքը տարամետ է:

$x=-1$ և $-1\leq\gamma-\alpha-\beta\leq 0$ դեպքում $F(\alpha, \beta, \gamma, -1)$ շարքի զուգամիտության հարցն առայժմ բաց է մնում:

368. ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՔ, ՆՐԱ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՄԻՋԱԿԱՅՔԸ.

Դիտարկենք

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots, \tag{4}$$

տեսքի աստիճանային շարքը, որն իրենից ներկայացնում է կարծես «անվերջ բազմանդամ»՝ դասավորված x փոփոխականի աճող աստիճաններով ($a_0, a_1, a_2, \ldots$՝ այստեղ նշանակում են հաստատուն գործակիցներ)։ Վերևում մենք շատ անգամ գործ ունեցանք այդպիսի աստիճանային շարքերի հետ [տես, օրինակ, նախորդ n°-ում 1) (ա)—(ե)]։

Այժմ մեր առջև խնդիր դնենք պարզել, թե ինչ տեսք ունի աստիճանային շարքի «զուգամիտության տիրույթը», այսինքն՝ փոփոխականի այն արժեքների $X=\{x\}$ բազմությունը, որոնց համար (4) շարքը զուգամետ է։ Այս կծառայի նորից որպես վերը շարադրածի կիրառման կարևոր օրինակ։

ԼԵՄՄԱ։ Եթե (4) շարքը զուգամետ է $x=\bar{x}$ արժեքի համար, որը 0-ից տարբեր է, ապա այն բ ա ց ա ր ձ ա կ զուգամետ է x-ի ամեն մի արժեքի համար, որը բավարարում է $|x|<|\bar{x}|$ անհավասարությանը։

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{x}^n = a_0 + a_1\bar{x} + a_2\bar{x}^2 + \ldots + a_n\bar{x}^n + \ldots$$

շարքի զուգամիտությունից բխում է, որ նրա ընդհանուր անդամը ձգտում է 0-ի [355, 6°], և, հետևապես, սահմանափակ է [26, 4°]՝

$$|a_n\bar{x}^n| \leqslant M \quad (n=0, 1, 2, 3, \ldots)։ \tag{5}$$

Այժմ վերցնենք որևէ x, որի համար $|x|<|\bar{x}|$, և կազմենք հետևյալ շարքը՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots \tag{6}$$

Քանի որ [տես (5)]

$$|a_n x^n| = |a_n \bar{x}^n| \cdot \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n \leqslant M \cdot \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n,$$

և (6) շարքի՝ անդամները ստացվում են ավելի փոքր, քան

$$M+M\cdot\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|+M\cdot\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^2+\ldots+M\cdot\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n+\ldots$$

զուգամիտող երկրաչափական պրոգրեսիայի (որի քանորդն է $\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|<1$) համապատասխան անդամները, ապա, ըստ 357-ի 1-ին թեորեմայի, 16) շարքը զուգամետ է։ Այդպիսի դեպքում, ինչպես գիտենք, (4) շարքը բացարձակ զուգամետ է, որը և պահանջվում էր ապացուցել։

$x=0$ դեպքում զուգամիտում է, ակներևորեն, ամեն մի (4) շարք։ Բայց կան և այնպիսի շարքեր, որոնք, բացի դրանից, չեն զուգամիտում x-ի և ոչ մի արժեքի դեպքում։ Որպես այդպիսի «ամենուրեք տարամետ» շարքի օրինակ կարող է ծառայել $\sum_{1}^{\infty} n!x^n$ շարքը, և դրանում հեշտ է համոզվել Դալամբերի հայտանիշի օգնությամբ։ Նման շարքերը մեզ համար հետաքրքրություն չեն ներկայացնում։

Ենթադրենք, վերջապես, որ (4) շարքի համար ընդհանրապես գոյություն ունեն 0-ից տարբեր այնպիսի $x=\bar{x}$ արժեքներ, որոնց դեպքում նա զուգամետ է, և դիտարկենք $\{|\bar{x}|\}$ բազմությունը։ Այդ բազմությունը կարող է լինել կամ վերևից սահմանափակ, կամ ոչ։

Վերջին դեպքում, x-ի ինչ արժեք էլ վերցնենք, անհրաժեշտորեն կգտնվի այնպիսի $\bar{x}$, որ $|x|<\bar{x}$, իսկ այդ դեպքում, ըստ լեմմայի, x-ի վերցրած արժեքի դեպքում (4) շարքը բացարձակ զուգամետ է։ Շարքն «ամենուրեք զուգամետ» է։

Դիցուք այժմ $\{|\bar{x}|\}$ բազմությունը վերևից սահմանափակ է, և R-ը նրա ճշգրիտ վերին եզրն է։ Եթե $|x|>R$, ապա անմիջապես պարզ է, որ x-ի այդ արժեքի դեպքում (4) շարքը տարամետ է։ Այժմ վերցնենք որևէ x, որի համար $|x|<R$։ Ըստ ճշգրիտ եզրի սահմանման, անհրաժեշտորեն կգտնվի այնպիսի $\bar{x}$, որ $|x|<|\bar{x}|\leqslant R$. իսկ այդ, ըստ լեմմայի, նորից առաջացնում է (4) շարքի բացարձակ զուգամիտություն։

Այսպիսով, $(-R, R)$ բաց միջակայքում (4) շարքը բա-

ցարձակ զուգամետ է. $R<x$-երի և $-R>x$-երի համար շարքը նախահայտորեն տարամետ է, և միայն միջակայքի $x=\pm R$ ծայրերի մասին չի կարելի ընդհանուր ոչինչ ասել՝ այնտեղ, նայած դեպքին, կարող է տեղի ունենալ և՛ զուգամիտություն, և՛ տարամիտություն.

Մեր առաջադրած խնդիրը լուծված է.

Յուրաքանչյուր (4) աստիճանային շարքի համար, երբ միայն նա ամենուրեք տարամետ չէ, X «զուգամիտության տիրույթը» ներկայացնում է մի անընդմեջ միջակայք $-R$-ից մինչև R, ծայրերը ներառյալ կամ ոչ. այդ միջակայքը կարող է նաև անվերջ լինել: Ընդ որում միջակայքի ներսը շարքը բացարձակ զուգամետ է:

Հիշյալ միջակայքն անվանում են շարքի զուգամիտության միջակայք, իսկ $R(0<R\leq+\infty)$ թիվը՝ զուգամիտության շառավիղ: Եթե վերադառնանք նախորդ n°-ի 1) (ա)—(ե) օրինակներին, ապա, ինչպես հեշտ է տեսնել, համապատասխան դեպքերում ունենք՝

$$(ա)\ R=+\infty.\ (բ),\ (գ)\ R=1.\ (դ)\ R=e.\ (ե)\ R=\frac{1}{e}.$$

Ամենուրեք տարամետ շարքի համար ընդունում են $R=0$. Նրա «զուգամիտության տիրույթը» հանգում է մեկ կետի՝ $x=0$:

Եթե դիտարկվող աստիճանային շարքի համար երկու հաջորդական գործակիցների հարաբերությունը, վերցրած բացարձակ մեծությամբ, ունի որոշակի սահման՝

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho,$$

ապա զուգամիտության շառավղի համար կարելի է գրել հետևյալ պարզ արտահայտությունը՝

$$R=\frac{1}{\rho}$$

(համարելով $R=+\infty$, երբ $\rho=0$, և $R=0$, երբ $\rho=+\infty$). Այդ հետևում է այն բանից, որ Դալամբերի հայտանիշն (4) շարքի համար՝

$$D_n^* = \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| \qquad (x \neq 0)$$

այս դեպքում նույնպես ունի որոշակի սահման՝

$$D^* = \rho \cdot |x|.$$

Նույն եզրակացությունը կարելի է անել

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

սահմանի առկայության դեպքում, օգտվելով այս անգամ Կոշիի վարիանտայից.

Ստորև [417] ցույց կտրվի մի ընդհանուր եղանակ որոշելու համար աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղը՝ նրա գործակիցներով.

369. ՆՇԱՆԱՓՈԽ ՇԱՐՔԵՐ. *Նշանափոխ են կոչվում այնպիսի շարքերը, որոնց անդամները հերթով ունենում են մեկ դրական, մեկ բացասական նշաններ. Նշանափոխ շարքը հարմար է գրել այնպես, որպեսզի անդամների նշանները պարզ երևան, օրինակ՝*

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + (-1)^{n-1}c_n + \ldots (c_n > 0). \tag{7}$$

Նշանափոխ շարքերի նկատմամբ գոյություն ունի հետևյալ պարզ թեորեման.

ԼԱՅԲՆԻՑԻ ԹԵՈՐԵՄԱՆ: Եթե *(7)* նշանափոխ շարքի անդամները բացարձակ մեծությամբ մոնոտոն նվազում են՝

$$c_n > c_{n+1} \quad (n=1,\ 2,\ 3, \ldots) \tag{8}$$

և ձգտում են զրոյի՝

$$\lim c_n = 0,$$

ապա շարքը զուգամետ է:

Ապացույց. C_{2m} *զույգ կարգի մասնակի գումարը կարելի է գրել այսպիսի տեսքով՝*

$$C_{2m} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \ldots + (c_{2m-1} - c_{2m}).$$

Քանի որ յուրաքանչյուր փակագիծը, (8)-ի շնորհիվ, դրական թիվ է, ապա այստեղից պարզ է, որ m*-ի աճման հետ* C_{2m} *գումարը նույնպես աճում է։ Մյուս կողմից, եթե* C_{2m}*-ը արտագրենք այսպես՝*

$$C_{2m}=c_1-(c_2-c_3)-\dots-(c_{2m-2}-c_{2m-1})-c_{2m},$$

ապա հեշտ է տեսնել, որ C_{2m}*-ը մնում է վերևից սահմանափակ՝*

$$C_{2m}<c_1.$$

Այդպիսի դեպքում, ըստ մոնոտոն վարիանտայի վերաբերյալ թեորեմայի [34], *երբ* m*-ը անվերջ աճում է,* C_{2m} *մասնակի գումարն ունի վերջավոր սահման*

$$\lim_{m\to\infty} C_{2m}=C.$$

Անցնելով C_{2m-1} *կենտ կարգի մասնակի գումարին, ունենք, ակներևորեն,* $C_{2m-1}=C_{2m}-c_{2m}$. *Քանի որ ընդհանուր անդամը ձգտում է զրոյի, ապա և*

$$\lim_{m\to\infty} C_{2m-1}=C.$$

Այստեղից հետևում է, որ հենց C*-ն կլինի տվյալ շարքի գումարը։*

Դիտողություն. Մենք տեսանք, որ C_{2m} *զույգ կարգի մասնակի գումարները մոտենում են շարքի* C *գումարին՝ աճելով։ Գրելով* C_{2m-1}*-ը հետևյալ տեսքով՝*

$$C_{2m-1}=c_1-(c_2-c_3)-\dots-(c_{2m-2}-c_{2m-1}),$$

հեշտ է ցույց տալ, որ կենտ կարգի գումարները ձգտում են C*-ին՝ նվազելով։ Այսպիսով, միշտ*

$$C_{2m}<C<C_{2m-1}.$$

Մասնավորապես կարելի է պնդել, որ

$$0<C<c_1.$$

Այս հանգամանքը թույլատրում է տալ շատ հասարակ և հարմար գնահատում դիտարկվող շարքի մնացորդի համար (որն ինքը ևս ներկայացնում է նույնպիսի մի նշանափոխ շարք)։ Այն է՝

$$\gamma_{2m}=c_{2m+1}-c_{2m+2}+\cdots$$

մնացորդի համար, ակնհայտորեն, ունենք՝

$$0<\gamma_{2m}<c_{2m+1}.$$

Ընդհակառակը,

$$\gamma_{2m-1}=c_{2m}+c_{2m+1}-\cdots=-(c_{2m}-c_{2m+1}+\cdots)$$

մնացորդի համար կլինի

$$\gamma_{2m-1}<0, \qquad |\gamma_{2m-1}|<c_{2m}$$

Այսպիսով, բոլոր դեպքերում լայբնիցյան տիպի* շարքի մնացորդն ունի իր առաջին անդամի նշանը և փոքր է նրանից բացարձակ մեծությամբ:

Այս դիտողությունը հաճախ է օգտագործվում շարքերի օգնությամբ մոտավոր հաշվումների ժամանակ [*տես* **396**]։

370. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Լայբնիցյան տիպի շարքերի պարզագույն օրինակներ են ծառայում հետևյալ շարքերը՝

$$(ա)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

և

$$(բ)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\cdots$$

Երկուսի էլ զուգամիտությունը բխում է ապացուցված թեորեմայից։

Միևնույն ժամանակ նրանց անդամների բացարձակ մեծություններից կազմված շարքերը տարամետ են՝ (ա) շարքի համար այդ կլինի հարմոնիկ շարքը, իսկ (բ) շարքի համար կստացվի՝

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$$

շարքը, որի տարամիտությունը պարզ է այն բանից, որ նրա մասնակի գումարը՝

---

* *Այսպես ենք անվանում Լայբնիցի թեորեմայի պայմաններին բավարարող նշանափոխ շարքը։*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}H_k.$$

Այսպիսով, հանձին (ա) և (բ) շարքերի մենք ունենք ոչ-բացարձակ շարքերի առաջին օրինակները։ [Ստորև կտեսնենք, որ նրանցից առաջինի գումարն է $\log 2$, *իսկ երկրորդի գումարը հավասար է* $\frac{\pi}{4}$, 376, 2) •393, 392։]

2) Համաձայն Լայբնիցի թեորեմայի, հետևյալ շարքերը զուգամետ են՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s},\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\log^s n},\quad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\log n\cdot(\log\log n)^s}\ (s>0)։$$

Եթե բոլոր անդամները փոխարինենք իրենց բացարձակ մեծություններով, ապա ինչպես գիտենք, $s>1$ *դեպքում կստացվեն զուգամետ շարքեր, իսկ* $s\leq 1$ *դեպքում՝ տարամետ։ Այսպիսով, ելակետային շարքերը* $s>1$ *դեպքում ստացվում են բացարձակ զուգամետ, իսկ* $s\leq 1$ *դեպքում՝ ոչ-բացարձակ զուգամետ։*

Մասնավորապես, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^s}$ *աստիճանային շարքի վերաբերյալ, որը մենք դիտարկեցինք* nn° 361-*ում և* 367-*ում, այժմ կարելի է ասել, որ իր զուգամիտության միջակայքի* $x=-1$ *ծայրում, երբ* $s\leq 1$, *նա դեռևս զուգամիտում է, բայց ոչ-բացարձակ։*

3) Դիտարկենք $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{x}{n}$ *շարքը, ցանկացած* $x\neq 0$ *դեպքում։*

Լայբնիցի թեորեման կիրառելի է, եթե ոչ այս շարքի նկատմամբ, ապա նրա բավական հեռավոր (ըստ համարի) մնացորդի նկատմամբ։ Իրոք, բավականաչափ մեծ n-*ի դեպքում,* $\sin\frac{x}{n}$-*ը ձեռք է բերում* x-*ի նշանը և* n-*ի աճման հետ միասին բացարձակ մեծությամբ նվազում է։ Այսպես ուրեմն, շարքը զուգամետ է [ակներևորեն, ոչ-բացարձակ, տես 368, 8) (գ)։]*

4) Պարզելու համար այն հարցը, որ c_n *թվերի մոնոտոն նվազման պահանջը Լայբնիցի թեորեմայի մեջ ամենևին էլ ավելորդ չէ, դիտարկենք հետևյալ նշանափոխ շարքը՝*

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\dots,$$

որի ընդհանուր անդամը ձգտում է զրոյի։ Նրա 2n անդամների գումարը հավասար է

$$\sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}-1}-\frac{1}{\sqrt{k}+1}\right)=\sum_{n=2}^{n+1}\frac{2}{k-1}=2H_n$$

և անվերջ աճում է n-ի հետ միասին. շարքը տարամետ է։ Դժվար չէ տեսնել, որ նկատման մոնոտոնությունը խախտվում է ամեն անգամ $-\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ անդամից $\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}$ անդամին անցնելիս։

Նույն նպատակին կարող է ծառայել նաև

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right]$$

տարամետ շարքը, որում թողնում ենք համոզվել ինքն ընթերցողը։

3) Վերջին շարքն առիթ է տալիս այսպիսի դիտողության։ Եթե այն համեմատելու լինենք $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ զուգամետ շարքի հետ, ապա դուրս է գալիս, որ նրանց ընդհանուր անդամների հարաբերությունը ձգտում է 1-ի։ Այսպիսով, n 357-ի 2-րդ թեորեման կամայական նշաններով անդամներ ունեցող շարքերի տեսության մեջ համանմանը չունի։

371. ԱԲԵԼԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆԸ։ Հաճախ հարկ է լինում գործ ունենալ հետևյալ տեսքի զույգ արտադրյալների գումարների հետ՝

$$S=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_m\beta_m. \qquad (9)$$

Ըստ որում շատ դեպքերում օգտակար է լինում հետևյալ տարրական ձևափոխությունը, որը նշել է Աբելը (N. H. Abel)։

Դիտարկենք հետևյալ գումարները՝

$$B_1=\beta_1,\quad B_2=\beta_1+\beta_2,\quad B_3=\beta_1+\beta_2+\beta_3,\ \ldots,$$
$$B_m=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_m.$$

Այդ դեպքում, β_i արտադրիչներն արտահայտելով այդ գումարների միջոցով՝

$$\beta_1=B_1,\quad \beta_2=B_2-B_1,\quad \beta_3=B_3-B_2,\ldots,$$
$$\beta_m=B_m-B_{m-1},$$

S *գումարը կարելի է գրել այս տեսքով՝*

$$S=\alpha_1B_1+\alpha_2(B_2-B_1)+\alpha_3(B_3-B_2)+\cdots$$
$$\cdots+\alpha_m(B_m-B_{m-1}).$$

Եթե փակագծերը բացենք և անդամներն այլ ձևով խմբավորենք, ապա կստանանք վերջնական բանաձև՝

$$S=\sum_{i=0}^{m}\alpha_i\beta_i=(\alpha_1-\alpha_2)B_1+(\alpha_2-\alpha_3)B_2+\cdots$$

$$\cdots+(\alpha_{m-1}-\alpha_m)\cdot B_{m-1}+\alpha_mB_m=\sum_{i=1}^{m-1}(\alpha_i-\alpha_{i+1})B_i+\alpha_mB_m{}^{*}.\quad(10)$$

[Եթե այդ բանաձևն արտագրենք այս ձևով

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i=\alpha_mB_m-\sum_{i=1}^{m-1}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)B_i,$$

ապա պարզ կլինի, որ վերջավոր գումարների այս բանաձևը համընկնում է ինտեգրալների մասերով ինտեգրման բանաձևի անալոգը. դիֆերենցիալն այստեղ փոխարինված է տարբերությամբ, իսկ ինտեգրալը՝ գումարով.]

Հիմնվելով (10) բանաձևի վրա, այժմ դուրս բերենք հետևյալ գնահատումը նշված տեսքի գումարների համար՝

ԼԵՄՄԱ: Եթե α_i արտադրիչները չեն աճում (կամ չեն նվազում), իսկ բոլոր B_i գումարները բացարձակ մեծությամբ սահմանափակված են L թվով՝

$$|B_i|\leqslant L\qquad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

---

* *Փաստորեն մենք արդեն օգտվել ենք նման ձևափոխություններից միջին արժեքի երկրորդ թեորեման ապացուցելու ժամանակ [294]:*

ապա

$$|S| = \left|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\beta_i\right| \leq L\cdot(|\alpha_1| + 2|\alpha_m|).$$

Իրոք, քանի որ (10)-ի մեջ մտնող բոլոր տարբերությունները միևնույն նշանն ունեն, ապա

$$|S| \leq \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i - \alpha_{i+1}|\cdot L + |\alpha_m|\cdot L =$$

$$= L(|\alpha_1 - \alpha_m| + |\alpha_m|) \leq L(|\alpha_1| + 2|\alpha_m|).$$

Դժվար չէ տեսնել, որ, եթե α_i արտադրիչները չեն աճում և դրական են, ապա գնահատումը կարելի է պարզեցնել՝

$$|S| = \left|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\beta_i\right| \leq L\cdot\alpha_1. \tag{11}$$

Ստորև մենք այս գնահատականներից շատ անգամ կօգտվենք զանազան առիթներով։ Այժմ դրանք կօգտագործենք արտածելու համար զուգամիտության ավելի ընդհանուր հայտանիշներ, քան Լ ա յ բ ն ի ց ի վերևում սահմանված հայտանիշն է։

372. ԱԲԵԼԻ ԵՎ ԴԻՐԻԽԼԵԻ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԸ։ *Դիտարկենք*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n + \ldots \tag{W}$$

շարքը, որտեղ $\{a_n\}$-ը և $\{b_n\}$-ը՝ իրական թվերի երկու հաջորդականություններ են։

Դրանցից յուրաքանչյուրի նկատմամբ արված հետևյալ ենթադրությունները առանձին-առանձին ապահովում են այդ շարքի զուգամիտությունը։

ԱԲԵԼԻ ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ։ Եթե

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \tag{B}$$

շարքը զուգամետ է, իսկ a_n թվերը կազմում են մոնոտոն ու սահմանափակ հաջորդականություն՝

$$|a_n| \le K \qquad (n=1,\ 2,\ 3, \dots),$$

ապա *(W)* շարքը զուգամետ է։

ԴԻՐԻԽԼԵԻ ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ։ Եթե *(B)* շարքի մասնակի գումարները՝ խմբովին սահմանափակ են*

$$|B_n| \le M \qquad (n=1,\ 2,\ 3, \dots),$$

իսկ a_n թվերը կազմում են մոնոտոն հաջորդականություն, որը ձգտում է զրոյի՝

$$\lim a_n = 0,$$

ապա *(W)* շարքը զուգամետ է։

Երկու դեպքում էլ (W) շարքի զուգամիտությունը որոշելու համար կդիմենք զուգամիտության սկզբունքին [355, 5°]*։ Ուստի դիտարկենք հետևյալ գումարը՝*

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k = \sum_{i=1}^{m} a_{n+i} b_{n+i}.$$

Նա ունի (9) տեսքը, եթե դնենք $\alpha_i = a_{n+i}$, $\beta_i = b_{n+i}$*։ Փորձենք գնահատել այդ գումարը լեմմայի օգնությամբ։*

Աբելի ենթադրությունների առկայության դեպքում, տրված $\varepsilon>0$ *թվի միջոցով կգտնվի այնպիսի* N *համար, որ* $N<n$*-երի դեպքում*

$$|b_{n+1}+b_{n+2}+\dots+b_{n+p}| < \varepsilon$$

անհավասարությունը տեղի կունենա, ինչպիսին էլ լինի p*-ն (զուգամիտության սկզբունքը)։ Հետևապես, լեմմայում հիշատակված* L *թվի փոխարեն կարելի է վերցնել* ε*։ Այն ժամանակ,* $N<n$*-երի և* $m=1,\ 2,\ 3, \dots$ *դեպքում, ունենք՝*

---

* *Այս պահանջը ավելի լայն է, քան (B) շարքի զուգամիտության վերաբերյալ արած ենթադրությունները։*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k\right| \leqslant \varepsilon(|a_{n+1}|+2|a_{n+m}|) < 3K \cdot \varepsilon,$$

որը և ապացուցում է (W) շարքի զուգամիտությունը։

Դիրիխլեի ենթադրությունների առկայության դեպքում, տրված $\varepsilon > 0$ *թվի միջոցով կգտնվի այնպիսի N համար, որ* $N < n$*-երի դեպքում կլինի*

$$|a_n| < \varepsilon.$$

Բացի այդ, ակներևորեն,

$$|b_{n+1}+b_{n+2}+\dots+b_{n+p}| = |B_{n+p}-B_n| \leqslant 2M$$

և լեմմայում կարելի է ընդունել $L = 2M$։ *Այն ժամանակ* $N < n$*-երի և* $m = 1, 2, 3\dots$ *դեպքում՝*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k\right| \leqslant 2M.(|a_{n+1}|+2|a_{n+m}|) < 6M \cdot \varepsilon,$$

և (W) շարքի զուգամիտությունն ապացուցված է։

Դիտողություն. Աբելի հայտանիշը բխում է Դիրիխլեի հայտանիշից։ Չէ որ Աբելի ենթադրություններից հետևում է, որ a_n*-ը ունի a վերջավոր սահման։ Եթե (W) շարքը գրենք որպես երկու շարքերի գումար՝*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a)b_n + a\sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

ապա դրանցից երկրորդը զուգամիտում է ըստ ենթադրության, իսկ առաջինի նկատմամբ կարելի է կիրառել Դիրիխլեի հայտանիշը։

373. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) *Եթե* a_n*-ը, մոնոտոն նվազելով, ձգտում է 0-ի, իսկ* $b_n = (-1)^{n-1}$, *ապա Դիրիխլեի թեորեմայի պայմանները, ակներևորեն, կատարված են։ Հետևապես,*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n-1}a_n + \dots$$

շարքը զուգամետ է։ Այսպիսով, Լայբնիցի թեորեման ստացվում է, որպես Դիրիխլեի թեորեմայի մասնավոր հետևանք։

2) a_n-ի նկատմամբ անելով նույն ենթադրությունները, դիտարկենք հետևյալ շարքերը (ցանկացած x-ի դեպքում)՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin nx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx։$$

n 295-ի (1) և (2) նույնություններում, որոնք այնտեղ ստացել էինք այլ առիթով, ընդունելով $a=0$ և $h=x$, կստանանք՝

$$\sum_{i=1}^{n} \sin ix = \frac{\cos\frac{1}{2}x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \cos ix = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

այն ենթադրությամբ միայն, որ x-ը չունի $2k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2 \dots)$ տեսքը։ Այսպիսով, եթե միայն $x \neq 2k\pi$, ապա ցանկացած n-ի դեպքում երկու գումարի էլ բացարձակ արժեքները սահմանափակված են $\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$ թվով։

Դիրիխլեի հայտանիշի համաձայն, երկու շարքն էլ զուգամետ են x-ի, $2k\pi$-ից տարբեր, ցանկացած արժեքի դեպքում. ակնհայտ, առաջին շարքը զուգամետ է նաև երբ $x=2k\pi$, որովհետև նրա բոլոր անդամները 0 են դառնում։

Մասնավորապես, օրինակ, զուգամետ են հետևյալ շարքերը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin nx}{n}, \text{ և այլն։}$$

3) Մեծ հետաքրքրություն են ներկայացնում

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} \tag{12}$$

տեսքի շարքերը, որտեղ $\{a_n\}$-ը՝ իրական թվերի կամայական հաջորդականություն է. դրանք կրում են Դիրիխլեի շարքեր *անունը։*

Դրանց համար կարելի է ապացուցել մի լեմմա, որը նմանություն ունի n° 368-ի աստիճանային շարքերի վերաբերյալ լեմմայի հետ՝

Եթե *(12)* շարքը զուգամետ է մի որևէ $x=\bar{x}$ արժեքի դեպքում, ապա այն զուգամետ է ամեն մի x-ի դեպքում, որը մեծ է $\bar{x}$-ից։

Այդ անմիջապես հետևում է Աբելի թեորեմայից, որովհետև երբ $x>\bar{x}$, ապա (12) շարքը ստացվում է

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

զուգամետ շարքից, բազմապատկելով նրա անդամները $\frac{1}{n^{x-\bar{x}}}$ $(n=1,2,3\ldots)$ *մոնոտոն նվազող դրական բազմապատկիչներով։*

Գոյություն ունեն (12) տեսքի «ամենուրեք զուգամետ» շարքեր, ինչպես $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n^x}$ *շարքն է։ Եթե բացառենք այս դեպքերը, ապա բերված լեմմայի օգնությամբ հեշտ է հաստատել այնպիսի* զուգամիտության λ եզրային *թվի գոյությունը, որ (12) շարքը զուգամետ է* $\lambda < x$*-երի դեպքում և տարամետ է* $\lambda > x$*-երի դեպքում։ Օրինակ,* $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ *շարքի համար, ակներևաբար,* $\lambda=1$, *իսկ* $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ *շարքի համար ունենք* $\lambda=0$*։ Եթե ցանկանանք, «ամենուրեք զուգամետ» շարքի համար կարելի է համարել* $\lambda=-\infty$, *իսկ «ամենուրեք տարամետի» համար* $\lambda=+\infty$*։*

Ընթերցողը հեշտությամբ կտեսնի նմանություն աստիճանային շարքերի հետ. երկու դեպքում էլ «զուգամիտության տիրույթը» ներկայացնում է անընդմեջ միջակայք։ Բայց կա նաև էական տարբերություն՝ բացարձակ *զուգամիտության տիրույթն այստեղ կարող է չհամընկնել ընդհանրապես զուգամիտության տիրույթի հետ։ Այսպես, ինչ առաջ մատնանշված* $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ *շարքը զուգամետ է* $0<x$*-երի դեպքում, իսկ* բացարձակ *զուգամետ է միայն* $1<x$*-երի դեպքում։*

4) Դ ի ր ի խ լ ե ի (12) շարքի հետ համեմատենք

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!a_n}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)} \tag{13}$$

շարքը, a_n գործակիցների միևնույն արժեքների դեպքում։ Այդ ժամանակ ընդհանրապես, կհամարենք, որ x-ը տարբեր է հետևյալ թվերից՝ 0, −1, −2,... *և այլն։*

Այս սահմանափակումով գոյություն ունի այսպիսի առաջադրություն, որը պատկանում է Լ ա ն դ ա ո ւ ի ն (E. Landau)*՝ (12) և (13)* շարքերը զուգամիտում են x-ի միևնույն արժեքների դեպքում։

(13) շարքը ստացվում է Դ ի ր ի խ լ ե ի (12) շարքից, բազմապատկելով նրա անդամները, համապատասխանաբար, հետևյալ բազմապատկիչներով՝

$$\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)} \quad (n=1, 2, 3, \ldots)\text{։} \tag{14}$$

n-ի բավականաչափ մեծ արժեքների դեպքում այդ բազմապատկիչները ձեռք են բերում որոշակի նշան։ Բացի այդ, սկսած մի որոշ տեղից, նրանք արդեն մ ո ն ո տ ո ն են փոփոխվում։

Իրոք, (n+1)*-րդ բազմապատկչի հարաբերությունը* n*-րդին կլինի այսպիսի՝*

$$\frac{(n+1)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^x}{x+n+1} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1}}{1+\frac{x+1}{n}}\text{։}$$

Բայց [123, 4]՝

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1} = 1+\frac{x+1}{n}+\frac{(x+1)}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

ինչպես նաև

$$\frac{1}{1+\frac{x+1}{n}} = 1-\frac{(x+1)}{n}+\frac{(x+1)^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

որտեղից՝

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1}}{1+\frac{x+1}{n}} = 1+\frac{(x+1)x}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\text{։}$$

վերջին բանաձևից պարզ երևում է, որ երբ $(x+1)x>0$, *հիշյալ հարաբերությունը վերջ ի վերջո դառնում է մեկից մեծ, իսկ երբ* $(x+1)x<0$ *նա դառնում է մեկից փոքր։*

Որպեսզի ցույց տանք (14) բազմապատկիչների սահմանափակությունը, կհիմնվենք այն բանի վրա, որ [ինչպես տորև այդ կապացուցվի, n *390-ի 9)-ում] (14) արտահայտության համար* $n\to\infty$ *դեպքում գոյություն ունի վ ե ր ջ ա վ ո ր սահման։ Այսպիսով, ըստ Աբելի հայտանիշի, (12) շարքի զուգամիտությունը բերում է իր հետ նաև (13) շարքի զուգամիտությունը։*

Քանի որ հիշատակված սահմանը (ինչպես կտեսնենք) միշտ 0-ից տարբեր է, ապա նման եզրակացություններ կիրառելի են նաև (14)-ին հակադարձ բազմապատկիչների նկատմամբ։ Այդ դեպքում, ըստ նույն թեորեմայի, (13) շարքի զուգամիտությունն էլ իր հետ բերում է (12) շարքի զուգամիտություն։ Սրանով ապացուցվեց ամբողջ թեորեման,

5) Նման տեսակի փոխադարձություն կարող է հաստատվել այսպես կոչված Լ ա մ բ ե ր տ ի *(J. H. Lambert)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} \tag{15}$$

շարքի *վարքի և*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \tag{16}$$

աստիճանային շարքի [368] *վարքի միջև, որն ունի նույն* a_n *գործակիցները* ($x=\pm 1$ *արժեքներն, իհարկե բացառվում են)։ Ավելի ճշգրիտ արտահայտվելով՝*

Եթե

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{A}$$

շարքը զուգամետ է, ապա Լ ա մ բ ե ր տ ի (15) շարքը զուգամետ է x-ի բոլոր արժեքների դեպքում. իսկ հակառակ դեպքում նա զուգամետ է x-ի հենց այն արժեքների համար, որոնց համար զուգամետ է (16) աստիճանային շարքը։ [Կ ն ո պ (K. Knopp)։]

(ա) Դիցուք սկզբում (A) շարքը տ ա ր ա մ ե տ է, այնպես որ (16) շարքի զուգամիտության շառավիղը կլինի $R\leqslant 1$։ *Ցույց տանք որ* $|x|<1$ *համար (15) և (16) շարքերի վարքը միատեսակ է։*

Եթե զուգամիտում է (15) շարքը, ապա զուգամիտում է և այն շարքը։

որն ստացվել է բազմապատկելով նրա անդամները x^n*-ով*, հետևապես, և (16) շարքը, որը երկու շարքերի տարբերությունն է հանդիսանում* [355, 4]՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cdot\frac{x^n}{1-x^n} - a_n\cdot\frac{x^n}{1-x^n}\cdot x^n\right],$$

Դիցուք այժմ զուգամիտում է (16) շարքը. այդ դեպքում, ըստ Աբելի հայտանիշի զուգամիտում է այն շարքը, որը ստացվել է բազմապատկելով նրա անդամները մոնոտոն նվազող $\frac{1}{1-x^{2n}}$ *բազմապատկիչներով՝*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\cdot\frac{1}{1-x^{2n}}, \quad \text{ինչպես նաև} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\cdot\frac{x^n}{1-x^{2n}},$$

Հետևապես, զուգամետ է և (15) շարքը, որը ներկայացնում է այդ շարքերի գումարը [355, 4]՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n x^n\cdot\frac{1}{1-x^{2n}} + a_n x^n\cdot\frac{x^n}{1-x^{2n}}\right],$$

$|x|>1$ *համար (16) շարքը ակնհայտորեն տարամետ է. մենք պնդում ենք, որ* x*-ի այդ արժեքի դեպքում տարամետ է նաև (15) շարքը։ Իրոք հակառակ դեպքում,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\frac{x^n}{1-x^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

---

* *Եթե որևէ շարք, ասենք,* $\sum_{1}^{\infty} b_n$*-ը զուգամետ է, ապա այդ նշանակում է, որ* $\sum_{1}^{\infty} b_n x^n$ *աստիճանային շարքը զուգամետ է* $x=1$ *դեպքում, բայց այդ դեպքում, ըստ n° 368-ի լեմմայի, այդ շարքը բացարձակորեն զուգամետ է ցանկացած* x*-ի դեպքում, որի համար* $|x|<1$*։ Այս դիտողությունից մենք դեռ երկու անգամ կօգտվենք ներքևում բերվող դատողությունների ժամանակ։*

շարքի զուգամիտությունից կբխեր

$$\sum_{n-1}^{\infty} a_n \cdot \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

և

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} - a_n \cdot \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} \right]$$

շարքերի զուգամիտությունը [355, 4], հակառակ ենթադրության։

(բ) Եթե (A) շարքը զուգամետ է (այնպես որ R ≥ 1), ապա $|x|<1$ համար (16) շարքը զուգամետ է, և (15) շարքի զուգամիտությունը հաստատվում է ինչպես և վերևում։ Մնում է ցույց տալ, որ (15) շարքը զուգամետ է նաև $|x|>1$ դեպքում։

Իրոք, այդ դեպքում $\left|\frac{1}{x}\right|<1$ և

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

շարքը, ինչպես հիշված է, զուգամետ է, հետևապես, զուգամետ է նաև

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} \equiv -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} \equiv -\sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n + a_n \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} \right]$$

շարքը [335, 4°]։

6) Վերջում, որպես Աբելի (10) ձևափոխման անմիջական կիրառման օրինակ, բերենք

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

նույնությունը, որտեղ

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots)։$$

Ընդ որում |x|-ը ենթադրվում է փոքր ոչ միայն առաջին շարքի R զուգամիտության շառավղից, այլև փոքր 1-ից։

Իսկապես, ունենք՝

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} s_i (x^i - x^{i+1}) + s_n x^n ։$$

Այստեղից $n \to \infty$ *դեպքում ստացվում է հենց պահանջված հավասարությունը, եթե միայն ցույց տրվի նաև, որ* $s_n x^n \to 0$։ *Այդ նպատակով վերցնենք* r *թիվը հետևյալ պայմանով՝*

$$|x| < r < R, \qquad r \neq 1 ։$$

Այդ դեպքում $|a_i| r^i < L$ (i=0, 1, 2, ...-*ի համար*) *և*

$$|s_n x^n| < L\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^n}\right)|x|^n =$$

$$= \frac{L}{1-r}\left(\frac{|x|}{r}\right)^n - \frac{Lr}{1-r}|x|^n ,$$

Իսկ վերջին արտահայտությունը, արված ենթադրությունների դեպքում ձգտում է 0-ի։

§ 4. ԶՈՒԳԱՄԵՏ ՇԱՐՔԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

374. ԶՈՒԳՈՐԴԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ. *Անվերջ շարքի գումարի գաղափարը էապես տարբերվում է վերջավոր գումարելիների գումարի գաղափարից (որը դիտարկվում է թվաբանության ու հանրահաշվի մեջ) նրանով, որ ներառում է իր մեջ սահմանային անցում։ Թեև սովորական գումարների որոշ հատկություններ փոխանցվում են նաև անվերջ շարքերի գումարներին, բայց ավելի հաճախ այդ տեղի է ունենում որոշ պայմանների բավարարման դեպքում, որոնք և ենթակա են ուսումնասիրության։ Սակայն պատահում են դեպքեր, երբ գումարների մեզ համար սովորական հատկությունները զարմանալի կերպով խախտվում են, այնպես որ, ընդհանրապես, այդ հարցում պետք է զգուշություն պահպանել։*

Դիտարկենք հետևյալ զուգամետ շարքը

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{A}$$

և նրա անդամները կամայական ձևով միավորենք խմբերի մեջ, ընդ որում չփոխելով նրանց դասավորությունը՝

$$a_1 + \cdots + a_{n_1}, \quad a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}, \ldots,$$

$$a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}, \ldots.$$

Այստեղ $\{n_k\}$*-ն՝ համարների մի որոշ մ ա ս ն ա կ ի աճող հաջորդականություն է՝ քաղված բնական շարքից։*

ԹԵՈՐԵՄԱ: Այդ գումարներից կազմված

$$(a_1 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots$$

$$\cdots + (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots \tag{$\tilde{A}$}$$

շարքը միշտ զուգամետ է և ունի նույն գումարը, ինչ որ ելակետային շարքը: *Ուրիշ խոսքով՝* զուգամետ շարքն օժտված է զ ու գ ո ր դ ա կ ա ն հատկությամբ:

Իրոք, նոր շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը

$$\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_k, \ldots$$

ոչ այլ ինչ է, եթե ոչ ելակետային շարքի գումարների

$$A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_k}, \ldots$$

մասնակի հաջորդականություն։ Դրանով էլ ապացուցվում է մեր պնդումը [40]։

Մենք տեսնում ենք, առայժմ, լրակատար համանմանություն սովորական գումարելիների հետ. բայց այդ համանմանությունը խախտվում է, եթե մենք փորձում ենք կիրառել զուգորդական հատկությունը, այսպես ասած, հակառակ կարգով։

Եթե տված է ($\tilde{A}$) *զ ու գ ա մ ե տ շարքը, որի յուրաքանչյուր անդամն առանձին ներկայացնում է վերջավոր թվով գումարելիների գումար, ապա, դեն ձգելով փակագծերը, կստանանք մի*

նոր (A) շարք, որը կարող է և տարամետ հանդիսանալ: Ահա դրա հասարակ օրինակը՝

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots$$

շարքը, ակնհայտորեն, զուգամետ է, մինչդեռ փակագծերը դեն ձգելու միջոցով դրանից ստացված

$$1-1+1-1+1-1+\dots$$

շարքը կլինի տարամետ:

Իհարկե, եթե, դեն ձգելով փակագծերը, մենք ստանանք զուգամետ (A) շարք, ապա նրա գումարը նույնը կլինի, ինչ որ $(\tilde{A})$ շարքինը: Այդ բխում է վերևում ապացուցածից:

Որոշ պայմանների դեպքում կարելի է նախապես երաշխավորել, որ (A) շարքը կզուգամիտի: Այդ տեսակի պարզագույն դեպք հանդիսանում այն, երբ $(\tilde{A})$-ի բոլոր գումարելիները միևնույն փակագծերի ներսում կունենան միևնույն նշանը*:

Իրոք, այդ դեպքում, երբ n-ը փոփոխվի n_{k-1}-ից մինչև n_k, ապա A_n մասնակի գումարը կփոփոխվի մոնոտոն կերպով, հետևապես, կպարունակվի $A_{n_{k-1}}=\tilde{A}_{k-1}$-ի և $A_{n_k}=\tilde{A}_k$-ի միջև: Բավականաչափ մեծ k-ի դեպքում այս վերջին գումարները կամայականորեն քիչ են տարբերվում $(\tilde{A})$ շարքի $\tilde{A}$ գումարից, հետևապես նույնն էլ իրավացի է և A_n գումարի նկատմամբ՝ բավականաչափ մեծ n-ի դեպքում, այնպես որ $A_n \to \tilde{A}$:

Այս դիտողությունից մենք շատ անգամ կօգտվենք հետագայում:

Դիտարկենք հենց այժմ այսպիսի

Օրինակ: Ցույց տալ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n}$ շարքի զուգամիտությունը:

* Այդ նշանը, մի փակագծից մյուսին անցնելիս, կարող է փոխվել:

Այստեղ սկզբում գալիս է 3 բացասական անդամ, դրանից հետո՝ 5 դրական անդամ և այլն: Եթե նույն նշանն ունեցող անդամների յուրաքանչյուր այդպիսի խումբը միացնենք և դարձնենք մեկ անդամ, ապա կստացվի նշանափոխ շարք՝

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\ldots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right]. \tag{1}$$

Հեշտ է ցույց տալ հետևյալ անհավասարությունը

$$\frac{2}{k+1}<\overbrace{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\ldots}^{k}+\overbrace{\frac{1}{k^2+k}+\ldots+\frac{1}{(k+1)^2-1}}^{k+1}<\frac{2}{k}.$$

օրինակ, քանի որ առաջին k գումարելիների գումարն ավելի փոքր է, քան $k\cdot\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k}$, իսկ վերջին (k+1) գումարելիների գումարն ավելի փոքր է, քան $(k+1)\frac{1}{k^2+k}=\frac{1}{k}$, ապա ամբողջ գումարը, իրոք, ավելի փոքր կլինի, քան $\frac{2}{k}$: Այստեղից եզրակացնում ենք, որ (1) շարքի անդամները, բացարձակ արժեքով մոնոտոն նվազելով, կձգտեն զրոյի: Այդ դեպքում, Լայբնիցի թեորեմայի համաձայն, (1) շարքը զուգամետ է, հետևապես, վերևում արված դիտողության շնորհիվ, զուգամետ է և առաջարկված շարքը:

375. ԲԱՑԱՐՁԱԿ ԶՈՒԳԱՄԵՏ ՇԱՐՔԵՐԻ ՏԵՂԱՓՈԽԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ: Դիցուք տված է (A) զուգամետ շարքը, որի գումարն է A: Նրա մեջ անդամները կամայական կերպով տեղափոխելով, կստանանք նոր շարք՝

$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k=a'_1+a'_2+\ldots+a'_k+\ldots \tag{A'}$$

Այդ շարքի յուրաքանչյուր a'_k անդամ նույնանում է ելակետային շարքի մի որոշակի a_{n_k} անդամի հետ*:

Հարց է ծագում, զուգամե՞տ է արդյոք (A′) շարքը և, զու-

* Ընդ որում $\{n_k\}$ համարների հաջորդականությունն առանց բաց թողումների և կրկնությունների վերարտադրում է բնական շարքը՝ կարգի ճշգրտությամբ:

գամիտության դեպքում, նրա գումարը հավասար կլինի՞ արդյոք ելակետային շարքի A գումարին։ Այս հարցի դիտարկման ժամանակ մենք ստիպված կլինենք խիստ տարբերություն դնել բացարձակ զուգամետ և ոչ-բացարձակ զուգամետ շարքերի միջև։

ԹԵՈՐԵՄԱ: Եթե (A) շարքը բացարձակ զուգամետ է, ապա նրա անդամների տեղափոխումից ստացված (A′) շարքը նույնպես զուգամետ է և ունի նույն A գումարը, ինչ որ ելակետային շարքը: *Ուրիշ խոսքով՝* բացարձակ զուգամետ շարքն օժտված է փոփոխական հատկությամբ։

Ապացույց։ (ա) Ապացույցը կատարենք երկու նվագով։ Նախ ենթադրենք, որ (A) շարքը դրական է։

Դիտարկենք (A′) շարքի որևէ A'_k մասնակի գումար։ Քանի որ

$$a'_1=a_{n_1},\quad a'_2=a_{n_2},\dots,a'_k=a_{n_k},$$

ապա, վերցնելով n'-ը ավելի մեծ, քան $n_1, n_2,\dots,n_k$ բոլոր համարները, ակներևորեն, կունենանք $A'_k \leqslant A_{n'}$, և առավել ևս՝

$$A'_k \leqslant A:$$

Այդ դեպքում (A′)-ը կլինի զուգամետ [356], և նրա A′ գումարը չի գերազանցի A-ին՝

$$A' \leqslant A.$$

Բայց (A) շարքն էլ ստացվում է (A′)-ից դարձյալ անդամների տեղափոխումով, ուստի համանմանորեն՝

$$A \leqslant A'.$$

Համեմատելով ստացված անհավասարությունները, կգանք պահանջված հավասարությանը՝ $A'=A$.

(բ) Դիցուք այժմ (A)-ն որևէ բացարձակ զուգամետ շարք է։

Քանի որ

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=|a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|+\dots, \qquad (A^*)$$

զուգամետ դրական շարքը, ըստ ապացուցածի, անդամների ցանկացած տեղափոխության դեպքում մնում է զուգամետ, ապա, ըստ n° 366 թեորեմայի (A), շարքը ևս այդ դեպքում կպահպանի իր (բացարձակ) զուգամիտությունը։

Այնուհետև, մենք տեսանք n° 366-ում, որ (A) շարքի բացարձակ զուգամիտության դեպքում, նրա գումարն արտահայտվում է այսպես՝

$$A = P - Q,$$

որտեղ P-ն և Q-ն դրական շարքերի գումարներ են՝ կազմված, համապատասխանաբար, հետևյալ մեծություններից՝

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad q = \frac{|a_n| - a_n}{2}. \tag{2}$$

Անդամների տեղափոխումը (A) շարքի մեջ կառաջացնի անդամների տեղափոխում և այդ շարքերի մեջ, բայց չի անդրադառնա (համաձայն ապացուցածի) նրանց P և Q գումարների վրա։ Հետևապես, (A) շարքի գումարը ևս կմնա նախկինը, որը և պահանջվում էր ապացուցել։

376. *ՈՉ-ԲԱՑԱՐՁԱԿ ԶՈՒԳԱՄԵՏ ՇԱՐՔԵՐԻ ԴԵՊՔԸ.* *Այժմ դիմենք ոչ-բացարձակ զուգամետ շարքերի դիտարկմանը և ցույց տանք,* որ նրանք օժտված չեն տեղափոխական հատկությամբ՝ *յուրաքանչյուր այդպիսի շարքում անդամների պատշաճ տեղափոխումով կարելի է փոխել նրա գումարը կամ նույնիսկ խախտել նրա զուգամիտությունը։*

Ենթադրենք, թե (A) շարքը զուգամետ է, բայց ոչ-բացարձակ զուգամետ։ Զուգամիտությունից հետևում է, որ $\lim a_n = 0$ [355, 6°]։ *Իսկ ինչ վերաբերում է*

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \quad \text{և} \quad \sum_{m=1}^{\infty} q_m \tag{3}$$

շարքերին, որոնց մասին հիշել ենք նախորդ n°-ում, ապա, թեև, ակներևաբար,

$$\lim_{k\to\infty} p_k = 0 \quad \text{և} \quad \lim_{m\to\infty} q_m = 0, \tag{4}$$

բայց տվյալ դեպքում նրանք երկուսն էլ տարամետ են։ Իրոք, մեկի զուգամիտությունից, քանի որ $a_n = p_n - q_n$, անհրաժեշտաբեն կբխեր և մյուսի զուգամիտությունը, իսկ երկուսի զուգամիտությունը, շնորհիվ նրա, որ $a_n = p_n + q_n$, որպես հետևանք կունենար (A) շարքի զուգամիտությունը, հակառակ մեր ենթադրության։*

Այժմ ապացուցենք հետևյալ նշանավոր թեորեման, որը պատկանում է Ռիմանին՝

ՌԻՄԱՆԻ ԹԵՈՐԵՄԱՆ: Եթե (A) շարքը ոչ-բացարձակ զուգամետ է, ապա ինչպիսի B թիվ էլ նախապես վերցնելու լինենք (վերջավոր կամ հավասար $\pm\infty$), կարելի է այդ շարքի մեջ անդամները այնպես տեղափոխել, որ ձևափոխված շարքի գումարը հենց B լինի:

Ապացույց. Կանգ առնենք B-ի վերջավոր լինելու դեպքի վրա.

Այստեղ մեզ համար հարմար է, թողնելով (2)-ի նշանակումները, p_k-ն հասկանալ որպես (A) շարքի k-րդ (ըստ կարգի) դրական անդամ, իսկ q_m-ը՝ որպես այդ շարքի m-րդ բացասակա՛ն անդամի բացարձակ մեծություն։ Այս բանը, հասկանալի է, որ չի անդրադառնա ոչ (3) երկու շարքերի տարամիտության վերաբերյալ արած եզրակացության վրա (այդ շարքերից մենք բաց ենք թողել միայն զրոյի հավասար անդամները), ոչ էլ (4) սահմանային հավասարությունների իրավացիության վրա։ Նկատենք նաև, որ 355, 1°-ի շնորհիվ, (3) շարքի բոլոր մնացորդները նույնպես տարամետ կլինեն, այնպես որ այդ շարքերից յուրաքանչյուրում, սկսած ցանկացած տեղից, կարելի է վերցնել այնքան անդամներ, որ գումարը գերազանցի ցանկացած թվին։

Օգտվելով այդ դիտողություններից, մենք (A) շարքի անդամների տեղափոխությունը կկատարենք հետևյալ եղանակով։

Նախ մեր շարքից վերցնենք այնքան դրական անդամներ (այն կարգով, ինչ կարգով նրանք այնտեղ դասավորված են), որ նրանց գումարը գերազանցի B թվին՝

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} > B.$$

Դրանից հետո վերցնենք բացասական անդամներ (այն

կարգով, ինչ կարգով նրանք դասավորված են տվյալ շարքում) այնքան, որ նրանց ընդհանուր գումարը դառնա B-ից փոքր՝

$$p_1+p_2+\cdots+p_{k_1}-q_1-q_2-\cdots-q_{m_1}<B.$$

Դրանից հետո նորից ավելացնենք դրական անդամներ (մնացած անդամներից) այնքան, որ լինի՝

$$p_1+\cdots+p_{k_1}-q_1-\cdots-q_{m_1}+p_{k_1+1}+\cdots+p_{k_2}>B.$$

Այնուհետև վերցնենք այնքան բացասական անդամներ (մնացած անդամներից), որ լինի՝

$$p_1+\cdots+p_{k_1}-q_1-\cdots-q_{m_1}+p_{k_1+1}+\cdots+p_{k_2}-$$

$$-q_{m_1+1}-\cdots-q_{m_2}<B,$$

և այլն։ Մենք պատկերացնենք, որ այս պրոցեսն անվերջ շարունակվում է. ակներևորեն (A) շարքի յուրաքանչյուր անդամ, ընդ որում հենց իր նշանով, կհանդիպի որոշակի տեղում։

Եթե ամեն անգամ, արտագրելով p կամ q անդամները, հավաքենք դրանցից ոչ ավելի, քան անհրաժեշտ է պահանջված անհավասարությունն իրագործելու համար, ապա B թվից այս կամ այն կողմ շեղումը իր բացարձակ մեծությամբ չի գերազանցի այն անդամին, որը գրված է վերջում։ Այդ դեպքում (4)-ից պարզ է, որ

$$(p_1+\cdots+p_{k_1})-(q_1+\cdots+q_{m_1})+\cdots$$

$$\cdots+(p_{k_{i-1}+1}+\cdots+p_{k_i})-(q_{m_{i-1}+1}+\cdots+q_{m_i})+\cdots$$

շարքի գումարը B-ն է։ n° 374-ի դիտողության շնորհիվ, այդ կմնա ճիշտ նաև փակագծերը բանալուց հետո։

Եթե $B=+\infty$, ապա, վերցնելով B_i թվերի միջև անվերջություն աճող հաջորդականություն, կարելի կլիներ դրական թվերի հավաքագրումը ենթարկել այն պահանջին, որ գումարները հաջորդաբար դառնան ավելի մեծ, քան B_1, B_2, B_3 և այլն, իսկ բացասական անդամներից տեղավորել միայն մեկական՝ դրական անդամների յուրաքանչյուր խմբից հետո։ Այս ճանապարհով անշուշտ կկազմվեր մի շարք, որի գումարը կլիներ $+\infty$։ Հա-

մանման ձևով կարելի է ստանալ և այնպիսի շարք, որ գումարը լինի $-\infty$*.

Ստացված արդյունքն ընդգծում է այն փաստը, որ ոչ-բացարձակ զուգամիտությունը իրագործվում է միայն շնորհիվ դրական և բացասական անդամների փոխադարձ ոչնչացման, ուստի և էապես կախված է այն կարգից, որով նրանք մեկը մյուսին հաջորդում են, մինչդեռ բացարձակ զուգամիտությունը հիմնված է այդ անդամների նվազման վրա և կախում չունի նրանց կարգից։

Օրինակներ: 1) Դիտարկենք հետևյալ նախահայտորեն ոչ-բացարձակ զուգամետ շարքը՝

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\dots, \tag{5}$$

որի գումարը, ինչպես հեշտ է ցույց տալ [տես 2)], հավասար է $\log 2$։ Տեղափոխենք նրա անդամներն այնպես, որ մեկ դրական անդամից հետո գան երկու բացասական անդամներ՝

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\dots \tag{6}$$

մենք պնդում ենք, որ այդպիսի տեղափոխությունից շարքի գումարը կփոքրանա երկու անգամ։

Իրոք, եթե այդ երկու շարքերի մասնակի գումարները նշանակենք, համապատասխանաբար, A_n և A'_n, ապա՝

$$A'_{3m}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}A_{2m},$$

այնպես որ $A'_{3m}\to\frac{1}{2}\log 2$։ Քանի որ

---

* Ընթերցողը հեշտությամբ կարող է գլխի ընկնել, թե ինչպես դասավորել տվյալ շարքի անդամները, որպեսզի ձևափոխված շարքի մասնակի գումարը որպես փոքրագույն և մեծագույն սահմաններ ունենա երկու նախապես տրված թվեր՝ B և $C>B$։

$$A'_{3m-1}=A'_{3m}+\frac{1}{4m} \quad և \quad A'_{3m-2}=A'_{3m-1}+\frac{1}{4m-2}$$

ձգտում է միևնույն $\frac{1}{2}\log 2$ սահմանին, այսպես (6) շարքը զուգամետ է և նրա գումարը հավասար է հենց այդ թվին։

2) Կարելի է ստանալ ավելի ընդհանուր արդյունք, եթե ելնենք հարմոնիկ շարքի H_n մասնակի գումարի համար ստացված [358 (4)] հետևյալ բանաձևից՝

$$H_n = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}=\log n+C+\gamma_n,$$

որտեղ C-ն Էյլերյան հաստատունն է, իսկ γ_n-ն՝ անվերջ փոքր է։ Այստեղից, ամենից առաջ, ունենք

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2m}=\frac{1}{2}H_m=\frac{1}{2}\log m+\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}\gamma_m,$$

$$1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2k-1}=H_{2k}-\frac{1}{2}H_k=$$

$$=\log 2+\frac{1}{2}\log k+\frac{1}{2}C+\gamma_{2k}-\frac{1}{2}\gamma_k.$$

Այժմ (5) շարքի անդամները դասավորենք այս կարգով՝ նախ տեղավորենք p հատ դրական և q հատ բացասական անդամներ, հետո նորից p հատ դրական և q հատ բացասական անդամներ, և այլն։ Որոշելու համար

$$1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2}-\dots-\frac{1}{2q}+\frac{1}{2p+1}+\dots$$

$$\dots+\frac{1}{4p-1}-\frac{1}{2p+2}\dots \tag{7}$$

շարքի գումարը, ավելի հարմար է միացնել հաջորդական խմբերը p կամ q անդամներից բաղկացած։ Այդ ձևով ստացված շարքի $\tilde{A}_{2n}$ մասնակի գումարը հավասար է

$$\tilde{A}_{2n}=\log\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right)+\alpha_n \qquad (\alpha_n\to 0)$$

և ձգտում է $\log\left(2\sqrt{\frac{p}{2}}\right)$ սահմանին. նույն սահմանին է ձգտում նաև

$\tilde{A}_{2n-1}$ գումարը։ Վերջապես, n 374-ի դիտողության շնորհիվ, (7) շարքը ևս կունենա նույն $\log\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$ գումարը։

Մասնավորապես, (5) շարքի համար ստացվում է $\log 2$ $(p=q=1)$, (6) շարքի համար, ինչպես և 1)-ում, $\frac{1}{2}\log 2$ $(p=1,\ q=2)$։ Համանման ձևով

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\dots=\frac{3}{2}\log 2$$

$$(p=2,\ q=1)$$

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\frac{1}{5}-\dots=0$$

$$(p=1,\ q=4)$$

և այլն։

Նկատենք, որ, եթե դրական և բացասական անդամների հաջորդական խմբերի մեջ անդամների քանակը փոփոխենք նաև խմբից խումբ, ապա հեշտ է այդ փոփոխության օրենքն այնպես ընտրել, որ ձևափոխված շարքի համար, իրոք, ստացվի ամեն մի նախապես տրված գումար։ Թողնում ենք ընթերցողին համոզվել դրանում։

377. ՇԱՐՔԵՐԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ։ Երկու զուգամետ շարքերի անդամ առ անդամ գումարման (կամ հանման) մասին, ինչպես և զուգամետ շարքի բոլոր անդամները հաստատուն բազմապատկիչով բազմապատկելու մասին արդեն խոսք եղավ n° 355-ի 3°-ում և 4°-ում։ Այժմ մենք զբաղվենք շ ա ր ք ե ր ի բ ա զ մ ա պ ա տ կ մ ա ն հարցով։

Դիցուք տված է երկու զուգամետ շարք՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=a_1+a_2+\dots+a_n+\dots \qquad (A)$$

և

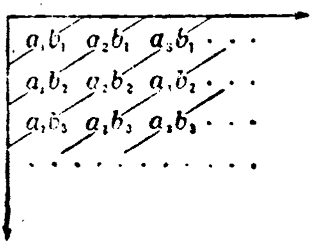
$$B=\sum_{m=1}^{\infty} b_m=b_1+b_2+\dots+b_m+\dots \qquad (B)$$

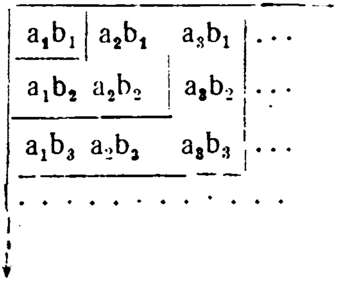
Վերջավոր գումարների բազմապատկման կանոնի նմանությամբ, այստեղ ևս դիտարկենք այդ շարքերի անդամների ամեն հնա-

բավոր զույգական արտադրյալներ՝ a_ib_k. *դրանցից կկազմվի անվերջ ուղղանկյուն մատրիցա՝*

$$\begin{array}{lllll} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 \ldots & a_ib_1 & \ldots \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 \ldots & a_ib_2 & \ldots \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 \ldots & a_ib_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1b_k & a_2b_k & a_3b_k \ldots & a_ib_k & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \qquad (8)$$

Այդ արտադրյալները կարելի է շատ եղանակներով դասավորել պարզ հաջորդականության տեսքով։ Օրինակ, կարելի է արտադրյալները արտագրել ըստ անկյունագծերի կամ ըստ քառակուսիների՝





որոնք, համապատասխանաբար, բերում են հետևյալ հաջորդականություններին՝

$$a_1b_1;\ a_1b_2,\ a_2b_1;\ a_1b_3,\ a_2b_2,\ a_3b_1;\ldots \qquad (9)$$

կամ

$$a_1b_1;\ a_1b_2,\ a_2b_2,\ a_2b_1;\ a_1b_3,\ a_2b_3,\ a_3b_3,\ a_3b_2,\ a_3b_1;\ldots \qquad (10)$$

ԿՈՇԻԻ ԹԵՈՐԵՄԱՆ։ Եթե *(A)* և *(B)* շարքերը երկուսն էլ բացարձակ զուգամետ են, ապա *(8)* արտադրյալներից կազմված շարքը, վերցրած ցանկացած կարգով, նույնպես զուգամետ է և նրա գումարը հավասար է տված գումարների AB արտադրյալին։

Ապացույց. Ըստ ենթադրության՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots \qquad (A^*)$$

և

$$\sum_{m=1}^{\infty} |b_m| = |b_1| + |b_2| + \ldots + |b_m| + \ldots \qquad (B^*)$$

շարքերը զուգամետ են, այսինքն՝ ունեն վերջավոր գումարներ, ասենք, A^* և B^*:

Դասավորելով (8) արտադրյալները կամայական ձևով հաջորդականության տեսքով, նրանցից կազմենք մի շարք՝

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{k_s} = a_{i_1} b_{k_1} + a_{i_2} b_{k_2} + \ldots + a_{i_s} b_{k_s} + \ldots \qquad (11)$$

Որպեսզի ապացուցենք բացարձակ մեծություններից կազմված

$$\sum_{s=1}^{\infty} |a_{i_s} b_{k_s}| = |a_{i_1} b_{k_1}| + |a_{i_2} b_{k_2}| + \ldots + |a_{i_s} b_{k_s}| + \ldots \qquad (12)$$

համապատասխան շարքի զուգամիտությունը, դիտարկենք նրա s-րդ մասնակի գումարը. եթե $i_1, k_1, i_2, k_2, \ldots, i_s, k_s$ նշիչներից ամենամեծը նշանակենք ν, ապա, ակներևաբար,

$$|a_{i_1} b_{k_1}| + |a_{i_2} b_{k_2}| + \ldots + |a_{i_s} b_{k_s}| \leqslant (|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_\nu|)(|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_\nu|) \leqslant A^* \cdot B^*.$$

Այստեղից [356] բխում է (12) շարքի զուգամիտությունը, հետևապես, և (11) շարքի *բացարձակ* զուգամիտությունը:

Մնում է որոշել նրա գումարը: Մենք իրավունք ունենք (11) շարքի անդամներին տալ այդ նպատակի համար ավելի հարմար դասավորություն, որովհետև այդ շարքը, որպես բացարձակ զուգամետ շարք, օժտված է տեղափոխական հատ-

կությամբ։ Դասավորելով այդ անդամները ըստ քառակուսիների, ինչպես (10)-ում, մենք կմիավորենք այն հաջորդական խմբերը, որոնք տարբերում են մեկ քառակուսին մյուսից՝

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1) +$$
$$+ (a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1) + \dots \qquad (13)$$

եթե A_n-ով ու B_n-ով նշանակենք, ինչպես սովորաբար, (A) և (B) շարքերի մասնակի գումարները, ապա (13) շարքի համար մասնակի գումարները կլինեն

$$A_1B_1,\ A_2B_2,\ A_3B_3, \dots,\ A_kB_k, \dots$$

որոնք ձգտում են AB արտադրյալին, որը, այդպիսով, հանդիսանում է ոչ միայն (13) շարքի գումար, այլև (11) շարքի։

Շարքերը փաստորեն բազմապատկելիս ավելի հաճախ հարմար է լինում (8) արտադրյալները դասավորել ըստ անկյունագծերի, ինչպես (9)-ում. սովորաբար այն անդամները, որոնք գտնվում են միևնույն անկյունագծի վրա, այդ դեպքում միավորվում են՝

$$AB = a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \dots \qquad (14)$$

Դիցուք, օրինակ, բազմապատկվում են երկու աստիճանային շարքեր՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m + \dots$$

[ընդ որում x-ը վերցրած է համապատասխան զուգամիտության միջակայքերի ներսը, 368]։ Այդ դեպքում, ինչպես դժվար չէ կռահել, նշված եղանակը համապատասխանում է նման անդամների միացմանը արտադրյալի մեջ՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m =$$
$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots$$

378. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Բազմապատկելով

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \qquad (|x|<1)$$

շարքն ինքն իրենով, այդպիսով կստանանք՝

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{1}^{\infty} nx^{n-1} = 1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$$

2) $$\frac{1}{1+x} = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots$$

և

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^m}{m} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{m-1} \frac{x^m}{m} + \ldots \qquad (15)$$

շարքերի բազմապատկումը (որտեղ $|x|<1$) կտա այսպիսի արդյունք՝

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} H_k x^k = x - \left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{k-1}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right)x^k + \ldots$$

Ստորև մենք կտեսնենք [393], *որ* (15) *շարքի գումարն է* $\log(1+x)$, *այնպես որ վերջին վերլուծումը ներկայացնում է* $\frac{\log(1+x)}{1+x}$ *ֆունկցիան։*

3) Բարձրացնել քառակուսի հետևյալ շարքը՝

$$\left\{1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{z^{2\mu}}{2^{2\mu} \cdot (\mu!)^2}\right\}^2$$

(ցանկացած z-ի դեպքում)։

Ցուցում։ Օգտվել տարրական եղանակով ապացուցվող հետևյալ բանաձևից՝

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} \left(C_\nu^\mu\right)^2 = C_{2\nu}^\nu = \frac{2\nu!}{(\nu!)^2}.$$

Պատասխան։ $1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{2\nu!\, z^{2\nu}}{2^{2\nu} \cdot (\nu!)^4}.$

4) Ապացուցել 373, 6-ի նույնությունը, անդամ առ անդամ բազմապատկելով հետևյալ շարքերը՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{և} \quad \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}.$$

5) Ինչպես արդեն գիտենք [367, 1) (ա)],

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

շարքը բացարձակ զուգամետ է x-ի բոլոր արժեքների դեպքում. Նշանակենք նրա գումարը $E(x)$։ Այդ դեպքում $E(x)$-ի և $E(y)$-ի արտադրյալը կարելի է կատարել ըստ շարքերի բազմապատկման կանոնի։ Արտադրյալի ընդհանուր անդամը կլինի այսպիսին՝

$$1 \cdot \frac{y^n}{n!} + \frac{x}{1!} \cdot \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{y^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} +$$

$$+ \ldots + \frac{x^n}{n!} \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k)!} x^k y^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Այսպիսով, առայժմ մեզ անհայտ $E(x)$ ֆունկցիայի համար ստացվում է այսպիսի առնչություն՝

$$E(x) \cdot E(y) = E(x+y)$$

ցանկացած x-ի ու y-ի դեպքում։ Հետագայում դա մեզ հնարավորություն կտա ցույց տալ, որ $E(x)$-ը՝ ցուցչային ֆունկցիա է [411, 1). համեմատել 75, 1°]։

6) Դալամբերի հայտանիշի օգնությամբ հեշտ է ցույց տալ, որ

$$C(x) = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots,$$

$$S(x) = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \ldots$$

շարքերը բացարձակ զուգամետ են x-ի բոլոր արժեքների դեպքում։ Շարքերի բազմապատկման միջոցով կարելի է ապացուցել հետևյալ առնչությունները՝

$$C(x+y) = C(x) \cdot C(y) - S(x) \cdot S(y),$$
$$S(x+y) = S(x) \cdot S(y) + C(x) \cdot S(y)\text{։}$$

Քանի որ իրականում $S(x)$-ը և $C(x)$-ը ոչ այլ ինչ են, բայց եթե $\sin x$ և $\cos x$ [392], ապա այստեղ մենք տեսնում ենք այդ ֆունկցիաների գումարման հայտնի թեորեմները։

7) Դիտարկենք, վերջապես,

$$\zeta(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

դրական շարքը, որը զուգամետ է, երբ $x > 1$ [356, 2)] և ներկայացնում է Ռիմանի ζ ֆունկցիան։ Հաշվենք, շարքերի բազմապատկման օգնությամբ, նրա քառակուսին։

Ամեն հնարավոր

$$\frac{1}{n^x} \cdot \frac{1}{m^x} = \frac{1}{(n \cdot m)^x}$$

արտադրյալները դասավորենք այնպես, որ միևնույն $k = n \cdot m$ թիվն ունեցող անդամները հայտարարում կողք կողքի լինեն, իսկ այնուհետև միավորենք դրանք։ Յուրաքանչյուր k-ին կհամապատասխանեն այնքան (իրար հավասար) անդամներ, որքան n բաժանարար ունի k թիվը, այսինքն՝ $\tau(k)$։ Ուրեմն, վերջնականապես,

$$[\zeta(x)]^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau(k)}{k^x}\text{։}$$

379. ՇԱՐՔԵՐԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՄԱՆ ԹԵՈՐԵՄԱՅԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՈՒՄԸ։ Ինչպես նշել է Մերտենսը (F. Mertens), նախորդ արդյունքները կարող են, որոշ իմաստով, տարածվել նաև ավելի ընդհանուր դեպքի վրա։

ՄԵՐՏԵՆՍԻ ԹԵՈՐԵՄԱՆ։ Եթե (A) և (B) շարքերը զուգամետ են, ընդ որում նրանցից գոնե մեկը բացարձակ զուգամետ է, ապա (14) վերլուծումը տեղի ունի։

Ապացույց։ Դիցուք, ասենք, (A) շարքը բացարձակ զուգամետ է, այսինքն՝ զուգամետ է (A^*) շարքը։

Միավորելով k-րդ անկյունագծի վրայի անդամները, ընդունենք՝

$$c_k = a_1 b_k + a_2 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1} b_2 + a_k b_1$$

և

$$C_k = c_1 + c_2 + \cdots + c_k,$$

այնպես որ պետք է ապացուցել, որ $C_k \to AB$։

Ամենից առաջ, դժվար չէ տեսնել, որ

$$C_k = a_1 B_k + a_2 B_{k-1} + \dots + a_{k-1} B_2 + a_k B_1.$$

Թե ընդունենք $B_m = B - \beta_m$ (որտեղ β_m մնացորդը ձգտում է 0-ի, երբ $m \to \infty$), ապա C_k գումարը կարտագրվի այսպես՝

$$C_k = A_k B - \gamma_k, \text{ որտեղ } \gamma_k = a_1 \beta_k + a_2 \beta_{k-1} + \dots + a_{k-1} \beta_2 + a_k \beta_1.$$

Քանի որ $A_k \to A$, ապա ամբողջ հարցը հանգում է $\lim \gamma_k = 0$ առնչության ապացուցմանը։

k թիվը վերլուծենք երկու գումարելիների՝ $k = p + q$ այնպես, որ k-ի հետ զուգընթաց p և q երկու գումարելիներն էլ անվերջ աճեն (օրինակ, կարելի է ընդունել $p = q = \frac{k}{2}$, երբ k-ն զույգ է կամ $p = \frac{k-1}{2}$ և $q = \frac{k+1}{2}$ երբ k-ն կենտ է)։ Այդ կապակցությամբ γ_k-ն էլ կվերածվի երկու արտահայտության՝

$$a_1 \beta_k + a_2 \beta_{k-1} + \dots + a_p \beta_{q+1} \text{ և } a_{p+1} \beta_q + a_{p+2} \beta_{q-1} + \dots + a_k \beta_1.$$

Քանի որ $\beta_m \to 0$, ապա տրված $\varepsilon > 0$ թվով կգտնվի այնպիսի M համար, որ $|\beta_m| < \varepsilon$, հենց որ $m > M$. բացի այդ, β_m փոփոխականը սահմանափակ է, այսինքն՝ $|\beta_m| \leqslant L$, ինչպիսին էլ լինի m-ը։

Մյուս կողմից, (A*) շարքը զուգամետ է։ Այդ դեպքում $\varepsilon > 0$ թվով կգտնվի այնպիսի N համար, որ $|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+s}| < \varepsilon$, եթե $n > N$ (ցանկացած s-ի դեպքում)։ Բացի այդ, միշտ $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \leqslant K$ ($K = \text{const.}$)։

Եթե ենթադրենք k-ն այնքան մեծ, որ լինի $p > N$ և $q > M$, ապա այստեղից կհետևեն հետևյալ անհավասարությունները՝

$$|a_1 \beta_k + a_2 \beta_{k-1} + \dots + a_p \beta_{q+1}| < \varepsilon (|a_1| + \dots + |a_p|) \leqslant K \cdot \varepsilon,$$

$$|a_{p+1} \beta_q + a_{p+2} \beta_{q-1} + \dots + a_k \beta_1| \leqslant L (|a_{p+1}| + \dots + |a_k|) < L \cdot \varepsilon,$$

այնպես որ $|\gamma_n| < (K + L) \cdot \varepsilon$, որով և ավարտվում է ապացուցումը։

Որպես թեորեմայի կիրառման օրինակ, վերադառնանք նախորդ n°-ի 4) խնդրին։ Այնտեղ հիշատակված հավասարությունը, ինչպես այժմ տեսնում ենք, տեղի ունի նաև $\sum_0^\infty a_n x^n$ շարքի զուգամիտության միջակայքի $x = \pm R$ ծայրերում, եթե $R < 1$ և շարքն այդ ծայրում ընդհանրապես զուգամետ է (թեկուզ և ոչ-բացարձակ)։

Նկատենք, որ եթե (A) և (B) երկու շարքերն էլ զուգամիտեին միայն ոչ-բացարձակորեն, ապա արդեն չէր կարելի երաշխավորել (14) շարքի զուգամիտությունը։ Օրինակի համար, փորձենք

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

շարքը [որը, ինչպես գիտենք, 370, 2), ոչ-բացարձակ զուգամետ է] բազմապատկել ինքն իրենով։ Այդ դեպքում՝

$$c_k = (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{1 \cdot \sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{k-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{i} \cdot \sqrt{k-i+1}} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{1}{\sqrt{k \cdot 1}} \right).$$

քանի որ փակագծերում եղած յուրաքանչյուր գումարելին մեծ է $\frac{1}{k}$*-ից, ապա* $|c_k| > 1$ *(երբ* $k > 1$*) և* $\sum_{1}^{\infty} c_k$ *շարքը տարամետ է* [355, 6°]։

Սակայն, եթե նման ձևով վարվենք նաև

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

նույնպես ոչ-բացարձակ զուգամետ շարքի հետ, ապա կստացվի, որ

$$c_k = (-1)^{k-1} \left[\frac{1}{1 \cdot k} + \frac{1}{2 \cdot (k-1)} + \cdots + \frac{1}{i \cdot (k-i+1)} + \cdots + \frac{1}{k \cdot 1} \right] =$$
$$= (-1)^{k-1} \frac{2}{k+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} \right)։$$

Այստեղ, k*-ն աճելիս,* $|c_k|$*-երը ձգտում են 0-ի, մոնոտոն նվազելով, այնպես որ [ըստ Լայբնիցի թեորեմայի, 369]* $\sum_{1}^{\infty} c_k$ *շարքն այնուամենայնիվ կլինի զուգամետ։ Ինչպիսի՞ն է սակայն նրա գումարը, կլինի՞ արդյոք այն հավասար* $(\log 2)^2$*։ Այս հարցին մենք կվերադառնանք ստորև [411, 7)]։*

Դիտողություն։ Այս պարագրաֆի վերջում կցանկանայինք մի անգամ ևս ընդգծել, որ անվերջ շարքերի մեջ հենց բացարձակ զուգամետ շարքերն են օժտված լինում վերջավոր գումարների սովորական հատկու-

թյուններում։ Ոչ-բացարձակ զուգամետ շարքերի վրա այդ հատկությունները տարածվում են միայն մասամբ և վերապահումներով։

§ 5. ԿՐԿՆԱԿԻ ՇԱՐՔԵՐ

380. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐՆԵՐ. *Դիցուք տրված են անվերջ բազմությամբ թվեր՝*

$$a_i^{(k)} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, \quad k = 1, 2, 3, \ldots),$$

որոնք կախված են երկու բնական նշիչներից։ Պատկերացնենք, որ դրանք դասավորված են անվերջ ուղղանկյուն մատրիցի տեսքով՝

$$\begin{array}{|lllll}
\hline
a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \ldots & a_i^{(1)} & \ldots \\
a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \ldots & a_i^{(2)} & \ldots \\
a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} \ldots & a_i^{(3)} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & a_3^{(k)} \ldots & a_i^{(k)} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array} \qquad (1)$$

Այս տեսակի մատրիցը կոչվում է անվերջ մատրից երկու մուտքով։

Մատրիցի մեջ մտնող անդամներից կարելի է կազմել հետևյալ սիմվոլը՝

$$\begin{aligned}
& a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + a_3^{(1)} + \ldots + a_i^{(1)} + \ldots \\
& \quad + a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + a_3^{(2)} + \ldots + a_i^{(2)} + \ldots \\
& \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \quad + a_1^{(k)} + a_2^{(k)} + a_3^{(k)} + \ldots + a_i^{(k)} + \ldots \\
& \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)},
\end{aligned} \qquad (2)$$

որը և կոչվում է կրկնակի շարք։

Սահմանենք կրկնակի շարքի գումարի գաղափարը. Սահմանափակվելով առաջին n *սյունակներով և առաջին* m *տողերով, դիտարկենք*

$$A_n^{(m)} = \sum_{i,\,k=1}^{i=n,\,k=m} a_i^{(k)},$$

վերջավոր գումարը, որը կոչվում է տվյալ կրկնակի շարքի մասնակի գումար.

Միաժամանակ և միմյանցից անկախ մեծացնենք n *և* m *թվերը այնպես, որ նրանք ձգտեն անվերջության.* Եթե գոյություն ունի

$$A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} A_n^{(m)}$$

վերջավոր կամ անվերջ (բայց որոշակի նշանով) սահման, ապա այն անվանում են կրկնակի շարքի գումար *և գրում են*

$$A = \sum_{i=1,\,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}.$$

Եթե (2) շարքը ունի վերջավոր գումար, այն անվանում են զուգամետ, իսկ հակառակ դեպքում՝ տարամետ.

Որպես (1) *մատրիցի օրինակ կարող է ծառայել նախորդ պարագրաֆում դիտարկված* (8) *մատրիցը, որը կազմված է* (A) *և* (B) *երկու զուգամետ շարքերի կամայական անդամների արտադրյալներից. Նրա ընդհանուր անդամն է*

$$c_i^{(k)} = a_i b_k,$$

իսկ մասնակի գումարը, ակներևորեն, հավասար է (եթե պահպանենք նախկին նշանակումները)

$$C_n^{(m)} = A_n B_m,$$

այնպես որ այդ մատրիցով կազմված կրկնակի շարքը միշտ զուգամետ է և ունի հետևյալ գումարը՝

$$C = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} C_n^{(m)} = AB^{*}.$$

Կրկնակի շարքերի վրա հեշտ է տարածել զուգամետ շարքի անդամները հաստատուն թվով բազմապատկելու և երկու զուգամետ շարքերն անդամ առ անդամ գումարելու կամ հանելու [355, 3° և 4°] թեորեմները, այդ անելը թողնում ենք ընթերցողին։

Ճիշտ այդպես էլ կրկնակի շարքի զուգամիտության համար անհրաժեշտ պայման է հանդիսանում ընդհանուր անդամի 0-ի ձգտելը՝

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} a_n^{(m)} = 0$$

[համեմատել 355, 6°]։ Այդ միանգամից երևում է հետևյալ բանաձևից՝

$$a_n^{(m)} = A_n^{(m)} - A_{n-1}^{(m)} - A_n^{(m-1)} + A_{n-1}^{(m-1)}.$$

Այժմ կանգ առնենք (1) տեսքի մատրիցի դիտարկման հետ կապված նոր գաղափարի վրա՝ հաջորդական շարքի գաղափարի վրա։

Եթե անվերջ ուղղանկյուն մատրիցում միագումարենք յուրաքանչյուր տողն առանձին, կստանանք հետևյալ տեսքի շարքերի անվերջ հաջորդականություն՝

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}. \tag{3}$$

Այժմ այդ հաջորդականությունը միագումարելով երկրորդ անգամ, կունենանք

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}. \tag{4}$$

* Այսպիսով երկու զուգամետ շարքերի արտադրյալը միշտ կարելի է ներկայացնել կրկնակի շարքով. դժվարությունը կայանում էր նրանում, որ այն պարզ շարքով ներկայացվեր։

Ստացված սիմվոլը հենց հաջորդական շարք է կոչվում։ Եթե տողերը փոխարինենք սյունակներով, այսինքն՝ եթե մեր անվերջ մատրիցի անդամները միագումարենք ըստ սյունակների, կստանանք երկրորդ հաջորդական շարքը

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_i^{(k)}, \tag{5}$$

(4) *հաջորդական շարքը կոչվում է* ***զուգամետ***, *եթե, նախ՝ զուգամետ են բոլոր* (3) *շարքերն ըստ տողերի (նրանց գումարները, համապատասխանաբար, նշանակենք* $A^{(k)}$), *և երկրորդ՝ զուգամետ է*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)}$$

շարքը. դրա գումարը հենց կլինի (4) *հաջորդական շարքի գումար։ Հեշտ է վերաձևակերպել այս բոլորը նաև* (5) *շարքի համար։*

Քանի որ

$$A_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)} \right\},$$

ապա այստեղ, ֆիքսած m-*ի դեպքում, անցնելով սահմանի, երբ* $n \to \infty$ *(այն ենթադրությամբ, որ ըստ տողերի շարքերը զուգամետ են) կստանանք՝*

$$\lim_{n \to \infty} A_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} A^{(k)}. \tag{6}$$

Այժմ պարզ է, որ (4) *հաջորդական շարքի գումարը ոչ այլ ինչ է, եթե ոչ* ***հաջորդական սահման***՝

$$\lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} A_n^{(m)}.$$

Կիրառելով դիտարկվող դեպքի նկատմամբ կրկնակի և հա-

*չորդական սահմանների** n° 158-ի *ընդհանուր թեորեման, կգանք հետևյալ արդյունքին.*

ԹԵՈՐԵՄԱ 1. Եթե 1) զուգամետ է (2) կրկնակի շարքը և 2) զուգամետ են ըստ տողերի շարքերը, ապա զուգամետ է (4) հաջորդական շարքը և ունի նույն գումարը, ինչ որ կրկնակի շարքը՝

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = A = \sum_{i,\,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}.$$

Համանման թեորեմա գոյություն ունի նաև մյուս՝ (5) *հաջորդական շարքի համար.*

Ընթերցողի ուշադրությունն ենք հրավիրում այն բանի վրա, որ 2) պայմանը, ընդհանրապես ասած, չի բխում 1)-ից. Օրինակ, հետևյալ սխեմայով կազմած կրկնակի շարքը՝

$$\begin{array}{|rrrrl}
1 & -1 & 1 & -1 & \ldots \\
-1 & 1 & -1 & 1 & \ldots \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \ldots \\
-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \ldots \\
\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \ldots \\
-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

զուգամետ է (նրա գումարն է 0*), մինչդեռ, բոլոր ըստ տողերի շարքերը տարամետ են.*

381. ԴՐԱԿԱՆ ՇԱՐՔԵՐ. *Կանգ առնենք դրական շարքի դեպքի վրա, այսինքն՝ այնպիսի շարքի, որի անդամները բոլորն էլ ոչ-բացասական են՝* $a_i^{(k)} \geqslant 0$.

ԹԵՈՐԵՄԱ 2. (2) շարքի զուգամիտության համար, եթե $a_i^{(k)} \geqslant 0$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա մասնակի գումարները սահմանափակ լինեն.

---

* *Այստեղ* n-ը *և* m-ը *անկախ փոփոխականների դեր են խաղում, իսկ* $A_n^{(m)}$ *մասնակի գումարը՝ նրանց ֆունկցիայի դերը:*

Ապացույց։ *Այս պնդման անհրաժեշտությունը պարզ է։ Ապացուցենք բավարարությունը։ Դիցուք* $A_n^{(m)} \le L$*։ Վերցնենք* $A_n^{(m)}$ *գումարների բազմության ճշգրիտ վերին եզրը՝*

$$A=\sup\{A_n^{(m)}\}$$

և ցույց տանք, որ նա կլինի մեր շարքի գումարը։

Վերցնենք որևէ $\varepsilon>0$ *թիվ։ Ըստ ճշգրիտ վերին եզրի սահմանման, կարելի է գտնել այնպիսի* $A_{n_0}^{(m_0)}$ *մասնակի գումար, որ*

$$A_{n_0}^{(m_0)} > A-\varepsilon.$$

Եթե վերցնենք $n>n_0$, $m>m_0$, *ապա առավել ևս*

$$A_n^{(m)} > A-\varepsilon,$$

քանի որ $A_n^{(m)}$*-ը* n *և* m *երկու նշիչների աճելու հետ միասին, ակներևորեն, աճում է։ Քանի որ յուրաքանչյուր մասնակի գումար չի գերազանցում* A*-ին, ապա կարելի է գրել, որ*

$$|A_n^{(m)}-A|<\varepsilon \quad (n>n_0,\ m>m_0 \text{ դեպքում}),$$

իսկ այդ էլ հենց նշանակում է, որ

$$A=\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} A_n^{(m)}$$

այսինքն՝ (2) *շարքը զուգամետ է։*

Այս թեորեմայի հիման վրա կարելի է, n° 357*-ի 1-ին թեորեմային համանման, տալ մի այլ թեորեմ՝ դրական կրկնակի շարքերի բաղդատման վերաբերյալ. այդ թողնում ենք ընթերցողին։*

Դրական շարքերի համար 1-ին թեորեման կարելի է մի փոքր ուժեղացնել՝

ԹԵՈՐԵՄԱ 3. Եթե

$$\sum_{i,k=1} a_i^{(k)}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}, \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$$

երեք շարքերից մեկը զուգամետ է, ապա զուգամետ են և մնացած երկուսը և ունեն նույն գումարը*։

Ապացույց։ Դիցուք զուգամետ է

$$\sum_{i,\, k=1}^{\infty} a_i^{(k)} = A$$

շարքը։

Այդ դեպքում, ակներևաբեն, մասնակի գումարների համար կունենանք

$$A_n^{(m)} \leqslant A \tag{7}$$

անհավասարությունը։

Այնուհետև, ինչպիսին էլ լինի k-ն,

$$a_1^{(k)} + a_2^{(k)} + \ldots + a_n^{(k)} \leqslant A_n^{(k)} \leqslant A.$$

Այդ ցույց է տալիս, որ

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = a_1^{(k)} + a_2^{(k)} + \ldots + a_i^{(k)} + \ldots$$

շարքը զուգամետ է ցանկացած k-ի դեպքում։ Եթե $A^{(k)}$-ն նշանակում է նրա գումարը, ապա ինչպես արդեն վերևում ունեինք [տես (6)]՝

$$\lim_{n \to \infty} A_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} a^{(k)},$$

այնպես որ (7) անհավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ $n \to \infty$, կստանանք՝

$$\sum_{k=1}^{m} A^{(k)} \leqslant A.$$

* Վերջին պնդումը, հենց որ հաստատված է շարքերի զուգամիտությունը, բխում է արդեն 1-ին թեորեմայից. բայց մենք գերադասում ենք այստեղ նորից հաստատել այն, առանց օգտվելու այդ թեորեմայից։

Տեսնում ենք, որ այս գումարը սահմանափակ է. հետևապես, $A^{(k)}$-երից կազմված շարքը զուգամետ է և

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} \leqslant A.$$

Մենք ցույց տվեցինք. որ եթե կրկնակի շարքը զուգամետ է, ապա զուգամետ է և հաջորդական շարքը, ընդ որում նրա գումարը

$$\alpha \leqslant A. \tag{8}$$

Այժմ ենթադրենք, թե զուգամետ է

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = \alpha$$

շարքը։ Ապացուցենք, որ զուգամետ է նաև կրկնակի շարքը։ Ակներևորեն,

$$A_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)} \right\} \leqslant \sum_{k=1}^{m} A^{(k)} \leqslant \alpha,$$

այնպես որ $A_n^{(m)}$ մասնակի գումարները սահմանափակ են։ Ուստի, նախորդ թեորեմայի հիման վրա, պնդում ենք, որ (2) կրկնակի շարքը զուգամետ է, ընդ որում նրա գումար

$$A \leqslant \alpha. \tag{9}$$

Համեմատելով (8) և (9) անհավասարությունները, գալիս ենք այն եզրակացության, որ դիտարկված շարքերից մեկի զուգամիտության դեպքում

$$\alpha = A.$$

Նման ձևով ապացուցում ենք թեորեմը նաև երկրորդ հաջորդական շարքի համար։

Մենք արդեն ասել ենք, մասնավոր տիպի մատրիցի կապակցությամբ, n° 377, (8), որ անվերջ ուղղանկյուն մատրիցի

էլեմենտները շատ եղանակներով կարելի է դասավորել պարզ հաջորդականության տեսքով։ Հակադարձաբար, եթե ունենք թվերի պարզ հաջորդականություն, ապա այն շատ եղանակներով կարելի է ներկայացնել երկու մուտքով մատրիցի տեսքով։

Բնականորեն հարց է առաջանում այն կապի մասին, որ կա ըստ (1) մատրիցի կառուցված կրկնակի շարքի և սովորական շարքի միջև, որը կառուցված է ըստ միևնույն անդամներից բաղկացած

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_r, \ldots,$$

հաջորդականության։ Դրական շարքերի դեպքում հարցը հեշտությամբ է լուծվում՝

ԹԵՈՐԵՄԱ 4։ Դիցուք

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$$

կրկնակի շարքը և

$$\sum_{r=1}^{\infty} u_r \tag{10}$$

պարզ շարքը բաղկացած են միևնույն անդամներից, Այդ դեպքում մի շարքի զուգամիտությունից բխում է մյուսի զուգամիտությունը և նրանց գումարների հավասարությունը։

Ապացույց։ Ենթադրենք սկզբում, որ կրկնակի շարքը զուգամետ է և ունի (վերջավոր) գումար

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)} = A.$$

Վերցնենք որևէ r թիվ և կազմենք (10) *շարքի մասնակի գումարը՝*

$$U_r = u_1 + u_2 + \cdots + u_r.$$

Այժմ n'*-ն ու* m'*-ը վերցնենք այնպես, որ* $A_{n'}^{(m')}$ *գումարն արդեն իր մեջ պարունակի* U_r*-ի բոլոր էլեմենտները. այդ դեպքում՝*

$$U_r \leqslant A_{n'}^{(m')} \leqslant A.$$

Ուրեմն, U_r-ի բոլոր մասնակի գումարները սահմանափակ են։ Այդ պատճառով (10) շարքը զուգամետ է և ունի հետևյալ գումարը՝

$$U \leqslant A. \tag{11}$$

Այժմ ենթադրենք, որ զուգամետ է (10) շարքը։ Վերցնենք որևէ է n և m, և r′-ը ընտրենք այնպես, որ $A_n^{(m)}$ մասնակի գումարի բոլոր էլեմենտները գտնվեն (10) շարքի առաջին r′ էլեմենտների թվում։ Այդ դեպքում տեղի կունենա հետևյալ անհավասարությունը՝

$$A_n^{(m)} \leqslant U_{r'} \leqslant U.$$

Այստեղից հետևում է, որ կրկնակի շարքը զուգամետ է և ունի հետևյալ գումարը՝

$$A \leqslant U. \tag{12}$$

Համեմատելով (11) և (12) անհավասարությունները, եզրակացնում ենք, որ, իրոք, նշված շարքերից մեկի զուգամիտության դեպքում, ունենք

$$A = U.$$

382. ԲԱՑԱՐՁԱԿ ԶՈՒԳԱՄԵՏ ՇԱՐՔԵՐ։ Այժմ դիտարկենք կրկնակի շարք, կազմված այնպիսի մատրիցից, որի ոչ բոլոր էլեմենտներն են դրական։ Ակներև է, ինչպես պարզ շարքերի համար, այստեղ ևս կարող ենք դիտարկումից բացառել այն դեպքերը, երբ մատրիցի բոլոր էլեմենտները բացասական են կամ երբ կա միայն վերջավոր թվով դրական կամ բացասական էլեմենտներ, որովհետև այդ բոլոր դեպքերը անմիջականորեն բերվում են քիչ առաջ դիտարկվածին։ Ուստի մենք կենթադրենք, որ դիտարկվող (1) մատրիցում, ուրեմն և (2) շարքում, կա ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական էլեմենտների անվերջ բազմություն։ Բացի (1) մատրիցից, կազմենք ևս մի մատրից՝ նրա էլեմենտների բացարձակ մեծություններից,

$$\begin{array}{ccccc}
|a_1^{(1)}| & |a_2^{(1)}| & \ldots & |a_i^{(1)}| & \ldots \\
|a_1^{(2)}| & |a_2^{(2)}| & \ldots & |a_i^{(2)}| & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
|a_1^{(k)}| & |a_2^{(k)}| & \ldots & |a_i^{(k)}| & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

և այս մատրիցից կազմենք կրկնակի շարք՝

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} \left|a_i^{(k)}\right|. \tag{13}$$

n° 366-*ի պարզ շարքերի վերաբերյալ թեորեմայի նման, այստեղ էլ տեղի ունի*

***ԹԵՈՐԵՄԱ** 5.* Եթե զուգամետ է (13) շարքը, որը կազմված է տվյալ (2) շարքի անդամների բացարձակ մեծություններից, ապա տվյալ շարքը ևս զուգամետ է.

Ապացույց. $a_i^{(k)}$-*ն ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝*

$$a_i^{(k)} = p_i^{(k)} - q_i^{(k)}, \tag{14}$$

որտեղ

$$p_i^{(k)} = \frac{\left|a_i^{(k)}\right| + a_i^{(k)}}{2}, \quad q_i^{(k)} = \frac{\left|a_i^{(k)}\right| - a_i^{(k)}}{2}.$$

Քանի որ $p_i^{(k)} \leqslant \left|a_i^{(k)}\right|$, $q_i^{(k)} \leqslant \left|a_i^{(k)}\right|$, *ապա* (13) *կրկնակի շարքի զուգամիտությունից բխում է հետևյալ կրկնակի շարքերի զուգամիտությունը*

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} p_i^{(k)} = P, \quad \sum_{i,k=1}^{\infty} q_i^{(k)} = Q. \tag{15}$$

Բայց այդ դեպքում զուգամետ է նաև

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)} = \sum_{i,k=1}^{\infty} \left(p_i^{(k)} - q_i^{(k)}\right)$$

շարքը, և ունի հենց հետևյալ գումարը՝

$$A = P - Q.$$

Եթե (2) շարքի հետ միաժամանակ զուգամետ է և (13) շարքը, ապա (2) շարքը կոչվում է բ ա ց ա ր ձ ա կ զուգամետ. Իսկ

եթե (2) շարքը զուգամետ է, իսկ (13) շարքը՝ տարամետ, ապա (2) շարքը կոչվում է *ոչ-բացարձակ* զուգամետ.

Բացարձակ զուգամետ շարքերի վրա տարածվում են դրական շարքերի հիմնական հատկությունները.

ԹԵՈՐԵՄԱ 6. Եթե (2) շարքը բացարձակ զուգամետ է, ապա ըստ տողերի (ըստ սյունակների) շարքերը նույնպես բացարձակ զուգամետ են. Բացի այդ, բացարձակ զուգամետ է նաև դրանց գումարներից կազմված շարքը, և ունի նույն գումարը, ինչ որ կրկնակի շարքը.

Ապացույց. Ըստ 3 թեորեմայի, (13) շարքի զուգամիտությունից բխում է հետևյալ շարքերի զուգամիտությունը

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|a_i^{(k)}\right| \quad (k=1, 2, 3, \ldots) \quad \text{և} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left|a_i^{(k)}\right|,$$

նույնպես և

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|A^{(k)}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} \right|$$

շարքի զուգամիտությունը*. Սրանով ապացուցվում են թեորեմայի՝ զուգամիտությանը վերաբերող պնդումները.

Իսկ եթե այդ 3 թեորեման կիրառենք (15) շարքերի նկատմամբ, ապա կստանանք

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} p_i^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} p_i^{(k)}, \qquad \sum_{i,k=1}^{\infty} q_i^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} q_i^{(k)},$$

* Շնորհիվ

$$\left|A^{(k)}\right| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left|a_i^{(k)}\right|$$

անհավասարության, որը ստացվում է

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|a_i^{(k)}\right|$$

անհավասարությունից սահմանային անցման օգնությամբ.

հավասարությունները, որտեղից անդամ առ անդամ հանումով, (14)-ի շնորհիվ, արտածվում է թեորեմայի եզրափակիչ պնդումը [որը, սակայն, անմիջապես հետևում է 1-ին թեորեմայից]։

ԹԵՈՐԵՄԱ 7։ Դիցուք տված են միևնույն անդամներից կազմված (2) կրկնակի շարքը և (10) պարզ շարքը։ Այդ դեպքում դրանցից մեկի բ ա ց ա ր ձ ա կ զուգամիտությունից հետևում է մյուսի նույնպես բ ա ց ա ր ձ ա կ զուգամիտությունը և նրանց գումարների հավասարությունը։

Ա պ ա ց ո ւ յ ց։ Ըստ 4 թեորեմայի,

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} \left|a_i^{(k)}\right|, \qquad \sum_{r=1}^{\infty} |u_r|$$

շարքերից մեկի զուգամիտությունից բխում է մյուսի զուգամիտությունը։

Քանի որ (10) շարքը բ ա ց ա ր ձ ա կ զուգամետ է, ապա կարելի է նրա անդամները դասավորել ցանկացած կարգով, որը հարմար լինի նրա գումարը հաշվելու համար, օրինակ՝ ըստ քառակուսիների։ Այստեղից արդեն հեշտ է ստանալ, որ նրա գումարը հավասար է կրկնակի շարքի գումարին։

ՀԵՏԵՎԱՆՔ։ Բացարձակ զուգամետ կրկնակի շարքն օժտված է տեղափոխական հատկությամբ։

Նախորդ թեորեմայի շնորհիվ, այդ ուղղակի բխում է պարզ շարքի համանման հատկությունից [375]։

*Ապացուցված թեորեմաներից բխում են հետևյալ երկու թեորեմաները, որոնք արդեն չեն պարունակում հիշատակում կ ր կ ն ա կ ի շ ա ր ք ի մ ա ս ի ն**։

ԹԵՈՐԵՄԱ 8. Դիցուք տված է (4) հաջորդական շարքը։ Եթե նրա անդամներն իրենց բացարձակ մեծություններով փոխարինելով՝ ստացվում է զուգամետ շարք, ապա զուգամետ է ոչ միայն (4) հաջորդական շարքը, այլև (5) հաջորդական շարքը, ընդ որում զուգամիտում է նույն գումարին, ինչ որ (4)-ը։

---

* *Դրանք, հասկանալի է, որ կարելի կլինեք ցույց տալ նաև անկախ կրկնակի շարքերի տեսությունից։*

Այդ բխում է 6 թեորեմայից, եթե ուշադրություն անենք, որ, ըստ 3 թեորեմայի,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |a_i^{(k)}|$$

շարքի զուգամիտությունը համազոր է

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_i^{(k)}|$$

կրկնակի շարքի զուգամիտությանը։

ԹԵՈՐԵՄԱ 9. Եթե (10) պարզ շարքը բացարձակ զուգամետ է, ապա, կամայականորեն դասավորելով նրա անդամները կրկնակի մուտքով (1) մատրիցի տեսքով, կարելի է (10) շարքը փոխարինել (4) կամ (5) հաջորդական շարքով։

Հետևանք է 7-րդ և 6-րդ թեորեմներից։

Վերջին առաջադրության մեջ կարելի է նկատել բացարձակ զուգամետ շարքի տ ե ղ ա փ ո խ ա կ ա ն և զ ու գ ո ր դ ա կ ա ն հատկությունների միասին հանդես գալու մի առանձնահատուկ ձև։

383. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty} x^i y^k$ *շարքը ստացվում է* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} x^i$ *և* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y^k$ *շարքերի բազմապատկումից, որոնք (բացարձակ) զուգամետ են, երբ* $|x|<1$ *և* $|y|<1$*. այդ արժեքների համար (բացարձակ) զուգամետ է նաև կրկնակի շարքը։*

Եթե $|x|>1$ *կամ* $|y|>1$, *ապա խախտվում է զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը՝ ընդհանուր անդամը չի ձգտում 0-ի, շարքը տարամետ է։ Հեշտ է ստուգել անմիջականորեն, որ տարամիտությունն առկա է և այն դեպքում, երբ* $|x|=1$ *կամ* $|y|=1$*։*

2) Դիտարկենք հետևյալ շարքը՝

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{1}{i^{\alpha}\, k^{\beta}} \quad (\alpha>0, \ \beta>0)\text{։}$$

Սա նույնպես ստացվում է $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{\alpha}}$ և $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\beta}}$ շարքերի բազմապատկումից, որոնք զուգամիտում են, երբ $\alpha>1$ և $\beta>1$, այնպես որ կրկնակի շարքը ևս այդ ենթադրությունների դեպքում զուգամետ է։

Ընդհակառակը, եթե $\alpha\leqslant 1$ (կամ $\beta\leqslant 1$), ապա կրկնակի շարքը հաստատապես տարամետ է, որովհետև այդ դեպքում տարամետ են բոլոր ըստ տողերի (ըստ սյունակների) շարքերը (համեմատել 3 թեորեմայի հետ)։

3) Հետազոտենք հետևյալ շարքի զուգամիտությունը

$$\sum_{i,k=1}^{\infty}\frac{1}{(i+k)^{\sigma}}\quad(\sigma>0)։$$

Դրա համար այն ներկայացնենք պարզ շարքի տեսքով, դասավորելով նրա անդամները ըստ անկյունագծերի։ Քանի որ միևնույն անկյունագծի վրա գտնվող անդամները հավասար են, ապա, միացնելով դրանք հաշվումը հեշտացնելու համար, կստանանք հետևյալ շարքը

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\,\frac{1}{n^{\sigma}}։$$

Հետևյալ ակներև անհավասարությունները

$$\frac{1}{2}\,n\leqslant n-1<n$$

բաժանելով n^{σ}-ի վրա, կստանանք՝

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{\sigma-1}}\leqslant(n-1)\cdot\frac{1}{n^{\sigma}}\leqslant\frac{1}{n^{\sigma-1}}։$$

Այստեղից պարզ է, որ մեր ստացած պարզ շարքը զուգամետ է $2<\sigma$-ների դեպքում և տարամետ է, երբ $\sigma\leqslant 2$։ Ըստ 4 թեորեմայի, նույնն իրավացի է և կրկնակի շարքի համար։

4) Այժմ դիտարկենք ավելի բարդ շարք՝

$$\sum_{i,k=1}^{\infty}a_i^{(k)}\equiv\sum_{i,k=1}^{\infty}\frac{1}{(Ai^2+2Bik+Ck^2)^{\rho}}\quad(\rho>0),$$

որտեղ $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ ֆորման ենթադրվում է որոշյալ դրական այնպես որ $\Delta=AC-B^2>0$, նույնպես և A և $C>0$։

Եթե $|A|$, $|B|$, $|C|$ թվերից ամենամեծը նշանակենք L, ապա, ակներևորեն,

$$Ai^2+2Bik+Ck^2\leqslant L(i+k)^2,\quad a_i^{(k)}\geqslant\frac{1}{L^{\rho}}\cdot\frac{1}{(i+k)^{2\rho}}։$$

Այդ դեպքում 3)-ից պարզ է, որ $\rho \leqslant 1$ *դեպքում մեր շարքը տարամետ է։*

Մյուս կողմից, ունենք՝

$$Ai^2 + 2Bik + Ck^2 = \frac{1}{C}\left[(AC-B^2)\, i^2 + (Bi+Ck)^2\right] \geqslant \frac{\Delta}{C}\, i^2,$$

այնպես որ՝

$$a_i^{(k)} \leqslant \frac{C^\rho}{\Delta^\rho} \cdot \frac{1}{i^{2\rho}} \text{ և, նման ձևով, } a_i^{(k)} \leqslant \frac{A^\rho}{\Delta^\rho} \cdot \frac{1}{k^{2\rho}}\text{։}$$

Այստեղից հեշտ է ստանալ, որ

$$a_i^{(k)} \leqslant \left(\frac{\sqrt{AC}}{\Delta}\right)^\rho \cdot \frac{1}{i^\rho \cdot k^\rho}\text{։}$$

Այս համեմատելով 2)-ի հետ, տեսնում ենք, որ $1<\rho$*-ի դեպքում դիտարկվող շարքը զուգամետ է։*

5) *Դիցուք* q*-ն ստանում է ամեն հնարավոր աստիճանային արժեքներ բնական հիմքերով ու (մեկից մեծ) ցուցիչներով, ընդ որում յուրաքանչյուր արժեք մեկ անգամ։ Ապացուցել, որ*

$$G = \sum_q \frac{1}{q-1} = 1\text{։}$$

[*Խ. Գոլդբախ* (Ch. Goldbach)։]

Եթե m*-ը ընդունում է (մեկից մեծ) ամեն տեսակ բնական արժեքներ, որոնք աստիճաններ չեն հանդիսանում, ապա*

$$G = \sum_m \frac{1}{m^2-1} + \sum_m \frac{1}{m^3-1} + \cdots = \sum_m \left\{\frac{1}{m^2-1} + \frac{1}{m^3-1} + \cdots\right\} =$$

$$= \sum_m \left\{\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^4} + \frac{1}{m^6} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^6} + \frac{1}{m^9} + \cdots\right) + \cdots\right\} =$$

$$= \sum_m \left\{\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{m^4} + \frac{1}{m^6} + \cdots\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{m^6} + \frac{1}{m^9} + \cdots\right) + \cdots\right\} =$$

$$= \sum_m \left\{\frac{1}{m(m-1)} + \frac{1}{m^2(m^2-1)} + \frac{1}{m^3(m^3-1)} + \cdots\right\}\text{։}$$

Այստեղից՝

$$G = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)},$$

որտեղ n*-ը այս անգամ արդեն ստանում է բոլոր բնական արժեքները սկսած* 2*-ից, այնպես որ, իրոք,* G=1 [354, 4)]։

[*Հիմնավորումը, հենվելով ապացուցված թեորեմների վրա, թողնում ենք ընթերցողին։*]

Հետաքրքրական է համեմատել այս արդյունքը Շտեյների (J. Steiner) *հետևյալ արդյունքի հետ՝*

$$\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{m^k}=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m(m-1)}-1.$$

(Այստեղ տարրերը կարող են հանդես գալ նաև ոչ մեկական անգամ!)

6) Դիտարկենք երկու փոփոխականների հետևյալ ֆունկցիան՝

$$\varphi(x,z)=e^{\frac{x}{2}(z-z^{-1})}\qquad (z\neq 0).$$

Բազմապատկելով իրարով հետևյալ բացարձակ զուգամետ շարքերը՝

$$e^{\frac{x}{2}\cdot z}=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{i}\cdot\frac{z^i}{i!},\qquad e^{-\frac{x}{2}\cdot z^{-1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{k}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot z^{-k},$$

այդ ֆունկցիայի համար կստանանք (նույնպես բացարձակ զուգամետ) կրկնակի շարք՝

$$\varphi(x,z)=\sum_{i,k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{i+k}\frac{(-1)^k}{i!\,k!}\,z^{i-k},$$

Հավաքելով (ըստ 7 և 9 թեորեմայի) z*-ի միևնույն աստիճանը պարունակող անդամները, կարելի է այն ձևափոխել և դարձնել հաջորդական շարք՝*

$$\varphi(x,z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}J_n(x)\cdot z^n,^{*}$$

---

* $\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n$ *շարքը, ըստ սահմանման, համընկնում է երկու շարքերի գումար* $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n+\sum_{n=1}^{+\infty}a_{-n}$։

որտեղ $0 \leqslant n$-երի համար կլինի՝

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n},$$

իսկ $0>n$-ի համար՝

$$J_n(x) = \sum_{k=-n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

Սակայն, հեշտ է տեսնել, որ

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \; J_n(x).$$

$J_n(x)$ ($n=0, 1, 2, \ldots$) ֆունկցիան կոչվում է Բեսսելի ֆունկցիա n ինդեքսով. այդ ֆունկցիաները կարևոր դեր են խաղում մաթեմատիկական ֆիզիկայում, երկնային մեխանիկայում, և այլն։ $\varphi(x, z)$ ֆունկցիան որի վերլուծումից նրանք ստացվում են, կոչվում է «ծնորդ ֆունկցիա» բեսսելյան ֆունկցիաների համար։

7) Հետաքրքիր օրինակ է տալիս հետևյալ մատրիցը ($0<x<1$)՝

x	$-x^2$	x^2	$-x^3$	x^3	$\ldots$
$x(1-x)$	$-x^2(1-x^2)$	$x^2(1-x^2)$	$-x^3(1-x^3)$	$x^3(1-x^3)$	$\ldots$
$x(1-x)^2$	$-x^2(1-x^2)^2$	$x^2(1-x^2)^2$	$-x^3(1-x^3)^2$	$x^3(1-x^3)^2$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Այստեղ ըստ տողերի շարքերը բացարձակ զուգամետ են և ունեն, համապատասխանաբար, x, $x(1-x)$, $x(1-x)^2, \ldots$ գումարները։ Այդ գումարներից կազմված շարքը նույնպես բացարձակ զուգամետ է. նրա գումարը հավասար է 1-ի։ Մինչդեռ մյուս հաջորդական շարքը զուգամետ չէ, քանի որ ըստ սյունակների շարքերն ունեն գումարներ, որոնք մեկընդմեջ հավասար են $+1$ կամ -1։

Այս փաստը ամենևին չի հակասում 8 թեորեմային, որովհետև բացարձակ մեծություններից կազմված մատրիցի համար հաջորդական շարքերից ոչ մեկը չի զուգամիտում։ Մենք տեսնում ենք միայն այն, որ ըստ տողերի (ըստ սյունակների) կազմած շարքերի բացարձակ զուգամիտության և նրանց գումարներից կազմած շարքի նույնպես բացարձակ զուգամիտության վերաբերյալ արած ենթադրությունը չի կարող փոխարինել այն պահանջը, որ բացարձակ մեծություններից կազմված մատրիցի հաջորդական շարքը զուգամետ լինի։

8) Կանգ առնենք Լամբերտի հետևյալ շարքի վրա՝

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^k}{1-x^k},$$

սահմանափակվելով այն ենթադրությամբ, որ $|x|<1$։ Մենք տեսանք [373, 5)], որ այդ ենթադրության դեպքում Լամբերտի շարքը զուգամետ է x-ի նույն արժեքների դեպքում, ինչ որ և հետևյալ աստիճանային շարքը՝

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \text{ ։}$$

Ենթադրենք ուրեմն, որ այդ շարքի զուգամիտության R շառավիղը >0 [368], և համարենք $|x|<R$։

Ակներևորեն՝

$$\frac{x^k}{1-x^k}=x^k+x^{2k}+\dots+x^{ik}+\dots$$

Այժմ այդ անդամներից, a_k-ով էլ բազմապատկված, կազմենք մատրից, տեղավորելով x-ի միատեսակ աստիճանները մեկ սյունակում (դատարկ տեղերը կարելի է լրացնել զրոներով)՝

a_1x	a_1x^2	a_1x^3	a_1x^4	a_1x^5	a_1x^6	a_1x^7	a_1x^8	a_1x^9	a_1x^{10}	...
	a_2x^2		a_2x^4		a_2x^6		a_2x^8		a_2x^{10}	...
		a_3x^3			a_3x^6			a_3x^9		...
			a_4x^4				a_4x^8			...
				a_5x^5					a_5x^{10}	...
					a_6x^6					...
						a_7x^7				...
							a_8x^8			...
								a_9x^9		...
									$a_{10}x^{10}$	...
									...	...
									...	...

Ըստ տողերի հաջորդական շարքն ունի հենց $\varphi(x)$ գումարը։ Քանի որ աստիճանային շարքը, իսկ դրա հետ նաև Լամբերտի շարքը, զուգամիտում է երբ փոխարինում ենք x-ը՝ $|x|$-ով և a_k-ն՝ $|a_k|$-ով, ապա կարելի է կիրառել 8 թեորեման և հանրագումարել ըստ սյունակների։ Մենք կստանանք $\varphi(x)$-ի վերլուծումը աստիճանային շարքի՝

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n, \text{ ընդ որում } \alpha_n=\sum_{n/k} a_k \cdot$$

n/k նշանը պայմանական կերպով նշանակում է, որ գումարը տարածվում է միայն n թվի k բաժանարարների վրա։

Օրինակ, ընդունելով $a_k = 1$ կամ $a_k = k$*, կունենանք, համապատասխանաբար,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \cdot x^n, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)\, x^n,$$

որտեղ $\tau(n)$-ը՝ նշանակում է n-ի բաժանարարների թիվը, իսկ $\sigma(n)$-ը՝ նրանց գումարը։

9) Դասավորելով նույն անդամներն այլ ձևով, առանց բաց թողումների՝

$$\begin{array}{|lllll}
a_1x & a_1x^2 & a_1x^3 & a_1x^4 & \cdots \\
a_2x^2 & a_2x^4 & a_2x^6 & a_2x^8 & \cdots \\
a_3x^3 & a_3x^6 & a_3x^9 & a_3x^{12} & \cdots \\
a_4x^4 & a_4x^8 & a_4x^{12} & a_4x^{16} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

մենք կպահպանենք նույն գումարները ըստ տողերի, իսկ ըստ սյունակների հերթով կստանանք՝ $f(x), f(x^2), f(x^3), f(x^4), \ldots$ Այսպիսով հանգում ենք մի նույնության, որը կապում է φ և f ֆունկցիաները՝

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x^n)։$$

Օրինակ, վերցնելով $a_k = a^k$, որտեղ $|a| < 1$, կունենանք՝

$$f(x) = \frac{ax}{1-ax},$$

այնպես որ՝

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ax)^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \cdot x^n}{1-a \cdot x^n} \quad (|a| < 1,\ |x| < 1)։$$

10) Ստացված արդյունքը կարելի է ընդհանրացնել։ Դիցուք տրված են երկու աստիճանային շարքեր՝

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad և \quad g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m,$$

* Երկու դեպքում էլ, ինչպես հեշտ է ստուգել, $R=1$, այնպես որ բավական է համարել պարզապես $|x| < 1$։

Սահմանափակվենք x-ի այն արժեքներով, որոնց համար $|x| < 1$ *և երկու շարքն էլ բացարձակ զուգամետ են։*

Կազմենք մատրից $a_n b_m x^{mn}$ *էլեմենտներից։ Քանի որ* ($1<m$*-երի և* $1<n$*-երի համար)* $mn \geqslant m+n$, *ապա՝*

$$\left|a_n b_m x^{mn}\right| \leqslant \left|a_n x^n\right| \cdot \left|b_m x^m\right|.$$

Այստեղից հեշտ է եզրակացնել, որ վերցրած մատրիցին համապատասխանող կրկնակի շարքը բացարձակ զուգամետ է։ Համապատասխանեցնելով հաջորդական շարքերի գումարները, 6 թեորեմայի հիման վրա, կստանանք հետևյալ նույնությունը՝

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m f(x^m) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g(x^n).$$

Այստեղից նախորդ վարժության նույնությունը ստացվում է $b_m = 1$ *դեպքում [այնպես որ* $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$*]։*

384. ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՔ ԵՐԿՈՒ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐՈՎ. ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՏԻՐՈՒՅԹԸ։ *Աստիճանային շարք* x, y *երկու փոփոխականներով կոչվում է*

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} a_{i,k} x^i y^k \tag{16}$$

տեսքի կրկնակի շարքը, որը դասավորված է ըստ x *ու* y *փոփոխականների ամբողջ դրական աստիճանների։*

Ինչպես մենք այդ արեցին 368-ում պարզ աստիճանային շարքերի նկատմամբ, այստեղ էլ խնդիր դնենք պարզել (16) շարքի «զուգամիտության տիրույթի» տեսքը, այսինքն՝ հարթության այն կետերի $\mathcal{M} = \{M(x, y)\}$ *բազմության տեսքը, որոնց համար շարքը զուգամետ է։*

ԼԵՄՄԱ. Եթե (16) շարքը զուգամետ է մի որոշ $\overline{M}(\overline{x}, \overline{y})$ կետում, որի երկու կոորդինատներն էլ 0-ից տարբեր են, ապա այն բացարձակ զուգամետ է բոլոր $M(x,y)$ կետերում, որոնք բավարարում են $|x|<|\overline{x}|$, $|y|<|\overline{y}|$ անհավասարություններին *(այսինքն՝ ամբողջ բաց ուղղանկյան մեջ, որի կենտրոնը կոորդինատների սկզբնակետում է և գագաթը՝* $\overline{M}$ *կետում)։*

Ապացույցը միանգամայն նման է n° 368*-ի լեմմայի ապացույցին։* (16) *շարքի անդամների սահմանափակությունից, երբ* $x=\bar{x}$, $y=\bar{y}$

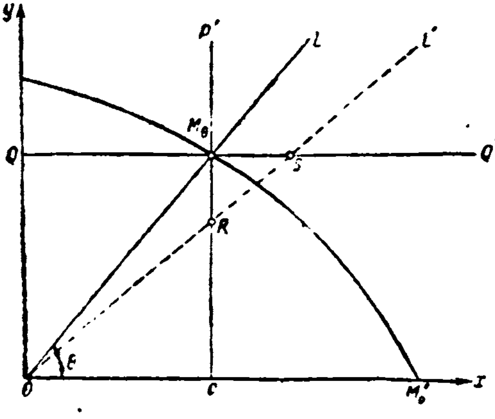
$$\left|a_{i,k}\bar{x}^i\bar{y}^k\right| \leqslant L \quad (i, k = 0, 1, 2, \dots)$$

ստացվում է

$$\left|a_{i,k}x^iy^k\right| \leqslant L\cdot\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^i\left|\frac{y}{\bar{y}}\right|^k,$$

այնպես որ, եթե միայն $|x|<|\bar{x}|$, $|y|<|\bar{y}|$, *աջ կողմում ունենք* [383, 1)] *զուգամետ շարքի ընդհանուր անդամ. այստեղից էլ հետևում է* (16) *շարքի բացարձակ զուգամիտությունը։*

Մենք կուսումնասիրենք միայն այնպիսի շարքեր, որոնց համար նման $\bar{M}$ *կետեր գոյություն ունեն, իսկ ուրիշ շարքեր մեզ համար հետաքրքրություն չեն ներկայացնում։ Լեմմայի բնույթն ինքը թույլ է տալիս սահմանափակվել միայն կոորդինատային առաջին անկյան դիտարկումով. ստացված արդյունքները, սիմետրիայի շնորհիվ, հեշտությամբ կարելի է տարածել և մնացած անկյունների վրա։*



Գծ. 55։

Վերցնենք ուրեմն առաջին անկյան մեջ OL *ճառագայթը, որը ելնում է կոորդինատների սկզբից և* x*-երի առանցքի հետ կազմում է* θ *անկյուն (գծ. 55)։ Ինչպես և* 368*-ում, օգտվելով լեմմայից, կարելի է ցույց տալ, որ կգտնվի այնպիսի դրական*

R (θ) թիվ (որը կարող է անվերջ լինել), որ այդ ճառագայթի վրա բոլոր M կետերում, որոնց համար

$$\overline{OM} < R(\theta),$$

(16) շարքը զուգամետ է բացարձակ, մինչդեռ

$$\overline{OM} > R(\theta)$$

պայմանի դեպքում այդ շարքը տարամետ է։

Եթե թեկուզ մեկ ճառագայթի համար $R(\theta) = +\infty$, ապա, լեմմայի շնորհիվ, շարքը զուգամետ է լինում (այն էլ՝ բացարձակ) ամբողջ հարթության վրա, որը և խաղում է M «զուգամիտության տիրույթի» դերը։

Այժմ բացառենք այդ՝ ամենուրեք զուգամետ շարքի դեպքը։ Այդ դեպքում $R(\theta)$-ն կլինի θ վերջավոր ֆունկցիա և յուրաքանչյուր OL ճառագայթի վրա կգտնվի M_θ սահմանազատ կետ, որի համար

$$\overline{OM_\theta} = R(\theta).$$

Այդ սահմանազատ կետը բաժանում է ճառագայթի այն M կետերը, որոնցում շարքը (բացարձակ) զուգամիտում է, այն կետերից, որտեղ այն տարամետ է. M_θ կետում, նայած դեպքին, կարող է տեղի ունենալ և՛ զուգամիտություն, և՛ տարամիտություն։

Եթե M_θ-ով տանենք PP' ուղղաձիգը և QQ' հորիզոնականը (տես գծագիրը), ապա $OPM_\theta Q$ ուղղանկյան ներսում շարքը նախահայտորեն զուգամետ է, իսկ $Q'M_\theta P'$ անկյան ներսում՝ նախահայտորեն տարամետ է (ըստ լեմմայի!)։

Ուստի OL' նոր ճառագայթի վրա, որ համապատասխանում է որևէ այլ θ' անկյան, OR-ի ուղղությամբ կլինի զուգամիտություն, իսկ SL'-ի ուղղությամբ՝ տարամիտություն։ Հետևապես, $M'_{\theta'}$ սահմանազատ կետը այդ ճառագայթի վրա պետք է գտնվի R-ի և S-ի միջև։ Այստեղից հեշտ է նկատել, որ, երբ θ-ն փոփոխվում է 0-ից մինչև $\frac{\pi}{2}$, ապա $R(\theta)$-ն փոփոխվում է ան-

ընդհատ կորով, այնպես որ M_θ կետը գծում է առաջին կոորդինատային անկյան մեջ անընդհատ սահմանափակ կոր։

Քանի որ θ-ն փոքրանալիս M_θ կետի x_θ աբսցիսը չի նվազում, իսկ նրա y_θ օրդինատը չի աճում, ապա $\theta \to 0$ դեպքում երկուսն էլ ունեն սահմանային արժեքներ։ Այդ դեպքում, ակնհայտորեն, սահմանային արժեք ունի նաև R(θ)-ն։ Եթե այդ սահմանը

$$\lim_{\theta \to 0} R(\theta) = R_0$$

վերջավոր է, ապա M_θ կետը ձգտում է որոշ սահմանային $M^*_0(R_0, 0)$ կետի՝ x-երի առանցքի վրա, իսկ հակառակ դեպքում սահմանափակ կորն ունի ասիմպտոտ՝ զուգահեռ x-երի առանցքին (որը կարող է համընկնել և իր՝ x-երի առանցքի հետ)։ Հեշտ է վերաձևակերպել բոլոր ասածը և այն դեպքի համար, երբ $\theta \to \frac{\pi}{2}$, փոխելով x-ի և y-ի դերերը։

Դիտողություն. Չպետք է, սակայն, կարծել, որ M^*_0 սահմանային կետը, որի մասին քիչ առաջ խոսք եղավ, անհրաժեշտորեն համընկնում է M_0 սահմանափակ կետի հետ հենց x-երի առանցքի վրա։ M_θ կետը կարող է գտնվել և M^*_0-ից դեպի աջ (և նույնիսկ գտնվել անվերջությունում)։ Այս հնարավորությունը չպետք է զարմացնի ընթերցողին, որովհետև լեմման և նրա վրա կառուցված դատողությունները վերաբերում են միայն կոորդինատային առանցքներից դուրս գտնվող կետերին։

Լրացնենք այժմ առաջին կոորդինատային անկյան մեջ կառուցած կորը (կոորդինատների երկու առանցքների և սկզբի նկատմամբ) սիմետրիկ կորով՝ կառուցված մնացած անկյունների մեջ։ Այդ ճանապարհով մենք կստանանք լրիվ սահմանափակ կոր, որը և հանդես կգա մեզ հետաքրքրող M «զուգամիտության տիրույթը»՝ հարթության այն մասում, որը դրսից սահմանափակված է այդ կորով, (16) շարքը զուգամետ է (ընդ որում՝ բացարձակ զուգամետ), հարթության արտաքին մասում շարքը

տարամետ է*, իսկ նենց սահմանազատ կորի իր կետերում կարող է տեղի ունենալ ինչպես զուգամիտություն, այնպես էլ տարամիտություն։

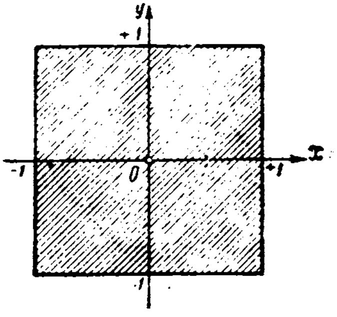
Դիտարկենք օրինակներ։

385. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ $\sum\limits_{i,k=0}^{\infty} x^i y^k$ *շարքի համար, ինչպես տեսանք 383-ի 1)-ում, M «զուգամիտության տիրույթը» հանդում է* $(-1, 1; -1, 1)$ *բաց ուղղանկյան (գծ. 56), որի սահմաններում նրա գումարը կլինի՝* $\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-y}$*։*

2) Համանման՝

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} x^i y^k$$

շարքի համար (որտեղ i, k նշիչները փոփոխվում են, սկսած 1-ից) «զուգամիտության տիրույթը» կազմված կլինի այդ նույն ուղղանկյունից, բայց ավելացրած երկու կոորդինատային առանցքները։ Այդ դեպքում, թեև M_θ *սահմանազատ կետը, որի մասին վերը խոսք եղավ, ձգտում է (երբ* $\theta \to 0$*) սահմանային* M_0^* *(1,0) կետին x-երի առանցքի վրայով, բայց զուգամիտությունը տեղի է ունենում այդ ամբողջ առանցքի վրա (տես դիտողությունը)։*



Գծ. 56։

3) Հետևյալ շարքը՝

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{x^i y^k}{i!\,k!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$$

ակներևորեն, զուգամետ է ամբողջ հարթության վրա։

4) Որպեսզի

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{(i+k}{k!} x^i y^k$$

** Եթե չհաշվենք կոորդինատային առանցքները, որոնց ուղղությամբ որոշ դեպքերում, ինչպես նշվել է, շարքը կարող է զուգամիտել նաև այդ կորի սահմաններից դուրս։*

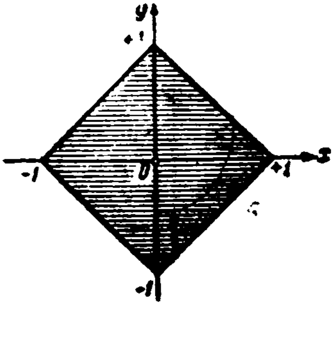
շարքը բացարձակ զուգամետ լինի, այսինքն՝ զուգամետ լինի

$$\sum_{i,\,k=0}^{\infty} \frac{(i+k)!}{i!\,k!}\,|x|^i\,|y|^k$$

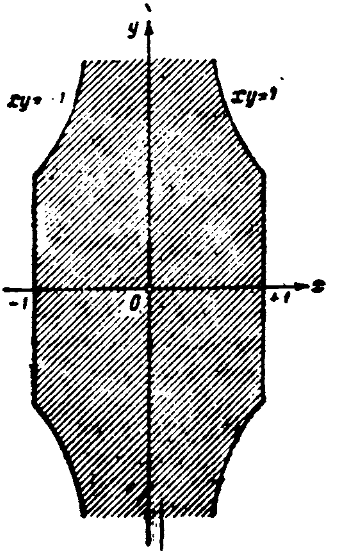
շարքը, անհրաժեշտ է և բավարար, որ զուգամետ լինի հետևյալ շարքը՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|x|+|y|)^n = \frac{1}{1-(|x|+|y|)},$$

որը ստացվում է նախորդից հանրագումարելով ըստ անկյունագծերի։ Այդ բերում է մեզ $|x|+|y|<1$ պայմանին։ Հետևապես, այստեղ «զուգամիտության տիրույթը» ներկայացնում է շեղ դրված քառակուսի, որի գագաթները գտնվում են $(\pm 1,0)$, $(0,\pm 1)$ կետերում (գծ. 57)։



Գծ. 57։



Գծ. 58։

5) Վերջում դիտարկենք հետևյալ կրկնակի շարքը՝

$$\sum_{i \geq k}^{\infty} x^i y^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^m + \dots + xy + x^2 y + \dots$$

$$\dots + x^m y + \dots + x^2 y^2 + \dots + x^m y^2 + \dots + x^m y^m + \dots$$

Եթե, ենթադրելով այն բացարձակ զուգամետ, միագումարենք այն ըստ տողերի, ապա կստանանք

$$(1+x+x^2+\dots)\,[1+xy+(xy)^2+\dots]=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-xy},$$

Այստեղից պարզ է, որ բացարձակ զուգամիտության համար անհրաժեշտ է՝ $|x|<1$, $|xy|<1$. դրա հետ միասին, այս անհավասարությունները և բավարար են։ «Զուգամիտության տիրույթը» պատկերված է 58-րդ գծագրում. կորերն այստեղ՝ հավասարակողմ հիպերբոլներ են։

386. ԲԱԶՄԱՊԱՏԻԿ ՇԱՐՔԵՐ. Անվերջ շարքի գաղափարի հետագա ընդլայնումը տեղի է ունենում միանգամայն բնական եղանակով. Դիցուք տված է թվերի անվերջ սիստեմ՝

$$u_{i,k,\dots,l},$$

համարակալված s $(s\geqslant 2)$ հատ նշիչներով՝ $i, k, \dots, l$, որոնցից յուրաքանչյուրը, անկախ մյուսներից, ընդունում է ամեն հնարավոր բնական արժեքներ. Այդ դեպքում

$$\sum_{i,k,\dots,l=1}^{\infty} u_{i,k,\dots,l}$$

սիմվոլը կոչվում է *բազմապատիկ* (ավելի ճշգրիտ՝ s-*ապատիկ*) շարք.

Եթե շարքի

$$U_{n,m,\dots,p}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\dots\sum_{l=1}^{p} u_{i,k,\dots,l}$$

մասնակի գումարը, երբ $n\to\infty$, $m\to\infty, \dots, p\to\infty$, ձգտում է վերջավոր կամ անվերջ (որոշակի նշանով) սահմանի, ապա այդ սահմանը շարքի *գումարն* է հանդիսանում. Շարքը կոչվում է *զուգամետ*, եթե նա ունի վերջավոր գումար։

Բազմապատիկ շարքերի կարևոր դաս են հանդիսանում *աստիճանային շարքերը* մի քանի փոփոխականներով՝

$$\sum_{i,k,\dots,l=0}^{\infty} a_{i,k,\dots,l}\,x^i y^k \dots z^l.$$

Բազմապատիկ շարքերի վրա նույնպես տարածվում են վերը շարադրված տեսության հիմնական գաղափարներն ու առաջադրությունները.

§ 6. ԱՆՎԵՐՋ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼՆԵՐ

387. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐՆԵՐ. Եթե

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots \tag{1}$$

թվերի մի որոշ տված հաջորդականություն է, ապա դրանցից կազմված

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n \cdot \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n \text{*} \tag{2}$$

սիմվոլը կոչվում է ***անվերջ արտադրյալ.***

Սկսենք հաջորդաբար բազմապատկել (1) թվերը, կազմելով ***մասնակի արտադրյալներ՝***

$$P_1 = p_1, \quad P_2 = p_1 \cdot p_2, \quad P_3 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3, \ldots,$$
$$P_n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n, \ldots \tag{3}$$

Մասնակի արտադրյալների այդ $\{P_n\}$ հաջորդականությունը մենք միշտ կհամադրենք (2) սիմվոլին.

Եթե P_n մասնակի արտադրյալը, երբ $n \to \infty$, ունի P սահման, վերջավոր կամ անվերջ (բայց որոշակի նշանով)՝

$$\lim P_n = P,$$

ապա այդ սահմանն անվանում են (2) արտադրյալի **արժեք**, և գրում են՝

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \cdot \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n.$$

Եթե անվերջ արտադրյալն ունի P վերջավոր արժեք, ընդ որում 0-ից տարբեր, ապա ինքն արտադրյալը կոչվում է **զուգամետ**, իսկ հակառակ դեպքում՝ **տարամետ***:

* Մեզ արդեն հանդիպել է արտադրյալի համար այդպիսի նշանակում, բայց միայն վերջավոր արտադրիչների դեպքում:

** Այսպիսով (ընդգծենք այդ), եթե $P=0$, ապա արտադրյալը մեզ համար **տարամետ** կլինի: Թեև այս տերմինաբանությունը հակասում է անվերջ շարքերի համար ընդունված տերմինաբանությանը, բայց նա հանրաճանաչ է, որովհետև հեշտացնում է շատ թեորեմների բանաձևումը:

Բավական է արտադրյալի արտադրիչներից մեկը լինի զրո, որպեսզի ամբողջ արտադրյալի արժեքը նույնպես հավասար լինի զրոյի։ Հետագա դիտարկումներում մենք այդ դեպքը կբացառենք, այնպես որ մեզ համար միշտ $p_n \neq 0$։

Ընթերցողը հեշտությամբ կհաստատի անալոգիա անվերջ շարքերի հետ [353] և կպարզի իր համար, որ շարքերի նման, անվերջ արտադրյալի դիտարկումը նույնպես հանդիսանում է վարիանտայի (կամ հաջորդականության) և նրա սահմանի ուսումնասիրության միայն յուրատեսակ ձև։ Այդ ձևի հետ օգտակար է ծանոթանալ, քանի որ որոշ դեպքերում այն ավելի հարմար է լինում, քան մյուսները։

388. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) $\prod_{n=2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$։

Քանի որ մասնակի արտադրյալն է

$$P_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\to\frac{1}{2},$$

ապա անվերջ արտադրյալը զուգամետ է, և նրա արժեքը կլինի $\frac{1}{2}$։

2) Վալլիսի բանաձևը [305]՝

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2.2\cdot4.4.\ldots.2n.2n}{1.3.3.5.\ldots\cdot(2n-1).(2n+1)},$$

ակներևորեն, համարժեք է $\frac{\pi}{2}$ թվի անվերջ արտադրյալի վերլուծմանը

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\ldots$$

Դա բերում է նաև հետևյալ բանաձևերին՝

$$\prod_{m=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(2m+1)^2}\right]=\frac{\pi}{4},\quad \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4m^2}\right)=\frac{2}{\pi}։$$

3) Ապացուցենք, որ (երբ $|x|<1$)՝

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot\ldots\cdot(1+x^{2^{n-1}})\cdot\ldots=\frac{1}{1-x}։$$

Իսկապես, հեշտ է համոզվել հաջորդական բազմապատկումով, որ

$$(1-x)\cdot P_n=(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdot\ldots\cdot(1+x^{2^{n-1}})=1-x^{2^n}.$$

$$P_n=\frac{1+x^{2^n}}{1-x},$$

Այստեղից, սահմանում ստացվում է հենց պահանջված հավասարությունը։

4) n° 54-ի 7ա)-ում մենք ունեցինք հետևյալ սահմանը՝

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\varphi}{2^n}=\frac{\sin\varphi}{\varphi}\quad(\varphi\neq 0)։$$

Այժմ մենք կարող ենք գրել այդ այսպես՝

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\varphi}{2^n}=\frac{\sin\varphi}{\varphi},$$

Մասնավորապես, երբ $\varphi=\frac{\pi}{2}$, կհանգենք հետևյալ վերլուծմանը՝

$$\frac{2}{\pi}=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\ldots$$

Եթե հիշենք, որ

$$\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{\frac{1}{2}}\ \text{և}\ \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha},$$

ապա այդ վերլուծումը կարելի է արտագրել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\ldots$$

[Վիետա (F. Vieta)։] Այս բանաձևը Վալիսի բանաձևի հետ միասին ներկայացնում են անվերջ արտադրյալների առաջին օրինակները անալիզի պատմության մեջ։

5) n° 303-ի (10)-ում 1-ին տեսակի լրիվ էլիպտիկ ինտեգրալի համար մենք ստացանք հետևյալ բանաձևը՝

$$F(k)=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}(1+k_1)(1+k_2)\cdot\ldots\cdot(1+k_n),$$

որտեղ k_n փոփոխականն որոշվում է հետևյալ անդրադարձ առնչությամբ՝

$$k_n=\frac{1-\sqrt{1-k_{n-1}^2}}{1+\sqrt{1-k_{n-1}^2}} \qquad (k_0=k)։$$

Այդ բանաձևը տալիս է F(k)-ի վերլուծումն անվերջ արտադրյալի՝

$$F(k)=\frac{\pi}{2}\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1+k_n)։$$

6) Դիտարկենք նաև այսպիսի անվերջ արտադրյալ՝

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}},$$

Տվյալ դեպքում մասնավոր արտադրյալն ունի

$$P_n=\frac{e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}{n+1}=\frac{e^{\log n+C+\gamma_n}}{n+1}=\frac{n}{n+1}\cdot e^{C}\cdot e^{\gamma_n}$$

տեսքը, որտեղ C-ն՝ էյլերյան հաստատունն է, իսկ γ_n-ը անվերջ փոքր է [358 (4)]։ Այսպիսով, արտադրյալը զուգամիտում է, և նրա արժեքն է

$$P=e^{C}։$$

389. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄԱՆԵՐ։ ԿԱՊԸ ՇԱՐՔԵՐԻ ՀԵՏ։

(2) անվերջ արտադրյալի մեջ դեն ձգելով առաջին m անդամները, կստանանք մնացորդային արտադրյալ՝

$$\pi_m=p_{m+1}\cdot p_{m+2}\cdot\ldots\cdot p_{m+k}\cdot\ldots=\prod_{n=m+1}p_n, \tag{4}$$

որը միանգամայն համանման է անվերջ շարքի մնացորդին։

1° Եթե զուգամիտում է (2) արտադրյալը, ապա զուգամիտում է, ցանկացած m-ի դեպքում, և (4) արտադրյալը. հակադարձորեն, (4) արտադրյալի զուգամիտությունից բխում է (2) ելակետային արտադրյալի զուգամիտությունը*։

* *Հիշեցնենք որ մենք մի անգամ ընդմիշտ ենթադրեցինք, որ $p_n\neq 0$։*

Ապացուցումը թողնում ենք ընթերցողին [համեմատել 355, *1°*]։

Այսպիսով, անվերջ արտադրյալի դեպքում ևս վերջավոր թվով սկզբնական արտադրիչների դեն ձգելը կամ սկզբում մի քանի նոր արտադրիչներ ավելացնելը նրա վարքի վրա չի անդրադառնում:

2° Եթե (2) անվերջ արտադրյալը զուգամետ է, ապա

$$\lim_{m \to \infty} \pi_m = 1$$

[*տես (4)*]։

Այդ հետևում է

$$\pi_m = \frac{P}{P_m}$$

հավասարությունից և նրանցից, որ P_m*-ը ձգտում է* $P \neq 0$։

3° Եթե (2) անվերջ արտադրյալը զուգամետ է, ապա՝

$$\lim_{n \to \infty} p_n = 1.$$

Իրոք, P_n*-ի հետ միասին,* P_{n-1}*-ը ևս ձգտում է* P*-ի*.

$$\lim_{n \to \infty} p_n = \frac{\lim P_n}{\lim P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1.$$

[*Համեմատել* 355, 6°.]

Առանց թվելու անվերջ արտադրյալների այլ հատկությունները, որոնք համանման են անվերջ շարքերի հատկություններին, դիմենք անվերջ արտադրյալների զուգամիտության և շարքերի զուգամիտության միջև կապ հաստատելուն, որը մեզ հնարավորություն կտա շարքերի համար մանրամասն զարգացրած տեսությունն անմիջականորեն օգտագործել արտադրյալների համար։

Զուգամետ արտադրյալի դեպքում p_n *արտադրիչները, սկսած մի որոշ տեղից, կլինեն դրական (3*)։ Սակայն, շնորհիվ (1°)-ի, մենք ընդհանրությունը խախտած չենք լինի, եթե այսուհետև ենթադրենք, որ բոլոր* $p_n > 0$։

4° Որպեսզի (2) անվերջ արտադրյալը զուգամետ լինի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ զուգամետ լինի

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log p_n \tag{5}$$

շարքը:

Այդ պայմանի կատարման դեպքում, եթե L-ը շարքի գումարն է, ունենք՝

$$P=e^L.$$

(5) շարքի մասնակի գումարը նշանակելով L_n, կունենանք՝

$$L_n=\log P_n, \quad P_n=e^{L_n}.$$

Լոգարիթմական և ցուցչային ֆունկցիաների անընդհատությունից այժմ հետևում է, որ եթե P_n-ը ձգտում է վերջավոր դրական P սահմանի, ապա L_n-ը ձգտում է $\log P$-ի, և հակադարձաբար՝ եթե L_n-ը ունի վերջավոր L սահման, ապա P_n-ի համար կլինի e^L-ը.

(2) Անվերջ արտադրյալի զուգամիտությունը հետազոտելիս հաճախ հարմար է լինում, ընդունելով

$$p_n=1+a_n,$$

գրել այն այս տեսքով՝

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n), \tag{2*}$$

իսկ (5) շարքը՝ այս տեսքով՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n). \tag{5*}$$

Այս նշանակումներով ունենք հետևյալ պարզ թեորեման՝

5° Եթե, առնվազն բավականաչափ մեծ n-երի համար, լինի

$$a_n>0 \ (\text{կամ } a_n<0),$$

ապա (2*) արտադրյալի զուգամիտության համար անհրաժեշտ է և բավարար

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{6}$$

շարքի զուգամիտությունը:

Քանի որ ինչպես (2) արտադրյալի, այնպես էլ (6) շարքի զուգամիտության համար անհրաժեշտ է, որ լինի

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{7}$$

[տես 3°], ապա այդ պայմանը կատարված համարենք: Այդ ժամանակ տեղի ունի հետևյալ առնչությունը

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+a_n)}{a_n} = 1$$

[76, *5) (ա)*]: *Այդ դեպքում, շնորհիվ նրա, որ (5*) և (6) երկու շարքերի անդամները, սկսած մի որոշ տեղից, պահպանում են որոշակի նշան, ըստ* n° 357-*ի 2 թեորեմայի, այդ շարքերը զուգամիտում կամ տարամիտում են միաժամանակ: Այստեղից էլ, 4°-ի կապակցությամբ, հետևում է մեր պնդումը:*

Վերադառնալով $a_n \gtrless 0$ *ընդհանուր դեպքին, ապացուցենք այսպիսի առաջադրություն ևս՝*

6° Եթե, (6) շարքի հետ միասին, զուգամետ է նաև

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \tag{8}$$

շարքը, ապա (2*) անվերջ արտադրյալը զուգամետ է:

Իսկապես, (8)-ից ամենից առաջ հետևում է (7)-ը: Հիշենք $\log(1+x)$ *ֆունկցիայի վերլուծումն ըստ Թեյլորի բանաձևի* [123, *5)*]. *ունենք՝*

$$\log(1+a_n) = a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2),$$

այնպես որ

$$\lim \frac{a_n - \log(1+a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}. \qquad (9)$$

Ըստ n° 357-ի 2 թեորեմայի, (8) շարքի զուգամիտությունից հետևում է

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n - \log(1+a_n)] \qquad (10)$$

շարքի զուգամիտությունը։ Քանի որ (6) շարքը զուգամետ է ենթադրված, այստեղից հետևում է նաև (5*) շարքի, որպես երկու զուգամետ շարքերի տարբերության, զուգամիտությունը։ Մնում է կիրառել 4° առաջադրությունը։

Թռուցիկ կերպով կանգ առնենք այն դեպքի վրա, երբ անվերջ արտադրյալը «տարամիտում է» դեպի 0։

7° Որպեսզի անվերջ արտադրյալը [(2) կամ (2*)] ունենա զրո արժեք, անհրաժեշտ է և բավարար, որ (5) շարքի [կամ (5*)-ի] գումարը լինի $-\infty$։

Մասնավորապես, այդպես կլինի, երբ $a_n<0$ և (6) շարքը տարամետ է, կամ եթե (6) շարքը զուգամետ է, բայց տարամետ է (8) շարքը։

Ապացուցումը թողնում ենք ընթերցողին։ Միայն վերջին առաջադրության առթիվ նկատենք, որ (8) շարքի տարամիտությունից, (9)-ի շնորհիվ, բխում է (10) շարքի տարամիտությունը, որի գումարը կլինի $+\infty$։ Իսկ այդ դեպքում, (6) շարքի զուգամիտության պատճառով, պարզ է, որ (5*) շարքի գումարը կլինի $-\infty$։

Վերջում օգտագործենք (2) [կամ (2*)] արտադրյալի և (5) [կամ (5*)] շարքի միջև եղած կապը՝ որոշելու համար անվերջ արտադրյալի բացարձակ զուգամիտության գաղափարը։ Արտադրյալը բացարձակ զուգամետ են անվանում հենց այն դեպքում, երբ բացարձակ զուգամետ է նրա արտադրիչների լոգարիթմներից բաղկացած համապատասխան շարքը։

nn° 375-ի և 376-ի հետազոտությունները միանգամից թույլ են տալիս եզրակացնել, որ բացարձակ զուգամետ արտադրյալներն օժտված են տեղափոխական հատկությամբ, մինչդեռ ոչ-բացարձակ զուգամետները նախահայտորեն այդ հատկությունը չունեն։

Հեշտ է ապացուցել, 5°-ի օրինակով, որ

8° (2*) արտադրյալի բ ա ց ա ր ձ ա կ զուգամիտության համար անհրաժեշտ է և բավարար (6) շարքի նույնպես բ ա ց ա ր ձ ա կ զուգամիտությունը:

390. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ: *1) Ապացուցված թեորեմները կիրառենք հետևյալ անվերջ արտադրյալների նկատմամբ.*

(ա) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$ *(x>0) զուգամետ է 1<x-ի դեպքում և տարամետ է 1≥x-ի դեպքում, համաձայն* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ *շարքի նույնպիսի վարքի (5°).*

Նման ձևով $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^x}\right)$ *արտադրյալը զուգամետ է, երբ x>1 (5°), իսկ երբ 0<x≤1՝ տարամիտում է դեպի զրոն (7°):*

(բ) $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right]$ *զուգամետ է, երբ* $x>\frac{1}{2}$*. այն է, երբ x>1, արտադրյալը բ ա ց ա ր ձ ա կ զուգամետ է, քանի որ զուգամետ է* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ *շարքը (8°), իսկ երբ* $\frac{1}{2}<x\leq 1$, *արտադրյալը ո չ-բ ա ց ա ր ձ ա կ զուգամետ է, քանի որ զուգամետ են* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ *և* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2x}}$ *շարքերը (6°). Վերջապես, երբ* $0<x\leq\frac{1}{2}$, *արտադրյալի արժեքը 0 է, որովհետև այդ շարքերից առաջինը զուգամետ է, իսկ երկրորդն արդեն ոչ (7°):*

2) Դիցուք x_n*-ը՝* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *միջակայքում գտնվող կամայական վարիանտ է: Այդ դեպքում՝*

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos x_n \quad \text{և} \quad \prod_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}$$

արտադրյալները զուգամետ են կամ ոչ, նայած նրան, զուգամետ է արդյոք $\sum_{n=1}^{\infty} x_x^2$ շարքը, թե ոչ։

Նախ ենթադրենք, թե փաստորեն $x_n \to 0$. այն ժամանակ այդ եզրակացությունները բխում են 5-ից և 7-ից, եթե օգտվենք հետևյալ վերլուծումներից [123, 2) և 3)]՝

$$\cos x_n = 1 - \frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2), \qquad \frac{\sin x_n}{x_n} = 1 - \frac{x_n^2}{6} + o(x_n^2)։$$

Իսկ եթե x_n-ը 0-ի չի ձգտում, ապա միաժամանակ շարքն էլ տարամետ է, և երկու արտադրյալն էլ ունեն զրո արժեքներ*։

3) Դիտարկենք հետևյալ կարևոր արտադրյալը

$$x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

[ստորև, n 395-ում, մենք կտեսնենք, որ դա $\sin x$ ֆունկցիան է ներկայացնում]։ Դիցուք $x \neq k\pi$, որտեղ $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Դրա զուգամիտությունը (ինարկե, բացարձակ) միանգամից բխում է $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2\pi^2}$ շարքի զուգամիտությունից։ Եթե յուրաքանչյուր արտադրիչը վերլուծենք երկուսի և արտադրյալը գրենք այսպես՝

$$x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1-\frac{x}{n\pi}\right)\left(1+\frac{x}{n\pi}\right)\cdot \ldots,$$

ապա, քանի որ $1 - \frac{x}{\pi n} \to 1$, արտադրիչների նշված դասավորության դեպքում զուգամիտությունը պահպանվում է, ուրեմն և պահպանվում է արտադրյալի արժեքը։ Բայց այդ դեպքում զուգամիտությունը կդառնա ոչ-բացարձակ, որովհետև ոչ-բացարձակ զուգամետ է հետևյալ շարքը՝

---

* Որ արտադրյալները ունեն որոշակի վերջավոր արժեքներ, պարզ է այն բանից, որ նրանց բոլոր արտադրիչները կանոնավոր կոտորակներ են. սակայն նրա արժեքները չեն կարող 0-ից տարբեր լինել, քանի որ խախտված է դրա համար անհրաժեշտ (3) պայմանը։

$$-\frac{x}{\pi}+\frac{x}{\pi}-\frac{x}{2\pi}+\frac{x}{2\pi}-\ldots-\frac{x}{n\pi}+\frac{x}{n\pi}-\ldots,$$

այնպես որ այդ արտադրիչները չի կարելի կամայականորեն տեղափոխել:

Այժմ յուրաքանչյուր $1\mp\frac{x}{n\pi}$ *արտադրիչը փոխարինենք* $\left(1\pm\frac{x}{n\pi}\right)e^{\pm\frac{x}{n\pi}}$ *արտադրիչով. հեշտ է տեսնել, որ այդ չի անդրադառնա ոչ զուգամիտության վրա, ոչ անվերջ արտադրյալի արժեքի վրա: Միևնույն ժամանակ նոր արտադրյալն արդեն կլինի բ ա ց ա ր ձ ա կ զուգամետ, որովհետև* [123, *1)*]

$$e^{\pm\frac{x}{n\pi}}=1\pm\frac{x}{n\pi}+\frac{x^2}{2n^2\pi^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad \left(1\mp\frac{x}{n\pi}\right)e^{\pm\frac{x}{n\pi}}=1-\frac{x^2}{2n^2\pi^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

և արտադրիչները, սկսած մի որոշ տեղից, դառնում են դրական կանոնավոր կոտորակներ:

4) Ապացուցել հետևյալ նույնությունը ($0<q<1$ *դեպքում*)՝

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdot\ldots=\frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)}$$

(Է յ լ ե ր):

Ց ու ց ու մ: Երկու արտադրյալների զուգամիտությունն էլ որոշվում է 3-ի օգնությամբ: Դրանցից առաջինը պետք է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdot\ldots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdot\ldots}$$

5) Ապացուցել, որ ($\alpha>\beta$ *դեպքում*)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}=0:$$

Դրա համար բավական է ցույց տալ

$$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\beta+n}{\alpha+n}=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+n}\right)$$

անվերջ արտադրյալի տարամիտությունը կամ [*տես 7*]

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha-\beta}{\alpha+n}$$

շարքի տարամիտությունը: Իսկ այդ հեշտությամբ ստացվում է դրված շարքը հարմոնիկ շարքի հետ բաղդատելով:

Դիտողություն։ Այս օրինակը, հավասարապես և հետևյալները, ուսանելի են այն տեսակետից, որ ցույց են տալիս, թե ինչպես երբեմն իրոք ձեռնտու է վարիանտայի (կամ հաջորդականության) սահմանի որոնումը բերել անվերջ արտադրյալի հետազոտման, օգտագործելով անվերջ արտադրյալների համար մշակված տեսությունը։

6) Վերադառնանք $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)^n}{n!}$ շարքին, որն արդեն դիտարկել ենք 361-ի 2) (ե)-ում և 367-ի 1) (ե)-ում։ Մենք այստեղ թողինք բաց նրա վարքի հարցը զուգամիտության միջակայքի $x=-\frac{1}{e}$ ծայրում։

Այդ դեպքում ստացվում է

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{n!}\frac{1}{e^n}$$

նշանափոխ շարքը, որի անդամները բացարձակ արժեքով մոնոտոն նվազում են։ Հիշելով Լայբնիցի թեորեմը [369], տեսնում ենք, որ շարքի զուգամիտության մասին եզրակացությունը կախված է հետևյալ հավասարության առկայությունից

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}\cdot\frac{1}{e^n}=0։$$

Քանի որ այդ վարիանտայի $(n+1)$-րդ արժեքի հարաբերությունը n-րդին տալիս է

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e},$$

ապա խնդիրը կարելի է ներկայացնել հավասարազոր ձևով, որպես

$$\frac{1}{e}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}$$

անվերջ արտադրյալի արժեքի որոնում։ Լոգարիթմելով, կստանանք [123, 5)]՝

$$\log\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}=n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-1=n\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+0\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]=-\frac{1}{2n}+0\left(\frac{1}{n}\right),$$

այնպես որ (5) տիպի լոգարիթմների շարքը տարամետ է և ունի $-\infty$ գու-

մար։ Այդ դեպքում (7) անվերջ արտադրյալի արժեքը (իսկ դրա հետ նաև որոնելի սահմանը), իրոք, 0 է։ Շարքը զուգամետ է։

7) Դիտենք

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)\cdot\ldots\cdot(\beta+n-1)}{n!\,\gamma\cdot(\gamma+1)\cdot\ldots\cdot(\gamma+n-1)}x^n$$

հիպերերկրաչափական շարքի վարքի հարցը [տես 363 և 367, 4)] $x=-1$ դեպքում, այն ենթադրությամբ, որ $-1<\gamma-\alpha-\beta<0$ (հենց այս դեպքն էր, որ առանց դիտարկման էր մնացել)։

$(n+1)$-րդ գործակցի հարաբերությունը n-րդին այստեղ հավասար է՝

$$\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}=1-\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\lambda_n}{n^2}\qquad(|\lambda_n|\leq L)։\tag{11}$$

n-ի բավականաչափ մեծ արժեքների համար այդ հարաբերությունը դրական է. դիցուք $\gamma-\alpha-\beta>-1$, այդ դեպքում նա վերջնականապես փոքր է դառնում մեկից։ Այսպիսով,

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)\cdot\ldots\cdot(\beta+n-1)}{n!\,\gamma\cdot(\gamma+1)\cdot\ldots\cdot(\gamma+n-1)}\tag{12}$$

շարքը, եթե ուշադրություն չդարձնենք մի որոշ թվով սկզբնական անդամներ, հանդիսանում է նշանափոխ շարք, որի անդամները բացարձակ մեծությամբ մոնոտոն նվազում են։ Այստեղ ևս ընդհանուր անդամի (բացարձակ մեծության) սահմանի որոնումը ավելի հարմար է բերել հետևյալ անվերջ արտադրյալի արժեքի որոնման՝

$$\prod_{n=n_0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)\cdot(\beta+n)}{(1+n)\cdot(\gamma+n)}\text{*},$$

եթե $\gamma-\alpha-\beta>-1$ (ինչպես ենթադրեցինք), ապա (11)-ից, 7°-ի շնորհիվ, հետևում է, որ այդ արտադրյալը ունի 0 արժեք. շարքը զուգամետ է։

Իսկ այն դեպքում, երբ $\gamma-\alpha-\beta=-1$, (11) բանաձևը կստանա հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}=1+\frac{\lambda_n}{n^2}\qquad(|\lambda_n|\leq L).$$

* $n=n_0$ սկզբնական արժեքը ենթադրվում է այնքան մեծ, որ բոլոր արտադրիչները լինեն դրական։

5° Թեորեմայի համաձայն, անվերջ արտադրյալի արժեքը տարբեր է 0-ից, (12) շարքի համար խախտվում է զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը, շարքը զուգամետ է։

Մենք, վերջապես, ավարտեցինք հիպերերկրաչափական շարքի վարքի հետազոտությունը։ Արդյունքները կարելի է ամփոփել հետևյալ աղյուսակով՝

$\|x\|<1$		բաց. զուգամետ է
$\|x\|>1$		տարամետ է
$x=1$	$\gamma-\alpha-\beta>0$ $\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$	բաց. զուգամետ է տարամետ է
$x=-1$	$-\alpha-\beta>0$ $0\geqslant\gamma-\alpha-\beta>-1$ $-\alpha-\beta\leqslant-1$	բաց. զուգամետ է ոչ-բաց. զուգամետ է տարամետ է

8) Ապացուցել, որ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x^2-1)(x^2-2^2)\cdots(x^2-n^2)$$

շարքը զուգամետ է x-ի բոլոր արժեքների համար, եթե այն զուգամետ է թեկուզ մեկ $x=x_0$ ոչ-ամբողջ արժեքի համար [Ստիրլինգ (T.Stirling)]։

Այդ շարքի անդամները տարբերվում են

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x_0^2-1)(x_0^2-2)\cdots(x_0^2-n^2)$$

զուգամետ շարքի անդամներից

$$\frac{(x^2-1)(x^2-2^2)\cdots(x^2-n^2)}{(x_0^2-1)(x_0^2-2^2)\cdots(x_0^2-n)}$$

բազմապատկիչներով, որոնք, բավականաչափ մեծ n-երի դեպքում, փոփոխվում են մոնոտոն կերպով։ Մնում է դեռ ապացուցել նրանց սահմանափակությունը (որովհետև այդ դեպքում կարելի կլինի կիրառել Աբելի

հայտանիշը), իսկ այդ նպատակի համար ամենից պարզ կլինի համոզվել

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{x^2-n^2}{x_0^2-n^2}$$

անվերջ արտադրյալի զուգամիտության մեջ. այդ թողնում ենք ընթերցողին։

9) Դիտարկենք (Էյլերի հետ միասին) հետևյալ անվերջ արտադրյալը՝

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}, \tag{13}$$

x-ը համարելով տարբեր զրոյից և բոլոր ամբողջ բացասական թվերից։

Հեշտ է նրա ընդհանուր արտադրիչը ներկայացնել այսպես՝

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}=1+\frac{x(x-1)}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

որտեղից, 8-ի շնորհիվ, բխում է, որ մեր արտադրյալը (բացարձակ) զուգամետ է։ Նրանով որոշվող $\Gamma(x)$ ֆունկցիան հանդիսանում է (տարրական ֆունկցիաներից հետո) անալիզի մեջ դիտարկվող կարևորագույն ֆունկցիաներից մեկը։ Ստորև [XIV, § 5] մենք կտանք այդ ֆունկցիայի մի այլ սահմանում և ավելի խոր կուսումնասիրենք նրա հատկությունները։

Քանի որ n-րդ մասնակի արտադրյալն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{(n+1)^x}{x(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^x\cdot\frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n)},$$

ապա կարելի է ընդունել և

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n)}. \tag{14}$$

Գրելով համանման բանաձև $\Gamma(x+1)$-ի համար, հեշտ է տեսնել, որ

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{x+1+n}=x,$$

և մենք գալիս ենք հետևյալ պարզ ու կարևոր առնչության՝

$$\Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x). \tag{15}$$

Եթե ընդունենք x-ը հավասար m բնական թվին, ապա կստանանք հետևյալ անդրադարձ բանաձևը՝

$$\Gamma(m+1)=m.\Gamma(m).$$

Քանի որ $\Gamma(1)=1$ (որը հեշտ է ստուգել), ապա այստեղից՝

$$\Gamma(m+1)=m!$$

Γ ֆունկցիայի համար մի կարևոր բանաձև ևս կստանանք, եթե բազմապատկենք անդամ առ անդամ հետևյալ հավասարությունները

$$\Gamma(x+1)=\Gamma(x)\cdot x=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}}{1+\frac{x}{n}} \quad \text{և} \quad e^{Cx}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}},$$

որոնցից առաջինը հետևում է (13)-ից և (15)-ից, իսկ երկրորդը հեշտությամբ դուրս է բերվում 388-ի 6)-ից: Կգտնենք՝

$$e^{Cx}\cdot\Gamma(x+1)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}$$

կամ՝

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)}=e^{Cx}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)\cdot e^{-\frac{x}{n}}, \tag{16}$$

Այս՝ Վեյերշտրասի բանաձևն է:

10) Բերենք անվերջ արտադրյալը շարքի ձևափոխելու մի նշանավոր օրինակ, որ նույնպես պատկանում է Էյլերին: Եթե պարզ թվերը համարակալենք աճման կարգով՝

$$p_1=2,\quad p_2=3,\quad p_3=5,\dots,p_k,\dots,$$

ապա $1<x$-ի դեպքում տեղի ունի

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^x}\right)\left(1-\frac{1}{3^x}\right)\left(1-\frac{1}{5^x}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k^x}\right)}=1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}+\ldots$$

կամ՝

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

նույնությունը, այնպես որ այս արտադրյալը ներկայացնում է Ռիմանի $\zeta(x)$ ֆունկցիան [356, 2)]:

Երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարի բանաձևի համաձայն ունենք՝

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}}=\frac{1}{p_k^x}+\frac{1}{(p_k^2)^x}+\ldots+\frac{1}{(p_k^m)^x}+\cdots$$

Եթե բազմապատկենք իրարով վերջավոր թվով այնպիսի շարքեր, որոնք համապատասխանում են N բնական թվից չգերազանցող բոլոր պարզ թվերին, ապա մասնակի արտադրյալը հավասար կլինի

$$P_x^{(N)}=\prod_{p_k<N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}}=\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{1}{n^x}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}+\sum_{n=N+1}^{\infty}{}'\frac{1}{n^x}, \qquad (17)$$

որտեղ շտրիխը (') նշանակում է, որ գումարումը տարածվում է ոչ բոլոր բնական թվերի վրա, այլ դրանցից միայն այն թվերի վրա (չհաշված միավորը), որոնք իրենց պարզ արտադրիչների վերլուծման մեջ պարունակում են միայն արդեն նշված թվերը (առաջին N բնական թվերն, իհարկե, օժտված են այդ հատկությամբ): Այստեղից առավել ևս՝

$$0<P_x^{(N)}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}<\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^x},$$

$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ շարքի զուգամիտության պատճառով, աջակողմյան արտահայտությունը, որը ներկայացնում է նրա մնացորդը N-րդ անդամից հետո, ձգտում է 0-ի, երբ $n\to\infty$. անցնելով սահմանին, կստանանք հենց պահանջված արդյունքը:

11) $x=1$ դեպքում (17) առնչությունը դեռ պահպանում է իր ուժը, այստեղից՝

$$P_1^{(N)}=\prod_{p_k\leqslant N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}>\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}=H_n,$$

այնպես որ, երբ $N\to\infty$, այս անդամ $P_1^{(N)}\to+\infty$. այսինքն՝

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\cdots}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$$

արտադրյալը տարամետ է և ունի $+\infty$ արժեք:

Սրանում է կայանում Էյլերի տված նոր ապացույցն այն մասին, որ պարզ թվերի բազմությունն անվերջ է (որից, ըստ էության, մենք չօգտվեցինք բերված դատողության մեջ). չէ որ այդ բազմության վերջավոր լինելու դեպքում արտադրյալը կունենար վերջավոր արժեք։ Եթե ստացված արդյունքն արտագրենք այսպես՝

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\cdot\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)=0,$$

ապա, 5-ի կապակցությամբ, կարելի է եզրակացնել

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{p_k}+\ldots=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_k}$$

շարքի զուգամիտության մասին։ Այս կարևոր առաջադրությունը տալիս է, բացի այդ, նաև պարզ թվերի աճման որոշ բնութագրություն։ [Ընդգծենք, որ այն շատ ավելի ուժեղ է, քան $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *հարմոնիկ շարքի տարամիտության վերաբերյալ պնդումը, որովհետև այստեղ խոսքը վերաբերում է նրա անդամների միայն մի մասին։]*

12) Նման ձևով կարելի է ստանալ ($x>1$ *դեպքում) հետևյալ նույնությունը՝*

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3^x}\right)\left(1-\frac{1}{5^x}\right)\left(1+\frac{1}{7^x}\right)\left(1+\frac{1}{11^x}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1\pm\frac{1}{p_{k+1}^x}\right)\cdot\ldots}=$$

$$=1-\frac{1}{3^x}+\frac{1}{5^x}-\frac{1}{7^x}+\frac{1}{9^x}-\ldots,$$

որտեղ ձախ մասի հայտարարում պլյուս կամ մինուս նշանը վերցվում է կախված այն բանից, թե (կենտ) պարզ թիվը կլինի՞ արդյոք $4n-1$ *թե* $4n+1$ *տեսքի։*

§ 7. ՏԱՐՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԸ

391. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄԸ ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՔԻ. ԹԵՅԼՈՐԻ ՇԱՐՔԸ. n° 368-ում մենք արդեն դիտարկել ենք

$$\sum_{1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (1)$$

տեսքի աստիճանային շարքեր, որոնք դասավորված են x-ի աստիճաններով։ Եթե բացառենք «ամենուրեք տարամետ» շարքերը, ապա յուրաքանչյուր այդպիսի շարքի համար գոյություն ունի զուգամիտության միջակայք՝ $-R$-ից մինչև R, կենտրոնը $x=0$ կետում, որտեղ զուգամիտության շառավիղը՝ $R>0$, բայց կարող է և անվերջ լինել։ Այդ միջակայքի ծայրերը ներառվում են կամ ոչ, նայած դեպքին։

Դիտարկում են նաև ավելի ընդհանուր տեսքի աստիճանային շարքեր՝

$$\sum_{0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots, \qquad (2)$$

որոնք դասավորված են (x-ի փոխարեն) $x-x_0$ երկանդամի աստիճաններով։ Այդպիսի շարքն էապես չի տարբերվում (1) տեսքի շարքից, որովհետև բերվում է դրան փոփոխականի հասարակ փոխարինումով՝ $x-x_0=y$ (փոփոխականի նշանակման ճշգրտությամբ)։ (2) շարքի համար, եթե այն «ամենուրեք տարամետ» չէ, նույնպես գոյություն ունի զուգամիտության միջակայք, բայց այս անգամ կենտրոնը x_0 կետում, x_0-R-ից մինչև x_0+R։ Միջակայքի ծայրերը, ինչպես և (1) շարքի դեպքում, կարող են պատկանել, բայց կարող են և չպատկանել միջակայքին։

Հետագա պարագրաֆներում մենք մանրամասնորեն կուսումնասիրենք այն աստիճանային շարքերի հատկությունները, որոնք շատ բաներով նմանվում են բազմանդամներին։ Աստիճանային շարքի հատվածներ հանդիսանում են բազմանդամները. մի հանգամանք, որն աստիճանային շարքերը հարմար միջոց է դարձնում մոտավոր հաշվումների համար։ Այդ կապակցությամբ մեծ կարևորություն է ստանում նախապես տրված ֆունկցիան ըստ $x-x_0$-ի աստիճանների (մասնավորապես, ըստ x-ի աստիճանների) վերլուծելու հարցը, այսինքն՝ այն (2) կամ (1) տիպի շարքի գումարի տեսքով ներկայացնելու հարցը։

Այստեղ մենք կզբաղվենք նման վերլուծումով տարրական

ֆունկցիաների նկատմամբ, ընդ որում դրված հարցի լուծման համար մեզ ուղի է բանում Թեյլորի բանաձևը, որը մանրամասն ուսումնասիրված է nn° 122—124-ում։ Իրոք, ենթադրենք, թե դիտարկվող $f(x)$ ֆունկցիան $[x_0, x_0+H]$ կամ $[x_0-H, x_0]$ $(H>0)$ միջակայքում ունի բոլոր կարգերի ածանցյալներ (որոնք, դրանով իսկ, անընդհատ են)։ Այն ժամանակ, ինչպես տեսանք 124-ում, x-ի բոլոր արժեքների համար այդ միջակայքում գոյություն ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x), \qquad (3)$$

որտեղ $r_n(x)$ լրացուցիչ անդամը կարող է ներկայացվել n° 124-ում նշված ձևերից մեկով։ Այդ ժամանակ n-ը մենք կարող ենք վերցնել ցանկացած չափով մեծ, այսինքն՝ այդ վերլուծումը հասցնել $x-x_0$-ի ցանկացած չափով բարձր աստիճանների։

Այդ բնականաբար հանգեցնում է հետևյալ անվերջ վերլուծման մտքին՝

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \qquad (4)$$

Այդպիսի շարքը, անկախ այն բանից զուգամետ է արդյոք այն և նրա գումարը հավասար է, իսկապես, $f(x)$-ին,—կոչվում է Թեյլորի շարք $f(x)$ ֆունկցիայի համար։ Նա ունի (2) տեսքը, ընդ որում նրա գործակիցները՝

$$a_0=f(x_0), \quad a_1=\frac{f'(x_0)}{1!}, \quad a_2=\frac{f''(x_0)}{2!}, \ldots,$$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ldots$$

կրում են Թեյլորի գործակիցներ անունը։

Քանի որ f(x)-ի և Թեյլորի շարքի n+1 անդամների գումարի տարբերությունը, շնորհիվ (3)-ի, հենց. $r_n(x)$-ն է, ապա ակներևորեն՝ որպեսզի x-ի մի որոշ արժեքի դեպքում իրոք տեղի ունենա (4) վերլուծումը, անհրաժեշտ է և բավարար, որ Թեյլորի բանաձևի $r_n(x)$ լրացուցիչ անդամը, x-ի այդ արժեքի դեպքում, n-ը աճելիս կձգտի 0-ի՝

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0. \tag{5}$$

Հետազոտելու դեպքում այն հարցը, թե տեղի ունի արդյոք այդ հավասարությունը, և հատկապես x-ի ո՞ր արժեքների դեպքում, մեզ հենց օգտակար կլինեն $r_n(x)$ լրացուցիչ անդամի գանազան ձևերը, որոնք բացահայտում են նրա կախումը n-ից։

Ամենից հաճախ հարկ է լինում գործ ունենալ այն դեպքի հետ, երբ $x_0=0$ և f(x) ֆունկցիան շարքի է վերլուծվում անմիջականորեն ըստ x-ի աստիճանների՝

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots\text{*}. \tag{6}$$

այս շարքն ունի (1)-ի տեսքը, հետևյալ գործակիցներով

$$a_0=f(0),\quad a_1=\frac{f'(0)}{1!},\quad a_2=\frac{f''(0)}{1!},\dots,$$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\dots \tag{7}$$

Այժմ ավելի մանրամասնորեն գրի առնենք $r_n(x)$ լրացուցիչ անդամը հենց այդ մասնավոր ենթադրության դեպքում, երբ $x_0=0$ [124]

Լագրանժի ձևով՝ $r_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, (8)

* *Այս շարքը սովորաբար, առանց որևէ հիմք ունենալու, անվանում են Մակլորենի շարք. տես նաև առաջին հատորի 323 և 328 էջերի ծանոթագրությունները։*

Կոշիի ձևով՝ $$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}, \tag{9}$$

ըստ որում θ *բազմապատկչի մասին հայտնի է միայն այն, որ նա գտնվում է* 0*-ի և* 1*-ի միջև, բայց նա կարող է փոփոխվել* x*-ի կամ* n*-ի փոփոխվելու դեպքում (և նույնիսկ՝ մի ձևից մյուսին անցնելիս)։*

Անցնենք կոնկրետ վերլուծումների։

392. ՑՈՒՑՉԱՅԻՆ, ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ԵՎ ԱՅԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄԸ ՇԱՐՔԵՐԻ։ *Նախ ապացուցենք հետևյալ պարզ առաջադրությունը, որով միանգամից ընդգրկված կլինեն մի շարք կարևոր դեպքեր՝*

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան $[0,H]$ կամ $[-H,0]$ $(H>0)$ միջակայքում ունի բոլոր կարգերի ածանցյալներ, և այդ բոլոր ածանցյալները, երբ x-ը փոփոխվում է նշված միջակայքում, իրենց բացարձակ մեծություններով սահմանափակված են լինում միևնույն թվով՝

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant L \tag{10}$$

(որտեղ L-ը կախում չունի n-ից), ապա ամբողջ միջակայքում տեղի ունի (6) վերլուծումը։

Իրոք, վերցնելով $r_n(x)$ *լրացուցիչ անդամը Լագրանժի ձևով [տես* (8)*], ունենք,* (10)*-ի շնորհիվ,*

$$|r_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\theta x)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leqslant L \cdot \frac{H^{n+1}}{(n+1)!}.$$

n*-ը անսահմանորեն աճելիս* $\frac{H^{n+1}}{(n+1)!}$ *արտահայտությունը ձգտում է* 0*-ի, ինչպես այդ տեսանք* 35*-ի 1)-ում. ի դեպ, այդ նույնը* [355*-ի* 6°*-ի շնորհիվ] բխում է նաև հետևյալ շարքի զուգամիտությունից՝*

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^{n+1}}{(n+1)!}$$

[361, *2) (ա)*]*։ Բայց այդ դեպքում* $r_n(x)$*-ը ևս ունի* 0 *սահման, որը և ապացուցում է մեր պնդումը։*

(ա) Այդ առաջադրությունը կիրառելի է հետևյալ ֆունկցիաների նկատմամբ՝

$$f(x)=e^x,\ \sin x,\ \cos x$$

ամեն մի [—H, H] միջակայքում, որովհետև նրանց ածանցյալները, որոնք, համապատասխանաբար, հավասար են՝

$$f^{(n)}(x)=e^x,\quad \sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\quad \cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

իրենց բացարձակ մեծություններով սահմանափակված կլինեն e^H թվով e^x ֆունկցիայի համար, և միավորով՝ $\sin x$-ի և $\cos x$-ի համար։

Քանի որ Թեյլորի գործակիցները մենք արդեն հաշվել ենք այդ ֆունկցիաների համար **123**-ի *1)—3)*-ում, ապա կարելի է միանգամից գրել հետևյալ վերլուծումները՝

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots,\tag{11}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\dots,\tag{12}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{2k!}+\dots\tag{13}$$

դրանք բոլորն էլ տեղի ունեն ամեն մի x-ի դեպքում։

(բ) Դժվար չէ նման եղանակով ստանալ վերլուծումներ նաև հիմնական հիպերբոլական ֆունկցիաների համար, բայց ավելի հեշտ է, հիշելով նրանց սահմանումը՝

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

արտածել այդ վերլուծումները, (*11*) շարքը և դրանից x-ը $-x$-ով փոխարինելով ստացվող

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\dots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\dots$$

շարքը անդամ առ անդամ հանելու կամ գումարելու միջոցով։ Այդ ճանապարհով գտնում ենք՝

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots$$

(գ) $y = \operatorname{arctg} x$ ֆունկցիայի նկատմամբ սկզբում ապացուցված առաջադրությունն արդեն կիրառելի չէ. Իսկապես, 109-ի 8)-ում դրա n-րդ ածանցյալի համար գտած

$$y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \cdot \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \tag{14}$$

ընդհանուր արտահայտությունը չի ապահովում ընդհանուր վերին եզրի գոյությունը բոլոր $y^{(n)}$-երի համար.

Քանի որ Թեյլորի համապատասխան շարքը [տես 123, 6)]՝

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \dots$$

զուգամետ է միայն $[-1, 1]$ միջակայքում*, ապա այդ միջակայքից դուրս հարկ չկա արդեն խոսելու $\operatorname{arctg} x$ ֆունկցիան այդ շարքով արտահայտելու մասին. Ընդհակառակը, $|x| \leqslant 1$ դեպքում ըստ Լագրանժի (8) բանաձևի [հաշվի առնելով (14)-ը] ունենք՝

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{\left|\cos^{n+1} y_\theta \cdot \sin(n+1)\left(y_\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right|}{n+1} |x|^{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1},$$

որտեղ $y_\theta = \operatorname{arctg} \theta x$. Այստեղից պարզ է, որ $r_n(x) \to 0$, այնպես որ x-ի բոլոր արժեքների համար $[-1, 1]$ միջակայքում տեղի ունի հետևյալ վերլուծումը

---

* Ըստ Դալամբերի հայտանիշի [366]. հեշտ է համոզվել, որ շարքը (բացարձակ) զուգամետ է, երբ $|x| < 1$, և տարամետ է $|x| > 1$ դեպքում. $x = \pm 1$ դեպքում զուգամիտությունը (ոչ բացարձակ) բխում է Լայբնիցի թեորեմայից [369].

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \ldots \qquad (15)$$

Մենք մի անգամ ևս ընդգծում ենք, որ, թեև arctg x*-ը այդ միջակայքից դուրս էլ ունի որոշակի իմաստ, բայց (15) վերլուծումն այնտեղ արդեն ուժի մեջ չէ, քանի որ շարքը գումար չունի։*

(15) շարքից $x=1$ *դեպքում, մասնավորապես, ստացվում է Լայբնիցի նշանավոր շարքը՝*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1} + \ldots \qquad (16)$$

սա առաջին շարքն է, որը տալիս է π *թվի վերլուծումը։*

393. ԼՈԳԱՐԻԹՄԱԿԱՆ ՇԱՐՔ. ՍՏԻՐԼԻՆԳԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ.

Եթե որպես $f(x)$ *ֆունկցիա վերցնենք* $\log(1+x)$ $(x>-1)$, *ապա Թեյլորի համապատասխան շարքը կլինի այսպիսին* [123, *5*]

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

Այս շարքը զուգամետ է x*-ի միայն այն արժեքների համար, որոնք գտնվում են* $[-1, 1]$ *միջակայքում*. ուստի միայն այդ արժեքների համար էլ իմաստ ունի հետազոտել* $r_n(x)$ *լրացուցիչ անդամի վարքը։*

Վերցնենք այն նախ Լագրանժի (8) ձևով. Քանի որ

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

[109, *3*], *ապա՝*

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0<\theta<1).$$

Եթե $0 \leqslant x \leqslant 1$, *ապա վերջին արտադրիչը մեկին չի գերազանցում, և այստեղից՝*

---

* *Համեմատել նախորդ ծանոթության հետ.* $x=-1$ *դեպքում ստացվում է (նշանի ճշգրտությամբ) տարամետ ներդաշնակ շարքը։*

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}, \text{ այնպես որ } r_n(x) \to 0 \quad (n \to \infty \text{ դեպքում}).$$

Բայց 0>x-երի դեպքում այդ արտադրիչի վարքը պարզ չի լինում, և հարկ է լինում դիմել լրացուցիչ անդամի Կոշիի ձևին [տես (9)]՝

Ունենք՝

$$r_n(x) = (-1)^n x^{n+1} \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1),$$

այնպես որ՝

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

Քանի որ $x>-1$ դեպքում կլինի $1+\theta x > 1-\theta$, ապա վերջին արտադրիչը մեկից փոքր է. հետևապես, հենց որ $|x|<1$, ապա նախահայտորեն $r_n(x) \to 0$։

Հետաքրքիր է, որ թեև Կոշիի ձևը լիակատար կերպով սպառում է հարցը x-ի բոլոր արժեքների համար −1-ի և 1-ի միջև, բայց ոչինչ չի տալիս, երբ $x=1$. այդ դեպքում ստանում ենք

$$|r_n(1)| < (1-\theta)^n,$$

բայց շնորհիվ այն հնարավորության, որ θ-ն կարող է փոփոխվել n-ի հետ միասին, չի կարելի եզրակացնել, որ $(1-\theta)^n \to 0$։

Այսպիսով, ամբողջությամբ վերցրած, x-ի բոլոր արժեքների համար $[-1, 1]$ միջակայքում, իրոք, կլինի

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots \qquad (17)$$

Մասնավորապես, երբ $x=1$ ստանում ենք մեզ արդեն ծանոթ շարք՝

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \dots \qquad (18)$$

(17) շարքից կարելի է արտածել և ուրիշ օգտակար վերլուծումներ։ Օրինակ, փոխարինելով այնտեղ x-ը −x-ով և ստացված շարքը հանելով (17) շարքից (այդ դեպքում համարում ենք, որ $|x|<1$), կհանգենք հետևյալ շարքին՝

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2x\left(1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4+\dots\right.$$

$$\left.\dots+\frac{1}{2m+1}x^{2m}+\dots\right). \qquad (19)$$

Որպես կիրառում ցույց տանք, թե ինչպես նրա օգնությամբ կարող է արտածվել անալիզի մի կարևոր բանաձև, որը կրում է Ստիրլինգի (J. Stirling) անունը։

Վերցնենք (19)-ի մեջ $x=\frac{1}{2n+1}$, որտեղ n-ը կամայական բնական թիվ է։ Քանի որ այդ դեպքում

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}=\frac{n+1}{n},$$

ապա կստանանք հետևյալ վերլուծումը՝

$$\log\frac{n+1}{n}=\frac{2}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\dots\right], \qquad (20)$$

որը կարելի է արտագրել այս տեսքով՝

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\dots$$

Այս արտահայտությունը, ակներևորեն, մեկից մեծ է, բայց փոքր է, քան

$$1+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\dots\right]=1+\frac{1}{12n(n+1)}.$$

Այսպիսով, ունենք՝

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n(n+1)},$$

որտեղից, պոտենցելով, կգտնենք

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Այժմ մտցնենք $a_n=\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ վարիանտը։ Այդ դեպքում՝

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e},$$

և նախորդ անհավասարություններից հետևում է, որ

$$1<\frac{a_n}{a_{n+1}}<e^{\frac{1}{12n(n+1)}}=\frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}},$$

այնպես որ, մի կողմից, $a_n > a_{n+1}$, իսկ մյուս կողմից,

$$a_n \cdot e^{-\frac{1}{12n}}<a_{n+1}\cdot e^{-\frac{1}{12(n+1)}}.$$

Այսպիսով, n-ը աճելիս a_n փոփոխականը նվազում է (մնալով ներքևից սահմանափակ, օրինակ, զրոյով), և ձգտում է a վերջավոր սահմանի, իսկ $a_n \cdot e^{-\frac{1}{12n}}$ փոփոխականը աճում է, ձգտելով, ակներևաբար, միևնույն a սահմանին (որովհետև $e^{-\frac{1}{12n}} \to 1$)։ Քանի որ, ցանկացած n-ի դեպքում, տեղի ունեն

$$a_n \cdot e^{-\frac{1}{12n}}<a<a_n$$

անհավասարությունները, ապա կգտնվի այնպիսի θ թիվ, զրոյի և մեկի միջև պարունակվող, որ

$$a=a_n \cdot e^{-\frac{\theta}{12n}} \quad \text{կամ} \quad a_n=a \cdot e^{\frac{\theta}{12n}},$$

(Նկատենք, որ θ թիվը, ընդհանրապես ասած, կախված է n-ից) Հիշելով a_n փոփոխականի սահմանումը, գտնում ենք՝

$$n!=a\sqrt{n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{\theta}{12n}} \qquad (0<\theta<1)։ \tag{21}$$

Այժմ մնում է որոշել a հաստատունի մեծությունը։ Այդ նպատակով հիշենք Վալլիսի բանաձևը [305], որը կարելի է գրել այս տեսքով՝

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2.$$

Փակագծերի մեջ եղած արտահայտությունը ձևափոխենք հետևյալ կերպ՝

$$\frac{2n!!}{(2n-1)!!}=\frac{(2n!!)^2}{2n!}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{2n!}.$$

տեղադրելով այստեղ n!-ի փոխարեն իր արտահայտությունը (21) բանաձևից, իսկ 2n!-ի փոխարեն հետևյալ համանման արտահայտությունը՝

$$2n!=a\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\cdot e^{\frac{\theta'}{24n}}\qquad(0<\theta'<1),$$

տարրական պարզացումներից հետո կստանանք՝

$$\frac{2n!!}{(2n-1)!!}=a\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot e^{\frac{4\theta-\theta'}{24n}},$$

այնպես որ՝

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\,a^2\cdot\frac{n}{2}\cdot e^{\frac{4\theta-\theta'}{12n}}=\frac{a^2}{4}.$$

Այստեղից՝

$$a^2=2\pi \quad \text{և} \quad a=\sqrt{2\pi}.$$

Տեղադրելով a-ի այս արժեքը (21) բանաձևի մեջ, կստանանք հենց Ստիրլինգի բանաձևը՝

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{\theta}{12n}}\qquad(0<\theta<1),$$

որը թույլատրում է հեշտությամբ գնահատել n! ֆակտորիալի մեծությունը n-ի մեծ արժեքների դեպքում։

394. ԲԻՆՈՄԱԿԱՆ ՇԱՐՔ. Վերցնենք, վերջապես, $f(x)=(1+x)^m$, որտեղ m-ը՝ ցանկացած իրական թիվ է, տարբեր 0-ից և բոլոր բնական թվերից (բնական m-ի դեպքում ստացվում է հայտնի վերջավոր վերլուծումը ըստ Նյուտոնի բա-

նաձև)։ Այդ դեպքում Թեյլորի շարքն ունի այս տեսքը [123, 4)]՝

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{1\,.\,2\cdot\ldots\cdot n}x^n+\ldots$$

Այս շարքն անվանում են բինոմական (երկանդամային) շարք, իսկ գործակիցները՝ բինոմական գործակիցներ։ m-ի նկատմամբ արված ենթադրությունների դեպքում այդ գործակիցներից ոչ մեկը զրո չի լինի (ընդհակառակը, եթե m-ը բնական թիվ լիներ, ապա x^{m+1}-ի գործակիցը և բոլոր հետևյալները զրո կդառնային)։ Դալամբերի հայտանիշի օգնությամբ [366] հեշտ է որոշել, որ $|x|<1$ դեպքում բինոմական շարքը (բացարձակ) զուգամետ է, իսկ $|x|>1$ դեպքում՝ տարամետ։ $r_n(x)$ լրացուցիչ անդամի հետազոտումը մենք կկատարենք այն ենթադրությամբ, որ $|x|<1$, ընդ որում միանգամից այն կվերցնենք Կոշիի ձևով (Լագրանժի ձևը այստեղ ևս պատասխան է տալիս x-ի ոչ բոլոր արժեքների դեպքում)։

Քանի որ

$$f^{(n+1)}(x)=m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)(1+x)^{m-n-1},$$

ապա կունենանք՝

$$r_n(x)=\frac{m(m-1)\ldots(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}}{1\,.\,2\cdot\ldots\cdot n}(1-\theta)^n x^{n+1}.$$

Վերախմբավորելով արտադրիչները, ներկայացնենք այն հետևյալ տեսքով՝

$$r_n(x)=\frac{(m-1)(m-2)\ldots(\overline{m-1}-n+1)}{1\,.\,2\cdot\ldots\cdot n}x^n\times$$

$$\times mx(1+\theta x)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

Այս երեք արտահայտություններից առաջինը ներկայացնում է նույն բինոմական շարքի ընդհանուր անդամը, որը, սակայն, համապատասխանում է $m-1$ ցուցչին. քանի որ $|x|<1$ դեպքում բինոմական շարքը զուգամետ է, ինչպիսին էլ լինի

ցուցիչը, ապա այդ արտահայտությունը $n \to \infty$ դեպքում ձգտում է զրոյի։ Ինչ վերաբերում է մյուս երկու արտահայտություններին, ապա երկրորդը իր բացարձակ մեծությամբ պարունակվում է

$$|mx| \cdot (1-|x|)^{m-1} \text{ և } |mx| \cdot (1+|x|)^{m-1}$$

սահմանների միջև, որոնք n-ից կախում չունեն, իսկ երրորդը, ինչպես և 393-ում, փոքր է մեկից։ Այսպիսով, $r_n(x) \to 0$, այսինքն՝ $|x|<1$ համար տեղի ունի հետևյալ վերլուծումը

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}x^n + \ldots, \tag{22}$$

որը նույնպես կապված է Նյուտոնի անվան հետ։

Մենք չդիտարկեցինք նրա կիրառման հարցը $x = \pm 1$ դեպքում։ Հեշտ է գլխի ընկնել, որ բինոմական շարքը հիպերերկրաչափական շարքի մասնավոր դեպքն է և ստացվում է վերջինից $\alpha = -m$, $\beta = \gamma$ և x-ը $-x$-ով փոխարինելու դեպքում։ Դրա հետևանքով, համաձայն n° 390-ի 7)-ի աղյուսակի, հեշտ է կազմել այսպիսի մի աղյուսակ, որը բնութագրում է բինոմական շարքի վարքը նրա զուգամիտության միջակայքի $x = \pm 1$ ծայրերում՝

$x=1$	$m>0$	բացարձ. զուգամետ է
	$0>m>-1$	ոչ բաց. զուգամետ է
	$m \leqslant -1$	տարամետ է
$x=-1$	$m>0$	բացարձ. զուգամետ է
	$m<0$	տարամետ է

Կարելի է ցույց տալ, որ ամեն անգամ, երբ բինոմական շարքը զուգամետ է, նրա գումարը կլինի $(1+x)^m$։ Այստեղ մենք դրա վրա կանգ չենք առնի, ցանկանալով խուսափել լրացուցիչ անդամի մանրակրկիտ հետազոտությունից, որովհետև այդ արդյունքը պարզապես բխում է մի ընդհանուր թեորեմայից, որը կապացուցվի ստորև [409, 6°]։

Նշենք բինոմական շարքի մի քանի մասնավոր դեպքեր, որոնք համապատասխանում են, օրինակ, $m=-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$ արժեքներին՝

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^{n-1}x^n+\cdots \qquad (-1<x<1)$$

(սովորական երկրաչափական պրոգրեսիա), այնուհետև՝

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}x^n+\cdots \quad (-1\leqslant x\leqslant 1) \qquad (23)$$

և

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2n!!}x^n+\cdots \quad (-1<x\leqslant 1)\text{։} \qquad (24)$$

Կարևոր է ընդգծել, որ երբ m-ը ռացիոնալ թիվ է, բինոմական շարքի գումարը տալիս է միշտ արմատի թվաբանական արժեքը։

Դիտողություններ։ 1) Դրա վրա է կառուցված, օրինակ, հետևյալ հետաքրքիր վերլուծումը, որը պատկանում է Շլյոմիլխին (O. Schlömilch)։ Ամենից առաջ, ընդունելով (23)-ի մեջ $x=-y^2$, որտեղ $-1\leqslant y\leqslant 1$, կստանանք, որ

$$\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}y^{2n-1},$$

իսկ այնուհետև, y-ի փոխարեն, տեղադրելով այստեղ $\frac{2z}{1+z^2}$ արտահայտությունը, որտեղ z-ը փոփոխվում է արդեն $-\infty$ և $+\infty$ միջև։ Կստացվի, որ՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^{2n-1}=\begin{cases} z, & \text{երբ } |z|\leqslant 1, \\ \frac{1}{z}, & \text{երբ } |z|>1\text{։}\end{cases}$$

Այս օրինակը հետաքրքիր է նրանով, որ տարբեր միջակայքերում տարբեր անալիտիկ արտահայտություններով՝ z-ով ու $\frac{1}{z}$-ով արտահ-

վող ֆունկցիայի համար միևնույն ժամանակ տրվում է նաև միասնական անալիտիկ արտահայտություն՝ շարքի գումարի տեսքով [տես 46, 3°]:

II. Ֆունկցիաները Թեյլորի շարքի վերլուծելու վերը դիտարկված բոլոր օրինակների մեջ ստացվում էր այնպես, որ x-ի այն բոլոր արժեքների համար, որոնց դեպքում շարքը զուգամետ էր, նրա գումարը հավասար էր լինում այն ֆունկցիային, որի համար շարքը կառուցված էր: Ուստի ընթերցողի մեջ կարող էր կասկած առաջանալ, որ ընդհանրապես բավական է միայն որոշել շարքի զուգամիտությունը, նույնիսկ առանց ստուգելու (5) առնչությունը, որպեսզի ապահովված լինի (4) կամ (6) վերլուծումը:

Իրականում, սակայն, այդ այդպես չէ: Եթե, օրինակ, վերադառնանք n° 132-ի դիտողության մեջ դիտարկված ֆունկցիային՝

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\quad (x\neq 0 \text{ դեպքում}),\quad f(0)=0,$$

ապա դրա համար, ինչպես տեսանք, նույնիսկ $x=0$ դեպքում գոյություն ունեն բոլոր կարգերի ածանցյալներ, բայց այդ կետում բոլորն էլ զրո են դառնում: (6) տեսքի Թեյլորի շարքը, որի բոլոր գործակիցները զրո են, իհարկե, ամեն տեղ զուգամետ է, բայց x-ի և ոչ մի արժեքի դեպքում (բացի $x=0$) չի վերարտադրում ելակետային ֆունկցիայի արժեքը:

395. sin x-ի և cos x-ի ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄԸ ԱՆՎԵՐՋ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼՆԵՐԻ: Վերևում մենք ծանոթացանք կարևոր տարրական ֆունկցիաների անվերջ շարքերի վերլուծման հետ, որտեղ շարքերը դասավորված էին լինում ըստ x-ի աստիճանների, այսինքն՝ այդ ֆունկցիաները ներկայացվում էին «անվերջ բազմանդամների» տեսքով:

Այս պարագրաֆի վերջում, մենք sin x և cos x ֆունկցիաները ներկայացնենք անվերջ արտադրյալների տեսքով, որոնք կարծես թե իրականացնում են համապատասխան «անվերջ բազմանդամների» վերլուծումն արտադրիչների:

Սկսենք մի օժանդակ բանաձևի արտածումից: Հանրահաշվից հայտնի է Մուավրի բանաձևը՝*

$$(\cos z+i\sin z)^m=\cos mz+i\sin mz,$$

որտեղ m-ը կհամարենք բնական թիվ: Ձախ կողմում բացելով փակագծերը սովորական կանոնով, հավասարեցնելով ձախ և աջ կողմերում $i=\sqrt{-1}$ «կեղծ միավորի» գործակիցները, կստանանք

$$\sin mz=m\cos^{m-1}z.\sin z-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}z.\sin^3 z+\dots$$

* Տես, օրինակ, ստորև n° 426,

Եթե $m=2n+1$ *կենտ է, ապա փոխարինելով կոսինուսի զույգ աստիճանները ըստ* $\cos^{2k}z=(1-\sin^2 z)^k$ *բանաձևի, արդյունքը կներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝*

$$\sin(2n+1)z=\sin z\,.\,P(\sin^2 z), \tag{25}$$

որտեղ $P(u)$*-ն՝* n*-րդ աստիճանի ամբողջ բազմանդամ է։*

Այդ բազմանդամը, եթե նրա արմատները նշանակենք $u_1, u_2, \dots, u_n$, *կարելի է վերլուծել արտադրիչների հետևյալ ձևով՝*

$$P(u)=a(u-u_1)\cdots(u-u_n)=A\left(1-\frac{u}{u_1}\right)\cdots\left(1-\frac{u}{u_n}\right).$$

$u_1, u_2, \dots, u_n$ *արմատները հեշտ է որոշել (25)-ից, նկատելով, որ եթե* z*-ը զրո է դարձնում* $\sin(2n+1)z$*-ը, բայց* $\sin z$*-ը թողնում է զրոյից տարբեր, ապա* $\sin^2 z$*-ը անհրաժեշտաբար կլինի* $P(u)$ *բազմանդամի արմատ։ Ակնհայտ է, որ* z*-ի* $z=\frac{\pi}{2n+1}, 2\cdot\frac{\pi}{2n+1}, \dots, n\cdot\frac{\pi}{2n+1}$ *արժեքներին, որոնք գտնվում են* 0*-ի և* $\frac{\pi}{2}$*-ի միջև և գնում են աճման կարգով, համապատասխանում են նույնպես աճող (հետևապես, իրարից տարբեր) արժեքներ՝*

$$u_1=\sin^2\frac{\pi}{2n+1},\quad u_2=\sin^2 2\frac{\pi}{2n+1},\ \dots,\ u_n=\sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}.$$

Վերջապես, $A=P(0)$ *գործակիցը որոշվում է, որպես* $\sin(2n+1)z/\sin z$ *հարաբերության սահման, երբ* $z\to 0$. *այստեղից՝* $A=2n+1$*։*

Այսպիսով, հանգում ենք հետևյալ բանաձևին՝

$$\sin(2n+1)z=(2n+1)\sin z\left(1-\frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\times\cdots$$
$$\cdots\times\left(1-\frac{\sin^2 z}{\sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}}\right).$$

Ընդունելով $z=\frac{x}{2n+1}$, *կարտագրենք այդ այսպես՝*

$$\sin x=(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\times\cdots$$
$$\cdots\times\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}}\right). \tag{26}$$

x-ը համարենք տարբեր 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi, \ldots,$ թվերից, այնպես որ $\sin x \neq 0$։ Վերցնենք k բնական թիվը այն պայմանով, որ $(k+1)\pi > |x|$, և թող լինի $n>k$։ Այժմ $\sin x$-ը ներկայացնենք որպես արտադրյալ՝

$$\sin x = U_k^{(n)} \cdot V_k^{(n)}, \tag{27}$$

որտեղ

$$U_k^{(n)} = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2 k\frac{\pi}{2n+1}}\right)$$

պարունակում է միայն k արտադրիչներ փակագծերի մեջ, իսկ

$$V_k^{(n)} = \left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2 (k+1)\frac{\pi}{2n+1}}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)$$

ընդգրկում է բոլոր մնացածները։

Դիցուք k-ն մնայուն ֆիքսած է. հեշտ է գտնել $U_k^{(n)}$-ի սահմանը, երբ $n\to\infty$, որովհետև այդ արտահայտությունը բաղկացած է որոշակի վերջավոր թվով արտադրիչներից։ Քանի որ

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1} = x,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2 h\frac{\pi}{2n+1}} = \frac{x^2}{h^2\pi^2} \quad (h=1, 2,\ldots,k),$$

ապա՝

$$U_k = \lim_{n\to\infty} U_k^{(n)} = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Շնորհիվ (27)-ի, գոյություն ունի նաև հետևյալ սահմանը՝

$$V_k = \lim_{n\to\infty} V_k^{(n)}, \quad \text{ընդ որում} \quad \sin x = U_k \cdot V_k.$$

Զբաղվենք V_k սահմանի գնահատումով։

Հայտնի է, որ $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ համար տեղի ունեն

$$\frac{2}{\pi}\varphi < \sin\varphi < \varphi$$

անհավասարությունները*: Ուստի՝

$$\sin^2\frac{x}{2n+1} < \frac{x^2}{(2n+1)^2}$$

և

$$\sin^2 h\frac{\pi}{2n+1} > \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{h^2\pi^2}{(2n+1)^2} \qquad (h=k+1, \ldots, n),$$

այնպես որ

$$1 > V_k^{(n)} > \left(1-\frac{x^2}{4(k+1)^2}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1-\frac{x^2}{4n^2}\right): \tag{28}$$

Հետևյալ անվերջ արտադրյալը

$$\prod_{h=h_0}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4h^2}\right)$$

(որտեղ h_0-ն ընտրված է այնպես, որ լինի $4h_0^2 > x^2$) զուգամետ է, որովհետև զուգամետ է $\sum_{h=h_0}^{\infty}\frac{x^2}{4h^2}$ շարքը [389 թեորեմ 5]: Ուստի մնացորդային արտադրյալը՝

$$\bar{V}_k = \prod_{h=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4h^2}\right),$$

երբ $k\to\infty$, պետք է ձգտի 1-ի [389, 2°]: Այնուհետև, մենք միայն կուժեղացնենք (28) անհավասարություններից երկրորդը, եթե գրենք՝

---

* Հիմնավորման կարիք ունի այդ անհավասարություններից միայն առաջինը: Հեշտ է ցույց տալ, որ $\sin\varphi/\varphi$ հարաբերությունը նվազում է $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ միջակայքում, այնպես որ իր փոքրագույն արժեքին է հասնում, երբ $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$1 > V_k^{(n)} > \overline{V}_k.$$

անցնելով սահմանին, երբ $n \to \infty$ *(ֆիքսած* k*-ի դեպքում), կստանանք՝*

$$1 > V_k \cdot \overline{V}_k։$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$\lim_{k \to \infty} V_k = 1, \text{ այնպես որ } \lim_{k \to \infty} U_k = \sin x$$

և մենք, վերջնականորեն, հանգում ենք հետևյալ նշանավոր վերլուծմանը՝

$$\sin x = x \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) =$$

$$= x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \cdots, \qquad (29)$$

որն առաջին անգամ ստացել է Էյլերը։

Հատկանշական է, որ այդ վերլուծումը տեղի ունի նաև սկզբում բացառված $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots,$ *արժեքների համար, որովհետև այդ դեպքում այդ հավասարության երկու մասերն էլ զրո են։ Հեշտ է տեսնել, որ առանձին արտադրիչները հենց համապատասխանում են* $\sin x$*-ի տարբեր արմատներին*։*

Եթե ստացված վերլուծման մեջ դնենք $x = \frac{\pi}{2}$, *ապա կստանանք՝*

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right),$$

որտեղից նորից բխում է Վալլիսի բանաձևը [305, *համեմատել* 388, *2)*]։

Մատնանշենք այդ վերլուծման մի հետաքրքիր կիրառում ևս, այն է նրա մեջ փոխարինելով x*-ը* πx*-ով, ներկայացնենք այն հետևյալ տեսքով՝*

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)։$$

Հիշենք $\Gamma(x)$ *ֆունկցիայի սահմանումը* [390, *(13)*]

* *Արտադրիչները տեղափոխելու հնարավորության վերաբերյալ տես* 390, *3)*։

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}}{1+\frac{x}{n}}$$

և $\Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x)$ առնչությունը [նույն տեղում, (18)]։ Այդ դեպքում՝

$$\Gamma(1-x)=-x\cdot\Gamma(-x)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-x}}{1-\frac{x}{n}}\text{։}$$

Բազմապատկելով, միանգամից հանգում ենք այսպես կոչված լրացման բանաձևին՝

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x},\tag{30}$$

որը նույնպես գտել է Էյլերը. այդ բանաձևը տեղի ունի x-ի ցանկացած ոչ ամբողջ արժեքների դեպքում*։

$\sin x$-ի վերլուծմանը համանման, արտածվում է նաև հետևյալ վերլուծումը՝

$$\cos x=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2}\right),$$

որը բացահայտում է $\cos x$-ի արմատները՝ $\pm\frac{2n-1}{2}\pi$։ Սակայն դա կարող է ստացվել և $\sin x$-ի վերլուծումից,

$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\quad\text{կամ}\quad\cos x=\frac{\sin 2x}{2\sin x}$$

բանաձևով։

Վերջապես, հիշեցնենք

---

* Ընդունելով այստեղ $x=\frac{1}{2}$, մասնավորապես, կգտնենք, որ $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\pi$, քանի որ $x>0$ դեպքում նաև $\Gamma(x)>0$, ապա $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$։

$$\operatorname{sh} x = x \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), \qquad \operatorname{ch} x = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2}\right) \tag{31}$$

վերլուծությունների մասին, որոնք նույնպես կարող են ստացվել նման նկատառումների օգնությամբ։

§ 8. ՄՈՏԱՎՈՐ ՀԱՇՎՈՒՄՆԵՐ ՇԱՐՔԵՐԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ

396. ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։ *Մեր ստացած կոնկրետ վերլուծումների օրինակով մենք բացատրենք, թե անվերջ շարքերը ինչպես կարող են օգտագործվել մոտավոր հաշվումներ կատարելու նպատակով։ Նախ մի շարք ընդհանուր դիտողություններ անենք։*

Եթե մեզ համար անհայտ A *թիվը շարքի է վերլուծված՝*

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots,$$

որտեղ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *հեշտությամբ հաշվվող (սովորաբար՝ ռացիոնալ) թվեր են, և ընդունենք մոտավորապես՝*

$$A \doteq A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

ապա ուղղումը բոլոր թողած անդամների դեն ձգելու կապակցությամբ կարտահայտվի հետևյալ մնացորդով՝

$$\alpha_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

Բավականաչափ մեծ n-*ի դեպքում այդ սխալը կդառնա ցանկացած չափով փոքր, այնպես որ* A_n-*ը կվերարտադրի* A-*ն՝ ամեն մի նախապես տրված ճշգրտությամբ։*

Մենք շահագրգռված ենք իմանալու, թե երբ է հնարավոր α_n *մնացորդի պարզ գնահատումը. դա մեզ թույլ կտա հենց ժամանակին էլ կանգ առնել հաջորդական մասնակի գումարների հաշվման ժամանակ, երբ արդեն ստացված կլինի պահանջված ճշգրտությամբ մոտավորությունը։*

Եթե դիտարկվող շարքը նշանափոխ է ստացվում, ընդ որում նրա անդամները բացարձակ մեծությամբ մոնոտոն նվազում են (շարքը «լայբնիցյան տիպի» է), ապա, ինչպես տեսանք [369, դիտողություն], մնացորդն ունի իր առաջին անդամի նշանը և բացարձակ մեծությամբ նրանից փոքր է։ Պարզության տեսակետից այս գնահատումից ավելի լավը չի կարելի ցանկանալ։

Գործը մի փոքր ավելի բարդանում է դրական շարքի դեպքում։ Այդ դեպքում սովորաբար աշխատում են գտնել ավելի մեծ անդամներ ունեցող մի այլ, դարձյալ դրական շարք՝ $\sum_{1}^{\infty} a'_n$, $a'_n \geq a_n$, *որը հեշտությամբ է*

անընդհատաբար և որպես a_n մնացորդի գնահատում վերցնում են այդ նոր շարքի a'_n մնացորդի մեծությունը՝ $a_n < a'_n$։

Օրինակ. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$ շարքի համար կարելի է ստանալ՝

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} = \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{n}$$

[այս գնահատումը համընկնում է ինտեգրման օգնությամբ 364-ի a)-ում ստացվածի հետ], իսկ $1+\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{m!}$ շարքի համար՝

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot \ldots \cdot m} < \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{m-n}} = \frac{1}{n!\, n}$$

[փաստորեն հենց այս գնահատումով մենք օգտվեցինք 37-ում e թիվը հաշվելիս]։

Սովորաբար որոնվում է A թվի տասնորդական մոտավորությունը, մինչդեռ շարքի անդամները կարող են արտահայտված չլինել տասնորդական կոտորակներով։ Այդ կոտորակները տասնորդական դարձնելու դեպքում նրանց կլորացումը նոր սխալի աղբյուր է դառնում, որը նույնպես պետք է հաշվի առնել։

Վերջապես, նշենք, որ մեզ հետաքրքրող A թիվը որպես գումար ունեցող ոչ ամեն շարք պիտանի է՝ այդ թիվը փաստորեն հաշվելու համար (նույնիսկ եթե նրա անդամները պարզ են, և մնացորդի գնահատումն էլ հեշտությամբ է կատարվում)։ Հարցը՝ զուգամիտության արագության մեջ է, այսինքն՝ մասնակի գումարի A թվին մոտենալու արագության մեջ։

Վերցնենք, օրինակի համար, հետևյալ շարքերը [տես 392 (16) և 393 (18)]՝

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots \quad \text{և} \quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots,$$

որոնք համապատասխանաբար տալիս են $\frac{\pi}{2}$ և $\log 2$ թվերի վերլուծումը։ Այդ թվերը դրանց օգնությամբ հաշվելու համար, ասենք $\frac{1}{10^5}$ ճշտությամբ, պետք է գումարել հիսուն հազար անդամ առաջին դեպքում և

հարյուր հազար՝ երկրորդ դեպքում. այդ, ի հարկե, անիրագործելի է։ Սակայն մենք առանց դժվարության կհաշվենք հիշյալ թվերը նույնիսկ ավելի մեծ ճշգրտությամբ, բայց օգտագործելով ավելի հարմար շարքեր։

397. π ԹՎԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ։ Օգտվենք արկտանգենսի համար հայտնի շարքից [392, (15)]՝

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1)։$$

Եթե վերցնենք $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ապա $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{6}$, և կստանանք

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3} + \dots\right),$$

որն արդեն պիտանի է հաշվելու համար։

Հիշելով արկտանգենսի համար գումարման բանաձևը

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}\ ^*$$

և որպես x և y ընտրելով որևէ երկու կանոնավոր կոտորակներ, որոնք բավարարում են

$$\frac{x+y}{1-xy} = 1 \text{ կամ } (x+1)(y+1) = 2$$

առնչությունը, կստանանք՝

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \left(x - \frac{x^3}{3} + \dots\right) + \left(y - \frac{y^3}{3} + \dots\right)։$$

Օրինակ, ընդունելով $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, կստանանք՝

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} - \dots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} - \dots\right)։$$

Սակայն, π թիվը հաշվելու համար գոյություն ունեն է՛լ ավելի հարմար շարքեր։ Ընդունենք $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{5}$, այդ դեպքում՝

---

* Որն այս տեսքով իրավացի է միայն այն ենթադրությամբ, որ անկյունների գումարն իր բացարձակ մեծությամբ փոքր է $\frac{\pi}{2}$-ից [50]։

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{5},\qquad \operatorname{tg}2\alpha=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{5}{12},\qquad \operatorname{tg}4\alpha=\frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}}=\frac{120}{119}.$$

Այդ թվի՝ 1-ին մոտ լինելու պատճառով, պարզ է, որ 4α անկյունը մոտ է $\frac{\pi}{4}$-ին. ընդունելով $\beta=4\alpha-\frac{\pi}{4}$, կունենանք՝

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}=\frac{1}{239},\quad \textit{այնպես որ}\quad \beta=\operatorname{arctg}\frac{1}{239}.$$

Այստեղից՝

$$\pi=16\alpha-4\beta=16\left\{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^9}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{5^{11}}+\ldots\right\}-4\left\{\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3}+\ldots\right\}$$

Այս՝ Մ ե չ ի ն ի (J. Machin) բանաձևն է։

Այդ բանաձևի օգնությամբ հաշվենք π թիվը, վերցնելով տասնորդակետից հետո 7 թվանշան։ Դրա համար բավական են բանաձևի այն անդամները, որոնք արդեն գրված են։ Քանի որ երկու շարքն էլ Լ ա յ բ ն ի ց յ ա ն տիպի են, ապա նվազելիի և հանելիի մեջ ուղղումները, որոնք կապված են չգրված անդամները դեն ձգելու հետ, համապատասխանաբար, կլինեն՝

$$0<\Delta_1<\frac{16}{13.5^{13}}<\frac{1}{10^8}\quad \textit{և}\quad 0<\Delta_2<\frac{4}{5\cdot 239^5}<\frac{1}{10^8}.$$

Պահպանված անդամները դարձնենք տասնորդական կոտորակներ, կլորացնելով (ըստ լրացման կանոնի) 8-րդ թվանշանով։ Հաշվումները ամփոփված են հետևյալ աղյուսակում ($\pm$-ը փակագծերի մեջ ցույց է տալիս ուղղման նշանը)՝

$\frac{16}{5}=3{,}20000000$	$\frac{16}{3.5^3}=0{,}04266667\ (-)$
$+\frac{16}{5.5^5}=0{,}00102400$	$+\frac{16}{7.5^7}=0{,}00002926\ (-)$
$\frac{16}{9.5^9}=0{,}00000091\ (+)$	$\frac{19}{11.5^{11}}=0{,}00000003\ (-)$
3,20102491	— 0,04269596

$$\frac{4}{239}=0,01673640(+)$$

$$\begin{array}{r} 3,20102491 \\ -\ 0,04269596 \\ \hline 3,15832895 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \frac{4}{239}=0,01673640(+) \\ -\ \frac{4}{3\cdot 239^3}=0,00000010(-) \\ \hline 0,01673630 \end{array}$$

Հաշվի առնելով բոլոր ուղղումները, ունենք՝

$$3,15832895 < 16\alpha < 3,15832898,$$

$$-0,01673632 < -4\beta < -0,01673630,$$

այնպես որ

$$3,14159263 < \pi < 3,14159268\text{։}$$

Այսպիսով, վերջնականապես, $\pi = 3,1415926\ldots$, *ընդ որում բոլոր գրված թվանշանները ճիշտ են։*

398. *ԼՈԳԱՐԻԹՄՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ։ Հաշվման հիմքում դրված է հետևյալ շարքը՝*

$$\log\frac{n+1}{n}=\log(n+1)-\log n=$$

$$=\frac{2}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right], \tag{1}$$

որից մենք արդեն օգտվել ենք n° **384**-*ում* [*տես* (20)] *Ստիրլինգի բանաձևն արտածելու ժամանակ։*

$n=1$ *դեպքում,* log 2-*ի համար կստանանք հետևյալ վերլուծումը՝*

$$\log 2=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^2}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{9^3}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9^4}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{9^5}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{9^6}+\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{9^7}+\frac{1}{17}\cdot\frac{1}{9^8}+\cdots\right)\text{։}$$

Այս շարքը միանգամայն պիտանի է հաշվումների համար։ Ցույց տանք, օրինակ, որ սահմանափակվելով միայն գրված անդամներով, կարելի է գտնել log 2-*ի համար* 9 *հատ ճիշտ տասնորդական թվանշան։*

Իրոք, եթե այդ շարքի անդամները դեն ձգենք սկսած տասներորդից, ապա համապատասխան ուղղումը կլինի՝

$$\Delta=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{19}\cdot\frac{1}{9^9}+\frac{1}{21}\cdot\frac{1}{9^{10}}+\cdots\right)<\frac{2}{3\cdot 19\cdot 9^9}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\cdots\right)=$$

$$=\frac{1}{12\cdot 19\cdot 9^8}<\frac{2}{10^{10}}\text{։}$$

10 թվանշանով հաշվումները ամփոփված են հետևյալ աղյուսակում՝

$$\frac{2}{3}=0{,}66666\,66667\ (-)$$

$$\frac{2}{3\cdot 3\cdot 9}=0{,}02469\,13580\ (+)$$

$$\frac{2}{3\cdot 5\cdot 9^2}=0{,}00164\,60905\ (+)$$

$$\frac{2}{3\cdot 7\cdot 9^3}=0{,}00013\,06421\ (+)$$

$$\frac{2}{3\cdot 9\cdot 9^4}=0{,}00001\,12901\ (-)$$

$$\frac{2}{3\cdot 11\cdot 9^5}=0{,}00000\,10264\ (-)$$

$$\frac{2}{3\cdot 13\cdot 9^6}=0{,}00000\,00965\ (-)$$

$$\frac{2}{3\cdot 15\cdot 9^7}=0{,}00000\,00093\ (-)$$

$$\frac{2}{3\cdot 17\cdot 9^8}=0{,}00000\,00009\ (+)$$

$$0{,}69314\,71805$$

Հաշվի առնելով բոլոր ուղղումները, ունենք՝

$$0{,}6931471802 < \log 2 < 0{,}6931471809,$$

այնպես որ

$$\log 2=0{,}693147180\ldots,$$

և գրված բոլոր 9 թվանշանները ճիշտ են։

Այժմ (1)-ում ընդունելով $n=4$, կգտնենք՝

$$\log 5=2\log 2+\frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{81}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{81^2}+\ldots\right)։$$

Օգտվելով $\log 2$-ի արդեն հաշված արժեքներից, այդ բանաձևով հեշտ է հաշվել $\log 5$, այնուհետև նաև $\log 10=\log 2+\log 5$։ Դրանից հետո կարելի է ցանկացած աստիճանի ճշգրտությամբ հաշվել բնական լոգարիթմներից տասնորդականներին անցնելու

$$M=\frac{1}{\log 10}$$

մոդուլը․ այն հավասար է $M=0{,}434294481\ldots$ Բազմապատկելով մոդուլով, կգտնենք տասնորդական լոգարիթմները՝ $\log_{10}2$ և $\log_{10}5$։

Անցնենք տ ա ս ն ո ր դ ա կ ա ն լոգարիթմների նաև (1) հիմնական բանաձևում՝

$$\log_{10}(n+1)-\log_{10}n=\frac{2M}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\dots\right]: \qquad (2)$$

Այստեղ ընդունելով $n=80=2^3.10$ և ի նկատի ունենալով $n+1=81=3^4$, կգտնենք

$$4\log_{10}3-3\log_{10}2-1=\frac{2M}{161}\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{25921}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{25921^2}+\dots\right],$$

որտեղից հեշտ է գտնել $\log_{10}3$: Ընդունելով, այնուհետև, (2) բանաձևում $n=2400=3\cdot2^3\cdot10^2$, կունենանք $n+1=2401=7^4$ և

$$4\log_{10}7-3\log_{10}2-\log_{10}3-2=$$

$$=\frac{2M}{4801}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{23049601}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{23049601^2}+\dots\right),$$

այնպես որ կգտնենք նաև $\log_{10}7$: Ընտրելով նման թվային կոմբինացիաներ, կարելի է ցանկացած աստիճանի ճշգրտությամբ գտնել պարզ թվերի լոգարիթմները, իսկ դրանցով, բնական բազմապատկիչներով բազմապատկելու և գումարելու միջոցով, կգտնվեն բարդ թվերի լոգարիթմները:

Կարելի էր և այլ կերպ վարվել՝ անմիջականորեն հաշվել հաջորդական բնական թվերի լոգարիթմները և $\log_{10}n$-ից անցնել $\log_{10}(n+1)$-ին՝ (2) բանաձևի օգնությամբ: Այսպես, 1000-ից մինչև 10000 թվերի լոգարիթմները հաշվելու համար, վերցնենք (2) բանաձևի մեջ միայն մեկ անդամ, այսինքն մոտավորապես ընդունենք՝

$$\log_{10}(n+1)-\log_{10}n=\frac{2M}{2n+1} \qquad (10^3\leq n<10^4):$$

Ուղղումն այդ դեպքում կլինի՝

$$\Delta=\frac{2M}{2n+1}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\dots\right]<$$

$$<\frac{2M}{3(2n+1)^3}\left[1+\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\dots\right]=$$

$$=\frac{2M}{3(2n+1)\cdot2n\cdot(2n+2)}<\frac{2M}{24n^3}:$$

Քանի որ մեզ մոտ $n>10^3$, իսկ $2M<1$, ապա՝

$$\Delta<\frac{1}{24\cdot10^9}<\frac{1}{2\cdot10^{10}}:$$

Եթե նույնիսկ բոլոր սխալները միագումարվեին, ապա ընդհանուր առմամբ այնուամենայնիվ սխալը կլիներ ավելի փոքր, քան $\frac{10^4}{2\cdot 10^{10}}=\frac{1}{2\cdot 10^6}$: Բայց հեշտ է խուսափել սխալների այսպիսի կուտակումից, հաշվելով մի ամբողջ շարք ստուգիչ լոգարիթմներ առաջին մեթոդով: Այսպիսի ճանապարհով կարելի է շատ ավելի մեծ ճշգրտության հասնել, պահպանելով միևնույն ժամանակ երկրորդ մեթոդին հատուկ հաշվումների ավտոմատիզմը (որը շատ գնահատելի է, մանավանդ լայնածավալ աղյուսակներ կազմելու ժամանակ):

390. ԱՐՄԱՏՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ: Ամենից ավելի հեշտ է արմատները հաշվել լոգարիթմական աղյուսակների օգնությամբ: Սակայն, եթե առանձին արմատներ պետք է հաշվել ավելի մեծ ճշգրտությամբ, ապա նպատակահարմար է դիմել բինոմական շարքին [394, (22)]՝

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots$$

Ենթադրենք, թե պետք է հաշվել $\sqrt[k]{A}$, ընդ որում արդեն հայտնի է այդ արմատի a մոտավոր արժեքը (պակասորդով կամ ավելորդով), բայց պետք է այն բարելավել: Եթե, ասենք,

$$\frac{A}{a^k}=1+x,$$

որտեղ $|x|$-ը ոչ մեծ կանոնավոր կոտորակ է, ապա արմատը կարելի է ձևափոխել հետևյալ եղանակով՝

$$\sqrt[k]{A}=a\cdot\sqrt[k]{\frac{A}{a^k}}=a\cdot(1+x)^{\frac{1}{k}}$$

և օգտագործել բինոմական շարքը $m=\frac{1}{k}$ դեպքում: Երբեմն ձեռնտու է ելնել

$$\frac{a^k}{A}=1+x'$$

հավասարությունից, եթե $|x'|$-ը նորից ոչ մեծ կանոնավոր կոտորակ է, և դիմել այլ ձևափոխության՝

$$\sqrt[k]{A}=\frac{a}{\sqrt[k]{\frac{a^k}{A}}}=a\cdot(1+x')^{-\frac{1}{k}},$$

որից հետո կիրառել բինոմական շարքը, վերցնելով $m=-\frac{1}{k'}$:

Օրինակի համար, հաշվենք $\sqrt{2}$-ը մեծ ճշգրտությամբ, ելնելով նրա 1,4 մոտավոր արժեքից։ Այդ նպատակով արմատը ձևափոխենք մատնանշված երկու եղանակներից մեկով՝

$$\sqrt{2}=1,4\cdot\sqrt{\frac{2}{1,96}}=1,4\cdot\sqrt{1+\frac{0,04}{1,96}}=1,4\cdot\left(1+\frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{2}}$$

կամ

$$\sqrt{2}=\frac{1,4}{\sqrt{\frac{1,96}{2}}}=\frac{1,4}{\sqrt{1-\frac{0,04}{2}}}=1,4\cdot\left(1-\frac{1}{50}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Հաշվումները հեշտացնելու համար բնական է գերադասել երկրորդ ճանապարհը։ Այսպիսով ունենք՝

$$\sqrt{2}=1,4\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{50}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{50^2}+\frac{5}{16}\cdot\frac{1}{50^3}+\frac{35}{128}\cdot\frac{1}{50^4}+\frac{63}{256}\cdot\frac{1}{50^5}+\dots\right).$$

Սահմանափակվենք գրված անդամներով. դրանք բոլորն էլ ներկայացվում են վերջավոր տասնորդական կոտորակներով՝

$$1+\dots+\frac{5}{16}\cdot\frac{1}{50^3}=0,0101525$$

$$\frac{35}{128}\cdot\frac{1}{50^4}=0,0000004375$$

$$\frac{63}{256}\cdot\frac{1}{50^5}=0,000000007875$$

$$1,0101525445375\times1,4=1,41421356235250.$$

Քանի որ $\frac{1}{50}$-ի աստիճանների գործակիցները նվազում են, ապա ուղղումը կարող է գնահատվել, ինչպես սովորաբար՝

$$\Delta<1,4\cdot\frac{231}{1024\cdot50^6}\cdot\left(1+\frac{1}{50}+\frac{1}{50^2}+\dots\right)=\frac{1,4\cdot231}{1024\cdot50^5\cdot49}<\frac{2,1}{10^{11}},$$

Ուստի

$$1,414213562352<\sqrt{2}<1,414213562373,$$

$$\sqrt{2}=1,4142135623$$

ստորակետից հետո բոլոր տասը թվանշաններն էլ ճիշտ են։

Օգտագործելով

$$\sqrt{2}=1,41\left(1-\frac{119}{20\,000}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

ձևափոխությունը, հեշտ է ստանալ զգալիորեն մեծ քանակությամբ թվանշաններ։ Բերենք նման ձևափոխությունների մի քանի օրինակներ ևս (թողնելով, որ հաշվումները կատարի ինքը՝ ընթերցողը բինոմական շարքի օգնությամբ)՝

$$\sqrt{3}=1,73\cdot\left(1-\frac{71}{30\,000}\right)^{-\frac{1}{2}}\qquad \sqrt{11}=\frac{10}{3}\left(1-\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sqrt[3]{2}=\frac{5}{4}\left(1+\frac{3}{125}\right)^{\frac{1}{3}},\qquad \sqrt[3]{3}=\frac{10}{7}\left(1+\frac{29}{1000}\right)^{\frac{1}{3}}։$$

ՏԱՍՆԵՐԿՈՒԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ՇԱՐՔԵՐ

§ 1. ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅՈՒՆ

400. ՆԵՐԱԾԱԿԱՆ ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ. *Վերևում մենք ուսումնասիրեցինք անվերջ հաջորդականությունները ու նրանց սահմանները, անվերջ շարքերն ու նրանց գումարները. այդ հաջորդականությունների էլեմենտներ կամ շարքերի անդամներ հանդիսանում էին հաստատուն թվերը։ Ճիշտ է, երբեմն նրանց կազմի մեջ թեև մտնում էին, պարամետրի դերում, այս կամ այն փոփոխական մեծությունները, բայց հետազոտության ժամանակ նրանց միշտ էլ վերագրվում էին որոշակի հաստատուն արժեքներ։ Այսպես, օրինակ, երբ մենք ցույց էինք տալիս, որ*

$$1+\frac{x}{1},\ \left(1+\frac{x}{2}\right)^{2},\ \left(1+\frac{x}{3}\right)^{3},\ldots,\ \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n},\ldots$$

հաջորդականությունը ունի e^x *սահմանը, կամ որ*

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

շարքը ունի $\log(1+x)$ *գումարը, մեզ համար* x*-ը հաստատուն թիվ էր։ Հաջորդականության էլեմենտների ու նրա սահմանի կամ շարքի անդամների ու նրա գումարի ֆունկցիոնալ բնույթը մենք ամենևին հաշվի չէինք առնում. իսկ այժմ մեր ուշադրությունը կենտրոնացնելու ենք հենց այդ հանգամանքի վրա։*

Ենթադրենք, թե տված է մի հաջորդականություն, որի էլեմենտները հանդիսանում են միևնույն x *փոփոխականի հետևյալ ֆունկցիաները՝*

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots, \tag{1}$$

որոնք որոշված են նրա փոփոխության մի որոշ $X=\{x\}$* *տիրույթում։ Դիցուք* X*-ից վերցրած յուրաքանչյուր* x*-ի համար այդ հաջորդականությունն ունի վերջավոր սահման. քանի որ այդ սահմանը լրիվին որոշվում է* x*-ի արժեքով, ապա նա նույնպես ներկայացնում է* x*-ի ֆունկցիա (*X *տիրույթում)՝*

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x), \tag{2}$$

որը մենք կանվանենք սահմանային ֆունկցիա (1) *հաջորդականության համար [կամ* $f_n(x)$ *ֆունկցիայի համար]։*

Այժմ մենք կհետաքրքրվենք ոչ միայն սոսկ սահմանի գոյությամբ x*-ի յուրաքանչյուր առանձին արժեքի դեպքում, այլ սահմանային ֆունկցիայի ֆունկցիոնալ հատկություններով։ Որպեսզի ընթերցողն իր համար կանխապես պարզի, թե այդ դեպքում ի՞նչ բնույթի նոր խնդիրներ են առաջանում, հիշատակենք օրինակի համար դրանցից մեկը։*

Ենթադրենք, թե (1) *հաջորդականության էլեմենտները բոլորն էլ* x*-ի անընդհատ ֆունկցիաներ են մի որոշ* $X=[a,b]$ *միջակայքում. երաշխավորվո՞ւմ է արդյոք դա սահմանային ֆունկցիայի անընդհատությունը։ Ինչպես երևում է հետևյալ օրինակներից, անընդհատության հատկությունը երբեմն փոխանցվում է նաև սահմանային ֆունկցիային, երբեմն էլ ո՛չ։*

Օրինակներ։ Բոլոր դեպքերում $X=[0,1]$։

1) $f_n(x)=x^n$, $f(x)=0$, *երբ* $x<1$, *և* $f(1)=1$ *(խզում՝ երբ* $x=1$*).*

2) $f_n(x)=\dfrac{1}{1+nx}$, $f(x)=0$, *երբ* $x>0$, *և* $f(0)=1$ *(խզում, երբ* $x=0$).

* *Ամենից հաճախ այդ կլինի միջակայք. բայց մենք պահպանում ենք առայժմ մեծագույն ընդհանրություն,* X*-ի տակ հասկանալով ամեն մի անվերջ թվային բազմություն։*

3) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $f(x)=0$ *բոլոր* x*-երի դեպքում (ամեն տեղ անընդհատ է).*

4) $f_n(x) = 2n^2x \cdot e^{-n^2x^2}$, $f(x) = 0$ *բոլոր* x*-երի դեպքում (նույնը)։*

Բնականաբար խնդիր է առաջանում՝ որոշել այն պայմանները, որոնց առկայության դեպքում սահմանային ֆունկցիան պահպանում է անընդհատությունը. դրանով մենք կզբաղվենք n° **404**-*ում։*

Մենք արդեն տեսանք [n° 353], *որ թվային շարքի և նրա գումարի դիտարկումը թվերի հաջորդականության և նրա սահմանի հետազոտության միայն մի այլ ձևն է հանդիսանում։ Այժմ դիտարկենք մի շարք, որի անդամները հանդիսանում են միևնույն* x *փոփոխականի ֆունկցիաներ մի որոշ* X *տիրույթում՝*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \tag{3}$$

Դիցուք այդ շարքը զուգամետ է x*-ի յուրաքանչյուր արժեքի դեպքում* X *տիրույթում. այդ դեպքում նրա գումարը նույնպես կներկայացնի* x*-ի մի որոշ ֆունկցիա՝* $f(x)$*։ Այդ գումարը կորոշվի (2) տեսքի սահմանային հավասարությամբ, եթե* $f_n(x)$*-ի տակ հասկացվի մասնակի գումար՝*

$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x). \tag{4}$$

Հակադարձաբար, կամայականորեն տրված (1) հաջորդականության համար սահմանային ֆունկցիայի հարցը կարելի է դիտարկել որպես (3) շարքի հանրագումարում, եթե ընդունենք՝

$$u_1(x) = f_1(x),\ u_2(x) = f_2(x) - f_1(x), \dots,$$
$$u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \dots$$

Մենք ավելի հաճախ գործ կունենանք ֆունկցիոնալ շարքերի հետ, որովհետև սահմանային ֆունկցիայի հետազոտության այդ ձևը գործնականում սովորաբար ավելի հարմար է։

Այստեղ ևս պետք է ընդգծել, որ մեր մոտակա հետազոտությունների առարկա են լինելու (3) շարքի ոչ միայն զուգա-

միտության հարցերը, այլև նրա գումարի ֆունկցիոնալ հատկությունները։ Որպես օրինակ կարելի է վերցնել շարքի գումարի անընդհատության հարցը, այն ենթադրությամբ, որ նրա բոլոր անդամներն անընդհատ են. սա նույն խնդիրն է, որն հիշվել է վերը։

Ինչպես երևում է, $f(x)$ սահմանային ֆունկցիայի (կամ, որ միևնույն է, շարքի գումարի) ֆունկցիոնալ հատկությունները էապես կախված են x-ի զանազան արժեքների դեպքում $f_n(x)$-ի $f(x)$-ին մոտենալու բնույթից հենց։ Այստեղ ներկայացվող տիպիկ հնարավորությունների ուսումնասիրությամբ մենք կզբաղվենք հաջորդ n°-ում։

401. ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԵՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։ Դիցուք, $\mathcal{X}$-ից վերցրած բոլոր x-երի համար տեղի ունի (2) հավասարությունը։ Սահմանի հենց սահմանումի համաձայն այդ նշանակում է հետևյալը՝ հենց որ $\mathcal{X}$-ից վերցրած x-ի արժեքը ֆիքսած է (որպեսզի գործ ունենանք որոշակի թվային հաջորդականության հետ), յուրաքանչյուր տրված $\varepsilon > 0$ թվով կգտնվի այնպիսի N համար, որ N-ից մեծ բոլոր n-երի դեպքում տեղի ունենա հետևյալ անհավասարությունը՝

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \tag{5}$$

որտեղ x-ի տակ հասկացվում է հենց այն արժեքը, որը նախապես ֆիքսած էր։

Եթե վերցնենք x-ի մի այլ արժեք, ապա կստացվի այլ թվային հաջորդականություն, և, միևնույն ε-ի դեպքում, գտած N համարը կարող է արդեն պիտանի չլինել. այդ դեպքում հարկ կլիներ այն փոխարինել ավելի մեծով։ Բայց x-ը ընդունում է անվերջ բազմությամբ արժեքներ, այնպես որ մեր առջև ունենք սահմանի ձգտող զանազան թվային հաջորդականությունների նույնպիսի անվերջ բազմություն։ Դրանցից ամեն մեկի համար առանձին կգտնվի յուր N-ը. հարց է ծագում՝ գոյություն ունի՞ արդյոք այնպիսի N համար, որը (տրված ε-ի դեպքում) ընդունակ լինի սպասարկել բոլոր այդ հաջորդականություններին միաժամանակ։

Ցույց տանք օրինակներով, որ որոշ դեպքերում այդպիսի N համար գոյություն ունի, իսկ այլ դեպքերում՝ ոչ։

1) Դիցուք նախ՝

$$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2},\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x)=0 \quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

Քանի որ այստեղ՝

$$0\leqslant f_n(x)=\frac{1}{2n}\cdot\frac{2nx}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{1}{2n},$$

ապա միանգամից պարզ է, որ $f_n(x)<\varepsilon$ անհավասարությունը իրականացնելու համար բավական է, ինչպիսին էլ լինի x-ը, վերցնել՝ $n>\frac{1}{2\varepsilon}$։ Այսպիսով, օրինակ, $N=E\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)$ թիվը այդ դեպքում պիտանի է միաժամանակ բոլոր x-երի համար։

2) Այժմ ենթադրենք [400, 3)]՝

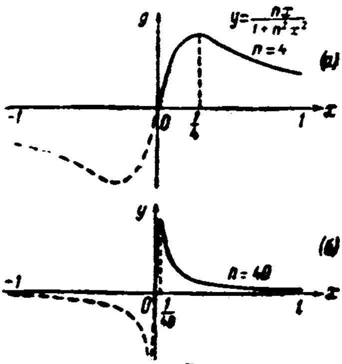
$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2},\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x)=0 \quad (0\leqslant x\leqslant 1)։$$

Ամեն մի ֆիքսած $0<x$-ի համար բավական է վերցնել $n>E\left(\frac{1}{x\varepsilon}\right)$, որպեսզի լինի՝ $f_n(x)<\frac{1}{nx}<\varepsilon$։ Բայց մյուս կողմից, n-ը որչափ էլ մեծ վերցնելու լինենք, $f_n(x)$ ֆունկցիայի համար [0, 1] միջակայքում միշտ կգտնվի մի կետ, այն է՝ $x=\frac{1}{n}$ կետը, որտեղ նրա արժեքը հավասար է $\frac{1}{2}$, այսինքն՝ $f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$։ Այսպիսով, n-ը մեծացնելու հաշվին դարձնել $f_n(x)<\frac{1}{2}$ միաժամանակ x-ի բոլոր արժեքների համար 0-ից մինչև 1՝ ոչ մի կերպ հնարավոր չէ։ Այլ խոսքով, արդեն $\varepsilon=\frac{1}{2}$ դեպքում գոյություն չունի այնպիսի N համար, որը պիտանի լինի միաժամանակ բոլոր x-երի համար։

Գծ. 59-ում պատկերված են այդ ֆունկցիաների գրաֆիկները, որոնք համապատասխանում են $n=4$ և $n=40$ արժեքներ-

րին. բնորոշ է $\frac{1}{2}$ *բարձրություն ունեցող սապատը, որը n-ի աճմանը զուգընթաց տեղափոխվում է աջից ձախ։ Թեև յուրաքանչյուր ուղղաձիգի վրա, առանձին վերցրած, հաջորդական կորերի կետերը n-ի աճմանը զուգընթաց անվերջ մոտենում են x-երի առանցքին, բայց ոչ մի կոր ամբողջությամբ չի հարում այդ առանցքին՝ x = 0-ից մինչև x = 1 ամբողջ երկարությամբ։*

Այլ է գործը 1)-ում դիտարկված ֆունկցիաների հետ. մենք դրանց գրաֆիկները չենք բերում, որովհետև դրանք, օրինակ, n = 4 կամ n = 40 դեպքում, ստացվում են գծ. 59-ում պատկերված գրաֆիկներից, փոքրացնելով բոլոր օրդինատները, համապատասխանաբար, 4 կամ 40 անգամ։ Այդ դեպքում կորերը միանգամից իրենց ամբողջ երկարությամբ հարում են x-երի առանցքին։



Գծ. 59։

Այժմ տանք հիմնական սահմանում՝

Եթե 1) (1) հաջորդականությունը X տիրույթում ունի $f(x)$ սահմանային ֆունկցիա և 2) յուրաքանչյուր $\varepsilon < 0$ թվի համար գոյություն ունի x-ից կախում չունեցող այնպիսի N համար, որ $N < n$-երի դեպքում (5) անհավասարությունը տեղի է ունենում X-ից վերցրած բոլոր x-երի համար միաժամանակ, ապա ասում են, որ (1) հաջորդականությունը զուգամիտում է [կամ՝ $f_n(x)$ ֆունկցիան ձգտում է] դեպի $f(x)$ ֆունկցիան x-ի նկատմամբ հավասարաչափ X տիրույթում։

Այսպիսով, բերված օրինակներից առաջինում $f_n(x)$ *ֆունկցիան ձգտում է զրոյի x-ի նկատմամբ հավասարաչափ* [0, 1] *միջակայքում, իսկ երկրորդում՝ ոչ։*

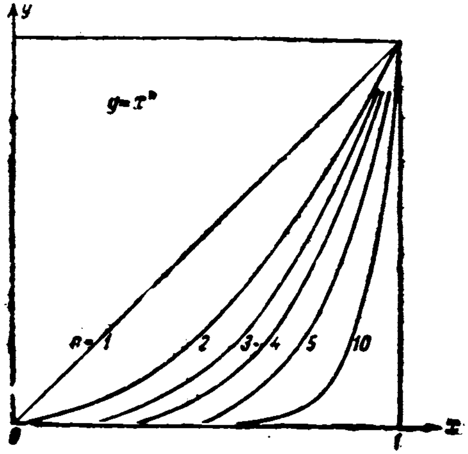
Պետք է ասել, որ նախորդ n°-ում դիտարկված մյուս ֆունկցիաների համար ևս զուգամիտությունը հավասարաչափ չի լինի։

3) $f_n(x) = x^n$ *ֆունկցիայի համար* $x^n < \varepsilon$ *(*$\varepsilon < 1$ *դեպքում)*

անհավասարության անհնարինությունը միաժամանակ բոլոր $1 > x$-երի համար երևում է թեկուզ այն բանից, որ $x^n \to 1$, եթե (ֆիքսած n-ի դեպքում) $x \to 1$։ Գծ. 60-ը պատկերացում է տալիս հավասարաչափության խախտման յուրահատուկ բնույթի մասին. այստեղ սահմանային ֆունկցիան փոփոխվում է թռիչքով, իսկ սապատն անշարժ է։

Դիցուք այժմ

$$4)\ f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \text{ կամ } 5)\ f_n(x) = 2n^2x \cdot e^{-n^2x^2}.$$



Գծ. 60։

$[0, 1]$-ում հավասարաչափ մոտենալու անկարելիությունն այն սահմանային ֆունկցիային, որը $0 < x$-ի համար երկու դեպքում էլ հավասար է 0-ի, հետևում է այն բանից, որ նայած դեպքին,

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \text{ կամ}$$

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n}{e}.$$

Երկրորդ դեպքում հավասարաչափ 0-ի ձգտելուն խանգարող սապատների բարձրությունը, բացի դրանից, դեռ անվերջ էլ աճում է։

x^n և $\frac{1}{1+nx}$ ֆունկցիաների օրինակով ցույց տանք հարցի հետազոտության մի այլ ճանապարհ ևս։

$$x^n < \varepsilon \text{ և } \frac{1}{1+nx} < \varepsilon$$

անհավասարությունները հավասարազոր են համապատասխանաբար, այսպիսիներին՝

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log x} \text{ և } n > \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \quad (0 < x < 1;\ 0 < \varepsilon < 1).$$

Քանի որ աջակողմյան արտահայտությունները անսահման աճում են, առաջինը՝ երբ x-ը մոտենում է 1-ի, իսկ երկրորդը՝ երբ x-ը մոտենում է 0-ի, ապա պարզ է, որ ոչ մի n համար x-ի բոլոր արժեքների դեպքում միաժամանակ չի կարող բավարարել այդ անհավասարություններին։

Այժմ ֆունկցիաների զուգամիտության վերաբերյալ բոլոր վերևում ասվածները փոխանցենք (3) ֆունկցիոնալ շարքի դեպքի վրա։

Շարքը զուգամետ ենթադրելով, դիտարկենք նրա $f(x)$ *գումարը,* $f_n(x)$ *մասնակի գումարը [տես (4)] և, վերջապես, նրա մնացորդը* n-*րդ անդամից հետո՝*

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)=f(x)-f_n(x).$$

Ամեն մի ֆիքսած x-*ի դեպքում՝*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \quad \text{և} \quad \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=0.$$

Եթե $f_n(x)$ մասնակի գումարը ձգտում է շարքի $f(x)$ գումարին՝ x-ի նկատմամբ հավասարաչափ X տիրույթում [կամ, որ միևնույն է, շարքի $\varphi_n(x)$ մնացորդը հավասարաչափ ձգտում է 0-ի], ապա ասում են, որ (3) շարքը հավասարաչափ զուգամետ է այդ տիրույթում։

Այս սահմանումը, ակներևորեն, հավասարազոր է հետևյալին.

(3) շարքը, որը զուգամետ է բոլոր x-երի համար X տիրույթում, կոչվում է հավասարաչափ զուգամետ այդ տիրույթում, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի x-ից կախում չունեցող այնպիսի N համար, որ $N<n$-երի դեպքում

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \quad \text{կամ} \quad |\varphi_n(x)|<\varepsilon \tag{6}$$

անհավասարությունը բավարարվում է X-ից վերցրած բոլոր x-երի համար միաժամանակ*.

Հավասարաչափ և անհավասարաչափ զուգամետ շարքերի օրինակներ, ինարկե, կարելի է կազմել, ձևափոխելով վերևում բերված հաջորդականությունների օրինակները։ Մենք դրանց կավելացնենք մի քանի նոր օրինակներ ևս։

* *Շարքի հավասարաչափ զուգամիտության գաղափարը գիտության մեջ մտցրել են միաժամանակ (1848 թ.) Զեյդելը* (Ph. L. v. Seidel) *և Ստոկսը* (G. C. Stokes), *բայց նրանցից էլ առաջ կիրառվել է Վեյերշտրասի կողմից նրա դասախոսությունների ժամանակ։*

6) Դիտարկենք $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ պրոգրեսիան, որը զուգամետ է $X=(-1,1)$ բաց միջակայքում։ X-ից վերցրած ցանկացած x-ի համար մնացորդը n-րդ անդամից հետո ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$

Եթե n-ը կամայականորեն ֆիքսենք, ապա, ակներևորեն,

$$\lim_{n \to -1+0} |\varphi_n(x)| = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \to 1-0} \varphi_n(x) = \infty\text{։}$$

Թե մեկը և թե մյուսը ցույց է տալիս, որ իրականացնել բոլոր x-երի համար միաժամանակ

$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon \quad \left(\text{եթե } \varepsilon < \frac{1}{2}\right)$$

անհավասարությունը միևնույն n համարի դեպքում՝ անհնարին է։ Պրոգրեսիայի զուգամիտությունը $(-1, 1)$ միջակայքում անհավասարաչափ է. այդ նույնը վերաբերում է $(-1, 0)$ և $(0, 1)$ միջակայքերին առանձին-առանձին։

7) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$ շարքը $X=(-\infty, +\infty)$-ից վերցրած x-ի ցանկացած արժեքի դեպքում զուգամետ է, որովհետև նա բավարարում է Լայբնիցի թեորեմայի պայմաններին [369]։ Թեորեմայի ապացույցից հետո արված դիտողության համաձայն, շարքի մնացորդը գնահատվում է, բացարձակ մեծությամբ, իր առաջին անդամով՝

$$|\varphi_n(x)| < \frac{1}{x^2+n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Այստեղից պարզ է, որ ամբողջ անվերջ միջակայքում շարքը հավասարաչափ զուգամետ է։

8) Համանման ձևով, նաև $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}$ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է $X=(-\infty, +\infty)$-ում, որովհետև $x \neq 0$ դեպքում

$$|\varphi_n(x)| < \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1+nx^2+\dots} < \frac{1}{n},$$

Հետաքրքրական է նշել, որ բացարձակ մեծություններից բաղկացած

$\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ *շարքը, թեև զուգամետ է, բայց անհավասարաչափ։ Իրոք, նրա մնացորդը, $x \neq 0$ դեպքում այսպիսին է՝*

$$\varphi_n(x) = \frac{\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}}{1-\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

ամեն մի ֆիքսած n-ի դեպքում նա ձգտում է 1-ի, երբ $x \to 0$։

Դիտողություն։ Եթե 2) օրինակում, $[0, 1]$ միջակայքի փոխարեն դիտարկենք ցանկացած $[a, 1]$ միջակայք, որտեղ $0<a<1$, ապա այնտեղ արդեն զուգամիտությունը հավասարաչափ կլինի։ Իրոք, բոլոր a x-երի համար

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{n}{1+n^2a^2} < \frac{1}{na^2},$$

իսկ ամեն մի $[0, a]$ միջակայքում զուգամիտությունը, ակնհայտորեն, անհավասարաչափ է։ Այսպիսով, $x=0$ կետի շուրջը կարծես «խտանում է» անհավասարաչափության հատկությունը. այն անվանենք անհավասարաչափության կետ։ Նույնը վերաբերում է նաև 4), 5) և 8) օրինակներին. Նման դեր է կատարում 3) օրինակում $x=1$ կետը, իսկ 6) օրինակում՝ $x=-1$ և $x=1$ երկու կետերը։

Ավելի բարդ դեպքերում անհավասարաչափության կետերը կարող են հանդիպել անվերջ քանակությամբ։

402. ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆԸ. *Բոլցանո-Կոշիի թեորեման, որը տալիս է տված թվային հաջորդականության համար վերջավոր սահմանի գոյության պայմանը («զուգամիտության սկզբունքը»), բնականորեն բերում է X տիրույթում տրված (1) ֆունկցիաների հաջորդականության հավասարաչափ զուգամիտության հետևյալ պայմանին՝*

Որպեսզի (1) հաջորդականությունը 1) ունենա սահմանային ֆունկցիա և 2) դեպի այդ ֆունկցիան զուգամիտի x-ի նկատմամբ հավասարաչափ X տիրույթում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունենա x-ից կախում չունեցող այնպիսի N համար, որ $N<n$-ի և ամեն մի $m=1, 2, 3, \ldots$ դեպքում

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \qquad (7)$$

անհավասարությունը տեղի ունենա X-ից վերցրած **բոլոր** x-երի **համար** միաժամանակ։

[*Այս պահանջը կարելի է համառոտ այսպես բանաձևել՝ զուգամիտության սկզբունքը (1) հաջորդականության համար պետք է իրականանա X-ից վերցրած բոլոր x-երի համար հավասարաչափ։*]

Ապացույց. Անհրաժեշտությունը։ Եթե (1) հաջորդականությունը ունի $f(x)$ սահմանային ֆունկցիա և դեպի այն զուգամիտում է հավասարաչափ X-ում, ապա տրված $\varepsilon>0$ *թվով կգտնվի x-ից կախում չունեցող այնպիսի* N *համար, որ* $N<n$*-երի դեպքում կլինի*

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{2}\varepsilon$$

բոլոր x-երի համար։ Համանմանորեն և

$$|f_{n+m}(x)-f(x)|<\frac{1}{2}\varepsilon\quad(m=1,2,3,\ldots),$$

իսկ այս երկու անհավասարություններից բխում է (7)*-ը։*

Բավարարությունը։ Դիցուք թեորեմայում նշված պահանջը կատարված է։ Այդ դեպքում, X-ից x-ի ինչ արժեք էլ ֆիքսելու լինենք, հանձին (1) հաջորդականության մենք կունենանք մի թվային հաջորդականություն, որի համար բավարարվում է Բոլցանո-Կոշիի պայմանը։ Հետևապես, այդ հաջորդականության համար գոյություն ունի վերջավոր սահման, որով ապացուցված է (1) հաջորդականության համար $f(x)$ *սահմանային ֆունկցիայի գոյությունը։*

Այժմ, կամայականորեն վերցնելով $n>N$ *և x-ը X-ից, սկսենք (7) անհավասարության մեջ անսահման մեծացնել m-ը (հաստատուն n-ի և x-ի դեպքում)։ Անցնելով սահմանի, կստանանք*

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon.$$

Սրանով հաստատվում է $f_n(x)$*-ի հավասարաչափ ձգտելը* $f(x)$*-ին։*

Դժվար չէ ապացուցված պայմանը վերաձևակերպել ֆունկցիոնալ շարքի դեպքի համար՝

Որպեսզի (3) շարքը **հավասարաչափ** զուգամետ լինի X

տիրույթում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենա x-ից կախում չունեցող այնպիսի N համար, որ $N < n$-ի և ցանկացած $m = 1, 2, 3, \ldots$ դեպքում

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x) \right| = \left| u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+m}(x) \right| < \varepsilon \quad (8)$$

անհավասարությունը տեղի ունենա X-ից վերցրած բոլոր x-երի համար միաժամանակ։

Այստեղից, մասնավորապես, բխում է օգտակար հետևանք.

Եթե X տիրույթում հավասարաչափ զուգամիտող (3) շարքի բոլոր անդամները բազմապատկենք միևնույն v(x) ֆունկցիայով, որը X-ում սահմանափակ է՝

$$|v(x)| \leqslant M,$$

ապա հավասարաչափ զուգամիտությունը կպահպանվի։

Ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների կամ շարքերի հավասարաչափ զուգամիտությունը որոշելու համար արտածված պայմանները գործնականում սակավ պիտանի են։ Այդ նպատակով օգտվում են, — հենց դրա վրա հիմնված, բայց կիրառման համար ավելի հարմար, — բավարար հայտանիշներից, որոնք սովորաբար բանաձևվում են շարքերի համար։

403. ՇԱՐՔԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԸ։ *Ահա պարզագույն և ամենահաճախ գործածվող հայտանիշը՝*

ՎԵՅԵՐՇՏՐԱՍՍԻ ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ։ Եթե (3) ֆունկցիոնալ շարքի անդամները X տիրույթում բավարարում են

$$|u_n(x)| \leqslant c_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad (9)$$

անհավասարություններին, որտեղ c_n-երը մի որոշ

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots \quad (C)$$

թվային զուգամետ շարքի անդամներն են, ապա (3) շարքը X-ում հավասարաչափ զուգամետ է։

(9) անհավասարության առկայության դեպքում ասում են, որ (3) շարքը *մաժորվում* է (C) շարքով, կամ՝ որ (C)-ն ծառայում է որպես *մաժորանտ* շարք (3) շարքի համար.*

Իրոք (9)-ից ստանում ենք

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| \le c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+m}$$

անհավասարությունը, որն իրավացի է X տիրույթին պատկանող բոլոր x-երի համար միաժամանակ. Զուգամիտության սկզբունքի համաձայն, որը մենք կիրառում ենք (C) թվային շարքի նկատմամբ, ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար կգտնվի այնպիսի N, որ $N < n$-ի դեպքում նախորդ անհավասարության աջակողմյան մասը կլինի արդեն ε-ից փոքր, իսկ դրա հետ՝ նաև ձախակողմյանը, ըստ որում բոլոր x-երի համար միաժամանակ. Սրանով, ըստ n° 402-ի պայմանի, մեր պնդումն ապացուցված է.

Այսպիսով, օրինակ, ամեն մի միջակայքում *հավասարաչափ* զուգամետ են հետևյալ շարքերը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

եթե միայն $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը բացարձակ *զուգամետ* է. Չէ որ

$$|a_n \sin nx| \le |a_n|, \quad |a_n \cos nx| \le |a_n|,$$

այնպես որ *մաժորանտի* դերն այստեղ խաղում է $\sum\limits_{1}^{\infty} |a_n|$ շարքը.

Եթե տվյալ (3) շարքի նկատմամբ *Վեյերշտրասի* հայտանիշը կիրառելի է լինում, ապա (3) շարքն անհրաժեշտորեն *բացարձակ* զուգամետ է. Դեռ ավելին, (3) շարքի հետ

---

* Այդպիսի շարքը կոչվում է նաև *կանոնավոր* զուգամետ շարք: Վեյերշտրասի հայտանիշը կարճ ձևակերպում են այսպես՝ X տիրույթում կանոնավոր զուգամետ շարքն այդ տիրույթում հավասարաչափ զուգամետ է. Տանոր. Հայհրատխմբ.:

միաժամանակ հավասարաչափ զուգամետ կլինի նաև նրա անդամների բացարձակ մեծություններից կազմված՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| \qquad (10)$$

շարքը։

Սակայն հնարավոր են և այնպիսի դեպքեր, երբ (3) *շարքը հավասարաչափ զուգամետ է, լինելով ոչ բացարձակ զուգամետ։ Դրա օրինակ է ծառայում* n° 401-*ի 7) շարքը (որ այդ շարքը բացարձակ զուգամետ չէ, հետևում է հարմոնիկ շարքի հետ բաղդատելուց)։ Հնարավոր է նույնիսկ այնպիսի դրություն, երբ* (3) *շարքը բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ է, բայց* (10) *շարքն այնուամենայնիվ զուգամիտում է անհավասարաչափ* [*տես 8) շարքերը* n° 401-*ում*]։ *Նման դեպքերը նախահայտորեն չեն ընդգրկվում Վեյերշտրասսի հայտանիշով. դրանց ուսումնասիրության համար պետք են ավելի նուրբ հայտանիշներ։*

Հիմա մենք ապացուցենք երկու հայտանիշ, որոնք վերաբերում են հետևյալ տեսքի ֆունկցիոնալ շարքերին՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x) = a_1(x) \cdot b_1(x) + a_2(x) \cdot b_2(x) + \cdots + a_n(x) \cdot b_n(x) + \cdots, \qquad (W)$$

որտեղ $a_n(x)$, $b_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$՝ x-*ի ֆունկցիաներն են* X *տիրույթում։ Մենք կընդօրինակենք այդ հայտանիշները Աբելի և Դիրիխլեի հայտանիշներից* [372] *թվային շարքերի տեսության մեջ. պայմանական կերպով դրանք էլ կանվանենք այդ գիտնականների անունով։*

ԱԲԵԼԻ ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ. Դիցուք

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = b_1(x) + b_2(x) + \cdots + b_n(x) + \cdots \qquad (B)$$

շարքը հավասարաչափ զուգամետ է X տիրույթում, իսկ $a_n(x)$ ֆունկցիաները (յուրաքանչյուր x-ի դեպքում) կազմում են մոնոտոն

հաջորդականություն և խմբովին, — ցանկացած x-ի և n-ի դեպքում, — սահմանափակ են՝

$$|a_n(x)| \leqslant K.$$

Այդ դեպքում (W) շարքը հավասարաչափ զուգամետ է X տիրույթում.

*Ապացույցը համանման է նախկինին. (B) շարքի հավասարաչափ զուգամիտության շնորհիվ N համարը գտնում ենք x-ից անկախ, հիմնվելով n° **402**-ի պայմանի վրա (զուգամիտության սկզբունքի փոխարեն), իսկ այնուհետև Աբելի լեմմայի օգնությամբ [371] ստանում ենք, ինչպես և վերևում (համարելով n>N)՝*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(x)\cdot b_k(x)\right| \leqslant \varepsilon(|a_{n+1}(x)|+2|a_{n+m}(x)|) \leqslant 3K\varepsilon,$$

միաժամանակ բոլոր x-երի համար X-ից. Սրանով մեր պնդումն ապացուցված է.

ԴԻՐԻԽԼԵԻ ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ. Դիցուք (B) շարքի $B_n(x)$ մասնակի գումարները խմբովին, — ցանկացած x-ի և n-ի դեպքում, — սահմանափակ են՝

$$|B_n(x)| \leqslant M,$$

իսկ $a_n(x)$ ֆունկցիաները (յուրաքանչյուր x-ի դեպքում) կազմում են մոնոտոն հաջորդականություն, որը X տիրույթում հավասարաչափ ձգտում է 0-ի. Այդ դեպքում (W) շարքը ևս հավասարաչափ զուգամետ է այդ տիրույթում.

Այստեղ ևս ապացույցը կատարվում է այնպես, ինչպես n 372-ում. Նշենք միայն, որ N համարը կարելի է ընտրել x-ից անկախ հատկապես այն բանի շնորհիվ, որ $a_n(x)$-ը հավասարաչափ ձգտում է 0-ի.

Գործնականում հաճախ $\{a_n(x)\}$ ֆունկցիոնալ հաջորդականության փոխարեն լինում է սովորական $\{a_n\}$ թվային հաջորդականություն կամ $\sum_{1}^{\infty} b_n(x)$ ֆունկցիոնալ շարքը

փոխարեն՝ սովորական $\sum_{1}^{\infty} b_n$ *թվային շարք։ Պետք է նշել, որ այդ դեպքը, իհարկե, մնում է որպես մասնավոր դեպք վերևում դիտարկվածի մեջ. չէ որ* $\{a_n\}$ *զուգամետ հաջորդականություն է և* $\sum_{1}^{\infty} b_n$ *զուգամետ շարքը կարելի է դիտել որպես հավասարաչափ զուգամետ (չկա կախում* x*-ից)։*

Օրինակ, եթե $\{a_n\}$*-ը դրական թվերի հաջորդականություն է, որոնք մոնոտոնորեն ձգտում են* 0*-ի, ապա*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

երկու շարքն էլ, ըստ Դիրիխլեի հայտանիշի, հավասարաչափ զուգամետ են ամեն մի փակ միջակայքում, որը չի պարունակում $2k\pi$ *տեսքի կետեր (որտեղ* $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$*)։ Այդ հետևում է այն բանից, որ, օրինակ [տես 373, 2)],*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \sin ix\right| = \left|\frac{\cos\frac{1}{2}x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}x\right|},$$

և մատնանշված միջակայքում $\sin\frac{1}{2}x$*-ը զրո չի դառնում, այնպես որ գումարի համար կարելի է ցույց տալ* x*-ից կախում չունեցող եզր։*

Հավասարաչափ զուգամիտության հայտանիշների կիրառման հետագա օրինակներ ընթերցողը կգտնի n° 411*-ում և հաջորդներում։*

§ 2. ՇԱՐՔԻ ԳՈՒՄԱՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

404. *ՇԱՐՔԻ ԳՈՒՄԱՐԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ։* *Այժմ մենք անցնում ենք ֆունկցիաներից կազմված շարքի գումարի ֆունկցիոնալ հատկությունների ուսումնասիրությանը, կապված այդ*

ֆունկցիաների հատկությունների հետ։ Վերն արդեն նշվել է հաջորդականությունների տեսակետից և անվերջ շարքերի տեսակետից համարժեքությունը։ Շարադրման մեջ մենք գերադասություն ենք տալիս վերջին տեսակետին, որովհետև կիրառությունների մեջ պատահում են համարյա բացառապես հենց անվերջ շարքերը։ Ֆունկցիոնալ շարքերի մասին ասածները ֆունկցիաների հաջորդականությունների դեպքի վրա տեղափոխելու հարցին կնվիրենք առանձին n° [408]։

Վերևում մտցված հավասարաչափ զուգամիտության գաղափարը հետագա ամբողջ շարադրանքի մեջ վճռական դեր է խաղալու, այնպես որ դրա կարևորությունը կհայտնաբերվի լիակատար ուժով։

Սկսենք շարքի գումարի անընդհատության հարցից, որն արդեն շոշափել ենք n° 400*-ում։*

***ԹԵՈՐԵՄԱ** 1.* Դիցուք $u_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ ֆունկցիաները որոշված են $X=[a, b]$ միջակայքում և բոլորն էլ անընդհատ են այդ միջակայքի մի որոշ $x=x_0$ կետում։ Եթե (3) շարքը X միջակայքում հավասարաչափ զուգամետ է, ապա շարքի $f(x)$ գումարը ևս անընդհատ կլինի $x=x_0$ կետում։

[Նման առաջադրություն առաջին անգամ ձևակերպել է Կոշին. բայց հռչակավոր հեղինակը տվել է դրան չափազանց ընդհանուր ձև, չդնելով հավասարաչափության պահանջ, առանց որի այն դադարում է ճիշտ լինել։]

Ապացույց։ Պահպանելով նախկին նշանակումները, ամեն մի $n=1, 2, 3, \ldots$*-ի և* X*-ից վերցրած ամեն մի* x*-ի դեպքում ունենք՝*

$$f(x)=f_n(x)+\varphi_n(x) \tag{11}$$

և, մասնավորապես,

$$f(x_0)=f_n(x_0)+\varphi_n(x_0),$$

որտեղից՝

$$|f(x)-f(x_0)| \leq |f_n(x)-f_n(x_0)|+|\varphi_n(x)|+|\varphi_n(x_0)|. \tag{12}$$

Այժմ վերցնենք կամայական $\varepsilon>0$*։ Շարքի հավասարաչափ զուգամիտության շնորհիվ կարելի է* n *համարը ֆիքսել այնպես, որ*

$$|\varphi_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{13}$$

անհավասարությունը տեղի ունենա x-*ի բոլոր արժեքների համար* X *միջակայքում (նույն թվում նաև* $x=x_0$-*ի համար)։ Նշենք, որ ֆիքսած* n-*ի դեպքում* $f_n(x)$ *ֆունկցիան ներկայացնում է, որոշ վերջավոր թվով,* $x=x_0$ *կետում անընդհատ,* $u_k(x)$ *ֆունկցիաների գումար։ Ուստի այդ* $f_n(x)$-*ը նույնպես անընդհատ է այդ կետում, և տրված* $\varepsilon>0$ *թվով կգտնվի այնպիսի* $\delta>0$, *որ, երբ* $|x-x_0|<\delta$, *կլինի՝*

$$|f_n(x)-f_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{14}$$

Այդ դեպքում, (12)-ի, (13)-ի և (14)-ի շնորհիվ, $|x-x_0|<\delta$ *անհավասարությունից հետևում է*

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

որը և ապացուցում է թեորեմը։

Ընականաբար, երբ $u_n(x)$ ֆունկցիաները անընդհատ են ամբողջ $X=[a,b]$ միջակայքում, ապա հավասարաչափ զուգամիտության առկայության դեպքում (3) շարքի $f(x)$ գումարը ևս կլինի անընդհատ ամբողջ միջակայքում:

Որ հավասարաչափ զուգամիտության պահանջը թեորեմի տեքստից չի կարելի հանել, ցույց է տալիս, օրինակ,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

շարքը [տես 401, 8)], որի գումարը հավասար է 1-ի, երբ $x\neq 0$ *և հավասար է 0-ի երբ* $x=0$։ *Սակայն հավասարաչափ զուգամիտությունը թեորեմայում դեր է խաղում միայն որպես բավարար պայման, և չպետք է կարծել, որ այդ պայմանն անհրաժեշտ է շարքի գումարի անընդհատության համար*. օրինակ,*

---

* *Այն պայմանը, որը միաժամանակ անհրաժեշտ է և բավարար, ցույց է տվել Արցելան* (C. Arzela)։ *Այդ պայմանը կայանում է զուգամիտության մի առանձին տիպի մեջ, որն ավելի ընդհանուր է, քան հավասարաչափ զուգամիտությունը [այդ՝ «քվազիհավասարաչափ» («կիսա հավասարաչափ») զուգամիտությունն է]։*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2x\left[n^2 e^{-n^2x^2} - (n-1)^2 e^{-(n-1)^2x^2}\right],$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right] \tag{15}$$

շարքերը [*համեմատել* 401, 5) *և* 2)] [0, 1] *միջակայքում ունեն անընդհատ գումար՝* 0, *թեև երկուսն էլ այդ միջակայքում անհավասարաչափ զուգամետ են։*

Սակայն, գոյություն ունեն մի շարք դեպքեր, երբ հավասարաչափ զուգամիտությունն այնուամենայնիվ անհրաժեշտ է լինում։ Այդ ուղղությամբ մենք կապացուցենք հետևյալ թեորեման, որը պատկանում է Դ ի ն ի ի ն (U. Dini)։

ԹԵՈՐԵՄԱ 2. Դիցուք (3) շարքի անդամներն անընդհատ են ամբողջ $X=[a, b]$ միջակայքում և դ ր ա կ ա ն են։ Եթե շարքն ունի f(x) գումար, որը նույնպես անընդհատ է ամբողջ միջակայքում, ապա նա այդ միջակայքում հավասարաչափ զուգամետ է։

Ա պ ա ց ու յ ց։ Դիտարկենք (3) *շարքի մնացորդները՝*

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = f(x) - f_n(x).$$

x-*ից կախված* $\varphi_n(x)$ *ֆունկցիան, որպես երկու անընդհատ ֆունկցիաների տարբերություն, նույնպես անընդհատ է։ Շարքի անդամների դրական լինելու շնորհիվ,* $\{\varphi_n(x)\}$ *հաջորդականությունը, հաստատուն* x-*ի դեպքում, հանդիսանում է նվազող (չաճող) հաջորդականություն՝*

$$\varphi_1(x) \geqslant \varphi_2(x) \geqslant \ldots \geqslant \varphi_n(x) \geqslant \varphi_{n+1}(x) \geqslant \ldots$$

Վերջապես, քանի որ (3) *շարքը զուգամետ է* X *միջակայքում, ապա ամեն մի հաստատուն* x-*ի դեպքում*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0.$$

Ցույց տալու համար շարքի <u>*բացարձակ*</u> *զուգամիտությունը, բավական է ապացուցել, որ յուրաքանչյուր* $\varepsilon > 0$ *թվի համար գոյություն ունի* n-*ի գոնե մեկ արժեք, որի ժամանակ*

$\varphi_n(x)<\varepsilon$ *միաժամանակ բոլոր* x*-երի համար (որովհետև այդ դեպքում* n*-ի մեծ արժեքների համար այդ անհավասարությունն առավել ևս կկատարվեր)։*

Ապացուցենք հակասող ենթադրության մեթոդով։ Ենթադրենք, թե մի որոշ $\varepsilon>0$ *թվի համար այդպիսի* n *համար գոյություն չունի։ Այն ժամանակ ամեն մի* $n=1, 2, 3, \ldots$*-ի դեպքում* X *միջակայքում կգտնվեր այնպիսի* $x=x_n$ *արժեք, որ կլիներ* $\varphi_n(x_n)\geqslant\varepsilon$*։ Այժմ* $\{x_n\}$ *հաջորդականության նկատմամբ, որի բոլոր էլեմենտները պարունակվում են* X *վերջավոր միջակայքում, կիրառենք Բոլցանո-Վեյերշտրասսի թեորեմն [41] և առանձնացնենք նրանցից* $\{x_{n_k}\}$ *մասնակի հաջորդականություն, որը ձգտում է* x_0 *սահմանին։*

$\varphi_m(x)$*-ի անընդհատության շնորհիվ, ունենք՝*

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_m(x_{n_k})=\varphi_m(x_0),$$

ինչպիսին էլ լինի m*-ը։ Մյուս կողմից, ցանկացած* m*-ի դեպքում, բավականաչափ մեծ* k*-երի համար կլիներ՝*

$$n_k \geqslant m, \text{ այնպես որ } \varphi_m(x_{n_k}) \geqslant \varphi_{n_k}(x_{n_k})\geqslant\varepsilon.$$

Այստեղ անցնելով սահմանին, երբ $k\to\infty$*, կգտնեինք, որ*

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_m(x_{n_k}) = \varphi_m(x_0)\geqslant\varepsilon.$$

Իսկ այս անհավասարությունը, որը տեղի ունի ցանկացած m*-ի դեպքում, կհակասեր այն բանին, որ*

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x_0)=0.$$

Թեորեմն ապացուցված է։

405. ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ԱՆՑՈՒՄՆ ԱՆԴԱՄ ԱՌ ԱՆԴԱՄ։ *Բերենք մի թեորեմա ևս, որը հանդիսանում է 1-ին թեորեմայի ընդհանրացումը։ Այդ թեորեմայում* $X=\{x\}$*-ը՝ կամայական անվերջ բազմություն է, որն ունի* a *խտացման կետ (վերջավոր կամ ոչ) [52]. այդ կետն ինքը կարող է չպատկանել բազմությանը։*

ԹԵՈՐԵՄԱ 3. Դիցուք $u_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը որոշված է X տիրույթում և, երբ x-ը ձգտում է a-ին, ունի վերջավոր սահման՝

$$\lim_{x \to a} u_n(x) = c_n. \tag{16}$$

Եթե (3) շարքը X տիրույթում հավասարաչափ զուգամետ է, ապա 1) զուգամետ է այդ սահմաններից կազմված շարքը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = C, \tag{C}$$

և 2) (3) շարքի f(x) գումարը նույնպես ունի սահման, երբ $x \to a$, այն է՝

$$\lim_{x \to a} f(x) = C. \tag{17}$$

Ապացույց։ *Համաձայն* n° 402-*ի հավասարաչափ զուգամիտության պայմանի, կամայականորեն վերցրած* $\varepsilon > 0$ *թվի համար գոյություն ունի այնպիսի* N *համար, որ երբ* $n > N$ *և* $m = 1, 2, 3, \ldots$, *ապա (8) անհավասարությունը տեղի է ունենում* X-*ից վերցրած բոլոր* x-*երի համար*։ *Այստեղ անցնելով սահմանին, երբ* $x \to a$, *և հաշվի առնելով (16)-ը, կգտնենք, որ*

$$|c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+m}| \leqslant \varepsilon,$$

այնպես որ (C) *շարքի համար կատարվում է զուգամիտության պայմանը* [355, 5°]։

Եթե C, C_n *և* γ_n՝ *նշանակում են, ինչպես սովորաբար, նրա գումարը, մասնակի գումարը և մնացորդը, ապա*

$$C = C_n + \gamma_n.$$

Այդ հավասարությունը անդամ առ անդամ հանելով (11)-ից, հեշտ է ստանալ՝

$$|f(x) - C| \leqslant |f_n(x) - C_n| + |\varphi_n(x)| + |\gamma_n|. \tag{18}$$

(3) շարքի հավասարաչափ զուգամիտության և (C) *շարքի զուգամիտության շնորհիվ, ցանկացած* $\varepsilon > 0$ *թվով կարե-*

լի է n-ը ֆիքսել այնչափ մեծ, որ X-ին պատկանող բոլոր x-երի համար լինի՝

$$|\varphi_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}, \text{ նույնպես և } |\gamma_n|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{19}$$

Քանի որ, ակներևորեն,

$$\lim_{x\to a} f_n(x)=\lim_{x\to a}\sum_{k=1}^{n} u_k(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k=C_n,$$

ապա, եթե սահմանափակվենք վերջավոր a-ի դեպքով, կգտնվի այնպիսի $\delta>0$, որ $|x-a|<\delta$ դեպքում կլինի՝

$$|f_n(x)-C|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{20}$$

Այն ժամանակ, x-ի նշած արժեքների դեպքում, (18)-ի, (19)-ի և (20)-ի շնորհիվ, կկատարվի

$$|f(x)-C|<\varepsilon$$

*անհավասարությունը, որը բերում է (17)-ին**.

(17) հավասարումը կարելի է գրել հետևյալ ձևով [տես (16)]՝

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\lim_{x\to a} u_n(x)\right\}.$$

այսպիսով, հավասարաչափ զուգամիտության առկայության դեպքում, շարքի գումարի սահմանը հավասար է նրա անդամների սահմաններից կազմված շարքի գումարին, *կամ, ուրիշ խոսքով,* շարքի մեջ թույլատրելի է սահմանային անցում անդամ առ անդամ:

406. ՇԱՐՔԵՐԻ ԱՆԴԱՄ ԱՌ ԱՆԴԱՄ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄԸ. *Այժմ անցնենք զուգամետ ֆունկցիոնալ շարքի գումարի ինտեգրման հարցի դիտարկմանը.*

---

* *Ընթերցողն այստեղ տեսնում է այն դատողությունը, որն արդեն կիրառվել է 1-ին թեորեմայի ապացուցման համար։*

ԹԵՈՐԵՄԱ 4. **Եթե** $u_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ **ֆունկցիաները անընդհատ են** $X=[a, b]$ **միջակայքում, և նրանցից կազմված** (3) **շարքը այդ միջակայքում հ ա վ ա ս ա ր ա չ ա փ զուգամետ է, ապա** (3) **շարքի** $f(x)$ **գումարի ինտեգրալը ներկայացվում է հետևյալ ձևով՝**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx=$$

$$=\int_a^b u_1(x)dx+\int_a^b u_2(x)dx+\dots+\int_a^b u_n(x)dx+\dots \qquad (21)$$

Ապացույց. $u_n(x)$ *և* $f(x)$ *ֆունկցիաների անընդհատության շնորհիվ* [**404,** *թեորեմ 1*], *այդ բոլոր ինտեգրալների գոյությունն ակներև է. Ինտեգրելով*

$$f(x)=u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x)+\varphi_n(x)$$

նույնությունը $[a, b]$ *միջակայքում, կստանանք՝*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b u_1(x)dx+\int_a^b u_2(x)dx+\dots+\int_a^b u_n(x)dx+\int_a^b \varphi_n(x)dx.$$

Այսպիսով, (21) շարքի n *անդամների գումարը տարբերվում է* $\int_a^b f(x)dx$ *ինտեգրալից* $\int_a^b \varphi_n(x)\,dx$ *լրացուցիչ անդամով.*

(21) վերլուծումն ապացուցելու համար պետք է միայն ցույց տալ, որ

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx=0. \qquad (22)$$

(3) շարքի հավասարաչափ զուգամիտության շնորհիվ, ցանկացած $\varepsilon>0$ *թվի համար կգտնվի այնպիսի* N *համար, որ* $N<n$*-ի դեպքում կլինի*

$$|\varphi_n(x)|<\varepsilon$$

միաժամանակ բոլոր x-*երի համար դիտարկված միջակայքում։ Այդ դեպքում* n-*ի նույն արժեքների համար կլինի՝*

$$\left|\int_a^b \varphi_n(x)\,dx\right| \leq \int_a^b \left|\varphi_n(x)\right| dx < (b-a)\cdot\varepsilon,$$

որը և ապացուցում է (22) սահմանային առնչությունը։

(21) հավասարությունը կարելի է գրել նաև այսպես՝

$$\int_a^b \left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\int_a^b u_n(x)dx\right\},$$

այնպես որ, հավասարաչափ զուգամետ շարքի դեպքում, շարքի գումարի ինտեգրալը հավասար է նրա անդամների ինտեգրալներից կազմած շարքի գումարին, կամ, ուրիշ խոսքով՝ թույլատրելի է շարքի անդամ առ անդամ ինտեգրումը։

Ինչպես և 1-ին թեորեմայի դեպքում, հավասարաչափ զուգամիտության պահանջը էական է (21) վերլուծման ճշտության համար, այսինքն չի կարող պարզապես բաց թողնվել, բայց և այնպես անհրաժեշտ չէ։ n° *404-ում դիտարկված (15) շարքերը լուսաբանում են հենց այդ հանգամանքը։ Նրանք երկուսն էլ* [0,1] *միջակայքում ձգտում են* f(x)=0 *ֆունկցիային անհավասարաչափ։ Բայց առաջինը անդամ առ անդամ ինտեգրելով, մենք որպես ինտեգրալների շարքի գումար կստանանք՝*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 2n^2x\cdot e^{-n^2x^2}dx = \lim_{n\to\infty}\left(1-e^{-n^2}\right) = 1, \text{ *թեև* } \int_0^1 f(x)dx = 0.$$

իսկ երկրորդ շարքի համար նման ձևով կգտնենք՝

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+n^2)}{2n} = 0 = \int_0^1 f(x)dx.$$

Այժմ ցույց տանք 4 թեորեմայի ընդհանրացումը, որը կապված է դիտարկվող ֆունկցիաների անընդհատության պահանջից հրաժարվելու հետ։

ԹԵՈՐԵՄԱ 5: Եթե $u_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ ֆունկցիաները ին-

տեգրելի են* $X=[a, b]$ միջակայքում, և նրանցից կազմված (3) շարքը հ ա վ ա ս ա ր ա չ ա փ զուգամետ է, ապա շարքի $f(x)$ գումարը նույնպես ինտեգրելի կլինի, և տեղի ունի (21) վերլուծումը։

Ա պ ա ց ո ւ յ ց. Կանգ առնենք $f(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրելիության վրա.

Շարքի հավասարաչափ զուգամիտության շնորհիվ, նախապես տրված ε-ով, կարող ենք ֆ ի ք ս ե լ n-ը այնչափ մեծ, որ $[a, b]$ միջակայքի բոլոր կետերում լինի՝

$$|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ կամ } f_n(x)-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)<f_n(x)+\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (23)$$

Վերցնենք $[a, b]$ միջակայքի որևէ $[\alpha, \beta]$ մաս, և դիցուք m-ը, M-ը՝ $f_n(x)$ ֆունկցիայի ճշգրիտ եզրերն են $[\alpha, \beta]$-ում, իսկ $\omega=M-m$՝ նրա տատանումը. $f(x)$ ֆունկցիայի համապատասխան տատանումը նշանակենք Ω-ով. (23)-ի շնորհիվ, $[\alpha, \beta]$ միջակայքի սահմաններում՝

$$m-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)<M+\frac{\varepsilon}{2}, \text{ այնպես որ } \Omega\leqslant\omega+\varepsilon.$$

Այժմ $[a, b]$ միջակայքը սովորական եղանակով տրոհենք $[x_i, x_{i+1}]$ մասնակի միջակայքերի և i նշիչով նշենք այն տատանումները, որոնք վերաբերում են i-րդ միջակայքին. Այդ դեպքում $\Omega_i\leqslant\omega_i+\varepsilon$ և

$$\sum_i \Omega_i \cdot \Delta x_i \leqslant \sum_i \omega_i \cdot \Delta x_i+\varepsilon(b-a).$$

Քանի որ աջակողմյան երկրորդ գումարելին կամայականորեն փոքր է, իսկ առաջինը $\lambda=\max \Delta x_i$-ի հետ միասին ձգտում է զրոյի, ապա այդ նույնն իրավացի է նաև ձախակողմյան արտահայտության նկատմամբ, որտեղից և հետևում է $f(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրելիությունը [285 (8)].

Ինչ վերաբերում է (21) հավասարությանը, ապա այն ապացուցվում է առաջվորեն այնպես, ինչպես և վերևում.

---

* n° 283-ի *իմաստով։*

Օրինակով ցույց տանք, որ հավասարաչափության խախտման դեպքում ինտեգրելի ֆունկցիաներից բաղկացած շարքը կարող է ունենալ ոչ ինտեգրելի գումար։ Ընդունենք $u_n(x)$-ը ($n=1, 2, 3, \ldots$-ի համար) հավասար 1-ի, եթե x-ը արտահայտվում է $\frac{m}{n}$ անկրճատելի կոտորակով, և հավասար 0-ի՝ [0,1] միջակայքի մնացած կետերում։ Այդ ֆունկցիաները, որոնք ունեն միայն վերջավոր թվով խզումներ, ինտեգրելի են [0,1]-ում, իսկ շարքի գումար կլինի Դ ի ր ի խ լ ե ի ֆունկցիան, որը նախահայտորեն անինտեգրելի է [282, 2)]։

Դրա հետ միասին, հասկանալի է (մենք այդ տեսանք օրինակներով), հավասարաչափ զուգամիտությունը անհրաժեշտ պայման չի հանդիսանում ինտեգրելի ֆունկցիաներից կազմված շարքի գումարի ինտեգրելիության համար։*

407. ՇԱՐՔԵՐԻ ԱՆԴԱՄ ԱՌ ԱՆԴԱՄ ԴԻՖԵՐԵՆՑՈՒՄԸ։

Նախորդ n°-ի 4 թեորեմայի օգնությամբ հեշտությամբ ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը։

ԹԵՈՐԵՄԱ 6. Դիցուք $u_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ ֆունկցիաները որոշված են $X=[a, b]$ միջակայքում և ունեն այնտեղ անընդհատ $u'_n(x)$ ածանցյալներ։ Եթե այդ միջակայքում ոչ միայն զուգամետ է (3) շարքը, այլև հ ա վ ա ս ա ր ա չ ա փ զուգամետ է ածանցյալներից կազմված՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = u'_1(x) + n'_2(x) + \cdots + u'_n(x) + \cdots \tag{24}$$

շարքը, ապա (3) շարքի $f(x)$ գումարը ևս ունի ածանցյալ X միջակայքում, ընդ որում՝

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x). \tag{25}$$

Ա պ ա ց ու յ ց։ Նշանակենք (24) շարքի գումարը $f^*(x)$-ով։ 1-ին թեորեմայի շնորհիվ, դա կլինի x-ի անընդհատ ֆունկցիա։

** Այս դեպքի համար ևս Արցելան նշել է միաժամանակ ա ն հ ր ա ժ ե շ տ և բ ա վ ա ր ա ր պայման («քվազի հավասարաչափ զուգամիտության ընդհանրապես»). համեմատել ծանոթությունը 511 էջում։*

Այժմ օգտվելով 4-րդ թեորեմայից, (24) շարքը անդամ առ անդամ ինտեգրենք a-*ից մինչև մի կամայական* x *արժեք* X-*ից. այսպիսով կստանանք՝*

$$\int_a^x f^*(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u'_n(t)dt.$$

Բայց, ակներևորեն, $\int_a^x u'_n(t)dt = u_n(x) - u_n(a)$, *այնպես որ*

$$\int_a^x f^*(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = f(x) - f(a).$$

Քանի որ ձախակողմյան ինտեգրալը, ընդինտեգրալ ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, ունի $f^*(x)$-*ին հավասար ածանցյալը* [293, *12*], *ապա նույն ածանցյալն ունի նաև* f(x) *ֆունկցիան, որն ինտեգրալից տարբերվում է միայն հաստատունով։*

(*25*) *հավասարությունը կարելի է արտագրել* (*եթե օգտըվենք, հետևելով Կոշիին, ածանցյալի համար* D *նշանակումով*) *հետևյալ տեսքով՝*

$$D\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\} = \sum_{n=1}^{\infty} Du_n(x).$$

Այսպիսով, նշված պայմանների դեպքում, շարքի գումարի ածանցյալը ստացվում է հավասար նրա անդամների ածանցյալներից կազմված շարքի գումարին, *կամ, ուրիշ խոսքով,* թույլատրելի է շարքի անդամ առ անդամ դիֆերենցումը։

Դիտարկենք հետևյալ շարքը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} [e^{-(n-1)^2x^2} - e^{-n^2x^2}]$$

և

$$\frac{1}{2}\log(1+x^2)+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{2n}\log(1+n^2x^2)-\frac{1}{2(n-1)}\log(1+(n-1)^2x^2)\right]\text{։}$$

Դրանցից առաջինը հավասարվում է 0-ի, երբ $x=0$, և 1-ի՝ մնացած կետերում, իսկ երկրորդի գումարը ամեն տեղ հավասար է 0-ի։ Եթե այդ շարքերը դիֆերենցենք անդամ առ անդամ, ապա կստացվեն մեզ արդեն ծանոթ (15) շարքերը [404], որոնք ամբողջ [0,1] միջակայքում զուգամիտում են 0-ի, բայց երկուսն էլ անհավասարաչափ։ Առաջին դեպքում, ածանցյալներից կազմված շարքը զուգամետ է նաև $x=0$ դեպքում, որտեղ սկզբնական շարքի գումարը չի կարող ածանցյալ ունենալ, որովհետև այդ կետում խզվում է։ Երկրորդ դեպքում, ընդհակառակը, անդամ առ անդամ դիֆերենցումը ամենուրեք բերում է ճիշտ արդյունքի։ Այդ օրինակներով լուսաբանվում է այն պահանջի դերը, ըստ որի ածանցյալների շարքը պիտի հավասարաչափ զուգամետ լինի. սա էական է, բայց ոչ անհրաժեշտ։

6-րդ թեորեման կարելի է ազատել որոշ. ավելորդ ենթադրություններից, ապացույցը մի փոքր բարդացնելու գնով։

ԹԵՈՐԵՄԱ 7: Դիցուք $u_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ ֆունկցիաները որոշված են $X=[a, b]$ միջակայքում և այնտեղ ունեն $u'_n(x)$ վերջավոր ածանցյալներ։ Եթե (3) շարքը զուգամետ է գոնե մեկ կետում, օրինակ, երբ $x=a$, իսկ ածանցյալներից կազմված (24) շարքը հավասարաչափ զուգամետ է ամբողջ X միջակայքում, ապա այդ դեպքում 1) (3) շարքը հավասարաչափ զուգամետ է ամբողջ միջակայքում և 2) նրա $f(x)$ գումարը X տիրույթում ունի ածանցյալ, որն արտահայտվում է (25) հավասարությամբ։

Ապացույց։ Վերցնենք [a, b] միջակայքում x_0 և x երկու տարբեր կետեր և կազմենք հետևյալ շարքը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x)-u_n(x_0)}{x-x_0}\text{,} \tag{26}$$

Ապացուցենք, որ ամեն մի ֆիքսած x_0-ի դեպքում այդ շարքը զուգամետ է բոլոր $x\neq x_0$ արժեքների համար, ընդ որում x-ի նկատմամբ հավասարաչափ։

Այդ նպատակով, վերցնելով կամայական $\varepsilon>0$ թիվ, (24) շարքի հավասարաչափ զուգամիտության շնորհիվ, կգտնենք այնպիսի N համար, որ երբ $n>N$ և $m=1, 2, 3, \ldots$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m'} u'_k(x)\right| < \varepsilon \tag{27}$$

անհավասարությունը տեղի ունենա x*-ի բոլոր արժեքների համար միաժամանակ։ Այդ ժամանակ ֆիքսելով* n*-ը և* m*-ը, դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան՝*

$$U(x) = \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x).$$

Նրա ածանցյալը՝

$$U'(x) = \sum_{k=n+1}^{n+m} u'_k(x),$$

(27)-ի շնորհիվ, միշտ բացարձակ մեծությամբ $<\varepsilon$*։ Բայց, ակներևորեն,*

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{u_n(x) - u_n(x_0)}{x - x_0} = \frac{U(x) - U(x_0)}{x - x_0} = U'(c),$$

որտեղ c*-ն պարունակվում է* x_0*-ի և* x*-ի միջև [ըստ Լագրանժի թեորեմայի, 118]։ Ուստի, վերջնականապես, բոլոր* $x \neq x_0$ *արժեքների համար*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{u_n(x) - u_n(x_0)}{x - x_0}\right| < \varepsilon.$$

քանի որ այս անհավասարությունը տեղի է ունենում, հենց որ $n > N$*, ինչպիսին էլ որ լինի* $m = 1, 2, 3, \ldots$*, ապա (26) շարքի հավասարաչափ զուգամիտությունը դրանով ապացուցված է։ Այստեղից արդեն բխում են բոլոր մեզ հարկավոր եզրակացությունները։*

Ամենից առաջ, վերցնելով $x_0 = a$*,* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) - u_n(a)}{x - a}$ *շարքի, դրա հետ և*

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)]$$ *շարքի հավասարաչափ զուգամիտու-*

թյունից [տես n 402-ի հետևանքը], նաև $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ *շարքի զուգամիտությունից եզրակացնում ենք* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *շարքի նույնպես հավասարաչափ զուգամիտությունը։*

Եթե նրա գումարը նշանակենք f(x), *ապա (26) շարքի գումարը, որտեղ* x_0*-ն նորից* x*-ի ցանկացած արժեք է* [a, b] *միջակայքում, ակներևորեն, կլինի* $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$*։ Քանի որ հավասարաչափ զուգամետ շարքում կարելի է անցնել սահմանին անդամ առ անդամ (ըստ 4-րդ թեորեմայի), ապա,* x*-ը ձգտեցնելով* x_0*-ին, կստանանք՝*

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\lim_{x\to x_0}\frac{u_n(x)-u_n(x_0)}{x-x_0}\right\}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x_0),$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Դիտողություն. Անդամ առ անդամ սահմանային անցման, անդամ առ անդամ ինտեգրման և դիֆերենցման այս բոլոր թեորեմաները համանմանություն են հաստատում ֆունկցիոնալ շարքերի և վերջավոր թվով ֆունկցիաների գումարների միջև։ Սակայն, այդ համանմանությունը սահմանափակված է որոշ պայմաններով, որոնց բնութագրման մեջ հավասարաչափ զուգամիտությունը բացառիկ տեղ է գրավում։

408. ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍԱԿԵՏԸ. Հետաքրքրական է ստացված արդյունքները վերաձևակերպել ֆունկցիաների հաջորդականության տեսակետից։ Այդ թույլ կտա այստեղ դիտարկվող հարցերը պարզորոշ կերպով կապել երկու սահմանային պրոցեսների տեղափոխման ընդհանուր հարցի հետ, որն այնչափ մեծ դեր է խաղում ամբողջ անալիզում։ Մյուս կողմից կգծվի նաև այն ուղին, որը տանում է դեպի այդ արդյունքների ընդհանրացում։

Այսպիսով, մենք նորից զուգադրում ենք ֆունկցիաների (1) հաջորդականությունը և (3) ֆունկցիոնալ շարքը, համարելով, որ դրանք կապված են հետևյալ առնչություններով՝

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$$

կամ դրանց հավասարազոր առնչություններով՝

$$u_1(x)=f_1(x),\quad u_n(x)=f_n(x)-f_{n-1}(x) \quad (n=2,\ 3,\ldots).$$

Սահմանային ֆունկցիան հաջորդականության համար նույնն է, ինչ որ համապատասխան շարքի գումարը։ Հավասարաչափ զուգամիտությունը կարող է տեղի ունենալ միայն միաժամանակ և՛ հաջորդականության, և՛ շարքի համար։

1. Նախ դիտարկենք հետևյալ սահմանային ֆունկցիայի ս ա հ մ ա ն ի հարցը։ Դիցուք $X=\{x\}$ *բազմությունը, որում որոշված են բոլոր դիտարկվող ֆունկցիաները, ունի* a *խտացման կետ։ Այդ դեպքում* n *405-ի 3 թեորեման կձևակերպվի այսպես՝*

ԹԵՈՐԵՄԱ 3*. Եթե $f_n(x)$ ֆունկցիաները ունեն սահմաններ՝

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \quad (x\text{-ը՝ } X\text{-ից}) \tag{28}$$

և

$$\lim_{x\to a} f_n(x)=C_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots), \tag{29}$$

ընդ որում առաջին դեպքում սահմանին ձգտելը տեղի է ունենում x-ի նկատմամբ հ ա վ ա ս ա ր ա չ ա փ (X տիրույթում), ապա գոյություն ունեն երկու վերջավոր սահմաններն էլ՝

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad \text{և} \quad \lim_{n\to\infty} C_n,$$

որոնք հավասար են միմյանց։

Հետևյալ հավասարությունը՝

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{n\to\infty} C_n,$$

եթե ուշադրության առնենք (28)-ը և (29)-ը, կարելի է արտագրել այսպես՝

$$\lim_{x \to a} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to a} f_n(x).$$

Այսպիսով, դիտարկվող թեորեման x *և* n *ե ր կ ո ւ փոփոխականների* $f_n(x)$ *ֆունկցիայի համար որոշում է երկու հաջորդական սահմանների գոյության և հավասարության պայմանները և անմիջականորեն հարում է* n° *158 հետազոտություններին։*

Ընթերցողին ենք թողնում վերաձևակերպել հաջորդականությունների համար նաև n° **404**-*ի երկու թեորեմները։*

11. *Այժմ թող* X *տիրույթը ներկայացնի* [a, b] *միջակայք, և դիտարկենք սահմանային ֆունկցիայի ի ն տ ե գ ր ա լ ի հարցը. Ահա 5 թեորեմայի նմանը* [406]՝

ԹԵՈՐԵՄԱ 5*. **Եթե** $\{f_n(x)\}$ **հաջորդականությունը բաղկացած է** [a, b] **միջակայքում ինտեգրվող ֆունկցիաներից, և զուգամիտում է իր սահմանային** $f(x)$ **ֆունկցիային** x-**ի նկատմամբ հ ա վ ա ս ա ր ա չ ա փ** [a, b]-**ում, ապա** $f(x)$ **ֆունկցիան ինտեգրելի կլինի** [a, b]-**ում, ընդ որում՝**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Վերջին հավասարությունն արտագրենք այս տեսքով՝

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \{\lim_{n \to \infty} f_n(x)\}dx, \qquad (30)$$

այնպես որ, ինտեգրալին վերաբերող սահմանը, դուրս է գալիս, որ հնարավոր է վերագրել անմիջականորեն ընդինտեգրալ ֆունկցիային։ Այս դեպքում ասում են, որ **թույլատրելի է սահմանային անցում ինտեգրալի ն շ ա ն ի տ ա կ.**

(30) հավասարության մեջ տեղափոխվում են ս ա հ մ ա ն ի և ի ն տ ե գ ր ա լ ի նշանները։ Քանի որ որոշյալ ինտեգրալը նույնպես ստացվում է որոշ սահմանային պրոցեսի հետևանքով, ապա այստեղ դիտարկված հարցը նման է նրան, որն ուսումնասիրվել է n° *158-ում.*

III. *Վերջապես, անցնենք սահմանային ֆունկցիայի ածանցյալի հարցին։ Վերաձևակերպենք 7 թեորեման* [n° 407]։

ԹԵՈՐԵՄԱ 7*. Դիցուք բոլոր $f_n(x)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են $[a, b]$ միջակայքում և ածանցյալների $\{f'_n(x)\}$ հաջորդականությունը զուգամետ է ամբողջ միջակայքում, հ ա վ ա ս ա ր ա չ ա փ x-ի նկատմամբ. եթե հայտնի է, որ ֆունկցիաների $\{f_n(x)\}$ հաջորդականությունը զուգամետ է $[a, b]$ միջակայքի մի կետում, ապա կարելի է պնդել, որ 1) այդ հաջորդականությունը զուգամետ է ամբողջ միջակայքում, և նույնիսկ հ ա վ ա ս ա ր ա չ ա փ, 2) սահմանային $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ընդ որում՝

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} f'_n(x).$$

Եթե արտագրենք այս հավասարությունն ավելի արտահայտիչ կերպով՝

$$D\{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\} = \lim_{n\to\infty} \{Df_n(x)\},$$

ապա միանգամից պարզ կլինի, որ խոսքը վերաբերում է ս ա հ մ ա ն ի և ա ծ ա ն ց յ ա լ ի նշանների տեղափոխմանը. Քանի որ ածանցյալը նույնպես ս ա հ մ ա ն է, ապա այդ հարցը ևս կապված է երկու սահմանային անցումների տեղափոխության հետ։

Վերջում նկատենք հետևյալը. Եթե կանգնենք անվերջ շարքի տեսակետի վրա, ապա n *բնական պարամետրը, բնականորեն, չի կարող փոխարինվել ավելի ընդհանուրով։ Այլ է գործը, եթե խոսքը վերաբերում է ֆունկցիաների հաջորդականությանը. Այստեղ* $f_n(x)$ *ֆունկցիան կարող է փոխարինվել երկու փոփոխականների* $f(x, y)$ *ֆունկցիայով, որտեղ* y*-ը փոփոխվում է* $Y = \{y\}$ *կամայական տիրույթում, որի խտացման կետն է* y_0 *թիվը (վերջավոր կամ ոչ)։ Սահմանային անցումը* $n \to \infty$ *դեպքում փոխարինվում է սահմանային անցումով* $y \to y_0$ *դեպքում. Այս ընդհանուր դեպքին վերաբերող թեորեմների ապացույցը և բանաձևումը դժվարություն չեն ներկայացնում. Այդ ընդհանրացումներից մի քանիսին մենք կվերադառնանք առորև,* XIV *գլխում.*

409. ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՔԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ. Շարադրված ամբողջ տեսության կիրառման կարևորագույն օրի-

նակ է հանդիսանում աստիճանային շարքերի հատկությունների ուսումնասիրությունը։ Մենք կսահմանափակվենք հետևյալ տեսքի շարքերով

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots, \tag{31}$$

որովհետև, ինչպես տեսանք n° 391*-ում, ավելի ընդհանուր տեսքի*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots \tag{31*}$$

շարքերը անմիջականորեն բերվում են (31) տեսքին, փոփոխականի հասարակ փոխարինումով։

Դիցուք (31) շարքն ունի $R > 0$ *զուգամիտության շառավիղ* [368]*․ ամենից առաջ, կարելի է պնդել՝*

1° Ինչպիսի դրական $r (< R)$ թիվ էլ վերցնելու լինենք, (31) շարքը կլինի x-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ $[-r, r]$ փակ միջակայքում։ *Իրոք, քանի որ* $r < R$, *ապա* $x = r$ *դեպքում (31) շարքը բացարձակ զուգամետ է, այսինքն՝ զուգամետ է հետևյալ դրական շարքը՝*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n = |a_0| + |a_1| \cdot r + |a_2| \cdot r^2 + \dots + |a_n| \cdot r^n + \dots \tag{32}$$

Երբ $|x| \leqslant r$, *(31) շարքի անդամները բացարձակ մեծությամբ չեն գերազանցում այդ շարքի համապատասխան անդամներին, որը, այդպիսով, խաղում է մաժորանտ շարքի դեր, և, ըստ Վեյերշտրասսի հայտանիշի, (31) շարքը* x*-ի նշված արժեքների համար հավասարաչափ զուգամետ է։*

Թեև r *թիվը կարելի է վերցնել ցանկացած չափով մոտ* R*-ին, բայց ապացուցածից դեռևս չի բխում հավասարաչափ զուգամիտությունը* $(-R, R)$ *միջակայքում։ Գրոզրեսիայի օրինակից* [401, *6)*] *ընթերցողը տեսնում է, որ հենց զուգամիտու-*

թյան միջակայքի ծայրերը կարող են լինել անհավասարաչափության կետեր։

Այժմ, որպես 1-ին թեորեմայի հետևանք ստանում ենք՝

2^0 (31) աստիճանային շարքի $f(x)$ գումարը ներկայացնում է x-ի անընդհատ ֆունկցիա x-ի բոլոր արժեքների համար $-R$-ի և R-ի միջև։

Զուգամիտության միջակայքի ներսը ինչպիսի $x=x_0$ *արժեք էլ վերցնենք, կարելի է* $R>r$ *թիվը վերցնել այնպես, որ լինի* $|x_0|<r$*։ Կիրառելով 1-ին թեորեման* $[-r, r]$ *միջակայքում, շնորհիվ* 1^0*-ի, կհաստատենք* $f(x)$ *ֆունկցիայի անընդհատությունն այդ միջակայքում, հետևաբար, մասնավորապես, նաև* $x=x_0$ *դեպքում։*

[*Ընթերցողի ուշադրությունն ենք հրավիրում այն բանի վրա, որ մենք խուսափեցինք 1-ին թեորեման կիրառելուց* $(-R,R)$ *միջակայքում, որտեղ հավասարաչափ զուգամիտությունը չի կարելի երաշխավորել։*]

Աստիճանային շարքի անընդհատությունը կարելի է օգտագործել աստիճանային շարքերի նույնության վերաբերյալ թեորեմայի ապացուցման համար (որը հիշեցնում է նման թեորեման բազմանդամների վերաբերյալ)՝

3^0 Եթե երկու աստիճանային շարքեր

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

և

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots$$

$x=0$ կետի շրջակայքում* ունեն միևնույն գումարը, ապա այդ շարքերը **նույնական** են, *այսինքն՝ նրանց համապատասխան գործակիցները զույգ-զույգ հավասար են՝*

---

* *Այստեղ նկատի է առնվում* $x=0$ *կետի ոչ միայն* $(-\delta, \delta)$ *երկկողմանի շրջակայքը, այլև* $[0, \delta)$ *կամ* $(-\delta, 0]$ *միակողմանի շրջակայքը՝*

$$a_0=b_0, \quad a_1=b_1, \; a_2=b_2 \ldots, \; a_n=b_n, \ldots$$

Ընդունելով $x=0$

$$a_0+a_1x+\ldots=b_0+b_1x+\ldots$$

նույնության մեջ, միանգամից համոզվում ենք, որ $a_0=b_0$*։ Դեն ձգելով այդ անդամները գրված նույնության երկու մասից և բաժանելով դրանք* x*-ի վրա (այդ դեպքում մենք հարկադրված ենք համարել* $x\neq 0$*) կստանանք նոր նույնություն*

$$a_1+a_2x+\ldots=b_1+b_2x+\ldots,$$

որը նույնպես տեղի ունի $x=0$ *կետի շրջակայքում, բայց բացառելով հենց ինքը այդ կետը։ Իրավունք չունենալով համարել այստեղ* $x=0$*, մենք, սակայն, կարող ենք* x*-ը ձգտեցնել 0-ի. սահմանում, օգտվելով անընդհատությունից, մենք այնուամենայնիվ կստանանք, որ* $a_1=b_1$*։ Դեն ձգելով այդ անդամները և նորից բաժանելով* $0\neq x$*-ի վրա,* $x\to 0$ *դեպքում կգտնենք, որ* $a_2=b_2$*, և այլն։*

Այս պարզ թեորեման, որը հաստատում է ֆունկցիան աստիճանային շարքի վերածելու միակությունը, ունի հաճախակի կիրառումներ։ Դրա օգնությամբ, օրինակ, միանգամից որոշվում է, որ զույգ (կենտ) ֆունկցիայի (31) տեսքի աստիճանային շարքի վերլուծումը կարող է պարունակել x-ի հենց միայն զույգ (կենտ) աստիճաններ։

Այժմ քննարկենք ավելի նուրբ հարց շարքի վարքի վերաբերյալ՝ իր զուգամիտության միջակայքի $x=\pm R$ *ծայրերից մեկի մոտակայքում (այդ միջակայքը նախապես վերջավոր համարելով)։ Մենք կարող ենք սահմանափակվել* $x=R$ *աջ ծայրով, որի մասին բոլոր ասածները,* x*-ը* $-x$*-ով պարզ փոխարինման օգնությամբ, փոխանցվում է* $x=-R$ *ձախ ծայրի դեպքի վրա։*

Ամենից առաջ պարզ է, որ

4° Եթե (31) աստիճանային շարքը իր զուգամիտության միջակայքի $x=R$ ծայրում տարամետ է, ապա շարքի զուգամիտությունը $[0, R)$ միջակայքում չի կարող հավասարաչափ լինել։

Իրոք, հավասարաչափ զուգամիտության առկայության դեպքում, կարելի կլիներ, 3-րդ թեորեմայի համաձայն մեր

շարքի մեջ անդամ առ անդամ անցնել սահմանին, երբ $x \to R-0$, *և դրանով հաստատել սահմանների՝*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + \cdots + a_n R^n + \cdots$$

շարքի զուգամիտությունը՝ հակառակ մեր ենթադրության։

Տեղի ունի նաև հետևյալ, որոշ իմաստով՝ հակադարձ, թեորեման՝

5° Եթե (31) աստիճանային շարքը զուգամետ է $x=R$ կետում (թեկուզ և ոչ բացարձակ), ապա զուգամիտությունը կլինի անընդհատորեն հավասարաչափ ամբողջ [0, R] միջակայքում։

Իրոք, եթե (31) շարքը ներկայացնենք այսպես՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^n \qquad (0 \leqslant x \leqslant R),$$

ապա պահանջված եզրակացությունը անմիջականորեն բխում է Աբելի հայտանիշից, որովհետև $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ *շարքը զուգամետ է, իսկ* $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ *բազմապատկիչները կազմում են մոնոտոն և հավասարաչափ սահմանափակ հաջորդականություն՝*

$$1 \geqslant \frac{x}{R} \geqslant \left(\frac{x}{R}\right)^2 \geqslant \cdots \geqslant \left(\frac{x}{R}\right)^n \geqslant \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \geqslant \cdots$$

Ապացուցված առաջադրությունը թույլատրում է 1-ին թեորեման կիրառել ամբողջ [0, R] *միջակայքի նկատմամբ։ Այսպիսով, որպես լրացում 2° թեորեմայի, որը վերաբերում է աստիճանային շարքի գումարի անընդհատությանը* (—R, R) *բաց միջակայքում, մենք ստանում ենք (Աբելին պատկանող) այսպիսի թեորեմա՝*

6° ԱԲԵԼԻ ԹԵՈՐԵՄԱՆ. Եթե (31) աստիճանային շարքը զուգամետ է $x=R$ կետում, ապա նրա գումարը պահպանում է ան-

ընդհատությամբ x-ի նաև այդ արժեքի դեպքում (հասկանալի է, որ ձախից), այսինքն՝

$$\lim_{x\to R-0}\sum_{0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{0}^{\infty} a_n R^n.$$

Աբելի թեորեման ունի կարևոր կիրառություններ։

Եթե f(x) *ֆունկցիայի համար ստացվել է աստիճանային շարքի վերլուծում միայն* (—R, R) *բաց միջակայքում՝*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (-R<x<R),$$

բայց ֆունկցիան պահպանում է անընդհատությունը, իսկ շարքը շարունակում է զուգամիտել նաև այդ միջակայքի ծայրերից որևէ մեկում, օրինակ, երբ x=R, *ապա վերլուծումը մնում է ճիշտ նաև այդ ծայրի համար։ Դրանում հեշտ է համոզվել, անցնելով գրված հավասարության մեջ սահմանի, երբ* $x\to R-0$։

Այսպիսով, օրինակ, ստանալով

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+\dots$$

վերլուծումը միայն $-1<x<1$ *բաց միջակայքի համար, բայց, գիտենալով, որ*

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\dots$$

շարքը զուգամետ է, եզրակացնում ենք, որ նրա գումարն է log 2։ *Ճիշտ նույնպես էլ արդարանում է նաև* n° 394-*ի այն պնդումը, որ*

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\dots+\frac{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}x^n+\dots$$

բինոմական շարքը $x=\pm1$ *դեպքում ևս ունի* $(1+x)^m$ *գումարը, եթե միայն շարքը զուգամետ է լինում։*

410. ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՔԵՐԻ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄԸ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑՈՒՄԸ։ *Այժմ աստիճանային շարքերի նկատմամբ կիրառենք* nn° 406-*ի և* 407-*ի թեորեմները։*

Համեմատելով 1° և 5° արդեն ապացուցված հատկությունները n° 406-*ի 4-րդ թեորեմայի հետ, կստանանք՝*

7° (3) աստիճանային շարքը [0, x] միջակայքում, որտեղ $|x| < R$, միշտ կարելի է ինտեգրել անդամ առ անդամ, այնպես որ

$$\int_0^x f(x)\,dx = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \ldots$$

x-ի արժեքն այստեղ կարող է համընկնել նաև զուգամիտության միջակայքի ծայրերից մեկի հետ, եթե այդ ծայրում (3) շարքը զուգամետ է․

Անցնելով (31) աստիճանային շարքի դիֆերենցման հարցին, մենք հանդիպում ենք նախ (31) շարքի անդամ առ անդամ դիֆերենցումից ստացված

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots \tag{33}$$

աստիճանային շարքի զուգամիտության միջակայքը որոշելու անհրաժեշտության հետ․

8° (31) և (33) երկու շարքերի զուգամիտության շառավիղները համընկնում են․

Նշանակենք (33) շարքի կամ, որ միևնույն է,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \ldots + n a_n x^n + \ldots \tag{34}$$

շարքի զուգամիտության շառավիղը R'։ *Վերցնենք ցանկացած այնպիսի* x, *որ լինի* $0 < |x| < R'$․ *այդ դեպքում (34) շարքը բացարձակ զուգամետ է, այսինքն զուգամետ է հետևյալ շարքը՝*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n x^n| =$$

$$= |a_1 x| + 2|a_2 x^2| + 3|a_3 x^3| + \ldots + n|a_n x^n| + \ldots \tag{35}$$

Քանի որ դրա անդամներին չեն գերազանցում (սկսած n=1-ից) հետևյալ շարքի համապատասխան անդամները՝

$$|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n| =$$

$$= |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + |a_3 x^3| + \dots + |a_n x^n| + \dots,$$

ապա այդ շարքը ևս զուգամետ է, իսկ դրա հետ նաև (31') շարքը, ուրեմն, $|x| \leq R$. այստեղից՝

$$R' \leq R. \tag{36}$$

Դիցուք այժմ x-ը վերցրած է կամայականորեն այնպես, որ $0 < |x| < R$. Ընտրենք $|x|$-ի և R-ի միջև մի r թիվ. (32) շարքի զուգամիտության շնորհիվ նրա ընդհանուր անդամը սահմանափակ է՝

$$|a_n| \cdot r^n \leq L \quad (n=1, 2, 3, \dots, \quad L=\text{const.}).$$

Այդ դեպքում՝

$$n|a_n x^n| = n|a_n| \cdot r^n \cdot \left|\frac{x}{r}\right|^n \leq L \cdot n \left|\frac{x}{r}\right|^n \quad (n=1, 2, 3, \dots);$$

այնպես որ (35) շարքի անդամները չեն գերազանցում հետևյալ շարքի համապատասխան անդամներին՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} L \cdot n \left|\frac{x}{r}\right|^n = L \cdot \left|\frac{x}{r}\right| + L \cdot 2 \left|\frac{x}{r}\right|^2 + \dots + L \cdot n \left|\frac{x}{r}\right|^n + \dots,$$

որի զուգամիտության մեջ (ի նկատի առնելով, որ $\left|\frac{x}{r}\right| < 1$) հեշտ է համոզվել, օրինակ, Դալամբերի հայտանիշի օգնությամբ։ Ուստի զուգամետ է (35) շարքը, իսկ դրա հետ միասին նաև (34) շարքը, այնպես որ $|x| \leq R'$. այստեղից՝

$$R \leq R'. \tag{37}$$

Բաղդատելով (36)-ը և (37)-ը՝ գալիս ենք պահանջված արդյունքին։

[Ապացուցված առաջադրությունից, ի միջի այլոց, հետևում է, որ նաև այն շարքը, որը ստացվում է աստիճանային շարքի անդամ առ անդամ ինտեգրումից, ունի նույն զուգամիտության շառավիղը, ինչ որ սկզբնական շարքը։]

Այժմ արդեն դժվար չէ հաստատել, որ

9° (31) աստիճանային շարքը իր զուգամիտության միջակայքի ներսը կարելի է դիֆերենցել անդամ առ անդամ, այնպես որ

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1} + \dots$$

Պնդումը պահպանում է իր ուժը նաև զուգամիտության միջակայքի ծայրի համար, եթե միայն գրված շարքն այդ ծայրում զուգամետ է։

Իրոք, $-R$-ի և R-ի միջև ինչպիսի $x=x_0$ արժեք էլ վերցնելու լինենք, կարելի է $R>r$ թիվը ընտրել այնպես, որ լինի $|x_0|<r$։ Քանի որ R-ը միաժամանակ հանդիսանում է նաև (33) շարքի զուգամիտության շառավիղը [8°], ապա վերջինս $[-r, r]$ միջակայքում հավասարաչափ զուգամետ է [1°]։ Այդ դեպքում, ըստ 6-րդ թեորեմայի, այդ ամբողջ միջակայքում, մասնավորապես, նաև $x=x_0$ կետում, (31) շարքի համար թույլատրելի է անդամ առ անդամ դիֆերենցում։

Եթե խոսքը վերաբերում է զուգամիտության միջակայքի այն ծայրին, որտեղ զուգամետ է (31) շարքը, ապա այդ դեպքում այդ ծայրում ամենից առաջ զուգամետ է նաև (31) շարքը, որը ստացվում է (33) շարքից, երբ նրա անդամները բազմապատկում ենք $\frac{x}{n}$ բազմապատկչով։ Այնուհետև, 1°-ի փոխարեն, պետք է հիմնվել 5°-ի վրա։*

Վերջին՝ 9° թեորեման հնարավորություն է բացում աստիճանային շարքը բ ա զ մ ա պ ա տ ի կ անգամ հաջորդաբար դիֆերենցելու համար։ Այսպիսով, առաջվա պես $f(x)$-ով նշանակելով այն ֆունկցիան, որը ներկայացվում է (31) շարքով նրա

---

* *Մինչև տվյալ անդամի ճշգրտությամբ։*

զուգամիտության միջակայքում, այդ միջակայքի ներսը ամենուրեք կունենանք՝

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

$$f'(x) = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 x + 3 \cdot a_3 x^2 + \dots + n \cdot a_n x^{n-1} + \dots$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 x + \dots + (n-1) \cdot n \cdot a_n x^{n-2} + \dots$$

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + \dots + (n-2)(n-1) n \cdot a_n x^{n-3} + \dots$$

. . . .

. . . .

$$f^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n a_n + \dots$$

. . . .

. . . .

Եթե այս բոլոր հավասարությունների մեջ ընդունենք $x=0$, *ապա կհանգենք աստիճանային շարքի գործակիցների համար հետևյալ, մեզ լավ ծանոթ, արտահայտություններին՝*

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad \dots$$

[*համեմատել* 391 (7)]։ *Եթե խոսքը վերաբերեր (31*) ընդհանուր տեսքի շարքին, ապա այստեղ հարկ կլիներ միայն* $x=0$ *արժեքի փոխարեն տեղադրել* $x=x_0$։ *Այսպիսով՝*

10° Այն ֆունկցիան, որը ներկայացվում է աստիճանային շարքով նրա զուգամիտության միջակայքում, այդ միջակայքի ներսում ունի բոլոր կարգի ածանցյալներ։ Ինքը շարքը այդ ֆունկցիայի նկատմամբ հանդիսանում է ոչ այլ ինչ, եթե ոչ նրա Թեյլորի շարքը։

Այս նշանավոր առաջադրությունը լույս է սփռում ֆունկցիաներն աստիճանային շարքերի վերլուծելու հարցերի վրա, որոնցով մենք զբաղվեցինք նախորդ գլխում։ Մենք տեսնում ենք, որ եթե ֆունկցիան վերլուծվում է աստիճանային շարքի, ապա անհրաժեշտաբար Թեյլորի շարքի է վերլուծվում. հենց այդ պատճառով էլ մենք սահմանափակվում էինք ֆունկցիան հենց իր Թեյլորի շարքով ներկայացնելու հնարավո-

ռությունների հետազոտությամբ. Նկատենք, որ այն ֆունկցիան, որը Թեյլորի շարքի է վերլուծվում ըստ $x-x_0$-ի աստիճանների, կոչվում է անալիտիկ ֆունկցիա x_0 կետում:

Շարադրված տեսությունը տարածվում է նաև բազմապատիկ աստիճանային շարքի վրա։ Որոշակիության համար կանգ առնենք երկու փոփոխականներով շարքի վրա՝

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} a_{ik}(x-x_0)^i (y-y_0)^k.$$

Զուգամիտության տիրույթի ներսը [384] *այդպիսի շարքը նույնպես կարելի է անդամ առ անդամ դիֆերենցել ըստ փոփոխականներից յուրաքանչյուրի և ցանկացած թիվ անգամ։ Այստեղից, ինչպես և քիչ առաջ գործակիցների համար հեշտությամբ ստացվում են հետևյալ արտահայտությունները՝*

$$a_{00}=f(x_0, y_0),\quad a_{10}=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x},\quad a_{01}=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y},$$

$$a_{20}=\frac{1}{2!}\,\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2},\ldots$$

և, ընդհանրապես,

$$a_{ik}=\frac{1}{i!\,k!}\,\frac{\partial^{i+k} f(x_0, y_0)}{\partial x^i \partial y^k}.$$

Այսպիսով, $f(x, y)$ *ֆունկցիայի վերլուծումը (եթե միայն այն հնարավոր է) անհրաժեշտորեն ունի հետևյալ տեսքը՝*

$$f(x,y)=\sum_{i,k=0}^{\infty}\frac{1}{i!\,k!}\,\frac{\partial^{i+k} f(x_0, y_0)}{\partial x^i \partial y^k}(x-x_0)^i (y-y_0)^k.$$

Այս շարքը ևս կոչվում է Թեյլորի շարք. սա բնականորեն հարում է Թեյլորի բանաձևին, որի մասին խոսք է եղել 185-*ում.* Այսպիսի վերլուծման առկայության դեպքում $f(x, y)$ ֆունկցիան կոչվում է անալիտիկ (x_0, y_0) կետում։

§ 3. ԿԻՐԱՌՈՒՄՆԵՐ

411. ԱՆԴԱՄ ԱՌ ԱՆԴԱՄ ՍԱՀՄԱՆԻՆ ԱՆՑՆԵԼՈՒ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ *1)* n° 378-*ի 5)-ում, որոշելով* E(x) *ֆունկցիան*

$$E(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

հավասարությամբ, մենք համոզվեցինք, որ այն բավարարում է այսպիսի առնչության՝

$$E(x+y)=E(x)\cdot E(y)\text{։} \tag{1}$$

Այժմ, ըստ 409-*ի 2 թեորեմայի, ստացվում է, որ* E(x) *ֆունկցիան անընդհատ է* $-\infty$ *մինչև* $+\infty$ *ամբողջ միջակայքում։ Իսկ* n° 75-*ի 1°-ում ապացուցածի շնորհիվ, (1) հավասարման անընդհատ լուծումն անհրաժեշտաբար ունի* $E(x)=A^x$ *տեսքը։ Վերջապես,* A *հիմքը, ակներևորեն, որոշվում է հետևյալ հավասարությամբ*

$$A=E(1)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=e\text{։}$$

Այսպիսով, վերջնականապես, $E(x)=e^x$ [*համեմատել* 392 *(11)*]։

2) Ընթերցողին արդեն հայտնի լոգարիթմական շարքը [393 *(17)*] *կարելի է ստանալ բինոմական շարքից* [394 *(22)*], *հետևյալ առնչության օգնությամբ* [76, *5 (բ)*]՝

$$\log a=\lim_{k\to\infty}k\left(\sqrt[k]{a}-1\right)\quad (k=1,2,3,\cdots)$$

Ընդունենք $a=1+x$ *(որտեղ* $|x|<1$*) և* $(1+x)^{\frac{1}{k}}$-*ի փոխարեն տեղադրենք նրա վերլուծումը՝*

$$(1+x)^{\frac{1}{k}}=1+\frac{1}{k}x+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)}{1\cdot 2}x^2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{k}-n+1\right)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n+\cdots$$

Այդ դեպքում $\log(1+x)$-*ը կներկայանա որպես հետևյալ արտահայտության սահման, երբ* $k\to\infty$,

$$k\left[(1+x)^{\frac{1}{k}}-1\right]=x-\frac{x^2}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\frac{x^3}{3}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{2k}\right)-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{2k}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{(n-1)k}\right)+\cdots \qquad (2)$$

Այս շարքի անդամները (հաստատուն x*-ի դեպքում) որպես փոփոխական պարունակում են* k *բնական պարամետրը: Դրա փոփոխության ամբողջ միջակայքում (2) շարքը հավասարաչափ զուգամետ է* k*-ի նկատմամբ. այս հետևում է այն բանից (ըստ Վեյերշտրասսի հայտանիշի), որ նա մաժորվում է*

$$|x|+\frac{|x|^2}{2}+\frac{|x|^3}{3}+\cdots+\frac{|x|^n}{n}+\cdots \qquad (x=\text{const}.,\ |x|<1)$$

շարքով, որն արդեն k *չի պարունակում: Այդպիսի դեպքում, ըստ 3-րդ թեորեմայի*, (2) շարքում* $k\to\infty$ *դեպքում կարելի է անցնել սահմանի անդամ առ անդամ, որը և բերում է լոգարիթմական շարքի:*

3) Նույն տեսակի հետաքրքիր օրինակ է ստացվում նաև, երբ ցուցչային շարքը արտածվում է հետևյալ առնչությունից [392 *(11)*]

$$e^x=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^k \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

Երկանդամի աստիճանը վերլուծելով ըստ Նյուտոնի բանաձևի, ստանում ենք

$$\left(1+\frac{x}{k}\right)^k=1+k\cdot\frac{x}{k}+\frac{k\cdot(k-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{x}{k}\right)^2+\cdots+$$

$$+\frac{k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\cdot\left(\frac{x}{k}\right)^k+\cdots=$$

$$=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\cdots+$$

$$+\frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{k}\right)+\cdots \qquad (3)$$

Փաստորեն այստեղ, յուրաքանչյուր k*-ի դեպքում, ընդամենը վերջավոր թվով* (=k+1) *անդամներ կան, բայց կարող ենք համարել, որ գործ ունենք*

---

* *Հիշեցնենք, որ* x *փոփոխականի* X *տիրույթը, որի մասին խոսք է գնում 3 թեորեմայում, կարող էր լինել ինչպիսին ցանկանանք, մասնավորապես, նա կարող էր բերվել նաև բնական շարքի (պայմանով, որ* $a=+\infty$*):*

համեմատելով շարքերի հետ, եթե նրանց անդամները համարենք հավասար 0-ի։ Այդ շարքը զուգամիտում է հավասարաչափ բոլոր k-երի համար, որովհետև, ակներևաբար,

$$1+\frac{|x|}{1!}+\frac{|x|^2}{2!}+\cdots+\frac{|x|^n}{n!}+\cdots \qquad (x=\mathrm{const.})$$

զուգամետ շարքը ծառայում է դրա համար որպես մաժորանտ շարք։ Այդպիսի դեպքում, ըստ 3-րդ թեորեմայի, (3) արտահայտության մեջ $k\to\infty$ դեպքում կարելի է անցնել սահմանի անդամ առ անդամ։ Քանի որ այդ շարքի $(n+1)$-րդ անդամը, որը հավասար է 0-ի քանի դեռ $k<n$, $n\leqslant k$-երի դեպքում ունի տեսքը

$$\frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\ \ldots\ \cdot\left(1-\frac{n-1}{k}\right)$$

տեսքը, ապա, երբ $k\to\infty$, դրա սահմանն է $\frac{x^n}{n!}$։ Այս հանգամանքով մենք նորից գալիս ենք e^x ցուցչային ֆունկցիայի վերլուծմանը։

4) Դիտարկենք Դիրիխլեի

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$$

շարքը [373, 3)], որտեղ $\{a_n\}$-ը իրական թվերի մի որոշ հաջորդականություն է։

Եթե

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A$$

շարքը զուգամետ է, ապա, ինչպես գիտենք, Դիրիխլեի շարքը $x>0$ դեպքում հավասարաչափ զուգամետ է և որոշում է x-ի մի որոշ $\varphi(x)$ ֆունկցիա։ Ապացուցենք, որ այդ դեպքում

$$\lim_{x\to+0}\varphi(x)=\lim_{x\to+0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A.$$

Քանի որ ցանկացած $x>0$ դեպքում $\frac{1}{n^x}$ բազմապատկիչները նվազում են n-ի աճելու հետ զուգընթաց, բոլորը միասին սահմանափակված լինելով մեկով, ապա, ըստ Աբելի հայտանիշի, ստացված շարքը զուգամիտում է հավասարաչափ x-ի նկատմամբ։ Այդպիսի դեպքում, 3-րդ թեորե-

մայի հիման վրա, կարելի է այդտեղ $x \to +0$ դեպքում անցնել սահմանի անդամ առ անդամ. հենց այդ էլ տալիս է մեզ պետք եղած արդյունքը։

5) Ապացուցել, որ

$$(ա)\quad \lim_{x \to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{2} \log 2,$$

$$(բ)\quad \lim_{x \to 1-0} (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{1-x^{2n}} = \frac{1}{2} \log 2.$$

(ա) Դիցուք $0<x<1$. քանի որ $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ շարքը զուգամետ է, իսկ $\frac{x^n}{1+x^n}$ բազմապատկիչները, որոնք վերևից սահմանափակված են մեկով, մոնոտոն նվազում են n-ի աճելու հետ զուգընթաց, ապա կիրառելի է Աբելի հայտանիշը, այնպես որ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է բոլոր x-երի համար $(0, 1)$-ում։ Այդտեղ $x \to 1-0$ դեպքում անդամ առ անդամ անցնելով սահմանին (Թեորեմ 3), կստանանք պահանջված արդյունքը։

(բ) Դիցուք այստեղ ևս $0<x<1$. ունենք՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1-x)\,x^n}{1-x^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{1+x+x^2+\ldots+x^{2n-1}}.$$

Այս անգամ $\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1}$ շարքը զուգամետ չէ, բայց նրա մասնակի գումարները սահմանափակ են։ Դրա փոխարեն $\frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{2n-1}}$ բազմապատկիչները ոչ միայն մոնոտոն նվազում են n-ի աճման հետ զուգընթաց, այլև ձգտում են 0-ի $(0, 1)$-ում x-ի համար հավասարաչափ, որովհետև

$$\frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{2n-1}} < \frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}} < \frac{x^n}{nx^n} = \frac{1}{n}.$$

Այսպիսի դեպքում կիրառելի է Դիրիխլեի հայտանիշը. շարքը հավասարաչափ զուգամետ է, թույլատրելի է անդամ առ անդամ սահմանային անցում $x \to 1-0$ դեպքում, և այլն։

6) Խոսելով աստիճանային շարքի մասին, մենք միշտ ենթադրում էինք, որ նրա անդամները դասավորված են ցուցիչների աճման կարգով։ Եթե զուգամիտության միջակայքի ներսում այդ բանն արժեք չունի, քանի որ

շարքը բացարձակ զուգամետ է, ապա, օրինակ, Աբելի թեորեման նրանց այդ վերադասավորումից դառնում է ոչ ճիշտ։

Այդ ստուգել հետևյալ շարքի վրա՝

$$x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^8}{8} + \cdots,$$

որը ստացվել է լոգարիթմական շարքից՝ անդամների տեղափոխությամբ [համեմատել 376, օրինակ 1)]։

7) Նշենք Աբելի թեորեմայի մի հետաքրքիր կիրառում [409, 6°] շարքերի բազմապատկման հարցի կապակցությամբ։

Մենք տեսանք n° 379-ում (Մ ե ր տ ե ն ս ի թեորեման), որ

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{A}$$

և

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{B}$$

երկու զուգամետ շարքերի արտադրյալը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \tag{C}$$

որտեղ $c_n = a_1 b_n + \cdots + a_n b_1$, եթե (A) կամ (B) շարքերից թեկուզ մեկը *բ ա ց ա ր ձ ա կ* զուգամետ է։

Դիցուք այժմ (A) և (B) շարքերը երկուսն էլ զուգամետ են, բայց *ո չ բ ա ց ա ր ձ ա կ*։ Ցույց տանք, որ եթե միայն (C) շարքը զուգամետ է [այդպիսի դեպք հնարավոր է, այդ մենք նույնպես տեսել ենք n° 379-ում], ապա C գումարն անհրաժեշտորեն հավասար է AB-ի։

(A) շարքի զուգամիտությունից ամենից առաջ եզրակացնում ենք, համաձայն n° 368 լեմմայի, որ

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \tag{A*}$$

շարքը *բ ա ց ա ր ձ ա կ* զուգամետ է, երբ $|x| < 1$, այնպես որ այդ շարքի զուգամիտության R շառավիղը անշուշտ ≥ 1։ Այնպիսով, ամեն դեպքում տեղի ունի հետևյալ առնչությունը

$$\lim A(x) = A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

այն է՝ ըստ Աբելի թեորեմայի, եթե R=1, *իսկ եթե* R>1՝ *ըստ* 2° *թեորեմայի* [409]։ *Եթե դիտարկենք. համանման ձևով, հետևյալ շարքերը* (|x|<1 *դեպքում),*

$$B(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \quad (B^*),\qquad C(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \quad (C^*),$$

ապա դրանց համար իրավացի կլինի այն բոլորը՝ ինչ որ ասվել է (A*) *շարքի մասին։*

Կիրառելով այժմ (A*) *և* (B*) *բացարձակ զուգամետ շարքերի նկատմամբ Կոշիի թեորեման* [377], *կունենանք՝*

$$A(x)\cdot B(x)=C(x)։$$

Մնում է միայն այստեղ անցնել սահմանի $x\to 1-0$ *դեպքում, որպեսզի ստանանք պահանջված արդյունքը՝*

$$A\cdot B=C։$$

412. ՇԱՐՔԵՐԻ ԱՆԴԱՄ ԱՌ ԱՆԴԱՄ ԻՆՏԵԳՐՄԱՆ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ *1) Հետևյալ շարքերի անդամ առ անդամ ինտեգրումով* [410, 7°]

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\cdots$$

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}+\cdots$$

[0, x] *միջակայքում (որտեղ* |x|<1) *միանգամից ստացվում են*

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x}=\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$$

վերլուծությունները, որոնք 393-*ում* [*տես* (17)] *և* 392-*ում* [*տես* (15)] *ստացվել էին ավելի բարդ ճանապարհով։ Առաջին վերլուծման իրավացիությունը* x=1 *դեպքում և երկրորդին՝* x=±1 *դեպքում հաստատվում է լրացուցիչ կերպով Աբելի թեորեմայի օգնությամբ* [409 6°]։

2) Եթե հիշենք, որ arcsin x *ֆունկցիայի ածանցյալը, որը հավասար է* $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *շարքի է վերլուծվում հետևյալ կերպ* [394 (24)]՝

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}x^{2n}\qquad(-1<x<1),$$

ապա այդ շարքի անդամ առ անդամ ինտեգրումով հեշտ է ստանալ (մեզ համար նոր) հենց իր արքսինուսի վերլուծությունը՝

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1).$$

Քանի որ այս շարքը զուգամետ է նաև $x=\pm 1$ դեպքում [361, 5) (ա)], ապա, ըստ Աբելի թեորեմայի, վերլուծությունն ուժի մեջ է նաև այդ արժեքների դեպքում։ Մասնավորապես, $x=1$ դեպքում, π թվի համար կունենանք այսպիսի շարք՝

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

Համանման ձևով

$$[\log(x+\sqrt{1+x^2})]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ածանցյալը շարքի վերլուծելով և այն անդամ առ անդամ ինտեգրելով, կգտնենք հետևյալ վերլուծությունը՝

$$\log(x+\sqrt{1+x^2}) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$(-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

Այս ֆունկցիան ոչ այլ ինչ է, եթե ոչ Arsh x, այսինքն, sh x-ի հակադարձ ֆունկցիան [49, 4); 330, դիտողություն]։

3) Շարքերի անդամ առ անդամ ինտեգրման միջոցով ստացվում են անվերջ աստիճանային շարքերի վերլուծություններ այնպիսի ինտեգրալների համար, որոնք տարրական ֆունկցիաների միջոցով չեն արտահայտվում վերջավոր տեսքով [տես 260]։ Այդ վերլուծությունները կարող են օգտագործվել մոտավոր հաշվումների համար։

Այսպես, ելնելով հետևյալ հայտնի վերլուծությունից

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$$

[համեմատել 392 (11)], կգտնենք՝

$$\int_0^x e^{-x^2}\,dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

Խնդիր դնենք 0,0001 ճշգրտությամբ հաշվել հետևյալ ինտեգրալը

$$I_1=\int_0^1 e^{-x^2}\,dx։$$

Ինտեգրալի վերին սահմանը վերցնելով 1, I_1-ի համար կստանանք նշանափոխ թվային շարք, որի անդամները բացարձակ մեծությամբ նվազում են՝

$$I_1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320}+\frac{1}{9360}-\frac{1}{75600}+\cdots$$

Քանի որ ութերորդ անդամն արդեն զգալիորեն ցածր է տված սխալի սահմանից, ապա կպահպանենք միայն առաջին յոթ անդամները։ Համապատասխան (բացասական) Δ ուղղումը հեշտությամբ գնահատվում է՝

$$|\Delta|<\frac{1}{75600}<\frac{1{,}5}{10^5}։$$

Հաշվելով մեր վերցրած անդամները ստորակետից հետո հինգ թվանշանով, կգտնենք՝

$$\begin{array}{rl}
1+\dfrac{1}{10}=1,10000 & \dfrac{1}{3}=0,33333\,(+) \\[2ex]
\dfrac{1}{216}=0,00463\,(-) & \dfrac{1}{42}=0,02381\,(-) \\[2ex]
\dfrac{1}{9360}=0,00011\,(-) & \dfrac{1}{1320}=0,00076\,(-) \\
\hline
1,10474 & 0,35790
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1,10474 \\
0,35790 \\
\hline
0,74684
\end{array}$$

Եթե հաշվի առնենք բոլոր ուղղումները, ապա կստացվի, որ

$$0{,}74681<I_1<0{,}74685, \qquad I_1=0{,}7468\ldots,$$

և բոլոր չորս թվանշաններն էլ ճիշտ են։ [Համեմատել 315, 5)։]

4) Համանմանորեն, քանի որ [համեմատել **302** *(12)]*

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}+\cdots,$$

ապա

$$\int_0^x\frac{\sin x}{x}\,dx=x-\frac{x^3}{3!\,3}+\frac{x^5}{5!\,5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!\,(2n-1)}+\cdots$$

Խնդիր դնենք այդ վերլուծման օգնությամբ հաշվել

$$I_2 = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

ինտեգրալը 0,0001 ճշգրտությամբ։

Համարելով $x = \pi$, ունենք՝

$$I_2 = \pi - \frac{1}{18}\pi^3 + \frac{1}{600}\pi^5 - \frac{1}{35280}\pi^7 + \frac{1}{3265920}\pi^9 - \frac{1}{439084800}\pi^{11} + \dots,$$

այսինքն՝ դարձյալ նշանափոխ շարք, որի անդամները բացարձակ մեծությամբ նվազում են։

Քանի որ վեցերորդ անդամն արդեն փոքր է, քան 0,0007, ապա կսահմանափակվենք հինգ անդամով։ Հաշվում ենք չորս թվանշանով՝

$$\begin{array}{rl} \pi = 3,1416\,(-) \\ \frac{1}{600}\pi^5 = 0,5100\,(+) \\ \frac{1}{3265920}\pi^9 = 0,0091\,(+) \\ \hline 3,6607 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \frac{1}{18}\pi^3 = 1,7226\,(-) \\ \frac{1}{35280}\pi^7 = 0,0856\,(+) \\ \hline 1,8082 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,6607 \\ -\;1,8082 \\ \hline 1,8525 \end{array}$$

Հաշվի առնելով ուղղումները, գալիս ենք հետևյալ եզրակացության՝

$$1,8517 < I_2 < 1,8527, \qquad I_2 = 1,852 \pm 0,001.$$

5) Խնդիր դնենք շարքերի տեսքով ներկայացնել հետևյալ ինտեգրալները՝

$$(\text{ա})\ \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx, \quad (\text{բ})\ \int_0^1 x^{-x}\, dx.$$

(ա) Հիշելով արկտանգենսի վերլուծումը, ունենք՝

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{7}x^6 + \dots\right) dx =$$

$$= 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots$$

Քանի որ ինտեգրալի նշանի տակ գտնված շարքը զուգամետ է $x = 1$ *դեպքում, ապա անդամ առ անդամ ինտեգրումը թույլատրելի է* [410, 7°]։

Մենք արդեն հիշատակել ենք [315, 6)], *որ այդ ինտեգրալի*

$$G = 0,915965\cdots$$

արժեքը հայտնի է, որպես «Կատալանի հաստատուն»։ Այժմ տեսնում ենք, որ

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}.$$

(բ) Արտագրելով ընդինտեգրալ արտահայտությունը $e^{-x \log x}$ *տեսքով, վերլուծում ենք այն ցուցչային շարքի՝*

$$x^{-x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n \log^n x^*}{n!},$$

որը հավասարաչափ զուգամետ է, երբ $0 < x \leqslant 1$, *որովհետև* $|x \log x|$ *ֆունկցիայի մաքսիմումն է* $\frac{1}{e}$ *(ինչպես այդ հեշտ է ստուգել դիֆերենցիալ հաշվի մեթոդներով), այնպես որ գրված շարքը մաժորվում է հետևյալ շարքով՝*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n}{n!}.$$

Ուրեմն, թույլատրելի է անդամ առ անդամ ինտեգրում։ Քանի որ [300, 4)]

$$\int_0^1 x^n \log^n x \, dx = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}},$$

ապա վերջնականապես

$$\int_0^1 x^{-x} \, dx = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^m}.$$

---

* $x = 0$ *դեպքում շարքի անդամները, սկսած* $n = 1$*-ից, փոխարինում ենք սահմանային արժեքներով, այսինքն՝ զրոներով։*

Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\,dx։$$

Եթե օգտվենք լոգարիթմական շարքից [393 (17)], ապա ընդինտեգրալ ֆունկցիայի համար կստանանք

$$1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{n-1} + \cdots$$

վերլուծումը, որն ուժի մեջ է [0, 1] ամբողջ միջակայքում։ Ինտեգրելով անդամ առ անդամ, կգտնենք՝

$$I = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}։$$

Հետագայում կտեսնենք, որ այդ շարքի գումարն է $\frac{\pi^2}{12}$ *։ Այսպիսով մենք հանգում ենք որոնելի ինտեգրալի համար «վերջավոր» արտահայտության՝ $I = \frac{\pi^2}{12}$։

7) Դիցուք պահանջվում է գտնել

$$\int_0^{\pi} \frac{\log(1 + a\cdot\cos x)}{\cos x}\,dx$$

ինտեգրալը ($|a| < 1$)։ (Երբ $x = \frac{\pi}{2}$, ընդինտեգրալ արտահայտությանը վերագրում ենք $x \to \frac{\pi}{2}$ դեպքում սահմանային a արժեքը)։

Օգտվելով լոգարիթմի վերլուծումից, ունենք՝

$$\frac{\log(1 + a\cos x)}{\cos x} = a + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{a^{n+1}}{n+1}\cos^n x,$$

---

* Այն է՝ nn° 420-ի 6)-ում և 422-ում ցույց կտրվի, որ $\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, իսկ այստեղից արդեն հետևում է, որ

$$\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2} - 2\sum_1^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{12}։$$

ընդ որում շարքը զուգամիտում է հ ա վ ա ս ա ր ա չ ա փ $[0, \pi]$ միջակայքում։ Նկատելով, որ [300 (8)]՝

$$\int_0^{\pi} \cos^{2m-1} x\, dx = 0, \quad \int_0^{\pi} \cos^{2m} x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x\, dx = \frac{(2m-1)!!}{2m!!}\pi,$$

կատարենք անդամ առ անդամ ինտեգրում՝

$$\int_0^{\pi} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\, dx = \pi\left\{a + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{2m!!}\cdot\frac{a^{2m+1}}{2m+1}\right\}։$$

Հանձին ստացված շարքի մենք ճանաչում ենք արկսինուս ֆունկցիայի վերլուծումը [տես 2)]։ Այսպիսով վերջնականապես գտնում ենք (վերջավոր տեսքով !)

$$\int_0^{\pi} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\, dx = \pi \cdot \arcsin a։$$

8) Դիտարկենք հետևյալ վերլուծումը ($|r|<1$ դեպքում)՝

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot \cos nx։ \tag{4}$$

Այդ ապացուցել հեշտ է, եթե աջ մասը բազմապատկենք $1-2r\cos x+r^2$ հայտարարով. կստանանք՝

$$1-2r\cos x + r^2 + 2\sum_1^{\infty} r^n \cos nx - 2\sum_1^{\infty} r^{n+1}\cdot 2\cos nx\cdot\cos x +$$
$$+ 2\sum_1^{\infty} r^{n+2}\cos nx։$$

Եթե $2\cos nx\cdot\cos x$-ը փոխարինենք $\cos(n+1)x+\cos(n-1)x$-ով և համապատասխանաբար երկրորդ գումարը երկու գումարի բաժանենք, ապա կրճատումներից հետո կմնա միայն $1-r^2$, որով և ավարտվում է ապացույցը։

Շնորհիվ $\sum_1^{\infty} |r|^n$ շարքի զուգամիտության (երբ $|r|<1$), (4)-ի աջակողմյան շարքը զուգամիտում է հ ա վ ա ս ա ր ա չ ա փ x-ի նկատմամբ $[-\pi, \pi]$ միջակայքում։ Այժմ վերցնենք ինտեգրալներ $-\pi$-ից մինչև π թե ձախից և

թե ալլից, ընդ որում շարքը կարելի է ինտեգրել անդամ առ անդամ (թեորեմա 4)։ Քանի որ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = 0$, ապա կստանանք՝

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1-2r\cos x + r^2}\,dx = 2\pi$$

[համեմատել 297, 8)]։

Համանման ձևով, (4) նույնության երկու կողմերն էլ բազմապատկելով $\cos mx$-ով ($m=1, 2, 3, \dots$) և ինտեգրելով անդամ առ անդամ, հեշտ է ստանալ՝

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos mx}{1-2r\cos x+r^2}\,dx = 2\pi\,\frac{r^m}{1-r^2}։$$

Այդ դեպքում օգտագործվում է հետևյալ հայտնի արդյունքը [297, 4) (գ)]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \text{ դեպքում} \\ \pi & m = n \text{ դեպքում}։ \end{cases}$$

9) Եթե (4) նույնության մեջ 1-ը տեղափոխենք ձախ կողմ և երկու մասն էլ բաժանենք $2r$-ի, ապա կստանանք

$$\frac{\cos x - r}{1-2r\cos x+r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\cos nx:$$

Այս անգամ կամայականորեն ֆիքսենք x-ը և սկսենք r-ը դիտարկել որպես փոփոխական, որի փոփոխության տիրույթն է $(-1, 1)$։ Հավասարության երկու մասերն էլ ինտեգրենք ըստ r-ի 0-ից մինչև ցանկացած r այդ միջակայքում, ընդ որում աջակողմյան աստիճանային շարքն ինտեգրենք անդամ առ անդամ [410, 7°]․ քանի որ ձախ կողմում համարիչը (մինչև թվային արտադրիչի ճշգրտությամբ) հանդիսանում է հայտարարի ածանցյալն ըստ r-ի, ապա արդյունքում կստանանք՝

$$\log(1-2r\cos x+r^2) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\cos nx \quad (|r|<1)։$$

Այժմ նորից ֆիքսենք r-ը, իսկ x-ը փոփոխենք 0-ից մինչև π։ Հեշտ է տեսնել, որ աջակողմյան շարքը x-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ

է այդ միջակայքում, այնպես որ թույլատրելի է անդամ առ անդամ ինտեգրում (թեորեմ 4)։ Կատարելով այդ, կհանգենք հետևյալ ինտեգրալին՝

$$\int_0^{\pi} \log(1-2r\cos x + r^2)\,dx = 0 \quad (|r|<1)$$

[համեմատել 295, 4), 302, 14)]։ Այստեղից, ինչպես արդեն տեսանք, հեշտ է ստանալ ինտեգրալի արժեքը նաև $|r| > 1$ դեպքում։

10) x-ից կախում ունեցող հետևյալ ինտեգրալները՝

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\theta)\,d\theta,$$

$$J_n(x) = \frac{2x^n}{(2n-1)!!\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\theta)\cos^{2n}\theta\,d\theta \qquad (n=1,2,3,\dots)$$

ներկայացնում են այսպես կոչված Բեսսելյան ֆունկցիաներ [համեմատել 383, 6)]։ Ընդինտեգրալ արտահայտությունները վերլուծելով ըստ $x\sin\theta$-ի աստիճանների և ինտեգրելով անդամ առ անդամ, հեշտ է ստանալ այդ ֆունկցիաների մեջ արդեն ծանոթ վերլուծումները շարքերի՝ ըստ x-ի աստիճանների։

Օրինակ, ինտեգրելով

$$\cos(x\sin\theta) = 1 \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\frac{x^{2x}\sin^{2k}\theta}{2k!}$$

շարքը և հիշելով [300 (8)]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}\theta\,d\theta = \frac{(2k-1)!!}{2k!!}\cdot\frac{\pi}{2} \tag{5}$$

բանաձևը, կգանենք զրո ինդեքս ունեցող բեսսելյան ֆունկցիայի համար՝

$$J_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\frac{x^{2k}}{(k!)^2\,2^{2k}}.$$

11) Մեզ արդեն հանդիպել են այսպես կոչված 1-ին և 2-րդ սեռի լրիվ էլիպտիկ ինտեգրալները [303 և ուրիշներ]՝

$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-n^2\sin^2\varphi}},\qquad E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Խնդիր դնենք՝ վերլուծել դրանք ըստ k *մոդուլի աստիճանների* ($0<k<1$).

n° 394-*ի* (24) *բանաձևում ընդունելով* $x=-k^2\sin\varphi$, *կստանանք՝*

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}k^{2n}\cdot\sin^{2n}\varphi,$$

Այս շարքը φ-*ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է, որովհետև* φ-*ի բոլոր արժեքների դեպքում մաժորվում է*

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}k^{2n}$$

զուգամետ շարքով; հետևապես, ըստ 4-րդ թեորեմայի, այստեղ թույլատրելի է անդամ առ անդամ ինտեգրում, որը և կկատարենք: Օգտագործելով նորից (5) բանաձևը, այդպիսով կստանանք՝

$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\cdot\left[\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\right]^2\cdot k^{2n}\right\},$$

Համանման ձևով, ելնելով n 394-*ի* (23) *բանաձևից, կգտնենք՝*

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\frac{\pi}{2}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\right]^2\cdot\frac{k^{2n}}{2n-1}\right\},$$

Այս շարքերից նույնպես կարելի է օգտվել մոտավոր հաշվումների համար: Օրինակի համար, դիտարկենք հետևյալ շարքը՝

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{8}-\frac{3}{256}-\frac{5}{2048}-\frac{175}{262144}-\frac{441}{2097152}-\cdots\right)$$

Եթե այստեղ պահպանենք միայն գրված անդամները, ապա համապատասխան ուղղումը կլինի բացասական և կգնահատվի հետևյալ կերպ՝

$$|\Delta|<\left(\frac{11!!}{12!!}\right)^2\cdot\frac{1}{11\cdot2^6}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\right)<0,00024.$$

ստորակետից հետո միայն երեք ճիշտ թվանշան կարելի է սպասել: Իսկապես, հաշվելով մինչև հինգ թվանշան, ստանում ենք՝

$$\frac{\pi}{2}=1,57080\ (-)\qquad\qquad \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{8}=0,19635\ (-)$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{256}=0,01841\ (-)$$

$$\begin{array}{r} 1,57080 \\ -\ 0,21997 \\ \hline 1,35083 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \frac{\pi}{2}\cdot\frac{5}{2048}=0,00383 & (+) \\ \frac{\pi}{2}\cdot\frac{175}{262144}=0,00105 & (-) \\ \frac{\pi}{2}\cdot\frac{441}{2097152}=0,00033 & (+) \\ \hline 0,21997 & \end{array}$$

$$1,35057 < E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 1,35085, \quad E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1,350\ldots$$ [համեմատել 315,4]։

Պետք է ասել, որ k*-ի միայն փոքր արժեքների դեպքումն է, որ վերևում նշված* F(k) *և* E(k) *լրիվ էլիպտիկ ինտեգրալների շարքերը ձեռնտու են հաշվումների համար։ Սակայն գոյություն ունեն այնպիսի ձևափոխումներ, որոնք թույլ են տալիս այդ ինտեգրալների հաշվումը բերել ցանկացած չափով փոքր* k*-ի դեպքին* [*համեմատել* 303]։

12) E(k) ***ֆունկցիայի*** *վերլուծումը կարելի է օգտագործել հաշվելու համար հետևյալ ինտեգրալը՝*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{E(h\sin\theta)}{1-h^2\sin^2\theta}\sin\theta\, d\theta \quad (0<h<1)\text{։}$$

Ամենից առաջ հեշտ է ստուգել, որ տեղի ունի հետևյալ վերլուծումը

$$\frac{E(k)}{1-k^2} = \frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 3k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\cdot 5k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\cdot 7k^6+\ldots\right\}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\right)^2\cdot(2n+1)\,k^{2n}\right\}$$

(օրինակ, բազմապատկելով հավասարության աջ մասը $1-k^2$*-ով)։*

Տեղադրելով $k=h\cdot\sin\theta$ *և բազմապատկելով* $\sin\theta$*-ով, կարող ենք ինտեգրել անդամ առ անդամ ըստ* θ*-ի* 0*-ից մինչև* $\frac{\pi}{2}$*, որովհետև ստացված շարքը այդ սահմաններում հավասարաչափ զուգամետ է (այն, օրինակ, մաժորվում է նախորդ շարքով* $k=h$ *դեպքում)։ Քանի որ* [300 *(8)*]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta\, d\theta = \frac{2n!!}{(2n+1)!!},$$

ապա գտնում ենք՝

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{E(h\sin\theta)}{1-h^2\sin^2\theta}\cdot\sin\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}\left\{1+\frac{1}{2}h^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}h^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}h^6+\cdots\right\}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}h^{2n}\right\}.$$

Համեմատելով փակագծերի արտահայտությունը n° 394-ի (24) բանաձևի հետ, ստանում ենք որոնելի ինտեգրալի արժեքը նույնիսկ վերջավոր տեսքով՝

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{E(h\sin\theta)}{1-h^2\sin^2\theta}\sin\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-h^2}}.$$

13) Վերջում դիտարկենք $y=\arcsin(1-x)$ ֆունկցիան ըստ x-ի (ոչ ամբողջ!) աստիճանների վերլուծելու հարցը $0\leqslant x$-ի դեպքում*։

Ունենք (օգտագործելով բինոմական շարքը)՝

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}x}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2x}}\left\{1+\frac{1}{4}x+\frac{3}{32}x^2+\cdots\right\}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{32\sqrt{2}}x^{\frac{3}{2}}-\cdots$$

ընդ որում, եթե բաց թողնենք առաջին անդամը, որը $x=0$ դեպքում դառնում է ∞, շարքի զուգամիտությունը հավասարաչափ կլինի ամեն մի $[0, x]$ միջակայքում, որտեղ $0<x<2$։ Առաջին անդամի համար նախնական ֆունկցիա է հանդիսանում $-\sqrt{2}\,x^{\frac{1}{2}}$. մնացած շարքի համար նախնական ֆունկցիան ստանում ենք անդամ առ անդամ ինտեգրումով։ Քանի որ $x=0$ դեպքում պետք է լինի $y=\frac{\pi}{2}$, ապա վերջնականապես գտնում ենք այսպի-

* x-ի ամբողջ դրական աստիճաններով սովորական վերլուծման մասին այստեղ խոսք լինել չի կարող, որովհետև այլապես, ըստ 410-ի 9° թեորեմայի, մեր ֆունկցիան կունենար վերջավոր ածանցյալ $x=0$ դեպքում, որն իրականում չկա։

որ վերլուծում ըստ x-ի կոտորակային աստիճանների ($0 < x < 2$ միջակայքի համար)՝

$$y = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\, x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6\sqrt{2}}\, x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{80\sqrt{2}}\, x^{\frac{5}{2}} - \dots$$

Համանման ձևով ստացվում է նաև

$$\arcsin \sqrt{\frac{2x}{1+x^2}} = \sqrt{2} \left\{ x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\, x^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{5}\, x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{7}\, x^{\frac{7}{2}} + \dots \right\}$$

վերլուծումը $0 < x < 1$ միջակայքի համար։

413. ՇԱՐՔԵՐԻ ԱՆԴԱՄ ԱՌ ԱՆԴԱՄ ԴԻՖԵՐԵՆՑՄԱՆ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։

1) Վերադառնալով նորից

$$y = E(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ֆունկցիային [համեմատել 378,5); 411,1)], այժմ մենք հեշտությամբ կարող ենք որոշել նրա ածանցյալը. դրա համար բավական է [410,9°] անդամ առ անդամ դիֆերենցել այդ շարքը։ Մենք կստանանք՝ $E'(x)=E(x)$, այնպես որ դիտարկվող ֆունկցիան բավարարում է $y'=y$ դիֆերենցիալ հավասարմանը։ Այստեղից $y=Ce^x$. քանի որ $x=0$ դեպքում, ակներևորեն, $y=1$, ապա վերջնականապես գտնում ենք, որ $E(x)=e^x$։

2) Ռիմանի $\zeta(x)$ ֆունկցիան, ինչպես գիտենք, $1 < x$-ի համար որոշվում է հետևյալ հավասարությամբ՝

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Անդամ առ անդամ դիֆերենցումով հեշտ է գտնել այդ ֆունկցիայի ածանցյալը՝

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^x},$$

Առայժմ այդ արդյունքը մենք ստացանք միայն ձևականորեն։ Որպեսզի այն արդարացնենք, պետք է համոզվենք, որ վերջին շարքը x-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է s-ից մեծ բոլոր x-երի համար, որտեղ

s-ը՝ մեկից մեծ ո ր և է (բայց ֆիքսած) թիվ է։ Այդ բխում է $\sum_{1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{s}}$ զուգամետ շարքի առկայությունից։

Ինչպիսի $x=x_0>1$ արժեք էլ վերցնելու լինենք, այն կարելի է պարփակել $1<s$ և s' սահմանների միջև. $[s,s']$ միջակայքի նկատմամբ կիրառելի է 6-րդ թեորեմը [407] և այլն։

Նույն ճանապարհով կարելի է համոզվել, որ $\zeta(x)$ ֆունկցիայի համար գոյությունն ունեն բոլոր կարգերի ածանցյալներ և ստանալ նրանց արտահայտությունները շարքերի տեսքով։

3) Մենք արդեն հանդիպել ենք $J_0(x)$ նշիչով Բ ե ս ս ե լ յ ա ն ֆ ո ւ ն կ ց ի ա յ ի աստիճանային շարքի վերլուծմանը

$$J_0(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(k!)^2\,2^{2k}}$$

[383,6); 412,10)]։

Այժմ ցույց տանք, որ այդ ֆունկցիան բավարարում է Բեսսելի հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարմանը՝

$$xu''+u'+xu=0$$

Ունենք, ընդունելով $u=J_0(x)$,

$$xu=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2k)^2}{(k!)^2\,2^{2k}}\cdot x^{2k-1},$$

իսկ այնուհետև, u-ի վերլուծումը երկու անգամ անդամ առ անդամ դիֆերենցելով՝

$$u'=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k}{(k!)^2\,2^{2k}}\cdot x^{2k-1},$$

$$xu''=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k(2k-1)}{(k!)^2\cdot 2^{2k}}\cdot x^{2k-1},$$

Եթե այդ հավասարությունները գումարենք, ապա x^{2k-1}-ի գործակիցը հավասար կլինի

$$\frac{(-1)^k}{(k!)^2\cdot 2^{2k}}\left[2k(2k-1)+2k-(2k)^2\right]=0,$$

որը և ապացուցում է պահանջված պնդումը։

Համանման ձևով կարելի է համոզվել, որ կամայական բնական նշիչով $J_n(x)$ բեսսելյան ֆունկցիան, որի մասին նույնպես վերևում խոսք եղավ, բավարարում է Բեսսելի ընդհանուր հավասարմանը՝

$$x^2u'' + xu' + (x^2 - n^2)u = 0։$$

4) Ավելի ուսանելի է խնդրի մի այլ դրում. դիցուք պահանջվում է գտնել մի ֆունկցիա, որը շարքի է վերլուծվում բոլոր x-երի համար և բավարարում է Բեսսելի հավասարմանը։

Կատարենք այդ, օրինակ, $n=0$ պարզագույն դեպքի համար։ Որոնելի ֆունկցիայի վերլուծումը գրենք անորոշ գործակիցներ ունեցող շարքի տեսքով

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

և, համարելով այն ամենուրեք զուգամետ, երկու անգամ դիֆերենցենք անդամ առ անդամ։ Տեղադրելով այդ բոլոր վերլուծումները հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$a_1 + \sum_{m=2}^{\infty} (m^2 a_m + a_{m-2}) x^{m-1} = 0։$$

ըստ 3° թեորեմայի [409]՝

$$a_1 = 0, \quad m^2 a_m + a_{m-2} = 0 \quad (m = 2, 3, \ldots)։$$

Այստեղից, ամենից առաջ, կենտ նշիչներ ունեցող գործակիցները՝ $a_{2k-1} = 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, իսկ ինչ վերաբերում է զույգ նշիչներ ունեցող a_{2k} գործակիցներին, ապա անդրադարձ բանաձևով նրանք բոլորն էլ արտահայտվում են a_0-ի միջոցով՝

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{(k!)^2 2^{2k}}։$$

Այսպիսով, a_0 կամայական արտադրիչի ճշգրտությամբ, մենք վերադառնում ենք $J_0(x)$ ֆունկցիային։

Որ ստացված շարքը, իրոք, ամենուրեք զուգամետ է, ստուգվում է անմիջականորեն։ Իսկ նրա ստանալու հենց եղանակից պարզորոշ երևում է, որ նրա ներկայացրած ֆունկցիան բավարարում է հավասարմանը։

[Ընթերցողի ուշադրությունն ենք հրավիրում անորոշ գործակիցների մեթոդի յուրահատուկ օգտագործման վրա. այստեղ մենք ունեցանք այդ գործակիցներից արդեն անվերջ քանակությամբ և հարկ եղավ գտնել առնչա-

նային շարքերի նույնության թեորեմային, փոխանակ սովորաբար կիրառվող բազմանդամների նույնության թեորեմային դիմելու։]

5) Գ ա ու ս ը մուծել է հետևյալ ֆունկցիան

$$u = F(\alpha, \beta, \gamma, x) =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}\, x^n$$

[հիպերերկրաչափական շարք. տես nn 363, 367, 4)]։ Այս շարքը երկու անգամ դիֆերենցելով անդամ առ անդամ (համարելով $|x| < 1$), կարելի է ցույց տալ, որ այդ ֆունկցիան բավարարում է այսպես կոչված հ ի պ ե ր ե ր կ ր ա չ ա փ ա կ ա ն դիֆերենցիալ հավասարմանը

$$x(x-1)u'' - [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\cdot u' + \alpha\beta\cdot u = 0։$$

Ընթերցողին ենք թողնում մի քիչ երկար, բայց ոչ դժվար հաշվումները։ Այստեղ ևս կարելի է փոխել խնդրի դրվածքը, ինչպես այդ արվեց 4) վարժության մեջ։

6) $f(x)$ ֆունկցիան $0<x<1$ միջակայքում որոշենք հետևյալ հավասարությամբ՝

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Ցույց տանք, որ $0 < x < 1$ միջակայքում այդ ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ հետաքրքիր ֆունկցիոնալ հավասարմանը՝

$$f(x) + f(1-x) + \log x\cdot\log(1-x) = \text{const.} = f(1)^{*}:$$

Դրա համար բավական է ապացուցել, որ ձախակողմյան արտահայտության ածանցյալն ըստ x-ի նույնաբար դառնում է զրո՝

$$f'(x) - f'(1-x) + \frac{1}{x}\log(1-x) - \frac{1}{1-x}\log x = 0.$$

Դիֆերենցելով անդամ առ անդամ $f(x)$ ֆունկցիան որոշող շարքը, կգտնենք՝

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{1}{x}\log(1-x).$$

Փոխարինելով x-ը $1-x$-ով, կստանանք, որ

---

* Հետագայում կտեսնենք, որ $f(1) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ [420, 6); 422]։

$$f'(1-x) = -\frac{1}{1-x}\log x.$$

Սրանով էլ ավարտվում է ապացույցը։

7) n° 395-ում մենք ստացանք sin x-ի վերլուծումն անվերջ արտադրյալի

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Անցնելով բացարձակ մեծություններին, այստեղից կստանանք՝

$$|\sin x| = |x|\prod_{n=1}^{\infty}\left|1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|.$$

Եթե x-ը տարբերվում է $k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2\ldots)$ տեսքի թվերից, ապա, լոգարիթմելով [389, 4°], կստանանք արդեն անվերջ շարք՝

$$\log|\sin x| = \log|x| + \sum_{n=1}^{\infty}\log\left|1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|.$$

Անդամ առ անդամ դիֆերենցումը մեզ տալիս է այսպիսի վերլուծում

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}.$$

Դրա արդարացման համար բավական է համոզվել այն բանում, որ ստացված շարքը հավասարաչափ զուգամետ է ամեն մի վերջավոր փակ միջակայքում, որը չի պարունակում $k\pi$ տեսքի կետեր։ Իրոք, երբ x-ը փոփոխվում է այդ միջակայքում, նրա բացարձակ մեծությունը մնում է սահմանափակ՝ $|x| < M$, այնպես որ, առնվազն $\frac{M}{\pi} < n$-երի համար՝

$$\left|\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}\right| = \frac{2|x|}{n^2\pi^2-|x|^2} < \frac{2M}{n^2\pi^2-M^2}.$$

Քանի որ

$$\sum_{n>\frac{M}{\pi}}^{\infty} \frac{2M}{n^2\pi^2 - M^2}$$

շարքը զուգամետ է, ապա պահանջվող արդյունքն ստացվում է Վ ե յ ե ր շ տ ր ա ս ս ի հայտանիշի օգնությամբ։

ctg x-ի վերլուծմանը կարելի է տալ հետևյալ ձևը՝

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \mathrm{ctg}\, x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-n\pi} + \frac{1}{x+n\pi} \right).$$

այս տեսքով այն կարծես թե հանդիսանում է ctg x-ի վ ե ր լ ու ծ ու մ ը պ ա ր զ կ ո տ ո ր ա կ ն ե ր ի, որոնք համապատասխանում են sin x-ի հայտարարի 0 և $\pm n\pi$ առանձին արմատներին։

Ըստ $\mathrm{tg}\, x = -\mathrm{tcg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ բանաձևի, այստեղից կարելի է ստանալ tg x-ի վերլուծումը պ ա ր զ կ ո տ ո ր ա կ ն ե ր ի

$$\mathrm{tg}\, x = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x - \frac{2n-1}{2}\pi} + \frac{1}{x + \frac{2n-1}{2}\pi} \right) =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}}.$$

Ճիշտ այդպես էլ, եթե օգտվենք

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{ctg}\, \frac{x}{2} + \mathrm{tg}\, \frac{x}{2} \right)$$

բանաձևից, կարելի է ստանալ վերլուծում նաև $\frac{1}{\sin x}$-ի համար՝

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x-n\pi} + \frac{1}{x+n\pi} \right) =$$

$$= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

ctg x-ի վերլուծումը դիֆերենցելով անդամ առ անդամ (ընթերցողին ենք թողնում համոզվել դրա թույլատրելիության մեջ), կստանանք մի օգտակար վերլուծում ևս՝

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(x-n\pi)^2} + \frac{1}{(x+n\pi)^2}\right];$$

8) Եթե ելնենք sh x-ի ներկայացումից անվերջ արտադրյալի տեսքով [395], ապա համանման ձևով կարելի է գալ հետևյալ վերլուծումներին՝

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2+n^2\pi^2},$$

$$\frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2+n^2\pi^2} \quad \text{և այլն։}$$

9) $\Gamma(x)$ ֆունկցիայի համար n° 390-ի 9)-ում մենք արտածեցինք Վ ե յ ե ր շ տ ր ա ս ս ի բանաձևը՝

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{Cx} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right) \cdot e^{-\frac{x}{n}},$$

Հաշվի առնելով, որ $\Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x)$, և անցնելով լոգարիթմներին, այստեղից հեշտ է ստանալ (x-ի զրոյից և բացասական ամբողջ թվերից տարբեր լինելու դեպքում)՝

$$\log|\Gamma(x)| = -\log|x| - Cx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n} - \log\left|1+\frac{x}{n}\right|\right);$$

Շարքն անդամ առ անդամ դիֆերենցելով, այստեղից ձ և ա կ ա ն ո ր ե ն կստանանք՝

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{n} - C + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right);$$

Այժմ ցույց տանք, որ աջակողմյան շարքը հավասարաչափ զուգամետ է ամեն մի վերջավոր միջակայքում (որը չի պարունակում ամբողջ բացասական թվեր)։ Իրոք, քանի որ այդ դեպքում |x|-ը մնում է սահմանափակ $|x| < M$, ապա առնվազն $M < n$-երի համար, ունենք

$$\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}\right|=\frac{|x|}{n(n+x)}<\frac{M}{n(n-M)},$$

Քանի որ $\sum\limits_{n>M}\frac{M}{n(n-M)}$ *շարքը զուգամետ է, ապա, ըստ Վեյերշտրասի հայտանիշի, հավասարաչափ զուգամիտությունն ապահովված է։ Մենք հնարավորություն ենք ստանում հիմնվել n 407-ի 6-րդ թեորեմայի վրա և դրանով կապացուցենք* $\log|\Gamma(x)|$*-ի, և հետևապես, նաև* $\Gamma(x)$*-ի ածանցյալի գոյությունը ևս և այլն։*

Ստացված բանաձևի աջ մասին ավելացնելով հետևյալ շարքը՝

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)=0,$$

կարելի է այն բերել այս տեսքին՝

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=-C+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu+1}-\frac{1}{x+\nu}\right).$$

Հեշտ է համոզվել, որ $\Gamma(x)$ *ֆունկցիայի համար գոյություն ունեն բոլոր կարգերի ածանցյալներ։*

414. ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ ԱՆԲԱՑԱՀԱՅՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ։ *Ֆունկցիոնալ շարքերի (կամ հաջորդականությունների) տեսությունը գործողության մեջ ցույց տալու համար նորից դիտարկենք «անբացահայտ» ֆունկցիաների գոյության հարցը [196 և հաջորդը]։ Պարզության համար սահմանափակվենք մեկ հավասարման դեպքով՝*

$$F(x, y)=0, \tag{6}$$

որից y-ը պետք է որոշվի որպես x-ի միարժեք ֆունկցիա։ Այս անգամ մենք կդիմենք հաջորդական մոտավորությունների մեթոդին, որը թույլատրում է մեզ ոչ միայն այդ ֆունկցիայի գոյությունը որոշել, այլև ցուցում տալ նրա փաստական հաշվման վերաբերյալ։

Դիցուք $F(x, y)$ ֆունկցիան իր $F'_y(x, y)$ ածանցյալի հետ միասին անընդհատ է մի որոշ

$$D=[x_0-\Delta,\ x_0+\Delta;\ y_0-\Delta,\ y_0+\Delta]$$

քառակուսում, որի կենտրոնն է (x_0, y_0) կետը, ընդ որում

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \text{բայց} \quad F'_y(x_0, y_0) \neq 0: \tag{7}$$

Այդ ժամանակ (6) հավասարումը (x_0, y_0) կետի շրջակայքում y-ը որոշում է որպես x-ի միարժեք և անընդհատ ֆունկցիա, որը $x = x_0$ դեպքում դառնում է y_0:

Մեզ համար ավելի հարմար է դիտարկել նախ մասնավոր դեպք, երբ (6) հավասարումն ունի

$$y = y_0 + \varphi(x, y) \tag{6*}$$

ձևը, որտեղ φ-ն φ'_y-ի հետ միասին բավարարում է անընդհատության նույն պայմաններին, ինչ և F-ը, միայն (7) պայմանը փոխարինելով հետևյալ պայմանով՝

$$\varphi(x_0, y_0) = 0, \quad |\varphi'_y(x_0, y_0)| < 1: \tag{7*}$$

Ածանցյալի անընդհատության շնորհիվ մենք կարող ենք D տիրույթը համարել այնչափ փոքր, որ նրա սահմաններում ընդհանրապես լինի

$$|\varphi'_y(x, y)| < \lambda, \tag{8}$$

որտեղ λ-ն մեկից փոքր մի որոշ հաստատուն է: Այնուհետև, պահպանելով y փոփոխականի փոփոխման միջակայքը, մեզ հարկավոր կլինի սեղմել նաև x փոփոխականի փոփոխման միջակայքը, փոխարինելով այն $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ այնչափ փոքր միջակայքով, որ նրա սահմաններում $\varphi(x, y_0)$-ն, որը x-ի անընդհատ ֆունկցիան է և զրո է դառնում $x = x_0$ դեպքում, բավարարի հետևյալ անհավասարությանը՝

$$|\varphi(x, y_0)| < (1-\lambda)\Delta: \tag{9}$$

Այսպիսով մենք նախապատրաստեցինք հետևյալ տիրույթը՝

$$D^* = [x_0-\delta, \ x_0+\delta; \ y_0-\Delta, \ y_0+\Delta],$$

որին և կվերաբերեն մեր հետագա դատողությունները:

(6) հավասարման աջ կողմյան մասում y-ի փոխարեն տեղադրելով y_0 հաստատունը, կստանանք x-ի մի որոշ ֆունկցիա՝*

$$y_1 = y_1(x) = y_0 + \varphi(x, y_0):$$

Համանման ձևով, ընդունում ենք հաջորդաբար՝

$$y_2 = y_2(x) = y_0 + \varphi(x, y_1),$$

$$y_3 = y_3(x) = y_0 + \varphi(x, y_2),$$

. . . .

և ընդհանրապես

$$y_n = y_n(x) = y_0 + \varphi(x, y_{n-1}): \tag{10}$$

Հենց այս՝

$$y_1(x),\quad y_2(x), \ldots, y_n(x), \ldots$$

ֆունկցիաներն էլ իրականացնում են հաջորդական մոտեցումները որոնելի y(x) ֆունկցիային:

Ճիշտ է, մնում է դեռևս ստուգել, որ նրանք բոլորն էլ չեն դուրս գալիս $[y_0-\Delta, y_0+\Delta]$ միջակայքի սահմաններից, որովհետև, եթե նրանցից որևէ մեկը դուրս գար այդ սահմանից, ապա նրան արդեն չէր կարելի տեղադրել y-ի փոխարեն (6*) հավասարման աջ մասում:

Հաստատենք այդ *ինդուկտիվ* եղանակով: Դիցուք, ասենք՝

$$y_0-\Delta \le y_{n-1} \le y_0+\Delta:$$

(10)-ից՝

$$y_n - y_0 = \varphi(x, y_{n-1}):$$

Բայց

$$|\varphi(x, y_{n-1})| \le |\varphi(x, y_{n-1}) - \varphi(x, y_0)| + |\varphi(x, y_0)|:$$

Աջակողմյան առաջին գումարելին կձևափոխվի համաձայն միջին արժեքի թեորեմայի, և, (8)-ի հիման վրա,

$$|\varphi(x, y_{n-1}) - \varphi(x, y_0)| = |\varphi'_y(x, \eta)\cdot(y_{n-1}-y_0)| < \lambda\cdot\Delta,$$

իսկ երկրորդը փոքր է $(1-\lambda)\Delta$-ից, (9)-ի շնորհիվ, այնպես որ խմբովին վերցրած՝

$$|y_n - y_0| < \lambda\Delta + (1-\lambda)\Delta = \Delta,$$

որը և ապացուցում է մեր պնդումը:

Միևնույն ժամանակ ինդուկտիվ կերպով հաստատվում է, որ նշված ճանապարհով կառուցված բոլոր ֆունկցիաներն *անընդհատ* կլինեն:

Այժմ զբաղվենք $\{y_n\}$ ֆունկցիաների հաջորդականության *սահմանի* հարցին: Հարմար է, սակայն, դիտարկել հետևյալ շարքը՝

$$y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (y_n - y_{n-1}): \tag{11}$$

Մեր հաջորդականության հենց սահմանումից պարզ է, որ

$$y_n - y_{n-1} = \varphi(x, y_{n-1}) - \varphi(x, y_{n-2})\text{։}$$

Օգտվելով նորից միջին արժեքի թեորեմայից և (8) անհավասարություններից, կգտնենք՝

$$|y_n - y_{n-1}| < \lambda\, |y_{n-1} - y_{n-2}|\text{։}$$

Այստեղից, փոխարինելով n-*ը՝* n−1-*ով,* n−2-*ով և այլն, վերջնականապես կստանանք՝*

$$|y_n - y_{n-1}| < \lambda^{n-1} \cdot |y_1 - y_0| \leqslant \lambda^{n-1} \cdot (1-\lambda) \cdot \Delta,$$

շնորհիվ (9)-ի։ Այսպիսով, (11) շարքը մաժորվում է

$$(1-\lambda)\Delta \cdot \sum_{1}^{\infty} \lambda^{n-1} \tag{12}$$

երկրաչափական պրոգրեսիայով, և, հետևապես, զուգամետ է, այն էլ հավասարաչափ x-*ի բոլոր արժեքների համար* $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ *միջակայքում։ Իսկ այդ դեպքում, ըստ* n° 404-*ի* 1-*ին թեորեմայի,*

$$y = y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$$

սահմանային ֆունկցիան ևս անընդհատ կլինի նշված միջակայքում։

Որ այդ ֆունկցիան բավարարում է ելակետային հավասարմանը, հեշտ է համոզվել. (10) հավասարության մեջ անցնելով սահմանի $n\to\infty$ *դեպքում։ Մնում է էլի ապացուցել, որ գոյություն չունեն* y-*ի ուրիշ արժեքներ, բացի այդ ֆունկցիայի միջոցով ստացվողներից, որոնք բավարարեն (6*) հավասարմանը։ Իրոք, եթե մի որոշ* x-*ի դեպքում, (6*)-ի հետ միասին ունենայինք նաև մի այլ*

$$\tilde{y} = y_0 + \varphi(x, \tilde{y}),$$

ապա, հանելով և գնահատելով φ-*ի արժեքների տարբերությունը, ինչպես սովորաբար, կստանայինք*

$$|y - \tilde{y}| = |\varphi(x, y) - \varphi(x, \tilde{y})| < \lambda \cdot |y - \tilde{y}|,$$

որն անհնար է, եթե $\tilde{y} \neq y$։

Այստեղից արդեն բխում է, որ

$$y(x^0) = y_0\text{.}$$

այդ, սակայն, անմիջականորեն էլ պարզ է նրանից, որ բոլոր $y_n(x_0)=y_0$։

Թեորեման, դիտարկվող մասնավոր դեպքում ապացուցված է։ Ընդհանուր դեպքը հեշտությամբ բերվում է մասնավորի. այսպես, (1) հավասարումը կարելի է արտագրել հետևյալ տեսքով՝

$$y = y_0 + \left[y - y_0 + \frac{F(x, y)}{F'_y(x_0, y_0)}\right],$$

որը նույնանում է (6*)-ի հետ, եթե դնենք

$$\varphi(x, y) = y - y_0 + \frac{F(x, y)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Այս ֆունկցիան բավարարում է (7*) պահանջներին, մասնավորապես նրանցից երկրորդին, որովհետև $\varphi'_y(x_0, y_0)$-ը հավասար է լինում 0-ի։

Ինչպես արդեն հիշատակվել է, շարադրված պրոցեսը հեշտացնում է նաև որոնելի $y(x)$ ֆունկցիայի փաստական հաշվումը մոտավորությամբ։ $y(x)$-ը $y_n(x)$-ով փոխարինումից ստացված սխալը հեշտությամբ է գնահատվում, քանի որ (11) շարքի մնացորդը n-րդ անդամից հետո մաժորվում է (12) երկրաչափական պրոգրեսիայի համապատասխան մնացորդով։ Այստեղից էլ ստացվում է՝

$$|y(x) - y_n(x)| < \Delta \cdot \lambda^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Վերին աստիճանի ուսանելի է 196-ում անբացահայտ ֆունկցիայի թեորեմայի ապացույցը համեմատել հենց նոր բերված ապացույցի հետ։ Այնտեղ մենք գործ ունեինք զուտ «գոյության ապացույցի» հետ, իսկ այստեղ՝ որոնելի օբեկտը կառուցելու հետ։

Նման եղանակով կարելի է էֆեկտիվ կերպով ապացուցել նաև n° 198-ի ընդհանուր թեորեմները։ Մենք սահմանափակվեցինք պարզագույն դեպքով որպեսզի ավելի լավ բացահայտենք մեթոդի իմաստը։

415. **ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ։** Ընթերցողը տեսել է, թե եռանկյունաչափական ֆունկցիաներն ինչպիսի կարևոր դեր են խաղում անալիզի մեջ։ Մինչդեռ նրանք մուծվում են զուտ երկրաչափական, անալիզին միանգամայն խորթ, նկատառումների հիման վրա։ Ուստի սկզբունքային կարևորություն է ստանում եռանկյունաչափական ֆունկցիաների սահմանման ու նրանց հիմնական հատկությունների ուսումնասիրման հնարավորության հարցը հենց իր՝ անալիզի միջոցներով։ Անվերջ շարքերը հանդիսանում են հենց այն զենքը, որի օգնությամբ այդ բոլորը կարելի է իրագործել, և մենք այս n°-ը կնվիրենք եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ուսումնասիրությանը ըստ նրանց անալիտիկ

սահմանումը, որը կծառայի որպես նոր օրինակ վերևում շարադրված տեսության կիրառմանը։

Այսպես, ուրեմն, դիտարկենք $C(x)$ և $S(x)$ երկու ֆունկցիաներ, որոնք ձևականորեն որոշվում են հետևյալ՝ x-ի բոլոր իրական արժեքների համար ամենուրեք զուգամետ շարքերով՝

$$C(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

առայժմ առանց որևէ չափով դրանց նույնացնելու առաջուց մեզ ծանոթ $\cos x$ և $\sin x$ ֆունկցիաների հետ։ Մենք մեկ անգամ արդեն գործ ենք ունեցել այդ ձևով որոշված ֆունկցիաների հետ [378, 6)]. շարքերի բազմապատկման միջոցով, ինչպես այնտեղ նշվել է, դրանց համար կարելի է ստանալ երկու հիմնական բանաձև՝

$$C(x+y)=C(x)\cdot C(y)-S(x)\cdot S(y), \tag{13}$$

$$S(x+y)=S(x)\cdot C(y)+C(x)\cdot S(y), \tag{14}$$

որոնք արդարացի են x-ի և y-ի բոլոր արժեքների դեպքում։

Շարունակենք $C(x)$ և $S(x)$ ֆունկցիաների հատկությունների ուսումնասիրությունը։ Փոխարինելով x-ը $-x$-ով, միանգամից տեսնում ենք, որ $C(x)$-ը զույգ ֆունկցիա է, իսկ $S(x)$-ը՝ կենտ՝

$$C(-x)=C(x),\quad S(-x)=-S(x)։$$

Ընդունելով այնուհետև $x=0$, կգտնենք, որ

$$C(0)=1,\quad S(0)=0։$$

Եթե այժմ, x-ը թողնելով կամայական, (13)-ում ընդունենք $y=-x$, ապա հաշվի առնելով հենց նոր ստացված հավասարությունները, կստանանք այդ երկու ֆունկցիաներն իրար հետ կապող հանրահաշվական առնչությունը

$$C^{2}(x)+S^{2}(x)=1։ \tag{15}$$

Հեշտ է ստանալ նաև արգումենտի կրկնապատկման կամ կիսման բանաձևերը։

400-ի 2° և 410-ի 10 թեորեմներից եզրակացնում ենք, որ $C(x)$ և $S(x)$ երկու ֆունկցիան էլ ոչ միայն անընդհատ են, այլև ունեն բոլոր կարգերի ածանցյալներ։ Մասնավորապես, մեր ֆունկցիաները որոշող շարքերի

նկատմամբ կիրառելով անդամ առ անդամ դիֆերենցում [9, 410], հեշտ է համոզվել, որ

$$C'(x) = -S'(x),\quad S'(x) = C(x)\text{։} \tag{16}$$

Այս բոլոր հատկությունները, ինչպես տեսնում ենք, հեշտությամբ են ստացվում։ Մի փոքր ավելի ջանք է պահանջում դիտարկվող ֆունկցիաների պարբերականության ապացույցը, որին մենք այժմ դիմում ենք։

Նախ ցույց տանք, որ $(0,2)$ միջակայքում գոյություն ունի $C(x)$ ֆունկցիայի արմատ, այն էլ միայն մեկը։ Իրոք, մենք գիտենք, որ $C(0)=1$, իսկ $C(2)$-ի արժեքը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով (առանձնացնելով համապատասխան շարքի առաջին երեք անդամները, իսկ մնացած անդամները միացնելով զույգ-զույգ)՝

$$C(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right) - \cdots$$

Քանի որ բոլոր փակագծերը դրական են՝

$$\frac{2^{2n}}{2n!} - \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{2^{2n}}{2n!}\left(1 - \frac{2\cdot 2}{(2n+1)(2n+2)}\right) > 0,$$

իսկ առաջին երեք անդամների գումարը տալիս է $-\frac{1}{3}$, ապա $C(2) < -\frac{1}{3}$, այսինքն $C(2)$-ը նախահայտորեն բացասական է։ $C(x)$ ֆունկցիայի անընդհատության պատճառով այստեղից հետևում է, որ $(0,2)$ միջակայքում իրոք գտնվում է այդ ֆունկցիայի արմատ։

Մյուս կողմից, այդ նույն միջակայքում

$$S(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot 3}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6\cdot 7}\right) + \cdots$$

ֆունկցիան, ակներևորեն, պահպանում է դրական նշան, իսկ $C'(x) = -S(x)$ ածանցյալը՝ բացասական, հետևապես, $C(x)$ ֆունկցիան նվազում է, երբ x-ը աճում է 0-ից մինչև 2, և 0 է դառնում միայն մեկ անգամ։

Այժմ $C(x)$ ֆունկցիայի հիշյալ արմատը նշանակենք $\frac{\pi}{2}$, ընդ որում π-ն, այսպիսով, մտցվում է զուտ մեկանգամայն ձևականորեն, և նույնացնել այն շրջանագծի և տրամագծի հարաբերության հետ առայժմ չի կարելի։

Այսպես, ուրեմն, ունենք՝

$$C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\qquad S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

վերջին հավասարությունը հետևում է (15)-ից, հաշվի առնելով $S(x)$ ֆունկցիայի դրական լինելը, երբ $0<x<2$։

Ընդունելով (13) և (14) բանաձևերում նախ $x=y=\frac{\pi}{2}$, իսկ այնուհետև $x=y=\pi$, հաջորդաբար կգտնենք՝

$$C(\pi)=-1,\quad S(\pi)=0,\quad C(2\pi)=1,\quad S(2\pi)=0։$$

Եթե նույն բանաձևերի մեջ, x-ը պահպանելով կամայական, վերցնենք $y=\pi$ կամ $y=2\pi$, ապա կստանանք՝

$$C(x+\pi)=-C(x),\quad S(x+\pi)=-S(x) \tag{17}$$

և, վերջապես,

$$C(x+2\pi)=C(x),\quad S(x+2\pi)=S(x)։$$

Վերջին առնչությունները հաստատում են, որ $C(x)$ և $S(x)$ ֆունկցիաներն ունեն 2π պարբերություն։

Դժվար չէր լինի արտածել նաև մյուս «բերման բանաձևերը», այդ թողնում ենք ընթերցողին։

Այժմ փորձենք ապացուցել դիտարկված $C(x)$ և $S(x)$ ֆունկցիաների համընկնումը $\cos x$ և $\sin x$ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների հետ, այլև նույնացնել մեր կողմից ձևականորեն մտցված π թիվն այն π թվի հետ որն այնչափ կարևոր դեր է կատարում երկրաչափության մեջ։

Այդ նպատակով դիտարկենք այն կորը, որը տված է

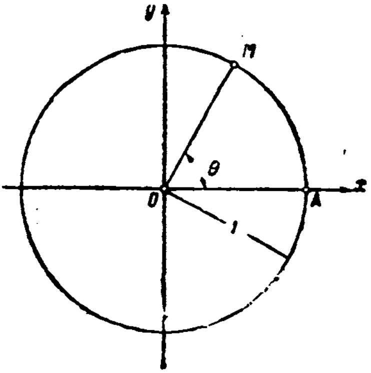
$$x=C(t),\quad y=S(t)$$

պարամետրական հավասարումներով, որտեղ t պարամետրը փոփոխվում է 0-ից մինչև 2π։ Շնորհիվ (15)-ի, այդ կորի բոլոր կետերը բավարարում են $x^2+y^2=1$ հավասարմանը, այսինքն գտնվում են այն շրջանագծի վրա, որի շառավիղը հավասար է 1-ի, իսկ կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբում (գծ. 61)։ Ցույց տանք, որ այդ դեպքում նրա յուրաքանչյուր կետը կստացվի, այն էլ միայն մեկ անգամ. բացառություն է կազմում, բնականորեն, A սկզբնական կետը, որը համապատասխանում է $t=0$ և $t=2\pi$ արժեքներին։

Մենք տեսանք, որ $S(t)>0$, քանի դեռ $0<t<2$, և հետևապես, առավել ևս երբ $0<t\leqslant\frac{\pi}{2}$։ (17) բանաձևերից երկրորդի մեջ x-ը փոխարինելով $-t$-ով, կստանանք՝

$$S(\pi-t)=S(t).$$

այստեղից կարելի է տեսնել, որ $S(t) > 0$ նաև այն դեպքում, երբ $\frac{\pi}{2} \leq t < \pi$։ Այդպիսի դեպքում $C(t)$ ֆունկցիան, որի ածանցյալը հավասար է $-S(t)$, մոնոտոն նվազում է, անցնելով 1-ից մինչև −1-ը եղած յուրաքանչյուր արժեքով մեկական անգամ, երբ t-ն փոփոխվում է 0-ից մինչև π, այստեղից պարզ է, որ պարամետրի փոփոխության $[0,\pi]$ միջակայքին միարժեքորեն համապատասխանում է մեր շրջանագծի վերին մասը։ Համանման պնդում կարելի է անել պարամետրի արժեքների $[\pi, 2\pi]$ միջակայքի և շրջանագծի ստորին մասի նկատմամբ, որովհետև [տես (17)]



Գծ. 61։

$$C(t+\pi) = -C(t), \quad S(t+\pi) = -S(t)։$$

Այժմ հաշվենք, ըստ n° 321-ի (7) բանաձևի, $\overset{\frown}{AM}$ աղեղի երկարությունը, համարելով, որ M կետը համապատասխանում է պարամետրի t արժեքին։ Ուշադրության առնելով (16)-ը և (15)-ը, կստանանք՝

$$S(t) = \int_0^t \sqrt{[C'(t)]^2 + [S'(t)]^2}\, dt = t։$$

Այդ ցույց է տալիս, որ t-ն համընկնում է ռադիաններով արտահայտված $\theta = \angle AOM$ անկյան հետ, իսկ այդ դեպքում

$$C(\theta) = x = \cos\theta, \quad S(\theta) = y = \sin\theta։$$

Միևնույն ժամանակ ամբողջ շրջանագծի երկարությունն ըստ մեր բանաձևի ստացվում է հավասար 2π-ի. հետևապես, մեր մուծած թիվը նույնական է այն թվի հետ, որը դիտարկվում է երկրաչափության մեջ։

416. ԱԾԱՆՑՅԱԼ ՉՈՒՆԵՑՈՂ ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՕՐԻՆԱԿ։ Այդ տեսակի առաջին օրինակը կառուցել է Վ և յ և ր շ տ ր ա ս ս ը. Նրա ֆունկցիան որոշվում է հետևյալ շարքով՝

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot \cos(b^n \pi x),$$

որտեղ $0 < a < 1$, իսկ b-ն բնական թիվ է (ընդ որում $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$)։

Այդ շարքը մաժորվում է $\sum_{1}^{\infty} a^{n}$ զուգամետ պրոգրեսիայով, հետևապես [403, 404 թեորեմա 1], հավասարաչափ զուգամետ է, և նրա գումարն ամենուրեք հանդիսանում է x-ի անընդհատ ֆունկցիա: Մանրակրկիտ հետազոտությամբ Վեյերշտրասսին հաջողվել է ցույց տալ, որ այնուամենայնիվ նրա համար գոյություն չունի վերջավոր ածանցյալ և ոչ մի կետում:

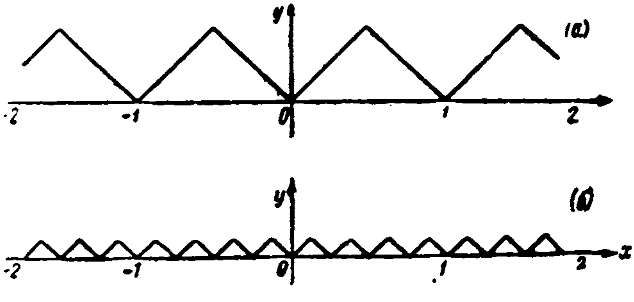
Մենք կբերենք Վան-դեր-Վարդենի (B. L. Van der Waerden) ավելի պարզ օրինակը, որն ըստ էության նույն գաղափարի վրա է կառուցված, միայն թե $y=\cos\omega x$ ատամնավոր կորերը փոխարինված են ատամնավոր բեկյալներով:

Այսպես, նշանակենք $u_0(x)$-ով x-ի և նրան ամենամոտ ամբողջ թվի տարբերության բացարձակ մեծությունը: Այդ ֆունկցիան կլինի գծային $\left[\frac{s}{2}, \frac{s+1}{2}\right]$ տեսքի յուրաքանչյուր միջակայքում, որտեղ s-ը ամբողջ է. նա անընդհատ է և ունի 1 պարբերություն: Նրա գրաֆիկը ներկայացնում է բեկյալ, որը պատկերված է 62a նկարում. բեկյալի առանձին հատվածներն ունեն անկյունային գործակից ± 1:

Ընդունենք, այնուհետև, $k = 1, 2, 3, \ldots$ համար՝

$$u_k(x)=\frac{u_0(4^k x)}{4^k}.$$

Այդ ֆունկցիան գծային կլինի $\left[\frac{s}{2\cdot 4^k}, \frac{s+1}{2\cdot 4^k}\right]$ տեսքի միջակայքերում. նա



Գծ. 62:

նույնպես անընդհատ է և ունի $\frac{1}{4^k}$ պարբերություն: Նրա գրաֆիկը նույնպես բեկյալ գիծ է, բայց ավելի մանր ատամներով. գծ. 62б-ում, օրինակ, պատկերված է $u_1(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Բոլոր դեպքերում բեկյալի առանձին հատվածների անկյունային գործակիցներն այստեղ ևս հավասար են ± 1:

Այժմ, x-ի բոլոր իրական արժեքների համար, f(x) ֆունկցիան որոշենք հետևյալ հավասարությամբ

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x).$$

Քանի որ, ակներևորեն, $0 \leqslant u_k(x) \leqslant \frac{1}{2 \cdot 4^k}$ $(k=0, 1, 2, \dots)$, այնպես որ շարքը մաժորվում է $\sum_0^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 4^k}$ զուգամետ պրոգրեսիայով, ապա (ինչպես և վեյերշտրասսի ֆունկցիայի դեպքում), շարքը հավասարաչափ զուգամետ է, և f(x) ֆունկցիան անընդհատ է ամենուրեք։

Կանգ առնենք $x=x_0$ ցանկացած արժեքի վրա։ Հաշվելով այն $\frac{1}{2 \cdot 4^n}$ (որտեղ $n=0, 1, 2, \dots$) ճշգրտությամբ, պակասորդով կամ ավելորդով, մենք այն տեղավորում ենք

$$\frac{s_n}{2 \cdot 4^n} \leqslant x_0 < \frac{s_n+1}{2 \cdot 4^n}$$

տեսքի թվերի միջև, որտեղ s_n-ը ամբողջ թիվ է։ Ակներև է, որ

$$\Delta_n = \left[\frac{s_n}{2 \cdot 4^n}, \frac{s_n+1}{2 \cdot 4^n}\right] \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

փակ միջակայքերը ստացվում են ներդրված մեկը մյուսի մեջ։ Դրանցից յուրաքանչյուրի մեջ կգտնվի այնպիսի x_n կետ, որ նրա հեռավորությունը x_0 կետից հավասար է միջակայքի երկարության կեսին՝

$$|x_n - x_0| = \frac{1}{4^{n+1}}.$$

Պարզ է, որ n-ի աճման հետ զուգընթաց x_n փոփոխականը ձգտում է x_0-ի։

Այժմ կազմենք աճերի հարաբերությունը՝

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0}.$$

Բայց, $k>n$ դեպքում, $\frac{1}{4^{n+1}}$ թիվը $u_k(x)$ ֆունկցիայի $\frac{1}{4^k}$ պարբերության

ամբողջ բազմապատիկն է, այնպես որ $u_k(x_n)=u_k(x_0)$, շարքի համապատասխան անդամները դառնում են 0 և կարող են բաց թողնվել։ Իսկ եթե $k\le n$, ապա $u_k(x)$ ֆունկցիան, որը գծային է Δ_k միջակայքում, գծային կլինի նաև դրա մեջ պարունակվող Δ_n միջակայքում, ընդ որում

$$\frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0}=\pm 1 \quad (k=0, 1, \ldots, n)։$$

Այսպիսով վերջնականապես ունենք

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\sum_{k=0}^{n}(\pm 1).$$

այլ խոսքով, այդ հարաբերությունը հավասար է զույգ ամբողջ թվի կենտ n-ի դեպքում և կենտ ամբողջ թվի զույգ n-ի դեպքում։ Այստեղից պարզ է, որ $n\to\infty$ դեպքում աճումների հարաբերությունը ոչ մի վերջավոր սահմանի ձգտել չի կարող, այնպես որ մեր ֆունկցիան $x=x_0$ դեպքում վերջավոր ածանցյալ չունի։

§ 4. ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՔԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

417. ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՇԱՌԱՎՂԻ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒՄԸ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐԻ ՄԻՋՈՑՈՎ. Մենք տեսանք n° 368-ում, որ յուրաքանչյուր

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{1}$$

աստիճանային շարքի համար գոյություն ունի մի ոչ-բացասական R թիվ (որը կարող է հավասար լինել և $+\infty$) հետևյալ հատկություններով. երբ $|x|<R$ (եթե $R>0$) (1) շարքը բացարձակ զուգամետ է, իսկ երբ $|x|>R$ (եթե $R<+\infty$) այդ շարքը տարամետ է։ Այդ թիվը մենք անվանեցինք (1) շարքի զուգամիտության շառավիղ։ Այժմ մենք կապացուցենք ավելի ճշգրիտ թեորեմ, որի մեջ ոչ միայն նորից հաստատվում է զուգամիտության շառավղի գոյությունը, այլև որոշվում է նրա մեծությունը կախված հենց իր (1) շարքի գործակիցներից։

Դիտարկենք հետևյալ հաջորդականությունը՝

$$\rho_1=|a_1|,\ \rho_2=\sqrt{|a_2|},\ \ldots,\ \rho_n=\sqrt[n]{|a_n|},\ \ldots$$

Այդ հաջորդականության մեծագույն սահմանը [որը միշտ գոյություն ունի, 42] նշանակենք ρ-ով, այնպես որ՝

$$\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\rho_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}։$$

ԿՈՇԻ - ՀԱԴԱՄԱՐԻ ԹԵՈՐԵՄԱՆ։ (1) շարքի զուգամիտության շառավիղը հավասար է $\rho_n = \sqrt[n]{|a_n|}$ վարիանտայի ρ մեծագույն սահմանի հակադարձ մեծությանը՝

$$R = \frac{1}{\rho}$$

(ընդ որում, եթե $\rho=0$, ապա $R=+\infty$, եթե $\rho=+\infty$, ապա $R=0$)։

[Այս թեորեման, որը հայտնագործել էր Կոշին, մոռացության էր մատնվել. Հադամարը (J. Hadamard) նորից հայտնագործեց այն և մատնանշեց նրա կարևոր կիրառումները։]

Ապացույց։ I դեպք՝ $\rho=0$։ *Ապացուցենք, որ այս դեպքում $R=+\infty$, այսինքն՝ որ ցանկացած x-ի դեպքում (1) շարքը բացարձակ զուգամետ է։*

Քանի որ $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$ հաջորդականությունը բաղկացած է դրական էլեմենտներից, ապա այն բանից, որ $\rho=0$, հետևում է, որ նա ունի որոշակի սահման՝

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0.$$

այստեղից Կոշիի վարիանտան

$$C_n = \sqrt[n]{|a_n\cdot x^n|} = |x|\cdot\sqrt[n]{|a_n|}\to 0,$$

երբ $n\to\infty$, ինչպիսին էլ լինի x-ը։ Հետևաբար, ըստ Կոշիի հայտանիշի [359], այն շարքը, որը կազմված է (1) շարքի անդամների բացարձակ մեծություններից, զուգամետ է, ուրեմն և ինքը՝ (1) շարքը բացարձակ զուգամետ է։

II դեպք՝ $\rho=+\infty$։ *Ապացուցենք, որ այս դեպքում $R=0$, այսինքն՝ ամեն մի $x\neq 0$ դեպքում (1) շարքը տարամետ է։*

Քանի որ

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=+\infty,$$

ապա, ակներևորեն, կարելի է գտնել այնպիսի $\{n_i\}$ մասնակի հաջորդականություն, որպեսզի՝

$$\lim_{i\to\infty}\sqrt[n_i]{|a_{n_i}|}=+\infty։$$

Հետևապես, յուրաքանչյուր $x\neq 0$ դեպքում կգտնվի այնպիսի i_0 համար, որ բոլոր $i_0<i$-երի համար տեղի կունենա հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\sqrt[n_i]{|a_{n_i}|} > \frac{1}{|x|} \text{ կամ } |a_{n_i}\cdot x^{n_i}| > 1։$$

Տեսնում ենք, որ այս դեպքում շարքի զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը չի կատարվում (շարքի ընդհանուր անդամը զրոյի չի ձգտում)։ Հետևապես, (1) շարքը տարամետ է։

III դեպք՝ ρ-ն վերջավոր դրական թիվ է՝ $0<\rho<+\infty$։ Ապացուցենք, որ այս դեպքում $R=\frac{1}{\rho}$, այսինքն՝ $\frac{1}{\rho}>|x|$ դեպքում շարքը բ ա ց ա ր ձ ա կ զուգամետ է, իսկ $\frac{1}{\rho}<|x|$ դեպքում շարքը տարամետ է։ Վերցնենք ցանկացած x, որի համար $|x|<\frac{1}{\rho}$։ Ընտրենք $\varepsilon>0$ թիվն այնչափ փոքր, որ կատարվի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$|x|<\frac{1}{\rho+\varepsilon}։$$

Ըստ այդ ε-ի, ակներևորեն, միշտ կարելի է գտնել այնպիսի N_ε թիվ, որ N_ε-ից մեծ բոլոր n-երի համար լինի՝

$$\sqrt[n]{|a_n|}<\rho+\varepsilon$$

[հաջորդականության մեծագույն սահմանի 1-ին հատկության հիման վրա, 42]։ Այստեղից հետևում է, որ Կ ո շ ի ի վարիանտան՝

$$G_n=\sqrt[n]{|a_n x^n|}=|x|\cdot\sqrt[n]{|a_n|}<|x|\cdot(\rho+\varepsilon)<1$$

N_ε-ից մեծ բոլոր n-երի դեպքում։ Կ ո շ ի ի հայտանիշի համաձայն, (1) շարքի անդամների բացարձակ մեծություններից կազմված շարքը զուգամետ է, ուրեմն և ինքը՝ (1) շարքը բ ա ց ա ր ձ ա կ զուգամետ է։

Այժմ վերցնենք ցանկացած x, որի համար $|x|>\frac{1}{\rho}$։ Ընտրենք ε-ը այնչափ փոքր, որ լինի

$$|x|>\frac{1}{\rho-\varepsilon}։$$

Մեծագույն սահմանի 2-րդ հ ա տ կ ո ւ թ յ ա ն համաձայն [42], ցանկացած չափով մեծ n-երի համար կկատարվի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\sqrt[n]{|a_n|}>\rho-\varepsilon,$$

այնպես որ

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|}>|x|\cdot(\rho-\varepsilon)>1։$$

Հետևապես, ցանկացած չափով մեծ n-երի համար շարքի ընդհանուր անդամը

$$\left|a_n x^n\right|>1,$$

և (1) շարքը տարամետ է։

Ապացուցած թեորեմայի օգնությամբ հեշտ է, օրինակ, նորից հաստատել n 410-ի 8° առաջադրությունը: Ըստ այդ թեորեմայի,

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x = a_1 x + 2a_2 x^2 + \cdots + na_n x^n + \cdots$$

շարքի R' *զուգամիտության շառավիղը հակադարձ մեծությունն է հետևյալ թվի՝*

$$\rho' = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n \cdot |a_n|}:$$

Բայց, քանի որ $\sqrt[n]{n} \to 1$, *երբ* $n \to \infty$ *[տես, օրինակ, 32, 10)], ակներևորեն,* $\rho' = \rho$, *իսկ այդ դեպքում նաև* $R' = R$, *որը և պահանջվում էր ապացուցել:*

418. ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՔԵՐԻ ՀԵՏ. *Այս n°-ը մենք կնվիրենք,—հիմնականում արդեն հայտնի,— աստիճանային շարքերի հետ կատարվող գործողությունների ակնարկին, որը մեկնակետ կծառայի հետագա առաջշարժման համար:*

Դիցուք, բացի (1) շարքից, ունենք նաև հետևյալ շարքը՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots \tag{2}$$

Երկու շարքերի զուգամիտության շառավիղներն էլ 0-ից տարբեր ենթադրելով, նրանցից ամենափոքրը նշանակենք r: *Այդ դեպքում, երբ* $r > |x|$, *ինչպես գիտենք [355, 4°, 377], այդ շարքերը կարելի է անդամ առ անդամ գումարել, հանել և բազմապատկել, ընդ որում արդյունքները նորից դասավորվում են ըստ* x*-ի աստիճանների՝*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0) x^n. \tag{3}$$

Ենթադրենք, թե (2) շարքը նույնական է (1)-ի հետ. այդ դեպքում կստացվի, որ զուգամիտության միջակայքի սահմաններում աստիճանային շարքը կարելի է հետևյալ ձևով քառակուսի բարձրացնել՝

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0) x^n.$$

Եթե վերջին շարքը, ըստ վերևում նշված կանոնի, նորից բազմապատկենք (1) շարքով և այդ բանը կրկնենք ցանկացած անգամ, ապա կհանգենք այն եզրակացության, որ աստիճանային շարքը, զուգամիտության միջակայքի սահմաններում, կարելի է ընդհանրապես աստիճան բարձրացնել ցանկացած m *բնական ցուցիչով, ընդ որում արդյունքը ներկայացվում է դարձյալ աստիճանային շարքի տեսքով՝*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} x^n \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (4$$

$a_n^{(m)}$ *գործակիցը կախված է ելակետային շարքի* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n$ *գործակիցներից, և, ինչպես այդ հետևում է (3)-ից, ստացվում է դրանցից միայն գումարումների և բազմապատկումների օգնությամբ։ Այս դիտողությունը ստորև մեզ պետք կգա։*

Այժմ կանգ առնենք անվերջ բազմությամբ աստիճանային շարքերի գումարման վրա, որի հետ մենք հաճախ գործ կունենանք ստորև։ Այսպես, դիցուք տված է աստիճանային շարքերի անվերջ հաջորդականություն

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} x^n \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

դրանցից կազմենք հաջորդական շարք՝

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} x^n \right\}. \qquad (5)$$

Եթե x-ի տվյալ արժեքի դեպքում զուգամետ է այն շարքը, որն ստացվում է այստեղից՝ բոլոր անդամներն իրենց բացարձակ մեծություններով փոխարինելով, ապա զուգամետ է նաև (5) շարքը, ընդ որում նրա A(x) գումարը կարելի է վերլուծել աստիճանային շարքի պարզապես նման անդամների միացումով՝

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \quad \text{որտեղ} \quad A_n=\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \quad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

Ապացույցը ստացվում է հիմնվելով n° 382-*ի* 8 *թեորեմայի վրա։*

Այս կարևոր թեորեմայի կիրառումը լուսաբանենք օրինակներով։

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Ելնելով x ctg x *ֆունկցիայի վերլուծումից պարզ կոտորակների* [413, 7)], *այժմ այն ներկայացնենք աստիճանային շարքով։ Պարզեցման համար փոխարինենք միայն* x-*ը* πx-*ով, այնպես որ*

$$\pi x \cdot \text{ctg}\,\pi x=1-2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^2}{m^2-x^2}.$$

Եթե $|x|<1$, *ապա ցանկացած* $m=1, 2, 3, \ldots$-*ի համար՝*

$$\frac{x^2}{m^2-x^2}=\frac{\frac{x^2}{m^2}}{1-\frac{x^2}{m^2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{m^2}\right)^n.$$

Բոլոր անդամների դրական լինելու շնորհիվ, համաձայն թեորեմայի, միանգամից կստանանք՝

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^2}{m^2-x^2}=\sum_{n=1}^{\infty} s_{2n}\cdot x^{2n}, \quad \text{որտեղ,} \quad s_{2n}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2n}} \quad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Այսպիսով, $1>|x|$ *դեպքում ունենք՝*

$$\pi x \cdot \text{ctg}\,\pi x=1-2\sum_{n=1}^{\infty} s_{2n}x^{2n}.$$

2) Միանգամայն համանման ձևով, ելնելով x · cth x *ֆունկցիայի վեր-*

լուծումից պարզ կոտորակների [413, 8)], կստանանք աստիճանային շարքի վերլուծում՝

$$\pi x \cdot \operatorname{cth} \pi x = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} s_{2n} x^{2n}: \quad (|x| < 1)$$

Հետագայում [422] մենք կտանք նաև այլ արտահայտություն 1) և 2) վերլուծումների գործակիցների համար:

3) Թեորեման պահպանում է իր ուժը նաև այն դեպքում, երբ անվերջ քանակությամբ գումարվող շարքերը դառնում են սովորական վերջավոր բազմանդամներ: Օրինակի համար, արտածենք լոգարիթմական շարքը, ելնելով բինոմական և ցուցչային շարքերից, հետևյալ դատողության միջոցով:

$1 > |x|$-ի և կամայական α-ի դեպքում ունենք [394 (22)]՝

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots$$

Ցրելով x-ը, սկսենք այդ շարքի անդամները դիտարկել որպես α-ի նկատմամբ ամբողջ բազմանդամներ: Քանի որ

$$1 + |\alpha| \cdot |x| + \frac{|\alpha|(|\alpha|+1)}{1 \cdot 2} |x|^2 + \frac{|\alpha|(|\alpha|+1)(|\alpha|+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} |x|^3 + \cdots$$

շարքը զուգամետ է, որում հեշտ է համոզվել Դալամբերի հայտանիշի օգնությամբ, ապա նախորդ շարքում, համաձայն թեորեմայի, կարելի է նման անդամները միացնել՝

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right) + \cdots$$

Մյուս կողմից, ակներև է, որ

$$(1+x)^{\alpha} = e^{\alpha \log(1+x)} = 1 + \alpha \log(1+x) + \cdots$$

Քանի որ երկու վերլուծումներն էլ պետք է նույնական լինեն, ապա հավասարեցնելով α-ի գործակիցները, կստանանք՝

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

Նկատենք, որ ապացուցված թեորեման անմիջականորեն տարածվում է նաև բազմապատիկ շարքերի վրա, օրինակ հետևյալ շարքի վրա

$$\sum_{k=0,\ m=0}^{\infty}\left\{\sum_{n=0} a_{nkm}x^{n}\right\},$$

Իսկապես, բավական է միայն փոխարինել կրկնակի շարքը պարզով, որպեսզի գործը հանգի արդեն դիտարկված դեպքին։

419. ՇԱՐՔԻ ՏԵՂԱԴՐՈՒՄԸ ՇԱՐՔԻ ՄԵՋ։ *Դիտարկենք* $y=f(x)$ *ֆունկցիան, որը* $(-R, R)$ *միջակայքում վերլուծվում է (1) աստիճանային շարքի։ Դիցուք, բացի այդ, տված է* $\varphi(y)$ *ֆունկցիան, որը նույնպես վերլուծվում է աստիճանային շարքի՝*

$$\varphi(y)=\sum_{m=0}^{\infty} h_m y^m=h_0+h_1y+h_2y^2+\ldots+h_my^m+\ldots \quad (6)$$

y*-ի արժեքների համար* $(-\rho, \rho)$ *միջակայքում։*

Եթե $|a_0|=|f(0)|<\rho$*, ապա բավականաչափ փոքր* x*-ի դեպքում և կլինի* $|f(x)|<\rho$*, այնպես որ* $\varphi(f(x))$ *բարդ ֆունկցիան իմաստ ունի։*

$|a_0|<\rho$ միակ պայմանի դեպքում, այդ $\varphi(f(x))$ ֆունկցիան $x=0$ կետի շրջակայքում կարելի է վերլուծել շարքի ըստ x-ի աստիճանների, երբ (6)-ի մեջ y-ի փոխարեն տեղադրենք (1) շարքը և, կատարելով բոլոր աստիճան բարձրացումները (4)-ի համաձայն, այնուհետև միացնենք նման անդամները։

Ապացույց։ Համարելով $|x|<R$*, դիտարկենք հետևյալ շարքը՝*

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|=|a_0|+|a_1|\cdot|x|+|a_2|\cdot|x|^2+\ldots+|a_n|\cdot|x|^n+\ldots.$$

Նրա գումարի անընդհատության [409, 2°] *համաձայն, շնորհիվ* $|a_0|<\rho$*, բավականաչափ փոքր* x*-երի համար տեղի ունի*

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|<\rho \quad (7)$$

անհավասարությունը, այնպես որ

$$|h_0| + \sum_{m=1}^{\infty} |h_m| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n \right)^m$$

շարքը կլինի զուգամետ։

Ընդունելով, ինչպես (4)-ում,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(m)} \cdot |x|^n ,$$

նախորդ շարքը կարելի է արտագրել հետևյալ տեսքով՝

$$|h_0| + \sum_{m=1}^{\infty} |h_m| \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(m)} \cdot |x|^n \right).$$

Քանի որ $\alpha_n^{(m)}$-ը ստացվում է $|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|$-ից գումարումների ու բազմապատկումների միջոցով [418] ճիշտ այնպես, ինչպես $a_n^{(m)}$-ը ստացվում էր $a_0, a_1, \ldots, a_n$-ից, ապա ակնհայտորեն՝ $|a_n^{(m)}| \leqslant \alpha_n^{(m)}$։ Ուստի x-ի նշված արժեքների համար զուգամիտում է նաև

$$|h_0| + \sum_{m=1}^{\infty} |h_m| \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(m)}| \cdot |x|^n \right),$$

շարքը, իսկ այդ դեպքում

$$h_0 + \sum_{m=1}^{\infty} h_m \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^m = h_0 + \sum_{m=1}^{\infty} h_m \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} \cdot x^n \right)$$

շարքի նկատմամբ կիրառելի է նախորդ n°-ի վերջին պնդումը, որը և ապացուցում է թեորեման։

x-ի փոփոխման տիրույթը, որի համար մեր դատողությունն ապահովում է $\varphi(f(x))$ ֆունկցիայի շարքի վերլուծումը ըստ x-ի աստիճանների, բնորոշվում է, այսպիսով, բացի ինքն-

բստինքյան հասկացված $|x|<R$ *անհավասարությունից, նաև (7) անհավասարությամբ. $R=+\infty$ դեպքում կարիք չկա մտցնել առաջին սահմանափակումը, իսկ $\rho=+\infty$ դեպքում՝ վերանում է երկրորդը.*

Թեորեմայի կիրառումների ժամանակ մեծ մասամբ բավական է լինում իմանալ, որ վերլուծումը տեղի ունի փոքր արժեքների համար. Եթե հետաքրքրություն է ներկայացնում տացված շարքի կիրառելիության ամբողջ տիրույթը, ապա պետք է առանձին հետազոտել նրա զուգամիտության միջակայքը:

Եվ այստեղ հարկ է նշել Թեորեմայի հետագա ընդհանրացումների հնարավորությունը. Դիցուք, օրինակ, տված է

$$\varphi(y, z)=\sum_{k,m=0}^{\infty} h_{km} y^k z^m,$$

կրկնակի շարքը, որը զուգամետ է երբ, $|y|<\rho$ և $|z|<\rho$, և հետևյալ երկու շարքերը՝

$$y=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad z=g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

որոնք զուգամետ են, երբ $|x|<R$. այդ դեպքում, երբ $|a_0|<\rho$ և $|b_0|<\rho$, $\varphi(f(x), g(x))$ բարդ ֆունկցիան $x=0$-ի շրջակայքում կարելի է վերլուծել շարքի ըստ x-ի աստիճանների, եթե տեղադրենք y-ի և z-ի փոխարեն համապատասխան շարքերը և, կատարելով աստիճան բարձրացումներն ու գումարումները, կատարենք նաև նման անդամների միացումը:

420. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ: 1) Գտնել $\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ֆունկցիայի ըստ x-ի աստիճանների վերլուծման առաջին մի քանի անդամները:

Ունենք, $1>|x|$-ի համար

$$\frac{1}{e}\cdot(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{e}\cdot e^{\frac{1}{x}\log(1+x)}=e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots}=$$

$$=1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^5}{6}+\cdots\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}-\cdots\right)^2+\frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots\right)^3+$$

$$+\frac{1}{24}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\cdots\right)^4+\frac{1}{120}\left(-\frac{x}{2}+\cdots\right)^5+\cdots=$$

$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+\frac{2447}{5760}x^4-\frac{959}{2304}x^5+\cdots$$

[Նման տիպի խնդիրները մոտ են նրանց, որոնք դիտարկվել են արդեն n° 123-ում:]

2) Եկեք փորձենք ստանալ բինոմական շարքը, ելնելով լոգարիթմական ու ցուցչային շարքերից:

$1>|x|$-ի և ցանկացած α-ի դեպքում, ակներևորեն, կլինի՝

$$(1+x)^{\alpha}=e^{\alpha\log(1+x)}=e^{\alpha\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\right)}=$$

$$=1+\alpha\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\right)+\frac{\alpha^2}{2!}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\right)^2+\cdots=$$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots$$

Մի քանի առաջին գործակիցների տեսքը որոշվում է միանգամից: Իսկ x^n պարունակող ընդհանուր անդամի գործակիցը կարելի է ստանալ հետևյալ նկատառումներից: Անմիջականորեն պարզ է, որ նա ներկայացնում է α-ի նկատմամբ n աստիճանի ամբողջ բազմանդամ՝ $P_n(x)$: Քանի որ $\alpha=0, 1, 2, \ldots, n-1$ դեպքերում վերլուծման մեջ x^n պարունակող անդամ չկա, ապա այդ բազմանդամը մատնանշված կետերում դառնում է 0, հետևապես և ունի հետևյալ տեսքը՝

$$P_n(\alpha)=c\cdot\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1):$$

$\alpha=n$ դեպքում x^n-ի գործակիցը 1 է, $P_n(n)=1$. այստեղից՝ $c=\frac{1}{n!}$, և վերջնականապես՝

$$P_n(\alpha)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}.$$

3) Դիցուք f(x)*-ը որևէ ֆունկցիա է, որը շարքի է վերլուծվում ըստ* x*-ի աստիճանների, առանց ազատ անդամի՝*

$$f(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n\;\cdots.$$

Այդ դեպքում, համաձայն ընդհանուր թեորեմայի, x*-ի նույն արժեքների համար շարքի է վերլուծվում նաև* $g(x)=e^{f(x)}$ *ֆունկցիան, ընդ որում ազատ անդամը, ակներևաբար, հավասար է 1-ի։ Պահանջվում է գտնել այդ վերլուծումը։*

Ցույց տանք, թե ինչպես կարելի է այդ նպատակի համար օգտագործել անորոշ գործակիցների մեթոդը։ *Դիցուք՝*

$$g(x)=e^{f(x)}=1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots+b_nx^n+\cdots$$

Դիֆերենցելով այս հավասարությունը, կգտնենք՝

$$e^{f(x)}\cdot f'(x)=b_1+2b_2x+3b_3x^2+\cdots+nb_nx^{n-1}+\cdots,$$

կամ, ձախ մասի արտադրիչների փոխարեն տեղադրելով նրանց վերլուծումները,

$$(1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots)(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots)=$$
$$=b_1+2b_2x+3b_3x^2+\cdots$$

Այդ պայմանը բերում է հավասարումների այսպիսի սիստեմի՝

$$a_1=b_1,\quad 2a_2+a_1b_1=2b_2,\quad 3a_3+2a_2b_1+a_1b_2=3b_3,\;\cdots$$
$$\cdots,\; na_n+(n-1)a_{n-1}b_1+\cdots+2a_2b_{n-2}+a_1b_{n-1}=nb_n,\;\cdots, \tag{8}$$

որից և հ ա ջ ո ր դ ա բ ա ր որոշվում են b *անհայտ գործակիցները։*

Օրինակի համար նշված եղանակը կիրառենք հետևյալ խնդիրը լուծելու համար (Վ ե յ ե ր շ տ ր ա ս ս)։

Ապացուցել, որ

$$g(x)=(1-x)e^{\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{m-1}}{m-1}}$$

ֆունկցիայի վերլուծումը սկսվում է $1-\frac{x^m}{m}+\cdots$ *անդամներով, և որ նրա բոլոր գործակիցները իրենց բացարձակ մեծությամբ մեկից փոքր են։*

Գրենք g(x)*-ը այս տեսքով*

$$g(x)=e^{\log(1-x)+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{m-1}}{m-1}}=e^{-\frac{x^m}{m}-\frac{x^{m+1}}{m+1}-\cdots}$$

Այդ դեպքում թեորեմայի առաջին մասն ակներև է դառնում, իսկ երկրորդ մասը կապացուցվի ինդուկտիվ կերպով։ Ենթադրենք, թե n-ից փոքր նշիչ ունեցող բոլոր b_k գործակիցները բացարձակ մեծությամբ փոքր են մեկից։ Քանի որ տվյալ դեպքում

$$a_k = 0, \text{ երբ } k \neq m, \text{ և } a_k = -\frac{1}{k} (ka_k = -1), \text{ երբ } k = m,$$

ապա (8) հավասարություններից n-րդը կհայտնաբերի, որ նաև $|b_n| < 1$։

[Առաջարկվում է այստեղ նշված մեթոդը կիրառել 1) և 2) օրինակների նկատմամբ։]

4) Նույն (8) հավասարումները կարող են պետք գալ և ուրիշ հարցերում։ Դիցուք տված է $g(x)$ ֆունկցիայի՝

$$g(x) = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

վերլուծումը և որոնվում է $f(x)$ ֆունկցիայի՝

$$f(x) = \log g(x) = ax + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

վերլուծումը։ Հեշտ է հասկանալ, որ a և b գործակիցները կապված են նույն (8) առնչություններով, բայց այս անգամ որոշման ենթակա են a գործակիցները։

5) Ցույց տալ, որ

$$F(x) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 + q^m x) = (1 + qx)(1 + q^2 x)(1 + q^3 x) \cdots \quad (|q| < 1)$$

անվերջ արտադրյալը բավականաչափ փոքր x-երի դեպքում վերլուծվում է ըստ x-ի աստիճանների, և որոշել այդ վերլուծման գործակիցները։

$1 > |x|$-ի դեպքում արտադրյալը զուգամետ է և ունի դրական արժեք լոգարիթմելով, կստանանք՝

$$\log F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \log (1 + q^m x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(q^m x - \frac{1}{2} q^{2m} x^2 + \cdots \right)։$$

Ստանավորապես, այդ շարքը զուգամետ է, երբ փոխարինում ենք x-ը՝ $|x|$-ով և q-ն՝ $|q|$-ով։ Այստեղից հետևում է [418], որ $\log F(x)$-ը կրկնակի շրջակայքում շարքի է վերլուծվում ըստ x-ի աստիճանների, իսկ դրա հետ [արդեն համաձայն n 419 թեորեմայի] վերածվում է նաև

$$F(x) = e^{\log F(x)}$$

արտահայտությունը։

Այսպիսով, բավականաչափ փոքր x-երի համար, ունենք,

$$F(x)=1+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots,$$

որտեղ $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ գործակիցները դեռևս որոշման ենթակա են։ Այդ ամենից հեշտ է կատարել, եթե ելնենք հետևյալ ակներև հավասարությունից՝

$$F(x)=(1+qx)\cdot F(qx),$$

որը, օգտվելով վերլուծումից, կարելի է արտագրել այս տեսքով՝

$$1+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots=$$

$$=(1+qx)(1+b_1qx+b_2q^2x^2+\cdots+b_nq^nx^n+\cdots)։$$

Աստիճանային շարքերի նույնության թեորեմայի համաձայն, այստեղից՝

$$b_1q+q=b_1,\quad b_2q^2+b_1q^2=b_2,\ \ldots,\ b_nq^n+b_{n-1}q^n=b_n\ \ldots$$

կամ

$$b_1=\frac{q}{1-q},\qquad b_2=\frac{b_1q^2}{1-q^2},\ \ldots,\ b_n=\frac{b_{n-1}q^n}{1-q^n},\ \ldots$$

և, վերջնականապես՝

$$b_1=\frac{q}{1-q},\quad b_2=\frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)},\ \ldots,\ b_n=\frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)},\ldots$$

6) Վերցնենք $\frac{\sin x}{x}$ ֆունկցիայի անվերջ արտադրյալի [395] և անվերջ շարքի [392 (12)] վերլուծումները և հավասարեցնենք նրանց լոգարիթմները [389, 4°]՝

$$\log\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)=\log\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\cdots\right)$$

կամ՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{n^2\pi^2}+\frac{1}{2}\,\frac{x^4}{n^4\pi^4}+\cdots\right)=$$

$$=\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+\cdots\right)^2+\cdots$$

Վերլուծելով ձախ և աջ մասերն ըստ x-*ի աստիճանների* [481, 419] *և նույնացնելով գործակիցները, կհանգենք հետևյալ հավասարություններին՝*

$$\frac{1}{\pi^2}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{6},\qquad \frac{1}{2\pi^4}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{180},\;\ldots,$$

որտեղից

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\qquad \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90},\;\ldots$$

Ի միջի այլոց, ստորև [422] *մենք կգտնենք այդ բանաձևերն այլ նկատառումներից:*

7) Եթե $f(x)$ ֆունկցիան $(-R,\ R)$ միջակայքում վերլուծվում է (1) աստիճանային շարքի և $\bar{x}$-ը այդ միջակայքի կամայական կետ է, ապա նրա շրջակայքում ֆունկցիան շարքի է վերլուծվում ըստ $(x-\bar{x})$-ի աստիճանների:

Իսկապես, (1)-ում ընդունենք $x=\bar{x}+y$. *ըստ ընդհանուր թեորեմայի (փոխելով միայն* x-*ի և* y-*ի դերերը), քանի դեռ* $|\bar{x}|+|y|<R$ *կամ* $|y|<R-|\bar{x}|$, *կարելի է անցնել վերլուծման ըստ* y-*ի աստիճանների, այսինքն՝ ըստ* $(x-\bar{x})$-*ի աստիճանների՝*

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_k y^k=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(x-\bar{x})^k.$$

Դասավորելով $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\bar{x}+y)^n$ *շարքի մեջ բոլոր աստիճան բարձրացումները և հավաքելով բոլոր նման անդամները, հեշտ է որոշել և այդ վերլուծման գործակիցները՝*

$$A_0=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\bar{x}^n=f(\bar{x})$$

և, ընդհանրապես,

$$A_k=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot2\cdots k}a_n\bar{x}^{n-k}=$$

$$=\frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdot\cdot\cdot(n-k+1)a_n \bar{x}^{n-k}=\frac{f^{(k)}(\bar{x})}{k!}\text{։}$$

Այս արդյունքը, շնորհիվ 410-ի 10°, անսպասելի չէ։

Միայն պարզության համար էր, որ ելակետային շարքը մենք վերցրինք դասավորված ըստ x*-ի աստիճանների. գործը չէր փոխվի, եթե* f(x) *ֆունկցիան լիներ վերլուծված ըստ* $x-x_0$ *տարբերության աստիճանների։*

Հիշեցնենք, որ f(x) *ֆունկցիան, որը* $x=x_0$ *կետի շրջակայքում վերլուծվում է շարքի ըստ* $x=x_0$*-ի աստիճանների*, կոչվում է անալիտիկ ֆունկցիա այդ կետում։ Մենք ապացուցեցինք, այսպիսով, որ* որևէ կետում անալիտիկ ֆունկցիան անալիտիկ կլինի նաև նրա մի որոշ շրջակայքի բոլոր կետերում։

Այս պնդումը տարածվում է նաև մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի դեպքի վրա։

8) Որպես վերջին օրինակ, դիտարկենք

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}}=[1+(\alpha^2-2x\alpha)]^{-\frac{1}{2}}$$

ֆունկցիայի վերլուծումը ըստ α*-ի աստիճանների, կամայականորեն ֆիքսած* x*-ի դեպքում։ Այսպիսի վերլուծման հնարավորությունը երաշխավորվում է մեր թեորեմայով, եթե միայն* $|\alpha|^2+2|x|\cdot|\alpha|<1$*։ Հեշտ է տեսնել,* α^n*-ի* $(n\geq1)$ *գործակիցը կլինի* n *աստիճանի մի* $X_n=X_n(x)$ *բազմանդամ, այնպես որ*

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}}=1+X_1\alpha+X_2\alpha^2+\cdot\cdot\cdot+X_n\alpha^n+\cdot\cdot\cdot \qquad (9)$$

Այդ գործակիցները որոշելու համար (9) հավասարությունը դիֆերենցենք ըստ α*-ի՝*

$$\frac{x-\alpha}{(\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2})^3}=X_1+2X_2\alpha+\cdot\cdot\cdot+nX_n\alpha^{n-1}+\cdot\cdot\cdot$$

Համեմատելով այս արդյունքը (9)-ի հետ, հեշտ է ստանալ՝

$$(1-2x\alpha+\alpha^2)(X_1+2X_2\alpha+\cdot\cdot\cdot+nX_n\alpha^{n-1}+\cdot\cdot\cdot)=$$
$$=(x-\alpha)(1+X_1\alpha+X_2\alpha^2+\cdot\cdot\cdot+X_n\alpha^n+\cdot\cdot\cdot)\text{։}$$

Այժմ հավասարեցնում ենք α*-ի միատեսակ աստիճանների գործակիցները երկու մասում էլ։ Մենք կգտնենք, ամենից առաջ,*

---

* *Այդ շարքը, անհրաժեշտաբար, կլինի նրա Թեյլորի շարքը* [410, *10)*]։

$$X_1 = x \text{ և } 2X_2 - 2xX_1 = 1 - xX_1, \text{ որտեղից } X_2 = \frac{3x^2-1}{2}։$$

Այնուհետև, ընդհանրապես,

$$(n+1)X_{n+1} - 2nx\cdot X_n + (n-1)X_{n-1} = xX_n - X_{n-1}$$

կամ

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0։$$

Գտնելով առաջին երկու բազմանդամը, կարելի է այդ անդրադարձ բանաձևով հաջորդաբար հաշվել մնացածները։

Աչքի է զարկում, որ X_1 և X_2 բազմանդամները համընկնում են Լ ե ժ ա ն դ ր ի առաջին երկու բազմանդամների հետ, իսկ քիչ առաջ հիշված բանաձևը նույնական է n° 308-ի (11)-ի համանման բանաձևի հետ, որի միջոցով հաշվվում են Լ ե ժ ա ն դ ր ի բազմանդամները։ Այստեղից եզրակացնում ենք, որ (9) վերլուծման գործակիցները հանդիսանում են հենց Լ ե ժ ա ն դ ր ի բազմանդամները։

Այդ կապակցությամբ α և x երկու փոփոխականների

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$$

ֆունկցիան անվանում են «ծնող ֆունկցիա» Լ ե ժ ա ն դ ր ի բազմանդամների համար։ (9) վերլուծումը հաջողությամբ կարող է օգտագործվել այդ բազմանդամների հատկությունները ուսումնասիրելու համար։

421. ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՔԵՐԻ ԲԱԺԱՆՈՒՄԸ։ Շարքը շարքի մեջ տեղադրման թեորեմայի կիրառման կարևոր օրինակ է հանդիսանում ա ս տ ի ճ ա ն ա յ ի ն շ ա ր ք ե ր ի բ ա ժ ա ն մ ա ն հ ա ր ց ը։

Դիցուք (1) շարքի a_0 ազատ անդամը տարբեր է 0-ից. այդ շարքը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$a_0\left(1+\frac{a_1}{a_0}x+\frac{a_2}{a_0}x^2+\ldots+\frac{a_n}{a_0}x^n+\ldots\right)=a_0(1+y),$$

ընդունելով

$$y=\frac{a_1}{a_0}x+\frac{a_2}{a_0}x^2+\ldots+\frac{a_n}{a_0}x^n+\ldots$$

Այդ դեպքում՝

$$\frac{1}{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots}=\frac{1}{a_0}\cdot\frac{1}{1+y}=$$

$$=\frac{1}{a_0}(1-y+y^2-\ldots+(-1)^m y^m+\ldots),$$

Վերջին շարքը խաղում է (6) շարքի դերը, ընդ որում ρ-ն այստեղ 1 է։ Համաձայն ընդհանուր թեորեմայի, այդ արտահայտությունը կարելի է վերլուծել ըստ x*-ի աստիճանների՝*

$$\frac{1}{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots}=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots$$

առնվազն x*-ի բավականաչափ փոքր արժեքների համար, օրինակ, նրանց համար, որոնք բավարարում են հետևյալ անհավասարությունը՝*

$$\left|\frac{a_1}{a_0}\right|\cdot|x|+\left|\frac{a_2}{a_0}\right|\cdot|x|^2+\ldots+\left|\frac{a_n}{a_0}\right|\cdot|x|^n+\ldots<1.$$

Դիտարկենք երկրորդ աստիճանային շարքը՝

$$b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+\ldots,$$

որի զուգամիտության շառավիղը 0*-ից տարբեր է։ Այդ դեպքում*

$$\frac{b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n+\ldots}{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots}$$

քանորդը բավականաչափ փոքր x*-երի համար կարելի է փոխարինել*

$$(b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n+\ldots)(c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots)$$

արտադրյալով և, հետևապես, նորից ներկայացնել մի որոշ աստիճանային շարքի տեսքով՝

$$d_0+d_1x+d_2x^2+\ldots+d_nx^n+\ldots$$

Այդ շարքի գործակիցներն ամենից ավելի հեշտությամբ կորոշվեն անորոշ գործակիցների մեթոդով, ելնելով հետևյալ առնչությունից՝

$$(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots)(d_0+d_1x+\ldots+d_nx^n+\ldots)=$$
$$=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n+\ldots,$$

որի մեջ a *և* b *գործակիցները հայտնի են ենթադրվում։ Ձախակողմյան շարքերն ընդհանուր կանոնով բազմապատկելով* [418]*, այնուհետև կհավասարեցնենք* x*-ի միատեսակ աստիճան-*

ների գործակիցները ձախ և աջ մասերում։ Այդ ճանապարհով կստացվեն անթիվ բազմությամբ հավասարումներ

$$a_0d_0=b_0,\quad a_0d_1+a_1d_0=b_1,\quad a_0d_2+a_1d_1+a_2d_0=b_2,\ldots$$

$$\ldots,\ a_0d_n+a_1d_{n-1}+\cdots+a_{n-1}d_1+a_nd_0=b_n,\ldots \qquad (10)$$

Քանի որ a_0 *գործակիցը* 0*-ից տարբեր է ենթադրված, ապա առաջին հավասարումից միանգամից կստանանք՝* $d_0=\frac{b_0}{a_0}$, *այնուհետև երկրորդը մեզ կտա՝* $d_1=\frac{b_1-a_1d_0}{a_0}=\frac{a_0b_1-a_1b_0}{a_0^2}$ *և այլն։ Ընդհանուր դեպքում, եթե* $d_0, d_1,\ldots, d_{n-1}$ n *գործակիցները արդեն գտնված են, ապա* $(n+1)$*-րդ հավասարումը, որը պարունակում է* d_n *միակ անհայտը, թույլ կտա որոշել նրա արժեքը։ Այսպես, հ ա ջ ո ր դ ա բ ա ր, (10) հավասարումների միջոցով որոշվում են քանորդի բոլոր գործակիցները, ընդ որում լիովին միարժեքորեն։*

Օ ր ի ն ա կ ն ե ր։ 1) Գտնել հետևյալ քանորդի առաջին մի քանի անդամները

$$\frac{x}{\log\frac{1}{1-x}}=\frac{x}{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots}=\frac{x}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\cdots},$$

(10) հավասարումներն այստեղ ընդունում են հետևյալ տեսքը՝

$$d_0=1,\quad d_1+\frac{1}{2}d_0=0,\quad d_2+\frac{1}{2}d_1+\frac{1}{3}d_0=0,$$

$$d_3+\frac{1}{2}d_2+\frac{1}{3}d_1+\frac{1}{4}d_0=0$$

և այլն. այստեղից $d_0=1,\ d_1=-\frac{1}{2},\ d_2=-\frac{1}{12},\ d_3=-\frac{1}{24},\ldots$ *Այսպիսով՝*

$$\frac{x}{\log\frac{1}{1-x}}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{24}x^3-\ldots$$

2) Գտնել tg x*-ի վերլուծումը զրոյի շրջակայքում, դիտարկելով* tg x*-ը որպես քանորդ* sin x*-ի և* cos x*-ի, որոնց վերլուծումները հայտնի են* [392, *(12) և (13)*]։

Այդպիսի վերլուծման գոյությունը նախապես հայտնի է ընդհանուր թեորեմայից։ Քանի որ tg x-ը կենտ ֆունկցիա է, ապա այդ վերլուծումը պարունակում է x-ի միայն կենտ աստիճաններ։ Որոնելի վերլուծման մեջ x^{2n-1}-ի գործակիցը հարմար է վերցնել $\frac{T_n}{(2n-1)!}$ ձևով։ Այսպիսով, ունենք՝

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{(2n-1)!} x^{2n-1} \tag{11}$$

և

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}։$$

Ակներևաբար $T_1=1$։ Որոշելու համար մնացած T_n թվերը, հավասարեցնելով x^{2n-1}-ի գործակիցները ձախ և աջ մասերում, կստանանք հետևյալ տեսքի հավասարումների հաջորդականությունը՝

$$\frac{T_n}{(2n-1)!} - \frac{T_{n-1}}{(2n-3)!} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{T_{n-2}}{(2n-5)!} \cdot \frac{1}{4!} - \ldots = (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}$$

կամ, $(2n-1)!$-ով բազմապատկելուց հետո,

$$T_n - C_{2n-1}^2 T_{n-1} + C_{2n-1}^4 T_{n-2} - \cdots = (-1)^{n-1}։$$

Քանի որ C_{2n-1}^k թվերը բոլորն ամբողջ են, ապա հաջորդաբար համոզվում ենք, որ T_n գործակիցները նույնպես բոլորն ամբողջ են։ Ահա նրանցից առաջիններից մի քանիսի արժեքները՝

$$T_1=1,\quad T_2=2,\quad T_3=16,\quad T_4=272,\quad T_5=7936,\ \cdots$$

Այսպիսով,

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots$$

Հետևյալ n°-ում կնշվի այդ վերլուծման գործակիցները հաշվելու այլ եղանակ և ճշտորեն կորոշվի նրա կիրառելիության բնագավառը։

422. ԲԵՌՆՈՒԼԻԻ ԹՎԵՐԸ ԵՎ ԱՅՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԸ, ՈՐՏԵՂ ՆՐԱՆՔ ՀԱՆԴԻՊՈՒՄ ԵՆ։ Դիտարկենք բաժանման մի օրինակ ևս, որն ունենալու է կարևոր կիրառումներ՝

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots}=\frac{1}{1+\frac{x}{2!}+\dots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\dots}$$

Համաձայն n° 421 *ընդհանուր պնդման, այդ քանորդը, x-ի գոնե բավականաչափ փոքր արժեքների համար, ներկայացվում է աստիճանային շարքի տեսքով՝*

$$\frac{x}{e^x-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{n!}x^n\,. \tag{12}$$

Նրա գործակիցները մենք վերցրինք $\beta_n/n!$ *ձևով, որը (ինչպես կտեսնենք) ավելի հարմար կդարձնի նրանց հաջորդաբար հաշվումը։ Ելնելով*

$$\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\dots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\dots\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{\beta_1}{1!}x+\frac{\beta_2}{2!}x^2+\dots+\frac{\beta_n}{n!}x^n+\dots\right)=1$$

նույնությունից, x^n*-ի* ($n=1, 2, 3, \dots$) *տարբեր աստիճանների գործակիցները ձախ կողմում հավասարեցնենք զրոյի։ Մենք կստանանք հետևյալ տեսքի հավասարումներ՝*

$$\frac{1}{n!1!}\beta_n+\frac{1}{(n-1)!2!}\beta_{n-1}+\dots+\frac{1}{(n-k+1)!k!}\beta_{n-k+1}+\dots$$

$$\dots+\frac{1}{1!n!}\beta_1+\frac{1}{(n+1)!}=0$$

կամ, $(n+1)!$*-ով բազմապատկելուց հետո,*

$$C^1_{n+1}\beta_n+C^2_{n+1}\beta_{n-1}+\dots+C^k_{n+1}\beta_{n+1-k}+\dots+C^n_{n+1}\beta_1+1=0.$$

Օգտագործելով Նյուտոնի բինոմի հետ ունեցած նմանությունը, այդ հավասարումները կարելի է սիմվոլիկ կերպով գրել այսպես՝

$$(\beta+1)^{n+1}-\beta^{n+1}=0 \qquad (n=1, 2, 3, \dots).$$

երկանդամը սովորական կանոնով աստիճան բարձրացնելուց և ավագ անդամը կրճատելուց հետո, β^k *աստիճաններն այստեղ պետք է փոխարինվեն* β_k *գործակիցներով։ Այսպիսով,* β_n *թվերը* ($n=1, 2, 3, \dots$) *որոշելու համար կունենանք հավասարումների անվերջ սիստեմ՝*

$$2\beta_1+1=0,\ 3\beta_2+3\beta_1+1=0,\ 4\beta_3+6\beta_2+4\beta_1+1=0,$$

$$5\beta_4+10\beta_3+10\beta_2+5\beta_1+1=0,\ \dots,$$

որոնցից հաջորդաբար գտնում ենք՝

$$\beta_1=-\frac{1}{2},\quad \beta_2=\frac{1}{6},\quad \beta_3=0,\quad \beta_4=-\frac{1}{30},\quad \beta_5=0,\quad \beta_6=\frac{1}{42},$$

$$\beta_7=0,\quad \beta_8=-\frac{1}{30},\quad \beta_9=0,\quad \beta_{10}=\frac{5}{66},\quad \beta_{11}=0,\quad \beta_{12}=-\frac{691}{2730},$$

$$\beta_{13}=0,\quad \beta_{14}=\frac{7}{6}\ \cdots$$

Քանի որ β թվերը որոշվում են ամբողջ գործակիցներ ունեցող գծային հավասարումներից, ապա նրանք բոլորն էլ ռացիոնալ են։ Հեշտ է որոշել, ընդհանուր տեսքով, որ կենտ ինդեքսներով β թվերը (բացի առաջինից)՝ զրոներ են։ Իրոք, (12) հավասարության մեջ $-\frac{x}{2}$ *անդամը ձախ կողմ տեղափոխելով, հավասարության ձախ կողմում, ակներևորեն, կունենանք զույգ ֆունկցիա՝*

$$\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=\frac{x}{2}\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{x}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}=\frac{x}{2}\,\mathrm{cth}\,\frac{x}{2}.$$

Այդ դեպքում նրա

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\beta_n}{n!}x^n$$

վերլուծումը չի կարող պարունակել x-ի կենտ աստիճաններ, որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Զույգ ինդեքսներ ունեցող β թվերի համար մտցնենք ավելի սովորական նշանակումներ, ընդունելով

$$\beta_{2n}=(-1)^{n-1}B_n\,^*,$$

այնպես որ

$$B_1=\frac{1}{6},\quad B_2=\frac{1}{30},\quad B_3=\frac{1}{42},\quad B_4=\frac{1}{30},$$

$$B_5=\frac{5}{66},\quad B_6=\frac{691}{2730},\quad B_7=\frac{7}{6},\ \cdots$$

---

* *Մենք շուտով կհամոզվենք, որ բոլոր* B_n*-երը դրական են։*

Հենց այս թվերն են, որ կոչվում են Բեռնուլլիի թվեր, Յակոբ Բեռնուլլիի անունով, որն առաջինն է հանդիպել նրանց՝ երբ հաջորդող բնական թվերի բնական ցուցիչներով աստիճանների գումարներն ուսումնասիրելիս։ Բեռնուլլիի թվերը կարևոր դեր են խաղում անալիզի շատ հարցերում.

Այսպես ուրեմն, հարմարության համար x-ը փոխարինելով 2x-ով, վերջնականապես կունենանք հետևյալ վերլուծումը՝

$$x \cdot \operatorname{cth} x = 1 + \frac{2^2 B_1}{2!} x^2 - \frac{2^4 B_2}{4!} x^4 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{2^{2n} B_n}{2n!} x^{2n} + \cdots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n} B_n}{2n!} x^{2n}, \qquad (13)$$

որն ուժի մեջ է x-ի բավականաչափ փոքր արժեքների համար։

n 418-ի 2)-ում մենք արդեն ունեցել ենք

$$\pi x \cdot \operatorname{cth} \pi x = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} s_{2n} \cdot x^{2n}$$

վերլուծումը, որտեղ s_{2n}-ով նշանակված էր $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}}$ շարքի գումարը։ (13) համապատասխանության մեջ x-ը փոխարինելով πx-ով, այն արտագրենք այսպես՝

$$\pi x \cdot \operatorname{cth} \pi x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n} B_n}{2n!} \cdot x^{2n}.$$

Երկու վերլուծումները, հասկանալի է, պետք է լինեն նույնական. այստեղից՝

$$B_n = \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \cdot s_{2n},$$

այնպես որ բոլոր B_n թվերը լինում են դրական։ Քանի որ $n \to \infty$ դեպքում, ակնհայտորեն, $s_{2n} \to 1$, ապա ստացված բանաձևից պարզորոշ երևում է, որ Բեռնուլլիի թվերն անվերջ աճում են*. նրանց համարիչների աճման հետ միասին։

* Թեև, ինչպես տեսանք, ոչ մոնոտոն, այլ վերջին աստիճանի քմահաճ օրենքով։

Զուգընթացաբար նշենք s_{2n} գումարների համար ստացվող օգտակար արտահայտությունները՝

$$s_{2n} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} \cdot B_n .$$

մասնավորապես [համեմատել 420, *6*)]

$$s_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad s_4 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Այժմ հիշենք [418, *1*), որ $\pi x \cdot \operatorname{ctg} \pi x$-ի համար ևս մենք ունենք այնպիսի վերլուծում, որի գործակիցները նույնպես կախված էին s_{2n} գումարներից՝

$$\pi x \cdot \operatorname{ctg} \pi x = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} s_{2n} \cdot x^{2n}. \tag{14}$$

Փոխարինելով այստեղ πx-ը x-ով և s_{2n}-երի փոխարեն տեղադրելով բեռնուլլիյան թվերի միջոցով գրած արտահայտությունները, կստանանք՝

$$x \cdot \operatorname{ctg} x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{2n!} x^{2n}. \tag{15}$$

Քանի որ (14) վերլուծման մասին մենք գիտենք, որ այն տեղի ունի $1>|x|$-ի դեպքում, ապա (15) վերլուծումն ուժի մեջ է $\pi>|x|$-ի դեպքում։ Բայց $x \to \pm\pi$ դեպքում (15) հավասարության ձախ մասն անվերջ աճում է, հետևապես, աջակողմյան շարքը չի կարող զուգամիտել ոչ $x=\pm\pi$ դեպքում, ոչ էլ առավել ևս $\pi<|x|$-ի դեպքում. Նրա զուգամիտության շառավիղը ճշտորեն հավասար է π-ի։

Այստեղից, ի միջի այլոց, պարզ է, որ նույնպիսին էլ կլինի (13) շարքի զուգամիտության շառավիղը, մինչդեռ (12) ելակետային շարքն ունի 2π զուգամիտության շառավիղ։

Օգտվելով

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2\operatorname{ctg} 2x$$

նույնությունից, (15)-ից հեշտ է նորից ստանալ վերլուծում $\operatorname{tg} x$-ի համար՝

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n!} B_n \cdot x^{2n-1}. \tag{16}$$

Դա նույնական է առաջ ստացածի հետ [տես (11)], բայց այն գերադասում են գրել հատկապես այդ ձևով այն պատճառով, որ Բեռնուլլիի թվերը լավ ուսումնասիրված են, և նրանց համար պատրաստված կան լայնածավալ աղյուսակներ: tg x-ը ներկայացնող շարքի զուգամիտության շառավիղն է $\frac{\pi}{2}$. այդ երևում է այժմ նրա ստանալու հենց եղանակից:

Բեռնուլլիի թվերի հետ կապված են նաև շատ ուրիշ օգտակար վերլուծումներ: Օրինակ, քանի որ

$$\left(\log\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}(x\cdot \operatorname{ctg} x-1)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_n}{2n!}x^{2n-1},$$

ապա, ինտեգրելով անդամ առ անդամ, գտնում ենք ($\pi>|x|$-ի համար)

$$\log\frac{\sin x}{x}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_n}{2n!}\cdot\frac{x^{2n}}{2n},$$

Համանման ձևով, (16) վերլուծումից անդամ առ անդամ ինտեգրումով ստանում ենք $\left(\frac{\pi}{2}>|x|\text{-ի համար}\right)$՝

$$\log\cos x=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{2n!}\cdot\frac{x^{2n}}{2n},$$

Այս վերլուծումներից հեշտ է ստանալ վերլուծում $\log\frac{\operatorname{tg} x}{x}$-ի համար: Այս շարքերն օգտակար են լինում լոգարիթմա-եռանկյունաչափական աղյուսակներ կազմելիս:

423. ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ՇԱՐՔԵՐԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ. Մենք մի անգամ էլ վերադառնանք այն հարցին, որը վերաբերում է y փոփոխականը որպես x-ի ֆունկցիա որոշելուն՝

$$F(x,\ y)=0 \tag{17}$$

չլուծված հավասարումից [համեմատել 196 և 444!], բայց այս անգամ հարցի այլ դրումով՝

Ենթադրենք, թե F(x, y) ֆունկցիան (x_0, y_0) կետի շրջակայքում վերլուծվում է շարքի ըստ $(x-x_0)$-ի և $(y-y_0)$-ի աստի-

ճանների, ընդ որում հաստատուն անդամը նրա մեջ հավասար է 0-ի, իսկ $(y-y_0)$-ի գործակիցը 0-ից տարբեր է*: Այդ դեպքում նշված կետի շրջակայքում (17) հավասարումով որոշվող $y=y(x)$ ֆունկցիան նույնպես վերլուծվում է շարքի ըստ $(x-x_0)$-ի աստիճանների $x=x_0$-ի մոտակայքում․

Ուրիշ խոսքով. եթե (17) հավասարման ձախ մասում գրված F ֆունկցիան անալիտիկ է (x_0, y_0) կետում, ապա այդ հավասարումով որոշվող $y=y(x)$ ֆունկցիան անալիտիկ է x_0 կետում:

Այսպիսով, այստեղ խոսվում է արդեն ոչ միայն որոնելի ֆունկցիայի գոյության կամ արժեքների հաշվման մասին, այլև նրա անալիտիկ ներկայացման մասին․

Ապացույց․ Առանց նվազեցնելու ընդհանրությունը կարելի է ընդունել $x_0=y_0=0$. *այդ, ըստ էության, հանգում է նրան, որ որպես նոր փոփոխականներ մենք ընտրում ենք* $x-x_0$ *և* $y-y_0$ *տարբերությունները, բայց պահպանում ենք հին նշանակումները․ Եթե առանձնացնենք y-ի առաջին աստիճան պարունակող անդամը, ապա տեղափոխելով այն մյուս մասը և բաժանելով նրա գործակցի վրա, կարելի է տվյալ հավասարումն արտագրել այսպես՝*

$$y=c_{10}x+c_{20}x^2+c_{11}xy+c_{02}y^2+$$
$$+c_{30}x^3+c_{21}x^2y+c_{12}xy^2+c_{03}y^3+\cdots \qquad (18)$$

x-ից կախված y ֆունկցիայի համար շարքը կփնտրենք հետևյալ տեսքով՝

$$y=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots \qquad (19)$$

Ամենից առաջ, եթե գոյի շրջակայքում նման վերլուծում գոյություն ունի, ապա նրա գործակիցները լիովին միարժեքորեն որոշվում են հենց (18) առնչությունով․

Իրոք, փոխարինելով դրա մեջ y-ը (նշված ենթադրությունների դեպքում) (19) վերլուծումով, կստանանք՝

---

* *Դա ճշտորեն համապատասխանում է*

$$F(x_0, y_0)=0, \quad F'_y(x_0, y_0)\neq 0$$

սովորական պահանջներին․

$$a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots=c_{10}x+c_{20}x^2+$$

$$+c_{11}x(a_1x+a_2x^2+\ldots)+c_{02}\cdot(a_1x+a_2x^2+\ldots)^2+c_{30}x^3+$$

$$+c_{21}x^2\cdot(a_1x+\ldots)+c_{12}x\cdot(a_1x+\ldots)^2+$$

$$+c_{03}\cdot(a_1x+\ldots)^3+\ldots \qquad (18ա)$$

Համաձայն n° 419-ի թեորեմայի, բավականաչափ փոքր x-երի համար, աջ կողմում այստեղ կարելի է կատարել բոլոր աստիճան բարձրացումները և կատարել նման անդամների միացում։ Եթե, դրանից հետո, օգտվենք աստիճանային շարքերի նույնության թեորեմայից և աջ ու ձախ մասերում x-ի միատեսակ աստիճանների գործակիցները հավասարեցնենք, ապա կստանանք հավասարումների (անվերջ!) սիստեմի՝ a_1, a_2, $a_3,\ldots,a_n,\ldots$ որոնելի գործակիցների նկատմամբ, այն է՝

$$a_1=c_{10},\qquad a_2=c_{20}+c_{11}a_1+c_{02}a_1^2,$$

$$a_3=c_{11}a_2+2c_{02}a_1a_2+c_{30}+c_{21}a_1+c_{12}a_1^2+c_{03}a_1^3,\ldots \qquad (20)$$

Քանի որ (18)-ի աջ մասում y պարունակող բոլոր անդամները երկրորդ չափումից ցածր չեն (այսինքն պարունակում են կամ հենց իր y-ի բարձր աստիճան, կամ y-ի առաջին աստիճան, բայց բազմապատկած x-ի որևէ աստիճանով), ապա (20) սիստեմի n-րդ հավասարման մեջ a_n գործակիցը ստացվում է արտահայտված ավելի փոքր համարներ ունեցող a_1, $a_2,\ldots$, a_{n-1} գործակիցներով (և c հայտնի գործակիցներով)։ Դրանով էլ ապահովվում է a_n գործակիցները մեկը մյուսի ետևից հաջորդաբար որոշելու հնարավորությունը՝

$$a_1=c_{10},\ a_2=c_{20}+c_{11}c_{10}+c_{02}c_{10}^2,$$

$$a_3=(c_{11}+2c_{02}c_{10})(c_{20}+c_{11}c_{10}+c_{02}c_{10}^2)+$$

$$+c_{30}+c_{31}c_{10}+c_{12}c_{10}^2+c_{03}c_{10}^3,\ldots \qquad (21)$$

Զուգընթացաբար անենք մի այսպիսի, հետագայի համար կարևոր, դիտողություն։ Քանի որ (18ա)-ում փակագծերը բացելիս a և c տառերի հետ բացի գումարումից ու բազմապատ-

կումից այլ գործողություններ կատարելու կարիք չի լինում, ապա (20) հավասարումների աջ մասերում մենք կունենանք ամբողջ բազմանդամներ այդ տառերի նկատմամբ, նախահայտորեն դրական (նույնիսկ՝ բնական) գործակիցներով։ Իսկ այդ դեպքում (21) բանաձևերի աջ կողմում նույնպես կլինեն ամբողջ բազմանդամներ դարձյալ դրական գործակիցներով c տառի նկատմամբ։

Այժմ կազմենք (19) շարքը a գործակիցներով, որոնք հաշված են հենց այդ բանաձևերի օգնությամբ։ Այդ շարքի մասին կարելի է ասել, որ նա «ձևականորեն» բավարարում է (18ա) առնչությանը։ Եթե հաստատված լիներ այդ շարքի զուգամիտությունը բավականաչափ փոքր x-երի համար, ապա արդեն կարիք չէր լինի ապացուցել, որ նրանով ներկայացվող ֆունկցիայի համար (18) պայմանը պահպանված է, որովհետև այդ դեպքում (20) հավասարությունները, որոնց բավարարում են շարքի գործակիցները, միանգամայն համարժեք են (18ա)-ին։ Այսպես ուրեմն, այժմ ամբողջ հարցը հանգում է միայն այն բանի ապացուցման, որ (19) շարքը, որի գործակիցները որոշվում են (21) բանաձևերով, զուգամետ է գոնե մի որոշ շրջակայքում։

Դիտարկենք, (18)-ի հետ միաժամանակ, համանման առնչություն

$$y=\gamma_{10}x+\gamma_{20}x^2+\gamma_{11}xy+\gamma_{02}y^2+$$
$$+\gamma_{30}x^3+\gamma_{21}x^2y+\gamma_{12}xy^2+\gamma_{03}y^3+\cdots, \tag{18*}$$

որտեղ բոլոր γ_{ik} գործակիցները դրական են և, բացի այդ, բավարարում են հետևյալ անհավասարություններին՝

$$|c_{ik}|\leqslant\gamma_{ik}. \tag{22}$$

Կառուցենք դրա համար, առայժմ ձևականորեն, մի շարք, որը համանման է (19)-ին՝

$$y=\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\cdots+\alpha_nx^n+\cdots, \tag{19*}$$

ընդ որում նրա գործակիցները, (21)-ի նման, որոշենք հետևյալ բանաձևերով՝

$$\alpha_1=\gamma_{10},\quad \alpha_2=\gamma_{20}+\gamma_{11}\gamma_{10}+\gamma_{02}\gamma_{10}^2,$$

$$\alpha_3=(\gamma_{11}+2\gamma_{02}\gamma_{10})(\gamma_{20}+\gamma_{11}\gamma_{10}+\gamma_{02}\gamma_{10}^2)+$$

$$+\gamma_{30}+\gamma_{21}\gamma_{10}+\gamma_{12}\gamma_{10}^2+\gamma_{03}\gamma_{10}^3,\dots \qquad (21^*)$$

Այս բանաձևերի կազմությունն ինքը, վերը նշվածի շնորհիվ, ապահովում է α_n թվերի դրական լինելը։ Բացի այդ, համեմատելով (21)-ի հետ և հաշվի առնելով (22)-ը, տեսնում ենք, որ (բոլոր n-երի դեպքում) նաև

$$|a_n|\leqslant\alpha_n. \qquad (23)$$

Եթե հաջողվեր ընտրել γ_{ik} դրական գործակիցներն այնպես, որ ոչ միայն կատարվեր (22) պայմանը, այլև համապատասխանորեն կառուցված (19*) շարքը ունենար զրոյից տարբեր զուգամիտության շառավիղ, ապա, շնորհիվ (23)-ի, այդ նույնն արդարացի կլիներ նաև (19) շարքի համար, և թեորեման ապացուցված կլիներ։ Զբաղվենք ուրեմն γ_{ik} թվերի ընտրությամբ։

Գոյություն ունեն այնպիսի r և ρ դրական թվեր, որ

$$|c_{10}|\cdot r+|c_{20}|\cdot r^2+|c_{11}|\cdot r\rho+|c_{02}|\rho^2+\dots$$

կրկնակի շարքը կլինի զուգամետ, այնպես որ նրա $c_{ik}r^i\rho^k$ ընդհանուր անդամը կձգտի 0-ի և, հետևապես, սահմանափակ կլինի՝

$$|c_{ik}|\cdot r^i\rho^k\leqslant M,\quad \text{որտեղից}\quad |c_{ik}|\leqslant\frac{M}{r^i\rho^k}.$$

Ընդունենք $\gamma_{ik}=\dfrac{M}{r^i\rho^k}$ և, համաձայն ասածի, դիտարկենք

$$y=\frac{M}{r}x+\frac{M}{r^2}x^2+\frac{M}{r\rho}xy+\frac{M}{\rho^2}y^2+\dots=$$

$$=\frac{M}{\left(1-\dfrac{x}{r}\right)\left(1-\dfrac{y}{\rho}\right)}-M-\frac{M}{\rho}y$$

առնչությունը կամ, վերջապես,

$$y^2-\frac{\rho^2}{\rho+M}y+\frac{M\rho^2}{\rho+M}\cdot\frac{x}{r-x}=0.$$

Այստեղ հնարավոր է լինում փ ա ս տ ո ր ե ն գտնել $y=y(x)$ ֆունկցիան, որը բավարարում է հավասարմանը՝ նրա հենց այն ճյուղը, որ 0 է դառնում $x=0$ դեպքում։ Լուծելով քառակուսի հավասարումը, կստանանք (համարելով $|x|<r$)՝

$$y=\frac{\rho^2}{2(\rho+M)}\left[1-\sqrt{1-\frac{4M(\rho+M)}{\rho^2}\cdot\frac{x}{r-x}}\right]^{*}.$$

Եթե, գրվածը պարզեցնելու համար, մտցնենք

$$r_1=r\left(\frac{\rho}{\rho+M}\right)^2$$

նշանակումը, ապա y-ի արտահայտությունը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$y=\frac{\rho^2}{2(\rho+M)}\left[1-\left(1-\frac{x}{r_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\right],$$

որտեղից արդեն պարզ է, եթե օգտվենք բինոմական շարքից, որ նա $r>r_1>|x|$-ի համար վերլուծվում է ըստ x-ի աստիճանների։ Քանի որ հիշատակված վերլուծումը նույնական պետք է լինի (19*)-ի հետ, ապա դրանով էլ ավարտվում է (19*) շարքի զուգամիտության ապացույցը, ուրեմն, և (19) շարքինը, գոնե $r>|x|$-երի համար։

Նշենք, որ թեորեման որոշում է միայն y-ի՝ ըստ x-ի աստիճանների [կամ, ընդհանուր դեպքում, ըստ $(x-x_0)$-ի աստիճանների] վերլուծման հնարավորությունը $x=0$-ի ($x=x_0$-ի) մ ո տ ա կ ա յ ք ո ւ մ։ Այդ վերլուծման զուգամիտության ճշգրիտ միջակայքի որոշումը պահանջում է հատուկ հետազոտություն։

Նման ձևով կարելի է բացատրել նաև ընդհանուր դեպքը, երբ ֆունկցիաների սիստեմը որոշվում է հավասարումների սիստեմից։

---

* Արմատի մինուս նշանը վերցրած է հենց նրա համար, որ $x=0$ դեպքում ունենանք նաև $y=0$։

Վերևում կիրառված դատողության այս նշանավոր մեթոդը պատկանում է Կոշիին. Նրա էությունը կայանում է մեկ կամ մի քանի փոփոխականներ ունեցող տվյալ աստիճանային շարքերը՝ հետազոտության համար ավելի հարմար այնպիսի «մաժորանտային» շարքերով փոխարինելու մեջ, որոնց բոլոր գործակիցները դրական են և, համապատասխանաբար, գերազանցում են տվյալ շարքերի գործակիցների բացարձակ մեծությունները. Այդ կապակցությամբ էլ ինքը մեթոդը ստացել է մաժորանտային շարքերի մեթոդ *անունը. Դրանից հաճախ օգտվում են դիֆերենցիալ հավասարումների տեսության մեջ.*

424. ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՔԻ ՀԱԿԱԴԱՐՁՈՒՄԸ. *Որպես խնդրի մասնավոր դեպք, դիտարկենք այժմ աստիճանային շարքի հակադարձման հարցը. Դիցուք* $y=f(x)$ *ֆունկցիան* $x=x_0$ *կետի մի որոշ շրջակայքում ներկայանում է որպես շարք, որը դասավորված է ըստ* $(x-x_0)$*-ի աստիճանների. Նշանակելով ազատ անդամը (որն արտահայտում է* y*-ի արժեքը* $x=x_0$ *դեպքում)* y_0*-ով, այդ վերլուծումը գրենք այս տեսքով՝*

$$y-y_0=a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots+a_n(x-x_0)^n+\dots$$

$a_1\neq 0$ դեպքում, $y=y_0$-ի շրջակայքում, x-ը այստեղից որոշվում է որպես y-ի ֆունկցիա, որն իր հերթին վերլուծվում է շարքի ըստ $(y-y_0)$-ի աստիճանների. *Այսպիսով*, եթե y-ը հանդիսանում է x-ի անալիտիկ ֆունկցիա x_0 կետում, ապա համապատասխան y_0 կետում (նշված պայմաններում) հակադարձ ֆունկցիան ևս անալիտիկ կլինի.

Այս բոլորն անմիջականորեն բխում է ապացուցված թեորեմայից. Պարզության համար ընդունելով $x_0=y_0=0$, y*-ն ու* x*-ը կապող առնչությունը գրենք, (18)-ի օրինակով, հետևյալ տեսքով*

$$x=by+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+\dots^{*}$$

Այդ դեպքում որոնելի

$$x=b_1y+b_2y^2+b_3y^3+\dots$$

վերլուծման գործակիցները հաջորդաբար կորոշվեն հետևյալ հավասարումներից

$$b_1=b,\ b_2=c_2b_1^2,\ b_3=2c_2b_1b_2+c_3b_1,\dots$$

* *Պետք է հիշել, որ այստեղ* x*-ն ու* y*-ը փոխել են իրենց դերերը.*

Օրինակ, գիտենալով սինուսի վերլուծումը՝

$$y=\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+\cdots,$$

կարելի է գտնել հետևյալ վերլուծումը

$$x=\arcsin y=y+b_3y^3+b_5y^5+b_7y^7+\cdots$$

(մենք գրի ենք առնում y-ի միայն կենտ աստիճանները, որովհետև, $y=\sin x$ ֆունկցիայի կենտ լինելու պատճառով, հակադարձ ֆունկցիան ևս կենտ կլինի)։ b գործակիցները որոշող հավասարումներն այդ դեպքում ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$b_3=\frac{1}{6},\quad b_5=\frac{1}{2}b_3-\frac{1}{120},\quad b_7=\frac{1}{2}(b_5+b_3^2)-\frac{1}{24}b_3+\frac{1}{5040},\ \cdots,$$

որտեղից

$$b_3=\frac{1}{6},\quad b_5=\frac{3}{40},\quad b_7=\frac{5}{112},\ \cdots,$$

այնպես որ

$$\arcsin y=y+\frac{1}{6}y^3+\frac{3}{40}y^5+\frac{5}{112}y^7+\cdots$$

426. ԼԱԳՐԱՆԺԻ ՇԱՐՔԸ։ Կիրառենք n 423 թեորեման հետևյալ տեսքի մասնավոր հավասարման նկատմամբ

$$y=a+x\varphi(y), \tag{24}$$

որտեղ $\varphi(y)$ ֆունկցիան ենթադրվում է անալիտիկ $y=a$ կետում։ Այդ դեպքում, ինչպես գիտենք, x-ի բավականաչափ փոքր արժեքների համար, այստեղից y-ը որոշվում է որպես x-ի ֆունկցիա, որն անալիտիկ է $x=0$ կետում և այդ կետում դառնում է a։

Դիցուք, այնուհետև, $u=f(y)$-ը y-ի որևէ ֆունկցիա է, որն անալիտիկ է $y=a$ դեպքում։ Եթե y-ի փոխարեն տեղադրենք այստեղ x-ի հիշյալ ֆունկցիան, ապա u-ն կլինի x-ի ֆունկցիա, որը նույնպես անալիտիկ է $x=0$ դեպքում։ Խնդիր դնենք գտնել u-ի վերլուծումը ըստ x-ի աստիճանների, ավելի ճիշտ՝ գտնել հարմար արտահայտություններ այդ վերլուծման գործակիցների համար։

Նախապես նկատենք, որ փոփոխական a-ի դեպքում, (24) հավասարումից y-ը որոշվում է որպես երկու փոփոխականների ֆունկցիա՝ x-ի և a-ի, որը վերլուծվում է կրկնակի շարքի ըստ x-ի և $(a-a_0)$-ի աստիճանների-

րի (որտեղ a_0-ն՝ a-ի որևէ ֆիքսած արժեք է)*։ Այդ դեպքում u փոփոխականը կլինի նույն երկու փոփոխականների ֆունկցիա։

Դիֆերենցելով (24)-ը ըստ x-ի և ըստ a-ի, կստանանք՝

$$\left[1-x\cdot\varphi'(y)\right]\frac{\partial y}{\partial x}=\varphi(y),\qquad \left[1-x\cdot\varphi'(y)\right]\frac{\partial y}{\partial a}=1,$$

որտեղից, ակներևորեն,

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\varphi(x)\cdot\frac{\partial y}{\partial a}, \tag{25}$$

Ճիշտ այդպես էլ ընդհանրապես, u=f(y) դեպքում,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi(y)\cdot\frac{\partial u}{\partial a}\text{։} \tag{25ա}$$

Մյուս կողմից, ինչպիսին էլ լինի F(y) ֆունկցիան, որի համար գոյություն ունի ածանցյալ ըստ y-ի, ունենք՝

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[F(y)\cdot\frac{\partial u}{\partial a}\right]=\frac{\partial}{\partial a}\left[F(y)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right]\text{։} \tag{26}$$

Դրանում հեշտ է համոզվել անմիջականորեն դիֆերենցումով, հիմնվելով (25) և (25ա) նույնությունների վրա։

Այս բոլոր դիտողություններից մենք կօգտվենք ապացուցելու համար հետագայում կարևոր մի բանաձև

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left[\varphi^n(y)\cdot\frac{\partial u}{\partial a}\right]^{**}\text{։} \tag{27}$$

n=1 դեպքում, այն բերվում է (25ա)-ին։ Այժմ ենթադրենք, որ այն ճիշտ է 1-ից մեծ մի որոշ n-ի համար և հաստատենք նրա իրավացիությունը (n+1)-րդ կարգի ածանցյալի համար։ Դիֆերենցելով (27)-ը ըստ x-ի և օգտվելով դիֆերենցումների կարգը փոխելու իրավունքից [180], կստանանք՝

$$\frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi^n(y)\cdot\frac{\partial u}{\partial a}\right]\text{։}$$

Բայց, (26)-ի և (25ա)-ի զորությամբ, ունենք հաջորդաբար՝

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi^n(y)\cdot\frac{\partial u}{\partial a}\right]=\frac{\partial}{\partial a}\left[\varphi^n(y)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial a}\left[\varphi^{n+1}(y)\cdot\frac{\partial u}{\partial a}\right]\text{։}$$

---

* Այդ պնդումը ենթադրում է, որ n° 423 թեորեման տարածվում է այն դեպքի վրա, երբ հավասարման մեջ մասնակցում են x, y, a փոփոխականներ, և նրանցից մեկը որոշվում է որպես մյուս երկուսի ֆունկցիա։

** Այստեղ $\varphi^n(y)$-ը ունի $[\varphi(y)]^n$ աստիճանի նշանակություն։

Տեղադրելով այդ նախորդ հավասարության մեջ, կստանանք՝

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}=\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left[\varphi^{n+1}(y)\cdot\frac{\partial u}{\partial a}\right]։$$

Այսպիսով, (27) բանաձևը ինդուկտիվորեն արդարացված է։

Դիտենք, վերջապես, մեզ հետաքրքրող u ֆունկցիայի վերլուծումը ըստ x-ի աստիճանների։ Հաստատուն a-ի դեպքում նա անհրաժեշտորեն ունի Թեյլորի վերլուծման տեսքը [410, 10°]՝

$$u=u_0+x\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+\frac{x^2}{2!}\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0+\cdots+\frac{x^n}{n!}\cdot\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_0+\cdots,$$

որտեղ 0 նշիչը նշանակում է, որ ֆունկցիան և նրա ածանցյալները վերցված են $x=0$ դեպքում։ Բայց այդ դեպքում y-ը դառնում է a, այնպես որ $u_0=f(a)$, և այնուհետև, ըստ (27) բանաձևի,

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_0=\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[\varphi^n(a)\quad f'(a)]։$$

Տեղադրելով գործակիցների այդ արժեքները, մենք գալիս ենք հետևյալ վերլուծմանը՝

$$f(y)=f(a)+x\cdot\varphi(a)f'(a)+\frac{x^2}{2!}\cdot\frac{d}{da}[\varphi^2(a)\cdot f'(a)]+\cdots$$

$$\cdots+\frac{x^n}{n!}\,\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[\varphi^n(a)\cdot f'(a)]+\cdots, \qquad (28)$$

որը և կոչվում է Լագրանժի շարք։ Այդ վերլուծումը նշանավոր է նրանով, որ նրա գործակիցները ներկայացված են a-ի բացահայտ ֆունկցիաների տեսքով։

Եթե $f(y)=y$, ապա, մասնավորապես, ստանում ենք

$$y=a+x\cdot\varphi(a)+\frac{x^2}{2!}\cdot\frac{d}{da}[\varphi^2(a)+]\cdots$$

$$\cdots+\frac{x^n}{n!}\cdot\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[\varphi^n(x)]+\cdots \qquad (28ա)$$

Բերենք օրինակներ։

1) Ելնենք

$$y=a+\frac{x}{y}$$

հավասարումից, այնպես որ այստեղ $\varphi(y)=\frac{1}{y}$։ Ընդունելով $f(y)=$ $=y^{-k}$, ըստ Լագրանժի (28) բանաձևի կգտնենք՝

$$\frac{1}{y^k}=\frac{1}{a^k}-x\cdot\frac{k}{a^{k+2}}+\frac{x^2}{2!}\cdot\frac{k(k+3)}{a^{k+4}}-\frac{x^3}{3!}\cdot\frac{k(k+4)(k+5)}{a^{k+6}}+$$

$$+\frac{x^5}{5!}\cdot\frac{k(k+5)(k+6)(k+7)}{a^{k+8}}-\cdots$$

Քանի որ այդ հավասարումը բերվում է քառակուսի հավասարման՝

$$y^2-ay-x=0,$$

ապա, ակներևորեն,

$$y=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+x}\,^*;$$

Օրինակ, եթե $a=2$, *ապա ստացվում է* (2^k*-ով բազմապատկելուց հետո) այսպիսի վերլուծում՝*

$$\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+x}}\right)^k=$$

$$=1-k\cdot\frac{x}{4}+\frac{k(k+3)}{2!}\left(\frac{x}{4}\right)^2-\frac{k(k+4)(k+5)}{3!}\left(\frac{x}{4}\right)^3+\cdots$$

2) Տեսական մեխանիկայի մեջ կարևոր դեր է խաղում Կեպլերի հավասարումը՝

$$E=M+\varepsilon\cdot\sin E,$$

որտեղ E*-ն մոլորակի էքսցենտրիկ անոմալիան է (արտակենտրոնական անկանոնությունը),* M*-ը՝ նրա միջին անոմալիան է, իսկ* ε*-ը՝ մոլորակի օրբիտայի (ուղեծրի) էքսցենտրիսիտետն է։ Օգտվելով* Լագրանժի *շարքից (28ա), հնարելի է գտնել* E*-ի վերլուծումը ըստ էքսցենտրիսիտետի աստիճանների,* M*-ից կախում ունեցող գործակիցներով՝*

$$E=M+\varepsilon\cdot\sin M+\frac{\varepsilon^2}{2!}\cdot\frac{d}{dM}\sin^2 M+\cdots+\frac{\varepsilon^n}{n!}\cdot\frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}}\sin^n M+\cdots$$

Այստեղ կարևորություն է ներկայացնում գտնել զուգամիտության միջակայքի ճիշտ չափերը. Լապլասը [P. S. Laplace] *առաջինը որոշեց, որ զուգամիտությունը տեղի ունի, երբ* $\varepsilon<0,6627\cdots$

---

* *Արմատի պլյուս նշանն է վերցրած այն նկատառումով, որ* $x=0$ *դեպքում պետք է լինի* $y=a$։

3) Վերջապես, դիտարկենք

$$y=x+\frac{\alpha}{2}(y^2-1)$$

հավասարումը*։

Դրա լուծումը, որ դառնում է x, երբ $\alpha=0$, կլինի՝

$$y=\frac{1-\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}{\alpha}=\frac{2x-\alpha}{1+\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}\text{;}$$

Այդ ֆունկցիայի վերլուծումը ըստ α-ի աստիճանների ունի հետևյալ տեսքը՝

$$y=x+\frac{\alpha}{2}(x^2-1)+\frac{1}{2!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\cdot\frac{d(x^2-1)^2}{dx}+\dots$$

$$\dots+\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2}\right)^n\cdot\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}+\dots$$

Դիֆերենցենք այդ հավասարության երկու մասերն էլ ըստ x-ի (ընդ որում y-ի, որպես α-ի և x-ի երկու փոփոխականների ֆունկցիայի, անալիտիկ բնույթից կարելի է եզրակացնել, որ շարքի համար թույլատրելի է անդամ առ անդամ դիֆերենցում)։ Մենք կստանանք հետևյալ վերլուծումը՝

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}=1+\alpha\cdot\frac{1}{2}\,\frac{d(x^2-1)}{dx}+\alpha^2\cdot\frac{1}{2!2^2}\cdot\frac{d^2(x^2-1)^2}{dx^2}+\dots$$

$$\dots+\alpha^n\cdot\frac{1}{n!2^n}\cdot\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}+\dots$$

Նրա գործակիցները, ինչպես մենք այդ դեպքում անմիջականորեն տեսնում ենք [համեմատել 420, 8)], հանդիսանում են Լեժանդրի բազմանդամները՝

$$X_n=\frac{1}{n!2^n}\cdot\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\text{;}$$

§ 5. ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՏԱՐՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԸ

426. ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԹՎԵՐ։ Այս գլխի վերջին պարագրաֆը մենք կնվիրենք կոմպլեքս փոփոխականի տարրական ֆունկցիաներին։ Այս հարցի շարադրումը հարում է աստիճանային շարքերի տեսության և, իր հերթին, լույս է սփռում այդ տեսության որոշ սկզբունքային հարցերի վրա։ Բացի

---

* Այստեղ x-ը խաղում է a-ի դերը, իսկ α-ն՝ x-ի դերը։

այդ, կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների հետ ծանոթությունը օգտակար է հանդիսանում իրական անալիզի համար նաև հաշվման տեսակետից [համեմատել n° 434-ի օրինակները, այլև դասընթացի երրորդ հատորի XIX գլուխը, որը նվիրված է Ֆուրյեի շարքերին]։

Մենք ենթադրում ենք, որ ընթերցողն արդեն ծանոթ է կոմպլեքս թվերին հանրահաշվից։ Ուստի այստեղ մենք կսահմանափակվենք այդ թվերի հիմնական հատկությունների միայն համառոտ ակնարկով։

z կոմպլեքս թիվն ունի $z=x+yi$ տեսքը, որտեղ i-ն կեղծ միավորն է՝ $=\sqrt{-1}$, իսկ x-ն ու y-ը իրական թվեր են։ Դրանցից x-ը կոչվում է z թվի իրական բաղադրիչ կամ իրական մաս, իսկ y-ը՝ կեղծ բաղադրիչ կամ կեղծ մաս, և նշանակում են այսպես՝

$$x=\mathfrak{R}(z), \quad y=I(z):$$

$x+yi$ և $x'+y'i$ երկու կոմպլեքս թվեր հավասար են այն դեպքում (և միայն այն դեպքում), երբ առանձին-առանձին $x=x'$ և $y=y'$ *)։ Կոմպլեքս թվերի գումարումը ու բազմապատկումը կատարվում է հետևյալ բանաձևերով՝

$$(x+yi)+(x'+y'i)=(x+x')+(y+y')i,$$
$$(x+yi)(x'+y'i)=(xx'-yy')+(xy'+x'y)i.$$

Հեշտ է ստուգել տարբերության և քանորդի գոյությունը, որոնք արտահայտվում են այսպես՝

$$(x+yi)-(x'+y'i)=(x-x')+(y-y')i,$$

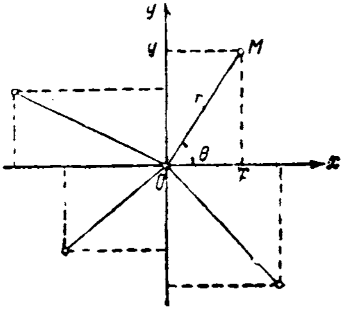
$$\frac{x+yi}{x'+y'i}=\frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2}+\frac{x'y-xy'}{x'^2+y'^2}\,i$$

(վերջինը՝ այն ենթադրությամբ, որ $x'+y'i\neq 0$, այսինքն՝ որ $x'^2+y'^2>0$)։ Այդ դեպքում կոմպլեքս թվերի համար պահպանվում են գործողությունների այն բոլոր սովորական հատկությունները, որոնք կապված չեն մեծի և փոքրի գաղափարների հետ (այդ գաղափարները կոմպլեքս թվերի համար չեն սահմանվում)։ Ավելի հշգրիտ ասած, տեղի ունեն n° 3-ի II 1°—4° և n° 4-ի III 1°—5° հատկությունները։

---

*) Ուրիշ խոսքով, այստեղ ևս մեզ համար հավասարությունը հանգում է պարզ նույնության [համեմատել 2]։

Վերցնենք հարթության վրա կոորդինատային առանցքների xOy ուղղանկյուն սիստեմը (գծ. 63)։ Այդ դեպքում յուրաքանչյուր $z=x+yi$ կոմպլեքս թիվ կարող է պատկերվել այդ հարթության վրա $M(x, y)$ կետով, որի համար կոորդինատները հանդիսանում են այդ թվի իրական և կեղծ բաղադրիչները։ Ակներև է և հակադարձը՝ հարթության յուրաքանչյուր M կետին համապատասխանում է միանգամայն որոշակի կոմպլեքս թիվ։ Այդ կապակցությամբ դիտարկվող հարթությունն անվանում են z կոմպլեքս փոփոխականի հարթություն կամ պարզապես կոմպլեքս հարթություն։



գծ. 63։

$x=x+0\cdot i$ իրական թվերը պատկերվում են x-երի առանցքի կետերով (որովհետև նրանց համար $y=0$), իսկ $yi=0+yi$ $(x=0)$ զուտ կեղծ թվերը՝ y-ների առանցքի կետերով։ Այդ առանցքներն էլ անվանում են առաջինը՝ իրական առանցք, իսկ երկրորդը՝ կեղծ առանցք։

Կարևոր դեր են խաղում նաև $z=x+yi$ թվի պատկեր ծառայող կետի r, θ բևեռային կոորդինատները (տես գծագիրը)։ Ոչ-բացասական r թիվը կոչվում է z կոմպլեքս թվի մոդուլ կամ բացարձակ մեծություն և նշանակվում է այսպես՝ $z=|z|$։ Մոդուլը միարժեքորեն որոշվում է z կոմպլեքս թվով՝

$$|z|=+\sqrt{x^2+y^2}$$

և դառնում է զրո այն, և միայն այն դեպքում, երբ $z=0$։ θ անկյունը կոչվում է z կոմպլեքս թվի արգումենտ՝ $\theta=\operatorname{Arg} z$։ Երբ $z\neq 0$ այդ անկյունը որոշվում է

$$\cos\theta=\frac{x}{r},\quad \sin\theta=\frac{y}{r}$$

հավասարություններից, բայց միայն $2k\pi$ տեսքի գումարելիի ճշտությամբ (որտեղ k-ն ամբողջ է)։ $z=0$ դեպքում արգումենտը մնում է բոլորովին չորոշված։ Բացառությամբ այս դեպքի, յուրաքանչյուր z թվի համար գոյություն ունի մեկ և միայն մեկ θ արգումենտ, որը բավարարում է հետևյալ անհավասարություններին

$$-\pi<\theta\leq\pi.$$

այդ անվանում են արգումենտի գլխավոր արժեք և նշանակում են arg z։ Եթե $\theta<\pi$, ապա

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{r\sin\theta}{r+r\cos\theta}=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}},$$

և $\arg z$ անկյունը կարելի է որոշել հետևյալ հավասարությամբ

$$\arg z = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot$$

այդ պիտանի է բոլոր կոմպլեքս թվերի համար, բացի իրական բացասական թվերից (և զրոյից)։

Նշենք, որ $z=x+yi$ և $z'=x'+y'i$ կոմպլեքս թվերի մոդուլների համար նույնպես կատարվում է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$|z+z'| \leqslant |z|+|z'|,$$

որն այնչափ սովորական է իրական թվերի բացարձակ մեծությունների համար։ Իսկապես, ներկա դեպքում այն բերվում է հետևյալ հայտնի անհավասարությանը [151]՝

$$\sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2}\,։$$

Արդարացի են նաև նրանցից բխող հետևանքները [տես 17]։

Եթե $z=x+yi$ կոմպլեքս թվի նշանակման մեջ դնենք՝ $x=r.\cos\theta$, $y=r\cdot\sin\theta$, ապա կստանանք այսպես կոչված կոմպլեքս թվի եռանկյունաչափական ձևը՝

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)։$$

Վերցնենք z' երկրորդ կոմպլեքս թիվը նույնպես եռանկյունաչափական ձևով՝

$$z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta)։$$

Այդ դեպքում zz' արտադրյալը եռանկյունաչափական ձևով կգրվի այսպես՝

$$zz'=rr'[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')]\,.$$

Այդ անմիջականորեն հետևում է կոսինուսի և սինուսի գումարման թեորեմներից։ Այստեղից՝

$$|zz'|=|z|.|z'|,\quad \mathrm{Arg}\,zz'=\mathrm{Arg}\,z+\mathrm{Arg}\,z'։$$

Համանմանորեն, z և z' թվերի քանորդի համար ($z\neq 0$) գտնում ենք՝

$$\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|},\quad \mathrm{Arg}\,\frac{z}{z'}=\mathrm{Arg}\,z-\mathrm{Arg}\,z'։$$

Արտադրյալի բանաձևից ստացվում է բանաձև n բնական ցուցիչով աստիճանի համար՝

$$z^n = r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta),$$

մասնավորապես, երբ $r=1$, հանգում ենք Մուավրի (A. de Moivre) բանաձևին՝

$$(\cos\Theta+i\sin\Theta)^n=\cos n\Theta+i\sin n\Theta\text{։}$$

Վերջապես, z-ի n աստիճանի արմատի համար ունենք

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\Theta}{n}+i\sin\frac{\Theta}{n}\right),$$

որտեղ $\sqrt[n]{r}$-ը r-ի թվաբանական արմատն է։ Ընդունելով այստեղ հերթականորեն, օրինակ՝

$$\Theta=\theta,\ \theta+2\pi,\ \theta+4\pi,\ldots,\ \theta+2(n-1)\pi,$$

մենք կստանանք $\sqrt[n]{z}$ արմատի n զանազան արժեքները (ինարկե, համարելով $z\neq0$)։ Θ-ի այլ արժեքների դեպքում արդեն միայն կկրկնվեն արմատի այդ նույն արժեքները։

427. ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՎԱՐԻԱՆՏԱ ԵՎ ՆՐԱ ՍԱՀՄԱՆԸ։ Դիտարկենք $\{z_n\}$ հաջորդականությունը, որը բաղկացած է $z_n=x_n+y_n i$ $(n=1, 2, 3\ldots)$ կոմպլեքս թվերից և z փոփոխականը, որն այդ արժեքներն ընդունում է ըստ համարների աճման կարգի։

Այդպիսի կոմպլեքս վարիանտայի սահմանը սահմանվում է նույն տերմիններով, ինչ որ իրական վարիանտայի դեպքում [23]՝

$c=a+bi$ հաստատուն թիվը կոչվում է $z=z_n$ վարիանտայի սահման, եթե որչափ էլ փոքր լինի $\varepsilon>0$ թիվը, նրա համար գոյություն ունի այնպիսի N համար, որ $N<n$ համարներ ունեցող բոլոր z_n արժեքները բավարարում են

$$|z_n-c|<\varepsilon$$

անհավասարությանը։ Այդ դեպքում գրում են՝

$$\lim z_n=c \quad \text{կամ} \quad z_n\to c\text{։}$$

Ճիշտ նույնպես էլ դիտարկվող դեպքի վրա փոխադրվում են անվերջ փոքր և անվերջ մեծ մեծությունների սահմանումները*։

Դիտարկենք, օրինակ, $z_n=z^n$ վարիանտան, որտեղ z-ը կոմպլեքս թիվ է։ Եթե այդ դեպքում $|z|<1$, ապա $z_n\to0$, իսկ եթե $|z|>1$, ապա $z_n\to\infty$. Հեշտ է տեսնել, որ երբ $|z|\geqslant1$, (բացի $z\neq1$) z_n վարիանտայի համար սահման ամենևին չկա։

Կոմպլեքս վարիանտայի համար հեշտ է անմիջականորեն վերաշարադրել սահմանների տեսության հիմնական թեորեմները, համարյա բառ առ բառ կրկնելով նախկին դատողությունները։ Մյուս կողմից, այդ բոլոր թեորեմները ավտոմատիկ կերպով փոխադրվում են կոմպլեքս վարիանտայի դեպքի վրա հետևյալ պարզ թեորեմայի հիման վրա։

---

* Նշենք, որ այժմ խոսք չի կարող լինել վարիանտայի որոշակի նշանով անվերջության ձգտելու մասին, քանի որ կոմպլեքս թվերին նշան առհասարակ չի վերագրվում։

$z_n = x_n + y_n i$ կոմպլեքս վարիանտն ձգտում է $c=a+bi$ սահմանին այն դեպքում և միայն այն դեպքում, երբ x_n և y_n իրական վարիանտները ձգտում են, համապատասխանաբար, a և b սահմաններին։

Դրա ապացույցը անմիջապես հետևում է հետևյալ անհավասարություններից՝

$$\left.\begin{array}{l}|x_n - a| \\ |y_n - b|\end{array}\right\} \leqslant |z_n - c| =$$

$$= \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} \leqslant |x_n - a| + |y_n - b|.$$

Այսպիսով կոմպլեքս վարիանտի սահմանը կարող է փոխարինվել երկու իրական վարիանտների սահմաններով։ Մասնավորապես, այս ճանապարհով կարելի է ապացուցել կոմպլեքս վարիանտի համար նաև զուգամիտության սկզբունքը [39]։

Այժմ դիտարկենք

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \cdots$$

անվերջ շարքը, բաղկացած $c_n = a_n + b_n i$ *կոմպլեքս անդամներից։ Շարքի գումար այստեղ ևս կոչվում է*

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$$

մասնակի գումարի սահմանը։ Այսպես, օրինակ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} + \cdots$$

երկրաչափական պրոգրեսիայի համար (որտեղ z-ը կոմպլեքս թիվ է, մեկից տարբեր), մասնակի գումարը հավասար է

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}.$$

այստեղից պարզ է, որ $|z| < 1$ *դեպքում շարքն ունի*

$$C = \frac{1}{1-z}$$

գումարը, իսկ $|z| > 1$ *դեպքում նա (վերջավոր) գումար չունի։*

№№ 353-ի և 355-ի բոլոր հիմնական գաղափարները և թեորեմները (իրենց ապացույցներով) պահպանվում են։

Կոմպլեքս շարքի հետազոտությունը կարող է հանգել երկու իրական շարքերի հետազոտության, հետևյալ թեորեմի հիման վրա՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n i) \qquad (C)$$

կոմպլեքս շարքի զուգամիտումը $C = A + Bi$ գումարին համարժեք է

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (A) \qquad և \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (B)$$

երկու իրական շարքերի զուգամիտմանը, համապատասխանաբար, A և B գումարներին։

Այս պնդումը, ակներևորեն, հանդիսանում է միայն այլ ձևակերպումն այն թեորեմի, որը վերն ապացուցվեց վարիանտայի տերմիններով։

Այժմ ապացուցենք մի թեորեմ, որը համանման է № 366-*ի թեորեմային։*

Եթե զուգամետ է

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \qquad (C^*)$$

դրական շարքը, որը կազմված է (C) շարքի անդամների մ ո դ ու լ ն ե ր ի ց ապա այս վերջին շարքը նույնպես զուգամետ է։

Իրոք,

$$\left.\begin{array}{l} |a_n| \\ |b_n| \end{array}\right\} \leqslant |c_n| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ակներև անհավասարությունների պատճառով (C) շարքի զուգամիտությունից հետևում է*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad և \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

երկու շարքերի զուգամիտությունը։ Այստեղից հետևում է, որ զուգամետ են (A) և (B) շարքերը, իսկ այդ դեպքում, ըստ նախորդ թեորեմի, զուգամետ է և (C) շարքը։

(C) շարքի զուգամետ լինելու դեպքում; (C) շարքը կոչվում է բ ա ց ա ր ձ ա կ զուգամետ. Նշենք, որ այդ դեպքում, ինչպես տեսանք, (A) և (B) շարքերը ևս բացարձակ զուգամետ են։*

Այդ թեորեմի շնորհիվ. կոմպլեքս շարքերի համար պահպանվում է իր ուժը. օրինակ, Դ ա լ ա մ բ ե ր ի հայտանիշը [366]։

Բացարձակ զուգամետ կոմպլեքս շարքերի վրա փոխադրվում է շարքի անդամների տեղափոխման վերաբերյալ n° 375-ի թեորեման և շարքերի անդամ առ անդամ բազմապատկման վերաբերյալ n° 377-ի կանոնը։ Առաջին դեպքում ապացույցն իրականանում է բերելով իրական շարքերի, իսկ երկրորդ դեպքում՝ սկզբունքորեն կարելի է պահպանել նախկին ապացույցը։

Վերջապես, համանման ձևով կարելի է կոմպլեքս դեպքի վրա փոխադրել կրկնակի շարքերի տեսության հիմնական գաղափարները և թեորեմները։ Հատկապես ընդգծենք, որ բացարձակ զուգամետ շարքերին վերաբերող բոլոր թեորեմները [382] լրիվ պահպանվում են։

428. ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ։ Դիցուք $z=x+yi$ կոմպլեքս փոփոխականը ընդունում է ամեն տեսակ արժեքներ մի որոշ $Z=\{z\}$ բազմությունից, որը երկրաչափորեն մեկնաբանվում է որպես տիրույթ (բաց կամ ոչ) կոմպլեքս հարթությունում։ Եթե Z տիրույթից վերցրած z-ի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանեցվում է մի այլ՝ $w=u+vi$ կոմպլեքս փոփոխականի մեկ կամ մի քանի արժեքներ, ապա վերջինս անվանում են z-ի ֆունկցիա (համապատասխանաբար, միարժեք կամ բազմարժեք) Z տիրույթում և գրում են՝

$$w=f(z) \text{ կամ } w=g(z), \text{ և այլն։}$$

Որպես միարժեք ֆունկցիայի օրինակներ (ընդ որում՝ ամբողջ կոմպլեքս հարթության մեջ) կարող են ծառայել՝ $|z|$-ը, z^n-ը կամ ընդհանրապես՝ ամբողջ ռացիոնալ ֆունկցիան, այսինքն՝ ամբողջ բազմանդամը՝

$$c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n,$$

որն ունի $c_0, c_1, \ldots, c_n$ հաստատուն կոմպլեքս գործակիցներ։ Կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիան, այսինքն՝ երկու բազմանդամների անկրճատելի քանորդը, նույնպես միարժեքորեն որոշված է ամբողջ հարթության մեջ, բացի այն կետերում, որոնք համապատասխանում են հայտարարի արմատներին, նա դառնում է անվերջություն։ Որպես ոչ միարժեք ֆունկցիաների օրինակներ անվանենք $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$: Ստորև, nn 430—433-ում մենք կստանանք կոմպլեքս փոփոխականի ուրիշ կարևոր ֆունկցիաներ։

Հետագայում, եթե հակառակ վերապահում չի լինի, մենք կդիտարկենք միարժեք ֆունկցիաներ։

Եթե $w=u+vi$ մեծությունը հանդիսանում է $z=x+yi$ փոփոխականի ֆունկցիա $Z=\{z\}=\{x+yi\}$ տիրույթում, ապա նրա u, v բաղադրիչները, ակներևորեն, նույնպես կլինեն z-ի ֆունկցիաներ կամ, որ միևնույն է, x-ի ու y-ի ֆունկցիաներ համապատասխան $Z^*=\{(x, y)\}$ տիրույթում (որը երկրաչափորեն ներկայացվում է նույն պատկերով, ինչ որ և Z-ը)՝

$$u=u(x, y), \quad v=v(x,y)։$$

Օրինակ, $w=|z|$ *կամ* $w=\arg z$ *իրական ֆունկցիաների համար ունենք, համապատասխանաբար՝*

$$u=\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{կամ} \quad u=2\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \quad (v=0)\text{·}$$

$w=z^n=(x+yi)^n$ *ֆունկցիայի համար, ակներևորեն,*

$$u=x^n-\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2+\dots,$$

$$v=nx^{n-1}y-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}y^3+\dots$$

Դիցուք c*-ն* Z *տիրույթի խտացման կետ է։ Ասում են, որ* $w=f(z)$ ֆունկցիան z-ը c-ին ձգտելիս ունի C սահմանը*, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար կգտնվի այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որ լինի $|f(z)-c|<\varepsilon$, հենց որ $|z-c|<\delta$ (և $z\neq c$)։

Գրի են առնում այս փաստը, ինչպես սովորաբար, այսպես՝

$$\lim_{z\to c} w=\lim_{z\to c} f(z)=C\text{։}$$

Հեշտ է վերաձևակերպել այս սահմանումն այն դեպքի համար, երբ c*-ն (կամ* C*-ն)* ∞ *է. կարելի է արտահայտել այդ նաև «հաջորդականությունների լեզվով»։*

Եթե $c=a+bi$, $C=A+Bi$, *ապա [ինչպես դժվար չէ դուրս բերել* n° *427-ից] նախորդ առնչությունը համարժեք է այսպիսի երկուսի՝*

$$\lim_{\substack{x\to c\\ y\to b}} u(x,y)=A, \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} v(x,y)=B\text{։}$$

$f(z)$ *ֆունկցիայի անընդհատությունը* Z *տիրույթի որևէ* $z_0=x_0+y_0i$ *կետում որոշվում է հետևյալ հավասարությամբ*

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)\text{։}$$

Այն, ակներևորեն, համարժեք է $u(x,y)$, $v(x,y)$ *երկու բաղադրիչների անընդհատությանը* (x_0,y_0) *կետում։*

Այսպիսով, հիշելով $|z|$*-ի և* z^n*-ի բաղադրիչների համար քիչ առաջ բերված արտահայտությունները, տեսնում ենք, որ այդ ֆունկցիաներն անընդհատ են կոմպլեքս փոփոխականի ամբողջ հարթության վրա։ Համանմանորեն,* $\arg z$*-ը ստացվում է ամենուրեք անընդհատ, բացառությամբ իրական առանցքի բացասական մասի։*

---

* *Այստեղ* c*-ն ու* C*-ն կոմպլեքս թվեր են։*

Իհարկե, անընդհատությունը կարող է հաստատվել նաև անմիջականորեն կոմպլեքս նկատառումներից ելնելով։ Օրինակ, $|z|$ ֆունկցիայի համար այն միանգամից հետևում է հետևյալ անհավասարությունից՝

$$||z|-|z_0|| \le |z-z_0| ։$$

z^n ֆունկցիայի համար ունենք՝

$$z^n - z_0^n = (z-z_0)(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \dots + z_0^{n-1}) ։$$

Երբ z-ը բավականաչափ մոտ է z_0-ին, ապա z-ի արժեքները սահմանափակված կլինեն մի որոշ հաստատունով՝ $|z| \le M$, այնպես որ

$$|z^n - z_0^n| \le nM^{n-1} \cdot |z-z_0|,$$

որտեղից և հետևում է պահանջված եզրակացությունը։

Այժմ հեշտ է տարածել ամբողջ և կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիաների անընդհատությունը (վերջին դեպքում՝ բացառելով հայտարարի արմատները)։

$w=f(z)$ ֆունկցիայի համար $z=z_0$ կետում ածանցյալի սահմանումը ունի նույն տեսքը, ինչ որ սովորական դիֆերենցիալ հաշվի մեջ՝

$$w' = f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} ։$$

Օրինակ, $w=z^n$ ֆունկցիայի համար ունենք

$$\frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} = z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \dots + z_0^{n-1},$$

այնպես որ, անցնելով սահմանին, երբ $z \to z_0$, նորից ստանում ենք ծանոթ բանաձևը

$$w' = nz^{n-1} ։$$

Հակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալի համար n° 93-ի բանաձևը և nn° 96-ի, 97-ի դիֆերենցման բոլոր կանոնները փոխադրվում են առանց փոփոխության։ Համանման ձևով սահմանվում է նաև բարձր կարգերի ածանցյալների գաղափարը։

Հիշատակենք նաև հետևյալ շարքերի մասին՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots ,$$

որոնց համար անդամներ են հանդիսանում z կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաները միևնույն Z տիրույթում։

Այստեղ, ամենից առաջ, կարելի է սահմանել հավասարաչափ զուգամիտության գաղափարը, նույն տերմիններով, ինչ և n° *401-ում։ Կոմպլեքս ֆունկցիոնալ շարքերի դեպքում, հավասարաչափ զուգամիտության մեջ կարելի է համոզվել նույնպես դրական մաժորանտ շարքի առկայությամբ, որովհետև Վեյերշտրասսի հայտանիշը պահպանում է իր ուժը այստեղ ևս։ Ֆունկցիոնալ շարքերի թեորեմներից մեկ հետագայում պետք կգա հավասարաչափ զուգամետ շարքի մեջ անդամ առ անդամ սահմանային անցման թեորեմը* [405, *թեորեմ 3*]. *այն ապացուցվում է այնպես, ինչպես վերևում։*

Այժմ մենք դիմում ենք, մասնավորապես, աստիճանային շարքերի դիտարկմանը, որոնք կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության մեջ բացառիկ կարևոր դեր են խաղում։ Դրանց մենք կնվիրենք հատուկ n°*։*

429. ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՔԵՐ։ Դիցուք ունենք

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots \tag{1}$$

շարքը, որտեղ $c_0, c_1, c_2, \ldots$*՝ հաստատուն կոմպլեքս գործակիցներ են, իսկ* z*-ը՝ փոփոխական է, որ փոփոխվում է ամբողջ կոմպլեքս հարթության մեջ։ Միանգամայն նույն ձևով, ինչպես այդ արվեց* n° 368*-ում* [*կամ* 417*-ում*], *նրա համար կարելի է հաստատել այնպիսի* R *ոչ-բացասական թվի գոյությունը, որ* $R > |z|$*-ի համար (եթե* $R > 0$*)* (*1*) *շարքը բացարձակ զուգամետ է, իսկ* $R < |z|$*-ի համար (եթե* $R < +\infty$*) շարքը տարամետ է։ Այսպիսով, եթե դեն նետենք* $R = 0$ *դեպքը, մենք ունենք* $R = +\infty$ *դեպքում մի շարք, որ զուգամետ է ամբողջ կոմպլեքս հարթության մեջ, իսկ վերջավոր* R*-ի դեպքում՝ շարք, որը զուգամետ է կոորդինատների սկզբից* R *շառավղով գծված շրջանի ներսը, և տարամետ է այդ շրջանից դուրս։ Զուգամիտության միջակայքի փոխարեն այստեղ հանդես է գալիս զուգամիտության շրջան, և «շառավիղ» տերմինն առաջին անգամ արդարացված է լինում։*

Օրինակ, ինչպես հեշտ է համոզվել Դալամբերի հայտանիշի օգնությամբ,

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

շարքը բացարձակ զուգամետ է z*-ի ցանկացած կոմպլեքս արժեքի դեպքում, մինչդեռ*

$$\sum_{0}^{\infty} z^n, \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

շարքերն ունեն $R = 1$ *զուգամիտության շառավիղ։*

Զուգամիտության շրջանի եզրի վրա (շրջանագծի վրա) աստիճանային շարքը կարող է տարբեր վարք ունենալ։ Օրինակ, քիչ առաջ բերված երեք շարքերից առաջինը տարամետ է $|z|=1$ *շրջանագծի բոլոր կետերում, որովհետև խախտված է զուգամիտության հիմնական պայմանը՝ ընդհանուր անդամը զրոյի չի ձգտում. երկրորդ շարքը այդ շրջանագծի բոլոր կետերում բացարձակ զուգամետ է, որովհետև զուգամետ է* $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *շարքը. վերջապես, երրորդ շարքը, եթե ընդունենք այնտեղ* $z=\cos\theta+i\sin\theta$, *ընդունում է*

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}+i\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}$$

տեսքը և (բացառելով $\theta=0$ *դեպքը, այսինքն՝* $z=1$ *դեպքը) զուգամետ է* [373, 2)], *բայց ոչ բացարձակ, շնորհիվ* $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *շարքի տարամիտության։*

Դիտողություն։ Եթե աստիճանային շարքի գործակիցները ներկայացնում են իրական թվեր (ինչպես բերված օրինակներում), ապա պարզ է, որ կոմպլեքս հարթության վրա գտնվող «զուգամիտության շրջանի» R *շառավիղը համընկնում է իրական առանցքի վրա գտնվող «զուգամիտության միջակայքի» նախկին շառավղի հետ։*

Այժմ թվենք աստիճանային շարքերին վերաբերող մյուս թեորեմները, որոնք փոխադրվում են նաև կոմպլեքս աստիճանային շարքերի վրա։

n° 409-*ի* 1° *և* 2° *թեորեմները լրիվ պահպանվում են, այնպես որ* **զուգամիտության շրջանի ներսում (1) աստիճանային շարքի գումարը z-ի անընդհատ ֆունկցիա է։** *Իսկ ինչ վերաբերում է Աբելի թեորեմային* [409, 6°], *ապա այժմ մենք այն կձևակերպենք այսպես՝*

Եթե (1) շարքը զուգամետ է $|z|=R$ շրջանագծի մի որևէ z_0 կետում, ապա երբ z կետը ներսից մոտենում է z_0 կետին շառավղի վրայով, ունենք

$$\lim_{z\to z_0}\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n\text{*}.$$

Մասնավոր դեպքում, երբ $z_0=R$, *կարելի է համարել, որ* $z=r$*-ը հանդիսանում է իրական դրական փոփոխական, և ապացուցվող հավասարությունը կներկայանա այս տեսքով*

$$\lim_{r\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty}c_n r^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n R^n.$$

* *Այս հավասարությունը կարելի է ապացուցել նաև* z*-ի* z_0*-ին մոտենալու ավելի ընդհանուր օրենքի դեպքում, սակայն դրա վրա այստեղ մենք կանգ չենք առնի։*

Եթե ընդունենք $c_n = a_n + b_n i$, ապա այդ հավասարությունը տրոհվում է երկու այսպիսի հավասարությունների՝

$$\lim_{r\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n, \quad \lim_{r\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n=\sum_{n=0}^{\infty} b_n R^n.$$

Քանի որ աջ մասերում գտնվող շարքերը զուգամետ են, շնորհիվ

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n+b_n i\right).R^n$$

շարքի զուգամիտության մասին արած ենթադրության, ապա այդ հավասարությունների ապացուցելու համար մնում է միայն դիմել Աբելի սովորական թեորեմային։

Անցնելով ընդհանուր դեպքին, z_0 թվի արգումենտը նշանակենք θ_0. Այդ դեպքում կարելի է ընդունել՝

$$z_0=R(\cos\theta_0+i\sin\theta_0),\quad z=r(\cos\theta_0+i\sin\theta_0)$$

և ապացուցման ենթակա հավասարությունը կգրվի այսպես՝

$$\lim_{r\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\cos n\theta_0+i\cdot\sin n\theta_0)\,r^n=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\cos n\theta_0+i\,.\sin n\theta_0)\,R^n.$$

Եթե փակագծերի մեջ եղած արտադրիչները վերագրենք գործակիցներին, ապա հարցը, ակներևորեն, կհանգի դիտարկված դեպքին։

Այժմ (առանց հիմնվելու շարքերի դիֆերենցման ընդհանուր թեորեմայի վրա) անմիջականորեն ապացուցենք, որ զուգամիտության շրջանի ներսում աստիճանային շարքը կարելի է դիֆերենցել անդամ առ անդամ, այսինքն, եթե $R>|z|$-ի համար ընդունենք՝

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c^n z^n,\quad \text{ապա}\quad f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}.$$

Անհրաժեշտ առաջ նշենք, որ վերջին շարքի զուգամիտության շառավիղը նույնպես R է, որում հեշտ է համոզվել, օրինակ, Կոշի-Հադամարի թեորեմայի օգնությամբ։

Կանգ առնենք մի z_0 որոշակի կետի վրա, $|z_0|<R$։ Ունենք՝

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\left(z^{n-1}+z_0z^{n-2}+\dots+z_0^{n-1}\right)\qquad(2)$$

Եթե ρ-ն վերցնենք $|z_0|$-ի և R-ի միջև, ապա կարելի է համարել նաև $|z| < \rho$. այդ դեպքում

$$|c_n(z^{n-1}+z_0z^{n-2}+\ldots+z_0^{n-1})| \leq n\cdot|c_n|\cdot\rho^{n-1},$$

$\sum_{1}^{\infty} n|c_n|\rho^{n-1}$ շարքը զուգամետ է, որովհետև ρ-ն փոքր է R-ից, որը (ինչպես մենք նշեցինք) ծառայում է որպես զուգամիտության շառավիղ նաև $\sum_{1}^{\infty} nc_n z^{n-1}$ շարքի համար։ Այդ դեպքում, կիրառելով Վ ե յ ե ր շ տ ր ա ս ի հայտանիշը, եզրակացնում ենք (2) շարքի հավասարաչափ զուգամիտության մասին. այդտեղ $z \to z_0$ դեպքում կարելի է անդամ առ անդամ անցնել սահմանի, որը և կբերի պահանջված արդյունքին։

Այստեղից արդեն բխում է, որ n° 410-ի 9 և 10 առաջադրությունները նույնպես փոխադրվում են կոմպլեքս դեպքի վրա՝ առանց փոփոխության։

Այսպիսով, զուգամիտության շրջանի ներքո աստիճանային շարքի գումարն անընդհատ է իր բոլոր ածանցյալների հետ միասին։ Այլ խոսքով, եթե ֆունկցիան շարքի ենք վերլուծում ըստ z-ի աստիճանների, ապա հեռավորությունը սկզբնակետից մինչև ֆունկցիայի (կամ նրա որևէ ածանցյալի) խզման մոտակա (սկզբնակետին ամենից մոտ) կետը հանդիսանում է բնական սահման այդ վերլուծման զուգամիտության շառավղի համար։

$$1-z+z^2-\cdots+(-1)^{n-1}z^n+\cdots=\frac{1}{1+z}$$

պրոգրեսիայի դեպքում այդպիսի կետ կլինի $z=-1$-ը. այդ կետը գտնվում է ի ր ա կ ա ն առանցքի վրա, այդ պատճառով սկզբում էլ հայտնի էր, որ $\frac{1}{1+z}$ ֆունկցիայի վերլուծման զուգամիտության շառավիղը չի կարող մեկից մեծ լինել։ Այլ է գործը հետևյալ պրոգրեսիայի հետ

$$1-z^2+z^4-\cdots+(-1)^{n-1}z^{2n}+\ldots=\frac{1}{1+z^2};$$

Նրա գումարը խզվում է կ ե ղ ծ առանցքի $z=\pm i$ կետերում, սկզբնակետից մեկ միավոր հեռավորության վրա. Մնալով իրական առանցքի վրա, որի ուղղությամբ $\frac{1}{1+x^2}$ ֆունկցիան անընդհատ է իր բոլոր ածանցյալների հետ միասին, չէր կարելի պարզել, թե ինչու նրա վերլուծման զուգամիտության շառավիղը հավասար է մեկի։

Մենք ստորև էլ կհանդիպենք նման տեսակի օրինակների, երբ կոմպլեքս տիրույթին անցնելը օգնում է պարզելու իրական փոփոխականի իրական ֆունկցիայի վերլուծման այս կամ այն եզակիությունների իսկական պատճառները։

Վերջում հիշատակենք, որ աստիճանային շարքերի հետ կատարվող գործողությունների բոլոր կանոնները [418], շարքը շարքի մեջ տեղադրման [419], շարքերի բաժանման [421] և, վերջապես, աստիճանային շարքի հակադարձման [424] թեորեմները պահպանում են իրենց ուժը այստեղ ևս․ ապացույցները, որոնք ձևական բնույթ են կրում, լրիվ չափով պիտանի են նաև կոմպլեքս աստիճանային շարքերի համար։

430. ՑՈՒՑՉԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ։ n° 392-*ի (11)-ում մենք տեսանք, որ կամայական իրական* x-*ի դեպքում տեղի ունի հետևյալ վերլուծումը*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Եթե այս շարքում x *իրական փոփոխականը փոխարինենք* $z = x + yi$ *կոմպլեքս փոփոխականով, ապա կստացվի* $1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *շարքը, որի մասին մենք արդեն գիտենք [429], որ այն զուգամետ է, այսինքն ունի որոշակի վերջավոր գումար կոմպլեքս փոփոխականի ամբողջ հարթության մեջ։* Հենց նրա գումարն էլ ընդունում են, ըստ սահմանման, որպես e^z ցուցչային ֆունկցիայի արժեք ցանկացած կոմպլեքս z-ի դեպքում, *այսինքն ընդունում են՝*

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \tag{3}$$

Այդ սահմանումը, ինչպես տեսանք, չի հակասում սովորական սահմանմանը իրական ցուցչի դեպքում, և հանդիսանում է նրա բնական ընդհանրացումը։

Եթե օգտվենք աստիճանային շարքերի բազմապատկման կանոնից, ապա, ինչպես և n° *378-ի 5)-ում, հեշտ է համոզվել, որ* z-*ի և* z'-*ի ցանկացած կոմպլեքս արժեքների դեպքում կլինի*

$$e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'}, \tag{4}$$

այնպես որ ցուցչային ֆունկցիայի այս բնորոշ հատկությունը պահպանված է լինում նաև կոմպլեքս տիրույթում։

e^z *ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ հարթության մեջ, դեռ ավելին՝ նա ունի բոլոր կարգերի ածանցյալներ. անդամ առ անդամ դիֆերենցելով այդ ֆունկցիան որոշող շարքը, կստանանք՝*

$$(e^z)' = e^z,$$

ինչպես և առաջ։

Դիցուք $z = x + yi$, *որտեղ* x-*ն ու* y-*ը իրական թվեր են. փոխարինելով (4)-ի մեջ* z-*ը* x-*ով, իսկ* z'-*ը* yi-*ով, կունենանք՝*

$$e^z = e^x \cdot e^{yi},$$

Այժմ զբաղվենք առանձնապես e^{yi} *արտահայտով, որն ունի զուտ կեղծ ցուցիչ։ Եթե (3) հիմնական սահմանման մեջ տեղադրենք z-ի փոխարեն yi, ապա կստանանք՝*

$$e^{yi}=1+yi-\frac{y^2}{2!}-\frac{y^3}{3!}i+\frac{y^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{y^{2n}}{2n!}+$$
$$+(-1)^n\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}i+\cdots$$

կամ, առանձնացնելով իրական մասը կեղծից,

$$e^{yi}=\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{y^{2n}}{2n!}+\cdots\right)+$$
$$+\left(y-\frac{y^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right)i\,.$$

Այս շարքերի մեջ մենք ճանաչում ենք cos y*-ի և* sin y*-ի վերլուծությունները* 392, *(12) և (13)] և, այսպիսով, հանգում ենք նշանավոր բանաձևի՝*

$$e^{yi}=\cos y+i\sin y, \tag{5}$$

որն առաջին անգամ սահմանել է Էյլերը. Այստեղից, օրինակ,

$$e^{\frac{\pi}{2}i}=i,\quad e^{\pi i}=-1,\quad e^{\frac{3\pi}{2}i}=-i,\quad e^{2\pi i}=1.$$

Այսպես, եթե $z=x+yi$, *ապա*

$$e^z=e^x\left(\cos y+i\sin y\right)^{*}. \tag{6}$$

Մենք տեսնում ենք, որ

$$e^x=e^{R(z)}=|e^z|,\quad y=I(z)=\operatorname{Arg} e^z.$$

Քանի որ $e^x>0$ *ամեն մի իրական* x*-ի դեպքում, ապա* e^z*-ը զրոյից տարբեր է ամեն մի կոմպլեքս* z*-ի դեպքում։*

Փոխարինելով (5)-ում y*-ը՝* (−y)*-ով, երկու բանաձևերի գումարման և հանման միջոցով, կստանանք*

$$\cos y=\frac{e^{yi}+e^{-yi}}{2},\qquad \sin y=\frac{e^{yi}-e^{-yi}}{2i} \tag{7}$$

---

* *Կարելի կլիներ և այս հավասարումը ընդունել կոմպլեքս արգումենտի ցուցչային ֆունկցիայի սահմանման հիմքում. այդ դեպքում (4)-ը կբխեր կոսինուսի և սինուսի գումարման թեորեմներից։*

առնչությունները, որոնք իրական արգումենտի եռանկյունաչափական ֆունկցիաներն արտահայտում են զուտ կեղծ արգումենտի ցուցչային ֆունկցիաների միջոցով։ Մենք դեռ ևս կվերադառնանք այս նշանավոր փաստին։

Եթե (6) հավասարության մեջ փոխարինենք y-ը՝ y+2π-ով, ապա հավասարության աջ մասի (ուրեմն, և ձախ մասի) արժեքը չի փոխվի. ուրիշ խոսքով,

$$e^{z+2\pi i}=e^{z},$$

և ստացվում է, որ ցուցչային ֆունկցիան պ ա ր բ ե ր ա կ ա ն է, $2\pi i$ զուտ կեղծ պարբերությամբ։

Հեշտ է ցույց տալ, որ բացի $2k\pi i$ *տեսքի պարբերություններից* (k-*ն ամբողջ է),* e^z *ֆունկցիան ուրիշ պարբերություններ չի կարող ունենալ։ Իրոք, եթե* $e^{z+\omega}=e^z$, *ապա (ընդունելով* $z=0$) $e^{\omega}=1$։ *Դիցուք, ասենք,* $\omega=\alpha+\beta i$, *այնպես որ [տես (6)]* $e^{\alpha}(\cos\beta+i\sin\beta)=1$. *այստեղից՝* $e^{\alpha}=1$ *և* $\alpha=0$, *իսկ այնուհետև՝* $\cos\beta=1$, $\sin\beta=0$, *հետևապես,* $\beta=2k\pi$, *որը, և պահանջվում էր ապացուցել։*

Միայն այժմ, երբ մենք գիտենք, որ $e^{\pm 2\pi i}=1$, *հասկանալի է դառնում, թե ինչու* $\frac{x}{e^x-1}$ *ֆունկցիայի աստիճանային շարքի վերլուծումը* [422 (12)] *ունի* 2π *զուգամիտության շառավիղ. թեև ի ր ա կ ա ն առանցքի վրա* $\frac{x}{e^x-1}$ *ֆունկցիան չունի այնպիսի եզակիություններ, որոնք կարողանային պատճառաբանել այդ, բայց կեղծ առանցքի վրա կան կետեր, որտեղ ֆունկցիան դառնում է անվերջություն, և նրանցից սկզբնակետին ամենամոտիկները կլինեն հենց* $z=\pm 2\pi i$ *կետերը, որոնք գտնվում են նրանից* 2π *հեռավորության վրա։*

Այն կապակցությամբ, որ մենք ընդհանրացնում ենք ցուցչային ֆունկցիան՝ վերցնելով ցանկացած կոմպլեքս ցուցիչ, հիշենք մի հետաքրքիր ֆունկցիա, որը մենք դիտարկեցինք nn° 132, 394-*ում՝*

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\quad(x\neq 0),\ f(0)=0։$$

Այդ ֆունկցիայի ըստ x-*ի աստիճանների վերլուծման անհնարինությունը զրոյի մի որևէ շրջակայքում, չնայած այդ ֆունկցիայի անընդհատությանը բոլոր ածանցյալների հետ միասին իրական առանցքի վրա, ներառյալ* $x=0$ *կետը, անմիջականորեն ակներև է դառնում* $z=x+yi$ *կ ո մ պ լ ե ք ս փոփոխականին անցնելու դեպքում։ Իսկապես,* $e^{-\frac{1}{z^2}}$ $(z\neq 0)$ *ֆունկցիան* $z\to 0$ *դեպքում չունի նույնիսկ սահման, որովհետև, օրինակ, երբ* z-*ը մոտենում է զրոյի կեղծ առանցքի վրայով, երբ* $z=yi$, *և* $y\to 0$ *դեպքում, կլինի՝*

$$e^{-\frac{1}{z^2}}=e^{\frac{1}{y^2}}\to\infty։$$

431. ԼՈԳԱՐԻԹՄԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ։ *Վերցնենք* w *ցանկացած կոմպլեքս թիվ, որը տարբեր է զրոյից, և խնդիր դնենք գտնել մի* z *թիվ, որը բավարարում է հետևյալ հավասարմանը՝*

$$e^z = w$$

(w=0 *դեպքում այդ հավասարումը, ինչպես գիտենք, լուծումներ չունի)։ Այդպիսի* z *թիվը կոչվում է* w-ի (բնական) լոգարիթմ *և նշանակվում է հետևյալ սիմվոլով՝*

$$z = \mathrm{Log}\, w. \tag{8}$$

Եթե $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ *և ընդունենք* $z = x + yi$, *ապա, շնորհիվ (6)-ի, (8) հավասարումը տրոհվում է այսպիսիների՝*

$$e^x = r, \quad \cos y = \cos\theta, \quad \sin y = \sin\theta,$$

որտեղից՝

$$x = \log r^*, \quad y = \theta + 2k\pi \quad (k\text{-ն ամբողջ է})։$$

Մենք գալիս ենք այն եզրակացության, որ w-*ի լոգարիթմը* ($w \neq 0$ *դեպքում) միշտ գոյություն ունի. այն հավասար է*

$$\mathrm{Log}\, w = \log|w| + i\cdot \mathrm{Arg}\, w = \log|w| + i\cdot \arg w + 2k\pi i \tag{9}$$

և այսպիսով, լինում է բազմարժեք*։ Ի դեպ, այդ հեշտ կլիներ նախատեսել՝ ելնելով ցուցչային ֆունկցիայի պարբերականությունից։ Վերցնելով* k=0, *կստանանք այսպես կոչված* լոգարիթմի գլխավոր արժեքը*՝*

$$\log w = \log|w| + i\cdot \arg w, \tag{10}$$

որը բնորոշվում է նրանով, որ նրա կեղծ բաղադրիչը գտնվում է $(-\pi, \pi]$ *միջակայքում՝*

$$-\pi < I(\log w) \leq \pi.$$

Օրինակ, ունենք՝

$$\log 1 = 0, \ \mathrm{Log}\, 1 = 2k\pi i; \ \log(-1) = \pi i, \ \mathrm{Log}(-1) = (2k+1)\pi i,$$

$$\log i = \frac{\pi}{2} i, \quad \mathrm{Log}\, i = \frac{4k+1}{2}\pi i, \text{ և այլն։}$$

Փոփոխական w-*ի դեպքում (10) բանաձևն արտահայտում է* Log w *բազմարժեք լոգարիթմական ֆունկցիայի գլխավոր ճյուղը։ Մյուս ճյուղերը ստացվում են* k-*ի տարբեր ամբողջ արժեքների դեպք*

---

* *Այստեղ նկատի է առնվում* r *դրական թվի սովորական բնական լոգարիթմը։*

քում, հետևյալ բանաձևով՝

$$\mathrm{Log}\, w = \log w + 2k\pi i.$$

Հեշտ է տեսնել, որ (10) ֆունկցիան անընդհատ է w *կոմպլեքս փոփոխականի ամբողջ հարթության մեջ, բացառությամբ սկզբնակետի և իրական առանցքի բացասական մասի։ Խզումը,* $w=0$ *դեպքում, անվերացնելի է, որովհետև երբ* $w\to 0$, *ակներևորեն,* $\log w\to\infty$։ *Այլ է գործը բացասական իրական արժեքների դեպքում՝* $w_0=u_0<0$։ *Խզումն այստեղ առաջանում է, որոշ իմաստով, արհեստականորեն, շնորհիվ մեր պայմանի՝* arg w-*ն վերցնել* $(-\pi, \pi]$ *միջակայքում։ Երբ* $v>0$ *դեպքում* $w=u+vi\to w_0$, *ապա* $\arg w\to\pi=\arg w_0$, *իսկ եթե այդ դեպքում* $v<0$, *ապա* $\arg w\to-\pi$։ *Եթե գլխավոր ճյուղից՝* log w-*ից երկրորդ քառորդում մենք անցնեինք ուրիշ ճյուղի՝* $\log w+2\pi i$-*ի երրորդ քառորդում, ապա անընդհատությունը վերականգնված կլիներ։ Այսպիսով, ցանկանալով խուսափել բազմարժեքություններից և մասնատելով բազմարժեք ֆունկցիան միարժեք ճյուղերի, մենք դրանով իսկ յուրաքանչյուր առանձին ճյուղի համար ստեղծում ենք խզումներ։ Ընդհանրապես, մի ճյուղ անցնում է մյուսին անընդհատ կերպով։ Բազմարժեք ֆունկցիաների զանազան ճյուղերի հենց այդ կապվածության մեջ է պարունակվում կոմպլեքս հարթության նշանավոր առանձնահատկությունը, որը համանմանը չունի բազմարժեք իրական ֆունկցիաների մեջ, որոնք որոշված են իրական առանցքի վրա։*

Հակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալի ընդհանուր թեորեմայի համաձայն, ունենք (բացառելով խզման կետերը)

$$(\log w)' = \frac{1}{(e^z)'} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}. \tag{11}$$

Փոխարինելով w-*ն՝* (1+w)-*ով, դիտարկենք* $z=\log(1+w)$ $(w\neq-1)$ *ֆունկցիան։ Այդ դեպքում*

$$e^z = e^{\log(1+w)} = 1+w = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \text{ այնպես որ } w=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

Այստեղից հետևում է, որ w-*ի (բացարձակ մեծությամբ) բավականաչափ փոքր արժեքների համար* $z=\log(1+w)$ *ֆունկցիան վերլուծվում է շարքի ըստ* w-*ի աստիճանների՝*

$$z = w + c_2w^2 + c_3w^3 + \cdots + c_n w^n + \cdots$$

Այդ ֆունկցիայի ածանցյալն ըստ w-*ի կներկայանա հետևյալ շարքով՝*

$$[\log(1+w)]' = 1 + 2c_2w + 3c_3w^2 + \cdots + nc_n w^{n-1} + \cdots$$

միևնույն ժամանակ, (11)-ի շնորհիվ, այն կարտահայտվի այսպես՝

$$[\log(1+w)]' = \frac{1}{1+w} = 1 - w + w^2 - \ldots + (-1)^{n-1} w^{n-1} + \ldots$$

Համեմատելով այս երկու վերլուծությունները, տեսնում ենք, որ

$$2c_2 = -1, \quad 3c_3 = 1, \ldots, \quad nc_n = (-1)^{n-1}, \ldots,$$

որտեղից

$$c_2 = -\frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{3}, \ldots, \quad c_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \ldots$$

Այսպես ուրեմն, վերջնականապես, զրոյի շրջակայքում ունենք հետևյալ վերլուծումը՝

$$\log(1+w) = w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{w^n}{n} + \ldots \qquad (12)$$

Հեշտ է ստուգել, որ ստացված շարքն ունի $R=1$ զուգամիտության շառավիղ։ Մենք տեսանք, որ բավականաչափ փոքր w-երի դեպքում նրա գումարը կլինի լոգարիթմի գլխավոր արժեքը՝ $\log(1+w)$. Կլինի՞ արդյոք այդպես նաև $|w|<1$ ամբողջ շրջանում։

Քանի որ (12) շարքը ձևականորեն բավարարում է

$$e^{w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \ldots} = 1+w$$

հավասարությանը, ապա նա փաստորեն էլ նրան բավարարում է, քանի դեռ զուգամիտում է։ Այսպիսով, $|w|<1$ ամբողջ շրջանի մեջ (12) շարքի գումարը անշուշտ ներկայացնում է $\text{Log}(1+w)$-ի արժեքներից մեկը. այժմ ամբողջ հարցը կայանում է նրանում, թե արդյոք միշտ այդ կլինի հենց գլխավոր արժեքը։

Եթե $|w|<1$, այնպես որ $1+w$ թիվը պատկերող կետը գտնվում է այն շրջանի ներսը, որի շառավիղն է 1, և կենտրոնը՝ $w=1$ կետը, ապա $\arg(1+w)$ գտնվում է $-\frac{\pi}{2}$-ի և $\frac{\pi}{2}$-ի միջև. $\text{Arg}(1+w)$-ի այլ արժեքները գտնվում են

$$\left(-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right), \left(-\frac{9\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}\right), \ldots$$

կամ

$$\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right), \left(\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right) \ldots$$

միջակայքերում։ (12) շարքի գումարի կեղծ բաղադրիչը հենց $\text{Arg}(1+w)$-ն է [տես (9)]։ Բավականաչափ փոքր $w=u+vi$-երի համար նա տալիս է

$\arg(1+w)$ գլխավոր արժեքը, այսինքն պարունակվում է $-\frac{\pi}{2}$-ի և $\frac{\pi}{2}$-ի միջև. միևնույն ժամանակ, որպես u-ի և v-ի անընդհատ ֆունկցիա, նա չի կարող ցատկել մյուս նշված միջակայքերը, հետևապես, բոլոր $|w|<1$ դեպքերում հավասար է հենց $\arg(1+w)$ գլխավոր արժեքին։ Դրանով ապացուցված է, որ (12) հավասարությունը տեղի ունի ամբողջ $|w|<1$ շրջանում։

Փոխարինելով (12)-ի մեջ w-ն՝ $(-w)$-ով և հանելով ստացված շարքը (12) շարքից, կստանանք հետևյալ օգտավետ վերլուծումը՝

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+w}{1-w}=w+\frac{w^3}{3}+\ldots+\frac{w^{2n-1}}{2n-1}+\ldots,^{*} \tag{13}$$

որը պիտանի է $1>|w|$-ի համար։

432. ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՈՒ ՆՐԱՆՑ ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԸ։ Մենք գիտենք [392 (12) և (13)], որ իրական x-ի դեպքում $\cos x$ և $\sin x$ ֆունկցիաները ներկայացվում են հետևյալ շարքերով՝

$$\cos x=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!},\qquad \sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}:$$

Բնական է $\cos z$ և $\sin z$ ֆունկցիաները ցանկացած կոմպլեքս z-ի համար որոշել համանման շարքերի օգնությամբ՝

$$\cos z=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{2n!},\qquad \sin z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \tag{14}$$

որոնք զուգամետ են z փոփոխականի ամբողջ հարթության մեջ։

Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների մուծման այս եղանակը մեզ համար արդեն նոր չէ՝ n° 415-ում մենք դրանից օգտվել ենք նույնիսկ իրական տիրույթում (որպեսզի անալիզի համար կարևոր այդ ֆունկցիաները հիմնավորենք՝ առանց դիմելու երկրաչափության օգնությանը)։ Ընդօրինակելով այնտեղ բերված դատողությունները կարելի կլիներ այստեղ ևս կոսինուսի և սինուսի համար սահմանել գումարման թեորեմները, բերման բանաձևերը, պարբերականության հատկությունը, այլև նրանց դիֆերենցման կանոնները՝ բայց արդեն անկախ փոփոխականի կոմպլեքս արժեքների համար։

Սակայն միևնույն արդյունքները կարելի է ստանալ և այլ ճանապարհով՝ կապ հաստատելով եռանկյունաչափական ֆունկցիաների և ցուցչային

* Քանի որ $\log(1+w)-\log(1-w)$ տարբերության կեղծ բաղադրիչը գտնվում է $-\pi$-ի և π-ի միջև, ապա այդ տարբերությունը տալիս է հենց $\log\frac{1+w}{1-w}$ գլխավոր արժեքը։

ֆունկցիայի մեջ։ Այսպես, ցանկացած կոմպլեքս z-ի համար, ընդհանրացնելով n° 430-ում $z=yi$-ի համար արվածը, կարելի է դուրս բերել, որ [համեմատել (5)].

$$e^{\pm zi} = \cos z \pm i \cdot \sin z,$$

իսկ այստեղից [համեմատել (7)]՝

$$\cos z = \frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}. \tag{15}$$

Այս բանաձևերը եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ուսումնասիրությունն ամբողջապես հանգեցնում են ցուցչային ֆունկցիաների ուսումնասիրությանը։ [Դրանք կարելի կլիներ դնել եռանկյունաչափական ֆունկցիաների սահմանման հիմքում (14)-ի փոխարեն։] Առաջարկում ենք ընթերցողին, ելնելով (15) բանաձևերից, նորից ապացուցել կոսինուսի և սինուսի վերը հիշատակված հատկությունները, ինչպես և հաստատել, որ 1) cos z-ը և sin z-ը չունեն ուրիշ պարբերություններ, բացի $2k\pi$-ից (k-ն ամբողջ է), և 2)՝ որ այդ ֆունկցիաների բոլոր արմատներն իրական են։

Եթե (15)-ում վերցնենք $z=yi$ (y-ը իրական է), ապա կգտնենք՝

$$\cos yi = \frac{e^{y}+e^{-y}}{2} = \operatorname{ch} y, \qquad \sin yi = \frac{e^{y}-e^{-y}}{2} \cdot i = i \cdot \operatorname{sh} y. \tag{16}$$

Այսպիսով անմիջական կապ է հաստատվում իրական արգումենտի հիպերբոլական ֆունկցիաների և զուտ կեղծ արգումենտի եռանկյունաչափական ֆունկցիաների միջև։ Հետաքրքրական է նշել, որ cos yi-ն իրական թիվ է և միշտ մեծ է մեկից։

Այժմ, օգտվելով գումարման թեորեմներից, կարելի է գրել, որ

$$\cos(x+yi) = \cos x \cdot \cos yi - \sin x \cdot \sin yi$$
$$\sin(x+yi) = \sin x \cdot \cos yi + \cos x \cdot \sin yi$$

կամ [ուշադրության առնելով (16)-ը]՝

$$\cos(x+yi) = \cos x \cdot \operatorname{ch} y - i \cdot \sin x \cdot \operatorname{sh} y,$$
$$\sin(x+yi) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y + i \cdot \cos x \cdot \operatorname{sh} y,$$

և դրանով վերլուծել կոսինուսը և սինուսը իրենց բաղադրիչներին։

tg z և ctg z ֆունկցիաները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{zi}-e^{-zi}}{e^{zi}+e^{-zi}} \qquad \left(z \neq \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right),$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\,\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{e^{zi}-e^{-zi}} \qquad (z \neq k\pi),$$

ընդ որում ունենում են π պարբերություն։

Այն վերլուծումները, որոնք ստացվեցին 422-ում tg x-ի և x . ctg x-ի համար, պահպանում են իրենց ուժը նաև երբ x իրական փոփոխականի փոխարեն տեղադրվում է z կոմպլեքս փոփոխականը։ x . ctg x-ի և x . cth x-ի վերլուծումների նմանությունը միանգամայն հասկանալի է դառնում, եթե հաշվի առնենք (16)-ից ստացվող հետևյալ առնչությունները

$$\operatorname{tg} yi = i \cdot \operatorname{th} y, \quad \operatorname{ctg} yi = -i \cdot \operatorname{cth} y\text{։}$$

Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներից մենք կանգ կառնենք արկտանգենսի և արկսինուսի վրա։

Քանի որ եռանկյունաչափական ֆունկցիաները բերվում են ցուցչային ֆունկցիաների, ապա բնական է սպասել, որ նրանց հակադարձները կապված կլինեն լոգարիթմի հետ։

Սկսենք այն ցուցումից որ $w = \operatorname{tg} z$-ը չի ընդունում $\pm i$ արժեքներ (դրանում հեշտ է համոզվել հակասող ընդունելությամբ)։ Դիցուք $w \neq \pm i$. այդ դեպքում

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2zi} - 1}{e^{2zi} + 1} = w$$

Հավասարումը կարող է լուծվել z-ի նկատմամբ՝

$$e^{2zi} = \frac{1+wi}{1-wi}, \quad z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \frac{1+wi}{1-wi}\text{։}$$

Այսպիսին է Arctg w հակադարձ ֆունկցիայի համար ստացված արտահայտությունը՝ ֆունկցիա, որը, ակնհայտորեն, անվերջ-արժեք է Log-ի հետ միասին։

Եթե լոգարիթմի համար վերցնենք նրա գլխավոր արժեքը, ապա կստանանք արկտանգենսի գլխավոր արժեքը՝

$$\operatorname{arctg} w = \frac{1}{2i} \log \frac{1+wi}{1-wi} \qquad (w \neq \pm i),$$

որը բնութագրվում է նրանով, որ նրա իրական մասը գտնվում է $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում՝

$$-\frac{\pi}{2} < R(\operatorname{arctg} w) < \frac{\pi}{2}\text{։}$$

Մնացած արժեքները ստացվում են հետևյալ բանաձևով՝

$$\operatorname{Arctg} w = \operatorname{arctg} w + k\pi \qquad (k\text{-ն ամբողջ է})\text{։}$$

Փոխարինելով (18) շարքում w-ն wi-ով, կգանք արկտանգենսի գլխավոր ճյուղի վերլուծման՝

$$\operatorname{arctg} w = w - \frac{w^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{w^{2n-1}}{2n-1} + \ldots,$$

որն ուժի մեջ է $|w|<1$ դեպքում*։

Դիմենք, վերջապես,

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = w$$

հավասարման լուծմանը z-ի նկատմամբ՝

$$e^{2iz} - 2wi\,e^{iz} - 1 = 0, \quad e^{iz} = wi \pm \sqrt{1-w^2},$$

որտեղից՝

$$z = \operatorname{Arcsin} w = \frac{1}{i}\operatorname{Log}\left(wi \pm \sqrt{1-w^2}\right).$$

այստեղ էլ ստանում ենք անվերջ-արժեք ֆունկցիա։

Սահմանափակվենք լոգարիթմի համար նրա գլխավոր արժեքով

$$z = \frac{1}{i}\log\left(wi \pm \sqrt{1-w^2}\right)։$$

Երբ $w=+1$ կամ -1, արմատը դառնում է 0, և մենք կստանանք, համապատասխանաբար, $z=\frac{\pi}{2}$ կամ $-\frac{\pi}{2}$, որը և կընդունենք որպես արկսինուսի գլխավոր արժեք։ Դիցուք այժմ $w\neq\pm1$, և մենք պետք է ընտրություն կատարենք z-ի երկու արժեքներից։ Ակներևաբար,

$$\left(wi+\sqrt{1-w^2}\right)\left(wi-\sqrt{1-w^2}\right) = -1,$$

այնպես որ

$$\frac{1}{i}\log\left(wi+\sqrt{1-w^2}\right) + \frac{1}{i}\log\left(wi-\sqrt{1-w^2}\right) = \pm\pi,$$

հետևապես, նաև՝

$$R\left(\frac{1}{i}\log\left(wi+\sqrt{1-w^2}\right)\right) + R\left(\frac{1}{i}\log\left(wi-\sqrt{1-w^2}\right)\right) = \pm\pi,$$

մինչդեռ կեղծ մասերը տարբերվում են միայն նշաններով։ Քանի որ իրական մասերից յուրաքանչյուրը $(-\pi, \pi]$ միջակայքի սահմաններից դուրս չի գալիս, ապա նրանցից միայն մեկը կգտնվի $-\frac{\pi}{2}$-ի և $\frac{\pi}{2}$-ի միջև. արկ-

* $w=\pm i$ դեպքում $\operatorname{arctg} w$ ֆունկցիան դառնում է ∞։

սինուսի համապատասխան արժեքն ընդունում են որպես գլխավոր արժեք։ Բացառություն կատարվի միայն այն դեպքում, երբ երկու իրական մասերն էլ հավասար լինեն $\frac{\pi}{2}$-ի կամ $-\frac{\pi}{2}$-ի. այդ դեպքում որպես գլխավոր արժեք ընդունվում է այն արժեքը, որին համապատասխանում է դրական կեղծ մասը*։ Այս վերապահումով կարելի է ասել, որ արկսինուսի գլխավոր արժեքը որոշվում է հետևյալ պայմանով՝

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant R\,(\arcsin w) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Հեշտ է ստուգել, որ մնացած արժեքները կարտահայտվեն հետևյալ բանաձևերով՝

$$\operatorname{Arcsin} w = \arcsin w + 2k\pi,$$
$$\operatorname{Arcsin} w = (2k+1)\pi - \arcsin w \quad (k\text{-ն ամբողջ է}):$$

Վերջում, հիշատակենք arcsin w-ի վերլուծումը ըստ w-ի աստիճանների։ Իրական փոփոխականների տիրույթում մենք արդեն տեսանք, որ

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

շարքի համար [որն արտահայտում է sin x-ը], հակադարձը կլինի հետևյալ շարքը՝

$$x = y + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{y^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{2n!!}\,\frac{y^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

որն արտահայտում է arcsin y-ը. տես 412, 2)]։ Քանի որ կոմպլեքս փոփոխականների դեպքում էլ գործակիցները որոշվում են միանգամայն միատեսակ եղանակով, ապա պարզ է, որ

$$w = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

շարքի հակադարձման արդյունքում պետք է ստացվի հետևյալ շարքը

$$z = w + \frac{1}{2}\cdot\frac{w^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\,.\,4}\cdot\frac{w^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{2n!!}\cdot\frac{w^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

---

* Օրինակ, $\arcsin 2 = \frac{\pi}{2} + i\log\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Նրա զուգամիտության շառավիղն է $R=1$*. երբ $|w|<1$, նա տալիս է Arcsin w-ի արժեքներից մեկը։ Ցույց տանք, որ դա կլինի հենց arcsin w գլխավոր արժեքը։ Իսկապես, $|R(z)|$-ը չի գերազանցում

$$|z|<1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}+\ldots+\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\cdot\frac{1}{2n+1}+\ldots=\frac{\pi}{2}$$

[տես 412, 2)], որտեղից և բխում է պահանջվող եզրակացությունը։

433. ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ։ Դիցուք a-ն և b-ն՝ երկու կոմպլեքս թվեր են, որոնցից $a\neq 0$։ Այդ դեպքում a^b աստիճանի ընդհանուր սահմանումը կլինի այսպիսին՝

$$a^b=e^{b\,\mathrm{Log}\,a}=e^{b(\log a+2k\pi i)}\qquad (k\text{-ն ամբողջ է}),$$

այնպես որ աստիճանը ստացվում է ընդհանրապես բազմարժեք։ $k=0$ դեպքում ստացվում է այսպես կոչված աստիճանի գլխավոր արժեքը՝

$$a^b=e^{b\log a}\ ։$$

Տարբերման համար, աստիճանի ընդհանուր արտահայտությունը, հետևելով Կոշիին, երբեմն նշանակում են այսպես՝ $((a))^b$ ։ Այսպիսով

$$((a))^b=a^b\cdot e^{2k\pi bi}\qquad (k\text{-ն ամբողջ է})։$$

Եթե b-ն հավասար է ամբողջ թվի, ապա երկրորդ արտադրիչը դառնում է մեկ. այդ դեպքում աստիճանը կունենա միայն մեկ արժեք։ Երբ b-ն անկրճատելի ռացիոնալ կոտորակ է՝ $\frac{p}{q}$ $(q>1)$, ապա աստիճանը կունենա ճիշտ q հատ տարբեր արժեքներ։ Վերջապես, q-ի ամեն մի ուրիշ արժեքի դեպքում աստիճանը կունենա անվերջ բազմության արժեքներ։

Օրինակ,

$$2^i=e^{i\log 2}=\cos(\log 2)+i\cdot\sin(\log 2),\quad ((2))^i=2^i\cdot e^{-2k\pi}\ (k\text{-ն ամբողջ է}),$$

$$i^i=e^{i\log i}=e^{-\frac{\pi}{2}},\quad ((i))^i=e^{-(4k+1)\frac{\pi}{2}}\qquad (k\text{-ն ամբողջ է})։$$

Եթե m-ը ցանկացած հաստատուն կոմպլեքս թիվ է, ապա $((z))^m$ աստիճանային ֆունկցիան ընդհանրապես բազմարժեք է։ Նրա գլխավոր ճյուղն է $(z\neq 0)$**

$$z^m=e^{m\cdot\log z}\ ։$$

---

* $w=\pm 1$ դեպքում խախտվում է արկսինուսի $\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}$ ածանցյալի անընդհատությունը։

** Երբեմն $z=0$ դեպքում ընդունում են $z^m=0$, եթե $R(m)>0$։

Հետևյալ առնչությունից՝

$$(1+z)^m=e^{m\cdot \log(1+z)},$$

որը այնպես, ինչպես n 420-ի 2)-ում, կարելի է ստանալ բինոմական շարքը՝

$$(1+z)^m=1+mz+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}z^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}z^n+\cdots$$

Այս շարքը զուգամետ է ցանկացած կոմպլեքս m-ի դեպքում, երբ $|z|<1$* և վերարտադրում է, ինչպես այդ երևում է նրա ստացման եղանակից, բինոմի աստիճանի հենց գլխավոր արժեքը: Դրա հետազոտությամբ զբաղվել է Աբելը:

434. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ: Այս n-ում մի քանի օրինակներով մենք ցույց կտանք, թե ինչ ծառայություններ են մատուցում իրական անալիզին կոմպլեքս փոփոխականն ու նրա տարրական ֆունկցիաները:

1) $y=\frac{1}{x^2+1}$ ֆունկցիայի հաջորդական ածանցյալները հեշտությամբ հաշվվում են, եթե այն ներկայացվի հետևյալ տեսքով՝

$$y=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right);$$

Այսպես

$$y^{(n-1)}=\frac{1}{2i}(-1)^{n-1}(n-1)!\left[\frac{1}{(x-i)^n}-\frac{1}{(x+i)^n}\right]=$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i}\cdot\frac{(x+i)^n-(x-i)^n}{(x^2+1)^n}=$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2+1)^n}\cdot\left[nx^{n-1}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}+\cdots\right];$$

Օրինակ,

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(4)}=24\cdot\frac{5x^4-10x^2+1}{(x^2+1)^5}.$$

Միաժամանակ, ակներևորեն, ստացվում են նաև arctg ֆունկցիայի հաջորդական ածանցյալները [համեմատել 109, 8) և 111, 4)]:

2) Էյլերի բանաձևերը, որոնք արտահայտում են կոսինուսն ու սինուսը ցուցչային ֆունկցիայի միջոցով, կարող են բազմազան ձևերով օգտագործվել: Օրինակ, կամենալով գտնել սեղմ արտահայտություն $s=\sum_{1}^{n}\cos kx$

---

* $z=-1$ դեպքում, եթե ոչ ինքը $(1+z)^m$ աստիճանը, ապա նրա բավականաչափ հեռավոր ածանցյալները խզում են ունենում. բացառություն է ներկայացնում միայն այն դեպքը, երբ $m=0$ կամ բնական թիվ:

գումարի համար, կարելի է գործը հանգեցնել պարզագույն երկրաչափական պրոգրեսիայի հանրագումարին՝

$$s=\frac{1}{2}\left(\sum_{1}^{n} e^{kxi}+\sum_{1}^{n} e^{-kxi}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{xi}-e^{(n+1)xi}}{1-e^{xi}}+\frac{e^{-xi}-e^{-(n+1)xi}}{1-e^{-xi}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{\frac{1}{2}xi}-e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)xi}}{e^{-\frac{1}{2}xi}-e^{\frac{1}{2}xi}}+\frac{e^{-\frac{1}{2}xi}-e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)xi}}{e^{\frac{1}{2}xi}-e^{-\frac{1}{2}xi}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2i}\left(e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)xi}-e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)xi}\right)-\frac{1}{2i}\left(e^{\frac{1}{2}xi}-e^{-\frac{1}{2}xi}\right)}{\frac{1}{2i}\left(e^{\frac{1}{2}xi}-e^{-\frac{1}{2}xi}\right)}=$$

$$=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}.$$

3) $\sin x$-*ի և* $\cos x$-*ի ամբողջ դրական աստիճանները, ինչպես և այդպիսի աստիճանների արտադրյալները կարելի է ներկայացնել բազմապատիկ աղեղների սինուսների ու կոսինուսների գծային կոմբինացիաներով։ Այդ բանը հեշտ է կատարել Էյլերի միևնույն բանաձևերի օգնությամբ, վերլուծելով*

$$\sin^n x=\left(\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\right)^n,\quad \cos^n x=\left(\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\right)^n\ \ldots$$

արտադրյալները ըստ Նյուտոնի երկանդամի։ Օրինակ՝

$$\sin^5 x=\frac{1}{32i}(e^{5xi}-5e^{3xi}+10e^{xi}-10e^{-xi}+5e^{-3xi}-e^{-5xi})=$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{e^{5xi}-e^{-5xi}}{2i}-5\,\frac{e^{3xi}-e^{-3xi}}{2i}+10\,\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\right)=$$

$$=\frac{1}{16}(\sin 5x-5\sin 3x+10\sin x);$$

$$\cos^4 x\sin^3 x=\left(\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\right)^4\left(\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\right)^3=$$

$$=-\frac{1}{128i}(e^{2xi}-e^{-2xi})^3(e^{xi}+e^{-xi})=$$

$$=-\frac{1}{128i}(e^{6xi}-3e^{2xi}+3e^{-2xi}-e^{-6xi})(e^{xi}+e^{-xi})=$$

$$=-\frac{1}{128i}(e^{7xi}+e^{5xi}-3e^{3xi}-3e^{xi}+3e^{-xi}+3e^{-3xi}-e^{-5xi}-e^{-7xi})=$$

$$=-\frac{1}{64}(\sin 7x+\sin 5x-3\sin 3x-3\sin x):$$

կարելի է ստանալ նաև ընդհանուր բանաձևեր՝

$$(\text{ա})\ \sin^{2\nu} x=\frac{(-1)^\nu}{2^{2\nu-1}}\Big\{\cos 2\nu x-2\nu\cos(2\nu-2)x+$$

$$+\frac{2\nu(2\nu-1)}{1\cdot 2}\cos(2\nu-4)x-\ldots+\frac{(-1)^\nu}{2}\,\frac{2\nu(2\nu-1)\ldots(\nu+1)}{1\cdot 2\ldots\nu}\Big\},$$

$$(\text{բ})\ \sin^{2\nu+1} x=\frac{(-1)^\nu}{2^{2\nu}}\Big\{\sin(2\nu+1)x-(2\nu+1)\sin(2\nu-1)x+$$

$$+\frac{(2\nu+1)2\nu}{1\cdot 2}\sin(2\nu-3)x+\cdots+(-1)^\nu\frac{(2\nu+1)2\nu\ldots(\nu+2)}{1\cdot 2\ldots\nu}\sin x\Big\},$$

$$(\text{գ})\qquad \cos^n x=\frac{1}{2^{n-1}}\Big\{\cos nx+n\cos(n-2)x+$$

$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos(n-4)x+\ldots\Big\},$$

ընդ որում (գ) բանաձևի մեջ վերջին անդամն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\nu(2\nu-1)\ldots(\nu+1)}{1\cdot 2\ldots\nu},\ \text{կամ}\ \frac{(2\nu+1)2\nu\ldots(\nu+2)}{1\cdot 2\ldots\nu}\cos x,$$

նայած այն բանին, կլինի արդյոք $n=2\nu$, թե $2\nu+1$:

Նման ձևափոխությունները ձեռնտու են ինտեգրման ժամանակ [համեմատել 275]:

4) Իրական կամ կոմպլեքս փոփոխականի կոմպլեքս ֆունկցիաների վրա տարածվում են ինտեգրալ հաշվի պարզագույն բանաձևերը (որոնք վերաբերում են տարրական ֆունկցիաներին):

Դիցուք պահանջվում է գտնել հետևյալ ինտեգրալները՝

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx,\qquad \int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

Այդ խնդիրը համարժեք է

$$\int e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)dx=\int e^{(a+bi)x}dx$$

ինտեգրալը որոնելուն, որը, տարրական բանաձևի համաձայն, հավասար է

$$\frac{1}{a+bi}e^{(a+bi)x}=\frac{\cos bx+i\sin bx}{a+bi}e^{ax}=$$

$$=\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}+i\cdot\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}:$$

Համեմատելով առանձին իրական և կեղծ մասերը, կստանանք որոնելի ինտեգրալները [համեմատել 259, 6)]:

$$\int P(x)\cdot e^{ax}dx$$

տիպի ինտեգրալի, որտեղ P(x)-ը ամբողջ բազմանդամ է [259, 4)], հաշվման բանաձևը կարելի է տարածել և այն դեպքի վրա, երբ a-ն կոմպլեքս թիվ է։ Այդ դեպքում դրան կբերվեն ոչ միայն

$$\int P(x)\cos bx\,dx,\qquad \int P(x)\sin bx\,dx$$

ինտեգրալները, այլև

$$\int P(x)e^{ax}\cos bx\,dx,\quad \int P(x)e^{ax}\sin bx\,dx$$

ինտեգրալները [259, 4); 277]։

5) Լոգարիթմական ֆունկցիայի և հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների միջև եղած կապը միացնում է ինտեգրալ հաշվի շատ բանաձևեր, որոնք թվում էին միանգամայն տարբեր, և հնարավորություն է տալիս ստանալ նոր բանաձևեր։ Օրինակ

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}\quad \text{և}\quad \int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$$

կամ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\log\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\quad \text{և}\quad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}$$

ինտեգրալները բերվում են մեկը մյուսին փոխարինելով x-ը՝ xi-ով։

6) Առանձնացնելով իրական և կեղծ մասերը հայտնի կոմպլեքս վերլուծությունների մեջ, կարելի է երբեմն պարզապես ստանալ հետաքրքիր վերլուծություններ իրական տիրույթում։

(ա) Վերցնենք, $|z|<1$ դեպքում,

$$\frac{z}{1-z}=\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

պրոգրեսիան և դնենք $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$։ Աջ մասում կստանանք

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

շարքը, իսկ ձախ մասում՝ հետևյալ արտահայտությունը՝

$$\frac{r(\cos\theta+i\sin\theta)}{(1-r\cos\theta)-ir\sin\theta}=\frac{r\cos\theta-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}+\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\cdot i$$

Համապատասխանեցնելով իրական և կեղծ բաղադրիչները հավասարության երկու մասերում (և կրճատելով r-ով), կգանք հետևյալ վերլուծություններին՝

$$\frac{\cos\theta - r}{1-2r\cos\theta+r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\cos n\theta,$$

$$\frac{\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\sin n\theta\text{։}$$

[Համեմատել 412, 9)։]

(բ) Համանման ձևով վարվելով

$$\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} \qquad (|z|<1)$$

լոգարիթմական շարքի հետ, կստանանք $1>r$-ի համար [համեմատել 412, 9)]՝

$$\frac{1}{2}\log(1-2r\cos\theta+r^2) = -\sum_{n=1}^{\infty} r^n\frac{\cos n\theta}{n},$$

$$\operatorname{arctg}\frac{r\sin\theta}{1-r\cos\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n\frac{\sin n\theta}{n}\text{։}$$

Դիցուք $0<\theta<\pi$. քանի որ $r=1$ դեպքում աջակողմյան շարքերը շարունակում են զուգամիտել [373, 2], ապա կարելի է, օգտվելով Աբելի թեորեմայից [409, 6], անցնել այստեղ սահմանի $r\to 1-0$ դեպքում։ Ձախ կողմում կստանանք առաջին դեպքում՝ $\frac{1}{2}\log(2-2\cos\theta)=\log 2\sin\frac{\theta}{2}$, իսկ երկրորդ դեպքում՝ $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi-\theta}{2}\right)=\frac{\pi-\theta}{2}$։ Այսպես ուրեմն, ունենք՝

$$\log 2\sin\frac{\theta}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}, \qquad \frac{\pi-\theta}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n} \qquad (0<\theta<\pi)\text{։}$$

[Դասընթացի երրորդ հատորում մենք կհանդիպենք եռանկյունաչափական նշանավոր շատ վերլուծումների։]

7) n° 420 ի 8)-ի մեջ մենք ունեինք հետևյալ վերլուծումը՝

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\cdot\alpha^n,$$

որտեղ $X_n(x)$-երը Լեժանդրի բազմանդամներն են։ Փոփոխելով x-ը -1-ի և $+1$-ի միջև, ընդունենք այստեղ $x=\cos\theta$՝

$$(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}X_n(\cos\theta)\,.\,\alpha^n\,;$$

Այժմ $2\cos\theta$-ն փոխարինենք $(e^{\theta i}+e^{-\theta i})$-ով կստանանք՝

$$(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}=[1-\alpha(e^{\theta i}+e^{-\theta i})+\alpha^2]^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=(1-\alpha e^{i\theta})^{-\frac{1}{2}}\,.\,(1-\alpha e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}}=\left(1+\frac{1}{2}\alpha e^{i\theta}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\alpha^2e^{2i\theta}+\ldots\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{1}{2}\alpha e^{-i\theta}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\alpha^2e^{-2i\theta}+\ldots\right).$$

Բազմապատկելով իրարով այս երկու շարքերը սովորական կանոնով և համախմբելով α^n-ի գործակիցները երկու վերլուծությունների մեջ, մենք կգտնենք $X_n(\cos\theta)$-ի համար հետևյալ արտահայտությունը՝

$$X_n(\cos\theta)=\frac{(2n-1)!!}{2n!!}(e^{ni\theta}+e^{-ni\theta})+$$

$$+\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\,.\,\frac{1}{2}\left(e^{(n-1)i\theta}+e^{-(n-1)i\theta}\right)+$$

$$+\frac{(2n-5)!!}{(2n-4)!!}\,.\,\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\left(e^{(n-2)i\theta}+e^{-(n-2)i\theta}\right)+\ldots$$

Փակագծերը այժմ կարելի է փոխարինել համապատասխանաբար $2\cos n\theta$-ով, $2\cos(n-1)\theta$-ով, $2\cos(n-2)\theta$-ով և այլն։ Քանի որ բոլոր գործակիցները այստեղ դրական են, ապա միանգամայն ակներև է, որ այդ արտահայտությունը մեծագույն արժեքի կհասնի $\theta=0$ դեպքում, այսինքն՝ $x=\cos 0=1$ դեպքում։ Այսպիսով, օգտվելով կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների բնագավառից վերցրած նկատառումներից, մենք գտանք հետաքրքիր արդյունք, որն ամբողջապես վերաբերում է իրական տիրույթին՝ երբ x-ը փոփոխվում է $[-1, +1]$ միջակայքում Լեժանդրի բոլոր բազմանդամներն իրենց մեծագույն արժեքին են հասնում $x=1$ ծայրում։

ՏԱՍՆՉՈՐԵՔԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

§ 1. ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ ԱՆՎԵՐՋ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐՈՎ

435. ԱՆՎԵՐՋ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐՈՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ. IX *գլխում ուսումնասիրեցինք* $\int_a^b f(x)dx$ *որոշյալ ինտեգրալի գաղափարը այն դեպքի համար, երբ* $[a, b]$ *միջակայքը վերջավոր էր և* $f(x)$ *ֆունկցիան՝ սահմանափակ. Ներկա գլուխը նվիրված է այդ գաղափարի ընդհանրացմանը զանազան ուղղություններով. Սկսենք անվերջ միջակայքով տարածված ինտեգրալի դիտարկումից:*

Դիցուք $f(x)$ *ֆունկցիան որոշված է* $[a, +\infty]$ *միջակայքում, այսինքն՝* $a \leqslant x$*-երի համար, և ինտեգրելի է նրա ամեն մի* $[a, A]$ *վերջավոր մասում, այնպես որ* $\int_a^A f(x)\,dx$ *ինտեգրալն իմաստ ունի ցանկացած* $A>a$ *դեպքում.* Եթե $A\to+\infty$ դեպքում այդ ինտեգրալի համար գոյություն ունի որոշակի վերջավոր սահման, ապա վերջինս անվանում են $f(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրալ a-ից մինչև $+\infty$ միջակայքում և *նշանակում են հետևյալ սիմվոլով՝*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx. \qquad (1)$$

Այդ դեպքում ասում են, որ (1) ինտեգրալը գոյություն

ունի կամ զուգամետ է, իսկ $f(x)$ ֆունկցիան անվանում են ինտեգրելի $[a, +\infty]$ անվերջ միջակայքում։ Ի տարբերություն սկզբում ուսումնասիրած իսկական իմաստով ինտեգրալի կամ իսկական ինտեգրալի, հենց նոր որոշված ինտեգրալը կոչվում է անիսկական ինտեգրալ*։

Եթե (1) սահմանը անվերջ է կամ բոլորովին գոյություն չունի, ապա ինտեգրալի մասին ասում են, որ այն գոյություն չունի կամ տարամետ է։ [Ի միջի այլոց, երբեմն հարմար է նաև անվերջ սահմանը (որոշակի նշանով) դիտել որպես (1) ինտեգրալի արժեք։]

Դիտարկենք օրինակներ։ 1) $\frac{1}{1+x^2}$ ֆունկցիան ինտեգրելի է ամեն մի $[0, A]$ $(A>0)$ վերջավոր միջակայքում, ընդ որում ունենք՝

$$\int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^A = \operatorname{arctg} A\text{։}$$

Քանի որ $A \to +\infty$ դեպքում գոյություն ունի վերջավոր սահման՝ $\frac{\pi}{2}$, ապա ինտեգրալը 0-ից մինչև $+\infty$ զուգամետ է և ունի այդ արժեքը՝

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A = \frac{\pi}{2}\text{։}$$

2) Ուսումնասիրենք այն հարցը, թե $0<\lambda$ ցուցչի ինչպիսի արժեքների դեպքում գոյություն ունի հետևյալ անիսկական ինտեգրալը՝

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} \qquad (a>0), \tag{2}$$

Դիցուք $\lambda \neq 1$։ Այդ ժամանակ՝

$$\int_a^A \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda} x^{1-\lambda} \Big|_a^A = \frac{1}{1-\lambda}\left(A^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}\right)\text{։}$$

---

* Հիշենք, որ մենք արդեն հանդիպել ենք անիսկական ինտեգրալի գաղափարին 364-ում։

Այդ արտահայտությունը $A\to\infty$ *դեպքում ունի* ∞ *կամ* $\frac{1}{\lambda-1}a^{1-\lambda}$ *վերջավոր սահմանը՝ նայած* $\lambda<1$, *թե* $\lambda>1$։ *Եթե* $\lambda=1$, *ունենք՝*

$$\int_a^A \frac{dx}{x} = \log x \Big|_a^A = \log A - \log a$$

և $A\to\infty$ *դեպքում սահմանում ստանում ենք* ∞։

Այսպիսով, (2) ինտեգրալը $1<\lambda$*-ի դեպքում զուգամետ է (և ունի* $\frac{1}{\lambda-1}a^{1-\lambda}$ *արժեքը), իսկ* $1\geq\lambda$*-ի դեպքում՝ տարամետ։*

(1)-ի նմանությամբ սահմանվում է նաև f(x) ֆունկցիայի ինտեգրալը $-\infty$-ից մինչև a՝

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{A'\to-\infty}\int_{A'}^{a} f(x)dx \quad (A'<a), \qquad (3)$$

ինչպես նաև f(x) ֆունկցիայի ինտեգրալը $-\infty$-ից մինչև $+\infty$՝

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A'\to-\infty \\ A\to+\infty}} \int_{A'}^{A} f(x)dx.$$

Այդ ժամանակ պահպանվում է նաև (1) ինտեգրալի առթիվ մտցված տերմինաբանությունը։

Վերջին դեպքում, վերցնելով ցանկացած a *թիվը, կարելի է գրել՝*

$$\int_{A'}^{A} f(x)\,dx = \int_{A'}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{A} f(x)dx,$$

և ձախակողմյան ինտեգրալի համար $A'\to-\infty$, $A\to+\infty$ *դեպքում սահմանի գոյությունը, ակներևորեն, հավասարազոր է աջակողմյան ինտեգրալների համար (1) և (3) սահմանների զատ-զատ գոյությանը։ Այսպիսով,* $-\infty$*-ից մինչև* $+\infty$ *ինտեգրալը կարելի է սահմանել նաև այսպիսի հավասարության միջոցով՝*

$$\int_{\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

ենթադրելով, որ աջակողմյան ինտեգրալները զատ-զատ գոյություն ունեն։ Այս սահմանումը փաստորեն կախված չէ a թվի ընտրությունից։

Օրինակներ.

$$3)\ \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A' \to -\infty} \int_{A'}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A' \to -\infty} (-\operatorname{arctg} A') = \frac{\pi}{2}.$$

$$4)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{0}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{0} = \pi.$$

436. ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՇՎԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ. Վերևում բերված օրինակներում նախ վերջավոր միջակայքով տարածված ինտեգրալը հաշվում էինք նախնական ֆունկցիայի օգնությամբ, իսկ այնուհետև իրականացնում էինք սահմանային անցումը։ Կարելի է այդ երկու քայլերը միավորել մեկ բանաձևի մեջ։

Դիցուք, օրինակ, $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $[a, +\infty)$ միջակայքում և ինտեգրելի է նրա յուրաքանչյուր $[a, A]$ վերջավոր մասում։ Եթե այդ ժամանակ $f(x)$-ի համար գոյություն ունի $F(x)$ նախնական ֆունկցիա ամբողջ $[a, +\infty)$ միջակայքում, ապա ինտեգրալ հաշվի հիմնական բանաձևի համաձայն [296]՝

$$\int_{a}^{A} f(x)\,dx = F(A) - F(a) = F(x)\Big|_{a}^{A},$$

Այստեղից պարզ է, որ (1) անիսկական ինտեգրալը գոյություն ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի հետևյալ վերջավոր սահմանը՝

$$\lim_{A \to +\infty} F(A) = F(+\infty),$$

և այն ժամանակ՝

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}.$$

Նման ձևով՝

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{a}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty},$$

եթե $F(-\infty)$ տակ հասկանանք $\lim\limits_{A'\to-\infty} F(A')$ սահմանը։ Կրկնակի տեղադրության հաշվման հնարավորությունը ինքը, որը կապված է նրա մեջ մասնակցող սահմանի գոյության (ու վերջավոր լինելու) հետ, արդեն վկայում է ինտեգրալի գոյության մասին։

Դիմենք նոր օրինակների։

437. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx \quad (a > 0)$։

Քանի որ նախնական ֆունկցիան՝

$$F(x) = -\frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2+b^2} \cdot e^{-ax},$$

այնպես որ $F(0) = -\frac{b}{a^2+b^2}$ և $F(+\infty) = 0$, ապա՝

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Նման ձևով՝

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{b \sin bx - a \cos bx}{a^2+b^2} \cdot e^{-ax}\Big|_0^{\infty} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

2) $$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \left[\frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x^2 + x\sqrt{2}+1}{x^2 - x\sqrt{2}+1} + \right.$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)\Big]\Big|^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

3) $$\int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx = \cos\frac{1}{x}\Big|_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} = 1.$$

4) $\int_0^{\infty}\sin x\,dx$։ Այստեղ նախնական ֆունկցիա կլինի $-\cos x$-ը, սակայն $-\cos x\Big|_0^{\infty}$ կրկնակի տեղադրությունն իմաստ չունի, քանի որ $\cos x$-ը ոչ մի սահմանի չի ձգտում, երբ $x\to\infty$. Ինտեգրալը գոյություն չունի։

5) $$\int_0^{\infty}\frac{x\log x}{(1+x^2)^3}\,dx.$$

Մասերով ինտեգրման և պարզագույն կոտորակների վերլուծման օգնությամբ գտնում ենք նախնական ֆունկցիան՝

$$F(x)=\int\frac{x\log x}{(1+x^2)^3}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{\log x}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{4}\log x-\frac{1}{8}\log(1+x^2)+\frac{1}{8}\,\frac{1}{1+x^2}.$$

Երբ $x\to 0$, ունենք $\lim F(x)=\frac{1}{8}$. այդ սահմանն ընդունում ենք որպես $F(x)$ ֆունկցիայի արժեք $x=0$ կետում։ Մյուս կողմից, $F(+\infty)=0$։ Այսպիսով, ինտեգրալի արժեքն է՝ $-\frac{1}{8}$։

6) $xy=1$ հիպերբոլը $0x$ առանցքի շուրջը պտտելուց առաջացած մարմնի համար հաշվել $x>1$ անհավասարությամբ որոշվող մասի ծավալն ու կողմնային մակերևույթը։

Մարմնի այն մասը, որը համապատասխանում է x-ի փոփոխմանը 1-ից մինչև $A\,(A>1)$, ունի հետևյալ ծավալն ու կողմնային մակերևույթը՝

$$V_A=\pi\int_1^A\frac{dx}{x^2},\quad S_A=2\pi\int_1^A\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx.$$

Բնական կլինի ամբողջ (անվերջ տարածվող) մարմնի համար որպես V *ծավալ և S կողմնային մակերևույթ ընդունել այդ մեծությունների սահմանները, այսինքն՝*

$$V=\pi\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}, \qquad S=2\pi\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx.$$

Սակայն, այն ժամանակ, երբ առաջին ինտեգրալը զուգամիտում է [435, *2*] *և ծավալի համար ստացվում է վերջավոր արժեք՝* π, *երկրորդ ինտեգրալը տարամիտում է, որը ցույց է տալիս կողմնային մակերևույթի անվերջ մեծ լինելը։ Որպեսզի դրանում համոզվենք, բավական է նկատել, որ՝*

$$S_A > 2\pi\int_1^{A}\frac{dx}{x}=2\pi\log A,$$

և S_A*-ն ձգտում է* ∞, *երբ* $A\to\infty$։

7) Դիցուք կոորդինատների O *սկզբնակետում գտնվում է* m *զանգված, որը* Ox *առանցքի վրա* O*-ից* x *հեռավորության վրա գտնվող և* 1 *զանգված ունեցող* M *նյութական կետը ձգում է*

$$F=\frac{m}{x^2}$$

ուժով (ըստ Նյուտոնի օրենքի)։ F *ուժն ինչպիսի՞* A *աշխատանք կկատարի երբ* M *կետը* $x=r$ *դիրքից* Ox *առանցքի վրայով տեղափոխվի մինչև անվերջություն։*

Աշխատանքն, անշուշտ, կլինի բացասական, քանի որ ուժն ուղղված է շարժմանը հակառակ։ Այս դեպքի վրա տարածելով n 344*-ի (9) բանաձևը, կգտնենք՝*

$$A=\int_r^{\infty}-\frac{m}{x^2}\,dx=\frac{m}{x}\Bigg|_r^{\infty}=-\frac{m}{r}.$$

M *կետի հակառակ տեղափոխության ժամանակ, անվերջությունից մինչև* $x=r$ *հեռավորությունը, նյուտոնյան ձգողականության ուժը կկատարի դրական աշխատանք, որը հավասար կլինի* $\frac{m}{r}$։ *Այդ մեծությունը կոչվում է գրավիտացիոն ուժի* պոտենցիալ M *կետում և ծառայում է որպես չափ այդ կետում կուտակված* պոտենցիալ էներգիայի։

8) v_1 *ծավալից մինչև* v_2 *ծավալն ընդարձակվելիս* ($v_2>v_1$) *գազի կատարած աշխատանքի համար մենք ունեինք հետևյալ բանաձևը* [**345** *(10)*]՝

$$A = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv։$$

Դիցուք տված է իդեալական գազի որոշ զանգված, որը p_1 ճնշման տակ զբաղեցնում է v_1 ծավալ։ Ենթադրենք, թե գազն ընդարձակվում է մինչև անվերջություն՝ ադիաբատորեն, այսինքն՝ առանց ջերմափոխանակման շրջապատող միջավայրի հետ։ Այդ պայմաններում, ինչպես հայտնի է [352, *3)*], *տեղի ունի Պուասոնի բանաձևը՝*

$$pv^k = c \quad \left(\text{որտեղ} \quad k = \frac{c_p}{c_v} > 1\right)։$$

Այդ ժամանակ այն աշխատանքը, որը կարող էր կատարել գազը այդպիսի ընդարձակման դեպքում, կլինի՝

$$A_{max} = \int_{v_1}^{\infty} c v^{-k} dv = \frac{c}{1-k}\cdot\frac{1}{v^{k-1}}\Bigg|_{v_1}^{\infty} = \frac{c}{k-1}\cdot\frac{1}{v^{k-1}}։$$

Ի նկատի ունենալով, որ $c = p_1 v_1^k$, *և այդ տեղադրելով ստացված բանաձևի մեջ, վերջնականապես կգտնենք՝*

$$A_{max} = \frac{p_1 v_1}{k-1}։$$

9) n° 347-*ի 8) խնդրի մեջ մենք ստացել էինք այն* F *ուժը, որով հոսանքի վերջավոր ուղղագիծ հատվածն ազդում է (1 զանգված ունեցող) մագնիսական բևեռի վրա՝*

$$F = \int_{s_1}^{s_2} \frac{al}{(a^2+s^2)^{3/2}} ds։$$

Այժմ դիտարկենք անվերջ (դեպի երկու կողմը) հաղորդիչի դեպքը, այսինքն ընդունենք՝ $s_1 = -\infty$, $s_2 = +\infty$։ *Այդ ժամանակ՝*

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{al}{(a^2+s^2)^{3/2}} ds = \frac{l}{a}\cdot\frac{s}{\sqrt{a^2+s^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2l}{a}։$$

Հասկանալի է, որ անվերջ հաղորդիչը՝ այդ պատրանք է։ Այնուամենայնիվ ստացված արդյունքը կարող է օգտակար լինել. շատ երկար հաղորդիչի դեպքում ձեռնտու է այն մոտավորապես դիտել որպես անվերջ հաղորդիչ, որովհետև դրանով հասնում ենք բանաձևի զգալի պարզեցման։

10) Եթե ինքնինդուկցիայով էլեկտրաշղթայի մեջ ժամանակի $t=0$

պահին I_0 ուժով հոսանքը անջատում ենք, ապա նրա մեջ առաջանում է *անջատման էքստրահոսանք* (экстраток), որը ենթարկվում է հետևյալ օրենքին [տես 350, 4) (ա). այստեղ պահպանում ենք նախկին նշանակումները]՝

$$I = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Խնդիր դնենք՝ հաշվել այդ հոսանքով առանձնացած Q ջոուլյան ջերմության *լրիվ քանակը*։

Ջերմաքանակի էլեմենտը $[t, t+dt]$ ժամանակամիջոցում, ակներևորեն, կլինի՝

$$dQ = I^2 R \cdot dt.$$

համրագումարելով, ամբողջ *անվերջ* ժամանակամիջոցի համար կստանանք՝

$$Q = \int_0^{\infty} I^2 R \cdot dt = R I_0^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{2R}{L}t} dt = \frac{1}{2} L I_0^2.$$

Նշենք, որ, թեև վերջավոր ժամանակամիջոցում հոսանքը դառնում է աննշմարելի, այնուամենայնիվ հոսանքի էներգիայի *լրիվ քանակը* որոշելու համար պետք է ինտեգրել *անվերջ* միջակայքում։

438. ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆԸ. $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$

ինտեգրալի գոյության հարցը, համաձայն (1) սահմանումի, հանգում է A-ից կախված հետևյալ ֆունկցիայի վերջավոր սահմանի գոյության հարցին $A \to +\infty$ դեպքում՝

$$F(A) = \int_a^{A} f(x)dx.$$

Այդ ֆունկցիայի նկատմամբ կիրառելով Բոլցանո-Կոշիի հայտանիշը [58], անիսկական ինտեգրալի գոյության պայմանը կարելի է ձևակերպել այսպես՝

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալի գոյության համար* ան-

* Ենթադրելով, որ յուրաքանչյուր $[a, A]$ միջակայքում, $(A > a)$, $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է (իսկական իմաստով)։

նրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համապատասխանի այնպիսի $A_0>a$ թիվ, որ $A>A_0$ և $A'>A_0$ դեպքում՝ տեղի ունենա հետևյալ անհավասարությունը՝

$$|F(A')-F(A)|=\left|\int_a^{A'} f(x)\,dx-\int_a^{A} f(x)\,dx\right|=\left|\int_A^{A'} f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Այս հայտանիշը թույլատրում է հեշտությամբ ապացուցել հետևյալ առաջադրությունը՝

Եթե $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ ինտեգրալը գոյություն ունի, ապա առավել ևս գոյություն ունի $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալը։

Իսկապես, շարադրված հայտանիշը կիրառելով $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ *ինտեգրալի նկատմամբ, որի գոյությունը ենթադրում ենք, տեսնում ենք, որ ցանկացած* $\varepsilon>0$ *թվի համար կգտնվի այնպիսի* $A_0>a$, *որ՝*

$$\int_A^{A'}|f(x)|dx<\varepsilon,$$

միայն թե $A'>A>A_0$. *Սակայն, ակներևաբար,* $\left|\int_A^{A'} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_A^{A'}|f(x)|dx$ *և, հետևաբար, նույն* A*-ի ու* A'*-ի համար առավել ևս տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝*

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\,dx\right|<\varepsilon,$$

որտեղից, մեր հայտանիշի համաձայն, բխում է $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *ին-տեգրալի գոյությունը։*

Նշենք, որ վերջին ինտեգրալի գոյությունից, ընդհանրապես, չի հետևում $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *ինտեգրալի գոյությունը։ Այդ հանգամանքը հիմք է տալիս առանձնապես տարբերել հետևյալ դեպքը։ Եթե* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *ինտեգրալի հետ միասին գոյություն ունի նաև* $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *ինտեգրալը, ապա առաջին ինտեգրալը անվանում են* բացարձակ զուգամետ, *իսկ* $f(x)$ *ֆունկցիան՝* բացարձակ ինտեգրելի $[a, +\infty]$ *միջակայքում։ Ոչ բացարձակ զուգամետ ինտեգրալի օրինակ կտրվի հաջորդ* n°-*ում։*

Ինտեգրալի գոյության մեր ապացուցած հայտանիշից բխում են մի շարք այլ հետևանքներ ևս՝

(ա) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ինտեգրալի գոյությունից բխում է $\int_{a_0}^{+\infty} f(x)dx$ $(a_0 > a)$ ինտեգրալի գոյությունը, և հակադարձը.

(բ) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ինտեգրալի գոյությունից բխում է $\int_a^{+\infty} k\cdot f(x)dx$ ինտեգրալի գոյությունը, որտեղ $k=\text{const}$.

(գ) եթե $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ և $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ ինտեգրալները գոյություն

ունենա, ապա գոյություն ունի նաև $\int_a^{+\infty} [f(x)+g(x)]dx$ ինտեգրալը։

Ի միջի այլոց, այդ բոլոր պնդումները նույնպիսի հեշտությամբ ստացվում են նաև անմիջականորեն անիսկական ինտեգրալի սահմանումից։

Ընթերցողին առաջարկում ենք վարժության կարգով ապացուցել այդ։

439. ԿԱՊԸ ԱՆՎԵՐՋ ՇԱՐՔԵՐԻ ՀԵՏ։ *Մենք գիտենք, որ ֆունկցիայի սահմանի գաղափարը կարելի է արտահայտել երկու կերպ՝ «ε-δ լեզվով» և «հաջորդականությունների լեզվով»* [52, 53]։ *Եթե* F(A) *ֆունկցիայի նկատմամբ* [*տես (4)*] *կիրառենք սահմանի երկրորդ սահմանումը, ապա անիսկական ինտեգրալի (1) սահմանումը կարող ենք մեկնաբանել այսպես՝ մինչև անվերջություն աճող* $A_n > a$ *թվերի ինչպիսի* $\{A_n\}$ *հաջորդականություն էլ վերցնելու լինենք, ինտեգրալների* $\left\{\int_a^{A_n} f(x)dx\right\}$ *հաջորդականությունը պետք է ձգտի միևնույն վերջավոր սահմանի*, որը և կտա* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *անիսկական ինտեգրալի արժեքը։*

Մյուս կողմից, $\left\{\int_a^{A_n} f(x)dx\right\}$ *հաջորդականության սահմանի հարցը նույնական է հետևյալ շարքի գումարի հարցի հետ* [353]՝

$$\int_a^{A_1} + \left\{\int_a^{A_2} - \int_a^{A_1}\right\} + \left\{\int_a^{A_3} - \int_a^{A_2}\right\} + \cdots = \int_a^{A_1} + \int_{A_1}^{A_2} + \int_{A_2}^{A_3} + \cdots$$

---

* *Բավական է ենթադրել, որ բոլոր* $\left\{\int_a^{A_n} f(x)dx\right\}$ *հաջորդականությունները զուգամետ են, որպեսզի այստեղից արդեն հնարավոր լինի եզրակացնել, որ նրանց բոլորի սահմանը միևնույնը կլինի* [53]։

Այսպիսով, կարելի է պնդել հետևյալը՝

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալի գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի, ինչպիսին էլ լինի $A_n \to +\infty$ վարիանտան,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)dx \qquad (A_0 = a)$$

շարքը զուգամիտի միևնույն գումարին, որը և տալիս է անիսկական ինտեգրալի արժեքը.

Նշենք, որ դրական (ոչ-բացասական) f(x) ֆունկցիայի դեպքում, ինտեգրալի գոյության համար բավական է վերոհիշյալ շարքի զուգամիտությունը $A_n \to +\infty$ վարիանտայի մի մասնավոր ընտրության դեպքում. Իսկապես, այդ ժամանակ A-ից կախված (4) աճող ֆունկցիան սահմանափակ է այդ շարքի գումարով և, հետևաբար, վերջավոր սահման ունի, երբ $A \to +\infty$։

Ինտեգրալի զուգամիտության հարցը շարքի զուգամիտության հարցին հանգեցնելը հաճախ շատ ձեռնտու է լինում, քանի որ հնարավորություն է տալիս օգտագործելու շարքերի զուգամիտության կամ տարամիտության բազմաթիվ հայտանիշներ.

Օրինակի համար դիտարկենք հետևյալ կարևոր ինտեգրալը՝

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Քանի որ x-ը աճելիս sin x-ը հերթով ընդունում է մեկ դրական, մեկ բացասական արժեքներ, նշանը փոխելով $n\pi (n=1, 2, 3, \ldots)$ կետերում, ապա բնական կլինի հենց այդ թվերն ընդունել որպես A_n և դիտարկել հետևյալ շարքը՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx. \qquad (5)$$

Ընդհանուր անդամի՝ $v_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$-ի մեջ տեղադրելով $x=n\pi+t$, կստանանք՝

$$v_n = (-1)^n \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi+t}\,dt։$$

Այստեղից երևում է, որ շարքի անդամները նշանափոխ են և բացարձակ արժեքով մոնոտոն նվազում են։ Այնուհետև, $n>0$ դեպքում՝

$$|v_n| = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi+t}\,dt < \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{n\pi}\,dt = \frac{1}{n}$$

և, հետևաբար, շարքի անդամների բացարձակ արժեքը ձգտում է զրոյի, երբ նրանց համարն անվերջորեն աճում է։ (5) շարքը կլինի Լայբնիցի տիպի և, հայտնի թեորեմայի [369] համաձայն, զուգամետ է։ Նրա գումարը նշանակենք I-ով։ Այսպիսով, ամեն մի $\varepsilon>0$ թվի համար կգտնվի այնպիսի N, որ $N<n$-երի դեպքում տեղի կունենա հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\left|\int\limits_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx - I\right| < \varepsilon։ \tag{6}$$

Այժմ արդեն ինտեգրալի գոյության ապացույցն ավելի հեշտ է ավարտել «$\varepsilon-\delta$ լեզվով»։ Դիցուք $A>N\pi$․ այդ ժամանակ գոյություն ունի այնպիսի n_0 բնական թիվ, որ $n_0\pi \leqslant A<(n_0+1)\pi$, ընդ որում $n_0\geqslant N$։ Քանի որ $n_0\pi$-ից մինչև $(n_0+1)\pi$ միջակայքում $\sin x$-ը պահպանում է նշանը, ապա $\int\limits_0^{A}$ ինտեգրալը կգտնվի $\int\limits_0^{n_0\pi}$ և $\int\limits_0^{(n_0+1)\pi}$ ինտեգրալների միջև, որոնցից յուրաքանչյուրը, (6)-ի շնորհիվ, գտնվում է $I-\varepsilon$ և $I+\varepsilon$ թվերի միջև։ Հետևաբար, այդ թվերի միջև կգտնվի նաև $\int\limits_0^{A}$ ինտեգրալը։ Այսպիսով, վերջնականապես, $N\pi<A$-ի համար ունենք՝

$$\left|\int_0^A \frac{\sin x}{x}dx - I\right| < \varepsilon,$$

այնպես որ գոյություն ունի՝

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{\sin x}{x}dx = I^*։$$

Զուգընթացաբար նկատենք, որ այդ ինտեգրալը զուգամետ է ոչ-բացարձակ, այսինքն՝ $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ ինտեգրալը տարամետ է։ Այդ փաստը հեշտ է ապացուցել. դիմելով ինտեգրալը շարքի տեսքով ներկայացնելուն։ Թեկուզ, եթե այդ ինտեգրալը զուգամիտեր, ապա, ինչպես և մի քիչ առաջ, կունենայինք՝

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi+t}dt։$$

Բայց $n\pi+t<(n+1)\pi$, այնպես որ՝

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi+t}dt > \frac{1}{(n+1)\pi}\cdot\int_0^{\pi}\sin t\, dt = \frac{2}{(n+1)\pi},$$

մինչդեռ $\frac{2}{\pi}\sum\frac{1}{n+1}$ շարքը տարամետ է [356, 1)]։

440. ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐ, ՈՐՈՆՔ ՀԻՄՆՎԱԾ ԵՆ ՆՐԱՆՑ ԲԱՂԴԱՏՄԱՆ ՎՐԱ։ Ֆունկցիաները դիտարկելով $[a, +\infty)$ անվերջ միջակայքում, մենք այստեղ միշտ ենթադրելու ենք, որ նրանք յուրաքանչյուր $[a, A]$ վերջավոր միջակայքում ինտեգրելի են։ Հարցը ինտեգրալի գոյության մասին է $[a, +\infty]$ անվերջ

---

* Ստորև [455, 3 և 484, 2°] մենք կտեսնենք, որ $I=\frac{\pi}{2}$։ Այստեղ մեզ հետաքրքրում է միայն ինտեգրալի զուգամիտության հարցը։

միջակայքում. Նախ սահմանափակվենք դրական ֆունկցիաներով.

ԹԵՈՐԵՄԱ. Եթե $a \leqslant x$ դեպքում տեղի ունի $f(x) \leqslant \varphi(x)$ անհավասարությունը, ապա $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ ինտեգրալի զուգամիտությունից հետևում է $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ ինտեգրալի զուգամիտությունը կամ, որ միևնույնն է, վերջին ինտեգրալի տարամիտությունից հետևում է առաջին ինտեգրալի տարամիտությունը:

Դիցուք $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ *ինտեգրալը զուգամետ է. Ունենք՝*

$$F(A)=\int\limits_a^{A} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^{A} \varphi(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

$F(A)$ *ֆունկցիան, որը մոնոտոն աճում է* A*-ի մեծացման հետ, մնում է սահմանափակ* $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ *վերջավոր թվով. Հետևաբար,* $F(A)$*-ի համար գոյություն ունի վերջավոր սահման, երբ* $A \to +\infty$, *որը և ապացուցում է* $\int\limits_a^{+\infty}$ *ինտեգրալի զուգամիտությունը.*

Դիտողություն. Ակներևորեն, բավական էր ենթադրել, որ $f(x) \leqslant \varphi(x)$ *անհավասարությունը տեղի ունի* x*-ի միայն բավականաչափ մեծ արժեքների դեպքում, ասենք՝* $a_0 \leqslant x$ *դեպքում, որտեղ* $a_0 > a$ [438, (*ա*)].

ՀԵՏԵՎԱՆՔ. Եթե գոյություն ունի հետևյալ սահմանը՝

$$\lim_{A \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = c \quad (0 \leqslant c \leqslant +\infty),$$

ապա $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ինտեգրալի զուգամիտությունից, $c<+\infty$ դեպքում, բխում է $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ինտեգրալի զուգամիտությունը, իսկ առաջին ինտեգրալի տարամիտությունից, $0<c$ դեպքում, բխում է երկրորդի տարամիտությունը։ [*Այսպիսով, $0<c<+\infty$ դեպքում, երկու ինտեգրալները զուգամիտում են կամ տարամիտում միաժամանակ։*]

Եթե $\varphi(x)$ *ֆունկցիան ինտեգրելի է* $c<+\infty$, *ապա, նախապես ընտրած* $\varepsilon<0$ *թվի դեպքում, բավականաչափ մեծ* x*-երի համար կլինի՝*

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}<c+\varepsilon \quad \textit{կամ} \quad f(x)<(c+\varepsilon)\varphi(x).$$

Քանի որ $\varphi(x)$ *ֆունկցիայի հետ միասին ինտեգրելի է նաև* $(c+\varepsilon)\varphi(x)$ *ֆունկցիան* [438, *(բ)*], *ապա թեորեմայի համաձայն այստեղից հետևում է* $f(x)$ *ֆունկցիայի ինտեգրելիությունը։*

Իսկ եթե $\varphi(x)$ *ֆունկցիան ինտեգրելի չէ և* $c>0$, *ապա այդ դեպքում հակադարձ հարաբերությունը՝* $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ *ունի վերջավոր սահման, և* $f(x)$ *ֆունկցիան չի կարող ինտեգրելի լինել, որովհետև այլապես, ապացուցածի համաձայն, ինտեգրելի կլիներ նաև* $\varphi(x)$*-ը։*

Բաղդատման համար ընտրելով կոնկրետ ֆունկցիաներ, կարելի է այստեղից ստանալ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *ինտեգրալի զուգամիտության կամ տարամիտության մասնավոր հայտանիշներ։ Գործնական նշանակություն ունի բաղդատումը* $\frac{1}{x^{\lambda}}$ *ֆունկցիայի հետ, որը ինտեգրելի է* a*-ից մինչև* $+\infty$ $1<\lambda$*-ի դեպքում և ինտեգրելի չէ* $1\geqslant\lambda$*-ի դեպքում* [435,2] . *Այստեղից բխող հայտանիշները կոչվում են* Կոշիի (A. L. Cauchy) հայտանիշներ: *Ահա նրանք՝*

Դիցուք բավականաչափ մեծ x-երի համար f(x) ֆունկցիան ունի այսպիսի տեսք՝

$$f(x)=\frac{g(x)}{x^{\lambda}} \quad (\lambda>0).$$

Այդ դեպքում՝ 1) եթե $\lambda>1$ և $g(x)\leqslant c<+\infty$, ապա $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ինտեգրալը զուգամետ է, 2) իսկ եթե $\lambda\leqslant 1$ և $g(x)\geqslant c>0$, ապա այդ ինտեգրալը տարամետ է։

Հենվել թեորեմայի վրա. բաղդատման ֆունկցիա հանդիսանում է $\frac{c}{x^{\lambda}}$ [438, (բ)]

Եթե $x\to\infty$ դեպքում f(x) ֆունկցիան $\lambda>0$ կարգի անվերջ փոքր է $\left(\frac{1}{x}\text{-ի նկատմամբ}\right)$, ապա $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալը զուգամետ է կամ տարամետ, նայած թե $\lambda>1$, թե $\lambda\leqslant 1$։

Հենվել հետևանքի վրա. φ(x)-ի դերը խաղում է $\frac{1}{x^{\lambda}}$*-ը։*

Օրինակներ։ 1) $\int_0^{\infty}\frac{x^{3/2}}{1+x^2}\,dx$, $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$։

Ենթաինտեգրալ արտահայտությունները, $x\to+\infty$ դեպքում, համարժեք են անվերջ փոքրերի, համապատասխանաբար 1/2 և 2 կարգի։ Հետևաբար, առաջին ինտեգրալը տարամետ է, իսկ երկրորդը՝ զուգամետ։

2) $\int_a^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, *որտեղ P(x)-ը՝ m աստիճանի ամբողջ բազմանդամ է, իսկ Q(x)-ը n աստիճանի (n>m) ամբողջ բազմանդամ է, որը $[a,+\infty]$ միջակայքում արմատներ չունի։*

Բավականաչափ մեծ x-երի համար ենթաինտեգրալ արտահայտությունը պահպանում է որոշակի նշան։ Այդ պատճառով (հարկ եղած դեպքում փոխելով նշանը) կարելի է կիրառել վերևում շարադրված հայտանիշները։ Ենթաինտեգրալ արտահայտությունը n—m կարգի անվերջ փոքր է։ Ուստի n=m+1 դեպքում ինտեգրալը տարամետ է, իսկ $n\geqslant m+2$ դեպքում՝ զուգամետ։ ($n\leqslant m$ դեպքում նա, ակնհայտաբար, տարամետ է)։

$f(x)$ նշանափոխ ֆունկցիայի նկատմամբ վերոհիշյալ հայտանիշներն անմիջապես կիրառելի չեն։ Սակայն կարելի է փորձել նրանց օգնությամբ պարզել $|f(x)|$ դրական ֆունկցիայի ինտեգրալի զուգամիտությունը. եթե պարզվի որ այդ ֆունկցիան ինտեգրելի է, ապա $f(x)$ ֆունկցիան նույնպես ինտեգրելի կլինի և այն էլ բացարձակ ինտեգրելի [438]։

Բերված բաղդատման թեորեմայից բխում է նաև հետևյալ առաջադրությունը, որը հաճախ է օգտակար լինում՝

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան բացարձակ ինտեգրելի է $[a,+\infty]$ միջակայքում, իսկ $g(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է, ապա նրանց $f(x)\cdot g(x)$ արտադրյալ նույնպես կլինի $[a,+\infty]$ միջակայքում բացարձակ ինտեգրելի ֆունկցիա։

Ապացուցման համար բավական է հենվել հետևյալ անհավասարության վրա՝

$$|f(x)\cdot g(x)| \le L\cdot|g(x)|.$$

3) *Դիցուք առաջադրված է* $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{k^2+x^2}dx$ *ինտեգրալը։ Այստեղ* $f(x)=\frac{1}{k^2+x^2}$ *ֆունկցիան (բացարձակ) ինտեգրելի է և միաժամանակ* $g(x)=\cos ax$*-ը սահմանափակ է։ Այստեղից՝ առաջադրված ինտեգրալի բացարձակ զուգամիտությունը։*

Ինչպես տեսնում ենք, նշանափոխ ֆունկցիայի համար այստեղ շարադրված նկատառումները, բարենպաստ պայմաններում, կարող են հաստատել միայն բացարձակ զուգամիտությունը։ Իսկ եթե տվյալ ֆունկցիայի ինտեգրալը տարամետ է կամ ոչ բացարձակ զուգամետ է, ապա այդ դեպքերը տարբերել այստեղ շարադրված հայտանիշների օգնությամբ՝ հնարավոր չէ։

441. *ԱՎԵԼԻ ՆՈՒՐԲ ՀԱՅՏԱՆԻՇ։ Հիմա կտանք ուրիշ տիպի հայտանիշ, որը հիմնված է միջին արժեքի երկրորդ թեորեմայի կիրառման վրա* [294]*։ Այդ հայտանիշը հնարավորություն է տալիս անիսկական ինտեգրալների զուգամիտությունը պարզել մի շարք դեպքերում, երբ բացակայում է բացարձակ զուգամիտությունը։ Այս* n°*-ի բովանդակությունը առաջարկվում է համեմատել* n° 372*-ի հետ։*

Դիցուք բավականաչափ մեծ x-երի համար f(x) ֆունկցիան ունի այսպիսի տեսք՝

$$f(x)=\frac{g(x)}{x^{\lambda}} \quad (\lambda>0)\text{։}$$

Այդ դեպքում՝ 1) եթե $\lambda>1$ և $g(x)\leqslant c<+\infty$, ապա $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ինտեգրալը զուգամետ է, 2) իսկ եթե $\lambda\leqslant 1$ և $g(x)\geqslant c>0$, ապա այդ ինտեգրալը տարամետ է։

Հենվել թեորեմայի վրա. բաղդատման ֆունկցիա հանդիսանում է $\frac{c}{x^{\lambda}}$ [438, (բ)]

Եթե $x\to\infty$ դեպքում f(x) ֆունկցիան $\lambda>0$ կարգի անվերջ փոքր է $\left(\frac{1}{x}\text{-ի նկատմամբ}\right)$, ապա $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ինտեգրալը զուգամետ է կամ տարամետ, նայած թե $\lambda>1$, թե $\lambda\leqslant 1$։

Հենվել հետևանքի վրա. $\varphi(x)$*-ի դերը խաղում է* $\frac{1}{x^{\lambda}}$*-ն։*

Օրինակներ։ 1) $\int_0^{\infty}\frac{x^{3/2}}{1+x^2}\,dx$, $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$։

Ընդինտեգրալ արտահայտությունները, $x\to+\infty$ *դեպքում, հանդիսանում են անվերջ փոքրեր, համապատասխանաբար* $1/2$ *և 2 կարգի։ Հետևաբար, առաջին ինտեգրալը տարամետ է, իսկ երկրորդը՝ զուգամետ։*

2) $\int_a^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, *որտեղ* P(x)*-ը՝* m *աստիճանի ամբողջ բազմանդամ է, իսկ* Q(x)*-ը* n *աստիճանի* $(n>m)$ *ամբողջ բազմանդամ է, որը* $[a,+\infty]$ *միջակայքում արմատներ չունի։*

Բավականաչափ մեծ x*-երի համար ընդինտեգրալ արտահայտությունը պահպանում է որոշակի նշան։ Այդ պատճառով (հարկ եղած դեպքում փոխելով նշանը) կարելի է կիրառել վերևում շարադրված հայտանիշները։ Ընդինտեգրալ արտահայտությունը* $n-m$ *կարգի անվերջ փոքր է։ Ուստի* $n=m+1$ *դեպքում ինտեգրալը տարամետ է, իսկ* $n\geqslant m+2$ *դեպքում՝ զուգամետ։ (*$n\leqslant m$ *դեպքում նա, ակներևաբար, տարամետ է)։*

f(x) նշանափոխ ֆունկցիայի նկատմամբ վերոհիշյալ հայտանիշներն անմիջապես կիրառելի չեն։ Սակայն կարելի է փորձել նրանց օգնությամբ պարզել |f(x)| *դրական ֆունկցիայի ինտեգրալի զուգամիտությունը. եթե պարզվի որ այդ ֆունկցիան ինտեգրելի է, ապա* f(x) *ֆունկցիան նույնպես ինտեգրելի կլինի և այն էլ բացարձակ ինտեգրելի* [438]։

Բերված բաղդատման թեորեմայից բխում է նաև հետևյալ առաջարկությունը, որը հաճախ է օգտակար լինում՝

Եթե f(x) ֆունկցիան բացարձակ ինտեգրելի է $[a,+\infty]$ միջակայքում, իսկ g(x) ֆունկցիան սահմանափակ է, ապա նրանց $f(x)\cdot g(x)$ արտադրյալ նույնպես կլինի $[a,+\infty]$ միջակայքում բացարձակ ինտեգրելի ֆունկցիա։

Ապացուցման համար բավական է հենվել հետևյալ անհավասարության վրա՝

$$|f(x)\cdot g(x)| \le L\cdot|g(x)|.$$

3) Դիցուք առաջադրված է $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{k^2+x^2}dx$ *ինտեգրալը։ Այստեղ* $f(x)=\frac{1}{k^2+x^2}$ *ֆունկցիան (բացարձակ) ինտեգրելի է և միաժամանակ* $g(x)=\cos ax$*-ը սահմանափակ է։ Այստեղից՝ առաջադրված ինտեգրալի բացարձակ զուգամիտությունը։*

Ինչպես տեսնում ենք, նշանափոխ ֆունկցիայի համար այստեղ շարադրված նկատառումները, բարենպաստ պայմաններում, կարող են հաստատել միայն բացարձակ զուգամիտությունը։ Իսկ եթե տվյալ ֆունկցիայի ինտեգրալը տարամետ է կամ ոչ բացարձակ զուգամետ է, ապա այդ դեպքերը տարբերել այստեղ շարադրված հայտանիշների օգնությամբ՝ հնարավոր չէ։

441. ԱՎԵԼԻ ՆՈՒՐԲ ՀԱՅՏԱՆԻՇ։ *Հիմա կտանք ուրիշ տիպի հայտանիշ, որը հիմնված է միջին արժեքի երկրորդ թեորեմայի կիրառման վրա* [294]։ *Այդ հայտանիշը հնարավորություն է տալիս անիսկական ինտեգրալների զուգամիտությունը պարզել մի շարք դեպքերում, երբ բացակայում է բացարձակ զուգամիտությունը։ Այս* n°*-ի բովանդակությունը առաջարկվում է համեմատել* n° 372*-ի հետ։*

Դիցուք ունենք f(x) *և* g(x) *երկու ֆունկցիաներ, որոնք որոշված են* $[a, +\infty)$ *միջակայքում, ընդ որում* f(x)-*ը ինտեգրելի է ամեն մի* [a, A] *վերջավոր միջակայքում։* Եթե (4) ինտեգրալը՝

$$F(A)=\int_a^A f(x)dx$$

իրենից ներկայացնում է A-ի սահմանափակ ֆունկցիա՝

$$|F(A)|=\left|\int_a^A f(x)dx\right|\leqslant K^* \quad (K=\text{const.}, a\leqslant A<+\infty)$$

իսկ g(x)-ը մոնոտոն ֆունկցիա է, ընդ որում $g(x)\to 0$ երբ $x\to+\infty$ ապա

$$\int_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)dx$$

ինտեգրալը զուգամետ է։

Միջին արժեքի երկրորդ թեորեմայի համաձայն, ցանկացած $A'>A>a$ *դեպքում կունենանք՝*

$$\int_A^{A'} f(x)g(x)dx=g(A)\cdot\int_A^{\xi} f(x)dx+g(A')\cdot\int_{\xi}^{A'} f(x)dx \qquad (7)$$

(*որտեղ* $A\leqslant\xi\leqslant A'$)։ *Սակայն՝*

$$\left|\int_A^{\xi} f(x)\,dx\right|=|F(\xi)-F(A)|\leqslant 2K, \quad \left|\int_{\xi}^{A'} f(x)dx\right|\leqslant 2K.$$

Մյուս կողմից, տված $\varepsilon>0$ *թվի համար կգտնվի այնպիսի* $\Delta>0$, *որ* $|g(x)|<\frac{\varepsilon}{4K}$ *երբ* $x>\Delta$. *Այդ դեպքում, երբ* $A'>A>\Delta$, *ակներևաբար կլինի՝*

---

* *Թեկուզ և* $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$ *սահմանը, այսինքն՝* $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *անիսկական ինտեգրալը գոյություն չունենա։*

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\cdot g(x)dx\right| \leqslant |g(A)|\cdot\left|\int_A^{\xi} f(x)dx\right| +$$

$$+|g(A')|\cdot\left|\int_{\xi}^{A'} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{4K}\cdot 2k + \frac{\varepsilon}{4K}\cdot 2K = \varepsilon.$$

Այստեղից էլ, ինտեգրալի գոյության ընդհանուր պայմանի [438] *համաձայն, բխում է պահանջվող արդյունքը։*

Օրինակ։ *Եթե* $F(A)$ *ինտեգրալը սահմանափակ է, ապա* $\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x^{\lambda}} dx$ $(a>0)$ *ինտեգրալը զուգամետ է ցանկացած* $\lambda>0$ *դեպքում։*

Այստեղ $g(x)$ *ֆունկցիայի դերը խաղում է* $\frac{1}{x^{\lambda}}$ *ֆունկցիան, որը մոնոտոն ձգտում է զրոյի, երբ* $x\to+\infty$*։*

Մասնավորապես կարելի է վերցնել $f(x)=\sin x$ *կամ* $\cos x$, *որովհետև* $\left|\int_a^A \sin x\, dx\right| = \left|\cos a-\cos A\right| \leqslant 2$ *և նմանապես* $\left|\int_a^A \cos x\, dx\right| < 2$*։ Այսպիսով,* $0<\lambda$*-ի դեպքում*

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\lambda}} dx, \qquad \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\lambda}} dx$$

ինտեգրալները զուգամետ են։ Առաջին ինտեգրալի նկատմամբ մենք այդ արդյունքը $\lambda=1$ *դեպքում արդեն ստացել էինք այլ ճանապարհով, ընդ որում տեսել էինք, որ զուգամիտությունը բացարձակ չէ* [439]*։ Հեշտ է ցույց տալ, որ այդպես է նաև* $1>\lambda$*-ի դեպքում, մինչդեռ* $1<\lambda$*-ի դեպքում զուգամիտությունն արդեն բացարձակ է։ Նման արդյունքներ են ստացվում նաև երկրորդ ինտեգրալի համար։*

Կարելի է ցույց տալ $f(x)$ *ու* $g(x)$ *ֆունկցիաներին առաջադրվող պայմանների մի ուրիշ կոմբինացիա ևս, որի առկայության դեպքում նրանց արտադրյալի ինտեգրալը գոյություն ունի.*

Եթե $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ինտեգրալը զուգամետ է (թեկուզ և ոչ բացարձակ), իսկ $g(x)$ մոնոտոն ֆունկցիան մնում է սահմանափակ՝

$$|g(x)|\leqslant L \qquad (a\leqslant x<+\infty),$$

ապա

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$$

ինտեգրալը զուգամետ է։

Այս դեպքում, (7) արտահայտության մեջ աջից առաջին բազմապատկիչները սահմանափակ են, իսկ երկրորդները կարող են դառնալ ցանկացած չափով փոքր, եթե A-ն ու A′-ը վերցնենք բավականաչափ մեծ։*

442. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Հետազոտել հետևյալ ինտեգրալների զուգամիտությունը՝

$$(\text{ա})\ \int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx, \qquad (\text{բ})\ \int_{z_0}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{z(z-a)(z-b)}}\ (z_0>a>b>0),$$

$$(\text{գ})\ \int_0^{\infty}\left(e^{-\frac{a^2}{x^2}}-e^{-\frac{b^2}{x^3}}\right)dx \qquad (\text{դ})\ \int_0^{\infty}\left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x^2}.$$

Լուծում։ (ա) Ընդինտեգրալ ֆունկցիան առաջին կարգի անվերջ փոքր է, երբ $x\to+\infty$. ինտեգրալը տարամետ է։

(բ) Ընդինտեգրալ ֆունկցիան $^3/_2$ կարգի անվերջ փոքր է. ինտեգրալը զուգամետ է։

(գ) Երբ $x\to0$, ընդինտեգրալ ֆունկցիան ձգտում է 0-ի։ Վերլուծելով շարքի, տեսնում ենք, որ՝

$$e^{-\frac{a^2}{x^2}}-e^{-\frac{b^2}{x^2}}=\frac{b^2-a^2}{x^2}+\ldots$$

---

* *Ի միջի այլոց, նոր պայմանները էապես հանգում են նախկին պայմաններին։ Իսկապես, g(x) սահմանափակ մոնոտոն ֆունկցիայի համար անհրաժեշտաբար գոյություն ունի* $g(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ *վերջավոր սահման։* $f(x)\cdot g(x)$ *արտադրյալը ներկայացնելով հետևյալ տեսքով՝*

$$f(x)\cdot g(x)=f(x)\cdot g(+\infty)+f(x)[\,g(x)-g(+\infty)],$$

տեսնում ենք, որ երկրորդ արտադրյալի համար արդեն բավարարվում են նախկին պայմանները [տես 438, (բ) և (գ)]։

արտահայտությունը 2-րդ կարգի անվերջ փոքր է երբ $x \to +\infty$. ինտեգրալը զուգամետ է:

(դ) Վերլուծելով $e^{\pm x}$ ֆունկցիան շարքի, հեշտ է ստանալ՝

$$\frac{x}{e^{x}-e^{-x}}-\frac{1}{2}=-\frac{x^{2}}{12}+\cdots,$$

այնպես, որ $x \to 0$ դեպքում ենթինտեգրալ արտահայտությունը ձգտում է $-\frac{1}{12}$-ի: $x \to \alpha$ դեպքում այն կլինի 2-րդ կարգի անվերջ փոքր: Ինտեգրալը զուգամետ է:

2) Նույնը հետևյալ ինտեգրալների համար՝

$$(\text{ա})\ \int_{a}^{\infty} x^{\mu} e^{-ax}\, dx\ (\mu,\ a>0),\quad (\text{բ})\ \int_{0}^{\infty}\frac{x\, dx}{\sqrt{e^{2x}-1}},$$

$$(\text{գ})\ \int_{1}^{\infty}\frac{\log x}{x\sqrt{x^{2}-1}}\, dx:$$

Լուծում: (ա) Վերցնելով ցանկացած $\lambda>1$, ունենք՝

$$\frac{x^{\mu} e^{-ax}}{1/x^{\lambda}}=\frac{x^{\lambda+\mu}}{e^{ax}} \to 0.$$

Ինտեգրալը զուգամետ է:

(բ) Նախ նկատենք, որ $x \to 0$ դեպքում ենթինտեգրալ ֆունկցիան ձգտում է 0-ի: Այժմ վերցնելով դարձյալ ցանկացած $\lambda>1$, կստանանք՝

$$\frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}}:\frac{1}{x^{\lambda}}=\frac{1}{\sqrt{e^{2x}\cdot x^{-(2\lambda+2)}-x^{-(2\lambda+2)}}} \to 0,\ \text{երբ}\ x \to +\infty.$$

Ինտեգրալը զուգամետ է:

(գ) Երբ $x \to 1$, ենթինտեգրալ ֆունկցիան ունի 0 սահման: Դիցուք $1<\lambda<2$. այդ դեպքում այդ ֆունկցիայի հարաբերությունը $\frac{1}{x^{\lambda}}$-ին կարելի է գրել այսպես՝

$$\frac{x^{\lambda}\log x}{x\sqrt{x^{2}-1}}=\frac{\log x}{x^{2-\lambda}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^{2}}}} \to 0,\ \text{երբ}\ x \to \infty.$$

Ինտեգրալը զուգամետ է:

3) Նույնը հետևյալ ինտեգրալների համար՝

$$(\text{ա})\ \int_0^{\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(a+x)}\ (a>0),\quad (\text{բ})\ \int_0^{\infty} x^{\mu}e^{-ax}\cos x\,dx\ (\mu,a>0):$$

Ցուցում: Երկու դեպքում էլ ունենք սահմանափակ ֆունկցիայի և (բացարձակ) ինտեգրելի ֆունկցիայի արտադրյալ:

4) Հիմնավորել հետևյալ ինտեգրալի զուգամիտությունը $(\alpha>0)$՝

$$\int_1^{\infty}dx\int_0^{x}\sin(\beta^2x^3)\,d\beta=\int_1^{\infty}\left\{\int_0^{x}\sin(\beta^2x^3)\,d\beta\right\}dx^{*}:$$

Աշխատենք գնահատել «ներքին» ինտեգրալի նվազման կարգը, երբ $x\to\infty$: *Այստեղ ընդունելով* $\beta^2x^3=z$, *ունենք՝*

$$\int_0^{x}\sin(\beta^2x^3)\,d\beta=\frac{1}{2x^{3/2}}\int_0^{x^2x^3}\frac{\sin z}{\sqrt{z}}dz:$$

Շնորհիվ $\int_0^{\infty}\frac{\sin z}{\sqrt{z}}dz$ *ինտեգրալի զուգամիտության* [441], *կգտնվի այնպիսի* L *հաստատուն, որ բոլոր* $A>0$ *դեպքում՝*

$$\left|\int_0^{A}\frac{\sin z}{\sqrt{z}}dz\right|<2L:$$

Հետևաբար, $\int_0^{x}\sin(\beta^2x^3)d\beta$ *ինտեգրալը բացարձակ արժեքով չի գերազանցում* $\frac{L}{x^{3/2}}$ *արտահայտությունից: Այստեղից բխում է տված ինտեգրալի բացարձակ զուգամիտությունը:*

5) Ցույց տալ հետևյալ ինտեգրալների զուգամիտությունը $(a,k,\lambda>0)$՝

$$(\text{ա})\ \int_0^{\infty}\frac{x\cdot\sin ax}{k^2+x^2}dx,\qquad (\text{բ})\ \int_0^{\infty}e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^{\lambda}}dx,$$

---

* *Ընդունենք առանց ապացուցման, որ «ներքին» ինտեգրալը* x*-ի անընդհատ ֆունկցիա է:*

$$(գ)\ \int_a^{\infty} |\log x|^{\lambda}\ \frac{\sin x}{x}dx,\quad (դ)\ \int_0^{\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^{\lambda}}dx։$$

Լուծում։ Բոլոր դեպքերում օգտվում ենք 441-ի հայտանիշից։

(ա) $g(x)=\frac{x}{k^2+x^2}$ *ֆունկցիան* x-*ի բավականաչափ մեծ արժեքների դեպքում մոնոտոն նվազում է և* $x\to\infty$ *դեպքում ձգտում է զրոյի.* $\int_0^A \sin ax\,dx$ *ինտեգրալը, ակներևաբար, սահմանափակ է։*

(բ) $g(x)=\frac{1}{x^{\lambda}}$, *մոնոտոն նվազելով, ձգտում է զրոյի, երբ* $x\to\infty$. $f(x)=e^{\sin x}\cdot\sin 2x$, *այնպես որ (եթե ընդունենք* $\sin x=t$*)՝*

$$\left|\int_0^A f(x)\,dx\right| = 2\left|\int_0^{\sin A} te^t dt\right| < 2e։$$

(գ) $g(x)=|\log x|^{\lambda}\cdot\frac{1}{x}$, x-*ի բավականաչափ մեծ արժեքների համար՝*

$$g'(x)=\frac{(\log x)^{\lambda-1}}{x^2}(\lambda-\log x)<0,$$

այնպես որ $g(x)$*-ը նվազում է, ակներևաբար, ձգտելով 0-ի, և այլն։*

(դ) $g(x)=\frac{1}{x^{\lambda}}$; $f(x)=\sin(x+x^2)$, *այնպես որ (ընդունելով* $z=x+x^2$*)՝*

$$\int_a^A \sin(x+x^2)\,dx=\int_{a+a^2}^{A+A^2}\frac{\sin z}{\sqrt{1+4z}}dz։$$

Այս արտահայտությունը բացարձակ արժեքով մնում է սահմանափակ այն բանի շնորհիվ, որ $\int_{a+a^2}^{\infty}\frac{\sin z}{\sqrt{1+4z}}dz$ *ինտեգրալը զուգամետ է (ինչում կարելի է համոզվել* n *441-ի նույն հայտանիշի օգնությամբ)։*

6) *Ապացուցել, որ* $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ *ինտեգրալը տարամետ է։*

Դրա համար բավական է [439] *ցույց տալ հետևյալ շարքի տարամիտությունը՝*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin^2 t}{t+n\pi}\,dt\geqslant\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin^2 x\,dx\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty.$$

Այստեղ մենք ընդհանրացնում ենք այդ արդյունքը.

7) Ապացուցել, որ եթե $f(x)>0$ *և մոնոտոն նվազում է, ապա*

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{և} \quad \int_{a}^{+\infty} f(x)\sin^2 x\,dx$$

ինտեգրալները երկուսն էլ միաժամանակ զուգամետ են (կամ տարամետ են)։

Քանի որ $\sin^2 x\leqslant 1$, *ապա առաջին ինտեգրալի զուգամիտությունից անմիջապես բխում է երկրորդի զուգամիտությունը։ Դիցուք այժմ առաջին ինտեգրալը տարամետ է։ Ներկայացնելով այն շարքի տեսքով՝*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{a+n\pi}^{a+(n+1)\pi} f(x)\,dx$$

և յուրաքանչյուր ինտեգրալ վերից գնահատելով $\pi\cdot f(a+n\pi)$ *թվով, ստանում ենք տարամետ շարք՝*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(a+n\pi).$$

Երկրորդ ինտեգրալն էլ փոխարինելով շարքի՝

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{a+n\pi}^{a+(n+1)\pi} f(x)\sin^2 x\,dx$$

և յուրաքանչյուր ինտեգրալ վարից գնահատելով հետևյա թվով՝

$$f(a+\overline{n+1}\,\pi)\cdot\int_{a+n\pi}^{a+(n+1)\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot f(a+\overline{n+1}\,\pi),$$

հետևյալ շարքի տարամիտությունից՝

$$\frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} f(a+\overline{n+1}\,\pi)$$

եզրակացնում ենք, որ տված ինտեգրալներից երկրորդը նույնպես տարամետ է։

8) Ցույց տալ հետևյալ ինտեգրալի զուգամիտությունը՝

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\mu}+\sin x}\,dx,$$

երբ $0<\mu\leqslant\frac{1}{2}$։

Նույնպես ունենք՝

$$\frac{\sin x}{x^{\mu}+\sin x}=\frac{\sin x}{x^{\mu}}-\frac{\sin^2 x}{x^{\mu}(x^{\mu}+\sin x)}։$$

Առաջին գումարելիի ինտեգրալը՝

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\mu}}\,dx$$

զուգամետ է։ Մյուս կողմից, երկրորդ գումարելին՝

$$\frac{\sin^2 x}{x^{\mu}(x^{\mu}+\sin x)}>\frac{\sin^2 x}{x^{\mu}(x^{\mu}+1)}։$$

Նախորդ վարժության համաձայն,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^{\mu}(x^{\mu}+1)}\,dx$$

ինտեգրալը տարամետ է

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^{\mu}(x^{\mu}+1)}\quad\left(\mu\leqslant\frac{1}{2}\,!\right)$$

ինտեգրալի հետ միասին։ Հետևաբար, տարամետ է երկրորդ գումարելիի ինտեգրալը, իսկ նրա հետ նաև տված ինտեգրալը։

Այս օրինակն ուսանելի կլինի համեմատել n° 441-ի զուգամիտության հայտանիշի հետ։ Առաջին բազմապատկիչի՝ sin x-ի ինտեգրալը սահմանափակ է և միաժամանակ երկրորդ բազմապատկիչը՝ $\frac{1}{x^{\mu}+\sin x}$-ը ձգտում է 0-ի,

երբ $x \to +\infty$։ Խախտվում է միայն այդ բազմապատկչի մ ո ն ո տ ո ն լինելու պահանջը, և ինտեգրալը տարամետ է։

9) Հետազոտել հետևյալ ինտեգրալների զուգամիտությունը՝

$$(\text{ա}) \int_0^{\infty} e^{\cos x} \cdot \sin(\sin x)\frac{dx}{x}, \qquad (\text{բ}) \int_0^{\infty} e^{\sin x} \cdot \sin(\sin x)\frac{dx}{x}.$$

(ա) Ունենք՝

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \sin(\sin x)\, dx = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} = 0,$$

որովհետև վերջին երկու ինտեգրալներից երկրորդն առաջինից տարբերվում է միայն նշանով ($z=2\pi-x$ տեղադրությունը)։ Այստեղից կարելի է եզրակացնել, որ, ինչպիսին էլ լինի $A>0$ թիվը,

$$\left|\int_0^{A} e^{\cos x} \sin(\sin x)\, dx\right| < \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot |\sin(\sin x)|\, dx.$$

Ինտեգրալը զուգամետ է [441]։

(բ) Այս անգամ, ինչպես հեշտ է համոզվել,

$$\int_0^{2\pi} e^{\sin x} \sin(\sin x) dx > 0$$

և $\int_0^{A}$ ինտեգրալը սահմանափակ չի մնում. n° 441-ի հայտանիշը կիրառելի չէ։ Փաստորեն ինտեգրալը տարամետ է։ Որպեսզի այդ ցույց տանք, դիմենք հետևյալ շարքի դիտարկմանը՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} + \int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} \right\} e^{\sin x} \sin(\sin x) \frac{dx}{x}.$$

Նրա ընդհանուր անդամը, ակնհայտ տեղադրությունների օգնությամբ, բերվում է հետևյալ տեսքին՝

$$\int_0^{\pi} e^{\sin t} \cdot \sin(\sin t)\frac{dt}{2n\pi+t} - \int_0^{\pi} e^{-\sin t} \cdot \sin(\sin t)\frac{dt}{(2n+1)\pi+t}$$

և պարզվում է, որ ավելի մեծ է, քան $\frac{a}{2n+1}$-ը, որտեղ՝

$$a=\frac{1}{\pi}\int_{0}(e^{\sin t}-e^{-\sin t}) \cdot \sin(\sin t)dt>0։$$

Այստեղից էլ՝ շարքի տարամիտությունը, իսկ նրա հետ նաև ինտեգրալի տարամիտությունը։

10) Կատարել հետևյալ ինտեգրալի զուգամիտության ու տարամիտության դեպքերի լրիվ ուսումնասիրությունը՝

$$J=\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^{\alpha}\cdot|\sin x|^{\beta}},$$

կախված α և β (α, β>0) պարամետրերի արժեքներից։

(ա) Դիցուք $\alpha\leqslant 1$։ *Քանի որ՝*

$$\frac{1}{1+x^{\alpha}\cdot|\sin x|^{\beta}}\geqslant\frac{1}{1+x^{\alpha}},$$

ուստի այս դեպքում ինտեգրալը տարամետ է [440]։

(բ) Դիցուք $\alpha\leqslant\beta$։ *Անցնելով շարքին [439], այդ ենթադրությամբ կստանանք՝*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+x^{\alpha}\cdot|\sin x|^{\beta}}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}\frac{dz}{1+(n\pi+z)^{\alpha}\sin^{\beta}z}>\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{\frac{1}{(n+1)\pi}}\ ,$$

Սակայն $0<z<\dfrac{1}{(n+1)\pi}$ *դեպքում՝*

$$(n\pi+z)^{\alpha}\sin^{\beta}z<(n+1)^{\alpha}\pi^{\alpha}z^{\beta}<(n+1)^{\beta}\pi^{\beta}\cdot\left(\frac{1}{(n+1)\pi}\right)^{\beta}=1,$$

այնպես որ վերջին շարքի անդամները ավելի մեծ են, քան հետևյալ տարամետ շարքի համապատասխան անդամները՝

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{n+1},$$

Այսպիսով, ինտեգրալը դարձյալ տ ա ր ա մ ե տ է։

(գ) Դիցուք $\alpha>\beta>1$։ *J-ն ներկայացնենք* J_1+J_2 *գումարի տեսքով՝*

$$J_1=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dz}{1+(n\pi+z)^\alpha\sin^\beta z},\qquad J_2=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dz}{1+(n\pi-z)^\alpha\sin^\beta z}.$$

Այնուհետև, $0<z<\frac{\pi}{2}$ *և* $n\geq 1$ *դեպքում՝*

$$(n\pi+z)^\alpha\sin^\beta z\geq(n\pi)^\alpha\left(\frac{2}{\pi}z\right)^\beta=n^\alpha c^\beta z^\beta,\ \text{որտեղ}\ c=2\pi^{\frac{\alpha}{\beta}-1}$$

որտեղից՝

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dz}{1+(n\pi+z)^\alpha\sin^\beta z}\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dz}{1+n^\alpha c^\beta z^\beta}=$$

$$=\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot c}\int_0^{n^{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot c\cdot\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+t^\beta}\leq\frac{c^*}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}},\ \text{որտեղ}\ c^*=\frac{1}{c}\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^\beta}.$$

Այսպիսով՝

$$J_1\leq\frac{\pi}{2}+c^*\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}<+\infty.$$

Ճիշտ այդպես էլ $J_2<+\infty$, *այնպես որ ինտեգրալը զուգամետ է։*

(գ) Հենց նոր դիտարկված՝ $\alpha>\beta>1$ *դեպքին է բերվում նաև ընդհանուր դեպքը, երբ միաժամանակ* $\alpha>1$ *և* $\alpha>\beta$*։ Իրոք, այդ դեպքում հեշտ է գտնել այնպիսի* $\beta'\geq\beta$*, որպեսզի լինի* $\alpha>\beta'>1$*։ Քանի որ β-ն փոքրացնելիս զուգամիտությունը միայն ուժեղանում է, ապա մատնանշված ընդհանուր դեպքում ևս առկա է զուգամիտությունը։*

Ամփոփելով ամբողջ ուսումնասիրությունը, տեսնում ենք, որ J ինտեգրալը զուգամետ է՝ $\alpha>1$ *և* $\alpha>\beta$ *պայմանների միաժամանակ բավարարման դեպքում և տարամետ է մյուս բոլոր դեպքերում։ Կարելի է և կարճ ասել՝* $\alpha>\max(1,\beta)$ *դեպքում շարքը (և ինտեգրալը) զուգամետ է, իսկ* $\alpha\leq\max(1,\beta)$ *դեպքում՝ տարամետ։*

§ 2. ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ ԱՆՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻՑ

443. ԱՆՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ։ *Այժմ դիտարկենք* [a, b] *վերջավոր միջակայքում որոշված այնպիսի* f(x) *ֆունկցիա, որն այդ միջակայքում անսահմանափակ է։ Ենթադրենք ավելի որոշակի, որ ամեն*

մի $[a, b-\eta]$ $(0<\eta<b-a)$ միջակայքում ֆունկցիան սահմանափակ է և ինտեգրելի, բայց անսահմանափակ է b կետից ձախ յուրաքանչյուր $[b-\eta, b]$ միջակայքում։ Այդ դեպքում b կետը կոչվում է *եզակի կետ*։

Եթե $\int_a^{b-\eta} f(x)dx$ ինտեգրալի համար $\eta\to 0$ դեպքում գոյություն ունի որոշակի վերջավոր սահման, ապա այն անվանում են f(x) ֆունկցիայի (անիսկական) ինտեգրալ a-ից մինչև b և նշանակում են՝

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\eta\to 0}\int_a^{b-\eta} f(x)dx. \tag{1}$$

Այդ պայմաններում նաև ասում են, որ (1) ինտեգրալը *գոյություն ունի* կամ *զուգամետ է*, իսկ f(x) ֆունկցիան անվանում են *ինտեգրելի* [a, b] միջակայքում։ Հակառակ դեպքում ինտեգրալի մասին ասում են, որ այն *գոյություն չունի* կամ *տարամետ է*։

Օրինակ։ 1) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ֆունկցիան սահմանափակ ու ինտեգրելի է յուրաքանչյուր $[0, 1-\eta]$ միջակայքում (որտեղ $0<\eta<1$), և՝

$$\int_0^{1-\eta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_0^{1-\eta}=\arcsin(1-\eta)։$$

x=1 կետում ֆունկցիան դառնում է անվերջություն։ Հիշենք, որ դրա տակ հասկանում ենք միայն այն, որ $x\to 1$ դեպքում $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ֆունկցիան ձգտում է անվերջության։ Այնուհետև, ամեն մի $[1-\eta, 1]$ միջակայքում ֆունկցիան սահմանափակ չէ, այսինքն՝ x=1 կետը եզակի կետ է։ Գործնականում սովորաբար գործ են ունենում հենց այդ տեսակի եզակի կետերի հետ։

Քանի որ հաշված ինտեգրալը $\eta\to 0$ դեպքում ձգտում է $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$ սահմանին, ապա գոյություն ունի հետևյալ անիսկական ինտեգրալը՝

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\eta\to 0}\int_0^{1-\eta}=\frac{\pi}{2}.$$

Դիցուք այժմ f(x) ֆունկցիան սահմանափակ ու ինտեգրելի է ամեն մի $[a+\eta', b]$ (որտեղ $0<\eta'<b-a$) միջակայքում, բայց անսահմանափակ է a կետից աջ յուրաքանչյուր $[a, a+\eta']$ միջակայքում (a-ն եզակի կետ է)։ Այդ ժամանակ f(x) ֆունկցիայի (անիսկական) ինտեգրալը a-ից մինչև b սահմանվում է հետևյալ հավասարությամբ՝

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta'\to 0}\int_{a+\eta'}^{b} f(x)\,dx, \qquad (2)$$

ենթադրելով որ այդ սահմանը գոյություն ունի և վերջավոր է։

Ընդհանուր դեպքում [a, b] միջակայքում կարող են լինել վերջավոր թվով եզակի կետեր՝ $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}, c_m$, որոնց մոտակայքում f(x) ֆունկցիան անսահմանափակ է, մինչդեռ այդ միջակայքի յուրաքանչյուր մասում, որը եզակի կետեր չի պարունակում, ֆունկցիան սահմանափակ ու ինտեգրելի է։

Դիցուք (գրության պարզության համար) այդպիսի կետեր երեքն են, ընդ որում նրանցից երկուսը համընկնում են միջակայքի a և b ծայրերի հետ, իսկ երրորդը՝ c-ն գտնվում է նրանց միջև։ Այդ ժամանակ a-ից b միջակայքում ինտեգրալի սահմանումը տրվում է հետևյալ հավասարությամբ՝

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\eta_1\to 0\\ \cdots\\ \eta_4\to 0}}\left\{\int_{a+\eta_1}^{c-\eta_2} + \int_{c+\eta_3}^{b-\eta_4}\right\}, \qquad (3)$$

եթե միայն սահմանը գոյություն ունի և վերջավոր է։

[a, c], [c, b] միջակայքերից յուրաքանչյուրի ներսը վերցնելով մեկական կետ՝ d, e, կունենանք՝

$$\int_{a+\eta_1}^{c-\eta_2} = \int_{a+\eta_1}^{d} + \int_{d}^{c-\eta_2}, \qquad \int_{c+\eta_3}^{b-\eta_4} = \int_{c+\eta_3}^{e} + \int_{e}^{b-\eta_4}.$$

Հեշտ է տեսնել, որ (3) սահմանի գոյությունը հավասարազոր է

զատ-զատ սահմանների գոյությունը այդ բոլոր չորս ինտեգրալների համար, այնպես որ (3) սահմանումը կարելի է փոխարինել այսպիսի սահմանումով՝

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{\partial} f(x)dx+\int_{\partial}^{c} f(x)dx+\int_c^e f(x)dx+\int_e^b f(x)dx,$$

ենթադրելով, որ բոլոր ձախակողմյան անիսկական ինտեգրալները գոյություն ունեն։ Այդ սահմանումը կախված չէ ∂ և e կետերի ընտրությունից:

(2) ու (3) անիսկական ինտեգրալների նկատմամբ պահպանվում է նույն տերմինաբանությունը, ինչ որ վերևում։

Օրինակներ։

3) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, եզակի կետ է՝ -1,

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\eta'\to 0}\int_{-1+\eta'}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\eta'\to 0}\left[-\arcsin(-1+\eta')\right]=\frac{\pi}{2}.$$

4) $\displaystyle\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, երկու եզակի կետ՝ -1 և 1,

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{0}+\int_{0}^{1}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

5) Գտնենք, թե $\lambda>0$ ցուցիչի ինչպիսի արժեքների դեպքում գոյություն ունի հետևյալ անիսկական ինտեգրալը՝

$$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^{\lambda}}\qquad (b>a).\tag{4}$$

Երբ $\lambda\neq 1$,

$$\int_{a+\eta}^{b} \frac{dx}{(x-a)^{\lambda}} = \frac{1}{1-\lambda}\left[(b-a)^{1-\lambda} - \eta^{1-\lambda}\right]$$

ինտեգրալը $\eta \to 0$ դեպքում ձգտում է ∞ կամ $\frac{1}{1-\lambda}(b-a)^{1-\lambda}$ վերջավոր թվին, նայած թե $\lambda>1$, թե $\lambda<1$։ Երբ $\lambda=1$, ունենք՝

$$\int_{a+\eta}^{b} \frac{dx}{x-a} = \log(b-a) - \log\eta \to \infty \quad (\text{երբ } \eta \to 0)։$$

Ուրեմն, (4) ինտեգրալը $1>\lambda$ դեպքում զուգամետ է և ունի $\frac{1}{1-\lambda}(b-a)^{1-\lambda}$ արժեքը, իսկ $1 \leqslant \lambda$ դեպքում տարամետ է [հմմտ. 435, 2)]։

6) Նման արդյունք կարելի է ստանալ նաև հետևյալ ինտեգրալի համար՝

$$\int_{a}^{b} \frac{dx}{(b-x)^{\lambda}} \quad (b>a,\ \lambda>0),$$

որ էապես չի տարբերվում նախորդից։

Դիտողություն։ Օգտակար է նկատել հետևյալ հանգամանքը. եթե $f(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ միջակայքում իսկական իմաստով ինտեգրելի է, (այնպես որ $\int_a^b f(x)dx$ ինտեգրալն արդեն սահմանված է), ապա (1) [կամ (2), կամ (3)] սահմանային հավասարությունը նրա համար այնուամենայնիվ տեղի ունի։ Այդ հավասարությունն անմիջականորեն բխում է ինտեգրալի անընդհատությունից ըստ փոփոխական վերին (ստորին) սահմանի [293, 11°]։ Այսպիսով, անիսկական ինտեգրալի համար որպես սահմանում ընդունեցինք այն հավասարությունը, որը իսկական ինտեգրալի համար ինքնին տեղի ունի։

Վերջապես, դիտարկենք այնպիսի $f(x)$ ֆունկցիա, որը տրված է անվերջ միջակայքում, օրինակ՝ $[a,+\infty)$-ում, և այնտեղ ունի վերջավոր թվով եզակի կետեր*, որոնց մոտակայքում

* Եզակի կետեր կարող են լինել և անվերջ բազմությամբ, միայն թե յուրաքանչյուր $[a, A]$ վերջավոր միջակայքում նրանք լինեն վերջավոր թվով (որը կարող է և աճել մինչև անվերջություն A-ի հետ միասին)։

նա դադարում է սահմանափակ լինել։ Ենթադրենք, թե յուրաքանչյուր [a, A] վերջավոր միջակայքում $\int_a^A f(x)dx$ ինտեգրալը գոյություն ունի՝ որպես իսկական կամ որպես անիսկական, համաձայն վերևում տված սահմանումի։ Այդ ժամանակ, մեկ անգամ ևս սահմանի անցնելով՝ A-ն ձգտեցնելով անվերջության, կարելի է 435-ի (1) հավասարությունով սահմանել անիսկական ինտեգրալը $[a, +\infty]$ միջակայքում։

Անվերջ միջակայքի դեպքում ∞ կետը նույն դերն է խաղում, ինչ որ եզակի կետերը, նրանց նման պահանջելով լրացուցիչ սահմանային անցում։ Այդ հիման վրա $\pm\infty$ կետը նույնպես անվանում են եզակի կետ, անկախ նրանից, $f(x)$ ֆունկցիան կմնա արդյոք սահմանափակ, երբ x-ն անսահմանորեն աճի, թե ոչ։

444. ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆ ԵԶԱԿԻ ԿԵՏԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ։ Դիտարկենք մի $f(x)$ ֆունկցիա, որը որոշված է [a, b] վերջավոր միջակայքում, և ենթադրենք, թե նա այդ միջակայքում իսկական իմաստով ինտեգրելի չէ։ Այդ դեպքում [a, b] միջակայքում անհրաժեշտաբար կգտնվի այնպիսի c կետ, որի յուրաքանչյուր շրջակայքում ֆունկցիան կլինի անինտեգրելի (իսկական իմաստով)։

Իրոք, եթե այդպիսի կետեր ամենևին չլինեին, ապա [a, b] միջակայքի յուրաքանչյուր կետ կարելի կլիներ շրջապատել այնպիսի σ շրջակայքով, որի սահմաններում ֆունկցիան ինտեգրելի լինի։ [a, b] միջակայքը ծածկող $\Sigma = \{\sigma\}$ սիստեմի նկատմամբ կիրառելով Բորելի լեմման [87], հեշտ կլիներ այդ դեպքում [a, b] տրոհել վերջավոր թվով այնպիսի մասերի, որոնցից յուրաքանչյուրում առանձին-առանձին ֆունկցիան ինտեգրելի է։ Սակայն այստեղից կբխեր այդ ֆունկցիայի ինտեգրելիությունն ամբողջ [a, b] միջակայքում, հակառակ մեր ենթադրության։

Հիշյալ c կետն էլ հենց բնական կլինի եզակի անվանել. նրանում կարծես թե «խտանում է» ֆունկցիայի ինտեգրելի չլինելու հատկությունը։ Եզակի կետեր կարող են լինել մի քանի հատ, անգամ անվերջ բազմությամբ. Դիրիխլեի ֆունկցիայի դեպքում [288, 2)], օրինակ, եզակի կետերը անընդմեջ լրացնում են ամբողջ [0, 1] միջակայքը։

Սահմանափակվենք այն դեպքով, երբ եզակի կետերը վերջավոր թվով են՝ $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_m$։ Այս դեպքում այդ կետերում իրականացվող «եզակիության» բնույթը հեշտ է բացահայտվում. նրանցից յուրաքանչյուրի շրջակայքում ֆունկցիան պարզապես անսահմանափակ է (այնպես որ հենց անսահմանափակությունն է պատճառը իսկական իմաստով անինտեգրելիության)։ Որպեսզի դրանում համոզվենք, բավական է դիտարկել այն դեպքը, երբ միակ եզակի կետը b-ն է։

Այսպես, ուրեմն, դիցուք ցանկացած $\eta>0$ ($\eta<b-a$) դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է (հետևաբար, անհրաժեշտաբար նաև սահմանափակ է) $[a, b-\eta]$ միջակայքում, բայց ինտեգրելի չէ $[b-\eta, b]$ միջակայքում։ Պետք է ապացուցել, որ այդ պայմաններում b կետի մոտակայքում ֆունկցիան չի կարող սահմանափակ մնալ։ Ենթադրենք հակառակը. դիցուք $[a, b]$ միջակայքի բոլոր x-երի համար ունենք՝

$$|f(x)| \le L \quad (L=\text{const.})։$$

Վերցնելով $\varepsilon>0$ կամայական թիվը, ընտրենք $\eta=\frac{\varepsilon}{6L}$։ $[a, b-\eta]$ միջակայքի համար, որտեղ $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է, $\frac{\varepsilon}{3}$ թվին համապատասխան կարելի է գտնել այնպիսի $\delta>0$, որպեսզի այդ միջակայքը $\delta>\Delta x_{i'}$ երկարությամբ մասերի տրոհելիս ստացվի՝

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} < \frac{\varepsilon}{3},$$

որտեղ $\omega_{i'}$-ները նշանակում են, ինչպես միշտ, ֆունկցիայի համապատասխան տատանումները [285]։ Բացի այդ, կարելի է ընդունել նաև, որ $\delta<\eta$։ Այժմ ամբողջ $[a, b]$ միջակայքը տրոհենք $\delta>\Delta x_i$ երկարությամբ մասերի և թող $\Delta x_{i'}$-ները համապատասխանեն այն մասերին, որոնք $[a, b-\eta]$ միջակայքի սահմաններից չեն դուրս գալիս, իսկ $\Delta x_{i''}$-ները՝ մնացած մասերին. նրանցից միայն մեկը կարող է դուրս գալ $[b-\eta, b]$-ի սահմաններից, այն էլ եթե $b-\eta$ կետն ինքը տրոհման կետ չէ։ Այդ դեպքում, առաջվա նման՝

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} < \frac{\varepsilon}{3},$$

իսկ մյուս կողմից՝

$$\sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} < 2L \cdot \sum_{i''} \Delta x_{i''} < 2L(\eta+\delta) < 4L\eta = \frac{2}{3}\varepsilon,$$

և վերջնականապես՝

$$\sum_{i} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i'} + \sum_{i''} < \varepsilon։$$

Սակայն դրանով է պայմանավորվում [285] $f(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրելիությունն ամբողջ $[a, b]$ միջակայքում, և b կետը դառնում է ոչ եզակի, հակառակ նրա վերաբերյալ ենթադրության։ Դրանով էլ ավարտվում է ապացույցը։

Այսպիսով, վերջավոր թվով եզակի կետերի դեպքում, այդ կետերը կարելի է բնութագրել հենց նրանով, որ նրանց մոտակայքում ֆունկցիան դադարում է սահմանափակ լինել. հենց այդ էլ մենք հիմք էինք ընդունել եզակի կետերի սահմանման մեջ նախորդ n-ում։

445. ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՇՎԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ. *Դիցուք* f(x) *ֆունկցիան որոշված է* $[a, b]$ *միջակայքում և ինտեգրելի է (իսկական իմաստով) ամեն մի* $[a, b-\eta]$ *միջակայքում, մինչդեռ* b *կետը նրա համար եզակի կետ է. Եթե* f(x)*-ի համար* $[a, b)$ *միջակայքում, այսինքն՝* $a \leq x < b$ *համար, գոյություն ունի* F(x) *նախնական ֆունկցիա, ապա՝*

$$\int_a^{b-\eta} f(x)dx = F(b-\eta) - F(a) = F(x)\Big|_a^{b-\eta},$$

և (1) անիսկական ինտեգրալի գոյությունը համազոր է $\lim_{\eta\to 0} F(b-\eta)$ *վերջավոր սահմանի գոյությանը. Եթե վերջինս գոյություն ունի, ապա բնական կլինի այն ընդունել որպես նախնական ֆունկցիայի արժեք* $x=b$ *կետում՝* F(b)*, դրանով* F(x)*-ն անընդհատ դարձնելով ամբողջ* $[a, b]$ *միջակայքում. (1) ինտեգրալը հաշվելու համար այդ դեպքում ունենք սովորական տեսքի բանաձև՝*

$$\int_a^{b} f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^{b}. \qquad (5)$$

Նույն բանաձևը տեղի ունի նաև այն դեպքում, երբ եզակի կետը գտնվում է միջակայքի ներսը կամ մի քանի եզակի կետերի առկայության դեպքում, սակայն (այդ պետք է հատուկ հիշել) պարտադիր պայմանով, որ այն F(x) *նախնական ֆունկցիան, որն ունի* f(x) *ածանցյալն ամենուրեք, բացի եզակի կետերից,* այս վերջիններում ևս լինի անընդհատ: *Այդպիսի նախնական ֆունկցիայի գոյությունն ապահովում է անիսկական ինտեգրալի գոյությունը.*

Դիտողություն: *Խոսելով* F(x) *«նախնական» ֆունկցիայի մասին, մենք կարող էինք այն հասկանալ նաև մի քիչ ավելի լայն իմաստով.* F(x)*-ը պետք է ունենա* f(x) *ածանցյալ ամենուրեք, բացառելով ոչ միայն եզակի կետեր, այլ, թերևս, որոշ վերջավոր թվով, կետեր ևս,* միայն թե այդ կետերում ևս չխախտվի F(x) ֆունկցիայի անընդհատությունը [*համեմ.* 298].

Փոխարինելով (5) հիմնական բանաձևում b*-ն* x*-ով, իսկ*

$f(x)$-ը՝ $F'(x)$-ով, կարող ենք, ինչպես և n° 298-ում, գրել այն հետևյալ տեսքով՝

$$F(x)=F(a)+\int_a^x F'(x)\,dx.$$

Այսպիսով, տված $F'(x)$ ածանցյալով վերականգնվում է $F(x)$ նախնական ֆունկցիան, եթե միայն ածանցյալն ինտեգրելի է, թեկուզ և անիսկական իմաստով։

Դիտենք օրինակներ։

1) $\int_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$, եզակի կետը՝ $x=0$, քանի որ $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ նախնական ֆունկցիան անընդհատ է նաև այդ կետում, ուստի ինտեգրալը գոյություն ունի՝

$$\int_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{-1}^{8}=\frac{9}{2}.$$

2) $\int_{-2}^{2}\frac{2x\,dx}{x^2-1}$ ինտեգրալը գոյություն չունի, քանի որ նախնական ֆունկցիան՝ $\log|x^2-1|$ անվերջություն է դառնում $x=\pm 1$ եզակի կետերում։

3) $\int_{0}^{1}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, եզակի կետը՝ $x=1$. այստեղ նախնական ֆունկցիան՝ $\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$ անընդհատ է $x=1$ կետում, հետևաբար, ինտեգրալը գոյություն ունի $\left(=\frac{\pi^2}{8}\right)$։

4) $\int_{0}^{1}\log x\,dx$, եզակի կետը՝ $x=0$. այստեղ նախնական ֆունկցիան՝ $x\log x-x$ ունի 0 սահմանը, երբ $x\to 0$։ Նրան $x=0$ կետում վերագրելով հենց այդ 0 արժեքը, կունենանք՝

$$\int_{0}^{1}\log x\,dx=x\log x-x\Big|_{0}^{1}=-1.$$

5) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$, *եզակի կետը՝* $x=1$, *ունենք՝*

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} = -\arcsin \frac{x+1}{2x}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{4}.$$

6) $\int_1^2 \frac{dx}{x \log x}$, *եզակի կետը՝* $x=1$, *ինտեգրալը գոյություն չունի, քանի որ նախնական ֆունկցիան՝* $\log\log x$ *դառնում է* ∞, *երբ* $x=1$։

446. ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՆ ՈՒ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԸ. *Մենք կանգ կառնենք միայն այն դեպքի վրա, որը կապված է (1) սահմանումի հետ, քանի որ մյուս դեպքերի համար վերաձևակերպումը դժվարություն չի ներկայացնում. ի նկատի ունենալով լիակատար անալոգիան $[a,+\infty]$ անվերջ միջակայքով տարածված անիսկական ինտեգրալի հետ, մենք կսահմանափակվենք մի քանի հիմնական առաջադրությունների ձևակերպումով. Ապացույցները նման են վերևում բերվածներին.*

Կապը անվերջ շարքերի հետ տրվում է հետևյալ թեորեմայով՝

$\int_a^b f(x)\,dx$ անիսկական ինտեգրալի (որտեղ b-ն՝ եզակի կետն է) գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի, ինչպիսին էլ լինի a_n փոփոխականը, որը$\to b$, հետևյալ շարքը՝

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx \qquad (a_0=a,\ a<a_n<b)$$

ձգտի միևնույն գումարին. վերջինս էլ հենց տալիս է անիսկական ինտեգրալի արժեքը։

Այնուհետև, կիրառելով Բոլցանո-Կոշիի հայտանիշը, ունենք գոյության այսպիսի ընդհանուր պայման՝

$\int_a^b f(x)\,dx$ անիսկական ինտեգրալի (որտեղ b-ն՝ եզակի կետ է) գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համապատասխանի այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որ $0<\eta<\delta$ և $0<\eta'<\delta$ դեպքում տեղի ունենա հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Այստեղից, ինչպես և վերևում, բխում է՝

Եթե գոյություն ունի $\int_a^b |f(x)|\,dx$ ինտեգրալը, ապա* առավել ևս գոյություն ունի $\int_a^b f(x)\,dx$ ինտեգրալը։

Հակադարձը, ընդհանրապես ասած, ճիշտ չէ։ Ուստի այստեղ ևս հատկապես տարբերում են այն դեպքը, երբ $\int_a^b f(x)\,dx$ ինտեգրալի հետ միասին զուգամետ է և $\int_a^b |f(x)|\,dx$ ինտեգրալը. այդ դեպքում առաջին ինտեգրալն անվանում են **բացարձակ զուգամետ**, *իսկ f(x) ֆունկցիան՝* **բացարձակ ինտեգրելի** [a, b] *միջակայքում։*

Բերենք ինտեգրալի օրինակ, որը զուգամետ է, բայց ոչ բացարձակ։ Ընդունենք, երբ $0<x<2$,

$$f(x)=2x\cdot\sin\frac{\pi}{x^2}-\frac{2\pi}{x}\cdot\cos\frac{\pi}{x^2}.$$

Այս ֆունկցիան անընդհատ է $0<x$ դեպքում և նրա համար միակ եզակի կետը [0, 2] միջակայքում կլինի 0-ն։ Մյուս կողմից, f(x)-ի նախնական ֆունկցիան, ինչպես հեշտ է ստուգել, կլինի՝

$$F(x)=x^2\cdot\sin\frac{\pi}{x^2},$$

որն ունի $F(+0)=0$ սահմանը, երբ $x\to0$։ Այսպիսով, գոյություն ունի հետևյալ ինտեգրալը՝

---

* *Ենթադրելով, որ յուրաքանչյուր $[a, b-\eta]$ $(\eta>0)$ միջակայքում f(x) ֆունկցիան ինտեգրելի է (սովորական իմաստով)։*

$$\int_0^2 f(x)\,dx = x^2 \cdot \sin \frac{\pi}{x^2}\Big|_0^2 = 2\sqrt{2}\,.$$

Որպեսզի ցույց տանք, որ $\int_0^2 |f(x)|\,dx$ ինտեգրալը տարամետ է, դիմենք այդ ինտեգրալը շարքի տեսքով ներկայացնելուն: Վերցնենք $a_n \to 0$ վարիանտան ընդունելով՝

$$a_1 = 2, \quad a_{2k-1} = \sqrt{\frac{2}{2k-1}}, \quad a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{k}} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots):$$

Այդ դեպքում՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_{n+1}}^{a_n} |f(x)|\,dx > \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_{2k}}^{a_{2k-1}} |f(x)|\,dx:$$

$[a_{2k}, a_{2k-1}]$ միջակայքում, այսինքն երբ՝ $k\pi \geq \frac{\pi}{x^2} \geq k\pi - \frac{\pi}{2}$, $\sin\frac{\pi}{x^2}$-ն և $\cos\frac{\pi}{x^2}$-ն ունեն հակադիր նշաններ, այնպես որ $f(x)$-ը պահպանում է որոշակի նշան, ուստի՝

$$\int_{a_{2k}}^{a_{2k-1}} |f(x)|\,dx = \left| \int_{a_{2k}}^{a_{2k-1}} f(x)\,dx \right| = |F(a_{2k-1}) - F(a_{2k})| =$$

$$= \frac{2}{2k-1} > \frac{1}{k},$$

$\sum_1^{\infty} \frac{1}{k}$ հարմոնիկ շարքի տարամիտության շնորհիվ տարամետ է նաև դիտարկվող շարքը, որի հետ նաև տված ինտեգրալը:

n° 440-ի թեորեման ու նրա հետևանքներն այստեղ ձևակերպվում են համարյա նույն արտահայտություններով: Մենք այստեղ դրանք չենք վերարտադրի և կսահմանափակվենք միայն Կոշիի հայտանիշների ձևակերպումով.

Դիցուք b-ին բավականաչափ մոտ x-երի համար f(x) ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(x) = \frac{g(x)}{(b-x)^{\lambda}} \quad (\lambda > 0).$$

Այդ ժամանակ 1) երբ $\lambda<1$ և $g(x)\leqslant c<+\infty$, *ապա* $\int_a^b f(x)\,dx$ ինտեգրալը զուգամետ է, 2) իսկ երբ $\lambda\geqslant 1$ և $g(x)\geqslant c>0$ ապա այդ ինտեգրալը տարամետ է:

Ավելի մասնավոր ձևով, որը գործնականում հարմար է՝

Երբ $x\to b$ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան $\lambda>0$ կարգի անվերջ մեծ է $\left(\frac{1}{b-x}\text{-ի նկատմամբ}\right)$, ապա $\int_a^b f(x)\,dx$ ինտեգրալը զուգամետ է կամ տարամետ կախված նրանից, արդյոք $\lambda<1$ թե $\lambda\geqslant 1$:

Օրինակներ։ 3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$։ *Ընդինտեգրալ ֆունկցիան* $\frac{1}{4}$ *կարգի անվերջ մեծ է, երբ* $x\to 1$՝

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}:\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}=\frac{1}{\sqrt[4]{1+x+x^2+x^3}}\to\frac{1}{\sqrt[4]{4}},\ \text{երբ } x\to 1։$$

Հետևաբար, ինտեգրալը զուգամետ է։

4) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ $(k^2<1)$, $\frac{1}{2}$ *կարգի անվերջ մեծ է. ինտեգրալը զուգամետ է:*

5) $\int_0^1 x^\mu \log x\,dx$: *Եթե* $\mu>0$, $f(x)=x^\mu\log x\to 0$, *երբ* $x\to 0$, *ինտեգրալը գոյություն ունի որպես իսկական ինտեգրալ։* $0\geqslant\mu$*-ի դեպքում ընդինտեգրալ ֆունկցիան անվերջություն է դառնում, երբ* $x\to 0$։

Եթե $\mu>-1$, *ապա,* λ*-ն վերցնելով այնպես, որ* $1>\lambda>\mu'=-\mu$, *կունենանք՝*

$$\frac{x^\mu\log x}{1/x^\lambda}=x^{\lambda+\mu}\log x\to 0\quad (\text{երբ } x\to 0).$$

Քանի որ $\int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}$ *ինտեգրալը զուգամետ է, ապա տված ինտեգրալը ևս զուգա-*

մետ է [n° 440-ի հետևանքի անալոգիան հանդիսացող հետևանքի համաձայն]*:

Վերջապես, եթե $\mu \leq -1$, ապա $\int_0^1 x^{\mu}\,dx$ ինտեգրալը տարամետ է, առավել ևս տարամետ է տված ինտեգրալը, որովհետև՝

$$\frac{x^{\mu}\log x}{x^{\mu}} = \log x \to \infty \quad (\text{երբ } x \to 0)$$

[նույն հետևանքի համաձայն]:

Հետագա օրինակներ ընթերցողը կգտնի հաջորդ համարում:

447. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ: Հետազոտել հետևյալ ինտեգրալների զուգամիտությունը՝

$$1)\ (\text{ա})\ \int_0^{\theta}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\theta}},\quad (\text{բ})\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}},\quad (\text{գ})\ \int_0^1\frac{dx}{\log x},$$

$$(\text{դ})\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^p\,dx,\qquad (\text{ե})\ \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right)^p d\theta:$$

Լուծում: (ա) Եզակի կետը՝ $\varphi=\theta$: Այդ կետում ածանցյալի՝

$$\lim_{\varphi\to\theta}\frac{\cos\varphi-\cos\theta}{\varphi-\theta} = -\sin\theta$$

գոյության շնորհիվ, ընդինտեգրալ արտահայտությունը $\varphi\to\theta$ դեպքում կլինի $1/2$ կարգի անվերջ մեծ $\left(\frac{1}{\theta-\varphi}\text{-ի նկատմամբ}\right)$: Զուգամետ է:

(բ) Եզակի կետը՝ $x=0$: Քանի որ

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=2,$$

ապա ընդինտեգրալ արտահայտության կարգը $\left(\frac{1}{x}\text{-ի նկատմամբ}\right)$ կլինի $\frac{2}{3}$: Զուգամետ է:

(գ) Այստեղ ես՝

$$\frac{\log x}{x-1}\to 1,\ \text{երբ } x\to 1,$$

* Մենք $x^{\mu}\log x$ ֆունկցիայի նկատմամբ կիրառում ենք դրական ֆունկցիաների համար ստացված հայտանիշները, որովհետև այդ ֆունկցիան դրական է բերվում նշանի պարզ փոփոխությամբ:

կարգը $\left(\frac{1}{1-x}\text{-ի նկատմամբ}\right)$ հավասար է 1-ի։ Տարամետ է։

(գ) Եթե $p>$, եզակի կետ է $\pi/_2$-ը, իսկ եթե $p<0$, եզակի կետը 0-ն է։ Երկու դեպքում էլ ընդինտեգրալ արտահայտությունը $|p|$ կարգի անվերջ մեծ է։ Այսպիսով, զուգամետ է, երբ $|p|<1$, և տարամետ է երբ $|p|\geq 1$։

(ե) Եթե $p>0$, եզակի կետ է $-\frac{\pi}{4}$-ը, իսկ եթե $p<0$, եզակի կետ է $\frac{\pi}{4}$-ը։

Պատասխանը նույնն է, ինչ որ նախորդ դեպքում։

$$2)\ (ա)\ \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx, \qquad (բ)\ \int_0^1 \frac{x^{b-1}-x^{a-1}}{\log x}dx, \quad (a,\ b>0)$$

$$(գ)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx, \qquad (դ)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log|\sin^2\theta - k^2|\, d\theta \qquad (k^2\leq 1)։$$

Լուծում։ (ա) Երբ $x\to 1$, ընդինտեգրալ ֆունկցիան ձգտում է 0-ի։ Եզակի կետ է՝ $x=0$։ Դիցուք $0<\lambda<1$, այդ դեպքում՝

$$\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} : \frac{1}{x^\lambda} = \frac{x^\lambda \log x}{\sqrt{1-x^2}} \to 0, \qquad \text{երբ } x\to 0։$$

Զուգամետ է՝

(բ) Երբ $x\to 1$, անորոշությունը պարզելով, կգտնենք, որ ընդինտեգրալ ֆունկցիան վերջավոր սահման ունի $(=b-a)$։ Եզակի կետ է $x=0$ (եթե a, b թվերից գեթ մեկը փոքր է 1-ից, որ և ենթադրվում ենք)։ Ընդինտեգրալ ֆունկցիայի հարաբերությունը համարիչին հավասար է՝ $\frac{1}{\log x}\to 0$, երբ $x\to 0$։ Շնորհիվ $\int_0^1 (x^{b-1}-x^{a-1})dx$ ինտեգրալի զուգամիտության, տված ինտեգրալը նույնպես զուգամետ է։

(գ) Եզակի կետ է $x=0$։ Դիցուք $0<\lambda<1$. ունենք՝

$$\frac{\log \sin x}{1/x^\lambda} = \left(\frac{x}{\sin x}\right)^\lambda \cdot \sin^\lambda x \cdot \log \sin x \to 0 \quad (\text{երբ } x\to 0)։$$

Զուգամետ է։

(դ) Տեղադրենք $k=\sin\omega$ $\left(0<\omega\leq\frac{\pi}{2}\right)$. Եզակի կետ է՝ $\theta=\omega$։ Դիցուք դարձյալ $0<\lambda<1$, այդ դեպքում՝

$$\frac{\log|\sin\theta-\sin\omega|}{1/|\theta-\omega|^{\lambda}}=\left|\frac{\theta-\omega}{\sin\theta-\sin\omega}\right|^{\lambda}\cdot|\sin\theta-\sin\omega|^{\lambda}\times$$
$$\times\{\log|\sin\theta|-|\sin\omega|+\log(\sin\theta+\sin\omega)\}$$

ձգտում է զրոյի, երբ $\theta\to\omega$: Ինտեգրալը զուգամետ է։

3) (ա) $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$, (բ) $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\log x\,dx$։

Լուծում։ (ա) Եթե $a<1$, եզակի կետ է 0-ն, եթե $b<1$, եզակի կետ է 1-ը։ Տված ինտեգրալը վերլուծենք երկուսի, օրինակ, այսպես՝ $\int_0^1=\int_0^{1/2}+\int_{1/2}^1$։ Քանի որ $x\to0$ դեպքում ընդինտեգրալ ֆունկցիան $1-a$ կարգի (եթե $a<1$) անվերջ մեծ է, ապա առաջին ինտեգրալը գոյություն ունի միայն այն դեպքում, երբ $1-a<1$, այսինքն՝ $a>0$։ Նման ձևով, երկրորդը գոյություն ունի, երբ $b>0$։ Այսպիսով, տված ինտեգրալը զուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ միաժամանակ $a>0$ և $b>0$։

(բ) $x=0$ կետի նկատմամբ դրությունը նույնն է մնում: Բավական է դիտարկել $\int_0^{1/2}$ ինտեգրալը և այն էլ $1>a$ դեպքում ($1<a$ դեպքում ինտեգրալը գոյություն ունի որպես իսկական ինտեգրալ)։ Դատողությունները նույնն են, ինչ որ n° 446-ի 5) օրինակում։ Ինտեգրալը գոյություն ունի $0<a$ դեպքում, ինչպես (ա) օրինակում։

Ինչ վերաբերում է $x=1$ կետին, ապա այստեղ դրությունը փոխվել է, քանի որ $x\to1$ դեպքում $\log x$-ը առաջին կարգի անվերջ փոքր է: $\int_{1/2}^1$ ինտեգրալը գոյություն ունի $-1<b$ դեպքում։

Վերջնականապես, տված ինտեգրալի զուգամիտության պայմաններն են՝ $a>0$, $b>-1$։

$$4)\quad \int_0^{\pi}\frac{\sin^{n-1}\varphi\,d\varphi}{|1+k\cos\varphi|^{n}}\,.$$

Լուծում։ Քանի որ $0>k$ դեպքը $\varphi=\pi-\bar\varphi$ ձևափոխության միջոցով բերվում է $0<k$ դեպքին, ապա կարելի է սահմանափակվել $0\leqslant k$ դեպքով։ Բացի այդ, ինտեգրալի զուգամիտության համար համենայն դեպս անհրաժեշտ է $n>0$, այլապես $\varphi\to0$ կամ ($\varphi\to\pi$) դեպքում ընդինտեգրալ ֆունկցիան դառնում է $1\leqslant$ կարգի անվերջ մեծ։

Եթե $k<1$, ապա այդ պայմանն էլ հենց բավական է։ $k=1$ դեպքում ինտեգրալը չի կարող գոյություն ունենալ, որովհետև, երբ $\varphi\to\pi$, առաջանում է 1 կարգի անվերջ մեծ։

Դիցուք, վերջապես, $k>1$։ Այդ դեպքում կա եզակի կետ՝ $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{k}\right)$. Երբ $\varphi\to\alpha$, ընդինտեգրալ արտահայտությունը դառնում է n կարգի անվերջություն, նշանակում է՝ ինտեգրալի գոյության համար պետք է պահանջել, որ $n<1$։

Այսպիսով, ինտեգրալը զ ու գ ա մ ե տ է, եթե 1) $0<k<1$ և $n>0$, կամ եթե 2) $k>1$ և $0<n<1$։ Մյուս բոլոր դեպքերում տ ա ր ա մ ե տ է։

$$5)\ (ա)\ \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx, \quad (բ)\ \int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx, \quad (գ)\ \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx։$$

Լ ու ծ ու մ։ (ա) Եզակի կետերն են՝ ∞ և ($1>a$ դեպքում) նաև 0։ Եթե ինտեգրալը վերլուծենք երկուսի $\int_0^\infty=\int_0^1+\int_1^\infty$, ապա նրանցից առաջինը զուգամետ կլինի $0<a$ դեպքում ($1>1-a$ կարգի անվերջ մեծ է x-ի նկատմամբ), իսկ երկրորդը՝ $1>a$ դեպքում ($1<2-a$ կարգի անվերջ փոքր է $\frac{1}{x}$-ի նկատմամբ)։ Այսպիսով, ինտեգրալը զուգամետ է, երբ $0<a<1$։

(բ) Եզակի կետեր են՝ ∞ և 0, $\int_0^\infty=\int_0^1+\int_1^\infty$։ Վերցնելով $0<\lambda<1$, կունենանք՝

$$\frac{\log x}{1+x^2} : \frac{1}{x^\lambda} = \frac{x^\lambda \log x}{1+x^2} \to 0, \text{ երբ } x\to 0,$$

$\int_0^1$ ինտեգրալը զուգամետ է։ Դիցուք այժմ $1<\mu<2$. այդ դեպքում՝

$$\frac{\log x}{1+x^2} : \frac{1}{x^\mu} = \frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{\log x}{x^{2-\mu}} \to 0, \text{ երբ } x\to+\infty,$$

նշանակում է նաև $\int_1^\infty$ ինտեգրալն է զուգամետ։ Այստեղից հետևում է $\int_0^\infty$ ինտեգրալի զուգամիտությունը։

(գ) Եզակի կետեր են՝ ∞ և 0 ($1>p$ դեպքում)։ $\int_0^1$ ինտեգրալը գոյություն ունի միայն $0<p$ դեպքում ($1-p$ կարգի անվերջ փոքր է $\frac{1}{x}$-ի նկատմամբ)։ $\int_1^\infty$ ինտեգրալը գոյություն ունի, ինչպիսին էլ լինի p-ն, քանի որ

վերցնելով $\lambda > 1$, կունենանք՝

$$\frac{x^{p-1}e^{-x}}{1/x^{\lambda}}=\frac{x^{\lambda+p-1}}{e^{x}}\to 0, \text{ երբ } x\to+\infty\text{։}$$

$\int_0^{\infty}$ ինտեգրալը գոյություն ունի $p>0$ դեպքում։

6) Այս և հաջորդ վարժություններում դիտարկվող $f=f(x)$ և $g=g(x)$ ֆունկցիաները ենթադրվում են որոշված $[a, b]$ վերջավոր միջակայքում և այնտեղ թերևս միայն վերջավոր թվով եզակի կետեր ունեցող։

Ապացուցել, որ՝

(ա) եթե f^2 ֆունկցիան ինտեգրելի է, ապա f ֆունկցիան ինքն էլ անհրաժեշտաբար բացարձակ ինտեգրելի կլինի (այդպիսի ֆունկցիայի մասին ասում են, որ նա «ինտեգրելի է քառակուսու հետ միասին»)։

(բ) եթե f և g երկու ֆունկցիաներն էլ քառակուսու հետ ինտեգրելի են, ապա նրանց $f+g$ գումարը նույնպես քառակուսու հետ ինտեգրելի է։

(գ) Նույն պայմանների դեպքում $f\cdot g$ արտադրյալը նույնպես (բացարձակ) ինտեգրելի է։

Բաղդատման թեորեմայի համաձայն այդ բոլորը պարզապես բխում է հետևյալ անհավասարություններից՝

$$|f|\leqslant\frac{1+f^2}{2},\quad (f+g)^2\leqslant 2(f^2+g^2),\quad |fg|\leqslant\frac{f^2+g^2}{2}\text{։}$$

7) Քառակուսու հետ ինտեգրելի f և g ֆունկցիաների համար ապացուցել հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\left\{\int_a^b fg\,dx\right\}^2\leqslant\int_a^b f^2dx\cdot\int_a^b g^2dx, \tag{6}$$

որը պատկանում է Վ. Յա. Բունյակովսկուն*։ Այդ անհավասարությունը կարելի է ներկայացնել նաև հետևյալ հավասարազոր տեսքով՝

$$\left\{\int_a^b (f+g)^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\left\{\int_a^b f^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{\int_a^b g^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\text{։} \tag{7}$$

Այստեղ կիրառենք նույն մեթոդը, որից մենք օգտվել ենք V գլխում [151], երբ ապացուցում էինք անալոգ անհավասարություններ վերջավոր գումարների համար։ Հետևյալ քառակուսի (z-ի նկատմամբ) եռանդամը՝

---

* Սովորաբար այս անհավասարությունը սխալմամբ անվանում են Շվարցի անհավասարություն։

$$\int_a^b [f\cdot z+g]^2 dx = z^2\cdot\int_a^b f^2 dx + 2z\int_a^b fg\,dx + \int_a^b g^2 dx,$$

ակներևաբար, բացասական արժեքներ չի ընդունում․ այստեղից էլ հենց եզրակացնում ենք, որ նրա դիսկրիմինանտը չի կարող դրական լինել՝

$$\left\{\int_a^b fg\,dx\right\}^2 - \int_a^b f^2 dx \cdot \int_a^b g^2 dx \leqslant 0։$$

8) (ա) Եթե $|f|^p$ և $|g|^p$ ֆունկցիաները ($1<p$ դեպքում) ինտեգրելի են, ապա ինտեգրելի է նաև $|f+g|^p$ ֆունկցիան, ընդ որում՝

$$\left\{\int_a^b |f+g|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{\int_a^b |f|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_a^b |g|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \tag{8}$$

(Մինկովսկու անհավասարություն)։

(բ) Եթե $|f|^p$ և $|g|^q$ ֆունկցիաները $\left(1<p \text{ և } q=\frac{p}{p-1} \text{ դեպքում}\right)$ ինտեգրելի են, ապա $f\cdot g$ ֆունկցիան բացարձակ ինտեգրելի է, ընդ որում՝

$$\left|\int_a^b fg\,dx\right| \leqslant \left\{\int_a^b |f|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left\{\int_a^b |g|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}} \tag{9}$$

(Հելդերի անհավասարություն)։ [համ. 365,6)։]

Այս անհավասարությունները, ակներևաբար, ընդհանրացնում են (6) և (7) անհավասարությունները, որոնք այստեղից ստացվում են $p=q=2$ դեպքում։

Ընդհանրությունը չնսեմացնելով, կարելի է սահմանափակվել այն դեպքով, երբ f և g ֆունկցիաները ոչ-բացասական են։ Սկսենք (9) անհավասարության ապացույցից։ Եթե, մասնավորապես, ընդունենք, որ՝

$$\int_a^b f^p dx = \int_a^b g^q dx = 1,$$

ապա այդ անհավասարությունը կհանգի հետևյալին՝

$$\int_a^b fg\,dx \leqslant 1։$$

Այստեղ, ինչպես և վերջավոր գումարների դեպքում, օգտվենք հետևյալ անհավասարությունից [127 (3)]՝

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q,$$

Այստեղ ընդունելով $a=f(x)$, $b=g(x)$, կստանանք՝

$$f\cdot g\leqslant\frac{1}{p}\,f^{p}+\frac{1}{q}\,g^{q}.$$

այստեղից, ինտեգրելով a-ից մինչև b, կստանանք պահանջվող անհավասարությունը՝

$$\int_a^b fg\,dx\leqslant\frac{1}{p}\int_a^b f^{p}dx+\frac{1}{q}\int_a^b g^{q}\,dx=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

ընդ որում ձախակողմյան ինտեգրալի գոյությունը բխում է բաղդատման թեորեմայից։

Ընդհանուր դեպքը դիտարկված մասնավոր դեպքին է բերվում, երբ f ու g ֆունկցիաների փոխարեն վերցնում ենք՝

$$\frac{f(x)}{\left\{\int_a^b[f(t)]^{p}dt\right\}^{1/p}}\quad\text{և}\quad\frac{g(x)}{\left\{\int_a^b[g(t)]^{q}\,dt\right\}^{1/q}},\quad\text{և այլն։}$$

Այդ ժամանակ, գործոն fg արտադրյալի ինտեգրալի գոյությունը, բաղդատման թեորեմայի համաձայն, հաստատվում է անհավասարության հետ միաժամանակ։

(8) անհավասարությունը, ինչպես և 365, 6)-ում, արտածվում է (9)-ից, եթե վերջինս կիրառենք աջ կողմի երկու արտադրյալների նկատմամբ առանձին-առանձին՝

$$(f+g)^{p}=f\cdot(f+g)^{p-1}+g\cdot(f+g)^{p-1}.$$

Բայց այստեղ պետք է նախ դիտարկել սահմանափակ ֆունկցիաների դեպքը, իսկ այնուհետև սահմանային անցման օգնությամբ անհավասարությունը տարածել ընդհանուր դեպքի վրա։ Օրինակ, եթե b-ն միակ եզակի կետն է, ապա, (9) անհավասարությունը գրելով $[a, b-\eta]$ $(\eta>0)$ միջակայքի համար, հարկավոր է միայն սահմանին անցնել, երբ $\eta\to0$։

448. ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ԳԼԽԱՎՈՐ ԱՐԺԵՔՆԵՐԸ։ Դիցուք $[a, b]$ միջակայքում տրված է $f(x)$ ֆունկցիան, որն ունի միայն մեկ c եզակի կետ միջակայքի ներսում և ինտեգրելի է (իսկական իմաստով) նրա յուրաքանչյուր մասում, որը չի պարունակում c-ն։ Անիսկական ինտեգրալը a-ից b սահմաններում որոշվում է հետևյալ հավասարությամբ՝

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\substack{\eta\to0\\ \eta'\to0}}\left\{\int_a^{c-\eta}+\int_{c+\eta'}^{b}\right\},$$

ընդ որում սահմանը պետք է գոյություն ունենա ըստ η-ի և ըստ η'-ի իրարից անկախ սահմանային անցման դեպքում։ Որոշ

դեպքերում, երբ այդ սահմանը գոյություն չունի, օգտակար է լինում դիտարկել այդ նույն արտահայտության սահմանն այն դեպքում, երբ η_1-ն ու η_1'-ը զրոյի են ձգտում, մնալով իրար հավասար՝ $\eta_1'=\eta_1\to 0$։ Եթե այդ սահմանը գոյություն ունի, այն անվանում են (Կոշիի օրինակով) $\int_a^b f(x)\,dx$ անիսկական ինտեգրալի գլխավոր արժեք և նշանակում են այսպես՝

$$V.p.\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\eta\to 0}\left\{\int_a^{c-\eta_1}+\int_{c+\eta_1}^b\right\}.$$

[V.p.՝ սկզբնատառերն են „Valeur principale" բառերի, որոնք ֆրանսերեն նշանակում են «գլխավոր արժեք»]։ Այդ դեպքում ասում են, որ $\int_a^b f(x)\,dx$ ինտեգրալը գոյություն ունի գլխավոր արժեքի իմաստով։ Եթե $\int_a^b f(x)\,dx$ ինտեգրալը որպես անիսկական ինտեգրալ գոյություն ունի, ապա նա, ակներևաբար, գոյություն ունի նաև գլխավոր արժեքի իմաստով. հակադարձը, ընդհանրապես ասած, ճիշտ չէ։ Դիտարկենք օրինակներ.

1) $\int_a^b \frac{dx}{x-c}$ $(a<c<b)$ ինտեգրալը, որպես անիսկական ինտեգրալ, գոյություն չունի, որովհետև

$$\int_a^{c-\eta_1}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\eta_1'}^b\frac{dx}{x-c}=\log\frac{b-c}{c-a}+\log\frac{\eta_1}{\eta_1'}$$

արտահայտությունը որոշակի սահման չունի, երբ η_1-ն ու η_1'-ը զրոյի են ձգտում իրարից անկախ։ Մինչդեռ, եթե η_1-ն ու η_1'-ը կապենք $\eta_1'=\eta_1$ պահանջով, ապա կստանանք

$$\int_a^{c-\eta_1}+\int_{c+\eta_1}^b=\log\frac{b-c}{c-a}$$

արտահայտությունը, որը փաստորեն կախված չէ η_1-ից, այնպես որ ինտեգրալի գլխավոր արժեքը գոյություն ունի՝

$$V.p.\int_a^b\frac{dx}{x-c}=\log\frac{b-c}{c-a}.$$

2) Ճիշտ այդպես էլ գոյություն չունի նաև հետևյալ ինտեգրալը՝

$\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^n}$, $a<c<b$, $n=2, 3, \dots$, Դիտարկենք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$\int_a^{c-\eta} \frac{dx}{(x-c)^n}+\int_{c+\eta}^{b} \frac{dx}{(x-c)^n}=$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{\frac{1}{(a-c)^{n-1}}-\frac{1}{(b-c)^{n-1}}+\frac{1}{\eta^{n-1}}+(-1)^n\frac{1}{\eta^{n-1}}\right\}։$$

Երբ n-ը կենտ է, այդ արտահայտությունը դառնում է հաստատուն թիվ․ այդպիսին կլինի տվյալ դեպքում նաև ինտեգրալի գլխավոր արժեքը՝

$$\mathrm{V.p.}\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^n}=\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(a-c)^{n-1}}-\frac{1}{(b-c)^{n-1}}\right] \quad (n\text{-ը կենտ է})։$$

Երբ n-ը զույգ է, վերոհիշյալ արտահայտությունը ձգտում է ∞, այնպես որ ինտեգրալը գոյություն չունի նույնիսկ գլխավոր արժեքի իմաստով։

Դիտողություն։ Ընթերցողը հեշտությամբ կհամոզվի, որ, ընդհանրապես, դրական ֆունկցիայի դեպքում տարամետ ինտեգրալը չի կարող գոյություն ունենալ նաև գլխավոր արժեքի իմաստով։

3) Դիտարկենք, այնուհետև, հետևյալ տարամետ ինտեգրալը՝

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{k-\sin\theta} \quad (0<k<1)։$$

Եզակի կետ կլինի $\alpha=\arcsin k$, և $\theta\to\alpha$ դեպքում ենթաինտեգրալ ֆունկցիան դառնում է 1-ին կարգի անվերջություն։ Ունենք՝

$$\int \frac{d\theta}{k-\sin\theta}=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\log\left|\frac{k-\sin\theta}{1-k\sin\theta-\sqrt{1-k^2}\cdot\cos\theta}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\log\left|\frac{\sin\alpha-\sin\theta}{1-\cos(\alpha-\theta)}\right|։$$

Ուստի՝

$$\int_0^{\alpha-\eta}+\int_{\alpha+\eta}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\left\{\log\frac{\sin\alpha-\sin(\alpha-\eta)}{\sin(\alpha+\eta)-\sin\alpha}+\log\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right\}։$$

$\eta\to 0$ դեպքում առաջին գումարելիում լոգարիթմի նշանի տակ գրված արտահայտությունը ձգտում է 1-ի (որում դժվար չէ համոզվել, անորոշությունը բացելով Լոպիտալի կանոնով)։ Վերջնականապես՝

$$\mathrm{V.\,p.}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{k-\sin\theta}=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\log\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{k}\quad(0<k<1)\text{։}$$

Որոշ դեպքերում կարելի է նախապես համոզվել, որ ինտեգրալի գլխավոր արժեքը գոյություն ունի։ Կանգ առնենք այդպիսի մի դեպքի վրա։ Դիցուք տված է

$$\int_a^b\frac{dx}{f(x)}$$

ինտեգրալը, որտեղ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a, b]$ միջակայքում և դառնում է 0 միջակայքի ներսի միայն մեկ c կետում։ Ենթադրենք, թե c կետի շրջակայքում գոյություն ունի $f'(x)$ առաջին ածանցյալը, որը 0 չի դառնում $x=c$ կետում, իսկ այդ կետում գոյություն ունի նաև $f''(c)$ երկրորդ ածանցյալը։

Քանի որ $\frac{1}{f(x)}$ -ը 1-ին կարգի անվերջ մեծ է, երբ $x\to c$, ուստի տված ինտեգրալը տարամետ է։ Ցույց տանք, որ այդ ինտեգրալը գոյություն ունի գլխավոր արժեքի իմաստով։

Ընդունենք՝

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{f'(c)(x-c)}+\varphi(x)\text{.}$$

այս ֆունկցիան $x\neq c$ դեպքում անընդհատ է։ $x=c$ կետի մոտակայքում, Պեանոյի ձևի լրացուցիչ անդամով Թեյլորի բանաձևի համաձայն, ունենք՝

$$f(x)=f'(c)(x-c)+[f''(c)+\alpha(x)]\cdot\frac{(x-c)^2}{2},$$

որտեղ $\alpha(x)\to 0$, երբ $x\to c$։ Այդ դեպքում, ակնհայտաբար՝

$$\varphi(x)=-\frac{\frac{1}{2}[f''(c)+\alpha(x)]}{f'(c)\left[f'(c)+\frac{f''(c)+\alpha(x)}{2}(x-c)\right]},$$

այնպես որ $\varphi(x)$-ը $x=c$ կետի մոտակայքում մնում է սահմանափակ և, հետևաբար, ինտեգրելի է նույնիսկ իսկական իմաստով։ Քանի որ $\frac{1}{f'(c)(x-c)}$ ֆունկցիայի համար ինտեգրալը գոյություն ունի գլխավոր արժեքի իմաստով [տես 1)], ուստի այդպես կլինի նաև տված ինտեգրալի նկատմամբ։

Այս հայտանիշի օգնությամբ, օրինակ, հեշտ է ցույց տալ գլխավոր արժեքի գոյությունը 3) օրինակում։ Ուրիշ օրինակ կարող է ծառայել մի

կարևոր ոչ-տարրական ֆունկցիայի, այսպես կոչված «ինտեգրալային լոգարիթմի» սահմանումը՝

$$\mathrm{li}\, a = \int_0^a \frac{dx}{\log x}.$$

Այս ինտեգրալը գոյություն ունի միայն $0<a<1$ դեպքում, իսկ երբ $a>1$, այն հասկանում են հենց գլխավոր արժեքի իմաստով։

Գլխավոր արժեքի գաղափարը դժվար չէ տարածել նաև այն դեպքի վրա, երբ միջակայքի ներսում կան ցանկացած վերջավոր թվով եզակի կետեր։

Մինչև հիմա մենք բացառում էինք եզակիության հնարավորությունը միջակայքի ծայրակետերում. կարելի է այդ չանել, եթե միայն գլխավոր արժեքները կազմելիս հաշվի չառնենք հենց այդ եզակիությունները։

4) Դիցուք, օրինակ, տված է հետևյալ նախահայտորեն տարամետ ինտեգրալը ($a>0$)՝

$$\int_0^2 \frac{x^{a-1}}{1-x}\,dx.$$

Այստեղ եզակի կետեր կլինեն $x=1$ կետը և (եթե $a<1$) միջակայքի $x=0$ ծայրակետը։ Հեշտ է ցույց տալ, որ այդ դեպքում՝

$$\mathrm{V.p.}\int_0^2 \frac{x^{a-1}}{1-x}\,dx = \lim_{\eta\to 0}\left\{\int_0^{1-\eta} + \int_{1+\eta}^2\right\}$$

գլխավոր արժեքը բերվում է պարզապես այսպիսի ինտեգրալի՝

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{a-1}-(1+t)^{a-1}}{t}\,dt$$

($1>a$-ի դեպքում՝ անիսկական)։

Վերջում դիտարկենք «գլխավոր արժեքի» մի տեսակը ևս, որից հաճախ հարկ է լինում օգտվել։ Այն է. կանգ առնենք դեպի երկու կողմն անվերջ $(-\infty, +\infty)$ միջակայքով տարածված ինտեգրալի վրա, ընդ որում ենթադրում ենք, որ միջակայքի ներսը եզակի կետ չկա։ Ինչպես հայտնի է, այդպիսի ինտեգրալը կարելի է սահմանել այսպիսի սահմանային հավասարությամբ՝

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ A'\to-\infty}} \int_{A'}^{A} f(x)\,dx,$$

որտեղ սահմանային անցումները ըստ A-ի և ըստ A'-ի ենթադրվում են մեկը մյուսից անկախ։ Սակայն, կարող է պատահել, որ այդ իմաստով սահման չկա, բայց գոյություն ունի սահման, որը

համապատասխանում է մասնավոր դեպքի, երբ $A = -A'$։ Այդ նույնպես անվանում են $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալի գլխավոր արժեք և նշանակում են այսպես՝

$$\mathrm{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} f(x)dx.$$

Օրինակ, եթե $f(x)$ ֆունկցիան կենտ է, ապա նրա ինտեգրալը 0-ի նկատմամբ սիմետրիկ $(-A, A)$ միջակայքում հավասար է 0-ի, այնպես որ նաև

$$\mathrm{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0,$$

թեև $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը կարող է և գոյություն չունենալ (ինչպես, օրինակ, $\sin x$ ֆունկցիայի համար)։

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան զույգ է, ապա՝

$$\int_{-A}^{A} f(x)dx = 2\int_{0}^{A} f(x)dx.$$

այս ինտեգրալի համար վերջավոր սահման գոյություն ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ վերջավոր սահման գոյություն ունի $\int_{0}^{A} f(x)dx$ ինտեգրալի համար, այսինքն՝ զուգամետ է $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը, իսկ դրա հետ նաև $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալը։ Այսպիսով, զույգ ֆունկցիայի համար ինտեգրալի գլխավոր արժեք գոյություն ունի միայն անիսկական ինտեգրալի հետ միաժամանակ (և, բնականաբար, հավասար է նրան)։

Ամեն մի $f(x)$ ֆունկցիա (յուրաքանչյուր վերջավոր միջակայքում ինտեգրելի) կարելի է ներկայացնել երկու ֆունկցիաների՝ զույգ և կենտ ֆունկցիաների գումարի տեսքով՝

$$\varphi(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{և} \quad \psi(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

(որոնք պահպանում են նույն՝ ինտեգրելիության հատկությունը)։

Վերը ասածից այժմ պարզ է, որ

$$V.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx,$$

եթե վերջին անիսկական ինտեգրալը զուգամետ է։ Օրինակ, նկատելով, որ $\frac{1+x}{1-x^2}$ *ֆունկցիան բաղկացած է* $\frac{1}{1+x^2}$ *զույգ մասից և* $\frac{x}{1+x^2}$ *կենտ մասից, իսկույն կարող ենք գրել՝*

$$V.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi.$$

§ 3. ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՆ ՈՒ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒՄԸ

449. ՊԱՐԶԱԳՈՒՅՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ։ Մենք դիտարկելու ենք այնպիսի ֆունկցիաներ, որոնք ինտեգրելի են (իսկական կամ անիսկական իմաստով) [a, b] *վերջավոր կամ անվերջ միջակայքում։ Այսպիսով,* a*-ն և* b*-ն կարող են նշանակել ոչ միայն վերջավոր թվեր, այլ նաև* $\pm\infty$*։ Անիսկական ինտեգրալների պարզագույն հատկությունները, որոնք մենք միայն կթվենք, իսկական ինտեգրալների հատկությունների* [290—294] *լիակատար անալոգներն են և ստացվում են նրանցից միևնույն եղանակով։ Քանի որ անիսկական ինտեգրալները իսկական ինտեգրալների սահմաններ են հանդիսանում, ապա սովորաբար բավական է իսկականների համար գրել պահանջվող հատկությունն արտահայտող հավասարությունը կամ անհավասարությունը և անցնել սահմանին։*

Այստեղ, ամենից առաջ, նույնպես կարելի է մտցնել կողմնորոշված միջակայքով վերցրած ինտեգրալի գաղափարը և ապացուցել՝

1 **Եթե f(x)-ը ինտեգրելի է [b, a] միջակայքում, ապա նա ինտեգրելի է նաև [a, b] միջակայքում, ընդ որում՝**

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx.$$

[*Կարելի է այդ ընդունել ուղղակի որպես* $\int_a^b$ *ինտեգրալի սահմանում, երբ* $a>b$*։*]

Այնուհետև՝

2° Դիցուք $f(x)$-ն ինտեգրելի է $[a, b]$, $[a, c]$ և $[c, b]$ միջակայքերից ամենամեծում. Այդ դեպքում նա ինտեգրելի է նաև մյուս երկուսում և տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

3° Եթե $f(x)$-ն ինտեգրելի է $[a, b]$ միջակայքում և $k = \text{const.}$, ապա $k \cdot f(x)$ արտադրյալը նույնպես ինտեգրելի է, և

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

4° Դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները երկուսն էլ ինտեգրելի են $[a, b]$ միջակայքում. այդ դեպքում ինտեգրելի է նաև $f(x) \pm g(x)$ ֆունկցիան, և

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

Այս (և հաջորդ) հատկության ապացուցելիս հարկավոր է ի նկատի ունենալ n° 443-ի դիտողությունը։ Ենթադրենք, օրինակ, b-ն միակ եզակի կետ է f(x) ու g(x) ֆունկցիաներից մեկի կամ մյուսի համար։ Այդ ժամանակ, գրելով հետևյալ հավասարությունը՝

$$\int_a^{x_0} [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx \pm \int_a^{x_0} g(x)\,dx \qquad (a < x_0 < b),$$

կարելի է դրանից ստանալ նախորդ բանաձևը, անցնելով սահմանին, երբ $x_0 \to b$, ինչպես այն դեպքում, երբ բոլոր ինտեգրալները a-ից b անիսկական են, այնպես և այն դեպքում, երբ նրանցից մեկը իսկական է։

5° Եթե $[a, b]$ միջակայքում ինտեգրելի $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների համար տեղի ունի $f(x) \leqslant g(x)$ անհավասարությունը, ապա $a < b$ դեպքում՝

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

6° Եթե $f(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ միջակայքում բացարձակ ինտեգրելի է, ապա ($a < b$ դեպքում)

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

7° Եթե $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a, b]$ միջակայքում, ապա այդ միջակայքից վերցրած ամեն մի x-ի համար գոյություն ունի հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \tag{1}$$

և x-ի անընդհատ ֆունկցիա է։

Դիցուք $a < x_0 \leq b$. *ապացուցենք, օրինակ,* $\Phi(x)$ *ֆունկցիայի ձախից անընդհատությունը* $x = x_0$ *կետում։ Վերցնելով* a-*ի և* x_0-*ի միջև* c-*ն այնպես, որ* $[c, x_0]$ *միջակայքում եզակի կետեր չլինեն, բացի թերևս* x_0 *կետից,* $c < x \leq x_0$ *արժեքների համար կունենանք՝*

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^x f(t)\,dt \tag{2}$$

և բավական է ցույց տալ, որ

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \int_c^x f(t)\,dt = \int_c^{x_0} f(t)\,dt.$$

Իսկ այս հավասարությունը տեղի ունի [*տես* n° 443-*ի դիտողությունը*] *ինչպես այն դեպքում, երբ աջ կողմի ինտեգրալն իսկական է, այնպես էլ այն դեպքում, երբ այն անիսկական է։*

Եթե $x_0 = b = +\infty$, *ապա* $\Phi(x)$ *ֆունկցիայի անընդհատությունը* $x = +\infty$ *դեպքում հասկացվում է այն իմաստով, որ՝*

$$\lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = \Phi(+\infty) = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt.$$

8° Նույն պայմաններում, եթե $x = x_0$ կետում $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է, $\Phi(x)$ ֆունկցիայի համար այդ կետում գոյություն ունի ածանցյալ, և

$$\Phi'(x_0) = f(x_0).$$

Ապացուցման համար օգտագործվում է (2) վերլուծությունը, հիմնվելով իսկական ինտեգրալի անալոգ հատկության վրա։

Հեշտ է 7° ու 8° հատկությունները վերաձևակերպել այն դեպքի համար, երբ փոփոխականը ինտեգրալի ստորին սահմանն է։

450. ՄԻՋԻՆ ԱՐԺԵՔԻ ԹԵՈՐԵՄԱՆԵՐԸ. Միջին արժեքի առաջին թեորեման իր սկզբնական ձևով [292, 9°] էապես ենթադրում է, որ f(x) ֆունկցիան սահմանափակ է, իսկ միջակայքը՝ վերջավոր, ուստի և չի կարող փոխադրվել անիսկական ինտեգրալի վրա։ Իսկ ընդհանրացրած ձևով [292, 10°] այն փոխադրել կարելի է՝

ՄԻՋԻՆ ԱՐԺԵՔԻ ԱՌԱՋԻՆ ԹԵՈՐԵՄԱՆ։ Դիցուք f(x) և g(x) ֆունկցիաները երկուսն էլ ինտեգրելի են [a, b] միջակայքում, ընդ որում f(x)-ը սահմանափակ է՝

$$m \leq f(x) \leq M,$$

իսկ g(x)-ը նշանը չի փոխում. այդ դեպքում $f(x)\cdot g(x)$ արտադրյալը նույնպես ինտեգրելի է և՝

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx,$$

որտեղ $m \leq \mu \leq M$։

Ինտեգրալի գոյությունը բխում է n° 440-ի վերջին թեորեմայից. Իսկ հավասարությունն ինքը ապացուցվում է ձևականորեն այնպես, ինչպես իսկական ինտեգրալների համար։

Եթե f(x) ֆունկցիան անընդհատ է [a, b] փակ միջակայքում, ապա որպես m և M կարելի է վերցնել f(x)-ի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները [a, b]-ում, և μ բազմապատկիչը կհավասարվի f(x) ֆունկցիայի արժեքներից մեկին՝

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = f(c)\cdot \int_a^b g(x)\,dx,$$

որտեղ c-ն գտնվում է [a, b]-ում։ Այդ ճիշտ է նաև այն դեպքում, երբ [a, b] միջակայքն անվերջ է, որովհետև Վեյերշտրասի և Կոշիի թեորեմները [81, 84] այդ դեպքում ևս ճիշտ են, որում համոզվել առաջարկում ենք ընթերցողին։

Տեղի ունի նաև [հմմտ. 294, 14°]

ՄԻՋԻՆ ԱՐԺԵՔԻ ԵՐԿՐՈՐԴ ԹԵՈՐԵՄԱՆ։ Դիցուք f(x) ֆունկցիան մոնոտոն ու սահմանափակ է [a, b] միջակայքում, իսկ g(x) ֆունկցիան այդ միջակայքում ինտեգրելի է։ Այդ դեպքում f(x)·g(x) արտադրյալը նույնպես ինտեգրելի է, և

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\,dx + f(b)\int_{\xi}^{b} g(x)\,dx,$$

$$(a \leq \xi \leq b)$$

Որոշակիության համար կանգ առնենք այն դեպքի վրա, երբ a-*ն վերջավոր է,* $b = +\infty$ *և* g(x)-*ի համար ուրիշ եզակի կետեր չկան։ Ինտեգրալի գոյությունը բխում է* n° 441-*ի հայտանիշից։*

Առանց ընդհանրությունը նսեմացնելու կարելի է f(x) *ֆունկցիան նվազող համարել։ Նրա սահմանափակ լինելու շնորհիվ գոյություն ունի՝*

$$f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

վերջավոր սահմանը։ Այն ժամանակ՝ $f^*(x) = f(x) - f(+\infty) \geqslant 0$*։* [a, A] *վերջավոր միջակայքի համար ունենք* [294, 13°]՝

$$\int_a^A f^*(x)\,g(x)\,dx = f^*(a)\int_a^{\eta} g(x)\,dx \quad (a \leq \eta \leq A). \tag{3}$$

A-*ից կախված* $\int_a^A g(x)\,dx$ *ֆունկցիան, որն անընդհատ է* $[a, +\infty]$ *միջակայքում, այնտեղ ունի* m *և* M *վերջավոր եզրեր, այնպես որ [տես (3)]՝*

$$m\cdot f^*(a) \leqslant \int_a^A f^*(x)\,g(x)\,dx \leqslant M\cdot f^*(a)$$

և, երբ $A \to +\infty$*, սահմանում՝*

$$m\cdot f^*(a) \leqslant \int_a^{+\infty} f^*(x)\,g(x)\,dx \leqslant M\cdot f^*(a),$$

Այստեղից՝

$$\int_a^{+\infty} f^*(x)\,g(x)\,dx = \mu\cdot f^*(a), \quad m \leqslant \mu \leqslant M. \qquad (4)$$

Բայց $\int_a^A g(x)\,dx$ *անընդհատ ֆունկցիան հասնում է իր* m *և* M *եզրերին և ընդունում է նրանց միջև ամեն մի արժեք, այսինքն՝*

$$\mu = \int_a^{\xi} g(x)\,dx, \quad \text{որտեղ } a \leqslant \xi < +\infty.$$

(4)-ում ընդունելով $f^*(x) = f(x) - f(+\infty)$ *և տեղադրելով* μ*-ի համար հենց նոր գտած արտահայտությունը, կստանանք պահանջվող բանաձևը։*

451. ՄԱՍԵՐՈՎ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄԸ ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ։ *Դիցուք* $u = u(x)$ *և* $v = v(x)$ *ֆունկցիաները որոշված ու իրենց առաջին ածանցյալների հետ միասին անընդհատ են* $[a, b]$ *միջակայքի բոլոր կետերում, բացի* b *կետից (որը կարող է և* $+\infty$ *լինել)։ Այն ժամանակ տեղի ունի*

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

հավասարությունը, եթե կրկնակի տեղադրության տակ հասկանանք

$$\lim_{x\to b} u(x)\,v(x) - u(a)\,v(a)$$

տարբերությունը։ Այդ ժամանակ ենթադրվում է, որ հավասարության մեջ մասնակցող երեք արտահայտություններից (երկու ինտեգրալ և կրկնակի տեղադրությունը) երկուսը իմաստ ունեն. երրորդի գոյությունն արդեն բխում է այստեղից։

Իրոք, վերցնելով $a < x_0 < b$, *գրենք մասերով ինտեգրման սովորական բանաձևը* $[a, x_0]$ *միջակայքի համար, որտեղ բոլոր ինտեգրալները իսկական են՝*

$$\int_a^{x_0} u\,dv = [u(x_0)\,v(x_0) - u(a)\,v(a)] - \int_a^{x_0} v\,du.$$

Դիցուք այժմ այս հավասարության մեջ x_0-ն ձգտում է b-ի։ Պայմանի համաձայն, նրա մեջ մտնող երեք արտահայտություններից երկուսն ունեն վերջավոր սահմաններ, երբ $x \to x_0$*։ Հետևաբար, վերջավոր սահման ունի նաև երրորդ արտահայտությունը, և ապացուցվելիք հավասարությունն արդարացվում է սահմանային անցման օգնությամբ։

452. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։

$$1)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = x \log \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\, dx.$$

Մասերով ինտեգրման միջոցով այստեղ հաջողվեց անիսկական ինտեգրալը բերել իսկականի ․․ այդպիսով ապացուցել անիսկական ինտեգրալի գոյությունը [հմմտ. 447, 2) (գ)]։ Նույն եզակիությունն ունեն նաև հետևյալ ինտեգրալները՝

$$2)\ (ա)\ \int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2}\, dx = \int_0^1 \log x\, d \operatorname{arctg} x =$$

$$= \log x \cdot \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx = -\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx։$$

(բ) Նման ձևով՝

$$\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\, dx։$$

$$3)\ \int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = -\int_a^{\infty} \frac{d \cos x}{x} = -\frac{\cos x}{x}\Big|_a^{\infty} - \int_a^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx\ (a>0)։$$

Քանի որ և՛ կրկնակի տեղադրությունը, և՛ աջ կողմի ինտեգրալը իմաստ ունեն, ապա դրանով դարձյալ ապացուցված է ձախ կողմի ինտեգրալի գոյությունը [հմմտ. 439]։

Միանգամայն նման եղանակով կարելի է ցույց տալ $\int_a^{\infty} \frac{f(x)}{x^{\lambda}}\, dx\ (a, \lambda > 0)$ի

---

* Տես n° 443-ի դիտողությունը։

ինտեգրալի գոյությունը, եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է և նրա՝ $F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$ ինտեգրալը սահմանափակ է բոլոր $a<x$-երի համար [հմմտ. 441]։

Մասերով ինտեգրման ճանապարհով երբեմն ստացվում են անդրադարձ բանաձևեր, որոնց օգնությամբ այնուհետև արդեն հեշտությամբ կատարվում է առաջադրված ինտեգրալների հաշվումը։ Ցուցադրենք այդ հետևյալ օրինակների վրա (n-ը և k-ն՝ բնական թվեր են)՝

$$4)\quad I_n=\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^n\,dt։$$

Ունենք՝

$$I_n=-e^{-t}\cdot t^n\Big|_0^\infty+n\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{n-1}\,dt=nI_{n-1},$$

որտեղից՝ $I_n=n!$

Կրկնակի տեղադրության չքացումը այստեղ (և հետագա օրինակներում) առավելությունն է ստեղծում որոշյալ (և ոչ անորոշ) ինտեգրալների նկատմամբ մասերով ինտեգրման բանաձևի կիրառման համար։

$$5)\quad E_n=\int_0^\infty e^{-ax}\sin^n x\,dx\qquad(a>0)։$$

Ամենից առաջ, մասերով ինտեգրելով, կգտնենք՝

$$E_n=-\frac{1}{a}e^{-ax}\sin^n x\Big|_0^x+\frac{n}{a}\int_0^x e^{-ax}\sin^{n-1}x\cos x\,dx։$$

Քանի որ կրկնակի տեղադրությունը հավասար է զրոյի, ապա, նորից դիմելով մասերով ինտեգրման, կստանանք՝

$$E_n=-\frac{n}{a^2}e^{-ax}\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^x+\frac{n(n-1)}{a^2}\int_0^x e^{-ax}\sin^{n-2}x\cos^2x\,dx$$

$$-\frac{n}{a^2}\int_0^\infty e^{-ax}\sin^n x\,dx։$$

Եթե այստեղ $\cos^2 x$-*ը փոխարինենք* $(1-\sin^2 x)$-*ով, ապա հեշտությամբ կհանգենք անդրադարձ բանաձևի՝*

$$E_n = \frac{n(n-1)}{n^2+a^2} \cdot E_{n-2},$$

Քանի որ $E_0 = \frac{1}{a}$ *և* $E_1 = \frac{1}{1+a^2}$, *ապա վերջնականապես կենտ և զույգ* n-*ի դեպքում համապատասխանաբար կստանանք՝*

$$E_{2k-1} = \frac{(2k-1)!}{(1+a^2)(3^2+a^2)\ldots(\overline{2k-1}^2+a^2)},$$

$$E_{2k} = \frac{2k!}{a(2^2+a^2)(4^2+a^2)\ldots(\overline{2k}^2+a^2)},$$

6) ***Անվերջական ինտեգրալների դեպքի վրա հեշտությամբ տարածվում է նաև մասերով ինտեգրման ընդհանրացրած բանաձևը* [299 (7)]։**

Դիցուք, օրինակ, տված է

$$K = \int_0^\infty e^{-(p+1)x} \cdot L_n(x)\,dx$$

ինտեգրալը, որտեղ $p>0$ *և* $L_n(x)$-*ը՝ այսպես կոչված Լագերի* (E. Laguerre) n-*րդ բազմանդամն է՝*

$$L_n(x) = e^x \cdot \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Օգտվելով այդ բանաձևից, կունենանք՝

$$K = \int_0^\infty e^{-px} \cdot \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n} \cdot dx =$$

$$= \left\{ e^{-px} \cdot \frac{d^{n-1}(x^n e^{-x})}{dx^{n-1}} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}e^{-px}}{dx^{n-1}} \cdot x^n e^{-x} \right\} \Bigg|_0^\infty +$$

$$+ (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-x} \cdot \frac{d^n e^{-px}}{dx^n} dx = p^n \int_0^\infty x^n e^{-(p+1)x} dx$$

և, վերջնականապես [(*տես* 4)]՝

$$K = \frac{p^n}{(p+1)^{n+1}} \cdot n!$$

Նման ձևով ստացվում են՝

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) \cdot L_k(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{երբ } k \neq n, \\ (n!)^2, & \text{երբ } k = n: \end{cases}$$

453. ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՓՈԽԱՐԻՆՈՒՄԸ ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐՈՒՄ. *Դիցուք* $f(x)$ *ֆունկցիան որոշված ու անընդհատ է* $[a, b)$ *վերջավոր կամ անվերջ միջակայքում և, հետևաբար, իսկական իմաստով ինտեգրելի է նրա ամեն մի մասում, որը չի պարունակում* b *կետը, ընդ որում* b*-ն կարող է լինել և* $+\infty$. *այդ կետը, մեր ենթադրությամբ,* $f(x)$ *ֆունկցիայի միակ եզակի կետն է։*

Այժմ դիտարկենք մոնոտոն աճող մի $\varphi(t)$ *ֆունկցիա, որն իր* $\varphi'(t)$ *ածանցյալի հետ միասին անընդհատ է* $[\alpha, \beta)$ *միջակայքում, որտեղ* β*-ն կարող է և* $+\infty$ *լինել, և ենթադրենք, թե* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. *վերջին հավասարությունը պետք հասկանալ այն իմաստով, որ* $\lim\limits_{t \to \beta} \varphi(t) = b$։

Այդ պայմաններում տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt, \tag{5}$$

ենթադրելով, որ այդ ինտեգրալներից մեկը գոյություն ունի (մյուսի գոյությունն արդեն բխում է այստեղից)։ Երկրորդ ինտեգրալը կլինի իսկական կամ անիսկական՝ միակ β *եզակի կետով։*

Հակադարձ ֆունկցիայի վերաբերյալ թեորեմայի համաձայն [82], *պարզ է, որ* t*-ն ևս կարելի է դիտել որպես* x*-ի մոնոտոն աճող ու անընդհատ ֆունկցիա* $[a, b)$ *միջակայքում՝* $t = \theta(x)$, *ընդ որում* $\lim\limits_{x \to b} \theta(x) = \beta$։

Դիցուք x_0*-ն ու* t_0*-ն՝* x*-ի ու* t*-ի կամայական, բայց իրար համապատասխանող արժեքներ են* (a, b) *և* (α, β) *միջակայքերից։*

Այդ ժամանակ իսկական ինտեգրալում փոփոխականի փոխարինմամբ կունենանք՝

$$\int_a^{x_0} f(x)\,dx = \int_\alpha^{t_0} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Եթե գոյություն ունի, ասենք, (5) *ինտեգրալներից երկրորդը, ապա* x_0*-ն կամայական եղանակով կմոտեցնենք* a*-ին. այդ ժամանակ* $t_0=\theta(x_0)$*-ն կձգտի* β*-ին, և մենք կստանանք (5) բանաձևը, միաժամանակ ապացուցելով ձախակողմյան ինտեգրալի գոյությունը։*

Մեր դատողությունը միատեսակ կիրառելի է մոնոտոն նվազող $\varphi(t)$ *ֆունկցիայի դեպքում, երբ* $\alpha>\beta$։ *Այդպես սպառվում են նաև եզակի կետերի դասավորության մյուս հնարավոր դեպքերը։ Ձևափոխված ինտեգրալի մեջ սահմանները դնելիս միշտ պիտի հիշել, որ* α ստորին սահմանը պետք է համապատասխանի a ստորին սահմանին, իսկ β վերին սահմանը՝ b վերին սահմանին, անկախ նրանից, թե $\alpha<$ թե՞ $>\beta$.

***454. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։** 1) Հետևյալ ինտեգրալը*

$$\int_{x_0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-k^2)}}\qquad (k^2<1<x_0)$$

$x=\frac{1}{t^2}$, $dx=-\frac{2}{t^3}dt$ *տեղադրությամբ բերվում է այսպիսինի՝*

$$-2\int_{\frac{1}{\sqrt{x_0}}}^{0}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x_0}}}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

Այստեղ՝ $a=x_0$, $b=\infty$, $\alpha=\frac{1}{\sqrt{x_0}}$, $\beta=0$։ *Անիսկական ինտեգրալը վեր է ածվում իսկական ինտեգրալի։*

2) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},$$

տեղադրելով $x=a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi$։

Ցուցում։ Այստեղ՝ $\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{2}$, և որոնելի ինտեգրալը բերվում է իսկական ինտեգրալի՝

$$2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi=\pi.$$

3) Արդեն ցույց տանք $\int_0^{\infty}\sin x^2\,dx$ ինտեգրալի զուգամիտությունը, նրա մեջ տեղադրելով՝ $x=\sqrt{t}$, $dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$, $a=\alpha=0$, $b=\beta=\infty$։ Մենք կստանանք $\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ նախահայտորեն զուգամետ ինտեգրալը [441 կամ 452, 3)], հետևաբար, զուգամետ է նաև տված ինտեգրալը։ Հետաքրքրական է նշել, որ նրա մեջ ընդինտեգրալ ֆունկցիան $x\to\infty$ դեպքում ոչ մի սահմանի չի ձգտում, տատանվելով -1-ի ու $+1$-ի միջև։

Նման ձևով ապացուցվում է $\int_0^{\infty}\cos x^2\,dx$ ինտեգրալի զուգամիտության հարցը։

4) $\int_0^{\infty}\frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ ինտեգրալը հաշվելու համար [նրա զուգամիտությունը արդեն ցույց ենք տվել 447, 5) (բ)-ում] այն տրոհենք երկու ինտեգրալի՝ $\int_0^{\infty}=\int_0^1+\int_1^{\infty}$։ Նրանցից երկրորդում տեղադրելով $x=\frac{1}{t}$ ($a=1$, $b=\infty$, $\alpha=1$, $\beta=0$) և կստանանք՝

$$\int_1^{\infty}\frac{\log x}{1+x^2}\,dx=\int_1^0\frac{\log t}{1+t^2}\,dt=-\int_0^1\frac{\log x}{1+x^2}\,dx,$$

որտեղից հետևում է, որ տված ինտեգրալը հավասար է 0-ի։

5) Դիցուք տված է $\int_0^1\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ անիսկական ինտեգրալը. $x=\sin$

$(a=0,\ b=1,\ \alpha=0,\ \beta=\frac{\pi}{2})$ տեղադրությամբ այն բերվում է $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin t}\,dt$ իս-կական ինտեգրալին։

6) Հետևյալ ինտեգրալի

$$I=\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}$$

հաշվումը [հմմտ. 437, 2)] կարող է շատ պարզեցվել նպատակահարմար տեղադրությունների օգնությամբ։

Ամենից առաջ, նրան է բերվում հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{1+x^4},$$

տեղադրելով $x=\frac{1}{t}$ $(a=0,\ b=\infty,\ \alpha=\infty,\ \beta=0)$, այնպես որ՝

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{(1+x^2)\,dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}}։$$

Եթե այժմ տեղադրենք $x-\frac{1}{x}=z$ $(a=0,\ b=+\infty,\ \alpha=-\infty,\ \beta=+\infty)$, ապա անմիջապես կստանանք՝

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{z^2+2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}։$$

7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{tg}\theta}}$ ինտեգրալը հաշվելու համար բնական է տեղադրել՝ $t=\sqrt{\operatorname{tg}\theta}$, այսինքն՝ $\theta=\operatorname{arctg} t^2$ $(a=0,\ b=\frac{\pi}{2},\ \alpha=0,\ \beta=\infty)$. Մենք կհանգենք հենց նոր հաշված ինտեգրալին՝ $2\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^4}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$։

8) *Ստանալ հետևյալ բանաձևերը՝*

$$(ա)\quad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(\alpha^2 - x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}} \qquad (\alpha > 1),$$

$$(բ)\quad \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - \alpha^2)\sqrt{x^2-1}} = \frac{\arcsin \alpha}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} \qquad (0 < \alpha < 1),$$

$$(գ)\quad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}} \qquad (\alpha > 0),$$

$$(դ)\quad \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)\sqrt{x^2-1}} = \frac{\log(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2})}{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}} \qquad (\alpha > 0),$$

$$(ե)\quad \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)\sqrt{x^2+1}} = \frac{\log(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1})}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}} \qquad (\alpha > 1),$$

$$= 1 \qquad (\alpha = 1),$$

$$= \frac{\arccos \alpha}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} \qquad (0 < \alpha < 1)։$$

Ցուցում։ Բոլոր դեպքերում օգտվել Աբելի տեղադրությունից [272]։

9) *Հետևյալ ինտեգրալների՝*

$$\int_{a}^{\infty} \frac{dx}{x \log^{\lambda} x}, \quad \int_{A}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \log x \cdot \log^{\lambda}(\log x)} \qquad (\lambda > 0,\ a > 1,\ A > e)$$

զուգամիտության հարցը անմիջապես լուծվում է, եթե

$$t = \log x, \quad u = \log(\log x)$$

տեղադրությամբ նրանք բերենք այսպիսի ինտեգրալների՝

$$\int_{\log a}^{\infty} \frac{dt}{t^{\lambda}}, \qquad \int_{\log(\log A)}^{\infty} \frac{du}{u^{\lambda}}.$$

Երկուսն էլ զուգամետ են, երբ $\lambda > 1$, *և տարամետ են, երբ* $\lambda \leq 1$։

Հաջորդ վարժություններում $f(u)$-*ի տակ հասկացվում է կամայական ֆունկցիա, որն անընդհատ է* $0 \leq u$-*ի դեպքում։*

10) Ապացուցել, որ՝

$$\int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\log x\,\frac{dx}{x}=\log a\int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{x}\qquad(a>0),$$

եթե միայն ինտեգրալները գոյություն ունեն:

Ցուցում: Դիմել հետևյալ տեղադրությանը՝

$$x=ae^{u}\ (\alpha=-\infty,\ \beta=+\infty):$$

11) Ապացուցել, որ $(p>0)$՝

$$(\text{ա})\quad \int_0^{\infty} f(x^{p}+x^{-p})\log x\,\frac{dx}{x}=0,$$

$$(\text{բ})\quad \int_0^{\infty} f(x^{p}+x^{-p})\log x\,\frac{dx}{1+x^{2}}=0,$$

եթե միայն ինտեգրալները գոյություն ունեն:

Օրինակ, (ա)-ի համար ունենք՝ $\int_0^{\infty}=\int_0^{1}+\int_1^{\infty}$, *բայց* $\int_1^{\infty}=-\int_0^{1}$, *ինչպես դրանում հեշտ է համոզվել* $x=\frac{1}{t}$ *տեղադրությամբ, և այլն:*

12) Ենթադրելով, որ աջակողմյան ինտեգրալը գոյություն ունի, ապացուցել հետևյալ բանաձևը՝

$$\int_0^{\infty} f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^{2}\right]dx=\frac{1}{A}\int_0^{\infty} f(y^{2})\,dy\qquad(A,B>0):$$

Հետևյալ տեղադրությունը՝ $y=Ax-\frac{B}{x}$ $(a=-\infty,\ b=+\infty,\ \alpha=0,\ \beta=+\infty)$ *տալիս է՝*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y^{2})\,dy=\int_0^{+\infty} f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^{2}\right]\cdot\left(A+\frac{B}{x^{2}}\right)dx=$$

$$=A\int_0^{+\infty} f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^{2}\right]dx+B\int_0^{+\infty} f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^{2}\right]\cdot\frac{dx}{x^{2}}:$$

Սակայն վերջին ինտեգրալը՝ $x = -\frac{B}{At}$ ($a = 0$, $b = +\infty$, $\alpha = -\infty$, $\beta = 0$) տեղադրությամբ բերվում է հետևյալին՝

$$A \int_{-\infty}^{0} f\left[\left(At - \frac{B}{t}\right)^2\right] dt,$$

այնպես որ՝

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y^2)\, dy = A \int_{-\infty}^{\infty} f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right] dx.$$

Այստեղից էլ (ընդինտեգրալ ֆունկցիայի զույգ լինելու շնորհիվ) բխում է պահանջվող բանաձևը։

Վերջում նկատենք, որ անվերջ սահման ունեցող $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ ինտեգրալը միշտ կարող է հարմար տեղադրությամբ բերվել վերջավոր սահման ունեցող ինտեգրալի (իսկականի կամ անիսկականի)։ Օ ր ի ն ա կ, երբ $a > 0$, կարելի է տեղադրել $x = \frac{1}{t}$՝

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \int_0^{\frac{1}{a}} f\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t^2}.$$

Հակադարձաբար, $\int_a^b f(x)\, dx$ անիսկական ինտեգրալը, որի միակ եզակի կետը b-ն է, միշտ կարող է բերվել անվերջ սահման ունեցող ինտեգրալի (առանց ուրիշ եզակի կետերի)։ Օ ր ի ն ա կ, տեղադրելով $x = b - \frac{1}{t}$, կըստանանք՝

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{dt}{t^2}.$$

§ 4. ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ ՀԱՇՎԵԼՈՒ ՀԱՏՈՒԿ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐ

455. *ՄԻ ՔԱՆԻ ՆՇԱՆԱՎՈՐ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ.* *Սկսենք մի քանի կարևոր ինտեգրալներ արհեստական եղանակներով հաշվելուց։*

1° Էյլերի (L. Euler) *ինտեգրալը*.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx.$$

Նրա գոյությունը արդեն ցույց ենք տվել։ Էյլերի ինտեգրալի հաշվումը հիմնված է փոփոխականի փոխարինման օգտագործման վրա։ Տեղադրելով $x=2t$, *ունենք*՝

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \sin 2t\, dt=\frac{\pi}{2}\log 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \sin t\, dt+2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \cos t\, dt.$$

Վերջին ինտեգրալում տեղադրելով $t=\frac{\pi}{2}-u$, *կբերենք*

$2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log \sin u\, du$ *տեսքին, այնպես որ, I-ն հաշվելու համար վերջնականապես ստանում ենք հետևյալ հավասարումը*՝

$$I=\frac{\pi}{2}\cdot\log 2+2I, \quad \text{որտեղից՝} \quad I=-\frac{\pi}{2}\log 2.$$

Այս ինտեգրալին են բերվում, նշանի ճշգրտությամբ, նաև հետևյալ իսկական ինտեգրալները [*հմմտ.* **452**, *1) և 2) (բ)*]՝

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\, dx, \quad \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\, dx.$$

2° Դիտենք Էյլերի — Պուասոնի հայտնի ինտեգրալի հաշվումը՝

$$K = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx,$$

որը հանդիպում է հավանականությունների տեսության մեջ։ Այդ նպատակով նախ արտածենք մի քանի անհավասարություններ։

Դիֆերենցիալ հաշվի սովորական մեթոդներով դժվար չէ ցույց տալ, որ $(1+t)e^{-t}$ ֆունկցիան հասնում է իր մեծագույն արժեքին՝ 1-ին, երբ $t=0$։ Հետևաբար, $t \neq 0$ համար կլինի՝

$$(1+t)e^{-t} < 1.$$

Տեղադրելով այստեղ՝ $t = \mp x^2$, կստանանք՝

$$(1-x^2)e^{x^2} < 1 \text{ և } (1+x^2)e^{-x^2} < 1,$$

որտեղից՝

$$1-x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2} \quad (x>0).$$

Այս անհավասարություններից առաջինում x-ի փոփոխումը սահմանափակելով $(0, 1)$ միջակայքով (այնպես որ $1-x^2>0$), իսկ երկրորդում x-ը համարելով կամայական, այդ բոլոր արտահայտությունները բարձրացնենք աստիճան՝ ցանկացած n բնական ցուցիչով. այդ մեզ տալիս է*

$$(1-x^2)^n < e^{-nx^2} \ (0<x<1) \quad \text{և} \quad e^{-nx^2} < \frac{dx}{(1+x^2)^n} \ (x>0).$$

Ինտեգրելով առաջին անհավասարությունը 0-ից 1 միջակայքում, իսկ երկրորդը՝ 0-ից $+\infty$, կստանանք՝

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx < \int_0^1 e^{-nx^2}dx < \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}dx < \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

* Դրական անդամներով անհավասարությունների համար անդամ առ անդամ բնական աստիճան բարձրացնելը թույլատրելի է։

Բայց՝

$$\int_0^{\infty} e^{-nx^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot K \quad (\text{տեղադրում՝ } u = \sqrt{n}\,x),$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\,dt = \frac{2n!!}{2n+1!!} \quad (\text{տեղադրում՝ } x = \cos t),$$

և, վերջապես՝

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} t\,dt = \frac{2n-3!!}{2n-2!!}\cdot\frac{\pi}{2} \quad (\text{տեղադրում՝ } x = \operatorname{ctg} t).$$

[Մենք այստեղ օգտվեցինք $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx$ ինտեգրալի հայտնի արտահայտություններից. 300 (8)]։ Այսպիսով, K-ի մեզ անհայտ արժեքը կարող է գտնվել հետևյալ երկու արտահայտությունների միջև՝

$$\sqrt{n}\cdot\frac{2n!!}{2n+1!!} < K < \sqrt{n}\cdot\frac{2n-3!!}{2n-2!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

այնպես որ, քառակուսի բարձրացնելով և ձևափոխելով, կստանանք՝

$$\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{(2n!!)^2}{(2n-1!!)^2(2n+1)} < K^2 < \frac{n}{2n-1}\cdot\frac{(2n-3!!)^2(2n-1)}{(2n-2!!)^2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Այժմ Վալլիսի

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n!!)^2}{(2n-1!!)^2\,(2n+1)}$$

բանաձևից [305] հեշտ է տեսնել, որ ձախակողմյան ու աջակողմ-

յան արտահայտությունները ձգտում են միևնույն $\frac{\pi}{4}$ սահմանին, երբ $n \to \infty$, հետևաբար՝

$$K^2 = \frac{\pi}{4} \quad \text{և} \quad K = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\text{քանի որ } K > 0).$$

3) Դիտարկենք, վերջապես, հետևյալ ինտեգրալը՝

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Մենք արդեն գիտենք, որ նա զուգամետ է [439, 452, 3)]. Ինտեգրալը ներկայացնենք շարքի տեսքով՝

$$J = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{\nu \cdot \frac{\pi}{2}}^{(\nu+1)\frac{\pi}{2}}.$$

Ընդունելով $\nu = 2\mu$ կամ $2\mu - 1$ և կատարելով, համապատասխանաբար, $x = \mu\pi + t$ կամ $x = \mu\pi - t$ տեղադրությունը, կունենանք՝

$$\int_{2\mu \cdot \frac{\pi}{2}}^{(2\mu+1)\cdot\frac{\pi}{2}} = (-1)^{\mu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\mu\pi + t}\, dt$$

և

$$\int_{(2\mu-1)\cdot\frac{\pi}{2}}^{2\mu \cdot \frac{\pi}{2}} = (-1)^{\mu-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\mu\pi - t}\, dt.$$

Այստեղից՝

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\,dt+\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{t+\mu\pi}+\frac{1}{t-\mu\pi}\right)\sin t\,dt.$$

Քանի որ

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{t+\mu\pi}+\frac{1}{t-\mu\pi}\right)$$

շարքը $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ միջակայքում հավասարաչափ զուգամետ է, որովհետև մաժորվում է $\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2-\frac{1}{4}}$ զուգամետ շարքով, ապա այն կարելի է, նրա բոլոր անդամները բազմապատկելով $\sin t$ սահմանափակ ֆունկցիայով,— ինտեգրել անդամ առ անդամ. Այդ մեզ իրավունք է տալիս J-ի արտահայտությունը գրել հետևյալ տեսքով՝

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cdot\left[\frac{1}{t}+\sum_{1}^{\infty}(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{t+\mu\pi}+\frac{1}{t-\mu\pi}\right)\right]dt.$$

Բայց քառակուսի փակագծերի ներսի արտահայտությունը $\frac{1}{\sin t}$ ֆունկցիայի վերլուծումն է պարզագույն կոտորակների [413, 7)]. Այսպիսով, վերջնականապես՝

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2}.$$

456. ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ԳՈՒՄԱՐՆԵՐԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ. ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐՈՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ԴԵՊՔԸ. Եթե $f(x)$ ֆունկցիան անսահմանափակ է $[a, b]$ միջակայքում, ապա կամայական (ռիմանյան) ինտեգրալ գումարներից օգտվել՝ նրա ինտեգրալը հաշվելու համար այդ միջակայքում, հասկանալի է, չի կարելի. Սակայն միշտ հնարավոր է այնպես ընտրել այդ գումարները, որպեսզի նրանք

միջակայքը տրոհելիս ձգտեն անիսկական ինտեգրալի արժեք...
Մենք այդ ցույց կտանք պարզագույն դեպքի համար, երբ ֆու...
ցիան մոնոտոն է։

Այսպես, ուրեմն, դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան $(0, a]$ $a(>0)$ ...
ջակայքում դրական է, մոնոտոն նվազում է և ձգտում է $+$...
երբ $x \to 0$. Միաժամանակ ընդունենք, որ նրա համար գոյ...
թյուն ունի անիսկական ինտեգրալ a-ից 0: $[0, a]$ միջակա...
տրոհելով n հավասար մասերի, կունենանք՝

$$\int_0^a f(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{\frac{\nu}{n}a}^{\frac{\nu+1}{n}a} f(x)\,dx < \int_0^{\frac{a}{n}} f(x)\,dx + \sum_{\nu=1}^{n-1} f\left(\frac{\nu}{n}a\right)\cdot\frac{a}{n}$$

և առավել ևս՝

$$\int_0^a f(x)\,dx < \int_0^{\frac{a}{n}} f(x)\,dx + \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}a\right)\cdot\frac{a}{n},$$

Միաժամանակ՝

$$\int_0^a f(x)\,dx > \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}a\right)\cdot\frac{a}{n},$$

այնպես որ, երկուսը միասին՝

$$0 < \int_0^a f(x)\,dx - \frac{a}{n}\cdot\sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}a\right) < \int_0^{\frac{a}{n}} f(x)\,dx.$$

Քանի որ վերջին ինտեգրալը $n\to\infty$ դեպքում ձգտում է զրոյ...
ապա վերջնականապես՝

---

* Նա իրենից ներկայացնում է տարբերություն $\int_0^a$ անիսկական ...
ինտեգրալի և նրան ձգտող $\int_{\frac{a}{n}}^a$ իսկական ինտեգրալի։

$$\int_0^a f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n} a\right).$$

Դրական աճող f(x) ֆունկցիայի համար, որը ձգտում է $+\infty$, երբ $x \to a$, նման ձևով ստացվում է՝

$$\int_0^a f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} f\left(\frac{\nu}{n} a\right).$$

Վերջապես, փոխելով i-ի նշանը, հեշտ է նման բանաձևեր ստանալ նաև մոնոտոն բացասական ֆունկցիայի համար։

Դիտարկենք օրինակներ. 1) $\int_0^1 \log x\,dx$ ինտեգրալը հաշվելու համար (0 եզակի կետով) ունենք՝

$$\int_0^1 \log x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \log \frac{\nu}{n} = \lim_{n\to\infty} \log \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

Քանի որ [76, 4)] $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$, ապա նախորդ սահմանը հավասար է -1-ի. փաստորեն հենց այդպիսին էլ է տված ինտեգրալի արժեքը։

2) Որպես երկրորդ օրինակ վերցնենք Էյլերի բարդ ինտեգրալը՝ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\,dx$։ Այս դեպքում՝

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{\nu=1}^{n-1} \log \sin \frac{\nu\pi}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \log \prod_{\nu=1}^{n-1} \sin \frac{\nu\pi}{2n}.$$

Ցանկանալով ստանալ պարզ արտահայտություն վերջին ինտեգրալի համար, դիտարկենք $(z^{2n}-1)$-ը (z^2-1)-ի վրա բաժանելուց ստացվող ամբողջ բազմանդամը և այն վերլուծենք գծային բազմապատիկների, միասնակ

համախմբելով համալուծ արմատներին համապատասխանող բազմապատիկները։ Մենք կստանանք [±1-ից տարբեր ամեն մի z-ի համար]՝

$$\frac{z^{2n}-1}{z^2-1}=\prod_{\nu=1}^{n-1}\left[\left(z-\cos\frac{\nu\pi}{n}\right)^2+\sin^2\frac{\nu\pi}{n}\right]^{*},$$

Երբ z=1 այստեղից գտնում ենք՝

$$n=\prod_{\nu=1}^{n-1}\left[\left(1-\cos\frac{\nu\pi}{n}\right)^2+\sin^2\frac{\nu\pi}{n}\right]=4^{n-1}\prod_{\nu=1}^{n-1}\sin^2\frac{\nu\pi}{2n},$$

այնպես որ, վերջապես՝

$$\prod_{\nu=1}^{n-1}\sin\frac{\nu\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Ուստի որոնելի ինտեգրալը հավասար կլինի [հմմտ. 455, 1)]՝

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin x\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}\log n-(n-1)\log 2}{n}=-\frac{\pi}{2}\log 2.$$

457. ԱՆՎԵՐՋ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐՈՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ԴԵՊՔԸ. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված ու ինտեգրելի է 0-ից մինչև $+\infty$ միջակայքում։ Այդ միջակայքը տրոհելով անվերջ բազմությամբ $h>0$ երկարություն ունեցող հավասար միջակայքերի, կազմենք $\sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu h)\cdot h$ գումարը, որն իր կառուցվածքով հիշեցնում է ռիմանյան գումար։ Զուգամե՞տ է արդյոք այդ շարքը, կձգտի՞ արդյոք նրա գումարը $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ անիսկական ինտեգրալին, երբ $h\to 0$, — ահա այն հարցերը, որոնցով պետք է զբաղվենք, $f(x)$-ի նկատմամբ որոշ մասնավոր ենթադրություններ անելով։

Նախ ենթադրենք, թե $f(x)$-ը դրական է և մոնոտոն նվազելով ձգտում է 0-ի, երբ $x\to+\infty$։ Այդ ժամանակ՝

* Տես n° 295 4)-ի ծանոթությունը։

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{\nu h}^{(\nu+1)h} f(x)\,dx < h \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu h),$$

իսկ մյուս կողմից, ակներևաբար՝

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx > h \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu h) = h \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu h) - h \cdot f(0),$$

այնպես որ՝

$$0 < h \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu h) - \int_0^{\infty} f(x)\,dx < h \cdot f(0),$$

և՝

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{h \to 0} h \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu h)\text{։} \tag{1}$$

Օրինակներ։ 1) Ընդունենք՝ $f(x) = e^{-x}$*։ Այդ դեպքում՝*

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{h \to 0} h \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\nu h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{1 - e^{-h}} = 1\text{։}$$

2) *Գիտենալով*

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ինտեգրալի արժեքը ուրիշ նկատառումներից, մենք այնուամենայնիվ կարող ենք արտածված բանաձևը կիրառել և, այդպիսով, ստանալ՝

$$\lim_{h \to 0} h \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\nu^2 h^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\text{։}$$

Եթե տեղադրենք $e^{-h^2} = t$, *ապա՝* $h = \sqrt{\log \frac{1}{t}} \sim \sqrt{1-t}$, *երբ* $t \to 1$։ *Այստեղից՝ մի հետաքրքիր սահմանային առնչություն՝*

$$\lim_{t \to 1-0} \sqrt{1-t} \cdot (1 + t + t^4 + t^9 + t^{16} + \cdots) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\text{։}$$

Անցնենք ավելի ընդհանուր դեպքին, առայժմ f(x)-ից ոչինչ չպահանջելով, բացի ինտեգրելիությունից։ Ունենք՝

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{A} f(x)\,dx + \int_A^{\infty} f(x)\,dx.$$

Բավականաչափ մեծ A-ի դեպքում վերջին ինտեգրալը բացարձակ արժեքով ցանկացած չափով փոքր կլինի*. Ինչպիսին էլ լինի A-ն, այնուհետև h-ը կվերցնենք այնպես, որ $\frac{A}{h}$-ը ամբողջ լինի. Այդ ժամանակ, A = const. դեպքում, իսկական ինտեգրալի սահմանման համաձայն՝

$$\lim_{h\to 0} \sum_{\nu=0}^{\frac{A}{h}-1} f(\nu h)\cdot h = \int_0^{A} f(x)\,dx,$$

այժմ պարզ է, որ (1) հավասարության իրավացիության համար բավական է, որ տեղի ունենա հետևյալ պայմանը՝

$$\lim_{\substack{A\to+\infty \\ h\to 0}} \sum_{\nu=\frac{A}{h}}^{\infty} f(\nu h)\cdot h = 0. \tag{2}$$

Իրոք, այդ ժամանակ՝

$$\int_0^{\infty} - \sum_{\nu=0}^{\infty} = \Big[\int_0^{A} - \sum_{\nu=0}^{\frac{A}{h}-1}\Big] + \int_A^{\infty} - \sum_{\nu=\frac{A}{h}}^{\infty}$$

---

* Նա իրենից ներկայացնում է տարբերություն $\int_0^{\infty}$ անիսկական ինտեգրալի և A→∞ դեպքում նրան ձգտող $\int_0^{A}$ իսկական ինտեգրալի։

հավասարության աջ մասի բոլոր գումարելիները կլինեն ցանկացած չափով փոքր, երբ A-ն բավականաչափ մեծ լինի և h-ը՝ բավականաչափ փոքր։

(2) պայմանը ավտոմատորեն բավարարվում է f(x)-ի նկատմամբ առաջ արված ենթադրությունների դեպքում, որովհետև՝

$$0 < \sum_{\nu=\frac{A}{h}}^{\infty} f(\nu h)\cdot h < \int_{A}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Այդ պայմանը բավարարվում է նաև այն դեպքում, երբ $f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$, որտեղ $\varphi(x)$-ը (թեկուզ և $0<x_0\leqslant x$ համար) բավարարում է այն պայմաններին, որոնք վերևում առաջադրվել էին $f(x)$-ի համար, իսկ $\psi(x)$-ը սահմանափակ է՝ $|\psi(x)|\leqslant L$. Այդ դեպքում՝

$$\left|\sum_{\nu=\frac{A}{h}}^{\infty}\varphi(\nu h)\cdot\psi(\nu h)\right| \leqslant L\cdot\sum_{\nu=\frac{A}{h}}^{\infty}\varphi(\nu h)\cdot h < L\cdot\int_{A}^{\infty}\varphi(x)\,dx$$

և այլն։

3) Որպես օրինակ դիտարկենք $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ ինտեգրալը. այստեղ՝ $\varphi(x)=\frac{1}{x^2}$, $\psi(x)=\sin^2 x$։ Ունենք՝

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx=\lim_{h\to 0} h\cdot\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin^2 \nu h}{(\nu h)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin^2 \nu h}{\nu^2},$$

Վերջին գումարը հաշվելու համար նախ կստանանք, որ՝

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin^2 \nu h}{\nu^2}\right\}'_h=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin 2\nu h}{\nu}=\frac{\pi-2h}{2}=\frac{\pi}{2}-h$$

[434, 6) (բ)]։ Անդամ առ անդամ դիֆերենցումը $h\neq 0$ դեպքում թույլատրելի է n° 407-ի 6-րդ թեորեմայի համաձայն՝ ածանցյալներից կազմված շարքի

հավասարաչափ զուգամիտության շնորհիվ [ըստ Դիրիխլեի հայտանիշի, 403]։ Կիրառելով, կգտնենք մեզ հետաքրքրող գումարի համար՝ $\frac{\pi - h}{2} \cdot h$։ Այստեղից, վերջապես՝

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \lim_{h \to 0} \frac{\pi - h}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Ուրիշ դեպքերում (2) պայմանի բավարարվելը հարկ է լինում ստուգել անմիջականորեն։

4) Դիցուք, օրինակ, առաջադրված է $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ ինտեգրալը։ Սահմանափակվենք (որի իրավունքը մենք, ակներևաբար, ունենք) $h = \frac{\pi}{k}$ և $A = m\pi$ արժեքներով, որտեղ k-ն և m-ը՝ բնական թվեր են։

Մեզ հետաքրքրող գումարը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\sum_{n=km}^{\infty} \frac{\sin nh}{nh} \cdot h = \sum_{n=km}^{k(m+1)-1} + \sum_{n=k(m+1)}^{k(m+2)-1} + \cdots$$

Դժվար չէ համոզվել, որ աջ կողմի յուրաքանչյուր վերջավոր գումարի սահմաններում գումարելիները կունենան միևնույն նշանը, որը փոխվում է մի գումարից մյուսին անցնելիս։ Ընդհանուր առմամբ, աջ կողմի շարքը կլինի Լայբնիցի տիպի շարք։ Այդ պատճառով նրա գումարը բացարձակ արժեքով փոքր կլինի առաջին գումարելիի բացարձակ արժեքից։ Մյուս կողմից, քանի որ $kmh = m\pi = A$, ուստի՝

$$\left| \sum_{n=km}^{k(m+1)-1} \frac{\sin nh}{nh} \cdot h \right| = \sum_{n=km}^{k(m+1)-1} \frac{|\sin nh|}{nh} \cdot h <$$

$$< \frac{1}{A} \sum_{n=km}^{k(m+1)-1} |\sin nh| \cdot h = \frac{1}{A} \sum_{i=0}^{k-1} \sin ih \cdot h.$$

Իսկ վերջին գումարը, որպես $\int_0^{\pi} \sin x\, dx = 2$ ինտեգրալի ինտեգրալ գումար, փոքր կլինի ամեն մի $C > 2$ թվից, երբ h-ը բավականաչափ փոքր լինի, իսկ այդ դեպքում՝

$$\left|\sum_{n=km}^{\infty} \frac{\sin nh}{nh} \cdot h\right| < \frac{C}{A},$$

որտեղից էլ բխում է (2) պայմանի բավարարվելը։

Առաջադրված ինտեգրալի հաշվումն ինքը, որն արդարացվում է շարադրված նկատառումներով, կատարվում է շատ պարզ [տես 434, 6) (բ)]՝

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{n} = \lim_{h\to 0} \frac{\pi - h}{2} = \frac{\pi}{2},$$

որը վերևում [455, 3°] ստացել էինք այլ ճանապարհով։

458. ՖՐՈՒԼԼԱՆԻԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԸ։ Դիտարկենք սովորաբար Ֆրուլլանիի (G. Froullani) ինտեգրալներ կոչվող անիսկական ինտեգրալների մի մասնավոր տեսակի գոյության ու հաշվելու հարցը, այն է՝

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx \quad (a, b > 0).$$

I. f(x) ֆունկցիայի նկատմամբ անենք հետևյալ ենթադրությունները՝ 1° f(x)-ը որոշված ու անընդհատ է $0 \leqslant x$-երի համար և 2° գոյություն ունի

$$f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

վերջավոր սահմանը։

1°-ից պարզ է, որ (երբ $0 < \delta < \Delta < +\infty$) գոյություն ունի հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = \int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(ax)}{x}\, dx - \int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(bx)}{x}\, dx =$$

$$= \int_{a\delta}^{a\Delta} \frac{f(z)}{z}\, dz - \int_{b\delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z}\, dz = \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(z)}{z}\, dz - \int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z}\, dx.$$

իսկ առաջադրված ինտեգրալը որոշվում է հետևյալ հավասարությամբ՝

$$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=\lim_{\delta\to 0}\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}\,dz-\lim_{\Delta\to+\infty}\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}\,dz.$$

Վերջին երկու ինտեգրալների նկատմամբ զատ-զատ կիրառելով միջին արժեքի ընդհանրացրած թեորեման կստանանք՝

$$\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}\,dz=f(\xi)\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{dz}{z}=f(\xi)\cdot\log\frac{b}{a}\qquad (\textit{որտեղ } a\delta\leqslant\xi\leqslant b\delta)$$

և, նման ձևով՝

$$\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}\,dz=f(\eta)\cdot\log\frac{b}{a}\qquad (\textit{որտեղ } a\Delta\leqslant\eta\leqslant b\Delta).$$

Քանի որ, ակներևաբար, $\xi\to 0$ (*երբ* $\delta\to 0$), *իսկ* $\eta\to+\infty$ (*երբ* $\Delta\to+\infty$), *ապա այդտեղից՝*

$$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=[f(0)-f(+\infty)]\cdot\log\frac{b}{a}. \tag{3}$$

Օրինակներ։ 1) Հետևյալ ինտեգրալի դեպքում՝

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$$

ունենք՝

$$f(x)=e^{-x},\ f(0)=1,\ f(+\infty)=0,$$

այնպես որ ինտեգրալի արժեքը կլինի $\log\frac{b}{a}$։

2) Դիցուք տված է հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_0^{\infty} \log \frac{p+qe^{-ax}}{p+qe^{-bx}} \cdot \frac{dx}{x} \qquad (p,\ q>0):$$

Քանորդի լոգարիթմը փոխարինելով լոգարիթմների տարբերությամբ, կարելի է այստեղ ընդունել՝

$$f(x)=\log(p+qe^{-x}),\ \text{այնպես որ}\ f(0)\log(p+q)\ \text{և}\ f(+\infty)=\log p:$$

Պատասխան՝ $\log\left(1+\frac{q}{p}\right)\cdot\log\frac{b}{a}$:

3) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} ax-\operatorname{arctg} bx}{x}\,dx:$$

Այս դեպքում՝

$$f(x)=\operatorname{arctg} x,\ f(0)=0,\ f(+\infty)=\frac{\pi}{2}:$$

Պատասխան՝ $\frac{\pi}{2}\log\frac{a}{b}$:

II. Երբեմն $f(x)$ ֆունկցիան $x\to+\infty$ դեպքում վերջավոր սահման չունի, բայց դրա փոխարեն գոյություն ունի հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_A^{+\infty}\frac{f(z)}{z}\,dz:$$

Վերևում բերված դատողություններում Δ-ն անվերջապես փոխարինելով $+\infty$-ով, (3)-ի փոխարեն կստանանք՝

$$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=f(0)\cdot\log\frac{b}{a}: \qquad (3ա)$$

Օրինակ 4)՝

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\, dx = \log \frac{b}{a}$$

(որովհետև $\int_A^{\infty} \frac{\cos z}{z}\, dz$ *ինտեգրալը, ինչպես գիտենք, գոյություն ունի)։*

III. *Նման ձևով, եթե* $f(x)$ *ֆունկցիայի անընդհատությունը խախտվում է* $x=0$ *կետում, բայց գոյություն ունի՝*

$$\int_0^{A} \frac{f(z)}{z}\, dz \qquad (A < +\infty)$$

ինտեգրալը, ապա՝

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = f(+\infty) \cdot \log \frac{a}{b}. \tag{3բ}$$

Ի միջի այլոց, այս դեպքը նախորդին է բերվում՝ $x = \frac{1}{t}$ *տեղադրությամբ։*

459. ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ ԱՆՎԵՐՋ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐՈՎ. *Վերջում դիտարկենք անվերջ սահմաններով ինտեգրալների մի տեսակ ևս՝*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx,$$

որտեղ $P(x)$*-ն ու* $Q(x)$*-ը՝ ամբողջ բազմանդամներ են։ Ենթադրենք, թե* $Q(x)$ *բազմանդամը իրական արմատներ չունի և* $P(x)$*-ի աստիճանը առնվազն երկու միավորով ցածր է* $Q(x)$*-ի աստիճանից։ Այս պայմաններում ինտեգրալը գոյություն ունի* [440, 2)]. *հարցը միայն այն հաշվելու մասին է։*

Եթե $x_\lambda = \alpha_\lambda + i\beta_\lambda$ $(\beta_\lambda \gtrless 0,\ \lambda = 1, 2, \ldots)$՝ $Q(x)$ *բազման-*

դամի իրարից տարբեր արմատներ են, ապա $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ կոտորակը պարզագույն կոտորակների է վերլուծվում հետևյալ կերպ՝

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{\lambda}\left[\frac{A_{\lambda}}{x-x_{\lambda}}+\frac{A'_{\lambda}}{(x-x_{\lambda})^{2}}+\dots\right], \tag{4}$$

ընդ որում յուրաքանչյուր փակագծի մեջ արմատների թիվը հավասար է համապատասխան արմատի բազմապատիկության ցուցիչին*։

Ինտեգրալներ հաշվելու տարրական եղանակները տարածելով իրական փոփոխականի կոմպլեքս ֆունկցիաների դեպքի վրա, անմիջապես տեսնում ենք, որ $m>0$ դեպքում՝

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x-x_{\lambda})^{m+1}}=-\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{(x-x_{\lambda})^{m}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=0,$$

հետևաբար՝

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{\lambda}\frac{A_{\lambda}}{x-x_{\lambda}}\,dx=\lim_{h\to+\infty}\int_{-h}^{h}\sum_{\lambda}\frac{A_{\lambda}}{x-x_{\lambda}}\,dx.$$

Մյուս կողմից՝

$$\frac{1}{x-x_{\lambda}}=\frac{1}{x-\alpha_{\lambda}-\beta_{\lambda}i}=\frac{x-\alpha_{\lambda}}{(x-\alpha_{\lambda})^{2}+\beta_{\lambda}^{2}}+i\,\frac{\beta_{\lambda}}{(x-\alpha_{\lambda})^{2}+\beta_{\lambda}^{2}}$$

և

$$\int_{-h}^{h}\frac{dx}{x-x_{\lambda}}=\left\{\frac{1}{2}\log\left[(x-\alpha_{\lambda})^{2}+\beta_{\lambda}^{2}\right]+i\,\operatorname{arctg}\frac{x-\alpha_{\lambda}}{\beta_{\lambda}}\right\}\Bigg|_{-h}^{h}=$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{(h-\alpha_{\lambda})^{2}+\beta_{\lambda}^{2}}{(h+\alpha_{\lambda})^{2}+\beta_{\lambda}^{2}}+i\left[\operatorname{arctg}\frac{h-\alpha_{\lambda}}{\beta_{\lambda}}+\operatorname{arctg}\frac{h+\alpha_{\lambda}}{\beta_{\lambda}}\right],$$

* VIII գլխում [262] մենք ունեցել ենք նման վերլուծություն, սակայն այնտեղ աշխատեցինք խուսափել կեղծություններից և, կեղծ արմատների դեպքում, դիտարկում էինք այնպիսի կոտորակներ, որոնց համար հայտարարներ էին ծառայում իրական գործակիցներ ունեցող քառակուսի եռանդամի աստիճանները։ Իսկ այստեղ՝ կեղծ արմատները մեկնաբանում ենք այնպես, ինչպես այնտեղ իրական արմատները։

Երբ $h \to +\infty$, *վերջին արտահայտության մեջ առաջին գումարելին ձգտում է* 0*-ի, իսկ երկրորդը՝* $+\pi i$*-ի կամ* $-\pi i$*-ի՝ նայած թե* $\beta_\lambda > 0$, *թե* < 0։

Այսպիսով հանգում ենք հետևյալ արդյունքին՝

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \pi i \cdot \sum_{\lambda} \pm A_\lambda ,$$

որտեղ A_λ*-ի մոտ դրվում է* + *նշան, երբ* $\beta_\lambda > 0$, *և* — *նշան, երբ* $\beta_\lambda < 0$։ *Այս բանաձևը կարելի է որոշ ձևափոխման ենթարկել հետևյալ նկատառումներից ելնելով։ (4) նույնության երկու մասն էլ բազմապատկենք* x*-ով։ Երբ* $x \to +\infty$, *ձախ մասը կձգտի 0-ի, քանի որ* $x \cdot P(x)$*-ի աստիճանը այնուամենայնիվ ցածր է* $Q(x)$*-ի աստիճանից։ Աջ մասում գծային հայտարարներ ունեցող բոլոր անդամները կոչնչանան, այնպես որ մնացած անդամների գումարը նույնպես 0-ի կձգտի։ Այստեղից՝* $\sum_{\lambda} A_\lambda = 0$, *այնպես որ՝* $\sum^{(+)} A_\lambda = -\sum^{(-)} A_\lambda$, *եթե* (+) *և* (−) *նշաններով նշանակենք այն* A_λ*-ների գումարները, որոնք համապատասխանում են* $\beta_\lambda > 0$ *և* $\beta_\lambda < 0$ *պայմաններին։ Այժմ ստացված բանաձևը կարելի է արտագրել այսպես՝*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = 2\pi i \cdot \sum^{(+)} A_\lambda . \tag{5}$$

Ինչ վերաբերում է A_λ *գործակիցները հաշվելուն, ապա մենք կսահմանափակվենք այն դեպքը ցույց տալով, երբ* x_λ*-ն պարզ արմատ է, որի համար* $Q(x_\lambda) = 0$, *բայց* $Q'(x_\lambda) \neq 0$։ *Նրան (4) վերլուծության մեջ համապատասխանում է միայն մեկ անդամ՝* $\frac{A_\lambda}{x - x_\lambda}$։ *Եթե (4) հավասարության երկու մասն էլ բազ-*

մապատկենք $(x-x_\lambda)$*-ով, այն կներկայացվի հետևյալ տեսքով՝*

$$\frac{P(x)}{\dfrac{Q(x)-Q(x_\lambda)}{x-x_\lambda}}=A_\lambda+(x-x_\lambda)\,.\,R(x),$$

որտեղ $R(x)$*-ը նշանակում է այն անդամների խումբը, որոնք վերջավոր են մնում, երբ* $x\to x_\lambda$. *Անցնելով սահմանին, կստանանք՝*

$$A_\lambda=\frac{P(x_\lambda)}{Q'(x_\lambda)}. \tag{6}$$

Այժմ դիմենք (5) և (6) բանաձևերի կիրառման օ ր ի ն ա կ ն ե ր ի.

1) Առաջին հերթին դիտարկենք հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx,$$

որտեղ m*-ն ու* n*-ը բնական թվեր են և* $m<n$. *Ապացուցած բանաձևի կիրառման համար բոլոր պայմաններն այստեղ բավարարվում են.*

Հայտարարի համար արմատներ հանդիսանում են հետևյալ թվերը՝

$$x_\lambda=\cos\frac{(2\lambda+1)\pi}{2n}+i\sin\frac{(2\lambda+1)\pi}{2n}$$

$$(\lambda=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,n-1;\ n,\,\ldots,\,2n-1),$$

սակայն նրանցից միայն առաջին n *թվերն ունեն դրական կեղծ մասեր. Ակներևաբար* $x_\lambda=x_0^{2\lambda+1}$, *որտեղ՝*

$$x_0=\cos\frac{\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi}{2n}.$$

(6) բանաձևի համաձայն, $\lambda=0,\,1,\,\ldots,\,n-1$ *արժեքների համար՝*

$$A_\lambda=\frac{x_\lambda^{2m}}{2n\,.\,x_\lambda^{2n-1}}=-\frac{1}{2n}\,x_\lambda^{2m+1}=-\frac{1}{2n}x_0^{(2m+1)(2\lambda+1)}$$

(հաշվի առնելով, որ $x_\lambda^{2n} = -1$)։ Պրոգրեսիան գումարելով, ստանում ենք՝

$$\sum^{(+)} A_\lambda = -\frac{1}{2n}\sum_{\lambda=0}^{n-1} x_0^{(2m+1)(2\lambda+1)} =$$

$$= -\frac{1}{2n}\cdot\frac{x_0^{2m+1} - x_0^{(2m+1)(2n+1)}}{1 - x_0^{2(2m+1)}}$$

կամ, քանի որ $x_0^{2n} = -1$,

$$\sum^{(+)} A_\lambda = -\frac{1}{n}\cdot\frac{x_0^{2m+1}}{1 - x_0^{2(2m+1)}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x_0^{2m+1} - x_0^{-(2m+1)}},$$

Տեղադրելով՝

$$x_0^{\pm(2m+1)} = \cos\frac{2m+1}{2n}\pi \pm i\cdot\sin\frac{2m+1}{2n}\pi,$$

մեզ հարկավոր գումարը վերջնականապես ներկայացնում ենք հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{1}{2n\,i}\cdot\frac{1}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}.$$

Այստեղից, (5) բանաձևի համաձայն՝

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx = \frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi} \qquad (m<n).$$

2) Մի քիչ ավելի ընդհանուր օրինակ է՝

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}-x^{2m'}}{1-x^{2n}}\,dx,$$

որտեղ m, m', n՝ բնական թվեր են և $m<n$, $m'<n$։

Պայմանները բավարարվում են, բացի նրանից, որ հայտարարն ունի ± 1 իրական արմատներ։ Այդ հանգամանքն այստեղ կարևոր չէ, որովհետև այդ արմատներն ունի նաև համարիչը, այնպես որ կոտորակը կարելի էր կրճատել (x^2-1)-ի վրա։ Այսուհետև այդ արմատները հաշվի չենք առնելու։

Հայտարարի մյուս արմատներն են՝

$$x_\lambda = \cos\frac{\lambda\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{\lambda\pi}{n} = x_1^\lambda$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, n-1;\ n+1, \ldots, 2n-1):$$

Նրանցից դրական կեղծ մասեր ունեն առաջին n—1 հատը: (6) բանաձևի համաձայն՝

$$A_\lambda = \frac{x_\lambda^{2m} - x_\lambda^{2m'}}{-2n\cdot x_\lambda^{2n-1}} = \frac{1}{2n}\left(x_\lambda^{2m'+1} - x_\lambda^{2n+1}\right),$$

այնպես որ՝

$$\sum^{(+)} A_\lambda = \frac{1}{2n}\sum_{\lambda=1}^{n-1}\left(x_\lambda^{2m'+1} - x_\lambda^{2m+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2n}\sum_{\lambda=1}^{n-1}\left(x_1^{\lambda(2m'+1)} - x_1^{\lambda(2m+1)}\right):$$

Ստացված արտահայտությունը հաջորդաբար ձևափոխվում է այսպես*՝

$$\sum^{(+)} A_\lambda = \frac{1}{2n}\left[\frac{x_1^{n(2m'+1)} - x_1^{2m'+1}}{x_1^{2m'+1}-1} - \frac{x_1^{n(2m+1)} - x_1^{2m+1}}{x_1^{2m+1}-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2n}\left[\frac{1+x_1^{2m'+1}}{1-x_1^{2m'+1}} - \frac{1+x_1^{2m+1}}{1-x_1^{2m+1}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2n}\left[\frac{x_1^{\frac{2m+1}{2}} + x_1^{-\frac{2m+1}{2}}}{x_1^{\frac{2m+1}{2}} - x_1^{-\frac{2m+1}{2}}} - \frac{x_1^{\frac{2m'+1}{2}} + x_1^{-\frac{2m'+1}{2}}}{x_1^{\frac{2m'+1}{2}} - x_1^{-\frac{2m'+1}{2}}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2ni}\left[\operatorname{ctg}\frac{2m+1}{2n}\pi - \operatorname{ctg}\frac{2m'+1}{2n}\pi\right]:$$

Վերջնականապես՝

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m} - x^{2m'}}{1 - x^{2n}}\,dx = \frac{\pi}{n}\left[\operatorname{ctg}\frac{2m+1}{2n}\pi - \operatorname{ctg}\frac{2m'+1}{2n}\pi\right].$$

$$(m, m' < n):$$

---

* Հաշվի առնելով, որ $x_1^n = -1$:

Նկատենք, որ այս բանաձևից հեշտությամբ կարելի էր ստանալ նաև նախորդ արդյունքը, եթե n-ը փոխարինենք 2n-ով և ընդունենք $m' = m + n$ (եթե $m < n$)։

3) Վերջապես, դիտարկենք հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{x^{4n} + 2x^{2n} \cdot \cos\theta + 1}\,dx,$$

որտեղ՝ $m < n$ և $-\pi < \theta < \pi$։

Մտցնելով նոր անկյուն՝ $\theta' = \pi - \theta$, $0 < \theta' < 2\pi$, այն կարտագրենք այսպես՝

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{x^{4n} - 2x^{2n} \cdot \cos\theta' + 1}\,dx\text{։}$$

Հայտարարի արմատները հաշվելու համար ընդունենք $x^{2n} = z$. այդ ժամանակ z-ը կորոշվի՝ $z^2 - 2z\cos\theta' + 1 = 0$ հավասարումից, այն է՝ $z = \cos\theta' \pm i \cdot \sin\theta'$։ x-ի համար ստացվում են երկու խումբ արմատներ՝

$$\left.\begin{aligned} x_\nu &= x_0 \cdot \varepsilon^\nu, \text{ որտեղ } x_0 = \cos\frac{\theta'}{2n} + i \cdot \sin\frac{\theta'}{2n} \\ \varepsilon &= \cos\frac{\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{\pi}{n} \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1;\ n, \ldots, 2n-1)$$

և

$$\bar{x}_\nu = \bar{x}_0 \cdot \varepsilon^\nu, \text{ որտեղ } \bar{x}_0 = \cos\frac{\theta'}{2n} - i \cdot \sin\frac{\theta'}{2n},$$

Այդ ժամանակ դրականի կեղծ մասը կունենան առաջին խմբի առաջին n հատը և երկրորդ խմբի վերջին n հատը։

x_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, n-1$) արմատներին համապատասխանող A_ν հաշվվում են (6) բանաձևով՝

$$A_\nu = \frac{x_\nu^{2m}}{4n\,(x_\nu^{4n-1} - x_\nu^{2n-1} \cdot \cos\theta')} = \frac{1}{4n} \cdot \frac{x_\nu^{2m+1}}{x_\nu^{2n}\,(x_\nu^{2n} - \cos\theta)} =$$

$$= \frac{1}{4n} \cdot \frac{x_0^{2m+1} \cdot \varepsilon^{(2m+1)\nu}}{(\cos\theta' + i\sin\theta') \cdot i\sin\theta'},$$

Հանրագումարելով այս գործակիցները և բազմապատկելով $2\pi i$-ով, կստանանք*՝

$$\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\cos\left(\frac{2m+1}{2n}-1\right)\theta'+i\cdot\sin\left(\frac{2m+1}{2n}-1\right)\theta'}{\sin\theta'}\cdot\frac{1-(\varepsilon^{n})^{2m+1}}{1-\varepsilon^{2m+1}}=$$

$$=\frac{\pi}{n}\cdot\frac{\cos\left(1-\frac{2m+1}{2n}\right)\theta'-i\cdot\sin\left(1-\frac{2m+1}{2n}\right)\theta'}{\sin\theta}\times\frac{1}{\left(1-\cos\frac{2m+1}{n}\pi\right)-i\cdot\sin\frac{2m+1}{n}\pi};$$

Արմատների երկրորդ խմբի՝ $\bar{x}_\nu$-երի ($\nu=n, n+1, \ldots, 2n-1$) համար նման ձևով կստացվի դրան համալուծ արտահայտություն. այդ երկու գումարը կտա իրական մասի կրկնապատիկը։ Տարրական ձևափոխություններից հետո այդ գումարը կբերվի հետևյալին՝

$$\frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin\left[\left(1-\frac{2m+1}{2n}\right)\theta'+\frac{2m+1}{2n}\pi\right]}{\sin\theta'\cdot\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}.$$

Վերադառնալով $\theta=\pi-\theta'$ անկյանը, վերջնականապես կստանանք՝

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{x^{4n}+2x^{2n}\cdot\cos\theta+1}\,dx=\frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin\left(1-\frac{2m+1}{2n}\right)\theta}{\sin\theta\cdot\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}$$

$$(m<n,\ -\pi<\theta<\pi)։$$

460. ԽԱՌԸ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ ՈՒ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։ 1) Ապացուցել հետևյալ ինտեգրալի գոյությունը՝

$$I=\int_{\pi}^{\infty}\frac{dx}{x^2\cdot(\sin x)^{2/3}}.$$

Եզակի կետերն անվերջ բազմություն են՝ $x=n\pi$ ($n=1, 2, \ldots$)։ Յուրաքանչյուր վերջավոր միջակայքում նրանցից վերջավոր թիվն են, և ինտեգրալը զուգամետ է։ Հարցը միայն ինտեգրալի զուգամիտության մասին է անվերջ միջակայքում։

* $\varepsilon^{n}=-1$։

Ունենք՝

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} =$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{(x+n\pi)^{2}\cdot(\sin x)^{2/3}}<\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{(\sin x)^{2/3}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}\pi^{2}}<+\infty\text{:}$$

2) *Եթե*

$$\int_{0}^{\infty}|\log t|^{\lambda}\,\frac{\sin t}{t}\,dt \qquad (\lambda>0)$$

զուգամետ [442,5) (*գ*)] *ինտեգրալում տեղադրենք՝* $t=e^{x}$, $x=\log t$, *ապա կստանանք հետևյալ ինտեգրալին՝*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{\lambda}\cdot\sin e^{x}\,dx.$$

վերջինս, այսպիսով, զուգամետ է, չնայած նրան, որ $|x|$*-ն անվերջորեն աճելիս ընդինտեգրալ ֆունկցիան տատանվում է* $-\infty$ *և* $+\infty$ *միջև։*

3) *Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները՝*

$$(\text{ա})\int_{0}^{\pi}x\cdot\log\sin x\,dx,\qquad(\text{բ})\int_{0}^{1}\frac{\log x}{\sqrt{1-x^{2}}}\,dx,\qquad(\text{գ})\int_{0}^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}\text{:}$$

Ցուցում։ (*ա*) $x=\pi-t$ *տեղադրությամբ համոզվում ենք, որ ինտեգրալը բերվում է հետևյալին՝*

$$\int_{0}^{\pi}\log\sin x\,dx=2\int_{0}^{\pi/2}\log\sin t\,dt\text{:}$$

(*բ*), (*գ*) *ինտեգրալները բերվում են* $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\log\sin t\,dt$ *ինտեգրալին՝* $x=\sin t$ *և* $x=\log\frac{1}{\sin t}$ *տեղադրությամբ։*

4) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$I=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\log\left|1-\frac{1}{x^2}\right| dx.$$

Ունենք (տեղադրելով $x=\sin\theta$)՝

$$J=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\cdot\log\operatorname{ctg}\theta\, d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta\cdot\log\operatorname{ctg}\theta\, d\theta.$$

Այնուհետև մասերով ինտեգրելով, կստանանք՝

$$J=\frac{1}{2}\sin 2\theta\cdot\log\operatorname{ctg}\theta\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\cdot\frac{1}{\operatorname{ctg}\theta}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{2}.$$

5) Գտնել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log|\sin^2\theta-a^2|\,d\theta \qquad (a^2<1).$$

Տեղադրելով $a=\sin\omega$ և օգտվելով

$$\sin^2\theta-\sin^2\omega=\sin(\theta-\omega)\sin(\theta+\omega)$$

նույնությունից, կստանանք՝

$$K=\int_{\omega-\frac{\pi}{2}}^{\omega+\frac{\pi}{2}}\log|\sin\theta|\,d\theta=\int_0^{\pi}\log\sin\theta\, d\theta=-\pi\log 2.$$

6) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$L=\int_0^{\infty}e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}\,dx \qquad (a,\ b>0).$$

Լուծում։ Օգտվելով 454, 12) բանաձևից, ունենք՝

$$I = e^{-2\sqrt{ab}} \int_0^\infty e^{-\left(\sqrt{ax} - \frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-2\sqrt{ab}} \int_0^\infty e^{-y^2} dy =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-2\sqrt{ab}}.$$

[Տես 455, 2։]

7) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները՝

$$J_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos \frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\theta)}} d\varphi, \quad J_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos \frac{3}{2}\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\theta)}} d\varphi.$$

Լուծում։ Նշանակենք $\cos\theta$-ն x-ով և կատարենք $z = \cos\varphi$ տեղադրությունը. այդ ժամանակ՝

$$\cos \frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1+z}{2}}, \quad \cos \frac{3}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1+z}{2}} \cdot (2z-1)$$

և

$$J_0 = \frac{1}{\pi} \int_x^1 \frac{dz}{\sqrt{(z-x)(1-z)}}, \quad J_1 = \frac{1}{\pi} \int_x^1 \frac{(2z-1)\,dz}{\sqrt{(z-x)(1-z)}}.$$

Այդ անգամ էլ մուծելով t նոր փոփոխականը՝ $\sqrt{(z-x)(1-z)} = t(1-z)$ բանաձևով, կստանանք՝

$$J_0 = \frac{2}{\pi} \int_\pi^\infty \frac{dt}{t^2+1} = 1,$$

$$J_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^2 + 2x - 1}{(t^2+1)^2} dt = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^\infty \frac{dt}{t^2+1} + 2(x-1) \int_0^\infty \frac{dt}{(t^2+1)^2} \right\} = x.$$

Այսպիսով, $J_0 = 1$ և $J_1 = \cos\theta$։ Ստորև, 473, 3)-ում, մենք կտանենք ավելի ընդհանուր արդյունքներ։

8) Մասերով ինտեգրելով ստանալ հետևյալ հավասարությունները՝

$$(ա)\quad \int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}(b-a),$$

$$(բ)\quad \int_0^\infty \frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,(b-a),$$

$$(գ)\quad \int_0^\infty \frac{\log(1+a^2x^2) - \log(1+b^2x^2)}{x^2}\,dx = \pi(a-b)։$$

9) Հեշտ է տեսնել, որ [455, 3), 457, 4)]՝

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{եթե } \alpha > 0 \\ 0, & \text{» } \alpha = 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{» } \alpha < 0։ \end{cases}$$

Այստեղից, քանի որ՝

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} \cos \beta x\,dx = \frac{1}{2}\left\{ \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{x}\,dx + \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{x}\,dx \right\},$$

ապա, ակնհայտորեն (եթե պարզության համար համարենք α և β>0),

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} \cos \beta x\,dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{եթե } \beta < \alpha \\ \dfrac{\pi}{4}, & \text{» } \beta = \alpha \\ 0, & \text{» } \beta > \alpha։ \end{cases}$$

Այս բանաձևը բազմիցս կիրառվել է Դիրիխլեի կողմից և հայտնի է Դիրիխլեի խզվող բազմապատկիչ *անունով։*

Նրան են բերվում ուրիշ շատ բանաձևեր։ Օրինակ (եթե α, β, γ>0 և α-ն նրանցից մեծագույնն է)՝

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x \cdot \sin \beta x \cdot \sin \gamma x}{x}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & \text{եթե } \alpha < \beta+\gamma \\ \dfrac{\pi}{8}, & \text{» } \alpha = \beta+\gamma \\ 0, & \text{» } \alpha > \beta+\gamma \end{cases}$$

(երկու սինուսների արտադրյալի փոխարինումը կոսինուսների տարբերությամբ), կամ (գործյալ համարելով $\alpha,\ \beta>0$)՝

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\cdot\frac{\sin\beta x}{x}\,dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\beta, & \text{եթե } \beta\leqslant\alpha,\\[2mm] \dfrac{\pi}{2}\alpha, & \text{»} \quad \beta>\alpha\end{cases}$$

(մասերով ինտեգրում)։

Վերջին արդյունքը կարելի է ընդհանրացնել հետևյալ ձևով.

Եթե $a,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\alpha_n>0$ և $a\geq\sum\limits_1^n\alpha_i$, ապա՝

$$J=\int_0^\infty\frac{\sin ax}{x}\cdot\frac{\sin\alpha_1 x}{x}\cdots\frac{\sin\alpha_n x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\text{։}$$

Ապացուցվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով (մասերով ինտեգրում)։

10) Հաշվել՝

$$\text{V. p.}\int_0^\infty\frac{2x\cdot\sin\alpha x}{x^2-r^2}\qquad(\alpha,\ r>0)\text{։}$$

Լուծում։ Եզակի կետ է՝ $x=r$։ Օգտվելով

$$\frac{2x}{x^2-r^2}=\frac{1}{x+r}+\frac{1}{x-r}$$

նույնությունից, անմիջապես ստանում ենք զ ու գ ա մ ե տ ինտեգրալը՝

$$\int_0^\infty\frac{\sin\alpha x}{x+r}\,dx=\cos\alpha r\cdot\int_r^\infty\frac{\sin\alpha y}{y}\,dy-\sin\alpha r\cdot\int_r^\infty\frac{\cos\alpha y}{y}\,dy\text{։}$$

Այնուհետև, պարզ ձևափոխություններից հետո, գտնում ենք՝

$$\left(\int_0^{r-\varepsilon}+\int_{r+\varepsilon}^\infty\right)\frac{\sin\alpha x}{x-r}\,dx=$$

$$=\cos\alpha r\cdot\int_r^\infty\frac{\sin\alpha y}{y}\,dy+\sin\alpha r\cdot\int_r^\infty\frac{\cos\alpha y}{y}\,dy+2\cos\alpha r\cdot\int_0^r\frac{\sin\alpha y}{y}\,dy,$$

այնպես որ՝

$$\mathrm{V.p.}\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha x}{x-r}\,dx\text{-ը}$$

ստացվում է, երբ վերջին ինտեգրալում ուղղակի դնում ենք $\varepsilon=0$։
Վերջնականապես՝

$$\mathrm{V.p.}\int_0^{\infty}\frac{2x\sin\alpha x}{x^2-r^2}\,dx=2\cos\alpha r\cdot\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha y}{y}\,dy=\pi\cdot\cos\alpha r.$$

11) Ենթադրելով, որ ձախակողմյան ինտեգրալը գոյություն ունի, ապացուցել հետևյալ բանաձևը՝

$$\int_0^{\infty}f(\sin^2 x)\cdot\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin^2 x)\,dx.$$

Ցուցում։ Օգտվել n 455, *3°-ում կիրառված մեթոդից։*

12) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները (a, b $>$ 0)՝

$$(\text{ա})\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\sin bx}{x}\,dx,\qquad(\text{բ})\int_0^{\infty}\frac{1-\cos ax}{x}\cos bx\,dx,$$

$$(\text{գ})\int_0^{1}\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{\log x}\,dx.$$

Ցուցում։ Բոլորը բերվում են Ֆրուլլանիի ինտեգրալներին, առաջին երկու ինտեգրալները a=b *դեպքում տարամետ են։*

Պատասխան։ (ա) $\log\sqrt{\dfrac{a+b}{|a-b|}}$, (բ) $\log\dfrac{\sqrt{|a^2-b^2|}}{b}$, (գ) $\log\dfrac{a}{b}$.

13) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները (a, b $>$ 0)՝

$$(\text{ա})\int_0^{\infty}\frac{b\cdot\sin ax-a\cdot\sin bx}{x^2}\,dx,$$

$$(\text{բ})\int_0^{\infty}\frac{b\cdot\log(1+ax)-a\log(1+bx)}{x^2}\,dx.$$

Ցուցում։ Երկուսն էլ բերվում են Ֆրուլլանիի ինտեգրալներին մասերով ինտեգրելով։

14) Գտնել հետևյալ ինտեգրալը $(a>0)$՝

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x^2}.$$

Լուծում։ Ունենք հետևյալ նույնությունը՝

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2x}\left(e^{-x} - e^{-2x}\right) +$$

$$+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}e^{-x}\right) - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^{2x}-1} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right).$$

Երկրորդ ու երրորդ արտահայտությունների ինտեգրալները փոխադարձ ոչնչացնում են (որում հեշտ է համոզվել փոփոխականի փոխարինումով) և առաջինը բերվում է Ֆրուլլանիի ինտեգրալի։ Պատասխան. $-\frac{1}{2}\log 2$.

15) Գտնել հետևյալ ինտեգրալը $(a,\ b>0)$՝

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx} + x(a-b)e^{-bx}}{x^2}\,dx.$$

Լուծում։ Ունենք (երբ $\eta>0$)՝

$$\int_\eta^\infty = \int_\eta^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x^2}\,dx + (a-b)\int_\eta^\infty \frac{e^{-bx}}{x}\,dx^{*}.$$

Աջ կողմի ինտեգրալներից առաջինը ձևափոխում ենք մասերով ինտեգրման միջոցով՝

$$\int_\eta^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x^2}\,dx = -\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\Bigg|_\eta^\infty + \int_\eta^\infty \frac{be^{-bx} - ae^{-ax}}{x}\,dx,$$

այնպես որ, վերջնականապես՝

$$\int_\eta^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-ba} + x(a-b)e^{-bx}}{x^2}\,dx =$$

$$= \frac{e^{-a\eta} - e^{-b\eta}}{\eta} + a\int_\eta^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x}\,dx.$$

---

* *Այդ ինտեգրալները զուգամետ չեն* $\eta=0$ *դեպքում։*

երբ $\eta \to 0$, աջ կողմի առաջին արտահայտությունը ձգտում է $(a-b)$-ի, իսկ երկրորդը՝ Ֆրուլլանիի հետևյալ ինտեգրալին՝

$$a\int_0^{\infty}\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}\,dx=b\cdot\log\frac{a}{b}.$$

16) Ապացուցել հետևյալ բանաձևը՝

$$\int_0^{\infty}\frac{A\cos ax+B\cos bx+\cdots+K\cos kx}{x}\,dx=$$

$$=-\{A\log a+B\log b+\cdots+K\log k\}$$

ենթադրելով, որ $a, b, \dots, k>0$ և $A+B+\dots+K=0$ (վերջին պայմանը, ակներևաբար, անհրաժեշտ է ինտեգրալի գոյության համար)։

Ցուցում։ Ընդունելով $K=-A-B-\dots$, օգտվել հետևյալ բանաձևերից՝

$$\int_0^{\infty}\frac{A\cos ax-A\cos kx}{x}\,dx=-A\log a+A\log k$$ և այլն։

Հեշտ է առաջադրված բանաձևն ընդհանրացնել այն դեպքի համար, երբ $f(x)$ ֆունկցիան բավարարում է n° 458, II-ի պայմաններին։

17) Գտնել հետևյալ ինտեգրալի արտահայտությունը՝

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^n x}{x^m}\,dx,$$

որտեղ n-ն ու m-ը բնական թվեր են և $n>m>2$։

Լուծում։ Մասերով ինտեգրման ընդհանրացված բանաձևը [299] տարածելով անվերջ միջակայքի դեպքի վրա, միանգամից կստանանք (քանի որ կրկնակի տեղադրությունն այստեղ չքանում է)՝

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^n x}{x^m}\,dx=\frac{1}{(m-1)!}\int_0^{\infty}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\sin^n x\cdot\frac{dx}{x}, \tag{7}$$

Վերջին ինտեգրալը հաշվելու համար հարմար է օգտվել $\sin^n x$-ի մեզ հայտնի վերլուծություններից ըստ բազմապատիկ աղեղների սինուսների կամ կոսինուսների [434, 3), (ա) և (բ)]։

Դիտարկենք տարբեր դեպքեր, որոնք այստեղ կարող են հանդես գալ։

(ա) $n=2\nu+1$, $m=2\mu+1$: *Այս դեպքում՝*

$$\frac{d^{2\mu}}{dx^{2\mu}}\sin^{2\nu+1}x=\frac{(-1)^{\nu+\mu}}{2^{2\nu}}\Big[(2\nu+1)^{2\mu}\sin(2\nu+1)x-$$

$$-(2\nu+1)(2\nu-1)^{2\mu}\sin(2\nu-1)x+$$

$$+\frac{(2\nu+1)\,2\nu}{1\cdot 2}(2\nu-3)^{2\mu}\sin(2\nu-3)x-\cdots\Big]$$

և ըստ (7) բանաձևի՝

$$\int_0^\infty\frac{\sin^{2\nu+1}x}{x^{2\mu+1}}dx=\frac{(-1)^{\nu+\mu}}{2^{2\nu}\cdot(2\mu)!}\cdot\frac{\pi}{2}\Big[(2\nu+1)^{2\mu}-(2\nu+1)(2\nu-1)^{2\mu}+$$

$$+\frac{(2\nu+1)\,2\nu}{1\cdot 2}(2\nu-3)^{2\mu}-\cdots\Big]:$$

(բ) $n=2\nu$, $m=2\mu+1$: *Այս դեպքում՝*

$$\frac{d^{2\mu}}{dx^{2\mu}}\sin^{2\nu}x=\frac{(-1)^{\nu+\mu}}{2^{2\nu-1}}\Big[(2\nu)^{2\mu}\cos 2\nu x-2\nu\cdot(2\nu-2)^{2\mu}\cos(2\nu-2)x+$$

$$+\frac{2\nu(2\nu-1)}{1\cdot 2}(2\nu-4)^{2\mu}\cos(2\nu-4)x-\cdots\Big]:$$

Հեշտ է տեսնել, որ ձախ մասը (քանի որ $\nu>\mu$*) դառնում է* 0*, երբ* $x=0$*, ուստի կոսինուսների գործակիցների գումարը հավասար է 0-ի, և մենք կարող ենք օգտագործել նախորդ՝ 16) վարժությունը: Այստեղից՝*

$$\int_0^\infty\frac{\sin^{2\nu}x}{x^{2\mu+1}}\,dx=\frac{(-1)^{\nu+\mu+1}}{2^{2\nu-1}(2\mu)!}\Big[(2\nu)^{2\mu}\log 2\nu-2\nu(2\nu-2)^{2\mu}\log(2\nu-2)+$$

$$+\frac{2\nu(2\nu-1)}{1\cdot 2}(2\nu-4)^{2\mu}\log(2\nu-4)=\cdots\Big]:$$

Նման բանաձևեր են ստացվում նաև հետևյալ դեպքերում՝ *(գ)* $n=2\nu+1$, $m=2\mu$ *և* *(դ)* $n=2\nu$, $m=2\mu$: *Նշենք, որ, մասնավորապես,* 2 *ամեն մի* n*-ի համար՝*

$$\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx=$$

$$=\frac{\pi}{2n\cdot(n-1)!}\Big[n^{n-1}-n(n-2)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(n-4)^{n-1}-\cdots\Big]:$$

18) Նույն 434, 3) (բ)-ի վերլուծության օգնությամբ հեշտ է ստանալ (երբ p > 0)՝

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2\nu+1} px}{x}\, dx = \frac{(-1)^{\nu\pi}}{2^{2\nu+1}} \left[1-(2\nu+1)+\frac{(2\nu+1)\,2\nu}{1\cdot 2} - \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + (-1)^{\nu} \frac{(2\nu+1)\cdot 2\nu\cdot \cdots \cdot(\nu+2)}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot \nu}\right],$$

իսկ $\int_0^\infty \frac{\sin^{2\nu} px}{x}\, dx$ *ինտեգրալն արդեն տարամետ է, այնպես որ հետևյալ ինտեգրալը՝*

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2\nu} px - \sin^{2\nu} qx}{x}\, dx \qquad (p,q>0)$$

Ֆրուլլանիի ինտեգրալ չէ. բայց 434, 3) (ա)-ի վերլուծության օգնությամբ հեշտ է ցույց տալ, որ նա բերվում է Ֆրուլլանիի ինտեգրալի տեսքին, եթե $\sin^{2\nu} x$*-ը փոխարինենք հետևյալ արտահայտությամբ՝*

$$\sin^{2\nu} x - \frac{1}{2\nu}\cdot\frac{2\nu(2\nu-1)\cdots(\nu+1)}{1\cdot 2\cdots \nu},$$

Վերջնականապես, ըստ (3ա) բանաձևի՝

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2\nu} px - \sin^{2\nu} qx}{x}\, dx = \frac{(2\nu-1)!!}{2\nu!!} \log\frac{q}{p},$$

Ոչ մի բնական n*-ի դեպքում* $\int_0^\infty \frac{\cos^n x}{x}\, dx$ *ինտեգրալը զուգամետ չէ։ Բայց* $n=2\nu+1$ *դեպքում զուգամետ է* $\int_A^\infty$ *ինտեգրալը և, ըստ Ֆրուլլանիի (3ա) բանաձևի, միանգամից ունենք՝*

$$\int_0^\infty \frac{\cos^{2\nu+1} px - \cos^{2\nu+1} qx}{x}\, dx = \log\frac{q}{p},$$

$n=2\nu$ *դեպքում, օգտագործելով 434, 3) (գ)-ի վերլուծությունը, ինչպես և վերևում սինուսների դեպքում, կստանանք՝*

$$\int_0^\infty \frac{\cos^{2\nu} px - \cos^{2\nu} qx}{x}\, dx = \left(1 - \frac{2\nu-1!!}{2\nu!!}\right)\log\frac{q}{p},$$

*19) Ստանալ հետևյալ բանաձևերը**՝

(ա) $$\int_0^\infty \cos\gamma x\,dx\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2\gamma}, & \text{երբ } |\gamma|>1,\\[2mm] \dfrac{\pi}{4}, & \text{» } |\gamma|=1,\\[2mm] 0, & \text{» } |\gamma|<1։\end{cases}$$

(բ) $$\int_0^\infty \sin\gamma x\,dx\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2\gamma}, & \text{երբ } |\gamma|>1,\\[2mm] \dfrac{\pi}{4}, & \text{» } |\gamma|=1,\\[2mm] 0, & \text{» } |\gamma|<1։\end{cases}$$

(գ) $$\int_0^\infty \cos\gamma x\,dx\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{1}{2\gamma}\log\left|\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right|, \text{ երբ } \gamma\neq 0, \pm 1,$$

$$=1, \text{ երբ } \gamma=0^{**}։$$

(դ) $$\int_0^\infty \sin\gamma x\,dx\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt=\frac{1}{\gamma}\log|1-\gamma^2|, \text{ երբ } \gamma\neq 0, \pm 1,$$

$$=0, \text{ երբ } \gamma=0^{**}։$$

(ե) $$\int_0^\infty e^{-\gamma x}\,dx\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt=\frac{1}{\gamma}\log(1+\gamma), \text{ երբ } \gamma>0,$$

$$=1, \text{ երբ } \gamma=0։$$

Ապացույց։ (ա) Ենթադրելով $\gamma\gtrless 0$, *մասերով ինտեգրենք*՝

$$\int_0^\infty \cos\gamma x\,dx\int_x^\infty\frac{\cos t}{t}\,dt=\frac{1}{\gamma}\sin\gamma x\cdot\int_x^\infty\frac{\cos t}{t}\,dt\,\Bigg|_0^\infty+\frac{1}{\gamma}\int_0^\infty\frac{\sin\gamma x}{x}\cos x\,dx։$$

Քանի որ՝

$$\left|\int_x^\infty\frac{\cos t}{t}\,dt\right|\leq\left|\int_1^\infty\frac{\cos t}{t}\,dt\right|+\left|\int_x^1\frac{dx}{x}\right|=c+|\log x|,$$

---

* *Հենց* $-\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ *և* $-\int_x^\infty\frac{\cos t}{t}\,dt$ *ինտեգրալներն էլ իրենցից ներկայացնում են* si x *և* ci x *ֆունկցիաները («ինտեգրալային սինուսը» և «ինտեգրալային կոսինուսը»), որոնց մասին հիշատակվել էր* n° 277-*ում։*

** $\gamma=\pm 1$ *դեպքում ինտեգրալը տարամետ է։*

ապա կրկնակի տեղադրությունը դառնում է 0, և ինտեգրալը բերվում է Դիրիխլեի խզվող բազմապատկչին [(9)]։

Առանձին դիտարկենք այն դեպքը, երբ $\gamma=0$։ Ցանկացած $A>0$ թվի դեպքում, կրկնաբար մասերով ինտեգրելով, կստանանք՝

$$\int_0^A dx\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt = x\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt\,\Bigg|_0^A + \int_0^A \text{sos}\,x\,dx = A\int_A^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt + \sin A =$$

$$= A\,\frac{\sin t}{t}\Bigg|_A^\infty + A\int_A^\infty \frac{\sin t}{t^2}\,dt + \sin A = A\int_A^\infty \frac{\sin t}{t^2}\,dt\text{։}$$

Միջին արժեքի երկրորդ թեորեմայի [450] համաձայն, վերջին արտահայտությունը բերվում է $\int_A^{\bar A}\frac{\sin t}{t}\,dt$ $(\bar A>A)$ տեսքին, իսկ այս ինտեգրալը $A\to\infty$ դեպքում ձգտում է 0-ի, Բոլցանո-Կոշիի պայմանի շնորհիվ, կիրառված $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ զուգամետ ինտեգրալի նկատմամբ։ Այսպիսով՝

$$\int_0^\infty dx\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt = 0\text{։}$$

Մյուս դեպքերում ապացույցները նման են սրան։

20) Ապացուցել հետևյալ բանաձևերը $(\alpha, \beta>0)$՝

$$(\text{ա})\quad \int_0^\infty dx\left\{\int_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt\cdot\int_{\beta x}^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt\right\} = \begin{cases}\dfrac{\pi}{2\alpha}, & \text{եթե } \alpha>\beta,\\[2mm] \dfrac{\pi}{2\beta}, & \text{եթե } \alpha\leqslant\beta\text{։}\end{cases}$$

$$(\text{բ})\quad \int_0^\infty dx\left\{\int_{\alpha x}^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt\cdot\int_{\beta x}^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt\right\} = \begin{cases}\dfrac{\pi}{2\alpha}, & \text{եթե } \alpha>\beta,\\[2mm] \dfrac{\pi}{2\beta}, & \text{եթե } \alpha\leqslant\beta\text{։}\end{cases}$$

$$(\text{գ})\quad \int_0^\infty dx\left\{\int_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt\cdot\int_{\beta x}^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt\right\} = \frac{1}{2\alpha}\log\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right| + \frac{1}{2\beta}\log\frac{|\alpha^2-\beta^2|}{\alpha^2},$$

$$\text{երբ } \alpha\neq\beta,$$

$$=\frac{1}{\alpha}\log 2,$$

$$\text{երբ } \alpha=\beta\text{։}$$

$$(դ)\quad \int_0^{\infty} dx \left\{ \int_{\alpha x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \cdot \int_{\beta x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \right\} = \log \frac{(\alpha+\beta)^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}\,\beta^{\frac{1}{\alpha}}},$$

Ապացույց: (ա) Մասերով ինտեգրման միջոցով առաջադրված ինտեգրալը բերվում է 19) (ա)-ում դիտարկված ինտեգրալների տիպին՝

$$\int_0^{\infty} dx \left\{ \int_{\alpha x}^{\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt \cdot \int_{\beta x}^{\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt \right\} = x \cdot \int_{\alpha x}^{\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt \cdot \int_{\beta x}^{\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt \Bigg|_{x=0}^{x=\infty} +$$

$$+ \int_0^{\infty} \cos \alpha x\, dx \int_{\beta x}^{\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt + \int_0^{\infty} \cos \beta x\, dx \int_{\alpha x}^{\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} \cos \frac{\alpha}{\beta} x\, dx \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt + \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} \cos \frac{\beta}{\alpha} x\, dx \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2\alpha}\ \text{կամ}\ \frac{\pi}{2\beta},$$

նայած թե $\alpha > \beta$, *թե* $\alpha < \beta$:

Բացատրություն տանք նաև կրկնապատիկ տեղադրության 0 դառնալու վերաբերյալ: Մեզ արդեն ծանոթ՝

$$\left| \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt \right| < c + |\log x|$$

գնահատականից երևում է, որ տեղադրության տակ գրված արտահայտությունը x-ի հետ միասին ձգտում է 0-ի: Մյուս կողմից՝

$$\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt = \frac{\sin t}{t}\Bigg|_x^{\infty} + \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt, \qquad \left| \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt \right| < \frac{2}{x},$$

որտեղից հետևում է, որ հիշյալ արտահայտությունը ձգտում է 0-ի նաև $x \to \infty$ *դեպքում:*

Մյուս բանաձևերի ապացույցը կատարվում է սրա անալոգիայով, հենվելով այն բանաձևերի վրա, որոնք ստացել ենք 19) (բ), (գ), (դ), (ե)-ում:

§ 5. ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ՀԱՇՎՈՒՄԸ

461. ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐՈՎ. ԵԶԱԿԻՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՌԱՆՁՆԱՑՈՒՄԸ: *Վերևում* nn° 309—315-*ում, մենք ուսումնասիրեցինք զանազան եղանակներ իսկական իմաստով որոշյալ ինտեգրալների մոտավոր հաշվման համար: Անիսկական ինտեգրալների նկատմամբ այդ եղանակներն*

ու այնտեղ ցույց տված սխալների գնահատումներն անմիջականորեն կիրառելի չեն։ Երբեմն հաջողվում է, փոփոխականի փոխարինման կամ մասերով ինտեգրման միջոցով, անիսկական ինտեգրալը բերել իսկականի։ Այդպիսի դեպքում անիսկական ինտեգրալի մոտավոր հաշվումն էլ բերվում է արդեն ծանոթ խնդրի։

Շատ դեպքերում $\int_a^b f(x)\,dx$ անիսկական ինտեգրալի (վերջավոր սահմաններով) մոտավոր հաշվումը հեշտանում է եզակիությունների առանձնացման ճանապարհով*։ Այդ եղանակը կայանում է նրանում, որ որոնվում է պարզ տեսքի մի $g(x)$ ֆունկցիա, որը կարծես թե իր մեջ է ներծծում $f(x)$ ֆունկցիայի բոլոր եզակիությունները, այնպես որ $\varphi(x)=f(x)-g(x)$ տարբերությունը արդեն զերծ է նման եզակիություններից, այսինքն՝ ինտեգրելի է դառնում իսկական իմաստով։ Այդ ժամանակ աշխատում են $g(x)$ ֆունկցիայի ընտրությունը անօրինել այնպես, որպեսզի $g(x)$-ի ինտեգրալն արտահայտվի վերջավոր տեսքով, իսկ $\varphi(x)$ ֆունկցիան ունենա հարկավոր թվով ածանցյալներ, որպեսզի նրա ինտեգրալը մոտավոր հաշվելիս կարելի լինի օգտագործել սխալների գնահատման համար գոյություն ունեցող բանաձևերը։

$g(x)$ ֆունկցիայի ընտրությունը կատարվում է զանազան ձևերով, նայած դեպքին։ Օրինակի ձևով մենք ցույց կտանք այդ ֆունկցիան կառուցելու ընդհանուր կանոնը՝ ինտեգրալների հաճախ հանդիպող մի դասի համար։

Դիցուք ընդինտեգրալ ֆունկցիան ունի այսպիսի տեսք՝

$$f(x)=(x-x_0)^{-\alpha}\cdot h(x) \quad (a\leq x_0\leq b,\ 0<\alpha<1),$$

որտեղ $h(x)$-ը $a\leq x\leq b$ միջակայքում վերլուծվում է աստիճանային շարքի՝

$$h(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots+c_n(x-x_0)^n+\cdots$$

Այդ ժամանակ ընդունում ենք՝

$$g(x)=(x-x_0)^{-\alpha}\cdot[c_0+c_1(x-x_0)+\cdots+c_n(x-x_0)^n]$$

և

$$\varphi(x)=(x-x_0)^{-\alpha}[c_{n+1}(x-x_0)^{n+1}+\cdots]=$$
$$=(x-x_0)^{n+(1-\alpha)}[c_{n+1}+\cdots]։$$

$g(x)$-ի ինտեգրալը վերցվում է հեշտությամբ. մյուս կողմից, $\varphi(x)$-ը $[a,b]$-ում, ներառյալ և x_0 կետը, ունի n անընդհատ ածանցյալներ։

462. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Դիցուք պահանջվում է հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx=2\int_0^{1/2} x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

վերջին ինտեգրալում միակ եզակի կետը 0-ն է։

* Այդ եղանակն առաջարկվել է Լ. Վ. Կանտորովիչի կողմից։

Վերլուծելով $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$-ը ըստ x-ի աստիճանների, կանգ առնենք x^4 պարունակող անդամի վրա և ընդունենք՝

$$g(x)=x^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4\right),$$

$$\varphi(x)=x^{-\frac{1}{2}}\left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}-\left(1+\cdots+\frac{35}{128}x^4\right)\right]=\frac{63}{256}x^{\frac{9}{2}}+\cdots$$

Այդ ժամանակ՝

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}g(x)\,dx+\int_0^{\frac{1}{2}}\varphi(x)\,dx=I_1+I_2.$$

I_1-ի արժեքը ճիշտ ենք հաշվում՝

$$I_1=\frac{715801}{645120}\sqrt{2}=1,569\,1585\ldots$$

Ինչ վերաբերում է I_2-ին, ապա այն կգտնենք Սիմպսոնի բանաձևով, $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ միջակայքը բաժանելով $2n=10$ մասի և հաշվումը կատարելով 6 թվանշանով՝

$$\begin{array}{lrl}
y_0=y_{1/2}=0 & 2y_1 &= 0,000318 \\
 & 4y_{3/2} &= 0,000225 \\
 & 2y_2 &= 0,000431 \\
 & 4y_{5/2} &= 0,002496 \qquad I_1 \doteq 1,5691585 \\
 & 2y_3 &= 0,003017 \qquad I_2 \doteq 0,0016385 \\
 & 4y_{7/2} &= 0,012901 \qquad I \doteq 1,5707970 \\
 & 2y_4 &= 0,012632 \\
 & 4y_{9/2} &= 0,046350 \\
 & y_5 &= 0,020239 \\
 & & 0,098309 \mid 60 \\
 & & 0,0016385
\end{array}$$

Իսկ I-ի իսկական արժեքը հավասար է [ինչպես այդ բխում է «Բ ե տ ա» ֆունկցիայի տեսությունից, 491 (5ա)]՝

$$\frac{\pi}{2}=1,5707963\ldots$$

Կատարենք սխալի գնահատում (չօգտվելով, իհարկե, այն հանգամանքից, որ մենք, ուրիշ նկատառումներից, այստեղ կարողանում ենք ստանալ ինտեգրալի ճշգրիտ արժեքը)։ Ունենք՝

$$\varphi^{IV}(x)=\frac{63}{256}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}+\cdots>0,$$

և φ^{IV}-ը x-ի հետ միասին աճում է, այնպես որ մեծագույն արժեքին հասնում է $x=\frac{1}{2}$ դեպքում։ Այստեղից հեշտ է ստանալ, որ $\max\varphi^{IV}(x)=288$։

Սիմպսոնի բանաձևի սխալն արտահայտվում է հայտնի բանաձևով [314]՝

$$R=-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{10^4}\cdot\frac{\varphi^{IV}(\zeta)}{180}.$$

Այսպիսով՝

$$R<0,\quad |R|<\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{10^4}\cdot\frac{288}{180}=\frac{5}{10^6}.$$

Մյուս կողմից, I_2-ի համար ստացած արժեքի այն սխալը, որն առաջացել է կլորացման հետևանքով, բացարձակ արժեքով փոքր է, քան $\frac{5\cdot10^{-6}}{60}<10^{-7}$։ Այդպիսին է նաև I_1-ի արժեքի բացարձակ սխալը։ Ընդհանուր սխալը գտնվում է $-\frac{5,2}{10^6}$-ի և $\frac{0,2}{10^6}$-ի միջև, այնպես որ՝

$$1,5707918<I<1,5707972 \text{ կամ } 1,570791<I<1,570798.$$

Վերջնականապես՝

$$I=1,57079+0,00001.$$

2) $I=\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{3}{4}}dx$ ինտեգրալի համար 0-ն ու 1-ը երկուսն էլ եզակի կետեր են։ Դրան համապատասխան այն տրոհենք երկուսի՝

$$I=\int_0^1=\int_0^{\frac{1}{2}}+\int_{\frac{1}{2}}^1=I_1+I_2.$$

I_1-ը հաշվելու համար ընդունենք՝

$$g(x)=x^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{3}{4}x+\frac{21}{32}x^2+\frac{77}{128}x^3+\frac{1155}{2048}x^4\right),$$

$$\varphi(x)=x^{-\frac{1}{2}}\left[(1-x)^{-\frac{3}{4}}-\left(1+\cdots+\frac{1155}{2048}x^4\right)\right],$$

այնպես որ՝

$$I_1=\int_0^{\frac{1}{2}}g(x)\,dx+\int_0^{\frac{1}{2}}\varphi(x)\,dx=I_{11}+I_{12}.$$

Միանգամից ստանում ենք՝

$$I_{11} = \frac{576293}{491520}\sqrt{2} \doteq 1,6581248։$$

I_{12} ինտեգրալը հաշվում ենք Սիմպսոնի բանաձևով. $2n = 10$, վեց թվանշանով՝ $I_{12} \doteq 0,003813$։ Այստեղից, $I_1 \doteq 1,661938$։ Գնահատելով սխալը, ինչպես և մի քիչ առաջ, կգտնենք՝

$$I_1 = 1,66193 + 0,00001։$$

Դրա նման էլ՝

$$I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{3}{4}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{4}}\left(1+\frac{1}{2}x+\cdots+\frac{35}{128}x^4\right)dx +$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{4}}\left[(1-x)^{-\frac{1}{2}} - (1+\cdots)\right]dx = I_{21}+I_{22}։$$

Գտնում ենք, որ՝

$$I_{21} \doteq 3,580291, \quad I_{22} \doteq 0,002033, \quad I_2 \doteq 3,582324։$$

Եթե սխալը գնահատենք, ինչպես վերևում, կստանանք՝

$$I_2 = 3,58232 + 0,000005։$$

Այսպիսով՝

$$I = 5,24425 + 0,000015 \quad \text{կամ} \quad I = 5,24426 \pm 0,00001։$$

3) Դիցուք առաջադրված է $I = \int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\,dx$ ինտեգրալը. եզակիություն ունի $x=0$ կետում։

Այդ եզակիությունն առանձնացնելու համար դիմենք վերևում կիրառվածին նման մի եղանակի։ Գրենք այսպես՝

$$I = \int_0^1 (1+x+x^2+x^3+x^4)\log x\,dx + \int_0^1 \frac{x^5 \log x}{1-x}\,dx = I_1 + I_2։$$

Հեշտ է գտնել (մասերով ինտեգրման միջոցով), որ՝ $I_1 = -1,46361\ldots$։ Իսկ I_2 ինտեգրալը հաշվենք Սիմպսոնի բանաձևով. $2n=10$, հինգ թվանշանով՝ $I_2 \doteq 0,18135$։

Այսպիսով՝ $I \doteq -1,64496$։ Որոնելի ինտեգրալի իսկական արժեքը [481, 1) (բ)] հավասար է՝ $-\frac{\pi^2}{6} = -1,644934\ldots$

Սխալը գնահատելիս, $\varphi^{IV}(x)$ ածանցյալը հաշվում ենք Լայբնիցի բանաձևով [110]։ Այդ ժամանակ հարմար է օգտվել հեշտությամբ ապացուցելի՝

$$\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]^{(k)}=\frac{1}{k+1}f^{(k+1)}(c)$$

բանաձևից (որտեղ c-ն գտնվում է a-ի և x-ի միջև), վերցնելով $f(x)=\log x$ և $a=1$։ Կոպիտ գնահատումը տալիս է՝ $|\varphi^{IV}(x)|<200$, այստեղից՝

$$|R|<\frac{1}{10^4}\cdot\frac{200}{180}\doteq 0,00011։$$

Ընդհանուր սխալն է՝ $\pm 0,00013$։ Վերջնականապես՝

$$|I|=1,645\pm 0,0002։$$

4) Դիտարկենք, վերջապես, այլ տիպի օրինակ՝

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log_{10}\sin x\,dx,$$

որի եզակի կետն է՝ 0։

Բնական է ընդինտեգրալ ֆունկցիան բաղդատել $g(x)=\log_{10}x$ ֆունկցիայի հետ, որի համար ինտեգրալը հեշտությամբ է հաշվվում՝*

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log_{10}x\,dx=M\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log x\,dx=M\,x(\log x-1)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\log_{10}\frac{\pi}{2}-M\right)\doteq -0,374123։$$

Իսկ $\varphi(x)=\log_{10}\frac{\sin x}{x}$ ֆունկցիայի I_2 ինտեգրալը հաշվում ենք Սիմպսոնի բանաձևով. $2n=18$, հինգ թվանշանով։ Ունենք՝

$$I_2=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\log_{10}x-\log_{10}\sin x]\,dx\doteq -0,098733։$$

Ուստի՝

$$I=I_1+I_2\doteq -0,472856։$$

Փաստորեն, I ինտեգրալը միայն M բազմապատկիչով է տարբերվում մեր արդեն հայտնի [455, 1)] հետևյալ ինտեգրալից՝

** M տառով ստորև նշանակված է բնական լոգարիթմներից տասնորդականներին անցնելու մոդուլը։*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \cdot \log 2$$

և, հետևաբար՝

$$I = -\frac{\pi}{2} \cdot \log_{10} 2 = -0,4728568 \ldots$$

Մենք տեսնում ենք, որ վերևում ստացված արժեքի մեջ բոլոր վեց թվանշաններն էլ ճիշտ են։

Չգիտենալով իսկական արժեքը, մենք հարկադրված կլինեինք օգտվել Սիմպսոնի բանաձևի սխալի գնահատումից։ Այստեղ՝

$$\varphi(x) = M(\log x - \log \sin x), \quad \varphi^{IV}(x) = M \frac{6(x^4 - \sin^4 x) - 4x^4 \sin^2 x}{x^4 \sin^4 x}.$$

Կարելի է ցույց տալ, որ $0 < \varphi^{IV}(x) < \frac{\pi^4}{12} M < 3,6$, որտեղից՝ $R < 0$, և $|R| < 0,000002$։ Հաշվի առնելով նաև կլորացման հետևանքով առաջացած սխալը, մենք կարող էինք միայն հաստատել, որ՝

$$|I| \doteq 0,47285 + 0,00001.$$

463. ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆ ԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ՀԱՇՎՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ։ Եզակիությունների առանձնացման մեթոդը կարող է օգտակար լինել նաև իսկական ինտեգրալներ հաշվելիս, եթե ենթաինտեգրալ ֆունկցիան, նույնիսկ անընդհատ լինելով, հարկավոր թվով անընդհատ ածանցյալներ չունի (որը դժվարացնում է սխալի գնահատումը)։ Պարզաբանենք այդ օրինակով։

Դիտարկենք հետևյալ ինտեգրալը՝

$$I = \int_0^1 \log x \cdot \log(1+x) \, dx.$$

Հեշտ է տեսնել, որ ենթաինտեգրալ ֆունկցիան ձգտում է 0-ի, երբ $x \to 0$, այնպես որ այդ ֆունկցիան կարելի է անընդհատ համարել ինտեգրման ամբողջ միջակայքում։ Սակայն հենց առաջին ածանցյալը դառնում է անվերջություն, երբ $x = 0$։ Օգտվելով լոգարիթմի վերլուծումից, մեր ֆունկցիան ներկայացնենք հետևյալ երկու ֆունկցիաների տարբերության ձևով՝

$$g(x) = \log x \cdot \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)$$

և

$$\varphi(x) = \log x \cdot \left[\log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\right].$$

Առաջին ֆունկցիայից հեշտ է ինտեգրալ վերցնել. նրա արժեքն է՝ $0,20528 \ldots$։ Իսկ երկրորդ ֆունկցիայի (որն արդեն չորս անընդհատ ածանցյալներ ունի) ինտեգրալը հաշվենք Սիմպսոնի բանաձևով. $2n = 10$,

հինգ թվանշանով։ Կստանանք՝ $-0,00348$, այնպես որ ընդհանուր արդյունքը կլինի՝ $-0,20876$։

Քանի որ $|\varphi^{IV}(x)| < 36$, ապա $|R| < 0,00002$։ Վերջնականապես՝

$$I = -0,20876 \pm 0,00003 = -0,2087 \pm 0,0001$$։

(Իսկ փաստորեն ստացված մոտավոր արժեքում բոլոր նշանները ճիշտ կլինեն, որովհետև I-ի իսկական արժեքը կլինի՝ $-0,2087618\ldots$)։

Հետաքրքրական է նշել, որ եթե Սիմպսոնի բանաձևը (նույն $2n=10$ դեպքում և հաշվելով դարձյալ հինգ թվանշանով) կիրառենք ընդինտեգրալ ֆունկցիայի նկատմամբ՝ առանց նախապես առանձնացնելու եզակիությունը, ապա կստանանք՝ $I \doteq -0,2080$, այսինքն՝ ընդամենը երեք ճիշտ թվանշան։ Այստեղ էական է ոչ միայն ճշգրտության փաստական փոքրացումը, այլև նրա գնահատման դժվարությունը։

464. ԱՆՎԵՐՋ ՍԱՀՄԱՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ՀԱՇՎՈՒՄԸ։ Հազվադեպ է հաջողվում $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ինտեգրալը հաշվել նրա սահմանման հիման վրա, որպես $\int_a^{A} f(x)\,dx$ իսկական ինտեգրալի սահման, մոտավորապես ընդունելով (բավականաչափ մեծ A-ի դեպքում) $\int_a^{\infty} \doteq \int_a^{A}$, ընդ որում վերջին ինտեգրալի արժեքն հաշվում ենք ուսումնասիրված մեթոդներով։ Այդ կարող է օգտակար լինել թերևս միայն այն դեպքում, երբ x-ն աճելիս ընդինտեգրալ ֆունկցիան շատ արագ նվազում է, այնպես որ, նույնիսկ ոչ մեծ A-ի դեպքում, վերևում գրված մոտավոր հավասարությունն արդեն ունի բավարար ճշգրտություն։

1) Այդպես կլինի, օրինակ, հետևյալ ինտեգրալի դեպքում՝

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$։

$x^2 \geq 2Ax - A^2$ անհավասարությունից հետևում է, որ՝

$$e^{-x^2} \leq e^{A^2}\cdot e^{-2Ax}$$

և

$$\int_A^{\infty} e^{-x^2}\,dx < e^{A^2}\cdot\int_A^{\infty} e^{-2Ax}\,dx = \frac{1}{2A}\,e^{A^2}$$։

Երբ $A=3$՝

$$\int_3^{\infty} e^{-x^2}\,dx < 0,00002$$։

Ինչ վերաբերում է $\int_0^3 e^{-x^2}\,dx$ ինտեգրալին, ապա այն կհաշվենք Սիմպսոնի բանաձևով. $n=30$, հինգ թվանշանով. այդ մեզ տալիս է՝ 0,88621։ Դժվար չէ ստանալ գնահատումը՝ $|(e^{-x^2})^{IV}| \leqslant 12$, $|R| < 2\cdot 10^{-5}$։ Ընդհանուր սխալը գտնվում է −0,00004-ի և 0,00006-ի միջև։ Այսպիսով՝

$$0,88617 < I < 0,88627, \quad I \doteq 0,8862 \pm 0,0001:$$

I-ի իսկական արժեքն, ինչպես գիտենք [455, 2)] հավասար է՝ $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0,886226\ldots$

Ավելի հաճախ ձեռնտու է լինում կամ $\int_a^{\infty}$ ինտեգրալը ձևափոխել և դարձնել վերջավոր սահմաններով, կամ այն տրոհել երկուսի՝ $\int_a^A + \int_A^{\infty}$ և երկրորդը ձևափոխել և դարձնել վերջավոր սահմաններով։

2) Նորից վերցնենք նույն՝ $I=\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ ինտեգրալը և այն ներկայացնենք գումարի տեսքով՝

$$\int_0^{\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty} = I_1 + I_2\text{։}$$

I_1-ը հաշվենք Սիմպսոնի բանաձևով. $2n=10$, հինգ թվանշանով, $|R| < 0,00001$, $I_1 = 0,74683 \pm 0,00002$։ Իսկ I_2 ինտեգրալը՝ $x = \frac{1}{t}$ տեղադրությամբ ձևափոխենք հետևյալին՝

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{t^2}\cdot e^{-\frac{1}{t^2}}\,dt,$$

Սովորական ճանապարհով կստանանք՝ $I_2 \doteq 0,13945$, այնպես որ՝ $I \doteq 0,88628$։

Սխալի գնահատումով չենք զբաղվելու։

Եթե անվերջ սահման ունեցող ինտեգրալը եզակի կետ ունի նաև վերջավոր տարածության վրա, ապա պետք է այն տրոհել մասերի, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակի միայն մեկ եզակիություն։

3) Դիտարկենք հետևյալ ինտեգրալը $(0<a<1)$՝

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx + \int_1^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = I_1 + I_2\text{։}$$

I_1 *ինտեգրալը գտնում ենք, եզակիությունն առանձնացնելով՝*

$$I_1 = \int_0^1 (x^{a-1} - x^a + x^{a+1} - x^{a+2} + x^{a+3})\,dx - \int_0^1 \frac{x^{a+4}}{1+x}\,dx = I_{11} - I_{12}\text{:}$$

$$I_{11} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} - \frac{1}{a+3} + \frac{1}{a+4},$$

իսկ I_{12}*-ը հաշվում ենք Սիմպսոնի բանաձևով։*

Դիցուք, օրինակ, $a = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7071068\ldots$, *այդ դեպքում* $I_{11} = 1,14052\ldots$։ I_{12}*-ի համար* ($2n = 10$, *հինգ թվանշանով*) *ստանում ենք* $0,09518$։ *Այսպիսով՝* $I_1 \doteq 1,04534$։

I_2 *ինտեգրալը՝* $x = \frac{1}{t}$ *տեղադրությամբ բերվում է հետևյալ տեսքին*

$$I_2 = \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{1+t}\,dt,$$

որտեղ $b = 1 - a = 0,2928931\ldots$։ *Նախորդի նման կստանանք* $I_2 \doteq 2,90289$։ *Վերջնականապես՝* $I \doteq \dot{3},94823$։ *Հետագայում* [484, *1*] *մենք կիմանանք, որ* I*-ի իսկական արժեքն է՝* $\frac{\pi}{\sin \pi a} = 3,948246\ldots$

Երբեմն, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *«ինտեգրալի դանդաղ զուգամիտման» դեպքում, այնուամենայնիվ հաջողվում է (օրինակ, կրկնակի մասերով ինտեգրելու միջոցով) նրանից առանձնացնել հեշտ հաշվելի անդամներ այն հաշվով, որպեսզի մնացած ինտեգրալն արդեն փոքր լինի։*

4) *Դիցուք առաջադրված է հետևյալ ինտեգրալը՝*

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx\text{:}$$

Այն ներկայացնենք գումարի տեսքով՝ $\int_0^A + \int_A^\infty$, *չձգտելով սակայն այն բանին, որ նրանցից երկրորդը փոքր լինի։ Այնուհետև մասերով ինտեգրելով, կունենանք՝*

$$\int_A^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \left\{ -\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + 2\frac{\cos x}{x^3} + 6\frac{\sin x}{x^4} - 24\frac{\cos x}{x^5} - 120\frac{\sin x}{x^6} \right\}\Bigg|_A^\infty + 720\int_A^\infty \frac{\sin x}{x^7}\,dx\text{:}$$

Վերցնելով, օրինակ, $A=2\pi$, կստանանք՝

$$\int_{2\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{1}{2\pi} - \frac{2}{(2\pi)^3} + \frac{24}{(2\pi)^5} + 720 \int_{2\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x^7}\, dx։$$

Ինտեգրված անդամների գումարը հավասար է 0, 15354 . . . ։ Այնուհետև՝

$$0 < 720 \int_{2\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x^7}\, dx < 720 \int_{2\pi}^{\infty} \frac{dx}{x^7} = \frac{120}{(2\pi)^6} < 0,002։$$

$\int_0^{2\pi}$ ինտեգրալը հաշվելով Սիմպսոնի բանաձևով ($2n=40$, չորս թվանշանով), կգտնենք՝ 1, 4182։

Սխալի գնահատումը՝

$$f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^m\, x^{2m}}{(2m+1)!}, \quad f^{IV}(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^m\, x^{2m}}{2m!\,(2m+5)},$$

$$|f^{IV}(x)| < \frac{1}{5}\, \mathrm{ch}\, 2\pi < 54, \quad |R| \leq 0,0012։$$

Այստեղից, հաշվի առնելով ընդհանուր սխալը, ստանում ենք՝

$$1,5702 < I < 1,5752, \quad I = 1,57 + 0,01:$$

Ինչպես գիտենք [455, 3°], փաստորեն՝ $I = \frac{\pi}{2} = 1,5707 \ldots$ ։

ՏԱՍՆՉՈՐՍԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՊԱՐԱՄԵՏՐԻՑ ԿԱԽՎԱԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

§ 1. ՏԱՐՐԱԿԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆԸ

465. ԽՆԴՐԻ ԴՐՈՒՄԸ։ *Դիտարկենք երկու փոփոխականների* $f(x, y)$ *ֆունկցիան, որը որոշված է* x*-ի բոլոր արժեքների համար մի որոշ* $[a, b]$ *միջակայքում և* y*-ի բոլոր արժեքների համար* $Y=\{y\}$ *բազմությունում։ Դիցուք,* Y*-ից վերցրած յուրաքանչյուր* y *արժեքի դեպքում,* $f(x, y)$*-ն ինտեգրելի է* $[a, b]$ *միջակայքում՝ իսկական կամ անիսկական իմաստով։ Այդ ժամանակ*

$$I(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx \tag{1}$$

ինտեգրալը կլինի, ակներևաբար, y *օժանդակ փոփոխականի կամ պարամետրի ֆունկցիա։*

n° 408*-ում խոսելով ֆունկցիաների* $\{f_n(x)\}$ *հաջորդականության մասին, մենք դիտարկում էինք*

$$I_n=\int_a^b f_n(x)\,dx,$$

ինտեգրալները, որոնք (1) *ինտեգրալների մասնավոր դեպքն են ներկայացնում. պարամետրի դերում այստեղ հանդես է գալիս* n *բնական նշիչը։*

$I(y)$ *ֆունկցիայի նկատմամբ բնականաբար ծագում են մի շարք հարցեր՝ նրա սահմանի գոյության ու արտահայտման վերաբերյալ որոշակի սահմանային անցման դեպքում, մասնավորապես՝ նրա անընդհատության վերաբերյալ ըստ* y*-ի, նրա դիֆերենցելիության ու նրա ածանցյալի արտահայտման վերաբերյալ և, վերջապես, նրա ինտեգրալի վերաբերյալ։ Այդ բոլոր հարցերին է նվիրված ներկա գլուխը։*

Պարամետրից կախված (1) ինտեգրալով արտահայտվող ֆունկցիայի հատկությունների ուսումնասիրությունը կարող է ինքնուրույն հետաքրքրություն ներկայացնել [այդ տեսակետից դիմել, օրինակ, § 15-ին]։ Սակայն, բացի դրանից, այդ հատկությունները, ինչպես ընթերցողը կտեսնի, ունեն նաև բազմազան կիրառումներ, առանձնապես անիսկական ինտեգրալներ հաշվելու վերաբերյալ հարցում։

466. ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ՁԳՏՈՒՄ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻՆ. *Առաջիկա հետազոտություններում վճռական դեր պիտի խաղա վերնագրում նշված գաղափարը։ Դիցուք $f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է, ընդհանուր դեպքում, $M = X \times Y$ երկչափ բազմությունում, որտեղ X-ն ու Y-ը նշանակում են x ու y փոփոխականների կողմից կամ-կամ ընդունվող արժեքների բազմություններ, ընդ որում Y-ն ունի, ասենք թե վերջավոր, y_0 խտացման կետը։*

Եթե 1) $f(x, y)$ ֆունկցիայի համար $y \to y_0$ դեպքում գոյություն ունի վերջավոր սահմանային ֆունկցիա՝

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x) \quad (x\text{-ը պատկանում է } X\text{-ին}), \tag{2}$$

և (2) ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար կգտնվի x-ից անկախ այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ՝

$$|y - y_0| < \delta \text{ դեպքում կլինի } |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon \tag{3}$$

X-ին պատկանող բոլոր x-երի համար միաժամանակ, ապա ասում են, որ $f(x, y)$ ֆունկցիան ձգտում է $\varphi(x)$ ֆունկցիային՝ x-ի նկատմամբ հավասարաչափ X տիրույթում։

Դժվար չէ այս սահմանումը վերաձևակերպել նաև այն դեպքի համար, երբ y_0-ն անիսկական թիվ է, օրինակ՝ $+\infty$. այդ դեպքում միայն $|y - y_0| < \delta$ տեսքի անհավասարությունը փոխարինվում է $y > \Delta$ տեսքի անհավասարությամբ։ XII գլխում [401] մենք արդեն գործ ենք ունեցել սահմանային ֆունկցիային այդպես հավասարաչափ ձգտելու մասնավոր դեպքի հետ. այնտեղ խոսքը $f_n(x)$ ֆունկցիայի՝ մասին էր, որը որպես պարամետր պարունակում էր n բնական նշիչը։

• 402-ում, գործ ունենալով ֆունկցիաների հաջորդականության հետ, մենք ցույց էինք տվել, որ հավասարաչափ զուգամիտության համար անհրաժեշտ է և բավարար, այսպես ասած,

զուգամիտության սկզբունքը հավասարաչափ տեղի ունենալը։ Նույնը կարելի է անել և ընդհանուր դեպքում. Այն է (եթե սահմանափակվենք այն ենթադրությամբ, որ y_0-ն վերջավոր է)՝

+ 1° Որպեսզի $f(x, y)$ ֆունկցիան $y \to y_0$ դեպքում ունենա սահմանային ֆունկցիա և նրան ձգտի x-ի նկատմամբ հավասարաչափ X տիրույթում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենա x-ից անկախ այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որպեսզի

$$|f(x, y') - f(x, y)| < \varepsilon \tag{4}$$

անհավասարությունը տեղի ունենա X-ից վերցրած բոլոր x-երի համար միաժամանակ, հենց որ՝

$$|y - y_0| < \delta, \ |y' - y_0| < \delta \quad (y\text{-ն ու } y'\text{-ը՝ } Y\text{-ից են})։ \tag{5}$$

[$y_0 = +\infty$ դեպքում վերջին անհավասարությունների փոխարեն հանդես են գալիս $y > \Delta$, $y' > \Delta$ անհավասարությունները։]

Անհրաժեշտություն։ Դիցուք տեղի ունի հավասարաչափ զուգամիտություն։ Սահմանումի մեջ ε-ը փոխարինելով $\frac{\varepsilon}{2}$-ով և համապատասխանորեն ընտրելով δ-ն, այժմ Y-ից վերցնենք y ու y' երկու արժեքներ այնպես, որ բավարարվեն (5) պայմանները։ Այդ ժամանակ, ինչպիսին էլ լինի x-ը, կունենանք՝

$$|f(x, y') - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{և} \quad |\varphi(x) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

որտեղից և հետևում է (4)-ը։

Բավարարություն։ Եթե հիշյալ պայմանը տեղի ունի, ապա ամենից առաջ պարզ է (2) սահմանային ֆունկցիայի գոյությունը։ Այնուհետև (4)-ում անցնելով սահմանին, երբ $y' \to y_0$ (ընդ որում y-ը ֆիքսած է այնպես, որ $|y - y_0| < \delta$), կստանանք՝

$$|\varphi(x) - f(x, y)| \leqslant \varepsilon.$$

Դրանով էլ հաստատվում է $f(x, y)$ ֆունկցիայի հավասարաչափ ձգտումը $\varphi(x)$ սահմանային ֆունկցիային։

Այժմ ցույց տանք, որ հնարավոր է դիտարկվող հարցը հանգեցնել ֆունկցիաների հաջորդականությունների հավասարաչափ զուգամիտության։

2° Որպեսզի $f(x, y)$ ֆունկցիան $y \to y_0$ դեպքում հավասարաչափ (x-ի նկատմամբ X տիրույթում) ձգտի $\varphi(x)$ ֆունկցիային, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\varphi(x)$-ին հավասարաչափ ձգտի յուրաքանչյուր $\{f(x, y_n)\}$ հաջորդականություն, ինչպիսի օրենքով էլ y_n վարիանտան (Y-ից վերցրած արժեքներով) ձգտի y_0-ին:

Ապացույցը սահմանափակենք վերջավոր y_0-ի դեպքով:

Անհրաժեշտություն. *Ենթադրելով $f(x, y)$ ֆունկցիայի հավասարաչափ ձգտումը $\varphi(x)$-ին, կամայապես վերցրած $\varepsilon>0$ թվով կգտնենք սահմանման համաձայն համապատասխան $\delta>0$ թիվ [տես (3)]: Ինչպիսին էլ լինի $y_n \to y_0$ վարիանտան, նրա համար գոյություն ունի այնպիսի N համար, որ $|y_n - y_0|<\delta$ հենց որ $n>N$: Բայց այդ ժամանակ, n-ի այդ նույն արժեքների համար, (3)-ի համաձայն, տեղի ունի*

$$|f(x, y_n)-\varphi(x)|<\varepsilon$$

անհավասարությունը, այն էլ բոլոր x-երի համար միաժամանակ: Այսպիսով, ապացուցվեց $\{f(x, y_n)\}$ հաջորդականության հավասարաչափ զուգամիտությունը:

Բավարարություն. *Դիցուք այժմ տրված է, որ յուրաքանչյուր այդպիսի հաջորդականություն ձգտում է $\varphi(x)$-ին հավասարաչափ:*

Որպեսզի ապացուցենք $f(x, y)$ ֆունկցիայի հավասարաչափ ձգտումը $\varphi(x)$-ին, ենթադրենք հակառակը: Այդ ժամանակ մի որոշ $\varepsilon>0$ թվի համար, ինչպիսին էլ վերցնելու լինենք $\delta=\delta'>0$, կգտնվի այնպիսի $y=y'$ արժեք Y-ից, որ թեև $|y'-y_0|<\delta'$, այնուամենայնիվ առնվազն մեկ $x=x'$ արժեքի համար (X-ից) տեղի կունենա $|f(x', y')-\varphi(x')|\geqslant\varepsilon$ անհավասարությունը: Այժմ վերցնենք դրական թվերի մի $\{\delta_n\}$ հաջորդականություն, որը ձգտում է 0-ի: Յուրաքանչյուր δ_n-ի, ասածի համաձայն, կարելի է համապատասխանեցնել y_n և x_n երկու այնպիսի արժեքներ, որ

$$|y_n - y_0|<\delta_n, \text{ բայց } |f(x_n, y_n)-\varphi(x_n)|\geqslant\varepsilon. \tag{6}$$

Պարզ է, որ $y_n \to y_0$ (որովհետև $\delta_n \to 0$), բայց $\{f(x, y_n)\}$ հաջորդականությունը չի կարող հավասարաչափ ձգտել $\varphi(x)$-ին (6)-ի պատճառով: Եկանք հակասության:

Դիցուք այժմ X բազմությունն իրենից ներկայացնում

է մի [a, b] վերջավոր միջակայք։ Մենք գիտենք [408], որ եթե անընդհատ (կամ իսկական իմաստով ինտեգրելի) ֆունկցիաների $\{f_n(x)\}$ հաջորդականությունը հավասարաչափ ձգտում է սահմանային ֆունկցիայի, ապա վերջինս ևս անհրաժեշտաբար անընդհատ (ինտեգրելի) կլինի։ 2°-ի շնորհիվ անմիջապես հասկանալի է, որ այդ բոլորը փոխադրվում է նաև ընդհանուր դեպքի վրա՝

√ 3° Եթե $f(x, y)$ ֆունկցիան Y-ից վերցրած ցանկացած y-ի դեպքում անընդհատ է (ինտեգրելի է) ըստ x-ի $X=[a, b]$ միջակայքում և $y \to y_0$ դեպքում հավասարաչափ ձգտում է $\varphi(x)$ սահմանային ֆունկցիային, ապա այս վերջին ֆունկցիան նույնպես անընդհատ (ինտեգրելի) կլինի։

Հետագա շարադրանքի հեշտացման համար ապացուցենք նաև հետևյալ առաջադրությունը, որն ընդհանրացնում է n° 404-ի Դինիի թեորեմը։ Այդ ժամանակ մենք համարելու ենք, որ բոլոր $y<y_0$։

4° Դիցուք $f(x, y)$ ֆունկցիան Y-ից վերցրած ցանկացած y-ի դեպքում անընդհատ է ըստ x-ի $X=[a, b]$ միջակայքում և y-ն աճելիս, մոնոտոն աճելով, ձգտում է $\varphi(x)$ սահմանային անընդհատ ֆունկցիային։ Այդ ժամանակ այդ սահմանային ձգտումը անհրաժեշտաբար կլինի x-ի նկատմամբ հավասարաչափ X միջակայքում։

Ապացուցման համար Y-ից առանձնացնենք y-ի արժեքների մի մոնոտոն աճող $\{y_n\}$ հաջորդականություն և դիտարկենք ֆունկցիաների $\{f(x, y_n)\}$ համապատասխան հաջորդականությունը, որն, ակներևաբար, նույնպես մոնոտոն աճող է n-ի հետ միասին։ Քանի որ

$$f(x, y_1)+\sum_{n=2}^{\infty} [f(x, y_n)-f(x, y_{n-1})]=\varphi(x)$$

շարքը բաղկացած է դրական անդամներից (բացի, թերևս, առաջին անդամից), ապա Դինիի թեորեման թույլատրում է պնդել, որ այդ շարքը x-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է X միջակայքում։ Հետևաբար, տված $\varepsilon>0$ թվով կգտնվի այնպիսի n_0 համար, որ

$$|\varphi(x)-f(x, y_{n_0})|<\varepsilon$$

անհավասարությունը կբավարարվի X-ին պատկանող բոլոր x-երի համար միաժամանակ՝ f ֆունկցիայի y-ի հետ միասին մոնոտոն աճելու շնորհիվ, առավել ևս կբավարարվի և

$$|\varphi(x)-f(x,y)|<\varepsilon$$

անհավասարությունը, հենց որ $y>y_n$. դրանով ապացուցվում է մեր պնդումը։

Թեև հավասարաչափ մոտեցման նոր ապացուցած հայտանիշը շատ նեղ է թվում, բայց նա հաճախ օգտակար է լինում, ազատելով մեզ հավասարաչափ մոտեցման վերաբերյալ այլ ճանապարհով համոզվելու անհրաժեշտությունից։

467. ԵՐԿՈՒ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ԱՆՑՈՒՄՆԵՐԻ ՏԵՂԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆԸ. Ներկա գլխում ամբողջ շարադրանքի միջով կարմիր թելի պես անցնում է այս կամ այն տիպի երկու սահմանային պրոցեսների տեղափոխման հարցը։ Այդ հարցը պարզագույն ձևով մեզ հանդիպել է n 158-ում, երբ խոսվում էր երկու հաջորդական սահմանների գոյության ու հավասարության մասին՝

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y), \tag{7}$$

ենթադրելով, որ գոյություն ունի

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$$

կրկնակի սահմանը։ Այնուհետև, n° 403-ում մենք տեսել ենք, որ հավասարաչափ զուգամետ շարքի մեջ անդամ առ անդամ սահմանին անցնելու վերաբերյալ թեորեման նույնպես կարող է արտահայտվել նման ձևով՝

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$$

այս անգամ ենթադրելով, որ $f_n(x)$ ֆունկցիան $n\to\infty$ դեպքում հավասարաչափ ձգտում է իր սահմանային ֆունկցիային։

Օգտվելով նախորդ n°-ում մուծած գաղափարից, մենք այժմ կձևակերպենք նույն տիպի ընդհանուր թեորեմ։ Մենք ենթադրելու ենք, որ $f(x,y)$ ֆունկցիան որոշված է $M=X\times Y$ երկչափ բազմությունում, որտեղ $X=\{x\}$ ու $Y=\{y\}$ բազմությունները զատ-զատ ունեն x_0 և y_0 խտացման կետերը (վերջավոր կամ անվերջ)։

Դիցուք X-ից վերցրած յուրաքանչյուր x-ի համար գոյություն ունի պարզ սահման՝

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x),$$

և Y-ից վերցրած յուրաքանչյուր y-ի համար՝

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y) = \psi(y)$$

պարզ սահմանը։ Եթե $y \to y_0$ դեպքում $f(x, y)$ ֆունկցիան $\varphi(x)$ սահմանային ֆունկցիային ձգտում է x-ի նկատմամբ հավասարաչափ X տիրույթում, ապա (7) երկու հաջորդական սահմաններն էլ գոյություն ունեն և հավասար են։

Հեշտ կլիներ այս թեորեման հանգեցնել վերը հիշատակված մասնավոր դեպքին, սակայն, առավել պարզության համար, մենք գերադասում ենք այստեղ տալ անկախ ապացույց (որոշակիության համար ենթադրելով, որ x_0 և y_0 երկու թվերն էլ վերջավոր են)։

Նախապես վերցնելով $\varepsilon > 0$ կամայական թիվը, 466-ի 1° թեորեմայի շնորհիվ կգտնենք նրան համապատասխանող այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ (5) անհավասարություններից կբխի (4)-ը, ինչպիսին էլ լինի x-ը X-ից։ Ֆիքսենք (5) պայմաններին բավարարող y ու y' արժեքները, իսկ x-ը ենթադրենք x_0-ին ձգտող. (4)-ում անցնելով սահմանին, կստանանք՝

$$|\psi(y') - \psi(y)| \leq \varepsilon. \tag{8}$$

Այսպիսով, $\psi(y)$ ֆունկցիայի համար $y \to y_0$ սահմանային անցման ժամանակ բավարարվում է Բոլցանո-Կոշիի կլասիկ պայմանը [58], որտեղից և հետևում է

$$\lim_{y \to y_0} \psi(y) = A$$

վերջավոր սահմանի գոյությունը։

Այժմ պարզ է, որ, հենց որ $|y - y_0| < \delta$, տեղի կունենա (X-ին պատկանող ամեն մի x-ի համար)՝

$$|\varphi(x) - f(x, y)| \leq \varepsilon, \text{ ինչպես նաև՝ } |\psi(y) - A| \leq \varepsilon.$$

դրանում հեշտ է համոզվել, (4) և (8) անհավասարություններում անցնելով սահմանին, երբ $y' \to y_0$ և x-ն ու y-ը ֆիքսած են։ Պահպանելով y-ի ընտրած արժեքը, կգտնենք այնպիսի $\delta' > 0$, որ

$$|f(x, y) - \psi(y)| < \varepsilon,$$

երբ $|x-x_0|<\delta'$։ Այդ դեպքում բոլոր այդ անհավասարություններից հետևում է, որ x-ի նույն արժեքների դեպքում տեղի ունի նաև

$$|\varphi(x)-A|<3\varepsilon$$

անհավասարությունը, այնպես որ նաև՝

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A.$$

Թեորեմն ապացուցվեց։

Դիտողություն։ Կարելի է ցույց տալ, որ A թիվը, որի մասին հենց նոր խոսվեց, միևնույն ժամանակ կլինի f(x, y) ֆունկցիայի նաև կրկնակի սահմանը, երբ միաժամանակ $x\to x_0$ և $y\to y_0$։ Այս հանգամանքը ապացուցված թեորեմն մոտեցնում է n° 158-ի թեորեմային։

468. ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ԱՆՑՈՒՄ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՆՇԱՆԻ ՏԱԿ։ Այժմ դիմենք y պարամետրից կախված (1) ինտեգրալի դիտարկմանը, սկզբում սահմանափակվելով այն դեպքով, երբ [a, b] միջակայքը վերջավոր է և ֆունկցիան ինտեգրելի է իսկական իմաստով։

Ենթադրելով, որ պարամետրի փոփոխման Y տիրույթը ունի y_0 խտացման կետը, հարց դնենք (1) ֆունկցիայի սահմանի վերաբերյալ, երբ $y\to y_0$։

I Թեորեմա: Եթե f(x, y) ֆունկցիան հաստատուն y-ի դեպքում ըստ x-ի ինտեգրելի է [a, b] միջակայքում և $y\to y_0$ դեպքում ձգտում է (2) սահմանային ֆունկցիային x-ի նկատմամբ հավասարաչափ, ապա տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x, y)\,dx=\int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{9}$$

Ապացույց*։ $\varphi(x)$ սահմանային ֆունկցիայի ինտեգրելիությունն արդեն հայտնի է [466, 3°]։ Նախապես վերցնելով $\varepsilon>0$ կամայական թիվը, կգտնենք այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որպեսզի տեղի ունենա (3)-ը։ Այդ ժամանակ, երբ $|y-y_0|<\delta$, կունենանք՝

* Որոշակիության համար ենթադրում ենք, որ y_0-ն վերջավոր է։

$$\left|\int_a^b f(x,y)\,dx-\int_a^b \varphi(x)\,dx\right|=\left|\int_a^b \left[f(x,y)-\varphi(x)\right]dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^b |f(x,y)-\varphi(x)|\,dx<\varepsilon(b-a),$$

որը և ապացուցում է (9) բանաձևը։

(9) բանաձևը կարելի է գրել նաև այսպես՝

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx.$$

Այս բանաձևի բավարարման դեպքում ասում են, որ սահմանային անցումն ըստ պարամետրի թույլատրելի է ինտեգրալի նշանի տակ։

Ընդունելով, որ բոլոր $y<y_0$, *ունենք՝*

ՀԵՏԵՎԱՆՔ: Եթե $f(x,y)$ ֆունկցիան հաստատուն y-ի դեպքում ըստ x-ի անընդհատ է $[a,b]$ միջակայքում և y-ն աճելիս ձգտում է անընդհատ սահմանային ֆունկցիայի, մոնոտոն աճելով, ապա տեղի ունի *(9)* բանաձևը:

Օգտագործել Դինիի ընդհանրացրած թեորեման [466, 3°]։

Ենթադրելով, որ Y տիրույթն ինքը ներկայացնում է մի $[c, d]$ *վերջավոր միջակայք, վերջում դիտարկենք (1) ֆունկցիայի անընդհատության հարցը։*

II. ԹԵՈՐԵՄԱ. Եթե $f(x,y)$-ը, որպես երկու փոփոխականների ֆունկցիա, որոշված ու անընդհատ է $[a, b; c, d]$ ուղղանկյունում, ապա *(1)* ինտեգրալը կլինի y պարամետրի անընդհատ ֆունկցիա $[c, d]$ միջակայքում։

Ապացույց. $f(x,y)$ *ֆունկցիայի հավասարաչափ անընդհատության շնորհիվ* [164], *կամայական* $\varepsilon>0$ *թվով կգտնենք այնպիսի* $\delta>0$, *որ*

$$|x''-x'|<\delta, \qquad |y''-y'|<\delta$$

անհավասարություններից հետևի

$$|f(x'',y'')-f(x',y')|<\varepsilon$$

անհավասարությունը։ Մասնավորապես ընդունենք
$x'=x''=x,\quad y'=y_0,\quad y''=y$. *այդ դեպքում, երբ* $|y-y_0|<\delta$, *ինչպիսին էլ լինի* x-*ը, կունենանք՝*

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon.$$

Այսպիսով, f(x, y) ֆունկցիան, երբ y-ը ձգտում է y_0 սահմանային արժեքին, ձգտում է $f(x,y_0)$-ին x-ի նկատմամբ հավասարաչափ։ Այդպիսի դեպքում, I թեորեմայի համաձայն՝

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x, y)dx=\int_a^b f(x, y_0)dx$$

կամ՝

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=I(y_0),$$

որը և ապացուցում է մեր պնդումը։

Այսպես, օրինակ, չհաշվելով

$$\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}dx,\quad \int_0^1 \log(x^2+y^2)dx$$

ինտեգրալները, անմիջապես տեսնում ենք, որ նրանք ներկայացնում են անընդհատ ֆունկցիաներ y պարամետրից՝ նրա ցանկացած դրական արժեքների համար։

469. ԴԻՖԵՐԵՆՑՈՒՄ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՆՇԱՆԻ ՏԱԿ։ *y պարամետր պարունակող ինտեգրալով տրված (1) ֆունկցիան ուսումնասիրելիս կարևոր նշանակություն ունի այդ ֆունկցիայի ածանցյալի (ըստ պարամետրի) հարցը։*

Ենթադրելով, որ գոյություն ունի $f'_y(x, y)$ մասնակի ածանցյալը, $I'(y)$ ածանցյալը հաշվելու համար Լայբնիցը տվել է մի կանոն, որը Լագրանժի նշանակումներով գրվում է այսպես՝

$$I'(y)=\int_a^b f'_y(x, y)dx, \tag{10}$$

կամ, եթե օգտվենք Կոշիի ավելի արտահայտիչ նշանակումներից, այսպես՝

$$D_y\int_a^b f(x, y)dx=\int_a^b D_y f(x, y)dx.$$

Եթե ածանցյալի (ըստ y-ի) և ինտեգրալի (ըստ x-ի) նշանների այդպիսի տեղափոխություն թույլատրելի է, ապա ասում են, որ (1) ֆունկցիան կարելի է ըստ պարամետրի դիֆե-

րենցել ինտեգրալի նշանի տակ։ *Ածանցյալը մասնանշված բանաձևով հաշվելու էլ հենց տացել է «Լայբնիցի կանոնը» անունը։*

Հետևյալ թեորեման տալիս է այդ կանոնի կիրառելիության պարզ բավարար պայման։

III. ԹԵՈՐԵՄԱ. Դիցուք $[a, b; c, \partial]$ ուղղանկյունում որոշված $f(x, y)$ ֆունկցիան ըստ x-ի անընդհատ է $[a, b]$-ում $[c, \partial]$-ին պատկանող ամեն մի հաստատուն y-ի դեպքում։ Ենթադրենք, այնուհետև, որ ամբողջ տիրույթում գոյություն ունի $f'_y(x, y)$ մասնակի ածանցյալ, որն անընդհատ է որպես երկու փոփոխականների ֆունկցիա*. Այդ ժամանակ, $[c, \partial]$-ին պատկանող ամեն մի y-ի դեպքում տեղի ունի (10) բանաձևը։

$f(x, y)$ *ֆունկցիայի անընդհատությունն ըստ x-ի ապահովում է (1) ինտեգրալի գոյությունը։*

Ֆիքսելով որևէ $y=y_0$ արժեք, նրան տանք $\Delta y=k$ աճ։ Այդ ժամանակ՝

$$I(y_0)=\int_a^b f(x, y_0)dx, \qquad I(y_0+k)=\int_a^b f(x, y_0+k)dx,$$

այնպես որ՝

$$\frac{I(y_0+k)-I(y_0)}{k}=\int_a^b \frac{f(x, y_0+k)-f(x, y_0)}{k}dx. \tag{11}$$

Աջ մասում ինտեգրալը կախված է k-ից։ Մեզ անհրաժեշտ է ապացուցել, որ $k\to 0$ դեպքում թույլատրելի է սահմանային անցում ինտեգրալի նշանի տակ։

Դրանով ցույց կտրվի և՛

$$I'(y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{I(y_0+k)-I(y_0)}{k}$$

ածանցյալի գոյությունը, և՛ պահանջվող հավասարության տեղի ունեցությունը, այն է՝

---

* *Այդ պայմաններից, փաստորեն, արդեն բխում է նաև $f(x, y)$ ֆունկցիայի անընդհատությունն ըստ երկու արգումենտների. սակայն մենք դրանից չենք օգտվելու։*

$$I'(y_0)=\lim_{k\to 0}\int_a^b \frac{f(x, y_0+k)-f(x, y_0)}{k}dx=$$

$$=\int_a^b \lim_{k\to 0}\frac{f(x,y_0+k)-f(x, y_0)}{k}dx=\int_a^b f'_y(x, y_0)dx.$$

Այդ նպատակով, նախ Լագրանժի բանաձևով կգրենք՝

$$\frac{f(x, y_0+k)-f(x, y_0)}{k}=f'_y(x, y_0+\theta k) \quad (0<\theta<1). \tag{12}$$

Իսկ օգտվելով $f'_y(x, y)$ *ֆունկցիայի հավասարաչափ անընդհատությունից, կամայական* $\varepsilon>0$ *թվի համար կգտնենք այնպիսի* $\delta>0$, *որ երբ*

$$|x''-x'|<\delta \quad \text{և} \quad |y''-y'|<\delta,$$

տեղի կունենա

$$|f'_y(x'', y'')-f'_y(x', y')|<\varepsilon$$

անհավասարությունը։ Այստեղ ընդունելով

$$x'=x''=x, \quad y'=y_0, \quad y''=y_0+\theta k$$

և համարելով $|k|<\delta$ *ու հաշվի առնելով (12)-ը, կստանանք, որ բոլոր* x*-երի համար միաժամանակ կլինի՝*

$$\left|\frac{f(x, y_0+k)-f(x,y_0)}{k}-f'_y(x, y_0)\right|<\varepsilon.$$

Այստեղից պարզ է, որ (12) ընդինտեգրալ ֆունկցիան, երբ $k\to 0$, *(*x*-ի նկատմամբ) հավասարաչափ ձգտում է* $f'_y(x, y_0)$ *սահմանային ֆունկցիային։ Դրանով էլ, I թեորեմայի համաձայն, արդարացվում է սահմանային անցումը (11) ինտեգրալի նշանի տակ։*

Իբրև օրինակներ նորից դիտարկենք այն ինտեգրալները, որոնց մասին խոսք եղավ նախորդ n°-ում։ Ակներևաբար, $0<y$*-ի համար՝*

$$D_y\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,dx=\int_0^1 D_y \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,dx=-\int_0^1\frac{x\,dx}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\log\frac{y^2}{1+y^2},$$

$$D_y\int_0^1 \log(x^2+y^2)dx=\int_0^1 D_y\log(x^2+y^2)\,dx=$$

$$=\int_0^1 \frac{2y}{x^2+y^2}\,dx=2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{y}\text{:}$$

Հեշտ է ստուգել ստացված արդյունքը, այդ ինտեգրալները անմիջականորեն հաշվելով վերջավոր տեսքով՝

$$I_1(x)=\int_0^1 \mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}dx=\mathrm{arctg}\frac{1}{y}+\frac{1}{2}\,y\log\frac{y^2}{1+y^2},$$

$$I_2(y)=\int_0^1 \log(x^2+y^2)dx=\log(1+y^2)-2+2y\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{1}{y}$$

և ապա դիֆերենցելով ըստ x-*ի:*

$y=0$ *դեպքում* III *թեորեմայի պայմանները խախտվում են. տեսնենք, թե ինչպես է գործը* $I_1(y)$ *և* $I_2(y)$ *ֆունկցիաների ածանցյալների հետ* $y=0$ *դեպքում: Եթե առաջին ինտեգրալի մեջ ընդինտեգրալ արտահայտության, նրա անընդհատություն պահպանելու համար,* $y=0$ *և* $x>0$ *դեպքում վերագրենք* $\frac{\pi}{2}$ *արժեք, ապա կստանանք* $I_1(0)=\frac{\pi}{2}$, *այնպես որ* $I_1(y)$ *ֆունկցիան ըստ* y-*ի անընդհատ կլինի նաև* $y=0$ *դեպքում: Սակայն՝*

$$\frac{I_1(y)-I_1(0)}{y}=\frac{1}{2}\log\frac{y^2}{1+y^2}-\frac{\mathrm{arc\,tg}\,y}{y}\to-\infty,$$

երբ $y\to0$, *այնպես որ* $y=0$ *դեպքում գոյություն չունի վերջավոր ածանցյալ: Իսկ* $I_2(y)$ *ֆունկցիայի համար ունենք՝*

$$I_2(0)=-2,\quad \frac{I_2(y)-I_2(0)}{y}=\frac{\log(1+y^2)}{y}+2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{y}\to\pi,$$

երբ $y\to0$: *Այստեղ* $I_2'(0)=\pi$, *մինչդեռ ընդինտեգրալ ֆունկցիայի ածանցյալը* $y=0$ *դեպքում հավասար է զրոյի, այնպես որ նրա ինտեգրալը նույնպես զրո է. Լայբնիցի կանոնը կիրառելի չէ:*

470. ԻՆՏԵԳՐՈՒՄ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՆՇԱՆԻ ՏԱԿ: *Դնենք, վերջապես, (1) ֆունկցիայի ինտեգրալի (ըստ* y-*ի) հարցը, ասենք,* $[c, d]$ *միջակայքում:*

Մեզ առանձնապես հետաքրքրելու է այն դեպքը, երբ այդ ինտեգրալը կարտահայտվի հետևյալ բանաձևով

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d \left\{\int_a^b f(x, y)dx\right\} dy = \int_a^b \left\{\int_c^d f(x, y)dy\right\} dx,$$

որն առանց փակագծերի գրվում է այսպես՝

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy: \tag{13}$$

*Այս բանաձևի առկայության դեպքում ասում են, որ (1) ֆունկ-*ցիան կարելի է ըստ y պարամետրի ինտեգրել ինտեգրալի (ըստ x-ի վերցրած) նշանի տակ։

(13)-ում գրված երկու հաջորդական ինտեգրալների հավասարության համար պարզագույն պայմաններ է տալիս հետևյալ թեորեման.

IV **ԹԵՈՐԵՄԱ**: Եթե f(x, y) ֆունկցիան անընդհատ է (ըստ երկու փոփոխականների) $[a, b; c, d]$ ուղղանկյունում, ապա տեղի ունի (13) բանաձևը։

Ապացուցենք ավելի ընդհանուր հավասարություն՝

$$\int_c^{\gamma_1} dy \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b dx \int_c^{\gamma_1} f(x, y)dy, \tag{13*}$$

որտեղ $c \leqslant \gamma_1 \leqslant d$:

Այդ հավասարության ձախ և աջ մասերում մենք ունենք γ_1 պարամետրից կախված երկու ֆունկցիա. հաշվենք նրանց ածանցյալներն ըստ γ_1-ի։

Ձախ մասում արտաքին ինտեգրալի ընդինտեգրալ ֆունկցիան է (1) ֆունկցիան, որն ըստ y-ի անընդհատ է II թեորեմայի շնորհիվ։ Ուստի, նրա ածանցյալն ըստ փոփոխական վերին սահմանի հավասար կլինի ընդինտեգրալ ֆունկցիային՝ հաշված $\lambda = \gamma_1$ համար, այսինքն հետևյալ ինտեգրալին՝

$$I(\gamma_1) = \int_a^b f(x, \gamma_1)dx.$$

(13)-ի աջ մասում գրված է հետևյալ ինտեգրալը*

$$\int_a^b \varphi(x, \eta)dx, \quad \text{որտեղ} \quad \varphi(x, \eta)=\int_c^{\eta} f(x, y)dy\text{։}$$

$\varphi(x, \eta)$ ֆունկցիան բավարարում է III թեորեմայի պայմաններին. Իսկապես, $\varphi(x, \eta)$ ֆունկցիան, II թեորեմայի համաձայն, անընդհատ է ըստ x-ի*։ Այնուհետև,

$$\varphi'_{\eta}(x, \eta)=f(x, \eta)$$

ածանցյալն, իբրև երկու փոփոխականի ֆունկցիա, անընդհատ է։ Ուստի հիշյալ ինտեգրալի նկատմամբ կիրառելի է Լայբնիցի կանոնը՝

$$D_{\eta}\int_a^b \varphi(x, \eta)dx=\int_a^b \varphi'_{\eta}(x, \eta)\, dx = \int_a^b f(x, \eta)dx=I(\eta)\text{․}$$

Այսպիսով, (13*) հավասարության ձախ և աջ մասերը, որպես η-ի ֆունկցիաներ, ունեն հավասար ածանցյալներ, հետևաբար, կարող են իրարից տարբերվել միայն հաստատուն գումարելիով։ Սակայն $\eta=c$ դեպքում այդ երկու արտահայտություններն էլ, ակներևորեն, դառնում են զրո. հետևաբար, նրանք նույնաբար հավասար են η-ի բոլոր արժեքների դեպքում, և (13*) հավասարությունն ապացուցված է։

Նրանից, $\eta=d$ դեպքում մասնավորապես ստացվում է (13)-ը։

Դիտարկենք օրինակներ։ 1) Դիցուք $f(x, y)=x^y$ $[0,1; a, b]$ ուղղանկյունում, որտեղ $0<a<b$։ Թեորեմայի պայմանները կատարվում են։ Ունենք՝

$$\int_a^b dy \int_0^1 x^y dx=\int_0^1 dx\int_a^b x^y dy\text{։}$$

Ձախ մասում հեշտությամբ ստացվում է վերջնական արդյունք՝

$$\int_a^b \frac{dy}{1+y}= \log \frac{1+b}{1+a},$$

իսկ աջ մասում ստացվում է $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\log x}\, dx$ ինտեգրալը։ Այսպիսով, ինտեգրման կարգը փոխելու շնորհիվ, մենք գտնում ենք այդ ինտեգրալի արժեքը [համեմատել 460, 12) (գ)]։

2) $f(x, y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ ֆունկցիայի դեպքում $[0,1; 0,1]$ ուղղանկյունում թեորեմայի պայմանները չեն կատարվում. խզում կա (0, 0) կետում։ Ունենք՝

* Որն այստեղ պարամետրի դեր է խաղում։

$$\int_0^1 f\,dx = \frac{x}{x^2+y^2}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{1+y^2} \qquad (y \neq 0),$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f\,dx = \operatorname{arctg} y \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

մինչդեռ՝

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f\,dy = -\frac{\pi}{4}:$$

471. ԱՅՆ ԴԵՊՔԸ, ԵՐԲ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԸ ՆՈՒՅՆՊԵՍ ԿԱԽՎԱԾ ԵՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐԻՑ. *Այժմ դիմենք ավելի բարդ դեպքի դիտարկմանը, երբ ոչ միայն ընդինտեգրալ արտահայտությունն է պարամետր պարունակում, այլև ինտեգրալի սահմաններն իրենք են կախված այդ պարամետրից. Այդ դեպքում ինտեգրալն ունի հետևյալ տեսքը՝*

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx. \tag{14}$$

Սահմանափակվենք այդպիսի ինտեգրալի անընդհատության ու դիֆերենցելիության հարցով.

V **ԹԵՈՐԵՄԱ.** Դիցուք $f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված ու անընդհատ է $[a, b; c, d]$ ուղղանկյունում, իսկ

$$x = \alpha(y), \quad x = \beta(y) \quad [c \leqslant y \leqslant d]$$

կորերն անընդհատ են և նրա սահմաններից չեն դուրս գալիս: Այդ դեպքում *(14)* ինտեգրալն իրենից ներկայացնում է y-ի անընդհատ ֆունկցիա $[c, d]$-ում.

Եթե y_0-ն y-ի որևէ մասնավոր արժեք է, ապա (14) ինտեգրալը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$I(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y)\,dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y)\,dx. \tag{15}$$

Առաջին ինտեգրալը, որի մեջ սահմաններն արդեն հաստատուն են, երբ $y \to y_0$ ձգտում է հետևյալ ինտեգրալին՝

$$I(y_0)=\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0)dx,$$

համաձայն II թեորեմայի։ Իսկ մնացած երկու ինտեգրալները գնահատվում են այսպես՝

$$\left|\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx\right|\leqslant M\cdot|\beta(y)-\beta(y_0)|,$$

$$\left|\int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y)dx\right|\leqslant M\cdot|\alpha(y)-\alpha(y_0)|,$$

որտեղ $M=\max|f(x, y)|$, և $\alpha(y)$ ու $\beta(y)$ ֆունկցիաների անընդհատության շնորհիվ ձգտում են զրոյի, երբ $y\to y_0$։

Այսպիսով, վերջնականապես՝

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=I(y_0),$$

որը և ապացուցում է թեորեման։

VI ԹԵՈՐԵՄԱ. Եթե, բացի ասածներից, $f(x, y)$ ֆունկցիան $[a, b; c, d]$ ուղղանկյունում ունի $f'_y(x, y)$ մասնակի ածանցյալ, ինչպես նաև գոյություն ունեն $\alpha'(y)$ ու $\beta'(y)$ ածանցյալները, ապա (14) ինտեգրալն ունի ածանցյալ ըստ պարամետրի, որն արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$I'(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y)dx+\beta'(y)\cdot f(\beta(y), y)-\alpha'(y)\cdot f(\alpha(y), y). \quad (16)$$

Այստեղ էլ մենք ելնելու ենք (15) հավասարությունից։ Առաջին ինտեգրալն $y=y_0$ դեպքում ունի ածանցյալ, որը ներկայացվում է ածանցյալի ինտեգրալով՝

$$\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0)dx\text{-ով},$$

համաձայն III թեորեմայի։ Երկրորդ ինտեգրալի համար (որի արժեքը հավասար է զրոյի, երբ $y=y_0$), միջին արժեքի թեորեմայի համաձայն ունենք՝

$$\frac{1}{y-y_0}\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y)dx = \frac{\beta(y)-\beta(y_0)}{y-y_0} f(\bar{x}, y),$$

որտեղ $\bar{x}$-ը գտնվում է $\beta(y_0)$-ի ու $\beta(y)$-ի միջև։ Այստեղից, երկրորդ ինտեգրալի ածանցյալը $y=y_0$ դեպքում, որը համընկնում է նախորդ արտահայտության սահմանի հետ, երբ $y\to y_0$, կլինի՝

$$\beta'(y_0)\cdot f(\beta(y_0), y_0)\text{։}$$

Նման եղանակով, երրորդ ածանցյալի համար $y=y_0$ դեպքում կստանանք՝

$$-\alpha'(y_0)\cdot f(\alpha(y_0), y_0)\text{։}$$

Այս բոլոր արդյունքներն ի մի բերելով, համոզվում ենք, որ $I'(y_0)$ ածանցյալը գոյություն ունի և արտահայտվում է նշված բանաձևով։

Դիտողություն։ Երկու թեորեմների եզրակացությունները էլ ուժի մեջ են մնում նաև այն ենթադրության դեպքում, որ $f(x, y)$ ֆունկցիան տված է (և օժտված է նշված հատկություններով) միայն այն տիրույթում, որը գտնվում է

$$x=\alpha(y) \text{ ու } x=\beta(y)$$

կորերի միջև։ Ֆունկցիայի դիտարկումը նաև այդ տիրույթից դուրս օգտագործվեց միայն դատողությունների պարզեցման համար։

Ուսանելի է ստացած արդյունքների վրա նայել նաև այդ տեսակետից։ $I(y)$ ինտեգրալը ստացվում է

$$I(y, u, v)=\int_u^v f(x, y)dx$$

ինտեգրալից, որը կախված է y, u, v երեք պարամետրից, $u=\alpha(y)$, $v=\beta(y)$ տեղադրությամբ։ Հարցն սպառվում է բարդ ֆունկցիայի անընդհատության ու դիֆերենցելիության վերաբերյալ ընդհանուր թեորեմների կիրառումով։ Մասնավորապես (16) բանաձևը, կլասիկ սխեմայով գրվում է այսպես՝

$$\frac{dI}{dy}=\frac{\partial I}{\partial y}+\frac{\partial I}{\partial u}\cdot\alpha'(y)+\frac{\partial I}{\partial v}\cdot\beta'(y)\text{։}$$

472. ՄԻԱՅՆ x-ԻՑ ԿԱԽՎԱԾ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՉԻ ՄՈՒԾՈՒՄԸ.

Հեշտ է ստանալ վերևում ստացված արդյունքների որոշ ընդհանրացումներ, ընդ որում՝ առանց նոր գաղափարների օգնության։ *Այսպես, կարելի է, (1)-ի փոխարեն, դիտարկել հետևյալ ինտեգրալը՝*

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)\cdot g(x)dx, \qquad (1^*)$$

որտեղ $g(x)$*-ը՝* x*-ի մի ֆունկցիա է, որը բացարձակ ինտեգրելի է* $[a, b]$ *միջակայքում (հնարավոր է, նաև անիսկական իմաստով)։ Այդ ճանապարհով հաջողվում է շարադրված տարրական տեսությունը մասամբ տարածել նաև անիսկական ինտեգրալների վրա։*

Ձևակերպենք I, II, III *և* IV *թեորեմներին համանման թեորեմներ՝*

I* **ԹԵՈՐԵՄԱ:** I թեորեմայի ենթադրությունների դեպքում տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\cdot g(x)dx=\int_a^b \varphi(x)\cdot g(x)dx.$$

Ամենից առաջ նկատենք, որ այդ բանաձևերում մասնակցող բոլոր ինտեգրալները գոյություն ունեն։ $\varphi(x)$ *սահմանային ֆունկցիայի ինտեգրելիությունն արդեն ապացուցվել է։ Իսկ* $f\cdot g$ *և* $\varphi\cdot g$ *ֆունկցիաների ինտեգրալների (ընդհանրապես ասած՝ անիսկական) գոյությունը հետևում է* n° 440*-ի վերջի առաջադրությունից։*

Այժմ, վերցնելով $\varepsilon>0$ *թիվը,* $f(x, y)$ *ֆունկցիայի* $\varphi(x)$*-ին հավասարաչափ ձգտելու շնորհիվ կգտնենք այնպիսի* $\delta>0$ *թիվ, որ տեղի ունենա (3) պայմանը*։ Այդ ժամանակ,* $|y-y_0|<\delta$ *դեպքում ճիշտ կլինի այսպիսի գնահատական՝*

$$\left|\int_a^b f(x,y)\cdot g(x)dx-\int_a^b \varphi(x)\cdot g(x)dx\right|\leq$$

$$\leq\int_a^b |f(x,y)-\varphi(x)|\cdot|g(x)|dx<\varepsilon\cdot\int_a^b |g(x)|dx,$$

* *Այստեղ ևս, ինչպես միշտ, օրինակի համար դիտարկում ենք վերջավոր* y_0*-ի դեպքը․ տարածումը* $y_0=+\infty$ *դեպքի վրա դժվար չէ։*

որը և ապացուցում է մեր բանաձևը, քանի որ այդ մասում կամայապես փոքր թիվը բազմապատկվում է $\int_a^b |g(x)|\,dx$ *վերջավոր հաստատուն թվով։*

Մասնավորապես, նման թեորեմա տեղի ունի նաև ֆունկցիաների $\{f_n(x)\}$ *հաջորդականության համար, որտեղ պարամետրի դերում* n*-ն է։ Մենք այդ արդյունքը ձևակերպենք «անվերջ շարքերի լեզվով», քանի որ այդ տեսքով նա ավելի հաճախ է կիրառվում։*

ՀԵՏԵՎԱՆՔ։ Եթե 1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

շարքի անդամները $[a, b]$ միջակայքում ինտեգրելի (իսկական իմաստով) ֆունկցիաներ են և շարքը հավասարաչափ զուգամետ է, 2) $g(x)$-ը՝ $[a, b]$-ում բացարձակ ինտեգրելի (թեկուզ և անիսկական իմաստով) ֆունկցիա է, ապա

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\cdot g(x)$$

շարքը կարելի է ինտեգրել անդամ առ անդամ։

Այնուհետև, ճիշտ այնպես, ինչպես և II ու III թեորեմաները (միայն հենվելով I թեորեմայի վրա, փոխարեն I-ի), ապացուցվում են հետևյալ թեորեմները՝*

II* **ԹԵՈՐԵՄԱ**։ II թեորեմայի ենթադրությունների դեպքում (1*) ինտեգրալը կլինի y-ի անընդհատ ֆունկցիա $[c, d]$ միջակայքում։

III* **ԹԵՈՐԵՄԱ**։ III թեորեմայի ենթադրությունների դեպքում (1*) ֆունկցիան կլինի դիֆերենցելի ըստ պարամետրի և տեղի կունենա հետևյալ բանաձևը՝

$$I'(y)=\int_a^b f'_y(x, y)\cdot g(x)dx.$$

Վերջապես՝

IV* **ԹԵՈՐԵՄԱ**։ IV թեորեմայի ենթադրությունների դեպքում իրավացի է երկու հաջորդական ինտեգրալների հավասարությունը՝

$$\int_c^d I(y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\cdot g(x)dx=\int_a^b g(x)dx\int_c^d f(x,y)dy.$$

Ապացույցը տառացի վերարտադրումն է IV *թեորեմայի ապացույցի (միայն հիմնվելով* II* *և* III* *թեորեմաների վրա, փոխարեն* II-*ի ու* III-*ի)։*

Այս (ինչպես և նախորդ) թեորեմաների կիրառման բազմաթիվ օրինակներ ընթերցողը կգտնի հաջորդ n°-*ում։*

473. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Օգտագործելով e^x *ֆունկցիայի շարքի վերլուծումը, շարքի գումարի տեսքով ներկայացնել հետևյալ ինտեգրալները՝*

$$(ա)\ \int_0^1 e^x\log x\,dx,\qquad (բ)\ \int_0^1 \frac{e^x-1}{\sqrt{x^3}}dx.$$

I* *թեորեմայի հետևանքի համաձայն ունենք՝*

$$(ա)\ \int_0^1 e^x\log x\,dx=\int_0^1\log x\cdot\left\{1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\right\}dx=$$

$$=\int_0^1\log x\,dx+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\int_0^1 x^m\log x\,dx=$$

$$=-\left\{1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!\,(m+1)}\right\},$$

$$(բ)\ \int_0^1\frac{e^x-1}{\sqrt{x^3}}dx=\int_0^1\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}x^{m-\frac{3}{2}}dx=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)\cdot m!}.$$

2) Շարքի վերլուծելով, հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$I=\int_0^1\log x\cdot\log(1+x)\,dx.$$

Ըստ 409-ի 3 թեորեմայի,

$$\log(1+x)=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

շարքը հավասարաչափ զուգամետ է [0, 1] *միջակայքում։ Քանի որ* log x-*ը այդ միջակայքում բացարձակ ինտեգրելի է, ապա,* I* *թեորեմայի նույն հետևանքի համաձայն,*

$$I=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^1 x^n\log x\,dx=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)^2},$$

ի նկատի ունենալով

$$\frac{1}{n(n+1)^2}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}$$

նույնությունը և հաշվի առնելով

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}=\log 2,\quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^2}=\frac{\pi^2}{12}\;{}^{*},$$

I-ի արտահայտությունը կարելի է ներկայացնել այսպես՝

$$I=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=2-2\log 2-\frac{\pi^2}{12}.$$

Այստեղ I-ի համար ստացվեց «վերջավոր տեսքով» արժեք։ Հասկանալի է, որ այդ ոչ միշտ է հաջողվում։

3) Նշանակելով $X_n(x)$*-ով Լեժանդրի* n*-րդ բազմանդամը, ապացուցել որ՝*

$$X_n(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\,d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}}.$$

Եթե վերհիշենք Լեժանդրի $X_n(x)$ *բազմանդամների ծագումը, որպես գործակիցներ՝* $\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$ *արտահայտության ըստ* α*-ի աստիճանների վերլուծման մեջ, ապա բավական է, դիտարկելով*

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\int_0^{\theta}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\,d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}} \tag{17}$$

շարքը, ցույց տալ, որ նրա գումարը հավասար է նշված արտահայտությանը $x=\cos\theta$ *դեպքում։*

Քանի որ [հմմտ. 434, 2)], $|\alpha|<1$ *դեպքում՝*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi=(1-\alpha)\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}$$

և շարքը φ*-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է (որովհետև մաժորվում է* $\sum_0^{\infty}|\alpha|^n$ *երկրաչափական պրոգրեսիայով), ապա (17) շարքը, նորից նույն հետևանքի համաձայն, կարելի է ձևափոխել այսպես՝*

---

* 393 *(18)*, 420, *6)* *կամ* 422*։ Տես նաև ծանոթագրությունը* 547 *էջում։*

$$2\,\frac{1-\alpha}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}}\cdot\frac{d\varphi}{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}.$$

Դիմելով նույն տեղադրումներին, ինչ որ 460-ի 7) խնդրի մեջ (որտեղ փաստորեն առաջվել է մասնավոր դեպքը, երբ n=0 *և 1), հաջորդաբար կստանանք՝*

$$\frac{1-\alpha}{\pi}\int_x^1\frac{1}{\sqrt{(z-x)(1-z)}}\cdot\frac{dz}{1-2\alpha z+\alpha^2}=$$

$$=\frac{2}{\pi}(1-\alpha)\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1-\alpha)^2t^2+(1-2\alpha x+\alpha^2)}=\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}},$$

որը և ավարտում է ապացույցը։

4) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_0^{\infty}\frac{\log|\cos x|\,dx}{x^2}.$$

Ընդինտեգրալ արտահայտությունը ∞ *է դառնում* $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ *կետերում, որտեղ* $\cos x=0$*։ *Սակայն այդ հանգամանքը չի խանգարում նրա ինտեգրալի գոյությանը ցանկացած վերջավոր միջակայքում։ 0-ից մինչև* $+\infty$ *միջակայքը տրոհելով վերջավոր միջակայքերի՝*

$$\left[n\cdot\frac{\pi}{2},\quad (n+1)\frac{\pi}{2}\right]\quad (n=0, 1, 2, \cdots),$$

$n=2m$ *դեպքում կստանանք՝*

$$\int_{m\pi}^{m\pi+\frac{\pi}{2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log\cos z}{(z+m\pi)^2}dz$$

(տեղադրություն՝ $x=z+m\pi$*), իսկ* $n=2m-1$ *դեպքում՝*

$$\int_{m\pi-\frac{\pi}{2}}^{m\pi}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log\cos z}{(z-m\pi)^2}dz$$

---

* $x=0$ *դեպքում եզակիություն չկա, ինչպես դրանում հեշտ է համոզվել, անորոշությունը բացելով Լոպիտալի եղանակով։*

(տեղադրում՝ $x=m\pi-z$)։ Այստեղից որոնելի ինտեգրալը ներկայացվում է ինտեգրալների շարքի տեսքով՝

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos z \cdot \frac{dz}{z^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos z \cdot \frac{dz}{(z-m\pi)^2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos z \cdot \frac{dz}{(z+m\pi)^2} \right\}$$

և կամ շարքի ինտեգրալի տեսքով՝

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos z \left\{ \frac{1}{z^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(z-m\pi)^2} + \frac{1}{(z+m\pi)^2} \right] \right\} dz\text{։}$$

Անդամ առ անդամ ինտեգրման թույլատրելիությունը արդարացվում է նախորդ n°-ի մի քանի անգամ հիշատակված հետևանքով, քանի որ $\sum_{m=1}^{\infty}$ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ միջակայքում։

Բայց $\{\ldots\}$ արտահայտության մեջ մենք տեսնում ենք $\frac{1}{\sin^2 z}$ ֆունկցիայի վերլուծումը պարզագույն կոտորակների [413, 7)]։ Այսպիսով՝

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\cos z}{\sin^2 z}\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos z \; d\,\mathrm{ctg}\, z$$

ինտեգրալը հեշտ է հաշվել մասերով ինտեգրումով։ Վերջնականապես՝

$$\int_0^{\infty} \frac{\log|\cos x|\, dx}{x^2} = -\frac{\pi}{2}\text{։}$$

5) Ցույց տալ անմիջականորեն, որ

$$(\text{ա}) \int_0^1 \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx, \quad (\text{բ}) \int_0^1 \frac{x^3}{y^2}\, e^{-\frac{x^2}{y}}\, dx$$

ինտեգրալների համար (որտեղ $y>0$) $y\to 0$ դեպքում սահմանային անցումը չի կարող կատարվել ինտեգրալի նշանի տակ։ Համոզվել, որ II թեորեմայի պայմանները խախտվում են։

6) Լայբնիցի կանոնը կիրառել հաշվելու համար

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(a^2-\sin^2\theta)\,d\theta \qquad (a>1)$$

ինտեգրալի ածանցյալն ըստ պարամետրի։

Հեշտ է ստուգել, որ III թեորեմայի պայմանները այստեղ տեղի ունեն։ Ունենք՝

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a\,d\theta}{a^2-\sin^2\theta}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}\,։$$

Այստեղից, ինտեգրելով ըստ a-ի, վերականգնում ենք $I(a)$ արժեքը՝

$$I(a)=\pi\log\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)+C\,։$$

C հաստատունը որոշելու համար, $I(a)$ ինտեգրալը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$I(a)=\pi\log a+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(1-\frac{1}{a^2}\sin^2\theta\right)d\theta,$$

այնպես որ, եթե օգտագործենք նաև $I(a)$-ի համար ստացած արտահայտությունը, կստանանք՝

$$C=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(1-\frac{1}{a^2}\sin^2\theta\right)d\theta-\pi\log\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a}\,։$$

Այստեղ անցնենք սահմանի, երբ $a\to+\infty$, քանի որ՝

$$\left|\log\left(1-\frac{1}{a^2}\sin^2\theta\right)\right|\leqslant\left|\log\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\right|,$$

ապա ինտեգրալը ձգտում է զրոյի, և գտնում ենք, որ $C=-\pi\log 2$։ Վերջնականապես, երբ $a>1$ [հմմտ. 460, 5)]՝

$$I(a)=\pi\log\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}\,։$$

Շատ նշանակալից է, որ ըստ Լայբնիցի կանոնի դիֆերենցումը հնարավորություն ավեց գտնել վերջավոր արտահայտություն առաջադրված ինտեգրալի համար։ Այս մեթոդը հաճախ է նպատակին հասցնում։

7) Էլ ավելի հեշտ է հաշվվում հետևյալ ինտեգրալը [որը մեզ արդեն հայտնի է, 295, 4), 302, 14), 412, 8)]՝

$$I(r)=\int_0^{\pi} \log(1-2r\cos x+r^2)\,dx \qquad (|r|<1)\,։$$

Ըստ Լայբնիցի կանոնի՝

$$I'(r)=\int_0^{\pi}\frac{-2\cos x+2r}{1-2r\cos x+r^2}dx։$$

$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ տեղադրման օգնությամբ հեշտ է ցույց տալ, որ ստացած ինտեգրալը հավասար է 0-ի. այդ դեպքում՝

$$I(r)=C=\text{const}։$$

Բայց $I(0)=0$, նշանակում է $C=0$։ Այսպիսով, $|r|<1$ դեպքում $I(r)=0$։

8) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$I=\int_0^1\frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}dx։$$

Պարամետր մուծելով, դիտարկենք ավելի ընդհանուր ինտեգրալ՝

$$I(y)=\int_0^1\frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}dx \qquad (y\geq 0),$$

որից $y=1$ դեպքում ստացվում է տված ինտեգրալը։ III* թեորեմայի պայմանները, եթե ընդունենք՝

$$f(x,y)=\frac{\operatorname{arctg} xy}{x} \quad \text{և} \quad g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

բավարարվում են։ Ինտեգրալի նշանի տակ դիֆերենցելով ըստ x-ի, կստանանք՝

$$I'(y)=\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Այս ինտեգրալը հեշտությամբ հաշվվում է, օրինակ, $x=\cos\theta$ տեղադրումով

$$I'(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{1+y^2\cos^2\theta}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1+y^2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}։$$

Այստեղից, ինտեգրելով, գտնում ենք՝

$$I(y)=\frac{\pi}{2}\log\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)+C։$$

Քանի որ $I(0)=0$, ապա $C=0$։ $y=1$ դեպքում ստանում ենք, վերջապես, որոնելի ինտեգրալը՝

$$I=I(1)=\frac{\pi}{2}\log(1+\sqrt{2})\text{։}$$

9) Ապացուցել, որ

$$(\text{ա})\ u=x^{n}\cdot\int_{0}^{\pi}\cos(x\cos\theta)\sin^{2n}\theta\,d\theta \quad \text{և} \quad (\text{բ})\ u=\int_{0}^{\pi}\cos(n\theta-x\cdot\sin\theta)\,d\theta$$

արտահայտությունները (ամբողջ n-ի դեպքում) բավարարում են, այսպես կոչված, Բեսսելի դիֆերենցիալ հավասարմանը՝

$$x^{2}u''+xu'+(x^{2}-n^{2})u=0\text{։}$$

Այստեղ պարամետրի դեր խաղում է x-ը։ Ինտեգրալի նշանի տակ երկու անգամ դիֆերենցելով (III թեորեման), կգտնենք, որ հավասարման ձախ մասը (u-ի փոխարեն տեղադրելով նշված արտահայտությունները) հավասար կլինի՝

$$(\text{ա})\quad x^{n+1}\int_{0}^{\pi}[x\cdot\cos(x\cos\theta)\sin^{2n+2}\theta-$$

$$-(2n+1)\sin(x\cos\theta)\cdot\cos\theta\cdot\sin^{2n}\theta]\,d\theta=-\sin^{2n+1}\theta\cdot\sin(x\cos\theta)\Big|_{0}^{\pi}=0,$$

$$(\text{բ})\quad -\int_{0}^{\pi}[(x^{2}\sin^{2}\theta+n^{2}-x^{2})\cos(n\theta-x\sin\theta)-$$

$$-x\sin\theta\cdot\sin(n\theta-x\sin\theta)]\,d\theta=-(n+x\cos\theta)\cdot\sin(n\theta-x\sin\theta)\Big|_{0}^{\pi}=0\text{։}$$

10) Ապացուցել, որ

$$\frac{d^{2}u}{dr^{2}}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-n^{2}u=0$$

հավասարմանը (ամբողջ n-ի դեպքում) բավարարում է Au_1+Bu_2 ֆունկցիան (A-ն, B-ն կամայական հաստատուններ են), որտեղ՝

$$u_1=\int_{0}^{\pi}e^{nr\cos\theta}\,d\theta,\qquad u_2=\int_{0}^{\pi}e^{nr\cos\theta}\log(r\sin^{2}\theta)\,d\theta\text{։}$$

Ակներևաբար, բավական է ստուգել, որ հավասարմանը բավարարում են u_1 և u_2 ֆունկցիաները զատ-զատ։ Այդ կատարվում է, ինչպես և վերևում, ինտեգրալի նշանի տակ դիֆերենցելու օգնությամբ, ընդ որում u_1 ֆունկցիայի համար կիրառվում է III թեորեման, իսկ

$$u_2=\log r\cdot\int_{0}^{\pi}e^{nr\cos\theta}\,d\theta+2\int_{0}^{\pi}e^{nr\cos\theta}\log\sin\theta\,d\theta$$

ֆունկցիայի համար նաև III* թեորեման։

11) Գտնել հետևյալ լրիվ էլիպտիկ ինտեգրալների ածանցյալները ըստ k *մոդուլի* (0 < k < 1)՝

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,\quad F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Ունենք՝

$$\frac{dF}{dk}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}k\sin^2\varphi\cdot(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{k}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}d\varphi\right\}=\frac{E-F}{k}.$$

Նման ձևով՝

$$\frac{dF}{dk}=\frac{1}{k}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}d\varphi\right\}.$$

Բայց՝

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}d\varphi=\frac{1}{1-k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}d\varphi^*,$$

այնպես որ՝

$$\frac{dF}{dk}=\frac{F}{k(1-k^2)}-\frac{F}{k},$$

Ստացված բանաձևերը հետաքրքիր կիրառություններ ունեն։ Օրինակ եթե մուծենք $\sqrt{1-k^2}=k'$ *համալրված մոդուլը և*

$$E'(k)=E(k')\quad \text{և}\quad F'(k)=F(k')$$

ֆունկցիաները, ապա հեշտ է ստանալ՝

$$\frac{d}{dk}(EF'+E'F-EF')=0,$$

որտեղից հետևում է, որ

$$EF'+E'F-FF'=c=\text{const}.$$

---

* *Այդ բխում է*

$$(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}=$$

$$=\frac{1}{1-k^2}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}-\frac{k^2}{1-k^2}\frac{d}{d\varphi}\left[\sin\varphi\cos\varphi\,(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

նույնությունից, որ հեշտությամբ կարելի է ստուգել։

Այդ c հաստատունի մեծությունը որոշելու համար գտնենք ձախ մասի սահմանը, երբ k→0 (k′→1). այդ սահմանը, ակներևաբար, կլինի հենց c-ն։ Ամենից առաջ հեշտ է տեսնել, որ՝

$$\lim_{k\to 0} F=\lim_{k\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{k\to 0} E'=\lim_{k'\to 1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi=1$$

[թեորեմ II, 468]։ Այնուհետև ունենք՝

$$F'=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-k'^2}}=\frac{\pi}{2k},$$

$$|E-F|=F-E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{k^2\sin^2\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi<\frac{\pi}{2}k^2,$$

այնպես որ՝

$$|F'(E-F)|<\frac{\pi^2}{4}\cdot k \text{ և } \lim_{k\to 0}F'(E-F)=0։$$

Պարզվում է, որ որոնելի սահմանը հավասար է $\frac{\pi}{2}$-ի, և մենք վերջնականապես հանգում ենք Լեժանդրի հայտնի առնչությանը՝

$$EF'+E'F-FF'=\frac{\pi}{2}։$$

12) Ապացուցել հետևյալ նույնությունը՝

$$\underbrace{\int_a^x dt_{n-1}\int_a^{t_{n-1}}dt_{n-2}\ldots\int_a^{t_1}}_{n} f(t)\,dt=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)\,dt,$$

որտեղ f(t)-ն կամայական ֆունկցիա է, անընդհատ [a, b] միջակայքում և $a\leqslant x\leqslant b$։

Լուծում։ Դիմենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդին։ n=1 դեպքում նույնությունն ակներև է։ Այժմ ենթադրենք, որ նա ճիշտ է

մի որևէ n-ի (≥ 1) դեպքում և ապացուցենք նրա իրավացիությունը նաև այն դեպքում, երբ n-ը փոխարինվում է (n+1)-ով։

Կարճության համար նշանակենք՝

$$I_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt։$$

ըստ x-ի դիֆերենցենք

$$I_{n+1}(x)=\frac{1}{n!}\int_a^b (x-t)^n f(t)\,dt$$

արտահայտությունը, կիրառելով VI թեորեմը։ Քանի որ այստեղ ստորին սահմանը հաստատուն է, իսկ վերին սահմանում, այսինքն $t=x$ դեպքում, ընդինտեգրալ ֆունկցիան զրո է դառնում, ապա (16) բանաձևի արտաինտեգրալային անդամները չքանում են և ստանում ենք՝

$$\frac{d I_{n+1}(x)}{dx}=I_n(x)։$$

Ի նկատի ունենալով, որ $I_n(a)=0$, այստեղից ստանում ենք՝

$$I_{n+1}(x)=\int_a^x I_n(t_n)\,dt_n ։$$

Տեղադրելով I_n-ի փոխարեն իր արտահայտությունը հաջորդական ինտեգրալի տեսքով, ստանում ենք նման արտահայտություն նաև I_{n+1}-ի համար։

Ճիշտ այդպես ապացուցվում է նաև ավելի ընդհանուր արդյունք՝

$$\int_a^x \varphi'(t_{n-1})\,dt_{n-1}\int_a^{t_{n-1}}\varphi'(t_{n-2})\,dt_{n-2}\ldots\int_a^{t_1} f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x [\varphi(x)-\varphi(t)]^{n-1} f(t)\,dt,$$

որտեղ f-ն ու φ-ն անընդհատ ֆունկցիաներ են [a, b] միջակայքում, իսկ φ-ն ունի նաև անընդհատ ածանցյալ։

13) Գտնել հետևյալ ինտեգրալի ածանցյալն ըստ α-ի՝

$$I(\alpha)=\int_0^\alpha \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{\alpha-x}},$$

որտեղ $\varphi(x)$-ն իր $\varphi'(x)$ ածանցյալի հետ միասին անընդհատ է $[0, a]$ միջակայքում և $0<\alpha\leq a$։

(16) բանաձևն անմիջականորեն կիրառել մենք չենք կարող, որովհետև $x=\alpha$ դեպքում ընդինտեգրալ արտահայտությունը, ընդհանրապես ասած, անվերջություն է դառնում։ Մենք դիմում ենք շրջանց հնարքի, այն՝ $x=\alpha t$ տեղադրումով ինտեգրալը բերում ենք այսպիսի տեսքի՝

$$I(\alpha)=\sqrt{\alpha}\int_0^1 \frac{\varphi(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}\,dt.$$

այստեղ արդեն կիրառելի է III* թեորեմը։ Ինտեգրալը դիֆերենցելով Լայբնիցի կանոնով, կգտնենք՝

$$I'(\alpha)=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\int_0^1 \frac{\varphi(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}\,dt+\sqrt{\alpha}\int_0^1 \frac{t\varphi'(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}\,dt$$

կամ, եթե վերադառնանք նախկին փոփոխականին՝

$$I'(\alpha)=\frac{1}{2\alpha}\int_0^\alpha \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\alpha-x}}\,dx+\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \frac{x\,\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}\,dx.$$

Այս ինտեգրալներից առաջինը մասերով ինտեգրելու միջոցով ձևափոխելով, բանաձևին կարելի է ավելի պարզ տեսք տալ

$$I'(\alpha)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}}+\int_0^\alpha \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}\,dx.$$

14) Դիցուք՝

$$\begin{cases} f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{երբ } 0<x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1, \\ f(0,y)=\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Անմիջականորեն ցույց տալ, որ $\int_0^1 f(x,y)\,dx$ ինտեգրալի նկատմամբ $y=0$ դեպքում Լայբնիցի կանոնը կիրառելի չէ։

Նույնը հետևյալ ֆունկցիայի համար

$$\begin{cases} f(x,y)=x\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}, & \text{երբ } 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0<y\leqslant 1; \\ f(x,0)=0. \end{cases}$$

16) Ներկայացնենք

$$I=\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

ինտեգրալի հաշվումը, որը մենք կատարել էինք 8)-ում՝ ըստ պարամետրի դիֆերենցելով, այլ տեսքով։

Ընդինտեգրալ արտահայտության մեջ կատարելով

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$$

փոխարինում, I-ն կարտագրենք հաջորդական ինտեգրալի տեսքով՝

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}\,։$$

Կիրառելով IV* թեորեման, ինտեգրման կարգը փոխենք՝

$$I=\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{\pi}{2}\log(1+\sqrt{2})\,։$$

16) Ինտեգրալի նշանի տակ ինտեգրում կատարելով, հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}\cdot\frac{dx}{\sin x}\qquad (a>b>0)\,։$$

Ընդինտեգրալ ֆունկցիան ներկայացնենք ինտեգրալի տեսքով՝

$$\frac{1}{\sin x}\log\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}=2ab\int_0^1 \frac{dy}{a^2-b^2y^2\sin^2 x}\,,$$

այնպես որ՝

$$K=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int_0^1 \frac{dy}{a^2-b^2y^2\sin^2 x}\,։$$

Ինտեգրման կարգը փոխելով (ըստ IV թեորեմայի), կստանանք՝

$$K=2ab\int_0^1 dy\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2-b^2y^2\sin^2 x}\,։$$

Քանի որ՝

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2-b^2y^2\sin^2 x}=\frac{\pi}{2a\sqrt{a^2-b^2y^2}}\,,$$

ապա, վերջնականապես՝

$$K=\pi b\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{a^2-b^2y^2}}=\pi\cdot\arcsin\frac{b}{a},$$

17) Բերենք նաև այնպիսի դեպքերի օրինակներ, երբ երկու ինտեգրումների կարգը փոխելը ա ն թ ո ւ յ լ ա տ ր ե լ ի է՝

$$(\text{ա})\quad \int_0^1 dy\int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3}dx=\frac{1}{2},\quad \int_0^1 dx\int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3}\,dy=-\frac{1}{2};$$

$$(\text{բ})\quad \int_0^1 dy\int_0^1\left(\frac{x^5}{y^4}-\frac{2x^3}{y^3}\right)e^{-\frac{x^2}{y}}dx=-\frac{1}{e},$$

$$\int_0^1 dx\int_0^1\left(\frac{x^5}{y^4}-\frac{2x^3}{y^4}\right)e^{-\frac{x^2}{y}}dy=-\frac{1}{e}+\frac{1}{2},$$

*Ինքնին հասկանալի է, որ այս դեպքերում համապատասխան թեորեմայի պայմանները խախտվում են. ընդինտեգրալ ֆունկցիան խզվում է (0, 0) կետում**։

474. ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄԱՅԻ ԳԱՈՒՍՅԱՆ ԱՊԱՑՈՒՅՑԸ։ *Հենվելով* IV *թեորեմայի վրա, Գաուսը տվել է հանրահաշվի հիմնական թեորեմայի միանգամայն յուրատեսակ ապացույց։*

Այդ թեորեման ասում է, որ յուրաքանչյուր

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdot\cdot\cdot+a_n$$

ամբողջ ֆունկցիա (իրական կամ կոմպլեքս գործակիցներով) ունի իրական կամ կոմպլեքս արմատ։

Ընդունելով՝

$$x=r(\cos\theta+i\sin\theta);$$

կունենանք՝

$$x^k=r^k(\cos k\theta+i\cdot\sin k\theta),$$

այնպես որ՝

$$f(x)=P+Qi$$

որտեղ՝

$$P=r^n\cos n\theta+\cdot\cdot\cdot,\ Q=r^n\sin n\theta$$

---

* *(բ) դեպքում, երբ* $y=0$, *բայց* $x\neq0$, *ընդինտեգրալ ֆունկցիան կարելի է անընդհատ համարել, եթե այդ կետում ֆունկցիան հավասար ընդունենք զրոյի։*

ընդ որում չգրված անդամները պարունակում են r-ի միայն ավելի ցածր աստիճաններ, իսկ r-ից ազատ անդամները վերածվում են ուղղակի հաստատունների։

Թեորեմը, ակներևաբար, ապացուցված կլինի, եթե ցույց տրվի, որ P^2+Q^2 արտահայտությունը զրո է դառնում r-ի ու θ-ի արժեքների մի որոշ սիստեմի դեպքում։

Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան՝

$$U=\operatorname{arctg}\frac{P}{Q}։$$

$$\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{\frac{\partial P}{\partial r}\cdot Q-P\cdot\frac{\partial Q}{\partial r}}{P^2+Q^2}, \qquad \frac{\partial U}{\partial \theta}=\frac{\frac{\partial P}{\partial \theta}\cdot Q-P\cdot\frac{\partial Q}{\partial \theta}}{P^2+Q^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r\,\partial\theta}=\frac{H(r,\theta)}{(P^2+Q^2)^2}\,,$$

այստեղ $H(r,\theta)$*-ն՝ r-ից ու θ-ից կախված ֆունկցիա է, որի ճշգրիտ արտահայտությունը մեզ համար հետաքրքիր չէ։*

Կազմենք, վերջապես, հետևյալ հաջորդական ինտեգրալները՝

$$I_1=\int_0^R dr\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 U}{\partial r\,\partial\theta}\,d\theta \quad \text{և} \quad I_2=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^R\frac{\partial^2 U}{\partial r\,\partial\theta}\,dr,$$

որտեղ R-ը դրական հաստատուն է, որի արժեքն ստորև կգտնենք։

Եթե P^2+Q^2 *ֆունկցիան երբեք զրո չդառնար, ապա ընդինտեգրալ ֆունկցիան անընդհատ կլիներ, և, IV թեորեմայի համաձայն, անհրաժեշտաբար կլիներ* $I_1=I_2$։ *Մենք կապացուցենք, սակայն, որ* բավականաչափ *մեծ R-ի դեպքում նման հավասարություն նախահայտորեն տեղի չի ունենում․ այդ կվկայի այն մասին, որ սկզբնակետի շուրջը R շառավղով շրջանի մեջ* P^2+Q^2 *ֆունկցիան պետք է ընդունի նաև զրո արժեք, և թեորեմն ապացուցված կլինի։*

I_1*-ի համար հաշվելով ներքին ինտեգրալը, կստանանք՝*

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 U}{\partial r\,\partial\theta}\,d\theta=\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}=0,$$

քանի որ $\frac{\partial U}{\partial r}$*-ի արտահայտությունից, երևում է, որ նա θ-ի 2π պարբերություն ունեցող ֆունկցիա է։ Այստեղից հետևում է, որ* $I_1=0$։

Դիմելով I_2 ինտեգրալին, կունենանք՝

$$\int_0^R \frac{\partial^2 U}{\partial r\,\partial\theta}\,dr = \frac{\partial U}{\partial\theta}\Bigg|_{r=0}^{r=R}:$$

Հետագայի համար այժմ կարևոր է դիտարկել $\frac{\partial U}{\partial\theta}$ կոտորակի համարիչի ու հայտարարի՝ r-ի նկատմամբ ավագ անդամները:

Քանի որ՝

$$\frac{\partial P}{\partial\theta} = -nr^n \sin n\theta + \cdots, \quad \frac{\partial Q}{\partial\theta} = nr^n \cos n\theta + \cdots,$$

ապա՝

$$\frac{\partial P}{\partial\theta}\cdot Q - P\cdot\frac{\partial Q}{\partial\theta} = -n\,r^{2n} + \cdots:$$

Մյուս կողմից՝

$$P^2 + Q^2 = r^{2n} + \cdots,$$

այնպես որ, վերջնականապես, ունենք՝

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} = \frac{-nr^{2n} + \cdots}{r^{2n} + \cdots}:$$

Քանի որ չգրված անդամները պարունակում են r-ի ավելի ցածր աստիճաններ, որոնց համար գործակիցներ ծառայում են θ-ի սահմանափակ ֆունկցիաներ, ապա ոչ միայն

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\partial U}{\partial\theta} = -n,$$

այլև —n սահմանին ձգտելն ինքը կատարվում է θ-ի նկատմամբ հավասարաչափ:

Քանի որ r = 0 դեպքում նաև $\frac{\partial U}{\partial\theta} = 0$ (որովհետև այդ դեպքում $\frac{\partial P}{\partial\theta} = \frac{\partial Q}{\partial\theta} = 0$), I_2-ի ներքին ինտեգրալը հանգում է $\frac{\partial U}{\partial\theta}$-ի արժեքին r=R դեպքում: Երբ R→∞, այդ արժեքը —n-ին ձգտում է θ-ի նկատմամբ հավասարաչափ: Իսկ այդ դեպքում, ըստ I թեորեմայի՝

$$\lim_{R\to\infty} I_2 = -2\pi n:$$

Այսպիսով, բավականաչափ մեծ R-երի համար, I_2 ինտեգրալը բացասական կլինի և $I_1 = I_2$ հավասարությունը անհնարին կդառնա:

§ 2. ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

475. ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ։ Պարամետրից կախված ինտեգրալների վերևում շարադրված տեսությունը անիսկական ինտեգրալների դեպքի վրա տարածելու համար առանձնահատուկ դեր է կատարում ինտեգրալների հավասարաչափ զուգամիտության գաղափարը, որը և նախապես կբացատրենք։

Ենթադրենք, թե $f(x, y)$ ֆունկցիան տրված է $a \leqslant x$-ի բոլոր արժեքների և մի որոշ Y տիրույթի բոլոր y արժեքների համար։ Դիցուք, այնուհետև, այդ տիրույթի յուրաքանչյուր y-ի դեպքում գոյություն ունի

$$I(y)=\int_a^{\infty} f(x, y)\, dx \tag{1}$$

ինտեգրալը։

Անվերջ սահմաններ ունեցող անիսկական ինտեգրալի հենց սահմանման համաձայն [435]՝

$$\int_a^{\infty} f(x, y)\, dx = \lim_{A \to \infty} \int_a^{A} f(x, y)\, dx.$$

Այսպիսով,

$$F(A, y) = \int_a^{A} f(x, y)\, dx \tag{2}$$

ինտեգրալը, որն իրենից ներկայացնում է A-ի ու y-ի ֆունկցիա, երբ $y = \text{const}$ և $A \to \infty$ ունի $I(y)$ սահմանը։ **Եթե այդ ինտեգրալի $I(y)$-ին ձգտելը տեղի է ունենում y-ի նկատմամբ հավասարաչափ Y տիրույթում, ապա $I(y)$ ինտեգրալն անվանում են y-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ պարամետրի նշված արժեքների համար։**

Այդ նշանակում է, որ ամեն մի $\varepsilon>0$ թվի համար կգտնվի y-ից չկախված այնպիսի $A_0 \geqslant a$ թիվ, որ, հենց որ $A > A_0$, հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\left| \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx - \int_a^{A} f(x, y)\, dx \right| = \left| \int_A^{\infty} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon$$

տեղի կունենա միաժամանակ y-ի բոլոր արժեքների համար Y տիրույթում։

Իբրև օրինակ դիտարկենք հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_0^{\infty} y e^{-xy}\, dx,$$

որը զուգամետ է y-ի յուրաքանչյուր ոչ բացասական արժեքի դեպքում։

Անմիջականորեն հաշվենք հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_A^{\infty} y e^{-xy}\, dx։$$

Երբ $y=0$, նա հավասար է 0-ի, ինչպիսին էլ լինի A-ն։ Իսկ եթե $y>0$, ապա $xy=t$ տեղադրման օգնությամբ հեշտությամբ գտնում ենք՝

$$\int_A^{\infty} y e^{-xy}\, dx = \int_{Ay}^{\infty} e^{-t}\, dt = e^{-Ay}։$$

Եթե y-ը հաստատուն է, այս արտահայտությունը $A \to \infty$ դեպքում, ակներևաբար, ձգտում է 0-ի և, ինչպիսին էլ լինի $\varepsilon>0$ թիվը, հետևյալ անհավասարությունը՝

$$e^{-Ay} < \varepsilon$$

տեղի կունենա բոլոր $A > A_0(y)$ դեպքում, որտեղ $A_0(y) = \dfrac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{y}$ կախված է y-ից։

Եթե y-ի փոփոխությունը սահմանափակված է $[c, d]$ միջակայքով, որտեղ $c>0$, ապա կգտնվի նաև y-ից չկախված այնպիսի A_0 թիվ, որ $A_0 < A$-երի դեպքում (3) անհավասարությունը տեղի կունենա միանգամից բոլոր y-ների համար. բավական է որպես A_0 վերցնել $A_0(c)$ թիվը, քանի որ այդ ժամանակ $A_0 < A$-երի դեպքում կլինի՝

$$e^{-Ay} \leqslant e^{-Ac} < \varepsilon \qquad (c \leqslant y \leqslant d)։$$

Այս կերպով, մեր ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է y-ի նկատմամբ $[c, d]$ միջակայքում։

Այլ է գործը, երբ y պարամետրը փոփոխվում է $[0, d]$ $(d>0)$ միջակայքում։ Այս անգամ այդպիսի A_0 արդեն գոյություն չունի (առնվազն այն դեպքում, երբ $\varepsilon < 1$)։ Այդ երևում է թեկուզ նրանից, որ, որքան էլ մեծ վերցնենք A_0 թիվը, $e^{-A_0 y}$ արտահայտությունը ձգտում է 1-ի, երբ $y \to 0$, այնպես որ y-ի բավականաչափ փոքր արժեքների համար նա մեծ կլինի ամեն մի $\varepsilon<1$ թվից։ Ինտեգրալի զուգամիտությունը, երբ y-ը փոփոխվում է $[0, d]$ միջակայքում, արդեն հավասարաչափ չի լինի y-ի նկատմամբ։

476. ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆԸ. ԿԱՊԸ ՇԱՐՔԵՐԻ ՀԵՏ. *Օգտվելով ֆունկցիայի սահմանին հավասարաչափ ձգտելու ընդհանուր սկզբունքից* [466, *1°*], *կարելի է դիտարկելի դեպքի համար այն ձևակերպել այսպես՝*

Որպեսզի *(1)* ինտեգրալը y-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ լինի *Y* տիրույթում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տված յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գտնվի y-ից չկախված այնպիսի A_0 թիվ, որպեսզի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\left|\int_a^{A'} f(x, y)\,dx - \int_a^{A} f(x, y)\,dx\right| = \left|\int_A^{A'} f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon$$

տեղի ունենա *Y*-ի բոլոր y-ների համար միաժամանակ, հենց որ $A'>A\geqslant A_0$.

Այստեղ ևս, ինչպես սովորաբար, հարցը հանգում է նրան, որպեսզի բոլոր դիտարկելի y-*ների համար զուգամիտության սկզբունքը* [*համմտ.* 438] *տեղի ունենա հավասարաչափ.*

Անվերջ սահմաններ ունեցող անիսկական ինտեգրալը մենք 439-*ում արդեն համեմատության մեջ ենք դրել անվերջ շարքերի հետ։ Անվերջ շարքերի հետ կապ գոյություն ունի նաև (1) ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտության հարցում.*

Ինչպես մենք գիտենք 460, 2°-*ից*, $A\to\infty$ *դեպքում* F(A, y) *ֆունկցիայի* [*տես* (2)] *(1) ինտեգրալին հավասարաչափ մոտենալու համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի այդ ինտեգրալին հավասարաչափ ձգտի ֆունկցիաների յուրաքանչյուր* $\{F(A_n, y)\}$ *հաջորդականություն, ինչպիսին էլ լինի* A_n *անվերջ աճող վարիանտան։*

Եթե, վերջապես, «հաջորդականությունների լեզվից» անցնենք «անվերջ շարքերի լեզվին», ապա կհանգենք վերջնական եզրակացության, որ (1) ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտությունը *(*y-ի նկատմամբ*)* լիովին հավասարազոր է հետևյալ տեսքի բոլոր շարքերի հավասարաչափ զուգամիտությանը՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x, y)\,dx \qquad (A_0=a,\ A_n \geqslant a),$$

որտեղ A_n-ը՝ $+\infty$ ձգտող որևէ վարիանտա է.

477. ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ԲԱՎԱՐԱՐ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐ։ *Այժմ ստանանք մի քանի հայտանիշներ, որոնցով սովորաբար գործնականում դատում են ինտեգրալների հավասարաչափ զուգամիտության վերաբերյալ։*

1° Մենք ենթադրելու ենք, որ f(x, y) *ֆունկցիան ըստ* x*-ի ինտեգրելի է (իսկական կամ անիսկական իմաստով) յուրաքանչյուր* [a, A] *վերջավոր միջակայքում* (A ≥ a)։ **Եթե գոյություն ունի միայն x-ից կախված և [a, +∞] անվերջ միջակայքում ինտեգրելի այնպիսի φ(x) ֆունկցիա, որ *Y*-ից վերցրած բոլոր y արժեքների դեպքում**

$$|f(x, y)| \leq \varphi(x) \quad (\textit{երբ}\ x \geq a),$$

ապա (1) ինտեգրալը զուգամիտում է y-ի նկատմամբ հավասարաչափ (նրա արժեքների նշված տիրույթում)։

Այդ անմիջաբար բխում է հետևյալ անհավասարությունից՝

$$\left| \int_{A}^{A'} f(x, y)\, dx \right| \leq \int_{A}^{A'} \varphi(x)\, dx,$$

եթե օգտվենք նախորդ n°*-ի կրիտերիումից։*

Նշված պայմանների առկայության դեպքում երբեմն ասում են, որ f(x, y) *ֆունկցիան ունի* φ(x) *ինտեգրելի մաժորանտը, կամ՝ (1) ինտեգրալը մաժորվում է*

$$\int_{a}^{\infty} \varphi(x)\, dx$$

զուգամետ ինտեգրալով, որը պարամետր չի պարունակում։

2° Ավելի նուրբ հայտանիշ, ինչպես և n° **441***-ում, մեզ տալիս է միջին արժեքի երկրորդ թեորեման։*

Դիտարկենք երկու ֆունկցիաների արտադրյալի

$$I(y) = \int_{a}^{\infty} f(x, y)\, g(x, y)\, dx \tag{4}$$

ինտեգրալը, ենթադրելով, որ f(x, y) *ֆունկցիան ըստ* x*-ի ինտեգրելի է ամեն մի* [a, A] *միջակայքում, իսկ* g(x, y) *ֆունկցիան մոնոտոն է ըստ* x*-ի։*

Եթե

$$\int^{A} f(x, y)\, dx$$

ինտեգրալը, որպես A-ի և y-ի ֆունկցիա, *հավասարաչափ* սահմանափակ է՝

$$\left|\int_a^A f(x,y)\,dx\right| \leq K \quad (K=\text{const.},\ A\geqslant a,\ y\text{-ը՝ } Y\text{-ից}),$$

իսկ $g(x,y)\to 0$, երբ $x\to\infty$, y-ի նկատմամբ *հավասարաչափ* (Y տիրույթում), ապա (4) ինտեգրալը y-ի նկատմամբ *հավասարաչափ* զուգամետ է Y տիրույթում։

n 441-ի *(7)-ի փոխարեն այս անգամ ունենք՝*

$$\int_A^{A'} f(x,y)\,g(x,y)\,dx =$$

$$=g(A,y)\int_A^{\xi} f(x,y)\,dx+g(A',y)\int_{\xi}^{A'} f(x,y)\,dx.$$

Եթե A_0*-ն այնչափ մեծ է, որ* $A_0\leq x$*-երի դեպքում*

$$|g(x,y)|<\frac{\varepsilon}{4K}$$

միաժամանակ բոլոր y*-ների համար, ապա, համարելով* $A'>A\geqslant A_0$*, դժվար չէ ստանալ այսպիսի գնահատական՝*

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)\,g(x,y)\,dx\right|<\varepsilon$$

[հմմտ. **441**], *որը և ապացուցում է մեր պնդումը։*

3 Ինչպես և **441***-ում, կարելի է նշել* f *և* g *ֆունկցիաների առաջադրվող պայմանների ուրիշ կոմբինացիա.*

Եթե

$$\int_a^{\infty} f(x,y)\,dx$$

ինտեգրալը y-ի նկատմամբ *հավասարաչափ* զուգամետ է Y տիրույթում, իսկ x-ի նկատմամբ մոնոտոն g(x, y) ֆունկցիան *հավասարաչափ* սահմանափակ է՝

$$|g(x,y)|\leq L \quad (L=\text{const},\ x\geqslant a,\ y\text{-ը՝ } Y\text{-ից}),$$

ապա (4) ինտեգրալը y-ի նկատմամբ *հավասարաչափ* զուգամետ է Y տիրույթում։

Ապացույցը թողնում ենք ընթերցողին։

4° Վերջում նկատենք, որ գործնականում ավելի հաճախ պատահում է այնպիսի դեպք, երբ f և g ֆունկցիաներից փաստորեն միայն մեկն է պարունակում y պարամետր։ Այսպիսով, 2° և 3° հայտանիշներից յուրաքանչյուրը տալիս է երկու մասնավոր հայտանիշ (կախված նրանից, թե այդ բազմապատկիչներից որն է y պարունակում)։

Ձևակերպենք 3°-ից բխող հայտանիշներից մեկը, որն ավելի հաճախ է կիրառվում գործնականում.

Եթե

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

ինտեգրալը զուգամետ է, իսկ x-ի նկատմամբ մոնոտոն g(x, y) ֆունկցիան հավասարաչափ սահմանափակ է, ապա

$$\int_a^\infty f(x)\,g(x, y)\,dx$$

ինտեգրալը y-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է։

Իբրև օրինակ այստեղից հետևում է

$$\int_a^\infty e^{-xy} f(x)\,dx, \quad \int_a^\infty e^{-x^2 y} \cdot f(x)\,dx \qquad (a \geq 0)$$

տիպի ինտեգրալների հավասարաչափ զուգամիտությունը y-ի նկատմամբ, երբ $y \geq 0$, ենթադրելով, որ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ինտեգրալը զուգամետ է։ Իրոք, e^{-xy} և e^{-x^2y} երկու ֆունկցիաներն էլ, x-ի նկատմամբ մոնոտոն նվազելով, սահմանափակված են միավորով։

Այս դիտողությունը հետագայում մեզ հաճախ է պետք գալու։

478. ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՄՅՈՒՍ ԴԵՊՔԸ։ Այժմ դիտարկենք այնպիսի f(x, y) ֆունկցիա, որը որոշված է x-ի արժեքների համար [a, b] վերջավոր միջակայքում և y-ի արժեքների համար մի որոշ Y տիրույթում։ Դիցուք y=const. դեպքում այդ ֆունկցիան ըստ x-ի ինտեգրելի է a-ից մինչև b (իսկական կամ անիսկական իմաստով)։ Այդ ժամանակ

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx \qquad (5)$$

ինտեգրալը, լինի նա իսկական թե անիսկական, հանդիսանում է հետևյալ ինտեգրալի սահմանը երբ $\eta \to 0$՝

$$\varphi(\eta, y) = \int_a^{b-\eta} f(x, y)\,dx. \tag{6}$$

Եթե այս ինտեգրալի ձգտումը $I(y)$ սահմանին (երբ $\eta \to 0$) կատարվում է y-ի նկատմամբ հավասարաչափ y-ի բոլոր արժեքների համար Y տիրույթում, ապա ասում են, որ (5) ինտեգրալը y-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է *Y* տիրույթում։

Այդ նշանակում է, որ ամեն մի $\varepsilon > 0$ *թվի համար կգտնվի y-ից չկախված այնպիսի* $\delta > 0$ *թիվ, որ, հենց որ լինի* $\eta < \delta$, *հետևյալ անհավասարությունը*

$$\left| \int_a^b f(x, y)\,dx - \int_a^{b-\eta} f(x, y)\,dx \right| = \left| \int_{b-\eta}^{b} f(x, y)\,dx \right| < \varepsilon$$

կբավարարվի միաժամանակ y-ի բոլոր արժեքների համար Y-ում։

Դժվար չէ այս դեպքի համար ձևակերպել այն պայմանը, որն անհրաժեշտ է և բավարար *հավասարաչափ զուգամիտության համար։ Այստեղ ևս այդ պայմանը հանգում է զուգամիտության սկզբունքի հավասարաչափ կատարմանը՝* $\varepsilon > 0$ թվով պետք է գտնվի y-ից չկախված այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ $0 < \eta' < \eta < \delta$ դեպքում տեղի ունենա հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x, y)\,dx \right| < \varepsilon,$$

ինչպիսին էլ լինի y-ը Y տիրույթում։

Ճիշտ այդպես էլ, այստեղ կարելի է (5) ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտության հարցը հանգեցնել հետևյալ շարքի հավասարաչափ զուգամիտության հարցին՝

$$\int_a^b f(x, y)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x, y)\,dx \qquad (a_0 = a,\ a \leqslant a_n \quad b),$$

ինչպիսին էլ լինի $a_n \to b$ *վարիանտան* [*հմմտ.* 476]։

Վերջապես, դիտարկվող դեպքի վրա են փոխադրվում նաև n° 477*-ի բավարար հայտանիշները։ Այդ թողնում ենք ընթերցողին։*

Մենք a*-ից մինչև* b *վերցրած (5) ինտեգրալը դիտեցինք իբրև սահման* a*-ից մինչև* $b-\eta_1$ *վերցրած (6) ինտեգրալի և մեզ հետաքրքրեց վերջին ինտեգրալի իր սահմանին մոտենալու բնույթը։ Այսպիսով, այստեղ եզակի դեր խաղում է* $x=b$ *կետը (ինչպես* n° 475*-ում* $x=\infty$ *կետը)։ Կարող է հարկավոր լինել (կախված այնպիսի հանգամանքներից, որոնք կպարզվեն հետագայում) նման դեր վերագրել նաև միջակայքի ուրիշ կետի։ Օրինակ, նույն (5) ինտեգրալը կարելի է դիտել որպես սահմանային ինտեգրալի՝*

$$\int_{a+\eta_1}^{b} f(x, y)\, dx,$$

երբ $\eta_1 \to 0$*։ Եթե վերջինս* $\eta_1 \to 0$ *դեպքում իր սահմանին մոտենում է* y*-ի նկատմամբ հ ա վ ա ս ա ր ա չ ա փ, ապա դարձյալ ասում են, որ (5) ինտեգրալը հ ա վ ա ս ա ր ա չ ա փ զուգամետ է։ Վերևում ասածն ամբողջությամբ փոխանցվում է նաև այս դեպքի վրա։*

Եթե կարող է կասկած առաջանալ այն մասին, թե հավասարաչափ զուգամիտություն որ տեսակի մասին է խոսքը, ասում են, որ ինտեգրալը հավասարաչափ *(*y*-ի նկատմամբ մի որոշ տիրույթում)* զուգամետ է, *համապատասխանաբար,* $x=+\infty$ դեպքում, $x=b$ դեպքում, $x=a$ դեպքում *և այլն։*

Նշենք, որ (5) ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտությունը, ասենք՝ $x=b$ *դեպքում, որպես կանոն, մեզ հետաքրքրելու է այն դեպքերում, երբ հենց* $x=b$ *կետն է ե զ ա կ ի կետ (5) ինտեգրալի համար [*n° 443*-ի իմաստով]՝* y*-ի այս կամ այն արժեքների դեպքում։ Սակայն սահմանումը ոչ միայն ձևականորեն է պահպանում իր ուժը նաև այն դեպքում, երբ (5) ինտեգրալը* y *-ի բ ո լ ո ր ա ր ժ ե ք ն ե ր ի հ ա մ ա ր իսկական է լինում, այլ, ինչպես կտեսնենք, կարող է խիստ օգտակար լինել նաև այդ դեպքում։*

Օրինակ, հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}\, dx$$

y-ի յուրաքանչյուր արժեքի համար $[0, \delta]$ միջակայքում, որտեղ $\delta > 0$, գոյություն կունենա որպես իսկական ինտեգրալ։ Սակայն y-ի փոփոխման նշված միջակայքի համար նրա զուգամիտությունը հավասարաչափ չի լինի $y=0$ կետում։ Իրոք,

$$\int_0^{\eta} \frac{y}{x^2+y^2}\, dx = \operatorname{arctg} \frac{\eta}{y} < \varepsilon$$

անհավասարությանը, հենց որ լինի $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$, չի կարելի բավարարել միաժամանակ y-ի բոլոր դրական արժեքների համար. որքան էլ փոքր վերցնենք η-ն, անհավասարության ձախ մասը $y \to 0$ դեպքում ձգտում է $\frac{\pi}{2}$-ի և, y-ի բավականաչափ փոքր արժեքների դեպքում, անշուշտ ավելի մեծ կլինի, քան ε-ը։

479. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Անմիջականորեն ապացուցել հետևյալ ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտությունը y-ի նկատմամբ (y-ի բոլոր արժեքների համար)՝

$$\int_1^{\infty} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx\text{։}$$

Ունենք՝

$$\left| \int_A^{\infty} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx \right| = \frac{A}{A^2+y^2} < \frac{1}{A},$$

որտեղից և բխում է պահանջված արդյունքը։

2) Ցույց տալ մաժորանտի օգնությամբ, որ հետևյալ ինտեգրալները t-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ են $0 < t_0 \leqslant t$-երի համար՝

$$(ա)\ \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx, \qquad (բ)\ \int_0^{\infty} e^{-tx} x^a \cos x\, dx \qquad (a \geqslant 0)\text{։}$$

Ցուցում։ Մաժորանտ կլինի՝ (ա) $e^{-t_0x^2}$, (բ) $e^{-t_0x} x^a$։

3) Անմիջականորեն ապացուցել, որ

$$\int_1^{\infty} \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}}\, dx$$

ինտեգրալը $n=1, 2, 3, \ldots$ արժեքների համար n-ի նկատմամբ հավասարաչափ չի զուգամիտում։

Այդ հետևում է նրանից, որ, ինչպիսին էլ լինի $A=\text{const.}$, կունենանք՝

$$\int_A^{\infty} \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}}\, dx = e^{-\frac{n}{2x^2}} \Big|_A^{\infty} = 1 - e^{-\frac{n}{2A^2}} \to 1, \text{ երբ } n \to \infty\text{։}$$

4) Անմիջականորեն ապացուցել, որ

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$$

ինտեգրալը α-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է $0 < \alpha_0 \leq \alpha$ տիրույթում, բայց անհավասարաչափ զուգամետ է $0 < \alpha$ տիրույթում։

Եթե A_0-ն այնքան մեծ է, որ $A_0 \leq A$-ի դեպքում՝

$$\left| \int_A^{\infty} \frac{\sin z}{z}\, dz \right| < \varepsilon,$$

որտեղ ε-ը՝ նախապես տված կամայական դրական թիվ է, ապա՝

$$\int_A^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \int_{A\alpha}^{\infty} \frac{\sin z}{z}\, dz \tag{7}$$

ինտեգրալը բացարձակ մեծությամբ փոքր կլինի ε-ից $0 < \alpha_0 \leq \alpha$-ների համար հենց որ լինի $A > \frac{A_0}{\alpha_0}$։ Դրանով ապացուցվում է մեր պնդման առաջին մասը։

Իսկ երկրորդ մասը հետևում է նրանից, որ (7) արտահայտությունը ցանկացած $A = \text{const}$. դեպքում ձգտում է հետևյալ սահմանին՝

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z}\, dz = \frac{\pi}{2},$$

երբ $\alpha \to 0$։

5) Ապացուցել

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cos x\, dx$$

ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտությունը α-ի նկատմամբ՝ ± 1 կետը չպարունակող ամեն մի փակ միջակայքում։

Ցուցում։ Ինտեգրալը բերել հետևյալ տեսքին՝

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin (\alpha+1) x + \sin (\alpha-1) x}{x}\, dx.$$

6) Հետազոտել

$$\int_0^{\infty} x \sin x^3 \sin t x\, dx$$

ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտության հարցը (t-ի նկատմամբ)։

Ցուցում։ Կրկնակի անգամ մասերով ինտեգրելու օգնությամբ $\int_A^{\infty}$

ինտեգրալը բերվում է հետևյալ տեսքին՝

$$-\frac{\cos x^3 \cdot \sin tx}{3x} + \frac{t}{3} \cdot \frac{\sin x^3 \cdot \cos tx}{3x^3}\Bigg|_A^\infty -$$

$$-\frac{1}{3}\int_A^\infty \frac{\cos x^3 \cdot \sin tx}{x^2}\,dx + \frac{t}{3}\int_A^\infty \frac{\sin x^3 \cdot \cos tx}{x^4}\,dx + \frac{t^2}{9}\int_A^\infty \frac{\sin x^3 \cdot \sin tx}{x^3}\,dx.$$

այստեղից պարզ է t-*ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամիտությունը ամեն մի վերջավոր միջակայքում։*

7) *Ցույց տալ, որ*

$$(\text{ա}) \int_0^1 x^{p-1}\,dx, \qquad (\text{բ}) \int_0^1 x^{p-1}\log^m x\,dx$$

(m-*ը բնական թիվ է) ինտեգրալները* p-*ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ են* ($x=0$ *կետում*) $0<p_0\leqslant p$ *տիրույթում և անհավասարաչափ՝* $0<p$ *տիրույթում։*

Մաժորանտ է՝ (ա) x^{p_0-1}, *(բ)* $x^{p_0-1}|\log x|^m$ ($0<p_0\leqslant p$ *տիրույթի համար)։ Մյուս կողմից, ինչպիսին էլ վերցնենք* $\eta=\text{const.}$, *կունենանք՝*

$$\int_0^\eta x^{p-1}\,dx = \frac{\eta^p}{p} \to \infty, \quad \text{երբ } p \to 0\text{։}$$

8) *Նման ձևով ցույց է տրվում հետևյալ ինտեգրալի*

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

հավասարաչափ զուգամիտությունը՝ p-*ի նկատմամբ* $0<p_0\leqslant p$ *տիրույթում* ($x=0$ *կետում*) *և* q-*ի նկատմամբ* $0<q_0\leqslant q$ *տիրույթում* ($x=1$ *կետում*)։

9) *Ապացուցել, որ*

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^y}\,dx$$

ինտեգրալի զուգամիտությունը ($x=0$ *կետում*) y-*ի նկատմամբ կլինի հավասարաչափ* $2>y_0\geqslant y$-*ների համար և անհավասարաչափ՝* $2>y$-*ների համար։*

Մաժորանտն է՝ $\frac{1}{x^{y_0-1}}$ ($2>y_0\geqslant y$-*ների դեպքում*)։ *Այնուհետև, ֆիքսում ենք* $0<\eta$-*ն կամայական, սակայն այնքան փոքր, որպեսզի* $\eta\geqslant x$-*երի դեպքում լինի՝* $\frac{\sin x}{x}\geqslant\frac{1}{2}$։ *Այդ ժամանակ՝*

$$\int_0^\eta \frac{\sin x}{x^y}\,dx > \frac{1}{2}\int_0^\eta \frac{dx}{x^{y-1}} = \frac{1}{2(2-y)}\eta^{2-y} \to \infty, \quad \text{երբ } y\to 2\text{։}$$

10) Ապացուցել հետևյալ ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտությունը n-*ի նկատմամբ* (n = 1, 2, 3, . . .) (*ինչպես* x = 0 *դեպքում, այնպես էլ* x=1 *դեպքում)՝*

$$\int_0^1 (1+x+x^2+\cdot\cdot\cdot+x^{n-1})\sqrt{\log\frac{1}{x}}\,dx\text{։}$$

Քանի որ $1+x+x^2+\cdot\cdot\cdot+x^{n-1}<\frac{1}{1-x}$, *ապա որպես մաժորանտ ծառայում է* $\frac{1}{1-x}\sqrt{\log\frac{1}{x}}$ *ֆունկցիան, որը* [0, 1] *միջակայքում ինտեգրելի է։*

11) Անմիջականորեն ցույց տալ, որ

$$\int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx$$

ինտեգրալի զուգամիտությունը (x=0 *դեպքում) չի լինի հավասարաչափ* y-*ի նկատմամբ* y-*ի փոփոխման* [0, 1] *միջակայքում։*

Ունենք, կամայական η=const. *դեպքում,*

$$\int_0^{\eta} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx=\frac{x}{x^2+y^2}\Bigg|_{x=0}^{x=\eta}=\frac{\eta}{\eta^2+y^2}\to\frac{1}{\eta},\text{ երբ } y\to 0\text{։}$$

12) Նույնը

$$\int_0^1 \frac{8x^3y-8xy^3}{(x^2+y^2)^3}\,dx$$

ինտեգրալի համար։ Այստեղ

$$\int_0^{\eta}=-\frac{4\eta^2y}{(\eta^2+y^2)^2}$$

ինտեգրալը $y=\eta$ *դեպքում դառնում է* $-\frac{1}{\eta}$։

13) Ապացուցել, որ

$$\int_0^{\infty} e^{-xy}\frac{\cos x}{x^a}\,dx\qquad(0<a<1)$$

ինտեգրալը y-*ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է* 0 ≤ y-*երի համար (ինչպես* x=0 *դեպքում, այնպես էլ* x=∞ *դեպքում)։*

x=0 *դեպքում այդ պարզ է* $\frac{1}{x^a}$ *մաժորանտի առկայությունից, իսկ* x=∞ *դեպքում այդ հետևում է*

$$\int_0^x \frac{\cos x}{x^a}\,dx$$

ինտեգրալի զուգամիտությունից [441], ո՛ 477-ի վերջի դիտողության կապակցությամբ։

14) Դիցուք $f(t)$ ֆունկցիան անընդհատ է $0<t$-ի համար։ Եթե

$$\int_0^{\infty} t^{\lambda} f(t)\,dt$$

ինտեգրալը զուգամետ է $\lambda=\alpha$ և $\lambda=\beta$ դեպքերում $(\alpha<\beta)$, ապա նա զուգամետ է, այն էլ λ-ի նկատմամբ հավասարաչափ ($t=0$ և $t=\infty$ դեպքերում), λ-ի բոլոր արժեքների համար α-ի և β-ի միջև։

Ապացույց։ $\int_0^1 t^{\alpha} f(t)\,dt$ ինտեգրալը զուգամետ է, իսկ $t^{\lambda-\alpha}$-ն՝ $\alpha\leqslant\lambda$ արժեքների համար t-ի մոնոտոն ֆունկցիա է և սահմանափակ է 1-ով։ Այստեղից,

$$\int_0^1 t^{\lambda} f(t)\,dt=\int_0^1 t^{\lambda-\alpha}\cdot t^{\alpha} f(t)\,dt$$

ինտեգրալը λ-ի նշված արժեքների համար հավասարաչափ զուգամետ է ($t=0$ դեպքում)։ Նման ձևով համոզվում ենք, որ

$$\int_1^{\infty} t^{\lambda} f(t)\,dt=\int_1^{\infty} t^{\lambda-\beta}\cdot t^{\beta} f(t)\,dt$$

ինտեգրալը λ-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է $\beta\geqslant\lambda$-ների համար ($t=\infty$ դեպքում)։

15) Ցույց տալ

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos xy}{x^a}\,dx \qquad (0<a<1)$$

ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտությունը y-ի նկատմամբ՝ $0<y_0\leqslant y$-ների համար, և հավասարաչափության խախտումը այն դեպքում, երբ y-ի փոփոխությունը սահմանափակված է միայն $y>0$ անհավասարությամբ։ (Խոսքը $x=\infty$ դեպքում զուգամիտության մասին է)։

Առաջին մասի համար կարելի է օգտվել 477, 2°-ի հայտանիշից (համեմ. 4°), քանի որ ցանկացած $A>0$ և $y>y_0$ դեպքում՝

$$\left|\int_0^A \cos xy\,dx\right|=\left|\frac{\sin Ay}{y}\right|\leqslant\frac{1}{y_0},$$

իսկ $\frac{1}{x^a}$ ֆունկցիան, մոնոտոն նվազելով, ձգտում է զրոյի, երբ $x\to\infty$։

Նույն դիտողությունը կարելի է անել, անմիջականորեն դիտարկելով հետևյալ արտահայտությունը՝

$$\int_A^{\infty} \frac{\cos xy}{x^a}\, dx = y^{a-1} \int_{Ay}^{\infty} \frac{\cos z}{z}\, dz։$$

Երկրորդ մասը բխում է նրանից, որ այդ նույն արտահայտությունը, երբ $A = \frac{1}{y}$ և $y \to 0$, անվերջորեն աճում է։

(Հեշտ է տեսնել, որ $x=0$ դեպքում ինտեգրալը y-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է՝ y-ի փոփոխման ամեն մի տիրույթում։)

16) Ապացուցել, որ

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2}\, dx \qquad (\alpha, \beta > 0)$$

ինտեգրալը β-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է $0 < \beta_0 \leqslant \beta$ տիրույթում։

Այդ հետևում է 477, 2°-ից․ իսկապես, $\beta_0 \leqslant \beta$-ի համար՝

$$\left| \int_0^A \sin \beta x\, dx \right| = \frac{1 - \cos A\beta}{\beta} \leqslant \frac{2}{\beta_0}։$$

Մյուս կողմից,

$$\frac{x}{\alpha^2 + x^2}$$

արտահայտությունը, որը β չի պարունակում, x-ի աճման հետ միասին նվազում է (գոնե $\alpha < x$-ի համար) և ձգտում է զրոյի, երբ $x \to +\infty$։

§ 3. ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՕԳՏԱԳՈՐԾՈՒՄԸ

480. ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ԱՆՑՈՒՄ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՆՇԱՆԻ ՏԱԿ։ Մենք այժմ կզբաղվենք, գլխավորապես, անվերջ միջակայքով տարածված ինտեգրալի նշանի տակ սահմանային անցման հարցով։ n° 468-ի I թեորեմն այս դեպքի վրա չի տարածվում. եթե նույնիսկ ամբողջ անվերջ միջակայքում $f(x, y)$ ֆունկցիան հավասարաչափ ձգտի $\varphi(x)$ սահմանային ֆունկցիային, երբ $y \to y_0$, ինտեգրալի նշանի տակ սահմանային անցումը կարող է և թույլատրելի չլինել։

Դիտարկենք, իբրև օրինակ, հետևյալ ֆունկցիան

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$՝

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}} & (x>0), \\ f_n(0) = 0. \end{cases}$$

Դիֆերենցիալ հաշվի սովորական մեթոդներով հեշտ է ցույց տալ, որ այդ ֆունկցիան մեծագույն արժեքին հասնում է $x=\sqrt{\frac{n}{3}}$ դեպքում և այդ արժեքը հավասար է՝ $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{n}} e^{-\frac{3}{2}}$. Քանի որ $n\to\infty$ *դեպքում այդ արժեքը ձգտում է զրոյի, ապա այստեղից պարզ է, որ* $f_n(x)$ *ֆունկցիան ամբողջ* $[0,+\infty)$ *միջակայքում հ ա վ ա ս ա ր ա չ ա փ ձգտում է* $\varphi(x)=0$ *սահմանին, երբ* $n\to\infty$. *Այնուամենայնիվ*

$$\int_0^\infty f_n(x)\,dx = 1$$

ինտեգրալը չի ձգտում զրոյի, երբ $n\to\infty$.

Սահմանային անցման թույլատրելիության համար բավարար պայման տալիս է հետևյալ թեորեման.

I ԹԵՈՐԵՄԱ: Դիցուք $f(x, y)$ ֆունկցիան, երբ y-ը վերցրած է Y-ից, ըստ x-ի ինտեգրելի է (իսկական իմաստով) $[a, A]$ միջակայքում՝ a-ից մեծ ամեն մի A-ի դեպքում, և յուրաքանչյուր այդպիսի միջակայքում x-ի նկատմամբ հ ա վ ա ս ա ր ա չ ա փ ձգտում է $\varphi(x)$ սահմանային ֆունկցիային երբ $y\to y_0$: Եթե, բացի դրանից,

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx \tag{1}$$

ինտեգրալը y-ի նկատմամբ հ ա վ ա ս ա ր ա չ ա փ զուգամետ (Y-ում), ապա տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^\infty f(x, y)\,dx = \int_a^\infty \varphi(x)\,dx. \tag{2}$$

Նշանակենք, ինչպես և վերևում,

$$F(A, y) = \int_a^A f(x, y)\,dx. \tag{3}$$

Այս ինտեգրալի համար տեղի ունեն n 468-*ի* I *թեորեմայի պայմանները, ուստի՝*

$$\lim_{A \to y_0} F(A, y) = \int_a^A \varphi(x)\, dx. \tag{4}$$

Մյուս կողմից, ակներևաբար՝

$$\lim_{A \to \infty} F(A, y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx, \tag{5}$$

ընդ որում տված է, որ այստեղ F(A, y) *ֆունկցիայի սահմանին ձգտելը կատարվում* y-*ի նկատմամբ հավասարաչափ։ Այդպիսի դեպքում մենք իրավունք ունենք հենվելու* n 467-*ի ընդհանուր թեորեմայի վրա՝ սահմանային անցումների տեղափոխման վերաբերյալ, և պնդելու, որ հաջորդական սահմանները գոյություն ունեն և իրար հավասար են, որը և անմիջականորեն հանգեցնում է (2)-ին։*

Այստեղից, կիրառելով Դինիի ընդհանրացրած թեորեման [466, 4], *կարելի է ստանալ այսպիսի*

ՀԵՏԵՎԱՆՔ*. Դիցուք f(x, y) ոչ բացասական ֆունկցիան ըստ x-ի անընդհատ է $[a, +\infty)$ միջակայքում և, y-ի հետ միասին աճելով, ձգտում է $\varphi(x)$ սահմանային ֆունկցիային, որը նույնպես անընդհատ է նշված միջակայքում։ Այդ ժամանակ

$$\int_a^\infty \varphi(x)\, dx \tag{6}$$

ինտեգրալի գոյությունից արդեն բխում է ինչպես (1) ինտեգրալի գոյությունը (*Y*-ին պատկանող բոլոր y-ների համար), այնպես էլ (2) բանաձևի իրավացիությունը։

Վերոհիշյալ թեորեմայի համաձայն, նշված պայմանների դեպքում f(x, y) *ֆունկցիայի ձգտումը* $\varphi(x)$-*ին կլինի* x-*ի նկատմամբ հավասարաչափ՝ ամեն մի վերջավոր միջակայքում։ Այնուհետև,* n° 440-*ի թեորեմայի շնորհիվ, գոյություն ունի (1) ինտեգրալը, քանի որ*

$$f(x, y) \le \varphi(x).$$

* *Մենք համարում ենք, որ այստեղ բոլոր* $y < y_0$։

$\varphi(x)$ ֆունկցիան խաղում է միաժամանակ նաև մաժորանտի դեր [477], որն ապահովում է (1) ինտեգրալի հավասարաչափ (y-ի նկատմամբ) զուգամիտությունը։ Այսպիսով, տեղի ունեն բոլոր պայմանները նախորդ թեորեմայի կիրառման համար։

Ընթերցողը հեշտությամբ կապացուցի, որ սահմանային ֆունկցիայի (6) ինտեգրալի գոյության վերաբերյալ ենթադրությունն այստեղ կարող է փոխարինվել հետևյալ վերջավոր սահմանի գոյության վերաբերյալ ենթադրությամբ՝

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^\infty f(x, y)\, dx,$$

իսկ այստեղից արդեն կբխի և (6) ինտեգրալի գոյությունը, և (2) բանաձևի իրավացիությունը։

Նույնպիսի դատողությունների օգնությամբ կարելի է ստանալ նաև որոշ ընդհանրացում n° 472-ի 1* թեորեմայի, որը վերաբերում է վերջավոր միջակայքին։

1' ԹԵՈՐԵՄԱ. Դիցուք $f(x, y)$ ֆունկցիան (Y-ից վերցրած y-երի համար) ինտեգրելի է (իսկական իմաստով) $[a, b-\eta]$ միջակայքում՝ ամեն մի դրական (բայց $b-a$-ից փոքր) η-ի դեպքում, և յուրաքանչյուր այդպիսի միջակայքում x-ի նկատմամբ հավասարաչափ ձգտում է $\varphi(x)$ սահմանային ֆունկցիային, երբ $y \to y_0$։ Եթե, բացի դրանից,

$$\int_a^b f(x, y)\, dx$$

ինտեգրալը ($x = b$ համար) y-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է Y-ում, ապա տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

Ապացույցը ոչնչով չի տարբերվում հենց նոր բերված ապացույցից։ Այս դեպքի վրա հեշտությամբ տարածվում է նաև հետևանքը։

Իհարկե, b կետի դերը կարող է խաղալ և ամեն մի այլ կետ։ Բացի դրանից, այդպիսի կետեր միջակայքում կարող են լինել և մի քանի հատ։

Ինչպես և վերևում, ինտեգրալի նշանի տակ սահմանային անցման հետ ամենից հաճախ գործ ենք ունենալու՝ այն հարմարեցնելով ֆունկցիաների $\{f_n(x)\}$ հաջորդականության նրկատմամբ։ Հաջորդականություններից անցնելով անվերջ շարքերին, այդպիսով կարելի է ստանալ նոր թեորեմաներ ֆունկցիոնալ շարքերի անդամ առ անդամ ինտեգրման վերաբերյալ։

Ահա, օրինակ, ինչպիսի ձև է ընդունում հ ե տ և ա ն ք ը՝

Դիցուք

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

շարքը, որը բաղկացած է $a \leqslant x$-երի համար (կամ $a \leqslant x < b$ համար) ա ն ը ն դ հ ա տ ու դ ր ա կ ա ն ֆունկցիաներից, ունի $\varphi(x)$ գումար, որը նույնպես անընդհատ է x-ի այդ նույն արժեքների համար։ Եթե $\varphi(x)$-ը ինտեգրելի է $[a, +\infty]$ (կամ $[a, b]$) միջակայքում, ապա այդ միջակայքում շարքը կարելի է ինտեգրել ա ն դ ա մ ա ռ ա ն դ ա մ։

Այստեղ նույնպես, ինչպես և վերևում, շարքի գումարի ինտեգրելիության փոխարեն կարելի էր ենթադրել ինտեգրալներից կազմած

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^{\infty} u_n(x)\,dx \qquad \left[\text{կամ՝ } \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^{b} u_n(x)\,dx \right]$$

շարքի զուգամիտությունը։

Թեորեմայի պնդումը, ակներևաբար, մնում է ուժի մեջ նաև այն դեպքում, երբ շարքի բոլոր անդամները բացասական են. այդպիսի շարքը բերվում է նախորդին՝ նշանի փոխման միջոցով։

481. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Շարքերի վերլուծման օգնությամբ հաշվել հետևյալ ինտեգրալները՝

$$(\text{ա}) \int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\,dx, \qquad (\text{բ}) \int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\,dx։$$

Լ ու ծ ու մ։ (ա) Ընդինտեգրալ ֆունկցիան վերլուծում ենք շարքի՝

$$\frac{\log(1-x)}{x} = -1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} - \cdots,$$

որի բոլոր անդամները ունեն բացասական նշան։ Զուգամիտության հավա-

սարաչափությունը խախտվում է x=1 *կետի մոտակայքում։ Հենց այս կետն էլ շարքի գումարի համար եզակի կետ է. այնուամենայնիվ,* [0, 1] *միջակայքում այդ գումարն ինտեգրելի է։ Կիրառելով նախորդ* n°*-ի վերջին առաջադրությունը, ինտեգրենք անդամ առ անդամ՝*

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 x^{n-1}\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$$

[420, *6*) *կամ* 422]։

(*բ*) *Երկրորդ ինտեգրալը* x=1—z *տեղադրումով բերվում է առաջինին։ Բայց և այնպես, վարժության համար, այն նորից հաշվենք, շարքի վերլուծելով* $\frac{1}{1-x}$*-ը՝*

$$\frac{\log x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \log x.$$

բոլոր անդամներն այստեղ ևս բացասական են։ Զուգամիտության հավասարաչափությունն այս անգամ խախտվում է երկու կետերի՝ x = 0 *և* x = 1 *կետերի մոտակայքում, այնպես որ վերոհիշյալ առաջադրությունը պետք է կիրառել զատ-զատ, օրինակ,* $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ *և* $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ *միջակայքերի նկատմամբ։ Վերջնականապես՝*

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^n \log x\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

2) (*ա*) *Հաշվել*

$$\sigma = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\cdots,$$

ելնելով նրանից, որ՝

$$\frac{1}{2n+1} = \int_0^1 x^{2n}\,dx \qquad (n=0, 1, 2, \cdots).$$

Լուծում։ Ունենք՝

$$\sigma = \sum_0^{\infty}(-1)^n \int_0^1 (x^{4n} + x^{4n+2})\,dx =$$

$$= \int_0^1 dx \sum_0^{\infty}(-1)^n x^{4n}\cdot(1+x^2) = \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4},$$

Թեպետև շարքի գումարը եզակիություն չունի, բայց հավասարաչափ զուգամիտությունը խախտվում է $x = 1$ կետի մոտակայքում։ Քանի որ շարքի մասնակի գումարի համար ունենք՝

$$0 \leqslant \sum_{0}^{n-1} (-1)^{\nu} x^{4\nu} \cdot (1 + x^2) = \frac{1 \pm x^{4n}}{1 + x^{4n}} (1 + x^2) \leqslant 2 \frac{1 + x^2}{1 + x^4} \leqslant 4,$$

ապա մաժորանտի դերում հանդես է գալիս պարզապես հաստատուն մեծություն և այդ գումարի ինտեգրալը ($x = 1$ դեպքում) n-ի նկատմամբ հավասարաչափ է զուգամիտում։ Դրանով արդարացվում է անդամ առ անդամ ինտեգրումը (1' Թեորեմա)։

(բ) Համանմանորեն՝

$$1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \cdots = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{2}\,։$$

3) Ելնելով

$$\frac{1}{p(p+1)\cdots(p+n)} = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n x^{p-1}\,dx,$$

բանաձևից հաշվել հետևյալ շարքերի գումարները՝

$$(ա)\ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots,$$

$$(բ)\ \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \cdots,$$

$$(գ)\ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} + \cdots$$

Պատասխան.

$$(ա)\ \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{1-x^2}\,dx = \log 2 - \frac{1}{2},$$

$$(բ)\ \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-x)^2 x}{1-x^2}\,dx = \frac{3}{4} - \log 2,$$

$$(գ)\ \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{1-x^3}\,dx = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \log 3 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6}\,։$$

4) Հաշվել էյլերի հետևյալ ինտեգրալները՝

$$(\text{ա})\ I=\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx, \qquad (\text{բ})\ K=\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x}\,dx:$$

$$(0<a<1) \qquad\qquad (a,\ b>0)$$

Լուծում: (ա) ինտեգրալը տրոհելով երկուսի՝

$$I=\int_0^1+\int_1^{\infty}=I_1+I_2,$$

Նրանք հաշվենք առանձին-առանձին:

$0<x<1$ համար ունենք այսպիսի շարքի վերլուծում՝

$$\frac{x^{a-1}}{1+x}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\ x^{a+\nu-1},$$

որը հավասարաչափ զուգամետ է, եթե միայն

$$0<\varepsilon\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon'<1:$$

Բայց մասնակի գումարն ունի $[0,\ 1]$ միջակայքում ինտեգրելի մաժորանտ՝

$$0\leqslant\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{\nu}\ x^{a+\nu-1}=\frac{x^{a-1}\ [1-(-x)^{n}]}{1+x}\leqslant x^{a-1},$$

հետևաբար, նրա ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է (ինչպես $x=0$ համար, այնպես էլ $x=1$ համար): Անդամ առ անդամ ինտեգրելով, I թեորեմայի համաձայն, կստանանք՝

$$I_1=\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_0^1(-1)^{\nu}\ x^{a+\nu-1}\ dx=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{a+\nu}:$$

I_2 ինտեգրալը $x=\frac{1}{z}$ տեղադրումով բերում ենք այսպիսի տեսքի՝

$$I_2=\int_0^1\frac{x^{-a}}{1+x}\,dx=\int_0^1\frac{x^{(1-a)-1}}{1+x}\ dx:$$

Օգտագործելով վերևում արդեն ստացված վերլուծումը, կստանանք՝

$$I_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{a-\nu}:$$

Այսպիսով՝

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{a} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \left(\frac{1}{a+\nu} + \frac{1}{a-\nu}\right):$$

Մենք այս արտահայտության մեջ տեսնում ենք [տես 413, 7)] $\frac{\pi}{\sin \pi a}$ *ֆունկցիայի վերլուծումը պարզ կոտորակների: Վերջնականապես՝*

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\sin \pi a},$$

(բ) Ինտեգրալը տրոհելով երկուսի, ինչպես և վերևում, և երկրորդում կատարելով նույն տեղադրումը, կստանանք՝

$$K = \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x}\, dx - \int_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{-b}}{1-x}\, dx = K_1 - K_2{}^{*},$$

Ակներևաբար, բավական է գտնել K_1*-ը: Անցնելով ընդինտեգրալ ֆունկցիայի շարքի վերլուծման, ինչպես և քիչ առաջ, կգտնենք՝*

$$K_1 = \frac{1}{a} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a+\nu} + \frac{1}{a-\nu}\right),$$

բայց [413, 7) այստեղ մենք տեսնում ենք $\pi \cdot \operatorname{ctg} \pi a$ *ֆունկցիայի վերլուծումը պարզ կոտորակների: Այսպիսով՝*

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1-x}\, dx = \pi (\operatorname{ctg} \pi a - \operatorname{ctg} \pi b),$$

5) Գտնել հետևյալ ինտեգրալների արժեքները $(|r| < 1)$՝

$$(\text{ա})\ I_1 = \int_0^{\infty} \frac{1 - r\cos \beta x}{(1+x^2)(1 - 2r\cos \beta x + r^2)}\, dx.$$

---

* *Երկու ինտեգրալներում էլ* $x = 1$ *դեպքում եզակիություն չի լինի. եզակի կետը* $x = 0$ *կետն է. ինտեգրալները գոյություն ունեն:*

$$(\text{բ})\quad I_2=\int_0^\infty \frac{\log(1-2r\cos\beta x+r^2)}{1+x^2}\,dx,$$

ընդ որում երկու դեպքում էլ

$$\int_0^\infty \frac{\cos kx}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}\,e^{-k}\qquad(k>0)$$

ինտեգրալը հաշվել հայտնի [տես 484, 4), ինչպես և 485, 9)]:

Լուծում: (ա) Ելնում ենք հետևյալ վերլուծումից՝

$$\frac{1-r\cos\beta x}{1-2r\cos\beta x+r^2}=\sum_{\nu=0}^\infty r^\nu\cos\nu\beta x^*.$$

բազմապատկելով $\frac{1}{1+x^2}$-ով, ինտեգրում ենք անդամ առ անդամ՝

$$I_1=\sum_{\nu=0}^\infty r^\nu\int_0^\infty\frac{\cos\nu\beta x}{1+x^2}\,dx:$$

Քանի որ սկզբնական շարքը, $\frac{1}{1+x^2}$-ով բազմապատկելուց հետո, x-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է նույնիսկ ամբողջ անվերջ միջակայքում, իսկ նրա մասնակի գումարները ունեն $\frac{c}{1+x^2}$ տեսքի մաժորանտ, ապա անդամ առ անդամ ինտեգրումն արդարացված է (1 թեորեմ):

Եթե այժմ օգտագործենք նշված ինտեգրալի արժեքը, ապա վերջնականապես կստանանք՝

$$I_1=\frac{\pi}{2}\cdot\sum_0^\infty r^\nu e^{-\nu\beta}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1-re^{-\beta}}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^\beta}{e^\beta-r},$$

(բ) Ցուցում: Ելնել հետևյալ վերլուծումից [434, 6) (բ)]՝

$$\log(1-2r\cos\beta x+r^2)=-2\sum_{\nu=1}^\infty\frac{r^\nu}{\nu}\cos\nu\beta x:$$

Պատասխան. $I_2=\pi\log(1-re^{-\beta})$.

---

* Այդ հեշտությամբ ստացվում է n° 412-ի 8) և 9) վերլուծումներից՝

6) Հետևյալ ինտեգրալները (Լապլաս)՝

$$(\text{ա}) \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx\, dx, \qquad (\text{բ}) \int_0^\infty e^{-x^2} \operatorname{ch} 2bx\, dx,$$

$$(\text{գ}) \int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2bx\, dx$$

վերլուծել շարքերի ըստ b-ի ($b>0$) աստիճանների, ընդ որում բոլոր դեպքերում հայտնի համարել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

[455, 2°, 484, 3°]:

(ա) Լուծում: Օգտվելով կոսինուսի հայտնի վերլուծումից և ինտեգրելով անդամ առ անդամ, կստանանք՝

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx\, dx = \int_0^\infty e^{-x^2} \sum_{\nu=0}^\infty \frac{(-1)^\nu (2bx)^{2\nu}}{2\nu!}\, dx =$$

$$= \sum_{\nu=0}^\infty \frac{(-1)^\nu (2b)^{2\nu}}{2\nu!} \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2\nu}\, dx.$$

Մեր շարքի հավասարաչափ զուգամիտությունը ամեն մի [0, A] վերջավոր միջակայքում ակներև է. նրա մասնակի գումարներն ունեն հետևյալ մաժորանտը՝

$$e^{-x^2} \sum_{\nu=0}^\infty \frac{(2bx)^\nu}{2\nu!} = c^{-x^2} \operatorname{ch} 2bx,$$

որն ինտեգրելի է 0-ից մինչև ∞: Դրանով հաստատվում է անդամ առ անդամ ինտեգրման օրինականությունը:

Մնում է որոշել $\int_0^\infty e^{-x^2} \cdot x^{2\nu}\, dx = I_\nu$ ինտեգրալը:

Մասերով ինտեգրելով, հեշտությամբ հանգում ենք հետևյալ անդրադարձ բանաձևին՝

$$I_\nu = \frac{2\nu-1}{2} \cdot I_{\nu-1}, \text{ որտեղից՝ } I_\nu = \frac{(2\nu-1)!!}{2^{\nu+1}} \sqrt{\pi}.$$

Այս տեղադրելով առաջ ստացած վերլուծման մեջ, վերջնականապես կգտնենք՝

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}\cdot(2b)^{2\nu}}{2\nu!}\cdot\frac{(2\nu-1)!!}{2^{\nu}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\{1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-b^2)^{\nu}}{\nu!}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-b^2}։$$

(բ) Պատասխան. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{b^2}$։

(գ) Նման ձևով ստացվում է՝

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\sin 2bx\,dx = b\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu-1)!!}(-2b^2)^{\nu-1},$$

սակայն այս անգամ նա «վերջավոր» բանաձևի չի բերում։ Հետագայում, այլ ճանապարհով, մենք կպարզենք այն նոր (ոչ տարրական) ֆունկցիայի բնույթը, որը հարկավոր կլինի մեզ ինտեգրալի արտահայտման համար [485, 5) (բ)]։

7) Գտնել հետևյալ ինտեգրալի արժեքը՝

$$I_k = \int_0^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{e^{2\pi x}-1}\,dx \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)։$$

Լուծում։ Վերլուծելով

$$\frac{1}{e^{2\pi x}-1} = \frac{e^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}}$$

պրոգրեսիայի, կստանանք դրական շարք՝

$$\frac{x^{2k-1}}{e^{2\pi x}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2k-1}\cdot e^{-2n\pi x},$$

որը հավասարաչափ զուգամետ է. ամեն մի $[r_1, A]$ միջակայքում, որտեղ՝ $0<r_1<A<+\infty$։ Քանի որ շարքի գումարն ինտեգրելի է $[0, +\infty]$ միջակայքում, ապա անդամ առ անդամ ինտեգրումն արդարացվում է**

---

* Մենք օգտվեցինք հետևյալ առնչերի ձևափոխություններից՝

$$2\nu! = 2\nu!!\,(2\nu-1)!! = 2^{\nu}\,\nu!\,(2\nu-1)!!։$$

** Մենք այստեղ (և հաջորդ ինդրում) օգտվում ենք միանգամից նախորդ n°-ի և՛ 1 թեորեմայից, և՛ 1′ թեորեմայից՝ կիրառված, ասենք, $[1,+\infty]$ և $[0, 1]$ միջակայքերի նկատմամբ առանձին-առանձին։

$$I_k = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{2k-1} e^{-2n\pi x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!}{(2n\pi)^{2k}} = \frac{(2k-1)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}։$$

Հիշելով, որ Բեռնուլիի k-րդ թիվն ունի հետևյալ արտահայտությունը [422]՝

$$B_k = \frac{2 \cdot (2k)!}{(2\pi)^{2k}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$$

վերջնականապես կստանանք՝

$$I_k = \frac{B_k}{4k}.$$

8) Գտնել արտահայտությունները հետևյալ ինտեգրալների համար (Լեժանդր)՝

$$(ա)\ \int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{e^{2\pi x} - 1}\, dx, \qquad (բ)\ \int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{e^{2\pi x} + 1}\, dx \qquad (m > 0)։$$

Լուծում։ (ա)

$$\frac{\sin mx}{e^{2\pi x} - 1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-2\nu\pi x} \sin mx$$

վերլուծումը նույնպես հավասարաչափ զուգամետ է ամեն մի $[\eta, A]$ միջակայքում, երբ մասնակի գումարները մաժորվում են $\frac{|\sin mx|}{e^{2\pi x} - 1}$ ֆունկցիայով։ Այդ պատճառով թույլատրելի է անդամ առ անդամ ինտեգրումը՝

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{e^{2\pi x} - 1}\, dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-2\nu\pi x} \sin mx\, dx =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{m}{m^2 + 4\nu^2\pi^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^m - 1} - \frac{1}{m} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\frac{e^m + 1}{e^m - 1} = \frac{1}{2m}\ *,$$

(բ) Նման ձևով ստանում ենք (օգտվելով նույն մաժորանտից)՝

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{e^{2\pi x} + 1}\, dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{m}{m^2 + 4\nu^2\pi^2} = \frac{1}{2m} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^{m/2} - e^{-m/2}}\ *։$$

---

* Այս արդյունքներն ստացվում են cthx և $\frac{1}{\text{shx}}$ ֆունկցիաների պարզ կոտորակների վերլուծումներից [413, 8)]։

Դիտողություն։ Բնական կլիներ տված ինտեգրալների արժեքները որոնել նաև sin mx*-ը շարքի վերլուծելու ճանապարհով։ (ա) դեպքում, օրինակ, մենք կհանգեինք 7)-ում գտնված ինտեգրալներին, իսկ վերջավոր տեսքով արդյունք ստանալու համար կարող էինք օգտագործել հետևյալ հայտնի վերլուծումը* [422]՝

$$\frac{1}{e^m-1}-\frac{1}{m}+\frac{1}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{2k!}m^{2k-1},$$

և այլն։ Սակայն այս մեթոդն սկզբունքային արատ ունի՝ նա պահանջում է ընդունել $m<2\pi$, *մինչդեռ արդյունքը ճիշտ է ամեն մի* m*-ի համար։*

9) Եթե հետևյալ տարրական բանաձևի մեջ [*հմմ.* 455, 2°]

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

տեղադրենք $x=\frac{z}{\sqrt{n}}$, *ապա կստանանք՝*

$$\int_0^{\infty}\frac{dz}{\left(1+\frac{z^2}{n}\right)^n}=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\sqrt{n}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

$\frac{1}{\left(1+\frac{z^2}{n}\right)^n}$ *ֆունկցիան,* n*-ի աճման հետ մոնոտոն նվազելով, ձգտում է* e^{-z^2} *սահմանին։ Հենվելով* n° 480*-ի հետևանքի վրա (որն ուժը պահպանում է նաև մոնոտոն նվազող ֆունկցիայի դեպքում), այստեղ կարելի է* $n\to\infty$ *դեպքում սահմանին անցնել ինտեգրալի նշանի տակ։ Եթե աջ մասի սահմանը հաշվելու համար օգտվենք Վ ա լ լ ի ս ի բանաձևից* [305], *ապա վերջնականապես կստանանք հետևյալ արդյունքը* [*հմմտ.* 455, 2°]՝

$$\int_0^{\infty}e^{-z^2}dz=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{dz}{\left(1+\frac{z^2}{n}\right)^n}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

10) Ֆ ա յ ե ր ի հետևյալ հայտնի ինտեգրալը [297, 5) (*բ*)]՝

$$\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nz}{\sin z}\right)^2dz=\frac{\pi}{2},$$

եթե տեղադրենք $z=\frac{x}{n}$, *կարող է արտագրվել այսպես՝*

$$\int_0^{n\cdot\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \left(\frac{\frac{x}{n}}{\sin\frac{x}{n}}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

Սահմանին անցնելը $n \to \infty$ *դեպքում այստեղ դժվարանում է այն հանգամանքի շնորհիվ, որ* n *պարամետրից կախված է ոչ միայն ընդինտեգրալ ֆունկցիան, այլև ինտեգրալի վերին սահմանը։*

Ընդունելով, սակայն՝

$$f_n(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \left(\frac{\frac{x}{n}}{\sin\frac{x}{n}}\right)^2, \text{ երբ } 0 \leqslant x \leqslant n\cdot\frac{\pi}{2}$$

և

$$f_n(x) = 0, \ x\text{-ի մյուս արժեքների համար։}$$

կարելի է գրել և այսպես՝

$$\int_0^{\infty} f_n(x)\,dx = \frac{\pi}{2}. \qquad (7)$$

Ակներևաբար, ինչպիսին էլ լինի $x > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2,$$

ընդ որում $f_n(x)$ *ֆունկցիայի ձգտումը իր սահմանին ամեն մի* $[0, A]$ *վերջավոր միջակայքում կլինի հավասարաչափ։ Մյուս կողմից, հայտնի է, որ* $0 < z \leqslant \frac{\pi}{2}$ *համար*

$$\frac{\sin z}{z} \geqslant \frac{2}{\pi},$$

ուստի, $0 < x \leqslant n\cdot\frac{\pi}{2}$ *համար՝*

$$f_n(x) \leqslant \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{4}.$$

այս անհավասարությունն առավել ևս տեղի ունի $n\cdot\frac{\pi}{2} < x$*-ի դեպքում, քանի որ այդ դեպքում* $f_n(x) = 0$։

Կիրառելով n° 480*-ի* I *թեորեմը, կարող ենք* (7) *հավասարության մեջ անցնել սահմանին, երբ* $n \to \infty$, *ինտեգրալի նշանի տակ, որը մեզ կհանգեցնի հետևյալ արդյունքին* [*համ.* 457, 3) 460, 9]՝

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}։$$

11) Նույն տեսակի մի ուրիշ օրինակ։ Հայտնի է [տես 412, 8], որ՝

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos mx}{1-2r\cos x+r^2}\,dx=\pi\,\frac{r^m}{1-r^2},$$

որտեղ m*-ը բնական թիվ է և* $|r|<1$։ *Այստեղ տեղադրենք* $x=\frac{z}{m}$ *և* $r=1-\frac{h}{m}$ *(որտեղ* $h>0$*)․ համարելով* $m>h$, *կստանանք՝*

$$\int_0^{m\pi}\frac{\cos z\,dz}{h^2+2m^2\left(1-\cos\frac{z}{m}\right)\left(1-\frac{h}{m}\right)}=$$

$$=\int_0^{m\pi}\frac{\cos z\,dz}{h^2+z^2\left(\frac{\sin z/2m}{z/2m}\right)^2\left(1-\frac{h}{m}\right)}=\frac{\pi}{h}\cdot\frac{\left(1-\frac{h}{m}\right)^m}{2-\frac{h}{m}}։$$

Այստեղ անցնելով սահմանին, երբ $m\to\infty$, *«ինտեգրալի նշանի տակ» չքաշվելով նրանից, որ այստեղ վերին սահմանը ևս աճում է* m*-ի հետ միասին (այն մենք կփոխարինենք* ∞*-ով), կստանանք՝*

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos z}{h^2+z^2}\,dz=\frac{\pi}{2h}\,e^{-h}։$$

Սակայն ճիշտ է արդյոք այս։ Ջանանք հիմնավորել արված սահմանային անցումը։

Այստեղ ևս մուծենք հետևյալ ֆունկցիան՝

$$f_m(z)=\frac{\cos z}{h^2+z^2\left(\frac{\sin z/2m}{z/2m}\right)^2\left(1-\frac{h}{m}\right)},\quad \textit{երբ } 0\leqslant z\leqslant m\pi,$$

$$f_m(z)=0,\quad \textit{երբ } z>m\pi,$$

այնպես որ մեզ հետաքրքրող հավասարության ձախ մասը կարտագրվի այսպես՝

$$\int_0^{\infty} f_m(z)\,dz։$$

Ակներևաբար՝

$$\lim_{m\to\infty} f_m(z)=\frac{\cos z}{h^2+z^2},$$

ընդ որում վերջավոր միջակայքում այդ ձգտումը տեղի է ունենում հավասարաչափ։ Վերջապես, որպես մաժորանտ կարող է ծառայել հետևյալ ֆունկցիան՝

$$\frac{1}{h^2+\frac{4}{\pi^2}\,z^2\left(1-\frac{h}{m_0}\right)},$$

եթե m > h և դիտարկենք միայն $m_0 \leqslant m$ արժեքները։ Մնում է հիմնվել n° 480-ի 1 թեորեմայի վրա։

Բերենք ևս երկու ոչ շաբլոն օրինակներ, որոնք հետաքրքիր են, ինչպես կտեսնենք, այլ տեսակետից։

12) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը (a-ն որևէ թիվ է)՝

$$I=\int_0^{\infty} e^{a\cos x}\sin(a\sin x)\,\frac{dx}{x}$$

[հմմտ. 442, 9) (ա)], հայտնի համարելով հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}$$

[տես 455, 3), 457, 4)]։

Հարմար է մուծել կոմպլեքս փոփոխական՝

$$z=a(\cos x+i\sin x).$$

այդ դեպքում [430 (6)]

$$e^z=e^{a\cos x}\,[\cos(a\sin x)+i\sin(a\sin x)]$$

ֆունկցիան վերլուծվում է այսպիսի շարքի՝

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n(\cos nx+i\sin nx)}{n!},$$

Կեղծ մասերը հավասարեցնելով, մենք կստանանք հենց այն արտահայտության վերլուծումը, որը ինտեգրալի նշանի տակ առաջին բազմապատկիչն է՝

$$e^{a\cos x}\sin(a\sin x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\sin nx,$$

այստեղից՝

$$I=\int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\cdot\frac{\sin nx}{x}\,dx։$$

Եթե հնարավոր լիներ այստեղ ինտեգրումը կատարել անդամ առ անդամ, ապա մենք կստանայինք՝

$$
I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \int_0^{\infty} \frac{\sin nx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = \frac{\pi}{2}(e^a - 1):
$$

բայց այդ իրավունքի հիմնավորումն այս դեպքում պիտի անել յուրատեսակ եղանակով։

Քանի որ ինտեգրալի նշանի տակ գտնվող շարքը մաժորվում է հետևյալ հաստատուն շարքով՝

$$
a \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a^\nu}{\nu!},
$$

ուստի [0, A] վերջավոր միջակայքում ինտեգրումը կարելի է կատարել անդամ առ անդամ՝

$$
\int_0^A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \frac{\sin nx}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \int_0^A \frac{\sin nx}{x}\,dx =
$$

$$
= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \int_0^{nA} \frac{\sin t}{t}\,dt\text{:} \qquad (8)
$$

Մնում է անցնել սահմանին, երբ $A \to \infty$: Բայց, ինչպես դժվար չէ տեսնել, հենց $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ ինտեգրալի գոյության շնորհիվ, $\int_0^{t_0} \frac{\sin t}{t}\,dt$ ինտեգրալը $0 <$ բոլոր t_0 արժեքների համար կլինի հավասարաչափ սահմանափակ՝

$$
\left| \int_0^{t_0} \frac{\sin t}{t}\,dt \right| \leqslant L\text{:}
$$

Այդ ժամանակ (8) շարքը, որի անդամները կախված են A փոփոխականից մաժորվում է հետևյալ հաստատուն շարքով՝

$$
L \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a|^n}{n!}
$$

և, հետևաբար, A-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է: Այդպիսի դեպքում, հայտնի Թեորեմայի [405] համաձայն, նրա մեջ կարելի է անդամ առ անդամ անցնել սահմանի, երբ $A \to \infty$, որով և ավարտվում է ապացույցը:

13) Նույն տեսակի մի ուրիշ օրինակ: Դիցուք

$$
\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s
$$

շարքը զուգամետ է, և $0 \leqslant x$-երի համար ընդունենք՝

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^n}{n!} \cdot$$

այս շարքը նույնպես զուգամետ է, այն էլ ամեն մի [0, A] *վերջավոր միջակայքում* x*-ի նկատմամբ հավասարաչափ* [*Աբելի-Դիրիխլեի հայտանիշների համաձայն, տես* 403], *քանի որ* $\frac{x^n}{n!}$ *բազմապատկիչը, առնվազն* $A<n$*-երի համար, նվազում է* n*-ի աճման հետ միասին։*

Ապացուցենք, որ այդ ժամանակ

$$\int_0^{\infty} e^{-x} g(x)\, dx = s\text{։} \tag{9}$$

Արդյունքը միանգամից ստացվում է, եթե ինտեգրում ենք անդամ առ անդամ՝

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^n}{n!}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s,$$

քանի որ $\int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^n\, dx = n!$ [452, 4)]։

Այժմ դիմենք այդպիսի իրավունքի հիմնավորմանը։

Ինչպես և քիչ առաջ, վերջավոր միջակայքում անդամ առ անդամ ինտեգրումը թույլատրելի է՝

$$\int_0^{A} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^n}{n!}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{n!} \int_0^{A} e^{-x} \cdot x^n\, dx\text{։} \tag{10}$$

Մասերով ինտեգրելով, հեշտ է ցույց տալ որ՝

$$\frac{1}{n!} \int_0^{A} e^{-x} \cdot x^n\, dx < \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{A} e^{-x} \cdot x^{n-1}\, dx < 1,$$

այնպես որ

$$\frac{1}{n!} \int_0^{A} e^{-x} \cdot x^n\, dx$$

բազմապատկիչները, որոնք կախված են A*-ից ու* n*-ից,* n*-ը աճելիս մոնոտոն նվազում են* (A = const *դեպքում), մնալով հավասարաչափ սահմանափակ։ Այդ դեպքում (հենց նոր նշված հայտանիշի համաձայն) (10)-ի աջ մասում գրված շարքը* A*-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է, և, նշանակում է, նրա մեջ կարելի է անդամ առ անդամ սահմանին անցնել, երբ* $A \to \infty$*, և այլն։*

Ցույց տանք մեր ստացած (9) գեղեցիկ բանաձևի կիրառման երկու օրինակ.

(ա) Դիտարկենք այսպես կոչված ինտեգրալային սինուսը՝

$$\operatorname{si} x = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3!3} - \frac{x^5}{5!5} + \cdots ^{*}$$

Այս շարքը կազմվում է g (x)-ի նման, ելնելով հետևյալ շարքից՝

$$\frac{\pi}{2} - 1 + 0 + \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{5} + \cdots$$

Այդ ժամանակ, ըստ (9) բանաձևի՝

$$\int_0^\infty e^{-x} \operatorname{si} x\, dx = \frac{\pi}{2} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} :$$

(բ) Մյուս հետաքրքիր ֆունկցիան՝ Բեսսելի զրո նշանիկ ունեցող $J_0(x)$ ֆունկցիան ունի հետևյալ վերլուծումը [413, 3),4)]՝

$$J_0(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{(\nu!)^2 \cdot 2^{2\nu}},$$

որը կազմվում է g (x)-ի նմանությամբ, եթե ընդունենք՝

$$a_0 = 1, \; a_{2\nu} = (-1)^\nu \frac{(2\nu-1)!!}{2\nu!!}, \quad a_{2\nu-1} = 0 :$$

Այդ ժամանակ, շնորհիվ (9)-ի,

$$\int_0^\infty e^{-x} \cdot J_0(x)\, dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{(2\nu-1)!!}{2\nu!!} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

այստեղ վերջնական արդյունքը ստացվում է, երբ հիշում ենք $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ ֆունկցիայի վերլուծումը բինոմական շարքի [394 (24)] և նրա մեջ ընդունում $x = 1$։

Դիտողություն։ Ուսանելի է հաստատել, թե ինչումն է կայանում վերջին երկու օրինակներում կիրառված գումարումությունների մեթոդի առանձնահատկությունը՝ անվերջ միջակայքում շարքերի անդամ առ անդամ ինտեգրման մյուս օրինակների համեմատությամբ։

---

* Այս վերլուծումը հեշտ է ստանալ, եթե գրենք՝

$$\operatorname{si} x = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt - \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$

և երկրորդ ինտեգրալի մեջ սինուսը փոխարինենք իր շարքով, իսկ հետո ինտեգրենք անդամ առ անդամ։

Եթե վերադառնանք անվերջ սահման ունեցող ինտեգրալի նշանի տակ սահմանային անցման վերաբերյալ ընդհանուր հարցին [480], *ապա պարզվում է, որ այդ հարցը համարժեք է երկու փոփոխականներից կախված մի որոշ* F(A, y) *ֆունկցիայի համար երկու հաջորդական սահմանների գոյության ու հավասարության վերաբերյալ հարցին* [*տես* (3)]։ *Համաձայն* n° 467-*ի ընդհանուր թեորեմայի, այդ դեպքում բավարար պայման, երկու պարզ սահմանների առկայության դեպքում, հանդիսանում է* ֆունկցիայի հավասարաչափ ձգտումը նրանցից որևէ մեկին՝ (4)-ին կամ (5)-ին, այն էլ միևնույն է թե որին։ *Սովորաբար մենք այդպիսի հավասարաչափություն ենթադրում ենք* (5) *սահմանի նկատմամբ, որը և համապատասխանում էր անվերջ սահման ունեցող «ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտությանը»*։ Սակայն եզրակացությունը լիովին ճիշտ կմնար, եթե դրա փոխարեն հավասարաչափ լիներ F ֆունկցիայի մոտեցումը (4) սահմանին։

$f_n(x)$ *մասնակի գումարներ ունեցող* $\sum_{1}^{\infty} u_n(x)$ *շարքի դեպքում կարելի է, այսպիսով, կամ ցույց տալ*

$$F_n(A) = \int_a^A f_n(x)\,dx$$

ֆունկցիայի n-*ի նկատմամբ հավասարաչափ ձգտումը* $\int_a^{\infty} f_n(x)\,dx$ *սահմանին, երբ* $A \to \infty$, *այսինքն՝ այդ ինտեգրալների «հավասարաչափ զուգամիտությունը», որ և մենք սովորաբար արել ենք, կամ էլ համոզվել, որ հիշյալ ֆունկցիան* A-*ի նկատմամբ հավասարաչափ մոտենում է* $\int_a^A \varphi(x)\,dx$ *սահմանին, երբ* $n \to \infty$, *այսինքն՝ որ*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^A u_n(x)\,dx = \int_a^A \varphi(x)\,dx$$

շարքը A-*ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է,* որն ավելի հարմար եղավ մեզ համար 12) և 13) օրինակներում։

482. ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆՆ ՈՒ ԴԻՖԵՐԵՆՑԵԼԻՈՒԹՅՈՒՆՆ ԸՍՏ ՊԱՐԱՄԵՏՐԻ. *Այստեղ ևս նախ զբաղվենք* nn° *468-ի և 469-ի* II *և* III *թեորեմների փոխանցմամբ անվերջ միջակայքի դեպքի վրա։*

II **ԹԵՈՐԵՄԱ**: Դիցուք f(x, y) ֆունկցիան (որպես երկու փոփոխականների ֆունկցիա) որոշված ու անընդհատ է $a \leqslant x$-ի արժեքների և y-ի $[c, d]$-ին պատկանող արժեքների համար: Եթե

$$I(y)=\int\limits_{a}^{\infty} f(x, y)\, dx \qquad (1)$$

ինտեգրալը y-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է $[c,\partial]$ միջակայքում, ապա նա իրենից ներկայացնում է y պարամետրի անընդհատ ֆունկցիա այդ միջակայքում:

Այս՝ I թեորեմայի հետևանք է։ Իրոք, ինչպես մենք տեսանք 468-ում, երբ x-ը փոփոխվում է որևէ [a,A] վերջավոր միջակայքում, f(x,y) ֆունկցիան $y\to y_0$ դեպքում, (որտեղ y_0-ն y-ի որևէ մասնավոր արժեք է) x-ի նկատմամբ հավասարաչափ ձգտում է $f(x,y_0)$ սահմանային ֆունկցիային։ Բայց այդ ժամանակ, I թեորեմայի համաձայն, (1) ինտեգրալի մեջ կարելի է սահմանին անցնել ինտեգրալի նշանի տակ՝

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=\lim_{y\to y_0}\int\limits_{a}^{\infty} f(x, y)\, dx=\int\limits_{a}^{\infty} f(x,y_0)\, dx=I(y_0),$$

որը և ապացուցում է մեր պնդումը։

Դիտողություն։ Այն դեպքում, երբ f(x,y) ֆունկցիան ոչ-բացասական է՝ $f(x,y)\geqslant 0$, *տեղի ունի որոշ իմաստով հակադարձ թեորեմա՝* (1) ինտեգրալի, որպես պարամետրի ֆունկցիայի, անընդհատությունից բխում է նրա հավասարաչափ զուգամիտությունը:

Այդ դեպքում y-ից կախված

$$F(A, y)=\int\limits_{a}^{A} f(x, y)\, dx$$

անընդհատ ֆունկցիան A-ի աճման հետ միասին աճում է և, հետևաբար (Դինիի ընդհանրացրած թեորեմայի համաձայն, 466, 4°), *իր (1) սահմանին ձգտում է y-ի նկատմամբ հավասարաչափ, որը և պահանջվում է ապացուցել։*

III **ԹԵՈՐԵՄԱ:** Դիցուք f(x, y) ֆունկցիան, որը որոշված ու անընդհատ է $a\leqslant x$-երի և $[c,\partial]$-ին պատկանող y-ների համար, այդ արժեքների համար ունի նաև $f'_y(x,y)$ անընդհատ ածանցյալ ներքադրենք, այնուհետև, որ (1) ինտեգրալը գոյություն ունի բոլոր y-ների համար $[c,\partial]$-ում, իսկ

$$\int\limits_{a}^{\infty} f'_y(x, y)\, dx \qquad (11)$$

ինտեգրալը ոչ միայն գոյություն ունի, այլև զուգամիտում է y-ի նկատմամբ հավասարաչափ նույն միջակայքում: Այդ ժամանակ $[c, d]$-ին պատկանող ամեն մի y-ի համար տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$I'(y) = \int_a^{\infty} f'_y(x, y)\,dx.$$

Վերցնելով $y = y_0$ *մասնավոր արժեքը, դիտարկենք հետևյալ հարաբերությունը՝*

$$\frac{I(y_0 + k) - I(y_0)}{k} = \int_a^{\infty} \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}\,dx \qquad (12)$$

և ապացուցենք, որ այստեղ թույլատրելի է ինտեգրալի նշանի տակ սահմանային անցում ըստ k *պարամետրի, երբ* $k \to 0$.

Մենք 469-*ում արդեն տեսել ենք, որ երբ* x-*ը փոփոխվում է որևէ* $[a, A]$ *վերջավոր միջակայքում,* $\frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}$ *ընդինտեգրալ ֆունկցիան* $k \to 0$ *դեպքում ձգտում է* $f'_y(x, y_0)$ *սահմանային ֆունկցիային՝* x-*ի նկատմամբ հավասարաչափ: Որպեսզի իրավունք ունենանք կիրառել* I *թեորեմը, մեզ հարկավոր էր նաև համոզվել, որ (12) ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է* k-*ի նկատմամբ:*

(11) ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտության վերաբերյալ մեր ենթադրության համաձայն, ամեն մի $\varepsilon > 0$ *համար կգտնվի այնպիսի* $A_0 > a$, *որ, հենց որ* $A' > A > A_0$, *կունենանք՝*

$$\left| \int_A^{A'} f'_y(x, y)\,dx \right| < \varepsilon \qquad (13)$$

բոլոր y-*ների համար միանգամից* [476]. *Ցույց տանք, որ միաժամանակ կլինի նաև՝*

$$\left| \int_A^{A'} \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}\,dx \right| < \varepsilon \qquad (14)$$

k-*ի բոլոր հնարավոր արժեքների համար.*

Այդ նպատակով (ֆիքսելով A-*ն և* A'-*ը) դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան՝*

$$\Phi(y)=\int_A^{A'} f(x,y)\,dx.$$

Ըստ n° 469-*ի* III *թեորեմայի, այս ֆունկցիայի ածանցյալը հաշվվում է Լայբնիցի կանոնով՝*

$$\Phi'(y)=\int_A^{A'} f'_y(x,y)\,dx$$

և, (18)-ի շնորհիվ, բացարձակ մեծությամբ միշտ $<\varepsilon$*։ Բայց այդ ժամանակ նաև*

$$\frac{\Phi(y_0+k)-\Phi(y_0)}{k}=\int_A^{A'}\frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k}\,dx$$

հարաբերությունը, որը ըստ Լագրանժի բանաձևի հավասար է $\Phi'(y_0+\theta k)$*, նույնպես բացարձակ մեծությամբ կլինի* $<\varepsilon$*, այսինքն բավարարվում է (14)-ը։ Այստեղից,* n° 476-*ի հայտանիշի համաձայն, հետևում է (12) ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտությունը, որով և ավարտվում է ապացույցը։*

Հեշտ է ստանալ նաև 472-*ի՝* $[a,b]$ *վերջավոր միջակայքին վերաբերող* II* *և* III* *թեորեմների ընդհանրացումը. հարկավոր է միայն, ըստ էության ոչինչ չփոխելով այստեղ բերված ձևակերպումների ու դատողությունների մեջ,* $x=\infty$ *կետը փոխարինել* $x=b$ *կետով (ինչպես այդ արեցինք, օրինակ,* I *թեորեմայից* I′ *թեորեմային անցնելիս)։*

Դիտողություն։ Այստեղ շարադրվող տեսության մեջ մենք չենք օգտվում ինտեգրալների և շարքերի կապից, նախընտրելով ամենուրեք առաջ քաշել այն գաղափարը, որը փաստորեն հանդիսանում է բոլոր դատողությունների հիմքը՝ սահմանային ֆունկցիային հավասարաչափ ձգտելու գաղափարը։ Սակայն որոշ դեպքերում շարքերի արդեն զարգացրած տեսությանը դիմելը կարող էր ձևական պարզեցում մտցնել դատողությունների մեջ։ Պարզաբանենք այդ, տալով III *թեորեմայի նոր ապացույց (որտեղ հիշյալ պարզեցումն ավելի զգալի է)։*

$I(y)$ *ինտեգրալը փոխարինենք շարքով* [439]՝

$$I(y)=\sum_{1}^{\infty}\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,y)\,dx \qquad (A_n\to\infty).$$

Այս շարքի

$$u_n(y) = \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x, y)\, dx$$

անդամները, շնորհիվ 468-ի և 469-ի II և III թեորեմների, անընդհատ են և ունեն անընդհատ ածանցյալներ՝

$$u_n'(y) = \int_{A_{n-1}}^{A_n} f_y'(x, y)\, dx\text{։}$$

Ընդսմին այդ ածանցյալներից կազմած շարքը y-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է [c, d] միջակայքում, ինչպես այդ հետևում է (11) ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտությունից [476]։ Այդ ժամանակ, շարքի անդամ առ անդամ դիֆերենցման վերաբերյալ թեորեմայի [407] համաձայն, գոյություն ունի՝

$$I'(y) = \sum_1^{\infty} u_n'(y) = \sum_1^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f_y'(x, y)\, dx = \int_a^{\infty} f_y'(x, y)\, dx,$$

որը և ապացուցում է պահանջվելիքը։

Նույն եղանակը կարելի է կիրառել նաև 480-ի և 482-ի I և II թեորեմները ապացուցելիս (ինչպես նաև հաջորդ n°-ի IV թեորեմն ապացուցելիս), դիմելով ֆունկցիոնալ շարքերի տեսության համապատասխան թեորեմներին։ Այդ թողնում ենք ընթերցողին։

483. ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄՆ ԸՍՏ ՊԱՐԱՄԵՏՐԻ։ Նախ ապացուցենք հետևյալ թեորեման.

IV **ԹԵՈՐԵՄԱ.** II թեորեմայի պայմանների առկայության դեպքում տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$\int_c^d I(y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx = \int_a^{\infty} dx \int_c^d f(x, y)\, dy\text{։} \qquad (15)$$

Իրոք, n 470-ի IV թեորեմայի համաձայն, ամեն մի վերջավոր A > a դեպքում ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը՝

$$\int_c^d dy \int_a^A f(x, y)\, dx = \int_a^A dx \int_c^d f(x, y)\, dy\text{։}$$

Բայց, ենթադրության համաձայն, (3) ֆունկցիան, որն անընդհատ է ըստ y-ի, A⟶∞ դեպքում ձգտում է իր (1) սահմանին՝ y-ի նկատմամբ հավասարաչափ։ Հետևաբար, n° 468-ի I թեորեմայի համաձայն, ձախ մասի ինտեգրալի մեջ կարելի է

անցնել սահմանին՝ ըստ A→∞՝ *ինտեգրալի նշանի տակ, այսինքն՝*

$$\lim_{A \to \infty} \int_c^d dy \int_a^A f(x, y)\, dx = \int_c^d dy \int_a^\infty f(x, y)\, dx.$$

Այդ ժամանակ գոյություն ունի նաև աջ մասի ինտեգրալի սահմանը, երբ A→∞, *այսինքն հետևյալ ինտեգրալը՝*

$$\int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y)\, dy,$$

և ունի նույն արժեքը, որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Եթե օգտվենք նախորդ n-*ի* II *թեորեմայի վերաբերյալ արած դիտողությունից, ապա հեշտ է այստեղից ստանալ այսպիսի*

ՀԵՏԵՎԱՆՔ: Ոչ-բացասական f(x, y) ֆունկցիայի դեպքում միայն (1) ինտեգրալի անընդհատությունից բխում է (15) բանաձևը:

Այսպիսով, մենք, որոշ պայմանների առկայության դեպքում, ցույց տվինք, որ իրավունք ունենք տեղափոխել երկու ինտեգրալներ, որոնցից միայն մեկն է տարածված անվերջ միջակայքով, իսկ մյուսը՝ վերջավոր։

Մինչդեռ շատ դեպքերում հարկավոր է լինում տեղափոխել հենց այնպիսի ինտեգրալներ, որոնք երկուսն էլ վերցրած են անվերջ միջակայքերում, այսպիսի բանաձևով՝

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x, y)\, dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y)\, dy: \qquad (16)$$

Այդպիսի տեղափոխման արդարացումը հաճախ իրենից ներկայացնում է բարդ և շատ աշխատանք պահանջող գործ, որում համոզվելու համար ընթերցողն ստորև շատ օրինակներ կգտնի։

Միայն դեպքերի շատ նեղ դասի համար է հաջողվում հիմնավորել (16) բանաձևը ընդհանուր նկատառումներով՝

V **ԹԵՈՐԵՄԱ:** Դիցուք f(x, y) ֆունկցիան որոշված ու անընդհատ է $a \leq x$-երի և $c \leq y$-ների համար: Ենթադրենք, այնուհետև, որ

$$\int_a^\infty f(x, y)\, dx \quad \text{և} \quad \int_c^\infty f(x, y)\, dy$$

երկու ինտեգրալներն էլ հավասարաչափ զուգամետ են, առաջինը՝ y-ի նկատմամբ՝ երկրորդը՝ x-ի նկատմամբ, ցանկացած վերջավոր միջակայքում։ Այդ ժամանակ, եթե

$$\int_c^{\infty} dx \int_a^{\infty} |f(x,y)|\,dx \quad և \quad \int_a^{\infty} dy \int_c^{\infty} |f(x,y)|\,dy \qquad (18)$$

հաջորդական ինտեգրալներից թեկուզ մեկը գոյություն ունի, ապա գոյություն ունեն և իրար հավասար են (16) հաջորդական ինտեգրալները։

Ենթադրենք, թե գոյություն ունի (18) ինտեգրալներից երկրորդը։ Շնորհիվ $\int_a^{\infty} f\,dx$ *ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտության, նախորդ թեորեմայի համաձայն, ցանկացած վերջավոր* $C>c$ *թվի համար կունենանք՝*

$$\int_c^{C} dy \int_a^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{\infty} dx \int_c^{C} f(x,y)\,dy.$$

Մնում է ապացուցել, որ աջ մասի ինտեգրալի մեջ $C\to\infty$ *դեպքում թույլատրելի է սահմանային անցում ինտեգրալի նշանի տակ, որովհետև այդ ժամանակ գոյություն կունենան՝*

$$\int_c^{\infty} dy \int_a^{\infty} f(x,y)\,dx = \lim_{C\to\infty} \int_c^{C} dy \int_a^{\infty} f\,dx = \lim_{C\to\infty} \int_a^{\infty} dx \int_c^{C} f(x,y)\,dy =$$

$$= \int_a^{\infty} dx \cdot \lim_{C\to\infty} \int_c^{C} f(x,y)\,dy = \int_a^{\infty} dx \int_c^{\infty} f(x,y)\,dy.$$

Հիշյալ սահմանային անցումը կարելի է արդարացնել, հենվելով 480-ի I թեորեմայի վրա։ x*-ից ու* C*-ից կախված*

$$\int_c^{C} f(x,y)\,dy$$

ֆունկցիան, որն ըստ x*-ի անընդհատ է* [468, II *թեորեմա*], $C\to+\infty$ *դեպքում ձգտում է*

$$\int_c^{\infty} f(x,y)\,dy$$

սահմանային ֆունկցիային՝ x-ի նկատմամբ հավասարաչափ ամեն մի վերջավոր միջակայքում. Իսկ

$$\int_a^\infty dx \int_c^C f(x, y)\, dy$$

ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է C-ի նկատմամբ, որովհետև մաժորվում է (18) ինտեգրալներից երկրորդով, քանի որ

$$\left| \int_c^C f(x, y)\, dy \right| \le \int_c^\infty |f(x, y)|\, dy.$$

Այսպիսով, I թեորեմայի բոլոր պայմաններն այստեղ բավարարվում են, և մեր պնդումն արդարացվում է.

Գործը մի քիչ ավելի պարզ է այնպիսի ֆունկցիայի դեպքում, որը նշանը չի փոխում. Օրինակ, ոչ-բացասական ֆունկցիայի համար (բավական է սահմանափակվել այդ դեպքով) տեղի ունի այսպիսի

ՀԵՏԵՎԱՆՔ: Դիցուք $f(x, y)$ ո չ-բ ա ց ա ս ա կ ա ն անընդհատ ֆունկցիայի համար (17) երկու ինտեգրալներն էլ իրենցից ներկայացնում են նույնպես ա ն ը ն դ հ ա տ ֆունկցիաներ, առաջինը՝ ըստ y-ի, երկրորդը՝ ըստ x-ի. Այդ ժամանակ, եթե գոյություն ունի (16) հաջորդական ինտեգրալներից մեկը, ապա գոյություն ունի նաև մյուսը և նրան հավասար է.

II *թեորեմայից և նրա վերաբերյալ դիտողությունից պարզվում է, որ (17) ինտեգրալների անընդհատության վերաբերյալ արված ենթադրությունը հավասարազոր է նրանց հավասարաչափ զուգամիտության վերաբերյալ պահանջին. Մնում է կիրառել նախորդ թեորեման, նշելով, որ տվյալ դեպքում* $|f(x, y)| = f(x, y)$:

Ներկա n°*-ի առաջադրությունները ևս կարող են վերաձևակերպվել վերջավոր միջակայքերի դեպքի համար.* IV *թեորեմայում (ու նրա հետևանքում) միայն պետք է* $x = \infty$ *կետը փոխարինել* $x = b$ *կետով, իսկ* V *թեորեմայում (ու նրա հետևանքում) նաև* $y = \infty$ *կետը՝* $y = d$ *կետով.*

484. ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՄԻ ՔԱՆԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ ՀԱՇՎԵԼԻՍ. *Վերևում շարադրված տեսությունը կիրառենք մի քանի կարևոր ինտեգրալներ հաշվելու համար.*

1° Է յ լ ե ր ի ինտեգրալները՝

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x}\,dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{x^2+2x\cos\theta+1}.$$

$(0<a<1)$ $\qquad$ $(0<a,\ b<1)$ $\qquad$ $(0<a<1,\ -\pi<\theta<\pi)$

ո 459, *1)-ի արդյունքներից անմիջապես ստացվում է՝*

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}\,dz = \frac{\pi}{2n}\frac{1}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi} \qquad (m<n).$$

Այստեղ դնելով $z=x^{1/2n}$, *կգտնենք Էյլերի ինտեգրալներից առաջինը* $a=\frac{2m+1}{2n}$ *մասնավոր արժեքի համար՝*

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}. \tag{19}$$

Որպեսզի այստեղից ստանանք որոնելի ինտեգրալի արժեքը յանկացած a*-ի դեպքում, որը բավարարում է* $0<a<1$ *պայմանին, համոզվենք, որ այդ ինտեգրալը* a*-ի անընդհատ ֆունկցիա է նշված արժեքների համար։*

Երբ $0<x<+\infty$ *և* $0<a<1$, *ընդինտեգրալ ֆունկցիան անընդհատությունը պահպանում է ըստ երկու փոփոխականների էլ։ Այնուհետև, դիտարկվող ինտեգրալը* a*-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է* $x=0$ *դեպքում՝* $0<a_0\leq a$*-երի համար, իսկ* $x=\infty$ *դեպքում՝* $1>a_1\geq a$*-երի համար։ Իրոք,* $\int_0^{\infty}$ *ինտեգրալը տրոհելով երկուսի՝* $\int_0^1+\int_1^{\infty}$, *հեշտ է տեսնել, որ վերջինները մաժորվում են, համապատասխանաբար, հետևյալ ինտեգրալներով՝*

$$\int_0^1 \frac{x^{a_0-1}}{1+x}\,dx \quad \text{և} \quad \int_1^{\infty} \frac{x^{a_1-1}}{1+x}\,dx.$$

Կիրառելով $\int_1^{\infty}$ *ինտեգրալի նկատմամբ* II *թեորեման, իսկ*

$\int\limits_0^1$ ինտեգրալի նկատմամբ՝ նրա համանման թեորեման վերջավոր միջակայքի համար, համոզվում ենք, որ երկու ինտեգրալներն էլ, որպես պարամետրի ֆունկցիաներ, անընդհատ են։

$0<a<1$ պայմանին բավարարող ամեն մի a արժեքի կարելի է կամայապես մոտենալ $\frac{2m+1}{2n}$ տեսքի արժեքների օգնությամբ (m-ն ու n-ը՝ բնական թվեր են և $m<n$)։ *(19)* բանաձևում անցնելով սահմանի, երբ $\frac{2m+1}{2n} \to a$, և օգտագործելով ինտեգրալի հենց նոր ապացուցված անընդհատությունը, վերջնականապես կգտնենք՝

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$ [Համմտ. 481), 4)։]

Միանգամայն նման եղանակով, 459, 2) և 3)-ից կստանանք՝

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x}\,dx = \pi(\operatorname{ctg} a\pi - \operatorname{ctg} b\pi)$$

և՝

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x^2+2x\cdot\cos\theta+1} = \pi\,\frac{\sin(1-a)\theta}{\sin\theta\cdot\sin a\pi}.$$

2° Հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

[համմտ. 455, 3]։

Դիտարկենք

$$J_0 = \int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx \qquad (\alpha > 0)$$

ինտեգրալը։ Այն հաշվենք ըստ α պարամետրի դիֆերենցման

օգնությամբ։ Սակայն Լայբնիցի կանոնի անմիջական կիրառումն այստեղ բերում է տարամետ ինտեգրալի՝

$$\int_0^\infty \cos \alpha x \, dx:$$

Այդ պատճառով մենք մուծում ենք e^{-kx} $(k>0)$ «զուգամիտության բազմապատկիչը» և սկսում ենք որոնել հետևյալ ինտեգրալի արժեքը՝

$$J = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin \alpha x}{x} \, dx \quad (\alpha \geqslant 0).$$

Այս ինտեգրալի համար՝ ինտեգրալի նշանի տակ ըստ α-ի դիֆերենցումն արդեն թույլատրելի է, որովհետև պահպանվում են III թեորեմայի պայմանները. ընդինտեգրալ ֆունկցիան ու նրա մասնական ածանցյալն ըստ α-ի անընդհատ են ըստ x-ի ու α-ի՝ $0 \leqslant x$-երի և 0 α-ների համար, իսկ դիֆերենցման հետևանքով ստացված

$$\int_0^\infty e^{-kx} \cos \alpha x \, dx = \frac{k}{\alpha^2 + k^2}$$

ինտեգրալը α-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է, քանի որ մաժորվում է α չպարունակող $\int_0^\infty e^{-kx} dx$ ինտեգրալով։

Այսպիսով, 0 α-ների համար՝

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \frac{k}{\alpha^2 + k^2}:$$

Ինտեգրելով ըստ α-ի, կգտնենք՝

$$J = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{k}$$

(հաստատուն գումարելի մուծելու կարիք այստեղ չկա, քանի որ այդ երկու արտահայտություններն էլ $\alpha = 0$ դեպքում դառնում են զրո)։

Այս բանաձևն արտածվեց, ենթադրելով, թե $k>0$։ Սակայն $\alpha = \text{const.}$ դեպքում, J ինտեգրալը դառնում է k-ի այնպիսի ֆունկցիա, որն անընդհատ է նաև $k=0$ դեպքում. այդ II

թեորեմայի համաձայն, հետևում է J *ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտությունից* k-*ի նկատմամբ, երբ* $k \geq 0$ [*տես* 477, 4°]. *Այլ խոսքով՝*

$$J_0 = \lim_{k \to +0} J.$$

Եթե $\alpha > 0$, *ապա՝*

$$J_0 = \lim_{k \to +0} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{k} = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Մասնավորապես (երբ $\alpha = 1$*) նաև՝*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

3° *Էյլերի-Պուասսոնի*

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

ինտեգրալը [*համմտ.* 455, *2*)].

Այստեղ ընդունելով $x = ut$, *որտեղ* u-*ն որևէ դրական թիվ է, կստանանք՝*

$$J = u \int_0^\infty e^{-u^2 t^2} dt.$$

Այժմ այս հավասարության երկու մասերն էլ բազմապատկենք $e^{-u^2} du$-*ով և ինտեգրենք ըստ* u-*ի* 0-*ից մինչև* ∞՝

$$J \cdot \int_0^\infty e^{-u^2} du = J^2 = \int_0^\infty e^{-u^2} u\, du \int_0^\infty e^{-u^2 t^2} dt.$$

Դժվար չէ տեսնել, որ ինտեգրալների տեղափոխումն այստեղ արագ է հասցնում արդյունքին. Իսկապես, տեղափոխումից հետո կստանանք՝

$$J^2 = \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2} u\, du = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4},$$

որտեղից (քանի որ, ակներևաբար, $J > 0$*)՝*

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Կատարված տեղափոխման օրինականությունը արդարացվում է V թեորեմայի հետևանքով։ Նրա պայմաններն այստեղ տեղի ունեն, քանի որ ընդինտեգրալ ֆունկցիան դրական ու անընդհատ է t-ի և u-ի վերջավոր արժեքների համար, իսկ երկու

$$\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2} u\,dt = e^{-u^2}\cdot J$$

և

$$\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2} u\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}$$

ներքին ինտեգրալներն էլ անընդհատ են, առաջինը ըստ u-ի, իսկ երկրորդը՝ ըստ t-ի։

4° Լապլասի (P. S. Laplace) ինտեգրալները՝

$$y=\int_0^\infty \frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx,\quad z=\int_0^\infty \frac{x\cdot\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx\quad (\alpha,\ \beta>0)\text{։}$$

Առաջինում ընդունելով՝

$$\frac{1}{\alpha^2+x^2}=\int_0^\infty e^{-t(\alpha^2+x^2)}\,dt,$$

կստանանք՝

$$y=\int_0^\infty \cos\beta x\,dx\int_0^\infty e^{-t(\alpha^2+x^2)}\,dt\text{։}$$

Տեղափոխելով այստեղ, ըստ V թեորեմայի, ինտեգրումներն ըստ x-ի և ըստ t-ի, կստանանք՝

$$y=\int_0^\infty e^{-\alpha^2 t}\,dt\int_0^\infty e^{-tx^2}\cos\beta x\,dx\text{։}$$

Սակայն ներքին ինտեգրալը մեզ հայտնի է [481, 6) (ա)]՝

$$\int_0^\infty e^{-tx^2}\cos\beta x\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{\beta^2}{4t}},$$

այնպես որ՝

$$y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha^2 t-\frac{\beta^2}{4t}}\frac{dt}{\sqrt{t}}\underset{(t=z^2)}{=}\sqrt{\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha^2 z^2-\frac{\beta^2}{4z^2}}dz.$$

հիշելով 460, *6), վերջնականապես կստանանք՝*

$$y=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta}.$$

Լապլասի երկրորդ ինտեգրալն ստացվում է առաջինից ըստ β *պարամետրի դիֆերենցումով՝*

$$z=-\frac{dy}{d\beta}=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}.$$

Լայբնիցի կանոնի կիրառումը արդարացվում է նրանով, որ ինտեգրալը β*-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է* $0<\beta_0\leqslant\beta$*-ների համար* [479, *16)*].

5) **Ֆրենելի** [A. J. Fresnel] *ինտեգրալները՝*

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx,\qquad \int_0^\infty \cos x^2\,dx.$$

Ընդունելով $x^2=t$, *կստանանք՝*

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt,\qquad \int_0^\infty \cos x^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt.$$

սկսենք որոնել այս ինտեգրալներից առաջինը ձևափոխված տեսքով.

Ինտեգրալի նշանի տակ $\frac{1}{\sqrt{t}}$ *արտահայտությունը փոխարինելով իրեն հավասար հետևյալ ինտեգրալով՝*

$$\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-tu^2}du,$$

որոնելի ինտեգրալը կբերենք հետևյալ տեսքին՝

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \sin t\,dt \int_0^\infty e^{-tu^2}\,du.$$

Ինտեգրալների տեղափոխումն այստեղ միանգամից կբերեր վերջնական արդյունքի՝

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-tu^2}\sin t\,dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^4} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},^{*}$$

Քանի որ այդպիսի տեղափոխման անմիջական հիմնավորումը պահանջում է շատ աշխատանք կլանող ձևափոխություններ ու գնահատումներ, ուստի մենք նախընտրում ենք այստեղ ևս (հմմտ. 2)) դիմել e^{-kt} $(k>0)$ զուգամիտության բազմապատկչին։

Ունենք՝

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-kt}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-kt}\sin t\,dt \int_0^\infty e^{-tu^2}\,du =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-(k+u^2)t}\sin t\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{du}{1+(k+u^2)^2}.$$

Այս անգամ ինտեգրալների տեղափոխման թույլատրելիությունը հաստատվում է V թեորեմայի օգնությամբ։ Մնում է, վերջապես, անցնել սահմանի $k\to 0$ դեպքում, որը, ինչպես հեշտ է ստուգել, կարելի է կատարել ինտեգրալի նշանի տակ։

Այսպիսով, վերջնականապես՝

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Նույն արժեքն է ստացվում նաև

$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt$$

* Տես 437, 2) կամ 454, 6)։

ինտեգրալի համար։ Այստեղից՝

$$\int_0^\infty \sin x^2\, dx = \int_0^\infty \cos x^2\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

485. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՆՇԱՆԻ ՏԱԿ ԴԻՖԵՐԵՆՑՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ։

1) Ելնելով հետևյալ հայտնի ինտեգրալներից ($a>0$)՝

$$(ա)\ \int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},\quad (բ)\ \int_0^\infty \frac{dx}{a+x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{a}},\quad (գ)\ \int_0^1 x^{a-1}dx = \frac{1}{a},$$

ըստ պարամետրի հաջորդական դիֆերենցման միջոցով նրանցից ստանալ նոր ինտեգրալներ։

(ա) *Լուծում։* Լայբնիցի կանոնով, n անգամ դիֆերենցելուց հետո, կստանանք՝

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}x^{2n}dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,.$$

Քանի որ այդ ժամանակ ստացվող բոլոր ինտեգրալները a-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ են $0<a_0\leqslant a$-երի համար (օրինակ, գրված ինտեգրալը մաժորվում է $\int_0^\infty e^{-a_0x^2}x^{2n}dx$ ինտեգրալով), ապա Լայբնիցի կանոնի կիրառումն օրինական է։

(բ) Պատասխան. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\cdot\frac{1}{a^n}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{a}}\,.$$

(գ) Պատասխան. $$\int_0^1 x^{a-1}\log^n x\, dx = (-1)^n\frac{n!}{a^{n+1}}\,.$$

2) Ըստ պարամետրի դիֆերենցման միջոցով հաշվել հետևյալ ինտեգրալները (α, β, $k>0$)՝

$$(ա)\ J = \int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha x}{x}e^{-kx}dx,$$

$$(բ)\ H = \int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\cdot\frac{\sin\beta x}{x}\cdot e^{-kx}dx\,.$$

(ա) Լուծում։ J-ի ածանցյալը ըստ α-ի արտահայտվում է հետևյալ ինտեգրալով (որն α-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է)՝

$$\frac{dJ}{d\alpha}=\int_0^{\infty} e^{-kx}\sin\alpha x\,dx=\frac{\alpha}{\alpha^2+k^2},$$

այստեղից՝

$$J=\frac{1}{2}\log(\alpha^2+k^2)+C\,։$$

Քանի որ α=0 դեպքում J ինտեգրալը դառնում է զրո, ապա $C=-\frac{1}{2}\log k^2$, և վերջնականապես՝

$$J=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\alpha^2}{k^2}\right)։$$

(բ) H-ը ինտեգրալի նշանի տակ դիֆերենցելով ըստ α-ի, կստանանք՝

$$\frac{dH}{d\alpha}=\int_0^{\infty} e^{-kx}\,\frac{\sin\beta x\cdot\cos\alpha x}{x}\,dx\,։$$

Լայբնիցի կանոնի կիրառումը օրինական է, որովհետև III թեորեմայի պայմանները պահպանվում են, ինչպես դրանում հեշտ է համոզվել։

Սինուսի և կոսինուսի արտադրյալը ձևափոխելով երկու սինուսների տարբերության, ստացված ինտեգրալը կբերենք մեզ ծանոթ ինտեգրալների [484, 2°]՝

$$\frac{dH}{d\alpha}=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\infty} e^{-kx}\,\frac{\sin(\alpha+\beta)x}{x}\,dx-\int_0^{\infty} e^{-kx}\,\frac{\sin(\alpha-\beta)x}{x}\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{\alpha+\beta}{k}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha-\beta}{k}\right)։$$

ինտեգրում ենք ըստ α-ի՝

$$H=\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha+\beta}{k}-\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha-\beta}{R}+\frac{k}{4}\log\frac{k^2+(\alpha-\beta)^2}{k^2+(\alpha+\beta)^2}+C\,։$$

Հաստատուն C=0 (որովհետև H=0, երբ α=0)։

3) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_0^{\infty}\frac{1-e^{-t}}{t}\cos t\,dt\,։$$

Ցուցում։ Դիտարկել ավելի ընդհանուր ինտեգրալ, մուծելով պարամետր՝

$$\int_0^{\infty}\frac{1-e^{-\alpha t}}{t}\cos t\,dt,$$

հաշվել այն ըստ պարամետրի դիֆերենցման միջոցով, և ապա ընդունել $\alpha=1$։

Պատասխան. $\log\sqrt{2}$։

4) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները՝

$$(\text{ա})\quad J_1=\int_0^\infty \frac{\log(1+a^2x^2)}{b^2+x^2}dx \qquad (a,\ b>0),$$

$$(\text{բ})\quad J_2=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} rx}{x(1+x^2)}dx \qquad (r>0),$$

$$(\text{գ})\quad J_3=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax\cdot\operatorname{arctg} bx}{x^2}dx \qquad (a,\ b>0)։$$

(ա) Ցուցում։ J_1-ը ըստ a-ի անընդհատ է $0\le a$-երի համար. մաժորանտն է՝ $\dfrac{\log(1+a_1^2x^2)}{b^2+x^2}$, երբ $0\le a\le a_1$։ $0<a$-ի համար ածանցյալը կլինի՝

$$\frac{dJ_1}{da}=\int_0^\infty \frac{2ax^2}{(b^2+x^2)(1+a^2x^2)}dx=\frac{\pi}{ab+1},$$

մաժորանտն է՝ $\dfrac{2a_1x^2}{(b^2+x^2)(1+a_0^2x^2)}$, երբ $0<a_0<a<a_1$։

Պատասխան. $J_1=\dfrac{\pi}{b}\log(ab+1)$.

բ) Ցուցում։ $0<r$-ի դեպքում ածանցյալը կլինի՝

$$\frac{dJ_2}{dr}=\int_0^\infty \frac{dx}{(1+r^2x^2)(1+x^2)}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+r}.$$

մաժորանտն է՝ $\dfrac{1}{1+x^2}$։ Պատասխան. $J_2=\dfrac{\pi}{2}\log(1+r)$։

(գ) Ցուցում։ Ածանցյալն ըստ a-ի բերվում է J_2 տիպի ինտեգրալի՝

$$\frac{dJ_3}{da}=\int_0^\infty \frac{1}{1+a^2x^2}\cdot\frac{\operatorname{arctg} bx}{x}dx=$$

$$=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}t}{t(1+t^2)}dt=\frac{\pi}{2}\log\frac{a+b}{a} \qquad (a>0)։$$

Պատասխան. $J_2=\frac{\pi}{2}\log\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a\cdot b^b}$։

Դիտողություն։ J_2-ից r=1 դեպքում x=tg t տեղադրությամբ ստացվում է հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{\operatorname{tg} t}\,dt=\frac{\pi}{2}\log 2,$$

իսկ այստեղից, մասերով ինտեգրելով, նորից գտնում ենք [հմմտ. 455, 1°]՝

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin t\,dt=-\frac{\pi}{2}\log 2։$$

ծ) (ա) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$J=\int_0^{\infty}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx։$$

Լուծում։ Ունենք՝

$$\frac{dJ}{db}=-\int_0^{\infty}e^{-x^2}\cdot 2x\cdot\sin 2bx\,dx։$$

Մասերով ինտեգրելով, կստանանք՝

$$\frac{dJ}{db}=-2b\int_0^{\infty}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx=-2bJ։$$

Այսպիսով, J-ի որոշման համար ստացվեց պարզ դիֆերենցիալ հավասարում անջատվող փոփոխականներով [349]։ Ինտեգրելով, գտնում ենք՝

$$J=Ce^{-b^2}։$$

Քանի որ b=0 դեպքում պետք է լինի $J=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ապա հենց դրան էլ հավասար է C-ն։ Վերջնականապես՝

$$J=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-b^2}$$

[հմմտ. 481, 6) (ա)]։

(բ) Նույն եղանակը կիրառենք հետևյալ ինտեգրալը հաշվելու համար

$$H=\int_0^{\infty} e^{-x^2}\sin 2bx\,dx,$$

ապա կգտնենք դիֆերենցիալ հավասարման՝

$$\frac{dH}{db}+2bH=1։$$

Սրա երկու մասերն էլ բազմապատկելով e^{b^2}-ով, ձախ կողմում, ակներևաբար, կստանանք $e^{b^2}\cdot H$ արտադրյալի ածանցյալն ըստ b-ի. ինտեգրելով 0-ից մինչև b, կստանանք՝

$$e^{b^2}\cdot H=\int_0^b e^{b^2}\,db$$

(քանի որ b=0 դեպքում H=0)։ Այսպիսով՝

$$H=e^{-b^2}\cdot\int_0^b e^{t^2}\,dt։$$

Այստեղ ինտեգրալի արտահայտման համար հարկավոր եղավ մուծել նոր, «ոչ տարրական» ֆունկցիա՝

$$\varphi(x)=\int_0^x e^{t^2}\,dt$$

[հմմտ. 481, 6) (գ)]։

6) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը (a, b > 0)՝

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}\,dx։$$

Լուծում։ Որոնելի ինտեգրալը միայն $\frac{1}{\sqrt{a}}$ բազմապատկչով է տարբերվում հետևյալ ինտեգրալից՝

$$J=\int_0^{\infty} e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}\,dy,$$

որտեղ $c^2=ab$ (տեղադրությունը՝ $y=\sqrt{a}\,x$)։

Ունենք՝

$$\frac{dJ}{dc}=-2c\int_0^{\infty} e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}\frac{dy}{y^2}=-2\int_0^{\infty} e^{-z^2-\frac{c^2}{z^2}}\,dz=-2J$$

(տեղադրում ենք $y=\frac{c}{z}$). Այստեղից.

$$J=Ae^{-2c}, \qquad A=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Պատասխան. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-2\sqrt{ab}}$. [հմմտ. 460, 6).]

7) Հաշվել՝

$$J=\int_0^\infty \frac{e^{-at}\cos bt-e^{-a_1t}\cos b_1t}{t}dt \qquad (a,\ a_1>0).$$

Լուծում։ Դիֆերենցելով առանձին-առանձին ըստ a-ի և ըստ b-ի, կստանանք՝

$$\frac{\partial J}{\partial a}=-\int_0^\infty e^{-at}\cos bt\,dt=-\frac{a}{a^2+b^2},$$

$$\frac{\partial J}{\partial b}=-\int_0^\infty e^{-at}\sin bt\,dt=-\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Դժվար չէ այս մասնակի ածանցյալներով վերականգնել ֆունկցիան ինքը՝*

$$J=-\frac{1}{2}\log(a^2+b^2)+C,$$

որտեղ C-ն կախված չէ ոչ a-ից, ոչ b-ից։ Քանի որ $a=a_1$ և $b=b_1$ դեպքում կլինի $J=0$, ապա՝

$$C=\frac{1}{2}\log(a_1^2+b_1^2),$$

այնպես որ՝

$$J=\frac{1}{2}\log\frac{a_1^2+b_1^2}{a^2+b^2}.$$

8) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները $(a>0,\ b>0)$՝

$$u=\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx^2dx, \qquad v=\int_0^\infty e^{-ax^2}\sin bx^2\,dx.$$

---

* Հետագայում մենք այդ հարցով կզբաղվենք սիստեմատիկորեն, իսկ այստեղ «նախնական» ֆունկցիան գտնում ենք «աչքաչափով»։

Լուծում։ Գտնենք այդ ինտեգրալների ածանցյալներն ըստ b պարամետրի, օգտվելով Լայբնիցի կանոնից՝

$$\frac{du}{db} = -\int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-ax^2} \sin bx^2 dx, \quad \frac{dv}{ab} = \int_0^{\alpha} x^2 \cdot e^{-ax^2} \cos bx^2 dx。$$

Մասերով ինտեգրելով, այստեղից հեշտ է ստանալ՝

$$\frac{du}{db} = -\frac{1}{2a} v - \frac{b}{a} \cdot \frac{dv}{db}, \quad \frac{dv}{db} = \frac{1}{2a} u + \frac{b}{a} \cdot \frac{du}{db}$$

կամ, այդ հավասարումները լուծելով ածանցյալների նկատմամբ,

$$\frac{du}{db} = -\frac{bu+av}{2(a^2+b^2)}, \quad \frac{dv}{db} = \frac{au-bv}{2(a^2+b^2)}。 \tag{20}$$

Այսպիսով, b-ից կախված u և v անհայտ ֆունկցիաների որոշման համար մենք ստացանք դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմ։

Մտցնելով b իրական փոփոխականից կախված $w=u+iv$ կոմպլեքս ֆունկցիան, հեշտ է հարցը հանգեցնել մեկ հավասարման (անջատվող փոփոխականով)։ Այսպես, եթե (20) հավասարումներից երկրորդը բազմապատկենք i-ով և անդամ առ անդամ գումարենք առաջինին, ապա կստանանք հետևյալ հավասարումը՝

$$\frac{dw}{db} = \frac{-b+ai}{2(a^2+b^2)} w = \frac{i}{2} \cdot \frac{w}{a-bi},$$

որը կարելի է սովորական եղանակով ինտեգրել. փոփոխականներն անջատելով։ Որպեսզի խուսափենք կոմպլեքս թվերի լոգարիթմներ օգտագործելուց, կարելի է և անմիջականորեն համոզվել, որ

$$\frac{d}{db}(w \cdot \sqrt{a-bi}) = 0$$

դիֆերենցիալ հավասարման շնորհիվ, որտեղից՝

$$w \cdot \sqrt{a-bi} = c = \text{const}。$$

Ընդունելով $b=0$, հեշտ է գտնել $c = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, այնպես որ՝

$$w = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a-bi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\sqrt{a+bi}}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

($\sqrt{a+bi}$ սիմվոլի տակ հասկանում ենք արմատների այն ճյուղերը, որոնք $b=0$ դեպքում դառնում են $+\sqrt{a}$ թվաբանական արմատ։

Հայտնի է, որ՝

$$\sqrt{a+bi}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,{}^{*}.$$

այսպիսով՝

$$w=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}}+i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}}\right).$$

Առանձին-առանձին հավասարեցնելով իրական և կեղծ մասերը, կստանանք վերջապես՝

$$u=\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx^2\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}},$$

$$v=\int_0^\infty e^{-ax^2}\sin bx^2\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}}.$$

Այս բանաձևերը մենք արտածեցինք էական ենթադրություն անելով, որ $a>0$։ Սակայն, քանի որ երկու ինտեգրալներն էլ, ինչպես հեշտ է համոզվել II թեորեմայի օգնությամբ [տես նաև 477, 4°], a-ի անընդհատ ֆունկցիաներ են նաև $a=0$ դեպքում, ապա ստացված հավասարությունների մեջ անցնելով սահմանին, երբ $a\to 0$, կգտնենք (եթե $b>0$)՝

$$\int_0^\infty \cos bx^2\,dx=\int_0^\infty \sin bx^2\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2b}},$$

այսինքն՝ Ֆրենելի ինտեգրալները [հմմտ. 484, 3°]։

9) Ցույց տանք, թե ինչպես դիֆերենցիալ հավասարման օգնությամբ հեշտությամբ կարելի է հաշվել Լապլասի ինտեգրալները [հմմտ. 484, 4°]՝

$$y=\int_0^\infty \frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx \quad \text{և} \quad z=\int_0^\infty \frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx \qquad (\alpha,\ \beta>0)։$$

Մենք արդեն տեսել ենք, որ

$$\frac{dy}{d\beta}=-z\,։$$

---

* Ընդունելով $\sqrt{a+bi}=x+yi$, կունենանք՝ $a=x^2-y^2$, $b=2xy$։ Այստեղից էլ ստացվում է՝ $x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$, $y=\pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$, ընդ որում երկու արմատներն էլ այստեղ վերցնում ենք պլյուսով, ի նկատի ունենալով հենց նոր ընդունած պայմանը և այն, որ $xy=\frac{1}{2}b>0$։

չետագա դիֆերենցումը ըստ β-ի ինտեգրալի նշանի տակ կատարել հնարավոր չէ, որովհետև այդպիսի դիֆերենցման հետևանքով կստացվեր արդեն տարամետ ինտեգրալ։

Սակայն, եթե գրած հավասարությանն անդամ առ անդամ ավելացնենք հետևյալ հավասարությունը [484,2°]*

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x}\, dx$$

ապա կստանանք՝

$$\frac{dy}{d\beta}+\frac{\pi}{2}=\alpha^2\int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x(\alpha^2+x^2)}dx\text{։}$$

Այստեղ ինտեգրալի նշանի տակ դիֆերենցումը նորից կարելի է և այդ ճանապարհով մենք կգտնենք՝

$$\frac{d^2y}{d\beta^2}=\alpha^2\int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{\alpha^2+x^2}dx,$$

այսինքն՝

$$\frac{d^2y}{d\beta^2}=\alpha^2 y\text{։}$$

Այս հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի պարզ դիֆերենցիալ հավասարում է, որի համար, «բնութագրական հավասարման» $\pm\alpha$ արմատների միջոցով, հեշտ է կազմել ընդհանուր լուծումը՝

$$y=C_1e^{\alpha\beta}+C_2e^{-\alpha\beta},$$

որտեղ C_1-ն ու C_2-ը հաստատուններ են։ Բայց β-ի բոլոր արժեքների դեպքում y-ը սահմանափակ է՝

$$|y|\leqslant\int_0^\infty \frac{dx}{\alpha^2+x^2}=\frac{\pi}{2\alpha},$$

նշանակում է C_1-ը անհրաժեշտաբար հավասար է 0-ի (որովհետև այլապես, երբ $\beta\to+\infty$, y մեծությունը կը անսահմանորեն կաճեր)։ Իսկ C_2 հաստատունը որոշելու համար կընդունենք $\beta=0$ և, ակներևաբար՝

$$C_2=\frac{\pi}{2\alpha}\text{։}$$

* Ի դեպ, հետագայի համար մեզ բոլորովին պետք չէ այդ ինտեգրալի արժեքը. բավական է միայն իմանալ, որ բոլոր $\beta>0$ դեպքում նա պահպանում է հաստատուն արժեք, իսկ դրանում հեշտ է համոզվել $t=\beta x$ պարզ տեղադրությամբ։

վերջնականապես՝

$$y=\frac{\pi}{2a}\, e^{-a\beta}\,;$$

Այստեղից, դիֆերենցումով ստացվում է նաև z-ը։

10) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները՝

$$u=\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos\frac{a^2}{x^2}\,dx, \qquad v=\int_0^{\infty} e^{-x^2}\sin\frac{a^2}{x^2}\,dx.$$

Ինտեգրալների գոյությունն ու անընդհատությունը α-ի բոլոր արժեքների դեպքում ապահովվում է e^{-x^2} մաժորանտի առկայությամբ։ Լայբնիցի կանոնով՝

$$\frac{du}{da}=-\int_0^{\infty} e^{-x^2}\sin\frac{a^2}{x^2}\cdot\frac{2a}{x^2}\,dx=-2\int_0^{\infty} e^{-\frac{a^2}{y^2}}\sin y^2\,dy.$$
$$\left(y=\frac{a}{x}\right)$$

Երկրորդ ինտեգրալը, ինչպես $y=0$ դեպքում, այնպես էլ $y=\infty$ դեպքում, հավասարաչափ զուգամետ է α-ի բոլոր արժեքների համար, նշանակում է՝ առաջին ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է, ինչպես $x=\infty$ դեպքում, այնպես էլ $x=0$ դեպքում, α-ի բոլոր արժեքների համար, որոնք բավարարում են $0<a_0\leqslant a\leqslant A<+\infty$ անհավասարություններին։ Այսպիսով, $0<a$-ի համար Լայբնիցի կանոնի կիրառումը արդարացվում է։

Հետագա դիֆերենցումը ըստ α-ի (որն արդարացվում է նման ձևով) մեզ կտա՝

$$\frac{d^2u}{da^2}=-2\int_0^{\infty} e^{-\frac{a^2}{y^2}}\sin y^2\cdot\frac{-2a}{y^2}\,dy=4\int_0^{\infty} e^{-x^2}\sin\frac{a^2}{x^2}\,dx=4v.$$

Ճիշտ այդպես էլ՝

$$\frac{d^2v}{da^2}=-4u.$$

Ընդունելով $w=u+iv$, w-ի որոշման համար կունենանք հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$\frac{d^2w}{da^2}=-4iw.$$

կազմենք «բնութագրական» հավասարումը՝ $\lambda^2+4i=0$, և նրա $\lambda=\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i$ արմատների օգնությամբ գրենք դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը՝

$$w=u+iv=$$
$$=Ae^{-\sqrt{2a}}(\cos\sqrt{2a}+i\sin\sqrt{2a})+Be^{\sqrt{2a}}(\cos\sqrt{2a}-i\sin\sqrt{2a}).$$

Քանի որ w ֆունկցիան բոլոր α-ների համար սահմանափակ է, ապա անհրաժեշտաբար B=0. բայց α=0 դեպքում պետք է $w=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, այնպես որ $A=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$: Վերջնականապես՝

$$u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha\sqrt{2}}\cos\alpha\sqrt{2},\qquad v=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha\sqrt{2}}\sin\alpha\sqrt{2}.$$

11) Ապացուցել

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}dx}{x^2+a^2}\qquad (a>0).$$

Նույնությունը։

Առաջին ինտեգրալը նշանակենք u-ով, իսկ երկրորդը՝ v-ով։ u-ի մեջ ընդունելով $x^2+a^2=y^2$, կստանանք՝

$$u=e^{a^2}\cdot\int_a^\infty e^{-y^2}dy.$$

Նոր փոփոխական մուծենք նաև v-ի մեջ, ընդունելով x=az. կստանանք՝

$$v=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-a^2z^2}dz}{z^2+1}.$$

v-ն դիֆերենցելով ըստ a-ի (Լայբնիցի կանոնով), $\frac{dv}{da}$-ն ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{dv}{da}=-\frac{2a}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^\infty e^{-a^2z^2}dz-\int_0^\infty \frac{e^{-a^2z^2}}{z^2+1}dz\right\},$$

որտեղից v-ն որոշելու համար ստացվում է գծային դիֆերենցիալ հավասարում՝

$$\frac{dv}{da}-2a\cdot v=-1.$$

Դրա երկու մասն էլ բազմապատկելով e^{-a^2} («ինտեգրող») բազմապատիկով, ստանում ենք՝

$$\frac{d}{da}[v\cdot e^{-a^2}]=-e^{-a^2}.$$

եթե այս հավասարումն ինտեգրենք ըստ a-*ի՝* 0-*ից մինչև* a, *կստանանք՝*

$$v\,e^{-a^2} = v_0 - \int_0^a e^{-t^2}\,dt,$$

որտեղ v_0-*ի տակ հասկանում ենք հետևյալ սահմանային արժեքը՝*

$$v_0 = \lim_{a \to 0} v = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dz}{z^2+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Քանի որ այդ նույն թիվը նաև $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ *ինտեգրալի արժեքն է, ապա* v-*ի համար վերջնականապես ստանում ենք՝*

$$v = e^{a^2} \cdot \int_a^x e^{-t^2}\,dt,$$

այսինքն՝ նույն արտահայտությունը, ինչ որ v-*ի համար։*

486. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՆՇԱՆԻ ՏԱԿ ԻՆՏԵԳՐՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ։ *1) Գտնել հետևյալ ինտեգրալների արժեքները՝*

$$\text{(ա)} \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx, \qquad \text{(բ)} \int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx \qquad (a, b > 0)$$

ինտեգրալի նշանի տակ ինտեգրելու միջոցով։

Լուծում։ (ա)

$$\int_0^\infty e^{-yx}\,dx = \frac{1}{y} \qquad (y > 0)$$

ինտեգրալը y-*ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է* $0 < y_0 \leq y$-*ների համար։ Այս հավասարությունն ինտեգրելով ըստ* y-*ի* a-*ից մինչև* b, *ընդ որում ձախ մասում ինտեգրումը կարելի է կատարել ինտեգրալի նշանի տակ, կստանանք [հմմտ. 458, 1)]՝*

$$\int_0^\infty dx \int_a^b e^{-yx}\,dy = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \int_a^b \frac{dy}{y} = \log \frac{b}{a}.$$

(բ) Նման ձևով, ելնելով

$$\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \qquad (y > 0)$$

ինտեգրալից, որը նույնպես y-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է $0<y_0\leq y$*-ների համար, կգտնենք՝*

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x}\int_a^b \sin yx\,dy=\int_0^{\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}=\frac{\pi}{2}\,(b-a)։$$

[*Համա.* 460, 8) (*ա*)]։

2) *Դիտարկենք 1-ին տեսակի լրիվ էլիպտիկ ինտեգրալը՝*

$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

որպես k *մոդուլի ֆունկցիա և գտնենք այդ ֆունկցիայի ինտեգրալը* [0, 1] *միջակայքում։*

Ունենք՝

$$\int_0^1 F(k)\,dk=\int_0^1 dk\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1\frac{dk}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi,$$

որը $x=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ *տեղադրությամբ բերվում է հետևյալ ինտեգրալի կրկնապատիկին՝*

$$\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\,dx=G=0,915965\ldots$$

[(G-*ն՝ «Կատալանի հաստատունն» է, տես* 315, 6) *և* 412, 5) *ա*)]։

Ինտեգրալների տեղափոխությունը կատարվում է V *թեորեմայի (ձևափոխված) հետևանքի հիման վրա։ Ընդինտեգրալ ֆունկցիան* $[0,\frac{\pi}{2};\,0,1]$ *ուղղանկյունում ամենուրեք դրական ու անընդհատ է բացառությամբ* $\left(\frac{\pi}{2},\,1\right)$ *կետի, որտեղ նա դառնում է* ∞։

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

ինտեգրալը k-ի անընդհատ ֆունկցիա է 1 > k-ի արժեքների համար, իսկ

$$\int_0^1 \frac{dk}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

ինտեգրալը՝ φ-ի անընդհատ ֆունկցիա է $\frac{\pi}{2} > \varphi$-ի արժեքների համար։

Վերջապես, հաջորդական ինտեգրալներից երկրորդն, ակնհայտ, գոյություն ունի։ Այսպիսով, նշված հետևանքի բոլոր պայմանները կատարվում են։

Մոտակա մի քանի օրինակների մեջ մենք նորից պիտի գործ ունենանք Բեսսելի զրո նշանիկ ունեցող

$$J_0(x) = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\theta)\, d\theta$$

ֆունկցիայի հետ, որն արդեն ծանոթ է մեզ [412, 10); 413, 3)], սակայն մեր դատողությունների հիմքում դնելու ենք $J_0(x)$-ի ասիմպտոտական բանաձևը, որը մենք կընդունենք առանց ապացուցման։ Ահա այդ բանաձևը՝

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\varphi_0(x)}{x^{3/2}}, \tag{21}$$

որտեղ $\varphi_0(x)$-ը, երբ x-ն անսահմանորեն աճում է, մնում է սահմանափակ՝

$$|\varphi_0(x)| \le L.$$

3) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$A = \int_0^\infty e^{-ax} \cdot J_0(x)\, dx \qquad (a > 0).$$

Ունենք՝

$$A = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-ax}\, dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty e^{-ax}\cos(x\sin\theta)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a}{a^2+\sin^2\theta}\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}};$$

Ինտեգրալների տեղափոխությունը թույլատրելի է, որովհետև

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos(x \sin\theta)\, dx$$

ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է θ-ի նկատմամբ (մաժորանտն է՝ e^{-ax})։

Քանի որ (21)-ից երևում է, որ

$$\int_0^\infty J_0(x)\, dx$$

ինտեգրալը զուգամետ է*, ապա A ինտեգրալը a-ի անընդհատ ֆունկցիա կլինի նաև a=0 դեպքում [II Թեորեմ, 477, 4]։ Այդ պատճառով, այդ ինտեգրալի արժեքը կարելի է ստանալ A-ի արտահայտությունից՝ սահմանային անցումով $a \to 0$ դեպքում։ Այսպիսով՝

$$\int_0^\infty J_0(x)\, dx = 1։$$

4) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$B = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} \cdot J_0(x)\, dx \qquad (a>0)։$$

Ունենք՝

$$B = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\, dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin\theta)\, d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} \cdot \cos(x\sin\theta)\, dx։$$

Բայց ներքին ինտեգրալը Դիրիխլեի «խզվող բազմապատկիչն» է [460, 9)]՝

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} \cos(x\sin\theta)\, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{եթե } \sin\theta < a, \\ 0, & \text{եթե } \sin\theta > a։ \end{cases}$$

Ուստի՝

$$B = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} \cdot J_0(x)\, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{երբ } a > 1, \\ \arcsin a, & \text{երբ } a < 1։ \end{cases}$$

---

* Այդ ինքնին կերևա, եթե (21)-ում առաջին գումարելին գրենք այսպես՝

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)։$$

Ցույց տանք, որ ինտեգրալների տեղափոխությունը թույլատրելի է։ Ունենք՝

$$\frac{2}{\pi}\int_0^A \frac{\sin ax}{x}\,dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\theta)\,d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^A \frac{\sin ax}{x}\cos(x\sin\theta)\,dx.$$

Բայց ներքին ինտեգրալը կարելի է գրել այսպես՝

$$\int_0^A \frac{\sin ax}{x}\cos(x\sin\theta)\,dx = \frac{1}{2}\left\{\int_0^A \frac{\sin(a+\sin\theta)x}{x}\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^A \frac{\sin(a-\sin\theta)x}{x}\,dx\right\} = \frac{1}{2}\left\{\int_0^{A(a+\sin\theta)}\frac{\sin z}{z}\,dz + \int_0^{A(a-\sin\theta)}\frac{\sin z}{z}\,dz\right\}. \qquad (22)$$

Եթե $a > 1$, այնպես որ $a - \sin\theta > a - 1 > 0$, ապա այդ արտահայտությունն $A \to \infty$ դեպքում իր սահմանին ձգտում է θ-ի նկատմամբ հավասարաչափ, այլ խոսքով, $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\cos(x\sin\theta)\,d\theta$ ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է, և ինտեգրալների տեղափոխումն արդարացի է։ Բայց քանի որ (22) արտահայտությունը մնում է հավասարաչափ սահմանափակ բոլոր A-երի և θ-ների դեպքում (չէ՞ որ մոտարկվում է հաստատունով), ապա արտաքին ինտեգրալը $\theta = \arcsin a$ դեպքում հավասարաչափ զուգամետ է A-ի նկատմամբ, այնպես որ $A \to \infty$ դեպքում սահմանային անցումն ինտեգրալի նշանի տակ այնուամենայնիվ թույլատրելի է, որով նորից արդարացվում է ինտեգրալների տեղափոխությունը։

5) B ինտեգրալից, ըստ a պարամետրի դիֆերենցելով, ստանում ենք մի ուրիշ հետաքրքիր ինտեգրալ՝

$$C = \int_0^\infty J_0(x)\cos ax\,dx = \begin{cases} 0, & \text{եթե } a > 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}, & \text{եթե } a < 1. \end{cases}$$

Որպեսզի հիմնավորենք ինտեգրալի նշանի տակ դիֆերենցելու իրավունքը, նկատենք, որ C ինտեգրալը a-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է a-ի արժեքների ամեն մի միջակայքում, որը չի պարունակում 1-ը։ Այդ հետևում է (21) ասիմպտոտական բանաձևից։ Այն գրելով այսպես*՝

* Տես 852 էջի ծանոթագրությունը։

$$J_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}(\cos x + \sin x) + \frac{\varphi_0(x)}{x^{3/2}},$$

երկու մասերը բազմապատկենք cos ax-ով՝

$$J_0(x)\cos ax =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos(1+a)x + \cos(1-a)x + \sin(1+a)x + \sin(1-a)x}{\sqrt{x}} +$$

$$+ \frac{\varphi_0(x)\cdot\cos ax}{x^{3/2}}.$$

Երկրորդ գումարելին մաժորվում է $\frac{L}{x^{3/2}}$ ֆունկցիայով։ Իսկ ինչ վերաբերում է առաջին գումարելիի ինտեգրալին, ապա $|1-a| \geq \delta > 0$ դեպքում նա էլ է հավասարաչափ զուգամետ։

Նույն բանաձևը ցույց է տալիս, որ $a=1$ դեպքում C ինտեգրալը տարամետ է։

6) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$D = \int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x} \cdot J_0(x)\,dx \qquad (a>0).$$

Ունենք՝

$$D = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x}\,dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x}\cos(x\sin\theta)\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\log\sqrt{|a^2-\sin^2\theta|} - \log\sin\theta\right] d\theta$$

[տես, 460, 12) (բ)]։ Այսպիսով [480, 5) և 473, 6)]՝

$$D = \int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x} \cdot J_0(x)\,dx = \begin{cases} \log(a+\sqrt{a^2-1}), & \text{եթե } a > 1, \\ 0, & \text{եթե } a < 1. \end{cases}$$

Ինտեգրալների տեղափոխումը հիմնավորելու համար նախ գրենք վերջավոր A-ի համար՝

$$\frac{2}{\pi}\int_0^A \frac{1-\cos ax}{x}\,dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\theta)\,d\theta =$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^A \frac{1-\cos ax}{x}\cos(x\sin\theta)\,dx\text{։}$$

Ամբողջ հարցն այժմ կայանում է նրանում, թե արդյոք կարելի՞ է այստեղ աջ մասում սահմանին անցնել ինտեգրալի նշանի տակ, երբ $A\to\infty$։

Որպեսզի հետազոտենք ներքին ինտեգրալի իր սահմանին ձգտելու բնույթը, դիտարկենք հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_A^{A'} \frac{1-\cos ax}{x}\cos(x\sin\theta)\,dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int_A^{A'}\frac{dx}{x}\left[2\cos(x\sin\theta)-\cos(a+\sin\theta)x-\cos|a-\sin\theta|x\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[2\int_{A\sin\theta}^{A'\sin\theta}-\int_{A(a+\sin\theta)}^{A'(a+\sin\theta)}-\int_{A|a-\sin\theta|}^{A'|a-\sin\theta|}\right]\frac{\cos z}{z}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{A\sin\theta}^{A(a+\sin\theta)}-\int_{A'\sin\theta}^{A'(a+\sin\theta)}+\int_{A\sin\theta}^{A|a-\sin\theta|}-\int_{A'\sin\theta}^{A'|a-\sin\theta|}\right]\frac{\cos z}{z}\,dz\text{։}$$

Շնորհիվ $\int_{z_0}^{\infty}\frac{\cos z}{z}\,dz$ $(z_0>0)$ ինտեգրալի գոյության, պարզ է, որ A-ն և A′-ը բավականաչափ մեծ վերցնելով, կարելի է այդ գումարը դարձնել ցանկացած չափով մեծ՝ միանգամից բոլոր θ-ների համար ամեն մի փակ միջակայքում, որը չի պարունակում ոչ 0, ոչ arcsin a (եթե $a\leqslant 1$)։ Այսպիսով, ներքին ինտեգրալի իր սահմանին ձգտելու հավասարաչափությունը $A\to\infty$ դեպքում խախտվում է θ-ի նշված արժեքներից միայն մեկի կամ երկուսի մոտակայքում։

Սակայն, մյուս կողմից, այդ ներքին ինտեգրալը մաժորվում է

$|\log\sqrt{a^2-\sin^2\theta}-\log\sin\theta|$ ֆունկցիայով, որն ինտեգրելի է $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ մի-

ջակայքում. նշանակում է՝ արտաքին ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է ինչպես $\theta=0$ դեպքում, այնպես էլ $\theta=\arcsin a$ դեպքում (եթե $a<1$)։ Այդ ժամանակ, ըստ 480-ի I' թեորեմայի համաձայն, վերոհիշյալ սահմանային անցումը վերջ ի վերջո թույլատրելի է։

7) Այստեղից, ըստ պարամետրի դիֆերենցումով, կգտնենք հետևյալ ինտեգրալը՝

$$E=\int_0^\infty J_0(x)\sin ax\,dx=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}, & \text{երբ } a>1,\\ 0\;, & \text{երբ } a<1\text{։}\end{cases}$$

Հիմնավորումը կատարվում է 5)-ինի նման, հենվելով (21) բանաձևի վրա։ $a=1$ դեպքում ինտեգրալը տարամետ է։

8) (ա) Անմիջականորեն ստուգել ինտեգրալների տեղափոխման թույլատրելիությունը, երբ՝

$$J=\int_1^\infty dy\int_1^\infty \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\text{։}$$

Ունենք՝

$$\int_1^\infty \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx=\frac{x}{x^2+y^2}\Bigg|_{x=1}^{x=\infty}=-\frac{1}{1+y^2},$$

այնպես որ՝

$$J=-\int_1^\infty \frac{dy}{1+y^2}=-\operatorname{arctg} y\Bigg|_1^\infty=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}\text{։}$$

Միևնույն ժամանակ՝

$$\tilde{J}=-\int_1^\infty dx\int_1^\infty \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy$$

հաջորդական ինտեգրալի համար նման ձևով ստացվում է $\tilde{J}=\frac{\pi}{4}$ արժեքը. տեղափոխումը անթույլատրելի է։

Հետաքրքրական է նկատել, որ [ինչպես համոզվեցինք 479, 1)-ում]

$$\int_1^\infty \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx$$

ինտեգրալը y-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է բոլոր $1\leq y$-ների համար. նման ձևով ցույց է տրվում նաև

$$\int_{1}^{\infty} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy$$

ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտությունը x-*ի նկատմամբ* $1 \leqslant x$-*երի համար։*

V *Թեորեման այստեղ կիրառելի չէ այն պատճառով, որ (ինչպես հեշտ է ստուգել անմիջականորեն) հետևյալ ինտեգրալները՝*

$$\int_{1}^{\infty} dx \int_{1}^{\infty} \frac{|y^2-x^2|}{(x^2+y^2)^2} dy, \qquad \int_{1}^{\infty} dy \int_{1}^{\infty} \frac{|y^2-x^2|}{(x^2+y^2)^2} dx$$

տարամետ են։

(բ) Հեշտ է ցույց տալ ինտեգրումների տեղափոխման անթույլատրելիությունը նաև հետևյալ ինտեգրալներում՝

$$\int_{1}^{\infty} dx \int_{0}^{1} \frac{y-x}{(x+y)^3}\, dy = -1, \qquad \int_{0}^{1} dy \int_{1}^{\infty} \frac{y-x}{(x+y)^3} dx = -\frac{1}{2}.$$

Այստեղ

$$\int_{1}^{\infty} \frac{y-x}{(x+y)^3}\, dx$$

ինտեգրալը, ինչպես այդ երևում է արդեն IV *թեորեմայից, չի կարող* y-*ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ լինել* [0, 1] *միջակայքում (որում հեշտ է համոզվել նաև անմիջականորեն)։*

(գ) Նույն տիպի մի գեղեցիկ օրինակ ևս՝

$$\int_{0}^{1} dx \int_{1}^{\infty} (pe^{-pxy} - qe^{-qxy})\, dy - \int_{1}^{\infty} dy \int_{0}^{1} (pe^{-pxy} - qe^{-qxy})\, dx =$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-px} - e^{-qx}}{x}\, dx = \log \frac{q}{p}\text{*},$$

որը հավասար չէ զրոյի, երբ $p > 0,\ q > 0,\ p \neq q$։

9) Շարադրենք երկու նոր եղանակ Լապլասի հետևյալ ինտեգրալը հաշվելու համար [*հմմտ.* 484, 4°]՝

$$J = \int_{0}^{\infty} \frac{\cos \beta x}{1+x^2}\, dx$$

[*հմմտ.* 484, 4°]։

---

* *Ֆրուլլանիի ինտեգրալը* [458, *1*)]։

Քանի որ՝

$$\frac{1}{1+x^2}=\int_0^{\infty} e^{-xy}\sin y\,dy,$$

ապա, տեղադրելով, կստանանք՝

$$J=\int_0^{\infty}\cos\beta x\,dx\int_0^{\infty} e^{-xy}\sin y\,dy.$$

ինտեգրումների կարգը փոխելով կստանանք՝

$$J=\int_0^{\infty}\sin y\,dy\int_0^{\infty} e^{-xy}\cos\beta x\,dx=\int_0^{\infty}\frac{y\sin y}{\beta^2+y^2}dy=\int_0^{\infty}\frac{x\sin\beta x}{1+x^2}\,dx.$$

Բայց վերջին ինտեգրալը, նշանի ճշգրտությամբ, իրենից ներկայացնում է $\frac{dJ}{d\beta}$-ն, այնպես որ J-ն բավարարում է այսպիսի պարզ դիֆերենցիալ հավասարման՝

$$\frac{dJ}{d\beta}=-J,$$

որտեղից՝

$$J=Ce^{-\beta}.$$

Քանի որ $\beta=0$ դեպքում $J=C=\frac{\pi}{2}$. ուստի, վերջնականապես՝

$$J=\frac{\pi}{2}e^{-\beta}.$$

Մնում է դեռևս հիմնավորել ինտեգրալների տեղափոխումը: Եթե $0<a<A<+\infty$, ապա հեշտ է համոզվել, որ իրավացի են հետևյալ հավասարությունները՝

$$\int_a^A\frac{\cos\beta x}{1+x^2}\,dx=\int_a^A\cos\beta x\,dx\int_0^{\infty}e^{-xy}\sin y\,dy=$$

$$=\int_0^{\infty}\sin y\,dy\int_a^A e^{-xy}\cos\beta x\,dx=$$

$$= \int_0^\infty \sin y\, dy \left[\frac{\beta \sin \beta A - y \cos \beta A}{y^2+\beta^2} e^{-Ay} - \frac{\beta \sin \beta a - y \cos \beta a}{y^2+\beta^2} e^{-ay} \right] =$$

$$= \beta \sin \beta A \cdot \int_0^\infty \frac{\sin y}{y^2+\beta^2} e^{-Ay} dy - \cos \beta A \cdot \int_0^\infty \frac{y \sin y}{y^2+\beta^2} e^{-Ay} dy -$$

$$- \beta \sin \beta a \cdot \int_0^\infty \frac{\sin y}{y^2+\beta^2} e^{-ay} dy + \cos \beta a \cdot \int_0^\infty \frac{y \sin y}{y^2+\beta^2} e^{-ay} dy:$$

Բոլոր ինտեգրալների հավասարաչափ զուգամիտությունը, համապատասխանաբար, a-*ի և* A-*ի նկատմամբ, թույլ է տալիս ինտեգրալի նշանի տակ անցնել սահմանին* $a \to 0$ *դեպքում և* $A \to \infty$ *դեպքում։ Այստեղից պարզ է, որ դիտարկվող արտահայտությունը նշված կրկնակի սահմանային անցման ժամանակ, իսկապես, ձգտում է* $\int_0^\infty \frac{y \sin y}{y^2+\beta^2} dy$ *սահմանին։*

10) Օգտագործելով մի այլ նույնություն՝

$$\frac{x}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-y} \sin xy\, dy,$$

կարելի է գրել՝

$$J = \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{x} dx \int_0^\infty e^{-y} \sin xy\, dy:$$

Այստեղ տեղափոխելով ինտեգրալները՝

$$J = \int_0^\infty e^{-y} dy \int_0^\infty \frac{\sin xy}{x} \cos \beta x\, dx,$$

Մենք իբրև ներքին ինտեգրալ ստանում ենք Դիրիխլեի «խզվող բազմապատկիչը» [460, 9)]՝

$$\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x} \cos \beta x\, dx = \begin{cases} 0, & \text{երբ } 0 < y < \beta, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{երբ } 0 < \beta < y: \end{cases}$$

Այսպիսով՝

$$J = \frac{\pi}{2} \int_\beta^\infty e^{-y} dy = \frac{\pi}{2} e^{-\beta}:$$

ինտեգրալների տեղափոխության հիմնավորման համար նկատենք, որ

$$\int_0^\infty e^{-y}\cdot\frac{\sin xy}{x}\cdot\cos\beta x\,dy$$

ինտեգրալը x-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է (մաժորանտն է՝ ye^{-y})։ Այդ պատճառով՝

$$\int_0^A \frac{\cos\beta x}{1+x^2}\,dx=\int_0^A \frac{\cos\beta x}{x}\,dx\int_0^\infty e^{-y}\sin xy\,dy=$$

$$=\int_0^\infty e^{-y}dy\int_0^A \frac{\sin xy}{x}\cos\beta x\,dx.$$

Կարելի՞ է արդյոք վերջին ինտեգրալի մեջ (ըստ y-ի) ինտեգրալի նշանի տակ անցնել սահմանին, երբ $A\to\infty$։ Ընդինտեգրալ արտահայտությունը e^{-y}-ի և հետևյալ արտահայտության արտադրյալն է՝

$$\int_0^A \frac{\sin xy}{x}\cos\beta x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^A \frac{\sin(y+\beta)x+\sin(y-\beta)x}{x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^{(y+\beta)A}\frac{\sin z}{z}\,dz+\int_0^{(y-\beta)A}\frac{\sin z}{z}\,dz\right\}$$

և $A\to\infty$ դեպքում ձգտում է սահմանին՝ հավասարաչափ y-ի նկատմամբ, բացառությամբ $y=\beta$ կետի շրջակայքը։ Քանի որ երկրորդ բազմապատկիչը հավասարաչափ սահմանափակ է բոլոր A-երի ու y-ների դեպքում, ապա ընդինտեգրալ արտահայտությունն ունի Ce^{-y} տեսքի մաժորանտ, այնպես որ $y=\beta$ դեպքում և $y=\infty$ դեպքում (արտաքին) ինտեգրալը A-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է։ Դրանով էլ արդարացվում է ինտեգրալի նշանի տակ սահմանային անցումը, իսկ նրա հետ նաև ինտեգրալների տեղափոխումը։

11) Վերջում նշենք հետևյալ ինտեգրալի համար բանաձևի արտածման մի գեղեցիկ եղանակ ևս՝

$$K=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Քանի որ՝

$$\frac{1}{x}=\int_0^\infty e^{-xy}\,dy,$$

ապա՝

$$K=\int_0^\infty \sin x\,dx\int_0^\infty e^{-xy}\,dy=\int_0^\infty dy\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx=\int_0^\infty\frac{dy}{1+y^2}=\frac{\pi}{2}.$$

Չզբաղվենք ինտեգրալների տեղափոխման օրինականության հարցով։ Վերցնելով $0<a<A<+\infty$, հեշտ է արդարացնել հետևյալ հավասարությունները՝

$$\int_a^A\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_a^A\sin x\,dx\int_0^\infty e^{-xy}\,dy=\int_0^\infty dy\int_a^A e^{-xy}\sin x\,dx=$$

$$=\int_0^\infty dy\left\{\frac{y\sin a+\cos a}{1+y^2}e^{-ay}-\frac{y\sin A+\cos A}{1+y^2}e^{-Ay}\right\}=$$

$$=\sin a\cdot\int_0^\infty\frac{y}{1+y^2}e^{-ay}\,dy+\cos a\cdot\int_0^\infty\frac{1}{1+y^2}e^{-ay}\,dy-$$

$$-\sin A\cdot\int_0^\infty\frac{y}{1+y^2}e^{-Ay}\,dy-\cos A\cdot\int_0^\infty\frac{1}{1+y^2}e^{-Ay}\,dy։$$

Քանի որ վերջին երկու ինտեգրալները A-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ են ($0<A_0\leq A$-երի համար), ապա, ինտեգրալի նշանի տակ անցնելով սահմանին, երբ $A\to\infty$, տեսնում ենք, որ նրանք երկուսն էլ ձգտում են 0-ի։ Երկրորդ ինտեգրալը, որը հավասարաչափ զուգամետ է a-ի նկատմամբ ($0\leq a$-երի համար), ակներևաբար, ձգտում է $\frac{\pi}{2}$-ի երբ $a\to 0$։ Մնում է համոզվել, որ առաջին ինտեգրալը, բազմապատկած $\sin a$-ով, այդ սահմանային անցման ժամանակ ձգտում է 0-ի։ Ունենք՝

$$\int_0^\infty\frac{y}{1+y^2}e^{-ay}\,dy=\int_0^\infty\frac{t}{a^2+t^2}e^{-t}\,dt=\int_0^1+\int_1^\infty,$$

$$\int_0^1<\int_0^1\frac{t\,dt}{a^2+t^2}=\frac{1}{2}\log(1+a^2)-\log a,\qquad\int_1^\infty<\int_1^\infty\frac{dt}{te^t}=C.$$

Այստեղից էլ բխում է պահանջվող եզրակացությունը։

§ 4. ԼՐԱՑՈՒՄՆԵՐ

487. ԱՐՑԵԼԱՅԻ ԼԵՄՄԱՆ։ Չնայած հաշվային նպատակների համար ամենից հաճախ բավարար է այն մասնավորը, որը շարադրված է առաջին երեք պարագրաֆներում, սակայն տեսական կառուցումների ժամանակ երբեմն հարկավոր են լինում ավելի նուրբ թեորեմներ, որոնք, ի դեպ ասած, տալիս են ավելի պարզ պայմաններ դիտարկված պրոցեսների կիրառելիության համար։

Սկսենք միջակայքերի սիստեմներին վերաբերող մի օժանդակ առաջադրությունից. այն պատկանում է Ա ր ց ե լ ա յ ի ն (C. Arzelà)։

ԼԵՄՄԱ։ Դիցուք $[a, b]$ վերջավոր միջակայքում գտնվում են միջակայքերի $D_1, D_2, \ldots, D_k, \ldots$ սիստեմներ, որոնցից յուրաքանչյուրը կազմված է վ ե ր ջ ա վ ո ր թվով չվերադրվող փակ միջակայքերից։ Եթե յուրաքանչյուր D_k $(k=1, 2, 3, \ldots)$ սիստեմի միջակայքերի երկարությունների գումարը մեծ է մի որոշ δ դրական հաստատուն թվից, ապա կգտնվի առնվազն մեկ $x = c$ կետ, որը պատկանի ա ն վ ե ր ջ բազմությամբ D_k սիստեմների։

Ա պ ա ց ո ւ յ ց։ Եթե մի որևէ D_k $(k>1)$ *սիստեմի միջակայքը վերադրվում է ն ա խ ո ր դ ո ղ՝* $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}$ *սիստեմների միջակայքերի վրա և նրանց ծայրերով տրոհվում է մասերի, ապա այդ մասերը մենք այսուհետև դիտելու ենք որպես* D_k *սիստեմի առանձին միջակայքեր։ Այսպիսով, եթե* d'*-ը՝* $D_{k'}$ *սիստեմի միջակայք է, իսկ* d''*-ը՝* $D_{k''}$ *սիստեմի միջակայք, և եթե* $k'<k''$*, ապա* d'*-ն ու* d''*-ը իրար վրա չեն վերադրվում, և կամ* d''*-ը գտնվում է* d'*-ի մեջ։*

Սակայն, D_{k+1} *սիստեմն ամբողջովին կարող է և չպարունակվել նախորդ՝* D_k *սիստեմում։ Քանի որ այդ հանգամանքն անհարմար է, ուստի մենք* D_k *սիստեմները կփոխարինենք միջակայքերի մի ուրիշ՝* Δ_k *սիստեմներով, հետևյալ կանոնով։* Δ_k*-ն ստանալու համար հիմք ընդունում ենք* D_k*-ն, նրան միացնում ենք* D_{k+1} *սիստեմի այն միջակայքերը, որոնք չեն մտնում* D_k*-ի մեջ, այնուհետև՝* D_{k+2} *սիստեմի այն միջակայքերը, որոնք չեն մտնում* D_k*-ի կամ* D_{k+1}*-ի մեջ, և այլն մինչև անվերջություն։ Այսպես կազմված* Δ_k *սիստեմը կարող է արդեն բաղկացած լինել անվերջ բազմությամբ միջակայքերից։ Սակայն դրա փոխարեն՝* 1) Δ_{k+1} սիստեմի յուրաքանչյուր միջակայք ամբողջապես մտնում է Δ_k սիստեմի միջակայքերից մեկի մեջ, 2) Δ_k սիստեմը կազմող միջակայքերի երկարությունների գումարը (կամ ավելի ճշգրիտ՝ երկարությունների շ ա ր ք ի գումարը) առավել ևս մեծ է δ-ից, *ինչպես տեղի ուներ* D_k *սիստեմի համար։*

Հաջորդ քայլը կկայանա նրանում, որ մենք նաև այս Δ_k *սիստեմները կփոխարինենք իրենց* $\Delta^{(k)}$ *վ ե ր ջ ա վ ո ր մասերով, սակայն պահպանելով այդ ժամանակ* Δ_k *սիստեմների հենց նոր նշված հատկություններից առաջինը։ Այդ անում ենք այսպես.*

Եթե Δ_1 սիստեմի միջակայքերի թիվը վերջավոր է, ապա ուղղակի կընդունենք $\Delta' = \Delta_1$։ Հակառակ դեպքում, մենք Δ_1 սիստեմից առանձնացնում ենք $d'_1, d'_2, \ldots, d'_r$ միջակայքերի մի Δ' վերջավոր սիստեմ այնպես, որ Δ_1 սիստեմի մնացած՝ $d'_{r+1}, d'_{r+2}, \ldots$ միջակայքերի երկարությունների գումարը փոքր լինի δ-ից*։ Δ_2 սիստեմի միջակայքերից կան այնպիսիները, որոնք մտնում են Δ'-ի միջակայքերի մեջ, որովհետև, եթե նրանք բոլորը մտնեին $d'_{r+1}, d'_{r+2}, \ldots$ միջակայքերի մեջ, ապա նրանց երկարությունների գումարը δ-ից փոքր կլիներ, հակառակ Δ_κ սիստեմների երկրորդ հատկության։ Եթե Δ_2 սիստեմի այդպիսի միջակայքերի թիվը, որոնք մտնում են Δ'-ի մեջ, վերջավոր է, ապա հենց դրանցից էլ կազմում ենք Δ'' սիստեմը։ Հակառակ դեպքում, մենք նրանցից առանձնացնում ենք մի Δ'' վերջավոր սիստեմ այնպես, որ Δ_2-ի մնացած բոլոր միջակայքերի (նրանցից այնպիսիների հետ միասին, որոնք չեն մտնում Δ'-ի մեջ) երկարությունների գումարը փոքր լինի δ-ից։ Այդ պրոցեսը շարունակում ենք մինչև անվերջություն, հաջորդաբար առանձնացնելով Δ_3-ից՝ Δ''' վերջավոր սիստեմ, ..., Δ_κ-ից՝ $\Delta^{(\kappa)}$ վերջավոր սիստեմ, ...։ Այդ ժամանակ $\Delta^{(\kappa+1)}$ սիստեմի միջակայքերից յուրաքանչյուրը մտնում է $\Delta^{(\kappa)}$ սիստեմի միջակայքերից մեկի մեջ։ (Δ_κ սիստեմների երկրորդ հատկությունը, ընդհանրապես ասած, կորչում է, բայց դրա գնով մենք վերականգնեցինք սիստեմների վերջավոր լինելը, ինչպես D_κ սիստեմների դեպքում էր)։

Վերջապես, վերջին քայլը կայանում է նրանում, որ $\Delta^{(\kappa)}$ սիստեմներից առանձնացնում ենք մեկական $d^{(\kappa)}$ միջակայքեր այնպես, որ նրանցից յուրաքանչյուրը պարունակվի նախորդի մեջ։

Այսպես, Δ' սիստեմի միջակայքերի թվում կգտնվի գոնե մեկը (նշանակենք այն d'-ով), որի մեջ կգտնվեն միջակայքեր՝ անվերջ բազմությամբ հաջորդ սիստեմներից։ Իրոք. ենթադրենք, թե այդպես չէ և Δ'-ի յուրաքանչյուր միջակայքում պարունակվում են միջակայքեր միայն վերջավոր թվով հաջորդ սիստեմներից. այդ ժամանակ այդպես կլիներ նաև ամբողջ Δ' սիստեմի համար՝ ամբողջությամբ վերցրած (հենց այն պատճառով, որ նա բաղկացած է վերջավոր թվով միջակայքերից)։ Այլ խոսքով, կարելի կլիներ գտնել այնքան մեծ k_0 համար, որ $\Delta^{(\kappa_0)}$ սիստեմի ոչ մի միջակայք չէր պարունակվի Δ'-ի մեջ, իսկ այդ կհակասեր $\Delta^{(\kappa)}$ սիստեմների նշված հատկությանը։

d'-ի մեջ պարունակվում է Δ'' սիստեմի որոշ միջակայքեր (որովհետև, հակառակ դեպքում, նրա մեջ չէին լինի միջակայքեր Δ'''-ից և հաջորդներից)։ Ավելին, Δ'' սիստեմի այն միջակայքերից, որոնք գտնվում են d'-ի մեջ, գոնե մեկը (նշանակենք այն d''-ով) պետք է ունենա d' միջակայքի վերևում նշված հատկությունը, այսինքն՝ պետք է պարունակի միջակայքեր անվերջ բազմությամբ հաջորդ սիստեմներից, որովհետև այլապես այդ հատ-

---

* Այդ կարելի է անել շնորհիվ զուգամետ շարքի մնացորդի հատկության։

կությունը չէր ունենա նաև d' միջակայքը (այստեղ նորից դեր է խաղում Δ'' սիստեմի վերջավոր լինելը)։ Այդ պրոցեսը շարունակելով մինչև անվերջություն, մենք հաջորդաբար յուրաքանչյուր $\Delta^{(k)}$ սիստեմից կառանձնացնենք մի $d^{(k)}$ միջակայք, որը կգտնվի նախապես առանձնացված $d^{(k-1)}$ միջակայքում։

Ստանալով իրար մեջ ներդրված $d^{(k)}=[a_k, b_k]$ $(k=1, 2, 3, \dots)$ միջակայքերի հաջորդականություն, մենք, ինչպես և հայտնի տարրական լեմման ապացուցելիս [38], կհաստատենք, որ a_k և b_k մոնոտոն փոփոխականների համար գոյություն ունեն սահմաններ՝

$$\lim a_k=\alpha \leqslant \beta \leqslant \lim b_k.$$

Քանի որ $d^{(k)}$ միջակայքերի երկարությունների մասին մենք ոչինչ չգիտենք, ուստի այստեղ ոչինչ չենք կարող պնդել այդ սահմանների հավասարության մասին։ Սակայն ամեն մի c կետ, որի համար տեղի ունի $\alpha \leqslant c \leqslant \beta$ պայմանը, պատկանում է, ակներևաբար, բոլոր $d^{(k)}$ $(k=1, 2, 3, \dots)$ միջակայքերին։ Դրանով c կետը պատկանում է յուրաքանչյուր Δ_k $(k=1, 2, 3, \dots)$ սիստեմի. նշանակում է, ինչպիսին էլ լինի k թիվը, c կետն անհրաժեշտաբար պատկանում է (եթե հաշվի առնենք Δ_k սիստեմների կազմելու կանոնը) նաև մի որոշ $D_{k'}$ սիստեմի, որտեղ $K' \geqslant K$։ Այստեղից արդեն պարզ է, որ c կետը պատկանում է անվերջ քանակությամբ D_k սիստեմների, որը և պահանջվում էր ապացուցել։

488. ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ԱՆՑՈՒՄ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՆՇԱՆԻ ՏԱԿ։ Այժմ, n° 408-ի 5*-րդ թեորեմայի փոխարեն, մենք ապացուցենք հետևյալ թեորեման, որտեղ $f_n(x)$ ֆունկցիայի իր սահմանին *հավասարաչափ* ձգտելու վերաբերյալ պահանջը փոխարինված է նրա սահմանափակ լինելու ավելի ընդհանուր պահանջով։

1 ԹԵՈՐԵՄԱ (*ԱՐՑԵԼԱՅԻ*)։ Դիցուք տրված է

$$f_n(x) \qquad (n=1, 2, 3, \dots)$$

ֆունկցիաների հաջորդականությունը, որոնք ինտեգրելի են (իսկական իմաստով) $[a, b]$ միջակայքում և *խմբովին* սահմանափակ են՝

$$|f_n(x)| \leqslant L \qquad (L=\text{const.},\ a \leqslant x \leqslant b,\ n=1, 2, 3, \dots).$$

Եթե $[a, b]$ միջակայքի բոլոր x-երի համար գոյություն ունի

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\varphi(x)$$

սահման և $\varphi(x)$ ֆունկցիան նույնպես ինտեգրելի է, ապա՝

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Ապացույց։ Սկզբում սահմանափակվենք մասնավոր ենթադրությամբ, որ $f_n(x)$ ֆունկցիաները ոչ բացասական են՝

$$f_n(x) \geqslant 0$$

և ունեն զրո սահման՝

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 \text{։} \tag{1}$$

Այս ենթադրությամբ մեզ հարկավոր կլինի ապացուցել, որ՝

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b i_n(x)\,dx = 0 \text{։} \tag{2}$$

Վերցնելով զրոյական թվերի $\eta_n \to 0$ հաջորդականություն, մենք յուրաքանչյուր n-ի համար կարող ենք $[a, b]$ միջակայքը վերլուծել $d_i^{(n)}$ $(i=1, 2, \ldots, h_n)$ մասերի այնպես, որպեսզի Դարբուի համապատասխան ստորին գումարը՝

$$s_n = \sum_{i=1}^{h_n} m_i^{(n)} d_i^{(n)} \,{}^{*}$$

բավարարի հետևյալ անհավասարությանը՝

$$0 \leqslant \int_a^b f_n(x)\,dx - s_n < \eta_n \text{։}$$

Այդ ժամանակ, ակներևաբար՝

$$\lim_{n \to \infty} \left[\int_a^b f_n(x)\,dx - s_n \right] = 0,$$

և (2)-ն ապացուցելու համար մեզ բավական է ցույց տալ, որ

$$\lim_{n \to \infty} s_n = 0 \text{։} \tag{3}$$

Այդ նպատակով, վերցնելով կամայապես փոքր $\varepsilon > 0$ և $\delta > 0$ թվերը, ցույց տանք, որ կգտնվի այնպիսի N համար, որ $N < n$-երի դեպքում n-րդ տրոհման $d_i^{(n)}$ միջակայքերից նրանց երկարությունների գումարը, որոնց համապատասխանում են $\varepsilon \leqslant m_i^{(n)}$ ստորին եզրեր, կլինի $< \delta$։

Իսկապես, ենթադրենք, թե այդ այդպես չէ։ Այդ դեպքում, n-ի անվերջ բազմությամբ՝

$$n = n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$$

արժեքների համար այն $d_i^{(n_k)}$ միջակայքերի երկարությունների գումարը,

---

* Մենք $d_i^{(n)}$-ով նշանակում ենք և՛ մասնակի միջակայքն ինքը, և նրա երկարությունը. $m_i^{(n)}$-ը՝ $\inf f(x)$-ն է $d_i^{(m)}$ միջակայքում։

որոնց համար $m_i^{(n_k)} \geqslant \varepsilon$, կլինեն $> \delta$: Այդ միջակայքերից կազմած D_k սիստեմների նկատմամբ կիրառելի է նախընթաց n°-ի լեմման: Նրա համաձայն, [a, b] միջակայքում կգտնվեր այնպիսի c կետ, որը կպատկաներ անվերջ բազմությամբ D_k սիստեմների: Այդպիսով, անվերջ բազմությամբ n արժեքների համար տեղի կունենար

$$f_n(c) \geqslant \varepsilon$$

անհավասարությունը, որը հակասում է (1) պայմանին, որ պետք է տեղի ունենա նաև $x=c$ դեպքում:

Այսպես, ուրեմն, հիշյալ N համարը գոյություն ունի. դիցուք այժմ $n \geqslant N$: Նշանակենք i'-ով և i''-ով n-րդ տրոհման այն միջակայքերի համարները, որոնց համար, համապատասխանաբար, կլինի՝

$$m_{i'}^{(n)} < \varepsilon \text{ կամ } m_{i''}^{(n)} \geqslant \varepsilon :$$

Դրան համապատասխան գումարն էլ տրոհենք՝

$$s_n = \sum_i m_i^{(n)} d_i^{(n)} = \sum_{i'} m_{i'}^{(n)} d_{i'}^{(n)} + \sum_{i''} m_{i''}^{(n)} d_{i''}^{(n)} :$$

Այժմ հեշտ է տեսնել, որ՝

$$\sum_{i'} m_{i'}^{(n)} d_{i'}^{(n)} < \varepsilon \cdot \sum_{i'} d_{i'}^{(n)} < \varepsilon \cdot (b-a),$$

$$\sum_{i''} m_{i''}^{(n)} d_{i''}^{(n)} \leqslant L \cdot \sum_{i''} d_{i''}^{(n)} < L \cdot \delta,$$

որովհետև, իհարկե, $m_i^{(n)} \leqslant L$ (թեորեմայի պայմանի համաձայն):

Այստեղից՝

$$s_n < \varepsilon(b-a) + L \cdot \delta,$$

որը և, ի նկատի ունենալով ε և δ թվերի կամայական լինելը, ապացուցում է (3) պնդումը:

Ընդհանուր դեպքը հեշտությամբ հանգեցվում է հենց նոր ապացուցված մասնավոր դեպքին: Իսկապես, ի նկատի ունենալով հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b \left| f_n(x) - \varphi(x) \right| dx,$$

բավական է ապացուցածը կիրառել $|f_n(x) - \varphi(x)|$ ոչ-բացասական ֆունկցիայի նկատմամբ, որը ձգտում է զրոյի:

ՀԵՏԵՎԱՆՔ: Եթե տեղի ունեն թեորեմայի բոլոր պայմանները, բացի սահմանային ֆունկցիայի ինտեգրելիության վերաբերյալ ենթադրությունից, համենայն դեպս կարելի է պնդել, որ գոյություն ունի՝

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

վերջավոր սահմանը:

Ապացուցման համար բավական է ցույց տալ, որ ամեն մի $\varepsilon>0$ համար կգտնվի այնպիսի N *համար, որ* $N\leqslant n'<n''$ *դեպքում կլինի՝*

$$\left|\int_a^b f_{n''}(x)\,dx-\int_a^b f_{n'}(x)\,dx\right|=\left|\int_a^b\left[f_{n''}(x)-f_{n'}(x)\right]dx\right|<\varepsilon:$$

Ենթադրենք հակառակը: Այդ ժամանակ գոյություն կունենար այնպիսի $\varepsilon_0>0$ *թիվ և անսահմանորեն աճող* n'_m *ու* n''_m $(m=1,2,3,\cdots,$ $n''_m>n'_m)$ *թվերի այնպիսի երկու հաջորդականություններ, որ միշտ տեղի կունենար՝*

$$\left|\int_a^b\left[f_{n''_m}(x)-f_{n'_m}(x)\right]dx\right|\geqslant\varepsilon_0: \tag{4}$$

Մյուս կողմից՝

$$\left|f_{n''_m}(x)-f_{n'_m}(x)\right|\leqslant 2L \text{ և } \lim_{m\to\infty}\left[f_{n''_m}(x)-f_{n'_m}(x)\right]=0:$$

Եթե

$$f^*_m(x)=f_{n''_m}(x)-f_{n'_m}(x)$$

ֆունկցիայի նկատմամբ կիրառենք նախորդ թեորեմը, կստանանք՝

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b f^*_m(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left[f_{n''_m}(x)-f_{n'_m}(x)\right]dx=0,$$

որը հակասում է (4) անհավասարությանը: Հենց այս հակասությունն էլ ապացուցում է մեր պնդումը:

Միայն բնական արժեքներ ստացող n *պարամետրերից հեշտ է անցնել կամայական* y *պարամետրերին [համմ. n° 468-ի I թեորեմայի հետ]՝*

2. **ԹԵՈՐԵՄԱ:** Դիցուք $f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է x-ի արժեքների համար [a, b] միջակայքում և y-ի արժեքների համար *Y* տիրույթում, ըստ x-ի ինտեգրելի է [a, b]-ում (հաստատուն y-ի դեպքում) և x-ի ու y-ի վերոհիշյալ արժեքների համար համասարաչափ սահմանափակ է՝

$$|f(x,y)|\leqslant L \qquad (L=\text{const}):$$

Եթե բոլոր x-երի համար գոյություն ունի*

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x)$$

սահմանային ֆունկցիա, որը նույնպես ինտեգրելի է [a, b]-ում, ապա՝

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx. \qquad (5)$$

Բավական է I թեորեման կիրառել $f_n(x) = f(x, y_n)$ ֆունկցիայի նկատմամբ, որտեղ $\{y_n\}$-ը՝ Y-ից վերցրած y-ի արժեքների կամայական հաջորդականություն է, որը ձգտում է y_0-ին: Այսպիսի ճանապարհով ստացվող հետևյալ առնչությունը՝

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x, y_n)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx$$

համարժեք է (5)-ին:

489. ԴԻՖԵՐԵՆՑՈՒՄ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՆՇԱՆԻ ՏԱԿ: *Արցելայի թեորեմայի հիման վրա հեշտությամբ ստացվում է նաև հետևյալ արդյունքը, որպես n° 469-ի III թեորեմայի անալոգ և ընդհանրացում:*

III ԹԵՈՐԵՄԱ: Դիցուք [a, b; c, ∂] ուղղանկյունում որոշված f(x, y) ֆունկցիան ըստ x-ի ինտեգրելի է [a, b] միջակայքում՝ ամեն մի հաստատուն y-ի դեպքում [c, ∂] միջակայքից: Ենթադրենք, այնուհետև որ ամբողջ տիրույթում գոյություն ունի $f'_y(x, y)$ մասնակի ածանցյալ, որը նույնպես ինտեգրելի է ըստ x-ի: Եթե այդ ածանցյալը, որպես երկու փոփոխականի ֆունկցիա, սահմանափակ է՝

$$|f'_y(x, y)| \leq L \qquad (L = \text{const.}, \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq \partial),$$

ապա [c, ∂]-ին պատկանող ամեն մի y-ի դեպքում

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

ֆունկցիայի համար տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)\, dx.$$

Ապացույց: Վերցնելով որևէ $y = y_0$ արժեք, ինչպես և n° 469-ում ապացուցելիս [տես (11)], կունենանք՝

** Ենթադրվում է, իհարկե, որ Y տիրույթը թույլ է տալիս սահմանային անցում $y \to y_0$ դեպքում:*

$$\frac{I(y_0+k)-I(y_0)}{k}=\int_a^b \frac{f(x, y_0+k)-f(x, y_0)}{k}\,dx.$$

Քանի որ, Լագրանժի թեորեմայի համաձայն՝

$$\frac{f(x, y_0+k)-f(x, y_0)}{k}=f_y'(x, y_0+\theta k),$$

ապա ընդինտեգրալ ֆունկցիան, որը կախված է x-ից ու k-ից, այդ փոփոխականների բոլոր արժեքների դեպքում սահմանափակ կլինի (ըստ բացարձակ մեծության) L հաստատունով։ Այս դեպքի նկատմամբ կիրառելով II թեորեման, մենք կարող ենք ինտեգրալի նշանի տակ անցնել սահմանին երբ $k \to 0$, որը և մեզ կտա պահանջվող արդյունքը։

490. ԻՆՏԵԳՐՈՒՄ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՆՇԱՆԻ ՏԱԿ։ Այս ուղղությամբ տեղի ունի հետևյալ առաջադրությունը, որը նշանակալից չափով ընդհանրացնում է n° 470-ի IV թեորեման.

IV ԹԵՈՐԵՄԱ։ Դիցուք $[a, b, c, \partial]$ ուղղանկյունում որոշված $f(x, y)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է ըստ x-ի $[a, b]$-ում (հաստատուն y-ի դեպքում) և ըստ y-ի՝ $[c, \partial]$-ում (հաստատուն x-ի դեպքում)։ Եթե, բացի դրանից, $f(x, y)$ ֆունկցիան x-ի ու y-ի վերոհիշյալ բոլոր արժեքների համար սահմանափակ է՝

$$|f(x, y)| \leqslant L \qquad (L=\text{const.}),$$

ապա

$$\int_c^\partial dy \int_a^b f(x, y)\,dx \quad \text{և} \quad \int_a^b dx \int_c^\partial f(x, y)\,dy$$

երկու հաջորդական ինտեգրալներն էլ գոյություն ունեն և իրար հավասար են։

Ապացույց։ Նշանակենք՝

$$I(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx, \quad K(x)=\int_c^\partial f(x, y)\,dy.$$

Դիտարկենք $[c, \partial]$ միջակայքի մասերի տրոհումների մի կամայական հաջորդականություն, որտեղ միջակայքի մասերի երկարություններն են՝

$$\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \ldots, \delta_{h_n}^{(n)} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

և ենթարկվում են միայն մեկ պայմանի՝ n-ը աճելիս $\max\{\delta_i^{(n)}\}$-ը ձգտում է զրոյի։ n-րդ տրոհման յուրաքանչյուր i-րդ մասում $(i=1, 2, \ldots, h_n)$ կամայապես վերցնենք $y=y_i^{(n)}$ արժեք և կազմենք ինտեգրալային գումար $I(y)$ ֆունկցիայի համար՝

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{h_n} I(y_i^{(n)})\cdot\delta_i^{(n)}=\sum_{i=1}^{h_n}\left\{\int_a^b f(x,\ y_i^{(n)})\,dx\right\}\cdot\delta_i^{(n)}=$$

$$=\int_a^b\left\{\sum_{i=1}^{h_n} f(x,\ y_i^{(n)})\cdot\delta_i^{(n)}\right\}dx.$$

Եթե ընդունենք՝

$$\sum_{i=1}^{h_n} f(x,\ y_i^{(n)})\cdot\delta_i^{(n)}=f_n^*(x),$$

ապա σ_n-ը կարտագրվի այսպես՝

$$\sigma_n=\int_a^b f_n^*(x)\,dx.$$

Քանի որ, ակներևաբար, գոյություն ունի

$$\lim_{n\to\infty} f_n^*(x)=\int_c^{\partial} f(x,\ y)\,dy=K(x) \qquad (6)$$

սահմանը և այն էլ x-ի ու n-ի բոլոր արժեքների համար

$$|f_n^*(x)|\leqslant L\cdot(\partial-c),$$

ապա, ըստ n° 488-ի հետևանքի, եզրակացնում ենք, որ գոյություն ունի

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n$$

սահմանը։

Այսպես, ուրեմն, այդ սահմանը գոյություն ունի, ինչպես էլ միջակայքը մասերի տրոհենք (միայն թե նրանց երկարությունների մեծագույնը ձգտի զրոյի) և ինչպես էլ ընտրենք նրանց մեջ $y_i^{(n)}$ արժեքները։ Այստեղից պարզ է, որ այդ սահմանը պետք է միևնույնը լինի բոլոր դեպքերում, այսինքն, որ գոյություն ունի

$$\int_c^{\partial} I(y)\,dy=\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n^*(x)\,dx$$

ինտեգրալը։

Բայց նույն եղանակով կարելի է ապացուցել նաև $\int_a^b K(x)\,dx$ ինտեգրալի գոյությունը, այսինքն՝ $f_n^*(x)$-ի սահմանային ֆունկցիայի ինտեգրե-

լիությունը [տես (6)]։ Այդ ժամանակ, $f^*_n(x)$-ի նկատմամբ կիրառելով I թեորեմը, վերջնականապես կստանանք՝

$$\int_c^d I(y)\,dy = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f^*_n(x)\,dx = \int_a^b K(x)\,dx,$$

այսինքն՝

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy,$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Մենք այստեղ սահմանափակվեցինք իսկական ինտեգրալների դեպքով։ Եթե հիմքում դնենք նրանց համար ապացուցած թեորեմները, ապա կարելի կլիներ համապատասխան ձևով ընդհանրացնել նաև անիսկական ինտեգրալներին վերաբերող արդյունքները. դրանով, սակայն, մենք չենք զբաղվելու։

§ 5. ԷՅԼԵՐՅԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

491. ԱՌԱՋԻՆ ՏԵՍԱԿԻ ԷՅԼԵՐՅԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼ. Այդպես է կոչվում (Լ ե ժ ա ն դ ր ի առաջարկով) հետևյալ տեսքի ինտեգրալը՝

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx, \tag{1}$$

որտեղ a և $b > 0$։ Նա իրենից ներկայացնում է a և b երկու փոփոխականների ֆունկցիա B ֆունկցիա («Բետա» ֆունկցիա)։

Դիտարկվող ինտեգրալը, ինչպես արդեն գիտենք [447, 3) (ա)], a-ի ու b-ի դրական արժեքների համար (թեկուզ և փոքր մեկից) զուգամետ է* և, հետևաբար, իսկապես կարող է դրվել B ֆունկցիայի որոշման հիմքում։ Ցույց տանք նրա մի քանի հատկությունները՝

1° Ամենից առաջ, գրեթե անմիջականորեն ($x = 1 - t$ տեղադրությամբ) ստանում ենք՝

$$B(a, b) = B(b, a),$$

* Ընդհակառակը, եթե a, b պարամետրերից թեկուզ մեկի արժեքը լինի ≤ 0, ապա ինտեգրալը տարամետ կլինի։

այնպես որ B ֆունկցիան սիմետրիկ է a-ի և b-ի նկատմամբ։

Մենք հիմա B-ի համար կստանք մի ուրիշ անալիտիկ արտահայտություն, որն արտաքին տեսքով էլ չի փոխվում, երբ a-ն և b-ն տեղափոխում ենք։

Այդ նպատակով նախ տեղադրենք $x=\frac{y}{1+y}$, որտեղ y-ը նոր փոփոխական է, որը փոփոխվում է 0-ից մինչև ∞։ Մենք կստանանք հետևյալ բանաձևը՝

$$B(a, b)=\int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}dy, \tag{2}$$

որից հետագայում էլ շատ անգամ ենք օգտվելու։

Եթե $\int_0^\infty$ ինտեգրալը ներկայացնենք $\int_0^1+\int_1^\infty$ գումարի տեսքով, ապա նրանցից երկրորդը $y=\frac{1}{z}$ տեղադրությամբ կբերվի նույն [0, 1] միջակայքին՝

$$\int_1^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\,dy=\int_0^1\frac{z^{b-1}}{(1+z)^{a+b}}\,dz,$$

այնպես որ, վերջնականապես՝

$$B(a, b)=\int_0^1\frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx.$$

2° Մասերով ինտեգրման միջոցով (1) բանաձևից, երբ $b>1$, կստանանք՝

$$B(a, b)=\int_0^1 (1-x)^{b-1}\, d\,\frac{x^a}{a}=$$

$$=\frac{x^a(1-x)^{b-1}}{a}\bigg|_0^1+\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}\,dx^*=$$

---

* Մենք այստեղ օգտագործում ենք հետևյալ նույնությունը՝

$$x^a=a^{a-1}-x^{a-1}(1-x).$$

$$
=\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}dx-\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=
$$

$$
=\frac{b-1}{a}B(a,\ b-1)-\frac{b-1}{a}B(a,b),
$$

որտեղից՝

$$
B(a,\ b)=\frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1). \tag{3}
$$

Այս բանաձևը կարելի է կիրառել b-*ն փոքրացնելու նպատակով, քանի դեռ* b-*ն* 1-*ից մեծ է մնում. այսպիսով միշտ կարելի է հասնել այնպիսի դեպքի, երբ երկրորդ արգումենտը* $\leqslant 1$.

Ի միջի այլոց, նույնը կարելի է ստանալ նաև առաջին արգումենտի նկատմամբ, քանի որ, B-*ի սիմետրիկության շնորհիվ, տեղի ունի բերման մյուս բանաձևը ևս՝*

$$
B(a,\ b)=\frac{a-1}{a+b-1}\ B(a-1,\ b) \qquad (a>1).
$$

Եթե b-*ն հավասար է* n *բնական թվի, հաջորդաբար կիրառելով (3) բանաձևը, կգտնենք՝*

$$
B(a,\ n)=\frac{n-1}{a+n-1}\cdot\frac{n-2}{a+n-2}\cdots\frac{1}{a+1}B(a,\ 1).
$$

Սակայն՝

$$
B(a,\ 1)=\int_0^1 x^{a-1}dx=\frac{1}{a}.
$$

Ուստի B(a, n)-*ի համար, և միաժամանակ* B(n, a)-*ի համար, ստացվում է այսպիսի վերջնական արտահայտություն՝*

$$
B(n,\ a)=B(a,\ n)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{a\cdot(a+1)\cdot(a+2)\cdots(a+n-1)}. \tag{4}
$$

Եթե նաև a-*ն է հավասար* m *բնական թվի, ապա՝*

$$
B(m,\ n)=\frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!}.
$$

Այս բանաձևը կարելի է կիրառել նաև m=1 *կամ* n=1 *դեպքում, եթե* 0! *սիմվոլի տակ հասկանանք* 1։

3° *Տեղադրենք (2) բանաձևում* $b = 1 - a$, *համարելով* $0 < a < 1$. *կգտնենք՝*

$$B(a, b) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{1+y} dy.$$

Ընթերցողը տեսնում է վերևում արդեն հաշված ինտեգրալը, որը նույնպես կապվում է Էյլերի անվան հետ [տես 481, 4) (ա) կամ 484, 1°]։ Տեղադրելով նրա արժեքը, հանգում ենք հետևյալ բանաձևին՝

$$B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (0 < a < 1). \tag{5}$$

Եթե, մասնավորապես, վերցնենք $a = 1 - a = \frac{1}{2}$, *ապա կստանանք՝*

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.$$

Մենք կսահմանափակվենք «Բետա» ֆունկցիայի այս մի քանի հատկություններով, որովհետև, ինչպես հիմա կտեսնենք, այդ ֆունկցիան շատ պարզ բանաձևով արտահայտվում է մի այլ ֆունկցիայի՝ «Գամա» ֆունկցիայի միջոցով, որը և կլինի մեր հետազոտության գլխավոր առարկան այս պարագրաֆում։

492. ԵՐԿՐՈՐԴ ՏԵՍԱԿԻ ԷՅԼԵՐՅԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼ։ *Այդ անունը* Լ ե ժ ա ն դ ր ը *տվել է հետևյալ նշանավոր ինտեգրալին՝*

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx, \tag{6}$$

որը զուգամետ է ամեն մի $a > 0$ *դեպքում* [447, 5) (գ)]* *և որոշում է* Γ ֆունկցիան (*«Գամա» ֆունկցիան*)։ Γ *ֆունկցիան, տարրական ֆունկցիաներից հետո, հանդիսանում է կարևորագույն ֆունկցիաներից մեկը անալիզի և նրա կիրառություննե-*

* $0 \geq a$-ի դեպքում ինտեգրալը տարամետ է։

րի համար։ Γ ֆունկցիայի հատկությունների հանգամանորեն ուսումնասիրումը, ելնելով նրա (6) որոշումից ինտեգրալի միջոցով, միաժամանակ կծառայի նաև իբրև գեղեցիկ օրինակ՝ պարամետրից կախված ինտեգրալների վերևում շարադրված տեսության կիրառման։

Մենք արդեն հանդիպել ենք Γ ֆունկցիային [390, 9), 395, 413, 9)], սակայն այն որոշել ենք այլ կերպ։ Ամենից առաջ ցույց տանք երկու սահմանումների նույնությունը (իհարկե, $0<a$-ի համար)։

(6)-ում ընդունելով $x=\log\frac{1}{z}$, կգտնենք

$$\Gamma(a)=\int_0^1\left(\log\frac{1}{z}\right)^{a-1}dz\text{։}$$

Ինչպես հայտնի է [76, 5) (բ)]՝

$$\log\frac{1}{z}=\lim_{n\to\infty} n\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right),$$

ընդ որում $n(1-z)^{\frac{1}{n}}$ արտահայտությունը, n-ը աճելիս, աճելով է ձգտում իր սահմանին*։ Այդ ժամանակ, 480-ի հիման վրա, արդարացվում է հետևյալ հավասարությունը՝

$$\Gamma(a)=\lim_{n\to\infty} n^{a-1}\int_0^1\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)^{a-1}dz$$

կամ, եթե դիմենք $z=y^n$ տեղադրման,

$$\Gamma(a)=\lim_{n\to\infty} n^{a}\int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{a-1}dy\text{։}$$

Բայց, (4)-ի համաձայն՝

$$\int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{a-1}dy=B(n,a)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}{a\cdot(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)},$$

* Դրանում կարելի է համոզվել դիֆերենցիալ հաշվի մեթոդներով, $\frac{1-z^{a}}{a}$ արտահայտությունը դիտելով որպես a-ի ֆունկցիա։

Այսպիսով, վերջնականապես, հանգում ենք Էյլեր-Գաուսի նշանավոր բանաձևին՝

$$\Gamma(a)=\lim_{n\to\infty} n^a\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}, \tag{7}$$

որը վերևում մեզ համար եղման կետ էր հանդիսացել [390 (14)]։ Հետագայում Γ ֆունկցիայի հատկությունները, ինչպես ասվեց, պետք է արտածենք նրա (6) ինտեգրալային ներկայացումից։

Սկսենք B և Γ ֆունկցիաների միջև կապ հաստատելուց, որի մասին մենք արդեն հիշատակել ենք վերևում։ Այդ նպատակով (6) արտահայտությունը ձևափոխում ենք, տեղադրելով $x=ty$ $(t>0)$՝

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a}=\int_0^\infty y^{a-1}e^{-ty}\,dy^*. \tag{8}$$

Այստեղ a-*ն փոխարինելով* $a+b$-*ով և միաժամանակ* t-*ն*՝ $1+t$-*ով, կստանանք*՝

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}}=\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}\,dy.$$

Այժմ այս հավասարության երկու մասերը բազմապատկենք t^{a-1}-*ով և ինտեգրենք* 0-*ից մինչև* ∞՝

$$\Gamma(a+b)\int_0^\infty\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\,dt=\int_0^\infty t^{a-1}\,dt\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}\,dy.$$

Ձախ մասում ինտեգրալը $B(a, b)$ *ֆունկցիան է [տես (2)]. իսկ աջ մասում ինտեգրալները տեղափոխենք. կստանանք [հաշվի առնելով (8)-ը և (6)-ը]*՝

$$\Gamma(a+b)\cdot B(a, b)=\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-y}\,dy\int_0^\infty t^{a-1}e^{-ty}\,dt=$$

* *Ընթերցողի ուշադրությունը հրավիրում ենք այս պարզ բանաձևի վրա, որը հաճախ է օգտակար լինելու հետագայում։*

$$=\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-y}\cdot\frac{\Gamma(a)}{y^a}dy=\Gamma(a)\int_0^\infty y^{b-1}e^{-y}dy=\Gamma(a)\cdot\Gamma(b),$$

որտեղից վերջապես՝

$$B(a,\ b)=\frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \tag{9}$$

Էյլերի այս առնչության մեր բերած գեղեցիկ ապացույցը պատկանում է Դիրիխլեին։ Ի միջի այլոց, դրա հիմնավորման համար դեռ պետք է արդարացնել ինտեգրալների տեղափոխումը։ Ի նկատի ունենալով ընդինտեգրալ ֆունկցիայի դրական լինելը, այստեղ բավական է դիմել 483-ի V *թեորեմայի հետևանքին, նշելով, որ*

$$t^{a-1}\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy=\Gamma(a+b)\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}$$

և

$$y^{a+b-1}e^{-y}\int_0^\infty t^{a-1}e^{ty}dt=\Gamma(a)\,y^{b-1}e^{-y}$$

ինտեգրալներն իրենցից ներկայացնում են անընդհատ ֆունկցիաներ, առաջինը՝ t-*ի,* $0<t<\infty$ *համար, իսկ երկրորդը՝* y-*ի,* $0<y<\infty$ *համար։*

493. Γ ***ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՊԱՐԶԱԳՈՒՅՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ։***
1^0 Γ(a) ֆունկցիան անընդհատ է և ունի Γ′(a) անընդհատ ածանցյալ $0<a$ համար։ *Բավական է ապացուցել երկրորդ պնդումը։ Ինտեգրալի նշանի տակ դիֆերենցելով, կստանանք՝*

$$\Gamma'(a)=\int_0^\infty x^{a-1}\log x\cdot e^{-x}dx. \tag{10}$$

Քանի որ այս ինտեգրալը a-*ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է՝* $x=0$ *դեպքում* $0<a_0\leqslant a$-*երի համար (մաժորանտն է՝* $x^{a_0-1}|\log x|$) *և* $x=\infty$ *դեպքում* $+\infty>A\geqslant a$-*երի համար (մաժորանտն է՝* $x^A e^{-x}$*), ապա Լայբնիցի կանոնի կիրա-*

* $0<x$-*երի համար, ակներևաբար,* $\log x<x$։

ումը օրինական է։ Նույն հիման վրա եզրակացնում ենք նաև, որ $\Gamma'(a)$-ն անընդհատ է։

Նույն եղանակով կարելի էր համոզվել նաև հաջորդ ածանցյալների գոյության մասին։

2° *Մասերով ինտեգրելով (6)-ը, անմիջապես ստանում ենք*

$$a\int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}dx = x^a e^{-x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} x^a e^{-x}dx,$$

այսինքն [հմմտ. 390 *(15)*]՝

$$\Gamma(a+1) = a\cdot\Gamma(a). \qquad (11)$$

Այս բանաձևը մի քանի անգամ կրկնելով, ստանում ենք՝

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2)\dots(a+1)\,a\,\Gamma(a). \qquad (12)$$

Այս ճանապարհով Γ ֆունկցիայի հաշվումը ցանկացած չափով մեծ արգումենտների համար կարելի է հանգեցնել Γ-ի հաշվման՝ 1 > արգումենտի համար։

Եթե (12)-ում վերցնենք $a=1$ և ի նկատի ունենանք, որ

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x}dx = 1, \qquad (13)$$

ապա կստացվի՝

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (14)$$

Γ ֆունկցիան հանդիսանում է՝ n-ի միայն բնական արժեքների համար որոշված $n!$ ֆակտորիալի, որոշ իմաստով, ընդհանրացումը արգումենտի ցանկացած դրական արժեքների դեպքի վրա։

(11)-ից (և 1°-ից) պարզ է, որ $a\to 0$ դեպքում

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a} \to +\infty.$$

Կարելի է որոշել նաև Γ-ի անվերջ աճման կարգը՝

$$\lim_{a\to+0}\frac{\Gamma(a)}{1/a} = \lim_{a\to+0}\Gamma(a+1) = \Gamma(1) = 1. \qquad (15)$$

3° **Լրացման բանաձև**։ *Եթե (9) բանաձևում դնենք* $b=1-a$ (համարելով $0<a<1$), ապա, ի նկատի ունենալով

(5)-ը և (13)-ը, կստանանք հետևյալ առնչությունը [*համեմ.* 395 (*30*)]՝

$$\Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}, \tag{16}$$

որը և կոչվում է ***լրացման բանաձև***։

Երբ $a=\frac{1}{2}$, *այստեղից կգտնենք* (*քանի որ* $\Gamma(a)>0$)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}. \tag{17}$$

Եթե

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}dz=\sqrt{\pi}$$

ինտեգրալի մեջ կատարենք $z=x^2$ *տեղադրում, նորից կստանանք* ***Էյլեր-Պուասոնի*** *ինտեգրալի արժեքը*՝

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4° *Որպես լրացման բանաձևի կիրառում որոշենք* (*Էյլերի հետ միասին*) *հետևյալ արտադրյալի մեծությունը* (*որտեղ* n-*ը որևէ բնական թիվ է*)՝

$$E=\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Այս արտադրյալը գրելով հակառակ կարգով՝

$$E=\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right),$$

այդ երկու արտահայտությունները իրարով բազմապատկենք՝

$$E^2=\prod_{\nu=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{\nu}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-\nu}{n}\right)$$

և բազմապատկիչներից յուրաքանչյուրը $\Gamma\left(\frac{\nu}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-\nu}{n}\right)$ *զույգի*

Նկատմամբ կիրառենք լրացման բանաձևը. Կստանանք՝

$$E^2=\frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin 2\frac{\pi}{n}\cdots\sin(n-1)\frac{\pi}{n}}\,.$$

Այժմ, սինուսների արտադրյալը հաշվելու համար, դիտարկենք հետևյալ նույնությունը [*հմմտ.* 456, *2)*]՝

$$\frac{z^n-1}{z-1}=\prod_{\nu=1}^{n-1}\left(z-\cos\frac{2\nu\pi}{n}-i\sin\frac{2\nu\pi}{n}\right),$$

և նրանում $z\to1$. *Սահմանում՝*

$$n=\prod_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\cos\frac{2\nu\pi}{n}-i\sin\frac{2\nu\pi}{n}\right)$$

կամ, մոդուլները հավասարեցնելով՝

$$n=\prod_{\nu=1}^{n-1}\left|1-\cos\frac{2\nu\pi}{n}-i\sin\frac{2\nu\pi}{n}\right|=2^{n-1}\prod_{\nu=1}^{n-1}\sin\frac{\nu\pi}{n},$$

այնպես որ՝

$$\prod_{\nu=1}^{n-1}\sin\frac{\nu\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}\,.$$

Տեղադրելով E^2 *մեջ, վերջնականապես կստանանք՝*

$$E=\prod_{\nu=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{\nu}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}\,. \tag{18}$$

5° Ռաաբեի ինտեգրալը. *Լրացման բանաձևի հետ է կապված նաև հետևյալ կարևոր ինտեգրալի հաշվումը, որն, ակներևաբար, գոյություն ունի* [*տես (15)*]՝

$$R_0=\int_0^1\log\Gamma(a)\,da.$$

a-*ն փոխարինելով* 1—a-*ով, կարելի է գրել՝*

$$R_0=\int_0^1\log\Gamma(1-a)\,da$$

և, գումարելով,

$$2R_0=\int_0^1 \log \Gamma(a)\,\Gamma(1-a)\,da=\int_0^1 \log\frac{\pi}{\sin a\pi}\,da=$$

$$=\log\pi-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\log\sin x\,dx=\log\pi-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin x\,dx.$$

Այստեղ տեղադրելով մեզ արդեն հայտնի [455, *1°*] *ինտեգրալի արժեքը, կգտնենք՝*

$$R_0=\int_0^1 \log\Gamma(a)\,da=\log\sqrt{2\pi}. \tag{19}$$

Ռաաբեն դիտարկել է հետևյալ ինտեգրալը (երբ $a>0$*)՝*

$$R(a)=\int_a^{a+1}\log\Gamma(a)\,da=\int_0^{a+1}-\int_0^a.$$

Քանի որ, ակներևաբար՝

$$R'(a)=\log\Gamma(a+1)-\log\Gamma(a)=\log a$$

[*տես (11)*], *ապա, ինտեգրելով, կգտնենք* $0<a$*-ի համար՝*

$$R(a)=a(\log a-1)+C.$$

Սակայն $R(a)$*-ն անընդհատությունը պահպանում է նաև* $a=0$ *դեպքում. այստեղ անցնելով սահմանին, երբ* $a\to 0$*, համոզվում ենք, որ* $C=R_0$*. Տեղադրելով* R_0*-ի արժեքը (19)-ից, կստանանք* **Ռաաբեի բանաձևը**՝

$$R(a)=\int_a^{a+1}\log\Gamma(a)\,da=a(\log a-1)+\log\sqrt{2\pi}. \tag{20}$$

6° **Լեժանդրի բանաձևը.** *Եթե հետևյալ ինտեգրալի մեջ՝*

$$B(a,\ a)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}dx=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{a-1}dx=$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{a-1}dx.$$

տեղադրենք $\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}\sqrt{t}$, *ապա կստանանք՝*

$$B(a,\ a)=\frac{1}{2^{2a-1}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{a-1}dt=\frac{1}{2^{2a-1}}B\left(\frac{1}{2},\ a\right).$$

Երկու դեպքում էլ B ֆունկցիան փոխարինելով Γ ֆունկցիայով համաձայն (9) բանաձևի, կստանանք՝

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)}=\frac{1}{2^{2a-1}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(a)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}.$$

Կրճատելով $\Gamma(a)$*-ով և* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$*-ի տեղ դնելով իր* $\sqrt{\pi}$ *արժեքը [տես (17)], կստանանք* Լեժանդրի բանաձևը՝

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\cdot\Gamma(2a). \qquad (21)$$

494. Γ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՄԻԱՐԺԵՔ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ՆՐԱ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ։ *Մենք գիտենք, որ* $\Gamma(a)$ *ֆունկցիան իր ածանցյալի հետ միասին անընդհատ է արգումենտի դրական արժեքների համար։ Բացի դրանից, նա բավարարում է հետևյալ առնչություններին [տես (11), (21) և (16)]*

$$\text{(I)}\ \Phi(a+1)=a\,\Phi(a),\qquad \text{(II)}\ \Phi(a)\,\Phi\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Phi(2a),$$

$$\text{(III)}\ \Phi(a)\Phi(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Մենք ցույց կտանք, որ այդ հատկությունները լրիվին բնորոշում են Γ

ֆունկցիան (այնպես որ՝ յուրաքանչյուր ֆունկցիա, որն օժտված է այդ հատկություններով, նույնական է Γ-ի հետ)։

Միայն (I) և (II) հատկությունները բավարար չեն, որովհետև Γ-ի հետ միասին այդ հատկություններով օժտված է նաև հետևյալ ֆունկցիան՝

$$\Phi(a)=\Gamma(a)\cdot[4\sin^2 a\pi]^{\mu}, \quad (\text{երբ } \mu>0)։$$

Ճիշտ այդպես էլ բավարար չեն նաև (I) և (III) պայմանները, որովհետև այդ հատկություններն ունի նաև հետևյալ ֆունկցիան՝

$$\Phi(a)=\Gamma(a)\cdot z^{a-\frac{1}{z}}, \quad (\text{երբ } z>0)։$$

Վերջապես, (I) և (III) հատկությունները բացահայտորեն կամայական են թողնում Φ(a) ֆունկցիայի արժեքները $0<a<\frac{1}{2}$ *միջակայքի համար։*

*Այլ բան է, երբ տրված են բոլոր երեք հատկությունները։ Ի միջի այլոց, (III) հատկությունը կարելի է փոխարինել ավելի թույլ պահանջով՝ Φ(a) ֆունկցիան զրո չդառնա 0<a-ի դեպքում, որը և բխում է (III) պայմանից**։

Ուրեմն, դիցուք Φ(a) ֆունկցիան 0<a-երի համար անընդհատ է իր ածանցյալի հետ միասին, զրոյից տարբեր է և բավարարում է (I) և (II) պայմաններին։ Ապացուցենք որ այդ դեպքում Φ(a)=Γ(a)։

Ընդունենք $\Phi(a)=M(a)\cdot\Gamma(a)$. *ակներևաբար, M(a) ֆունկցիան ևս անընդհատ է իր ածանցյալի հետ միասին և զրոյից տարբեր է։ Բացի դրանից, քանի որ Φ(a) և Γ(a) ֆունկցիաները երկուսն էլ բավարարում են (I) և (II) պայմաններին, ապա M(a)-ն բավարարում է հետևյալ առնչություններին՝*

$$(\mathrm{I}')\ M(a+1)=M(a) \quad \text{և} \quad (\mathrm{II}')\ M(a)M\left(a+\frac{1}{2}\right)=M(2a)։$$

(I′)-ից երևում է, որ $a\to+0$ *դեպքում M(a)-ի համար սահման գոյություն ունի։ Եթե այդ սահմանն ընդունենք իբրև M(0) արժեք, ապա M(a)-ն իր ածանցյալի հետ միասին անընդհատ կլինի ընդհուպ մինչև a=0 կետը։*

Նկատենք, որ (II′)-ից $a=\frac{1}{2}$ *դեպքում հետևում է, որ* $M\left(\frac{1}{2}\right)=1$. *նշանակում է՝* $M(a)>0$ *բոլոր* $0\leqslant a$*-երի համար։ Այդ մեզ իրավունք է տալիս դիտարկել*

$$L(a)=\log M(a)$$

ֆունկցիան, որը նույնպես անընդհատ է իր ածանցյալի հետ միասին $0\leqslant a$*-երի համար, բայց բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝*

---

* $0<a<1$ *միջակայքի համար. a-ի այլ արժեքների համար այդ պահանջի բավարարումը հետևում է արդեն (I) պայմանից։*

$$(\mathrm{I}'')\quad L(a+1)=L(a) \quad \text{և} \quad (\mathrm{II}'')\quad L(a)+L\left(a+\frac{1}{2}\right)=L(2a):$$

Վերջապես, մուծենք մի անընդհատ ֆունկցիա ևս՝

$$\Delta(a)=L'(a).$$

այդ ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ առնչություններին՝

$$(\mathrm{I}''')\quad \Delta(a+1)=\Delta(a) \quad \text{և} \quad (\mathrm{II}''')\quad \Delta(a)+\Delta\left(a+\frac{1}{2}\right)=2\Delta(2a):$$

(II''')-ից, a-ն փոխարինելով $\frac{a}{2}$*-ով, կստանանք՝*

$$\frac{1}{2}\left\{\Delta\left(\frac{a}{2}\right)+\Delta\left(\frac{a+1}{2}\right)\right\}=\Delta(a):$$

Եթե այստեղ նորից a-ն փոխարինենք նախ $\frac{a}{2}$*-ով, ապա* $\frac{a+1}{2}$*-ով և ստացված հավասարությունները գումարենք, ապա կստանանք՝*

$$\frac{1}{4}\left\{\Delta\left(\frac{a}{4}\right)+\Delta\left(\frac{a+1}{4}\right)+\Delta\left(\frac{a+2}{4}\right)+\Delta\left(\frac{a+3}{4}\right)\right\}=\Delta(a):$$

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով հեշտ է ստանալ ընդհանուր առնչությունը՝

$$\frac{1}{2^n}\sum_{\nu=0}^{2^n-1}\Delta\left(\frac{a+\nu}{2^n}\right)=\Delta(a):$$

Սակայն, ինչպիսին էլ լինի a-ն, ձախ մասը կարելի է դիտել որպես ինտեգրալային գումար հետևյալ ինտեգրալի համար՝

$$\int_0^1 \Delta(x)\,dx^{*}:$$

Ուստի՝

$$\Delta(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{0}^{2^n-1}\Delta\left(\frac{a+\nu}{2^n}\right)=\int_0^1\Delta(x)\,dx=L(1)-L(0)=0:$$

---

* *Հաշվի առնելով այդ ժամանակ Δ(a) ֆունկցիայի պարբերականությունը, (I''')-ի շնորհիվ:*

[շնորհիվ (I'')-ի]։ Այդ դեպքում $L(a)=\text{const}$., նշանակում է նաև $M(a)=\text{const}$. Բայց մենք տեսել ենք, որ $M\left(\frac{1}{2}\right)=1$, այնպես որ $M(a)=1$ և $\Phi(a)=\Gamma(a)$, որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Վերջում նկատենք նաև, որ դիֆերենցելիության պահանջը այդ ժամանակ էական դեր է խաղում և չի կարող դեն նետվել։ Եթե, օրինակ, ընդունենք՝

$$L(a)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sin(2^n\pi a),$$

ապա հանձին $L(a)$-ի կունենանք անընդհատ ֆունկցիա, որը բավարարում է (I'') և (III'') պայմաններին, բայց և այնպես $L(0)=0$ և $L\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$, այնպես որ $L(a)$-ն հաստատունի չի վերածվում։

495. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։ 1) Գտնել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\,dx \qquad (p,\ q,\ m>0)։$$

Ցուցում։ Ընդունելով $x^m=y$, բերում ենք առաջին տեսակի էյլերյան ինտեգրալի։

Պատասխան՝

$$\frac{1}{m}B\left(\frac{p}{m},\ q\right)=\frac{1}{m}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}.$$

Առաջարկվում է այդ արդյունքի օգնությամբ ապացուցել, օրինակ, որ՝

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\int_0^1\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{\pi}{4} \qquad (\text{Էյլեր})։$$

2) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{[\alpha x+\beta(1-x)+\gamma]^{p+q}}\,dx \qquad (\alpha,\ \beta\geq 0;\ \gamma,\ p,\ q>0)։$$

Հետևյալ տեղադրման օգնությամբ

$$\frac{(\alpha+\gamma x)}{\alpha x+\beta(1-x)+\gamma}=t, \qquad \frac{(\beta+\gamma)(1-x)}{\alpha x+\beta(1-x)+\gamma}=1-t,$$

$$\frac{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)\,dx}{[\alpha x+\beta(1-x)+\gamma]^2}=dt$$

առաջարկված ինտեգրալը փոխակերպվում է այսպիսի ինտեգրալի՝

$$\frac{1}{(\alpha+\gamma)^p(\beta+\gamma)^q}\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt=\frac{B(p,q)}{(\alpha+\gamma)^p(\beta+\gamma)^q}.$$

3) Գտնել հետևյալ ինտեգրալները՝

$$(\text{ա})\ \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(x+p)^{a+b}}\,dx, \qquad (\text{բ})\ \int_{-1}^{+1}\frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}}\,dx.$$

$$(a,\ b,\ p>0) \qquad\qquad (m,\ n>0)$$

Ցուցում: **(ա)** *Տեղադրում ենք՝* $y=(1+p)\dfrac{x}{x+p}$: **(բ)** *Տեղադրում ենք՝* $u=\dfrac{1}{2}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}$.

Պատասխան: (ա) $\dfrac{1}{(1+p)^a\,p^b}B(a,b)$; (բ) $2^{m+n-2}B(m,n)$:

Այստեղից, իրենց հերթին, կարող են ստացվել մի շարք հետաքրքիր ինտեգրալներ: Օրինակ, եթե վերջինի մեջ վերցնենք $n=1-m$, *ընդունենք* $2m-1=\cos 2\alpha$ *և տեղադրենք* $x=\operatorname{tg}\varphi$, *ապա կգտնենք՝*

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos\varphi-\sin\varphi}\right)^{\cos 2\alpha}d\varphi=\frac{\pi}{2\sin(\pi\cos^2\alpha)};$$

4) Գտնել հետևյալ ինտեգրալները՝

$$(\text{ա})\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\varphi\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{a-1}\varphi\,d\varphi \quad (a>0);$$

$$(\text{բ})\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}^c\varphi\,d\varphi \quad (|c|<1); \qquad (\text{գ})\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\varphi\cos^{b-1}\varphi\,d\varphi \quad (a,\ b>0).$$

Լուծում։ (գ) *Սկսենք վերջին օրինակից։ Ընդունելով* $x=\sin\varphi$, *այն կբերենք հետևյալ ինտեգրալին՝*

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x^2)^{\frac{b}{2}-1}\,dx,$$

այնպես որ, օգտագործելով 1) խնդիրը, կունենանք՝

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi\cos^{b-1}\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}B\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}.$$

(ա) *Մասնավորապես* $b=1$ *դեպքում այստեղից կստանանք՝*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi\,d\varphi=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}.\text{*}$$

Լեժանդրի բանաձևի օգնությամբ այս արդյունքը կարելի է արտագրել այսպես՝

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi\,d\varphi=2^{a-2}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(a)}=2^{a-2}B\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right).$$

(բ) *Վերջապես,* (գ)*-ում ընդունելով* $a=1+c$, *և* $b=1-c$, *որտեղ* $|c|<1$, *կգտնենք (օգտագործելով լրացման բանաձևը)՝*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^c\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+c}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-c}{2}\right)=\frac{\pi}{2\cos\frac{c\pi}{2}}.$$

5) *Որոշել հետևյալ կորով սահմանափակված պատկերի* P *մակերեսը՝*

$$r^4=\sin^3\theta\cos\theta.$$

Լուծում։ Կորը երկու հանգույց ունի՝ I *և* III *քառորդներում, բավական է նրանցից մեկի մակերեսը կրկնապատկել։ Մակերեսի հաշվման բևեռային կոորդինատներով բանաձևի համաձայն* [329 (8)], *ունենք՝*

---

* *Հեշտ է ստուգել, որ այս բանաձևում, որպես մասնավոր դեպք պարունակվում են* n° 300*-ի,* (8) *երկու բանաձևերն էլ։*

$$P=2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{3/2}\theta\cos^{1/2}\theta\,d\theta=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2\Gamma(2)}=$$

$$=\frac{1}{8}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

[տես 1) (գ) խնդիրը և (11), (14), (16) առնչությունները]։

6) Որոշել՝ ա) հետևյալ կորի մեկ գալարով սահմանափակված պատկերի P մակերեսը և բ) այդ գալարի S երկարությունը (m-ը բնական թիվ է)՝

$$r^m=a^m\cos m\theta։$$

Լուծում. (ա) $P=2\cdot\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2m}}\cos^{\frac{2}{m}}m\theta\,d\theta=\frac{a^2}{m}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2}{m}}\varphi\,d\varphi=$

$$=\frac{a^2}{m}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)}=\frac{\pi a^2}{m\sqrt[m]{4}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\right]^2}$$

[տես 4(ա) խնդիրը և (11), (21) առնչությունները]։

(բ) Աղեղի երկարության համար բևեռային կոորդինատներով բանաձևի համաձայն [320 (6)]՝

$$S=2a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2m}}\cos^{\frac{1}{m}-1}m\theta\,d\theta=\frac{2a}{m}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{1}{m}-1}\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{a}{m}\cdot2^{\frac{1}{m}-1}\cdot\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)},$$

[տես 4) (ա) խնդիրը]։

7) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները՝

(ա) $\int\limits_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{3-\cos\theta}},$

$$(բ)\quad \int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\varphi}{1+k\cos\varphi}\right)^{a-1}\cdot\frac{d\varphi}{1+k\cos\varphi}\qquad (a>0,\ 0<k<1)։$$

ա) Ցուցում։ Տեղադրել՝ $\cos\theta = 1-2\sqrt{x}$։

Պատասխան։ $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2$։

(բ) Ցուցում։ Տեղադրել՝ $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$։

Պատասխան։ $\frac{2^{a-1}}{(1-k^2)^{a/2}}\cdot\frac{\left[\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(a)}$։

8) Ապացուցել, որ՝

$$\int_{-\infty}^{1}(1-x^3)^{-\frac{1}{2}}\,dx=\sqrt{3}\int_1^{\infty}(x^3-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx։$$

Լուծում։ Նշանակենք՝

$$\int_0^1(1-x^3)^{-\frac{1}{2}}\,dx=I_1,\qquad \int_1^{\infty}(x^3-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx=I_2,$$

$$\int_{-\infty}^{0}(1-x^3)^{-\frac{1}{2}}\,dx=\int_0^{\infty}(1+x^3)^{-\frac{1}{2}}\,dx=I_3։$$

Ապացուցման ենթակա է

$$I_1+I_3=\sqrt{3}\,I_2$$

Հավասարությունը։ Այդ ինտեգրալներում կատարելով, համապատասխանաբար, $x=t^{\frac{1}{3}}$, $x=t^{-\frac{1}{3}}$, $x=(t^{-1}-1)^{\frac{1}{3}}$ տեղադրումները, կբերենք առաջին տեսակի էյլերյան ինտեգրալների։ Այնուհետև պետք է միայն մի քանի անգամ օգտագործել լրացման բանաձևը։

9) Ապացուցել հետևյալ բանաձևը (որը պատկանում է Դիրիխլեին)՝

$$\Gamma(r)\int_0^{\infty}\frac{e^{-fx}\,x^{s-1}}{(g+x)^r}\,dx=\Gamma(s)\int_0^{\infty}\frac{e^{-gy}\,y^{r-1}}{(f+y)^s}\,dy\quad (f,\ s,\ g,\ r>0)։$$

Ցուցում: Տեղադրել՝

$$\frac{\Gamma(r)}{(g+x)^r}=\int_0^{\infty} e^{-(g+x)y}\, y^{r-1}dy, \quad \frac{\Gamma(s)}{(1+y)^s}=\int_0^{\infty} e^{-(1+y)x}\, s^{s-1}dx$$

և օգտագործել ըստ x*-ի ու ըստ* y*-ի ինտեգրալների տեղադրումը (դրական ֆունկցիայի դեպքը):*

10) n° 473, *11) խնդրի մեջ մենք ապացուցեցինք հետևյալ նույնությունը՝*

$$EF'+E'F-FF'=c=\text{const.}$$

(նշանակումների վերաբերյալ տես հիշյալ խնդրի մեջ): Այնուհետև, մի ինչ-որ սահմանային անցման օգնությամբ ցույց էր տրվել, որ $c=\frac{\pi}{2}$*: Այդ նույն արդյունքը կարելի էր ստանալ նաև հաշվելով ձախ մասի մեծությունը* k*-ի մի որևէ մասնավոր արժեքի դեպքում:*

Դիցուք $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$*, այդ ժամանակ* $K'=K$, $E'=E$ *և* $F'=F$, *և նույնությունը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝*

$$2EF-F^2=(2E-F)\cdot F=c:$$

$$F=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}, \quad E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

ինտեգրալները, $\cos\varphi=t$, $t^4=x$ *հաջորդական տեղադրումների օգնությամբ, բերվում են առաջին տեսակի Էյլերյան ինտեգրալների՝*

$$F=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 x^{-\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx,$$

$$E=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\int_0^1 x^{-\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx+\int_0^1 x^{-\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx\right\},$$

այնպես, որ՝

$$2E-F=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 x^{-\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx:$$

Այստեղից որոնելի հաստատունը՝

$$c=\frac{1}{8}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}=\frac{\pi}{2}\,։$$

11) Շարքի վերլուծել հետևյալ ինտեգրալները՝

$$(\text{ա})\ \int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx,\quad (s>1)\qquad (\text{բ})\ \int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x+1}\,dx\ ։\quad (s>0)$$

Լուծում։

$$(\text{ա})\ \int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx=\int\limits_0^\infty x^{s-1}\sum_1^\infty e^{-nx}\,dx=\sum_1^\infty\int\limits_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}\,dx=$$

$$=\Gamma(s)\cdot\sum_1^\infty\frac{1}{n^s}=\Gamma(s)\cdot\zeta(s),$$

եթե $\zeta(s)$-ով [Ռիմանի «ձետա» ֆունկցիան], ինչպես սովորաբար, նշանակենք վերջին շարքի գումարը։ Մենք այստեղ օգտվեցինք դրական շարքի ինտեգրման վերաբերյալ թեորեմայից [480] և (8) բանաձևից։

$$(\text{բ})\ \int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x+1}\,dx=\Gamma(s)\sum_1^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}\,։\quad \text{Մաժորանտն է } \frac{2x^{s-1}}{e^x+1}\,։$$

Եթե $s>1$, ապա այդ արդյունքը կարելի է ներկայացնել այսպես՝

$$\Gamma(s)\,(1-2^{1-s})\cdot\zeta(s),$$

որովհետև՝

$$\sum_1^\infty\frac{1}{n^s}(1-2^{1-s})=\sum_1^\infty\frac{1}{n^s}-2\sum_1^\infty\frac{1}{(2n)^s}=\sum_1^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}\,։$$

12) Նախորդ խնդրի որոշ ընդհանրացում են ներկայացնում հետևյալ վերլուծումները՝

$$(\text{ա})\ \int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}\,dx=\Gamma(s)\cdot\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(a+n)^s}\qquad (s>1,\ a>0)$$

[a=1 դեպքում այստեղից ստացվում է 11) (ա)-ն].

$$(\text{բ})\quad \int_0^\infty \frac{zx^{s-1}dx}{e^x-z} = \Gamma(s)\cdot\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^s} \qquad (-1\leqslant z<1 \text{ և } s>0, \text{ կամ } z=1 \text{ և } s>1)$$

[z=1 դեպքում այստեղից ստացվում է 11) (ա)-ն, իսկ z=−1 դեպքում՝ 11) (բ)-ն]։

13) F(α, β, γ, x)-ով նշանակելով հանրահայտ հիպեր-երկրաչափական շարքի գումարը [տես 413, 5)]՝

$$1+\sum_{n=1}^\infty \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\ldots n\cdot\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\,x^n,$$

ապացուցել՝

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{\Gamma(\gamma)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\cdot\Gamma(\gamma-\beta)}$$

(Գաուս)։

Համարելով α>0 և γ−α>0, դիտարկենք

$$I(x)=\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\gamma-\alpha-1}(1-zx)^{-\beta}dz$$

ինտեգրալը, երբ 0<x<1։ Քանի որ

$$(1-zx)^{-\beta}=\sum_{n=0}^\infty \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\ldots n}\,x^n z^n$$

շարքը (հաստատուն x-ի դեպքում) z-ի նկատմամբ հավասարաչափ զուգամետ է [0,1] միջակայքում, ապա, բազմապատկելով այդ միջակայքում ինտեգրելի $z^{\alpha-1}(1-z)^{\gamma-\alpha-1}$ ֆունկցիայով, ստացված շարքը կարելի է ինտեգրել անդամ առ անդամ։ Մենք կստանանք հետևյալ վերլուծումը՝

$$I(x)=\sum_0^\infty I_n\cdot x^n,$$

որտեղ՝

$$I_n=\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\ldots n}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+n)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+n)}=$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\ldots n\cdot\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}$$

[տես (12)]։

Այսպիսով՝

$$I(x)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\cdot F(\alpha,\beta,\gamma,x)։$$

Գ ա ու ս ի բանաձևը ստանալու համար մնում է միայն անցնել սահմանին, երբ $x\to 1$ (ենթադրելով $\gamma-\alpha-\beta>0$)։ Շարքի մեջ այդ անցումը կարելի է կատարել անդամ առ անդամ՝ ըստ Աբելի թեորեմայի [409, 6°]։ Իսկ ինտեգրալի մեջ կարելի է սահմանին անցնել ինտեգրալի նշանի տակ, շնորհիվ հետևյալ մաժորանտի առկայության՝

$$z^{\alpha-1}(1-z)^{\gamma-\alpha-1}\ (\text{երբ } \beta\leq 0)\ \text{կամ}\ z^{\alpha-1}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\ (\text{երբ } \beta>0)։$$

Արդյունքում [տես (9)]՝

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)}=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\cdot F(\alpha,\beta,\gamma,1),$$

որտեղից և հետևում է ապացուցվելիք առնչությունը։

Նրանից, մասնավորապես, $\gamma=1$, $\beta=-\alpha$ դեպքում ստացվում է [հաշվի առնելով (18), (11), (16)] հետևյալ հետաքրքիր վերլուծությունը՝

$$\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}=1-\frac{\alpha^2}{1}+\frac{\alpha^2(\alpha^2-1)}{(1.2)^2}-\frac{\alpha^2(\alpha^2-1)(\alpha^2-4)}{(1\cdot 2\cdot 3)^2}+\dots^{*}։$$

496. Γ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԼՈԳԱՐԻԹՄԱԿԱՆ ԱԾԱՆՑՅԱԼԸ։ Շարունակելով Γ ֆունկցիայի հատկությունների ուսումնասիրությունը, դիմենք նրա լ ո գ ա ր ի թ մ ա կ ա ն ածանցյալի, այսինքն՝

$$\frac{d\log\Gamma(a)}{da}=\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$$

արտահայտության դիտարկմանը։

1° Այդ արտահայտության զանազան ներկայացումները ինտեգրալների տեսքով կարելի է նաև (10) բանաձևից ստանալ։ Սակայն ավելի հեշտ է ելնել հետևյալ նկատառումներից. ունենք՝

$$\Gamma(b)-B(a,b)=\Gamma(b)-\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}=\frac{\Gamma(b)\cdot b}{\Gamma(a+b)}\cdot\frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b}=$$

$$=\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b)}\cdot\frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b},$$

---

* Այդ կարելի է, ի միջի այլոց, ստանալ նաև սինուսն արտահայտող հայտնի անվերջ արտադրյալի ձևափոխումով [395]։

այնպես որ, եթե այստեղ անցնենք սահմանի երբ $b \to 0$, *կստանանք՝*

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b \to 0} [\Gamma(b) - B(a, b)].$$

Վերցնենք նախ [տես (6) և (2)]՝

$$\Gamma(b) = \int_0^\infty x^{b-1} e^{-x} dx, \quad B(a,b) = \int_0^\infty \frac{x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}} dx.$$

Այդ ժամանակ՝

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b \to +0} \int_0^\infty x^{b-1} \left[e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{a+b}} \right] dx$$

և, սահմանին անցնելով ինտեգրալի նշանի տակ, կստանանք Կոշիի բանաձևը՝

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty \left[e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a} \right] \frac{dx}{x}. \tag{22}$$

Սահմանային անցումն արդարացնելու համար նկատենք, որ $x=0$, $b=0$ *մոտակայքում*

$$\frac{1}{x} \left[e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{a+b}} \right]$$

արտահայտությունը կլինի x*-ի ու* b*-ի անընդհատ ֆունկցիա, իսկ* $x^b < 1$. *Բավականաչափ մեծ* x*-երի և* $b_0 \geqslant b$*-երի դեպքում ֆունկցիան կունենա հետևյալ մաժորանտը՝*

$$x^{b_0-1} \left[\frac{1}{(1+x)^a} - e^{-x} \right].$$

Իսկ եթե B*-ի (1) արտահայտության մեջ նախ տեղադրենք* $x = e^{-t}$՝

$$B(a,b) = \int_0^\infty e^{-at} (1 - e^{-t})^{b-1} dt,$$

ապա կարելի կլինի գրել՝

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b\to+0}\int_0^\infty [e^{-x}x^{b-1} - e^{-ax}(1-e^{-x})^{b-1}]dx.$$

Այստեղ ինտեգրալի նշանի տակ սահմանին անցնելով (որը արդարացվում է ինչպես վերևում), կստանանք մի ուրիշ բանաձև՝

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-ax}}{1-e^{-x}}\right)dx. \tag{23}$$

Ընդհակառակը, կարելի է բոլորովին վերացնել ցուցչային արտահայտությունները ընդինտեգրալ ֆունկցիայից։ Այդ նպատակով, (22)-ում ընդունենք a=1՝

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \Gamma'(1) = \int_0^\infty \left[e^{-x} - \frac{1}{1+x}\right]\frac{dx}{x} = -C,$$

որտեղ C-*ն՝ այսպես կոչված* էյլերյան հաստատունն *է*։ Այս հավասարությունն անդամ առ անդամ հանելով (22)-ից, կստանանք՝*

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + C = \int_0^1 \left[\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^a}\right]\frac{dx}{x}.$$

Վերջապես, $t=\dfrac{1}{1+x}$ *տեղադրությունը մեզ կհանգեցնի* Գաուսի բանաձևին՝

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + C = \int_0^1 \frac{1-t^{a-1}}{1-t}dt. \tag{24}$$

8° Այժմ մենք կարող ենք մեզ հաշիվ տալ Γ(a) *ֆունկցիայի վարքի մասին, երբ* a-*ն աճում է* 0-*ից մինչև* +∞*։ Բոլոր երեք բանաձևերն էլ ցույց են տալիս, որ* $\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$ *հարաբե-*

* *Մենք* XI *գլխում* [358, *10)*] *այդ հաստատունը որոշել էինք այլ կերպ։ Ստորև մենք կհամոզվենք, որ այդ երկու որոշումները նույնական են։*

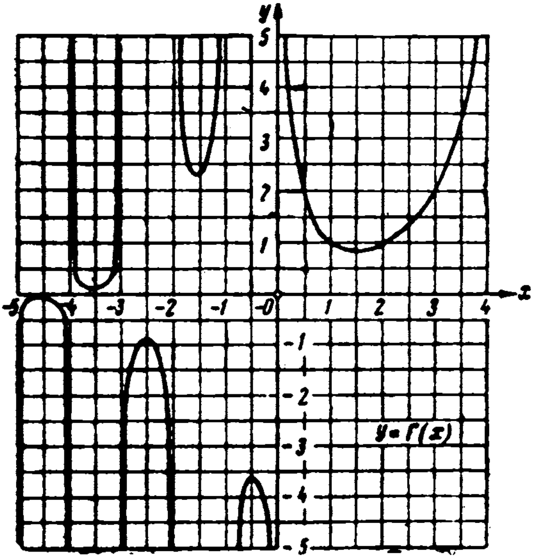
քությունն այդ ժամանակ աճում է, այն է՝ $-\infty$-ից մինչև $+\infty$։
Իսկապես, $(a<1)$

$$\int_0^1 \frac{1-t^{a-1}}{1-t}\,dt < \int_\varepsilon^1 \frac{1-t^{a-1}}{1-t}\,dt \qquad (\varepsilon>0)$$

անհավասարությունից, որտեղ աջ մասը $a\to 0$ դեպքում ունի

$$-\int_\varepsilon^1 \frac{dt}{t} = \log \varepsilon$$

սահմանը, պարզ է, օրինակ, որ (24) ինտեգրալը ձգտում է $-\infty$, երբ $a\to 0$։ Նման ձևով հեշտ է համոզվել, որ, երբ $a\to+\infty$, այդ



Գծ. 64։

ինտեգրալը ձգտում է $+\infty$։

$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$ անընդհատ ֆունկցիան միայն մեկ անգամ է զրո դառնում, պլյուս նշանը փոխելով մինուսի։ Այդպես է (շնորհիվ $\Gamma(a)>0$ հատկության) նաև $\Gamma'(a)$ ածանցյալը։ Այսպիսով, եթե a_0-ով նշանակենք ածանցյալի արմատը, Γ ֆունկցիան $+\infty$-ից նվազում է մինչև մի որոշ $\Gamma(a_0)$ դրական մինիմում, երբ a-ն

փոփոխվում է 0-ից մինչև a_0, իսկ հետո, երբ a-ն աճում է մինչև $+\infty$, ինքն էլ է աճում մինչև $+\infty$։

Քանի որ $\Gamma(2)=\Gamma(1)=1$, ապա, Ռոլլի թեորեմայի համաձայն, ածանցյալի a_0 արմատը պետք է գտնվի հենց 1-ի և 2-ի միջև։ Ավելի ճշգրիտ հաշվումը տալիս է՝

$$a_0=1,4616321\ldots,\quad \min\Gamma=\Gamma(a_0)=0,8856032\ldots$$

$\Gamma(a)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ներկայացված է 64-րդ գծագրի վրա (այստեղ մեզ համար հետաքրքիր է նրա այն մասը, որը համապատասխանում է $0<a$-ին)։

497. ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՄԱՆ ԹԵՈՐԵՄԱՆ Γ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՀԱՄԱՐ։ 9° Ելնելով լոգարիթմական ածանցյալի (24) ներկայացումից, այժմ ստանանք հետևյալ նշանավոր բանաձևը, որը նույնպես Գաուսին է պատկանում՝

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{na-\frac{1}{2}}}\Gamma(na) \qquad (25)$$

(n-ը որևէ բնական թիվ է)։ Այդ բանաձևն արտահայտում է բազմապատկման թեորեման Γ ֆունկցիայի համար։

(24)-ում ընդունելով $t=u^n$, կստանանք՝

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+C=n\int_0^1\frac{u^{n-1}-u^{na-1}}{1-u^n}\,du,$$

որտեղից, a-ի փոխարեն դնելով՝ $a+\frac{\nu}{n}$ $(\nu=0,\ 1,\ldots,\ n-1)$,

$$\frac{\Gamma'\left(a+\frac{\nu}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{\nu}{n}\right)}+C=n\int_0^1\frac{u^{n-1}u^{na+\nu-1}}{1-u^n}du$$

և, հանրագումարելով ըստ ν-ի 0-ից մինչև $n-1$,

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\Gamma'\left(a+\frac{\nu}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{\nu}{n}\right)}+nC=n\int_0^1\left[\frac{nu^{n-1}}{1-u^n}-\frac{u^{na-1}}{1-u}\right]du.$$

Այս բաղդատենք

$$\frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)}+C=\int_0^1\frac{1-u^{na-1}}{1-u}du$$

հավասարության հետ։ Վերջինս բազմապատկելով n-*ով և հանելով նախորդից, կգտնենք՝*

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\Gamma'\left(a+\frac{\nu}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{\nu}{n}\right)}-n\frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)}=n\int_0^1\left[\frac{nu^{n-1}}{1-u^n}-\frac{1}{1-u}\right]du=$$

$$=-n\log\frac{1-u^n}{1-u}\Big|_0^1=-n\log n,$$

որը կարելի է գրել այսպես՝

$$\frac{d}{da}\log\frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)}=-n\log n.$$

Այստեղից, ինտեգրելով, կստանանք՝

$$\log\frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)}=-an\log n+\log C^*$$

կամ՝

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)}=\frac{C}{n^{na}}.$$

---

* *Գտնելումը կանխատեսելով, մենք կամայական հաստատունը նախապես վերցնում ենք* log C *տեսքով։*

C հաստատունը որոշելու համար այստեղ ընդունենք $a = \frac{1}{n}$. *Ակներևաբար՝* $C = nE$, *որտեղ* E-*ն՝ Էյլերի այն արտադրյալն է, որը մենք հաշվել ենք* 493, 4°-*ում։ Նրա արժեքը (18)-ից տեղադրելով, կհանգենք (25) բանաձևին։*

Գաուսի բանաձևի մասնավոր դեպքը Լեժանդրի (21) բանաձևն է, որն ստացվել էր դրանից անկախ. Իսկապես, եթե (25)-ում դնենք $n=2$, *կստանանք՝*

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2\pi}}{2^{2a-\frac{1}{2}}}\Gamma(2a),$$

որը համարժեք է (21)-ին։

498. *ՄԻ ՔԱՆԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ ՇԱՐՔԵՐԻ ԵՎ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼՆԵՐԻ.* *10° Դրանց աղբյուրը նույն (24) բանաձևն է։ Ընդինտեգրալ ֆունկցիան շարքի վերլուծենք՝*

$$\frac{1-t^{a-1}}{1-t}=(1-t^{a-1})\sum_{\nu=0}^{\infty} t^{\nu}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(t^{\nu}-t^{a+\nu-1}),$$

որի բոլոր անդամներն ունեն միևնույն նշանը։ Անդամ առ անդամ ինտեգրումը տալիս է՝

$$D\log\Gamma(a)+C=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu+1}-\frac{1}{a+\nu}\right). \qquad (26)$$

Այս շարքը $0<a\leq a_0$ *համար հավասարաչափ զուգամետ է, որովհետև մաժորվում է* $(a_0+1)\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}$ *շարքով։*

Այդ շարքը անդամ առ անդամ դիֆերենցելով ըստ a-ի, կստանանք իր պարզությամբ նշանավոր մի վերլուծություն՝

$$D^2\log\Gamma(a)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(a+\nu)^2}. \qquad (27)$$

Քանի որ այս շարքը և $0<a$-երի համար հավասարաչափ զուգամետ է (մաժորվում է $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}$ շարքով), ապա անդամ առ անդամ դիֆերենցումը արդարացվում է։

11° (26) շարքն անդամ առ անդամ ինտեգրելով ըստ a-ի 1-ից մինչև $a>0$ (որն օրինական է շարքի հավասարաչափ զուգամիտության շնորհիվ), կստանանք՝

$$\log\Gamma(a)+C(a-1)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{a-1}{\nu+1}-\log\frac{a+\nu}{\nu+1}\right). \qquad (28)$$

Այստեղ a-ն փոխարինելով $a+1$-ով (երբ $a>-1$), կարտագրենք այսպես՝

$$\log\Gamma(a+1)+Ca=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{n}-\log\frac{a+n}{n}\right)$$

կամ՝

$$\log\frac{1}{\Gamma(a+1)}=Ca+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\log\left(1+\frac{a}{n}\right)-\frac{a}{n}\right].$$

Այստեղից, պոտենցելով, ստանում ենք Վայերշտրասի նշանավոր բանաձևը՝

$$\frac{1}{\Gamma(a+1)}=e^{Ca}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)e^{-\frac{a}{n}} \qquad (a>-1). \qquad (29)$$

[հմմտ. **390** *(16)], որը տալիս է* $\frac{1}{\Gamma(a+1)}$ *ֆունկցիայի վերլուծումն անվերջ արտադրյալի։*

12° Վերադառնալով (28)-ին, դնենք այնտեղ $a=2$. *Քանի որ* $\log\Gamma(2)=\log 1=0$, *ապա կստանանք՝*

$$C=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu+1}-\log\frac{\nu+2}{\nu+1}\right).$$

Զուգընթացաբար նկատենք, որ այստեղից՝

$$C = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log(n+1)\right]$$

և մենք գալիս ենք էյլերյան հաստատունի մեզ արդեն ծանոթ որոշմանը [358, *10*)]։

Վերջապես, (30)-ը բազմապատկելով $(a-1)$*-ով և անդամ առ անդամ հանելով (28)-ից, կարտաքսենք C-ն՝*

$$\log\Gamma(a) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[(a-1)\log\frac{\nu+2}{\nu+1} - \log\frac{a+\nu}{\nu+1}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\log\left[n^{a-1}\frac{1\cdot 2\ldots(n-1)}{a(a+1)\ldots(a+n-2)}\right]$$

կամ, որ միևնույնն է,

$$\log\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty}\log\left[n^{a}\frac{1\cdot 2\ldots(n-1)}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}\right],$$

Այստեղից, պոտենցելու միջոցով, մենք նորից կստանանք Էյլեր-Գաուսի (7) բանաձևը, որը վերևում ստացել էինք այլ ճանապարհով։

199. ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ ԵՎ ԼՐԱՑՈՒՄՆԵՐ։ Օգտվելով նրանից, որ՝

$$e^{-t} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n},$$

ապացուցել, որ $(0<a$*-ի դեպքում)՝*

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1}e^{-t}dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^{n} t^{a-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}dt,$$

և այստեղից արտածել (7) բանաձևը։

Ցուցում։ Սահմանային հավասարությունը ցույց է տրվում այնպես, ինչպես n° 481*-ի 10) և 11) խնդիրներում։* $z=\frac{1}{n}$ *տեղադրությամբ ձևափոխում ենք ինտեգրալը՝*

$$\int_0^n t^{a-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = n^a \int_0^1 \tau^{a-1}(1-\tau)^n dt = n^a \cdot B(a, n+1)$$

և օգտագործում (4) բանաձևը։

2) Արդեն հայտնի (22)՝

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty \left[e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a} \right] \frac{dx}{x}$$

բանաձևից անմիջականորեն ստանալ (23) բանաձևը՝

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-au}}{1-e^{-u}} \right] du։$$

Նկատենք, որ այստեղ դժվարությունը կայանում է նրանում, որ չիկարելի (23) ինտեգրալը դիտել որպես երկու ինտեգրալների տարբերություն (այդպիսի հարցը կպատահեր երկրորդի ձևափոխությամբ՝ $x = e^u - 1$ *տեղադրման միջոցով)։*

Ուստի, այդ դժվարությունը շրջանցելով, գրում ենք՝

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-x} dx}{x} - \int_\varepsilon^\infty \frac{dx}{(1+x)^a \cdot x} \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-u} du}{u} - \int_{\log(1+\varepsilon)}^\infty \frac{e^{-au}}{1-e^{-u}} du \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^\infty \left[\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-au}}{1-e^{-u}} \right] du = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-au}}{1-e^{-u}} \right] du,$$

քանի որ՝

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\log(1+\varepsilon)}^{\varepsilon} \frac{e^{-au}}{1-e^{-u}} du = 0։$$

[Այդ երևում է նրանից, որ ինտեգրալը գնահատվում է այսպիսի արտահայտությամբ՝ $\frac{\varepsilon - \log(1+\varepsilon)}{\varepsilon(1+\varepsilon)^{a-1}} < \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^{a-1}}$]։

3) Ելնելով էյլերյան հաստատունի որոշումից հետևյալ հավասարության միջոցով՝

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu} - \log n\right),$$

ստանալ հետևյալ ինտեգրալ բանաձևերը՝

$$(\text{ա})\quad C = \int_0^1 (1-e^{-x})\frac{dx}{x} - \int_1^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x},$$

$$(\text{բ})\quad C = \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+u} - e^{-u}\right)\frac{du}{u}\,;$$

Քանի որ՝

$$\sum_{1}^{n}\frac{1}{\nu} = \int_0^1 \sum_{1}^{n} t^{\nu-1}dt = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}\,dt = \int_0^1 \frac{1-(1-s)^n}{s}ds,$$

իսկ՝

$$\log n = \int_1^n \frac{ds}{s},$$

ապա՝

$$C = \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 \frac{1-(1-s)^n}{s}ds - \int_1^n \frac{ds}{s}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^n \left[1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]\frac{dx}{x} - \int_1^n \frac{dx}{x}\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^1 \left[1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]\frac{dx}{x} - \int_1^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n\frac{dx}{x}\right\}.$$

Երկրորդ ինտեգրալում սահմանային անցումը կատարվում է այնպես, ինչպես 1)-ում։ (ա)-ն (բ)-ի փոխակերպելու վերաբերյալ տես 2)-ը։

4) Ընդունելով (0<a *և* 1<s *դեպքում*)՝

$$\zeta(s,\ a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a+n)^{s}},$$

ցույց տալ, որ՝

$$\lim_{s\to 1+0}\left[\zeta(s,\ a)-\frac{1}{s-1}\right]=-\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}.$$

Մենք ունենք [495, *12*) (*ա*)]՝

$$\zeta(s,\ a)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{0}^{\infty}\frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}\,dx.$$

Ուստի՝

$$\zeta(s,\ a)-\frac{1}{s-1}=\frac{1}{\Gamma(s)}\left\{\int_{0}^{\infty}\frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}\,dx-\Gamma(s-1)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{0}^{\infty}x^{s-1}\left[\frac{e^{-ax}}{1-e^{-x}}-\frac{e^{-x}}{x}\right]dx.$$

Սահմանային անցումը $s\to 1$ *դեպքում կարելի է կատարել ինտեգրալի նշանի տակ, քանի որ ընդինտեգրալ արտահայտությունը,* [0, 1] *և* [1, +∞] *միջակայքերում առանձին-առանձին, իր սահմանին ձգտում է մոնոտոն* [*480*]։ *Այնուհետև օգտագործել* (*23*) *բանաձևը*։

Մասնավորապես a=1 *դեպքում ստացվում է՝*

$$\lim_{s\to 1+0}\left[\xi(s)-\frac{1}{s-1}\right]=C.$$

5) Հաշվել հետևյալ անվերջ արտադրյալի մեծությունը՝

$$P=\prod_{n=1}^{\infty}u_n,$$

որտեղ՝

$$u_n=\frac{(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_k)}{(n+b_1)(n+b_2)\cdots(n+b_k)}\qquad (a_i,\ b_i>-1)$$

[Քանի որ՝

$$u_n=\left(1+\frac{a_1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{a_k}{n}\right)\left(1+\frac{b_1}{n}\right)^{-1}\cdots\left(1+\frac{b_k}{n}\right)^{-1}=$$

$$=1+\frac{(a_1+\cdots+a_k)-(b_1+\cdots+b_k)}{n}+\frac{A_n}{n^2}$$

$$(|A_n|\leqslant A<+\infty),$$

ապա անվերջ արտադրյալը զուգամետ կլինի միայն հետևյալ պայմանի դեպքում՝

$$a_1+a_2+\cdots+a_k=b_1+b_2+\cdots+b_k\cdot$$

այս ենթադրությամբ էլ առաջարկվում է հաշվել P-ն]։

Ցուցում։ U_n-ը ներկայացնելով հետևյալ տեսքով, օգտագործել Վայերշտրասի (29) բանաձևը,

$$u_n=\frac{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)e^{-\frac{a_1}{n}}\cdots\left(1+\frac{a_k}{n}\right)e^{-\frac{a_k}{n}}}{\left(1+\frac{b_1}{n}\right)e^{-\frac{b_1}{n}}\cdots\left(1+\frac{b_k}{n}\right)e^{-\frac{b_k}{n}}},$$

Պատասխան: $P=\dfrac{\Gamma(1+b_1)\Gamma(1+b_2)\cdots\Gamma(1+b_k)}{\Gamma(1+a_1)\Gamma(1+a_2)\cdots\Gamma(1+a_k)}$:

6) $\Gamma(a)$ ֆունկցիայի տարածումը բացասական a-երի դեպքի վրա: Ըստ (11) բանաձևի՝

$$\Gamma(a)=\frac{\Gamma(a+1)}{a},$$

այնպես որ $\Gamma(a)$-ի արժեքը որոշվում է $\Gamma(a+1)$-ի միջոցով: Եթե $-1<a<0$, ապա $a+1>0$, և $\Gamma(a+1)$-ը իմաստ ունի: $\Gamma(a)$-ն *որոշենք* նախորդ բանաձևով. այսպիսով $\Gamma(a)$ ֆունկցիայի որոշումը տարածվեց $-1<a<0$ դեպքի վրա: Ընդհանրապես, եթե $-n<a<-(n-1)$, ապա այս դեպքի վրա տարածելով (12) բանաձևը, $\Gamma(a)$-ն կորոշենք այսպիսի հավասարությամբ՝

$$\Gamma(a)=\frac{\Gamma(a+n)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}: \tag{31}$$

Եթե, էլ ավելի պարզության համար, այստեղ ընդունենք $a=-n+\alpha$, որտեղ $0<\alpha<1$, ապա այդ որոշումը կարտագրվի այսպես՝

$$\Gamma(\alpha-n)=(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-\alpha)}: \tag{32}$$

Այստեղից անմիջապես երևում է, որ $-n<a<-(n-1)$ համար $\Gamma(a)$-ի նշանը որոշվում է $(-1)^n$ արտադրիչով: Երբ a-ն մոտենում է $-n$-ին կամ $-(n-1)$-ին (այսինքն երբ α-ն մոտենում է 0-ին կամ 1-ին), $\Gamma(a)$-ն դառնում է ∞ (առաջին կարգի):

7) Առաջարկվում է, հիմնվելով 6)-ի վրա, (7), (11), (16), (21), (25) (29) բանաձևերն ընդհանրացնել արգումենտների ցանկացած իրական արժեքների համար (խուսափելով միայն ամբողջ բացասական և զրո արժեքներից)։ Ցուցում։ (29) բանաձևն ընդհանրացնելիս հաշվի առնել (31) հավասարությունը։

8) Հիմնվելով (32) բանաձևի վրա, ապացուցել, որ, երբ α-ն փոփոխվում է 0-ից մինչև 1, $\Gamma'(\alpha-n)$-ը մեկ անգամ (ասենք՝ երբ $\alpha=\alpha_n$) անցնում է 0-ով, նշանը փոխելով $(-1)^{n+1}$-ից $(-1)^n$-ի։ Համապատասխանաբար՝ $a=\alpha_n-n$ արժեքի դեպքում $\Gamma(a)$ ֆունկցիան, այսպիսով, ունի կամ դրական մինիմում (զույգ n-ի դեպքում) կամ բացասական մաքսիմում (կենտ n-ի դեպքում)։ Տես Γ ֆունկցիայի գրաֆիկը 64-րդ գծագրի վրա։

Առաջարկվում է նաև ապացուցել, որ n-ը աճելիս ինչպես α_n-ը, այնպես էլ $\Gamma_n=|\Gamma(\alpha_n-n)|$-ը մոնոտոն նվազելով ձգտում են 0-ի։

Ցուցում։ Այդ եզրակացությունների համար հիմք են ծառայում հետևյալ հավասարությունները ($0<\alpha<1$)՝

$$|\Gamma(\alpha-\overline{n+1})|=\frac{|\Gamma(\alpha-n)|}{n+1-\alpha},$$

$$|\Gamma(\alpha-\overline{n+1})|'=\frac{|\Gamma(\alpha-n)|'}{n+1-\alpha}+\frac{|\Gamma(\alpha-n)|}{(n+1-\alpha)^2}$$

և

$$\frac{\Gamma'(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_n)}=-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu-\alpha_n}.$$

9) Ապացուցել, որ $-n<a<-(n-1)$ դեպքում $\Gamma(a)$ ֆունկցիան արտահայտվում է հետևյալ ինտեգրալով՝

$$\Gamma(a)=\int_0^{\infty}x^{a-1}\left(e^{-x}-1+\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)dx.$$

Ցուցում։ Կատարել մասերով ինտեգրում, տես 6)։

10) XI գլխում [390, 9)], ելնելով $\Gamma(a)$ ֆունկցիայի որոշումից Էյլեր-Գաուսի (7) բանաձևով, և այն էլ միանգամից արգումենտի ցանկացած իրական արժեքների համար (բացառությամբ զրոն և ամբողջ բացասական թվերը), մենք ստացել էինք այդ ֆունկցիայի մի քանի պարզագույն հատկությունները [տես նաև 395]։ Նույնը կարելի է անել նաև մեր ուսումնասիրած մյուս հատկությունների նկատմամբ։

Մեզ այժմ էլ, ցանկացած a-ի դեպքում (նույն բացառություններով) $\Gamma(a)$ ֆունկցիայի ուսումնասիրման համար ելման կետ կարող է ծառայել հետևյալ շարքը՝

$$D^2 \log \Gamma(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2},$$

$\Gamma(2)=\Gamma(1)=1$ *լրացուցիչ պայմաններով։*

11) Վերջապես, նշենք, որ $\Gamma(a)$ *ֆունկցիան կարող է որոշվել որպես միարժեք անալիտիկ ֆունկցիա* a *կոմպլեքս փոփոխականի ամբողջ հարթությունում։* Այդ կարելի է անել, ելնելով հենց (6) ինտեգրալի տեսքով որոշումից, եթե* $\int_0^{\infty}$*-ը տրոհենք երկուսի՝* $\int_0^1 + \int_1^{\infty} = P(a)+Q(a)$*։ Այդ ժամանակ* $P(a)$ *ֆունկցիան՝*

$$P(a) = \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{a-1}\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}dx =$$

$$= \sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^{a+n-1}dx = \sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{1}{a+n}$$

ընդհանրապես տարածվում է կոմպլեքս փոփոխականի ամբողջ հարթության վրա որպես մերոմորֆ ֆունկցիա, որն ունի պարզ բևեռներ $0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$ *կետերում՝* $1, -1, \frac{1}{2!}, \ldots, (-1)^n\frac{1}{n!}, \ldots$ *մնացքներով։ Իսկ* $Q(a)$ *ֆունկցիան՝*

$$Q(a) = \int_1^{\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$$

իմաստ ունի նաև a*-ի կոմպլեքս արժեքների դեպքում և ներկայացվում է ամբողջ ֆունկցիայով։*

$\Gamma(a)$ *ֆունկցիայի այն հատկությունները, որոնք ապացուցել ենք արգումենտի դրական իրական արժեքների համար, ավտոմատիկորեն տարածվում են ամբողջ հարթության վրա՝ անալիտիկ ֆունկցիաների հայտնի թեորեմայով (մենք ի նկատի ունենք այնպիսի հատկություններ, որոնք*

** Այս վերջին դիտողությունը* Γ *ֆունկցիայի տարածման մասին կարող է հասկանալի լինել նրանց համար, ովքեր ծանոթ են կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության հիմնական գաղափարներին ու տերմիններին։*

արտահայտվում են համապատասխանություններով անալիտիկ ֆունկցիաների միջև)։ Մասնավորապես, (16) լրացման բանաձևից, որը կարելի է գրել նաև այսպես՝

$$\frac{1}{\Gamma(1-a)}=\frac{1}{\pi}\sin a\pi\cdot\Gamma(a)=\frac{1}{\pi}\sin a\pi\,[P(a)-Q(a)],^{*}$$

երևում է, որ $\frac{1}{\Gamma(a)}$ ֆունկցիան հոլոմորֆ է ամբողջ հարթությունում։ Այսպիսով, $\Gamma(a)$-ն արմատ չունի։

Վերջում նշենք, որ ինչպես Էյլեր ի-Գաուսի (7) բանաձևը, այնպես էլ Վայերշտրասի (29) բանաձևը հաջողությամբ կարող է $\Gamma(a)$ ֆունկցիայի որոշման հիմքում դրվել՝ միանգամից ամբողջ հարթությունում։

500. ՄԻ ՔԱՆԻ ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ։ Դիմենք մի քանի ինտեգրալների դիտարկման, որոնց հաշվման համար օգտագործվում են $\Gamma(a)$ ֆունկցիան և նրա հատկությունները։

1) Դիֆերենցելով ըստ a-ի հետևյալ բանաձևը՝

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx,$$

մենք 493, 1-ում ստացել էինք՝

$$\Gamma'(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\log x\,dx.$$

Այստեղ ընդունելով $a=1$, քանի որ $\Gamma'(1)=-C$, կստանանք՝

$$\int_0^\infty e^{-x}\log x\,dx=-C.$$

$x=-\log u$ տեղադրությունը բերում է մի հետաքրքիր ինտեգրալի՝

$$\int_0^1\log(-\log u)\,du=-C.$$

Եթե վերցնենք $a=\frac{1}{2}$ և ընդունենք $x=t^2$, ապա կգտնենք՝

---

* Այն դեպքում, որտեղ $P(a)$-ն բևեռ ունի, $\sin a\pi$-ն զրո է դառնում։

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\log t\,dt=\frac{1}{4}\,\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{\pi}}{4}(C+2\log 2),$$

ինչպես այդ հեշտությամբ ստացվում է (26) վերլուծություններից՝ հաշվի առնելով լոգարիթմական շարքը։

Կրկնելով դիֆերենցումն ըստ a-ի, կստանանք՝

$$\Gamma''(a)=\int_0^\infty x^{a-1}\,e^{-x}\log^2 x\,dx.$$

$a=1$ դեպքում այստեղից կստացվի՝

$$\int_0^\infty e^{-x}\log^2 x\,dx=\Gamma''(1)=C^2+\frac{\pi^2}{6}.$$

Վերջին արդյունքն ստացվում է (27)-ից, եթե օգտվենք այդ ժամանակ հետևյալ հայտնի շարքից՝

$$\sum_1^\infty\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Վերջապես, այստեղ էլ ընդունելով $a=\frac{1}{2}$, $x=t^2$ տեղադրությամբ կստանանք այսպիսի ինտեգրալ ևս՝

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\log^2 t\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{8}\left[(C+2\log 2)^2+\frac{\pi^2}{2}\right]$$

և այլն։

2) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$J=\int_0^\infty\frac{\sin^p x}{x}\,dx,$$

որտեղ p-ն ռացիոնալ կոտորակ է կենտ համարիչով ու կենտ հայտարարով։

Ցուցում։ Նույն մեթոդով, որով մենք 455, 8°-ում հաշվել էինք $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx$ ինտեգրալը, կգտնենք՝

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p t\left\{\frac{1}{t}+\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\left[\frac{1}{t-\nu\pi}+\frac{1}{t+\nu\pi}\right]\right\}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-1}t\,dt\text{։}$$

Տես 495, *4)* *(ա)*։ Պատասխան։ $J=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}=2^{p-2}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(p)}$։

3) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները $(b>0)$՝

$$A=\int_0^{\infty}\frac{\cos bx}{x^s}\,dx, \qquad B=\int_0^{\infty}\frac{\sin bx}{x^s}\,dx\text{։}$$
$$(0<s<1) \qquad\qquad (0<s<2)$$

Ունենք [*տես (8)*]՝

$$\frac{1}{x^s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}z^{s-1}e^{-zx}dz,$$

այնպես որ՝

$$A=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\cos bx\,dx\int_0^{\infty}z^{s-1}e^{-zx}dz\text{։}$$

Ինտեգրումների կարգը փոխելով, կստանանք՝

$$A=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}z^{s-1}\,dz\int_0^{\infty}e^{-zx}\cos bx\,dx=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{z^s\,dz}{z^2+b^2}$$

կամ, ընդունելով $b^2t=z^2$,

$$A=\frac{b^{s-1}}{2\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{s-1}{2}}}{1+t}dt=\frac{b^{s-1}}{2\Gamma(s)}B\left(\frac{s+1}{2},\ \frac{1-s}{2}\right)=$$

$$=\frac{b^{s-1}}{2\Gamma(s)}\frac{\pi}{\sin\frac{s+1}{2}\pi}=\frac{\pi b^{s-1}}{2\Gamma(s)\cdot\cos\frac{s\pi}{2}}$$

[*տես (2), (5)*]։ *Նման ձևով*՝

$$B=\frac{\pi b^{s-1}}{2\Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{2}}\,.$$

Ինտեգրալների տեղափոխման հիմնավորումը կատարվում է այնպես, ինչպես $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ ինտեգրալի հաշվման ժամանակ 496, 11)։

4) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները՝

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\log x\,dx,\qquad \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\log^2 x\,dx.$$

Համաձայն 3)-ի ունենք $(0<s<2)$՝

$$J=\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x^s}dx=\frac{\pi}{2\Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{2}}\,.$$

Դիֆերենցելով այն ըստ s պարամետրի (Լայբնիցի կանոնով), կգտնենք՝

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x^s}\log x\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\left[\Gamma(s)\cdot\sin\frac{s\pi}{2}\right]^2}\left\{\Gamma'(s)\cdot\sin\frac{s\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\Gamma(s)\cdot\cos\frac{s\pi}{2}\right\}.$$

Լայբնիցի կանոնի կիրառումն արդարացվում է ստացված ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտությամբ ըստ s-ի ինչպես $x=\infty$ կետում ($0<s_0<s$-երի համար, տես 477, 4°), այնպես էլ $x=0$ կետում ($s_1>s$-երի համար, $|\log x|$-ի մաժորանտն է՝ x^{s_1-1})։

Ստացված հավասարությունը մեկ անգամ էլ դիֆերենցելով (որը հիմնավորվում է նույն եղանակով), կգտնենք՝

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x^s}\cdot\log^2 x\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{\left[\Gamma(s)\cdot\sin\frac{s\pi}{2}\right]^3}\left\{\Gamma'(s)\sin\frac{s\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}\right\}^2-$$

$$-\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\left[\Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{2}\right]^2}\left\{\Gamma''(s)\sin\frac{s\pi}{2}+\pi\Gamma'(s)\cos\frac{s\pi}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi^2}{4}\,\Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{2}\right\}։$$

Երկու հավասարություններում էլ ընդունելով $s=1$, կգտնենք որոնելի ինտեգրալների արժեքները՝

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\log x\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot\Gamma'(1),$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\log^2 x\,dx=\pi[\Gamma'(1)]^2-\frac{\pi}{2}\cdot\Gamma''(1)+\frac{\pi^3}{8}։$$

Հաշվի առնելով, որ [համեմ. 1)]՝

$$\Gamma'(1)=-C,\quad \Gamma''(1)=C^2+\frac{\pi^2}{6},$$

վերջնականապես կունենանք՝

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\log x\,dx=-\frac{\pi}{2}\cdot C,\qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\log^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot C^2+\frac{\pi^3}{24}։$$

5) Մենք արդեն ունեցել ենք [տես 495, 4) (ա)] հետևյալ բանաձևը՝

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a-1}\varphi\,d\varphi=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma(a)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}\qquad (a>0)։$$

Դիֆերենցելով ըստ a-ի [կիրառելով Լայբնիցի կանոնը, 482], կստանանք՝

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a-1}\varphi\cdot\log\sin\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma(a)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{d\log\Gamma(a)}{da}-\frac{d\log\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}{da}\right]։$$

Եթե օգտվենք Գաուսի (24) բանաձևից, ապա փակագծերի ներսի արտահայտությունը կգրվի այսպես

$$\int_0^1 \frac{t^{a-\frac{1}{2}} - t^{a-1}}{1-t}\,dt.$$

Այժմ ընդունենք $2a-1=2n$, *որտեղ* n-*ը որևէ բնական թիվ է կամ զրո, և կատարենք* $t=u^2$ *տեղադրությունը։ Այդ ժամանակ կստանանք՝*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi \log\sin\varphi\, d\varphi = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}\int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u}\,du.$$

$n=0$ *դեպքում կստանանք՝*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\log 2,$$

որն արդեն հայտնի է մեզ։ $1 \leqslant n$-*ի դեպքում ստանում ենք նոր ինտեգրալ՝*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\cdot\log\sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2n}-\log 2\right).$$

6) Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները ($a>0$, $p>0$)՝

$$u=\int_0^{\infty} e^{-ax}x^{p-1}\cos bx\,dx, \qquad v=\int_0^{\infty} e^{-ax}x^{p-1}\sin bx\,dx.$$

Լուծումը կատարվում է n° 485 *8)-ի նման։* b-*ից կախված* $W=u+vi$ *ֆունկցիայի համար, ինչպես և այնտեղ, ստացվում է դիֆերենցիալ հավասարում՝*

$$\frac{dw}{db} = -\frac{p}{a^2+b^2}(b-ai)w,$$

որը կարելի է արտագրել այսպես՝

$$\frac{dw}{db} = pw\cdot\frac{i}{a-bi}.$$

հեշտ է ստուգել, որ, այս հավասարման շնորհիվ,

$$w \cdot (a - bi)^p = c = \text{const.}^{*}։$$

Այստեղ ընդունելով $b=0$, *կգտնենք* $c=\Gamma(p)$։ *Այսպիսով՝*

$$w = \frac{\Gamma(p)}{(a-bi)^p} = \frac{\Gamma(p)}{(a^2+b^2)^p}(a+bi)^p =$$

$$= \frac{\Gamma(a)}{(a^2+b^2)^{p/2}}\left\{\cos p \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + i \sin p \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right\}։$$

Իրական և կեղծ մասերը զատ-զատ իրար հավասարեցնելով, վերջապես, կստանանք՝

$$u = \frac{\Gamma(p)}{(a^2+b^2)^{p/2}}\cos p\theta, \qquad v = \frac{\Gamma(p)}{(a^2+b^2)^{p/2}}\sin p\theta,$$

որտեղ կարճության համար դրված է՝ $\theta = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$։

$\sqrt{a^2+b^2}$*-ն փոխարինելով* $\frac{b}{\sin\theta}$*-ով կամ* $\frac{a}{\cos\theta}$*-ով, կարելի է արդյունքը գրել այսպիսի տեսքով՝*

$$u = \frac{\Gamma(p)}{b^p}\sin^p\theta\cos p\theta = \frac{\Gamma(p)}{a^p}\cos^p\theta\cos p\theta,$$

$$v = \frac{\Gamma(p)}{b^p}\sin^p\theta\sin p\theta = \frac{\Gamma(p)}{a^p}\cos^p\theta\sin p\theta։$$

Առաջարկվում է այստեղից ստանալ 3) կետի A *և* B *ինտեգրալները, ընդունելով* $p = 1 - s$ *և* a*-ն ձգտեցնելով* 0*-ի* ($0 < b$*-երի դեպքում* $\theta = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ *անկյունն այդ ժամանակ ձգտում է* $\frac{\pi}{2}$*-ի*)։

u *և* v *ինտեգրալներն ըստ* p*-ի դիֆերենցելով, կարելի է ստանալ մի շարք նոր ինտեգրալներ. այդ թողնում ենք ընթերցողին։*

7) u *և* v *ինտեգրալների համար գտած արժեքները մեզ հնարավորություն կտան հաշվել ուրիշ հետաքրքիր ինտեգրալներ։ Հետևյալ հավասարությունների երկու մասերն իրարով բազմապատկենք՝*

$$\frac{\Gamma(p)}{a^p}\cos^p\theta \cdot \cos p\theta = \int_0^\infty e^{-ax}x^{p-1}\cos bx\,dx$$

---

* $(a \pm bi)^p$*-ի տակ մենք այստեղ և առաջ հասկանում ենք աստիճանային ֆունկցիայի այն ճյուղը, որը* $b=0$ *դեպքում դառնում է* a^p *դրական իրական թիվ։*

և

$$a^{q}\cdot \mathrm{tg}^{q-1}\theta \cdot \frac{d\theta}{\cos^{2}\theta}=b^{q-1}\,db$$

(համարելով $0<q<p$ և $q<1$) և ինտեգրելով ձախ մասն ըստ θ-ի, 0-ից մինչև $\frac{\pi}{2}$, իսկ աջ մասն ըստ b-ի, 0-ից մինչև ∞*, կստանանք՝

$$J_1=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{p-q-1}\theta\cdot\sin^{q-1}\theta\cdot\cos p\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{a^{p-q}}{\Gamma(p)}\int_{0}^{\infty}b^{q-1}\,db\int_{0}^{\infty}e^{-ax}x^{p-1}\cos bx\,dx.$$

Եթե աջ մասում ինտեգրալները տեղափոխենք, ապա այդ անմիջապես կհանգեցնի J_1 ինտեգրալի հաշվմանը՝

$$J_1=\frac{a^{p-q}}{\Gamma(p)}\int_{0}^{\infty}e^{-ax}x^{p-1}dx\int_{0}^{\infty}\frac{\cos bx}{b^{1-q}}\,db.$$

Հեշտ է 2)-ից ստանալ, որ ներքին ինտեգրալի արժեքը կլինի $\frac{\Gamma(q)\cos\frac{q\pi}{2}}{x^{q}}$, այնպես որ՝

$$J_1=\frac{a^{p-q}\,\Gamma(q)\cos\frac{q\pi}{2}}{\Gamma(p)}\int_{0}^{\infty}e^{-ax}x^{p-q-1}\,dx$$

և վերջնականապես՝

$$J_1=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{p-q-1}\theta\cdot\sin^{q-1}\theta\cdot\cos p\theta\,d\theta=\frac{\Gamma(q)\Gamma(p-q)}{\Gamma(p)}\cos\frac{q\pi}{2}.$$

---

* Կապը b և θ փոփոխականների միջև տրվում է $b=a\cdot \mathrm{tg}\,\theta$ ($a=\mathrm{const}$ բանաձևով։

Նման ձևով կարելի է ստանալ՝

$$J_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{p-q-1}\theta\cdot\sin^{q-1}\theta\cdot\sin p\theta\,d\theta=\frac{\Gamma(q)\,\Gamma(p-q)}{\Gamma(p)}\sin\frac{q\pi}{2}.$$

Այժմ ցույց տանք, թե ինչպես հիմնավորենք ինտեգրալների տեղափոխումը (առանց որի, հասկանալի է, արդյունքը չի կարելի ապացուցված համարել)։ Քանի որ հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_0^\infty x^{p-1}\,e^{-ax}\,b^{q-1}\cos bx\,dx$$

հավասարաչափ զուգամետ է, երբ $0<b_0\leqslant b<B<+\infty$, *ապա՝*

$$\int_{b_0}^{B}b^{q-1}\,db\int_0^\infty x^{p-1}\,e^{-ax}\cos bx\,dx=\int_0^\infty e^{-ax}\,x^{p-1}\,dx\int_{b_0}^{B}b^{q-1}\cos bx\,db=$$

$$=\int_0^\infty e^{-ax}\,x^{p-q-1}\,dx\int_{b_0x}^{Bx}u^{q-1}\cos u\,du$$

Շնորհիվ $\int_0^\infty u^{q-1}\cos u\,du$ *ինտեգրալի գոյության, ներքին ինտեգրալը, երբ* $b_0\to0$ *և* $B\to+\infty$, *նրան է ձգտում, մնալով սահմանափակ՝*

$$\left|\int_{b_0x}^{Bx}u^{q-1}\cdot\cos u\,du\right|\leqslant L,$$

այնպես որ ամբողջ ընդինտեգրալ ֆունկցիան մաժորվում է $L\cdot e^{-ax}\cdot x^{p-q-1}$ *ֆունկցիայով և, երբ* $b_0\to0$ *և* $B\to+\infty$, *սահմանային անցումը թույլատրելի է ինտեգրալի նշանի տակ, և այլն։*

8) Ընդունենք՝

$$\psi(t)=D\log\Gamma(t)=\int_0^1\frac{1-x^{t-1}}{1-x}\,dx-C$$

[*տես (24)*]։ *Այդ ժամանակ՝*

$$\int_0^1\frac{x^p-x^q}{1-x}\,dx=\psi(q+1)-\psi(p+1)$$

(*երբ* $p+1>0,\ q+1>0$)։

Նկատելով այդ, դիտարկենք

$$J=\int_0^1 \frac{(1-x^{\alpha})(1-x^{\beta})}{(1-x)\log x}dx$$

$$(\alpha>-1,\ \beta>-1,\ \alpha+\beta>-1)$$

ինտեգրալը։ Նրա ածանցյալն ըստ α*-ի՝*

$$\frac{dJ}{d\alpha}=-\int_0^1 \frac{x^{\alpha}(1-x^{\beta})}{1-x}dx=\psi(\alpha+1)-\psi(\alpha+\beta+1)=$$

$$=\frac{d}{d\alpha}\log\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\text{։}$$

Ուստի՝

$$J=\log\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+C\text{։}$$

Քանի որ $J=0$ *երբ* $\alpha=0$, *ապա* $C=\log\Gamma(\beta+1)$, *հետևաբար՝*

$$J=\log\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\text{։}$$

Նման ձևով գտնվում են հետևյալ ինտեգրալները՝

$$K=\int_0^1 \frac{x^{\alpha}(1-x^{\beta})(1-x^{\gamma})}{(1-x)\log x}dx=$$

$$(\alpha>-1,\ \alpha+\beta>-1,\ \alpha+\gamma>-1,\ \alpha+\beta+\gamma>-1)$$

$$=\log\frac{\Gamma(\alpha+\gamma+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)},$$

$$L=\int_0^1 \frac{(1-x^{\alpha})(1-x^{\beta})(1-x^{\gamma})}{(1-x)\log x}dx=$$

$(\alpha>-1,$ *և այլն*$)$

$$=\log\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\gamma+1)\Gamma(\beta+\gamma+1)}\text{։}$$

և այդպես շարունակ։

Եթե K ինտեգրալի մեջ վերցնենք $\gamma=\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{a}{2}-1$, $\beta=\frac{b-a}{2}$ և կատարենք $x=t^2$ տեղադրությունը, ապա կստանանք հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}-t^{b-1}}{(1+t)\log t}\,dt=\log\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)},$$

$$(a,\ b>0)$$

$b=1-a$ դեպքում այստեղից ստացվում է մի հետաքրքիր ինտեգրալ՝

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}-t^{-a}}{(1+t)\log t}\,dt=\log \operatorname{tg}\frac{a\pi}{2} \qquad (0<a<1)\text{։}$$

Բերված օրինակները բավական են, որպեսզի տեսնենք, թե որքան են ընդարձակվում ինտեգրալները վերջավոր բանաձևով ներկայացնելու մեր հնարավորությունները՝ Γ ֆունկցիան մուծելու շնորհիվ։ Անգամ այն դեպքերում, երբ վերջավոր բանաձևը չի պարունակում ուրիշ ֆունկցիաներ, բացի տարրականներից, նրա ստացումն այնուամենայնիվ հաճախ հեշտանում է Γ ֆունկցիայի օգտագործումով, թեկուզ և միջանկյալ հաշվումների ժամանակ։

501. ՍՏԻՐԼԻՆԳԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ։ Այժմ դիմենք $\log\Gamma(a)$-ի համար հարմար մոտավոր բանաձևերի արտածմանը և այդ լոգարիթմի (և Γ ֆունկցիայի՝ իր) արժեքները հաշվելու հարցին։

Մեզ համար ելման կետ հանդիսանալու է Γ-ի լոգարիթմական ածանցյալի համար ստացած (28) բանաձևը՝

$$D\log\Gamma(a)=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-x}}{x}-\frac{e^{-ax}}{1-e^{-x}}\right)dx\text{։}$$

Քանի որ ընդինտեգրալ արտահայտությունն իրենից ներկայացնում է x և a երկու արգումենտների անընդհատ ֆունկցիա $0\leqslant x$-երի և $0<a$-երի դեպքում ($x=0$ դեպքում դրանում կարելի է համոզվել՝ շարքի վերլուծելով), իսկ $x=\infty$ դեպքում ինտեգրալը զուգամետ է a-ի նկատմամբ հավասարաչափ՝ $0<a_0\leqslant a$-երի համար (մաժորանտան է՝

$$\frac{e^{-x}}{x}+\frac{e^{-a_0x}}{1-e^{-x}}\Bigg),$$

ապա կարելի է ըստ a-ի ինտեգրել 1-ից մինչև a՝ ինտեգրալի նշանի տակ՝

$$\log\Gamma(a)=\int_0^\infty\left[(a-1)e^{-x}-\frac{e^{-x}-e^{-ax}}{1-e^{-x}}\right]\frac{dx}{x} \qquad (a>0)\text{։}$$

Փոխելով ինտեգրման փոփոխականի նշանը, անցնենք $[-\infty, 0]$ միջակայքին՝

$$\log\Gamma(a)=\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{ax}-e^{x}}{e^{x}-1}-(a-1)e^{x}\right]\frac{dx}{x}. \qquad (33)$$

Այս ինտեգրալը նա հավասարաչափ զուգամետ է $x=-\infty$ դեպքում՝ $0<a_0\leqslant a\leqslant A<+\infty$ համար։ Ուրեմն ինտեգրենք ըստ a-ի, a-ից մինչև a+1, ինտեգրալի նշանի տակ՝

$$R(a)=\int_{a}^{a+1}\log\Gamma(a)\,da=$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{ax}}{x}-\frac{e^{x}}{e^{x}-1}-\left(a-\frac{1}{2}\right)e^{x}\right]\frac{dx}{x}. \qquad (34)$$

Օգտագործենք ստացված ինտեգրալը, ինչպես նաև Ֆրուլլանիի

$$\frac{1}{2}\log a=\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-x}-e^{-ax}}{2}\cdot\frac{dx}{x}=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{ax}-e^{x}}{2}\cdot\frac{dx}{x} \qquad (35)$$

տարրական ինտեգրալը՝ (33) արտահայտությունը պարզեցնելու համար։ Այսպես; Նրանից հանենք (32)-ը և գումարենք (35)-ը, կստանանք՝

$$\log\Gamma(a)-R(a)+\frac{1}{2}\log a=\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{1}{e^{x}-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right]\frac{e^{ax}dx}{x}.$$

Նշանակելով, հարմարության համար՝

$$\omega(a)=\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{1}{e^{x}-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right]\frac{e^{ax}dx}{x} \qquad (36)$$

և R(a)-ի փոխարեն տեղադրելով Ռաաբեի ինտեգրալի մեզ արդեն հայտնի (20) արտահայտությունը, կստանանք

$$\log\Gamma(a)=\log\sqrt{2\pi}+\left(a-\frac{1}{2}\right)\log a-a+\omega(a). \qquad (37)$$

VII գլխում [413, 8)] մենք ստացել էինք հիպերբոլական կոտանգենսի վերլուծումը պարզ կոտորակների՝

$$\operatorname{cth} x=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2x}{x^{2}+k^{2}\pi^{2}},$$

որը ճիշտ է $0 \neq x$-*ի բոլոր արժեքների համար։ Այստեղ* x-*ը փոխարինելով* $\frac{x}{2}$-*ով, կարելի է բերել այսպիսի տեսքի* [*հմմտ.* 422]՝

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 4k^2\pi^2}$$

կամ, վերջապես,

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4k^2\pi^2}.$$

Հանձին $f(x)$-*ի մենք տեսնում ենք* (36)-*ի ընդինտեգրալ արտահայտության մեջ մտնող ֆունկցիան։*

Ֆիքսենք որևէ m *ոչ-բացասական ամբողջ թիվ և շարքի յուրաքանչյուր անդամ փոխարինենք իրեն նույնաբար հավասար գումարով՝*

$$\frac{1}{x^2 + 4k^2\pi^2} = \frac{1}{4k^2\pi^2} - \frac{x^2}{(4k^2\pi^2)^2} + \frac{x^4}{(4k^2\pi^2)^3} - \dots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-2}}{(4k^2\pi^2)^m} +$$

$$+ (-1)^m \frac{x^{2m}}{(4k^2\pi^2)^{m+1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4k^2\pi^2}}.$$

Հանրագումարենք

$$(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(4k^2\pi^2)^n} \qquad (1 \leqslant n \leqslant m)$$

տեսքի գումարելիներն առանձին՝ $k = 1, 2, 3, \dots$ *դեպքերում։ Ընդունելով, ինչպես սովորաբար՝*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = s_{2n},$$

կստանանք՝

$$(-1)^{n-1}\frac{1}{(2\pi)^{2n}} \cdot s_{2n} \cdot x^{2n-2}$$

արդյունքը. եթե մուծենք Բեռնուլիի n-*րդ թիվը* [422]՝

$$B_n = \frac{2 \cdot (2n)!}{(2\pi)^{2n}} \cdot s_{2n}, \tag{38}$$

ապա այդ արդյունքը կարտագրենք այսպես՝

$$(-1)^{n-1}\cdot\frac{B_n}{2\cdot(2n)!}\cdot x^{2n-2},$$

Իսկ ինչ վերաբերում է վերջին գումարելիներին, որոնք պարունակում են $\dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{4k^2\pi^2}}$ արտադրիչները, որոնք դրական կանոնավոր կոտորակներ են, ապա, դրանք գումարելով, կստանանք այսպիսի անդամ՝

$$(-1)^m\cdot\tilde{\theta}\cdot\frac{B_{m+1}}{2(2m+2)!}\cdot x^{2m},$$

որտեղ $\tilde{\theta}$-ն նույնպես դրական կանոնավոր կոտորակ է։

Վերջնականապես f(x)-ի համար կստանանք այսպիսի արտահայտություն՝

$$f(x)=\frac{B_1}{2!}-\frac{B_2}{4!}x^2+\frac{B_3}{6!}x^4-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{B_m}{2m!}x^{2m-2}+$$
$$+(-1)^m\cdot\tilde{\theta}\cdot\frac{B_{m+1}}{(2m+2)!}x^{2m}\qquad(0<\tilde{\theta}<1)։$$

Տեղադրելով այս (36)-ում, ինտեգրենք անդամ առ անդամ։ Քանի որ՝

$$\int_{-\infty}^{0}e^{ax}x^{2n}dx=\int_{0}^{\infty}e^{-ax}x^{2n}dx=\frac{2n\,!}{a^{2n+1}}$$

և

$$\int_{-\infty}^{0}e^{ax}\cdot\tilde{\theta}\cdot x^{2m}\,dx=\theta\cdot\int_{-\infty}^{0}e^{ax}x^{2m}dx=\theta\cdot\frac{2m!}{a^{2m+1}}\qquad(0<\theta<1)^*,$$

ապա գտնում ենք՝

$$\omega(a)=\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{a}-\frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{a^3}+\frac{B_3}{5.6}\cdot\frac{1}{a^5}-\cdots+$$
$$+(-1)^{m-1}\frac{B_m}{(2m-1)2m}\cdot\frac{1}{a^{2m-1}}+$$
$$+(-1)^m\cdot\theta\cdot\frac{B_{m+1}}{(2m+1)(2m+2)}\cdot\frac{1}{a^{2m+1}}\qquad(0<\theta<1)։$$

---

* Ընթերցողի ուշադրությունը հրավիրում ենք այն հանգամանքի վրա, որ $\tilde{\theta}$-ն x-ից կախված է, իսկ θ-ն՝ ոչ։

Վերջապես, եթե (37)*-ում* ω(a)*-ի փոխարեն դնենք ստացած արտահայտությունը, ապա կհանգենք այսպիսի բանաձևի՝*

$$\log\Gamma(a)=\log\sqrt{2\pi}+\left(a-\frac{1}{2}\right)\log a-a+\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{a}-$$

$$-\frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{a^3}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{B}{(2m-1)\,2m}\cdot\frac{1}{a^{2m-1}}+$$

$$+(-1)^m\cdot\theta\cdot\frac{B_{m+1}}{(2m+1)(2m+2)}\frac{1}{a^{2m+1}}\qquad(0<\theta<1),\qquad(39)$$

որը կրում է Ստիրլինգի (J. Stirling) *անունը։*

Պարզագույն դեպքում, երբ m=0, *բանաձևն ստանում է այսպիսի տեսք՝*

$$\log\Gamma(a)=\log\sqrt{2\pi}+\left(a-\frac{1}{2}\right)\log a-a+\frac{\theta}{12a}\qquad(0<\theta<1),$$

որովհետև $B_1=\frac{1}{6}$*։ Այստեղ* a*-ն ընդունելով* n *բնական թվի հավասար (և երկու մասերին ավելացնելով* log n*), կստանանք մեզ արդեն ծանոթ* [393] *բանաձևը՝*

$$\log n!=\log\sqrt{2\pi}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\frac{\theta}{12n}\qquad(0<\theta<1)։$$

Եթե, դեն նետելով լրացուցիչ անդամը (որը պարունակում է θ *արտադրիչը), (39) բանաձևում անդամների շարքը շարունակենք մինչև անվերջություն, ապա կստացվի այսպես կոչված* Ստիրլինգի շարքը*։ Այդ շարքը տարամետ կլինի։ Իսկապես, շնորհիվ (38)-ի, Ստիրլինգի բանաձևի ընդհանուր անդամի բացարձակ մեծությունը՝*

$$\frac{B_n}{(2n-1)2n}\cdot\frac{1}{a^{2n-1}}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{(2n-2)!}{(2\pi a)^{2n-1}}\cdot s_{2n}\to\infty,$$

երբ n→∞*։*

Այնուամենայնիվ, այդ շարքի հատվածից, որը տրվում է (39) բանաձևով, կարելի է հաջողությամբ օգտվել մոտավոր հաշվումների համար։ Լրացուցիչ անդամի տեսքից երևում է, որ սխալը բացարձակ մեծությամբ ավելի փոքր է, քան դեն նետած անդամներից առաջինը։ Շարքի անդամները սկզբում արագ նվազում են, իսկ հետո նրանք աճում են՝ նույնիսկ մինչև անվերջություն. այսպիսով, ամենից ձեռնտու է շարքը դադարեցնել այն անդամի վրա, որը բացարձակ մեծությամբ ամենից փոքրն է։

Իհարկե, ֆիքսած a*-ի դեպքում այդ ճանապարհով չի կարելի կամայապես տված ճշգրտությամբ մոտավորություններ ստանալ։ Սակայն դրան կարելի է հասնել, եթե* a*-ն բավականաչափ մեծ վերցնենք։*

Մոտակա n°*-ներում, որպեսզի ընթերցողին հնարավորություն տանք*

ավելի խորը հասկանալու գործի էությունը, այդ տեսակ տարամետ շարքերի հարցը մենք կդիտարկենք ընդհանուր տեսակետից։

502. ԱՍԻՄՊՏՈՏԱԿԱՆ ՇԱՐՔԵՐ։ Եթե մի որոշ F(x) ֆունկցիա, որը որոշված է $x_0 \leqslant x$-երի դեպքում, հարկավոր է լինում դիտարկել x-ի մեծ արժեքների դեպքում, ապա հետաքրքրություն է ներկայացնում՝ գտնել իր կառուցվածքով պարզ այնպիսի S(x) ֆունկցիա, որ

$$\rho(x) = F(x) - S(x)$$

տարբերությունը ձգտի զրոյի, երբ $x \to \infty$։ Այդ ժամանակ բավականաչափ մեծ x-երի դեպքում կարելի է ցանկացած աստիճանի ճշգրտությամբ ընդունել $F(x) = S(x)$։ Ակներևաբար, այդ մոտավոր բանաձևն այնքան ավելի արժեքավոր է, որքան ավելի բարձր է $\rho(x)$ անվերջ փոքր տարբերության կարգը, երբ $x \to \infty$ $\left(\frac{1}{x}\text{-ի համեմատությամբ}\right)$։

Այն դեպքում, երբ F(x) ֆունկցիան թույլ է տալիս վերլուծում ըստ x-ի բացասական աստիճանների ($x_0 \leqslant x$-երի համար)՝

$$F(x) = A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} + \frac{A_{n+1}}{x^{n+1}} + \cdots,$$

ընդհատելով այն n-րդ անդամի վրա, այսինքն ընդունելով՝

$$S_n(x) = A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots + \frac{A_n}{x^n}, \quad \rho_n(x) = \frac{A_{n+1}}{x^{n+1}} + \cdots,$$

մենք կունենայինք՝

$$\lim_{x \to \infty} x^n \rho_n(x) = 0 \text{ կամ } \rho_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \tag{40}$$

այնպես որ $\rho_n(x)$ տարբերությունը կլիներ n-ից ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր*։

Սակայն նման վերլուծում չթույլատրող F(x) ֆունկցիաների համար էլ երբեմն հաջողվում է կառուցել այնպիսի (հնարավոր է և տարամետ) շարք՝

$$A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} + \frac{A_{n+1}}{x^{n+1}} + \cdots,$$

որ F(x) ֆունկցիայի և այդ շարքի n-րդ հատվածի՝ $S_n(x)$-ի միջև եղած $\rho_n(x)$ տարբերությունը ցանկացած, բայց ֆիքսած, n-ի դեպքում բավարարում է (40) պայմանին։ Այդպիսի դեպքերում շարքի մասին ասում

* Իրականում՝ առնվազն (n+1)-րդ կարգի։

են, որ նա տալիս է F(x) ֆունկցիայի ասիմպտոտական վերլուծումը (կամ ներկայացումը) և այդ փաստը գրում են այսպես՝

$$F(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{x^k},$$

Դրա իմաստը, կրկնում ենք, լոկ այն է, որ գրած շարքը սկզբնաղբյուր է հանդիսանում

$$F(x) \doteq A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

մոտավոր բանաձևերի, որոնց որակը բնութագրվում է (40) հավասարությամբ:

Բերենք ասիմպտոտական վերլուծման երկու պարզ օրինակ.

1) Դիցուք ($0<x$-երի համար)՝

$$F(x) = \int_x^{\infty} e^{x-t}\,\frac{dt}{t},$$

Մի քանի անգամ մասերով ինտեգրելով, հեշտ է ստանալ՝

$$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} + \rho_n(x),$$

որտեղ՝

$$\rho_n(x) = (-1)^n \cdot n! \int_x^{\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\,dt.$$

Քանի որ՝

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\,dt = -\left.\frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\right|_{t=x}^{t=\infty} - (n+1)\int_x^{\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+2}}\,dt < \frac{1}{x^{n+1}},$$

ապա՝

$$|\rho_n(x)| < \frac{n!}{x^{n+1}},$$

և (40) պայմանը բավարարվում է: Այսպիսով, F(x)-ի համար ստանում ենք ասիմպտոտական շարք՝

$$F(x) \sim \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} + \cdots$$

Միևնույն ժամանակ հեշտ է համոզվել, որ այդ շարքը տարամետ է, որովհետև նրա ընդհանուր անդամը $n\to\infty$ դեպքում ձգտում է ∞։

2) Այժմ ընդունենք ($0<x$-երի համար)՝

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^k}{x+k},$$

որտեղ $0<c<1$ (շարքը զուգամետ է)։

$x>k$-երի համար ունենք՝

$$\frac{1}{x+k}=\frac{1}{x}-\frac{k}{x^2}+\frac{k^2}{x^3}-\frac{k^3}{x^4}+\cdots,$$

իսկ երբ $k\geqslant x$, ապա այդ շարքը տարամետ է։ Այնուամենայնիվ, այդ շարքը ձևականորեն տեղադրելով $F(x)$ ֆունկցիան որոշող շարքի մեջ, միավորենք նման անդամները, կստանանք՝

$$\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\cdots+\frac{A_n}{x^n}+\cdots,$$

որտեղ

$$A_n=(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}k^{n-1}c^k\text{։}$$

Հեշտ է համոզվել, որ A_n գործակիցները որոշող շարքերը բոլորը զուգամետ են։ Բայց նախորդ շարքը բացահայտորեն տարամետ է, որովհետև՝

$$|A_n|\geqslant n^{n-1}c^n \quad \text{և} \quad \left|\frac{A_n}{x^n}\right|\geqslant\frac{n^{n-1}c^n}{x^n},$$

իսկ վերջինի արտահայտությունը $n\to\infty$ դեպքում ձգտում է ∞։

Ցույց տանք, սակայն, որ ստացված շարքը այնուամենայնիվ տալիս է $F(x)$ ֆունկցիայի ասիմպտոտական ներկայացումը։

Նրա n-րդ հատվածը կլինի՝

$$S_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{A_\nu}{x^\nu}=\sum_{k=1}^{\infty}c^k\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}k^{\nu-1}}{x^\nu}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[1+(-1)^{n+1}\frac{k^n}{x^n}\right]\frac{c^k}{x+k},$$

այնպես որ՝

$$|\rho_n(x)| = \frac{1}{x^n}\sum_{\kappa=1}^{\infty} k^n \frac{c^k}{x+k} \leqslant \frac{|A_{n+1}|}{x^{n+1}}$$

և (40) պայմանը դարձյալ բավարարվում է։

Վերադառնալով Ստիրլինգի շարքին՝

$$\log\Gamma(a)-\left(a-\frac{1}{2}\right)\log a-a \sim \mathrm{og}\sqrt{2\pi}+\frac{B_1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{a}- \\ -\frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{a^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n-1)\,2n}\cdot\frac{1}{a^{2n-1}}+\cdots \tag{41}$$

մենք այժմ կարող ենք ասել, որ նա տալիս է ձախ մասում գրված ֆունկցիայի ասիմպտոտական ներկայացումը։ Իսկապես, (39) բանաձևից երևում է, որ՝

$$\rho_{2n-1}(a)=\rho_{2n}(a)=(-1)^n\,\theta\cdot\frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\cdot\frac{1}{a^{2n+1}},$$

որտեղից՝

$$\rho_{2n}(a)=o\left(\frac{1}{a^{2n}}\right)։$$

Այսպիսի ասիմպտոտական շարքերը կարևոր դեր են խաղում դիֆերենցիալ հավասարումների տեսության և երկնային մեխանիկայում։

503. ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԱՍԻՄՊՏՈՏԱԿԱՆ ՇԱՐՔԵՐԻ ՀԵՏ։ Ամենից առաջ նկատենք, որ եթե $F(x)$ ֆունկցիան ընդհանրապես թույլ է տալիս ասիմպտոտական վերլուծում, ապա միայն մեկը։ Իսկապես, եթե լիներ՝

$$F(x)\sim\sum_{0}^{\infty}A_\nu x^{-\nu} \quad \text{և} \quad F(x)\sim\sum_{0}^{\infty}B_\nu x^{-\nu},$$

ապա ամեն մի n-ի դեպքում պետք է տեղի ունենար՝

$$\lim_{x\to\infty}\left[(A_0-B_0)+\frac{A_1-B_1}{x}+\cdots+\frac{A_n-B_n}{x^n}\right]x^n=0,$$

իսկ այդ հնարավոր կլիներ, եթե միայն՝

$$A_0=B_0,\ A_1=B_1,\ \cdots,\ A_n=B_n\ ։$$

Եթե

$$F(x)\sim\sum_{0}^{\infty}A_k x^{-k},\qquad G(x)\sim\sum_{0}^{\infty}B_k x^{-k}, \tag{42}$$

ապա, ակներևաբար, նաև՝

$$F(x) \pm G(x) \sim \sum_{0}^{\infty} (A_k \pm B_k)\, x^{-k}.$$

Այժմ ցույց տանք, որ F(x) · G(x) ֆունկցիայի ասիմպտոտական վերլուծումը կարելի է ստանալ (42) վերլուծումների ձևական բազմապատկման միջոցով։

Ցանկացած n-ի դեպքում ունենք՝

$$F(x) = A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

և

$$G(x) = B_0 + \frac{B_1}{x} + \cdots + \frac{B_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Իրարով բազմապատկելով, կստանանք՝

$$F(x) \cdot G(x) = C_0 + \frac{C_1}{x} + \cdots + \frac{C_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right),$$

որտեղ՝

$$C_m = \sum_{k=0}^{m} A_k B_{m-k}.$$

Այս էլ հավասարազոր է նրան, որ՝

$$F(x) \cdot G(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{-m},$$

որը և ենթակա էր ապացուցման։

Այնուհետև, եթե F(x) ֆունկցիան ունի

$$F(x) \sim \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k}{x^k}$$

ասիմպտոտական վերլուծումը, որն սկսվում է x^{-2} պարունակող անդամից*, ապա x-ից մինչև ∞ միջակայքում կարելի է այդ վերլուծումը ձևա-

* Այնպես որ F(x) ֆունկցիան ինքը $x \to \infty$ դեպքում երկրորդից ոչ ցածր կարգի անվերջ փոքր է։

կանորեն ինտեգրել անդամ առ անդամ, այսինքն՝ տեղի ունի նույնպիսի ասիմպտոտական վերլուծում՝

$$\int_x^{\infty} F(x)\,dx \sim \sum_{k=2}^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{A_k}{x^k}\,dx$$

կամ՝

$$\int_x^{\infty} F(x)\,dx \sim \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k}{(k-1)x^{k-1}}. \tag{43}$$

Ինչպես, ընդունելով

$$S_n(x) = \sum_{k=2}^{n} \frac{A_k}{x^k}, \qquad \rho_n(x) = F(x) - S_n(x),$$

բավականաչափ մեծ x-երի համար կունենանք՝

$$|\rho_n(x)| \cdot x^n < \varepsilon, \tag{44}$$

որտեղ $0<\varepsilon$-ը՝ նախապես տված կամայական թիվ է։

Այդ ժամանակ՝

$$\int_x^{\infty} F(x)\,dx = \int_x^{\infty} S_n(x)\,dx + \int_x^{\infty} \rho_n(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{A_k}{(k-1)x^{k-1}} + \int_x^{\infty} \rho_n(x)\,dx.$$

Սակայն, շնորհիվ (44)-ի, բավականաչափ մեծ x-երի համար՝

$$\left| \int_x^{\infty} \rho_n(x)\,dx \right| < \int_x^{\infty} |\rho_n(x)|\,dx < \varepsilon \int_x^{\infty} \frac{dx}{x^n} = \frac{\varepsilon}{(n-1)x^{n-1}},$$

այնպես որ՝

$$\lim_{x\to\infty} x^{n-1} \int_x^{\infty} \rho_n(x)\,dx = 0,$$

որով և ապացուցվում է (43)-ը։

Հետաքրքրական է նշել, որ ասիմպտոտական վերլուծման ձևական դիֆերենցումն անդամ առ անդամ, ընդհանրապես ասած, անթույլատրելի է։ Իբրև օրինակ, դիտարկենք $F(x)=e^{-x}\sin e^{x}$ ֆունկցիան։ Քանի որ ամեն մի n-ի դեպքում՝

$$\lim_{x\to\infty} F(x)\cdot x^{n}=0,$$

ապա $F(x)\sim 0$, այսինքն՝ $F(x)$ ֆունկցիայի ասիմպտոտական վերլուծումը բաղկացած է զրոներից։ Մինչդեռ $F'(x)=-e^{-x}\sin e^{x}+\cos e^{x}$ ածանցյալի համար այդպիսի վերլուծում ընդհանրապես հնարավոր չէ, որովհետև գոյություն չունի նույնիսկ $\lim\limits_{x\to\infty} F'(x)$ սահմանը։

Վերջապես, ենթադրելով, որ $F(x)$ ֆունկցիան թույլ է տալիս ասիմպտոտական վերլուծում առանց ազատ անդամի՝*

$$F(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty} A_{k}\, x^{-k},$$

ապացուցենք, որ կարելի է այն ձևականորեն պոտենցել։ Մենք դրանով ուզում ենք ասել որ $e^{F(x)}$ ֆունկցիայի ասիմպտոտական վերլուծումը կարելի է ստանալ, եթե

$$e^{F(x)}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}[F(x)]^{m}$$

շարքի մեջ $F(x)$-ը փոխարինենք իր վերլուծումով, ձևականորեն կատարենք աստիճան բարձրացումը և միավորենք նման անդամները։

Այդ նպատակով նշենք, որ (ցանկացած n-ի դեպքում)՝

$$x^{n}[e^{F(x)}-e^{S_{n}(x)}]=x^{n}e^{S_{n}(x)}[e^{\rho_{n}(x)}-1]=$$

$$=e^{S_{n}(x)}\cdot\frac{e^{\rho_{n}(x)}-1}{\rho_{n}(x)}\cdot x^{n}\rho_{n}(x)\to 0$$

երբ $x\to\infty$, այնպես որ՝

$$e^{F(x)}=e^{S_{n}(x)}+o\left(\frac{1}{x^{n}}\right)։$$

Մյուս կողմից՝

$$e^{S_{n}(x)}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[S_{n}(x)]^{k}}{k!}=1+\frac{A_{1}}{x}+\left[\frac{A_{1}^{2}}{2!}+\frac{A_{2}}{1!}\right]\frac{1}{x^{2}}+$$

* Այնպես որ $F(x)\to 0$, երբ $x\to\infty$։

$$+\left[\frac{A_1^3}{3!}+\frac{2A_1A_2}{2!}+\frac{A_3}{1!}\right]\frac{1}{x^3}+\cdots$$

$$\cdots+\left[\frac{A_1^n}{n!}+\frac{(n-1)A_1A_2+\cdots}{(n-1)!}+\cdots+\frac{A_n}{1!}\right]\frac{1}{x^n}+o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Այստեղից էլ ստանում ենք՝

$$e^{F(x)}\sim 1+\frac{A_1}{x}+\cdots+\left[\frac{A_1^n}{n!}+\cdots+\frac{A_n}{1!}\right]\frac{1}{x^n}+\cdots,$$

Եթե ստացված արդյունքը կիրառենք Ստիրլինգի (41) շարքի նկատմամբ, ապա, B_K գործակիցների փոխարեն տեղադրելով իրենց թվային արժեքները, Γ(a) ֆունկցիայի իր համար կստանանք այսպիսի վերլուծում՝

$$\frac{\Gamma(a)}{\sqrt{2\pi}\,e^{-a}\cdot a^{a-\frac{1}{2}}}\sim 1+\frac{1}{12a}+\frac{1}{288a^2}-\frac{139}{51840a^3}-\frac{571}{2488320a^4}+\cdots$$

504. ԷՅԼԵՐՅԱՆ ՀԱՍՏԱՏՈՒՆԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ։ Վերադառնանք (37) բանաձևին և այն դիֆերենցենք ըստ a-ի՝

$$D\log\Gamma(a)=\log a-\frac{1}{2a}+\omega'(a),$$

որտեղ՝

$$\omega'(a)=\int_{-\infty}^{0}xe^{ax}f(x)\,dx։$$

Նախկին հաշվումները կրկնելով, կստանանք՝

$$\omega'(a)=-\frac{B_1}{2}\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{B_2}{4}\cdot\frac{1}{a^4}-\cdots-(-1)^m\frac{B_m}{2m}\cdot\frac{1}{a^{2m}}+$$

$$+(-1)^{m+1}\theta'\frac{B_{m+1}}{2m+2}\cdot\frac{1}{a^{2m+2}}\quad(0<\theta'<1)։\qquad(45)$$

Այստեղից էլ հենց ստանում ենք հետևյալ ասիմպտոտական վերլուծումը՝

$$D\log\Gamma(a)-\log a+\frac{1}{2a}\sim-\frac{B_1}{2}\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{B_2}{4}\cdot\frac{1}{a^4}-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^n\frac{B_n}{2n}\cdot\frac{1}{a^{2n}}+\cdots$$

Ձևականորեն այս վերլուծումը կարող է ստացվել Ստիրլինգի շարքն, անդամ առ անդամ դիֆերենցելով։*

---

* *Այսպիսով, տվյալ դեպքում հնարավոր եղավ ասիմպտոտական վերլուծման անդամ առ անդամ դիֆերենցումը* [*հմմ. 503*]։

Ստացված (45) բանաձևից կարելի է հարմար եղանակ բխեցնել՝ էյլերյան C հաստատունը հաշվելու համար։

Գաուսի (24) բանաձևում a-ն հավասար ընդունելով k բնական թվի, կգտնենք՝

$$C=\int_0^1 \frac{1-t^{k-1}}{1-t}\,dt - D\log\Gamma(k).$$

Սակայն՝

$$\frac{1-t^{k-1}}{1-t}=1+t+\cdots+t^{k-2},$$

այնպես որ՝

$$\int_0^1 \frac{1-t^{k-1}}{1-t}\,dt=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k-1}.$$

Օգտագործելով (45) բանաձևը a=k դեպքում, վերջնականապես կստանանք՝

$$C=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k-1}-\log k+\frac{1}{2k}+\frac{1}{12k^2}-\frac{1}{120k^4}+$$

$$+\frac{1}{252k^6}-\frac{1}{240k^8}+\cdots+(-1)^n\frac{B_n}{2n}\cdot\frac{1}{k^{2n}}+(-1)^{n+1}\theta'\frac{B_{n+1}}{2n+2}\cdot\frac{1}{k^{2n+2}},$$

$$(0<\theta'<1)$$

Այս բանաձևով, վերցնելով $k=10$ և հաշվելով մինչև k^{12} պարունակող անդամը, Էյլերը C-ի արժեքը գտել է 15 թվանշանով՝

$$C=0{,}577\,215\,664\,901\,532\ldots$$

505. Γ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԼՈԳԱՐԻԹՄՆԵՐԻ ԱՂՅՈՒՍԱԿԻ ԿԱԶՄՈՒՄԸ։ Համառոտակի ցույց տանք այդ աղյուսակը կազմելու ուղին։

Վերադառնանք (26) բանաձևին, որը a-ն փոխարինելով $a+1$-ով, կարտագրենք այսպես՝

$$\frac{d\log\Gamma(1+a)}{da}=-C+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{a+k}\right).$$

Հաջորդաբար դիֆերենցելով, կստանանք բանաձև n-րդ ածանցյալի համար՝

$$\frac{d^n\log\Gamma(1+a)}{da^n}=(-1)^n(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(a+k)^n}$$

(ստացված շարքերի հավասարաչափ զուգամիտությունն արդարացնում է դիֆերենցումն անդամ առ անդամ)։

Այսպիսով, գտնում ենք Թեյլորի շարքի գործակիցները՝

$$\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n \log \Gamma(1+a)}{da^n}\right]_{a=0} = (-1)^n \frac{s_n}{n},$$

որտեղ՝

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}.$$

Այդ ժամանակ $|a|<1$ *դեպքում կունենանք՝*

$$\log \Gamma(1+a) = -Ca + \frac{1}{2} s_2 a^2 - \frac{1}{3} s_3 a^3 + \frac{1}{4} s_4 a^4 - \cdots.$$

Քանի որ s_K *թվերը (հատկապես մեծ* k-*երի համար), մոտ են 1-ին, ապա ձեռնտու է անդամ առ անդամ ավելացնել հետևյալ վերլուծումը (որը նույնպես օրինական է* $|a|<1$ *դեպքում)՝*

$$\log (1+a) = a - \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{3} a^3 - \frac{1}{4} a^4 + \cdots,$$

որը մեզ տալիս է՝

$$\text{og}\,\Gamma(1+a) =$$
$$= -\log(1+a) + (1-C)a + \frac{1}{2}(s_2-1)a^2 - \frac{1}{3}(s_3-1)a^3 + \cdots$$

Բազմապատկելով M *մոդուլով և նշանակելով՝*

$$M(1-C)=C_1, \quad \frac{1}{2}M(s_2-1)=C_2, \quad \frac{1}{3}M(s_3-1)+C_3, \cdots,$$

կստանանք՝

$$\log_{10}\Gamma(1+a) = -\log_{10}(1+a) + C_1 a + C_2 a^2 - C_3 a^3 - C_4 a^4 + \cdots \qquad (46)$$

Փոխարինելով a-*ն* $(-a)$-*ով, ստացած՝*

$$\log_{10}\Gamma(1-a) = -\log_{10}(1-a) - C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + C_4 a^4 + \cdots$$

վերլուծումը հանենք նախորդից։ Քանի որ լրացման բանաձևով՝

$$\Gamma(1-a)\Gamma(1+a) = \frac{a\pi}{\sin a\pi}$$

և՝

$$\log_{10}\Gamma(1-a) = -\log_{10}\Gamma(1+a) + \log_{10}\frac{a\pi}{\sin a\pi},$$

ապա կստանանք՝

$$\log_{10}\Gamma(1+a) = \frac{1}{2}\log_{10}\frac{a\pi}{\sin a\pi} - \frac{1}{2}\log_{10}\frac{1+a}{1-a} + C_1 a - C_3 a^3 - C_5 a^5 - \cdots \qquad (47)$$

Լեժանդրը տվել է C_n գործակիցների ($15 \geqslant n$-երի համար) արժեքները ու նրանց լոգարիթմները և (46), (47) բանաձևերի օգնությամբ հաշվել է $\Gamma(a)$-ի տասնորդական լոգարիթմները 1-ից մինչև 2՝ յուրաքանչյուր 0,001 արժեքից հետո, նախ 7, իսկ հետո 12 տասնորդական նիշերով։

Սրանով վերջացնելով «գամմա» ֆունկցիայի ուսումնասիրությունը, տեսնում ենք, որ, ելնելով նրա ներկայացումից a պարամետր պարունակող ինտեգրալի միջոցով, մենք ոչ միայն ծանոթացանք նրա խորը հատկությունների հետ, այլև սովորեցինք հաշվել այն։ Այդ նոր ֆունկցիան մեր կողմից նույն չափով է յուրացված, որ չափով և տարրական ֆունկցիաները։

ԼՐԱՑՈՒՄ

ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՏԵՍԱԿԵՏ ՍԱՀՄԱՆԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

506. ԱՆԱԼԻԶԻ ՄԵՋ ՀԱՆԴԻՊՈՂ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻ ԶԱՆԱԶԱՆ ՏԵՍԱԿՆԵՐ։ *Սահմանի գաղափարը ներթափանցում է անալիզի ամբողջ դասընթացը, բայց նրա տարբեր մասերում միանգամայն տարբեր ձևեր է ընդունում։*

Մենք սկսեցինք ամենապարզ դեպքի ուսումնասիրությունից՝ վարիանտայի սահմանից, որն անցնում է արժեքների համարակալված հաջորդականություն [22, 23]. *դրա համեմատ էլ մանրամասն զարգացրինք սահմանների տեսությունը* (I *գլուխ*)*։*

Այնուհետև սահմանի գաղափարն ընդհանրացրինք մեկ կամ մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի սահմանի դեպքի համար [52, 155]*։ *Սահմանային պրոցեսը բարդացավ, բայց ընդհանուր առմամբ պահպանեց իր բնույթը։*

Ինտեգրալ հաշիվը մեզ հանդեցրեց Ռիմանի և Դարբուի ինտեգրալային գումարների սահմանների դիտարկմանը [283, 284, 289]*։ Այստեղ սահմանային պրոցեսը կապվեց տվյալ միջակայքը մասերի տրոհելու հետ և, համեմատած առաջ ուսումնասիրած դեպքի հետ, արդեն նշանակալի յուրակերպություն ներկայացրեց։*

Այդ տիպի սահմաններին որոշ չափով հարում են այն սահմանները, որոնց մենք հանդիպել ենք X *գլխում, երբ տալիս էինք աղեղի երկարության* [*ներգծյալ բեկյալի պարագծի սահման*, 318], *հարթ պատկերի մակերեսի* [*ընդգրկվող և ընդգրկող ուղղանկյուն պատկերների մակերեսի սահման*, 327] *և նման այլ գաղափարների սահմանումը։*

---

* *Մենք շարունակ նկատի ունենք սահմանի սահմանումները «$\varepsilon - \delta$ լեզվով»։*

Պետք է ավելացնել, որ երրորդ հատորում ընթերցողը կհանդիպի այլ սահմանային գոյացումների ևս, որոնք ստացվում են այլ՝ վերը նշվածներից տարբեր սահմանային պրոցեսների հետևանքով։

Սահմանի վերոհիշյալ տարբեր տեսակները բոլորն էլ սկզբունքորեն կարող են բերվել վարիանտայի սահմանին։ *Այս միտքը մենք ընդգծել ենք ամբողջ շարադրման ընթացքում, սկզբում մտնելով մանրամասնությունների մեջ* [53, 156, 283], *իսկ այնուհետև արդեն սահմանափակվելով միայն հիշեցումով, որ սահմանի սահմանումը հնարավոր է արտահայտել նաև «հաջորդականությունների լեզվով»։ Իհարկե, բարդ սահմանային պրոցեսները վարիանտայի պարզ սահմանին բերելը ինքնին հետաքրքրություն է ներկայացնում։ Սակայն մեզ համար այդ կարևոր էր նաև այն տեսակետից, որ նա մեզ ազատում էր սահմանների տեսության տարրական թեորեմները ամեն անգամ նորից հաստատելու անհրաժեշտությունից։*

Թեև նման ճանապարհով վերականգնվում էլ է սահմանի մեզ հանդիպած բոլոր տեսակների միասնությունը, սակայն դրա համար փոփոխականի «անդամահատման» անհրաժեշտությունն ինքը, նրա արժեքների բազմությունից հատուկ համարակալված հաջորդականությունների առանձնացումը, անկասկած, իրենց՝ մեջ արհեստականության տարր են պարունակում։ Այնուամենայնիվ դա չի ստեղծում փոփոխականի սահմանի ընդհանուր սահմանում։

Այս լրացուցիչ պարագրաֆի նպատակն էլ հենց այն է, որպեսզի ստեղծենք սահմանի նկատմամբ ընդհանուր տեսակետ, որը որպես մասնավոր դեպքեր ընդգրկի սահմանի՝ անալիզի մեջ հանդիպող բոլոր տարբեր տեսակները *և նրա հիման վրա նշել սահմանների ընդհանուր տեսության կոնտուրները։*

Ստորև շարադրվելիք գաղափարներն առաջին անգամ արտահայտել է Ս. Օ. Շատունովսկին, իսկ հետո ամերիկացի գիտնականներ Մուրը (E. H. Moore) *և Սմիթը* (H. L. Smith). [*Նկատենք, ի միջի այլոց, որ նրանց պատկանող հարցադրումը ամենևին էլ միակ հնարավորը չէ։*]

507. ԿԱՐԳԱՎՈՐՅԱԼ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ (ԻՍԿԱԿԱՆ ԻՄԱՍՏՈՎ). Սահման ունեցող փոփոխականների վերևում ուսումնասիրված նմուշներն այն միտքն են թելադրում, թե որպեսզի

ընդհանրապես իմաստ ունենա խոսել փոփոխականի սահմանի մասին, նրա փոփոխության տիրույթը չպետք է «ամորֆ» մնա և պետք է որոշակի կերպով ուղղված կամ կարգավորված լինի։ Այդ կապակցությամբ մենք նախ ընդհանուր ձևով կորոշենք կարգավորյալ բազմություններին վերաբերող հիմնական գաղափարները։

Դիցուք ունենք $P = \{P\}$ բազմություն, որը բաղկացած է ցանկացած բնույթի P էլեմենտներից։ Եթե P, P′ մի որոշ զույգ տարբեր էլեմենտների համար համաձայնվել են համարել, որ նրանցից մեկը (օրինակ, P′-ը) հաջորդում է մյուսին (P-ին), ապա այդ նշանակում են այսպես՝ $P' \succ P$*, և ասում են, որ P, P′ զույգի համար կարգ է հաստատված։ Այն կանոնը, որով կարգ է հաստատվում P-ի տարբեր էլեմենտների ամեն տեսակ զույգերի կամ այդ զույգերից միայն մի քանիսի համար, համենայն դեպս պետք է ենթարկվի հետևյալ երկու պահանջներին՝

I) Եթե $P_1 \succ P_2$, ապա չի կարող պատահել, որ միաժամանակ $P_2 \succ P_1$.

II) Եթե $P_1 \succ P_2$ և $P_2 \succ P_3$, ապա անհրաժեշտորեն $P_1 \succ P_3$ [այսինքն «հաջորդում է» առնչությունն օժտված է փոխանցական (տրանզիտիվ) հատկությամբ]։

Եթե P-ից վերցրած տարբեր տարրերի բոլոր զույգերի համար որոշ կանոնով կարգ է հաստատված, պահպանելով I և II պահանջները, ապա P բազմությունը կոչվում է կարգավորյալ բազմություն (կամ, ավելի ճշգրիտ՝ իսկական իմաստով կարգավորյալ, ի տարբերություն ընդհանրացրած իմաստով կարգավորյալ բազմությունների, որոնք կդիտարկվեն հետևյալ n°-ում)։

Ահա կարգավորյալ բազմությունների օրինակներ՝

1) Իրական թվերի ամեն մի $\{x\}$ բազմություն բնականաբար կարգավորվում է, եթե այդ թվերը դասավորում ենք աճման կարգով ($x' \succ x$, երբ $x' > x$)** կամ նվազման կարգով ($x' \succ x$, երբ $x' < x$)։

---

* կամ այսպես՝ $P \prec P'$ և ասում են, P-ն նախորդում է P′-ին։
Ծանոթություն թարգմ. խմբագրի:

** Հենց այս հասարակ օրինակից ելնելով, սովորական է դարձել «հաջորդում է» առնչությունը նշանակել $\succ$ նշանով, որը նման է $>$ («մեծ է») նշանին։

Նույն օրինակը երկրաչափական ձևով կարելի է ներկայացնել այսպես՝ հորիզոնական ուղիղի վրա գտնված կետերի ամեն մի բազմություն կարգավորվում է, եթե երկու կետերից հաջորդող համարենք աջակողմյանը (կամ՝ ձախակողմյանը)։

2) Այժմ դիտարկենք որևէ $\boldsymbol{M}=\{M(x, y)\}$ *բազմություն, որը բաղկացած է երկչափ (թվաբանական) տարածության որոշ* $M(x, y)$ *կետերից։ Այս բազմությունը կարելի է կարգավորել, ասենք, հետևյալ ձևով՝*

$M'(x', y') \succ M(x, y)$, *եթե* $x > x'$, *իսկ* $x = x'$ *դեպքում, եթե* $y > y'$։

Այս բոլոր դեպքերում էլ հեշտ է ստուգել I և II պահանջների պահպանումը։

Որպեսզի հեշտացնենք մտցրած գաղափարի օգտագործումը փոփոխականի սահմանի դիտարկման ժամանակ, մենք լրացուցիչ կերպով ենթադրելու ենք, որ դիտարկվող $\boldsymbol{P}$ բազմության մեջ չկա «վերջին» էլեմենտ *(որը հաջորդեր մնացած բոլոր էլեմենտներին)։ Այսպիսով, ինչպիսի* P *էլեմենտ էլ վերցնենք* $\boldsymbol{P}$*-ից, միշտ կգտնվի մի* P' *էլեմենտ, որ կհաջորդի* P*-ին՝* $P' \succ P$։

508. ԿԱՐԳԱՎՈՐՅԱԼ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ (ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՐԱԾ ԻՄԱՍՏՈՎ)։ Ինչպես հետագայում կտեսնենք, ավելի հաճախ հարկ է լինում հրաժարվել այն ենթադրություններից, որ դիտարկվող $\boldsymbol{P}$ *բազմության էլեմենտներից յուրաքանչյուր զույգի համար կարգ է հաստատված, և բավականանալ նրանով, որ այդպիսի կարգ հաստատված է (պահպանելով I և II պայմանները) միայն որոշ զույգերի համար։ Նման դեպքերում, սակայն, մենք կպահանջենք այսպիսի պայմանի կատարում ևս՝*

III $\boldsymbol{P}$ բազմության P, P' ցանկացած երկու էլեմենտի համար այդ բազմության մեջ կգտնվի P'' էլեմենտ, որը (կհաջորդի այդ երկուսին էլ՝

$$P'' \succ P, \quad P'' \succ P'.$$

[Այդ դեպքում նշանակություն չունի, թե P *և* P' *էլեմենտների՝ իրենց համար կարգ հաստատված է, թե ոչ։]*

Այս պայմանն ինքն ըստ ինքյան արդեն անհնարին է դարձնում վերջին էլեմենտի գոյությունը $\boldsymbol{P}$*-ի մեջ։*

Հեշտ է տեսնել, որ ամեն մի իսկական իմաստով կարգավորյալ բազմություն, եթե միայն նա զուրկ է վերջին էլեմենտից, անհրաժեշտաբեն բավարարում է նաև III պայմանին։ Ի-

րոք, ինչպիսին էլ լինեն *P*-ից վերցրած P և P′ էլեմենտները, նրանց համար տվյալ դեպքում կարգ հաստատված է. դիցուք, ասենք, $P' \succ P$։ Քանի որ P′-ը վերջին էլեմենտ չէ, ապա *P*-ի մեջ կգտնվի P′-ին հաջորդող P″ էլեմենտ. $\succ$ առնչության փոխանցական հատկության շնորհիվ միաժամանակ և $P'' \succ P$, որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Եթե *P* բազմության էլեմենտների գոնե որոշ զույգերի համար կարգ է հաստատված՝ I, II, III բոլոր երեք պայմանների պահպանմամբ, ապա *P* բազմությունը նույնպես կանվանենք կարգավորյալ բազմություն (ընդհանրացրած իմաստով)*։

Այժմ բերենք այդպիսի բազմությունների օրինակներ։

3) Դիտարկենք x իրական թվերի *X* բազմություն, որի համար a-ն խտացման կետ է ծառայում [52]. դիցուք ինքը a կետը *X*-ին չի պատկանում։

Պայմանավորվենք համարել, որ

$$x' \succ x, \quad \text{եթե} \quad |x'-a| < |x-a|,$$

այնպես որ հաջորդող կլինի արժեքներից այն, որն ավելի մոտ է a-ին։

I, II պահանջները բացահայտորեն պահպանված են։ Եթե *X*-ի մեջ չեն պատահում x-ի այնպիսի արժեքներ, որոնք հավասարապես են հեռացած a-ից, բայց նրա տարբեր կողմերում են գտնվում, ապա *X* բազմությունը կարգավորված կլինի իսկական իմաստով։ Բայց եթե արժեքների այդպիսի զույգեր կան, ապա նրանց համար մեր համաձայնությամբ, ակներևորեն, կարգ չի լինի հաստատված։

Այժմ ստուգենք III պահանջի կատարումը։ *X*-ից վերցնենք ցանկացած x և x′ թվեր։ Քանի որ նրանք երկուսն էլ a-ից տարբեր են և a-ն *X*-ի համար խտացման կետ է ծառայում, ապա *X*-ի մեջ անհրաժեշտորեն կգտնվի այնպիսի x″, որն a-ին ավելի մոտ կլինի, քան x-ը և x′-ը. այդ դեպքում $x'' \succ x$ և $x'' \succ x'$։

Այսպիսով, *X* բազմությունը համենայն դեպս ընդհանրացրած իմաստով կարգավորված է։

---

* Ասում են նաև «մասամբ կարգավորյալ», «կիսակարգավորյալ» կամ «ոչ լրիվ կարգավորյալ» բազմություններ։

4) Դիցուք X-ը թվային մի բազմություն է, որի համար ∞-ը խտացման կետ է։ Այն կարելի է կարգավորել հետևյալ պայմանի օգնությամբ.

$$x' \succ x, \quad \text{եթե} \quad |x'| > |x|.$$

Բոլոր I, II, III պահանջները կատարված են։ Եթե X-ի մեջ չկան x-ի այնպիսի զույգ արժեքներ, որոնք միայն նշաններով են տարբերվում, ապա բազմությունը կարգավորված կլինի իսկական իմաստով, իսկ եթե այդպիսի զույգեր կան, ապա նրանց համար կարգ չի հաստատված, և կարգավորվածության մասին կարելի է խոսել միայն ընդհանրացված իմաստով։

5) Այժմ վերցնենք երկչափ տարածության կետերի ցանկացած $M=\{M(x, y)\}$ բազմություն $M_0(a, b)$ խտացման կետով [153]։ Ենթադրենք, թե a և b երկու կոորդինատն էլ վերջավոր են. դիցուք M_0 կետը M բազմությանը չի պատկանում։

Համաձայնություն կայացնենք, որ

$$M'(x', y') \succ M(x, y),$$

եթե

$$\max(|x'-a|, |y'-b|) < \max(|x-a|, |y-b|).$$

Այստեղ էլ, 3)-ի նման, բոլոր I, II, III պահանջները կատարված են։ Ստուգենք, օրինակ, III պայմանը։ Դիցուք M-ից տված են $M(x, y)$ և $M'(x', y')$ երկու կետեր. քանի որ դրանք երկուսն էլ M_0-ից տարբեր են, ապա

$$\sigma=\max(|x-a|, |y-b|)>0$$

և

$$\sigma'=\max(|x'-a|, |y'-b|)>0.$$

Դիցուք δ-ն այդ թվերից փոքրն է. քանի որ M_0-ն M-ի համար խտացման կետ է, ապա M-ի մեջ կգտնվի այնպիսի $M''(x'', y'')$ կետ, որ $|x''-a| < \delta$ և $|y''-b| < \delta$։ Բայց այդ դեպքում

$$M'' \succ M \text{ և } M'' \succ M',$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։ Այսպիսով, կայացրած համաձայնությամբ M բազմությունն իրոք կարգավորված է (ընդհանրացված իմաստով)։

Եթե M_0 կետի կոորդինատներից որևէ մեկը, ասենք a-ն,

հավասար է ∞, կարելի է ձևափոխել մեր համաձայնությունը, օրինակ, փոխարինելով $|x - a|$-ն $\frac{1}{|x|}$-ով, և այլն։

6) Որպես օրինակ բերենք M բազմություն, որի մասին հենց քիչ առաջ խոսվեց, կարգավորման այլ եղանակներ ևս (a-ն և b-ն համարում ենք վերջավոր)։

Կարելի է պայմանավորվել այսպես՝

$$M'(x', y') \succ M(x, y),$$

եթե

$$|x'-a| + |y'-b| < |x-a| + |y-b|,$$

կամ թե այսպես՝

$$M'(x', y') \succ M(x, y),$$

եթե

$$\sqrt{(x'-a)^2 + (y'-b)^2} < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\text{։}$$

7) Դիցուք M-ը՝ (m, n) «ամբողջաթիվ» կետերի բազմություն է, որտեղ m-ը և n-ը բնական թվեր են, և $(+\infty, +\infty)$-ը՝ խտացման կետն է։ Համաձայն 5)-ին, այս բազմությունը կարելի է կարգավորել հետևյալ կանոնով՝

$$(m', n') \succ (m, n), \text{ եթե } \min(m', n') > \min(m, n)\text{։}$$

Ավելի պարզ է կարգավորման այսպիսի օրենքը՝

$$(m', n') \succ (m, n), \text{ եթե } m' > m \text{ և } n' > n\text{։}$$

Այստեղ էլ I, II, III պահանջները պահպանված են։

8) Այժմ վերցնենք օրինակներ այլ բնագավառից։ Դիցուք դիտարկվող R բազմության էլեմենտներն են հանդիսանում տըրված $[a, b]$ միջակայքի ամեն տեսակի R տրոհումներ վերջավոր թվով մասերի, հետևյալ բաժանման կետերի օգնությամբ

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b\text{։}$$

Եթե այդ մասերի երկարություններից մեծագույնը նշանակենք λ-ով, ապա բնական կլինի զանազան R տրոհումները դասավորել λ-ի նվազման կարգով. տրոհումներից այն կլինի հաջորդող, որին համապատասխանում է ավելի փոքր λ։

I, II պայմանների պահպանումն ակներև է։ Հեշտությամբ ստուգվում է նաև III պայմանը. ինչպիսին էլ լինեն երկու տրոհումները, որոնք համապատասխանում են λ և λ' արժեքներին,

միշտ կարելի է իրականացնել ավելի փոքր մասերի տրոհում ևս, որին կհամապատասխանի λ'' թիվ՝ ավելի փոքր և՛ λ-ից, և՛ λ'-ից։

Այսպիսով, $\boldsymbol{R}$ բազմությունը ստացվում է կարգավորված, բայց միայն ընդհանրացրած իմաստով. միևնույն λ ունեցող երկու տարբեր տրոհումների համար կարգ չի հաստատված։

9) Քիչ առաջ դիտարկված $\boldsymbol{R}=\{R\}$ բազմության համար կարելի է կարգ հաստատել այլ համաձայնությամբ՝ R' տրոհումը հաջորդում է R տրոհմանը, եթե այն ստացվել է R-ից՝ նրա բաժանման կետերին նոր բաժանման կետեր ավելացնելով։ Այս նույնպես բերում է միայն ընդհանրացրած իմաստով կարգավորման. կարգ չի հաստատված, օրինակ, այնպիսի R և R' երկու տրոհումների համար, որոնք ամենուրեք տարբեր բաժանման կետեր ունեն։

509. ԿԱՐԳԱՎՈՐՅԱԼ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԵՎ ՆՐԱ ՍԱՀՄԱՆԸ։ Այժմ դիտարկենք մի x փոփոխական, որի փոփոխության տիրույթն է $\boldsymbol{X}$։ Կարող ենք պատկերացնել, որ անմիջականորեն այդ $\boldsymbol{X}$ տիրույթը կարգավորված է (իսկական կամ ընդհանրացրած իմաստով) կամ, ավելի ընդհանրորեն, որ $\boldsymbol{X}$-ից վերցրած x-ի բոլոր արժեքները միարժեք համապատասխանության մեջ են դրված մի ինչ որ, ցանկացած բնույթի առարկաներից կազմված, $\boldsymbol{P}=\{P\}$ կարգավորյալ բազմության P էլեմենտների հետ։ Այդ դեպքում ինքը x փոփոխականը ևս կոչվում է *կարգավորյալ փոփոխական*։

$\boldsymbol{P}$-ի հետ համապատասխանորեն կարգավորվում է նաև $x=x_P$ արժեքների բազմությունը. այն է՝ համարում են, որ

$$x_{P'} \succ x_P, \quad \text{եթե} \quad P' \succ P \quad (\boldsymbol{P}\text{-ի մեջ})։$$

Այս՝ ընդհանուր ձևով վերարտադրումն է այն բանի, որ մենք ունեինք x_n *վարիանտայի* համար, որի արժեքները համապատասխանության մեջ էին դրվում բնական շարքի թվերի՝ «համարների» հետ և դասավորվում էին նրանց աճման կարգով՝

$$x_{n'} \succ x_n, \quad \text{եթե} \quad n' > n։$$

Կարողանալով տարբերել $\boldsymbol{P}$ բազմության P էլեմենտները, մենք տարբերում ենք նաև մեր $x=x_P$ փոփոխականի արժեքներն այդ P «նշանիկների» միջոցով։ Այս պայմաններում մենք թույլ ենք տալիս (ինչպես և վարիանտայի դեպքում) նաև հա-

վառար արժեքների հնարավորություն տարբեր «նշանիկներով»։

Ընդգծենք առանձնապես, որ խոսելով կարգավորյալ փոփոխականի մասին, ըստ էության դրա հետ չենք կապում ոչ մի պատկերացում նրա արժեքների դասավորման վերաբերյալ՝ տարածության մեջ կամ ժամանակի ընթացքում։ Հաջորդ արժեքը չի գրավում «ավելի հեռու տեղ», քան նախորդը. հաջորդ արժեքը փոփոխականը չի ընդունում «ավելի ուշ», քան նախորդը, և այլն։ Սակայն եթե, այնուամենայնիվ, սովորաբար թույլ են տալիս գործածել այնպիսի արտահայտություններ, ինչպես «սկսած մի որոշ տեղից» կամ «փոփոխման մի որոշ պահից սկսած» և դրանց նմանները, ապա այդ արվում է միայն լեզվի պատկերավորության համար։

$x = x_p$ *կարգավորյալ փոփոխականի սահմանի (կամ, ինչպես երբեմն ասում են,* $\{x_p\}$ *կարգավորյալ բազմության սահմանի) սահմանումը միանգամայն համանման է վարիանտայի (կամ հաջորդականության) սահմանի սահմանմանը՝*

$x = x_p$ փոփոխականն ունի a վերջավոր սահման, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար կգտնվի *P*-ից վերցրած այնպիսի P_ε «նշանիկ», որ $P_\varepsilon \prec$ բոլոր P-երի համար համապատասխան $x = x_p$ արժեքները բավարարում են

$$|x-a| = |x_p-a| < \varepsilon$$

անհավասարությանը։

n° 23-*ի սահմանման մեջ* P_ε-*ի դերը, ակներևորեն, խաղում էր* N_ε-*ը. չէ որ* $n \succ N_\varepsilon$ *առնչությունը հավասարազոր է* $n > N_\varepsilon$ *անհավասարությանը։*

Ճիշտ այդպես էլ տրվում է և անվերջ սահմանի սահմանումը՝

$x = x_p$ փոփոխականն ունի ∞ սահման, եթե յուրաքանչյուր $E > 0$ թվի համար կգտնվի *P*-ից վերցրած այնպիսի P_E «նշանիկ», որ

$$|x| = |x_p| > E,$$

հենց որ $P \succ P_E$։

Հեշտ է վերաձևակերպել վերջին սահմանումն այն դեպքի համար, երբ խոսքը վերաբերում է որոշակի նշան ունեցող անվերջության՝ $+\infty$ *կամ* $-\infty$*։*

Այդ դեպքում գրում են, ինչպես սովորաբար՝

$$\lim x=a\,(\infty, +\infty, -\infty) \text{ կամ } x\to a\,(\infty, +\infty, -\infty).$$

Դիտենք օրինակներ։

510. *ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ։* *Սկսենք այնպիսի x փոփոխականի օրինակից, որի փոփոխման X տիրույթն անմիջականորեն կարգավորված է։*

1) Դիցուք $X=\{x\}$*-ը իրական թվերի ցանկացած բազմություն է, a խտացման կետով, որը կարգավորված է* $|x-a|$*-ի նվազման կարգով [տես n° 508, 3) օրինակը]։ Ակներևորեն, համապատասխան x փոփոխականն ունի a սահմանը. ինչպիսին էլ* $\varepsilon>0$ *վերցնելու լինենք, X-ի մեջ կգտնվի a-ից տարբեր այնպիսի* x_ε*, որ* $|x_\varepsilon-a|<\varepsilon$*, իսկ այդ դեպքում* x_ε*-ից x-երի համար առավել ևս* $|x-a|<\varepsilon$*։*

Համանման ձևով, եթե $X=\{x\}$*-ի համար խտացման կետ է* ∞ *և այդ բազմությունը կարգավորենք ըստ* $|x|$*-ի աճման [տես օրինակ 4) n° 508], ապա* $x\to\infty$*։*

Սակայն հաճախ պատահում են դեպքեր, երբ փոփոխականի արժեքները համապատասխանության մեջ են դրված որևէ P կարգավորյալ բազմության P «նշանիկների» հետ։ Ստորև բերվող այդ տեսակի օրինակներն առանձին կարևորություն ունեն՝ նրանք ցույց են տալիս, որ մեր դասընթացի մեջ ուսումնասիրված սահմանների զանազան տեսակներն իրոք կարող են դիտարկվել որպես վերևում շարադրված ընդհանուր սահմանման մասնավոր իրականացումներ։

2) Դիտարկենք ֆունկցիայի սահմանի գաղափարը [52]

$$\lim_{x\to a} f(x)=A, \tag{1}$$

սահմանափակվելով, պարզության համար, a-ի և A-ի վերջավոր լինելու դեպքով։

Դիցուք f(x) ֆունկցիան որոշված է $X=\{x\}$ *տիրույթում, որի համար խտացման կետ է a-ն, ինքը՝ a-ի արժեքը X-ի մեջ չի մտնում կամ, առնվազն, հաշվի չի առնվում (1) սահմանը ո-*

րոշելու դեպքում։ Այստեղ այդ ֆունկցիան հենց այն փոփոխականն է, որի սահմանի մասին խոսվում է, իսկ x-ը P «նշանիկի» դերն է խաղում։ Պայմանավորվենք $x \to a$ ցուցումը հասկանալ այն իմաստով, որ x-ի փոփոխության X տիրույթը կարգավորված է ըստ $|x-a|$-ի նվազման [508, *3)*]։ Այդ դեպքում համապատասխան կերպով կարգավորվում է նաև ֆունկցիայի արժեքների $\{f(x)\}$ բազմությունը, և (1) հավասարությունը, համաձայն ընդհանուր սահմանումի, որոշակի իմաստ է ձեռք բերում։ Այն է՝ այդ նշանակում է, որ տրված $\varepsilon>0$ թվով միշտ կգտնվի x-ի այնպիսի արժեք X-ից, որ

$$|f(x)-A|<\varepsilon \tag{2}$$

անհավասարությունը բավարարվում է $x_\varepsilon \prec x$-երի համար, այսինքն հենց որ $|x-a|<|x_\varepsilon-a|$։

Ընդունելով $|x_\varepsilon-a|=\delta$, վերջին պայմանը կարելի է գրել այսպես՝ $|x-a|<\delta$։ Հակադարձաբար, եթե (2) անհավասարությունը տեղի ունի $|x-a|<\delta$ դեպքում, ապա x_ε-ը վերցնելով $|x_\varepsilon-a|<\delta$ պայմանով, կարելի է պնդել, որ (2)-ը բավարարում է $x_\varepsilon \prec x$-երի համար։ Այսպիսով ֆունկցիայի սահմանի նոր սահմանումը հավասարազոր է նախկինին [52]։

3) Երկու փոփոխականների ֆունկցիայի սահմանի

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A \tag{3}$$

սահմանումը կարելի է արտահայտել կարգավորյալ փոփոխականի տերմիններով միանգամայն համանման ձևով։

Դիցուք $f(M)=f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է $\mathcal{M}=\{M(x, y)\}$ տիրույթում, որի համար $M_0(a, b)$-ն խտացման կետ է. այդ կետն ինքը (3) հավասարությունը որոշելու ժամանակ հաշվի չի առնվում։ $\mathcal{M}$-ի $M(x, y)$ կետերը «նշանիկների» դեր են խաղում։ Կարգավորելով $\mathcal{M}$ բազմությունն այնպես, ինչպես այդ արված է n° **508**, *5)*-ում (հենց այդ իմաստով էլ պայմանավորվում ենք հասկանալ $M \to M_0$ կամ $x \to a$, $y \to b$ ցուցումը), դրանով իսկ կարգավորում ենք նաև ֆունկցիայի արժեքների $\{f(M)\}=\{f(x, y)\}$ բազմությունը։ Այդ դեպքում (3) հավասարությունն իմաստ է ձեռք բերում՝ համաձայն կարգավորյալ փոփոխականի սահմանի ընդհանուր սահմանումին։

Այստեղ ևս անմիջապես պարզ է, որ (3) հավասարության նոր ըմբռնումը հավասարազոր է նախկինին [155]։

Սահմանի սահմանումը, ըստ էության, միևնույնը կմնա, եթե 508, 5)-ում ցույց տրված $M=\{M(x, y)\}$ բազմության կարգավորման օրենքի փոխարեն, հիմքում դնենք 6)-ում բերված կանոնները։

4) m և n երկու բնական նշիչներից կախված $x_{m,n}$ փոփոխականի համար

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} x_{m,n}=A$$

սահմանի գաղափարը կառուցվում է (m, n) զույգերի կարգավորման այսպիսի օրենքի վրա՝

$$(m', n') \succ (m, n), \quad \text{եթե} \quad \min(m', n') > \min(m, n)$$

[տես 508, 7)]։ Այդ համընկնում է այն սահմանումի հետ, որի մասին խոսք եղավ n° 155-ում։

Նույն արդյունքը կստացվեր, եթե ելնեինք նաև ավելի պարզ, նույնպես 7)-ում հիշատակված, կարգավորման կանոնից՝

$$(m', n') \succ (m, n), \quad \text{եթե} \quad m'>m,\ n'>n.$$

Բոլոր ասածների տարածումը մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաների դեպքի վրա դժվարություն չի ներկայացնում։

5) Դիմենք, վերջապես, [a, b] միջակայքում տրված $f(x)$ սահմանափակ ֆունկցիայի համար Ռ ի մ ա ն ի և Դ ա ր բ ու ի գումարների սահմանի հարցին։ Հիշված գումարները կապված են [a, b] միջակայքի R տրոհման հետ, որն առաջանում է բաժանման

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_n=b$$

կետերի օգնությամբ, ընդ որում սահմանային պրոցեսը դեկավարվում է նրանով, որ $\lambda\to 0$, որտեղ $\lambda=\max \Delta x_i$։ 508, 8)-ում մենք արդեն կարգավորել ենք միջակայքի ամեն տեսակի $\mathcal{R}=\{R\}$ տրոհումների բազմությունը՝ λ-ի նվազման կարգով։ Դրան համապատասխան կարգավորվում են նաև Դ ա ր բ ու ի գումարների արժեքները, s-ը և S-ը։

Ռիմանյան σ գումարը կառուցելու համար, բացի միջակայքը մասերի տրոհելուց, պետք է նաև յուրաքանչյուր մասում

մեկական կետ ընտրել։ Այսպիսով, Ռիմանյան գումարը բնութագրվում է ոչ միայն բաժանման կետերի, այլև միջանկյալ կետերի հ ա վ ա ք ո ւ յ թ ո վ. այդ հավաքույթները (իսկ դրանց հետ միասին նաև ռիմանյան գումարները) նույնպես կարելի է կարգավորել ըստ λ-ի նվազման:

Այժմ արդեն պարզ է, որ

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma,\quad \lim_{\lambda\to 0}s,\quad \lim_{\lambda\to 0}S$$

սահմանները ևս համարվում են այստեղ զարգացրած ընդհանուր սխեմային։

Զուգընթացաբար նկատենք, որ ըստ էության, նույն սահմանները կստացվեն բոլոր դեպքերում, եթե $\{\sigma\}$, $\{s\}$, $\{S\}$ բազմությունների կարգավորման հիմքում դրված լիներ և n° 508, 9) կանոնը։ Որպես վարժություն առաջարկվում է ընթերցողին ապացուցել այդ, հենվելով nn° 285-ի և 289-ի արդյունքների վրա։

Համանման ձևով սպառվում է այն սահմանների հարցը, որոնք դիտարկվել են աղեղի երկարությունը [318], հարթ պատկերի մակերեսը [327] և այլն որոշելու ժամանակ։

511. ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ։ Խոսելով (1) սահմանի մասին, մենք պայմանավորվեցինք միայն մեկ՝ միանգամայն որոշակի ձևով կարգավորել $X = \{x\}$ բազմությունը, իսկ դրա հետ միասին նաև ֆունկցիայի արժեքների $\{f(x)\}$ բազմությունը։ Այս վերջինիս սահմանի սահմանումը, որը կառուցված է x-ի՝ a-ին մոտենալու հիշյալ «ստանդարտ» օրենքի դիտարկման վրա, հավասարազոր դուրս եկավ այն սահմանումին, որը տրվել էր n° 52-ում «ε—δ լեզվով»։

Կարելի կլիներ, սակայն, հրաժարվել x-ի՝ a-ին մոտենալու օրենքի «ստանդարտացումից», թույլ տալով, որ x-ը փոփոխվի X բազմությունում կամ նրա այն մասերից ցանկացածում, որոնք a-ն պահպանում են որպես խտացման կետ և կարգավորված են կամայական օրենքով, բայց այնպես, որ a-ն հանդիսանում է նրանց սահմանը։ $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքներն ամեն անգամ կարգավորվում են՝ համապատասխան x-ի կարգավորման։

Այսպիսով, (1) հավասարությունը կարելի է հասկանալ և այսպես՝

Ինչ օրենքով էլ x անկախ փոփոխականը ձգտելիս լինի a սահմանին, $f(x)$ ֆունկցիան միշտ ձգտում է միևնույն A սահմանին։

Այս սահմանումը մոտենում է n° 53-ում «հաջորդականությունների լեզվով» տրված սահմանումին, միայն թե a-ին ձգտող x-ի արժեքների կամայական հաջորդականությունն այստեղ փոխարինված է ընդհանրապես կամայական կարգավորյալ բազմությամբ, որն ունի a սահմանը։

Մեր առաջ բերված սահմանումի և նախորդ n°-ում տրվածի համասարազորությունն ապացուցելու համար բավական է հաստատել, որ (1) սահմանի n° 52 իմաստով գոյությունից հետևում է վերը բանաձևված պնդումը։ Դիցուք թե ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար կգտնվի այնպիսի $\delta>0$, որ (2) անհավասարությունը բավարարվի, հենց որ $|x-a|<\delta$։ Ինչ օրենքով էլ x-ը ձգտելիս լինի a-ին, ըստ իրեն սահմանի սահմանման պետք է գոյություն ունենա այնպիսի $\bar{x}$ արժեք, որ $\bar{x}\to x$-երի համար կլինի $|x-a|<\delta$. այդ դեպքում x-ի նույն արժեքների համար կբավարարվի նաև (2) անհավասարությունը, այսինքն, իրոք, $f(x)\to A$։

Հենց այդպիսի դիտողություն էլ կարելի կլիներ անել նաև երկու (կամ մի քանի) փոփոխականների ֆունկցիաների նկատմամբ։

512. ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ։ *Դիմենք վերջապես, I գլխում վարիանտայի համար ապացուցված պնդումների տարածմանը կարգավորյալ փոփոխականի ընդհանուր դեպքի վրա։ Այդ տարածումը դժվար չէ իրականացնել, եթե քայլ առ քայլ հետևենք վարիանտայի համար սահմանների տեսության կառուցմանը։*

Ամեն անգամ, երբ այնտեղ խոսք էր լինում մի որոշ N-ից մեծ n համարներ ունեցող x_n արժեքների համար որևէ առընչության կատարման մասին, այստեղ հարկ կլինի խոսել նրա կատարման մասին P′-ին հաջորդող P «նշանիկներ» ունեցող $x=x_P$ արժեքների համար։

Օրինակ, ապացուցենք մի պնդում, որը համանման է 26, 1°-ին.

Եթե x_P կարգավորյալ փոփոխականը ձգտում է a սահմանին և $a>p$ $(a<q)$, ապա նաև $x_P>p$ $(x_P<q)$, առնվազն մի որոշ տեղից սկսած։

Վերցնելով $\varepsilon < a - p$ $(\varepsilon < q - a)$, *կգտնենք այնպիսի* P', *որ* $P' \succ P$*-երի համար կլինի* $|x_p - a| < \varepsilon$. *այդ նույն* x_p*-երի համար, ակներևորեն, նաև*

$$x_p > a - \varepsilon > p \quad (x_p < a + \varepsilon < q)։$$

Նույն ձևով ընդհանրացվում են նաև 26, 2°—4 պնդումները։ Վերջինս, սակայն, վերաձևակերպվում է այսպես՝ երբ x փոփոխականն ունի a (վերջավոր) սահման, ապա այն սահմանափակ է, առնվազն մի որոշ տեղից սկսած [*տես* 55, I, 4°]։

Սահմանի միակությունն ապացուցելիս [26, 5°] *հարկ է լինում յուրահատուկ ձևով օգտվել* III *պայմանից* [508]։

Ենթադրենք (հակասող ենթադրություն անելով), թե միաժամանակ $x_p \to a$, $x_p \to b$, *ընդ որում* $a < b$։ *Եթե վերցնենք* r*-ը* a*-ի և* b*-ի միջև, ապա մի կողմից՝* $x_p < r$, *երբ* $P \succ P'$, *իսկ մյուս կողմից էլ՝* $x_p > r$, *երբ* $P \succ P''$։ *Բայց հենց* III*-ի շնորհիվ կգտնվի այնպիսի* P *«նշանիկ», որ միանգամից և՛* $P \succ P'$ *և՛* $P \succ P''$. *այդ դեպքում միաժամանակ* $x_p < r$ *և* $x_p > r$, *որը և իրականացնում է պահանջվող հակասությունը։*

Կարգավորյալ փոփոխականի վրա հետևյալ կերպ է տարածվում մոնոտոն փոփոխականի սահմանումը՝ x_p փոփոխականը կոչվում է մոնոտոն աճող (կամ աճող լայն իմաստով), երբ $P' \succ P$ պայմանից միշտ հետևում է $x_{p'} > x_p$ (կամ $x_{p'} \geqslant x_p$) պայմանը։

Այդպիսի փոփոխականի օրինակ կարող է ծառայել մոնոտոն աճող f(x) *ֆունկցիան, եթե նրա արժեքները կարգավորված են ըստ* x *անկախ փոփոխականի աճման. կամ*

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k}$$

դրական կրկնակի շարքի $A_m^{(n)}$ *մասնակի գումարը, եթե համարենք*

$$A_{m'}^{(n')} > A_m^{(n)} \quad \text{երբ} \quad m' > m \ \text{և} \ n' > n։$$

Նույն ձևով էլ սահմանվում է մոնոտոն նվազող փոփոխականի գաղափարը։

Ուշադրություն առնելով Դարբուի s և S գումարների հայտնի հատկությունները [284], *եթե միայն միջակայքի տրոհումները կարգավորենք այնպես, ինչպես այդ արվեց* n° 508-*ի 9) օրինակում, ակներևորեն, ստորին s գումարը կհանդիսանա մոնոտոն աճող փոփոխական, իսկ վերին S գումարը՝ մոնոտոն նվազող։ Այդ չի կարելի անել, եթե կարգավորման այլ եղանակ վերցնենք* [508, *8*]։

Այժմ հեշտ է ընդհանրացնել մոնոտոն վարիանտայի վերաբերյալ n° 34 *թեորեման։*

Մոնոտոն աճող $x=x_p$ փոփոխականը միշտ սահման ունի։ Եթե փոփոխականը վերևից սահմանափակ է, ապա այդ սահմանը վերջավոր է, հակառակ դեպքում այն հավասար է $+\infty$։

Փոփոխականը սահմանափակ ենթադրելով, ընդունենք $a=\sup(x_p)$, *այնպես որ բոլոր* $x_p\leqslant a$ *և, մյուս կողմից, ինչպիսին էլ լինի* $\varepsilon>0$ *թիվը, կգտնվի այնպիսի* P_ε *«նշանիկ», որ* $x_{p_\varepsilon}>a-\varepsilon$։ *Բայց այդ դեպքում հենց որ* $P\succ P_\varepsilon$, *կունենանք* $x_p\geqslant x_{p_\varepsilon}$, *հետևապես, առավել ևս* $x_p>a-\varepsilon$։ *Այսպիսով,* $P_\varepsilon\prec P$-*երի համար բավարարվում է* $|x_p-a|$ *անհավասարությունը, որտեղից՝* $x_p\to a$։

Եթե x_p *փոփոխականը սահմանափակ չէ, ապա յուրաքանչյուր* $E>0$ *թվի համար կգտնվի այնպիսի* P_E, *որ* $x_{p_E}>E$։ *Այդ դեպքում* $P_E\prec P$-*երի համար առավել ևս* $x_p>E$, *այնպես որ* $x_p\to\infty$։ *Թեորեման ապացուցված է։*

Այս թեորեմայի մեջ, որպես մասնավոր դեպքեր, պարունակվում են մոնոտոն վարիանտայի սահմանի վերաբերյալ թեորեման n° 34-*ում և մոնոտոն ֆունկցիայի սահմանի գոյության վերաբերյալ թեորեման* n° 57-*ում, ինչպես և կրկնակի դրական շարքի զուգամիտության վերաբերյալ թեորեման* n° 381-*ում։ Այստեղ բերված դատողությունը, ինչպես պարզ է ընթերցողի համար, ընդհանուր ձևով միայն վերարտադրում է այն դատողությունները, որոնք արվել են նշված տեղերում մասնավոր թեորեմաները առանձին-առանձին ապացուցելիս։*

Նկատենք, որ ապացուցված ընդհանուր թեորեմայից միանգամից բխում է նաև Դարբուի s *և* S *գումարների համար վերջավոր սահմանների գոյությունը, բայց միայն եթե կանգնենք* n° 508 *9) կանոնի տեսակետի վրա. նրանց համընկնումը* 389-*ում դիտարկվածների հետ դեռևս ապացուցման ենթակա կլինեն։*

Որպես ավելի բարդ օրինակի, կանգ առնենք զուգամիտության սկզբունքի ապացուցման վրա [տես 39]։

Որպեսզի x_p կարգավորյալ փոփոխականը վերջավոր սահման ունենա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենա այնպիսի P_ε «ճշանիկ», որ

$$|x_p - x_{p'}| < \varepsilon$$

անհավասարությունը տեղի ունենա հենց որ $P \succ P_\varepsilon$ և $P' \succ P_\varepsilon$։

Վերաձևակերպելով n° 39-*ի դատողությունը, ամենից առաջ ցույց տանք այդ պայմանի անհրաժեշտությունը։ Եթե* $x_p \to a$, *ապա* $\frac{\varepsilon}{2}$ *թվի միջոցով կգտնվի այնպիսի* $\overline{P}$, *որ* $\overline{P} \prec P$-*երի համար կլինի* $|x_p - a| < \frac{\varepsilon}{2}$։ *Դիցուք* $P \succ \overline{P}$ *և* $P' \succ \overline{P}$, *այդ դեպքում միանգամից* $|x_p - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ *և* $|a - x_{p'}| < \frac{\varepsilon}{2}$, *այնպես որ* $|x_p - x_{p'}| < \varepsilon$. *այս դեպքում* P_ε-*ի փոխարեն կարելի է վերցնել* $\overline{P}$։

Բավարարությունն ապացուցելու համար ենթադրենք, թե պայմանը կատարված է։

Բոլոր իրական թվերի բազմությունում կատարենք հատույթ հետևյալ կանոնով. A *դասին վերագրենք յուրաքանչյուր իրական* α *թիվ, որի համար, սկսած մի որոշ տեղից՝*

$$x > \alpha.$$

A' *դասին վերագրենք բոլոր մնացած* α' *իրական թվերը։ Հեշտ է տեսնել, որ այդ կանոնն իրոք հատույթ է որոշում։ Մենք կանգ կառնենք միայն երկու դասերի անդատարկության ապացույցի վրա։*

Կամայական $\varepsilon > 0$ *դեպքում կգտնվի, ըստ ենթադրության,*

նրան համապատասխանող այնպիսի P_ε, որ հենց որ $P \succ P_\varepsilon$ և $P' \succ P_\varepsilon$, անմիջապես՝

$$|x_p - x_{p'}| < \varepsilon \quad \text{կամ} \quad x_{p'} - \varepsilon < x_p < x_{p'} + \varepsilon.$$

Այստեղից արդեն պարզ է, որ (երբ $P' \succ P_\varepsilon$) $x_{p'} - \varepsilon$-ը α թվերից մեկն է, իսկ $x_{p'} + \varepsilon$-ը՝ α' թվերից մեկը. վերջինս, փաստորեն, դարձյալ պահանջում է III պայմանի օգտագործումը. եթե $x_{p'} + \varepsilon$-ը α-ներից մեկը լիներ, այնպես որ $x_p > x_{p'} + \varepsilon$ անհավասարությունը տեղի ունենար, ասենք, $\bar{P} \prec P$-երի համար, ապա վերցնելով (III-ի շնորհիվ) P-ն այնպես, որ միանգամից լինի $P \succ P_\varepsilon$ և $P \succ \bar{P}$, կունենայինք միաժամանակ $x_p < x_{p'} + \varepsilon$ և $x_p > x_{p'} + \varepsilon$!

Ըստ Դեդեկինդի թեորեմայի [9] երկու դասերի միջև գոյություն ունի սահմանային a թիվ

$$\alpha \leqslant a \leqslant \alpha'.$$

Մասնավորապես, երբ $P' \succ P_\varepsilon$,

$$x_{p'} - \varepsilon \leqslant a \leqslant x_{p'} + \varepsilon, \text{ այսինքն } |x_{p'} - a| \leqslant \varepsilon,$$

որտեղից և հետևում է, որ $x_p \to a$.

Այս թեորեման իր հետաքրքիր կիրառումներն ունի։ Նա ոչ միայն իր մեջ պարունակում է, որպես մասնավոր դեպքեր, nn° 39-ի և 58-ի մեզ արդեն հայտնի թեորեմները, այլև նոր արդյունքների է բերում։ Այսպես, նրա օգնությամբ զուգամիտության սկզբունքը տարածվում է մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի վրա, կրկնակի շարքերի վրա և այլն։ Նա տալիս է նաև աղեղի ուղղելիության պայմանը [318]։ Թողնելով, որ ընթերցողն ինքը բանաձևի այդ պայմանը, ուշադրություն ենք հրավիրում այն հանգամանքի վրա, որ պայմանը բացահայտորեն կատարվում է աղեղի մասի համար, եթե կատարվում է ամբողջ աղեղի համար. այսպիսով, այժմ կարելի է երկու խոսքով ապացուցել այն պնդումը, որն առաջ մեզնից կպահանջեր երկար դատողություններ [319]։

513. ՄԻԱՏԵՍԱԿ ԿԱՐԳԱՎՈՐՎԱԾ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐ։ Ընդհանրացնելու համար այնպիսի պնդումներ, որոնց մեջ մասնակ-

ցում են միաժամանակ երկու (կամ մի քանի) փոփոխականներ, մտցնենք միատեսակ կարգավորված փոփոխականների գաղափարը։ Այսպես են կոչվում այնպիսի x և y երկու փոփոխականներ, որոնք կարող են կարգավորվել միևնույն $\mathcal{P}=\{P\}$ կարգավորված բազմության օգնությամբ, որի էլեմենտների հետ նրանց արժեքները միարժեք համապատասխանության մեջ են դրվում (համապատասխան կհամարենք նրանց այն x_P և y_P արժեքները, որոնք ունեն միատեսակ P «նշանիկներ»)։

Օրինակ, եթե ունենք f(x) և g(x) երկու ֆունկցիա միևնույն x անկախ փոփոխականից՝ փոփոխման X կարգավորյալ տիրույթով, ապա այդ ֆունկցիաները միատեսակ կարգավորված փոփոխականներ կլինեն։ Համապատասխան կլինեն նրանց այն արժեքները, որոնք որոշվում են x-ի միևնույն արժեքով (հենց այդ էլ խաղում է P «նշանիկի» դերը)։

Ահա ուրիշ օրինակ։ Դիցուք մի որոշ [a, b] միջակայքում որոշված f(x) և g(x) ֆունկցիաների համար կառուցված են ինտեգրալային գումարներ՝

$$\sigma=\sum_i f(\xi_i)\,\Delta x_i \quad \text{և} \quad \tau=\sum_i g(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Այստեղ, ակներևորեն, համապատասխան պետք է համարել այն գումարները, որոնք որոշվում են բաժանման x_i կետերի և միջանկյալ ξ_i կետերի միևնույն հավաքույթով. այդ հավաքույթը դիտարկվող դեպքում P «նշանիկի» դեր է խաղում. եթե դրանք կարգավորենք, իսկ դրանց հետ նաև σ, τ գումարները, ըստ $\lambda=\max\Delta x_i$-ի նվազման, ապա նորից կստանանք միատեսակ կարգավորված փոփոխականներ։

Այժմ x, y երկու փոփոխականները հավասարության նշաններով կամ թվաբանական գործողությունների նշաններով միացնելով, մենք այդ փոփոխականները միատեսակ կարգավորված կենթադրենք և կենթադրենք, որ խոսքը վերաբերում է միատեսակ «նշանիկներ» ունեցող x_P և y_P համապատասխան արժեքներին։ Այդ նշանիկների հետ վարվելով այնպես, ինչպես առաջ վարվում էինք վարիանտայի արժեքների n

համարների հետ, հեշտ է վերարտադրել վարիանտներին վերաբերող բոլոր նախկին դատողությունները։

Օրինակի համար ապացուցենք n° 29-*ի 2-րդ լեմման ընդհանրացնող այսպիսի առաջադրությունը՝*

Եթե x_p փոփոխականը սահմանափակ է (առնվազն մի որոշ տեղից սկսած), իսկ նրա հետ միատեսակ կարգավորված α_p փոփոխականը անվերջ փոքր է, ապա նրանց արտադրյալը ևս անվերջ փոքր կլինի։

Դիցուք ուրեմն

$$|x_p| \leqslant M,$$

ասենք, $P' \prec P$*-երի համար։ Վերցնելով կամավոր* $\varepsilon > 0$*, ըստ* $\frac{\varepsilon}{M}$ *թվի կգտնենք այնպիսի* P''*, որ* $P'' \prec P$*-երի համար կլինի*

$$|\alpha_p| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Համաձայն III *պայմանի, գոյություն ունի այնպիսի* P_0*, որ*

$$P_0 \succ P' \quad \textit{և} \quad P_0 \succ P''.$$

Եթե $P \succ P_0$*, ապա* (II*-ի շնորհիվ) միաժամանակ*

$$P \succ P' \quad \textit{և} \quad P \succ P'',$$

այնպես որ միանգամից տեղի են ունենում նախորդ երկու անհավասարությունները, իսկ այդ դեպքում

$$|x_p \alpha_p| = |x_p| \cdot |\alpha_p| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

որը և ապացուցում է մեր պնդումը։

Բերված օրինակներից հետո ընթերցողի համար պարզ է, որ սահմանների ամբողջ տեսությունը (ապացուցումների ընդհանուր գծերի պահպանումով) հեշտ փոխադրվում է կարգավորված փոփոխականների ընդհանուր դեպքի վրա։

514. ԿԱՐԳԱՎՈՐՈՒՄ ԹՎԱՅԻՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ. *Անալիզի մեջ սահմանի գաղափարի կիրառման մեզ հանդիպող բոլոր դեպքերում* x_p *փոփոխականի համար «նշանիչների»* $\boldsymbol{P} = \{P\}$ *բազմության կարգավորումը միատեսակ էր*

իրագործվում։ Ընդհանուր ձևով կարգավորման կիրառված եղանակը կարելի է նկարագրել հետևյալ կերպ։

$\mathcal{P}$-ի յուրաքանչյուր P էլեմենտին համապատասխանեցվում է մի որոշ t պարամետրի մի արժեք, ընդ որում շատ P-երի էլ կարող է համապատասխանել միևնույն t-ն. այդպիսի բոլոր P-երի բազմությունը նշանակենք $\mathcal{P}_t$։ Ենթադրենք, որ բոլոր $t>0$ և գոյություն ունեն t-ի ցանկացած չափով փոքր արժեքներ, որոնց համար $\mathcal{P}_t$-ն դատարկ չէ։

Այժմ պայմանավորվենք, որ երկու P էլեմենտներից հաջորդող համարվում է այն, որին համապատասխանում է t պարամետրի ավելի փոքր արժեք (այսինքն՝ P էլեմենտները դասավորենք «ըստ պարամետրի նվազման»)։ Երկու P էլեմենտների համար, որոնց համապատասխանում է միևնույն t-ն, այնպես որ նրանք մտնում են միևնույն $\mathcal{P}_t$ բազմության մեջ (ինչպես և նրանց համապատասխանող x արժեքների համար), կարգ չի սահմանվում։ Այդ դեպքում պահպանված կլինեն բոլոր I, II, III պայմանները։ Այդ ակներև է I-ի և II-ի նկատմամբ. ստուգենք III-ի կատարումը։ Դիցուք P-ն և P′-ը $\mathcal{P}$ բազմության ցանկացած երկու էլեմենտներն են, և նրանց համապատասխանում են պարամետրի t և t′ արժեքներ։ Ըստ ենթադրության, կգտնվի այնպիսի t″ արժեք, ավելի փոքր քան t-ն և t′-ը, որի համար $\mathcal{P}_{t''}$-ը դատարկ չէ։ Այդ դեպքում $\mathcal{P}_{t''}$-ի ցանկացած P″-ը կհաջորդի և P-ին, և P′-ին։

Ընթերցողը հեշտությամբ կստուգի, որ սահմանի գաղափարի օգտագործման իրեն հայտնի բոլոր դեպքերը հարմարվում են այս սխեմային։ n «նշանիկ» ունեցող x_n վարիանտայի համար կարելի է ընդունել $t=\frac{1}{n}$։ Եթե խոսքը վերաբերում է f(x) ֆունկցիային ու նրա սահմանին, երբ $x \to a$, ապա x «նշանիկների» բազմությունը կարգավորվում է ըստ $t=|x-a|$ պարամետրի նվազման։ Նույնպես և $f(M)=f(x, y)$ երկու փոփոխականների ֆունկցիայի դեպքում, որտեղ «նշանիկի» դերը կատարում է M(x, y) կետը, որոշելով ֆունկցիայի սահմանը, երբ $x \to a$, $y \to b$, կարելի է այդ պրոցեսը բնութագրել հետևյալ պարամետրներից ցանկացածի օգնությամբ՝

$$t_1=\max\{|x-a|, |y-b|\}, \quad t_2=|x-a|+|y-b|$$

կամ

$$t_2 = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Դարբուի

$$s = \sum_i m_i \Delta x_i \quad և \quad S = \sum_i M_i \Delta x_i$$

գումարների համար «նշանիկ» է ծառայում բաժանման կետերի հավաքույթը. Ռիմանի

$$\sigma = \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i$$

գումարներին անցնելու դեպքում դրան միանում է նաև ξ_i կետերի հավաքույթը։ Երկու դեպքում էլ այդ «նշանիկները» կարգավորվում են $t=\max \Delta x_i$ պարամետրի օգնությամբ։ Աղեղի երկարությունը որոշելու ժամանակ որպես պարամետր ծառայում է մասնակի աղեղների տրամագծերից մեծագույնը և այլն։

Բոլոր դեպքերում, երբ x փոփոխականի փոփոխության X տիրույթը կամ, ավելի ճշգրիտ, $P=\{P\}$ «նշանիկների» բազմությունը, կարգավորված են վերը նշված եղանակով թվային t պարամետրի օգնությամբ, ակներևաբար, սահմանի սահմանումը (սահմանափակվում ենք վերջավոր սահմանի դեպքով) կարող է տրվել հետևյալ ձևով՝ a թիվը հանդիսանում է x-ի սահմանը, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվին համապատասխանում է այնպիսի $\delta>0$, որ

$$|x-a| < \varepsilon$$

հենց որ նրան համապատասխանող պարամետրի արժեք $t<\delta$.

Թվային պարամետրի օգնությամբ կարգավորումից կօգտվենք նաև երրորդ հատորում։ Սակայն կարգավորման այս պարզ եղանակն այնուամենայնիվ չի ծածկում մաթեմատիկական անալիզի պահանջները նրա ավելի բարձր ճյուղերում։ Որպես այնպիսի կարգավորման օրինակ, որն ընդհանրապես չի կարելի իրագործել նման ճանապարհով (թվային պարամետրի կիրառումով), կարելի է բերել n° 508, 9) կանոնը. այդ կպարզվի հաջորդ n°-ի դիտարկումից։

515. ԲԵՐՈՒՄԸ ՎԱՐԻԱՆՏԱՅԻ։ Բոլոր կոնկրետ դեպքերում, երբ մենք հանդիպում էինք սահմանի գաղափարին, մինչև այժմ հնարավոր էր լինում որոշ իմաստով հարցը բերել վարիանտայի սահմանին։ Սահմանի գաղափարի «հաջորդականության լեզվով» արտահայտելու այդ հնարավորությունը կարևոր դեր էր խաղում նախորդ շարադրման մեջ։ Այժմ ուսումնասիրենք, թե ինչպես է գործը $x=x_p$ կարգավորված փոփոխականի ընդհանուր դեպքում։

Այդ նպատակով մտցնենք կոնֆինալ ենթահաջորդականության գաղափարը տվյալ $\mathcal{P}=\{p\}$ կարգավորված բազմության համար։ Այսպես կանվանենք $\mathcal{P}$-ից քաղված էլեմենտների

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots \tag{4}$$

հաջորդականությունը, եթե կատարված է հետևյալ պայմանը՝ ինչպիսի p' էլեմենտ էլ վերցնենք $\mathcal{P}$-ից, p_n էլեմենտները բավականաչափ մեծ համարների դեպքում հաջորդում են p'-ին՝

$$p_n \succ p' \quad (N<n\text{-երի համար})։$$

Եթե x փոփոխականը կարգավորված է $\mathcal{P}$-ից վերցրած p «նշանիկների» օգնությամբ, ապա, $\mathcal{P}$ բազմության համար (4) կոնֆինալ ենթահաջորդականության առկայության դեպքում, $\mathcal{X}$-ից քաղված x-ի արժեքների համապատասխան

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \tag{5}$$

հաջորդականությունը, որտեղ $x_n = x_{p_n}$, կանվանենք կոնֆինալ ենթահաջորդականություն $\mathcal{X}=\{x\}$-ի համար։

Ամենից առաջ հարց է ծագում գոնե մեկ նման (4) ենթահաջորդականության գոյության մասին, որը կոնֆինալ լինի $\mathcal{P}$-ի համար, կամ, որ միևնույնն է, (5) ենթահաջորդականության գոյության մասին, որը կոնֆինալ լինի $\mathcal{X}$-ի համար։

Պետք է ասել, որ բոլոր դեպքերում, երբ $\mathcal{P}$ բազմության կարգավորումն իրագործվում է որոշ t թվային պարամետրի օգնությամբ (ինչպես այդ բացատրված է նախորդ n°-ում), նման ենթահաջորդականության կառուցումը դժվարություն չի ներ-

կայացնում. վերցնելով $\{t_n\}$, $t_n \to 0$ *հաջորդականությունն այնպես, որ բոլոր* P_{t_n} *բազմությունները դատարկ չլինեն, ընտրենք յուրաքանչյուր* P_{t_n}*-ից* P_n*-ական էլեմենտ. դրանցից կազմված* $\{P_n\}$ *հաջորդականությունը, ակներևորեն, կլինի հենց որոնելին։*

Ընդհանուր դեպքում, սակայն, $P=\{P\}$ *կարգավորված բազմության համար կարող է և գոյություն չունենալ ոչ մի կոնֆինալ ենթահաջորդականություն։*

Օրինակի համար, դիտարկենք տվյալ [a, b] *միջակայքի վերջավոր թվով մասերի տրոհումների* $R=\{R\}$ *բազմությունը**, *ընդ որում այդ բազմության կարգավորումը, կատարենք ըստ* n° 508, *9) կանոնի։ Ենթադրենք, հակառակ ենթադրություն անելով, որ R-ի համար գոյություն ունի տրոհումների կոնֆինալ ենթահաջորդականություն՝*

$$R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$$

Յուրաքանչյուր R_n*-ին համապատասխանում է բաժանման կետերի վերջավոր հավաքույթ։ Հեշտ է կառուցել այնպիսի* $[a_1, b_1]$ $(a<a_1<b_1<b)$ *միջակայք, որպեսզի նրա մեջ* R_1*-ից ոչ մի բաժանման կետ չգտնվի։ Այնուհետև կառուցենք* $[a_2, b_2]$ $(a_1<a_2<b_2<b_1)$ *միջակայք, որն ազատ է* R_2*-ի բաժանման կետերից, և այլն՝ մինչև անվերջություն։* n*-րդ փուլում կառուցված կլինի* $[a_n, b_n]$ $(a_{n-1}<a_n<b_n<b_{n-1})$ *միջակայքը, որի մեջ* R_n *բաժանման կետեր չեն պարունակվի։ Եթե հոգ տանենք այդ դեպքում, որպեսզի* $b_n - a_n \to 0$, *ապա ըստ ներդրյալ միջակայքերի լեմմայի* [38], *կգտնվի միակ* $c=\lim a_n=\lim b_n$ *կետ, որը պատկանում է բոլոր* $[a_n, b_n]$ *միջակայքերին։ Այդ կետը, ակներևորեն, չի համընկնում ոչ մի* R_n*-ի ոչ մի բաժանման կետի հետ։ Եթե վերցնենք այժմ* [a, b] *միջակայքի ցանկացած* R' *տրոհում, որի մեջ բաժանման կետերի թվում գտնվում է* c*-ն, ապա ըստ* 508, *9) կանոնի ոչ մի* R_n *չի կարող համարվել* R'*-ին*

* *Այդ* R*-երը, ինչպես նշվել է, կարող են ծառայել որպես «նշանիկներ», օրինակ,* [a, b] *միջակայքում որոշված մի որոշ ֆունկցիայի Դարբուի գումարների համար։*

հաջորդող, հակառակ կոնֆինալ ենթահաջորդականության սահմանումի։ Հենց այս հակասությունն էլ ապացուցում է, որ իրականում այդպիսի ենթահաջորդակությունն չկա։

[Այստեղից, ի միջի այլոց, հետևում է այն որ, $\boldsymbol{R} = \{R\}$ *բազմության կարգավորման նշված եղանակը չի ենթարկվում պարամետրացման, նախորդ* n°*-ի իմաստով!]*

Այժմ ենթադրենք, թե նշանիկների $\boldsymbol{P}$ *բազմությունը, իսկ դրա հետ նաև կարգավորված* x *փոփոխականի փոփոխման* X *տիրույթն ընդհանրապես պարունակում է կոնֆինալ ենթահաջորդականություններ։ Այդ դեպքում (և, հասկանալի է, միայն այդ դեպքում)* x *փոփոխականի սահմանի հարցը հանգում է վարիանտայի սահմանի հարցին՝*

որպեսզի x փոփոխականը a սահման ունենա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ սահմանին ձգտի յուրաքանչյուր x_n վարիանտա, որն անցնում է X-ի համար կոնֆինալ ենթահաջորդականությունով։

Իրոք, եթե $x \to a$ *(որտեղ, որոշակիության համար ենթադրում ենք, որ* a*-ն վերջավոր է), ապա ցանկացած* $\varepsilon > 0$ *դեպքում ունենք*

$$|x_p - a| < \varepsilon, \quad \textit{հենց որ} \quad P \succ P_\varepsilon.$$

Բայց եթե վերցված է ցանկացած (4) կոնֆինալ ենթահաջորդականություն, ապա բավականաչափ մեծ n*-երի համար, ըստ սահմանումի, կլինի* $P \succ P_\varepsilon$*, այնպես որ*

$$|x_n - a| = |x_{p_n} - a| < \varepsilon.$$

Այդ էլ հենց նշանակում է, որ x_n *վարիանտան ձգտում է* a*-ի։*

Հակադարձորեն, դիցուք յուրաքանչյուր այդպիսի վարիանտա ձգտում է a*-ի։ Ապացուցելու համար, որ այդ դեպքում* $x \to a$*, ենթադրենք հակառակը՝ որոշ* $\varepsilon > 0$ *թվի համար, ինչպիսի* P' *էլ վերցնենք* $\boldsymbol{P}$*-ից, կգտնվի այնպիսի* $P \succ P'$*, որ* $|x_p - a| \geqslant \varepsilon$*։ Վերցնենք* $\boldsymbol{P}$*-ի համար կոնֆինալ մի որոշ կոնկրետ* $\{P'_n\}$ *ենթահաջորդականություն։ Ասածի համաձայն, յուրաքանչյուր* P'_n*-ի միջոցով կգտնվի* $\boldsymbol{P}$*-ի մեջ մի* P_n *էլեմենտ՝* $P_n \succ P'_n$*,*

որի համար

$$|x_n - a| = |x_{p_n} - a| \geqslant \varepsilon \quad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Հեշտ է ցույց տալ, որ $\{P_n\}$ *ենթահաջորդականությունը կոնֆինալ կլինի P-ի համար, և ուրեմն* $\{x_n\}$ *հաջորդականությունը՝ կոնֆինալ X-ի համար, իսկ այդ դեպքում նախորդ անհավասարությունը հակասում է ենթադրությանը։*

516. ԿԱՐԳԱՎՈՐՅԱԼ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՄԵԾԱԳՈՒՅՆ ԵՎ ՓՈՔՐԱԳՈՒՅՆ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԸ։ *Դիտարկենք կարգավորված* x *փոփոխականը, որի արժեքներն օժտված են P-ից վերցրած* P *«նշաններով»։ Ցանկացած* P*-ի դեպքում կազմենք* X_p *բազմություն* x*-ի այն արժեքներից, որոնք հաջորդում են* x_p*-ին, այսինքն՝ համապատասխանում են* $P \prec P'$ *«նշաններին» և գտնենք նրա ճշգրիտ եզրերը՝*

$$\sup X_p \quad \text{և} \quad \inf X_p$$

(որոնք կարող են և անվերջ լինել)։ Դրանցից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է կարգավորյալ փոփոխական P *«նշաններով», ընդ որում առաջինը՝ մոնոտոն նվազող, իսկ երկրորդը՝ մոնոտոն աճող* (n° 512*-ի իմաստով)։ Այդ դեպքում, ըստ մոնոտոն փոփոխականի վերաբերյալ թեորեմայի, գոյություն ունեն որոշակի (վերջավոր կամ ոչ) սահմաններ*

$$M^* = \lim(\sup X_p) \quad M_* = \lim(\inf X_p)\text{*}. \qquad (6)$$

Դրանց էլ հենց, ընդհանուր դեպքում, անվանում են x *փոփոխականի, համապատասխանաբար,* ***մեծագույն*** *կամ* ***փոքրագույն*** *սահմաններ և գրում են՝*

$$M^* = \overline{\lim}\, x, \quad M_* = \underline{\lim}\, x.$$

Այդ սահմանների հավասարությունը անհրաժեշտ և բավարար պայման է x փոփոխականի սահմանի գոյության համար սովորական իմաստով [509]։

---

* *Այն հանգամանքը, որ դիտարկվող փոփոխականները կարող են ընդունել և* $\pm\infty$ *անիսկական արժեքներ, դժվարություններ չի առաջացնում։*

Իրոք, եթե գոյություն ունի

$$a = \lim x \tag{7}$$

վերջավոր սահման, ապա ցանկացած $\varepsilon > 0$*-ի համար կգտնվի այնպիսի* P_ε *«նշանիկ», որ*

$$P \succ P\text{-ի համար } a - \varepsilon < x_p < a + \varepsilon. \tag{8}$$

Այդ դեպքում նաև

$$a-\varepsilon \leqslant \inf X_{p_\varepsilon} \leqslant M_* \leqslant M^* \leqslant \sup X_{p_\varepsilon} \leqslant a+\varepsilon,$$

այնպես որ, ε*-ի կամայական լինելու շնորհիվ,*

$$M^* = M_* = a.$$

Հակադարձաբար, եթե տեղի ունի այդ հավասարությունը (երբ a*-ն վերջավոր է), ապա, (6)-ի հետևանքով, նորից* $\varepsilon > 0$ *թվի միջոցով կգտնվի այնպիսի* P_ε*, որ*

$$a - \varepsilon < \inf X_{p_\varepsilon} \leqslant \sup X_{p_\varepsilon} < a+\varepsilon,$$

այնպես որ բավարարվում է (8)-ը, իսկ այստեղից հետևում է (7)-ը.

Ընթերցողին ենք թողնում դատողություններ անել $a = \pm\infty$ *դեպքի համար.*

M^* *և* M_* *թվերը, նրանց վերջավոր լինելու դեպքում, կարող են բնութագրվել իրենց այնպիսի հատկություններով, որոնք միանգամայն համանման են 42-ում ուսումնասիրված I և II հատկություններին. Օրինակի համար կանգ առնենք* M^**-ի վրա.*

Եթե կամայականորեն վերցնենք $\varepsilon > 0$ *թիվը և* P_0 *«նշանիկը», ապա գոյություն ունի այնպիսի* $P_\varepsilon \succ P_0$*, որ*

$$M^* - \varepsilon < \sup X_{p_\varepsilon} < M^* + \varepsilon.$$

Այստեղից, ճշգրիտ վերին եզրի սահմանման համաձայն, հետևվում է՝

M^* *թվի* I *հատկությունը՝* բոլոր $P_\varepsilon \prec P$ համար կլինի

$$x_p < M^* + \varepsilon.$$

M^* *թվի* II *հատկությունը՝* կգտնվի գոնե մեկ $x_{p'}$ (որտեղ $P' \succ P_0$) այնպիսի արժեք, որ

$$x_{p'} > M^* - \varepsilon.$$

Դիցուք այժմ $P = \{P\}$ *բազմությունը թույլատրում է (4) կոնֆինալ ենթահաջորդականություններ, որոնց համապատասխանում են մեր փոփոխականի արժեքների՝ X-ի համար կոնֆինալ (5) ենթահաջորդականություններ։ Եթե այդ հաջորդականություններից որևէ մեկը սահման ունի, ապա այն* x *փոփոխականի մասնակի սահման են անվանում [տես 40 և 59]։*

Այս դեպքում կարելի է ապացուցել, որ վերը որոշված M^* *և* M_* *մեծագույն և փոքրագույն սահմանները միաժամանակ հանդիսանում են* x *փոփոխականի բոլոր մասնակի սահմաններից, համապատասխանաբար, մեծագույնը և փոքրագույնը [ինչպես և 40-ում կամ 59-ում]։*

Իրոք (եթե նորից սահմանափակվենք մեծագույն սահմանով), I *հատկությունից անմիջապես պարզ է, որ ոչ մի մասնակի սահման չի կարող գերազանցել* M^**-ին։ Որպեսզի կառուցենք X-ի համար կոնֆինալ (5) ենթահաջորդականություն, որը ձգտում է* M^**-ի (և դրանով ցույց տանք, որ* M^**-ը ինքը ծառայում է որպես մասնակի սահման), մենք նախապես ելնում ենք P-ի համար կոնֆինալ մի որոշ*

$$P'_1, P'_2, \ldots, P'_n, \ldots,$$

ենթահաջորդականությունից։ Իսկ հետո, I *և* II *հատկությունների օգնությամբ [տես 40], ինդուկտիվ կերպով կառուցում ենք (4) ենթահաջորդականությունն այնպես, որ, նախ, լինի*

$$P_n \succ P'_n$$

(այնպես որ (4)-ը ևս կոնֆինալ կլինի P-ի համար) և, երկրորդ, որ $x_n = x_{P_n}$ *բավարարի հետևյալ կրկնակի անհավասարությանը՝*

$$M^* - \varepsilon_n < x_n < M^* + \varepsilon_n,$$

որտեղ ε_n*-ը կամայականորեն վերցված դրական վարիանտա է, որը ձգտում է 0-ի։ Ակներևաբար, X-ի համար կոնֆինալ, (5) հաջորդականության սահմանը* M^**-ը կլինի։*

Կարելի է մատնանշել մեծագույն և փոքրագույն սահման-

ների մի օրինակ ես՝ ընթերցողին արդեն ծանոթ բնագավառից։ Այսպես, ակներև է, որ Դարբուի I^* *և* I_* *վերին և ստորին ինտեգրալները* [284, 289] *հանդիսանում են, համապատասխանաբար, մեծագույն և փոքրագույն սահմաններ հետևյալ ինտեգրալային գումարի (Ռիմանի գումարի) համար՝* $\sigma=\sum f(\xi_i)\Delta x_i$, *երբ* $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$։

ԱՅԲԲԵՆԱԿԱՆ ՑԱՆԿ

(Թվերը ցույց են տալիս էջերը)

Աբել 372, 374, 633
Աբելի թեորեման 530, 618
— լեմման 390
— հայտանիշը շարքի զուգամիտության 391
— — — հավասարաչափ զուգամիտության 507
— ձևափոխությունը 389, 399
— տեղադրումը 79, 84
Աբելյան ինտեգրալներ 98
Ադիտիվ ֆունկցիա միջակայքի 287
Ադիտիվություն աղեղի երկարության 215
— ծավալի 258
— մակերեսի 238
Ածանցյալ կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիայի 617
— չունեցող անընդհատ ֆունկցիա 569
Աղեղի երկարություն 213
— —, ադիտիվությունը 215
— —, արտահայտումն ինտեգրալով 216
— —, գոյության պայմանը 216, 951
— —, դիֆերենցիալը 220
— — տարածական կորի 235
Անալիտիկ ֆունկցիա 536, 587, 597, 602
Անբացահայտ ֆունկցիա 561, 596
Անդամ առ անդամ բազմապատկում շարքերի 410, 416, 541, 614
— — — դիֆերենցում շարքի 519, 619
— — — ինտեգրում շարքի 515, 774, 807, 822
Անընդհատություն աստիճանային շարքի գումարի 528, 530
— ըստ պարամետրի (ինտեգրալի) 763, 774, 823
— կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիայի 618
— շարքի գումարի 509
— սահմանային ֆունկցիայի 495, 756
Անիսկական ինտեգրալ անսահմանափակ ֆունկցիայից 668, 672, 673
— — անվերջ սահմանով 639, 672, 673
— —, գոյության հայտանիշներ 656, 657, 677, 679
— —, — պայմանը 647, 677
— — զուգամետ, տարամետ 639, 640, 668
— —, կապը շարքերի հետ 650, 826
— —, հատկությունները 693
Անհավասարաչափ զուգամիտություն ինտեգրալի 791, 798
— — հաջորդականության, շարքի 499, 500, 530

Անհավասարաչափության կետ 503, 528
Անորոշ գործակիցների մեթոդ 44, 48, 77, 108, 556, 583, 589
— ինտեգրալ 3
— —, աղյուսակ 11
— —, գոյությունը 142
— —, երկրաչափական մեկնաբանությունը 7
— —, հատկությունները 5
Անվերջ արտադրյալ 446
— —, բացարձակ զուգամետ 453, 454
— —, զուգամետ, տարամետ 446
— —, զուգամիտության և տարամիտության հայտանիշներ 449—453
— —, մասնակի արտադրյալը 446
— —, մնացորդը 449
— փոքր տարրերի (էլեմենտների) հանրագումարումը 287
Առանձնացումը ինտեգրալի հանրահաշվական մասի 77
— — ռացիոնալ մասի 46
Առանցք իրական 609
— կեղծ 609
Ասիմպտոտական շարք 923
— —, բազմապատկումը 927
— —, դիֆերենցումը 929, 931
— —, ինտեգրումը 928
— —, միակցությունը 923
— —, պոտենցումը 929
Աստիճանային շարք 381, 463, 617
— —, բաժանումը 588
— —, գործողությունները 575
— —, գումարի անընդհատությունը 528, 530
— —, դիֆերենցումը 534
— — երկու փոփոխականներով 439
— —, զուգամիտության միջակայք 381
— —, — շառավիղ 381, 572, 617
— —, — շրջան 617
— —, ինտեգրումը 532
— —, միակությունը 528, 529
— — մի քանի փոփոխականներով 445
Աստրոիդ 222, 234, 235, 257, 268, 278
Արգումենտ կոմպլեքս թվի 609
Արկսինուս, աստիճանային շարքը 543, 553, 554, 603, 631
—, գլխավոր արժեքը 630
Արկտանգենս, աստիճանային շարքը 470, 542, 630
—, գլխավոր արժեքը 629
Արմատ իրական թվից, հաշվումը 491
— կոմպլեքս թվից 611
Արցելա 511, 519, 862, 864
Արքիմեդյան սպիրալ (գալարագիծ) 223, 254

Բազմանդամներ Լագերի 701
— Լեժանդրի 170, 185, 588, 607, 637, 677
Բազմապատիկ շարք 445
Բազմապատկիչ զուգամիտության 833, 837
Բազմարժեք ֆունկցիաներ կոմպլեքս փոփոխականի 614, 624, 629, 631, 632
Բաղդատման թեորեմներ անիսկական ինտեգրալների համար 653
— — շարքերի համար 342, 343
Բարրոու 9
Բացարձակ զուգամետ անիսկական ինտեգրալ 649, 657, 676
— — արտադրյալ 453, 454

— — շարք 376, 404, 428, 613
— — —, բազմապատկումը 411
— — —, տեղափոխական հատկությունը 403, 404, 431, 432, 614
— ինտեգրելի ֆունկցիա 649, 657, 676
Բեռնուլի Իոհան 113
Բեռնուլիի թվերը 591, 815, 920
Բեսսելի դիֆերենցիալ հավասարումը 555, 781
— ֆունկցիաներ 436, 550, 555, 822, 851
Բետա-ֆունկցիա 871
— —, անդրադարձ (ռեկուրենտ) բանաձև 873
— —, կապը գամա-ֆունկցիայի հետ 877
— —, սիմետրիկությունը 872
Բերման բանաձևեր բինոմային դիֆերենցիալների համար 59
— — որոշյալ ինտեգրալների համար 159
— — $\sin^\nu x$ և $\cos^\nu x$ ֆունկցիաների ինտեգրալների համար 91
Բերտրանի հայտանիշը 363
Բինոմական շարք 474, 582, 633
Բինոմային դիֆերենցիալների ինտեգրումը 56
Բիոյի և Սավարի օրենքը 312
Բնական լոգարիթմ կոմպլեքս թվի 624
— հավասարում կորի 228
Բոնեի բանաձևը 146
Բունյակովսկու անհավասարությունը 685

Գամա-ֆունկցիա 460, 874
— —, անդրադարձ (ռեկուրենտ) բանաձև 461, 878
— —, Գաուսսի բանաձևը 895, 897
— —, գրաֆիկը 896
— —, Էյլերի արտադրյալը 879
— —, Էյլերի-Գաուսսի բանաձևը 461, 876, 901
— —, ընդարձակումը 804
— —, Լեժանդրի բանաձևը 882, 899
— —, լոգարիթմական ածանցյալը 560, 893, 898
— —, լոգարիթմների աղյուսակը 931
— —, լրացման բանաձևը 483, 879
— —, Կոշիի բանաձևը 894
— —, մաքսիմումը և մինիմումը 896, 906
— —, որոշումը նրա հատկություններով 882
— —, Ռաաբեի ինտեգրալը 880
— —, Ստիռլինգի բանաձևը և շարքը 922
— —, Վեյերշտրասսի բանաձևը 461, 900
Գաուսս 364, 787, 892
Գաուսսի բանաձևերը 175, 895, 897
— հայտանիշը 363
Գաուսսի-Էյլերի բանաձևը 461, 876, 901
Գլանային հատված 269, 284, 308
Գլխավոր արժեք անիսկական ինտեգրալի 687, 736
— — սատիճանի 632
— — արկսինուսի 630
— — արկտանգենսի 629
— — լոգարիթմի 624
— — կոմպլեքս թվի արգումենտի 609
Գնահատում շարքի մնացորդի 368, 387, 484

Գնդային գոտի 278
Գոլդբախ 434
Գուլդինի թեորեմները 293, 296
Գումար շարքի 332, 440, 612

Դալամբերի հայտանիշը 352, 362, 379, 613
Դարբու 117
Դարբուի գումարները, վերին և ստորին 117, 949
— թեորեման 130
— ինտեգրալները, վերին և ստորին 120
— — որպես սահմաններ 130, 962
Դեկարտյան տերև 256
Դինի 372, 373, 374
Դինիի թեորեման 512
— —, ընդհանրացումը 759, 805, 824
Դիրիխլե 154, 889, 877
Դիրիխլեի խզվող բազմապատկիչը 735, 743, 852, 859
— հայտանիշը 392, 508
— շարքերը 395, 539
— ֆունկցիան 128, 130, 673
Դիֆերենցիալ հավասարում 313
— — Բեսսելի 555, 781
— — կազմելը 324, 555, 556, 557, 781
— — հիպերերկրաչափական 557
Դիֆերենցում ինտեգրալի նշանի տակ 764, 771, 774, 824, 869

Եզակի կետ ֆունկցիայի 669, 673
Եզակիությունների առանձնացումը, որպես ինտեգրալներ հաշվելու մեթոդ 669, 673
e թիվը, տրանսցենդենտությունը 183

Եռանկյունաչափական ձև կոմպլեքս թվի 610
— տեղադրումներ 26
— ֆունկցիաներ, անալիտիկ սահմանումները 565
— —, կապը հիպերբոլական ֆունկցիաների հետ 251, 628, 629
— — —, — ցուցչային ֆունկցիաների հետ 622, 628
— — կոմպլեքս տիրույթում 629
Տես նաև Սինուս և այլն

Զեյդել 501
Զուգամետ անիսկական ինտեգրալ 639, 668
— անվերջ արտադրյալ 446
— — շարք 332, 420
Զուգամիտության բազմապատկիչ 833, 837
— եզրային պրոցես 395
— հայտանիշներ անիսկական ինտեգրալի 656, 657, 677, 679
— — — —, պայմանը 647, 677
— —անվերջ արտադրյալի 449—453
— — շարքի՝ Աբելի 391, Բերտրանի 363, Գաուսսի 363, Դալամբերի 352, 362, 379, 613, Դիրիխլեի 392, 508, Լայբնիցի 385, 394, Կոշիի 350, 364, 655, 679, Կումմերի 360, Ռաաբեի 353, 362, 363
— — —, պայմանը 337
— միջակայք 381
— շառավիղ 381, 572, 617
— շրջան 617
— սկզբունքը 337, 612, 950
Զուգորդական հատկություն շարքի 400, 438
Զույգ ֆունկցիա, ինտեգրալը

սիմետրիկ միջակայքում 170, 180
էլիպս 224, 249, 252, 253, 254, 256, 257, 293, 297
էլիպտիկ ինտեգրալներ 98
— — 1-ին, 2-րդ, 3-րդ տեսակի 107
— — Լեժանդրյան տեսքով 110, 143, 224, 225, 226
— — լրիվ 176, 177, 205, 224, 273, 286, 324, 448, 552, 782, 850, 880
էյլեր 63, 456, 460, 461, 463, 482, 709, 710, 810, 877, 879, 885, 931
էյլերի բանաձևերը 622, 633
էյլերի-Գաուսսի բանաձևերը 461, 876, 901
էյլերյան ինտեգրալներ առաջին և երկրորդ տեսակի 871, 874
— հաստատուն 350, 369, 409, 449, 895, 900, 903, 908, 930
— տեղադրումներ 63, 66
էպիցիկլոիդ 234, 235
էվոլյուտ, բնական հավասարումը 234
էվոլվենտ շղթայագծի 227
— շրջանի (շրջանագծի) 222, 232, 234

Ընդինտեգրալ արտահայտություն 5
— ֆունկցիա 5

Թեյլորի բանաձևը 161, 465
— —, լրացուցիչ անդամը 161, 466
— գործակիցները 465
— շարքը 465
Իներցիայի մոմենտ հարթ պատկերի 308
— — մարմնի 309
Ինտեգրալ (ինտեգրալային) գումար 116
—, վերին, ստորին 117
— հայտանիշ Կոշիի 364
— հաշվի հիմնական բանաձևը 151, 156, 158, 647, 675
Ինտեգրալային լոգարիթմ 96, 191
— կոսինուս 97, 742
— սինուս 97, 742, 822
Ինտեգրալի դիֆերենցումն ըստ վերին (ստորին) սահմանի 143, 695
— — — պարամետրի (դիֆերենցում ինտեգրալի նշանի տակ) 764, 771, 774, 824, 868
— ինտեգրումն ըստ պարամետրի (ինտեգրում ինտեգրալի նշանի տակ) 767, 775, 827, 869
Ինտեգրալներ, որոնք չեն արտահայտվում վերջավոր տեսքով 35, 36, 58, 96, 101, 109, 543, 544
Ինտեգրելի ֆունկցիա 116
— —, դասերը 122, 129
— —, հատկությունները 124
— — քառակուսու հետ միասին 685
Ինտեգրելիություն սահմանային ֆունկցիայի 525, 759
Ինտեգրում արմատային արտահայտությունների 54, 63, 74, 636
— բինոմային դիֆերենցիալների 56
— եռանկյունաչափական և ցուցչային արտահայտությունների 86, 96, 635
— մասերով (մաս առ մաս) 28, 161, 698
— շարքի, անդամ առ անդամ 515, 774, 807, 821

— պարզ կոտորակների 36
—, պարզագույն կանոնները 12
— ռացիոնալ արտահայտությունների 35
— վերջավոր տեսքով 35, 36
— փոփոխականի փոխարինման (տեղադրման) միջոցով 18, 165, 178, 698
Ինտերպոլացում պարաբոլական 192

Լագեռի բազմանդամներ 701
Լագրանժի շարք 603
Լամբերտի շարք 397, 436
Լայբնից 8, 113
Լայբնիցի թեորեման 385, 394
— կանոնը 765
— և Նյուտոնի թեորեման (բանաձևը) 8
Լանդենի ձևափոխությունը 177
Լապլաս 606, 813, 835
Լեժանդր 109, 110, 383, 815, 871, 874, 933
Լեժանդրի բազմանդամներ 170, 185, 588, 607, 637, 776
— բանաձևը 882, 899
— ֆունկցիաները՝ F (k, φ), E (k, φ) 110, 143, 224, 226
— — F (k), E (k) 177, 204, 205, 224, 225, 273, 274, 285, 286, 324, 448, 449, 551, 552, 554, 850, 890
Լեմնիսկատ 226, 255, 280
Լեուվիլլ 109
Լոգարիթմ կոմպլեքս թվի 624
Լոգարիթմական սպիրալ 223, 233, 234
— ֆունկցիա, աստիճանային շարքը 471, 538, 542, 578, 626
— — կոմպլեքս տիրույթում 624
Լոգարիթմներ, հաշվումները 488

Խզվող բազմապատկիչ Դիրիխլեի 735, 743, 852, 859
Խխունջ 225, 255

Ծանրության կենտրոն գլանային մակերևույթի 308
— — կորի 292
— — հարթ պատկերի 296
— — մակերևույթի, մարմնի 306, 307
Ծավալ մարմնի 258
— —, ադիտիվությունը 258
— —, արտահայտումն ինտեգրալով 263
— —, արտաքին, ներքին 258
— —, գոյության պայմանը 258, 260
— —, հաշվումը լայնական հատույթի մակերեսի միջոցով 263, 265
— —, որպես սահման 259
— պտտման մարմնի 265
Ծնորդ ֆունկցիա բեսսելյան ֆունկցիաների համար 436
— — Լեժանդրի բազմանդամների համար 588

Կանոնավոր կոտորակ, վերլուծումը պարզ կոտորակների 16
Կանտորովիչ 745
Կատալանի հաստատունը 207, 546, 850
Կարգավորյալ բազմություն 937
— փոփոխական 941
— —, բերումը վարիանտայի 956
— —, սահմանը 942
Կարդիոիդ 225, 234, 235, 255, 279
Կենտ ֆունկցիա, ինտեգրալը սիմետրիկ միջակայքում 170, 180
Կեպլերի հավասարումը 606

Կողմնորոշված միջակայք 131, 693
Կոմպլեքս թիվ 607
— —, արգումենտը 609
— —, արմատը 611
— —, գործողություններ 608
— —, եռանկյունաչափական ձևը 610
— —, իրական մասը 608
— —, լոգարիթմը 624
— —, կեղծ մասը 608
— —, մոդուլը 609
— վարիանտա 611
— փոփոխական և նրա ֆունկցիա 614, 621, 624, 627, 632
Կոն շրջանային 267, 307, 308, 309
Կոնֆինալ ենթահաջորդականություն 956
Կոշի 370, 602, 688
Կոշիի բանաձևը 894
— թեորեման 411
— հայտանիշները 350, 364, 655, 679
Կոշիի-Հադամարի թեորեման 573
Կոշիի—Հյոլդերի անհավասարությունը 376
Կոսինուս, անալիտիկ սահմանումը 565
—, անվերջ արտադրյալը 483
—, աստիճանային շարքը 468, 627
—, լոգարիթմի աստիճանային շարքը 596
— հիպերբոլական, անվերջ արտադրյալը 484
— —, աստիճանային շարքը 169
Կոտանգենս, վերլուծումն աստիճանային շարքի 577, 595, 629
—, վերլուծումը պարզ կոտորակների 559
— հիպերբոլական, վերլուծումն աստիճանային շարքի 578, 594, 629
— —, վերլուծումը պարզ կոտորակների 560
Կորի բնական հավասարումը 228
Կվադրատուրա տես Քառակուսում
Կրկնակի (կրկնապատիկ) շարք 419
Կումմերի հայտանիշը 360

Հադամար 573
Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ-տես Արկսինուս և Արկտանգենս
Հակադարձում աստիճանային շարքի 602
Հանրագումարում անվերջ փոքր էլեմենտների 287
Հանրահաշվական մաս ինտեգրալի, առանձնացումը 77
Հանրահաշվի հիմնական թեորեման 787
Հաջորդական մոտավորությունների մեթոդը 561
— շարք 422
Հավասարաչափ զուգամիտություն աստիճանային շարքի 527, 570
— — ինտեգրալի 790, 795, 796
— — —, կապը շարքերի հետ 792, 796
— — —, հայտանիշներ 793
— — —, պայմանը 792, 796
— — շարքի, հաջորդականության 497, 501, 617
— — —, հայտանիշներ 504
— — —, պայմանը 503
— ձգում սահմանային ֆունկցիային 756
Հարմոնիկ շարք 339, 345, 350
Հերմիտ 46, 48, 183

Հիմնական հաջորդականություն միջակայքի տրոհումների 115
Հիպերբոլ 225, 249
Հիպերբոլական տեղադրումներ 26
— ֆունկցիաներ, համեմատումը եռանկյունաչափական ֆունկցիաների հետ 251, 628, 629
Հիպերերկրաչափական դիֆերենցիալ հավասարում 557
— շարք 364, 381, 458, 557, 892
Հիպոցիկլոիդ 234, 235
Հյուգենի-Կոշիի անհավասարությունը 376, 686

Ձետա-ֆունկցիա 341, 416, 461, 554, 891, 904

Ճոճանակ մաթեմատիկական 322

Մաժորանտ ինտեգրալ 793
— շարք 506
— շարքերի մեթոդը 602
Մակերես գլանային մակերևույթի 281
— կորագիծ սեղանի 245
— — —, որպես գումարի սահման 112
— — —, որպես նախնական ֆունկցիա 9
— հարթ պատկերի 237
— — —, ադիտիվությունը 238
— —, արտահայտումն ինտեգրալով 245
— — —, արտաքին, ներքին 237
— — —, գոյության պայմանները 237, 241, 243, 244
— — —, որպես սահման 239, 240
— պտտման մակերևույթի 274
Մասնակի գումար շարքի 332, 440, 612
Մեշինի բանաձևը 487
Մինկովսկու անհավասարությունը 374, 686
Միջակայք զուգամիտության 381
— կողմնորոշված 131, 693
Միջակայքի տրոհումների հիմնական հաջորդականություն, 115
Միջին արժեքի երկրորդ թեորեման 144, 697
— — ընդհանրացրած թեորեման 140, 696
— — թեորեման 138
— — —, կապը Լագրանժի բանաձևի հետ 152
Մնացորդ շարքի 335
Մնացորդային արտադրյալ 449
Մոավրի բանաձևը 478
Մոդուլ բնական լոգարիթմներից տասնորդականներին անցնելու 489
— էլիպտիկ ինտեգրալի 110
—կոմպլեքս թվի 609
Մոտավոր հաշվում անիսկական ինտեգրալների 744, 451
— — իսկական ինտեգրալների 189, 750
— — շարքերի օգնությամբ 484, 544, 545, 552
Մուր 935

Նախնական ֆունկցիա 3
— —, վերականգնումը որոշյալ ինտեգրալի օգնությամբ 159, 676
Նյուտոն 8, 319, 476
Նյուտոնի և Լայբնիցի թեորեման 8
Նշանափոխ շարք 385
— —, մնացորդի գնահատումը 387

Նույնություն ստորճանային շարքերի 528, 529

Շառավիղ զուգամիտության 381, 572, 617
Շատուստվսկի 935
Շարք (անվերջ) 331, 612, տես նաև Աստիճանային շարք և Ֆունկցիոնալ շարք
— բազմապատիկ 445
— բացարձակ զուգամետ 379, 404, 428, 613
—, գումարը 332, 420, 613
—, դիֆերենցումն անդամ առ անդամ 519, 619
— զուգամետ, տարամետ 332, 420
—, զուգամիտության պայմանը (սկզբունքը) 337
—, ինտեգրումն անդամ առ անդամ 515, 774, 807, 822
— լայբնիցյան տիպի 387
— կրկնակի 419
— Տաչորդական (ПОВТОРНЫЙ) 421
— Հարմոնիկ (ներդաշնակ) 339, 345, 350
— Հիպերերկրաչափական 364, 381, 458, 557, 892
—, մասնակի գումարները 332, 420, 612
—, մնացորդը 335
— նշանափոխ 385
— ոչ-բացարձակ (պայմանական) զուգամետ 379, 404, 406
Շարքերի բազմապատկումը 410, 416, 541, 614
Շլյոմիլխ 477
Շղթայագիծ 221, 227, 233, 248, 267, 278
Շվարց 685
Շտեյներ 435
Շրջան զուգամիտության 617
Շրջանային կոն 267, 307, 308, 309

Ողորկ կոր 244
— մակերևույթ 261
Ոչ-բացարձակ (պայմանական) զուգամետ արտադրյալ 453, 653
— — ինտեգրալ 649, 653, 678
— — շարք 379, 430, 618
Որոշյալ ինտեգրալ (իսկական իմաստով) 114
— —, գոյության պայմանները 120, 128, 131
— —, կիրառման սխեման 287
— — Հաշվումը արվեստական եղանակներով 710, 721, 724
— — — ըստ պարամետրի դիֆերենցման միջոցով 778, 832, 836, 838, 908
— — — — — ինտեգրման միջոցով 785, 786, 833—837, 849, 876, 910
— — — — — սահմանային անցման միջոցով 816, 831, 834, 837, 852
— — — ինտեգրալ գումարների օգնությամբ 147, 713, 716
— — — — Հաշվի հիմնական բանաձևով 152, 642, 675
— — — մասերով ինտեգրման միջոցով 161, 699, 733—739
— — — նախնական ֆունկցիայի օգնությամբ 152
— — — շարքի վերլուծելու միջոցով 542, 712, 775, 807, 819, 909
— — — տեղադրումների օգնությամբ 165, 702, 703, 709, 731, 885
— —, Հատկությունները 131

Պարաբոլ 9, 222, 252, 297, 298
Պարաբոլական ինտերպոլացում 192
Պարամետր 755, 954, 958
Պարբերական ֆունկցիա, ինտեգրումն ըստ պարբերության 171, 180
Պարզ կոտորակներ 36
— —, ինտեգրումը 36
— —, կանոնավոր կոտորակի վերլուծումը պարզ կոտորակների գումարի 39, 43
— — ctgx, cthx, tgx, $\frac{1}{\sin x}$, $\frac{1}{\sin^2 x}$, $\frac{1}{\mathrm{sh}x}$ *ֆունկցիաների վերլուծումը պարզ կոտորակների գումարի 559, 560*
Պսեվդոէլիպտիկ ինտեգրալներ 101
Պտուտակագիծ 335
Պուասոն 150, 173
Պուասոնի բանաձևը 329
π *թիվը, մոտավոր հաշվումը, 486*

Ռաաբեի ինտեգրալը 880
— հայտանիշը 353, 362, 363
Ռացիոնալացում ընդինտեգրալ արտահայտության 54, 55, 56, 63, 86, 99
Ռացիոնալ մաս ինտեգրալի, առանձնացումը 46
— ֆունկցիա, ինտեգրալն անվերջ սահմաններով 724
Ռիման 116, 341
Ռիմանի թեորեման 404
Ռիմանյան ինտեգրալ գումար 116

Սահման կարգավորյալ փոփոխականի 942
— — —, գոյության պայմանը (սկզբունքը) 950, 959
— — —, մեծագույն, փոքրագույն 959
— կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիայի 615
Սահմանային անցում անդամ առ անդամ (շարքի մեջ) 514, 617
— — ինտեգրալի նշանի տակ 525, 764, 773, 803, 806, 864, 868
— ֆունկցիայի անընդհատությունը 759
— — դիֆերենցելիությունը 526
— — ինտեգրելիությունը 525, 759
Սահմաններ ինտեգրալի, վերին և ստորին 116
Սեղանների բանաձևը 191
— —, լրացուցիչ անդամը 198
Սիմպսոնի բանաձևը 195
— —, լրացուցիչ անդամը 199
Սինուս, անալիտիկ սահմանումը 565
—, անվերջ արտադրյալը 482
—, աստիճանային շարքը 468, 627
—, աստիճանային շարք $\log\frac{\sin x}{x}$ *համար 596*
—, կոմպլեքս տիրույթում 627
— հակադարձ մեծության վերլուծումը պարզ կոտորակների 560
Սինուս հիպերբոլական, անվերջ արտադրյալը 484
— —, աստիճանային շարքը 469
— —, հակադարձ մեծության վերլուծումը պարզ կոտորակների 560
Սկզբնական արժեք (մեծության) 7
— պայմաններ 313
Սմիտ 935

Ստատիկ մոմենտ գլանային մակերևույթի 308
— — կորի 290
— — հարթ պատկերի 294
— — մարմնի 306
— — պտտման մակերևույթի 307
Ստիրլինգ 459, 472
Ստիրլինգի բանաձևերը 474, 922
— շարքը 922
Ստոկս 501
Սֆերա, կիսասֆերա 307, 308, 309

Վալլիսի բանաձևը 180, 447, 482, 711, 816
Վան-դեր-Վերդեն 570
Վարիանտա Բերտրանի 363
— Դալամբերի 353
— կոմպլեքս 611
— —, սահմանը 611
— Կոշիի 352
— Կումմերի 360
— Ռաաբեի 353
Վեյերշտրասս 461, 501, 569, 570, 584
Վեյերշտրասսի բանաձևը 461, 560, 900, 905
— հայտանիշը շարքի հավասարաչափ զուգամիտության 505
Վիետա 448
Վիվիանիի կորը 236, 284
— մակերևույթը 284

Տանգենսի աստիճանային շարքը 591, 595
— վերլուծումը պարզ կոտորակների 559
Տարամետ անվերջ արտադրյալ 446
— ինտեգրալ 640, 668
— շարք 332, 420
Տեղադրում (փոփոխականի փոխարինում) 18, 165, 178, 702
— Աբելի 79, 82
— եռանկյունաչափական 26
— Էյլերի 63, 66
— կոտորակագծային 80, 102
— հիպերբոլական 26
— շարքը շարքի մեջ 579
Տեղափոխական հատկություն բացարձակ զուգամետ արտադրյալի 453
— — — — շարքի 404, 431, 432, 614
Տոր 294, 298
Տորիչելլի 311
Տրակտրիսա 228, 319

Ցիկլոիդ 222, 233, 234, 235, 254, 268, 279, 294, 298
Ցուցչային ֆունկցիա, աստիճանային շարքը 468, 537, 621
— —, կապը եռանկյունաչափական ֆունկցիաների հետ 622, 628
— — կոմպլեքս տիրույթում 621

Ուղղանկյունների բանաձևը 190
— —, լրացուցիչ անդամը 196
Ուղղություն կորի վրա 211
— միջակայքում 132
Ունիկուրսալ կոր 99

Փոփոխականի փոխարինում— տես Տեղադրում

Քառակուսելի պատկեր 237
Քառակուսելիության պայմանը 237, 238, 240, 241, 242
Քառակուսու հետ միասին ինտեգրելի ֆունկցիա 685
Քառակուսում 10

Օստրոգրադսկու-Հերմիտի բանաձևր 46, 47, 48

Ֆայեր 154
Ֆրենել 836
Ֆրուլյանիի ինտեգրալներ 721
Ֆունկցիոնալ հաջորդականություն 495
— —, դիֆերենցումը 526
— —, ինտեգրումը 525
— —, հավասարաչափ զուգամիտություն 499
— — — —, պայմանը 503
— —, սահմանային անցում 524
— —, ֆունկցիա 495
— շարք 496
— —, անդամ առ անդամ դիֆերենցումը 519, 521
— — — — — ինտեգրումը 515, 774, 807, 822
— —, գումար ֆունկցիա, անընդհատությունը 496, 510
— —, հավասարաչափ զուգամիտությունը 501
— — — —, հայտանիշները 505, 507, 508